

Figura 5.1: Campos de temperatura (arriba) y velocidad (abajo) para convección seca en la celda rectangular a $R_T = 5R_c$ y $t = t_c$ sobre una grilla de 32×16 puntos.

débiles el tiempo de arranque de la convección puede ser muy largo. En la práctica no se observó inestabilidad a $R_T \leq 1,5R_c$ para tiempos de corrida $t \leq 2t_c$.

A bajo R_T se alcanza un estado de régimen estacionario consistente en dos vórtices contrarrotantes, en tiempos $\sim t_c$ o menores. Este tiempo cae rápidamente al crecer R_T , hasta $\sim 0,1t_c$ a $R_T \sim 1000R_c$ (ver figuras 5.1 a 5.3).

Alrededor de $R_T \sim 5000R_c$ estos vórtices desarrollan oscilaciones laterales, y aparecen las primeras “estructuras secundarias” (pequeños vórtices) cerca de la base de las columnas ascendentes y descendentes (ver figura 5.4). Todavía existe un estado de régimen ordenado, pero ya no es estacionario sino oscilatorio.

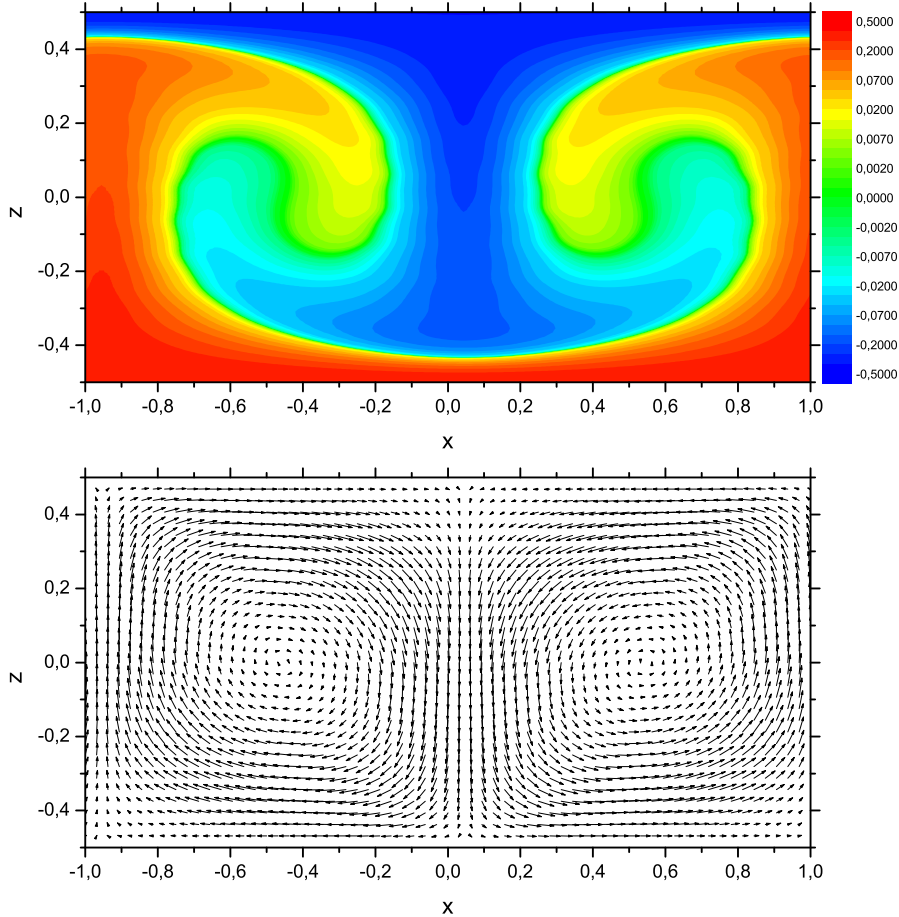


Figura 5.2: Campos de temperatura (arriba) y velocidad (abajo) para convección seca en la celda rectangular a $R_T = 50R_c$ y $t = t_c$ sobre una grilla de 64×32 puntos.

Por encima de $R_T \sim 5000R_c$ el estado de régimen se vuelve desordenado y aperiódico, y consiste ahora en columnas y vórtices intermitentes con un amplio rango de tamaños. Si se deja correr las simulaciones un tiempo largo, se hace evidente que el sistema ya no alcanzará un estado de régimen ordenado ni (multi)periódico. A medida que R_T crece el estado de régimen se torna cada vez más desordenado, dando lugar a una proliferación de estructuras convectivas cada vez más pequeñas (ver figura 5.5).

Finalmente, a $R_T \sim 5 \times 10^5 R_c \sim 10^9$, la diferencia de temperatura ha alcanzado unos 65°C . Debe notarse que la diferencia de temperatura es aquí unas cinco veces mayor que la más alta que alcanzaremos en el Capítulo 6; ello es intencional, ya que la convección húmeda tiende a ser más intensa que la seca al mismo ΔT . Los vórtices más pequeños disminuyen

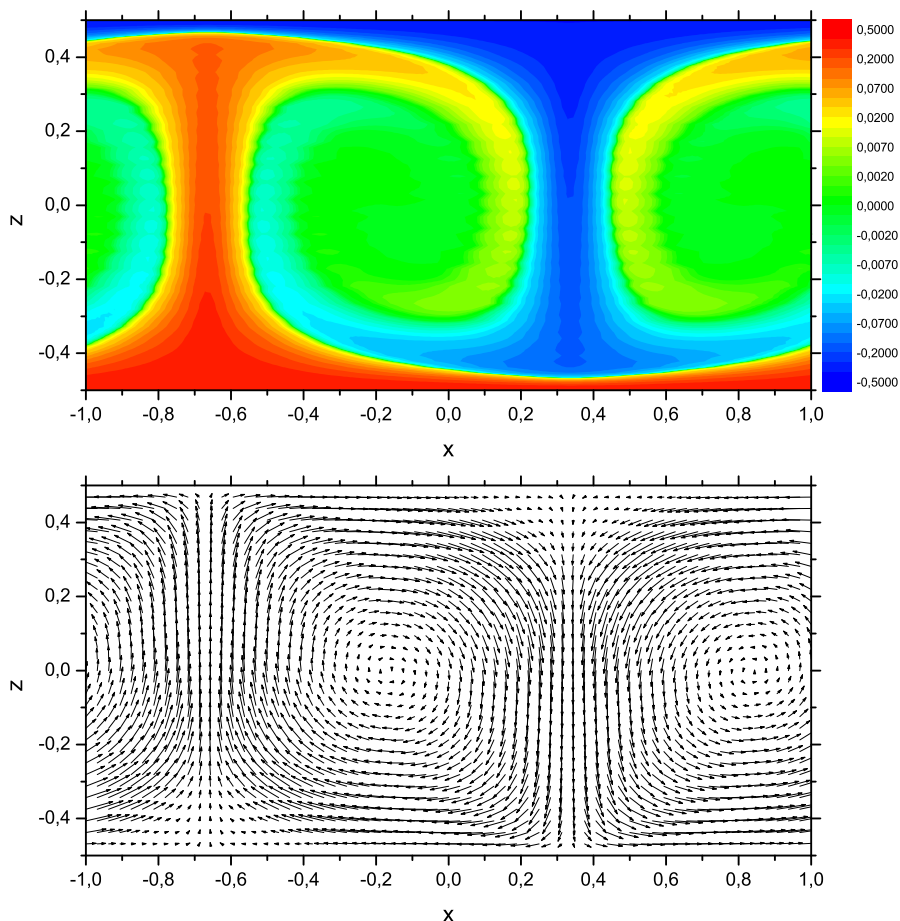


Figura 5.3: Campos de temperatura (arriba) y velocidad (abajo) para convección seca en la celda rectangular a $R_T = 500R_c$ y $t = 0,25t_c$ sobre una grilla de 128×64 puntos (en velocidades decimada a 64×32 puntos).

hasta alrededor de 1 cm y las velocidades típicas son del orden de 1 m/s (ver figura 5.6), en concordancia con resultados conocidos [56]. El tiempo necesario para alcanzar este estado desde el estado inicial conductivo es bastante corto, del orden de $0,001t_c$ o aproximadamente unos 10 a 12 segundos.

El espaciamiento de grilla necesario para correr cada simulación se muestra al pie de las correspondientes figuras, y en todos los casos es consistente con el requerimiento de resolver la capa límite, lo que en nuestra experiencia se consigue cuando ésta tiene un espesor de entre cinco y diez puntos de grilla. En la figura 5.7 se muestra el campo de temperatura resultante de correr la misma simulación de la figura 5.6 pero sobre una grilla intencionalmente subdimensionada, con el doble de espaciamiento (la mitad de puntos) en cada dirección. La presencia de una inestabilidad en damero resulta evidente,

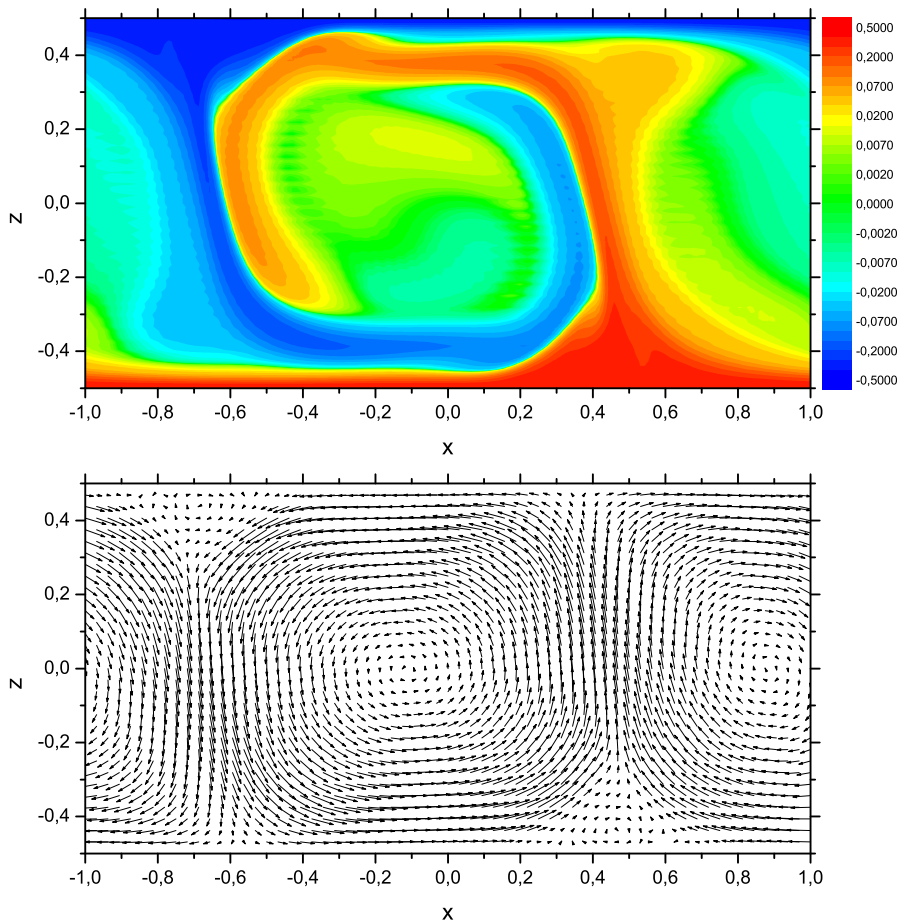


Figura 5.4: Campos de temperatura (arriba) y velocidad (abajo) para convección seca en la celda rectangular a $R_T = 5000R_c$ y $t = 0,05t_c$ sobre una grilla de 192×96 puntos (en velocidades decimada a 64×32 puntos).

y sin embargo la simulación no sólo siguió corriendo sino que, aparte de su evidente distorsión por la inestabilidad, el campo de temperatura es cualitativamente similar al de la simulación bien resuelta. Ello muestra claramente la estabilidad y robustez del código desarrollado.

En todos los casos se verificó que la incompresibilidad del campo de velocidad era mantenida esencialmente a precisión de máquina. Para ello se calculó el campo $\nabla \cdot \mathbf{u}$ y se lo comparó, tanto punto a punto como en valor RMS sobre la celda, con el campo de vorticidad $\nabla \times \mathbf{u}$, obteniendo en ambos casos

$$\frac{|\nabla \cdot \mathbf{u}|}{|\nabla \times \mathbf{u}|} \sim 10^{-16}, \quad (5.10)$$

que está al nivel del ε de máquina en precisión doble, la que empleamos en

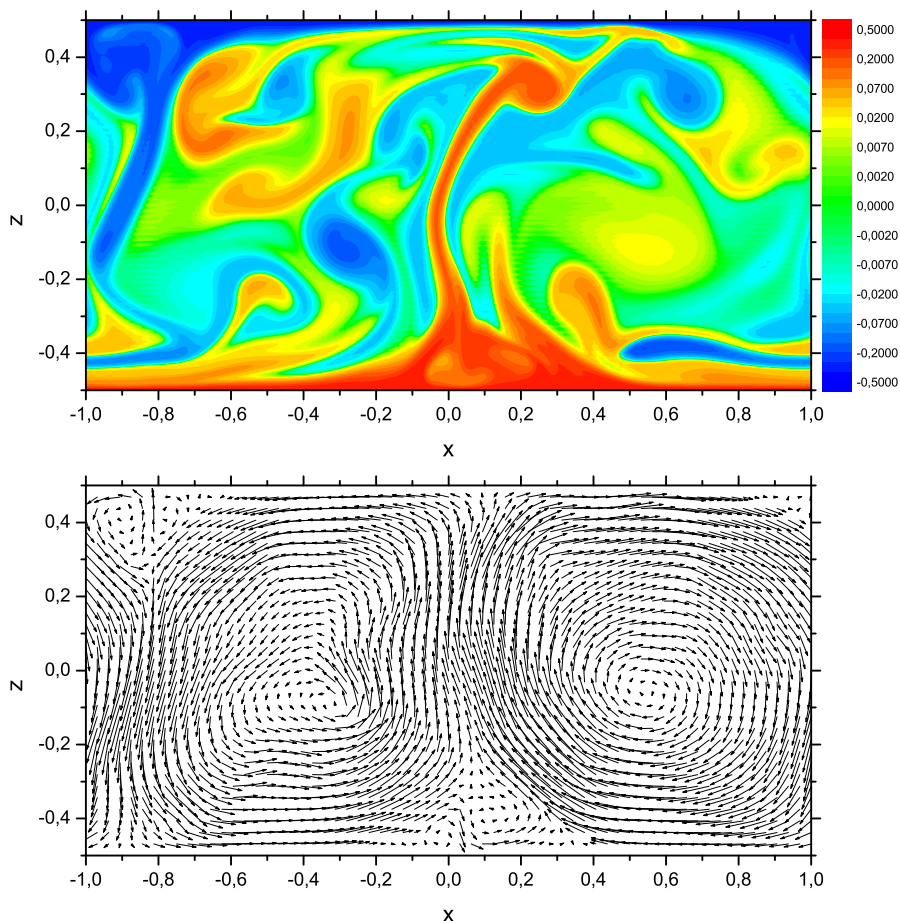


Figura 5.5: Campos de temperatura (arriba) y velocidad (abajo) para convección seca en la celda rectangular a $R_T = 50000R_c$ y $t = 0,01t_c$ sobre una grilla de 384×192 puntos (en velocidades decimada a 64×32 puntos).

todas las simulaciones. De igual forma se verificó que los algoritmos respetaban las CC con la misma precisión. Para ello se monitorearon los valores de los campos sobre las fronteras $z = 0$ y $z = H$ de la celda, comparándolos con los valores RMS de los campos en el interior, con el mismo resultado. Esto muestra que tanto el procedimiento de eliminación del término de presión desarrollado en la Sección 4.4, como el procedimiento de resolución de la ecuación de Laplace desarrollado en el Apéndice B.1, no sólo son correctos, sino que resuelven los respectivos problemas sin introducir ningún error más allá del inevitable por la naturaleza numérica de la implementación (es decir, que ambos métodos son analíticamente *exactos*).

Debemos destacar que el código desarrollado es además notablemente rápido. Todas las simulaciones de este capítulo fueron corridas sobre un úni-

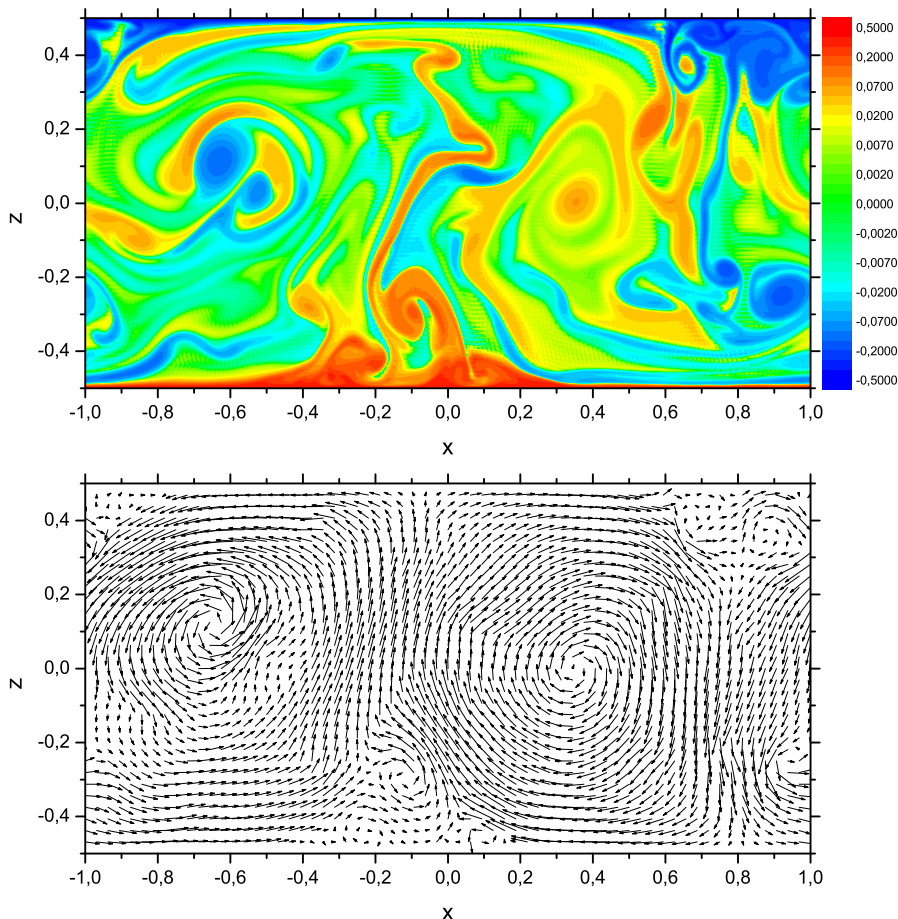


Figura 5.6: Campos de temperatura (arriba) y velocidad (abajo) para convección seca en la celda rectangular a $R_T = 500000R_c$ y $t = 0,002t_c$ sobre una grilla de 512×256 puntos (en velocidades decimada a 64×32 puntos).

co núcleo de un procesador Pentium D con velocidad de reloj de 3GHz, sin ninguna optimización. Incluso omitimos en esta primera etapa optimizaciones del código de implementación relativamente trivial, tales como aparear las FFT de funciones reales mediante un algoritmo como el 2FFT [60], que prácticamente duplicaría la velocidad, pues el tiempo de cómputo está dominado por las llamadas a la FFT. Pese a estas desventajas, la simulación mostrada en la figura 5.6, con una grilla de 512×256 puntos, corrió a un factor de compresión $\lesssim 10^3$, es decir menos de 1000s de tiempo de CPU por cada segundo de tiempo de evolución simulado. Pruebas recientes de un código moderadamente optimizado, sobre un único núcleo virtual (de cuatro) de un procesador Intel I3 a 3.5GHz, mostraron un desempeño unas diez veces superior.

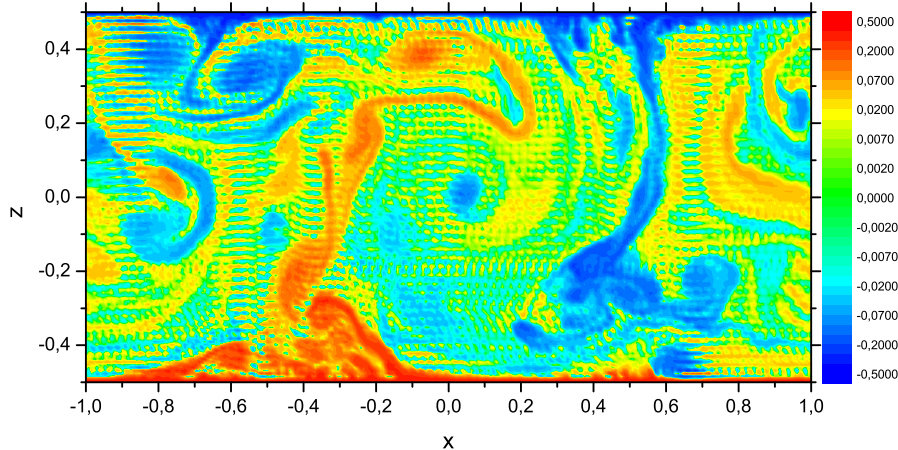


Figura 5.7: Campo de temperatura para convección seca en la celda rectangular a $R_T = 500000R_c$ y $t = 0,002t_c$ sobre una grilla subdimensionada de 256×128 puntos.

Dados los resultados mostrados aquí, en esta etapa los consideramos una validación suficiente del código desarrollado. Pasamos entonces a probar las modificaciones necesarias para implementar convección seca, primero en una celda cuadrada con CC homogéneas en los cuatro lados, y luego en una celda triangular.

5.2. Celda cuadrada

Las simulaciones de convección seca en una celda cuadrada constituyen un paso intermedio, cuyo objetivo es esencialmente poner a prueba la solución de la ecuación de Laplace por el método desarrollado en el Apéndice B.2. El sistema de ecuaciones a resolver es todavía el sistema WOB (3.137)–(3.139), pero sobre una grilla cuadrada (isotrópica) $N \times N$. Las CC para velocidad y temperatura son homogéneas de Dirichlet en los cuatro lados de la celda cuadrada. Para el campo de velocidad esto corresponde a CC *no-slip*. Para el campo de temperatura las CC son las de contacto térmico perfecto con la base (caliente), el techo (fría) y las paredes verticales, que mantienen un gradiente de temperatura uniforme entre estos dos extremos y pueden pensarse como conductores térmicos perfectos.

Esta última elección, que puede parecer algo extraña, tiene la intención de mantener como solución estacionaria el perfil conductivo *hidrostático* de la Sección 4.5, y no introducir complicaciones adicionales que dificulten la comparación con el caso precedente. Recuérdese que no pretendemos simular aquí un dado problema realista, sino poner a prueba únicamente la solución

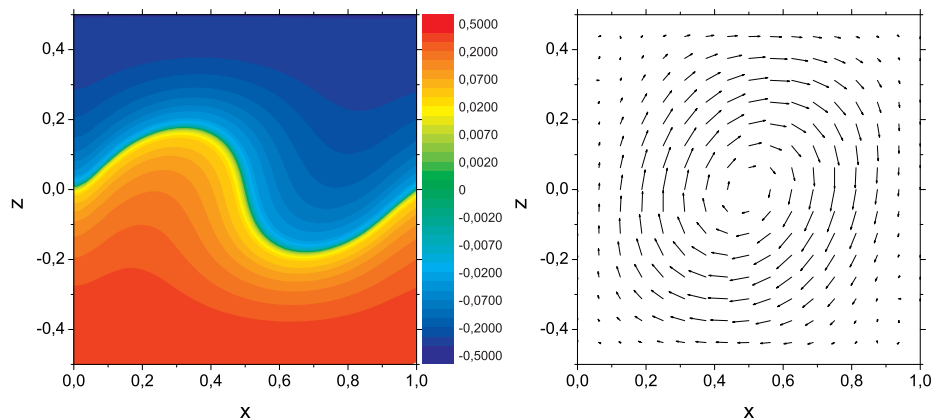


Figura 5.8: Campos de velocidad y temperatura para convección seca en la celda cuadrada a $R_T = 5R_c$ y $t = 2,0t_c$ sobre una grilla de 16×16 puntos.

de la ecuación de Laplace. Las elecciones de resolución temporal y espacial, y las escalas y parámetros, son también los mismos de la Sección 5.1, por los mismos motivos. En particular, el ancho y alto de la celda son ahora ambos de 0,5 m.

Las figuras 5.8 a 5.10 muestran, para una selección de los casos simulados, los campos de velocidad y temperatura para los valores de R_T y los tiempos indicados al pie de cada una, con la misma elección de escalas y colores de la Sección 5.1, y tienen aquí un propósito simplemente ilustrativo. Pese a ello es interesante notar la diferencia con los correspondientes patrones convectivos de dicha Sección, que muestra la influencia decisiva de cambiar la razón de aspecto y las CC laterales. También es interesante la comparación de la fenomenología con uno de los pocos ejemplos que hemos hallado en la literatura [86], con el que presenta gran similitud.

A diferencia del caso precedente, y por las razones discutidas en la Sección 4.4.2, en este caso ya no esperamos que el método desarrollado mantenga la homogeneidad de las CC con exactitud, pero sí que, por construcción (ver Apéndice B.2), preserve la incompresibilidad del campo de velocidad. Efectivamente, en todos los casos simulados se verificó que la incompresibilidad era mantenida esencialmente a precisión de máquina, calculando como antes el campo $\nabla \cdot \mathbf{u}$ y comparándolo, punto a punto y en valor RMS, con el campo de vorticidad $\nabla \times \mathbf{u}$, y obteniendo en ambos casos

$$\frac{|\nabla \cdot \mathbf{u}|}{|\nabla \times \mathbf{u}|} \sim 10^{-16}. \quad (5.11)$$

En cambio, si bien el campo de temperatura respeta las CC a precisión de máquina, como era de esperar, el campo de velocidad las viola, es decir, difiere de cero. La magnitud de esta violación va típicamente de $\sim 10^{-4}$ en

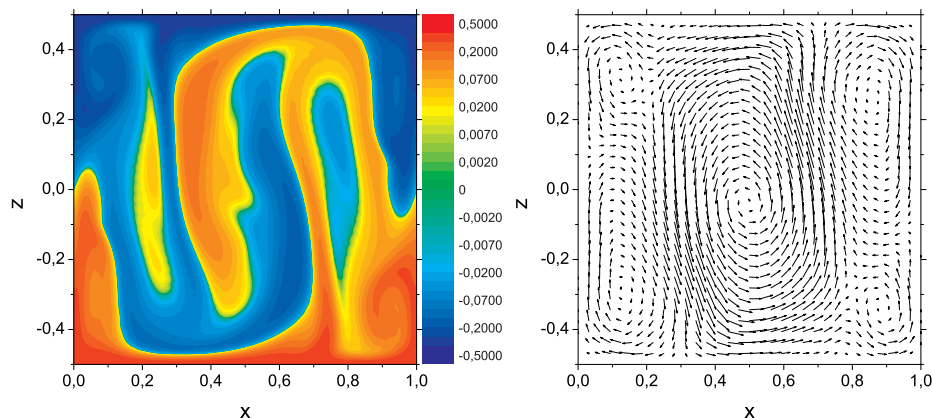


Figura 5.9: Campos de velocidad y temperatura para convección seca en la celda cuadrada a $R_T = 5000R_c$ y $t = 0,05t_c$ sobre una grilla de 96×96 puntos (en velocidades decimada a 32×32 puntos).

las esquinas a $\sim 10^{-8}$ en el centro de los lados, respecto del valor RMS de la velocidad en el interior de la celda. Esto es consecuencia del procedimiento de resolución de la ecuación de Laplace desarrollado en el Apéndice B.2, que en este caso es sólo aproximado.

El hecho de violar la CC de velocidad nula puede generar cierta incomodidad desde el punto de vista físico, ya que después de todo suponemos que las fronteras son rígidas e impenetrables a la materia. Más allá de que esta violación sea comparable o menor que la precisión con que estamos calculando los valores punto a punto de los campos (debido a las inexactitudes del modelo), esta objeción puede salvarse por el simple procedimiento de imponer, tras cada paso de integración temporal, CC homogéneas al campo de velocidad, asignando a cero sus valores sobre la frontera en la grilla directa. La consecuencia previsible es que entonces aparece una violación de la condición de incompresibilidad, de la misma magnitud, en el interior de la celda pero cerca de la frontera. Sin embargo resulta más intuitivo y tolerable, desde un punto de vista físico, interpretar que el fluido simulado no es exactamente incompresible, que pensar que las paredes simuladas no son exactamente rígidas.

En la práctica adoptamos el procedimiento de reimponer las CC homogéneas al campo de velocidad en la grilla directa, tras cada paso de integración temporal, trasladando así la inexactitud de las CC a la divergencia del mismo.

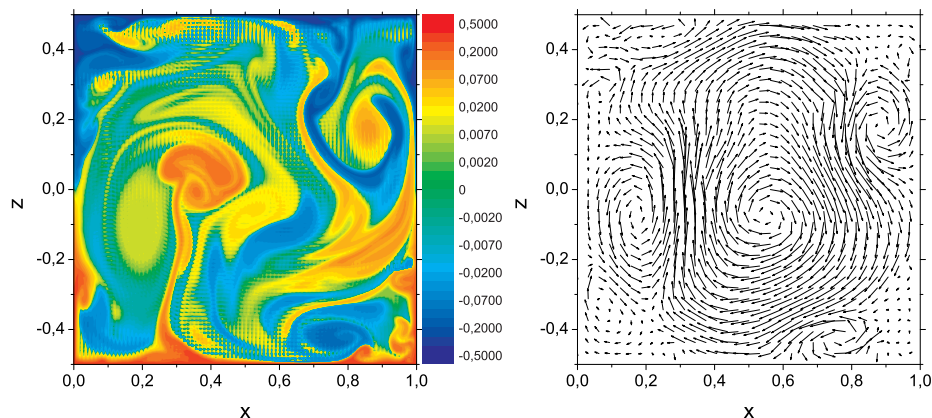


Figura 5.10: Campos de velocidad y temperatura para convección seca en la celda cuadrada a $R_T = 500000R_c$ y $t = 0,002t_c$ sobre una grilla de 256×256 puntos (en velocidades decimada a 32×32 puntos).

5.3. Celda triangular

Las simulaciones de convección seca en una celda triangular constituyen otro paso intermedio, cuyo objetivo es poner a prueba el método de las imágenes desarrollado en la Sección 4.6 y la solución de la ecuación de Laplace para el campo adimensional τ obtenida allí. El sistema de ecuaciones a resolver es el sistema WOB (3.142)–(3.144), sobre una grilla cuadrada (isotrópica) $N \times N$ e imponiendo las condiciones de simetría (4.118)–(4.121) respecto a la diagonal $x = z$; las ecuaciones discretizadas en la grilla conjugada son el sistema (4.136)–(4.138). Las CC para velocidad y temperatura son homogéneas de Dirichlet en los cuatro lados de la celda cuadrada; sobre la diagonal son homogéneas de Dirichlet para temperatura y velocidad normal, y de Neumann para velocidad tangencial. Para el campo de velocidad esto corresponde a CC *no-slip* en los cuatro lados de la celda, y *free-slip* en la diagonal. Para el campo de temperatura las CC son las de contacto térmico perfecto con todas las fronteras.

Las CC *free-slip* para velocidad sobre la diagonal (la base de la celda triangular) son consecuencia directa del método de las imágenes; pueden parecer poco realistas para convección seca, o al menos inconsistentes, ya que en las demás fronteras tenemos CC *no-slip*. Sin embargo, como ya hemos dicho no es nuestra intención en este caso modelar un sistema realista, sino sólo poner a prueba partes del código desarrollado. Además, estas CC serán realistas para convección húmeda [77], como se discutirá en la Sección 6.2.

Las elecciones de resolución temporal y espacial, y los parámetros, son los mismos de la Sección 5.1, y por los mismos motivos. Las escalas, en cambio, se han elegido para corresponder al tamaño del destilador real; en

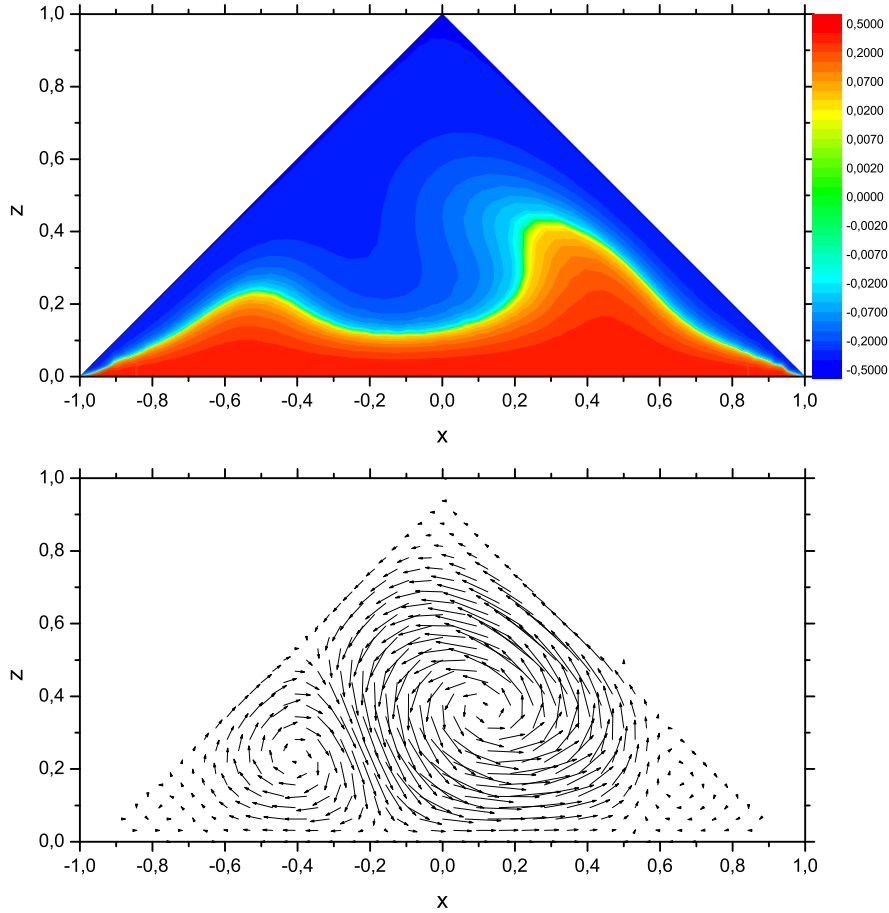


Figura 5.11: Campos de temperatura (arriba) y velocidad (abajo) para convección seca en la celda triangular a $R_T = 5R_c$ y $t = 2t_c$ sobre una grilla de 32×32 puntos.

particular, el alto de la celda triangular es ahora 0,65 m, con lo que el “alto” y “ancho” de la celda cuadrada son ambos de $\sqrt{2} \times 0,65$ m.

Las figuras 5.11 y 5.12 muestran, para dos de los casos simulados, los campos de velocidad y temperatura para los valores de R_T y los tiempos indicados al pie de cada una, con la misma elección de escalas y colores de la Sección 5.1, y tienen como en la Sección 5.2 un propósito simplemente ilustrativo. Pese a ello es interesante notar la diferencia con los correspondientes patrones convectivos de dichas Secciones, que muestra la influencia del cambio de geometría y de las CC inferiores. En particular puede apreciarse en la figura 5.12 que la distribución de temperaturas es más homogénea y más fría que para los casos comparables en las celdas cuadrada y rectangular. Ello es debido a que ahora la superficie fría (los “techos” de la celda) es mayor

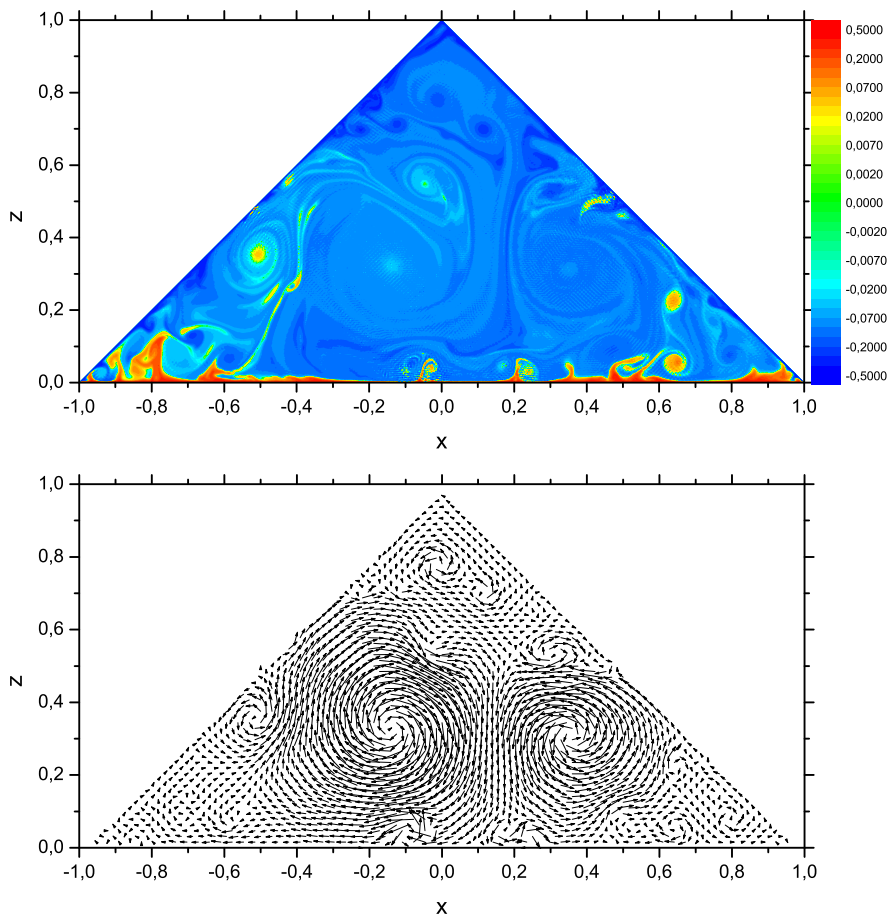


Figura 5.12: Campos de temperatura (arriba) y velocidad (abajo) para convección seca en la celda triangular a $R_T = 500000R_c$ y $t = 0,0015t_c$ sobre una grilla de 512×512 puntos (en velocidades decimada a 64×64 puntos).

que la caliente (la base) en un factor $\sqrt{2}$, y a que las CC *free-slip* en la base facilitan la aparición de estructuras convectivas más organizadas que transportan el calor con mayor eficiencia, las que se manifiestan como dos grandes vórtices en el campo de velocidades. En convección de Rayleigh–Bénard con CC horizontales *free-slip* y laterales periódicas, éstas estructuras se manifiestan como *flujo zonal* [87] (dos capas superpuestas de flujo horizontal en direcciones opuestas), y al contrario que aquí, *disminuyen* el transporte de calor.

Al igual que en la Sección 5.2, y por las razones discutidas en la Sección 4.4.2, las CC homogéneas para el campo de velocidad no son mantenidas con exactitud en los “techos” de la celda triangular, aunque sí se verifica la condición de incompresibilidad a precisión de máquina. Las CC *free-slip* en

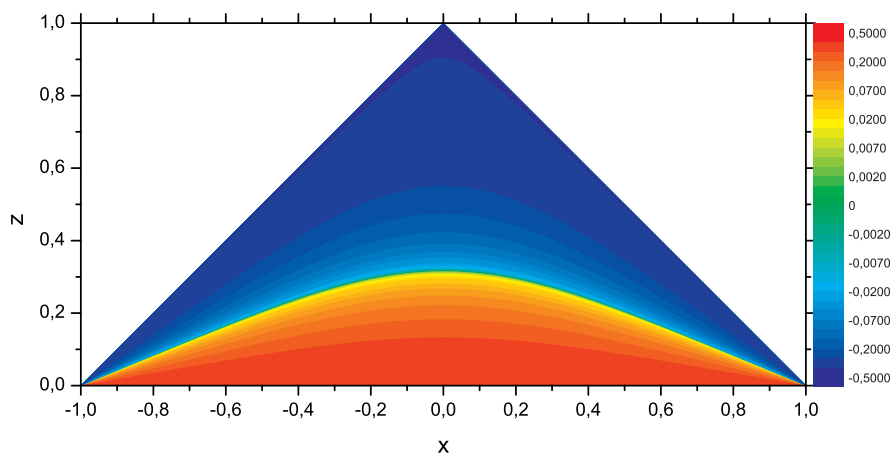


Figura 5.13: Campo de temperatura adimensional τ correspondiente al perfil conductivo adimensional en la celda triangular, sobre una grilla de 512×512 puntos.

la base, en cambio, se verifican con la anulaci3n en la frontera a precisi3n de m1quina, de la velocidad normal y de la derivada normal de la velocidad tangencial. Ello era de esperar dadas las simetrías impuestas al campo de velocidad en la celda cuadrada por el m3todo de las im1genes de la Secci3n 4.6. Como en la Secci3n precedente, adoptamos el procedimiento de reimponer las CC homog3neas al campo de velocidad en la grilla directa tras cada paso de integraci3n temporal (y generamos as3 una leve violaci3n de la incompresibilidad), pero *s3lo en las fronteras de la celda cuadrada*; las CC en la base de la celda triangular, que queremos que sean *free-slip* cuando simulemos convecci3n h3meda, no son alteradas.

La soluci3n obtenida en la Secci3n 4.6 para la ecuaci3n de Laplace del campo adimensional τ se muestra en la figura 5.13. Puede apreciarse a simple vista que satisface las CC requeridas, $\tau = \frac{1}{2}$ en la base y $\tau = -\frac{1}{2}$ en los techos, y num3ricamente se verifica que lo hace a precisi3n de m1quina. Esto era de esperar ya que a diferencia de las soluciones de la ecuaci3n de Laplace obtenidas en cada paso de integraci3n por el m3todo iterativo de la Secci3n 4.4.2, esta soluci3n se obtiene de manera anal3tica, y es por lo tanto *exacta*.

Este perfil conductivo de temperatura fu3 el utilizado como CI en todas las simulaciones de convecci3n seca en la celda triangular. Debe notarse que estas CI ser3an dif3ciles de implementar en la pr1ctica. Sin embargo tienen dos ventajas: por un lado permiten un r1pido inicio de la etapa convectiva, ya que el perfil conductivo no es hidrost1tico; y por otro proveen de un estado conductivo de referencia que resultar1 muy 3til en la Secci3n 6.2 para la definici3n y c1lculo de los n3meros de Nusselt [88] y Sherwood [89].

La inexistencia de un perfil conductivo hidrostático hace innecesario en este caso desestabilizar la condición inicial; sin embargo, para evitar que la simetría bilateral de la celda triangular origine patrones convectivos con un sesgo sistemático, igualmente se sumó al perfil conductivo un campo de fluctuaciones Gaussianas de amplitud comparable a la del ruido térmico [44] para construir la CI de las simulaciones.