

MEDIDAS DE COMPLEJIDAD Y DE INFORMACIÓN COMO
HERRAMIENTAS PARA EL ANÁLISIS DE SERIES TEMPORALES.

DIEGO M. MATEOS

Aplicaciones al estudio de señales de origen electrofisiológicas

Facultad de Matemática Astronomía y Física.
Universidad Nacional de Córdoba

Marzo 2016



Medidas de complejidad y información como herramientas de análisis de series temporales. Por Mateos Diego M. Se distribuye bajo una [Licencia Creative Commons AtribuciónNoComercialSinDerivadas 2.5 Argentina](#).

Por ser esa luz que se encuentra al final del túnel.

— Leila y Patricia

AGRADECIMIENTOS

A mi mujer y mi hija por ser el sostén emocional de mi vida.
A mis padres por su apoyo incondicional.

Al Dr. Pedro W. Lamberti y Dr. Steeve Zozor por que con paciencia infinita, han sido mi guías en este viaje.

Para mis colaboradores y amigos de trabajo, Dr. Juan Díaz, Dr. Hugo Diaz del Instituto de Neurociencia de Córdoba por el uso e interpretaciones médicas de los datos de EEG y ECG.

Dr. Felipe Olivarez, Dr. Osvaldo Rosso y a la Dra. Carina Boyarian, por sus comentarios y sugerencias.

A la secretaría de Ciencia y Técnica de Universidad Nacional de Córdoba (SeCyT-UNC) por la beca doctoral y los fondos los cuales me permitieron realizar la mayor parte de este doctorado.

Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Tecnológicas (CONICET), por la beca de finalización de doctorado y los fondos que me permitieron asistir a los diferentes congresos y escuelas.

ÍNDICE GENERAL

| | |
|---|-----------|
| Anacronismos | x |
| Introducción | 1 |
| 1 INFORMACIÓN Y COMPLEJIDAD | 5 |
| 1.1 Una aproximación determinista a los sistemas dinámicos | 5 |
| 1.1.1 Sistemas dinámicos continuos y discretos | 5 |
| 1.1.2 Estabilidad de los sistemas dinámicos | 7 |
| 1.1.3 La reconstrucción de los espacios de estado y el análisis no lineal de las series de tiempo | 8 |
| 1.1.4 Caracterizar el comportamiento caótico en sistemas dinámicos no lineales | 9 |
| 1.1.5 Variables aleatorias y procesos estocásticos | 10 |
| 1.1.6 Variables aleatorias discretas y continuas | 10 |
| 1.1.7 Procesos estocásticos | 12 |
| 1.2 Elementos de teoría de la Información | 13 |
| 1.2.1 Entropía de Shannon | 13 |
| 1.2.2 Entropía conjunta y Entropía condicional | 15 |
| 1.2.3 Entropía relativa e Información mutua | 16 |
| 1.2.4 Divergencia de Jensen-Shannon | 18 |
| 1.3 Complejidad de Lempel-Ziv | 20 |
| 1.3.1 Complejidad de Kolmogorov y compresión de datos | 20 |
| 1.3.2 Complejidad de Lempel-Ziv | 21 |
| 1.4 Conclusión del capítulo | 23 |
| 2 ENTROPÍA DE PERMUTACIÓN Y APLICACIONES AL ESTUDIO DE ELECTROENCEFALOGRAMAS | 25 |
| 2.1 Entropía de permutación | 25 |
| 2.1.1 Introducción | 25 |
| 2.1.2 Entropía de permutación | 27 |
| 2.1.3 Algunas aplicaciones de la entropía de permutación | 28 |
| 2.2 Entropía de permutación aplicada a la caracterización de la evolución clínica de pacientes epilépticos bajo tratamiento farmacológico | 31 |
| 2.2.1 Presentación del problema | 31 |
| 2.2.2 Aplicación de la entropía de permutación al estudio de un EEG | 32 |
| 2.2.3 Caso clínico a estudiar | 33 |
| 2.2.4 Resultados | 35 |
| 2.3 Observaciones finales de este capítulo | 38 |
| 3 COMPLEJIDAD DE PERMUTACIÓN DE LEMPEL-ZIV | 39 |
| 3.1 Introducción | 39 |

| | | |
|-------|--|----|
| 3.2 | La complejidad de permutación de Lempel-Ziv | 41 |
| 3.3 | Aplicaciones a datos simulados y reales | 44 |
| 3.3.1 | Caracterización del mapa logístico | 44 |
| 3.3.2 | La detección de cambios repentinos en una señal de tres dimensiones | 47 |
| 3.3.3 | Análisis de un electroencefalograma (EEG) de un paciente sufriendo un ataque epiléptico. | 51 |
| 3.4 | Discusiones | 54 |
| 4 | DETECCIÓN DE CAOS-RUIDO MEDIANTE EL USO DE LA DIVERGENCIA DE JENSEN SHANNON | 57 |
| 4.1 | Introducción | 57 |
| 4.2 | DJS aplicada al mapeo alfabético | 58 |
| 4.2.1 | Mapeo alfabético | 59 |
| 4.2.2 | DJS aplicada al mapeo alfabético | 60 |
| 4.3 | Mapas caóticos y ruidos coloreados. | 61 |
| 4.3.1 | Mapas caóticos | 62 |
| 4.3.2 | Ruidos Coloreados | 62 |
| 4.4 | Análisis de la Divergencia de Jensen Shannon alfabética entre secuencias caóticas y aleatorias | 63 |
| 4.4.1 | Matriz para la distancia DJSa | 63 |
| 4.4.2 | La DJSa como detector de cambios en una señal | 64 |
| 4.5 | Algunas aplicaciones a señales reales de la DJSa | 67 |
| 4.5.1 | Distinción entre grupos de pacientes con problemas cardíacos | 69 |
| 4.5.2 | Detección del desalineamiento del eje de un motor eléctrico | 69 |
| 4.6 | Discusión | 70 |
| 5 | PLANO COMPLEJIDAD-ENTROPÍA | 73 |
| 5.1 | Introducción | 73 |
| 5.2 | Caracterización de mapas caóticos y ruidos no gaussianos. | 74 |
| 5.2.1 | Mapas caóticos | 74 |
| 5.2.2 | Mapas de Schuster | 75 |
| 5.2.3 | k-ruidos | 75 |
| 5.2.4 | Movimiento fraccional gaussiano y ruido fraccional browniano | 76 |
| 5.3 | Análisis del plano complejidad vs entropía | 76 |
| 5.4 | Aplicaciones del plano C_{LZ} vs H_{PE} a señales de EEG | 80 |
| 5.5 | Discusión | 80 |
| | Conclusiones y trabajos futuros | 83 |
| i | APÉNDICE | 87 |
| A | DETALLES TÉCNICOS DE LA IMPLEMENTACIÓN DE CPLZ | 89 |
| B | BREVE INTRODUCCIÓN AL EEG | 93 |
| B.1 | Introduction | 93 |

| | | | |
|-----|----------------------------------|------------|-----|
| B.2 | Que es lo que mide EEG | 94 | |
| B.3 | El sistema internacional 10 – 20 | | 95 |
| C | MAPAS CAÓTICOS | 97 | |
| C.1 | Mapas no invertibles | 97 | |
| C.2 | Mapas Disipativos | 100 | |
| C.3 | Mapas conservativos | 101 | |
| C.4 | Tablas de mapas utilizados | | 104 |
| | BIBLIOGRAFÍA | 107 | |

ACRONISMOS

| | |
|-------|--|
| AVP | Ácido valproico |
| CLZ | Complejidad de Lempel-Ziv |
| CPLZ | Complejidad de Permutación de Lempel-Ziv |
| DJS | Divergencia de Jensen-Shannon |
| DJSa | Divergencia de Jensen-Shannon alfabética |
| DKL | Divergencia de Kullback-Leibler |
| EEG | Electroencefalograma |
| EGI | Epilepsia idiopática generalizada |
| EP | Entropía de permutación |
| FDP | Función distribución de probabilidades |
| ILL | Intervalo latido a latido |
| i.i.d | Independiente e idénticamente distribuidas |
| TI | Teoría de la información |

INTRODUCCIÓN

LAS SERIES TEMPORALES DESDE LA MIRADA DE LA TEORÍA DE LA INFORMACIÓN.

El estudio en Física de los fenómenos naturales puede analizarse por medio de dos caminos. El primero, es a través del conocimiento de una ecuación o de un sistema de ecuaciones que describan dicho fenómeno, lo cual permite determinar y caracterizar el comportamiento del sistema. No obstante, en muchos sistemas "de la vida real", este camino no siempre es aplicable, ya que por su naturaleza compleja, la obtención de ecuaciones descriptivas es casi imposible.

Ante esto, es necesario entonces tomar un segundo camino. Éste es, en cierto sentido, inverso al anterior, ya que permite observar el comportamiento del fenómeno natural y tomar mediciones sobre el mismo para luego buscar la causa subyacente que lo genera. En este último camino, lo único que se tiene sobre el sistema, es una secuencia de mediciones sucesivas en el tiempo, es decir, una *serie temporal*. En el presente trabajo, analizaremos este tipo de series de tiempo por medio de diferentes métodos.

Muchas de las señales reales son el resultado de dinámicas muy complejas o de varias dinámicas acopladas, características del sistema que los originan. Esta situación se puede encontrar en series temporales originadas en sistemas biológicos. Por ejemplo, en el procesos de reacción-difusión, de gran relevancia en la quimiotaxis, en la generación de señales eléctricas registradas en un EEG, o en las acciones colectivas de los genes para una producción específicas de proteínas [1-3].

Otro ámbito en que los efectos emergentes de un acoplamiento de diversas dinámicas, y que ha sido materia de estudios exhaustivos en los últimos años, es el de las Ciencias Sociales [4, 5]. Como ejemplo podemos nombrar la valoración de los activos en el mercado accionario y los análisis de complejidad aplicados a ellos. [6]. En la física, uno de los retos es describir estas señales complejas de forma sencilla, para permitir la extracción de la información significativa y relevante. [7-9].

Por otra parte el estudio estadístico de las series temporales ha sido abordado desde la matemática pura y en el contexto de diversas aplicaciones (meteorología, finanzas, etc.) [10, 11]. En los últimos años los métodos de estudio de las series temporales se han visto enriquecidos con conceptos y técnicas provistas por la teoría de la información y por herramientas provenientes de distintos campos de la física, tales como la teoría de los sistemas caóticos, la fractalidad y las medidas

de complejidad [12, 13].

Desde los trabajos pioneros de E. Jaynes en el año 1957 [14], la teoría de la información se ha incorporado plenamente al ámbito de la física. Además, los estudios del concepto de complejidad han tenido gran impacto en varias áreas del conocimiento como por ejemplo, las neurociencias, la biología y los sistemas dinámicos no lineales. En las últimas décadas ha habido un crecimiento notable en la definición de distintas medidas de complejidad. Basta mencionar la complejidad algorítmica de Kolmogorov, la complejidad de Lempel-Ziv, la entropía de permutación de Bandt y Pompe, entre otros.

De particular interés para nosotros, y por su relevancia en el ámbito clínico, son los estudios realizados a series temporales de origen fisiológico (EEG, ECG, etc.) a través de conceptos tales como caos, auto-organización, fractaliada y otros provenientes del ámbito de la física estadística [15–17]. La conjunción de todos estos temas aplicados al análisis de series temporales, fundamentalmente de origen fisiológico, constituirá el eje principal de desarrollo del presente trabajo.

ORGANIZACIÓN DE LA TESIS

El trabajo descripto a continuación está dividido en cinco capítulos.

El capítulo 1 comenzará con una introducción a los sistemas determinísticos y aleatorios, además se expondrán conceptos básicos de la teoría de la información tales como entropía, información mutua y divergencias entre distribuciones de probabilidades [18].

El capítulo 2 estará constituido de dos partes principales. En la primera parte se introducirá la noción de entropía de permutación desarrollada por Bandt y Pompe [19], y estudiará tanto sus propiedades como sus aplicaciones. En la segunda parte se utilizará esta herramienta para cuantificar la evolución de un paciente con epilepsia bajo tratamiento farmacológico [20].

En el capítulo 3 se cambia la mirada sobre las series temporales y las abordará desde un punto de vista más determinista. Para ello se verá el concepto de la complejidad de Kolmogorov [21], y la noción de complejidad algorítmica desarrollada por A. Lempel y J. Ziv [22]. Luego se desarrollará una nueva idea basada en la combinación de las ideas de Bandt y Pompe y la complejidad de Lempel-Ziv, generando una nueva medida a la que llamaremos la complejidad de permutación de Lempel-Ziv [23]. Se mostrarán las ventajas del uso de esta complejidad para señales multidimensionales.

En el capítulo 4 se verá una nueva forma de asignación de señales continuas de una correspondencia alfabética [24]. Posteriormente se usará la divergencia de Jensen-Shannon para establecer distancias estadísticas que permitan determinar cuán similares son dos secuencias

diferentes, previamente "mapeadas" por medio de una correspondencia alfabética. Luego se utilizará el cálculo de la divergencia de Jensen-Shannon dentro de una ventana móvil a lo largo de la señal a analizar. Esto permite determinar los cambios en las distribuciones de probabilidad asociadas con la señal, para poner a prueba este método se usaran señales provenientes de la dinámica no lineal y de secuencias aleatorias no-gaussianas, de uso común en la bibliografía [25], así también se usaran señales reales provenientes de registros de ECG y mediciones realizadas sobre el eje de un motor eléctrico.

En el capítulo 5, se utilizará un plano complejidad de Lempel-Ziv vs. entropía de permutación, ya que permite un análisis simultáneo tanto estadístico como determinístico de las señales. Mediante el análisis de señales caóticas, ruidos correlacionados y no correlacionados, se mostrará la utilidad de este plano para la distinción entre ruido y caos. Este tipo de plano permite ampliar los resultados expuestos en el capítulo dos y discutir sus ventajas a la hora de visualizar la evolución clínica de un paciente con epilepsia bajo tratamiento farmacológico, retomando también la investigación sobre la cuantificación de la evolución de dicho paciente.

Finalmente se hará una conclusión general sobre los resultados expuestos en esta tesis, la cual describirá algunas posibles líneas de investigación futuras.

En el siguiente capítulo se darán las bases teóricas de las herramientas de análisis a utilizar a lo largo de la tesis. En la primera parte se dará una introducción a los sistemas dinámicos no lineales, en donde se explicarán las propiedades de estabilidad y se definirá el concepto de caos determinístico. En la segunda parte se entrará en el campo de la teoría de la información, en donde se definirá los conceptos de entropía, información mutua y divergencias. Finalmente en la tercera parte se abordará el tema de la complejidad de Lempel Ziv.

1.1 UNA APROXIMACIÓN DETERMINISTA A LOS SISTEMAS DINÁMICOS

1.1.1 *Sistemas dinámicos continuos y discretos*

El concepto de sistema dinámico fue introducido por Isaac Newton, al usar un conjunto de ecuaciones diferenciales para describir la evolución en el tiempo de fenómenos naturales. Hoy en día, se acepta que muchos sistemas físicos se pueden describir en términos de variables de estado $= (x_1, \dots, x_m)$; $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, cuya evolución temporal está determinada por las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden [26–29]. Un sistema dinámico determinístico se define como un conjunto de variables de estado o un vector de estado $\mathbf{x}(t)$, que describe el sistema en algún instante de tiempo t y una ley dinámica que gobierna la evolución temporal de las correspondientes variables de estado.

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = f(\mathbf{x}, \mu, t) \quad (1)$$

Los sistemas dinámicos se llaman determinísticos si existe una sucesión de estados únicos para cada posición inicial $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t = 0)$. La función f puede ser lineal o no lineal. En cada caso el correspondiente sistema se llama sistema lineal o no lineal. La variable μ comprende a un conjunto de parámetros de control o de bifurcación. Los sistemas dinámicos se denominan estacionarios si $f(\mathbf{x}, \mu, t) \equiv f(\mathbf{x}, \mu)$ y en el caso contrario no estacionarios. Con el fin de lograr una cierta profundidad en el conocimiento de las propiedades cualitativas de un sistema, sin llegar a resolver las ecuaciones diferenciales, es conveniente representar la dinámica m -dimensional del espacio de las fases de manera más abstracta, donde cada dimensión corresponde a un estado particular de las variables. Por lo tanto, cada uno de los puntos representados en el espacio de las fases especifica el estado de

un sistema y viceversa.

A medida que el sistema evoluciona en el tiempo, guiado por el campo de velocidad $\mathbf{v} = f(\mathbf{x}, \mu, t)$, produce un camino o una trayectoria $\mathbf{x}(t)$ en el espacio de las fases. Entonces se puede estudiar la dinámica del sistema mediante el análisis de la trayectoria del sistema en el espacio de fases.

Un sistema dinámico se llama *disipativo* cuando un volumen del espacio de las fases, que contiene todas las posibles condiciones iniciales $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, se contrae con el transcurso del tiempo; de lo contrario se llama *conservativo*.

En un sistema disipativo todas las trayectorias eventualmente se aproximarán (después de algún tiempo transitorio) permaneciendo cerca la una de la otra. Si este subconjunto de puntos es invariante bajo las leyes dinámicas se lo llama *atractor*.

Un subconjunto de todas las condiciones iniciales que asintóticamente conduce al mismo atractor se lo llama *cuenca de atracción*. Si por ejemplo una trayectoria se aproxima a un punto fijo \mathbf{x}^* tal que $\mathbf{v}(\mathbf{x}^*) = 0$, este punto corresponde a un estado de equilibrio del sistema. Si las pequeñas perturbaciones en el entorno de \mathbf{x}^* son amortiguadas en el transcurso del tiempo, entonces este punto se llama un atractor de *punto fijo estable*.

Un sistema dinámico en el que también se observan auto-oscilaciones sostenidas alrededor de un punto, se lo denomina *atractor de ciclo límite*. Como en el caso de un punto fijo estable, pequeñas perturbaciones en el entorno del ciclo límite estable serán suprimidas.

Los ciclos límites son fenómenos intrínsecamente no lineales y pueden ser solamente observados en sistemas que posean al menos dos variables de estado. También son posibles atractores con geometrías y topologías más complejas, que van desde un m -toro a estructuras fractales ¹. Este último se llama un *atractor extraño* y corresponde a un sistema caótico determinista mientras que el anterior representa oscilaciones cuasi-periódicas.

Los atractores de los sistemas caóticos disipativos generalmente tienen una estructura muy complicada con dimensiones no enteras. Por lo tanto, el conocimiento de la geometría y la topología del atractor (por ejemplo, su dimensión) proporciona una comprensión más profunda de la naturaleza del sistema dinámico subyacente.

Los sistemas dinámicos deterministas con tiempo discreto se definen por una relación recursiva o por un mapeo

$$\mathbf{x}_{n+1} = f(\mathbf{x}_n, \mu) \quad (2)$$

donde el vector de fase \mathbf{x}_n es proyectado sobre el vector de fase en el tiempo \mathbf{x}_{n+1} ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ y $m, n \in \mathbb{N}$). De este modo, mediante el establecimiento de un vector en el estado inicial \mathbf{x}_0 , es posible por

¹ Para profundizar sobre el tema de fractalidad y fractales se recomienda la siguiente bibliografía [? ?]

medio de iteraciones calcular el estado vector \mathbf{x}_n , para un paso de tiempo arbitrario en el futuro. En analogía con los sistemas de tiempo continuo, el estado de equilibrio \mathbf{x}_n^* se define como $\mathbf{x}_n^* = f(\mathbf{x}_n^*, \mu)$, así como la dinámica periódicas (por ejemplo, con período- T) se define como $\mathbf{x}_{n+T} = f(\mathbf{x}_n, \mu)$ para cualquier n .

Hay que tener en cuenta que el mapeo de la función f podría no ser necesariamente biyectiva y por lo tanto, el mapeo inverso de \mathbf{x}_{n+1} en \mathbf{x}_n no siempre se define de forma única. Esto se traduce en la pérdida de información parcial sobre el estado del sistema durante una iteración hacia adelante, y por lo tanto en una dinámica bastante compleja. En otras palabras, el estado futuro se vuelve impredecible a pesar de que la evolución temporal es determinista.

1.1.2 Estabilidad de los sistemas dinámicos

La estabilidad es un tema central en el análisis de la evolución temporal de los sistemas dinámicos [30–32]. Es natural preguntarse si un pequeño cambio en las condiciones iniciales de un sistema dinámico puede llevar a un comportamiento asintóticamente similar, o si dos segmentos cercanos en la trayectoria del espacio de fases se mantendrán contiguos el uno del otro en el transcurso del tiempo. Formalmente, un punto de equilibrio \mathbf{x}_e de un sistema dinámico se llama *Lyapunov estable* si para cualquier $\epsilon > 0$ existe $\delta \equiv \delta(\epsilon) > 0$ de tal manera que, si $\|\mathbf{x}_e - \mathbf{x}(t_0)\| < \delta$, entonces $\|\mathbf{x}_e - \mathbf{x}(t)\| < \epsilon$ para cualquier $t > t_0$. El exponente Lyapunov λ de un sistema dinámico, es una magnitud que caracteriza la tasa de separación de la trayectoria de dos segmentos \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 infinitesimalmente cerca en el transcurso del tiempo, es decir, $\delta\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \delta\mathbf{x}(t_0)$, donde $\delta\mathbf{x} = \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$ y $t_0 = 0$. Por lo tanto, un valor positivo del exponente de Lyapunov caracteriza a la divergencia exponencial o inestabilidad de la dinámica. En general, existe un rango completo de los exponentes característicos, los cuales son una cantidad que caracteriza el grado de separación de dos trayectorias infinitesimalmente próximas. El sistema dinámico puede exhibir inestabilidad sólo a lo largo de algunas direcciones de dicho espacio, pero puede permanecer estable a lo largo de las otras. La existencia de al menos un exponente Lyapunov positivo, indica un comportamiento caótico en la evolución temporal de los sistemas dinámicos. En esta situación, incluso una pequeña incerteza sobre el estado inicial, la separación entre dos trayectorias crecerá exponencialmente en el tiempo.

El resultado de esta imprevisibilidad a largo plazo es una consecuencia de la inestabilidad inherente a los sistemas dinámicos, y esta propiedad se denomina dependencia sensible de las condiciones iniciales.

Otra propiedad importante de los sistemas dinámicos es su estabilidad estructural, es decir, su robustez frente a ligeros cambios de

parámetros de control μ . De hecho, muchos de los sistemas naturales no son estructuralmente estables, e incluso pequeñas perturbaciones de los parámetros de control estos a un cambio topológico y geométrico del atractor produce cambios drásticos en el comportamiento asintótico de un sistema dinámico.

Los parámetros de control donde se producen los cambios cualitativos de los atractores del sistema se llaman *puntos de bifurcación* [30, 33]. Por lo tanto, los sistemas dinámicos estructuralmente inestables deben residir en las proximidades de un punto de bifurcación. Como ejemplo, se tiene la transición de un estado de equilibrio inicial a oscilaciones auto-sostenidas. Esto puede considerarse como un proceso en el que, debido a cambios en los parámetros de control, un punto fijo atractor estable pierde su estabilidad, mientras que algunos ciclos límite se vuelven estables.

1.1.3 *La reconstrucción de los espacios de estado y el análisis no lineal de las series de tiempo*

El espectro de exponentes característicos y la dinámica del atractor del sistema dinámico son invariantes bajo una transformación producida en el espacio de fases. Esta importante propiedad garantiza que las estimaciones de las cantidades medidas en el sistema, deben permanecer constantes e independientes más allá de los detalles del proceso de medición y de la reconstrucción del espacio. Esto los hace a los invariantes muy útiles y atractivos en las aplicaciones prácticas. Sobre la base de estas consideraciones se han propuesto diferentes algoritmos para la estimación de estas cantidades a partir de datos experimentales [26, 30]. Sin embargo, con el fin de proceder con el análisis de los sistemas dinámicos no lineales, se debe abordar el problema de la reconstrucción del espacio de fase desde series de tiempo experimentales $x(t) = M(X(t))$, donde M es la función de medición y es una proyección del estado original del espacio X en alguna variedad (por ejemplo los ejes cartesianos).

Pero, ¿que es una reconstrucción?. Formalmente un atractor Γ se reconstruye si se puede construir un espacio vectorial U con un atractor topológicamente equivalente Γ_e . De hecho, es bien sabido que una reconstrucción del espacio de fases original no es necesaria y que a menudo es suficiente para construir un nuevo espacio con un atractor topológicamente equivalente al original. Para ello hay que definir un mapa suave $\phi : \phi(\Gamma) \subset U$ tal que ϕ es un difeomorfismo² entre Γ y $\phi(\Gamma)$. Dicho mapa ϕ se llama "immensor" de una variedad Γ en el espacio U . Todavía no está completamente claro cómo el espacio U se puede construir y cómo se puede encontrar una inmersión adecuada. Una solución para este problema fue encontrado por Takens [34]. De

² Un difeomorfismo es una función invertible que mapea una variedad diferenciable sobre otra, de tal manera que tanto la función y su inversa son lisas.

acuerdo con el *teorema de Takens* el espacio reconstruido U puede formarse con la ayuda de los llamados vectores de retraso $\mathbf{X}_d(t) = (x(t), x(t - \tau), \dots, x(t - (d - 1)\tau))$ donde d es la dimensión de inmersión y τ es un tiempo de retardo [34]. Este teorema se basa en los resultados de Whitney, que establecen que la dimensión de inmersión debe cumplir $d \geq 2D + 1$, donde D es la dimensión del atractor (ver [26] y referencias en él). En general, el valor de tiempo de retardo τ no es objeto de estudio del teorema de Takens. Sin embargo existen muchos trabajos posteriores ya que es bastante importante una elección apropiada de este parámetro [35, 36]. Se debe señalar que la no linealidad de la función de medición M (por ejemplo, cuando la función M no es homeomorfa³), puede conducir a la pérdida parcial de la información acerca de la topología del atractor.

1.1.4 *Caracterizar el comportamiento caótico en sistemas dinámicos no lineales*

La invención de la técnica de inmersión de retardo ha ampliado drásticamente el campo de análisis de series temporales no lineales, y sobre todo el análisis numérico de los sistemas dinámicos no lineales. Mediante ella se ha demostrado que en varios procesos naturales que fueron antes considerados como estocásticos, pueden de hecho ser descritos satisfactoriamente como sistemas dinámicos caóticos determinísticos [26, 30, 37].

El lado dinámico del caos determinístico se manifiesta en la dependencia sensible de la evolución temporal de las condiciones iniciales. Estimaciones numéricas del espectro de los exponentes de Lyapunov proporcionan hoy en día un conjunto de herramientas estándar para caracterizar y cuantificar el grado de caoticidad determinística en sistemas dinámicos y en series de tiempo. Recuérdese que la existencia de al menos un solo exponente de Lyapunov positivo, indica un comportamiento caótico en la evolución temporal de los sistemas dinámicos. Una estimación para la dimensión del atractor reconstruido a partir de una serie de tiempo, puede proporcionar una buena medida de su complejidad.

La integral de correlación generalizada ofrece hoy en día una forma estándar para estimar la dimensión de un conjunto de espacios dimensionalmente altos [26]. La estimación de la integral de correlación para varios sistemas dinámicos no lineales ha demostrado la existencia de atractores de dimensiones no enteras (o fractales).

En este trabajo se utilizarán varios mapas caóticos, sacados del libro de Sprott [25] los cuales están detallados en el apéndice C.

³ Una función se llama homeomorfa si es biyectiva (uno a uno), continua y tiene una inversa continua. Se sabe que una función homeomorfa preserva la topología de un conjunto [30]

1.1.5 Variables aleatorias y procesos estocásticos

En muchos casos, los sistemas dinámicos son demasiado complejos como para ser descritos en términos de un sistema de ecuaciones diferenciales. Varios sistemas físicos en la naturaleza poseen un número muy grande de grados de libertad, por eso es muy difícil analizar dichos sistemas mediante la resolución de las ecuaciones diferenciales que describen la evolución temporal de los mismos. Por ejemplo, un gas en condiciones normales contiene aproximadamente $N_L = 2,43 \times 10^{16}$ partículas por milímetro cúbico. Esta es una limitación evidente desde el punto de vista de la mecánica macroscópica. Para lidiar con este problema se desarrolló la *física estadística*, la cual es una rama de la física que describe propiedades emergentes ⁴ de dichos sistemas.

Un ejemplo sumamente interesante es el provisto por el movimiento browniano. Como es sabido éste tiene que ver con el movimiento de partículas diminutas en suspensión. Grandes investigadores teóricos como Einstein, Smoluchowski y Langevin, han realizado un enfoque estocástico para la descripción de este fenómeno macroscópico [38, 39]. Con este enfoque se pretendió ofrecer una descripción determinista pura de la evolución del sistema en el espacio de fases y, además, utilizar conceptos probabilísticos.

Estos estudios han demostrado que en muchos casos un sistema dinámico no puede considerarse como completamente aislado, ya que las influencias de perturbaciones externas tienen que ser tomadas en cuenta. Tales perturbaciones son introducidas mediante la adición de términos aleatorios en las ecuaciones de movimiento. Generalmente un sistema dinámico se llama *estocástico* si para cualquier estado inicial hay una distribución de probabilidades de los posibles estados futuros.

1.1.6 Variables aleatorias discretas y continuas

Un concepto fundamental para cualquier tratamiento estadístico es el de variable aleatoria. Se ha hablado de la probabilidad de que ocurra un dado evento a través de la asignación de un número, de tal manera que este número represente la probabilidad de que este evento ocurra. Una variable aleatoria es un objeto X definido por:

1. un conjunto de posibles valores (llamados "rango", "conjunto de estados" o "espacio de fase")
2. una distribución de probabilidades sobre ese conjunto.

⁴ Las propiedades emergentes de los sistemas físicos macroscópicos (temperatura, presión, etc.) son típicos para muchos sistemas de muchos-cuerpos. Son el resultado de la interacción de sus constituyentes y estas cantidades no existen a nivel microscópico.

El conjunto puede ser *discreto*, como por ejemplo el número de acciones compradas por una compañía o el número de latidos de un corazón en un cierto tiempo. O puede ser un conjunto continuo en un intervalo dado: la velocidad de una componente de una partícula Browniana (en el intervalo $-\infty, +\infty$) o el potencial eléctrico medido a través de un electroencefalograma (intervalo $-\infty, +\infty$). Mas aún el conjunto de estados puede ser multidimensional; en este caso \mathbf{X} es un vector [40].

En el caso continuo unidimensional, la *función densidad de probabilidad* (FDP) viene dada por $g(x)$, la cual es no negativa

$$g(x) \geq 0$$

, y normalizada en el sentido que:

$$\int g(x) dx = 1$$

donde la integral se extiende sobre todo el rango de posibles valores a tomar. La FDP $g(x)$ significa que para un dx lo suficientemente pequeño, $g(x)dx$ es la probabilidad de ocurrencia del evento $x \in (x, x + dx)$. De una manera similar se define un vector aleatorio d -dimensional $\mathbf{x} \equiv (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$.

La probabilidad de ocurrencia de un número real X , el cual pertenece al intervalo $[x_1, x_2]$ se define como

$$P(x_1 \leq x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} g(x) dx \quad (3)$$

Así, la probabilidad para que cada componente de un vector $\mathbf{x} \equiv (x, y, \dots)$ pueda ser incluida en el intervalo $x \in (x_1, x_2), y \in (y_1, y_2), \dots$ se define como

$$P(x_1 \leq x \leq x_2; y_1 \leq y \leq y_2; \dots) = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \dots g(x, y, \dots) dx dy \dots \quad (4)$$

La densidad de probabilidad $g(x, y, \dots)$ es ahora una función en \mathbb{R}^d y se llama densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias X, Y, \dots . Mediante la integración sobre algunas de las variables aleatorias de una dada FDP se puede obtener lo que se llaman las distribuciones marginales de la FDP.

En teoría de la probabilidad se define $A|B$ para un evento A , que está teniendo lugar bajo la condición que ocurra B . Por definición, la función de *densidad condicional* para la variable aleatoria X bajo la condición del resultado de Y se define como $g(x|y) = g(x, y)/g(y)$. Una variable aleatoria X es estadísticamente independiente de Y si y sólo si $g(x, y) = g(x) g(y)$ y por lo tanto $g(x|y) = g(x)$.

1.1.7 *Procesos estocásticos*

Los procesos estocásticos proporcionan un marco matemático importante para describir diferentes procesos dinámicos que no pueden ser adecuadamente representados por una secuencia independiente e idénticamente distribuida (i.i.d) de variables aleatorias [40, 41].

Sea una variable estocástica X como se la ha definido en la sección anterior, e infinitas variables estocásticas z definidas como funciones de X mediante algún mapeo f . Si en particular a esa cantidad le sumamos una variable t que representa el tiempo

$$z(t) = f(X, t)$$

$z(t)$ se la denomina un *proceso estocástico*. Este proceso estocástico es simplemente una función de dos variables, en la cual una es el tiempo t y la otra una variable estocástica X .

Si se supone, por simplicidad, que el tiempo es discreto, se puede decir que un proceso estocástico es una secuencia de variables aleatorias, es decir, $\{z(t_i)\}_{i=1}^N$. Por lo tanto, un proceso estocástico $z(t)$ dentro del intervalo $[t_1, \dots, t_N]$ se define de forma única con la función de densidad $g(z(t_1), \dots, z(t_N))$.

En general, el estado de un proceso estocástico en el paso de tiempo t_n , depende de su historia completa

$$g(z(t_n)|z(t_{n-1}), \dots, z(t_0)).$$

En muchas situaciones prácticas es sin embargo, bastante razonable suponer que un proceso estocástico tiene una memoria limitada. En este caso su estado en el paso de tiempo t_n es independiente en su historia completa y se define de forma unívoca solo cuando se da el estado del proceso al paso de tiempo t_{n-1} , es decir,

$$g(z(t_n)|z(t_{n-1}), \dots, z(t_0)\dots) = g(z(t_n)|z(t_{n-1})).$$

El proceso que posee esta propiedad se denomina *proceso de Markov* (o cadena) de primer orden ⁵.

La propiedad de Markov se define como una idealización que permite especificar completamente un proceso estocástico por la función densidad, para el estado del proceso la cual posee un valor inicial $g(z(t_0))$ mediante la densidad condicional $g(z(t_n)|z(t_{n-1}))$, también conocida como función densidad de transición. Un proceso estocástico es estacionario en sentido estricto si la función de distribución conjunta de cualquier subconjunto de variables es constante respecto a un desplazamiento en el tiempo. Por lo tanto, para un proceso de Markov estacionario de primer orden se tiene que:

⁵ Es muy sencillo generalizar esta definición para los procesos de Markov de orden k como $g(z(t_n)|z(t_{n-1}), \dots, z(t_0)\dots) = g(z(t_n)|z(t_{n-1}), \dots, z(t_{n-k}))$

$$g(z(t_n), z(t_{n-1}), \dots, z(t_0)) = g(z(t_n)|z(t_{n-1})) \dots g(z(t_1)|z(t_0))g(z(t_0))$$

En el caso de una secuencia de variables aleatorias i.i.d, es evidente que la función de densidad de transición se reduce a

$$g(z(t_n)|z(t_{n-1})) = g(z(t_n))$$

Un proceso estocástico se dice que es *ergódico* respecto a la media si, es estacionario en sentido estricto y el promedio temporal es igual a la media.

En esta parte del capítulo se ha dado un breve repaso de la noción de sistemas no lineales, variable aleatoria y procesos estocásticos. En la sección siguiente se introducirán los conceptos de teoría de la información.

1.2 ELEMENTOS DE TEORÍA DE LA INFORMACIÓN

1.2.1 Entropía de Shannon

El concepto de entropía viene de la termodinámica (entropía de Boltzmann) y encontró su contraparte en el dominio de la comunicaciones (o más precisamente en teoría de la información) a través del trabajo Shannon de 1948 [42]⁶. El objetivo fue definir una medida de la incertidumbre asociada con una variable aleatoria de estado discreto. Esta medida tiene que ser invariante frente a la permutación de las probabilidades asociadas a la variable aleatoria, aumentando con la dimensión del espacio de fase cuando la distribución es uniforme, y teniendo que satisfacer la propiedad de recursividad (la regla de pérdida de entropía cuando se unen dos estados en uno).

Una manera intuitiva de definir la entropía desde el punto de vista de la información es verla como la cantidad de información promedio que contienen los símbolos usados en un mensaje. Los símbolos con menor probabilidad son los que aportan mayor información; por ejemplo, si se considera como sistema de símbolos a las palabras en un texto, palabras frecuentes como "que", "el", "a" aportan poca información, mientras que palabras menos frecuentes como "corren", "auto", "perro" aportan más información. Si de un texto dado se borra un "que", seguramente no afectará a la comprensión y el mismo se podrá entender, no siendo así si se excluye la palabra "auto" del mismo texto original. Cuando todos los símbolos son igualmente probables, todos aportan información relevante y la entropía es máxima.

⁶ El concepto de entropía, desde la noción clásica de la termodinámica desarrollada por L. Boltzmann, y desde la teoría de la información desarrollada por C. Shannon, no poseen una correlación directa. Sin embargo se han hecho muchos análisis para relacionar estos dos conceptos, entre ellos los trabajos de Jaynes [43]

Tomando un alfabeto discreto \mathcal{A} de tamaño finito $|\mathcal{A}| < \infty$, con la función probabilidad $p_X(x) = \Pr[X = x]$, $x \in \mathcal{A}$, la entropía de la variable aleatoria X está dada por [18]

$$H[X] = - \sum_{x \in \mathcal{A}} p(x) \log(p(x)). \quad (5)$$

En la definición de Shannon, el logaritmo se expresa en la base 2 y H en *bits*; también puede ser utilizado el logaritmo natural, y por tanto H se expresa en *nats*. La ecuación 5 puede ser reescrita como el valor medio del logaritmo de $P(X)$ de la siguiente manera:

$$H(X) = \langle \log(P(X)) \rangle \quad (6)$$

La llamada entropía de Shannon es una distribución funcional de X y no depende de los valores tomados por la variable aleatoria X . Es sencillo demostrar que:

$$0 \leq H[X] \leq \log|\mathcal{A}|,$$

donde $H[X] = 0$ es mínima cuando $p(x) = \delta_{x,x_0}$ (delta de Kronecker), para un determinado $x_0 \in \mathcal{A}$ (es conocida toda la información sobre X) y $H[X] = \log(|\mathcal{A}|)$ es máxima cuando la distribución es uniforme sobre \mathcal{A} . Entonces podemos normalizar la entropía como

$$h[X] = \frac{- \sum_{x \in \mathcal{A}} p(x) \log(p(x))}{\log(|\mathcal{A}|)} \quad (7)$$

en el caso $|\mathcal{A}| \rightarrow \infty$, este cociente se llama tasa de entropía.

La definición de la entropía fue extendida naturalmente al caso en que $|\mathcal{A}| = +\infty$, para este caso la entropía no posee límites, y la distribución de probabilidades correspondiente al valor máximo de entropía puede no ser una distribución uniforme [18].

La extensión de una variable aleatoria continua no es natural y fue propuesta por analogía con la definición discreta mediante la sustitución de las probabilidades con la función de densidad de probabilidad y la suma discreta por una integral [18]. Sin embargo, la llamada entropía diferencial pierde muchas de las buenas propiedades de la entropía, como ser la independencia de sus estados [18]. En el contexto del análisis de las señales, cuando no se conoce la distribución de probabilidad de los datos, la entropía no puede ser evaluada y debe estimarse a partir de los datos.

En el contexto de estados discretos, a partir de una secuencia observada de símbolos, la distribución se puede estimar a través de las frecuencias de aparición de cada uno de ellos. Por el contrario, en el contexto estados continuos, la estimación de la entropía diferencial es un problema dificultoso [44, 45].

1.2.2 Entropía conjunta y Entropía condicional

Sean X e Y dos variables aleatorias, con distribución conjunta $p(X = x, Y = y) = p(x, y)$. La entropía conjunta $H(X, Y)$ se define como:

$$H(X, Y) = - \sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{y \in \mathcal{Y}} p(x, y) \log(p(x, y)) \quad (8)$$

en donde \mathcal{X} es el rango de X , \mathcal{Y} es el rango de Y y las suma se extiende sobre todo el rango de cada variable. Esta expresión de la ecuación cuantifica la incertidumbre asociada al par de variables aleatorias o, la información promedio asociada al observar las variables simultáneamente. La ecuación 8 se puede reescribir de otra forma

$$H(X, Y) = \left\langle \log \left(\frac{1}{P(X, Y)} \right) \right\rangle_{p(x, y)} \quad (9)$$

donde $\langle \rangle$ es el valor medio, calculado usando la distribución conjunta $P(X, Y)$.

Ahora, si se supone que se tiene dos variables aleatorias y se conoce el resultado de una, ¿cuánta incertidumbre se tiene respecto a la otra variable?. O dicho de otra forma ¿cuánta información promedio se obtiene al observar una variable dada, si ya se conoce el resultado de la otra?. Para ello se define la entropía condicional de una variable aleatoria, como el valor esperado de las entropías de las distribuciones condicionales, promediadas sobre la variable aleatoria condicionada. Siendo $H(Y|X = x) = - \sum_{y \in \mathcal{Y}} p(y|x) \log(p(y|x))$ tenemos que:

$$H(Y|X) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) H(Y|X = x) \quad (10)$$

$$= \left\langle \log \left(\frac{1}{P(Y|X)} \right) \right\rangle_{p(x, y)}. \quad (11)$$

Esta cantidad da la información promedio de observar Y dado que ya se conoce X , pero sin importar el valor particular de X . [Notar que en la definición, ec. 10, se promedia sobre todos los posibles valores de X (multiplicado por cada probabilidad de ocurrencia, $p(x)$). Algo que se debe tener en cuenta es que la entropía conjunta de dos variables aleatorias X e Y es igual a la entropía de una más la entropía condicional de la otra, es decir

$$\begin{aligned} H(X|Y) &= H(X) + H(Y|X) \\ &= H(Y) + H(X|Y) \end{aligned} \quad (12)$$

La prueba de esto se lo puede ver en [18].

Se puede decir que la información promedio que se obtiene al observar un par de variables aleatorias, es igual a la información promedio de observar una de ellas sumada a la información promedio de observar la segunda condicionada a la primera. En el caso particular en

que las variables aleatorias son independientes, $P(X, Y) = P(X) P(Y)$ por lo tanto $H(Y|X) = H(Y)$, con lo que la Ec 12 se reduce a $H(X, Y) = H(X) + H(Y)$. Esto significa, tal como se dijo antes, que la información asociada a dos variables aleatorias independientes es la suma de las informaciones individuales.

1.2.3 Entropía relativa e Información mutua

Hasta aquí se ha interpretado a la entropía de una variable aleatoria como la cantidad de información requerida para describir dicha variable. En esta sección se introducen dos conceptos relacionados: la *entropía relativa* y la *información mutua*.

La entropía relativa es una medida de la distancia entre dos distribuciones de probabilidad. En estadística surge como un logaritmo de la razón de verosimilitud. Concretamente la entropía relativa $D(p, q)$ es una medida de la consecuencia de asumir que la distribución para la variable aleatoria X es $q(x)$ cuando la verdadera distribución es $p(x)$. Es decir, si se considera la verdadera distribución $p(x)$, la longitud promedio de un código construido con la variable X , es $H(p)$ (bits); mientras que si la distribución es $q(x)$, la longitud promedio es $H(p) + D(p, q)$ bits.

1.2.3.1 Divergencia de Kullback-Leibler

Se define la *Entropía relativa* o la *Divergencia Kullback-Leibler* (DKL) entre dos distribuciones de probabilidad $P(X)$ y $Q(x)$ asociada a la variable aleatoria X

$$D_{KL}(P, Q) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \log \left(\frac{p(x)}{q(x)} \right) = \left\langle \log \left(\frac{P}{Q} \right) \right\rangle_p. \quad (13)$$

A continuación se enumera algunas de sus propiedades.

1. Si $P(X)$ y $Q(X)$ son dos distribuciones posibles para la variable aleatoria X entonces se cumple que:

$$D_{KL}(P(X), Q(X)) \geq 0 \quad (14)$$

con $D_{KL}(P(X), Q(X)) = 0$ si y sólo si $P(x) = Q(x)$, $\forall x \in \mathcal{X}$. Por esta propiedad es que a menudo se utiliza la DKL como una medida de disimilitud entre las distribuciones de probabilidad.

2. No es simétrica respecto a sus argumentos:

$$D_{KL}(P(X), Q(X)) \neq D_{KL}(Q(X), P(X)) \quad (15)$$

3. No posee cota superior.

1.2.3.2 Información Mutua

Considere dos variables aleatorias X e Y con una distribución de probabilidad conjunta $p(x, y)$ y con probabilidades marginales $p(x)$ y $p(y)$. La información mutua $I(X; Y)$ es la entropía relativa entre la distribución conjunta y la distribución del producto $p(x) p(y)$:

$$I(X; Y) = \sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{y \in \mathcal{Y}} p(x, y) \log \left(\frac{p(x, y)}{p(x)p(y)} \right) \quad (16)$$

$$= D_{\text{KL}}(p(x, y) | p(x) p(y)) \quad (17)$$

$$= \left\langle \log \left(\frac{p(X, Y)}{p(X) p(Y)} \right) \right\rangle_{p(x, y)} \quad (18)$$

Se puede generalizar esta definición para variables aleatorias continuas [18].

1.2.3.3 Relación entre la Entropía y la Información Mutua

Podemos reescribir la definición de la información $I(X; Y)$ como

$$\begin{aligned} I(X; Y) &= \sum_{x, y} p(x, y) \log \left(\frac{p(x, y)}{p(x) p(y)} \right) \\ &= - \sum_{x, y} \log p(x) + \sum_x \log p(x|y) \\ &= H(X) - H(X|Y) \end{aligned} \quad (19)$$

Por lo tanto, la información mutua $I(X; Y)$ es la reducción en la incertidumbre de X debido al conocimiento de Y . Por simetría, también se deduce que

$$I(X; Y) = H(Y) - H(Y|X) \quad (20)$$

Vemos entonces que, X dice tanto sobre Y como Y dice sobre X . Usando $H(X, Y) = H(X) + H(Y|X)$, tenemos

$$I(X; Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y). \quad (21)$$

Por último, se puede observar que

$$I(X; X) = H(X) - H(X|X) = H(X). \quad (22)$$

Por lo tanto, la información mutua de una variable aleatoria consigo misma es la entropía de la variable aleatoria. Se pueden demostrar las siguientes propiedades: [18]

$$I(X; Y) = H(X) - H(X|Y) \quad (23)$$

$$= H(Y) - H(Y|X) \quad (24)$$

$$= H(X) + H(Y) - H(X, Y) \quad (25)$$

$$= I(Y; X) \quad (26)$$

1.2.4 Divergencia de Jensen-Shannon

Si bien la DKL como medida de disimilitud aparece de manera natural en el contexto de la teoría de la información, tiene también importantes limitaciones ya mencionada en la Sección 1.2.3.1. Debido a estas limitaciones es que J. Lin [46] introduce una nueva cantidad relacionada con la DKL, denominada *divergencia de Jensen-Shannon*, definida como:

$$D_{J_{S_{1/2}}}(P|Q) = \frac{1}{2} \left(D_{KL} \left(P, \frac{P+Q}{2} \right) + D_{KL} \left(Q, \frac{P+Q}{2} \right) \right). \quad (27)$$

La cantidad así definida tiene las siguientes propiedades:

1. Es simétrica.
2. Es definida positiva.
3. Es acotada y está siempre bien definida (no requiere la condición de continuidad absoluta entre las distribuciones de probabilidad, a diferencia de lo que ocurre con la divergencia de Kullback-Leibler)

Utilizando la definición de la DKL, ec 13, es posible reescribir la divergencia Jensen-Shannon en término de la entropía:

$$D_{J_{S_{1/2}}}(P|Q) = H \left(\frac{P+Q}{2} \right) - \frac{1}{2} (H(P) + H(Q)). \quad (28)$$

Mas adelante Lin generaliza la expresión para proponer la divergencia de Jensen-Shannon (DJS) entre dos distribuciones P y Q a cada una de las cuales, se le asigna un peso diferente:

$$D_{J_{S_{\pi}}}(P|Q) = H(\pi_1 P + \pi_2 Q) - (\pi_1 H(P) + \pi_2 H(Q)), \quad (29)$$

siendo π_1 y π_2 los pesos asociados a las distribuciones P y Q, respectivamente. Estos pesos son números reales no negativos tales que $\pi_1 + \pi_2 = 1$.

La $D_{J_{S_{\pi}}}$ propuesta por Lin fue inspirada en un trabajo previo de C.R. Rao [47], en el cual propone una cantidad llamada diferencia de Jensen para una entropía general.

1.2.4.1 Algunas propiedades de la divergencia de Jensen-Shannon

Se procederá a hacer un repaso de las propiedades más importantes que tiene la DJS: Si se usa el logaritmo en base 2, la DJS es acotada:

$$0 \leq D_{J_S}(P|Q) \leq 1$$

Por otro lado la D_{J_S} en la versión en que los pesos son iguales, Ec. 27, posee dos propiedades adicionales a las del caso general, que son:

1. Es simétrica respecto a sus argumentos:

$$D_{JS_{1/2}}(P|Q) = D_{JS_{1/2}}(Q|P); \quad (30)$$

2. Es el cuadrado de una métrica [48], esto significa que:

$$d_{JS}(P|Q) = \sqrt{D_{JS_{1/2}}(P|Q)}$$

3. Satisface la desigualdad triangular: si $P(X)$, $Q(X)$ y $R(X)$ son distribuciones de probabilidad, entonces

$$d_{JS}(P|Q) \leq d_{JS}(P|R) + d_{JS}(R|Q)$$

Estas propiedades hacen que la D_{JS} sea una buena medida de disimilitud entre distribuciones de probabilidad y que d_{JS} sea una verdadera *distancia*⁷. Este concepto será muy utilizado en capítulos posteriores para medir la similitud entre dos señales.

1.2.4.2 Divergencia de Jensen-Shannon generalizada

Una de las características más interesantes de la D_{JS} es que puede ser generalizada para comparar un número arbitrario de distribuciones. Sean m distribuciones de probabilidad $P^{(1)}, P^{(2)}, \dots, P^{(m)}$ con pesos asociados $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m$, con las restricciones habituales tanto para las distribuciones como para los pesos, que sea no negativa y normalizada. La divergencia de Jensen-Shannon generalizada se define entonces de la siguiente manera [18]:

$$D_{JS}(P^{(1)}, P^{(2)}, \dots, P^{(m)}) = H\left(\sum_{i=1}^m \pi_i P^{(i)}\right) - \left(\sum_{i=1}^m \pi_i H(P^{(i)})\right) \quad (31)$$

Cabe destacar, las propiedades mencionadas en la sección anterior para el caso de dos distribuciones se verifican también para esta versión generalizada. Así la D_{JS} es no negativa y se anula si y sólo si todas las distribuciones son iguales, y está siempre bien definida (no requiere distribuciones absolutamente continuas). Además es "*simétrica*" ante el intercambio de dos distribuciones cualesquiera siempre y cuando al intercambiar las distribuciones también se intercambien sus respectivos pesos.

1.2.4.3 Aplicaciones

La divergencia Jensen-Shannon se ha aplicado a diferentes ramas de la física, biología, ciencias sociales entre otras. Se destaca:

⁷ Distancia en el sentido matemático: la cual debe cumplir que sea definida positiva, simétrica, que se anule sólo si los elementos que está comparando son iguales y que cumpla la desigualdad triangular.

- Bioinformática y comparación de genomas, [49–51],
- Biofísica: comparación de proteínas de superficie [52],
- Ciencias sociales: estudios de opinión [53], estudio cuantitativo de la historia [54],
- Física cuántica: para distinguir entre estados cuánticos mezclados [55, 56], para medir grados de entrelazamiento [57],
- Distinguir entre sistemas caóticos y aleatorios [58, 59],
- Análisis de EEG [16].

Para profundizar en las interpretaciones de D_{JS} en diferentes ámbitos de la física y biología se recomienda ver [60]. En esta segunda parte de este primer capítulo se ha realizado un breve introducción a las nociones de entropía, divergencias y medidas de información. En la siguiente sección se hará un introducción a la complejidad de Lempel Ziv.

1.3 COMPLEJIDAD DE LEMPEL-ZIV

1.3.1 Complejidad de Kolmogorov y compresión de datos

El interés de Kolmogorov en la aleatoriedad y la complejidad lo llevó al desarrollo de la noción de complejidad algorítmica [21, 61–63]. En contraste con la noción de tasa de entropía de los procesos estocásticos introducida por Shannon varios años antes, Kolmogorov propuso una medida de complejidad que no se basa explícitamente en la noción de la probabilidad de un evento. En este caso es posible definir una medida de complejidad de un objeto finito (una cadena) sin la necesidad de asociar una distribución de probabilidad de este objeto, la cual es necesaria para una definición rigurosa de la tasa de entropía de los procesos estocásticos.

El problema de buscar la descripción de algún objeto por una secuencia finita de símbolos (por ejemplo, una cadena binaria). En principio, hay numerosas descripciones posibles. Es bastante lógico considerar la longitud más corta para la descripción de un objeto como una medida para su complejidad.

Kolmogorov [62], define la noción de complejidad de un cadena finita con respecto a un cierto número de cálculos universales fijos⁸.

Formalmente, la complejidad de Kolmogorov (algorítmica) $K(S)$ de una cadena S , es la longitud del programa binario más corto (*prog*), realizada por una máquina universal U , es decir,

$$K(S) = \min_{\text{prog}} \{\text{largo}(\text{prog})\} \quad (32)$$

⁸ Por ejemplo, se puede considerar la máquina universal de Turing como la forma más simple de computación universal. Para más detalles, véase [18]

La principal contribución de Kolmogorov fue que esta definición sobre la complejidad de una cadena es independiente de la elección de la computadora. Varias versiones de esta noción de complejidad fueron descritas independientemente por otros autores, (ver referencias, [18, 21]).

Para demostrar el concepto de complejidad de Kolmogorov se puede considerar primero una larga cadena periódica binaria $S_{\text{per}} = 000100010001000100010001\dots$. Es obvio que esta cadena se puede generar con un programa corto de computadora prog_{per} tal que se utilice n – veces la subcadena 0001 para imprimir S_{per} . En contraste con esto, una cadena generada de manera puramente aleatoria de la misma longitud $S_{\text{al}} = 010101000100110101010\dots$ sólo puede ser generada por un programa prog_{al} que usa S_{al} para imprimir S_{al} , el cual es al menos tan larga como la longitud de S_{al} . Esto indica que la complejidad Kolmogorov de la cadena periódica mencionada tiene un valor constante $K(S_{\text{per}}) = 4 + c$ y es independiente de la longitud de la cadena, mientras que la complejidad Kolmogorov para la cadena aleatoria crece linealmente con la longitud de la cadena $K(S_{\text{al}}) = \text{largo}(S_{\text{al}}) + c$. Aquí c es alguna constante que depende de los detalles de implementación de los programas de ordenador utilizados. Debido a la naturaleza más bien abstracta de la definición anteriormente dada de la complejidad de Kolmogorov, hay una necesidad de dar una definición más práctica de esta medida. Siempre se puede argumentar que el programa más corto para generar alguna cadena S , debe ser definido como un prog^* que usa S^* para imprimir S , donde S^* es la versión comprimida de la cadena S . El problema de encontrar la complejidad de Kolmogorov de una cadena S puede ser reducido al problema de encontrar un *esquema de compresión sin pérdida*⁹ de la cadena.

1.3.2 Complejidad de Lempel-Ziv

Una clase importante de técnicas para la compresión de cadenas ha sido desarrollada por Lempel y Ziv. Los algoritmos de compresión propuestos por los autores hacen uso de diccionarios adaptativos [64, 65]. Esta idea se remonta a la época del telégrafo. Los pioneros de las telecomunicaciones reconocieron que era más práctico generar un libro con los códigos de las frases con mayor frecuencia de uso, que codificar letra por letra cada vez que se enviaba un mensaje. Por lo tanto, era posible que el remitente comprimiera un mensaje a transmitir y el receptor lo descomprimiera de nuevo sin ninguna pérdida de información, siempre y cuando ambas partes tuvieran el acceso a la lista de códigos. Lempel y Ziv tomaron esta idea y la mejoraron generan-

⁹ Un esquema de compresión sin pérdidas se define como un proceso de compresión sin pérdida de información. En este caso, mediante el uso de la versión comprimida de la cadena S^* siempre es posible reconstruir la cadena original S .

do un diccionario autoadaptado.

Se considera una secuencia de tamaño finito $S_{0:T-1} = S_0 \dots S_{T-1}$ de símbolos de un alfabeto \mathcal{A} de tamaño finito $|\mathcal{A}|$. Basados en la idea de complejidad de Kolmogorov, y particularizando a la idea de un programa construido con solo dos operaciones, Lempel y Ziv avanzaron en su esquema de compresión. Las operaciones básicas que un programa podía realizar son la copia y el pegado recursivo, es decir la "reproducción" y la "producción".

REPRODUCCIÓN: consiste en extender la secuencia $S_{0:T-1}$ de longitud T , a una nueva secuencia $S_{0:T+N-1}$ de longitud $T+N$, por medio de operaciones recursivas de copiar-pegar sub-secuencias $Q_{0:N-1}$ ($S_{0:T+N-1} = S_{0:T-1}Q_{0:N-1}$), donde $Q_{0:N-1}$ pertenecientes en su totalidad a $S_{0:T-2}$ la cual se denota como $SQ\pi$. Esto se lo puede entender como, que toda la "información" relevante que posee la secuencia $S_{0:T+N-1}$ se encuentra en $S_{0:T-1}$.

PRODUCCIÓN: la secuencia extendida $S_{0:T+N-1}$ es tal que ahora $\pi SQ = S_{0:T+N-2}$ puede ser reproducida por la secuencia $S_{0:T-1}$, pero el último símbolo de la extensión, puede ser un "nuevo" símbolo, dando una secuencia no reproducible íntegramente por $S_{0:T-1}$.

Para ilustrar esta idea se considera el siguiente ejemplo: Tenemos la secuencia 0010 la cual podemos determinar por los siguientes pasos

1. El primer dígito siempre se introduce. $\rightarrow 0$
2. $S = 0, Q = 0, SQ = 00, SQ\pi = 0, Q \in SQ\pi \rightarrow 0 \cdot 0$
3. $S = 0, Q = 01, SQ = 001, SQ\pi = 00, Q \notin SQ\pi \rightarrow 0 \cdot 01$.
4. $S = 001, Q = 0, SQ = 0010, SQ\pi = 001, Q \in SQ\pi \rightarrow 0 \cdot 01 \cdot 0$

Cualquier secuencia puede considerarse construida a través de una sucesión de producciones, llamada "historia". Como ejemplo, una secuencia puede ser producida símbolo por símbolo. Sin embargo, una secuencia dada no tiene una historia única; varios procesos de producción pueden conducir a la misma secuencia. En el espíritu de la complejidad de Kolmogorov, Lempel y Ziv estaban interesados en la "historia óptima"; es decir, la mínima producción necesaria para generar una secuencia: la llamada "Complejidad Lempel-Ziv", denotada como $C_{LZ}(S_{0:T-1})$, es este número de pasos mínimo de producción necesaria para la generación de $S_{0:T-1}$. En cierto sentido, C_{LZ} describe la *mínima* información necesaria para generar la secuencia por medio de operaciones recursivas de copiado y pegado. Para nuestro ejemplo anterior $0 \cdot 01 \cdot 0$ la C_{LZ} es la cantidad de partes separadas por los puntos, por ende $C_{LZ} = 3$.

El enfoque de Lempel y Ziv, y diversas variaciones [64, 66], dio lugar a varios algoritmos de compresión (como el famoso 'gzip'). Este, se puede entender como el mínimo de secuencias de producción utilizadas, que nos permiten reproducir la secuencia original [22]. Esto permitió el desarrollo de algoritmos simples para la evaluación de la complejidad Lempel-Ziv de una secuencia [67].

Notablemente, aunque hemos realizado aquí una análisis puramente determinista de la secuencia, la complejidad $C_{LZ}(S_{0:T-1})$ incluye la noción de información en un sentido estadístico. De hecho, se demostró (referencias [18, 22]) que para un proceso aleatorio estacionario y ergódico, cuando esta correctamente normalizado, la complejidad de Lempel-Ziv asociada con este proceso tiende a la tasa de entropía del proceso; es decir,

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} C(S_{0:T-1}) \frac{\log(T)}{T} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{H(S_{0:T-1})}{T} \quad (33)$$

donde $H(S_{0:T-1})$ es la entropía conjunta de los símbolos S , y la parte derecha es la tasa de entropía (entropía por símbolo) del proceso. Tal propiedad permite utilizar la complejidad de Lempel-Ziv para el propósito de estimación de la entropía [68, 69].

Se debe tener en cuenta, que para usar la complejidad de Lempel-Ziv en el análisis estadístico, es importante observar que tamaño de la secuencia sea lo suficientemente grande con relación al tamaño del alfabeto. Ya que para secuencias pequeñas en comparación con el tamaño de la alfabeto, la complejidad de la secuencia tiende estar cerca del tamaño de la secuencia.

1.4 CONCLUSIÓN DEL CAPÍTULO

En este primer capítulo se han introducido tres temas básicos, los cuales serán las bases teóricas utilizados a lo largo de todo este trabajo. Se comenzó haciendo una introducción a los sistemas dinámicos. Luego se paso a explicar las condiciones de estabilidad de los mismos, y se introdujo la noción de caos. Finalmente se introdujo los conceptos de procesos estocásticos y cadenas de Markov.

En la segunda parte se presento los aspectos básicos de la teoría de la información. Se destacó la nociones de entropía como una medida de la información la cual no es conocida. De información mutua y finalmente de divergencia como un medida de disimilitud entre dos distribuciones de probabilidad, centrándose en la divergencia de Jensen-Shannon, la cual se utilizarán en capítulos posteriores.

Finalmente se presentó el concepto de complejidad de Lempel Ziv, una medida proveniente de la noción de complejidad de Kolmogorov, la cual permite calcular la cantidad de información relevante en una secuencia de símbolos.

ENTROPÍA DE PERMUTACIÓN Y APLICACIONES AL ESTUDIO DE ELECTROENCEFALOGRAMAS

En el presente capítulo se abordará el tema de la entropía de permutación. El mismo está dividido en dos secciones. En la primera parte se dará una detallada explicación de la utilización de la entropía de permutación y se comentarán las áreas de aplicación de la misma. En la segunda parte se aplicará este método para la caracterización de la evolución de un paciente epiléptico bajo tratamiento médico.

2.1 ENTROPÍA DE PERMUTACIÓN

2.1.1 Introducción

Dado un sistema, ya sea natural o artificial, y teniendo en cuenta un observable de dicho sistema cuya evolución puede ser seguida a través del tiempo, surge una pregunta natural. ¿Qué cantidad de información posee el sistema en estudio?

El contenido de información de un sistema se evalúa típicamente a través de una función distribución de probabilidad (FDP) la que se denotará con la letra P correspondiente a un observable que, en general, es una serie de tiempo $X(t)$. Cuantificar el contenido de la información de tal observable es en gran parte equivalente a caracterizar la distribución de probabilidad del mismo. Esto a menudo se puede realizar utilizando una amplia familia de medidas llamadas *entropías de información* [70].

Como se ha visto en el capítulo 1, la entropía puede considerarse como una medida de la incertidumbre asociada al proceso físico descrito por una P . Sin embargo, este método tradicional presenta una serie de inconvenientes. En primer lugar y más importante, las medidas clásicas como la entropía de Shannon descuidan las relaciones temporales entre los valores de la serie temporal, por lo que la estructura y los posibles patrones temporales presentes en el proceso no se contabilizan [71]. Si por ejemplo dos series de temporales son $X_1 = \{0, 0, 1, 1\}$ y $X_2 = \{0, 1, 0, 1\}$, se cumple que $H(X_1) = H(X_2)$. Más generalmente, esto se produce cuando simplemente se le asigna a cada punto de la serie de tiempo X , un símbolo del alfabeto finito dado \mathcal{A} creando así una secuencia simbólica que puede ser considerada como una descripción no causal y robusta de la serie temporal bajo consideración. Como consecuencia, las relaciones de orden y las escalas de tiempo de la dinámica se pierden. La técnica habitual en las que se utilizan histogramas corresponde a este tipo de asignación.

La información causal puede ser debidamente incorporada si la información sobre la última dinámica del sistema está incluida en la secuencia simbólica, es decir, si es posible realizar una correspondencia con la secuencia de símbolos del alfabeto \mathcal{A} , con un segmento de la *trayectoria en el espacio de las fases*.

En segundo lugar, las medidas de entropía clásicas suponen algún conocimiento previo sobre el sistema; específicamente, en el uso de cuantificadores basados en la teoría de la información. Para ello se debe proporcionar de antemano una distribución de probabilidad asociada a la serie temporal que se quiere analizar.

La determinación de la FDP más adecuada es un problema fundamental. Entre otros, se puede mencionar la frecuencia de conteo [72], los procedimientos basados en la estadística de las amplitudes [73], dinámica simbólica binaria [74], el análisis de Fourier [75], o transformadas de ondículas (wavelet) [76]. Su aplicabilidad depende en concreto de las características de los datos tales como la estacionariedad, la longitud de las series temporales, la variación de los parámetros, el nivel de contaminación de ruido, etc. En todos estos casos los aspectos globales de la dinámica pueden ser capturados de alguna manera, sin embargo los diferentes enfoques no son equivalentes en su capacidad para discernir todos los detalles físicos relevantes. También se debe reconocer el hecho de que las técnicas anteriores se introducen como "una moda" y no se derivan directamente de las propiedades dinámicas del sistema bajo estudio. Por lo tanto, surge naturalmente la siguiente cuestión: ¿Existe una manera de definir una FDP que sea más general e independiente del sistema ?

En tercer lugar, los métodos clásicos son a menudo mejor diseñados para hacer frente a los sistemas lineales y poco describen regímenes caóticos altamente no lineales. Bandt y Pompe [19] abordan estas cuestiones mediante la introducción de un método simple y robusto que toma en cuenta la causalidad mediante la comparación de los valores vecinos en una serie de tiempo. La secuencia apropiada de símbolos surge naturalmente de la serie de tiempo sin conocimiento previo asumido. Las "particiones" son naturalmente generadas por la comparación del orden de los valores relativos entre los vecinos, en lugar de un prorrato de amplitudes de acuerdo a diferentes niveles. Basado en este análisis simbólico, se construye la *entropía de permutación* (EP). El enfoque de Bandt y Pompe para generar una FDP es una técnica sencilla donde la simbolización incorpora la causalidad en la evaluación de la FDP asociada a la serie de tiempo. Su uso ha sido una clara mejora en la calidad de la información de los cuantificadores basadas en la teoría de la información [59, 77].

2.1.2 Entropía de permutación

Sea una serie de tiempo discreta de valor real $\{x(t)\}_{t \geq 0}$, y sean dos enteros $d \geq 2$ y $\tau \geq 1$, siendo d la dimensión de inmersión y τ el tiempo de retardo, respectivamente. A partir de la serie de tiempo original, se introduce un vector d -dimensional $\mathbf{Y}_{(d,\tau)}^t$:

$$\mathbf{Y}_{(d,\tau)}^t \longrightarrow (x_{t-(d-1)\tau}, \dots, x_{t-\tau}, x_t)^T; t \geq (d-1)\tau \quad (34)$$

donde el superíndice T significa transposición del vector.

Existen condiciones tanto para d como para τ con el fin de que el vector $\mathbf{Y}_{(d,\tau)}^t$ conserve las propiedades dinámicas del sistema completo (teorema de Takens) [34]. A continuación, las componentes de la trayectoria del espacio de fase $\mathbf{Y}_{(d,\tau)}^t$ se ordenan en forma ascendente. Entonces, se puede definir un vector de permutación, $\mathbf{\Pi}_{(d,\tau)}^t$, cuyas componentes son la posiciones de los valores ordenados de $\mathbf{Y}_{(d,\tau)}^t$. Como ejemplo, se toma la serie temporal $x_t = (1, 7; 2, 1; 1, 5; 1, 4; 2)$ y se aplica a ella el mapeo de Bandt y Pompe para $d = 3$ y $\tau = 1$, de este procedimiento se obtienen los vectores $\mathbf{Y}_{(d,\tau)}^t$ correspondientes a la serie X_t son $\mathbf{Y}_{3,1}^1 = (1, 7; 2, 1; 1, 5)^T$, $\mathbf{Y}_{3,1}^2 = (2, 1; 1, 5; 1, 4)^T$ y $\mathbf{Y}_{3,1}^3 = (1, 5; 1, 4; 2)^T$, y los vectores de permutación correspondiente son $\mathbf{\Pi}^1 = (1; 2; 0)^T$, $\mathbf{\Pi}^2 = (2; 1; 0)^T$ y $\mathbf{\Pi}^3 = (1; 0; 2)^T$. Cada uno de estos vectores representa un patrón (o forma). Existen $d!$ posibles patrones.

En la figura 1 se puede observar gráficamente como los patrones $\mathbf{\Pi}$ van apareciendo naturalmente en una señal. Para una secuencia lo suficientemente grande en comparación con $d!$, es posible calcular las frecuencias de ocurrencia de cualquiera de los $d!$ posibles vectores de permutación. A partir de estas frecuencias, se puede estimar la entropía de Shannon (Ec.5) asociada con las distribuciones de probabilidad de los vectores de permutación. Algunos de los posibles patrones pueden no ocurrir. A estos se les llama "*patrones prohibidos*". Existen muchos estudios en los cuales la aparición o no de dichos patrones dan información sobre la dinámica del sistema [78–80]. Sin embargo, este trabajo no abordará ese tema. Si se denota la probabilidad de ocurrencia del patrón i -ésimo como $P_i = P(\mathbf{\Pi}_i)$, $i \leq d!$, entonces la entropía de permutación normalizada asociada a la serie temporal X_t es:

$$h_{EP}(x_t) = \frac{- \sum_{i=1}^{d!} P_i \log P_i}{\log d!} \quad (35)$$

La suposición fundamental detrás de la definición de la entropía de permutación (EP) es que $d!$ -posibles vectores de permutación podrían no tener la misma probabilidad de ocurrencia, y por lo tanto, esta probabilidad podría revelar el conocimiento sobre el sistema subyacente.

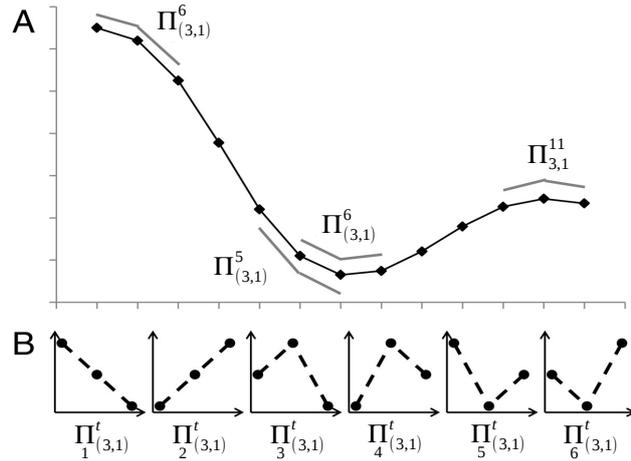


Figura 1: Ejemplo gráfico del método del mapeo de Bandt y Pompe. En la parte (A) se muestra como se generan los vectores de permutación $\Pi_{(\tau,d)}^t$ a lo largo de la señal a analizar. En este caso particular para cada tiempo t de la señal tomamos $d = 3$ y $\tau = 1$. Se ve como van apareciendo los patrones a medida que la señal evoluciona. En la parte (B) para una dimensión de inmersión $d = 3$ se tienen $d! = 6$ diferentes posibles patrones.

Se debe tener en cuenta que si al trabajar con una secuencia multidimensional $\{X_t\}_{t \geq 0}$, el procedimiento de permutación se puede realizar en cada vector X_t , por lo que no existe un procedimiento de inmersión y no se tienen en cuenta los vínculos temporales.

2.1.3 Algunas aplicaciones de la entropía de permutación

Ya que esta herramienta será troncal para los trabajos realizados en éste y los próximos capítulos se quiere mencionar algunas de las tantas aplicaciones en la que se emplea ¹.

2.1.3.1 Estudios de la dinámica subyacente en series de tiempo.

DISTINGUIENDO RUIDO DEL CAOS: Con el fin de modelar un sistema, primero es necesario identificar la dinámica que subyace al mismo. La clasificación entre secuencias estocástica o caóticas (determinísticas) es esencial para lograr el objetivo de modelado. Esto en general no es una tarea fácil. Trabajos basados en la aparición de patrones prohibidos mediante metodología de Bandt y Pompe han permitido diferenciar diferentes regímenes (ruido-caos) en series de tiempo lo suficientemente largas [78, 82, 83]

¹ Para una mayor profundidad de los temas se recomienda leer el artículo [81] con sus referencias correspondientes.

IDENTIFICACIÓN DE LAS ESCALAS DE TIEMPO: A menudo, cuando se estudia un sistema físico o biológico complejo, el primer paso casi obligatorio en su investigación consiste en determinar sus dimensiones características. Clásicamente, esta cuestión se ha abordado a través de funciones de autocorrelación o información mutua retardada (véase, [84–86]).

Recientemente, la EP ha sido propuesta como un enfoque alternativo. Específicamente, la idea es que la entropía asociada con una serie de tiempo debe ser mínima, es decir, la dinámica subyacente debe ser más predecible y simple, cuando el valor del retardo τ es igual al retardo de tiempo característico del sistema [87, 88].

DEPENDENCIAS ENTRE SERIES DE TIEMPO La identificación de la presencia de las relaciones entre la dinámica de dos o más series de tiempo es un problema relevante en muchos campos de la ciencia, entre ellos en la economía y la biofísica. Se han propuesto varias técnicas en el pasado, pero por lo general requieren un conocimiento previo de la distribución de probabilidad correspondiente. Viendo que el análisis de EP no depende del modelo en cuestión, se han propuesto pruebas basadas en patrones de permutación para medir la independencia entre las series de tiempo [89–91].

2.1.3.2 *Aplicaciones biomédicas*

En los últimos años, la entropía de permutación y métricas relacionadas, se han convertido en medidas de complejidad apropiadas para el estudio de series de tiempo de los sistemas biológicos tales como señales cerebrales (EEG) o cardíacas (ECG). Las razones de este creciente éxito son múltiples.

En primer lugar, tanto la actividad eléctrica cerebral como la cardíaca se caracterizan por tener dinámicas complejas, con una estructura temporal incluso estando la persona en estado de reposo [92]. Por otra parte, diversas patologías están asociadas con la aparición de patrones altamente estereotipados de los registros de EEG y ECG [93].

La entropía de permutación parece particularmente bien equipada para captar esta estructura, tanto en pacientes sanos como en pacientes con patologías.

Contrariamente a la mayoría de las medidas no lineales, la EP y algunas métricas derivadas, pueden calcularse para series de tiempo reales y son métodos bastante robustos frente a las fuentes de ruido y de artefactos experimentales [19, 94]. Por último, las aplicaciones en tiempo real para fines clínicos requieren algoritmos computacionalmente parsimoniosos que pueden proporcionar resultados fiables para series de tiempo relativamente cortas y ruidosas. La mayoría de los métodos existentes requieren que las señales sean largas, es-

tacionarias y con bajo nivel de ruido. La EP, por el contrario, es extremadamente rápida y robusta, y parece particularmente ventajoso cuando hay enormes conjuntos de datos y no hay tiempo para preprocesamiento y ajuste de parámetros. A continuación se verá algunos casos en donde es usada la EP. En capítulos posteriores se profundizarán en algunos de estos puntos.

ESTUDIO DE LA EPILEPSIA. La EP se emplea para diferentes aspectos relacionados con epilepsia como ser:

- Clasificación de EEG normales y patológicos [95].
- Determinar diferentes tipos de ataques epilepticos [93].
- Detección de cambios en la dinámica del EEG [96–98].
- Predicción de los ataques [99, 100].
- Dinámica espacio temporal del EEG [101–103].
- Cuantificación del tratamiento farmacológico ² [20].

ANESTESIA. Los fármacos anestésicos ejercen principalmente sus efectos sobre el sistema nervioso central. Así, la tecnología del EEG se puede utilizar para evaluar los efectos de la anestesia sobre un paciente. Estas cuestiones se examinaron en diversos estudios [104–107], los cuales mostraron consistentemente que la entropía de permutación se puede utilizar para discriminar de manera eficiente entre los diferentes niveles de conciencia durante la anestesia, proporcionando un índice del efecto anestésico.

RITMOS CARDÍACOS. Las enfermedades cardíacas están a menudo asociadas con los cambios en la variabilidad de la frecuencia cardíaca y en patrones característicos de intervalos entre latido y latido (ILL). Discriminar entre patrones ILL fisiológicos y patológicos representa una herramienta de diagnóstico clave. La EP ha demostrado de manera consistente la capacidad de distinguir la variabilidad del ritmo cardíaco bajo diferentes condiciones fisiológicas y patológicas [108]. La estadística sobre los patrones de EP ha demostrado ser más eficiente (en distinguir entre los pacientes que sufren de insuficiencia cardíaca de sujetos sanos), que el establecido indicador de variabilidad de la frecuencia cardíaca [109]. Estos patrones también han demostrado ser valiosas características para la clasificación del estado del corazón del feto [110] y podría servir posiblemente para desarrollar e investigar métodos de clasificación, considerando la estructura ordinal de una serie de tiempo [111].

² Esto será ampliado en la sección 2.2.1

2.2 ENTROPÍA DE PERMUTACIÓN APLICADA A LA CARACTERIZACIÓN DE LA EVOLUCIÓN CLÍNICA DE PACIENTES EPILÉPTICOS BAJO TRATAMIENTO FARMACOLÓGICO

2.2.1 *Presentación del problema*

En esta subsección se dará un enfoque novedoso a la utilización de la EP, al análisis de un electroencefalograma. Un electroencefalograma (EEG) es una representación gráfica de la actividad neuronal. La señal se puede registrar desde electrodos colocados dentro del cerebro, sobre la corteza por debajo del cráneo o sobre el cuero cabelludo. En este último caso, existe un sistema estandarizado en regiones del cráneo sobre donde colocar los electrodos, conocido como 10-20³, que sistematiza la localización y la identificación de los electrodos⁴ [112]. En todos los casos, la mayoría de las muestras captadas desde los electrodos corresponde a la actividad sináptica que se produce en las capas superficiales de la corteza cerebral. Las señales obtenidas a partir de ellos se pueden presentar en el dominio del tiempo [113], pero existen nuevos dispositivos de EEG, los cuales aplican herramientas simples de procesamiento de señales para visualizar las actividades cerebrales en el dominio espacial [114, 115].

Los EEGs se han convertido en una herramienta fundamental para el diagnóstico de muchas enfermedades neurológicas, como por ejemplo la epilepsia y los trastornos del sueño [116]. Es bien sabido que los registros de EEG son muy sensibles a la administración de sustancias farmacológicas, especialmente drogas psicotrópicas, anestésicos y anticonvulsivos [117, 118]. Por lo general, las interpretaciones clínicas de un registro EEG se logran mediante la asociación de características patológicas con la inspección visual y el patrón de reconocimiento del trazado del EEG. Aún cuando este análisis tradicional es bastante útil, la inspección visual del EEG es subjetiva y no permite una fácil sistematización. Por lo tanto, es de suma importancia para proporcionar métodos cuantitativos de análisis, los cuales permitan la evaluación de la eficacia terapéutica de un medicamento en particular, posibiliten el seguimiento de la evolución clínica del paciente. El análisis cuantitativo de un registro de EEG se ha basado, principalmente, en el uso de técnicas clásicas de procesamiento de señales. Entre ellos se encuentran los análisis espectrales bajo la transformada rápida de Fourier [119, 120] y la transformada de ondículas (wavelets) [121, 122] así como otras técnicas analíticas más complejas [123, 124]. Recientemente algunos nuevos enfoques para la cuantificación de las características estadísticas y dinámicas de la serie asociadas a un EEG, han sido logradas mediante el uso de técnicas y métodos proceden-

³ Los sistemas estandarizados varían según el número de electrodos a colocar, en nuestro caso utilizamos 20 electrodos.

⁴ Se profundiza todo lo concerniente a EEG y protocolo de adquisición en el apéndice B.

tes de la teoría de la información y la dinámica no lineal [125, 126]. Cuando se utilizan estos enfoques, se parte de la suposición de que los registros de EEG son señales complejas cuyas propiedades estadísticas dependen tanto del espacio como del tiempo.

En cuanto a las características temporales, las señales de EEG son caóticas y altamente no estacionarias. Sin embargo, pueden ser subdivididas analíticamente en secciones más cortas, permitiendo que se cumpla la hipótesis de estacionariedad [16]. Varios trabajos se han dedicado a la cuantificación de los efectos terapéuticos de los fármacos a partir del análisis de los registros de EEG por medio de cantidades procedentes de la teoría de la información y sistemas no lineales [127–129]. Una de estas cantidades es la entropía de permutación explicada en la sección 2.1.2. En esta subsección se desarrollará un método basado en la EP para caracterizar los cambios que se producen en los registros EEG obtenidos en un paciente que sufre de epilepsia generalizada del tipo tónico-clónicas. Los EEGs analizados en este capítulo se registraron en diferentes etapas del tratamiento farmacológico del paciente, el cual fue tratado con un medicamento anti-convulsivo. Nuestros resultados muestran que la EP puede ser una herramienta útil para los neurofisiólogos para evaluar, de una manera cuantitativa, la evolución clínica del paciente a lo largo del curso del tratamiento. En la siguiente sección, se describen las principales características clínicas del paciente, y los resultados logrados por el esquema de análisis propuesto.

2.2.2 Aplicación de la entropía de permutación al estudio de un EEG

Como se ha indicado anteriormente, una serie de tiempo de un EEG cambia sus propiedades estadísticas (no estacionariedad). La suposición básica es que la EP debe mostrar estos cambios. Por lo tanto, para la cuantificación de estos cambios, se define una distribución de probabilidad de los patrones de permutación $\Pi_{(d,\tau)}^t$ a lo largo de toda la señal. El esquema consiste en introducir una ventana móvil que se mueve a lo largo de la señal original. Para cada posición de la ventana, se puede evaluar la probabilidad distribución de los patrones de la señal limitada dentro de la ventana, y de esta manera evaluar la EP en función del tiempo. Esquemáticamente, el método propuesto puede ser descrito en los siguientes pasos:

- *Paso 1:* Se define una ventana móvil de ancho Δ y posición k (que indica la posición de la parte derecha de la ventana). Esta ventana se mueve a lo largo de la señal original.
- *Paso 2:* Para cada posición de la ventana, se evalúan los vectores permutaciones, de la manera ya explicada. Se denotan este conjunto de patrones por $\Pi_{d,\tau}^t(\Delta, k)$.

- *Paso 3*: Para cada valor de k y de cada estimación de las distribuciones de probabilidad de los patrones $\Pi_{d,\tau}^t(\Delta, k)$, se evalúa la EP asociada al registro.

2.2.3 Caso clínico a estudiar

Se aplicó el esquema descrito anteriormente para el análisis de los registros de EEG obtenidos de un paciente de 20 años de edad, con un diagnóstico electrofisiológico de epilepsia idiopática generalizada (EGI). Los registros de EEG fueron tomados en diferentes etapas del tratamiento farmacológico. El paciente se sometió a un tratamiento inicial con una dosis de 1200 mg/día de carbamazepina. A lo largo de este período, el paciente sufría un promedio de diez crisis convulsivas por semana. En la figura 2 se puede ver la comparación del trazado (10s) de algunos canales de EEG del paciente que sufre EGI y de un paciente del grupo control. Se puede observar formas de ondas características que aparecen en el EEG del paciente. En un determinado momento del tratamiento, tiempo T_1 , la dosis de carbamazepina se redujo a 400 mg/día, y el paciente fue co-medicado con una dosis de 1,000 mg/día de ácido valproico (AVP). La inclusión de la AVP disminuyó el número de crisis a dos por mes. Este tratamiento se prolongó durante casi un año.

En la figura 2 muestra algunos registros de electrodos representativos registrados a partir de un paciente control (panel superior) y desde el paciente bajo estudio (panel inferior) en un momento anterior a T_1 . El EEG se registró durante casi una hora, con el paciente en la posición basal, y no se observó ninguna crisis convulsiva mientras se realizaba el registro. Los datos fueron filtrados entre 0,5 y 70 Hz. La frecuencia de muestreo fue de 65 Hz (las mismas condiciones son válidas para todos los registros utilizados en este trabajo). Las señales que aparecen dentro de los rectángulos marcados son el tipo de patrón que los neurofisiólogos utilizan para caracterizar la enfermedad. Dentro de las regiones limitadas por ambos rectángulos, pueden observarse distintas descargas con voltajes altos en ambas áreas frontales. Por lo general, esto está asociado con las descargas epileptiformes. Para tiempos anteriores a T_1 , se observaron entre dos y tres paroxismos por minuto. De éstos, el 38 % de los paroxismos tenían una duración no inferior a 10 segundos, mientras que sólo el 16 % tenían una duración superior a 20 segundos. La mayoría de estos paroxismos tenían una frecuencia de tres espigas por segundo. Los mayores voltajes medidos corresponden a los electrodos frontales F (ver apéndice B). Por lo tanto, se puede concluir que la disfunción es prominente en la región frontal, pero que tiene repercusiones en todas las áreas. Un análisis similar se realizó en un registro de EEG obtenido un año después de la administración de AVP, el cual muestra que el número de paroxismos por minuto se reduce notablemente, así como la duración de los

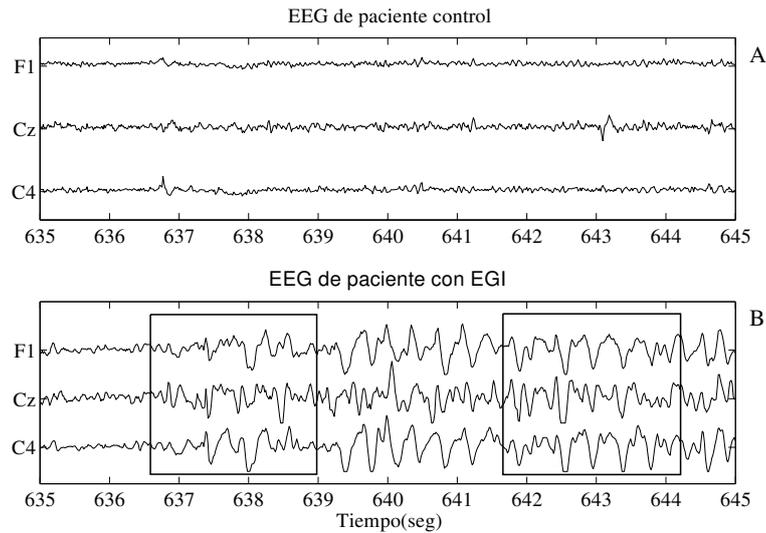


Figura 2: Algunos trazados de EEG representativos de un paciente sano (A) y del paciente estudiado (B).

mismos.

La figura 3 muestra los trazados correspondientes al electrodo F1 y la EP evaluada a partir de esta forma de onda, de acuerdo con el esquema descrito en la sección 2.2.2. Los gráficos a la izquierda corresponden a un paciente sano, y los de la derecha corresponden al paciente estudiado. La EP se evaluó para una dimensión de inmersión $d = 5$ y un tiempo de retardo $\tau = 1$. La ventana móvil tiene un ancho de $\Delta = 1000$ puntos. Se eligió el valor $d = 5$ con el fin de satisfacer la condición de que el número de valores dentro de la ventana móvil fuera marcadamente mayor que $d!$. Se comprobó que los resultados no son modificados por una elección diferente de d , por ejemplo $d = 3$. El resultado obtenido muestra que para el paciente analizado el valor de la EP es marcadamente menor que para un miembro del grupo de control. A su vez, en el primer caso, las fluctuaciones en los valores, son mayores⁵.

Previo al tratamiento con AVP, el paciente tenía crisis convulsivas generalizadas tanto diurnas como nocturnas. Después de la introducción del AVP, la frecuencia de las crisis empezó a disminuir, hasta alcanzar el valor de dos crisis por mes. En el momento que fue comedicado con AVP, las crisis que afectaban al paciente eran solo del tipo tónico, las cuales ocurrían sólo por las noches.

⁵ El EEG se registró antes del tiempo T_1 , que es anterior a la administración de VPA.

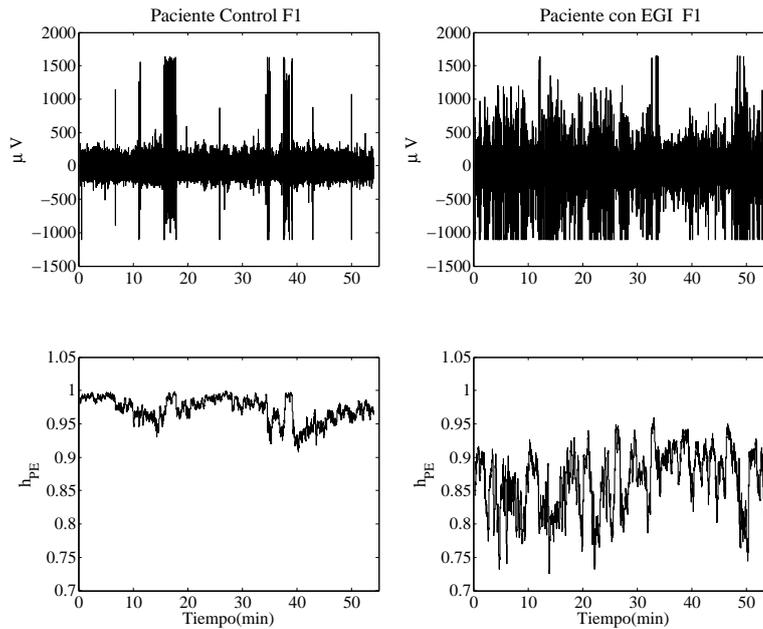


Figura 3: Trazado de la señal correspondiente al electrodo F1 (arriba) y la entropía de permutación correspondiente (EP) (abajo) para un paciente control (izquierda) y el paciente estudiado (derecha)

2.2.4 Resultados

Se realizaron dos análisis diferentes para comparar los valores obtenidos de la EP del paciente estudiado, con los de un grupo control de 20 personas. El primero fue hacer un análisis de la EP calculada con el método de ventanas móviles descrito en la sección 2.2.2. En la figura 4 se muestran la comparación de 4 de los 20 canales analizados. Las líneas punteadas muestran los valores calculados a partir del EEG registrado previamente al tiempo T_1 y las líneas continuas para uno registrado un año después del tiempo T_1 . Todos los valores correspondientes a pacientes sanos se encuentran dentro de la banda delimitada por las líneas horizontales (I y II). Los resultados muestran un desplazamiento de los valores de la entropía h_{EP} hacia los valores correspondientes al grupo control.

Un segundo análisis se realizó para poder cuantificar mejor los cambios en EP después de T_1 . Se utilizó como variable para trazar un rango de valores de la EP, la diferencia entre los valores más altos y los valores más bajos de EP es decir, la diferencia de pico a pico. En la figura 5, se trazan los valores resultantes. Se utilizó el símbolo \triangle para indicar los valores medidos en el paciente que sufre los ataques de epilepsia antes de T_1 y el símbolo \circ para los valores medidos un año después del tiempo T_1 . Los símbolos \square representan el promedio de los valores de pico a pico de la EP en los 20 pacientes

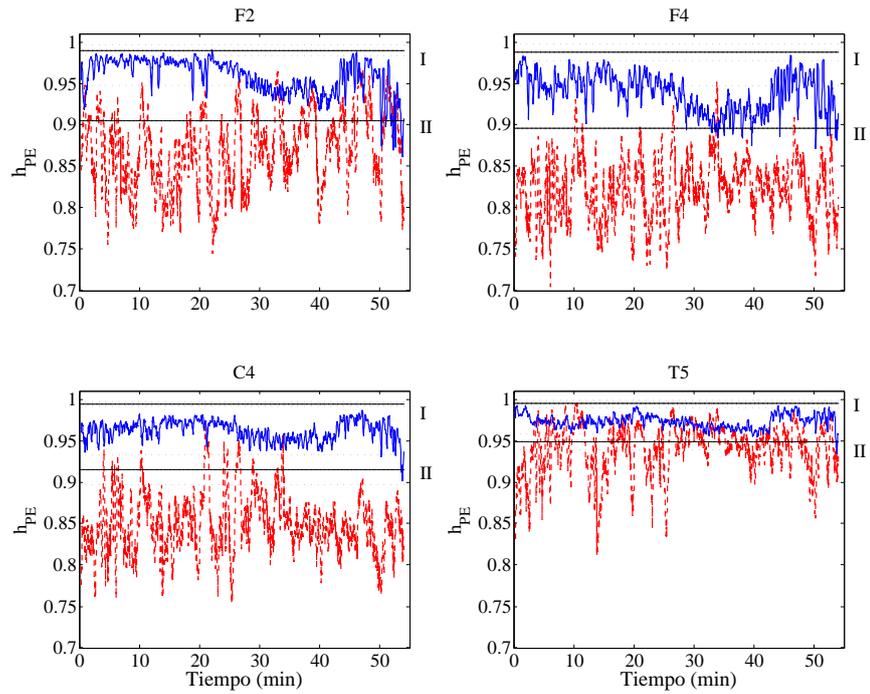


Figura 4: EP evaluada a partir de algunos canales representativos F2, F4, C4 y T5 (ver apéndice B). La línea punteada se utilizó para trazar los registros obtenidos antes del tiempo T_1 , y la línea continua se utilizó en los registros obtenidos un año después del inicio del tratamiento con ácido valproico (AVP). Todos los valores EP correspondientes a los pacientes del grupo control se encuentran dentro de la banda delimitada por las líneas negras horizontales I y II

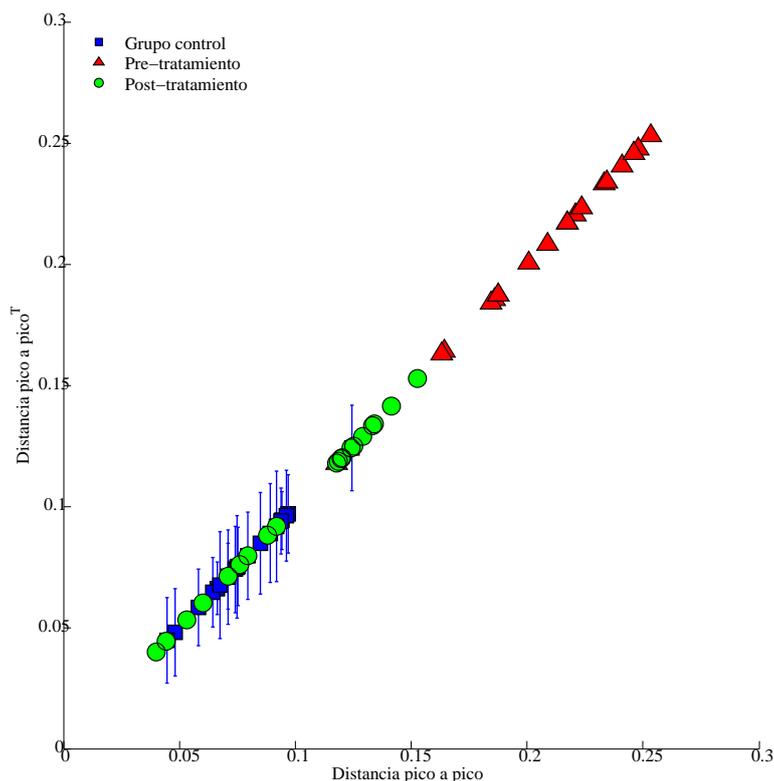


Figura 5: Comparación entre los valores de EP evaluado a partir de un grupo de control (20 pacientes saludables) y la evolución de la EP del paciente analizado. Cada símbolo (del mismo tipo) corresponde a un electrodo en particular. Los valores trazados corresponden a la diferencia entre los valores máximo y los valores mínimos de EP. Para el grupo control, el valor medio se traza con el error estadístico correspondiente.

sanos. Para cada tipo de símbolo tenemos un conjunto de 20 valores graficados correspondientes a cada canal de EEG. Después del tratamiento con AVP, se observa un desplazamiento de los valores de la EP del paciente hacia el valor medio calculado para los pacientes controles. Es importante tener en cuenta que para todos los valores de la EP correspondientes al pre-tratamiento se encuentran fuera del rango de los pacientes sanos. Se ha realizado una evaluación similar usando diferentes dimensiones de inmersión ($d = 3, 4, 5$)⁶, observando el mismo comportamiento que los valores de la EP. En ese sentido, los resultados obtenidos son robustos.

⁶ No se pueden tomar dimensiones de inmersión mas grande, ya que la cantidad de datos dentro de la ventana es del orden o menor que d !

2.3 OBSERVACIONES FINALES DE ESTE CAPÍTULO

En la primera parte de este capítulo se ha introducido la noción de entropía de permutación propuesta por Bandt y Pompe. Como se ha visto, la misma permite trabajar con señales continuas gracias a la reconstrucción de la dinámica del sistema por medio de los vectores de permutación. A su vez se han revisado varias aplicaciones del método, como ser en el análisis de EEG, ECG, aplicación a la econofísica, etc.

En la segunda parte del capítulo se ha propuesto y aplicado el método de Bandt y Pompe para evaluar los efectos terapéuticos de un fármaco anticonvulsivo usado en el tratamiento de un paciente con epilepsia crónica. Nuestro estudio muestra que esta medida es adecuada para ser utilizada por los neurofisiólogos para evaluar la evolución clínica de un paciente bajo tratamiento farmacológico. A diferencia de la inspección visual del trazado de un EEG, el esquema propuesto permite una visión más global del EEG, y una evaluación prospectiva a largo plazo del paciente. Los registros de EEG aquí utilizados, no tuvieron ningún procesamiento previo. Esto hace que nuestro esquema sea computacionalmente eficiente. Cabe destacar que se utilizó la EP como una medida para evaluar la evolución del trazado del EEG a lo largo de un determinado lapso de tiempo. No hemos hecho ningún estudio detallado sobre las propiedades dinámicas de la serie temporal de EEG. Sin embargo, se sabe que el análisis de EEG tiene la capacidad potencial para extraer características dinámicas de la actividad eléctrica del cerebro. En una publicación reciente, Ferlazzo y colaboradores [130] desarrollaron un mapa topográfico de la EP para pacientes con ausencias típicas. Ellos han demostrado que para este tipo de paciente ocurre una aleatoriedad en las áreas fronto-temporal y una aleatoriedad menor en las zonas posteriores. Este hecho se contrasta con el caso de un grupo de control sano, en el que se observa una distribución aleatoria de la EP en toda la topografía. En nuestra investigación, nos hemos interesado por la evolución de la EP a lo largo de un determinado lapso de tiempo, en lugar de su distribución espacial ⁷. Por último, queremos señalar que, a pesar de que hemos analizado sólo en un caso, entendemos que nuestros resultados sugieren una aplicación interesante y útil de la EP.

⁷ Hemos realizado el análisis en pacientes que poseen la misma disfunción cerebral pero localizada en el área frontal únicamente. Calculando la EP para todos los canales se vio, que solamente se obtiene valores de la EP fuera del rango del grupo control, en las áreas que están afectada. Esto nos da la idea que el método también puede distinguir entre áreas afectas y no afectadas.

En el presente capítulo, se introducirá una nueva manera de analizar las series temporales mediante el uso de mapeo de Bandt y Pompe desarrollado en el capítulo anterior y la complejidad de Lempel Ziv. Para probar las ventajas del uso de este método, se usarán series generadas artificialmente y señales reales de EEG.

3.1 INTRODUCCIÓN

La naturaleza compleja de las señales naturales ha llevado a los investigadores a analizar las mismas por medio de herramientas provenientes de la teoría de las probabilidades y de la dinámica no-lineal. El propósito es caracterizar el grado de información o complejidad que poseen las señales bajo análisis. El primer enfoque es estadístico, y el objetivo es medir la dispersión de la distribución que subyace a los datos, o detectar cualquier cambio en su estadística. Las herramientas comunes que se utilizan aquí provienen de la teoría de la información [7, 9, 131–134], de las medidas de correlación [1], o del análisis espectral [135]. El segundo enfoque está dedicado a las señales que se producen por mecanismos deterministas (generalmente no lineales), incluso si las secuencias a analizar pueden parecer como generadas "al azar". Las herramientas que se utilizan generalmente para la descripción de estos sistemas complejos vienen de la teoría del caos, como son el exponente de Lyapunov, las dimensiones fractales, y otros [8].

Las medidas provenientes de la teoría de la información son herramientas poderosas en el sentido que permite la cuantificación del grado de incertidumbre de una secuencia aleatoria. Sin embargo, en la práctica pueden surgir algunos problemas con el cálculo de magnitudes tales como la entropía. Tal es el caso cuando la señal bajo estudio es de naturaleza continua. En este caso, la estimación de una entropía diferencial de los datos no es siempre una tarea fácil [45, 136, 137]. El estimador de densidad más simple es el que se basa en la generación de un histograma, que es equivalente a la cuantificación de los datos. El rendimiento de la estimación depende de esta cuantificación [136]. Esta dificultad es superada gracias al método de Bandt y Pompe [19], explicado en el capítulo 2.

Por el contrario, para las secuencias deterministas generadas por sistemas dinámicos, hay un gran número de herramientas de análisis, como el ya mencionado exponente Lyapunov y las dimensiones fractales, entre otros [35, 138, 139]. En general, las cantidades que se es-

tudian requieren largos tiempos de cálculo. Como por ejemplo, es necesario primero reconstruir una trayectoria espacio-fase usando varias estimaciones, para determinar la dimensión de inmersión d y el retardo óptimo τ para luego, en un segundo paso, estimar algunas cantidades de la trayectoria reconstruida, como ser el espectro de Lyapunov completo, o parcial, o las dimensiones originales [34, 35]. Más aún, estas herramientas están generalmente diseñadas en especial para el estudio de la serie caótica.

Un concepto más natural de "incertidumbre" de una serie de tiempo, ya sea caótica o no, es el de la complejidad en el sentido de Kolmogorov. Esta mide el tamaño mínimo de un programa binario que pueda generar la secuencia (la complejidad algorítmica) [18, 140].

La complejidad de Lempel-Ziv (CLZ), se basa en la simple operación recursiva de copiado y pegado, como se verá más adelante [22, 64]. Este tipo de medida encuentra naturalmente aplicaciones en el dominio de la compresión de archivos [18, 64, 66], y también se utiliza para el análisis de señales [9, 134, 141, 142]. Un punto fuerte de esta complejidad es que, como se trata de una secuencia de estado discreto al azar y ergódica, cuando está correctamente normalizada, la misma converge a la tasa de la entropía de la secuencia [18, 22]. En un sentido, la complejidad de Lempel-Ziv contiene el concepto de complejidad tanto en el sentido determinístico (Kolmogorov), como en el sentido estadístico (Shannon). Esta propiedad condujo a utilizar la complejidad de Lempel-Ziv para la estimación de la entropía [68, 143].

Un posible inconveniente de la complejidad de Lempel-Ziv es que se define para secuencias que tienen sus valores en un alfabeto discreto (de tamaño finito).

Se pueden encontrar aplicaciones naturales que tienen que ver con las secuencias de estado discreto, tales como secuencias de ADN o secuencias generadas por los circuitos lógicos, mientras que en "la vida real" las señales poseen generalmente estados continuos ¹. Por lo tanto, para usar la complejidad de Lempel-Ziv para los propósitos de caracterización de la señal, primero es necesario discretizar los datos teniendo en cuenta el ajuste de los parámetros para este proceso. Estos parámetros pueden influir en el comportamiento de la complejidad de la señal cuantificada, como puede verse en la referencia [67], donde para un mapa logístico, algunas bifurcaciones no están capturadas por la complejidad de Lempel-Ziv. Como puede imaginarse, hay muchas maneras de superar los inconvenientes de los métodos puramente estadísticos o exclusivamente deterministas. En esta parte del trabajo nos concentramos en la complejidad de Lempel-Ziv (CLZ),

¹ Al realizar la adquisición de una señal por medio de una computadora, por ejemplo, la serie (de tiempo discreto) es intrínsecamente discretizada debido a la precisión finita de la computadora. Sin embargo, esta precisión es generalmente alta, de modo que la serie puede suponerse como una serie de estados continuos. En general, el número de estados posibles es mucho mayor que la número de muestras a analizar.

usando primero la idea de discretización de la secuencia a analizar que se encuentra en la entropía Bandt-Pompe.

Teniendo en cuenta que la introducción a la teoría de la complejidad de Lempel Ziv ha sido desarrollada en la sección 1.3, y el método de asignación de Bandt y Pompe se desarrolló en la sección 2.1 este capítulo está organizado de la siguiente manera. En la sección 3.2, se introducirá la idea de combinar, la CLZ y el método de asignación de patrones de Bandt y Pompe, lo que se llamará la *complejidad de permutación de Lempel-Ziv* (CPLZ). En esta misma sección se proporcionará algunas propiedades de la complejidad de permutación Lempel-Ziv. En el apéndice A se encuentran los detalles técnicos y la descripción de una forma práctica de calcular esta complejidad cuando se trata con secuencias escalares. Se verá también en la sección 3.3 algunas aplicaciones de la CPLZ en el análisis de datos de secuencias simuladas y señales biológicas.

3.2 LA COMPLEJIDAD DE PERMUTACIÓN DE LEMPEL-ZIV

Como se vio en la sección 1.3, la complejidad de Lempel-Ziv pretende capturar un nivel de redundancia o de regularidad en una secuencia. Por lo tanto, es una herramienta útil para el análisis de señales aleatorias o caóticas, ya que las mismas podrían ocultar algunas regularidades [67]. Una desventaja de la CLZ es que se define solamente para secuencias simbólicas discretas y de tamaño finito. Cuando se trata con series temporales "del mundo real", se debe realizar una discretización antes de su estudio como se ha hecho en muchos de los estudios relacionados con análisis de los datos a través de esta complejidad [9, 141, 142]. Discretizar una señal podría tener algunas consecuencias en la evaluación de la complejidad, y en los efectos de los parámetros cuantificadores, que podrían ser difíciles de evaluar. A la inversa, la entropía de permutación también tiene algunos inconvenientes debido a su carácter estadístico. Si se considera el ejemplo de un ruido escalar i.i.d, frente a una secuencia escalar periódica de periodo $T = 2$. Para una inmersión de dimensión $d = 2$ y un retardo $\tau = 1$, en ambos casos los vectores de permutación $[0 \ 1]^T$ y $[1 \ 0]^T$ aparecen con la misma frecuencia $\frac{1}{2}$ (suponiendo que la longitud de la secuencia es suficientemente grande). Por lo tanto, la entropía de permutación es igual en ambos casos. El ejemplo muestra que este método no es lo suficientemente sensible para discriminar entre la secuencia aleatoria i.i.d y la secuencia periódica². Para evitar estos inconvenientes se puede imaginar varias variantes del método como por ejemplo, teniendo en cuenta las amplitudes en la construcción de

² Más rigurosamente, se sabe que para el uso de la entropía de permutación en el análisis de datos, se deben probar varias dimensiones de inmersión. Para $d = 3$ en este ejemplo, la entropía de permutación hace la distinción entre el ruido y la secuencia periódica

los vectores de permutación. La entropía de permutación con pesos propuesta en la referencia [143] muestra su eficacia para la detección de cambios abruptos en una secuencia. Sin embargo en los ejemplos dados anteriormente, no fue posible discriminar entre las dos situaciones. Más aún, cuando se trata de una secuencia multidimensional intrínseca, los vectores de permutación no reflejan claramente ninguna dinámica.

Para evitar las posibles desventajas de ambos métodos, se propone aquí una combinación de los enfoques de Bandt-Pompe y Lempel-Ziv. De esta manera se espera poder tomar ventaja de ambos métodos, y reducir así sus respectivos inconvenientes. Se lo llamara *complejidad de permutación de Lempel-Ziv* (CPLZ). Para una secuencia escalar $X_{0:T-1}$, finita, y para una secuencia de varias variables $\mathbf{X}_{0:T-1}$ se la denotará como la CLZ de la secuencia de los vectores de permutación. Para una secuencia escalar $X_{0:T-1}$,

$$C_{d,\tau}^{\pi}(X_{0:T-1}) \equiv C_{LZ} \left(\prod_{\mathbf{Y}_{(d-1)\tau}^{(d,\tau)}} \dots \prod_{\mathbf{Y}_{T-1}^{(d,\tau)}} \right) \quad (36)$$

donde $\mathbf{Y}_t^{(d,\tau)} = [X_{t-(d-1)\tau} \dots X_{t-\tau} X_t]^T$ y $\prod_{\mathbf{Y}_{T-1}^{(d,\tau)}}$ son los vectores permutación correspondientes a la series $X_{0:T-1}$, parametrizados por la dimensión de inmersión d y el tiempo de retardo τ (ver capítulo 2).

Para una secuencia de varias variables $\mathbf{X}_{0:T-1}$ la definimos como

$$C^{\pi}(\mathbf{X}_{0:T-1}) \equiv C_{LZ} \left(\prod_{\mathbf{X}_0} \dots \prod_{\mathbf{X}_{T-1}} \right) \quad (37)$$

donde $\prod_{\mathbf{X}_i}$ representan los vectores permutación multidimensional (ver capítulo 2).

De esta manera se proporciona una respuesta a la necesidad de trabajar con datos tomando valores de un alfabeto de tamaño finito (en este caso, el alfabeto es $\mathcal{A} \equiv \{[\pi(0) \dots \pi(d-1)]^T : \pi \in \Pi^{(d)}\}$ de tamaño $\alpha = d!$, donde $\Pi^{(d)}$ es el conjunto de las $d!$ posibles permutaciones en $\{0, \dots, d-1\}$. Por otra parte, al mirar un vector de permutación como un cuantificador de los datos resulta interesante hacer un paralelo con cuantificadores dinámicos del tipo sigma-delta [144]. En secuencias de estado reales escalares, donde se tome $\tau = 1$ y $d = 2$, por ejemplo, el vector de permutación es $[0 \ 1]^T$ si la señal aumenta a nivel local, y es $[1 \ 0]^T$ si ocurre lo contrario. En otras palabras, los dos posibles vectores de permutación cuantifican la variaciones de la señal en bit. En términos generales, un cuantificador sigma-delta actúa de forma similar ³. Para $d > 2$, el mismo planteo debe hacerse con los llamados cuantificadores sigma-delta de múltiples etapas

³ Más rigurosamente, cuantifica la diferencia entre una muestra y la predicción de la misma muestra (la parte 'delta') en un bit. La predicción se hace de todas las últimas muestras, generalmente la realización se realiza por medio de una integración o una sumatoria (parte 'sigma').

[145]. Este planteo es otra motivación para utilizar vectores de permutación como manera de cuantificar una señal. Por otra parte, si se trata de secuencias intrínsecamente multivaluadas, los posibles vectores de permutación deben ser visto como un vector de cuantificación de los vectores con valores reales; este esquema no necesita parámetros de ajuste a diferencia de los esquemas de cuantificación vectorial estándar [144].

Trabajando con los vectores de permutación se mantiene la idea de estudiar la ocurrencia de patrones en una secuencia.

Mediante el análisis de los vectores de permutación a través de la complejidad de Lempel-Ziv, se añade un una nueva forma de analizar los patrones de forma temporal, en lugar de analizar la frecuencia de ocurrencia. Para enfatizar esto, si se retomará el ejemplo anterior donde se comparaban las secuencias de vectores permutación correspondiente a un ruido frente a una secuencia periódica de periodo $T = 2$. Como se explicó anteriormente, los patrones $[0 \ 1]^T$ y $[1 \ 0]^T$ aparecerán con la misma frecuencia en ambos casos. Sin embargo, la diferencia es que en el primero caso los patrones aparecerán en manera aleatoria en la primer secuencia, mientras que en el segundo aparecerán de forma periódica. Para el primer caso, la complejidad de Lempel-Ziv es alta, mientras que para segundo caso será baja (e igual a 3)⁴. Con este ejemplo muy elemental, se puede ver por qué la complejidad de permutación de Lempel-Ziv en una secuencia puede dar más información sobre la dinámica de la misma, esto es gracias al análisis de cómo se organizan los patrones de forma temporal, y no solo en términos de frecuencia.

Por otro lado, al tratar con secuencias intrínsecamente multivaluadas, el objetivo de capturar las dinámicas que subyacen a la secuencia falla, ya que no hay una inmersión previa para cuantificar la construcción del vector de permutación. En esencia, la complejidad de Lempel-Ziv será una manera de captar la dinámica de una secuencia del tipo multivaluada. Esto refuerza el interés por mezclar el método de Bandt-Pompe con el de Lempel-Ziv.

La complejidad de permutación de Lempel-Ziv tiene algunas propiedades que han sido heredadas de la complejidad de Lempel-Ziv. El primero es el vínculo con la entropía de permutación. Para un proceso ergódico estacionario tanto escalar como multivaluado, la secuencia de permutaciones permanece estacionaria y ergódica, de modo que la ecuación (33) se aplica a la complejidad de Lempel-Ziv y la tasa de entropía de esta secuencia puede ser escrita como:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} C_{d,\tau}^{\pi}(X_{0:T-1}) \frac{\log T}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{H_{d,\tau}^{\pi}(X_{0:T-1})}{T} \quad (38)$$

⁴ Que la CLZ sea mas alta o baja, quiere decir que necesitamos mas o menos caracteres (información) para replicar la secuencia

y

$$\lim_{T \rightarrow \infty} C^\pi(\mathbf{X}_{0:T-1}) \frac{\log T}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{H^\pi(\mathbf{X}_{0:T-1})}{T} \quad (39)$$

La segunda propiedad se aplica a las series de varias variables $\{\mathbf{X}_t\}_{t \geq 0}$, y es la invariancia de la complejidad de permutación de Lempel-Ziv a una permutación aplicada a las componentes del vector de la serie. Es decir, para cualquier matriz de permutación \mathbf{P}

$$C^\pi(\mathbf{P}\mathbf{X}_0 \dots \mathbf{P}\mathbf{X}_{T-1}) = C^\pi(\mathbf{X}_0 \dots \mathbf{X}_{T-1}) \quad (40)$$

En otras palabras, si se construye una secuencia de vectores \mathbf{X}_t de d secuencias escalares, la elección del orden de las componentes no modifica el valor de la complejidad de la secuencia conjunta. Esta propiedad se debe a que $\Pi_{\mathbf{P}\mathbf{X}_t} = \mathbf{P}\Pi_{\mathbf{X}_t}$ (permutar las componentes del vector permutación Π_t asociado al vector \mathbf{X}_t , es igual a permutar las componentes del vector \mathbf{X}_t y luego calcular el vector permutación correspondiente a dicho vector), junto con la invariancia de la complejidad de Lempel-Ziv a una transformación de uno a uno [146]. Como se muestra en la referencia [146] para la complejidad de Lempel-Ziv, es posible construir medidas asociadas con la complejidad de permutación de Lempel-Ziv, aunque tales posibles extensiones van más allá del alcance de este trabajo.

Antes de pasar a poner la complejidad de permutación de Lempel-Ziv en acción, se señalará las siguientes opciones adicionales:

1. Para tener en cuenta una resolución finita en la adquisición de datos o para contrarrestar posibles bajos niveles de ruido en los datos, se puede introducir un radio de confianza δ ; es decir, si el valor absoluto de la diferencia de dos componentes es estrictamente inferior δ , entonces ellos se consideran iguales.
2. Para mejorar el procedimiento de permutación, cuando dos componentes de un vector son iguales, a) en el caso vectorial se opta por poner el índices "más pequeño", b) en el caso escalar el índice más antiguo.

En el apéndice A se desarrolla este tema, con más detalles y mayor justificación. Una vez más, hay que tener en cuenta que el uso de la complejidad de permutación de Lempel-Ziv para fines de análisis podría no ser factible si el tamaño de la secuencia no es lo suficientemente grande con respecto del tamaño del alfabeto $d!$.

3.3 APLICACIONES A DATOS SIMULADOS Y REALES

3.3.1 Caracterización del mapa logístico

Para ilustrar cómo la complejidad de permutación de Lempel-Ziv puede capturar regularidades en una señal, se considera aquí el mapa logístico

$$X_{t+1} = k X_t(1 - X_t), \quad t \geq 0,$$

Se inicializó aleatoriamente X_0 entre $[0;1]$ de modo que la secuencia tiene valores reales en el intervalo $[0;1]$. Este mapa ya ha sido estudiado por muchos autores en el pasado, entre ellas dos formas interesantes de abordarla fueron realizadas tanto por Bandt y Pompe desde el punto de vista de la entropía [19], como por Kaspar y Schuster desde la CLZ [67]. El mapa logístico se ha estudiado durante mucho tiempo, y su comportamiento es bien conocido, [29, 147]. Se debe recordar que cuando k aumenta, se hacen más notorios los regímenes complejos: existe una sucesión creciente de valores $k_{-1} = 0 < k_0 < \dots < k_\infty \approx 3,56995$ tal que, si $k \in (k_{n-1}; k_n]$, los valores X_t oscilan asintóticamente entre 2^n valores: un fenómeno que es bien conocido como *bifurcaciones* (ver capítulo 1). Para $k \geq k_\infty$, el sistema está en un régimen caótico (impredecible). Parece comportarse aleatoriamente aunque es producida por un sistema determinista elemental. Sin embargo, en esta zona quedan algunos intervalos, conocidos como islas de estabilidad, donde el comportamiento es no caótico. Este comportamiento se describe brevemente en el diagrama de bifurcación graficado en la figura 6a.

A continuación se estudiará los regímenes del mapa logístico vs k a través de la complejidad de permutación de Lempel-Ziv aquí propuesto. Para este fin, se genera una secuencia de tamaño $T = 1000$ y sólo se analizó la segunda mitad de la secuencia, que se supone que es en el régimen permanente. En la Fig. 6 se compara el comportamiento de $C_{\Pi}^{(d,\tau)}$ versus k Fig. 6g, con la entropía de permutación (Figs. 6d-6f), con la complejidad de Lempel-Ziv (realizado en una estática cuantificación de 2 – nivel de la señal media $\mathbb{I}_{(0,5;1]}(x_t)$, donde \mathbb{I} es la función indicadora) (Fig. 6c), y con el exponente de Lyapunov⁵(Fig. 6b).

El comportamiento de cada valor puede ser interpretado de la siguiente manera:

- *El exponente de Lyapunov*: este exponente describe el carácter caótico de la secuencia logística cuando es positivo, frente a su carácter no caótico cuando es negativo. Sin embargo, esto no es lo suficientemente preciso para distinguir diferentes tipos de comportamiento en los regímenes no caóticos.
- *La complejidad de Lempel-Ziv $C(\{\mathbb{I}_{(0,5;1]}(X_t)\})$* : Para los autores Kaspar y Schuster la CLZ es más precisa que el exponente de Lyapunov. En particular, la complejidad es muy alta para los regímenes caóticos, mientras que se mantiene baja en los regímenes no caóticos. Sin embargo, se puede observar que dichas

⁵ Ver definición en el capítulo 1

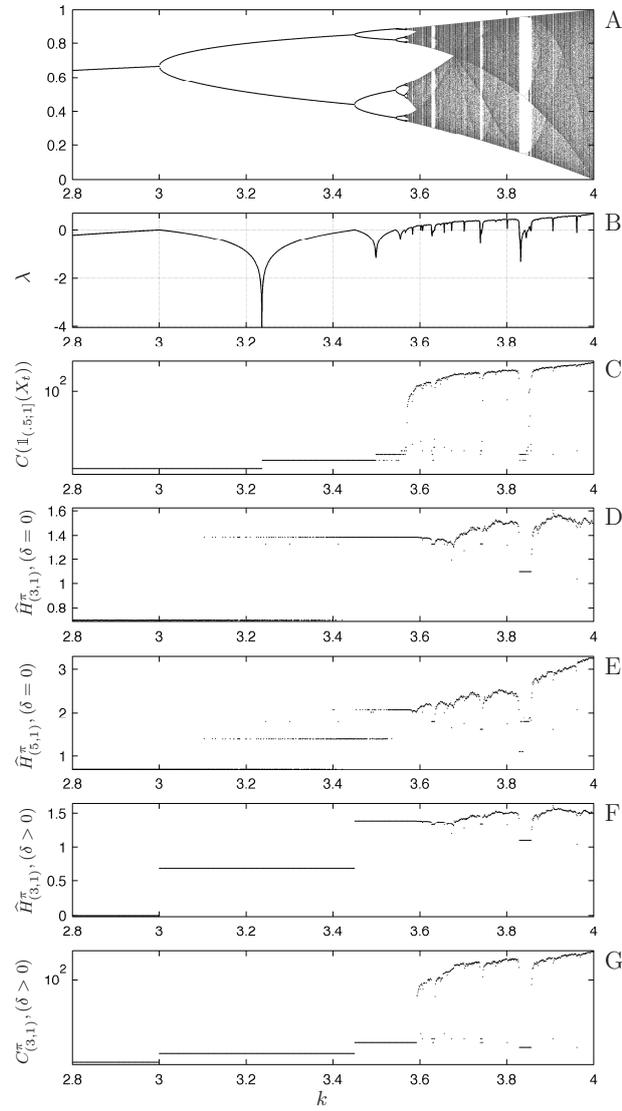


Figura 6: Caracterización del mapa logístico vs k . El gráfico (A) muestra el diagrama de bifurcación, es decir, los valores tomados por la serie en régimen permanente para cada valor de k . El gráfico (B) representa el exponente de Lyapunov λ . El gráfico (C) es la complejidad de Lempel-Ziv de la señal cuantificada por $\mathbb{I}_{(0,5:1]}(X_T)$ como esta hecho en [67]; Del gráfico (D) al (F) se muestran la entropía de permutación $H_{(d,\tau)}^\pi$ con un retraso de $\tau = 1$, cuando $(d, \delta) = (3, 0)$, $(d, \delta) = (5, 0)$ y $(d, \delta) = (3, 10^{-3})$ respectivamente. El gráfico (G) da la complejidad de permutación de Lempel-Ziv $C_{(d,\tau)}^\pi$ para $(d, \tau, \delta) = (3, 1, 10^{-3})$

bifurcaciones no se detectan claramente. Esto se debe al límite de cuantificación utilizado. Para $k < 3,237$, el sistema oscila asintóticamente entre dos valores mayores que 0,5, el umbral fue elegido por Kaspar y Schuster. Eso explica por qué la CLZ no puede detectar las bifurcaciones.

Aparece el mismo fenómeno para las bifurcaciones siguientes. La elección de un umbral de $2/3$ para este sistema permite la detección de la primera bifurcación, pero las otras bifurcaciones permanecen sin ser detectadas.

- *La entropía de permutación $H_{(d,1)}$* : en los casos de $d = 3$ y $d = 5$, la entropía de permutación puede caracterizar los diferentes regímenes del mapa logístico. En particular, el valor de la entropía es alto en las regiones caóticas, mientras que es bajo para regiones no caóticas; como ocurre en las islas de estabilidad. Esto se da particularmente para dimensión de inmersión grades; como por ejemplo para, $d = 5$. Hay que observar que para $\delta = 0$, la primera bifurcación no puede ser detectada. Esto se debe a las pequeñas oscilaciones que se mantienen en torno al valor límite cuando $k \in (2; k_0]$. Sin embargo, si no se está interesado en la propia señal, pero sí en su régimen asintótico, las pequeñas fluctuaciones se las puede ver como perturbaciones. La elección de $\delta > 0$ permite el "filtrado" de estas perturbaciones. En este caso, incluso si la entropía de permutación no caracteriza la propia secuencia del mapa logístico, se logra caracterizar de manera muy precisa los regímenes asintóticos de la secuencia, como puede verse en Fig.6. De hecho, en este caso, las bifurcaciones son muy bien detectadas, incluso para las dimensiones de integración "bajas".
- *La complejidad de permutación de Lempel-Ziv $C_{(d,1)}$* : a primera vista esta medida se comporta de igual modo que la entropía de permutación. En particular, se pueden observar las detecciones de las bifurcaciones para $\delta = 0$ (no trazada en la fig. 6) o para $\delta > 0$. Notar, sin embargo, que incluso en baja dimensión de inmersión, la complejidad parece caracterizar mejor los regímenes constantes, oscilatorios o caóticos. Mientras que $H_{(3,1)}^\pi$ es más o menos constante cuando aparece el caos (para k ligeramente mayor que k_∞), la complejidad aumenta en gran medida.

3.3.2 *La detección de cambios repentinos en una señal de tres dimensiones*

Para ilustrar cómo la medida propuesta puede superar, a la entropía de permutación en la evaluación del grado de complejidad de algunas señales se considerará lo siguiente: una serie multidimensional \mathbf{X}_t compuesta por los primeros N_c puntos dados por una serie logística d -dimensional, seguido de N_n puntos de ruido i.i.d tanto

espacial como temporal. El mapa logístico d-dimensional usado aquí está descrito por la siguiente ecuación:

$$\mathbf{X}_{t+1} = k(\mathbf{K}\mathbf{X}_t + \mathbf{1}) \odot \mathbf{X}_t \odot (\mathbf{1} - \mathbf{X}_t) \quad (41)$$

donde \mathbf{X}_t es un vector d-dimensional, $\mathbf{1} = [1, \dots, 1]^T$, \mathbf{K} es una matriz de acoplamiento $D \times D$, con \odot representando el producto de componentes a componente para $(t \geq 0)$. Cuando \mathbf{K} es cero, las d logísticas están desacopladas. Por el contrario, cuando $\mathbf{K} = 3\mathbf{P}$ con \mathbf{P} una matriz de permutación cíclica, el mapa corresponde a los modelos propuestos por López-Ruiz y Fournier-Prunaret. Este mapa bajo los contextos 2 y 3 dimensional es utilizado para modelar las interacciones simbióticas entre especies, donde el parámetro k representa la tasa de crecimiento de las especies [148, 149]. En los dos casos $D = 2$ y $D = 3$, de acuerdo con el valor de k , estos mapas muestran órbitas regulares u órbitas caóticas. No describiremos aquí la riqueza de estos mapas, pero si se quiere profundizar en el tema ver [148, 149].

Para los propósitos de este trabajo, se ha optado por estudiar lo que sucede cuando los primeros puntos de la secuencia N_c son generados por el mapa de 3 dimensiones ($D = 3$) que muestra un comportamiento caótico. Se consideraron dos casos: en el primero el acoplamiento es $\mathbf{K} = 3\mathbf{P}$ y $k = 1,01$; y en el segundo, $\mathbf{K} = 0,01\mathbf{P}$ y $k = 3,96$. En el primer caso, los componentes están fuertemente acoplados, mientras que en el segundo caso están débilmente acoplados. Una representación de estas secuencias del mapa logístico seguido de ruido puro se muestra en las figuras 7A y 8A. A simple vista parece relativamente difícil detectar los cambios en la naturaleza de la señal. Esto permite a continuación, analizar la señal a través de ventanas móviles de tamaño N_w , la cual se mueve punto por punto. En cada ventana de análisis, $(\mathbf{X}_{t-N_w+1}, \dots, \mathbf{X}_t)$, $t = N_w - 1, \dots$, se evalúa a lo largo de la señal la entropía de permutación, la complejidad de Lempel-Ziv de una versión cuantificada de los componentes (por medio de $\mathbb{I}_{[0,5;+\infty)}$), y la complejidad de permutación de Lempel-Ziv. Los resultados en función de t se representan en las figuras 7B-7D y 8B-8D, donde se muestran 10 realizaciones para cada análisis. A la derecha de las figuras 7B-7D y 8B-8D, se muestran los histogramas⁶ correspondientes para los valores tomados por cada medida utilizando 4×10^6 valores del mapa caótico (líneas continuas) y del ruido (líneas discontinuas). Debemos tener en cuenta que la probabilidad de error en una tarea de discriminación de dos distribuciones de probabilidad, puede ser vista en un histograma, como la superficie superpuesta de las dos distribuciones de probabilidades a comparar.

Las interpretaciones de estos ejemplos son las siguientes:

⁶ En el caso de la complejidad de Lempel-Ziv, como los valores sólo puede tomar valores discretos entre 2 y 500, su distribuciones de probabilidad son discretas. Para un mejor uso de la representación, los hemos trazado como distribuciones continuas para hacer su la lectura más fácil.

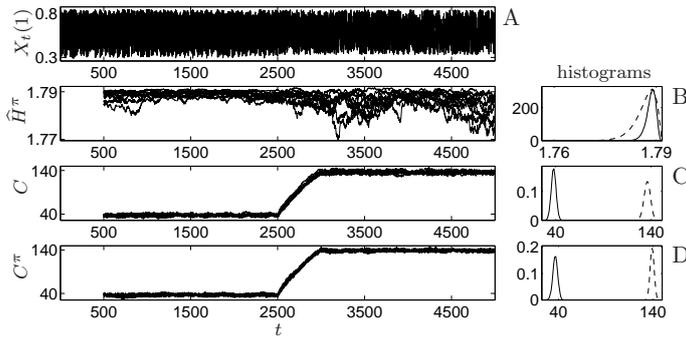


Figura 7: La detección de un cambio repentino en una secuencia 3–dimensional que se compone de $N_c = 2500$ puntos de un mapa logístico dado por la Ec.(41), seguido por $N_n = 2500$ puntos de ruido aleatorio (uniforme). El gráfico de la primera componente de tal secuencia se representa en la parte superior. A continuación, se analizan un conjunto de 2000 secuencias a través de una ventana deslizante de $N_w = 500$ que se mueve punto a punto. Se muestran 10 realizaciones de las entropías de permutación (segundo panel), la complejidad de Lempel-Ziv de una versión cuantificada de los vectores (tercer panel) y la complejidad de permutación de Lempel-Ziv (cuarto panel). En el lado derecho de las figuras (B, C y D), se muestran los histogramas de los valores tomados por la medida las cuales se representa, con una línea sólida para la parte caótica, y con una línea discontinua en la parte del ruido. El mapa caótico está aquí fuertemente acoplado, con $\mathbf{K} = 3\mathbf{P}$ y $k = 1,01$.

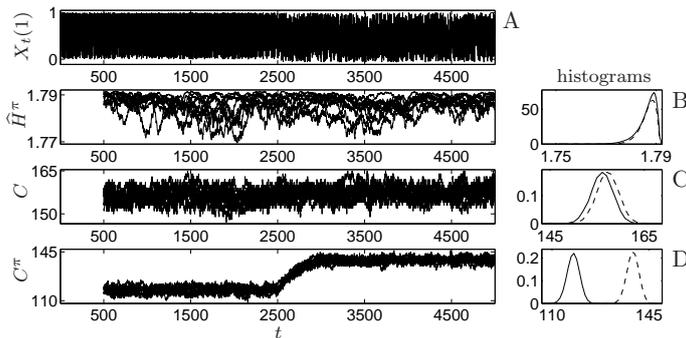


Figura 8: Lo mismo que la figura 7, para acoplamientos debiles del mapa caotico con $\mathbf{K} = 0,01\mathbf{P}$ and $k = 3,96$.

- *La entropía de permutación*: este índice no detecta el cambio en la naturaleza de la señal como puede verse en el gráfico, tanto para el acoplamiento fuerte como para el débil (figs. 7B y 8D). Esto es debido a que los patrones obtenidos en los vectores de permutación aparecen con frecuencias similares en el régimen caótico y en el régimen ruidoso. Por medio del análisis estadístico de estos patrones, la dinámica subyacente a los datos se pierde. La dificultad en la discriminación entre el caos y el ruido también es ilustrada por la distribución de probabilidades de los valores de H^{Π} .
- *La complejidad de Lempel-Ziv*: cuando se mira en el caso del acoplamiento fuerte entre las componentes del mapa logístico, la complejidad de Lempel-Ziv realiza una cuantificación básica de los vectores, la cual claramente discrimina entre el caos y el ruido. Sin embargo, cuando las componentes están débilmente acopladas, no se logra discriminarlos. Esto se ve claramente en los histogramas que se superponen en el caso de acoplamiento débil (Fig. 8C), mientras que están separados en la situación de acoplamiento fuerte (Fig. 7C). La interpretación de este efecto es que, en un sentido, la complejidad de Lempel-Ziv analiza las componentes casi individualmente: en el caso de acoplamiento débil, no puede "ver" que las componentes siguen exactamente la misma dinámica y están, en cierto sentido, vinculadas por esta dinámica en común.
- *La complejidad de permutación de Lempel-Ziv*: en ambos tipos de acoplamiento, esta medida detecta inequívocamente el cambio en la naturaleza de la señal. Esto puede ser visto tanto en los gráficos como en las distribuciones de probabilidad de los valores tomados por esta medida (Fig. 8D y 7D). Está claro que no hay solapamiento entre los dos histogramas, lo que confirma que no hay ninguna posibilidad de error en la discriminación entre el caos y el ruido. A partir de las curvas, se observa que, la complejidad de permutación de Lempel-Ziv muestra una dispersión más débil alrededor de su media que para la complejidad estándar de Lempel-Ziv.

Estas ilustraciones muestran que, a pesar de la potencia de la entropía de permutación para discriminar entre el caos y ruido, hay situaciones en las cuales esta herramienta no logra hacerlo. El uso de la complejidad de Lempel-Ziv como una versión cuantificada sobre la base de la secuencia puede ser una alternativa, pero esto sigue dependiendo de la cuantificación que se realice. Por otra parte, en este ejemplo, cuando no hay acoplamiento o existe acoplamiento débil entre las componentes, el vector de permutación tiene en cuenta que las componentes siguen exactamente la misma dinámica. Por estas interpretaciones, se puede evidenciar que al tratar con una secuencia

multidimensional intrínseca, es preferible el uso de la complejidad de permutación de Lempel- Ziv, en lugar de la entropía de permutación y la complejidad usual de Lempel-Ziv.

3.3.3 *Análisis de un electroencefalograma (EEG) de un paciente sufriendo un ataque epiléptico.*

La señal de EEG analizada en esta sección corresponde a un registro de un paciente que sufre un ataque de epilepsia generalizada tónico-clónica secundario, registrado desde un electrodo con ubicación central (C4). Esta señal fue estudiada por Rosso et al. en las referencias [16, 150, 151]. Fue obtenida de un paciente de 39 años de edad con un diagnóstico de epilepsia fármaco-resistente (epilepsia del lóbulo temporal), y ningún otro desorden. La señal de EEG se muestra en la Fig.9A. El ataque epiléptico comienza en $T_1 = 80s$, con una descarga de las ondas lentas que se superponen por ondas rápidas de menor amplitud. Estas descargas duran $\Delta T = 8s$, y tienen una amplitud media de 100 mV. Durante el ataque epiléptico tónico-clónico, las amplitudes, que contaminan la grabación, son muy altas, y el paciente tuvo que ser tratado con un inhibidor de respuestas musculares. Después de un corto período de tiempo, una fase de desincronización, conocida como el ritmo de reclutamiento epiléptico, aparece en una banda de frecuencia centrada a aproximadamente 10 Hz, la cual aumenta rápidamente en amplitud. Después de 10s, un aumento progresivo de las frecuencias más bajas (0,5 – 3,5) Hz fue observado [152]. Para el EEG que se estudió aquí, esta fase aparece en $T_2 = 90s$. También es posible establecer el comienzo de la fase clónicas, en alrededor de $T_3 = 125s$, y en el final de la convulsión en $T_4 = 155s$, donde hay un decaimiento abrupto de la amplitud de la señal.

La señal grabada tiene una duración de 180s, y la frecuencia de muestreo fue 102,4 Hz (1024 muestras /10s) para la cual se dispone de 18432 muestras. Para analizar la señal, se vuelve a considerar la metodología propuesta en este capítulo, la evaluación de la complejidad de permutación de Lempel-Ziv. Este resultado se comparó a las dadas por la complejidad de Lempel- Ziv estándar, y con la entropía de permutación. El análisis se realizó con ventanas móviles de tamaño $N_w = 1024$ puntos, la cual se mueve punto por punto sobre la señal. Aquí, se usaron dos versiones cuantificadas: una de nivel-2 (Q_2^9 y otra de nivel-16 (Q_{16}), ambas son uniformes para todas las ventanas utilizadas en todo el rango de la señal. Para las medidas de permutación, los vectores de permutación se construyeron con una dimensión de inmersión de $d = 4$ y un retraso de $\tau = 1$. Aquí se eligió un radio de confianza igual a cero. Los resultados se muestran en las Figs.9B-9E.

Las interpretaciones de estos análisis son las siguientes:

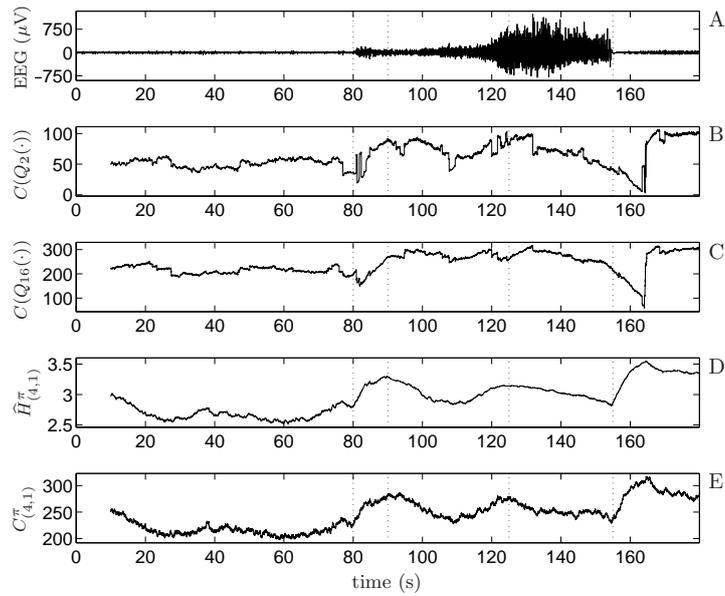


Figura 9: Registros de EEG del análisis de un ataque de epilepsia generalizada tónico-clónica secundaria. El análisis se realizó con una ventana móvil de 10s (1024 puntos) la cual se mueve punto a punto. (A) EEG original. La complejidad de Lempel-Ziv clásica la cual se realizó en una cuantificación de 2 niveles (B) y una cuantificación de 16 niveles (C) (cuantificadores uniformes sobre la dinámica de las ventanas analizadas). (D, E) para tanto la entropía de permutación (D) y de la complejidad de permutación de Lempel-Ziv (E), se evaluaron los vectores de permutación de una trayectoria reconstruida del espacio de fase con una dimensión de inmersión $d = 4$ y retardo $\tau = 1$. El radio de confianza fue elegido como cero. Las líneas punteadas verticales indican los tiempos característicos T_1 , T_2 , T_3 y T_4 .

- *La complejidad de Lempel-Ziv*: tanto para el nivel 2 como para el nivel 16 de cuantificación, no detectan ningún cambio en la serie analizada.
- *La entropía de permutación*: en esta señal, la entropía de permutación detecta la aparición de la convulsión en $T_1 = 80s$, como se puede observar en la señal. El aumento de la entropía mide un cambio en la naturaleza de la señal; no es sólo un cambio en la amplitud, de lo contrario no se habría cambiado la naturaleza de la secuencia de los vectores de permutación, y tampoco lo haría su entropía. Del mismo modo, para los tiempo característicos $T_2 = 90s$, $T_3 = 125s$ (que representa la fase clónica del ataque) y $T_4 = 155s$ (que es el final de convulsiones), los cambios son visibles en la señal original de EEG. Los tiempos T_1 , T_2 y T_4 son detectados por la entropía de permutación (representado por el aumento y descenso de los valores de H). Sin embargo, el tiempo característico T_3 no es detectado por la entropía de permutación.
- *La complejidad de permutación de Lempel-Ziv*: se puede observar que los tiempos característicos detectados por la entropía de permutación también son detectados claramente por la complejidad de permutación de Lempel-Ziv. La forma de esta complejidad es muy similar a la de la entropía de permutación. En particular, la complejidad de permutación de Lempel-Ziv detecta una modificación de la señal después del tiempo $T_2 = 90s$, un cambio que no es observado visualmente: en el pico, la ventana analizada está completamente dentro de la "parte compleja" de la crisis, pero la disminución indica que la señal se vuelve más organizada. Finalmente, la complejidad de permutación de Lempel-Ziv detecta mejor que la entropía de permutación, las modificaciones que se producen en la señal después del tiempo $T_3 = 125s$.

Téngase en cuenta que tanto la entropía de permutación como la complejidad de permutación de Lempel-Ziv indican la aparición de un evento en el tiempo 110s, como se ve por sus aumentos locales. Por último, el cambio brusco que fue detectado por la complejidad estándar de Lempel-Ziv en tiempo de 165s es consecuencia del cambio abrupto en la dinámica.

Se puede ver en este ejemplo que la medida de la complejidad introducida en este trabajo aumenta de manera abrupta y muy precisamente en momentos en que el paciente comienza el ataque epiléptico, y aún más, puede detectar los diferentes estados del ataque epiléptico tónico-clónico. Hay que tener en cuenta también el alto valor de la complejidad en el extremo de la señal en comparación con su valor al comienzo. Este nivel indica que la señal permanece "desorganizada". Una posible interpretación de tan alta complejidad es que

incluso si el evento epiléptico aparentemente termina, la serie sigue siendo compleja como consecuencia de la crisis. Sería necesaria una secuencia más larga después del ataque de epilepsia para verificar si la complejidad disminuye al valor observado antes de la crisis.

3.4 DISCUSIONES

El análisis de los datos tiene una larga historia y aún así da lugar a una enorme cantidad de investigaciones. Entre los desafíos, especialmente para el análisis de señales naturales tales como las señales biomédicas, existe la necesidad de caracterizar el grado de organización o el grado de complejidad de la señal. El problema es detectar cambios en la señal que no sean detectables visualmente, como así también el problema de caracterización de la naturaleza de los cambios específicos en una secuencia. La literatura correspondiente a la teoría de la información y del análisis de sistemas dinámicos proporciona un importante número de herramientas y métodos para resolver estos desafíos. En este capítulo de la tesis, se propuso una herramienta que mezcla dos enfoques bien conocidos: la entropía de permutación y la complejidad de Lempel-Ziv. La idea es tratar de obtener la ventaja sobre ambos enfoques, el primero de los cuales es estadístico, y el segundo determinista.

La complejidad de Lempel-Ziv se conoce desde hace tiempo y se introdujo inicialmente en el dominio de compresión de datos. A su vez ha demostrado ser una potente herramienta para el análisis de datos. Por otro parte, la entropía de permutación permite ver la dinámica subyacente a una señal, mediante la realización de una reconstrucción de los datos en el espacio de fase de la señal. Por otra parte, se basa en una especie de cuantificación de los datos, considerando sólo las tendencias en lugar de los valores de la secuencia. De esto último parece natural para cuantificar los datos, usar vectores de permutación ya sean naturales o reconstituidos, y luego evaluar la complejidad de los mismos. La asociación de estos dos enfoques puede dar origen a lo que se le ha llamado la complejidad de permutación de Lempel-Ziv, que está en el corazón de este capítulo.

Se ha demostrado aquí cómo la complejidad de permutación de Lempel-Ziv de una serie puede capturar con precisión el grado de organización de la misma. Cuando se trata de secuencias escalares, la complejidad de permutación de Lempel-Ziv parece dar resultados similares a los de la entropía de permutación, incluso siendo una medida estadística, mientras que la otra es puramente determinista. Sin embargo, cuando se trata de señales multidimensionales intrínsecas, sin procedimientos de reconstrucción del espacio de fases, la entropía calculada a través de los vectores de permutación no puede capturar la dinámica que subyace a los datos. De hecho, el cálculo de la frecuencia de ocurrencia de tales vectores de permutación es un análisis

punto a punto, y los vínculos entre los sucesivos puntos se pierden. A la inversa, como la complejidad de Lempel-Ziv tiene por objeto detectar regularidades en una secuencia, mediante el análisis de la aparición de los símbolos en la misma, esto permite capturar la dinámica de la señal. Hacer este análisis de las secuencias de los vectores permutación permite la resolución natural de la cuestión de la cuantificación de los datos. Como se muestra en nuestro ejemplo, se pueden imaginar muchas situaciones para las que la complejidad de permutación de Lempel-Ziv puede capturar un cierto grado de organización, mientras que la entropía de permutación falla, especialmente cuando tratamos con señales multidimensionales; es decir, sin espacio de fase de reconstrucción.

DETECCIÓN DE CAOS-RUIDO MEDIANTE EL USO DE LA DIVERGENCIA DE JENSEN SHANNON

En el presente capítulo se introducirá una nueva forma de cuantificar señales a través del llamado mapeo alfabético. Además se aplicará la noción de divergencia de Jensen-Shannon a estas señales cuantificadas. Se definirá una matriz distancia basada en la Divergencia de Jensen-Shannon, entre señales. En una segunda parte se usará un método de ventana deslizante sobre la señal para detectar el momento donde la misma efectúe un cambio significativo. Para probar ambos métodos utilizaremos señales generadas artificialmente y señales reales de electrocardiograma y mediciones hechas sobre el eje de un motor eléctrico.

4.1 INTRODUCCIÓN

Las series temporales derivadas de los sistemas caóticos, comparten varias propiedades con las derivadas de los sistemas generados a través de procesos estocásticos, siendo muchas veces casi indistinguibles. Entre sus propiedades se encuentra que : 1) ambas poseen un espectro de potencia de banda ancha, 2) tienen una función de autocorrelación en forma de delta, y 3) presentan un comportamiento irregular de las señales medidas. De hecho, esta similitud ha posibilitado la sustitución de los procesos estocásticos por sistemas caóticos en muchas aplicaciones prácticas, por ejemplo la generación de números pseudo-aleatorios a partir de funciones deterministas [153]. En este capítulo se propone un esquema para distinguir entre estos dos tipos de sistemas, mediante la utilización de herramientas tomadas de la teoría de la información.

La idea es trabajar sobre series temporales generadas por modelos bien conocidos, y contrastarlas con señales "reales", pero teniendo en cuenta que toda señal siempre posee una componente estocástica debido al ruido dinámico intrínseco [154, 155]. Esta afirmación tiene su fundamento en un resultado de Wold quien demostró que cualquier serie temporal (estacionaria) se puede descomponer en dos partes diferentes [155]. Una parte determinista, que puede ser descrita exactamente por una combinación lineal de su propio pasado y la segunda parte que representa una componente de media móvil de orden finito. Por este motivo podríamos considerar superfluo preguntar si las series generadas mediante "procesos naturales" son deterministas, caóticas o una combinación de ambas. Sin embargo, teniendo en cuenta el teorema de Wold [154], uno puede preguntarse cuál de la

dos partes es la dominante.

Las señales caóticas siempre producen series de tiempo con una estructura física. Aquí se plantea encontrar un valor que represente cuán similares (o disimilares) son dichas estructuras. Con este fin se utilizará una medida extraída de la teoría de la información conocida como la divergencia de Jensen Shannon (DJS), que ya fuera introducida en el capítulo 1. Como es sabido, para poder utilizar estas medidas estadísticas es necesario (de manera ineludible) evaluar la distribución de probabilidad de la señal. En capítulos anteriores se ha visto que la construcción de esas distribuciones de probabilidades puede hacerse por diversos métodos. Aquí se utilizará una forma de asignación llamada mapeo alfabético [24].

Mediante el uso de la DJS aplicada sobre la señal cuantificada mediante el método del mapeo alfabético (la cual se denominará DJSa), se obtendrá un valor de disimilitud entre señales de diferentes naturalezas, y se utilizará de una ventana móvil, para detectar los cambios en la naturaleza de una señal.

Este capítulo estará dividido de la siguiente manera: en la sección 4.2 se explicará el método de mapeo alfabético y la aplicación de la DJS al mismo. En la sección 4.3 se dará una breve descripción de la secuencias caóticas y aleatorias extraídas de la literatura. En la sección 4.4 se aplicará el método a las señales artificiales. En la sección 4.5 se analizarán dos ejemplos de señales reales y por último, en la sección 4.6 se discutirán los resultados obtenidos.

4.2 DJS APLICADA AL MAPEO ALFABÉTICO

Como se ha comentado en capítulo 1 la divergencia de Jensen Shannon es una herramienta que permite medir la distancia entre dos distribuciones de probabilidad P y Q por medio de la Ec.(27). Cuando se quiere aplicar la DJS de manera discreta entre dos señales Ec.(27), se debe tener en cuenta que ambas señales deben estar previamente discretizadas¹. En el capítulo 2 se han mencionado que existen varias formas de discretizar una señal continua, como por ejemplo, usando método de histogramas, el mapeo binario o el método de permutación de Bandt y Pompe, con un enfoque similar se propone aquí el llamado *mapeo alfabético* [24]. Esta asignación puede verse como un mapeo de permutación de segundo orden seguido de una nueva inmersión. A continuación se describirá brevemente este método y luego se explicará como se vincula con la DJS.

¹ Hay que recordar que se puede utilizar DJS directamente sobre señales continuas, sin la necesidad de discretizar las señales previamente, pero como se expuso en el capítulos 1, muchas características interesante que posee DJS.

4.2.1 Mapeo alfabético

Para una determinada serie continua, se puede mapear esta serie de valores reales en una serie binaria dependiendo de los valores relativos entre dos puntos vecinos $[x_t; x_{t+1}]$, como se muestra a continuación:

$$S_t = \begin{cases} 0 & \text{si } x_t \geq x_{t-1} \\ 1 & \text{si } x_t < x_{t-1} \end{cases}$$

S_t es una secuencia binaria $S = \{s_1, s_2, \dots, s_{N-1}\}$ donde $s_i = 0$ o 1 . Al igual que en la entropía de permutación (EP), se consideran dos enteros $d \geq 2$ y $\tau \geq 1$. Luego define un vector d -dimensional $\mathbf{V}_{(d,\tau)}^t$:

$$\mathbf{V}_{(d,\tau)}^t \rightarrow (s_{t-(d-1)\tau}, \dots, s_{t-\tau}, s_t)^T; t \geq (d-1)\tau \quad (42)$$

El superíndice T significa transposición del vector, al igual que para el método de permutación de Bandt y Pompe d es la dimensión inmersión (los números de bits tomados para crear la palabra) y τ es llamado el "retardo". Como ya se ha dicho el teorema de Takens da las condiciones para d y τ tal que $\mathbf{V}_{(d,\tau)}^t$ conserva las propiedades dinámicas del sistema completo [34].

Para cada vector $\mathbf{V}_{(d,\tau)}^t$ se define un valor entero $W_{(d,\tau)}^t$, que toma sus valores en un alfabeto discreto \mathcal{B} de tamaño $|\mathcal{B}| = 2^d$ que es el conjunto de palabras binarias de longitud d . Al moverse por la señal se obtiene un conjunto de números $\{W_{(d,t)}^t\}$, de manera similar a lo que se propuso tratar con el mapeo de permutación en el capítulo 2. Se puede calcular la frecuencia de ocurrencia de las diferentes $\{W_{(d,t)}^t\}$.

Muchas veces se tiene que trabajar con señales de dos dimensiones como ser mapas caóticos bi-dimensionales, polisomnografías, EEG, etc. Las componentes de este tipo de señales en su mayoría se encuentran acopladas, dado que los valores de la señal no sólo dependen de los valores anteriores sino también de los valores alcanzados por las otras señales. Por ello al hacer un análisis unidimensional hay información valiosa que se podría estar perdiendo. Tomando la idea expuesta anteriormente para señales uni-dimensionales (1D), se mostrará que el mismo algoritmo con una leve modificación puede ser utilizado para analizar señales 2D-dimensionales sin perder información.

Si se tiene una serie continua 2D $\mathbf{X}_t = (x(t), y(t))$, se puede corresponder esta serie de valores reales con una serie binaria 1D, mediante los valores relativos entre las dos componentes a cada tiempo t $[x_t; y_t]$, Es decir:

$$S_t = \begin{cases} 0 & \text{si } x_t \geq y_t \\ 1 & \text{si } x_t < y_t \end{cases}$$

Ahora S es una secuencia binaria del mismo modo que lo era para el caso 1D, por lo tanto se puede aplicar todos los pasos aplicados al caso unidimensional.

4.2.2 DJS aplicada al mapeo alfabético

Una vez discretizadas las señales por medio del mapeo alfabético antes propuesto, y habiendo obtenido la FDP por medio de cálculo de la frecuencia de aparición de los símbolos $W_{(d,t)}^t$, se procederá a aplicar la DJS de dos maneras diferentes. En la primera, se medirá la distancia entre dos señales diferentes. En la segunda parte se hará el enfoque sobre la detección de cambios en la distribución de probabilidad asociada a una única señal, y se utilizará el esquema de la ventana deslizante ya comentado.

4.2.2.1 aDJS entre dos secuencias.

Sean dos secuencias diferentes, por ejemplo, una caótica y una aleatoria y se aplica el método de mapeo explicado en la sección 4.2.1, resultando dos conjuntos de números $\{W_{(d,\tau)}^t\}$ y $\{\widetilde{W}_{(d,\tau)}^t\}$. Se calcula luego la frecuencia de aparición de los patrones para ambas señales $P^W = P(W_{d,\tau}^t)$ y $P^{\widetilde{W}} = P(\widetilde{W}_{d,\tau}^t)$. Finalmente, se calcula la divergencia $D_{JS}^{W,\widetilde{W}} = D_{JS}(P^W|P^{\widetilde{W}})$ entre estas distribuciones. Se generaron 10^5 ensembles por cada señal. Para generar el conjunto de señales, se usaron los mismos parámetros con diferentes condiciones iniciales. A cada conjunto de señales se les aplicó el procedimiento antes descripto, y se calculó:

$$\mu^{W,\widetilde{W}} = \langle D_{JS}(P^W|P^{\widetilde{W}}) \rangle \quad (43)$$

siendo μ el valor promedio sobre todos los conjuntos de distancias medidas, con su respectivo desviación estándar (σ).

$$\sigma^{W,\widetilde{W}} = \langle (D_{JS}(P^W|P^{\widetilde{W}}) - \mu^{W,\widetilde{W}})^2 \rangle^{1/2} \quad (44)$$

Sean dos secuencias generadas a partir de una misma distribución de probabilidad: idealmente, deberían tener las mismas propiedad estadística, y la DJS entre ellas, debería tomar un valor muy pequeño, próximo a cero. De todos modos, debido a las fluctuaciones estadísticas, esto no es así pues se construyen estimadores para las distribuciones de probabilidades correspondientes a las secuencias y por lo tanto las fluctuaciones propias de esta construcción arrojarán valores de la DJS mayores que cero. Para ello Grosse [49] y otros introdujeron una cantidad llamada "significancia", la cual permite ver si los valores alcanzados por la DJS son o no del orden de las fluctuaciones estadísticas. Esta cantidad depende de la longitud de la secuencia y

del tamaño del alfabeto al cual pertenecen los símbolos de la secuencia. Esta formula se ha utilizado en varios trabajos tomando el esquema de segmentación basado en la DJS (ver por ejemplo los trabajos sobre segmentación de secuencias de ADN [49], y la detección de paredes de dominios en la dinámica de motores moleculares [156]). Sin embargo para la expresión de significancia presentada por los autores arriba mencionados, no puede utilizarse con alfabetos con más de cinco símbolos. Esto imposibilita su uso para asignaciones del estilo de Bandt y Pompe, donde se utilizan alfabetos con una mayor cantidad de símbolos. Este también es el caso de la correspondencia que aquí se está usando. Se debe entonces modificar el criterio introducido por Grosse y colaboradores, para detectar valores de la DJS que están genuinamente por encima de las fluctuaciones estadísticas. Se propone calcular la DJSa sobre un conjunto de ensembles (10^5) generados para cada señal pero con condiciones iniciales diferentes. Al valor medio y desviación estándar calculado sobre cada conjunto DJSa se la llamará "auto-DJSa", $D_{JS}^W = D_{JS}(W | W)$. El mismo cálculo $D_{JS}^{\tilde{W}}$ se hará para el conjunto de símbolos \tilde{W} . Finalmente dos secuencias son diferentes, en el sentido estadístico, si se cumple que:

$$\mu^{W, \tilde{W}} - \sigma^{W, \tilde{W}} \geq \text{máx}[\mu^W + \sigma^W, \mu^{\tilde{W}} + \sigma^{\tilde{W}}]$$

Si los valores de la DJSa no cumplen con este criterio se dice que las dos señales no son estadísticamente distinguibles entre si.

4.2.2.2 DJSa por medio del uso de ventanas corredizas.

Para el segundo método, se usará una ventana corrediza que se mueve sobre una señal, la cual fue inicialmente simbolizada como se explicó en la sección anterior. La ventana posee un ancho $\Delta > 0$ y una posición k (que hace referencia al centro de la ventana con relación a la posición sobre la señal). Para cada posición k , se tomaran las subsecuencias que se encuentran delimitadas entre el borde izquierdo y el centro de la ventana y entre el centro y del lado derecho de la misma. En ambos casos, se calculara la frecuencia de ocurrencias de los patrones a derecha $P(W_{d,\tau}^{der}) = P_{der}^W$ e izquierda $P(W_{izq}^{d,\tau}) = P_{izq}^W$. Finalmente se evalúa la DJS asociada $D_{JS}(k) = D_{JS}(P_{der}^W | P_{izq}^W)$ como una función de la posición del puntero k . El valor máximo de la DJS $D_{JS_{max}} = \max[D_{JS}(k)]$ se interpreta como un cambio en la distribución de probabilidad de los patrones $W_{(d,\tau)}$ en la señal.

4.3 MAPAS CAÓTICOS Y RUIDOS COLOREADOS.

Para analizar los métodos antes explicados, es conveniente usar secuencias conocidas cuyas propiedades han sido estudiadas por diferentes autores. Se estudian 18 mapas caóticos y 5 ruidos coloreados los cuales se describirá brevemente a continuación.

4.3.1 Mapas caóticos

Se consideraron 18 mapas caóticos los cuales fueron tomados del libro de Sprott [25], y están desarrollados en el apéndice C. Los mapas pueden ser agrupados de la siguiente manera:

- Mapas 1D: son secuencias dinámicas donde la imagen posee más de una pre-imagen por lo cual, en cada interacción hay una pérdida de información, generando así un sistema caótico [25]. Estos son los mapas que se han analizado: generador congruencial lineal [157], mapa de Gauss [158], mapa logístico [159], mapa de Pinchers [160]; modelo de población de Ricker [161], mapa seno circular [162], mapa seno [29], mapa de Spencer [163] y mapa tienda [164].
- Mapas 2D: estos se pueden dividir en dos categorías: disipativos: en los que el espacio de fase se contrae, y conservativos, en los cuales alguna cantidad del sistema se conserva (ej la energía). Los mapas que se han utilizados fueron: mapa de Hénon [165], mapa de Lonzi, mapa logístico retardado [166], mapas campanita [167], mapa disipativo estándar [168], mapa del gato de Arnold [162], mapa red caótica [169], mapa de Chirikov [170], mapa hombre de jengibre [171], mapa de Hénon preservador de áreas [165].

Para todos los mapas presentados anteriormente, se utilizaron los parámetros y condiciones iniciales descritos en el libro de Sprott.

4.3.2 Ruidos Coloreados

Existen muchos tipos de ruido en la naturaleza, y su caracterización se realiza a través de su espectro de potencia y de la distribución de sus valores. El ruido que el espectro de potencia es independiente de la frecuencia se denomina *blanco* por analogía con la luz blanca. El ruido blanco es no correlacionado ya que la función de correlación es cero para todos los tiempos (función de correlación deltiforme). Un ruido con un espectro de potencia que varía con la frecuencia se denomina *correlacionado*. La potencia del ruido varía con la frecuencia de la forma $1/f^k$ (también llamado ruido de Hurst). El ruido blanco tiene $k = 0$. El caso de $k = 1$ se llama ruido rosa y se utiliza, por ejemplo, en la investigación acústica. El caso $k = 2$ corresponde al ruido browniano [172]. A los ruidos cuya potencia aumenta cuando la frecuencia crece ($k < 0$) se los llama ruidos azules si ($k = -1$). Un ejemplo en donde se presenta este tipo de ruido, son las células de la retina que están dispuestas en patrones de ruido-azul. Estas han demostrado estar asociadas con un muy buen rendimiento en la resolución visual gracias a este tipo de tramado [173]. El ruido violeta ($k = -2$) es una señal de ruido diferenciado que tiene una trayectoria

específica, y que resulta útil para el bloqueo de algunos sonidos de mayor frecuencia.

4.4 ANÁLISIS DE LA DIVERGENCIA DE JENSEN SHANNON ALFABÉTICA ENTRE SECUENCIAS CAÓTICAS Y ALEATORIAS

Se analizó la DJSa entre secuencias caóticas y aleatorias. Las mismas fueron analizadas usando los dos métodos descritos en la sección 4.2.2. Para ello se generaron un conjunto de 10^5 secuencia para cada mapa o ruido mencionado en la sección 4.3, se mantuvieron los mismos parámetros de generación pero con diferentes condiciones iniciales.

4.4.1 Matriz para la distancia DJSa

Se tomaron las señales caóticas 1D y los ruidos coloreados de longitud $L_s = 10^6$ y se calculó una matriz de distancias entre las series caóticas y los ruidos coloreados, utilizando el criterio de significancia de los valores de la DJSa explicado en la sección 4.2.2. Para ello se usaron los parámetros de asignación $\tau = 1$ y $8 \leq d \leq 12$. En la figura 10 se pueden observar las matrices de las distancias DJSa correspondiente a los parámetros $d = 8$ y $\tau = 1$. Para las diferentes dimensiones de inmersión d , se obtienen resultados similares.

Haciendo un análisis sobre los resultados, para el caso de la matriz de la DJSa caos-ruido (figura 10A) se observan que la mayor parte de los mapas caóticos son distinguibles de los diferentes tipos de ruidos coloreados. Para el caso particular del mapa generador congruencial (GC) y el ruido blanco, la DJSa no supera el criterio de significancia. Una explicación a este comportamiento se puede dar ya que el GC más allá que sea un sistema determinista, es un ejemplo muy simple de un generador de números aleatorios, el cual pasa los test de primalidad de Miller–Rabin² y el solitario FreeCell³. Por lo tanto la distribución de las palabras $\{W_{(8,1)}^t\}$ correspondiente para GC y al ruido blanco son similares⁴.

Para el segundo caso se calculó la misma matriz de distancias DJSa entre diferentes secuencias caóticas. En la Fig (10b) se puede ver que la matriz DJSa es simétrica, esto viene gracias a la simetría que posee la Ec. 27. La matriz distancia muestra que todos los valores de la DJSa están por encima del criterio de significancia, y por lo tanto la DJSa puede dar una distancia relevante entre las FDP de todas las secuencias caóticas expresadas en este trabajo. Mas aún, los valores expresados por la DJSa no son azarosos, sino que un análisis deta-

² Es una prueba de primalidad: un algoritmo que determina si un número dado es primo o no.

³ Es el juego de cartas del solitario creado en 1978

⁴ Sin embargo para d altos $d \simeq 12$, se pueden diferenciar las dos secuencias.

lado muestra que tienen una estrecha relación con el diagrama de fase de los mismos. Por ejemplo, el mapa logístico, el mapa tienda y el mapa seno tienen diagramas de fases similares ⁵, y a partir de los valores de la matriz distancia se observa que poseen los valores de DJSa más bajos. El mismo comportamiento se puede encontrar entre el mapa de Pinchers y el mapa de Spencer. A medida que los diagramas de fase se hacen más diferentes, la DJSa aumenta.

El mismo análisis se realizó con las series caóticas en 2D. Fueron asignadas las señales caóticas bidimensionales descritas en la sección 4.3 utilizando el método explicado en la sección 4.2.2 y se calculó la matriz distancia de la DJSa, bajo los parámetros $6 \geq d \geq 12$ y $\tau = 1$. En la figura 11 se puede observar la matriz DJSa correspondiente a los parámetros $d = 8$ y $\tau = 1$. Al igual que lo observado para las series unidimensionales, todas las distancias han pasado el criterio de significancia, por lo cual todos los mapas son distinguibles entre sí. Además, se puede ver que los valores de la DJSa decrecen a medida que la topología del diagrama de fases, tienden a ser similares, esto se lo puede ver el caso del mapa de Henón y el mapa de Lonzi. Y los valores de DJSa aumenta cuando los mismos tienen diferencias topográficas muy diferentes como por ejemplo en el mapa de Henón preservador de área y el mapa de Chirikov. Para las diferentes dimensiones de inmersión cambia el valor absoluto de la DJSa, pero se mantiene constante el valor relativo entre las distancias de la matriz, mostrando la robustez del método.

Si se quiere ver la relación entre los diagramas de fase y los valores de DJSa, primero se debe recordar que la DJS da una medida de disimilitud entre dos distribuciones de probabilidad. En el caso de estudios las FDP están asociadas al conjunto de palabras $\{W_{(d,\tau)}^t\}$ y $\{\widetilde{W}_{(d,\tau)}^t\}$. El valor de DJSa resulta de calcular la distancia entre estas FDP. Por el teorema de Takens, se sabe que estos conjuntos de palabras son los encargados de reconstruir el espacio de fase de cada señal original, por lo cual, espacios de fases similares tendrán una distribución de probabilidad de palabra similares, haciendo que los valores de la DJSa sean más pequeños.

4.4.2 La DJSa como detector de cambios en una señal

En esta sección se ha puesto a prueba el método de detección de cambios en una señal, utilizando la DJSa mediante una ventana móvil de la forma descrita en la sección 4.2.2.2. En este caso se unieron dos señales diferentes de igual longitud $L_{s1} = L_{s2} = 5 \times 10^5$, donde la señal s_1 era una secuencia caótica y la s_2 una aleatoria, o dos secuencias caóticas diferentes. Utilizando un ancho de ventana $\Delta = 40000$, se procedió a analizar cada una de las combinaciones generadas.

En la figura 12 se puede ver el resultado de aplicar la DJSa a cuatro

⁵ Obsérvese los gráficos en el apéndice C

A

| | | | | | |
|---------------|--------------|------------|-----------------|------------|---------------|
| Congruencial | 0.000 | 0.042 | 0.146 | 0.028 | 0.061 |
| Gauss | 0.065 | 0.151 | 0.284 | 0.030 | 0.028 |
| Logístico | 0.370 | 0.451 | 0.458 | 0.357 | 0.341 |
| Pinchers | 0.452 | 0.529 | 0.623 | 0.364 | 0.304 |
| Rikers | 0.470 | 0.563 | 0.634 | 0.406 | 0.353 |
| Seno circular | 0.518 | 0.518 | 0.565 | 0.546 | 0.566 |
| Seno | 0.389 | 0.460 | 0.445 | 0.385 | 0.377 |
| Spencer | 0.430 | 0.505 | 0.600 | 0.344 | 0.289 |
| Tienda | 0.367 | 0.449 | 0.461 | 0.351 | 0.333 |
| | Ruido blanco | Ruido rosa | Ruido Browniano | Ruido azul | Ruido violeta |

B

| | | | | | | | | | |
|---------------|--------------|-------|-----------|----------|--------|---------------|-------|---------|--------|
| Congruencial | 0.000 | 0.072 | 0.378 | 0.430 | 0.470 | 0.525 | 0.397 | 0.405 | 0.374 |
| Gauss | 0.072 | 0.000 | 0.277 | 0.364 | 0.302 | 0.552 | 0.317 | 0.366 | 0.266 |
| Logístico | 0.378 | 0.277 | 0.000 | 0.576 | 0.286 | 0.693 | 0.013 | 0.590 | 0.000 |
| Pinchers | 0.430 | 0.364 | 0.576 | 0.000 | 0.492 | 0.693 | 0.595 | 0.027 | 0.564 |
| Rikers | 0.470 | 0.302 | 0.286 | 0.492 | 0.000 | 0.693 | 0.358 | 0.521 | 0.265 |
| Seno circular | 0.525 | 0.552 | 0.693 | 0.693 | 0.693 | 0.000 | 0.693 | 0.693 | 0.693 |
| Seno | 0.397 | 0.317 | 0.013 | 0.595 | 0.358 | 0.693 | 0.000 | 0.606 | 0.022 |
| Spencer | 0.405 | 0.366 | 0.590 | 0.027 | 0.521 | 0.693 | 0.606 | 0.000 | 0.580 |
| Tienda | 0.374 | 0.266 | 0.000 | 0.564 | 0.265 | 0.693 | 0.022 | 0.580 | 0.000 |
| | Congruencial | Gauss | Logístico | Pinchers | Rikers | Seno circular | Seno | Spencer | Tienda |

Figura 10: Matriz distancia de la DJSa para señales 1D bajo los parámetros $d = 8$ y $\tau = 1$. (A) La matriz de DJSa entre mapas caóticos y ruidos coloreados. (B) La matriz de la DJSa entre mapas caóticos. Los valores 0.00 significan que la DJSa no ha superado el criterio de significancia expuesto en la sección 4.2.2.

| | | | | | | | | | |
|------------|-------|-------|-----------|------------|------------|---------|------------|----------|-----------|
| Henon | 0.000 | 0.019 | 0.691 | 0.645 | 0.502 | 0.554 | 0.693 | 0.674 | 0.693 |
| Lozi | 0.019 | 0.000 | 0.692 | 0.649 | 0.503 | 0.555 | 0.693 | 0.680 | 0.693 |
| Log retar | 0.691 | 0.692 | 0.000 | 0.265 | 0.671 | 0.550 | 0.594 | 0.453 | 0.633 |
| Campanitas | 0.645 | 0.649 | 0.265 | 0.000 | 0.611 | 0.478 | 0.649 | 0.524 | 0.663 |
| Disipativo | 0.502 | 0.503 | 0.671 | 0.611 | 0.000 | 0.161 | 0.593 | 0.656 | 0.603 |
| Arnolds | 0.554 | 0.555 | 0.550 | 0.478 | 0.161 | 0.000 | 0.551 | 0.456 | 0.574 |
| H jengibre | 0.693 | 0.693 | 0.594 | 0.649 | 0.593 | 0.551 | 0.000 | 0.693 | 0.052 |
| Chirikov | 0.674 | 0.680 | 0.453 | 0.524 | 0.656 | 0.456 | 0.693 | 0.000 | 0.693 |
| Henon con | 0.693 | 0.693 | 0.633 | 0.663 | 0.603 | 0.574 | 0.052 | 0.693 | 0.000 |
| | Henon | Lozi | Log retar | Campanitas | Disipativo | Arnolds | H jengibre | Chirikov | Henon con |

Figura 11: Matriz distancia de la DJSa para señales de 2D calculada bajo los parámetros $d = 8$ y $\tau = 1$. Los valores 0.00 significan que la DJSa no ha superado el criterio de significancia expuesto en la sección 4.2.2.

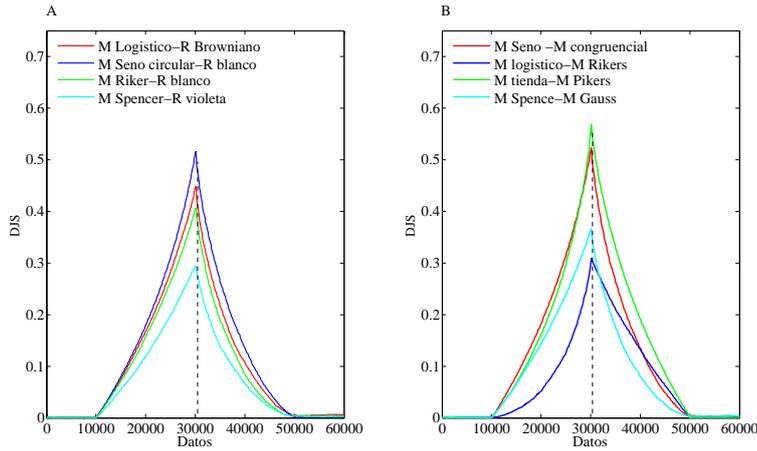


Figura 12: Cálculo de la DJSa mediante el método de ventana para los parámetros $d = 8$, $\tau = 1$ y $\Delta = 40000$. (A) Secuencias compuestas de señales caóticas y aleatorias. (B) Secuencias compuestas por dos señales caóticas diferentes. En ambos gráficos la unión de ambas secuencias se encuentra en la línea vertical punteada.

de todas las posibles combinaciones de secuencias de caos-ruido. Similares resultados se observan para el caso de secuencias generadas de la forma caos-caos. Cabe destacar como la DJSa alcanza su valor máximo exactamente en el punto de unión de las dos secuencias diferentes, la cual está marcada con una línea vertical punteada. El valor que alcanza en este punto es varios órdenes de magnitud superior a los valores que toma cuando la ventana se encuentra en una secuencia pura. Claramente, no existe un problema con relación a los valores de las fluctuaciones estadísticas. Para el caso de las secuencias combinadas caos-caos (figura 12B), las diferentes alturas dependen de cuán similares son los diagramas de fase de las señales unidas, tal como se explicó en la sección 4.4.1. Para completar esta parte del trabajo se extendió el análisis de secuencias combinadas a las secuencias bidimensionales, para lo cual fueron tomadas 4 señales combinadas. Se aplicó el método de mapeo alfabético bidimensional. Los resultados se pueden ver en la figura 13. Todas las señales son claramente identificables y nuevamente la altura máxima depende de la afinidad topográfica de los diagrama de fases de las secuencias unidas.

4.5 ALGUNAS APLICACIONES A SEÑALES REALES DE LA DJSA

Dejando de lado los modelos de "juguete" explicados en la sección anterior, se probaron las herramientas antes propuestas al análisis de un grupo de señales reales. La primera es un conjunto de señales de ECG sobre las cuales calcularemos la matriz de distancias de la DJSa entre grupos de pacientes con diferentes patologías cardíacas.

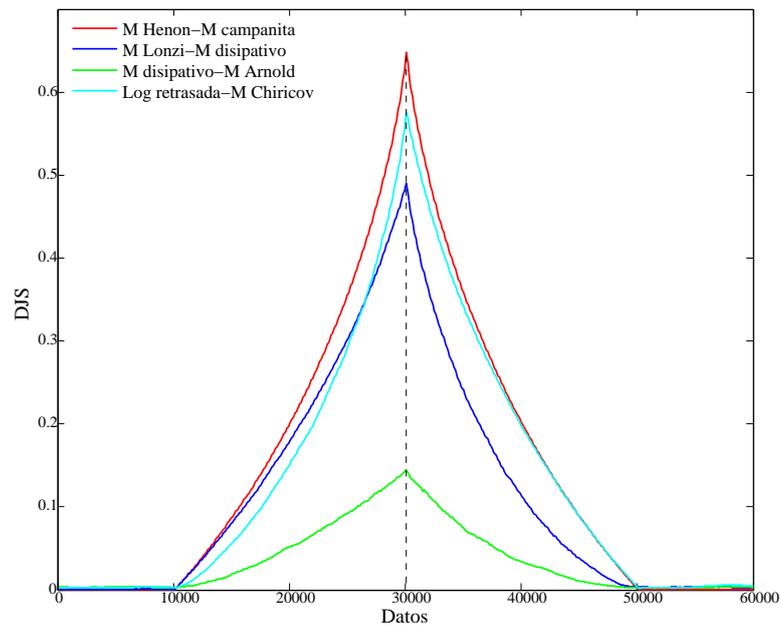


Figura 13: Cálculo de la DJSa para señales de 2D mediante el método de ventana para los parámetros $d = 8$, $\tau = 1$ y $\Delta = 40000$. Las secuencias están compuestas por dos señales caóticas diferentes bidimensionales. La unión de ambas secuencias se encuentra en la línea vertical punteada.

En el segundo contexto de aplicación, se utilizaron distintas señales tomadas sobre el eje de un motor eléctrico, mediante la aplicación DJSa se pudo determinar el momento en el cual existe un cambio en la alineación en el eje del motor.

4.5.1 *Distinción entre grupos de pacientes con problemas cardíacos*

Se midieron los intervalos de tiempo entre los latidos del corazón (ILL), sobre 15 pacientes. Los mismos se agruparon en 3 grupos de 5 pacientes cada uno. El primer grupo estuvo constituido por personas sanas con ritmo sinusal normal (RSN); el segundo grupo estuvo formado por personas que sufría de insuficiencia cardíaca (IC), y el tercer grupo de pacientes que padecían de fibrilación auricular (FA). Este conjunto de datos se encuentran disponible libremente en: www.physionet.org/challenge/chaos/.

Cada serie tiene cerca de 24 horas de duración (aproximadamente 100.000 intervalos). Los registros analizados no poseen ningún filtro previo. En la figura 14 se muestra la matriz de distancias de la DJSa entre los tres grupos para los parámetros $d = 8$ y $\tau = 1$.

Con la DJSa se alcanza una clara distinción entre los grupos. Se puede decir que la distancia de DJSa, puede discriminar entre el grupo control y los grupos patológicos. Esto se debe a que en los pacientes pertenecientes al grupo control, la frecuencia de tiempo entre latidos se mantiene prácticamente sin alteraciones, mientras que los pacientes con patologías están alteradas. Esta diferencia entre latidos es captada por medio del mapeo alfabético, dando diferentes distribuciones de patrones para cada grupo. Esta diferencia entre DP es cuantificada mediante DJS.

4.5.2 *Detección del desalineamiento del eje de un motor eléctrico*

En relación al segundo contexto de aplicación propuesto, la primera de las mediciones realizadas sobre el motor eléctrico, corresponde a la vibración por medio del uso de un acelerómetro capacitivo, montado sobre el eje z del cojinete del motor (figura 15A). La segunda es la señal procedente de un codificador incremental óptico de tambor rotativo, con unos 145 pulsos por revolución mostrado en la figura 15B. La tercera es una señal generada por un acelerómetro piezoeléctrico montado en el mismo lugar donde se tomaron las señal capacitiva figura 15C. La última señal es la tasa de carga del motor⁶ figura 15D. Los datos fueron obtenidos con una frecuencia de muestreo de 25000 Hz sin realizarle ningún pre-procesamiento⁷. Para mas detalles técni-

⁶ La misma está relacionada con la frecuencia de rotación del eje por medio de un "keyphaser"

⁷ Los datos fueron cedidos amablemente por el Dr. Pierre Granjon del laboratorio GIPSA-Lab, Grenoble.

| | | | |
|-----|-------|-------|-------|
| FA | 0.000 | 0.083 | 0.134 |
| IC | 0.083 | 0.000 | 0.111 |
| RNS | 0.134 | 0.111 | 0.000 |
| | FA | IC | RNS |

Figura 14: Matriz de distancia DJSa, para tres grupos de 5 pacientes cada uno: el grupo RSN, el grupo IC y el grupo FA. Ver el texto para más detalles.

cos sobre las mediciones ver (capítulo 5 referencia [174]).

Cada una de las señales posee un largo de $N = N_a + N_d = 140000$, en donde los primeros $N_a = 70000$ valores corresponden a la medición del eje cuando se encuentra en la posición alineado y $N_d = 70000$ valores cuando el mismo se encuentra en posición desalineado. A todas las señales se le aplicó el método de la ventana la DJSa con los siguientes parámetros: $d = 8$, $\tau = 1$ y $\Delta = 40000$. Los resultados se muestran en la figura 15. Se observa que para todas las señales, el valor máximo de la DJSa se alcanza exactamente cuando el estado de alineación del eje cambia. Ese punto se encuentra delimitado por la línea vertical punteada. Para el caso de las señales provenientes de la medición de la vibración tanto piezoeléctrica como por acelerómetros capacitivos, el valor de la DJSa máxima es menor y más fluctuantes que por los otros dos métodos. Esto se puede asociar a la eficacia de los métodos de medición. En todos los casos las dos señales son claramente detectables por el método aquí propuesto.

4.6 DISCUSIÓN

En este capítulo se ha introducido la noción de asignación alfabética, una alternativa al método de Bandt y Pompe explicado en el capítulo de entropía de permutación. Como se ha visto, el método se

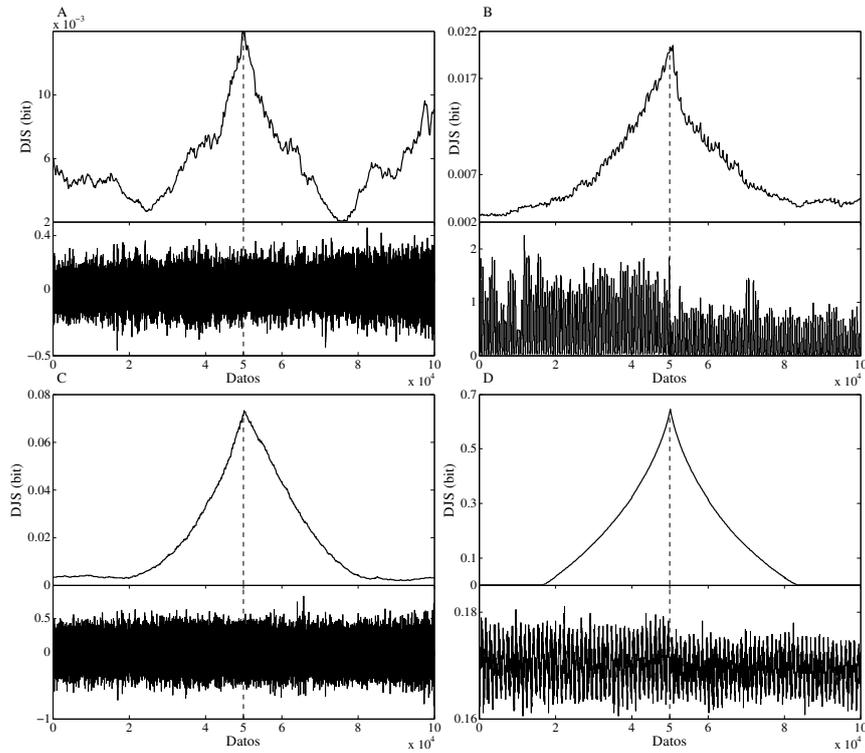


Figura 15: Análisis de la DJSa mediante el método de ventana correspondiente a cuatro señales diferentes tomadas sobre el eje de un motor eléctrico en rotación. (A) Señal de un acelerómetro capacitivo montado sobre el eje z del cojinete del motor. (B) señal de un codificador incremental óptico de tambor rotativo con 145 pulsos por revolución. (C) Señal generada por un acelerómetro piezoeléctrico montado sobre el mismo lugar que A. (D) Señal de la tasa de carga del motor. Todas las señales fueron analizadas bajo los parámetros $d = 1$ $\tau = 2$ $\Delta = 40000$.

puede utilizar para señales de una dimensión, y con una leve modificación aplicarlo en señales de dos dimensiones. En este último caso, se puede utilizar toda la información proveniente de la señal. A esta forma de asignación se le ha aplicado una métrica proveniente de la teoría de la información llamada divergencia de Jensen-Shanon. Mediante el uso de estas dos herramientas, se ha desarrollado dos métodos para distinguir entre diferentes tipos de señales. Por medio de la primera, se generó una matriz distancia que permite medir la similitud entre señales de naturaleza distintas. Para ello, se usó señales bien conocidas de la literatura que provienen tanto de la teoría del caos, como de las señales estocásticas con diferentes espectros de frecuencia. Mediante la matriz distancia DJSa, se pudo mostrar que las señales caóticas son claramente diferenciables de los ruidos y entre ellas mismas. En este último caso, se pudo determinar que los valores de la DJSa correspondían a cuán similar eran sus diagramas de fase. Cuanto más bajo es el valor de la DJSa, más parecida es la estructura de sus diagrama de fase. Esto se observó tanto para señales caóticas unidimensionales como bidimensionales. Luego se procedió a aplicar esta matriz a datos de ECG reales, los cuales con la DJSa se logra distinguir grupos de pacientes con problemas cardíacos de pacientes de control.

En la segunda parte del trabajo se propuso un método por el cual la DJSa se va calculando por medio de una ventana corrediza que se mueve sobre una señal mapeada por el método alfabético. La ventana fue dividida en dos partes iguales. Cada vez que la ventana se movía una posición, se calculaba la DJSa entre las dos subsecuencias limitadas dentro de la ventana. El valor máximo corresponde al punto donde existe un cambio en la probabilidad de la distribución de los valores de la señal. Primero se probó su eficacia utilizando secuencias compuestas por dos señales diferentes unidas en algún punto y la DJSa detectó en todos los casos el punto exacto donde las dos señales diferentes se acoplaban. Finalmente se trabajó con señales reales extraídas de la medición de diferente tipos de señales sobre el eje de un motor eléctrico, para determinar cuando el mismo se encontraba alineado o desalineado, dando resultados satisfactorios.

Para concluir, cabe destacar que estos análisis se hicieron sobre una única medición. Por lo tanto no son promedios de mediciones sucesivas. Esto muestra la eficiencia del método. Esto último permite pensar que, gracias a su bajo costo computacional y a la gran efectividad, sin la necesidad de disponer de todos los datos simultáneamente, el método de DJSa por medio de una ventana móvil se puede aplicar al análisis de señales a tiempo real.

En este capítulo se retomaron las ideas de entropía de permutación y complejidad de permutación de Lempel-Ziv, las mismas fueron combinadas para el análisis de series temporales en un plano complejidad vs entropía. Mediante este plano se caracterizaron diferentes mapas caóticos y ruidos no gaussianos. Así mismo, se analizaron señales de EEG para mostrar una nueva manera de caracterizar el tratamiento farmacológico de un paciente que sufre epilepsia.

5.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se introducirá una forma de analizar diferentes tipos de señales, utilizando las herramientas explicadas en los capítulos anteriores. Generando un plano de complejidad vs entropía. La unión de estos dos concepto permite la obtención de información sobre las series, que no se puede adquirir utilizando estas dos magnitudes por separado.

Estos tipos de planos se han utilizado en la literatura para la diferenciación entre señales caóticas y aleatorias [59], para la caracterización de mapas caóticos [58], para determinar autoría en textos literarios [72], para la distinción el grado de desarrollo del mercado de valores [175] y en el análisis de EEG [176]

Entre las complejidades utilizadas en estos planos se destaca la "medida de complejidad estadística" (statistical complexity measure (SCM)) [177], que se define como un producto entre la entropía de Shannon de la FDP de la señal y la DJS entre la FDP de la señal a analizar y la distribución de probabilidad uniforme. La información que se obtiene de este tipo de plano es puramente estadística por lo que la idea es proponer un plano complejidad-entropía en el cual la complejidad tenga una base determinística.

Teniendo en cuenta las propiedades que posee la complejidad de Lempel-Ziv (ver capítulo 3.2) y la relación que posee con la entropía de Shannon Ec.33, se ha definido el plano complejidad de permutación de Lempel-Ziv (CPLZ) vs Entropía de Permutación (EP).

El desarrollo del cálculo de la CPLZ ha sido presentado en el capítulo 3 y la EP en el capítulo 2. Se quiere remarcar que los parámetros de mapeo de los vectores permutación (d y τ) utilizados tanto para los calculos CPLZ como EP, serán los mismos.

Para poner a prueba estos métodos de análisis, se utilizará una serie de mapas caóticos, ruidos correlacionados y anticorrelacionados, descritos en la literatura [25]. En una segunda parte se aplicará este

plano a nuevas mediciones realizadas sobre el paciente con epilepsia idiopática generalizada descrita en el capítulo 2.

En la sección 5.2, se describirá brevemente las señales artificiales que utilizaremos. En la sección 5.3, se hará el análisis y caracterización de dichas señales. En la sección 5.4, se analizará las señales de EEG a través del plano complejidad-entropía. Por último en la sección 5.5, se discutirán los resultados.

5.2 CARACTERIZACIÓN DE MAPAS CAÓTICOS Y RUIDOS NO GAUSSIANOS.

La definición de algunos mapas caóticos y ruidos coloreados fue presentada en el capítulo 4. En esta parte, se ampliará el conjunto de mapas caóticos a los que se agregará los mapas de Schuster. Por otro lado se ampliará el número de ruidos coloreados, y se introducirán dos nuevos tipos de señales las cuales no se pueden enmarcar ni en ruidos ni en mapas caóticos: el movimiento fraccional browniano y el ruido fraccional gaussiano ¹.

5.2.1 Mapas caóticos

Se han considerado 26 diferentes mapas caóticos descritos en el libro de Sprott [25]. Estos mapas se encuentran agrupados como²:

- *Mapas conservativos*: En contraste con los sistemas disipativos, los sistemas conservativos tienen alguna cantidad que se conserva, tales como la energía mecánica o el momento angular. En este caso, el volumen de su diagrama de fase se mantiene constante. Estos sistemas surgen de una forma natural al formular el *Hamiltoniano* de un sistema mecánico clásico (newtoniano), y también se denominan *sistemas Hamiltonianos*.

Se analizarán los siguientes mapas conservativos: mapa de Arnold (1) [178], mapa de la red caótica (2) [169], mapa estándar de Chirikov (3) [170], mapa hombre de jengibre (4) [171], mapa de Hénon cuadrático preservador de áreas (5) [165], mapa caótico tridimensional de Lorenz (6) [179].

- *Mapas Disipativos*: Hay que recordar que los sistemas mecánicos disipativos son aquellos en los cuales, la energía mecánica se convierte en calor (es disipada), esto implica una contracción del volumen del espacio de fases [25].

Se estudiarán los siguientes mapas: mapa de Hénon (7) [165], mapa de Lonzi (8), mapa logístico de retrasado (9) [166], mapa

¹ El número entre paréntesis que aparece para cada uno de los mapas y los ruidos que se exponen a continuación, corresponden al valor asignado en la figura 17. En la tabla 1 del apéndice C.4 se resumen todas las señales utilizadas en este capítulo.

² Para una descripción mas profunda de los mapas ver apéndice C

campanita (10) [167], mapa cúbico de Holmes (11) [180], mapa disipativo estándar (12) [168], mapa de Ikeda (13) [181], mapa de Sinai (14) [182], mapa discreto presa-depredador (15) [183].

- *Mapas no invertibles*: Un mapa iterativo se llama no invertible, cuando para cada secuencia de iteración X_n tiene dos o más preimágenes X_{n-1} , las cuales no coinciden. En consecuencia, existe información que se pierde con cada iteración, ya que no hay manera de saber de que valor provino. Esta pérdida de información es equivalente a un crecimiento exponencial del error sobre la condición inicial lo cual caracteriza a la generación del caos. La condición de no invertibilidad es necesaria para los mapas caóticos unidimensionales, pero no para mapas en dimensión superior [25].

Aquí se analizarán los siguientes mapas caóticos no invertibles: generador congruencial lineal (16) [157], mapa cúbico (17) [168], mapa cúspide (18) [184], mapa de Gauss (19) [158], mapa logístico (20) [159], mapa tenazas (21) [160], modelo de población de Ricker (22) [161], mapa seno circular (23) [162], mapa del seno (24) [29], mapa de Spence (25) [163], mapa de tienda (26) [164].

5.2.2 Mapas de Schuster

Schuster y colaboradores [185], introdujeron un mapa caótico que posee intermitencia de la forma de ruido $1/f$. La ocurrencia de las intermitencias se alternan aleatoriamente entre fases largas (laminares) y estallidos caóticos relativamente cortos. Las mismas se generan mediante la siguiente ecuación iterativa.

$$x_{n+1} = x_n + x_n^z \pmod{1} \quad (45)$$

Se ha trabajado para los casos $z = 5/2$, $z = 2$ y $z = 3/2$ (etiquetas referentes 27, 28 y 29).

5.2.3 k -ruidos

En el capítulo 2 se ha hecho referencia a los ruidos los cuales tienen un espectro de potencias de la forma de $1/f^k$. En este trabajo se muestra el análisis para ruidos que poseen k entre $0 \leq k \leq 3,75$ (48-63)³

³ En el mapa se representa el punto (48) para $k = 0$, van creciendo, hasta el punto (63) que corresponde a $k = 3,75$

5.2.4 *Movimiento fraccional gaussiano y ruido fraccional browniano*

Un proceso gaussiano $B^H = B_t^H, t \geq 0$ se llama **movimiento fraccional browniano** (MFB) de índice de Hurst $H \in (0, 1)$ si el promedio es cero y la función de covarianza es

$$\langle B^H(t)B^H(s) \rangle = R_H(t, s) = \frac{1}{2}(s^{2H} + t^{2H} - |t - s|^{2H}). \quad (46)$$

con $s, t \in \mathbb{R}$. Este proceso fue introducido por Kolmogorov [186] y estudiado por Mandelbrot y Van Ness en [187], y se estableció una representación integral estocástica en términos del movimiento browniano estándar. El parámetro H se llama índice de Hurst, introducido por el climatólogo Hurst [188]. Es la única familia de señales en la que (a) es Gaussiana, (b) auto-similar ($B^H(at) \approx |a|^H B^H(t)$), y (c) se producen incrementos ($B^H(t) - B^H(\delta t) = B^H(t - \delta(t))$) estacionarios para $\forall \delta t$ (ver Ref. [189]). Cuando $H > 1/2$ implica persistencia (correlaciones positivas), y los incrementos consecutivos tienden a tener el mismo signo; en cambio, para $H < 1/2$, exhibe antipersistencia (correlación negativa), y los incrementos consecutivos son más propensos a tener signos opuestos.

El proceso de incremento viene dado por:

$$G^H(t) \equiv B^H(t+1) - B^H(t) \quad (47)$$

se conoce como **ruido fraccional gaussiano** (RFG) [190], siendo las autocorrelaciones de la forma:

$$\rho(k) = \langle G^H(t)G^H(t+k) \rangle = \frac{1}{2}[(k+1)^{2H} - 2k^{2H} + |k-1|^{2H}], k > 0. \quad (48)$$

Se puede ver que para $H = 1/2$ todas las correlaciones para tiempo de retraso diferentes a cero desaparecen, y $G^{1/2}(t), t > 0$ por lo tanto, es una representación de ruido blanco. Para la evaluación de las series temporales MFB y RFG se adoptaron el algoritmo de Davies-Harte [191]. Para el siguiente análisis se eligieron $H \in (0, 1)$ con un $\delta H = 0,1$ para ambos casos MFB (30-38) y RFG (39-47).

Las señales que se analizarán en el plano complejidad entropía están resumidas en la tabla apéndice C.4.

5.3 ANÁLISIS DEL PLANO COMPLEJIDAD VS ENTROPÍA

Se estudiaron un total de 63 señales indicadas en la sección 5.2. La longitud de las mismas es $L_s = 10^6$ y se generaron $N_e = 10^3$ ensambles de datos, utilizando los mismos parámetros, pero cambiando las condiciones iniciales. Todas las señales fueron discretizadas mediante el método de Bandt-Pompe bajo los parámetros $3 \leq d \leq 8$ y $\tau = 1$.

Luego se evaluó la complejidad de permutación de Lempel-Ziv y la entropía de permutación. Sobre estos valores se calcularon el valor medio y la matriz de covarianza a cada señal. Finalmente, se presentaron los resultados en un mapa complejidad-entropía (C_{LZ} vs H_{PE}) figura 16. Analizando cada grupo de señales se han encontrado los siguientes resultados:

MAPAS CAÓTICOS: se puede decir que la mayoría de los mapas se encuentran con un valor de entropía comprendido en el intervalo $[0,35; 0,8]$ y valores de complejidad entre $[0; 0,15]$. Existe un pequeño grupo de mapas caóticos que se encuentran con valores de complejidad y entropía muy altos como ser el mapa de Arnold (1), el mapa de Sinai (14), el mapa disipativo (12) y el generador congruencial (16). Estos mapas se consideran mapas patológicos ya que los mismos, más allá de ser deterministas, generan secuencias pseudoaleatorias. Esto se puede ver en la topología de sus diagramas de fases (ver C). Sin embargo, se puede observar que salvo el generador congruencial (16), todos los demás mapas están bien diferenciados de los ruidos aleatorios ya que poseen menores valores de complejidad. La razón por la que los valores de la complejidad de los mapas caóticos sean menor que los MFB, RFG y k-ruidos, se debe a que los primeros son de naturaleza determinística, y por ello el número de patrones diferentes necesarios para recrear la señal original es menor que la requerida en una señal de origen aleatorio. En su mayoría, los mapas conservativos poseen menor complejidad que los mapas disipativos y los no invertibles, siendo estos últimos los que más complejidad poseen.

MAPAS DE SCHUSTER: son los mapas de mas baja entropía, con un valor $H_{PE} < 0,6$. esto está dado en que los mapas de Schuster poseen regiones laminares de muy bajo ruido separadas por estallidos caóticos. Al disminuir el parámetros z , se observa un marcado aumento de H_{PE} moviéndose hacia la región de las señales caóticas. Esto se debe a que al disminuir el exponente z , disminuye el tamaño de la región laminar, implicando que el sistema se asemeja más a un sistema caótico completo.

MOVIMIENTO FRACCIONAL BROWNIANO: si se observa la figura 16A, los MFB se mantienen en una región intermedia entre el grupo de las señales caóticas y el grupo de las señales aleatorias. Lo mismo esta dado ya que son procesos que nacen de la integración de los RFG, es decir, se generan mediante un proceso de suma paso por paso. Para H cercano a 0, se tiene un ruido altamente descorrelacionado, lo que implica un proceso bastante desordenado y por lo tanto los valores de la entropía y de la complejidad son altos. Mientras H aumenta, la descorrelación en los ruidos disminuye, pasando a tener una correlación cada

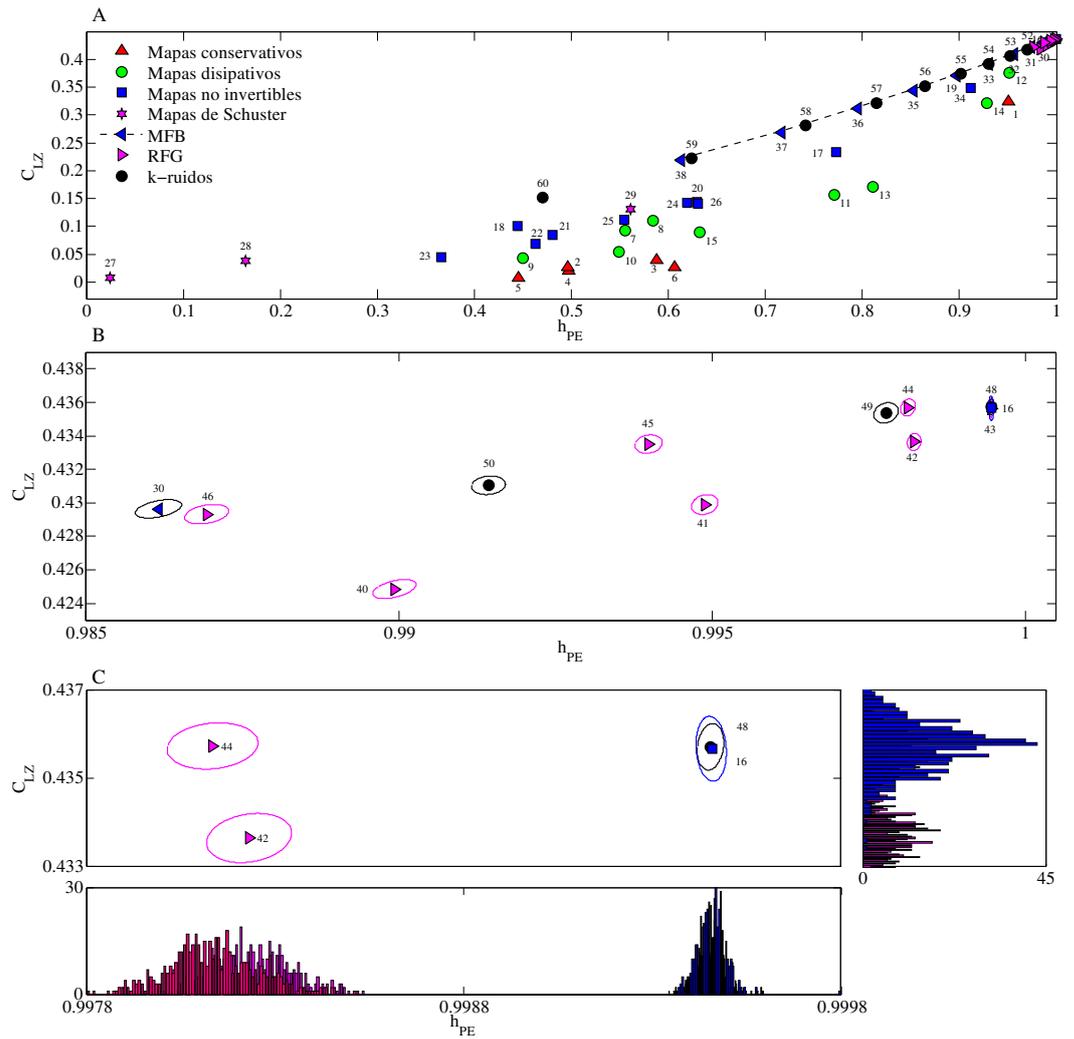


Figura 16: Plano de complejidad de permutación de Lempel-Ziv vs entropía de permutación aplicado a mapas caóticos, ruidos correlacionados y no correlacionados. (A) Distribución de los mapas caóticos (mapas conservativos, mapas disipativos, mapas no invertibles, mapas de Schuster) y ruidos correlacionados (MFB, RFG, k-ruidos), el análisis de los resultados se encuentran en la sección 5.3. (B) Ampliación de la zona de mayor entropía y complejidad del plano. Los promedios y las elipses del desvío estándar corresponden a los valores calculados sobre 10^6 ensambles por señal. (C) Valores de complejidad y entropía para el mapa generador congruencial, para el ruido blanco y RFG con menor correlación. Los histogramas laterales pertenecen a los valores de complejidad y entropía calculados sobre un conjunto de 10^6 ensambles por cada señal analizada. Los valores de entropía h_{PE} y complejidad C_{LZ} están normalizados. Todos los mapas analizados en esta figura se encuentran en la tabla 1, apéndice C.4

vez más alta. Como consecuencia se producen procesos cada vez más organizados y con una tendencia muy marcada, lo que conduce a valores de entropía y complejidad menores.

RUIDO FRACCIONAL GAUSSIANO: en la figura 16B se puede ver claramente, que para $H < 1/2$ la entropía y la complejidad aumentan al crecer el índice H . Esto es debido a que se produce una disminución de la anticorrelación y por lo tanto hay un aumento de la aleatoriedad. En $H = 1/2$, el RFG corresponde a un ruido blanco (k -ruido con $k = 0,0$), con la entropía y la complejidad alcanzando sus valores máximos ($H_{PE} = 0,998$, $C_{LZ} = 0,436$). A medida que el exponente $H > 1/2$ crece, comienzan a aparecer correlaciones positivas haciendo decrecer tanto los valores de complejidad como de entropía⁴. Se puede observar que los valores de C_{LZ} correspondientes a la señales de RFG con correlación negativa son menores a las que poseen correlación positiva. Esto puede deberse a que los procesos de correlación negativa son de corto alcance, mientras que los procesos de correlación positiva son de largo alcance. Los valores de C_{LZ} estarían indicando que se requiere una mayor cantidad de símbolos para almacenar la información, de las señales que poseen correlaciones de largo alcance, que para las del caso contrario.

k-RUIDOS: lo que se observa en este caso es que al aumentar la correlación en el ruido (es decir aumentando el valor de k), los valores de entropía y complejidad decrecen. Como fue dicho, los valores máximos de entropía y de complejidad se alcanzan para $k = 0$. En la figura 16C, se observan los histogramas calculados para los valores de entropía (histograma inferior) y los de complejidad (histograma lateral) existen señales las cuales se distinguen muy bien para los valores de entropía, pero no para la complejidad como ser RFG con $H = 0,6$ (44), y el ruido blanco (48). Esto también ocurre para el caso contrario, señales donde su distinción se hace muy marcada para los valores de complejidad, y no así para los valores de entropía, como ser el caso de RFG con $H = 0,6$ (44) y RFG con $H = 0,4$ (42). Esto indica que el uso de un mapa permite una mejor distinción de las diferentes señales. Sin embargo se debe tener en cuenta que el mapa generador congruencial (16), posee los mismo valores de complejidad y de entropía que ruido blanco. Como se comentó en el capítulo 4 este mapa es un muy buen generador de ruido pseudoaleatorio, por lo cual la distinción entre estas dos señales se vuelve una tarea difícil de resolver.

⁴ Estos resultados se corresponden con los resultados obtenido en otro tipo de planos [58, 59].

5.4 APLICACIONES DEL PLANO C_{LZ} VS H_{PE} A SEÑALES DE EEG

En esta segunda parte se ampliará el trabajo realizado en el capítulo 2 sobre la cuantificación del tratamiento farmacológico de un paciente con epilepsia idiopática generalizada (EIG). En este caso se lo hará, mediante el seguimiento del paciente en cuatro diferentes etapas de su tratamiento. Luego de los resultados expuestos en el capítulo 2, al mismo paciente se le realizaron nuevos estudios, ampliando el número de observaciones durante su tratamiento farmacológico. Para los detalles de las características clínicas del paciente, ver el capítulo 2.2.3. El aspecto novedoso del tratamiento clínico del paciente es que luego de ocho meses, los especialistas cambiaron su medicación, administrando una dosis de lamotrigina 400 mg/día, y 1500 mg/día de levetiracetam (periodo T_2). Esto produjo que el paciente tuviera una crisis convulsiva cada tres meses. Viendo la mejora del paciente bajo este esquema de medicación, luego de 5 meses (periodo T_3), los especialistas ajustaron la dosis de levetiracetam a 2000 mg/día, lamotrigina 400 mg/día y por un lapso de 8 meses hasta el presente, el paciente no ha tenido ninguna crisis.

Para cada etapa explicada, al paciente se le realizó un EEG bajo las mismas condiciones (posición basal, ojos cerrados, y no presentó crisis convulsiva mientras se realizaba el registro). Las señales fueron tomadas con una frecuencia de muestreo de 65 Hz y filtradas entre 0,5 y 70 Hz. Luego se procedió al análisis de cada canal en el plano complejidad-entropía. También se procedió a la comparación con los valores correspondientes a un grupo de control figura 17.

Observando la figura 17, se ve claramente como a medida que el esquema de medicación se va modificando, y el paciente presenta un mejora clínica; los valores de complejidad y de entropía pasan de estar fuera del área correspondiente a los valores del grupo control a estar dentro, y cada vez más se acercan a los valores medios calculados para el grupo de control.

Esto representa una convalidación adicional a los resultados presentados en el capítulo 2.2.2. Además se puede observar que este método de análisis permite una mejor visualización de los resultados en comparación a los expuestos en dicho capítulo.

5.5 DISCUSIÓN

En este capítulo se ha presentado el plano complejidad de permutación de Lempel-Ziv vs entropía de permutación. Mediante el análisis de mapas caóticos, ruidos correlacionados y no correlacionados, se ha podido observar que este plano complejidad-entropía es una buena herramienta para distinguir y caracterizar señales caóticas de ruidos aleatorios.

Pudo verse que las señales de origen aleatorias poseen valores de en-

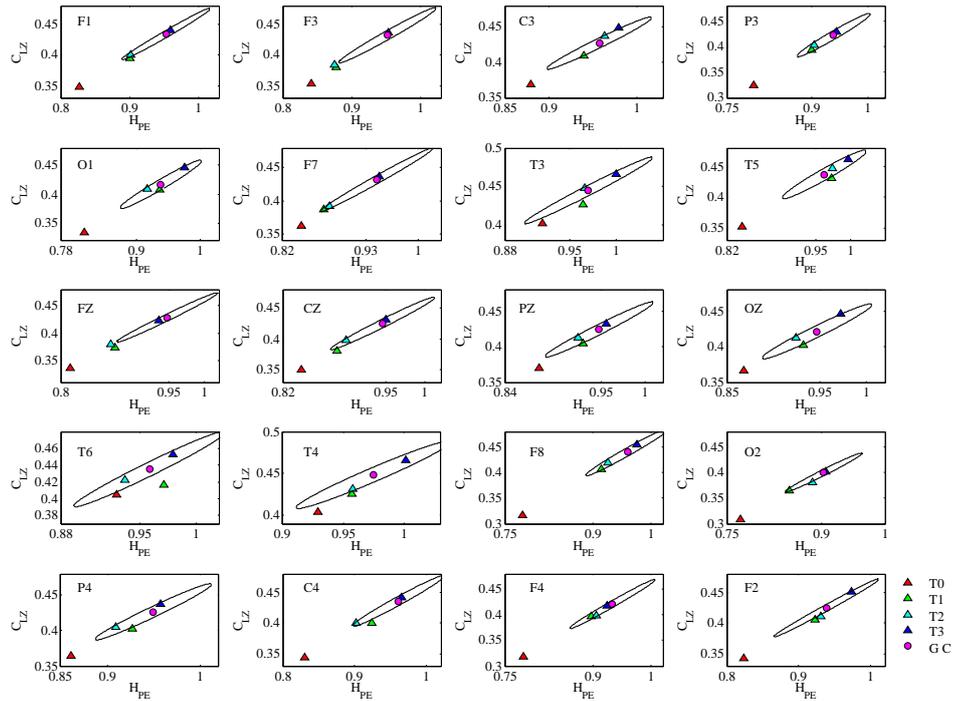


Figura 17: Planos complejidad-entropía analizados para los 20 canales del EEG. Los triángulos corresponden a los registros de EEG pertenecientes al paciente con EGI realizados en las diferentes etapas del tratamiento farmacológico. Los puntos con la elipse corresponde a los valores medios del grupo control de 20 pacientes con su correspondiente desvío estándar. Como se puede observar a medida que el tratamiento avanza, los valores de complejidad y entropía se van corriendo hacia la zona del grupo control.

tropía y complejidad superiores a las señales caóticas. Además que señales caóticas pueden ser muy bien distinguidas entre ellas. Se ha podido describir el comportamiento de otro tipo de señales caóticas como ser los mapas de Schuster. Se observó que mediante el aumento de parámetro z , el cual permite disminuir las zonas de estabilidad de la secuencia, los valores de complejidad y entropía en el plano se hacen cada vez más cercanos a la zona donde residen la mayoría de los mapas caóticos.

Se observó que las señales de origen aleatorio tanto correlacionadas como no correlacionadas poseen valores de complejidad y entropía mayores que las señales de origen determinístico. Los ruidos que poseen poca correlación o ninguna, como ser el caso del ruido blanco, alcanzan los valores de complejidad y entropía máximas dentro del plano. A medida que la correlación comienza a ser mayor los valores tanto de entropía como de complejidad comienzan a disminuir, pero siempre son superiores a los valores de las señales caóticas.

El mapa ha demostrado ser una herramienta muy útil para la discriminación de las señales aleatorias y determinísticas, siendo a su vez una buena forma de caracterización de dichas señales y siendo robusta al cambio del parámetro de inmersión d .

En la segunda parte, se aplicó el análisis de las señales de EEG del paciente con epilepsia presentado en el capítulo 2. En esta ocasión se analizó cuatro estadios diferentes en el seguimiento prospectivo del paciente. Se logró correlacionar la mejora clínica producida por la administración de la medicación, con los de valores en plano C_{LZ} vs H_{PE} correspondientes a los diferentes EEG analizados. De esto modo se ha propuesto que el plano complejidad-entropía es una buena herramienta para cuantificar los efectos del tratamiento farmacológico y facilitando la lectura de la evolución del mismo.

En otras palabras el uso del plano complejidad-entropía es un método muy útil para el análisis señales de diferente naturaleza proporcionando una manera eficaz de hacer un análisis tanto estadístico como determinístico. Se quiere destacar que esta manera de presentar los resultados puede ser de gran utilidad práctica, por ejemplo en el ámbito clínico.

CONCLUSIONES Y TRABAJOS A FUTURO

CONCLUSIONES FINALES

El análisis de los datos tiene una larga historia y aún así da lugar a una enorme cantidad de investigaciones. Entre los desafíos, especialmente para el análisis de señales naturales tales como las señales biomédicas, existe la necesidad de caracterizar el grado de organización o el grado de complejidad de la señal. El problema es detectar los cambios en la señal que no se pueden analizar visualmente, como así también el problema de caracterización de la naturaleza de los cambios específicos en una secuencia. La literatura correspondiente a la teoría de la información y del análisis de sistemas dinámicos proporciona un importante número de herramientas y métodos para resolver estos desafíos. En esta tesis, se propusieron nuevas herramientas tomadas de la teoría de la información para analizar dichas series.

En la primer parte del trabajo se introdujo la idea de la entropía de permutación, la cual permite ver la dinámica subyacente a una señal mediante la realización de una reconstrucción de los datos en el espacio de fase de la señal. Ésta se basa en la cuantificación de los datos considerando sólo las tendencias, en lugar de los valores de la secuencia. Mediante el uso de este método, se abordó el problema del análisis de EEG de un paciente quien sufría de epilepsia generalizada idiopática. Los resultados obtenidos fueron positivos, ya que mediante el uso de EP se pudo observar una mejora sustancial del paciente, luego del cambio del tratamiento farmacológico.

Otro de los temas propuestos fue una herramienta que mezcla dos enfoques: la entropía de permutación y la complejidad de Lempel-Ziv. La idea fue tratar de obtener la ventaja sobre ambos enfoques, el primero de los cuales es estadístico, y el segundo determinista a esto se le llamó la complejidad de permutación de Lempel-Ziv.

Se pudo ver que para señales multidimensionales, utilizando el mapeo vectorial de permutación de Bandt y Pompe, la complejidad de permutación de Lempel-Ziv mejora notablemente la detección de los cambios de regímenes en la señal, en comparación con el cálculo de la entropía de permutación. Finalmente se analizó un EEG de un paciente sufriendo una crisis convulsiva sufrida por epilepsia. En el mismo se observó que la complejidad de permutación Lempel-Ziv detecta tiempos característicos de la crisis, que otros análisis no lo pueden hacer.

Se desarrolló una herramienta que permite hacer una distinción entre secuencias caóticas y ruidos de diferentes tipos. Para ello se introdu-

jo la idea de aplicar la divergencia de Jensen-Shannon sobre la señal cuantificada a través de una asignación alfabética. Esta idea se utilizó sobre señales caóticas y ruidos correlacionados permitiendo generar una matriz distancia entre las diferentes secuencias. Además se desarrolló un método por medio de ventanas deslizantes que se utilizó para la detección del cambio de régimen caos-ruido en señales mixtas. Además se aplicaron estos dos métodos a señales reales, dando como resultado que la matriz distancia permitía distinguir grupos de pacientes con afecciones cardíacas de pacientes sanos, y que mediante el método de ventanas se podía detectar el momento en que el eje de un motor eléctrico pasaba de estar en posición alineado a estar desalineado.

Finalmente tomando las ideas de entropía de permutación y complejidad de permutación de Lempel-Ziv, se propuso una nueva forma de analizar las señales, mediante un plano complejidad de permutación de Lempel-Ziv vs entropía de permutación. Nuevamente se tomaron secuencias caóticas y ruidos correlacionados, ambos obtenidos de la literatura, y se los analizaron en el plano complejidad vs entropía. Lo que el mapa puede distinguir entre secuencias caóticas y aleatorias con mayor precisión que utilizando cada método por separado. Además se puede observar la diferenciación de los ruidos correlacionados, dependiendo de la correlación de los mismo. También se aplicó el plano a señales de EEG retomando el caso del capítulo 2, donde se pudo cuantificar la mejoría del paciente a lo largo del tratamiento farmacológico y comparándolo con su evolución clínica.

De lo expuesto en el presente trabajo se puede concluir que el uso de la teoría de la información para abordar el análisis de las series temporales, está aportando grandes resultados a este campo. Por lo tanto su estudio es de suma importancia, para aportar nuevos métodos de análisis a las series temporales.

TRABAJOS FUTUROS

Los caminos futuros que pueden tomar cada una de las temáticas presentadas en este trabajo son numerosos, ya que cada una de ellas da lugar a nuevas preguntas a responder. A continuación se dará un breve panorama de como se podrían continuar cada uno de los temas presentados anteriormente.

Comenzando con el capítulo 2, la idea de calcular la entropía de Shannon una vez cuantificada la señal por medio de los vectores permutación, puede ampliarse si se toman otros tipos de entropías presentes en la bibliografía, como ser la entropía de Rényi o la entropía de Fisher, entre otras. El uso de otros tipos de entropías puede dar información sobre las series temporales que no las provee la entropía de Shannon, un ejemplo de esto se ha demostrado al aplicar la entropía de Tsallis a una series de vectores permutación, daba mayor informa-

ción que al utilizar la clásica entropía de Shannon [192].

Más allá de las diferentes técnicas matemáticas usadas en este trabajo, existe una idea de desarrollar algoritmos los cuales puedan ser usados en el ambiente clínico. Otro ámbito importante a desarrollar en un futuro, particularmente aplicado a las señales de EEG, es la de analizar las series temporales mediante la asignación de los vectores permutación de manera vectorial como se explicó el capítulo 2. Esto permitiría trabajar con la información de varios canales del EEG al mismo tiempo.

La idea planteada anteriormente puede ser extrapolada para el cálculo de la complejidad de permutación de Lempel-Ziv explicada en el capítulo 3. Como se vió en el caso de la ecuación logística 3-dimensional el uso de una asignación vectorial permitiría una mejor detección de los regímenes caos-ruido. Estas mejoras pueden ser aplicadas al análisis de señales multidimensionales, del tipo polisomnográficas, EEG o MEG.

En el capítulo 4 se ha trabajado aplicando la DJS a una señal cuantificada por medio del mapeo alfabético. Se pueden tomar otros tipos de asignaciones y ver si la detección DJS mejora, o usar otro tipos de métricas para medir distancia entre FDP. Además, otra vez, la cuantificación puede hacer con señales multidimensionales para luego aplicarle la DJS u otra métrica para detectar los cambios en el conjunto de señales.

Como se ha mostrado todas estas herramientas no están acotadas a un tipo de dato en particular, por lo cual otra idea a desarrollar es generar un esquema que permita ampliar el campo de aplicación de estas herramientas. Algunos ejemplos podrían ser datos de origen, climáticos, sociales y económicos entre otros.

Finalmente con relación a los mapas entropía complejidad expuestos en el capítulo 5. Una posibilidad es usar el mapa como un diagrama de fase, esto quiere decir hacer un seguimiento de los valores de entropía y complejidad a lo largo del tiempo. Esto podría mostrar como se comporta la señal a entrar en diferentes regímenes (por ejemplo de caos y ruido). Particularmente con relación al estudio de los EEG, la idea es ver si los resultados expuestos pueden ser reproducidos cuando un paciente sufre crisis focales, esto significa que la alteración no se expresa en todo cerebro. Hay indicios que solamente en los canales que se presenta la alteración, los valores de entropía y complejidad cambian, mientras que en los canales no alterados permanecen con valores normales.

Parte I

APÉNDICE

DETALLES TÉCNICOS DE LA IMPLEMENTACIÓN DE CPLZ

En este apéndice se quiere profundizar sobre el algoritmo de cálculo de la complejidad de permutación de Lempel-Ziv. Se mostrará como construir los vectores de inmersión $\mathbf{Y}_{(d,t)}^t$, luego como a partir de éstos generar los vectores rango $\Pi_{(d,t)}^t$ y finalmente como calcular la CLZ de la secuencia de vectores $\Pi_{(d,t)}^t$.

Se debe notar que cuando dos componentes de un vector son iguales, una ambigüedad se mantiene al realizar el procedimiento de permutación. Esta situación aparece con una probabilidad de cero, para el estado de una secuencia continua y aleatoria i.i.d, pero puede aparecer en secuencias constantes o periódicas. Para evitar una ambigüedad tal, Bandt y Pompe propusieron añadir una pequeña perturbación a los valores, que es equivalente a elegir al azar el valor "más pequeño" entre dos valores iguales. Por ejemplo, en el caso de una secuencia constante, los vectores de permutación pueden reflejar sólo el comportamiento de la perturbación, y por lo tanto la entropía de permutación y la complejidad de permutación de Lempel-Ziv son valores del ruido y no de la señal bajo análisis. Para superar tal dificultad, cuando tenemos dos valores iguales en una señal, se toma como el valor más pequeño del vector inmersión, al valor más antiguo. En el ejemplo de una señal constante, la secuencia de vectores de permutación será constante. Por el contrario, en una secuencia observada puede ser corrompida por un bajo nivel de ruido. Este ruido puede ocultar la complejidad de la secuencia cuando se evalúan los vectores de permutación.

En el ejemplo de una señal constante se ilustra de nuevo el impacto de los ruidos. Para contrarrestar las perturbaciones, una forma de eliminación de ruido o filtrar la secuencia observada puede consistir en elegir un valor $\delta \geq 0$, para dos componentes $Y(i)$ e $Y(j)$ de un vector (espacio-fase). Si $|Y(i) - Y(j)| \leq \delta$ a continuación, $Y(i)$ e $Y(j)$ se interpretan como iguales. En un sentido, δ es un radio de confianza en los datos medidos. Si $\delta = 0$, esto significa que tenemos perfecta confianza en los datos medidos, mientras que para $\delta > 0$ se tiene en cuenta la posible perturbaciones en las medidas. En otras palabras, δ puede elegirse para que sea igual a la resolución de la adquisición de los datos. Prácticamente, el evaluar $C_{d,\tau}^\pi(X_t)$ se puede hacer de forma recursiva, alternando el cálculo de los vectores de rango y la actualización de la complejidad:

PASO 0: Se construye el primer vector d -dimensional $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_t^{d,\tau}$ y se evalúa el vector rango $\Pi_t = \Pi_Y$, $t = 0$; se almacena este vector

de rango en una columna, e inicializa el algoritmo Lempel-Ziv (implícitamente, la primera etapa de producción).

PASO 1: $t \leftarrow t + 1$: se sustituye de \mathbf{Y} por el nuevo vector de la trayectoria, y se evalúa el nuevo vector de rango Π_t a ser almacenado en la columna.

PASO 2. Se actualiza la complejidad de Lempel-Ziv usando este vector de rango, y luego vuelve al paso 1.

En el caso donde $\tau = 1$, la evaluación del vector rango Π_t en el tiempo t se puede simplificar mediante el uso Π_{t-1} . De hecho, en la trayectoria del vector construido \mathbf{Y} , el primer punto $X_{sal} = Y(0)$ desaparece, los otros $d - 1$ componentes se desplazan, y el siguiente punto de la secuencia de escalar X_t aparece como el último de la componente de \mathbf{Y} . La permutación de las componente i (anteriormente $i + 1$, $i = 1, \dots, d - 1$) cambia sólo si cualquiera $X_t \geq Y(i)$ y $X_{sal} \leq Y(i)$ (el rango disminuye) o $X_t < Y(i)$ y $X_{out} > Y(i)$ (el rango aumenta). Esta es una actualización de la clasificación, de este modo se puede hacer con d dobletes de comparaciones (que buscan también el rango del nuevo punto X_t).

En la complejidad de Lempel-Ziv, al comenzar un nuevo paso de la producción, el algoritmo de [67] consiste en probar todas las posibilidades construidas por el puntero como sea posible, en una etapa de producción, y quedarse con la historia que da el mayor paso de producción: este es lo que se da a llamar una etapa de producción *exhaustiva*.

El algoritmo recursivo se describe en detalle por el diagrama de flujo que se muestra en la figura 18; en este sencillo caso, $\tau = 1$. Para $\tau > 1$, el mismo esquema se mantiene, excepto que tenemos que guardar los primero τ vectores de rango entonces almacenar los τ vectores \mathbf{Y} , digamos $\mathbf{Y}_0, \dots, \mathbf{Y}_{\tau-1}$, y el uso de ambos $\mathbf{Y}_{t \bmod \tau}$ y $\Pi_{t-\tau}$ para evaluar de forma recursiva Π_t . Para un radio de confianza distinto de cero, en el algoritmo que esta descrito en la figura 18, $x > y$ (y, respectivamente, $x \geq y$) es entonces reemplazado por $x > y + \delta$ (respectivamente, $x \geq y + \delta$) y $x < y$ (Respectivamente, $x \leq y$) por $x < y - \delta$ (respectivamente, $x \leq y - \delta$).

Hay que tener en cuenta que hay varios algoritmos que clasifican un vector rápidamente [193, 194]. En general, estos algoritmos trabajan mediante la partición recursiva de los puntos que se quieren clasificar, de una forma parcialmente ordenada (a través de un árbol), o mediante una realización más de clasificación más "a la fuerza". En general, el costo computacional de los algoritmos más optimizados es $O(d \log d)$ en lugar de $O(d^2)$ para los métodos comunes. Podría utilizarse este algoritmo, utilizando la particiones en la etapa $t - 1$, para determinar el paso en la etapa t , dando un costo computacional en $O(\log d)$ en lugar de d . Sin embargo, en la práctica, la entropía Bandt-Pompe (y aquí la complejidad de permutación Lempel-Ziv) se

estudia en baja dimensiones, de modo que el costo computacional de un enfoque de cálculo a la fuerza, es relativamente próximo a la de los enfoques más rápidos. Por lo tanto, no se va a profundizar en tipo de posibles mejoras del algoritmo propuesto. Por último, señalar que, contrariamente a la entropía permutación, la Lempel-Ziv se puede evaluar "en línea", es decir, actualizando los valores, adquisición por adquisición.

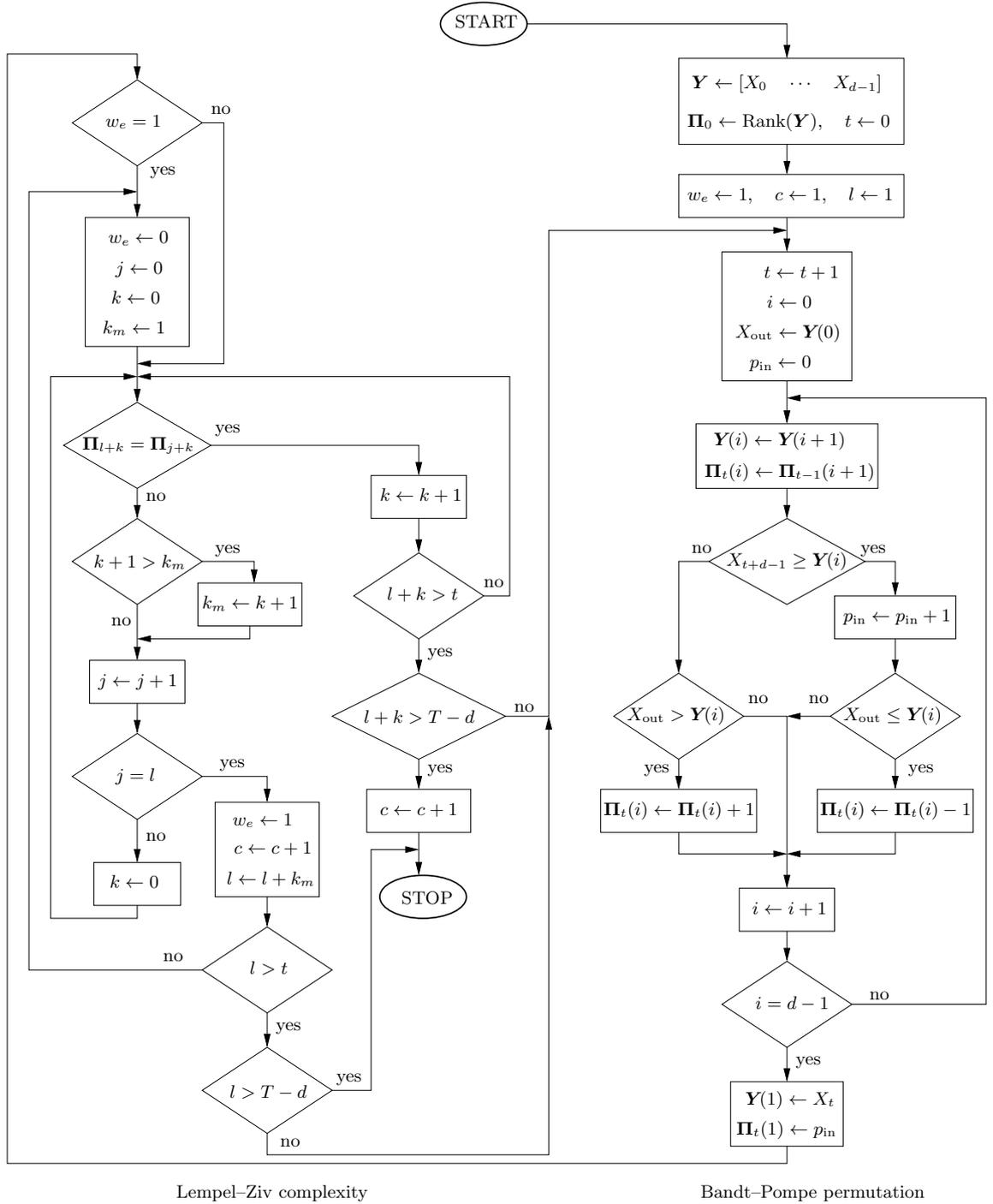


Figura 18: Diagrama de flujo del algoritmo de aplicación de la complejidad de permutación de Lempel-Ziv $C_{(d,\tau)}^\Pi$ para una secuencia escalar. En este diagrama $\tau = 1$ (véase el texto para la extensión a cualquier τ) y el tamaño de la secuencia se denota T . w_e marcas cuando una palabra es exhaustiva o no, i es el comienzo de una palabra exhaustiva, j el puntero, y k_m el tamaño de la palabra actual [22, 67]

BREVE INTRODUCCIÓN AL EEG

B.1 INTRODUCTION

El análisis de los datos obtenidos a través de registros de EEG ha sido uno de nuestros principales temas de estudio. Es así que da una breve explicación del funcionamiento de un EEG, y se explica el tipo de montaje experimental utilizado en todos los experimentos descritos en este trabajo.

La electroencefalografía (EEG) es típicamente un método no invasivo; sin embargo existen electrodos invasivos que se utilizan a menudo en aplicaciones específicas para registrar la actividad eléctrica del cerebro a lo largo de la corteza cerebral. Un EEG mide las fluctuaciones de las tensiones resultantes de las corrientes iónicas procedentes de las neuronas de las capas superficiales del cerebro [116]. En contextos clínicos, el EEG se refiere a la adquisición de la actividad eléctrica espontánea del cerebro durante un período de tiempo [116], a partir del registro de múltiples electrodos colocados en el cuero cabelludo. Las aplicaciones para el diagnóstico se centran generalmente en el contenido espectral de EEG, es decir, el tipo de oscilaciones neurales que se pueden observar en las señales de EEG.

El EEG se utiliza frecuentemente para diagnosticar epilepsia, enfermedad que causa anomalías en las lecturas de EEG. También se utiliza para diagnosticar trastornos del sueño, coma, encefalopatías y la muerte cerebral [195]. El EEG solía ser un método de primera línea del diagnóstico de tumores, accidentes cerebrovasculares y otros trastornos cerebrales focales. Pero este uso ha disminuido con el advenimiento de las técnicas de imagen anatómicas de alta resolución, como la resonancia magnética (RM) y la tomografía computarizada (TC). A pesar de la resolución espacial limitada, el EEG sigue siendo una herramienta valiosa para la investigación y el diagnóstico. Algunas de las ventajas y desventajas del uso del EEG las podemos resumir de la siguiente manera:

Ventajas:

- Los costos de hardware son significativamente más bajos que los de la mayoría de otras técnicas.
- El EEG tiene una resolución temporal muy alta, del orden de milisegundos. El EEG se registra habitualmente a velocidades de muestreo entre 65 y 2000 Hz en clínica, pudiendo ser muy superiores en el campo de la investigación.

- El EEG es una poderosa herramienta para el seguimiento de los cambios cerebrales durante las diferentes fases de la vida, por ejemplo la fase de sueño no son las mismas para un adulto que para un niño.
- Operativamente es mucho más sencillo que otros métodos tales como la resonancia magnética funcional (RMf), magnetoencefalografía (ME), etc. Al paciente no se lo expone a altos campos magnéticos, ni a radiaciones.
- Es relativamente tolerante al movimiento del paciente.

Desventajas:

- EEG tiene muy poca precisión para medir la actividad neuronal que se produce por debajo de las capas superiores del cerebro (corteza cerebral).
- A menudo toma mucho tiempo para conectar el EEG a un paciente, ya que requiere la colocación precisa de decenas de electrodos alrededor de la cabeza y el uso de diversos geles, soluciones salinas, y/o pastas para mantenerlos en su lugar.
- La relación señal-ruido es pobre, por lo que para análisis de datos sofisticados, se requiere un gran número tanto de mediciones como de sujetos para extraer información útil.

B.2 QUE ES LO QUE MIDE EEG

Las cargas eléctrica del cerebro se mueven por miles de millones de neuronas. Las neuronas están cargadas eléctricamente (o "polarizadas"), gracias a las proteínas de transporte que bombean iones a través de sus membranas. Las neuronas están constantemente intercambiando iones con el medio extracelular, por ejemplo para mantener potencial de reposo y propagar potenciales de acción. Los iones que poseen carga similares se repelen entre sí, formando una cascada de propagación. Este proceso se conoce como volumen de conducción. Cuando la cascada de iones alcanza los electrodos colocados en el cuero cabelludo, pueden repeler o atraer los electrones presentes en el metal en los electrodos. Dado que el metal conduce estos electrones fácilmente, la diferencia de potencial entre dos electrodos es medida por un voltímetro. El registro de estas tensiones a través del tiempo nos da el trazado del EEG [196].

El potencial eléctrico generado por una neurona individual es demasiado pequeño para ser recogido por el EEG [197]. Por lo tanto, el EEG refleja la suma de la actividad sincrónica de miles o millones de neuronas que tienen una orientación espacial similar. Si las células no tienen orientación espacial similar, sus iones no podrán moverse hacia el mismo lado y crear ondas para ser detectados. Se cree que

las neuronas piramidales de la corteza son las que generan la mayor parte de la señal del EEG, porque están bien alineadas y generalmente disparan todas en sincronía. Debido a que los campos eléctricos decaen con el cuadrado de la distancia, la actividad de fuentes profundas es más difícil de detectar que las corrientes cerca del cráneo [198].

El EEG muestra oscilaciones en una variedad de frecuencias. Varias de estas oscilaciones tienen rangos de frecuencia características, distribuciones espaciales y están asociadas con diferentes estados de funcionamiento del cerebro (por ejemplo, la vigilia y las diversas fases de sueño). Estas oscilaciones representan la actividad sincrónica a través de una red de neuronas. Se entiende que existen redes neuronales que subyacen a algunas de estas oscilaciones, por ejemplo la resonancia de la neuronas que forman el área talamocortical, subyacen a las oscilaciones que aparecen en el sueño. Experimentos que miden tanto señales provenientes del EEG y mediciones sobre el número de disparos de las neuronas, muestran que la relación que existe entre ambas señales es compleja, siendo una combinación de la potencia en la banda gamma del EEG, y la fase relativa en la banda delta de las señales, las más fuertemente asociadas a la actividad de disparos de las neuronas [199].

B.3 EL SISTEMA INTERNACIONAL 10 – 20

El sistema internacional 10 – 20 (figura 19) es un método reconocido internacionalmente para describir y aplicar la ubicación de los electrodos del cuero cabelludo, en el contexto de una prueba o experimento de EEG [112]. Este método fue desarrollado para asegurar la reproducibilidad estandarizada, de manera que los estudios de un mismo sujeto pueden ser comparados con el tiempo, y también comparar sujetos entre sí. Este sistema se basa en la relación entre la ubicación de un electrodo y la zona subyacente de la corteza cerebral. El "10" y el "20" se refieren al hecho, de que las distancias reales entre electrodos adyacentes son del 10 % o 20 % de la distancia delantera-trasera total, o distancia derecha-izquierda del cráneo.

Cada sitio tiene una letra para identificar el lóbulo cerebral y un número para identificar la ubicación hemisferio. Las letras F, T, C, P y O representan frontal, temporal, parietal, y los lóbulos occipitales centrales, respectivamente. Tenga en cuenta que no existe un lóbulo central; la letra C se utiliza sólo con fines de identificación. Az (que significa A cero) se refiere a un electrodo colocado en la línea media. Incluso los números (2, 4, 6, 8) se refiere a las posiciones de electrodos en el hemisferio derecho, mientras que los números impares (1, 3, 5, 7) se refieren a aquellos situados en el hemisferio izquierdo. Además, el códigos de letras A, P y F es para identificar los lóbulos de las orejas, sitios polares nasofaríngeos y frontal respectivamente.

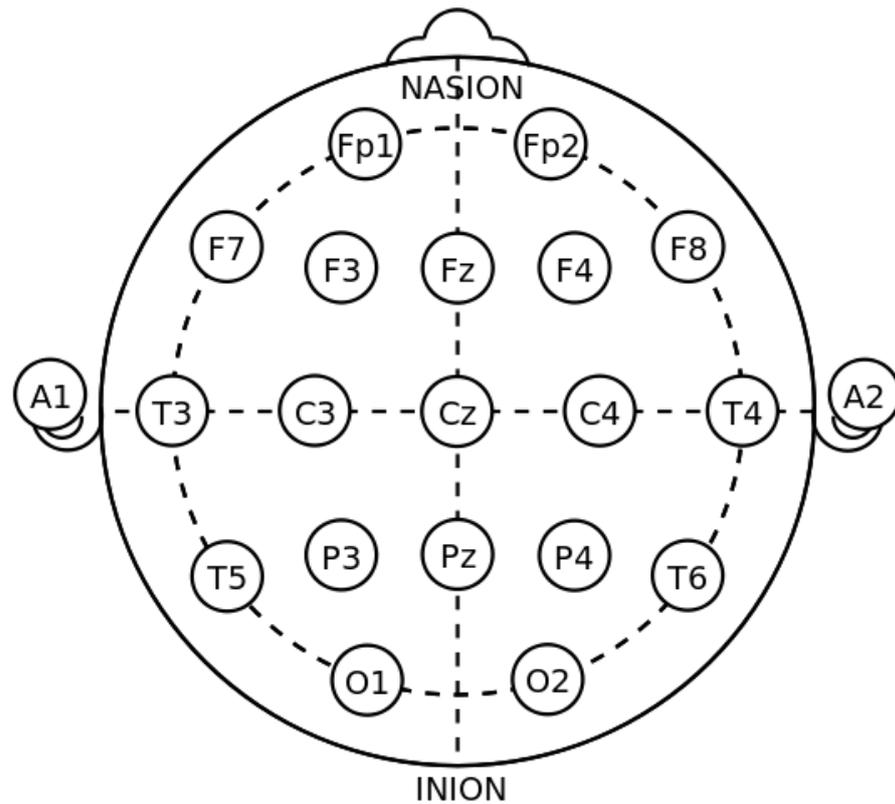


Figura 19: Posición de los electrodos de registro de EEG, según el sistema internacional 10-20

Este sistema es el que fue utilizado para el registro de todos los pacientes reportados en este trabajo.

Dos puntos de referencia anatómicos se utilizan para el posicionamiento esencial de los electrodos de EEG: primero, el nasión que es la zona deprimida claramente entre los ojos, justo por encima del puente de la nariz; segundo, el inion, que es el punto más bajo del cráneo de la parte posterior de la cabeza y normalmente se indica por una protuberancia prominente.

MAPAS CAÓTICOS

En este apéndice se ofrece una descripción de los mapas caóticos utilizados en los capítulos 4 y 5.

C.1 MAPAS NO INVERTIBLES

A continuación se hará una lista de los mapas no invertibles, con los parámetros utilizados capítulos 4 y 5, una de las condiciones iniciales¹ y el correspondiente exponente de Lyapunov. La figura 20 muestra X_{n+1} versus X_n .

- *Generador congruencial lineal* :

$$X_{n+1} = A X_n + B \pmod{C} \quad (49)$$

Valores de los parámetros: $A = 7141$, $B = 54773$, $C = 259200$;
condición inicial: $X_0 = 0$; Exponente de Lyapunov: $\lambda = \ln|7141| = 8,873608101\dots$ [157]

- *Mapa cúbico*:

$$X_{n+1} = A X_n (1 - X_n^2). \quad (50)$$

Valor del parámetro: $A = 3$; condición inicial: $X_0 = 0,1$; Exponente de Lyapunov: $\lambda \simeq 1,0986122883$ [168]

- *Mapa cúspide*:

$$X_{n+1} = 1 - A \sqrt{|X_n|} \quad (51)$$

Valor del parámetro: $A = 2$; condición inicial: $X_0 = 0,5$; Exponente de Lyapunov: $\lambda = 0,5$ [184]

- *Mapa de Gauss*:

$$X_{n+1} = 1/X_n \pmod{1} \quad (52)$$

Valor de la condición inicial: $X_0 = 0,1$; Exponente de Lyapunov: $\lambda \simeq 2,373445$ [158]

¹ En las secuencias utilizadas en el trabajo se sortearon muchas condiciones iniciales para generar cada serie. Para $t \rightarrow \infty$, todas las series tienden a tener una topografía parecida mas allá de la condición inicial. Acá a modo de ejemplo mostraremos solo una.

- *Mapa logístico:*

$$X_{n+1} = k X_n (1 - X_n). \quad (53)$$

Valor del parámetro: $k = 4$; condición inicial: $X_0 = 0,1$; Exponente de Lyapunov: $\lambda = \ln 2 = 0,693147\dots$ [159]

- *Mapa de Pincher:*

$$X_{n+1} = |\tanh[S(X_n - C)]| \quad (54)$$

Valores de los parámetros: $S = 2$, $C = 0,5$; condición inicial: $X_0 = 0$; Exponente de Lyapunov: $\lambda \simeq 0,457944$. [160]

- *Modelo de población de Ricker:*

$$X_{n+1} = A X_n e^{-X_n} \quad (55)$$

Valores del parámetros: $A = 20$; condición inicial: $X_0 = 0,1$; Exponente de Lyapunov: $\lambda \simeq 0,384846$ [161]

- *Mapa seno circular:*

$$X_{n+1} = X_n + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi X_n) \pmod{1} \quad (56)$$

Valores de los parámetros: $K = 2$, $\Omega = 0,5$; condiciones iniciales: $X_0 = 0,1$; Exponente de Lyapunov: $\lambda \simeq 0,0353863$ [162]

- *Mapa seno:*

$$X_{n+1} = A \sin(\pi X_n). \quad (57)$$

Valor del parámetro: $A = 1$; condición inicial: $X_0 = 0,1$; Exponente de Lyapunov: $\lambda \simeq 0,689067$ [29]

- *Mapa de Spence :*

$$X_{n+1} = |\ln X_n| \quad (58)$$

Valor de la condición inicial: $X_0 = 0,5$; Exponente de Lyapunov: $\lambda \rightarrow \infty$. [163]

- *Mapa tienda:*

$$X_{n+1} = A \text{Min}\{X_n, 1 - X_n\}. \quad (59)$$

Valor del parámetros: $A = 2$; condición inicial: $X_0 = 1/\sqrt{2}$; Exponente de Lyapunov: $\lambda = \ln|2| = 0,693147181\dots$ [164]

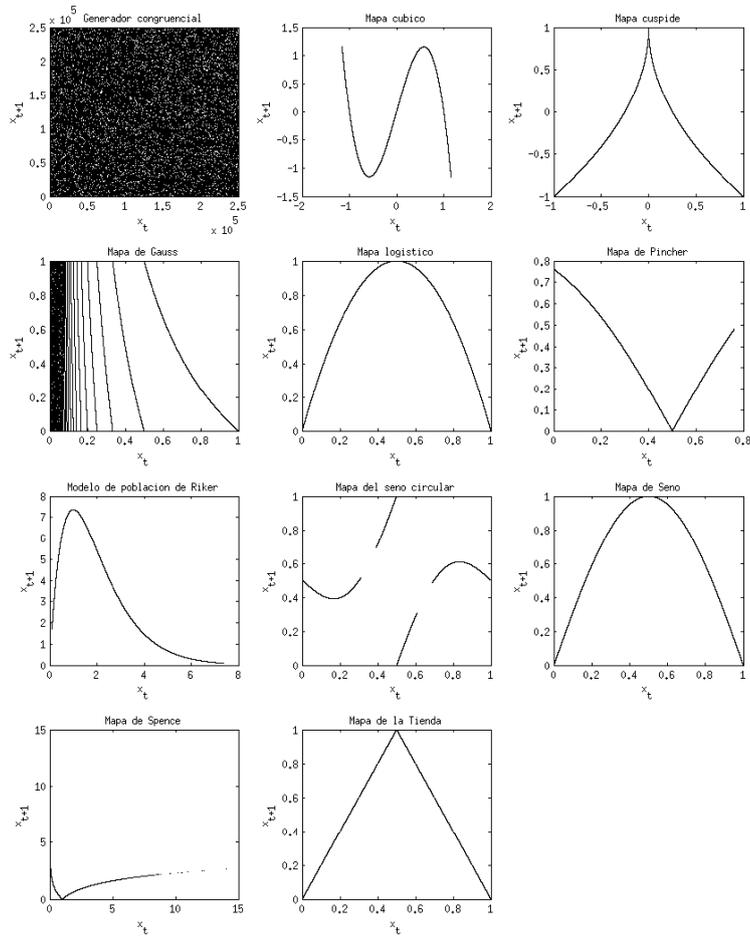


Figura 20: Representación gráfica para once mapas caóticos considerado en el presente trabajo. El gráfico muestra X_{n+1} versus X_n para mapas unidimensionales (ver la sección C.1)

C.2 MAPAS DISIPATIVOS

A continuación se hará una lista de los mapas disipativos utilizados en el trabajo, con los parámetros, condiciones iniciales y el correspondiente exponente de Lyapunov. La figura 21 muestra X_n versus Y_n .

- *Mapa de Hénon:*

$$\begin{cases} X_{n+1} = 1 - a X_n^2 + b Y_n \\ Y_{n+1} = X_n \end{cases} \quad (60)$$

Valores de los parámetros: $a = 1,4$; $b = 0,3$; condiciones iniciales: $X_0 = 0$, $Y_0 = 0,9$; Exponentes de Lyapunov: $\lambda_1 \simeq 0,41922$, $\lambda_2 \simeq -1,62319$. [165]

- *Mapa de Lonzi:*

$$\begin{cases} X_{n+1} = 1 - a |X_n| + b Y_n \\ Y_{n+1} = X_n \end{cases} \quad (61)$$

Valores de los parámetros: $a = 1,7$, $b = 0,5$; condiciones iniciales: $X_0 = -0,1$, $Y_0 = 0,1$; Exponentes de Lyapunov: $\lambda_1 \simeq 0,47023$, $\lambda_2 \simeq -1,16338$. [166]

- *Mapa logístico retrasado:*

$$\begin{cases} X_{n+1} = A X_n (1 - Y_n) \\ Y_{n+1} = X_n \end{cases} \quad (62)$$

Valores de los parámetros: $A = 2,27$; condiciones iniciales: $X_0 = 0,001$, $Y_0 = 0,001$; Exponentes de Lyapunov: $\lambda_1 \simeq 0,18312$, $\lambda_2 \simeq -1,24199$. [166]

- *Mapa campanitas:*

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n^2 - Y_n^2 + a X_n + b Y_n \\ Y_{n+1} = 2 X_n Y_n + c X_n + d Y_n \end{cases} \quad (63)$$

Valores de los parámetros: $a = 0,9$, $b = -0,6$, $c = 2$, $d = 0,5$; condiciones iniciales: $X_0 = 0$, $Y_0 = 0,5$; Exponentes de Lyapunov: $\lambda_1 \simeq 0,18997$, $\lambda_2 \simeq -0,52091$. [167]

- *Mapa disipativo estándar:*

$$\begin{cases} Y_{n+1} = b Y_n + k \sin(X_n) \pmod{2\pi} \\ X_{n+1} = X_n + Y_{n+1} \pmod{2\pi} \end{cases} \quad (64)$$

Valores de los parámetros: $b = 0,1$, $k = 8,8$; condiciones iniciales: $X_0 = 0,1$, $Y_0 = 0,1$; Exponentes de Lyapunov: $\lambda_1 \simeq 1,46995$, $\lambda_2 \simeq -3,77254$ [168]

- *Mapa cúbico de Holmes:*

$$\begin{cases} X_{n+1} = Y_n \\ Y_{n+1} = -b X_n + d Y_n - Y_n^3 \end{cases} \quad (65)$$

Valores de los parametros: $b = 0,2$, $d = 2,77$; condiciones iniciales: $X_0 = 1,6$, $Y_0 = 0$; Exponentes de Lyapunov: $\lambda_1 \simeq 0,59458$, $\lambda_2 \simeq -2,20402$ [180]

- *Mapa de Ikeda:*

$$\begin{cases} X_{n+1} = \gamma + \nu (X_n \cos\phi - Y_n \sin\phi) \\ Y_{n+1} = \nu (X_n \sin\phi + Y_n \cos\phi) \end{cases} \quad (66)$$

donde $\phi = \beta - \alpha/(1 + X_n^2 + Y_n^2)$. Valores de los parametros: $\alpha = 6$, $\beta = 0,4$, $\gamma = 1$, $\nu = 0,9$; condiciones iniciales: $X_0 = 0$, $Y_0 = 0$; Exponentes de Lyapunov: $\lambda_1 \simeq 0,50760$, $\lambda_2 \simeq -0,71832$ [181]

- *Mapa de Sinai:*

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n + Y_n + \delta \cos 2\pi Y_n \pmod{1} \\ Y_{n+1} = X_n + 2 Y_n \pmod{1} \end{cases} \quad (67)$$

Valores de los parametros: $\delta = 0,1$; condiciones iniciales: $X_0 = 0,5$, $Y_0 = 0,5$; Exponentes de Lyapunov: $\lambda_1 \simeq 0,95946$, $\lambda_2 \simeq -1,07714$ [182]

- *Mapa discreto depredador-presa:*

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n \exp[r(1 - X_n/K) - \alpha Y_n] & \text{(presa)} \\ Y_{n+1} = X_n [1 - \exp(-\alpha Y_n)] & \text{(depredador)} \end{cases} \quad (68)$$

Valores de los parametros: $r = 3$, $K = 1$, $\alpha = 5$; condiciones iniciales: $X_0 = 0,5$, $Y_0 = 0,5$; Exponentes de Lyapunov: $\lambda_1 \simeq 0,19664$, $\lambda_2 \simeq 0,03276$ [183]

C.3 MAPAS CONSERVATIVOS

A continuación se hará una lista de los mapas conservativos utilizados en el trabajo, con el parámetros utilizado, las condiciones iniciales y el correspondiente exponente de Lyapunov. La figura 22 muestra X_n versus Y_n .

- *El mapa del gato de Arnold:*

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n + Y_n \pmod{1} \\ Y_{n+1} = X_n + k Y_n \pmod{1} \end{cases} \quad (69)$$

Valores de los parametros: $k = 2$; condiciones iniciales: $X_0 = 0$, $Y_0 = 1/\sqrt{2}$; Exponentes de Lyapunov: $\lambda_{1,2} = \pm \ln[\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})] = \pm 0,96242365$ [178]

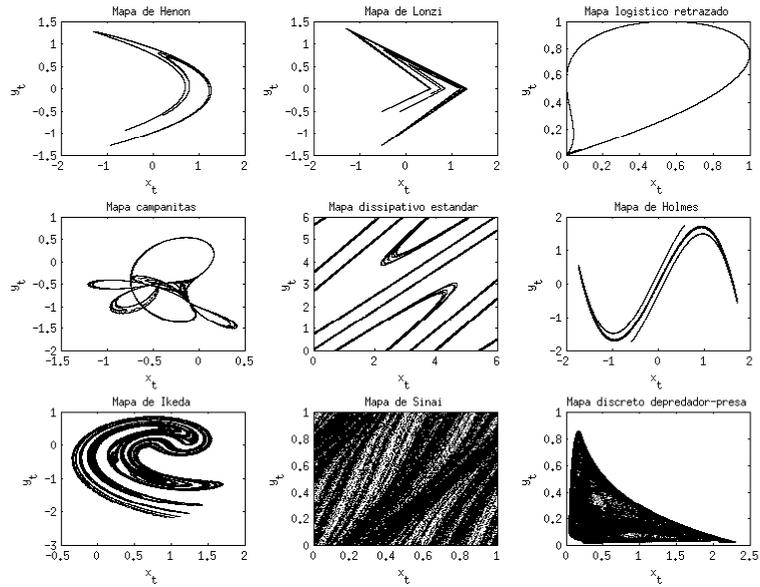


Figura 21: Representación gráfica para nueve mapas caóticos disipativos considerado en el presente trabajo. El gráfico muestra Y_n versus X_n para mapas bidimensionales (ver la sección C.2)

- *Mapa hombre de jengibre:*

$$\begin{cases} X_{n+1} = 1 + |X_n| - Y_n \\ Y_{n+1} = X_n \end{cases} \quad (70)$$

Valores de las condiciones iniciales: $X_0 = 0,5$, $Y_0 = 3,7$; Exponentes de Lyapunov: $\lambda_{1,2} \simeq \pm 0,07339$ [171]

- *Mapa estándar de Chirikov:*

$$\begin{cases} Y_{n+1} = Y_n + k \sin X_n \pmod{2\pi} \\ X_{n+1} = X_n + Y_{n+1} \pmod{2\pi} \end{cases} \quad (71)$$

Valores de los parametros: $k = 1$; condiciones iniciales: $X_0 = 0$, $Y_0 = 6$; Exponentes de Lyapunov: $\lambda_{1,2} \simeq \pm 0,10497$ [170]

- *Mapa de Hénon que preserva el área:*

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n \cos \alpha - (Y_n - X_n^2) \sin \alpha \\ Y_{n+1} = X_n \sin \alpha + (Y_n - X_n^2) \cos \alpha \end{cases} \quad (72)$$

Valores de los parametros: $\cos \alpha = 0,24$; condiciones iniciales: $X_0 = 0,6$; $Y_0 = 0,13$; Exponentes de Lyapunov: $\lambda_{1,2} \simeq \pm 0,00643$ [165]

- *Mapa de la red caótica:*

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n \cos \alpha - (Y_n + k \sin X_n) \sin \alpha \\ Y_{n+1} = X_n \sin \alpha + (Y_n + k \sin X_n) \cos \alpha \end{cases} \quad (73)$$

Valores de los parametros: $\alpha = \pi/2$, $k = 1$; condiciones iniciales: $X_0 = 0$; $Y_0 = 3$; Exponentes de Lyapunov: $\lambda_{1,2} \simeq \pm 0,04847$ [169]

- *Mapa caótico tridimensional de Lorenz:*

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n Y_n - Z_n \\ Y_{n+1} = X_n \\ Z_{n+1} = Y_n \end{cases} \quad (74)$$

Valores de las condiciones iniciales: $X_0 = 0,5$, $Y_0 = ,5$, $Z_0 = -1$; Exponentes de Lyapunov: $\lambda_{1,2,3} \simeq 0,07456, 0, -0,07456$ [179]

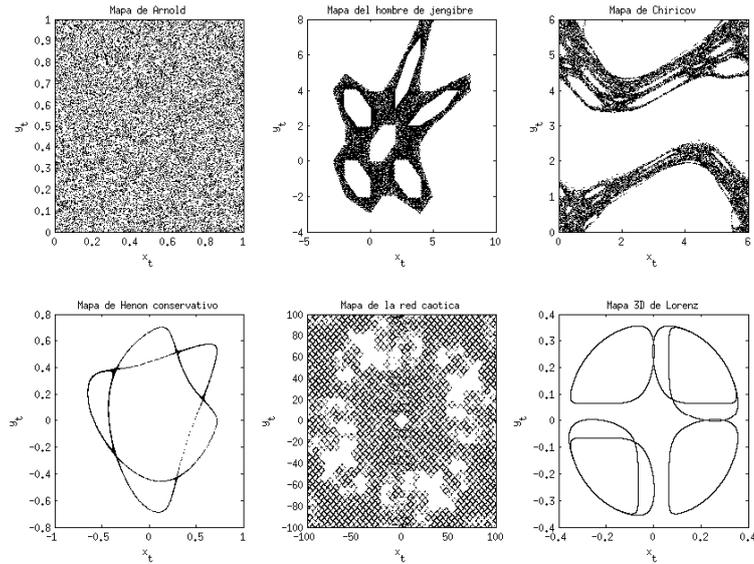


Figura 22: Representación gráfica para nueve mapas caóticos conservativos considerado en el presente trabajo. El gráfico muestra Y_n versus X_n para mapas bidimensionales (ver la sección C.3)

C.4 TABLAS DE MAPAS UTILIZADOS

En esta sección se presenta una tabla donde se especifican todos los mapas caóticos y ruidos correlacionados utilizados en el análisis del capítulo 5.3. Están agrupados por clase, el número de la tercera fila corresponde al número asignado en el plano complejidad-entropía figura 16

| Señales analizadas | | |
|---------------------|----------------------------|----|
| Grupo | Señal | Nº |
| Mapas conservativos | Mapa de Arnold | 1 |
| | Mapa red caótica | 2 |
| | Mapa de Chirikov | 3 |
| | Mapa hombre de jengibre | 4 |
| | Mapa de Hénon conservativo | 5 |
| | Mapa 3D caótico de Lorenz | 6 |
| Mapas disipativos | Mapa de Hénon | 7 |
| | Mapa de Lonzi | 8 |
| | Mapa logístico retardado | 9 |
| | Mapa campanitas | 10 |
| | Mapa cúbico de Holmes | 11 |

Continua en la otra pagina

| Grupo | Señal | Nº |
|----------------------------|-----------------------------|----|
| | Mapa estándar disipativo | 12 |
| | Mapa de Ikeda | 13 |
| | Mapa de Sinai | 14 |
| | Mapa depredador-presa | 15 |
| Mapas no invertibles | Mapa generador congruencial | 16 |
| | Mapa cúbico | 17 |
| | Mapa cúspide | 18 |
| | Mapa de Gauss | 19 |
| | Mapa logístico | 20 |
| | Mapa de Pinchers | 21 |
| | Mapa modelo Rikers | 22 |
| | Mapa seno circular | 23 |
| | Mapa del seno | 24 |
| | Mapa de Spencer | 25 |
| | Mapa de la Tienda | 26 |
| Mapas de Schuster | $z = 5/2$ | 27 |
| | $z = 2$ | 28 |
| | $z = 3/2$ | 29 |
| MFB | H = 0,1 | 30 |
| | H = 0,2 | 31 |
| | H = 0,3 | 32 |
| | H = 0,4 | 33 |
| | H = 0,5 | 34 |
| | H = 0,6 | 35 |
| | H = 0,7 | 36 |
| | H = 0,8 | 37 |
| | H = 0,9 | 38 |
| RFG | H = 0,1 | 39 |
| | H = 0,2 | 40 |
| | H = 0,3 | 41 |
| | H = 0,4 | 42 |
| | H = 0,5 | 43 |
| | H = 0,6 | 44 |
| | H = 0,7 | 45 |
| | H = 0,8 | 46 |
| | H = 0,9 | 47 |
| Continúa en la otra pagina | | |

| Grupo | Señal | Nº |
|------------|------------|----|
| k-ruidos | $k = 0,0$ | 48 |
| | $k = 0,25$ | 49 |
| | $k = 0,50$ | 50 |
| | $k = 0,75$ | 51 |
| | $k = 1,0$ | 52 |
| | $k = 1,25$ | 53 |
| | $k = 1,50$ | 54 |
| | $k = 1,75$ | 55 |
| | $k = 2,00$ | 56 |
| | $k = 2,25$ | 57 |
| | $k = 2,50$ | 58 |
| | $k = 2,75$ | 59 |
| | $k = 3,0$ | 60 |
| | $k = 3,25$ | 61 |
| | $k = 3,50$ | 62 |
| $k = 3,75$ | 63 | |

Cuadro 1: Señales Caóticas y ruidos correlacionados analizados mediante el plano C_{LZ} vs H_{PE} en el capítulo 5.3. El número de la tercera columna corresponde al número asignado en la figura 16

BIBLIOGRAFÍA

- [1] G. W. Botteron and Smith J. M. A technique for measurement of the extent of spatial organization of atrial activation during atrial fibrillation in the intact human heart. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 42(6):548–555, June 1995.
- [2] S. A. Kauffman. *The Origins of Order: Self-Organization and Selection in Evolution*. Oxford University Press, Oxford, 1st edition, 1993.
- [3] S. Zozor, O. Blanc, V. Jacquemet, N. Virag, J.-M. Vesin, E. Pruvot, L. Kappenberger, and C. Henriquez. A numerical scheme for modeling wavefront propagation on a monolayer of arbitrary geometry. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 50(4):412–420, April 2003.
- [4] M. Rajković and Z. Mihailović. Quantifying complexity in the minority game. *Physica A*, 325(1-2):40–47, July 2003.
- [5] David Jacobs and Jason T Carmichael. The political sociology of the death penalty: A pooled time-series analysis. *American Sociological Review*, pages 109–131, 2002.
- [6] W. B. Arthur. Inductive reasoning and bounded rationality (the El Farol problem). *The American Economic Review*, 84(2):406–411, May 1994.
- [7] C. Cysarz, H. Bettermann, and J. A. Van Leeuwen. Entropies of short binary sequences in heart period dynamics. *AJP Heart and Circulatory Physiology*, 278(6):H2163–H2172, June 2000.
- [8] M. Rajković. Extracting meaningful information from financial data. *Physica A*, 287(3-4):383–395, December 2000.
- [9] X.S. Zhang, Y.S. Zhu, N. V. Thakor, and Z. Wang. Detecting ventricular tachycardia and fibrillation by complexity measure. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 46(5):548–555, May 1999.
- [10] D. Peña, G. C. Tiao, and R. S. Tsay. *A course in time series analysis*, volume 322. John Wiley & Sons, 2011.
- [11] C. Chatfield. *The analysis of time series: an introduction*. CRC press, 2013.
- [12] C. Chatfield. *Time-series forecasting*. CRC Press, 2000.

- [13] D.L. Pollock, Stephen G., R. C. Green, and T. Nguyen. *Handbook of time series analysis, signal processing, and dynamics*. Academic Press, 1999.
- [14] E. T. Jaynes. Information theory and statistical mechanics. *Physical review*, 106(4):620, 1957.
- [15] F. Lombardi. Chaos theory, heart rate variability, and arrhythmic mortality. *Circulation*, 101(1):8–10, 2000.
- [16] M.E. Pereyra, P.W. Lamberti, and O.A. Rosso. Wavelet Jensen–Shannon divergence as a tool for studying the dynamics of frequency band components in EEG epileptic seizures. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 379(1):122–132, 2007.
- [17] H. Preißl, W. Lutzenberger, F. Pulvermüller, and N. Birbaumer. Fractal dimensions of short EEG time series in human. *Neuroscience Letters*, 225(2):77–80, 1997.
- [18] T. M. Cover and J. A. Thomas. *Elements of Information Theory*. John Wiley & Sons, 2nd edition, 2006.
- [19] C. Bandt and B. Pompe. Permutation entropy: A natural complexity measure for time series. *Physical Review Letters*, 88:174102, 2002.
- [20] D. M. Mateos, J. M. Diaz, and P. W. Lamberti. Permutation entropy applied to the characterization of the clinical evolution of epileptic patients under pharmacological treatment. *Entropy*, 16(11):5668–5676, 2014.
- [21] M. Li and P. Vitányi. *An introduction to Kolmogorov complexity and its applications*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [22] A. Lempel and J. Ziv. On the complexity of finite sequences. *IEEE Transactions on Information Theory*, 22(1):75–81, January 1976.
- [23] S. Zozor, D. Mateos, and P.W. Lamberti. Mixing Bandt–Pompe and Lempel–Ziv approaches: another way to analyze the complexity of continuous-states sequences. *The European Physical Journal B*, 87(5):107, 2014.
- [24] A.C. Yang, S. Hseu, H. Yien, A. Goldberger, and C.K. Peng. Linguistic analysis of the human heartbeat using frequency and rank order statistics. *PRL*, 90:108103, 2003.
- [25] J. Clinton Sprott. *Chaos and time-series analysis*, volume 69. Oxford University Press, 2003.
- [26] H. Kantz and T. Schreiber. *Nonlinear time series analysis*, volume 7. Cambridge university press, 2004.

- [27] L.D. Landau. *Mechanics: Volume 1 (Course Of Theoretical Physics)*. Butterworth-Heinemann, 1976.
- [28] E. Ott. *Chaos in dynamical systems*. Cambridge university press, 2002.
- [29] S. H. Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology and chemistry*. Perseus publishing, 2001.
- [30] G. G. Malinetskii and A. B. Potapov. Modern problems of non-linear dynamics. *Editorial URSS, Moscow*, 2000.
- [31] E. Ott, T. Sauer, and J. A. Yorke. *Coping with chaos: analysis of chaotic data and the exploitation of chaotic systems*. Wiley. New York, 1994.
- [32] C. R. Shalizi. Methods and techniques of complex systems science: An overview. In *Complex systems science in biomedicine*, pages 33–114. Springer, 2006.
- [33] E. M Izhikevich. *Dynamical systems in neuroscience*. MIT press, 2007.
- [34] F. Takens. Detecting strange attractors in turbulence. In *Dynamical systems and turbulence, Warwick 1980*, pages 366–381. Springer, 1981.
- [35] J. C. Robinson. *Dimensions, embeddings, and attractors*, volume 186. Cambridge University Press, 2011.
- [36] Nicholas Rohrbacker. Analysis of electroencephalogram data using timedelay embeddings to reconstruct phase space. *Dynamics at the Horsetooth*, 1:1–11, 2009.
- [37] R. Hegger, H. Kantz, and T. Schreiber. Practical implementation of nonlinear time series methods: The tisean package. *Chaos*, 9(2):413–435, 1999.
- [38] A. Einstein. Über die von der molekularkinetischen theorie der wärme geforderte bewegung von in ruhenden flüssigkeiten suspendierten teilchen. *Annalen der physik*, 322(8):549–560, 1905.
- [39] P. Langevin. Sur la théorie du mouvement brownien. *CR Acad. Sci. Paris*, 146(530-533), 1908.
- [40] N. G. Van Kampen. *Stochastic processes in physics and chemistry*, volume 1. Elsevier, 1992.
- [41] J. Honerkamp. *Stochastic dynamical systems: concepts, numerical methods, data analysis*. John Wiley & Sons, 1993.
- [42] C. Shannon. A mathematical theory of communication. *Bell System Technical Journal*, 27(3):379 – 423, 1948.

- [43] E.T. Jaynes. Information theory and statistical mechanics. *Physical review*, 106(4):620, 1957.
- [44] R. L. Dobrushin. A simplified method of experimentally evaluating the entropy of a stationary sequence. *Theory of Probability and its Applications*, 3(4):428–430, 1958.
- [45] N. Leonenko, L. Pronzato, and Savani V. A class of Rényi information estimators for multidimensional densities. *Annals of Statistics*, 36(5):2153–2182, October 2008.
- [46] J. Lin. Divergence measures based on the Shannon entropy. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 37(1):145–151, 1991.
- [47] R. C Radhakrishna. Diversity and dissimilarity coefficients: a unified approach. *Theoretical Population Biology*, 21(1):24–43, 1982.
- [48] D. M. Endres and J. E. Schindelin. A new metric for probability distributions. *IEEE Transactions on Information Theory*, 49(7):1858–1860, 2003.
- [49] I. Grosse, P. Bernaola-Galván, P. Carpena, R. Román-Roldán, J. Oliver, and H.E. Stanley. Analysis of symbolic sequences using the Jensen-Shannon divergence. *Physical Review E*, 65(4):041905, 2002.
- [50] S. Itzkovitz, E. Hodis, and E. Segal. Overlapping codes within protein-coding sequences. *Genome research*, 2010.
- [51] G. E. Sims, S. Jun, G. A. Wu, and S. Kim. Alignment-free genome comparison with feature frequency profiles (ffp) and optimal resolutions. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 106(8):2677–2682, 2009.
- [52] Y. Ofran and B. Rost. Analysing six types of protein–protein interfaces. *Journal of molecular biology*, 325(2):377–387, 2003.
- [53] S. DeDeo, R. Hawkins, S. Klingenstein, and T. Hitchcock. Bootstrap methods for the empirical study of decision-making and information flows in social systems. *Entropy*, 15(6):2246–2276, 2013.
- [54] S. Klingenstein, T. Hitchcock, and S. DeDeo. The civilizing process in London’s Old Bailey. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 111(26):9419–9424, 2014.
- [55] A.P. Majtey, P.W. Lamberti, and D.P. Prato. Jensen-Shannon divergence as a measure of distinguishability between mixed quantum states. *Physical Review A*, 72(5):052310, 2005.

- [56] P.W. Lamberti, A.P. Majtey, A. Borrás, M.t Casas, and A. Plastino. Metric character of the quantum Jensen–Shannon divergence. *Physical Review A*, 77(5):052311, 2008.
- [57] A.P. Majtey, A. Borrás, M. Casas, P.W. Lamberti, and A. Plastino. Jensen–shannon divergence as a measure of the degree of entanglement. *International Journal of Quantum Information*, 6(supp01):715–720, 2008.
- [58] O. A. Rosso, F. Olivares, L. Zunino, L. De Micco, A. L. L. Aquino, A. Plastino, and H. A. Larrondo. Characterization of chaotic maps using the permutation Bandt–Pompe probability-distribution. *The European Physics Journal B*, 86(4):116–128, april 2013.
- [59] O.A. Rosso, H.A. Larrondo, M.T. Martin, A. Plastino, and M.A. Fuentes. Distinguishing noise from chaos. *Physical review letters*, 99(15):154102, 2007.
- [60] J. Sparacino. *Cuantificadores de Información en Física*. FaMAF. Universidad Nacional de Córdoba, 2013.
- [61] T. M. Cover, P. Gacs, and R. M. Gray. Kolmogorov’s contributions to information theory and algorithmic complexity. *The annals of probability*, pages 840–865, 1989.
- [62] A. Kolmogorov. Three approaches to the quantitative definition of information’. *Problems of information transmission*, 1(1):1–7, 1965.
- [63] A. Kolmogorov. Logical basis for information theory and probability theory. *IEEE Transactions on Information Theory’s*, 14(5):662–664, 1968.
- [64] J. Ziv and A. Lempel. A universal algorithm for sequential data compression. *IEEE Transactions on Information Theory*, 23(3):337–343, May 1977.
- [65] J. Ziv and A. Lempel. Compression of individual sequences via variable-rate coding. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 24(5):530–536, 1978.
- [66] T. A. Welch. A technique for high-performance data compression. *IEEE Transactions on Computers*, 17(6):8–19, June 1984.
- [67] F. Kaspar and H. G. Schuster. Easily calculable measure for the complexity of spatiotemporal patterns. *Physical Review A*, 36:842–848, 1987.
- [68] G. Hansel. Estimation of the entropy by the Lempel-Ziv method. *Lecture Notes in Computer Science (Electronic Dictionaries and Automata in Computational Linguistics)*, 377:51–65, 1989.

- [69] T. Schürmann and Grassberger. Entropy estimation of symbol sequences. *Chaos*, 6(3):414, September 1996.
- [70] R. M. Gray. *Entropy and information theory*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [71] D. P. Feldman and J. P. Crutchfield. Measures of statistical complexity: Why? *Physics Letters A*, 238(4):244–252, 1998.
- [72] O. A. Rosso, H. Craig, and P. Moscato. Shakespeare and other english renaissance authors as characterized by information theory complexity quantifiers. *Physica A*, 388(6):916–926, 2009.
- [73] L. De Micco, C. M. González, H. A. Larrondo, M. T. Martin, A. Plastino, and O. A. Rosso. Randomizing nonlinear maps via symbolic dynamics. *Physica A*, 387(14):3373–3383, 2008.
- [74] K. Mischaikow, M. Mrozek, J. Reiss, and A. Szymczak. Construction of symbolic dynamics from experimental time series. *Physical Review Letters*, 82(6):1144, 1999.
- [75] Powell G. E. and I. C. Percival. A spectral entropy method for distinguishing regular and irregular motion of hamiltonian systems. *Journal of Physics A*, 12(11):2053, 1979.
- [76] O. A. Rosso, S. Blanco, J. Yordanova, V. Kolev, A. Figliola, M. Schürmann, and E. Başar. Wavelet entropy: a new tool for analysis of short duration brain electrical signals. *Journal of neuroscience methods*, 105(1):65–75, 2001.
- [77] O. A. Rosso, Carpil. C., P. M. Saco, and M. Gómez Ravetti. Causality and the entropy-complexity plane: Robustness and missing ordinal patterns. *Physica A*, 391(1-2):42–45, january 2012.
- [78] J. M. Amigó, L. Kocarev, and J. Szczepanski. Order patterns and chaos. *Physics Letters A*, 355(1):27–31, 2006.
- [79] J. M. Amigó, S. Zambrano, and M. A. F. Sanjuán. True and false forbidden patterns in deterministic and random dynamics. *Europhysics Letters*, 79:50001, 2007.
- [80] L. Zunino, M. Zanin, B. M. Tabak, D. G Pérez, and O. A. Rosso. Forbidden patterns, permutation entropy and stock market inefficiency. *Physica A*, 388(14):2854–2864, 2009.
- [81] M. Zanin, O. A Zunino, L. and Rosso, and D. Papo. Permutation entropy and its main biomedical and econophysics applications: a review. *Entropy*, 14(8):1553–1577, 2012.
- [82] C. Bandt and F. Shiha. Order patterns in time series. *Journal of Time Series Analysis*, 28(5):646–665, 2007.

- [83] L. C. Carpi, P. M. Saco, and O. A. Rosso. Missing ordinal patterns in correlated noises. *Physica A.*, 389(10):2020–2029, 2010.
- [84] A. M. Fraser and H. L. Swinney. Independent coordinates for strange attractors from mutual information. *Physical review A*, 33(2):1134, 1986.
- [85] S. Lepri, G. Giacomelli, A. Politi, and F.T. Arecchi. High-dimensional chaos in delayed dynamical systems. *Physica D*, 70(3):235–249, 1994.
- [86] M. C. Mackey and L. Glass. Oscillation and chaos in physiological control systems. *Science*, 197(4300):287–289, 1977.
- [87] M. C Soriano, L. Zunino, O. A Rosso, I. Fischer, and C. R. Mirasso. Time scales of a chaotic semiconductor laser with optical feedback under the lens of a permutation information analysis. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 47(2):252–261, 2011.
- [88] L. Zunino, M. C Soriano, I. Fischer, O. A Rosso, and C.R. Mirasso. Permutation-information-theory approach to unveil delay dynamics from time-series analysis. *Physical Review E*, 82(4):046212, 2010.
- [89] J. S. Cánovas, A. Guillamón, and M. del Carmen Ruíz. Using permutations to detect dependence between time series. *Physica D*, 240(14):1199–1204, 2011.
- [90] M. Matilla-García and M. Ruiz Marín. A non-parametric independence test using permutation entropy. *Journal of Econometrics*, 144(1):139–155, 2008.
- [91] M. Matilla-García and M. R. Marín. Spatial symbolic entropy: A tool for detecting the order of contiguity. *Geographical Analysis*, 43(2):228–239, 2011.
- [92] A. L. Goldberger, L. A. N. Amaral, J. M. Hausdorff, P. Ch. Ivanov, C-K Peng, and H. Stanley. Fractal dynamics in physiology: alterations with disease and aging. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 99(suppl 1):2466–2472, 2002.
- [93] K. Schindler, H. Gast, L. Stieglitz, A. Stibal, M. Hauf, R. Wiest, L. Mariani, and C. Rummel. Forbidden ordinal patterns of periictal intracranial eeg indicate deterministic dynamics in human epileptic seizures. *Epilepsia*, 52(10):1771–1780, 2011.
- [94] A. Groth. Visualization of coupling in time series by order recurrence plots. *Physical Review E*, 72(4):046220, 2005.
- [95] I. Veisi, N. Pariz, and A. Karimpour. Fast and robust detection of epilepsy in noisy EEG signals using permutation entropy.

- In *Bioinformatics and Bioengineering, 2007. BIBE 2007. Proceedings of the 7th IEEE International Conference on*, pages 200–203. IEEE, 2007.
- [96] A. A. Bruzzo, B. Gesierich, M. Santi, C. A. Tassinari, N. Birbaumer, and G. Rubboli. Permutation entropy to detect vigilance changes and preictal states from scalp EEG in epileptic patients. a preliminary study. *Neurological Sciences*, 29(1):3–9, 2008.
- [97] Y. Cao, W. Tung, J. B. Gao, V. A. Protopopescu, and L. M. Hively. Detecting dynamical changes in time series using the permutation entropy. *Physical Review E*, 70(4):046217, 2004.
- [98] N. Nicolaou and J. Georgiou. Detection of epileptic electroencephalogram based on permutation entropy and support vector machines. *Expert Systems with Applications*, 39(1):202–209, 2012.
- [99] H. Li, M. Muskulus, R. Heusdens, and L. Wolters. Analysis and synthesis of pseudo-periodic job arrivals in grids: A matching pursuit approach. In *Cluster Computing and the Grid, 2007. CCGRID 2007. Seventh IEEE International Symposium on*, pages 183–196. IEEE, 2007.
- [100] X. Ouyang, G. Li and D. A. Dang, C. and Richards. Deterministic dynamics of neural activity during absence seizures in rats. *Physical Review E*, 79(4):041146, 2009.
- [101] X. Li and G. Ouyang. Estimating coupling direction between neuronal populations with permutation conditional mutual information. *NeuroImage*, 52(2):497–507, 2010.
- [102] M. Staniek and K. Lehnertz. Symbolic transfer entropy. *Physical Review Letters*, 100(15):158101, 2008.
- [103] F. Wendling, P. Chauvel, A. Biraben, and F. Bartolomei. From intracerebral EEG signals to brain connectivity: identification of epileptogenic networks in partial epilepsy. *Frontiers in systems neuroscience*, 4, 2010.
- [104] D. Jordan, G. Stockmanns, E. F. Kochs, S. Pilge, and G. Schneider. Electroencephalographic order pattern analysis for the separation of consciousness and unconsciousness. *Anesthesiology*, 109(6):1014–22, 2008.
- [105] E. Olofsen, J.W. Sleight, and A. Dahan. Permutation entropy of the electroencephalogram: a measure of anaesthetic drug effect. *British journal of anaesthesia*, 101(6):810–821, 2008.
- [106] A. Silva, H. Cardoso-Cruz, F. Silva, V. Galhardo, and L. Antunes. Comparison of anesthetic depth indexes based on thalamocortical local field potentials in rats. *Anesthesiology*, 112(2):355, 2010.

- [107] A. Silva, S. Campos, J. Monteiro, C. Venancio, B. Costa, P. P Guedes, and L. Antunes. Performance of anesthetic depth indexes in rabbits under propofol anesthesia: prediction probabilities and concentration-effect relations. *Anesthesiology*, 115(2):303–314, 2011.
- [108] B. Chunhua, Q. Chang, D. Y. Qianli, and S Qinghong. Modified permutation-entropy analysis of heartbeat dynamics. *Physical Review E*, 85(2):021906, 2012.
- [109] U. Parlitz, S. Berg, S. Luther, A. Schirdewan, J Kurths, and N. Wessel. Classifying cardiac biosignals using ordinal pattern statistics and symbolic dynamics. *Computers in biology and medicine*, 42(3):319–327, 2012.
- [110] B. Frank, B. Pompe, U. Schneider, and D. Hoyer. Permutation entropy improves fetal behavioural state classification based on heart rate analysis from biomagnetic recordings in near term fetuses. *Medical and Biological Engineering and Computing*, 44(3):179–187, 2006.
- [111] S. Berg, S. Luther, S. E. Lehnart, K. Hellenkamp, R. Bauernschmitt, J. Kurths, N. Wessel, and U. Parlitz. Comparison of features characterizing beat-to-beat time series. In *Proceedings of the International Biosignal Processing Conference, Berlin, Germany*, volume 49, pages 1–4, 2010.
- [112] H. H. JASPER. The ten twenty electrode system of the international federation. *Electroencephalography and clinical neurophysiology*, 10:371–375, 1958.
- [113] T. Koenig, F. Marti-Lopez, and P. Valdes-Sosa. Topographic time-frequency decomposition of the EEG. *NeuroImage*, 14(2):383–390, 2001.
- [114] S. Irisawa, T. Isotani, and T. Kinoshita. Spatial eeg structure in schizophrenia. *Methods and findings in experimental and clinical pharmacology*, 24:111, 2002.
- [115] Z. J. Koles. The quantitative extraction and topographic mapping of the abnormal components in the clinical EEG. *Electroencephalography and clinical Neurophysiology*, 79(6):440–447, 1991.
- [116] E. Niedermeyer and F.H L. da Silva. *Electroencephalography: basic principles, clinical applications, and related fields*. Lippincott Williams & Wilkins, 2005.
- [117] S. J. M. Smith. EEG in the diagnosis, classification, and management of patients with epilepsy. *Journal of Neurology, Neurosurgery & Psychiatry*, 76(suppl 2):ii2–ii7, 2005.

- [118] J. Veauthier, H. Haettig, and H. Meencke. Impact of levetiracetam add-on therapy on different eeg occipital frequencies in epileptic patients. *Seizure*, 18(6):392–395, 2009.
- [119] C.M Michel, D. Lehmann, B. Henggeler, and D. Brandeis. Localization of the sources of EEG delta, theta, alpha and beta frequency bands using the FFT dipole approximation. *Electroencephalography and clinical neurophysiology*, 82(1):38–44, 1992.
- [120] D. Lehmann and C. M. Michel. Intracerebral dipole source localization for FFT power maps. *Electroencephalography and clinical Neurophysiology*, 76(3):271–276, 1990.
- [121] H. Adeli, Z. Zhou, and N. Dadmehr. Analysis of eeg records in an epileptic patient using wavelet transform. *Journal of neuroscience methods*, 123(1):69–87, 2003.
- [122] N. Hazarika, J. Z. Chen, A. Tsoi, and A. Sergejew. Classification of EEG signals using the wavelet transform. In *Digital Signal Processing Proceedings, 1997. DSP 97., 1997 13th International Conference on*, 1997.
- [123] S. Sanei and J. A. Chambers. *EEG signal processing*. John Wiley & Sons, 2013.
- [124] S. Tong and N. V. Thakor. *Quantitative EEG analysis methods and clinical applications*. Artech House, 2009.
- [125] S. Blanco, A. Figliola, R. Quian Quiroga, O. A. Rosso, and E. Serrano. Time-frequency analysis of electroencephalogram series. iii. wavelet packets and information cost function. *Physical Review E*, 57(1):932, 1998.
- [126] R. C. Hwa and T. C. Ferree. Scaling properties of fluctuations in the human electroencephalogram. *Physical Review E*, 66(2):021901, 2002.
- [127] K. Lehnertz. Epilepsy and nonlinear dynamics. *Journal of biological physics*, 34(3-4):253–266, 2008.
- [128] K. Natarajan, R. Acharya, F. Alias, Thelma T., and S. K. Puthusserypady. Nonlinear analysis of EEG signals at different mental states. *BioMedical Engineering OnLine*, 3(1):7, 2004.
- [129] J. Röscke and P. Fell, J. and Beckmann. Nonlinear analysis of sleep EEG data in schizophrenia: calculation of the principal lyapunov exponent. *Psychiatry research*, 56(3):257–269, 1995.
- [130] E. Ferlazzo, N. Mammone, V. Cinci, S. Gasparini, A. Gambardella, A. Labate, M. A. Latella, V. Sofia, M. Elia, F. C. Morabito, et al. Permutation entropy of scalp eeg: A tool to investigate

- epilepsies: Suggestions from absence epilepsies. *Clinical Neurophysiology*, 125(1):13–20, 2014.
- [131] G. A. Darbellay and Wuertz D. The entropy as a tool for analysing statistical dependences in financial time series. *Physica A*, 287(3-4):429–439, December 2000.
- [132] W. Ebeling, L. Molgedey, J. Kurths, and U. Schwarz. Entropy, complexity, predictability and data analysis of time series and letter sequences. In *Theory of Disaster*. Springer Verlag, Berlin, A. Bundle and H.-J. Schellnhuber edition, 2000.
- [133] R. Q. Quiroga, Arnhold J., K. Lehnertz, and P. Grassberger. Kulback–Leibler and renormalized entropies: Applications to electroencephalograms of epilepsy patients. *Physical Review E*, 62(6):8380–8386, December 2000.
- [134] M. E. Torres and L. G. Gamero. Relative complexity changes in time series using information measures. *Physica A*, 286(3-4):457–473, November 2000.
- [135] T. H. Evrett, J. R. Moorman, L. C. Kok, J. G. Akar, and D. E. Haines. Assessment of global atrial fibrillation organization to optimize timing of atrial defibrillation. *Circulation*, 103(23):2857–2861, June 2001.
- [136] P. O. Amblard, S. Zozor, O. Michel, and A. M. Cuculescu. On the estimation of the entropy using k-th nearest neighbours. In *International Conference on Mathematics in Signal Processing (IMA'08)*, Circenter, United Kingdom, 16-18 December 2008.
- [137] J. Beirlant, E. J. Dudewicz, L. Györfi, and E. C. van der Meulen. Nonparametric entropy estimation: An overview. *International Journal of Mathematical and Statistical Sciences*, 6(1):17–39, June 1997.
- [138] P. Grassberger and I. Procaccia. Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica D*, 9(1-2):189–208, October 1983.
- [139] A. Lasota and M. C. Mackey. *Chaos, Fractals, and Noise; Stochastic Aspects of Dynamics*. Applied Mathematical Sciences 97. Springer Verlag, New York, 2nd edition, 1994.
- [140] P. Gács, J. T. Tromp, and P. M. B. Vitányi. Algorithmic statistics. *IEEE Transactions on Information Theory*, 47(6):2443–2463, September 2001.
- [141] J. JSzczepański, J. M. Amigó, E. Wajnryb, and M. V. Sanchez-Vives. Application of Lempel – Ziv complexity to the analysis of neural discharges. *Network: Computation in Neural Systems*, 14(2):335–350, May 2003.

- [142] N. Radhakrishnan. Quantifying physiological data with Lempel – Ziv complexity – certain issues. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 49(11):1371–1373, November 2002.
- [143] B. Fadlallah, B. Chen, A. Keil, and J. Príncipe. Weighted-permutation entropy: A complexity measure for time series incorporating amplitude information. *Physical Review E*, 87(2):022911, February 2013.
- [144] A. Gersho and R. M. Gray. *Vector quantization and signal compression*. Kluwer, Boston, 1992.
- [145] W. Chou, P. W. Wong, and R. M. Gray. Multistage sigma-delta modulation. *IEEE Transactions on Information Theory*, 35(4):784–796, July 1989.
- [146] S. Zozor, S. Ravier, and O. Buttelli. On Lempel-Ziv complexity for multidimensional data analysis. *Physica A*, 345(1-2):285–302, January 2005.
- [147] K. T. Alligood, T. D. Sauer, and J. A. Yorke. *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. Springer Verlag, New-York, 1996.
- [148] D. Fournier-Prunaret, B. S. López-Ruiz, and A. Taha. Route to chaos in three-dimensional maps of logistic type. In *Proceedings of the European Conference on Iteration Theory (ECIT '04)*, volume 350, 2004.
- [149] R. López-Ruiz and D. Fournier-Prunaret. Complex behavior in a discrete coupled logistic model for the symbiotic interaction of two species. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 1(2):307–324, September 2004.
- [150] O. A. Rosso, M. T. Martín, A. Figliola, K. Keller, and A. Plastino. EEG analysis using wavelet-based informational tools. *Journal of Neuroscience Methods*, 153(2):163–182, June 2006.
- [151] O.A. Rosso, M.T. Martin, and A. Plastino. Brain electrical activity analysis using wavelet-based informational tools (ii): Tsallis non-extensivity and complexity measures. *Physica A*, 320:497–511, 2003.
- [152] H. Gaustaut and J. R. Broughton. *Epileptic Seizure: Clinical and Electrographic Feature, Diagnosis and Treatment*. Charles C. Thomas Publisher, 1972.
- [153] G. Marsaglia. The structure of linear congruential sequences. *Applications of number theory to numerical analysis*, 1:249–285, 1972.
- [154] J. Kurths and H. Herzel. An attractor in a solar time series. *Physica D*, 25(1):165–172, 1987.

- [155] H. Wold. *A study in the analysis of stationary time series*. Almqvist & Wiksell, 1938.
- [156] J Sparacino, P.W. Lamberti, and C.M. Arizmendi. Shock detection in dynamics of single-headed motor proteins kif1a via Jensen-Shannon divergence. *Physical Review E*, 84(4):041907, 2011.
- [157] D. E. Knuth. *Sorting and Searching*, vol. 3. 1973.
- [158] W.H. Steeb and .M .A Van Wyk. *Chaos and fractals: algorithms and computations*. Wissenschaftsverlag, 1992.
- [159] R. M. May. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 261(5560):459–467, 1976.
- [160] A. Potapov and M.K. Ali. Robust chaos in neural networks. *Physics Letters A*, 277(6):310–322, 2000.
- [161] W. E. Ricker. Stock and recruitment. *Journal of the Fisheries Research Board of Canada*, 11(5):559–623, 1954.
- [162] V.I. Arnol'd. Small denominators. i. mapping the circle onto itself. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya*, 25(1):21–86, 1961.
- [163] R. Shaw and Naturforsch. Strange attractors, chaotic behavior, and information flow. *A*, 36(80), 1981.
- [164] M. W. Hirsch, S. Smale, and R. L. Devaney. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*, volume 60. Academic press, 2004.
- [165] M. Hénon. A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Communications in Mathematical Physics*, 50(1):69–77, 1976.
- [166] D.G. Aronson, M.A. Chory, G.R. Hall, and R.P. McGehee. Bifurcations from an invariant circle for two-parameter families of maps of the plane: a computer-assisted study. *Communications in Mathematical Physics*, 83(3):303–354, 1982.
- [167] H.E. Nusse. *Dynamics: numerical explorations*, volume 101. Springer, 1998.
- [168] G. Schmidt and B. Wang. Dissipative standard map. *Physical Review A*, 32(5):2994, 1985.
- [169] A. A Chernikov, R. Z Sagdeev, and G. M Zaslavskii. Chaos. how regular can it be? *Physics Today*, 41:27–35, 1988.
- [170] B. V Chirikov. A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Physics reports*, 52(5):263–379, 1979.

- [171] R. L. Devaney. A piecewise linear model for the zones of instability of an area-preserving map. *Physica D*, 10(3):387–393, 1984.
- [172] J. M. Halley and W. E. Kunin. Extinction risk and the $1/f$ family of noise models. *Theoretical Population Biology*, 56(3):215–230, 1999.
- [173] D. P. Mitchell. Generating antialiased images at low sampling densities. In *ACM SIGGRAPH Computer Graphics*, volume 12, pages 65–72. ACM, 1987.
- [174] M. Blodt, B. Raison, J. Regnier, and P. Granjon. *Mechanical Fault detection in induction motor drives through stator current monitoring-Theory and application examples*. INTECH Open Access Publisher, 2010.
- [175] L. Zunino, M. Zanin, B. M Tabak, D.G Pérez, and O. A. Rosso. Complexity-entropy causality plane: A useful approach to quantify the stock market inefficiency. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 389(9):1891–1901, 2010.
- [176] F Montani and O. A Rosso. Entropy-complexity characterization of brain development in chickens. *Entropy*, 16(8):4677–4692, 2014.
- [177] P. W. Lamberti, M. T. Martin, A. Plastino, and O. A. Rosso. Intensive entropic non-triviality measure. *Physica A*, 334(1):119–131, 2004.
- [178] V.I. Arnol'd, Igorevič, and André A. *Ergodic problems of classical mechanics*. WA Benjamin, 1968.
- [179] E.N. Lorenz. *The essence of chaos*. University of Washington Press, 1995.
- [180] P. Holmes. A nonlinear oscillator with a strange attractor. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 292(1394):419–448, 1979.
- [181] K. Ikeda, H. Daido, and O. Akimoto. Optical turbulence: chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity. *Physical Review Letters*, 45(9):709, 1980.
- [182] Y. Sinai. Gibbs measures in ergodic theory. *Russian Mathematical Surveys*, 27(4):21, 1972.
- [183] J.R. Beddington, C.A. Free, and J.H. Lawton. *Dynamic complexity in predator-prey models framed in difference equations*. Nature Publishing Group, 1975.

- [184] C. Beck and F. Schögl. *Thermodynamics of chaotic systems: an introduction*. Cambridge University Press, 1995.
- [185] Heinz Georg Schuster and Wolfram Just. *Deterministic chaos: an introduction*. John Wiley & Sons, 2006.
- [186] A. Kolmogorov and Wienersche. Sienersche spiralen und einige andere interessante kurven im hilbertschen raum. *Doklady*, 26:115–118, 1940.
- [187] B. B. Mandelbrot and J. W. Van Ness. Fractional brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM review*, 10(4):422–437, 1968.
- [188] H. Hurst. Long-term storage capacity in reservoirs. *ICE*, 116:400–410, 1951.
- [189] L. Zunino, D.G. Pérez, M.T. Martín, A. Plastino, M. Garavaglia, and O.A. Rosso. Characterization of gaussian self-similar stochastic processes using wavelet-based informational tools. *Physical Review E*, 75(2):021115, 2007.
- [190] G. Samorodnitsky. Long range dependence. *Foundations and Trends® in Stochastic Systems*, 1(3):163–257, 2007.
- [191] R. B. Davies and D. S. Harte. Tests for hurst effect. *Biometrika*, 74(1):95–101, 1987.
- [192] L Zunino, F Olivares, and O. A Rosso. Permutation min-entropy: An improved quantifier for unveiling subtle temporal correlations. *EPL (Europhysics Letters)*, 109(1):10005, 2015.
- [193] C. A. R. Hoare. Quicksort. *The Computer Journal*, 5(1):10–16, 1962.
- [194] R. Sedgewick. Implementing quicksort programs. *Programming Techniques*, 21(10):847–857, October 1978.
- [195] B. Abou-Khalil and K. Misulis. *Atlas of EEG & Seizure Semiology: Text with DVD*. Butterworth-Heinemann, 2005.
- [196] W. O. Tatum IV. *Handbook of EEG interpretation*. Demos Medical Publishing, 2014.
- [197] P. L Nunez and R. Srinivasan. *Electric fields of the brain: the neurophysics of EEG*. Oxford university press, 2006.
- [198] S. B. Klein and B. M. Thorne. *Biological psychology*. Macmillan, 2006.
- [199] K. Whittingstall and N. K. Logothetis. Frequency-band coupling in surface EEG reflects spiking activity in monkey visual corte. *Neuron*, 64(2):281–289, 2009.