Práctico 8

1. Determinar la suma de las siguientes series.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(10^{-n}+9^{-n}\right).$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+3}+3^n}{6^n}.$

2. Sean $k \in \mathbb{N}$, y $a_i \in \mathbb{R}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si la serie $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ converge.

3. Decidir si las siguientes series son convergentes o divergentes.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+1}.$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{n^4+7n}.$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2-2}{5n^2+1}.$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}^4(n)}{n^2}.$

(e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}}.$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}.$ (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}.$ (h) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}.$

(i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}.$ (j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}.$ (k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}.$

4. (a) Demostrar el llamado **criterio de la raíz** para la convergencia de series.
Sea $a_n \geq 0$ tal que $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = r$. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si $r < 1$ y diverge si $r > 1$.
Sugerencia: la prueba es similar a la prueba del criterio del cociente.

(b) Decidir en cada caso si la serie es convergente.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n.$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}.$ (iii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^n.$

5. Determinar en cada caso si la serie es convergente, y si es absolutamente convergente.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{e^n}.$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+2)}.$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n}.$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2n+1}.$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}.$

6. Decidir si las siguientes integrales impropias convergen o no, utilizando el criterio de la integral para series numéricas.

(a) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{e^x}{x^x}\,dx.$ (b) $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^x}.$

7. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

(a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no es absolutamente convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no es convergente.

(b) Si $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(c) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ son convergentes, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente.

(d) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente y $a_n \geq 0$ para todo n, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ es convergente.

Ejercicios adicionales

(para practicar antes de los exámenes)

8. Decidir si las siguientes series son convergentes o divergentes.

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$. (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(1/n)$. (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(n)$.

Sugerencias: En (a) comparar $n!$ con n^n y usar 3.(i). Para (c) mostrar que $\operatorname{sen}(n)$ no tiende a cero cuando $n \to \infty$.

9. (a) Sea $\{a_n\}$ una sucesión de enteros tales que $0 \leq a_n \leq 9$. Demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$$

existe y es un número entre 0 y 1 (que se denota comúnmente por $0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$).

(b) Escribir cada uno de los números decimales periódicos siguientes como una fracción o como suma de dos fracciones.

(i) $0,2525252525\ldots$ (ii) $0,41283283283283\ldots$

(c) Sean $m, k \in \mathbb{N}$ tales que $m < 10^k$. Probar que $\dfrac{m}{10^k}$ admite dos expresiones decimales distintas.

10. Decidir si las siguientes series son convergentes. Justificar.

(a) $1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} + \cdots$ (b) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$

11. Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que $|a| < 1$ y sea $a_n = (-a)^n$, con $n \geq 0$. Calcular $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, donde b_n es la siguiente reordenación de a_n:

$$1, a^2, a^4, -a, a^6, a^8, a^{10}, -a^3, a^{12}, a^{14}, a^{16}, -a^5, a^{18}, \ldots$$

(se intercalan tres términos de exponente par con uno de exponente impar).