

Retículos en \mathbb{R}^4
y
el problema del cuantizador óptimo.

por

Juan Miguel Velásquez Soto

Trabajo Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía y Física como parte
de los requerimientos para la obtención del grado de Doctor en Matemática de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Diciembre de 2012

©FAMAF-UNC 2012

Director: Dr. Juan Pablo Rossetti

Para Sara

Resumen

En esta tesis consideramos retículos (lattices) en espacios euclídeos en dimensiones muy bajas. Estudiamos desde un punto de vista geométrico la clasificación de los lattices en dimensión 4 de acuerdo a la forma topológico-combinatoria de su celda de Voronoi, mostrando un etiquetamiento completo de los vértices, aristas, 2-caras y ‘facets’ de la celda para cada uno de los tres tipos de lattices en esta dimensión.

Considerando a los lattices como cuantizadores, abordamos el problema del retículo cuantizador óptimo en dimensión 4. En dimensión 3, este problema fue resuelto por Barnes y Sloane en 1983, en un trabajo que nos ha servido de guía, al igual que los de Conway y Sloane para calcular el momento de inercia de politopos al descomponerlos en símplices.

Utilizando el etiquetamiento mencionado obtenemos fórmulas explícitas para calcular la constante de cuantización de lattices en dimensión 4. Luego mostramos que los retículos A_4^* y D_4^* son mínimos locales para la función de cuantización. Este hecho, junto a resultados numéricos obtenidos mediante la ayuda de la computadora, nos permiten conjeturar que D_4^* es el lattice quantizer óptimo en dimensión 4.

Finalmente, mostramos como transformar el problema del retículo cuantizador para lattices de Tipo I, en otro completamente algebraico, – Un sistema de ecuaciones polinomiales homogéneas con 10 incógnitas–, si se lograra resolver ese sistema de ecuaciones, posiblemente podríamos encontrar el retículo óptimo, por lo menos entre los lattices de Tipo I.

Pensamos que sistemas similares podrían desarrollarse para los Tipos II y III, no obstante dadas las dificultades técnicas encontradas en el Tipo I, decidimos no ahondar mucho en esos casos.

Palabras claves: Retículos euclídeos, Cuantizadores vectoriales, Celda de Voronoi.

2010 Mathematics subject Classification: 11H06, 11P21, 52C07

Abstract

In this thesis we study low-dimensional lattices in Euclidean spaces from a geometric perspective. Classification of four dimensional Euclidean lattices, according to its Voronoi cell is well known: there being Type I Lattices, —those that admit an obtuse superbase—, lattices of Type II, —those that admit an almost obtuse superbase— and lattices of Type III.

We study this classification and present a complete labeling of the 120 vertex of the Voronoi cell according to its Types, in terms of reduced Selling parameters associated to the Lattice, this allow us to identify the 240 edges, the 150 2-faces and the 30 facets that it comprises.

Using this cell description, we obtain explicit formulas for computing the quantization constant in any 4-dimensional Euclidean lattice. As a consequence of these formulas, we proof that A_4^* and D_4^* lattices are local minima for the quantization function.

This fact, together with some numerical results obtained computationally, suggest us that D_4^* is the predicted optimal lattice quantizer.

Finally, as a proposal to solve the lattice quantizer problem in four dimensions in Type I lattices, we explore an algebraic system of 15 homogeneous polynomial equations, whose variables are the Selling reduced parameters of Type I lattices. If this system could be solved, we could possibly find the optimal lattice quantizer, at least between the lattices of Type I.

Key words: Euclidean lattices, vector quantizer, Voronoi cell.

2010 Mathematics subject Classification: 11H06, 11P21, 52C07

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mi director, el profesor Juan Pablo Rossetti, por quien tengo un gran sentimiento de aprecio y gratitud, quien desde un principio estuvo atento y dispuesto a orientarme. También agradezco a los jurados, los profesores: Peter Doyle, Daniel Penazzi, Ariel Pacetti y Marcos Salvai por sus opiniones y comentarios, por las innumerables correcciones y todas las recomendaciones para continuar avanzando en esta investigación. Tengo claro que el camino apenas comienza.

De manera muy especial quiero agradecer a Nancy Moyano y Claudia Aguirre, del CIEM, y a los empleados no docentes de FaMAF, en particular a los vigilantes, quienes tuvieron siempre una sonrisa y la mejor disposición para hacer que mi paso por la facultad fuera más sencillo. Pienso que por medio suyo estoy agradeciendo a todo el personal de CONICET en Argentina, y a la Universidad del Valle en Colombia, que me proporcionaron los recursos materiales necesarios para lograr concluir esta etapa de mi formación.

Agradezco además a Nicolás Andruskiewitsch, que ha creído en nosotros, él siempre ha sabido como alentarnos para seguir adelante. ¡Muchas gracias profe por prestarnos la camiseta!

Finalmente me siento en libertad de agradecer a Ívan, Alonso y Oscar, Felipe, Rocha, Lorena y Julia y a otros, muchos otros que no nombro, con quienes tuve la suerte de compartir algunos almuerzos, buenas charlas, algunas risas, pocas rabiets, café, y un buen Té verde! de cuando en cuando. A todos ellos ¡Muchas gracias!, qué el dios de sus creencias los llene de vida y felicidad.

Índice general

Resumen	I
Abstract	III
Agradecimientos	V
Introducción	XI
1. Preliminares.	1
1.1. Definiciones y resultados básicos.	1
1.1.1. Generalidades sobre lattices.	1
1.1.2. Familias especiales de lattices.	4
1.2. Superbases y parámetros de Selling.	7
1.3. Lattices y formas cuadráticas.	9
1.4. Determinante de un lattice y norma de un vector.	10
1.5. Vonormas y Conormas.	15
1.5.1. Vectores de Voronoi.	15
1.5.2. Vonormas y Conormas.	17
1.6. Árboles, grafos y determinante.	18
2. Clasificación de lattices en dimensiones bajas.	25
2.1. Lattices en dimensión 1 y 2.	25
2.2. Lattices en dimensión 3.	30
2.2.1. Existencia de superbase obtusa.	30
2.2.2. Descripción de la celda de Voronoi para lattices en dimensión 3.	34
2.3. Reducción de lattices 4-dimensionales	36
2.3.1. Reducción de formas cuadráticas cuaternarias.	37

2.3.2.	Algoritmo de reducción de Charve.	38
3.	Celdas de Voronoi en dimensión 4.	45
3.1.	Lattices de Tipo I.	45
3.1.1.	Vectores de Voronoi y facets.	45
3.1.2.	\mathbf{y} -coordenadas de los vértices de $S(\mathbf{0})$	49
3.1.3.	Aristas de $S(\mathbf{0})$	51
3.2.	Lattices Tipo II.	52
3.2.1.	Vectores de Voronoi y facets.	53
3.2.2.	Descripción de las facets.	54
3.2.3.	\mathbf{y} -coordenadas de los vértices.	58
3.2.4.	Aristas de $S(\mathbf{0})$	62
3.3.	Lattices Tipo III.	64
3.3.1.	Vectores de Voronoi y facets.	64
3.3.2.	Descripción de las facets.	67
3.3.3.	Identificación de los vértices.	69
3.4.	Descripción del espacio de lattices	71
4.	Constante de cuantización para lattices en dimensión 4.	73
4.1.	Introducción.	73
4.2.	Segundo momento para politopos.	76
4.3.	Constante de cuantización para lattices en dimensión 2.	77
4.4.	Constante de cuantización para lattices en dimensión 3.	80
4.5.	Constante de Cuantización para lattices 4-dimensionales.	81
4.5.1.	Constante de cuantización para lattices de Tipo I.	84
4.5.2.	Constante de cuantización para lattices de Tipo II.	86
4.5.3.	Constante de cuantización para lattices de Tipo III.	86
4.6.	Algunos valores para la constante de cuantización $G(\rho)$	88
4.7.	A_4^* y D_4^* son mínimos locales para $G(\rho)$	91
5.	Un sistema algebraico para el mínimo.	93
5.1.	Variaciones que fijan el determinante.	94
5.2.	Método de Variaciones para lattices de Tipo I.	96

6. Apéndice.	99
A.1. Vértices para $S(\mathbf{0})$ en Tipo I, II y III.	99
A.2. Algoritmos.	103
A.3. Variaciones que fijan el determinante.	107
A.4. Sistema de ecuaciones, cuantización en Tipo I.	120

Introducción

Un retículo (o lattice) euclídeo es un subconjunto L de \mathbb{R}^n formado por las combinaciones lineales enteras de n vectores linealmente independientes, $L := \{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i : m_i \in \mathbb{Z}\}$, donde $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de \mathbb{R}^n . Por ejemplo, \mathbb{Z}^n es un retículo; otro es $D_n := \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n : x_1 + \dots + x_n \text{ es par}\}$, llamado *checkerboard lattice* (tablero de damas); otro notable es H_2 , el *retículo hexagonal*, etc.

Asociado a cada punto del lattice está la *celda de Voronoi* correspondiente a él, que se define como el conjunto de puntos del espacio euclídeo cuya distancia a dicho punto es menor o igual que la distancia a cualquier otro punto del lattice.

Estas celdas producen un *embaldosamiento* (o *tiling*) del espacio. En dimensión 2, hay esencialmente dos *clases* de celdas de Voronoi asociadas a retículos, la hexagonal y la rectangular, constituyendo la primera el caso genérico para retículos en dimensión 2. Así el tipo hexagonal se llama *primitivo*, lo cual también puede ser caracterizado por la propiedad que en el correspondiente embaldosamiento se encuentran en cada vértice el mínimo número posible de polígonos, tres en este caso.

En dimensión 3 hay cinco clases o tipos de celdas de Voronoi y sólo una de ellas es primitiva (E.S. Fedorov [Fe]). En dimensión 4, este problema fue resuelto por Delone [De], con una enumeración de 52 tipos de retículos, de los cuales solo tres son primitivos. En dimensión 5, Ryshkov y Baranovskii [RB] hallaron 221 tipos primitivos de celdas de Voronoi, luego corregido a 222 por Engel [EG].

La celda de Voronoi es un elemento geométrico que cumple un rol fundamental en la mayoría de los problemas importantes relacionados con lattices. Entre éstos, mencionamos rápidamente el *packing problem*, donde se trata de empaquetar esferas del mismo tamaño de la manera más eficiente posible, es decir, poniéndolas unas contra otras de la forma más densa posible; el *covering problem*, donde se trata de cubrir el espacio con esferas del mismo tamaño (que se superponen) de la manera más económica posible; el *kissing number* o *número de contacto*, donde se trata de disponer el mayor número de esferas tocando a una esfera prefijada, todas del mismo tamaño; y el *quantizer problem*, donde se digitalizan datos que llegan tratando de cometer el menor error posible. Podemos ver que en el packing problem habrá una esfera dentro de cada celda de Voronoi; en el covering problem se pone una esfera cubriendo justo una celda; en el kissing number habrá tantas esferas tocando a una fija como paredes de la celda haya a distancia mínima del punto del lattice dentro de la celda; y en el quantizer problem se considera el error cuadrático medio en la celda de Voronoi.

Nos detenemos en este último caso por ser el que trataremos en el presente trabajo. Un cuantizador (o *quantizer*) puede ser pensado como un conversor analógico-digital. Son usados en el mundo real. Cuando un mensaje es enviado a través de un canal ruidoso, es de interés eliminar ese ruido agregado al mensaje original. Bajo ciertas condiciones generales, un retículo puede ser considerado como un cuantizador vectorial (es decir en dimensión mayor que uno). La celda de Voronoi se usa

para convertir cada punto dentro de ella en un punto del lattice. De este modo se obtiene el conversor analógico-digital. Interesa medir cuánto ha sido el error promedio cometido, siendo la forma más común de hacerlo tomar la integral de las distancias al cuadrado de los puntos de la celda de Voronoi al centro de la misma, es decir, el momento de inercia de la celda.

Esta es la cantidad que se quiere minimizar al variar los lattices. Si bien los quantizers utilizados en el mundo real son de dimensión uno, P. L. Zador [Za] mostró que los *vector quantizers* son mejores. Por eso podría ser importante encontrar buenos vector quantizers, y los lattices son excelentes proveedores de ellos; así el problema en cada dimensión tiene aplicaciones potenciales.

Recordamos que G. Fejes Tóth resolvió el caso de dimensión dos [Fej], donde como es de esperar el lattice hexagonal es el mejor cuantizador. En dimensión 3 el problema fue resuelto en un gran trabajo de Barnes y Sloane [BS]. Simultáneamente, Conway y Sloane realizaron una serie de cálculos importantes en relación a este tema (ver capítulo 21 de [CS] y referencias en el mismo).

En esta tesis nos concentramos en los lattices en el espacios euclídeo \mathbb{R}^4 , mirándolos desde el punto de vista de la forma topológico-combinatoria de su celda de Voronoi, y luego abordamos el problema de determinar el retículo cuantizador óptimo en dimensión 4.

Primero estudiamos detalladamente la celda de Voronoi de lattices en dimensión 4, lo que significa rehacer la clasificación de lattices en esta dimensión, dada originalmente por Delone [De] y revisitada en varias oportunidades por diversos autores, entre los que destacamos el enfoque dado por Conway con las conormas en [Co] y [CS3], también el de [Va].

Con posterioridad a Selling y previo a Voronoi, Charve propuso parámetros y un procedimiento para diferenciar los tres tipos de lattices primitivos en dimensión 4, [Ch]. Asimismo Conway propuso como parámetros las llamadas *conormas*, que tienen la ventaja de ser continuas y mostrar la simetría del lattice, aunque la desventaja de que son más de diez. Ambos tipos de parámetros nos resultaron útiles para nuestros propósitos, aunque los cálculos realizados con la computadora fueron hechos con los parámetros de Selling-Charve. Revisamos el método de Charve e instrumentamos en forma concreta un programa de computadora, basado en este algoritmo, para determinar el tipo del lattice euclídeo de un lattice 4-dimensional dado (ver Sección 2.3).

Siguiendo la clasificación mencionada, escribimos en forma explícita un etiquetamiento completo de los 120 vértices, 240 aristas, 150 caras 2-dimensionales y las 30 *facets* de las celdas de Voronoi para los tres tipos de lattices (primitivos) existentes en esta dimensión, el cual utilizaremos en cálculos posteriores.

Siguiendo el procedimiento propuesto en [CS, Cap 21, pag. 451], y en [BS], calculamos la constante de cuantización de lattices en dimensión 4. Para esto, partimos la celda de Voronoi del lattice en 1440 símplexes (son como tetraedros pero en dimensión 4) y se calcula el momento de inercia de cada uno de ellos. Esto es posible puesto que los momentos de inercia son sumables, a diferencia de los segundos momentos que no lo son. A continuación se suman todos éstos, y a dicha cantidad se la divide por una potencia del determinante del lattice, lo que permite comparar con lattices en otras dimensiones. La principal dificultad en este procedimiento es que se trabaja con miles de sumandos, y se realizan muchas cuentas, que solo es posible hacerlas con la ayuda de la computadora.

Luego de muchos intentos, de observar largos renglones llenos de cuentas y sobre todo teniendo presente la formula de la constante de cuantización en dimensión 3 dada en [CS], logramos una fórmula análoga para la constante de cuantización en lattices 4-dimensionales. En realidad, conseguimos tres fórmulas, una para cada uno de los tres tipos de lattices primitivos. Estas expresiones

permiten calcular rápidamente la constante de cuantización de cualquier lattice en dimensión 4, previa reducción de sus parámetros de Selling-Charve, lo que podemos hacer mediante el algoritmo mencionado.

Utilizando las fórmulas encontradas (ver expresiones (4.31) en el Capítulo 4), probamos que los lattices A_4^* y D_4^* son mínimos locales de las funciones de cuantización, es decir, son óptimos locales para el *lattice quantizer problem*.

El caso de A_4^* se resuelve fácilmente puesto que dicho lattice se encuentra en medio de la región de Tipo I, por lo que alcanza con evaluar la función $G(L)$ para el Tipo I, calcular sus derivadas parciales y el Hessiano en el punto A_4^* .

En cambio el caso de D_4^* es más difícil, puesto que dicho lattice está justo en una *esquina* en el espacio de los lattices, donde confluyen varias *paredes* divisorias de distintas regiones de Tipo II y una región de tipo III. Por esta razón y por el hecho que los parámetros que utilizamos no son continuos, resulta más complicado el cálculo.

Esta información, junto a evaluaciones numéricas hechas con métodos computacionales, nos permiten conjeturar que D_4^* es el retículo cuantizador óptimo en dimensión 4. Esto está en concordancia con los resultados conocidos del algoritmo general dado por Viterbo-Bigliero en [VB], y Agrell-Eriksson [AE] para obtener buenos retículos cuantizadores en cada dimensión.

Por último, en un intento por obtener todos los mínimos locales para este problema, abordamos el llamado *método de variaciones* utilizado por Barnes y Sloane [BS], y logramos obtener variaciones que fijan el determinante hasta el primer orden. Esto es importante porque uno se puede mover en el espacio de lattices manteniendo casi invariante el denominador en la expresión de la constante de cuantización, de modo que solo hay que minimizar el numerador. No obstante, el problema continúa siendo demasiado grande para poder ser resuelto. Planteamos las ecuaciones para los puntos críticos de la función de cuantización de Tipo I y obtenemos un sistema algebraico de 15 ó 16 ecuaciones polinómicas homogéneas de grado 10, donde la cantidad de términos de cada ecuación oscila entre 104 y 680. Usualmente estos sistemas se resuelven usando bases de Groebner, pero nuestro caso es demasiado grande y no ha sido posible resolverlo utilizando los métodos computacionales usuales. Le consultamos a varios expertos en el tema, pero ellos tampoco lograron avances significativos, pese a aplicar algunos procedimientos muy ingeniosos.

Pensamos que en caso de lograr resolver el sistema planteado, y si la solución que se obtiene (salvo homotecia) es un conjunto discreto, el problema, al menos en el caso de los lattices de Tipo I, estará terminado al evaluar la función de cuantización en dichos puntos, comparar los resultados y quedarse con el menor. En el caso general todas las evidencias apuntan a que el lattice D_4^* es el óptimo.

A lo largo de todos los capítulos hay una fuerte componente computacional debido a que las cuentas que se debían realizar involucraban miles de términos, tanto en la partición de la celda de Voronoi de dimensión 4 en símlices, como en los cálculos intermedios para obtener la constante de cuantización, en la simplificación de las fórmulas, las variaciones, etc.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera:

En el Capítulo 1, presentamos los preliminares básicos sobre lattices que necesitaremos a lo largo del trabajo y algunos ejemplos de lattices destacados; salvo el Teorema 1.4.5, que establece una expresión para calcular el determinante de un lattice y la norma de un vector en función de ciertos parámetros del lattice, cuya prueba es una adaptación nuestra de un teorema de Kirchoff,

los demas resultados presentados en el capítulo son anteriores, y pueden consultarse en el libro de Conway-Sloane [CS] o en el trabajo de Valentin [Va].

En el Capítulo 2, presentamos la clasificación de los lattices en dimensiones bajas según la estructura topológico-combinatoria de su celda de Voronoi, los resultados de las dos primeras secciones han sido tomados de los trabajos de Conway - Sloane, [CS], [CS3]. En la Sección 2.3.1 presentamos el método de Charve [Ch], para reducción de formas cuadráticas definidas positivas, e implementamos un algoritmo que nos permite encontrar los parámetros de Selling reducidos de un lattice 4-dimensional. La implementación es una propuesta nuestra, pero el método es de Charve.

En el Capítulo 3, presentamos un etiquetamiento de cada uno de los tres Tipos de celdas de Voronoi primitivas en dimensión 4, en términos de los parámetros de Selling reducidos asociados. Los resultados de este capítulo serán esenciales a la hora de calcular la constante de cuantización de un lattice 4-dimensional, problema que abordamos en el Capítulo 4. El resultado principal de la tesis se resume en las fórmulas del numeral (4.31). Como consecuencia de esas ecuaciones logramos probar que los lattices A_4^* y D_4^* son mínimos locales en su Tipo para el *lattice quantizer problem*.

Finalmente en el Capítulo 5, presentamos un sistema de ecuaciones algebraicas obtenidas de la aplicación del método de variaciones, como una alternativa para resolver el problema del retículo cuantizador óptimo en los lattices de Tipo I.

En el Apéndice se encuentran algunos datos de respaldo de cuentas realizadas, los vértices de las celdas en los tres Tipos en términos de los vectores de una superbase reducida. Los algoritmos usados para generar la partición de las celdas en símlices, así como los algoritmos que nos permitieron calcular la constante de cuantización. También presentamos los pasos intermedios de algunas cuentas extensas, y un sistema de 15 ecuaciones polinomiales que de lograr resolverse proporcionaría información valiosa para la terminación del problema en los lattice de Tipo I.

Capítulo 1

Preliminares.

En este capítulo presentamos las definiciones y propiedades básicas sobre la teoría de retículos en espacios euclídeos e introducimos parte de la notación que usaremos a lo largo del trabajo. Para ampliar la información aquí consignada recomendamos consultar el libro de Conway-Sloane, *Sphere packings, lattices and groups* [CS], el trabajo de Vallentin [Va], o las notas sobre *Retículos en espacios euclídeos* del profesor Rossetti, [Ro].

1.1. Definiciones y resultados básicos.

1.1.1. Generalidades sobre lattices.

Definición 1.1.1. Decimos que un subconjunto $L \subseteq \mathbb{R}^n$ es un *lattice* (o *retículo*) de rango n , o n -dimensional, si existe un subconjunto $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ de n vectores linealmente independientes en \mathbb{R}^n tales que

$$L = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{v}_i : x_i \in \mathbb{Z} \right\}. \quad (1.1)$$

En tal caso decimos que B es una *base* para L .

En ocasiones también consideraremos lattices de rango n en un subespacio de \mathbb{R}^m , con $n < m$. De acuerdo a su definición, a un lattice L se lo puede ver como un conjunto de puntos en el espacio. Sin embargo, hay otras formas de mirarlo que resultan muy interesantes. En lugar de pensar el vector $\mathbf{v} \in L$ como un punto de \mathbb{R}^n , lo identificamos con la traslación en \mathbb{R}^n por \mathbf{v} , es decir, la transformación rígida del espacio $T_{\mathbf{v}} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{v} + \mathbf{x}$. Así, identificamos

$$\begin{aligned} L &\longleftrightarrow T_L \\ \mathbf{v} &\longleftrightarrow T_{\mathbf{v}} \end{aligned}$$

En este caso, se habla de *lattice de traslaciones*. Esto da origen a una *acción* del lattice L en \mathbb{R}^n , que resulta ser *propiamente discontinua*. En particular, no hay puntos fijos en esta acción — excepto cuando el vector \mathbf{v} es el vector nulo — por lo que el *espacio de órbitas*, o *espacio cociente* $T^n := L \backslash \mathbb{R}^n$, no tiene singularidades.

De esta manera T^n resulta ser una variedad diferenciable sin borde, además como L tiene rango máximo, es compacta. Si a T^n lo dotamos con la *métrica* inducida de \mathbb{R}^n , entonces T^n tiene la estructura de una variedad riemanniana de dimensión n , llamada *toro plano n -dimensional*, lo que establece una relación entre el estudio de los lattices y la *Geometría riemanniana*.

Otra forma de ver un lattice L es como grupo abeliano, para lo cual basta pensarlo como un subgrupo de $(\mathbb{R}^n, +)$. Desde este punto de vista, los lattices en una dimensión fija son todos isomorfos entre sí.

Si $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de L , es fácil ver que $B' = \{\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \dots, \mathbf{v}'_n\}$ es otra base para L si y sólo si, existe una transformación unimodular entera, $U \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{Z})$, tal que

$$U(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) = (\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \dots, \mathbf{v}'_n).$$

Si además

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (\mathbf{v}_{11}, \mathbf{v}_{12}, \dots, \mathbf{v}_{1n}) \\ \mathbf{v}_2 &= (\mathbf{v}_{21}, \mathbf{v}_{22}, \dots, \mathbf{v}_{2n}) \\ &\vdots \\ \mathbf{v}_n &= (\mathbf{v}_{n1}, \mathbf{v}_{n2}, \dots, \mathbf{v}_{nn}) \end{aligned}$$

son las coordenadas de los vectores de B en una base de \mathbb{R}^n , que usualmente será la base canónica, la matriz

$$M := \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{11} & \mathbf{v}_{12} & \dots & \mathbf{v}_{1n} \\ \mathbf{v}_{21} & \mathbf{v}_{22} & \dots & \mathbf{v}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{v}_{n1} & \mathbf{v}_{n2} & \dots & \mathbf{v}_{nn} \end{bmatrix}$$

se llama *matriz generadora* del lattice. Resulta claro que

$$\mathbf{y} \in L \iff \text{existe } \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \text{ tal que } \mathbf{y} = \mathbf{x}M$$

Otra matriz muy importante en el estudio de los lattices es la *matriz de Gram* $A = MM^{\text{tr}}$.

Notemos que la entrada (i, j) de A es el producto interno $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$. Como veremos más adelante, esta matriz caracteriza al lattice, salvo equivalencia por transformaciones ortogonales.

Dado que las transformaciones rígidas del espacio \mathbb{R}^n que fijan el origen, están dadas por el grupo $O(n)$. Podemos pensar que $O(n)$ actúa en el conjunto de lattices de \mathbb{R}^n , así: para todo $A \in O(n)$ y L un lattice en \mathbb{R}^n , denotamos por $A \cdot L$, al conjunto $\{A\mathbf{x} : \mathbf{x} \in L\}$.

Con esto en mente, diremos que dos lattices L y L' son *congruentes* (o *iguales*), si ellos están en la misma órbita por esta acción, es decir, si existe $A \in O(n)$ tal que $L' = A \cdot L$, y en tal caso escribimos $L' \equiv L$.

Por otra parte, si dos lattices L y L' están relacionados por una homotecia, es decir, si existe $t \in \mathbb{R}^+$, tal que $L' = tL$, diremos que ellos son *semejantes* (o *equivalentes*), en tal caso escribimos $L \cong L'$. Para todos los problemas sobre lattices mencionados en la Introducción, no hace ninguna diferencia considerar lattices semejantes, por lo que se justifica el nombre *equivalentes*.

Observación 1.1.2. Si L y L' son semejantes, y M, M' son matrices generadoras para L y L' respectivamente, se cumple que $M' = cUMB$ donde $c > 0$, $B \in O(n)$ y $U \in GL_n(\mathbb{Z})$. De manera similar, las matrices de Gram A y A' satisfacen $A' = c^2UAU^{\text{tr}}$. Cuando los lattices son congruentes, se tiene $A' = UAU^{\text{tr}}$.

Ilustremos con un ejemplo las definiciones anteriores.

Ejemplo 1.1.3. Consideramos los siguientes lattices 2-dimensionales: H , el *lattice hexagonal*, generado por los vectores $(1, 0)$ y $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, y $A_2 := \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^3 : x_0 + x_1 + x_2 = 0\}$. El conjunto $\{(1, -1, 0), (0, 1, -1)\}$ es una base para A_2 . Hacemos notar que aunque A_2 es un lattice dos dimensional, sus elementos están en \mathbb{R}^3 . Las siguientes son matrices generadoras para H y A_2 respectivamente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

y las matrices de Gram correspondientes son:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

No es difícil ver que estos dos lattices son equivalentes. Por ejemplo, se puede multiplicar H por $\sqrt{2}$, obteniendo así la matriz de Gram $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, que también se obtiene al tomar en A_2 la base $\{(1, -1, 0), (0, -1, 1)\}$.

Como se puede ver, una ventaja de usar A_2 en lugar de H es que uno tiene coordenadas enteras, en lugar de la molesta $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Además, en A_2 se aprecia inmediatamente la simetría entre las tres coordenadas.

Dado que dos matrices de Gram para L tienen el mismo determinante, definimos *el determinante de L* , $\det(L)$, como el determinante de una cualesquiera de las matrices de Gram asociadas a L .

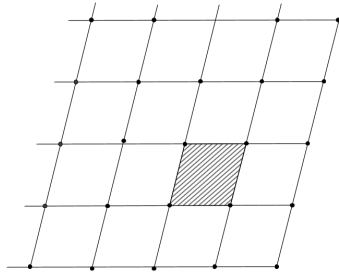


Figura 1.1: Paralelotopo fundamental en dimensión 2.

Definición 1.1.4. Sea L un lattice n -dimensional y $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ una base para L . Al *paralelotopo*

$$P := \left\{ \sum_{i=1}^n t_i \mathbf{v}_i : 0 \leq t_i < 1 \right\} \quad (1.2)$$

se le llama un *paralelotopo fundamental* para L .

Un paralelotopo fundamental es en realidad una región fundamental para el lattice, es decir, un ‘bloque’ con el cual, usando únicamente traslaciones, es posible cubrir todo el espacio y reconstruir el lattice. Resulta claro que cada base del lattice tiene asociado un paralelotopo fundamental, y que todos ellos tienen el mismo volumen, al cual llamamos *volumen del lattice* y denotamos por $\text{vol}(L)$.

Se puede probar que

$$\text{vol}(L) = \sqrt{\det(A)} \quad (1.3)$$

donde A es una matriz de gram del lattice.

Definición 1.1.5. Sea L un lattice de rango n en \mathbb{R}^n .

- i. Decimos que $L' \subseteq L$, es un *sublattice de L* , si L' también es un lattice de rango n de \mathbb{R}^n .
- ii. El conjunto $L^* := \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{Z} \text{ para todo } \mathbf{v} \in L\}$ es un lattice de \mathbb{R}^n , y se le llama el *lattice dual de L* .

Es claro que si L' es un sublattice de L , el grupo cociente L/L' es finito. Al cardinal de este grupo se le llama *índice de L' en L* y se lo suele denotar por $[L : L']$. Los volúmenes de L y L' están relacionados por la igualdad

$$\text{vol}(L') = \text{vol}(L) [L : L'].$$

Es claro que si L es un lattice, $2L = \{2\mathbf{v} : \mathbf{v} \in L\}$ es un sublattice suyo, y el grupo cociente $L/2L$ resulta isomorfo a \mathbb{Z}_2^n . Este sublattice está muy relacionado con los llamados vectores de Voronoi de L , los cuales juegan un papel esencial en la clasificación de los lattices de acuerdo a la estructura topológico-combinatoria de la celda de Voronoi asociada. En el Capítulo 2 estudiaremos este objeto con más detalle.

Definición 1.1.6. Decimos que un lattice L es *entero*, si el producto interno de cualquier par de elementos de L es un número entero, es decir, L es un lattice entero si para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \in \mathbb{Z}$. Adicionalmente, decimos que un lattice entero es *par*, si las normas de todos sus vectores son pares. Y que un lattice entero es *unimodular*, si su volumen es 1, o equivalentemente, si coincide con su dual.

Note que si L es un lattice entero, entonces $L \subseteq L^*$, es decir, los lattices enteros son sublattices de su dual.

1.1.2. Familias especiales de lattices.

A continuación presentamos una serie de lattices y algunas de sus propiedades. Incluimos en la presentación el lattice cúbico \mathbb{Z}^n , los lattices de raíces A_n y D_n y sus duales, entre otros. Algunos de ellos los incluimos simplemente como ejemplos, y otros por la información que aportan para una mejor comprensión de algunos problemas clásicos en la teoría, ya que resultan ser los mejores ejemplos conocidos en problemas como *the covering problem*, *the packing problem*, *the lattice quantizer problem*, entre otros. El lector interesado puede ampliar la información sobre ellos consultando el libro de Conway - Sloane [CS], o el catálogo de lattices [Cat].

El lattice cúbico n -dimensional \mathbb{Z}^n . Sea n un número natural, y \mathbb{Z} el conjunto de los números enteros. El conjunto

$$\mathbb{Z}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \in \mathbb{Z}\}$$

es un lattice, que llamamos *lattice cúbico n -dimensional* o *lattice entero*. Al lattice \mathbb{Z}^2 se le suele llamar *lattice cuadrado*. Una matriz generadora para este lattice puede ser I_n , la matriz identidad de orden n , que también hace las veces de matriz de Gram, es claro que el determinante del lattice es $\det(\mathbb{Z}^n) = \det(I_n) = 1$.

El lattice n -dimensional A_n . Para $n \geq 1$,

$$A_n := \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} : x_0 + x_1 + \dots + x_n = 0\}. \quad (1.4)$$

Note que usamos $n + 1$ coordenadas para definir un lattice n -dimensional. A_n esta contenido en el hiperplano $\sum_0^n x_i = 0$ de \mathbb{R}^{n+1} . Los n vectores: $(1, -1, 0, \dots, 0)$, $(1, 0, -1, 0, \dots, 0)$, $(1, 0, 0, -1, 0, \dots, 0)$, \dots , $(1, 0, \dots, 0, -1)$, conforman una base para A_n . La matriz generadora, M , y de Gram, A , asociadas a esta base son:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (1.5)$$

Se puede probar que $\det(A_n) = n + 1$.

El lattice dual A_n^* . Es el conjunto de puntos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tales que $\sum_0^n x_i = 0$ y $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \in \mathbb{Z}$ para todo $\mathbf{y} \in A_n$. Una matriz generadora, y de Gram para este lattice son respectivamente:

$$M = \frac{1}{n+1} \begin{bmatrix} n-1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & n & \dots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{bmatrix}, \quad A = \frac{1}{n+1} \begin{bmatrix} n-1 & \dots & -1 \\ -1 & n & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & n \end{bmatrix}. \quad (1.6)$$

Note que la matriz generadora es de tamaño $n \times (n + 1)$, mientras que la de Gram es una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$. Se puede probar por inducción que $\det(A_n^*) = \frac{1}{n+1}$.

Como un caso particular, presentamos el lattice A_4^* .

El lattice dual A_4^* . Es uno de los lattices más usados en dimensión 4. Por el ítem anterior, los vectores:

$$\left(\frac{4}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right), \left(-\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right), \left(-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right), \left(-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{1}{5}\right)$$

forman una base para A_4^* . La matriz generadora correspondiente a esta base

$$M_{A_4^*} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

y la de Gram

$$A_{A_4^*} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

El determinante del lattice es $\det(A_4^*) = \frac{5^3}{5^4} = \frac{1}{5}$.

El lattice D_n . Para $n \in \mathbb{N}$,

$$D_n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n : x_1 + x_2 + \dots + x_n \in 2\mathbb{Z}\}. \quad (1.9)$$

En otras palabras, D_n se obtiene al colorear los puntos de \mathbb{Z}^n de manera alternada, azul y amarillo, comenzando en el origen $\mathbf{0}$, como un tablero de damas, y tomando los puntos de color azul. Es por eso que a D_n algunas veces se le llama *the checkerboard lattice*. Una base típica para D_n , con $n > 2$ es la que forman los vectores $(-1, -1, 0, \dots, 0, 0)$, $(1, -1, 0, \dots, 0, 0)$, $(0, 1, -1, 0, \dots, 0)$, \dots , $(0, 0, 0, \dots, 1, -1)$. La matriz generadora asociada a esta base es

$$M = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

y su determinante, $\det(D_n) = 4$

El lattice D_4 . Una matriz generadora para D_4 es

$$M_{D_4} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

La matriz de Gram asociada es:

$$A_{D_4} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

El lattice dual D_n^* . Una matriz generadora para D_n^* es

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

Además $\det(D_n^*) = 1/4$.

Observación 1.1.7. Los lattices D_4 y D_4^* son equivalentes, para ver esto notemos que la matriz

$$T := \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

mapea la matriz (1.11) en

$$M' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

la cual es una matriz generadora de D_4^* .

1.2. Superbases y parámetros de Selling.

Definición 1.2.1. Sea L un lattice en \mathbb{R}^n y $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ un conjunto de $n+1$ vectores de L , decimos que B es una *superbase* de L , si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de L y $\sum_{i=0}^n \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$.

Adicionalmente, diremos que B es una *superbase obtusa*, si el producto interno de cualquier par de vectores de B es menor o igual que cero.

Una superbase obtusa se dice *estricta*, si todos los productos internos son estrictamente negativos, o *laxa* en caso contrario.

Es claro que si B es una superbase de un lattice L , cualquier subconjunto de n elementos de B , es una base para L .

Observación 1.2.2. A los lattices que admiten una superbase obtusa, se los conoce como *lattices de primer Tipo* o de *Tipo I*. Para dimensiones 2 y 3, se sabe que todos los lattices son de Tipo I, para una prueba intuitiva ver [Co, pag, 61]. Voronoi, [Vo], demostró que en dimensión 4 además de los lattices de Tipo I, hay dos Tipos más. En la actualidad se sabe que en dimensión 5 hay 222 Tipos de lattices, ver [RB], y que en dimensión 6 la cantidad de Tipos supera los 250 000, esta información puede ampliarse en [Va].

Problema 1 (Existencia de superbases obtusas). *¿Dado un lattice n -dimensional, es posible determinar si tiene o no una superbase obtusa? En caso afirmativo, ¿cómo se puede calcular una tal base?*

En general éste es un problema muy difícil, no obstante hay avances: El caso de las dimensiones 2 y 3 está completamente resuelto, ver por ejemplo [Co]. Los trabajos de Charve [Ch], y Voronoi [Vo], permiten resolver completamente el problema en dimensión 4, al final del Capítulo 2 presentamos la implementación computacional del método de Charve para reducir formas cuadráticas cuaternarias (equivalentemente lattices en \mathbb{R}^4). Hay familias de lattices, como A_n^* , por ejemplo, para las cuales es fácil determinar su Tipo, lo cual consignamos en la siguiente proposición:

Proposición 1.2.3. *Para todo $n \geq 2$, los lattices A_n^* son de Tipo I.*

Demostración. Es consecuencia inmediata de notar que los $n + 1$ vectores de \mathbb{R}^{n+1} obtenidos cíclicamente de $(\frac{n}{n+1}, -\frac{1}{n+1}, \dots, -\frac{1}{n+1}, -\frac{1}{n+1})$ constituyen una superbase obtusa estricta para A_n^* . \square

Definición 1.2.4. Si $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es una superbase de un lattice L , a los $\binom{n+1}{2}$ valores

$$p_{ij} = -\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j \quad \text{con } 0 \leq i < j \leq n \quad (1.16)$$

se les llama *parámetros de Selling de L relativos a la superbase B* .

Usualmente solo se da el nombre de *los parámetros de Selling del lattice*, cuando la superbase es obtusa, no obstante nosotros levantamos esa restricción, mas por comodidad del lenguaje que por razones matemáticas. Cuando sea necesario pediremos condiciones extras a la superbase.

Teorema 1.2.5 (Selling). *Sea L un lattice n -dimensional y $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ una superbase de L con parámetros de Selling asociados $p_{ij} = -\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$ para $0 \leq i < j \leq n$, y sea $\mathbf{x} = \sum_{i=0}^n x_i \mathbf{v}_i$ con $x_i \in \mathbb{R}$, entonces la norma de \mathbf{x} , que denotamos $N(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$, tiene la forma:*

$$N(\mathbf{x}) = \sum_{i < j} p_{ij} (x_i - x_j)^2 \quad (1.17)$$

Demostración. Dado que $\mathbf{x} = \sum_{i=0}^n x_i \mathbf{v}_i$, tenemos que

$$\begin{aligned} N(\mathbf{x}) &= \left(\sum_{i=0}^n x_i \mathbf{v}_i \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^n x_i \mathbf{v}_i \right) \\ &= \sum_{i=0}^n x_i^2 \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i + 2 \sum_{i < k} x_i x_k \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_k \\ &= \sum_{i=0}^n x_i^2 \mathbf{v}_i \cdot \left(- \sum_{j \neq i} \mathbf{v}_j \right) - 2 \sum_{i < k} p_{ik} x_i x_k \\ &= \sum_{i=0}^n x_i^2 \sum_{j \neq i} p_{ij} - 2 \sum_{i < k} p_{ik} x_i x_k \\ &= \sum_{i < j} p_{ij} (x_i^2 + x_j^2) - 2 \sum_{i < k} p_{ik} x_i x_k \\ &= \sum_{i < j} p_{ij} (x_i^2 + x_j^2 - 2x_i x_j) \\ &= \sum_{i < j} p_{ij} (x_i - x_j)^2 \end{aligned}$$

\square

En el Capítulo 4, utilizaremos los parámetros de Selling asociados a bases reducidas en lattices 4-dimensionales para describir la celda de Voronoi del lattice.

1.3. Lattices y formas cuadráticas.

En general, una forma cuadrática es un polinomio homogéneo f de grado 2 en n variables. Si sus coeficientes pertenecen a un cuerpo K , entonces

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i x_j \quad \text{con } b_{ij} \in K. \quad (1.18)$$

Podemos definir $a_{ij} = a_{ji} = \frac{b_{ij} + b_{ji}}{2}$, con lo cual

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j = \mathbf{x}^{tr} A \mathbf{x} \quad (1.19)$$

donde $A = (a_{ij})$ es una matriz simétrica $n \times n$ y $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^{tr}$

Si \mathcal{S}^n denota el espacio $\binom{n+1}{2}$ -dimensional de las matrices simétricas reales de tamaño $n \times n$, la forma cuadrática correspondiente a la matriz simétrica $A \in \mathcal{S}^n$, es $A[\mathbf{x}] = \mathbf{x}^{tr} A \mathbf{x}$, para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Definición 1.3.1. Una forma cuadrática, respectivamente una matriz simétrica real $A \in \mathcal{S}^n$, es *definida positiva*, si $A[\mathbf{x}] > 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Al espacio de las formas cuadráticas definidas positivas lo denotamos por $\mathcal{S}_{>0}^n$, esto es:

$$\mathcal{S}_{>0}^n = \{A \in \mathcal{S}^n : A[\mathbf{x}] > 0 \text{ para todo } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\} \quad (1.20)$$

Por el *criterio de Sylvester*, una forma cuadrática $A \in \mathcal{S}^n$ es definida positiva, si y sólo si, los menores principales de A son positivos, es decir si $A_k = (a_{ij})_{i,j=1\dots k}$, tienen determinante positivo, para todo $k = 1, \dots, n$

$$\mathcal{S}_{>0}^n = \{A \in \mathcal{S}^n : \det(A_k) > 0, k = 1, \dots, n\}. \quad (1.21)$$

Definición 1.3.2. Dos formas cuadráticas $A, A' \in \mathcal{S}_{>0}^n$ son *aritméticamente equivalentes* si existe una transformación unimodular entera $U \in GL_n(\mathbb{Z})$ tal que $A[U\mathbf{x}] = A'[\mathbf{x}]$, para todo $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^{tr} \in \mathbb{R}^n$

Otra forma de pensar un lattice n -dimensional, es considerar a \mathbb{Z}^n y dotarlo de un producto escalar adecuado, esta manera de pensar el lattice, permite mostrar, fácilmente, la biyección natural entre las clases de lattices isométricos y las clases de formas cuadráticas definidas positivas aritméticamente equivalentes.

Note que una clase de formas cuadráticas definidas positivas aritméticamente equivalentes, determina una clase de lattices isométricos, de esta manera: Si A es una forma cuadrática definida positiva, ella es enviada al lattice \mathbb{Z}^n dotado del producto escalar siguiente: Para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n$ definimos $s_A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \mathbf{x}^{tr} A \mathbf{y}$. Si no hay lugar a confusión escribimos simplemente (\cdot, \cdot) en lugar de $s_A(\cdot, \cdot)$. A los lattices que están en la clase de (\mathbb{Z}^n, s_A) se les llama *asociados de A*.

De otro lado, una clase de isometrías de lattices, determina una clase de formas cuadráticas aritméticamente equivalentes, de la siguiente forma: Si L es un lattice n -dimensional, y $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de L , entonces la matriz de Gram A asociada a la base B , determina una forma cuadrática definida positiva.

Observación 1.3.3. En virtud de esta biyección, el lenguaje de los lattices resulta muy apropiado para tratar problemas de tipo geométrico, mientras que el de las formas cuadráticas es ideal para un tratamiento algebraico del problema.

1.4. Determinante de un lattice y norma de un vector.

Al fijar una base $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ de un lattice n -dimensional L , a cada vector $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ se lo puede representar por lo menos de tres formas distintas:

- i. En términos de sus *coordenadas euclídeas*, es decir, lo podemos ver como un punto de \mathbb{R}^n escrito en términos de la base canónica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$, en tal caso $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)^{tr} = t_1\mathbf{e}_1 + t_2\mathbf{e}_2 + \dots + t_n\mathbf{e}_n$.
- ii. Por medio de sus *x-coordenadas* asociadas a la base B , donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^{tr}$ es tal que $\mathbf{t} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\mathbf{v}_n$. Resulta claro que si M es la matriz generadora de L asociada a la base B , entonces $\mathbf{t} = M^{tr}\mathbf{x}$
- iii. Si A es la matriz de Gram asociada a la base B , definimos las *y-coordenadas* de \mathbf{t} , como $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$. Nótese que

$$\begin{aligned}\mathbf{y} &= A\mathbf{x} \\ &= M(M^{tr}\mathbf{x}) \\ &= M\mathbf{t}\end{aligned}$$

con lo cual, las *y-coordenadas* de un punto $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$, son los productos internos del vector \mathbf{t} con los elementos de la base B

$$\mathbf{y} = (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{t}, \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{t}, \dots, \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{t})^{tr} \quad (1.22)$$

Observación 1.4.1. Todo lo anterior es válido si consideramos una superbase, en lugar de una base del lattice. En tal caso hablaremos de coordenadas aumentadas o extendidas.

Estas formas de escribir los vectores de \mathbb{R}^n , y en especial la que corresponde a las *y-coordenadas* aumentadas, las usaremos en el Capítulo 3 para describir completamente cada una de las componentes de la celda de Voronoi de un lattice 4-dimensional.

Si A es una matriz de Gram de un lattice L , podemos escribir la norma de un elemento \mathbf{t} de L , en términos de sus *x-coordenadas*, es decir $\mathbf{t} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\mathbf{v}_n$ con $x_i \in \mathbb{Z}$, $N(\mathbf{t})$ tiene la forma

$$\begin{aligned}N(\mathbf{t}) &= \mathbf{t}^{tr}\mathbf{t} \\ &= \mathbf{x}^{tr}MM^{tr}\mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^{tr}A\mathbf{x}\end{aligned} \quad (1.23)$$

Adicionalmente, dado que A es inversible, podemos despejar \mathbf{x} en la igualdad $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$, y sustituir en la última igualdad de (1.23), de esta manera conseguimos expresar $N(\mathbf{t})$ en función de las \mathbf{y} -coordenadas de \mathbf{t} , así:

$$\begin{aligned} N(\mathbf{t}) &= \mathbf{x}^{tr} A\mathbf{x} \\ &= \mathbf{y}^{tr} A^{-1}\mathbf{y} \end{aligned} \quad (1.24)$$

Dado que $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$, donde $\text{adj}(A)$ es la matriz adjunta de A , Si conseguimos una expresión para el determinante del lattice, y otra para la $\text{adj}(A)$ en términos de los parámetros de Selling asociados a una superbase del lattice podemos escribir $N(\mathbf{t})$ de manera más explícita.

En teoría de Grafos, el Teorema de Cayley afirma que el número de árboles generadores — subgrafos conexos de G que tiene a todos los vértices y no tiene ciclos— de un grafo completo en n vértices es n^{n-2} . Hay una generalización de éste resultado a grafos conexos hecha por *G. Kirchhoff*. Apoyados en tal generalización, vamos a calcular el determinante de un lattice en función de sus parámetros de Selling.

Recordemos que *la matriz laplaciana* de un grafo es la diferencia entre *la matriz de grados* del grafo, matriz diagonal con el grado de los vértices sobre la diagonal, y su *matriz de adyacencia*, matriz con 1 en los lugares que corresponden a las entradas donde los vértices son adyacentes y cero en otra parte.

Teorema 1.4.2 (Kirchhoff). *Si G es un grafo conexo con matriz laplaciana A' , entonces el número de árboles generadores de G coincide con el valor de cualquier cofactor de A' .*

Un resultado de matrices que será necesario es la fórmula de Cauchy-Binet que presentamos sin demostración en el siguiente lema:

Lema 1.4.3 (Fórmula de Cauchy-Binet). *Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{jk})$ matrices $m \times n$ y $n \times m$ respectivamente, con $m \leq n$, entonces*

$$\det(AB) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n} \det \begin{pmatrix} a_{1j_1} & \dots & a_{1j_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mj_1} & \dots & a_{mj_m} \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} b_{j_1 1} & \dots & b_{j_1 m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{j_m 1} & \dots & b_{j_m m} \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

Notación 1.4.4. Sea K_{n+1} el grafo completo con $n+1$ vértices. Si B es una superbase de un lattice n -dimensional L , denotamos por G_B al subgrafo K_{n+1} , cuyos vértices son los $n+1$ elementos de B , y hay una arista entre los vértices \mathbf{v}_i y \mathbf{v}_j , etiquetada con $p_{ij} = -\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$, si $p_{ij} \neq 0$, a dicha arista la denotamos $[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j]$.

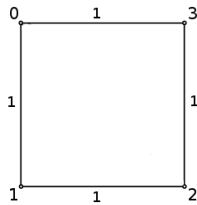


Figura 1.2: Grafo del fcc lattice

Por ejemplo, si consideremos el *face-centered cubic lattice* o (*fcc*), y la superbase cuya $B = \{\mathbf{v}_0 = (0, 1, 1), \mathbf{v}_1 = (-1, -1, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 1, -1), \mathbf{v}_3 = (1, -1, 0)\}$, el grafo asociado tiene la forma que indica la Figura 1.2

La representación de un lattice en términos de grafos, hace posible adaptar la prueba del Teorema de Kirchhoff o *Matrix tree theorem*, y obtener una expresión para el determinante de un lattice en términos de árboles generadores.

Teorema 1.4.5 (Fórmula para el determinante de un lattice). *Sea L un lattice n -dimensional, y $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ una superbase para L , si $p_{i|j_k \dots l} = p_{ij} + p_{ik} + \dots + p_{il}$ con $p_{ij} = -\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$ para $0 \leq i < j \leq n$. Entonces:*

i. La matriz laplaciana del grafo G_B asociado a la superbase B , coincide con

$$A' = \begin{bmatrix} p_{0|12 \dots n} & -p_{01} & \dots & -p_{0n} \\ -p_{01} & p_{1|02 \dots n} & \dots & -p_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -p_{0n} & -p_{1n} & \dots & p_{n|01 \dots n-1} \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

la matriz de Gram de la superbase.

ii. El determinante del lattice viene dado por:

$$\det(L) = \sum_T \prod_{[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j] \in T} p_{ij} \quad (1.27)$$

donde T recorre todos los árboles generadores de G_B , y $[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j]$ denota la arista entre los vértices \mathbf{v}_i y \mathbf{v}_j , y coincide con cualquier cofactor de A' .

La prueba de este teorema la presentamos en la Sección 1.6.

Como consecuencia del resultado anterior y a manera de ejemplo, calculamos la forma general del determinante de un lattice en dimensiones 2, 3 y 4.

Determinante para Lattices en dimensión 2. Si $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es una superbase para un lattice L en \mathbb{R}^2 , tiene como grafo asociado al grafo completo K_3 con vértices $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1$ y \mathbf{v}_2 , el cual tiene 3 árboles generadores, tal como lo muestra la Figura 1.3.

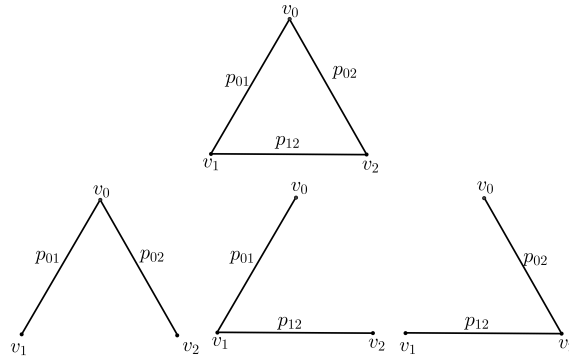


Figura 1.3: Árboles generadores para el grafo completo K_3 .

La matriz de Gram correspondiente a la superbase B es

$$A' = \begin{bmatrix} p_{01} + p_{02} & -p_{01} & -p_{02} \\ -p_{01} & p_{01} + p_{12} & -p_{12} \\ -p_{02} & -p_{12} & p_{02} + p_{12} \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

y el determinante del lattice es

$$\det(L) = p_{01}p_{02} + p_{01}p_{12} + p_{02}p_{12}. \quad (1.29)$$

Determinante para Lattices en dimensión 3. La matriz de Gram asociada a la superbase $\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, de un lattice 3 dimensional es

$$A' = \begin{bmatrix} p_{01} + p_{02} + p_{03} & -p_{01} & -p_{02} & -p_{03} \\ -p_{01} & p_{01} + p_{12} + p_{13} & -p_{12} & -p_{13} \\ -p_{02} & -p_{12} & p_{02} + p_{12} + p_{23} & -p_{23} \\ -p_{03} & -p_{13} & -p_{23} & p_{03} + p_{13} + p_{23} \end{bmatrix}$$

el grafo asociado a la superbase tiene $4^2 = 16$ árboles generadores, los cuales tienen una de las

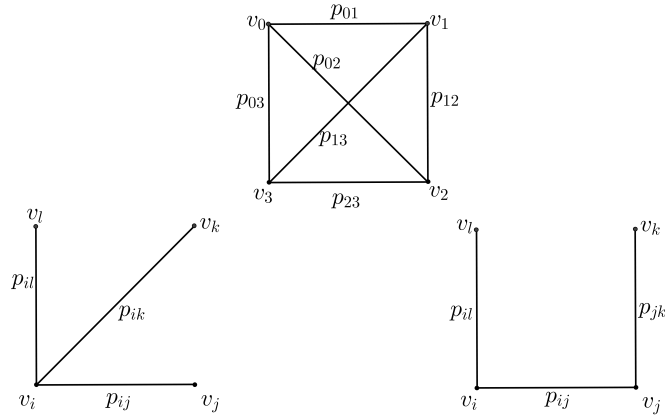


Figura 1.4: Árboles generadores para el grafo completo K_4 .

formas que se muestran en la Figura 1.4 y el determinante del lattice es:

$$\begin{aligned} \det(L) = & p_{01}p_{02}p_{03} + p_{01}p_{02}p_{13} + p_{01}p_{03}p_{12} + p_{02}p_{03}p_{12} + p_{02}p_{03}p_{13} + p_{01}p_{02}p_{23} + \\ & p_{01}p_{12}p_{13} + p_{01}p_{03}p_{23} + p_{02}p_{12}p_{13} + p_{03}p_{12}p_{13} + p_{01}p_{12}p_{23} + p_{01}p_{13}p_{23} + \\ & p_{02}p_{12}p_{23} + p_{02}p_{13}p_{23} + p_{03}p_{12}p_{23} + p_{03}p_{13}p_{23}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Determinante para Lattices en dimensión 4. El determinante tiene 125 sumandos, uno por cada árbol generador del grafo completo K_5 . Ver Figura 1.5. Los árboles generadores tienen una de las formas que indica la Figura 1.6. El determinante viene dado por la expresión:

$$\det(A) = \sum^{(60)} p_{ij}p_{jk}p_{kl}p_{lm} + \sum^{(60)} p_{ij}p_{jk}p_{kl}p_{jm} + \sum^{(5)} p_{ij}p_{ik}p_{il}p_{im} \quad (1.31)$$

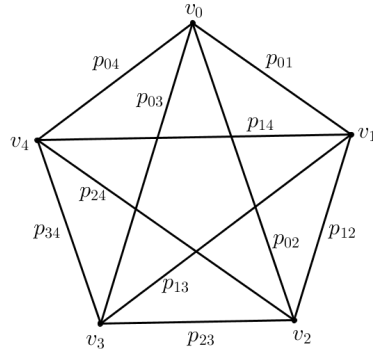


Figura 1.5: Grafo completo K_5 , asociado a un lattice 4-dimensional.

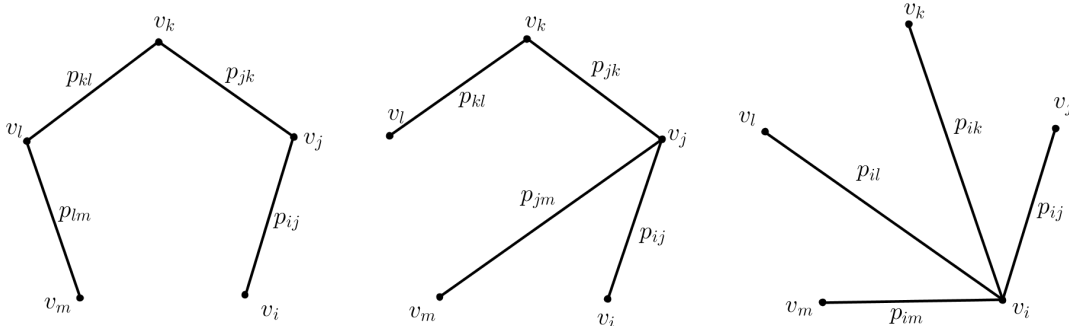


Figura 1.6: Árboles generadores para el grafo completo K_5 .

Observación 1.4.6. Si A es la matriz de Gram asociada a la base $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$, y Δ es el determinante del lattice, $\Delta = \det(A)$, denotamos por Δ_{ij} a la derivada parcial formal de Δ respecto a p_{ij} , es decir $\Delta_{ij} = \frac{\partial \Delta}{\partial p_{ij}}$. Hemos observado que la matriz adjunta de A es una matriz simétrica, que se puede escribir como $\text{adj}(A) = (b_{ij})$, donde $b_{ii} = \Delta_{0i}$, y $b_{ij} = \frac{1}{2} (\Delta_{0i} + \Delta_{0j} - \Delta_{ij})$ si $i < j$.

Como consecuencia de esta observación podemos enunciar la siguiente proposición.

Proposición 1.4.7. Sea $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ una superbase de un lattice n -dimensional L en \mathbb{R}^n , con matriz de productos internos $A = (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j)$ con $0 \leq i \leq j \leq n$, $\Delta = \det(L)$. Sea $\mathbf{t} \in L$, si $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)^{tr}$ son las \mathbf{x} -coordenadas de \mathbf{t} , e $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ son sus \mathbf{y} -coordenadas, entonces

$$N(\mathbf{t}) = \frac{1}{\Delta} \left(\sum_{i=1}^n \Delta_{0i} y_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\Delta_{0i} + \Delta_{0j} - \Delta_{ij}) y_i y_j \right) \quad (1.32)$$

Demostración. Es consecuencia inmediata de la observación 1.4.6 y de la expresión (1.24). \square

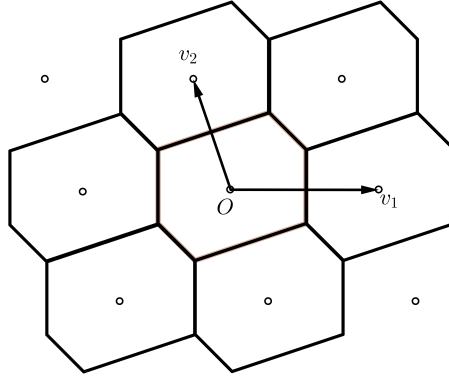


Figura 1.7: Celda de Voronoi genérica en dimensión 2.

1.5. Vonormas y Conormas.

Definición 1.5.1. Sea L un lattice n -dimensional, la *celda de Voronoi* $S(\mathbf{u})$ para $\mathbf{u} \in L$, es el conjunto de puntos de \mathbb{R}^n que están al menos tan cerca de \mathbf{u} como de cualquier otro punto del lattice. En símbolos esto es:

$$S(\mathbf{u}) = \{x \in \mathbb{R}^n : N(x - \mathbf{u}) \leq N(x - \mathbf{v}) \text{ para todo } \mathbf{v} \in L\} \quad (1.33)$$

La Figura 1.7, muestra una celda de Voronoi típica de un lattice 2 dimensional.

Se puede ver fácilmente que todas las celdas de Voronoi de un lattice son polítopos convexos congruentes los cuales forman un teselado o embaldosamiento de \mathbb{R}^n .

Si para cada $\mathbf{v} \neq 0$ en L , $H_{\mathbf{v}} := \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot \mathbf{v} \leq \frac{1}{2}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}\}$. Se puede probar que $S(\mathbf{0})$ es la intersección de todos los semiespacios $H_{\mathbf{v}}$, para \mathbf{v} vector no nulo de L .

1.5.1. Vectores de Voronoi.

Definición 1.5.2. Sea L un lattice n -dimensional, decimos que un vector $\mathbf{v} \in L$ es un *vector de Voronoi*, si el hiperplano

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : x \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}N(\mathbf{v}) \right\} \quad (1.34)$$

tiene intersección no vacía con $S(\mathbf{0})$, la celda de Voronoi de L en torno al origen. Además, decimos que un vector de Voronoi es *estricto o relevante*, si la intersección anterior es una *facet* o cara $(n-1)$ -dimensional de $S(\mathbf{0})$, en caso contrario decimos que es un vector de Voronoi *laxo o irrelevante*.

El siguiente resultado da una caracterización de los vectores de voronoi. Ver idea de la prueba en [CS3].

Teorema 1.5.3 (Vectores de Voronoi). *Sea L un lattice en \mathbb{R}^n , y \mathbf{v} un vector no cero de L , entonces*

- i. \mathbf{v} es un vector de Voronoi si y sólo si \mathbf{v} es uno de los vectores más cortos en la clase $\mathbf{v} + 2L$.

- ii. \mathbf{v} es un vector de Voronoi estricto si y sólo si \mathbf{v} y $-\mathbf{v}$ son los únicos vectores más cortos en $\mathbf{v} + 2L$.

Dado un lattice n -dimensional L , el grupo $L/2L$ tiene $2^n - 1$ elementos no nulos, cada uno de los cuales proporciona a lo menos dos vectores de Voronoi, en consecuencia L tiene por lo menos $2(2^n - 1)$ vectores de Voronoi distintos de cero.

El siguiente resultado, da un método para encontrar los vectores de Voronoi en un lattice de Tipo I, a partir de una superbase obtusa del lattice.

Teorema 1.5.4. *Sea L es un lattice n -dimensional de Tipo I, y $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ una superbase obtusa para L , y sean S un subconjunto propio de $\{0, 1, 2, \dots, n\}$, y \bar{S} su complemento. Entonces la suma $\mathbf{v}_S = \sum_{i \in S} \mathbf{v}_i$ es un vector de Voronoi de L . \mathbf{v}_S y $\mathbf{v}_{\bar{S}}$ son congruentes módulo $2L$, es decir, están en la misma clase en $L/2L$.*

Demostración. Del Teorema 1.2.5, sabemos que para $\mathbf{v} = \sum_{i=0}^n m_i \mathbf{v}_i$ con $m_i \in \mathbb{Z}$, su norma viene dada por $N(\mathbf{v}) = \sum_{i < j} p_{ij} (m_i - m_j)^2$. Ahora bien, dado que $\sum_{i=0}^n \mathbf{v}_i = 0$, el vector \mathbf{v} no cambia si

a todos los coeficientes m_i se les suma la misma cantidad, y la clase $\mathbf{v} + 2L$, tampoco cambia si a los m_i se los incrementa en enteros pares, de este modo, un representante de una clase de $L/2L$ tiene norma mínima si todos valores pares de m_i se cambian por 0, y los valores impares por 1. En consecuencia, para cada subconjunto propio S de $\{0, 1, 2, \dots, n\}$, el vector $\mathbf{v}_S = \sum_{i \in S} \mathbf{v}_i$ tienen norma mínima dentro de la clase $\mathbf{v}_S + 2L$, y por el Teorema 1.5.3 son vectores de Voronoi de L . Para ver que \mathbf{v}_S y $-\mathbf{v}_{\bar{S}}$ son congruentes módulo $2L$ es suficiente notar que $\mathbf{v}_S + \mathbf{v}_{\bar{S}} = 0$ \square

Este teorema permite calcular, casi de manera inmediata, la norma de los vectores de Voronoi para lattices de Tipo I.

Corolario 1.5.5 (Norma de vectores de Voronoi en lattices de Tipo I.). *Si L es un lattice de Tipo I y $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es una superbase obtusa de L con parámetros de Selling $p_{ij} = -\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$, para $0 \leq i < j \leq n$, entonces las normas de los vectores de Voronoi de L vienen dadas por:*

$$N(\mathbf{v}_S) = \sum_{i \in S, j \in \bar{S}} p_{ij} \quad (1.35)$$

Donde S recorre todos los subconjunto propios de $\{0, 1, 2, \dots, n\}$.

Demostración. Sea S un subconjunto propio de $\{0, 1, 2, \dots, n\}$, del Teorema anterior, sabemos que \mathbf{v}_S es un vector de Voronoi y como $\mathbf{v}_S = -\mathbf{v}_{\bar{S}}$, tenemos que

$$\begin{aligned} N(\mathbf{v}_S) &= \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{v}_S \\ &= -\mathbf{v}_S \cdot \mathbf{v}_{\bar{S}} \\ &= \sum_{i \in S, j \in \bar{S}} p_{ij} \end{aligned}$$

y esto termina la prueba. \square

1.5.2. Vonormas y Conormas.

Definición 1.5.6. Sean L un lattice n -dimensional y $\mathbf{v} \in L$, a la menor norma de los vectores de la clase $\mathbf{v} + 2L$ se le llama *Vonorma* de $\bar{\mathbf{v}} := \mathbf{v} + 2L$, y la denotamos por $V_o(\bar{\mathbf{v}})$. Es decir:

$$V_o(\bar{\mathbf{v}}) = \min(\{N(\mathbf{w}) : \mathbf{w} \in \mathbf{v} + 2L\}). \quad (1.36)$$

Es claro que las vonormas de un lattice son las normas de los vectores de Voronoi del lattice, a las que llamaremos *Vonormas propias*, junto con el 0 que llamaremos *Vonorma impropia*.

Conway y Sloane en [CS3], introdujeron una familia de parámetros que también clasifican los lattices en dimensiones bajas, estos parámetros, llamados *Conormas*, presentan algunas ventajas sobre los parámetros de Selling. A la fecha las conormas resultan muy útiles para clasificar los lattices de acuerdo con la estructura topológico-combinatoria de su celda de Voronoi.

Antes de introducir las conormas, recordemos que si L es un lattice n -dimensional, un *carácter real* χ sobre L , es un homomorfismo entre los grupos $L/2L$ y $\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$. Es decir, $\chi : L/2L \rightarrow \{-1, 1\}$ es un carácter real sobre L , si para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in L$ se cumple

$$\chi(\overline{\mathbf{u} + \mathbf{v}}) = \chi(\overline{\mathbf{u}}) \chi(\overline{\mathbf{v}}). \quad (1.37)$$

Lema 1.5.7. Sea L un lattice n -dimensional, y $F = \{\chi : \chi \text{ es un carácter real sobre } L\}$, entonces F tiene 2^n elementos, y es un grupo con la multiplicación usual de funciones.¹

Demostración. Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ una base de L , $\mathbf{v} = \sum m_i \mathbf{v}_i \in L$ y sea χ un carácter real de L , entonces $\chi(\bar{\mathbf{v}}) = \chi(\sum m_i \bar{\mathbf{v}}_i) = \prod_i \chi(\bar{\mathbf{v}}_i)^{m_i}$, de aquí que para definir un carácter real sobre L es suficiente elegir para cada uno de los n elementos de una base de L , la imagen correspondiente en $\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$. Así las cosas, F tiene 2^n caracteres reales. \square

Teorema 1.5.8. Sea L un lattice n -dimensional de Tipo I, y sea $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ una superbase obtusa de L . Entonces F está en correspondencia biyectiva con los subconjuntos de cardinal par de B : Si S es uno de tales subconjuntos, el carácter asociado a S es $\chi_S(\bar{\mathbf{v}}) = \prod_i \chi_S(\bar{\mathbf{v}}_i)^{m_i}$ con $\mathbf{v} = \sum m_i \mathbf{v}_i \in L$ y

$$\chi_S(\bar{\mathbf{v}}_i) = \begin{cases} -1 & \text{si } \mathbf{v}_i \in S \\ +1 & \text{si } \mathbf{v}_i \notin S \end{cases} \quad (1.38)$$

Demostración. Es claro que el número de subconjuntos de B con cardinal par es 2^n . Por otro lado, del Lema 1.5.7, χ_S es un carácter de L , además, si S_1 y S_2 son subconjuntos distintos de B , los caracteres asociados, χ_{S_1} y χ_{S_2} también son distintos. \square

Observación 1.5.9. El carácter trivial asociado al conjunto vacío lo denotamos por χ_0 . Resulta claro que para todo $\mathbf{v} \in L$, $\chi_0(\bar{\mathbf{v}}) = 1$. Por abuso de notación escribimos $\chi_0 = 1$

Definición 1.5.10. Si L es un lattice n -dimensional y χ un carácter real sobre L , a la suma

$$\text{Co}(\chi) = -\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\bar{\mathbf{v}} \in L/2L} \chi(\bar{\mathbf{v}}) V_o(\bar{\mathbf{v}}) \quad (1.39)$$

se le llama *conorma* o *norma conjugada* de χ .

¹A F se le llama espacio de conormas.

A la conorma asociada al carácter trivial $\chi_0 = 1$ se le suele llamar *conorma impropia*, y por lo general se escribe $\text{Co}(1)$ en lugar de $\text{Co}(\chi_0)$. Siempre que hagamos referencia a las conormas, entenderemos conormas propia, es decir no triviales.

Como ya habrá notado el lector, las conormas son, salvo una constante, las transformadas de Fourier finitas de las Vonormas, y por lo tanto ellas llevan la misma información que las Vonormas.

Observación 1.5.11. Si \mathbf{v} es un vector de Voronoi fijo, para la mitad de los caracteres reales de L , la imagen de \mathbf{v} es $+1$, y para la otra mitad es -1 .

La observación anterior permite escribir las vonormas en términos de las conormas, tal como se muestra el siguiente lema.

Lema 1.5.12. *Sean L un lattice n -dimensional de Tipo I, y $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ una superbase obtusa de L . Si \mathbf{v} es un vector de Voronoi de L , entonces*

$$\text{Vo}(\bar{\mathbf{v}}) = \sum_{\chi(\bar{\mathbf{v}})=-1} \text{Co}(\chi) \quad (1.40)$$

Demostración. Por la observación anterior, dado un vector de Voronoi \mathbf{v} de L , hay exactamente 2^{n-1} caracteres χ tales que $\chi(\bar{\mathbf{v}}) = -1$. Adicionalmente, si \mathbf{v}' es otro vector de Voronoi, la mitad de estos caracteres le asignan -1 y la otra mitad $+1$, así que

$$\sum_{\chi(\bar{\mathbf{v}})=-1} \text{Co}(\chi) = \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}} \text{Vo}(\bar{\mathbf{v}}) = \text{Vo}(\bar{\mathbf{v}}), \quad (1.41)$$

como se buscaba. □

Dado que $\text{Vo}(\bar{\mathbf{v}}) > 0$ si $\bar{\mathbf{v}}$ no es la clase del cero, el lema anterior implica que el soporte de la función conorma no puede estar contenido en un subespacio propio del espacio de conormas.

El siguiente teorema muestra la estrecha relación entre las conormas de un lattice de Tipo I y los parámetros de Selling asociados a una superbase obtusa del lattice.

Teorema 1.5.13. *Si L es un lattice de Tipo I y $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es una superbase obtusa de L , con parámetros de Selling asociados $p_{ij} = -\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$ con $0 \leq i < j \leq n$, entonces las conormas propias de L vienen dadas por*

$$\text{Co}(\chi_S) = \begin{cases} p_{ij} & \text{si } S = \{i, j\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Es decir, en los lattice de Tipo I las conormas son los parámetros de Selling asociados a una superbase obtusa y algunos ceros.

1.6. Árboles, grafos y determinante.

En esta sección presentaremos la prueba de Teorema 1.4.5, para lo cual haremos uso de un par de resultados de teoría de grafos. La prueba que presentamos es una adaptación del *Matrix Tree*

Theorem o Teorema de Kirchhoff, encontrada en el texto de John M. Harris et al. *Combinatorics and Graph Theory*, un resultado similar puede encontrarse en el trabajo de Dients [Di2].

Como es bien sabido, la fórmula de los árboles de Cayley da una expresión sencilla para contar el número de árboles generadores etiquetados distintos del grafo completo en n vértices, K_n ; en este problema los vértices del grafo se piensan fijos, y se consideran todas las posibles formas de dibujar un árbol sobre esos n vértices.

La Figura 1.3, muestra tres árboles generadores etiquetados distintos sobre tres vértices; de hecho, esos son los únicos árboles generadores en este caso. Para el grafo en 4 vértices, K_4 , hay 16 árboles generadores etiquetados diferentes.

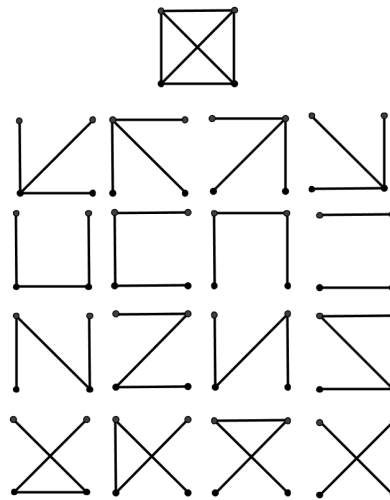


Figura 1.8: Árboles generadores para el grafo completo K_4 .

Con más generalidad Cayley demostró que la cantidad de árboles generadores etiquetados del grafo completo K_n en n vértices es n^{n-2} .

A continuación damos un bosquejo de la prueba de Prüfer de este mismo resultado, su método es muy elegante, y consiste en contar los árboles etiquetados estableciendo una correspondencia uno-a-uno con un conjunto cuyo tamaño es fácil de determinar, el conjunto de todas las secuencias de longitud $n - 2$ cuyas entradas provienen del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$.

Definición 1.6.1. Una sucesión de Prüfer de longitud $n - 2$, para $n \geq 2$ es cualquier sucesión de $n - 2$ números entre 1 y n .

Lema 1.6.2. Hay n^{n-2} sucesiones de Prüfer de longitud $n - 2$.

Demostración. Por definición hay n formas de escoger cada elemento en una sucesión de Prüfer y como cada secuencia tiene $n - 2$ elementos, se sigue que hay n^{n-2} de tales secuencias. \square

Ejemplo 1.6.3. Para $n = 4$, las sucesiones de Prüfer son:

$$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), \\ (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)$$

Dado un árbol con vértices etiquetados por $1, 2, 3, \dots, n$, el algoritmo de codificación de Prüfer le asignará una sucesión de longitud $n - 2$ construida a partir del árbol de la siguiente forma: Se empieza con una sucesión vacía. Si el árbol tiene más de dos vértices, el algoritmo encuentra la hoja con la menor etiqueta, y se añade a la secuencia la etiqueta del vértice adyacente de esa hoja. A continuación se elimina del árbol la hoja con la menor etiqueta y su arista. Esta operación se repite $n - 2$ veces hasta que sólo quedan dos vértices en el árbol. El algoritmo termina después de que se suprimen $n - 2$ vértices, la sucesión resultante tiene longitud $n - 2$.

Método de Prüfer para asignar una sucesión a un árbol etiquetado.

Entrada: Un árbol T con vértices etiquetados por $1, 2, 3, \dots, n$.

Salida: Una sucesión de Prüfer P de longitud $n - 2$.

1. Haga $T_i = T_0$, $T_0 = T$ y $P = ()$.
2. Encuentre la hoja de T_i con menor etiqueta, y llame v a dicha etiqueta.
3. Adicione al final de P la etiqueta del vértice vecino de v .
4. Elimine v de T_i y construya el nuevo árbol T_{i+1} obtenido de T_i al eliminar el vértice v y la arista que le correspondía.
5. Si $T_{i+1} = K_2$, devuelva P . En caso contrario incremente i en 1 y regrese al paso 2.

Apliquemos el algoritmo de Prüfer al grafo de la Figura 1.9.

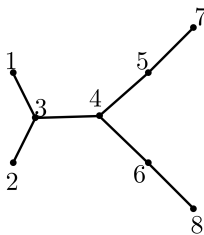


Figura 1.9: Árboles 8 vértices.

La Figura 1.10 muestra el proceso de codificación paso a paso. En la Figura 1.10 (a), el vértice 1 es la hoja con la menor etiqueta, con lo que se añade su único vecino, el vértice 3, a la secuencia, lo que resulta en la sucesión de Prüfer en construcción $P = (3)$. Entonces quitamos el vértice 1 del árbol, y tal como lo muestra la Figura 1.10 (b), 2 se convierte en la hoja con la menor etiqueta, agregamos a P su único vecino, el vértice 3. Así tenemos que $P = (3, 3)$. Después de retirar el vértice 2 del árbol, el vértice 3 es la hoja con la menor etiqueta. Dado que el vértice 4 es su único vecino, lo agregamos a P y obtenemos $P = (3, 3, 4)$.

Repetimos esta operación hasta que solo quedan dos vértices en el árbol. A saber, los vértices 6 y 8. La sucesión de Prüfer correspondiente a la Figura 1.9, es $P = (3, 3, 4, 5, 4, 6)$.

Hay un procedimiento análogo para asignarle a una sucesión de longitud $n - 2$, un único árbol generador en n vértices. Los dos procedimientos juntos establecen una correspondencia uno a uno entre el conjunto de sucesiones de Prüfer de longitud $n - 2$ y el conjunto de árboles generadores del grafo completo K_n .

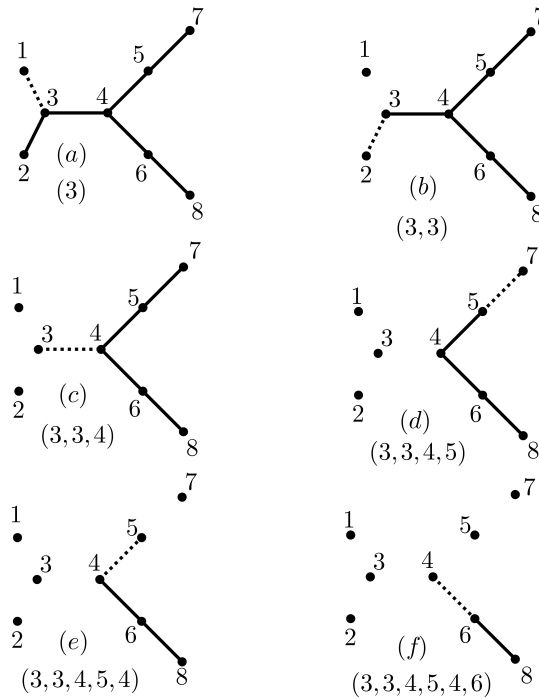


Figura 1.10: Pasos del algoritmo de Prüfer en el árbol de la Figura 1.9

Teorema 1.6.4 (Fórmula de Cauchy - Número de árboles generadores). *El número de árboles generadores del grafo completo K_n con n vértices es n^{n-2} .*

Primero recordemos que dada una matriz A de orden $n \times n$, el ij -ésimo cofactor de A es el escalar $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A[i, j])$, donde $A[i, j]$ es la matriz obtenida de A al eliminar la i -ésima fila y la j -ésima columna.

A continuación presentamos algunas definiciones de teoría de grafos.

Definición 1.6.5. Sea G un grafo etiquetado y conexo con vértices $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$.

- Dado un vértice \mathbf{v}_i , *el grado ponderado del vértice \mathbf{v}_i* , que denotaremos por $\deg(\mathbf{v}_i)$, es la suma de las etiquetas de las aristas que inciden en él. ²
- La *matriz de grados* de G , es una matriz $D = (d_{ij})_{n \times n}$ donde $d_{ij} = \begin{cases} \deg(\mathbf{v}_i) & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$
- La *matriz de adyacencia* del grafo G , es la matriz A_d , de tamaño $n \times n$, cuya entrada en la posición ij es: 0, si no hay arista entre los vértices \mathbf{v}_i y \mathbf{v}_j , o el valor de la etiqueta de dicha arista, que denotamos p_{ij} , en caso contrario.

Estamos ahora en condiciones de demostrar el Teorema 1.4.5

²En inglés se lo conoce como *the weighted degree of \mathbf{v}_i* .

Teorema (Fórmula para el determinante de un lattice) *Sea L un lattice n -dimensional, y $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ una superbase para L . Si $p_{i|jk\dots l} = p_{ij} + p_{ik} + \dots + p_{il}$, con $p_{ij} = -\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$ para $0 \leq i < j \leq n$. Entonces:*

i. *La matriz laplaciana del grafo G_B asociado a la superbase B , coincide con*

$$A' = \begin{bmatrix} p_{0|12\dots n} & -p_{01} & \dots & -p_{0n} \\ -p_{01} & p_{1|02\dots n} & \dots & -p_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -p_{0n} & -p_{1n} & \dots & p_{n|01\dots n-1} \end{bmatrix},$$

la matriz de Gram de la superbase.

ii. *El determinante del lattice, $\det(L)$, coincide con cualquier cofactor de A' y viene dado por:*

$$\det(L) = \sum_T \prod_{[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j] \in T} p_{ij}$$

donde T recorre todos los árboles generadores de G_B , y $[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j]$ denota la arista entre los vértices \mathbf{v}_i y \mathbf{v}_j .

Demostración. i. Sea G_B el grafo asociado a B , tal como se definió en el apartado 1.4.4. La matriz de grados de G_B es

$$D = \begin{bmatrix} p_{0|12\dots n} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_{1|02\dots n} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_{n|01\dots n-1} \end{bmatrix}$$

y la matriz de adyacencia

$$\text{Ad} = \begin{bmatrix} 0 & p_{01} & \dots & p_{0n} \\ p_{01} & 0 & \dots & p_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{0n} & p_{1n} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz laplaciana del grafo es $D - \text{Ad}$, que claramente coincide con A' , la matriz de Gram asociada a la superbase B .

ii. Notemos que la matriz de Gram asociada a $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$, es la menor $A'[1, 1]$. Adicionalmente, para cada vértice \mathbf{v}_k y cada arista $[\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_t]$ con $s < t$, definamos:

$$n_{k,[s,t]} = \begin{cases} \sqrt{p_{st}} & \text{si } k = t \\ -\sqrt{p_{st}} & \text{si } k = s \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y llamemos $N = (n_{k,[s,t]})$, matriz con $n+1$ filas, y tantas columnas como aristas tenga el grafo G_B . A N se le conoce como *la matriz de incidencia* de G_B . Dado que cada arista de G_B incide en dos vértices, las columnas de N tiene por lo menos $n-1$ entradas iguales 0. Afirmamos que $A' = NN^{tr}$. En efecto, si $A' = (a_{ij})$, notemos primero que

$$a_{ij} = \begin{cases} \sum_{r \neq i} p_{ir} & \text{si } i = j \\ -p_{ij} & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

además, $(NN^{tr})_{ij}$, la entrada ij de la matriz NN^{tr} , es el producto escalar de N_i y N_j^{tr} , esto es:

$$\begin{aligned} (NN^{tr})_{ij} &= (N_{i1}, N_{i2}, \dots, N_{ik}) \cdot (N_{1j}^{tr}, N_{2j}^{tr}, \dots, N_{kj}^{tr}) \\ &= (N_{i1}, N_{i2}, \dots, N_{ik}) \cdot (N_{j1}, N_{j2}, \dots, N_{jk}) \\ &= \sum_{r=1}^k N_{ir} N_{jr}. \end{aligned}$$

Si $i = j$, $(NN^{tr})_{ii} = \sum_{r=1}^k N_{ir}^2 = \sum_{r \neq i} p_{ir}$, es decir, $(NN^{tr})_{ii} = a_{ii}$.

Si $i \neq j$ y $p_{ij} \neq 0$, entonces, entre \mathbf{v}_i y \mathbf{v}_j hay una arista, y por lo tanto la única columna de N en la que las entradas i y j son distintas de 0, es la que corresponde a la arista $[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j]$, en este caso la suma es $-p_{ij}$.

De este modo tenemos que

$$(NN^{tr})_{ij} = \begin{cases} \sum_{r \neq i} p_{ir} & \text{si } i = j \\ -p_{ij} & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

lo cual prueba la afirmación.

De otro lado, sean H un subgrafo de G_B con $n+1$ vértices n aristas, p un entero arbitrario entre 1 y n , y N' la submatriz de orden $n \times n$ de N , formada por las filas de N excepto la fila p , y cuyas columnas son las que corresponden a las aristas de H . Afirmamos que

$$|\det(N')| = \begin{cases} \prod_{[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j] \in H} p_{ij} & \text{si } H \text{ es un árbol generador de } G_B. \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad (1.42)$$

En efecto, si H no es un árbol generador, dado que H tiene $n+1$ vértices y n aristas, entonces H es desconexo. Sea H_1 una componente conexa de H que no contiene a \mathbf{v}_p , y consideremos N'' , la submatriz de N' de tamaño $m \times n$ formada al eliminar todas las filas que no corresponden a vértices de H_1 , cada columna de N'' tiene dos entradas no cero, a saber: $\sqrt{p_{ij}}$ y $-\sqrt{p_{ij}}$, claramente la suma de las filas de N'' es cero, por lo tanto el conjunto formado por las filas de N'' es linealmente dependiente, y en consecuencia $\det(N') = 0$. De otro lado, si H es un árbol generador de G_B , elijamos una hoja de H distinta a \mathbf{v}_p y llamemos u_1 a dicha hoja, y sea e_1 la arista de H incidente con u_1 . En el árbol $H - u_1$, escojamos alguna hoja distinta de \mathbf{v}_p , digamos u_2 , y sea e_2 la arista de $H - u_1$ incidente con e_2 , y continuamos el proceso hasta que \mathbf{v}_p sea el único vértice que quede, de esta manera formamos la lista de vértices u_1, u_2, \dots, u_n , ahora construyamos con el nuevo etiquetamiento de los vértices y las aristas la matriz de incidencia de H a la que denotamos por N^* . Como para cada i , el vértice u_i no es incidente con ninguna de las aristas $e_{i+1}, e_{i+2}, \dots, e_n$, la matriz N^* es una matriz triangular, y por

tanto su determinante es el producto de las entradas de la diagonal, pero esto es precisamente $\pm \sqrt{\prod_{[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j] \in H} p_{ij}}$, y dado que N^* corresponde a un reordenamiento de las filas y las columnas de N' , se sigue que

$$\begin{aligned} |\det(N^*)| &= |\det(N')| \\ &= \sqrt{\prod_{[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j] \in H} p_{ij}}. \end{aligned}$$

Finalmente, veamos cómo son los cofactores de $A' = NN^{tr}$. Dado que A' es una matriz de suma cero por filas y columnas, todos sus cofactores $A'_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A'[i, j])$ son iguales. Por comodidad elegimos un cofactor para el cual $i + j$ es par, digamos $i = j = 1$. Así las cosas:

$$\begin{aligned} \det(L) &= \det(A'_{11}) = \det(NN^{tr}[1, 1]) \\ &= \det(N_1N_1^{tr}) \end{aligned}$$

siendo N_1 la matriz obtenida de N al eliminar la primera fila. Del Lema 1.4.3, se sigue que $\det(N_1N_1^{tr})$ es la suma de los productos de determinantes de las submatrices de orden $n \times n$ de N_1 . Además, por la afirmación (1.42), sabemos que cualquier submatriz de orden $n \times n$ que corresponda a un árbol generador H de G_B contribuye en $\prod_{[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j] \in H} p_{ij}$ a la suma, mientras que los otros no aportan nada, y esto termina la prueba. □

Capítulo 2

Clasificación de lattices en dimensiones bajas.

A continuación presentamos algunos resultados sobre clasificación de lattices en dimensiones bajas de acuerdo a la estructura topológico-combinatoria de la celda de Voronoi asociada. Para las dimensiones 1 a 3, los resultados son esencialmente los consignados en [CS3], para dimensión 4 lo que presentamos se puede encontrar en el paper de Charve [Ch]. El lector encontrará motivante las ideas de Conway [Co], sobre la clasificación de lattices por medio de conormas, dicha clasificación también es abordada por Vallentin [Va] con otras herramientas.

Como mencionamos en la Sección 1.3, a un lattice n -dimensional se lo puede representar por un punto del espacio vectorial de las matrices de Gram, para lo cual se requieren $\frac{1}{2}n(n+1)$ parámetros (de Selling). Pero también se lo puede caracterizar por medio de las $2^n - 1$ conormas no triviales. Hasta dimensión tres, la cantidad de vonormas (respectivamente conormas) es casi la misma que la de parámetros de Selling, pero esto no así en dimensiones superiores donde el número de vonormas es bastante mayor que el de parámetros de Selling. La tabla muestra un comparativo de dichas cantidades.

n	$\frac{1}{2}n(n+1)$	$2^n - 1$	diferencia
1	1	1	0
2	3	3	0
3	6	7	1
4	10	15	5
5	15	31	16
6	21	63	42

2.1. Lattices en dimensión 1 y 2.

En estas dimensiones las vonormas son suficientes para caracterizar los lattices, rápidamente se verá que ellos son de Tipo I, es decir poseen una superbase obtusa, tal como se había adelantado en el capítulo anterior.

Dimensión 1. Sea L un lattice 1-dimensional con matriz de Gram asociada $A = (a)$, y \mathbf{v}_1 un generador de L con $N(\mathbf{v}_1) = a$. Entonces, si $\mathbf{v}_0 := -\mathbf{v}_1$, $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1\}$ es una superbase obtusa de

L , sólo hay una vonorma propia, a , y la conorma propia correspondiente también es a .

Dimensión 2. Si L es un lattice 2-dimensional generado por los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, y tiene matriz de Gram reducida a la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & -h \\ -h & b \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

con $0 \leq 2h \leq a \leq b$, al definir $\mathbf{v}_0 := -\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, el conjunto $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es una superbase obtusa para L con parámetros de Selling reducidos $p_{ij} = -\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$, con $0 \leq i < j \leq 2$ y se cumple:

$$a = p_{01} + p_{12}, \quad h = p_{12}, \quad b = p_{02} + p_{12}$$

En este caso, los vectores de Voronoi son: $\pm\mathbf{v}_0, \pm\mathbf{v}_1, \pm\mathbf{v}_2$. Si $h = p_{12} \neq 0$, no hay más vectores de Voronoi, mientras que si $p_{12} = 0$, $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ también resultan ser vectores de Voronoi (solo que son laxos). En la Figura 2.1 se muestran los vectores de Voronoi. Las vonormas propias son

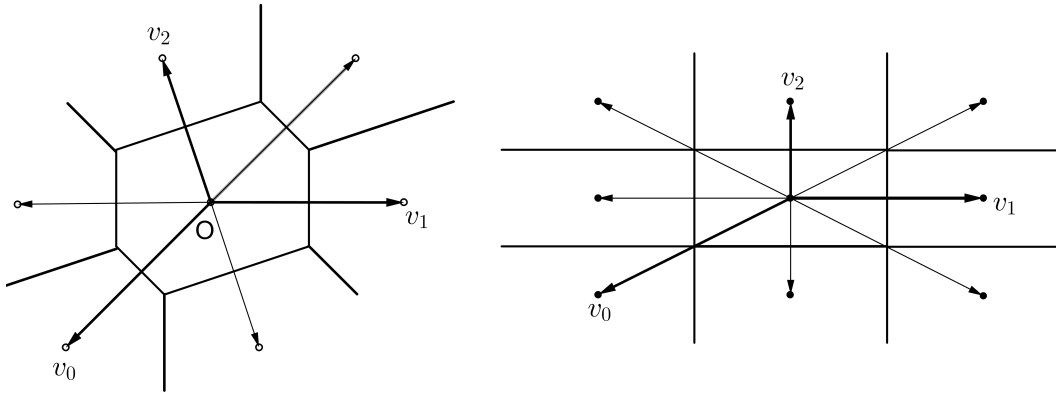


Figura 2.1: Vectores de Voronoi en dimensión 2.

$$a = p_{01} + p_{12}, \quad b = p_{02} + p_{12} \quad \text{y} \quad c = p_{01} + p_{02} = a + b - 2h.$$

Observación 2.1.1. En general, las vonormas pueden ser cualesquiera tres números positivos que cumplan con las desigualdades triangulares:

$$b + c \geq a, \quad c + a \geq b, \quad a + b \geq c. \quad (2.2)$$

Por otra parte, las conormas propias p_{01} , p_{02} y p_{12} , pueden ser cualesquiera tres números no negativos, con al menos dos de ellos estrictamente positivos, para que L sea un lattice propio, es decir 2 dimensional.

El determinante del lattice es $\det(L) = ab - h^2 = p_{01}p_{02} + p_{01}p_{12} + p_{02}p_{12}$, que coincide con la fórmula (1.29).

Descripción de las celdas de Voronoi en dimensión 2.

A continuación identificamos los vértices y las aristas de la celda de Voronoi de un lattice L en términos de los parámetros de Selling asociados a una superbase obtusa del mismo.

Recordemos que si $\mathbf{t} = (t_1, t_2)^{tr} \in \mathbb{R}^2$, y B es una superbase de L , con matriz generadora aumentada M y de Gram aumentada $A = MM^{tr}$, entonces las \mathbf{x} e \mathbf{y} -coordenadas aumentadas de \mathbf{t} vienen dadas por las relaciones $\mathbf{t} = M^{tr}\mathbf{x}$ y $\mathbf{y} = (y_0, y_1, y_2) = A\mathbf{x}$ con $y_0 + y_1 + y_2 = 0$.

Consideremos la celda de Voronoi $S(\mathbf{0})$, centrada en el origen, y denotemos por $F_{0|12}$, $F_{1|02}$ y $F_{2|01}$ a las caras determinadas por los vectores \mathbf{v}_0 , \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 respectivamente, y por $F_{12|0}$, $F_{02|1}$ y $F_{01|2}$, a sus caras opuestas, y etiquetemos el vértice correspondiente a la intersección de las caras $F_{i|jk}$ y $F_{ij|k}$ con \mathbf{p}_{ijk} , tal como se muestra en la Figura 2.2.

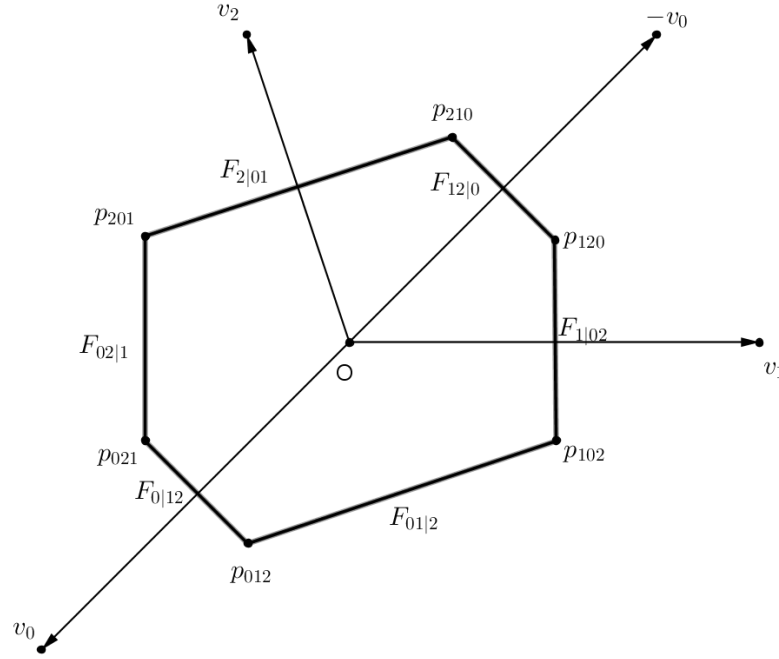


Figura 2.2: Etiquetamiento de la celda de Voronoi en dimensión 2.

Calculemos las \mathbf{y} -coordenadas del vértice \mathbf{p}_{012} determinado por la intersección de $F_{0|12} \cap F_{01|2}$, en este caso

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{1}{2}N(\mathbf{v}_0) \\ y_2 &= -\frac{1}{2}N(\mathbf{v}_2) \end{aligned}$$

y dado que $N(\mathbf{v}_0) = p_{01} + p_{02}$ y $N(\mathbf{v}_2) = p_{02} + p_{12}$, se sigue que

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{1}{2}(p_{01} + p_{02}) \\ y_1 &= \frac{1}{2}(-p_{01} + p_{12}) \\ y_2 &= \frac{1}{2}(-p_{02} - p_{12}) \end{aligned}$$

por lo tanto \mathbf{p}_{012} tiene \mathbf{y} -coordenadas aumentadas:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_{01} + p_{02} \\ -p_{01} + p_{12} \\ -p_{02} - p_{12} \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Dada la simetría de esta expresión, es claro que el vértice \mathbf{p}_{ijk} determinado por las caras $F_{i|jk}$ y

$F_{ij|k}$, donde ijk es un reordenamiento de los índices 012 , tiene \mathbf{y} -coordenadas

$$\begin{aligned} y_i &= \frac{1}{2}N(\mathbf{v}_i) \\ y_i + y_j &= \frac{1}{2}N(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j) \\ y_k &= -y_i - y_j. \end{aligned} \quad (2.4)$$

y en consecuencia:

$$\begin{aligned} y_i &= \frac{1}{2}(p_{ij} + p_{ik}) \\ y_j &= \frac{1}{2}(-p_{ij} + p_{jk}) \\ y_k &= \frac{1}{2}(-p_{ik} - p_{jk}) \end{aligned}$$

De este modo, los vértices de $S(\mathbf{0})$ tienen \mathbf{y} -coordenadas aumentadas:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{012} &\rightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_{01} + p_{02} \\ -p_{01} + p_{12} \\ -p_{02} - p_{12} \end{pmatrix} & \mathbf{P}_{021} &\rightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_{01} + p_{02} \\ -p_{01} - p_{12} \\ -p_{02} + p_{12} \end{pmatrix} \\ \mathbf{P}_{102} &\rightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -p_{01} + p_{02} \\ p_{01} + p_{12} \\ -p_{02} - p_{12} \end{pmatrix} & \mathbf{P}_{120} &\rightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -p_{01} - p_{02} \\ p_{01} + p_{12} \\ p_{02} - p_{12} \end{pmatrix} \\ \mathbf{P}_{201} &\rightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_{01} - p_{02} \\ -p_{01} - p_{12} \\ p_{02} + p_{12} \end{pmatrix} & \mathbf{P}_{210} &\rightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -p_{01} - p_{02} \\ p_{01} - p_{12} \\ p_{02} + p_{12} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Si $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2$ tiene \mathbf{y} -coordenadas aumentadas (y_0, y_1, y_2) , por la Proposición 1.4.7, la norma de \mathbf{t} viene dada por la expresión

$$N(\mathbf{t}) = \frac{1}{\det A} (p_{12}y_0^2 + p_{02}y_1^2 + p_{01}y_2^2) \quad (2.6)$$

en consecuencia, la norma del vértice \mathbf{p}_{ijk} es:

$$\begin{aligned} N(\mathbf{p}_{ijk}) &= \frac{1}{\det A} (p_{ij}y_k^2 + p_{ik}y_j^2 + p_{jk}y_i^2) \\ &= \frac{1}{4 \det A} (p_{ij}(p_{ik} + p_{jk})^2 + p_{ik}(-p_{ij} + p_{jk})^2 + p_{jk}(p_{ij} + p_{ik})^2) \\ &= \frac{1}{4 \det A} (p_{ij}(p_{ik}^2 + 2p_{ik}p_{jk} + p_{jk}^2) + p_{ik}(p_{ij}^2 - 2p_{ij}p_{jk} + p_{jk}^2) + p_{jk}(p_{ij}^2 + 2p_{ij}p_{ik} + p_{ik}^2)) \\ &= \frac{1}{4 \det A} (p_{ij} + p_{ik})(p_{ij} + p_{jk})(p_{ik} + p_{jk}) \\ &= \frac{N(\mathbf{v}_0)N(\mathbf{v}_1)N(\mathbf{v}_2)}{4 \det A}. \end{aligned}$$

Es decir, todos los vértices en la celda de Voronoi de un lattice 2-dimensional están a la misma distancia del origen. Hecho excepcional que no sucede en las demás dimensiones.

Una vez conocidos los vértices de la celda de Voronoi no es difícil determinar la longitud de las aristas.

Si F_i es la arista determinada por el vector v_i , y $\Delta = p_{ij}p_{ik} + p_{ij}p_{jk} + p_{ik}p_{jk}$ es el determinante del lattice, y denotamos por Δ_{jk} a la derivada formal de Δ con respecto a p_{jk} , por ejemplo: $\Delta_{01} = p_{02} + p_{12}$ Se tiene el siguiente teorema:

Teorema 2.1.2 (longitud de las aristas en dimensión 2). *Sea L un lattice 2-dimensional y $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ una superbase obtusa con parámetros de Selling asociados $p_{01} = -\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1$, $p_{02} = -\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_2$ y $p_{12} = -\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$. Entonces, la longitud de la arista perpendicular al vector \mathbf{v}_i en la celda de Voronoi del lattice es:*

$$p_{jk} \sqrt{\frac{\Delta_{jk}}{\Delta}} \quad (2.7)$$

Demostración. Consideremos la superbase obtusa $B = \{\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k\}$, y la celda de Voronoi centrada en el origen etiquetada tal como se muestra en la Figura 2.3. Dado que los vértices de la celda equidistan del origen, este último se encuentra sobre la mediatriz de las aristas, en consecuencia los triángulos OPR y OQR son congruentes, y por lo tanto $l_i = \overline{PQ} = l + l' = 2l$.

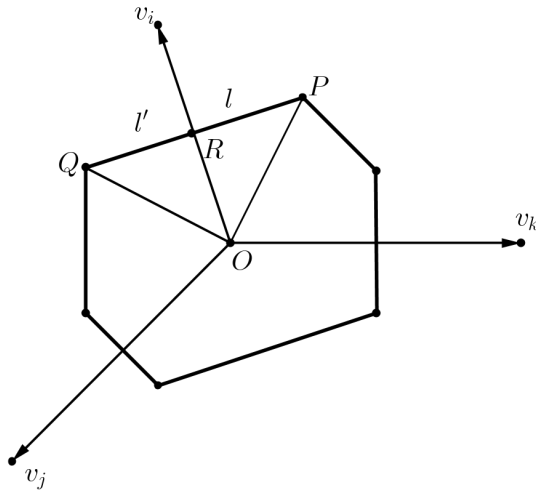


Figura 2.3: Longitud de una arista en dimensión 2.

Del Teorema de Pitágoras se sigue que

$$\begin{aligned} l_i^2 &= |PQ|^2 = 4l^2 \\ &= 4 \left(N(P) - \frac{1}{4}N(\mathbf{v}_i) \right) \\ &= 4N(P) - N(\mathbf{v}_i) \\ &= \frac{(p_{ij} + p_{jk})(p_{ij} + p_{ik})(p_{jk} + p_{ik})}{\det A} - (p_{ij} + p_{ik}) \\ &= \frac{(p_{ij} + p_{ik})}{\det A} ((p_{ij} + p_{jk})(p_{jk} + p_{ik}) - \det A) \\ &= \frac{(p_{ij} + p_{ik})}{\det A} ((p_{ij} + p_{jk})(p_{jk} + p_{ik}) - (p_{ij}p_{ik} + p_{ij}p_{jk} + p_{ik}p_{jk})) \\ &= \frac{p_{jk}^2 (p_{ij} + p_{ik})}{\det A} \end{aligned} \quad (2.8)$$

y puesto que $\Delta_{jk} = p_{ij} + p_{ik}$, tenemos (2.7). □

2.2. Lattices en dimensión 3.

Voronoi en [Vo], demostró que todo lattice en 3-dimensional es de Tipo I. Es decir, todo lattice en \mathbb{R}^3 tiene una superbase obtusa. A continuación presentamos rápidamente las ideas de una prueba de este mismo resultado hecha por Conway & Sloane [CS3]. Ellos usan fuertemente las conormas y una representación muy ingeniosa de las mismas en un *plano de Fano*.

Recordemos que un *plano de Fano*, es un plano proyectivo con 7 puntos y 7 líneas, cada una de las cuales tiene 3 puntos, con la propiedad que dados dos puntos cualesquiera siempre hay una línea que los contiene. A dicho plano se le suele representar con un triángulo equilátero en el que se han dibujado los tres alturas y el círculo inscrito. Las líneas del plano son los lados del triángulo junto con las tres alturas y el círculo inscrito, y los puntos del plano son las intersecciones de estas líneas, tal como se muestra en la Figura 2.4.

En el caso de un lattice típico 3-dimensional L , sabemos que $|L/2L| = 8$, por lo tanto hay 7 clases no triviales, cada una de las cuales da lugar a un vector de Voronoi y una Conorma, a las que se les asigna un punto del plano de Fano. Más específicamente: Si $\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es una superbase obtusa para L , del Teorema 1.5.4, los vectores de Voronoi son: $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$.

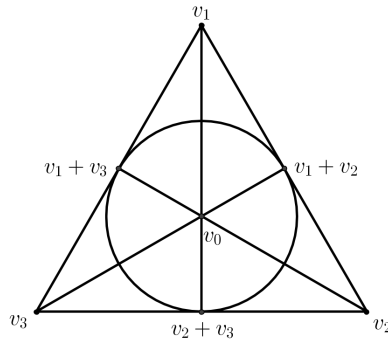


Figura 2.4: Plano de Fano de las Vonormas.

2.2.1. Existencia de superbase obtusa.

A continuación presentamos un bosquejo de la demostración de Conway & Sloane del Teorema de Voronoi sobre existencia de superbase obtusa para todo lattice 3-dimensional. Es importante destacar que en la prueba se muestra la fuerza y conveniencia de las conormas en esa dimensión. Adicionalmente, la prueba permite una hermosa descripción gráfica del método usado por ellos.

Teorema 2.2.1 (Voronoi). *Todo lattice 3-dimensional es de Tipo I.*

Sea L un lattice 3-dimensional, y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ una base de L , llamamos *vectores de Voronoi putativos*, a cada uno de los siete vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$, uno por cada subconjunto no vacío de $\{1, 2, 3\}$, y llamamos a sus normas $N(\mathbf{v}_1), N(\mathbf{v}_2), \dots, N(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)$ *Vonormas putativas*. Así mismo, llamamos *Conormas putativas* para la superbase $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, con $\mathbf{v}_0 = -(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)$, a los seis parámetros $p_{ij} = -\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$ con $0 \leq i <$

$j \leq 3$, junto con el 0. Es claro que esas cantidades putativas eventualmente pueden ser las correctas, si la superbase inicial es obtusa.

Las vonormas putativas se marcan con los puntos de un plano de Fano, así como las conormas putativas complementadas con el $\mathbf{0}$, tal como lo muestra la Figura 2.5.

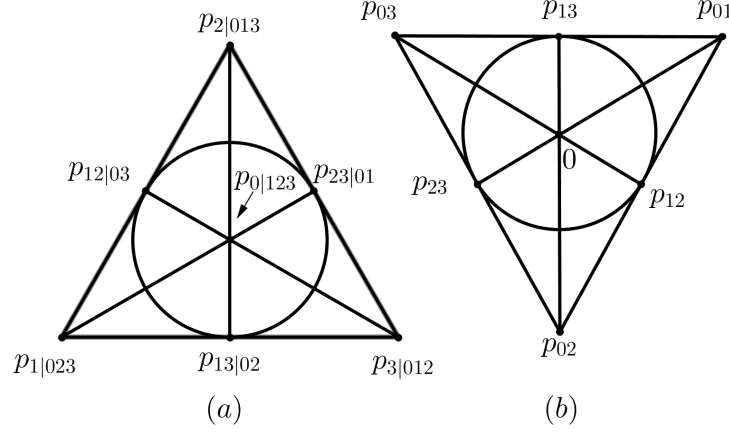


Figura 2.5: (a) Plano de Vonormas putativas (b) Plano de Conormas putativas.

Supongamos que una Conorma es negativa, digamos $p_{13} = -\epsilon$, con $\epsilon > 0$, veamos qué ocurre cuando cambiamos la superbase por la *superbase adyacente*: $B' = \{\mathbf{v}'_0, \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3\}$ definida por:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}'_0 &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}'_1 &= -\mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}'_2 &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}'_3 &= \mathbf{v}_3\end{aligned}$$

los vectores de Voronoi resultantes, además de sus negativos, son:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}'_0 &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1; & \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2 &= \mathbf{v}_2; \\ \mathbf{v}'_1 &= -\mathbf{v}_1; & \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_3 &= -(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3); \\ \mathbf{v}'_2 &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2; & \mathbf{v}'_2 + \mathbf{v}'_3 &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3; \\ \mathbf{v}'_3 &= \mathbf{v}_3;\end{aligned}$$

Notemos que 6 de estos vectores también son, salvo posiblemente el signo, vectores de Voronoi en la superbase inicial, esto justifica el nombre adyacente. Así las cosas, el vector $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3$ es ahora más corto que $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3$, de hecho, dado que $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_0 + 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ tenemos

$$\begin{aligned}N(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3) &= p_{01} + p_{03} + p_{12} + 4p_{13} + p_{23} \\ &= (p_{01} + p_{12}) + (p_{03} + p_{23}) + 4p_{13} \\ &= N(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3) + 4p_{13}\end{aligned}$$

y como $p_{13} < 0$, se sigue que $N(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3) < N(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3)$. Los parámetros de Selling correspondientes a la nueva superbase son:

$$\begin{aligned}p'_{01} &= p_{12} - \epsilon; & p'_{12} &= p_{01} - \epsilon; \\ p'_{02} &= p_{02} + \epsilon; & p'_{13} &= \epsilon; \\ p'_{03} &= p_{03} - \epsilon; & p'_{23} &= p_{23} - \epsilon;\end{aligned}$$

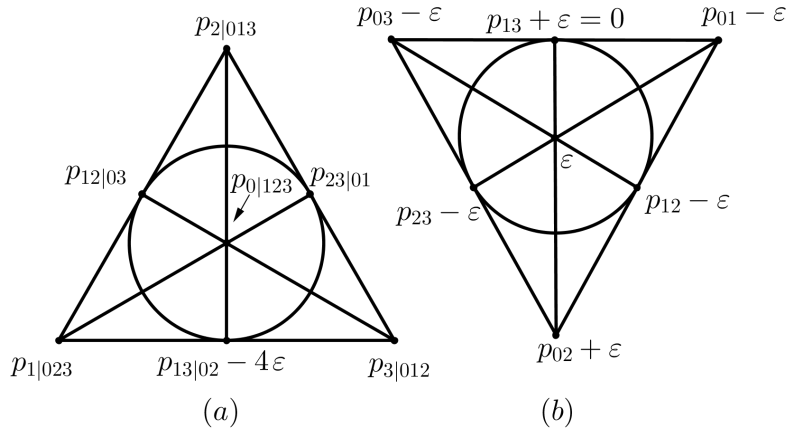


Figura 2.6: Vonormas y conormas para superbases adyacentes.

Los nuevos parámetros se distribuyen en un plano de Fano, tal como se muestra en la Figuras 2.6.

Note que sólo una vonorma putativa cambió, $N(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3)$ que se disminuyó en 4ϵ , adicionalmente tres conormas putativas sobre una misma línea se incrementan en ϵ , mientras que las demás se disminuyen en ϵ . La línea de conormas que se incrementa en ϵ es precisamente la que une las posiciones de las conormas que son 0.

En realidad ϵ está determinado por la condición: Después de aplicado el proceso, una de las nuevas conormas será 0. Esta condición permite establecer un algoritmo de reducción para lattices en dimensión 3. Explicamos el método con un ejemplo.

Ejemplo 2.2.2. Consideremos un lattice L con matriz de Gram relativa a la una base $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \}$ dada por

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

adjuntamos el vector $\mathbf{v}_0 = -(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)$ de tal manera que la matriz de Gram aumentada es:

$$A' = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & 2 & -7 \\ 1 & 2 & 5 & -8 \\ -5 & -7 & -8 & 20 \end{bmatrix}$$

Dado que algunos productos internos son positivos, la superbases $\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ no es obtusa. Las conormas putativas para este caso son: $p_{01} = 5$, $p_{02} = 7$, $p_{03} = 8$, $p_{12} = -1$, $p_{13} = -1$ y $p_{23} = -2$, las cuales se distribuyen en el plano de fano dual que se muestra en la Figura 2.7.

Ahora aplicamos el proceso de reducción, la línea punteada en cada plano indica la línea de trabajo a la que se aplicará la reducción. De este modo, después de 5 pasos se obtienen las conormas reducidas.

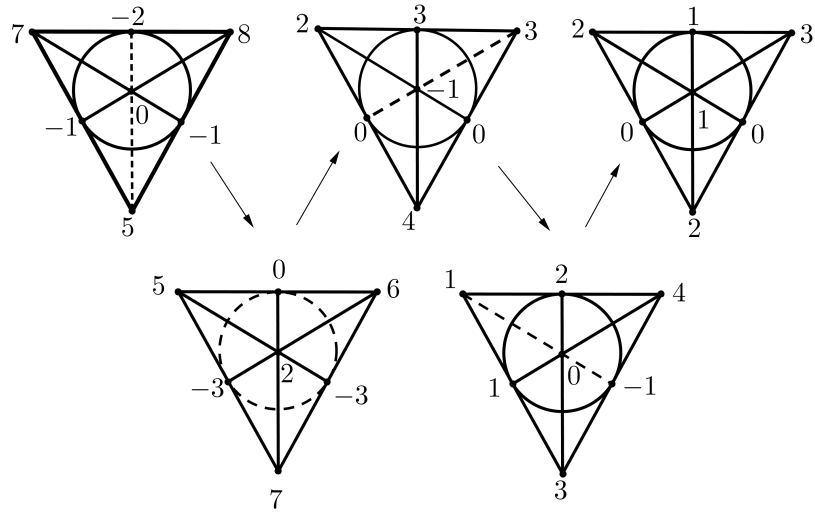


Figura 2.7: Ilustración algoritmo de reducción para lattices 3-dimensionales.

Por último aplicamos la simetría que permite intercambiar las líneas que pasan por los puntos 1, 1, 2 y 3, 0, 2, al último plano, de tal manera que la conorma 0 quede en el centro tal como se muestra en la Figura 2.8.

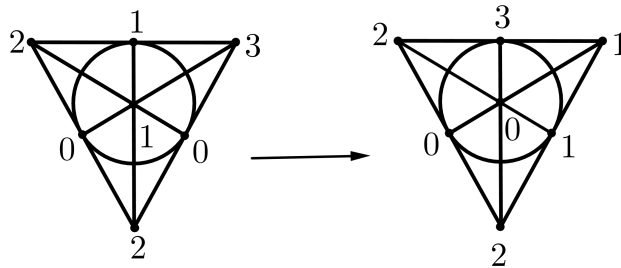


Figura 2.8: Aplicación de simetría en algoritmo de reducción para lattices 3-dimensionales.

De todo lo anterior, las conormas reducidas del lattice son: $p_{01} = 1$, $p_{02} = 2$, $p_{03} = 2$, $p_{12} = 1$, $p_{13} = 3$ y $p_{23} = 0$

En general el proceso descrito siempre produce una superbase obtusa del lattice. Note que si $M = \sum_{0 \leq i < j < 3} p_{ij}$, es fácil ver que $M = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 N(\mathbf{v}_i)$, por lo tanto, $M > 0$. Sabemos además que hay un mínimo para esta cantidad. El algoritmo comienza con el M correspondiente a una superbase, y en cada paso del algoritmo se reduce M estrictamente (salvo en los reordenamientos de la base, que van aparte). Sin embargo, esto todavía no garantiza que el algoritmo vaya a terminar en un número finito de pasos, ya que la reducción de M podría ir haciéndose cada vez mas lenta. Pero esto no puede ocurrir ya que sólo hay una cantidad finita de superbases que tienen un valor de M menor o igual que la M inicial, por lo tanto hay sólo un número finito de estados (superbases) por los que el algoritmo puede pasar y en consecuencia el proceso de reducción no se puede extender indefinidamente.

2.2.2. Descripción de la celda de Voronoi para lattices en dimensión 3.

Consideremos $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ una superbase obtusa estricta de un lattice 3-dimensional L , como vimos en la Sección 1.4, un elemento de $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$ queda determinado por sus \mathbf{y} -coordenadas, es decir, los productos internos de \mathbf{t} con los elementos de una superbase. Por comodidad usaremos las \mathbf{y} -coordenadas aumentadas, $(y_0, y_1, y_2, y_3) = (t \cdot \mathbf{v}_0, t \cdot \mathbf{v}_1, t \cdot \mathbf{v}_2, t \cdot \mathbf{v}_3)$, note que $\sum_{i=0}^3 \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ implica que $\sum_{i=0}^3 y_i = 0$.

Por el Teorema 1.5.4, si S es un subconjunto propio de $\{0, 1, 2, 3\}$, $\mathbf{v}_S = \sum_{i \in S} \mathbf{v}_i$ es un vector de Voronoi de L , en total hay 14 de tales vectores, cada uno de los cuales dirige o determina una 2-cara de la celda de Voronoi $S(\mathbf{0})$ centrada en el origen.

Si $\bar{S} = \{0, 1, 2, 3\} \setminus S$, denotamos por $F_{S|\bar{S}}$, a la 2-cara de $S(\mathbf{0})$ dirigida por el vector \mathbf{v}_S ; se puede ver que $F_{\bar{S}|S} = -F_{S|\bar{S}}$, es decir, las caras $F_{\bar{S}|S}$ y $F_{S|\bar{S}}$ son opuestas respecto al origen, ya que todo lattice tiene simetría central.

Más específicamente, si $\{i, j, k, l\} = \{0, 1, 2, 3\}$, y $S = \{i\}$, la cara $F_{i|jkl}$ contiene sólo puntos $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$ cuya y_i coordenada es de la forma $y_i = \frac{1}{2}N(\mathbf{v}_i)$, y dado que $N(\mathbf{v}_i) = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = p_{ij} + p_{ik} + p_{il}$, tenemos que $y_i = \frac{1}{2}(p_{ij} + p_{ik} + p_{il})$, es decir, para \mathbf{t} en $S(\mathbf{0})$

$$\mathbf{t} \in F_{i|jkl} \iff y_i = \frac{1}{2}(p_{ij} + p_{ik} + p_{il})$$

De otro lado, si $S = \{i, j\}$, la cara $F_{ij|kl}$ contiene los puntos $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$ para los cuales $y_i + y_j = \frac{1}{2}N(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j)$, o lo que es lo mismo $y_i + y_j = \frac{1}{2}(p_{ik} + p_{il} + p_{jk} + p_{jl})$, es decir:

$$\mathbf{t} \in F_{ij|kl} \iff y_i + y_j = \frac{1}{2}(p_{ik} + p_{il} + p_{jk} + p_{jl})$$

así que la cara $F_{i|jkl}$ comparte una arista (caras *vecinas* o *adyacentes*) con: $F_{ij|kl}$, $F_{ik|jl}$, $F_{il|jk}$, $F_{ik|jl}$, $F_{ij|lk}$, y $F_{ik|lj}$. De este modo, las caras del tipo $F_{i|jkl}$ y sus opuestas son hexágonos.

Análogamente, las caras vecinas de $F_{ij|kl}$ son: $F_{i|jkl}$, $F_{j|ikl}$, $F_{ijk|l}$ y $F_{ijl|k}$, con lo cual las caras del tipo $F_{ij|jk}$ son cuadriláteros.

En general, si $i j k l$ es un reordenamiento de 0 1 2 3, las caras $F_{i|jkl}$, $F_{ij|kl}$ y $F_{ijk|l}$ son vecinas dos a dos, y su intersección $F_{i|jkl} \cap F_{ij|kl} \cap F_{ijk|l}$ es un vértice de la celda, al que denotamos por \mathbf{p}_{ijkl} , y cuyas \mathbf{y} -coordenadas satisfacen las relaciones:

$$\begin{aligned} y_i &= \frac{1}{2}N(\mathbf{v}_i) \\ y_i + y_j &= \frac{1}{2}N(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j) \\ y_i + y_j + y_k &= \frac{1}{2}N(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_k) \end{aligned} \tag{2.9}$$

de este modo, las \mathbf{y} -coordenadas aumentadas de \mathbf{p}_{ijkl} son:

$$\begin{aligned} y_i &= \frac{1}{2}(p_{ij} + p_{ik} + p_{il}) \\ y_j &= \frac{1}{2}(-p_{ij} + p_{jk} + p_{jl}) \\ y_k &= \frac{1}{2}(-p_{ik} - p_{jk} + p_{kl}) \\ y_l &= \frac{1}{2}(-p_{il} - p_{jl} - p_{kl}) \end{aligned} \tag{2.10}$$

Ahora bien, el vértice \mathbf{p}_{ijkl} pertenece a las caras $F_{i|jkl}$, $F_{ij|kl}$ y $F_{ijk|l}$, tomando dos de estas caras, digamos $F_{i|jkl}$ y $F_{ij|kl}$, la otra vecina a ellas distinta de $F_{ijk|l}$ es $F_{ijl|k}$, éstas tres caras determinan al vértice \mathbf{p}_{ijlk} , que es adyacente a \mathbf{p}_{ijkl} , pues comparte con él dos de las tres caras que lo determinan. De manera similar $F_{i|jkl}$, $F_{ijk|l}$, tienen como única cara vecina a $F_{ik|jl}$, y las tres determinan al vértice \mathbf{p}_{ikjl} , finalmente para $F_{ij|kl}$ y $F_{ijk|l}$, la única cara vecina es $F_{j|ikl}$ y juntas determinan al vértice \mathbf{p}_{jikl} . En resumen, los vértices \mathbf{p}_{ijlk} , \mathbf{p}_{ikjl} y \mathbf{p}_{jikl} , son adyacentes a \mathbf{p}_{ijkl} y definen 3 aristas,

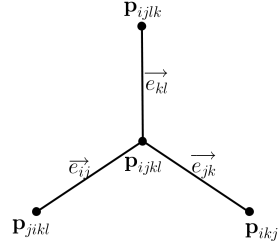


Figura 2.9: Vértices y aristas adyacentes.

a saber:

- $e_{ij} = \overline{\mathbf{p}_{ijkl}\mathbf{p}_{jikl}}$ que tiene \mathbf{y} -coordenadas asociadas $y_i = -p_{ij}$, $y_j = p_{ij}$, $y_k = 0$, $y_l = 0$.
- $e_{jk} = \overline{\mathbf{p}_{ijkl}\mathbf{p}_{ikjl}}$ que tiene \mathbf{y} -coordenadas asociadas $y_i = 0$, $y_j = -p_{jk}$, $y_k = p_{jk}$, $y_l = 0$.
- $e_{kl} = \overline{\mathbf{p}_{ijkl}\mathbf{p}_{ijlk}}$ que tiene \mathbf{y} -coordenadas asociadas $y_i = 0$, $y_j = 0$, $y_k = -p_{kl}$, $y_l = p_{kl}$.

Note que si continuamos así, encontramos que hay 6 tipos de aristas, uno por cada elección de dos \mathbf{y} -coordenadas iguales a cero. Las restantes son:

- $e_{ik} = \overline{\mathbf{p}_{ikjl}\mathbf{p}_{kijl}}$ que tiene \mathbf{y} -coordenadas asociadas $y_i = -p_{ik}$, $y_j = 0$, $y_k = p_{ik}$, $y_l = 0$.
- $e_{il} = \overline{\mathbf{p}_{iljk}\mathbf{p}_{lijk}}$ que tiene \mathbf{y} -coordenadas asociadas $y_i = -p_{il}$, $y_j = 0$, $y_k = 0$, $y_l = p_{il}$.
- $e_{jl} = \overline{\mathbf{p}_{ikjl}\mathbf{p}_{iklj}}$ que tiene \mathbf{y} -coordenadas asociadas $y_i = 0$, $y_j = -p_{jl}$, $y_k = 0$, $y_l = p_{jl}$.

Ahora podemos determinar las longitudes de las aristas de la celda en términos de los parámetros de Selling asociados a una superbase obtusa.

Si determinante del lattice es $\det(L) = \Delta$ como en (1.30), y denotamos por Δ_{ij} a la derivada formal de Δ respecto a p_{ij} se tiene el siguiente teorema.

Teorema 2.2.3 (“Edge length” en dimensión 3). *Sea L un lattice 3-dimensional con superbase obtusa $\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, entonces la longitud de la arista e_{ij} que tiene vértices en \mathbf{p}_{ijkl} y \mathbf{p}_{jikl} viene dada por*

$$|e_{ij}| = p_{ij} \sqrt{\frac{\Delta_{ij}}{\Delta}} \quad (2.11)$$

Demostración. Si $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$ tiene \mathbf{y} -coordenadas aumentadas (y_0, y_1, y_2, y_3) , de la Proposición 1.4.7, tenemos que

$$N(\mathbf{t}) = \frac{1}{\Delta} \left(\sum_{i=1}^3 \Delta_{0i} y_i^2 + \sum_{0 \leq i < j \leq 3} (\Delta_{0i} + \Delta_{0j} - \Delta_{ij}) y_i y_j \right) \quad (2.12)$$

y como e_{ij} tiene \mathbf{y} -coordenadas $y_i = -p_{ij}$, $y_j = p_{ij}$, $y_k = 0$, $y_l = 0$, al reemplazar en (2.12), obtenemos

$$N(e_{ij}) = \frac{\Delta_{ij} p_{ij}^2}{\Delta},$$

$$|e_{ij}| = p_{ij} \sqrt{\frac{\Delta_{ij}}{\Delta}}.$$

□

Note que la arista e_{ij} se hace cero justo cuando la conorma p_{ij} se anula, de aquí que dos lattices en los cuales las mismas conormas son cero, tienen celdas de Voronoi equivalentes ya que uno de ellos puede deformarse continuamente hasta obtener la otra sin perder ninguna arista.

En general sólo hay cinco posibles elecciones de conormas iguales a cero, a saber: Un cero, dos ceros, tres ceros colineales, tres ceros no colineales, o cuatro ceros. Cada una de éstas posibilidades genera una celda de Voronoi, ver Figura 2.10.

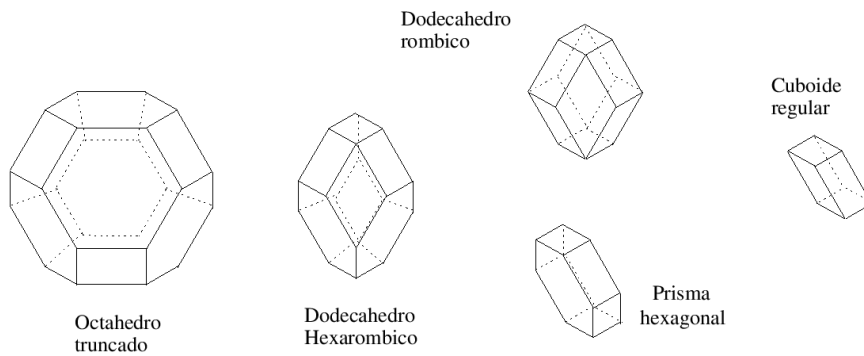


Figura 2.10: Celdas de Voronoi para lattices en dimensión 3.

Todo esto se resume en el siguiente teorema, Fedorov [Fe].

Teorema 2.2.4 (Fedorov, 1885). *Hay sólo cinco posibilidades combinatorias diferentes para la forma de celdas de Voronoi de un lattice tres dimensional. Y son justo las que se muestran en la Figura 2.10.*

2.3. Algoritmo de reducción de Charve en lattices 4-dimensionales.

El objetivo central de la sección es implementar el algoritmo de reducción de formas cuadráticas de Charve el cual nos servirá para determinar el Tipo primitivo de un lattice euclídeo en dimensión 4, de acuerdo con la clasificación de reducción de Charve.

El algoritmo que presentamos se basa completamente en el trabajo de M. Charve [Ch]. Nuestro aporte únicamente ha sido rescatar el trabajo de Charve y escribir un prototipo programa para ser ejecutado en el toolbox de matemática simbólica de MATLAB.

Es importante destacar que este algoritmo de reducción de formas cuadráticas cuaternarias definidas positivas, juega un papel muy importante a la hora de encontrar la constante de cuantización de un lattice en dimensión 4, problema que abordamos en el Capítulo 4.

2.3.1. Reducción de formas cuadráticas cuaternarias.

Como ya hemos dicho hay una correspondencia entre lattices 4-dimensionales y formas cuadráticas cuaternarias definidas positivas, el lenguaje que usaremos ahora será el de las formas cuadráticas.

Si ϕ es una forma cuadrática cuaternaria definida positiva, existen escalares p_{ij} con $0 \leq i < j \leq 4$, fijos tales que si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ y $x_0 = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$, entonces $\phi(\mathbf{x})$ tiene la forma

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{0 \leq i < j \leq 4} p_{ij}(x_i - x_j)^2. \quad (2.13)$$

Definición 2.3.1. Decimos que ϕ está *reducida en el sentido de Charve* o simplemente que está *reducida*, si satisface una de las siguientes tres condiciones:

- i. Todos los coeficientes p_{ij} en (2.13) son no negativos.
- ii. Hay un único coeficiente negativo en (2.13), digamos p_{st} , todos los demás son no negativos y se cumple que $|p_{st}| \leq p_{ij}$, para $\{s, t\} \cap \{i, j\} \neq \emptyset$.
- iii. Exactamente dos coeficientes en (2.13), que no comparten subíndices, son negativos, digamos p_{st} y p_{uv} , los demás son no negativos y satisfacen: $|p_{st}| \leq p_{ij}$ para $\{s, t\} \cap \{i, j\} \neq \emptyset$, $|p_{uv}| \leq p_{ij}$ para $\{u, v\} \cap \{i, j\} \neq \emptyset$ y $|p_{st} + p_{uv}| \leq p_{ij}$ con $i \in \{s, t\}$ y $j \in \{u, v\}$.

El siguiente teorema, debido a M. Charve, muestra que toda forma cuadrática cuaternaria definida positiva tiene una y sólo una forma cuadrática aritméticamente equivalente que es reducida en el sentido de la definición anterior. La prueba del Teorema es constructiva y se corresponde esencialmente con el algoritmo de reducción que se presenta en la Sección 2.3.2. El lector puede consultar dicha prueba en [Ch].

Teorema 2.3.2 (Existencia y unicidad de formas cuadráticas cuaternarias reducidas). *Si Φ es una forma cuadrática cuaternaria definida positiva, entonces existe una y sólo una forma cuadrática reducida aritméticamente equivalente a Φ .*

Las formas cuadráticas que cumplen la condición (i) de la definición, son justo aquellas que corresponden a los lattices de Tipo I.

En lo sucesivo, diremos que un lattice en \mathbb{R}^4 es de *Tipo II* si la cualquier forma cuadrática definida positiva asociada, es aritméticamente equivalente a una forma reducida que satisface la condición (ii) de la Definición 2.3.1.

Diremos que un lattice es de *Tipo III*, si cualquier forma cuadrática asociada a él, es aritméticamente equivalente a una forma cuadrática reducida que satisfaga la condición (iii) de la Definición 2.3.1.

De otro lado, diremos que un lattice es *primitivo* si su forma cuadrática reducida no tiene parámetros iguales a cero, si éste es el caso, las celdas de voronoi asociadas son primitivas, es decir,

en el embañosamiento (tiling) de \mathbb{R}^4 que ellas generan, cada vértice pertenece sólo a 5 celdas, el mínimo posible en esta dimensión.

Por ejemplo el lattice A_4^* tiene todos sus parámetros positivos e iguales a $1/5$, por lo tanto es un lattice primitivo de Tipo I.

2.3.2. Algoritmo de reducción de Charve.

Sea $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ y $x_0 = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$ y sea

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{0 \leq i, j \leq 4} p_{ij}(x_i - x_j)^2 \quad (2.14)$$

una forma cuadrática cuaternaria definida positiva y asumamos que Φ no es reducida según la Definición 2.3.1. Entonces, ocurre uno de los siguientes casos:

Caso 1. En (2.14), hay dos parámetros p_{ij} y p_{it} , tales que $|p_{ij}| > p_{it}$ con $t \neq j$ y $p_{ij} < 0$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $p_{12} < 0$ y $|p_{12}| > p_{13}$ en tal caso, al aplicarle a $\Phi(\mathbf{x})$ la transformación T1 de \mathbb{R}^4 dada por:

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow x_4 - x_3 \\ x_2 &\rightarrow x_1 - x_0 \\ x_3 &\rightarrow x_2 - x_0 \\ x_4 &\rightarrow x_4 - x_0 \\ x_0 &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (T1)$$

obtenemos la forma cuadrática

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) = & (p_{02} + p_{12})(x_0 - x_1)^2 + (p_{03} + p_{13})(x_0 - x_2)^2 + (p_{12} + p_{13} + p_{14})(x_0 - x_3)^2 + \\ & (p_{04} - p_{12} - p_{13})(x_0 - x_4)^2 + p_{23}(x_1 - x_2)^2 - p_{12}(x_1 - x_3)^2 + (p_{12} + p_{24}) \\ & (x_1 - x_4)^2 - p_{13}(x_2 - x_3)^2 + (p_{13} + p_{34})(x_2 - x_4)^2 + (p_{01} + p_{12} + p_{13})(x_3 - x_4)^2 \end{aligned}$$

la cual es aritméticamente equivalente a Φ y tiene como suma de parámetros $(p_{12} + p_{13}) + \sum_{0 \leq i < j \leq 4} p_{ij}$.

Caso 2. En (2.14), hay dos parámetros negativos, digamos p_{ij} y p_{kl} , que no comparten subíndices, y son tales que $|p_{ij} + p_{kl}| > p_{ik}$. Si éste es el caso, no hay pérdida de generalidad al suponer que tales parámetros son p_{12} , p_{34} y p_{13} , es decir:

$$|p_{12} + p_{34}| > p_{13} \text{ con } p_{12} < 0, p_{34} < 0$$

en este caso, la transformación T2 de \mathbb{R}^4 dada por:

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow x_2 - x_1 \\ x_2 &\rightarrow x_0 - x_4 \\ x_3 &\rightarrow x_0 - x_3 \\ x_4 &\rightarrow x_2 - x_4 \\ x_0 &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (T2)$$

envía a Φ en la forma cuadrática

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) = & -(p_{12} + p_{13})(x_0 - x_1)^2 + (p_{12} + p_{13} + p_{24} + p_{34})(x_0 - x_2)^2 + (p_{03} + p_{13} + p_{34})(x_0 - x_3)^2 + \\ & (p_{02} + p_{12} - p_{34})(x_0 - x_4)^2 + (p_{01} + p_{12} + p_{13})(x_1 - x_2)^2 + p_{13}(x_1 - x_3)^2 + (p_{12} + p_{14})(x_1 \\ & - x_4)^2 - (p_{13} + p_{34})(x_2 - x_3)^2 + (p_{04} - p_{12} + p_{34})(x_2 - x_4)^2 + (p_{01} + p_{12} + p_{13})(x_3 - x_4)^2 \end{aligned}$$

que es aritméticamente equivalente a Φ y cuya suma de parámetros es:

$$(p_{12} + p_{13} + p_{34}) + \sum_{0 \leq i < j \leq 4} p_{ij}.$$

En cualquier caso, si una forma cuadrática cuaternaria definida positiva, no satisface ninguna de las condiciones de reducción de la Definición 2.3.1, siempre es posible encontrar otra forma cuadrática cuaternaria definida positiva aritméticamente equivalente a ella cuya suma de parámetros sea menor, de tal manera que al aplicar este proceso repetidamente, necesariamente se obtendrá una forma cuadrática reducida.

El proceso termina ya que la suma de los p_{ij} es acotada inferiormente por una constante que depende de los vectores de Voronoi del lattice, y dado que éstos son únicos, el proceso no se puede extender indefinidamente. Note que el algoritmo comienza con un $M = \sum_{0 \leq i < j \leq n} p_{ij}$ que podemos pensar asociado a una superbase de un lattice, y el algoritmo lo va reduciendo M estrictamente (salvo en los reordenamientos de la superbase, que van aparte). En cada paso se cambia de forma cuadrática, equivalentemente se cambia de superbase, por una cuya suma M es menor a la anterior, pero sólo hay un número finito de estas, así que los posibles estados (formas cuadráticas) por los que el algoritmo puede pasar es finito, y en consecuencia el proceso de reducción no se puede extender indefinidamente.

Los pasos para el proceso de reducción pueden ser los siguientes:

- Paso 1.** Permute los índices de manera tal que el menor parámetro sea p_{12} y el menor de los que comparte un índice con él sea p_{13} .
- Paso 2.** Si $p_{12} \geq 0$, entonces la forma cuadrática satisface la condición (i) de la definición de reducción, en tal caso (i) ocurre y el proceso de reducción termina.
- Paso 3.** Si $p_{12} < 0$, y $|p_{12}| \leq p_{13}$ y $\min\{p_{03}, p_{04}, p_{34}\} \geq 0$ entonces la condición (ii) ocurre y el proceso de reducción termina.
- Paso 4.** Si $p_{12} < 0$ y $|p_{12}| > p_{13}$ entonces aplique la transformación (T1) y regrese al **Paso 1**.
- Paso 5.** Si $p_{12} < 0$ y $|p_{12}| \leq p_{13}$ y defina $p_{st} := \min\{p_{03}, p_{04}, p_{34}\} < 0$, entonces aplique una permutación que lleve a p_{st} y al menor parámetro que comparte un índice con él a los parámetros p_{12} y p_{13} respectivamente.
- Paso 6.** Si $|p_{12}| > p_{13}$ aplique la transformación (T1) y regrese al **Paso 1**, en caso contrario, aplique una permutación que fije p_{12} y envíe al menor parámetro con índices en $\{0, 3, 4\}$ a p_{34} .
- Paso 7.** Si $|p_{12} + p_{34}| \leq \min\{p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}\}$, entonces se cumple la condición (iii) y el proceso de reducción termina. En caso contrario, aplique una permutación que fije a p_{12} y p_{34} y que envíe en p_{13} al mínimo entre $\{p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}\}$, entonces aplique la transformación (T2) y regrese al **Paso 1**.

A continuación presentamos una posible implementación del algoritmo.

El programa *DP*, determinar si los parámetros dados representan una forma cuadrática definida positiva o no.

```

DP:=proc(p)
// Recibe un vector de  $\mathbb{R}^{10}$  y determina si la matriz de gram asociada
// representa un lattice, es decir si es definida positiva.

local A, dp, men;}
begin
  dp:=0;
  if nops(p)=10 then
    A:=matrix([[p[1] + p[5] + p[6] + p[7], -p[5], -p[6], -p[7]],
               [-p[5], p[2] + p[5] + p[8] + p[9], -p[8], -p[9]],
               [-p[6], -p[8], p[3] + p[6] + p[8] + p[10], -p[10]],
               [-p[7], -p[9], -p[10], p[4] + p[7] + p[9] + p[10]]]);
    men:=[linalg::det(A[1..i, 1..i]) $ i = 1 . . 4 ];
    if {is(men[i], Type::Positive) $ i=1..4} = {TRUE} then dp:= 1; end_if;
  end_if;
  return(dp);
end_proc:

```

En el procedimiento *aux*, calcula la menor suma entre un parámetro y aquellos con los que comparte un índice.

```

aux:=proc(x,p)
// suma menor entre un parámetro negativo y los parámetros
// que comparten un índice con el.

local T, Tinv, S, IO, N1, b;
begin
  T:=table(1 = {0, 1}, 2 = {0, 2}, 3 = {0, 3}, 4 = {0,4}, 5 = {1, 2},
           6 = {1, 3}, 7 = {1, 4}, 8 = {2, 3}, 9 = {2,4}, 10 = {3, 4});
  S:=table(0 = {1, 2, 3, 4}, 1 = {1, 5, 6, 7}, 2 = {2, 5, 8, 9},
           3 = {3, 6, 8, 10}, 4 = {4, 7, 9, 10});
  IO:=T[x];
  N1:=(S[IO[1]] union S[IO[2]]) minus { x };
  b:=min({ p[i] $ i in N1 } )
  return(p[x] + b);
end_proc;

```

El procedimiento *Sel* prepara los parámetros para que sea más fácil verificar las condiciones de reducción.

```

Sel:=proc(p)
// Recibe los parámetros de Selling de un lattice 4 dimensional referidos a una
// cierta base y devuelve la forma de Selling ordenada, para identificar Tipo o
// para aplicación de las transformaciones  $T1$  o  $T2$ . Es decir, si hay parámetros
// negativos ellos aparecerán al menos en las posiciones  $p_{12}$  y  $p_{34}$ .

```

```

local T, Tinv, N, mm, x, IO, N1, x0, IO, N2, x1, I1, i, j, k, U1, U, p0;
begin
  T:=table(1 = {0, 1}, 2 = {0, 2}, 3 = {0, 3}, 4 = {0, 4}, 5 = {1, 2},
           6 = {1, 3}, 7 = {1, 4}, 8 = {2, 3}, 9 = {2, 4}, 10 = {3, 4});
  Tinv:=table( {0, 1} = 1, {0, 2} = 2, {0, 3} = 3, {0, 4} = 4, {1, 2} = 5,
              {1, 3} = 6, {1, 4} = 7, {2, 3} = 8, {2, 4} = 9, {3, 4} = 10);
  S:= table(0 = {1, 2, 3, 4}, 1 = {1, 5, 6, 7}, 2 = {2, 5, 8, 9},
            3 = {3, 6, 8, 10}, 4 = {4, 7, 9, 10});
  N:=select({$1..10 }, x -> p[x] < 0);
  if nops(N)=0 then return(p) else
    mm:= min(op([aux(i, p) $ i in N]));
    x:=select(N, i -> aux(i, p)=mm)[1];
    IO:=T[x];
    N1:=(S[IO[1]] union S[IO[2]]);
    x0:=select(N1, y1 -> p[y1]=min({p[i] $i in N1 }))[1];
    IO:=T[x0];
    N2:=N1 minus {x0 };
    x1:=select(select(N2, y1->p[y1]+p[x0]=mm), x -> nops(T[x0] minus T[x])=1
              and nops(T[x] minus T[x0])=1 and nops(T[x] intersect T[x0])=1)[1];
    I1:=T[x1]; i:=op(IO intersect I1); j:=op(IO minus I1);
    k:=op(I1 minus IO); U1:={0, 1, 2, 3, 4} minus {i, j, k};
    U:=table(0 = min(U1), 1 = i, 2 = j, 3 = k, 4 = max(U1));
    p0:=[p[Tinv[{min({U[T[11][1]], U[T[11][2]]})},
              max( { U[T[11][1]], U[T[11][2]] } })] $ 11 = 1..10];
    return(p0);
  end_if;
end_proc:

```

La transformación T1.

```

T1:=proc(rho)
// Aplica la transformación T1 a rho y reordena según el programa Sel.

local p;
begin
  p:=Sel(rho);
  while p[5]<0 and abs(p[5])>p[6] do
    p:= Sel([p[2]+p[5],p[3]+p[6],p[5]+p[6]+p[7],p[4]-p[5]-p[6],
            p[8],-p[5],p[5]+p[9],-p[6],p[6]+p[10],p[1]+p[5]+p[6]]);
  end_while:
  return(p);
end_proc

```

La transformación T2.

```

T2:=proc(rho)
// Aplica la transformación T2 a rho y reordena según el programa Sel.

```

```

local p;
begin
  p:=Sel(rho);
  while abs(p[5])<=p[6] and min(p[3],p[4],p[10])<0 and abs(p[5]+p[10])>p[6] do
    h:=min({p[i] $i in {3,4,10}});
    x:=select({3,4,10},y->p[y]=h)[1];
    I2:=T[x];
    N1:={Tinv[{1,I2[1]}],Tinv[{1,I2[2]}],Tinv[{2,I2[1]}],Tinv[{2,I2[1]}]};
    b:=min({p[i] $i in N1});
    x1:=select(N1,y1->p[y1]=b)[1];
    I3:=T[x1];
    i:=op({1,2} minus I3);
    j:=op({1,2} minus {i});
    k:=op(I3 intersect I2);
    l:=op(I2 minus {k});
    m:=op({0..4} minus {i,j,k,l});
    U:= table(0=m,1=i,2=j,3=k, 4=l):
    p=[p[Tinv[{min({U[T[1][1]},U[T[1][2]]},
                max({U[T[1][1]},U[T[1][2]]})}] $l=1..10)],
    p:=Sel([- (p[5]+p[6]), p[5]+p[6]+p[9]+p[10], p[6]+p[3]+p[10],
              p[2]+p[5]-p[10], p[1]+p[5]+p[6], p[6], p[5]+p[7],
              -p[6]-p[10], p[4]+p[10]-p[5], p[8]+p[10]])
  end_while;
  return(p);
end_proc;

```

El algoritmo de reducción de charve :

```

Charve:=proc(rho)
//Recibe los parámetros de Selling y devuelve la forma cuadrática asociada.
//reducida en el sentido de Charve.

```

```

local T,Tinv,h,x,x1,I1,I2,I3,N1,b,i,j,k,l,m,U,contador,phi;
begin
  contador:=0; /* Un contador*/
  if DP(rho)=0 then return("No es un lattice"); end_if;
  p:=rho;
  T:=table(1 = {0,1},2 = {0,2},3 = {0,3}, 4 = {0,4}, 5 = {1,2},
           6 = {1,3}, 7 = {1,4}, 8 = {2,3},9={2,4},10 = {3,4});
  Tinv:=table({0,1}=1,{0,2}=2,{0,3}=3, {0,4}=4, {1,2}=5,
              {1,3}=6, {1,4}=7,{2,3}=8,{2,4}=9,{3,4}=10);
  S:= table(0 = {1,2,3,4},1={1,5,6,7}, 2 = {2,5,8,9},
            3 = {3,6,8,10}, 4 = {4,7,9,10}):
  repeat
    p:=Sel(p);
    /* Identificación de tipo I*/
    if p[5]>=0 then
      /* El lattice es tipo I */

```

```

/* Reordena para que la coordenada mas chica quede en la posicion */
U:= table(0=2,1=1,2=0,3=3,4=4):
p:=[p[Tinv[{min({U[T[1][1]},U[T[1][2]})},
          max({U[T[1][1]},U[T[1][2]})}]] $l=1..10];
contador:=1;
return(p,1);
elif abs(p[5])>p[6] then
  p:=T1(p);
  elif abs(p[5])<=p[6] and min(p[3],p[4],p[10])>=0 then
/* El lattice es tipo II */
/* para ordenar las coodenadas negativas*/
U:= table(0=2,1=1,2=3,3=0,4=4):
p:=[p[Tinv[{min({U[T[1][1]},U[T[1][2]})},
          max({U[T[1][1]},U[T[1][2]})}]] $l=1..10];
contador:=1;
return(p,2);
elif abs(p[5])<=p[6] and min(p[3],p[4],p[10])<0 then
  p:=Sel(p);
  h:=min({p[i] $i in {3,4,10}});
  x:=select({3,4,10},y->p[y]=h)[1];
  I2:=T[x];
  N1:={Tinv[{1,I2[1]}],Tinv[{1,I2[2]}],
       Tinv[{2,I2[1]}],Tinv[{2,I2[1]}]};
  b:=min({p[i] $i in N1});
  x1:=select(N1,y1->p[y1]=b)[1];
  I3:=T[x1];
  i:=op({1,2} minus I3);
  j:=op({1,2} minus {i});
  k:=op(I3 intersect I2);
  l:=op(I2 minus {k});
  m:=op({0..4} minus {i,j,k,l});
  U:= table(0=m,1=i,2=j,3=k, 4=1):
  p:=[p[Tinv[{min({U[T[1][1]},U[T[1][2]})},
          max({U[T[1][1]},U[T[1][2]})}]] $l=1..10];
  if abs(p[5]+p[10])>p[6] then
    p:=Sel([- (p[5]+p[6]), p[5]+p[6]+p[9]+p[10],p[6]+p[3]+p[10],
             p[2]+p[5]-p[10], p[1]+p[5]+p[6],p[6],p[5]+p[7],
             -p[6]-p[10],p[4]+p[10]-p[5],p[8]+p[10]]);
  else
/* El lattice es tipo III */
/* para ordenar las coodenadas negativas */
U:= table(0=2,1=1,2=0,3=3,4=4):
p:=[p[Tinv[{min({U[T[1][1]},U[T[1][2]})},
          max({U[T[1][1]},U[T[1][2]})}]] $l=1..10];
contador:=1;
return(p,3);
end_if;

```

```

    end_if;
until contador=1 end_repeat;
return(p);
end_proc;

```

Ejemplo 2.3.3. Apliquemos el programa a los parámetros $p_{01} = -2$, $p_{02} = 2$, $p_{03} = 2$, $p_{04} = 2$, $p_{12} = 2$, $p_{13} = 2$, $p_{14} = 1$, $p_{23} = 2$, $p_{24} = 2$ y $p_{34} = -2$, que denotamos $\rho = [-2, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 2, -2]$, veamos primero que ρ representa un lattice, equivalentemente una forma cuadrática definida positiva, para lo cual construimos $A(\rho)$ la matriz de gram asociada a ρ , y verificamos si dicha matriz es definida positiva. En este caso

$$A(\rho) = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 & -1 \\ -2 & 8 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Dado que los menores principales de $A(\rho)$ son 3, 20, 20 y 22, la matriz es definida positiva, y por lo tanto ρ representa un lattice.

Para empezar el proceso de reducción ordenamos los parámetros de ρ de tal manera que un parámetro negativo, si lo hay, quede en la posición p_{12} , y el menor de los que comparten un índice con él quede en la posición p_{13} . Esto lo conseguimos aplicando el programa *Sel* a ρ , en nuestro caso obtenemos: $\rho' = Sel(\rho) = [2, 2, 2, 2, -2, 1, 2, 2, -2]$, puesto que $|p'_{12}| = 2 > 1 = p'_{13}$ podemos aplicar la transformación *T1*, dada por: $[\rho'[2] + \rho'[5], \rho'[3] + \rho'[6], \rho'[5] + \rho'[6] + \rho'[7], \rho'[4] - \rho'[5] - \rho'[6], \rho'[8], -\rho'[5], \rho'[5] + \rho'[9], -\rho'[6], \rho'[6] + \rho'[10], \rho'[1] + \rho'[5] + \rho'[6]]$, así llegamos a: $\rho' = [0, 3, 1, 3, 2, 2, 0, -1, -1, 1]$, ahora reordenamos nuevamente con *Sel*, para conseguir: $\rho'' = [3, 1, 3, 0, -1, -1, 2, 1, 2, 0]$. Como ρ'' tiene dos parámetros negativos que comparten índices, aplicamos la transformación *T1* de nuevo, y obtenemos $[0, 2, 0, 2, 1, 1, 1, 1, -1, 1]$, reordenamos con *Sel*, y conseguimos $\rho''' = [2, 2, 0, 0, -1, 1, 1, 1, 1, 1]$, el cual satisface la condición (ii) de la Definición 2.3.1, por lo tanto ρ''' está en forma reducida y el lattice inicial es de Tipo II. Se pueden reordenar los parámetros nuevamente para que el parámetro negativo, -1 , quede en en la primera posición. De ese modo el proceso de reducción de Charve concluye dando como resultado $[-1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 0, 1, 0]$ que es aritméticamente equivalente a ρ .

Capítulo 3

Celdas de Voronoi de lattices en dimensión 4.

En el presente capítulo nos proponemos hacer un etiquetamiento de la celda de Voronoi primitiva para cada uno de los tres Tipos de lattices que produce la clasificación de reducción de Charve. Delone hizo un trabajo excelente y completo al clasificar las celdas [De]. Nosotros volvemos a mirar el problemas con la intención de calcular la constante de cuantización de los lattices 4-dimensionales. Para lo cual nos inspiramos en las ideas de Conway y Valentin.

La técnica que empleamos es la que usan Conway - Sloane en [CS3], que para los lattice 4-dimensionales de Tipo I, es completamente análogo al caso de los lattices en dimensión 3. Sabemos que hay trabajos anteriores en lo que se aborda el problema de clasificación de los lattices, por ejemplo [Vo], [Va], no obstante rehacemos parcialmente las cuentas, pensando todo el tiempo en que ellas nos servirán de base para calcular la constante de cuantización, tema que abordamos en el Capítulo 4.

3.1. Lattices de Tipo I.

Sea L un lattice primitivo 4-dimensional de Tipo I, y sea $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ una superbase obtusa para L , si $0 \leq i \neq j \leq 4$, denotamos por $p_{ij} = -\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$, a los parámetros de Selling asociados a B . Nos proponemos describir $S(\mathbf{0})$, la celda de Voronoi de L centrada en el origen, en términos de los parámetros de Selling. La notación que usamos es una ampliación natural de usada por Conway - Sloane en [CS3].

3.1.1. Vectores de Voronoi y facets.

Del Teorema 1.5.4, sabemos que los vectores de Voronoi de L están en correspondencia biunívoca con los subconjuntos propios de $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, de tal manera que si S es uno de tales subconjuntos, $\mathbf{v}_S = \sum_{i \in S} \mathbf{v}_i$ es un vector de Voronoi de L .

A continuación presentamos la lista completa de dichos vectores.

Vectores de Voronoi para lattices de Tipo I

$$\begin{array}{cccccc}
\mathbf{v}_0 & \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4 \\
\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \\
\mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_4 \\
\mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 \\
\mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2
\end{array} \tag{3.1}$$

Adicionalmente, cada vector \mathbf{v}_S determina una 3-cara o facet de $S(\mathbf{0})$, a la que denotamos por F_S , en lugar de $F_{S|\bar{S}}$, en realidad escribimos F_i en lugar de $F_{\{i\}}$ y F_{ij} en lugar de $F_{\{i,j\}}$.

Es claro que si $\bar{S} = \{0, 1, 2, 3, 4\} \setminus S$, entonces $\mathbf{v}_{\bar{S}} = -\mathbf{v}_S$, lo que implica que las facets $F_{\bar{S}}$ y F_S son congruentes, pero opuestas respecto al origen $\mathbf{0}$, y escribimos $F_{\bar{S}} = -F_S$.

La siguiente lista muestra las 30 facets correspondientes a los vectores de Voronoi de L .

Facets de la celda Voronoi primitiva para lattices de Tipo I

$$\begin{array}{cccccc}
F_0 & F_{\bar{0}} & F_{01} & F_{\bar{01}} & F_{13} & F_{\bar{13}} \\
F_1 & F_{\bar{1}} & F_{02} & F_{\bar{02}} & F_{14} & F_{\bar{14}} \\
F_2 & F_{\bar{2}} & F_{03} & F_{\bar{03}} & F_{23} & F_{\bar{23}} \\
F_3 & F_{\bar{3}} & F_{04} & F_{\bar{04}} & F_{24} & F_{\bar{24}} \\
F_4 & F_{\bar{4}} & F_{12} & F_{\bar{12}} & F_{34} & F_{\bar{34}}
\end{array} \tag{3.2}$$

Definición 3.1.1. Sea L un lattice 4-dimensional, decimos que dos facets F y F' de la celda de voronoi $S(\mathbf{0})$ son *vecinas*, si su intersección es una 2 cara. Si este es el caso a los vectores de Voronoi que las dirigen los llamaremos *vectores vecinos*.

Es un resultado conocido de Voronoi [Vo], que dos vectores de Voronoi son vecinos si su resta es un vector de Voronoi.

Lema 3.1.2. Sea L un lattice 4-dimensional de Tipo I, y $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ una superbase obtusa para L , sean F_S y F_T dos facets de la celda de Voronoi $S(\mathbf{0})$ de un lattice L , entonces

$$F_S, F_T \text{ son vecinas si y solo si } S \subset T \text{ o } T \subset S. \tag{3.3}$$

Demostración. Se deduce inmediatamente de la Definición 3.1.1, toda vez que una facet tiene asociado un vector de Voronoi, y éste a su vez un subconjunto propio de $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. \square

Ahora bien, si S es un subconjunto propio de $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, denotamos por $\mathcal{F}(S)$ al conjunto de las caras vecinas de F_S tenemos:

- Si $S = \{i\}$, el conjunto de caras vecinas de F_i es:

$$\mathcal{F}(\{i\}) = \{F_S : i \in S\}. \tag{3.4}$$

Por ejemplo, el conjunto de cara vecinas de la facet dirigida por el vector \mathbf{v}_0 , es:

$$\mathcal{F}(\{0\}) = \{F_{01}, F_{02}, F_{03}, F_{04}, F_{012}, F_{013}, F_{014}, F_{024}, F_{034}, F_{034}, F_{0234}, F_{0134}, F_{0124}, F_{0123}\}$$

- Si $S = \{i, j\}$, entonces

$$\mathcal{F}(\{i, j\}) = \{F_i, F_j, F_{ijk}, F_{ijl}, F_{ijm}, F_{ijkl}, F_{ijkm}, F_{ijlm}\}. \quad (3.5)$$

- Si $S = \{i, j, k\}$, y $\{l, m\} = S \setminus \{i, j, k\}$, dado que $F_{\bar{S}} = -F_S$, tenemos que

$$\mathcal{F}(\{i, j, k\}) = -\mathcal{F}(\{l, m\})$$

y en consecuencia

$$\mathcal{F}(\{i, j, k\}) = \{F_i, F_j, F_k, F_{ij}, F_{ik}, F_{jk}, F_{ijkl}, F_{ijkm}\}. \quad (3.6)$$

- Finalmente $\mathcal{F}(\{j, k, l, m\}) = -\mathcal{F}(\{i\})$, es decir $\mathcal{F}(\{j, k, l, m\})$ tiene como facets vecinas a las opuesta de las facets vecinas de F_i .

La siguiente tabla muestra el número de 2-caras en cada facet, una por cada facet vecina.

Cantidad de 2-caras	Facet
14	F_i para $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$
8	F_{ij} para $\{i, j\} \subset \{0, 1, 2, 3, 4\}$
8	F_{ijk} para $\{i, j, k\} \subset \{0, 1, 2, 3, 4\}$

lo que resumimos escribiendo que la celda de Voronoi primitiva para lattices de Tipo I es el Permutaedro π_4 , y tiene $10P_{14} + 20P_8$. 10 politopos de 14 caras (π_3) y 20 politopos P_8 (prismas hexagonales.)

Veamos ahora cuántos vértices tiene cada una de las facets de la celda. En primer lugar, dado que $S(\mathbf{0})$ es una celda de Voronoi primitiva, cada vértice es la intersección de cuatro facets. De tal forma que si \mathbf{p} es un vértice de $S(\mathbf{0})$ y si $F_{S_1}, F_{S_2}, F_{S_3}$ y F_{S_4} son las facets que lo determinan, entonces ellas son vecinas dos a dos, y por el Lema 3.1.2, podemos re-etiquetar los conjuntos S_1, S_2, S_3, S_4 de tal manera que

$$S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset S_4$$

adicionalmente, dado que ninguno los conjuntos puede ser vacío, y tampoco pueden haber dos de ellos iguales, la única posibilidad es que

$$S_1 = \{i\}, S_2 = \{i, j\}, S_3 = \{i, j, k\} \text{ y } S_4 = \{i, j, k, l\}$$

con $\{i, j, k, l\} \subset \{0, 1, 2, 3, 4\}$ con lo cual $\mathbf{p} \in F_i \cap F_{ij} \cap F_{ijk} \cap F_{ijkl}$.

De esta manera, si $ijklm$ es un reordenamiento de 01234 , denotaremos por \mathbf{p}_{ijklm} al único punto de la intersección $F_i \cap F_{ij} \cap F_{ijk} \cap F_{ijkl}$.

Así las cosas, hay una correspondencia biunívoca entre los vértices de la celda de Voronoi de un lattice Tipo I y el conjunto de permutaciones de los elementos de $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, de tal suerte que la celda tiene $5! = 120$ vértices.

Consideremos ahora F_i , la facet de $S(\mathbf{0})$ determinada por \mathbf{v}_i . Sabemos que F_i tiene 14 vecinas, y como cada vecina determina una cara dos dimensional, F_i tiene 14 de dichas caras. Además, la

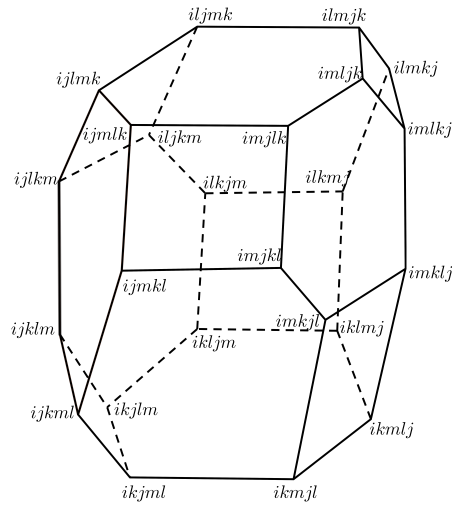
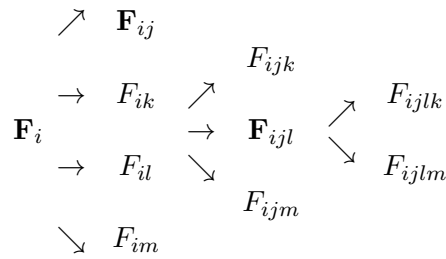


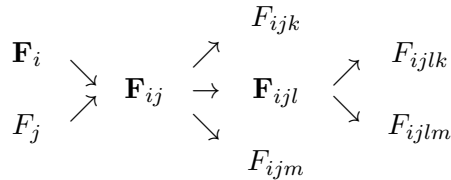
Figura 3.1: Facet dirigida por el vector de Voronoi \mathbf{v}_i

intersección de 4 facets de $\mathcal{F}(\{i\})$ que sean vecinas dos a dos, determinan un único vértice. Lo que en este caso específico podemos representar con el siguiente diagrama:



De manera que las facets del tipo F_i tienen un total de $4 \times 3 \times 2 = 24$ vértices. Mirando F_i con más cuidado se logra concluir que estas caras son octaedros truncados o permutaedros 3-dimensionales, a los que se suele denotar por π_3 . En la Figura 3.1.1 presentamos el etiquetamiento correspondiente a F_i .

Por otro lado, las facets del tipo F_{ij} , tienen 8 (vecinas) caras 2-dimensionales. Para obtener los vértices podemos considerar el siguiente diagrama



De esta manera, el total de vértices para este tipo de facets es: $2 \times 3 \times 2 \times 1 = 12$.

Notemos que las facets del tipo F_{ij} comparten sus caras 2-dimensionales con F_i , que como hemos dicho, es combinatoriamente equivalente al permutaedro π_3 , de modo que sus caras 2-dimensionales son hexágonos o cuadriláteros, adicionalmente, si k es el número de cuadriláteros en F_{ij} , entonces el cantidad de vértices es $4k/2 = 2k$, pero sabemos que las facets del tipo F_{ij} tienen 12 vértices, con lo cual el número de cuadriláteros en ellas es $k = 6$, las dos caras restantes son hexagonales, de manera

que las facets del tipo F_{ij} son prismas hexagonales. En la Figura 3.2 mostramos un prototipo de ellas.

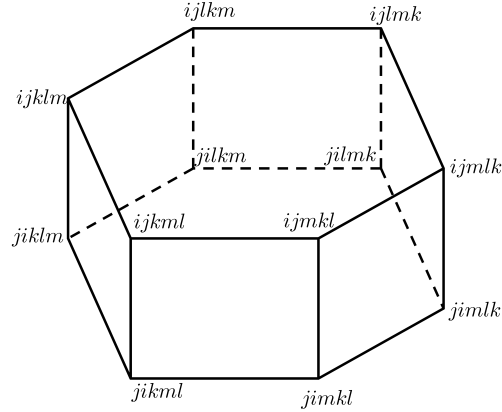


Figura 3.2: Facet dirigida por el vector de Voronoi $\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j$

En resumen, $S(\mathbf{0})$ tiene 120 vértices, sus facets del tipo F_i y las opuestas de ellas son octaedros truncados o permutaedros, y las del tipo F_{ij} , y sus opuestas, son prismas hexagonales, lo que hace a $S(\mathbf{0})$ combinatoriamente equivalente al permutaedro 4-dimensional π_4 .

3.1.2. y-coordenadas de los vértices de $S(\mathbf{0})$.

Si F es la facet dirigida por el vector de Voronoi \mathbf{v} , los puntos $\mathbf{t} \in F$ son de la forma $\mathbf{t} = \frac{1}{2}\mathbf{v} + h$, donde $h \perp \mathbf{v}$, así que

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}N(\mathbf{v}). \quad (3.7)$$

Ésta relación nos permite calcular las y-coordenadas de cualquier vértice de la celda de Voronoi. Para ello, notemos que si $ijklm$ es un reordenamiento de los índices 01234 , entonces:

- Si $\mathbf{v} = \mathbf{v}_i$, de la igualdad (3.7), se sigue que los puntos $\mathbf{t} \in F_i$ son de la forma $\mathbf{t} = \frac{1}{2}\mathbf{v}_i + h$, con $h \perp \mathbf{v}_i$, y por lo tanto $y_i = \mathbf{t} \cdot \mathbf{v}_i = \frac{1}{2}N(\mathbf{v}_i)$, es decir, para \mathbf{t} en $S(\mathbf{0})$

$$\mathbf{t} \in F_i \iff y_i = \frac{1}{2}(p_{ij} + p_{ik} + p_{il} + p_{im})$$

- Si $\mathbf{v} = \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j$, los puntos $\mathbf{t} \in F_{ij}$, son de la forma $\mathbf{t} = \frac{\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j}{2} + h$, con $h \perp (\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j)$ y así:

$$y_i + y_j = \mathbf{t} \cdot (\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j) = \frac{1}{2}N(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j)$$

por lo tanto:

$$\mathbf{t} \in F_{ij} \iff y_i + y_j = \frac{1}{2}N(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j).$$

- Si $\mathbf{v} = \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_k$, la facet F_{ijk} tiene puntos \mathbf{t} de $S(\mathbf{0})$ para los cuales $\mathbf{t} = \frac{\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_k}{2} + h$ con $h \perp (\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_k)$, así que

$$\mathbf{t} \in F_{ijk} \iff y_i + y_j + y_k = \frac{1}{2}N(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_k).$$

- Finalmente, a la facet F_{ijkl} pertenecen los puntos $\mathbf{t} = \frac{-\mathbf{v}_m}{2} + h$, con $h \perp \mathbf{v}_m$, así que:

$$y_i + y_j + y_k + y_l = -y_m = \frac{1}{2}N(\mathbf{v}_m),$$

con lo cual

$$\mathbf{t} \in F_{ijkl} \iff y_m = -\frac{1}{2}N(\mathbf{v}_m).$$

Como vimos un poco más arriba, la celda de Voronoi de un lattice Tipo I en dimensión 4, es combinatoriamente equivalente al permutaedro π_4 , y por lo tanto sus vértices están en correspondencia uno a uno con los elementos de \mathbb{P}_5 , el conjunto de permutaciones de $\{0, 1, 2, 3, 4\}$; de tal forma que si consideremos $ijklm \in \mathbb{P}_5$ y denotamos por \mathbf{p}_{ijklm} al único punto de $F_i \cap F_j \cap F_{ijk} \cap F_{ijkl}$, de las relaciones anteriores tenemos que

$$\begin{aligned} y_i &= \frac{1}{2}N(\mathbf{v}_i) \\ y_j &= \frac{1}{2}[N(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j) - N(\mathbf{v}_i)] \\ y_k &= \frac{1}{2}[N(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_k) - N(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j)] \\ y_l &= \frac{1}{2}[N(\mathbf{v}_m) - N(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_k)] \\ y_m &= -\frac{1}{2}N(\mathbf{v}_m). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Si $p_{ij} = -\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$ para $0 \leq i < j \leq 4$, del Corolario 1.5.5 llegamos a que las \mathbf{y} -coordenadas son

$$\begin{aligned} y_i &= \frac{1}{2}(p_{ij} + p_{ik} + p_{il} + p_{im}) \\ y_j &= \frac{1}{2}(-p_{ij} + p_{jk} + p_{jl} + p_{jm}) \\ y_k &= \frac{1}{2}(-p_{ik} - p_{jk} + p_{kl} + p_{km}) \\ y_l &= \frac{1}{2}(-p_{il} - p_{jl} - p_{kl} + p_{lm}) \\ y_m &= \frac{1}{2}(-p_{im} - p_{jm} - p_{km} - p_{lm}) \end{aligned} \tag{3.9}$$

En el apéndice A.1, se encuentra la lista completa de los vértices para un lattice primitivo de Tipo I, en términos de los vectores de una superbases obtusa del lattice.

Notemos que para obtener las \mathbf{y} -coordenadas de un vértices, es suficiente aplicar las ecuaciones dadas en (3.9). Por ejemplo, a la permutación 34012, le corresponde el vértice \mathbf{p}_{34012} que es el único

punto de la intersección $F_3 \cap F_{34} \cap F_{340} \cap F_{3401}$, de acuerdo con (3.9), \mathbf{p}_{34012} tiene \mathbf{y} -coordenadas:

$$\begin{array}{ll} y_3 = \frac{1}{2}(p_{34} + p_{03} + p_{13} + p_{23}) & y_0 = \frac{1}{2}(p_{01} + p_{02} - p_{03} - p_{04}) \\ y_4 = \frac{1}{2}(-p_{34} + p_{04} + p_{14} + p_{24}) & y_1 = \frac{1}{2}(-p_{01} + p_{12} - p_{13} - p_{14}) \\ y_0 = \frac{1}{2}(-p_{03} - p_{04} + p_{01} + p_{02}) & \text{reordenando } y_2 = \frac{1}{2}(-p_{02} - p_{12} - p_{23} - p_{24}) \\ y_1 = \frac{1}{2}(-p_{13} - p_{14} - p_{01} + p_{12}) & y_3 = \frac{1}{2}(p_{03} + p_{13} + p_{23} + p_{34}) \\ y_2 = \frac{1}{2}(-p_{23} - p_{24} - p_{02} - p_{12}) & y_4 = \frac{1}{2}(p_{04} + p_{14} + p_{24} - p_{34}) \end{array}$$

Al considerar los 24 vértices en las caras de tipo F_i , notamos que ellos tienen etiquetas del tipo $i\sigma_4$ o $\sigma_4 i$ donde σ_4 es un reordenamiento de $jklm$. De manera similar, en las caras F_{ij} se encuentran los 12 vértices con etiquetas $ij\sigma_3$ o $\sigma_3 ij$, donde σ_3 es un reordenamiento de klm .

3.1.3. Aristas de $S(\mathbf{0})$.

Es claro que dos vértices en la celda $S(\mathbf{0})$ son adyacentes si ellos comparten tres de las cuatro facets que los determinan.

Con la notación introducida en la sección anterior, consideremos el vértice \mathbf{p}_{ijklm} , el cual pertenece a las caras F_i, F_{ij}, F_{ijk} y F_{ijkl} , si tomamos tres de estas caras, digamos: F_i, F_{ij} y F_{ijk} , la única facet de $S(\mathbf{0})$ distinta de F_{ijkl} , que es vecina a ellas tres es F_{ijkm} , así que la intersección $F_i \cap F_{ij} \cap F_{ijk} \cap F_{ijkm}$ determina un nuevo vértice, a saber: \mathbf{p}_{ijkml} , el cual es adyacente a \mathbf{p}_{ijklm} .

Notemos que esto lo podemos hacer de cuatro formas distintas, una por cada elección de tres de las facets que determinan a \mathbf{p}_{ijklm} , en consecuencia, cada vértice $S(\mathbf{0})$ tiene exactamente 4 vértices adyacentes.

Por ejemplo los cuatro vértices adyacentes al vértice \mathbf{p}_{ijklm} son: $\mathbf{p}_{jiklm}, \mathbf{p}_{ikjlm}, \mathbf{p}_{ijlkm}$ y \mathbf{p}_{ijkml} . cada uno de los cuales determina, junto con \mathbf{p}_{ijklm} , una arista de $S(\mathbf{0})$. Si denotamos por e_{ij} a la

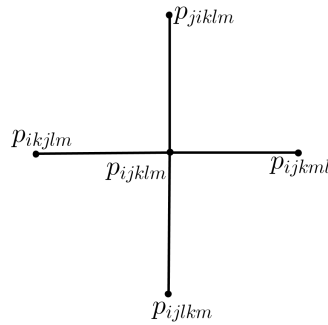


Figura 3.3: Vértices y aristas adyacentes.

arista que tiene por vértices a \mathbf{p}_{ijklm} y \mathbf{p}_{jiklm} , encontramos que sus \mathbf{y} -coordenadas son:

$$y_i = -p_{ij}, \quad y_j = p_{ij}, \quad y_k = 0, \quad y_l = 0, \quad y_m = 0.$$

De este modo, la celda de Voronoi tiene 10 familias de aristas, una por cada elección de dos índices.

En la tabla mostramos las \mathbf{y} -coordenadas de una arista típica para cada familia.

Arista	Vértices	\mathbf{y} -coordenadas $(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4)$
e_{01}	$\mathbf{P}_{01234}, \mathbf{P}_{10234}$	$(-p_{01}, p_{01}, 0, 0, 0)$
e_{02}	$\mathbf{P}_{02134}, \mathbf{P}_{20134}$	$(-p_{02}, 0, p_{02}, 0, 0)$
e_{03}	$\mathbf{P}_{03124}, \mathbf{P}_{30124}$	$(-p_{03}, 0, 0, p_{03}, 0)$
e_{04}	$\mathbf{P}_{04123}, \mathbf{P}_{40123}$	$(-p_{04}, 0, 0, 0, p_{04})$
e_{12}	$\mathbf{P}_{12034}, \mathbf{P}_{21034}$	$(0, -p_{12}, p_{12}, 0, 0)$
e_{13}	$\mathbf{P}_{13024}, \mathbf{P}_{31024}$	$(0, -p_{13}, 0, p_{13}, 0)$
e_{14}	$\mathbf{P}_{14023}, \mathbf{P}_{41023}$	$(0, -p_{14}, 0, 0, p_{14})$
e_{23}	$\mathbf{P}_{23014}, \mathbf{P}_{32014}$	$(0, 0, -p_{23}, p_{23}, 0)$
e_{24}	$\mathbf{P}_{24013}, \mathbf{P}_{42013}$	$(0, 0, -p_{24}, 0, p_{24})$
e_{34}	$\mathbf{P}_{34012}, \mathbf{P}_{43012}$	$(0, 0, 0, -p_{34}, p_{34})$

Finalmente, dado que en cada vértice inciden 4 aristas, y que cada arista une dos vértices, el número total de aristas en la celda es $\frac{120 \times 4}{2} = 240$.

Si denotamos por $\Delta = \det(L)$, el determinante de L expreso en términos de los parámetros de Selling del lattice, tal como lo hicimos en (1.31), y por Δ_{ij} denotamos a la derivada formal de Δ respecto a p_{ij} , es posible expresar la longitud de una arista de $S(\mathbf{0})$ en términos de estas cantidades.

Lema 3.1.3 (Longitud de las aristas en Tipo I). *Si L es un lattice de Tipo I con parámetros de Selling p_{ij} para $0 \leq i < j \leq 4$, entonces la longitud de la arista e_{ij} con vértices en \mathbf{P}_{ijklm} y \mathbf{P}_{jiklm} es*

$$|e_{ij}| = p_{ij} \sqrt{\frac{\Delta_{ij}}{\Delta}} \quad (3.10)$$

Demostración. Si \mathbf{t} tiene \mathbf{y} -coordenadas $(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4)$, de acuerdo con la Proposición (1.4.7), su norma viene dada por

$$N(\mathbf{t}) = \frac{1}{\Delta} \left(\sum_{i=1}^4 \Delta_{0i} y_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} (\Delta_{0i} + \Delta_{0j} - \Delta_{ij}) y_i y_j \right). \quad (3.11)$$

Así las cosas, dado que las \mathbf{y} -coordenadas de e_{ij} son $y_i = -p_{ij}$, $y_j = p_{ij}$, $y_k = y_l = y_m = 0$, al reemplazar en (3.11), obtenemos:

$$N(e_{ij}) = \frac{p_{ij}^2 \Delta_{ij}}{\Delta}, \quad (3.12)$$

lo que concluye la prueba. \square

3.2. Lattices Tipo II.

Consideremos ahora un lattice primitivo L de Tipo II, en el espacio euclídeo 4-dimensional, es decir L tiene una superbase $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ cuyos parámetros de Selling asociados satisfacen la condición (ii) de la Definición 2.3.1, o lo que es lo mismo, hay un único parámetro de Selling asociado a la superbase, digamos p_{01} , que es negativo, los demás son mayores o iguales a cero, y se cumple que $|p_{01}| \leq p_{ij}$, siempre que uno de los índices i , o j sea 0 o 1. En tal caso decimos que B es una *superbase casi obtusa*.

3.2.1. Vectores de Voronoi y facets.

Supongamos que $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ es una superbase casi obtusa para L , sin pérdida de generalidad podemos asumir que el parámetro negativo es $p_{01} = -\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1$. De acuerdo a los planteamientos de Conway en [Co], a cada subconjunto propio S de $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, se le puede asignar un vector de Voronoi de L , para lo cual distinguimos tres casos:

$$\mathbf{v}_S = \begin{cases} \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_1 & \text{si } S = \{0, 1\} \\ -\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 & \text{si } S = \{2, 3, 4\} \\ \sum_{i \in S} \mathbf{v}_i & \text{cualquier otro caso} \end{cases} \quad (3.13)$$

A continuación listamos los $30 = 2^5 - 2$ vectores de Voronoi para lattices de Tipo II, en términos de una superbase casi obtusa para el lattice.

Vectores de Voronoi para lattices de Tipo II

$$\begin{array}{cccccc} \mathbf{v}_0 & \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_1 & 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4 \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_4 \\ \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \end{array} \quad (3.14)$$

Dado que un vector de Voronoi determina una facet de $S(\mathbf{0})$, la celda de Voronoi del lattice centrada en el origen, usaremos la misma notación que en los lattices de Tipo I, en consecuencia, las facets asociadas a cada uno de los vectores de Voronoi son:

Facets de la celda Voronoi primitiva para lattices de Tipo II

$$\begin{array}{cccccc} F_0 & F_0^- & F_{0\bar{1}} & F_{0\bar{1}}^- & F_{13} & F_{\bar{1}\bar{3}} \\ F_1 & F_1^- & F_{02} & F_{0\bar{2}}^- & F_{14} & F_{\bar{1}\bar{4}} \\ F_2 & F_2^- & F_{03} & F_{0\bar{3}}^- & F_{23} & F_{\bar{2}\bar{3}} \\ F_3 & F_3^- & F_{04} & F_{0\bar{4}}^- & F_{24} & F_{\bar{2}\bar{4}} \\ F_4 & F_4^- & F_{12} & F_{\bar{1}\bar{2}}^- & F_{34} & F_{\bar{3}\bar{4}} \end{array} \quad (3.15)$$

Donde $F_{0\bar{1}}$ es la facet correspondiente al vector $\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_1$ y F_{ij}^- la que corresponde al vector $\mathbf{v}_k + \mathbf{v}_l + \mathbf{v}_m$, con i y j distintos de 0 o 1, y $\{i, j, k, l, m\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

De la Definición 3.1.1, los vectores vecinos a cada vector de Voronoi son:

- Los vectores vecinos de \mathbf{v}_i , con $i \in \{0, 1\}$ y $\{i, j\} = \{0, 1\}$ son:
 $\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4, 2\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4.$
- Los vectores vecinos de \mathbf{v}_i con $i \in \{2, 3, 4\}$ y $\{j, k, l, m\} = \{0, 1, 2, 3, 4\} \setminus \{i\}$ son:
 $\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_l, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_l, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_k + \mathbf{v}_l, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_k + \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_k + \mathbf{v}_l, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_k + \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_l + \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_k + \mathbf{v}_l + \mathbf{v}_m$
donde $\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 \notin \{\mathbf{v}_j + \mathbf{v}_l, \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_k + \mathbf{v}_l, \mathbf{v}_k + \mathbf{v}_m\}$.
- Los vectores vecinos de $\mathbf{v}_{0\bar{1}} = \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_1$, al que también podemos escribir como $\mathbf{v}_{0\bar{1}} = 2\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$, son:
 $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4.$

- Los vectores vecinos de \mathbf{v}_{ij} con $i \in \{0, 1\}$ y $j \in \{2, 3, 4\}$ son:
 $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_l, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_m, 2\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_l + \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_k + \mathbf{v}_l,$
 $\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_k + \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_l + \mathbf{v}_m.$
- Los vecinos de \mathbf{v}_{ij} con $\{i, j\} \subset \{2, 3, 4\}$ son:
 $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_l, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_k + \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_l + \mathbf{v}_m.$

Para completar la lista basta tener presente que $\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 = 0$ y que $S(\mathbf{0})$ tiene simetría central.

La identificación de los vectores vecinos a un vector de Voronoi dado equivale a determinar las facets vecinas a la facet que le corresponde. Podemos proceder de manera similar a como se hizo en el caso de los lattices de Tipo I.

Si S es un subconjunto propio de $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ y escribimos $\mathcal{F}(S)$ para denotar el conjunto de caras vecinas de F_S , tenemos:

- $\mathcal{F}(\{i\}) = \{F_j, F_{i2}, F_{i3}, F_{i4}, F_{0i2}, F_{0i3}, F_{0i4}, F_{i23}, F_{i24}, F_{i34}, F_{i\bar{j}}, F_{\bar{4}}, F_{\bar{3}}, F_{\bar{2}}\}$, donde $\{i, j\} = \{0, 1\}$.
- $\mathcal{F}(\{i\}) = \{F_{ij}, F_{ik}, F_{il}, F_{im}, F_{ijl}, F_{ijm}, F_{ikl}, F_{ikm}, F_{\bar{m}}, F_{\bar{l}}, F_{\bar{k}}, F_{\bar{j}}\}$, donde $i \in \{2, 3, 4\}$, $\overline{\{i\}} = \{j, k, l, m\}$, y $\{0, 1\} \notin \{\{j, l\}, \{j, m\}, \{k, l\}, \{k, m\}\}$.
- $\mathcal{F}(\{0, 1\}) = \{F_0, F_{02}, F_{03}, F_{04}, F_{023}, F_{024}, F_{034}, F_{\bar{1}}\}$.
- $\mathcal{F}(\{i, j\}) = \{F_i, F_j, F_{jk}, F_{ijk}, F_{ijl}, F_{ijm}, F_{i\bar{j}}, F_{\bar{m}}, F_{\bar{l}}, F_{\bar{k}}\}$, donde $i \in \{0, 1\}$ y $j \in \{2, 3, 4\}$.
- $\mathcal{F}(\{i, j\}) = \{F_i, F_j, F_{ijk}, F_{ijl}, F_{\bar{l}}, F_{\bar{k}}\}$, donde $\{i, j\} \subset \{2, 3, 4\}$.

La siguiente tabla muestra el número de caras 2-dimensionales en cada facet.

Cantidad de 2-caras	Facet
14	F_i para $i \in \{0, 1\}$
12	F_i para $i \notin \{0, 1\}$
10	F_{ij} para $i \in \{0, 1\}$ y $j \in \{2, 3, 4\}$
8	$F_{\bar{0}\bar{1}}$
6	F_{ij} para $\{i, j\} \subset \{2, 3, 4\}$

3.2.2. Descripción de las facets.

A continuación presentamos una serie de tablas que nos permitirán deducir la forma de cada una de las 30 facets de que conforman la celda de Voronoi $S(\mathbf{0})$ para un lattice genérico de Tipo II.

- Como vimos en el numeral (3.2.1), la facet F_i para $i \in \{0, 1\}$ tiene 14 caras 2-dimensionales las cuales están determinadas por las intersecciones de F_i con sus facets vecinas.

La tabla (3.16) muestra el número de vértices en cada una de esas 14 caras 2-dimensionales.

$F \cap F_i$	N de vértices
$F_0 \cap F_1$	6
$F_{i2} \cap F_i$	6
$F_{i3} \cap F_i$	6
$F_{i4} \cap F_i$	6
$F_{012} \cap F_i$	4
$F_{013} \cap F_i$	4
$F_{014} \cap F_i$	4
$F_{i23} \cap F_i$	4
$F_{i24} \cap F_i$	4
$F_{i34} \cap F_i$	4
$F_{i\bar{j}} \cap F_i$	6
$F_{\bar{4}} \cap F_i$	6
$F_{\bar{3}} \cap F_i$	6
$F_{\bar{2}} \cap F_i$	6

(3.16)

En resumen, las facets F_0 y F_1 tienen 8 caras hexagonales, 6 cuadriláteros y un total de 24 vértices, con lo cual ellas son combinatoriamente equivalente al permutaedro π_3 . Ver Figura 3.4

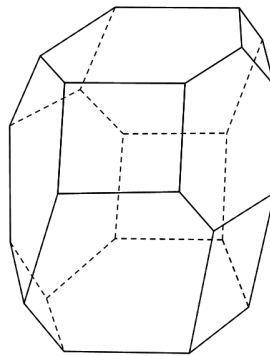


Figura 3.4: Facet F_0 y F_i .

- La cara F_i con $i \in \{2, 3, 4\}$ y $\{i, j, k\} = \{2, 3, 4\}$ tiene 12 caras dos dimensionales, la tabla

muestra el número de vértices en cada una de ellas.

$F \cap F_i$	N de vértices
$F_{ij} \cap F_i$	4
$F_{ik} \cap F_i$	4
$F_{\bar{j}} \cap F_i$	4
$F_{\bar{k}} \cap F_i$	4
$F_{0ij} \cap F_i$	5
$F_{0ik} \cap F_i$	5
$F_{1ij} \cap F_i$	5
$F_{1ik} \cap F_i$	5
$F_{0i} \cap F_i$	6
$F_{1i} \cap F_i$	6
$F_{\bar{0}} \cap F_i$	6
$F_{\bar{1}} \cap F_i$	6

(3.17)

Por lo tanto éste tipo de facet tiene 4 caras hexagonales, 4 caras pentagonales y 4 cuadriláteros y un total de 20 vértices. Ver Figura 3.5

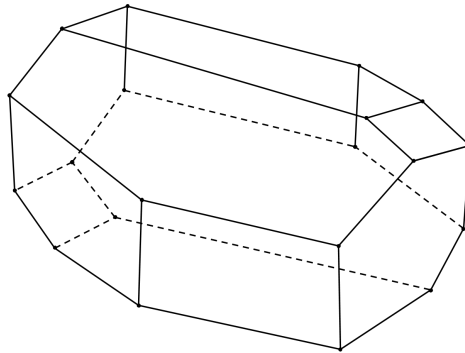


Figura 3.5: Facet F_i con $i \in \{2, 3, 4\}$.

- La 3-cara $F_{0\bar{1}}$ tiene 8 caras dos dimensionales, la tabla (3.18) muestra el número de vértices en cada una de ellas.

$F \cap F_{0\bar{1}}$	N de vértices
$F_0 \cap F_{0\bar{1}}$	6
$F_{02} \cap F_{0\bar{1}}$	4
$F_{03} \cap F_{0\bar{1}}$	4
$F_{04} \cap F_{0\bar{1}}$	4
$F_{023} \cap F_{0\bar{1}}$	4
$F_{024} \cap F_{0\bar{1}}$	4
$F_{034} \cap F_{0\bar{1}}$	4
$F_{\bar{1}} \cap F_{0\bar{1}}$	6

(3.18)

Esta facet tienen 2 hexágonos y 6 cuadriláteros y 12 vértices, con lo cual es combinatoriamente equivalente a un prisma hexagonal. Ver Figura 3.6

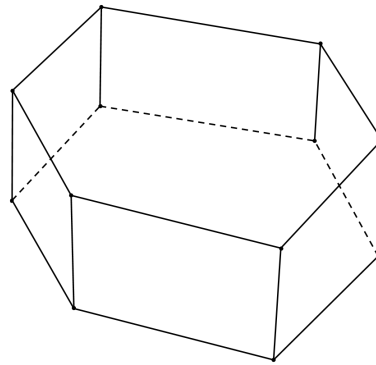


Figura 3.6: Facet $F_{0\bar{1}}$ con $i \in \{2, 3, 4\}$.

- La facet F_{ij} con $\{i, k\} = \{0, 1\}$ y $\{j, l, m\} = \{2, 3, 4\}$ tiene 10 caras dos dimensionales, la tabla (3.19) muestra el número de vértices en cada una de ellas.

$F \cap F_{ij}$	N de vértices
$F_i \cap F_{ij}$	6
$F_j \cap F_{ij}$	6
$F_{ijl} \cap F_{ij}$	5
$F_{ijm} \cap F_{ij}$	5
$F_{\bar{m}} \cap F_{ij}$	5
$F_{\bar{l}} \cap F_{ij}$	5
$F_{jk} \cap F_{ij}$	4
$F_{ijk} \cap F_{ij}$	4
$F_{\bar{k}} \cap F_{ij}$	4
$F_{i\bar{k}} \cap F_{ij}$	4

(3.19)

Estas facets tienen 2 hexágonos, 4 pentágonos y 4 cuadriláteros y un total de 16 vértices. Ver Figura 3.7

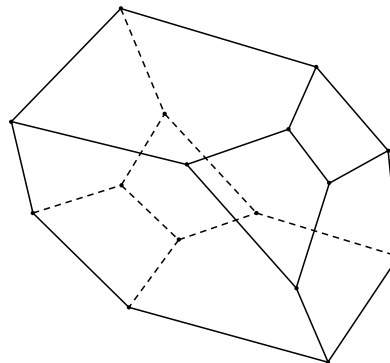


Figura 3.7: Facet F_{ij} con $i \in \{0, 1\}$ $j \in \{2, 3, 4\}$.

- Las facets F_{ij} con $\{i, j\} \subset \{2, 3, 4\}$ tienen 6 caras 2-dimensionales. La tabla muestra el número

de vértices en cada una de ellas.

$F \cap F_{ij}$	N de vértices
$F_i \cap F_{ij}$	4
$F_j \cap F_{ij}$	4
$F_{0ij} \cap F_{ij}$	4
$F_{1ij} \cap F_{ij}$	4
$F_{\bar{0}} \cap F_{ij}$	4
$F_{\bar{1}} \cap F_{ij}$	4

(3.20)

Estas facets tienen 6 cuadriláteros y 8 vértices, con lo cual es combinatoriamente equivalente al cubo. Ver Figura 3.8

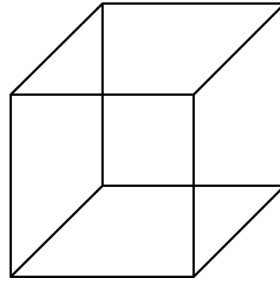


Figura 3.8: Facet F_{ij} con $\{i, j\} \subset \{2, 3, 4\}$.

En resumen, la celda de Voronoi primitiva de un lattice de Tipo II en dimensión 4, esta formada por $4P_{14} + 6P_{12} + 12P_{10} + 2P_8 + 6P_6$, el coeficiente corresponde a la cantidad de politopos 3-dimensionales del tipo P_i , donde el subíndice cuenta el número de caras 2-dimensionales de cada politopo.

3.2.3. y-coordenadas de los vértices.

Dado que la celda de Voronoi considerada es primitiva, cada vértice \mathbf{p} es la intersección de 4 facets de $S(\mathbf{0})$. Sean $F_{S_1}, F_{S_2}, F_{S_3}$ y F_{S_4} las facets que determinan a p , ellas son vecinas dos a dos, y por lo tanto, entre los conjuntos S_1, S_2, S_3 y S_4 puede ocurrir uno de los siguientes casos:

1. Hay un etiquetamiento en el cual $S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset S_4$ y

$$S_1 = \{i\}, S_2 = \{i, j\}, S_3 = \{i, j, k\}, S_4 = \{i, j, k, l\}$$

con $\{i, j, k, l\} \subset \{0, 1, 2, 3, 4\}$, esto ocurre en 60 de los 120 vértices, para ellos conservamos la

notación usada en el caso de los Tipo I. Estos vértices son:

P02134 P02143 P02314 P02413 P04123 P04132
P04213 P04312 P03124 P03142 P03214 P03412
P13024 P13042 P13204 P13402 P12034 P12043
P12304 P12403 P14023 P14032 P14203 P14302
P20314 P20341 P20413 P20431 P23041 P23140
P24031 P24130 P21304 P21340 P21403 P21430
P31204 P31240 P31420 P31402 P30214 P30241
P30412 P30421 P32140 P32041 P34120 P34021
P40213 P40231 P40312 P40321 P41203 P41230
P41302 P41320 P42031 P42130 P43021 P43120

2. Hay un etiquetamiento de los conjuntos S_1, S_2, S_3 y S_4 , en el cual $S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset S_4$ y $S_1 = \{i\}, S_2 = \{i, j\}, S_3 = \{i, j, k\}$ y S_4 es el multiconjunto $\{\{i, i, j, k, l\}\}$ con $i \in \{0, 1\}$ y $\{j, k, l\} = \{2, 3, 4\}$ ésta situación ocurre en 12 vértices, a los que etiquetamos en la forma $\mathbf{P}_{ijk[l]i}$, ellos son:

P023(04) P024(03) P034(02) P032(04) P042(03) P043(02)
P123(14) P124(13) P134(12) P132(14) P142(13) P143(12)

3. Hay un etiquetamiento de los conjuntos S_1, S_2, S_3 y S_4 , en el cual

$$S_1 = \{0\}, S_2 = \{1\}, S_3 = \{0, 1, i\}, S_4 = \{0, 1, i, j\}$$

con $\{i, j\} \subset \{2, 3, 4\}$, éste caso ocurre en 6 vértices que representamos por $\mathbf{P}_{[0,1]ij}$, ellos son:

P_{[0,1]23} P_{[0,1]24} P_{[0,1]34} P_{[0,1]32} P_{[0,1]42} P_{[0,1]43}

4. También ocurre que hay un etiquetamiento de los conjuntos S_1, S_2, S_3 y S_4 , en el cual

$$S_1 = \{i\}, S_2 = \{0, i\}, S_3 = \{1, i\}, S_4 = \{0, 1, i, j\}$$

con $\{i, j\} \subset \{2, 3, 4\}$, éste caso ocurre en 6 vértices que representamos por $\mathbf{P}_{i[0,1]j}$, los vértices son:

P_{2[0,1]3} P_{3[0,1]2} P_{4[0,1]2} P_{2[0,1]4} P_{3[0,1]4} P_{4[0,1]3}

5. Puede ocurrir que hay un etiquetamiento de los conjuntos S_1, S_2, S_3 y S_4 , en el cual

$$S_1 = \{i\}, S_2 = \{i, j\}, S_3 = \{0, i, j\}, S_4 = \{1, i, j\}$$

con $\{i, j\} \subset \{2, 3, 4\}$, éste caso también ocurre en 6 vértices que representamos por $\mathbf{P}_{ij[0,1]}$, los vértices son:

P_{23[0,1]} P_{32[0,1]} P_{42[0,1]} P_{24[0,1]} P_{34[0,1]} P_{43[0,1]}

6. Hay un etiquetamiento de los conjuntos S_1, S_2, S_3, S_4 en el cual

$$S_1 = \{0, i\}, S_2 = \{1, i\}, S_3 = \{0, 1, i\}, S_4 = \{0, 1, i, j\}$$

con $\{i, j\} \subset \{2, 3, 4\}$, éste caso ocurre en 6 vértices que representamos por $\mathbf{P}_{[0i,1i]0j}$, a saber:

P_{[02,12]03} P_{[03,13]02} P_{[04,14]03} P_{[02,12]04} P_{[03,13]04} P_{[04,14]03}

7. Hay un etiquetamiento de los conjuntos S_1, S_2, S_3, S_4 en el cual

$$S_1 = \{i\}, S_2 = \{0, i, j\}, S_3 = \{1, i, j\}, S_4 = \{0, 1, i, j\}$$

con $\{i, j\} \subset \{2, 3, 4\}$, éste caso ocurre en 6 vértices que representamos por $\mathbf{P}_{i[0j,1j]}$, ellos son:

$$\mathbf{P}_{2[03,13]} \quad \mathbf{P}_{3[02,12]} \quad \mathbf{P}_{4[02,12]} \quad \mathbf{P}_{2[04,14]} \quad \mathbf{P}_{3[04,14]} \quad \mathbf{P}_{4[03,13]}$$

8. Hay un etiquetamiento de los conjuntos S_1, S_2, S_3, S_4 en el cual

$$S_1 = \{i\}, S_2 = \{i, j\}, S_3 = \{0, i, j, k\}, S_4 = \{1, i, j, k\}$$

con ijk una permutación de 234 , éste caso ocurre en 6 vértices que representamos por $\mathbf{P}_{ij[0k,1k]}$ y son:

$$\mathbf{P}_{23[04,14]} \quad \mathbf{P}_{32[04,14]} \quad \mathbf{P}_{42[03,13]} \quad \mathbf{P}_{24[03,13]} \quad \mathbf{P}_{34[02,12]} \quad \mathbf{P}_{43[02,12]}$$

Por último

9. Hay un etiquetamiento de los conjuntos S_1, S_2, S_3, S_4 en el cual

$$S_1 = \{i, j\}, S_2 = \{i, j, k\}, S_3 = \{i, j, k, l\}, S_4 = \{\{i, i, j, k, l\}\}$$

con $i \in \{0, 1\}$ y $ijkl$ es una permutación de $2, 3, 4$, éste caso ocurre en 12 vértices que representamos por $\mathbf{P}_{[ij]kli}$ y que listamos a continuación:

$$\begin{array}{cccccc} \mathbf{P}_{(02)340} & \mathbf{P}_{(03)240} & \mathbf{P}_{(04)230} & \mathbf{P}_{(02)430} & \mathbf{P}_{(03)420} & \mathbf{P}_{(04)320} \\ \mathbf{P}_{(12)341} & \mathbf{P}_{(13)241} & \mathbf{P}_{(14)231} & \mathbf{P}_{(12)431} & \mathbf{P}_{(13)421} & \mathbf{P}_{(14)321} \end{array}$$

En resumen tenemos:

1. $\mathbf{P}_{ijklm} \in F_i \cap F_{ij} \cap F_{ijk} \cap F_{ijkl}$.
2. $\mathbf{P}_{ijk(il)} \in F_i \cap F_{ij} \cap F_{ijk} \cap F_{i\bar{m}}$, donde $\{i, m\} = \{0, 1\}$.
3. $\mathbf{P}_{[0,1]ij} \in F_0 \cap F_1 \cap F_{01i} \cap F_{01ij}$ con $\{i, j\} \subset \{2, 3, 4\}$.
4. $\mathbf{P}_{i[0,1]j} \in F_i \cap F_{0i} \cap F_{1i} \cap F_{01ij}$ con $\{i, j\} \subset \{2, 3, 4\}$.
5. $\mathbf{P}_{ij[01]} \in F_i \cap F_{ij} \cap F_{0ij} \cap F_{1ij}$ con $\{i, j\} \subset \{2, 3, 4\}$.
6. $\mathbf{P}_{[0i,1i]0j} \in F_{0i} \cap F_{1i} \cap F_{01i} \cap F_{01ij}$ con $\{i, j\} \subset \{2, 3, 4\}$.
7. $\mathbf{P}_{i[0j,1j]} \in F_i \cap F_{0ij} \cap F_{1ij} \cap F_{01ij}$ con $\{i, j\} \subset \{2, 3, 4\}$.
8. $\mathbf{P}_{ij[0k,1k]} \in F_i \cap F_{ij} \cap F_{0ijk} \cap F_{1ijk}$ con ijk una permutación de 234 .
9. $\mathbf{P}_{(ij)kli} \in F_{ij} \cap F_{ijk} \cap F_{ijkl} \cap F_{i\bar{m}}$ con $i \in \{0, 1\}$ y $ijkl$ una permutación de 234 .

Para calcular las \mathbf{y} -coordenadas de los vértices usamos, igual que antes, el hecho de que si F es una facet dirigida por el vector de Voronoi \mathbf{v} entonces F contiene a los puntos $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^4$ de la forma $\mathbf{t} = \frac{1}{2}\mathbf{v} + h$, donde $h \perp \mathbf{v}$.

Por ejemplo, el vértice $\mathbf{p}_{[02,12]03}$ es el único punto en $F_{02} \cap F_{12} \cap F_{120} \cap F_{1203}$, de acuerdo con (3.9), sus \mathbf{y} -coordenadas satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} y_0 + y_2 &= \frac{1}{2}N(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2) \\ y_1 + y_2 &= \frac{1}{2}N(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \\ y_0 + y_1 + y_2 &= \frac{1}{2}N(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \\ y_0 + y_1 + y_2 + y_3 &= \frac{1}{2}N(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) \end{aligned} \tag{3.21}$$

y dado que

$$\begin{aligned} N(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2) &= (p_{01} + p_{03} + p_{04} + p_{12} + p_{23} + p_{24}) \\ N(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) &= (p_{01} + p_{13} + p_{04} + p_{02} + p_{23} + p_{24}) \\ N(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) &= (p_{03} + p_{13} + p_{23} + p_{04} + p_{14} + p_{24}) \\ N(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) &= (p_{04} + p_{14} + p_{24} + p_{34}) \end{aligned}$$

el sistema (3.21), se puede escribir como:

$$\begin{aligned} y_0 + y_2 &= \frac{1}{2}(p_{01} + p_{03} + p_{04} + p_{12} + p_{23} + p_{24}) \\ y_1 + y_2 &= \frac{1}{2}(p_{01} + p_{13} + p_{04} + p_{02} + p_{23} + p_{24}) \\ y_0 + y_1 + y_2 &= \frac{1}{2}(p_{03} + p_{13} + p_{23} + p_{04} + p_{14} + p_{24}) \\ y_0 + y_1 + y_2 + y_3 &= \frac{1}{2}(p_{04} + p_{14} + p_{24} + p_{34}) \end{aligned} \tag{3.22}$$

Dado que $\sum_{i=0}^4 y_i = 0$, de la última ecuación en (3.22), se sigue que $y_4 = -\frac{1}{2}(p_{04} + p_{14} + p_{24} + p_{34})$, luego de resolver el sistema (3.22) completamente obtenemos:

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{1}{2}(-p_{01} - p_{02} + p_{03} + p_{04}) \\ y_1 &= \frac{1}{2}(-p_{01} - p_{12} + p_{13} + p_{14}) \\ y_2 &= p_{01} + \frac{1}{2}(p_{02} + p_{12} + p_{23} + p_{24}) \\ y_3 &= \frac{1}{2}(-p_{03} - p_{13} - p_{23} + p_{34}) \\ y_4 &= \frac{1}{2}(-p_{04} - p_{14} - p_{24} - p_{34}). \end{aligned}$$

3.2.4. Aristas de $S(\mathbf{0})$.

Dado que dos vértices en la celda $S(\mathbf{0})$ son adyacentes si ellos comparten tres de las cuatro facets que los determinan, es fácil identificar las aristas de la celda a partir de la lista de vértices de la misma escritos en términos de los vectores de Voronoi. Nosotros diseñamos un programa de computadora muy sencillo para esta labor, ver Apéndice A.2.

Para calcular la longitud de las aristas es suficiente aplicar la fórmula (3.11) que permite calcular la norma de un vector, por medio de sus \mathbf{y} -coordenadas. Por ejemplo, si consideramos la arista e cuyos vértices son $\mathbf{p}_{3[0,1]2}$ y $\mathbf{p}_{3[0,1]4}$, entonces las \mathbf{y} -coordenadas e son $y_0 = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = p_{24} - p_{01}$, $y_3 = 0$, $y_4 = -(p_{24} - p_{01})$, y al reemplazar en (3.11), obtenemos:

$$\begin{aligned} N(e) &= \frac{1}{\Delta} [\Delta_{02}(p_{24} - p_{01})^2 + \Delta_{04}(p_{01} - p_{24})^2 - (\Delta_{02} + \Delta_{04} - \Delta_{24})(p_{01} - p_{24})^2] \\ &= \frac{(p_{01} - p_{24})^2 \Delta_{24}}{\Delta} \end{aligned}$$

y en consecuencia

$$|e| = (p_{24} - p_{01}) \sqrt{\frac{\Delta_{24}}{\Delta}}.$$

La celda de los lattice de Tipo II, no son tan simétricas como los de Tipo I. Esto se puede evidenciar no solo en gran variedad de etiquetas de los vértices, sino también en la cantidad de longitudes distintas de las aristas. Encontramos que hay 21 familias de longitudes, 11 más que en Tipo I. En la siguiente tabla mostramos una arista típica de cada familia, sus \mathbf{y} -coordenadas y su longitud correspondiente. Todas estas cuentas se hicieron con la ayuda de la computadora.

Clases de aristas y sus longitudes en una celda de Voronoi genérica en lattices de Tipo II.

Vértices de la arista	y -coordenadas	Longitud de la arista
$\mathbf{P}_{02314}, \mathbf{P}_{20314}$	$(-p_{02}, 0, p_{02}, 0, 0)$	$p_{02} \sqrt{\frac{\Delta_{02}}{\Delta}}$
$\mathbf{P}_{12034}, \mathbf{P}_{12304}$	$(-p_{03}, 0, 0, p_{03}, 0)$	$p_{03} \sqrt{\frac{\Delta_{03}}{\Delta}}$
$\mathbf{P}_{12043}, \mathbf{P}_{12403}$	$(-p_{04}, 0, 0, 0, p_{04})$	$p_{04} \sqrt{\frac{\Delta_{04}}{\Delta}}$
$\mathbf{P}_{03124}, \mathbf{P}_{03214}$	$(0, -p_{12}, p_{12}, 0, 0)$	$p_{12} \sqrt{\frac{\Delta_{12}}{\Delta}}$
$\mathbf{P}_{02134}, \mathbf{P}_{02314}$	$(0, -p_{13}, 0, p_{13}, 0)$	$p_{13} \sqrt{\frac{\Delta_{13}}{\Delta}}$
$\mathbf{P}_{02143}, \mathbf{P}_{02413}$	$(0, -p_{14}, 0, 0, p_{14})$	$p_{14} \sqrt{\frac{\Delta_{14}}{\Delta}}$
$\mathbf{P}_{23[0,1]}, \mathbf{P}_{32[0,1]}$	$(0, 0, -p_{23}, p_{23}, 0)$	$p_{23} \sqrt{\frac{\Delta_{23}}{\Delta}}$
$\mathbf{P}_{24[0,1]}, \mathbf{P}_{42[0,1]}$	$(0, 0, -p_{24}, 0, p_{24})$	$p_{24} \sqrt{\frac{\Delta_{24}}{\Delta}}$
$\mathbf{P}_{34[0,1]}, \mathbf{P}_{43[0,1]}$	$(0, 0, 0, -p_{34}, p_{34})$	$p_{34} \sqrt{\frac{\Delta_{34}}{\Delta}}$
$\mathbf{P}_{13402}, \mathbf{P}_{134(21)}$	$(p_{01} + p_{02}, 0, -(p_{01} + p_{02}), 0, 0)$	$(p_{01} + p_{02}) \sqrt{\frac{\Delta_{02}}{\Delta}}$
$\mathbf{P}_{12403}, \mathbf{P}_{124(13)}$	$(p_{01} + p_{03}, 0, 0, -(p_{01} + p_{03}), 0)$	$(p_{01} + p_{03}) \sqrt{\frac{\Delta_{03}}{\Delta}}$
$\mathbf{P}_{12304}, \mathbf{P}_{123(14)}$	$(p_{01} + p_{04}, 0, 0, 0, -(p_{01} + p_{04}))$	$(p_{01} + p_{04}) \sqrt{\frac{\Delta_{04}}{\Delta}}$
$\mathbf{P}_{03412}, \mathbf{P}_{034(02)}$	$(0, p_{01} + p_{12}, -(p_{01} + p_{12}), 0, 0)$	$(p_{01} + p_{12}) \sqrt{\frac{\Delta_{12}}{\Delta}}$
$\mathbf{P}_{02413}, \mathbf{P}_{024(03)}$	$(0, p_{01} + p_{13}, 0, -(p_{01} + p_{13}), 0)$	$(p_{01} + p_{13}) \sqrt{\frac{\Delta_{13}}{\Delta}}$
$\mathbf{P}_{02314}, \mathbf{P}_{023(04)}$	$(0, p_{01} + p_{14}, 0, 0, -(p_{01} + p_{14}))$	$(p_{01} + p_{14}) \sqrt{\frac{\Delta_{14}}{\Delta}}$
$\mathbf{P}_{4[0,1]2}, \mathbf{P}_{4[0,1]3}$	$(0, 0, p_{23} - p_{01}, -(p_{23} - p_{01}), 0)$	$(p_{23} - p_{01}) \sqrt{\frac{\Delta_{23}}{\Delta}}$
$\mathbf{P}_{3[0,1]2}, \mathbf{P}_{3[0,1]4}$	$(0, 0, p_{24} - p_{01}, 0, -(p_{24} - p_{01}))$	$(p_{24} - p_{01}) \sqrt{\frac{\Delta_{24}}{\Delta}}$
$\mathbf{P}_{2[0,1]3}, \mathbf{P}_{2[0,1]4}$	$(0, 0, 0, p_{34} - p_{01}, -(p_{34} - p_{01}))$	$(p_{34} - p_{01}) \sqrt{\frac{\Delta_{34}}{\Delta}}$
$\mathbf{P}_{2[0,1]3}, \mathbf{P}_{[02,12]03}$	$(-p_{01}, -p_{01}, p_{01}, p_{01}, 0)$	$p_{01} \sqrt{\frac{(\Delta_{02} + \Delta_{03} + \Delta_{12} + \Delta_{13} - \Delta_{01} - \Delta_{23})}{\Delta}}$
$\mathbf{P}_{2[0,1]4}, \mathbf{P}_{[02,12]04}$	$(-p_{01}, -p_{01}, p_{01}, 0, p_{01})$	$p_{01} \sqrt{\frac{(\Delta_{02} + \Delta_{04} + \Delta_{12} + \Delta_{14} - \Delta_{01} - \Delta_{24})}{\Delta}}$
$\mathbf{P}_{3[0,1]4}, \mathbf{P}_{[03,13]04}$	$(-p_{01}, -p_{01}, 0, p_{01}, p_{01})$	$p_{01} \sqrt{\frac{(\Delta_{03} + \Delta_{04} + \Delta_{13} + \Delta_{14} - \Delta_{01} - \Delta_{34})}{\Delta}}$

3.3. Lattices Tipo III.

Consideremos ahora un lattice primitivo L de Tipo III. De la Denición 2.3.1, L tiene una superbase B reducida cuyos parámetros de Selling asociados satisfacen la condición (iii) de dicha definición, es decir, hay exactamente dos parámetros de Selling que son negativos, y que no comparten subíndices, sin pérdida de generalidad podemos asumir que dichos parámetros son p_{01} y p_{34} , los demás parámetros son positivos y se cumple que: $|p_{01}| \leq p_{ij}$ para $\{0, 1\} \cap \{i, j\} \neq \emptyset$, $|p_{34}| \leq p_{ij}$ para $\{3, 4\} \cap \{i, j\} \neq \emptyset$ y $|p_{01} + p_{34}| \leq p_{ij}$ con $i \in \{0, 1\}$ y $j \in \{3, 4\}$.

3.3.1. Vectores de Voronoi y facets.

Supongamos que $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ es una superbase reducida para L . De acuerdo a los planteamientos de Conway en [Co], a cada subconjunto propio S de $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, le podemos hacer corresponder un vector de Voronoi del lattice, para lo cual es necesario distinguir los siguientes casos:

- Si $S = \{0, 1\}$, le asignamos el vector $\mathbf{v}_{0\bar{1}} = \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_1$, si $S = \{3, 4\}$ le asignamos el vector $\mathbf{v}_{\bar{3}4} = \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4$.
- Si $S = \{2, 3, 4\}$, el vector de Voronoi que le asignamos es $\mathbf{v}_{\bar{0}1} = -\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1$, al que también podemos escribir como $\mathbf{v}_{\bar{0}1} = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$. Si $S = \{0, 1, 2\}$ le asignamos el vector $\mathbf{v}_{\bar{3}4} = -\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$, al que también podemos escribir como $\mathbf{v}_{\bar{3}4} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_4$.
- A cualquier otro subconjunto S , le asignamos el vector $\mathbf{v}_S = \sum_{i \in S} \mathbf{v}_i$.

En resumen, si S es un subconjunto propio de $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ el vector de voronoi asociado es:

$$\mathbf{v}_S = \begin{cases} \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_1 & \text{si } S = \{0, 1\} \\ -\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 & \text{si } S = \{2, 3, 4\} \\ \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4 & \text{si } S = \{3, 4\} \\ -\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 & \text{si } S = \{0, 1, 2\} \\ \sum_{i \in S} \mathbf{v}_i & \text{cualquier otro caso} \end{cases} \quad (3.23)$$

En la lista (3.24), presentamos los 30 vectores de Voronoi para lattices de Tipo III en términos de los vectores de una superbase reducida para el lattice.

Vectores de Voronoi para lattices de Tipo III

$$\begin{array}{cccccc} \mathbf{v}_0 & \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0 & \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4 \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_4 \\ \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_3 \end{array} \quad (3.24)$$

Las facets asociadas a cada uno de estos vectores de Voronoi son:

Facets de la celda Voronoi primitiva para lattices de Tipo I

$$\begin{array}{cccccc}
 F_0 & F_0^- & F_{0\bar{1}} & F_{\bar{0}1} & F_{13} & F_{\bar{1}\bar{3}} \\
 F_1 & F_1^- & F_{02} & F_{\bar{0}\bar{2}} & F_{14} & F_{\bar{1}\bar{4}} \\
 F_2 & F_2^- & F_{03} & F_{\bar{0}\bar{3}} & F_{23} & F_{\bar{2}\bar{3}} \\
 F_3 & F_3^- & F_{04} & F_{\bar{0}\bar{4}} & F_{24} & F_{\bar{2}\bar{4}} \\
 F_4 & F_4^- & F_{12} & F_{\bar{1}\bar{2}} & F_{\bar{3}4} & F_{\bar{3}\bar{4}}
 \end{array} \tag{3.25}$$

De la Definición 3.1.1, podemos identificar la lista de vectores vecinos a un vector de Voronoi dado.

- Los vectores vecinos de \mathbf{v}_i con $i \in \{0, 1\}$ y $\{i, j\} = \{0, 1\}$ son:
 $\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4, 2\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4.$
- Para \mathbf{v}_2 los vectores vecinos son:
 $\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4.$
- Los vectores vecinos de \mathbf{v}_i con $i \in \{3, 4\}$ y $\{i, j\} = \{3, 4\}$ son:
 $\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4.$
- Los vectores vecinos de $\mathbf{v}_{0\bar{1}} = \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_1 = 2\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$ son:
 $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4.$
- Los vectores vecinos de $\mathbf{v}_{02} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2$ son:
 $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4, 2\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4.$
- Los vectores vecinos de $\mathbf{v}_{03} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_3$ son:
 $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3, 2\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4.$
- Los vectores vecinos de $\mathbf{v}_{04} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_4$ son:
 $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_4, 2\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4.$
- Los vectores vecinos de $\mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ son:
 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4, 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4.$
- Los vectores vecinos de $\mathbf{v}_{13} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3$ son:
 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3, 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4.$
- Los vectores vecinos de $\mathbf{v}_{14} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_4$ son:
 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_4, 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4.$
- Los vectores vecinos de $\mathbf{v}_{23} = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ son:
 $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4.$

- Los vectores vecinos de $\mathbf{v}_{24} = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4$ son:
 $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4.$
- Los vectores vecinos de $\mathbf{v}_{3\bar{4}} = \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3$ son:
 $\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3.$

Los vectores vecinos de los vectores de Voronoi restantes son los opuestos de los que aparecen aquí, para calcularlos es suficiente tener presente que $\sum_{i=0}^4 \mathbf{v}_i = 0$, y que la celda de Voronoi tiene simetría central.

En resumen, hay 18 vectores que tienen 12 vecinos, 6 que tienen 8 vecinos y 6 que tienen 6 vecinos.

Si S es un subconjunto propio de $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, escribimos $\mathcal{F}(S)$ para denotar el conjunto de caras vecinas de F_S tenemos:

- $\mathcal{F}(\{i\}) = \{F_j, F_{i2}, F_{i3}, F_{i4}, F_{0i3}, F_{0i4}, F_{i23}, F_{i24}, F_{i\bar{j}}, F_{\bar{4}}, F_{\bar{3}}, F_{\bar{2}}\}$
con $\{i, j\} = \{0, 1\}$
- $\mathcal{F}(\{2\}) = \{F_{02}, F_{12}, F_{23}, F_{24}, F_{023}, F_{024}, F_{123}, F_{124}, F_{\bar{0}}, F_{\bar{1}}, F_{\bar{3}}, F_{\bar{4}}\}.$
- $\mathcal{F}(\{i\}) = \{F_j, F_{0i}, F_{1i}, F_{2i}, F_{02i}, F_{12i}, F_{034}, F_{134}, F_{i\bar{j}}, F_{\bar{0}}, F_{\bar{1}}, F_{\bar{2}}\}$
con $\{i, j\} = \{3, 4\}.$
- $\mathcal{F}(\{0, 1\}) = \{F_0, F_{02}, F_{03}, F_{04}, F_{023}, F_{024}, F_{034}, F_{\bar{1}}\}.$
- $\mathcal{F}(\{0, 2\}) = \{F_0, F_2, F_{12}, F_{023}, F_{024}, F_{0\bar{1}}, F_{\bar{3}}, F_{\bar{4}}\}.$
- $\mathcal{F}(\{0, 3\}) = \{F_0, F_3, F_{04}, F_{13}, F_{013}, F_{023}, F_{034}, F_{3\bar{4}}, F_{0\bar{1}}, F_{\bar{1}}, F_{\bar{2}}, F_{\bar{4}}\}.$
- $\mathcal{F}(\{0, 4\}) = \{F_0, F_4, F_{03}, F_{14}, F_{014}, F_{024}, F_{034}, F_{4\bar{3}}, F_{0\bar{1}}, F_{\bar{1}}, F_{\bar{2}}, F_{\bar{3}}\}.$
- $\mathcal{F}(\{1, 2\}) = \{F_1, F_2, F_{02}, F_{123}, F_{124}, F_{1\bar{0}}, F_{\bar{3}}, F_{\bar{4}}\}.$
- $\mathcal{F}(\{1, 3\}) = \{F_1, F_3, F_{03}, F_{14}, F_{013}, F_{123}, F_{134}, F_{3\bar{4}}, F_{1\bar{0}}, F_{\bar{0}}, F_{\bar{2}}, F_{\bar{4}}\}.$
- $\mathcal{F}(\{1, 4\}) = \{F_1, F_4, F_{04}, F_{13}, F_{014}, F_{124}, F_{134}, F_{4\bar{3}}, F_{1\bar{0}}, F_{\bar{0}}, F_{\bar{2}}, F_{\bar{3}}\}.$
- $\mathcal{F}(\{2, 3\}) = \{F_2, F_3, F_{023}, F_{123}, F_{\bar{0}}, F_{\bar{1}}\}.$
- $\mathcal{F}(\{2, 4\}) = \{F_2, F_4, F_{024}, F_{124}, F_{\bar{0}}, F_{\bar{1}}\}.$
- $\mathcal{F}(\{3, 4\}) = \{F_3, F_{03}, F_{13}, F_{023}, F_{123}, F_{\bar{4}}\}.$

En resumen: Las facets F_{23}, F_{24}, F_{34} y sus opuestas, tienen 6 caras 2-dimensionales, mientras que las facets F_{01}, F_{02}, F_{12} y sus opuestas tienen 8 caras 2-dimensionales. Las facets restantes tienen 12 caras 2-dimensionales cada una.

3.3.2. Descripción de las facets.

- Como vimos en el apartado 3.3.1, las facets F_{23} , F_{24} , F_{34} y sus opuestas, tienen 6 caras 2-dimensionales, las cuales están determinadas por la intersección de ellas con sus facets vecinas.

La tabla (3.26), muestra el número de vértices en cada una de las 6 caras 2-dimensionales.

$F \cap F_{2i}$ con $i \in \{3, 4\}$	N de vértices
$F_2 \cap F_{2i}$	4
$F_i \cap F_{2i}$	4
$F_{02i} \cap F_{2i}$	4
$F_{12i} \cap F_{2i}$	4
$F_{\bar{0}} \cap F_{2i}$	4
$F_{\bar{1}} \cap F_{2i}$	4

(3.26)

De aquí que estas facets tienen 6 caras cuadriláteras y 8 vértices, y por lo tanto son combinatoriamente equivalentes a un cubo.

$F \cap F_{3\bar{4}}$	N de vértices
$F_3 \cap F_{3\bar{4}}$	4
$F_{03} \cap F_{3\bar{4}}$	4
$F_{13} \cap F_{3\bar{4}}$	4
$F_{023} \cap F_{3\bar{4}}$	4
$F_{123} \cap F_{3\bar{4}}$	4
$F_{\bar{4}} \cap F_{3\bar{4}}$	4

(3.27)

De aquí que estas facets están formadas por 6 cuadriláteras y 8 vértices, y por lo tanto son, al igual que las anteriores, combinatoriamente equivalentes al cubo. Ver Figura 3.9.

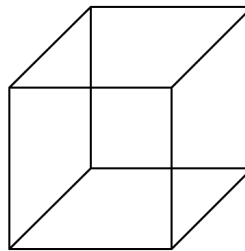


Figura 3.9: Facet $F_{3\bar{4}}$ y F_{2i} con $i \in \{3, 4\}$.

- $F_{0\bar{1}}$, F_{02} , F_{12} y sus opuestas tienen 8 caras 2-dimensionales, la tabla (3.28) muestra el número

de vértices en cada una de ellas.

$F \cap F_{i2}$ con $\{i, j\} \in \{0, 1\}$	Nro de vértices
$F_i \cap F_{i2}$	5
$F_2 \cap F_{i2}$	5
$F_{j2} \cap F_{i2}$	3
$F_{i23} \cap F_{i2}$	5
$F_{i24} \cap F_{i2}$	5
$F_{i\bar{j}} \cap F_{i2}$	3
$F_{\bar{3}} \cap F_{i2}$	5
$F_{\bar{4}} \cap F_{i2}$	5

(3.28)

De aquí que estas facets tienen 6 caras pentagonales, 2 triangulares y 12 vértices.

$F \cap F_{0\bar{i}}$	N de vértices
$F_0 \cap F_{0\bar{i}}$	5
$F_{02} \cap F_{0\bar{i}}$	3
$F_{03} \cap F_{0\bar{i}}$	5
$F_{04} \cap F_{0\bar{i}}$	5
$F_{023} \cap F_{0\bar{i}}$	5
$F_{024} \cap F_{0\bar{i}}$	5
$F_{034} \cap F_{0\bar{i}}$	3
$F_{\bar{1}} \cap F_{0\bar{i}}$	5

(3.29)

Estas facets tienen 6 caras pentagonales, 2 triangulares y 12 vértices. Ver Figura 3.3.2.

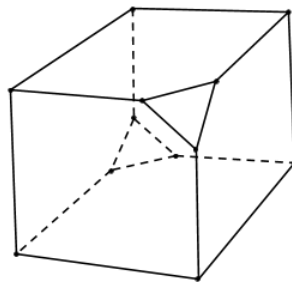


Figura 3.10: Facet $F_{0\bar{i}}$ con $i \in \{2, 3, 4\}$.

- La facet F_i con $i \in \{0, 1\}$ tiene 12 caras 2-dimensionales, la tabla (3.30) muestra el número

de vértices en cada una de ellas.

$F \cap F_i$ con $\{i, j\} = \{0, 1\}$	N de vértices
$F_{013} \cap F_i$	4
$F_{014} \cap F_i$	4
$F_{i23} \cap F_i$	4
$F_{i24} \cap F_i$	4
$F_j \cap F_i$	5
$F_{i2} \cap F_i$	5
$F_{i\bar{j}} \cap F_i$	5
$F_{\bar{2}} \cap F_i$	5
$F_{i3} \cap F_i$	6
$F_{i4} \cap F_i$	6
$F_{\bar{3}} \cap F_i$	6
$F_{\bar{4}} \cap F_i$	6

(3.30)

Estas facets tiene 4 hexágonos, 4 pentágonos, 4 cuadriláteros y 20 vértices.

- Las facets con 12 caras 2-dimensionales son del mismo tipo que F_3 . La tabla (3.31), muestra el número de vértices en cada una de ellas.

$F \cap F_i$ con $\{i, j\} = \{3, 4\}$	N de vértices
$F_{2i} \cap F_i$	4
$F_j \cap F_i$	4
$F_{i\bar{j}} \cap F_i$	4
$F_{\bar{2}} \cap F_i$	4
$F_{02i} \cap F_i$	5
$F_{12i} \cap F_i$	5
$F_{034} \cap F_i$	5
$F_{134} \cap F_i$	5
$F_{0i} \cap F_i$	6
$F_{1i} \cap F_i$	6
$F_{\bar{0}} \cap F_i$	6
$F_{\bar{1}} \cap F_i$	6

(3.31)

Las facets están formadas por 4 hexágonos, 4 pentágonos, 4 cuadriláteros y 20 vértices. Ver Figura 3.11.

En resumen, la celda de Voronoi primitiva de un lattice de Tipo III, en dimensión 4 está formada por $18P_{12} + 6P_8 + 6P_6$, el coeficiente cuenta la cantidad de politopos 3-dimensionales, y el subíndice el número de caras 2-dimensionales de cada politopo.

3.3.3. Identificación de los vértices.

A diferencia de lo que ocurre para los vértices de las celdas en lattices de Tipo I, y en menor medida en los de Tipo II, no conseguimos una buena notación, sencilla y clara, que nos permitiera etiquetar los vértices en función de los vectores de Voronoi o de las facets. Esta dificultad es sólo

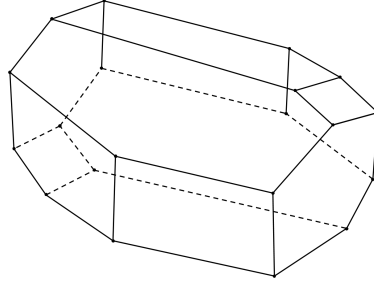


Figura 3.11: Facet F_i con $i \in \{0, 1, 3, 4\}$.

estética y no interfiere para nada en la descripción de la celda, ni afecta las cuentas que haremos posteriormente para calcular la constante de cuantización del lattice.

Dado que la celda de Voronoi es primitiva, cada vértice es la intersección de 4 facets. Si \mathbf{p} es el vértice de la celda de Voronoi $S(\mathbf{0})$, así \mathbf{p} es el único punto en $F_{S_1} \cap F_{S_2} \cap F_{S_3} \cap F_{S_4}$, y le asignaremos el conjunto $\{\mathbf{v}_{S_1}, \mathbf{v}_{S_2}, \mathbf{v}_{S_3}, \mathbf{v}_{S_4}\}$.

En el Apéndice A.3, presentamos la lista completa de los vértices en términos de los vectores de Voronoi que les corresponden a las facets que los determinan, así por ejemplo, al vértice determinado por las facets F_2, F_{02}, F_{023} y F_{024} , le hemos representado con el conjunto $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_{02}, \mathbf{v}_{023}, \mathbf{v}_{024}\}$.

Para calcular sus \mathbf{y} -coordenadas procederemos igual que antes, usando el hecho de que si F es la facet de $S(\mathbf{0})$ dirigida por el vector de Voronoi \mathbf{v} , entonces F contiene a los puntos $\mathbf{t} \in S(\mathbf{0})$ de la forma $\mathbf{t} = \frac{1}{2}\mathbf{v} + h$, donde $h \perp \mathbf{v}$, de aquí que $\mathbf{t} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}N(\mathbf{v})$.

Por ejemplo, el vértice determinado por $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_{02}, \mathbf{v}_{023}, \mathbf{v}_{024}\}$ es el único punto en $F_2 \cap F_{02} \cap F_{023} \cap F_{024}$, sus \mathbf{y} -coordenadas satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 y_2 &= \frac{1}{2}N(\mathbf{v}_2) &&= \frac{1}{2}(p_{02} + p_{12} + p_{23} + p_{24}) \\
 y_0 + y_2 &= \frac{1}{2}N(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2) &&= \frac{1}{2}(p_{01} + p_{03} + p_{04} + p_{12} + p_{23} + p_{24}) \\
 y_0 + y_2 + y_3 &= \frac{1}{2}N(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) &&= \frac{1}{2}(p_{01} + p_{12} + p_{13} + p_{04} + p_{24} + p_{34}) \\
 y_0 + y_2 + y_4 &= \frac{1}{2}N(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4) &&= \frac{1}{2}(p_{01} + p_{12} + p_{14} + p_{03} + p_{23} + p_{34}) \\
 y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 &= 0
 \end{aligned}$$

El sistema tiene como única solución:

$$\begin{aligned}
 y_0 &= \frac{1}{2}(p_{01} - p_{02} + p_{03} + p_{04}) \\
 y_1 &= \frac{1}{2}(-p_{01} - p_{12} - p_{13} - p_{14}) - p_{34} \\
 y_2 &= \frac{1}{2}(p_{02} + p_{12} + p_{23} + p_{24}) \\
 y_3 &= \frac{1}{2}(-p_{03} + p_{13} - p_{23} + p_{34}) \\
 y_4 &= \frac{1}{2}(-p_{04} + p_{14} - p_{24} + p_{34}).
 \end{aligned}$$

Con los demás vértices se procede de manera similar.

3.4. Una descripción informal del espacio de los lattices en \mathbb{R}^4 .

Al espacio de los lattices en dimensión 4, o equivalentemente, al espacio de las formas cuadráticas definidas positivas, se lo puede ver como un espacio 10-dimensional, una dimensión por cada parámetro que los describe. Como se vio en las secciones precedentes, la estructura topológico-combinatoria de la celda de Voronoi asociada a cada lattice está estrechamente relacionada con los parámetros de Selling reducidos del lattice, de tal manera que al variar los parámetros, las caras de la celda también varían, se alargan o ensanchan y hasta pueden perder lados o desaparecer, si se *atraviesan las paredes* que determinan a cada tipo de lattice (respectivamente forma cuadrática), lo cual podemos pensar como un cambio de región en el espacio. Por la definición de reducción de formas cuadráticas considerada en dimensión 4, distinguimos tres regiones abiertas, que corresponden a los tres Tipos de lattices primitivos.

Si nos “paramos” en un lattice primitivo de Tipo I, podemos movernos libremente, variar continuamente los parámetros de Selling, en el espacio de los lattices permaneciendo en Tipo I, hasta que eventualmente llegamos a lo que llamamos una *pared*. En ella, la celda de Voronoi pierde generalidad, se *degenera*, por ejemplo, desaparecen todas las aristas de una “zona” en la *Vocell*, pudiendo incluso desaparecer algunas 2-caras y posiblemente alguna facets. De manera similar a lo que ocurre en los lattices de dimensión 2, donde una celda de tipo hexagonal pasa a otra rectangular, o en dimensión 3 donde un octaedro truncado o permutoedro 3-dimensional, se degenera y transforma en un dodecaedro hexarómbico al hacer un parámetro igual a cero, para ver con más detalle recomendamos consultar [Co], [CS3].

Si se atraviesa completamente la pared, y se pasa “al otro lado” de la misma, nos encontramos nuevamente en una región de lattices primitivos. Sólo que éstos pueden ser del mismo Tipo primitivo ó de otro Tipo!. En el caso que partimos de un lattice de Tipo I, y se cambiara de Tipo al atravesar una pared, caeremos necesariamente a un lattice de Tipo II. Pero, si estamos en la región de Tipo II y atravesamos una pared, podemos caer a cualquiera de los tres Tipos existentes. Esto evidencia que las paredes son distintas.

Como hemos visto, para Tipo I en dimensión 4, hay 10 clases (o zonas) de aristas, y el colapso de cualquiera de estas zonas nos lleva a una pared. En este caso, las diez paredes nos separan de regiones de Tipo II. Desde el Tipo II, las diez paredes nos llevan así: una sola a Tipo I (de la que vinimos), seis a Tipo II y las tres restantes a Tipo III. Por último, si estamos en una región de Tipo III, nueve de las paredes nos llevan a regiones de Tipo II y sólo una a Tipo III.

Como hemos visto, a los lattices se les asignan parámetros para trabajar con ellos. Nosotros hemos considerado dos tipos de parámetros, los de Selling —con los que Charve desarrolla su método de reducción de formas cuadráticas cuaternarias, — y las Conormas de Conway - Sloane, [CS3] y [Co], que ellos usan como un método alternativo en la clasificación de los lattices de acuerdo a su celda de Voronoi. En ambos casos resulta muy interesante observar qué cambios sufre la celda de Voronoi cuando alguno de estos parámetros se hace cero. Vale la pena destacar que en los lattices de Tipo I, ambas clasificaciones de parámetros coinciden, más aun, el hecho de que al variar un lattice se llegue hasta una pared se traduce en anulación de uno de los diez parámetros del lattices. Y atravesar la pared significa que dicho parámetro se hace negativo. En realidad, al hacerse el parámetro negativo, posiblemente deja de ser un parámetro reducido del lattice, y pasa a ser uno *putativo* lo que obliga a aplicar el algoritmo de reducción desarrollado en 2.3.2.

El lector interesado puede consultar la tercera lectura de [Co] donde el autor explica de manera

muy atractiva el proceso con las conormas en dimensión 3.

Los parámetros de Selling o de Selling-Charve viven en \mathbb{R}^{10} . Sin embargo la correspondencia biunívoca entre lattices y parámetros reducidos es delicada, solo vale en una región de \mathbb{R}^{10} que muchas veces es solo la región cercana al lattice que se está considerando. En el caso de un lattice como A_4^* cuyos parámetros en \mathbb{R}^{10} son $\rho_{A_4^*} = [1, 1, \dots, 1]$, no hay problema, pues la región de validez es grande y contiene un abierto alrededor $\rho_{A_4^*}$ en el espacio de los lattices.

Por el contrario, en el caso de D_4^* mostrar esto es un poco delicado, ya que sus parámetros reducidos son $\rho_{D_4^*} = [-1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0]$, con lo cual el lattice se encuentre digamos en una *esquina* del espacio de los lattices. No obstante, si al cambiar un poco los parámetros se cruza una pared, y el lattice obtenido no está en forma reducida, al aplicar el algoritmo de reducción 2.3.2, siempre se obtienen parámetros reducidos que están cercanos al lattice inicial, lo que permite considerar un abierto también al rededor de éste punto o de puntos similares.

Para una discusión más rigurosa y detallada de este tema, recomendamos al lector las siguientes lecturas: [Co], [CS3], [RB], [Va], [Sc]

Capítulo 4

Constante de cuantización para lattices en dimensión 4.

El objetivo principal del capítulo, es calcular la constante de cuantización de un lattice L de \mathbb{R}^4 , en función de sus parámetros de Selling reducidos. El capítulo está distribuido de la siguiente forma: A manera de introducción, y casi como una digresión, presentamos el problema general de cuantización, y como un caso particular el problema del retículo cuantizador óptimo.

En la sección 4.2 presentamos los preliminares necesarios para abordar el problema. Acto seguido, sección 4.3, reconstruimos las cuentas para calcular la constante de cuantización en términos de los parámetros de Selling reducidos para lattices en dimensión 2. En la sección 4.4, describimos los pasos seguidos por Barnes y Sloane en [BS], para calcular la constante de cuantización en lattices 3-dimensionales, y presentamos sin demostración los resultados principales de su trabajo, esto es: Una fórmula para la constante de cuantización y el mínimo de dicha función. En la sección 4.5, obtenemos el resultado principal de nuestro trabajo, esto es: una expresión que permite calcular la constante de cuantización de un lattices 4-dimensional, en función de los parámetros reducidos según Charve.

Nuestra fórmula tiene en cuenta los tres tipos de lattices *primitivos* y dependiendo el Tipo al que pertenece cada lattice se calcula su constante de cuantización. Para la obtención de la fórmula usamos fuertemente los resultados del capítulo anterior, y una serie de algoritmos que diseñamos para poder hacer los calculos intermedios. Finalmente en la sección 4.6 calculamos la constante de cuantización de algunos lattices especiales, el capítulo termina con la sección 4.7, en la cual demostramos que los lattices A_4^* y D_4^* son mínimos locales para la función de cuantización en dimensión 4.

4.1. Introducción.

Un *cuantizador* o conversor análogo-digital, es un aparato para transformar señales continuas en discretas. Intuitivamente lo podemos pensar como muestra la Figura 4.1. En el mundo real los cuantizadores son muy útiles, y se les usa para construir aparatos de grabación, instrumentos digitales de medida, sistemas de comunicación digital, entre otros.

A continuación se hace una presentación general del problema de cuantización, aunque sólo

tenemos interés en el problema restringido a lattices, y en particular a lattices 4-dimensionales. En una primera lectura el lector puede obviar los párrafos siguientes y continuar desde la Fórmula (4.7) Más formalmente, consideremos H un subconjunto discreto de \mathbb{R}^n . Un cuantizador es una función

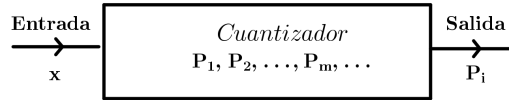


Figura 4.1: Representación intuitiva de un Cuantizador.

que le asigna a cada punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ un punto $P_i \in H$, de tal manera que la distancia de \mathbf{x} a H sea igual a la distancia entre \mathbf{x} y P_i .

Note que un cuantizador puede describirse diciendo que tras su aplicación el espacio \mathbb{R}^n queda particionado en celdas de Voronoi. La Figura 4.2 da una idea intuitiva de tal partición en dimensión 2.

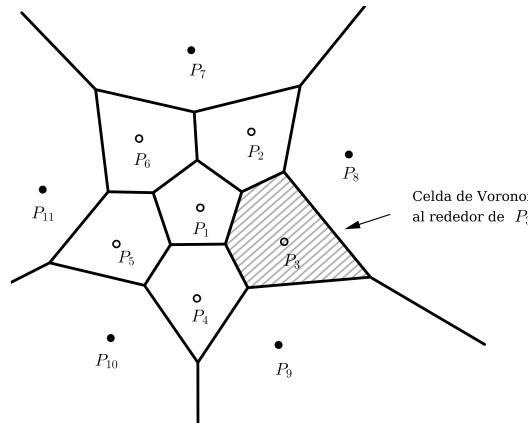


Figura 4.2: Representación intuitiva de un Cuantizador en dimensión 2.

El proceso de cuantizar (discretizar) se introducen errores, usualmente la magnitud del error se mide por la distancia euclídea del punto \mathbf{x} a su imagen P_i . A la hora de cuantizar los puntos P_i se deben elegir de acuerdo a la distribución de probabilidad de \mathbf{x} , de tal manera que sean puntos representativos, es decir, cada P_i debe ser tal que el promedio de $N(\mathbf{x} - P_i(\mathbf{x}))$ sea mínimo. Si \mathbf{x} tiene función de densidad de probabilidad $p(\mathbf{x})$, el error cuadrático medio en dimensión n es

$$E = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^n} N(\mathbf{x} - P_i(\mathbf{x})) p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \tag{4.1}$$

donde $P_i(\mathbf{x})$ es el punto que el cuantizador le asigna a \mathbf{x} .

Dado que las celdas de Voronoi inducen una partición de \mathbb{R}^n , la ecuación anterior se puede escribir en la forma:

$$E = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^M \int_{S(P_i)} N(\mathbf{x} - P_i) p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \tag{4.2}$$

Es claro que E depende de la dimensión del espacio, n , la cantidad de puntos M y de la función de probabilidad.

Dados n, M y una función de densidad de probabilidad p , se desea conocer el valor de

$$E(n, M, p) = \inf_{\{P_i\}} E \quad (4.3)$$

es decir, el menor error alcanzado para cualquier conjunto de M puntos $P_1, P_2, \dots, P_M \in \mathbb{R}^n$.

Zador demostró en [Za], que bajo ciertas condiciones generales sobre $p(\mathbf{x})$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} M^{2/n} E(n, M, p) = G_n \left(\int_{\mathbb{R}^n} p(\mathbf{x})^{n/(n+2)} d\mathbf{x} \right)^{\frac{n+2}{n}} \quad (4.4)$$

donde G_n es una constante que depende de n . Zador también demostró que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n = \frac{1}{2\pi e}.$$

Adicionalmente, se puede probar que

$$G_n = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{E(n, M, p)}{\left(\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \int_{S(P_i)} d\mathbf{x} \right)^{\frac{2}{n}}} \quad (4.5)$$

El *quantizer problem* consiste en elegir “suficientes” puntos P_1, P_2, \dots, P_M en \mathbb{R}^n , uniformemente distribuidos en una bola grande de \mathbb{R}^n de tal manera que

$$\frac{1}{n} \frac{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \int_{S(P_i)} N(\mathbf{x} - P_i) d\mathbf{x}}{\left(\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \text{vol}(S(P_i)) \right)^{1 + \frac{2}{n}}} \quad (4.6)$$

sea mínima. Ocurre que G_n es el límite de los ínfimos de (4.6) sobre todas las posibles elecciones de los puntos P_i .

De otro lado, si todas las celdas son congruentes entre sí, la expresión anterior se puede simplificar. Por ejemplo, si $P = S(\mathbf{0})$ es la celda de Voronoi de un lattice, la expresión (4.6) toma la forma

$$G_n(P) = \frac{1}{n} \frac{\int_P \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} d\mathbf{x}}{\text{vol}(P)^{1 + \frac{2}{n}}} \quad (4.7)$$

es decir $G_n(P)$ es el *segundo momento normalizado* de P .

Es decir, si los puntos se toman en un lattice L de \mathbb{R}^n , y P es la celda de Voronoi centrada en el origen, el *lattice quantizer problem* o *Problema del retículo cuantizador óptimo*, consiste en encontrar un lattice n -dimensional L en \mathbb{R}^n para el cual $G_n(L) := G_n(P)$ sea mínimo.

El problema de hallar el retículo cuantizador óptimo ha sido resuelto únicamente en dimensiones 2 y 3. En dimensión 2, como es de esperarse, el mejor cuantizador es el lattice hexagonal, denotado por A_2 , ver [Fej], mientras que en dimensión 3 el mínimo ocurre en el lattice A_3^* , también conocido como *body-centered cubic lattice*, ver [BS].

4.2. Segundo momento para politopos.

Un *paralelotopo* n -dimensional es un politopo convexo que produce un *embaldosamiento* completo o *tiling* por traslación de \mathbb{R}^n . Los centros de las baldosas de un tal embaldosamiento forman un lattice. Un paralelotopo de dimensión n se dice que es *primitivo* si en cada uno de sus vértices inciden exactamente $n + 1$ paralelotopos en el embaldosamiento generado por él, por ejemplo en dimensión 2 la celda de Voronoi del lattice hexagonal es primitiva.

Si P es un politopo en \mathbb{R}^n , denotamos por $U(P)$ a su segundo momento no normalizado respecto al origen, esto es:

$$U(P) = \int_P x \cdot x dx. \quad (4.8)$$

Denotamos por $I(P)$ a su momento de inercia respecto al origen, es decir:

$$I(P) = \frac{U(P)}{\text{vol}(P)}. \quad (4.9)$$

Finalmente, el segundo momento normalizado y sin dimensión de P respecto al origen lo denotamos por $G(P)$, y corresponde a:

$$G(P) = \frac{1}{n} \frac{U(P)}{\text{vol}(P)^{\frac{n+2}{n}}}. \quad (4.10)$$

Tal como se muestra en el siguiente resultado, el momento de inercia de un n -simplex se puede calcular a partir de las coordenadas de sus vértices.

Teorema 4.2.1 (Momento de un n -simplex). [CS4] *Sea T un simplex n -dimensional en \mathbb{R}^n con vértices $\mathbf{v}_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in})$ para $0 \leq i \leq n$, entonces:*

a. *El centroide de T es el baricentro de los vértices:*

$$\mathbf{v}_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \mathbf{v}_i \quad (4.11)$$

b. *El volumen de T es:*

$$\text{vol}(T) = \frac{1}{n!} \det \begin{bmatrix} 1 & v_{01} & v_{02} & \cdots & v_{0n} \\ 1 & v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

c. *El momento de inercia al rededor del origen es:*

$$I(T) = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{i=0}^{n+1} \|\mathbf{v}_i\|^2 \quad (4.13)$$

Demostración. Una idea de la prueba puede consultarse en [CS4] o en [CS, Cap 21, pag. 451]. \square

Como consecuencia del Teorema 4.2.1, y de la definición de $U(P)$, se sigue que si Q es una partición en n -símplices de un politopo P , entonces

$$U(P) = \sum_{T \in Q} U(T) \quad (4.14)$$

esto da un camino para calcular la constante de cuantización de un lattice. A modo de ejemplo veamos cómo es la fórmula de la constante de cuantización en dimensión 2.

4.3. Constante de cuantización para lattices en dimensión 2.

Sea L un lattice 2-dimensional con superbases obtusa $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, parámetros de Selling $p_{01} = -\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1$, $p_{02} = -\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_2$, $p_{12} = -\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$, matriz de Gram

$$A = \begin{bmatrix} p_{01} + p_{12} & -p_{12} \\ -p_{12} & p_{02} + p_{12} \end{bmatrix}$$

y determinante $\Delta = \det(A) = p_{01}p_{02} + p_{01}p_{12} + p_{02}p_{12}$.

Una vez identificadas las componentes básicas de la celda, tal como hicimos en la Sección 2.1, hacemos una triangulación de la misma, ver Figura (4.3), y consideramos el centroide de cada triángulo, dicho punto coincide con el baricentro del triángulo y viene dado por el promedio de los vértices. Las \mathbf{y} -coordenadas de los vértices son:

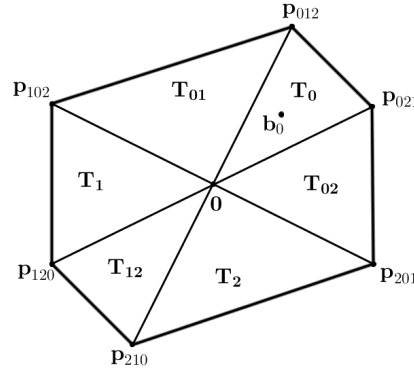


Figura 4.3: Partición en símplexes celda de voronoi 2 dimensional.

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{012} &\rightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_{01} + p_{02} \\ -p_{01} + p_{12} \\ -p_{02} - p_{12} \end{pmatrix} & \mathbf{p}_{021} &\rightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_{01} + p_{02} \\ -p_{01} - p_{12} \\ -p_{02} + p_{12} \end{pmatrix} \\ \mathbf{p}_{102} &\rightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -p_{01} + p_{02} \\ p_{01} + p_{12} \\ -p_{02} - p_{12} \end{pmatrix} & \mathbf{p}_{120} &\rightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -p_{01} - p_{02} \\ p_{01} + p_{12} \\ p_{02} - p_{12} \end{pmatrix} \\ \mathbf{p}_{201} &\rightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_{01} - p_{02} \\ -p_{01} - p_{12} \\ p_{02} + p_{12} \end{pmatrix} & \mathbf{p}_{210} &\rightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -p_{01} - p_{02} \\ p_{01} - p_{12} \\ p_{02} + p_{12} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Consideremos el triángulo T_0 , con vértices en $\mathbf{0}$, \mathbf{p}_{012} , \mathbf{p}_{021} , su área viene dada por:

$$\begin{aligned} \text{vol}(T_0) &= \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \frac{p_{01}+p_{02}}{2} & \frac{-p_{01}+p_{12}}{2} \\ \frac{p_{01}+p_{02}}{2} & \frac{-p_{01}+p_{12}}{2} \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{8} |-(p_{01} + p_{02})(p_{01} + p_{12}) - (-p_{01} + p_{12})(p_{01} + p_{02})| \\ &= \frac{1}{8} (p_{01} + p_{02})(2p_{12}) \\ &= \frac{p_{12}(p_{01} + p_{02})}{4}. \end{aligned}$$

Como los triángulos T_0 y T_{12} son congruentes, se sigue que

$$\text{vol}(T_0) = \frac{p_{12}(p_{01} + p_{02})}{4} = \text{vol}(T_{12})$$

por simetría tenemos que

$$\text{vol}(T_1) = \frac{p_{02}(p_{01} + p_{12})}{4} = \text{vol}(T_{02})$$

y

$$\text{vol}(T_2) = \frac{p_{01}(p_{02} + p_{12})}{4} = \text{vol}(T_{01}).$$

Si $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ y \mathbf{p}_3 son los vértices del triángulo y \mathbf{b}_0 es su baricentro, el momento de inercia de T en torno al origen, viene dado por:

$$I(T) = \frac{3}{4}N(\mathbf{b}_0) + \frac{1}{3 \cdot 4} \sum_{i=1}^3 N(\mathbf{p}_i)$$

y el segundo momento de inercia no normalizado $U(T)$, viene dado por:

$$U(T) = I(T) \times \text{vol}(T)$$

donde $\text{vol}(T)$ es el área del triángulo.

De este modo para el triángulo T_0 tenemos:

$$I(T_0) = \frac{3}{4}N\left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix} p_{01} + p_{02} \\ -p_{01} \end{pmatrix}\right) + \frac{1}{12}\left[N\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} p_{01} + p_{02} \\ -p_{01} + p_{12} \end{pmatrix}\right) + N\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} p_{01} + p_{02} \\ -p_{01} - p_{12} \end{pmatrix}\right)\right]$$

De (1.4.7), obtenemos:

$$I_0 = I(T_0) = \frac{1}{24\Delta}(p_{01} + p_{02})(3\Delta + p_{12}^2), \quad \text{donde } \Delta = \det(A) = p_{01}p_{02} + p_{01}p_{12} + p_{02}p_{12},$$

y el segundo momento de inercia no normalizado

$$U_0 = \frac{1}{24\Delta}(p_{01} + p_{02})(3\Delta + p_{12}^2) \frac{1}{4}p_{12}(p_{01} + p_{02}).$$

Cuentas similares muestran que

$$U_1 = \frac{p_{02}(p_{01} + p_{12})^2(3\Delta + p_{02}^2)}{96\Delta}$$

y

$$U_2 = \frac{p_{01} (p_{02} + p_{12})^2 (3\Delta + p_{01}^2)}{96\Delta}$$

además se tiene que $U_{12} = U_0$, $U_{02} = U_1$ y $U_{01} = U_2$.

Así las cosas, el momento de inercia no normalizado de la celda de Voronoi $S(\mathbf{0})$ es:

$$U(S(\mathbf{0})) = 2(U_0) + U_1 + U_2$$

que podemos escribir como

$$U(S(\mathbf{0})) = \frac{1}{12} [p_{01}^2 (p_{02} + p_{12}) + p_{02}^2 (p_{01} + p_{12}) + p_{12}^2 (p_{01} + p_{02}) + 4p_{01}p_{02}p_{12}]. \quad (4.16)$$

Si llamamos

$$\begin{aligned} S_1 &= p_{01} + p_{02} + p_{12} \\ K &= p_{01}p_{02}p_{12} \end{aligned}$$

tenemos

$$U(S(\mathbf{0})) = \frac{1}{12} (\Delta S_1 + K) \quad (4.17)$$

y por lo tanto, la constante de cuantización de L viene dada por:

$$\begin{aligned} G(L) &= \frac{1}{2} \frac{U(L)}{\Delta^{3/2}} \\ &= \frac{(\Delta S_1 + K)}{24\Delta^{3/2}} \end{aligned}$$

De este modo tenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.3.1. *Sea L un lattice 2-dimensional con parámetros de Selling asociados $[x, y, z]$, entonces la constante de cuantización de L , que denotamos por $G_2(L)$ o por $G_2(x, y, z)$, viene dada por:*

$$G_2(x, y, z) = \frac{(x + y + z)(xy + xz + yz) + xyz}{24(xy + xz + yz)^{3/2}}$$

Si L un lattice 2-dimensional, con parámetros de Selling $\rho = [x, y, z]$, sin perder generalidad podemos asumir que $\Delta = xy + xz + yz = 3$. De tal manera que encontrar el mejor lattice cuantizador en dimensión 2, equivale a determinar el mínimo de $G_2(x, y, z) = 3(x + y + z) + xyz$, sujeto a las restricciones $f(x, y, z) = xy + xz + yz = 3$ y $x \geq 0$, $y \geq 0$ y $z \geq 0$.

Usando el método de los multiplicadores de Lagrange, se logra mostrar sin mucha dificultad, que el único mínimo de $G_2(x, y, z)$ con las condiciones impuestas a ρ es $[1, 1, 1]$, que corresponde al lattice Hexagonal.

Fejes Tóth [Fej], demuestra algo más general, la mejor distribución de puntos en el plano, no necesariamente lattices, corresponde al lattice hexágono.

Teorema 4.3.2 (Fejes Tóth). *El mejor cuantizador en dimensión 2 es el lattice hexagonal A_2 .*

4.4. Constante de cuantización para lattices en dimensión 3.

En la Sección 2.2 hicimos una descripción detallada de las componentes de la celda de Voronoi primitiva de un lattice en dimensión 3. Si $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es una superbase obtusa de un lattice tres dimensional, los parámetros de Selling son $p_{ij} = -\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$, con $0 \leq i < j \leq 3$, bajo estas condiciones, una matriz de Gram asociada es

$$A = \begin{bmatrix} p_{01} + p_{12} + p_{13} & -p_{12} & -p_{13} \\ -p_{12} & p_{02} + p_{12} + p_{23} & -p_{23} \\ -p_{13} & -p_{23} & p_{03} + p_{13} + p_{23} \end{bmatrix},$$

y el determinante del lattice, $\Delta = \det(A)$, tiene la forma:

$$\begin{aligned} \Delta = & p_{01}p_{02}p_{03} + p_{01}p_{02}p_{13} + p_{01}p_{03}p_{12} + p_{02}p_{03}p_{12} + p_{02}p_{03}p_{13} + p_{01}p_{02}p_{23} + \\ & p_{01}p_{12}p_{13} + p_{01}p_{03}p_{23} + p_{02}p_{12}p_{13} + p_{03}p_{12}p_{13} + p_{01}p_{12}p_{23} + p_{01}p_{13}p_{23} + \\ & p_{02}p_{12}p_{23} + p_{02}p_{13}p_{23} + p_{03}p_{12}p_{23} + p_{03}p_{13}p_{23}. \end{aligned}$$

Adicionalmente, si $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$ tiene \mathbf{y} -coordenadas aumentadas (y_0, y_1, y_2, y_3) , la Proposición 1.4.7 establece que $N(\mathbf{t})$ es de la forma

$$N(\mathbf{t}) = \frac{1}{\Delta} \left(\sum_{i=1}^3 \Delta_{0i} y_i^2 + \sum_{0 \leq i < j \leq 3} (\Delta_{0i} + \Delta_{0j} - \Delta_{ij}) y_i y_j \right), \text{ donde } \Delta_{ij} = \frac{\partial \Delta}{\partial p_{ij}}.$$

Si $S(\mathbf{0})$ es la celda de Voronoi centrada en el origen, ella tiene la forma de la Figura 4.4.

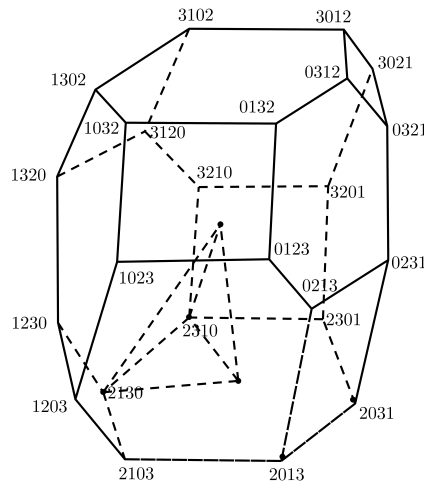


Figura 4.4: Etiquetamiento de una Celda de Voronoi Primitiva en dimensión 3.

Barnes y Sloane [BS], basados en un trabajo previo de Barnes [Ba], resuelven el *lattice quantizer problem* en dimensión 3, ellos encuentran una expresión para la constante de cuantización en términos de los parámetros de Selling reducidos del lattice, para lo cual construyen una partición de $S(\mathbf{0})$ en 60 tetraedros, un tal tetraedro se muestra en la Figura 4.4, al tener presente los resultados de la

Sección 4.2 logran expresar la inercia, y el segundo momento de cada tetraedro de la partición en función de las \mathbf{y} -coordenadas de sus vértices, y consiguen calcular la constante de cuantización del lattice. Las cuentas son similares a las que hicimos en el caso 2-dimensional, y pueden consultarse en [BS].

Teorema 4.4.1 (Barnes-Sloane). *Sean $p_{ij} = -\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$, para $0 \leq i < j \leq 3$, los parámetros de Selling asociados a una superbase obtusa de un lattice 3-dimensional L , y sean*

$$\begin{aligned}\Delta &= \sum^{(4)} p_{01}p_{02}p_{03} + \sum^{(3)} p_{01}p_{23}(p_{02} + p_{03} + p_{12} + p_{13}) \\ S_1 &= p_{01} + p_{02} + p_{03} + p_{12} + p_{13} + p_{23} \\ S_2 &= p_{01}p_{02}p_{13}p_{23} + p_{01}p_{03}p_{12}p_{23} + p_{02}p_{03}p_{12}p_{13} \\ K &= \sum^{(4)} p_{01}p_{02}p_{03}(p_{12} + p_{13} + p_{23}).\end{aligned}$$

Entonces, la constante de cuantización de L es:

$$G_3(L) = \frac{\Delta S_1 + 2S_2 + K}{36\Delta^{4/3}}$$

Recurriendo a herramientas muy ingeniosas, entre las que se destacan las variaciones que fijan el determinante, y lo que ellos llaman *el Lema de los caminos*, Barnes y Sloane demuestran en [BS], que A_3^* es el mejor lattice cuantizador en dimensión 3.

Teorema 4.4.2 ([BS]). *El único mínimo local de*

$$G_3(L) = \frac{DS_1 + 2S_2 + K}{36\Delta^{4/3}}$$

sujeito a las condiciones $p_{ij} \geq 0$ para todo $0 \leq i < j \leq 3$ y $\Delta \neq 0$, ocurre cuando todos los p_{ij} son iguales.

En la siguiente sección seguiremos los pasos de Barnes y Sloane, y conseguiremos expresiones que permiten calcular la constante de cuantización de cualquier lattice 4-dimensional, una una expresión para cada uno de los tres Tipo de lattice.

4.5. Constante de Cuantización para lattices 4-dimensionales.

Sea L un lattice 4-dimensional y $\rho = [p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{04}, p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34}]$ un vector de parámetros de Selling reducidos asociado a L , no hay pérdida de generalidad al suponer que todos los $p_{ij} \neq 0$, ya que si este no es el caso, algunos de los simplex de la partición que usaremos para calcular $G(L)$ son “degenerados”, es decir tienen volumen cero, y por tanto no aportan nada en el cálculo final de la constante de cuantización de L . Hacemos notar además que un lattice puede tener hasta $5! = 120$ representantes ρ , una por cada permutación de los subíndices de los parámetros ρ 's.

Si $S(\mathbf{v})$ denota la celda de Voronoi centrada en $\mathbf{v} \in L$, los resultados del capítulo anterior proporcionan una descripción detallada de $S(\mathbf{0})$ en términos de ρ . Una celda típica, tendrá un máximo de 120 vértices, 240 aristas, 150 caras 2-dimensionales y 30 facets o caras 3-dimensionales.

La constante de cuantización de L , que denotamos por $G(L)$ o $G(\rho)$, es el segundo momento normalizado y sin dimensión de la celda de Voronoi calculada en un punto cualquiera de L , por lo tanto su valor depende de la forma de la celda y no de los parámetros usados para describirla. Por comodidad haremos los cálculos en $S(\mathbf{0})$, en cualquier otro punto de L el valor es igual. Es decir $G(L) = G(S(\mathbf{0}))$.

Es importante destacar que aunque los cálculos a realizar son algebraicamente sencillos, ellos involucran expresiones polinómicas muy grandes, lo que hace indispensable el uso de la computadora. Para tal efecto, hemos implementado una serie de programas para ser ejecutados en el toolbox de matemática simbólica de MATLAB. El código de los programas implementados, se puede consultar en el Apéndice A.2.

El procedimiento general para calcular $G(S(\mathbf{0}))$ será el siguiente:

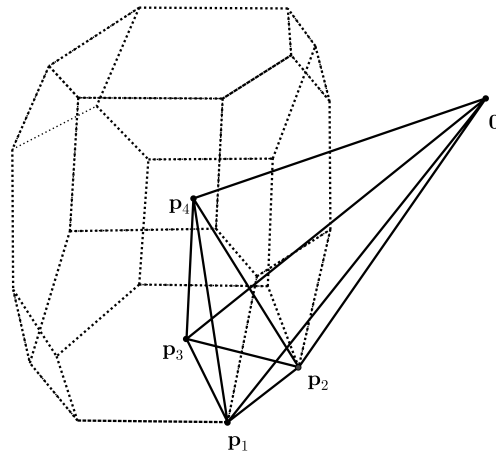


Figura 4.5: Vértices de un 4-simplex.

- Paso 1.** Generamos una partición Q de $S(\mathbf{0})$ en 1440 símplexes 4-dimensionales. Para construir tal partición, notemos que un 4-simplex queda completamente determinado por sus vértices, 5 en este caso, los cuales elegiremos de la siguiente forma: el origen, $\mathbf{0}$, siempre será un vértice; a continuación elegimos 2 vértices adyacentes \mathbf{p}_1 y \mathbf{p}_2 de la celda de Voronoi, lo que equivale a tomar una de las 240 aristas de la celda; a continuación escogemos una cara 2-dimensional de la celda que contenga a esta arista, lo que corresponde a elegir una de las tres caras 2-dimensionales de $S(\mathbf{0})$ que contienen a la arista elegida; el cuarto vértice, que denotamos por \mathbf{p}_3 , será el promedio de los vértices de la 2-cara anteriormente elegida; el quinto y último vértice, que denotamos por \mathbf{p}_4 , será el centro de una de las dos facets que contiene a la 2-cara considerada en el paso anterior. La Figura 4.5 muestra uno de los posibles 4-simplex de la partición. De esta manera construimos una partición de $S(\mathbf{0})$, la cual tiene $240 \times 3 \times 2 = 1440$ símplexes.

Computacionalmente procederemos así: El programa *edge*, ver Apéndice A.2, recibe la lista de los vértice de la celda de Voronoi e identifica la lista completa sus aristas. De manera similar, el programa *verfaces*, recibe el vector de Voronoi asociado a una facet de $S(\mathbf{0})$ y devuelve todos los conjunto de vértices que conforman cada una de las caras 2-dimensionales de la facet. Finalmente el programa *Vertsimplex*, encuentra los vértices de cada uno de los 4-simplex de

la partición antes descrita.

- **Paso 2.** Calculamos el volumen de cada uno de los 4-simplex de la partición Q . Para esto tendremos presente que si $\rho = [p_{01}, p_{02}, \dots, p_{24}, p_{34}]$ es un vector de parámetros de Selling para un lattice, la matriz de Gramm asociada tiene la forma:

$$A = \begin{pmatrix} p_{1|0234} & -p_{12} & -p_{13} & -p_{14} \\ -p_{12} & p_{2|0134} & -p_{23} & -p_{24} \\ -p_{13} & -p_{23} & p_{3|0124} & -p_{34} \\ -p_{14} & -p_{24} & -p_{34} & p_{4|0123} \end{pmatrix}$$

Donde $p_{i|jklm} = p_{ij} + p_{ik} + p_{il} + p_{im}$, además, si Δ es el determinante del lattice, por el Teorema 1.4.5 sabemos que:

$$\Delta = \sum^{(60)} p_{ij} p_{jk} p_{kl} p_{lm} + \sum^{(60)} p_{ij} p_{jk} p_{kl} p_{jm} + \sum^{(5)} p_{ij} p_{ik} p_{il} p_{im}$$

y Δ_{ij} denota la derivada formal de Δ con respecto a p_{ij} .

Adicionalmente, si $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^4$ tiene \mathbf{y} -coordenadas aumentadas $(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4)$, la Proposición 1.4.7, establece que $N(\mathbf{t})$ viene dada por:

$$N(\mathbf{t}) = \frac{1}{\Delta} \left(\sum_{i=1}^4 \Delta_{0i} y_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} (\Delta_{0i} + \Delta_{0j} - \Delta_{ij}) y_i y_j \right). \quad (4.18)$$

Finalmente, si T es un 4-simplex con vértices en $\mathbf{0}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4$ cada uno de ellos expresado en \mathbf{y} -coordenadas, entonces

$$\text{vol}(T) = \frac{1}{24\sqrt{\Delta}} |\det(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4)|. \quad (4.19)$$

El programa *Vol*, ver Apéndice A.2, usa estos hechos y con su ayuda podemos calcular el volumen de un 4-simplex en términos de las \mathbf{y} -coordenadas de sus vértices.

- **Paso 3.** Calculamos $U(S(\mathbf{0}))$, el segundo momento de $S(\mathbf{0})$. Primero notemos que si los vértices de un simplex T son $\mathbf{0}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ y \mathbf{p}_4 , su baricentro es $\mathbf{p}_5 = \frac{1}{5} \sum_{i=0}^4 \mathbf{p}_i$ y entonces

$$I(T) = \frac{1}{30} \sum_{i=0}^5 \|\mathbf{p}_i\|^2, \quad (4.20)$$

adicionalmente, por la igualdad en (4.14), el segundo momento de $S(\mathbf{0})$ viene dado por

$$U(S(\mathbf{0})) = \sum_{T \in Q} \text{Vol}(T) I(T). \quad (4.21)$$

Para calcular $U(S(\mathbf{0}))$ usaremos el programa *Iner*, dicho programa recibe las \mathbf{y} -coordenadas de los vértices de un simplex 4-dimensional y usa la igualdad en (4.20) para calcular el momento de inercia de T respecto al origen.

- **Paso 4.** Finalmente, reemplazamos en la igualdad (4.10), la expresión obtenida en el paso anterior y simplificamos.

Veamos como son estos cálculos para cada uno de los tres Tipos de lattices en dimensión 4.

4.5.1. Constante de cuantización para lattices de Tipo I.

Si L es un lattice 4-dimensional primitivo de Tipo I, el algoritmo de reducción de Charve garantiza la existencia de una superbase obtusa $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ para L . Sea $\rho = [p_{01}, p_{02}, \dots, p_{23}, p_{24}, p_{34}]$, el vector de parámetros de Selling reducidos de L asociados a B , notemos que en este caso $p_{ij} = -v_i \cdot v_j > 0$ para $0 \leq i < j \leq 4$.

Los resultados de la Sección 3.1, proporcionan una descripción detallada en términos de ρ de la celda de Voronoi con centro en el origen, $S(\mathbf{0})$; adicionalmente, en el Apéndice A.1, se encuentra la lista completa de los vértices de dicha celda. Con esta lista y siguiendo los pasos descritos al inicio de la Sección procedemos a calcular $G(\rho)$.

Primero construimos la partición Q de $S(\mathbf{0})$ en 4-simplex, para lo cual es suficiente aplicar a la lista de vértices de Tipo I, el programa *Vertsimplex*, ver programa *Vertsimplex* en el Apéndice A.2.

Consideremos uno de tales simplex, digamos T_0 , que tiene vértices en $\mathbf{0}$, \mathbf{p}_{01234} , \mathbf{p}_{01243} , \mathbf{p}_3 y \mathbf{p}_4 , cuyas \mathbf{y} -coordenadas aumentadas son:

$$\mathbf{p}_{01234} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_{01} + p_{02} + p_{03} + p_{04} \\ -p_{01} + p_{12} + p_{13} + p_{14} \\ -p_{02} - p_{12} + p_{23} + p_{24} \\ -p_{03} - p_{13} - p_{23} + p_{34} \\ -p_{04} - p_{14} - p_{24} - p_{34} \end{pmatrix} \quad \mathbf{p}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_{01} + p_{02} + p_{03} + p_{04} \\ -p_{01} + p_{12} + p_{13} + p_{14} \\ -p_{02} - p_{12} \\ -p_{03} - p_{13} \\ -p_{04} - p_{14} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{p}_{01243} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_{01} + p_{02} + p_{03} + p_{04} \\ -p_{01} + p_{12} + p_{13} + p_{14} \\ -p_{02} - p_{12} + p_{23} + p_{24} \\ -p_{03} - p_{13} - p_{23} - p_{34} \\ -p_{04} - p_{14} - p_{24} + p_{34} \end{pmatrix} \quad \mathbf{p}_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_{01} + p_{02} + p_{03} + p_{04} \\ -p_{01} \\ -p_{02} \\ -p_{03} \\ -p_{04} \end{pmatrix}.$$

tal como lo indica la Figura 4.5. Usando (4.19) tenemos que

$$\begin{aligned} \text{vol}(T_0) &= \frac{1}{24\sqrt{\Delta}} \det \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{01234} & \mathbf{p}_{01243} & \mathbf{p}_3 & \mathbf{p}_4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2^3 \cdot 24\sqrt{\Delta}} (p_{01} + p_{02} + p_{03} + p_{04}) (p_{12} + p_{13} + p_{14}) (p_{23} + p_{24}) p_{34} \end{aligned}$$

y de la igualdad (4.20), su momento de inercia es

$$I(T_0) = \frac{1}{30} (\|\mathbf{p}_{01234} + \mathbf{p}_{01243} + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4\|^2 + \|\mathbf{p}_{01234}\|^2 + \|\mathbf{p}_{01243}\|^2 + \|\mathbf{p}_3\|^2 + \|\mathbf{p}_4\|^2).$$

Después de reemplazar los valores de esas normas y expandir, obtenemos una expresión cuyo numerador tiene 722 sumandos de grado 5, a la que podemos escribir como

$$I(T_0) = \frac{1}{60\Delta} \left(\sum_1^4 10p_{0i}^2 \Delta_{0i} + 3p_{12}^2 \Delta_{12} + 3p_{13}^2 \Delta_{13} + 6p_{14}^2 \Delta_{14} + 3p_{23}^2 \Delta_{23} + 6p_{24}^2 \Delta_{24} + 2p_{34}^2 \Delta_{34} + 2R \right),$$

donde R es la expresión:

$$R = 7p_{01}p_{04}p_{12}p_{13}p_{23} - 9p_{02}p_{03}p_{04}p_{12}p_{14} - 9p_{02}p_{03}p_{04}p_{13}p_{14} - 8p_{01}p_{02}p_{04}p_{13}p_{23} - 2p_{01}p_{03}p_{04}p_{12}p_{23} - 11p_{01}p_{02}p_{03}p_{14}p_{24} - p_{01}p_{03}p_{04}p_{12}p_{24} - 8p_{02}p_{03}p_{12}p_{13}p_{14} - 9p_{02}p_{04}p_{12}p_{13}p_{14} - 9p_{03}p_{04}p_{12}p_{13}p_{14} -$$

$$\begin{aligned}
& 8p_{01}p_{02}p_{13}p_{14}p_{23} - 2p_{01}p_{03}p_{12}p_{14}p_{23} - 8p_{02}p_{03}p_{04}p_{12}p_{13} - 7p_{01}p_{02}p_{03}p_{14}p_{34} - 4p_{01}p_{02}p_{04}p_{13}p_{34} - \\
& 11p_{01}p_{02}p_{13}p_{14}p_{24} + 4p_{01}p_{03}p_{12}p_{14}p_{24} - p_{01}p_{04}p_{12}p_{13}p_{24} - 8p_{02}p_{03}p_{12}p_{13}p_{24} + 7p_{02}p_{04}p_{12}p_{13}p_{23} - \\
& 9p_{01}p_{03}p_{04}p_{23}p_{24} + 4p_{02}p_{03}p_{12}p_{14}p_{24} - 9p_{02}p_{04}p_{12}p_{14}p_{23} + 7p_{03}p_{04}p_{12}p_{13}p_{23} - p_{02}p_{03}p_{13}p_{14}p_{24} + \\
& 2p_{02}p_{04}p_{13}p_{14}p_{23} + 2p_{03}p_{04}p_{12}p_{13}p_{24} + 4p_{03}p_{04}p_{12}p_{14}p_{24} - 9p_{03}p_{04}p_{13}p_{14}p_{23} - 9p_{03}p_{04}p_{13}p_{14}p_{24} - \\
& 8p_{01}p_{02}p_{13}p_{23}p_{24} - 2p_{01}p_{03}p_{12}p_{23}p_{24} + 7p_{01}p_{12}p_{13}p_{14}p_{23} - 7p_{01}p_{02}p_{03}p_{24}p_{34} - 4p_{01}p_{02}p_{04}p_{23}p_{34} + \\
& 5p_{01}p_{02}p_{13}p_{14}p_{34} - 11p_{01}p_{02}p_{14}p_{23}p_{24} - 7p_{01}p_{03}p_{12}p_{14}p_{34} - 4p_{01}p_{04}p_{12}p_{13}p_{34} - p_{01}p_{04}p_{12}p_{23}p_{24} + \\
& 4p_{01}p_{12}p_{13}p_{14}p_{24} - 8p_{02}p_{03}p_{12}p_{13}p_{34} + 7p_{02}p_{12}p_{13}p_{14}p_{23} - p_{01}p_{03}p_{14}p_{23}p_{24} + 2p_{01}p_{04}p_{13}p_{23}p_{24} + \\
& 2p_{02}p_{04}p_{12}p_{13}p_{34} + 4p_{02}p_{12}p_{13}p_{14}p_{24} + 7p_{03}p_{12}p_{13}p_{14}p_{23} + 5p_{02}p_{03}p_{13}p_{14}p_{34} - 9p_{02}p_{04}p_{12}p_{14}p_{34} - \\
& 9p_{03}p_{04}p_{12}p_{23}p_{24} + 4p_{03}p_{12}p_{13}p_{14}p_{24} + 7p_{04}p_{12}p_{13}p_{14}p_{23} + 5p_{02}p_{04}p_{13}p_{14}p_{34} - 9p_{03}p_{04}p_{13}p_{23}p_{24} + \\
& 4p_{04}p_{12}p_{13}p_{14}p_{24} - 9p_{03}p_{04}p_{14}p_{23}p_{24} - 8p_{01}p_{02}p_{13}p_{23}p_{34} - 2p_{01}p_{03}p_{12}p_{23}p_{34} + 7p_{01}p_{12}p_{13}p_{23}p_{24} + \\
& 6p_{01}p_{03}p_{12}p_{24}p_{34} + 10p_{01}p_{04}p_{12}p_{23}p_{34} + 5p_{01}p_{12}p_{13}p_{14}p_{34} + 4p_{01}p_{12}p_{14}p_{23}p_{24} + 7p_{02}p_{12}p_{13}p_{23}p_{24} - \\
& 11p_{01}p_{02}p_{14}p_{24}p_{34} - 7p_{01}p_{03}p_{14}p_{23}p_{34} - p_{01}p_{04}p_{12}p_{24}p_{34} - 4p_{01}p_{04}p_{13}p_{23}p_{34} - 4p_{01}p_{13}p_{14}p_{23}p_{24} - \\
& 7p_{02}p_{03}p_{12}p_{24}p_{34} - 4p_{02}p_{04}p_{12}p_{23}p_{34} + 5p_{02}p_{12}p_{13}p_{14}p_{34} + 4p_{02}p_{12}p_{14}p_{23}p_{24} + 7p_{03}p_{12}p_{13}p_{23}p_{24} - \\
& 7p_{01}p_{03}p_{14}p_{24}p_{34} - 4p_{01}p_{04}p_{13}p_{24}p_{34} - 7p_{02}p_{03}p_{13}p_{24}p_{34} - 4p_{02}p_{04}p_{13}p_{23}p_{34} - 4p_{02}p_{13}p_{14}p_{23}p_{24} + \\
& 5p_{03}p_{12}p_{13}p_{14}p_{34} + 4p_{03}p_{12}p_{14}p_{23}p_{24} + 7p_{04}p_{12}p_{13}p_{23}p_{24} - 7p_{02}p_{03}p_{14}p_{24}p_{34} - 4p_{02}p_{04}p_{14}p_{23}p_{34} - \\
& 4p_{03}p_{13}p_{14}p_{23}p_{24} + 5p_{04}p_{12}p_{13}p_{14}p_{34} + 4p_{04}p_{12}p_{14}p_{23}p_{24} - 4p_{04}p_{13}p_{14}p_{23}p_{24} + 7p_{01}p_{12}p_{13}p_{23}p_{34} + \\
& 5p_{01}p_{02}p_{23}p_{24}p_{34} + 7p_{02}p_{12}p_{13}p_{23}p_{34} + 5p_{01}p_{03}p_{23}p_{24}p_{34} + 4p_{01}p_{12}p_{14}p_{24}p_{34} + 5p_{01}p_{13}p_{14}p_{23}p_{34} + \\
& 7p_{03}p_{12}p_{13}p_{23}p_{34} + 5p_{01}p_{04}p_{23}p_{24}p_{34} + 5p_{01}p_{13}p_{14}p_{24}p_{34} + 4p_{02}p_{12}p_{14}p_{24}p_{34} + 5p_{02}p_{13}p_{14}p_{23}p_{34} + \\
& 7p_{04}p_{12}p_{13}p_{23}p_{34} + 5p_{02}p_{13}p_{14}p_{24}p_{34} + 4p_{03}p_{12}p_{14}p_{24}p_{34} + 5p_{03}p_{13}p_{14}p_{23}p_{34} + 5p_{03}p_{13}p_{14}p_{24}p_{34} + \\
& 4p_{04}p_{12}p_{14}p_{24}p_{34} + 5p_{04}p_{13}p_{14}p_{23}p_{34} + 5p_{04}p_{13}p_{14}p_{24}p_{34} + 5p_{01}p_{12}p_{23}p_{24}p_{34} + 5p_{01}p_{13}p_{23}p_{24}p_{34} + \\
& 5p_{02}p_{12}p_{23}p_{24}p_{34} + 5p_{01}p_{14}p_{23}p_{24}p_{34} + 5p_{02}p_{13}p_{23}p_{24}p_{34} + 5p_{03}p_{12}p_{23}p_{24}p_{34} + 5p_{02}p_{14}p_{23}p_{24}p_{34} + \\
& 5p_{03}p_{13}p_{23}p_{24}p_{34} + 5p_{04}p_{12}p_{23}p_{24}p_{34} + 5p_{03}p_{14}p_{23}p_{24}p_{34} + 5p_{04}p_{13}p_{23}p_{24}p_{34} + 5p_{04}p_{14}p_{23}p_{24}p_{34}.
\end{aligned}$$

La contribución de T_0 al segundo momento no normalizado de la celda de Voronoi $S(\mathbf{0})$, viene dada por $U(T_0) = \text{vol}(T_0)I(T_0)$, cuyo numerador tiene 6070 sumandos, cada uno de grado 9, motivo por el cual no lo escribimos aquí.

Después de sumar los segundos momentos de todos los simples de la partición Q , obtenemos una expresión cuyo numerador consta de 13370 sumandos. Con ayuda de la computadora conseguimos factorizar Δ en ese numerador, y si definimos:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum^{(10)} p_{ij} \\
S_2^{(I)} &= \sum^{(60)} p_{ij}p_{jk}p_{kl}p_{lm}p_{mj} + \sum^{(12)} p_{ij}p_{jk}p_{kl}p_{lm}p_{mi} \\
K^{(I)} &= \sum^{(30)} p_{ij}p_{jk}p_{ki}p_{il}p_{im} + \sum^{(60)} p_{ij}p_{jk}p_{ki}p_{il}p_{jm} + \sum^{(60)} p_{ij}p_{jk}p_{ki}p_{il}p_{lm} + \\
&\quad \sum^{(12)} p_{ij}p_{jk}p_{kl}p_{lm}p_{mi}
\end{aligned} \tag{4.22}$$

donde el supraíndice (I) designa el Tipo I, y el índice sobre la sumatoria cuenta la cantidad de términos de la misma. $U(S(\mathbf{0}))$ toma la forma:

$$U(S(\mathbf{0})) = \frac{\Delta S_1 + 2S_2^{(I)} + K^{(I)}}{12\Delta^{1/2}} \tag{4.23}$$

Finalmente, al sustituir (4.23) en la fórmula (4.10), y simplificar, obtenemos la constante de cuantización del lattice, la cual presentamos en el siguiente teorema.

Teorema 4.5.1 (Constante de cuantización para lattices de Tipo I). *Sea L un lattice de Tipo I con parámetros de Selling reducidos $\rho = [p_{01}, p_{02}, \dots, p_{24}, p_{34}]$, y sean Δ el determinante de L , S_1 ,*

$S_2^{(I)}$ y $K^{(I)}$ como en (4.22), entonces la constante de cuantización de L viene dada por:

$$G(\rho) = \frac{\Delta S_1 + 2S_2^{(I)} + K^{(I)}}{48\Delta^{5/4}} \quad (4.24)$$

4.5.2. Constante de cuantización para lattices de Tipo II.

Si L es un lattice 4-dimensional primitivo de Tipo II, con vector de parámetros de Selling reducidos $\rho = [p_{01}, p_{02}, \dots, p_{24}, p_{34}]$, del algoritmo de reducción de Charve, sabemos que $p_{01} < 0$ los otros parámetros p_{ij} son positivos y $|p_{01}| \leq p_{ij}$ para $\{i, j\} \cap \{0, 1\} \neq \emptyset$, y sea $S(\mathbf{0})$ la celda de Voronoi de L con centro en el origen. Los resultados de la sección 3.2, proporcionan una descripción detallada de las componentes básicas de dicha celda en función ρ . En el Apéndice A.1, se encuentra la lista de los vértices, en términos los vectores de una superbases reducida del lattice.

Las cuentas para calcular $G(\rho)$ en lattices de Tipo II son similares a las hechas en el caso de los lattices de Tipo I, con algunos pequeños cambios, en este caso, obtuvimos que el segundo momento de $S(\mathbf{0})$, tiene un numerador con 13762 sumandos de grado 9, en el que también logramos factorizar un determinante Δ del lattice, si definimos

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum^{(10)} p_{ij} \\ S_2^{(II)} &= S_2^{(I)} - 2p_{01}^3(p_{23}p_{24} + p_{23}p_{34} + p_{24}p_{34}) \\ K^{(II)} &= K^{(I)} + 2p_{01}^4(p_{23} + p_{24} + p_{34}) \end{aligned} \quad (4.25)$$

podemos expresar $U(S(\mathbf{0}))$ como:

$$U(S(\mathbf{0})) = \frac{\Delta S_1 + 2S_2^{(II)} + K^{(II)}}{12\Delta^{1/2}} - \frac{p_{01}^5}{15\Delta^{1/2}}, \quad (4.26)$$

así las cosas, al reemplazar (4.26) en (4.10), obtenemos el siguiente teorema:

Teorema 4.5.2 (Constante de cuantización para lattices de Tipo II). *Si L es un lattice de Tipo II con parámetros de Selling reducidos $\rho = [p_{01}, p_{02}, p_{03}, \dots, p_{24}, p_{34}]$, y Δ es el determinante de L , y $S_1, S_2^{(II)}$ y $K^{(II)}$ son como en (4.25), entonces la constante de cuantización de L viene dada por:*

$$G(\rho) = \frac{\Delta S_1 + 2S_2^{(II)} + K^{(II)}}{48\Delta^{5/4}} - \frac{p_{01}^5}{60\Delta^{5/4}} \quad (4.27)$$

4.5.3. Constante de cuantización para lattices de Tipo III.

Si L es un lattice 4-dimensional primitivo de Tipo III, por el algoritmo de reducción de Charve el vector de parámetros de Selling reducidos $\rho = [p_{01}, p_{02}, p_{03}, \dots, p_{24}, p_{34}]$ para L es tal que $p_{01} < 0$, $p_{34} < 0$, los restantes $p_{ij} \geq 0$ y $|p_{01}| \leq p_{ij}$ siempre que $\{i, j\} \cap \{0, 1\} \neq \emptyset$, $|p_{34}| \leq p_{ij}$ para $\{i, j\} \cap \{3, 4\} \neq \emptyset$, y $|p_{01} + p_{34}| \leq p_{ij}$ con $p_{ij} \in \{p_{03}, p_{04}, p_{13}, p_{14}\}$. Si como antes, $S(\mathbf{0})$ es la celda de Voronoi centrada en el origen, los resultados de la sección 3.3 nos dan una descripción detallada de dicha celda en términos de ρ . En el Apéndice A.1, se encuentra la lista de los vértices $S(\mathbf{0})$ en términos de una superbases reducida de L .

Las cuentas para calcular $G(\rho)$ son similares a las hechas con los lattices de Tipo I y II, en este caso el numerador de $U(S(\mathbf{0}))$ tiene 14214 sumandos de grado 9.

Si Δ es el determinante del lattice, y

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum^{(10)} p_{ij} \\ S_2^{(III)} &= S_2^{(II)} - 2p_{34}^3(p_{01}^2 + p_{01}p_{02} + p_{01}p_{12} + p_{02}p_{12}) \\ K^{(III)} &= K^{(II)} + 2p_{34}^4(2p_{01} + p_{02} + p_{12}) \end{aligned} \quad (4.28)$$

logramos expresar $U(S(\mathbf{0}))$ en la forma:

$$U(S(\mathbf{0})) = \frac{\Delta S_1 + 2S_2^{(III)} + K^{(III)}}{12\Delta^{1/2}} - \frac{p_{01}^5}{15\Delta^{1/2}} - \frac{p_{34}^5}{10\Delta^{1/2}} \quad (4.29)$$

luego de reemplazar (4.29) en (4.10), y simplificar, obtenemos:

Teorema 4.5.3 (Constante de cuantización para lattices de Tipo III). *Si L es un lattice de Tipo III con vector de parámetros de Selling reducidos $\rho = [p_{01}, p_{02}, p_{03}, \dots, p_{24}, p_{34}]$ y si Δ es el determinante del lattice, y S_1 , $S_2^{(III)}$ y $K^{(III)}$ son como en (4.28), entonces L tiene constante de cuantización*

$$G(\rho) = \frac{\Delta S_1 + 2S_2^{(III)} + K^{(III)}}{48\Delta^{5/4}} - \frac{p_{01}^5}{60\Delta^{5/4}} - \frac{p_{34}^5}{40\Delta^{5/4}} \quad (4.30)$$

En resumen, si ρ es el vector de parámetros de Selling reducidos para un lattice 4-dimensional L , y $G(\rho)$ es la constante de cuantización para dicho lattice, entonces:

$$G(\rho) = \begin{cases} \frac{\Delta S_1 + 2S_2^{(I)} + K^{(I)}}{48\Delta^{5/4}} & \text{si } \rho \text{ es de Tipo I} \\ \frac{\Delta S_1 + 2S_2^{(II)} + K^{(II)}}{48\Delta^{5/4}} - \frac{p_{01}^5}{60\Delta^{5/4}} & \text{si } \rho \text{ es de Tipo II} \\ \frac{\Delta S_1 + 2S_2^{(III)} + K^{(III)}}{48\Delta^{5/4}} - \frac{p_{01}^5}{60\Delta^{5/4}} - \frac{p_{34}^5}{40\Delta^{5/4}} & \text{si } \rho \text{ es de Tipo III} \end{cases} \quad (4.31)$$

Observación 4.5.4. La naturaleza de la función hace que ella sea continua en el espacio de los lattices. Sin embargo debe tenerse cuidado con la forma de calcular el valor que ella asume en un lattice dado. Note que si $V = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ es una superbase reducida para un lattice L , es claro que cualquier reordenamiento de sus vectores sigue siendo una superbase reducida de L , por lo tanto, si $\rho = [p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{04}, p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34}]$ es un vector de parámetros de Selling reducidos para L y si σ es una permutación de $0\ 1\ 2\ 3\ 4$, el vector $\sigma \cdot \rho := [p_{\sigma(0)\sigma(1)}, p_{\sigma(0)\sigma(2)}, \dots, p_{\sigma(2)\sigma(4)}, p_{\sigma(3)\sigma(4)}]$, también es un vector de parámetros de Selling reducidos para L , así pues, en general L tiene $5! = 120$ vectores de Selling que lo representan. Este hecho debe tenerse presente en las consideraciones de continuidad de la función que como advertimos es continua en el espacio de los lattices, pero usamos los parámetros de Selling reducidos para conocer el valor de dicha función en lattices concretos.

El siguiente corolario muestra que la constante de cuantización de un lattice es invariante por homotecias.

Corolario 4.5.5. *Sea $t > 0$ y L un lattice en \mathbb{R}^4 con parámetros de Selling reducidos $\rho = [p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{04}, p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34}]$, entonces el lattice $\sqrt{t}L$ es del mismo Tipo que L y tiene parámetros de Selling reducidos $t\rho := [tp_{01}, tp_{02}, \dots, tp_{24}, tp_{34}]$. Además se cumple*

$$G(t\rho) = G(\rho) \quad (4.32)$$

Demostración. Sea $t > 0$, y $\rho = [p_{01}, p_{02}, p_{03}, \dots, p_{24}, p_{34}]$. La primera afirmación es clara, ya que si $V = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ es una superbase reducida de L , $\sqrt{t}V := \{\sqrt{t}\mathbf{v}_0, \sqrt{t}\mathbf{v}_1, \sqrt{t}\mathbf{v}_2, \sqrt{t}\mathbf{v}_3, \sqrt{t}\mathbf{v}_4\}$ lo es para $\sqrt{t}L$, y por las propiedades del producto interno en \mathbb{R}^4 tenemos que $[tp_{01}, tp_{02}, \dots, tp_{24}, tp_{34}]$ es el vector de parámetros reducidos correspondiente. Para ver la segunda afirmación, es suficiente notar que todos los términos en el numerador de $G(\rho)$ son homogéneos de grado 5, mientras que la cantidad sub-radical en el denominador lo es de grado 4, el resultado se sigue de las propiedades de la potenciación. \square

Observación 4.5.6. Como consecuencia del Corolario 4.5.5, todo lattice en \mathbb{R}^4 es equivalente a otro cuyo vector de parámetros de Selling reducidos tiene 1 o -1 en la primera posición, dependiendo de si el lattice es o no de Tipo I.

4.6. Algunos valores para la constante de cuantización $G(\rho)$.

Una vez que tenemos la expresión para la constante de cuantización en términos de los parámetros de Selling reducidos del lattice, podemos calcular rápidamente dicho valor. Es importante destacar que las fórmulas que encontramos solo son validas si los parámetros son reducidos, por lo que es indispensable usar primero el algoritmo de reducción de formas cuadráticas dado en la Sección 2.3.2.

1. **El lattice de raíz A_4 .** Los parámetros de Selling reducidos de A_4 son $[1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1]$, por lo que es un lattice de Tipo I, por el Teorema 4.5.1,

$$G(A_4) = \frac{\Delta(A_4)S_1(A_4) + 2S_2^{(I)}(A_4) + K^{(I)}(A_4)}{48\Delta(A_4)^{5/4}}$$

donde

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum^{(10)} p_{ij} \\ S_2^{(I)} &= \sum^{(60)} p_{ij}p_{jk}p_{kl}p_{lm}p_{mj} + \sum^{(12)} p_{ij}p_{jk}p_{kl}p_{lm}p_{mi} \\ K^{(I)} &= \sum^{(30)} p_{ij}p_{jk}p_{ki}p_{il}p_{im} + \sum^{(60)} p_{ij}p_{jk}p_{ki}p_{il}p_{jm} + \sum^{(60)} p_{ij}p_{jk}p_{ki}p_{il}p_{lm} + \\ &\quad \sum^{(12)} p_{ij}p_{jk}p_{kl}p_{lm}p_{mi} \end{aligned}$$

Al evaluar cada una de estas expresiones obtenemos que $\Delta = 5$, $S_1 = 5$, $K = 1$ y $S_2 = 1$, por lo tanto la constante de cuantización de A_4 es $G(A_4) = \frac{5 \cdot 5 + 2 \cdot 1 + 1}{48 \cdot (5)^{5/4}} \approx 0,0780197022$.

2. **El lattice dual A_4^* .** Este lattice también es de Tipo I, ya que tiene parámetros de Selling reducidos $[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$, cuantas similares a las anteriores muestran que su constante de cuantización es $G(A_4^*) \approx 0,0775587567$.
3. **El lattice dual D_4^* .** Sus parámetros de Selling reducidos son $D_4^* = [-1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0]$, por tanto D_4^* es un lattice de Tipo II con constante de cuantización $G(D_4^*) \approx 0,0766032346$.

4. El mejor “packing-covering lattice” en dimensión 4. A este lattice se suele denotar por Ho_4 , [Sc, Cap 5. pag 100], una matriz de Gram es:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & 4 \end{bmatrix},$$

usando el algoritmo de reducción de Charve descrito en (2.3.2), encontramos que los parámetros de Selling reducidos para Ho_4 son:

$$Ho_4 = [-1, 1, 1, 36602, 1, 36602, 1, 1, 36602, 1, 36602, 0, 36602, 0, 366025, -0, 36602],$$

con lo cual Ho_4 es un lattice Tipo III, con constante de cuantización $G(Ho_4) \approx 0,07693771799$.

5. Los lattices de Dickson de tipo α . Para cada $\alpha \in (-1, 2)$ la matriz

$$Di_{4\alpha} = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & -1 & -1 \\ \alpha & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 - \alpha \\ -1 & -1 & 1 - \alpha & 2 \end{bmatrix},$$

es definida positiva, y por la correspondencia entre lattices y formas cuadráticas definidas positivas, $Di_{4\alpha}$ es la matriz de Gram de un lattice 4-dimensional. Después de aplicarle el algoritmo de reducción de Charve a ésta matriz encontramos que:

- Para $\alpha \in (-1, 0]$, $Di_{4\alpha}$ es un lattice de tipo II, con parámetros de Selling reducidos $Di_{4\alpha} = [-1 - \alpha, 1, 1, 1 + \alpha, 1 + \alpha, 1 + \alpha, 1 + \alpha, -\alpha, 0, 0]$, y constante de cuantización

$$G(Di_{4\alpha}) = \frac{(\alpha + 1)^2(-7\alpha^3 + 9\alpha^2 + 39\alpha - 52)}{120(-\alpha^2 + \alpha + 2)^{5/2}}.$$

- Para $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$, $Di_{4\alpha}$ es un lattice de tipo III, con parámetros de Selling reducidos $Di_{4\alpha} = [-1 - \alpha, 1, 1, 1 + \alpha, 1 + \alpha, 1 + \alpha, 1 + \alpha, -\alpha, 0, 0]$, y constante de cuantización

$$G(Di_{4\alpha}) = \frac{16\alpha^5 + 5\alpha^4 - 50\alpha^3 - 35\alpha^2 + 65\alpha + 52}{120(-\alpha^2 + \alpha + 2)^{5/2}}.$$

- Para $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$, $Di_{4\alpha}$ es un lattice de tipo III, con parámetros de Selling reducidos $Di_{4\alpha} = [-\alpha, \alpha, 1, 1, \alpha, 1, 1, 1 - \alpha, 1 - \alpha, \alpha - 1]$, y constante de cuantización

$$G(Di_{4\alpha}) = \frac{-16\alpha^5 + 85\alpha^4 - 130\alpha^3 + 5\alpha^2 + 55\alpha + 53}{120(-\alpha^2 + \alpha + 2)^{5/2}}.$$

- Para $\alpha \in [1, 2)$, $Di_{4\alpha}$ es un lattice de tipo II, con parámetros de Selling reducidos $Di_{4\alpha} = [-2 + \alpha, 1, 1, 2 - \alpha, 2 - \alpha, 2 - \alpha, 2 - \alpha, \alpha - 1, 0, 0]$, y constante de cuantización

$$G(Di_{4\alpha}) = \frac{(\alpha - 2)^2(-7\alpha^3 + 12\alpha^2 + 36\alpha + 11)}{120(-\alpha^2 + \alpha + 2)^{5/2}}.$$

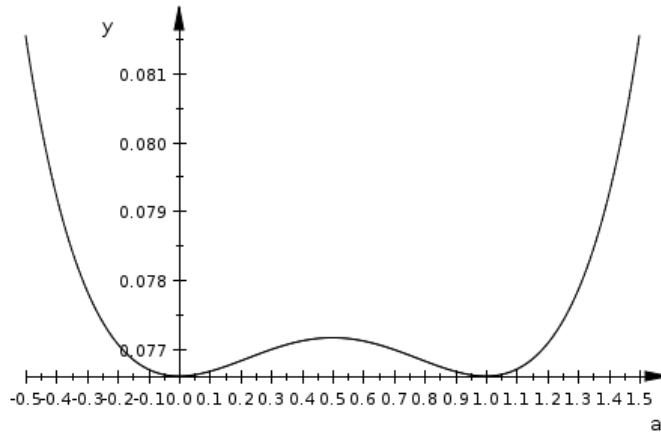


Figura 4.6: Comportamiento de $G(Di_{4a})$ para la familia Dickson.

La siguiente es la gráfica de la constante de cuantización para la familia Di_{4a} . Es importante resaltar que aunque el lattice Di_{4a} , con $a = \frac{5-\sqrt{13}}{2}$ es óptimo local para el “covering lattice problem” en dimensión 4, no se destaca cuando se lo mira como un retículo cuantizador.

6. Los lattices de Dickson de tipo β . Consideremos la familia de vectores $Di_{4b}(\beta, \gamma) = [-\gamma, 1, 1, 1, 1, 1, \beta, \beta, \beta]$, cada elemento de esta familia representa un lattice en \mathbb{R}^4 si la matriz de Gram asociada

$$\begin{bmatrix} 3-\gamma & \gamma & -1 & -1 \\ \gamma & 3-\gamma & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2+2\beta & -\beta \\ -1 & -1 & -\beta & 2+2\beta \end{bmatrix},$$

es definida positiva, es decir si los menores principales de dicha matriz son positivos. De aquí que:

$$\begin{aligned} 3-\gamma &> 0 \\ 6\beta-2\gamma-2\beta\gamma+5 &> 0 \\ 18\beta-4\gamma-3\beta^2\gamma+9\beta^2-8\beta\gamma+8 &> 0 \\ 36\beta-8\gamma-18\beta^2\gamma+27\beta^2-24\beta\gamma+12 &> 0 \end{aligned}$$

lo cual ocurre para $-2/3 < \beta < \infty$ y $-\infty < \gamma < 3/2$. En el caso $\beta = 0,54415$ y $\gamma \cong 0,50009$, obtenemos el lattice de Dickson $Di_{4\beta}$, que resulta ser un lattice Tipo II con parámetros de Selling reducidos $Di_{4\beta} = [-\gamma, 1, 1, 1, 1, 1, \beta, \beta, \beta]$, y constante de cuantización $G(Di_{4\beta}) \approx 0,0774655442$. Como en el caso Di_{4a} , este lattice no se destaca cuando se lo mira como un retículo cuantizador.

Observación 4.6.1. Tras largas búsquedas computacionales con lattices arbitrarios en cada uno de los tres tipo, encontramos que los valores más pequeños de $G(\rho)$ ocurren en los lattices A_4^* y D_4^* . En la siguiente sección demostramos que ellos son mínimos locales de G . Lo que confirma los resultados numéricos obtenidos por Agrell y Eriksson en [AE].

4.7. A_4^* y D_4^* son mínimos locales para $G(\rho)$.

Teorema 4.7.1. *El lattice A_4^* es un mínimos local de la función $G(\rho)$.*

Demostración. Por el Corolario 4.5.5, no hay pérdida de generalidad al suponer que $p_{01} = 1$ para los lattices de Tipo I, y temporalmente, denotemos a p_{02} con ρ_2 , a p_{03} con ρ_3 , etc., es decir $\rho_2 = p_{02}$, $\rho_3 = p_{03}$, $\rho_4 = p_{04}$, $\rho_5 = p_{12} = \rho_5$, $\rho_6 = p_{13}$, $\rho_7 = p_{14}$, $\rho_8 = p_{23}$, $\rho_9 = p_{24} = \rho_9$, y $\rho_{10} = p_{34} = \rho_{10}$.

Calculamos ahora las derivadas parciales $\frac{\partial G}{\partial \rho_i}$ para $i = 2, \dots, 10$, utilizando la fórmula (4.24), cada una de estas derivadas tiene alrededor de dos mil términos en el numerador, no obstante, con la ayuda de la computadora se verifica rápidamente que en el punto $\rho = A_4^* = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$ es un cero simultaneo de todas ellas, es decir,

$$\frac{\partial G}{\partial \rho_i}(A_4^*) = 0 \quad \text{para } 2 \leq i \leq 10.$$

Por consiguiente A_4^* es un punto crítico de G .

Adicionalmente, la matriz Hessiana de G , tiene entradas $(H_G)_{ij} = \frac{\partial^2 G}{\partial \rho_i \partial \rho_j}$ para $i, j = 2, \dots, 10$. Nuevamente con la ayuda de la computadora, calculamos y evaluamos esta matriz en el punto A_4^* , los cálculos muestran que ella es el producto de un escalar positivo con la matriz

$$\begin{pmatrix} 111 & 14 & 14 & 14 & -65 & -65 & 14 & 14 & -65 \\ 14 & 111 & 14 & -65 & 14 & -65 & 14 & -65 & 14 \\ 14 & 14 & 111 & -65 & -65 & 14 & -65 & 14 & 14 \\ 14 & -65 & -65 & 111 & 14 & 14 & 14 & 14 & -65 \\ -65 & 14 & -65 & 14 & 111 & 14 & 14 & -65 & 14 \\ -65 & -65 & 14 & 14 & 14 & 111 & -65 & 14 & 14 \\ 14 & 14 & -65 & 14 & 14 & -65 & 111 & 14 & 14 \\ 14 & -65 & 14 & 14 & -65 & 14 & 14 & 111 & 14 \\ -65 & 14 & 14 & -65 & 14 & 14 & 14 & 14 & 111 \end{pmatrix}$$

Se verificar fácilmente (con la computadora) que los menores principales de la última matriz son positivos, con lo cual la Hessiana $H_G(A_4^*)$ es definida positiva, y por lo tanto A_4^* es un mínimo local de G . \square

Teorema 4.7.2. *El lattice D_4^* es un mínimo local de la función $G(\rho)$.*

Demostración. Este caso es un poco más complicado que el anterior, ya que mientras A_4^* se encuentra en el interior de la región de los lattices de Tipo I, D_4^* , por el contrario, se encuentra en una ‘esquina’ del espacio de los lattices, es decir, en la intersección de ‘paredes’ que dividen a los distintos tipos de lattices, tal como se Sección 3.4.

Las ‘paredes’, separan regiones de lattices de Tipo II y III, por lo que a D_4^* uno puede acercarse por lattices de Tipo II y también por lattices de Tipo III. De este modo, para verificar que D_4^* es un mínimo local, es necesario tener en cuenta esto y verificar la condición de minimalidad en ambas fórmulas, (4.27) y (4.30)¹. Queda claro que es suficiente analizar sólo dos regiones, la de Tipo II que está ‘cerca’ a D_4^* y la de Tipo III que se acerca a D_4^* . No es necesario ver cómo son todas las paredes

¹es similar a tomar límites laterales en una función definida a tramos.

que contienen a D_4^* ni tampoco qué sucede en los dos semiespacios que ellas determinan, ya que toda la información sobre lattices cercanos a D_4^* estará contenida en las dos regiones consideradas.

Veamos primero qué ocurre cuando nos acercamos a D_4^* dentro del espacio de lattices de Tipo II. Por el Corolario 4.5.5, no hay pérdida de generalidad al suponer $p_{01} = -1$ para los lattices de Tipo II, y denotemos por ρ_2 a p_{02} , y así sucesivamente $\rho_3 = p_{03}, \dots, \rho_{10} = p_{34}$. Con la ayuda de la computadora hacemos los cálculos de las primeras derivadas parciales $\frac{\partial G}{\partial \rho_i}$, esta vez utilizando la fórmula (4.27), se verifica que dichas derivadas se anulan en D_4^* , es decir

$$\frac{\partial G}{\partial \rho_i}(D_4^*) = 0 \quad \text{para } 2 \leq i \leq 10.$$

Con lo cual D_4^* es un punto crítico de G .

Adicionalmente, la matriz Hessiana $H_G = \left(\frac{\partial^2 G}{\partial \rho_i \partial \rho_j} \right)$ para $i, j = 2, \dots, 10$, evaluada en D_4^* , es un múltiplo escalar positivo de

$$\begin{pmatrix} 12 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & -2 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

dado que todos los menores principales de dicha matriz son positivos, ella es definida positiva, y en consecuencia D_4^* es un mínimo local de G para los lattices de Tipo II.

Algo similar ocurre cuando nos acercamos a D_4^* por lattices de Tipo III. En este caso procedemos de manera similar al anterior, pero usando la expresión de $G(\rho)$ para lattices de Tipo III, fórmula (4.30), y observamos nuevamente que D_4^* es un punto crítico de G , la matriz Hessiana es la misma que en el caso anterior y por lo tanto D_4^* es un mínimo local de G para los lattices de Tipo III.

De todo lo anterior, podemos concluir que D_4^* es un mínimo local de G . □

En el siguiente capítulo presentamos algunos adelantos en la búsqueda del mínimo global del problema de cuantización para lattices 4-dimensionales.

Capítulo 5

Un sistema algebraico asociado al problema del retículo cuantizador óptimo en dimensión 4.

Una vez que tenemos en forma explícita la fórmula para la constante de cuantización de lattices en dimensión 4, expresión (4.31), el problema de obtener el retículo óptimo en dicha dimensión consiste en determinar el mínimo de esa función. Es decir, minimizar la expresión

$$G(\rho) = \begin{cases} \frac{\Delta S_1 + 2S_2^{(I)} + K^{(I)}}{48\Delta^{5/4}} & \text{si } \rho \text{ es de Tipo I} \\ \frac{\Delta S_1 + 2S_2^{(II)} + K^{(II)}}{48\Delta^{5/4}} - \frac{p_{01}^5}{60\Delta^{5/4}} & \text{si } \rho \text{ es de Tipo II} \\ \frac{\Delta S_1 + 2S_2^{(III)} + K^{(III)}}{48\Delta^{5/4}} - \frac{p_{01}^5}{60\Delta^{5/4}} - \frac{p_{34}^5}{40\Delta^{5/4}} & \text{si } \rho \text{ es de Tipo III} \end{cases} \quad (5.1)$$

El ataque natural a este problema, sería intentar determinar todos los mínimos locales de cada una de la funciones, y luego comparar esos valores y así obtener el mínimo global. Dado que las expresiones involucradas son funciones suaves, se podría pensar en utilizar métodos del análisis diferencial. Por ejemplo, el método de los multiplicadores de Lagrange, éste método funciona bien en dimensión dos, pero para dimensión tres o superiores, las expresiones involucradas hacen que el método deje de funcionar. Barnes & Sloane [BS], advirtieron esa complicación, y debieron recurrir a herramientas matemáticas muy ingeniosas para resolver el problema en dimensión tres.

Una complicación adicional para nuestro caso es que en lugar de una, tenemos tres fórmulas distintas. Una posible herramienta para buscar mínimos locales es el llamado *método variaciones*, que se puede utilizar en numerosos contextos matemáticos.

Dado que nuestra función $G(\rho)$ es un cociente, por razones mnemotécnicas la denotaremos como $\frac{Num(\rho)}{Den(\rho)}$, notemos que tanto el numerador $Num(\rho)$ como el denominador $Den(\rho)$ son muy grandes, a saber, son polinomios homogéneos de grado 5 con más de 500 términos en 10 variables. De modo que resulta difícil comparar los valores de la función en dos lattices distintos. Sin embargo, si el denominador de ambos lattices fuese el mismo, entonces la comparación resultaría muchísimo más fácil de evaluar. Es por esta razón que se piensa en un método donde uno se mueva por un subespacio

de lattices con el mismo denominador. Como en este caso $Den(\rho)$ es esencialmente el determinante del lattice, sería como movernos dentro del subespacio de los lattices con el mismo determinante o equivalentemente con el mismo volumen, lo que no nos quita generalidad, ya que como hemos dicho en Corolario 4.5.5 la constante de cuantización entre lattices semejantes no cambia.

En el presente capítulo haremos una breve presentación de dicho método, adaptándolo a nuestro caso, presentaremos algunas ventajas del mismo y mostraremos la obstrucción encontrada.

5.1. Variaciones que fijan el determinante.

Definición 5.1.1. Sean $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función, $\epsilon > 0$, m y ρ vectores en \mathbb{R}^n . Decimos que $\tilde{\rho} = \rho + \epsilon m$, fija a $F(\rho)$ hasta el primer orden de ϵ , si $F(\tilde{\rho}) = F(\rho) + \epsilon^2 R$, siendo R una expresión polinómica en ϵ .

Consideremos Δ como la función que asigna a cada lattice L su determinante. Por comodidad representaremos a L por medio de uno cualquiera de los vectores $\rho = [p_{01}, p_{02}, p_{03}, \dots, p_{24}, p_{34}]$ de parámetros de Selling reducidos. Para ρ fijo, consideremos $\tilde{\rho} = \rho + \epsilon m$ de tal manera que represente un lattice en \mathbb{R}^4 , es decir, la matriz de Gram asociada a $\tilde{\rho}$ es definida positiva. Por el Teorema de Taylor para funciones en varias variables, podemos escribir:

$$\Delta(\tilde{\rho}) = \Delta(\rho) + \epsilon(d\Delta(\rho)) \cdot m + \epsilon^2 R \quad (5.2)$$

donde $d\Delta(\rho)$ es el diferencial de la función Δ valuado en ρ . Para que $\tilde{\rho}$ deje fijo a $\Delta(\rho)$ hasta el primer orden de ϵ es necesario y suficiente que

$$d\Delta(\rho) \cdot m = 0. \quad (5.3)$$

Sin pérdida de generalidad, y para facilitar los cálculos, vamos a considerar que m es de la forma $A\rho$, donde $A = (a_{ij})$ es una matriz cuadrada de tamaño 10×10 a determinar. Así las cosas nos proponemos encontrar condiciones sobre A para que se satisfaga la igualdad (5.3).

Más explícitamente, si

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{09} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{19} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{90} & a_{91} & \cdots & a_{99} \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned} m &= A\rho \\ &= \begin{pmatrix} a_{00} p_{01} + a_{01} p_{02} + \cdots + a_{09} p_{34} \\ a_{10} p_{01} + a_{11} p_{02} + \cdots + a_{19} p_{34} \\ \vdots \\ a_{90} p_{01} + a_{91} p_{02} + \cdots + a_{99} p_{34} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y como

$$d\Delta(\rho) = (\Delta_{01}(\rho), \Delta_{02}(\rho), \dots, \Delta_{34}(\rho))$$

donde $\Delta_{ij}(\rho)$ es la derivada formal de Δ respecto a p_{ij} evaluada en ρ , al reemplazar en (5.3), obtenemos

$$d\Delta(\rho) \cdot m = 0$$

$$(\Delta_{01}(\rho), \Delta_{02}(\rho), \dots, \Delta_{34}(\rho)) \cdot \begin{pmatrix} a_{00} p_{01} + a_{01} p_{02} + \dots + a_{09} p_{34} \\ a_{10} p_{01} + a_{11} p_{02} + \dots + a_{19} p_{34} \\ \vdots \\ a_{90} p_{01} + a_{91} p_{02} + \dots + a_{99} p_{34} \end{pmatrix} = 0. \quad (5.4)$$

Expandimos el miembro izquierdo de (5.4), y agrupamos por términos semejantes, obtenemos una expresión polinómica en las variables $p_{01}, p_{02}, \dots, p_{34}$ (ver Apéndice A.3), al exigir que dicho polinomio sea idénticamente cero, conseguimos un sistema de ecuaciones cuyas variables son las entradas de la matriz $A = (a_{ij})$, las soluciones del sistema permiten construir vectores $m = A\rho$, tales que $\tilde{\rho} = \rho + \epsilon m$ fija a $\Delta(\rho)$ hasta el primer orden de ϵ . Las cuentas intermedias se pueden consultar en el Apéndice A.3. Con una manipulación algebraica un poco más cuidadosa, logramos escribir a $\tilde{\rho} = \rho + \epsilon m$ en la forma $\tilde{\rho} = \rho + \epsilon \sum_{i=0}^{14} t_i w_i$, donde los t_i son números reales, y los w_i son como sigue:

$$w_0 = \begin{pmatrix} p_{01} + p_{02} + p_{03} + p_{04} \\ 0 \\ 0 \\ -p_{01} - p_{02} - p_{03} - p_{04} \\ -p_{02} \\ -p_{03} \\ p_{01} - p_{04} \\ 0 \\ p_{02} \\ p_{03} \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} p_{01} + p_{02} + p_{03} + p_{04} \\ 0 \\ -p_{01} - p_{02} - p_{03} - p_{04} \\ 0 \\ -p_{02} \\ p_{01} - p_{03} \\ -p_{04} \\ p_{02} \\ 0 \\ p_{04} \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} p_{01} - p_{02} - p_{03} - p_{04} + 2p_{12} + 2p_{13} + 2p_{14} \\ -p_{02} - 2p_{12} \\ -p_{03} - 2p_{13} \\ p_{01} - p_{04} - 2p_{14} \\ p_{02} + p_{12} \\ p_{03} + p_{13} \\ p_{04} - p_{01} - p_{12} - p_{13} \\ 0 \\ p_{12} \\ p_{13} \end{pmatrix},$$

$$w_3 = \begin{pmatrix} p_{01} + p_{12} + p_{13} + p_{14} \\ -p_{12} \\ p_{01} - p_{13} \\ -p_{14} \\ 0 \\ -p_{01} - p_{12} - p_{13} - p_{14} \\ 0 \\ p_{12} \\ 0 \\ p_{14} \end{pmatrix}, \quad w_4 = \begin{pmatrix} -p_{01} - 2p_{12} - p_{14} \\ 2p_{02} + 2p_{12} + 2p_{23} + p_{24} \\ -p_{03} - 2p_{23} - p_{34} \\ p_{02} + p_{04} + p_{14} - p_{24} + p_{34} \\ 0 \\ -p_{13} \\ p_{12} \\ 0 \\ -p_{02} - p_{12} - p_{23} \\ p_{23} \end{pmatrix}, \quad w_5 = \begin{pmatrix} p_{14} - p_{02} - p_{03} - p_{04} - p_{12} - p_{01} \\ p_{02} + p_{12} + p_{23} + 2p_{24} \\ p_{02} - p_{23} + p_{34} \\ -2p_{04} - p_{14} - 2p_{24} - p_{34} \\ p_{02} + p_{12} \\ p_{03} + p_{12} + p_{13} \\ -p_{02} - p_{12} - p_{24} \\ 0 \\ p_{24} \\ p_{14} - p_{02} - p_{03} - p_{04} - p_{13} - p_{01} \end{pmatrix},$$

$$w_6 = \begin{pmatrix} -p_{01} - p_{13} - p_{14} \\ -p_{02} - p_{23} - p_{24} \\ p_{03} + p_{13} + p_{23} \\ p_{04} + p_{14} + p_{24} \\ -p_{12} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ p_{34} \end{pmatrix}, \quad w_7 = \begin{pmatrix} p_{14} - p_{02} - p_{03} - p_{04} - p_{01} \\ p_{24} \\ p_{34} \\ -2p_{04} - p_{14} - p_{24} - p_{34} \\ p_{02} + p_{12} \\ p_{03} + p_{13} \\ p_{04} \\ p_{23} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_8 = \begin{pmatrix} p_{14} - p_{02} - p_{03} - p_{04} - p_{13} - p_{01} \\ p_{03} - p_{23} + p_{24} \\ p_{03} + p_{13} + p_{23} + 2p_{34} \\ -2p_{04} - p_{14} - p_{24} - 2p_{34} \\ p_{02} + p_{12} + p_{13} \\ p_{03} + p_{13} \\ p_{04} \\ -p_{03} - p_{13} - p_{34} \\ p_{34} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$w_9 = \begin{pmatrix} p_{01} + p_{02} + p_{03} + p_{04} \\ -p_{01} - p_{02} - p_{03} - p_{04} \\ 0 \\ 0 \\ p_{01} - p_{02} \\ -p_{03} \\ -p_{04} \\ p_{03} \\ p_{04} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_{10} = \begin{pmatrix} p_{01} + p_{12} + p_{13} + p_{14} \\ p_{01} - p_{12} \\ -p_{13} \\ -p_{14} \\ -p_{01} - p_{12} - p_{13} - p_{14} \\ 0 \\ 0 \\ p_{13} \\ p_{14} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_{11} = \begin{pmatrix} -p_{01} - p_{12} - p_{14} \\ p_{02} + p_{12} + p_{23} \\ -p_{03} - p_{23} - p_{34} \\ p_{04} + p_{14} + p_{34} \\ 0 \\ -p_{13} \\ 0 \\ 0 \\ p_{24} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$w_{12} = \begin{pmatrix} p_{12} - p_{03} - p_{04} - p_{02} + p_{13} + p_{14} \\ -p_{02} - p_{12} \\ -p_{03} - p_{13} \\ -p_{04} - p_{14} \\ p_{02} + p_{12} \\ p_{03} + p_{13} \\ p_{04} + p_{14} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_{13} = \begin{pmatrix} p_{02} - p_{12} \\ p_{02} + p_{12} + p_{23} + p_{24} \\ -p_{23} \\ -p_{24} \\ -p_{02} - p_{12} - p_{23} - p_{24} \\ p_{23} \\ p_{24} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_{14} = \begin{pmatrix} p_{03} - p_{13} \\ -p_{23} \\ p_{03} + p_{13} + p_{23} + p_{34} \\ -p_{34} \\ p_{23} \\ -p_{03} - p_{13} - p_{23} - p_{34} \\ p_{34} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En resumen, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 5.1.2 (Variaciones que fijan el determinante). *Sea Δ la función que asigna a cada lattice en \mathbb{R}^4 su determinante, y sea $\rho = [p_{01}, p_{02}, p_{03}, \dots, p_{24}, p_{34}]$ una representación en parámetros de Selling reducidos de un lattice L . Si $w_0, w_1, \dots, w_{13}, w_{14}$ son como arriba, entonces todo lattice con representación de parámetros dada por $\tilde{\rho} = \rho + \epsilon \sum_{i=0}^{14} t_i w_i$, con ϵ y todos los t_i números reales, deja fijo a $\Delta(\rho)$ hasta el primer orden de variación de ϵ .*

Apliquemos el método de variaciones a los lattices A_4^* y D_4^*

Ejemplo 5.1.3. Consideremos $A_4^* = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$, para encontrar lattices $\tilde{\rho} = A_4^* + \epsilon m$ que fijan a $\Delta(A_4^*)$ hasta el primer orden de variación de ϵ es suficiente hacer:

$$\tilde{\rho} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \epsilon \begin{bmatrix} 4t_0 + 4t_1 + 4t_2 + 4t_3 - 4t_4 - 4t_5 - 3t_6 - 3t_7 - 4t_8 + 4t_9 + 4t_{10} - 3t_{11} \\ -3t_2 - t_3 + 7t_4 + 5t_5 - 3t_6 + t_7 + t_8 - 4t_9 + 3t_{11} - 2t_{12} + 4t_{13} - t_{14} \\ -4t_1 - 3t_2 - 4t_4 + t_5 + 3t_6 + t_7 + 5t_8 - t_{10} - 3t_{11} - 2t_{12} - t_{13} + 4t_{14} \\ -4t_0 - 2t_2 - t_3 + 3t_4 - 6t_5 + 3t_6 - 5t_7 - 6t_8 - t_{10} + 3t_{11} - 2t_{12} - t_{13} - t_{14} \\ -t_0 - t_1 + 2t_2 + 2t_5 - t_6 + 2t_7 + 3t_8 - 4t_{10} + 2t_{12} - 4t_{13} + t_{14} \\ -t_0 + 2t_2 - 4t_3 - t_4 + 3t_5 + 2t_7 + 2t_8 - t_9 - t_{11} + 2t_{12} + t_{13} - 4t_{14} \\ -t_1 - 2t_2 + t_4 + t_5 + t_7 + t_8 - t_9 + 2t_{12} + t_{13} + t_{14} \\ t_1 + t_3 - 3t_5 + t_7 - 3t_8 + t_9 + t_{10} \\ t_0 + t_2 - 3t_4 + t_8 + t_9 + t_{10} + t_{11} \\ t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 5.1.4. Para el lattice $D_4^* = [-1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0]$, los lattices $\tilde{\rho}$ que fijan $\Delta(D_4^*)$ hasta el primer orden de variación de ϵ son de la forma:

$$\tilde{\rho} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \epsilon \begin{bmatrix} 2t_0 + 2t_1 + 2t_2 + 2t_3 - 2t_4 - 2t_5 - t_6 - t_7 - 2t_8 + 2t_9 + 2t_{10} - t_{11} \\ -3t_2 - t_3 + 4t_4 + 2t_5 - t_6 + t_8 - 2t_9 - 2t_{10} + 2t_{11} - 2t_{12} + 2t_{13} \\ -2t_1 - 3t_2 - 2t_3 - t_4 + t_5 + 2t_6 + 2t_8 - t_{10} - t_{11} - 2t_{12} + 2t_{14} \\ -2t_0 - 2t_{12} - 4t_2 - t_3 + 3t_4 - 3t_5 + 2t_6 - 3t_7 - 3t_8 - t_{10} + 2t_{11} \\ -t_0 - t_1 + 2t_2 + 2t_5 - t_6 + 2t_7 + 3t_8 - 2t_9 - 2t_{10} + 2t_{12} - 2t_{13} \\ -t_0 - 2t_1 + 2t_2 - 2t_3 - t_4 + 3t_5 + 2t_7 + 2t_8 - t_9 - t_{11} + 2t_{12} - 2t_{14} \\ -2t_0 - t_1 + t_4 + t_5 + t_7 + t_8 - t_9 + 2t_{12} \\ t_1 + t_3 - 2t_5 - 2t_8 + t_9 + t_{10} \\ t_0 + t_2 - 2t_4 + t_9 + t_{10} \\ t_0 + t_1 + t_2 + t_3 \end{bmatrix}$$

Observación 5.1.5. En ambos ejemplos, es importante destacar que aunque hay 15 parámetros t_i 's, el espacio generado es 9 dimensional, que es la dimensión máxima posible, es decir los lattices que se obtienen por este método son todos los posibles entre aquellos que fijan $\Delta(\rho)$ hasta el primer orden.

5.2. Método de Variaciones para lattices de Tipo I.

Usemos el método de variaciones descrito en la sección anterior en el caso más simple de la función de cuantización, la que corresponde a los lattices de Tipo I. Como vimos en el capítulo anterior, si ρ es un lattice de Tipo I, por el Teorema 4.5.1, la constante de cuantización de ρ tiene la forma

$$G(\rho) = \frac{Num(\rho)}{48\Delta^{5/4}} \text{ donde} \\ Num(\rho) = \Delta S_1 + 2S_2^{(I)} + K^{(I)}.$$

Si ϵ es lo suficientemente pequeño, de tal manera que $\tilde{\rho} = \rho + \epsilon \sum_{i=0}^{14} t_i w_i$ también es un lattice de Tipo I, por el Teorema 5.1.2, $\tilde{\rho}$ fija a $\Delta(\rho)$ hasta el primer orden de variación de ϵ , con lo cual el

incremento $G(\tilde{\rho}) - G(\rho)$ es esencialmente $Num(\tilde{\rho}) - Num(\rho)$. Ahora bien, el coeficiente de ϵ en la expansión de Taylor alrededor de ρ en $Num(\tilde{\rho})$ viene dado por

$$dNum(\rho) \cdot \sum_{i=0}^{14} t_i w_i,$$

en consecuencia, si ρ es un mínimo de G entonces

$$dNum(\rho) \cdot \sum_{i=0}^{14} t_i w_i = 0,$$

las propiedades del producto interno permiten escribir

$$\sum_{i=0}^{14} t_i dNum(\rho) \cdot w_i = 0. \quad (5.5)$$

Dado que esto es cierto para todas las posibles elecciones de los escalares t_i , podemos concluir que si ρ es un mínimo de G entonces

$$dNum(\rho) \cdot w_i = 0, \text{ para } 0 \leq i \leq 14. \quad (5.6)$$

Es decir, los mínimos locales de $G(\rho)$ son soluciones del sistema de ecuaciones (5.6), el cual puede consultarse en el Apéndice A.4.

Como habrá notado el lector, las ecuaciones del sistema (5.6), son homogéneas de grado 5, en 10 variables, y tienen muchísimos términos, entre 100 y 680, con lo cual la cantidad de operaciones necesarias para resolverlo, es extremadamente grande. El sistema resulta imposible de resolverse con las maquinas a las que tenemos en la actualidad.

Observación 5.2.1. Hemos hecho algunas pruebas, desde ingenuas como debilitar un poco las condiciones, por ejemplo: consideramos tres o más variables constantes e iguales, hasta muy ingeniosas, en las que intentamos explotar la simetría que guardan los subíndices, pero todos los caminos que intentamos, incluso con recomendaciones y vigilancia de matemáticos expertos en este tipo de sistemas, fueron infructuosos.

No obstante logramos algunas cosas, por ejemplo: si consideramos que hay almenos tres parámetros iguales, digamos a $t > 0$, el sistema se puede resolver en un tiempo prudente, dando como única solución $\rho = [t, t, t, t, t, t, t, t, t, t]$, lo cual será de esperarse, ya que como vimos en el Teorema 4.7.1, $A_4^* = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$ es un mínimo local de G para los lattice de Tipo I.

Por el Corolario 4.5.5, todo lattice de Tipo I, tiene un representante cuyos parámetros de Selling tienen valores entre 0 y 1. Apoyados en este hecho, hicimos una búsqueda entre los lattices de Tipo I, con cerca de 10^{10} lattices, distribuidos por el cubo unidad en el primer ortante, y encontramos que sólo para los lattices que tienen sus parámetros cercanos a 1 la constante de cuantización es inferior a $0,077559 \approx A_4^*$, pero ninguno estuvo por debajo de $G(A_4^*) = 0,0775587567$. Lo cual nos alienta a pensar que A_4^* es el óptimo para el problema de cuantización en lattices de Tipo I.

Nuestros resultados, junto con los resultados experimentales de Agrell & Eriksson, ver [AE], reafirman la idea que A_4^* es óptimo entre los retículos de Tipo I.

El procedimiento fue así: Construimos una grilla de lattices reducidos de Tipo I en el cubo unidad, donde cada parámetro tomaba un valor en el conjunto $\{0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \dots, \frac{9}{10}, 1\}$, evaluamos la

función (4.24), en los puntos de dicha grilla, si el valor de G es menor que 0,07756, almacenamos tanto al lattice como a su constante de cuantización.

Un procedimiento similar se hizo para lattices de Tipo II y III, comparando con el valor de G en D_4^* . El resultado obtenido fué similar, es decir:

No encontramos lattices con constante de cuantización inferior a $G(D_4^*) \cong 0,0766032346$ y para los que tienen cuantización cercana a 0,076603... sus parámetros reducidos son muy cercanos a un representante de $D_4^* = [-1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0]$.

Teniendo en cuenta la cantidad de lattices explorados, y la distribución de los mismos y tomando en consideración los trabajos de Agrell & Eriksson, estamos muy tentados a afirmar que A_4^* es el único mínimo entre los retículos de Tipo I y que D_4^* es el único mínimo entre los lattices de Tipo II y III. Y que por lo tanto D_4^* es el óptimo para el *lattice quantizer problem* en dimensión 4. No obstante aun nos hacen falta elementos para lograr probar esa afirmación.

Capítulo 6

Apéndice.

A.1. Vértices para $S(0)$ en Tipo I, II y III.

Por comodidad identificamos un vértice de la celda de Voronoi $S(0)$, con los vectores de Voronoi que dirigen las facets a las que él pertenece, así por ejemplo el vértice determinado por F_0, F_{01}, F_{012} y F_{0123} lo representamos por el conjunto $\{v_0, v_{01}, v_{012}, v_{0123}\}$. Las siguientes tres listas muestran, en la forma que acabamos de enunciar, todos los vértices para $S(0)$ la celda de Voronoi con centro en el origen, en cada uno de los tres tipos de lattice en el espacio euclídeo 4-dimensional.

Vértices de la celda de Voronoi primitiva lattices Tipo I.

$$\begin{aligned}
& \{v_0, v_{01}, v_{012}, v_{0123}\} & \{v_0, v_{01}, v_{012}, v_{0124}\} & \{v_0, v_{01}, v_{013}, v_{0123}\} & \{v_0, v_{02}, v_{012}, v_{0123}\} \\
& \{v_1, v_{01}, v_{012}, v_{0123}\} & \{v_0, v_{02}, v_{012}, v_{0124}\} & \{v_1, v_{01}, v_{012}, v_{0124}\} & \{v_1, v_{01}, v_{013}, v_{0123}\} \\
& \{v_0, v_{03}, v_{013}, v_{0123}\} & \{v_0, v_{01}, v_{014}, v_{0124}\} & \{v_0, v_{01}, v_{013}, v_{0134}\} & \{v_0, v_{02}, v_{023}, v_{0123}\} \\
& \{v_1, v_{12}, v_{012}, v_{0123}\} & \{v_2, v_{02}, v_{012}, v_{0123}\} & \{v_2, v_{02}, v_{012}, v_{0124}\} & \{v_1, v_{12}, v_{012}, v_{0124}\} \\
& \{v_1, v_{01}, v_{013}, v_{0134}\} & \{v_1, v_{01}, v_{014}, v_{0124}\} & \{v_0, v_{01}, v_{014}, v_{0134}\} & \{v_2, v_{12}, v_{012}, v_{0123}\} \\
& \{v_0, v_{03}, v_{023}, v_{0123}\} & \{v_0, v_{03}, v_{013}, v_{0134}\} & \{v_1, v_{13}, v_{013}, v_{0123}\} & \{v_2, v_{12}, v_{012}, v_{0124}\} \\
& \{v_0, v_{02}, v_{024}, v_{0124}\} & \{v_1, v_{01}, v_{014}, v_{0134}\} & \{v_2, v_{02}, v_{023}, v_{0123}\} & \{v_0, v_{02}, v_{023}, v_{0234}\} \\
& \{v_0, v_{04}, v_{014}, v_{0124}\} & \{v_1, v_{12}, v_{123}, v_{0123}\} & \{v_3, v_{03}, v_{013}, v_{0123}\} & \{v_1, v_{13}, v_{123}, v_{0123}\} \\
& \{v_0, v_{02}, v_{024}, v_{0234}\} & \{v_0, v_{04}, v_{014}, v_{0134}\} & \{v_3, v_{03}, v_{023}, v_{0123}\} & \{v_0, v_{04}, v_{024}, v_{0124}\} \\
& \{v_2, v_{02}, v_{024}, v_{0124}\} & \{v_0, v_{03}, v_{023}, v_{0234}\} & \{v_2, v_{12}, v_{123}, v_{0123}\} & \{v_3, v_{13}, v_{013}, v_{0123}\} \\
& \{v_1, v_{13}, v_{013}, v_{0134}\} & \{v_0, v_{03}, v_{034}, v_{0134}\} & \{v_1, v_{12}, v_{124}, v_{0124}\} & \{v_1, v_{14}, v_{014}, v_{0124}\} \\
& \{v_2, v_{02}, v_{023}, v_{0234}\} & \{v_2, v_{23}, v_{023}, v_{0123}\} & \{v_3, v_{03}, v_{013}, v_{0134}\} & \{v_1, v_{14}, v_{014}, v_{0134}\} \\
& \{v_0, v_{03}, v_{034}, v_{0234}\} & \{v_2, v_{02}, v_{024}, v_{0234}\} & \{v_3, v_{23}, v_{023}, v_{0123}\} & \{v_3, v_{13}, v_{013}, v_{0134}\} \\
& \{v_0, v_{04}, v_{034}, v_{0134}\} & \{v_0, v_{04}, v_{024}, v_{0234}\} & \{v_3, v_{13}, v_{123}, v_{0123}\} & \{v_2, v_{12}, v_{124}, v_{0124}\} \\
& \{v_2, v_{23}, v_{123}, v_{0123}\} & \{v_1, v_{12}, v_{123}, v_{1234}\} & \{v_3, v_{23}, v_{123}, v_{0123}\} & \{v_4, v_{04}, v_{014}, v_{0124}\} \\
& \{v_1, v_{14}, v_{124}, v_{0124}\} & \{v_0, v_{04}, v_{034}, v_{0234}\} & \{v_3, v_{03}, v_{023}, v_{0234}\} & \{v_4, v_{04}, v_{014}, v_{0134}\} \\
& \{v_2, v_{24}, v_{024}, v_{0124}\} & \{v_1, v_{13}, v_{134}, v_{0134}\} & \{v_2, v_{12}, v_{123}, v_{1234}\} & \{v_1, v_{13}, v_{123}, v_{1234}\} \\
& \{v_2, v_{23}, v_{023}, v_{0234}\} & \{v_1, v_{12}, v_{124}, v_{1234}\} & \{v_3, v_{03}, v_{034}, v_{0134}\} & \{v_4, v_{04}, v_{024}, v_{0124}\} \\
& \{v_4, v_{14}, v_{014}, v_{0124}\} & \{v_4, v_{14}, v_{014}, v_{0134}\} & \{v_2, v_{12}, v_{124}, v_{1234}\} & \{v_2, v_{24}, v_{124}, v_{0124}\} \\
& \{v_1, v_{14}, v_{134}, v_{0134}\} & \{v_3, v_{23}, v_{023}, v_{0234}\} & \{v_3, v_{03}, v_{034}, v_{0234}\} & \{v_1, v_{13}, v_{134}, v_{1234}\} \\
& \{v_4, v_{04}, v_{034}, v_{0134}\} & \{v_4, v_{14}, v_{124}, v_{0124}\} & \{v_4, v_{04}, v_{024}, v_{0234}\} & \{v_4, v_{24}, v_{024}, v_{0124}\} \\
& \{v_2, v_{24}, v_{024}, v_{0234}\} & \{v_1, v_{14}, v_{124}, v_{1234}\} & \{v_2, v_{23}, v_{123}, v_{1234}\} & \{v_3, v_{13}, v_{123}, v_{1234}\} \\
& \{v_3, v_{13}, v_{134}, v_{0134}\} & \{v_1, v_{14}, v_{134}, v_{1234}\} & \{v_3, v_{23}, v_{123}, v_{1234}\} & \{v_4, v_{04}, v_{034}, v_{0234}\} \\
& \{v_4, v_{24}, v_{124}, v_{0124}\} & \{v_3, v_{13}, v_{134}, v_{1234}\} & \{v_2, v_{24}, v_{124}, v_{1234}\} & \{v_4, v_{24}, v_{024}, v_{0234}\} \\
& \{v_3, v_{34}, v_{034}, v_{0134}\} & \{v_4, v_{14}, v_{134}, v_{0134}\} & \{v_2, v_{23}, v_{234}, v_{0234}\} & \{v_2, v_{24}, v_{234}, v_{0234}\} \\
& \{v_3, v_{23}, v_{234}, v_{0234}\} & \{v_2, v_{23}, v_{234}, v_{1234}\} & \{v_3, v_{34}, v_{134}, v_{0134}\} & \{v_4, v_{14}, v_{124}, v_{1234}\} \\
& \{v_3, v_{34}, v_{034}, v_{0234}\} & \{v_4, v_{34}, v_{034}, v_{0134}\} & \{v_2, v_{24}, v_{234}, v_{1234}\} & \{v_3, v_{23}, v_{234}, v_{1234}\} \\
& \{v_4, v_{14}, v_{134}, v_{1234}\} & \{v_4, v_{34}, v_{034}, v_{0234}\} & \{v_4, v_{34}, v_{134}, v_{0134}\} & \{v_4, v_{24}, v_{124}, v_{1234}\} \\
& \{v_3, v_{34}, v_{134}, v_{1234}\} & \{v_3, v_{34}, v_{234}, v_{0234}\} & \{v_4, v_{24}, v_{234}, v_{0234}\} & \{v_3, v_{34}, v_{234}, v_{1234}\} \\
& \{v_4, v_{24}, v_{234}, v_{1234}\} & \{v_4, v_{34}, v_{134}, v_{1234}\} & \{v_4, v_{34}, v_{234}, v_{0234}\} & \{v_4, v_{34}, v_{234}, v_{1234}\}.
\end{aligned} \tag{A.1}$$

Vértices de la celda de Voronoi primitiva lattices Tipo II.

$$\begin{aligned}
& \{v_0, v_{02}, v_{012}, v_{0123}\} & \{v_0, v_{02}, v_{012}, v_{0124}\} & \{v_0, v_{02}, v_{023}, v_{0123}\} & \{v_0, v_{03}, v_{013}, v_{0123}\} \\
& \{v_0, v_{03}, v_{023}, v_{0123}\} & \{v_0, v_{03}, v_{013}, v_{0134}\} & \{v_0, v_{02}, v_{024}, v_{0124}\} & \{v_0, v_{04}, v_{024}, v_{0124}\} \\
& \{v_0, v_{04}, v_{014}, v_{0134}\} & \{v_0, v_{04}, v_{014}, v_{0124}\} & \{v_0, v_{04}, v_{024}, v_{0\bar{1}}\} & \{v_0, v_{04}, v_{034}, v_{0\bar{1}}\} \\
& \{v_0, v_{03}, v_{034}, v_{0134}\} & \{v_0, v_{04}, v_{034}, v_{0134}\} & \{v_0, v_{02}, v_{023}, v_{0\bar{1}}\} & \{v_0, v_{02}, v_{024}, v_{0\bar{1}}\} \\
& \{v_0, v_{03}, v_{023}, v_{0\bar{1}}\} & \{v_0, v_{03}, v_{034}, v_{0\bar{1}}\} & \{v_0, v_1, v_{012}, v_{0123}\} & \{v_0, v_1, v_{012}, v_{0124}\} \\
& \{v_0, v_1, v_{013}, v_{0123}\} & \{v_0, v_1, v_{013}, v_{0134}\} & \{v_0, v_1, v_{014}, v_{0124}\} & \{v_0, v_1, v_{014}, v_{0134}\} \\
& \{v_1, v_{14}, v_{124}, v_{0\bar{1}}\} & \{v_1, v_{14}, v_{134}, v_{0\bar{1}}\} & \{v_1, v_{12}, v_{012}, v_{0124}\} & \{v_1, v_{13}, v_{013}, v_{0123}\} \\
& \{v_1, v_{12}, v_{123}, v_{0123}\} & \{v_1, v_{12}, v_{012}, v_{0123}\} & \{v_1, v_{13}, v_{123}, v_{0123}\} & \{v_1, v_{13}, v_{013}, v_{0134}\} \\
& \{v_1, v_{12}, v_{124}, v_{0124}\} & \{v_1, v_{14}, v_{014}, v_{0124}\} & \{v_1, v_{14}, v_{014}, v_{0134}\} & \{v_1, v_{14}, v_{124}, v_{0124}\} \\
& \{v_1, v_{13}, v_{134}, v_{0134}\} & \{v_1, v_{14}, v_{134}, v_{0134}\} & \{v_1, v_{12}, v_{123}, v_{0\bar{1}}\} & \{v_1, v_{12}, v_{124}, v_{0\bar{1}}\} \\
& \{v_1, v_{13}, v_{123}, v_{0\bar{1}}\} & \{v_1, v_{13}, v_{134}, v_{0\bar{1}}\} & \{v_2, v_{12}, v_{124}, v_{1234}\} & \{v_2, v_{23}, v_{123}, v_{1234}\} \\
& \{v_2, v_{02}, v_{024}, v_{0124}\} & \{v_2, v_{12}, v_{123}, v_{0123}\} & \{v_2, v_{02}, v_{023}, v_{0123}\} & \{v_2, v_{02}, v_{023}, v_{0234}\} \\
& \{v_2, v_{02}, v_{024}, v_{0234}\} & \{v_2, v_{12}, v_{124}, v_{0124}\} & \{v_2, v_{23}, v_{023}, v_{0234}\} & \{v_2, v_{12}, v_{123}, v_{1234}\} \\
& \{v_2, v_{24}, v_{024}, v_{0234}\} & \{v_2, v_{24}, v_{124}, v_{1234}\} & \{v_2, v_{02}, v_{12}, v_{0123}\} & \{v_2, v_{02}, v_{12}, v_{0124}\} \\
& \{v_2, v_{24}, v_{024}, v_{124}\} & \{v_2, v_{23}, v_{023}, v_{123}\} & \{v_2, v_{023}, v_{123}, v_{0123}\} & \{v_2, v_{024}, v_{124}, v_{0124}\} \\
& \{v_2, v_{23}, v_{0234}, v_{1234}\} & \{v_2, v_{24}, v_{0234}, v_{1234}\} & \{v_3, v_{03}, v_{023}, v_{0123}\} & \{v_3, v_{13}, v_{123}, v_{0123}\} \\
& \{v_3, v_{03}, v_{023}, v_{0234}\} & \{v_3, v_{03}, v_{034}, v_{0134}\} & \{v_3, v_{03}, v_{034}, v_{0234}\} & \{v_3, v_{23}, v_{023}, v_{0234}\} \\
& \{v_3, v_{13}, v_{123}, v_{1234}\} & \{v_3, v_{13}, v_{134}, v_{0134}\} & \{v_3, v_{23}, v_{123}, v_{1234}\} & \{v_3, v_{13}, v_{134}, v_{1234}\} \\
& \{v_3, v_{34}, v_{034}, v_{0234}\} & \{v_3, v_{34}, v_{134}, v_{1234}\} & \{v_3, v_{23}, v_{0234}, v_{1234}\} & \{v_3, v_{034}, v_{134}, v_{0134}\} \\
& \{v_3, v_{023}, v_{123}, v_{0123}\} & \{v_3, v_{34}, v_{0234}, v_{1234}\} & \{v_3, v_{03}, v_{13}, v_{0134}\} & \{v_3, v_{23}, v_{023}, v_{123}\} \\
& \{v_3, v_{03}, v_{13}, v_{0123}\} & \{v_3, v_{34}, v_{034}, v_{134}\} & \{v_4, v_{04}, v_{024}, v_{0124}\} & \{v_4, v_{04}, v_{024}, v_{0234}\} \\
& \{v_4, v_{14}, v_{124}, v_{0124}\} & \{v_4, v_{04}, v_{034}, v_{0134}\} & \{v_4, v_{14}, v_{124}, v_{1234}\} & \{v_4, v_{24}, v_{124}, v_{1234}\} \\
& \{v_4, v_{14}, v_{134}, v_{1234}\} & \{v_4, v_{34}, v_{034}, v_{0234}\} & \{v_4, v_{04}, v_{034}, v_{0234}\} & \{v_4, v_{24}, v_{024}, v_{0234}\} \\
& \{v_4, v_{14}, v_{134}, v_{0134}\} & \{v_4, v_{34}, v_{134}, v_{1234}\} & \{v_4, v_{024}, v_{124}, v_{0124}\} & \{v_4, v_{034}, v_{134}, v_{0134}\} \\
& \{v_4, v_{34}, v_{0234}, v_{1234}\} & \{v_4, v_{24}, v_{0234}, v_{1234}\} & \{v_4, v_{04}, v_{14}, v_{0124}\} & \{v_4, v_{04}, v_{14}, v_{0134}\} \\
& \{v_4, v_{34}, v_{034}, v_{134}\} & \{v_4, v_{24}, v_{024}, v_{124}\} & \{v_{02}, v_{12}, v_{012}, v_{0123}\} & \{v_{02}, v_{12}, v_{012}, v_{0124}\} \\
& \{v_{02}, v_{023}, v_{0\bar{1}}, v_{0234}\} & \{v_{02}, v_{024}, v_{0\bar{1}}, v_{0234}\} & \{v_{03}, v_{13}, v_{013}, v_{0123}\} & \{v_{03}, v_{13}, v_{013}, v_{0134}\} \\
& \{v_{03}, v_{023}, v_{0\bar{1}}, v_{0234}\} & \{v_{03}, v_{034}, v_{0\bar{1}}, v_{0234}\} & \{v_{04}, v_{14}, v_{014}, v_{0124}\} & \{v_{04}, v_{14}, v_{014}, v_{0134}\} \\
& \{v_{04}, v_{024}, v_{0\bar{1}}, v_{0234}\} & \{v_{04}, v_{034}, v_{0\bar{1}}, v_{0234}\} & \{v_{12}, v_{123}, v_{0\bar{1}}, v_{1234}\} & \{v_{12}, v_{124}, v_{0\bar{1}}, v_{1234}\} \\
& \{v_{13}, v_{123}, v_{0\bar{1}}, v_{1234}\} & \{v_{13}, v_{134}, v_{0\bar{1}}, v_{1234}\} & \{v_{14}, v_{124}, v_{0\bar{1}}, v_{1234}\} & \{v_{14}, v_{134}, v_{0\bar{1}}, v_{1234}\}.
\end{aligned} \tag{A.2}$$

Vértices de la celda de Voronoi primitiva lattices Tipo III.

$$\begin{aligned}
& \{v_0, v_1, v_{013}, v_{0123}\} & \{v_0, v_1, v_{013}, v_{0134}\} & \{v_0, v_1, v_{014}, v_{0124}\} & \{v_0, v_1, v_{014}, v_{0134}\} \\
& \{v_0, v_1, v_{0123}, v_{0124}\} & \{v_0, v_2, v_{0123}, v_{0124}\} & \{v_0, v_2, v_{024}, v_{0\bar{1}}\} & \{v_0, v_2, v_{023}, v_{0123}\} \\
& \{v_0, v_2, v_{024}, v_{0124}\} & \{v_0, v_2, v_{023}, v_{0\bar{1}}\} & \{v_0, v_3, v_{013}, v_{0123}\} & \{v_0, v_3, v_{04}, v_{0134}\} \\
& \{v_0, v_3, v_{04}, v_{0\bar{1}}\} & \{v_0, v_3, v_{023}, v_{0\bar{1}}\} & \{v_0, v_3, v_{023}, v_{0123}\} & \{v_0, v_3, v_{013}, v_{0134}\} \\
& \{v_0, v_4, v_{014}, v_{0124}\} & \{v_0, v_4, v_{014}, v_{0134}\} & \{v_0, v_4, v_{024}, v_{0124}\} & \{v_0, v_4, v_{024}, v_{0\bar{1}}\} \\
& \{v_1, v_{12}, v_{123}, v_{0123}\} & \{v_1, v_{12}, v_{123}, v_{0\bar{1}}\} & \{v_1, v_{12}, v_{124}, v_{0124}\} & \{v_1, v_{12}, v_{124}, v_{0\bar{1}}\} \\
& \{v_1, v_{12}, v_{0123}, v_{0124}\} & \{v_1, v_{13}, v_{14}, v_{0134}\} & \{v_1, v_{13}, v_{14}, v_{0\bar{1}}\} & \{v_1, v_{13}, v_{013}, v_{0123}\} \\
& \{v_1, v_{13}, v_{013}, v_{0134}\} & \{v_1, v_{13}, v_{123}, v_{0123}\} & \{v_1, v_{13}, v_{123}, v_{0\bar{1}}\} & \{v_1, v_{14}, v_{014}, v_{0124}\} \\
& \{v_1, v_{14}, v_{014}, v_{0134}\} & \{v_1, v_{14}, v_{124}, v_{0124}\} & \{v_1, v_{14}, v_{124}, v_{0\bar{1}}\} & \{v_2, v_{02}, v_{12}, v_{0123}\} \\
& \{v_2, v_{02}, v_{12}, v_{0124}\} & \{v_2, v_{02}, v_{023}, v_{024}\} & \{v_2, v_{02}, v_{024}, v_{0124}\} & \{v_2, v_{02}, v_{023}, v_{0123}\} \\
& \{v_2, v_{12}, v_{123}, v_{124}\} & \{v_2, v_{12}, v_{123}, v_{0123}\} & \{v_2, v_{12}, v_{124}, v_{0124}\} & \{v_2, v_{23}, v_{023}, v_{123}\} \\
& \{v_2, v_{23}, v_{023}, v_{0234}\} & \{v_2, v_{23}, v_{123}, v_{1234}\} & \{v_2, v_{23}, v_{0234}, v_{1234}\} & \{v_2, v_{24}, v_{024}, v_{124}\} \\
& \{v_2, v_{24}, v_{024}, v_{0234}\} & \{v_2, v_{24}, v_{124}, v_{1234}\} & \{v_2, v_{24}, v_{0234}, v_{1234}\} & \{v_2, v_{023}, v_{123}, v_{0123}\} \\
& \{v_2, v_{024}, v_{124}, v_{0124}\} & \{v_2, v_{023}, v_{024}, v_{0234}\} & \{v_2, v_{123}, v_{124}, v_{1234}\} & \{v_3, v_4, v_{034}, v_{134}\} \\
& \{v_3, v_4, v_{034}, v_{0234}\} & \{v_3, v_4, v_{134}, v_{1234}\} & \{v_3, v_4, v_{0234}, v_{1234}\} & \{v_3, v_{03}, v_{13}, v_{0134}\} \\
& \{v_3, v_{03}, v_{13}, v_{3\bar{4}}\} & \{v_3, v_{03}, v_{023}, v_{3\bar{4}}\} & \{v_3, v_{03}, v_{034}, v_{0234}\} & \{v_3, v_{03}, v_{023}, v_{0234}\} \\
& \{v_3, v_{03}, v_{034}, v_{0134}\} & \{v_3, v_{13}, v_{123}, v_{1234}\} & \{v_3, v_{13}, v_{123}, v_{3\bar{4}}\} & \{v_3, v_{13}, v_{134}, v_{0134}\} \\
& \{v_3, v_{13}, v_{134}, v_{1234}\} & \{v_3, v_{23}, v_{023}, v_{0234}\} & \{v_3, v_{23}, v_{0234}, v_{1234}\} & \{v_3, v_{23}, v_{023}, v_{123}\} \\
& \{v_3, v_{23}, v_{123}, v_{1234}\} & \{v_3, v_{034}, v_{134}, v_{0134}\} & \{v_3, v_{023}, v_{123}, v_{3\bar{4}}\} & \{v_4, v_{04}, v_{14}, v_{0134}\} \\
& \{v_4, v_{04}, v_{034}, v_{0134}\} & \{v_4, v_{04}, v_{024}, v_{0234}\} & \{v_4, v_{04}, v_{034}, v_{0234}\} & \{v_4, v_{04}, v_{14}, v_{3\bar{4}}\} \\
& \{v_4, v_{04}, v_{024}, v_{3\bar{4}}\} & \{v_4, v_{14}, v_{134}, v_{0134}\} & \{v_4, v_{14}, v_{124}, v_{1234}\} & \{v_4, v_{14}, v_{134}, v_{1234}\} \\
& \{v_4, v_{14}, v_{124}, v_{3\bar{4}}\} & \{v_4, v_{034}, v_{134}, v_{0134}\} & \{v_4, v_{024}, v_{124}, v_{3\bar{4}}\} & \{v_4, v_{24}, v_{024}, v_{124}\} \\
& \{v_4, v_{24}, v_{024}, v_{0234}\} & \{v_4, v_{24}, v_{124}, v_{1234}\} & \{v_4, v_{24}, v_{0234}, v_{1234}\} & \{v_{02}, v_{12}, v_{0123}, v_{0124}\} \\
& \{v_{02}, v_{023}, v_{024}, v_{0\bar{1}}\} & \{v_{03}, v_{04}, v_{034}, v_{0134}\} & \{v_{03}, v_{04}, v_{034}, v_{0\bar{1}}\} & \{v_{03}, v_{13}, v_{3\bar{4}}, v_{0123}\} \\
& \{v_{03}, v_{13}, v_{013}, v_{0123}\} & \{v_{03}, v_{13}, v_{013}, v_{0134}\} & \{v_{03}, v_{023}, v_{3\bar{4}}, v_{0123}\} & \{v_{03}, v_{023}, v_{0\bar{1}}, v_{0234}\} \\
& \{v_{03}, v_{034}, v_{0\bar{1}}, v_{0234}\} & \{v_{04}, v_{14}, v_{014}, v_{0124}\} & \{v_{04}, v_{14}, v_{014}, v_{0134}\} & \{v_{04}, v_{14}, v_{3\bar{4}}, v_{0124}\} \\
& \{v_{04}, v_{024}, v_{3\bar{4}}, v_{0124}\} & \{v_{04}, v_{024}, v_{0\bar{1}}, v_{0234}\} & \{v_{04}, v_{034}, v_{0\bar{1}}, v_{0234}\} & \{v_{13}, v_{14}, v_{134}, v_{0134}\} \\
& \{v_{13}, v_{14}, v_{134}, v_{0\bar{1}}\} & \{v_{12}, v_{123}, v_{124}, v_{0\bar{1}}\} & \{v_{13}, v_{123}, v_{3\bar{4}}, v_{0123}\} & \{v_{13}, v_{123}, v_{0\bar{1}}, v_{1234}\} \\
& \{v_{13}, v_{134}, v_{0\bar{1}}, v_{1234}\} & \{v_{14}, v_{124}, v_{3\bar{4}}, v_{0124}\} & \{v_{14}, v_{124}, v_{0\bar{1}}, v_{1234}\} & \{v_{14}, v_{134}, v_{0\bar{1}}, v_{1234}\} \\
& \{v_{023}, v_{024}, v_{0\bar{1}}, v_{0234}\} & \{v_{023}, v_{123}, v_{3\bar{4}}, v_{0123}\} & \{v_{024}, v_{124}, v_{3\bar{4}}, v_{0124}\} & \{v_{123}, v_{124}, v_{0\bar{1}}, v_{1234}\}.
\end{aligned} \tag{A.3}$$

A.2. Algoritmos.

Algoritmos. Los algoritmos que presentamos a continuación han sido de gran ayuda a la hora de calcular la constante de cuantización de cada una de las tres celdas de Voronoi primitivas para lattices en dimensión 4. Los mismos están escritos para ser ejecutados en el sistema computacional MuPAD, actualmente toolbox de matemática simbólica para Matlab, tal como notará el lector, los procedimientos no son complicados, no hay procesos intrincados ni operaciones extravagantes, la dificultad en las cuentas radica esencialmente en el tamaño de los resultados obtenidos.

A lo largo de todos los procedimientos consideramos:

```
r:=[r_01,r_02,r_03,r_04,r_12,r_13,r_14,r_23,r_24,r_34];
A:=r -> matrix([ [r[1]+r[5]+r[6]+r[7],-r[5],-r[6],-r[7]],
                 [-r[5],r[2]+r[5]+r[8]+r[9],-r[8],-r[9]],
                 [-r[6],-r[8],r[3]+r[6]+r[8]+r[10],-r[10]],
                 [-r[7],-r[9],-r[10],r[4]+r[7]+r[9]+r[10]]]);
det:=linalg::det(A(r));
```

Para calcular x-coordenadas de un vector.

```
xco:=proc(v)
/* Este procedimiento recibe un vector como combinación lineal de la base
{v_1, v_2, v_3, v_4} y devuelve sus x-coordenadas. */
local x,t;
begin
  v:=subs(v, v_0=-v_1-v_2-v_3-v_4);
  t:=[0 $i=1..4];
  x:=[{select(v, has, v_.i)} $i=1..4];
  for j from 1 to 4 do
    if nops(x[j])=1 then
      t[j]:=op(x[j])/v_.j;
    end_if;
  end_for;
return(matrix(t));
end_proc;
```

Para calcular las Vonormas.

```
VoN:=proc(v)
/* Este procedimiento recibe un vector de Voronoi en dimensión 4 y devuelve su
norma en función de los parámetros de Selling asociados al lattice. */
local J,S,norm;
begin
  J:=coerce(combinat::subsets::list({$0..4}, 2), DOM_SET);
  S:=_plus(v_.i $ i=0..4);
  norm:=subs(expand(v*(v-S)), { 2*v_.i^2=2*_plus(r_.min({j,i}).max({j,i})
    $j in {$0..4} minus {i}) $i=0..4
    2*v_.0*v_.1=-2*r_0.1, -2*v_.0*v_.1=2*r_0.1,
```

```

2*v_.3*v_.4=-2*r_3.4, -2*v_.3*v_.4=2*r_3.4,
v_.min(a)*v_.max(a)=-r_.min(a).max(a) $ a in J,
-v_.min(a)*v_.max(a)= r_.min(a).max(a) $ a in J});
return(norm);
end_proc;

```

Para calcular las **y**-coordenadas de un punto.

```

yc:=proc(v)
/* Este procedimiento recibe un vector como combinación lineal de la
bases {v1,v2,v3,v4} y devuelve sus y-coordenadas. */
local A;
begin
A:=matrix([[ r_01 + r_12 + r_13 + r_14, -r_12, -r_13, -r_14],
[-r_12, r_02 + r_12 + r_23 + r_24, -r_23, -r_24],
[-r_13, -r_23, r_03 + r_13 + r_23 + r_34, -r_34],
[-r_14, -r_24, -r_34, r_04 + r_14 + r_24 + r_34]]);
return(A*xco(v));
end_proc;

```

Para calcular **y**-coordenadas de un vértice.

```

ycov:=proc(v)
/* Recibe los vectores que dirigen las Facets a las que pertenece un vértice y devuelve
las y-coordenadas del mismo. */
local a;
begin
a:=linsolve({subs(v[j],{v_.i=y_.i $ i=0..4}) = 1/2*VoN(v[j])
$j=1..4,_plus(y_.i $ i=0..4)=0}, {y_.i $ i=0..4});
return(subs(matrix([y_.i $ i=1..4]), a));
end_proc;

```

El siguiente algoritmo nos permite encontrar la norma de un vector en términos de las **y**-coordenadas.

```

dNoY:=proc(y)
/* Recibe las y-coordenadas de un vector devuelve d*Norma del vector. */
local N;
begin
N:=expand(_plus(diff(det,r[i])*y[i+1]^2 $i=1..4) +
_plus(y[2]*y[2+i]*(diff(det,r[1]) + diff(det, r[i+1])
- diff(det,r[4+i])) $i=1..3) + _plus(y[3]*y[3+i]*(diff(det,r[2])
+ diff(det, r[i+2]) - diff(det,r[7+i])) $i=1..2) + y[4]*y[5]*(diff(det,r[3])
+ diff(det,r[4])-diff(det,r[10])));
return(N);
end_proc;

```

Conocidos los vértices de la celda de Voronoi es fácil determinar cuando dos de ellos son adyacentes, es decir forman una arista.

El siguiente procedimiento da la lista de todas las aristas de la celda, conocidos sus vértices.

```
edge:=proc(L)
/* Recibe la lista de vértices de la celda de Voronoi y devuelve las parejas de
vértices que forman una arista. */
local s3;
begin
  s3:={op(combinat::subsets::list(L[i],3)) $i=1..120};
  return({_union(select(L,x -> x union s3[i]=x)) $i=1..240});
end_proc;
```

El siguiente algoritmo permite encontrar todos los vértices de las facets de la celda, y los agrupa en conjuntos que determinan las 2-caras.

```
verfaces:=proc(v,m)
/* Recibe un vector de Voronoi y el tipo del lattice y devuelve los vértices de
todas las caras 2-dimensionales de la facet que corresponde al vovec dado. L[m]
es la lista de vértices de la celda de Voronoi. */
local V,ver,j,t,s,i,k,c2;
begin
  c2:=[]; ver:=L[m];
  t:=(_union(op(select(L[m], x-> x union {v}=x))) minus {v});
  k:=[]:
  for j in t do s:=[]:
    for i in {$1..120} do
      if ({j, v} subset ver[i]) then
        s:={op(s), ver[i]};
      end_if;
    end_for;
    k:=[op(k),s];
    c2:=[op(c2), nops(s)];
  end_for;
  return(c2,k);
end_proc;
```

Para generar la partición en 4-simplex usamos el siguiente programa:

```
Vertsimplex:=proc(ar,m)
/* Recibe los dos vértices de una arista y devuelve los vértices de cada uno de los
6 4-simplex que lo tienen como lado en la partición de la celda de Voronoi. */
local simp,v,j,i,o,s;
begin
  simp:=[]:
  for v in _intersect(ar[j] $j=1..nops(ar)) do
    o:=verfaces(v,m)[2]:
    for i from 1 to nops(o) do s:=[]:
      if (ar subset o[i]) then
        s:=[(1/2)*Yvo(v),1/nops(o[i])*_plus(map(o[i],Y)[j] $j=1..nops(o[i])),
```

```

        Y(ar[1]),Y(ar[2]));
    simp:=[op(simp),s];
    end_if:
    end_for:
end_for:
return(simp);
end_proc;

```

Para calcular el volumen de un 4-simplex conocidos sus vértices, y el tipo de lattice de donde viene, podemos usar el siguiente algoritmo:

```

Vol:=proc(l,m)
/* Recibe los vértices de un 4-simplex y el tipo de lattice y devuelve su volumen. */

```

```

local V0,T0;
begin
    if m=1 then assume(r, Type::Positive); end_if;
    if m=2 then assume([r[i] $i=2..10], Type::Positive);
        assume(r[1], Type::Negative,_and);
        assume(r[j]>-r[1],_and) $ j in {2,3,4,5,6,7};
    end_if;
    if m=3 then assume([r[i] $i=2..9], Type::Positive);
        assume([r[1],r[10]], Type::Negative,_and);
        assume(r[1]> r[10],_and);
        assume(r[j]>-r[1],_and) $ j in {2,3,4,5,6,7};
        assume(r[j]>-r[10],_and) $ j in {3,4,6,7,8,9};
        assume(r[j]>-(r[1]+r[10]),_and) $ j in {3,4,6,7};
    end_if;
    T0:=matrix([[1],coerce( linalg::transpose(l[1]), DOM_LIST)[1],
coerce( linalg::transpose(l[2]), DOM_LIST)[1],
coerce( linalg::transpose(l[3]), DOM_LIST)[1],
coerce( linalg::transpose(l[4]), DOM_LIST)[1]]]);
    V0:=abs(simplify((1/4!)*linalg::det(T0)));
    return(V0);
end_proc;

```

Para calcular la inercia de un 4-simplex T usamos:

```

Iner:=proc(l)
/* Este programita recibe los vértices de un 4-simplex y devuelve el producto d*I, del
momento de inercia I del 4-simplex y el determinante del lattice. */
local bari, Ine, i, j;
begin
    bari:=_plus(l[i] $i=1..4);
    Ine:=(1/30)*(_plus(dNoY(l[j]) $j=1..4) + dNoY(bari) );
return(Ine);
end_proc;

```

A.3. Variaciones que fijan el determinante.

$$\begin{aligned}
& (a_{30} + a_{60} + a_{80} + a_{90})p_{01}^2p_{02}p_{03} + (a_{20} + a_{50} + a_{70} + a_{90})p_{01}^2p_{02}p_{04} + (a_{30} + a_{60} + a_{80} + a_{90})p_{01}^2p_{02}p_{13} + (a_{20} + a_{50} + \\
& a_{70} + a_{90})p_{01}^2p_{02}p_{14} + (a_{30} + a_{60} + a_{80} + a_{90})p_{01}^2p_{02}p_{23} + (a_{20} + a_{50} + a_{70} + a_{90})p_{01}^2p_{02}p_{24} + (a_{20} + a_{30} + a_{50} + a_{60} + a_{70} + \\
& a_{80})p_{01}^2p_{02}p_{34} + (a_{10} + a_{40} + a_{70} + a_{80})p_{01}^2p_{03}p_{04} + (a_{30} + a_{60} + a_{80} + a_{90})p_{01}^2p_{03}p_{12} + (a_{10} + a_{40} + a_{70} + a_{80})p_{01}^2p_{03}p_{14} + \\
& (a_{30} + a_{60} + a_{80} + a_{90})p_{01}^2p_{03}p_{23} + (a_{10} + a_{30} + a_{40} + a_{60} + a_{70} + a_{90})p_{01}^2p_{03}p_{24} + (a_{10} + a_{40} + a_{70} + a_{80})p_{01}^2p_{03}p_{34} + \\
& (a_{20} + a_{50} + a_{70} + a_{90})p_{01}^2p_{04}p_{12} + (a_{10} + a_{40} + a_{70} + a_{80})p_{01}^2p_{04}p_{13} + (a_{10} + a_{20} + a_{40} + a_{50} + a_{80} + a_{90})p_{01}^2p_{04}p_{23} + \\
& (a_{20} + a_{50} + a_{70} + a_{90})p_{01}^2p_{04}p_{24} + (a_{10} + a_{40} + a_{70} + a_{80})p_{01}^2p_{04}p_{34} + (a_{30} + a_{60} + a_{80} + a_{90})p_{01}^2p_{12}p_{13} + (a_{20} + a_{50} + \\
& a_{70} + a_{90})p_{01}^2p_{12}p_{14} + (a_{30} + a_{60} + a_{80} + a_{90})p_{01}^2p_{12}p_{23} + (a_{20} + a_{50} + a_{70} + a_{90})p_{01}^2p_{12}p_{24} + (a_{20} + a_{30} + a_{50} + a_{60} + \\
& a_{70} + a_{80})p_{01}^2p_{12}p_{34} + (a_{10} + a_{40} + a_{70} + a_{80})p_{01}^2p_{13}p_{14} + (a_{30} + a_{60} + a_{80} + a_{90})p_{01}^2p_{13}p_{23} + (a_{10} + a_{30} + a_{40} + a_{60} + \\
& a_{70} + a_{90})p_{01}^2p_{13}p_{24} + (a_{10} + a_{40} + a_{70} + a_{80})p_{01}^2p_{13}p_{34} + (a_{10} + a_{20} + a_{40} + a_{50} + a_{80} + a_{90})p_{01}^2p_{14}p_{23} + (a_{20} + a_{50} + \\
& a_{70} + a_{90})p_{01}^2p_{14}p_{24} + (a_{10} + a_{40} + a_{70} + a_{80})p_{01}^2p_{14}p_{34} + (a_{10} + a_{20} + a_{30} + a_{40} + a_{50} + a_{60})p_{01}^2p_{23}p_{24} + (a_{10} + a_{20} + \\
& a_{30} + a_{40} + a_{50} + a_{60})p_{01}^2p_{23}p_{34} + (a_{10} + a_{20} + a_{30} + a_{40} + a_{50} + a_{60})p_{01}^2p_{24}p_{34} + (a_{31} + a_{61} + a_{81} + a_{91})p_{01}p_{02}^2p_{03} + \\
& (a_{21} + a_{51} + a_{71} + a_{91})p_{01}p_{02}^2p_{04} + (a_{31} + a_{61} + a_{81} + a_{91})p_{01}p_{02}^2p_{13} + (a_{21} + a_{51} + a_{71} + a_{91})p_{01}p_{02}^2p_{14} + (a_{31} + \\
& a_{61} + a_{81} + a_{91})p_{01}p_{02}^2p_{23} + (a_{21} + a_{51} + a_{71} + a_{91})p_{01}p_{02}^2p_{24} + (a_{21} + a_{31} + a_{51} + a_{61} + a_{71} + a_{81})p_{01}p_{02}^2p_{34} + (a_{32} + \\
& a_{62} + a_{82} + a_{92})p_{01}p_{02}p_{03}^2 + (a_{00} + a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{40} + a_{41} + a_{50} + a_{52} + a_{60} + a_{63} + a_{71} + a_{72} + a_{81} + a_{83} + a_{92} + \\
& a_{93})p_{01}p_{02}p_{03}p_{04} + (a_{30} + a_{31} + a_{34} + a_{60} + a_{61} + a_{64} + a_{80} + a_{81} + a_{84} + a_{90} + a_{91} + a_{94})p_{01}p_{02}p_{03}p_{12} + (a_{30} + a_{32} + \\
& a_{35} + a_{60} + a_{62} + a_{65} + a_{80} + a_{82} + a_{85} + a_{90} + a_{92} + a_{95})p_{01}p_{02}p_{03}p_{13} + (a_{00} + a_{11} + a_{22} + a_{30} + a_{36} + a_{40} + a_{41} + a_{50} + \\
& a_{52} + a_{66} + a_{71} + a_{72} + a_{80} + a_{81} + a_{86} + a_{90} + a_{92} + a_{96})p_{01}p_{02}p_{03}p_{14} + (a_{31} + a_{32} + a_{37} + a_{61} + a_{62} + a_{67} + a_{81} + a_{82} + \\
& a_{87} + a_{91} + a_{92} + a_{97})p_{01}p_{02}p_{03}p_{23} + (a_{00} + a_{11} + a_{22} + a_{31} + a_{38} + a_{40} + a_{41} + a_{50} + a_{52} + a_{60} + a_{61} + a_{68} + a_{71} + a_{72} + \\
& a_{88} + a_{91} + a_{92} + a_{98})p_{01}p_{02}p_{03}p_{24} + (a_{00} + a_{11} + a_{22} + a_{32} + a_{39} + a_{40} + a_{41} + a_{50} + a_{52} + a_{60} + a_{62} + a_{69} + a_{71} + a_{72} + \\
& a_{81} + a_{82} + a_{89} + a_{99})p_{01}p_{02}p_{03}p_{34} + (a_{23} + a_{53} + a_{73} + a_{93})p_{01}p_{02}p_{04}^2 + (a_{20} + a_{21} + a_{24} + a_{50} + a_{51} + a_{54} + a_{70} + a_{71} + \\
& a_{74} + a_{90} + a_{91} + a_{94})p_{01}p_{02}p_{04}p_{12} + (a_{00} + a_{11} + a_{20} + a_{25} + a_{33} + a_{40} + a_{41} + a_{55} + a_{60} + a_{63} + a_{70} + a_{71} + a_{75} + a_{81} + \\
& a_{83} + a_{90} + a_{93} + a_{95})p_{01}p_{02}p_{04}p_{13} + (a_{20} + a_{23} + a_{26} + a_{50} + a_{53} + a_{56} + a_{70} + a_{73} + a_{76} + a_{90} + a_{93} + a_{96})p_{01}p_{02}p_{04}p_{14} + \\
& (a_{00} + a_{11} + a_{21} + a_{27} + a_{33} + a_{40} + a_{41} + a_{50} + a_{51} + a_{57} + a_{60} + a_{63} + a_{77} + a_{81} + a_{83} + a_{91} + a_{93} + a_{97})p_{01}p_{02}p_{04}p_{23} + \\
& (a_{21} + a_{23} + a_{28} + a_{51} + a_{53} + a_{58} + a_{71} + a_{73} + a_{78} + a_{91} + a_{93} + a_{98})p_{01}p_{02}p_{04}p_{24} + (a_{00} + a_{11} + a_{23} + a_{29} + a_{33} + \\
& a_{40} + a_{41} + a_{50} + a_{53} + a_{59} + a_{60} + a_{63} + a_{71} + a_{73} + a_{79} + a_{81} + a_{83} + a_{99})p_{01}p_{02}p_{04}p_{34} + (a_{30} + a_{31} + a_{34} + a_{60} + a_{61} + \\
& a_{64} + a_{80} + a_{81} + a_{84} + a_{90} + a_{91} + a_{94})p_{01}p_{02}p_{12}p_{13} + (a_{20} + a_{21} + a_{24} + a_{50} + a_{51} + a_{54} + a_{70} + a_{71} + a_{74} + a_{90} + a_{91} + \\
& a_{94})p_{01}p_{02}p_{12}p_{14} + (a_{30} + a_{31} + a_{34} + a_{60} + a_{61} + a_{64} + a_{80} + a_{81} + a_{84} + a_{90} + a_{91} + a_{94})p_{01}p_{02}p_{12}p_{23} + (a_{20} + a_{21} + \\
& a_{24} + a_{50} + a_{51} + a_{54} + a_{70} + a_{71} + a_{74} + a_{90} + a_{91} + a_{94})p_{01}p_{02}p_{12}p_{24} + (a_{20} + a_{21} + a_{24} + a_{30} + a_{31} + a_{34} + a_{50} + a_{51} + \\
& a_{54} + a_{60} + a_{61} + a_{64} + a_{70} + a_{71} + a_{74} + a_{80} + a_{81} + a_{84})p_{01}p_{02}p_{12}p_{34} + (a_{35} + a_{65} + a_{85} + a_{95})p_{01}p_{02}p_{13}^2 + (a_{00} + a_{11} + \\
& a_{20} + a_{25} + a_{30} + a_{36} + a_{40} + a_{41} + a_{55} + a_{66} + a_{70} + a_{71} + a_{75} + a_{80} + a_{81} + a_{86} + a_{95} + a_{96})p_{01}p_{02}p_{13}p_{14} + (a_{30} + a_{31} + \\
& a_{35} + a_{37} + a_{60} + a_{61} + a_{65} + a_{67} + a_{80} + a_{81} + a_{85} + a_{87} + a_{90} + a_{91} + a_{95} + a_{97})p_{01}p_{02}p_{13}p_{23} + (a_{00} + a_{11} + a_{20} + a_{25} + \\
& a_{31} + a_{38} + a_{40} + a_{41} + a_{55} + a_{60} + a_{61} + a_{68} + a_{70} + a_{71} + a_{75} + a_{88} + a_{90} + a_{91} + a_{95} + a_{98})p_{01}p_{02}p_{13}p_{24} + (a_{00} + a_{11} + \\
& a_{20} + a_{25} + a_{30} + a_{35} + a_{39} + a_{40} + a_{41} + a_{55} + a_{65} + a_{69} + a_{70} + a_{71} + a_{75} + a_{80} + a_{81} + a_{85} + a_{89} + a_{99})p_{01}p_{02}p_{13}p_{34} + \\
& (a_{26} + a_{56} + a_{76} + a_{96})p_{01}p_{02}p_{14}^2 + (a_{00} + a_{11} + a_{21} + a_{27} + a_{30} + a_{36} + a_{40} + a_{41} + a_{50} + a_{51} + a_{57} + a_{66} + a_{77} + a_{80} + \\
& a_{81} + a_{86} + a_{90} + a_{91} + a_{96} + a_{97})p_{01}p_{02}p_{14}p_{23} + (a_{20} + a_{21} + a_{26} + a_{28} + a_{50} + a_{51} + a_{56} + a_{58} + a_{70} + a_{71} + a_{76} + a_{78} + \\
& a_{90} + a_{91} + a_{96} + a_{98})p_{01}p_{02}p_{14}p_{24} + (a_{00} + a_{11} + a_{20} + a_{26} + a_{29} + a_{30} + a_{36} + a_{40} + a_{41} + a_{56} + a_{59} + a_{66} + a_{70} + a_{71} + \\
& a_{76} + a_{79} + a_{80} + a_{81} + a_{86} + a_{99})p_{01}p_{02}p_{14}p_{34} + (a_{37} + a_{67} + a_{87} + a_{97})p_{01}p_{02}p_{23}^2 + (a_{00} + a_{11} + a_{21} + a_{27} + a_{31} + \\
& a_{38} + a_{40} + a_{41} + a_{50} + a_{51} + a_{57} + a_{60} + a_{61} + a_{68} + a_{77} + a_{88} + a_{97} + a_{98})p_{01}p_{02}p_{23}p_{24} + (a_{00} + a_{11} + a_{21} + a_{27} + a_{31} + \\
& a_{37} + a_{39} + a_{40} + a_{41} + a_{50} + a_{51} + a_{57} + a_{60} + a_{61} + a_{67} + a_{69} + a_{77} + a_{87} + a_{89} + a_{99})p_{01}p_{02}p_{23}p_{34} + (a_{28} + a_{58} + a_{78} + \\
& a_{98})p_{01}p_{02}p_{24}^2 + (a_{00} + a_{11} + a_{21} + a_{28} + a_{29} + a_{31} + a_{38} + a_{40} + a_{41} + a_{50} + a_{51} + a_{58} + a_{59} + a_{60} + a_{61} + a_{68} + a_{78} + a_{79} + \\
& a_{88} + a_{99})p_{01}p_{02}p_{24}p_{34} + (a_{29} + a_{39} + a_{59} + a_{69} + a_{79} + a_{89})p_{01}p_{02}p_{34}^2 + (a_{12} + a_{42} + a_{72} + a_{82})p_{01}p_{03}^2p_{04} + (a_{32} + a_{62} + \\
& a_{82} + a_{92})p_{01}p_{03}^2p_{12} + (a_{12} + a_{42} + a_{72} + a_{82})p_{01}p_{03}^2p_{14} + (a_{32} + a_{62} + a_{82} + a_{92})p_{01}p_{03}^2p_{23} + (a_{12} + a_{32} + a_{42} + a_{62} + \\
& a_{72} + a_{92})p_{01}p_{03}^2p_{24} + (a_{12} + a_{42} + a_{72} + a_{82})p_{01}p_{03}^2p_{34} + (a_{13} + a_{43} + a_{73} + a_{83})p_{01}p_{03}p_{04}^2 + (a_{00} + a_{10} + a_{14} + a_{22} + \\
& a_{33} + a_{44} + a_{50} + a_{52} + a_{60} + a_{63} + a_{70} + a_{72} + a_{74} + a_{80} + a_{83} + a_{84} + a_{92} + a_{93})p_{01}p_{03}p_{04}p_{12} + (a_{10} + a_{12} + a_{15} + a_{40} + \\
& a_{42} + a_{45} + a_{70} + a_{72} + a_{75} + a_{80} + a_{82} + a_{85})p_{01}p_{03}p_{04}p_{13} + (a_{10} + a_{13} + a_{16} + a_{40} + a_{43} + a_{46} + a_{70} + a_{73} + a_{76} + a_{80} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_{83} + a_{86})p_{01}p_{03}p_{04}p_{14} + (a_{00} + a_{12} + a_{17} + a_{22} + a_{33} + a_{40} + a_{42} + a_{47} + a_{50} + a_{52} + a_{60} + a_{63} + a_{77} + a_{82} + a_{83} + a_{87} + \\
& a_{92} + a_{93})p_{01}p_{03}p_{04}p_{23} + (a_{00} + a_{13} + a_{18} + a_{22} + a_{33} + a_{40} + a_{43} + a_{48} + a_{50} + a_{52} + a_{60} + a_{63} + a_{72} + a_{73} + a_{78} + a_{88} + \\
& a_{92} + a_{93})p_{01}p_{03}p_{04}p_{24} + (a_{12} + a_{13} + a_{19} + a_{42} + a_{43} + a_{49} + a_{72} + a_{73} + a_{79} + a_{82} + a_{83} + a_{89})p_{01}p_{03}p_{04}p_{34} + (a_{34} + \\
& a_{64} + a_{84} + a_{94})p_{01}p_{03}p_{12}^2 + (a_{30} + a_{32} + a_{35} + a_{60} + a_{62} + a_{65} + a_{80} + a_{82} + a_{85} + a_{90} + a_{92} + a_{95})p_{01}p_{03}p_{12}p_{13} + (a_{00} + \\
& a_{10} + a_{14} + a_{22} + a_{30} + a_{36} + a_{44} + a_{50} + a_{52} + a_{66} + a_{70} + a_{72} + a_{74} + a_{84} + a_{86} + a_{90} + a_{92} + a_{96})p_{01}p_{03}p_{12}p_{14} + (a_{30} + \\
& a_{32} + a_{34} + a_{37} + a_{60} + a_{62} + a_{64} + a_{67} + a_{80} + a_{82} + a_{84} + a_{87} + a_{90} + a_{92} + a_{94} + a_{97})p_{01}p_{03}p_{12}p_{23} + (a_{00} + a_{10} + a_{14} + \\
& a_{22} + a_{30} + a_{34} + a_{38} + a_{44} + a_{50} + a_{52} + a_{64} + a_{68} + a_{70} + a_{72} + a_{74} + a_{88} + a_{90} + a_{92} + a_{94} + a_{98})p_{01}p_{03}p_{12}p_{24} + (a_{00} + \\
& a_{10} + a_{14} + a_{22} + a_{32} + a_{39} + a_{44} + a_{50} + a_{52} + a_{60} + a_{62} + a_{69} + a_{70} + a_{72} + a_{74} + a_{80} + a_{82} + a_{84} + a_{89} + a_{99})p_{01}p_{03}p_{12}p_{34} + \\
& (a_{10} + a_{12} + a_{15} + a_{40} + a_{42} + a_{45} + a_{70} + a_{72} + a_{75} + a_{80} + a_{82} + a_{85})p_{01}p_{03}p_{13}p_{14} + (a_{30} + a_{32} + a_{35} + a_{60} + a_{62} + \\
& a_{65} + a_{80} + a_{82} + a_{85} + a_{90} + a_{92} + a_{95})p_{01}p_{03}p_{13}p_{23} + (a_{10} + a_{12} + a_{15} + a_{30} + a_{32} + a_{35} + a_{40} + a_{42} + a_{45} + a_{60} + a_{62} + \\
& a_{65} + a_{70} + a_{72} + a_{75} + a_{90} + a_{92} + a_{95})p_{01}p_{03}p_{13}p_{24} + (a_{10} + a_{12} + a_{15} + a_{40} + a_{42} + a_{45} + a_{70} + a_{72} + a_{75} + a_{80} + a_{82} + \\
& a_{85})p_{01}p_{03}p_{13}p_{34} + (a_{16} + a_{46} + a_{76} + a_{86})p_{01}p_{03}p_{14}^2 + (a_{00} + a_{12} + a_{17} + a_{22} + a_{30} + a_{36} + a_{40} + a_{42} + a_{47} + a_{50} + a_{52} + \\
& a_{66} + a_{77} + a_{80} + a_{82} + a_{86} + a_{87} + a_{90} + a_{92} + a_{96})p_{01}p_{03}p_{14}p_{23} + (a_{00} + a_{10} + a_{16} + a_{18} + a_{22} + a_{30} + a_{36} + a_{46} + a_{48} + \\
& a_{50} + a_{52} + a_{66} + a_{70} + a_{72} + a_{76} + a_{78} + a_{88} + a_{90} + a_{92} + a_{96})p_{01}p_{03}p_{14}p_{24} + (a_{10} + a_{12} + a_{16} + a_{19} + a_{40} + a_{42} + a_{46} + \\
& a_{49} + a_{70} + a_{72} + a_{76} + a_{79} + a_{80} + a_{82} + a_{86} + a_{89})p_{01}p_{03}p_{14}p_{34} + (a_{37} + a_{67} + a_{87} + a_{97})p_{01}p_{03}p_{23}^2 + (a_{00} + a_{12} + a_{17} + \\
& a_{22} + a_{32} + a_{37} + a_{38} + a_{40} + a_{42} + a_{47} + a_{50} + a_{52} + a_{60} + a_{62} + a_{67} + a_{68} + a_{77} + a_{88} + a_{97} + a_{98})p_{01}p_{03}p_{23}p_{24} + (a_{00} + \\
& a_{12} + a_{17} + a_{22} + a_{32} + a_{39} + a_{40} + a_{42} + a_{47} + a_{50} + a_{52} + a_{60} + a_{62} + a_{69} + a_{77} + a_{87} + a_{89} + a_{99})p_{01}p_{03}p_{23}p_{34} + (a_{18} + \\
& a_{38} + a_{48} + a_{68} + a_{78} + a_{98})p_{01}p_{03}p_{24}^2 + (a_{00} + a_{12} + a_{18} + a_{19} + a_{22} + a_{32} + a_{39} + a_{40} + a_{42} + a_{48} + a_{49} + a_{50} + a_{52} + a_{60} + \\
& a_{62} + a_{69} + a_{78} + a_{79} + a_{88} + a_{99})p_{01}p_{03}p_{24}p_{34} + (a_{19} + a_{49} + a_{79} + a_{89})p_{01}p_{03}p_{34}^2 + (a_{23} + a_{53} + a_{73} + a_{93})p_{01}p_{04}p_{12}^2 + \\
& (a_{13} + a_{43} + a_{73} + a_{83})p_{01}p_{04}p_{13}^2 + (a_{13} + a_{23} + a_{43} + a_{53} + a_{83} + a_{93})p_{01}p_{04}p_{23}^2 + (a_{23} + a_{53} + a_{73} + a_{93})p_{01}p_{04}p_{24}^2 + \\
& (a_{13} + a_{43} + a_{73} + a_{83})p_{01}p_{04}p_{34}^2 + (a_{24} + a_{54} + a_{74} + a_{94})p_{01}p_{04}p_{12}^2 + (a_{00} + a_{10} + a_{14} + a_{20} + a_{25} + a_{33} + a_{44} + a_{55} + a_{60} + \\
& a_{63} + a_{74} + a_{75} + a_{80} + a_{83} + a_{84} + a_{90} + a_{93} + a_{95})p_{01}p_{04}p_{12}p_{13} + (a_{20} + a_{23} + a_{26} + a_{50} + a_{53} + a_{56} + a_{70} + a_{73} + a_{76} + \\
& a_{90} + a_{93} + a_{96})p_{01}p_{04}p_{12}p_{14} + (a_{00} + a_{10} + a_{14} + a_{20} + a_{24} + a_{27} + a_{33} + a_{44} + a_{54} + a_{57} + a_{60} + a_{63} + a_{77} + a_{80} + a_{83} + \\
& a_{84} + a_{90} + a_{93} + a_{94} + a_{97})p_{01}p_{04}p_{12}p_{23} + (a_{20} + a_{23} + a_{24} + a_{28} + a_{50} + a_{53} + a_{54} + a_{58} + a_{70} + a_{73} + a_{74} + a_{78} + a_{90} + \\
& a_{93} + a_{94} + a_{98})p_{01}p_{04}p_{12}p_{24} + (a_{00} + a_{10} + a_{14} + a_{23} + a_{29} + a_{33} + a_{44} + a_{50} + a_{53} + a_{59} + a_{60} + a_{63} + a_{70} + a_{73} + a_{74} + \\
& a_{79} + a_{80} + a_{83} + a_{84} + a_{99})p_{01}p_{04}p_{12}p_{34} + (a_{15} + a_{45} + a_{75} + a_{85})p_{01}p_{04}p_{13}^2 + (a_{10} + a_{13} + a_{16} + a_{40} + a_{43} + a_{46} + a_{70} + \\
& a_{73} + a_{76} + a_{80} + a_{83} + a_{86})p_{01}p_{04}p_{13}p_{14} + (a_{00} + a_{10} + a_{15} + a_{17} + a_{20} + a_{25} + a_{33} + a_{45} + a_{47} + a_{55} + a_{60} + a_{63} + a_{77} + \\
& a_{80} + a_{83} + a_{85} + a_{87} + a_{90} + a_{93} + a_{95})p_{01}p_{04}p_{13}p_{23} + (a_{00} + a_{13} + a_{18} + a_{20} + a_{25} + a_{33} + a_{40} + a_{43} + a_{48} + a_{55} + a_{60} + \\
& a_{63} + a_{70} + a_{73} + a_{75} + a_{78} + a_{88} + a_{90} + a_{93} + a_{95})p_{01}p_{04}p_{13}p_{24} + (a_{10} + a_{13} + a_{15} + a_{19} + a_{40} + a_{43} + a_{45} + a_{49} + a_{70} + \\
& a_{73} + a_{75} + a_{79} + a_{80} + a_{83} + a_{85} + a_{89})p_{01}p_{04}p_{13}p_{34} + (a_{10} + a_{13} + a_{16} + a_{20} + a_{23} + a_{26} + a_{40} + a_{43} + a_{46} + a_{50} + a_{53} + \\
& a_{56} + a_{80} + a_{83} + a_{86} + a_{90} + a_{93} + a_{96})p_{01}p_{04}p_{14}p_{23} + (a_{20} + a_{23} + a_{26} + a_{50} + a_{53} + a_{56} + a_{70} + a_{73} + a_{76} + a_{90} + a_{93} + \\
& a_{96})p_{01}p_{04}p_{14}p_{24} + (a_{10} + a_{13} + a_{16} + a_{40} + a_{43} + a_{46} + a_{70} + a_{73} + a_{76} + a_{80} + a_{83} + a_{86})p_{01}p_{04}p_{14}p_{34} + (a_{17} + a_{27} + a_{47} + \\
& a_{57} + a_{87} + a_{97})p_{01}p_{04}p_{23}^2 + (a_{00} + a_{13} + a_{18} + a_{23} + a_{27} + a_{28} + a_{33} + a_{40} + a_{43} + a_{48} + a_{50} + a_{53} + a_{57} + a_{58} + a_{60} + a_{63} + \\
& a_{77} + a_{88} + a_{97} + a_{98})p_{01}p_{04}p_{23}p_{24} + (a_{00} + a_{13} + a_{17} + a_{19} + a_{23} + a_{29} + a_{33} + a_{40} + a_{43} + a_{47} + a_{49} + a_{50} + a_{53} + a_{59} + \\
& a_{60} + a_{63} + a_{77} + a_{87} + a_{89} + a_{99})p_{01}p_{04}p_{23}p_{34} + (a_{28} + a_{58} + a_{78} + a_{98})p_{01}p_{04}p_{24}^2 + (a_{00} + a_{13} + a_{18} + a_{23} + a_{29} + a_{33} + \\
& a_{40} + a_{43} + a_{48} + a_{50} + a_{53} + a_{59} + a_{60} + a_{63} + a_{78} + a_{79} + a_{88} + a_{99})p_{01}p_{04}p_{24}p_{34} + (a_{19} + a_{49} + a_{79} + a_{89})p_{01}p_{04}p_{34}^2 + \\
& (a_{34} + a_{64} + a_{84} + a_{94})p_{01}p_{12}^2p_{13} + (a_{24} + a_{54} + a_{74} + a_{94})p_{01}p_{12}^2p_{14} + (a_{34} + a_{64} + a_{84} + a_{94})p_{01}p_{12}^2p_{23} + (a_{24} + a_{54} + \\
& a_{74} + a_{94})p_{01}p_{12}^2p_{24} + (a_{24} + a_{34} + a_{54} + a_{64} + a_{74} + a_{84})p_{01}p_{12}^2p_{34} + (a_{35} + a_{65} + a_{85} + a_{95})p_{01}p_{12}p_{13}^2 + (a_{00} + a_{10} + \\
& a_{14} + a_{20} + a_{25} + a_{30} + a_{36} + a_{44} + a_{55} + a_{66} + a_{74} + a_{75} + a_{84} + a_{86} + a_{95} + a_{96})p_{01}p_{12}p_{13}p_{14} + (a_{34} + a_{35} + a_{37} + a_{64} + \\
& a_{65} + a_{67} + a_{84} + a_{85} + a_{87} + a_{94} + a_{95} + a_{97})p_{01}p_{12}p_{13}p_{23} + (a_{00} + a_{10} + a_{14} + a_{20} + a_{25} + a_{30} + a_{34} + a_{38} + a_{44} + a_{55} + \\
& a_{64} + a_{68} + a_{74} + a_{75} + a_{88} + a_{94} + a_{95} + a_{98})p_{01}p_{12}p_{13}p_{24} + (a_{00} + a_{10} + a_{14} + a_{20} + a_{25} + a_{30} + a_{35} + a_{39} + a_{44} + a_{55} + \\
& a_{65} + a_{69} + a_{74} + a_{75} + a_{84} + a_{85} + a_{89} + a_{99})p_{01}p_{12}p_{13}p_{34} + (a_{26} + a_{56} + a_{76} + a_{96})p_{01}p_{12}p_{14}^2 + (a_{00} + a_{10} + a_{14} + a_{20} + \\
& a_{24} + a_{27} + a_{30} + a_{36} + a_{44} + a_{54} + a_{57} + a_{66} + a_{77} + a_{84} + a_{86} + a_{94} + a_{96} + a_{97})p_{01}p_{12}p_{14}p_{23} + (a_{24} + a_{26} + a_{28} + a_{54} + \\
& a_{56} + a_{58} + a_{74} + a_{76} + a_{78} + a_{94} + a_{96} + a_{98})p_{01}p_{12}p_{14}p_{24} + (a_{00} + a_{10} + a_{14} + a_{20} + a_{26} + a_{29} + a_{30} + a_{36} + a_{44} + a_{56} + \\
& a_{59} + a_{66} + a_{74} + a_{76} + a_{79} + a_{84} + a_{86} + a_{99})p_{01}p_{12}p_{14}p_{34} + (a_{37} + a_{67} + a_{87} + a_{97})p_{01}p_{12}p_{23}^2 + (a_{00} + a_{10} + a_{14} + a_{20} + \\
& a_{24} + a_{27} + a_{30} + a_{34} + a_{38} + a_{44} + a_{54} + a_{57} + a_{64} + a_{68} + a_{77} + a_{88} + a_{97} + a_{98})p_{01}p_{12}p_{23}p_{24} + (a_{00} + a_{10} + a_{14} + a_{20} + \\
& a_{24} + a_{27} + a_{30} + a_{34} + a_{37} + a_{39} + a_{44} + a_{54} + a_{57} + a_{64} + a_{67} + a_{69} + a_{77} + a_{87} + a_{89} + a_{99})p_{01}p_{12}p_{23}p_{34} + (a_{28} + a_{58} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_{78} + a_{98})p_{01}p_{12}p_{24}^2 + (a_{00} + a_{10} + a_{14} + a_{20} + a_{24} + a_{28} + a_{29} + a_{30} + a_{34} + a_{38} + a_{44} + a_{54} + a_{58} + a_{59} + a_{64} + a_{68} + a_{78} + \\
& a_{79} + a_{88} + a_{99})p_{01}p_{12}p_{24}p_{34} + (a_{29} + a_{39} + a_{59} + a_{69} + a_{79} + a_{89})p_{01}p_{12}p_{34}^2 + (a_{15} + a_{45} + a_{75} + a_{85})p_{01}p_{13}^2p_{14} + (a_{35} + \\
& a_{65} + a_{85} + a_{95})p_{01}p_{13}^2p_{23} + (a_{15} + a_{35} + a_{45} + a_{65} + a_{75} + a_{95})p_{01}p_{13}^2p_{24} + (a_{15} + a_{45} + a_{75} + a_{85})p_{01}p_{13}^2p_{34} + (a_{16} + \\
& a_{46} + a_{76} + a_{86})p_{01}p_{13}p_{14}^2 + (a_{00} + a_{10} + a_{15} + a_{17} + a_{20} + a_{25} + a_{30} + a_{36} + a_{45} + a_{47} + a_{55} + a_{66} + a_{77} + a_{85} + a_{86} + a_{87} + \\
& a_{95} + a_{96})p_{01}p_{13}p_{14}p_{23} + (a_{00} + a_{10} + a_{16} + a_{18} + a_{20} + a_{25} + a_{30} + a_{36} + a_{46} + a_{48} + a_{55} + a_{66} + a_{75} + a_{76} + a_{78} + a_{88} + \\
& a_{95} + a_{96})p_{01}p_{13}p_{14}p_{24} + (a_{15} + a_{16} + a_{19} + a_{45} + a_{46} + a_{49} + a_{75} + a_{76} + a_{79} + a_{85} + a_{86} + a_{89})p_{01}p_{13}p_{14}p_{34} + (a_{37} + \\
& a_{67} + a_{87} + a_{97})p_{01}p_{13}p_{23}^2 + (a_{00} + a_{10} + a_{15} + a_{17} + a_{20} + a_{25} + a_{30} + a_{35} + a_{37} + a_{38} + a_{45} + a_{47} + a_{55} + a_{65} + a_{67} + \\
& a_{68} + a_{77} + a_{88} + a_{97} + a_{98})p_{01}p_{13}p_{23}p_{24} + (a_{00} + a_{10} + a_{15} + a_{17} + a_{20} + a_{25} + a_{30} + a_{35} + a_{39} + a_{45} + a_{47} + a_{55} + a_{65} + \\
& a_{69} + a_{77} + a_{87} + a_{89} + a_{99})p_{01}p_{13}p_{23}p_{34} + (a_{18} + a_{38} + a_{48} + a_{68} + a_{78} + a_{98})p_{01}p_{13}p_{24}^2 + (a_{00} + a_{10} + a_{15} + a_{18} + a_{19} + \\
& a_{20} + a_{25} + a_{30} + a_{35} + a_{39} + a_{45} + a_{48} + a_{49} + a_{55} + a_{65} + a_{69} + a_{78} + a_{79} + a_{88} + a_{99})p_{01}p_{13}p_{24}p_{34} + (a_{19} + a_{49} + a_{79} + \\
& a_{89})p_{01}p_{13}p_{34}^2 + (a_{16} + a_{26} + a_{46} + a_{56} + a_{86} + a_{96})p_{01}p_{14}^2p_{23} + (a_{26} + a_{56} + a_{76} + a_{96})p_{01}p_{14}^2p_{24} + (a_{16} + a_{46} + a_{76} + \\
& a_{86})p_{01}p_{14}^2p_{34} + (a_{17} + a_{27} + a_{47} + a_{57} + a_{87} + a_{97})p_{01}p_{14}p_{23}^2 + (a_{00} + a_{10} + a_{16} + a_{18} + a_{20} + a_{26} + a_{27} + a_{28} + a_{30} + a_{36} + \\
& a_{46} + a_{48} + a_{56} + a_{57} + a_{58} + a_{66} + a_{77} + a_{88} + a_{97} + a_{98})p_{01}p_{14}p_{23}p_{24} + (a_{00} + a_{10} + a_{16} + a_{17} + a_{19} + a_{20} + a_{26} + a_{29} + \\
& a_{30} + a_{36} + a_{46} + a_{47} + a_{49} + a_{56} + a_{59} + a_{66} + a_{77} + a_{87} + a_{89} + a_{99})p_{01}p_{14}p_{23}p_{34} + (a_{28} + a_{58} + a_{78} + a_{98})p_{01}p_{14}p_{24}^2 + \\
& (a_{00} + a_{10} + a_{16} + a_{18} + a_{20} + a_{26} + a_{29} + a_{30} + a_{36} + a_{46} + a_{48} + a_{56} + a_{59} + a_{66} + a_{78} + a_{79} + a_{88} + a_{99})p_{01}p_{14}p_{24}p_{34} + \\
& (a_{19} + a_{49} + a_{79} + a_{89})p_{01}p_{14}p_{34}^2 + (a_{17} + a_{27} + a_{37} + a_{47} + a_{57} + a_{67})p_{01}p_{23}^2p_{24} + (a_{17} + a_{27} + a_{37} + a_{47} + a_{57} + \\
& a_{67})p_{01}p_{23}^2p_{34} + (a_{18} + a_{28} + a_{38} + a_{48} + a_{58} + a_{68})p_{01}p_{23}p_{24}^2 + (a_{17} + a_{18} + a_{19} + a_{27} + a_{28} + a_{29} + a_{37} + a_{38} + a_{39} + a_{47} + \\
& a_{48} + a_{49} + a_{57} + a_{58} + a_{59} + a_{67} + a_{68} + a_{69})p_{01}p_{23}p_{24}p_{34} + (a_{19} + a_{29} + a_{39} + a_{49} + a_{59} + a_{69})p_{01}p_{23}p_{34}^2 + (a_{18} + a_{28} + \\
& a_{38} + a_{48} + a_{58} + a_{68})p_{01}p_{24}^2p_{34} + (a_{19} + a_{29} + a_{39} + a_{49} + a_{59} + a_{69})p_{01}p_{24}p_{34}^2 + (a_{01} + a_{41} + a_{51} + a_{61})p_{02}^2p_{03}p_{04} + \\
& (a_{31} + a_{61} + a_{81} + a_{91})p_{02}^2p_{03}p_{12} + (a_{31} + a_{61} + a_{81} + a_{91})p_{02}^2p_{03}p_{13} + (a_{01} + a_{31} + a_{41} + a_{51} + a_{81} + a_{91})p_{02}^2p_{03}p_{14} + \\
& (a_{01} + a_{41} + a_{51} + a_{61})p_{02}^2p_{03}p_{24} + (a_{01} + a_{41} + a_{51} + a_{61})p_{02}^2p_{03}p_{34} + (a_{21} + a_{51} + a_{71} + a_{91})p_{02}^2p_{04}p_{12} + (a_{01} + \\
& a_{21} + a_{41} + a_{61} + a_{71} + a_{91})p_{02}^2p_{04}p_{13} + (a_{21} + a_{51} + a_{71} + a_{91})p_{02}^2p_{04}p_{14} + (a_{01} + a_{41} + a_{51} + a_{61})p_{02}^2p_{04}p_{23} + (a_{01} + \\
& a_{41} + a_{51} + a_{61})p_{02}^2p_{04}p_{34} + (a_{31} + a_{61} + a_{81} + a_{91})p_{02}^2p_{12}p_{13} + (a_{21} + a_{51} + a_{71} + a_{91})p_{02}^2p_{12}p_{14} + (a_{31} + a_{61} + a_{81} + \\
& a_{91})p_{02}^2p_{12}p_{23} + (a_{21} + a_{51} + a_{71} + a_{91})p_{02}^2p_{12}p_{24} + (a_{21} + a_{31} + a_{51} + a_{61} + a_{71} + a_{81})p_{02}^2p_{12}p_{34} + (a_{01} + a_{21} + a_{31} + \\
& a_{41} + a_{71} + a_{81})p_{02}^2p_{13}p_{14} + (a_{31} + a_{61} + a_{81} + a_{91})p_{02}^2p_{13}p_{23} + (a_{01} + a_{21} + a_{41} + a_{61} + a_{71} + a_{91})p_{02}^2p_{13}p_{24} + (a_{01} + \\
& a_{21} + a_{31} + a_{41} + a_{71} + a_{81})p_{02}^2p_{13}p_{34} + (a_{01} + a_{31} + a_{41} + a_{51} + a_{81} + a_{91})p_{02}^2p_{14}p_{23} + (a_{21} + a_{51} + a_{71} + a_{91})p_{02}^2p_{14}p_{24} + \\
& (a_{01} + a_{21} + a_{31} + a_{41} + a_{71} + a_{81})p_{02}^2p_{14}p_{34} + (a_{01} + a_{41} + a_{51} + a_{61})p_{02}^2p_{23}p_{24} + (a_{01} + a_{41} + a_{51} + a_{61})p_{02}^2p_{23}p_{34} + \\
& (a_{01} + a_{41} + a_{51} + a_{61})p_{02}^2p_{24}p_{34} + (a_{02} + a_{42} + a_{52} + a_{62})p_{02}p_{03}^2p_{04} + (a_{32} + a_{62} + a_{82} + a_{92})p_{02}p_{03}^2p_{12} + (a_{32} + a_{62} + \\
& a_{82} + a_{92})p_{02}p_{03}^2p_{13} + (a_{02} + a_{32} + a_{42} + a_{52} + a_{82} + a_{92})p_{02}p_{03}^2p_{14} + (a_{02} + a_{42} + a_{52} + a_{62})p_{02}p_{03}^2p_{24} + (a_{02} + a_{42} + \\
& a_{52} + a_{62})p_{02}p_{03}^2p_{34} + (a_{03} + a_{43} + a_{53} + a_{63})p_{02}p_{03}p_{04}^2 + (a_{01} + a_{04} + a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} + a_{51} + a_{52} + a_{54} + a_{61} + a_{63} + \\
& a_{64} + a_{71} + a_{72} + a_{81} + a_{83} + a_{92} + a_{93})p_{02}p_{03}p_{04}p_{12} + (a_{02} + a_{05} + a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{41} + a_{42} + a_{45} + a_{55} + a_{62} + a_{63} + \\
& a_{65} + a_{71} + a_{72} + a_{81} + a_{83} + a_{92} + a_{93})p_{02}p_{03}p_{04}p_{13} + (a_{03} + a_{06} + a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{41} + a_{43} + a_{46} + a_{52} + a_{53} + a_{56} + \\
& a_{66} + a_{71} + a_{72} + a_{81} + a_{83} + a_{92} + a_{93})p_{02}p_{03}p_{04}p_{14} + (a_{01} + a_{02} + a_{07} + a_{41} + a_{42} + a_{47} + a_{51} + a_{52} + a_{57} + a_{61} + a_{62} + \\
& a_{67})p_{02}p_{03}p_{04}p_{23} + (a_{01} + a_{03} + a_{08} + a_{41} + a_{43} + a_{48} + a_{51} + a_{53} + a_{58} + a_{61} + a_{63} + a_{68})p_{02}p_{03}p_{04}p_{24} + (a_{02} + a_{03} + \\
& a_{09} + a_{42} + a_{43} + a_{49} + a_{52} + a_{53} + a_{59} + a_{62} + a_{63} + a_{69})p_{02}p_{03}p_{04}p_{34} + (a_{34} + a_{64} + a_{84} + a_{94})p_{02}p_{03}p_{12}^2 + (a_{31} + a_{32} + \\
& a_{34} + a_{35} + a_{61} + a_{62} + a_{64} + a_{65} + a_{81} + a_{82} + a_{84} + a_{85} + a_{91} + a_{92} + a_{94} + a_{95})p_{02}p_{03}p_{12}p_{13} + (a_{01} + a_{04} + a_{11} + a_{22} + \\
& a_{31} + a_{34} + a_{36} + a_{44} + a_{51} + a_{52} + a_{54} + a_{66} + a_{71} + a_{72} + a_{84} + a_{86} + a_{91} + a_{92} + a_{94} + a_{96})p_{02}p_{03}p_{12}p_{14} + (a_{31} + a_{32} + \\
& a_{37} + a_{61} + a_{62} + a_{67} + a_{81} + a_{82} + a_{87} + a_{91} + a_{92} + a_{97})p_{02}p_{03}p_{12}p_{23} + (a_{01} + a_{04} + a_{11} + a_{22} + a_{31} + a_{38} + a_{44} + a_{51} + \\
& a_{52} + a_{54} + a_{64} + a_{68} + a_{71} + a_{72} + a_{88} + a_{91} + a_{92} + a_{98})p_{02}p_{03}p_{12}p_{24} + (a_{01} + a_{04} + a_{11} + a_{22} + a_{32} + a_{39} + a_{44} + a_{51} + \\
& a_{52} + a_{54} + a_{61} + a_{62} + a_{64} + a_{69} + a_{71} + a_{72} + a_{81} + a_{82} + a_{89} + a_{99})p_{02}p_{03}p_{12}p_{34} + (a_{35} + a_{65} + a_{85} + a_{95})p_{02}p_{03}p_{13}^2 + \\
& (a_{02} + a_{05} + a_{11} + a_{22} + a_{32} + a_{35} + a_{36} + a_{41} + a_{42} + a_{45} + a_{55} + a_{66} + a_{71} + a_{72} + a_{81} + a_{82} + a_{85} + a_{86} + a_{95} + \\
& a_{96})p_{02}p_{03}p_{13}p_{14} + (a_{31} + a_{32} + a_{37} + a_{61} + a_{62} + a_{67} + a_{81} + a_{82} + a_{87} + a_{91} + a_{92} + a_{97})p_{02}p_{03}p_{13}p_{23} + (a_{02} + a_{05} + \\
& a_{11} + a_{22} + a_{31} + a_{38} + a_{41} + a_{42} + a_{45} + a_{55} + a_{61} + a_{62} + a_{65} + a_{68} + a_{71} + a_{72} + a_{88} + a_{91} + a_{92} + a_{98})p_{02}p_{03}p_{13}p_{24} + \\
& (a_{02} + a_{05} + a_{11} + a_{22} + a_{32} + a_{39} + a_{41} + a_{42} + a_{45} + a_{55} + a_{65} + a_{69} + a_{71} + a_{72} + a_{81} + a_{82} + a_{89} + a_{99})p_{02}p_{03}p_{13}p_{34} + \\
& (a_{06} + a_{36} + a_{46} + a_{56} + a_{86} + a_{96})p_{02}p_{03}p_{14}^2 + (a_{01} + a_{02} + a_{07} + a_{31} + a_{32} + a_{37} + a_{41} + a_{42} + a_{47} + a_{51} + a_{52} + a_{57} + a_{81} + \\
& a_{82} + a_{87} + a_{91} + a_{92} + a_{97})p_{02}p_{03}p_{14}p_{23} + (a_{01} + a_{06} + a_{08} + a_{11} + a_{22} + a_{31} + a_{38} + a_{46} + a_{48} + a_{51} + a_{52} + a_{56} + a_{58} + \\
& a_{66} + a_{71} + a_{72} + a_{88} + a_{91} + a_{92} + a_{98})p_{02}p_{03}p_{14}p_{24} + (a_{02} + a_{06} + a_{09} + a_{11} + a_{22} + a_{32} + a_{39} + a_{41} + a_{42} + a_{46} + a_{49} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_{56} + a_{59} + a_{66} + a_{71} + a_{72} + a_{81} + a_{82} + a_{89} + a_{99})p_{02}p_{03}p_{14}p_{34} + (a_{01} + a_{02} + a_{07} + a_{41} + a_{42} + a_{47} + a_{51} + a_{52} + a_{57} + \\
& a_{61} + a_{62} + a_{67})p_{02}p_{03}p_{23}p_{24} + (a_{01} + a_{02} + a_{07} + a_{41} + a_{42} + a_{47} + a_{51} + a_{52} + a_{57} + a_{61} + a_{62} + a_{67})p_{02}p_{03}p_{23}p_{34} + \\
& (a_{08} + a_{48} + a_{58} + a_{68})p_{02}p_{03}p_{24}^2 + (a_{01} + a_{02} + a_{08} + a_{09} + a_{41} + a_{42} + a_{48} + a_{49} + a_{51} + a_{52} + a_{58} + a_{59} + a_{61} + a_{62} + \\
& a_{68} + a_{69})p_{02}p_{03}p_{24}p_{34} + (a_{09} + a_{49} + a_{59} + a_{69})p_{02}p_{03}p_{34}^2 + (a_{23} + a_{53} + a_{73} + a_{93})p_{02}p_{04}^2p_{12} + (a_{03} + a_{23} + a_{43} + \\
& a_{63} + a_{73} + a_{93})p_{02}p_{04}^2p_{13} + (a_{23} + a_{53} + a_{73} + a_{93})p_{02}p_{04}^2p_{14} + (a_{03} + a_{43} + a_{53} + a_{63})p_{02}p_{04}^2p_{23} + (a_{03} + a_{43} + a_{53} + \\
& a_{63})p_{02}p_{04}^2p_{34} + (a_{24} + a_{54} + a_{74} + a_{94})p_{02}p_{04}p_{12}^2 + (a_{01} + a_{04} + a_{11} + a_{21} + a_{24} + a_{25} + a_{33} + a_{44} + a_{55} + a_{61} + a_{63} + \\
& a_{64} + a_{74} + a_{75} + a_{81} + a_{83} + a_{91} + a_{93} + a_{94} + a_{95})p_{02}p_{04}p_{12}p_{13} + (a_{21} + a_{23} + a_{24} + a_{26} + a_{51} + a_{53} + a_{54} + a_{56} + a_{71} + \\
& a_{73} + a_{74} + a_{76} + a_{91} + a_{93} + a_{94} + a_{96})p_{02}p_{04}p_{12}p_{14} + (a_{01} + a_{04} + a_{11} + a_{21} + a_{27} + a_{33} + a_{44} + a_{54} + a_{57} + a_{61} + a_{63} + \\
& a_{64} + a_{77} + a_{81} + a_{83} + a_{91} + a_{93} + a_{97})p_{02}p_{04}p_{12}p_{23} + (a_{21} + a_{23} + a_{28} + a_{51} + a_{53} + a_{58} + a_{71} + a_{73} + a_{78} + a_{91} + a_{93} + \\
& a_{98})p_{02}p_{04}p_{12}p_{24} + (a_{01} + a_{04} + a_{11} + a_{23} + a_{29} + a_{33} + a_{44} + a_{51} + a_{53} + a_{54} + a_{59} + a_{61} + a_{63} + a_{64} + a_{71} + a_{73} + a_{79} + \\
& a_{81} + a_{83} + a_{99})p_{02}p_{04}p_{12}p_{34} + (a_{05} + a_{25} + a_{45} + a_{65} + a_{75} + a_{95})p_{02}p_{04}p_{13}^2 + (a_{03} + a_{06} + a_{11} + a_{23} + a_{25} + a_{26} + a_{33} + \\
& a_{41} + a_{43} + a_{46} + a_{55} + a_{66} + a_{71} + a_{73} + a_{75} + a_{76} + a_{81} + a_{83} + a_{95} + a_{96})p_{02}p_{04}p_{13}p_{14} + (a_{01} + a_{05} + a_{07} + a_{11} + a_{21} + \\
& a_{27} + a_{33} + a_{45} + a_{47} + a_{55} + a_{61} + a_{63} + a_{65} + a_{67} + a_{77} + a_{81} + a_{83} + a_{91} + a_{93} + a_{97})p_{02}p_{04}p_{13}p_{23} + (a_{01} + a_{03} + a_{08} + \\
& a_{21} + a_{23} + a_{28} + a_{41} + a_{43} + a_{48} + a_{61} + a_{63} + a_{68} + a_{71} + a_{73} + a_{78} + a_{91} + a_{93} + a_{98})p_{02}p_{04}p_{13}p_{24} + (a_{03} + a_{05} + a_{09} + \\
& a_{11} + a_{23} + a_{29} + a_{33} + a_{41} + a_{43} + a_{45} + a_{49} + a_{55} + a_{65} + a_{69} + a_{71} + a_{73} + a_{79} + a_{81} + a_{83} + a_{99})p_{02}p_{04}p_{13}p_{34} + (a_{26} + \\
& a_{56} + a_{76} + a_{96})p_{02}p_{04}p_{14}^2 + (a_{03} + a_{06} + a_{11} + a_{21} + a_{27} + a_{33} + a_{41} + a_{43} + a_{46} + a_{51} + a_{53} + a_{56} + a_{57} + a_{66} + a_{77} + a_{81} + \\
& a_{83} + a_{91} + a_{93} + a_{97})p_{02}p_{04}p_{14}p_{23} + (a_{21} + a_{23} + a_{28} + a_{51} + a_{53} + a_{58} + a_{71} + a_{73} + a_{78} + a_{91} + a_{93} + a_{98})p_{02}p_{04}p_{14}p_{24} + \\
& (a_{03} + a_{06} + a_{11} + a_{23} + a_{29} + a_{33} + a_{41} + a_{43} + a_{46} + a_{56} + a_{59} + a_{66} + a_{71} + a_{73} + a_{79} + a_{81} + a_{83} + a_{99})p_{02}p_{04}p_{14}p_{34} + \\
& (a_{07} + a_{47} + a_{57} + a_{67})p_{02}p_{04}p_{23}^2 + (a_{01} + a_{03} + a_{08} + a_{41} + a_{43} + a_{48} + a_{51} + a_{53} + a_{58} + a_{61} + a_{63} + a_{68})p_{02}p_{04}p_{23}p_{24} + \\
& (a_{01} + a_{03} + a_{07} + a_{09} + a_{41} + a_{43} + a_{47} + a_{49} + a_{51} + a_{53} + a_{57} + a_{59} + a_{61} + a_{63} + a_{67} + a_{69})p_{02}p_{04}p_{23}p_{34} + (a_{01} + \\
& a_{03} + a_{08} + a_{41} + a_{43} + a_{48} + a_{51} + a_{53} + a_{58} + a_{61} + a_{63} + a_{68})p_{02}p_{04}p_{24}p_{34} + (a_{09} + a_{49} + a_{59} + a_{69})p_{02}p_{04}p_{34}^2 + (a_{34} + \\
& a_{64} + a_{84} + a_{94})p_{02}p_{12}^2p_{13} + (a_{24} + a_{54} + a_{74} + a_{94})p_{02}p_{12}^2p_{14} + (a_{34} + a_{64} + a_{84} + a_{94})p_{02}p_{12}^2p_{23} + (a_{24} + a_{54} + a_{74} + \\
& a_{94})p_{02}p_{12}^2p_{24} + (a_{24} + a_{34} + a_{54} + a_{64} + a_{74} + a_{84})p_{02}p_{12}^2p_{34} + (a_{35} + a_{65} + a_{85} + a_{95})p_{02}p_{12}p_{13}^2 + (a_{01} + a_{04} + a_{11} + a_{21} + \\
& a_{24} + a_{25} + a_{31} + a_{34} + a_{36} + a_{44} + a_{55} + a_{66} + a_{74} + a_{75} + a_{84} + a_{86} + a_{95} + a_{96})p_{02}p_{12}p_{13}p_{14} + (a_{34} + a_{35} + a_{37} + a_{64} + \\
& a_{65} + a_{67} + a_{84} + a_{85} + a_{87} + a_{94} + a_{95} + a_{97})p_{02}p_{12}p_{13}p_{23} + (a_{01} + a_{04} + a_{11} + a_{21} + a_{24} + a_{25} + a_{31} + a_{38} + a_{44} + a_{55} + \\
& a_{64} + a_{68} + a_{74} + a_{75} + a_{88} + a_{94} + a_{95} + a_{98})p_{02}p_{12}p_{13}p_{24} + (a_{01} + a_{04} + a_{11} + a_{21} + a_{24} + a_{25} + a_{31} + a_{34} + a_{35} + a_{39} + \\
& a_{44} + a_{55} + a_{65} + a_{69} + a_{74} + a_{75} + a_{84} + a_{85} + a_{89} + a_{99})p_{02}p_{12}p_{13}p_{34} + (a_{26} + a_{56} + a_{76} + a_{96})p_{02}p_{12}p_{14}^2 + (a_{01} + a_{04} + \\
& a_{11} + a_{21} + a_{27} + a_{31} + a_{34} + a_{36} + a_{44} + a_{54} + a_{57} + a_{66} + a_{77} + a_{84} + a_{86} + a_{94} + a_{96} + a_{97})p_{02}p_{12}p_{14}p_{23} + (a_{24} + a_{26} + \\
& a_{28} + a_{54} + a_{56} + a_{58} + a_{74} + a_{76} + a_{78} + a_{94} + a_{96} + a_{98})p_{02}p_{12}p_{14}p_{24} + (a_{01} + a_{04} + a_{11} + a_{21} + a_{24} + a_{26} + a_{29} + a_{31} + \\
& a_{34} + a_{36} + a_{44} + a_{56} + a_{59} + a_{66} + a_{74} + a_{76} + a_{79} + a_{84} + a_{86} + a_{99})p_{02}p_{12}p_{14}p_{34} + (a_{37} + a_{67} + a_{87} + a_{97})p_{02}p_{12}p_{23}^2 + \\
& (a_{01} + a_{04} + a_{11} + a_{21} + a_{27} + a_{31} + a_{38} + a_{44} + a_{54} + a_{57} + a_{64} + a_{68} + a_{77} + a_{88} + a_{97} + a_{98})p_{02}p_{12}p_{23}p_{24} + (a_{01} + a_{04} + \\
& a_{11} + a_{21} + a_{27} + a_{31} + a_{37} + a_{39} + a_{44} + a_{54} + a_{57} + a_{64} + a_{67} + a_{69} + a_{77} + a_{87} + a_{89} + a_{99})p_{02}p_{12}p_{23}p_{34} + (a_{28} + a_{58} + \\
& a_{78} + a_{98})p_{02}p_{12}p_{24}^2 + (a_{01} + a_{04} + a_{11} + a_{21} + a_{28} + a_{29} + a_{31} + a_{38} + a_{44} + a_{54} + a_{58} + a_{59} + a_{64} + a_{68} + a_{78} + a_{79} + a_{88} + \\
& a_{99})p_{02}p_{12}p_{24}p_{34} + (a_{29} + a_{39} + a_{59} + a_{69} + a_{79} + a_{89})p_{02}p_{12}p_{34}^2 + (a_{05} + a_{25} + a_{35} + a_{45} + a_{75} + a_{85})p_{02}p_{13}^2p_{14} + (a_{35} + \\
& a_{65} + a_{85} + a_{95})p_{02}p_{13}^2p_{23} + (a_{05} + a_{25} + a_{45} + a_{65} + a_{75} + a_{95})p_{02}p_{13}^2p_{24} + (a_{05} + a_{25} + a_{35} + a_{45} + a_{75} + a_{85})p_{02}p_{13}^2p_{34} + \\
& (a_{06} + a_{26} + a_{36} + a_{46} + a_{76} + a_{86})p_{02}p_{13}p_{14}^2 + (a_{01} + a_{05} + a_{07} + a_{11} + a_{21} + a_{27} + a_{31} + a_{35} + a_{36} + a_{37} + a_{45} + a_{47} + \\
& a_{55} + a_{66} + a_{77} + a_{85} + a_{86} + a_{87} + a_{95} + a_{96})p_{02}p_{13}p_{14}p_{23} + (a_{01} + a_{06} + a_{08} + a_{11} + a_{21} + a_{25} + a_{26} + a_{28} + a_{31} + a_{38} + \\
& a_{46} + a_{48} + a_{55} + a_{66} + a_{75} + a_{76} + a_{78} + a_{88} + a_{95} + a_{96})p_{02}p_{13}p_{14}p_{24} + (a_{05} + a_{06} + a_{09} + a_{25} + a_{26} + a_{29} + a_{35} + a_{36} + \\
& a_{39} + a_{45} + a_{46} + a_{49} + a_{75} + a_{76} + a_{79} + a_{85} + a_{86} + a_{89})p_{02}p_{13}p_{14}p_{34} + (a_{37} + a_{67} + a_{87} + a_{97})p_{02}p_{13}p_{23}^2 + (a_{01} + a_{05} + \\
& a_{07} + a_{11} + a_{21} + a_{27} + a_{31} + a_{38} + a_{45} + a_{47} + a_{55} + a_{65} + a_{67} + a_{68} + a_{77} + a_{88} + a_{97} + a_{98})p_{02}p_{13}p_{23}p_{24} + (a_{01} + a_{05} + \\
& a_{07} + a_{11} + a_{21} + a_{27} + a_{31} + a_{37} + a_{39} + a_{45} + a_{47} + a_{55} + a_{65} + a_{69} + a_{77} + a_{87} + a_{89} + a_{99})p_{02}p_{13}p_{23}p_{34} + (a_{08} + a_{28} + \\
& a_{48} + a_{68} + a_{78} + a_{98})p_{02}p_{13}p_{24}^2 + (a_{01} + a_{05} + a_{08} + a_{09} + a_{11} + a_{21} + a_{28} + a_{29} + a_{31} + a_{38} + a_{45} + a_{48} + a_{49} + a_{55} + a_{65} + \\
& a_{69} + a_{78} + a_{79} + a_{88} + a_{99})p_{02}p_{13}p_{24}p_{34} + (a_{09} + a_{29} + a_{39} + a_{49} + a_{79} + a_{89})p_{02}p_{13}p_{34}^2 + (a_{06} + a_{36} + a_{46} + a_{56} + a_{86} + \\
& a_{96})p_{02}p_{14}^2p_{23} + (a_{26} + a_{56} + a_{76} + a_{96})p_{02}p_{14}^2p_{24} + (a_{06} + a_{26} + a_{36} + a_{46} + a_{76} + a_{86})p_{02}p_{14}^2p_{34} + (a_{07} + a_{37} + a_{47} + \\
& a_{57} + a_{87} + a_{97})p_{02}p_{14}p_{23}^2 + (a_{01} + a_{06} + a_{08} + a_{11} + a_{21} + a_{27} + a_{31} + a_{38} + a_{46} + a_{48} + a_{56} + a_{57} + a_{58} + a_{66} + a_{77} + a_{88} + \\
& a_{97} + a_{98})p_{02}p_{14}p_{23}p_{24} + (a_{01} + a_{06} + a_{07} + a_{09} + a_{11} + a_{21} + a_{27} + a_{31} + a_{37} + a_{39} + a_{46} + a_{47} + a_{49} + a_{56} + a_{59} + a_{66} + \\
& a_{77} + a_{87} + a_{89} + a_{99})p_{02}p_{14}p_{23}p_{34} + (a_{28} + a_{58} + a_{78} + a_{98})p_{02}p_{14}p_{24}^2 + (a_{01} + a_{06} + a_{08} + a_{11} + a_{21} + a_{28} + a_{29} + a_{31} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (a_{38} + a_{46} + a_{48} + a_{56} + a_{59} + a_{66} + a_{78} + a_{79} + a_{88} + a_{99})p_{02}p_{14}p_{24}p_{34} + (a_{09} + a_{29} + a_{39} + a_{49} + a_{79} + a_{89})p_{02}p_{14}p_{34}^2 + \\
& (a_{07} + a_{47} + a_{57} + a_{67})p_{02}p_{23}^2p_{24} + (a_{07} + a_{47} + a_{57} + a_{67})p_{02}p_{23}^2p_{34} + (a_{08} + a_{48} + a_{58} + a_{68})p_{02}p_{23}p_{24}^2 + (a_{07} + a_{08} + \\
& a_{09} + a_{47} + a_{48} + a_{49} + a_{57} + a_{58} + a_{59} + a_{67} + a_{68} + a_{69})p_{02}p_{23}p_{24}p_{34} + (a_{09} + a_{49} + a_{59} + a_{69})p_{02}p_{23}p_{34}^2 + (a_{08} + \\
& a_{48} + a_{58} + a_{68})p_{02}p_{24}^2p_{34} + (a_{09} + a_{49} + a_{59} + a_{69})p_{02}p_{24}p_{34}^2 + (a_{02} + a_{12} + a_{52} + a_{62} + a_{72} + a_{82})p_{03}^2p_{04}p_{12} + (a_{12} + \\
& a_{42} + a_{72} + a_{82})p_{03}^2p_{04}p_{13} + (a_{12} + a_{42} + a_{72} + a_{82})p_{03}^2p_{04}p_{14} + (a_{02} + a_{42} + a_{52} + a_{62})p_{03}^2p_{04}p_{23} + (a_{02} + a_{42} + a_{52} + \\
& a_{62})p_{03}^2p_{04}p_{24} + (a_{32} + a_{62} + a_{82} + a_{92})p_{03}^2p_{12}p_{13} + (a_{02} + a_{12} + a_{32} + a_{52} + a_{72} + a_{92})p_{03}^2p_{12}p_{14} + (a_{32} + a_{62} + a_{82} + \\
& a_{92})p_{03}^2p_{12}p_{23} + (a_{02} + a_{12} + a_{32} + a_{52} + a_{72} + a_{92})p_{03}^2p_{12}p_{24} + (a_{02} + a_{12} + a_{52} + a_{62} + a_{72} + a_{82})p_{03}^2p_{12}p_{34} + (a_{12} + \\
& a_{42} + a_{72} + a_{82})p_{03}^2p_{13}p_{14} + (a_{32} + a_{62} + a_{82} + a_{92})p_{03}^2p_{13}p_{23} + (a_{12} + a_{32} + a_{42} + a_{62} + a_{72} + a_{92})p_{03}^2p_{13}p_{24} + (a_{12} + \\
& a_{42} + a_{72} + a_{82})p_{03}^2p_{13}p_{34} + (a_{02} + a_{32} + a_{42} + a_{52} + a_{82} + a_{92})p_{03}^2p_{14}p_{23} + (a_{02} + a_{12} + a_{32} + a_{52} + a_{72} + a_{92})p_{03}^2p_{14}p_{24} + \\
& (a_{12} + a_{42} + a_{72} + a_{82})p_{03}^2p_{14}p_{34} + (a_{02} + a_{42} + a_{52} + a_{62})p_{03}^2p_{23}p_{24} + (a_{02} + a_{42} + a_{52} + a_{62})p_{03}^2p_{23}p_{34} + (a_{02} + a_{42} + \\
& a_{52} + a_{62})p_{03}^2p_{24}p_{34} + (a_{03} + a_{13} + a_{53} + a_{63} + a_{73} + a_{83})p_{03}p_{04}^2p_{12} + (a_{13} + a_{43} + a_{73} + a_{83})p_{03}p_{04}^2p_{13} + (a_{13} + a_{43} + \\
& a_{73} + a_{83})p_{03}p_{04}^2p_{14} + (a_{03} + a_{43} + a_{53} + a_{63})p_{03}p_{04}^2p_{23} + (a_{03} + a_{43} + a_{53} + a_{63})p_{03}p_{04}^2p_{24} + (a_{04} + a_{14} + a_{54} + a_{64} + \\
& a_{74} + a_{84})p_{03}p_{04}^2p_{12}^2 + (a_{02} + a_{05} + a_{12} + a_{14} + a_{15} + a_{22} + a_{33} + a_{44} + a_{55} + a_{62} + a_{63} + a_{65} + a_{74} + a_{75} + a_{82} + a_{83} + a_{84} + \\
& a_{85} + a_{92} + a_{93})p_{03}p_{04}p_{12}p_{13} + (a_{03} + a_{06} + a_{13} + a_{14} + a_{16} + a_{22} + a_{33} + a_{44} + a_{52} + a_{53} + a_{56} + a_{66} + a_{72} + a_{73} + a_{74} + \\
& a_{76} + a_{84} + a_{86} + a_{92} + a_{93})p_{03}p_{04}p_{12}p_{14} + (a_{02} + a_{04} + a_{07} + a_{12} + a_{17} + a_{22} + a_{33} + a_{44} + a_{54} + a_{57} + a_{62} + a_{63} + a_{64} + \\
& a_{67} + a_{77} + a_{82} + a_{83} + a_{87} + a_{92} + a_{93})p_{03}p_{04}p_{12}p_{23} + (a_{03} + a_{04} + a_{08} + a_{13} + a_{18} + a_{22} + a_{33} + a_{44} + a_{52} + a_{53} + a_{54} + \\
& a_{58} + a_{64} + a_{68} + a_{72} + a_{73} + a_{78} + a_{88} + a_{92} + a_{93})p_{03}p_{04}p_{12}p_{24} + (a_{02} + a_{03} + a_{09} + a_{12} + a_{13} + a_{19} + a_{52} + a_{53} + a_{59} + \\
& a_{62} + a_{63} + a_{69} + a_{72} + a_{73} + a_{79} + a_{82} + a_{83} + a_{89})p_{03}p_{04}p_{12}p_{34} + (a_{15} + a_{45} + a_{75} + a_{85})p_{03}p_{04}p_{13}^2 + (a_{12} + a_{13} + a_{15} + \\
& a_{16} + a_{42} + a_{43} + a_{45} + a_{46} + a_{72} + a_{73} + a_{75} + a_{76} + a_{82} + a_{83} + a_{85} + a_{86})p_{03}p_{04}p_{13}p_{14} + (a_{02} + a_{05} + a_{12} + a_{17} + a_{22} + \\
& a_{33} + a_{45} + a_{47} + a_{55} + a_{62} + a_{63} + a_{65} + a_{77} + a_{82} + a_{83} + a_{87} + a_{92} + a_{93})p_{03}p_{04}p_{13}p_{23} + (a_{02} + a_{05} + a_{13} + a_{18} + a_{22} + \\
& a_{33} + a_{42} + a_{43} + a_{45} + a_{48} + a_{55} + a_{62} + a_{63} + a_{65} + a_{72} + a_{73} + a_{78} + a_{88} + a_{92} + a_{93})p_{03}p_{04}p_{13}p_{24} + (a_{12} + a_{13} + a_{19} + \\
& a_{42} + a_{43} + a_{49} + a_{72} + a_{73} + a_{79} + a_{82} + a_{83} + a_{89})p_{03}p_{04}p_{13}p_{34} + (a_{16} + a_{46} + a_{76} + a_{86})p_{03}p_{04}p_{14}^2 + (a_{03} + a_{06} + a_{12} + \\
& a_{17} + a_{22} + a_{33} + a_{42} + a_{43} + a_{46} + a_{47} + a_{52} + a_{53} + a_{56} + a_{66} + a_{77} + a_{82} + a_{83} + a_{87} + a_{92} + a_{93})p_{03}p_{04}p_{14}p_{23} + (a_{03} + \\
& a_{06} + a_{13} + a_{18} + a_{22} + a_{33} + a_{46} + a_{48} + a_{52} + a_{53} + a_{56} + a_{66} + a_{72} + a_{73} + a_{78} + a_{88} + a_{92} + a_{93})p_{03}p_{04}p_{14}p_{24} + (a_{12} + \\
& a_{13} + a_{19} + a_{42} + a_{43} + a_{49} + a_{72} + a_{73} + a_{79} + a_{82} + a_{83} + a_{89})p_{03}p_{04}p_{14}p_{34} + (a_{07} + a_{47} + a_{57} + a_{67})p_{03}p_{04}p_{23}^2 + (a_{02} + \\
& a_{03} + a_{07} + a_{08} + a_{42} + a_{43} + a_{47} + a_{48} + a_{52} + a_{53} + a_{57} + a_{58} + a_{62} + a_{63} + a_{67} + a_{68})p_{03}p_{04}p_{23}p_{24} + (a_{02} + a_{03} + a_{09} + \\
& a_{42} + a_{43} + a_{49} + a_{52} + a_{53} + a_{59} + a_{62} + a_{63} + a_{69})p_{03}p_{04}p_{23}p_{34} + (a_{08} + a_{48} + a_{58} + a_{68})p_{03}p_{04}p_{24}^2 + (a_{02} + a_{03} + a_{09} + \\
& a_{42} + a_{43} + a_{49} + a_{52} + a_{53} + a_{59} + a_{62} + a_{63} + a_{69})p_{03}p_{04}p_{24}p_{34} + (a_{34} + a_{64} + a_{84} + a_{94})p_{03}p_{12}^2p_{13} + (a_{04} + a_{14} + a_{34} + \\
& a_{54} + a_{74} + a_{94})p_{03}p_{12}^2p_{14} + (a_{34} + a_{64} + a_{84} + a_{94})p_{03}p_{12}^2p_{23} + (a_{04} + a_{14} + a_{34} + a_{54} + a_{74} + a_{94})p_{03}p_{12}^2p_{24} + (a_{04} + \\
& a_{14} + a_{54} + a_{64} + a_{74} + a_{84})p_{03}p_{12}^2p_{34} + (a_{35} + a_{65} + a_{85} + a_{95})p_{03}p_{12}p_{13}^2 + (a_{02} + a_{05} + a_{12} + a_{14} + a_{15} + a_{22} + a_{32} + a_{35} + \\
& a_{36} + a_{44} + a_{55} + a_{66} + a_{74} + a_{75} + a_{84} + a_{86} + a_{95} + a_{96})p_{03}p_{12}p_{13}p_{14} + (a_{34} + a_{35} + a_{37} + a_{64} + a_{65} + a_{67} + a_{84} + a_{85} + \\
& a_{87} + a_{94} + a_{95} + a_{97})p_{03}p_{12}p_{13}p_{23} + (a_{02} + a_{05} + a_{12} + a_{14} + a_{15} + a_{22} + a_{32} + a_{34} + a_{35} + a_{38} + a_{44} + a_{55} + a_{64} + a_{68} + \\
& a_{74} + a_{75} + a_{88} + a_{94} + a_{95} + a_{98})p_{03}p_{12}p_{13}p_{24} + (a_{02} + a_{05} + a_{12} + a_{14} + a_{15} + a_{22} + a_{32} + a_{39} + a_{44} + a_{55} + a_{65} + a_{69} + \\
& a_{74} + a_{75} + a_{84} + a_{85} + a_{89} + a_{99})p_{03}p_{12}p_{13}p_{34} + (a_{06} + a_{16} + a_{36} + a_{56} + a_{76} + a_{96})p_{03}p_{12}p_{14}^2 + (a_{02} + a_{04} + a_{07} + a_{12} + \\
& a_{17} + a_{22} + a_{32} + a_{34} + a_{36} + a_{37} + a_{44} + a_{54} + a_{57} + a_{66} + a_{77} + a_{84} + a_{86} + a_{94} + a_{96} + a_{97})p_{03}p_{12}p_{14}p_{23} + (a_{04} + a_{06} + \\
& a_{08} + a_{14} + a_{16} + a_{18} + a_{34} + a_{36} + a_{38} + a_{54} + a_{56} + a_{58} + a_{74} + a_{76} + a_{78} + a_{94} + a_{96} + a_{98})p_{03}p_{12}p_{14}p_{24} + (a_{02} + a_{06} + \\
& a_{09} + a_{12} + a_{14} + a_{16} + a_{19} + a_{22} + a_{32} + a_{39} + a_{44} + a_{56} + a_{59} + a_{66} + a_{74} + a_{76} + a_{79} + a_{84} + a_{86} + a_{99})p_{03}p_{12}p_{14}p_{34} + \\
& (a_{37} + a_{67} + a_{87} + a_{97})p_{03}p_{12}p_{23}^2 + (a_{02} + a_{04} + a_{07} + a_{12} + a_{17} + a_{22} + a_{32} + a_{37} + a_{38} + a_{44} + a_{54} + a_{57} + a_{64} + a_{68} + \\
& a_{77} + a_{88} + a_{97} + a_{98})p_{03}p_{12}p_{23}p_{24} + (a_{02} + a_{04} + a_{07} + a_{12} + a_{17} + a_{22} + a_{32} + a_{39} + a_{44} + a_{54} + a_{57} + a_{64} + a_{67} + a_{69} + \\
& a_{77} + a_{87} + a_{89} + a_{99})p_{03}p_{12}p_{23}p_{34} + (a_{08} + a_{18} + a_{38} + a_{58} + a_{78} + a_{98})p_{03}p_{12}p_{24}^2 + (a_{02} + a_{04} + a_{08} + a_{09} + a_{12} + \\
& a_{18} + a_{19} + a_{22} + a_{32} + a_{39} + a_{44} + a_{54} + a_{58} + a_{59} + a_{64} + a_{68} + a_{78} + a_{79} + a_{88} + a_{99})p_{03}p_{12}p_{24}p_{34} + (a_{09} + a_{19} + a_{59} + \\
& a_{69} + a_{79} + a_{89})p_{03}p_{12}p_{34}^2 + (a_{15} + a_{45} + a_{75} + a_{85})p_{03}p_{13}^2p_{14} + (a_{35} + a_{65} + a_{85} + a_{95})p_{03}p_{13}^2p_{23} + (a_{15} + a_{35} + a_{45} + \\
& a_{65} + a_{75} + a_{95})p_{03}p_{13}^2p_{24} + (a_{15} + a_{45} + a_{75} + a_{85})p_{03}p_{13}^2p_{34} + (a_{16} + a_{46} + a_{76} + a_{86})p_{03}p_{13}p_{14}^2 + (a_{02} + a_{05} + a_{12} + \\
& a_{17} + a_{22} + a_{32} + a_{35} + a_{36} + a_{45} + a_{47} + a_{55} + a_{66} + a_{77} + a_{85} + a_{86} + a_{87} + a_{95} + a_{96})p_{03}p_{13}p_{14}p_{23} + (a_{02} + a_{05} + a_{12} + \\
& a_{15} + a_{16} + a_{18} + a_{22} + a_{32} + a_{35} + a_{36} + a_{46} + a_{48} + a_{55} + a_{66} + a_{75} + a_{76} + a_{78} + a_{88} + a_{95} + a_{96})p_{03}p_{13}p_{14}p_{24} + (a_{15} + \\
& a_{16} + a_{19} + a_{45} + a_{46} + a_{49} + a_{75} + a_{76} + a_{79} + a_{85} + a_{86} + a_{89})p_{03}p_{13}p_{14}p_{34} + (a_{37} + a_{67} + a_{87} + a_{97})p_{03}p_{13}p_{23}^2 + (a_{02} + \\
& a_{05} + a_{12} + a_{17} + a_{22} + a_{32} + a_{37} + a_{38} + a_{45} + a_{47} + a_{55} + a_{65} + a_{67} + a_{68} + a_{77} + a_{88} + a_{97} + a_{98})p_{03}p_{13}p_{23}p_{24} + (a_{02} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (a_{05} + a_{12} + a_{17} + a_{22} + a_{32} + a_{39} + a_{45} + a_{47} + a_{55} + a_{65} + a_{69} + a_{77} + a_{87} + a_{89} + a_{99})p_{03}p_{13}p_{23}p_{34} + (a_{18} + a_{38} + a_{48} + \\
& a_{68} + a_{78} + a_{98})p_{03}p_{13}p_{24}^2 + (a_{02} + a_{05} + a_{12} + a_{18} + a_{19} + a_{22} + a_{32} + a_{39} + a_{45} + a_{48} + a_{49} + a_{55} + a_{65} + a_{69} + a_{78} + \\
& a_{79} + a_{88} + a_{99})p_{03}p_{13}p_{24}p_{34} + (a_{19} + a_{49} + a_{79} + a_{89})p_{03}p_{13}p_{34}^2 + (a_{06} + a_{36} + a_{46} + a_{56} + a_{86} + a_{96})p_{03}p_{14}^2p_{23} + \\
& (a_{06} + a_{16} + a_{36} + a_{56} + a_{76} + a_{96})p_{03}p_{14}^2p_{24} + (a_{16} + a_{46} + a_{76} + a_{86})p_{03}p_{14}^2p_{34} + (a_{07} + a_{37} + a_{47} + a_{57} + a_{87} + \\
& a_{97})p_{03}p_{14}p_{23}^2 + (a_{02} + a_{06} + a_{07} + a_{08} + a_{12} + a_{17} + a_{22} + a_{32} + a_{37} + a_{38} + a_{46} + a_{48} + a_{56} + a_{57} + a_{58} + a_{66} + a_{77} + \\
& a_{88} + a_{97} + a_{98})p_{03}p_{14}p_{23}p_{24} + (a_{02} + a_{06} + a_{09} + a_{12} + a_{17} + a_{22} + a_{32} + a_{39} + a_{46} + a_{47} + a_{49} + a_{56} + a_{59} + a_{66} + a_{77} + \\
& a_{87} + a_{89} + a_{99})p_{03}p_{14}p_{23}p_{34} + (a_{08} + a_{18} + a_{38} + a_{58} + a_{78} + a_{98})p_{03}p_{14}p_{24}^2 + (a_{02} + a_{06} + a_{09} + a_{12} + a_{18} + a_{19} + a_{22} + \\
& a_{32} + a_{39} + a_{46} + a_{48} + a_{56} + a_{59} + a_{66} + a_{78} + a_{79} + a_{88} + a_{99})p_{03}p_{14}p_{24}p_{34} + (a_{19} + a_{49} + a_{79} + a_{89})p_{03}p_{14}p_{34}^2 + (a_{07} + \\
& a_{47} + a_{57} + a_{67})p_{03}p_{23}^2p_{24} + (a_{07} + a_{47} + a_{57} + a_{67})p_{03}p_{23}^2p_{34} + (a_{08} + a_{48} + a_{58} + a_{68})p_{03}p_{23}p_{24}^2 + (a_{07} + a_{08} + a_{09} + \\
& a_{47} + a_{48} + a_{49} + a_{57} + a_{58} + a_{59} + a_{67} + a_{68} + a_{69})p_{03}p_{23}p_{24}p_{34} + (a_{09} + a_{49} + a_{59} + a_{69})p_{03}p_{23}p_{34}^2 + (a_{08} + a_{48} + a_{58} + \\
& a_{68})p_{03}p_{24}^2p_{34} + (a_{09} + a_{49} + a_{59} + a_{69})p_{03}p_{24}p_{34}^2 + (a_{03} + a_{13} + a_{23} + a_{63} + a_{83} + a_{93})p_{04}^2p_{12}p_{13} + (a_{23} + a_{53} + a_{73} + \\
& a_{93})p_{04}^2p_{12}p_{14} + (a_{03} + a_{13} + a_{23} + a_{63} + a_{83} + a_{93})p_{04}^2p_{12}p_{23} + (a_{23} + a_{53} + a_{73} + a_{93})p_{04}^2p_{12}p_{24} + (a_{03} + a_{13} + a_{53} + \\
& a_{63} + a_{73} + a_{83})p_{04}^2p_{12}p_{34} + (a_{13} + a_{43} + a_{73} + a_{83})p_{04}^2p_{13}p_{14} + (a_{03} + a_{13} + a_{23} + a_{63} + a_{83} + a_{93})p_{04}^2p_{13}p_{23} + (a_{03} + \\
& a_{23} + a_{43} + a_{63} + a_{73} + a_{93})p_{04}^2p_{13}p_{24} + (a_{13} + a_{43} + a_{73} + a_{83})p_{04}^2p_{13}p_{34} + (a_{13} + a_{23} + a_{43} + a_{53} + a_{83} + a_{93})p_{04}^2p_{14}p_{23} + \\
& (a_{23} + a_{53} + a_{73} + a_{93})p_{04}^2p_{14}p_{24} + (a_{13} + a_{43} + a_{73} + a_{83})p_{04}^2p_{14}p_{34} + (a_{03} + a_{43} + a_{53} + a_{63})p_{04}^2p_{23}p_{24} + (a_{03} + a_{43} + \\
& a_{53} + a_{63})p_{04}^2p_{23}p_{34} + (a_{03} + a_{43} + a_{53} + a_{63})p_{04}^2p_{24}p_{34} + (a_{04} + a_{14} + a_{24} + a_{64} + a_{84} + a_{94})p_{04}p_{12}^2p_{13} + (a_{24} + a_{54} + \\
& a_{74} + a_{94})p_{04}p_{12}^2p_{14} + (a_{04} + a_{14} + a_{24} + a_{64} + a_{84} + a_{94})p_{04}p_{12}^2p_{23} + (a_{24} + a_{54} + a_{74} + a_{94})p_{04}p_{12}^2p_{24} + (a_{04} + a_{14} + \\
& a_{54} + a_{64} + a_{74} + a_{84})p_{04}p_{12}^2p_{34} + (a_{05} + a_{15} + a_{25} + a_{65} + a_{85} + a_{95})p_{04}p_{12}p_{13}^2 + (a_{03} + a_{06} + a_{13} + a_{14} + a_{16} + a_{23} + \\
& a_{25} + a_{26} + a_{33} + a_{44} + a_{55} + a_{66} + a_{74} + a_{75} + a_{84} + a_{86} + a_{95} + a_{96})p_{04}p_{12}p_{13}p_{14} + (a_{04} + a_{05} + a_{07} + a_{14} + a_{15} + a_{17} + \\
& a_{24} + a_{25} + a_{27} + a_{64} + a_{65} + a_{67} + a_{84} + a_{85} + a_{87} + a_{94} + a_{95} + a_{97})p_{04}p_{12}p_{13}p_{23} + (a_{03} + a_{04} + a_{08} + a_{13} + a_{18} + a_{23} + \\
& a_{24} + a_{25} + a_{28} + a_{33} + a_{44} + a_{55} + a_{64} + a_{68} + a_{74} + a_{75} + a_{88} + a_{94} + a_{95} + a_{98})p_{04}p_{12}p_{13}p_{24} + (a_{03} + a_{05} + a_{09} + a_{13} + \\
& a_{14} + a_{15} + a_{19} + a_{23} + a_{29} + a_{33} + a_{44} + a_{55} + a_{65} + a_{69} + a_{74} + a_{75} + a_{84} + a_{85} + a_{89} + a_{99})p_{04}p_{12}p_{13}p_{34} + (a_{26} + a_{56} + \\
& a_{76} + a_{96})p_{04}p_{12}p_{14}^2 + (a_{03} + a_{06} + a_{13} + a_{14} + a_{16} + a_{23} + a_{24} + a_{26} + a_{27} + a_{33} + a_{44} + a_{54} + a_{57} + a_{66} + a_{77} + a_{84} + a_{86} + \\
& a_{94} + a_{96} + a_{97})p_{04}p_{12}p_{14}p_{23} + (a_{24} + a_{26} + a_{28} + a_{54} + a_{56} + a_{58} + a_{74} + a_{76} + a_{78} + a_{94} + a_{96} + a_{98})p_{04}p_{12}p_{14}p_{24} + \\
& (a_{03} + a_{06} + a_{13} + a_{14} + a_{16} + a_{23} + a_{29} + a_{33} + a_{44} + a_{56} + a_{59} + a_{66} + a_{74} + a_{76} + a_{79} + a_{84} + a_{86} + a_{99})p_{04}p_{12}p_{14}p_{34} + \\
& (a_{07} + a_{17} + a_{27} + a_{67} + a_{87} + a_{97})p_{04}p_{12}p_{23}^2 + (a_{03} + a_{04} + a_{08} + a_{13} + a_{18} + a_{23} + a_{27} + a_{28} + a_{33} + a_{44} + a_{54} + a_{57} + \\
& a_{64} + a_{68} + a_{77} + a_{88} + a_{97} + a_{98})p_{04}p_{12}p_{23}p_{24} + (a_{03} + a_{04} + a_{07} + a_{09} + a_{13} + a_{17} + a_{19} + a_{23} + a_{29} + a_{33} + a_{44} + a_{54} + \\
& a_{57} + a_{64} + a_{67} + a_{69} + a_{77} + a_{87} + a_{89} + a_{99})p_{04}p_{12}p_{23}p_{34} + (a_{28} + a_{58} + a_{78} + a_{98})p_{04}p_{12}p_{24}^2 + (a_{03} + a_{04} + a_{08} + a_{13} + \\
& a_{18} + a_{23} + a_{29} + a_{33} + a_{44} + a_{54} + a_{58} + a_{59} + a_{64} + a_{68} + a_{78} + a_{79} + a_{88} + a_{99})p_{04}p_{12}p_{24}p_{34} + (a_{09} + a_{19} + a_{59} + a_{69} + \\
& a_{79} + a_{89})p_{04}p_{12}p_{34}^2 + (a_{15} + a_{45} + a_{75} + a_{85})p_{04}p_{13}^2p_{14} + (a_{05} + a_{15} + a_{25} + a_{65} + a_{85} + a_{95})p_{04}p_{13}^2p_{23} + (a_{05} + a_{25} + \\
& a_{45} + a_{65} + a_{75} + a_{95})p_{04}p_{13}^2p_{24} + (a_{15} + a_{45} + a_{75} + a_{85})p_{04}p_{13}^2p_{34} + (a_{16} + a_{46} + a_{76} + a_{86})p_{04}p_{13}p_{14}^2 + (a_{03} + a_{06} + \\
& a_{13} + a_{15} + a_{16} + a_{17} + a_{23} + a_{25} + a_{26} + a_{33} + a_{45} + a_{47} + a_{55} + a_{66} + a_{77} + a_{85} + a_{86} + a_{87} + a_{95} + a_{96})p_{04}p_{13}p_{14}p_{23} + \\
& (a_{03} + a_{06} + a_{13} + a_{18} + a_{23} + a_{25} + a_{26} + a_{33} + a_{46} + a_{48} + a_{55} + a_{66} + a_{75} + a_{76} + a_{78} + a_{88} + a_{95} + a_{96})p_{04}p_{13}p_{14}p_{24} + \\
& (a_{15} + a_{16} + a_{19} + a_{45} + a_{46} + a_{49} + a_{75} + a_{76} + a_{79} + a_{85} + a_{86} + a_{89})p_{04}p_{13}p_{14}p_{34} + (a_{07} + a_{17} + a_{27} + a_{67} + a_{87} + \\
& a_{97})p_{04}p_{13}p_{23}^2 + (a_{03} + a_{05} + a_{07} + a_{08} + a_{13} + a_{18} + a_{23} + a_{27} + a_{28} + a_{33} + a_{45} + a_{47} + a_{55} + a_{65} + a_{67} + a_{68} + a_{77} + a_{88} + \\
& a_{97} + a_{98})p_{04}p_{13}p_{23}p_{24} + (a_{03} + a_{05} + a_{09} + a_{13} + a_{17} + a_{19} + a_{23} + a_{29} + a_{33} + a_{45} + a_{47} + a_{55} + a_{65} + a_{69} + a_{77} + a_{87} + \\
& a_{89} + a_{99})p_{04}p_{13}p_{23}p_{34} + (a_{08} + a_{28} + a_{48} + a_{68} + a_{78} + a_{98})p_{04}p_{13}p_{24}^2 + (a_{03} + a_{05} + a_{09} + a_{13} + a_{18} + a_{23} + a_{29} + a_{33} + \\
& a_{45} + a_{48} + a_{49} + a_{55} + a_{65} + a_{69} + a_{78} + a_{79} + a_{88} + a_{99})p_{04}p_{13}p_{24}p_{34} + (a_{19} + a_{49} + a_{79} + a_{89})p_{04}p_{13}p_{34}^2 + (a_{16} + a_{26} + \\
& a_{46} + a_{56} + a_{86} + a_{96})p_{04}p_{14}^2p_{23} + (a_{26} + a_{56} + a_{76} + a_{96})p_{04}p_{14}^2p_{24} + (a_{16} + a_{46} + a_{76} + a_{86})p_{04}p_{14}^2p_{34} + (a_{17} + a_{27} + a_{47} + \\
& a_{57} + a_{87} + a_{97})p_{04}p_{14}p_{23}^2 + (a_{03} + a_{06} + a_{13} + a_{18} + a_{23} + a_{27} + a_{28} + a_{33} + a_{46} + a_{48} + a_{56} + a_{57} + a_{58} + a_{66} + a_{77} + a_{88} + \\
& a_{97} + a_{98})p_{04}p_{14}p_{23}p_{24} + (a_{03} + a_{06} + a_{13} + a_{17} + a_{19} + a_{23} + a_{29} + a_{33} + a_{46} + a_{47} + a_{49} + a_{56} + a_{59} + a_{66} + a_{77} + a_{87} + \\
& a_{89} + a_{99})p_{04}p_{14}p_{23}p_{34} + (a_{28} + a_{58} + a_{78} + a_{98})p_{04}p_{14}p_{24}^2 + (a_{03} + a_{06} + a_{13} + a_{18} + a_{23} + a_{29} + a_{33} + a_{46} + a_{48} + a_{56} + \\
& a_{59} + a_{66} + a_{78} + a_{79} + a_{88} + a_{99})p_{04}p_{14}p_{24}p_{34} + (a_{19} + a_{49} + a_{79} + a_{89})p_{04}p_{14}p_{34}^2 + (a_{07} + a_{47} + a_{57} + a_{67})p_{04}p_{23}^2p_{24} + \\
& (a_{07} + a_{47} + a_{57} + a_{67})p_{04}p_{23}^2p_{34} + (a_{08} + a_{48} + a_{58} + a_{68})p_{04}p_{23}p_{24}^2 + (a_{07} + a_{08} + a_{09} + a_{47} + a_{48} + a_{49} + a_{57} + a_{58} + \\
& a_{59} + a_{67} + a_{68} + a_{69})p_{04}p_{23}p_{24}p_{34} + (a_{09} + a_{49} + a_{59} + a_{69})p_{04}p_{23}p_{34}^2 + (a_{08} + a_{48} + a_{58} + a_{68})p_{04}p_{24}^2p_{34} + (a_{09} + \\
& a_{49} + a_{59} + a_{69})p_{04}p_{24}p_{34}^2 + (a_{04} + a_{14} + a_{24} + a_{34})p_{12}^2p_{13}p_{14} + (a_{04} + a_{14} + a_{24} + a_{34})p_{12}^2p_{13}p_{24} + (a_{04} + a_{14} + a_{24} + \\
& a_{34})p_{12}^2p_{13}p_{34} + (a_{04} + a_{14} + a_{24} + a_{34})p_{12}^2p_{14}p_{23} + (a_{04} + a_{14} + a_{24} + a_{34})p_{12}^2p_{14}p_{34} + (a_{04} + a_{14} + a_{24} + a_{34})p_{12}^2p_{23}p_{24} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (a_{04} + a_{14} + a_{24} + a_{34})p_{12}^2p_{23}p_{34} + (a_{04} + a_{14} + a_{24} + a_{34})p_{12}^2p_{24}p_{34} + (a_{05} + a_{15} + a_{25} + a_{35})p_{12}p_{13}^2p_{14} + (a_{05} + a_{15} + \\
& a_{25} + a_{35})p_{12}p_{13}^2p_{24} + (a_{05} + a_{15} + a_{25} + a_{35})p_{12}p_{13}^2p_{34} + (a_{06} + a_{16} + a_{26} + a_{36})p_{12}p_{13}p_{14}^2 + (a_{04} + a_{05} + a_{07} + a_{14} + \\
& a_{15} + a_{17} + a_{24} + a_{25} + a_{27} + a_{34} + a_{35} + a_{37})p_{12}p_{13}p_{14}p_{23} + (a_{04} + a_{06} + a_{08} + a_{14} + a_{16} + a_{18} + a_{24} + a_{26} + a_{28} + a_{34} + \\
& a_{36} + a_{38})p_{12}p_{13}p_{14}p_{24} + (a_{05} + a_{06} + a_{09} + a_{15} + a_{16} + a_{19} + a_{25} + a_{26} + a_{29} + a_{35} + a_{36} + a_{39})p_{12}p_{13}p_{14}p_{34} + (a_{04} + \\
& a_{05} + a_{07} + a_{14} + a_{15} + a_{17} + a_{24} + a_{25} + a_{27} + a_{34} + a_{35} + a_{37})p_{12}p_{13}p_{23}p_{24} + (a_{04} + a_{05} + a_{07} + a_{14} + a_{15} + a_{17} + a_{24} + \\
& a_{25} + a_{27} + a_{34} + a_{35} + a_{37})p_{12}p_{13}p_{23}p_{34} + (a_{08} + a_{18} + a_{28} + a_{38})p_{12}p_{13}p_{24}^2 + (a_{04} + a_{05} + a_{08} + a_{09} + a_{14} + a_{15} + a_{18} + \\
& a_{19} + a_{24} + a_{25} + a_{28} + a_{29} + a_{34} + a_{35} + a_{38} + a_{39})p_{12}p_{13}p_{24}p_{34} + (a_{09} + a_{19} + a_{29} + a_{39})p_{12}p_{13}p_{34}^2 + (a_{06} + a_{16} + a_{26} + \\
& a_{36})p_{12}p_{14}^2p_{23} + (a_{06} + a_{16} + a_{26} + a_{36})p_{12}p_{14}^2p_{34} + (a_{07} + a_{17} + a_{27} + a_{37})p_{12}p_{14}p_{23}^2 + (a_{04} + a_{06} + a_{08} + a_{14} + a_{16} + a_{18} + \\
& a_{24} + a_{26} + a_{28} + a_{34} + a_{36} + a_{38})p_{12}p_{14}p_{23}p_{24} + (a_{04} + a_{06} + a_{07} + a_{09} + a_{14} + a_{16} + a_{17} + a_{19} + a_{24} + a_{26} + a_{27} + a_{29} + \\
& a_{34} + a_{36} + a_{37} + a_{39})p_{12}p_{14}p_{23}p_{34} + (a_{04} + a_{06} + a_{08} + a_{14} + a_{16} + a_{18} + a_{24} + a_{26} + a_{28} + a_{34} + a_{36} + a_{38})p_{12}p_{14}p_{24}p_{34} + \\
& (a_{09} + a_{19} + a_{29} + a_{39})p_{12}p_{14}p_{34}^2 + (a_{07} + a_{17} + a_{27} + a_{37})p_{12}p_{23}^2p_{24} + (a_{07} + a_{17} + a_{27} + a_{37})p_{12}p_{23}^2p_{34} + (a_{08} + a_{18} + \\
& a_{28} + a_{38})p_{12}p_{23}p_{24}^2 + (a_{07} + a_{08} + a_{09} + a_{17} + a_{18} + a_{19} + a_{27} + a_{28} + a_{29} + a_{37} + a_{38} + a_{39})p_{12}p_{23}p_{24}p_{34} + (a_{09} + \\
& a_{19} + a_{29} + a_{39})p_{12}p_{23}p_{34}^2 + (a_{08} + a_{18} + a_{28} + a_{38})p_{12}p_{24}^2p_{34} + (a_{09} + a_{19} + a_{29} + a_{39})p_{12}p_{24}p_{34}^2 + (a_{05} + a_{15} + a_{25} + \\
& a_{35})p_{13}^2p_{14}p_{23} + (a_{05} + a_{15} + a_{25} + a_{35})p_{13}^2p_{14}p_{24} + (a_{05} + a_{15} + a_{25} + a_{35})p_{13}^2p_{23}p_{24} + (a_{05} + a_{15} + a_{25} + a_{35})p_{13}^2p_{23}p_{34} + \\
& (a_{05} + a_{15} + a_{25} + a_{35})p_{13}^2p_{24}p_{34} + (a_{06} + a_{16} + a_{26} + a_{36})p_{13}p_{14}^2p_{23} + (a_{06} + a_{16} + a_{26} + a_{36})p_{13}p_{14}^2p_{24} + (a_{07} + \\
& a_{17} + a_{27} + a_{37})p_{13}p_{14}p_{23}^2 + (a_{05} + a_{06} + a_{07} + a_{08} + a_{15} + a_{16} + a_{17} + a_{18} + a_{25} + a_{26} + a_{27} + a_{28} + a_{35} + a_{36} + a_{37} + \\
& a_{38})p_{13}p_{14}p_{23}p_{24} + (a_{05} + a_{06} + a_{09} + a_{15} + a_{16} + a_{19} + a_{25} + a_{26} + a_{29} + a_{35} + a_{36} + a_{39})p_{13}p_{14}p_{23}p_{34} + (a_{08} + a_{18} + \\
& a_{28} + a_{38})p_{13}p_{14}p_{24}^2 + (a_{05} + a_{06} + a_{09} + a_{15} + a_{16} + a_{19} + a_{25} + a_{26} + a_{29} + a_{35} + a_{36} + a_{39})p_{13}p_{14}p_{24}p_{34} + (a_{07} + \\
& a_{17} + a_{27} + a_{37})p_{13}p_{23}^2p_{24} + (a_{07} + a_{17} + a_{27} + a_{37})p_{13}p_{23}^2p_{34} + (a_{08} + a_{18} + a_{28} + a_{38})p_{13}p_{23}p_{24}^2 + (a_{07} + a_{08} + a_{09} + \\
& a_{17} + a_{18} + a_{19} + a_{27} + a_{28} + a_{29} + a_{37} + a_{38} + a_{39})p_{13}p_{23}p_{24}p_{34} + (a_{09} + a_{19} + a_{29} + a_{39})p_{13}p_{23}p_{34}^2 + (a_{08} + a_{18} + a_{28} + \\
& a_{38})p_{13}p_{24}^2p_{34} + (a_{09} + a_{19} + a_{29} + a_{39})p_{13}p_{24}p_{34}^2 + (a_{06} + a_{16} + a_{26} + a_{36})p_{14}^2p_{23}p_{24} + (a_{06} + a_{16} + a_{26} + a_{36})p_{14}^2p_{23}p_{34} + \\
& (a_{06} + a_{16} + a_{26} + a_{36})p_{14}^2p_{24}p_{34} + (a_{07} + a_{17} + a_{27} + a_{37})p_{14}p_{23}^2p_{24} + (a_{07} + a_{17} + a_{27} + a_{37})p_{14}p_{23}^2p_{34} + (a_{08} + \\
& a_{18} + a_{28} + a_{38})p_{14}p_{23}p_{24}^2 + (a_{07} + a_{08} + a_{09} + a_{17} + a_{18} + a_{19} + a_{27} + a_{28} + a_{29} + a_{37} + a_{38} + a_{39})p_{14}p_{23}p_{24}p_{34} + \\
& (a_{09} + a_{19} + a_{29} + a_{39})p_{14}p_{23}p_{34}^2 + (a_{08} + a_{18} + a_{28} + a_{38})p_{14}p_{24}^2p_{34} + (a_{09} + a_{19} + a_{29} + a_{39})p_{14}p_{24}p_{34}^2 = 0
\end{aligned}$$

Hacemos el polinomio idénticamente cero, entonces todos los coeficientes deben ser 0, obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
& a_{01} + a_{05} + a_{08} + a_{09} + a_{11} + a_{21} + a_{28} + a_{29} + a_{31} + a_{38} + a_{45} + a_{48} + a_{49} + a_{55} + a_{65} + a_{69} + a_{78} + a_{79} + a_{88} + a_{99} = 0 \\
& a_{02} + a_{04} + a_{08} + a_{09} + a_{12} + a_{18} + a_{19} + a_{22} + a_{32} + a_{39} + a_{44} + a_{54} + a_{58} + a_{59} + a_{64} + a_{68} + a_{78} + a_{79} + a_{88} + a_{99} = 0 \\
& a_{01} + a_{06} + a_{07} + a_{09} + a_{11} + a_{21} + a_{27} + a_{31} + a_{37} + a_{39} + a_{46} + a_{47} + a_{49} + a_{56} + a_{59} + a_{66} + a_{77} + a_{87} + a_{89} + a_{99} = 0 \\
& a_{03} + a_{04} + a_{07} + a_{09} + a_{13} + a_{17} + a_{19} + a_{23} + a_{29} + a_{33} + a_{44} + a_{54} + a_{57} + a_{64} + a_{67} + a_{69} + a_{77} + a_{87} + a_{89} + a_{99} = 0 \\
& a_{02} + a_{06} + a_{07} + a_{08} + a_{12} + a_{17} + a_{22} + a_{32} + a_{37} + a_{38} + a_{46} + a_{48} + a_{56} + a_{57} + a_{58} + a_{66} + a_{77} + a_{88} + a_{97} + a_{98} = 0 \\
& a_{03} + a_{05} + a_{07} + a_{08} + a_{13} + a_{18} + a_{23} + a_{27} + a_{28} + a_{33} + a_{45} + a_{47} + a_{55} + a_{65} + a_{67} + a_{68} + a_{77} + a_{88} + a_{97} + a_{98} = 0 \\
& a_{00} + a_{10} + a_{16} + a_{17} + a_{19} + a_{20} + a_{26} + a_{29} + a_{30} + a_{36} + a_{46} + a_{47} + a_{49} + a_{56} + a_{59} + a_{66} + a_{77} + a_{87} + a_{89} + a_{99} = 0 \\
& a_{00} + a_{10} + a_{15} + a_{18} + a_{19} + a_{20} + a_{25} + a_{30} + a_{35} + a_{39} + a_{45} + a_{48} + a_{49} + a_{55} + a_{65} + a_{69} + a_{78} + a_{79} + a_{88} + a_{99} = 0 \\
& a_{02} + a_{06} + a_{09} + a_{12} + a_{14} + a_{16} + a_{19} + a_{22} + a_{32} + a_{39} + a_{44} + a_{56} + a_{59} + a_{66} + a_{74} + a_{76} + a_{79} + a_{84} + a_{86} + a_{99} = 0 \\
& a_{00} + a_{10} + a_{16} + a_{18} + a_{20} + a_{26} + a_{27} + a_{28} + a_{30} + a_{36} + a_{46} + a_{48} + a_{56} + a_{57} + a_{58} + a_{66} + a_{77} + a_{88} + a_{97} + a_{98} = 0 \\
& a_{03} + a_{05} + a_{09} + a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{19} + a_{23} + a_{29} + a_{33} + a_{44} + a_{55} + a_{65} + a_{69} + a_{74} + a_{75} + a_{84} + a_{85} + a_{89} + a_{99} = 0 \\
& a_{02} + a_{05} + a_{12} + a_{15} + a_{16} + a_{18} + a_{22} + a_{32} + a_{35} + a_{36} + a_{46} + a_{48} + a_{55} + a_{66} + a_{75} + a_{76} + a_{78} + a_{88} + a_{95} + a_{96} = 0 \\
& a_{03} + a_{06} + a_{13} + a_{15} + a_{16} + a_{17} + a_{23} + a_{25} + a_{26} + a_{33} + a_{45} + a_{47} + a_{55} + a_{66} + a_{77} + a_{85} + a_{86} + a_{87} + a_{95} + a_{96} = 0 \\
& a_{00} + a_{10} + a_{14} + a_{20} + a_{24} + a_{28} + a_{29} + a_{30} + a_{34} + a_{38} + a_{44} + a_{54} + a_{58} + a_{59} + a_{64} + a_{68} + a_{78} + a_{79} + a_{88} + a_{99} = 0 \\
& a_{01} + a_{06} + a_{08} + a_{11} + a_{21} + a_{25} + a_{26} + a_{28} + a_{31} + a_{38} + a_{46} + a_{48} + a_{55} + a_{66} + a_{75} + a_{76} + a_{78} + a_{88} + a_{95} + a_{96} = 0 \\
& a_{00} + a_{10} + a_{15} + a_{17} + a_{20} + a_{25} + a_{30} + a_{35} + a_{37} + a_{38} + a_{45} + a_{47} + a_{55} + a_{65} + a_{67} + a_{68} + a_{77} + a_{88} + a_{97} + a_{98} = 0 \\
& a_{03} + a_{04} + a_{08} + a_{13} + a_{18} + a_{23} + a_{24} + a_{25} + a_{28} + a_{33} + a_{44} + a_{55} + a_{64} + a_{68} + a_{74} + a_{75} + a_{88} + a_{94} + a_{95} + a_{98} = 0 \\
& a_{01} + a_{04} + a_{11} + a_{21} + a_{24} + a_{26} + a_{29} + a_{31} + a_{34} + a_{36} + a_{44} + a_{56} + a_{59} + a_{66} + a_{74} + a_{76} + a_{79} + a_{84} + a_{86} + a_{99} = 0 \\
& a_{03} + a_{06} + a_{13} + a_{14} + a_{16} + a_{23} + a_{24} + a_{26} + a_{27} + a_{33} + a_{44} + a_{54} + a_{57} + a_{66} + a_{77} + a_{84} + a_{86} + a_{94} + a_{96} + a_{97} = 0 \\
& a_{00} + a_{10} + a_{14} + a_{20} + a_{24} + a_{27} + a_{30} + a_{34} + a_{37} + a_{39} + a_{44} + a_{54} + a_{57} + a_{64} + a_{67} + a_{69} + a_{77} + a_{87} + a_{89} + a_{99} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&a_{00} + a_{13} + a_{17} + a_{19} + a_{23} + a_{29} + a_{33} + a_{40} + a_{43} + a_{47} + a_{49} + a_{50} + a_{53} + a_{59} + a_{60} + a_{63} + a_{77} + a_{87} + a_{89} + a_{99} = 0 \\
&a_{01} + a_{05} + a_{07} + a_{11} + a_{21} + a_{27} + a_{31} + a_{35} + a_{36} + a_{37} + a_{45} + a_{47} + a_{55} + a_{66} + a_{77} + a_{85} + a_{86} + a_{87} + a_{95} + a_{96} = 0 \\
&a_{00} + a_{12} + a_{18} + a_{19} + a_{22} + a_{32} + a_{39} + a_{40} + a_{42} + a_{48} + a_{49} + a_{50} + a_{52} + a_{60} + a_{62} + a_{69} + a_{78} + a_{79} + a_{88} + a_{99} = 0 \\
&a_{02} + a_{04} + a_{07} + a_{12} + a_{17} + a_{22} + a_{32} + a_{34} + a_{36} + a_{37} + a_{44} + a_{54} + a_{57} + a_{66} + a_{77} + a_{84} + a_{86} + a_{94} + a_{96} + a_{97} = 0 \\
&a_{01} + a_{04} + a_{11} + a_{21} + a_{24} + a_{25} + a_{31} + a_{34} + a_{35} + a_{39} + a_{44} + a_{55} + a_{65} + a_{69} + a_{74} + a_{75} + a_{84} + a_{85} + a_{89} + a_{99} = 0 \\
&a_{02} + a_{05} + a_{12} + a_{14} + a_{15} + a_{22} + a_{32} + a_{34} + a_{35} + a_{38} + a_{44} + a_{55} + a_{64} + a_{68} + a_{74} + a_{75} + a_{88} + a_{94} + a_{95} + a_{98} = 0 \\
&a_{03} + a_{05} + a_{09} + a_{11} + a_{23} + a_{29} + a_{33} + a_{41} + a_{43} + a_{45} + a_{49} + a_{55} + a_{65} + a_{69} + a_{71} + a_{73} + a_{79} + a_{81} + a_{83} + a_{99} = 0 \\
&a_{00} + a_{13} + a_{18} + a_{23} + a_{27} + a_{28} + a_{33} + a_{40} + a_{43} + a_{48} + a_{50} + a_{53} + a_{57} + a_{58} + a_{60} + a_{63} + a_{77} + a_{88} + a_{97} + a_{98} = 0 \\
&a_{02} + a_{06} + a_{09} + a_{11} + a_{22} + a_{32} + a_{39} + a_{41} + a_{42} + a_{46} + a_{49} + a_{56} + a_{59} + a_{66} + a_{71} + a_{72} + a_{81} + a_{82} + a_{89} + a_{99} = 0 \\
&a_{00} + a_{11} + a_{21} + a_{28} + a_{29} + a_{31} + a_{38} + a_{40} + a_{41} + a_{50} + a_{51} + a_{58} + a_{59} + a_{60} + a_{61} + a_{68} + a_{78} + a_{79} + a_{88} + a_{99} = 0 \\
&a_{03} + a_{04} + a_{08} + a_{13} + a_{18} + a_{22} + a_{33} + a_{44} + a_{52} + a_{53} + a_{54} + a_{58} + a_{64} + a_{68} + a_{72} + a_{73} + a_{78} + a_{88} + a_{92} + a_{93} = 0 \\
&a_{00} + a_{12} + a_{17} + a_{22} + a_{32} + a_{37} + a_{38} + a_{40} + a_{42} + a_{47} + a_{50} + a_{52} + a_{60} + a_{62} + a_{67} + a_{68} + a_{77} + a_{88} + a_{97} + a_{98} = 0 \\
&a_{01} + a_{06} + a_{08} + a_{11} + a_{22} + a_{31} + a_{38} + a_{46} + a_{48} + a_{51} + a_{52} + a_{56} + a_{58} + a_{66} + a_{71} + a_{72} + a_{88} + a_{91} + a_{92} + a_{98} = 0 \\
&a_{02} + a_{05} + a_{13} + a_{18} + a_{22} + a_{33} + a_{42} + a_{43} + a_{45} + a_{48} + a_{55} + a_{62} + a_{63} + a_{65} + a_{72} + a_{73} + a_{78} + a_{88} + a_{92} + a_{93} = 0 \\
&a_{03} + a_{06} + a_{12} + a_{17} + a_{22} + a_{33} + a_{42} + a_{43} + a_{46} + a_{47} + a_{52} + a_{53} + a_{56} + a_{66} + a_{77} + a_{82} + a_{83} + a_{87} + a_{92} + a_{93} = 0 \\
&a_{00} + a_{11} + a_{21} + a_{27} + a_{31} + a_{37} + a_{39} + a_{40} + a_{41} + a_{50} + a_{51} + a_{57} + a_{60} + a_{61} + a_{67} + a_{69} + a_{77} + a_{87} + a_{89} + a_{99} = 0 \\
&a_{02} + a_{04} + a_{07} + a_{12} + a_{17} + a_{22} + a_{33} + a_{44} + a_{54} + a_{57} + a_{62} + a_{63} + a_{64} + a_{67} + a_{77} + a_{82} + a_{83} + a_{87} + a_{92} + a_{93} = 0 \\
&a_{03} + a_{06} + a_{11} + a_{23} + a_{25} + a_{26} + a_{33} + a_{41} + a_{43} + a_{46} + a_{55} + a_{66} + a_{71} + a_{73} + a_{75} + a_{76} + a_{81} + a_{83} + a_{95} + a_{96} = 0 \\
&a_{03} + a_{06} + a_{13} + a_{14} + a_{16} + a_{22} + a_{33} + a_{44} + a_{52} + a_{53} + a_{56} + a_{66} + a_{72} + a_{73} + a_{74} + a_{76} + a_{84} + a_{86} + a_{92} + a_{93} = 0 \\
&a_{01} + a_{05} + a_{07} + a_{11} + a_{21} + a_{27} + a_{33} + a_{45} + a_{47} + a_{55} + a_{61} + a_{63} + a_{65} + a_{67} + a_{77} + a_{81} + a_{83} + a_{91} + a_{93} + a_{97} = 0 \\
&a_{01} + a_{04} + a_{11} + a_{23} + a_{29} + a_{33} + a_{44} + a_{51} + a_{53} + a_{54} + a_{59} + a_{61} + a_{63} + a_{64} + a_{71} + a_{73} + a_{79} + a_{81} + a_{83} + a_{99} = 0 \\
&a_{03} + a_{06} + a_{11} + a_{21} + a_{27} + a_{33} + a_{41} + a_{43} + a_{46} + a_{51} + a_{53} + a_{56} + a_{57} + a_{66} + a_{77} + a_{81} + a_{83} + a_{91} + a_{93} + a_{97} = 0 \\
&a_{00} + a_{10} + a_{16} + a_{18} + a_{22} + a_{30} + a_{36} + a_{46} + a_{48} + a_{50} + a_{52} + a_{66} + a_{70} + a_{72} + a_{76} + a_{78} + a_{88} + a_{90} + a_{92} + a_{96} = 0 \\
&a_{00} + a_{11} + a_{20} + a_{26} + a_{29} + a_{30} + a_{36} + a_{40} + a_{41} + a_{56} + a_{59} + a_{66} + a_{70} + a_{71} + a_{76} + a_{79} + a_{80} + a_{81} + a_{86} + a_{99} = 0 \\
&a_{01} + a_{04} + a_{11} + a_{22} + a_{32} + a_{39} + a_{44} + a_{51} + a_{52} + a_{54} + a_{61} + a_{62} + a_{64} + a_{69} + a_{71} + a_{72} + a_{81} + a_{82} + a_{89} + a_{99} = 0 \\
&a_{02} + a_{05} + a_{11} + a_{22} + a_{31} + a_{38} + a_{41} + a_{42} + a_{45} + a_{55} + a_{61} + a_{62} + a_{65} + a_{68} + a_{71} + a_{72} + a_{88} + a_{91} + a_{92} + a_{98} = 0 \\
&a_{02} + a_{05} + a_{11} + a_{22} + a_{32} + a_{35} + a_{36} + a_{41} + a_{42} + a_{45} + a_{55} + a_{66} + a_{71} + a_{72} + a_{81} + a_{82} + a_{85} + a_{86} + a_{95} + a_{96} = 0 \\
&a_{02} + a_{05} + a_{12} + a_{14} + a_{15} + a_{22} + a_{33} + a_{44} + a_{55} + a_{62} + a_{63} + a_{65} + a_{74} + a_{75} + a_{82} + a_{83} + a_{84} + a_{85} + a_{92} + a_{93} = 0 \\
&a_{00} + a_{10} + a_{14} + a_{23} + a_{29} + a_{33} + a_{44} + a_{50} + a_{53} + a_{59} + a_{60} + a_{63} + a_{70} + a_{73} + a_{74} + a_{79} + a_{80} + a_{83} + a_{84} + a_{99} = 0 \\
&a_{00} + a_{10} + a_{15} + a_{17} + a_{20} + a_{25} + a_{33} + a_{45} + a_{47} + a_{55} + a_{60} + a_{63} + a_{77} + a_{80} + a_{83} + a_{85} + a_{87} + a_{90} + a_{93} + a_{95} = 0 \\
&a_{00} + a_{11} + a_{20} + a_{25} + a_{30} + a_{35} + a_{39} + a_{40} + a_{41} + a_{55} + a_{65} + a_{69} + a_{70} + a_{71} + a_{75} + a_{80} + a_{81} + a_{85} + a_{89} + a_{99} = 0 \\
&a_{00} + a_{13} + a_{18} + a_{20} + a_{25} + a_{33} + a_{40} + a_{43} + a_{48} + a_{55} + a_{60} + a_{63} + a_{70} + a_{73} + a_{75} + a_{78} + a_{88} + a_{90} + a_{93} + a_{95} = 0 \\
&a_{01} + a_{04} + a_{11} + a_{21} + a_{24} + a_{25} + a_{33} + a_{44} + a_{55} + a_{61} + a_{63} + a_{64} + a_{74} + a_{75} + a_{81} + a_{83} + a_{91} + a_{93} + a_{94} + a_{95} = 0 \\
&a_{01} + a_{04} + a_{11} + a_{22} + a_{31} + a_{34} + a_{36} + a_{44} + a_{51} + a_{52} + a_{54} + a_{66} + a_{71} + a_{72} + a_{84} + a_{86} + a_{91} + a_{92} + a_{94} + a_{96} = 0 \\
&a_{00} + a_{10} + a_{14} + a_{20} + a_{24} + a_{27} + a_{33} + a_{44} + a_{54} + a_{57} + a_{60} + a_{63} + a_{77} + a_{80} + a_{83} + a_{84} + a_{90} + a_{93} + a_{94} + a_{97} = 0 \\
&a_{00} + a_{10} + a_{14} + a_{22} + a_{30} + a_{34} + a_{38} + a_{44} + a_{50} + a_{52} + a_{64} + a_{68} + a_{70} + a_{72} + a_{74} + a_{88} + a_{90} + a_{92} + a_{94} + a_{98} = 0 \\
&a_{00} + a_{10} + a_{14} + a_{22} + a_{32} + a_{39} + a_{44} + a_{50} + a_{52} + a_{60} + a_{62} + a_{69} + a_{70} + a_{72} + a_{74} + a_{80} + a_{82} + a_{84} + a_{89} + a_{99} = 0 \\
&a_{00} + a_{12} + a_{17} + a_{22} + a_{30} + a_{36} + a_{40} + a_{42} + a_{47} + a_{50} + a_{52} + a_{66} + a_{77} + a_{80} + a_{82} + a_{86} + a_{87} + a_{90} + a_{92} + a_{96} = 0 \\
&a_{00} + a_{11} + a_{20} + a_{25} + a_{31} + a_{38} + a_{40} + a_{41} + a_{55} + a_{60} + a_{61} + a_{68} + a_{70} + a_{71} + a_{75} + a_{88} + a_{90} + a_{91} + a_{95} + a_{98} = 0 \\
&a_{00} + a_{11} + a_{21} + a_{27} + a_{30} + a_{36} + a_{40} + a_{41} + a_{50} + a_{51} + a_{57} + a_{66} + a_{77} + a_{80} + a_{81} + a_{86} + a_{90} + a_{91} + a_{96} + a_{97} = 0 \\
&a_{17} + a_{18} + a_{19} + a_{27} + a_{28} + a_{29} + a_{37} + a_{38} + a_{39} + a_{47} + a_{48} + a_{49} + a_{57} + a_{58} + a_{59} + a_{67} + a_{68} + a_{69} = 0 \\
&a_{02} + a_{06} + a_{09} + a_{12} + a_{18} + a_{19} + a_{22} + a_{32} + a_{39} + a_{46} + a_{48} + a_{56} + a_{59} + a_{66} + a_{78} + a_{79} + a_{88} + a_{99} = 0 \\
&a_{03} + a_{05} + a_{09} + a_{13} + a_{17} + a_{19} + a_{23} + a_{29} + a_{33} + a_{45} + a_{47} + a_{55} + a_{65} + a_{69} + a_{77} + a_{87} + a_{89} + a_{99} = 0 \\
&a_{01} + a_{06} + a_{08} + a_{11} + a_{21} + a_{28} + a_{29} + a_{31} + a_{38} + a_{46} + a_{48} + a_{56} + a_{59} + a_{66} + a_{78} + a_{79} + a_{88} + a_{99} = 0 \\
&a_{03} + a_{05} + a_{09} + a_{13} + a_{18} + a_{23} + a_{29} + a_{33} + a_{45} + a_{48} + a_{49} + a_{55} + a_{65} + a_{69} + a_{78} + a_{79} + a_{88} + a_{99} = 0 \\
&a_{00} + a_{10} + a_{16} + a_{18} + a_{20} + a_{26} + a_{29} + a_{30} + a_{36} + a_{46} + a_{48} + a_{56} + a_{59} + a_{66} + a_{78} + a_{79} + a_{88} + a_{99} = 0 \\
&a_{03} + a_{04} + a_{08} + a_{13} + a_{18} + a_{23} + a_{27} + a_{28} + a_{33} + a_{44} + a_{54} + a_{57} + a_{64} + a_{68} + a_{77} + a_{88} + a_{97} + a_{98} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&a_{02} + a_{06} + a_{09} + a_{12} + a_{17} + a_{22} + a_{32} + a_{39} + a_{46} + a_{47} + a_{49} + a_{56} + a_{59} + a_{66} + a_{77} + a_{87} + a_{89} + a_{99} = 0 \\
&a_{03} + a_{06} + a_{13} + a_{17} + a_{19} + a_{23} + a_{29} + a_{33} + a_{46} + a_{47} + a_{49} + a_{56} + a_{59} + a_{66} + a_{77} + a_{87} + a_{89} + a_{99} = 0 \\
&a_{01} + a_{05} + a_{07} + a_{11} + a_{21} + a_{27} + a_{31} + a_{37} + a_{39} + a_{45} + a_{47} + a_{55} + a_{65} + a_{69} + a_{77} + a_{87} + a_{89} + a_{99} = 0 \\
&a_{03} + a_{04} + a_{08} + a_{13} + a_{18} + a_{23} + a_{29} + a_{33} + a_{44} + a_{54} + a_{58} + a_{59} + a_{64} + a_{68} + a_{78} + a_{79} + a_{88} + a_{99} = 0 \\
&a_{02} + a_{05} + a_{12} + a_{18} + a_{19} + a_{22} + a_{32} + a_{39} + a_{45} + a_{48} + a_{49} + a_{55} + a_{65} + a_{69} + a_{78} + a_{79} + a_{88} + a_{99} = 0 \\
&a_{02} + a_{04} + a_{07} + a_{12} + a_{17} + a_{22} + a_{32} + a_{37} + a_{38} + a_{44} + a_{54} + a_{57} + a_{64} + a_{68} + a_{77} + a_{88} + a_{97} + a_{98} = 0 \\
&a_{05} + a_{06} + a_{09} + a_{25} + a_{26} + a_{29} + a_{35} + a_{36} + a_{39} + a_{45} + a_{46} + a_{49} + a_{75} + a_{76} + a_{79} + a_{85} + a_{86} + a_{89} = 0 \\
&a_{00} + a_{10} + a_{15} + a_{17} + a_{20} + a_{25} + a_{30} + a_{35} + a_{39} + a_{45} + a_{47} + a_{55} + a_{65} + a_{69} + a_{77} + a_{87} + a_{89} + a_{99} = 0 \\
&a_{01} + a_{06} + a_{08} + a_{11} + a_{21} + a_{27} + a_{31} + a_{38} + a_{46} + a_{48} + a_{56} + a_{57} + a_{58} + a_{66} + a_{77} + a_{88} + a_{97} + a_{98} = 0 \\
&a_{03} + a_{06} + a_{13} + a_{18} + a_{23} + a_{27} + a_{28} + a_{33} + a_{46} + a_{48} + a_{56} + a_{57} + a_{58} + a_{66} + a_{77} + a_{88} + a_{97} + a_{98} = 0 \\
&a_{02} + a_{04} + a_{07} + a_{12} + a_{17} + a_{22} + a_{32} + a_{39} + a_{44} + a_{54} + a_{57} + a_{64} + a_{67} + a_{69} + a_{77} + a_{87} + a_{89} + a_{99} = 0 \\
&a_{03} + a_{06} + a_{13} + a_{14} + a_{16} + a_{23} + a_{25} + a_{26} + a_{33} + a_{44} + a_{55} + a_{66} + a_{74} + a_{75} + a_{84} + a_{86} + a_{95} + a_{96} = 0 \\
&a_{01} + a_{05} + a_{07} + a_{11} + a_{21} + a_{27} + a_{31} + a_{38} + a_{45} + a_{47} + a_{55} + a_{65} + a_{67} + a_{68} + a_{77} + a_{88} + a_{97} + a_{98} = 0 \\
&a_{01} + a_{04} + a_{11} + a_{21} + a_{28} + a_{29} + a_{31} + a_{38} + a_{44} + a_{54} + a_{58} + a_{59} + a_{64} + a_{68} + a_{78} + a_{79} + a_{88} + a_{99} = 0 \\
&a_{04} + a_{06} + a_{08} + a_{14} + a_{16} + a_{18} + a_{34} + a_{36} + a_{38} + a_{54} + a_{56} + a_{58} + a_{74} + a_{76} + a_{78} + a_{94} + a_{96} + a_{98} = 0 \\
&a_{00} + a_{10} + a_{14} + a_{20} + a_{24} + a_{27} + a_{30} + a_{34} + a_{38} + a_{44} + a_{54} + a_{57} + a_{64} + a_{68} + a_{77} + a_{88} + a_{97} + a_{98} = 0 \\
&a_{03} + a_{06} + a_{13} + a_{14} + a_{16} + a_{23} + a_{29} + a_{33} + a_{44} + a_{56} + a_{59} + a_{66} + a_{74} + a_{76} + a_{79} + a_{84} + a_{86} + a_{99} = 0 \\
&a_{02} + a_{05} + a_{12} + a_{14} + a_{15} + a_{22} + a_{32} + a_{35} + a_{36} + a_{44} + a_{55} + a_{66} + a_{74} + a_{75} + a_{84} + a_{86} + a_{95} + a_{96} = 0 \\
&a_{03} + a_{06} + a_{13} + a_{18} + a_{23} + a_{25} + a_{26} + a_{33} + a_{46} + a_{48} + a_{55} + a_{66} + a_{75} + a_{76} + a_{78} + a_{88} + a_{95} + a_{96} = 0 \\
&a_{02} + a_{05} + a_{12} + a_{17} + a_{22} + a_{32} + a_{37} + a_{38} + a_{45} + a_{47} + a_{55} + a_{65} + a_{67} + a_{68} + a_{77} + a_{88} + a_{97} + a_{98} = 0 \\
&a_{04} + a_{05} + a_{07} + a_{14} + a_{15} + a_{17} + a_{24} + a_{25} + a_{27} + a_{64} + a_{65} + a_{67} + a_{84} + a_{85} + a_{87} + a_{94} + a_{95} + a_{97} = 0 \\
&a_{01} + a_{04} + a_{11} + a_{21} + a_{27} + a_{31} + a_{37} + a_{39} + a_{44} + a_{54} + a_{57} + a_{64} + a_{67} + a_{69} + a_{77} + a_{87} + a_{89} + a_{99} = 0 \\
&a_{01} + a_{04} + a_{11} + a_{21} + a_{24} + a_{25} + a_{31} + a_{34} + a_{36} + a_{44} + a_{55} + a_{66} + a_{74} + a_{75} + a_{84} + a_{86} + a_{95} + a_{96} = 0 \\
&a_{00} + a_{13} + a_{18} + a_{23} + a_{29} + a_{33} + a_{40} + a_{43} + a_{48} + a_{50} + a_{53} + a_{59} + a_{60} + a_{63} + a_{78} + a_{79} + a_{88} + a_{99} = 0 \\
&a_{00} + a_{10} + a_{16} + a_{18} + a_{20} + a_{25} + a_{30} + a_{36} + a_{46} + a_{48} + a_{55} + a_{66} + a_{75} + a_{76} + a_{78} + a_{88} + a_{95} + a_{96} = 0 \\
&a_{02} + a_{05} + a_{12} + a_{14} + a_{15} + a_{22} + a_{32} + a_{39} + a_{44} + a_{55} + a_{65} + a_{69} + a_{74} + a_{75} + a_{84} + a_{85} + a_{89} + a_{99} = 0 \\
&a_{00} + a_{10} + a_{14} + a_{20} + a_{26} + a_{29} + a_{30} + a_{36} + a_{44} + a_{56} + a_{59} + a_{66} + a_{74} + a_{76} + a_{79} + a_{84} + a_{86} + a_{99} = 0 \\
&a_{00} + a_{10} + a_{15} + a_{17} + a_{20} + a_{25} + a_{30} + a_{36} + a_{45} + a_{47} + a_{55} + a_{66} + a_{77} + a_{85} + a_{86} + a_{87} + a_{95} + a_{96} = 0 \\
&a_{02} + a_{03} + a_{09} + a_{12} + a_{13} + a_{19} + a_{52} + a_{53} + a_{59} + a_{62} + a_{63} + a_{69} + a_{72} + a_{73} + a_{79} + a_{82} + a_{83} + a_{89} = 0 \\
&a_{02} + a_{05} + a_{12} + a_{17} + a_{22} + a_{32} + a_{35} + a_{36} + a_{45} + a_{47} + a_{55} + a_{66} + a_{77} + a_{85} + a_{86} + a_{87} + a_{95} + a_{96} = 0 \\
&a_{00} + a_{12} + a_{17} + a_{22} + a_{32} + a_{39} + a_{40} + a_{42} + a_{47} + a_{50} + a_{52} + a_{60} + a_{62} + a_{69} + a_{77} + a_{87} + a_{89} + a_{99} = 0 \\
&a_{03} + a_{06} + a_{11} + a_{23} + a_{29} + a_{33} + a_{41} + a_{43} + a_{46} + a_{56} + a_{59} + a_{66} + a_{71} + a_{73} + a_{79} + a_{81} + a_{83} + a_{99} = 0 \\
&a_{01} + a_{04} + a_{11} + a_{21} + a_{24} + a_{25} + a_{31} + a_{38} + a_{44} + a_{55} + a_{64} + a_{68} + a_{74} + a_{75} + a_{88} + a_{94} + a_{95} + a_{98} = 0 \\
&a_{00} + a_{10} + a_{14} + a_{20} + a_{25} + a_{30} + a_{35} + a_{39} + a_{44} + a_{55} + a_{65} + a_{69} + a_{74} + a_{75} + a_{84} + a_{85} + a_{89} + a_{99} = 0 \\
&a_{03} + a_{06} + a_{13} + a_{18} + a_{22} + a_{33} + a_{46} + a_{48} + a_{52} + a_{53} + a_{56} + a_{66} + a_{72} + a_{73} + a_{78} + a_{88} + a_{92} + a_{93} = 0 \\
&a_{01} + a_{03} + a_{08} + a_{21} + a_{23} + a_{28} + a_{41} + a_{43} + a_{48} + a_{61} + a_{63} + a_{68} + a_{71} + a_{73} + a_{78} + a_{91} + a_{93} + a_{98} = 0 \\
&a_{00} + a_{10} + a_{14} + a_{20} + a_{24} + a_{27} + a_{30} + a_{36} + a_{44} + a_{54} + a_{57} + a_{66} + a_{77} + a_{84} + a_{86} + a_{94} + a_{96} + a_{97} = 0 \\
&a_{01} + a_{04} + a_{11} + a_{21} + a_{27} + a_{31} + a_{34} + a_{36} + a_{44} + a_{54} + a_{57} + a_{66} + a_{77} + a_{84} + a_{86} + a_{94} + a_{96} + a_{97} = 0 \\
&a_{00} + a_{11} + a_{21} + a_{27} + a_{31} + a_{38} + a_{40} + a_{41} + a_{50} + a_{51} + a_{57} + a_{60} + a_{61} + a_{68} + a_{77} + a_{88} + a_{97} + a_{98} = 0 \\
&a_{02} + a_{05} + a_{11} + a_{22} + a_{32} + a_{39} + a_{41} + a_{42} + a_{45} + a_{55} + a_{65} + a_{69} + a_{71} + a_{72} + a_{81} + a_{82} + a_{89} + a_{99} = 0 \\
&a_{00} + a_{10} + a_{14} + a_{20} + a_{25} + a_{30} + a_{34} + a_{38} + a_{44} + a_{55} + a_{64} + a_{68} + a_{74} + a_{75} + a_{88} + a_{94} + a_{95} + a_{98} = 0 \\
&a_{03} + a_{06} + a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{41} + a_{43} + a_{46} + a_{52} + a_{53} + a_{56} + a_{66} + a_{71} + a_{72} + a_{81} + a_{83} + a_{92} + a_{93} = 0 \\
&a_{10} + a_{13} + a_{16} + a_{20} + a_{23} + a_{26} + a_{40} + a_{43} + a_{46} + a_{50} + a_{53} + a_{56} + a_{80} + a_{83} + a_{86} + a_{90} + a_{93} + a_{96} = 0 \\
&a_{01} + a_{02} + a_{07} + a_{31} + a_{32} + a_{37} + a_{41} + a_{42} + a_{47} + a_{51} + a_{52} + a_{57} + a_{81} + a_{82} + a_{87} + a_{91} + a_{92} + a_{97} = 0 \\
&a_{02} + a_{05} + a_{12} + a_{17} + a_{22} + a_{33} + a_{45} + a_{47} + a_{55} + a_{62} + a_{63} + a_{65} + a_{77} + a_{82} + a_{83} + a_{87} + a_{92} + a_{93} = 0 \\
&a_{00} + a_{13} + a_{18} + a_{22} + a_{33} + a_{40} + a_{43} + a_{48} + a_{50} + a_{52} + a_{60} + a_{63} + a_{72} + a_{73} + a_{78} + a_{88} + a_{92} + a_{93} = 0 \\
&a_{02} + a_{05} + a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{41} + a_{42} + a_{45} + a_{55} + a_{62} + a_{63} + a_{65} + a_{71} + a_{72} + a_{81} + a_{83} + a_{92} + a_{93} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&a_{00} + a_{11} + a_{23} + a_{29} + a_{33} + a_{40} + a_{41} + a_{50} + a_{53} + a_{59} + a_{60} + a_{63} + a_{71} + a_{73} + a_{79} + a_{81} + a_{83} + a_{99} = 0 \\
&a_{01} + a_{04} + a_{11} + a_{22} + a_{31} + a_{38} + a_{44} + a_{51} + a_{52} + a_{54} + a_{64} + a_{68} + a_{71} + a_{72} + a_{88} + a_{91} + a_{92} + a_{98} = 0 \\
&a_{10} + a_{12} + a_{15} + a_{30} + a_{32} + a_{35} + a_{40} + a_{42} + a_{45} + a_{60} + a_{62} + a_{65} + a_{70} + a_{72} + a_{75} + a_{90} + a_{92} + a_{95} = 0 \\
&a_{00} + a_{12} + a_{17} + a_{22} + a_{33} + a_{40} + a_{42} + a_{47} + a_{50} + a_{52} + a_{60} + a_{63} + a_{77} + a_{82} + a_{83} + a_{87} + a_{92} + a_{93} = 0 \\
&a_{01} + a_{04} + a_{11} + a_{21} + a_{27} + a_{33} + a_{44} + a_{54} + a_{57} + a_{61} + a_{63} + a_{64} + a_{77} + a_{81} + a_{83} + a_{91} + a_{93} + a_{97} = 0 \\
&a_{01} + a_{04} + a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} + a_{51} + a_{52} + a_{54} + a_{61} + a_{63} + a_{64} + a_{71} + a_{72} + a_{81} + a_{83} + a_{92} + a_{93} = 0 \\
&a_{00} + a_{11} + a_{22} + a_{32} + a_{39} + a_{40} + a_{41} + a_{50} + a_{52} + a_{60} + a_{62} + a_{69} + a_{71} + a_{72} + a_{81} + a_{82} + a_{89} + a_{99} = 0 \\
&a_{20} + a_{21} + a_{24} + a_{30} + a_{31} + a_{34} + a_{50} + a_{51} + a_{54} + a_{60} + a_{61} + a_{64} + a_{70} + a_{71} + a_{74} + a_{80} + a_{81} + a_{84} = 0 \\
&a_{00} + a_{11} + a_{21} + a_{27} + a_{33} + a_{40} + a_{41} + a_{50} + a_{51} + a_{57} + a_{60} + a_{63} + a_{77} + a_{81} + a_{83} + a_{91} + a_{93} + a_{97} = 0 \\
&a_{00} + a_{11} + a_{20} + a_{25} + a_{30} + a_{36} + a_{40} + a_{41} + a_{55} + a_{66} + a_{70} + a_{71} + a_{75} + a_{80} + a_{81} + a_{86} + a_{95} + a_{96} = 0 \\
&a_{00} + a_{11} + a_{22} + a_{31} + a_{38} + a_{40} + a_{41} + a_{50} + a_{52} + a_{60} + a_{61} + a_{68} + a_{71} + a_{72} + a_{88} + a_{91} + a_{92} + a_{98} = 0 \\
&a_{00} + a_{10} + a_{14} + a_{22} + a_{30} + a_{36} + a_{44} + a_{50} + a_{52} + a_{66} + a_{70} + a_{72} + a_{74} + a_{84} + a_{86} + a_{90} + a_{92} + a_{96} = 0 \\
&a_{00} + a_{10} + a_{14} + a_{20} + a_{25} + a_{33} + a_{44} + a_{55} + a_{60} + a_{63} + a_{74} + a_{75} + a_{80} + a_{83} + a_{84} + a_{90} + a_{93} + a_{95} = 0 \\
&a_{00} + a_{10} + a_{14} + a_{22} + a_{33} + a_{44} + a_{50} + a_{52} + a_{60} + a_{63} + a_{70} + a_{72} + a_{74} + a_{80} + a_{83} + a_{84} + a_{92} + a_{93} = 0 \\
&a_{00} + a_{11} + a_{20} + a_{25} + a_{33} + a_{40} + a_{41} + a_{55} + a_{60} + a_{63} + a_{70} + a_{71} + a_{75} + a_{81} + a_{83} + a_{90} + a_{93} + a_{95} = 0 \\
&a_{00} + a_{11} + a_{22} + a_{30} + a_{36} + a_{40} + a_{41} + a_{50} + a_{52} + a_{66} + a_{71} + a_{72} + a_{80} + a_{81} + a_{86} + a_{90} + a_{92} + a_{96} = 0 \\
&a_{04} + a_{05} + a_{08} + a_{09} + a_{14} + a_{15} + a_{18} + a_{19} + a_{24} + a_{25} + a_{28} + a_{29} + a_{34} + a_{35} + a_{38} + a_{39} = 0 \\
&a_{04} + a_{06} + a_{07} + a_{09} + a_{14} + a_{16} + a_{17} + a_{19} + a_{24} + a_{26} + a_{27} + a_{29} + a_{34} + a_{36} + a_{37} + a_{39} = 0 \\
&a_{05} + a_{06} + a_{07} + a_{08} + a_{15} + a_{16} + a_{17} + a_{18} + a_{25} + a_{26} + a_{27} + a_{28} + a_{35} + a_{36} + a_{37} + a_{38} = 0 \\
&a_{01} + a_{02} + a_{08} + a_{09} + a_{41} + a_{42} + a_{48} + a_{49} + a_{51} + a_{52} + a_{58} + a_{59} + a_{61} + a_{62} + a_{68} + a_{69} = 0 \\
&a_{01} + a_{03} + a_{07} + a_{09} + a_{41} + a_{43} + a_{47} + a_{49} + a_{51} + a_{53} + a_{57} + a_{59} + a_{61} + a_{63} + a_{67} + a_{69} = 0 \\
&a_{02} + a_{03} + a_{07} + a_{08} + a_{42} + a_{43} + a_{47} + a_{48} + a_{52} + a_{53} + a_{57} + a_{58} + a_{62} + a_{63} + a_{67} + a_{68} = 0 \\
&a_{03} + a_{06} + a_{13} + a_{18} + a_{23} + a_{29} + a_{33} + a_{46} + a_{48} + a_{56} + a_{59} + a_{66} + a_{78} + a_{79} + a_{88} + a_{99} = 0 \\
&a_{02} + a_{05} + a_{12} + a_{17} + a_{22} + a_{32} + a_{39} + a_{45} + a_{47} + a_{55} + a_{65} + a_{69} + a_{77} + a_{87} + a_{89} + a_{99} = 0 \\
&a_{01} + a_{04} + a_{11} + a_{21} + a_{27} + a_{31} + a_{38} + a_{44} + a_{54} + a_{57} + a_{64} + a_{68} + a_{77} + a_{88} + a_{97} + a_{98} = 0 \\
&a_{00} + a_{10} + a_{14} + a_{20} + a_{25} + a_{30} + a_{36} + a_{44} + a_{55} + a_{66} + a_{74} + a_{75} + a_{84} + a_{86} + a_{95} + a_{96} = 0 \\
&a_{12} + a_{13} + a_{15} + a_{16} + a_{42} + a_{43} + a_{45} + a_{46} + a_{72} + a_{73} + a_{75} + a_{76} + a_{82} + a_{83} + a_{85} + a_{86} = 0 \\
&a_{10} + a_{12} + a_{16} + a_{19} + a_{40} + a_{42} + a_{46} + a_{49} + a_{70} + a_{72} + a_{76} + a_{79} + a_{80} + a_{82} + a_{86} + a_{89} = 0 \\
&a_{10} + a_{13} + a_{15} + a_{19} + a_{40} + a_{43} + a_{45} + a_{49} + a_{70} + a_{73} + a_{75} + a_{79} + a_{80} + a_{83} + a_{85} + a_{89} = 0 \\
&a_{00} + a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{40} + a_{41} + a_{50} + a_{52} + a_{60} + a_{63} + a_{71} + a_{72} + a_{81} + a_{83} + a_{92} + a_{93} = 0 \\
&a_{21} + a_{23} + a_{24} + a_{26} + a_{51} + a_{53} + a_{54} + a_{56} + a_{71} + a_{73} + a_{74} + a_{76} + a_{91} + a_{93} + a_{94} + a_{96} = 0 \\
&a_{20} + a_{21} + a_{26} + a_{28} + a_{50} + a_{51} + a_{56} + a_{58} + a_{70} + a_{71} + a_{76} + a_{78} + a_{90} + a_{91} + a_{96} + a_{98} = 0 \\
&a_{20} + a_{23} + a_{24} + a_{28} + a_{50} + a_{53} + a_{54} + a_{58} + a_{70} + a_{73} + a_{74} + a_{78} + a_{90} + a_{93} + a_{94} + a_{98} = 0 \\
&a_{31} + a_{32} + a_{34} + a_{35} + a_{61} + a_{62} + a_{64} + a_{65} + a_{81} + a_{82} + a_{84} + a_{85} + a_{91} + a_{92} + a_{94} + a_{95} = 0 \\
&a_{30} + a_{31} + a_{35} + a_{37} + a_{60} + a_{61} + a_{65} + a_{67} + a_{80} + a_{81} + a_{85} + a_{87} + a_{90} + a_{91} + a_{95} + a_{97} = 0 \\
&a_{30} + a_{32} + a_{34} + a_{37} + a_{60} + a_{62} + a_{64} + a_{67} + a_{80} + a_{82} + a_{84} + a_{87} + a_{90} + a_{92} + a_{94} + a_{97} = 0 \\
&a_{04} + a_{05} + a_{07} + a_{14} + a_{15} + a_{17} + a_{24} + a_{25} + a_{27} + a_{34} + a_{35} + a_{37} = 0 \\
&a_{04} + a_{06} + a_{08} + a_{14} + a_{16} + a_{18} + a_{24} + a_{26} + a_{28} + a_{34} + a_{36} + a_{38} = 0 \\
&a_{05} + a_{06} + a_{09} + a_{15} + a_{16} + a_{19} + a_{25} + a_{26} + a_{29} + a_{35} + a_{36} + a_{39} = 0 \\
&a_{07} + a_{08} + a_{09} + a_{17} + a_{18} + a_{19} + a_{27} + a_{28} + a_{29} + a_{37} + a_{38} + a_{39} = 0 \\
&a_{01} + a_{02} + a_{07} + a_{41} + a_{42} + a_{47} + a_{51} + a_{52} + a_{57} + a_{61} + a_{62} + a_{67} = 0 \\
&a_{01} + a_{03} + a_{08} + a_{41} + a_{43} + a_{48} + a_{51} + a_{53} + a_{58} + a_{61} + a_{63} + a_{68} = 0 \\
&a_{02} + a_{03} + a_{09} + a_{42} + a_{43} + a_{49} + a_{52} + a_{53} + a_{59} + a_{62} + a_{63} + a_{69} = 0 \\
&a_{07} + a_{08} + a_{09} + a_{47} + a_{48} + a_{49} + a_{57} + a_{58} + a_{59} + a_{67} + a_{68} + a_{69} = 0 \\
&a_{10} + a_{12} + a_{15} + a_{40} + a_{42} + a_{45} + a_{70} + a_{72} + a_{75} + a_{80} + a_{82} + a_{85} = 0 \\
&a_{10} + a_{13} + a_{16} + a_{40} + a_{43} + a_{46} + a_{70} + a_{73} + a_{76} + a_{80} + a_{83} + a_{86} = 0 \\
&a_{12} + a_{13} + a_{19} + a_{42} + a_{43} + a_{49} + a_{72} + a_{73} + a_{79} + a_{82} + a_{83} + a_{89} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&a_{15} + a_{16} + a_{19} + a_{45} + a_{46} + a_{49} + a_{75} + a_{76} + a_{79} + a_{85} + a_{86} + a_{89} = 0 \\
&a_{20} + a_{21} + a_{24} + a_{50} + a_{51} + a_{54} + a_{70} + a_{71} + a_{74} + a_{90} + a_{91} + a_{94} = 0 \\
&a_{20} + a_{23} + a_{26} + a_{50} + a_{53} + a_{56} + a_{70} + a_{73} + a_{76} + a_{90} + a_{93} + a_{96} = 0 \\
&a_{21} + a_{23} + a_{28} + a_{51} + a_{53} + a_{58} + a_{71} + a_{73} + a_{78} + a_{91} + a_{93} + a_{98} = 0 \\
&a_{24} + a_{26} + a_{28} + a_{54} + a_{56} + a_{58} + a_{74} + a_{76} + a_{78} + a_{94} + a_{96} + a_{98} = 0 \\
&a_{30} + a_{31} + a_{34} + a_{60} + a_{61} + a_{64} + a_{80} + a_{81} + a_{84} + a_{90} + a_{91} + a_{94} = 0 \\
&a_{30} + a_{32} + a_{35} + a_{60} + a_{62} + a_{65} + a_{80} + a_{82} + a_{85} + a_{90} + a_{92} + a_{95} = 0 \\
&a_{31} + a_{32} + a_{37} + a_{61} + a_{62} + a_{67} + a_{81} + a_{82} + a_{87} + a_{91} + a_{92} + a_{97} = 0 \\
&a_{34} + a_{35} + a_{37} + a_{64} + a_{65} + a_{67} + a_{84} + a_{85} + a_{87} + a_{94} + a_{95} + a_{97} = 0 \\
&a_{10} + a_{20} + a_{30} + a_{40} + a_{50} + a_{60} = 0 \quad a_{17} + a_{27} + a_{37} + a_{47} + a_{57} + a_{67} = 0 \\
&a_{18} + a_{28} + a_{38} + a_{48} + a_{58} + a_{68} = 0 \quad a_{19} + a_{29} + a_{39} + a_{49} + a_{59} + a_{69} = 0 \\
&a_{01} + a_{21} + a_{31} + a_{41} + a_{71} + a_{81} = 0 \quad a_{05} + a_{25} + a_{35} + a_{45} + a_{75} + a_{85} = 0 \\
&a_{06} + a_{26} + a_{36} + a_{46} + a_{76} + a_{86} = 0 \quad a_{09} + a_{29} + a_{39} + a_{49} + a_{79} + a_{89} = 0 \\
&a_{02} + a_{12} + a_{32} + a_{52} + a_{72} + a_{92} = 0 \quad a_{04} + a_{14} + a_{34} + a_{54} + a_{74} + a_{94} = 0 \\
&a_{06} + a_{16} + a_{36} + a_{56} + a_{76} + a_{96} = 0 \quad a_{08} + a_{18} + a_{38} + a_{58} + a_{78} + a_{98} = 0 \\
&a_{03} + a_{13} + a_{23} + a_{63} + a_{83} + a_{93} = 0 \quad a_{04} + a_{14} + a_{24} + a_{64} + a_{84} + a_{94} = 0 \\
&a_{05} + a_{15} + a_{25} + a_{65} + a_{85} + a_{95} = 0 \quad a_{07} + a_{17} + a_{27} + a_{67} + a_{87} + a_{97} = 0 \\
&a_{02} + a_{12} + a_{52} + a_{62} + a_{72} + a_{82} = 0 \quad a_{03} + a_{13} + a_{53} + a_{63} + a_{73} + a_{83} = 0 \\
&a_{04} + a_{14} + a_{54} + a_{64} + a_{74} + a_{84} = 0 \quad a_{09} + a_{19} + a_{59} + a_{69} + a_{79} + a_{89} = 0 \\
&a_{01} + a_{21} + a_{41} + a_{61} + a_{71} + a_{91} = 0 \quad a_{03} + a_{23} + a_{43} + a_{63} + a_{73} + a_{93} = 0 \\
&a_{05} + a_{25} + a_{45} + a_{65} + a_{75} + a_{95} = 0 \quad a_{08} + a_{28} + a_{48} + a_{68} + a_{78} + a_{98} = 0 \\
&a_{10} + a_{20} + a_{40} + a_{50} + a_{80} + a_{90} = 0 \quad a_{01} + a_{31} + a_{41} + a_{51} + a_{81} + a_{91} = 0 \\
&a_{02} + a_{32} + a_{42} + a_{52} + a_{82} + a_{92} = 0 \quad a_{13} + a_{23} + a_{43} + a_{53} + a_{83} + a_{93} = 0 \\
&a_{06} + a_{36} + a_{46} + a_{56} + a_{86} + a_{96} = 0 \quad a_{16} + a_{26} + a_{46} + a_{56} + a_{86} + a_{96} = 0 \\
&a_{07} + a_{37} + a_{47} + a_{57} + a_{87} + a_{97} = 0 \quad a_{17} + a_{27} + a_{47} + a_{57} + a_{87} + a_{97} = 0 \\
&a_{10} + a_{30} + a_{40} + a_{60} + a_{70} + a_{90} = 0 \quad a_{12} + a_{32} + a_{42} + a_{62} + a_{72} + a_{92} = 0 \\
&a_{15} + a_{35} + a_{45} + a_{65} + a_{75} + a_{95} = 0 \quad a_{18} + a_{38} + a_{48} + a_{68} + a_{78} + a_{98} = 0 \\
&a_{20} + a_{30} + a_{50} + a_{60} + a_{70} + a_{80} = 0 \quad a_{21} + a_{31} + a_{51} + a_{61} + a_{71} + a_{81} = 0 \\
&a_{24} + a_{34} + a_{54} + a_{64} + a_{74} + a_{84} = 0 \quad a_{29} + a_{39} + a_{59} + a_{69} + a_{79} + a_{89} = 0 \\
&a_{04} + a_{14} + a_{24} + a_{34} = 0 \quad a_{05} + a_{15} + a_{25} + a_{35} = 0 \quad a_{06} + a_{16} + a_{26} + a_{36} = 0 \\
&a_{07} + a_{17} + a_{27} + a_{37} = 0 \quad a_{08} + a_{18} + a_{28} + a_{38} = 0 \quad a_{09} + a_{19} + a_{29} + a_{39} = 0 \\
&a_{01} + a_{41} + a_{51} + a_{61} = 0 \quad a_{02} + a_{42} + a_{52} + a_{62} = 0 \quad a_{03} + a_{43} + a_{53} + a_{63} = 0 \\
&a_{07} + a_{47} + a_{57} + a_{67} = 0 \quad a_{08} + a_{48} + a_{58} + a_{68} = 0 \quad a_{09} + a_{49} + a_{59} + a_{69} = 0 \\
&a_{10} + a_{40} + a_{70} + a_{80} = 0 \quad a_{12} + a_{42} + a_{72} + a_{82} = 0 \quad a_{13} + a_{43} + a_{73} + a_{83} = 0 \\
&a_{15} + a_{45} + a_{75} + a_{85} = 0 \quad a_{16} + a_{46} + a_{76} + a_{86} = 0 \quad a_{19} + a_{49} + a_{79} + a_{89} = 0 \\
&a_{20} + a_{50} + a_{70} + a_{90} = 0 \quad a_{21} + a_{51} + a_{71} + a_{91} = 0 \quad a_{23} + a_{53} + a_{73} + a_{93} = 0 \\
&a_{24} + a_{54} + a_{74} + a_{94} = 0 \quad a_{26} + a_{56} + a_{76} + a_{96} = 0 \quad a_{28} + a_{58} + a_{78} + a_{98} = 0 \\
&a_{30} + a_{60} + a_{80} + a_{90} = 0 \quad a_{31} + a_{61} + a_{81} + a_{91} = 0 \quad a_{32} + a_{62} + a_{82} + a_{92} = 0 \\
&a_{34} + a_{64} + a_{84} + a_{94} = 0 \quad a_{35} + a_{65} + a_{85} + a_{95} = 0 \quad a_{37} + a_{67} + a_{87} + a_{97} = 0.
\end{aligned}$$

Si denotamos por $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{10}$, a las 10 columnas de la matriz A , ellas se pueden escribir en 15 variables y tienen la forma:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \begin{pmatrix} t_0 + t_1 + t_2 + t_3 - t_4 - t_5 - t_6 - t_7 - t_8 + t_9 + t_{10} - t_{11} \\ -t_9 + t_{10} \\ -t_1 + t_3 \\ -t_0 + t_2 \\ t_9 - t_{10} \\ t_1 - t_3 \\ t_0 - t_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & A_2 &= \begin{pmatrix} t_0 + t_1 - t_2 - t_5 - t_7 - t_8 + t_9 - t_{12} + t_{13} \\ -t_2 + 2t_4 + t_5 - t_6 - t_9 + t_{11} - t_{12} + t_{13} \\ -t_1 + t_5 \\ -t_0 + t_4 \\ -t_0 - t_1 + t_2 + t_5 + t_7 + t_8 - t_9 + t_{12} - t_{13} \\ 0 \\ 0 \\ t_1 - t_5 \\ t_0 - t_4 \\ 0 \end{pmatrix} \\
A_3 &= \begin{pmatrix} t_0 + t_1 - t_2 - t_5 - t_7 - t_8 + t_9 - t_{12} + t_{14} \\ t_8 - t_9 \\ -t_1 - t_2 - t_4 + t_6 + t_8 - t_{11} - t_{12} + t_{14} \\ -t_0 \\ -t_0 - t_1 + t_2 + t_5 + t_7 + t_8 - t_9 + t_{12} - t_{14} \\ 0 \\ -t_8 + t_9 \\ 0 \\ t_0 \end{pmatrix} & A_4 &= \begin{pmatrix} t_0 + t_1 - t_2 - t_5 - t_7 - t_8 + t_9 - t_{12} \\ -t_9 \\ -t_1 \\ -t_0 - t_2 + t_4 - 2t_5 + t_6 - 2t_7 - 2t_8 + t_{11} - t_{12} \\ 0 \\ 0 \\ -t_0 - t_1 + t_2 + t_5 + t_7 + t_8 - t_9 + t_{12} \\ 0 \\ t_9 \\ t_1 \end{pmatrix} \\
A_5 &= \begin{pmatrix} 2t_2 + t_3 - 2t_4 - t_5 + t_{10} - t_{11} + t_{12} - t_{13} \\ -2t_2 - t_3 + 2t_4 + t_5 - t_{10} + t_{11} - t_{12} + t_{13} \\ 0 \\ t_2 + t_5 - t_6 + t_7 + t_8 - t_{10} + t_{12} - t_{13} \\ -t_3 + t_5 \\ -t_2 + t_4 \\ t_3 - t_5 \\ t_2 - t_4 \\ 0 \end{pmatrix} & A_6 &= \begin{pmatrix} 2t_2 + t_3 - t_6 - t_8 + t_{10} + t_{12} - t_{14} \\ 0 \\ -2t_2 - t_3 + t_6 + t_8 - t_{10} - t_{12} + t_{14} \\ 0 \\ t_8 - t_{10} \\ t_2 - t_3 - t_4 + t_5 + t_7 + t_8 - t_{11} + t_{12} - t_{14} \\ -t_2 \\ -t_8 + t_{10} \\ 0 \\ t_2 \end{pmatrix} \\
A_7 &= \begin{pmatrix} 2t_2 + t_3 - t_4 + t_5 - t_6 + t_7 + t_8 + t_{10} - t_{11} + t_{12} \\ 0 \\ 0 \\ -2t_2 - t_3 + t_4 - t_5 + t_6 - t_7 - t_8 - t_{10} + t_{11} - t_{12} \\ -t_{10} \\ -t_3 \\ t_{12} \\ 0 \\ t_{10} \\ t_3 \end{pmatrix} & A_8 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2t_4 + t_5 - t_6 - t_8 + t_{11} + t_{13} - t_{14} \\ -2t_4 - t_5 + t_6 + t_8 - t_{11} - t_{13} + t_{14} \\ 0 \\ -t_{13} + t_{14} \\ t_{13} - t_{14} \\ 0 \\ t_7 \\ -t_4 \\ t_4 \end{pmatrix} \\
A_9 &= \begin{pmatrix} 0 \\ t_4 + 2t_5 - t_6 + t_7 + t_8 + t_{13} \\ 0 \\ -t_4 - 2t_5 + t_6 - t_7 - t_8 - t_{13} \\ -t_{13} \\ 0 \\ t_{13} \\ -t_5 \\ t_{11} \\ t_5 \end{pmatrix} & A_{10} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -t_4 + t_5 + t_7 + 2t_8 - t_{11} + t_{14} \\ t_4 - t_5 - t_7 - 2t_8 + t_{11} - t_{14} \\ 0 \\ -t_{14} \\ t_{14} \\ -t_8 \\ t_8 \\ t_6 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Manipulando un poco $A\rho$, llegamos a que los lattices $\tilde{\rho} = \rho + \epsilon A\rho$ se pueden escribir de manera general como:

$$\tilde{\rho} = \rho + \epsilon A\rho = \rho + \epsilon \sum_0^{14} t_i w_i$$

Donde

$$w_0 = \begin{pmatrix} p_{01} + p_{02} + p_{03} + p_{04} \\ 0 \\ 0 \\ -p_{01} - p_{02} - p_{03} - p_{04} \\ -p_{02} \\ -p_{03} \\ p_{01} - p_{04} \\ 0 \\ p_{02} \\ p_{03} \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} p_{01} + p_{02} + p_{03} + p_{04} \\ 0 \\ -p_{01} - p_{02} - p_{03} - p_{04} \\ 0 \\ -p_{02} \\ p_{01} - p_{03} \\ -p_{04} \\ p_{02} \\ 0 \\ p_{04} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
w_2 &= \begin{pmatrix} p_{01} - p_{02} - p_{03} - p_{04} + 2p_{12} + 2p_{13} + 2p_{14} \\ -p_{02} - 2p_{12} \\ -p_{03} - 2p_{13} \\ p_{01} - p_{04} - 2p_{14} \\ p_{02} + p_{12} \\ p_{03} + p_{13} \\ p_{04} - p_{01} - p_{12} - p_{13} \\ 0 \\ p_{12} \\ p_{13} \end{pmatrix}, & w_3 &= \begin{pmatrix} p_{01} + p_{12} + p_{13} + p_{14} \\ -p_{12} \\ p_{01} - p_{13} \\ -p_{14} \\ 0 \\ -p_{01} - p_{12} - p_{13} - p_{14} \\ 0 \\ p_{12} \\ 0 \\ p_{14} \end{pmatrix}, \\
w_4 &= \begin{pmatrix} -p_{01} - 2p_{12} - p_{14} \\ 2p_{02} + 2p_{12} + 2p_{23} + p_{24} \\ -p_{03} - 2p_{23} - p_{34} \\ p_{02} + p_{04} + p_{14} - p_{24} + p_{34} \\ 0 \\ -p_{13} \\ p_{12} \\ 0 \\ -p_{02} - p_{12} - p_{23} \\ p_{23} \end{pmatrix}, & w_5 &= \begin{pmatrix} p_{14} - p_{02} - p_{03} - p_{04} - p_{12} - p_{01} \\ p_{02} + p_{12} + p_{23} + 2p_{24} \\ p_{02} - p_{23} + p_{34} \\ -2p_{04} - p_{14} - 2p_{24} - p_{34} \\ p_{02} + p_{12} \\ p_{03} + p_{12} + p_{13} \\ p_{04} \\ -p_{02} - p_{12} - p_{24} \\ 0 \\ p_{24} \end{pmatrix}, \\
w_6 &= \begin{pmatrix} -p_{01} - p_{13} - p_{14} \\ -p_{02} - p_{23} - p_{24} \\ p_{03} + p_{13} + p_{23} \\ p_{04} + p_{14} + p_{24} \\ -p_{12} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ p_{34} \end{pmatrix}, & w_7 &= \begin{pmatrix} p_{14} - p_{02} - p_{03} - p_{04} - p_{01} \\ p_{24} \\ p_{34} \\ -2p_{04} - p_{14} - p_{24} - p_{34} \\ p_{02} + p_{12} \\ p_{03} + p_{13} \\ p_{04} \\ p_{23} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
w_8 &= \begin{pmatrix} p_{14} - p_{02} - p_{03} - p_{04} - p_{13} - p_{01} \\ p_{03} - p_{23} + p_{24} \\ p_{03} + p_{13} + p_{23} + 2p_{34} \\ -2p_{04} - p_{14} - p_{24} - 2p_{34} \\ p_{02} + p_{12} + p_{13} \\ p_{03} + p_{13} \\ p_{04} \\ -p_{03} - p_{13} - p_{34} \\ p_{34} \\ 0 \end{pmatrix}, & w_9 &= \begin{pmatrix} p_{01} + p_{02} + p_{03} + p_{04} \\ -p_{01} - p_{02} - p_{03} - p_{04} \\ 0 \\ 0 \\ p_{01} - p_{02} \\ -p_{03} \\ -p_{04} \\ p_{03} \\ p_{04} \\ 0 \end{pmatrix}, \\
w_{10} &= \begin{pmatrix} p_{01} + p_{12} + p_{13} + p_{14} \\ p_{01} - p_{12} \\ -p_{13} \\ -p_{14} \\ -p_{01} - p_{12} - p_{13} - p_{14} \\ 0 \\ 0 \\ p_{13} \\ p_{14} \\ 0 \end{pmatrix}, & w_{11} &= \begin{pmatrix} -p_{01} - p_{12} - p_{14} \\ p_{02} + p_{12} + p_{23} \\ -p_{03} - p_{23} - p_{34} \\ p_{04} + p_{14} + p_{34} \\ 0 \\ -p_{13} \\ 0 \\ 0 \\ p_{24} \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$w_{12} = \begin{pmatrix} p_{12} - p_{03} - p_{04} - p_{02} + p_{13} + p_{14} \\ -p_{02} - p_{12} \\ -p_{03} - p_{13} \\ -p_{04} - p_{14} \\ p_{02} + p_{12} \\ p_{03} + p_{13} \\ p_{04} + p_{14} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_{13} = \begin{pmatrix} p_{02} - p_{12} \\ p_{02} + p_{12} + p_{23} + p_{24} \\ -p_{23} \\ -p_{24} \\ -p_{02} - p_{12} - p_{23} - p_{24} \\ p_{23} \\ p_{24} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$w_{14} = \begin{pmatrix} p_{03} - p_{13} \\ -p_{23} \\ p_{03} + p_{13} + p_{23} + p_{34} \\ -p_{34} \\ p_{23} \\ -p_{03} - p_{13} - p_{23} - p_{34} \\ p_{34} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A.4. Sistema de ecuaciones, cuantización en Tipo I.

Por comodidad escribiremos $\rho = [\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5, \rho_6, \rho_7, \rho_8, \rho_9, \rho_{10}]$, en lugar de $[p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{04}, p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34}]$.

Las ecuaciones del sistema

$$dNum(\rho) \cdot w_i = 0, \quad \text{para } 0 \leq i \leq 14 \quad (\text{A.4})$$

son:

$$\begin{aligned} & \rho_0^2 \rho_1 \rho_2 \rho_3 - \rho_0 \rho_1 \rho_2 \rho_3^2 - \rho_0 \rho_1 \rho_3^2 \rho_5 - \rho_0 \rho_2 \rho_3^2 \rho_4 + \rho_0^2 \rho_1 \rho_3 \rho_5 + \rho_0^2 \rho_2 \rho_3 \rho_4 - \rho_1 \rho_2 \rho_3^2 \rho_4 + \rho_1^2 \rho_2 \rho_3 \rho_4 - \rho_1 \rho_2 \rho_3^2 \rho_5 + \rho_1 \rho_2^2 \rho_3 \rho_5 - \\ & \rho_0 \rho_1 \rho_3^2 \rho_7 - \rho_0 \rho_1^2 \rho_2 \rho_8 - \rho_0 \rho_3^2 \rho_4 \rho_5 + \rho_0^2 \rho_1 \rho_2 \rho_8 + \rho_0^2 \rho_1 \rho_3 \rho_7 + \rho_0^2 \rho_3 \rho_4 \rho_5 - \rho_0 \rho_2 \rho_3^2 \rho_7 - \rho_1 \rho_3^2 \rho_4 \rho_5 + \rho_0^2 \rho_2 \rho_3 \rho_7 + \rho_1^2 \rho_3 \rho_4 \rho_5 - \\ & \rho_0 \rho_2 \rho_3^2 \rho_8 - \rho_2 \rho_3^2 \rho_4 \rho_5 + \rho_0^2 \rho_2 \rho_3 \rho_8 + \rho_2^2 \rho_3 \rho_4 \rho_5 - \rho_0 \rho_1 \rho_2^2 \rho_9 - \rho_0 \rho_1^2 \rho_5 \rho_8 - \rho_0 \rho_3^2 \rho_4 \rho_7 + \rho_0^2 \rho_1 \rho_2 \rho_9 + \rho_0^2 \rho_1 \rho_5 \rho_8 + \rho_0^2 \rho_3 \rho_4 \rho_7 - \\ & \rho_0 \rho_1 \rho_3^2 \rho_9 - \rho_0 \rho_3^2 \rho_5 \rho_7 - \rho_1 \rho_3^2 \rho_4 \rho_7 + \rho_0^2 \rho_1 \rho_3 \rho_9 + \rho_0^2 \rho_3 \rho_5 \rho_7 + \rho_1^2 \rho_3 \rho_4 \rho_7 - \rho_0 \rho_3^2 \rho_5 \rho_8 + \rho_1 \rho_2^2 \rho_5 \rho_8 - \rho_1 \rho_3^2 \rho_5 \rho_7 - \rho_2 \rho_3^2 \rho_4 \rho_7 + \\ & \rho_0^2 \rho_3 \rho_5 \rho_8 - \rho_1^2 \rho_2 \rho_5 \rho_8 + \rho_1^2 \rho_3 \rho_5 \rho_7 + \rho_2^2 \rho_3 \rho_4 \rho_7 - \rho_2 \rho_3^2 \rho_5 \rho_7 + \rho_2^2 \rho_3 \rho_5 \rho_7 - \rho_2 \rho_3^2 \rho_5 \rho_8 + \rho_2^2 \rho_3 \rho_5 \rho_8 - \rho_0 \rho_2^2 \rho_7 \rho_8 - \rho_0 \rho_2^2 \rho_4 \rho_9 + \\ & \rho_0^2 \rho_1 \rho_7 \rho_8 + \rho_0^2 \rho_2 \rho_4 \rho_9 - \rho_0 \rho_3^2 \rho_7 \rho_8 - \rho_0 \rho_3^2 \rho_4 \rho_9 - \rho_1 \rho_2^2 \rho_4 \rho_9 + \rho_0^2 \rho_2 \rho_7 \rho_8 + \rho_0^2 \rho_3 \rho_4 \rho_9 + \rho_1^2 \rho_2 \rho_4 \rho_9 - \rho_0 \rho_3^2 \rho_7 \rho_8 - \rho_1 \rho_3^2 \rho_4 \rho_9 + \\ & \rho_0^2 \rho_3 \rho_7 \rho_8 + \rho_1^2 \rho_3 \rho_4 \rho_9 - \rho_0 \rho_1^2 \rho_7 \rho_9 + \rho_0^2 \rho_1 \rho_7 \rho_9 - \rho_0 \rho_1^2 \rho_8 \rho_9 - \rho_0 \rho_2^2 \rho_7 \rho_9 + \rho_0^2 \rho_1 \rho_8 \rho_9 + \rho_0^2 \rho_2 \rho_7 \rho_9 - \rho_0 \rho_3^2 \rho_7 \rho_9 + \\ & \rho_0^2 \rho_2 \rho_8 \rho_9 + \rho_0^2 \rho_3 \rho_7 \rho_9 - \rho_0 \rho_3^2 \rho_8 \rho_9 + \rho_0^2 \rho_3 \rho_8 \rho_9 + 2\rho_0 \rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4 + 2\rho_0 \rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_5 + 2\rho_0 \rho_1 \rho_3 \rho_4 \rho_5 + 2\rho_0 \rho_2 \rho_3 \rho_4 \rho_5 - \\ & 2\rho_0 \rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_8 + 2\rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4 \rho_5 + 2\rho_0 \rho_1 \rho_3 \rho_4 \rho_7 + 2\rho_0 \rho_1 \rho_2 \rho_5 \rho_8 + 2\rho_0 \rho_1 \rho_3 \rho_5 \rho_7 + 2\rho_0 \rho_2 \rho_3 \rho_4 \rho_7 - 2\rho_0 \rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_9 - \\ & 2\rho_0 \rho_1 \rho_3 \rho_5 \rho_8 + 2\rho_0 \rho_2 \rho_3 \rho_5 \rho_7 + 2\rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4 \rho_7 + 2\rho_0 \rho_2 \rho_3 \rho_5 \rho_8 + 2\rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_5 \rho_7 - 2\rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_5 \rho_8 + 2\rho_0 \rho_1 \rho_2 \rho_4 \rho_9 - \\ & 2\rho_0 \rho_1 \rho_2 \rho_7 \rho_8 + 2\rho_0 \rho_1 \rho_3 \rho_4 \rho_9 - 2\rho_0 \rho_1 \rho_3 \rho_7 \rho_8 - 2\rho_0 \rho_2 \rho_3 \rho_4 \rho_9 - 2\rho_0 \rho_2 \rho_3 \rho_7 \rho_8 - 2\rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4 \rho_9 - 2\rho_0 \rho_1 \rho_2 \rho_7 \rho_9 - \\ & 2\rho_0 \rho_1 \rho_2 \rho_8 \rho_9 - 2\rho_0 \rho_1 \rho_3 \rho_7 \rho_9 - 2\rho_0 \rho_1 \rho_3 \rho_8 \rho_9 - 2\rho_0 \rho_2 \rho_3 \rho_7 \rho_9 - 2\rho_0 \rho_2 \rho_3 \rho_8 \rho_9 = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \rho_0^2 \rho_1 \rho_2 \rho_3 - \rho_0 \rho_1 \rho_2^2 \rho_3 - \rho_0 \rho_1 \rho_2^2 \rho_6 - \rho_0 \rho_2^2 \rho_3 \rho_4 + \rho_0^2 \rho_1 \rho_2 \rho_6 + \rho_0^2 \rho_2 \rho_3 \rho_4 - \rho_1 \rho_2^2 \rho_3 \rho_4 + \rho_1^2 \rho_2 \rho_3 \rho_4 + \rho_1 \rho_2 \rho_3^2 \rho_6 - \rho_1 \rho_2^2 \rho_3 \rho_6 - \\ & \rho_0 \rho_1 \rho_2^2 \rho_8 - \rho_0 \rho_1^2 \rho_3 \rho_7 - \rho_0 \rho_2^2 \rho_4 \rho_6 + \rho_0^2 \rho_1 \rho_2 \rho_8 + \rho_0^2 \rho_1 \rho_3 \rho_7 + \rho_0^2 \rho_2 \rho_4 \rho_6 - \rho_0 \rho_2^2 \rho_3 \rho_7 - \rho_1 \rho_2^2 \rho_4 \rho_6 + \rho_0^2 \rho_2 \rho_3 \rho_7 + \rho_1^2 \rho_2 \rho_4 \rho_6 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2\rho_1\rho_4\rho_5\rho_6\rho_7 - 2\rho_1\rho_2\rho_5\rho_7\rho_8 - 2\rho_1\rho_3\rho_4\rho_7\rho_8 + 2\rho_1\rho_4\rho_5\rho_6\rho_8 + 2\rho_2\rho_4\rho_5\rho_6\rho_7 + 2\rho_1\rho_2\rho_5\rho_6\rho_9 - 2\rho_1\rho_2\rho_6\rho_7\rho_8 - \\
& 2\rho_1\rho_3\rho_5\rho_7\rho_8 - 2\rho_2\rho_3\rho_4\rho_5\rho_9 - 2\rho_2\rho_3\rho_4\rho_7\rho_8 + 2\rho_1\rho_3\rho_5\rho_6\rho_9 - 2\rho_1\rho_3\rho_6\rho_7\rho_8 - 2\rho_2\rho_3\rho_4\rho_6\rho_9 - 2\rho_2\rho_3\rho_5\rho_7\rho_8 + \\
& 2\rho_3\rho_4\rho_5\rho_6\rho_8 - 2\rho_2\rho_3\rho_6\rho_7\rho_8 - 2\rho_1\rho_2\rho_4\rho_7\rho_9 + 2\rho_1\rho_4\rho_5\rho_7\rho_8 - 2\rho_1\rho_2\rho_4\rho_8\rho_9 - 2\rho_1\rho_2\rho_5\rho_7\rho_9 - 2\rho_1\rho_3\rho_4\rho_7\rho_9 + \\
& 2\rho_1\rho_4\rho_6\rho_7\rho_8 + 2\rho_2\rho_4\rho_5\rho_7\rho_8 - 2\rho_1\rho_2\rho_5\rho_8\rho_9 - 2\rho_1\rho_2\rho_6\rho_7\rho_9 - 2\rho_1\rho_3\rho_4\rho_8\rho_9 - 2\rho_1\rho_3\rho_5\rho_7\rho_9 + 2\rho_1\rho_5\rho_6\rho_7\rho_8 - \\
& 2\rho_2\rho_3\rho_4\rho_7\rho_9 + 2\rho_2\rho_4\rho_5\rho_6\rho_9 + 2\rho_2\rho_4\rho_6\rho_7\rho_8 + 2\rho_3\rho_4\rho_5\rho_7\rho_8 - 2\rho_1\rho_2\rho_6\rho_8\rho_9 - 2\rho_1\rho_3\rho_5\rho_8\rho_9 - 2\rho_1\rho_3\rho_6\rho_7\rho_9 - \\
& 2\rho_2\rho_3\rho_4\rho_8\rho_9 - 2\rho_2\rho_3\rho_5\rho_7\rho_9 + 2\rho_2\rho_5\rho_6\rho_7\rho_8 + 2\rho_3\rho_4\rho_5\rho_6\rho_9 + 2\rho_3\rho_4\rho_6\rho_7\rho_8 - 2\rho_1\rho_3\rho_6\rho_8\rho_9 - 2\rho_2\rho_3\rho_5\rho_8\rho_9 - \\
& 2\rho_2\rho_3\rho_6\rho_7\rho_9 + 2\rho_3\rho_5\rho_6\rho_7\rho_8 - 2\rho_2\rho_3\rho_6\rho_8\rho_9 + 2\rho_1\rho_4\rho_5\rho_7\rho_9 + 2\rho_1\rho_4\rho_5\rho_8\rho_9 + 2\rho_1\rho_4\rho_6\rho_7\rho_9 + 2\rho_2\rho_4\rho_5\rho_7\rho_9 + \\
& 2\rho_1\rho_4\rho_6\rho_8\rho_9 + 2\rho_1\rho_5\rho_6\rho_7\rho_9 + 2\rho_2\rho_4\rho_5\rho_8\rho_9 + 2\rho_2\rho_4\rho_6\rho_7\rho_9 + 2\rho_3\rho_4\rho_5\rho_7\rho_9 + 2\rho_1\rho_5\rho_6\rho_8\rho_9 + 2\rho_2\rho_4\rho_6\rho_8\rho_9 + \\
& 2\rho_2\rho_5\rho_6\rho_7\rho_9 + 2\rho_3\rho_4\rho_5\rho_8\rho_9 + 2\rho_3\rho_4\rho_6\rho_7\rho_9 + 2\rho_2\rho_5\rho_6\rho_8\rho_9 + 2\rho_3\rho_4\rho_6\rho_8\rho_9 + 2\rho_3\rho_5\rho_6\rho_7\rho_9 + 2\rho_3\rho_5\rho_6\rho_8\rho_9 = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \rho_1^2\rho_2\rho_3\rho_4 - \rho_1\rho_2\rho_3\rho_4^2 - \rho_1\rho_2\rho_4^2\rho_6 - \rho_1\rho_3\rho_4^2\rho_5 + \rho_1^2\rho_2\rho_4\rho_6 + \rho_1^2\rho_3\rho_4\rho_5 - \rho_1\rho_2\rho_4^2\rho_8 - \rho_1\rho_3\rho_4^2\rho_7 - \rho_1\rho_4^2\rho_5\rho_6 + \rho_1^2\rho_2\rho_4\rho_8 + \\
& \rho_1^2\rho_3\rho_4\rho_7 + \rho_1^2\rho_4\rho_5\rho_6 - \rho_1\rho_3\rho_5\rho_7^2 + \rho_2\rho_3\rho_4\rho_7^2 - \rho_2\rho_3\rho_4^2\rho_7 + \rho_1^2\rho_3\rho_5\rho_7 - \rho_1\rho_2\rho_6\rho_8^2 + \rho_2\rho_3\rho_4\rho_8^2 - \rho_2\rho_3\rho_4^2\rho_8 + \rho_1^2\rho_2\rho_6\rho_8 - \\
& \rho_1\rho_2\rho_4^2\rho_9 - \rho_1\rho_4^2\rho_5\rho_8 - \rho_1\rho_4^2\rho_6\rho_7 + \rho_1^2\rho_2\rho_4\rho_9 + \rho_1^2\rho_4\rho_5\rho_8 + \rho_1^2\rho_4\rho_6\rho_7 - \rho_1\rho_3\rho_4^2\rho_9 - \rho_1\rho_5\rho_6\rho_7^2 + \rho_2\rho_4\rho_6\rho_7^2 - \rho_2\rho_4^2\rho_6\rho_7 + \\
& \rho_1^2\rho_3\rho_4\rho_9 + \rho_1^2\rho_5\rho_6\rho_7 - \rho_1\rho_5\rho_6\rho_8^2 + \rho_3\rho_4\rho_5\rho_8^2 - \rho_3\rho_4^2\rho_5\rho_8 + \rho_1^2\rho_5\rho_6\rho_8 - \rho_1\rho_4^2\rho_5\rho_9 - \rho_1\rho_4^2\rho_7\rho_8 + \rho_1^2\rho_4\rho_5\rho_9 + \rho_1^2\rho_4\rho_7\rho_8 - \\
& \rho_1\rho_5\rho_7^2\rho_8 - \rho_1\rho_4^2\rho_6\rho_9 + \rho_2\rho_4\rho_7^2\rho_8 - \rho_2\rho_4^2\rho_7\rho_8 + \rho_1^2\rho_4\rho_6\rho_9 + \rho_1^2\rho_5\rho_7\rho_8 - \rho_1\rho_6\rho_7\rho_8^2 + \rho_3\rho_4\rho_7\rho_8^2 - \rho_3\rho_4^2\rho_7\rho_8 + \rho_1^2\rho_6\rho_7\rho_8 - \\
& \rho_2\rho_6\rho_7\rho_8^2 + \rho_2\rho_6\rho_7^2\rho_8 + \rho_3\rho_5\rho_7\rho_8^2 - \rho_3\rho_5\rho_7^2\rho_8 - \rho_1\rho_4^2\rho_7\rho_9 + \rho_1^2\rho_4\rho_7\rho_9 - \rho_1\rho_5\rho_7^2\rho_9 - \rho_1\rho_4^2\rho_8\rho_9 + \rho_2\rho_4\rho_7^2\rho_9 - \rho_2\rho_4^2\rho_7\rho_9 + \\
& \rho_1^2\rho_4\rho_8\rho_9 + \rho_1^2\rho_5\rho_7\rho_9 - \rho_1\rho_5\rho_8^2\rho_9 - \rho_1\rho_6\rho_7^2\rho_9 + \rho_2\rho_4\rho_8^2\rho_9 - \rho_2\rho_4^2\rho_8\rho_9 + \rho_3\rho_4\rho_7^2\rho_9 - \rho_3\rho_4^2\rho_7\rho_9 + \rho_1^2\rho_5\rho_8\rho_9 + \rho_1^2\rho_6\rho_7\rho_9 - \\
& \rho_1\rho_6\rho_8^2\rho_9 + \rho_3\rho_4\rho_8^2\rho_9 - \rho_3\rho_4^2\rho_8\rho_9 + \rho_1^2\rho_6\rho_8\rho_9 + 2\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4\rho_7 + 2\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4\rho_8 + 2\rho_1\rho_2\rho_4\rho_6\rho_7 - 2\rho_1\rho_3\rho_4\rho_5\rho_7 - \\
& 2\rho_1\rho_2\rho_4\rho_6\rho_8 + 2\rho_1\rho_3\rho_4\rho_5\rho_8 + 2\rho_1\rho_2\rho_4\rho_7\rho_8 - 2\rho_1\rho_4\rho_5\rho_6\rho_7 + 2\rho_1\rho_3\rho_4\rho_7\rho_8 - 2\rho_1\rho_4\rho_5\rho_6\rho_8 + 2\rho_1\rho_2\rho_6\rho_7\rho_8 + \\
& 2\rho_1\rho_3\rho_5\rho_7\rho_8 + 2\rho_2\rho_3\rho_4\rho_7\rho_8 + 2\rho_1\rho_2\rho_4\rho_7\rho_9 - 2\rho_1\rho_4\rho_5\rho_7\rho_8 + 2\rho_1\rho_2\rho_4\rho_8\rho_9 + 2\rho_1\rho_3\rho_4\rho_7\rho_9 - 2\rho_1\rho_4\rho_6\rho_7\rho_8 + \\
& 2\rho_1\rho_3\rho_4\rho_8\rho_9 - 2\rho_1\rho_5\rho_6\rho_7\rho_8 - 2\rho_2\rho_4\rho_6\rho_7\rho_8 - 2\rho_3\rho_4\rho_5\rho_7\rho_8 - 2\rho_1\rho_4\rho_5\rho_7\rho_9 - 2\rho_1\rho_4\rho_5\rho_8\rho_9 - 2\rho_1\rho_4\rho_6\rho_7\rho_9 - \\
& 2\rho_1\rho_4\rho_6\rho_8\rho_9 - 2\rho_1\rho_5\rho_7\rho_8\rho_9 + 2\rho_2\rho_4\rho_7\rho_8\rho_9 - 2\rho_1\rho_6\rho_7\rho_8\rho_9 + 2\rho_3\rho_4\rho_7\rho_8\rho_9 = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \rho_1\rho_2^2\rho_3\rho_5 - \rho_1\rho_2\rho_3\rho_5^2 - \rho_1\rho_2\rho_5^2\rho_6 + \rho_1\rho_2^2\rho_5\rho_6 - \rho_2\rho_3\rho_4\rho_5^2 + \rho_2^2\rho_3\rho_4\rho_5 - \rho_1\rho_2\rho_5^2\rho_8 + \rho_1\rho_3\rho_5\rho_7^2 - \rho_1\rho_3\rho_5^2\rho_7 + \rho_1\rho_2^2\rho_5\rho_8 - \\
& \rho_2\rho_3\rho_4\rho_7^2 - \rho_2\rho_4\rho_5^2\rho_6 + \rho_2^2\rho_3\rho_4\rho_7 + \rho_2^2\rho_4\rho_5\rho_6 - \rho_2\rho_3\rho_5^2\rho_7 + \rho_2^2\rho_3\rho_5\rho_7 - \rho_2\rho_3\rho_5^2\rho_8 + \rho_2^2\rho_3\rho_5\rho_8 - \rho_1\rho_2\rho_5^2\rho_9 + \rho_1\rho_5\rho_6\rho_7^2 + \\
& \rho_1\rho_2^2\rho_5\rho_9 - \rho_1\rho_5^2\rho_6\rho_7 - \rho_2\rho_4\rho_6\rho_7^2 - \rho_2\rho_4^2\rho_5\rho_8 + \rho_2^2\rho_4\rho_5\rho_8 + \rho_2^2\rho_4\rho_6\rho_7 - \rho_1\rho_2\rho_6\rho_9^2 + \rho_1\rho_3\rho_5\rho_9^2 - \rho_1\rho_3\rho_5^2\rho_9 + \rho_1\rho_2^2\rho_6\rho_9 - \\
& \rho_2\rho_5^2\rho_6\rho_7 + \rho_2^2\rho_5\rho_6\rho_7 - \rho_2\rho_5^2\rho_6\rho_8 + \rho_2^2\rho_5\rho_6\rho_8 + \rho_1\rho_5\rho_7^2\rho_8 - \rho_1\rho_5^2\rho_7\rho_8 - \rho_2\rho_4\rho_6^2\rho_9 - \rho_2\rho_4\rho_7^2\rho_8 + \rho_2^2\rho_4\rho_5\rho_9 + \rho_2^2\rho_4\rho_7\rho_8 - \\
& \rho_2\rho_4\rho_6^2\rho_9 - \rho_2\rho_5^2\rho_7\rho_8 + \rho_3\rho_4\rho_5\rho_9^2 - \rho_3\rho_4^2\rho_5\rho_9 + \rho_2^2\rho_4\rho_6\rho_9 + \rho_2^2\rho_5\rho_7\rho_8 - \rho_2\rho_6\rho_7^2\rho_8 + \rho_3\rho_5\rho_7^2\rho_8 - \rho_3\rho_5^2\rho_7\rho_8 + \rho_2^2\rho_6\rho_7\rho_8 + \\
& \rho_1\rho_5\rho_7^2\rho_9 - \rho_1\rho_5^2\rho_7\rho_9 - \rho_2\rho_4\rho_7^2\rho_9 + \rho_2^2\rho_4\rho_7\rho_9 + \rho_1\rho_5\rho_8\rho_9^2 - \rho_1\rho_6\rho_7\rho_9^2 + \rho_1\rho_6\rho_7^2\rho_9 - \rho_1\rho_5^2\rho_8\rho_9 - \rho_2\rho_4\rho_8\rho_9^2 - \rho_2\rho_5^2\rho_7\rho_9 + \\
& \rho_3\rho_4\rho_7\rho_9^2 - \rho_3\rho_4^2\rho_7\rho_9 + \rho_2^2\rho_4\rho_8\rho_9 + \rho_2^2\rho_5\rho_7\rho_9 - \rho_2\rho_6\rho_7\rho_9^2 - \rho_2\rho_5^2\rho_8\rho_9 + \rho_3\rho_5\rho_7\rho_9^2 - \rho_3\rho_5^2\rho_7\rho_9 + \rho_2^2\rho_5\rho_8\rho_9 + \rho_2^2\rho_6\rho_7\rho_9 - \\
& \rho_2\rho_6\rho_8\rho_9^2 + \rho_3\rho_5\rho_8\rho_9^2 - \rho_3\rho_5^2\rho_8\rho_9 + \rho_2^2\rho_6\rho_8\rho_9 + 2\rho_1\rho_2\rho_3\rho_5\rho_7 + 2\rho_1\rho_2\rho_5\rho_6\rho_7 - 2\rho_2\rho_3\rho_4\rho_5\rho_7 + 2\rho_1\rho_2\rho_3\rho_5\rho_9 + \\
& 2\rho_1\rho_2\rho_5\rho_7\rho_8 - 2\rho_2\rho_4\rho_5\rho_6\rho_7 - 2\rho_1\rho_2\rho_5\rho_6\rho_9 + 2\rho_2\rho_3\rho_4\rho_5\rho_9 + 2\rho_2\rho_3\rho_5\rho_7\rho_8 + 2\rho_1\rho_2\rho_5\rho_7\rho_9 - 2\rho_2\rho_4\rho_5\rho_7\rho_8 + \\
& 2\rho_1\rho_2\rho_5\rho_8\rho_9 + 2\rho_1\rho_2\rho_6\rho_7\rho_9 + 2\rho_1\rho_3\rho_5\rho_7\rho_9 + 2\rho_2\rho_3\rho_4\rho_7\rho_9 - 2\rho_2\rho_4\rho_5\rho_6\rho_9 + 2\rho_2\rho_3\rho_5\rho_7\rho_9 - 2\rho_2\rho_5\rho_6\rho_7\rho_8 + \\
& 2\rho_2\rho_3\rho_5\rho_8\rho_9 - 2\rho_2\rho_4\rho_5\rho_7\rho_9 - 2\rho_1\rho_5\rho_6\rho_7\rho_9 - 2\rho_2\rho_4\rho_5\rho_8\rho_9 - 2\rho_2\rho_4\rho_6\rho_7\rho_9 - 2\rho_3\rho_4\rho_5\rho_7\rho_9 - 2\rho_2\rho_5\rho_6\rho_7\rho_9 - \\
& 2\rho_2\rho_5\rho_6\rho_8\rho_9 + 2\rho_1\rho_5\rho_7\rho_8\rho_9 - 2\rho_2\rho_4\rho_7\rho_8\rho_9 - 2\rho_2\rho_6\rho_7\rho_8\rho_9 + 2\rho_3\rho_5\rho_7\rho_8\rho_9 = 0;
\end{aligned}$$

Opcionalmente se puede incluir la ecuación:

$$\begin{aligned}
& \rho_0\rho_1\rho_2\rho_3 + \rho_0\rho_1\rho_2\rho_6 + \rho_0\rho_1\rho_3\rho_5 + \rho_0\rho_2\rho_3\rho_4 + \rho_1\rho_2\rho_3\rho_4 + \rho_1\rho_2\rho_3\rho_5 + \rho_1\rho_2\rho_3\rho_6 + \rho_0\rho_1\rho_2\rho_8 + \rho_0\rho_1\rho_3\rho_7 + \\
& \rho_0\rho_1\rho_5\rho_6 + \rho_0\rho_2\rho_4\rho_6 + \rho_0\rho_3\rho_4\rho_5 + \rho_0\rho_2\rho_3\rho_7 + \rho_1\rho_2\rho_4\rho_6 + \rho_1\rho_3\rho_4\rho_5 + \rho_0\rho_2\rho_3\rho_8 + \rho_1\rho_2\rho_5\rho_6 + \rho_2\rho_3\rho_4\rho_5 + \\
& \rho_1\rho_3\rho_5\rho_6 + \rho_2\rho_3\rho_4\rho_6 + \rho_0\rho_1\rho_2\rho_9 + \rho_0\rho_1\rho_5\rho_8 + \rho_0\rho_1\rho_6\rho_7 + \rho_0\rho_2\rho_4\rho_8 + \rho_0\rho_3\rho_4\rho_7 + \rho_0\rho_4\rho_5\rho_6 + \rho_0\rho_1\rho_3\rho_9 + \\
& \rho_0\rho_2\rho_6\rho_7 + \rho_0\rho_3\rho_5\rho_7 + \rho_1\rho_2\rho_4\rho_8 + \rho_1\rho_3\rho_4\rho_7 + \rho_1\rho_4\rho_5\rho_6 + \rho_0\rho_2\rho_6\rho_8 + \rho_0\rho_3\rho_5\rho_8 + \rho_1\rho_2\rho_5\rho_8 + \rho_1\rho_3\rho_5\rho_7 + \\
& \rho_2\rho_3\rho_4\rho_7 + \rho_2\rho_4\rho_5\rho_6 + \rho_1\rho_2\rho_6\rho_8 + \rho_1\rho_3\rho_6\rho_7 + \rho_2\rho_3\rho_4\rho_8 + \rho_2\rho_3\rho_5\rho_7 + \rho_3\rho_4\rho_5\rho_6 + \rho_2\rho_3\rho_5\rho_8 + \rho_2\rho_3\rho_6\rho_7 + \rho_2\rho_3\rho_6\rho_8 + \\
& \rho_0\rho_1\rho_5\rho_9 + \rho_0\rho_1\rho_7\rho_8 + \rho_0\rho_2\rho_4\rho_9 + \rho_0\rho_4\rho_5\rho_8 + \rho_0\rho_4\rho_6\rho_7 + \rho_0\rho_1\rho_6\rho_9 + \rho_0\rho_2\rho_7\rho_8 + \rho_0\rho_3\rho_4\rho_9 + \rho_0\rho_5\rho_6\rho_7 + \rho_1\rho_2\rho_4\rho_9 + \\
& \rho_1\rho_4\rho_5\rho_8 + \rho_1\rho_4\rho_6\rho_7 + \rho_0\rho_3\rho_7\rho_8 + \rho_0\rho_5\rho_6\rho_8 + \rho_1\rho_2\rho_5\rho_9 + \rho_1\rho_3\rho_4\rho_9 + \rho_1\rho_5\rho_6\rho_7 + \rho_2\rho_4\rho_5\rho_8 + \rho_2\rho_4\rho_6\rho_7 + \rho_1\rho_2\rho_6\rho_9 + \\
& \rho_1\rho_3\rho_5\rho_9 + \rho_1\rho_5\rho_6\rho_8 + \rho_2\rho_5\rho_6\rho_7 + \rho_3\rho_4\rho_5\rho_8 + \rho_3\rho_4\rho_6\rho_7 + \rho_1\rho_3\rho_6\rho_9 + \rho_2\rho_5\rho_6\rho_8 + \rho_3\rho_5\rho_6\rho_7 + \rho_3\rho_5\rho_6\rho_8 + \rho_0\rho_1\rho_7\rho_9 + \\
& \rho_0\rho_4\rho_5\rho_9 + \rho_0\rho_4\rho_7\rho_8 + \rho_0\rho_1\rho_8\rho_9 + \rho_0\rho_2\rho_7\rho_9 + \rho_0\rho_4\rho_6\rho_9 + \rho_0\rho_5\rho_7\rho_8 + \rho_1\rho_4\rho_5\rho_9 + \rho_1\rho_4\rho_7\rho_8 + \rho_0\rho_2\rho_8\rho_9 + \rho_0\rho_3\rho_7\rho_9 + \\
& \rho_0\rho_6\rho_7\rho_8 + \rho_1\rho_4\rho_6\rho_9 + \rho_1\rho_5\rho_7\rho_8 + \rho_2\rho_4\rho_5\rho_9 + \rho_2\rho_4\rho_7\rho_8 + \rho_0\rho_3\rho_8\rho_9 + \rho_1\rho_6\rho_7\rho_8 + \rho_2\rho_4\rho_6\rho_9 + \rho_2\rho_5\rho_7\rho_8 + \rho_3\rho_4\rho_5\rho_9 + \\
& \rho_3\rho_4\rho_7\rho_8 + \rho_2\rho_6\rho_7\rho_8 + \rho_3\rho_4\rho_6\rho_9 + \rho_3\rho_5\rho_7\rho_8 + \rho_3\rho_6\rho_7\rho_8 + \rho_0\rho_4\rho_7\rho_9 + \rho_0\rho_4\rho_8\rho_9 + \rho_0\rho_5\rho_7\rho_9 + \rho_1\rho_4\rho_7\rho_9 + \rho_0\rho_5\rho_8\rho_9 + \\
& \rho_0\rho_6\rho_7\rho_9 + \rho_1\rho_4\rho_8\rho_9 + \rho_1\rho_5\rho_7\rho_9 + \rho_2\rho_4\rho_7\rho_9 + \rho_0\rho_6\rho_8\rho_9 + \rho_1\rho_5\rho_8\rho_9 + \rho_1\rho_6\rho_7\rho_9 + \rho_2\rho_4\rho_8\rho_9 + \rho_2\rho_5\rho_7\rho_9 + \rho_3\rho_4\rho_7\rho_9 + \\
& \rho_1\rho_6\rho_8\rho_9 + \rho_2\rho_5\rho_8\rho_9 + \rho_2\rho_6\rho_7\rho_9 + \rho_3\rho_4\rho_8\rho_9 + \rho_3\rho_5\rho_7\rho_9 + \rho_2\rho_6\rho_8\rho_9 + \rho_3\rho_5\rho_8\rho_9 + \rho_3\rho_6\rho_7\rho_9 + \rho_3\rho_6\rho_8\rho_9 = 125;
\end{aligned}$$

Si escribimos

$$[0, 0, 1, 2, 3] - [0, 1, 2, 3, 3] - [0, 1, 3, 3, 5] \dots \text{ en lugar de } \rho_0^2 \rho_1 \rho_2 \rho_3 - \rho_0 \rho_1 \rho_2 \rho_3^2 - \rho_0 \rho_1 \rho_3^2 \rho_5 \dots$$

Las ecuaciones del sistema anterior toman la forma:

$$\begin{aligned} & [0, 0, 1, 2, 3] - [0, 1, 2, 3, 3] - [0, 1, 3, 3, 5] - [0, 2, 3, 3, 4] + [0, 0, 1, 3, 5] + [0, 0, 2, 3, 4] - [1, 2, 3, 3, 4] + [1, 1, 2, 3, 4] - \\ & [1, 2, 3, 3, 5] + [1, 2, 2, 3, 5] - [0, 1, 3, 3, 7] - [0, 1, 1, 2, 8] - [0, 3, 3, 4, 5] + [0, 0, 1, 2, 8] + [0, 0, 1, 3, 7] + [0, 0, 3, 4, 5] - \\ & [0, 2, 3, 3, 7] - [1, 3, 3, 4, 5] + [0, 0, 2, 3, 7] + [1, 1, 3, 4, 5] - [0, 2, 3, 3, 8] - [2, 3, 3, 4, 5] + [0, 0, 2, 3, 8] + [2, 2, 3, 4, 5] - \\ & [0, 1, 2, 2, 9] - [0, 1, 1, 5, 8] - [0, 3, 3, 4, 7] + [0, 0, 1, 2, 9] + [0, 0, 1, 5, 8] + [0, 0, 3, 4, 7] - [0, 1, 3, 3, 9] - [0, 3, 3, 5, 7] - \\ & [1, 3, 3, 4, 7] + [0, 0, 1, 3, 9] + [0, 0, 3, 5, 7] + [1, 1, 3, 4, 7] - [0, 3, 3, 5, 8] + [1, 2, 2, 5, 8] - [1, 3, 3, 5, 7] - [2, 3, 3, 4, 7] + \\ & [0, 0, 3, 5, 8] - [1, 1, 2, 5, 8] + [1, 1, 3, 5, 7] + [2, 2, 3, 4, 7] - [2, 3, 3, 5, 7] + [2, 2, 3, 5, 7] - [2, 3, 3, 5, 8] + [2, 2, 3, 5, 8] - \\ & [0, 1, 1, 7, 8] - [0, 2, 2, 4, 9] + [0, 0, 1, 7, 8] + [0, 0, 2, 4, 9] - [0, 2, 2, 7, 8] - [0, 3, 3, 4, 9] - [1, 2, 2, 4, 9] + [0, 0, 2, 7, 8] + \\ & [0, 0, 3, 4, 9] + [1, 1, 2, 4, 9] - [0, 3, 3, 7, 8] - [1, 3, 3, 4, 9] + [0, 0, 3, 7, 8] + [1, 1, 3, 4, 9] - [0, 1, 1, 7, 9] + [0, 0, 1, 7, 9] - \\ & [0, 1, 1, 8, 9] - [0, 2, 2, 7, 9] + [0, 0, 1, 8, 9] + [0, 0, 2, 7, 9] - [0, 2, 2, 8, 9] - [0, 3, 3, 7, 9] + [0, 0, 2, 8, 9] + [0, 0, 3, 7, 9] - \\ & [0, 3, 3, 8, 9] + [0, 0, 3, 8, 9] + 2[0, 1, 2, 3, 4] + 2[0, 1, 2, 3, 5] + 2[0, 1, 3, 4, 5] + 2[0, 2, 3, 4, 5] - 2[0, 1, 2, 3, 8] + 2[1, 2, 3, 4, 5] + \\ & 2[0, 1, 3, 4, 7] + 2[0, 1, 2, 5, 8] + 2[0, 1, 3, 5, 7] + 2[0, 2, 3, 4, 7] - 2[0, 1, 2, 3, 9] - 2[0, 1, 3, 5, 8] + 2[0, 2, 3, 5, 7] + \\ & 2[1, 2, 3, 4, 7] + 2[0, 2, 3, 5, 8] + 2[1, 2, 3, 5, 7] - 2[1, 2, 3, 5, 8] + 2[0, 1, 2, 4, 9] - 2[0, 1, 2, 7, 8] + 2[0, 1, 3, 4, 9] - \\ & 2[0, 1, 3, 7, 8] - 2[0, 2, 3, 4, 9] - 2[0, 2, 3, 7, 8] - 2[1, 2, 3, 4, 9] - 2[0, 1, 2, 7, 9] - 2[0, 1, 2, 8, 9] - 2[0, 1, 3, 7, 9] - \\ & 2[0, 1, 3, 8, 9] - 2[0, 2, 3, 7, 9] - 2[0, 2, 3, 8, 9] = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [0, 0, 1, 2, 3] - [0, 1, 2, 2, 3] - [0, 1, 2, 2, 6] - [0, 2, 2, 3, 4] + [0, 0, 1, 2, 6] + [0, 0, 2, 3, 4] - [1, 2, 2, 3, 4] + [1, 1, 2, 3, 4] + \\ & [1, 2, 3, 3, 6] - [1, 2, 2, 3, 6] - [0, 1, 2, 2, 8] - [0, 1, 1, 3, 7] - [0, 2, 2, 4, 6] + [0, 0, 1, 2, 8] + [0, 0, 1, 3, 7] + [0, 0, 2, 4, 6] - \\ & [0, 2, 2, 3, 7] - [1, 2, 2, 4, 6] + [0, 0, 2, 3, 7] + [1, 1, 2, 4, 6] - [0, 2, 2, 3, 8] + [0, 0, 2, 3, 8] + [2, 3, 3, 4, 6] - [2, 2, 3, 4, 6] - \\ & [0, 1, 2, 2, 9] - [0, 1, 1, 6, 7] - [0, 2, 2, 4, 8] + [0, 0, 1, 2, 9] + [0, 0, 1, 6, 7] + [0, 0, 2, 4, 8] - [0, 1, 3, 3, 9] - [0, 2, 2, 6, 7] - \\ & [1, 2, 2, 4, 8] + [0, 0, 1, 3, 9] + [0, 0, 2, 6, 7] + [1, 1, 2, 4, 8] - [0, 2, 2, 6, 8] + [0, 0, 2, 6, 8] - [1, 2, 2, 6, 8] + [1, 3, 3, 6, 7] + \\ & [2, 3, 3, 4, 8] + [1, 1, 2, 6, 8] - [1, 1, 3, 6, 7] - [2, 2, 3, 4, 8] + [2, 3, 3, 6, 7] - [2, 2, 3, 6, 7] + [2, 3, 3, 6, 8] - [2, 2, 3, 6, 8] - \\ & [0, 1, 1, 7, 8] - [0, 2, 2, 4, 9] + [0, 0, 1, 7, 8] + [0, 0, 2, 4, 9] - [0, 2, 2, 7, 8] - [0, 3, 3, 4, 9] - [1, 2, 2, 4, 9] + [0, 0, 2, 7, 8] + \\ & [0, 0, 3, 4, 9] + [1, 1, 2, 4, 9] - [0, 3, 3, 7, 8] - [1, 3, 3, 4, 9] + [0, 0, 3, 7, 8] + [1, 1, 3, 4, 9] - [0, 1, 1, 7, 9] + [0, 0, 1, 7, 9] - \\ & [0, 1, 1, 8, 9] - [0, 2, 2, 7, 9] + [0, 0, 1, 8, 9] + [0, 0, 2, 7, 9] - [0, 2, 2, 8, 9] - [0, 3, 3, 7, 9] + [0, 0, 2, 8, 9] + [0, 0, 3, 7, 9] - \\ & [0, 3, 3, 8, 9] + [0, 0, 3, 8, 9] + 2[0, 1, 2, 3, 4] + 2[0, 1, 2, 3, 6] + 2[0, 1, 2, 4, 6] - 2[0, 1, 2, 3, 7] + 2[0, 2, 3, 4, 6] + 2[1, 2, 3, 4, 6] + \\ & 2[0, 1, 2, 4, 8] - 2[0, 1, 2, 6, 7] - 2[0, 1, 2, 3, 9] + 2[0, 1, 2, 6, 8] + 2[0, 1, 3, 6, 7] + 2[0, 2, 3, 4, 8] + 2[0, 2, 3, 6, 7] + \\ & 2[1, 2, 3, 4, 8] + 2[0, 2, 3, 6, 8] - 2[1, 2, 3, 6, 7] + 2[1, 2, 3, 6, 8] + 2[0, 1, 2, 4, 9] - 2[0, 1, 2, 7, 8] + 2[0, 1, 3, 4, 9] - \\ & 2[0, 1, 3, 7, 8] - 2[0, 2, 3, 4, 9] - 2[0, 2, 3, 7, 8] - 2[1, 2, 3, 4, 9] - 2[0, 1, 2, 7, 9] - 2[0, 1, 2, 8, 9] - 2[0, 1, 3, 7, 9] - \\ & 2[0, 1, 3, 8, 9] - 2[0, 2, 3, 7, 9] - 2[0, 2, 3, 8, 9] = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [0, 0, 1, 2, 6] - [0, 1, 2, 6, 6] + [1, 2, 3, 4, 4] - [1, 1, 2, 3, 4] + [1, 2, 3, 5, 5] - [1, 2, 2, 3, 5] + [1, 2, 3, 6, 6] - [1, 2, 3, 3, 6] - \\ & [0, 1, 5, 6, 6] - [0, 2, 4, 6, 6] + [0, 0, 1, 5, 6] + [0, 0, 2, 4, 6] - [1, 2, 4, 6, 6] + 2[1, 2, 4, 4, 6] + [1, 3, 4, 4, 5] - [1, 1, 2, 4, 6] - \\ & [1, 1, 3, 4, 5] - [1, 2, 5, 6, 6] + 2[1, 2, 5, 5, 6] - [1, 2, 2, 5, 6] + [2, 3, 4, 5, 5] - [2, 2, 3, 4, 5] + [1, 3, 5, 6, 6] - [1, 3, 3, 5, 6] + \\ & [2, 3, 4, 6, 6] - [2, 3, 3, 4, 6] - [0, 1, 6, 6, 7] - [0, 2, 4, 4, 8] - [0, 4, 5, 6, 6] + [0, 0, 1, 6, 7] + [0, 0, 2, 4, 8] + [0, 0, 4, 5, 6] - \\ & [0, 2, 6, 6, 7] + [1, 2, 4, 4, 8] + [1, 3, 4, 4, 7] - [1, 4, 5, 6, 6] + 2[1, 4, 4, 5, 6] + [0, 0, 2, 6, 7] - [1, 1, 2, 4, 8] - [1, 1, 3, 4, 7] - \\ & [1, 1, 4, 5, 6] - [0, 2, 6, 6, 8] + [1, 2, 5, 5, 8] + [1, 3, 5, 5, 7] - [1, 2, 2, 5, 8] + [2, 3, 4, 4, 7] - [2, 4, 5, 6, 6] + 2[2, 4, 5, 5, 6] + \\ & [0, 0, 2, 6, 8] - [1, 1, 3, 5, 7] - [2, 2, 3, 4, 7] - [2, 2, 4, 5, 6] + [1, 2, 6, 6, 8] + [1, 3, 6, 6, 7] - [1, 3, 3, 6, 7] + [2, 3, 4, 4, 8] + \\ & [2, 3, 5, 5, 7] - [2, 3, 3, 4, 8] + [3, 4, 5, 6, 6] - [1, 1, 2, 6, 8] - [2, 2, 3, 5, 7] - [3, 3, 4, 5, 6] + [2, 3, 5, 5, 8] + [2, 3, 6, 6, 7] - \\ & [2, 3, 3, 6, 7] - [2, 2, 3, 5, 8] + [2, 3, 6, 6, 8] - [2, 3, 3, 6, 8] - [0, 1, 5, 5, 9] - [0, 4, 6, 6, 7] - [0, 4, 4, 5, 8] + [0, 0, 1, 5, 9] + \\ & [0, 0, 4, 5, 8] + [0, 0, 4, 6, 7] - [0, 1, 6, 6, 9] - [0, 5, 6, 6, 7] + [1, 2, 4, 4, 9] - [1, 4, 6, 6, 7] + [1, 4, 4, 5, 8] + 2[1, 4, 4, 6, 7] + \\ & [0, 0, 1, 6, 9] + [0, 0, 5, 6, 7] - [1, 1, 2, 4, 9] - [1, 1, 4, 5, 8] - [1, 1, 4, 6, 7] - [0, 5, 6, 6, 8] + [1, 2, 5, 5, 9] + [1, 3, 4, 4, 9] - \\ & [1, 5, 6, 6, 7] - [1, 2, 2, 5, 9] + 2[1, 5, 5, 6, 7] + 2[2, 4, 5, 5, 8] - [2, 4, 6, 6, 7] - [2, 4, 4, 5, 8] + 2[2, 4, 4, 6, 7] + [0, 0, 5, 6, 8] - \\ & [1, 1, 3, 4, 9] - [1, 1, 5, 6, 7] - [2, 2, 4, 5, 8] - [2, 2, 4, 6, 7] + [1, 2, 6, 6, 9] + [1, 3, 5, 5, 9] + [1, 5, 6, 6, 8] - [1, 2, 2, 6, 9] - \\ & [1, 3, 3, 5, 9] - [2, 5, 6, 6, 7] + 2[2, 5, 5, 6, 7] + [3, 4, 6, 6, 7] + [3, 4, 4, 5, 8] - [1, 1, 5, 6, 8] - [2, 2, 5, 6, 7] - [3, 3, 4, 5, 8] - \\ & [3, 3, 4, 6, 7] + [1, 3, 6, 6, 9] - [1, 3, 3, 6, 9] - [2, 5, 6, 6, 8] + 2[2, 5, 5, 6, 8] + [3, 5, 6, 6, 7] - [2, 2, 5, 6, 8] - [3, 3, 5, 6, 7] + \\ & [3, 5, 6, 6, 8] - [3, 3, 5, 6, 8] - [0, 4, 5, 5, 9] - [0, 4, 4, 7, 8] + [0, 0, 4, 5, 9] + [0, 0, 4, 7, 8] - [0, 4, 6, 6, 9] - [0, 5, 5, 7, 8] - \\ & [1, 4, 5, 5, 9] + 2[1, 4, 4, 5, 9] + [1, 4, 4, 7, 8] + [0, 0, 4, 6, 9] + [0, 0, 5, 7, 8] - [1, 1, 4, 5, 9] - [1, 1, 4, 7, 8] - [0, 6, 6, 7, 8] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [1, 4, 6, 6, 9] + 2[1, 4, 4, 6, 9] + [1, 5, 5, 7, 8] + [2, 4, 5, 5, 9] + [2, 4, 4, 7, 8] + [0, 0, 6, 7, 8] - [1, 1, 4, 6, 9] - [1, 1, 5, 7, 8] - \\
& [2, 2, 4, 5, 9] - [2, 2, 4, 7, 8] + [1, 6, 6, 7, 8] + [2, 4, 6, 6, 9] + [2, 5, 5, 7, 8] + [3, 4, 5, 5, 9] + [3, 4, 4, 7, 8] - [1, 1, 6, 7, 8] - \\
& [2, 2, 4, 6, 9] - [2, 2, 5, 7, 8] - [3, 3, 4, 5, 9] - [3, 3, 4, 7, 8] + [2, 6, 6, 7, 8] + [3, 4, 6, 6, 9] + [3, 5, 5, 7, 8] - [2, 2, 6, 7, 8] - \\
& [3, 3, 4, 6, 9] - [3, 3, 5, 7, 8] + [3, 6, 6, 7, 8] - [3, 3, 6, 7, 8] - [0, 4, 4, 7, 9] + [0, 0, 4, 7, 9] - [0, 4, 4, 8, 9] - [0, 5, 5, 7, 9] + \\
& [1, 4, 4, 7, 9] + [0, 0, 4, 8, 9] + [0, 0, 5, 7, 9] - [1, 1, 4, 7, 9] - [0, 5, 5, 8, 9] - [0, 6, 6, 7, 9] + [1, 4, 4, 8, 9] + [1, 5, 5, 7, 9] + \\
& [2, 4, 4, 7, 9] + [0, 0, 5, 8, 9] + [0, 0, 6, 7, 9] - [1, 1, 4, 8, 9] - [1, 1, 5, 7, 9] - [2, 2, 4, 7, 9] - [0, 6, 6, 8, 9] + [1, 5, 5, 8, 9] + \\
& [1, 6, 6, 7, 9] + [2, 4, 4, 8, 9] + [2, 5, 5, 7, 9] + [3, 4, 4, 7, 9] + [0, 0, 6, 8, 9] - [1, 1, 5, 8, 9] - [1, 1, 6, 7, 9] - [2, 2, 4, 8, 9] - \\
& [2, 2, 5, 7, 9] - [3, 3, 4, 7, 9] + [1, 6, 6, 8, 9] + [2, 5, 5, 8, 9] + [2, 6, 6, 7, 9] + [3, 4, 4, 8, 9] + [3, 5, 5, 7, 9] - [1, 1, 6, 8, 9] - \\
& [2, 2, 5, 8, 9] - [2, 2, 6, 7, 9] - [3, 3, 4, 8, 9] - [3, 3, 5, 7, 9] + [2, 6, 6, 8, 9] + [3, 5, 5, 8, 9] + [3, 6, 6, 7, 9] - [2, 2, 6, 8, 9] - \\
& [3, 3, 5, 8, 9] - [3, 3, 6, 7, 9] + [3, 6, 6, 8, 9] - [3, 3, 6, 8, 9] + 2[0, 1, 2, 4, 6] + 2[0, 1, 2, 5, 6] + 2[0, 1, 4, 5, 6] + 2[0, 2, 4, 5, 6] - \\
& 2[1, 2, 3, 4, 7] + 2[1, 2, 4, 5, 6] - 2[1, 2, 3, 4, 8] - 2[1, 2, 3, 5, 7] - 2[1, 2, 3, 6, 8] + 2[0, 1, 4, 6, 7] + 2[0, 1, 5, 6, 7] + \\
& 2[0, 2, 4, 5, 8] + 2[0, 2, 4, 6, 7] - 2[0, 2, 4, 6, 8] + 2[0, 2, 5, 6, 7] - 2[1, 2, 4, 6, 7] + 2[1, 3, 4, 5, 7] + 2[0, 2, 5, 6, 8] + \\
& 2[1, 2, 4, 6, 8] - 2[1, 2, 5, 6, 7] - 2[1, 3, 4, 5, 8] + 2[2, 3, 4, 5, 7] - 2[1, 2, 3, 5, 9] - 2[1, 2, 3, 6, 9] - 2[1, 3, 5, 6, 8] + \\
& 2[2, 3, 4, 6, 8] + 2[0, 1, 4, 5, 9] + 2[0, 1, 4, 6, 9] - 2[0, 1, 5, 6, 9] - 2[0, 4, 5, 6, 8] - 2[1, 2, 4, 7, 8] + 4[1, 4, 5, 6, 7] - \\
& 2[1, 2, 5, 7, 8] - 2[1, 3, 4, 7, 8] + 2[1, 4, 5, 6, 8] + 4[2, 4, 5, 6, 7] + 2[1, 2, 5, 6, 9] - 2[1, 2, 6, 7, 8] - 2[1, 3, 5, 7, 8] - \\
& 2[2, 3, 4, 5, 9] - 2[2, 3, 4, 7, 8] - 2[2, 4, 5, 6, 8] + 2[1, 3, 5, 6, 9] - 2[1, 3, 6, 7, 8] - 2[2, 3, 4, 6, 9] - 2[2, 3, 5, 7, 8] + \\
& 2[3, 4, 5, 6, 8] - 2[2, 3, 6, 7, 8] - 2[0, 4, 5, 7, 8] - 2[0, 4, 5, 6, 9] - 2[0, 4, 6, 7, 8] - 2[1, 2, 4, 7, 9] + 2[1, 4, 5, 7, 8] - \\
& 2[0, 5, 6, 7, 8] - 2[1, 2, 4, 8, 9] - 2[1, 2, 5, 7, 9] - 2[1, 3, 4, 7, 9] - 2[1, 4, 5, 6, 9] + 2[1, 4, 6, 7, 8] + 2[2, 4, 5, 7, 8] - \\
& 2[1, 2, 5, 8, 9] - 2[1, 2, 6, 7, 9] - 2[1, 3, 4, 8, 9] - 2[1, 3, 5, 7, 9] + 2[1, 5, 6, 7, 8] - 2[2, 3, 4, 7, 9] + 2[2, 4, 5, 6, 9] + \\
& 2[2, 4, 6, 7, 8] + 2[3, 4, 5, 7, 8] - 2[1, 2, 6, 8, 9] - 2[1, 3, 5, 8, 9] - 2[1, 3, 6, 7, 9] - 2[2, 3, 4, 8, 9] - 2[2, 3, 5, 7, 9] + \\
& 2[2, 5, 6, 7, 8] + 2[3, 4, 5, 6, 9] + 2[3, 4, 6, 7, 8] - 2[1, 3, 6, 8, 9] - 2[2, 3, 5, 8, 9] - 2[2, 3, 6, 7, 9] + 2[3, 5, 6, 7, 8] - \\
& 2[2, 3, 6, 8, 9] - 2[0, 4, 5, 7, 9] - 2[0, 4, 5, 8, 9] - 2[0, 4, 6, 7, 9] + 2[1, 4, 5, 7, 9] - 2[0, 4, 6, 8, 9] - 2[0, 5, 6, 7, 9] + \\
& 2[1, 4, 5, 8, 9] + 2[1, 4, 6, 7, 9] + 2[2, 4, 5, 7, 9] - 2[0, 5, 6, 8, 9] + 2[1, 4, 6, 8, 9] + 2[1, 5, 6, 7, 9] + 2[2, 4, 5, 8, 9] + \\
& 2[2, 4, 6, 7, 9] + 2[3, 4, 5, 7, 9] + 2[1, 5, 6, 8, 9] + 2[2, 4, 6, 8, 9] + 2[2, 5, 6, 7, 9] + 2[3, 4, 5, 8, 9] + 2[3, 4, 6, 7, 9] + \\
& 2[2, 5, 6, 8, 9] + 2[3, 4, 6, 8, 9] + 2[3, 5, 6, 7, 9] + 2[3, 5, 6, 8, 9] = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [0, 0, 1, 3, 5] - [0, 1, 3, 5, 5] - [0, 1, 5, 5, 6] - [0, 3, 4, 5, 5] + [0, 0, 1, 5, 6] + [0, 0, 3, 4, 5] - [1, 3, 4, 5, 5] + [1, 3, 4, 4, 5] + \\
& [1, 3, 5, 6, 6] - [1, 3, 5, 5, 6] - [0, 1, 5, 5, 8] - [0, 3, 4, 4, 7] - [0, 4, 5, 5, 6] + [0, 0, 1, 5, 8] + [0, 0, 3, 4, 7] + [0, 0, 4, 5, 6] - \\
& [0, 3, 5, 5, 7] - [1, 4, 5, 5, 6] + [1, 4, 4, 5, 6] + [0, 0, 3, 5, 7] - [0, 3, 5, 5, 8] + [0, 0, 3, 5, 8] + [3, 4, 5, 6, 6] - [3, 4, 5, 5, 6] - \\
& [0, 1, 5, 5, 9] - [0, 4, 5, 5, 8] - [0, 4, 4, 6, 7] + [0, 0, 1, 5, 9] + [0, 0, 4, 5, 8] + [0, 0, 4, 6, 7] - [0, 1, 6, 6, 9] - [0, 5, 5, 6, 7] - \\
& [1, 4, 5, 5, 8] + [1, 4, 4, 5, 8] + [0, 0, 1, 6, 9] + [0, 0, 5, 6, 7] - [0, 5, 5, 6, 8] + [0, 0, 5, 6, 8] + [1, 5, 6, 6, 8] - [1, 5, 5, 6, 8] - \\
& [3, 4, 5, 5, 8] + [3, 4, 6, 6, 7] + [3, 4, 4, 5, 8] - [3, 4, 4, 6, 7] + [3, 5, 6, 6, 7] - [3, 5, 5, 6, 7] + [3, 5, 6, 6, 8] - [3, 5, 5, 6, 8] - \\
& [0, 4, 5, 5, 9] - [0, 4, 4, 7, 8] + [0, 0, 4, 5, 9] + [0, 0, 4, 7, 8] - [0, 4, 6, 6, 9] - [0, 5, 5, 7, 8] - [1, 4, 5, 5, 9] + [1, 4, 4, 5, 9] + \\
& [0, 0, 4, 6, 9] + [0, 0, 5, 7, 8] - [0, 6, 6, 7, 8] - [1, 4, 6, 6, 9] + [1, 4, 4, 6, 9] + [0, 0, 6, 7, 8] - [0, 4, 4, 7, 9] + [0, 0, 4, 7, 9] - \\
& [0, 4, 4, 8, 9] - [0, 5, 5, 7, 9] + [0, 0, 4, 8, 9] + [0, 0, 5, 7, 9] - [0, 5, 5, 8, 9] - [0, 6, 6, 7, 9] + [0, 0, 5, 8, 9] + [0, 0, 6, 7, 9] - \\
& [0, 6, 6, 8, 9] + [0, 0, 6, 8, 9] + 2[0, 1, 3, 4, 5] + 2[0, 1, 3, 5, 6] + 2[0, 1, 4, 5, 6] + 2[0, 3, 4, 5, 6] + 2[1, 3, 4, 5, 6] + 2[0, 1, 4, 5, 8] - \\
& 2[0, 3, 4, 5, 7] + 2[0, 1, 5, 6, 8] + 2[0, 3, 4, 5, 8] + 2[0, 3, 4, 6, 7] + 2[0, 3, 5, 6, 7] + 2[0, 3, 5, 6, 8] + 2[0, 1, 4, 5, 9] + \\
& 2[0, 1, 4, 6, 9] - 2[0, 4, 5, 6, 7] - 2[0, 1, 5, 6, 9] + 2[1, 4, 5, 6, 8] - 2[3, 4, 5, 6, 7] + 2[3, 4, 5, 6, 8] - 2[0, 4, 5, 7, 8] - \\
& 2[0, 4, 5, 6, 9] - 2[0, 4, 6, 7, 8] - 2[0, 5, 6, 7, 8] - 2[1, 4, 5, 6, 9] - 2[0, 4, 5, 7, 9] - 2[0, 4, 5, 8, 9] - 2[0, 4, 6, 7, 9] - \\
& 2[0, 4, 6, 8, 9] - 2[0, 5, 6, 7, 9] - 2[0, 5, 6, 8, 9] = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -[0, 0, 1, 2, 3] - [0, 0, 1, 2, 6] - [0, 0, 1, 2, 8] - [0, 0, 1, 2, 9] - [0, 0, 1, 3, 5] - [0, 0, 1, 3, 7] - [0, 0, 1, 3, 9] - [0, 0, 1, 5, 6] - \\
& [0, 0, 1, 5, 8] - [0, 0, 1, 5, 9] - [0, 0, 1, 6, 7] - [0, 0, 1, 6, 9] - [0, 0, 1, 7, 8] - [0, 0, 1, 7, 9] - [0, 0, 1, 8, 9] - [0, 0, 2, 3, 4] - \\
& [0, 0, 2, 3, 7] - [0, 0, 2, 3, 8] - [0, 0, 2, 4, 6] - [0, 0, 2, 4, 8] - [0, 0, 2, 4, 9] - [0, 0, 2, 6, 7] - [0, 0, 2, 6, 8] - [0, 0, 2, 7, 8] - \\
& [0, 0, 2, 7, 9] - [0, 0, 2, 8, 9] - [0, 0, 3, 4, 5] - [0, 0, 3, 4, 7] - [0, 0, 3, 4, 9] - [0, 0, 3, 5, 7] - [0, 0, 3, 5, 8] - [0, 0, 3, 7, 8] - \\
& [0, 0, 3, 7, 9] - [0, 0, 3, 8, 9] - [0, 0, 4, 5, 6] - [0, 0, 4, 5, 8] - [0, 0, 4, 5, 9] - [0, 0, 4, 6, 7] - [0, 0, 4, 6, 9] - [0, 0, 4, 7, 8] - \\
& [0, 0, 4, 7, 9] - [0, 0, 4, 8, 9] - [0, 0, 5, 6, 7] - [0, 0, 5, 6, 8] - [0, 0, 5, 7, 8] - [0, 0, 5, 7, 9] - [0, 0, 5, 8, 9] - [0, 0, 6, 7, 8] - \\
& [0, 0, 6, 7, 9] - [0, 0, 6, 8, 9] + [0, 1, 1, 2, 3] + [0, 1, 1, 2, 6] + 3[0, 1, 1, 2, 8] + [0, 1, 1, 2, 9] + [0, 1, 1, 3, 5] + [0, 1, 1, 3, 7] + \\
& [0, 1, 1, 3, 9] + [0, 1, 1, 5, 6] + 3[0, 1, 1, 5, 8] + [0, 1, 1, 5, 9] + [0, 1, 1, 6, 7] + [0, 1, 1, 6, 9] + 3[0, 1, 1, 7, 8] + 3[0, 1, 1, 7, 9] + \\
& 3[0, 1, 1, 8, 9] - [0, 1, 2, 2, 3] - [0, 1, 2, 2, 6] - [0, 1, 2, 2, 8] - [0, 1, 2, 2, 9] + [0, 1, 2, 3, 3] - 4[0, 1, 2, 3, 5] + 4[0, 1, 2, 3, 8] + \\
& 4[0, 1, 2, 4, 8] - 4[0, 1, 2, 5, 6] - 4[0, 1, 2, 5, 8] - 4[0, 1, 2, 5, 9] + [0, 1, 2, 6, 6] + 2[0, 1, 2, 6, 8] - 2[0, 1, 2, 6, 9] + \\
& 4[0, 1, 2, 7, 8] - [0, 1, 2, 8, 8] + 2[0, 1, 2, 8, 9] + [0, 1, 2, 9, 9] + [0, 1, 3, 3, 5] + [0, 1, 3, 3, 7] + [0, 1, 3, 3, 9] - [0, 1, 3, 5, 5] - \\
& 2[0, 1, 3, 5, 7] + 4[0, 1, 3, 5, 8] - 2[0, 1, 3, 5, 9] - [0, 1, 3, 7, 7] + 4[0, 1, 3, 7, 8] + 2[0, 1, 3, 7, 9] + 4[0, 1, 3, 8, 9] - \\
& [0, 1, 3, 9, 9] + 4[0, 1, 4, 5, 8] + 4[0, 1, 4, 7, 8] + 4[0, 1, 4, 7, 9] + 4[0, 1, 4, 8, 9] - [0, 1, 5, 5, 6] - [0, 1, 5, 5, 8] - [0, 1, 5, 5, 9] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [0, 1, 5, 6, 6] - 2[0, 1, 5, 6, 7] + 2[0, 1, 5, 6, 8] + 2[0, 1, 5, 7, 8] - 2[0, 1, 5, 7, 9] - [0, 1, 5, 8, 8] + [0, 1, 5, 9, 9] + [0, 1, 6, 6, 7] + \\
& [0, 1, 6, 6, 9] - [0, 1, 6, 7, 7] + 2[0, 1, 6, 7, 8] + 2[0, 1, 6, 8, 9] - [0, 1, 6, 9, 9] - [0, 1, 7, 7, 8] - 3[0, 1, 7, 7, 9] - [0, 1, 7, 8, 8] - \\
& 4[0, 1, 7, 8, 9] + [0, 1, 7, 9, 9] - [0, 1, 8, 8, 9] - [0, 1, 8, 9, 9] - [0, 2, 2, 3, 4] - [0, 2, 2, 3, 7] - [0, 2, 2, 3, 8] - [0, 2, 2, 4, 6] - \\
& [0, 2, 2, 4, 8] - [0, 2, 2, 4, 9] - [0, 2, 2, 6, 7] - [0, 2, 2, 6, 8] - [0, 2, 2, 7, 8] - [0, 2, 2, 7, 9] - [0, 2, 2, 8, 9] + [0, 2, 3, 3, 4] + \\
& [0, 2, 3, 3, 7] + [0, 2, 3, 3, 8] + [0, 2, 3, 4, 4] - 4[0, 2, 3, 4, 5] - 2[0, 2, 3, 4, 7] + 2[0, 2, 3, 4, 8] - 4[0, 2, 3, 5, 7] - 4[0, 2, 3, 5, 8] + \\
& [0, 2, 3, 7, 7] + 2[0, 2, 3, 7, 8] + [0, 2, 3, 8, 8] + [0, 2, 4, 4, 6] + 3[0, 2, 4, 4, 8] + [0, 2, 4, 4, 9] - 4[0, 2, 4, 5, 6] - 4[0, 2, 4, 5, 8] - \\
& 4[0, 2, 4, 5, 9] + [0, 2, 4, 6, 6] - 2[0, 2, 4, 6, 7] + 4[0, 2, 4, 6, 8] - 2[0, 2, 4, 6, 9] + 2[0, 2, 4, 7, 8] - 2[0, 2, 4, 7, 9] - \\
& [0, 2, 4, 8, 8] + [0, 2, 4, 9, 9] - 4[0, 2, 5, 6, 7] - 4[0, 2, 5, 6, 8] - 4[0, 2, 5, 7, 8] - 4[0, 2, 5, 7, 9] - 4[0, 2, 5, 8, 9] + [0, 2, 6, 6, 7] + \\
& [0, 2, 6, 6, 8] + [0, 2, 6, 7, 7] - 2[0, 2, 6, 7, 9] + [0, 2, 6, 8, 8] - 2[0, 2, 6, 8, 9] + 3[0, 2, 7, 7, 8] + [0, 2, 7, 7, 9] - [0, 2, 7, 8, 8] + \\
& 4[0, 2, 7, 8, 9] + [0, 2, 7, 9, 9] + [0, 2, 8, 8, 9] + [0, 2, 8, 9, 9] + [0, 3, 3, 4, 5] + [0, 3, 3, 4, 7] + [0, 3, 3, 4, 9] + [0, 3, 3, 5, 7] + \\
& [0, 3, 3, 5, 8] + [0, 3, 3, 7, 8] + [0, 3, 3, 7, 9] + [0, 3, 3, 8, 9] + [0, 3, 4, 4, 5] + [0, 3, 4, 4, 7] + [0, 3, 4, 4, 9] - [0, 3, 4, 5, 5] + \\
& 2[0, 3, 4, 5, 8] - 2[0, 3, 4, 5, 9] - [0, 3, 4, 7, 7] + 2[0, 3, 4, 7, 8] + 2[0, 3, 4, 8, 9] - [0, 3, 4, 9, 9] - [0, 3, 5, 5, 7] - [0, 3, 5, 5, 8] + \\
& [0, 3, 5, 7, 7] - 2[0, 3, 5, 7, 9] + [0, 3, 5, 8, 8] - 2[0, 3, 5, 8, 9] - [0, 3, 7, 7, 8] + [0, 3, 7, 7, 9] + [0, 3, 7, 8, 8] - [0, 3, 7, 9, 9] + \\
& [0, 3, 8, 8, 9] - [0, 3, 8, 9, 9] + [0, 4, 4, 5, 6] + 3[0, 4, 4, 5, 8] + [0, 4, 4, 5, 9] + [0, 4, 4, 6, 7] + [0, 4, 4, 6, 9] + 3[0, 4, 4, 7, 8] + \\
& 3[0, 4, 4, 7, 9] + 3[0, 4, 4, 8, 9] - [0, 4, 5, 5, 6] - [0, 4, 5, 5, 8] - [0, 4, 5, 5, 9] + [0, 4, 5, 6, 6] + 4[0, 4, 5, 6, 8] + 4[0, 4, 5, 7, 8] - \\
& [0, 4, 5, 8, 8] + 2[0, 4, 5, 8, 9] + [0, 4, 5, 9, 9] + [0, 4, 6, 6, 7] + [0, 4, 6, 6, 9] - [0, 4, 6, 7, 7] + 4[0, 4, 6, 7, 8] + 2[0, 4, 6, 7, 9] + \\
& 4[0, 4, 6, 8, 9] - [0, 4, 6, 9, 9] - [0, 4, 7, 7, 8] - 3[0, 4, 7, 7, 9] - [0, 4, 7, 8, 8] - 4[0, 4, 7, 8, 9] + [0, 4, 7, 9, 9] - [0, 4, 8, 8, 9] - \\
& [0, 4, 8, 9, 9] - [0, 5, 5, 6, 7] - [0, 5, 5, 6, 8] - [0, 5, 5, 7, 8] - [0, 5, 5, 7, 9] - [0, 5, 5, 8, 9] + [0, 5, 6, 6, 7] + [0, 5, 6, 6, 8] + \\
& [0, 5, 6, 7, 7] + 2[0, 5, 6, 7, 8] + [0, 5, 6, 8, 8] + 3[0, 5, 7, 7, 8] + [0, 5, 7, 7, 9] - [0, 5, 7, 8, 8] + 4[0, 5, 7, 8, 9] + [0, 5, 7, 9, 9] + \\
& [0, 5, 8, 8, 9] + [0, 5, 8, 9, 9] + [0, 6, 6, 7, 8] + [0, 6, 6, 7, 9] + [0, 6, 6, 8, 9] - [0, 6, 7, 7, 8] + [0, 6, 7, 7, 9] + [0, 6, 7, 8, 8] - \\
& [0, 6, 7, 9, 9] + [0, 6, 8, 8, 9] - [0, 6, 8, 9, 9] + [1, 1, 2, 3, 4] + [1, 1, 2, 3, 5] + [1, 1, 2, 3, 6] + 3[1, 1, 2, 4, 6] + 3[1, 1, 2, 4, 8] + \\
& [1, 1, 2, 4, 9] + [1, 1, 2, 5, 6] + 3[1, 1, 2, 5, 8] + [1, 1, 2, 5, 9] + 3[1, 1, 2, 6, 8] + [1, 1, 2, 6, 9] + [1, 1, 3, 4, 5] + [1, 1, 3, 4, 7] + \\
& [1, 1, 3, 4, 9] + [1, 1, 3, 5, 6] + [1, 1, 3, 5, 7] + [1, 1, 3, 5, 9] + [1, 1, 3, 6, 7] + [1, 1, 3, 6, 9] + 3[1, 1, 4, 5, 6] + 3[1, 1, 4, 5, 8] + \\
& 3[1, 1, 4, 5, 9] + 3[1, 1, 4, 6, 7] + 3[1, 1, 4, 6, 9] + 3[1, 1, 4, 7, 8] + 3[1, 1, 4, 7, 9] + 3[1, 1, 4, 8, 9] + 3[1, 1, 5, 6, 7] + \\
& 3[1, 1, 5, 6, 8] + 3[1, 1, 5, 7, 8] + 3[1, 1, 5, 7, 9] + 3[1, 1, 5, 8, 9] + 3[1, 1, 6, 7, 8] + 3[1, 1, 6, 7, 9] + 3[1, 1, 6, 8, 9] - \\
& [1, 2, 2, 3, 4] - [1, 2, 2, 3, 5] - [1, 2, 2, 3, 6] - [1, 2, 2, 4, 6] - [1, 2, 2, 4, 8] - [1, 2, 2, 4, 9] - [1, 2, 2, 5, 6] - [1, 2, 2, 5, 8] - \\
& [1, 2, 2, 5, 9] - [1, 2, 2, 6, 8] - [1, 2, 2, 6, 9] + [1, 2, 3, 3, 4] + [1, 2, 3, 3, 5] + [1, 2, 3, 3, 6] - [1, 2, 3, 4, 4] - 2[1, 2, 3, 4, 5] + \\
& 2[1, 2, 3, 4, 6] + 4[1, 2, 3, 4, 8] - [1, 2, 3, 5, 5] - 2[1, 2, 3, 5, 6] + 4[1, 2, 3, 5, 8] - [1, 2, 3, 6, 6] + 4[1, 2, 3, 6, 8] - 3[1, 2, 4, 4, 6] - \\
& [1, 2, 4, 4, 8] - [1, 2, 4, 4, 9] - 2[1, 2, 4, 5, 6] + 2[1, 2, 4, 5, 8] - 2[1, 2, 4, 5, 9] + [1, 2, 4, 6, 6] + 4[1, 2, 4, 6, 7] - 4[1, 2, 4, 6, 8] + \\
& 4[1, 2, 4, 7, 8] - [1, 2, 4, 8, 8] + 2[1, 2, 4, 8, 9] + [1, 2, 4, 9, 9] - [1, 2, 5, 5, 6] - [1, 2, 5, 5, 8] - [1, 2, 5, 5, 9] + [1, 2, 5, 6, 6] + \\
& 4[1, 2, 5, 7, 8] - [1, 2, 5, 8, 8] + 2[1, 2, 5, 8, 9] + [1, 2, 5, 9, 9] - [1, 2, 6, 6, 8] - [1, 2, 6, 6, 9] + 4[1, 2, 6, 7, 8] - [1, 2, 6, 8, 8] + \\
& 2[1, 2, 6, 8, 9] + [1, 2, 6, 9, 9] + [1, 3, 3, 4, 5] + [1, 3, 3, 4, 7] + [1, 3, 3, 4, 9] + [1, 3, 3, 5, 6] + [1, 3, 3, 5, 7] + [1, 3, 3, 5, 9] + \\
& [1, 3, 3, 6, 7] + [1, 3, 3, 6, 9] - [1, 3, 4, 4, 5] - [1, 3, 4, 4, 7] - [1, 3, 4, 4, 9] - [1, 3, 4, 5, 5] + 2[1, 3, 4, 5, 6] - 4[1, 3, 4, 5, 7] + \\
& 4[1, 3, 4, 5, 8] + 2[1, 3, 4, 6, 7] + 2[1, 3, 4, 6, 9] - [1, 3, 4, 7, 7] + 4[1, 3, 4, 7, 8] + 2[1, 3, 4, 7, 9] + 4[1, 3, 4, 8, 9] - \\
& [1, 3, 4, 9, 9] - [1, 3, 5, 5, 6] - [1, 3, 5, 5, 7] - [1, 3, 5, 5, 9] - [1, 3, 5, 6, 6] + 4[1, 3, 5, 6, 8] - 4[1, 3, 5, 6, 9] - [1, 3, 5, 7, 7] + \\
& 4[1, 3, 5, 7, 8] + 2[1, 3, 5, 7, 9] + 4[1, 3, 5, 8, 9] - [1, 3, 5, 9, 9] - [1, 3, 6, 6, 7] - [1, 3, 6, 6, 9] - [1, 3, 6, 7, 7] + 4[1, 3, 6, 7, 8] + \\
& 2[1, 3, 6, 7, 9] + 4[1, 3, 6, 8, 9] - [1, 3, 6, 9, 9] - 3[1, 4, 4, 5, 6] - [1, 4, 4, 5, 8] - 3[1, 4, 4, 5, 9] - 3[1, 4, 4, 6, 7] - 3[1, 4, 4, 6, 9] - \\
& [1, 4, 4, 7, 8] - [1, 4, 4, 7, 9] - [1, 4, 4, 8, 9] - [1, 4, 5, 5, 6] - [1, 4, 5, 5, 8] - [1, 4, 5, 5, 9] + [1, 4, 5, 6, 6] - 8[1, 4, 5, 6, 7] - \\
& 4[1, 4, 5, 6, 8] - 4[1, 4, 5, 7, 8] - 8[1, 4, 5, 7, 9] - [1, 4, 5, 8, 8] - 6[1, 4, 5, 8, 9] + [1, 4, 5, 9, 9] + [1, 4, 6, 6, 7] + [1, 4, 6, 6, 9] - \\
& [1, 4, 6, 7, 7] - 4[1, 4, 6, 7, 8] - 6[1, 4, 6, 7, 9] - 4[1, 4, 6, 8, 9] - [1, 4, 6, 9, 9] - [1, 4, 7, 7, 8] - 3[1, 4, 7, 7, 9] - [1, 4, 7, 8, 8] - \\
& 4[1, 4, 7, 8, 9] + [1, 4, 7, 9, 9] - [1, 4, 8, 8, 9] - [1, 4, 8, 9, 9] - [1, 5, 5, 6, 7] - [1, 5, 5, 6, 8] - [1, 5, 5, 7, 8] - [1, 5, 5, 7, 9] - \\
& [1, 5, 5, 8, 9] + [1, 5, 6, 6, 7] - [1, 5, 6, 6, 8] - 3[1, 5, 6, 7, 7] - 6[1, 5, 6, 7, 8] - [1, 5, 6, 8, 8] - 4[1, 5, 6, 8, 9] - [1, 5, 7, 7, 8] - \\
& 3[1, 5, 7, 7, 9] - [1, 5, 7, 8, 8] - 4[1, 5, 7, 8, 9] + [1, 5, 7, 9, 9] - [1, 5, 8, 8, 9] - [1, 5, 8, 9, 9] - [1, 6, 6, 7, 8] - [1, 6, 6, 7, 9] - \\
& [1, 6, 6, 8, 9] - [1, 6, 7, 7, 8] - 3[1, 6, 7, 7, 9] - [1, 6, 7, 8, 8] - 4[1, 6, 7, 8, 9] + [1, 6, 7, 9, 9] - [1, 6, 8, 8, 9] - [1, 6, 8, 9, 9] - \\
& [2, 2, 3, 4, 5] - [2, 2, 3, 4, 6] - [2, 2, 3, 4, 7] - [2, 2, 3, 4, 8] - [2, 2, 3, 5, 7] - [2, 2, 3, 5, 8] - [2, 2, 3, 6, 7] - [2, 2, 3, 6, 8] - \\
& [2, 2, 4, 5, 6] - [2, 2, 4, 5, 8] - [2, 2, 4, 5, 9] - [2, 2, 4, 6, 7] - [2, 2, 4, 6, 9] - [2, 2, 4, 7, 8] - [2, 2, 4, 7, 9] - [2, 2, 4, 8, 9] - \\
& [2, 2, 5, 6, 7] - [2, 2, 5, 6, 8] - [2, 2, 5, 7, 8] - [2, 2, 5, 7, 9] - [2, 2, 5, 8, 9] - [2, 2, 6, 7, 8] - [2, 2, 6, 7, 9] - [2, 2, 6, 8, 9] + \\
& [2, 3, 3, 4, 5] + [2, 3, 3, 4, 6] + [2, 3, 3, 4, 7] + [2, 3, 3, 4, 8] + [2, 3, 3, 5, 7] + [2, 3, 3, 5, 8] + [2, 3, 3, 6, 7] + [2, 3, 3, 6, 8] + \\
& [2, 3, 4, 4, 5] + [2, 3, 4, 4, 6] - [2, 3, 4, 4, 7] - [2, 3, 4, 4, 8] - [2, 3, 4, 5, 5] - 2[2, 3, 4, 5, 6] - [2, 3, 4, 6, 6] + [2, 3, 4, 7, 7] + \\
& 2[2, 3, 4, 7, 8] + [2, 3, 4, 8, 8] - [2, 3, 5, 5, 7] - [2, 3, 5, 5, 8] - 2[2, 3, 5, 6, 7] - 2[2, 3, 5, 6, 8] + [2, 3, 5, 7, 7] + 2[2, 3, 5, 7, 8] + \\
& [2, 3, 5, 8, 8] - [2, 3, 6, 6, 7] - [2, 3, 6, 6, 8] + [2, 3, 6, 7, 7] + 2[2, 3, 6, 7, 8] + [2, 3, 6, 8, 8] + [2, 4, 4, 5, 6] + 3[2, 4, 4, 5, 8] + \\
& [2, 4, 4, 5, 9] - 3[2, 4, 4, 6, 7] + [2, 4, 4, 6, 9] - [2, 4, 4, 7, 8] - [2, 4, 4, 7, 9] - [2, 4, 4, 8, 9] - [2, 4, 5, 5, 6] - [2, 4, 5, 5, 8] - \\
& [2, 4, 5, 5, 9] + [2, 4, 5, 6, 6] + 4[2, 4, 5, 6, 8] + 4[2, 4, 5, 7, 8] - [2, 4, 5, 8, 8] + 2[2, 4, 5, 8, 9] + [2, 4, 5, 9, 9] + [2, 4, 6, 6, 7] -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [2, 4, 6, 6, 9] + 3[2, 4, 6, 7, 7] - 4[2, 4, 6, 7, 8] + 2[2, 4, 6, 7, 9] + [2, 4, 6, 9, 9] + 3[2, 4, 7, 7, 8] + [2, 4, 7, 7, 9] - [2, 4, 7, 8, 8] + \\
& 4[2, 4, 7, 8, 9] + [2, 4, 7, 9, 9] + [2, 4, 8, 8, 9] + [2, 4, 8, 9, 9] - [2, 5, 5, 6, 7] - [2, 5, 5, 6, 8] - [2, 5, 5, 7, 8] - [2, 5, 5, 7, 9] - \\
& [2, 5, 5, 8, 9] + [2, 5, 6, 6, 7] + [2, 5, 6, 6, 8] + [2, 5, 6, 7, 7] + 2[2, 5, 6, 7, 8] + [2, 5, 6, 8, 8] + 3[2, 5, 7, 7, 8] + [2, 5, 7, 7, 9] - \\
& [2, 5, 7, 8, 8] + 4[2, 5, 7, 8, 9] + [2, 5, 7, 9, 9] + [2, 5, 8, 8, 9] + [2, 5, 8, 9, 9] - [2, 6, 6, 7, 8] - [2, 6, 6, 7, 9] - [2, 6, 6, 8, 9] + \\
& 3[2, 6, 7, 7, 8] + [2, 6, 7, 7, 9] - [2, 6, 7, 8, 8] + 4[2, 6, 7, 8, 9] + [2, 6, 7, 9, 9] + [2, 6, 8, 8, 9] + [2, 6, 8, 9, 9] + [3, 3, 4, 5, 6] + \\
& [3, 3, 4, 5, 8] + [3, 3, 4, 5, 9] + [3, 3, 4, 6, 7] + [3, 3, 4, 6, 9] + [3, 3, 4, 7, 8] + [3, 3, 4, 7, 9] + [3, 3, 4, 8, 9] + [3, 3, 5, 6, 7] + \\
& [3, 3, 5, 6, 8] + [3, 3, 5, 7, 8] + [3, 3, 5, 7, 9] + [3, 3, 5, 8, 9] + [3, 3, 6, 7, 8] + [3, 3, 6, 7, 9] + [3, 3, 6, 8, 9] + [3, 4, 4, 5, 6] - \\
& [3, 4, 4, 5, 8] + [3, 4, 4, 5, 9] + [3, 4, 4, 6, 7] + [3, 4, 4, 6, 9] - [3, 4, 4, 7, 8] - [3, 4, 4, 7, 9] - [3, 4, 4, 8, 9] - [3, 4, 5, 5, 6] - \\
& [3, 4, 5, 5, 8] - [3, 4, 5, 5, 9] - [3, 4, 5, 6, 6] - 4[3, 4, 5, 6, 9] - 4[3, 4, 5, 7, 8] + [3, 4, 5, 8, 8] - 2[3, 4, 5, 8, 9] - [3, 4, 5, 9, 9] - \\
& [3, 4, 6, 6, 7] - [3, 4, 6, 6, 9] - [3, 4, 6, 7, 7] - 2[3, 4, 6, 7, 9] - [3, 4, 6, 9, 9] - [3, 4, 7, 7, 8] + [3, 4, 7, 7, 9] + [3, 4, 7, 8, 8] - \\
& [3, 4, 7, 9, 9] + [3, 4, 8, 8, 9] - [3, 4, 8, 9, 9] - [3, 5, 5, 6, 7] - [3, 5, 5, 6, 8] - [3, 5, 5, 7, 8] - [3, 5, 5, 7, 9] - [3, 5, 5, 8, 9] - \\
& [3, 5, 6, 6, 7] - [3, 5, 6, 6, 8] + [3, 5, 6, 7, 7] - 2[3, 5, 6, 7, 8] - 4[3, 5, 6, 7, 9] + [3, 5, 6, 8, 8] - 4[3, 5, 6, 8, 9] - [3, 5, 7, 7, 8] + \\
& [3, 5, 7, 7, 9] + [3, 5, 7, 8, 8] - [3, 5, 7, 9, 9] + [3, 5, 8, 8, 9] - [3, 5, 8, 9, 9] - [3, 6, 6, 7, 8] - [3, 6, 6, 7, 9] - [3, 6, 6, 8, 9] - \\
& [3, 6, 7, 7, 8] + [3, 6, 7, 7, 9] + [3, 6, 7, 8, 8] - [3, 6, 7, 9, 9] + [3, 6, 8, 8, 9] - [3, 6, 8, 9, 9] = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [0, 0, 1, 2, 3] - [0, 0, 1, 2, 6] - [0, 0, 1, 2, 8] - [0, 0, 1, 2, 9] - [0, 0, 1, 3, 5] - [0, 0, 1, 3, 7] - [0, 0, 1, 3, 9] - [0, 0, 1, 5, 6] - \\
& [0, 0, 1, 5, 8] - [0, 0, 1, 5, 9] - [0, 0, 1, 6, 7] - [0, 0, 1, 6, 9] - [0, 0, 1, 7, 8] - [0, 0, 1, 7, 9] - [0, 0, 1, 8, 9] - [0, 0, 2, 3, 4] - \\
& [0, 0, 2, 3, 7] - [0, 0, 2, 3, 8] - [0, 0, 2, 4, 6] - [0, 0, 2, 4, 8] - [0, 0, 2, 4, 9] - [0, 0, 2, 6, 7] - [0, 0, 2, 6, 8] - [0, 0, 2, 7, 8] - \\
& [0, 0, 2, 7, 9] - [0, 0, 2, 8, 9] - [0, 0, 3, 4, 5] - [0, 0, 3, 4, 7] - [0, 0, 3, 4, 9] - [0, 0, 3, 5, 7] - [0, 0, 3, 5, 8] - [0, 0, 3, 7, 8] - \\
& [0, 0, 3, 7, 9] - [0, 0, 3, 8, 9] - [0, 0, 4, 5, 6] - [0, 0, 4, 5, 8] - [0, 0, 4, 5, 9] - [0, 0, 4, 6, 7] - [0, 0, 4, 6, 9] - [0, 0, 4, 7, 8] - \\
& [0, 0, 4, 7, 9] - [0, 0, 4, 8, 9] - [0, 0, 5, 6, 7] - [0, 0, 5, 6, 8] - [0, 0, 5, 7, 8] - [0, 0, 5, 7, 9] - [0, 0, 5, 8, 9] - [0, 0, 6, 7, 8] - \\
& [0, 0, 6, 7, 9] - [0, 0, 6, 8, 9] + [0, 1, 1, 2, 3] + [0, 1, 1, 2, 6] + [0, 1, 1, 2, 8] + [0, 1, 1, 2, 9] + [0, 1, 1, 3, 5] + 3[0, 1, 1, 3, 7] + \\
& [0, 1, 1, 3, 9] + [0, 1, 1, 5, 6] + [0, 1, 1, 5, 8] + [0, 1, 1, 5, 9] + 3[0, 1, 1, 6, 7] + [0, 1, 1, 6, 9] + 3[0, 1, 1, 7, 8] + 3[0, 1, 1, 7, 9] + \\
& 3[0, 1, 1, 8, 9] + [0, 1, 2, 2, 3] + [0, 1, 2, 2, 6] + [0, 1, 2, 2, 8] + [0, 1, 2, 2, 9] - [0, 1, 2, 3, 3] - 4[0, 1, 2, 3, 6] + 4[0, 1, 2, 3, 7] - \\
& [0, 1, 2, 6, 6] + 4[0, 1, 2, 6, 7] - 2[0, 1, 2, 6, 8] - 2[0, 1, 2, 6, 9] + 4[0, 1, 2, 7, 8] + 4[0, 1, 2, 7, 9] - [0, 1, 2, 8, 8] + 2[0, 1, 2, 8, 9] - \\
& [0, 1, 2, 9, 9] - [0, 1, 3, 3, 5] - [0, 1, 3, 3, 7] - [0, 1, 3, 3, 9] + 4[0, 1, 3, 4, 7] + [0, 1, 3, 5, 5] - 4[0, 1, 3, 5, 6] + 2[0, 1, 3, 5, 7] - \\
& 2[0, 1, 3, 5, 9] - 4[0, 1, 3, 6, 7] - 4[0, 1, 3, 6, 9] - [0, 1, 3, 7, 7] + 4[0, 1, 3, 7, 8] + 2[0, 1, 3, 7, 9] + [0, 1, 3, 9, 9] + 4[0, 1, 4, 6, 7] + \\
& 4[0, 1, 4, 7, 8] + 4[0, 1, 4, 7, 9] + 4[0, 1, 4, 8, 9] + [0, 1, 5, 5, 6] + [0, 1, 5, 5, 8] + [0, 1, 5, 5, 9] - [0, 1, 5, 6, 6] + 2[0, 1, 5, 6, 7] - \\
& 2[0, 1, 5, 6, 8] + 2[0, 1, 5, 7, 8] + 2[0, 1, 5, 7, 9] - [0, 1, 5, 8, 8] - [0, 1, 5, 9, 9] - [0, 1, 6, 6, 7] - [0, 1, 6, 6, 9] - [0, 1, 6, 7, 7] + \\
& 2[0, 1, 6, 7, 8] - 2[0, 1, 6, 8, 9] + [0, 1, 6, 9, 9] - [0, 1, 7, 7, 8] - [0, 1, 7, 7, 9] - [0, 1, 7, 8, 8] - 4[0, 1, 7, 8, 9] - [0, 1, 7, 9, 9] - \\
& 3[0, 1, 8, 8, 9] + [0, 1, 8, 9, 9] + [0, 2, 2, 3, 4] + [0, 2, 2, 3, 7] + [0, 2, 2, 3, 8] + [0, 2, 2, 4, 6] + [0, 2, 2, 4, 8] + [0, 2, 2, 4, 9] + \\
& [0, 2, 2, 6, 7] + [0, 2, 2, 6, 8] + [0, 2, 2, 7, 8] + [0, 2, 2, 7, 9] + [0, 2, 2, 8, 9] - [0, 2, 3, 3, 4] - [0, 2, 3, 3, 7] - [0, 2, 3, 3, 8] + \\
& [0, 2, 3, 4, 4] - 4[0, 2, 3, 4, 6] + 2[0, 2, 3, 4, 7] - 2[0, 2, 3, 4, 8] - 4[0, 2, 3, 6, 7] - 4[0, 2, 3, 6, 8] + [0, 2, 3, 7, 7] + 2[0, 2, 3, 7, 8] + \\
& [0, 2, 3, 8, 8] + [0, 2, 4, 4, 6] + [0, 2, 4, 4, 8] + [0, 2, 4, 4, 9] - [0, 2, 4, 6, 6] + 2[0, 2, 4, 6, 7] - 2[0, 2, 4, 6, 9] + 2[0, 2, 4, 7, 8] + \\
& 2[0, 2, 4, 7, 9] - [0, 2, 4, 8, 8] - [0, 2, 4, 9, 9] - [0, 2, 6, 6, 7] - [0, 2, 6, 6, 8] + [0, 2, 6, 7, 7] - 2[0, 2, 6, 7, 9] + [0, 2, 6, 8, 8] - \\
& 2[0, 2, 6, 8, 9] + [0, 2, 7, 7, 8] + [0, 2, 7, 7, 9] - [0, 2, 7, 8, 8] - [0, 2, 7, 9, 9] + [0, 2, 8, 8, 9] - [0, 2, 8, 9, 9] - [0, 3, 3, 4, 5] - \\
& [0, 3, 3, 4, 7] - [0, 3, 3, 4, 9] - [0, 3, 3, 5, 7] - [0, 3, 3, 5, 8] - [0, 3, 3, 7, 8] - [0, 3, 3, 7, 9] - [0, 3, 3, 8, 9] + [0, 3, 4, 4, 5] + \\
& 3[0, 3, 4, 4, 7] + [0, 3, 4, 4, 9] + [0, 3, 4, 5, 5] - 4[0, 3, 4, 5, 6] + 4[0, 3, 4, 5, 7] - 2[0, 3, 4, 5, 8] - 2[0, 3, 4, 5, 9] - 4[0, 3, 4, 6, 7] - \\
& 4[0, 3, 4, 6, 9] - [0, 3, 4, 7, 7] + 2[0, 3, 4, 7, 8] - 2[0, 3, 4, 8, 9] + [0, 3, 4, 9, 9] + [0, 3, 5, 5, 7] + [0, 3, 5, 5, 8] - 4[0, 3, 5, 6, 7] - \\
& 4[0, 3, 5, 6, 8] + [0, 3, 5, 7, 7] - 2[0, 3, 5, 7, 9] + [0, 3, 5, 8, 8] - 2[0, 3, 5, 8, 9] - 4[0, 3, 6, 7, 8] - 4[0, 3, 6, 7, 9] - 4[0, 3, 6, 8, 9] - \\
& [0, 3, 7, 7, 8] + [0, 3, 7, 7, 9] + 3[0, 3, 7, 8, 8] + 4[0, 3, 7, 8, 9] + [0, 3, 7, 9, 9] + [0, 3, 8, 8, 9] + [0, 3, 8, 9, 9] + [0, 4, 4, 5, 6] + \\
& [0, 4, 4, 5, 8] + [0, 4, 4, 5, 9] + 3[0, 4, 4, 6, 7] + [0, 4, 4, 6, 9] + 3[0, 4, 4, 7, 8] + 3[0, 4, 4, 7, 9] + 3[0, 4, 4, 8, 9] + [0, 4, 5, 5, 6] + \\
& [0, 4, 5, 5, 8] + [0, 4, 5, 5, 9] - [0, 4, 5, 6, 6] + 4[0, 4, 5, 6, 7] + 4[0, 4, 5, 7, 8] + 4[0, 4, 5, 7, 9] - [0, 4, 5, 8, 8] + 2[0, 4, 5, 8, 9] - \\
& [0, 4, 5, 9, 9] - [0, 4, 6, 6, 7] - [0, 4, 6, 6, 9] - [0, 4, 6, 7, 7] + 4[0, 4, 6, 7, 8] + 2[0, 4, 6, 7, 9] + [0, 4, 6, 9, 9] - [0, 4, 7, 7, 8] - \\
& [0, 4, 7, 7, 9] - [0, 4, 7, 8, 8] - 4[0, 4, 7, 8, 9] - [0, 4, 7, 9, 9] - 3[0, 4, 8, 8, 9] + [0, 4, 8, 9, 9] + [0, 5, 5, 6, 7] + [0, 5, 5, 6, 8] + \\
& [0, 5, 5, 7, 8] + [0, 5, 5, 7, 9] + [0, 5, 5, 8, 9] - [0, 5, 6, 6, 7] - [0, 5, 6, 6, 8] + [0, 5, 6, 7, 7] + 2[0, 5, 6, 7, 8] + [0, 5, 6, 8, 8] + \\
& [0, 5, 7, 7, 8] + [0, 5, 7, 7, 9] - [0, 5, 7, 8, 8] - [0, 5, 7, 9, 9] + [0, 5, 8, 8, 9] - [0, 5, 8, 9, 9] - [0, 6, 6, 7, 8] - [0, 6, 6, 7, 9] - \\
& [0, 6, 6, 8, 9] - [0, 6, 7, 7, 8] + [0, 6, 7, 7, 9] + 3[0, 6, 7, 8, 8] + 4[0, 6, 7, 8, 9] + [0, 6, 7, 9, 9] + [0, 6, 8, 8, 9] + [0, 6, 8, 9, 9] - \\
& [1, 1, 2, 3, 4] + [1, 1, 2, 3, 5] + [1, 1, 2, 3, 6] - [1, 1, 2, 4, 6] - [1, 1, 2, 4, 8] - [1, 1, 2, 4, 9] + [1, 1, 2, 5, 6] + [1, 1, 2, 5, 8] + \\
& [1, 1, 2, 5, 9] - [1, 1, 2, 6, 8] + [1, 1, 2, 6, 9] + [1, 1, 3, 4, 5] + [1, 1, 3, 4, 7] - [1, 1, 3, 4, 9] + [1, 1, 3, 5, 6] + [1, 1, 3, 5, 7] + \\
& [1, 1, 3, 5, 9] + 3[1, 1, 3, 6, 7] + [1, 1, 3, 6, 9] + [1, 1, 4, 5, 6] + [1, 1, 4, 5, 8] + [1, 1, 4, 5, 9] + [1, 1, 4, 6, 7] + [1, 1, 4, 6, 9] + \\
& [1, 1, 4, 7, 8] + [1, 1, 4, 7, 9] + [1, 1, 4, 8, 9] + [1, 1, 5, 6, 7] + [1, 1, 5, 6, 8] + [1, 1, 5, 7, 8] + [1, 1, 5, 7, 9] + [1, 1, 5, 8, 9] + \\
& [1, 1, 6, 7, 8] + [1, 1, 6, 7, 9] + [1, 1, 6, 8, 9] + [1, 2, 2, 3, 4] - [1, 2, 2, 3, 5] + [1, 2, 2, 3, 6] + [1, 2, 2, 4, 6] + [1, 2, 2, 4, 8] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [1, 2, 2, 4, 9] - [1, 2, 2, 5, 6] - [1, 2, 2, 5, 8] - [1, 2, 2, 5, 9] + [1, 2, 2, 6, 8] - [1, 2, 2, 6, 9] - [1, 2, 3, 3, 4] - [1, 2, 3, 3, 5] - \\
& 3[1, 2, 3, 3, 6] + [1, 2, 3, 4, 4] + 2[1, 2, 3, 4, 5] - 2[1, 2, 3, 4, 6] - 4[1, 2, 3, 4, 8] + [1, 2, 3, 5, 5] - 2[1, 2, 3, 5, 6] - 4[1, 2, 3, 5, 9] + \\
& [1, 2, 3, 6, 6] + 4[1, 2, 3, 6, 7] - 4[1, 2, 3, 6, 8] - 4[1, 2, 3, 6, 9] + [1, 2, 4, 4, 6] + [1, 2, 4, 4, 8] + [1, 2, 4, 4, 9] + 2[1, 2, 4, 5, 6] + \\
& 2[1, 2, 4, 5, 8] + 2[1, 2, 4, 5, 9] - [1, 2, 4, 6, 6] - [1, 2, 4, 8, 8] - 2[1, 2, 4, 8, 9] - [1, 2, 4, 9, 9] + [1, 2, 5, 5, 6] + [1, 2, 5, 5, 8] + \\
& [1, 2, 5, 5, 9] - [1, 2, 5, 6, 6] - [1, 2, 5, 8, 8] - 2[1, 2, 5, 8, 9] - [1, 2, 5, 9, 9] + [1, 2, 6, 6, 8] + [1, 2, 6, 6, 9] - [1, 2, 6, 8, 8] - \\
& 2[1, 2, 6, 8, 9] - [1, 2, 6, 9, 9] - [1, 3, 3, 4, 5] - [1, 3, 3, 4, 7] - [1, 3, 3, 4, 9] - 3[1, 3, 3, 5, 6] - [1, 3, 3, 5, 7] - 3[1, 3, 3, 5, 9] - \\
& 3[1, 3, 3, 6, 7] - 3[1, 3, 3, 6, 9] - [1, 3, 4, 4, 5] + [1, 3, 4, 4, 7] + [1, 3, 4, 4, 9] + [1, 3, 4, 5, 5] - 2[1, 3, 4, 5, 6] + 2[1, 3, 4, 6, 7] - \\
& 2[1, 3, 4, 6, 9] - [1, 3, 4, 7, 7] - 2[1, 3, 4, 7, 9] - 4[1, 3, 4, 8, 9] + [1, 3, 4, 9, 9] + [1, 3, 5, 5, 6] + [1, 3, 5, 5, 7] + [1, 3, 5, 5, 9] + \\
& [1, 3, 5, 6, 6] - 4[1, 3, 5, 6, 8] + 4[1, 3, 5, 6, 9] - [1, 3, 5, 7, 7] - 2[1, 3, 5, 7, 9] - 4[1, 3, 5, 8, 9] + [1, 3, 5, 9, 9] + [1, 3, 6, 6, 7] + \\
& [1, 3, 6, 6, 9] - [1, 3, 6, 7, 7] - 2[1, 3, 6, 7, 9] - 4[1, 3, 6, 8, 9] + [1, 3, 6, 9, 9] - [1, 4, 4, 5, 6] - [1, 4, 4, 5, 8] - [1, 4, 4, 5, 9] + \\
& [1, 4, 4, 6, 7] - [1, 4, 4, 6, 9] + [1, 4, 4, 7, 8] + [1, 4, 4, 7, 9] + [1, 4, 4, 8, 9] + [1, 4, 5, 5, 6] + [1, 4, 5, 5, 8] + [1, 4, 5, 5, 9] - \\
& [1, 4, 5, 6, 6] - 4[1, 4, 5, 6, 8] - [1, 4, 5, 8, 8] - 2[1, 4, 5, 8, 9] - [1, 4, 5, 9, 9] - [1, 4, 6, 6, 7] - [1, 4, 6, 6, 9] - [1, 4, 6, 7, 7] - \\
& 2[1, 4, 6, 7, 9] - 4[1, 4, 6, 8, 9] + [1, 4, 6, 9, 9] - [1, 4, 7, 7, 8] - [1, 4, 7, 7, 9] - [1, 4, 7, 8, 8] - 4[1, 4, 7, 8, 9] - [1, 4, 7, 9, 9] - \\
& 3[1, 4, 8, 8, 9] + [1, 4, 8, 9, 9] + [1, 5, 5, 6, 7] + [1, 5, 5, 6, 8] + [1, 5, 5, 7, 8] + [1, 5, 5, 7, 9] + [1, 5, 5, 8, 9] - [1, 5, 6, 6, 7] + \\
& [1, 5, 6, 6, 8] - [1, 5, 6, 7, 7] - 2[1, 5, 6, 7, 8] - 3[1, 5, 6, 8, 8] + 4[1, 5, 6, 8, 9] - [1, 5, 7, 7, 8] - [1, 5, 7, 7, 9] - [1, 5, 7, 8, 8] - \\
& 4[1, 5, 7, 8, 9] - [1, 5, 7, 9, 9] - 3[1, 5, 8, 8, 9] + [1, 5, 8, 9, 9] + [1, 6, 6, 7, 8] + [1, 6, 6, 7, 9] + [1, 6, 6, 8, 9] - [1, 6, 7, 7, 8] - \\
& [1, 6, 7, 7, 9] - [1, 6, 7, 8, 8] - 4[1, 6, 7, 8, 9] - [1, 6, 7, 9, 9] - 3[1, 6, 8, 8, 9] + [1, 6, 8, 9, 9] - [2, 2, 3, 4, 5] + [2, 2, 3, 4, 6] - \\
& [2, 2, 3, 4, 7] + [2, 2, 3, 4, 8] - [2, 2, 3, 5, 7] - [2, 2, 3, 5, 8] + [2, 2, 3, 6, 7] + [2, 2, 3, 6, 8] - [2, 2, 4, 5, 6] - [2, 2, 4, 5, 8] - \\
& [2, 2, 4, 5, 9] - [2, 2, 4, 6, 7] - [2, 2, 4, 6, 9] - [2, 2, 4, 7, 8] - [2, 2, 4, 7, 9] - [2, 2, 4, 8, 9] - [2, 2, 5, 6, 7] - [2, 2, 5, 6, 8] - \\
& [2, 2, 5, 7, 8] - [2, 2, 5, 7, 9] - [2, 2, 5, 8, 9] - [2, 2, 6, 7, 8] - [2, 2, 6, 7, 9] - [2, 2, 6, 8, 9] - [2, 3, 3, 4, 5] - 3[2, 3, 3, 4, 6] - \\
& [2, 3, 3, 4, 7] - 3[2, 3, 3, 4, 8] - [2, 3, 3, 5, 7] - [2, 3, 3, 5, 8] - 3[2, 3, 3, 6, 7] - 3[2, 3, 3, 6, 8] + [2, 3, 4, 4, 5] + [2, 3, 4, 4, 6] + \\
& [2, 3, 4, 4, 7] + [2, 3, 4, 4, 8] + [2, 3, 4, 5, 5] - 2[2, 3, 4, 5, 6] + 4[2, 3, 4, 5, 7] - 4[2, 3, 4, 5, 9] + [2, 3, 4, 6, 6] + 4[2, 3, 4, 6, 8] - \\
& 4[2, 3, 4, 6, 9] + [2, 3, 4, 7, 7] - 2[2, 3, 4, 7, 8] - 4[2, 3, 4, 7, 9] + [2, 3, 4, 8, 8] - 4[2, 3, 4, 8, 9] + [2, 3, 5, 5, 7] + [2, 3, 5, 5, 8] - \\
& 2[2, 3, 5, 6, 7] - 2[2, 3, 5, 6, 8] + [2, 3, 5, 7, 7] - 2[2, 3, 5, 7, 8] - 4[2, 3, 5, 7, 9] + [2, 3, 5, 8, 8] - 4[2, 3, 5, 8, 9] + [2, 3, 6, 6, 7] + \\
& [2, 3, 6, 6, 8] + [2, 3, 6, 7, 7] - 2[2, 3, 6, 7, 8] - 4[2, 3, 6, 7, 9] + [2, 3, 6, 8, 8] - 4[2, 3, 6, 8, 9] + [2, 4, 4, 5, 6] + [2, 4, 4, 5, 8] + \\
& [2, 4, 4, 5, 9] + [2, 4, 4, 6, 7] + [2, 4, 4, 6, 9] + [2, 4, 4, 7, 8] + [2, 4, 4, 7, 9] + [2, 4, 4, 8, 9] + [2, 4, 5, 5, 6] + [2, 4, 5, 5, 8] + \\
& [2, 4, 5, 5, 9] - [2, 4, 5, 6, 6] + 4[2, 4, 5, 6, 7] + 4[2, 4, 5, 7, 8] + 4[2, 4, 5, 7, 9] - [2, 4, 5, 8, 8] + 2[2, 4, 5, 8, 9] - [2, 4, 5, 9, 9] - \\
& [2, 4, 6, 6, 7] + [2, 4, 6, 6, 9] + [2, 4, 6, 7, 7] + 2[2, 4, 6, 7, 9] + 4[2, 4, 6, 8, 9] - [2, 4, 6, 9, 9] + [2, 4, 7, 7, 8] + [2, 4, 7, 7, 9] - \\
& [2, 4, 7, 8, 8] - [2, 4, 7, 9, 9] + [2, 4, 8, 8, 9] - [2, 4, 8, 9, 9] + [2, 5, 5, 6, 7] + [2, 5, 5, 6, 8] + [2, 5, 5, 7, 8] + [2, 5, 5, 7, 9] + \\
& [2, 5, 5, 8, 9] - [2, 5, 6, 6, 7] - [2, 5, 6, 6, 8] + [2, 5, 6, 7, 7] + 2[2, 5, 6, 7, 8] + [2, 5, 6, 8, 8] + [2, 5, 7, 7, 8] + [2, 5, 7, 7, 9] - \\
& [2, 5, 7, 8, 8] - [2, 5, 7, 9, 9] + [2, 5, 8, 8, 9] - [2, 5, 8, 9, 9] + [2, 6, 6, 7, 8] + [2, 6, 6, 7, 9] + [2, 6, 6, 8, 9] + [2, 6, 7, 7, 8] + \\
& [2, 6, 7, 7, 9] - [2, 6, 7, 8, 8] - [2, 6, 7, 9, 9] + [2, 6, 8, 8, 9] - [2, 6, 8, 9, 9] - 3[3, 3, 4, 5, 6] - 3[3, 3, 4, 5, 8] - 3[3, 3, 4, 5, 9] - \\
& 3[3, 3, 4, 6, 7] - 3[3, 3, 4, 6, 9] - 3[3, 3, 4, 7, 8] - 3[3, 3, 4, 7, 9] - 3[3, 3, 4, 8, 9] - 3[3, 3, 5, 6, 7] - 3[3, 3, 5, 6, 8] - \\
& 3[3, 3, 5, 7, 8] - 3[3, 3, 5, 7, 9] - 3[3, 3, 5, 8, 9] - 3[3, 3, 6, 7, 8] - 3[3, 3, 6, 7, 9] - 3[3, 3, 6, 8, 9] + [3, 4, 4, 5, 6] - \\
& [3, 4, 4, 5, 8] + [3, 4, 4, 5, 9] + 3[3, 4, 4, 6, 7] + [3, 4, 4, 6, 9] + [3, 4, 4, 7, 8] + [3, 4, 4, 7, 9] + [3, 4, 4, 8, 9] + [3, 4, 5, 5, 6] + \\
& [3, 4, 5, 5, 8] + [3, 4, 5, 5, 9] + [3, 4, 5, 6, 6] + 4[3, 4, 5, 6, 7] + 4[3, 4, 5, 6, 8] + 4[3, 4, 5, 6, 9] + 4[3, 4, 5, 7, 9] + 3[3, 4, 5, 8, 8] + \\
& 6[3, 4, 5, 8, 9] + [3, 4, 5, 9, 9] + [3, 4, 6, 6, 7] + [3, 4, 6, 6, 9] - [3, 4, 6, 7, 7] + 8[3, 4, 6, 7, 8] + 6[3, 4, 6, 7, 9] + 4[3, 4, 6, 8, 9] + \\
& [3, 4, 6, 9, 9] - [3, 4, 7, 7, 8] + [3, 4, 7, 7, 9] + 3[3, 4, 7, 8, 8] + 4[3, 4, 7, 8, 9] + [3, 4, 7, 9, 9] + [3, 4, 8, 8, 9] + [3, 4, 8, 9, 9] + \\
& [3, 5, 5, 6, 7] + [3, 5, 5, 6, 8] + [3, 5, 5, 7, 8] + [3, 5, 5, 7, 9] + [3, 5, 5, 8, 9] + [3, 5, 6, 6, 7] + [3, 5, 6, 6, 8] + [3, 5, 6, 7, 7] + \\
& 6[3, 5, 6, 7, 8] + 4[3, 5, 6, 7, 9] + [3, 5, 6, 8, 8] + 4[3, 5, 6, 8, 9] - [3, 5, 7, 7, 8] + [3, 5, 7, 7, 9] + 3[3, 5, 7, 8, 8] + 4[3, 5, 7, 8, 9] + \\
& [3, 5, 7, 9, 9] + [3, 5, 8, 8, 9] + [3, 5, 8, 9, 9] + [3, 6, 6, 7, 8] + [3, 6, 6, 7, 9] + [3, 6, 6, 8, 9] - [3, 6, 7, 7, 8] + [3, 6, 7, 7, 9] + \\
& 3[3, 6, 7, 8, 8] + 4[3, 6, 7, 8, 9] + [3, 6, 7, 9, 9] + [3, 6, 8, 8, 9] + [3, 6, 8, 9, 9] = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [0, 0, 1, 2, 3] - [0, 0, 1, 2, 6] - [0, 0, 1, 2, 8] - [0, 0, 1, 2, 9] - [0, 0, 1, 3, 5] - [0, 0, 1, 3, 7] - [0, 0, 1, 3, 9] - [0, 0, 1, 5, 6] - \\
& [0, 0, 1, 5, 8] - [0, 0, 1, 5, 9] - [0, 0, 1, 6, 7] - [0, 0, 1, 6, 9] - [0, 0, 1, 7, 8] - [0, 0, 1, 7, 9] - [0, 0, 1, 8, 9] - [0, 0, 2, 3, 4] - \\
& [0, 0, 2, 3, 7] - [0, 0, 2, 3, 8] - [0, 0, 2, 4, 6] - [0, 0, 2, 4, 8] - [0, 0, 2, 4, 9] - [0, 0, 2, 6, 7] - [0, 0, 2, 6, 8] - [0, 0, 2, 7, 8] - \\
& [0, 0, 2, 7, 9] - [0, 0, 2, 8, 9] - [0, 0, 3, 4, 5] - [0, 0, 3, 4, 7] - [0, 0, 3, 4, 9] - [0, 0, 3, 5, 7] - [0, 0, 3, 5, 8] - [0, 0, 3, 7, 8] - \\
& [0, 0, 3, 7, 9] - [0, 0, 3, 8, 9] - [0, 0, 4, 5, 6] - [0, 0, 4, 5, 8] - [0, 0, 4, 5, 9] - [0, 0, 4, 6, 7] - [0, 0, 4, 6, 9] - [0, 0, 4, 7, 8] - \\
& [0, 0, 4, 7, 9] - [0, 0, 4, 8, 9] - [0, 0, 5, 6, 7] - [0, 0, 5, 6, 8] - [0, 0, 5, 7, 8] - [0, 0, 5, 7, 9] - [0, 0, 5, 8, 9] - [0, 0, 6, 7, 8] - \\
& [0, 0, 6, 7, 9] - [0, 0, 6, 8, 9] - [0, 1, 1, 2, 3] - [0, 1, 1, 2, 6] - [0, 1, 1, 2, 8] - [0, 1, 1, 2, 9] - [0, 1, 1, 3, 5] - [0, 1, 1, 3, 7] - \\
& [0, 1, 1, 3, 9] - [0, 1, 1, 5, 6] - [0, 1, 1, 5, 8] - [0, 1, 1, 5, 9] - [0, 1, 1, 6, 7] - [0, 1, 1, 6, 9] - [0, 1, 1, 7, 8] - [0, 1, 1, 7, 9] - \\
& [0, 1, 1, 8, 9] + [0, 1, 2, 2, 3] + [0, 1, 2, 2, 6] + [0, 1, 2, 2, 8] + [0, 1, 2, 2, 9] + [0, 1, 2, 3, 3] - 4[0, 1, 2, 3, 4] + 4[0, 1, 2, 3, 9] - \\
& 4[0, 1, 2, 4, 6] - 4[0, 1, 2, 4, 8] - 4[0, 1, 2, 4, 9] + [0, 1, 2, 6, 6] - 2[0, 1, 2, 6, 8] + 2[0, 1, 2, 6, 9] + [0, 1, 2, 8, 8] + 2[0, 1, 2, 8, 9] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [0, 1, 2, 9, 9] + [0, 1, 3, 3, 5] + [0, 1, 3, 3, 7] + [0, 1, 3, 3, 9] - 4[0, 1, 3, 4, 5] - 4[0, 1, 3, 4, 7] - 4[0, 1, 3, 4, 9] + [0, 1, 3, 5, 5] - \\
& 2[0, 1, 3, 5, 7] + 2[0, 1, 3, 5, 9] + [0, 1, 3, 7, 7] + 2[0, 1, 3, 7, 9] + [0, 1, 3, 9, 9] - 4[0, 1, 4, 5, 6] - 4[0, 1, 4, 5, 8] - 4[0, 1, 4, 5, 9] - \\
& 4[0, 1, 4, 6, 7] - 4[0, 1, 4, 6, 9] - 4[0, 1, 4, 7, 8] - 4[0, 1, 4, 7, 9] - 4[0, 1, 4, 8, 9] + [0, 1, 5, 5, 6] + [0, 1, 5, 5, 8] + [0, 1, 5, 5, 9] + \\
& [0, 1, 5, 6, 6] - 2[0, 1, 5, 6, 7] - 2[0, 1, 5, 6, 8] + 4[0, 1, 5, 6, 9] - 2[0, 1, 5, 7, 8] - 2[0, 1, 5, 7, 9] + [0, 1, 5, 8, 8] + [0, 1, 5, 9, 9] + \\
& [0, 1, 6, 6, 7] + [0, 1, 6, 6, 9] + [0, 1, 6, 7, 7] - 2[0, 1, 6, 7, 8] - 2[0, 1, 6, 8, 9] + [0, 1, 6, 9, 9] + [0, 1, 7, 7, 8] + [0, 1, 7, 7, 9] + \\
& [0, 1, 7, 8, 8] + 4[0, 1, 7, 8, 9] + [0, 1, 7, 9, 9] + [0, 1, 8, 8, 9] + [0, 1, 8, 9, 9] + [0, 2, 2, 3, 4] + [0, 2, 2, 3, 7] + [0, 2, 2, 3, 8] + \\
& [0, 2, 2, 4, 6] + [0, 2, 2, 4, 8] + [0, 2, 2, 4, 9] + [0, 2, 2, 6, 7] + [0, 2, 2, 6, 8] + [0, 2, 2, 7, 8] + [0, 2, 2, 7, 9] + [0, 2, 2, 8, 9] + \\
& [0, 2, 3, 3, 4] + [0, 2, 3, 3, 7] + [0, 2, 3, 3, 8] - [0, 2, 3, 4, 4] - 2[0, 2, 3, 4, 7] - 2[0, 2, 3, 4, 8] + 4[0, 2, 3, 4, 9] - [0, 2, 3, 7, 7] + \\
& 2[0, 2, 3, 7, 8] + 4[0, 2, 3, 7, 9] - [0, 2, 3, 8, 8] + 4[0, 2, 3, 8, 9] - [0, 2, 4, 4, 6] - [0, 2, 4, 4, 8] - [0, 2, 4, 4, 9] + [0, 2, 4, 6, 6] - \\
& 2[0, 2, 4, 6, 7] + 2[0, 2, 4, 6, 9] - 2[0, 2, 4, 7, 8] - 2[0, 2, 4, 7, 9] + [0, 2, 4, 8, 8] + [0, 2, 4, 9, 9] + [0, 2, 6, 6, 7] + [0, 2, 6, 6, 8] - \\
& [0, 2, 6, 7, 7] + 2[0, 2, 6, 7, 9] - [0, 2, 6, 8, 8] + 2[0, 2, 6, 8, 9] - [0, 2, 7, 7, 8] - [0, 2, 7, 7, 9] + [0, 2, 7, 8, 8] + [0, 2, 7, 9, 9] - \\
& [0, 2, 8, 8, 9] + [0, 2, 8, 9, 9] + [0, 3, 3, 4, 5] + [0, 3, 3, 4, 7] + [0, 3, 3, 4, 9] + [0, 3, 3, 5, 7] + [0, 3, 3, 5, 8] + [0, 3, 3, 7, 8] + \\
& [0, 3, 3, 7, 9] + [0, 3, 3, 8, 9] - [0, 3, 4, 4, 5] - [0, 3, 4, 4, 7] - [0, 3, 4, 4, 9] + [0, 3, 4, 5, 5] - 2[0, 3, 4, 5, 8] + 2[0, 3, 4, 5, 9] + \\
& [0, 3, 4, 7, 7] - 2[0, 3, 4, 7, 8] - 2[0, 3, 4, 8, 9] + [0, 3, 4, 9, 9] + [0, 3, 5, 5, 7] + [0, 3, 5, 5, 8] - [0, 3, 5, 7, 7] + 2[0, 3, 5, 7, 9] - \\
& [0, 3, 5, 8, 8] + 2[0, 3, 5, 8, 9] + [0, 3, 7, 7, 8] - [0, 3, 7, 7, 9] - [0, 3, 7, 8, 8] + [0, 3, 7, 9, 9] - [0, 3, 8, 8, 9] + [0, 3, 8, 9, 9] - \\
& [0, 4, 4, 5, 6] - [0, 4, 4, 5, 8] - [0, 4, 4, 5, 9] - [0, 4, 4, 6, 7] - [0, 4, 4, 6, 9] - [0, 4, 4, 7, 8] - [0, 4, 4, 7, 9] - [0, 4, 4, 8, 9] + \\
& [0, 4, 5, 5, 6] + [0, 4, 5, 5, 8] + [0, 4, 5, 5, 9] + [0, 4, 5, 6, 6] + 4[0, 4, 5, 6, 9] + [0, 4, 5, 8, 8] + 2[0, 4, 5, 8, 9] + [0, 4, 5, 9, 9] + \\
& [0, 4, 6, 6, 7] + [0, 4, 6, 6, 9] + [0, 4, 6, 7, 7] + 2[0, 4, 6, 7, 9] + [0, 4, 6, 9, 9] + [0, 4, 7, 7, 8] + [0, 4, 7, 7, 9] + [0, 4, 7, 8, 8] + \\
& 4[0, 4, 7, 8, 9] + [0, 4, 7, 9, 9] + [0, 4, 8, 8, 9] + [0, 4, 8, 9, 9] + [0, 5, 5, 6, 7] + [0, 5, 5, 6, 8] + [0, 5, 5, 7, 8] + [0, 5, 5, 7, 9] + \\
& [0, 5, 5, 8, 9] + [0, 5, 6, 6, 7] + [0, 5, 6, 6, 8] - [0, 5, 6, 7, 7] + 2[0, 5, 6, 7, 8] + 4[0, 5, 6, 7, 9] - [0, 5, 6, 8, 8] + 4[0, 5, 6, 8, 9] - \\
& [0, 5, 7, 7, 8] - [0, 5, 7, 7, 9] + [0, 5, 7, 8, 8] + [0, 5, 7, 9, 9] - [0, 5, 8, 8, 9] + [0, 5, 8, 9, 9] + [0, 6, 6, 7, 8] + [0, 6, 6, 7, 9] + \\
& [0, 6, 6, 8, 9] + [0, 6, 7, 7, 8] - [0, 6, 7, 7, 9] - [0, 6, 7, 8, 8] + [0, 6, 7, 9, 9] - [0, 6, 8, 8, 9] + [0, 6, 8, 9, 9] - [1, 1, 2, 3, 4] - \\
& [1, 1, 2, 3, 5] - [1, 1, 2, 3, 6] - [1, 1, 2, 4, 6] - [1, 1, 2, 4, 8] - [1, 1, 2, 4, 9] - [1, 1, 2, 5, 6] - [1, 1, 2, 5, 8] - [1, 1, 2, 5, 9] - \\
& [1, 1, 2, 6, 8] - [1, 1, 2, 6, 9] - [1, 1, 3, 4, 5] - [1, 1, 3, 4, 7] - [1, 1, 3, 4, 9] - [1, 1, 3, 5, 6] - [1, 1, 3, 5, 7] - [1, 1, 3, 5, 9] - \\
& [1, 1, 3, 6, 7] - [1, 1, 3, 6, 9] - [1, 1, 4, 5, 6] - [1, 1, 4, 5, 8] - [1, 1, 4, 5, 9] - [1, 1, 4, 6, 7] - [1, 1, 4, 6, 9] - [1, 1, 4, 7, 8] - \\
& [1, 1, 4, 7, 9] - [1, 1, 4, 8, 9] - [1, 1, 5, 6, 7] - [1, 1, 5, 6, 8] - [1, 1, 5, 7, 8] - [1, 1, 5, 7, 9] - [1, 1, 5, 8, 9] - [1, 1, 6, 7, 8] - \\
& [1, 1, 6, 7, 9] - [1, 1, 6, 8, 9] + [1, 2, 2, 3, 4] + [1, 2, 2, 3, 5] + [1, 2, 2, 3, 6] + [1, 2, 2, 4, 6] + [1, 2, 2, 4, 8] + [1, 2, 2, 4, 9] + \\
& [1, 2, 2, 5, 6] + [1, 2, 2, 5, 8] + [1, 2, 2, 5, 9] + [1, 2, 2, 6, 8] + [1, 2, 2, 6, 9] + [1, 2, 3, 3, 4] + [1, 2, 3, 3, 5] + [1, 2, 3, 3, 6] - \\
& [1, 2, 3, 4, 4] - 2[1, 2, 3, 4, 5] - 2[1, 2, 3, 4, 6] + 4[1, 2, 3, 4, 9] - [1, 2, 3, 5, 5] + 2[1, 2, 3, 5, 6] + 4[1, 2, 3, 5, 9] - [1, 2, 3, 6, 6] + \\
& 4[1, 2, 3, 6, 9] - [1, 2, 4, 4, 6] - [1, 2, 4, 4, 8] - [1, 2, 4, 4, 9] - 2[1, 2, 4, 5, 6] - 2[1, 2, 4, 5, 8] - 2[1, 2, 4, 5, 9] + [1, 2, 4, 6, 6] + \\
& [1, 2, 4, 8, 8] + 2[1, 2, 4, 8, 9] + [1, 2, 4, 9, 9] - [1, 2, 5, 5, 6] - [1, 2, 5, 5, 8] - [1, 2, 5, 5, 9] + [1, 2, 5, 6, 6] + [1, 2, 5, 8, 8] + \\
& 2[1, 2, 5, 8, 9] + [1, 2, 5, 9, 9] - [1, 2, 6, 6, 8] - [1, 2, 6, 6, 9] + [1, 2, 6, 8, 8] + 2[1, 2, 6, 8, 9] + [1, 2, 6, 9, 9] + [1, 3, 3, 4, 5] + \\
& [1, 3, 3, 4, 7] + [1, 3, 3, 4, 9] + [1, 3, 3, 5, 6] + [1, 3, 3, 5, 7] + [1, 3, 3, 5, 9] + [1, 3, 3, 6, 7] + [1, 3, 3, 6, 9] - [1, 3, 4, 4, 5] - \\
& [1, 3, 4, 4, 7] - [1, 3, 4, 4, 9] + [1, 3, 4, 5, 5] - 2[1, 3, 4, 5, 6] - 2[1, 3, 4, 6, 7] - 2[1, 3, 4, 6, 9] + [1, 3, 4, 7, 7] + 2[1, 3, 4, 7, 9] + \\
& [1, 3, 4, 9, 9] + [1, 3, 5, 5, 6] - [1, 3, 5, 5, 7] - [1, 3, 5, 5, 9] - [1, 3, 5, 6, 6] + [1, 3, 5, 7, 7] + 2[1, 3, 5, 7, 9] + [1, 3, 5, 9, 9] - \\
& [1, 3, 6, 6, 7] - [1, 3, 6, 6, 9] + [1, 3, 6, 7, 7] + 2[1, 3, 6, 7, 9] + [1, 3, 6, 9, 9] - [1, 4, 4, 5, 6] - [1, 4, 4, 5, 8] - [1, 4, 4, 5, 9] - \\
& [1, 4, 4, 6, 7] - [1, 4, 4, 6, 9] - [1, 4, 4, 7, 8] - [1, 4, 4, 7, 9] - [1, 4, 4, 8, 9] + [1, 4, 5, 5, 6] + [1, 4, 5, 5, 8] + [1, 4, 5, 5, 9] + \\
& [1, 4, 5, 6, 6] + 4[1, 4, 5, 6, 9] + [1, 4, 5, 8, 8] + 2[1, 4, 5, 8, 9] + [1, 4, 5, 9, 9] + [1, 4, 6, 6, 7] + [1, 4, 6, 6, 9] + [1, 4, 6, 7, 7] + \\
& 2[1, 4, 6, 7, 9] + [1, 4, 6, 9, 9] + [1, 4, 7, 7, 8] + [1, 4, 7, 7, 9] + [1, 4, 7, 8, 8] + 4[1, 4, 7, 8, 9] + [1, 4, 7, 9, 9] + [1, 4, 8, 8, 9] + \\
& [1, 4, 8, 9, 9] - [1, 5, 5, 6, 7] + [1, 5, 5, 6, 8] - [1, 5, 5, 7, 8] - [1, 5, 5, 7, 9] - [1, 5, 5, 8, 9] + [1, 5, 6, 6, 7] - [1, 5, 6, 6, 8] + \\
& [1, 5, 6, 7, 7] + 2[1, 5, 6, 7, 8] + [1, 5, 6, 8, 8] + [1, 5, 7, 7, 8] + [1, 5, 7, 7, 9] + [1, 5, 7, 8, 8] + 4[1, 5, 7, 8, 9] + [1, 5, 7, 9, 9] + \\
& [1, 5, 8, 8, 9] + [1, 5, 8, 9, 9] - [1, 6, 6, 7, 8] - [1, 6, 6, 7, 9] - [1, 6, 6, 8, 9] + [1, 6, 7, 7, 8] + [1, 6, 7, 7, 9] + [1, 6, 7, 8, 8] + \\
& 4[1, 6, 7, 8, 9] + [1, 6, 7, 9, 9] + [1, 6, 8, 8, 9] + [1, 6, 8, 9, 9] + [2, 2, 3, 4, 5] + [2, 2, 3, 4, 6] + [2, 2, 3, 4, 7] + [2, 2, 3, 4, 8] + \\
& [2, 2, 3, 5, 7] + [2, 2, 3, 5, 8] + [2, 2, 3, 6, 7] + [2, 2, 3, 6, 8] + [2, 2, 4, 5, 6] + [2, 2, 4, 5, 8] + [2, 2, 4, 5, 9] + [2, 2, 4, 6, 7] + \\
& [2, 2, 4, 6, 9] + [2, 2, 4, 7, 8] + [2, 2, 4, 7, 9] + [2, 2, 4, 8, 9] + [2, 2, 5, 6, 7] + [2, 2, 5, 6, 8] + [2, 2, 5, 7, 8] + [2, 2, 5, 7, 9] + \\
& [2, 2, 5, 8, 9] + [2, 2, 6, 7, 8] + [2, 2, 6, 7, 9] + [2, 2, 6, 8, 9] + [2, 3, 3, 4, 5] + [2, 3, 3, 4, 6] + [2, 3, 3, 4, 7] + [2, 3, 3, 4, 8] + \\
& [2, 3, 3, 5, 7] + [2, 3, 3, 5, 8] + [2, 3, 3, 6, 7] + [2, 3, 3, 6, 8] - [2, 3, 4, 4, 5] - [2, 3, 4, 4, 6] - [2, 3, 4, 4, 7] - [2, 3, 4, 4, 8] - \\
& [2, 3, 4, 5, 5] + 2[2, 3, 4, 5, 6] - 4[2, 3, 4, 5, 7] + 4[2, 3, 4, 5, 9] - [2, 3, 4, 6, 6] - 4[2, 3, 4, 6, 8] + 4[2, 3, 4, 6, 9] - [2, 3, 4, 7, 7] + \\
& 2[2, 3, 4, 7, 8] + 4[2, 3, 4, 7, 9] - [2, 3, 4, 8, 8] + 4[2, 3, 4, 8, 9] - [2, 3, 5, 5, 7] - [2, 3, 5, 5, 8] + 2[2, 3, 5, 6, 7] + 2[2, 3, 5, 6, 8] - \\
& [2, 3, 5, 7, 7] + 2[2, 3, 5, 7, 8] + 4[2, 3, 5, 7, 9] - [2, 3, 5, 8, 8] + 4[2, 3, 5, 8, 9] - [2, 3, 6, 6, 7] - [2, 3, 6, 6, 8] - [2, 3, 6, 7, 7] + \\
& 2[2, 3, 6, 7, 8] + 4[2, 3, 6, 7, 9] - [2, 3, 6, 8, 8] + 4[2, 3, 6, 8, 9] - [2, 4, 4, 5, 6] - [2, 4, 4, 5, 8] - [2, 4, 4, 5, 9] - [2, 4, 4, 6, 7] - \\
& [2, 4, 4, 6, 9] - [2, 4, 4, 7, 8] - [2, 4, 4, 7, 9] - [2, 4, 4, 8, 9] - [2, 4, 5, 5, 6] - [2, 4, 5, 5, 8] - [2, 4, 5, 5, 9] + [2, 4, 5, 6, 6] - \\
& 4[2, 4, 5, 6, 7] - 4[2, 4, 5, 7, 8] - 4[2, 4, 5, 7, 9] + [2, 4, 5, 8, 8] - 2[2, 4, 5, 8, 9] + [2, 4, 5, 9, 9] + [2, 4, 6, 6, 7] - [2, 4, 6, 6, 9] -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [2, 4, 6, 7, 7] - 2[2, 4, 6, 7, 9] - 4[2, 4, 6, 8, 9] + [2, 4, 6, 9, 9] - [2, 4, 7, 7, 8] - [2, 4, 7, 7, 9] + [2, 4, 7, 8, 8] + [2, 4, 7, 9, 9] - \\
& [2, 4, 8, 8, 9] + [2, 4, 8, 9, 9] - [2, 5, 5, 6, 7] - [2, 5, 5, 6, 8] - [2, 5, 5, 7, 8] - [2, 5, 5, 7, 9] - [2, 5, 5, 8, 9] + [2, 5, 6, 6, 7] + \\
& [2, 5, 6, 6, 8] - [2, 5, 6, 7, 7] - 2[2, 5, 6, 7, 8] - [2, 5, 6, 8, 8] - [2, 5, 7, 7, 8] - [2, 5, 7, 7, 9] + [2, 5, 7, 8, 8] + [2, 5, 7, 9, 9] - \\
& [2, 5, 8, 8, 9] + [2, 5, 8, 9, 9] - [2, 6, 6, 7, 8] - [2, 6, 6, 7, 9] - [2, 6, 6, 8, 9] - [2, 6, 7, 7, 8] - [2, 6, 7, 7, 9] + [2, 6, 7, 8, 8] + \\
& [2, 6, 7, 9, 9] - [2, 6, 8, 8, 9] + [2, 6, 8, 9, 9] + [3, 3, 4, 5, 6] + [3, 3, 4, 5, 8] + [3, 3, 4, 5, 9] + [3, 3, 4, 6, 7] + [3, 3, 4, 6, 9] + \\
& [3, 3, 4, 7, 8] + [3, 3, 4, 7, 9] + [3, 3, 4, 8, 9] + [3, 3, 5, 6, 7] + [3, 3, 5, 6, 8] + [3, 3, 5, 7, 8] + [3, 3, 5, 7, 9] + [3, 3, 5, 8, 9] + \\
& [3, 3, 6, 7, 8] + [3, 3, 6, 7, 9] + [3, 3, 6, 8, 9] - [3, 4, 4, 5, 6] - [3, 4, 4, 5, 8] - [3, 4, 4, 5, 9] - [3, 4, 4, 6, 7] - [3, 4, 4, 6, 9] - \\
& [3, 4, 4, 7, 8] - [3, 4, 4, 7, 9] - [3, 4, 4, 8, 9] + [3, 4, 5, 5, 6] + [3, 4, 5, 5, 8] - [3, 4, 5, 5, 9] - [3, 4, 5, 6, 6] - 4[3, 4, 5, 6, 8] - \\
& 4[3, 4, 5, 7, 9] - [3, 4, 5, 8, 8] - 2[3, 4, 5, 8, 9] + [3, 4, 5, 9, 9] - [3, 4, 6, 6, 7] - [3, 4, 6, 6, 9] + [3, 4, 6, 7, 7] - 4[3, 4, 6, 7, 8] - \\
& 2[3, 4, 6, 7, 9] - 4[3, 4, 6, 8, 9] + [3, 4, 6, 9, 9] + [3, 4, 7, 7, 8] - [3, 4, 7, 7, 9] - [3, 4, 7, 8, 8] + [3, 4, 7, 9, 9] - [3, 4, 8, 8, 9] + \\
& [3, 4, 8, 9, 9] + [3, 5, 5, 6, 7] + [3, 5, 5, 6, 8] - [3, 5, 5, 7, 8] - [3, 5, 5, 7, 9] - [3, 5, 5, 8, 9] - [3, 5, 6, 6, 7] - [3, 5, 6, 6, 8] - \\
& [3, 5, 6, 7, 7] - 2[3, 5, 6, 7, 8] - [3, 5, 6, 8, 8] + [3, 5, 7, 7, 8] - [3, 5, 7, 7, 9] - [3, 5, 7, 8, 8] + [3, 5, 7, 9, 9] - [3, 5, 8, 8, 9] + \\
& [3, 5, 8, 9, 9] - [3, 6, 6, 7, 8] - [3, 6, 6, 7, 9] - [3, 6, 6, 8, 9] + [3, 6, 7, 7, 8] - [3, 6, 7, 7, 9] - [3, 6, 7, 8, 8] + [3, 6, 7, 9, 9] - \\
& [3, 6, 8, 8, 9] + [3, 6, 8, 9, 9] = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [0, 0, 1, 2, 3] - [0, 0, 1, 2, 6] - [0, 0, 1, 2, 8] - [0, 0, 1, 2, 9] - [0, 0, 1, 3, 5] - [0, 0, 1, 3, 7] - [0, 0, 1, 3, 9] - [0, 0, 1, 5, 6] - \\
& [0, 0, 1, 5, 8] - [0, 0, 1, 5, 9] - [0, 0, 1, 6, 7] - [0, 0, 1, 6, 9] - [0, 0, 1, 7, 8] - [0, 0, 1, 7, 9] - [0, 0, 1, 8, 9] - [0, 0, 2, 3, 4] - \\
& [0, 0, 2, 3, 7] - [0, 0, 2, 3, 8] - [0, 0, 2, 4, 6] - [0, 0, 2, 4, 8] - [0, 0, 2, 4, 9] - [0, 0, 2, 6, 7] - [0, 0, 2, 6, 8] - [0, 0, 2, 7, 8] - \\
& [0, 0, 2, 7, 9] - [0, 0, 2, 8, 9] - [0, 0, 3, 4, 5] - [0, 0, 3, 4, 7] - [0, 0, 3, 4, 9] - [0, 0, 3, 5, 7] - [0, 0, 3, 5, 8] - [0, 0, 3, 7, 8] - \\
& [0, 0, 3, 7, 9] - [0, 0, 3, 8, 9] - [0, 0, 4, 5, 6] - [0, 0, 4, 5, 8] - [0, 0, 4, 5, 9] - [0, 0, 4, 6, 7] - [0, 0, 4, 6, 9] - [0, 0, 4, 7, 8] - \\
& [0, 0, 4, 7, 9] - [0, 0, 4, 8, 9] - [0, 0, 5, 6, 7] - [0, 0, 5, 6, 8] - [0, 0, 5, 7, 8] - [0, 0, 5, 7, 9] - [0, 0, 5, 8, 9] - [0, 0, 6, 7, 8] - \\
& [0, 0, 6, 7, 9] - [0, 0, 6, 8, 9] + [0, 1, 1, 2, 3] + [0, 1, 1, 2, 6] + [0, 1, 1, 2, 8] + [0, 1, 1, 2, 9] + [0, 1, 1, 3, 5] + [0, 1, 1, 3, 7] + \\
& [0, 1, 1, 3, 9] + [0, 1, 1, 5, 6] + [0, 1, 1, 5, 8] + [0, 1, 1, 5, 9] + [0, 1, 1, 6, 7] + [0, 1, 1, 6, 9] + [0, 1, 1, 7, 8] + [0, 1, 1, 7, 9] + \\
& [0, 1, 1, 8, 9] + [0, 1, 2, 2, 3] + [0, 1, 2, 2, 6] + [0, 1, 2, 2, 8] + [0, 1, 2, 2, 9] - [0, 1, 2, 3, 3] - 4[0, 1, 2, 3, 6] + 4[0, 1, 2, 3, 7] - \\
& [0, 1, 2, 6, 6] + 4[0, 1, 2, 6, 7] - 2[0, 1, 2, 6, 8] - 2[0, 1, 2, 6, 9] + 4[0, 1, 2, 7, 8] + 4[0, 1, 2, 7, 9] - [0, 1, 2, 8, 8] + 2[0, 1, 2, 8, 9] - \\
& [0, 1, 2, 9, 9] - [0, 1, 3, 3, 5] - [0, 1, 3, 3, 7] - [0, 1, 3, 3, 9] + [0, 1, 3, 5, 5] - 4[0, 1, 3, 5, 6] + 2[0, 1, 3, 5, 7] - 2[0, 1, 3, 5, 9] - \\
& 4[0, 1, 3, 6, 7] - 4[0, 1, 3, 6, 9] + [0, 1, 3, 7, 7] + 2[0, 1, 3, 7, 9] + [0, 1, 3, 9, 9] + [0, 1, 5, 5, 6] + [0, 1, 5, 5, 8] + [0, 1, 5, 5, 9] - \\
& [0, 1, 5, 6, 6] + 2[0, 1, 5, 6, 7] - 2[0, 1, 5, 6, 8] + 2[0, 1, 5, 7, 8] + 2[0, 1, 5, 7, 9] - [0, 1, 5, 8, 8] - [0, 1, 5, 9, 9] - [0, 1, 6, 6, 7] - \\
& [0, 1, 6, 6, 9] + [0, 1, 6, 7, 7] - 2[0, 1, 6, 7, 8] - 2[0, 1, 6, 8, 9] + [0, 1, 6, 9, 9] + [0, 1, 7, 7, 8] + [0, 1, 7, 7, 9] - [0, 1, 7, 8, 8] - \\
& [0, 1, 7, 9, 9] - [0, 1, 8, 8, 9] + [0, 1, 8, 9, 9] + [0, 2, 2, 3, 4] + [0, 2, 2, 3, 7] + [0, 2, 2, 3, 8] + [0, 2, 2, 4, 6] + [0, 2, 2, 4, 8] + \\
& [0, 2, 2, 4, 9] + [0, 2, 2, 6, 7] + [0, 2, 2, 6, 8] + [0, 2, 2, 7, 8] + [0, 2, 2, 7, 9] + [0, 2, 2, 8, 9] - [0, 2, 3, 3, 4] - [0, 2, 3, 3, 7] - \\
& [0, 2, 3, 3, 8] + [0, 2, 3, 4, 4] - 4[0, 2, 3, 4, 6] + 2[0, 2, 3, 4, 7] - 2[0, 2, 3, 4, 8] - 4[0, 2, 3, 6, 7] - 4[0, 2, 3, 6, 8] + [0, 2, 3, 7, 7] + \\
& 2[0, 2, 3, 7, 8] + [0, 2, 3, 8, 8] + [0, 2, 4, 4, 6] + [0, 2, 4, 4, 8] + [0, 2, 4, 4, 9] - [0, 2, 4, 6, 6] + 2[0, 2, 4, 6, 7] - 2[0, 2, 4, 6, 9] + \\
& 2[0, 2, 4, 7, 8] + 2[0, 2, 4, 7, 9] - [0, 2, 4, 8, 8] - [0, 2, 4, 9, 9] - [0, 2, 6, 6, 7] - [0, 2, 6, 6, 8] + [0, 2, 6, 7, 7] - 2[0, 2, 6, 7, 9] + \\
& [0, 2, 6, 8, 8] - 2[0, 2, 6, 8, 9] + [0, 2, 7, 7, 8] + [0, 2, 7, 7, 9] - [0, 2, 7, 8, 8] - [0, 2, 7, 9, 9] + [0, 2, 8, 8, 9] - [0, 2, 8, 9, 9] - \\
& [0, 3, 3, 4, 5] - [0, 3, 3, 4, 7] - [0, 3, 3, 4, 9] - [0, 3, 3, 5, 7] - [0, 3, 3, 5, 8] - [0, 3, 3, 7, 8] - [0, 3, 3, 7, 9] - [0, 3, 3, 8, 9] + \\
& [0, 3, 4, 4, 5] + [0, 3, 4, 4, 7] + [0, 3, 4, 4, 9] + [0, 3, 4, 5, 5] - 4[0, 3, 4, 5, 6] + 4[0, 3, 4, 5, 7] - 2[0, 3, 4, 5, 8] - 2[0, 3, 4, 5, 9] - \\
& 4[0, 3, 4, 6, 7] - 4[0, 3, 4, 6, 9] + [0, 3, 4, 7, 7] - 2[0, 3, 4, 7, 8] - 2[0, 3, 4, 8, 9] + [0, 3, 4, 9, 9] + [0, 3, 5, 5, 7] + [0, 3, 5, 5, 8] - \\
& 4[0, 3, 5, 6, 7] - 4[0, 3, 5, 6, 8] + [0, 3, 5, 7, 7] - 2[0, 3, 5, 7, 9] + [0, 3, 5, 8, 8] - 2[0, 3, 5, 8, 9] - 4[0, 3, 6, 7, 8] - 4[0, 3, 6, 7, 9] - \\
& 4[0, 3, 6, 8, 9] + [0, 3, 7, 7, 8] + [0, 3, 7, 7, 9] + [0, 3, 7, 8, 8] + 4[0, 3, 7, 8, 9] + [0, 3, 7, 9, 9] + [0, 3, 8, 8, 9] + [0, 3, 8, 9, 9] + \\
& [0, 4, 4, 5, 6] + [0, 4, 4, 5, 8] + [0, 4, 4, 5, 9] + [0, 4, 4, 6, 7] + [0, 4, 4, 6, 9] + [0, 4, 4, 7, 8] + [0, 4, 4, 7, 9] + [0, 4, 4, 8, 9] + \\
& [0, 4, 5, 5, 6] + [0, 4, 5, 5, 8] + [0, 4, 5, 5, 9] - [0, 4, 5, 6, 6] + 4[0, 4, 5, 6, 7] + 4[0, 4, 5, 7, 8] + 4[0, 4, 5, 7, 9] - [0, 4, 5, 8, 8] + \\
& 2[0, 4, 5, 8, 9] - [0, 4, 5, 9, 9] - [0, 4, 6, 6, 7] - [0, 4, 6, 6, 9] + [0, 4, 6, 7, 7] + 2[0, 4, 6, 7, 9] + [0, 4, 6, 9, 9] + [0, 4, 7, 7, 8] + \\
& [0, 4, 7, 7, 9] - [0, 4, 7, 8, 8] - [0, 4, 7, 9, 9] - [0, 4, 8, 8, 9] + [0, 4, 8, 9, 9] + [0, 5, 5, 6, 7] + [0, 5, 5, 6, 8] + [0, 5, 5, 7, 8] + \\
& [0, 5, 5, 7, 9] + [0, 5, 5, 8, 9] - [0, 5, 6, 6, 7] - [0, 5, 6, 6, 8] + [0, 5, 6, 7, 7] + 2[0, 5, 6, 7, 8] + [0, 5, 6, 8, 8] + [0, 5, 7, 7, 8] + \\
& [0, 5, 7, 7, 9] - [0, 5, 7, 8, 8] - [0, 5, 7, 9, 9] + [0, 5, 8, 8, 9] - [0, 5, 8, 9, 9] - [0, 6, 6, 7, 8] - [0, 6, 6, 7, 9] - [0, 6, 6, 8, 9] + \\
& [0, 6, 7, 7, 8] + [0, 6, 7, 7, 9] + [0, 6, 7, 8, 8] + 4[0, 6, 7, 8, 9] + [0, 6, 7, 9, 9] + [0, 6, 8, 8, 9] + [0, 6, 8, 9, 9] - [1, 1, 2, 3, 4] + \\
& [1, 1, 2, 3, 5] + [1, 1, 2, 3, 6] - [1, 1, 2, 4, 6] - [1, 1, 2, 4, 8] - [1, 1, 2, 4, 9] + [1, 1, 2, 5, 6] + [1, 1, 2, 5, 8] + [1, 1, 2, 5, 9] - \\
& [1, 1, 2, 6, 8] + [1, 1, 2, 6, 9] - [1, 1, 3, 4, 5] - [1, 1, 3, 4, 7] - [1, 1, 3, 4, 9] + [1, 1, 3, 5, 6] - [1, 1, 3, 5, 7] + [1, 1, 3, 5, 9] + \\
& [1, 1, 3, 6, 7] + [1, 1, 3, 6, 9] - [1, 1, 4, 5, 6] - [1, 1, 4, 5, 8] - [1, 1, 4, 5, 9] - [1, 1, 4, 6, 7] - [1, 1, 4, 6, 9] - [1, 1, 4, 7, 8] - \\
& [1, 1, 4, 7, 9] - [1, 1, 4, 8, 9] - [1, 1, 5, 6, 7] - [1, 1, 5, 6, 8] - [1, 1, 5, 7, 8] - [1, 1, 5, 7, 9] - [1, 1, 5, 8, 9] - [1, 1, 6, 7, 8] - \\
& [1, 1, 6, 7, 9] - [1, 1, 6, 8, 9] + [1, 2, 2, 3, 4] - [1, 2, 2, 3, 5] + [1, 2, 2, 3, 6] + [1, 2, 2, 4, 6] + [1, 2, 2, 4, 8] + [1, 2, 2, 4, 9] - \\
& [1, 2, 2, 5, 6] - [1, 2, 2, 5, 8] - [1, 2, 2, 5, 9] + [1, 2, 2, 6, 8] - [1, 2, 2, 6, 9] - [1, 2, 3, 3, 4] - [1, 2, 3, 3, 5] - 3[1, 2, 3, 3, 6] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [1, 2, 3, 4, 4] + 2[1, 2, 3, 4, 5] - 2[1, 2, 3, 4, 6] - 4[1, 2, 3, 4, 8] + [1, 2, 3, 5, 5] - 2[1, 2, 3, 5, 6] - 4[1, 2, 3, 5, 9] + [1, 2, 3, 6, 6] + \\
& 4[1, 2, 3, 6, 7] - 4[1, 2, 3, 6, 8] - 4[1, 2, 3, 6, 9] + [1, 2, 4, 4, 6] + [1, 2, 4, 4, 8] + [1, 2, 4, 4, 9] + 2[1, 2, 4, 5, 6] + 2[1, 2, 4, 5, 8] + \\
& 2[1, 2, 4, 5, 9] - [1, 2, 4, 6, 6] - [1, 2, 4, 8, 8] - 2[1, 2, 4, 8, 9] - [1, 2, 4, 9, 9] + [1, 2, 5, 5, 6] + [1, 2, 5, 5, 8] + [1, 2, 5, 5, 9] - \\
& [1, 2, 5, 6, 6] - [1, 2, 5, 8, 8] - 2[1, 2, 5, 8, 9] - [1, 2, 5, 9, 9] + [1, 2, 6, 6, 8] + [1, 2, 6, 6, 9] - [1, 2, 6, 8, 8] - 2[1, 2, 6, 8, 9] - \\
& [1, 2, 6, 9, 9] - [1, 3, 3, 4, 5] - [1, 3, 3, 4, 7] - [1, 3, 3, 4, 9] - 3[1, 3, 3, 5, 6] - [1, 3, 3, 5, 7] - 3[1, 3, 3, 5, 9] - 3[1, 3, 3, 6, 7] - \\
& 3[1, 3, 3, 6, 9] + [1, 3, 4, 4, 5] + [1, 3, 4, 4, 7] + [1, 3, 4, 4, 9] + [1, 3, 4, 5, 5] - 2[1, 3, 4, 5, 6] + 4[1, 3, 4, 5, 7] - 4[1, 3, 4, 5, 8] - \\
& 2[1, 3, 4, 6, 7] - 2[1, 3, 4, 6, 9] + [1, 3, 4, 7, 7] - 4[1, 3, 4, 7, 8] - 2[1, 3, 4, 7, 9] - 4[1, 3, 4, 8, 9] + [1, 3, 4, 9, 9] + [1, 3, 5, 5, 6] + \\
& [1, 3, 5, 5, 7] + [1, 3, 5, 5, 9] + [1, 3, 5, 6, 6] - 4[1, 3, 5, 6, 8] + 4[1, 3, 5, 6, 9] + [1, 3, 5, 7, 7] - 4[1, 3, 5, 7, 8] - 2[1, 3, 5, 7, 9] - \\
& 4[1, 3, 5, 8, 9] + [1, 3, 5, 9, 9] + [1, 3, 6, 6, 7] + [1, 3, 6, 6, 9] + [1, 3, 6, 7, 7] - 4[1, 3, 6, 7, 8] - 2[1, 3, 6, 7, 9] - 4[1, 3, 6, 8, 9] + \\
& [1, 3, 6, 9, 9] + [1, 4, 4, 5, 6] + [1, 4, 4, 5, 8] + [1, 4, 4, 5, 9] + [1, 4, 4, 6, 7] + [1, 4, 4, 6, 9] + [1, 4, 4, 7, 8] + [1, 4, 4, 7, 9] + \\
& [1, 4, 4, 8, 9] + [1, 4, 5, 5, 6] + [1, 4, 5, 5, 8] + [1, 4, 5, 5, 9] - [1, 4, 5, 6, 6] + 4[1, 4, 5, 6, 7] + 4[1, 4, 5, 7, 8] + 4[1, 4, 5, 7, 9] - \\
& [1, 4, 5, 8, 8] + 2[1, 4, 5, 8, 9] - [1, 4, 5, 9, 9] - [1, 4, 6, 6, 7] - [1, 4, 6, 6, 9] + [1, 4, 6, 7, 7] + 2[1, 4, 6, 7, 9] + [1, 4, 6, 9, 9] + \\
& [1, 4, 7, 7, 8] + [1, 4, 7, 7, 9] - [1, 4, 7, 8, 8] - [1, 4, 7, 9, 9] - [1, 4, 8, 8, 9] + [1, 4, 8, 9, 9] + [1, 5, 5, 6, 7] + [1, 5, 5, 6, 8] + \\
& [1, 5, 5, 7, 8] + [1, 5, 5, 7, 9] + [1, 5, 5, 8, 9] - [1, 5, 6, 6, 7] + [1, 5, 6, 6, 8] + [1, 5, 6, 7, 7] + 2[1, 5, 6, 7, 8] - [1, 5, 6, 8, 8] + \\
& 4[1, 5, 6, 8, 9] + [1, 5, 7, 7, 8] + [1, 5, 7, 7, 9] - [1, 5, 7, 8, 8] - [1, 5, 7, 9, 9] - [1, 5, 8, 8, 9] + [1, 5, 8, 9, 9] + [1, 6, 6, 7, 8] + \\
& [1, 6, 6, 7, 9] + [1, 6, 6, 8, 9] + [1, 6, 7, 7, 8] + [1, 6, 7, 7, 9] - [1, 6, 7, 8, 8] - [1, 6, 7, 9, 9] - [1, 6, 8, 8, 9] + [1, 6, 8, 9, 9] - \\
& [2, 2, 3, 4, 5] + [2, 2, 3, 4, 6] - [2, 2, 3, 4, 7] + [2, 2, 3, 4, 8] - [2, 2, 3, 5, 7] - [2, 2, 3, 5, 8] + [2, 2, 3, 6, 7] + [2, 2, 3, 6, 8] - \\
& [2, 2, 4, 5, 6] - [2, 2, 4, 5, 8] - [2, 2, 4, 5, 9] - [2, 2, 4, 6, 7] - [2, 2, 4, 6, 9] - [2, 2, 4, 7, 8] - [2, 2, 4, 7, 9] - [2, 2, 4, 8, 9] - \\
& [2, 2, 5, 6, 7] - [2, 2, 5, 6, 8] - [2, 2, 5, 7, 8] - [2, 2, 5, 7, 9] - [2, 2, 5, 8, 9] - [2, 2, 6, 7, 8] - [2, 2, 6, 7, 9] - [2, 2, 6, 8, 9] - \\
& [2, 3, 3, 4, 5] - 3[2, 3, 3, 4, 6] - [2, 3, 3, 4, 7] - 3[2, 3, 3, 4, 8] - [2, 3, 3, 5, 7] - [2, 3, 3, 5, 8] - 3[2, 3, 3, 6, 7] - 3[2, 3, 3, 6, 8] + \\
& [2, 3, 4, 4, 5] + [2, 3, 4, 4, 6] + [2, 3, 4, 4, 7] + [2, 3, 4, 4, 8] + [2, 3, 4, 5, 5] - 2[2, 3, 4, 5, 6] + 4[2, 3, 4, 5, 7] - 4[2, 3, 4, 5, 9] + \\
& [2, 3, 4, 6, 6] + 4[2, 3, 4, 6, 8] - 4[2, 3, 4, 6, 9] + [2, 3, 4, 7, 7] - 2[2, 3, 4, 7, 8] - 4[2, 3, 4, 7, 9] + [2, 3, 4, 8, 8] - 4[2, 3, 4, 8, 9] + \\
& [2, 3, 5, 5, 7] + [2, 3, 5, 5, 8] - 2[2, 3, 5, 6, 7] - 2[2, 3, 5, 6, 8] + [2, 3, 5, 7, 7] - 2[2, 3, 5, 7, 8] - 4[2, 3, 5, 7, 9] + [2, 3, 5, 8, 8] - \\
& 4[2, 3, 5, 8, 9] + [2, 3, 6, 6, 7] + [2, 3, 6, 6, 8] + [2, 3, 6, 7, 7] - 2[2, 3, 6, 7, 8] - 4[2, 3, 6, 7, 9] + [2, 3, 6, 8, 8] - 4[2, 3, 6, 8, 9] + \\
& [2, 4, 4, 5, 6] + [2, 4, 4, 5, 8] + [2, 4, 4, 5, 9] + [2, 4, 4, 6, 7] + [2, 4, 4, 6, 9] + [2, 4, 4, 7, 8] + [2, 4, 4, 7, 9] + [2, 4, 4, 8, 9] + \\
& [2, 4, 5, 5, 6] + [2, 4, 5, 5, 8] + [2, 4, 5, 5, 9] - [2, 4, 5, 6, 6] + 4[2, 4, 5, 6, 7] + 4[2, 4, 5, 7, 8] + 4[2, 4, 5, 7, 9] - [2, 4, 5, 8, 8] + \\
& 2[2, 4, 5, 8, 9] - [2, 4, 5, 9, 9] - [2, 4, 6, 6, 7] + [2, 4, 6, 6, 9] + [2, 4, 6, 7, 7] + 2[2, 4, 6, 7, 9] + 4[2, 4, 6, 8, 9] - [2, 4, 6, 9, 9] + \\
& [2, 4, 7, 7, 8] + [2, 4, 7, 7, 9] - [2, 4, 7, 8, 8] - [2, 4, 7, 9, 9] + [2, 4, 8, 8, 9] - [2, 4, 8, 9, 9] + [2, 5, 5, 6, 7] + [2, 5, 5, 6, 8] + \\
& [2, 5, 5, 7, 8] + [2, 5, 5, 7, 9] + [2, 5, 5, 8, 9] - [2, 5, 6, 6, 7] - [2, 5, 6, 6, 8] + [2, 5, 6, 7, 7] + 2[2, 5, 6, 7, 8] + [2, 5, 6, 8, 8] + \\
& [2, 5, 7, 7, 8] + [2, 5, 7, 7, 9] - [2, 5, 7, 8, 8] - [2, 5, 7, 9, 9] + [2, 5, 8, 8, 9] - [2, 5, 8, 9, 9] + [2, 6, 6, 7, 8] + [2, 6, 6, 7, 9] + \\
& [2, 6, 6, 8, 9] + [2, 6, 7, 7, 8] + [2, 6, 7, 7, 9] - [2, 6, 7, 8, 8] - [2, 6, 7, 9, 9] + [2, 6, 8, 8, 9] - [2, 6, 8, 9, 9] - 3[3, 3, 4, 5, 6] - \\
& 3[3, 3, 4, 5, 8] - 3[3, 3, 4, 5, 9] - 3[3, 3, 4, 6, 7] - 3[3, 3, 4, 6, 9] - 3[3, 3, 4, 7, 8] - 3[3, 3, 4, 7, 9] - 3[3, 3, 4, 8, 9] - \\
& 3[3, 3, 5, 6, 7] - 3[3, 3, 5, 6, 8] - 3[3, 3, 5, 7, 8] - 3[3, 3, 5, 7, 9] - 3[3, 3, 5, 8, 9] - 3[3, 3, 6, 7, 8] - 3[3, 3, 6, 7, 9] - \\
& 3[3, 3, 6, 8, 9] + [3, 4, 4, 5, 6] + [3, 4, 4, 5, 8] + [3, 4, 4, 5, 9] + [3, 4, 4, 6, 7] + [3, 4, 4, 6, 9] + [3, 4, 4, 7, 8] + [3, 4, 4, 7, 9] + \\
& [3, 4, 4, 8, 9] + [3, 4, 5, 5, 6] + [3, 4, 5, 5, 8] + [3, 4, 5, 5, 9] + [3, 4, 5, 6, 6] + 4[3, 4, 5, 6, 7] + 4[3, 4, 5, 6, 8] + 4[3, 4, 5, 6, 9] + \\
& 4[3, 4, 5, 7, 8] + 4[3, 4, 5, 7, 9] + [3, 4, 5, 8, 8] + 6[3, 4, 5, 8, 9] + [3, 4, 5, 9, 9] + [3, 4, 6, 6, 7] + [3, 4, 6, 6, 9] + [3, 4, 6, 7, 7] + \\
& 4[3, 4, 6, 7, 8] + 6[3, 4, 6, 7, 9] + 4[3, 4, 6, 8, 9] + [3, 4, 6, 9, 9] + [3, 4, 7, 7, 8] + [3, 4, 7, 7, 9] + [3, 4, 7, 8, 8] + 4[3, 4, 7, 8, 9] + \\
& [3, 4, 7, 9, 9] + [3, 4, 8, 8, 9] + [3, 4, 8, 9, 9] + [3, 5, 5, 6, 7] + [3, 5, 5, 6, 8] + [3, 5, 5, 7, 8] + [3, 5, 5, 7, 9] + [3, 5, 5, 8, 9] + \\
& [3, 5, 6, 6, 7] + [3, 5, 6, 6, 8] + [3, 5, 6, 7, 7] + 6[3, 5, 6, 7, 8] + 4[3, 5, 6, 7, 9] + [3, 5, 6, 8, 8] + 4[3, 5, 6, 8, 9] + [3, 5, 7, 7, 8] + \\
& [3, 5, 7, 7, 9] + [3, 5, 7, 8, 8] + 4[3, 5, 7, 8, 9] + [3, 5, 7, 9, 9] + [3, 5, 8, 8, 9] + [3, 5, 8, 9, 9] + [3, 6, 6, 7, 8] + [3, 6, 6, 7, 9] + \\
& [3, 6, 6, 8, 9] + [3, 6, 7, 7, 8] + [3, 6, 7, 7, 9] + [3, 6, 7, 8, 8] + 4[3, 6, 7, 8, 9] + [3, 6, 7, 9, 9] + [3, 6, 8, 8, 9] + [3, 6, 8, 9, 9] = 0; \\
& [0, 0, 1, 2, 3] - [0, 0, 1, 2, 6] - [0, 0, 1, 2, 8] - [0, 0, 1, 2, 9] - [0, 0, 1, 3, 5] - [0, 0, 1, 3, 7] - [0, 0, 1, 3, 9] - [0, 0, 1, 5, 6] - \\
& [0, 0, 1, 5, 8] - [0, 0, 1, 5, 9] - [0, 0, 1, 6, 7] - [0, 0, 1, 6, 9] - [0, 0, 1, 7, 8] - [0, 0, 1, 7, 9] - [0, 0, 1, 8, 9] - [0, 0, 2, 3, 4] - \\
& [0, 0, 2, 3, 7] - [0, 0, 2, 3, 8] - [0, 0, 2, 4, 6] - [0, 0, 2, 4, 8] - [0, 0, 2, 4, 9] - [0, 0, 2, 6, 7] - [0, 0, 2, 6, 8] - [0, 0, 2, 7, 8] - \\
& [0, 0, 2, 7, 9] - [0, 0, 2, 8, 9] - [0, 0, 3, 4, 5] - [0, 0, 3, 4, 7] - [0, 0, 3, 4, 9] - [0, 0, 3, 5, 7] - [0, 0, 3, 5, 8] - [0, 0, 3, 7, 8] - \\
& [0, 0, 3, 7, 9] - [0, 0, 3, 8, 9] - [0, 0, 4, 5, 6] - [0, 0, 4, 5, 8] - [0, 0, 4, 5, 9] - [0, 0, 4, 6, 7] - [0, 0, 4, 6, 9] - [0, 0, 4, 7, 8] - \\
& [0, 0, 4, 7, 9] - [0, 0, 4, 8, 9] - [0, 0, 5, 6, 7] - [0, 0, 5, 6, 8] - [0, 0, 5, 7, 8] - [0, 0, 5, 7, 9] - [0, 0, 5, 8, 9] - [0, 0, 6, 7, 8] - \\
& [0, 0, 6, 7, 9] - [0, 0, 6, 8, 9] + [0, 1, 1, 2, 3] + [0, 1, 1, 2, 6] + [0, 1, 1, 2, 8] + [0, 1, 1, 2, 9] + [0, 1, 1, 3, 5] + [0, 1, 1, 3, 7] + \\
& [0, 1, 1, 3, 9] + [0, 1, 1, 5, 6] + [0, 1, 1, 5, 8] + [0, 1, 1, 5, 9] + [0, 1, 1, 6, 7] + [0, 1, 1, 6, 9] + [0, 1, 1, 7, 8] + [0, 1, 1, 7, 9] + \\
& [0, 1, 1, 8, 9] + [0, 1, 2, 2, 3] + [0, 1, 2, 2, 6] + [0, 1, 2, 2, 8] + [0, 1, 2, 2, 9] - [0, 1, 2, 3, 3] - 4[0, 1, 2, 3, 6] + 4[0, 1, 2, 3, 7] - \\
& [0, 1, 2, 6, 6] + 4[0, 1, 2, 6, 7] - 2[0, 1, 2, 6, 8] - 2[0, 1, 2, 6, 9] + 4[0, 1, 2, 7, 8] + 4[0, 1, 2, 7, 9] - [0, 1, 2, 8, 8] + 2[0, 1, 2, 8, 9] - \\
& [0, 1, 2, 9, 9] - [0, 1, 3, 3, 5] - [0, 1, 3, 3, 7] - [0, 1, 3, 3, 9] + [0, 1, 3, 5, 5] - 4[0, 1, 3, 5, 6] + 2[0, 1, 3, 5, 7] - 2[0, 1, 3, 5, 9] -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4[0, 1, 3, 6, 7] - 4[0, 1, 3, 6, 9] + [0, 1, 3, 7, 7] + 2[0, 1, 3, 7, 9] + [0, 1, 3, 9, 9] + [0, 1, 5, 5, 6] + [0, 1, 5, 5, 8] + [0, 1, 5, 5, 9] - \\
& [0, 1, 5, 6, 6] + 2[0, 1, 5, 6, 7] - 2[0, 1, 5, 6, 8] + 2[0, 1, 5, 7, 8] + 2[0, 1, 5, 7, 9] - [0, 1, 5, 8, 8] - [0, 1, 5, 9, 9] - [0, 1, 6, 6, 7] - \\
& [0, 1, 6, 6, 9] + [0, 1, 6, 7, 7] - 2[0, 1, 6, 7, 8] - 2[0, 1, 6, 8, 9] + [0, 1, 6, 9, 9] + [0, 1, 7, 7, 8] + [0, 1, 7, 7, 9] - [0, 1, 7, 8, 8] - \\
& [0, 1, 7, 9, 9] - [0, 1, 8, 8, 9] + [0, 1, 8, 9, 9] + [0, 2, 2, 3, 4] + 3[0, 2, 2, 3, 7] + [0, 2, 2, 3, 8] + [0, 2, 2, 4, 6] + [0, 2, 2, 4, 8] + \\
& [0, 2, 2, 4, 9] + 3[0, 2, 2, 6, 7] + [0, 2, 2, 6, 8] + 3[0, 2, 2, 7, 8] + 3[0, 2, 2, 7, 9] + 3[0, 2, 2, 8, 9] - [0, 2, 3, 3, 4] - [0, 2, 3, 3, 7] - \\
& [0, 2, 3, 3, 8] + [0, 2, 3, 4, 4] - 4[0, 2, 3, 4, 6] + 2[0, 2, 3, 4, 7] - 2[0, 2, 3, 4, 8] + 4[0, 2, 3, 5, 7] - 4[0, 2, 3, 6, 7] - 4[0, 2, 3, 6, 8] - \\
& [0, 2, 3, 7, 7] + 2[0, 2, 3, 7, 8] + 4[0, 2, 3, 7, 9] + [0, 2, 3, 8, 8] + [0, 2, 4, 4, 6] + [0, 2, 4, 4, 8] + [0, 2, 4, 4, 9] - [0, 2, 4, 6, 6] + \\
& 2[0, 2, 4, 6, 7] - 2[0, 2, 4, 6, 9] + 2[0, 2, 4, 7, 8] + 2[0, 2, 4, 7, 9] - [0, 2, 4, 8, 8] - [0, 2, 4, 9, 9] + 4[0, 2, 5, 6, 7] + 4[0, 2, 5, 7, 8] + \\
& 4[0, 2, 5, 7, 9] + 4[0, 2, 5, 8, 9] - [0, 2, 6, 6, 7] - [0, 2, 6, 6, 8] - [0, 2, 6, 7, 7] + 2[0, 2, 6, 7, 9] + [0, 2, 6, 8, 8] - 2[0, 2, 6, 8, 9] - \\
& [0, 2, 7, 7, 8] - [0, 2, 7, 7, 9] - [0, 2, 7, 8, 8] - 4[0, 2, 7, 8, 9] - [0, 2, 7, 9, 9] + [0, 2, 8, 8, 9] - 3[0, 2, 8, 9, 9] - [0, 3, 3, 4, 5] - \\
& [0, 3, 3, 4, 7] - [0, 3, 3, 4, 9] - [0, 3, 3, 5, 7] - [0, 3, 3, 5, 8] - [0, 3, 3, 7, 8] - [0, 3, 3, 7, 9] - [0, 3, 3, 8, 9] + [0, 3, 4, 4, 5] + \\
& [0, 3, 4, 4, 7] + [0, 3, 4, 4, 9] + [0, 3, 4, 5, 5] - 4[0, 3, 4, 5, 6] + 4[0, 3, 4, 5, 7] - 2[0, 3, 4, 5, 8] - 2[0, 3, 4, 5, 9] - 4[0, 3, 4, 6, 7] - \\
& 4[0, 3, 4, 6, 9] + [0, 3, 4, 7, 7] - 2[0, 3, 4, 7, 8] - 2[0, 3, 4, 8, 9] + [0, 3, 4, 9, 9] + 3[0, 3, 5, 5, 7] + [0, 3, 5, 5, 8] - 4[0, 3, 5, 6, 7] - \\
& 4[0, 3, 5, 6, 8] - [0, 3, 5, 7, 7] + 2[0, 3, 5, 7, 9] + [0, 3, 5, 8, 8] - 2[0, 3, 5, 8, 9] - 4[0, 3, 6, 7, 8] - 4[0, 3, 6, 7, 9] - 4[0, 3, 6, 8, 9] + \\
& [0, 3, 7, 7, 8] - [0, 3, 7, 7, 9] + [0, 3, 7, 8, 8] + 4[0, 3, 7, 8, 9] + 3[0, 3, 7, 9, 9] + [0, 3, 8, 8, 9] + [0, 3, 8, 9, 9] + [0, 4, 4, 5, 6] + \\
& [0, 4, 4, 5, 8] + [0, 4, 4, 5, 9] + [0, 4, 4, 6, 7] + [0, 4, 4, 6, 9] + [0, 4, 4, 7, 8] + [0, 4, 4, 7, 9] + [0, 4, 4, 8, 9] + [0, 4, 5, 5, 6] + \\
& [0, 4, 5, 5, 8] + [0, 4, 5, 5, 9] - [0, 4, 5, 6, 6] + 4[0, 4, 5, 6, 7] + 4[0, 4, 5, 7, 8] + 4[0, 4, 5, 7, 9] - [0, 4, 5, 8, 8] + 2[0, 4, 5, 8, 9] - \\
& [0, 4, 5, 9, 9] - [0, 4, 6, 6, 7] - [0, 4, 6, 6, 9] + [0, 4, 6, 7, 7] + 2[0, 4, 6, 7, 9] + [0, 4, 6, 9, 9] + [0, 4, 7, 7, 8] + [0, 4, 7, 7, 9] - \\
& [0, 4, 7, 8, 8] - [0, 4, 7, 9, 9] - [0, 4, 8, 8, 9] + [0, 4, 8, 9, 9] + 3[0, 5, 5, 6, 7] + [0, 5, 5, 6, 8] + 3[0, 5, 5, 7, 8] + 3[0, 5, 5, 7, 9] + \\
& 3[0, 5, 5, 8, 9] - [0, 5, 6, 6, 7] - [0, 5, 6, 6, 8] - [0, 5, 6, 7, 7] + 2[0, 5, 6, 7, 8] + 4[0, 5, 6, 7, 9] + [0, 5, 6, 8, 8] - [0, 5, 7, 7, 8] - \\
& [0, 5, 7, 7, 9] - [0, 5, 7, 8, 8] - 4[0, 5, 7, 8, 9] - [0, 5, 7, 9, 9] + [0, 5, 8, 8, 9] - 3[0, 5, 8, 9, 9] - [0, 6, 6, 7, 8] - [0, 6, 6, 7, 9] - \\
& [0, 6, 6, 8, 9] + [0, 6, 7, 7, 8] - [0, 6, 7, 7, 9] + [0, 6, 7, 8, 8] + 4[0, 6, 7, 8, 9] + 3[0, 6, 7, 9, 9] + [0, 6, 8, 8, 9] + [0, 6, 8, 9, 9] - \\
& [1, 1, 2, 3, 4] + [1, 1, 2, 3, 5] + [1, 1, 2, 3, 6] - [1, 1, 2, 4, 6] - [1, 1, 2, 4, 8] - [1, 1, 2, 4, 9] + [1, 1, 2, 5, 6] + [1, 1, 2, 5, 8] + \\
& [1, 1, 2, 5, 9] - [1, 1, 2, 6, 8] + [1, 1, 2, 6, 9] - [1, 1, 3, 4, 5] - [1, 1, 3, 4, 7] - [1, 1, 3, 4, 9] + [1, 1, 3, 5, 6] - [1, 1, 3, 5, 7] + \\
& [1, 1, 3, 5, 9] + [1, 1, 3, 6, 7] + [1, 1, 3, 6, 9] - [1, 1, 4, 5, 6] - [1, 1, 4, 5, 8] - [1, 1, 4, 5, 9] - [1, 1, 4, 6, 7] - [1, 1, 4, 6, 9] - \\
& [1, 1, 4, 7, 8] - [1, 1, 4, 7, 9] - [1, 1, 4, 8, 9] - [1, 1, 5, 6, 7] - [1, 1, 5, 6, 8] - [1, 1, 5, 7, 8] - [1, 1, 5, 7, 9] - [1, 1, 5, 8, 9] - \\
& [1, 1, 6, 7, 8] - [1, 1, 6, 7, 9] - [1, 1, 6, 8, 9] + [1, 2, 2, 3, 4] - [1, 2, 2, 3, 5] + [1, 2, 2, 3, 6] + [1, 2, 2, 4, 6] + [1, 2, 2, 4, 8] + \\
& [1, 2, 2, 4, 9] - [1, 2, 2, 5, 6] - [1, 2, 2, 5, 8] - [1, 2, 2, 5, 9] + [1, 2, 2, 6, 8] - [1, 2, 2, 6, 9] - [1, 2, 3, 3, 4] - [1, 2, 3, 3, 5] - \\
& 3[1, 2, 3, 3, 6] + [1, 2, 3, 4, 4] + 2[1, 2, 3, 4, 5] - 2[1, 2, 3, 4, 6] - 4[1, 2, 3, 4, 8] + [1, 2, 3, 5, 5] - 2[1, 2, 3, 5, 6] - 4[1, 2, 3, 5, 9] + \\
& [1, 2, 3, 6, 6] + 4[1, 2, 3, 6, 7] - 4[1, 2, 3, 6, 8] - 4[1, 2, 3, 6, 9] + [1, 2, 4, 4, 6] + [1, 2, 4, 4, 8] + [1, 2, 4, 4, 9] + 2[1, 2, 4, 5, 6] + \\
& 2[1, 2, 4, 5, 8] + 2[1, 2, 4, 5, 9] - [1, 2, 4, 6, 6] - [1, 2, 4, 8, 8] - 2[1, 2, 4, 8, 9] - [1, 2, 4, 9, 9] + [1, 2, 5, 5, 6] + [1, 2, 5, 5, 8] + \\
& [1, 2, 5, 5, 9] - [1, 2, 5, 6, 6] - [1, 2, 5, 8, 8] - 2[1, 2, 5, 8, 9] - [1, 2, 5, 9, 9] + [1, 2, 6, 6, 8] + [1, 2, 6, 6, 9] - [1, 2, 6, 8, 8] - \\
& 2[1, 2, 6, 8, 9] - [1, 2, 6, 9, 9] - [1, 3, 3, 4, 5] - [1, 3, 3, 4, 7] - [1, 3, 3, 4, 9] - 3[1, 3, 3, 5, 6] - [1, 3, 3, 5, 7] - 3[1, 3, 3, 5, 9] - \\
& 3[1, 3, 3, 6, 7] - 3[1, 3, 3, 6, 9] + [1, 3, 4, 4, 5] + [1, 3, 4, 4, 7] + [1, 3, 4, 4, 9] + [1, 3, 4, 5, 5] - 2[1, 3, 4, 5, 6] + 4[1, 3, 4, 5, 7] - \\
& 4[1, 3, 4, 5, 8] - 2[1, 3, 4, 6, 7] - 2[1, 3, 4, 6, 9] + [1, 3, 4, 7, 7] - 4[1, 3, 4, 7, 8] - 2[1, 3, 4, 7, 9] - 4[1, 3, 4, 8, 9] + \\
& [1, 3, 4, 9, 9] + [1, 3, 5, 5, 6] + [1, 3, 5, 5, 7] + [1, 3, 5, 5, 9] + [1, 3, 5, 6, 6] - 4[1, 3, 5, 6, 8] + 4[1, 3, 5, 6, 9] + [1, 3, 5, 7, 7] - \\
& 4[1, 3, 5, 7, 8] - 2[1, 3, 5, 7, 9] - 4[1, 3, 5, 8, 9] + [1, 3, 5, 9, 9] + [1, 3, 6, 6, 7] + [1, 3, 6, 6, 9] + [1, 3, 6, 7, 7] - 4[1, 3, 6, 7, 8] - \\
& 2[1, 3, 6, 7, 9] - 4[1, 3, 6, 8, 9] + [1, 3, 6, 9, 9] + [1, 4, 4, 5, 6] + [1, 4, 4, 5, 8] + [1, 4, 4, 5, 9] + [1, 4, 4, 6, 7] + [1, 4, 4, 6, 9] + \\
& [1, 4, 4, 7, 8] + [1, 4, 4, 7, 9] + [1, 4, 4, 8, 9] + [1, 4, 5, 5, 6] + [1, 4, 5, 5, 8] + [1, 4, 5, 5, 9] - [1, 4, 5, 6, 6] + 4[1, 4, 5, 6, 7] + \\
& 4[1, 4, 5, 7, 8] + 4[1, 4, 5, 7, 9] - [1, 4, 5, 8, 8] + 2[1, 4, 5, 8, 9] - [1, 4, 5, 9, 9] - [1, 4, 6, 6, 7] - [1, 4, 6, 6, 9] + [1, 4, 6, 7, 7] + \\
& 2[1, 4, 6, 7, 9] + [1, 4, 6, 9, 9] + [1, 4, 7, 7, 8] + [1, 4, 7, 7, 9] - [1, 4, 7, 8, 8] - [1, 4, 7, 9, 9] - [1, 4, 8, 8, 9] + [1, 4, 8, 9, 9] + \\
& [1, 5, 5, 6, 7] + [1, 5, 5, 6, 8] + [1, 5, 5, 7, 8] + [1, 5, 5, 7, 9] + [1, 5, 5, 8, 9] - [1, 5, 6, 6, 7] + [1, 5, 6, 6, 8] + [1, 5, 6, 7, 7] + \\
& 2[1, 5, 6, 7, 8] - [1, 5, 6, 8, 8] + 4[1, 5, 6, 8, 9] + [1, 5, 7, 7, 8] + [1, 5, 7, 7, 9] - [1, 5, 7, 8, 8] - [1, 5, 7, 9, 9] - [1, 5, 8, 8, 9] + \\
& [1, 5, 8, 9, 9] + [1, 6, 6, 7, 8] + [1, 6, 6, 7, 9] + [1, 6, 6, 8, 9] + [1, 6, 7, 7, 8] + [1, 6, 7, 7, 9] - [1, 6, 7, 8, 8] - [1, 6, 7, 9, 9] - \\
& [1, 6, 8, 8, 9] + [1, 6, 8, 9, 9] + [2, 2, 3, 4, 5] + [2, 2, 3, 4, 6] + [2, 2, 3, 4, 7] + [2, 2, 3, 4, 8] + [2, 2, 3, 5, 7] - [2, 2, 3, 5, 8] + \\
& 3[2, 2, 3, 6, 7] + [2, 2, 3, 6, 8] + [2, 2, 4, 5, 6] + [2, 2, 4, 5, 8] + [2, 2, 4, 5, 9] + [2, 2, 4, 6, 7] + [2, 2, 4, 6, 9] + [2, 2, 4, 7, 8] + \\
& [2, 2, 4, 7, 9] + [2, 2, 4, 8, 9] + [2, 2, 5, 6, 7] + [2, 2, 5, 6, 8] + [2, 2, 5, 7, 8] + [2, 2, 5, 7, 9] + [2, 2, 5, 8, 9] + [2, 2, 6, 7, 8] + \\
& [2, 2, 6, 7, 9] + [2, 2, 6, 8, 9] - [2, 3, 3, 4, 5] - 3[2, 3, 3, 4, 6] - [2, 3, 3, 4, 7] - 3[2, 3, 3, 4, 8] - [2, 3, 3, 5, 7] - [2, 3, 3, 5, 8] - \\
& 3[2, 3, 3, 6, 7] - 3[2, 3, 3, 6, 8] + [2, 3, 4, 4, 5] + [2, 3, 4, 4, 6] + [2, 3, 4, 4, 7] + [2, 3, 4, 4, 8] - [2, 3, 4, 5, 5] - 2[2, 3, 4, 5, 6] + \\
& [2, 3, 4, 6, 6] + 4[2, 3, 4, 6, 8] - 4[2, 3, 4, 6, 9] - [2, 3, 4, 7, 7] - 2[2, 3, 4, 7, 8] + [2, 3, 4, 8, 8] - 4[2, 3, 4, 8, 9] + [2, 3, 5, 5, 7] + \\
& [2, 3, 5, 5, 8] + 2[2, 3, 5, 6, 7] - 2[2, 3, 5, 6, 8] - [2, 3, 5, 7, 7] - 2[2, 3, 5, 7, 8] + [2, 3, 5, 8, 8] - 4[2, 3, 5, 8, 9] + [2, 3, 6, 6, 7] + \\
& [2, 3, 6, 6, 8] - [2, 3, 6, 7, 7] - 2[2, 3, 6, 7, 8] + [2, 3, 6, 8, 8] - 4[2, 3, 6, 8, 9] + [2, 4, 4, 5, 6] + [2, 4, 4, 5, 8] + [2, 4, 4, 5, 9] + \\
& [2, 4, 4, 6, 7] + [2, 4, 4, 6, 9] + [2, 4, 4, 7, 8] + [2, 4, 4, 7, 9] + [2, 4, 4, 8, 9] - [2, 4, 5, 5, 6] - [2, 4, 5, 5, 8] - [2, 4, 5, 5, 9] -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [2, 4, 5, 6, 6] - 4[2, 4, 5, 6, 9] - [2, 4, 5, 8, 8] - 2[2, 4, 5, 8, 9] - [2, 4, 5, 9, 9] - [2, 4, 6, 6, 7] + [2, 4, 6, 6, 9] - [2, 4, 6, 7, 7] - \\
& 2[2, 4, 6, 7, 9] + 4[2, 4, 6, 8, 9] - 3[2, 4, 6, 9, 9] - [2, 4, 7, 7, 8] - [2, 4, 7, 7, 9] - [2, 4, 7, 8, 8] - 4[2, 4, 7, 8, 9] - [2, 4, 7, 9, 9] + \\
& [2, 4, 8, 8, 9] - 3[2, 4, 8, 9, 9] + [2, 5, 5, 6, 7] - [2, 5, 5, 6, 8] + [2, 5, 5, 7, 8] + [2, 5, 5, 7, 9] + [2, 5, 5, 8, 9] - [2, 5, 6, 6, 7] - \\
& [2, 5, 6, 6, 8] - [2, 5, 6, 7, 7] - 2[2, 5, 6, 7, 8] + [2, 5, 6, 8, 8] - 4[2, 5, 6, 8, 9] - [2, 5, 7, 7, 8] - [2, 5, 7, 7, 9] - [2, 5, 7, 8, 8] - \\
& 4[2, 5, 7, 8, 9] - [2, 5, 7, 9, 9] + [2, 5, 8, 8, 9] - 3[2, 5, 8, 9, 9] + [2, 6, 6, 7, 8] + [2, 6, 6, 7, 9] + [2, 6, 6, 8, 9] - [2, 6, 7, 7, 8] - \\
& [2, 6, 7, 7, 9] - [2, 6, 7, 8, 8] - 4[2, 6, 7, 8, 9] - [2, 6, 7, 9, 9] + [2, 6, 8, 8, 9] - 3[2, 6, 8, 9, 9] - 3[3, 3, 4, 5, 6] - 3[3, 3, 4, 5, 8] - \\
& 3[3, 3, 4, 5, 9] - 3[3, 3, 4, 6, 7] - 3[3, 3, 4, 6, 9] - 3[3, 3, 4, 7, 8] - 3[3, 3, 4, 7, 9] - 3[3, 3, 4, 8, 9] - 3[3, 3, 5, 6, 7] - \\
& 3[3, 3, 5, 6, 8] - 3[3, 3, 5, 7, 8] - 3[3, 3, 5, 7, 9] - 3[3, 3, 5, 8, 9] - 3[3, 3, 6, 7, 8] - 3[3, 3, 6, 7, 9] - 3[3, 3, 6, 8, 9] + \\
& [3, 4, 4, 5, 6] + [3, 4, 4, 5, 8] + [3, 4, 4, 5, 9] + [3, 4, 4, 6, 7] + [3, 4, 4, 6, 9] + [3, 4, 4, 7, 8] + [3, 4, 4, 7, 9] + [3, 4, 4, 8, 9] + \\
& [3, 4, 5, 5, 6] + [3, 4, 5, 5, 8] - [3, 4, 5, 5, 9] + [3, 4, 5, 6, 6] + 4[3, 4, 5, 6, 7] + 4[3, 4, 5, 6, 8] + 4[3, 4, 5, 6, 9] + 4[3, 4, 5, 7, 8] + \\
& [3, 4, 5, 8, 8] + 6[3, 4, 5, 8, 9] + 3[3, 4, 5, 9, 9] + [3, 4, 6, 6, 7] + [3, 4, 6, 6, 9] + [3, 4, 6, 7, 7] + 4[3, 4, 6, 7, 8] + 6[3, 4, 6, 7, 9] + \\
& 4[3, 4, 6, 8, 9] + [3, 4, 6, 9, 9] + [3, 4, 7, 7, 8] - [3, 4, 7, 7, 9] + [3, 4, 7, 8, 8] + 4[3, 4, 7, 8, 9] + 3[3, 4, 7, 9, 9] + [3, 4, 8, 8, 9] + \\
& [3, 4, 8, 9, 9] + 3[3, 5, 5, 6, 7] + [3, 5, 5, 6, 8] + [3, 5, 5, 7, 8] + [3, 5, 5, 7, 9] + [3, 5, 5, 8, 9] + [3, 5, 6, 6, 7] + [3, 5, 6, 6, 8] - \\
& [3, 5, 6, 7, 7] + 6[3, 5, 6, 7, 8] + 8[3, 5, 6, 7, 9] + [3, 5, 6, 8, 8] + 4[3, 5, 6, 8, 9] + [3, 5, 7, 7, 8] - [3, 5, 7, 7, 9] + [3, 5, 7, 8, 8] + \\
& 4[3, 5, 7, 8, 9] + 3[3, 5, 7, 9, 9] + [3, 5, 8, 8, 9] + [3, 5, 8, 9, 9] + [3, 6, 6, 7, 8] + [3, 6, 6, 7, 9] + [3, 6, 6, 8, 9] + [3, 6, 7, 7, 8] - \\
& [3, 6, 7, 7, 9] + [3, 6, 7, 8, 8] + 4[3, 6, 7, 8, 9] + 3[3, 6, 7, 9, 9] + [3, 6, 8, 8, 9] + [3, 6, 8, 9, 9] = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [0, 0, 1, 2, 3] - [0, 1, 1, 2, 3] - [0, 1, 1, 2, 6] - [0, 1, 1, 3, 5] + [0, 0, 1, 2, 6] + [0, 0, 1, 3, 5] + [1, 2, 2, 3, 5] - [1, 1, 2, 3, 5] + \\
& [1, 2, 3, 3, 6] - [1, 1, 2, 3, 6] - [0, 1, 1, 2, 8] - [0, 1, 1, 3, 7] - [0, 1, 1, 5, 6] + [0, 0, 1, 2, 8] + [0, 0, 1, 3, 7] + [0, 0, 1, 5, 6] - \\
& [0, 2, 2, 3, 7] + [0, 0, 2, 3, 7] - [0, 2, 3, 3, 8] + [1, 2, 2, 5, 6] + [0, 0, 2, 3, 8] - [1, 1, 2, 5, 6] + [1, 3, 3, 5, 6] - [1, 1, 3, 5, 6] - \\
& [0, 1, 1, 2, 9] - [0, 1, 1, 5, 8] - [0, 1, 1, 6, 7] + [0, 0, 1, 2, 9] + [0, 0, 1, 5, 8] + [0, 0, 1, 6, 7] - [0, 1, 1, 3, 9] - [0, 2, 2, 6, 7] + \\
& [0, 0, 1, 3, 9] + [0, 0, 2, 6, 7] - [0, 3, 3, 5, 8] + [1, 2, 2, 5, 8] + [0, 0, 3, 5, 8] - [1, 1, 2, 5, 8] + [1, 3, 3, 6, 7] - [1, 1, 3, 6, 7] - \\
& [2, 3, 3, 5, 8] + [2, 3, 3, 6, 7] + [2, 2, 3, 5, 8] - [2, 2, 3, 6, 7] - [0, 1, 1, 5, 9] - [0, 1, 1, 7, 8] + [0, 0, 1, 5, 9] + [0, 0, 1, 7, 8] - \\
& [0, 1, 1, 6, 9] - [0, 2, 2, 7, 8] + [0, 0, 1, 6, 9] + [0, 0, 2, 7, 8] - [0, 3, 3, 7, 8] + [1, 2, 2, 5, 9] + [0, 0, 3, 7, 8] - [1, 1, 2, 5, 9] + \\
& [1, 2, 2, 6, 9] + [1, 3, 3, 5, 9] - [1, 1, 2, 6, 9] - [1, 1, 3, 5, 9] + [1, 3, 3, 6, 9] - [1, 1, 3, 6, 9] - [0, 1, 1, 7, 9] + [0, 0, 1, 7, 9] - \\
& [0, 1, 1, 8, 9] - [0, 2, 2, 7, 9] + [0, 0, 1, 8, 9] + [0, 0, 2, 7, 9] - [0, 2, 2, 8, 9] - [0, 3, 3, 7, 9] + [0, 0, 2, 8, 9] + [0, 0, 3, 7, 9] - \\
& [0, 3, 3, 8, 9] + [0, 0, 3, 8, 9] + 2[0, 1, 2, 3, 5] + 2[0, 1, 2, 3, 6] - 2[0, 1, 2, 3, 7] + 2[0, 1, 2, 5, 6] - 2[0, 1, 2, 3, 8] + 2[0, 1, 3, 5, 6] + \\
& 2[1, 2, 3, 5, 6] + 2[0, 1, 2, 5, 8] - 2[0, 1, 2, 6, 7] - 2[0, 1, 3, 5, 8] + 2[0, 1, 3, 6, 7] + 2[0, 2, 3, 5, 8] + 2[0, 2, 3, 6, 7] - \\
& 2[1, 2, 3, 5, 8] - 2[1, 2, 3, 6, 7] + 2[0, 1, 2, 5, 9] - 2[0, 1, 2, 7, 8] + 2[0, 1, 2, 6, 9] + 2[0, 1, 3, 5, 9] - 2[0, 1, 3, 7, 8] + \\
& 2[0, 1, 3, 6, 9] - 2[0, 2, 3, 7, 8] + 2[1, 2, 3, 5, 9] + 2[1, 2, 3, 6, 9] - 2[0, 1, 2, 7, 9] - 2[0, 1, 2, 8, 9] - 2[0, 1, 3, 7, 9] - \\
& 2[0, 1, 3, 8, 9] - 2[0, 2, 3, 7, 9] - 2[0, 2, 3, 8, 9] = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [0, 0, 2, 3, 4] - [0, 2, 3, 4, 4] - [0, 2, 4, 4, 6] - [0, 3, 4, 4, 5] + [0, 0, 2, 4, 6] + [0, 0, 3, 4, 5] + [2, 3, 4, 5, 5] - [2, 3, 4, 4, 5] + \\
& [2, 3, 4, 6, 6] - [2, 3, 4, 4, 6] - [0, 2, 4, 4, 8] - [0, 3, 4, 4, 7] - [0, 4, 4, 5, 6] + [0, 0, 2, 4, 8] + [0, 0, 3, 4, 7] + [0, 0, 4, 5, 6] - \\
& [0, 3, 5, 5, 7] + [0, 0, 3, 5, 7] - [0, 2, 6, 6, 8] + [2, 4, 5, 5, 6] - [2, 4, 4, 5, 6] + [0, 0, 2, 6, 8] + [3, 4, 5, 6, 6] - [3, 4, 4, 5, 6] - \\
& [0, 2, 4, 4, 9] - [0, 4, 4, 5, 8] - [0, 4, 4, 6, 7] + [0, 0, 2, 4, 9] + [0, 0, 4, 5, 8] + [0, 0, 4, 6, 7] - [0, 3, 4, 4, 9] - [0, 5, 5, 6, 7] + \\
& [0, 0, 3, 4, 9] + [0, 0, 5, 6, 7] - [0, 5, 6, 6, 8] + [2, 4, 5, 5, 8] - [2, 4, 4, 5, 8] + [0, 0, 5, 6, 8] + [3, 4, 6, 6, 7] - [3, 4, 4, 6, 7] - \\
& [2, 5, 6, 6, 8] + [2, 5, 5, 6, 8] + [3, 5, 6, 6, 7] - [3, 5, 5, 6, 7] - [0, 4, 4, 5, 9] - [0, 4, 4, 7, 8] + [0, 0, 4, 5, 9] + [0, 0, 4, 7, 8] - \\
& [0, 4, 4, 6, 9] - [0, 5, 5, 7, 8] + [0, 0, 4, 6, 9] + [0, 0, 5, 7, 8] - [0, 6, 6, 7, 8] + [2, 4, 5, 5, 9] - [2, 4, 4, 5, 9] + [0, 0, 6, 7, 8] + \\
& [2, 4, 6, 6, 9] - [2, 4, 4, 6, 9] + [3, 4, 5, 5, 9] - [3, 4, 4, 5, 9] + [3, 4, 6, 6, 9] - [3, 4, 4, 6, 9] - [0, 4, 4, 7, 9] + [0, 0, 4, 7, 9] - \\
& [0, 4, 4, 8, 9] - [0, 5, 5, 7, 9] + [0, 0, 4, 8, 9] + [0, 0, 5, 7, 9] - [0, 5, 5, 8, 9] - [0, 6, 6, 7, 9] + [0, 0, 5, 8, 9] + [0, 0, 6, 7, 9] - \\
& [0, 6, 6, 8, 9] + [0, 0, 6, 8, 9] + 2[0, 2, 3, 4, 5] + 2[0, 2, 3, 4, 6] + 2[0, 2, 4, 5, 6] + 2[0, 3, 4, 5, 6] + 2[2, 3, 4, 5, 6] + 2[0, 2, 4, 5, 8] - \\
& 2[0, 3, 4, 5, 7] - 2[0, 2, 4, 6, 8] + 2[0, 3, 4, 6, 7] + 2[0, 2, 5, 6, 8] + 2[0, 3, 5, 6, 7] + 2[0, 2, 4, 5, 9] - 2[0, 4, 5, 6, 7] + \\
& 2[0, 2, 4, 6, 9] + 2[0, 3, 4, 5, 9] - 2[0, 4, 5, 6, 8] + 2[0, 3, 4, 6, 9] - 2[2, 4, 5, 6, 8] - 2[3, 4, 5, 6, 7] - 2[0, 4, 5, 7, 8] - \\
& 2[0, 4, 6, 7, 8] - 2[0, 5, 6, 7, 8] + 2[2, 4, 5, 6, 9] + 2[3, 4, 5, 6, 9] - 2[0, 4, 5, 7, 9] - 2[0, 4, 5, 8, 9] - 2[0, 4, 6, 7, 9] - \\
& 2[0, 4, 6, 8, 9] - 2[0, 5, 6, 7, 9] - 2[0, 5, 6, 8, 9] = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -[0, 0, 1, 2, 3] - [0, 0, 1, 2, 6] - [0, 0, 1, 2, 8] - [0, 0, 1, 2, 9] - [0, 0, 1, 3, 5] - [0, 0, 1, 3, 7] - [0, 0, 1, 3, 9] - [0, 0, 1, 5, 6] - \\
& [0, 0, 1, 5, 8] - [0, 0, 1, 5, 9] - [0, 0, 1, 6, 7] - [0, 0, 1, 6, 9] - [0, 0, 1, 7, 8] - [0, 0, 1, 7, 9] - [0, 0, 1, 8, 9] - [0, 0, 2, 3, 4] - \\
& [0, 0, 2, 3, 7] - [0, 0, 2, 3, 8] - [0, 0, 2, 4, 6] - [0, 0, 2, 4, 8] - [0, 0, 2, 4, 9] - [0, 0, 2, 6, 7] - [0, 0, 2, 6, 8] - [0, 0, 2, 7, 8] - \\
& [0, 0, 2, 7, 9] - [0, 0, 2, 8, 9] - [0, 0, 3, 4, 5] - [0, 0, 3, 4, 7] - [0, 0, 3, 4, 9] - [0, 0, 3, 5, 7] - [0, 0, 3, 5, 8] - [0, 0, 3, 7, 8] - \\
& [0, 0, 3, 7, 9] - [0, 0, 3, 8, 9] - [0, 0, 4, 5, 6] - [0, 0, 4, 5, 8] - [0, 0, 4, 5, 9] - [0, 0, 4, 6, 7] - [0, 0, 4, 6, 9] - [0, 0, 4, 7, 8] - \\
& [0, 0, 4, 7, 9] - [0, 0, 4, 8, 9] - [0, 0, 5, 6, 7] - [0, 0, 5, 6, 8] - [0, 0, 5, 7, 8] - [0, 0, 5, 7, 9] - [0, 0, 5, 8, 9] - [0, 0, 6, 7, 8] - \\
& [0, 0, 6, 7, 9] - [0, 0, 6, 8, 9] + [0, 1, 1, 2, 3] + [0, 1, 1, 2, 6] + [0, 1, 1, 2, 8] + [0, 1, 1, 2, 9] + [0, 1, 1, 3, 5] + [0, 1, 1, 3, 7] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [0, 1, 1, 3, 9] + [0, 1, 1, 5, 6] + [0, 1, 1, 5, 8] + [0, 1, 1, 5, 9] + [0, 1, 1, 6, 7] + [0, 1, 1, 6, 9] + [0, 1, 1, 7, 8] + [0, 1, 1, 7, 9] + \\
& [0, 1, 1, 8, 9] - [0, 1, 2, 2, 3] - [0, 1, 2, 2, 6] - [0, 1, 2, 2, 8] - [0, 1, 2, 2, 9] + [0, 1, 2, 3, 3] - 4[0, 1, 2, 3, 5] + 4[0, 1, 2, 3, 8] - \\
& 4[0, 1, 2, 5, 6] - 4[0, 1, 2, 5, 8] - 4[0, 1, 2, 5, 9] + [0, 1, 2, 6, 6] + 2[0, 1, 2, 6, 8] - 2[0, 1, 2, 6, 9] + [0, 1, 2, 8, 8] + 2[0, 1, 2, 8, 9] + \\
& [0, 1, 2, 9, 9] + [0, 1, 3, 3, 5] + [0, 1, 3, 3, 7] + [0, 1, 3, 3, 9] - [0, 1, 3, 5, 5] - 2[0, 1, 3, 5, 7] + 4[0, 1, 3, 5, 8] - 2[0, 1, 3, 5, 9] - \\
& [0, 1, 3, 7, 7] + 4[0, 1, 3, 7, 8] + 2[0, 1, 3, 7, 9] + 4[0, 1, 3, 8, 9] - [0, 1, 3, 9, 9] - [0, 1, 5, 5, 6] - [0, 1, 5, 5, 8] - [0, 1, 5, 5, 9] + \\
& [0, 1, 5, 6, 6] - 2[0, 1, 5, 6, 7] + 2[0, 1, 5, 6, 8] - 2[0, 1, 5, 7, 8] - 2[0, 1, 5, 7, 9] + [0, 1, 5, 8, 8] + [0, 1, 5, 9, 9] + [0, 1, 6, 6, 7] + \\
& [0, 1, 6, 6, 9] - [0, 1, 6, 7, 7] + 2[0, 1, 6, 7, 8] + 2[0, 1, 6, 8, 9] - [0, 1, 6, 9, 9] - [0, 1, 7, 7, 8] - [0, 1, 7, 7, 9] + [0, 1, 7, 8, 8] + \\
& [0, 1, 7, 9, 9] + [0, 1, 8, 8, 9] - [0, 1, 8, 9, 9] - [0, 2, 2, 3, 4] - [0, 2, 2, 3, 7] - [0, 2, 2, 3, 8] - [0, 2, 2, 4, 6] - [0, 2, 2, 4, 8] - \\
& [0, 2, 2, 4, 9] - [0, 2, 2, 6, 7] - [0, 2, 2, 6, 8] - [0, 2, 2, 7, 8] - [0, 2, 2, 7, 9] - [0, 2, 2, 8, 9] + [0, 2, 3, 3, 4] + [0, 2, 3, 3, 7] + \\
& [0, 2, 3, 3, 8] + [0, 2, 3, 4, 4] - 4[0, 2, 3, 4, 5] - 2[0, 2, 3, 4, 7] + 2[0, 2, 3, 4, 8] - 4[0, 2, 3, 5, 7] - 4[0, 2, 3, 5, 8] + [0, 2, 3, 7, 7] + \\
& 2[0, 2, 3, 7, 8] + [0, 2, 3, 8, 8] + [0, 2, 4, 4, 6] + [0, 2, 4, 4, 8] + [0, 2, 4, 4, 9] - 4[0, 2, 4, 5, 6] - 4[0, 2, 4, 5, 8] - 4[0, 2, 4, 5, 9] + \\
& [0, 2, 4, 6, 6] - 2[0, 2, 4, 6, 7] + 4[0, 2, 4, 6, 8] - 2[0, 2, 4, 6, 9] - 2[0, 2, 4, 7, 8] - 2[0, 2, 4, 7, 9] + [0, 2, 4, 8, 8] + [0, 2, 4, 9, 9] - \\
& 4[0, 2, 5, 6, 7] - 4[0, 2, 5, 6, 8] - 4[0, 2, 5, 7, 8] - 4[0, 2, 5, 7, 9] - 4[0, 2, 5, 8, 9] + [0, 2, 6, 6, 7] + [0, 2, 6, 6, 8] + [0, 2, 6, 7, 7] - \\
& 2[0, 2, 6, 7, 9] + [0, 2, 6, 8, 8] - 2[0, 2, 6, 8, 9] + [0, 2, 7, 7, 8] + [0, 2, 7, 7, 9] + [0, 2, 7, 8, 8] + 4[0, 2, 7, 8, 9] + [0, 2, 7, 9, 9] + \\
& [0, 2, 8, 8, 9] + [0, 2, 8, 9, 9] + [0, 3, 3, 4, 5] + [0, 3, 3, 4, 7] + [0, 3, 3, 4, 9] + [0, 3, 3, 5, 7] + [0, 3, 3, 5, 8] + [0, 3, 3, 7, 8] + \\
& [0, 3, 3, 7, 9] + [0, 3, 3, 8, 9] + [0, 3, 4, 4, 5] + [0, 3, 4, 4, 7] + [0, 3, 4, 4, 9] - [0, 3, 4, 5, 5] + 2[0, 3, 4, 5, 8] - 2[0, 3, 4, 5, 9] - \\
& [0, 3, 4, 7, 7] + 2[0, 3, 4, 7, 8] + 2[0, 3, 4, 8, 9] - [0, 3, 4, 9, 9] - [0, 3, 5, 5, 7] - [0, 3, 5, 5, 8] + [0, 3, 5, 7, 7] - 2[0, 3, 5, 7, 9] + \\
& [0, 3, 5, 8, 8] - 2[0, 3, 5, 8, 9] - [0, 3, 7, 7, 8] + [0, 3, 7, 7, 9] + [0, 3, 7, 8, 8] - [0, 3, 7, 9, 9] + [0, 3, 8, 8, 9] - [0, 3, 8, 9, 9] + \\
& [0, 4, 4, 5, 6] + [0, 4, 4, 5, 8] + [0, 4, 4, 5, 9] + [0, 4, 4, 6, 7] + [0, 4, 4, 6, 9] + [0, 4, 4, 7, 8] + [0, 4, 4, 7, 9] + [0, 4, 4, 8, 9] - \\
& [0, 4, 5, 5, 6] - [0, 4, 5, 5, 8] - [0, 4, 5, 5, 9] + [0, 4, 5, 6, 6] + 4[0, 4, 5, 6, 8] + [0, 4, 5, 8, 8] + 2[0, 4, 5, 8, 9] + [0, 4, 5, 9, 9] + \\
& [0, 4, 6, 6, 7] + [0, 4, 6, 6, 9] - [0, 4, 6, 7, 7] + 4[0, 4, 6, 7, 8] + 2[0, 4, 6, 7, 9] + 4[0, 4, 6, 8, 9] - [0, 4, 6, 9, 9] - [0, 4, 7, 7, 8] - \\
& [0, 4, 7, 7, 9] + [0, 4, 7, 8, 8] + [0, 4, 7, 9, 9] + [0, 4, 8, 8, 9] - [0, 4, 8, 9, 9] - [0, 5, 5, 6, 7] - [0, 5, 5, 6, 8] - [0, 5, 5, 7, 8] - \\
& [0, 5, 5, 7, 9] - [0, 5, 5, 8, 9] + [0, 5, 6, 6, 7] + [0, 5, 6, 6, 8] + [0, 5, 6, 7, 7] + 2[0, 5, 6, 7, 8] + [0, 5, 6, 8, 8] + [0, 5, 7, 7, 8] + \\
& [0, 5, 7, 7, 9] + [0, 5, 7, 8, 8] + 4[0, 5, 7, 8, 9] + [0, 5, 7, 9, 9] + [0, 5, 8, 8, 9] + [0, 5, 8, 9, 9] + [0, 6, 6, 7, 8] + [0, 6, 6, 7, 9] + \\
& [0, 6, 6, 8, 9] - [0, 6, 7, 7, 8] + [0, 6, 7, 7, 9] + [0, 6, 7, 8, 8] - [0, 6, 7, 9, 9] + [0, 6, 8, 8, 9] - [0, 6, 8, 9, 9] + [1, 1, 2, 3, 4] + \\
& [1, 1, 2, 3, 5] + [1, 1, 2, 3, 6] + [1, 1, 2, 4, 6] + [1, 1, 2, 4, 8] + [1, 1, 2, 4, 9] + [1, 1, 2, 5, 6] + [1, 1, 2, 5, 8] + [1, 1, 2, 5, 9] + \\
& [1, 1, 2, 6, 8] + [1, 1, 2, 6, 9] + [1, 1, 3, 4, 5] + [1, 1, 3, 4, 7] + [1, 1, 3, 4, 9] + [1, 1, 3, 5, 6] + [1, 1, 3, 5, 7] + [1, 1, 3, 5, 9] + \\
& [1, 1, 3, 6, 7] + [1, 1, 3, 6, 9] + [1, 1, 4, 5, 6] + [1, 1, 4, 5, 8] + [1, 1, 4, 5, 9] + [1, 1, 4, 6, 7] + [1, 1, 4, 6, 9] + [1, 1, 4, 7, 8] + \\
& [1, 1, 4, 7, 9] + [1, 1, 4, 8, 9] + [1, 1, 5, 6, 7] + [1, 1, 5, 6, 8] + [1, 1, 5, 7, 8] + [1, 1, 5, 7, 9] + [1, 1, 5, 8, 9] + [1, 1, 6, 7, 8] + \\
& [1, 1, 6, 7, 9] + [1, 1, 6, 8, 9] - [1, 2, 2, 3, 4] - [1, 2, 2, 3, 5] - [1, 2, 2, 3, 6] - [1, 2, 2, 4, 6] - [1, 2, 2, 4, 8] - [1, 2, 2, 4, 9] - \\
& [1, 2, 2, 5, 6] - [1, 2, 2, 5, 8] - [1, 2, 2, 5, 9] - [1, 2, 2, 6, 8] - [1, 2, 2, 6, 9] + [1, 2, 3, 3, 4] + [1, 2, 3, 3, 5] + [1, 2, 3, 3, 6] - \\
& [1, 2, 3, 4, 4] - 2[1, 2, 3, 4, 5] + 2[1, 2, 3, 4, 6] + 4[1, 2, 3, 4, 8] - [1, 2, 3, 5, 5] - 2[1, 2, 3, 5, 6] + 4[1, 2, 3, 5, 8] - [1, 2, 3, 6, 6] + \\
& 4[1, 2, 3, 6, 8] - [1, 2, 4, 4, 6] - [1, 2, 4, 4, 8] - [1, 2, 4, 4, 9] - 2[1, 2, 4, 5, 6] - 2[1, 2, 4, 5, 8] - 2[1, 2, 4, 5, 9] + [1, 2, 4, 6, 6] + \\
& [1, 2, 4, 8, 8] + 2[1, 2, 4, 8, 9] + [1, 2, 4, 9, 9] - [1, 2, 5, 5, 6] - [1, 2, 5, 5, 8] - [1, 2, 5, 5, 9] + [1, 2, 5, 6, 6] + [1, 2, 5, 8, 8] + \\
& 2[1, 2, 5, 8, 9] + [1, 2, 5, 9, 9] - [1, 2, 6, 6, 8] - [1, 2, 6, 6, 9] + [1, 2, 6, 8, 8] + 2[1, 2, 6, 8, 9] + [1, 2, 6, 9, 9] + [1, 3, 3, 4, 5] + \\
& [1, 3, 3, 4, 7] + [1, 3, 3, 4, 9] + [1, 3, 3, 5, 6] + [1, 3, 3, 5, 7] + [1, 3, 3, 5, 9] + [1, 3, 3, 6, 7] + [1, 3, 3, 6, 9] - [1, 3, 4, 4, 5] - \\
& [1, 3, 4, 4, 7] - [1, 3, 4, 4, 9] - [1, 3, 4, 5, 5] + 2[1, 3, 4, 5, 6] - 4[1, 3, 4, 5, 7] + 4[1, 3, 4, 5, 8] + 2[1, 3, 4, 6, 7] + 2[1, 3, 4, 6, 9] - \\
& [1, 3, 4, 7, 7] + 4[1, 3, 4, 7, 8] + 2[1, 3, 4, 7, 9] + 4[1, 3, 4, 8, 9] - [1, 3, 4, 9, 9] - [1, 3, 5, 5, 6] - [1, 3, 5, 5, 7] - [1, 3, 5, 5, 9] - \\
& [1, 3, 5, 6, 6] + 4[1, 3, 5, 6, 8] - 4[1, 3, 5, 6, 9] - [1, 3, 5, 7, 7] + 4[1, 3, 5, 7, 8] + 2[1, 3, 5, 7, 9] + 4[1, 3, 5, 8, 9] - [1, 3, 5, 9, 9] - \\
& [1, 3, 6, 6, 7] - [1, 3, 6, 6, 9] - [1, 3, 6, 7, 7] + 4[1, 3, 6, 7, 8] + 2[1, 3, 6, 7, 9] + 4[1, 3, 6, 8, 9] - [1, 3, 6, 9, 9] - [1, 4, 4, 5, 6] - \\
& [1, 4, 4, 5, 8] - [1, 4, 4, 5, 9] - [1, 4, 4, 6, 7] - [1, 4, 4, 6, 9] - [1, 4, 4, 7, 8] - [1, 4, 4, 7, 9] - [1, 4, 4, 8, 9] - [1, 4, 5, 5, 6] - \\
& [1, 4, 5, 5, 8] - [1, 4, 5, 5, 9] + [1, 4, 5, 6, 6] - 4[1, 4, 5, 6, 7] - 4[1, 4, 5, 7, 8] - 4[1, 4, 5, 7, 9] + [1, 4, 5, 8, 8] - 2[1, 4, 5, 8, 9] + \\
& [1, 4, 5, 9, 9] + [1, 4, 6, 6, 7] + [1, 4, 6, 6, 9] - [1, 4, 6, 7, 7] - 2[1, 4, 6, 7, 9] - [1, 4, 6, 9, 9] - [1, 4, 7, 7, 8] - [1, 4, 7, 7, 9] + \\
& [1, 4, 7, 8, 8] + [1, 4, 7, 9, 9] + [1, 4, 8, 8, 9] - [1, 4, 8, 9, 9] - [1, 5, 5, 6, 7] - [1, 5, 5, 6, 8] - [1, 5, 5, 7, 8] - [1, 5, 5, 7, 9] - \\
& [1, 5, 5, 8, 9] + [1, 5, 6, 6, 7] - [1, 5, 6, 6, 8] - [1, 5, 6, 7, 7] - 2[1, 5, 6, 7, 8] + [1, 5, 6, 8, 8] - 4[1, 5, 6, 8, 9] - [1, 5, 7, 7, 8] - \\
& [1, 5, 7, 7, 9] + [1, 5, 7, 8, 8] + [1, 5, 7, 9, 9] + [1, 5, 8, 8, 9] - [1, 5, 8, 9, 9] - [1, 6, 6, 7, 8] - [1, 6, 6, 7, 9] - [1, 6, 6, 8, 9] - \\
& [1, 6, 7, 7, 8] - [1, 6, 7, 7, 9] + [1, 6, 7, 8, 8] + [1, 6, 7, 9, 9] + [1, 6, 8, 8, 9] - [1, 6, 8, 9, 9] - [2, 2, 3, 4, 5] - [2, 2, 3, 4, 6] - \\
& [2, 2, 3, 4, 7] - [2, 2, 3, 4, 8] - [2, 2, 3, 5, 7] - [2, 2, 3, 5, 8] - [2, 2, 3, 6, 7] - [2, 2, 3, 6, 8] - [2, 2, 4, 5, 6] - [2, 2, 4, 5, 8] - \\
& [2, 2, 4, 5, 9] - [2, 2, 4, 6, 7] - [2, 2, 4, 6, 9] - [2, 2, 4, 7, 8] - [2, 2, 4, 7, 9] - [2, 2, 4, 8, 9] - [2, 2, 5, 6, 7] - [2, 2, 5, 6, 8] - \\
& [2, 2, 5, 7, 8] - [2, 2, 5, 7, 9] - [2, 2, 5, 8, 9] - [2, 2, 6, 7, 8] - [2, 2, 6, 7, 9] - [2, 2, 6, 8, 9] + [2, 3, 3, 4, 5] + [2, 3, 3, 4, 6] + \\
& [2, 3, 3, 4, 7] + [2, 3, 3, 4, 8] + [2, 3, 3, 5, 7] + [2, 3, 3, 5, 8] + [2, 3, 3, 6, 7] + [2, 3, 3, 6, 8] + [2, 3, 4, 4, 5] + [2, 3, 4, 4, 6] - \\
& [2, 3, 4, 4, 7] - [2, 3, 4, 4, 8] - [2, 3, 4, 5, 5] - 2[2, 3, 4, 5, 6] - [2, 3, 4, 6, 6] + [2, 3, 4, 7, 7] + 2[2, 3, 4, 7, 8] + [2, 3, 4, 8, 8] - \\
& [2, 3, 5, 5, 7] - [2, 3, 5, 5, 8] - 2[2, 3, 5, 6, 7] - 2[2, 3, 5, 6, 8] + [2, 3, 5, 7, 7] + 2[2, 3, 5, 7, 8] + [2, 3, 5, 8, 8] - [2, 3, 6, 6, 7] -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [2, 3, 6, 6, 8] + [2, 3, 6, 7, 7] + 2[2, 3, 6, 7, 8] + [2, 3, 6, 8, 8] + [2, 4, 4, 5, 6] + [2, 4, 4, 5, 8] + [2, 4, 4, 5, 9] - [2, 4, 4, 6, 7] + \\
& [2, 4, 4, 6, 9] - [2, 4, 4, 7, 8] - [2, 4, 4, 7, 9] - [2, 4, 4, 8, 9] - [2, 4, 5, 5, 6] - [2, 4, 5, 5, 8] - [2, 4, 5, 5, 9] + [2, 4, 5, 6, 6] + \\
& 4[2, 4, 5, 6, 8] + [2, 4, 5, 8, 8] + 2[2, 4, 5, 8, 9] + [2, 4, 5, 9, 9] + [2, 4, 6, 6, 7] - [2, 4, 6, 6, 9] + [2, 4, 6, 7, 7] + 2[2, 4, 6, 7, 9] + \\
& [2, 4, 6, 9, 9] + [2, 4, 7, 7, 8] + [2, 4, 7, 7, 9] + [2, 4, 7, 8, 8] + 4[2, 4, 7, 8, 9] + [2, 4, 7, 9, 9] + [2, 4, 8, 8, 9] + [2, 4, 8, 9, 9] - \\
& [2, 5, 5, 6, 7] - [2, 5, 5, 6, 8] - [2, 5, 5, 7, 8] - [2, 5, 5, 7, 9] - [2, 5, 5, 8, 9] + [2, 5, 6, 6, 7] + [2, 5, 6, 6, 8] + [2, 5, 6, 7, 7] + \\
& 2[2, 5, 6, 7, 8] + [2, 5, 6, 8, 8] + [2, 5, 7, 7, 8] + [2, 5, 7, 7, 9] + [2, 5, 7, 8, 8] + 4[2, 5, 7, 8, 9] + [2, 5, 7, 9, 9] + [2, 5, 8, 8, 9] + \\
& [2, 5, 8, 9, 9] - [2, 6, 6, 7, 8] - [2, 6, 6, 7, 9] - [2, 6, 6, 8, 9] + [2, 6, 7, 7, 8] + [2, 6, 7, 7, 9] + [2, 6, 7, 8, 8] + 4[2, 6, 7, 8, 9] + \\
& [2, 6, 7, 9, 9] + [2, 6, 8, 8, 9] + [2, 6, 8, 9, 9] + [3, 3, 4, 5, 6] + [3, 3, 4, 5, 8] + [3, 3, 4, 5, 9] + [3, 3, 4, 6, 7] + [3, 3, 4, 6, 9] + \\
& [3, 3, 4, 7, 8] + [3, 3, 4, 7, 9] + [3, 3, 4, 8, 9] + [3, 3, 5, 6, 7] + [3, 3, 5, 6, 8] + [3, 3, 5, 7, 8] + [3, 3, 5, 7, 9] + [3, 3, 5, 8, 9] + \\
& [3, 3, 6, 7, 8] + [3, 3, 6, 7, 9] + [3, 3, 6, 8, 9] + [3, 4, 4, 5, 6] - [3, 4, 4, 5, 8] + [3, 4, 4, 5, 9] + [3, 4, 4, 6, 7] + [3, 4, 4, 6, 9] - \\
& [3, 4, 4, 7, 8] - [3, 4, 4, 7, 9] - [3, 4, 4, 8, 9] - [3, 4, 5, 5, 6] - [3, 4, 5, 5, 8] - [3, 4, 5, 5, 9] - [3, 4, 5, 6, 6] - 4[3, 4, 5, 6, 9] - \\
& 4[3, 4, 5, 7, 8] + [3, 4, 5, 8, 8] - 2[3, 4, 5, 8, 9] - [3, 4, 5, 9, 9] - [3, 4, 6, 6, 7] - [3, 4, 6, 6, 9] - [3, 4, 6, 7, 7] - 2[3, 4, 6, 7, 9] - \\
& [3, 4, 6, 9, 9] - [3, 4, 7, 7, 8] + [3, 4, 7, 7, 9] + [3, 4, 7, 8, 8] - [3, 4, 7, 9, 9] + [3, 4, 8, 8, 9] - [3, 4, 8, 9, 9] - [3, 5, 5, 6, 7] - \\
& [3, 5, 5, 6, 8] - [3, 5, 5, 7, 8] - [3, 5, 5, 7, 9] - [3, 5, 5, 8, 9] - [3, 5, 6, 6, 7] - [3, 5, 6, 6, 8] + [3, 5, 6, 7, 7] - 2[3, 5, 6, 7, 8] - \\
& 4[3, 5, 6, 7, 9] + [3, 5, 6, 8, 8] - 4[3, 5, 6, 8, 9] - [3, 5, 7, 7, 8] + [3, 5, 7, 7, 9] + [3, 5, 7, 8, 8] - [3, 5, 7, 9, 9] + [3, 5, 8, 8, 9] - \\
& [3, 5, 8, 9, 9] - [3, 6, 6, 7, 8] - [3, 6, 6, 7, 9] - [3, 6, 6, 8, 9] - [3, 6, 7, 7, 8] + [3, 6, 7, 7, 9] + [3, 6, 7, 8, 8] - [3, 6, 7, 9, 9] + \\
& [3, 6, 8, 8, 9] - [3, 6, 8, 9, 9] = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [1, 2, 3, 4, 4] - [1, 1, 2, 3, 4] + [1, 2, 3, 5, 5] - [1, 2, 2, 3, 5] + [1, 2, 3, 6, 6] - [1, 2, 3, 3, 6] + [1, 2, 4, 4, 6] + [1, 3, 4, 4, 5] - \\
& [1, 1, 2, 4, 6] - [1, 1, 3, 4, 5] + [1, 2, 5, 5, 6] - [1, 2, 2, 5, 6] + [2, 3, 4, 5, 5] - [2, 2, 3, 4, 5] + [1, 3, 5, 6, 6] - [1, 3, 3, 5, 6] + \\
& [2, 3, 4, 6, 6] - [2, 3, 3, 4, 6] + [1, 2, 4, 4, 8] + [1, 3, 4, 4, 7] + [1, 4, 4, 5, 6] - [1, 1, 2, 4, 8] - [1, 1, 3, 4, 7] - [1, 1, 4, 5, 6] + \\
& [1, 2, 5, 5, 8] + [1, 3, 5, 5, 7] - [1, 2, 2, 5, 8] + [2, 3, 4, 4, 7] + [2, 4, 5, 5, 6] - [1, 1, 3, 5, 7] - [2, 2, 3, 4, 7] - [2, 2, 4, 5, 6] + \\
& [1, 2, 6, 6, 8] + [1, 3, 6, 6, 7] - [1, 3, 3, 6, 7] + [2, 3, 4, 4, 8] + [2, 3, 5, 5, 7] - [2, 3, 3, 4, 8] + [3, 4, 5, 6, 6] - [1, 1, 2, 6, 8] - \\
& [2, 2, 3, 5, 7] - [3, 3, 4, 5, 6] + [2, 3, 5, 5, 8] + [2, 3, 6, 6, 7] - [2, 3, 3, 6, 7] - [2, 2, 3, 5, 8] + [2, 3, 6, 6, 8] - [2, 3, 3, 6, 8] + \\
& [1, 2, 4, 4, 9] + [1, 4, 4, 5, 8] + [1, 4, 4, 6, 7] - [1, 1, 2, 4, 9] - [1, 1, 4, 5, 8] - [1, 1, 4, 6, 7] + [1, 2, 5, 5, 9] + [1, 3, 4, 4, 9] - \\
& [1, 2, 2, 5, 9] + [1, 5, 5, 6, 7] + [2, 4, 5, 5, 8] + [2, 4, 4, 6, 7] - [1, 1, 3, 4, 9] - [1, 1, 5, 6, 7] - [2, 2, 4, 5, 8] - [2, 2, 4, 6, 7] + \\
& [1, 2, 6, 6, 9] + [1, 3, 5, 5, 9] + [1, 5, 6, 6, 8] - [1, 2, 2, 6, 9] - [1, 3, 3, 5, 9] + [2, 5, 5, 6, 7] + [3, 4, 6, 6, 7] + [3, 4, 4, 5, 8] - \\
& [1, 1, 5, 6, 8] - [2, 2, 5, 6, 7] - [3, 3, 4, 5, 8] - [3, 3, 4, 6, 7] + [1, 3, 6, 6, 9] - [1, 3, 3, 6, 9] + [2, 5, 5, 6, 8] + [3, 5, 6, 6, 7] - \\
& [2, 2, 5, 6, 8] - [3, 3, 5, 6, 7] + [3, 5, 6, 6, 8] - [3, 3, 5, 6, 8] + [1, 4, 4, 5, 9] + [1, 4, 4, 7, 8] - [1, 1, 4, 5, 9] - [1, 1, 4, 7, 8] + \\
& [1, 4, 4, 6, 9] + [1, 5, 5, 7, 8] + [2, 4, 5, 5, 9] + [2, 4, 4, 7, 8] - [1, 1, 4, 6, 9] - [1, 1, 5, 7, 8] - [2, 2, 4, 5, 9] - [2, 2, 4, 7, 8] + \\
& [1, 6, 6, 7, 8] + [2, 4, 6, 6, 9] + [2, 5, 5, 7, 8] + [3, 4, 5, 5, 9] + [3, 4, 4, 7, 8] - [1, 1, 6, 7, 8] - [2, 2, 4, 6, 9] - [2, 2, 5, 7, 8] - \\
& [3, 3, 4, 5, 9] - [3, 3, 4, 7, 8] + [2, 6, 6, 7, 8] + [3, 4, 6, 6, 9] + [3, 5, 5, 7, 8] - [2, 2, 6, 7, 8] - [3, 3, 4, 6, 9] - [3, 3, 5, 7, 8] + \\
& [3, 6, 6, 7, 8] - [3, 3, 6, 7, 8] + [1, 4, 4, 7, 9] - [1, 1, 4, 7, 9] + [1, 4, 4, 8, 9] + [1, 5, 5, 7, 9] + [2, 4, 4, 7, 9] - [1, 1, 4, 8, 9] - \\
& [1, 1, 5, 7, 9] - [2, 2, 4, 7, 9] + [1, 5, 5, 8, 9] + [1, 6, 6, 7, 9] + [2, 4, 4, 8, 9] + [2, 5, 5, 7, 9] + [3, 4, 4, 7, 9] - [1, 1, 5, 8, 9] - \\
& [1, 1, 6, 7, 9] - [2, 2, 4, 8, 9] - [2, 2, 5, 7, 9] - [3, 3, 4, 7, 9] + [1, 6, 6, 8, 9] + [2, 5, 5, 8, 9] + [2, 6, 6, 7, 9] + [3, 4, 4, 8, 9] + \\
& [3, 5, 5, 7, 9] - [1, 1, 6, 8, 9] - [2, 2, 5, 8, 9] - [2, 2, 6, 7, 9] - [3, 3, 4, 8, 9] - [3, 3, 5, 7, 9] + [2, 6, 6, 8, 9] + [3, 5, 5, 8, 9] + \\
& [3, 6, 6, 7, 9] - [2, 2, 6, 8, 9] - [3, 3, 5, 8, 9] - [3, 3, 6, 7, 9] + [3, 6, 6, 8, 9] - [3, 3, 6, 8, 9] - 2[1, 2, 3, 4, 7] - 2[1, 2, 3, 4, 8] - \\
& 2[1, 2, 3, 5, 7] - 2[1, 2, 3, 6, 8] - 2[1, 2, 4, 6, 7] + 2[1, 3, 4, 5, 7] + 2[1, 2, 4, 6, 8] - 2[1, 2, 5, 6, 7] - 2[1, 3, 4, 5, 8] + \\
& 2[2, 3, 4, 5, 7] - 2[1, 2, 3, 5, 9] - 2[1, 2, 3, 6, 9] - 2[1, 3, 5, 6, 8] + 2[2, 3, 4, 6, 8] - 2[1, 2, 4, 7, 8] + 2[1, 4, 5, 6, 7] - \\
& 2[1, 2, 5, 7, 8] - 2[1, 3, 4, 7, 8] + 2[1, 4, 5, 6, 8] + 2[2, 4, 5, 6, 7] + 2[1, 2, 5, 6, 9] - 2[1, 2, 6, 7, 8] - 2[1, 3, 5, 7, 8] - \\
& 2[2, 3, 4, 5, 9] - 2[2, 3, 4, 7, 8] + 2[1, 3, 5, 6, 9] - 2[1, 3, 6, 7, 8] - 2[2, 3, 4, 6, 9] - 2[2, 3, 5, 7, 8] + 2[3, 4, 5, 6, 8] - \\
& 2[2, 3, 6, 7, 8] - 2[1, 2, 4, 7, 9] + 2[1, 4, 5, 7, 8] - 2[1, 2, 4, 8, 9] - 2[1, 2, 5, 7, 9] - 2[1, 3, 4, 7, 9] + 2[1, 4, 6, 7, 8] + \\
& 2[2, 4, 5, 7, 8] - 2[1, 2, 5, 8, 9] - 2[1, 2, 6, 7, 9] - 2[1, 3, 4, 8, 9] - 2[1, 3, 5, 7, 9] + 2[1, 5, 6, 7, 8] - 2[2, 3, 4, 7, 9] + \\
& 2[2, 4, 5, 6, 9] + 2[2, 4, 6, 7, 8] + 2[3, 4, 5, 7, 8] - 2[1, 2, 6, 8, 9] - 2[1, 3, 5, 8, 9] - 2[1, 3, 6, 7, 9] - 2[2, 3, 4, 8, 9] - \\
& 2[2, 3, 5, 7, 9] + 2[2, 5, 6, 7, 8] + 2[3, 4, 5, 6, 9] + 2[3, 4, 6, 7, 8] - 2[1, 3, 6, 8, 9] - 2[2, 3, 5, 8, 9] - 2[2, 3, 6, 7, 9] + \\
& 2[3, 5, 6, 7, 8] - 2[2, 3, 6, 8, 9] + 2[1, 4, 5, 7, 9] + 2[1, 4, 5, 8, 9] + 2[1, 4, 6, 7, 9] + 2[2, 4, 5, 7, 9] + 2[1, 4, 6, 8, 9] + \\
& 2[1, 5, 6, 7, 9] + 2[2, 4, 5, 8, 9] + 2[2, 4, 6, 7, 9] + 2[3, 4, 5, 7, 9] + 2[1, 5, 6, 8, 9] + 2[2, 4, 6, 8, 9] + 2[2, 5, 6, 7, 9] + \\
& 2[3, 4, 5, 8, 9] + 2[3, 4, 6, 7, 9] + 2[2, 5, 6, 8, 9] + 2[3, 4, 6, 8, 9] + 2[3, 5, 6, 7, 9] + 2[3, 5, 6, 8, 9] = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [1, 1, 2, 3, 4] - [1, 2, 3, 4, 4] - [1, 2, 4, 4, 6] - [1, 3, 4, 4, 5] + [1, 1, 2, 4, 6] + [1, 1, 3, 4, 5] - [1, 2, 4, 4, 8] - [1, 3, 4, 4, 7] - \\
& [1, 4, 4, 5, 6] + [1, 1, 2, 4, 8] + [1, 1, 3, 4, 7] + [1, 1, 4, 5, 6] - [1, 3, 5, 7, 7] + [2, 3, 4, 7, 7] - [2, 3, 4, 4, 7] + [1, 1, 3, 5, 7] - \\
& [1, 2, 6, 8, 8] + [2, 3, 4, 8, 8] - [2, 3, 4, 4, 8] + [1, 1, 2, 6, 8] - [1, 2, 4, 4, 9] - [1, 4, 4, 5, 8] - [1, 4, 4, 6, 7] + [1, 1, 2, 4, 9] + \\
& [1, 1, 4, 5, 8] + [1, 1, 4, 6, 7] - [1, 3, 4, 4, 9] - [1, 5, 6, 7, 7] + [2, 4, 6, 7, 7] - [2, 4, 4, 6, 7] + [1, 1, 3, 4, 9] + [1, 1, 5, 6, 7] - \\
& [1, 5, 6, 8, 8] + [3, 4, 5, 8, 8] - [3, 4, 4, 5, 8] + [1, 1, 5, 6, 8] - [1, 4, 4, 5, 9] - [1, 4, 4, 7, 8] + [1, 1, 4, 5, 9] + [1, 1, 4, 7, 8] -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [1, 5, 7, 7, 8] - [1, 4, 4, 6, 9] + [2, 4, 7, 7, 8] - [2, 4, 4, 7, 8] + [1, 1, 4, 6, 9] + [1, 1, 5, 7, 8] - [1, 6, 7, 8, 8] + [3, 4, 7, 8, 8] - \\
& [3, 4, 4, 7, 8] + [1, 1, 6, 7, 8] - [2, 6, 7, 8, 8] + [2, 6, 7, 7, 8] + [3, 5, 7, 8, 8] - [3, 5, 7, 7, 8] - [1, 4, 4, 7, 9] + [1, 1, 4, 7, 9] - \\
& [1, 5, 7, 7, 9] - [1, 4, 4, 8, 9] + [2, 4, 7, 7, 9] - [2, 4, 4, 7, 9] + [1, 1, 4, 8, 9] + [1, 1, 5, 7, 9] - [1, 5, 8, 8, 9] - [1, 6, 7, 7, 9] + \\
& [2, 4, 8, 8, 9] - [2, 4, 4, 8, 9] + [3, 4, 7, 7, 9] - [3, 4, 4, 7, 9] + [1, 1, 5, 8, 9] + [1, 1, 6, 7, 9] - [1, 6, 8, 8, 9] + [3, 4, 8, 8, 9] - \\
& [3, 4, 4, 8, 9] + [1, 1, 6, 8, 9] + 2[1, 2, 3, 4, 7] + 2[1, 2, 3, 4, 8] + 2[1, 2, 4, 6, 7] - 2[1, 3, 4, 5, 7] - 2[1, 2, 4, 6, 8] + 2[1, 3, 4, 5, 8] + \\
& 2[1, 2, 4, 7, 8] - 2[1, 4, 5, 6, 7] + 2[1, 3, 4, 7, 8] - 2[1, 4, 5, 6, 8] + 2[1, 2, 6, 7, 8] + 2[1, 3, 5, 7, 8] + 2[2, 3, 4, 7, 8] + \\
& 2[1, 2, 4, 7, 9] - 2[1, 4, 5, 7, 8] + 2[1, 2, 4, 8, 9] + 2[1, 3, 4, 7, 9] - 2[1, 4, 6, 7, 8] + 2[1, 3, 4, 8, 9] - 2[1, 5, 6, 7, 8] - \\
& 2[2, 4, 6, 7, 8] - 2[3, 4, 5, 7, 8] - 2[1, 4, 5, 7, 9] - 2[1, 4, 5, 8, 9] - 2[1, 4, 6, 7, 9] - 2[1, 4, 6, 8, 9] - 2[1, 5, 7, 8, 9] + \\
& 2[2, 4, 7, 8, 9] - 2[1, 6, 7, 8, 9] + 2[3, 4, 7, 8, 9] = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [1, 2, 2, 3, 5] - [1, 2, 3, 5, 5] - [1, 2, 5, 5, 6] + [1, 2, 2, 5, 6] - [2, 3, 4, 5, 5] + [2, 2, 3, 4, 5] - [1, 2, 5, 5, 8] + [1, 3, 5, 7, 7] - \\
& [1, 3, 5, 5, 7] + [1, 2, 2, 5, 8] - [2, 3, 4, 7, 7] - [2, 4, 5, 5, 6] + [2, 2, 3, 4, 7] + [2, 2, 4, 5, 6] - [2, 3, 5, 5, 7] + [2, 2, 3, 5, 7] - \\
& [2, 3, 5, 5, 8] + [2, 2, 3, 5, 8] - [1, 2, 5, 5, 9] + [1, 5, 6, 7, 7] + [1, 2, 2, 5, 9] - [1, 5, 5, 6, 7] - [2, 4, 6, 7, 7] - [2, 4, 5, 5, 8] + \\
& [2, 2, 4, 5, 8] + [2, 2, 4, 6, 7] - [1, 2, 6, 9, 9] + [1, 3, 5, 9, 9] - [1, 3, 5, 5, 9] + [1, 2, 2, 6, 9] - [2, 5, 5, 6, 7] + [2, 2, 5, 6, 7] - \\
& [2, 5, 5, 6, 8] + [2, 2, 5, 6, 8] + [1, 5, 7, 7, 8] - [1, 5, 5, 7, 8] - [2, 4, 5, 5, 9] - [2, 4, 7, 7, 8] + [2, 2, 4, 5, 9] + [2, 2, 4, 7, 8] - \\
& [2, 4, 6, 9, 9] - [2, 5, 5, 7, 8] + [3, 4, 5, 9, 9] - [3, 4, 5, 5, 9] + [2, 2, 4, 6, 9] + [2, 2, 5, 7, 8] - [2, 6, 7, 7, 8] + [3, 5, 7, 7, 8] - \\
& [3, 5, 5, 7, 8] + [2, 2, 6, 7, 8] + [1, 5, 7, 7, 9] - [1, 5, 5, 7, 9] - [2, 4, 7, 7, 9] + [2, 2, 4, 7, 9] + [1, 5, 8, 9, 9] - [1, 6, 7, 9, 9] + \\
& [1, 6, 7, 7, 9] - [1, 5, 5, 8, 9] - [2, 4, 8, 9, 9] - [2, 5, 5, 7, 9] + [3, 4, 7, 9, 9] - [3, 4, 7, 7, 9] + [2, 2, 4, 8, 9] + [2, 2, 5, 7, 9] - \\
& [2, 6, 7, 9, 9] - [2, 5, 5, 8, 9] + [3, 5, 7, 9, 9] - [3, 5, 5, 7, 9] + [2, 2, 5, 8, 9] + [2, 2, 6, 7, 9] - [2, 6, 8, 9, 9] + [3, 5, 8, 9, 9] - \\
& [3, 5, 5, 8, 9] + [2, 2, 6, 8, 9] + 2[1, 2, 3, 5, 7] + 2[1, 2, 5, 6, 7] - 2[2, 3, 4, 5, 7] + 2[1, 2, 3, 5, 9] + 2[1, 2, 5, 7, 8] - 2[2, 4, 5, 6, 7] - \\
& 2[1, 2, 5, 6, 9] + 2[2, 3, 4, 5, 9] + 2[2, 3, 5, 7, 8] + 2[1, 2, 5, 7, 9] - 2[2, 4, 5, 7, 8] + 2[1, 2, 5, 8, 9] + 2[1, 2, 6, 7, 9] + \\
& 2[1, 3, 5, 7, 9] + 2[2, 3, 4, 7, 9] - 2[2, 4, 5, 6, 9] + 2[2, 3, 5, 7, 9] - 2[2, 5, 6, 7, 8] + 2[2, 3, 5, 8, 9] - 2[2, 4, 5, 7, 9] - \\
& 2[1, 5, 6, 7, 9] - 2[2, 4, 5, 8, 9] - 2[2, 4, 6, 7, 9] - 2[3, 4, 5, 7, 9] - 2[2, 5, 6, 7, 9] - 2[2, 5, 6, 8, 9] + 2[1, 5, 7, 8, 9] - \\
& 2[2, 4, 7, 8, 9] - 2[2, 6, 7, 8, 9] + 2[3, 5, 7, 8, 9] = 0;
\end{aligned}$$

De manera opcional se puede incluir la ecuación:

$$\begin{aligned}
& [0, 1, 2, 3] + [0, 1, 2, 6] + [0, 1, 3, 5] + [0, 2, 3, 4] + [1, 2, 3, 4] + [1, 2, 3, 5] + [1, 2, 3, 6] + [0, 1, 2, 8] + [0, 1, 3, 7] + \\
& [0, 1, 5, 6] + [0, 2, 4, 6] + [0, 3, 4, 5] + [0, 2, 3, 7] + [1, 2, 4, 6] + [1, 3, 4, 5] + [0, 2, 3, 8] + [1, 2, 5, 6] + [2, 3, 4, 5] + \\
& [1, 3, 5, 6] + [2, 3, 4, 6] + [0, 1, 2, 9] + [0, 1, 5, 8] + [0, 1, 6, 7] + [0, 2, 4, 8] + [0, 3, 4, 7] + [0, 4, 5, 6] + [0, 1, 3, 9] + \\
& [0, 2, 6, 7] + [0, 3, 5, 7] + [1, 2, 4, 8] + [1, 3, 4, 7] + [1, 4, 5, 6] + [0, 2, 6, 8] + [0, 3, 5, 8] + [1, 2, 5, 8] + [1, 3, 5, 7] + \\
& [2, 3, 4, 7] + [2, 4, 5, 6] + [1, 2, 6, 8] + [1, 3, 6, 7] + [2, 3, 4, 8] + [2, 3, 5, 7] + [3, 4, 5, 6] + [2, 3, 5, 8] + [2, 3, 6, 7] + [2, 3, 6, 8] + \\
& [0, 1, 5, 9] + [0, 1, 7, 8] + [0, 2, 4, 9] + [0, 4, 5, 8] + [0, 4, 6, 7] + [0, 1, 6, 9] + [0, 2, 7, 8] + [0, 3, 4, 9] + [0, 5, 6, 7] + [1, 2, 4, 9] + \\
& [1, 4, 5, 8] + [1, 4, 6, 7] + [0, 3, 7, 8] + [0, 5, 6, 8] + [1, 2, 5, 9] + [1, 3, 4, 9] + [1, 5, 6, 7] + [2, 4, 5, 8] + [2, 4, 6, 7] + [1, 2, 6, 9] + \\
& [1, 3, 5, 9] + [1, 5, 6, 8] + [2, 5, 6, 7] + [3, 4, 5, 8] + [3, 4, 6, 7] + [1, 3, 6, 9] + [2, 5, 6, 8] + [3, 5, 6, 7] + [3, 5, 6, 8] + [0, 1, 7, 9] + \\
& [0, 4, 5, 9] + [0, 4, 7, 8] + [0, 1, 8, 9] + [0, 2, 7, 9] + [0, 4, 6, 9] + [0, 5, 7, 8] + [1, 4, 5, 9] + [1, 4, 7, 8] + [0, 2, 8, 9] + [0, 3, 7, 9] + \\
& [0, 6, 7, 8] + [1, 4, 6, 9] + [1, 5, 7, 8] + [2, 4, 5, 9] + [2, 4, 7, 8] + [0, 3, 8, 9] + [1, 6, 7, 8] + [2, 4, 6, 9] + [2, 5, 7, 8] + [3, 4, 5, 9] + \\
& [3, 4, 7, 8] + [2, 6, 7, 8] + [3, 4, 6, 9] + [3, 5, 7, 8] + [3, 6, 7, 8] + [0, 4, 7, 9] + [0, 4, 8, 9] + [0, 5, 7, 9] + [1, 4, 7, 9] + [0, 5, 8, 9] + \\
& [0, 6, 7, 9] + [1, 4, 8, 9] + [1, 5, 7, 9] + [2, 4, 7, 9] + [0, 6, 8, 9] + [1, 5, 8, 9] + [1, 6, 7, 9] + [2, 4, 8, 9] + [2, 5, 7, 9] + [3, 4, 7, 9] + \\
& [1, 6, 8, 9] + [2, 5, 8, 9] + [2, 6, 7, 9] + [3, 4, 8, 9] + [3, 5, 7, 9] + [2, 6, 8, 9] + [3, 5, 8, 9] + [3, 6, 7, 9] + [3, 6, 8, 9] = 125;
\end{aligned}$$

Esta escritura permite un mejor manejo y manipulación de las ecuaciones.

Bibliografia

- [AE] AGRELL, E; ERIKSSON, T. Optimization of lattices for quantization. *IEEE Transactions on Information Theory*, **44** 5, (1998) 1814–1828.
- [BS] BARNES, E. S.; SLOANE, N. J. A. The optimal lattice quantizer in three dimensions. *SIAM J. Algebraic Discrete Methods* **4** (1983), no. 1, 30–41.
- [Ba] BARNES, E. S. The covering of space by spheres. *Canad. J. Math.* **8** (1956), 293–304.
- [Cat] SLOANE, N. J. A. A Catalogue of Lattices. <http://www2.research.att.com/~njas/lattices/>
- [Ch] CHARVE, L. De la réduction des formes quadratiques quaternaires positives, *Annales scientifiques de l'École normale supérieure* **2**, tome 11 (1882), 119–134.
- [CK] COHN, H.; KUMAR, A. Optimality and uniqueness of the Leech lattice among lattices, *Ann. of Math.* , **2** (2) 170 (2009), no. 3, 1003–1050.
- [Co] CONWAY, J. H. (with the assistance of F.Y.C. FUNG), The sensual (quadratic) form, *Carus Mathematical Monographs*, **26** Math. Assoc. of America, Washington, DC (1997).
- [CS] CONWAY, J. H.; SLOANE, N. J. A. Sphere Packing, Lattices and Groups. *Springer-Verlag 3rd Edition* (1999).
- [CS1] CONWAY, J. H.; SLOANE, N. J. A. A Lower Bound on the Average Error of Vector Quantizers, *PGTI* **31** (2) (1985), 106–109.
- [CS2] CONWAY, J. H.; SLOANE, N. J. A. The optimal isodual lattice quantizer in three dimension, *Advances in Mathematics of Communications* **1**, (2), (2007), 257–260.
- [CS3] CONWAY, J. H.; SLOANE, N. J. A. Low-dimensional lattices. VI. Voronoi reduction of three-dimensional lattices. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **436** (1992), 55–68.
- [CS4] CONWAY J.H.; SLOANE, N. J. A. Voronoi regions of lattices, second moments of polytopes, and quantization, *PGIT* **28**(1982), 211–226 \cong Chap. 21 of book “Sphere Packing, Lattices and Groups. *Springer-Verlag 3rd Edition* (1999).”
- [CS5] CONWAY J.H.; SLOANE, N. J. A. On the Voronoi regions of certain lattices, *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, **5** (3) (1984), 294–305.
- [De] DELONE, B. N. Sur la partition régulière de l'espace à 4-dimensions. *Izv. Akad. Nauk SSSR Otdel. Fiz.-Mat. Nauk* **7** (1929), 79–110 and 145–164
- [Di1] DIENTS, T. On zone-reduction in Voronoi-cells of lattices of the first kind, preprint. <http://www.matha.mathematik.uni-dortmund.de/~thilo/index.html>
- [Di2] DIENTS, T. A note on the minors of a symmetric matrix, preprint. <http://www.matha.mathematik.uni-dortmund.de/~thilo/index.html>
- [En] ENGEL, P. Investigations of parallelhedra in \mathbb{R}^d , *Voronoi's Impact on Modern Science*, (eds), Institute of Mathematics, Kyiv, **2**, (1998), 22–60.

- [EG] ENGEL, P; GRISHUKHIN, V.P. There are exactly 222 L -types of primitive five-dimensional lattices. *European J. Combin.* **23** (2002), no. 3, 275–279.
- [DG] DEZA, M; GRISHUKHIN, V.P. More about 52 four-dimensional parallelotopes, *Taiwanese J. Math.* **12** (2008), no. 4, 901–916. <http://arxiv.org/pdf/math/0307171>
- [Fe] FEDOROV, E.S. Elements of the study of figures. *Zap. Mineralog. Obsc. (2)* **21**, 1–279. Reprinted by Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moscow, 1953.
- [Fej] FEJES TÓTH, G. Sur la représentation d'une population infinie par un nombre fini d'éléments, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, **10** (1959), 307–313.
- [LLL] LENSTRA, A.K; LENSTRA, H.W JR; LOVÁSK, L. Factoring polynomials with rational coefficients. *Math. Ann.*, **261** (1982), 515–534.
- [RB] RYŠKOV, S. S.; BARANOVSKIĪ, E. P. C -types of n -dimensional lattices and 5-dimensional primitive parallelehedra (with application to the theory of coverings). *Proc. Steklov Inst. Math.* 1978, no. 4, 140 pp.
- [Ro] ROSSETTI, J.P. Retículos en espacios euclídeos, http://www.famaf.unc.edu.ar/publicaciones/documents/serie_b/BMat48-3.pdf
- [RV1] ROSSETTI, J.P; VELÁSQUEZ, J.M. An explicit formula for the quantizing constant for lattices in 4 dimensions, en preparación.
- [RV2] ROSSETTI, J.P; VELÁSQUEZ, J.M. Local minima in the lattice quantizer problem in 4 dimensions, en preparación.
- [Sc] SCHÜRMAN, A. Computational Geometry of Positive Definite Quadratic Forms: Polyhedral Reduction Theories, Algorithms, and Applications, *AMS* 2009, 162 pages.
- [SV] SCHÜRMAN, A.; VALLENTIN F. Computational Approaches to Lattice Packing and Covering Problems, <http://arxiv.org/pdf/math/0403272v3> 2005, 40 pages.
- [Va] VALLENTIN, F. Sphere covering, lattices, and tilings (in low dimensions), *Ph.D. thesis, Technical University Munich*, Germany, (2003), 128 pages.
- [VB] VITERBO, E; BIGLIERO, E. Computing the Voronoi cell of a lattices: The diamond cutting algorithm *IEEE Transactions on information theory*, **42**(1), (1986), 161–171.
- [Ve] VELÁSQUEZ, J.M. Determination of the Voronoi type of a Euclidean lattice in four dimensions. En preparación.
- [Vo] VORONOI, G.F. Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. *J. Reine Angew. Math.* **133** (1908), 97–178; **134** (1908) 198–287; **136**, (1909) 67–181 [2,21].
- [Za] ZADOR, P.L. Asymptotic quantization error of continuous signals and their quantization dimension, *Institute of Electrical and Electronic Engineers, Transactions on Information Theory.* **28** (1982), 139–149.