RICHAR FERNANDO RIAÑO RIAÑO

SUBVARIEDADES Y S-REPRESENTACIONES

UNIVERSIDAD NACIONAL
DE CÓRDOBA

Facultad de Matemática, Astronomía y Física

Tesis de doctorado:

SUBVARIEDADES Y S-REPRESENTACIONES

Por:
RICHAR FERNANDO RIAÑO RIAÑO

Bajo la dirección de:
DR. CARLOS ENRIQUE OLMOS

Tesis presentada ante la Facultad de Matemática, Astronomía y Física como parte de los requerimientos para la obtención del grado de Doctor en Matemática de la Universidad Nacional de Córdoba

Richar Fernando Riaño Riaño,
Subvariedades y s-representaciones.
Title in English: *Submanifolds and s-representations.*

C I E M
CONICET
U N C

Con el apoyo de CONICET; Beca Interna de Postgrado con Países Latinoamericanos.
(Fully supported by a CONICET fellowship).

ABSTRACT

This work will prove the conjecture found in [O4] for the case where $n = 3$, generally cited as: *a full, irreducible and homogeneous submanifold from the sphere, different from a curve, such that the normal holonomy group is non-transitive (it does not act transitively on the sphere of the normal space), must be an orbit of an s-representation*, even more, it is proved that it is a Veronese submanifold; namely, isometric to an orbit of the form $SO(n)S$ where S is a symmetric $n \times n$ matrix with zero trace with exactly two eigenvalues, one with multiplicity 1, and the second one with multiplicity n-1, for the case $n = 3$, or a principal orbit of the isotropy representation of SL(3)/SO(3).

An important result that is proven here is that the quantity of non-trivial factors given by the Normal holonomy theorem [BCO, Teorema 4.2.1], for a Euclidean submanifold, in which the local normal holonomy group coincides with the restricted normal holonomy group at each point, is bounded by $[\frac{n}{2}]$, the integer part of $\frac{n}{2}$. This implies that for $n = 3$ there is only one factor; so if M^3 is a submanifold of the sphere, the normal holonomy group acts irreducibly.

Simultaneously with the above proof of the conjecture for $n = 3$, the proof to the previous conjecture will be given assuming that the codimension is maximal, $\mathrm{codim}(M) = \frac{n(n+1)}{2}$ [O3], and that the normal holonomy group (as a submanifold of the sphere) acts irreducibly on the normal space; even more, is a Veronese submanifold. This particularly characterizes Veronese submanifolds in terms of normal holonomy. Finally, we prove the above by changing the assumption of homogeneity for being a minimal submanifold.

[2010] Primary 53C30 AMS; Secondary 53C21 AMS

Key words and phrases: submanifolds, Veronese submanifolds, holonomy, normal holonomy group, submanifolds of the sphere, submanifold of the Eucliden space, rank rigidity, isoparametric submanifolds, s-representations, ortogonal actions.

RESUMEN

En este trabajo se probará la conjetura encontrada en [O4] para el caso en que $n = 3$, citada en general como: *una subvariedad substancial, irreducible y homogénea de la esfera, diferente de una curva, tal que el grupo de holonomía normal es no-transitivo (actúa de manera no transitiva sobre la esfera del espacio normal), debe ser órbita de una s-representación*, mas aún se prueba que es una subvariedad de Veronese; esto es, isométrico a una órbita de la forma $SO(n)S$ donde S es una matriz simétrica de traza nula $n \times n$, con exactamente dos autovalores, uno de multiplicidad 1 y el otro de multiplicidad n-1, para el caso $n = 3$, o una órbita principal de la representación isotrópica de $SL(3)/SO(3)$.

Un resultado importante probado aquí es que la cantidad de factores no triviales del teorema de holonomía normal [BCO, Teorema 4.2.1], para una subvariedad Euclídea, en la cual el grupo de holonomía normal local coincide con el grupo de holonomía normal restringido a cada punto, esta acotado por $[\frac{n}{2}]$, la parte entera de $\frac{n}{2}$. Lo cual implica que para $n = 3$ solo existe un factor; de lo que si M^3 es una subvariedad de la esfera, el grupo de holonomía normal actúa de manera irreducible.

Simultáneamente con la prueba de la conjetura citada para $n = 3$, se dará la prueba para la conjetura anterior asumiendo que la codimensión es maximal, $\operatorname{codim}(M) = \frac{n(n+1)}{2}$ [O3], y que el grupo de holonomía normal (como subvariedad de la esfera) actúa de manera irreducible sobre el espacio normal; mas aún es una subvariedad de Veronese. Lo cual en particular caracteriza las subvariedades de Veronese en términos de holonomía normal. Finalmente se hace una prueba de esto último cambiando la hipótesis de homogeneidad por la de ser mínima.

[2010] Primary 53C30 AMS; Secondary 53C21 AMS

Palabras y frases claves: subvariedades, subvariedades de Veronese, holonomía, grupo de holonomía normal, subvariedades de la esfera, subvariedades del espacio euclídeo, rango rígido, Variedades isoparamétricas, s-representaciones, acciones ortogonales.

Dedicado a mi Madre

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al profesor Nicolás Andruskiewitsch por darme esta gran oportunidad, en especial la oportunidad de trabajar con el profesor Carlos Enrique Olmos a quien agradezco el haber trabajado conmigo por este largo tiempo, por la paciencia y por todas las cosas que aprendí con el y sin el cual este trabajo hubiera sido imposible. Agradezco también a todos los amigos y compañeros que me acompañaron durante este proceso y finalmente agradezco a mi familia que es lo mas importante que tengo, en especial a mi madre cuyo amor es incondicional.

TABLA DE CONTENIDOS

En [O4] se encuentra la siguiente conjetura: *una subvariedad substancial, irreducible y homogénea de la esfera, diferente de una curva, tal que el grupo de holonomía normal es no-transitivo, debe ser órbita de una s-representación*, como una posible extensión del teorema de rango rígido para subvariedades, el cual plantea que: *Si* M^n *es una subvariedad homogénea substancial e irreducible del espacio euclídeo que no es una curva, de rango mayor o igual que dos entonces* M *es una órbita de una s-representación. Más aún para rango al menos uno, ésta, está contenida en alguna esfera*. Como se puede ver en [BCO] la conjetura es valida para $n = 2$

Una subvariedad del espacio euclídeo se dirá *substancial*, si no esta contenida en un subespacio afín y propio del espacio ambiente, el rango de una subvariedad homogénea del espacio euclídeo es definido como el número maximal de campos normales, paralelos, linealmente independientes. Una órbita de una s-representación, es una órbita de la representación isotrópica de un espacio simétrico, simplemente conexo y semisimple; como se puede ver en [O3], para una subvariedad M^n del espacio euclídeo como en la conjetura, la codimensión, esto es, la dimensión del espacio normal, es a lo sumo $\frac{n(n+1)}{2}$, o en otras palabras, el espacio ambiente de una subvariedad con estas características tiene dimensión a lo sumo $n + \frac{n(n+1)}{2}$.

Una órbita de la forma $V^n = SO(n+1)S = \{kSk^{-1} : k \in SO(n+1)\}$ es llamada una *órbita de Veronese*, donde S es una matriz simétrica de traza cero con dos valores propios, uno de los cuales tiene multiplicidad 1 y el otro con multiplicidad n y $SO(n+1)$ es la componente conexa de la identidad del grupo de matrices ortogonales $(n+1) \times (n+1)$. Una subvariedad $M \subset \mathbb{R}^N$ es llamada una *subvariedad de Veronese* si ésta es extrínsecamente isométrica a una órbita de Veronese.

Este trabajo tendrá como mayor objetivo probar los siguientes resultados:

Proposición A. *Sea* M^n *una subvariedad del espacio euclídeo. Asúmase que para todo punto de* M *el grupo de holonomía normal local y el grupo de holonomía normal restringido coinciden (o, equivalentemente, la dimensión de los grupos de holonomía normal locales es constante sobre* M*, en particular para variedades homogéneas 1.3.8). Sea* $p \in M$ *y* k *el numero de de factores irreducibles (no-triviales) de la representación del grupo de holonomía normal restringido* $\Phi(p)$ *sobre* $\nu_p(M)$*. Entonces* $k \leq [\frac{n}{2}]$*, donde* $[\frac{n}{2}]$ *es la parte entera de* $\frac{n}{2}$*.*

Teorema B. *Sea* $M^n \subset S^{n-1+\frac{n(n+1)}{2}}$ *una subvariedad substancial, irreducible y homogénea; con* $n \geq 3$*. Entonces,* M *es una subvariedad de Veronese si y solo si el grupo de holonomía normal restringido actúa de manera irreducible y no-transitiva sobre el espacio normal.*

Teorema C. *Una subvariedad* M^3 *substancial, irreducible y homogénea de la esfera, de dimensión* 3*, tal que el grupo de holonomía normal es no-transitivo, debe ser órbita de una s-representación, mas aún una subvariedad de Veronese o una órbita principal de la representación isotrópica de* $SL(3) = SO(3)$*.*

Teorema D. *Sea* M^n, $n \geq 3$, *una subvariedad completa, substancial e irreducible (inmersa) de* $S^{n-1+\frac{n(n+1)}{2}}$. *Entonces,* M^n *es (salvo cubrimiento) una subvariedad de Veronese si y solamente si es una subvariedad mínima y el grupo de holonomía normal restringido* $\Phi(q)$ *actúa irreducible y no-transitivamente.*

El Teorema C nos dice que la conjetura es válida cuando la dimensión es 3, la Proposición A es esencial para probar este hecho, ya que de A se tiene que la subvariedad M^3 de C, cumple que el grupo de holonomía normal actúa de manera irreducible, mas aún se prueba en el Capítulo 3 que la codimensión de M^3 es necesariamente maximal, en otras palabras la variedad M^3 es necesariamente subvariedad de $S^8 \subset \mathbb{R}^9$, de lo que esta variedad cumple las hipótesis del Teorema B. En particular probado el teorema B se tiene que M^3 en C es una órbita de una s-representación. Note que de B y C se obtiene una caracterización de las subvariedades de Veronese en términos de holonomía normal.

El Teorema B plantea en particular que la conjetura es válida cuando la codimensión es maximal y el grupo de holonomía normal actúa de manera irreducible sobre el espacio normal, esto último, como se dijo, es necesario cuando la dimensión es 3 o incluso 2, ver [BCO]. Hasta cierto punto la prueba de B se sigue de manera general, pero en dado momento el caso en que $n = 3$ necesita una consideración especial y se debe trabajar en varios casos, uno de los cuales necesita un argumento topológico delicado que involucra dos fibraciones distintas: denominadas *fibración del tubo holonómico* y la *fibración cáustica*. Lo que hace que este caso sea más complejo y menos estándar de probar.

El teorema D será probado en la última sección del capitulo 3 y constituye una extensión del teorema B quitando la hipótesis de homogeneidad por la de subvariedad mínima, esto es, una subvariedad tal que para todo $p \in M$ y todo $\xi \in \nu_p(M)$ la $Traza(A_\xi) = 0$.

La hipótesis de homogeneidad o de ser mínima no pueden quitarse, pues si se aplica un difeomorfismo conforme de la esfera la holonomía normal se conserva pero la subvariedad deja de ser mínima (y por consiguiente no puede ser una subvariedad Riemanniana de Veronese).

Con respecto al contenido, los preliminares son esenciales en este trabajo, pues forman un compendio de tópicos que se pueden abordar con relativa facilidad y que son, uno a uno, fundamentales en la prueba de A, B, C y D; por lo que es preciso ahondar en cada detalle.

En el Capítulo 1, se empiezan a estudiar las subvariedades, más específicamente, subvariedades de formas espaciales, es decir subvariedades de variedades con curvatura escalar constante, posteriormente en el trabajo de manera gradual se reducirá solamente, a considerar subvariedades del espacio euclídeo o de la esfera, que es lo que supone el problema a resolver.

Posteriormente en la segunda sección del capitulo 1, se hablará de la holonomía normal, que en esencia no difiere de la holonomía Riemanniana. Se expresarán algunos hechos relevantes respecto a la holonomía normal y se presentará el teorema de holonomía normal, cuya prueba será dada en la sección posterior. Otro tópico fundamental de esta sección, es el de sistemas de holonomía de Simons, junto con el notable teorema de *J. Simons* [S], que será útil para la prueba del teorema de holonomía normal, que además es no solo fundamental para posteriores pruebas de los preliminares, si no que será esencial en la prueba del teorema que compete a este trabajo.

Como se expresó anteriormente en la siguiente sección del capitulo 1 se dará la prueba del teorema de holonomía normal, además de múltiples aplicaciones de los sistemas de holonomía, en conjunto con esto se mostrarán las aplicaciones del teorema de *J. Simons* que es fundamental para el trabajo de sistemas de holonomía irreducibles. La prueba del teorema de holonomía normal es dada no solo por la importancia del teorema en sí, sino por la trascendencia de ella misma, esto es, la prueba en sí nos da métodos valiosos para posteriores pruebas, tanto de los preliminares, como de la conclusión de la tesis. Antes de finalizar esta sección se dará la prueba de A, con un argumento bastante sencillo.

El capítulo 2, tratará el tema de acciones ortogonales, en la primera sección se verán generalidades, s-representaciones, acciones polares y otros conceptos básicos; por supuesto a medida que se avanza se va generando la notación adecuada para este trabajo, las dos secciones siguientes son mucho más delicadas que el trabajo hasta ahora, se tratarán temas como subvariedades con fibrado normal plano, subvariedades con curvaturas principales constantes, en particular subvariedades isoparamétricas y otros temas como tubos de holonomía y variedades focales, todos en detalle, pues forman parte fundamental de la tesis. Análogamente como para la prueba del teorema de holonomía normal, no solo los resultados sino algunas de las construcciones para las pruebas serán posteriormente usadas en la conclusión del trabajo, teoremas, como el teorema de Thorberssonn 2.3.14, que finaliza el capítulo, dan luz a la conjetura general.

En adición a los preliminares tenemos cuatro apéndices, los dos primeros presentan preliminares sobre temas básicos que se usan en la tesis, como campos de Killing, el grupo de isometrías, las variedades homogéneas y espacios simétricos, el Apéndice 3 de gran utilidad hablará de las órbitas de Veronese fundamental para el Teorema B. El Apéndice 4 mostrará como son los grupos de Lie compactos de dimensión menor que 4 lo cual es básico para la prueba del Teorema C.

Para finalizar, el Capítulo 3 empezará con la motivación del problema, por supuesto, se darán algunos argumentos mas profundos que los dados en esta introducción. La siguientes secciones corresponden al trabajo de tesis, la mayoría de los lemas, proposiciones y teoremas dados en esta sección hacen parte del trabajo, algunos de las cuales son de nivel muy general, que tal vez sean útiles para diferentes y/o posteriores trabajos pero que para el objetivo del trabajo solo sirven como postulados de empalme hacia la prueba de los Teoremas B y C y la Proposición A, antes citados.

Explicaremos algunas ideas de la prueba del Teorema B cuando $n \geq 4$.

Sea $\tilde{A}_\xi = A_\xi - \frac{1}{n} traza(A_\xi) Id$, donde $\tilde{A}$ es el operador de forma de traza nula de la variedad homogénea $M = H\nu$. Sea $\tilde{A}$ la aplicación del espacio normal a la esfera $\bar{\nu}_q(M)$ en los endomorfismos simétricos de traza nula $Sim_\circ(n)$. Para el caso, $\tilde{A}$ es una biyección lineal que aplica el espacio normal a las $\Phi(p)$-órbitas en el espacio normal de las $SO(n)$-órbitas, por conjugación en $Sim_\circ(T_q M)$. Se probará que $\tilde{A}$ es una homotecia la cual aplica $\Phi(q)$ en $SO(n)$. Esto implica que los autovalores de $\tilde{A}_\xi$ son constantes si ξ es transportado paralelamente a lo largo de curvas cerradas. Por la homogeneidad de M y como el grupo

H está contenido en las $\nabla^{\perp}$-transvecciones, se obtiene que los valores de $\tilde{A}_{\xi}$ son constantes, donde $\xi(t)$ es el transporte paralelo normal a lo largo de una curva. Ahora pasamos a un tubo de holonomía, singular, apropiado, M_{ξ}, donde A_{ξ} tiene exactamente dos autovalores uno de los cuales es de multiplicidad 2. Para M_{ξ} el campo $\hat{\xi}$ definido como $\hat{\xi}(q) = q - \pi(q)$ es un campo normal paralelo tal que la variedad focal paralela $(M_{\xi})_{-\hat{\xi}}$ a M_{ξ} coincide con M.

Se obtiene que las tres funciones propias $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2$ y $\hat{\lambda}_3 = -1$, del operador de forma $\hat{A}_{\hat{\xi}}$ de M_{ξ} tienen multiplicidad constante y las dos distribuciones $\hat{A}_{\hat{\xi}}$, llámense E_1 y E_2 de $\hat{\lambda}_1$ y $\hat{\lambda}_2$ respectivamente tienen multiplicidades respectivas 2 y $n-2$. La distribución vertical es la autodistribución asociada al autovalor -1. De las propiedades de $\tilde{A}$ mencionadas anteriormente y las formulas del tubo se obtiene que $\hat{\lambda}_1$ y $\hat{\lambda}_2$ cumplen que si alguna es constante a lo largo de una curva, la otra también lo es. Usando la condición de Dupin; pues $\dim(E_1) \geq 2$, $\hat{\lambda}_1$, y por tanto $\hat{\lambda}_2$, son constantes a lo largo de variedades integrales de E_1. Si $n \geq 4$, esto es valido también para la distribución E_2. Entonces, los autovalores de $\hat{A}_{\hat{\xi}}$ son constantes a lo largo de curvas horizontales. Pero cualquier par de puntos en el tubo de holonomía puede ser unido por una curva horizontal, entonces $\hat{A}_{\hat{\xi}}$ tiene autovalores constantes, de lo que $\hat{\xi}$ es un campo normal paralelo isoparamétrico no-umbilico ($\hat{A}_{\hat{\xi}}$ no es múltiplo escalar de la identidad). Entonces, por el teorema isoparamétrico del rango rígido, el tubo de holonomía M_{ξ}, y en tanto $(M_{\xi})_{-\hat{\xi}} = M$, es órbita de una s-representación. De lo que se sigue que M es una subvariedad de Veronese. El recíproco es bien conocido para subvariedades de Veronese.

Cuando $n = 3$, como anteriormente, la prueba es mas compleja. Pues la condición de Dupin no aplica para la distribución E_2, y requiere un argumento topológico.

1 SUBVARIEDADES Y HOLONOMÍA NORMAL

En este capítulo se recordarán los resultados básicos de la teoría de subvariedades, esencialmente relacionados con la holonomía normal. También nos referiremos a los sistemas de holonomía de Simons que están muy relacionados con la holonomía normal. En esta tesis también haremos uso de esta herramienta.

1.1 SUBVARIEDADES

Sean M y $\bar{M}$ variedades Riemannianas, si se tiene una inmersión isométrica de M en $\bar{M}$, se dice que M es una *subvariedad inmersa* de $\bar{M}$. Cuando M es un subconjunto de $\bar{M}$ y la inclusión es una inmersión isométrica se dice que M es una *subvariedad*, si en adición la inclusión es un incrustación se dice que M es una *subvariedad incrustada*, en ocasiones se hace caso omiso de la traducción y se escribe *subvariedad embedded*, este último caso se tiene si y solo si la topología de M es la inducida por $\bar{M}$.

Sea M subvariedad inmersa de $\bar{M}$ y $f : M \mapsto \bar{M}$ la inmersión, y sea $\langle \cdot, \cdot \rangle_{f(p)}$ el producto interno en $T_{f(p)}\bar{M}$ de la métrica Riemanniana; entonces éste induce un producto interno en T_pM dado por $\langle x, y \rangle_p = \langle f_{*p}x, f_{*p}y \rangle_{f(p)}$, para todo $p \in M$ y $x, y \in T_pM$, de aquí en adelante siempre se verá a M con la métrica inducida de este modo.

Consideremos M como subvariedad de $\bar{M}$, en particular $M \subset \bar{M}$, la métrica Riemanniana de $\bar{M}$ induce en M una descomposición ortogonal de $T\bar{M}$.

$$T\bar{M}\,|_M = TM \oplus \nu M$$

νM es llamado el *fibrado normal* a M, la fibra a $p \in M$ de νM es el *espacio normal* a p denotado por $\nu_p M$. Para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ es posible definir $\overline{\nabla}_X Y$, con $\overline{\nabla}$ la conexión de Levi-Civita en $\bar{M}$, en los puntos de M, pues la derivada covariante depende sólo de los valores de Y a lo largo de curvas integrales de X, entonces se puede usar cualquier extensión de X e Y a campos de $\bar{M}$.

Por la descomposición anterior se tiene:

$\overline{\nabla}_X Y = (\nabla_X Y)^T + (\nabla_X Y)^\perp$, donde $(\cdot)^T$ denota la parte tangente y $(\cdot)^\perp$ la parte normal.

Si ∇ es la conexión de Levi-Civita de M, entonces:

$\nabla_X Y = (\nabla_X Y)^T$

Se define $(\nabla_X Y)^\perp = \alpha(X, Y)$, llamada la *segunda forma fundamental*, de lo que la ecuación inicial quedará

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y)$$

La prueba de que $\nabla_X Y$ es la conexión de Levi-Civita se deduce del hecho de que ésta es unívocamente determinada por la *fórmula de Koszul*:

$$\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2}\{X\langle Y, Z\rangle + Y\langle X, Z\rangle - Z\langle X, Y\rangle + \langle [X, Y], Z\rangle - \langle [X, Z], Y\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle\}$$

La fórmula $\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y)$, se conoce como la *fórmula de Gauss*, de esta fórmula y como la conexión de Levi-Civita es simétrica sumado a que el corchete de Lie de dos campos de una subvariedad M es tangente a M, se sigue que, $\overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X = [X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$, de lo que $\alpha(X, Y) = \alpha(Y, X)$, luego y como α es $C^\infty(M)$-bilineal, es un tensor simétrico; de lo que tiene sentido hablar de $\alpha(v, w)$, $v, w \in T_p M$.

Una sección de νM se llamará campo vectorial normal de M. Sea ξ un campo normal de M, entonces se escribe:

$$\overline{\nabla}_X \xi = \nabla^\perp_X \xi - A_\xi X, \text{ X vector tangente a } M$$

Esta fórmula es conocida como la *fórmula de Weingarten*, donde de nuevo, $-A_\xi X = (\overline{\nabla}_X \xi)^T$ y $\nabla^\perp_X \xi = (\overline{\nabla}_X \xi)^\perp$, el tensor A_ξ es llamado el operador normal o de forma; como $\langle X, \xi\rangle = 0$, entonces $0 = X\langle Y, \xi\rangle = \langle \alpha(X, Y), \xi\rangle + \langle X, -A_\xi Y\rangle$, de lo que:

$$\langle \alpha(X, Y), \xi\rangle = \langle A_\xi X, Y\rangle$$

La simetría de α implica que A_ξ es un tensor auto-adjunto sobre M, también se tiene que para todo $p \in M$ el endomorfismo $A_\xi(p)$ no depende de la extensión de ξ_p como vector normal, esto es, el operador normal se puede definir con respecto a cada vector normal de M, del cual se obtiene la fórmula de Weingarten. En esta fórmula $\nabla^\perp$ es llamada la *conexión normal* sobre νM. $\nabla^\perp$ es una conexión en el sentido que satisface:

1. $\nabla^\perp$ es $\mathbb{R}$-bilineal.
2. $\nabla^\perp_{fX} \xi = f \nabla^\perp_X \xi$
3. $\nabla^\perp_X f\xi = f \nabla^\perp_X \xi + X(f)\xi$
4. $X\langle \xi, \eta\rangle = \langle \nabla^\perp_X \xi, \eta\rangle + \langle \xi, \nabla^\perp_X \eta\rangle$ ($\nabla^\perp$ es métrica).

Por supuesto que la propiedad de simetría de la conexión de Levi-Civita no tiene sentido para la conexión normal.

Por derivación de los tensores A y α se obtienen las fórmulas:

$$(\nabla^\perp_X \alpha)(Y, Z) = \nabla^\perp_X \alpha(Y, Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z)$$

$$(\nabla_X A)_\xi Y = (\nabla_X A_\xi)Y - A_{\nabla^\perp_X \xi} Y = \nabla_X(A_\xi Y) - A_\xi(\nabla_X Y) - A_{\nabla^\perp_X \xi} Y$$

que se relacionan por:

$$\langle(\nabla^\perp_X \alpha)(Y,Z),\xi\rangle = \langle(\nabla_X A)_\xi Y, Z\rangle = \langle(\nabla_X A_\xi)Y, Z\rangle - \langle A_{\nabla^\perp_X \xi} Y, Z\rangle$$

Sean R y $\overline{R}$ los tensores de curvatura Riemanniana de M y $\bar{M}$ respectivamente, $\bar{M}$ de curvatura constante k; esto es, el tensor Riemanniano tiene la forma.

$$\overline{R}(X,Y)Z = k(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y)$$

Recordar que en general $R(X,Y)Z = [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]}Z$, entonces:

$$\begin{aligned}
\overline{R}(X,Y)Z &= \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_{[X,Y]}Z \\
&= \overline{\nabla}_X(\nabla_Y Z + \alpha(Y,Z)) - \overline{\nabla}_Y(\nabla_X Z + \alpha(X,Z)) - (\nabla_{[X,Y]}Z + \alpha([X,Y],Z)) \\
&= \nabla_X\nabla_Y Z + \alpha(X,\nabla_Y Z) - A_{\alpha(Y,Z)}X + \nabla^\perp_X \alpha(Y,Z) \\
&\quad - (\nabla_Y\nabla_X Z + \alpha(Y,\nabla_X Z) - A_{\alpha(X,Z)}Y + \nabla^\perp_Y \alpha(X,Z)) \\
&\quad - \nabla_{[X,Y]}Z - \alpha(\nabla_X Y, Z) + \alpha(\nabla_Y X, Z) \\
&= R(X,Y)Z - A_{\alpha(Y,Z)}X + A_{\alpha(X,Z)}Y \quad \Rightarrow \text{Parte tangente} \\
&\quad + (\nabla^\perp_X \alpha)(Y,Z) - (\nabla^\perp_Y \alpha)(X,Z) \qquad \Rightarrow \text{Parte normal}
\end{aligned}$$

Como $\bar{M}$ tiene curvatura seccional constante k, igualando en la ecuación anterior, la parte tangente y la parte normal, se tiene que:

$$(\overline{R}(X,Y)Z)^T = R(X,Y)Z - A_{\alpha(Y,Z)}X + A_{\alpha(X,Z)}Y = k(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y)$$

$$(\overline{R}(X,Y)Z)^\perp = (\nabla^\perp_X \alpha)(Y,Z) - (\nabla^\perp_Y \alpha)(X,Z) = 0 \quad \text{o} \quad (\nabla^\perp_X \alpha)(Y,Z) = (\nabla^\perp_Y \alpha)(X,Z)$$

La primera ecuación se llama la *ecuación de Gauss* y la segunda la *ecuación de Codazzi*. Si W es otro campo en M y ξ es un campo normal, las ecuaciones de Gauss y Codazzi se reescriben respectivamente como:

$$k(\langle Y,Z\rangle\langle X,W\rangle - \langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle) = \langle R(X,Y)Z, W\rangle - \langle\alpha(Y,Z),\alpha(X,W)\rangle + \langle\alpha(X,Z),\alpha(Y,W)\rangle$$

$$\langle(\nabla_X A)_\xi Y, Z\rangle - \langle(\nabla_Y A)_\xi X, Z\rangle = 0$$

Note que $\overline{R}(X,Y)Z = k(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y)$, en $\bar{M}$, de lo que si se escogen X,Y tangentes a M y ξ normal, por ortogonalidad se concluye que $\overline{R}(X,Y)\xi = 0$, de lo que:

$$\begin{aligned}
0 = \overline{R}(X,Y)\xi &= \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y\xi - \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X\xi - \overline{\nabla}_{[X,Y]}\xi \\
&= \overline{\nabla}_X(-A_\xi Y + \nabla^\perp_Y\xi) - \overline{\nabla}_Y(-A_\xi X + \nabla^\perp_X\xi) + A_\xi[X,Y] - \nabla^\perp_{[X,Y]}\xi \\
&= -\nabla_X(A_\xi Y) - \alpha(X, A_\xi Y) - A_{\nabla^\perp_Y\xi}X + \nabla^\perp_X\nabla^\perp_Y\xi \\
&\quad + \nabla_Y(A_\xi X) + \alpha(Y, A_\xi X) + A_{\nabla^\perp_X\xi}Y - \nabla^\perp_Y\nabla^\perp_X\xi \\
&\quad + A_\xi\nabla_X Y - A_\xi\nabla_Y X - \nabla^\perp_{[X,Y]}\xi \\
&= (\nabla_Y A)_\xi X - (\nabla_X A)_\xi Y + R^\perp(X,Y)\xi + \alpha(A_\xi X, Y) - \alpha(X, A_\xi Y) \quad (*)
\end{aligned}$$

Aquí $R^\perp(X,Y)\xi = \nabla^\perp_X\nabla^\perp_Y\xi - \nabla^\perp_Y\nabla^\perp_X\xi - \nabla^\perp_{[X,Y]}\xi$, es el tensor de curvatura del espacio normal con conexión $\nabla^\perp$, llamado el *tensor de curvatura normal* de M. Notar de la última ecuación que la conexión normal, que por razones obvias, no cumple la simetría de la conexión de Levi-Civita, cobra sentido con respecto al tensor de curvatura normal. Volviendo a la ecuación $(*)$, la parte tangente da la ecuación de Codazzi, mientras que la parte normal da la llamada *ecuación de Ricci*.

$$0 = (\overline{R}(X,Y)\xi)^\perp = R^\perp(X,Y)\xi + \alpha(A_\xi X, Y) - \alpha(X, A_\xi Y)$$

Si η es otro campo normal de M la ecuación de Ricci se reescribe.

$$\langle (R^\perp(X,Y)\xi), \eta\rangle = \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y\rangle, \text{ donde } [A_\xi, A_\eta] = A_\xi A_\eta - A_\eta A_\xi.$$

La conexión normal al igual que la conexión de Levi-Civita induce una derivada covariante, notada con $\frac{D^\perp}{dt}$, a lo largo de curvas. Si $c : [a,b] \to M$ se define el transporte paralelo a lo largo de c de igual manera que en el caso Riemanniano y se nota con $\tau^\perp$, asumiendo siempre que se hace referencia a una curva especifica; y de nuevo como en el caso Riemanniano se obtiene una isometría lineal $\tau^\perp : \nu M_{c(a)} \to \nu M_{c(b)}$, análogamente si $\xi(t)$ es un vector normal a lo largo de una curva c entonces:

$$\frac{D^\perp}{dt}\xi(t) = \left.\frac{d}{dh}\right|_{h=0} (\tau^\perp)^{-1}\xi(t+h)$$

Esto último, de hecho, es válido para conexiones métricas en general [KN1].

Si $R^\perp \equiv 0$, se dice que M tiene un *fibrado normal plano (ó flat)*, lo que significa que el transporte paralelo en el espacio normal, con respecto a la conexión normal solo depende de la clase de homotopía de las curvas cerradas. También por la ecuación de Ricci M tiene fibrado normal plano si y solo si el conjunto, $\{A_\xi : \xi \in \nu_p M\}$, es una familia conmutativa de endomorfismos simétricos para todo $p \in M$.

Sea M subvariedad de $\bar{M}$, se dice que M es *totalmente geodésica*, si α es idénticamente cero, como $\langle \alpha(X,Y), \xi\rangle = \langle A_\xi X, Y\rangle$, esto es equivalente a que el operador de forma A es idénticamente cero, esto es, $\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y$ para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Si $c : [a,b] \to M$ es una curva diferenciable a trozos, el transporte paralelo a lo largo de c en M y $\bar{M}$, está relacionado por:

$\tau = \overline{\tau}\,|_{T_{c(a)}M}$

$(\tau^{\perp}) = \overline{\tau}\,|_{\nu M_{c(a)}}$

Esta última propiedad es también equivalente a que M sea totalmente geodésica. En particular si toda geodésica de M es geodésica de $\bar{M}$ es equivalente a que M sea totalmente geodésica, pues $\overline{\nabla}_{\gamma'(0)}\gamma'(t) = \alpha(\gamma'(0), \gamma'(0))$ para toda γ geodésica de M.

Si M es una subvariedad totalmente geodésica de $\bar{M}$ entonces los respectivos tensores de curvatura $R, \bar{R}$ se relacionan de igual forma, esto es :

$R_{v,w}z = \bar{R}_{v,w}z$, para todo $p \in M$, $v, w, z \in T_pM$.

Las *Formas espaciales* son las variedades Riemannianas con curvatura seccional constante $k \in \mathbb{R}$, los modelos estándar de estas variedades son:

1. $S^n(k^{1/2})$ si $k > 0$ la esfera de dimensión n, de radio $k^{1/2}$ contenida en $\mathbb{R}^{n+1}$ con la métrica usual derivada de éste.

2. $\mathbb{R}^n$ si $k = 0$ con la métrica usual.

3. $H^n((-k)^{-1/2})$ si $k < 0$ el espacio hiperbólico.

Donde k es la curvatura seccional constante, en el caso del espacio Hiperbólico se define sobre $\mathbb{R}^{n+1}$ la métrica Lorentziana, como:

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i - v_{n+1}w_{n+1}.$$

Notando a este espacio como $\mathbb{R}^{n,1}$ llamado el espacio de Lorentz, sea r un real positivo entonces el espacio hiperbólico se define como $H^n(r) := \{p \in \mathbb{R}^{n,1} : \langle p, p\rangle = -r^2,\ p_{n+1} > 0\}$. Estos modelos son llamados las *Formas espaciales estándar* que corresponden a las formas espaciales conexas, simplemente conexas; usualmente notadas como $\bar{M}^n(k)$, note que si $M^n(k)$ es una forma espacial conexa con curvatura constante k, ésta siempre admite un cubrimiento de $\bar{M}^n(k)$, de ahí que usualmente se llame a un forma espacial $M^n(k)$, esférica, plana o hiperbólica dependiendo de si $k > 0$, $k = 0$ o $k < 0$ respectivamente.

Teorema 1.1.1. *[BCO]. Sea $p \in \bar{M}^n(k)$ una forma espacial estándar y V un subespacio lineal r-dimensional de $T_p\bar{M}^n(k)$, $0 < r < n$, entonces existe una subvariedad conexa, compacta y totalmente geodésica M de $\bar{M}^n(k)$ con $p \in M$ y $T_pM = V$, mas aún, M es congruente al embedding canónico de $\bar{M}^r(k)$ en $\bar{M}^n(k)$, que es totalmente geodésico. Toda subvariedad conexa y totalmente geodésica N de $\bar{M}^n(k)$ con $p \in N$ y $T_pN = V$ es un abierto en M.*

En el caso de $\mathbb{R}^n$, toda subvariedad totalmente geodésica es un subespacio afín, mas aún, las subvariedades conexas, completas, totalmente geodésicas de $S^n(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ son la intersección de $S^n(r)$ con los subespacios de $\mathbb{R}^{n+1}$, análogo para $H^n \subset \mathbb{R}^{n,1}$.

Una subvariedad M de $\bar{M}$ forma espacial se dice *substancial*, si no está contenida en una subvariedad totalmente geodésica de $\bar{M}$ de dimensión menor que la dimensión de $\bar{M}$, en el caso en que $\bar{M} = \mathbb{R}^n$, esto equivale a que M no está contenida en ningún espacio afín propio de $\mathbb{R}^n$, para el caso en el que $\bar{M} = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es similar, decir que M es subvariedad substancial de S^n es equivalente a decir que $M \subsetneq L \cap S^n$ donde L es un subespacio afín propio de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Si M no es substancial se dice que existe una *reducción de codimensión* de M.

Se define por, $\nu_p^1 = \text{span}\{\alpha(X,Y) \mid X, Y \in T_pM\} \subset \nu_pM$, llamado primer espacio normal a p, esto es, ν_p^1 es el complemento ortogonal en ν_pM del subespacio de ν_pM que consiste de todos los $\xi \in \nu_pM$ para los que $A_\xi = 0$; si $\dim(\nu_p^1)$ no depende de p, ν^1 es un subespacio fibrado de ν con fibras a todo p dadas obviamente por ν_p^1.

El siguiente resultado es muy simple pero útil para demostrar cuando una subvariedad del espacio euclídeo no es substancial.

Lema 1.1.2. ***Lema de Erbacher****. Sea M una subvariedad conexa del espacio euclídeo y sea $\xi \neq 0$ un campo normal paralelo tal que $A_\xi \equiv 0$. Entonces M no es substancial.*

Demostración
Sean $p, q \in M$ y c una curva en M con $c(0) = p$, $c(1) = q$, entonces:

$\frac{d}{dt}\xi(c(t)) = \frac{D^\perp}{dt}\xi(c(t)) - A_{\xi(c(t))}c'(t) = 0$, luego $\xi(p) = \xi(q)$.

En particular $\nu = \xi(p)$ es normal a M de lo que

$\frac{d}{dt}\langle \nu, c(t)\rangle = \langle \nu, c'(t)\rangle = 0$, pues $c'(t)$ es tangente.

Como $\langle \nu, p\rangle = \langle \nu, q\rangle$ entonces M esta contenido en el hiperplano afín dado por la ecuación $\langle \nu, \cdot\rangle = \langle \nu, p\rangle$. $\diamond$

Teorema 1.1.3. ***Teorema de reducción de codimensión.****.[BCO, Teorema 2.5.1]. Sea $f : M \to \overline{M}$ una inmersión isométrica de una variedad Riemanniana conexa m-dimensional M en una forma espacial estándar n-dimensional $\bar{M}$. Si para algún, y por lo tanto para cada $p \in M$, ν_p^1 es invariante bajo el transporte paralelo con respecto a la conexión normal, y si s denota la dimensión constante de ν^1, entonces existe una $(m+s)$-dimensional subvariedad totalmente geodésica N de $\bar{M}$, tal que f es una inmersión isométrica de M en N.*

Al igual que en la geometría Riemanniana se puede definir la irreducibilidad de subvariedades de una forma espacial; una subvariedad $M \subset \mathbb{R}^N$ se dice *reducible* si $M = M_1 \times M_2$

donde M_1 es subvariedad de $\mathbb{R}^{N_1}$ y M_2 subvariedad de $\mathbb{R}^{N_2}$ con $N_1 + N_2 = N$, en tal caso $M_1 \times M_2$ es llamado producto de M_1 y M_2; se dice que M es *irreducible* si esto no se puede dar; por supuesto para S^n se tiene una definición análoga.

Se terminará esta sección con el siguiente lema.

Lema 1.1.4. ***Lema de Moore****. Sea M una subvariedad del espacio euclídeo, la cual es producto Riemanniano $M = M_1 \times M_2$. Si la distribución paralela en M tangente a M_1 (o equivalentemente a M_2) es invariante bajo el operador de forma, entonces, M es reducible como producto de las subvariedades M_1 y M_2.*

Demostración
Para $(p, q) \in M_1 \times M_2$, sean respectivamente L_p y L^q los subespacios afines del espacio ambiente generados por $\{p\} \times M_2$ y $M_1 \times \{q\}$, se debe probar que todos los L_p y L^q son paralelos y que $L_p \perp L^q$.

Ver que si la distribución paralela TM_1 de M es invariante bajo el operador de forma, entonces TM_2 también lo es, esto equivale a decir que $\alpha(x_1, x_2) = 0^{(1)}$ si x_1 está en el tangente a M_1 y x_2 en el tangente a M_2, pues $\langle \alpha(x_1, x_2), \xi \rangle = \langle A_\xi x_1, x_2 \rangle = 0$, para todo ξ normal a M. Por la fórmula de Gauss y como el espacio ambiente es plano $\alpha(x_1, y_1) \perp \alpha(x_2, y_2)$ si $x_1, x_2, y_1, y_2 \in T_{(p,q)}M$, $x_1, y_1 \in T_pM \times \{0\}$, $x_2, y_2 \in \{0\} \times T_pM$.

Se usará el siguiente hecho; si S es una subvariedad de un espacio euclídeo y $s \in S$, entonces el subespacio afín generado por S está dado por, $s + \mathrm{span}(\bigcup_{r \in S} T_rS)^{(2)}$, aquí el tangente se ve como espacio lineal.

Sean $q, q' \in M$ y sea $c(t)$ curva en M_2 con $c(0) = q, c(1) = q'$ y $\nu \in T_{(p,q)}(M_1 \times \{q\})$. Además sea $\nu(t)$ el transporte paralelo en la conexión normal de $\{p\} \times M_2$ como subvariedad de M, $\nu(t)$ es un campo en M a lo largo de $c(t)$ entonces $\frac{d}{dt}\nu(t) = 0$ pues $\frac{d}{dt}\nu(t)$ en el espacio normal a $\{p\} \times M_2$ como subvariedad de M se anula por definición de paralelismo, la componente tangente también se anula pues la subvariedad es totalmente geodésica en M. La componente normal a M es $\alpha(\nu(t), c'(t))$, la cual es cero por (1), de lo que $T_{(p,q)}(M_1 \times \{q\}) = T_{(p,q')}(M_1 \times \{q'\})$.

Entonces por (2), L^q es paralelo a $L^{q'}$, análogamente para los L_p.

Se sabe que $T_{(p,q)}(M_1 \times \{q\}) \perp T_{(p,q)}(\{p\} \times M_2)$ entonces por (2):

$T_{(p,q)}(M_1 \times \{q\}) \perp T_{(p,q')}(\{p\} \times M_2)$, para todo $q' \in M_2$.

de (2) se obtiene que $T_{(p,q)}(M_1 \times \{q\}) \perp L_p$ puesto que q' es arbitrario en M_2, haciendo lo mismo a izquierda se llega a que $L^q \perp L_p$, lo que concluye que todos los L_p son paralelos al igual que los L^q y que $L^q \perp L_p$, $(p, q) \in M_1 \times M_2$ arbitrarios. $\diamond$

1.2 HOLONOMÍA NORMAL Y TEOREMA DE HOLONOMÍA NORMAL

El concepto de holonomía que se presentará en esta sección es mucho más amplio, tal como se puede apreciar en [KN1], este es un concepto cuya noción se extiende a espacios fibrados con alguna conexión, en particular se puede aplicar al fibrado normal de una subvariedad M de un espacio con curvatura constante al cual le fue asociada ya su respectiva conexión normal $\nabla^{\perp}$.

Sea M una subvariedad de una forma espacial estándar $\bar{M}^n(k)$, como es usual νM es el espacio normal de M y $\nabla^{\perp}$ la conexión normal inducida; análogamente, como para el caso Riemanniano para $p, q \in M$ y $c : [0,1] \to M$, curva diferenciable a trozos con $c(0) = p$ y $c(1) = q$, el transporte $\nabla^{\perp}$-paralelo a lo largo de c induce una isometría lineal $\tau_c^{\perp} : \nu_p M \to \nu_q M$, en efecto el transporte paralelo sobre cualquier fibrado con una conexión no depende de la parametrización de la curva [KN1, Capítulo 2] en particular en el espacio normal; de nuevo $\Omega(p)$ es el conjunto de curvas diferenciables a trozos cerradas a p, esto es, el conjunto de las $c : [0,1] \to M$ tales que $c(1) = c(0) = p$, entonces $\tau_c^{\perp}$ es una isometría lineal de $\nu_p M$ en $\nu_p M$, en ocasiones para la notación se omitirá escribir la curva siempre que no genere confusión, el conjunto de todas estas isometrías forma un subgrupo de $O(\nu_p M)$ llamado el *grupo de holonomía normal* de M a p, denotado como Φ_p o $\Phi(p)$, en caso de que M sea conexo todos los Φ_p son conjugados por lo que se suele hablar simplemente del grupo de holonomía normal y se nota como Φ.

Si se reemplaza $\Omega(p)$ por $\Omega^*(p)$ el conjunto de curvas homotópicas a cero en $\Omega(p)$, se obtiene un subgrupo de $O(\nu_p M)$ llamado el *grupo de holonomía normal restringido* de M a p denotado por Φ_p^* o $\Phi_*(p)$, Φ_p^* resulta normal a Φ_p, Φ_p/Φ_p^* es numerable, y Φ_p^* es un subgrupo de Lie conexo de $O(\nu_p M)$, ver [KN1, Capítulo 2], en virtud de esto Φ_p resulta un subgrupo de Lie de $O(\nu_p M)$ cuya componente conexa a la identidad es Φ_p^*, en general como se ha mencionado esto resulta un hecho general para espacios fibrados con alguna conexión. En adición tanto Φ_p como Φ_p^* se pueden obtener usando solamente curvas en $\Omega(p)$ y $\Omega(p)^*$ respectivamente de clase C^1 a trozos, ver [KN1, Capítulo 2], por supuesto si M es simplemente conexa $\Phi_p^* = \Phi_p^*$.

Un importante hecho concerniente a Φ_p^* es que éste es un subgrupo cerrado de $O(\nu_p M)$, en particular compacto, mientras que Φ_p no necesariamente. Mas adelante cuando sea formulado el teorema de holonomía normal, esto será probado basado en el simple hecho de que cualquier grupo conexo que actúa irreduciblemente por isometrías es compacto [KN1, Apéndice 5], por supuesto el grupo de holonomía normal actúa sobre el espacio normal al punto base, al igual que el grupo restringido, como subgrupo de isometrías; pero no necesariamente de manera irreducible, aun así el teorema de holonomía normal establece, en particular, que se puede descomponer como producto finito de subgrupos normales cada uno actuando irreduciblemente sobre un subespacio del normal.

El álgebra de Lie de Φ_p, que por supuesto es la misma que para Φ_p^*, es llamada el *álgebra de holonomía normal*; un importante teorema general de holonomía es el teorema de *Ambrose-Singer*. Este resultado general es válido sobre cualquier fibrado sobre una variedad M conexa y paracompacta, con una conexión arbitraria, la prueba se puede ver en [KN1, Capítulo 2, Teorema 8.1].

En el caso de holonomía normal se cita como:

Teorema 1.2.1. ***Teorema normal de Ambrose-Singer.*** *Sea M subvariedad conexa de $\bar{M}^n(k)$ forma espacial, y sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de holonomía normal subálgebra de $\mathfrak{so}(\nu_p M)$. Entonces es generada por los endomorfismos $\tau_c^{\perp} R(X_q, Y_q)(\tau_c^{\perp})^{-1}$ donde $\tau_c^{\perp}$ es el transporte $\nabla^{\perp}$-paralelo en M a lo largo de una curva diferenciable a trozos c que une p con q, con $X_q, Y_q \in T_q M$.*

Sea M subvariedad de $\bar{M}^n(k)$ forma espacial y sean A y α respectivamente el operador de forma y la segunda forma fundamental, relacionadas por la ecuación:

$$\langle \alpha(X,Y), \xi \rangle = \langle A_\xi X, Y \rangle,\ X, Y \in T_p M \text{ y } \xi \in \nu_p M,\ p \in M.$$

Como A_ξ es un operador simétrico de $\nu_p M$ todos sus valores propios son reales y son llamados *curvaturas principales* de M con respecto a ξ y los vectores propios, *vectores de curvatura principal* de M con respecto a ξ, el espacio de vectores propios a una misma curvatura principal es llamado *espacio de curvatura principal* asociado a esta curvatura, por supuesto la multiplicidad de la curvatura es la dimensión de este espacio. Como $A_{s\xi} = sA_\xi$, $s \in \mathbb{R}$, es claro que para $s \neq 0$ las curvaturas principales son las mismas, por lo que usualmente se considera a ξ unitario. Se dirá que M tiene curvaturas principales constantes si para todo campo paralelo ξ_t, a lo largo de cualquier curva diferenciable a trozos en cada tiempo t, las curvaturas principales en dirección a ξ_t se mantienen constantes.

Un importante ejemplo de subvariedades con curvaturas principales constantes son las *subvariedades isoparamétricas* que son por definición subvariedades con curvaturas principales constantes con espacio normal plano, esto es, tales que $R^{\perp} \equiv 0$, éste tópico será tratado mas adelante con más detalle. Otra sub-clase de subvariedades con curvaturas principales constantes son las órbitas de *s-representaciones* que serán estudiadas en el siguiente capítulo. Con más precisión ver B, una s-representación es la representación isotrópica de un espacio simétrico simplemente conexo, semisimple, $M = G/K$ con $G = I^{\circ}(M)$, esto es si:

$$\psi : K \to GL(T_0 M) \qquad K \to d\varphi_k|_0$$

Donde $\varphi_k : M \to M \quad p \to kp$

$\psi(K)$ es llamado el *grupo lineal de isotropía* de G/K y $\psi(K)\nu$ una *órbita* de la s-representación para cada $\nu \in T_0 M$, usualmente se nota como $K\nu$, si no hay posible confusión.

Este tópico será tratado en el siguiente capítulo, por el momento se tiene el siguiente lema:

Lema 1.2.2. *Sea M subvariedad de $\bar{M}^n(k)$ forma espacial con curvaturas principales constantes, entonces, para todo $p \in M$, el primer espacio normal ν_p^1 es invariante bajo transporte $\nabla^{\perp}$-paralelo.*

Demostración
Recordar que $(\nu_p^1)^{\perp} = \{\xi \in \nu_p M \mid A_\xi \equiv 0\}$, se sigue de la definición de curvaturas principales constantes que $(\nu_p^1)^{\perp}$ es invariante bajo el transporte $\nabla^{\perp}$-paralelo, lo que implica inmediatamente que ν_p^1 es invariante bajo el transporte $\nabla^{\perp}$-paralelo.$\diamond$

Si M^n es substancial se tiene que $\nu_p = \nu_p^1$, entonces, el lema implica que si M tiene curvaturas principales constantes entonces $\dim(\nu_p) \leq \frac{n(n+1)}{2}$, donde el miembro derecho de la desigualdad es precisamente la dimensión de las matrices simétricas $n \times n$.

Volviendo a la holonomía, uno de los teoremas principales es el teorema de holonomía normal que viene a ser una versión normal del teorema algebraico de De Rham-Berger [BCO, Pág. 106].

Teorema 1.2.3. ***Teorema de holonomía normal.***
Sea M una subvariedad conexa de una forma espacial estándar $\bar{M}^n(k)$. Sea $p \in M$ y sea Φ^* el grupo de holonomía normal restringido a p. Entonces Φ^* es compacto, y existe una única (salvo el orden) descomposición ortogonal $\nu_p M = V_0 \oplus \ldots \oplus V_m$ del espacio normal $\nu_p M$ en subespacios Φ^*-invariantes y subgrupos normales $\Phi_0, \ldots, \Phi_m$ de Φ^* tales que:

I $\Phi^* = \Phi_0 \times \ldots \times \Phi_m$ (producto directo)

II Φ_i actúa trivialmente sobre V_j si $j \neq i$.

III $\Phi_0 = \{1\}$ y si $i \geq 1$, ϕ_i actúa irreduciblemente sobre V_i como la representación isotrópica de un espacio simétrico irreducible (Riemanniano).

La prueba de este hecho se dará en la siguiente sección, en esta prueba se usan los llamados sistemas de holonomía que representan un importante tópico en la geometría de subvariedades. Sea V un espacio vectorial euclídeo. Un tensor $R : V \times V \to \mathfrak{so}(V)$ es llamado un tensor de *curvatura algebraico* si satisface las identidades algebraicas de un tensor de curvatura Riemanniano, a saber:

a) $\langle R(X,Y)Z,W\rangle = -\langle R(Y,X)Z,W\rangle$

b) $\langle R(X,Y)Z,W\rangle = -\langle R(X,Y)W,Z\rangle$

c) $\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle R(Z,W)X,Y\rangle$

d) $\langle R(X,Y)Z,W\rangle + \langle R(Y,Z)X,W\rangle + \langle R(Z,X)Y,W\rangle = 0$ *la primera identidad de Bianchi*

Sea $g \in SO(n)$ y $A \in \mathfrak{so}(n)$, entonces, gR y AR son tensores de curvatura algebraicos, esto es, el espacio vectorial real de todos los tensores de curvatura algebraicos sobre V es un $SO(n)$-modulo, aquí gR significa $(gR)_{x,y} = gR_{g^{-1}(x),g^{-1}(y)}g^{-1}$ y por diferenciación $(AR)_{x,y} = -R_{Ax,y} - R_{x,Ay} - [R_{x,y}, A]$.

Sea R un tensor de curvatura algebraico sobre V. Un subgrupo compacto G de $O(n)$ es llamado un *grupo de holonomía* de R, si $R_{x,y} \in \mathfrak{g}$, para todo $x, y \in V$ donde $\mathfrak{g}$ denota el álgebra de Lie de G. Véase que si $R_{x,y} \in \mathfrak{g}$, para todo $x, y \in V$, entonces $(gR)_{x,y}$ y $(AR)_{x,y}$ están en $\mathfrak{g}$ para todo $x, y \in V$, $g \in G$, $A \in \mathfrak{g}$, de lo que si G es subgrupo de holonomía de R, lo es de gR y AR.

Una tripleta $S = [V, R, G]$, donde V es un espacio vectorial euclídeo, R un tensor de curvatura algebraico sobre V y G un grupo de holonomía conexo de R, es llamado *sistema de holonomía*. El hecho de que R cumpla las propiedades de un tensor de curvatura Riemanniano no es fortuito ya que $[T_pM, R_p, Hol_p^\circ(M)]$ forma un sistema de holonomía para todo p donde M es una variedad Riemanniana, R el tensor de curvatura y $\mathrm{Hol}_p(M)$ la componente conexa del grupo de holonomía Riemanniano [KN1], ya que $R_{x,y} \in \mathrm{Lie}(\mathrm{Hol}_p^{\circ}(M))$ donde $\mathrm{Lie}(\mathrm{Hol}_p^{\circ}(M))$ es el álgebra de Lie de $\mathrm{Hol}_p^{\circ}(M)$, que por supuesto coincide con el álgebra del grupo de holonomía $\mathrm{Hol}_p(M)$.

Un sistema de holonomía $[V, R, G]$ es llamado *irreducible* si G actúa irreduciblemente sobre V, *transitivo* si G actúa transitivamente sobre la esfera unitaria de V y *simétrico* si $gR = R$ para todo $g \in G$, o equivalentemente vía diferenciación, si $AR = 0$ para todo $A \in \mathfrak{g}$. Note que en tal caso:

$R_{x,y} = (gR)_{x,y} = gR_{g^{-1}(x),g^{-1}(y)}g^{-1}$, entonces

$g^{-1}R_{(x,y)} = R_{g^{-1}(x),g^{-1}(y)}g^{-1}, \quad$ para todo $g \in G$

De lo que el sistema de holonomía es simétrico si el tensor algebraico es G-invariante.

Nota 1.2.4. La definición de sistemas de holonomía simétricos esta íntimamente relacionada con los espacios simétricos; considérese $[V, R, G]$ sistema de holonomía simétrico y $\mathfrak{L} = \mathfrak{g} \oplus V$ el espacio vectorial, defínase $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ por :

- $[A, B] = [A, B]_{\mathfrak{g}}$
- $[x, y] = R_{x,y}$
- $[A, x] = Ax, \quad A, B \in \mathfrak{g}, \quad x, y \in V$

$[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$ denota el corchete de Lie del álgebra $\mathfrak{g}$. $[\cdot,\cdot]$ dota a $\mathfrak{L}$ de estructura de álgebra de Lie, lo cual no es difícil de probar, por ejemplo, si $x, y, z \in V$ la identidad de Bianchi expresa la identidad de Jacobi, si $A, B \in \mathfrak{g}$ y $x, y \in V$.

$[[A, B], x] + [[B, x], A] + [[x, A], B] = (AB - BA)x - A(Bx) + B(Ax) = 0$ y por simetría,

$[A, [x, y]] + [y, [A, x]] + [x, [y, A]] = (AR)_{x,y}$.

Entonces $(\mathfrak{L}, [\cdot,\cdot])$ es un álgebra de Lie y en adición tenemos las relaciones de Cartan:

$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$, $[\mathfrak{g}, V] \subset V$, $[V, V] \subset \mathfrak{g}$.

Con lo que $\mathfrak{L}$ corresponde a la descomposición de un espacio simétrico simplemente conexo $M = K/G$ donde $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g}$, $\mathrm{Lie}(K) = \mathfrak{L}$, para el cual el espacio tangente a cada punto $p \in M$ se identifica con V. Con tensor de curvatura a p igual a R y álgebra holonómica igual a $\mathfrak{g}$. Para una construcción explícita ver [BCO, Pág. 110].

El producto interno en $\mathfrak{L}$ esta dado por el producto en V, $-\mathrm{Tr}(XY)$ en $\mathfrak{g}$ y $V \perp \mathfrak{g}$, si K/G tiene factor plano, entonces G no es, en general, el grupo de isotropía ni la holonomía, pero si ésta es semisimple, esto es sin factor plano, entonces G coincide con la holonomía y también con el grupo de isotropía. Véase que K/G es semisimple si y solo si R es no degenerado, esto es, $R_{u,v} = 0$, para todo $v \in V$ si y solo si $u = 0$. Si G actúa irreduciblemente sobre V y $R \neq 0$

entonces K/G es simétrico irreducible, en general el tensor de curvatura algebraico R no es el tensor de curvatura de K/G, pero es un múltiplo escalar sobre cada factor irreducible de la descomposición de De Rham [KN1] de K/G.

De lo dicho anteriormente se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1.2.5. *Si $S = [V, R, G]$ y $S' = [V, R', G]$ son dos sistemas de holonomía simétricos, irreducibles con $\dim(V) \geq 2$, entonces $R' = \lambda R$, para alguna constante λ.*

Un importante teorema, resultado de *J. Simons* es el siguiente.

Teorema 1.2.6. ***(J. Simons).*** *[S] Sea $[V, R, K]$ sistema de holonomía irreducible, si K es no transitivo sobre V, entonces $[V, R, K]$ es simétrico.*

1.3 ALGUNAS APLICACIONES DE LOS SISTEMAS DE HOLONOMÍA.

En esta sección se demostrarán varios teoremas útiles en lo que sigue, en los cuales se usan los sistemas de holonomía, por supuesto uno de los principales hechos será demostrar el teorema de holonomía normal, cuya prueba no solo es útil por el resultado en si, si no que provee de una técnica muy útil para probar otros teoremas relacionados.

Asociada a cada tensor de curvatura algebraico R se tiene la *curvatura escalar* definida de manera similar que para el tensor de curvatura Riemanniano, esto es $k(R_p) = 2\sum_{i<j}\langle R_{e_i e_j} e_j, e_i\rangle$ con $e_1, ..., e_n$ base ortonormal de T_pM, notar que $k(gR) = k(R)$.

Lema 1.3.1. *Sea G subgrupo de Lie conexo de $SO(n)$, el cual actúa irreduciblemente sobre $\mathbb{R}^n$, entonces G es cerrado en $SO(n)$. [KN1, Apéndice 5]*

Teorema 1.3.2. *Sea G subgrupo de Lie conexo de $SO(V)$, actuando irreduciblemente sobre un espacio vectorial V, sea R tensor de curvatura algebraico sobre V tal que $R_{x,y} \in \mathfrak{g}$ para todo $x, y \in V$. Si $k(R) \neq 0$, entonces, G es compacto, $S = [V, R, G]$ es un sistema de holonomía irreducible y G actúa sobre V como un s-representación.*

Demostración
Por el lema anterior G es compacto, entonces existe una medida de Haar sobre G la cual permite definir un tensor $\overline{R}$ de la siguiente manera:

$$\overline{R} = \int_G gR$$

Claramente $g\overline{R} = \overline{R}$ para todo $g \in G$, como $k(R) \neq 0$ entonces $k(\overline{R}) \neq 0$ luego $\overline{R} \neq 0$, de lo que $[V, \overline{R}, G]$ es un sistema de holonomía simétrico en particular actúa sobre V como una s-representación. ⋄

La siguiente es una importante propiedad de las s-representaciones.

Proposición 1.3.3. *Sean* K *y* K' *dos s-representaciones irreducibles sobre* V, $\dim(V) \geq 2$ *que no actúan transitivamente sobre la esfera unitaria en* V. *Si* K *y* K' *tienen las mismas órbitas, entonces* $K = K'$ *y las s-representaciones coinciden.*

Demostración

Sea $\hat{K}$ el grupo generado por K y K', este es no-transitivo (no actúa transitivamente sobre la esfera unitaria en V), puesto que ambos K y K' tienen las mismas órbitas, de lo que cK también. Sean R y R' los respectivos tensores de curvatura correspondientes a las s-representaciones de K y K'. Entonces, $[V, R, \hat{K}]$ es un sistema de holonomía irreducible y no-transitivo; pues $R_{x,y} \in \mathrm{Lie}(K) \subset \mathrm{Lie}(\hat{K})$, por el teorema de Simons 1.2.6, $[V, R, \hat{K}]$ es simétrico de lo que $\mathrm{Lie}(\hat{K})$ es generado por R, y entonces $K = \hat{K}$, análogamente $K' = \hat{K}$ de lo que $K = K'$ y por la Proposición 1.2.5, $R' = \lambda R$ con λ constante. $\diamond$

Prueba del teorema de holonomía normal

Demostración Sea M una subvariedad de una forma espacial estándar $\bar{M}^n(k)$, se tiene en un comienzo el tensor de curvatura normal sobre M, $R^\perp$, recordar que:

$R^\perp(X,Y)\xi = \nabla^\perp_X \nabla^\perp_Y \xi - \nabla^\perp_Y \nabla^\perp_X \xi - \nabla^\perp_{[X,Y]}\xi$, y satisface,

$\langle (R^\perp(X,Y)\xi), \eta\rangle = \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y\rangle$, donde, $[A_\xi, A_\eta] = A_\xi A_\eta - A_\eta A_\xi$.

Se sabe que $R^\perp(X,Y)$ está en el álgebra de la holonomía normal como caso particular del teorema de Ambrose-Singer, pero de la definición es claro que $R^\perp$ no es un tensor de curvatura algebraico sobre el espacio normal, deseamos construir un tensor de tipo $(1,3)$ sobre el espacio normal a M, por el momento $R^\perp$ se puede considerar como un homomorfismo de $\bigwedge^2 T_pM \to \bigwedge^2 \nu_pM$ donde $\bigwedge^2$ se puede identificar con los endomorfismos antisimétricos, este último se compone con su respectivo homomorfismo adjunto $R^{\perp t}$, de lo que se obtiene $\mathfrak{R}^\perp = R^\perp R^{\perp t} : \bigwedge^2 \nu_pM \to \bigwedge^2 \nu_pM$, el cual se puede identificar con un $(1,3)$-tensor sobre ν_pM; la ecuación de Ricci nos dice que:

$\langle (R^\perp(X,Y)\xi), \eta\rangle = \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y\rangle$, lo que implica, $R^{\perp t}(\xi \wedge \eta) = [A_\xi, A_\eta]$, de lo que,

$\langle \mathfrak{R}^\perp(\xi_1, \xi_2)\xi_3, \xi_4\rangle = \langle R^{\perp t}(\xi_1 \wedge \xi_2), R^{\perp t}(\xi_3 \wedge \xi_4)\rangle = -\mathrm{Tr}([A_{\xi_1}, A_{\xi_2}][A_{\xi_3}, A_{\xi_4}])$

pues el producto interno sobre $\bigwedge^2$ es dado por $\langle A, B\rangle = -\mathrm{Tr}(AB)$, esta última fórmula nos da un tensor algebraico de tipo $(1,3)$ sobre el normal, el cual satisface las condiciones de tensor algebraico, fácilmente verificables por simple inspección. A $\mathfrak{R}^\perp$ se le llama el *tensor de curvatura normal adaptado* y esta última ecuación la llamaremos la *ecuación del tensor adaptado*, solo para futuras referencias.

Lema 1.3.4. $\mathfrak{R}^\perp$ *es un tensor algebraico sobre* ν_pM.

Nota 1.3.5. Note que $k(\mathfrak{R}^\perp) = 2\sum_{i<j}\langle \mathfrak{R}^\perp_{e_i e_j} e_j, e_i\rangle = -2\sum_{i<j}\mathrm{Tr}([A_{e_i}, A_{e_j}][A_{e_i}, A_{e_j}])$ donde k es la curvatura escalar, entonces $\mathfrak{R}^\perp$ tiene curvatura escalar no-negativa y es cero si y solo si $\mathfrak{R}^\perp$ es idénticamente cero, además la imagen de $\mathfrak{R}^\perp$ es la misma que la de $R^\perp$ pues $\ker(R^\perp) =$

$(\mathrm{Im}R^{\perp t})^{\perp}$.

Del teorema de Ambrose-Singer se tiene que:

Lema 1.3.6. *Sea* M *subvariedad de* $\bar{M}^n(k)$ *espacio de formas estándar, entonces el álgebra de Lie del grupo de holonomía normal a* $p \in M$*, es generado por los tensores de la forma* $(\tau_c^{\perp})^{-1}\mathfrak{R}^{\perp}(\tau_c^{\perp}\xi, \tau_c^{\perp}\eta)\tau_c^{\perp}$*, donde* c *es una curva cerrada diferenciable a trozos en* M *a* p.

Nótese, $c\mathfrak{R}^{\perp}(\xi,\eta) = (\tau_c^{\perp})^{-1}\mathfrak{R}^{\perp}(\tau_c^{\perp}\xi, \tau_c^{\perp}\eta)\tau_c^{\perp}$, considérese V el espacio vectorial de todos los tensores sobre $\nu_p M$ generados por todos los tensores $c\mathfrak{R}^{\perp}$, como $\mathfrak{R}^{\perp}$ es algebraico, $c\mathfrak{R}^{\perp}$ es algebraico y en general toda combinación lineal de ellos, de lo que para todo $R \in V$, R es un tensor de curvatura algebraico. Se descompone $\nu_p M$ en subespacios invariantes Φ_p^*-ortogonales, sea $\nu_p M = V_0 \oplus \ldots \oplus V_k$, donde Φ_p^* actúa trivialmente sobre V_0 e irreduciblemente sobre V_i para $i \geq 1$. Denótese ξ_i la proyección ortogonal de $\xi \in \nu_p M$ sobre V_i, entonces se tiene para todo $R \in V$ que:

a) $R(\xi_i, \xi_j) = 0$ si $i \neq j$.

Como R es tensor algebraico $\langle R(\xi_i,\xi_j)\eta,\eta'\rangle = \langle R(\eta,\eta')\xi_i,\xi_j\rangle$, $\eta,\eta' \in \nu_p M$, como $R(\eta,\eta') \in \mathrm{Lie}(\Phi_p^*)$ y $\mathrm{Lie}(\Phi_p^*)$ deja invariante V_i entonces $R(\eta,\eta')\xi_i \in V_i \perp V_j$ luego $\langle R(\eta,\eta')\xi_i,\xi_j\rangle = 0$, de lo que $\langle R(\xi_i,\xi_j)\eta,\eta'\rangle = 0$, para todo $\eta,\eta' \in \nu_p M$, por arbitrariedad de $\xi \in \nu_p M$ esto implica a).

b) $R(\xi,\eta) = \Sigma_i R(\xi_i,\eta_i)$.

Es inmediato de a) usando linealidad.

c) $R(\xi_i,\eta_i)V_j = 0$ si $i \neq j$.

Si $\eta_j' \in V_j$, de Bianchi, $R(\xi_i,\eta_i)\eta_j' + R(\eta_i,\eta_j')\xi_i + R(\eta_j',\xi_i)\eta_j = 0$; por a) $R(\eta_i,\eta_j') = R(\eta_j',\xi_i) = 0$, luego $R(\xi_i,\eta_i)\eta_j' = 0$ y se obtiene c).

d) $R(\xi_i,\eta_i)V_i \subseteq V_i$.

Tómese $(R(\xi_i,\eta_i)\eta_j')_j = P_j$, la proyección ortogonal en V_j para algún V_j en la descomposición ortogonal, nótese que por a) $R(\xi_i^1, P_j) = 0$, entonces $\langle R(\xi_i^1,P_j)\xi_i^2,\xi_i^3\rangle = 0$, para todo $\xi^1,\xi^2,\xi^3 \in \nu_p M$, esto es, $\langle R(\xi_i^2,\xi_i^3)\xi_i^1, P_j\rangle = 0$, en particular si $\xi^2 = \xi$, $\xi^3 = \eta$, $\xi^1 = \eta'$ implica $\langle P_j, P_j\rangle = 0$ y esto si y solamente si $P_j = 0$ de donde $R(\xi_i,\eta_i)\eta_j')_j \in V_i$ y se obtiene d).

Tómese $\mathfrak{g}_i$ el espacio vectorial generado por los $R(\xi_i,\eta_i)$; $\xi_i,\eta_i, \in V_i$, $R \in V$ de (a-d) se obtiene.

Lema 1.3.7. *Con la notación anterior:*

i) $\mathfrak{g}_0 = \{0\}$, *y todo* $\mathfrak{g}_i$ $i \geq 1$ *es un ideal de* $\mathfrak{g}$.

ii) $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus ... \oplus \mathfrak{g}_k$ y $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = \{0\}$ si $i \neq j$.

iii) $\mathfrak{g}_i V_i = V_i$, *para todo* $i \geq 1$.

iv) $\mathfrak{g}_i V_j = \{0\}$ *si* $i \neq j$.

v) $\mathfrak{g}_i$ *actúa irreduciblemente sobre* V_i *para todo* $i \geq 1$.

Por el lema anterior, si Φ_i subgrupo de Lie conexo de Φ_p^* con álgebra de lie $\mathfrak{g}_i$ entonces $\Phi_p^* = \Phi_0 \times ... \times \Phi_k$, con Φ_i actuando trivialmente sobre V_j para $i \neq j$, e irreduciblemente sobre V_i si $i \geq 1$, por el Lema 1.3.1 Φ_i es compacto, de lo que Φ_p^* es compacto por ser producto de compactos.

Para cada $i \geq 0$ tómese $R_i \in V$ tal que R_i no sea idénticamente nulo sobre V_i, entonces $[V_i, R_i, \Phi_i]$ es un sistema de holonomía irreducible, como $k(R_i) \neq 0$, aplicando el teorema 1.3.2, Φ_i actúa sobre V_i como una s-representación, lo que concluye la prueba del teorema de holonomía normal. ◇

Para finalizar este capítulo se darán teoremas que serán de gran utilidad en el trabajo a seguir.

Nota 1.3.8. Se define Φ_p^{loc} a p, como la intersección de todos los grupos de holonomía $\Phi_p^*(U)$, donde U es cualquier vecindad abierta a p. Se puede ver que siempre existe una vecindad V de p tal que el grupo de holonomía normal de V a p coincide con Φ_p^{loc}, claro, si $\{U_k\}$ es una sucesión de vecindades abiertas y conexas de p tales que $U_k \supset \overline{U_{k+1}}$ y $\bigcap^\infty U_k = \{p\}$, entonces obviamente $\Phi_p^*(U_1) \supset \Phi_p^*(U_2) \supset ...$, como para cada U vecindad abierta de p existe un entero k tal que $U_k \subset U$ se tiene que $\Phi_p^{loc} = \bigcap^\infty \Phi_p^*(U_k)$, como cada grupo $\Phi_p^*(U_k)$ es conexo se sigue que $\dim(\Phi_p^*(U_k))$ es constante a partir de k lo suficientemente grande y en tanto $\Phi_p^*(U_k) = \Phi_p^{loc}$ para tal k, y este es el V deseado, por supuesto para $V' \subset V$ se sigue que $\Phi_p^*(V) = \Phi_p^*(V') = \Phi_p^{loc}$, de lo que en general se puede asumir V difeomorfo a una bola abierta, note que si $\dim(\Phi_p^{loc})$ es constante entonces $\Phi_p^{loc} = \Phi_p^*$ [KN1, Cap. 4, Teorema 10.3], en particular $\Phi_p^{loc} = \Phi_p^*$ si la variedad es homogénea.

Teorema 1.3.9. *[O3]. Sea* M^n *subvariedad substancial del espacio euclídeo, o de la esfera, tal que el grupo de holonomía local a* $p \in M$ *actúa sin puntos fijos; esto es, no existe un campo normal paralelo localmente definido no-trivial alrededor de* p*. Asúmase, más aun, que ningún factor del grupo de holonomía local es transitivo sobre la esfera. Entonces existen puntos en* M*, arbitrariamente cerca a* p*, donde el primer espacio normal coincide con el espacio normal. En particular,* $\operatorname{codim}(M) \leq \frac{n(n+1)}{2}$ *donde* $\operatorname{codim}(M) = \dim(\nu_p)$.

Demostración
Si M subvariedad de la esfera, asimismo puede considerarse subvariedad del espacio euclídeo. Como el trabajo es local y por la nota previa, se puede asumir que M es tan pequeño tal que el grupo de holonomía local coincide con el grupo de holonomía normal a p.

Se descompone $\nu M = V_0 \oplus V_1 \oplus \ldots \oplus V_m$ en espacios ortogonales paralelos asociados a los factores irreducibles del grupo de holonomía normal (V_0 es trivial si M es euclidiano y V_0 es el subespacio normal 1-dimensional generado por el vector posición si M esta contenido en la esfera).

$\mathfrak{R}^{\perp}_{\xi,\eta}$ deja la descomposición invariante donde $\mathfrak{R}^{\perp}$ es el tensor de curvatura normal adaptado y más aún $\mathfrak{R}^{\perp} = \mathfrak{R}^1 \oplus \mathfrak{R}^2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{R}^m$ donde $\mathfrak{R}^i$ es la restricción de $\mathfrak{R}^{\perp}$ a V_i , de la prueba del teorema de holonomía normal $\mathfrak{R}^i = 0$ si y solo si $i = 0$, entonces para $i = 1, 2, \ldots r$ existe un $q \in M$ cercano a p tal que $\mathfrak{R}^i(q) \neq 0$ y se tiene que $[(V_i)_q, \mathfrak{R}^i(q), \Phi_i]$ es un sistema de holonomía irreducible no-transitivo, donde Φ_i es la restricción a $(V_i)_q$ del grupo de holonomía normal a q para cada i, por Simons 1.2.6, $[(V_i)_q, \mathfrak{R}^i(q), \Phi_i]$ es simétrico para todo i, entonces $\mathfrak{R}^i(q)$ es el tensor de curvatura de un espacio simétrico irreducible, en particular éste es no degenerado para todo i, por lo que la degenerancia de $\mathfrak{R}^{\perp}$ es V_0. Si $\xi \in \nu_q M$ es ortogonal a ν^1_q entonces $A_{\xi} = 0$, de la ecuación del tensor adaptado $\mathfrak{R}^{\perp}$, se puede concluir que ξ esta en la degenerancia de $\mathfrak{R}^{\perp}$, entonces $\xi \in (V_0)_q$ y $\xi = 0$ si M no esta contenida en la esfera, de lo contrario A_{ξ} es múltiplo no trivial de la identidad Pero $A_{\xi} = 0$ implica $\xi = 0$, pues V_0 es generado por el vector posición, de lo que en cualquier caso $A_{\xi} = 0$ implica que $\xi = 0$ o lo que es lo mismo $\xi \to A_{\xi}$ es inyectiva en el espacio de matrices simétricas $n \times n$ cuya dimensión es $\frac{n(n+1)}{2}$.

De la primera conclusión $\nu'_q = \nu_q M$ y de la segunda $\operatorname{codim}(M) \leq \frac{n(n+1)}{2}$ y queda probado el teorema. $\diamond$

Los siguientes lemas dan cotas para la cantidad de factores invariantes de la descomposición del teorema de holonomía normal. El primero es clave cuando la subvariedad es de dimensión 2 y el segundo para cuando la dimensión es mayor que 2.

Lema 1.3.10. *[BCO, Teorema 4.5.1] Sea M^n una subvariedad del espacio euclídeo. Entonces en un subconjunto abierto y denso de M, el número de factores irreducibles de la representación del grupo de holonomía normal local es $\frac{n(n-1)}{2}$.*

La siguiente proposición da una mejor cota para factores no-triviales.

Proposición 1.3.11. *Sea M^n una subvariedad del espacio euclídeo. Asúmase que para todo punto de M el grupo de holonomía normal local y el grupo de holonomía normal restringido coinciden (o, equivalentemente, la dimensión de los grupos de holonomía normal locales es constante sobre M, en particular para variedades homogéneas 1.3.8). Sea $p \in M$ y k el número de factores irreducibles (no-triviales) de la representación del grupo de holonomía normal restringido $\Phi(p)$ sobre $\nu_p(M)$. Entonces $k \leq [\frac{n}{2}]$, donde $[\frac{n}{2}]$ es la parte entera de $\frac{n}{2}$.*

Demostración

Para $p \in M$ Sea $\nu_p(M) = \nu_p^0 \oplus \nu_p^1 \oplus ... \oplus \nu_p^k$, la descomposición en subespacios asociados a cada uno de los factores irreducibles del grupo de holonomía normal restringido, con ν_p^0 asociado al factor trivial. Por hipótesis $\nu_p^i(M)$ se extiende a un subfibrado normal paralelo ν^i de $\nu(M)$ para $i = 0, 1, ..., k$ (eventualmente haciendo a M suficientemente pequeño alrededor de p, como el trabajo aquí es local, esto no es problema). Entonces tenemos la descomposición $\nu(M) = \nu^1 \oplus ... \oplus \nu^k$. Por hipótesis $\Phi(p)$ actúa trivialmente sobre ν_q^0 e irreduciblemente sobre ν_q^i para $i = 1, ..., k$.

Sea $\mathfrak{R}^{\perp}_{\xi,\eta}$ el tensor de curvatura adaptado definido en la prueba del teorema de holonomía 1.3. Por la fórmula del tensor adaptado 1.3, $\mathfrak{R}^{\perp}_{\xi,\eta} = 0$ si y solo si $[A_\xi, A_\eta] = 0$, observe que si $i \neq j$ entonces $\mathfrak{R}^{\perp}_{\xi_i,\xi_j} = 0$ para ξ_i, ξ_j secciones normales de ν^i y ν^j respectivamente. Entonces, existe $q \in M$, arbitrariamente cerca a p, tal que $\mathfrak{R}^{\perp}_{\nu_q^i,\nu_q^i} \neq \{0\}$, para todo $i = 1, ..., k$. En efecto, existe $q_1 \in M$, arbitrariamente cerca a p tal que $\mathfrak{R}^{\perp}_{\nu_{q_1}^1,\nu_{q_1}^1} \neq \{0\}$, de lo contrario ν^1 debe ser plano. Esto debe ser cierto incluso para una vecindad V_1 de q_1. Ahora tómese $q_2 \in V_1$ tal que $\mathfrak{R}^{\perp}_{\nu_{q_2}^2,\nu_{q_2}^2} \neq \{0\}$ y se continúa hasta encontrar $q = q_k$ en una vecindad V_{k-1} tal que $\mathfrak{R}^{\perp}_{\nu_q^i,\nu_q^i} \neq \{0\}$ para todo $i = 1, ..., k$.

Supóngase que para todo $\xi_i, \eta_i \in \nu_q^i$, $i > 0$ $[A_{\xi_i}, A_{\eta_i}]$ conmuta con A_{ξ_i}, entonces:

$$\langle [[A_{\xi_i}, A_{\eta_i}], A_{\xi_i}], A_{\eta_i} \rangle = 0 = \langle [A_{\xi_i}, A_{\eta_i}], [A_{\xi_i}, A_{\eta_i}] \rangle$$

De lo que $[A_{\xi_i}, A_{\eta_i}] = 0$, como $\mathfrak{R}^{\perp}_{\nu_q^i,\nu_q^i} \neq \{0\}$ y ξ_i, η_i son arbitrarios en ν_q^i se llega a contradicción. Lo anterior implica que para todo $i = 1, ..., k$; existen $\xi_i, \eta_i \in \nu_i$ tales que $[A_{\xi_i}, A_{\eta_i}]$ no pertenece al álgebra generada por los $\{A_\eta\}$ con $\eta \in \nu_q(M)$ sin componente en ν^i (en efecto pues si $i \neq j$ los operadores de forma de elementos de ν_q^j conmutan con los operadores de forma de elementos en ν^i). Entonces existe un conjunto $[A_{\xi_1}, A_{\eta_1}], ..., [A_{\xi_k}, A_{\eta_k}]$ de k endomorfismos antisimétricos linealmente independientes que además conmutan entre si. Como el rango del grupo ortogonal $SO(n)$ es la parte entera de $\frac{n}{2}$, esto es, la dimensión de un subespacio maximal de matrices antisimétricas que conmutan entre si, entonces $k \leq [\frac{n}{2}]$, con $[\frac{n}{2}]$ la parte entera de $\frac{n}{2}$. ◇

La cota del lema 1.3.10 nos da el siguiente teorema, que como se verá mas adelante es una motivación para este trabajo, ver 3.1.4

Teorema 1.3.12. *[BCO, Teorema 4.5.2] Sea M una superficie que tiene la propiedad de que alrededor de cada punto, ésta no está contenida en una esfera o en un subespacio afín. Entonces el grupo local de holonomía normal es trivial o éste actúa transitivamente sobre la esfera unitaria del espacio normal (local).*

Demostración

i. Supóngase que Φ_q^{loc} es no trivial y sea $p \in M$. Supóngase que existe un campo normal paralelo ξ tal que el operador de forma A_ξ es múltiplo de la identidad (éste se denomina un *campo normal paralelo umbilico*), en tal caso M debe estar contenido o en una esfera o en un subespacio afín. Mas aún, el factor V_0 es trivial, pues en otro caso debe existir un campo normal paralelo no-umbilico ξ al rededor de p. Pero esto implica que el fibrado normal es plano pues ξ conmuta con todos los otros operadores de forma y por la ecuación de Ricci el operador de forma conmuta, pues $\dim(M) = 2$, entonces $R^\perp = 0$, de lo que la existencia de ξ es imposible por la hipótesis del teorema.

ii. El lema 1.3.10 fuerza a que el grupo local de holonomía normal actúa irreduciblemente, pues $l = \frac{m(m-1)}{2} = 1$ si $m = 2$.

iii. Por contradicción supóngase que Φ_q^{loc} no actúa transitivamente sobre la esfera unitaria de $\nu_p M$. Entonces existe un punto q cercano a p tal que $\mathfrak{R}_q^\perp \neq 0$ y $[\nu_q M, \mathfrak{R}_q^\perp, \Phi_q^{loc}]$ es un sistema de holonomía irreducible no-transitivo, por el teorema de Simons 1.2.6, el sistema resulta simétrico, en particular ν_q' coincide con $\nu_q M$, claro, esto es consecuencia de la irreducibilidad, pues si existe un $\xi \in \nu_q M$ con $A_\xi = 0$, entonces $\mathfrak{R}_q^\perp(\xi, \cdot) = 0$.

Como $\xi \to A_\xi$ es inyectiva, se tiene que $\dim(\nu_q M) \leq 3$, pues A_ξ es un operador simétrico y la dimensión de las matrices simétricas 2×2 es 3. (De la clasificación de espacios simétricos [BCO, Apéndice 4]), un espacio simétrico irreducible de dimensión a lo mas 3 tiene rango 1, esto es ν_0 (el factor euclídeo) tiene dimensión 1, por i. se llega a contradicción, de lo que el grupo de holonomía normal es transitivo sobre la esfera unitaria del espacio normal. $\diamond$

Lo anterior es válido incluso para superficies contenidas en la esfera que no están contenidas en espacios afín propios o de manera equivalente, en esferas de menor dimensión.

2 TOPICOS

2.1 ACCIONES

En esta primera sección del capítulo trataremos las G-acciones sobre una variedad Riemanniana, las acciones siempre se supondrán suaves, y nos referiremos siempre al caso especial de acciones por isometrías. Entonces tenemos el isomorfismo $\rho : G \to I(M)$ y la aplicación suave de $G \times M \to M$ dada por $(g, p) \to \rho(g)(p) = gp$ que por definición de acción satisface $(gg')p = g(g'p)$, para todo $g, g' \in G$, $p \in M$.

Una órbita de la acción es el conjunto Gp con $p \in M$ y el grupo de isotropía es el subgrupo $G_p = \{g \in G \mid gp = p\}$, si para algún $p \in M$ por lo tanto para todos $Gp = M$, la acción se dice *transitiva* y M se dice un G-*espacio*. Un ejemplo importante es la acción de $SO(n)$ sobre $Sim_\circ$, el conjunto de matrices simétricas de traza cero actuando por conjugación, esto es $g.x = gxg^{-1}$, esta acción es ortogonal con respecto al producto interno $\langle X, Y \rangle = Tr(XY)$.

Nota 2.1.1. La palabra *ortogonal* se usa para este tipo de acciones, esto es acciones para las cuales $\rho(G)$ es un subgrupo del grupo de isometrías lineales, en adelante supondremos que la acción es no-transitiva; toda órbita es una subvariedad del espacio ambiente pero no necesariamente una subvariedad incrustada.

Tenemos la siguiente proposición cuya prueba se sigue fácilmente.

Proposición 2.1.2. *Supóngase que* G *actúa por isometrías en* M *entonces:*

i. $G_{gx} = gG_xg^{-1}$

ii. $Gx \cap Gy = \phi$ *o* $Gx = Gy$

iii. $T_x(Gx) = \{\xi(x) \mid \xi \in \mathfrak{g}\}$, $\mathfrak{g}$ *el álgebra de Lie de* G.

Toda órbita Gp tiene una estructura Riemanniana inherente del espacio ambiente. Sea M subvariedad Riemanniana de $\bar{M}$, se dice que M es una *subvariedad homogénea* si para todo $p, q \in M$ existe una isometría g de $\bar{M}$ tal que $g(M) = M$ y $g(p) = q$. Una subvariedad de este tipo es una órbita de algún subgrupo G de $I(\bar{M})$, siempre en lo que sigue se supondrá que G es conexo.

Sea G actuando sobre M, se denota M/G el conjunto de todas las órbitas y $\pi : M \to M/G$ la proyección canónica, esto es $x \to Gx$. M/G con la topología cociente es llamado el *espacio de* *órbitas* de la G-acción.

Una acción sobre M es llamada *propia* si $g_n x_n \to y$ y $x_n \to x$, donde $\{g_n\}$ es una sucesión en G y $\{x_n\}$ es una sucesión en M, implica que g_n tiene una subsucesión convergente. Para que una acción, (siempre se supondrá por isometrías), sobre M sea propia, es suficiente que G sea un subgrupo cerrado del grupo de isometrías de M, por otro lado si G actúa propiamente sobre M entonces G_x es compacto para todo $x \in M$. Una consecuencia de las acciones propias es que el espacio cociente M/G es Hausdorff y toda órbita Gx es cerrada en M y por tanto una subvariedad incrustada. En adelante las acciones serán propias.

Sea S subvariedad de M y G actuando por isometrías sobre M; se dice que S es un *slice* en $x \in M$ si:

i) $x \in S$

ii) $GS := \{gp \mid g \in G, p \in S\}$ es un subconjunto abierto de M

iii) $G_x S = S$

iv) la acción de G_x sobre S es isomorfa a una acción ortogonal lineal de G_x sobre una bola abierta en algún espacio euclídeo.

> Una acción de G' sobre M' se dice isomorfa o equivalente a la acción de G sobre M si existe un isomorfismo $\varphi : G \to G'$ y una isometría $f : M \to M'$ tal que $f(gp) = \varphi(g)f(p)$, para todo $p \in M, g \in G$.

v) la aplicación $(G \times S)/G_p \to M$, $(g, q)G_p \to gq$, es un difeomorfismo sobre GS, donde la acción de G_p sobre $G \times S$ es dada por $k(g, q) = (gk^{-1}, kg)$, $k \in G_p$, $g \in G$, $q \in S$ y $(G \times S)/G_p$ es el espacio de órbitas.

Cuando la acción en M es propia, existe para todo $x \in M$ un slice [PT, Teorema 5.2.6].

Sean Gx y Gy órbitas en M/G, se dice que tienen el *mismo tipo* si G_x y G_y son conjugados en G, de la Proposición 2.1.2, G_x y G_y son conjugados si y solo si $G_y = G_{gx}$ para algún $g \in G$, el tipo de órbitas define una relación de equivalencia lo cual no es difícil de ver. Se notará $[Gx]$ la clase de la órbita Gx y se llamará *órbita tipo* de Gx; sea $\mathfrak{H}$ el conjunto de todas las órbitas tipo. Se dirá que $[Gx] \leq [Gy]$ si y solo si G_y es conjugado en G de algún subgrupo de G_x, esto define un orden parcial sobre el conjunto de todas las órbitas tipo; la existencia de un slice S a x implica que $[Gx] \leq [Gy]$, para todo $y \in GS$, si M es conexo, entonces M/G es conexo [PT, Corolario 5.4.18.], entonces existe una única órbita tipo maximal en $\mathfrak{H}$, como consecuencia de la definición $[Gx]$ es maximal si y solo si para todo $y \in M$, G_x es conjugado de algún subgrupo de G_y. A las órbitas de clases maximales se les llama *órbitas principales*.

En [PT, Proposición 5.4.14, Corolario 5.4.18] se establece la existencia de órbitas tipo principales y la unicidad si M es conexo.

La *cohomogeneidad* es la codimensión de una órbita principal; si x pertenece a una órbita principal entonces es llamado *punto regular*; de lo contrario es llamado *punto singular*, de igual manera si una órbita tiene dimensión menor que una órbita principal es llamada *singular*, pueden existir órbitas que no son principales con dimensión igual a órbitas principales, a tales órbitas se les llama *excepciones*, la idea es buscar cuando estas órbitas no existen, mas adelante se darán ejemplos fundamentales para este trabajo en los cuales las órbitas excepcionales no existen.

Se nota con M_r el conjunto de puntos regulares, esto es, la unión de órbitas principales, véase que si S es un slice a un x, entonces $[Gx] \leq [Gy]$, para todo $y \in GS$; si x es regular Gx es principal esto es $[Gy] \leq [Gx]$, de lo que $[Gx] = [Gy]$, para todo $y \in GS$, que por definición de slice es abierto, lo que prueba que M_r es un subconjunto abierto de M, mas aún M_r resulta un subconjunto abierto y denso de M [PT, Teorema 5.4.15].

Supóngase que G actúa sobre M y la acción es propia y que M/G es conexo; como se vio antes si G es un subgrupo cerrado de isometrías de M y M conexo, esto se tiene. La aplicación $\varphi_g : M \to M$, $p \to gp$, es una isometría de M ya que la acción es isométrica, si $p \in M$ y $g \in G_p$ entonces φ_g fija p, de lo que para todo $p \in M$, G_p actúa sobre T_pM por:

$\psi_p : G_p \times T_pM \to T_pM$, $(g, X) \to gX = (d\varphi_g)_pX$

Como $T_p(M) = T_p(Gp) \oplus \nu_p(Gp)$. Notar que para $g \in G_p$, Gp es invariante, de lo que $T_p(Gp)$ es invariante por la acción, por lo que su complemento ortogonal también lo es, esto es, $\nu_p(Gp)$ es invariante.

Sea $\mathfrak{X}_p : G_p \times T_p(Gp) \to T_p(Gp)$ la restricción de ψ_p al tangente a p, que es llamada la *representación isotrópica* de la acción a p, por otro lado $\sigma_p : G_p \times \nu_p(Gp) \to \nu_p(Gp)$ la restricción de ψ_p al normal a p es llamada la *representación slice* y su restricción a G_p^* es la *representación slice de la componente conexa que contiene a la identidad, del subgrupo de isotropía (brevemente, la llamaremos representación slice conexa)*, donde G_p^* es la componente conexa a la identidad de G_p.

Sea $p \in M$, tómese r suficientemente pequeño tal que $B_r(0) \subset \nu_p(Gp)$ es un embedding de $B_r(0)$ en M bajo la restricción de la exponencial, $S = \exp_p(B_r(0))$ es un slice a p llamado el *slice geodésico o slice normal*.

Lema 2.1.3. *Si S es un slice geodésico a p, entonces $G_q \subset G_p$, para todo $q \in S$, en particular si p es regular $G_q = G_p$, para todo $q \in S$.*

Teorema 2.1.4. *Una órbita Gp es principal si y solo si la representación slice S_p es trivial.*

Demostración
Del lema anterior $G_q = G_p$, para todo $q \in S_p$. Si se toma éste slice geodésico lo suficientemente pequeño, para que la geodésica en S_p una p y q, entonces todo $g \in G_p$ fija p y q de lo

que G_q fija punto por punto el subespacio lineal unidimensional de $\nu_p(Gp)$ correspondiente a esa geodésica, lo que concluye el teorema. $\diamond$

Anteriormente se dijo que siempre existen órbitas principales y órbitas singulares (de menor dimensión que las principales), pero se habló de las órbitas excepcionales, esto es, órbitas de igual dimensión que las principales, que no son principales, el trabajo ahora es ver acciones que no tengan órbitas excepcionales, o lo que es lo mismo, acciones donde todas las órbitas de dimensión maximal sean principales.

Sea M una variedad Riemanniana conexa y completa, y sea G un subgrupo cerrado de $I(M)$, (en particular la acción es propia); una subvariedad cerrada, completa, conexa y embedded S de M es llamada una *sección* para M si $GS = M$ y para todo $x \in S$, $T_xS \subseteq \nu_x(Gx)$; pero como $T_x(Gx)$ es el conjunto de $\xi(x)$ donde $\xi \in \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de G, la segunda condición se puede reescribir como:

Para todo $x \in S$ y $\xi \in \mathfrak{g}$, $\xi(x) \perp T_xS$.

Es claro que si S es una sección para M, gS también lo es para $g \in G$. Como $GS = M$, se sigue que si una sección existe, entonces existe una sección a cada punto, y se dirá que M admite secciones. Si M admite secciones la acción es llamada *polar*, por supuesto si G actúa polarmente G^* también, con G^* la componente conexa a la identidad de G.

En particular en la acción de $SO(n)$ sobre $Sim_\circ$, las matrices simétricas de traza cero, con acción $g.x = gxg^{-1}$ y con producto interno $\langle X, Y\rangle = Tr(XY)$; una sección es el espacio de matrices diagonales de traza cero.

Sea K un grupo compacto, una representación $\rho : K \to SO(n)$ se llama *polar* si $\rho(K)$ actúa polarmente sobre $\mathbb{R}^n$. Un ejemplo de representación polar, es la acción usual de $SO(n)$ sobre $\mathbb{R}^n$, ésta puede ser vista como la representación isotrópica de $S^n = SO(n+1)/SO(n)$. Un importante ejemplo de representaciones polares son las llamadas s-representaciones B, vistas de manera tangencial en el capítulo anterior, esto es, la representación isotrópica de un espacio simétrico, simplemente conexo y semisimple; este caso especial se estudiará con mas detalle posteriormente.

Teorema 2.1.5. *Toda sección de una acción polar es totalmente geodésica.*

Demostración
Sea S una sección de una acción polar dada, se denota S_r el conjunto de puntos en S los cuales son puntos regulares; esto es, están en alguna órbita principal. Sea $p \in S_r$ y $\xi \in \nu_pS$, como la acción es isométrica se puede definir un campo de Killing X en una vecindad de p con $X_p = \xi$, como la acción es polar entonces X es ortogonal a la sección, al ser X campo de Killing la derivada covariante ∇X, es un tensor antisimétrico, por la fórmula de Weingarten se tiene que:

$\langle -A_\xi Y, Y\rangle = \langle \nabla_Y X, Y\rangle = 0$, por supuesto aquí la parte normal de la fórmula es ortogonal a $Y \in T_pS$ y S, en tanto S es ortogonal en cada punto de S_r, como S_r es denso y abierto en S

entonces S es totalmente geodésica. $\diamond$

Proposición 2.1.6. *La representación slice conexa de una acción polar, en cualquier punto es polar. mas aún, si* S *es una sección de la acción polar a* $p \in S$*, entonces* T_pS *es una sección de la representación slice conexa a* p.

Demostración

Sea G_p el grupo de isotropía en p de la acción polar de G sobre M. Sea $\nu_p(Gp)$ el espacio de la representación slice, por definición de sección T_pS es un subespacio lineal de $\nu_p(Gp)$, tómese una $B_r(0)$ suficientemente pequeña, centrada en cero en $\nu_p(Gp)$ y $\Sigma = \exp_p(B)$ el normal slice en p, y sea $x = \exp_p(\nu) \in S$, como $G_x \subseteq G_p$, para todo $x \in S$, el subgrupo de isotropía de la G_p-acción lineal sobre $V_p(Gp)$ a x es G_x, de lo que se sigue que la G_p-órbita de x en $\nu_p(Gp)$ tiene la misma codimensión, tal como la G-órbita de x a M, luego la codimensión de una órbita principal de la acción de G_p sobre el espacio normal $\nu_p(Gp)$, es igual a la dimensión de T_pS. Si se prueba que T_pS es perpendicular a las órbitas de G_p se tendría la proposición, pues T_pS debe coincidir con el espacio normal a una G_p-órbita principal, y ésta debería intersectar todas las otras. El algebra de Lie de G_p puede ser vista como el conjunto de endomorfismos antisimétricos de $\nu_p(Gp)$ de la forma $(\nabla X)_p$ donde X es un campo de killing sobre M inducido por G, pero todo campo de Killing sobre M inducido por G es siempre ortogonal a S (esto es por definición). Entonces para todo $\nu \in T_pS$, $\nabla_\nu X$ es ortogonal a T_pS pues del teorema anterior S es totalmente geodésica, por lo que los campos de killing inducidos por G_p sobre $\nu_p(Gp)$ son perpendiculares a T_pS. $\diamond$

Se define para cada campo de Killing X sobre M inducido por la acción polar de G, el endomorfismo antisimétrico sobre $\nu_p(Gp)$ a $p \in M$ notado por B_p^X, como $\langle B_p^X \xi, \eta\rangle = \langle \nabla_\xi X, \eta\rangle$ $\xi, \eta \in \nu_p(Gp)$.

Sea $\mathfrak{h}_p$ la subálgebra de $\mathfrak{so}(\nu_p(Gp))$ generada por todos los B_p^X y sea H_p el subgrupo de Lie conexo de $SO(\nu_p(Gp))$ con algebra de Lie $\mathfrak{h}_p$.

Lema 2.1.7. *El grupo de Lie* H_p *contiene la imagen* $\sigma_p(G_p^*)$ *de la representación slice conexa a* p *(como subgrupo de* $SO(\nu_p(Gp))$*), y la acción de* H_p *sobre* $\nu_p(Gp)$ *tiene las mismas órbitas como la representación slice conexa a* p.

Demostración

Sea $\sigma_p : G_p \to SO(\nu_p(Gp))$ la representación slice a p. Si $X \in \mathfrak{g}_p$, $\sigma_p(\exp_p(tX)) = \exp^{t\sigma_* X}$. Si γ curva en $\nu_p(Gp)$ con $\gamma(0) = p$ y $\xi = \gamma'(0)$ entonces:

$$\begin{aligned}
\sigma_{p*}X(\xi) &= \frac{D}{dt}\Big|_{t=0} \sigma_p(\exp(tX))_*\xi && \text{definición de diferencial.}\\
&= \frac{D}{dt}\Big|_{t=0} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} (\exp(tX))\gamma(s) && \text{por definición de } \gamma\\
&= \frac{D}{ds}\Big|_{s=0} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\exp(tX))\gamma(s) && \text{por diferenciabilidad}\\
&= \frac{D}{ds}\Big|_{s=0} X^*_{\gamma(s)} && \text{por el campo de Killing definido en A}\\
&= \nabla_\xi = B_p^{X^*}\xi
\end{aligned}$$

Como $B_p^{X^*}\xi \in \nu_p(Gp)$ entonces $\sigma_p(G_p^*) \subset H_p$, lo que prueba la primera afirmación.

Para la segunda parte de la Proposición 2.1.6, si S es una sección de la G-acción en p, T_pS es una sección de la representación slice conexa en p. Sea X un campo de Killing inducido por la G-acción; sea A el operador de formas de la subvariedad S en el espacio ambiente. Por la fórmula de Weingarten

$\langle B_p^X v, w\rangle = \langle \nabla_v X, w\rangle = \langle -A_X v, w\rangle$; $v, w \in T_p$, con ∇ la conexión de Levi-Civita del espacio ambiente, por supuesto, $w \perp (\nabla_v X)^\perp = \nabla_v^\perp X$, como X es perpendicular a S por definición de slice y del teorema 2.1.5, al ser la acción polar S es totalmente geodésica, luego $v \to B_p^X v$, es un campo de Killing, lineal sobre $\nu_p M$ y perpendicular a toda sección σ_p, la prueba se sigue de que, si X es un campo de Killing que es ortogonal a todas las secciones de una acción polar de G sobre una variedad Riemanniana M entonces el grupo monoparamétrico de isometrías generado por X preserva cada G-órbita [BCO, Ejemplo 3.10.15]. $\diamond$

Sea Gp una órbita principal y $\xi \in \nu_p(Gp)$ entonces se define $\widehat{\xi}_{gp} := g\xi$, este es un campo normal bien definido sobre Gp; pues si $gp = g'p$ entonces $g^{-1}g'p \in G_p$ y $g^{-1}g'\xi = \xi$ por el teorema 2.1.4. Entonces $g\xi = g'\xi$, este es llamado el *campo normal equivariante* a ξ.

Un principal hecho es que se pueden tomar $\xi_1, \ldots, \xi_k$ base ortonormal a $\nu_p(Gp)$ y construir los campos equivariantes $\widehat{\xi}_1, \ldots, \widehat{\xi}_k$, los cuales forman un marco ortonormal de campos del fibrado normal de Gp, recordar [KN1] que un fibrado (P, M, G) es trivial si $P = M \times G$, de lo anterior, el tener un marco global del fibrado normal, implica que éste es trivial, esto es, isomorfo a $Gp \times \mathbb{R}_n$.

Proposición 2.1.8. *Sea G actuando polarmente sobre M y asúmase que $\xi \in \nu_p(Gp))$ es fijo bajo la representación slice conexa a p. Entonces ξ se extiende localmente a un campo normal G-invariante, $\nabla^\perp$-paralelo a Gp.*

Demostración

Sea F el conjunto de puntos fijos de G_p^* sobre $\nu_p M$; y sea S una sección para la acción con $p \in S$; por la Proposición 2.1.6, T_pS es una sección de la representación slice conexa, del lema 2.1.7, H_p tiene las mismas órbitas que la representación slice conexa, entonces H_p fija a F, por derivación, como $\mathfrak{h}_p$ es generado por todos los B_p^X, en particular $B_p^X = 0$ para todo X campo de Killing inducido por G. Localmente se puede extender ξ, pues la órbita es arbitraría, a un campo normal equivariante (local) $\widehat{\xi}$ de Gp y este se puede extender a un campo tangente a

M, ξ'. ξ' será nuestro candidato, véase que:

$\langle \nabla_{X_p} \xi', \xi \rangle = \langle \nabla_{X_p} \xi' - [X, \xi']_p, \xi \rangle = \langle \nabla_\xi X, \xi \rangle = 0$ pues $B^X_p \xi = 0$.

Y $[X, \xi']_p = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\phi^X_{-t})_{*\phi_t(p)} \xi' = 0$ y $\widehat{\xi}$ es equivariante, lo que nos da la G-invariancia. $\diamond$

La proposición anterior implica.

Corolario 2.1.9. *Sea* G *actuando polarmente sobre* M*, entonces todo campo* G*-equivariante sobre una órbita principal es* $\nabla^\perp$*-paralelo.*

Demostración
Este es un caso particular de la proposición anterior, para el cual la órbita principal es $\nabla^\perp$-paralela. $\diamond$

El corolario anterior tiene un recíproco local, recuérdese que M_r es el conjunto de puntos regulares y éste resulta abierto y denso. Para G actuando sobre M, con M conexo se dirá que G *actúa localmente polar* sobre M, si la distribución ν sobre M_r dada por el espacio normal $\nu_p(Gp)$ a las órbitas principales es integrable con hojas totalmente geodésicas.

Proposición 2.1.10. *Sea* G *actuando sobre* M*, con* M *conexa. Si todo campo normal equivariante sobre una órbita principal es* $\nabla^\perp$*-paralelo, entonces* G *actúa localmente polar sobre* M*.*

Demostración
Sean ξ, η, campos tangentes G-equivariantes a ν y X un campo de Killing inducido por G. Entonces:

$\langle \nabla_\xi \eta, X \rangle = -\langle \eta, \nabla_\xi X \rangle = \langle \eta, \nabla_X \xi - [X, \xi] \rangle = 0$

Pues ξ es paralelo y $[X, \xi] = 0$, al igual que en la prueba anterior, de donde ν es paralelo y en particular integrable. $\diamond$

Proposición 2.1.11. *Sea* G *actuando polarmente sobre* M *y sea* S *una sección, si* N *es una subvariedad totalmente geodésica de* M *que interseca todas las* G*-órbitas ortogonalmente, entonces existe una isometría* $g \in G$*, tal que* $g(N) \subset S$*.*

Demostración
Por densidad, si N no es un punto, existe un punto $p \in G$ tal que $g(p) \subset S$, esto se puede ver por definición de sección, entonces se tiene que $g_* T_p N \subset g_* \nu_p(Gp) = \nu_{gp}(Gp) = T_p S$, (en la primera inclusión se usa la hipótesis de ortogonalidad), lo anterior implica que $g(N) \subset S$, pues $g(N)$ y S son totalmente geodésicas, conexas y S es completa. $\diamond$

Terminamos esta sección hablando de un tópico fundamental para este trabajo que ha sido tocado de manera superficial en apartados pasados, éstas son las s-representaciones B; una s-representación es la representación isotrópica de un espacio simétrico $S = G/K$, conexo, simplemente conexo y semisimple (por supuesto se asume Riemanniano). Donde G es la componente conexa del grupo de isometrías de S y K el subgrupo de isotropía. Un importante hecho es que la representación holonómica de S coincide con la representación isotrópica G/K. Una órbita de s-representación se conoce usualmente como *R-espacio*, por la descomposición de Cartan B, se puede ver que la s-representación coincide con la representación adjunta vía la identificación $\mathfrak{p} = T_o M$, con $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ la descomposición asociada.

El siguiente teorema es de gran importancia ya que prueba que la representación isotrópica (adjunta) de $\mathfrak{k}$ es polar.

Teorema 2.1.12. *Sea (G,K) un par simétrico (Riemanniano), de un espacio simétrico (Riemanniano), simplemente conexo, semisimple S y sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ la correspondiente descomposición de Cartan del algebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G. Entonces la representación adjunta de $\mathfrak{k}$ sobre $\mathfrak{p}$ es polar y todo abeliano maximal de $\mathfrak{p}$ es una sección.*

Demostración

Se asume S irreducible, compacto y la métrica Riemanniana sobre S es normalizada de modo que el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre $\mathfrak{p} \simeq T_p S$ que es inducido de la métrica Riemanniana sobre S, es igual a $-B$ donde B es la forma de Killing de $\mathfrak{g}$. Como se sabe de antemano se puede tomar un $v \in \mathfrak{p}$ tal que la órbita $\mathrm{Ad}(k)v$ es principal, se denota Σ el espacio normal afín a la órbita v; esto es:

$$\Sigma = \{v + \xi \mid \xi \in \nu_v(\mathrm{Ad}(K)v)\}.$$

Como $-v \in \nu_v(\mathrm{Ad}(K)v)$, entonces $v - v = 0 \in \Sigma$, por tanto $\Sigma = \nu_v(\mathrm{Ad}(K)v)$, viendo $\nu_v(v)(\mathrm{Ad}(K)v)$ como subespacio lineal de $\mathfrak{p}$.

Sea $\mathrm{Ad}(K)w$ otra órbita, por compacidad de las órbitas se puede tomar w tal que la distancia entre ambas órbitas compactas es igual que la distancia entre v y w, entonces $w - v \in \nu_v(\mathrm{Ad}(K)v)$, de lo que $v + w - v \in \Sigma$, esto es, $w \in \Sigma$ y Σ interseca órbitas.

Sea $u \in \Sigma$, entonces $[u, v] \in \mathfrak{k}$ por la descomposición de Cartan, ya que $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$. Sea $w \in \mathfrak{k}$ entonces por propiedades de la forma de Killing B, se tiene que.

$$B([u, v], w) = -B(u, [w, v]) = 0, \text{ pues } [w, v] \in T_v(\mathrm{Ad}(K)v) \text{ y } u \in \Sigma = \nu_v(\mathrm{Ad}(K)v).$$

Como B es no degenerada y por arbitrariedad de w se tiene que $[u, v] = 0$, usando Jacobi para $u, w \in \Sigma$ de lo anterior, $[u, v] = [w, v] = 0$, luego $[[u, w], v] = [[u, v], w] + [u, [w, v]] = 0$, esto prueba que $[v, w]$ esta en la subálgebra isotrópica $\mathfrak{k}_v$ de $\mathfrak{k}$ a v, como v es un punto de una órbita principal, por el Lema 2.1.3, los grupo de isotropía a cualquier punto de un slice geodésico coinciden y como la órbita es principal se sigue que Σ es geodésico, luego $[u, w]$ esta en el álgebra isotrópica de $\mathfrak{k}$ a todo punto de Σ, en particular $[[u, w], w] = 0$, pero $B([u, w], [u, w]) = -B([[u, w]w], u) = 0$, entonces $[u, w] = 0$, por arbitrariedad de $u, w \in \Sigma$ se tiene que Σ es abeliano.

Ahora si $u \in \Sigma$ y $X \in T_u\Sigma$, entonces:

$B(T_u(Ad(K)u), X) = B([\mathfrak{k}, u], X) = B(\mathfrak{k}, [u, X]) = 0$, pues Σ es abeliano, de lo que Σ intersecta ortogonalmente todas las órbitas en sus puntos de intersección, por lo que la acción adjunta de $\mathfrak{k}$ sobre $\mathfrak{p}$ es polar.

Para terminar la prueba del teorema resta ver que Σ es un abeliano maximal.

Supóngase que $\Sigma = \nu_\nu(Ad(K)\nu) \subset \Sigma'$ y Σ' maximal a p. Como en la ultima parte de la prueba Σ es ortogonal a $Ad(K)\nu$ a ν, entonces $\Sigma' \subset \nu_\nu(Ad(K)\nu)$ y $\Sigma = \Sigma'$. $\diamond$

Del teorema anterior y la proposición 2.1.11, se llega a que:

Teorema 2.1.13. *Si $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{a}'$ son abelianos maximales de $\mathfrak{p}$, entonces existe un elemento $k \in K$ tal que $Ad(k)\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$.*

> Usualmente se suele llamar flat a un abeliano maximal, el rango de un espacio simétrico S es la dimensión de un abeliano maximal igual a la cohomogeidad (codimensión de la representación isotrópica $S = G/K$).

Terminamos esta sección con un importante resultado probado por Dadok [Da] que da una caracterización de las representaciones polares; ya el teorema 2.1.12, prueba que toda s-representación es polar, veremos que el recíproco es válido en el siguiente sentido.

Sean $\mathfrak{p}_1 : G_1 \to SO(n)$ y $\mathfrak{p}_2 : G_2 \to SO(n)$ dos representaciones, se dice que son *órbita-equivalentes* si existe una isometría $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que envia órbitas de G_1 en órbitas de G_2 esto es $\varphi(G_1(x)) = G_2(\varphi(x))$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$

Teorema 2.1.14. *(Dadok) [Da].*
Toda representación polar de $\mathbb{R}^n$ es órbita-equivalente a una s-representación.

2.2 SUBVARIEDADES CON FIBRADO NORMAL GLOBALMENTE PLANO Y SUBVARIEDADES ISOPARAMÉTRICAS

Supóngase que M es una subvariedad de $\bar{M}^n(k)$, espacio de formas, un campo normal paralelo ξ de M es llamado una *sección normal paralela isoparamétrica* si A_ξ tiene valores propios constantes, con A el operador de forma. Una subvariedad de un espacio con curvatura seccional constante se dice *Umbilical en dirección* de ξ si A_ξ es múltiplo de la identidad y ξ es llamado *campo normal umbilical* (o sección). Si M es umbilical en cada dirección normal ξ, M es llamado *totalmente umbilical* de $\bar{M}$.

De aquí en adelante supondremos que $\bar{M} = \mathbb{R}^n$, para el caso de $\bar{M} = S^n$ simplemente es preciso verla como subvariedad de $\mathbb{R}^{n+1}$. Como consecuencia del teorema de reducción de codimensión, si M es subvariedad substancial de $\mathbb{R}^n$ solo existe una única sección umbilical isoparamétrica salvo múltiplo constante, y ésta es dada por el vector posición al origen. Nos interesarán en adelante solamente los no umbilicales.

Sea ξ sección isoparamétrica y $\lambda_1, ..., \lambda_m$ los diferentes (constantes) valores propios de A_ξ y $TM = E_1 \oplus, ..., \oplus E_m$ la descomposición ortogonal suave en espacios propios (autoespacios) del operador de forma A_ξ en dirección ξ, las distribuciones $E_1, ...E_m$ se denominan las *Autodistribuciones (distribuciones propias) asociadas a* A_ξ. Entonces se tiene:

Lema 2.2.1. *Sea* M *subvariedad de* $\mathbb{R}^n$ *y* ξ *una sección normal paralela isoparamétrica .*

i) *La autodistribución* E_i *de* A_ξ *es una distribución auto-paralela (por lo tanto integrable con hojas totalmente geodésicas), para cada* $i = 1, 2, ..., m$.

ii) *La autodistribución* E_i *es invariante bajo todos los operadores de forma de* M*, para cada* $i = 1, 2, ..., m$.

iii) *Sea* $S_i(q)$ *la subvariedad integral de* E_i *para* $q \in M$*, entonces* $S_i(q)$ *está contenido en el subespacio afín* $q + E_i(q) \oplus \nu_q M$ *de* $\mathbb{R}^n$ *y* $A^i_\xi = A_\xi |_{E_i(q)}$ *para todo* $\xi \in \nu_q M$*, donde* A^i *es el operador de forma de* $S_i(q)$*, como subvariedad del subespacio afín.*

Demostración

i) si $m = 1$, es trivial. Si $m \geq 2$ sean X, Y secciones de E_i y Z de E_j, $i \neq j$, usando la ecuación de Codazzi, $(\lambda_i - \lambda_j)\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \langle (\nabla_X A_\xi)Y, Z\rangle = \langle (\nabla_Z A_\xi)X, Y\rangle = 0$; para $i \neq j$ implica que $\langle \nabla_X Y, Z\rangle = 0$, entonces $\nabla_X Y$ es una sección en E_i de lo que E_i es auto-paralelo, en tanto, integrable con hojas totalmente geodésicas [BCO, Apéndice].

ii) Como ξ es $\nabla^\perp$-paralelo $\nabla^\perp \xi = 0$, entonces, por definición del tensor de curvatura normal $R^\perp(X, Y)\xi = 0$ y usando la ecuación de Ricci se tiene que $[A_\xi, A_\eta] = 0$ para todo η campo normal, de lo que el operador de forma conmuta con A_ξ, por lo tanto preserva la distribución.

iii) Si $m = 1$, es trivial. Si $m \geq 2$ sea $c : [0, 1] \to S_i(q)$ una curva suave con $c(0) = q$, ξ normal a $S_i(q) \subset M$ a q. Nótese de igual forma ξ, el vector paralelo a lo largo de c con respecto a la conexión normal de $S_i(q)$; por paralelismo y usando que $S_i(q)$ es totalmente geodésica, de la fórmula de Gauss se tiene que $\alpha(c'(t), \xi(t)) = 0$, la derivada covariante en $\mathbb{R}^n$ es nula, esto implica que $S_i(q)$ esta contenido en el espacio afín $q + E_i(q) \oplus \nu_q M$ de $\mathbb{R}^n$, además como $S_i(q)$ es totalmente geodésica en M, A^i_ξ es la restricción de A_ξ a $E_i(q)$, para todo $\xi \in \nu_q M$. $\diamond$

Considérese ahora M subvariedad isoparamétrica de $\mathbb{R}^n$, esto es, M tiene curvaturas principales constantes y fibrado normal plano $((R^\perp) \equiv 0)$, dado que $(R^\perp) \equiv 0$, por la ecuación de Ricci $\langle R^\perp(X, Y)\xi, \eta\rangle = \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y\rangle$, entonces $[A_\xi, A_\eta] = 0$, para todo ξ, η en el normal a cada p, de lo que $\{A_\xi\}_{\xi \in \nu_p M}$ es un conjunto de operadores simultáneamente diagonalizables, sean $\lambda_0(\xi), ..., \lambda_m(\xi)$; los valores propios comunes de A a p con $\lambda_0(\xi) \equiv 0$ y sea E_i la distribución común a $\lambda_i(\xi)$ para $i = 0, 1, ...m$; llamada la *distribución de curvatura* de M, esto es:

$A_\xi X_i = \lambda_i(\xi) X_i, \ X_i \in E_i \ (1)$

Considérese, $\lambda_i : \nu_p M \to \mathbb{R}$, la función lineal para todo i definida por (1), se tiene que $\lambda_i = \langle \eta_i(p), \cdot \rangle$, la cual determina campos η_i a todo i, llamados las *curvaturas normales*, como

$\lambda_i(\xi)$ es constante, si ξ es paralelo, las curvaturas normales son paralelas en la conexión normal.

Se puede tomar ξ tal que $\langle \xi, \eta_i \rangle$ son todos diferentes, E_0 es por supuesto $\mathrm{Ker}(A_\xi)$.

Por el lema anterior la distribución E_i es auto-paralela e invariante por todos los operadores de forma y $S_i(q) \subset q + E_i(q) \oplus \nu_q M$ a través de q, donde $S_i(q)$ es la hoja de la distribución en q llamada la *esfera de curvatura* en q relativa a λ_i, que es subvariedad totalmente umbilical del espacio ambiente.

$S_i(q)$ es abierto de un subespacio afín si $n_i = 0$ o de una esfera en otro caso. Las dimensiones de los E_i son llamadas las *multiplicidades* de la subvariedad isoparamétrica.

Lema 2.2.2. *Sea M una subvariedad isoparamétrica del espacio euclídeo. Entonces, M es substancial si las curvaturas normales generan el espacio normal, esto es $\mathrm{span}\langle \eta_i(x) \rangle = \nu_x M$ para todo $x \in M$, en particular $\mathrm{codim}(M) \leq \dim(M)$.*

Demostración
Si $\mathrm{span}\langle \eta_i(x) \rangle \neq \nu_x M$ para todo x entonces se puede tomar $\eta \neq 0$ campo normal paralelo con $\eta_x \perp \mathrm{span}\langle \eta_i(x) \rangle$ para todo x, por el teorema de reducción de codimensión M no puede ser substancial pues en otro caso $A_\xi = 0$. ⋄

Del lema 2.2.1 y lo anterior se tiene que:

Lema 2.2.3. *Sea M subvariedad isoparamétrica de $\mathbb{R}^n$.*

i) *Si la curvatura normal $\eta_i \neq 0$, entonces $S_i(q)$ es un abierto de una esfera del espacio afín $q + E_i(q) + \mathbb{R}\eta_i(q)$.*

ii) *Si la curvatura normal $\eta_i = 0$, entonces $S_i(q)$ es un abierto del subespacio afín $q + E_i(q)$.*

Nota 2.2.4. En esta nota se expresan algunas ideas básicas sobre subvariedades isoparamétricas.

⋆ Del Lema 1.2.2 y el Lema 2.2.2 se reescribe como: el primer espacio normal de una subvariedad isoparamétrica es generado por las curvaturas normales.
⋆ Si M es una subvariedad isoparamétrica compacta, todas las curvaturas normales son diferentes de cero.
⋆ Se define el rango de una subvariedad isoparamétrica del espacio euclídeo como el número maximo de curvaturas normales linealmente independientes, en particular si es substancial el rango coincide con la codimensión.
⋆ Si $S_i(p)$ tiene codimensión 1, entonces es claro que es una esfera(extrínseca), esto es una esfera contenida en un subespacio afín del espacio ambiente.

Sea M subvariedad de $\mathbb{R}^n$ y asúmase que existe un campo normal paralelo no trivial, ξ, como $\xi_p \in \nu_p M$; ξ_p puede ser visto como un vector de $\mathbb{R}^n$, de lo que se puede ver $\xi : M \to \mathbb{R}^n$, como una aplicación suave, se define $f_\xi : M \to \mathbb{R}^n$, $p \to p + \xi_p$; si $v = c'(0) \in T_p M$ entonces:

$$\begin{aligned}(f_\xi)_{*p}(v) &= \frac{d}{dt}\bigg|_0 (c(t) + \xi(c(t))) \\ &= v - A_{\xi_q} v \\ &= (\mathrm{Id}_{T_pM} - A_{\xi_p})v \quad \textit{esto es}\end{aligned}$$

$$(f_\xi)_{*p} = \mathrm{Id}_{T_pM} - A_{\xi_p}.$$

De lo que f_ξ es una inmersión si y solo si $1 \notin \mathrm{Spec}(A_\xi)$, esto es 1 no es valor propio de A_ξ; para propiedades locales se puede asumir que f_ξ es un embedded.

Se reescribe $1 \notin \mathrm{Spec}(A_\xi)$ y f_ξ es un embedding si y solo si $\ker(f_{\xi*})_p \equiv 0$ para todo p, en tal caso se llama a $M_\xi = \{p + \xi_p | p \in M\}$ una variedad paralela a M en dirección ξ.

En general si $\dim(\mathrm{Ker}(f_{\xi*})_p) \equiv c$, constante para todo p, M_ξ es una subvariedad inmersa de $\mathbb{R}^n$ con dimensión $\dim(M) - c$, esto ocurre en particular si ξ es una sección isoparamétrica. Se llama a $p + \xi_p$ un punto focal a M en dirección ξ, si $\dim(\mathrm{Ker}(f_{\xi*})_p) > 0$, en tal caso $\dim(\mathrm{Ker}(f_{\xi*})_p)$ es la multiplicidad del punto focal; en el caso en que es constante positiva $\dim(\mathrm{Ker}(f_{\xi*})_p) = c > 0$, M_ξ es llamada variedad focal(o focal paralela) de M en dirección a ξ.

Un importante hecho es que *variedades paralelas a subvariedades isoparamétricas son isoparamétricas*.

Sea M_ξ un embedding paralelo o variedad focal a M, se define $\pi : M \to M_\xi$ simplemente como $\pi(p) = f_\xi(p) = p + \xi_p$, por supuesto π es una submersión la cual es un difeomorfismo si $\mathrm{Ker}(f_{\xi*})_p \equiv 0$

Se denotan con $\mathcal{H}$ y $\mathcal{V}$ la distribución horizontal y vertical respectivamente, inducida por π. Por supuesto $\mathcal{H}_p$ es paralelo e isomorfo a $T_{\pi(p)}M_\xi$, $\nu_p \subset \nu_{\pi(q)}M_\xi$ y $\mathcal{V}_p = \mathrm{Ker}(\pi_{*p}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - A_\xi)_p = T_p(\pi^{-1}(\pi(p)))$.

Sea λ_i un valor propio no nulo de la sección paralela isoparamétrica ξ, con la notación del lema 2.2.1, $\xi_i = \xi/\lambda_i$ es una sección paralela isoparamétrica con $A_\xi|_{E_i} = \mathrm{Id}_{E_i}$ y $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - A_{\xi_i}) = E_i$. Se denota $\pi_i : M \to M_{\xi_i}$ la aplicación focal de M sobre M_{ξ_i}, el espacio tangente de M_{ξ_i} a $\pi_i(p)$ es dado por $E_1(p) \oplus \ldots \oplus \hat{E}_i(p) \oplus \ldots \oplus E_m(p)$, donde $\hat{E}_i(p)$ significa que $E_i(p)$ es omitido; en otras palabras, la distribución vertical y horizontal es dada por $\mathcal{V} = E_i$ y $\mathcal{H} = E_1 \oplus \ldots \oplus \hat{E}_i \oplus \ldots \oplus E_m$ respectivamente. Se dirá que M_{ξ_i} es *variedad focal que focaliza* E_i.

Lema 2.2.5. *Sea M_ξ variedad focal paralela a M y π como antes, $\pi : M \to M_\xi$, entonces las fibras de π son subvariedad totalmente geodésicas de M y el operador de forma de M deja la descomposición ortogonal, $TM = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}$, invariante.*

Demostración
La segunda parte es análoga a la prueba ii) en el lema 2.2.1, el primer estamento se sigue de la ecuación de Codazzi; supóngase que $\dim(M_\xi) \geq 1$, en otro caso es trivial, sean X, Y secciones en $\mathcal{V}$ y Z vector propio de A_ξ con $A_\xi Z = \lambda Z$, $\lambda \neq 1$, de Codazzi:

$$(1-\lambda)\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \langle (\nabla_X A_\xi)Y, Z\rangle = \langle (\nabla_Z A_\xi)X, Y\rangle = 0.$$

Como $\mathcal{H}$ es generado por los vectores propios Z, esto implica que $\nabla_X Y$ es una sección de $\mathcal{V}$, entonces $\mathcal{V}$ es un subespacio auto-paralelo de TM, de lo que, las hojas son subvariedades totalmente geodésicas de M. $\diamond$

Considérese una curva c en M_ξ, $q = c(0)$ y el levantamiento horizontal de c a $p = \pi^{-1}(q)$, notado con, $\tilde{c}$ y $\tilde{c}(0) = p$ ver [KN1, Capítulo 2], esto es, la única curva $\tilde{c}$ con $\tilde{c}(p)$ tal que $\pi \circ \tilde{c} = c$ y $c'(t) \in \mathcal{H}_{c(t)}$ para todo t. Del lema anterior se sigue.

Lema 2.2.6. *Sea c curva en M_ξ con $q = c(0)$ y $\tilde{c}$ el levantamiento horizontal, con $\tilde{c}(0) = p \in \pi^{-1}(\{q\})$ para todo $\eta \in \nu_p \subset \nu_q M_\xi$, entonces el trasporte paralelo de η a lo largo de c y $\tilde{c}$ con respecto a las conexiones normales de M_ξ y M respectivamente, coinciden.*

Se sigue el siguiente hecho importante:

Lema 2.2.7. *(Formula del tubo). Para todo $\eta \in \nu_p M \subset \nu_{\pi(p)} M_\xi$ se tiene que:*

$$\hat{A}_\eta = (A_{\eta|_{\mathcal{H}}}) \circ [(\mathrm{Id} - A_{\xi_p})\,|_{\mathcal{H}}]^{-1}.$$

con A el operador de forma de M y $\hat{A}$ el de M_ξ.

Demostración Sea c curva en M_ξ con $c(0) = \pi(p)$, $c'(0) \in T_{\pi(p)} M_\xi \cong \mathcal{H}$ y sea $\tilde{c}$ el levantamiento de c con $\tilde{c}(0) = p$, entonces $\tilde{c}(t) = c(t) - \xi(t)$, si $\eta(t) := \eta(c(t)) = \eta(\tilde{c}(t))$ se tiene:

$$A_{\eta(t)}\tilde{c}'(t) = -\eta'(t) = \hat{A}_{\eta(t)}(\tilde{c}'(t) + \xi'(t)) = \hat{A}_{\eta(t)}(\tilde{c}(t) - A_\xi \tilde{c}(t)).$$

Para $t = 0$ y por arbitrariedad de c se obtiene la formula del tubo.

Sea $\gamma : [0,1] \to M$ curva, se considera el transporte $\nabla^\perp$-paralelo como una transformación de $\gamma(0) + \nu_{\gamma(0)} M$ en $\gamma(1) + \nu_{\gamma(1)} M$; si M_ξ es focal, identificaremos $p - \xi(p)$ en M para $p \in M_\xi$, con el vector $-\xi(p)$, el cual es normal en M a $p - \xi(p)$, y en M_ξ a p. $\diamond$

Lema 2.2.8. *Sea M subvariedad de $\mathbb{R}^n$ y ξ campo normal paralelo a M, asúmase que* $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - A_\xi)$ *tiene dimensión constante y sea M_ξ la variedad focal a M y $\pi : M \to M_\xi$ la sumersión correspondiente.*

i. *Si $\bar{\gamma} : [0,1] \to M$ el levantamiento horizontal en M (esto es, $\bar{\gamma}'(t)$ es ortogonal a* $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - A_{\xi(t)})$*) entonces $\bar{\gamma}(1) = \tau^\perp_\gamma(\bar{\gamma}(0))$ donde $\gamma = \pi \circ \bar{\gamma}$ y $\tau^\perp_\gamma : \gamma(0) + \nu_{\gamma(0)}(M_\xi) \to \gamma(1) + \nu_{\gamma(1)}(M_\xi)$ es el transporte paralelo.*

ii. *la fibra* $\pi^{-1}(q)$ *esta contenida en el espacio normal afín* $q+\nu_q(M_\xi)$ *para* $q \in M_\xi$.

iii. *Sea* $p \in M$ *y* $\gamma : [0,1] \to M_\xi$ *una curva diferenciable a trozos con* $\gamma(0) = \pi(p) = \bar{p}$, $\gamma(1) = \pi(q) = \bar{q}$ *y sea* $\tau_\gamma^\perp$ *el transporte* $\nabla^\perp$*-paralelo a lo largo de* γ. *Entonces* $q = \tau_\gamma^\perp(p) \in \pi^{-1}(\bar{q})$ *y* $\tau_\gamma^\perp(\pi^{-1}(\bar{p}))$ *coincide con* $\pi^{-1}(\bar{q})$ *cerca a* q.

Sea M una subvariedad del espacio euclídeo con espacio normal plano, por ejemplo las subvariedades isoparamétrica. Para $q \in M$ sea $q+\nu_q(M)$ el espacio normal afín, se notara $F_M(q) = \{q+\xi_q \mid \xi_q \in \nu_q(M), (\mathrm{Id} - A_{\xi_q}) \text{ es singular}\}$, $F_M(q)$ se llama el *conjunto focal*. Como M es plano, el conjunto de operadores de forma a q, forma una familia conmutativa; Sean $\lambda_1(\xi_q), ..., \lambda_r(\xi_q)$ los valores propios comunes (por supuesto estos definen funciones lineales a $\nu_q M$), entonces:

$F_M(q) = \bigcup_{i=1}^r \ell_i(q)$, donde $\ell_i(q) = \{q+\xi_q \mid \xi_q \in \nu_q(M), \lambda_i(\xi_q) = 1\}$.

Los $\ell_i(q)$ son llamados *hiperplanos focales*.

Proposición 2.2.9. *Sea* M *subvariedad Riemanniana del espacio euclídeo, con fibrado normal plano (en particular isoparamétrica). Sea* ξ *vector normal paralelo a* M *tal que* $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - A_\xi) \neq 0$ *y considérese la variedad paralela* M_ξ *a* M. *Entonces para todo* $q \in M$.

i) $q+\nu_q(M) = \bar{q}+\nu_{\bar{q}}(M_\xi)$, *donde* $\bar{q} = q+\xi_q$

ii) $F_M(q) = F_{M_\xi}(\bar{q})$

Demostración
i) Como $T_{\bar{q}}M_\xi = \mathrm{im}(\mathrm{Id} - A_\xi(q)) = T_q M$, $\nu_q M = \nu_{\bar{q}} M_\xi$ y $\bar{q} \in q+\nu_q M$ se sigue fácilmente i).

ii) Sean A y $\hat{A}$ los operadores de forma de M y M_ξ respectivamente. Sea $x \in q+\nu_q M = \bar{q}+\nu_{\bar{q}}(M_\xi)(i)$; por la fórmula de tubo $\hat{A}_{x-\bar{q}} = A_{x-\bar{q}}(\mathrm{Id} - A_{\xi(q)})^{-1}$ como $x-\bar{q} = (x-q)-\xi_q$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
\hat{A}_{x-\bar{q}} &= (A_{x-q} - A_{\xi_p})(\mathrm{Id} - A_{\xi_p})^{-1} \\
&= [(A_{x-q} - \mathrm{Id}) + (\mathrm{Id} - A_{\xi_q})](\mathrm{Id} - A_{\xi_q})^{-1} \\
&= (A_{x-q} - \mathrm{Id})(\mathrm{Id} - A_{\xi_q})^{-1} + \mathrm{Id}
\end{aligned}$$

esto es, $\mathrm{Id} - \hat{A}_{x-\bar{q}} = (\mathrm{Id} - A_{x-q})(\mathrm{Id} - A_{\xi_q})^{-1}$

Luego $\mathrm{Id} - \bar{A}_{x-\bar{q}}$ es invertible si y solo si $\mathrm{Id} - A_{x-q}$ es invertible y se tiene ii). $\diamond$

Nota 2.2.10. Volviendo al caso de subvariedades isoparamétricas; que en particular tienen fibrado normal plano; los hiperplanos focales y los conjuntos focales son subvariedades invariantes por el transporte paralelo del espacio normal, pues las curvas normales son $\nabla^{\perp}$-paralelas. Esto es, subvariedades isoparamétrica determinan una foliación singular del espacio euclídeo; donde sus hojas son variedades isoparamétrica o focales de una subvariedad isoparamétricas.

En el caso en que M sea una subvariedad compacta, substancial e isoparamétrica, todas las curvaturas normales son no nulas, pues M es compacta y toda hoja de la 0-distribución es un subespacio afín del espacio ambiente; el cual es trivial, pues M es compacta, nota 2.2.4.

Sea M subvariedad completa e isoparamétrica del espacio euclídeo, sean $p, q \in M$ y sea $\tau_{p,q} : \nu_p M \to \nu_q M$ el transporte paralelo. El transporte paralelo afín $\bar{\tau}_{p,q} : p + \nu_p M \to q + \nu_q M$ es la única isometría que cumple $\bar{\tau}_{p,q}(p) = q$ y $(\bar{\tau}_{p,q})_{*p} = \tau_{p,q}$.

Por ser isoparamétrica:

$\bar{\tau}_{p,q}(F_M(p)) = F_M(q)$, nota 2.2.10.

Denótese σ_i^q la reflexión en el espacio afín $q + \nu_q M$ a través del hiperplano $\ell_i(q)$ correspondientes a curvaturas normales no nulas, ver [H2] o [PT], entonces:

Lema 2.2.11. $\sigma_i^q(q)$ *es el punto antipodal de* q *en la esfera* $S_i(q)$ *y* $\sigma_i^q = \bar{\tau}_{q,\sigma_i^q(q)}$.

Sea $\psi_i := \frac{2\eta_i}{\langle \eta_i, \eta_i \rangle}$, entonces, $\varphi_i(q) = q + \psi_i(q) = \sigma_i^q(q)$

Por ser isoparamétrica, nota 2.2.10

$\bar{\tau}_{q,\varphi_i(q)}(F_M(q)) = F_M(\varphi_i(q))$ de la Proposición 2.2.9 se tiene que:

$F_M(q) = F_{M_{\psi_i}}(q + \psi_i(q))$, pues $M = M_{\psi_i}$ y $q + \psi_i(q)$.

Se concluye que $\bar{\tau}_{q,\varphi_i(q)}(F_M(q)) = F_M(q)$, de lo que todo σ_i^q permuta los hiperplanos focales $\ell_1(q), \ldots, \ell_m(q)$.

Teorema 2.2.12. *(Terng)[BCO, teorema 5.2.7]. Las reflexiones* σ_i^q *a través de los hiperplanos* $\ell_i(q)$*, correspondientes a las curvaturas normales, generan un grupo finito de reflexiones* W^q*, llamado grupo de coxeter de la subvariedad isoparamétrica a* q.

Proposición 2.2.13. *Sea* $X : M \to \mathbb{R}^n$ *de rango* k*, una subvariedad isoparamétrica completa, tal que todas las curvas normales son no-nulas (en particular si* M *compacto ver nota 2.2.10). Entonces* M *esta contenido en una esfera de radio* $\|\eta\|$ *con centro* $c_0 = x + \eta$.

Demostración
Sea η un campo normal paralelo tal que $\langle \eta, \eta_i \rangle = 1$ para $i = 1, 2, \ldots m$.

La existencia de η está justificada, ya que el grupo de reflexiones W fuerza a que $\bigcap \ell_i(q)$ consiste de un punto o equivalentemente W tiene un punto fijo, de lo que si M tiene rango k existe η tal que $\langle \eta, \eta_i \rangle = 1$, para todo $i = 1, 2, \ldots n$; (pues $q + \nu \in \ell_i(q)$ si y solo si $\langle \nu, \eta_i \rangle = 1$).

De lo que para η se tiene que $X + \eta$ es un vector constante, pues para todo campo ν sobre M, $\bar{\nabla}_\nu(X + \eta) = \nu - A_\eta \nu = 0$, ya que si $\nu_i \in E_i$, entonces $A_\eta = \langle \eta_i, \eta \rangle \nu_i = \nu_i$ y $TM = \bigoplus_i E_i$, con lo que $\|X - c_0\| = \|\eta\|$. $\diamond$

De la nota 2.2.10 y lo anterior se tiene el siguiente resultado:

Corolario 2.2.14. *Sea M subvariedad completa e isoparamétrica de $\mathbb{R}^n$, los siguientes estamentos son equivalentes.*

i. M *es compacta.*

ii. *Todas las curvaturas normales son no-nulas.*

iii. M *esta contenida en una esfera.*

Teorema 2.2.15. *Si M es una subvariedad completa e isoparamétrica de $\mathbb{R}^n$ de rango k con distribución de nulidad E_0 de dimensión m, entonces existe una subvariedad isoparamétrica M_1 de rango k de la esfera en $\mathbb{R}^{n-m}$, tal que $M = M_1 \times E_0$.*

Demostración
Sea η campo normal paralelo con $\langle \eta_i, \eta \rangle = 1$ como en la prueba de 2.2.13. Entonces $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - A_\eta)$ es la distribución correspondiente al complemento de la nulidad. Como la nulidad y $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - A_\eta)$ son auto-paralelos e invariantes por todos los operadores de forma, por el lema de Moore 1.1.4 M es un producto. $\diamond$

Nota 2.2.16. $\star$ Se puede escribir W para hablar del grupo de Coxeter en cualquier punto, pues para $p, q \in M$, W^p y W^q son conjugados por el transporte paralelo a una curva que une p, q

$\star$ Supóngase que M_1, M_2 subvariedades isoparamétricas de $\mathbb{R}^{m_1+k_1}$ y $\mathbb{R}^{m_2+k_2}$ respectivamente y W_1, W_2 los respectivos grupos de Coxeter, entonces $M_1 \times M_2$ es subvariedad isoparamétrica de $\mathbb{R}^n$ con $n = m_1 + m_2 + k_1 + k_2$

El siguiente teorema relaciona el grupo de Coxeter con el concepto de reducibilidad.

Teorema 2.2.17. *Sea M una subvariedad isoparamétrica de $\mathbb{R}^n$ con grupo de Coxeter W, entonces M es reducible si y solo si W es reducible.*

Demostración
Por el Teorema 2.2.15, se asume que las curvaturas normales son diferentes de cero, supóngase que los primeros k generan W_1 y los demás W_2 y que $W = W_1 \times W_2$ con W_i grupos de Coxeter de $\mathbb{R}^{k_i}$, $i = 1, 2$. Los dos conjuntos de curvaturas son perpendiculares uno al otro, nótense A_1 y A_2.

Como en anteriores pruebas sea η un campo paralelo, tal que $\langle \eta_i, \eta \rangle = 1$ para todas las curvaturas normales. Entonces se escribe $\eta = \eta_1 + \eta_2$, $\eta_1 \perp A_2$ y $\eta_2 \perp A_1$.

Ahora las distribuciones $\mathfrak{D}_1 = \operatorname{Ker}(\operatorname{Id} - A_{\eta_1})$ y $\mathfrak{D}_2 = \operatorname{Ker}(\operatorname{Id} - A_{\eta_2})$, son mutuamente ortogonales, auto-paralelas e invariantes para todos los operadores de forma. De lo que ambas son paralelas y por el lema de Moore 1.1.4 M es producto. $\diamond$

Finalizamos esta sección con el teorema del slice, previo el siguiente lema que se sigue como en la prueba del lema 2.2.1.

Lema 2.2.18. *Sea M subvariedad isoparamétrica del espacio euclídeo, sea ξ campo normal paralelo y considérese la variedad focal $\pi : M \to M_\xi$ para todo $\bar{q} \in M_\xi$, entonces toda componente conexa de $\pi^{-1}(\bar{q})$ es una subvariedad isoparamétrica de $\nu_{\bar{q}} M_\xi$.*

De este lema se deduce.

Teorema 2.2.19. *(Teorema del Slice) [HOT]. Sea M_ξ variedad focal de una subvariedad isoparamétrica M del espacio euclídeo, sea $\bar{q} \in M_\xi$ fijo, y sea $V = \nu_{\bar{q}} M_\xi$. Entonces las variedades paralelas M_η de M intersectan V en una foliación isoparamétrica de V.*

Lema 2.2.20. *Sea M una subvariedad isoparamétrica, ξ campo normal paralelo y M_ξ la correspondiente variedad (focal) con $\pi : M \to M_\xi$ la respectiva proyección y $\bar{q} = \pi(q)$, entonces:*

$$\nu_{\bar{q}} M_\xi = \bigcup_{\hat{q} \in \pi^{-1}(\bar{q})} \nu_{\hat{q}} M.$$

2.3 VARIEDADES CON CURVATURAS PRINCIPALES CONSTANTES

Sea M una subvariedad del espacio euclídeo, recordar que M tienen curvaturas principales constantes si los valores propios del operador de forma $A_{\xi(t)}$ son constantes, donde $\xi(t)$ es el transporte paralelo normal de ξ a lo largo de un curva arbitraria, en particular por definición las subvariedades isoparamétrica cumplen esta propiedad.

Se empieza con el siguiente resultado para los campos equivariantes, vistos en el capitulo anterior.

Proposición 2.3.1. *Las curvaturas principales de órbitas principales con respecto a campos normales equivariantes son constantes.*

Demostración
Sea $M = Gp$ órbita principal de la G-acción isométrica, para $g \in G$, $x \in T_pM$ y $\xi \in \nu_pM$ se tiene que.

$A_{g_*\xi}g_*X = g_*A_\xi X$ pues g es isometría.

Como M es principal, para ξ se define el respectivo campo normal equivariante $\hat{\xi}$ entonces:

$A_{\hat{\xi}_{gp}}g_*X = A_{g_*\xi}g_*X = g_*A_\xi X$, para todo $g \in G$, $x \in T_pM$ y $\xi \in \nu_pM$ luego.

$A_{\hat{\xi}_{gp}} = g_*A_\xi g_*^{-1}$

de lo que, las curvaturas principales para todo $A_{\hat{\xi}}$ son constantes. ⋄

Por Dadok teorema 2.1.14 toda s-representación es polar y de lo anterior toda órbita principal de una s-representación tiene curvaturas principales constantes, mas aún es isoparamétrica [BCO, Sección 3.6], pero existe un hecho más general y es que cualquier órbita de una s-representación tiene curvaturas principales constantes.

Proposición 2.3.2. *[BCO, proposición 4.1.6] Toda órbita de una s-representación es una subvariedad con curvaturas principales constantes.*

Se darán adelante fuertes resultados que caracterizan las subvariedades con curvaturas principales constantes, pero antes introducimos un tópico importante en lo que sigue, éste es el de tubos de holonomía.

Si $\eta_p \in \nu_pM$, el *tubo holonómico* notado como $(M)_{\eta_p}$ a η_p, que es la imagen bajo la exponencial del subconjunto del espacio normal $\mathfrak{Hol}_{\eta_p}M$ obtenido por transporte $\nabla^\perp$-paralelo de η_p a lo largo de curvas suaves a trozos en M, mas explícitamente.

$(M)_{\eta_p} = \{\gamma(1) + \tau_\gamma^\perp\eta_p | \gamma : [0,1] \to M$ suave a trozos con $\gamma(0) = p\}$.

$\mathfrak{Hol}_{\eta_p}M$ es, de hecho, un subespacio de νM llamado el *subespacio holonomía* a través de η_p. Su fibra a p es la órbita de η_p bajo la acción del grupo de holonomía normal. $\mathfrak{Hol}_{\eta_p}M$ es una, uno a uno subvariedad inmersa de νM y si el grupo de holonomía es compacto, ésta es una subvariedad embedded, en particular cuando M es simplemente conexo. Este último hecho se puede asumir, pues los resultados respecto a tubos holonómicos serán locales.

Se define la *distancia focal* como el supremo de los números reales positivos ϵ, tales que 1 no es valor propio de A_ξ si $\|\xi\| \leq \epsilon$.

Si 1 no es valor propio de $A_{\tau_\gamma^\perp\eta_p}$ para todo $\tau_\gamma^\perp\eta_p$ de η_p, esto es γ curva suave a trozos arbitraría; o si $\|\eta_p\|$ es menor que la distancia focal, entonces $(M)_{\eta_p}$ es una subvariedad inmersa de $\mathbb{R}^n$ y se tiene la sumersión relativa $\pi_{\eta_p} : (M)_{\eta_p} \to M$, para la cual las fibras son las órbitas del grupo de holonomía normal (restringido); notar que si ξ_p con ξ paralelo, el tubo de holonomía coincide con la variedad paralela M_{ξ_p}.

Sea $\eta := p + \eta_p \in (M)_{\eta_p}$, entonces $T_\eta((M)_{\eta_p}) = T_pM \oplus T_{\eta_p}(\Phi\eta_p)$, en particular la dimensión del tubo de holonomía es mayor que la dimensión de M.

Además $\nu_\eta((M_{\eta_p}))$ puede ser identificado con el espacio normal en ν_pM a el normal a la órbita $\Phi\eta_p$.

En la siguiente nota se expresarán los hechos anteriores con más detalle, asumiendo en adición que la variedad es homogénea, irreducible, substancial y contenida en la esfera; para probar que el tubo de holonomía bajo esta hipótesis, con la métrica inducida es una variedad Riemanniana completa.

Nota 2.3.3. Sea $M^n = H\nu$ una subvariedad homogénea, irreducible, substancial de $\mathbb{R}^N$ la cual esta contenida en la esfera S^{N-1}. No se asume que M sea compacta (caso en el cual lo dicho en esta nota es trivial). Como M es homogénea existe un $\epsilon > 0$ tal que si $\xi \in \nu(M)$ con $0 < \|\xi\| < \epsilon$ entonces cada valor propio λ del operador de forma A_ξ satisface $|\lambda| < 1 - a$, para algún $0 < a < 1$.

Se asume que el rango de M sea 1, de lo contrario por el teorema del rango rígido, ver 3.1, es una órbita de una s-representación, caso en el cual M debe ser compacta.

Tómese $\xi \in \nu_\nu(M)$ con $0 < \|\xi\| < \epsilon$ considérese el subespacio de holonomía a través de ξ del normal $\nu(M)$:

$$\mathfrak{Hol}_{\xi_p}(M) = \{\eta(1) \in \nu(M) : \eta \text{ es una curva horizontal con } \eta(0) = \xi\} \subset \nu(M)$$

Donde la distribución horizontal $\mathcal{H}$ de $\nu(M)$ es obtenida de manera natural por $\pi : \nu(M) \to M$, (En lo que sigue notaremos $\eta \in \mathfrak{Hol}_{\xi_p}(M)$ en vez de $\eta(1)$).

Tenemos que las fibras de $\pi : \mathfrak{Hol}_{\xi_p}(M) \to M$ son compactas. En efecto $\pi^{-1}(\{\pi(\eta)\}) = \Phi(\pi(\eta))\eta$, donde Φ denota el grupo de holonomía normal. Observe que éste grupo es compacto, pues la componente conexa actúa como una s-representación, ver discusión en el teorema 3.3.3 [Caso 2, C] y [BCO, lema 6.2.2].

Sea $\exp^\nu : \nu(M) \to \mathbb{R}^N$ la aplicación exponencial normal definida por $\exp^\nu(\eta) = \pi(\eta) + \eta$. Para $\eta \in \nu_p(M)$ se identifica como es usual via $d\pi$ a, $T_pM \simeq \mathcal{H}$ y $\nu_\eta = T_\eta\nu_p(M)$, éste ultimo identificado con $\nu_p(M)$. En base a esta identificación se tiene una expresión para el diferencial de la exponencial normal:

$d(\exp\nu)|_{\mathcal{H}_\eta} = (Id - A_\eta)$ y $d(\exp^p)|_{\mathcal{V}_\eta}$ (*)

Entonces $\exp^\nu : \mathfrak{Hol}_{\xi_p}(M) \to \mathbb{R}^N$ es una inmersión, la imagen como se dijo anteriormente es el tubo de holonomía dado como:

$M_\xi = \{c(1) + \bar{\xi}(1) : \bar{\xi}(t)$ es el $\nabla^\perp$-transporte paralelo a lo largo de $c(t)$ con $c(0) = p$, $\bar{\xi}(0) = \xi\}$

Entonces la subvariedad Euclídea $\exp^\nu : \mathfrak{Hol}_{\xi_p}(M) \to \mathbb{R}^N$, con la métrica inducida $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es una variedad Riemanniana completa. En efecto, sea $(\cdot,\cdot)$ la métrica de Sasaki sobre $\mathfrak{Hol}_{\xi_p}(M)$. En ésta métrica la distribución horizontal es perpendicular a la distribución vertical. Mas aún, π es una sumersión Riemanniana y la métrica en el espacio vertical, $\phi(p)\eta$, es la inducida de la métrica sobre el espacio normal $\nu_p(M)$. Como M es completa y las fibras son compactas, entonces $(\cdot,\cdot)$ es completa y de (*) $a^2(\cdot,\cdot) \leq \langle\cdot,\cdot\rangle$. Esto implica que la métrica inducida es completa.$\diamond$

En lo que sigue se darán algunas importantes ideas que relacionan los tubos de holonomía, ver referencias [HOT], [BCO].

Nota 2.3.4. Hechos básicos sobre tubos de holonomía.

$\star$ Si $\tilde{A}$ es el operador de forma del tubo $(M)_{\xi_p}$ y $\bar{A}$ el operador de forma de la órbita $\Phi_p\xi_p$ como subvariedad de $\nu_p M \subset \mathbb{R}^n$, entonces por la formula del tubo y la descomposición dada anteriormente.

$$\bar{A}_{\eta|T_p} = A_\eta(id - A_{\xi_p})^{-1} \text{ y}$$

$$\tilde{A}_{\eta|T_{\xi_p}\Phi_p\xi_p} = \bar{A}_\eta \text{ para todo } \eta \in \nu_{p+\xi_p}((M)_{\xi_p}).$$

$\star$ Si el tubo de holonomía es principal, entonces éste tiene espacio normal plano. En particular si tiene curvaturas principales constantes, es una variedad isoparamétrica.

$\star$ La geometría de tubos puede contener información útil para M, por ejemplo $(M)_{\eta_p}$ es irreducible si y solo si M es irreducible.

$\star$ Si ξ sección normal paralela isoparamétrica, entonces $(M_\xi)_{-\xi(p)} \subset M$ donde M_ξ es la variedad focal a ξ.

$\star$ Sea $\pi : M_{\xi_p} \to M$ la respectiva proyección definida por $\pi(c(1) + \xi(1)) = c(1)$, donde M_{ξ_p} nota el tubo de holonomía a través de ξ_p y $\xi(1)$ el transporte paralelo de ξ a lo largo de c, evaluado en 1. Entonces el campo normal definido sobre M_{ξ_p} por, $q \to \eta(q) := \pi(q) - q$ es paralelo. Lo que deduce que M es una variedad paralela (en general, focal) a el tubo de holonomía ya que:

$$M = (M_{\xi_p})_\eta$$

Citaremos los dos siguientes resultados como aplicaciones del tubo de holonomía.

Teorema 2.3.5. *[HOT] Una variedad del espacio euclídeo tiene curvaturas principales constantes si y solo si cualquier tubo de holonomía principal es isoparamétrico.*

Corolario 2.3.6. *[HOT] Una subvariedad del espacio euclídeo tiene curvaturas principales constantes si y solo si es isoparamétrica o variedad focal (paralela) a una subvariedad isoparamétrica.*

Continuando con el estudio de subvariedades con curvaturas principales constantes se tiene el siguiente teorema, cuando la variedad en adición es substancial.

Lema 2.3.7. *(Lema de Holonomía) [BCO, lema 5.3.5],*
Sea M una subvariedad substancial de $\mathbb{R}^n$ con curvaturas principales constantes. Entonces para todo $q \in M$ los valores propios de A (el operador de forma), localmente distinguen diferentes órbitas del grupo de holonomía normal restringido Φ_q^*.

Del cual se deduce:

Teorema 2.3.8. *(Teorema del slice homogéneo) [HOT].*
Las fibras de la proyección de una subvariedad completa e isoparamétrica sobre una variedad focal y substancial, son órbitas de una s-representación.

Demostración
Si N es una subvariedad irreducible, substancial e isoparamétrica, $\pi : N \to M$ es una variedad focal; una fibra F de π es la unión de órbitas holonómicas normales de la variedad focal. Los valores propios del operador de forma de M sobre la fibra son constantes, luego del lema 2.3.7 (Lema de holonomía) sus componentes conexas deben ser solo una única órbita, y del teorema de holonomía normal se sigue el teorema. $\diamond$

El siguiente corolario da una extensión de lo dicho en la nota 2.3.4.

Corolario 2.3.9. *Sea M_ξ variedad focal y substancial de una subvariedad isoparamétrica completa M, entonces $M = (M_\xi)_{-\xi(p)}$. Esto es, una variedad focal y substancial determina la focalización isoparamétrica.*

Como se vio en el capítulo anterior, toda órbita principal de una s-representación es isoparamétrica, recíprocamente se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.3.10. *[BCO, Teorema 5.4.1]. Sea M subvariedad compacta, substancial e isoparamétrica de $\mathbb{R}^n$. Supóngase que $G = \{g \in I(\mathbb{R}^n) \mid g(M) \subset M\}$ actúa transitivamente sobre M, sea G^* la componente conexa a la identidad, entonces la representación, $\rho : G^* \to O(n)$, es polar y M es una G^*-órbita principal.*

Teorema 2.3.11. *(Palais y Terng) [PT].*
Sea M una órbita de una representación ortogonal ρ de un grupo de Lie compacto, entonces M es isoparamétrica si y solo si ρ es polar y M es órbita principal.

Prueba del teorema 2.3.10.

Sean $p, q \in M$ y $c : [0, 1] \to G^*$ con $c(0) = \mathrm{Id}$ y $g(1)p = q$. Sea τ_t el transporte normal paralelo a lo largo de la curva $\gamma(s) = c(s)p$ desde 0 hasta t. Entonces $h(t) = \tau_t^{-1} c(t)_{*p}$ permuta las curvaturas normales a p, como las curvaturas normales generan $\nu_p M$ y $h(0)$ es la transformación identidad del normal a p , se concluye que $h(t) = \mathrm{Id}$ para todo t. El transporte paralelo es entonces dado por el grupo, de lo que, M es órbita principal y la acción es polar localmente, y en tanto, es polar pues el espacio ambiente es el espacio euclídeo. $\diamond$

En consecuencia, tal como se especuló en el capitulo 1.

Corolario 2.3.12. *Sea* $G \to O(V)$, *acción polar, entonces una órbita de maximal dimensión es principal (esto es, las acciones polares no tienen órbitas excepcionales).*

Demostración

Sea Gp una órbita de maximal dimensión y tómese $G\xi$ una órbita principal, esto es, Gp pertenece a la foliación isoparamétrica determinada por $G\xi$ y es paralela a $G\xi$. Por dimensión Gp no puede ser focal, de lo que es isoparamétrica y por tanto principal. $\diamond$

Usando Dadok, teorema 2.1.14, se obtiene que:

Teorema 2.3.13. *Toda subvariedad isoparamétrica, homogénea es una órbita principal de una s-representación.*

Finalizamos este capítulo con el siguiente resultado [T].

Teorema 2.3.14. *(Thorbergsson).*

Toda subvariedad substancial, irreducible e isoparamétrica de $\mathbb{R}^n$ *de rango al menos 3 es una órbita de una s-representación.*

El teorema de Thorbegrsson implica que toda subvariedad isoparamétrica e irreducible de la esfera, con codimensión al menos 2, es una órbita de s-representación.

3 PROBLEMA

3.1 MOTIVACIÓN, TEOREMA DEL RANGO RÍGIDO PARA SUBVARIEDADES Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

Sea $M \to \bar{M}^n(k)$ subvariedad, se define $(\nu_p M)_0 = \{\xi \in \nu_p M \mid \Phi_p^* \xi = \xi\}$, es claro que $(\nu M)_0$ es el subfibrado plano maximal, $\nabla^\perp$-paralelo de νM, donde la fibra a p es $((\nu M)_0)_p = (\nu_p M)_0$. Se define el rango de una subvariedad como la dimensión sobre M del fibrado $(\nu M)_0$.

Si M es simplemente conexo $(\nu_p M)_0$ tiene fibrado normal plano, entonces el rango(M), es el número maximo de campos normales paralelos linealmente independientes en M, como casos particulares si M tiene fibrado normal plano el rango(M) es la codim$(\bar{M})$, si M es una subvariedad substancial e isoparamétrica de un espacio euclídeo el rango coincide con la noción usual para subvariedades isoparamétricas, si en adición es homogénea entonces es órbita de una s-representación y el rango coincide con el rango de su correspondiente espacio simétrico.

Para el caso de M subvariedad del espacio euclídeo, el rango de M, es el mínimo sobre $p \in M$, de $\mathrm{rango}_p(M)$, donde $\mathrm{rango}_p(M)$ es el número máximo de campos normales paralelos linealmente independientes, localmente definidos alrededor de p. Si M es homogénea $\mathrm{rango}_p(M) = \mathrm{rango}(M)$ para todo $p \in M$.

El teorema del rango rígido para subvariedades, ver [O2], establece que: *Si M es una subvariedad substancial, irreducible y homogénea del espacio euclídeo que no es una curva, de rango mayor o igual que 2 entonces M es una órbita de una s-representación. Más aún para rango al menos 1, ésta está contenida en alguna esfera.*

La siguiente nota dará una aplicación sencilla del teorema del rango rígido, que será útil en este trabajo.

Nota 3.1.1. Sea $M^3 = K\nu \subset \mathbb{R}^N$ una subvariedad substancial, irreducible y homogénea del espacio Euclídeo de dimensión 3. Asúmase que el rango$(M) \geq 2$. En este caso por el teorema del rango rígido, M es una órbita de una s-representación. Se puede asumir que K actúa como una s-representación.

Sea ξ un campo normal paralelo a M, K-invariante, el cual no es umbilico. Si el operador de forma A_ξ tiene dos autovalores diferentes (constantes), entonces las autodistribuciones asociadas a los autoespacios, llámense E_1 y E_2, son autoparalelas e invariantes bajo todos los operadores de forma de M (recordar que como ξ es un campo normal paralelo, entonces de la ecuación de Ricci, A_ξ conmuta con todos los otros operadores de forma). Del lema de Moore 1.1.4, M es un producto de subvariedades, lo que es contradictorio.

Si A_ξ tiene tres autovalores entonces las multiplicidades son todas 1. Como A_ξ conmuta con los demás operadores de forma, entonces todos deben conmutar, de nuevo aplicando la ecuación de Ricci, M tiene fibrado normal plano. De lo que M es isoparamétrica, pues es una órbita de s-representación (en particular tiene curvaturas principales constantes). Como M es isoparamétrica con exactamente tres curvaturas principales, entonces el grupo de Coxeter irreducible, asociado a M, ver 2.2.12, tiene exactamente tres hiperplanos de reflexión. Esto es posible solo si la dimensión del espacio normal es 2. En otro caso, las curvaturas normales son mutuamente perpendiculares y M debe ser un producto de círculos, y de nuevo se tiene una contradicción.

Entonces $N = 5$ y M es una hipersuperficie isoparamétrica de la esfera S^4. Mas aún, por la nota 3.3.1, M es una órbita principal de la representación isotrópica en $SL(3)/SO(3)$. $\diamond$

Subvariedades contenidas en una esfera tienen rango mayor o igual que 1, pues el vector posición es un campo normal paralelo.

Del teorema del rango rígido para subvariedades y el Teorema 1.3.9, se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 3.1.2. *[O3]. Sea M^n, $n \geq 2$ una subvariedad substancial, irreducible y homogénea del espacio euclídeo tal que el grupo de holonomía normal actúa no-transitivamente (sobre la esfera) en cada factor irreducible, entonces el primer espacio normal de M coincide con el espacio normal.*

La siguiente conjetura que se encuentra en [O4], es una posible extensión del teorema del rango rígido y motivación para este trabajo de tesis:

Conjetura 3.1.3. Una subvariedad substancial, irreducible y homogénea de la esfera, diferente de una curva, tal que el grupo de holonomía normal es no-transitivo, debe ser órbita de una s-representación.

Nota 3.1.4. Notar que no existen superficies (propiamente contenidas en la esfera), substanciales, irreducibles, homogéneas y no-transitivas. Pues al ser homogénea, del teorema 1.3.12, necesariamente tiene fibrado normal plano, como es no-transitiva del mismo teorema es isoparamétríca. Por supuesto con una o dos autodistribuciones. En el primer caso es umbilical, por lo que no es substancial. En el segundo caso se tendrían dos distribuciones de dimensión 1 (ver 3.1.2 y nota 3.1.5), perpendiculares, autoparalelas e invariantes por el operador de forma, y por el lema de Moore 1.1.4, sería un producto. $\diamond$

La Nota 3.1.4, muestra que la conjetura para $n = 2$ se cumple vacíamente. La conjetura en general es equivalente a los siguientes apartados de manera conjunta.

i) *Sea M subvariedad substancial, irreducible y homogénea de la esfera con* $\dim(M) \geq 2$, *la cual no es órbita de una s-representación. Entonces el grupo de holonomía normal actúa irreduciblemente.*

ii) *Sea M subvariedad substancial y homogénea de la esfera tal que el grupo de holonomía normal actúa irreduciblemente y es no-transitivo. Entonces M es órbita de una s-representación.*

En este trabajo se probará que en adición a la Nota 3.1.4, la conjetura es válida para $n = 3$, y también cuando la codimensión es maxima, agregando la hipótesis de que el grupo de holonomía actúa irreduciblemente. Recordar que por el teorema 1.3.9, $\operatorname{codim}(M) \leq \frac{n(n+1)}{2}$ (como subvariedad euclídea) y $\operatorname{codim}(M) \leq \frac{n(n+1)}{2} - 1$ (como subvariedad de la esfera).

Nota 3.1.5. Como consecuencia del Corolario 3.1.2, $\xi \to A_\xi$ es una función lineal inyectiva de $\nu_p M$ en las matrices simétricas $n \times n$, si la codimensión de M es maximal; esto es, $\operatorname{codim}(M) = \frac{n(n+1)}{2}$ (como subvariedad Euclídeo), entonces $\xi \to A_\xi$ es una biyección lineal.

Por el teorema del rango rígido es suficiente para la conjetura suponer que el rango es uno, esto es, M como subvariedad de la esfera no tiene puntos fijos bajo la acción del grupo de holonomía normal.

El siguiente teorema que involucra subvariedades que son substanciales, irreducibles y homogéneas de $\mathbb{R}^n$, será de utilidad para el trabajo.

Teorema 3.1.6. *[BCO, Teorema 6.2.5.] Sea $M = G\nu$, $\dim(M) \geq 2$, subvariedad substancial, irreducible y homogénea de $\mathbb{R}^n$, con G grupo de Lie conexo del grupo de isometrías de $\mathbb{R}^n$; y sean $g \in G$ y $p \in M$, Entonces existe $c : [0,1] \to M$ curva suave a trozos con $c(0) = p$, $c(1) = gp$, tal que:*

$$g_{*p} \mid_{\nu_p M} = \tau_c^\perp$$

Donde $\tau_c^\perp$ denota el transporte $\nabla^\perp$-paralelo a lo largo de c.

Corolario 3.1.7. *Sea $M = G\nu$ subvariedad substancial y homogénea de $\mathbb{R}^n$ donde $G \subset I(\mathbb{R}^n)$ es conexo. Entonces la imagen bajo la representación slice del subgrupo isotrópico G_p, está contenido en el grupo de holonomía a p.*

Nota 3.1.8. Sea M subvariedad del espacio euclídeo.

⋆ Si M tiene curvaturas principales constantes, por el Teorema 2.3.5, el tubo holonómico principal es isoparamétrico, si en adición, la subvariedad es substancial, irreducible, y el tubo holonómico tiene codimensión al menos 3 en el espacio euclídeo, entonces por el teorema de Thorbergsson, Teorema 2.3.14, el tubo holonómico principal M_{ξ_p} es una órbita de una s-representación, como M es una variedad paralela (focal), $M = (M_{\xi_p})_{-\tilde{\xi}}$, donde $\tilde{\xi}(q) = q - \pi(q)$, entonces M es una órbita de una s-representación.

⋆ Asumamos con la notación anterior que el tubo de holonomía M_{ξ_p} el cual no es necesariamente principal, tiene curvaturas principales constantes, por la formula del tubo 2.2.7 la variedad original tiene curvaturas principales constantes, lo anterior implica que si ésta es substancial e irreducible, entonces es una órbita de una s-representación.

3.2 PROBLEMA (CASO DE CODIMENSIÓN MAXIMAL Y HOLONOMÍA NORMAL IRREDUCIBLE)

Las siguientes secciones suponen el propósito de este trabajo de tesis, que es probar el siguiente teorema:

Sea M^n, $\dim(M) \geq 2$, *subvariedad substancial, irreducible y homogénea de la esfera* $S^{\frac{n(n+1)}{2}+n-1}$, *tal que el grupo de holonomía normal actúa no-transitivamente e irreduciblemente, entonces* M *debe ser órbita de una s-representación. Mas aún, para* $\dim(M) \geq 3$, M *es una subvariedad de Veronese.*

Como se vio en la sección anterior, éste es el caso particular de la conjetura 3.1.3, en el cual la codimensión es maximal y el grupo de holonomía normal actúa irreduciblemente sobre el espacio normal.

Nota 3.2.1. Para el caso $n = 2$, el teorema es válido independiente de las hipótesis adicionales. De hecho se cumple vacíamente, ver la Nota 3.1.4, aunque la irreducibilidad para este caso es inmediata por Lema 1.3.10, independiente de las hipótesis de ser substancial e irreducible, de igual forma por la Proposición 1.3.11 la irreducibilidad se tiene también para el caso en que $n = 3$.

El caso de dimensión 3 se tratará con más detalle en la siguiente sección ya que aunque se usan algunos resultados de esta sección, en cierto punto la prueba debe ser modificada usando algunos argumentos topológicos que la convierten en una prueba ligeramente mas compleja y menos estándar, más aún se probará que para dimensión 3 la conjetura 3.1.3 es válida.

Previo a la prueba del teorema, se probarán una serie de enunciados, que llevarán a probar que para una subvariedad M con estas hipótesis, las curvaturas principales son constantes, lo cual como se mostró al final de la sección anterior en la nota 3.1.8, prueba que M es órbita de una s-representación.

Lema 3.2.2. *Sea* C *un grupo de Coxeter actuando irreduciblemente por isometrías lineales sobre un espacio euclídeo n-dimensional* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. *Sea* $H_1, \dots, H_r$ *la familia de diferentes hiperplanos de reflexión asociados a las simetrías de* C. *Se define el grupo*

$$G = \{g \in \mathrm{End}(V) : g \textit{ permuta los hiperplanos } H_1, H_2, \dots, H_r \textit{ y } \det(g) = \pm 1\}$$

entonces G *es finito.*

Demostración

Sea S_r el grupo finito de biyecciones del conjunto $\{1, 2, \dots, r\}$ y sea $\rho : G \to S_r$ el homomorfismo definido por $\rho(g)(i) = j$ si $g(H_i) = H_j$, el grupo G es finito si y solo si $\mathrm{Ker}(\rho)$ es finito. Probaremos que $\mathrm{Ker}(\rho)$ es finito. Si $g \in \mathrm{Ker}(\rho)$ éste induce una permutación trivial de la familia $H_1, \dots, H_r$. Entonces g^t, la transpuesta de g con respecto al producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induce una permutación trivial del conjunto de rectas $L_1, \dots, L_r$, donde L_i es la recta perpendicular a H_i, $i = 1, 2, \dots, r$. Desde luego $\langle H_i, g^t L_i\rangle = \langle gH_i, L_i\rangle = 0$ y esto si y solamente si $g^t L_i = L_i$; en particular todo vector de L_i es vector propio de g^t para $i = 1, 2, \dots, r$.

Se define para $i \neq j$ el subespacio vectorial de dimensión dos $V_{i,j} := \text{span}(L_i \cup L_j)$, este subespacio es llamado *genérico* si existe $k \in \{1, ..., r\}$, $i \neq k \neq j$ tal que $L_k \subset V_{i,j}$, en otras palabras $V_{i,j}$ es genérico si existen por lo menos tres diferentes rectas de $\{L_1, ..., L_r\}$ que están contenidas en $V_{i,j}$. Supóngase que $V_{i,j}$ es genérico y que $L_i \cup L_k \cup L_j \subset V_{i,j}$, $i \neq k \neq j$, como g^t es una permutación trivial de las rectas $\{L_1, ..., L_r\}$ entonces $g^t : V_{i,j} \to V_{i,j}$ y todo vector en $L_i \cup L_k \cup L_j$ es un vector propio de g^t, sean $\alpha_i \in L_i$, $\alpha_j \in L_j$ y $\alpha_k \in L_k$ con $g^t(\alpha_i) = \lambda_i \alpha_i$ y $g^t(\alpha_j) = \lambda_j \alpha_j$, entonces $\alpha_k = a\alpha_i + b\alpha_j$ y $\lambda_k \alpha_k = g^t(\alpha_k) = a\lambda_i \alpha_i + b\lambda_j \alpha_j$, lo cual es cierto si y solo si $\lambda_i = \lambda_j = \lambda$, con lo que $g^t|_{V_{i,j}} = \lambda \text{Id}|_{V_{i,j}}$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.

Se define una relación de equivalencia $\sim$ sobre el conjunto $\{1, ..., r\}$ como: $i \sim i'$ si existen $i_1, ..., i_l \in \{1, ..., r\}$ con $i_1 = i$, $i_l = i'$ tales que $V_{i_s, i_{s+1}}$ es genérico para $s = 1, ..., l-1$; tómese $i \in \{1, ..., r\}$ fijo. Denótese $[i]$ la clase de equivalencia de i; por la observación anterior existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que si $j \in [i]$ y $v_j \in L_j$ entonces $g^t(v_j) = \lambda v_j$. Si $[i] = \{1, ..., r\}$ entonces $g^t = \lambda \text{Id}$, por tanto $g = \lambda \text{Id}$ pero $\det(g) = \pm 1$, entonces $\lambda^n = \pm 1$ de lo que $\lambda = \pm 1$ y $g = \pm \text{Id}$, entonces existen a lo sumo dos elementos en $\text{Ker}(\rho)$, de lo que para probar el lema es suficiente probar que existe una única clase de equivalencia sobre $\{1, ..., r\}$.

Sea $i \in \{1, ..., r\}$ fijo, debemos ver que $[i] = \{1, ..., r\}$, sea $j \notin [i]$ y supóngase que para algún $k \in [i]$, L_j no es perpendicular a L_k, se puede tomar $k = i$, sea s_j la simetría a través del hiperplano H_j y $\alpha_i \in L_i$ no nulo, como L_i y L_j no son perpendiculares $\alpha_i = \alpha + \alpha_j$ con $\alpha \in H_j$, $\alpha_j \in L_j$ no nulos, entonces $s_j(\alpha_i) = s_j(\alpha) + s_j(\alpha_j) = \alpha - \alpha_j = \alpha + \alpha_j - 2\alpha_j = \alpha_i - 2\alpha_j$, de lo que $s_j(L_i) \subset V_{i,j}$ y $s_j(L_i)$ es una recta en $L_1, ..., L_r$ que no es L_i ni L_j, esto es, $V_{i,j}$ es genérico y $i \sim j$ lo que lleva a contradicción de lo que si $j \notin [i]$ se tiene que $L_j \perp L_k$ para todo $k \in [i]$, esto es, si $j \notin [i]$, $L_k \subset H_j$ para todo $k \in [i]$.

Entonces s_j actúa trivialmente sobre $V_{[i]} = \text{span}\{\bigcup_{k \in [i]} L_k\}$. Véase también que s_j conmuta con s_k para todo $k \in [i]$, claro, sea $\alpha \in V$ entonces $\alpha = \alpha' + \alpha_k + \alpha_j$ con $\alpha_k \in L_k$, $\alpha_j \in L_j$ y $\alpha' \in [\text{span}(L_k \cup L_j)]^\perp$ como $s_j(\alpha') = \alpha' = s_k(\alpha')$ entonces:

$$\begin{aligned}
s_k s_j(\alpha) &= s_k s_j(\alpha') + s_k s_j(\alpha_k) + s_k s_j(\alpha_j) \\
&= \alpha' + s_k(\alpha_k) + s_k(-\alpha_j) \\
&= \alpha' - \alpha_k - \alpha_j \\
&= s_j s_k(\alpha)
\end{aligned}$$

Sea ahora V_0 el subespacio maximal de V que es fijo punto a punto por las simetrías s_j con $j \notin [i]$, el cual es no nulo pues $V_{[i]} \subset V_0$. Si existe $j \notin [i]$ entonces V_0 es subespacio propio de V, si $k \in [i]$ entonces $s_k(V_0) \subset V_0$ pues s_k conmuta con todos las s_j, para $j \notin [i]$. Por otro lado es claro que $s_j(V_0) = V_0$, entonces V_0 es un subespacio propio no-trivial de V el cual es invariante bajo el grupo de Coxeter irreducible C. Una contradicción con las hipótesis, de lo que $[i] = \{1, ..., r\}$. $\diamond$

Lema 3.2.3. *Bajo los supuestos y la notación del lema anterior, entonces* G *actúa por isometrías.*

Demostración

Por el lema 3.2.2 G es finito. Sea $G = \{g_1, ..., g_s\}$, se define el producto interno sobre V, $(,)_{g_i} = \langle g_i, g_i \rangle$, esto es $(v, w) = \langle g_i v, g_i w \rangle$, entonces el producto interno $\sum_{i=1}^{s} (\cdot, \cdot)_{g_i}$ es G-invariante sobre V. Como $C \subset G$, entonces $(\cdot, \cdot)$ es C-invariante, como C actúa irreduciblemente por isometrías, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ debe ser proporcional a $(\cdot, \cdot)$. Entonces G actúa por isometrías. $\diamond$

Corolario 3.2.4. *Sea $(V_i, \langle \cdot, \cdot \rangle_i)$ un espacio vectorial euclídeo y sea C_i actuando irreduciblemente por isometrías lineales sobre $(V_i, \langle \cdot, \cdot \rangle_i)$, $i = 1, 2$; y sea $h : V_1 \to V_2$ un isomorfismo lineal que induce una biyección de la familia de hiperplanos de reflexión de C_1 en la familia de hiperplanos de reflexión de C_2. Entonces h es una homotecia.*

Demostración

Sea $(\cdot, \cdot) = h^*(\langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ producto interno en V_1, esto es, para todo $x, y \in V$, $(x, y) = \langle h(x), h(y) \rangle_2$ y sea $C^* = h^*(C_2) = h^{-1} C_2 h$; el determinante de cada elemento de C_2 es ± 1 pues C_2 actúa por isometrías en $(V_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$, de lo que todo elemento en C^* tiene determinante ± 1. Por hipótesis se obtiene que la familia de hiperplanos de reflexión del grupo de coxeter irreducible C^* de $(V_1, (\cdot, \cdot))$ coincide con la familia $H_1, ..., H_r$ de hiperplanos de reflexión de C_1, esto es, todo elemento de C^* induce una permutación en esta familia de hiperplanos. Por el lema 3.2.3 C^* actúa por isometrías sobre $(V_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ y como C^* actúa irreduciblemente se tiene que $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ es proporcional a $(\cdot, \cdot)$ de lo que h es homotecia. $\diamond$

Proposición 3.2.5. *Sean $[V, R, K]$ y $[V', R', K']$ dos sistemas de holonomía irreducibles y no transitivos (y por Simons 1.2.6, simétricos). Sea $l : V \to V'$ un isomorfismo lineal tal que para cualquier K-órbita Kv en V $l(\nu_v(Kv)) = \nu_{l(v)}(K' l(v))$, donde ν denota el espacio normal. Entonces l es una homotecia y $l(K) = K'$.*

Demostración

Como $[V, R, K]$ y $[V', R', K']$ son sistemas de holonomía irreducibles y no transitivos (por tanto simétricos), de la nota 1.2.4 K y K' actúan como s-representaciones irreducibles. Vea que Kv es una órbita de dimensión maximal si y solo si $K' l(v)$ lo es, por Dadok teorema 2.1.14 y el Corolario 2.3.12, para s-representaciones una órbita es de dimensión maximal si y solo si es principal, de lo que si Kv es una K-órbita de dimensión maximal entonces es una subvariedad isoparamétrica irreducible (homogénea) de V, de lo que se puede definir un grupo de Coxeter que actúa irreduciblemente sobre el espacio normal Teorema, ver 2.2.12 y Teorema 2.2.17.

Sobre el espacio normal $\nu_v(Kv)$, si $H_1, ..., H_r$; son los hiperplanos de reflexión asociados al respectivo grupo de coxeter, llámese C, entonces:

$$\bigcup_{i=1}^{r} H_i = \{z \in \nu_v(Kv) : Kz \text{ es una órbita singular}\} \ (1)$$

Análogamente para $v' = l(v)$ se tienen objetos similares $K'v'$, $\nu_{v'}(K'v')$, C' y $H'_1, ..., H'_s$, para los que también se tiene que:

$$\bigcup_{i=1}^{s} H'_i = \{z \in \nu_{v'}(K'v') : K'z' \text{ es una órbita singular}\} \ (2)$$

De (1) y (2) y como l envía órbitas singulares en órbitas singulares se tiene que $l(\bigcup_{i=1}^{r} H_i) = \bigcup_{i=1}^{s} H_i'$. Veamos que l permuta los hiperplanos de reflexión. Supóngase sin pérdida de generalidad que $l(H_1)$ no es ningún H_i', notar que si la dimensión de las hiperplanos es 1 lo que deseamos probar es obvio; entonces suponemos que es mayor o igual que dos, por hipótesis, entonces existen $v_1, v_2 \in H_1$, tal que $l(v_1) \in H_i'$, $l(v_2) \in H_j'$, $l(v_1) \notin H_j'$ y $l(v_2) \notin H_i'$; tómese el subespacio span$\{v_1, v_2\}$ de H_1.

$l : \text{span}\{v_1, v_2\} \mapsto \nu_{v'}(K'v')$ es lineal, además como $v_1, v_2 \in H_1$, span$\{v_1, v_2\} \subset H_1$, entonces si $av_1 + v_2 \in H_1$ implica que $l(av_1 + v_2) \in \bigcup H_i'$, o lo que es lo mismo que, $al(v_1) + l(v_2) \in H_i'$ para algún i. Fíjese $a > 0$, supóngase que existe una sucesión decreciente $a_{n_{>0}} \to 0$, con $a_1 = a$, tal que $a_n l(v_1) + l(v_2) \in H_i'$, como H_i' es cerrado en $\nu_{v'}(K'v')$ y $a_n l(v_1) + l(v_2) \in H_i'$ converge en $\nu_{v'}(K'v')$, entonces, $l(v_2) \in H_i'$; luego $al(v_1) \in H_i'$, de lo que $l(v_1), l(v_2) \in H_i'$, lo que contradice la hipótesis.

Si no existe tal sucesión, el conjunto de los $b < a$, tales que $bl(v_1) + l(v_2) \in H_i'$ está acotado inferiormente por un cierto $b_i > 0$, si esto ocurre, para todo i se puede tomar $b = \min\{b_1, b_2 ..., b_m\}$ y en tal caso, si $0 < c < b$, entonces $cl(v_1) + l(v_2) \notin H_i'$ para ningún i y se contradice que $l(\bigcup H_i) = \bigcup H_i'$, entonces no existen tales v_1, v_2, de lo que, $l(H_i)$ es algún H_j', en particular $r = s$ y l permuta hiperplanos de reflexión.

Del corolario anterior se tiene que:

$$l : \nu_v(Kv) \to \nu_{v'}(K'v')$$

Es homotecia, para todo K-vector principal v donde $v' = l(v)$, denótese por $\lambda(v) > 0$ la constante de homotecia de esta aplicación.

Tómese v vector principal fijo y sea $M = Kv$, como Kv es subvariedad isoparamétrica de $V \approx \mathbb{R}^n$, entonces los operadores de forma $\{A_\xi\}_{\xi \in \nu_v(Kv)}$ forman una familia conmutativa de transformaciones simétricas de $T_v(Kv)$, en particular son simultáneamente diagonalizables. Sean $\lambda_1(\xi), ..., \lambda_r(\xi)$; los valores propios de A y $\{E_i\}_{i=1}^{r}$ la distribución de los autovectores, esto es:

$$A_\xi X_i = \lambda_i(\xi) X_i, \; X_i \in E_i.$$

Como se sabe, los λ_i son funcionales lineales del normal a cada punto y $\lambda_i = \langle \eta_i, \cdot \rangle$, donde los η_i son campos normales (curvaturas normales), que resultan ser paralelos en la conexión normal, ver 2.2. Por definición $A_\xi X_i = \langle \eta_i(v), \xi \rangle X_i$, $X_i \in E_i$, $\xi \in \nu_v(M)$.

La distribución E_i es autoparalela e invariante para todos los operadores de forma, que operan como múltiplos de la identidad. Por ser autoparalelas resultan integrables, entonces para todo i existe la hoja $S_i(v)$ que es una subvariedad conexa, totalmente umbilica del espacio ambiente, contenida en M, de E_i en v, esto es, $T_v S_i(v) = E_i$, que se llamó la esfera de curvatura, ver 2.2 Lemas 2.2.1 y 2.2.2. Como la codimensión de M es al menos 2, se puede tomar un $\xi \in \nu_v(M)$ tal que $\eta \perp \xi$.

Sea $c : [a, b] \to S_i(\nu)$ una curva suave a trozos con $c(a) = \nu$, se notará el transporte paralelo a lo largo de c en t con respecto a la conexión normal como $\xi(t)$. Por la formula de Weingarten:

$$\overline{\nabla}_{\frac{dc}{dt}} \xi = -A_\xi \frac{dc}{dt} + \nabla^{\perp}_{\frac{dc}{dt}} \xi,$$

con $\overline{\nabla}$ la conexión de Levi-civita del espacio ambiente $V \approx \mathbb{R}^n$. Como el espacio ambiente es espacio euclídeo, la derivada covariante a lo largo de una curva coincide con la derivada usual, de lo que:

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = -A_{\xi(t)} \frac{dc}{dt} + \nabla^{\perp}_{\frac{dc}{dt}} \xi(t), \text{ como } \xi(t) \text{ es } \nabla^{\perp}\text{-paralelo, } \nabla^{\perp}_{\frac{dc}{dt}} \xi(t) = 0 \text{ de lo que,}$$

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = -A_{\xi(t)} \frac{dc}{dt} = -\langle \eta_i(t), \xi(t) \rangle \frac{dc}{dt}.$$

Pues $\frac{dc}{dt}$ pertenece al tangente de la esfera de curvatura, que es E_i, como $\eta_i(t), \xi(t)$ son paralelos en la conexión normal a lo largo de c, entonces $\langle \eta_i(t), \xi(t) \rangle$ es constante, pero $\langle \eta_i(0), \xi(0) \rangle = \langle \eta_i(\nu), \xi \rangle = 0$, pues $\eta(\nu) \perp \xi$, entonces $\langle \eta_i(t), \xi(t) \rangle = 0$ para todo t, de lo que $\frac{d\xi(t)}{dt} = 0$ a todo t, con lo que $\xi(t)$ es constante, esto es, $\xi(t) = \xi$ para todo $t \in [a, b]$. Por paralelismo, ξ pertenece al normal a $M = K\nu$ en $c(t)$ para todo t, entonces, los $\nu_{c(t)}(M)$ se intersecan, de lo que la constante de homotecia en todos es la misma, como en $S_i(\nu)$ cualquier otro punto se puede unir por una curva suave a trozos a ν, se concluye que para todo par de puntos $x, y \in S_i(\nu) \subset K\nu$ los normales a $K\nu$ en estos puntos, tienen la misma constante de homotecia.

Ahora, recuérdese que la distribución $\{E_i\}$ genera todo el tangente a cada punto, tómese el punto base ν y una base de campos locales a una vecindad de ν, se puede considerar esta vecindad, vecindad coordenada, sea $(U, x_1, ..., x_n)$, de tal forma que cada campo está en algún E_i, note que por la ortogonalidad de la distribución, esto equivale a decir que se toma una base de campos locales en $\{E_i\}$ para todo i, y se toma la unión. Como la distribución de curvatura genera todo el tangente a cada punto, esta unión es una base del tangente en todo punto en U. Entonces, sea $\{X_i\}_{i=1}^n$ la base de campos locales tal que cada uno está en algún espacio de la distribución de curvatura. Recordar que si X un campo (local) cualquiera en M se puede considerar su flujo alrededor de cualquier punto $m \in M$, que está definido en un cierto intervalo I_m con $0 \in I_m$, pero $\mathfrak{D}_t = \{m \in M : t \in I_m\}$ es un abierto para todo t, esto permite concluir que se puede tomar un abierto en cada punto, tal que para todo punto en este abierto se puede escoger un intervalo común tal que existe una curva integral a X, para todo punto en el abierto, definida sobre el mismo intervalo. Como la intersección finita de abiertos es abierto, entonces simplemente se parte de U abierto que contiene a ν, tal que X_i tiene una curva integral para todo punto en U, sobre un mismo intervalo común I_i para todo $i = 1, 2, ...n$; por supuesto $I = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$, entonces se puede definir una aplicación con valores en M, mas precisamente sobre U, de la siguiente forma:

Se nota $\gamma_i(m, t_i)$, la curva integral definida anteriormente en cada punto $m \in U$ sobre el intervalo I_i para todo i en coordenada o tiempo t_i, ahora se define h de I abierto de $\mathbb{R}^n$, sobre U como:

$$h(t_1, ..., t_n) = \gamma_1(\gamma_2(\gamma_3(...\gamma_n(\nu, t_n), ...), t_3), t_2,), t_1).$$

Esta es una función suave, pues toda curva integral lo es. Recuérdese que por la definición de flujo, $\gamma_i(m,0) = m$ y $\frac{d\gamma_i}{dt_i}(m,t_i) = X_{i\gamma_i(m,t_i)}$, de lo que resulta que:

$h(0,...,0) = \nu$, pues $\gamma_n(\nu,0) = \nu$, $\gamma_{n-1}(\nu,0) = \nu$,...,$\gamma_1(\nu,0) = \nu$.

Entonces, $h(0,...,0) = \gamma_1(\gamma_2(\gamma_3,...\gamma_n(\nu,0)),0),...),0) = \nu$, notaremos el 0 de $\mathbb{R}^n$ de igual forma que el 0 en $\mathbb{R}$ siempre que no se presente confusión, sea $w_i = (0,0,...,0,t_i,0,...,0)$. Como $\gamma_n(\nu,0) = \nu$, entonces $h(w_i) = \gamma_1(\gamma_2(\gamma_3(...\gamma_i(\nu,t_i),...),0),0,),0)$ pero:

$\gamma_{i-1}(\gamma_i(\nu,t_i),0) = \gamma_i(\nu,t_i)$
$\gamma_{i-2}(\gamma_i(\nu,t_i),0) = \gamma_i(\nu,t_i)$ y así sucesivamente, de lo que se concluye que:

$(*)$ $h(0,0,...,0,t_i,0,...,0) = \gamma_i(\nu,t_i)$ para todo i

Volvemos al sistema coordenado $(U;x_1,....x_n)$, donde la diferencial de h en las coordenadas t_i en 0 está dada por la ecuación:

$$dh\left(\left.\frac{d}{dt_i}\right|_0\right) = \sum_1^n \left.\frac{d(x_i\circ h)}{dt_i}\right|_0 \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_\nu .$$

Recordar que $h(0) = \nu$.

Escribiendo $h_i = (0,0,...,0,h,0,0...,0)$ en la i-ésima componente y $X_i\ |_U = \sum_1^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ se tiene usando $(*)$ que:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d(x_i\circ h)}{dt_i}\right|_0 &= \lim_{h\to 0}\frac{x_i\circ h(h_i) - x_i\circ h(0)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x_i\circ\gamma_i(\nu,h_i) - x_i\circ\gamma_i(\nu,0)}{h}\\
&= \left.\frac{d(x_i\circ\gamma_i(\nu,t_i))}{dt_i}\right|_0\\
&= f_i(\gamma_i(\nu,0))\\
&= f_i(\nu).
\end{aligned}$$

Entonces:

$$dh\left(\left.\frac{d}{dt_i}\right|_0\right) = \sum_1^n f_i(\nu)\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_\nu = X_{i\,\nu},\ \text{ esto es,}$$
$$dh\left(\left.\frac{d}{dt_i}\right|_0\right) = X_{i\,\nu}.$$

En conclusión h aplica el 0 en ν y dh aplica los vectores coordenados de I abierto de $\mathbb{R}^n$ a 0, en los vectores coordenados $X_{i\,\nu}$ en ν. Por el teorema de la función inversa, existe $I' \subset I$ abierto, tal que si $V = h(I')$, V es abierto y $h : I' \to V$ es un difeomorfismo, recordar que $h(I)$ se obtiene de seguir curvas cuyos tangentes están en algún espacio de la distribución de curvatura, o lo que es lo mismo, que $h(I)$ se obtiene de seguir curvas que están contenidas en esferas de curvatura, posiblemente a diferentes puntos, lo que implica que si se mueve a través de un punto ν por medio de curvas tangentes a esferas de curvatura se obtiene un abierto en M, a saber, $h(I)$ para ν.

Defínase la siguiente relación de equivalencia en M. Dos puntos $x, y \in M$ se relacionan, escríbase $x \sim y$, si y solo si se pueden unir por medio de una curva suave a trozos que se obtiene de unir curvas que son tangentes a esferas de curvatura en M, es fácil ver que es una relación de equivalencia. Por lo mostrado anteriormente cualquier clase de equivalencia vista como subconjunto de M es un abierto. Se define $M/\sim$, el espacio cociente con la topología usual que hace de la proyección canónica una función continua, como M es conexa, entonces $M/\sim$ es conexa, como toda clase es un abierto en M, toda clase es un abierto en el cociente y por conexidad del cociente solo existe una clase; lo que implica que en M cualquier par de puntos se relacionan, esto es, se pueden unir por medio de una curva que es la unión de curvas yuxtapuestas, cada una de las cuales es tangente a alguna esfera de curvatura.

Como ya se probó antes, en cualquier esfera de curvatura en todo punto el espacio normal, tiene la misma constante de homotecia; como cualquier par de puntos se pueden unir por una curva que es unión de curvas yuxtapuestas por curvas que están contenidas en esferas de curvatura, aplicando repetitivamente el hecho anterior, se tiene que para cualesquier dos puntos en M, los normales tiene la misma constante de homotecia, en particular $\lambda(\nu) = \lambda(x)$ para todo $x \in M$. Si existiera algún otro espacio normal a alguna K-órbita principal en algún punto con diferente constante de homotecia, se llegaría a una contradicción, puesto que los normales son secciones de la s-representación, en particular todo normal interseca todas las órbitas, por lo que interseca a M, y $\lambda(\nu) = \lambda(x) = \lambda$ para todo $x \in V$.

Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ son los respectivos productos internos de V y V', de lo anterior se tiene que para $x, y \in V$:

$$\begin{aligned}
\langle x+y, x+y \rangle &= c\langle l(x+y), l(x+y) \rangle' \\
\langle x, x \rangle &= c\langle l(x), l(x) \rangle' \\
\langle y, y \rangle &= c\langle l(y), l(y) \rangle'
\end{aligned}$$

Entonces se tiene que:

$\langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = c\langle l(x), (x) \rangle' + 2c\langle l(x), l(x) \rangle' + c\langle l(y), l(y) \rangle'$ y

$\langle x, y \rangle = c\langle l(x), l(y) \rangle'$

De lo que l es una homotecia y esto prueba la primera parte de la proposición.

Sea $K'' = l(K)$. Como l es una homotecia, K'' actúa por isometrías sobre V'. Sea $\mathcal{D}$ la distribución (integrable) sobre un subconjunto abierto y denso de V' dado por los espacios tangentes a las K'-órbitas principales [PT, Teorema 5.4.15]. Sea $X \in \mathrm{Lie}(K'') \subset \mathfrak{so}(V')$ y w un K'-vector principal (X se ve como un campo de Killing sobre V' A). Como l es homotecia y por hipótesis $l(\nu_v(Kv)) = \nu_{l(v)}(K'l(v))$ entonces $X(w) \in T_w(K'w)$; claro, como $X \in \mathrm{Lie}(K'')$ entonces $l^{-1}(X) \in \mathrm{Lie}(K)$ de lo que:

$$\frac{1}{\lambda}\langle X(w), \nu_w(Kw)\rangle = \langle l^{-1}(X)(l^{-1}(w)), \nu_{l^{-1}(w)}(Kl^{-1}(w))\rangle = 0$$

con λ la constante de homotecia, observe que lo mismo es válido si se remplaza w por $k'w$ para todo $k' \in K'$, entonces el campo de Killing X restringido a $K'w$ debe ser tangente a $K'w$ de lo que $\exp(tX)(K'w) = K'w$, lo que prueba que:

$$K'' \subset \bar{K}' := (\{g \in SO(V') : g(K'w) = K'w\})_\circ,$$

donde $(\cdot)_\circ$ denota la componente conexa en la identidad. Como $K' \subset \bar{K}'$, se tiene que $[V', R', \bar{K}']$ es un sistema de holonomía irreducible, mas aún es no transitivo pues $\bar{K}'w = K'w$ y por el teorema de Simons 1.2.6 es simétrico, entonces $\mathrm{Lie}(\bar{K}')$, nota 1.2.4 y el teorema de Ambrose-Singer [KN1, Cap. 2, teorema 8.1], es generado por R' igual que $\mathrm{Lie}(K')$, lo que prueba que $\bar{K}' = K'$, entonces $K'' \subset K'$. De igual forma como K actúa de manera irreducible y no-transitiva sobre V y $l(K) = K''$ entonces K'' actúa de manera irreducible y no-transitiva sobre V' y $K'' \subset \bar{K}'$, de lo que $[V', R'', \bar{K}']$ es un sistema de holonomía irreducible y no-transitivo, donde R'' es el tensor algebraico inducido por l; y de igual forma se obtiene que $K' \subset K''$ y concluye la prueba. $\diamond$

Sea $M^n = Kv \subset S^{n-1+\frac{n(n+1)}{2}}$ subvariedad homogénea de la esfera, asúmase que el grupo de holonomía normal restringido, como subvariedad de la esfera, actúa irreduciblemente y es no transitivo (actúa no-transitivamente sobre la esfera unitaria del espacio normal). En adelante considérese M como subvariedad del espacio euclídeo con espacio normal notado por $\nu(M)$ y grupo de holonomía normal restringido como $\Phi(p)$.

Sea $\xi = P$ el vector posición, que es global normal paralelo, esto es $\nabla^\perp \xi = 0$, si c es una curva en M entonces:

$$-A_{c(0)}c'(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} P(c(t)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} c(t) = c'(0).$$

para toda curva $c(t)$, de lo que $A_\xi = -\mathrm{Id}$, donde A es el operador de forma.

Ver que $\Phi(p)$ actúa trivialmente sobre $\mathbb{R}.p$ y que $\Phi(p)$ restringido a $\bar{\nu}_p(M) = (\mathbb{R}.p)^\perp \cap \nu_p(M)$ es identificado con el grupo de holonomía normal restringido de M como subvariedad de la esfera. Notar que M es substancial e irreducible, considerada como subvariedad del espacio euclídeo $\mathbb{R}^{n+\frac{n(n+1)}{2}}$, por supuesto, la irreducibilidad del grupo de holonomía normal sobre $\bar{\nu}_p(M)$ implica que el $\mathrm{rango}(M) = 1$, sea p el único vector fijo por $\Phi(p)$. La irreducibilidad del grupo de holonomía normal restringido sobre $(\mathbb{R}.p)^\perp \cap \nu_p(M)$ implica que M es substancial como subvariedad del espacio euclídeo pues de lo contrario direcciones normales constantes que no son múltiplos del vector posición son campos normales paralelos. Si M es reducible debe ser producto de subvariedades contenidas en esferas, entonces $\mathrm{rango}(M) = 2$ y se llega a una contradicción.

Del Corolario 3.1.2 y la Nota 3.1.5 la aplicación $A : \nu_p(M) \to \mathrm{Sim}(T_pM)$, $\xi \to A_\xi$, es un isomorfismo; donde $\mathrm{Sim}(T_pM)$ es el espacio de endomorfismos simétricos de T_pM con $\dim(\mathrm{Sim}(T_pM)) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Sea $\mathfrak{R}^\perp$ el tensor de curvatura adaptado, [ver prueba del teorema de holonomía normal 1.3], que es dado por la ecuación:

$$\langle \mathfrak{R}^\perp(\xi_1,\xi_2)\xi_3,\xi_4\rangle = -\mathrm{Tr}([A_{\xi_1},A_{\xi_2}][A_{\xi_3},A_{\xi_4}]) = \langle [A_{\xi_1},A_{\xi_2}],[A_{\xi_3},A_{\xi_4}]\rangle$$

Notar que el lado derecho de la igualdad anterior, expresa el tensor de curvatura Riemanniano del espacio simétrico $GL(n)^+/SO(n) = \mathbb{R}^* \times SL(n)/SO(n)$. El espacio tangente del segundo factor es identificado con las matrices simétricas de traza cero.

Considérese $\bar{A}$ el *operador de forma de traza nula* de M definido por:

$$\bar{A}_\xi := A_\xi - \frac{1}{n}\mathrm{Traza}(A_\xi)\,\mathrm{Id} = A_\xi - \frac{1}{n}\langle \xi, H\rangle\,\mathrm{Id}\,.$$

Donde H usualmente se denomina el *vector de curvatura media*. Vease que $[\bar{A}_{\xi_1},\bar{A}_{\xi_2}] = [\bar{A}_{\xi_1} - \frac{1}{n}\langle\xi_1,H\rangle\,\mathrm{Id}, \bar{A}_{\xi_2} - \frac{1}{n}\langle\xi_2,H\rangle\,\mathrm{Id}] = [A_{\xi_1},A_{\xi_2}]$, entonces:

$$\langle \mathfrak{R}^\perp(\xi_1,\xi_2)\xi_3,\xi_4\rangle = \langle [\bar{A}_{\xi_1},\bar{A}_{\xi_2}],[\bar{A}_{\xi_3},\bar{A}_{\xi_4}]\rangle = R \quad (3)$$

donde R es el tensor de curvatura del espacio simétrico irreducible $SL(T_pM)/SO(T_pM)$. Si $\bar{\nu}_p(M) = \{P\}^\perp \cap \nu_p(M)$, P el vector posición, se tienen dos sistemas de holonomía no-transitivos e irreducibles (simétricos), $[\bar{\nu}_p(M), \mathfrak{R}^\perp, \Phi(p)]$ y $[\mathfrak{sl}(T_p(M)), R, SO(T_pM)]$.

En general para un sistema de holonomía simétrico $[V, \bar{R}, K]$ el espacio normal a $K\nu$ es dado por:

$$\nu_\nu(K\nu) = \{w \in V : \bar{R}_{\nu,w} = 0\}$$ ver Nota 1.2.4 y prueba del Teorema 2.1.12.

Entonces de (3) se tiene que $\bar{A}$ es un isomorfismo lineal que envía $\Phi(p)$-órbitas en espacios normales a $SO(T_pM)$-órbitas, de la Proposición 3.2.5, $\bar{A} : \bar{\nu}_p(M) \to \mathrm{Sim}_\circ(T_pM)$ es una homotecia y $\bar{A}(\Phi(p)) = SO(T_pM)$, donde $SO(T_pM)$ actúa por conjugación sobre los endomorfismos simétricos de traza nula $\mathrm{Sim}_\circ(T_pM)$.

Lo anterior se resume como:

Lema 3.2.6. *(Manteniendo la notación anterior). Sea* $M^n = K\nu \subset S^{n-1+\frac{n(n+1)}{2}}$ *subvariedad homogénea de la esfera, asúmase que* M *es substancial e irreducible, considerada como subvariedad del espacio euclídeo* $\mathbb{R}^{n+\frac{n(n+1)}{2}}$*, en adición supóngase que el grupo de holonomía normal restringido, como subvariedad de la esfera, actúa irreduciblemente y es no transitivo (actúa no-transitivamente sobre la esfera unitaria del espacio normal). Entonces la representación del grupo de holonomía normal* $\Phi(\nu)$ *sobre* $\bar{\nu}_\nu(M)$ *es (ortogonalmente) equivalente a la representación isotrópica del espacio simétrico* $SL(n)/SO(n)$ *en particular* $\dim(\Phi(\nu)) = \frac{n(n-1)}{2} = \dim(SO(n))$. ⋄

Proposición 3.2.7. *Sea* $M = K\nu \subset S^{n-1+\frac{n(n+1)}{2}}$ *una subvariedad substancial y homogénea. asúmase que el grupo de holonomía normal restringido actúa irreduciblemente y éste es no-transitivo. Entonces, para* $\xi(t)$ *sección normal paralela a lo largo de una curva, el operador de forma de traza cero* $\bar{A}_{\xi(t)}$ *tiene valores propios constantes.*

Demostración

Sea K_p el subgrupo de isotropía de K a $p \in M$, se descompone $\mathrm{Lie}(K) = \mathfrak{m} \oplus \mathrm{Lie}(K_p)$ donde $\mathfrak{m}$ es el espacio complementario de $\mathrm{Lie}(K_p)$, sea $B_r(0)$ una bola abierta de radio r de $\mathfrak{m}$ tal que $\exp : B_r(0) \to M$ es un difeomorfismo sobre la imagen $U = \exp(B_r(0))$, sea $\beta : [0, 1] \to U$ una curva diferenciable a trozos arbitraria con $\beta(0) = p$, como $\beta(1) \in U$ existe un $X \in \mathfrak{m}$ tal que $\beta(1) = \exp(X).p$, se define $\gamma : [0, 1] \to M$ como $\gamma(t) = \exp(tX).p$, denótese para $k \in K$, l_k la isometría lineal $\nu \to k.\nu$ de V. Sea $\tau_t^{\perp}$ el transporte $\nabla^{\perp}$-paralelo a lo largo de $\gamma|_{[0,t]}$, de las [BCO, notas 6.2.8 y 6.2.9] se tiene que:

$$\tau_t^{\perp} = \left(dl_{\exp(tX)}\right)\Big|_{\nu_p(M)} \circ e^{-t\mathcal{A}_X} \quad (4)$$

donde $\mathcal{A}_X$ pertenece a $\mathrm{Lie}(\Phi(p))$ y es definido por:

$$\mathcal{A}_X = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \tau_{-t}^{\perp} \circ (dl_{\exp(tX)})\Big|_{\nu_p(M)}.$$

(La notación $\tau_{-t}^{\perp} = (\tau_t^{\perp})^{-1}$, esto es, el transporte $\nabla^{\perp}$-paralelo de 0 a t de la curva $-\gamma$).

Sea $\tau_{\beta}^{\perp}$ el transporte $\nabla^{\perp}$-paralelo a lo largo de β y $\phi = \tau_{-1}^{\perp} \circ \tau_{\beta}^{\perp}$ entonces ϕ pertenece a $\Phi(p)$ al grupo de holonomía normal restringido a p. En efecto, ϕ coincide con el transporte $\nabla^{\perp}$-paralelo a p a lo largo de la homotopía a cero, pues está contenida en U, obtenida de unir β con la curva $-\gamma$ con $-\gamma(t) = \gamma(1 - t)$.

Tenemos entonces que $\tau_{\beta}^{\perp} = \tau_1 \circ \phi$ y por (4).

$$\tau_{\beta}^{\perp} = (dl_{\exp(X)})|_{\nu_p(M)} \circ \bar{\phi}$$

donde $\bar{\phi} = e^{\mathcal{A}_X} \circ \phi \in \Phi(p)$. Entonces para todo $\xi \in \nu_p(M)$:

$$\begin{aligned}
\bar{A}_{\tau_{\beta}^{\perp}}(\xi) &= \bar{A}_{dl_{\exp(X)}(\bar{\phi}(\xi))} \\
&= dl_{\exp(X)} \circ \bar{A}_{\bar{\phi}(\xi)} \circ (dl_{\exp(X)})^{-1} \\
&= \exp(X)\bar{A}_{\bar{\phi}(\xi)}(\exp(X))^{-1}
\end{aligned}$$

Por lo dicho previo a la proposición, esto es $\bar{A}(\Phi(p)) = SO(T_pM)$, con $SO(T_pM)$ actuando por conjugación sobre $\mathrm{Sim}_{\circ}(T_pM)$; se tiene que existe un $g \in SO(T_pM)$ tal que $\bar{A}_{\bar{\phi}(\xi)} = g\bar{A}g^{-1}$, de lo que:

$$\bar{A}_{\tau_{\beta}^{\perp}}(\xi) = (\exp(X)g)\bar{A}_{\xi}(\exp(X)g)^{-1}$$

Entonces los valores propios de $\bar{A}_{\tau_{\beta}^{\perp}}(\xi)$ coinciden con los de $\bar{A}_{\xi}$.

La curva β se asume contenida en U, como p es arbitraria, entonces los valores propios de $\bar{A}_{\xi(t)}$ son localmente constantes para todo $\xi(t)$, campo normal paralelo a lo largo de una curva $c(t)$, esto implica que $\bar{A}_{\xi(t)}$ tiene valores propios constantes. $\diamond$

El siguiente lema es bien conocido y será de utilidad en lo que sigue [C].

Lema 3.2.8. *(Condición de Dupin). Sea M una subvariedad de un espacio con curvatura constante y sea ξ un campo normal paralelo tal que los valores propios del operador de forma A_ξ tienen multiplicidad constante. Sea $\lambda : M \to \mathbb{R}$ función de un valor propio que tiene asociado una distribución (integrable) E con dimensión mayor o igual que 2. Entonces λ es constante a lo largo de toda variedad integral de E, (esto es, $d\lambda(E) = 0$).*

Demostración

Sean X, Y secciones en E, como $\dim E(p) \geq 2$ constante para todo p en cualquier variedad integral, se pueden tomar X, Y de tal forma que X_p, Y_p sean linealmente independientes. Sea Z una sección arbitraria de TM. Por la ecuación de Codazzi, $\langle(\nabla_X A)_\xi Y, Z\rangle - \langle(\nabla_Y A)_\xi X, Z\rangle = 0$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
0 &= \langle \nabla_X(A_\xi Y) - A_\xi(\nabla_X Y), Z\rangle - \langle \nabla_Y(A_\xi X) - A_\xi(\nabla_Y X), Z\rangle \\
&= \langle \nabla_X(\lambda Y) - A_\xi(\nabla_X Y), Z\rangle - \langle \nabla_Y(\lambda X) - A_\xi(\nabla_Y X), Z\rangle \\
&= \langle \lambda\nabla_X(Y) + X(\lambda)Y - A_\xi(\nabla_X Y), Z\rangle - \langle \lambda\nabla_Y(X)Y(\lambda)X - A_\xi(\nabla_Y X), Z\rangle \\
&= \langle \lambda(\nabla_X(Y) - \nabla_Y(X)) - A_\xi(\nabla_X(Y) - \nabla_Y(X)) + X(\lambda)Y - Y(\lambda)X, Z\rangle \\
&= \langle \lambda([X,Y]) - A_\xi([X,Y]) + X(\lambda)Y - Y(\lambda)X, Z\rangle \\
&= \langle \lambda([X,Y]) - \lambda([X,Y]) + X(\lambda)Y - Y(\lambda)X, Z\rangle \\
&= \langle X(\lambda)Y - Y(\lambda)X, Z\rangle
\end{aligned}$$

Como Z es arbitrario, entonces $X(\lambda)Y = Y(\lambda)X$, pero, como X_p, Y_p son linealmente independientes para p en la variedad integral, se tiene que esto es cierto si y solamente si $X(\lambda) = Y(\lambda)$, por arbitrariedad de X, Y como secciones de E entonces $E(\lambda) \equiv 0$. $\diamond$

Una *subvariedad de Veronese*, ver C, es una subvariedad que es extrínsecamente isométrica a la órbita del grupo ortogonal $SO(n)$ por conjugación de una matriz $n \times n$, simétrica de traza nula y con dos autovalores, uno de multiplicidad 1 y otro de multiplicidad $n-1$, que resulta intrínsecamente isométrico al espacio proyectivo real.

Teorema 3.2.9. *Sea $M^n \subset S^{n-1+\frac{n(n+1)}{2}}$ una subvariedad substancial, irreducible y homogénea; donde $n > 3$. Asúmase que el grupo de holonomía restringido actúa irreducible y no-transitivamente, entonces M es una órbita de una s-representación (irreducible), mas aún una es subvariedad de Veronese.*

Demostración

Véase M como subvariedad del espacio euclídeo $\mathbb{R}^{n+\frac{n(n+1)}{2}}$, por lo visto en esta sección $A : \nu_p(M) \to \mathrm{Sim}(T_p M)$ es un isomorfismo para todo $p \in M$. Escójase $\xi \in \nu_p(M)$ tal que A_ξ tiene exactamente dos valores propios $\lambda_1(p), \lambda_2(p)$ con multiplicidad $m_1, m_2 \geq 2$ respectivamente, claramente esto no es posible para $n \leq 3$. En particular se puede asumir a $m_1 = 2$ y $m_2 = n-2$ y que ξ es lo suficientemente cercano a cero tal que el tubo de holonomía,

$$M_\xi = \{c(1) + \bar{\xi}(1) : \bar{\xi}(t) \text{ es el transporte } \nabla^\perp - \text{paralelo a lo largo de } c(t) \text{ con } c(0) = p, \bar{\xi}(0) = \xi\}$$

es una de la subvariedad euclídea inmersa, ver nota 2.3.3. Entonces existe una proyección natural $\pi : M_\xi \to M$, $\pi(c(1) + \xi(\bar{1})) = c(1)$ y $\tilde{\xi}$ define un campo normal paralelo a M_ξ como $\tilde{\xi}(q) = q - \pi(q)$, y se tiene, ver [CDO], que M es una variedad paralela (en general focal) al tubo de holonomía M_ξ con $M = (M_{\xi_p})_{-\tilde{\xi}}$, aquí M_ξ no tiene dimensión maximal de lo que no tiene fibrado normal plano, de lo contrario los valores propios de A_ξ tienen multiplicidad 1. Sea $\bar{\xi}(t)$ un campo normal paralelo a lo largo de $c(t)$ con $c(0) = p$, $\bar{\xi}(0) = \xi$, por la Proposición 3.2.7 los valores del operador de forma de traza no nula $\bar{A}_{\bar{\xi}(t)}$ son constantes e iguales que los de $\bar{A}_\xi$, los cuales son $\bar{\lambda}_1 = \lambda_1 - \frac{1}{n}(2\lambda_1 + (n-2)\lambda_2)$ con multiplicidad 2 y $\bar{\lambda}_2 = \lambda_1 - \frac{1}{n}(2\lambda_1 + (n-2)\lambda_2)$ con multiplicidad $n-2$.

Aplicando la formula del tubo, lema 2.2.7, se tiene que los valores propios del operador de forma $\tilde{A}_{\tilde{\xi}}$ restringido al subespacio horizontal, $\mathcal{H}_q$, del tubo de holonomía M_ξ a el punto $q = c(1) + \bar{\xi}(1)$ son:

$$\frac{\lambda_1 + \frac{1}{n}\langle \bar{\xi}(1), H(c(1))\rangle}{1 - \lambda_1 - \frac{1}{n}\langle \bar{\xi}(1), H(c(1))\rangle}$$

y,

$$\frac{\lambda_2 + \frac{1}{n}\langle \bar{\xi}(1), H(c(1))\rangle}{1 - \lambda_2 - \frac{1}{n}\langle \bar{\xi}(1), H(c(1))\rangle}$$

o de manera equivalente;

$$\tilde{\lambda}_1(q) = \frac{\lambda_1 + \frac{1}{n}\langle \tilde{\xi}(q), H(\pi(q))\rangle}{1 - \lambda_1 - \frac{1}{n}\langle \tilde{\xi}(q), H(\pi(q))\rangle}$$

y,

$$\tilde{\lambda}_2(q) = \frac{\lambda_2 + \frac{1}{n}\langle \tilde{\xi}(q), H(\pi(q))\rangle}{1 - \lambda_2 - \frac{1}{n}\langle \tilde{\xi}(q), H(\pi(q))\rangle}$$

con multiplicidades (constantes) 2 y $n-2$ respectivamente. Ver que $\tilde{A}_{\tilde{\xi}(q)}$, restringido a la distribución vertical, que es tangente a las órbitas en M_ξ por el grupo de holonomía normal de M a los puntos de proyección, es $-\mathrm{Id}$, ver [O1]. De lo que $\tilde{A}_{\tilde{\xi}}(q)$ tiene tres valores propios; sea $\tilde{\lambda}_3(q) = -1$ con multiplicidad constante $m_3 = \dim(M_\xi) - \dim(M)$. Ver que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $s \to \frac{s}{1-s}$ es inyectiva y aplica $\tilde{\lambda}_i(q)$ en $\lambda_i + \frac{1}{n}\langle \tilde{\xi}(q), H(\pi(q))\rangle$ para $i = 1, 2$. Como para todo $i = 1, 2$, λ_i es constante y f inyectiva, $\tilde{\lambda}_1(q) = \tilde{\lambda}_1(q')$ si y solo si $\langle \tilde{\xi}(q), H(\pi(q))\rangle = \langle \tilde{\xi}(q'), H(\pi(q'))\rangle$; de igual forma si $\tilde{\lambda}_2(q) = \tilde{\lambda}_2(q')$, entonces:

$$\tilde{\lambda}_1(q) = \tilde{\lambda}_1(q') \text{ si y solo si } \tilde{\lambda}_2(q) = \tilde{\lambda}_2(q') \quad (5)$$

Sean E_1 y E_2, las distribuciones horizontales asociadas a las respectivas funciones de los vectores propios $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$ del operador de forma $\tilde{A}_{\tilde{\xi}}$.

Hasta este punto lo anterior es válido incluso para el caso en que $n = 3$. (6).

Por hipótesis de la prueba $\dim(E_1) = 2$ y $\dim(E_2) = n - 2 \geq 2$; si $\gamma(t)$ es una curva tangente a E_1 entonces del lema 3.2.8 (condición de Dupin) se tiene que $\tilde{\lambda}_1$ es constante a lo largo de γ y por (5) $\tilde{\lambda}_2$ también es constante a lo largo de γ. Si se aplica la (condición de Dupin) en E_2 se tiene que esto también es valido si $\gamma \subset E_2$, como $\tilde{\lambda}_3$ es constante, entonces $v(\tilde{\lambda}_1) = v(\tilde{\lambda}_2) = v(\tilde{\lambda}_3) = 0$ para todo vector $v \in \mathcal{H}$. Entonces los valores propios del operador de forma $\tilde{A}_\xi$ son constantes a lo largo de curvas horizontales; como dos puntos en el tubo de holonomía pueden unirse por medio de curvas horizontales entonces los tres valores propios de $\tilde{A}_\xi$ son constantes sobre M_ξ.

De lo que $\tilde{\xi}$ es una sección normal paralela isoparamétrica (no-umbilical), como M es substancial e irreducible, M_ξ lo es, ver Nota 2.3.4, mas aún, M_ξ es completa con la métrica inducida, ver Nota 2.3.3. Por el [BCO, Teorema 5.5.2.] M_ξ tiene curvaturas principales constantes, de la Nota 3.1.8 M es órbita de una s-representación (irreducible), lo que prueba la primera parte del teorema. Sea $M = Kv$ donde K actúa sobre $\mathbb{R}^{n+\frac{n(n+1)}{2}}$ como una s-representación (irreducible y no-transitiva).

Se probará ahora usando la clasificación de espacios simétricos irreducibles que M es una subvariedad de Veronese; en el lema 3.2.13 se dará una prueba alternativa de este hecho evitando esta clasificación. Como M es órbita de una s-representación (irreducible), si $p \in M$ la isotropía (conexa) $(K_p)_\circ$ representada sobre el espacio normal, esto es la representación slice conexa coincide con el grupo de holonomía normal, para ver esto [BCO, Corolario 3.1.5 y Teorema 5.4.9.].

Otro hecho es que K_p vía la representación isotrópica actúa efectivamente sobre T_pM, sea $k \in K_p$ que se representa trivialmente sobre T_pM, entonces la isometría inducida por k es trivial sobre M, ver A; de lo que K actúa trivialmente sobre el espacio lineal generado por los vectores en M, esto es, $V = \operatorname{span}\{v : v \in M\}$, como K actúa irreduciblemente V es todo el espacio y $k = \mathrm{Id}$.

Por el Lema 3.2.6, el grupo de holonomía restringido $\Phi(p)$ es isomorfo a $SO(T_pM)$, de lo que la representación slice conexa de $(K_p)_\circ$ es isomorfa a $SO(T_pM)$, en particular $\dim((K_p)_\circ) \geq \frac{n(n+1)}{2} = \dim(SO(T_pM))$, como la acción de K_p es efectiva sobre T_pM, entonces $\dim((K_p)_\circ) = \frac{n(n+1)}{2} = \dim(SO(T_pM))$. Esto implica que M^n tiene curvatura constante pues la isotropía resulta igual a $SO(T_pM)$ en particular todo par de planos son isométricos y $K \approx SO(n+1)$, como M^n es una s-representación irreducible entonces $K \approx SO(n+1)$ es la isotropía de un espacio simétrico de dimensión $n + \frac{n(n+1)}{2} = (n+1) + \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \dim(SL(n+1)/SO(n+1))$. Pero de la clasificación de espacios simétricos irreducibles $SL(n+1)/SO(n+1)$ es el único, salvo dualidad, con isotropía $SO(n+1)$ y dimensión $n + \frac{n(n+1)}{2}$, $(n > 1)$ se tiene que K actúa como la representación isotrópica de este espacio simétrico; el cual es equivalente a la acción de $SO(n+1)$ sobre el espacio de matrices simétricas reales $(n+1) \times (n+1)$ de traza cero, como la dimensión de M es n, de la C.0.4 se tiene que:

$$M \cong \{gAg^{-1} : g \in SO(n+1)\} = V^n$$

donde A es una matriz simétrica $(n+1) \times (n+1)$ de traza cero con exactamente dos valores propios de multiplicidad 1 y n respectivamente, ver C. Entonces M es una variedad de Veronese. $\diamond$

Sea K actuando sobre $\mathbb{R}^N$ como una s-representación y sea (G, K) el par simétrico, simplemente conexo, semisimple; asociado con descomposición de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, Donde $\mathbb{R}^N \simeq \mathfrak{p}$. Sea $M = Kv$ una órbita no trivial. Entonces M es una subvariedad substancial la cual es irreducible si y solo si K actúa irreduciblemente. De la Nota 1.2.4 y el Teorema 2.1.12 se tiene que el espacio normal a v coincide con el conmutador a v, esto es:

$$\nu_v(M) = \{x \in \mathfrak{p} : [x, v] = 0\}$$

donde $[\cdot, \cdot]$ es el corchete de $\mathfrak{g}$. Como M es órbita de una s-representación del [BCO, teorema 5.4.9], el grupo de holonomía $\Phi(v)$ de M a v coincide con la representación del grupo de isotropía sobre $\nu_v(M)$, esto es, la representación slice.

La representación isotrópica de un espacio simétrico semisimple coincide con la de su dual B. Entonces, se puede asumir que el espacio simétrico es compacto. Sea (G, K) par simétrico de tipo compacto, simplemente conexo y sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la descomposición de Cartan asociada a dicho par. La representación isotrópica de K se puede identificar con la representación adjunta de K a $\mathfrak{p}$. La métrica euclídea sobre $\mathfrak{p}$ es $-B$, donde B es la forma de Killing de $\mathfrak{g}$, sea $v \in \mathfrak{p} - \{0\}$ y considérese la órbita $M = Kv \simeq K/K_v$ la cual es una subvariedad con curvaturas principales constantes. Tómese $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la restricción de $-B$ a $\mathfrak{k}$, entonces, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno $Ad(K)$-invariante y definido positivo sobre $\mathfrak{k}$. Se considera la descomposición reductiva $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_v \oplus \mathfrak{m}$, con $Lie(K_v) = \mathfrak{k}_v$ y $\mathfrak{m} = (\mathfrak{k}_v)^\perp$ con respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ restringido a $\mathfrak{m} \simeq T_{[e]}(K/K_v) = T_v(M)$ induce una métrica normal homogénea sobre M , la cual es en particular naturalmente reductiva, B, tal métrica es llamada la *métrica canónica normal homogénea* (mas brevemente la métrica canónica normal). En general esta métrica es diferente de la métrica inducida de la variedad euclídea. Entonces se tiene:

Proposición 3.2.10. *Sea K actuando sobre $\mathbb{R}^n$ como una s-representación irreducible y sea $M = Kv$, $v \neq 0$. Si la métrica canónica normal homogénea sobre M coincide con la métrica inducida, entonces M tiene segunda forma fundamental paralela.*

Demostración

Manteniendo la notación previa a la proposición, sea ∇^c la conexión canónica sobre M asociada a la descomposición real $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_v \oplus \mathfrak{m}$. Entonces la segunda forma fundamental α de M es paralela con respecto a la conexión $\bar{\nabla}^c = \nabla^c \oplus \nabla^\perp$.

Se tiene de [Ta] que la segunda forma fundamental es paralela con respecto a la conexión canónica, esto es $\bar{\nabla}^c \alpha = 0$. Sea $\bar{\nabla} = \nabla \oplus \nabla^\perp$, donde ∇ es la conexión de Levi-Civita sobre M inducida por el espacio ambiente la cual coincide, por hipótesis, con la métrica normal homogénea, entonces:

$\bar{\nabla}_x\alpha(y,z) = \alpha(D_xy,z) + \alpha(y,D_xz)$, donde $D = \nabla - \nabla^c$, se tiene que $D_xy = -D_yx$, ver [OR], de lo que:

$$\bar{\nabla}_x\alpha(x,x) = 2\alpha(D_xx,x) = 0$$

Por Codazzi $\bar{\nabla}_x\alpha(y,z)$ es simétrica en las tres variables de lo que $\bar{\nabla}\alpha = 0$ y M tiene segunda forma fundamental paralela. $\diamond$

Corolario 3.2.11. *Sea K que actúa sobre $\mathbb{R}^N$ como una s-representación y sea $M = Kv$, $v \neq 0$. Asumamos que K_v actúa irreduciblemente sobre $T_v(M)$. Entonces, M tiene segunda forma fundamental paralela.*

Lema 3.2.12. *Sean $M^n, \bar{M}^n \subset S^{N-1}$, subvariedades de la esfera con segunda forma fundamental paralela, o de manera equivalente, subvariedades simétricas extrínsecas [BCO, Teorema 3.7.3]. Asúmase también, que M es una subvariedad substancial del espacio euclídeo $\mathbb{R}^N$, y que existe un $p \in M \cap \bar{M}$ con $T_pM = T_p\bar{M}$ tal que las respectivas segundas formas fundamentales α y $\bar{\alpha}$ a p de M y $\bar{M}$ son proporcionales, esto es, $\bar{\alpha} = \lambda\alpha$, $\lambda \neq 0$, entonces $M = \bar{M}$ o $M = \sigma(\bar{M})$ donde σ es la transformación ortogonal de $\mathbb{R}^N$ tal que σ es la identidad sobre $\mathbb{R}p \oplus T_pM$ y menos la identidad sobre $(\mathbb{R}p \oplus T_pM)^\perp$.*

Demostración

Como M es simétrica, considérese $M = Kp$ donde K actúa como una s-representación irreducible, tenemos que el grupo de holonomía restringido a p del espacio fibrado $TM \oplus \nu(M)$ es la representación sobre $T_pM \oplus \nu_p(M)$ de la componente conexa del grupo de isotropía $(K_p)_\circ$ (aquí ν_pM es el espacio normal de M como subvariedad de la esfera). Esto se deduce del siguiente hecho bien conocido: Si X pertenece a la subálgebra de Cartan asociada al par simétrico (K, K_p) entonces $dl_{\exp(tX)}$ es el transporte paralelo asociado a la conexión de Levi-Civita cuando es restringido a T_pM a lo largo de la geodésica $\gamma(t) = \exp(tX)p$, y el transporte paralelo normal a lo largo de $\gamma(t)$ cuando se restringe a $\nu_p(M)$ (aquí l_k es definido como en la prueba de la proposición 3.2.7).

Por el teorema Ambrose-Singer [KN1], los endomorfismos generados por el tensor de curvatura toman valores en el álgebra de el grupo de holonomía, esto es $(R_{x,y}, R^\perp_{x,y}) \in \mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K_p) = \mathrm{Lie}((K_p)_\circ) \subset \mathfrak{so}(T_pM) \oplus \mathfrak{so}(\nu_p(M))$ donde R y $R^\perp$ son respectivamente el tensor de curvatura tangente y normal de M a p.

Sea R^S el tensor de curvatura de la esfera S^{N-1} a p restringido a T_pM, de la ecuación de Gauss,

$$R_{x,y} = T_{x,y} + R^S_{x,y}$$

donde $\langle T_{x,y}z, w\rangle = \langle\alpha(x,w), \alpha(y,z)\rangle - \langle\alpha(x,z), \alpha(y,w)\rangle$.

Para $\bar{M} = \bar{K}p$, se tienen objetos similares, $\bar{R}, \bar{R}^{\perp}, \bar{\mathfrak{l}}, \bar{T}$; de la anterior ecuación y como $\bar{\alpha} = \lambda\alpha$, $\lambda \neq 0$, se tiene que $\bar{T} = \lambda^2 T$, entonces,

$$\bar{R}_{x,y} = \lambda^2 T_{x,y} + R^S_{x,y} \quad (7)$$

Por la ecuación de Ricci se tiene que,

$$\bar{R}^{\perp}_{x,y} = \lambda^2 R^{\perp}_{x,y} \quad (8)$$

Note que para todo $X \in \mathfrak{l} \subset \mathfrak{so}(T_pM) \oplus \mathfrak{so}(\nu_p(M))$,

$$X.\alpha = 0 = X.(\lambda\alpha) = X.\bar{\alpha} \quad (9)$$

análogamente para $\bar{X} \in \bar{\mathfrak{l}}$, como $(R_{x,y}, R^{\perp}_{x,y}) \in \mathfrak{l}$ y $(\bar{R}_{x,y}, \bar{R}^{\perp}_{x,y}) \in \bar{\mathfrak{l}}$ de (7),(8) y (9) se tiene, si $\lambda \neq \pm 1$, que:

$$\begin{aligned}
(R^S_{x,y})\alpha &= (R_{x,y} - T_{x,y}, 0)\alpha \\
&= (R_{x,y}, 0)\alpha - (T_{x,y}, 0)\alpha \\
&= -(T_{x,y}, 0)\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(R^S_{x,y})\alpha &= (\bar{R}_{x,y} - \lambda^2 T_{x,y}, 0)\alpha \\
&= (\bar{R}_{x,y}, 0)\alpha - \lambda^2 (T_{x,y}, 0)\alpha \\
&= -\lambda^2 (T_{x,y}, 0)\alpha
\end{aligned}$$

Si $\lambda \neq \pm 1$, lo anterior es cierto si y solo si $(T_{x,y}, 0)\alpha = 0$, pues $\lambda \neq 0$, entonces $(R^S_{x,y})\alpha = 0$, análogamente $(\bar{R}^s_{x,y})\bar{\alpha} = 0$.

Como el espacio lineal generado por $\{R^S_{x,y} : x, y \in T_pM\}$ es $\mathfrak{so}(T_pM)$, se tiene que $\alpha(gx, gy) = \alpha(x, y)$ para todo $g \in SO(T_pM)$, de la formula de Gauss, $\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle \alpha(X, Y), \xi\rangle$ se obtiene que el operador de forma de M a p conmuta con todo elemento de $SO(T_pM)$, en otras palabras es múltiplo de la identidad; de lo que M es umbilical en p y como M es en particular homogéneo, entonces es umbilical en cualquier punto, de lo que es una esfera intrínseca; como M es substancial, se concluye que $M = S^{N-1}$; análogamente para $\bar{M}$, de lo que $M = \bar{M}$.

Si $\lambda = 1$, entonces M y $\bar{M}$ tienen la misma segunda forma fundamental a p. Como ambas son paralelas es bien conocido que $M = \bar{M}$.

Si $\lambda = -1$, entonces se reemplaza $\bar{M}$ por $\sigma(\bar{M})$ y las segundas formas fundamentales de M y $\bar{M}$ deben coincidir. De lo que, $M = \sigma(\bar{M})$.

Ver que si M y $\bar{M}$ son subvariedades de la esfera de radios diferentes entonces la segunda forma fundamental a p es proporcional, de lo que la condición de ser substancial es esencial para que se mantenga la igualdad. ⋄

Lema 3.2.13. *Sea* $M^n = K\nu \subset \mathbb{R}^{n+\frac{n(n+1)}{2}}$, *donde* K *actúa sobre* $\mathbb{R}^{n+\frac{n(n+1)}{2}}$ *como una s-representación* $(n \geq 2)$. *Asúmase que el grupo de holonomía normal restringido a* $\bar{\nu}_\nu(M) = (\mathbb{R})^\perp \cap \nu_\nu(M)$, *actúa irreduciblemente y es no transitivo sobre la esfera unitaria de* $\bar{\nu}_\nu(M)$. *Entonces:*

i) *La representación holonómica de* $\Phi(\nu)$ *sobre* $\bar{\nu}_\nu(M)$ *es equivalente a la representación isotrópica del espacio simétrico* $SL(n)/SO(n)$.

ii) M^n *es una subvariedad de Veronese.*

Demostración
La parte i) es consecuencia del Lema 3.2.6.

Como K actúa como una s-representación, entonces la imagen de la representación slice, del grupo de isotropía K_ν, coincide con el grupo de holonomía normal $\Phi(\nu)$. Pero del Lema 3.2.6, $\dim(\Phi(\nu)) = \dim(SO(n))$, entonces el grupo de isotropía K_ν tiene al menos $\dim(SO(n)) = \dim(SO(T_\nu M))$.

Observe que la representación isotrópica de K_ν sobre $T_\nu M$ es efectiva, de lo contrario M debe estar contenido en el subespacio propio que consiste de los vectores fijos por K_ν en $\mathbb{R}^{n+\frac{n(n+1)}{2}}$. Entonces $(K_\nu)_\circ = SO(T_\nu M)$, de lo que K_ν actúa irreduciblemente sobre $T_\nu M$. Por el Corolario 3.2.11 M tiene segunda forma fundamental paralela.

Sea V^n una subvariedad de Veronese de $\mathbb{R}^{n+\frac{n(n+1)}{2}}$, se puede asumir que $\nu \in V^n$ y que $T_\nu M = T_\nu V^n = \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+\frac{n(n+1)}{2}}$, por lo dicho previo al Lema 3.2.6, $\bar{A} : \{P\}^\perp \cap \nu_\nu(V^n) = \{\nu\}^\perp \cap \nu_\nu(M) \to Sim_\circ(T_\nu V^n) = Sim_\circ(T_\nu M)$ es una homotecia, la cual induce un isomorfismo del grupo de holonomía normal restringido $\bar{\Phi}(\nu)$ de V^n sobre $SO(n)$. Lo mismo ocurre para el operador A de M. Observe que si $\xi \in \{\nu\}^\perp \cap \nu_\nu(M)$ el operador de forma A_ξ pertenece a $Sim_\circ(T_\nu M)$, el espacio de endomorfismos simétricos con traza nula de $T_\nu M$. Entonces el operador de forma de traza nula $\tilde{A}$ y el operador de forma A de M a ν coinciden cuando se restringen a $\{\nu\}^\perp \cap \nu_\nu(M)$, de lo que $A : \{\nu\}^\perp \cap \nu_\nu(M) \to Sim_\circ(T_\nu M) = Sim_\circ(T_\nu V^n) = Sim_\circ(\mathbb{R}^n)$ es una homotecia la cual induce un isomorfismo del grupo de holonomía normal restringido $\Phi(\nu)$ de M sobre $SO(n)$. Entonces la aplicación $A^{-1} \circ \bar{A}$ es una homotecia del espacio $\{\nu\}^\perp \cap \nu_\nu(M)$, si β es la constante de homotecia entonces $h = \beta^{-1} A^{-1} \circ \bar{A}$ es una isometría lineal de $\{\nu\}^\perp \cap \nu_\nu(M)$. Se define g isometría lineal de $\mathbb{R}^{n+\frac{n(n+1)}{2}}$ como :

- $g(\nu) = \nu$
- $g|_{\{P\}^\perp \cap \nu_\nu(M)} = h^{-1}$
- $g|_{T_\nu M} = Id.$

Entonces V^n y $g(M)$ tienen segunda forma fundamental proporcional de lo que en virtud del lema 3.2.12 $V^n = g(M)$, en particular M es una subvariedad de Veronese. $\diamond$

De lo anterior se prueba la segunda parte del Teorema 3.2.9 sin usar resultados de clasificación.

3.3 prueba de la conjetura en dimensión 3

En esta sección probaremos la Conjetura 3.1.3, para dimensión 3, valiéndonos de algunos resultados de la la sección anterior y cambiando substancialmente otros. Empezamos esta sección con la siguiente nota.

Nota 3.3.1. Sea $X = G/K$ un espacio simétrico, simplemente conexo irreducible de tipo no compacto, con rango al menos 2, donde G es la componente conexa a la identidad del grupo de isometrías de X. Asumamos que la dimensión de X es por lo menos 5. Entonces, $X \simeq SL(3)/SO(3)$. Daremos una prueba de este hecho evitando resultados de clasificación.

Como el rango de X es mayor o igual que 2, la representación isotrópica de K sobre T_pX tiene una órbita (no principal) $M = K\nu$ ($p \in G$, con $G_p = K$) de dimensión 2. En efecto M no tiene dimensión 3, de lo contrario una K-órbita principal debe tener dimensión 4 y K debe actuar transitivamente sobre la esfera. La dimensión de M no puede ser 1 pues K actúa irreduciblemente sobre T_pX entonces K actúa efectivamente sobre una órbita no trivial. Si $\mathrm{dim}(M) = 1$, entonces $\mathrm{dim}(K) = 1$, como $\mathrm{dim}(X) > 2$, K no puede actuar irreduciblemente sobre T_pX, lo que es contradictorio, entonces $\mathrm{dim}(M) = 2$. La $\mathrm{dim}(K_\nu) = 1$ pues debe tener dimensión positiva, de lo contrario la acción es transitiva. Mas aún, como M no es una órbita principal, la imagen bajo la representación slice de K_ν no es trivial. Por la Nota 1.2.4 y el Teorema 2.1.12 el grupo de holonomía normal restringido $\Phi(p)$ de M a ν no es trivial. Entonces, $\Phi(p)$ debe actuar irreduciblemente sobre el espacio de dimensión 2, $\bar{\nu}_\nu(M) = (\mathbb{R}\nu)^\perp \cap \nu_\nu(M)$. La codimención de M es 3, entonces, por el Lema 3.2.13 M es una subvariedad de Veronese C. Se puede asumir que $\mathrm{Sim}_\circ(3) = T_pM$ y que $M = V^3$, entonces K y $SO(3)$ son subgrupos de Lie de $\tilde{K} = \{g \in SO(\mathrm{Sim}_\circ(3)) : gM = M\}$. Observe que $\tilde{K}$ actúa de manera no transitiva sobre la esfera de $\mathrm{Sim}_\circ(3)$ pues la codimensión de M es 3. Si R' y R son los tensores de curvatura a $p = [e]$ de X y $SL(3)/SO(3)$ respectivamente, entonces se tienen dos sistemas de holonomía irreducibles y no transitivos, $[\mathrm{Sim}_\circ(3), R', \tilde{K}]$ y $[\mathrm{Sim}_\circ(3), R, \tilde{K}]$. Por el teorema de Simons 1.2.6 son simétricos y por la Proposición 1.2.5, R' es múltiplo escalar de R. Lo que implica que el espacio simétrico X es homotético a $SL(3)/SO(3)$. $\diamond$

Lema 3.3.2. *Sea* $M^3 = Hp$ *una subvariedad homogénea de la esfera* S^{N-1} *de dimensión 3 la cual es substancial e irreducible (como subvariedad del espacio euclídeo* $\mathbb{R}^N$*). Asúmase que el grupo de holonomía normal de* M *es no-transitivo. Entonces si* M *no es de rango mayor o igual que 2, el grupo de holonomía normal (restringido)* $\Phi(p)$*, como subvariedad de la esfera, actúa irreduciblemente y* $N = 9$*, mas aún, el grupo de holonomía normal (restringido) actúa como la acción de* $SO(3)$ *por conjugación de matrices de traza cero y el operador de forma de traza nula* $\bar{A}$ *de* M *a* p *es* $SO(3)$*-equivariante.*

Demostración
Considérese M^3 como subvariedad del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$. Como M no es de rango mayor o igual que dos, por la Proposición 1.3.11 el grupo de holonomía normal (restringido)

$\Phi(p)$ actúa irreduciblemente sobre $\bar{\nu}_p(M)$ (el complemento ortogonal del vector posición p). Por el Corolario 3.1.2 el primer espacio normal como subvariedad del espacio euclídeo coincide con el espacio normal, entonces la codimensión $k = N - 3$ (en $\mathbb{R}^N$) está acotada $k \leq 6 = \frac{3(3+1)}{2}$. Por el teorema de holonomía normal del Teorema 1.2.3 y lo anterior se tiene que el grupo de holonomía normal restringido coincide con la representación isotrópica de un espacio simétrico irreducible de rango al menos 2 y dimensión a lo sumo 5. Por la nota 3.3.1 la representación de la holonomía normal es equivalente a la representación de $SL(3)/SO(3)$, por lo que la codimensión de M, en la esfera, es 5 y $N = 9$. Por el lema 3.2.6 $\bar{A}(\Phi(p)) = SO(T_pM)$ lo que implica la equivariancia. ⋄

Teorema 3.3.3. *Sea* $M^3 = Hp$ *una subvariedad homogénea de la esfera* S^{N-1} *de dimensión* 3*, la cual es substancial e irreducible (como subvariedad de* $\mathbb{R}^N$*). Asúmase que el grupo de holonomía normal de* M *es no-transitivo, entonces* M *es una órbita de una s-representación.*

Demostración

Del Lema 3.3.2 y la Nota 3.1.5 se tiene que el grupo de holonomía normal como subvariedad de la esfera es irreducible, no transitivo y $N = 9$, note que del Corolario 3.1.2 y la Nota 3.1.5 el primer espacio normal coincide con el espacio normal, la codimensión es maximal y la aplicación $\xi \to A_\xi$ es biyectiva; de lo que las hipótesis del Teorema 3.2.9 se mantienen y tal como en la prueba del citado teorema, esta se mantiene valida hasta (6), continuaremos entonces con la notación de dicha prueba, recordar que la única diferencia es que el valor propio $\tilde{\lambda}_2$ tiene multiplicidad 1. De lo que la condición de Dupin 3.2.8 es aplicable para la distribución E_1, mas no para E_2 el cual es para el caso de dimensión 1.

Observe que el tubo de holonomía M_ξ tiene dimensión 5, por supuesto tal como en la sección 2.3, $T_\eta(M_\xi) = T_pM \oplus T_\xi(\Phi\xi)$, por hipótesis $\dim(M) = 3$ y por el Lema 3.3.2 y la Nota 3.3.1 toda órbita focal del grupo de holonomía normal restringido, $\Phi(p) \approx SO(3)$, tiene dimensión 2 (y es isométrica a la subvariedad de Veronese V_2 la cual es el espacio proyectivo de dimensión 2).

Por el [BCO, Teorema 6.2.4, parte (2)], $H \subset SO(9)$ actuando (extrínsecamente) por isometrías sobre M_ξ. Más aun la proyección $\pi : M_\xi \to M$ es H-equivariente; esto es, $\pi(g\eta) = \psi(g)\pi(\eta)$ con $\eta \in M_\xi$, $g \in H$ y $\psi : H \to H$ homomorfismo; para el caso $\psi = i$.

Si $H(p + \xi) = M_\xi$, entonces M_ξ es una subvariedad substancial e irreducible del espacio euclídeo con rango mayor o igual que 2, del teorema del rango rígido M_ξ es órbita de una s-representación y como $M = (M_\xi)_{-\xi}$, M es órbita de una s-representación ver nota 3.1.8. Del lema 3.2.13 se tiene que M es una subvariedad de Veronese (esto puede ser probado del hecho de que existe un único, salvo dualidad, espacio simétrico irreducible de dimensión 5). De lo que se puede asumir que $H(p + \xi) \subsetneq M_\xi$. Sea $\mathfrak{h} = Lie(H)$. Consideremos el subespacio $\mathfrak{h}(p + \xi)$ de $T_{p+\xi}M_\xi$, este subespacio tiene dimensión al menos 3 pues $\dim(M) = 3$ y π es una submersión, esto es $d\pi(\mathfrak{h}(p + \xi)) = \mathfrak{h}p = T_pM$. Como el subespacio horizontal $\mathcal{H}_{(p+\xi)}$ de $T_{p+\xi}M_\xi$ tiene dimensión 3 y $\dim(T_{p+\xi}M_\xi) = 5$, entonces $\dim(\mathcal{H}_{(p+\xi)} \cap \mathfrak{h}(p + \xi)) \geq 1$.

Caso (1): $E_1(x) + (\mathcal{H}_x \cap \mathfrak{h}x) = \mathcal{H}_x$

Se puede asumir que $x = p + \xi$. Observe que si la igualdad de arriba se tiene para $(p + \xi)$, entonces se mantiene para todo q en una vecindad U de $(p + \xi)$ en M_ξ.

Usando la notación del Teorema 3.2.9, las funciones definidas por los valores propios del operador de forma $\tilde{A}_{\tilde{\xi}}$ a q (las cuales son diferenciables) son: $\tilde{\lambda}_1(q)$ de multiplicidad 2, $\tilde{\lambda}_2(q)$ de multiplicidad 1 y $\tilde{\lambda}_3(q) = -1$ de multiplicidad 2, lo cual es claro pues es asociada al espacio vertical $\mathcal{V}_q$ de dimensión 2, por la condición de Dupin 3.2.8 aplicada a E_1, pues $\dim(E_1) = 2$, y la equivalencia (5) en la prueba del Teorema 3.2.9 se tiene que:

$v(\tilde{\lambda}_1) = v(\tilde{\lambda}_2) = v(\tilde{\lambda}_3) = 0$, para todo $v \in E_1(q)$

o escrito de otro modo,

$E_1(q)(\tilde{\lambda}_1) = E_1(q)(\tilde{\lambda}_2) = E_1(q)(\tilde{\lambda}_3) = 0.$

Además si $X \in \mathfrak{h}$

$$(X.q)(\tilde{\lambda}_1) = (X.q)(\tilde{\lambda}_2) = (X.q)(\tilde{\lambda}_3) = 0$$

pues $\tilde{A}_{h.\tilde{\xi}(q)} = h\tilde{A}_{\tilde{\xi}(q)}h^{-1}$ para todo $h \in H$ ya que H esta contenido en las isometrías del espacio ambiente y el campo normal paralelo $\tilde{\xi}$ es H-invariante, que se sigue de como esta definido el campo y de que π es equivariante. Por diferenciación se obtiene lo deseado.

Por hipótesis para este caso se tiene que:

$$\mathcal{H}_q(\tilde{\lambda_1}) = \mathcal{H}_q(\tilde{\lambda_2}) = \mathcal{H}_q(\tilde{\lambda_3}) = 0 \quad (10)$$

para todo $q \in U$.

Como M es (extrínsecamente) homogénea, todos los grupos de holonomía locales, ver Nota 1.3.8, tienen la misma dimensión. Entonces el grupo de holonomía local para todo $x \in M$ coincide con el grupo de holonomía normal restringido $\Phi(x)$.

El transporte paralelo a lo largo de lazos "pequeños", en base a p produce una vecindad V del grupo de holonomía local ver [DO], el cual como se vio coincide con $\Phi(p)$ de tal forma que $p + \tau\xi \in U$; de esto en particular y de (10) se tiene que $\tilde{A}_{\tilde{\xi}(p+\tau\xi)}$ tiene los mismos valores propios $\tilde{\lambda}_1(p + \xi)$, $\tilde{\lambda}_2(p + \xi)$ y $\tilde{\lambda}_3(p + \xi) = -1$ de $\tilde{A}_{\tilde{\xi}(p+\xi)}$, para todo $\tau \in V$.

Como $\Phi(p)$ es conexo es fácil y estándar ver que $\tilde{A}_{\tilde{\xi}(p+\tau\xi)}$ tiene los mismos valores propios que $\tilde{A}_{\tilde{\xi}(p+\xi)}$ para $\tau \in \Phi(p)$, por lo que los valores propios de $\tilde{A}_{\tilde{\xi}}$ son constantes sobre $p + \Phi(p).\xi = \pi^{-1}(\{p\})$, como $Hp = M$ es homogénea H actúa transitivamente sobre M, entonces $H\pi^{-1}(\{p\}) = M_\xi$, al ser $\tilde{\xi}$, H-invariante se concluye que los valores propios de $\tilde{A}_{\tilde{\xi}}$ son constantes sobre M_ξ. Por supuesto $\tilde{\xi}$ es no-umbilical, pues $\tilde{A}_{\tilde{\xi}}$ tiene tres valores propios (constantes) distintos, entonces de [DO] (ver [BCO, Teorema 5.5.8]), M_ξ tiene curvaturas principales constantes.

Como $M = (M_\xi)_{-\tilde{\xi}}$ tiene curvaturas principales constantes por el Teorema 2.3.5 todo tubo de holonomía principal es isoparamétrico. Sea $\tilde{M}$ principal, como $\tilde{M}$ no es una hipersuperficie de la esfera, pues por hipótesis el grupo de holonomía normal en el espacio euclídeo es no-transitivo sobre el complemento ortogonal del vector posición, entonces por el teorema de Thorbergsson, Teorema 2.3.14, $\tilde{M}$ es órbita de una s-representación de lo que M es órbita de una s-representación y concluye la prueba para el caso (1).

Caso (2): $E_1(x) + (\mathcal{H}_x \cap \mathfrak{h}x) \subsetneq \mathcal{H}_x$ para todo $x \in M_\xi$.

La prueba del teorema se partirá en varios casos dependiendo de la dimensión de H. En principio como $\dim(M) = 3$ y H actúa transitivamente sobre M $\dim(H) \geq 3$, como la acción de H sobre M es efectiva pues M es substancial entonces $\dim(H) \leq 6$, de lo contrario si $h \in H$ y actúa trivialmente sobre M entonces éste actúa trivialmente sobre el espacio (afín) generado por M, el cual es $\mathbb{R}^9$. Pero la dimensión del grupo de isometrías de una variedad Riemanniana de dimensión n esta acotada por $\frac{n(n+1)}{2}$ (la dimensión de el grupo de isometrías de un espacio con curvatura constante n-dimensional), en nuestro caso $n = 3$ y $\dim(H) \leq 6$.

H no puede ser abeliano, en efecto si H es abeliano, como la dimensión del espacio ambiente es impar igual a 9, el subgrupo conexo $H \subset SO(9)$ debe fijar un vector v, sea $v \neq 0$, en tal caso es claro que toda órbita Hq esta contenida en el subespacio afín $q + \{v\}^\perp$ de lo que en particular $M = Hp$ no es substancial y se llega a contradicción.

Si $\dim(H) = 5$ entonces el grupo de isotropía H_p tiene dimensión 2, pues $\dim(H/H_p) = \dim(M) = 3$, luego H_p es abeliano, recordar que $H_p \subset SO(T_pM) \simeq SO(3)$ vía la representación isotrópica, pero $SO(3)$ tiene rango 1 por lo que no tiene ningún subgrupo abeliano de dimensión 2. Una contradicción, de lo que $\dim(H) \neq 5$, de lo que resta ver los casos para los que $\dim(H) = 6, 4, 3$.

(a) $\dim(H) = 6$. En este caso se tiene que $(H_p)_\circ = SO(3)$ pues $\dim(H_p) = 3$. Como $SO(3)$ es simple, la representación slice σ_p de $(H_p)_\circ$ a $\nu_p(M)$ debe ser trivial o la imagen tiene dimensión 3. En el primer caso se tendría que $A_\mu = A_{h\mu} = hA_\mu h^{-1}$ para todo $h \in (H_p)_\circ$, A_μ operador de forma arbitrario de M a p; de lo que A_μ es múltiplo de la identidad entonces M^3 sería una subvariedad umbilical de $S^8 \subset \mathbb{R}^9$ en particular no sería substancial y se llegaría a una contradicción.

Supóngase que la dimensión de la imagen de la representación slice es 3. Por el Corolario 3.1.7, $\sigma_p((H_p)_\circ) \subset \Phi(p)$, donde $\Phi(p)$ es el grupo de holonomía normal restringido de M^3 como subvariedad euclidea. Como $\dim(\Phi(p)) = 3$ se concluye que $\sigma_p((H_p)_\circ) = \Phi(p)$, entonces cualquier tubo de holonomía es una H-órbita. En particular si es principal, los cuales tienen espacio normal plano, pero los tubos de holonomía son subvariedades substancial e irreducibles del espacio euclídeo, con codimensión al menos 3, pues $\Phi(p)$ actúa sobre el espacio normal $\nu_p(M)$ de dimensión 6 con cohomogeneidad 3. Entonces, por el teorema de Thorbergsson, Teorema 2.3.14 cualquier tubo de holonomía es órbita de una s-representación de lo que M^3 es órbita de una s-representación, Nota 3.1.8, y del Lema 3.2.13 M^3 es una subvariedad de Veronese.

Algunos detalles que se usaran a continuación acerca de los grupos compactos de dimensión menor que 4 se pueden ver en el apéndice D.

(b) $\dim(H) = 4$. En este caso $\dim(H_p) = 1$, de nuevo esto es claro ya que $\dim(M) = \dim(H/H_p) = 3$, entonces como en (a) si la representación slice es trivial, todos los operadores de forma conmutan con $(H_p)_\circ \approx S^1$, una contradicción pues la familia de operadores de forma es $\mathrm{Sim}(T_pM)$.

Considérese entonces el caso en que la representación slice es no trivial, para esto se usarán los resultados de [O3] (ver [BCO, Teorema 6.2.7]) más específicamente la [O3, Proposición 2.4] usada para la prueba del teorema de holonomía de Simons de dicho articulo citada como: *Para una subvariedad euclidea M^n, irreducible, substancial y H-homogénea con $n \geq 2$, las proyecciones sobre el espacio normal $\nu_p(M)$ de los campos de Killing (Euclídeos) dados por los elementos de $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(H)$, pertenecen al álgebra de holonomía normal $\mathfrak{g}$.*

Para el caso $\dim(\mathfrak{h}) = 4$ y $\dim(\mathfrak{g}) = 3$ entonces debe existir $0 \neq X \in \mathfrak{h}$ tal que su proyección es trivial sobre el espacio normal, este X no puede estar en el álgebra isotrópica pues se asumió que la representación slice de $(H_p)_\circ \simeq S^1$ es no-trivial, esto implica que $0 \neq X.p \in T_pM$.

Considérese $\tilde{\xi}$ el campo normal paralelo H-invariante de M_ξ. Como sabemos $(M_\xi)_{-\tilde{\xi}} = M$ (M es una variedad focal paralela de M_ξ).

Como X se proyecta trivialmente sobre $\nu_p(M)$, $X.q \in \mathcal{H}_q$, para todo $q \in (p + \Phi(p)\xi) = (\pi^{-1}(\{p\}))_q \subset M_\xi$, de lo que $X.q \in \mathcal{H}_q \cap \mathfrak{h}q$; como $\dim(E_1(q)) = 2$ y $\dim(\mathcal{H}_q) = 3$ y por hipótesis(caso 2), $E_1(q) + (\mathcal{H}_q \cap \mathfrak{h}q) \subsetneq \mathcal{H}_q$, entonces $(\mathcal{H}_q \cap \mathfrak{h}q) \subseteq E_1(q)$ de lo que $X.q \in E_1(q)$ para todo $q \in (p + \Phi(p)\xi)$.

Considérese la curva $\gamma(t) = \exp(tX)p$ de M^3 con $\gamma'(0) = Xp \neq 0$. Sea $q \in (p + \Phi(p)\xi)$ y $\psi(t)$ el transporte paralelo normal de $(q-p) \in \nu_p(M)$ a lo largo de $\gamma(t)$. Como $\tilde{\xi}(q) = p - q$ entonces $\tilde{\xi}(\gamma(t) + \psi(t)) = \pi(\gamma(t) + \psi(t)) - \gamma(t) - \psi(t) = -\psi(t)$(ver que $M_\xi = M_{q-p}$).

Por la fórmula del tubo Lema 2.2.7 (en la notación se permutan los objetos, pues para el caso M es paralela focal a M_ξ).

$$A_{(q-p)} = \tilde{A}_{(q-p)}\big|_{\mathcal{H}}((\mathrm{Id} - \tilde{A}_{(q-p)})|_{\mathcal{H}})^{-1}$$

Se tiene que $E_1(q)$ es un espacio propio del operador $A_{(q-p)}$ de M, por otro lado $d\pi(E_1(q)) = (\mathrm{Id} - \tilde{A}_{\tilde{\xi}})(E_1(q)) \subset E_1(q)$, como $\tilde{\xi}$ es H-invariante y $\tilde{\xi}(q) = -(q-p)$,

$$\begin{aligned} d\pi(X.q) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\exp(tX)q + \tilde{\xi}(\exp(tX)q)) \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\exp(tX)q + (\exp(tX)(q-p))) \\ &= X.p \end{aligned}$$

por lo que $X.p$ es valor propio de todos los operadores de forma $A_{(q-p)}$ de M tales que $q \in (p + \Phi(p)\xi)$. Sin perder generalidad se puede asumir desde un comienzo que ξ es perpendicular al vector posición p; como $\Phi(p)$ actúa irreduciblemente sobre $\{p\}^\perp$ es claro que $\mathrm{span}\{\Phi(p)\xi\} = \{p\}^\perp$, de lo anterior y por linealidad del operador de forma $X.p$ es vector propio de todos los operadores de forma de M en p. Lo que es claramente una contradicción pues la familia de todos los operadores de forma en p es $\mathrm{Sim}(T_pM)$

(c) $\dim(H) = 3$. En este caso es excluido el caso en que H es abeliano por las observaciones anteriores, entonces H es simple con cubrimiento universal Spin(3). En este caso claramente la isotropia es finita, veremos que con la suposición para este caso (caso 2), se llega a una contradicción.

Note que M debe ser compacto. El grupo de holonomía $\tilde{\Phi(p)}$ también es compacto; en efecto la componente conexa a la identidad es $\Phi(p)$, el grupo de holonomía normal restringido que es compacto 1.2.3, $\tilde{\Phi(p)}$ esta contenido en el grupo compacto $N(\Phi(p))$, el normalizador de $\Phi(p)$ en $O(\nu_p(M))$. Note que $(N(\Phi(p)))_\circ = \Phi(p)$, pues $\Phi(p)$ actúa como una s-representación, ver [BCO, lema 6.2.2], entonces $\tilde{\Phi(p)}$ tiene un numero finito de componentes conexas, de igual forma $\tilde{\Phi(p)}.\xi$. Esto implica que M_ξ es compacto.

Como M esta contenido en una esfera, M_ξ esta contenido en una esfera. Si η es el vector posición de M_ξ, obviamente η es un campo normal paralelo umbilical pues $\tilde{A}_\eta = -\mathrm{Id}$, si se adiciona a $\tilde{\xi}$ un múltiplo constante de η se obtiene un nuevo campo normal paralelo donde el operador de forma tiene asociada la misma distribución como en $\tilde{A}_{\tilde{\xi}}$, si se toma el múltiplo constante suficientemente grande (y usando la compacidad de M_ξ) las tres funciones asociadas a los tres valores propios se pueden asumir positivas en todo punto, por esta construcción podemos asumir desde un comienzo que para $\tilde{\tilde{\xi}}$, $\tilde{\lambda}_1$ nunca se anula.

La aplicación *Cáustica* ρ de M_ξ en $\mathbb{R}^9$, definida como $q \to q + (\tilde{\lambda}_1(q))^{-1}\tilde{\xi}(q)$ tiene rango constante pues $\mathrm{Ker}(d\rho) = E_1$ de dimensión constante 2, por la condición de Dupin 3.2.8 $\tilde{\lambda}_1$ es constante a lo largo de toda variedad integral $Q_1(q)$ de E_1. Observar que $\tilde{\lambda}_2$ es constante a lo largo de $Q_1(q)$ por la equivalencia (5) en la prueba del teorema 3.2.9 y $\tilde{\lambda}_3$ es constante, en particular a lo largo de $Q_1(q)$.

Sea $\bar{M} = M_\xi/\mathcal{E}_1$, el cociente de M_ξ por la familia $\mathcal{E}_1$ de variedades integrales (maximales) de E_1 obtenido por la identificación de puntos contenidos en la misma variedad integral de la distribución, y sea $\bar{\pi} : M_\xi \to \bar{M}$ la proyección canónica. La distribución E_1 es H-invariante pues $\tilde{\xi}$ lo es, así la acción de H sobre M_ξ es proyectada a una acción sobre $\bar{M}$, de esta forma $\bar{\pi}$ es H-equivariante, del Lema 3.3.4 que se verá posterior a esta prueba se tiene que $\bar{M}$ es una subvariedad inmersa de $\mathbb{R}^9$ de dimensión 3 y compacta, vía la proyección $\bar{\rho}$ de ρ a el espacio cociente (compacto) $\bar{M}$.

Vea que ρ es H-equivariante pues $\tilde{\xi}$ lo es, entonces como $\tilde{\pi}$ es H-equivariante, la inmersión $\bar{\rho} : \bar{M} \to \mathbb{R}^9$ es H-equivariante.

Entonces, reescribiendo M_ξ tiene las siguientes fibraciones H-equivariantes.

$0 \to \Phi(p).\xi \to M_\xi \overset{\tilde{\pi}}{\to} \tilde{M} \to 0$ (fibración del tubo de holonomía)

$0 \to Q \to M_\xi \overset{\bar{\pi}}{\to} \bar{M} \to 0$ (fibración cáustica)

donde Q es una (arbitraria) variedad integral de E_1 y $\tilde{M}$ la variedad cociente obtenida de M_ξ sobre la componente conexa de las fibras de $\pi : M_\xi \to M$ (las cuales son órbitas del grupo de holonomía normal restringido $\Phi(p)$, $p \in M$). Nosotros tenemos que $\tilde{M}$ es un cubrimiento finito de M.

Ahora usaremos la fibración del tubo de holonomía y la fibración cáustica para llegar a contradicción para el caso (2) si $H \approx \text{Spin}(3)$. La prueba se seguirá por pasos.

i. sea $P \overset{\pi}{\to} N$ una fibración y supongamos que las fibras $\pi^{-1}(p)$ para $p \in N$ son conexas, sea $c : [0,1] \to N$ una curva cerrada en N, con $c(0) = c(1) = p$, sea $q \in \pi^{-1}(p)$ tómese $\tilde{c}$ el levantamiento horizontal de c en P con $\tilde{c}(0) = q$, esto es $\bar{\pi} \circ \tilde{c} = c$, ver [KN1, capitulo 2, sección 3]. Como las fibras en P son conexas, se puede tomar una curva $\tau : [0,1] \to \pi^{-1}(p) \subset P$ tal que $\tau(0) = q$ y $\tau(1) = \tilde{c}(1)$, considerese la curva $\bar{c} = \tilde{c} \cdot \tau$, esta es una curva cerrada en q con $\bar{\pi}(\bar{c})$ homotópica a c.

ii. En la fibración del tubo de holonomía las fibras tienen grupo fundamental finito pues son espacios proyectivos (reales) de dimensión 2, los cuales tienen grupo fundamental finito. Mas aún, el espacio base $\tilde{M}$ tiene grupo fundamental finito pues es una órbita con isotropía finita del grupo $\text{Spin}(3) \approx S^3$. Entonces, M_ξ tiene grupo fundamental finito.

iii. Finalmente considérese la fibración cáustica, por [II] M_ξ tiene grupo fundamental finito y las fibras de esta fibración son conexas, de lo que [I] aplica, esto es, para toda curva $c : [0,1] \to \bar{M}$, con $c(0) = c(1) = p \in \bar{M}$ y $q \in \bar{\pi}^{-1}(p)$ existe una curva $c' : [0,1] \to M_\xi$, con $c'(0) = c'(1) = q$ tal que $\bar{\pi}(c')$ es homotópica a c, como $\bar{\pi}$ envía clases de homotopía en clases de homotopía, c es arbitraría y M_ξ tiene grupo fundamental finito entonces $\bar{M}$ tiene grupo fundamental finito, claro a el punto q, sean $[c'_1], [c'_2], \ldots, [c'_k]$ las diferentes clases de homotopía, si c arbitraria como antes c' es homotópica a c'_i para algún $i = 1, \ldots, k$; sea A_i el subconjunto de curvas cerradas a p, tal que $c \in A_i$ si $c' \in [c'_i]$ entonces todas las curvas de A_i son homotópicas, pero $A_1 \cup \ldots \cup A_k$ unión finita, es la unión de todas las curvas cerradas a p, lo que implica que $\bar{M}$ tiene grupo fundamental finito.

Del Lema 3.3.5 el grupo fundamental de $\bar{M}$ no es finito, lo que contradice [III], esto implica que en el caso (2) no se puede tener que $H \approx \text{Spin}(3)$ lo que finaliza la prueba del teorema. ⋄

Lema 3.3.4. *(ver [DO, Proposición 2.4.]). Sea M una subvariedad inmersa y compacta de $\mathbb{R}^N$ la cual esta contenida en la esfera S^{N-1}. Sea ξ un campo normal paralelo a M tal que los valores propios del operador de forma A_ξ tienen multiplicidad constante sobre M. Sea $\lambda : M \to \mathbb{R}$ una función de valores propios de A_ξ la cual es asociada a la distribución propia (integrable) E que tiene dimensión constante al menos 2. Sea $\mathcal{E}$ la familia de variedades integrables (maximales) de E. Asúmase que la función λ nunca se anula, entonces:*

i). Toda variedad integral $Q \in \mathcal{E}$ es compacta.

ii). El espacio cociente $\bar{M}/\mathcal{E}$ es una variedad compacta y la proyección $\pi : M \to \bar{M}$ es una fibración (en particular, una submersión).

iii). La aplicación Caustica $\rho : M \to \mathbb{R}^N$, $\rho(q) = q + (\lambda(q))^{-1}\xi(q)$ proyecta una inmersión $\bar{\rho} : \bar{M} \to \mathbb{R}^N$, esto es, $\rho = \bar{\rho} \circ \pi$

Demostración
De la condición de Dupin se tiene que λ es constante a lo largo de toda variedad integral de E. Considerar la aplicación caustica ρ, como $\mathrm{Ker}(d\rho) = E$, entonces $d\rho$ tiene rango constante, por la forma local de una aplicación de rango constante, ver [Bo, Nota 4.2], y la compacidad de M se tiene que existe un cubrimiento abierto y finito $U_1, ..., U_d$; de M tal que para todo $i = 1, ..., d$; y $q, q' \in V_i$ se sigue que:

$\rho(q) = \rho(q')$ si y solo si q y q' están ambas en la misma variedad integral de $E|_{V_i}$.

Se sigue que toda variedad integral (maximal) Q de E debe ser cerrada y por tanto un subconjunto compacto de M. Mas aún, por la equivalencia anterior la foliación $\mathcal{E}$ es una foliación regular, en el sentido de Palais [P].

Para probar que el espacio cociente es una variedad se debe probar que el cociente es Hausdorff. Sea $E^{\perp}$ la distribución ortogonal con respecto a la métrica inducida por el espacio ambiente sobre M. Se define una nueva métrica $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sobre M cambiando la métrica inducida sobre la distribución $E^{\perp}$ en tal camino que ρ es localmente una submersión Riemanniana sobre su imagen. Sea:

- $\langle E, E^{\perp}\rangle = 0$
- $\langle\cdot,\cdot\rangle$ coincide con $(\cdot,\cdot)$ cuando se restringe a E.
- $d|_q\rho$ es isometría lineal para $(E^{\perp})_q$ sobre su imagen.

Tal métrica es (bundle-like) métrica en el sentido de Reinhart[Re], como M es compacta $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es una métrica Riemanniana completa, ver [KN1, Capítulo IV, Corolario 4.4] entonces por [Re, Corolario 3, Página 129] el espacio cociente $\bar{M}$ es Hausdorff y π es una fibración [DO, Proposición 2.4, Página 83] y entonces se tiene que ρ proyecta una inmersión $\bar{\rho} : \bar{M} \to \mathbb{R}^N$ y $\rho = \bar{\rho} \circ \pi$. $\diamond$

Lema 3.3.5. *Bajo la hipótesis del teorema 3.3.3 y la hipótesis del caso (2), en la prueba del mismo, asumiendo en adición que* $H \cong \mathrm{Spin}(3)$ *entonces:*

· *La acción de* H *sobre* $\bar{M}$ *tiene todas las órbitas de dimensión* 2.

· *el cubrimiento universal* $\tilde{M}$ *de* $\bar{M}$ *es un producto con un factor igual a una recta real; de lo que el grupo fundamental de* $\bar{M}$ *no es finito.*

Demostración
Como $\tilde{\xi}$ es H-invariante entonces cualquier distribución propia de $\tilde{A}_{\xi}$ es H-invariante, de lo que la acción de H sobre M_{ξ} es proyectada naturalmente sobre $\bar{M}$. Si $q \in M_{\xi}$ entonces el subespacio $\mathfrak{h}q \subset T_q M_{\xi}$ de dimensión 3 debe intersecar de manera no trivial al subespacio horizontal de dimensión 3, $\mathcal{H}_q$, ya que $\dim(M_{\xi}) = 5$. Como se asume la hipótesis del caso

2, $\{0\} \neq (\mathfrak{h}q \cap \mathcal{H}_q) \subsetneq E_1(q)$. Nótese $\bar{\pi}$ la proyección de M_ξ en $\bar{M}$. Como la acción de H es proyectada en $\bar{M}$ se puede considerar $H_{\bar{q}}$ el grupo de isotropía de H a el punto $\bar{q} = \bar{\pi}(q) \in \bar{M}$. Sea $\mathfrak{h}_{\bar{q}} = \mathrm{Lie}(H_{\bar{q}})$, entonces se tiene que

$$\mathfrak{h}_{\bar{q}} = \{X \in \mathfrak{h} : X.q' \in E_1(q')\}$$

para todo $q' \in (\bar{\pi})^{-1}(\bar{\pi}(\{q\}))$.

Si $\dim(\mathfrak{h}_{\bar{q}}) = 3$ entonces $\mathfrak{h}_{\bar{q}} = \mathfrak{h}$ de lo que H deja invariante la variedad integral de dimensión 2, $S_1(q)$ de E_1 a q. En particular H_q tiene dimensión positiva, pero $H_q \subset H_{\pi(q)}$ donde $H_{\pi(q)}$ es el grupo de isotropía de H al punto $\pi(q) \in M^3 = Hp$, lo que es contradictorio pues $H \cong \mathrm{Spin}(3)$ en particular $\dim(H) = 3$ y $\dim(M) = 3$.

Observe que $\dim(\mathfrak{h}_{\bar{q}}) \neq 2$ de lo contrario $\mathfrak{h}_{\bar{q}}$ es un ideal de $\mathfrak{h}$, pero $\mathfrak{h}$ es simple y se llega a contradicción. Aquí se usa que una subálgebra de Lie de codimensión 1 en una algebra de Lie que admite una métrica bi-invariante debe ser un ideal.

Entonces tenemos que $\dim(\mathfrak{h}_{\bar{q}}) = 1$ para todo $q \in M_\xi$, lo que implica que todas las H-órbitas en $\bar{M}$ tienen dimensión 2, lo que prueba i).

Se define ahora una métrica auxiliar sobre $\bar{M}$, que varia a lo largo de las H-órbitas la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ inducida por la inmersión $\bar{\rho}$.

Como la H-órbitas en $\bar{M}$ tienen dimensión 2, H actúa con cohomogeneidad 1 sobre $\bar{M}$, entonces [BCO, Proposición 3.2.9], H actúa de manera localmente polar. En particular la distribución 1-dimensional $\mathcal{D}$ sobre $\bar{M}$ perpendicular a las H-órbitas es autoparalela. Si $\bar{q} \in \bar{M}$ entonces sobre la órbita $H\bar{q}$ se asocia la métrica normal homogénea, es decir, la métrica asociada a la descomposición reductiva B,

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\bar{q}} \oplus (\mathfrak{h}_{\bar{q}})^{\perp}$$

donde el complemento ortogonal es calculado con respecto a la métrica bi-invariante sobre $\mathfrak{h}$.

Se define $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ como sigue:

- $\langle \cdot, \cdot \rangle'|_{\mathcal{D}} = \langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathcal{D}}$

- $\langle \mathcal{U}, \mathcal{D} \rangle' = 0$, donde $\mathcal{U}$ es la distribución dada por el espacio tangente de las H-órbitas sobre $\bar{M}$

- $\langle \cdot, \cdot \rangle'|_{\mathcal{U}_{\bar{q}}}$, coincide con la métrica normal homogénea de $H_{\bar{q}}$ para todo $\bar{q}$ sobre $\bar{M}$.

Como $\bar{M}$ es compacta Lema 3.3.4, $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ es completa [KN1, Capítulo IV, Corolario 4.4]. De igual manera se nota por $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ el levantamiento de esta métrica al cubrimiento universal $\tilde{M}$ de $\bar{M}$. De lo que $(\tilde{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle')$ es una variedad Riemanniana completa. Sean $\tilde{\mathcal{U}}$ y $\tilde{\mathcal{D}}$ los levantamientos a $\tilde{M}$ de las respectivas distribuciones $\mathcal{U}$ y $\mathcal{D}$; levántese la H-acción sobre $\bar{M}$ a $\tilde{M}$. Como $\tilde{M}$ es simplemente conexo, la distribución 1-dimensional $\tilde{\mathcal{D}}$ es paralelizable; esto es, existe un campo no nulo $\tilde{X}$ de $\tilde{M}$ tal que $\mathbb{R}.\tilde{X} = \tilde{D}$. Considérese $\tilde{Z} = \frac{\tilde{X}}{\|\tilde{X}\|}$ donde $\| \cdot \|$ es la norma con respecto a $\langle\cdot,\cdot\rangle'$. El flujo ϕ_t asociado a $\tilde{Z}$ es una isometría a todo t, de lo que $\tilde{Z}$ es un campo de Killing A. Entonces $\langle\nabla.\tilde{Z},\cdot\rangle'$ es antisimétrica en particular $\langle\nabla_\nu\tilde{Z},\nu\rangle' = 0$ (ecuación de Killing A), para todo vector ν tangente en $\tilde{\mathcal{U}}$. Pero si $\tilde{A}_{\tilde{Z}}$ es el operador de forma de la órbita Hx, $x \in \tilde{M}$, de la formula de Weingarden $\langle\tilde{A}_{\tilde{Z}}\nu,\nu\rangle' = \langle\nabla_\nu\tilde{Z},\nu\rangle' = 0$. Entonces $\tilde{U} = \tilde{D}^\perp$ es una distribución autoparalela, pero dos distribuciones autoparalelas complementarias ortogonalmente deben ser paralelas y por el teorema de descomposición de De Rham [KN1, Capítulo IV, Teorema 6.2], $\tilde{M}$ es un producto de espacios simplemente conexos; como una de las distribuciones es de dimensión 1, entonces $\tilde{M} = \mathbb{R} \times M'$, en particular $\tilde{M}$ no es compacto pero $\bar{M}$ si lo es, entonces el grupo fundamental no puede ser finito. ⋄

Para finalizar, muchos de los resultados de esta sección pertenecen al trabajo de tesis, pero resultaron como postulados de empalme para el verdadero objetivo de este trabajo que se simplifica en los siguientes tres enunciados concluidos anteriormente:

Proposición A. *Sea M^n una subvariedad del espacio euclídeo. Asúmase que para todo punto de M el grupo de holonomía normal local y el grupo de holonomía normal restringido coinciden (o, equivalentemente, la dimensión de los grupos de holonomía normal locales es constante sobre M, en particular para variedades homogéneas 1.3.8). Sea $p \in M$ y k el numero de de factores irreducibles (no-triviales) de la representación del grupo de holonomía normal restringido $\Phi(p)$ sobre $\nu_p(M)$. Entonces $k \leq [\frac{n}{2}]$, donde $[\frac{n}{2}]$ es la parte entera de $\frac{n}{2}$.*

Teorema B. *Sea $M^n \subset S^{n-1+\frac{n(n+1)}{2}}$ una subvariedad substancial, irreducible y homogénea; con $n \geq 3$. Entonces, M es una subvariedad de Veronese si y solo si el grupo de holonomía normal restringido actúa de manera irreducible y no-transitiva sobre el espacio normal.*

Teorema C. *Una subvariedad M^3 substancial, irreducible y homogénea de la esfera, de dimensión 3, tal que el grupo de holonomía normal es no-transitivo debe ser órbita de una s-representación, mas aún una subvariedad de Veronese o una órbita principal de la representación isotrópica de* $SL(3)/SO(3)$.

La Proposición A es la Proposición 1.3.11.

el Teorema B se sigue de la Nota 3.1.4, el Teorema 3.2.9 y el Teorema 3.3.3.

El Teorema C se sigue del Teorema 3.3.3, el Lema 3.2.13 y la Nota 3.1.1.

3.4 EXTENSIÓN DEL PROBLEMA PARA SUBVARIEDADES MÍNIMAS

Una subvariedad Riemanniana M de una variedad Riemanniana arbitraria es llamada *subvariedad mínima* si el vector de curvatura media se anula a cada punto, o en otras palabras, diremos que M es mínima si para todo $p \in M$ y todo $\xi \in \nu_p(M)$ se tiene que la $\mathrm{Traza}(A_\xi) = 0$. En particular no existen subvariedades mínimas del espacio euclídeo que no sean compactas [KN2, Capitulo VII, sección 5]. El propósito de esta sección es extender el Teorema B de la sección anterior para subvariedades mínimas sin asumir la hipótesis de homogeneidad. Este es de hecho el Teorema D citado en la introducción.

Teorema 3.4.1. *Sea M^n, $n \geq 3$, una subvariedad completa, substancial e irreducible (inmersa) de $S^{n-1+\frac{n(n+1)}{2}}$. Entonces, M^n es (salvo cubrimiento) una subvariedad de Veronese si y solamente si es* *una subvariedad mínima y el grupo de holonomía normal restringido $\Phi(q)$ actúa irreducible y no-transitivamente.*

Demostración Sea $p \in M$ tal que para el tensor de curvatura normal adaptado $\mathfrak{R}^{\perp}(p) \neq 0$ o de manera equivalente que $R^{\perp}(p) \neq 0$. Considérense los sistemas de holonomía irreducibles y no-transitivos $[\bar{\nu}_p, \mathfrak{R}^{\perp}(p), \Phi(p)]$ y $[\mathrm{Sim}_\circ(T_pM), R, SO(T_pM)]$. De la Proposición 3.2.5, la ecuación del tensor adaptado 1.3 y como M es mínima; si A^p denota el operador de forma a p entonces $A^p : \bar{\nu}_p(M) \to \mathrm{Sim}_\circ(T_pM)$ es una homotecia y $A^p\Phi(p)(A^p)^{-1} = SO(T_pM)$.

Esto implica, que si $\phi \in \Phi(p)$, los autovalores de A^p_η y $A^p_{\phi(\eta)}$ son los mismos.

Sea U una vecindad contráctil (en particular simplemente conexa) de $p \in M$ tal que $\mathfrak{R}^{\perp}$ no se anula sobre U, sea $p' \in U$ y $\gamma : [0,1] \to U$ una curva diferenciable de p a p' y τ_t el transporte normal paralelo a lo largo de $\gamma_{[0,t]}$. Se sabe que $\tau_t\Phi(p)(\tau_t)^{-1} = \Phi(\gamma(t))$. Tómese $\xi \in \bar{\nu}_p(M)$ de tal forma que $A^p_\xi \in \mathrm{Sim}_\circ(T_pM)$ tiene exactamente dos autovalores, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ de multiplicidad 2 y $\lambda_2 = \frac{-1}{n-2}$ de multiplicidad $(n-2)$.

De nuevo, por lo anterior $A^{\gamma(t)} : \bar{\nu}_{\gamma(t)} \to \mathrm{Sim}(T_{\gamma(t)}M)$ aplica $\Phi(\gamma(t))$ en $SO(T_{\gamma(t)}M)$. Entonces, la homotecia:

$$g_t := A^{\gamma(t)} \circ \tau_t \circ (A^p)^{-1} : \mathrm{Sim}_\circ(T_pM) \to \mathrm{Sim}_\circ(T_{\gamma(t)}M)$$

aplica el grupo $SO(T_pM)$ en $SO(T_\gamma M)$. De lo que g_t aplica el grupo de isotropía $SO(T_pM)_{A^p_\xi} \simeq S(O(2) \times O(n-2))$ en el subgrupo de isotropía $SO(T_{\gamma(t)}M)_{A^{\gamma(t)}_{\tau_t(\xi)}}$. Esto implica que $A^{\gamma(t)}_{\tau_t(\xi)}$ tiene dos autovalores, sean λ^t_1 de multiplicidad 2 y λ^t_2 de multiplicidad $n-2$, como $A^{\gamma(t)}_{\tau_t(\xi)} \in \mathrm{Sim}_\circ(T_{\gamma(t)}M)$, entonces, $\lambda^t_2 = -\frac{2}{n-2}\lambda^t_1$.

De lo que, los dos autovalores de $A^{\gamma(t)}_{\tau_t(\xi)}$ son constantes salvo multiplicación por $a(t) = \lambda^t_1 \neq 0$. Ver que si γ es una curva cerrada a p, entonces $\tau_1 \in \Phi$. Como se vio anteriormente esto implica que los autovalores de A^p_ξ y los de $A^p_{\tau_1(\xi)}$ son los mismos, por lo que $a(t)$ depende solamente de $\gamma(t)$. Entonces existe una función diferenciable no-nula $f : U \to \mathbb{R}$ tal que $a(t) = f(\gamma(t))$. Ver que $f(p) = a(0)$. Manteniendo la notación como en la prueba del Teorema 3.2.9, prueba que se modificara en lo que sigue, sea U_ξ el respectivo tubo de holonomía como en la prueba citada. Se tiene el campo normal paralelo $\tilde{\xi}$ de U_ξ. Los autovalores del operador de forma $\tilde{A}_{\tilde{\xi}}$ a $q \in U_\xi$ están dados por :

$$\tilde{\lambda_1}(q) = \frac{f(\pi(q))}{1 - f(\pi(q))}$$

asociado a la distribución horizontal E_1 de dimensión 2.

$$\tilde{\lambda_2}(q) = \frac{\frac{-f(\pi(q))}{n-2}}{1 + \frac{f(\pi(q))}{n-2}}$$

asociado a la distribución horizontal E_2 de dimensión $n-2$.

Y el tercer autovalor (constante) de $\tilde{A}_{\tilde{\xi}}$, $\tilde{\lambda}_3 = -1$, asociado a la distribución vertical $\mathcal{V}$, tangente a las órbitas normales. Por la condición de Dupin 3.2.8; $d(\tilde{\lambda_1})(E_1) = 0$, lo que implica que :

$$d(f \circ \pi)(E_1) = 0 \quad (*)$$

.

Recordar que si $n > 3$, lo mismo es válido para la distribución E_2; pero no es así en el caso en que $n = 3$. Por lo que aquí no asumiremos este hecho, con el fin de hacer una prueba conjunta.

Por la fórmula del tubo, como en la prueba del Teorema 3.3.3, caso (2)(b); $d\pi(E_1(q)) = E_1(q)$, como subespacio del espacio ambiente. Más aún, $E_1(q)$ es un autoespacio de $A_{q-\pi(q)} = A_{\tilde{\xi}(q)}$, donde A es el operador de forma de M (quitando el índice superior $\pi(q)$ de A).

Sea $q \in U_{\xi}$ con $\pi(q) = p$ y sea $\bar{\mathcal{V}}$ el subespacio de T_pM el cual es generado por $E_1(q')$, con $q' \in \Phi(p)q = \pi^{-1}(\{p\})$.

Si $\bar{\mathcal{V}} = T_pM$, entonces de (*), $df(T_pM) = \{0\}$. Si $\bar{\mathcal{V}}$ esta contenido propiamente en T_pM, sea $0 \neq \nu \in \bar{\mathcal{V}}^{\perp}$, se llegará a una contradicción para este caso. En efecto, el operador de forma de $A_{q'-p}$ tiene solo dos autovalores, como ν es perpendicular al auto espacio $E_1(q')$ de $A_{q'-p}$, entonces ν es un autovector del operador de forma, para cada $q' \in \Phi(p)q$. Observe que el espacio lineal generado por $\Phi(p)q$ es $\bar{\nu}_p(M)$, como $q' \neq 0$ y $\Phi(p)$ actúa irreduciblemente sobre el espacio normal. Entonces ν es un autovector común para todos los operadores de forma A_η, $\eta \in \nu_p(M)$. Pero $A : \bar{\nu}_p(M) \to \mathrm{Sim}_\circ(T_pM)$ es un isomorfismo, lo cual es una contradicción. Por lo que $df(T_pM) = \{0\}$, y lo mismo es válido para todo $p' \in U$, de lo que $f = f(p) = \frac{1}{2}$ es constante sobre U.

Entonces, los autovalores $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3$ son constantes sobre U_ξ, de lo que $\tilde{\xi}$ es un campo normal paralelo isoparamétrico (no-umbilical) de U_ξ. Del [BCO, teorema 5.5.2], U_ξ y en tanto U tienen curvaturas principales constantes, probado que U_ξ es irreducible localmente y substancial alrededor de algún punto $q \in \pi^{-1}(\{p\})$. Note que el grupo de holonomía normal local a p coincide con el grupo de holonomía normal; en efecto, el sistema de holonomía $[\bar{\nu}_p(M)], \mathfrak{R}^{\perp}(p), \Phi(p)]$ es irreducible y no-transitivo, por el teorema de Simons 1.2.6, éste es simétrico. Mas aún, $\mathrm{Lie}(\Phi(p))$ es generado linealmente por los endomorfismos $\mathfrak{R}^{\perp}_{\xi,\eta}(p)$. Lo cual implica que el grupo de holonomía normal local a p coincide con el grupo de holonomía normal restringido $\Phi(p)$. Entonces, el rango local de M, como subvariedad del espacio euclídeo es 1, de lo que M es irreducible localmente y substancial alrededor de p y entonces U_ξ es substancial e irreducible alrededor de cada punto $q \in \pi^{-1}(\{p\})$.

Entonces U es una subvariedad con curvaturas principales constantes. Como el grupo de holonomía normal de M es no-transitivo sobre la esfera del espacio normal, cada tubo de holonomía principal, el cual es isoparamétrico, tiene codimensión al menos 3 en el espacio euclídeo, del teorema de Thorbergsson 2.3.14 U es una órbita de una s-representación.

Entonces, $\|\mathfrak{R}^{\perp}\|$ es constante sobre U, de lo que $\|\mathfrak{R}^{\perp}\|$ es constante sobre Ω, la componente conexa del subconjunto abierto $\{p \in M : \mathfrak{R}^{\perp}(p) \neq 0\}$. Pero si $p' \in M$ es un punto limite de Ω, por continuidad $\mathfrak{R}^{\perp}(p') \neq 0$. Esto implica que Ω debe contener a p'. Lo que prueba que el abierto Ω es también cerrado en M. Entonces M tiene curvaturas principales constantes, en particular su imagen bajo la inmersión isométrica, es una subvariedad embedding con curvaturas principales constantes. Mas aún, por Thorbergsson es una órbita de una s-representación irreducible . Del Lema 3.2.13 la imagen de M es una subvariedad de Veronese.

El recíproco es válido por la nota C.0.4 i) y ii). $\diamond$

Como se mencionó en la Introducción, la hipótesis de homogeneidad o de ser mínima no pueden quitarse, pues si se aplica un difeomorfismo conforme de la esfera la holonomía normal se conserva pero la subvariedad deja de ser mínima (y por consiguiente no puede ser una subvariedad Riemanniana de Veronese).

APÉNDICE

A

GRUPO DE ISOMETRÍAS Y CAMPOS DE KILLING

Sea M variedad Riemanniana, sea $f : M \to M$ un difeomorfismo, este es llamado *isometría* si $\langle f_*X, f_*Y\rangle = \langle X, Y\rangle$, para todo $X, Y \in T_pM$, $p \in M$ donde f_* es la diferencial de f a p, si M es conexo y $f : M \to M$ función continua, sobreyectiva, entonces, ésta es isometría si y solo si $d(f(p), f(q)) = d(p, q)$, para todo $p, q \in T_pM$, para M conexo. Las isometrías están completamente determinadas por su valor y su diferencial en un punto cualquiera, esto es , si g, f isometrías de M variedad Riemanniana, tales que para algún $p \in M$, $g(p) = f(p)$ y $g_* |_p = f_* |_p$, entonces $f = g$. $f : M \to M$ se dice que es una *isometría local* si para cada $p \in M$ existen vecindades abiertas U a p y V a $f(p)$ tal que f es una isometría entre estas vecindades.

El conjunto de isometrías de una variedad Riemanniana forma un grupo, notado como $I(M)$ y es llamado el *grupo de isometrías* de M, dotado con la topología compacto-abierta, este resulta un grupo de Lie [B] que actúa sobre M como grupo de transformaciones, se denotará $I^*(M)$ la componente conexa a la identidad.

Sea X un campo en M, la variedad no necesariamente Riemanniana, entonces, siempre existe para cada m en M una vecindad abierta U de p, un intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$, y una aplicación suave $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times U \to M$, tal que $\varphi_m : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ es la única curva integral de X a m, tal que $\varphi(0, m) = m$, aquí $\varphi_m = \varphi(\cdot, m)$ [W, Capítulo 1], usualmente se notará también $\varphi_t = \varphi(t, \cdot)$, siempre que no genere confusión. Las letras t, s supondrán parámetros reales, si M es completa entonces el intervalo es todo $\mathbb{R}$, φ es llamado el flujo de M. Nos referimos al conjunto de todas las φ_t como el *grupo monoparamétrico local* de X, por supuesto si M es completa éste forma un grupo de transformaciones, llamado el *grupo monoparamérico* de X.

Con la notación anterior X se dice *campo de Killing* si φ_t es una isometría para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, a los campos de Killing se les suele llamar *isomtrías infinitesimales*, recíprocamente si se tiene un grupo monoparamétrico de transformaciones φ_t que son isometrías sobre M, entonces éstas definen un campo de Killing X sobre M dado por la relación $X_p = \frac{d}{dt} |_{t=0} \varphi_t(p)$. La proposición que sigue da una caracterización más precisa de estos objetos.

Proposición A.0.2. ***Proposición.*** *[KN1, Capítulo 6]. Las siguientes afirmaciones son equivalentes sobre M variedad Riemanniana.*

i. X *campo de Killing.*

ii. *la derivada de Lie en M con respecto a X es nula.*

iii. $\langle \nabla_Y X, Z\rangle + \langle \nabla_Z X, Y\rangle = 0$, *para todo $X, Y \in \mathfrak{X}$ (ecuación de Killing).*

El conjunto de isometrías infinitesimales notado por $i(M)$, forma un álgebra de Lie con el corchete usual de campos, esto se obtiene inmediatamente de ii, puesto que $L_{[X,Y]} =$

$L_X L_Y - L_Y L_X = 0$, con L la derivada de Lie, con lo que $[X, Y] \in i(M)$; un importante resultado respecto a la dimensión de esta álgebra es el siguiente. Si M^n variedad Riemanniana conexa, entonces $\dim(i(M)) \leq \frac{n(n+1)}{2}$, y si $\dim(i(M)) = \frac{n(n+1)}{2}$, entonces M tiene curvatura constante [KN1, Capítulo 6].

Los campos de Killing están completamente determinados por su valor y por la derivada covariante a cada punto, en particular, si X es un campo de Killing tal que $X_p = 0$ y $(\nabla X)_p = 0$ para algún p, entonces éste es nulo en todo M.

Tómese $\overline{TM}$ el conjunto de los vectores tangentes para los cuales, $\gamma_X(1)$ esta definido, $\overline{TM} \subseteq TM$, si M completa de lo anterior $\overline{TM} = TM$, defínase la aplicación:

$$\exp : \overline{TM} \to M, X \to \gamma_X(1).$$

Se llamará la *exponencial*, para cada $p \in M$ se denota la restricción a $\overline{TM} \cap T_pM$ por $\exp_p$, esta aplicación resulta un difeomorfismo de alguna vecindad abierta de $0 \in T_pM$ a alguna vecindad abierta de $p \in M$.

Sea $e_1, ..., e_n$ una base ortonormal en T_pM, la aplicación $(x_1, ..., x_m) \to \exp_p(\sum_{i=1}^m x_i e_i)$ define coordenadas locales de M en alguna vecindad a p, estas coordenadas son llamadas *coordenadas normales*.

Si M tiene un número finito de componentes conexas entonces $\mathrm{Lie}(I(M)) \simeq i(M)$, la identificación es la siguiente. Sea $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(I(M))$ si $X \in \mathfrak{g}$, entonces se define X^* sobre M por $X^*_p = \frac{d}{dt}\left.\right|_{t=0} \exp(tX)(p)$, $p \in M$ que satisface $[X, Y]^* = -[X^*, Y^*]$, de lo que definiendo el algebra $\mathfrak{g}$ con vectores invariantes a derecha en vez de vectores invariantes a izquierda, se tiene que $X \to X^*$ es un isomorfismo de álgebras de Lie $\mathfrak{g} \to (M)$.

B

CONCEPTOS BÁSICOS SOBRE VARIEDADES HOMOGÉNEAS Y ESPACIOS SIMÉTRICOS

Sea G un grupo de Lie y K un subgrupo cerrado de G. Se denota G/K el conjunto de clases laterales de K en G, $G/K = \{gK \mid g \in G\}$, y sea π la proyección canoníca $\pi : G \to G/K$, $g \to gK$.

G/K es dotado con la topología relativa a π, esto es, la que hace a π continua, como K es cerrado en G, G/K es Hausdorff y existe una única estructura diferenciable que hace a π una aplicación diferenciable, si K es un subgrupo normal de G entonces G/K es grupo de Lie con la multiplicación usual de clases laterales.

Sea M una variedad arbitraria, G un grupo de Lie y $\eta : G \times M \to M$ una acción suave a izquierda, la acción es llamada *efectiva*, si e es el único elemento de G para el cual η_e es la identidad de M, donde e es la identidad de G. La acción es llamada *transitiva* si para cualesquiera m, n en M existen un σ en G tal que $\eta_\sigma(m) = n$, sea $m \in M$, $G_m = \{\sigma \in G \mid \eta_\sigma(m) = m\}$, es llamado el *grupo de isotropía* a m, que resulta un subgrupo cerrado de G, la acción de η restringida a G_m, da una acción de G_m sobre M, con punto fijo m y se tiene la representación $\alpha : G_m \to Aut(T_m M)$ donde $\alpha(\sigma) = d\eta_\sigma \mid T_m M$.

El grupo $\alpha(G_m)$ de transformaciones lineales de $T_m M$ es llamado el grupo de *isotropía lineal* a m y α la *representación isotrópica*.

Volviendo al caso inicial, si K es un subgrupo cerrado de G entonces la acción $G \times G/K \to G/K$, $(g_1, g_2 K) \to (g_1 g_2)K$, es una acción transitiva de G sobre G/K cuya estructura esta caracterizada por las propiedades de la acción. El recíproco es valido y está establecido en el siguiente teorema.

Teorema B.0.3. ***Teorema*** *[W]. Sea* $\eta : G \times M \to M$ *una acción suave de* G *sobre* M*;* M *variedad, sea* $m \in M$ *entonces la aplicación* $\beta : G/G_m \to M$ *dada por* $\beta(\sigma G_m) = \eta_\sigma(m_0)$ *es un difeomorfismo.*

En este sentido siempre se identifica a M con el cociente G/G_p, si M es una variedad y G grupo de Lie que actúa transitivamente sobre M; se dice que M es un *espacio homogéneo* o mas precisamente un G-*espacio homogéneo*. Si M es un G-espacio conexo, entonces G^* también actúa transitivamente sobre M.

Sea $M = G/K$ un G-espacio homogéneo; sean $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$, las respectivas álgebras de lie de G y K y sea $\mathfrak{m}$ el complemento ortogonal de $\mathfrak{k}$ en $\mathfrak{g}$, de lo que en particular $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ y se tiene un isomorfismo de $\mathfrak{m}$ en $T_0 M$ dado por $\pi_{*e} |_{\mathfrak{m}} : \mathfrak{m} \to T_0 M$ donde $\pi : G \to G/K$ es la proyección canónica, π_{*e} es la diferencial de π a e, con e la identidad de G, de lo que el tangente de M a 0 se puede identificar con elementos del algebra de lie $\mathfrak{g}$.

Sea $Ad : G \to GL(\mathfrak{g})$ la representación adjunta de G, esto es, $g \to I_{g*e}$ donde I_{g*e} denota la diferencial de I_g a e con I_g el automorfismo interno, esto es, $I_g(\tau) = g\tau g^{-1}$. Entonces el subespacio $\mathfrak{m}$ se dice Ad(K)-invariante si $\mathrm{Ad}(K)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$ para todo $k \in K$, si $\mathfrak{m}$ es Ad(K)-invariante para $k \in K$ la diferencial de φ_k a 0, con $\varphi_k : M \to M$, $p \to kp$ tiene la expresión $\varphi_{k*0} = \mathrm{Ad}(k) \mid \mathfrak{m}$.

Un espacio homogéneo G/K es llamado *reductivo* si existe un subespacio lineal Ad(k)-invariante $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ y $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{m} = \{0\}$, en tal situación la descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$, es llamada *descomposición reductiva*.

Para G/K espacio homogéneo se denota $\phi : K \to GL(T_0M)$, $k \to \varphi_{k*0}$, la representación isotrópica de G/K y $\phi(K) \subset GL(T_0M)$ es llamado el grupo de *isotropía lineal* de G/K. En ocasiones se suele omitir la letra ϕ, siempre que no exista confusión.

Como se vio previamente, en el caso en que G/K es reductivo y $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ la descomposición reductiva, la representación isotrópica coincide con la representación adjunta $\mathrm{Ad}\,|_K \to GL(\mathfrak{m})$ vía la identificación $\mathfrak{m} \cong T_0M$.

Una métrica G-invariante $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre $M = G/K$, es una métrica Riemanniana para la cual φ_g es isométrica para cada $g \in G$; esto es G actúa sobre M por isometrías, un espacio homogéneo $M = G/K$ puede ser equipado con una métrica G-invariante si y solo si $\phi(K)$ es un subconjunto compacto de $L(T_0M, T_0M)$; las aplicaciones lineales de $T_0M \to T_0M$. Se sigue que si K es compacto, G/K admite una métrica G-invariante. (Cada espacio homogéneo Riemanniano es reductivo). Una variedad Riemanniana homogénea M se dice *espacio Riemanniano homogéneo naturalmente reductivo*, si existe un subgrupo de Lie conexo G de $I(M)$, para $M = G/K$, que actúa transitiva y efectivamente sobre M y una descomposición reductiva $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G, donde $\mathfrak{k}$ es el álgebra de Lie del grupo de isotropía K a algún punto $0 \in M$, tal que $\langle [X, Z]_{\mathfrak{m}}, Y \rangle + \langle Z, [X, Y]_{\mathfrak{m}} \rangle = 0$, con $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$.

Aquí $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno sobre $\mathfrak{m}$ que es inducido por la métrica Riemanniana sobre M y $[X, Z]_{\mathfrak{m}}$ es la proyección canónica sobre $\mathfrak{m}$ con respecto a la descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$. Para más detalles acerca de espacios homogéneos ver [KN2, Capítulo 10].

Sea M variedad Riemanniana, considérese una vecindad normal coordenada; se puede tomar una bola abierta $B_r(p)$, se denota $\exp_p : T_pM \to M$ la exponencial a p, la aplicación $s_p : B_r(p) \to B_r(p)$, $\exp(tv) \to \exp(-tv)$, que refleja las geodésicas de M a p se llama la *simetría localmente geodésica* de M a p. Una variedad conexa se dice *localmente simétrica* si para cada $p \in M$ se tiene una $B_r(p)$ tal que s_p es isometría; esto es equivalente a que $\nabla R \equiv 0$.

Si s_p se extiende a una isometría global $s_p : M \to M$, M se dice *espacio simétrico*; esto es equivalente a decir que existe una isometría involutiva s_p de M tal que p es un punto fijo aislado de s_p, s_p se llama *la simetría* de M a p. Si M es espacio simétrico este resulta homogéneo, no es así en general para el caso de espacios localmente simétricos.

Sea G un grupo de Lie conexo con un automorfismo involutivo no trivial de G, se denota por $G_s \subset G$ el conjunto de puntos en G que son fijos bajo s y G_s^* la componente conexa a la identidad de G_s, sea K un subgrupo cerrado de G tal que $G_s^* \subset K \subset G_s$ defínase $\alpha = s_{*e}$ que es un automorfismo involutivo de $\mathfrak{g}$, con $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de G. Se definen:

$\mathfrak{k} = \{x \in \mathfrak{g} \mid \alpha(x) = x\}$

$\mathfrak{p} = \{x \in \mathfrak{g} \mid \alpha(x) = -x\}$

subespacios lineales de $\mathfrak{g}$; $\mathfrak{p}$ es llamado el *complemento ortogonal estándar* de $\mathfrak{k}$ en $\mathfrak{g}$. Se tiene que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$(suma directa de espacios vectoriales) y $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$, $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$.

Esta descomposición de $\mathfrak{g}$ es llamada la *descomposición de Cartan* de $\mathfrak{g}$ con respecto a α y el par (G, K) es llamado un *par simétrico Riemanniano* si $Ad_G(K)$ es un subgrupo compacto de $GL(\mathfrak{g})$ y $\mathfrak{p}$ es equipado con algún producto interno $Ad_G(K)$-invariante.

Si (G, K) es un par simétrico, el producto interno sobre $\mathfrak{p}$ determina una métrica G-invariante sobre el espacio homogéneo $M = G/K$ y la aplicación de $M \to M$, $gK \to s(g)K$, con s el automorfismo involutivo es una simetría de M a $0 = eK \in M$, escríbase s_0; como G/K homogéneo, supóngase que $p \in M$ y sea g una isometría en M tal que $g(0) = p$ entonces $s_p = g s_0 g^{-1}$ es una simetría de M tal que $g(0) = p$, de lo que M es un espacio simétrico.

Recíprocamente, supóngase que M es un espacio simétrico. Sea $G = I^*(M)$ la componente conexa del grupo de isometrías de M, a cada punto $0 \in M$ sea s_0 la simetría de M a 0, y K el subgrupo de isotropía de G a 0. Entonces $s : G \to G$, $g \to s_0 g s_0$ (recuérdese que $s_0^{-1} = s_0$), es un automorfismo involutivo de G con $G_s^* \subset K \subset G_s$ y el producto interno sobre $\mathfrak{p}$, el complemento estándar de $\mathfrak{k}$ en $\mathfrak{g}$, es $Ad_G(K)$-invariante, usando $\mathfrak{p} \approx T_0M$. De lo que M determina un par simétrico Riemanniano; el cual resulta *efectivo*, esto es, cada subgrupo normal de G contenido en K es trivial. Para ver un estudio mas detallado ver [He] o [KN2, Capítulo 11].

Sea M un espacio simétrico y $\widetilde{M}$ el cubrimiento universal, sea $M_1 \times ... \times M_k$ la descomposición de De Rham [KN1] de $\widetilde{M}$ donde M_0 es isométrico a un espacio euclídeo de dim ≥ 0 y M_i es un espacio simétrico simplemente conexo e irreducible. M se dice *semisimple* si M_0 tiene dimensión cero y *simple* si la descomposición tiene un único factor no euclídeo. No es sorpresa que la definición no sea fortuita ya que si M es semisimple entonces $I^*(M)$ es un grupo de Lie semisimple, se dirá que M es de *tipo compacto* (o *no compacto*) si es semisimple y compacto o respectivamente (no compacto).

Una *s-representación* es por definición la representación isotrópica de un espacio simétrico, simplemente conexo y semisimple $M = G/K$ con $G = I^*(M)$. El *rango* de $M = G/K$ es la dimensión del subespacio abeliano maximal de $\mathfrak{p}$ en la descomposición de cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de $G = I^*(M)$ [He].

Sea (G, K) un par simétrico Riemanniano; tal que G/K es un espacio simétrico Riemanniano de tipo compacto o no compacto respectivamente. Considérese la complexificación $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{k} + i\mathfrak{g}$ de la descomposición de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$. Entonces $\mathfrak{g}' = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{p}$ es una subalgebra de Lie real de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ con respecto a la estructura de álgebra de Lie inducida. Sea G' el subgrupo de Lie real de $G^{\mathbb{C}}$ con álgebra de Lie $\mathfrak{g}'$, entonces G'/K es un espacio simétrico, simplemente conexo de tipo no-compacto o compacto respectivamente, con descomposición de Cartan $\mathfrak{g}' = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{p}$ llamado el dual a G/K. Esta dualidad describe una correspondencia uno a uno entre estos dos tipos de espacios simétricos simplemente conexos; como es explícito la representación isotrópica de un espacio simétrico semisimple coincide con la del dual, en tal caso para hablar de la representación isotrópica se puede asumir que el espacio simétrico es de tipo compacto.

C

EMBEDDING DE VERONESE, ISOTROPÍA DE SL(n)/SO(n) Y SUBVARIEDADES DE VERONESE

Sea S^n, $n \geq 2$ la esfera unitaria del espacio euclídeo $\mathbb{R}^{n+1}$ y sea $\mathbb{R}^{n+1} \otimes_s \mathbb{R}^{n+1}$ el espacio de 2-tensores simétricos de $\mathbb{R}^{n+1}$ sea $h : \mathbb{R}^{n+1} \otimes_s \mathbb{R}^{n+1} \to \mathrm{Sim}(n+1)$ el isomorfismo usual sobre las matrices simétricas de $\mathbb{R}^{n+1}$. Sea $e_1, \ldots, e_{n+1}$ la base canónica de $\mathbb{R}^{n+1}$. Entonces $h(e_i \otimes e_j) + h(e_j \otimes e_i)$ es la matriz para la cual todos los coeficientes $a_{k,l} = 0$ excepto $a_{i,j} = a_{j,i} = 1$ si $i \neq j$ y $a_{i,i} = 2$ si $i = j$.

La *aplicación de Veronese* $\hat{\rho} : S^n \to \mathrm{Sim}(n+1)$ es definida por $\hat{\rho}(v) = h(v \otimes v)$ ver que $(\hat{\rho}(v))_{i,j} = v_i v_j$ donde $v = (v_1, \ldots, v_{n+1})$. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interno sobre $\mathrm{Sim}(n+1)$ dado por $\langle A, B \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}(AB^t)$ entonces $\hat{\rho}$ es una inmersión isométrica. Ver que $\mathrm{Tr}(\hat{\rho}(v)) = 1$ para todo $v \in S^n$, entonces la imagen de $\hat{\rho}$ esta contenida en el hiperplano afín de $\mathrm{Sim}(n+1)$ dado por la ecuación lineal $\langle \cdot, \mathrm{Id} \rangle = \frac{1}{2}$.

Sea $\mathrm{Sim}_\circ(n+1)$ las matrices simétricas de traza cero de $\mathbb{R}^{n+1}$ y sea $\tilde{\rho} : S^n \to \mathrm{Sim}_\circ(n+1)$ definido por:

$$\tilde{\rho}(v) = \hat{\rho}(v) - \frac{1}{n+1} \mathrm{Id}$$

$\tilde{\rho}$ es llamada la *inmersión Riemanniana de Veronese* a la esfera S^n en $\mathrm{Sim}_\circ(n+1)$. Se tiene que $\tilde{\rho}$ y $\hat{\rho}$ son $O(n+1)$-equivariantes; esto es, si $g \in O(n+1)$ entonces $\tilde{\rho}(v)(gv) = g \tilde{\rho} g^{-1}$. Esto se deduce fácilmente de la ecuación,

$$\tilde{\rho}(v) = vv^t - \frac{1}{n+1} \mathrm{Id} \quad (*)$$

para $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ vector columna.

Se puede ver que $\tilde{\rho}(v) = \tilde{\rho}(w)$ si y solo si $v = \pm w$, entonces $\tilde{\rho}$ se proyecta a un embedding $O(n+1)$-equivariante isométrico $\rho : \mathbb{R}P^n \to \mathrm{Sim}_\circ(n+1)$ llamado el *embedding de Veronese* del espacio proyectivo real en las matrices simétricas de traza cero $(n+1) \times (n+1)$.

Considérese el par simétrico $(SL(n+1), SO(n+1))$ de tipo no compacto. La descomposición de Cartan asociada a este par es:

$$\mathfrak{sl}(n+1) = \mathfrak{so}(n+1) \oplus \mathrm{Sim}_\circ(n+1)$$

Entonces la representación isotrópica (irreducible) de $X = SL(n+1)/SO(n+1)$ es identificada naturalmente por la conjugación de $SO(n+1)$ sobre $Sim_\circ(n+1)$ (notar que si n es impar, para que la acción sea efectiva es necesario dividir $SO(n+1)$ por el grupo $\{\pm Id\}$).

Como ρ es $O(n+1)$-equivariante entonces la imagen de ρ es $\rho(\mathbb{R}P^n) = SO(n+1)\rho(v)$ para v arbitrario en $\mathbb{R}P^n$; se puede tomar en particular $v = [(1,\dots,0)]$, de (*) se tiene que $\rho(v) = (a_{i,i})$, con $(a_{i,j})$ matriz en $\mathrm{Sim}_\circ(n+1)$ tal que $a_{i,j} = 0$ si $i \neq j$; $a_{1,1} = 1 - \frac{1}{n+1}$ y $a_{i,i} = -\frac{1}{n+1}$ si $i \neq 1$. En otras palabras $\rho(v) = S$ es una matriz de $\mathrm{Sim}_\circ(n+1)$ con exactamente dos valores propios; $1 - \frac{1}{n+1}$ de multiplicidad 1 asociado al autoespacio $\mathbb{R}e_1$ y $-\frac{1}{n+1}$ de multiplicidad n asociado al autoespacio $(\mathbb{R}e_1)^\perp$.

Sea $S' \in \mathrm{Sim}_\circ(n+1)$ con exactamente dos valores propios λ_1 de multiplicidad 1 y λ_2 de multiplicidad n, asumase que $\|S'\| = \|S\|$ (tienen la misma longitud). Se puede ver que $\lambda_1 = 1 - \frac{1}{n+1}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{n+1}$ o $\lambda_1 = -1 + \frac{1}{n+1}$, $\lambda_2 = \frac{1}{n+1}$; en el primer caso $S' \in SO(n+1)S = \rho(\mathbb{R}P^n)$ y en el segundo $-S' \in SO(n+1)S$, véase que S' y $-S'$ no pueden estar ambos en la imagen del embedding de Veronese pues el valor propio de multiplicidad 1 es diferente para los dos casos; en general si $\bar{S} \in Sim_\circ(n+1)$ tiene dos valores propios diferentes, uno de multiplicidad 1 y el otro de multiplicidad n entonces $\bar{S} = \lambda S$, para algún $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

La órbita $V^n = SO(n+1)\bar{S} = \{kSk^{-1} : k \in SO(n+1)\}$ es llamada una *órbita de Veronese*. Notar que existen exactamente dos órbitas de Veronese sobre la esfera unitaria de $\mathrm{Sim}_\circ(n+1)$, más aún estas órbitas son isométricas una a la otra por la isometría $-\mathrm{Id}_{\mathrm{Sim}_\circ(n+1)}$ de $\mathrm{Sim}_\circ(n+1)$.

Una subvariedad $M \subset \mathbb{R}^N$ es llamada una *subvariedad de Veronese* si ésta es extrínsecamente isométrica a una órbita de Veronese.

Nota C.0.4. i) Una órbita de Veronese $V^n = SO(n+1)S$ es una subvariedad substancial, irreducible de $\mathrm{Sim}_\circ(n+1)$ que tiene dimensión n y codimensión $\frac{n(n+1)}{2}$.

ii) Una órbita de $SO(n+1)$ en $\mathrm{Sim}_\circ(n+1)$ tiene dimensión minimal si y solo si es una órbita de Veronese (en este caso la dimensión es n).

iii) El grupo de holonomía normal a S de la órbita de Veronese V^n coincide con la imagen de la representación slice del grupo de isotropía $(SO(n+1))_S = S(O(E_1) \times O(E_2)) \simeq S(O(1) \times O(n))$, aquí E_1 y E_2 son los respectivos autoespacios asociados a los valores propios de multiplicidad 1 y n. Como el espacio normal de V^n a S coincide con el conmutador a S, ver nota 1.2.4 y teorema 2.1.12, entonces la representación holonómica normal restringida sobre $\bar{\nu}_S(V^n) = (\mathbb{R}S)^\perp \cap \nu_S(V^n)$ es equivalente a la representación isotrópica del espacio simétrico $SL(n)/SO(n)$ de rango $n-1$. Entonces la representación holonómica normal es irreducible. Mas aún, es no transitiva sobre la esfera unitaria de $\bar{\nu}(V^n)$ si y solo si $n \geq 3$.

iv) Una órbita de Veronese $V^n = SO(n+1)S = SO(n+1)/(SO(n+1))_S$ es intrínsecamente un espacio proyectivo real $\mathbb{R}P^n$. Mas aún, $(SO(n+1), (SO(n+1))_S)$ es un par simétrico y $(SO(n+1))_S$ actúa irreduciblemente sobre $T_S(V^n)$. Entonces por el Corolario 3.2.11, V^n tiene segunda forma fundamental paralela.

Lema C.0.5. *Sea* $SO(n)$ *actuando por conjugación sobre* $Sim_\circ(n)$ *y sea* $M = SO(n)A$ *una órbita,* $A \neq 0$. *Entonces* $n-1 \leq \dim(M)$. *Más aún, la igualdad se mantiene si y solo si* M *es una órbita de Veronese.*

Demostración

Asumamos que M tiene dimensión minimal. Primero se probara que A tiene exactamente dos valores propios. Supongamos que no, y sean $\lambda_1, ..., \lambda_d$ los valores propios distintos de A asociados a los autoespacios $E_1, ..., E_d$ ($d \geq 3$). Entonces el subgrupo de isotropía $SO(n)_A = S(SO(E_1) \otimes ... \otimes SO(E_d))$ tiene dimensión menor que $S(SO(E_1) \otimes SO(E_2 \oplus ... \oplus E_d))$, el cual es el grupo de isotropía para algún $A' \in Sim_\circ(n)$, $A' \neq A$, el cual tiene dos diferentes autovalores con autoespacios E_1 y $E_2 \oplus ... \oplus E_d$. Entonces $\dim(M) > \dim(SO(n))A'$ lo que contradice la minimalidad de la dimensión de M, entonces $d = 2$; ver que si $d = 1$ se tiene que $A = 0$ pues A tiene traza cero, sea $k = \dim(E_1)$ y $n - k = \dim E_2$, por la bien conocida fórmula de dimensión de las Grassmanianas:

$$\dim(M) = \dim(SO(n)) - \dim(SO(k)) - \dim(SO(n-k)) = k(n-k)$$

Pero la función cuadrática $f(x) = x(n-x)$ tiene mínimo, restringido al conjunto $\{1, ..., n-1\}$, a $x = 1$ y $x = n-1$, entonces $K = 1$ o $k = n-1$; en cualquier caso M es una órbita de Veronese de dimensión $n-1$. $\diamond$

Sea K el grupo de isotropía del espacio simétrico $X = \bar{SL}(n+1)/\bar{SO}(n+1)$ donde la barra sobre los grupos indica que la acción isométrica es efectiva; esto es, $\bar{SL}(n+1) = SL(n+1)$ y $\bar{SO}(n+1) = SO(n+1)$ si n es par y $\bar{SL}(n+1) = SL(n+1)/\pm Id$, $\bar{SO}(n+1) = SO(n+1)/\pm Id$ si n es impar.

Ver que $\bar{SO}(n+1) = (K)_\circ$ (la componente conexa a la identidad de K), la cual es un subgrupo normal de K. Por definición de representación isotrópica $K \subset O(Sim_\circ(n+1))$, con esta identificación $\sigma = -Id_{Sim_\circ(n+1)} \in K$ pues ésta es la diferencial a $[Id]$ de la simetría B de X a $[Id]$.

Claramente como se mencionó previamente σ permuta las dos órbitas de Veronese de la esfera de $Sim_\circ(n+1)$, de lo que es obvio que $\sigma \notin \bar{SO}(n+1)$.

Sea $k \in K$. Entonces:

$$kSO(n+1)S = kSO(n+1)k^{-1}k(S) = \bar{SO}(n+1)k(S)$$

Como $\dim(k(M)) = \dim(M) = n$ por el lema C.0.5 $SO(n+1)k(S) = k(M)$ es una órbita de Veronese, pues tiene dimensión minimal. Ver que $\|k(S)\| = \|S\|$ entonces se tiene que $k(M) = M$ o $k(M) = -M = \sigma(M)$, de lo que k o $-k = \sigma \circ k$ envía isométricamente en M. Sea $k' = k$ si $k(M) = M$ o $k' = -k$ si $-k(M) = M$. Entonces $k'|_M : M \to M$ es una isometría de $M = \rho(\mathbb{R}P^n) \simeq \mathbb{R}P^n$, pero toda isometría del proyectivo $\mathbb{R}P^n$ es la proyección de una isometría de la esfera S^n. Como ρ es $O(n+1)$-equivariante existe un $g \in \bar{O}(n+1)$ tal que $k' = g$, con $O(n+1)$ actuando por conjugación sobre $Sim_\circ(n+1)$.

Por otro lado cada $g \in \bar{SO}(n+1)$ pertenece a la isotropía de X a $[\mathrm{Id}]$, pues éste preserva el tensor de curvatura de X a $[\mathrm{Id}]$ (el cual es múltiplo escalar de $\langle[[A,B],C],D\rangle$, donde $A,B,C,D \in \mathrm{Sim}_\circ(n+1)$).

De lo anterior se sigue que:

Proposición C.0.6. *Sea* $K \subset O(\mathrm{Sim}_\circ(n+1))$ *el grupo de isotropía del espacio simétrico* $\bar{SL}(n+1)/\bar{SO}(n+1)$ *(notado como antes). Entonces* $K = \bar{O}(n+1) \cup \sigma\bar{O}(n+1)$*, unión disjunta.*

Notar que la proposición anterior es valida para el espacio dual $SU(n+1)/SO(n+1)$.

D

GRUPOS DE LIE COMPACTOS

Sea G un grupo de Lie compacto de dimensión a lo sumo 4. Evitando resultados de clasificación se probará cuáles son estos grupos. Primero se usara el siguiente resultado:

(*) *Un subgrupo de codimensión* 1 *de un grupo de Lie con una métrica bi-invariante debe ser un subgrupo normal.*

Recordar que el rango de un grupo de Lie G es la dimensión del abeliano maximal de $\mathrm{Lie}(G)$.

1. $\dim(G) \le 2$, de (*) G debe ser abeliano.

2. $\dim(G) = 3$, si el $\mathcal{R}ango(G) \ge 2$ de (*) G debe ser abeliano. Si $rango(G) = 1$, entonces G tiene cubrimiento universal $\mathrm{Spin}(3)$, (para ver una prueba ver [OR]).

3. $\dim(G) = 4$
   Si G es simple y no es abeliano, entonces del caso anterior se tiene que un cubrimiento de G se parte como $S^1 \times \mathrm{Spin}(3)$, si G es simple entonces el $\mathcal{R}ango(G) \le 2$, en otro caso G tiene un subgrupo abeliano de codimension 1 (el cual es normal).
   Si G es simple, entonces el $\mathcal{R}ango(G) \ne 1$. Pues de lo contrario $G = \mathrm{Spin}(3)$ el cual tiene dimensión 3. Sea G simple de rango 2. entonces la representación adjunta de G sobre $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ debe tener una órbita focal (no-trivial) Gv, tal órbita debe tener codimensión 3. El espacio normal $\nu_v(Gv)$ coincide con el conmutador de v, ver Nota 1.2.4 y el Teorema 2.1.12. Pero $\dim(\nu_v(Gv)) = 3$ lo cual implica, de (*), que G posee un subgrupo normal no trivial, lo que genera una contradicción.

BIBLIOGRAFÍA

[B] Ballmann, Werner., *Automorphism Groups*, Notes, 2011

[BCO] Berndt, J., S. Console and C. Olmos., *Submanifolds and Holonomy*. CRC/Chapman and Hall, Research Notes Series in Mathematics 434. Boca Raton, 2003.

[Bo] Boothby, W., *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry* 2Ed, Academic Press, 2003.

[C] Cecil, T.E., *Lie Sphere Geometry. With Applications to Submanifolds* Springer, 1992.

[CDO] Console, S., Di Scala, A.J., Olmos, C., *A Berger Type Normal Holonomy Theorem for Complex Submanifolds*, Math Ann (2011) 351: 187-214.

[D] Do Carmo, M.P., *Riemanniann Geometry*, Birkhauser, 1992.

[Da] Dadok. J., *Polar Coordinates induced by Actions of Compact Lie Groups*, Trans. Am. Math. Soc. 288, 125-137(1985).

[DO] Di Scala, A.J., and C. Olmos., *Submanifolds with curvature normals of constant length and the Gauss map*. J. reine angew. Math. 574, 79-102(2004)

[EH] Eschenburg, J.H., Heintze, E., *Polar representations and symmetric spaces*, J. Reine Angew. Math. 507, 93-106 (1999).

[H1] Humphreys J.E., *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer-Verlag, 1972.

[H2] Humphreys, J.E., *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge University Press, 1990.

[He] Helgason, S., *Differenciable Geometry, Lie Groups, and Simmetric Spaces*, Academic Press, 1978.

[HO] Heintze, E., and Olmos, C., *Normal holonomy groups and -representations*, Indiana Univ. Math. J. 41 (1992), 869-874.

[HOT] Heintze, E., Olmos, C., Thorbergsson, G., *Submanifolds with constant Principal Curvatures and Normal Holonomy Groups*, Int. J. Math. 2, 167-175 (1991).

[KN1] Kobayashi, S., Nomizu,K., *Foundations of Differential Geometry I*, Interscience Publishers, 1963.

[KN2] Kobayashi, S., Nomizu,K., *Foundations of Differential Geometry II*, Interscience Publishers, 1969.

[LP] Little J.A., Pohl W.F., *On Tight Immersions of Maximal Codimension*, Inventiones Math. 13, 179-204 (1971)

[MO] Miatello, R.J., Olmos C.E., *Geometría de Espacios Fibrados*, Trabajos de Matemática, Universidad Nacional de Córdoba FaMAF 198.

[O1] Olmos C., *Riemannian and Submanifold Geometry*, FaMAF, Universidad Nacional de Córdoba, Notas.

[O2] Olmos, C., *Homogeneous Submanifolds of Higher Rank and Parallel Mean Curvature*, J. Differ. Geom. 39, 605-627 (1994).

[O3] Olmos, C., *On the Geometry of Holonomy Systems*, L'Enseignement Mathématique, t. 51 (2005), p 335-349.

[O4] Olmos, C., *Homogeneous Submanifolds of Higher Rank and Parallel Mean Curvature*, J. Differential Geom. 39 (1994), 605-627.

[OR] C. Olmos, and S. Reggiani., *The skew-torsion holonomy theorem and naturally reductive spaces*, J.reine angew Math., 664(2012), 29-53.

[OS] Olmos, C., Salvai, M., *Holonomy of Homogeneous Vector Bundles and Polar Representations*, Indiana Univ. Math. J. 44, 1007-1015(1995).

[OSa] Olmos, C., Sánchez, C., *A geometric characterization of the orbits of s-representations*, J.Reine Angew. Math. 420, 195-202 (1991).

[P] R. Palais, *A global formulation of the Lie theory of transformation groups*, Mem. Amer. Math. Soc. 22 (1957), 1-123.

[PT] Palais, R.S., Terng, C.L., *Critical Point Theory and Submanifold Geometry*, Springer, 1988.

[Re] B. Reinhart, *Foliated manifolds with bundle-like metrics*, Ann. of Math. 69 (1959), 119-132.

[S] Simons, J., *On the Transitivity of Holonomy Systems*, Ann. Math. (2) 76, 213-234 (1962).

[T] Thorbergsson, G., *Isoparametric Foliations and their buildings*, Ann. Math.(2) 133, 429-446(1991).

[Ta] Takagi, R., *On homogeneous real hypersurfaces in complex projective space*, Osaka J. Math. 10, 495-506(1973).

[W] Warner, F., *Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer-verlag, New York, 1983.

DECLARACIÓN

Declaro que esta tesis, así como los resultados en ella reportados, son producto de mi trabajo y que hasta donde yo sé, no contiene material previamente publicado o escrito por otra persona, excepto donde se reconoce como tal a través de citas y con propósitos exclusivos de ilustración o comparación. En este sentido, afirmo que cualquier información presentada sin citar a un tercero es de mi propia autoría. Así mismo, declaro que este trabajo no contiene material que haya sido utilizado para obtener algún grado o diploma en alguna otra institución educativa excepto donde se reconoce como tal.

Córdoba, Argentina, 2013

Richar Fernando Riaño Riaño

Francisco Vittone
Jurado externo

Adrián Andrada
Grupo de Geometría

Roberto Miatello
Grupo Teoría de Números