

# Compresión de imágenes y cálculo eficiente de proyecciones a autoespacios

por Javier Hernán Lezama

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía y Física como  
parte  
de los requerimientos para la obtención del grado de Doctor en  
Matemática de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Mayo de 2013

©FAMAF-UNC 2013

Director: Dr. Fernando Levstein



## Índice general

1. INTRODUCCIÓN	11
Capítulo 1. ESQUEMAS DE ASOCIACIÓN	15
1. ESQUEMAS DE ASOCIACIÓN	15
2. REPRESENTACIONES	17
3. TRANSFORMADA DE RADON	18
4. MARCOS AJUSTADOS FINITOS	19
5. DISTRIBUCIÓN BINOMIAL	20
Capítulo 2. RETICULADO	23
1. RETICULADO	23
Capítulo 3. COMPRESIÓN DE IMÁGENES	27
1. INTRODUCCIÓN	27
2. IMÁGENES	27
3. JPEG	29
4. MÉTODO PROPUESTO	35
5. PRÁCTICA	37
6. $H(6,2)$	51
7. RESULTADOS VISUALES	55
8. DE LA TEORÍA A LA PRÁCTICA	61
Capítulo 4. COMPONENTES PRINCIPALES	63
1. INTRODUCCIÓN	63
2. DESARROLLO	64
3. CÁLCULO DE OPERACIONES Y TEOREMAS RESULTANTES	74
Capítulo 5. CONCLUSIONES	85
Capítulo 6. BIBLIOGRAFÍA	87



**Resumen.**

Este trabajo está enfocado fundamentalmente en el cálculo eficiente de las componentes principales de proyecciones a autoespacios de una función  $f$  sobre determinados esquemas de asociación. El cálculo de componentes principales se aplica entre otras cosas al área de compresión de imágenes. Los usos más comunes de esta son la transmisión y almacenamiento de información. En transmisión, sus principales aplicaciones son la televisión, radar, tele conferencias, comunicación por computadoras, transmisión por fax y otras así. En almacenamiento, la compresión de imágenes se utiliza sobre documentos, imágenes médicas, secuencia de imágenes, imágenes de satélites, mapas meteorológicos, etc.

**Palabras claves:** componentes principales, compresión de imágenes, marcos ajustados finitos, esquemas de asociación.

**2010 Mathematics subject Classification:** 94C30: Applications of design theory, 94C15: Applications of graph theory, 94A08: Image processing (compression, reconstruction, etc.).



## AGRADECIMIENTOS.

Quiero agradecer a todas las personas que de una u otra manera, me prestaron su ayuda desinteresadamente, en el desarrollo de este trabajo. Sobre todo en los momentos que más lo necesitaba. El desarrollo del mismo me permitió conocer gente de gran calidad y valor humano.

Y sobre todo a las personas que me acompañaron en el día a día a lo largo de los años, mis seres queridos, mi familia mi soporte en el día a día.



## Resumen.

Este trabajo está enfocado fundamentalmente en el cálculo eficiente de las componentes principales de proyecciones a autoespacios de una función  $f$  sobre determinados esquemas de asociación. El cálculo de componentes principales se aplica entre otras cosas al área de compresión de imágenes. Los usos más comunes de esta son la transmisión y almacenamiento de información. En transmisión, sus principales aplicaciones son la televisión, radar, tele conferencias, comunicación por computadoras, transmisión por fax y otras así. En almacenamiento, la compresión de imágenes se utiliza sobre documentos, imágenes médicas, secuencia de imágenes, imágenes de satélites, mapas meteorológicos, etc.

La primera parte de la tesis, propone un método básico de compresión de imágenes que permite comprimir y descomprimir a través de la aplicación de una transformada lineal, (llamada transformada de Hadamard), cuya matriz asociada tiene sus coeficientes en el conjunto  $\{\pm 1\}$ .

La idea del método es la siguiente:

Dada una matriz correspondiente a una imagen, la subdividimos en submatrices  $2^n \times 2^n$ , que miraremos como vectores en  $\mathbb{R}^{4^n}$ . A cada  $v \in \mathbb{R}^{4^n}$ , le aplicamos una matriz  $H$ , cuyas filas son una base ortogonal de autovectores correspondientes al operador de adyacencia del grafo de Hamming. Como  $v = H^{-1}Hv$  se tiene que un múltiplo de los coeficientes de  $Hv$  son las coordenadas de  $v$  en dicha base de autovectores.

Los autovalores permiten ordenar la información. La compresión consiste en hacer cero las coordenadas asociadas a los autovalores más chicos. Llamamos al vector resultante  $w$ . A partir de  $w$  reconstruimos un vector  $\tilde{v} = \tilde{H}w$ , con  $\tilde{H}$  matriz de descompresión que proviene de  $H$ , que será una aproximación de  $v$ . Para analizar los resultados obtenidos consideramos distintas imágenes y calculamos el error cuadrático medio (ECM) de la imagen reconstruida con su original. También analizamos los resultados con las siguientes métricas: Signal to noise ratio (SNR), Peak signal to noise ratio (PSNR), Normalized Cross correlation (NCC). Se comparan los resultados obtenidos con otros formatos ya establecidos como el JPEG, (Joint Photographic Experts Group), el cual es el formato estándar de compresión utilizado actualmente.

Esto lleva a abordar el problema del cálculo eficiente de proyecciones a autoespacios, y se investiga el cálculo del mismo en otros esquemas, que abordamos en la segunda parte del trabajo.

En la segunda parte, se considera el problema del cálculo de las componentes principales de una señal  $f \in L(X)$ , donde  $X$  es igual a los subconjuntos de  $k$  elementos de un conjunto  $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$  de  $n$  elementos.

El grupo simétrico  $S_n$  actúa en  $X$  naturalmente y  $L(X)$  se descompone como suma directa de las componentes isotópicas de la correspondiente representación:

$$L(X) = \bigoplus_{i=1}^m V_i.$$

El problema general consiste en dada una señal  $f \in L(X)$ , calcular la proyección de  $f$  a un determinado  $V_i$ , denotado por  $\Pi_{V_i} f$ , en forma eficiente (minimizando las operaciones empleadas).

El cálculo se realiza usando la transformada de Radon y una familia de marcos ajustados finitos de las componentes principales.

El resultado principal de esta sección es la reducción de las cotas presentadas en el trabajo [DR].

**Palabras claves:** componentes principales, compresión de imágenes, marcos ajustados finitos, esquemas de asociación.

**2010 Mathematics subject Classification:** 94C30, 94C15, 94A08.



## 1. INTRODUCCIÓN

El presente trabajo, está dividido en dos partes las cuales describimos a continuación:

La primera parte de la tesis, propone un método básico de compresión de imágenes que permite comprimir y descomprimir a través de la aplicación de una transformada lineal, (llamada transformada de Hadamard), cuya matriz asociada tiene sus coeficientes en el conjunto  $\{\pm 1\}$ .

La idea del método es la siguiente:

Dada una matriz correspondiente a una imagen, la subdividimos en submatrices  $2^n \times 2^n$ , que miraremos como vectores en  $\mathbb{R}^{4^n}$ . A cada  $v \in \mathbb{R}^{4^n}$ , le aplicamos una matriz  $H$ , en nuestro caso  $Hv$  resultan ser las coordenadas de  $v$  respecto de una base de autovectores correspondientes al operador de adyacencia,  $A$ , del grafo de Hamming. Descartamos la información del vector  $Hv$  correspondientes a los autoespacios asociados a los autovalores de menor valor, obteniendo un vector más chico  $w$ . Los autovalores permiten ordenar la información. La compresión consiste en descartar las coordenadas asociadas a los autovalores más chicos. Los restantes elementos los guardamos en  $w$ . Guardamos  $w$  para luego reconstruir un vector  $\tilde{v} = \tilde{H}w$ , con  $\tilde{H}$  matriz de descompresión que proviene de  $H$ , que será una aproximación de  $v$ . Se comparan los resultados obtenidos con otros formatos ya establecidos como el JPEG, (Joint Photographic Experts Group), el cual es el formato estándar de compresión utilizado actualmente.

Las aplicaciones de la compresión de imágenes son principalmente la transmisión y almacenamiento de información. En transmisión, sus principales aplicaciones son la televisión, radar, tele conferencias, comunicación por computadoras, transmisión por fax y otras así. En almacenamiento, la compresión de imágenes se utiliza sobre documentos, imágenes médicas, secuencia de imágenes, imágenes de satélites, mapas meteorológicos, etc.

Esto lleva a abordar el problema del cálculo eficiente de proyecciones a autoespacios, y se investiga el cálculo del mismo en otros esquemas, que abordamos en la segunda parte del trabajo.

En la segunda parte, se considera el problema del cálculo de las componentes principales de una señal  $f \in L(X)$ , donde  $X$  es igual a los subconjuntos de  $k$  elementos de un conjunto  $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$  de  $n$  elementos, mediante la transformada de Radon.

Una de las motivaciones de este problema, es su aplicación a los juegos de lotería del estado, por citar algún ejemplo, podemos nombrar el "Quini 6". Este consiste en elegir un subconjunto de 6 números del conjunto  $\{0, 1, 2, \dots, 45\}$ . Los jugadores están interesados en elegir subconjuntos de seis números pocos elegidos para maximizar la ganancia, y el estado está interesado en poder predecir los resultados globales.

Sea  $G$  un grupo finito actuando transitivamente en un conjunto  $X$ . Sea  $L(X)$  el espacio vectorial de las funciones de  $X$  sobre el cuerpo de los números reales.  $L(X)$  admite una representación natural  $\rho$  de  $G$  definida por

$$(\rho(s)(f))(x) = f(s^{-1}x)$$

Para todo  $s \in G$  y todo  $x \in X$ .  $L(X)$  se descompone como suma directa de sub-espacios isotópicos

$$L(X) = \oplus_{i=1}^m V_i.$$

El problema general consiste en dada una señal  $f \in L(X)$ , calcular la proyección de  $f$  a un determinado  $V_i$ , denotado por  $\Pi_{V_i} f$ , en forma eficiente (minimizando las operaciones empleadas).

El resultado principal de esta sección es la reducción de las cotas presentadas en el trabajo [DR].

En [DR] se proponen dos métodos para calcular las proyecciones de una señal  $f \in L(X)$ :

En un método usan la transformada de Radon, denotada por  $R$ . Utilizando la propiedad que para el método propuesto la transformada  $R$  es inyectiva, denotan su transformada inversa a izquierda,  $R^-$ .  $R$  matricialmente es de dimensión  $\binom{n}{k} \times \binom{n}{j}$ , y por consiguiente  $R^-$  de dimensión  $\binom{n}{j} \times \binom{n}{k}$ , donde  $0 < j \leq k$ . En lema 3.1, (ver lema 3.1 [DR]), prueban que  $\Pi = RR^-$  es la proyección al subespacio isotópico de dimensión  $j$ ,  $M^j$ , y variando  $j = 0, \dots, k$ , calculan la proyección a los diferentes subespacios. Estableciendo la siguiente cota, teorema 3.1:

**TEOREMA 0.1.** *(Th 3.1 [DR]): Calcular las proyecciones de un elemento arbitrario de  $M^k$  en cada uno de los  $k + 1$  subespacios isotópicos mediante la transformada de Radon requiere un costo inicial de a lo sumo  $O(k^2 \binom{n}{k}^2 \log k)$  operaciones y un adicional de  $k \binom{n}{k}^2$  operaciones.*

Mientras que en el algoritmo presentado en esta sección, aprovechando la gran cantidad de ceros que presenta la transformada  $R$  y la propiedad de los marcos ajustados finitos, se reduce esa cota a:

**TEOREMA 0.2.** *Calcular todas las proyecciones  $\Pi_{V_i} f$  en todas las hojas requiere un costo inicial de a lo sumo  $\sum_{l=1}^k (n-l) \binom{n}{l-1}$  sumas y un adicional de  $\binom{n}{k} (3^k - 2^k)$  sumas y  $\binom{n}{k} ((k-2)2^{k-1} + 2k - 1)$  multiplicaciones.*

Obtenemos el siguiente corolario, teniendo en cuenta el orden de las operaciones

**COROLARIO 0.3.** *Calcular todas las proyecciones  $\Pi_{V_i} f$  en todas las hojas requiere un costo inicial de a lo sumo  $\sum_{l=1}^k (n-l) \binom{n}{l-1}$  sumas y un adicional de  $\binom{n}{k} (3^k - 2^k)$  sumas y  $\binom{n}{k} ((k-2)2^{k-1})$  multiplicaciones.*

En el otro método utilizando la teoría de representaciones y por medio de funciones esféricas, establecen la siguiente cota, teorema 2.6:

**TEOREMA 0.4.** *(Th 2.6 [DR]): Todas las proyecciones isotópicas de  $M^{(n-k,k)}$  pueden calcularse usando a lo sumo  $\binom{n}{k}^2$  sumas más un adicional de  $O(\binom{n}{k} k \log^2 k)$  operaciones.*

El algoritmo presentado en esta sección es una variante del primer algoritmo, en donde se reduce esa cota a:

**TEOREMA 0.5.** *Calcular todas las proyecciones  $\Pi_{V_i} f$  en todas las hojas requiere un costo inicial de a lo sumo  $\sum_{l=1}^k (n-l) \binom{n}{l-1}$  sumas y un adicional de a lo sumo  $\sum_{r=1}^k \binom{n}{r} (2^r - 1)$  sumas y  $(\sum_{r=1}^{k-1} \binom{n}{r} (r-1)) + k - 1 + \binom{n}{k} 2(k-1)$  multiplicaciones.*

Dando el siguiente corolario, teniendo en cuenta el orden de las operaciones

**COROLARIO 0.6.** *Calcular todas las proyecciones  $\Pi_{V_i} f$  en todas las hojas requiere un costo inicial de a lo sumo  $\sum_{l=1}^k (n-l) \binom{n}{l-1}$  sumas y un adicional de a lo sumo  $\sum_{r=1}^k \binom{n}{r} (2^r - 1)$  sumas y  $(\sum_{r=1}^{k-1} \binom{n}{r} (r-1)) + \binom{n}{k} 2(k-1)$  multiplicaciones.*

A continuación se detalla la distribución de los contenidos de este trabajo.

Este trabajo está dividido en seis capítulos. En el capítulo uno daremos la definición y propiedades de esquemas de asociación, transformada de Radon, marcos ajustados finitos e introduciremos los conceptos y propiedades que se utilizarán en este trabajo sobre la teoría de representaciones y la distribución binomial.

En el capítulo dos introduciremos la definición de reticulado, para poder definir posteriormente semireticulado inferior, que utilizaremos a lo largo del trabajo.

En el capítulo tres se abarca el tema de compresión de imágenes, donde se introduce el tema, se da una breve reseña del método estándar de compresión de imágenes JPEG, para posteriormente presentar el método básico de compresión propuesto, mostrando los resultados obtenidos.

En el capítulo cuatro se presenta el desarrollo del cálculo de componentes principales, siendo los teoremas 4.41 y 4.59 los resultados principales de dicho capítulo, reduciendo las cotas presentadas en el trabajo [DR], como se explicó anteriormente.

Las conclusiones se presentan en el capítulo cinco, junto con las posibles líneas de investigación para futuros proyectos.

Mientras que la bibliografía se presenta en el capítulo seis.



## ESQUEMAS DE ASOCIACIÓN

Comenzaremos con la definición de Esquemas de asociación, propiedades de los mismos y definiremos los esquemas específicos de Hamming y esquemas de Johnson. (Ver [B], [BI], [G]).

### 1. ESQUEMAS DE ASOCIACIÓN

DEFINICIÓN 1.1. (Ver [B] pag. 1). Un esquema de asociación simétrico de clase  $d$  es un par  $Y = (X, \{R_i\}_{i=0}^d)$  que consiste de un conjunto finito  $X$  y relaciones simétricas  $R_0, R_1, \dots, R_d$  en  $X$  tales que:

- i)  $R_0 = \Delta$ , la diagonal de  $X \times X$ .
- ii)  $\{R_i\}_{i=0}^d$  es una partición de  $X \times X$ .
- iii) Dado  $(x, y) \in R_h$ ,  $|\{z \in X : (x, z) \in R_i, (z, y) \in R_j\}|$  depende solo de  $h, i$  y  $j$ . (Este número se denota por  $p_{i,j}^h$ ).

Se definen las matrices de adyacencia  $A_i$  por las fórmulas:

$$(A_i)_{x,y} = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \in R_i \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Tenemos que  $A_0 = I$  (por i) arriba) y  $A_i A_j = \sum_{h=0}^d p_{i,j}^h A_h$  (por iii) arriba), por lo tanto generan un álgebra  $\mathbf{A}(Y)$ , llamada el álgebra de Bose-Mesner.

OBSERVACIÓN 1.2. Las relaciones  $R_i$  en  $X \times X$  definen  $d + 1$  estructuras de grafo sobre  $X$ : el conjunto de vértices es  $X$  y el par  $(x, y)$  es arista si pertenece a  $R_i$ .

Sea  $\mathbb{R}^X = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}\}$ .

Sea  $A : \mathbb{R}^X \mapsto \mathbb{R}^X$  el operador de adyacencia:

$$A(f)(x) = \sum_{y:(x,y) \in R_1} f(y)$$

$A$  es simétrico con respecto al producto interno:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{x \in X} f(x)g(x)$$

por lo que  $\mathbb{R}^X$  se descompone en autoespacios ortogonales:

$$\mathbb{R}^X = V_0 \oplus V_1 \oplus \dots \oplus V_k.$$

**1.1. ESQUEMAS DE HAMMING.** Una familia particular de esquemas de asociación son los esquemas de Hamming  $H(n, d)$ .

DEFINICIÓN 1.3. Sea  $\Gamma$  un conjunto de  $n$  elementos y sea  $\Omega = \Gamma^m$ . Para  $x$  e  $y$  en  $\Omega$ ,  $x, y$  son  $i$ -asociados si  $x$  e  $y$  difieren en exactamente  $i$  posiciones, donde  $0 \leq i \leq m$ . Esto define un esquema de asociación llamado esquema de Hamming,  $H(m, n)$ .

Los esquemas de Hamming generalizan al hipercubo  $H(n, 2) = (X, R_1)$ , en este caso  $(X, R_1)$  es el hipercubo, que es un grafo que tiene como vértices a  $X = \mathbb{Z}_2^n$ , donde dos vértices  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in X$  son adyacentes si  $|\{i : x_i \neq y_i\}| = 1$ .

EJEMPLO 1.4. *Ejemplo:  $H(2, 2)$ :*

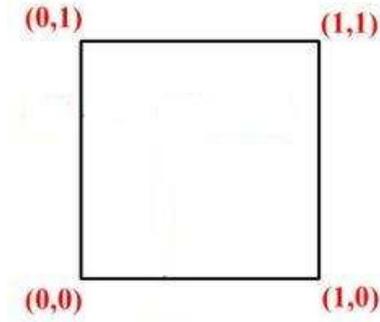


FIGURA 1. El cuadrado

En este ejemplo  $X = \mathbb{Z}_2^2 = \{(0, 0); (0, 1); (1, 0); (1, 1)\}$ . Si damos dicho orden a los vértices, la matriz de adyacencia,  $A_1 = A$ , indexadas sus entradas por dicho orden es

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 1.5. *Ejemplo:  $H(3, 2)$ :*

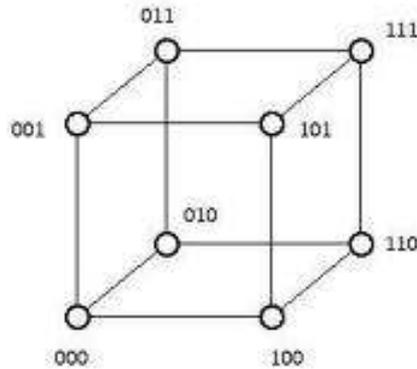


FIGURA 2. El cubo

En este caso  $X = \mathbb{Z}_2^3 = \{(0, 0, 0); (0, 0, 1); (0, 1, 0); (0, 1, 1); (1, 0, 0); (1, 0, 1); (1, 1, 0); (1, 1, 1)\}$ . Si damos dicho orden a los vértices, la matriz de adyacencia,  $A_1 = A$ , indexadas sus entradas por dicho orden es

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

## 1.2. ESQUEMAS DE JOHNSON.

DEFINICIÓN 1.6. Sea  $\Omega$  el conjunto de todos los subconjuntos de  $k$  elementos de un conjunto  $\Gamma$  de  $n$  elementos, donde  $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$ . Sean  $x, y \in \Omega$ , para  $i = 0, 1, \dots, k$ , se dice que  $x$  e  $y$  son  $i$  asociados si

$$|x \cap y| = n - i$$

estos esquemas de asociación se llaman esquemas de Johnson,  $J(n, k)$ .

EJEMPLO 1.7. Ejemplo  $J(5, 2)$ .

Consideremos el caso de  $J(5, 2)$ , es decir  $n = 5, k = 2$ . Los subconjuntos de 2 elementos del conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  son:

$$\{12\}, \{13\}, \{14\}, \{15\}, \{23\}, \{24\}, \{25\}, \{34\}, \{35\}, \{45\}$$

La matriz de adyacencia asociada al esquema de Johnson  $J(5, 2)$ ,  $A_1 = A$ , si ordenamos los conjuntos lexicográficamente, como están escritos arriba, es

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

## 2. REPRESENTACIONES

En esta sección daremos las definiciones y conceptos básicos de la teoría de representaciones, (ver [S],[St]).

DEFINICIÓN 1.8. Sea  $V$  un espacio vectorial sobre el cuerpo  $\mathbf{C}$  de los números complejos, y sea  $GL(V)$  el grupo de isomorfismos de  $V$ . Sea  $G$  un grupo finito. Una representación lineal de  $G$  en  $V$  es un homomorfismo  $\rho$  del grupo  $G$  en el grupo  $GL(V)$ . En otros términos, a todo elemento  $s$  de  $G$  se le asocia un elemento,  $\rho(s)$ , de  $GL(V)$ , de modo que

$$\rho(st) = \rho(s) \circ \rho(t), \forall s, t \in G$$

Sea  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  una representación lineal, y sea  $W$  un subespacio vectorial de  $V$ . Supongamos que  $W$  es estable por las operaciones de  $G$ , también denominado invariante, es decir, que si  $x \in W$ , entonces  $\rho_s(x) \in W$  para todo  $s \in G$ . La restricción  $\rho_s^W$  de  $\rho_s$  a  $W$  es entonces un automorfismo de  $W$ , y ciertamente  $\rho_{st}^W = \rho_s^W \rho_t^W$ . Así  $\rho^W : G \rightarrow GL(W)$  es una representación lineal de  $G$  en  $W$ . Se dice que  $W$  es una subrepresentación de  $V$ .

**DEFINICIÓN 1.9.** Una representación lineal  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  se dice irreducible si  $V \neq 0$  y ningún subespacio de  $V$  es estable por  $G$ , excepto  $0$  y  $V$ .

Ver [S], capítulo 1 para mayor detalle.

Sea  $G$  un grupo finito actuando transitivamente en un conjunto finito  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ .  $X$  es un espacio homogéneo de  $G$ . Sea  $\rho$  la representación natural definida por  $L(X)$ , es decir la representación:

$$\rho_s f(x) = f(s^{-1}x)$$

**EJEMPLO 1.10.** El grupo finito  $S_n$  actúa transitivamente en el esquema de Johnson,  $J(n, k)$ , con la acción natural del grupo.

Recordemos  $L(X)$  se descompone en autoespacios ortogonales:

$$L(X) = V_0 \oplus V_1 \oplus \dots \oplus V_k.$$

Los  $V_i$  son irreducibles, (ver th 2.6 pag. 93 [St]).

### 3. TRANSFORMADA DE RADON

A continuación daremos la definición de la transformada de Radon y propiedades de la misma, (ver [DR], [FMRHO1], [GLL], [St], [Y]).

Sea  $X_{\binom{n}{k}}$  el conjunto cuyos elementos son los  $\binom{n}{k}$  subconjuntos de  $k$ -elementos del conjunto  $\{1, \dots, n\}$  y  $\mathbf{L}(X_{\binom{n}{k}}) = \{f : X_{\binom{n}{k}} \rightarrow \mathbb{R}\}$ .

**DEFINICIÓN 1.11.** La transformada de Radon,  $R : \mathbf{L}(X_{\binom{n}{j}}) \rightarrow \mathbf{L}(X_{\binom{n}{k}})$ , con  $0 < j \leq k \leq \frac{n}{2}$ , está dada por

$$Rf(t) = \sum_{s \subset t} f(s)$$

donde  $|s| = j$  y  $|t| = k$ .

**DEFINICIÓN 1.12.** La transformada adjunta de  $R$ ,  $S$ , se define

$$Sh(s) = \sum_{t \supset s} h(t)$$

donde  $|s| = j$  y  $|t| = k$ .

**TEOREMA 1.13.** (Ver teo. 1 pag. 5 [Y]). La transformada de Radon,  $R$ , es inyectiva.

Como dicha transformada es inyectiva, por lo tanto posee inversa a izquierda, (ver [GLL]).

Veamos cómo se comporta la transformada de Radon con respecto a la acción del grupo simétrico.

PROPOSICIÓN 1.14. Sea  $G = S_n$ ,  $f \in L(X_{\binom{n}{k}})$ .

La transformada de Radon,  $R$ , satisface:

$$R(gf) = gR(f) \text{ con } g \in G$$

DEMOSTRACIÓN.

$$(R((gf)))(x) = \sum_{y \subset x} gf(y) = \sum_{y \subset x} f(g^{-1}y) \quad \forall x \in X_{\binom{n}{k}}$$

$$(g(Rf))(x) = Rf(g^{-1}x) = \sum_{y \subset g^{-1}x} f(y) = \sum_{gy \subset x} f(y) \quad \forall x \in X_{\binom{n}{k}}$$

haciendo el siguiente cambio de variable,  $z = gy$ , tenemos

$$= \sum_{z \subset x} f(g^{-1}z) \quad \forall x \in X_{\binom{n}{k}}.$$

Por lo tanto  $R(gf) = gR(f)$ . □

La sucesión de imágenes  $R(\mathbf{L}(X_{\binom{n}{j}})) = \Lambda_j$ , da una filtración en  $\mathbf{L}(X_{\binom{n}{k}})$ .

TEOREMA 1.15. (Theo 2.6 pag 93, ver [St]). Sea  $G$  y  $X$  tal que satisfacen:

- (1) La métrica  $d$  sobre  $X \times X$  coincide con la distancia del grafo en  $X \times X$ ,
- (2)  $G$  es dos-puntos homogéneo en  $X$ .

Donde la máxima distancia en  $X \times X$  es  $N$ . Entonces

$$L^2(X) = V_{\lambda_0} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_N},$$

donde  $\{V_{\lambda_i}\}_{i=0}^N$  son representaciones irreducibles distintas de  $G$ .

COROLARIO 1.16.

$$\Lambda_j = V_0 \oplus V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_j$$

DEMOSTRACIÓN. Al ser  $R$  inyectiva  $\Rightarrow V_{\lambda_i}$  es isomorfo a  $R(V_{\lambda_i})$ . Como  $R$  conmuta con la acción del grupo  $G = S_n$ , tenemos por teorema 1.15

$$R(L^2(X)) = R(V_{\lambda_0}) \oplus \dots \oplus R(V_{\lambda_N}),$$

$R(V_{\lambda_i})$  es isomorfo a 0 o a  $V_{\lambda_i}$ . Pero  $R$  es inyectiva  $\Rightarrow R(V_{\lambda_i}) = V_{\lambda_i}$ . □

COROLARIO 1.17. (Ver coro 4.14 pag 6 [LMP]).

$$\Lambda_0 \subset \Lambda_1 \subset \Lambda_2 \dots \subset \Lambda_k$$

#### 4. MARCOS AJUSTADOS FINITOS

A continuación definiremos marcos ajustados finitos y sus propiedades, (ver [BF], [CK1], [D], [EB], [VW]).

Sea  $H$  un espacio de Hilbert real o complejo de dimensión  $d$ .

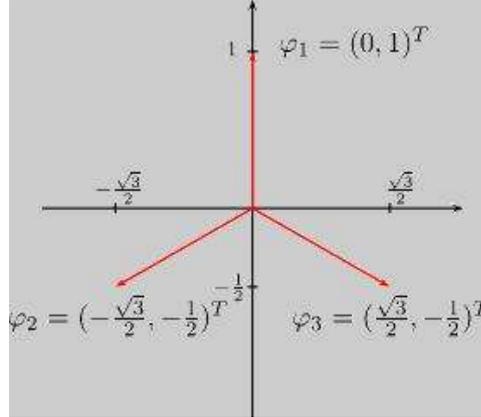
DEFINICIÓN 1.18. (Ver def 2.1 pag. 3 [VW]): Un conjunto finito de vectores no nulos  $\Phi = \{\phi_j\}_{j=1}^n$  en  $H$  es un marco ajustado finito si existe  $c > 0$  tal que

$$\|f\|^2 = c \sum_{j=1}^n |\langle f, \phi_j \rangle|^2, \quad \forall f \in H$$

o equivalentemente, por la identidad de polarización

$$f = c \sum_{j=1}^n \langle f, \phi_j \rangle \phi_j, \quad \forall f \in H.$$

EJEMPLO 1.19. *Ejemplo de marco ajustado finito en  $\mathbb{R}^2$*



Los tres vectores del plano  $\varphi_j$  con  $j = 1, 2, 3$ , forman un marco ajustado finito con  $c = \frac{2}{3}$ , es decir satisfacen

$$f = \frac{2}{3} \sum_{j=1}^3 \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j, \quad \forall f \in \mathbb{R}^2.$$

La definición de marcos ajustados proviene del artículo [D], donde se observa que si uno relaja la condición de que un conjunto de vectores sea base ortogonal del espacio pero sigue requiriendo que la descomposición de vectores tenga una expresión sencilla obtiene una flexibilidad que le es de mucha utilidad para probar la existencia de wavelets con ciertas condiciones y construirlos. Otros ejemplos pueden verse en [BF], [CK1] y [EB]. En particular, en [VW], se fabrican marcos que provienen de grupos.

## 5. DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

En esta sección introduciremos los conceptos y propiedades de la distribución binomial, (ver [De]).

DEFINICIÓN 1.20. *La distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta está definida para todo número  $x$  por  $p(x) = P(X = x)$ .*

En otras palabras, para todo valor posible  $x$  de la variable aleatoria, la distribución de probabilidad especifica la probabilidad de observar ese valor cuando el experimento se realiza. Las condiciones  $p(x) \geq 0$  y  $\sum_{\text{toda } x \text{ posible}} p(x) = 1$  se requieren para cualquier distribución de probabilidad.

DEFINICIÓN 1.21. *La función de distribución acumulada de una variable  $X$  de variable aleatoria discreta con distribución de probabilidad  $p(x)$  está definida para todo número  $x$  mediante*

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{y: y \leq x} p(y)$$

Para cualquier número  $x$ ,  $F(x)$  es la probabilidad de que el valor observado de  $X$  sea a lo sumo  $x$ .

DEFINICIÓN 1.22. Dado un experimento binomial formado por  $n$  ensayos, la variable aleatoria binomial  $X$  asociada con este experimento está definida como

$X =$  número de éxito entre los  $n$  ensayos.

NOTACIÓN 1.23. Debido a que la distribución de probabilidad de una variable aleatoria binomial  $X$  depende de los parámetros  $n$  y  $p$ , denotamos la distribución de probabilidad por  $b(x; n, p)$ .

Donde  $p$  es la probabilidad de éxito de un ensayo.

TEOREMA 1.24. (Ver teo. pag. 119 [De]).

$$b(x; n, p) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & x = 0, 1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

NOTACIÓN 1.25. Para  $X \sim \binom{n}{p}$ ,  $X$  variable aleatoria binomial basada en  $n$  ensayos con probabilidad de éxito  $p$ , la función de distribución acumulada estará simbolizada por

$$P(X \leq x) = B(x; n, p) = \sum_{y=0}^x b(y; n, p), \quad x = 0, 1, \dots, n.$$

PROPOSICIÓN 1.26. (Ver prop. pag. 165 [De]). Sea  $X$  una variable aleatoria basada en  $n$  ensayos con probabilidad de éxito  $p$ . Entonces, si el histograma de probabilidad binomial no está demasiado sesgado,  $X$  tiene aproximadamente una distribución normal con  $\mu = np$  y  $\sigma = \sqrt{npq}$ . En particular, para  $x =$  valor posible de  $X$ ,

$$\begin{aligned} P(X \leq x) = B(x; n, p) &\approx \left( \begin{array}{l} \text{área bajo la curva normal} \\ \text{a la izquierda de } x + 0,5 \end{array} \right) \\ &= \Phi\left(\frac{x + 0,5 - np}{\sqrt{npq}}\right) \end{aligned}$$

En la práctica, la aproximación es adecuada siempre que  $np \geq 10$  y  $nq \geq 10$ .

Con  $\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$  y  $q = (1 - p)$ .



## RETICULADO

En este capítulo introduciremos la noción de reticulado utilizada en este trabajo, (ver [DPr], [LMP]).

### 1. RETICULADO

DEFINICIÓN 2.1. Sea  $P$  un conjunto. Un orden parcial sobre  $P$  es una relación binaria,  $\leq$ , sobre  $P$ , tal que para todo  $x, y, z \in P$ ,

- (i)  $x \leq x$ ,
- (ii)  $x \leq y$  e  $y \leq x$ , implica  $x = y$ ,
- (iii)  $x \leq y$  e  $y \leq z$ , implica  $x \leq z$ .

Es decir la relación es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Un conjunto  $P$  equipado con un orden parcial se define como un conjunto parcialmente ordenado.

EJEMPLO 2.2. El conjunto de números  $N$ ,  $Z$ ,  $Q$ ,  $R$ , son ejemplos básicos de conjuntos parcialmente ordenados.

EJEMPLO 2.3. El siguiente diagrama de Hasse es una representación gráfica simplificada de un conjunto parcialmente ordenado finito.

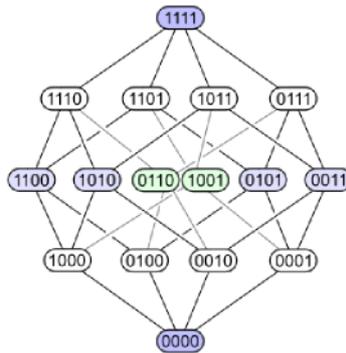


FIGURA 1. Diagrama de Hasse

DEFINICIÓN 2.4. Sea  $P$  un conjunto parcialmente ordenado y  $S \subseteq P$ . Un elemento  $x$  en  $P$  es una cota superior de  $S$  si  $s \leq x$  para todo  $s \in S$ . Recíprocamente se define cota inferior.

La cota superior más chica de  $S$  se denomina supremo de  $S$ ,  $\sup S$ ; la cota inferior más grande de  $S$  se denomina ínfimo de  $S$ ,  $\inf S$ .

NOTACIÓN 2.5. Denotaremos  $x \vee y$ , ( $x$  join  $y$ ), en lugar de  $\sup\{x, y\}$  si este existe, y  $x \wedge y$ , ( $x$  meet  $y$ ), en lugar de  $\inf\{x, y\}$  si este existe.

DEFINICIÓN 2.6. Sea  $P$  un conjunto parcialmente ordenado distinto del vacío. Si  $x \vee y$ ,  $x \wedge y$  existen para todo  $x, y \in P$ , entonces  $P$  se llama reticulado.

OBSERVACIÓN 2.7. Esta noción de reticulado difiere de la definición dada en Teoría de Números.

DEFINICIÓN 2.8. Sea  $P$  un conjunto parcialmente ordenado distinto del vacío que contiene cota inferior máxima para cualquier par de elementos de  $P$ .  $P$  se denomina semireticulado inferior (o meet-semireticulado).

EJEMPLO 2.9. Consideremos el conjunto  $P$  formado por todos los subconjunto de hasta  $k$  elementos de un conjunto  $\Omega = \{1, \dots, n\}$  de  $n$  elementos, ordenados por la relación inclusión,  $\subseteq$ .

Esto me da un conjunto parcialmente ordenado por la relación  $\subseteq$ , en donde todo par de elementos de  $P$  tiene cota inferior máxima, por consiguiente  $P$  es un semireticulado inferior separado por niveles según la cantidad de elementos, y cada nivel corresponde al esquema  $J(n, j)$ .

A esto denotamos el semireticulado inferior asociado al esquema de Johnson  $J(n, k)$ .

Ejemplo  $J(6, 3)$ .

El semireticulado inferior asociado al esquema de Johnson  $J(6, 3)$ , se lo puede representar de la siguiente manera

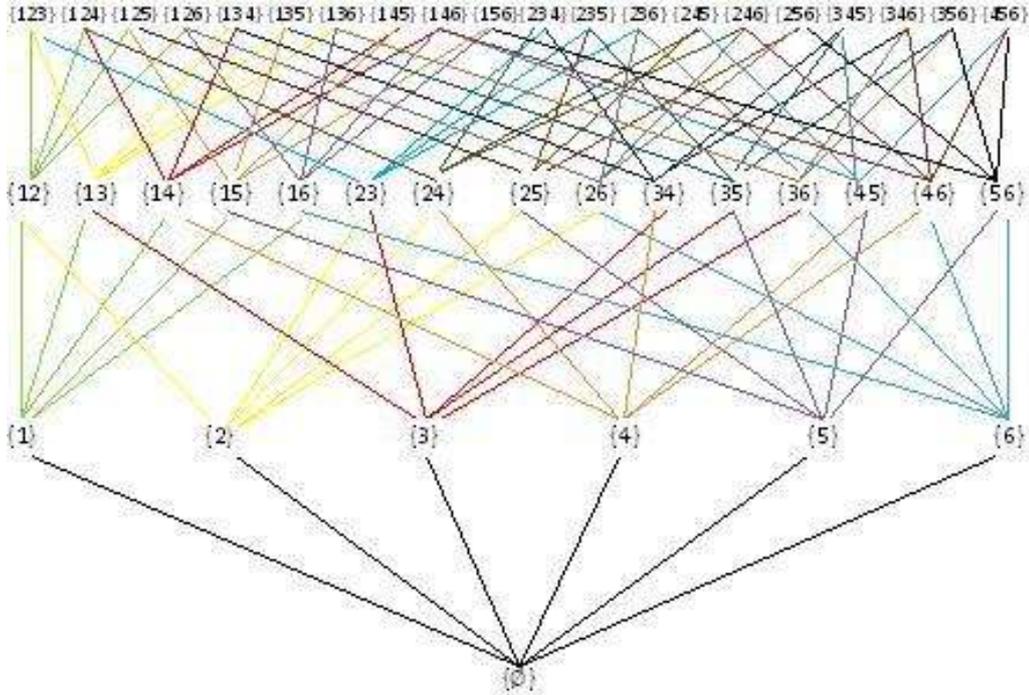


FIGURA 2. Semireticulado inferior asociado al esquema de Johnson  $J(6, 3)$

Esto da un semireticulado inferior de 4 niveles,  $X_j$ ,  $j = 0, \dots, 3$ , con

$X_0 = \{\emptyset\}$ , representa el nivel 0.

$X_1 = \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$ , representan el nivel 1.

$X_2 = \{12\}, \{13\}, \{14\}, \{15\}, \{16\}, \{23\}, \{24\}, \{25\}, \{26\}, \{34\}, \{35\}, \{36\}, \{45\}, \{46\}, \{56\}$ ,  
representan el nivel 2.

$X_3 =$

$\{123\}, \{124\}, \{125\}, \{126\}, \{134\}, \{135\}, \{136\}, \{145\}, \{146\}, \{156\}$ ,

$\{234\}, \{235\}, \{236\}, \{245\}, \{246\}, \{256\}, \{345\}, \{346\}, \{356\}, \{456\}$

representan el nivel 3.

DEFINICIÓN 2.10. Llamamos hojas del semireticulado inferior a los elementos del último nivel.

Las hojas del semireticulado inferior asociado al esquema de Johnson  $J(6, 3)$  son los siguientes  $\binom{6}{3}$  tripletes

$\{123\}, \{124\}, \{125\}, \{126\}, \{134\}, \{135\}, \{136\}, \{145\}, \{146\}, \{156\}$ ,

$\{234\}, \{235\}, \{236\}, \{245\}, \{246\}, \{256\}, \{345\}, \{346\}, \{356\}, \{456\}$ .



## COMPRESIÓN DE IMÁGENES

### 1. INTRODUCCIÓN

Conforme la informática avanza, las imágenes se han convertido en un área muy importante de esta. Hoy en día surgen más entornos gráficos orientados a múltiples aplicaciones. Las imágenes se han hecho con la informática, de ahí la necesidad de compactarlas, hay que reducir la cantidad de datos necesarios para representar una imagen digital. La compresión se basa en la eliminación de datos redundantes.

En este capítulo introduciremos el concepto de como se representa una imagen en una computadora y contaremos un poco la historia de la compresión de imágenes y detallaremos brevemente el estándar de compresión utilizada en la actualidad JPEG, para posteriormente presentar nuestro algoritmo de compresión.

### 2. IMÁGENES

Comenzaremos con la definición de imagen en un ordenador, (ver [DP], [MW], [Wdm]).

**DEFINICIÓN 3.1.** *Una imagen en escala de grises se representa, en un ordenador, con una matriz  $F$ ,  $M \times N$ , en donde cada entrada corresponde a un pixel (short for **picture element**) y el valor de la entrada es un número entre 0 y 255, que corresponde a una intensidad de gris. Donde el valor 0 corresponde al color negro y el 255 al blanco.*

Los 256 posibles valores de intensidad de grises se muestran a continuación.

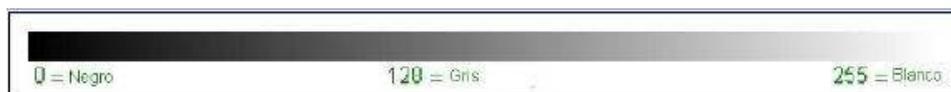


FIGURA 1. Rango de valores de intensidad de grises desde 0 (negro) hasta 255 (blanco).

Aún si uno puede ver la imagen completa, la intensidad individual de los pixeles es muy difícil de ver, o distinguir para el ojo humano, debido a la continuidad de la imagen. Por lo tanto hay información redundante, es decir que se repite o indetectable para la visión humana. Esto es una ventaja de las imágenes de alta resolución, más puntos, o pixeles, por pulgada (dots per inch (dpi)) produce una imagen más fina.

EJEMPLO 3.2. A continuación se muestra la matriz asociada a una parte de una imagen, bloque, con su correspondiente intensidad en cada entrada del bloque a manera de ejemplo



FIGURA 2. Imagen original

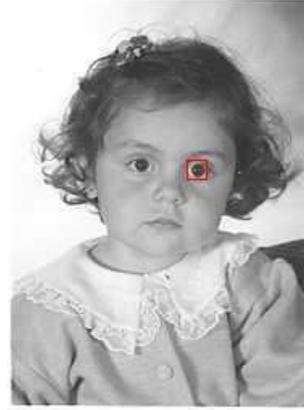


FIGURA 3. Ojo derecho

163	160	156	177	138	128	144	126
186	157	140	125	136	117	115	105
125	79	82	51	82	89	100	104
84	56	80	77	73	64	103	125
62	70	48	79	49	67	87	127
118	146	60	95	79	87	59	111
81	104	42	60	62	86	62	120
43	53	70	74	74	70	88	147
119	55	64	75	55	84	150	175
157	118	89	95	118	161	174	166
176	163	130	130	157	172	145	127
160	157	166	161	144	138	117	115

OBSERVACIÓN 3.3. La matriz con los diferentes valores de intensidad corresponden al bloque, cuadrado, remarcado con rojo en el ojo derecho de la niña de la imagen del ejemplo 3.2.

¿Cuál es el espacio necesario de almacenamiento de una imagen en una computadora?

DEFINICIÓN 3.4. La unidad fundamental de una computadora es un bit. Un bit (unidad binaria) puede valer 0 o 1. Un byte (la unidad fundamental de almacenamiento en una PC) está compuesta por 8 bits. Como cada bit vale 0 o 1 y 8 bits son un byte, hay  $2^8 = 256$  bytes diferentes.

Por lo tanto si nuestra imagen es de tamaño  $M \times N$  píxeles, el espacio necesario de almacenamiento, por lo anteriormente visto, es de  $M \times N \times 8$  bits.

Gracias a la continuidad de las imágenes y al hecho anteriormente mencionado con respecto a que la intensidad individual de los píxeles es muy difícil de ver, o distinguir para el ojo humano. Hay información sobreabundante, que puede comprimirse o eliminarse, reduciendo así de manera considerable la cantidad de espacio necesario de almacenamiento.

En otras palabras, la compresión de imágenes trata de minimizar el número de bits necesarios para representar una imagen.

### 3. JPEG

En esta sección abarcaremos la historia del estándar de compresión JPEG y describiremos brevemente su funcionamiento. (Ver [Wdm]).

**3.1. INICIOS JPEG.** El estándar de compresión de imágenes JPEG fue introducido por primera vez en 1992, las siglas JPEG provienen de Joint Photographic Experts Group. El formato JPEG se formó en la década de 1980 por los miembros de la International Organization for Standardization (ISO) and the International Telecommunications Union (ITU). Hay cuatro pasos básicos en el algoritmo utilizado por el formato JPEG: preprocesamiento, transformación, cuantificación y codificación, (ver [Wdm]); que se detallan a continuación:

#### -Preprocesamiento

Se divide la imagen en bloques de  $8 \times 8$  píxeles,

EJEMPLO 3.5. Como ejemplo para ver los pasos empleados usaremos el siguiente bloque

$$F = \begin{bmatrix} 5 & 176 & 193 & 168 & 168 & 170 & 167 & 165 \\ 6 & 176 & 158 & 172 & 162 & 177 & 168 & 151 \\ 5 & 167 & 172 & 232 & 158 & 61 & 145 & 214 \\ 33 & 179 & 169 & 174 & 5 & 5 & 135 & 178 \\ 8 & 104 & 180 & 178 & 172 & 197 & 188 & 169 \\ 63 & 5 & 102 & 101 & 160 & 142 & 133 & 139 \\ 51 & 47 & 63 & 5 & 180 & 191 & 165 & 5 \\ 49 & 53 & 43 & 5 & 184 & 170 & 168 & 74 \end{bmatrix}$$

correspondiente a la siguiente imagen.

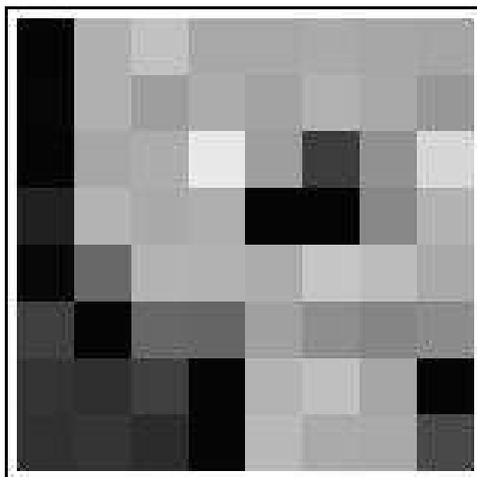


FIGURA 4

Posteriormente se resta 127 a cada intensidad del pixel de la imagen. Este paso acerca las intensidades alrededor del valor 0, y tiene como finalidad simplificar la matemática de los pasos de la transformación y cuantización que se detallan más adelante.

EJEMPLO 3.6. *En nuestro ejemplo los nuevos valores son*

$$B = \begin{bmatrix} -122 & 49 & 66 & 41 & 41 & 43 & 40 & 38 \\ -121 & 49 & 31 & 45 & 35 & 50 & 41 & 24 \\ -122 & 40 & 45 & 105 & 31 & -66 & 18 & 87 \\ -94 & 52 & 42 & 47 & -122 & -122 & 8 & 51 \\ -119 & -23 & 53 & 51 & 45 & 70 & 61 & 42 \\ -64 & -122 & -25 & -26 & 33 & 15 & 6 & 12 \\ -76 & -80 & -64 & -122 & 53 & 64 & 38 & -122 \\ -78 & -74 & -84 & -122 & 57 & 43 & 41 & -53 \end{bmatrix}$$

### -Transformación

El formato de compresión de imagen estándar JPEG utiliza la transformada del coseno discreta, Discrete Cosine Transformation (DCT),  $C$ . La matriz  $C$  es inversible, más aún  $C$  es ortogonal,  $C^T = C^{-1}$ , (ver [Sg]).

Cada bloque  $8 \times 8$ ,  $B$ , de la imagen preprocesada es multiplicado por la matriz de la transformada DCT,  $C$ , de tamaño  $8 \times 8$  a izquierda y por  $C^T$  a derecha, obteniendo el bloque  $U = CBC^T$  con

$$C = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \frac{\pi}{16} & \cos \frac{3\pi}{16} & \cos \frac{5\pi}{16} & \cos \frac{7\pi}{16} & \cos \frac{9\pi}{16} & \cos \frac{11\pi}{16} & \cos \frac{13\pi}{16} & \cos \frac{15\pi}{16} \\ \cos \frac{2\pi}{16} & \cos \frac{6\pi}{16} & \cos \frac{10\pi}{16} & \cos \frac{14\pi}{16} & \cos \frac{18\pi}{16} & \cos \frac{22\pi}{16} & \cos \frac{26\pi}{16} & \cos \frac{30\pi}{16} \\ \cos \frac{3\pi}{16} & \cos \frac{9\pi}{16} & \cos \frac{15\pi}{16} & \cos \frac{21\pi}{16} & \cos \frac{27\pi}{16} & \cos \frac{33\pi}{16} & \cos \frac{39\pi}{16} & \cos \frac{45\pi}{16} \\ \cos \frac{4\pi}{16} & \cos \frac{12\pi}{16} & \cos \frac{20\pi}{16} & \cos \frac{28\pi}{16} & \cos \frac{36\pi}{16} & \cos \frac{44\pi}{16} & \cos \frac{52\pi}{16} & \cos \frac{60\pi}{16} \\ \cos \frac{5\pi}{16} & \cos \frac{15\pi}{16} & \cos \frac{25\pi}{16} & \cos \frac{35\pi}{16} & \cos \frac{45\pi}{16} & \cos \frac{55\pi}{16} & \cos \frac{65\pi}{16} & \cos \frac{75\pi}{16} \\ \cos \frac{6\pi}{16} & \cos \frac{18\pi}{16} & \cos \frac{30\pi}{16} & \cos \frac{42\pi}{16} & \cos \frac{54\pi}{16} & \cos \frac{66\pi}{16} & \cos \frac{78\pi}{16} & \cos \frac{90\pi}{16} \\ \cos \frac{7\pi}{16} & \cos \frac{21\pi}{16} & \cos \frac{35\pi}{16} & \cos \frac{49\pi}{16} & \cos \frac{63\pi}{16} & \cos \frac{77\pi}{16} & \cos \frac{91\pi}{16} & \cos \frac{105\pi}{16} \end{bmatrix}$$

Analicemos los cambios que realiza la transformada DCT,  $C$ , a cada bloque  $8 \times 8$  de la imagen.

La fila 0, enumerando las mismas del 0 al 7, es la función constante  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Observemos que la suma de las coordenadas de las filas 1 a 7 en el intervalos  $[0, \pi]$  dividido en 8 espacios de igual distancia  $\frac{2k\pi}{16}$ , con  $k = 1, \dots, 7$ , empezando en el punto  $\frac{k\pi}{16}$  da cero. Debido a esto puede verse que la transformada DCT,  $C$ , concentra la información de la matriz  $B$  en las coordenadas cercanas al ángulo superior izquierdo, mientras que las otras coordenadas tomaran valores cercanos a cero.

EJEMPLO 3.7. Si la matriz  $B$  tiene como entradas únicamente a los números 50, 51, 52.

$$B = \begin{bmatrix} 51 & 52 & 51 & 50 & 50 & 52 & 50 & 52 \\ 51 & 52 & 51 & 51 & 50 & 52 & 52 & 51 \\ 50 & 50 & 51 & 52 & 52 & 51 & 51 & 51 \\ 51 & 50 & 50 & 50 & 52 & 50 & 50 & 51 \\ 51 & 50 & 50 & 51 & 50 & 50 & 51 & 50 \\ 50 & 51 & 52 & 52 & 51 & 50 & 50 & 50 \\ 51 & 52 & 51 & 50 & 52 & 50 & 52 & 50 \\ 50 & 51 & 52 & 52 & 50 & 51 & 52 & 51 \end{bmatrix}$$

en este caso la matriz resultante  $U$  es

$$U = \begin{bmatrix} 407 & 0 & -0,5 & -0,5 & -0,5 & 0,1 & -0,5 & 0 \\ 0,3 & -0,6 & 1 & 0,8 & 0,1 & -1 & 1,1 & -1,1 \\ 1,9 & -0,1 & 1 & -0,5 & -2,1 & -0,3 & 0,2 & -1 \\ -0,6 & 1,3 & 0,6 & 0 & -0,4 & 0,5 & 0,2 & -0,4 \\ -1 & -0,3 & 1,1 & 0,1 & 0,5 & 0 & 0,8 & -0,5 \\ -0,2 & 0,1 & 0,1 & 0,7 & 0,9 & -1,9 & -0,1 & 1,4 \\ 0 & -0,1 & -1,7 & -1,5 & 0,6 & 0,1 & 1 & -0,6 \\ -0,1 & -0,3 & 0,1 & 0,4 & 0 & 0,5 & -0,4 & 0,1 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 3.8. Si consideramos el ejemplo 3.6 en este caso la matriz resultante  $U$  es

$$U = \begin{bmatrix} -27,50 & -213,47 & -149,61 & -95,28 & -103,75 & -46,95 & -58,72 & 27,23 \\ 168,23 & 51,61 & -21,54 & -239,52 & -8,24 & -24,50 & -52,66 & -96,62 \\ -27,20 & -31,24 & -32,28 & 173,39 & -51,14 & -56,94 & 4,00 & 49,14 \\ 30,18 & -43,07 & -50,47 & 67,13 & -14,12 & 11,14 & 71,01 & 18,04 \\ 19,50 & 8,46 & 33,59 & -53,11 & -36,75 & 2,92 & -5,80 & -18,39 \\ -70,59 & 66,88 & 47,44 & -32,61 & -8,20 & 18,13 & -22,99 & 6,63 \\ 12,08 & -19,13 & 6,25 & -55,16 & 85,59 & -0,60 & 8,03 & 11,21 \\ 71,15 & -38,37 & -75,92 & 29,29 & -16,45 & -23,44 & -4,21 & 15,62 \end{bmatrix}$$

Como podemos observar las entradas de la matriz  $B$ , luego de la etapa de preprocesamiento, son números enteros, mientras que la transformada DCT,  $C$ , convierte dichas entradas generalmente en números reales. El proceso de cuantificación se encarga de convertir los mismos en enteros como veremos a continuación.

### -Cuantificación

El proceso de cuantificación consiste en dividir cada entrada de la matriz  $U$  por los elementos de la siguiente matriz de cuantificación  $Q$

$$Q = \begin{bmatrix} 16 & 11 & 10 & 16 & 24 & 40 & 51 & 61 \\ 12 & 12 & 14 & 19 & 26 & 58 & 60 & 55 \\ 14 & 13 & 16 & 24 & 40 & 57 & 69 & 56 \\ 14 & 17 & 22 & 29 & 51 & 87 & 80 & 62 \\ 18 & 22 & 37 & 56 & 68 & 109 & 103 & 77 \\ 24 & 35 & 55 & 64 & 81 & 104 & 113 & 92 \\ 49 & 64 & 78 & 87 & 103 & 121 & 120 & 101 \\ 72 & 92 & 95 & 98 & 112 & 100 & 103 & 99 \end{bmatrix}$$

Para convertir los números resultantes en números enteros creamos la siguiente matriz  $Q'$  definida por

$$Q'_{jk} = R(U_{jk}/Q_{jk}) \text{ con } j, k = 1, \dots, 8.$$

Donde la función  $R(\cdot)$  es la función de redondeo al entero más próximo. Observamos que los valores de la esquina inferior derecha de la matriz  $Q$  son más grandes, al dividir por dichos números se obtienen valores cercanos al cero, por lo cual al redondearlos se convierten en cero.

EJEMPLO 3.9. Si aplicamos el proceso de cuantificación al ejemplo 3.6:

La matriz  $Q'$  es igual a

$$Q' = \begin{bmatrix} -2 & -19 & -15 & -6 & -4 & -1 & -1 & 0 \\ 14 & 4 & -2 & -13 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 7 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observemos que la transformada DCT,  $C$ , es inversible, más aún es ortogonal,  $C = C^T$ . La división por un número es reversible, mientras que el redondeo no, por eso el JPEG es un ejemplo de compresión con pérdida.

### -Codificación

El último paso en el proceso JPEG es codificar la imagen transformada y cuantificada. El estándar de compresión JPEG usa una versión avanzada del código de Huffman, (ver [Wdm]).

Para invertir el proceso y obtener una aproximación del bloque de la imagen original, el primer paso, trabajando por bloques  $8 \times 8$ , es decodificar el código de Huffman para obtener la matriz cuantificada del bloque trabajado. Posteriormente se invierte el paso de la división y luego aplicamos la inversa de la transformada DCT,  $C$ , y obtener una aproximación del bloque original preprocesado  $U$ ,  $U'$ . Es decir, formamos primero la matriz  $U'_{jk} = Q'_{jk} * Q_{jk}$ .

EJEMPLO 3.10. Si invertimos el proceso de división obtenemos

$$U' = \begin{bmatrix} -32 & -209 & -150 & -96 & -96 & -40 & -51 & 0 \\ 168 & 48 & -28 & -247 & 0 & 0 & -60 & -110 \\ -28 & -26 & -32 & 168 & -40 & -57 & 0 & 56 \\ 28 & -51 & -44 & 58 & 0 & 0 & 80 & 0 \\ 18 & 0 & 37 & -56 & -68 & 0 & 0 & 0 \\ -72 & 70 & 55 & -64 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -87 & 103 & 0 & 0 & 0 \\ 72 & 0 & -95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mientras que nuestro bloque  $U$  original era

$$U = \begin{bmatrix} -27,50 & -213,47 & -149,61 & -95,28 & -103,75 & -46,95 & -58,72 & 27,23 \\ 168,23 & 51,61 & -21,54 & -239,52 & -8,24 & -24,50 & -52,66 & -96,62 \\ -27,20 & -31,24 & -32,28 & 173,39 & -51,14 & -56,94 & 4,00 & 49,14 \\ 30,18 & -43,07 & -50,47 & 67,13 & -14,12 & 11,14 & 71,01 & 18,04 \\ 19,50 & 8,46 & 33,59 & -53,11 & -36,75 & 2,92 & -5,80 & -18,39 \\ -70,59 & 66,88 & 47,44 & -32,61 & -8,20 & 18,13 & -22,99 & 6,63 \\ 12,08 & -19,13 & 6,25 & -55,16 & 85,59 & -0,60 & 8,03 & 11,21 \\ 71,15 & -38,37 & -75,92 & 29,29 & -16,45 & -23,44 & -4,21 & 15,62 \end{bmatrix}$$

Observemos que los valores de  $U'$  difieren un poco de los valores correspondientes a  $U$ .

Para posteriormente obtener una aproximación de  $B$ ,  $B'$ , aplicando la transformada DCT,  $C$ , en sentido inverso,  $B' = C^T U' C$

$$B' = \begin{bmatrix} -128 & 45 & 71 & 63 & 22 & 32 & 22 & 52 \\ -110 & 39 & 4 & 48 & 41 & 68 & 65 & 13 \\ -115 & 40 & 50 & 152 & 13 & -88 & -4 & 76 \\ -105 & 51 & 43 & 18 & -126 & -99 & 19 & 60 \\ -116 & -24 & 56 & 63 & 33 & 80 & 62 & 28 \\ -67 & -118 & -47 & -24 & 30 & 17 & -12 & 29 \\ -67 & -79 & -60 & -116 & 49 & 69 & 12 & -108 \\ -78 & -69 & -80 & -138 & 63 & 41 & 49 & -67 \end{bmatrix}$$

Observando la diferencia con la matriz original  $B$ , y su consiguiente pérdida de información.

$$D = B' - B = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 5 & 22 & -19 & -11 & -18 & 14 \\ 11 & 10 & -27 & 3 & 6 & 18 & 24 & -11 \\ 7 & 0 & 5 & 47 & -18 & -22 & -22 & -11 \\ -11 & -1 & -1 & -29 & -4 & 23 & 11 & 9 \\ 3 & -1 & 3 & 12 & -12 & 10 & 1 & -14 \\ -3 & 4 & -22 & 2 & -3 & 2 & -18 & 17 \\ 9 & 1 & 4 & 6 & -4 & 5 & -26 & 14 \\ 0 & 5 & 4 & -16 & 6 & -3 & 8 & -14 \end{bmatrix}$$

*El último paso es sumar 127 a cada elemento del bloque. La matriz resultante es una aproximación del bloque original de la imagen original.*

*Bloque resultante*

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 172 & 198 & 190 & 149 & 159 & 149 & 179 \\ 17 & 166 & 131 & 175 & 168 & 195 & 192 & 140 \\ 12 & 167 & 177 & 255 & 140 & 39 & 123 & 203 \\ 22 & 178 & 170 & 145 & 1 & 28 & 146 & 187 \\ 11 & 103 & 183 & 190 & 160 & 207 & 189 & 155 \\ 60 & 9 & 80 & 103 & 157 & 144 & 115 & 156 \\ 60 & 48 & 67 & 11 & 176 & 196 & 139 & 19 \\ 49 & 58 & 47 & 0 & 190 & 168 & 176 & 60 \end{bmatrix}$$

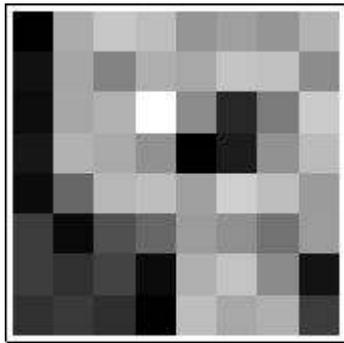


FIGURA 5. Bloque resultante

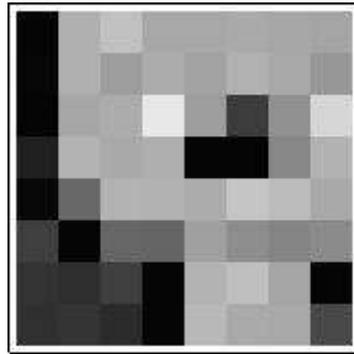


FIGURA 6. Bloque original

*Bloque original*

$$F = \begin{bmatrix} 5 & 176 & 193 & 168 & 168 & 170 & 167 & 165 \\ 6 & 176 & 158 & 172 & 162 & 177 & 168 & 151 \\ 5 & 167 & 172 & 232 & 158 & 61 & 145 & 214 \\ 33 & 179 & 169 & 174 & 5 & 5 & 135 & 178 \\ 8 & 104 & 180 & 178 & 172 & 197 & 188 & 169 \\ 63 & 5 & 102 & 101 & 160 & 142 & 133 & 139 \\ 51 & 47 & 63 & 5 & 180 & 191 & 165 & 5 \\ 49 & 53 & 43 & 5 & 184 & 170 & 168 & 74 \end{bmatrix}$$

#### 4. MÉTODO PROPUESTO

En esta sección expondremos el método de compresión propuesto.

Para fijar ideas, consideraremos que la imagen se representa por una matriz  $512 \times 512$  (ver [DP], [MW]).

Una familia particular de esquemas de asociación son los esquemas de Hamming  $H(n, d)$ , (ver capítulo 1 sección 1.1). Estos generalizan al hipercubo  $H(n, 2) = (X, E)$  que es un grafo que tiene como vértices a  $X = \mathbb{Z}_2^n$ , donde dos vértices  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in X$  son adyacentes si  $|\{i : x_i \neq y_i\}| = 1$ . (Ver [B], [BI]).

Recordemos que el espacio de funciones  $\mathbb{R}^X = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}\}$  se descompone como

$$\mathbb{R}^X = \bigoplus_{j=0}^n V_j$$

donde  $\{V_j\}_{j=0}^n$  son autoespacios de  $A = A_1$ , correspondientes a autovalores distintos.

Ordenamos la descomposición teniendo en cuenta  $\lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_n$ , donde  $\lambda_j$  es el autovalor de  $A$  en el autoespacio  $V_j$ .

Sean  $\Lambda_0 = V_0$ ,  $\Lambda_1 = V_0 \oplus V_1$ ,  $\Lambda_2 = V_0 \oplus V_1 \oplus V_2$ ,  $\dots$ ,  $\Lambda_n = V_0 \oplus V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n$ . Obteniéndose así la filtración:

$$\Lambda_0 \subset \Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \dots \subset \Lambda_n$$

En este caso se observa que un subconjunto de los marcos ajustados obtenidos en [LMP] forman una base ortogonal de autovectores de  $A$ . Esta, forma una matriz ortogonal de orden  $2^n$ ,  $H_n$ , llamada matriz de Hadamard, cuya forma es:

$$H_n = H_1 \otimes H_1 \otimes H_1 \otimes H_1 \otimes \dots \otimes H_1 \otimes H_1.$$

Es decir el producto tensorial de  $H_1$  consigo misma  $n$  veces.

Con

$$H_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

La idea del método es la siguiente:

Dada una matriz correspondiente a una imagen, la subdividimos en submatrices  $2^n \times 2^n$ , que miramos como vectores en  $\mathbb{R}^{4^n}$ . A cada  $v \in \mathbb{R}^{4^n}$ , le aplicamos una matriz  $H$ , en nuestro caso  $Hv$  resultan ser las coordenadas de  $v$  respecto de una base de autovectores correspondientes al operador de adyacencia,  $A$ , del grafo de Hamming. Descartamos la información del vector  $Hv$  correspondientes a los autoespacios asociados a los autovalores de menor valor, obteniendo un vector más chico  $w$ . Los autovalores permiten ordenar la información y la compresión consiste en descartar las coordenadas asociadas a los autovalores más chicos. Los restantes elementos los guardamos en  $w$ . Guardamos  $w$  para luego reconstruir un vector  $\tilde{v} = \tilde{H}w$ , con  $\tilde{H}$  matriz de descompresión que proviene de  $H$ , que será una aproximación de  $v$ . El objetivo es que la diferencia entre  $v$  y  $\tilde{v}$  sea la menor posible visualmente.

Se consideraron diversos métodos para comprimir la imagen.

Uno de ellos consiste en guardar sólo las proyecciones a los primeros autoespacios  $V_0, V_1, \dots, V_j$ , es decir, quedándonos en el nivel de resolución  $\Lambda_j$  y reconstruir la imagen con dicha información de la siguiente manera:

$$\text{Sea } k = \sum_{i=j+1}^{2^n} \binom{2^n}{i}.$$

$$\tilde{H} = (H_n \text{ sin las últimas } k \text{ filas}).$$

La compresión viene dada por:

$$\frac{1}{2^n} \tilde{H}v$$

La reconstrucción de  $v$ , (con pérdida de información), se realiza mediante la fórmula:

$$\frac{1}{2^n} \tilde{H}^T \tilde{H}v$$

**4.1. INICIOS.** El primer método que se implemento era utilizando  $H(2, 2)$ . Tenemos una base ortogonal de autovectores de  $A_1$ .

EJEMPLO 3.11.

$$\mathbb{R}^4 = \underbrace{\langle (1, 1, 1, 1) \rangle}_{\lambda_0=2} \oplus \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} (1, -1, 1, -1) \\ (1, 1, -1, -1) \end{pmatrix} \right\rangle}_{\lambda_1=0} \oplus \underbrace{\langle (1, -1, -1, 1) \rangle}_{\lambda_2=-2}$$

descomposición en autoespacios de:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Con esa base, obtenemos una matriz ortogonal  $2^2 \times 2^2$  que denotaremos  $H_2$ .

$$H_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para una compresión del 25 %,  $k = 1$ , el procedimiento es el siguiente:

Para comprimir guardamos sólo las proyecciones a los primeros autoespacios  $V_0, V_1$  en analogía con la teoría de análisis de componentes principales. Descartando la información correspondiente a la proyección a  $V_2$ .

### COMPRESIÓN

Dada una imagen de tamaño  $512 \times 512$ , dividimos dicha matriz en bloques de tamaño  $2 \times 2$  teniendo en cuenta el siguiente recorrido.

EJEMPLO 3.12.

$a_1$	$b_1$	$a_2$	$b_2$
$c_1$	$d_1$	$c_2$	$d_2$
$a_3$	$b_3$	$a_4$	$b_4$
$c_3$	$d_3$	$c_4$	$d_4$

a cada bloque  $2 \times 2$  lo miramos como un vector en  $\mathbb{R}^4$ .

EJEMPLO 3.13.

$a_1$	$b_1$	$a_2$	$b_2$	$\mapsto$ $v_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1)$ $v_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2)$ $\vdots$
$c_1$	$d_1$	$c_2$	$d_2$	
$a_3$	$b_3$	$a_4$	$b_4$	
$c_3$	$d_3$	$c_4$	$d_4$	

Sea  $v$  un bloque de tamaño  $2 \times 2$ , es decir  $v \in \mathbb{R}^4$ .

EJEMPLO 3.14. *Sea*

$$v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

La compresión viene dada por

$$w = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b+c+d \\ a-b+c-d \\ a+b-c-d \end{bmatrix}$$

y guardar solamente

$$w = \begin{bmatrix} a+b+c+d \\ a-b+c-d \\ a+b-c-d \end{bmatrix}$$

#### DESCOMPRESIÓN

Recuperamos el vector

$$\tilde{v} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a+b+c+d \\ a-b+c-d \\ a+b-c-d \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3a+b+c-d \\ a+3b-c+d \\ a-b+3c+d \\ -a+b+c+3d \end{bmatrix}$$

O bien equivalentemente aplicar directamente  $\frac{1}{4}\tilde{H}^T\tilde{H}$  a  $v$  de la siguiente manera:

#### COMPRESIÓN

$$\frac{1}{4}\tilde{H}^T\tilde{H}v = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3a+b+c-d \\ a+3b-c+d \\ a-b+3c+d \\ -a+b+c+3d \end{bmatrix}$$

Y guardar solamente las tres primeras componentes del vector anterior eliminando la última componente:

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3a+b+c-d \\ a+3b-c+d \\ a-b+3c+d \end{bmatrix}$$

#### DESCOMPRESIÓN

Recuperamos el vector

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3a+b+c-d \\ a+3b-c+d \\ a-b+3c+d \\ -a+b+c+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix}$$

mediante la relación  $w_4 = (-w_1 + w_2 + w_3)$

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3a+b+c-d \\ a+3b-c+d \\ a-b+3c+d \\ -a+b+c+3d \end{bmatrix} \text{ debería estar visualmente "cerca" de } \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

En la práctica:

### 5. PRÁCTICA

En esta sección veremos los resultados del método anteriormente descrito con un ejemplo, mostrando la imagen original, la imagen obtenida, la diferencia entre la imagen original y la obtenida, con su correspondiente histograma.

EJEMPLO 3.15.

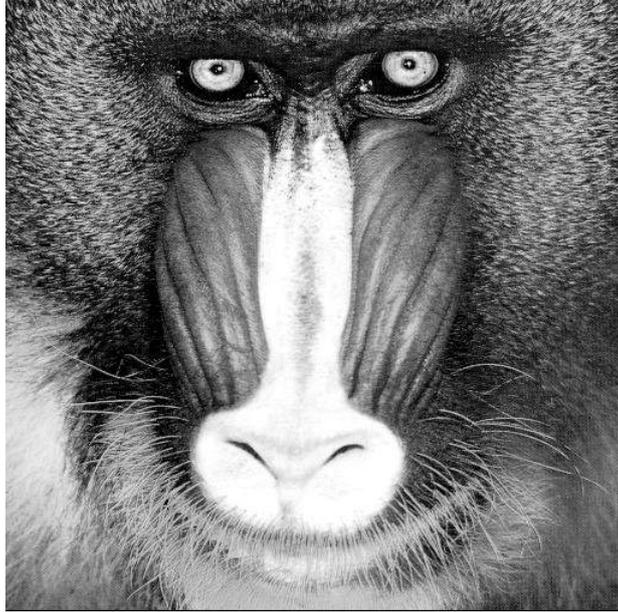


FIGURA 7. Original

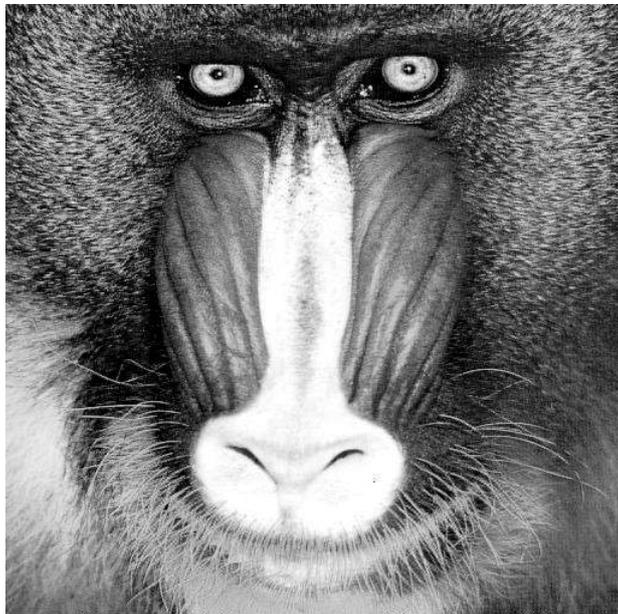
FIGURA 8. Imagen obtenida a partir de la proyección a  $V_0 \oplus V_1$ ,  
(compresión del 25 %)



FIGURA 9. Diferencia

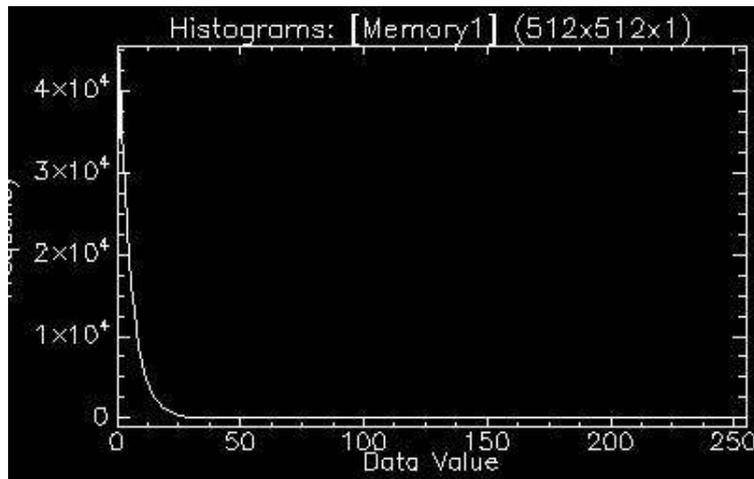


FIGURA 10. Histograma de la diferencia

OBSERVACIÓN 3.16. *Observemos como los pixeles en el histograma se acumulan en el valor cero.*

*Los resultados obtenidos eran buenos visualmente pero la compresión era sólo del 25 % (4:3).*

¿Por qué proyectar a los primeros autoespacios y no a los últimos?

Observemos que pasa si nos quedamos con las proyecciones sobre los últimos autoespacios de  $\frac{1}{4}\tilde{H}^T\tilde{H}v$ , en vez de las proyecciones sobre los primeros autoespacios, es decir eliminar la primera fila en el método aplicado anteriormente.

EJEMPLO 3.17. *Proyección a  $V_1 \oplus V_2$*

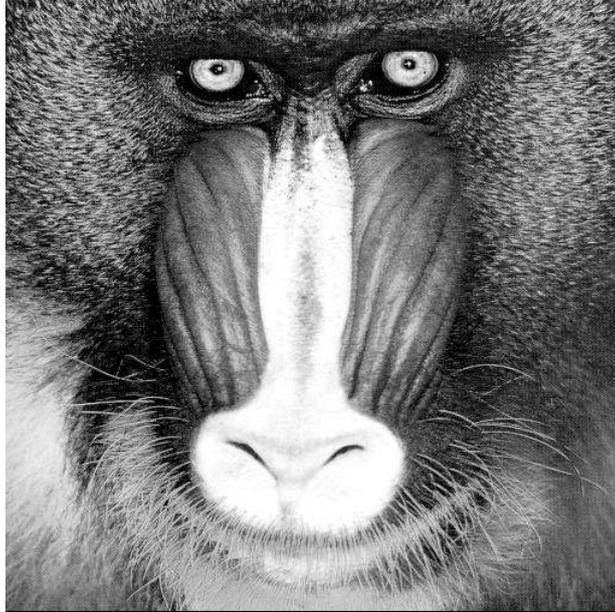


FIGURA 11. Original

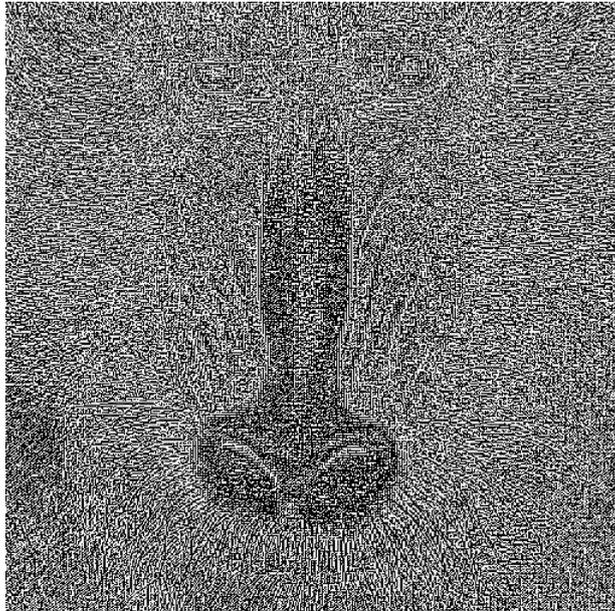


FIGURA 12. Imagen obtenida a partir de la proyección a  $V_1 \oplus V_2$

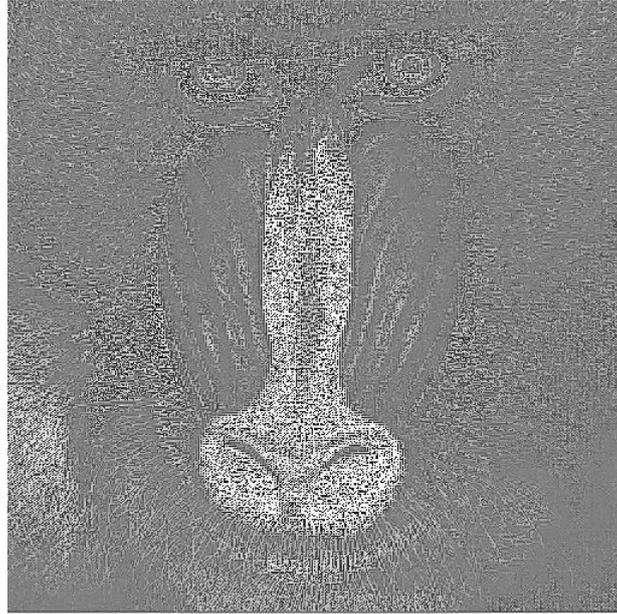


FIGURA 13. Diferencia

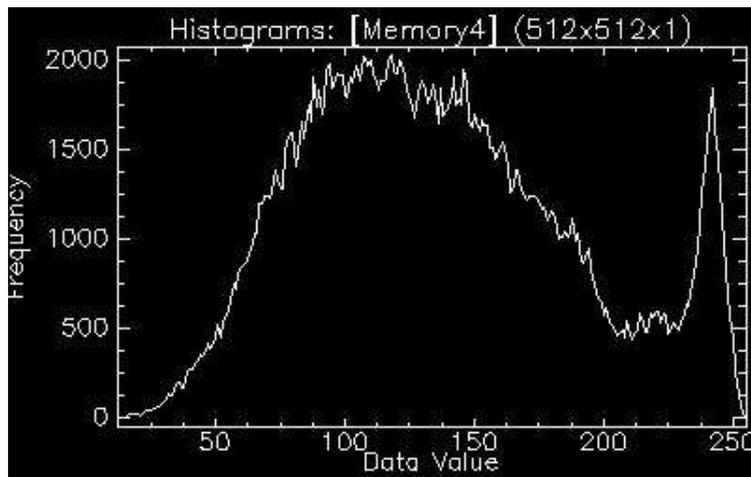


FIGURA 14. Histograma de la diferencia

Como vemos los autoespacios asociados a los autovalores más grande concentran la mayor información de la imagen.

Observemos a continuación que pasa si nos quedamos con las proyecciones sobre el primer autoespacio, sobre uno de los dos autovectores del segundo autoespacio y el último autoespacio de  $\frac{1}{4}\tilde{H}^T\tilde{H}v$ , en vez de las proyecciones sobre los primeros autoespacios, es decir eliminar la tercera fila en el método aplicado anteriormente.

EJEMPLO 3.18. *Proyección a  $V_0 \oplus V_1 \oplus V_2$ , donde  $V_1$  corresponde al espacio formado por uno de los autovectores perteneciente a  $V_1$*

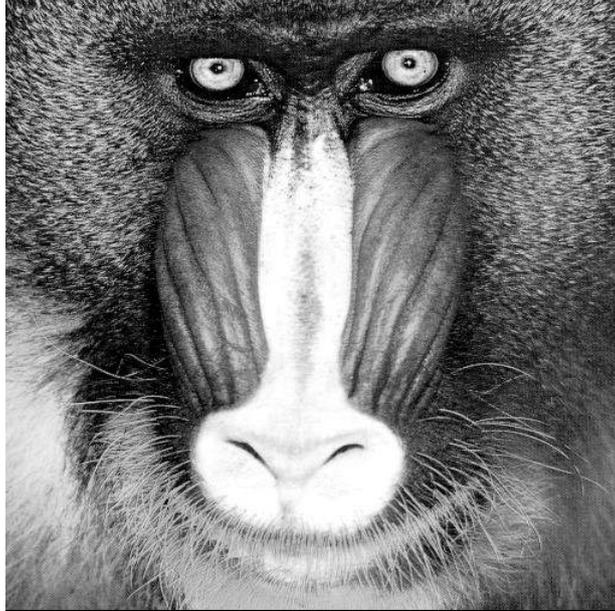


FIGURA 15. Original

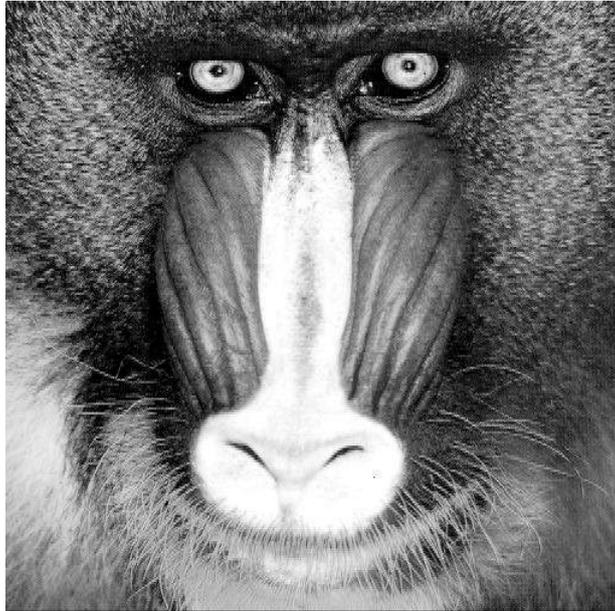


FIGURA 16. Imagen obtenida a partir de la proyección a  $V_0 \oplus V_1 \oplus V_2$

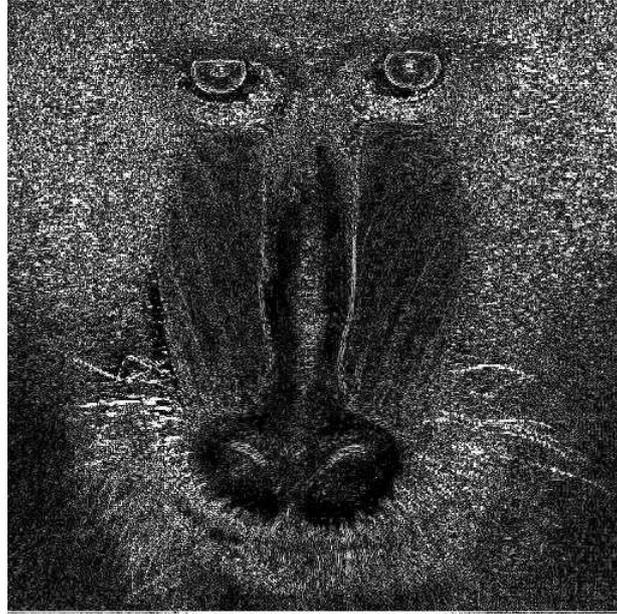


FIGURA 17. Diferencia

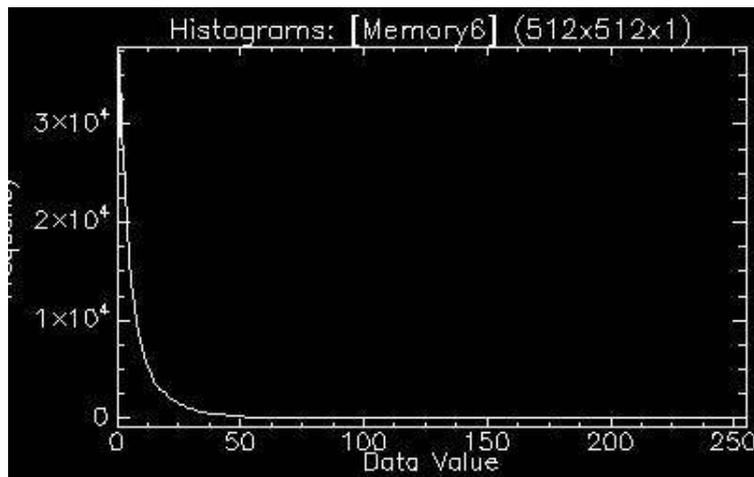


FIGURA 18. Histograma de la diferencia

Y por último observemos a continuación que pasa si nos quedamos con las proyecciones sobre el primer autoespacio, sobre uno de los dos autovectores del segundo autoespacio y el último autoespacio  $\frac{1}{4}\tilde{H}^T\tilde{H}v$ , en vez de las proyecciones sobre los primeros autoespacios, es decir eliminar ahora la segunda fila en el método aplicado anteriormente.

EJEMPLO 3.19. *Proyección a  $V_0 \oplus V_1 \oplus V_2$ , donde  $V_1$  corresponde al espacio formado por el restante autovector perteneciente a  $V_1$*

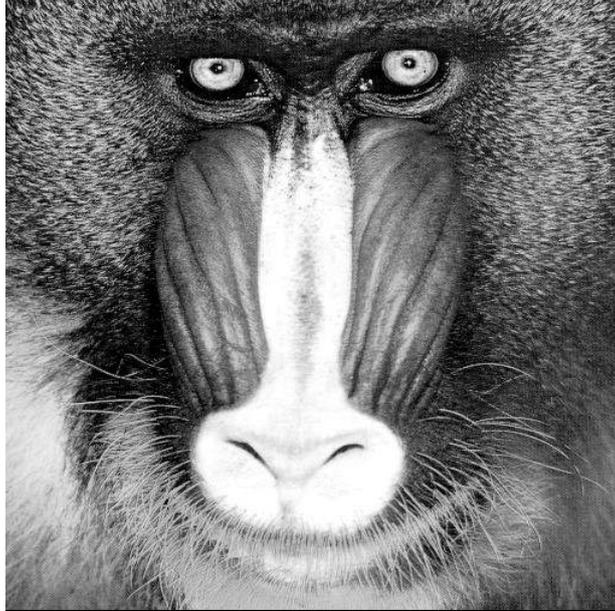


FIGURA 19. Original

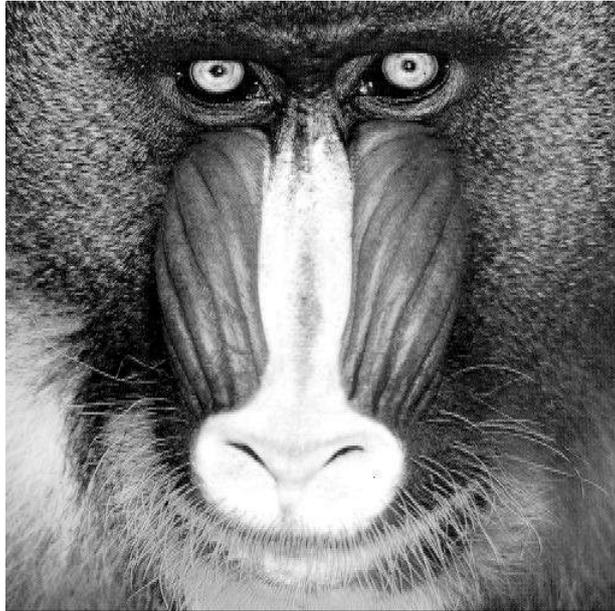


FIGURA 20. Imagen obtenida a partir de la proyección a  $V_0 \oplus V_1 \oplus V_2$

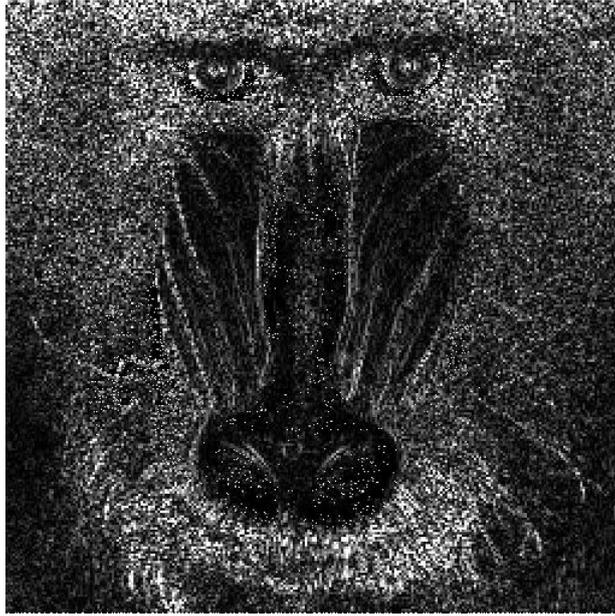


FIGURA 21. Diferencia

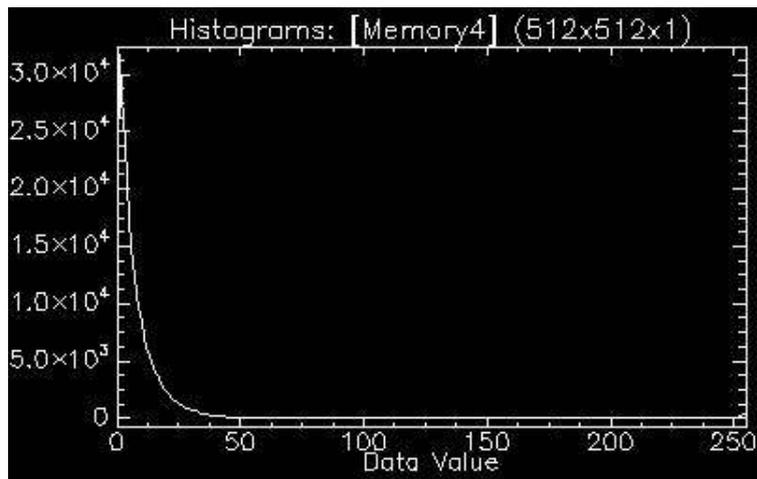


FIGURA 22. Histograma de la diferencia

EJEMPLO 3.20. *Miremos las diversas imágenes resultantes en una misma hoja.*

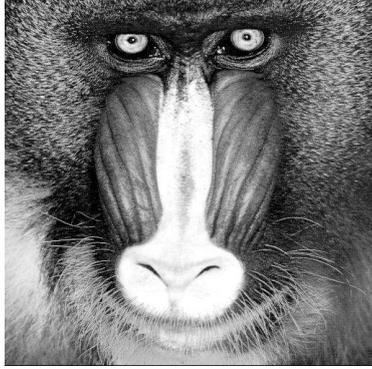


FIGURA 23. Original

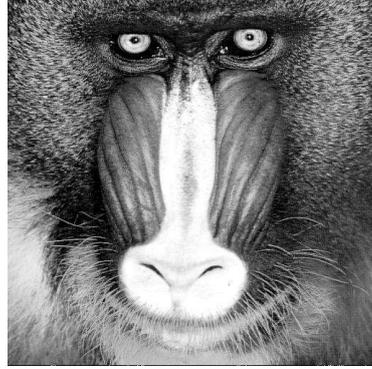


FIGURA 24. Imagen obtenida a partir de la proyección a  $V_0 \oplus V_1$

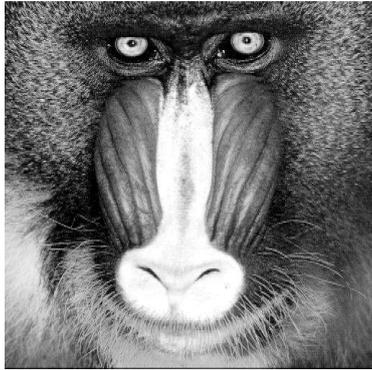


FIGURA 25. Imagen obtenida a partir de la proyección a  $V_0 \oplus V_1 \oplus V_2$ , donde  $V_1$  corresponde al espacio formado por uno de los autovectores pertenecientes a  $V_1$

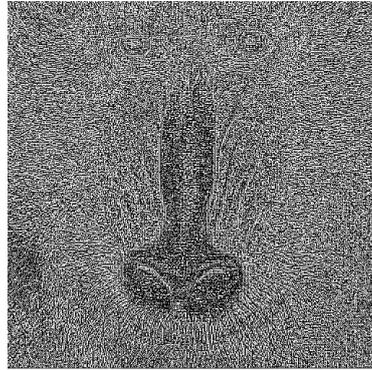


FIGURA 26. Imagen obtenida a partir de la proyección a  $V_1 \oplus V_2$

Como observamos anteriormente la imagen resultante a partir de la proyección de los autoespacios asociados a los autovalores más grandes nos proporciona los mejores resultados visuales. Por lo cual los autoespacios asociados a los autovalores más grande concentran la mayor información de la imagen. Siendo la imagen obtenida a partir de la proyección a  $V_0 \oplus V_1$  la que mejor resultados visuales proporciona.

**5.1. COMPRESIÓN DOBLE.** Este procedimiento lo podemos aplicar dos veces aumentando así el nivel de compresión. Siguiendo con la misma idea del método anterior de la siguiente manera:

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \otimes \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{16} \begin{bmatrix} 9 & 3 & 3 & -3 & 3 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & -1 & -3 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 9 & -3 & 3 & 1 & 3 & -1 & 1 & 1 & 3 & -1 & 1 & -1 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 9 & 3 & 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 & -1 & 1 & -3 & -1 \\ -3 & 3 & 3 & 9 & -1 & 1 & 1 & 3 & -1 & 1 & 1 & 3 & 1 & -1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 9 & 3 & 3 & -3 & -3 & -1 & -1 & 1 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 3 & 9 & -3 & 3 & -1 & -3 & 1 & -1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 3 & -3 & 9 & 3 & -1 & 1 & -3 & -1 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & -3 & 3 & 3 & 9 & 1 & -1 & -1 & -3 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & -3 & -1 & -1 & 1 & 9 & 3 & 3 & -3 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & -1 & -3 & 1 & -1 & 3 & 9 & -3 & 3 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 & -1 & 1 & -3 & -1 & 3 & -3 & 9 & 3 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 1 & -1 & -1 & -3 & -3 & 3 & 3 & 9 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & -1 & 1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 9 & 3 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & 1 & -1 & 1 & 3 & -1 & 1 & 1 & 3 & -1 & 1 & 3 & 9 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & -3 & -1 & 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 & 3 & -3 & 9 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -3 & -1 & 1 & 1 & 3 & -1 & 1 & 1 & 3 & -3 & 3 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

En este caso las filas a eliminar son las 4ª, 8ª, 12ª, 13ª, 14ª, 15ª, 16ª filas de la matriz, asociadas a los autoespacios correspondientes a los autovalores más chicos. Obteniendo una compresión del 44%.

Dichas filas se reconstruyen mediante las siguientes relaciones que se obtienen de observar las filas de la matriz anterior:

$$f_4 = (-f_1 + f_2 + f_3)$$

$$f_8 = (-f_4 + f_5 + f_6)$$

$$f_{12} = (-f_7 + f_8 + f_9)$$

$$f_{13} = (-f_1 + f_4 + f_7)$$

$$f_{14} = (-f_2 + f_5 + f_8)$$

$$f_{15} = (-f_3 + f_6 + f_9)$$

$$f_{16} = (f_{13} + f_{14} + f_{15})$$

**OBSERVACIÓN 3.21.** En este caso cada bloque  $4 \times 4$  lo recorreremos de la siguiente manera, que explicamos a continuación, este recorrido del bloque resulta de comparar los resultados obtenidos de recorrerlos, primero por fila, después por columna, siendo el siguiente el que mejor resultados visuales presenta.

Recorrido alfabético de la imagen

a	b	e	f
c	d	g	h
i	j	m	n
k	l	o	p

OBSERVACIÓN 3.22. Para la primera compresión, de cada bloque de dimensión  $2 \times 2$ , tomamos los píxeles correspondientes a un mismo color como muestra la imagen anterior, y como resultado obtenemos 12 píxeles en vez de los 16 originales. Una representación gráfica de los mismo se presenta a continuación, preservando los colores del bloque original que corresponde, pero con ', al resultado del píxel obtenido al aplicarle la primera compresión.

Primera compresión

$a'$	$b'$	$e'$	$f'$
$c'$		$g'$	
$i'$	$j'$	$m'$	$n'$
$k'$		$o'$	

OBSERVACIÓN 3.23. Para la segunda compresión, de cada bloque de dimensión  $2 \times 2$ , tomamos los píxeles correspondientes a un mismo color como muestra la imagen anterior, notar el espacio vacío debido a la primera compresión. Y como resultado obtenemos 9 píxeles en vez de los 12 píxeles resultantes de la primera compresión. Una representación gráfica de los mismo se presenta a continuación, preservando los colores, pero con ", al resultado del píxel obtenido al aplicarle la segunda compresión.

Segunda compresión

$a''$	$b''$	$e''$	$f''$
$c''$		$g''$	
$i''$	$j''$		
$k''$			

EJEMPLO 3.24. A continuación presentamos un ejemplo con la foto del mandril

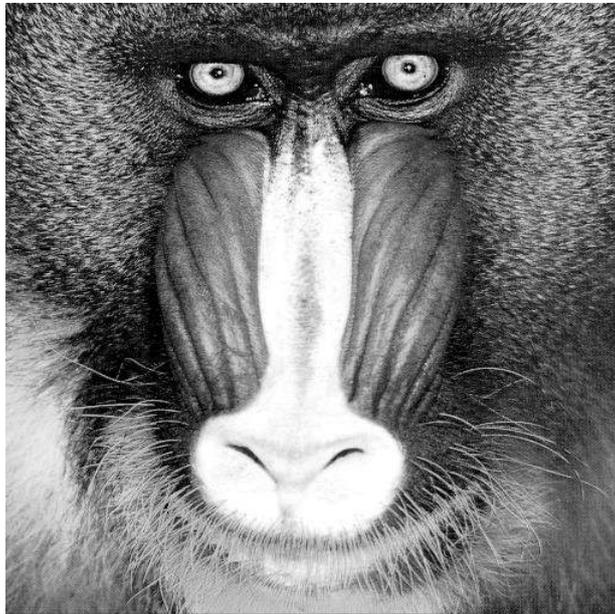


FIGURA 27. Original

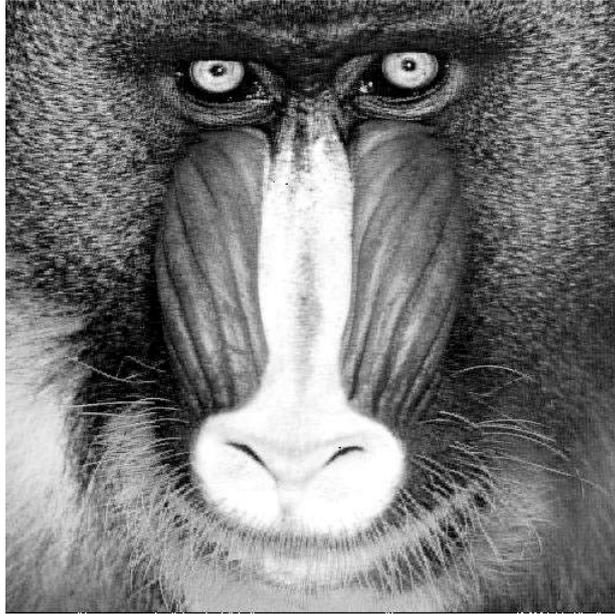


FIGURA 28. Con compresión del 44 %

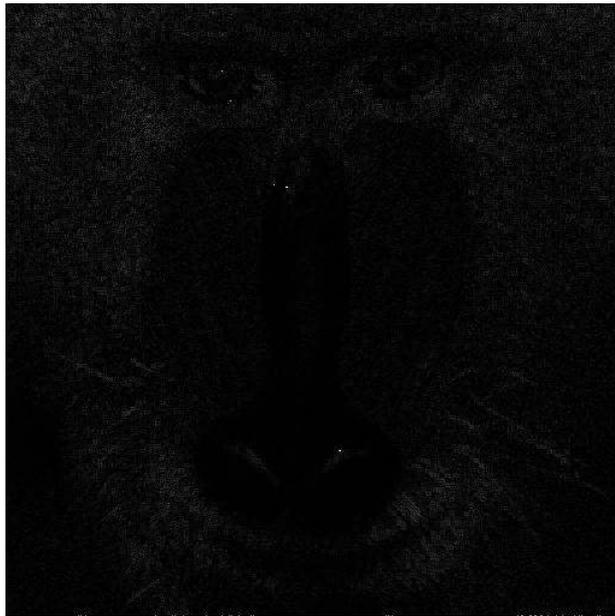


FIGURA 29. Diferencia

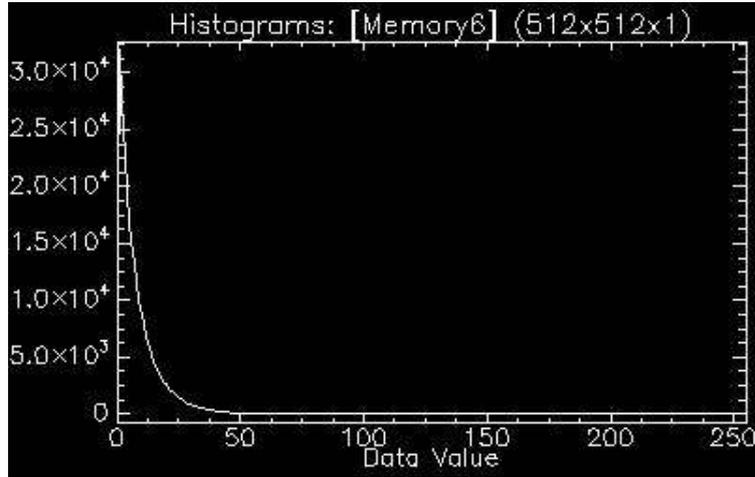


FIGURA 30. Histograma de la diferencia

Como vemos los resultados visuales obtenidos son buenos, y los píxeles en el histograma se acumulan en el cero, pero el nivel de compresión es bajo, con estos resultados obtenidos y probados en diversas imágenes se presenta a continuación el método de compresión propuesto y los diferentes resultados obtenidos con diferentes imágenes.

## 6. H(6,2)

En esta sección ampliaremos nuestro método de compresión anteriormente descrito para el caso  $H(6,2)$ , con una mejoría del mismo aumentando el porcentaje de compresión y los resultados visuales.

Recordemos que  $\Lambda_j = V_0 \oplus V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_j$  y  $\pi_j : \mathbb{R}^{64} \rightarrow \Lambda_j$  las correspondientes proyecciones ortogonales.

En nuestro caso es conveniente dividir la matriz en bloques de submatrices  $8 \times 8$  y comprimir cada uno de estos bloques. Cada bloque será descompuesto como suma de siete matrices. Para esto identificaremos las matrices  $8 \times 8$  con vectores de 64 coordenadas. Estos vectores serán descompuestos como combinación lineal de autovectores de la matriz de adyacencia  $A$  del hipercubo de 64 vértices.

En  $H(6,2)$ ,  $H$  es de tamaño  $64 \times 64$ , que denotaremos  $H_6$ , cuyas columnas son autovectores de  $A = A_6$ .  $H_6$  es la matriz de Hadamard de  $64 \times 64$ .

$$H_6 = H_1 \otimes H_1 \otimes H_1 \otimes H_1 \otimes H_1 \otimes H_1$$

con

$$H_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Recordemos que  $H_6 H_6^T = 64I$ ,  $H_6 = H_6^T$  y cuyas filas son autovectores de  $A$ .  $\mathbb{R}^{64}$  se descompone como:

$$\mathbb{R}^{64} = V_0 \oplus V_1 \oplus \dots \oplus V_6$$

donde  $\{V_j\}_{j=0}^6$  son los autoespacios de  $A$  correspondientes a los autovalores  $\lambda_j = 6 - 2j$  y  $\dim V_j = \binom{6}{j}$ , (ver [B], [BI]).

Dado un bloque  $v \in \mathbb{R}^{64}$ , el vector  $\frac{1}{64}H_6 v$  contiene las coordenadas de  $v$  en la base de autovectores. Uno de los métodos para comprimir consiste en guardar sólo las proyecciones a los autoespacios de mayor autovalor.

Sea:

$$(1) \quad k = \sum_{j=i+1}^6 \binom{6}{j}$$

$$(2) \quad \tilde{H}_6 = (H_6 \text{ sin las } k \text{ filas correspondientes a } V_{i+1}, \dots, V_6)$$

Como en la sección 1, la compresión viene dada por:  $w = \tilde{H}_6 v$  y la reconstrucción de  $v$ , (con pérdida de información), se realiza mediante la fórmula:  $\tilde{v} = \frac{1}{64} \tilde{H}_6^T \tilde{H}_6 v$

Con este método se logra obtener una compresión de 3:2 de la imagen original, pero con una variación del mismo se logra compresiones de 5:1 con escasa pérdida de la calidad visual en un tamaño de 8".

En el caso de  $H(6,2)$  proyectar a  $V_0$  y  $V_1$  nos da una compresión del 89%, (10:1), pero los resultados visuales no son buenos. Agregando proyecciones a  $V_2$  la compresión se reduce a sólo 65%, (64:22), y los resultados siguen sin ser del todo satisfactorios visualmente. Agregando proyecciones a  $V_3$  los resultados visuales eran buenos pero con una compresión de sólo 33% (64:42). Se consideró la siguiente alternativa:

**6.1. MEJORAMIENTO.** Para cada  $j = 1, 2, 3, 6$  proyectamos  $v$  a  $\Lambda_j$  y realizamos una medición de "energía" de la misma y nos quedamos con el primer  $j$  para el cual la energía pasa un cierto número  $c$  cercano a 1 al que llamaremos *umbral*. Concretamente verificamos si:

$$\|\pi_j v\|^2 > c \|v\|^2$$

Dado el  $j$  “correcto” como se explico antes, sea  $k = \sum_{i=j+1}^6 \binom{6}{i}$ . Tomamos  $\tilde{H}_{6,j} = (H_6$  sin las  $k$  filas correspondientes a los autoespacios  $V_{j+1}, \dots, V_6$ ). La compresión de cada vector  $v$  viene dada por:

$$w = \tilde{H}_{6,j} v$$

Guardamos  $w$  y  $j$ . La reconstrucción de  $v$ , (con pérdida de información), se realiza mediante la fórmula:

$$\tilde{v} = \frac{1}{64} \tilde{H}_{6,j}^T w$$

**OBSERVACIÓN 3.25.** *Las imágenes de ejemplo en la parte práctica que se muestran en este trabajo, son una selección, según sus contraste o intensidad, de un banco de imágenes al cual se les aplico el método propuesto, el cual determino resultados similares resumidos en los ejemplos citados, siendo las imágenes de Lena y el Mandril unas de las más utilizadas para medir la compresión de imágenes, debido a su variación de intensidad y detalles.*

*El criterio utilizado para la elección del umbral o energía  $c$ ,  $c = 0,96, c = 0,99, c = 0,999$ , fue tomar aquellos que producen mejores resultados en la práctica. Dado un umbral  $c$ , la correspondiente distribución de los bloques entre los distintos  $\Lambda_j$  contienen la información sobre el nivel de compresión y su calidad visual de la imagen. Donde los umbrales con mejores resultados obtenidos eran tales que su distribución de la cantidad de bloques a  $\Lambda_1$  rondara entre el 70 y el 60 por ciento del total, la cantidad de bloques a  $\Lambda_2$  sea menor a un tercio de los distribuidos en  $\Lambda_1$ , y la cantidad de bloques en  $\Lambda_6$ , no supere los 100.*

**6.2. RESULTADOS.** Para analizar los resultados se consideraron distintas imágenes y se cálculo el error cuadrático medio (ECM) de la imagen reconstruida con su original. El histograma de la diferencia de estas imágenes muestra una gran concentración alrededor del 0. También se analizo los resultados con las siguientes métricas:

**DEFINICIÓN 3.26.** *Signal to noise ratio (SNR) dada por la fórmula (ver [DD]):*

$$SNR(f, g) = \left( \frac{\sum_{x \in X} g(x)^2}{\sum_{x \in X} (f(x) - g(x))^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

*donde  $f$  es la imagen original y  $g$  es la imagen obtenida. Esta métrica es muy conocida en el área de compresión de imágenes, mide la cantidad de ruido obtenido entre la imagen original y la imagen obtenida. Esta métrica tiene sentido siempre que sea mayor a 1, obteniendo mejores resultados mientras mayor sea la misma.*

**DEFINICIÓN 3.27.** *Peak signal to noise ratio (PSNR) dada por la fórmula (ver [CSV]):*

$$PSNR(f, g) = 10 \log_{10} \frac{255^2}{ECM(f, g)}$$

*una medida de que tan buena es la reconstrucción, el cual es en dB. Mientras más grande la PSNR, mejor la calidad de reconstrucción. ( $\infty$  es reconstrucción sin pérdida). Valores usuales en compresión de imágenes están entre 30dB y 50dB.*

DEFINICIÓN 3.28. *Normalized Cross correlation (NCC) dada por la fórmula (ver [CSV]):*

$$NCC(f, g) = \frac{\sum_{x \in X} (f(x) - \tilde{f})(g(x) - \tilde{g})}{\sqrt{[\sum_{x \in X} (f(x) - \tilde{f})^2] [\sum_{x \in X} (g(x) - \tilde{g})^2]}}$$

donde  $\tilde{f}$  y  $\tilde{g}$  representan el valor promedio de la imagen original y de la imagen obtenida respectivamente.

El software utilizado en este trabajo es ENVI 4.3 con una base de datos de imágenes con distintos contrastes de grises.

Los resultados dependen de la constante  $c$  que se elija y de la figura a comprimir. A continuación se muestra una tabla con la tasa de compresión obtenida para diferentes imágenes y distintos valores de  $c$ , donde los datos con color rojo son los resultados con el  $c$  más chico entre los tres considerados para el cual el resultado obtenido sigue siendo visualmente bueno.

$c$	0,999	0,99	0,96
Lena	5 : 2	5 : 1	8 : 1
Mandrill	7 : 6	2 : 1	4 : 1
Pizarra	4 : 1	7 : 1	8 : 1
PC	6 : 2	5 : 1	8 : 1
Eclipse	8 : 1	9 : 1	9 : 1

EJEMPLO 3.29. *Resultados visuales obtenidos con la imagen de Lena con un umbral  $c = 0,99$*



FIGURA 31. Original



FIGURA 32. Imagen obtenida con una compresión de 5 a 1 con un umbral  $c = 0,99$

donde la distribución de los bloques a las correspondientes proyecciones  $\Lambda_j$ , (con ese  $c$ ), son las siguientes:

$\Lambda_j$	$\Lambda_1$	$\Lambda_2$	$\Lambda_3$	$\Lambda_6$
Lena	3180	520	313	83

obteniendo una compresión de los  $4096 \times 64 = 262144$  bytes originales a:

$3180 \times 7 + 520 \times 22 + 313 \times 42 + 83 \times 64 = 52158$  bytes. ( $\frac{262144}{52158} = 5,03$  aproximadamente 5 a 1).

EJEMPLO 3.30. Resultados visuales obtenidos con la imagen del Mandril con un umbral  $c = 0,96$

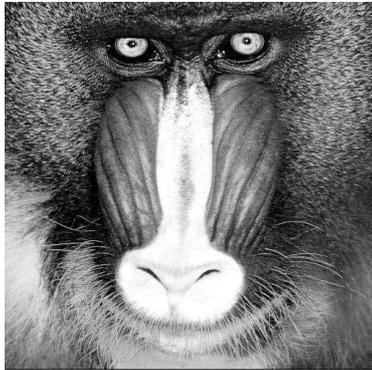


FIGURA 33. Original

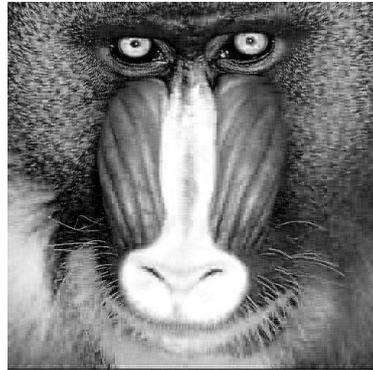


FIGURA 34. Imagen obtenida con una compresión de 4 a 1 con un umbral  $c = 0,96$

donde la distribución de los bloques a las correspondientes proyecciones  $\Lambda_j$ , (con ese  $c$ ), son las siguientes:

$\Lambda_j$	$\Lambda_1$	$\Lambda_2$	$\Lambda_3$	$\Lambda_6$
Mandrill	2691	769	565	71

obteniendo una compresión de los  $4096 \times 64 = 262144$  bytes originales a:

$2691 \times 7 + 769 \times 22 + 565 \times 42 + 71 \times 64 = 64029$  bytes. ( $\frac{262144}{64029} = 4,09$  aproximadamente 4 a 1).

Los resultados de los correspondientes ECM para los distintos  $c$  son

$c$	0,999	0,99	0,96
Lena	0,00428867	0,009	0,0150708
Mandrill	0,00384834	0,0158876	0,031
Pizarra	0,004	0,00935865	0,0142134
PC	0,00352576	0,0105751	0,0179216
Eclipse	0,000646960	0,00321923	0,00545430

Los resultados de los correspondientes SNR para los distintos  $c$  son

$c$	0,999	0,99	0,96
Lena	45,7450	20,0231	13,1987
Mandrill	41,3444	10,4609	5,8656
Pizarra	47,5777	19,7902	13,0883
PC	6,08999	2,03788	1,31431
Eclipse	360,373	72,4049	42,7384

Los resultados de los correspondientes PSNR para los distintos  $c$  son

$c$	0,999	0,99	0,96
Lena	41,2989	20,7488	30,3827
Mandrill	42,2399	29,9242	29,1284
Pizarra	38,4096	34,5211	30,8914
PC	43,0004	33,4597	28,8779
Eclipse	57,7279	43,7904	39,2106

Los resultados de los correspondientes NCC para los distintos  $c$  son

$c$	0,999	0,99	0,96
Lena	0,998941	0,999331	0,986472
Mandrill	0,999374	0,989220	0,967854
Pizarra	0,996655	0,992961	0,983637
PC	0,999824	0,998386	0,995350
Eclipse	0,999944	0,998595	0,995959

## 7. RESULTADOS VISUALES

En esta sección pondremos la imagen original y la resultante obtenida mediante el procedimiento anterior, con el correspondiente  $c$ , que nos da un mejor resultado tanto visual y en compresión. El tamaño de las imágenes para lograr apreciar finamente las diferencias entre la imagen original y la resultante en el papel, es mayor al de las imágenes originales que recordemos su visualización es en 8". Lo cual pixela levemente los resultados visuales. Pero en un tamaño menor es muy difícil percibir las diferencias visuales y lograr ver los resultados obtenidos visualmente.

Recordemos la siguiente tabla:

$c$	0,999	0,99	0,96
Lena	5 : 2	5 : 1	8 : 1
Mandrill	7 : 6	2 : 1	4 : 1
Pizarra	4 : 1	7 : 1	8 : 1
PC	6 : 2	5 : 1	8 : 1
Eclipse	8 : 1	9 : 1	9 : 1

EJEMPLO 3.31. *Figura: Lena,  $c = 0,99$ , compresión de (5 : 1)*



FIGURA 35. Original



FIGURA 36. Imagen resultante

EJEMPLO 3.32. *Figura: Mandríl,  $c = 0,96$ , compresión de (4 : 1)*

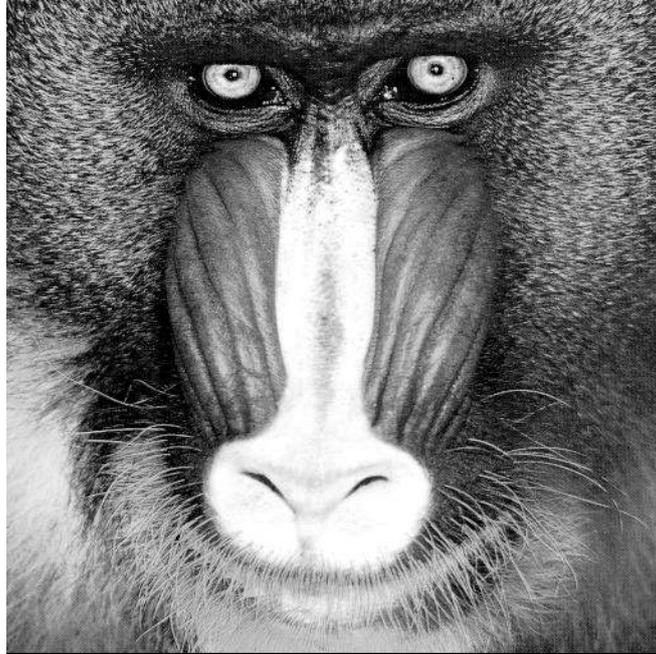


FIGURA 37. Original

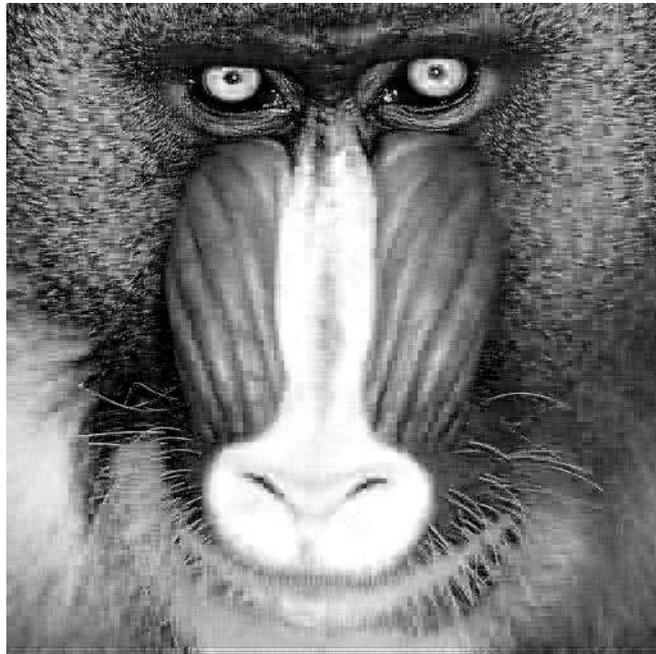


FIGURA 38. Imagen resultante

EJEMPLO 3.33. *Figura: Pizarra,  $c = 0,999$ , compresión de (4 : 1)*

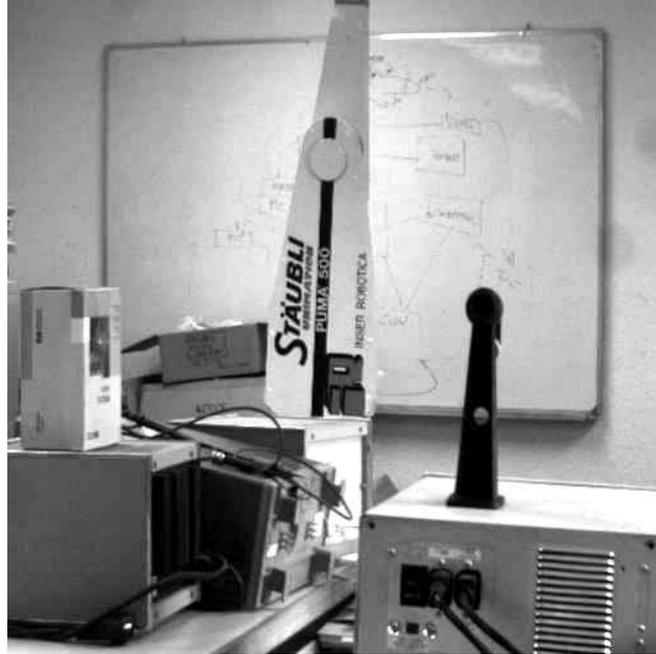


FIGURA 39. Original

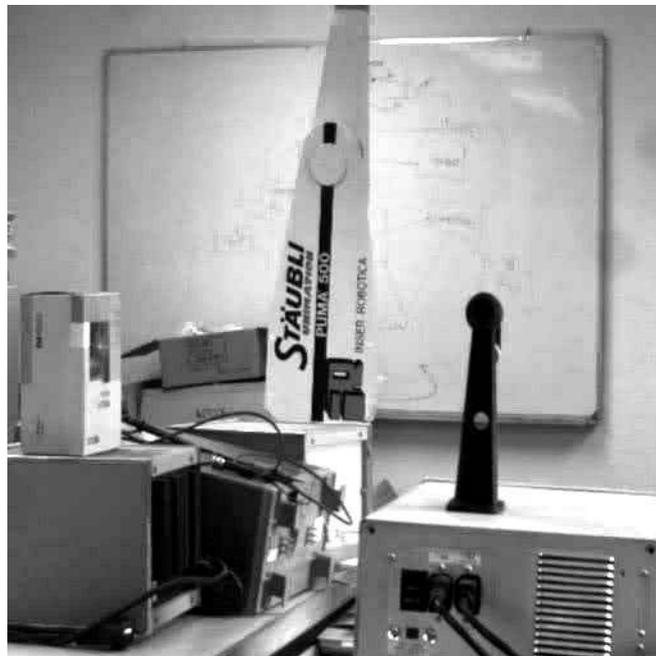


FIGURA 40. Imagen resultante

EJEMPLO 3.34. *Figura: Pc,  $c = 0,99$ , compresión de (5 : 1)*



FIGURA 41. Original



FIGURA 42. Imagen resultante

EJEMPLO 3.35. *Figura: Eclipse,  $c = 0,999$ , compresión de (8 : 1)*

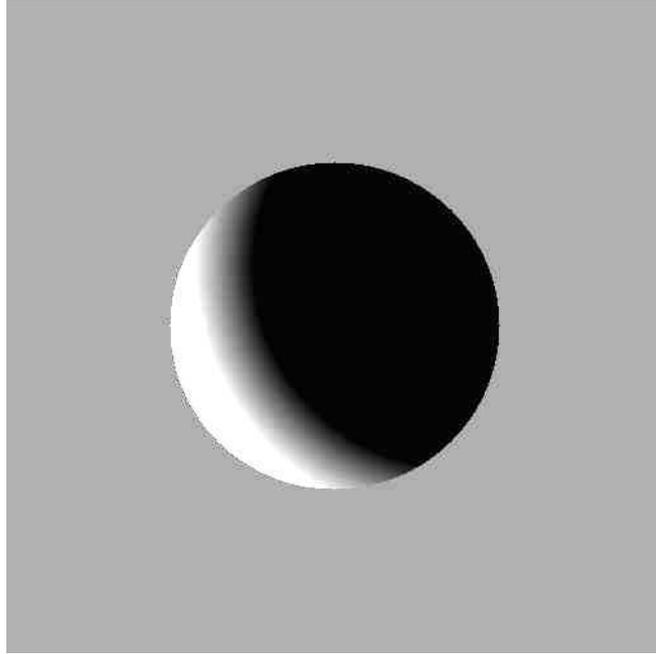


FIGURA 43. Original

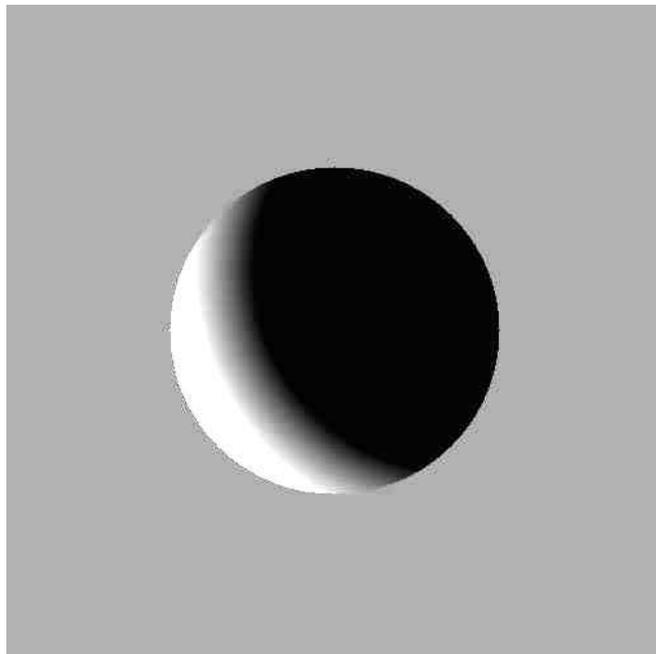


FIGURA 44. Imagen resultante

## 8. DE LA TEORÍA A LA PRÁCTICA

En esta sección se mostrarán los resultados obtenidos de un trabajo en desarrollo por Daniel Penazzi y Mauro Schilman, quienes siguiendo la teoría desarrollada anteriormente, implementaron dichos códigos en C, con la modificación que ellos eliminan las filas convertidas en cero en el archivo comprimido a guardar y además zipearon el resultado obtenido, donde se puede observar que los niveles de compresión teóricos y las métricas de medición, del método propuesto, en la práctica son del orden anteriormente mostrado, para el caso del ejemplo de Lena y el Mandril, es decir que los resultados teóricos obtenidos anteriormente concuerdan con los resultados prácticos. Ellos demostraron que se puede bajar aún más el nivel de compresión.

El algoritmo denominado (a2) es el presentado en 5.1, el algoritmo (a4) es el presentado en 4.1 y el algoritmo (a64c99) es el presentado en 6.1, utilizando  $c = 0,99$ .

Los resultados obtenidos en el trabajo en desarrollo por Daniel Penazzi y Mauro Schilman son los siguientes:

De los diversos algoritmos que ellos probaron, se muestran los resultados de tres. Un algoritmo de compresión simple, (a4), usando una matriz  $4 \times 4$ , uno doble, (a2), que usa esa matriz dos veces (equivalente a usar una matriz  $16 \times 16$ ) y finalmente el a64c99 que utiliza una matriz  $64 \times 64$  con constante  $c = 0,99$ , todos con la transformación lineal  $H$  descrita anteriormente. Como con todos los algoritmos de compresión se usa luego un algoritmo extra de compresión sin pérdida. Ellos comparan la compresión obtenida aplicando gzip y bzip ya sea a la imagen resultante como a la original. En la tabla de abajo, los porcentajes corresponden al porcentaje de compresión (más alto, mejor. Un archivo comprimido al 90% es un 10% del original). La unidad de medida abajo es KB, salvo en la medición de los PSNR (Peak Signal to Noise Ratio, una medida de que tan buena es la reconstrucción) el cual es en dB. Mientras más grande la PSNR, mejor la calidad de reconstrucción. ( $\infty$  es reconstrucción sin pérdida). Valores usuales en compresión de imágenes están entre 30dB y 50dB. Como la compresión con gzip o bzip2 es sin pérdida, esa parte no afecta la PSNR, así que el resultado de usar uno u otro es indistinto, solo se lista uno de ellos para PSNR.

Imágenes  $512 \times 512$  píxeles, tamaño del original: 257 KB

<i>Imagen</i>	<i>gzip</i>	<i>a4gzip</i>	<i>a2gzip</i>	<i>a64gzip</i>
<i>Lena</i>	219	109	53	38
	14,8 %	57,6 %	79,4 %	85,3 %
<i>Mandril</i>	233	139	83	57
	9,4 %	46,0 %	67,8 %	77,9 %
<i>Imagen</i>	<i>bzip2</i>	<i>a4bzip2</i>	<i>a2bzip2</i>	<i>a64bzip2</i>
<i>Lena</i>	171	88	45	31
	33,5 %	65,8 %	82,5 %	88,0 %
	<i>PSNR :</i>	<i>35,23dB</i>	<i>33,54dB</i>	<i>34,53dB</i>
<i>Mandril</i>	213	121	77	77
	17,2 %	53,0 %	70,1 %	70,1 %
	<i>PSNR :</i>	<i>29,24dB</i>	<i>26,39dB</i>	<i>30,74dB</i>



## COMPONENTES PRINCIPALES

### 1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo presentamos los algoritmos y las cotas que reducen las obtenidas en el trabajo [DR].

El problema general consiste en minimizar las operaciones requeridas para calcular a partir de una señal  $f$  su proyección ortogonal a un subespacio  $V_i$  de  $L(X)$ . Esta proyección se denota por  $\Pi_{V_i}f$ .

Como motivación del cálculo de componentes principales en [DR] ponen el ejemplo de los juegos de lotería del estado. Cuando ningún jugador acierta los números sorteados, el premio no repartido se acumula con el del siguiente juego, lo cual incrementa el número de jugadores y sus apuestas. Los jugadores a su vez están interesados en números pocos elegidos para no compartir el premio. Por lo cual el estado está interesado en las elecciones de los jugadores, para poder predecir correctamente la proyección fiscal. El número de ganancias o refinanciamiento debe ser previsto. Por ejemplo en el caso del Quini 6, este consiste en elegir un subconjunto de 6 números al azar del conjunto  $\{0, 1, 2, \dots, 45\}$ . Sea  $f : X_{\binom{46}{6}} \rightarrow R$ , el valor  $f(s)$  es el número de personas que eligen el subconjunto  $s$ . Un análisis de  $f(s)$  puede determinar la popularidad de los números individuales. Es decir midiendo el promedio:

$$\bar{f}(i) = \sum_{i \in s} f(s).$$

Luego uno puede medir la popularidad de los pares, triples, etc. Los diversos subespacios invariantes anteriormente mencionados miden naturalmente la contribución de los diferentes subconjuntos de  $j$  elementos. Es en esta parte donde el cálculo de las componentes principales, o la proyección de  $f$  en los diferentes subespacios invariantes cobra interés.

En dicho trabajo, [DR], se proponen dos métodos para calcular las proyecciones de una señal  $f \in L(X)$ :

En un método usan la transformada de Radon, denotada por  $R$ . Utilizando la propiedad que para el método propuesto la transformada  $R$  es inyectiva, denotan su transformada inversa a izquierda,  $R^-$ .  $R$  matricialmente es de dimensión  $\binom{n}{k} \times \binom{n}{j}$ , y por consiguiente  $R^-$  de dimensión  $\binom{n}{j} \times \binom{n}{k}$ , donde  $0 < j \leq k$ . En lema 3.1, (ver lema 3.1 [DR]), prueban que  $\Pi = RR^-$  es la proyección al subespacio isotópico de dimensión  $j$ ,  $M^j$ , y variando  $j = 0, \dots, k$ , calculan la proyección a los diferentes subespacios. Estableciendo la siguiente cota, teorema 3.1:

**TEOREMA 4.1.** (*Th 3.1 [DR]*): *Calcular las proyecciones de un elemento arbitrario de  $M^k$  en cada uno de los  $k + 1$  subespacios isotópicos mediante la transformada de Radon requiere un costo inicial de a lo sumo  $O(k^2 \binom{n}{k}^2 \log k)$  operaciones y un adicional de  $k \binom{n}{k}^2$  operaciones.*

En nuestro algoritmo, aprovechando la gran cantidad de ceros que presenta la transformada  $R$  y por la propiedad de los marcos ajustados finitos, se reduce esa cota a:

**TEOREMA 4.2.** *Calcular todas las proyecciones  $\Pi_{V_i} f$  en todas las hojas requiere un costo inicial de a lo sumo  $\sum_{l=1}^k (n-l) \binom{n}{l-1}$  sumas y un adicional de  $\binom{n}{k} (3^k - 2^k)$  sumas y  $\binom{n}{k} ((k-2)2^{k-1} + 2k - 1)$  multiplicaciones.*

En el otro método utilizando la teoría de representaciones y por medio de funciones esféricas, establecen la siguiente cota, teorema 2.6:

**TEOREMA 4.3.** *(Th 2.6 [DR]): Todas las proyecciones isotópicas de  $M^{(n-k,k)}$  pueden calcularse usando a lo sumo  $\binom{n}{k}^2$  sumas más un adicional de  $O(\binom{n}{k} k \log^2 k)$  operaciones.*

Nuestro algoritmo presentado en esta sección es una variante del primer algoritmo, en donde se reduce esa cota a:

**TEOREMA 4.4.** *Calcular todas las proyecciones  $\Pi_{V_i} f$  en todas las hojas requiere un costo inicial de a lo sumo  $\sum_{l=1}^k (n-l) \binom{n}{l-1}$  sumas y un adicional de a lo sumo  $\sum_{r=1}^k \binom{n}{r} (2^r - 1)$  sumas y  $(\sum_{r=1}^{k-1} \binom{n}{r} (r-1)) + k - 1 + \binom{n}{k} 2(k-1)$  multiplicaciones.*

**OBSERVACIÓN 4.5.** *En el trabajo [DR] se considera una operación a una multiplicación más una suma. Mientras que en este trabajo se considera por separado las sumas y multiplicaciones necesarias que requieren nuestros algoritmos.*

*En [DR] los resultados de las cotas presentadas están expresadas en formato orden computacional de un algoritmo,  $O()$ , lo que conlleva oculta una constante, la cual es igual a uno, mientras que las cotas presentadas en nuestros algoritmos cuentan, como se aclaró anteriormente, por separados las sumas y multiplicaciones, sin hablar de orden computacional. Pero al ser la constante igual a uno dichas cotas pueden ser comparadas.*

## 2. DESARROLLO

A continuación se desarrollará la teoría y se contarán las operaciones necesarias de los algoritmos propuestos.

De ahora en más sea  $X$  el conjunto de todos los subconjunto de  $k$  elementos del conjunto  $\Omega = \{1, \dots, n\}$ .

Comenzaremos definiendo las funciones  $e_s : X \rightarrow \{0, 1\}$ , con  $|s| = 0, 1, \dots, k$ .

**DEFINICIÓN 4.6.** *Sea  $x \in X$*

$$e_s(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } s \subset x \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

donde  $e_{\{\emptyset\}} = \delta$ , con  $\delta(x) = 1 \forall x \in X$ .

**LEMA 4.7.**

$$\{e_s\}_{|s|=i} \text{ es base de } \Lambda_i = V_0 \oplus V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_i$$

donde  $s \in X_{\binom{n}{i}} = \{s : s \subset \Omega \text{ tal que } |s| = i\}$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Al ser  $R$  inyectiva, nos da un isomorfismo con su imagen, es decir un isomorfismo entre  $L(X_{\binom{n}{i}})$  y  $\Lambda_i$ , (ver capítulo 1 sección 3). Las funciones

$e_{\{s\}}$ ,  $|s| = i$ , son base en  $L(X_{(i)}^{(n)})$  y a través de  $R$  corresponden a bases en  $\Lambda_i$ , pues sea  $x \in X$  una hoja,

$$e_{\{s\}} \in L(X_{(i)}^{(n)}) \text{ y } e_s \in L(X_{(k)}^{(n)})$$

$$Re_{\{s\}}(x) = \sum_{\{r\} \subset x} e_{\{s\}}(\{r\}) = \begin{cases} 1 & \text{si } s \subset x \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Por lo tanto

$$Re_{\{s\}} = e_s$$

□

DEFINICIÓN 4.8.

Denotamos por  $\check{e}_s$  a la proyección ortogonal de  $e_s$  a  $V_i$ , con  $|s| = i$ .

LEMA 4.9.

$$\sum_s e_s = \binom{k}{|s|} \delta$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $x \in X$

$$e_s(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } s \subset x \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

⇒

$$\sum_s \check{e}_s = \binom{k}{|s|} \delta$$

□

COROLARIO 4.10.

$$\sum_s \check{e}_s = 0$$

con  $|s| = i > 0$ .

TEOREMA 4.11. (Ver th 5.4 [LMP]).

$\{\check{e}_s\}_{e_s \in \Lambda_i}$  es un marco ajustado finito de  $V_i$ .

Por lo tanto la proyección de una señal  $f$  a  $V_i$ ,  $\Pi_{V_i} f$ , se calcula (ver capítulo 1 sección 4 def. 1.18):

$$\Pi_{V_i} f = c_i \sum \langle f, \check{e}_s \rangle \check{e}_s$$

NOTACIÓN 4.12.

$$[\langle e_s, e_t \rangle] = \begin{bmatrix} \langle e_{s_1}, e_{t_1} \rangle & \langle e_{s_1}, e_{t_2} \rangle & \dots & \langle e_{s_1}, e_{s_{(|t|)}^{(n)}} \rangle \\ \langle e_{s_2}, e_{t_1} \rangle & \langle e_{s_2}, e_{t_2} \rangle & \dots & \langle e_{s_2}, e_{s_{(|t|)}^{(n)}} \rangle \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \langle e_{s_{(|s|)}}, e_{t_1} \rangle & \langle e_{s_{(|s|)}}, e_{t_2} \rangle & \dots & \langle e_{s_{(|s|)}}, e_{s_{(|t|)}^{(n)}} \rangle \end{bmatrix}$$

con  $|s| = |s_i| = |t_j| = |t| = l$ ;  $i, j = 1, 2, \dots, \binom{n}{|s|}$ .

De ahora en más  $\square$  representará una matriz o vector según corresponda.

LEMA 4.13.

$$\Pi_{V_i} f = c_i \sum \langle f, \check{e}_s \rangle \check{e}_s = c_i \sum \langle f, e_s \rangle \check{e}_s = c_i \sum \langle f, \check{e}_s \rangle e_s \text{ con } |i| = 0, 1, \dots, k-1.$$

DEMOSTRACIÓN. Veamos primero que se cumple

$$\sum_s \langle f, \check{e}_s \rangle e_s = \sum_s \langle f, e_s \rangle \check{e}_s$$

Pero:

$$\sum_s \langle f, \check{e}_s \rangle e_s = \sum_s \langle f, e_s \rangle \check{e}_s$$

si y solo si

$$\sum_s \langle f, \check{e}_s \rangle \langle e_s, e_u \rangle = \sum_s \langle f, e_s \rangle \langle \check{e}_s, e_u \rangle \forall u, |u| = |s|$$

si y solo si

$$\sum_s \langle e_t, \check{e}_s \rangle \langle e_s, e_u \rangle = \sum_s \langle e_t, e_s \rangle \langle \check{e}_s, e_u \rangle \forall u, |u| = |s| = |t|$$

si y solo si

$$\tilde{A}A = A\tilde{A}$$

donde  $\tilde{A} = [\langle e_t, \check{e}_s \rangle]$  y  $A = [\langle e_s, e_u \rangle]$ .

Lo cual es cierto pues  $\tilde{A}$  y  $A$  están en la Bose-Mesner, (ver capítulo 1 sección 1), por depender solo de la distancia, (intersección), entre  $s$ ,  $t$  y  $u$ .

Veamos ahora que  $\sum \langle f, \check{e}_s \rangle \check{e}_s = \sum \langle f, e_s \rangle \check{e}_s \forall f \in \Lambda_l$ .

$$\sum \langle f, \check{e}_s \rangle \check{e}_s = \sum \langle f, e_s \rangle \check{e}_s \forall f \in \Lambda_l$$

si y solo si

$$\pi_{V_i} \sum \langle f, \check{e}_s - e_s \rangle e_s = 0$$

si y solo si

$$\sum \langle f, \check{e}_s - e_s \rangle e_s \in \Lambda_{l-1}$$

si y solo si

$$\sum \langle f, \check{e}_s \rangle e_s - \sum \langle f, e_s \rangle e_s \in \Lambda_{l-1}$$

si y solo si

$$\sum (\langle \check{f}, e_s \rangle - \langle f, e_s \rangle) e_s \in \Lambda_{l-1}$$

si y solo si

$$\sum \langle \check{f} - f, e_s \rangle e_s \in \Lambda_{l-1}$$

si y solo si

$$\sum \langle g, e_s \rangle e_s \in \Lambda_{l-1} \forall g \in \Lambda_{l-1}$$

con  $g = \check{f} - f$ .

Sea  $u$ , tal que  $|u| = l - 1$ .

$$\pi_{V_i} (\sum \langle e_u, e_s \rangle e_s) = \sum \langle e_u, e_s \rangle \check{e}_s = \sum \langle e_u, \check{e}_s \rangle e_s =$$

$$\Rightarrow \sum \langle \pi_{V_i} e_u, e_s \rangle e_s = \sum \langle 0, e_s \rangle e_s = 0$$

$$\Rightarrow \sum \langle e_u, e_s \rangle e_s \in \Lambda_{l-1} \quad \forall u, |u| = l-1$$

$$\Rightarrow \sum \langle g, e_s \rangle e_s \in \Lambda_{l-1} \quad \forall g \in \Lambda_{l-1}.$$

Por lo tanto

$$\sum \langle f, \check{e}_s \rangle \check{e}_s = \sum \langle f, e_s \rangle \check{e}_s \quad \forall f \in \Lambda_l.$$

□

Entonces para calcular la proyección de una señal  $f$  a  $V_i$ ,  $\Pi_{V_i} f$ , necesito calcular los diferentes productos internos  $\langle f, \check{e}_s \rangle$  y para calcular los mismos los calculamos en base a los  $\langle f, e_s \rangle$ .

Veamos primero como es la fórmula general de los  $e_s$  y el valor de la constante  $c_i$ .

PROPOSICIÓN 4.14.

$$\sum_{j=0}^l \binom{N-j}{K-j} \binom{l}{j} (-1)^j = \binom{N-l}{K}$$

DEMOSTRACIÓN. Demostremos por inducción.

Sea  $l = 0$

$$\sum_{j=0}^0 \binom{N-j}{K-j} \binom{l}{j} (-1)^j = \binom{N}{K}$$

Probaremos que esta fórmula es válida para cualquier  $N$  y  $K$ .

Supongamos válido para  $l-1$ , es decir que se cumple

$$\sum_{j=0}^{l-1} \binom{N-j}{K-j} \binom{l-1}{j} (-1)^j = \binom{N-l+1}{K}$$

Veamos que se cumple para  $l$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^l \binom{N-j}{K-j} \binom{l}{j} (-1)^j \\ &= \sum_{j=0}^l \binom{N-j}{K-j} \left( \binom{l-1}{j} + \binom{l-1}{j-1} \right) (-1)^j \end{aligned}$$

desarrollando vemos que se cumple

$$= \sum_{j=0}^{l-1} \binom{l-1}{j} \left( \binom{N-j}{K-j} - \binom{N-j-1}{K-j-1} \right) (-1)^j$$

tomamos  $N = N-1$  y por hipótesis inductiva tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{l-1} \binom{l-1}{j} \binom{N-1-j}{K-j} (-1)^j &= \binom{N-1-(l-1)}{K} \\ &= \binom{N-l}{K}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\sum_{j=0}^l \binom{N-j}{K-j} \binom{l}{j} (-1)^j = \binom{N-l}{K}$$

□

COROLARIO 4.15.

$$\sum_{j=0}^l \binom{n-l-1-j}{k-l-1-j} \binom{l}{j} (-1)^j = \binom{n-2l-1}{k-l-1}$$

DEMOSTRACIÓN. Por proposición 4.14, tomando

$$N = n - l - 1$$

$$K = k - l - 1$$

Por lo tanto

$$\sum_{j=0}^l \binom{n-l-1-j}{k-l-1-j} \binom{l}{j} (-1)^j = \binom{n-2l-1}{k-l-1}$$

□

LEMA 4.16.

$$e_t = \frac{1}{k-|t|} \sum_{u \supset t} e_u$$

con  $|t| = |u| - 1$ .

DEMOSTRACIÓN. Evaluemos la función  $e_u$  en la hoja  $\{12 \dots k\}$

$$e_u(\{12 \dots k\}) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \subseteq \{12 \dots k\} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Sea  $e_t$  tal que  $|t| = |u| - 1$ . La cantidad de funciones  $e_r$ , con  $|r| = |u|$  y  $t \subset r$ , que son igual a uno en la hoja  $\{12 \dots k\}$  la calculamos contando la cantidad de subconjuntos diferentes de  $|u|$  elementos que contengan al conjunto  $t$ , para eso fijamos los  $|t|$  primeros elementos de la hoja  $\{12 \dots k\}$  y la cantidad de subconjuntos diferentes de  $|u|$  elementos que contengan al conjunto  $t$  es por lo tanto  $k - |t|$ .

□

o equivalentemente

$$\sum_{t \subset u} e_u = (k+1-|u|)e_t$$

con  $|t| = |u| - 1$ .

COROLARIO 4.17.

$$\langle f, e_t \rangle = \frac{1}{k-|t|} \sum_{u \supset t} \langle f, e_u \rangle$$

con  $|t| = |u| - 1$ .

LEMA 4.18.

$$[\langle e_s, e_t \rangle] = \sum_{i=0}^l \gamma_i A_i$$

con  $|s| = |t| = l$ ,  $A_i$  las matrices de adyacencia asociadas al esquema de Johnson  $J(n, l)$  y  $\gamma_i = |s \cap t|$ ,  $i = 0, \dots, l$ .

DEMOSTRACIÓN. Como  $[\langle e_s, e_t \rangle]$  depende de la distancia entre  $s$  y  $t$ , es decir la cantidad de elementos en que difieren, está en la Bose-Mesner del esquema de Johnson  $J(n, l)$ , (ver capítulo 1 sección 1). Por lo tanto se escribe de la siguiente forma

$$[\langle e_s, e_t \rangle] = \sum_{i=0}^l \gamma_i A_i$$

□

TEOREMA 4.19. (Cálculo de la constante  $c_l$ ).

$$\Pi_{V_i} f = c_l \sum \langle f, \check{e}_s \rangle e_s$$

con

$$c_l^{-1} = \binom{n-2l}{k-l}$$

y  $|s| = l$ .

DEMOSTRACIÓN. Los autovalores del esquema de Johnson  $J(n, k)$ ,  $p_i(j)$ , vienen dados por la siguiente fórmula, (ver teo. 7.4.1 pag. 87 [G]):

$$(3) \quad p_i(j) = \sum_{r=0}^i (-1)^{i-r} \binom{k-r}{i-r} \binom{n-k+r+j}{r} \binom{k-j}{r}$$

mediante la siguiente relación, (ver lema 4.13)

$$\Pi_{V_i} f = c_i \sum \langle f, \check{e}_s \rangle e_s$$

con  $f = e_s$  tenemos:

si  $|s| = 1$

$$\begin{bmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle & \dots & \langle e_1, e_n \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle & \langle e_2, e_2 \rangle & \dots & \langle e_2, e_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \langle e_n, e_1 \rangle & \langle e_n, e_2 \rangle & \dots & \langle e_n, e_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle \check{e}_1, e_1 \rangle \\ \langle \check{e}_1, e_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle \check{e}_1, e_n \rangle \end{bmatrix} = c_1^{-1} \begin{bmatrix} \langle \check{e}_1, e_1 \rangle \\ \langle \check{e}_1, e_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle \check{e}_1, e_n \rangle \end{bmatrix}$$

En general

$$\begin{bmatrix} \langle e_{s_1}, e_{s_1} \rangle & \langle e_{s_1}, e_{s_2} \rangle & \dots & \langle e_{s_1}, e_{s_{\binom{n}{|s|}}} \rangle \\ \langle e_{s_2}, e_{s_1} \rangle & \langle e_{s_2}, e_{s_2} \rangle & \dots & \langle e_{s_2}, e_{s_{\binom{n}{|s|}}} \rangle \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \langle e_{s_{\binom{n}{|s|}}}, e_{s_1} \rangle & \langle e_{s_{\binom{n}{|s|}}}, e_{s_2} \rangle & \dots & \langle e_{s_{\binom{n}{|s|}}}, e_{s_{\binom{n}{|s|}}} \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle \check{e}_{s_1}, e_{s_1} \rangle \\ \langle \check{e}_{s_1}, e_{s_2} \rangle \\ \vdots \\ \langle \check{e}_{s_1}, e_{s_{\binom{n}{|s|}}} \rangle \end{bmatrix} = c_{|s|}^{-1} \begin{bmatrix} \langle \check{e}_{s_1}, e_{s_1} \rangle \\ \langle \check{e}_{s_1}, e_{s_2} \rangle \\ \vdots \\ \langle \check{e}_{s_1}, e_{s_{\binom{n}{|s|}}} \rangle \end{bmatrix}$$

con  $|s| = |s_i|$ ,  $i = 1, 2, \dots, \binom{n}{|s|}$ .

Por lo tanto el vector

$$\begin{bmatrix} \langle \check{e}_{s_1}, e_{s_1} \rangle \\ \langle \check{e}_{s_1}, e_{s_2} \rangle \\ \vdots \\ \langle \check{e}_{s_1}, e_{s_{\binom{n}{|s|}}} \rangle \end{bmatrix}$$

es autovector de la matriz

$$\begin{bmatrix} \langle e_{s_1}, e_{s_1} \rangle & \langle e_{s_1}, e_{s_2} \rangle & \dots & \langle e_{s_1}, e_{s_{\binom{n}{|s|}}} \rangle \\ \langle e_{s_2}, e_{s_1} \rangle & \langle e_{s_2}, e_{s_2} \rangle & \dots & \langle e_{s_2}, e_{s_{\binom{n}{|s|}}} \rangle \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \langle e_{s_{\binom{n}{|s|}}}, e_{s_1} \rangle & \langle e_{s_{\binom{n}{|s|}}}, e_{s_2} \rangle & \dots & \langle e_{s_{\binom{n}{|s|}}}, e_{s_{\binom{n}{|s|}}} \rangle \end{bmatrix}$$

con autovalor  $c_{|s|}^{-1}$ .

$c_{|s|}^{-1}$  es autovalor de la matriz  $[\langle e_{s_i}, e_{s_j} \rangle]$  correspondiente al autovector  $[\langle \check{e}_{s_1}, e_{s_j} \rangle] \in V_{|s|}$ .

Pues

$$\sum \langle e_s, \check{e}_t \rangle e_t = \sum \langle e_s, e_t \rangle \check{e}_t \in V_{|s|}$$

Tenemos

$$(4) \quad [\langle e_s, e_t \rangle] = \sum_{i=0}^l \gamma_i A_i$$

con  $\gamma_i = \binom{n-l-i}{k-l-i} = \langle e_s, e_t \rangle$ , con  $dist(s, t) = i$ , y  $A_i$ ,  $i = 0, \dots, l$ , las matrices de adyacencia asociadas al esquema de Johnson  $J(n, l)$  respectivamente, (ver capítulo 1 sección 1, capítulo 1 subsección 1.2), con  $l \leq k$ .

Luego por 3 y 4

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^l \gamma_i A_i v_l &= \left( \sum_{i=0}^l \gamma_i p_i(l) \right) v_l \quad i \leq l \\ (5) \quad \left( \sum_{i=0}^l \gamma_i p_i(l) \right) v_l &= c_l^{-1} v_l \quad i \leq l \end{aligned}$$

por 3

$$p_i(l) = (-1)^i \binom{l}{i}$$

Pues se toma  $k = l$ , es decir restringiéndonos al esquema de Johnson  $J(n, l)$ , en cada caso particular para calcular  $p_i(l)$ .

Entonces

$$\sum_{i=0}^l \gamma_i p_i(l) = \sum_{i=0}^l \binom{n-l-i}{k-l-i} \binom{l}{i} (-1)^i$$

Por lo tanto, de 5

$$\sum_{i=0}^l \binom{n-l-i}{k-l-i} \binom{l}{i} (-1)^i = c_l^{-1}$$

Por proposición 4.14

$$\sum_{i=0}^l \binom{n-l-i}{k-l-i} \binom{l}{i} (-1)^i = \binom{n-2l}{k-l} = c_l^{-1}$$

en nuestro caso

$$N = n - l$$

$$K = k - l$$

Por lo tanto

$$\sum_{i=0}^l \binom{n-l-i}{k-l-i} \binom{l}{i} (-1)^i = c_l^{-1} = \binom{n-2l}{k-l}$$

□

OBSERVACIÓN 4.20. *A continuación demostraremos un lema, seguido de un ejemplo así queda más clara la demostración.*

LEMA 4.21.

$$e_s = \check{e}_s + \alpha_{|s|-1}^{s|} \left( \sum_{t \subset s; |t|=|s|-1} \check{e}_t \right) + \alpha_{|s|-2}^{s|} \left( \sum_{u \subset s; |u|=|s|-2} \check{e}_u \right) + \dots + \alpha_0^{s|} \delta$$

con

$$\alpha_i^j = \frac{\binom{n-i-j}{k-j}}{\binom{n-2i}{k-i}}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $|s| = l + 1$ . En los pasos siguientes  $\vee = \cup$ .

Por lema 4.13

$$\pi_{V_l} e_s = c_l \sum_{|t \cap s|=l} \langle e_s, e_t \rangle \check{e}_t + c_l \sum_{|t \cap s|=l-1} \langle e_s, e_t \rangle \check{e}_t + \dots + c_l \sum_{|t \cap s|=1} \langle e_s, e_t \rangle \check{e}_t + c_l \sum_{|t \cap s|=0} \langle e_s, e_t \rangle \check{e}_t.$$

Recordemos por corolario 4.10

$$\sum \check{e}_t = 0 = c_l \sum_{|t \cap s|=l} \check{e}_t + c_l \sum_{|t \cap s|=l-1} \check{e}_t + \dots + c_l \sum_{|t \cap s|=0} \check{e}_t.$$

En general tenemos

$$(6) \quad \pi_{V_l} \left( \sum_{(\alpha \subset s, |\alpha|=j)} \sum_{(t, |t \cap \alpha|=0)} e_{\alpha \vee t} \right) = 0$$

$$\pi_{V_l} \left( \sum_{(\alpha \subset s, |\alpha|=j)} \sum_{(t, |t \cap \alpha|=0)} e_{\alpha \vee t} \right) = \sum_{(\alpha \subset s, |\alpha|=j)} \sum_{r=0}^{l-j} \sum_{(t, |t \cap s|=r)} \check{e}_{\alpha \vee t}$$

Donde

$$\sum_{(\alpha \subset s, |\alpha|=j)} \sum_{(t, |t \cap s|=r)} \check{e}_{\alpha \vee t} = \binom{j+r}{j} \sum_{(|t \cap s|=r+j)} \check{e}_t$$

Expresado matricialmente tenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & \dots & l-1 & l \\ \vdots & \vdots & \binom{r}{j} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & l \\ c_l \binom{n-2l-1}{k-2l-1} & c_l \binom{n-2l}{k-2l} & \dots & \dots & \dots & \dots & c_l \binom{n-l-1}{k-l-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{|t \cap s|=0} \check{e}_t \\ \sum_{|t \cap s|=1} \check{e}_t \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum_{|t \cap s|=l} \check{e}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \pi_{V_l} e_s \end{bmatrix}$$

Los coeficientes de la última fila de la matriz anterior salen de

$$\sum_{|t \cap s|=i} \langle e_s, e_t \rangle = \binom{n-2l-1+i}{k-2l-1+i}.$$

Las diferentes entradas de la matriz anterior sin contar los de la primera y la última fila son los coeficientes del triángulo de Pascal, corridos según la fila y columna en que estemos parados, que ambas se indican desde 0, las filas representan a la variable  $j$  y las columnas a la variable  $r$ , donde  $\binom{r}{j} = 0$  si  $r < j$  y  $\binom{0}{0} = 1$ . El corrimiento de los coeficientes corresponde al hecho en que en la ecuación 6,  $|\alpha| = j$ . Los diversos coeficientes son los coeficientes del triángulo de Pascal, pues

$$(7) \quad \frac{\binom{l+1}{1} \binom{l}{j} \binom{n-l-1}{l-j-1}}{\binom{l+1}{j+1} \binom{n-l-1}{l-j-1}} = j+1$$

Que proviene de contar la cantidad de sumandos de la ecuación 6, y los sumandos de la derecha de la igualdad siguiente, la cual vale por simetría

$$\sum_{(\alpha \subset s, |\alpha|=j)} \sum_{(t, |t \cap s|=r)} \check{e}_{\alpha \vee t} = a \sum_{(|t \cap s|=j+r)} \check{e}_t$$

en donde dicho cociente es  $j+1$ , por 7, con  $a$  constante.

Multiplico a izquierda a la matriz

$$(8) \quad \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & \dots & l-1 & l \\ \vdots & \vdots & \binom{r}{j} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & l \\ c_l \binom{n-2l-1}{k-2l-1} & c_l \binom{n-2l}{k-2l} & \dots & \dots & \dots & \dots & c_l \binom{n-l-1}{k-l-1} \end{bmatrix}$$

por las diferentes matrices elementales, hasta llegar al siguiente sistema equivalente

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{|t \cap s|=0} \check{e}_t \\ \sum_{|t \cap s|=1} \check{e}_t \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum_{|t \cap s|=l} \check{e}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \pi_{V_l} e_s \end{bmatrix}$$

Es decir

$$\pi_{V_l} e_s = d \sum_{(t \subset s, |t|=l)} \check{e}_t$$

Por lo tanto necesitamos calcular el determinante de la matriz 8, para obtener el valor buscado  $d$ .

Para calcular el determinante de la matriz 8, multiplico a derecha a la matriz 8, por la siguiente matriz

$$(9) \quad \left[ \binom{r}{j} (-1)^{r+j} \right]$$

Donde nuevamente la matriz 9, es la matriz triangular superior, con unos en la diagonal, cuyas entradas son los coeficientes del triangulo de Pascal, corridos según la fila y columna en que estemos parados, las filas representan a la variable  $j$  y las columnas a la variable  $r$ , donde  $\binom{r}{j} = 0$  si  $r < j$  y  $\binom{0}{0} = 1$ , variando según su posición el signo del mismo.

Observemos que el determinante de la matriz 9 es uno.

Lo que da como resultado la matriz

$$(10) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & * & * & * & d \end{bmatrix}$$

Por lo tanto el determinante de la matriz 8 es igual a  $d$ . Con

$$d = \sum_{j=0}^l \binom{n-l-1-j}{k-l-1-j} \binom{l}{j} (-1)^j = \binom{n-2l-1}{k-l-1}$$

por proposición 4.14, pues  $d$  es igual al producto de la última fila de la matriz 8 por la última columna de la matriz 9.

Por lo tanto

$$\alpha_i^j = \frac{\binom{n-i-j}{k-j}}{\binom{n-2i}{k-i}}$$

pues  $c_i^{-1} = \binom{n-2i}{k-i}$  como vimos en teorema 4.19.

□

EJEMPLO 4.22. Demos a continuación un ejemplo con  $l = 4, i = 3$ .

Calculemos  $\pi_{V_3} \check{e}_s$  con  $|s| = 4$ , es decir buscamos,  $\alpha_3^4$ .

Recordemos por lema 4.13 y por corolario 4.10

$$\begin{aligned} \pi_{V_3} e_s &= c_3 \sum_{t \cap s = |t|=3} \langle e_s, e_t \rangle \check{e}_t + c_3 \sum_{|t \cap s|=2} \langle e_s, e_t \rangle \check{e}_t + c_3 \sum_{|t \cap s|=1} \langle e_s, e_t \rangle \check{e}_t + c_3 \sum_{|t \cap s|=0} \langle e_s, e_t \rangle \check{e}_t \\ \sum \check{e}_t &= 0 = c_3 \sum_{|t \cap s|=3} \check{e}_t + c_3 \sum_{|t \cap s|=2} \check{e}_t + c_3 \sum_{|t \cap s|=1} \check{e}_t + c_3 \sum_{|t \cap s|=0} \check{e}_t \end{aligned}$$

Expresado matricialmente queda

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ \binom{n-7}{k-7} & \binom{n-6}{k-6} & \binom{n-5}{k-5} & \binom{n-4}{k-4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{|t \cap s|=0} \check{e}_t \\ \sum_{|t \cap s|=1} \check{e}_t \\ \sum_{|t \cap s|=2} \check{e}_t \\ \sum_{|t \cap s|=3} \check{e}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ c_3^{-1} \pi_{V_3} e_s \end{bmatrix}$$

Aplicando las operaciones elementales matricialmente obtenemos la matriz

$$(11) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$$

Para calcular el determinante de

$$(12) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ \binom{n-7}{k-7} & \binom{n-6}{k-6} & \binom{n-5}{k-5} & \binom{n-4}{k-4} \end{bmatrix}$$

multiplico por derecha dicha matriz, por la matriz

$$(13) \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observemos que el determinante de la matriz 13 es igual a uno.

Multiplicando obtenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ \binom{n-7}{k-7} & \binom{n-6}{k-6} & \binom{n-5}{k-5} & \binom{n-4}{k-4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ * & * & * & d \end{bmatrix}$$

De donde, por proposición 4.14,  $d = (-\binom{n-7}{k-7}) + 3\binom{n-6}{k-6} - 3\binom{n-5}{k-5} + \binom{n-4}{k-4} = \binom{n-7}{k-4} = \alpha_3^4 * c_3 \Rightarrow$

$$\alpha_3^4 = \frac{\binom{n-7}{k-4}}{\binom{n-6}{k-3}}$$

### 3. CÁLCULO DE OPERACIONES Y TEOREMAS RESULTANTES

En esta sección contaremos las operaciones necesarias para obtener la proyección de una señal  $f$  y se comparan las cotas obtenidas con las del trabajo [DR].

Para calcular la proyección de una señal  $f$  a  $V_i$ ,  $\Pi_{V_i} f$ , necesitamos contar con los diferentes productos internos  $\langle f, \check{e}_s \rangle$  y estos los obtendremos en base a los  $\langle f, e_s \rangle$ .

DEFINICIÓN 4.23.

Sea  $f_x = \langle f, e_x \rangle$  con  $x \in X$ .

Definimos inductivamente  $f_t$ , para  $|t| < k$  por

$$f_t = \sum_{t \subset s} f_s$$

con  $|t| = |s| - 1$ .

A continuación calculamos  $f_t$  para  $|t| = k-1, k-2, k-3, \dots, 0$ , empezando desde el nivel  $k-1$  del semireticulado inferior asociado al esquema de Johnson  $J(n, k)$ , (ver capítulo 2 def. 2.8), para obtener un múltiplo conocido de los diferentes productos internos  $\langle f, e_s \rangle$ .

LEMA 4.24.

*Calcular todos los  $f_t$  con  $|t| = k-1$ , requiere*

$$(n-k) \binom{n}{k-1} \text{ sumas.}$$

DEMOSTRACIÓN. Para calcular cada  $f_{\{i_1 i_2 i_3 \dots i_{k-1}\}}$  necesito  $(n-k)$  sumas. Pues cada  $\{i_1 i_2 i_3 \dots i_{k-1}\}$ , del semireticulado inferior asociado al esquema de Johnson  $J(n, k)$ , tiene  $n-k+1$  hijos. Como tengo  $\binom{n}{k-1}$ -uplas  $\{i_1 i_2 i_3 \dots i_{k-1}\} \Rightarrow$  en total necesito  $(n-k) \binom{n}{k-1}$  sumas.  $\square$

EJEMPLO 4.25. *Para el semireticulado inferior asociado al grafo del esquema  $J(6, 3)$  (ver capítulo 2 ejem. 2.9).*

*$f_{\{12\}} = f_{\{123\}} + f_{\{124\}} + f_{\{125\}} + f_{\{126\}}$ , como tengo 15 pares  $\Rightarrow$  en total necesito  $3 \times 15 = 3 \binom{6}{2} = 45$  sumas en total.*

COROLARIO 4.26.

*Calcular todos los  $f_t$  con  $|t| = k-1, \dots, 0$ , en total requiere*

$$\sum_{l=1}^k (n-l) \binom{n}{l-1}$$

*sumas.*

Esto para obtener todos los  $f_\gamma$  con  $\gamma$  en el semireticulado inferior asociado al esquema de Johnson  $J(n, k)$ . Con esto obtengo, dado una señal  $f \in L(X)$ , un múltiplo conocido de los diferentes productos internos  $\langle f, e_s \rangle$ , con  $|s| = 0, 1, \dots, k$ , donde  $e_0 = \delta$ .

EJEMPLO 4.27. *Para el semireticulado inferior asociado al grafo del esquema  $J(6, 3)$ .*

*En total necesito  $\sum_{t=0}^2 (6-t-1) \binom{6}{t} = 74$  sumas. Esto para obtener todos los  $f_\gamma$  con  $\gamma$  en el semireticulado inferior.*

OBSERVACIÓN 4.28. *De ahora en más nos referiremos al semireticulado inferior asociado al esquema de Johnson  $J(n, k)$  como semireticulado inferior.*

OBSERVACIÓN 4.29. *Sea  $\{i_1 i_2 \dots i_k\}$  una hoja fija del semireticulado inferior.*

LEMA 4.30.

*Evaluar  $\Pi_{V_r} f$  en la hoja  $\{i_1 i_2 \dots i_k\}$ , es equivalente a calcular*

$$\langle \Pi_{V_r} f, e_{\{i_1 i_2 \dots i_k\}} \rangle$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned} \langle \Pi_{V_r} f, e_{\{i_1 i_2 \dots i_k\}} \rangle &= \sum_{i=1}^r c_r \langle f, \check{e}_{r_i} \rangle \langle e_{r_i}, e_{\{i_1 i_2 \dots i_k\}} \rangle \\ &= c_r (\langle f, \check{e}_{r_1} \rangle \langle e_{r_1}, e_{\{i_1 i_2 \dots i_k\}} \rangle + \dots \end{aligned}$$

$$+ \langle f, \check{e}_{r \binom{n}{r}} \rangle \langle e_{r \binom{n}{r}}, e_{\{i_1 i_2 \dots i_k\}} \rangle.$$

Notar que

$$\langle e_{r_i}, e_{\{i_1 i_2 \dots i_k\}} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } r_i \subset \{i_1 i_2 \dots i_k\} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

con  $i = 1, \dots, \binom{n}{r}$ .

De donde

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\binom{n}{r}} c_r \langle f, \check{e}_{r_i} \rangle \langle e_{r_i}, e_{\{i_1 i_2 \dots i_k\}} \rangle = \\ & = c_r (\langle f, \check{e}_{r_1} \rangle \langle e_{r_1}, e_{\{i_1 i_2 \dots i_k\}} \rangle + \dots \\ & \quad + \langle f, \check{e}_{r \binom{n}{r}} \rangle \langle e_{r \binom{n}{r}}, e_{\{i_1 i_2 \dots i_k\}} \rangle) \\ & = c_r (\langle f, \check{e}_{\{i_1 i_2 \dots i_r\}} \rangle + \dots + \langle f, \check{e}_{\{i_{k-r+1} \dots i_k\}} \rangle) \\ & = \Pi_{V_r} f(i_1 i_2 \dots i_k). \end{aligned}$$

□

Por lo tanto, por lema anterior, calcular  $\Pi_{V_r} f(i_1 i_2 \dots i_k)$ , es igual a

$$\begin{aligned} \langle \Pi_{V_r} f, e_{\{i_1 i_2 \dots i_k\}} \rangle & = \sum_{i=1}^{\binom{n}{r}} c_r \langle f, \check{e}_{r_i} \rangle \langle e_{r_i}, e_{\{i_1 i_2 \dots i_k\}} \rangle \\ & = c_r (\langle f, \check{e}_{r_1} \rangle \langle e_{r_1}, e_{\{i_1 i_2 \dots i_k\}} \rangle + \dots \\ & \quad + \langle f, \check{e}_{r \binom{n}{r}} \rangle \langle e_{r \binom{n}{r}}, e_{\{i_1 i_2 \dots i_k\}} \rangle) \\ & = c_r (\langle f, \check{e}_{\{i_1 i_2 \dots i_r\}} \rangle + \dots + \langle f, \check{e}_{\{i_{k-r+1} \dots i_k\}} \rangle). \end{aligned}$$

Recordemos por lema 4.21

$$\check{e}_s = e_s - \alpha_{|s|-1}^{|s|} \left( \sum_{t \subset s; |t|=|s|-1} \check{e}_t \right) - \alpha_{|s|-2}^{|s|} \left( \sum_{u \subset s; |u|=|s|-2} \check{e}_u \right) - \dots - \alpha_0^{|s|} \delta$$

De donde

PROPOSICIÓN 4.31. *Calcular*

$$\langle f, \check{e}_{\{i_1 i_2 \dots i_r\}} \rangle$$

*requiere*  $\sum_{i=0}^{r-1} \binom{r}{i} - 1 + r = 2^r - 1$  sumas y  $r$  productos.

OBSERVACIÓN 4.32. *El cálculo del término*  $\alpha_0^r \langle f, \delta \rangle$  *se calcula una sola vez, pues es constante.*

Por prop. 4.31

COROLARIO 4.33. *Obtener*  $\Pi_{V_r} f$ , *en la hoja*  $\{i_1 i_2 \dots i_k\}$ , *requiere*  $\binom{k}{r} (2^r - 1) + \binom{k}{r} - 1 = \binom{k}{r} 2^r - 1$  sumas y  $\binom{k}{r} (r - 1) + 3$  productos.

Donde los 3 productos vienen determinados, uno por  $\alpha_0^r \langle f, \delta \rangle$ , uno por el múltiplo conocido de los diferentes productos internos  $\langle f, e_s \rangle$ , (ver lema 4.16), y el último de multiplicar todo por la constante  $c_r$ .

COROLARIO 4.34. *Calcular la proyección  $\Pi_{V_r} f$  en todas las hojas requiere por lo tanto  $\binom{n}{k} \left( \binom{k}{r} 2^r - 1 \right)$  sumas y  $\binom{n}{k} \left( \binom{k}{r} (r-1) + 3 \right)$  multiplicaciones.*

EJEMPLO 4.35. *Sea  $\{i_1 i_2 i_3\}$  una hoja determinada del semireticulado inferior asociado al grafo del esquema  $J(6, 3)$  y sea  $f \in X$ .*

*El total de operaciones necesarias para obtener  $\Pi_{V_1} f$ , en la hoja  $\{i_1 i_2 i_3\}$ , es de  $2 + 3$  sumas y  $1 + 1 + 1$  multiplicaciones.*

*Calcular la proyección  $\Pi_{V_1} f$  en todas las hojas requiere por lo tanto  $\binom{6}{3} 5 = 100$  sumas y  $\binom{6}{3} 3 = 60$  multiplicaciones.*

*El total de operaciones necesarias para obtener  $\Pi_{V_2} f$ , en la hoja  $\{i_1 i_2 i_3\}$ , es de  $2 + 9$  sumas y  $1 + 4 + 1$  multiplicaciones.*

*Calcular la proyección  $\Pi_{V_2} f$  en todas las hojas requiere por lo tanto  $\binom{6}{3} 11 = 220$  sumas y  $\binom{6}{3} 6 = 120$  multiplicaciones.*

OBSERVACIÓN 4.36.  $\Pi_{V_k} f(i_1 i_2 \dots i_k)$  lo calculamos mediante la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} \Pi_{V_k} f(i_1 i_2 \dots i_k) &= f(i_1 i_2 \dots i_k) - \Pi_{\Lambda_{k-1}} f(i_1 i_2 \dots i_k) \\ &= f(i_1 i_2 \dots i_k) - \Pi_{V_{k-1}} f(i_1 i_2 \dots i_k) - \dots - \Pi_{V_0} f(i_1 i_2 \dots i_k). \end{aligned}$$

PROPOSICIÓN 4.37. *Calcular*

$$\Pi_{V_k} f(i_1 i_2 \dots i_k)$$

*requiere en total  $k$  sumas.*

COROLARIO 4.38. *Calcular la proyección  $\Pi_{V_k} f$  en todas las hojas requiere por lo tanto  $\binom{n}{k} k$  sumas.*

EJEMPLO 4.39. *Sea  $\{i_1 i_2 i_3\}$  una hoja determinada del semireticulado inferior asociado al grafo del esquema  $J(6, 3)$  y sea  $f \in X$ .*

*En total necesito 3 sumas para obtener  $\Pi_{V_3} f$  en la hoja  $\{i_1 i_2 i_3\}$ .*

*Calcular la proyección  $\Pi_{V_3} f$  en todas las hojas, requiere por lo tanto  $\binom{6}{3} 3 = 60$  sumas.*

A continuación detallaremos cuanto lleva calcular todas las proyecciones  $\Pi_{V_i} f$  en la hoja  $\{i_1 i_2 \dots i_k\}$ .

Recordemos la cantidad de sumas necesarias para calcular las sumas del semireticulado inferior (ver coro. 4.26).

$$\sum_{l=1}^k (n-l) \binom{n}{l-1}$$

OBSERVACIÓN 4.40. *Para poder calcular el resultado de dicha suma la acotamos por la siguiente cota*

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^k (n-l) \binom{n}{l-1} &= \sum_{l=1}^k (n-l+1) \binom{n}{l-1} - \sum_{l=1}^k \binom{n}{l-1} \\ &= n \sum_{l=1}^k \binom{n-1}{l-1} - \sum_{l=1}^k \binom{n}{l-1} \\ &= n \sum_{l=0}^{k-1} \binom{n-1}{l} - \sum_{l=0}^{k-1} \binom{n}{l} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= ((n-2) \sum_{l=0}^{k-1} \binom{n-1}{l}) + \binom{n-1}{k-1} \\
&\leq n \sum_{l=0}^{k-1} \binom{n-1}{l} \Rightarrow \\
&\sum_{l=1}^k (n-l) \binom{n}{l-1} \leq n \sum_{l=0}^{k-1} \binom{n-1}{l}
\end{aligned}$$

por prop. 1.26 (ver capítulo 1 sección 5 prop. 1.26)  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^k (n-l) \binom{n}{l-1} &\leq n \sum_{l=0}^{k-1} \binom{n-1}{l} \approx n 2^{n-1} \Phi\left(\frac{k-1+0,5-(n-1)p}{\sqrt{(n-1)p(1-p)}}\right) \Rightarrow \\
\sum_{l=1}^k (n-l) \binom{n}{l-1} &\leq n 2^{n-1} \Phi\left(\frac{k-1+0,5-(n-1)p}{\sqrt{(n-1)p(1-p)}}\right)
\end{aligned}$$

con  $p = \frac{1}{2}$ .

Las sumas para calcular todas las proyecciones  $\Pi_{V_r} f$

$$\sum_{r=1}^{k-1} \left( \binom{k}{r} 2^r - 1 \right) + k = 3^k - 2^k$$

pues

$$(2+1)^k = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} 2^r 1^{k-r} \Rightarrow \sum_{r=1}^{k-1} \binom{k}{r} 2^r = 3^k - 2^k - 1$$

Las multiplicaciones para calcular todas las proyecciones  $\Pi_{V_r} f$

$$\sum_{r=1}^{k-1} \binom{k}{r} (r-1) + 3 = (k-2)2^{k-1} + 2k - 1$$

pues

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{k-1} \binom{k}{r} (r-1) + 3 &= k \sum_{r=1}^{k-1} \binom{k-1}{r-1} - \sum_{r=1}^{k-1} \binom{k}{r} + 3(k-1) \\
&= k(2^{k-1} - 1) - (2^k - 2) + 3(k-1) = (k-2)2^{k-1} + 2k - 1.
\end{aligned}$$

Donde queda demostrado el siguiente teorema

**TEOREMA 4.41.** *Calcular todas las proyecciones  $\Pi_{V_i} f$  en todas las hojas requiere un costo inicial de a lo sumo  $\sum_{l=1}^k (n-l) \binom{n}{l-1}$  sumas y un adicional de  $\binom{n}{k} (3^k - 2^k)$  sumas y  $\binom{n}{k} ((k-2)2^{k-1} + 2k - 1)$  multiplicaciones.*

**OBSERVACIÓN 4.42.** *El término que más ponderación tiene en el teorema anterior es  $\binom{n}{k} (3^k - 2^k)$ .*

Teniendo en cuenta el orden de las operaciones

**COROLARIO 4.43.** *Calcular todas las proyecciones  $\Pi_{V_i} f$  en todas las hojas requiere un costo inicial de a lo sumo  $\sum_{l=1}^k (n-l) \binom{n}{l-1}$  sumas y un adicional de  $\binom{n}{k} (3^k - 2^k)$  sumas y  $\binom{n}{k} ((k-2)2^{k-1})$  multiplicaciones.*

Comparando con el siguiente teorema

TEOREMA 4.44. (*Th 3.1 [DR]*): *Calcular las proyecciones de un elemento arbitrario de  $M^k$  en cada uno de los  $k+1$  subespacios isotópicos mediante la transformada de Radon requiere un costo inicial de a lo sumo  $O(k^2 \binom{n}{k}^2 \log k)$  operaciones y un adicional de  $k \binom{n}{k}^2$  operaciones.*

OBSERVACIÓN 4.45.  $\log = \log_2$ .

OBSERVACIÓN 4.46. *En teorema 4.44:*

*El costo inicial de  $O(k^2 \binom{n}{k}^2 \log k)$  operaciones corresponde al cálculo de obtener todas las matrices de proyección, mientras que el adicional de  $k \binom{n}{k}^2$  operaciones corresponde a calcular cada una de las  $k$  proyecciones de una señal  $f$  dada.*

OBSERVACIÓN 4.47. *De obs. 4.40*

$$\sum_{l=1}^k (n-l) \binom{n}{l-1} \leq n \sum_{l=0}^{k-1} \binom{n-1}{l} \leq nk \binom{n-1}{k-1} = k^2 \binom{n}{k} < k^2 \binom{n}{k}^2 \log k$$

pues

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$

Además, si  $0 < k \leq \frac{n}{3}$  se cumple

$$\binom{n}{k} 3^k < k \binom{n}{k}^2$$

pues tenemos que ver que

$$3^k < k \binom{n}{k}$$

pero

$$k \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{(k-1)!}$$

y

$$\frac{n-j}{k-j} > 3$$

con  $j = 1, \dots, k-1$ .

Por lo tanto

$$3^k < k \binom{n}{k}$$

LEMA 4.48.

$$3^k - (k-2)2^{k-1} - 2k + 1 > 0$$

DEMOSTRACIÓN. Por inducción:

si  $l = 1$

$$3 > 0$$

supongamos válido para  $l = k$ , veamos para  $l = k+1$

$$3^k 3 - (k-1)2^k - 2k + 3 = 2 * 3^k - 2^k - (k-2)2^{k-1} + 2 + 3^k - (k-2)2^{k-1} - 2k + 1 > 0$$

pues similarmente se ve que

$$2 * 3^k - 2^k - (k-2)2^{k-1} > 0$$

□

Por lo tanto  $\binom{n}{k}(3^k - 2^k)$  sumas +  $\binom{n}{k}((k-2)2^{k-1} + 2k - 1)$  multiplicaciones  $< \binom{n}{k}3^k$  operaciones  $< k\binom{n}{k}^2$  operaciones.

EJEMPLO 4.49. Consideremos el caso del ejemplo básico  $J(6,3)$ , como ejemplo en donde las cuentas se pueden hacer a mano y calcular el número exacto de operaciones, en donde  $0 < k \leq \frac{n}{2}$ .

Calcular todas las proyecciones  $\Pi_{V_i}f$  en todas las hojas requiere 454 sumas y 180 multiplicaciones. Siendo menor a 634 operaciones.

Mientras que en [DR] da un costo total de a lo sumo 6906 operaciones, para el caso  $n = 6, k = 3$ .

Y como ejemplo de nuestra cota con la restricción para  $0 < k \leq \frac{n}{3}$ .

EJEMPLO 4.50. Ejemplo  $J(40,6)$ .

Calcular todas las proyecciones  $\Pi_{V_i}f$  en todas las hojas requiere por lo tanto un total de a lo sumo  $\approx (2,671712 \times 10^7) + 2552522700$  sumas y 533534820 multiplicaciones. Dando un total de  $\approx 3,1 \times 10^9$  operaciones.

Mientras que en [DR] da  $\approx 1,46 \times 10^{15}$  operaciones.

**3.1. ALGORITMO 2.** El algoritmo que presentamos a continuación difiere del primero, en que en el primero fijamos una hoja  $\{i_1 i_2 \dots i_k\}$  del semireticulado inferior y calculamos inductivamente, por nivel, cada  $\check{e}_s$  que aparece en el cálculo de la proyección de  $f$  en cada hoja en cuestión.

Mientras que en el algoritmo a continuación calculamos inductivamente por nivel todos los  $\check{e}_s$  sin fijar una hoja en particular.

Recordemos por lemas 4.13 y 4.21

$$\Pi_{V_i}f = c_i \sum \langle f, e_s \rangle \check{e}_s = c_i \sum \langle f, \check{e}_s \rangle e_s \text{ con } |i| = 0, 1, \dots, k-1.$$

$$e_s = \check{e}_s + \alpha_{|s|-1}^{|s|} \left( \sum_{t \subset s} \check{e}_t \right) + \alpha_{|s|-2}^{|s|} \left( \sum_{u \subset s} \check{e}_u \right) + \dots + \alpha_0^{|s|} \delta.$$

De prop. 4.31 tenemos

COROLARIO 4.51. Calcular todos los  $\langle f, \check{e}_s \rangle$  con  $|s| = r$  requiere en total  $\binom{n}{r}(2^r - 1)$  sumas y  $\binom{n}{r}(r-1) + 1$  productos.

Por lo tanto

COROLARIO 4.52. Calcular todos los  $\langle f, \check{e}_s \rangle$  con  $|s| = 1, \dots, k-1$ , requiere en total  $\sum_{r=1}^{k-1} \binom{n}{r}(2^r - 1)$  sumas y  $\sum_{r=1}^{k-1} \binom{n}{r}(r-1) + 1$  productos.

De lema 4.30 se tiene

COROLARIO 4.53. Evaluar  $\Pi_{V_r}f$  en la hoja  $\{i_1 i_2 \dots i_k\}$ , requiere en total  $\binom{k}{r} - 1$  sumas y  $1 + 1 = 2$  productos.

Por lo tanto

COROLARIO 4.54. Evaluar la proyección en la hoja  $\{i_1 i_2 \dots i_k\}$ , hasta el nivel  $k-1$  requiere en total  $\sum_{r=1}^{k-1} \binom{k}{r} - 1$  sumas y  $\sum_{r=1}^{k-1} 2 = 2(k-1)$  productos.

Recordemos que (ver obs. 4.36).

Calcular  $\Pi_{V_k} f(i_1 i_2 \dots i_k)$  lo calculamos mediante la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} \Pi_{V_k} f(i_1 i_2 \dots i_k) &= f(i_1 i_2 \dots i_k) - \Pi_{\Lambda_{k-1}} f(i_1 i_2 \dots i_k). \\ &= f(i_1 i_2 \dots i_k) - \Pi_{V_{k-1}} f(i_1 i_2 \dots i_k) - \dots - \Pi_{V_0} f(i_1 i_2 \dots i_k). \end{aligned}$$

Calcular  $\Pi_{V_k} f(i_1 i_2 \dots i_k)$ , requiere en total  $k$  sumas.

Obteniendo el siguiente corolario.

**COROLARIO 4.55.** *Calcular la proyección hasta el nivel  $k$  en todas las hojas requiere en total  $\binom{n}{k}((\sum_{r=1}^{k-1} \binom{k}{r} - 1) + k) = \binom{n}{k}((\sum_{r=1}^{k-1} \binom{k}{r}) + 1) = \binom{n}{k}(2^k - 1)$  sumas y  $\binom{n}{k}2(k-1)$  productos.*

**OBSERVACIÓN 4.56.** *El número total de sumas necesarias para calcular todas las proyecciones  $\Pi_{V_i} f$  en todas las hojas, además del cálculo inicial de las sumas del semireticulado inferior, esta dado por*

$$\sum_{r=1}^{k-1} \binom{n}{r} (2^r - 1) + \binom{n}{k} (2^k - 1) = \sum_{r=1}^k \binom{n}{r} (2^r - 1)$$

Ver corolario 4.52 y corolario 4.55.

**OBSERVACIÓN 4.57.** *El cálculo del resultado anterior se lo acoto por*

$$\sum_{r=1}^k \binom{n}{r} (2^r - 1) = \sum_{r=1}^k \binom{n}{r} 2^r - \sum_{r=1}^k \binom{n}{r}$$

por prop. 1.26 (ver capítulo 1 sección 5 prop. 1.26)  $\Rightarrow$

$$\sum_{r=1}^k \binom{n}{r} 2^r \leq 3^n \Phi\left(\frac{k + 0,5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

con  $p = \frac{2}{3}$ .

$$\sum_{r=1}^k \binom{n}{r} \leq 2^n \Phi\left(\frac{k + 0,5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

con  $p = \frac{1}{2}$ .

**OBSERVACIÓN 4.58.** *El número total de multiplicaciones necesarias para calcular todas las proyecciones  $\Pi_{V_i} f$  en todas las hojas, esta dado por (ver corolario 4.55 y corolario 4.52)*

$$\left(\sum_{r=1}^{k-1} \binom{n}{r} (r-1)\right) + k - 1 + \binom{n}{k} 2(k-1)$$

La expresión

$$\sum_{r=1}^{k-1} \binom{n}{r} (r-1)$$

se la acoto por

$$\sum_{r=1}^{k-1} \binom{n}{r} (r-1) = \sum_{r=1}^{k-1} \binom{n}{r} r - \sum_{r=1}^{k-1} \binom{n}{r}$$

por prop. 1.26 (ver capítulo 1 sección 5 prop. 1.26)  $\Rightarrow$

$$\sum_{r=1}^{k-1} \binom{n}{r} r = n \sum_{r=1}^{k-1} \binom{n-1}{r-1} \leq n 2^{n-1} \Phi\left(\frac{k-1+0,5-(n-1)p}{\sqrt{(n-1)p(1-p)}}\right)$$

con  $p = \frac{1}{2}$ .

$$\sum_{r=1}^{k-1} \binom{n}{r} \leq 2^n \Phi\left(\frac{k-1+0,5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

con  $p = \frac{1}{2}$ .

Por lo tanto el número total de sumas y productos necesarios para calcular todas las proyecciones  $\Pi_{V_i} f$  en todas las hojas esta dado por

**TEOREMA 4.59.** *Calcular todas las proyecciones  $\Pi_{V_i} f$  en todas las hojas requiere un costo inicial de a lo sumo  $\sum_{l=1}^k (n-l) \binom{n}{l-1}$  sumas y un adicional de a lo sumo  $\sum_{r=1}^k \binom{n}{r} (2^r - 1)$  sumas y  $(\sum_{r=1}^{k-1} \binom{n}{r} (r-1)) + k - 1 + \binom{n}{k} 2(k-1)$  multiplicaciones.*

Teniendo en cuenta el orden de las operaciones

**COROLARIO 4.60.** *Calcular todas las proyecciones  $\Pi_{V_i} f$  en todas las hojas requiere un costo inicial de a lo sumo  $\sum_{l=1}^k (n-l) \binom{n}{l-1}$  sumas y un adicional de a lo sumo  $\sum_{r=1}^k \binom{n}{r} (2^r - 1)$  sumas y  $(\sum_{r=1}^{k-1} \binom{n}{r} (r-1)) + \binom{n}{k} 2(k-1)$  multiplicaciones.*

Comparando con el siguiente teorema

**TEOREMA 4.61.** *(Th 2.6 [DR]): Todas las proyecciones isotópicas de  $M^{(n-k,k)}$  pueden calcularse usando a lo sumo  $\binom{n}{k}^2$  sumas más un adicional de  $O(\binom{n}{k} k \log^2 k)$  operaciones.*

**OBSERVACIÓN 4.62.**  $\log = \log_2$ .

**OBSERVACIÓN 4.63.** *De obs. 4.40*

$$\sum_{l=1}^k (n-l) \binom{n}{l-1} \leq n \sum_{l=0}^{k-1} \binom{n-1}{l} \leq nk \binom{n-1}{k-1} = k^2 \binom{n}{k}$$

Además

$$\sum_{r=1}^k \binom{n}{r} (2^r - 1) < 2^k k \binom{n}{k} < 4^k \binom{n}{k}$$

Además, si  $0 < k \leq \frac{n}{4}$  se cumple  $\Rightarrow$

$$\frac{n-j}{k-j} \geq 4$$

con  $j = 1, \dots, k$ .

Por lo tanto

$$4^k < \binom{n}{k}$$

$\Rightarrow$

$$k^2 \binom{n}{k} + 4^k \binom{n}{k} = \binom{n}{k} (k^2 + 4^k) < \binom{n}{k}^2$$

pues  $k^2$  es despreciable en relación a  $4^k$ .

Por lo tanto  $k^2 \binom{n}{k} + 4^k \binom{n}{k} = \binom{n}{k} (k^2 + 4^k) < \binom{n}{k}^2$ .

OBSERVACIÓN 4.64. *En la observación 4.63, acotamos las sumas empleadas, a continuación acotaremos las multiplicaciones empleadas.*

OBSERVACIÓN 4.65. *Veamos primero que*

$$\sum_{r=1}^{k-1} \binom{n}{r} (r-1) < k \binom{n}{k}.$$

*Lo vemos por inducción.*

*Sea  $k = 2$*

$$0 < 2 \binom{n}{2}.$$

*Supongamos válido para  $k = l$ , veamos para  $k = l + 1$ .*

$$\sum_{r=1}^{l-1} \binom{n}{r} (r-1) + (l-1) \binom{n}{l} < l \binom{n}{l} + (l-1) \binom{n}{l}$$

*por hipótesis inductiva  $\Rightarrow$*

$$\sum_{r=1}^l \binom{n}{r} (r-1) < (2l-1) \binom{n}{l}$$

*Si  $n \geq 3l - 1$ ,  $\Rightarrow$*

$$(2l-1) \binom{n}{l} \leq (l+1) \binom{n}{l+1}$$

*pues simplificando queda*

$$(2l-1) \leq (n-l)$$

*Si  $n \geq 3l - 1$ .*

*Entonces si  $k \geq 3$*

$$k \binom{n}{k} + 2k \binom{n}{k} - 2 \binom{n}{k} < k \binom{n}{k} \log^2 k$$

*pues simplificando*

$$(3k-2) < k \log^2 k \Rightarrow \left(3 - \frac{2}{k}\right) < \log^2 k$$

*si  $k \geq 3$ .*

Por lo tanto  $(\sum_{r=1}^{k-1} \binom{n}{r} (r-1)) + k - 1 + \binom{n}{k} 2(k-1) < \binom{n}{k} k \log^2 k$ .

OBSERVACIÓN 4.66. *El termino  $k - 1$  en la cuenta anterior no se lo considero al ser insignificante en relación a los otros números.*

EJEMPLO 4.67. *Consideremos el caso del ejemplo básico  $J(6,3)$ , como ejemplo en donde las cuentas se pueden hacer a mano y calcular el número exacto de operaciones, en donde  $0 < k \leq \frac{n}{2}$ .*

*Calcular todas las proyecciones  $\Pi_{V_i} f$  en todas las hojas requiere 265 sumas y 97 multiplicaciones. Siendo menor a 362 operaciones.*

*Mientras que en [DR] da 400 sumas más 151 operaciones, para el caso  $n = 6$ ,  $k = 3$ .*

Y como ejemplo de nuestra cota con la restricción para  $0 < k \leq \frac{n}{4}$ .

EJEMPLO 4.68. *Ejemplo  $J(40, 6)$ .*

*Calcular todas las proyecciones  $\Pi_{V_i} f$  en todas las hojas requiere por lo tanto un total de a lo sumo  $\approx 2,671712 \times 10^7 + 2,63658 \times 10^8$  sumas y  $6,37650 \times 10^7$  productos. Dando un total de  $\approx 3,5 \times 10^8$  operaciones.*

*Mientras que en [DR] da  $\approx 1,5 \times 10^{13}$  sumas y  $1,53889 \times 10^8$  operaciones. Dando un total de  $\approx 1,5 \times 10^{13}$  operaciones.*

OBSERVACIÓN 4.69. *El cálculo de la distribución binomial, (ver capítulo 1 sección 5), para calcular el costo inicial de  $n \sum_{l=0}^{k-1} \binom{n-1}{l}$  sumas, (ver obs. 4.40), se realizó con el programa [ST] con  $p = \frac{1}{2}$ ; mientras que para el cálculo de  $\sum_{r=1}^{k-1} \binom{n}{k} (2^r - 1)$  sumas y  $\sum_{r=1}^{k-1} \binom{n}{r} (r-1) + 1$  productos, (ver capítulo 1 sección 5 prop. 1.26), se realizó mediante el programa [ST] con  $p = \frac{2}{3}$  para la suma con 15 decimales después de la coma, es decir  $\frac{2}{3} \approx 0,6666666666666666$  y para los productos se tomó  $p = \frac{1}{2}$ .*

OBSERVACIÓN 4.70. *En ambos métodos el rango de valores para  $n$  utilizados fue de  $40 \leq n \leq 50$ , y para  $k$ ,  $6 \leq k \leq 10$ .*

OBSERVACIÓN 4.71. *En ambos métodos las cotas propuestas son las logradas por las cotas de las diferentes acotaciones en las diversas sumas de la distribución binomial, que en la mayoría de los casos es demasiado grande con los resultados obtenidos en la cuenta operacional de sumas y multiplicaciones requeridas con exactitud como se establece en los teoremas anteriormente expuestos. Pero no se encontraron cotas más finas de dichas sumas.*

## CONCLUSIONES

El método de compresión de imágenes propuesto si bien no mejora los métodos estándares de la actualidad, JPEG, su implementación es más sencilla, pues las entradas de la matriz de compresión utilizada está formada por el conjunto  $\{\pm 1\}$  y trabaja puramente con enteros lo que simplifica la cuentas y agiliza las operaciones en un ordenador, en contraposición del JPEG, que trabaja con números reales y en su proceso de implementación intervienen varias matrices.

Los resultados obtenidos, los cuales fueron probados con diferentes marcos de imágenes muestran que el método propuesto ronda una compresión en general del 80%, con resultados del 90% igualando en determinados casos el nivel de compresión del formato JPEG, el cual ronda el 90%; cabe mencionar que el nivel de compresión depende mucho de la imagen en cuestión.

Si bien los diversos algoritmos muestran una compresión teórica de la imagen, en el capítulo 3 sección 8 dichas compresiones son comprobadas, más aún se mejora la compresión y las diferentes métricas obtenidas con el método propuesto.

La idea de calcular las componentes principales surge del hecho de trabajar con otros esquemas de asociación, en este caso el de Johnson y poder obtener mejores resultados en los métodos de compresión.

Pero en dicho proceso se revisó el trabajo [DR] y se mejoraron las cotas de dicho trabajo, como se explicó en el capítulo cuatro.

Otro trabajo a futuro es reducir dichas cotas encontradas, pues en el cálculo de las diferentes proyecciones de  $f$  a algún  $V_r$ , ciertos sumandos,  $\langle f, e_s \rangle$ , se repiten para distintos  $r$ , lo cual un cálculo diferente de las diversos productos internos  $\langle f, e_s \rangle$  podrían reducir el número total de operaciones.



## BIBLIOGRAFÍA

- [B] R. A. Bailey. *Association Schemes: Designed Experiments, Algebra and Combinatorics*. Cambridge studies in advanced mathematics 84. Cambridge University Press. 2004.
- [BA] Burt P.J.; Adelson E.H. *The Laplacian pyramid as a compact image code*. IEEE Trans. Comm. 31 (4),532-540. (1983).
- [BI] E. Bannai, T. Ito. *Algebraic Combinatorics I: Association Schemes*. Benjamin Cummings, Lecture Notes Series, Menlo Park, Cal, 1984.
- [BCE] Balan R.; Casazza P. G. and D. Edidin. *On signal reconstruction without phase*. Journ. Appl. and Comput. Harmonic Analysis, 20(3):345-356, 2006.
- [BF] Benedetto J.J.; Fickus M. *Finite normalized tight frames*. Adv. Comp. Math. 18 (2003).
- [CK1] Kovacevic, J. Chebira A. *Life Beyond Bases: The Advent of Frames (Part I)*. IEEE SP Mag., vol. 24, no. 4, Jul. 2007, pp. 86-104.
- [CK2] Kovacevic, J. Chebira A. *Life Beyond Bases: The Advent of Frames (Part II)*. IEEE SP Mag., vol. 24, no. 5, Sep. 2007, pp. 115-125.
- [CSV] Chatterji B.N. Srinivaskumar S. and Veeraswamy K. *Designing Quantization Table for Hadamard Transform based on Human Visual System for Image compression*, ICGST-GVIP Journal, Volume 7, Issue 3, November 2007.
- [D] Daubechies, *I Painless Nonorthogonal Expansions*. J. Math. Phys. vol. 27, pp. 1271-1283 (1986).
- [DD] Deza E. and Deza M. *Dictionary of distances*, ELSEVIER, Chapter 21.
- [De] Devore J. L. *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*. Thomson Learning, quinta edición (2001).
- [DP] De la Cruz García J. M.; Pajares Martinsanz G. *Visión por Computador*. 2º ed. Alfaomega (2002).
- [DP] Davey B. A. and Priestley H. A. *Introduction to Lattices and Order*. Cambridge Mathematical textbooks. Cambridge University Press. 1990.
- [DR] Diaconis P. and Rockmore D. *Efficient Computation of Isotypic projections for the Symmetric Group*. DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, Mar. 1992.
- [EB] Eldar Y. and B'olskei H. *Geometrically uniform frames*. IEEE Trans. Inform. Th., 49(4):993-1006, Apr. 2003.
- [FMRHO1] Foote, R. Mirchandani, G. Rockmore D. Healy D. Olson, T. *A Wreath Product Group Approach to Signal and Image Processing: Part I - Multi-resolution Analysis*. IEEE transactions on signal processing, 2000, vol. 48, n°1, pp. 102-132.
- [FMRHO2] Foote, R. Mirchandani, G. Rockmore D. Healy D. Olson, T. *A Wreath Product Group Approach to Signal and Image Processing: Part II - Convolution, Correlation, and Applications*. IEEE transactions on signal processing, 2000, vol. 48, n°1, pp. 102-132.
- [G] Godsil C. *Association Schemes*. Combinatorics & Optimization. University of Waterloo. 2005.

- [GKK] Goyal, V. K. Kovacevic, J. Kelner. A. *Quantized frame expansions with erasures*. Journal of Appl. and Comput. Harmonic Analysis, 10(3):203-233, May 2001.
- [GLL] Graham, R. L., Li, and Li, W. *On the structure of  $t$ -designs*. SIAM J. Alg. and Disc Meth. 1, 8 - 14, 1980.
- [LMP] Levstein, F.; Maldonado C. and Penazzi D. *Lattices, frames and Norton algebras of dual polar graphs*. CONTEMPORARY MATHEMATICS, vol. 544 p. 1 - 16, 2011.
- [M] Munch N.J. *Noise reduction in tight Weyl-Heisenberg frames*. IEEE Trans. Inform. Th. 38 (2), 608-616. (1992).
- [MW] Madisetti V.; Williams D. *The digital signal processing handbook*. CRC PRESS, IEEE PRESS, (1998).
- [NS] Nguyen T.; Strang G. *Wavelets and Filter Banks*. Wellesley - Cambridge Press (1997).
- [S] Serre J. P. *Linear Representations of Finite Groups*. Springer-Verlag, NY, 1977.
- [Sg] Strang G. *The Discrete Cosine Transform*. Journal SIAM Review archive Volume 41 Issue 1, pag. 135-147. March 1999.
- [St] Stanton D. *Orthogonal polynomials and Chevalley group*. Special Functions: Group Theoretical Aspect and Applications. (ed. R. Askey, et. al.), 1984, 87 - 128.
- [ST] Binomial calculator. <http://stattrek.com/online-calculator/binomial.aspx>
- [Wdm] Image Compression. <http://www.whynomath.org/node/wavlets/index.html>.
- SIAM
- [VW] Vale R. and Waldron S. *Tight frames and their symmetries*. Const. Approx., 21:83-112, 2005.
- [Y] Yáñez M. Francisca *Harmonic Analysis of Radon Filtrations for  $S_n$  and  $GL_n(q)$* . arxiv 0901.2669 January 2009.