Universidad Nacional de Córdoba

FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA Y FÍSICA

REPRESENTACIONES CUASIFINITAS

por García José Ignacio

Tesis presentada ante la Facultad de Matemática, Astronomía y Física como parte de los requerimientos para la obtención del grado de Doctor en Matemática de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Abril, 2013

Dirigida por:
Liberati José I.

Dedicado a
mis amores Lautaro y Silvina

Agradecimientos

Agradezco a mi director José Ignacio Liberati y a todos los profesores de la FaMAF que contribuyeron en mi desarrollo profesional, no puedo dejar de nombrar al Dr. Jorge Vargas quien ha sido muy generoso.

Agradezco además al CONICET y a la FaMAF por el apoyo económico y por el lugar de trabajo.

Finalmente a mis dos grandes amores Silvina y Lautaro.

Resumen

En el siguiente trabajo clasificamos los módulos de peso máximo irreducibles cuasifinitos de las subálgebras de Lie clásicas de los siguientes ejemplos:

· $W_{\infty,p} = \widehat{\mathcal{D}_p}$, que es una extensión central del álgebra de Lie de los operadores diferenciales sobre el círculo que son un múltiplo de $p(t\partial_t)$ (donde $p(x) \in \mathbb{C}[x]$),

· $\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_q$, que es una extensión central de la super álgebra de Lie de los operadores pseudodiferenciales cuánticos.

Estas subálgebras denominadas clásicas aparecen por el estudio de anti-involuciones. La dificultad en entender la teoría de representaciones de estas álgebras es que aunque admitan una $\mathbb{Z}$-graduación (y por lo tanto una descomposición triangular), cada una de sus componentes homogéneas es de dimensión infinita, y por lo tanto el estudio de los módulos de peso máximo tales que sus componentes homogéneas sean de dimensión finita (que es la condición de ser cuasifinito) se convierte en un problema no trivial.

En el primer ejemplo los casos más importantes son las subálgebras clásicas $\widehat{\mathcal{D}}_x^{\pm}$ de $W_\infty = \widehat{\mathcal{D}}_x$, que se obtiene de tomar $p(x) = x$. El caso $\widehat{\mathcal{D}}_x^{+}$ fue estudiado en [**6**], y en base a este estudio, para el caso $\widehat{\mathcal{D}}_x^{-}$ realizamos sus módulos de peso máximo irreducibles cuasifinitos en términos de los módulos de peso máximo irreducibles cuasifinitos de $\widehat{\mathfrak{gl}}_\infty^{[m]}$, su subálgebra de Lie clásica de tipo D y una subálgebra que denotamos por $\mathcal{L}^{[m]}$, donde $\widehat{\mathfrak{gl}}_\infty^{[m]}$ es la extensión central del álgebra de Lie $\mathfrak{gl}_\infty^{[m]}$ de las matrices infinitas con una cantidad finita de diagonales no nulas tomando valores en el álgebra de los polinomios truncados $R_m = \mathbb{C}[u]/(u^{m+1})$.

MSC (2010): 17B65 Infinite-dimensional Lie (super)algebras, 17B10 Representations, algebraic theory (weights).

Palabras claves: Álgebra de Lie de dimensión infinita, representación cuasifinita.

Abstract

In this work we classify the irreducible quasifinite highest weight representations of the following classical Lie subalgebras:

· $W_{\infty,p} = \widehat{\mathcal{D}_p}$; this is the central extension of the Lie algebra of differential operators on the circle that are a multiple of $p(t\partial_t)$ (where $p(x) \in \mathbb{C}[x]$),

· $\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_q$; this is the central extension of the Lie superalgebra of quantum pseudodifferential operators.

The classical Lie algebras appear by the anti-involution study. The difficulty in understanding the representation theory of a Lie algebra of this kind is that although it admits a $\mathbb{Z}$-gradation (and thus the associated triangular decomposition), each of the graded subspaces is still infinite dimensional, and therefore the study of highest weight modules with the finiteness requirement on the dimensions of their graded subspaces (which we will refer to as quasifinite condition) becomes a non-trivial problem.

In the case of the first example, the most important cases are the classical subalgebras $\widehat{\mathcal{D}}_x^{\pm}$ of $W_\infty = \widehat{\mathcal{D}}_x$, which are obtained when $p(x) = x$. The $\widehat{\mathcal{D}}_x^{+}$ case was studied in [**6**]; based on this study, we realize the irreducible quasifinite highest weight representations for the $\widehat{\mathcal{D}}_x^{-}$ case, in terms of highest weight representation of the central extension of the Lie algebra of infinite matrices with finitely many non-zero diagonals over the algebra $R_m = \mathbb{C}[u]/(u^{m+1})$, its classical subalgebras of D type and a subalgebra that we denote by $\mathcal{L}^{[m]}$.

Índice general

Introducción

El estudio sistemático de módulos cuasifinitos de peso máximo de la extensión central $\widehat{\mathcal{D}}$ del álgebra de operadores diferenciales en el círculo fue iniciado por Kac y Radul en [**13**] y luego continuado en [**2, 12, 4, 14**] y muchos otros. El álgebra de Lie $\widehat{\mathcal{D}}$ se conoce en la literatura como $W_{1+\infty}$ y tiene conexión con la física que es donde se inició su interés.

La dificultad para entender la teoría de representaciones de un álgebra de Lie de éste tipo es que aunque $\widehat{\mathcal{D}}$ admite una $\mathbb{Z}$-graduación (y por lo tanto una descomposición triangular asociada), cada una de sus componentes homogéneas es de dimensión infinita en contraste con los casos más familiares como el álgebra de Virasoro o las álgebras de Kac-Moody. El estudio de módulos de peso máximo sobre $\widehat{\mathcal{D}}$ con el requerimiento de finitud en las dimensiones de sus componentes homogeneas (motivado por la física y que llamaremos cuasifinitos en el presente trabajo) resulta entonces un problema altamente no trivial.

Analizando para que subálgebras parabólicas de $\widehat{\mathcal{D}}$ el correspondiente módulo de Verma generalizado resulta cuasifinito, Kac y Radul en [**13**] fueron capaces de dar una elegante caracterización de los $\widehat{\mathcal{D}}$-módulos cuasifinitos de peso máximo irreducibles en términos de una función generatríz de pesos máximos. Luego ellos construyeron todos esos $\widehat{\mathcal{D}}$-módulos en términos de representaciones del álgebra de Lie $\widehat{\mathfrak{gl}}_{\infty}^{[m]}$ que es la extensión central del álgebra de Lie $\mathfrak{gl}_{\infty}^{[m]}$ de matrices infinitas con una cantidad finita de diagonales no nulas y entradas en el álgebra de polinomios truncados $R_m = \mathbb{C}[u]/(u^{m+1})$.

La clasificación de los módulos cuasifinitos y la correspondiente construcción para la versión matricial ($W_{1+\infty}^N$), super, q-análoga y super q-análoga de $\widehat{\mathcal{D}}$, fueron desarrollados en [**4**], [**2**], [**13**] y [**8**] respectivamente. La realización de dichos módulos fue en términos de módulos sobre $\widehat{\mathfrak{gl}}_{\infty}$ (o $\widehat{\mathfrak{gl}}_{\infty|\infty}$ en la versión super).

$W_{1+\infty}^N$, estudiada recientemente en [**4**], corresponde a la extensión central del álgebra de operadores diferenciales matriciales sobre el círculo. Existen interesantes subálgebras de $W_{1+\infty}^N$, y sus versiones q-análogas y super [**2**], y su estudio aún no ha sido completado. Una fuente natural de subálgebras viene dada por las subálgebras menos fijadas por anti-involuciones del álgebra asociativa correspondiente, que preservan la graduación.

Otro ejemplo importante es el álgebra de Lie W_{∞} que es un caso particular de la familia de álgebras $W_{\infty,p} = \mathcal{D}p(t\partial_t)$ (el álgebra de operadores diferenciales regulares en el círculo que son un múltiplo de $p(t\partial_t)$, $p \in \mathbb{C}[x]$). Dicha álgebra de Lie fue estudiada por Kac y Liberati en [**12**], notar que

$W_\infty = W_{\infty,x}$. Siguiendo las ideas pioneras de Kac-Radul [**13**], en [**12**] se obtuvo la clasificación de los módulos de peso máximo irreducibles cuasifinitos sobre $W_{\infty,p}$, y la realización de dichos módulos en términos de módulos sobre $\widehat{\mathfrak{gl}}_\infty$. En [**12**] se desarrolló además la teoría general de módulos cuasifinitos de peso máximo sobre álgebras de Lie $\mathbb{Z}$-graduadas, y luego fue extendida a la versión super en [**8**].

En [**3**], Bloch descubre una anti-involución de W_∞ y las representaciones de la subálgebra correspondiente las relaciona con ciertos valores de la función zeta de Riemann. Entonces, resulta interesante buscar la clasificación completa de las anti-involuciones de $\mathcal{D}p(t\partial_t)$, y estudiar las representaciones de las subálgebras asociadas a dichas anti-involuciones, ese es el primer objetivo específico del presente plan de trabajo (ver Capítulo 2, secciones 1 y 2).

En numerosos y recientes trabajos ([**14, 9, 7**]) se buscó la clasificación de anti-involuciones de ciertas álgebras (que preservaran graduación), y luego se describió la relación entre las correspondientes álgebras de Lie (menos) fijadas por dichas anti-involuciones y las subálgebras clásicas de $\widehat{\mathfrak{gl}}_\infty^{[m]}$ (o $\widehat{\mathfrak{gl}}_{\infty|\infty}^{[m]}$ en la versión super). En [**14, 9, 7**], además del estudio de anti-involuciones, se clasificó y construyó las representaciones quasifinitas irreducibles de peso máximo.

Nuestro primer objetivo específico es clasificar las anti-involuciones del álgebra $\mathcal{D}p(t\partial_t)$ que preservan la graduación principal. Además obtenemos la clasificación de los módulos de peso máximo irreducibles cuasifinitos sobre dichas subálgebras y logramos la realización de dichos módulos para las subálgebras de W_∞ en términos de módulos sobre $\widehat{\mathfrak{gl}}_\infty^{[m]}$ y subálgebras de la misma (ver Capítulo 2, secciones 3 y 4).

El segundo objetivo específico es un resultado q-análogo al de Cheng-Wang [**9**] o lo que es lo mismo, un resultado super-análogo a Boyallian-Liberati [**7**], es decir, clasificamos las anti-involuciones de la super álgebra q-$\mathcal{SD}$ que preservan la graduación principal, donde q-$\mathcal{SD}$ es la super álgebra de operadores pseudodiferenciales regulares en el super círculo $S^{1|1}$ (es decir el q-análogo de [**9**]). Luego obtuvimos la clasificación de los módulos de peso máximo irreducibles cuasifinitos sobre dichas subálgebras (ver Capítulo 3).

La siguiente tabla describe el estado de situación de la clasificación de los módulos de peso máximo irreducibles cuasifinitos sobre $W_{1+\infty}$, su versión matricial, super o q-análoga y sobre las subálgebras construidas a partir de sus anti-involuciones, conformando un programa de largo plazo. Se ve claramente los lugares que ocupan los resultados del presente trabajo.

	$W_{1+\infty}$	$W_{\infty,p}$	$W_{1+\infty}^N$	super $W_{1+\infty}$	q-$W_{1+\infty}$	super q-$W_{1+\infty}$
álgebra	[**13**]	[**1, 12**]	[**4**]	[**2**]	[**13**]	[**8**]
anti-involución	[**14**]	[**10**] (caso particular [**6**])	resultados parciales [**5**] y otros	[**9**]	[**7**]	[**11**]

El presente trabajo está organizado como sigue: en el Capítulo 1 se presenta la teoría general de módulos cuasifinitos de peso máximo sobre álgebras de Lie $\mathbb{Z}$-graduadas desarrollada en [**12**], y luego extendida a la versión super en [**8**]. Dichos resultados serán aplicados en el resto del trabajo. En el Capítulo 2, clasificamos las anti-involuciones del álgebra $\mathcal{D}p(t\partial_t)$ que preservan la graduación principal. Obtenemos la clasificación de los módulos de peso máximo irreducibles cuasifinitos sobre dichas subálgebras y logramos la realización de dichos módulos para las subálgebras de W_∞ en términos de módulos sobre $\widehat{\mathfrak{gl}}_\infty^{[m]}$. En el Capítulo 3, clasificamos las anti-involuciones de la super álgebra q-$\mathcal{SD}$ que preservan la graduación principal, donde q-$\mathcal{SD}$ es la super álgebra de operadores pseudodiferenciales regulares en el super círculo $S^{1|1}$. Luego obtuvimos la clasificación de los módulos de peso máximo irreducibles cuasifinitos sobre dichas subálgebras.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo introducimos definiciones básicas y los resultados más importantes que utilizaremos a lo largo de la tesis. La siguiente teoría fue desarrollada en [**12**] para álgebras de Lie $\mathbb{Z}$-graduadas y luego en [**8**] se probó que las mismas demostraciones se adaptan a la versión super.

Denotaremos por $\mathbb{Z}_+$ (respectivamente $\mathbb{Z}^\times$) al conjunto de los enteros no negativos (respectivamente no nulos) y por $\mathbb{C}^\times$ al conjunto de los complejos no nulos.

1. Módulos cuasifinitos de (super) álgebras de Lie $\mathbb{Z}$-graduadas

Denotaremos por $\mathfrak{g} = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$ una (super) álgebra de Lie $\mathbb{Z}$-graduada (consistente) donde los $\mathfrak{g}_i$ no necesariamente tienen dimensión finita y por $\mathfrak{g}_\pm$ a las siguientes subálgebras de $\mathfrak{g}$;

$$\mathfrak{g}_\pm := \bigoplus_{j\in\mathbb{N}} \mathfrak{g}_{\pm j}.$$

Asumimos que $\mathfrak{g}$ satisface las siguientes propiedades:

(P1) $\mathfrak{g}_0$ es conmutativa,

(P2) si $a \in \mathfrak{g}_{-j}$ con $j \in \mathbb{N}$ y $[a, \mathfrak{g}_1] = 0$, entonces $a = 0$.

Una subálgebra $\mathfrak{p} = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathfrak{p}_j$ de $\mathfrak{g}$ se dice *parabólica* si;

$$\mathfrak{p}_j = \mathfrak{g}_j, \text{ para todo } j \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{y} \quad \mathfrak{p}_{-j} \neq 0, \text{ para algún } j \in \mathbb{N}.$$

Dado $a \in \mathfrak{g}_{-1}$ no nulo, definimos $\mathfrak{p}^a = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathfrak{p}^a_j$, donde;

$$\mathfrak{p}^a_j = \mathfrak{g}_j, \text{ para todo } j \in \mathbb{Z}_+, \quad \mathfrak{p}^a_{-1} = \mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)\, a^* \quad \text{y} \quad \mathfrak{p}^a_{-k-1} = [\mathfrak{p}^a_{-1}, \mathfrak{p}^a_{-k}].$$

Aquí y en lo que sigue, dada g (super) álgebra de Lie denotaremos por $\mathcal{U}(g)$ el álgebra universal de g.

LEMA 1.1. *Sea $a \in \mathfrak{g}_{-1}$, con $a \neq 0$, entonces*
(a) $\mathfrak{p}^a$ es la subálgebra parabólica minimal que contiene a a,
(b) $[\mathfrak{p}^a, \mathfrak{p}^a] \cap \mathfrak{g}_0 = [a, \mathfrak{g}_1]$.

DEMOSTRACIÓN. (a) Probaremos primero que $[\mathfrak{p}^a_i, \mathfrak{p}^a_j] \subset \mathfrak{p}^a_{i+j}$, para todo $i, j \in \mathbb{Z}$. Si $i + j \geqslant 0$, $\mathfrak{p}^a_{i+j} = \mathfrak{g}_{i+j}$ y el resultado sigue de la definición. Sean $i, j \in \mathbb{N}$ entonces haciendo inducción en i probaremos que $[\mathfrak{p}^a_{-i}, \mathfrak{p}^a_{-j}] \subset \mathfrak{p}^a_{-i-j}$.

*Es claro que $\mathfrak{g}_0$ es un álgebra de Lie y $\mathfrak{g}_j$ puede verse como un $\mathfrak{g}_0$-módulo con la acción adjunta.

Para $i = 1$, la afirmación sigue de la definición, suponemos valido para i, entonces

$$\begin{aligned}[\mathfrak{p}^a_{-i-1}, \mathfrak{p}^a_{-j}] &= [[\mathfrak{p}^a_{-1}, \mathfrak{p}^a_{-i}], \mathfrak{p}^a_{-j}] \\ &= [\mathfrak{p}^a_{-1}, [\mathfrak{p}^a_{-i}, \mathfrak{p}^a_{-j}]] + [\mathfrak{p}^a_{-i}, [\mathfrak{p}^a_{-1}, \mathfrak{p}^a_{-j}]] \\ &\subset \mathfrak{p}^a_{-i-j-1}.\end{aligned}$$

Suponemos ahora $i \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{Z}_+$ con $i > j$, nuevamente haciendo inducción en i probaremos que $[\mathfrak{p}^a_{-i}, \mathfrak{p}^a_j] \subset \mathfrak{p}^a_{-i+j}$. Si $i = 1$, entonces $j = 0$ y la afirmación sigue de la definición, suponemos valido para i, entonces

$$\begin{aligned}[\mathfrak{p}^a_{-i-1}, \mathfrak{p}^a_{j}] &= [[\mathfrak{p}^a_{-1}, \mathfrak{p}^a_{-i}], \mathfrak{p}^a_{j}] \\ &= [\mathfrak{p}^a_{-1}, [\mathfrak{p}^a_{-i}, \mathfrak{p}^a_{j}]] + [\mathfrak{p}^a_{-i}, [\mathfrak{p}^a_{-1}, \mathfrak{p}^a_{j}]] \\ &\subset \mathfrak{p}^a_{-i+j-1}.\end{aligned}$$

(b) Dado $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}[\mathfrak{p}^a_{-k-1}, \mathfrak{g}_{k+1}] &= [[\mathfrak{p}^a_{-1}, \mathfrak{p}^a_{-k}], \mathfrak{g}_{k+1}] \\ &= [\mathfrak{p}^a_{-1}, [\mathfrak{p}^a_{-k}, \mathfrak{g}_{k+1}]] + [\mathfrak{p}^a_{-k}, [\mathfrak{p}^a_{-1}, \mathfrak{g}_{k+1}]] \\ &\subset [\mathfrak{p}^a_{-1}, \mathfrak{g}_1] + [\mathfrak{p}^a_{-k}, \mathfrak{g}_k],\end{aligned}$$

luego haciendo inducción obtenemos que $[\mathfrak{p}^a_{-k-1}, \mathfrak{g}_{k+1}] \subset [\mathfrak{p}^a_{-1}, \mathfrak{g}_1]$, y como $\mathfrak{g}_0$ es abeliana

$$\begin{aligned}[\mathfrak{p}_{-1}, \mathfrak{g}_1] &= \text{linearspan}\{[[\cdots[[a, c_1], c_2]\cdots], x] : c_i \in \mathfrak{g}_0,\ x \in \mathfrak{g}_1\} \\ &= \text{linearspan}\{[a, [c_1, \cdots [c_{k-1}, [c_k, x]]\cdots]] : c_i \in \mathfrak{g}_0,\ x \in \mathfrak{g}_1\} \\ &= [a, \mathfrak{g}_1].\end{aligned}$$

□

DEFINICIÓN 1.2. *(a) Una subálgebra parabólica* $\mathfrak{p}$ *se dice no degenerada si* $\mathfrak{p}_{-j}$ *tiene codimensión finita en* $\mathfrak{g}_{-j}$ *para todo* $j \in \mathbb{N}$.
(b) Un elemento $a \in \mathfrak{g}_{-1}$ *se dice no degenerado si* $\mathfrak{p}^a$ *es no degenerada.*

Además vamos a suponer que $\mathfrak{g}$ satisface la siguiente condición:

(P3) Toda subálgebra parabólica no degenerada de $\mathfrak{g}$ contiene un elemento no degenerado.

Un $\mathfrak{g}$-módulo V es $\mathbb{Z}$-*graduado* si, $V = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ y además $\mathfrak{g}_i \cdot V_j \subset V_{i+j}$. Un $\mathfrak{g}$-módulo $\mathbb{Z}$-graduado V se dice *cuasifinito* si $dim\, V_j < \infty$ para todo j.

Dado $\lambda \in \mathfrak{g}_0^*$, un *módulo de peso máximo* es un $\mathfrak{g}$-módulo $\mathbb{Z}$-graduado $V(\mathfrak{g}, \lambda) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}_+} V_{-j}$, definido por las siguientes propiedades:

(a) $V_0 = \mathbb{C}v_\lambda$, donde v_λ es un vector no nulo,
(b) $hv_\lambda = \lambda(h)v_\lambda$, para todo $h \in \mathfrak{g}_0$,
(c) $\mathfrak{g}_+ v_\lambda = 0$,
(d) $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)v_\lambda = V(\mathfrak{g}, \lambda)$.

Un vector no nulo $v \in V(\mathfrak{g}, \lambda)$ se dice *singular* si $\mathfrak{g}_+ v = 0$.

El *módulo de Verma* sobre $\mathfrak{g}$ asociado a $\lambda \in \mathfrak{g}_0^*$ se define de forma usual:

$$M(\mathfrak{g}, \lambda) = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \bigotimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0 \bigoplus \mathfrak{g}_+)} \mathbb{C}_\lambda,$$

donde $\mathbb{C}_\lambda := \mathbb{C}v_\lambda$ es el $(\mathfrak{g}_0 \bigoplus \mathfrak{g}_+)$-módulo unidimensional dado por $hv_\lambda = \lambda(h)v_\lambda$ si $h \in \mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}_+ v_\lambda = 0$, y la acción de $\mathfrak{g}$ sobre $M(\mathfrak{g}, \lambda)$ es inducida por la multiplicación a izquierda en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Cualquier módulo de peso máximo $V(\mathfrak{g},\lambda)$ es un módulo cociente de $M(\mathfrak{g},\lambda)$. El módulo irreducible $L(\mathfrak{g},\lambda)$ es el cociente de $M(\mathfrak{g},\lambda)$ por el submódulo graduado maximal.

Ahora, sea $\mathfrak{p} = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathfrak{p}_j$ una subálgebra parabólica de $\mathfrak{g}$ y sea $\lambda \in \mathfrak{g}_0^*$ tal que $\lambda\mid_{[\mathfrak{p},\mathfrak{p}]\cap\mathfrak{g}_0} = 0$. Entonces el $(\mathfrak{g}_0 \bigoplus \mathfrak{g}_+)$-módulo $\mathbb{C}_\lambda$ extiende a un $\mathfrak{p}$-módulo haciendo $\mathfrak{p}_j v_\lambda = 0$ para todo $j < 0$, luego podemos construir el módulo de peso máximo

$$M(\mathfrak{p},\mathfrak{g},\lambda) = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \bigotimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{p})} \mathbb{C}_\lambda,$$

llamado el *módulo de Verma generalizado*. Claramente todos estos módulos son graduados. El siguiente resultado da una caracterización de los módulos de peso máximo irreducibles cuasifinitos de $\mathfrak{g}$.

TEOREMA 1.3. *Sea $\mathfrak{g} = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$ una (super) álgebra de Lie $\mathbb{Z}$-graduada (consistente) sobre $\mathbb{C}$ que satisface las condiciones (P1), (P2) y (P3). Entonces las siguientes condiciones sobre $\lambda \in \mathfrak{g}_0^*$ son equivalentes:*

(a) $M(\mathfrak{g},\lambda)$ contiene un vector singular $a.v_\lambda$ en $M(\mathfrak{g},\lambda)_{-1}$, donde a es no degenerado.
(b) Existe un elemento no degenerado $a \in \mathfrak{g}_{-1}$, tal que $\lambda([\mathfrak{g}_1, a]) = 0$.
(c) $L(\mathfrak{g},\lambda)$ es cuasifinito.
(d) Existe un elemento no degenerado $a \in \mathfrak{g}_{-1}$, tal que $L(\mathfrak{g},\lambda)$ es el cociente irreducible del módulo de Verma generalizado $M(\mathfrak{g},\mathfrak{p}^a,\lambda)$.

DEMOSTRACIÓN. (a) $\Rightarrow$ (d) Denotamos por $a.v_\lambda$ el vector singular, con $a \in \mathfrak{g}_{-1}$, entonces (d) vale para este a particular; (d) $\Rightarrow$ (c) es inmediata. Finalmente, $L(\mathfrak{g},\lambda)$ cuasifinito implica $dim(\mathfrak{g}_{-1}.v_\lambda) < \infty$ entonces existe $a \in \mathfrak{g}_{-1}$ tal que $a.v_\lambda = 0$ en $L(\mathfrak{g},\lambda)$, luego $0 = \mathfrak{g}_1(a.v_\lambda) = a.(g_1 v_\lambda) + [g_1, a].v_\lambda = \lambda([\mathfrak{g}_1, a])v_\lambda$, resultando (c) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (a). $\square$

Capítulo 2

Módulos cuasifinitos de las subálgebras clásicas de $W_{\infty,\,p}$

En este capítulo caracterizamos los módulos de peso máximo irreducibles cuasifinitos de las subálgebras de Lie clásicas de $W_{\infty,\,p} = \widehat{\mathcal{D}}_p$, dichas subálgebras aparecen por el estudio de las anti-involuciones del álgebra asociativa de los operadores diferenciales sobre el círculo $\mathcal{D}_p^a$. La clasificación de dichas anti-involuciones extiende los resultados obtenidos por Kac, Wang y Yang en [**14**]. Los casos más importantes son las subálgebras clásicas $\widehat{\mathcal{D}}_x^{\pm}$ de $W_\infty = \widehat{\mathcal{D}}_x$. Para el caso $\widehat{\mathcal{D}}_x^-$ realizamos sus módulos de peso máximo irreducibles cuasifinitos en términos de los módulos de peso máximo irreducibles cuasifinitos de $\widehat{\mathfrak{gl}}_\infty^{[m]}$, su subálgebra de Lie clásica de tipo D y una subálgebra que denotamos por $\mathcal{L}^{[m]}$. Una realización similar para el caso $\widehat{\mathcal{D}}_x^+$ fue obtenida en [**6**], y para los casos $\widehat{\mathcal{D}}_1^{\pm}$ se hizo en [**14**].

En la sección 1, introducimos definiciones básicas que usaremos a lo largo de todo el capítulo y clasificamos todas las anti-involuciones de $\mathcal{D}_p^a$ que preservan la $\mathbb{Z}$-graduación principal encontrando dos que denotaremos por $\sigma_\pm$. En la sección 2, describimos las subálgebras de Lie $\widehat{\mathcal{D}}_p^{\pm}$ fijadas por $-\sigma_\pm$ y obtenemos una caracterización de sus módulos de peso máximo irreducibles cuasifinitos. Finalmente en las dos últimas secciones nos abocamos al estudio de $\widehat{\mathcal{D}}_x^-$, en sección 3 encontramos relaciones entre $\widehat{\mathcal{D}}_x^{\mathcal{O},-}$ y $\widehat{\mathfrak{gl}}_\infty^{[m]}$, $d_\infty^{[m]}$, $\mathcal{L}^{[m]}$ lo que luego nos permite, en la última sección, realizar los módulos de peso máximo irreducibles cuasifinitos de $\widehat{\mathcal{D}}_x^-$.

1. Anti-involuciones de $\mathcal{D}_p^a$ que preservan la graduación principal

Sea $\mathcal{D}^a$ el álgebra asociativa de los operadores diferenciales regulares sobre el círculo, i.e. los operadores sobre $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ de la forma

$$E = e_k(t)\partial_t^k + e_{k-1}(t)\partial_t^{k-1} + \cdots + e_0(t),$$

donde $e_i(t) \in \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ y ∂_t denota $\frac{d}{dt}$. Los elementos $L_k^l = -t^k D^l$ con $l \in \mathbb{Z}_+$ y $k \in \mathbb{Z}$ forman una base, donde $D = t\partial_t$. Denotaremos por $\mathcal{D}$ el álgebra de Lie que se obtiene de $\mathcal{D}^a$ por tomar el corchete usual, i.e.

$$[t^r f(D), t^s g(D)] = t^{r+s}(f(D+s)g(D) - f(D)g(D+r)),$$

donde $f,\ g \in \mathbb{C}[x]$ y $s,\ t \in \mathbb{Z}$. Consideremos la siguiente familia de subálgebras de $\mathcal{D}^a$: dado $p \in \mathbb{C}[x]$ denotamos $\mathcal{D}_p^a := \mathcal{D}^a p(D)$ y denotaremos por $\mathcal{D}_p$ la correspondiente álgebra de Lie asociada.

Haciendo $\operatorname{wt} t^k f(D) = k$ definimos la $\mathbb{Z}$-graduación principal de $\mathcal{D}^a$ y $\mathcal{D}_p^a$:

$$\mathcal{D}_p^a = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} (\mathcal{D}_p^a)_j, \text{ donde } (\mathcal{D}_p^a)_j = \{t^j f(D)p(D) : f \in \mathbb{C}[x]\}.$$

Una *anti-involución* σ de $\mathcal{D}_p^a$ es un anti-automorfismo involutivo de $\mathcal{D}_p^a$, i.e. $\sigma : \mathcal{D}_p^a \to \mathcal{D}_p^a$ con $\sigma(bX+Y) = b\sigma(X)+\sigma(Y)$, $\sigma^2 = Id$ y $\sigma(XY) = \sigma(Y)\sigma(X)$ donde $X, Y \in \mathcal{D}_p^a$, $b \in \mathbb{C}$.

El principal resultado de esta sección es el siguiente teorema con la clasificación de todas las anti-involuciones de $\mathcal{D}_p^a$ que preservan la $\mathbb{Z}$-graduación principal.

Teorema 1.1. *Sea $p \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio no nulo. Entonces existe una anti-involución en $\mathcal{D}_p^a$ que preserva la graduación principal si y sólo si, existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $p(x) = \varepsilon p(-x + c)$, donde $\varepsilon = (-1)^{deg(p)}$.*

Si $deg(p) \geqslant 1$ y existe tal c entonces este es único y solo hay dos anti-involuciones dadas por

$$\sigma_\pm(t^k f(D)p(D)) = \varepsilon(\pm t)^k f(-D - k + c)p(D). \tag{1.1}$$

Si $deg(p) = 0$, c es un parámetro libre, y existen solo dos familias de anti-involuciones dadas por (1.1).

Observación 1.2. *Cuando $deg(p) = 0$, recuperamos la clasificación obtenida en Proposición 2.1* [**14**].

En la última parte de esta sección presentamos la prueba del Teorema 1.1 a través de varios lemas.

Sea $\sigma : \mathcal{D}_p^a \longrightarrow \mathcal{D}_p^a$ una anti-involución que preserva la graduación principal, entonces σ induce un mapa $\sigma_0 : \mathcal{D}^a \longrightarrow \mathcal{D}^a$ como sigue

$$\sigma(t^k f(D)p(D)) = \sigma_0(t^k f(D))p(D). \tag{1.2}$$

Es claro que σ_0 preserva la graduación principal y además caracterizar σ es equivalente a caracterizar σ_0.

Lema 1.3. *Sean $f, g \in \mathbb{C}[x]$ y sean $k, m \in \mathbb{Z}$. Entonces*

(a) σ_0 es $\mathbb{C}$-lineal;
(b) $\sigma_0^2 = Id$;
(c) $\sigma_0(t^{k+m} f(D + m)p(D + m)g(D)) = \sigma_0(t^m g(D))p(D)\sigma_0(t^k f(D))$;
(d) $\sigma_0(f(D)g(D)p(D)) = \sigma_0(f(D))\sigma_0(g(D))p(D)$.

Demostración. Usando que σ es una anti-involución, (a) y (b) son inmediatas. Ahora para $f, g \in \mathbb{C}[x]$, $k, m \in \mathbb{Z}$, tenemos

$$\sigma(t^k f(D)p(D)t^m g(D)p(D)) = \sigma_0(t^m g(D))p(D)\sigma_0(t^k f(D))p(D) \tag{1.3}$$

y

$$\sigma(t^k f(D)p(D)t^m g(D)p(D)) = \sigma_0(t^{k+m} f(D+m)p(D+m)g(D))p(D) \tag{1.4}$$

(c) sigue de igualar (1.3) con (1.4). Finalmente, observe que (d) sigue de (c) ya que $(\mathcal{D}^a)_0$ es una subálgebra abeliana de $\mathcal{D}^a$ y σ_0 preserva la graduación principal, finalizando la prueba. □

A continuación necesitaremos la siguiente notación $\sigma_0(t^k) = t^k\varepsilon_k$, con $\varepsilon_k \in \mathbb{C}[D]$.

LEMA 1.4. *(a) Para todo $k \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon_k = \pm 1$.*
(b) Existe $c \in \mathbb{C}$ tal que, para todo $k \in \mathbb{Z}$ y $f \in \mathbb{C}[D]$,

$$\sigma_0(t^k f(D)) = \varepsilon_k t^k f(-D - k + c).$$

DEMOSTRACIÓN. Usando el Lema 1.3.(d) con $f = g = 1$ tenemos

$$\sigma_0(p(D)) = \varepsilon_0^2 p(D), \tag{1.5}$$

luego por Lema 1.3.(b) y (1.5), $p(D) = \sigma_0(\varepsilon_0^2 p(D))$ y usando nuevamente el Lema 1.3.(d) con $f = 1$ y $g = \varepsilon_0^2$, obtenemos

$$p(D) = \varepsilon_0 \sigma_0(\varepsilon_0^2) p(D). \tag{1.6}$$

Luego de (1.6) obtenemos $1 = \varepsilon_0 \sigma_0(\varepsilon_0^2)$ y por lo tanto ε_0 es constante. Además por Lema 1.3.(a) y (b), tenemos $1 = \sigma_0^2(1) = \varepsilon_0^2$, obteniendo

$$\varepsilon_0 = \pm 1. \tag{1.7}$$

Ahora haciendo inducción en i, probaremos que

$$\sigma_0(t^l D^i) = t^l \varepsilon_l \left(\varepsilon_0 \sigma_0(D) - l\right)^i, \text{ para todo } i \in \mathbb{Z}_+ \text{ y } l \in \mathbb{Z}. \tag{1.8}$$

Para $i = 0$ se sigue de la notación. Luego, usando Lema 1.3.(c) con $t^k f(D) = (D - l)$, $t^m g(D) = t^l D^i$, tenemos

$$\begin{aligned} \sigma_0(t^l D^{i+1} p(D + l)) &= \sigma_0(t^l D^i) p(D) \sigma_0(D - l) \\ &= t^l \varepsilon_l \left(\varepsilon_0 \sigma_0(D) - l\right)^i p(D)(\sigma_0(D) - \varepsilon_0 l) \end{aligned} \tag{1.9}$$

por otro lado, usando nuevamente el Lema 1.3.(c) con $t^k f(D) = 1$, $t^m g(D) = t^l D^{i+1}$, obtenemos

$$\sigma_0(t^l D^{i+1} p(D + l)) = \sigma_0(t^l D^{i+1}) p(D) \varepsilon_0. \tag{1.10}$$

Comparando (1.9) con (1.10), y usando (1.7), obtenemos (1.8).

Dado $f \in \mathbb{C}[x]$ usando la linealidad de σ_0 junto con (1.8), tenemos que

$$\sigma_0(t^k f(D)) = t^k \varepsilon_k f(\varepsilon_0 \sigma_0(D) - k). \tag{1.11}$$

Entonces por Lema 1.3.(b) y (1.11), para todo $k \in \mathbb{Z}$,

$$t^k = \sigma_0^2(t^k) = \sigma_0(t^k \varepsilon_k) = t^k \varepsilon_k(D) \varepsilon_k(\varepsilon_0 \sigma_0(D) - k), \tag{1.12}$$

por lo tanto $deg(\varepsilon_k) = 0$ y además $\varepsilon_k^2 = 1$, finalizando la prueba de (a).

A continuación, ya que σ_0 preserva la $\mathbb{Z}$-graduación, podemos asumir que $\sigma_0(D) = g(D)$ para algún $g \in \mathbb{C}[x]$. Entonces por Lema 1.3.(b) y (1.11), tenemos que

$$D = \sigma_0^2(D) = \varepsilon_0 g(\varepsilon_0 g(D)), \tag{1.13}$$

y usando (1.7), obtenemos que $deg(g)^2 = 1$, por lo tanto $deg(g) = 1$. Entonces $g(D) = aD + b$ para algunos $a,\ b \in \mathbb{C}$ con $a \neq 0$ y reemplazando en (1.13) obtenemos,

$$\sigma_0(D) = aD + b, \text{ con } a = \pm 1,\ (a + \varepsilon_0) b = 0. \tag{1.14}$$

Observe que usando (1.11), (1.14) y (a) obtenemos

$$\sigma_0(t^k f(D)) = \varepsilon_k t^k f(\varepsilon_0 a D - k + c), \quad \text{donde} \quad c = \varepsilon_0 b.$$

Ahora para finalizar la prueba de (b), solo tenemos que probar que $\varepsilon_0 a = -1$. Como

$$\begin{aligned} t^k D &= \sigma_0^2(t^k D) \\ &= \sigma_0(\varepsilon_k t^k(\varepsilon_0 aD - k + \varepsilon_0 b)) \\ &= t^k D + (\varepsilon_0 a + 1)k \end{aligned}$$

para todo k en $\mathbb{Z}$, obtenemos $\varepsilon_0 a + 1 = 0$. $\square$

Demostración del Teorema 1.1. Sea $\sigma : \mathcal{D}_p^a \to \mathcal{D}_p^a$ una anti-involución que preserva la $\mathbb{Z}$-graduación principal. Entonces, de (1.2) y Lema 1.4.(b)

$$\sigma(t^k f(D)p(D)) = \varepsilon_k t^k f(-D - k + c)p(D), \tag{1.15}$$

para algún $c \in \mathbb{C}$. Además de (1.5) y Lema 1.4.(a) tenemos que $\sigma_0(p(D)) = p(D)$, por otro lado, usando Lema 1.4.(b) obtenemos que p satisface

$$p(D) = \varepsilon_0 p(-D + c), \text{ para algún } c \in \mathbb{C}. \tag{1.16}$$

Si $n = deg(p) > 0$, comparando los coeficiente de D^n y D^{n-1} en ambos lados de (1.16), obtenemos $\varepsilon_0 = (-1)^n$ y $c = -\frac{2c_{n-1}}{nc_n}$ respectivamente, donde $p(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i$, así c esta totalmente determinado por los coeficientes de p.

Si $deg(p) = 0$, usando (1.16) obtenemos $\varepsilon_0 = 1$ y c es un parámetro libre.

Por otro lado,

$$\sigma(t^k p(D) t^m p(D)) = \sigma(t^m p(D))\sigma(t^k p(D)) \tag{1.17}$$

con

$$\begin{aligned} \sigma(t^k p(D) t^m p(D)) &= \sigma(t^{k+m} p(D+m)p(D)) \\ &= \varepsilon_{k+m} t^{k+m} p(-D - k + c)p(D) \\ &= \varepsilon_0 \varepsilon_{k+m} t^{k+m} p(D+k)p(D), \end{aligned} \tag{1.18}$$

y

$$\begin{aligned} \sigma(t^m p(D))\sigma(t^k p(D)) &= \varepsilon_m \varepsilon_k t^m p(D) t^k p(D) \\ &= \varepsilon_m \varepsilon_k t^{k+m} p(D+k)p(D). \end{aligned} \tag{1.19}$$

De (1.18) y (1.19) tenemos que (1.17) es verdadero si y sólo si

$$\varepsilon_{k+m} = \varepsilon_0 \varepsilon_k \varepsilon_m, \tag{1.20}$$

y esto se cumple para todo $k,\ m \in \mathbb{Z}$. Entonces, si tomamos $k = 1$ y $m = -1$ de (1.20) y Lema 1.4.(a), tenemos que $\varepsilon_1 = \varepsilon_{-1}$ y por inducción

$$\varepsilon_k = \varepsilon_0(\varepsilon_0 \varepsilon_1)^k, \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}. \tag{1.21}$$

Además como ε_0 esta totalmente determinado, solo podríamos tener dos anti-involuciones dependiendo de la elección de ε_1. Usando (1.15) y (1.21), tenemos los siguientes casos:

· si $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$, $\sigma(t^k f(D)p(D)) = \varepsilon_0 t^k f(-D - k + c)p(D)$;
· si $\varepsilon_1 = -\varepsilon_0$, $\sigma(t^k f(D)p(D)) = \varepsilon_0 (-t)^k f(-D - k + c)p(D)$.

Recíprocamente, a través de un cálculo directo se puede ver que si p satisface (1.16) entonces los dos casos anteriores son anti-involuciones, finalizando la prueba. $\square$

2. Módulos de peso máximo cuasifinitos de $\widehat{\mathcal{D}}_p^{\pm}$

Sea $p \in \mathbb{C}[x]$ con $n = deg(p)$ que satisface el Teorema 1.1, i.e. $p(x) = (-1)^n p(-x+c)$ para algún $c \in \mathbb{C}$. Denotamos por $\mathcal{D}_p^{\pm}$, la subálgebra de Lie de $\mathcal{D}_p$ dada por los elementos $-\sigma_{\pm}$-fijos, es decir

$$\mathcal{D}_p^{\pm} = \{d \in \mathcal{D}_p : \sigma_{\pm}(d) = -d\}.$$

Esta subálgebra hereda una $\mathbb{Z}$-graduación de $\mathcal{D}_p$ ya que $\sigma_{\pm}$ preserva la graduación principal de $\mathcal{D}_p$, entonces $\mathcal{D}_p^{\pm} = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}(\mathcal{D}_p^{\pm})_k$ donde

$$(\mathcal{D}_p^{\pm})_k = \{t^k f(D)p(D) : f \in \mathbb{C}[x] \text{ y } \sigma_{\pm}(t^k f(D)p(D)) = -t^k f(D)p(D)\}.$$

Denotaremos por $\mathbb{C}[x]^{(0)}$ (resp. $\mathbb{C}[x]^{(1)}$) el conjunto de todos los polinomios pares (resp. impares) en $\mathbb{C}[x]$. Además, sea $\overline{k} = 0$ si k es un entero impar y $\overline{k} = 1$ si k es par. El siguiente lema nos da una descripción de $(\mathcal{D}_p^{\pm})_k$.

LEMA 2.1. *(a)* $(\mathcal{D}_p^{+})_k = \left\{ t^k f\left(D - \dfrac{c-k}{2}\right) p(D) : f \in \mathbb{C}[x]^{(\overline{n})} \right\}$ *;*
(b) $(\mathcal{D}_p^{-})_k = \left\{ t^k f\left(D - \dfrac{c-k}{2}\right) p(D) : f \in \mathbb{C}[x]^{(\overline{n+k})} \right\}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $t^k f(D)p(D) \in (\mathcal{D}_p^{-})_k$. Entonces, por Teorema 1.1

$$(-1)^{n+k} t^k f(-D-k+c)p(D) = \sigma_{-}(t^k f(D)p(D)) = -t^k f(D)p(D),$$

si y sólo si $(-1)^{n+k+1} f(x) = f(-x-k+c)$. Luego definimos $g(w) = f(w + \frac{c-k}{2})$ y para $x = w - \frac{c-k}{2}$, tenemos $g(-x) = f(-w-k+c) = (-1)^{n+k+1} f(w) = (-1)^{n+k+1} f(x + \frac{c-k}{2}) = (-1)^{n+k+1} g(x)$, por lo tanto $g(w) \in \mathbb{C}[w]^{(\overline{n+k})}$ y
$g(x - \frac{c-k}{2}) = f(x)$ finalizando (b). La prueba de (a) es similar. □

Consideremos el siguiente 2-cociclo sobre $\mathcal{D}$, donde $f(x),\ g(x) \in \mathbb{C}[x]$

$$\Psi(t^r f(D), t^s g(D)) = \begin{cases} \sum\limits_{-r \leqslant m \leqslant -1} f(m)g(m+r), & \text{si } r = -s > 0; \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Denotamos por $\widehat{\mathcal{D}}$ la extensión central de $\mathcal{D}$ por centro $\mathbb{C}C$, correspondiente al 2-cociclo Ψ, i.e. $\widehat{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \oplus \mathbb{C}C$ con la siguiente relación de conmutación

$$[t^r f(D), t^s g(D)] = t^{r+s}(f(D+s)g(D) - f(D)g(D+r)) + \Psi(t^r f(D), t^s g(D))C.$$

Denotamos por $\widehat{\mathcal{D}}_p^{\pm}$ la extension central de $\mathcal{D}_p^{\pm}$ por $\mathbb{C}C$ correspondiente a la restricción del 2-cociclo Ψ.

Haciendo $\operatorname{wt} t^k f(D)p(D) = k,\ \operatorname{wt} C = 0$ se define la $\mathbb{Z}$-*graduación principal* de $\widehat{\mathcal{D}}_p^{\pm}$

$$\widehat{\mathcal{D}}_p^{\pm} = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} (\widehat{\mathcal{D}}_p^{\pm})_k, \text{ donde } (\widehat{\mathcal{D}}_p^{\pm})_k = (\mathcal{D}_p^{\pm})_k \oplus \delta_{0,k}\mathbb{C}C. \tag{2.1}$$

Con el objetivo de aplicar el Teorema 1.3 introducido en el capítulo 1, probaremos que $\widehat{\mathcal{D}}_p^{\pm}$ satisface las propiedades (P1), (P2), (P3). Es obvio que

$\widehat{\mathcal{D}}_p^{\pm}$ satisface (P1). Ahora para probar que cumple (P2) y (P3), necesitaremos los siguientes resultados.

LEMA 2.2. *Sean* $f,\ g,\ h \in \mathbb{C}[x]$ *tales que* $deg(fg) > 0$ *y*

$$[t^k f(D), t^l g(D)] = t^{k+l} h(D) + \Psi(t^k f(D), t^l g(D))C, \tag{2.2}$$

entonces $deg(h) = deg(f) + deg(g) - 1$ *si y sólo si,* $deg(f)l \neq deg(g)k$.

DEMOSTRACIÓN. Suponemos primero, $f(D) = D^i$ y $g(D) = D^j$ con $i + j > 0$, entonces de (2.2)

$$h(D) = (D + l)^i D^j - (D + k)^j D^i,$$

luego es claro que $deg(h) \leqslant i + j - 1$, además el coeficiente de D^{i+j-1} es $(il - jk)$ por lo tanto el Lema es verdadero para este caso. Ahora sean $f(x) = \sum_{i=0}^n f_i x^i,\ g(x) = \sum_{j=0}^m g_j x^j \in \mathbb{C}[x]$ tales que $n + m > 0$, entonces

$$[t^k f(D), t^l g(D)] = \sum_{i,j} f_i g_j [t^k D^i, t^l D^j] := \sum_{i,j} f_i g_j\, t^{k+l} h_{i,j}(D) + \Psi_0 C,$$

con $deg(h_{i,j}) \leqslant i + j - 1$ y $\Psi_0 \in \mathbb{C}$. Por lo tanto sólo tenemos que estudiar $t^{k+l} h_{n,m}(D) := [t^k D^n, t^l D^m]$, finalmente la prueba sigue de lo anterior. □

LEMA 2.3. *Sea* $\mathfrak{p} = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathfrak{p}_j$ *una subálgebra* $\mathbb{Z}$*-graduada de* $\widehat{\mathcal{D}}_p^{\pm}$ *con* $\mathfrak{p}_0 = (\widehat{\mathcal{D}}_p^{\pm})_0$.

(a) Si $\mathfrak{p}_j \neq 0$*, entonces* $\mathfrak{p}_j$ *tiene codimensión finita en* $(\widehat{\mathcal{D}}_p^{\pm})_j$.

(b) Si $\mathfrak{p}_{-1} \neq 0$*, entonces* $\mathfrak{p}_{-j}$ *tiene codimensión finita en* $(\widehat{\mathcal{D}}_p^{\pm})_{-j}$ *para todo* $j \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN. Para probar (a), es suficiente encontrar una familia

$$\{t^j g_k(D) p(D)\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{p}_j,$$

con $deg(g_k) = m_0 + 2k$ para algún $m_0 \in \mathbb{Z}_+$ fijo (ver Lema 2.1).

Suponemos $j \neq 0$. Sea $t^j f(D)p(D) \in \mathfrak{p}_j$ no nulo. Por hipótesis y Lema 2.1, tenemos que $(D - \frac{c}{2})^{2k+\overline{n}} p(D) \in \mathfrak{p}_0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$t^j g_k(D)p(D) := [t^j f(D)p(D), (D - \frac{c}{2})^{2k+\overline{n}} p(D)] \in \mathfrak{p}_j,$$

y del Lema 2.2 obtenemos $deg(g_k) = deg(f) + \overline{n} + n - 1 + 2k$, finalizando (a).

Ahora suponemos $\mathfrak{p}_{-1} \neq 0$. Para probar (b) sólo necesitamos ver que $\mathfrak{p}_{-j} \neq 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Por inducción, suponemos $\mathfrak{p}_{-j} \neq 0$ con $j \in \mathbb{N}$. Entonces de lo anterior, existe $m_0 \in \mathbb{Z}_+$ fijo tal que $t^{-j} g_k(D)p(D) \in \mathfrak{p}_{-j}$ con $deg(g_k) = m_0 + 2k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y por hipótesis existe $t^{-1} f(D)p(D) \in \mathfrak{p}_{-1}$ no nulo. Luego, podemos tomar $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(n + deg(f))j \neq (n + m_0 + 2k_0)$, entonces por Lema 2.2, $[t^{-1} f(D)p(D), t^{-j} g_{k_0}(D)p(D)] \in \mathfrak{p}_{-j-1}$ es no nulo, completando la inducción. □

COROLARIO 2.4. *(a)* $\widehat{\mathcal{D}}_p^{\pm}$ *satisface (P2).*

(b) Cualquier subálgebra parabólica de $\widehat{\mathcal{D}}_p^{\pm}$ *es no degenerada.*

(c) Todo elemento no nulo de $(\widehat{\mathcal{D}}_p^{\pm})_{-1}$ *es no degenerado.*

(d) $\widehat{\mathcal{D}}_p^{\pm}$ *satisface (P3).*

DEMOSTRACIÓN. Sea $t^{-k}f(D)p(D) \in \widehat{\mathcal{D}}_p^{\pm}$, no nulo (con $k \in \mathbb{N}$), entonces si tomamos $tg(D)p(D) \in (\widehat{\mathcal{D}}_p^{\pm})_1$ con g no constante, por Lema 2.2 obtenemos que

$$[t^{-k}f(D)p(D), tg(D)p(D)] \neq 0,$$

por lo tanto, $\widehat{\mathcal{D}}_p^{\pm}$ satisface (P2), demostrando (a).

Ahora, sea $\mathfrak{p}$ una subálgebra parabólica de $\widehat{\mathcal{D}}_p^{\pm}$, por definición existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{p}_{-j} \neq 0$ entonces por (P2), $\mathfrak{p}_{-1} \neq 0$, y la prueba de (b) se sigue del Lema 2.3 (b). Finalmente, (c) sigue de (b), y (d) sigue de (c). $\square$

Sea $L(\widehat{\mathcal{D}}_p^{\pm}, \lambda)$ un $\widehat{\mathcal{D}}_p^{\pm}$-módulo de peso máximo irreducible cuasifinito. Por Teorema 1.3, existe un polinomio mónico $b(x - \frac{c+1}{2})p(x)$ tal que $(t^{-1}b(D - \frac{c+1}{2})p(D))v_\lambda = 0$ (con $b(x)$ un polinomio impar o par dependiendo de $\widehat{\mathcal{D}}_p^{\pm}$, ver Lema 2.1). Llamaremos a tal polinomio mónico de grado mínimo, determinado unívocamente por el peso máximo λ, el *polinomio característico* de $L(\widehat{\mathcal{D}}_p^{\pm}, \lambda)$.

Denotaremos por $\mathbb{Z}_+^{(0)}$ (resp. $\mathbb{Z}_+^{(1)}$) el conjunto de todos los enteros pares (resp. impares).

Una funcional $\lambda \in (\widehat{\mathcal{D}}_p^{\pm})_0^*$ se describe por sus valores en los niveles $\triangle_l = -\lambda((D - \frac{c}{2})^l p(D))$, donde $l \in \mathbb{Z}_+^{(\overline{n})}$, $n = deg(p)$ y la carga central $\lambda(C) = \bar{c}$. Consideremos la siguiente serie generatriz,

$$\Delta_\lambda(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}_+^{(\overline{n})}} \frac{x^l}{l!} \triangle_l. \tag{2.3}$$

Además necesitaremos el siguiente resultado. Recordemos que un *cuasipolinomio* es una combinación lineal de funciones de la forma $q(x)e^{\alpha x}$, donde $q \in \mathbb{C}[x]$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Se sabe que: una serie de potencias formal es un cuasipolinomio (resp. cuasipolinomio par) si y sólo si, satisface una ecuación diferencial lineal no trivial con coeficientes constantes $f(\partial) = 0$, donde $f(x)$ es un polinomio (resp. polinomio par).

El siguiente teorema es el principal resultado de esta sección y nos da una caracterización de los módulos de peso máximo irreducibles cuasifinitos sobre $\widehat{\mathcal{D}}_p^{\pm}$. Es una extensión del resultado de Kac-Wang-Yang, dado que para el caso particular $p(x) = 1$ recuperamos el Teorema 4.1 de [**14**].

TEOREMA 2.5. *Un $\widehat{\mathcal{D}}_p^{\pm}$-módulo $L(\widehat{\mathcal{D}}_p^{\pm}, \lambda)$ es cuasifinito si y sólo si,*

$$\triangle_\lambda(x) = p\left(\frac{d}{dx} + \frac{c}{2}\right)\left(\frac{\phi_\lambda(x)}{2\sinh\left(\frac{x}{2}\right)}\right), \tag{2.4}$$

donde $\phi_\lambda(x)$ es un cuasipolinomio par tal que $\phi_\lambda(0) = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que p satisface

$$p(x) = (-1)^n p(-x + c) \tag{2.5}$$

donde $n = deg(p)$. Es fácil ver que valen las siguientes identidades, para f, $g \in \mathbb{C}[x]$ y $a \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} f\left(\pm\frac{d}{dx}\right)e^{ax} &= f(\pm a)e^{ax}, &(2.6)\\ e^{\pm x(D-\frac{c}{2})}f(D) &= f\left(\pm\frac{d}{dx}+\frac{c}{2}\right)e^{\pm x(D-\frac{c}{2})}, &(2.7)\\ e^{\pm\frac{x}{2}}f\left(\frac{d}{dx}\right)g(x) &= f\left(\frac{d}{dx}\mp\frac{1}{2}\right)e^{\pm\frac{x}{2}}g(x). &(2.8)\end{aligned}$$

Usando (2.5) y (2.7), obtenemos

$$\begin{aligned}\Delta_\lambda(x) &= -\frac{1}{2}\lambda\left(\left(e^{x(D-\frac{c}{2})}+(-1)^{n+1}e^{-x(D-\frac{c}{2})}\right)p(D)\right)\\ &= -\frac{1}{2}\lambda\left(p\left(\frac{d}{dx}+\frac{c}{2}\right)\left(e^{x(D-\frac{c}{2})}-e^{-x(D-\frac{c}{2})}\right)\right). \qquad (2.9)\end{aligned}$$

Ahora, tomamos $\Gamma_\lambda(x)$ una solución de

$$\triangle_\lambda(x) = p\left(\frac{d}{dx}+\frac{c}{2}\right)\Gamma_\lambda(x). \tag{2.10}$$

Se sigue del Teorema 1.3 que $L(\widehat{\mathcal{D}}_p^{\pm},\lambda)$ es cuasifinito si y sólo si existe $t^{-1}b(D-\frac{c+1}{2})p(D) \in (\widehat{\mathcal{D}}_p^{\pm})_{-1}$ tal que

$$0 = \lambda([t(D-\frac{c-1}{2})^{2k+\delta}p(D), t^{-1}b(D-\frac{c+1}{2})p(D)]) \tag{2.11}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$ y por Lema 2.1 y (2.1), $b \in \mathbb{C}[x]^{(\delta)}$ donde δ viene dada por

$$\delta = \begin{cases}\overline{n}, & \text{en el caso } \widehat{\mathcal{D}}_p^{+},\\ \overline{n-1}, & \text{en el caso } \widehat{\mathcal{D}}_p^{-}.\end{cases} \tag{2.12}$$

Tomando serie generatriz, (2.11) es equivalente a

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}\lambda([t(e^{x(D-\frac{c-1}{2})}+(-1)^{\delta}e^{-x(D-\frac{c-1}{2})})p(D), t^{-1}b(D-\frac{c+1}{2})p(D)])\\ &= \frac{1}{2}\lambda\Bigg(b(D-\frac{c+1}{2})p(D-1)p(D)(e^{x(D-\frac{c+1}{2})}+(-1)^{\delta}e^{-x(D-\frac{c+1}{2})})\\ &\quad -b(D-\frac{c-1}{2})p(D+1)p(D)(e^{x(D-\frac{c-1}{2})}+(-1)^{\delta}e^{-x(D-\frac{c-1}{2})})\\ &\quad +b(-\frac{c+1}{2})p(-1)p(0)(e^{-(\frac{c+1}{2})x}+(-1)^{\delta}e^{(\frac{c+1}{2})x})C\Bigg) \qquad (2.13)\end{aligned}$$

Entonces usando las identidades (2.5), (2.6), (2.7), (2.8), (2.9) y (2.10), sale que (2.13) puede ser reescrito como

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2}\lambda\left(b(\frac{d}{dx})p(\frac{d}{dx}+\frac{c-1}{2})e^{-\frac{x}{2}}p(\frac{d}{dx}+\frac{c}{2})e^{x(D-\frac{c}{2})}\right.\\
&\quad +(-1)^{\delta}b(-\frac{d}{dx})p(-\frac{d}{dx}+\frac{c-1}{2})e^{\frac{x}{2}}p(-\frac{d}{dx}+\frac{c}{2}+1)e^{-x(D-\frac{c}{2})}\\
&\quad -b(\frac{d}{dx})p(\frac{d}{dx}+\frac{c+1}{2})e^{\frac{x}{2}}p(\frac{d}{dx}+\frac{c}{2})e^{x(D-\frac{c}{2})}\\
&\quad \left.-(-1)^{\delta}b(-\frac{d}{dx})p(-\frac{d}{dx}+\frac{c+1}{2})e^{-\frac{x}{2}}p(-\frac{d}{dx}+\frac{c}{2}-1)e^{-x(D-\frac{c}{2})}\right)\\
&\quad +\frac{1}{2}\left(b(\frac{d}{dx})p(\frac{d}{dx}+\frac{c-1}{2})p(\frac{d}{dx}+\frac{c+1}{2})e^{-(\frac{c+1}{2})x}\right.\\
&\quad \left.+(-1)^{\delta}b(-\frac{d}{dx})p(-\frac{d}{dx}+\frac{c-1}{2})p(-\frac{d}{dx}+\frac{c+1}{2})e^{(\frac{c+1}{2})x}\right)\bar{c}\\
&= \frac{1}{2}\lambda\left(b(\frac{d}{dx})\left[p(\frac{d}{dx}+\frac{c-1}{2})e^{-\frac{x}{2}}-p(\frac{d}{dx}+\frac{c+1}{2})e^{\frac{x}{2}}\right]p(\frac{d}{dx}+\frac{c}{2})e^{x(D-\frac{c}{2})}+\right.\\
&\quad \left.b(\frac{d}{dx})\left[p(\frac{d}{dx}+\frac{c+1}{2})e^{\frac{x}{2}}-p(\frac{d}{dx}+\frac{c-1}{2})e^{-\frac{x}{2}}\right]p(\frac{d}{dx}+\frac{c}{2})e^{-x(D-\frac{c}{2})}\right)\\
&\quad +\frac{1}{2}b(\frac{d}{dx})p(\frac{d}{dx}+\frac{c-1}{2})p(\frac{d}{dx}+\frac{c+1}{2})(e^{-(\frac{c+1}{2})x}+e^{(\frac{c+1}{2})x})\bar{c}\\
&= b(\frac{d}{dx})\left[p(\frac{d}{dx}+\frac{c+1}{2})e^{\frac{x}{2}}-p(\frac{d}{dx}+\frac{c-1}{2})e^{-\frac{x}{2}}\right]p(\frac{d}{dx}+\frac{c}{2})\Gamma_{\lambda}(x)\\
&\quad +b(\frac{d}{dx})p(\frac{d}{dx}+\frac{c-1}{2})p(\frac{d}{dx}+\frac{c+1}{2})\cosh((\frac{c+1}{2})x)\bar{c}\\
&= b(\frac{d}{dx})p(\frac{d}{dx}+\frac{c+1}{2})p(\frac{d}{dx}+\frac{c-1}{2})\left(2\sinh(\frac{x}{2})\Gamma_{\lambda}(x)+\cosh((\frac{c+1}{2})x)\bar{c}\right).
\end{aligned}$$

Se sigue que $L(\widehat{\mathcal{D}}_p^{\pm},\lambda)$ es cuasifinito si y sólo si, existe $b\in\mathbb{C}[x]^{\delta}$ (ver (2.12)) tal que

$$0=b(\frac{d}{dx})p(\frac{d}{dx}+\frac{c+1}{2})p(\frac{d}{dx}+\frac{c-1}{2})\left(2\sinh(\frac{x}{2})\Gamma_{\lambda}(x)+\cosh((\frac{c+1}{2})x)\bar{c}\right). \tag{2.14}$$

Luego si $L(\widehat{\mathcal{D}}_p^{\pm},\lambda)$ es cuasifinito, entonces $2\sinh(\frac{x}{2})\Gamma_{\lambda}(x)+\cosh((\frac{c+1}{2})x)\bar{c}$ es un cuasipolinomio y usando (2.9), (2.10) obtenemos que $\Gamma_{\lambda}(x)$ es una función impar. Se sigue que,

$$\phi_{\lambda}(x)=2\sinh\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma_{\lambda}(x) \tag{2.15}$$

es un cuasipolinomio par tal que $\phi_{\lambda}(0)=0$, y usando (2.10), tenemos

$$\Delta_{\lambda}(x)=p\left(\frac{d}{dx}+\frac{c}{2}\right)\left(\frac{\phi_{\lambda}(x)}{2\sinh(\frac{x}{2})}\right). \tag{2.16}$$

Recíprocamente, si se cumple (2.16) para algún cuasipolinomio par ϕ_{λ} con $\phi_{\lambda}(0)=0$, entonces $F(x)=\phi_{\lambda}(x)+\cosh((\frac{c+1}{2})x)\bar{c}$ es un cuasipolinomio par y satisface $q(\frac{d}{dx})F(x) = 0$ para algún $q \in \mathbb{C}[x]^\delta$. En particular, tenemos que

$$p(\frac{d}{dx} + \frac{c+1}{2})p(\frac{d}{dx} + \frac{c-1}{2})q(\frac{d}{dx})F(x) = 0,$$

y por lo tanto $L(\widehat{\mathcal{D}}_p^\pm, \lambda)$ es cuasifinito, finalizando la prueba. □

Sea $\lambda \in (\widehat{\mathcal{D}}_p^\pm)_0^*$ tal que $L(\widehat{\mathcal{D}}_p^\pm, \lambda)$ es cuasifinito. El cuasipolinomio par $\phi_\lambda(x) + \cosh((\frac{c+1}{2})x)\bar{c}$, donde $\phi_\lambda(x)$ es como en (2.4) y $\bar{c}$ es la carga central, puede ser escrito en la forma

$$\phi_\lambda(x) + \cosh((\frac{c+1}{2})x)\bar{c} = \sum_i q_i(x)\cosh(e_i^+ x) + \sum_j r_j(x)\sinh(e_j^- x), \quad (2.17)$$

donde $q_i(x)$ (resp. $r_j(x)$) son polinomios pares (resp. impares) no nulos y e_i^+ (resp. e_j^-) son números complejos distintos. Notar que $\sum_i q_i(0) = \bar{c}$.

La expresión (2.17) es única salvo cambio de signo en e_i^+ ó simultaneo cambio de signo en e_j^- y $r_j(x)$. Llamamos a e_i^+ (resp. e_j^-) los *exponentes pares* (resp. *impares*) de $L(\widehat{\mathcal{D}}_p^\pm, \lambda)$ con *multiplicidades* $q_i(x)$ (resp. $r_j(x)$). Denotamos por e^+ el conjunto de todos los exponentes pares e_i^+ con multiplicidad $q_i(x)$ y por e^- el conjunto de todos los exponentes impares e_j^- con multiplicidad $r_j(x)$. El par (e^+, e^-) determina $L(\widehat{\mathcal{D}}_p^\pm, \lambda)$ unívocamente y denotaremos a este por $L(\widehat{\mathcal{D}}_p^\pm; e^+, e^-)$.

Corolario 2.6. *Sea $L(\widehat{\mathcal{D}}_p^\pm, \lambda)$ un módulo de peso máximo cuasifinito sobre $\widehat{\mathcal{D}}_p^\pm$, con polinomio característico $b(x) \in \mathbb{C}[x]^\delta$ (ver* (2.12)*), $\Gamma_\lambda(x)$ una solución de* (2.10) *y sea $F(x) = 2\sinh(\frac{x}{2})\Gamma_\lambda(x) + \cosh((\frac{c+1}{2})x)\bar{c}$. Entonces*

$$b\left(\frac{d}{dx}\right)p\left(\frac{d}{dx} + \frac{c+1}{2}\right)p\left(\frac{d}{dx} + \frac{c-1}{2}\right)F(x) = 0$$

es la ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes minimal de la forma

$$f\left(\frac{d}{dx}\right)p\left(\frac{d}{dx} + \frac{c+1}{2}\right)p\left(\frac{d}{dx} + \frac{c-1}{2}\right), \text{ donde } f \in \mathbb{C}[x]^\delta,$$

que satisface $F(x)$. Además, los exponentes que aparecen en (2.17) *son todas las raíces del polinomio $b(x)p(x + \frac{c+1}{2})p(x + \frac{c-1}{2})$.*

3. Relación entre $\widehat{\mathcal{D}}_x^{\mathcal{O},-}$ y $\widehat{\mathfrak{gl}}_\infty^{[m]}$, $d_\infty^{[m]}$, $\mathcal{L}^{[m]}$

Denotamos por $\mathrm{R_m}$ el álgebra cociente $\mathbb{C}[u]/(u^{m+1})$ y por $\mathbf{1}$ el elemento identidad de $\mathrm{R_m}$. Sea $\mathfrak{gl}_\infty^{[m]}$ el álgebra de Lie de todas las matrices $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ con entradas en $\mathrm{R_m}$ y una cantidad finita de diagonales no nulas. Además denotamos por E_{ij} la matriz infinita con $\mathbf{1}$ en el lugar (i,j) y 0 en los otros lugares. Definimos la $\mathbb{Z}$-*graduación principal* de $\mathfrak{gl}_\infty^{[m]}$ haciendo $\mathrm{wt}\, E_{ij} = j - i$. Existe un automorfismo natural ν de $\mathfrak{gl}_\infty^{[m]}$ dado por

$$\nu(E_{ij}) = E_{i+1,j+1}. \quad (3.1)$$

Consideremos el siguiente 2-cociclo sobre $\mathfrak{gl}_\infty^{[m]}$ con valores en $\mathrm{R_m}$;

$$C(A,B) = tr([J,A]B), \tag{3.2}$$

donde $J = \sum_{j\leqslant 0} E_{jj}$, y denotamos por $\widehat{\mathfrak{gl}}_\infty^{[m]} = \mathfrak{gl}_\infty^{[m]} \oplus \mathrm{R_m}$ la correspondiente extensión central. La $\mathbb{Z}$-graduación de esta álgebra de Lie se define haciendo $\mathrm{wt}\,\mathrm{R_m} = 0$ y como antes $\mathrm{wt}\, E_{ij} = j - i$.

Dado $\lambda \in (\widehat{\mathfrak{gl}}_\infty^{[m]})_0^*$, sea

$$\begin{array}{rcl} c_j & = & \lambda(u^j), \\ {}^a\lambda_i^{(j)} & = & \lambda(u^j E_{ii}), \\ {}^a h_i^{(j)} & = & {}^a\lambda_i^{(j)} - {}^a\lambda_{i+1}^{(j)} + \delta_{i,0}\, c_j. \end{array} \tag{3.3}$$

donde $i \in \mathbb{Z}$ y $j = 0, \ldots, m$. El super índice a corresponde al álgebra de Lie de tipo A, $\widehat{\mathfrak{gl}}_\infty^{[m]}$. Sea $L(\widehat{\mathfrak{gl}}_\infty^{[m]}, \lambda)$ el $\widehat{\mathfrak{gl}}_\infty^{[m]}$-módulo de peso máximo irreducible con peso máximo λ. Los ${}^a\lambda_i^{(j)}$ son llamados *niveles* y los c_j son las *cargas centrales* de $L(\widehat{\mathfrak{gl}}_\infty^{[m]}, \lambda)$.

Consideremos el espacio vectorial $\mathrm{R_m}[t, t^{-1}]$ con base $v_i = t^i$ ($i \in \mathbb{Z}$) sobre $\mathrm{R_m}$ y la siguiente forma $\mathbb{C}$-bilineal sobre este espacio:

$$D(u^m v_i, u^n v_j) = u^m(-u)^n \delta_{i,1-j}.$$

Denotamos por $\overline{d}_\infty^{[m]}$ la subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}_\infty^{[m]}$ que preserva la forma bilineal D. Luego

$$\overline{d}_\infty^{[m]} := \{A \in \mathfrak{gl}_\infty^{[m]} : A_{ij}(u) = -A_{1-j,1-i}(-u)\}.$$

Denotamos por $d_\infty^{[m]} = \overline{d}_\infty^{[m]} \oplus R_m$ la extension central de $\overline{d}_\infty^{[m]}$, dada por la restricción del 2-cociclo (3.2). Esta subálgebra hereda la $\mathbb{Z}$-graduación principal de $\widehat{\mathfrak{gl}}_\infty^{[m]}$.

Dado $\lambda \in (d_\infty^{[m]})_0^*$, denotamos por $L(d_\infty^{[m]}, \lambda)$ el $d_\infty^{[m]}$-módulo de peso máximo irreducible con peso máximo λ. Definimos

$$\begin{array}{rcl} c_j & = & \lambda(u^j), \\ {}^d\lambda_i^{(j)} & = & \lambda(u^j E_{ii} - (-u)^j E_{1-i,1-i}), \\ {}^d h_i^{(j)} & = & {}^d\lambda_i^{(j)} - {}^d\lambda_{i+1}^{(j)}, \\ {}^d h_0^{(j)} & = & {}^d\lambda_1^{(j)} + c_j \quad \text{(j par)}, \end{array} \tag{3.4}$$

donde $i \in \mathbb{Z}$, $j = 0, \ldots, m$. Los ${}^d\lambda_i^{(j)}$ son llamados los *niveles* y los c_j son las *cargas centrales* de $L(d_\infty^{[m]}, \lambda)$.

Además definimos

$$\begin{array}{rcl} \overline{\mathcal{L}}^{[m]} & = & \{A \in \mathfrak{gl}_\infty^{[m]} : A_{i,j}(u) = -A_{-j,-i}(-u) \text{ si } ij > 0 \ \vee \ i = j = 0; \\ & & A_{i,j}(u) = A_{-j,-i}(-u) \text{ si } ij < 0;\ A_{-i,0}(u) = uA_{0,i}(-u); \\ & & A_{i,0}(u) = -uA_{0,-i}(-u), \text{ para todo } i \in \mathbb{N}\}, \end{array}$$

una subálgebra de $\mathfrak{gl}_\infty^{[m]}$. Y denotamos por $\mathcal{L}^{[m]} = \overline{\mathcal{L}}^{[m]} \oplus \mathrm{R_m}$ la extensión central de $\overline{\mathcal{L}}^{[m]}$, dada por la restricción del 2-cociclo (3.2). Esta subálgebra hereda la $\mathbb{Z}$-graduación principal de $\widehat{\mathfrak{gl}}_\infty^{[m]}$.

Dado $\lambda \in (\mathcal{L}^{[m]})_0^*$, definimos

$$\begin{aligned} c_j &= \lambda(u^j), \\ {}^1\lambda_i^{(j)} &= \lambda(u^j E_{ii} - (-u)^j E_{-i-i}), \\ {}^1h_i^{(j)} &= {}^1\lambda_i^{(j)} - {}^1\lambda_{i+1}^{(j)} + \delta_{i,0}\, c_j. \end{aligned} \tag{3.5}$$

donde $i \in \mathbb{Z}$ y $j = 0, \ldots, m$. Sea $L(\mathcal{L}^{[m]}, \lambda)$ el $\mathcal{L}^{[m]}$-módulo de peso máximo irreducible con peso λ. Los ${}^1\lambda_i^{(j)}$ son llamados *niveles* y los c_j son las *cargas centrales* de $L(\mathcal{L}^{[m]}, \lambda)$.

Denotamos por $\mathcal{O}$ el álgebra de todas las funciones holomorfas sobre $\mathbb{C}$ con la topología de la convergencia uniforme sobre compactos y sea $\mathcal{O}^{(1)}$ (resp. $\mathcal{O}^{(0)}$) el conjunto de las funciones holomorfas impares (resp. pares). Consideremos el espacio vectorial $\mathcal{D}^{\mathcal{O}}$ generado por los operadores diferenciales (de orden infinito) de la forma $t^k f(D)$, donde $f \in \mathcal{O}$. El corchete en $\mathcal{D}$ se extiende en forma natural a $\mathcal{D}^{\mathcal{O}}$. De forma similar definimos una completación de $\mathcal{D}_x^-$ por $\mathcal{D}_x^{\mathcal{O},-}$ consistente de todos los operadores diferenciales de la forma $t^k f(D + \frac{k}{2})D$ donde $f \in \mathcal{O}^{(\bar{k})}$.

Luego el 2-cociclo Ψ sobre $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{D}_x^-$) se extiende a un 2-cociclo sobre $\mathcal{D}^{\mathcal{O}}$ (resp. $\mathcal{D}_x^{\mathcal{O},-}$). Denotamos la correspondiente extensión central por $\widehat{\mathcal{D}}^{\mathcal{O}} = \mathcal{D}^{\mathcal{O}} \oplus \mathbb{C}C$ (resp. $\widehat{\mathcal{D}}_x^{\mathcal{O},-} = \mathcal{D}_x^{\mathcal{O},-} \oplus \mathbb{C}C$).

Dado $s \in \mathbb{C}$, consideraremos la siguiente familia de morfismos de álgebras de Lie $\varphi_s^{[m]} : \mathcal{D}_x^{\mathcal{O},-} \to \mathfrak{gl}_\infty^{[m]}$ definida por;

$$\begin{aligned} \varphi_s^{[m]}(t^k f(D + \frac{k}{2})D) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} f(-j + \frac{k}{2} + s + u)(-j + s + u)E_{j-k,j} \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{i=0}^{m} \frac{(f(-j + \frac{k}{2} + s + u)(-j + s + u))|_{u=0}^{(i)}}{i!} u^i E_{j-k,j} \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{i=0}^{m} \frac{f^{(i)}(-j + \frac{k}{2} + s)}{i!}((-j + s) + u)u^i E_{j-k,j}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

donde $f^{(i)}$ denota la ith derivada. Notar que $\varphi_s^{[m]}$ es la restricción a $\mathcal{D}_x^{\mathcal{O},-}$ del morfismo (3.2.1) en Ref. [**13**].

Observación 3.1. *La $\mathbb{Z}$-graduación principal sobre $\mathcal{D}_x^{\mathcal{O},-}$ y $\mathfrak{gl}_\infty^{[m]}$ son compatibles bajo el morfismo $\varphi_s^{[m]}$.*

Sean

$$I_{s,k}^{[m]} = \{f \in \mathcal{O}^{(\bar{k})} : f^{(i)}(-j + k/2 + s) = 0 \text{ para todo } j \in \mathbb{Z},\ 0 \leqslant i \leqslant m\},$$

y

$$J_s^{[m]} = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \{t^k f(D + k/2)D : f \in I_{s,k}^{[m]}\}.$$

Proposición 3.2. *Dado $s \in (\mathbb{C} - \mathbb{Z}/2)$ y $m \in \mathbb{Z}_+$ tenemos la siguiente sucesión exacta de álgebras de Lie:*

$$0 \to J_s^{[m]} \to \mathcal{D}_x^{\mathcal{O},-} \xrightarrow{\varphi_s^{[m]}} \mathfrak{gl}_\infty^{[m]} \to 0.$$

Demostración. Ahora como $\{(u+(s-j))u^i\}_{i=0}^m$ es una base de $\mathrm{R_m}$, para mostrar que $\varphi_s^{[m]}$ es sobreyectiva es suficiente con encontrar una preimagen de $A = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{i=0}^m b_{ij}(u+(s-j))u^i E_{j-k,\,j}$ (con $b_{ij} \in \mathbb{C}$) para cada $k \in \mathbb{Z}$ fijo. Recordemos el siguiente hecho bien conocido: para toda sucesión discreta de puntos en $\mathbb{C}$ y un entero no negativo m existe $a(x) \in \mathcal{O}$ teniendo valores prescritos de sus primeras m derivadas en esos puntos.

Como $s \notin \mathbb{Z}/2$ las sucesiones $\{-j+k/2+s\}_{j\in\mathbb{Z}}$ y $\{j-k/2-s\}_{j\in\mathbb{Z}}$ son disjuntas, entonces existe $a(x) \in \mathcal{O}$ tal que

· si k es par, $a^{(i)}(-j+k/2+s) = a^{(i)}(j-k/2-s) = i!b_{ij}/2$,

· si k es impar, $a^{(i)}(-j+k/2+s) = 2i!b_{ij}, \quad a^{(i)}(j-k/2-s) = i!b_{ij}$.

Luego si $g(x) = a(x) + (-1)^k a(-x)$, entonces se puede ver que $\varphi_s^{[m]}(t^k g(D+k/2)D) = A$, demostrando la suryectividad de $\varphi_s^{[m]}$. Por otro lado, es claro que $ker\varphi_s^{[m]} = J_s^{[m]}$, finalizando la prueba. $\square$

Proposición 3.3. *Para $s = \frac{1}{2}$, tenemos la siguiente sucesión exacta de álgebras de Lie:*

$$0 \to J_{\frac{1}{2}}^{[m]} \to \mathcal{D}_x^{\mathcal{O},-} \to \overline{d}_\infty^{[m]} \to 0.$$

Demostración. El morfismo $\varphi_{\frac{1}{2}}^{[m]} : \mathcal{D}_x^{\mathcal{O}} \to \mathfrak{gl}_\infty^{[m]}$ definido por

$$\begin{aligned}\varphi_{\frac{1}{2}}^{[m]}(t^k f(D)D) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} f(u+\frac{1}{2}-j)(u+\frac{1}{2}-j)E_{j-k,j} \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{i=0}^m \frac{f^{(i)}(\frac{1}{2}-j)}{i!}((\frac{1}{2}-j)+u)u^i E_{j-k,j},\end{aligned}$$

es sobreyectivo y la anti-involución σ_- se transfiere a través de este morfismo a una anti-involución w en $\mathfrak{gl}_\infty^{[m]}$, que satisface

$$w\left((u+\frac{1}{2}-j)f(u)E_{i,j}\right) = (-1)^{i+j}(-u+\frac{1}{2}-i)f(-u)E_{1-j,1-i},$$

con $f \in \mathbb{C}[x]$, de donde es fácil ver que

$$w(f(u)E_{i,j}) = (-1)^{i+j}(-u+\frac{1}{2}-i)(-u+\frac{1}{2}-j)^{-1}f(-u)E_{1-j,1-i}. \quad (3.7)$$

Luego, el álgebra de Lie de los puntos $-\sigma_-$-fijos en $\mathcal{D}_x^{\mathcal{O}}$ (llamada $\mathcal{D}_x^{\mathcal{O},-}$), se mapea sobreyectivamente sobre el álgebra de Lie de los puntos $-w$-fijos en $\mathfrak{gl}_\infty^{[m]}$.

A continuación definimos el automorfismo $T : \mathfrak{gl}_\infty^{[m]} \longrightarrow \mathfrak{gl}_\infty^{[m]}$ por

$$\begin{aligned} T(u^l E_{ij}) &= \prod_{k=i}^{j-1}\left(u-(k+\frac{1}{2})\right) u^l E_{ij}, \quad \text{si } i<j, \\ T(u^l E_{ii}) &= u^l E_{ii}, \\ T(u^l E_{ij}) &= \prod_{k=j}^{i-1}\left(u-(k+\frac{1}{2})\right)^{-1} u^l E_{ij}, \quad \text{si } i>j. \end{aligned}$$

Por otro lado, sea $\rho(f(u)E_{i,j}) = (-1)^{i+j} f(-u) E_{1-j,1-i}$ la anti-involución en $\mathfrak{gl}_\infty^{[m]}$ que define $\overline{d}_\infty^{[m]}$, entonces usando (3.7) tenemos que

$$T\rho|_{(\mathfrak{gl}_\infty^{[m]})_{-1}\bigoplus(\mathfrak{gl}_\infty^{[m]})_0\bigoplus(\mathfrak{gl}_\infty^{[m]})_1} = wT|_{(\mathfrak{gl}_\infty^{[m]})_{-1}\bigoplus(\mathfrak{gl}_\infty^{[m]})_0\bigoplus(\mathfrak{gl}_\infty^{[m]})_1}. \tag{3.8}$$

Ahora, como $\mathfrak{gl}_\infty^{[m]}$ esta generado por $(\mathfrak{gl}_\infty^{[m]})_{-1}\bigoplus(\mathfrak{gl}_\infty^{[m]})_0\bigoplus(\mathfrak{gl}_\infty^{[m]})_1$ usando (3.8), obtenemos que $\rho = T^{-1}wT$. Como antes, el álgebra de Lie de los puntos $-w$-fijos en $\mathfrak{gl}_\infty^{[m]}$ se mapean sobreyectivamente a través de T^{-1} sobre el álgebra de Lie de los puntos $-\rho$-fijos en $\mathfrak{gl}_\infty^{[m]}$, llamada $\overline{d}_\infty^{[m]}$. Así $T^{-1}\,\varphi_{\frac{1}{2}}^{[m]}$ lleva sobreyectivamente $\mathcal{D}_x^{\mathcal{O},-}$ en $\overline{d}_\infty^{[m]}$ y como T^{-1} es un automorfismo es claro que $kerT^{-1}\,\varphi_{\frac{1}{2}}^{[m]} = J_{\frac{1}{2}}^{[m]}$, finalizando la prueba. □

Proposición 3.4. *Para $s=0$, tenemos la siguiente sucesión exacta de álgebras de Lie:*

$$0 \to J_0^{[m]} \to \mathcal{D}_x^{\mathcal{O},-} \to \overline{\mathcal{L}}^{[m]} \to 0.$$

Demostración. Consideremos los siguientes morfismos de álgebras de Lie: $\varphi_0^{[m]}$ como en (3.6) y $T : \mathfrak{gl}_\infty^{[m]} \longrightarrow \mathfrak{gl}_\infty^{[m]}$ definido por

$$\begin{aligned} T(u^l E_{ij}) &= \prod_{\substack{k=i \\ k\neq 0}}^{j-1}(u-k)\, u^l E_{ij}, \quad \text{si } i<j, \\ T(u^l E_{ii}) &= u^l E_{ii}, \\ T(u^l E_{ij}) &= \prod_{\substack{k=j \\ k\neq 0}}^{i-1}(u-k)^{-1} u^l E_{ij}, \quad \text{si } i>j, \end{aligned}$$

notar que $T(u^l E_{ij}) = u^l\, T(E_{ij})$. Luego, $T\varphi_0^{[m]} : \mathcal{D}_x^{\mathcal{O},-} \to \overline{\mathcal{L}}^{[m]}$ es sobreyectiva y como T es un automorfismo es claro que $kerT\varphi_0^{[m]} = J_0^{[m]}$, finalizando la prueba. □

Observación 3.5. *(a) Haciendo abuso de notación vamos a denotar por $\varphi_{\frac{1}{2}}^{[m]}$ (resp. $\varphi_0^{[m]}$) el morfismo sobreyectivo de la Proposición 3.3 (resp. 3.4).*
(b) Para $s \in \mathbb{Z}$ (resp. $s \in \mathbb{Z}+\frac{1}{2}$) la imagen de $\mathcal{D}_x^{\mathcal{O},-}$ bajo el morfismo $\varphi_s^{[m]}$ es $\nu^{\widetilde{s}}\varphi_0^{[m]}(\mathcal{D}_x^{\mathcal{O},-})$ (resp. $\nu^{\widetilde{s}}\varphi_{\frac{1}{2}}^{[m]}(\mathcal{D}_x^{\mathcal{O},-})$), donde ν se definió en (3.1) y $\widetilde{s}=s$ (resp. $\widetilde{s}=s-\frac{1}{2}$). Por lo tanto, para $s\in\mathbb{Z}/2$ sólo vamos a considerar los casos $s=0,\ \frac{1}{2}$.

Ahora nosotros deseamos extender el morfismo $\varphi_s^{[m]}$ a un morfismo entre las extensiones centrales de las correspondientes álgebras de Lie. Definimos

$$\eta_i(x,s) = \frac{e^{(s-1/2)x} + (-1)^i e^{-(s-1/2)x}}{2}\frac{x^i}{i!}, \quad \text{con } \ i \in \mathbb{Z}_+, \ s \in \mathbb{C}.$$

Estas funciones satisfacen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \eta_i(x,-s) &= (-1)^i \eta_i(x,s+1), \qquad (3.9)\\ \eta_0(x,s+1/2) &= \cosh(sx). \end{aligned}$$

PROPOSICIÓN 3.6. *El morfismo* $\widehat{\varphi}_s^{[m]} : \widehat{\mathcal{D}}_x^- \to \widehat{\mathfrak{gl}}_\infty^{[m]}$ *extiende a* $\varphi_s^{[m]}$ *donde:*

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_s^{[m]}|_{(\widehat{\mathcal{D}}_x^-)_j} &= \varphi_s^{[m]}|_{(\mathcal{D}_x^-)_j}, \quad si\ j \neq 0,\\ \widehat{\varphi}_s^{[m]}(\sinh(xD)) &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{\eta_i(x,s-j+1)-\eta_i(x,s-j)}{\sinh(x/2)} u^i E_{j,j}\\ &\quad -\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m}\frac{\eta_i(x,s)}{\sinh(x/2)}u^i c_0 + \frac{1}{2}\frac{\cosh(x/2)}{\sinh(x/2)}c_0, \qquad (3.10)\\ \widehat{\varphi}_s^{[m]}(C) &= 1. \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Notar que $(\widehat{\mathcal{D}}_x^+)_0 = (\widehat{\mathcal{D}}_x^-)_0$ y además nuestra extensión $\widehat{\varphi}_s^{[m]}$ no es más que la restricción de la extensión dada en Proposición 3.3 [**13**] por lo tanto $\widehat{\varphi}_s^{[m]}|_{(\widehat{\mathcal{D}}_x^+)_0} = \widehat{\varphi}_s^{[m]}|_{(\widehat{\mathcal{D}}_x^-)_0}$. Ver Proposición 5.2 en [**6**]. □

Sean $\overline{m} = (m_1,\ldots,m_N) \in \mathbb{Z}_+^N$ y $\overline{s} = (s_1,\ldots,s_N) \in \mathbb{C}^N$ tales que $s_i \in \mathbb{Z}$ implica $s_i = 0$, $s_i \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ implica $s_i = \frac{1}{2}$ y $s_i \neq \pm s_j$ $(mod\, \mathbb{Z})$ para $i \neq j$, combinando las Proposiciones 3.2, 3.3, 3.4 y 3.6 obtenemos el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 3.7. *Dado* $\overline{m}$ *y* $\overline{s}$ *como antes, tenemos la siguiente sucesión exacta de álgebras de Lie:*

$$0 \to \bigcap_{i=1}^{N} J_{s_i}^{[m_i]} \to \widehat{\mathcal{D}}_x^{\mathcal{O},-} \xrightarrow{\widehat{\varphi}_{\overline{s}}^{[\overline{m}]}} \mathfrak{g}^{[\overline{m}]} \to 0,$$

donde $\widehat{\varphi}_{\overline{s}}^{[\overline{m}]} = \bigoplus_{i=0}^{N} \widehat{\varphi}_{s_i}^{[m_i]}$ *y* $\mathfrak{g}^{[\overline{m}]} = \bigoplus_{i=0}^{N} \mathfrak{g}^{[m_i]}$ *con*

$$\mathfrak{g}^{[m_i]} = \begin{cases} \widehat{\mathfrak{gl}}_\infty^{[m_i]}, & si \ \ s_i \neq 0, \ \frac{1}{2},\\ d_\infty^{[m_i]}, & si \ \ s_i = \frac{1}{2},\\ \mathcal{L}^{[m_i]}, & si \ \ s_i = 0. \end{cases}$$

4. Realización de los módulos de peso máximo irreducibles cuasifinitos de $\widehat{\mathcal{D}}_x^-$

En el siguiente teorema $\mathfrak{g}^{[m]}$ denotará alguna de las siguientes álgebras $\widehat{\mathfrak{gl}}_\infty^{[m]}$ ó $d_\infty^{[m]}$ ó $\mathcal{L}^{[m]}$.

PROPOSICIÓN 4.1. *El* $\mathfrak{g}^{[m]}$*-módulo* $L(\mathfrak{g}^{[m]},\lambda)$ *es cuasifinito si y sólo si todos salvo una cantidad finita de los* ${}^*h_k^{(i)}$ *son nulos, donde* $*$ *representa a ó d ó* l *dependiendo de que* $\mathfrak{g}^{[m]}$ *represente* $\widehat{\mathfrak{gl}}_\infty^{[m]}$ *ó* $d_\infty^{[m]}$ *ó* $\mathcal{L}^{[m]}$ *respectivamente.*

Sean $\overline{m} = (m_1, \ldots, m_N) \in \mathbb{Z}_+^N$ y $\overline{s} = (s_1, \ldots, s_N) \in \mathbb{C}^N$ tales que $s_i \in \mathbb{Z}$ implica $s_i = 0$, $s_i \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ implica $s_i = \frac{1}{2}$ y $s_i \neq \pm s_j$, $(mod\, \mathbb{Z})$ tomamos $\lambda_i \in (\mathfrak{g}^{[m_i]})_0^*$ cuasifinito con $i = 1, \ldots, N$ y sea $L(\mathfrak{g}^{[m_i]}, \lambda_i)$ el correspondiente $\mathfrak{g}^{[m_i]}$-módulo irreducible. Sea $\overline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$. Entonces el producto tensorial

$$L(\mathfrak{g}^{[\overline{m}]}, \overline{\lambda}) = \bigotimes_{i=1}^{N} L(\mathfrak{g}^{[m_i]}, \lambda_i), \tag{4.1}$$

es un $\mathfrak{g}^{[\overline{m}]}$-módulo irreducible, con $\mathfrak{g}^{[\overline{m}]} = \bigoplus_{i=1}^N \mathfrak{g}^{[m_i]}$ como en la Proposición 3.7. El módulo $L(\mathfrak{g}^{[\overline{m}]}, \overline{\lambda})$ puede ser visto como un $\widehat{\mathcal{D}}_x^-$-módulo via el morfismo $\widehat{\varphi}_{\overline{s}}^{[\overline{m}]}$, y denotaremos a este módulo por $L_{\overline{s}}^{[\overline{m}]}(\overline{\lambda})$. Necesitaremos la siguiente proposición cuya prueba es similar a la Proposición 4.3 en [**13**].

PROPOSICIÓN 4.2. *Sea V un $\widehat{\mathcal{D}}_x^-$-módulo cuasifinito. Entonces la acción de $\widehat{\mathcal{D}}_x^-$ sobre V se extiende naturalmente a la acción de $(\widehat{\mathcal{D}}_x^{\mathcal{O},-})_k$ sobre V para todo $k \neq 0$.*

TEOREMA 4.3. *Sea V un $\mathfrak{g}^{[\overline{m}]}$-módulo cuasifinito, el cual es visto como un $\widehat{\mathcal{D}}_x^-$-módulo via el morfismo $\widehat{\varphi}_{\overline{s}}^{[\overline{m}]}$. Entonces cualquier $\widehat{\mathcal{D}}_x^-$-submódulo de V es también un $\mathfrak{g}^{[\overline{m}]}$-submódulo. En particular, el $\widehat{\mathcal{D}}_x^-$-módulo $L_{\overline{s}}^{[\overline{m}]}(\overline{\lambda})$ es irreducible si $\overline{s} = (s_1, \ldots, s_N) \in \mathbb{C}^N$ satisface que $s_i \in \mathbb{Z}$ implica $s_i = 0$, $s_i \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ implica $s_i = \frac{1}{2}$, y $s_i \neq \pm s_j$ $(mod\, \mathbb{Z})$ siempre que $i \neq j$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea U un $\widehat{\mathcal{D}}_x^-$-submódulo de V, entonces por hipótesis U es un $\widehat{\mathcal{D}}_x^-$-módulo cuasifinito, luego por Proposición 4.2, se puede extender la acción a $(\widehat{\mathcal{D}}_x^{\mathcal{O},-})_k$ para todo $k \neq 0$. Además por Proposición 3.7, el mapa $\widehat{\varphi}_{\overline{s}}^{[\overline{m}]} : (\widehat{\mathcal{D}}_x^{\mathcal{O},-})_k \to (\mathfrak{g}^{[\overline{m}]})_k$ es sobreyectivo para todo $k \neq 0$. Por lo tanto U es invariante con respecto a $(\mathfrak{g}^{[\overline{m}]})_k$ para todo $k \neq 0$, y como $\mathfrak{g}^{[\overline{m}]}$ coincide con su álgebra derivada, finalizamos la prueba. $\square$

Dado $L(\widehat{\mathcal{D}}_x^-, \lambda)$ un $\widehat{\mathcal{D}}_x^-$-módulo de peso máximo, usando el Teorema 2.5, tenemos que este es cuasifinito si y sólo si

$$\Delta_\lambda(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\phi_\lambda(x)}{2\sinh\left(\frac{x}{2}\right)}\right) \tag{4.2}$$

donde $\phi_\lambda(x)$ es un cuasipolinomio par tal que $\phi_\lambda(0) = 0$.

Por otro lado, una funcional $\lambda \in (\widehat{\mathcal{D}}_x^-)_0^*$ esta caracterizada por $\Gamma_l = -\lambda(D^{l+1})$, donde $l \in \mathbb{Z}_+^{(0)}$, y la carga central $\lambda(C) = \bar{c}$, cf. (2.3). Consideremos la nueva serie generatriz:

$$\Gamma_\lambda(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}_+^{(0)}} \frac{x^{l+1}}{(l+1)!}\Gamma_l = -\lambda(\sinh(xD)), \tag{4.3}$$

notar que $\Gamma_\lambda(x)$ satisface (2.10), entonces usando (2.15) obtenemos

$$\Gamma_\lambda(x) = \frac{\phi_\lambda(x)}{2\sinh\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Mostraremos que todos los $\widehat{\mathcal{D}}_x^-$-módulos de peso máximo irreducibles cuasifinitos pueden ser realizados como algún $L_{\overline{s}}^{[\overline{m}]}(\overline{\lambda})$, y esto se hace mediante el estudio de los exponentes y multiplicidades usando el cálculo de la serie generatriz $\Gamma_{m,s,\lambda}(x)$ del $\widehat{\mathcal{D}}_x^-$-módulo de peso máximo irreducible cuasifinito $L_s^{[m]}(\mathfrak{g}^{[m]},\lambda)$.

PROPOSICIÓN 4.4. *Para $s \in (\mathbb{C}-\mathbb{Z}/2)$, consideremos el morfismo $\widehat{\varphi}_s^{[m]} : \widehat{\mathcal{D}}_x^- \to \widehat{\mathfrak{gl}}_\infty^{[m]}$. Entonces el $\widehat{\mathfrak{gl}}_\infty^{[m]}$-módulo cuasifinito $L(\widehat{\mathfrak{gl}}_\infty^{[m]},\lambda)$ visto como un $\widehat{\mathcal{D}}_x^-$-módulo via $\widehat{\varphi}_s^{[m]}$ es isomorfo a $L(\widehat{\mathcal{D}}_x^-; e^+, e^-)$ donde e^+, e^- consisten de exponentes $(s-j-\frac{1}{2})$ con $j \in \mathbb{Z}$ y multiplicidades*

$$\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant m,\\ i \text{ par}}} \frac{{}^a h_j^{(i)} x^i}{i!} \quad y \quad \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant m,\\ i \text{ impar}}} \frac{{}^a h_j^{(i)} x^i}{i!},$$

respectivamente.

DEMOSTRACIÓN. Del Teorema 4.3 y como $\widehat{\varphi}_s^{[m]}$ es un morfismo graduado, el $\widehat{\mathcal{D}}_x^-$-módulo $L(\widehat{\mathfrak{gl}}_\infty^{[m]},\lambda)$ es un módulo de peso máximo irreducible cuasifinito. Usando (3.10), $\bar{c} = \lambda(1)$ y usando la expresión explícita del morfismo $\widehat{\varphi}_s^{[m]} : \widehat{\mathcal{D}}_x^- \to \widehat{\mathfrak{gl}}_\infty^{[m]}$ dada en Proposición 3.6, y las formulas (4.3) y (3.3) tenemos que

$$\begin{aligned}\Gamma_{m,s,\lambda}(x) &= -\lambda(\widehat{\varphi}_s^{[m]}(\sinh(xD))) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{\eta_i(x,s-j)}{\sinh(x/2)}\, {}^a h_j^{(i)} - \frac{1}{2}\frac{\cosh(x/2)}{\sinh(x/2)} c_0.\end{aligned}$$

La proposición sigue de la definición de exponente y multiplicidad. □

PROPOSICIÓN 4.5. *Consideremos el morfismo $\widehat{\varphi}_{\frac{1}{2}}^{[m]} : \widehat{\mathcal{D}}_x^- \to d_\infty^{[m]}$. Entonces el $d_\infty^{[m]}$-módulo cuasifinito $L(d_\infty^{[m]},\lambda)$ visto como un $\widehat{\mathcal{D}}_x^-$-módulo via $\widehat{\varphi}_{\frac{1}{2}}^{[m]}$ es isomorfo a $L(\widehat{\mathcal{D}}_x^-; e^+, e^-)$ donde e^+, e^- consisten de exponentes $-j$ con $j \in \mathbb{Z}_+$ y multiplicidades*

$$\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant m,\\ i \text{ par}}} \frac{{}^d h_j^{(i)} x^i}{i!} \quad y \quad \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant m,\\ i \text{ impar}}} -\frac{{}^d h_j^{(i)} x^i}{i!},$$

respectivamente, donde ${}^d h_0^{(i)} = 0$ para i impar.

DEMOSTRACIÓN. Necesitamos calcular $\Gamma_{m,s,\lambda}(x)$. El resto de la prueba es clara, cf. la prueba de la Proposición 4.4. Recordar la observación 3.5 *(a)* y considerar el cálculo explícito del morfismo $\widehat{\varphi}_{\frac{1}{2}}^{[m]} : \widehat{\mathcal{D}}_x^- \to d_\infty^{[m]}$ dado en la

Proposición 3.6. Usando (4.3), (3.9) y (3.4) tenemos que

$$\begin{aligned}\Gamma_{m,s,\lambda}(x) &= -\lambda(\widehat{\varphi}_{\frac{1}{2}}^{[m]}(\sinh(xD)))\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j>0}(-1)^i\frac{\eta_i(x,1/2-j)}{\sinh(x/2)}\,{}^d h_j^{(i)}\\ &\quad+\frac{1}{2}\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant m\\ i \text{ par}}}\frac{\eta_i(x,1/2)}{\sinh(x/2)}\,{}^d h_0^{(i)}-\frac{1}{2}\frac{\cosh(x/2)}{\sinh(x/2)}c_0,\end{aligned}$$

de donde se sigue la proposición. □

Proposición 4.6. *Considere el morfismo $\widehat{\varphi}_0^{[m]} : \widehat{\mathcal{D}}_x^- \to \mathcal{L}^{[m]}$. Entonces el $\mathcal{L}^{[m]}$-módulo cuasifinito $L(\mathcal{L}^{[m]},\lambda)$ visto como un $\widehat{\mathcal{D}}_x^-$-módulo via $\widehat{\varphi}_0^{[m]}$ es isomorfo a $L(\widehat{\mathcal{D}}_x^-; e^+, e^-)$ donde e^+, e^- consisten de exponentes $(-j-\frac{1}{2})$ con $j\in\mathbb{Z}_+$ y multiplicidades*

$$\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant m,\\ i \text{ par}}}\frac{{}^1 h_j^{(i)}x^i}{i!} \quad y \quad \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant m,\\ i \text{ impar}}}\frac{{}^1 h_j^{(i)}x^i}{i!}.$$

Demostración. Recordar la observación 3.5 *(a)* y considerar el cálculo explícito del morfismo $\widehat{\varphi}_0^{[m]} : \widehat{\mathcal{D}}_x^- \to \mathcal{L}^{[m]}$ que se obtuvo en la Proposición 3.6. Usando (4.3), (3.9) y (3.5) tenemos que

$$\begin{aligned}\Gamma_{m,s,\lambda}(x) &= -\lambda(\widehat{\varphi}_0^{[m]}(\sinh(xD)))\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j\geqslant 0}\frac{\eta_i(x,-j)}{\sinh(x/2)}\,{}^1 h_j^{(i)}-\frac{1}{2}\frac{\cosh(x/2)}{\sinh(x/2)}c_0,\end{aligned}$$

de donde se sigue la proposición. □

Sea $L(\widehat{\mathcal{D}}_x^-,\lambda)$ un $\widehat{\mathcal{D}}_x^-$-módulo de peso máximo irreducible cuasifinito con carga central $\bar{c}$ y

$$\Gamma_\lambda(x)=\frac{\phi_\lambda(x)}{2\sinh(x/2)},$$

donde $\phi_\lambda(x)$ es un cuasipolinomio par tal que $\phi_\lambda(0)=0$. Luego podemos escribir

$$\phi_\lambda(x)+\cosh(x/2)\bar{c}=\sum_{s\in\mathbb{C}}\sum_{i=0}^{m_s}a_{s,i}\,\eta_i(x,s), \tag{4.4}$$

donde $a_{s,i}\in\mathbb{C}$ y $a_{s,i}\neq 0$ solo para una cantidad finita de $s\in\mathbb{C}$ (ver Corolario 2.6). Ahora por definición de η_i, tenemos que $\eta_i(x,-s)=(-1)^i\eta_i(x,s+1)$, luego para evitar ambigüedades en la expresión (4.4), vamos a elegir el parámetro s siguiendo estas reglas: cuando $s\in\mathbb{Z}/2$ requerimos que $s\leqslant\frac{1}{2}$, cuando $s\notin\mathbb{Z}/2$, requerimos que $\operatorname{Im}s>0$ si $\operatorname{Im}s\neq 0$ ó $s-[s]<\frac{1}{2}$ si $s\in\mathbb{R}$, donde $\operatorname{Im}s$ es la parte imaginaria de s, y $[s]$ denota el menor entero mayor que s respectivamente.

Descomponemos el conjunto $\{s\in\mathbb{C} : a_{s,i}\neq 0 \text{ para algún } i\}$ en una unión disjunta de clases de equivalencias bajo la relación de equivalencia $s\sim s'$ si $s=\pm s'\ (mod\,\mathbb{Z})$. Sea S una clase de equivalencia, entonces podemos escribir

$S = \{s-k_0,\, s-k_1, \dots,\, s-k_\alpha\}$ (para algún $\alpha \in \mathbb{Z}_+$) donde; si $S \not\subseteq \mathbb{Z}/2$, s es un representante y $k_r \in \mathbb{Z}$ para todo $r = 0,\, 1, \dots,\, \alpha$; si $S \subset \mathbb{Z}$ ó $S \subset \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$, $s = 0$ ó $s = \frac{1}{2}$ respectivamente y $k_r \in \mathbb{Z}_+$ para todo $r = 0,\, 1, \dots,\, \alpha$. Sea $m = max_{s \in S}\, m_s$.

Asociamos a S el $\mathfrak{g}^{[m]}$-módulo $L_S^{[m]}(\mathfrak{g}^{[m]}, \lambda_S)$ como sigue: si $s \notin \mathbb{Z}/2$, sea ${}^a h_{k_r}^{(i)} = a_{s-k_r,i}$ con $i = 0, \dots, m_{s-k_r}$ y $r = 0,\, 1, \dots, \alpha$. Asociamos a S el $\widehat{\mathfrak{gl}}_\infty^{[m]}$-módulo $L_S^{[m]}(\widehat{\mathfrak{gl}}_\infty^{[m]}, \lambda_S)$ con carga central y niveles

$$c_i = \sum_{k_r} {}^a h_{k_r}^{(i)}, \quad {}^a\lambda_j^{(i)} = \sum_{k_r \geqslant j} ({}^a h_{k_r}^{(i)} - \delta_{k_r,0}\ c_i).$$

Si $s = \frac{1}{2}$, sea ${}^d h_{k_r}^{(i)} = a_{\frac{1}{2}-k_r,i}$, con $i = 0, \dots, m_{\frac{1}{2}-k_r}$ y $r = 0,\, 1, \dots, \alpha$. Asociamos a S el $d_\infty^{[m]}$-módulo $L_S^{[m]}(d_\infty^{[m]}, \lambda_S)$ con carga central y niveles

$$c_i = \sum_{k_r} {}^d h_{k_r}^{(i)}\ (i \text{ par}),\ c_i = 0\ \ (i \text{ impar}),\ \ {}^d\lambda_j^{(i)} = \sum_{k_r \geqslant j} {}^d h_{k_r}^{(i)}.$$

De forma similar si $s = 0$, ${}^1 h_{k_r}^{(i)} = a_{-k_r,i}$, con $i = 0, \dots, m_{-k_r}$ y $r = 0,\, 1, \dots, \alpha$. Asociamos a S el $\mathcal{L}^{[m]}$-módulo $L_S^{[m]}(\mathcal{L}^{[m]}, \lambda_S)$ con carga central y niveles

$$c_i = \sum_{k_r} {}^1 h_{k_r}^{(i)}, \quad {}^1\lambda_j^{(i)} = \sum_{k_r \geqslant j} ({}^1 h_{k_r}^{(i)} - \delta_{k_r,0}\ c_i).$$

Por Proposición 4.1, el módulo asociado a S es cuasifinito.

Denotamos por $\{s_1,\, s_2, \dots,\, s_N\}$ un conjunto de representantes de las clases de equivalencias del conjunto $\{s \in \mathbb{C} : a_{s,i} \neq 0 \text{ para algún } i\}$. Por Teorema 4.3, el $\widehat{\mathcal{D}}_x^-$-módulo $L_{\overline{s}}^{[\overline{m}]}(\overline{\lambda})$ es irreducible para $\overline{s} = (s_1, \dots, s_N)$ tal que $s_i \in \mathbb{Z}$ implica $s_i = 0$, $s_i \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ implica $s_i = \frac{1}{2}$ y $s_i \neq \pm s_j\ (mod\, \mathbb{Z})$ para $i \neq j$. Entonces tenemos

$$\Gamma_{\overline{m},\overline{s},\overline{\lambda}}(x) = \sum_i \Gamma_{m_i,s_i,\lambda_i}(x), \quad \bar{c} = \sum_i c_0^{(i)}.$$

Luego usando el Teorema 4.3 y las Proposiciones 4.4, 4.5 y 4.6, se prueba el siguiente resultado.

TEOREMA 4.7. *Sea V un $\widehat{\mathcal{D}}_x^-$-módulo de peso máximo irreducible cuasifinito con peso λ, carga central $\bar{c}$ y*

$$\Gamma_\lambda(x) = \frac{\phi_\lambda(x)}{2\sinh(x/2)}$$

donde $\phi_\lambda(x)$ es un cuasipolinomio par tal que $\phi_\lambda(0) = 0$, el cual es escrito en la forma (4.4). Entonces V es isomorfo al producto tensorial de los módulos $L_S^{[m]}(\mathfrak{g}^{[m]}, \lambda_S)$ para las distintas clases de equivalencias.

OBSERVACIÓN 4.8. *Una elección diferente de un representante $s \notin \mathbb{Z}/2$ produce el efecto de desplazar $\widehat{\mathfrak{gl}}_\infty^{[m]}$ via el morfismo ν^i para algún i. Luego es fácil ver que cualquier módulo de peso máximo cuasifinito irreducible $L(\widehat{\mathcal{D}}_x^-, \lambda)$ puede ser obtenido como antes salvo un desplazamiento de ν.*

Capítulo 3

Módulos de peso máximo cuasifinitos de las subálgebras clásicas de $\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_q$

En este capítulo caracterizamos los módulos de peso máximo irreducibles cuasifinitos de las subálgebras de Lie clásicas de $\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_q$, dichas subálgebras aparecen por el estudio de las anti-involuciones de la super álgebra asociativa de los operadores pseudodiferenciales cuánticos $\mathcal{S}\mathfrak{S}_q^a$.

En la sección 1, introducimos definiciones básicas que usaremos a lo largo de todo el capítulo, clasificamos todas las anti-involuciones de $\mathcal{S}\mathfrak{S}_q^a$ que preservan la graduación principal y describimos las subálgebras clásicas $\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_{q,k}$ y $\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_{q,k,l}^{\pm\pm}$. En la sección 2, caracterizamos los módulos de peso máximo irreducibles cuasifinitos de $\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_{q,k}$ y $\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_{q,k,l}^{\pm\pm}$.

1. Anti-involuciones de $\mathcal{S}\mathfrak{S}_q^a$ que preservan la graduación principal

Sea $q \in \mathbb{C}^\times$ con $|q| \neq 1$. Denotaremos por T_q el siguiente operador sobre $\mathbb{C}[z^{-1}, z]$:

$$T_q(f(z)) = f(qz).$$

Además, denotaremos por $\mathfrak{S}_q^a$ el álgebra asociativa de todos los operadores pseudodiferenciales, i.e., los operadores sobre $\mathbb{C}[z^{-1}, z]$ de la forma

$$E = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e_k(z) T_q^k, \quad \text{donde } e_i(z) \in \mathbb{C}[z^{-1}, z] \text{ (suma finita).}$$

Cualquier operador pseudodiferencial puede ser escrito como combinación lineal de elementos de la forma $z^n f(T_q)$, donde $f \in \mathbb{C}[w^{-1}, w]$ y $n \in \mathbb{Z}$. El producto en $\mathfrak{S}_q^a$ es dado por

$$z^n f(T_q) \cdot z^m g(T_q) = z^{n+m} f(q^m T_q) g(T_q).$$

Haciendo $\mathrm{wt}\, z^n f(T_q) = n$, se define la $\mathbb{Z}$-*graduación principal* de $\mathfrak{S}_q^a$.

Sea $M(1|1)$ el conjunto de las super matrices 2×2 con coeficientes en $\mathbb{C}$, vista como la super álgebra asociativa de las transformaciones lineales del super espacio complejo $(1|1)$-dimensional $\mathbb{C}^{(1|1)}$. Y denotaremos por E_{ij} la 2×2 matriz con 1 en el lugar (i, j) y 0 en los otros lugares. Declarando E_{11}, E_{22} elementos pares y E_{12}, E_{21} elementos impares, dotamos a $M(1|1)$ con una $\mathbb{Z}_2$-graduación donde $|M|$ denota la paridad del elemento homogéneo $M \in M(1|1)$.

Denotamos por $\mathcal{S}\mathfrak{S}_q^a$ la super álgebra asociativa de las super matrices de 2×2 con entradas en $\mathfrak{S}_q^a$, i.e.,

$$\mathcal{S}\mathfrak{S}_q^a = \mathfrak{S}_q^a \bigotimes M(1|1),$$

y el producto es dado por la multiplicación usual de matrices. Luego, denotaremos por $\mathcal{S}\mathfrak{S}_q$ la super álgebra de Lie que se obtiene de $\mathcal{S}\mathfrak{S}_q^a$ tomando el corchete usual.

Ahora, introducimos el mapa lineal $Str_0 : \mathcal{S}\mathfrak{S}_q \longrightarrow \mathbb{C}$ dado por

$$Str_0(\sum_{ij} f_{ij}(T_q)E_{ij}) = (f_{11}(T_q))_0 - (f_{22}(T_q))_0,$$

donde $(f(T_q))_0 = f_0$ si $f(T_q) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k T_q^k$ y definimos el 2-cociclo ψ como sigue

$$\psi(z^n f(T_q)E_{ij}, z^m g(T_q)E_{kl}) =$$
$$\begin{cases} -(-1)^i \sum_{r=0}^{n-1} (f(q^{-n+r}T_q)g(q^r T_q))_0 \delta_{jk}\delta_{il}, & \text{si } n = -m > 0, \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Luego denotamos por $\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_q$, la extensión central unidimensional de $\mathcal{S}\mathfrak{S}_q$ con carga central C correspondiente al 2-cociclo ψ, i.e., $\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_q = \mathcal{S}\mathfrak{S}_q \bigoplus \mathbb{C}C$ donde el corchete viene dado por

$$[z^n f(T_q)E_{ij}, z^m g(T_q)E_{kl}] = z^{n+m}(f(q^m T_q)g(T_q)\delta_{jk}E_{il} - (-1)^{|E_{ij}||E_{kl}|}$$
$$f(T_q)g(q^n T_q)\delta_{li}E_{kj}) + \psi(z^n f(T_q)E_{ij}, z^m g(T_q)E_{kl})C.$$

Haciendo $\mathrm{wt}\, z^n f(T_q)E_{ii} = n,\ \mathrm{wt}\,(z^n f(T_q)E_{12} + z^{n+1}g(T_q)E_{21}) = n + \frac{1}{2}$ y $\mathrm{wt}\, C = 0$, con $i = 1,\, 2,\ n \in \mathbb{Z}$, se define la $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-*graduación principal* de $\mathcal{S}\mathfrak{S}_q^a$, $\mathcal{S}\mathfrak{S}_q$ y $\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_q$, la cual es compatible con la $\mathbb{Z}_2$-graduación, así

$$\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_q = \left(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_q\right)_{\bar{0}} \bigoplus \left(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_q\right)_{\bar{1}},$$
$$\left(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_q\right)_{\bar{0}} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} (\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_q)_n, \quad \left(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_q\right)_{\bar{1}} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} (\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_q)_{n+\frac{1}{2}},$$

donde

$$(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_q)_n = \{z^n f_1(T_q)E_{11} + z^n f_2(T_q)E_{22} : f_i \in \mathbb{C}[w^{-1}, w],\ i = 1,\, 2\} + \delta_{n,0}\mathbb{C}C,$$
$$(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_q)_{n+\frac{1}{2}} = \{z^n f_1(T_q)E_{12} + z^{n+1} f_2(T_q)E_{21} : f_i \in \mathbb{C}[w^{-1}, w],\ i = 1,\, 2\}.$$

Una *anti-involución* σ de $\mathcal{S}\mathfrak{S}_q^a$ es un anti-automorfismo involutivo de $\mathcal{S}\mathfrak{S}_q^a$, i.e., $\sigma : \mathcal{S}\mathfrak{S}_q^a \to \mathcal{S}\mathfrak{S}_q^a$ con $\sigma^2 = Id$, $\sigma(A+bB) = \sigma(A)+b\sigma(B)$ y $\sigma(AB) = (-1)^{|A||B|}\sigma(B)\sigma(A)$, donde $A,\, B \in \mathcal{S}\mathfrak{S}_q^a$, y $b \in \mathbb{C}$.

El principal resultado de esta sección es el siguiente teorema con la clasificación de todas las anti-involuciones de $\mathcal{S}\mathfrak{S}_q^a$ que preservan la $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-graduación principal.

TEOREMA 1.1. *Cualquier anti-involución σ de $\mathcal{S}\mathfrak{S}_q^a$ que preserva la graduación principal es una de las siguientes, sea $f \in \mathbb{C}[w^{-1}, w]$ y $n \in \mathbb{Z}$:*

(a) $\sigma_{a,b,c,k}(z^n f(T_q)E_{11}) = a^n q^{(n-1)nk} z^n f(bq^{-n}T_q^{-1})T_q^{2nk}E_{11},$

$\sigma_{a,b,c,k}(z^n f(T_q)E_{22}) = a^n q^{(n-2)nk} z^n f(bq^{-n+1}T_q^{-1})T_q^{2nk}E_{22},$

$\sigma_{a,b,c,k}(z^n f(T_q)E_{12}) = a^n c q^{n^2 k} z^{n+1} f(bq^{-n}T_q^{-1})T_q^{(2n+1)k}E_{21},$

$\sigma_{a,b,c,k}(z^n f(T_q)E_{21}) = -a^n c^{-1} q^{((n-1)^2-n)k} z^{n-1} f(bq^{-n+1}T_q^{-1})T_q^{(2n-1)k}E_{12},$

con $a,\, b,\, c \in \mathbb{C}^\times,\ k \in \mathbb{Z}$, *tales que* $-ab^k = q^k$.

(b) $\sigma_{a,b,c,k,l}(z^n f(T_q)E_{11}) = a^n q^{\frac{n(n-1)}{2}k} z^n f(bq^{-n}T_q^{-1})T_q^{nk}E_{22}$,

$\sigma_{a,b,c,k,l}(z^n f(T_q)E_{22}) = a^n q^{\frac{n(n-1)}{2}k+nl} z^n f(bq^{-n}T_q^{-1})T_q^{nk}E_{11}$,

$\sigma_{a,b,c,k,l}(z^n f(T_q)E_{12}) = a^n c q^{\frac{n(n-1)}{2}k+nl} z^n f(bq^{-n}T_q^{-1})T_q^{nk+l}E_{12}$,

$\sigma_{a,b,c,k,l}(z^n f(T_q)E_{21}) = -a^n c^{-1} q^{\frac{n(n-1)}{2}k} z^n f(bq^{-n}T_q^{-1})T_q^{nk-l}E_{21}$,

con $a,\ b,\, c \in \mathbb{C}^\times,\ k,\, l \in \mathbb{Z}$, *tales que* $a^2b^k = q^{k-l}$ *y* $b^lc^2 = 1$.

Dividimos la prueba del teorema en varios resultados.

Sea σ una anti-involución de $\mathcal{S}\mathfrak{S}_q^a$ la cual preserva la graduación principal, entonces σ define los siguientes mapas lineales que preservan la graduación principal $\sigma_{i,j} : \mathfrak{S}_q^a \to \mathfrak{S}_q^a$ dado por,

$$\sigma(z^n f(T_q)E_{ii}) = \sigma_{i,1}(z^n f(T_q))E_{11} + \sigma_{i,2}(z^n f(T_q))E_{22}.$$

Lema 1.2. *Sea σ una anti-involución de $\mathcal{S}\mathfrak{S}_q^a$ que preserva la graduación principal. Entonces σ satisface una de las siguientes condiciones:*

(a) $\sigma(z^n f(T_q)E_{11}) = \sigma_{1,1}(z^n f(T_q))E_{11}$,

$\sigma(z^n f(T_q)E_{22}) = \sigma_{2,2}(z^n f(T_q))E_{22}$,

$\sigma(E_{12}) = zf_{21}(T_q)E_{21}$,

$\sigma(E_{21}) = z^{-1}g_{12}(T_q)E_{12}$.

(b) $\sigma(z^n f(T_q)E_{11}) = \sigma_{1,2}(z^n f(T_q))E_{22}$,

$\sigma(z^n f(T_q)E_{22}) = \sigma_{2,1}(z^n f(T_q))E_{11}$,

$\sigma(E_{12}) = f_{12}(T_q)E_{12}$,

$\sigma(E_{21}) = g_{21}(T_q)E_{21}$;

para algunos $f_{ij},\ g_{ij} \in \mathbb{C}[w^{-1}, w]$, *donde* $1 \leqslant i,\, j \leqslant 2$ *con* $i \neq j$.

Demostración. Como σ preserva la graduación principal, tenemos que

$$\sigma(E_{12}) = f_{12}(T_q)E_{12} + zf_{21}(T_q)E_{21}, \tag{1.1}$$

$$\sigma(E_{21}) = z^{-1}g_{12}(T_q)E_{12} + g_{21}(T_q)E_{21}, \tag{1.2}$$

para algunos $f_{ij},\ g_{ij} \in \mathbb{C}[w^{-1}, w]$, con $1 \leqslant i,\, j \leqslant 2,\, i \neq j$.

Luego, como

$$0 = \sigma(z^n f(T_q)E_{11}\, z^m g(T_q)E_{22}) = \sigma(z^m g(T_q)E_{22})\sigma(z^n f(T_q)E_{11}),$$

tenemos dos posibilidades

$$\sigma(z^n f(T_q)E_{11}) = \sigma_{1,1}(z^n f(T_q))E_{11} \quad \text{y} \quad \sigma(z^n f(T_q)E_{22}) = \sigma_{2,2}(z^n f(T_q))E_{22}, \tag{1.3}$$

ó

$$\sigma(z^n f(T_q)E_{11}) = \sigma_{1,2}(z^n f(T_q))E_{22} \quad \text{y} \quad \sigma(z^n f(T_q)E_{22}) = \sigma_{2,1}(z^n f(T_q))E_{11}. \tag{1.4}$$

Además, como $0 = \sigma(E_{ij}^2) = -\sigma(E_{ij})^2$ para $1 \leqslant i,\, j \leqslant 2,\ i \neq j$, se sigue de (1.1) y (1.2) que

$$\sigma(E_{12}) = f_{12}(T_q)E_{12} \quad \text{ó} \quad \sigma(E_{12}) = zf_{21}(T_q)E_{21}, \tag{1.5}$$

y

$$\sigma(E_{21}) = g_{21}(T_q)E_{21} \quad \text{ó} \quad \sigma(E_{21}) = z^{-1}g_{12}(T_q)E_{12}. \tag{1.6}$$

Finalmente, dado que

$$\sigma(E_{11}) = -\sigma(E_{21})\sigma(E_{12}), \tag{1.7}$$

el resultado sigue de (1.3), (1.4), (1.5), (1.6) y (1.7). □

COROLARIO 1.3. *Sea σ una anti-involución de $\mathcal{S}\mathfrak{S}_q^a$ que preserva la graduación principal. Entonces*
(a) si σ satisface el Lema 1.2.(a) $\sigma_{i,j}(1) = \delta_{i,j}$ para todo $1 \leqslant i, j \leqslant 2$,
(b) si σ satisface el Lema 1.2.(b) $\sigma_{i,j}(1) = 1 - \delta_{i,j}$ para todo $1 \leqslant i, j \leqslant 2$.

DEMOSTRACIÓN. Es claro que $\sigma(Id) = Id$, luego el resultado se sigue del Lema 1.2. □

PROPOSICIÓN 1.4. *Sea σ una anti-involución de $\mathcal{S}\mathfrak{S}_q^a$ que preserva la graduación principal y asumimos que satisface el Lema 1.2.(a). Entonces σ es una de las $\sigma_{a,b,c,k}$ del Teorema 1.1.(a).*

Con el objetivo de probar la Proposición 1.4 necesitaremos el siguiente resultado.

LEMA 1.5. *Sea σ como en la Proposición 1.4, entonces*

$$\sigma(z^n f(T_q)E_{ii}) = a_i^n q^{\frac{n(n-1)}{2}k_i} z^n f(b_i q^{-n} T_q^{-1}) T_q^{nk_i} E_{ii}, \tag{1.8}$$

$$\sigma(z^n f(T_q)E_{12}) = a_1^n c q^{\frac{n(n-1)}{2}k_1 + nk} z^{n+1} f(b_1 q^{-n} T_q^{-1}) T_q^{nk_1+k} E_{21}, \tag{1.9}$$

$$\sigma(z^n f(T_q)E_{21}) = -a_2 c^{-1} q^{(\frac{nk_2}{2}-k)(n-1)} z^{n-1} f(b_2 q^{-n} T_q^{-1}) T_q^{nk_2-k} E_{12}, \tag{1.10}$$

donde $a_i,\ b_i,\ c \in \mathbb{C}^\times$, $k_i,\ k \in \mathbb{Z}$, tales que $a_i^2 b_i^{k_i} = q^{k_i}$, con $i = 1, 2$.

DEMOSTRACIÓN. Es fácil ver que $\sigma_{i,i}$ es una anti-involución de $\mathfrak{S}_q^a$ con $i = 1, 2$, entonces de Sección 3 en [**6**] y la hipótesis, obtenemos

$$\sigma(z^n f(T_q)E_{ii}) = a_i^n q^{\frac{n(n-1)}{2}k_i} z^n f(b_i q^{-n} T_q^{-1}) T_q^{nk_i} E_{ii}, \tag{1.11}$$

con $k_i \in \mathbb{Z}$, $a_i,\ b_i \in \mathbb{C}^\times$, tales que $a_i^2 b_i^{k_i} = q^{k_i}$, $i = 1, 2$. Además, del Corolario 1.3.(a) y la hipótesis tenemos que

$$E_{11} = -\sigma(E_{21})\sigma(E_{12}) = -g_{12}(qT_q)f_{21}(T_q)E_{11},$$

por lo tanto $f_{21}(T_q) = cT_q^k$ y $g_{12}(T_q) = -c^{-1}q^k T_q^{-k}$ con $c \in \mathbb{C}^\times$, $k \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\sigma(E_{12}) = czT_q^k E_{21} \ \text{ y } \ \sigma(E_{21}) = -c^{-1}q^k z^{-1} T_q^{-k} E_{12}. \tag{1.12}$$

Además,

$$\sigma(z^n f(T_q)E_{ij}) = \sigma(E_{ij})\sigma(z^n f(T_q)E_{ii}), \tag{1.13}$$

con $i, j = 1, 2$, $i \neq j$. La prueba sigue de (1.11) y de remplazar (1.11) y (1.12) en (1.13). □

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPOSICIÓN 1.4. Del Lema 1.5, tenemos que

$$E_{12} = \sigma^2(E_{12}) = c\sigma(E_{21})\sigma(zT_q^k E_{22}) = -a_2 b_2^k q^{-k} T_q^{k_2-2k} E_{12}, \tag{1.14}$$

$$E_{12} = \sigma^2(E_{12}) = c\sigma(zT_q^k E_{11})\sigma(E_{21}) = -a_1 b_1^k q^{k-k_1} T_q^{k_1-2k} E_{12}, \tag{1.15}$$

entonces de (1.14) y (1.15), obtenemos

$$k_1 = k_2 = 2k, \tag{1.16}$$

y además de (1.15) y (1.16) se tiene que,

$$-a_1 b_1^k = q^k. \tag{1.17}$$

Luego, de (1.16) y usando nuevamente el Lema 1.5, tenemos que

$$\sigma(z^n T_q^l E_{12}) = a_1^n b_1^l c q^{(nk-l)n} z^{n+1} T_q^{(2n+1)k-l} E_{21}, \tag{1.18}$$

$$\begin{aligned} \sigma(z^n T_q^l E_{12}) &= \sigma(z^n T_q^l E_{22})\sigma(E_{12}) \\ &= a_2^n b_2^l c q^{(nk-l)(n+1)} z^{n+1} T_q^{(2n+1)k-l} E_{21}, \end{aligned} \tag{1.19}$$

para todo $n,\ l \in \mathbb{Z}$. Comparando (1.18) con (1.19), obtenemos

$$a_1^n b_1^l = a_2^n b_2^l q^{nk-l}, \quad \text{para todo} \ \ n,\, l \in \mathbb{Z},$$

en particular,

$$\cdot \text{ si } \ n = 0 \ \text{ y } \ l = 1, \quad b_2 = b_1 q, \tag{1.20}$$

$$\cdot \text{ si } \ n = 1 \ \text{ y } \ l = 0, \quad a_2 = a_1 q^{-k}. \tag{1.21}$$

De (1.17) y reemplazando (1.16), (1.20) y (1.21) en (1.8), (1.9) y (1.10), obtenemos que $\sigma = \sigma_{a_1,b_1,c,k}$, finalizando la demostración. □

La siguiente proposición nos da la parte *(b)* del Teorema 1.1.

PROPOSICIÓN 1.6. *Sea σ una anti-involución de $\mathcal{S}\mathfrak{S}_q^a$ que preserva la graduación principal y asumimos que satisface el Lema 1.2.(b). Entonces σ es una de las $\sigma_{a,b,c,k,l}$ del Teorema 1.1.(b).*

Con el objetivo de probar la Proposición 1.6 vamos a considerar el siguiente resultado.

LEMA 1.7. *Sea σ como en la Proposición 1.6, entonces*

$$\sigma(z^n f(T_q) E_{11}) = a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2} k_1} z^n f(b_1 q^{n m_1} T_q^{m_1}) T_q^{n k_1} E_{22}, \tag{1.22}$$

$$\sigma(z^n f(T_q) E_{22}) = a_2^n q^{\frac{n(n-1)}{2} k_2} z^n f(b_2 q^{n m_2} T_q^{m_2}) T_q^{n k_2} E_{11}, \tag{1.23}$$

$$\sigma(z^n f(T_q) E_{12}) = a_1^n c q^{\frac{n(n-1)}{2} k_1 + nl} z^n f(b_1 q^{n m_1} T_q^{m_1}) T_q^{n k_1 + l} E_{12}, \tag{1.24}$$

$$\sigma(z^n f(T_q) E_{21}) = -a_2 c^{-1} q^{\frac{n(n-1)}{2} k_2 - nl} z^n f(b_2 q^{n m_2} T_q^{m_2}) T_q^{n k_2 - l} E_{21}, \tag{1.25}$$

donde $a_i,\, b_i,\, c \in \mathbb{C}^\times$, $k_i,\, m_i,\, l \in \mathbb{Z}$, con $i = 1,\, 2$.

DEMOSTRACIÓN. De la hipótesis y el Corolario 1.3.(b), tenemos que

$$E_{11} = \sigma(T_q E_{22} T_q^{-1} E_{22}) = \sigma_{2,1}(T_q^{-1})\sigma_{2,1}(T_q) E_{11}, \tag{1.26}$$

$$E_{22} = \sigma(T_q E_{11} T_q^{-1} E_{11}) = \sigma_{1,2}(T_q^{-1})\sigma_{1,2}(T_q) E_{22}, \tag{1.27}$$

$$E_{11} = \sigma(z E_{22} z^{-1} E_{22}) = \sigma_{2,1}(z^{-1})\sigma_{2,1}(z) E_{11}, \tag{1.28}$$

$$E_{22} = \sigma(z E_{11} z^{-1} E_{11}) = \sigma_{1,2}(z^{-1})\sigma_{1,2}(z) E_{22}, \tag{1.29}$$

$$E_{11} = -\sigma(E_{12})\sigma(E_{21}) = -f_{12}(T_q) g_{21}(T_q) E_{11}. \tag{1.30}$$

Luego, utilizando (1.26)-(1.29), obtenemos

$$\begin{aligned}\sigma_{i,j}(T_q^{\pm 1}) &= b_i^{\pm 1}T_q^{\pm m_i},\\ \sigma_{i,j}(z) &= a_i z T_q^{k_i},\\ \sigma_{i,j}(z^{-1}) &= a_i^{-1}q^{k_i}z^{-1}T_q^{-k_i},\end{aligned}$$

y haciendo inducción obtenemos

$$\sigma(T_q^m E_{ii}) = b_i^m T_q^{m_i m}E_{jj}, \quad \text{para todo} \quad m \in \mathbb{Z}, \tag{1.31}$$

$$\sigma(z^n E_{ii}) = a_i^n q^{\frac{n(n-1)}{2}k_i} z^n T_q^{nk_i}E_{jj}, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1.32}$$

donde $a_i,\ b_i \in \mathbb{C}^\times,\ k_i,\ m_i \in \mathbb{Z},\ i,\ j = 1,\ 2,\ i \neq j$. Luego de (1.31) y (1.32) tenemos que

$$\begin{aligned}\sigma(z^n f(T_q)E_{ii}) =&\sigma(f(T_q)E_{ii})\sigma(z^n E_{ii})\\ =&a_i^n q^{\frac{n(n-1)}{2}k_i} z^n f(b_i q^{nm_i}T_q^{m_i})T_q^{nk_i}E_{jj},\end{aligned} \tag{1.33}$$

con $i,\ j = 1,\ 2,\ i \neq j$.

Por otro lado, de (1.30) tenemos que $f_{12}(T_q) = cT_q^l$ y $g_{21}(T_q) = -c^{-1}T_q^{-l}$ con $c \in \mathbb{C}^\times$ y $l \in \mathbb{Z}$, por lo tanto

$$\sigma(E_{12}) = cT_q^l E_{12} \quad \text{y} \quad \sigma(E_{21}) = -c^{-1}T_q^{-l}E_{21}. \tag{1.34}$$

Además,

$$\sigma(z^n f(T_q)E_{ij}) = \sigma(E_{ij})\sigma(z^n f(T_q)E_{ii}), \tag{1.35}$$

con $i,\ j = 1,\ 2,\ i \neq j$. La prueba sigue de (1.33) y de reemplazar (1.33) y (1.34) en (1.35). $\square$

Demostración de la Proposición 1.6. Por el Lema 1.7, tenemos que

$$T_q E_{11} = \sigma^2(T_q E_{11}) = b_1 b_2^{m_1} T_q^{m_1 m_2} E_{11}, \tag{1.36}$$

$$zE_{ii} = \sigma^2(zE_{ii}) = a_i a_j b_j^{k_i} q^{m_j k_i} z T_q^{m_j k_i + k_j} E_{ii}, \tag{1.37}$$

$$E_{12} = \sigma^2(E_{12}) = b_1^l c^2 E_{12}, \tag{1.38}$$

$$\sigma(zE_{12}) = a_1 c q^l z T_q^{k_1 + l}E_{12}, \tag{1.39}$$

$$\sigma(zE_{12}) = \sigma(zE_{22})\sigma(E_{12}) = a_2 c z T_q^{k_1 + l}E_{12}. \tag{1.40}$$

Luego, utilizando (1.36)-(1.38) tenemos que

$$m_1 = m_2 = 1 \text{ ó } m_1 = m_2 = -1, \tag{1.41}$$

y

$$b_1 = b_2^{-m_1}, \tag{1.42}$$

$$a_i a_j b_j^{k_i} q^{m_j k_i} = 1, \tag{1.43}$$

$$m_j k_i = -k_j, \tag{1.44}$$

$$b_1^l c^2 = 1, \tag{1.45}$$

donde $i,\ j = 1,\ 2,\ i \neq j$. Supongamos $m_1 = m_2 = 1$, entonces de (1.42) y (1.44) tenemos que $b_1 = b_2^{-1},\ k_1 = -k_2$ y reemplazando en (1.43), obtenemos $q^{2k_1} = 1$, pero como q no es una raíz de la unidad, necesariamente tenemos que $k_1 = k_2 = 0$. Entonces, utilizando el Lema 1.7 obtenemos

$$\sigma(zT_q E_{11}) = a_1 b_1 q z T_q E_{22}, \tag{1.46}$$

además,

$$\sigma(zT_qE_{11}) = q^{-1}\sigma(zE_{11})\sigma(T_qE_{11}) = a_1b_1q^{-1}zT_qE_{22}. \tag{1.47}$$

Comparando (1.46) con (1.47), obtenemos $q^2 = 1$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, de (1.41) y el resultado anterior, tenemos que

$$m_1 = m_2 = -1, \tag{1.48}$$

entonces reemplazando (1.48) en (1.42) y (1.44) obtenemos

$$b_1 = b_2 \quad \text{y} \quad k_1 = k_2. \tag{1.49}$$

Por otro lado, comparando (1.39) con (1.40) tenemos que

$$a_2 = a_1q^l, \tag{1.50}$$

y reemplazando (1.48), (1.49), (1.50) en (1.43), obtenemos

$$a_1^2b_1^{k_1} = q^{k_1-l}. \tag{1.51}$$

Utilizando (1.45), (1.51) y de reemplazar (1.48), (1.49) y (1.50) en (1.22), (1.23), (1.24) y (1.25), obtenemos $\sigma = \sigma_{a_1,b_1,c,k_1,l}$, finalizando la demostración. □

Demostración del Teorema 1.1. Haciendo un cálculo directo se demuestra que ambos casos son anti-involuciones de $\mathcal{S}\mathfrak{S}_q^a$. Recíprocamente, del Lema 1.2 y las Proposiciones 1.4, 1.6, es claro que cualquier anti-involución de $\mathcal{S}\mathfrak{S}_q^a$ que preserva la graduación principal satisface (a) ó (b), finalizando la demostración. □

Ahora dada una anti-involución σ de $\mathcal{S}\mathfrak{S}_q^a$ que preserva la graduación principal, los puntos $-\sigma$-fijos forman una subálgebra de $\mathcal{S}\mathfrak{S}_q$ y además esta subálgebra hereda la graduación. Estas subálgebras se describen en la última parte de esta sección.

Definimos los siguientes automorfismos de $\mathcal{S}\mathfrak{S}_q^a$ por

$$\Theta_s(M) = (z^{-s}Id)\cdot M\cdot(z^sId), \quad \text{para todo} \quad M\in\mathcal{S}\mathfrak{S}_q^a,$$

y

$$\Phi_s|_{(\mathcal{S}\mathfrak{S}_q^a)_{\bar{0}}} = id,$$
$$\Phi_s(z^nf(T_q)E_{12} + z^{n+1}g(T_q)E_{21}) = sz^nf(T_q)E_{12} + s^{-1}z^{n+1}g(T_q)E_{21},$$

con $s\in\mathbb{C}^\times$. Por otro lado, dados $n,\ m\in\mathbb{Z}$ denotaremos por

$$\mathbb{C}[w^{-1},w]^{(n,m)} := \{f\in\mathbb{C}[w^{-1},w] : f(w) = -(-1)^nf(w^{-1})w^m\}.$$

Observación 1.8. *$f(w)\in\mathbb{C}[w^{-1},w]^{(n,m)}$ con $f(w)=\sum f_jw^j$ si y sólo si, $f_j = -(-1)^nf_{m-j}$, para todo $j\in\mathbb{Z}$.*

El caso $\sigma_{a,b,c,k}$

Sean $a,\ b,\ c\in\mathbb{C}^\times,\ k\in\mathbb{Z}$ tales que $-ab^k = q^k$. Denotamos por $\mathcal{S}\mathfrak{S}_{q,k}^{a,b,c}$ la subálgebra de Lie de $\mathcal{S}\mathfrak{S}_q$ que consiste de los puntos $-\sigma_{\mathrm{a,b,c,k}}$-fijos, entonces esta hereda la $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-graduación de $\mathcal{S}\mathfrak{S}_q$, así $\mathcal{S}\mathfrak{S}_{q,k}^{a,b,c} = \bigoplus_{j\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}}(\mathcal{S}\mathfrak{S}_{q,k}^{a,b,c})_j$ donde

$$(\mathcal{S}\mathfrak{S}_{q,k}^{a,b,c})_j = \{M\in(\mathcal{S}\mathfrak{S}_q)_j : \sigma_{\mathrm{a,b,c,k}}(M) = -M\}.$$

Además, denotamos $\mathcal{S}\mathfrak{S}_{q,k} := \mathcal{S}\mathfrak{S}_{q,k}^{-q^k,1,1}$ y $\sigma_{q,k} := \sigma_{-q^k,1,1,k}$.

El siguiente Lema nos da una descripción de $\mathcal{S}\mathfrak{S}_{q,k}^{a,b,c}$.

LEMA 1.9. *Sean a, b, c, k como antes, entonces $\mathcal{S}\mathfrak{S}_{q,k}^{a,b,c} \simeq \mathcal{S}\mathfrak{S}_{q,k}$ y*

$$(\mathcal{S}\mathfrak{S}_{q,k})_n = \left\{ z^n f(q^{\frac{n}{2}} T_q) E_{11} + z^n g(q^{\frac{n-1}{2}} T_q) E_{22} \,:\, f, g \in \mathbb{C}[w^{-1}, w]^{(n,2nk)} \right\},$$

$$(\mathcal{S}\mathfrak{S}_{q,k})_{n+\frac{1}{2}} = \Big\{ z^n f(T_q) E_{12} - (-1)^n q^{(n+1)nk} z^{n+1} f(q^{-n} T_q^{-1}) T_q^{(2n+1)k} E_{21} : \\ f \in \mathbb{C}[w^{-1}, w] \Big\},$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

DEMOSTRACIÓN. Es fácil verificar que

$$\Theta_{-s}\, \sigma_{\mathrm{a,b,c,k}}\, \Theta_s = \sigma_{\mathrm{a}q^{-2ks},\mathrm{b}q^{2s},\mathrm{c}q^{-ks},\mathrm{k}}, \tag{1.52}$$

$$\Phi_{-t}\, \sigma_{\mathrm{a,b,c,k}}\, \Phi_t = \sigma_{\mathrm{a,b,c}t^2,\mathrm{k}}, \tag{1.53}$$

entonces si tomamos $s,\ t \in \mathbb{C}^{\times}$ tales que $b^{-1} = q^{2s}$ y $t^2 = c^{-1} q^{ks}$, de (1.52), (1.53) y la relación entre a, b, c, k, obtenemos $\mathcal{S}\mathfrak{S}_{q,k}^{a,b,c} \simeq \mathcal{S}\mathfrak{S}_{q,k}$.

Por otro lado, usando el Teorema 1.1.(a) y la linealidad de $\sigma_{q,k}$ obtenemos que (para $n \in \mathbb{Z}$), $z^n f(T_q) E_{11} + z^n g(T_q) E_{22} \in (\mathcal{S}\mathfrak{S}_{q,k})_n$ si y sólo si $z^n f(T_q) E_{11}$, $z^n g(T_q) E_{22} \in (\mathcal{S}\mathfrak{S}_{q,k})_n$. Ahora, sea $z^n h(T_q) E_{11} \in (\mathcal{S}\mathfrak{S}_{q,k})_n$ con $h(w) = \sum h_j w^j$, entonces

$$-z^n h(T_q) E_{11} = \sigma_{q,k}(z^n h(T_q) E_{11}) = (-1)^n q^{n^2 k} z^n h(q^{-n} T_q^{-1}) T_q^{2nk} E_{11},$$

si y sólo si, $q^{-\frac{n}{2} j} h_j = -(-1)^n q^{-\frac{n}{2}(2nk - j)} h_{2nk-j}$, para todo $j \in \mathbb{Z}$, lo cual es equivalente a $f(w) = h(q^{-\frac{n}{2}} w) \in \mathbb{C}[w^{-1}, w]^{(n,2nk)}$ (ver Observación 1.8). Por lo tanto,

$$z^n h(T_q) E_{11} = z^n f(q^{\frac{n}{2}} T_q) E_{11}, \quad \text{con} \quad f(w) \in \mathbb{C}[w^{-1}, w]^{(n,2nk)}.$$

De forma similar probamos que, $z^n h(T_q) E_{22} \in (\mathcal{S}\mathfrak{S}_{q,k})_n$ si y sólo si

$$z^n h(T_q) E_{22} = z^n g(q^{\frac{n-1}{2}} T_q) E_{22}, \quad \text{donde} \quad g(w) \in \mathbb{C}[w^{-1}, w]^{(n,2nk)}.$$

Ahora, suponemos que $z^n f(T_q) E_{12} + z^{n+1} g(T_q) E_{21} \in (\mathcal{S}\mathfrak{S}_{q,k})_{n+\frac{1}{2}}$ entonces

$$- z^n f(T_q) E_{12} - z^{n+1} g(T_q) E_{21} = \sigma_{q,k}(z^n f(T_q) E_{12} + z^{n+1} g(T_q) E_{21}) = \\ (-1)^n q^{n^2 k} \left(z^n g(q^{-n} T_q^{-1}) T_q^{(2n+1)k} E_{12} + q^{nk} z^{n+1} f(q^{-n} T_q^{-1}) T_q^{(2n+1)k} E_{21} \right)$$

si y sólo si $g(T_q) = -(-1)^n q^{(n+1)nk} f(q^{-n} T_q^{-1}) T_q^{(2n+1)k}$, finalizando la demostración. □

El caso $\sigma_{a,b,c,k,l}$

Sean $a,\ b,\ c \in \mathbb{C}^{\times}$, $k,\ l \in \mathbb{Z}$ tales que $a^2 b^k = q^{k-l}$ y $b^l c^2 = 1$. Denotamos por $\mathcal{S}\mathfrak{S}_{q,k,l}^{a,b,c}$ la subálgebra de Lie de $\mathcal{S}\mathfrak{S}_q$ formada por los puntos $-\sigma_{\mathrm{a,b,c,k,l}}$-fijos, entonces esta subálgebra hereda la $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-graduación de $\mathcal{S}\mathfrak{S}_q$, por lo tanto $\mathcal{S}\mathfrak{S}_{q,k,l}^{a,b,c} = \bigoplus_{j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}} (\mathcal{S}\mathfrak{S}_{q,k,l}^{a,b,c})_j$ donde,

$$(\mathcal{S}\mathfrak{S}_{q,k,l}^{a,b,c})_j = \{ M \in (\mathcal{S}\mathfrak{S}_q)_j : \sigma_{\mathrm{a,b,c,k,l}}(M) = -M \}.$$

Además, denotamos por $\mathcal{S}\mathfrak{S}_{q,k,l}^{+\pm} := \mathcal{S}\mathfrak{S}_{q,k,l}^{a,1,\pm 1}$, $\sigma_{q,k,l}^{+\pm} := \sigma_{a,1,\pm 1,k,l}$ y $\mathcal{S}\mathfrak{S}_{q,k,l}^{-\pm} := \mathcal{S}\mathfrak{S}_{q,k,l}^{-a,1,\pm 1}$, $\sigma_{q,k,l}^{-\pm} := \sigma_{-a,1,\pm 1,k,l}$, con $a = q^{\frac{k-l}{2}}$.

El siguiente Lema nos da una descripción de $\mathcal{S}\mathfrak{S}_{q,k,l}^{a,b,c}$. Necesitaremos la siguiente notación:

$$\delta_n := \begin{cases} 0, & \text{en } (\mathcal{S}\mathfrak{S}_{q,k,l}^{+,+})_{n+\frac{1}{2}}; \\ 1, & \text{en } (\mathcal{S}\mathfrak{S}_{q,k,l}^{+,-})_{n+\frac{1}{2}}; \\ n, & \text{en } (\mathcal{S}\mathfrak{S}_{q,k,l}^{-,+})_{n+\frac{1}{2}}; \\ n+1, & \text{en } (\mathcal{S}\mathfrak{S}_{q,k,l}^{-,-})_{n+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Lema 1.10. *Sean a, b, c, k, l como antes, entonces $\mathcal{S}\mathfrak{S}_{q,k,l}^{a,b,c}$ es isomorfa a una de las siguientes álgebras: $\mathcal{S}\mathfrak{S}_{q,k,l}^{++}$, $\mathcal{S}\mathfrak{S}_{q,k,l}^{+-}$, $\mathcal{S}\mathfrak{S}_{q,k,l}^{-+}$ ó $\mathcal{S}\mathfrak{S}_{q,k,l}^{--}$. Además*

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}\mathfrak{S}_{q,k,l}^{+\pm})_n =& \Big\{ z^n f(T_q)E_{11} - (\pm 1)^n q^{\frac{n(nk-l)}{2}} z^n f(q^{-n}T_q^{-1})T_q^{nk}E_{22} \ : \\ & f \in \mathbb{C}[w^{-1}, w] \Big\}, \\ (\mathcal{S}\mathfrak{S}_{q,k,l}^{+\pm})_{n+\frac{1}{2}} =& \Big\{ z^n f(q^{\frac{n}{2}}T_q)E_{12} + z^{n+1} g(q^{\frac{n+1}{2}}T_q)E_{21} : f \in \mathbb{C}[w^{-1}, w]^{(\delta_n, nk+l)}, \\ & g \in \mathbb{C}[w^{-1}, w]^{(\delta_n+1, (n+1)k-l)} \Big\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}\mathfrak{S}_{q,k,l}^{-\pm})_n =& \Big\{ z^n f(T_q)E_{11} - (\pm 1)^n q^{\frac{n(nk-l)}{2}} z^n f(q^{-n}T_q^{-1})T_q^{nk}E_{22} \ : \\ & f \in \mathbb{C}[w^{-1}, w] \Big\}, \\ (\mathcal{S}\mathfrak{S}_{q,k,l}^{-\pm})_{n+\frac{1}{2}} =& \Big\{ z^n f(q^{\frac{n}{2}}T_q)E_{12} + z^{n+1} g(q^{\frac{n+1}{2}}T_q)E_{21} : f \in \mathbb{C}[w^{-1}, w]^{(\delta_n, nk+l)}, \\ & g \in \mathbb{C}[w^{-1}, w]^{(\delta_n, (n+1)k-l)} \Big\}, \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Es fácil ver que,

$$\Theta_{-s}\sigma_{\mathrm{a,b,c,k,l}}\Theta_s = \sigma_{aq^{-sk}, bq^{2s}, cq^{-sl}, k, l}, \tag{1.54}$$

luego si tomamos s tal que $q^{2s} = b^{-1}$, obtenemos la primera afirmación usando (1.54) y las relaciones entre a, b, c, k, l.

Por otro lado, suponemos que $z^n f(T_q)E_{11} + z^n g(T_q)E_{22} \in (\mathcal{S}\mathfrak{S}_{q,k,l}^{+,\pm})_n$ entonces

$$\begin{aligned} & - z^n f(T_q)E_{11} - z^n g(T_q)E_{22} = \sigma_{q,k,l}^{+\pm}(z^n f(T_q)E_{11} + z^n g(T_q)E_{22}) \\ & = (\pm 1)^n q^{\frac{n(nk-l)}{2}} z^n f(q^{-n}T_q^{-1})T_q^{nk}E_{22} + (\pm 1)^n q^{\frac{n(nk+l)}{2}} z^n g(q^{-n}T_q^{-1})T_q^{nk}E_{11} \end{aligned}$$

si y sólo si $g(T_q) = -(\pm 1)^n q^{\frac{n(nk-l)}{2}} f(q^{-n}T_q^{-1})T_q^{nk}$. La prueba para el caso $\mathcal{S}\mathfrak{S}_{q,k,l}^{-\pm}$ es similar.

Luego, por Teorema 1.1.(b) y de la linealidad de $\sigma_{q,k,l}$, obtenemos que

$$z^n f(T_q)E_{12} + z^{n+1} g(T_q)E_{21} \in (\mathcal{S}\mathfrak{S}_{q,k,l}^{++})_{n+\frac{1}{2}},$$

si y sólo si,

$$z^n f(T_q)E_{12}, \ z^n g(T_q)E_{21} \in (\mathcal{S}\mathfrak{S}_{q,k,l}^{++})_{n+\frac{1}{2}}.$$

Suponemos que $z^{n+1}h(T_q)E_{21} \in (\mathcal{S}\mathfrak{S}^{++}_{q,k,l})_{n+\frac{1}{2}}$, con $h(w) = \sum h_j w^j$ entonces

$$\begin{aligned}-z^{n+1}h(T_q)E_{21} =&\sigma^{++}_{k,l}(z^{n+1}h(T_q)E_{21})\\ =&-q^{\frac{(n+1)((n+1)k-l)}{2}} z^{n+1}h(q^{-(n+1)}T_q^{-1})T_q^{(n+1)k-l}E_{21}\end{aligned}$$

si y sólo si $h_j q^{-\frac{n+1}{2}j} = q^{-\frac{n+1}{2}((n+1)k-l-j)}h_{(n+1)k-l-j}$ para todo $j \in \mathbb{Z}$, lo cual es equivalente a $g(w) = h(q^{-\frac{n+1}{2}}w) \in \mathbb{C}[w^{-1}, w]^{(1,(n+1)k-l)}$ (ver Observación 1.8). Por lo tanto,

$$z^{n+1}h(T_q)E_{21} = z^{n+1}g(q^{\frac{n+1}{2}}T_q)E_{21}, \quad \text{con} \quad g(w) \in \mathbb{C}[w^{-1}, w]^{(1,(n+1)k-l)}.$$

De forma similar se prueba que $z^n h(T_q)E_{12} \in (\mathcal{S}\mathfrak{S}^{++}_{q,k,l})_{n+\frac{1}{2}}$ si y sólo si

$$z^n h(T_q)E_{12} = z^n f(q^{\frac{n}{2}}T_q)E_{12},$$

con $f \in \mathbb{C}[w^{-1}, w]^{(0,nk+l)}$. La demostración de los otros casos se hace de forma similar. □

Observación 1.11. *Del Lema 1.9 (resp. Lema 1.10), es claro que un elemento en $(\mathcal{S}\mathfrak{S}_{q,k})_{n+\frac{1}{2}}$ (resp. $(\mathcal{S}\mathfrak{S}^{\pm,\pm}_{q,k,l})_n$) esta totalmente determinado por sus valor en la posición E_{12} (resp. E_{11}), donde $n \in \mathbb{Z}$.*

Finalmente, denotaremos por $\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_{q,k}$ y $\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l}$ las extensiones centrales de $\mathcal{S}\mathfrak{S}_{q,k}$ y $\mathcal{S}\mathfrak{S}^{\pm\pm}_{q,k,l}$ correspondientes a la restricción del 2-cociclo ψ respectivamente. Es claro que estas subálgebras admiten una $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-graduación compatible con la $\mathbb{Z}_2$-graduación, i.e.,

$$\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_{q,k} = \left(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_{q,k}\right)_{\bar{0}} \bigoplus \left(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_{q,k}\right)_{\bar{1}}, \quad \widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l} = \left(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l}\right)_{\bar{0}} \bigoplus \left(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l}\right)_{\bar{1}},$$

donde

$$\begin{aligned}\left(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_{q,k}\right)_{\bar{0}} &= \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_{q,k})_n \quad \text{y} \quad \left(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_{q,k}\right)_{\bar{1}} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_{q,k})_{n+\frac{1}{2}},\\ \left(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l}\right)_{\bar{0}} &= \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l})_n \quad \text{y} \quad \left(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l}\right)_{\bar{1}} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l})_{n+\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

con $(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_{q,k})_n = (\mathcal{S}\mathfrak{S}_{q,k})_n + \delta_{n,0}\mathbb{C}C$ y $(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l})_n = (\mathcal{S}\mathfrak{S}^{\pm\pm}_{q,k,l})_n + \delta_{n,0}\mathbb{C}C$, para todo $n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$.

2. Módulos de peso máximo cuasifinitos de $\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_{q,k}$ y $\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l}$

El objetivo de esta sección es caracterizar los módulos de peso máximo irreducibles cuasifinitos de $\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_{q,k}$ y $\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l}$. De forma similar a lo que se hizo en el capítulo 2, vamos a aplicar los resultados introducidos en el capítulo 1. El lector debe haber notado que los resultados del capítulo 1 se dan en base a una $\mathbb{Z}$-graduación de la super álgebra de Lie y en nuestro caso tenemos una $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-graduación, sin embargo no es difícil ver que para nuestro propósito esto no implica ninguna dificultad, pues solo tendríamos que re-graduar nuestra álgebra a través de la siguiente biyección $\frac{1}{2}\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $l \mapsto 2l$ (notar que la consistencia de la $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-graduación no se altera). Es decir que para los resultados del capítulo 1, tener una $\mathbb{Z}$-graduación compatible es equivalente a tener una $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-graduación compatible a través de la identificación anterior.

A continuación probaremos que $\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_{q,k}$ y $\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l}$ satisfacen (P1), (P2) y (P3), lo cual es equivalente a estudiar sus subálgebras parabólicas. Antes de estudiar cada caso particular consideraremos los siguientes resultados.

LEMA 2.1. *Sean $A = z^n f_1(T_q)E_{11}+z^n f_2(T_q)E_{22}$ y $z^m g(T_q)E_{ij}$ elementos no nulos en $\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_q$ donde $n \neq 0$, $i, j = 1, 2$ y sea $h \in \mathbb{C}[w^{-1}, w]$ no constante. Entonces,*
(a) $[A, z^m g(T_q)E_{ij}] \neq 0$ ó $[A, z^m g(T_q)h(T_q)E_{ij}] \neq 0$, con $i \neq j$.
(b) Si $f_i \neq 0$, $[A, z^m g(T_q)E_{ii}] \neq 0$ ó $[A, z^m g(T_q)h(T_q)E_{ii}] \neq 0$.

DEMOSTRACIÓN. (a) Suponemos

$$[A, z^m g(T_q)E_{12}] = 0 \quad \text{y} \quad [A, z^m g(T_q)h(T_q)E_{12}] = 0,$$

entonces

$$f_1(q^m T_q)g(T_q) = f_2(T_q)g(q^n T_q), \tag{2.1}$$

$$f_1(q^m T_q)g(T_q)h(T_q) = f_2(T_q)g(q^n T_q)h(q^n T_q), \tag{2.2}$$

usando (2.1) y la hipótesis tenemos que f_1 y f_2 son no nulos. Entonces, si reemplazamos (2.1) en (2.2), obtenemos $h(T_q) = h(q^n T_q)$ lo cual es una contradicción, ya que h no es constante, $n \neq 0$ y q no es una raíz de la unidad.

La demostración del otro caso y del inciso (b) es similar. □

PROPOSICIÓN 2.2. *Dado un cuasipolinomio P, y un polinomio $B(x) = \prod_i (x - A_i)$, tomamos $b(x) = \prod_i (x - a_i)$ donde $a_i = \exp(A_i)$, entonces*

$$b(x)\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} P(n)x^{-n}\right) = 0 \quad \textit{si y sólo si} \quad B\left(\frac{d}{dx}\right)P(x) = 0.$$

<u>El caso $\mathfrak{g} = \widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_{q,k}$</u>

Es claro que $\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_{q,k}$ satisface (P1). Ahora, supongamos que

$$A = z^{-n} f(T_q)E_{11} + z^{-n} g(T_q)E_{22} \in (\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_{q,k})_{-n}, \ (\text{con } n \in \mathbb{N}),$$

satisface $[A, (\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_{q,k})_{\frac{1}{2}}] = 0$, en particular para todo $i \in \mathbb{Z}$

$$[A, T_q^i E_{12} - zT_q^{k-i}E_{21}] = 0,$$

de donde $f(T_q) = q^{-ni} g(T_q)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, si y sólo si $f = g = 0$ (ya que $n \neq 0$ y q no es una raíz de la unidad), por lo tanto $A = 0$. De forma similar, sea

$$A = z^{-n} f(T_q)E_{12} - (-1)^{-n} q^{(n-1)nk} z^{-n+1} f(q^n T_q^{-1})T_q^{(-2n+1)k} E_{21},$$

en $(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_{q,k})_{-n+\frac{1}{2}}$ (con $n \in \mathbb{N}$), tal que $[A, (\mathcal{S}\mathfrak{S}_{q,k})_{\frac{1}{2}}] = 0$, entonces

$$[A, T_q^i E_{12} - zT_q^{k-i}E_{21}] = 0,$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$, de donde, $f(T_q) = q^{nk-i} f(qT_q)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Se sigue que $f = 0$, y en consecuencia $A = 0$. Así probamos que $\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_{q,k}$ satisface (P2).

Finalmente, usando el siguiente lema probaremos que $\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_{q,k}$ satisface (P3).

LEMA 2.3. *Sea* $\mathfrak{p} = \bigoplus_{j\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}} \mathfrak{p}_j$ *una subálgebra* $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$*-graduada de* $\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_{q,k}$*, donde* $\mathfrak{p}_0 = (\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_{q,k})_0$*. Entonces*

(a) Dado $n \in \mathbb{Z}$*,* $\mathfrak{p}_{n+\frac{1}{2}}$ *tiene codimensión finita en* $(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_{q,k})_{n+\frac{1}{2}}$ *si y sólo si,* $\mathfrak{p}_{n+\frac{1}{2}} \neq 0$*;*

(b) Dado $n \in \mathbb{Z}$*,* $\mathfrak{p}_n$ *tiene codimensión finita en* $(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_{q,k})_n$ *si y sólo si, existe* $z^n f(q^{\frac{n}{2}}T_q)E_{11} + z^n g(q^{\frac{n-1}{2}}T_q)E_{22} \in \mathfrak{p}_n$*, tales que* f *y* g *son no nulos;*

(c) $\mathfrak{p}_{-n}$ *tiene codimensión finita en* $(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_{q,k})_{-n}$*, para todo* $n \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ *si y sólo si,* $\mathfrak{p}_{-\frac{1}{2}} \neq 0$*.*

DEMOSTRACIÓN. (a) Supongamos que existe

$$A = z^n f(T_q)E_{12} - (-1)^n q^{(n+1)nk} z^{n+1} f(q^{-n}T_q^{-1})T_q^{(2n+1)k}E_{21} \in \mathfrak{p}_{n+\frac{1}{2}},$$

con $f \neq 0$, entonces, $M_1^j := [A, (T_q^j - T_q^{-j})E_{11}]$ y $M_2^j := [A, (q^{-\frac{j}{2}}T_q^j - q^{\frac{j}{2}}T_q^{-j})E_{22}]$ pertenecen a $\mathfrak{p}_{n+\frac{1}{2}}$, para todo $j \in \mathbb{Z}$. Más aún,

$$A^j = (q^{-(n+1)j} - q^{nj})^{-1}(M_1^j + q^{-(n+\frac{1}{2})j}M_2^j) \in \mathfrak{p}_{n+\frac{1}{2}},$$

y

$$A^j = z^n f(T_q)T_q^jE_{12} - (-1)^n q^{(n+1)nk-nj} z^{n+1} f(q^{-n}T_q^{-1})T_q^{(2n+1)k-j}E_{21}, \tag{2.3}$$

para todo $j \in \mathbb{Z}^\times$. Por lo tanto, utilizando (2.3), tenemos que

$$z^n g(T_q)E_{12} - (-1)^n q^{(n+1)nk} z^{n+1} g(q^{-n}T_q^{-1})T_q^{(2n+1)k}E_{21} \in \mathfrak{p}_{n+\frac{1}{2}},$$

para todo $g(w) \in \langle f(w)\rangle$, donde $\langle f(w)\rangle$ denota el ideal de $\mathbb{C}[w^{-1}, w]$ generado por $f(w)$. Luego usando que $\langle f(w)\rangle$ tiene codimensión finita en $\mathbb{C}[w^{-1}, w]$, obtenemos que $\mathfrak{p}_{n+\frac{1}{2}}$ tiene codimensión finita en $(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_{q,k})_{n+\frac{1}{2}}$ (ver Observación 1.11). La prueba de la recíproca es trivial.

(b) Supongamos que $A = z^n f(q^{\frac{n}{2}}T_q)E_{11} + z^n g(q^{\frac{n-1}{2}}T_q)E_{22} \in \mathfrak{p}_n$, con f y g elementos no nulos de $\mathbb{C}[w^{-1}, w]^{(n,2nk)}$, entonces de forma similar a lo anterior

$$(q^{-\frac{nj}{2}} - q^{\frac{nj}{2}})^{-1}[A, (T_q^j - T_q^{-j})E_{11}] = z^n f(q^{\frac{n}{2}}T_q)(q^{\frac{nj}{2}}T_q^j + q^{-\frac{nj}{2}}T_q^{-j})E_{11} \in \mathfrak{p}_n,$$

$$b[A, (q^{\frac{-j}{2}}T_q^j - q^{\frac{j}{2}}T_q^{-j})E_{22}] = z^n g(q^{\frac{n-1}{2}}T_q)(q^{\frac{(n-1)j}{2}}T_q^j + q^{-\frac{(n-1)j}{2}}T_q^{-j})E_{22} \in \mathfrak{p}_n,$$

donde $b = (q^{-\frac{n}{2}j} - q^{\frac{n}{2}j})^{-1}$, y esto es verdadero para todo $j \in \mathbb{Z}^\times$. Por lo tanto

$$z^n h_1(q^{\frac{n}{2}}T_q)E_{11} \in \mathfrak{p}_n, \text{ para todo } h_1 \in f(w)\mathbb{C}[w^{-1}, w]^{(1,0)}, \tag{2.4}$$

y

$$z^n h_2(q^{\frac{n-1}{2}}T_q)E_{22} \in \mathfrak{p}_n, \quad \text{para todo} \quad h_2 \in g(w)\mathbb{C}[w^{-1}, w]^{(1,0)}. \tag{2.5}$$

Luego como $f(w)\mathbb{C}[w^{-1}, w]^{(1,0)}$ y $g(w)\mathbb{C}[w^{-1}, w]^{(1,0)}$ tienen codimensión finita en $\mathbb{C}[w^{-1}, w]^{(n,2nk)}$, tenemos que $\mathfrak{p}_n$ tiene codimensión finita en $(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_{q,k})_n$. La demostración de la recíproca es trivial.

(c) Suponemos $\mathfrak{p}_{-\frac{1}{2}} \neq 0$. Luego, con el fin de probar que $\mathfrak{p}_{-n}$ tiene codimensión finita en $(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_{q,k})_{-n}$ para todo $n \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$, solamente necesitamos ver que esto es verdadero para todo $n \in \mathbb{N}$, ya que en este caso usando (P2) obtenemos que $\mathfrak{p}_{-n+\frac{1}{2}} \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por (a) tiene codimensión finita en $(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_{q,k})_{-n+\frac{1}{2}}$. Por hipótesis, existe $A = z^{-1}f(T_q)E_{12} + f(qT_q^{-1})T_q^{-k}E_{21} \in \mathfrak{p}_{-\frac{1}{2}}$ con $f \neq 0$, entonces usando (2.3) tenemos que $B = z^{-1}f(T_q)T_qE_{12} + qf(qT_q^{-1})T_q^{-k-1}E_{21} \in \mathfrak{p}_{-\frac{1}{2}}$, y

$$[A, B] := z^{-1}f_1(q^{-\frac{1}{2}}T_q)E_{11} + z^{-1}g_1(q^{-1}T_q)E_{22} \in \mathfrak{p}_{-1},$$

con f_1 y g_1 son no nulos. Se sigue de (b) que $\mathfrak{p}_{-1}$ tiene codimensión finita en $(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_{q,k})_{-1}$. Además por (2.4) y (2.5) tenemos que

$$z^{-1}f_1(q^{-\frac{1}{2}}T_q)h(q^{-\frac{1}{2}}T_q)E_{11} \in \mathfrak{p}_{-1}, \tag{2.6}$$

$$z^{-1}g_1(q^{-1}T_q)h(q^{-1}T_q)E_{22} \in \mathfrak{p}_{-1}, \tag{2.7}$$

para todo $h(w) \in \mathbb{C}[w^{-1}, w]^{(1,0)}$. Ahora por inducción, supongamos que $\mathfrak{p}_{-n}$ tiene codimensión finita en $(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_{q,k})_{-n}$, entonces existe

$$A = z^{-n}f(q^{-\frac{n}{2}}T_q)E_{11} + z^{-n}g(q^{-\frac{n+1}{2}}T_q)E_{22} \in \mathfrak{p}_{-n},$$

con f y g no nulos. Luego por (2.6) y Lema 2.1.(a)

$$[A, z^{-1}f_1(q^{-\frac{1}{2}}T_q)E_{11}] \neq 0 \text{ ó } [A, z^{-1}f_1(q^{-\frac{1}{2}}T_q)h(q^{-\frac{1}{2}}T_q)T_q)E_{11}] \neq 0,$$

para algún $h(w) \in \mathbb{C}[w^{-1}, w]^{(1,0)}$ no constante, por lo tanto existe un elemento $z^{-n-1}\widetilde{f}(T_q)E_{11} \in \mathfrak{p}_{-n-1}$ no nulo. De forma similar, usando (2.7) y Lema 2.1.(a), existe $z^{-n-1}\widetilde{g}(T_q)E_{22} \in \mathfrak{p}_{-n-1}$ no nulo. Luego el resultado se desprende de (b), finalizando la inducción. La prueba de la recíproca es trivial. $\square$

COROLARIO 2.4. *(a) Toda subálgebra parabólica de $\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_{q,k}$ es no degenerada.*

(b) Todo elemento no nulo de $(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_{q,k})_{-\frac{1}{2}}$ es no degenerado.

(c) $\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_{q,k}$ satisface (P3).

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathfrak{p}$ una subálgebra parabólica de $\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_{q,k}$, por definición existe $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{p}_{-j} \neq 0$, luego usando (P2) $\mathfrak{p}_{-\frac{1}{2}} \neq 0$, la prueba de (a) sigue del Lema 2.3.(c). Finalmente, (b) sigue de (a), y (c) sigue de (b). $\square$

Una funcional $\lambda \in (\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_{q,k})_0^*$ esta determinada por sus niveles $\Delta_{n,1} = -\lambda((T_q^n - T_q^{-n})E_{11})$, $\Delta_{n,2} = -\lambda((q^{-n}T_q^n - T_q^{-n})E_{22})$ con $n \in \mathbb{Z}$, y la carga central $\lambda(C) = c$. Consideremos la serie generatriz

$$\Delta_{\lambda,i}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Delta_{n,i}x^{-n}, \text{ con } i = 1, 2.$$

TEOREMA 2.5. *Un $\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_{q,k}$-módulo de peso máximo irreducible $L(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_{q,k}, \lambda)$ es cuasifinito si y sólo si, se cumple una de las siguientes condiciones equivalentes:*

(a) Existe un polinomio de Laurent $b(x)$ tal que

$$b(qx)\left(\Delta_{\lambda,1}(x) + \Delta_{\lambda,2}(x) + c\right) = 0.$$

(b) Existe un cuasipolinomio $P(x)$ tal que

$$P(n) = \Delta_{n,1} + \Delta_{n,2} + \delta_{n,0}c,$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Por Teorema 1.3, $L(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_{q,k}, \lambda)$ es cuasifinito si y sólo si, existe $a \in (\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_{q,k})_{-\frac{1}{2}}$ no degenerado, tal que $\lambda([(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_{q,k})_{\frac{1}{2}}, a]) = 0$.

Ahora, sea $a = z^{-1}b(T_q)E_{12} + b(qT_q^{-1})T_q^{-k}E_{21} \in (\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_{q,k})_{-\frac{1}{2}}$ no nulo (con $b(w) = \sum_j b_j w^j$), entonces por Corolario 2.4.(b), a es un elemento no degenerado. Luego, $\lambda([(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_{q,k})_{\frac{1}{2}}, a]) = 0$ si y sólo si, para todo $i \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} 0 =& \lambda([(T_q^i E_{12} - zT_q^{k-i}E_{21}, a)]) \\ =& \sum_j q^j b_j(\Delta_{k-i+j,1} + \Delta_{k-i+j,2}) + q^{-k+i}b_{-k+i}c. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Multiplicando (2.8) por x^{-k+i} y sumando sobre $i \in \mathbb{Z}$, obtenemos

$$\begin{aligned} 0 =& \sum_{j,i} q^j b_j(\Delta_{k-i+j,1} + \Delta_{k-i+j,2})x^{-k+i} + \sum_i q^{-k+i}b_{-k+i}x^{-k+i}c \\ =& b(qx)(\Delta_{\lambda,1}(x) + \Delta_{\lambda,2}(x) + c). \end{aligned}$$

La equivalencia entre (a) y (b) sigue de la Proposición 2.2. □

El caso $\mathfrak{g} = \widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l}$

Es claro que $\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l}$ satisface (P1). Ahora, probaremos que $\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l}$ satisface (P2). Supongamos que $A = z^{-n}f(q^{-\frac{n}{2}}T_q)E_{12} + z^{-n+1}g(q^{\frac{-n+1}{2}}T_q)E_{21}$ en $(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l})_{-n+\frac{1}{2}}$ (con $n \in \mathbb{N}$), satisface $[A, (\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l})_{\frac{1}{2}}] = 0$, en particular si tomamos $zh_{21}(q^{\frac{1}{2}}T_q)E_{21}$ y $h_{12}(T_q)E_{12} \in (\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l})_{\frac{1}{2}}$ no nulos, tenemos que

$$[A, h_{12}(T_q)E_{12}] = 0,$$

luego $g(q^{\frac{-n+1}{2}}T_q)h_{12}(T_q) = 0$, por lo tanto $g = 0$. De forma similar,

$$[A, zh_{21}(q^{\frac{1}{2}}T_q)E_{21}] = 0,$$

entonces $f(q^{-\frac{n}{2}+1}T_q)h_{21}(q^{\frac{1}{2}}T_q) = 0$ y por lo tanto $f = 0$. Así obtenemos $A = 0$.

Observación 2.6. *Sean $B = z^n f(q^{\frac{n}{2}}T_q)E_{12} + z^{n+1}g(q^{\frac{n+1}{2}}T_q)E_{21} \in (\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l})_{n+\frac{1}{2}}$ y $A = h(T_q)E_{11} - h(T_q^{-1})E_{22} \in (\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l})_0$ con $h \in \mathbb{C}[w^{-1}, w]$. Entonces $M := [A, B] \in (\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l})_{n+\frac{1}{2}}$, donde $M_{ii} = 0$ ($i = 1, 2$) y*

$$M_{12} = - z^n f(q^{\frac{n}{2}}T_q)(h(q^n T_q) + h(T_q^{-1})), \tag{2.9}$$

$$M_{21} = z^{n+1}g(q^{\frac{n+1}{2}}T_q)(h(T_q) + h(q^{-n-1}T_q^{-1})). \tag{2.10}$$

Ahora, sea $A = z^{-n}f_1(T_q)E_{11} + z^{-n}f_2(T_q)E_{22} \in (\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l})_{-n}$ no nulo (con $n \in \mathbb{N}$), entonces si tomamos $B = f(T_q)E_{12} \in (\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l})_{\frac{1}{2}}$ no nulo por Observación 2.6, existe $f(T_q)h(T_q)E_{12} \in (\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l})_{\frac{1}{2}}$ con h no constante, entonces por Lema 2.1.(a) tenemos que

$$[A, f(T_q)E_{12}] \neq 0 \quad \text{ó} \quad [A, f(T_q)h(T_q)E_{12}] \neq 0. \tag{2.11}$$

Por lo tanto $\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l}$, satisface (P2).

Con el objetivo de probar que $\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l}$ satisface (P3), necesitamos el siguiente resultado. Denotaremos por

$$\delta_n' := \begin{cases} \delta_n + 1, & \text{en } (\mathcal{S}\mathfrak{S}^{+,\pm}_{q,k,l})_{n+\frac{1}{2}}, \\ \delta_n, & \text{en } (\mathcal{S}\mathfrak{S}^{-,\pm}_{q,k,l})_{n+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Lema 2.7. *Sea $\mathfrak{p} = \bigoplus_{j\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}} \mathfrak{p}_j$ una subálgebra $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-graduada de $\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l}$, con $\mathfrak{p}_0 = (\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l})_0$. Entonces*

(a) Dado $n \in \mathbb{Z}$, $\mathfrak{p}_n$ tiene codimensión finita en $(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l})_n$ si y sólo si, $\mathfrak{p}_n \neq 0$.

(b) Dado $n \in \mathbb{Z}$, $\mathfrak{p}_{n+\frac{1}{2}}$ tiene codimensión finita en $(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l})_{n+\frac{1}{2}}$ si y sólo si, existe $z^n f(q^n T_q)E_{12} + z^{n+1} g(q^{\frac{n+1}{2}} T_q)E_{21} \in \mathfrak{p}_{n+\frac{1}{2}}$, tale que f y g son no nulos.

(c) $\mathfrak{p}_{-n}$ tiene codimensión finita en $(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l})_{-n}$ para todo $n \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ si y sólo si, $\mathfrak{p}_{-\frac{1}{2}}$ tiene codimensión finita en $(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l})_{-\frac{1}{2}}$.

Demostración. (a) Sea,

$$A = z^n f(T_q)E_{11} - (\pm 1)^n q^{\frac{n(nk-l)}{2}} z^n f(q^{-n}T_q^{-1})T_q^{nk} E_{22} \in \mathfrak{p}_n,$$

con $f \neq 0$, entonces $B_j := (1 - q^{nj})^{-1}[A, T_q^j E_{11} - T_q^{-j} E_{22}] \in \mathfrak{p}_n$ y

$$B_j = z^n f(T_q)T_q^j E_{11} - (\pm 1)^n q^{\frac{n(nk-l)}{2} - nj} z^n f(q^{-n}T_q^{-1})T_q^{nk-j} E_{22}, \tag{2.12}$$

para todo $j \in \mathbb{Z}^\times$, por lo tanto de (2.12) tenemos que

$$z^n g(T_q)E_{11} - (\pm 1)^n q^{\frac{n(nk-l)}{2}} z^n g(q^{-n}T_q^{-1})T_q^{nk} E_{22} \in \mathfrak{p}_n$$

para todo $g(w) \in \langle f(w)\rangle$ y como $\langle f(w)\rangle$ tiene codimensión finita en $\mathbb{C}[w^{-1}, w]$, tenemos que $\mathfrak{p}_n$ tiene codimensión finita en $(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l})_n$ (ver Observación 1.11). La demostración de la recíproca es trivial.

(b) Supongamos que existen elementos $z^n f_1(T_q)E_{12}$ y $z^{n+1} f_2(T_q)E_{21}$ no nulos en $\mathfrak{p}_{n+\frac{1}{2}}$, entonces de Observación 2.6, tenemos que $z^n g_1(T_q)E_{12} \in \mathfrak{p}_{n+\frac{1}{2}}$ para todo $g_1(q^{-\frac{n}{2}} w) \in f_1(w)\mathbb{C}[w^{-1}, w]^{(1,0)}$ (ver (2.9)) y $z^{n+1} g_2(T_q)E_{21} \in \mathfrak{p}_{n+\frac{1}{2}}$ para todo $g_2(q^{-\frac{n+1}{2}} w) \in f_2(w)\mathbb{C}[w^{-1}, w]^{(1,0)}$ (ver (2.10)). Luego dado que $f_1(w)\mathbb{C}[w^{-1}, w]^{(1,0)}$ tiene codimensión finita en $\mathbb{C}[w^{-1}, w]^{(\delta_n, nk+l)}$, y $f_2(w)\ \mathbb{C}[w^{-1}, w]^{(1,0)}$ tiene codimensión finita en $\mathbb{C}[w^{-1}, w]^{(\delta_n', (n+1)k-l)}$, tenemos que $\mathfrak{p}_{n+\frac{1}{2}}$ tiene codimensión finita en $(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l})_{n+\frac{1}{2}}$.

Entonces para probar que $\mathfrak{p}_{n+\frac{1}{2}}$ tiene codimensión finita en $(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l})_{n+\frac{1}{2}}$, solamente necesitamos ver que existen elementos no nulos en $\mathfrak{p}_{n+\frac{1}{2}}$ como arriba. Sea $B = z^n f(q^{\frac{n}{2}}T_q)E_{12} + z^{n+1}g(q^{\frac{n+1}{2}}T_q)E_{21} \in \mathfrak{p}_{n+\frac{1}{2}}$ con f y g no nulos, y sean A y M como en la Observación 2.6. Entonces como $\mathfrak{p}_0 = (\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l})_0$, tomando $h(w) = w - q^n w^{-1}$ (observar que $h(T_q^{-1}) = -h(q^n T_q)$), de (2.9) y (2.10), tenemos que

$$M = z^{n+1}g(q^{\frac{n+1}{2}}T_q)\left(h(T_q) + h(q^{-(n+1)}T_q^{-1})\right)E_{21} \in \mathfrak{p}_{n+\frac{1}{2}}, \text{ con } M \neq 0.$$

De forma similar, tomando $h(w) = w - q^{-n-1}w^{-1}$ (observar que $h(T_q) = -h(q^{-n-1}T_q^{-1})$), tenemos que

$$M = -z^n f(q^{\frac{n}{2}}T_q)\left(h(q^nT_q) + h(T_q^{-1})\right)E_{12} \in \mathfrak{p}_{n+\frac{1}{2}}, \text{ con } M \neq 0,$$

lo que prueba la existencia de los elementos buscados. La demostración de la recíproca es trivial.

(c) Supongamos que $\mathfrak{p}_{-\frac{1}{2}}$ tiene codimensión finita en $(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l})_{-\frac{1}{2}}$, entonces para probar que $\mathfrak{p}_{-n}$ tiene codimensión finita en $(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l})_{-n}$ para todo $n \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$, sólo necesitamos ver que es verdadero para todo $-n + \frac{1}{2}$ con $n \in \mathbb{N}$, ya que en este caso, usando (P2) obtenemos que $\mathfrak{p}_{-n} \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces por (a) tenemos que $\mathfrak{p}_{-n}$ tiene codimensión finita en $(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l})_{-n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por hipótesis existen elementos $A = z^{-1}f(q^{-1}T_q)E_{12}$ y $B = g(T_q)E_{21}$ no nulos en $\mathfrak{p}_{-\frac{1}{2}}$, por lo tanto $[A, B] \in \mathfrak{p}_{-1}$ es no nulo. Por inducción, suponemos que $\mathfrak{p}_{-n+\frac{1}{2}}$ tiene codimensión finta en $(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l})_{-n+\frac{1}{2}}$, entonces existen elementos no nulos $z^{-n+1}f_{21}(q^{\frac{-n+1}{2}}T_q)E_{21}$ y $z^{-n}f_{12}(q^nT_q)E_{12}$ en $(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l})_{-n+\frac{1}{2}}$ y por Observación 2.6, tenemos además que

$$z^{-n}f_{12}(q^nT_q)g_{12}(T_q)E_{12},\ z^{-n+1}f_{21}(q^{\frac{-n+1}{2}}T_q)g_{21}(T_q)E_{21} \in (\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l})_{-n+\frac{1}{2}},$$

con g_{ij} no constante ($i \neq j$). Luego por Lema 2.1.(a), tenemos que

$$[z^{-n}f_{12}(q^nT_q)E_{12}, [A, B]] \neq 0 \text{ ó } [z^{-n}f_{12}(q^nT_q)g_{12}(T_q)E_{12}, [A, B]] \neq 0, \tag{2.13}$$

por lo tanto de (2.13), existe $z^{-n-1}\widetilde{f}_{12}(T_q)E_{12} \in (\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l})_{-n-\frac{1}{2}}$ no nulo. De forma similar, probamos que existe $z^{-n}\widetilde{f}_{21}(T_q)E_{21} \in (\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l})_{-n-\frac{1}{2}}$ no nulo. Ahora la demostración sigue de (b). La demostración de la recíproca es trivial. □

Corolario 2.8. *(a)* $a = z^{-1}f(q^{-\frac{1}{2}}T_q)E_{12} + g(T_q)E_{21} \in (\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l})_{-\frac{1}{2}}$ *es no degenerado si y sólo si f y g son no nulos.*
(b) $\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l}$ *satisface (P3).*

Demostración. (a) Sea $a = z^{-1}f(q^{-\frac{1}{2}}T_q)E_{12}+g(T_q)E_{21} \in (\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l})_{-\frac{1}{2}}$. Entonces si f, g son no nulos por Lema 2.7.(b), $\mathfrak{p}^a_{-\frac{1}{2}}$ tiene codimensión finita en $(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l})_{-\frac{1}{2}}$, luego por Lema 2.7.(c), a es un elemento no degenerado. Recíprocamente, si $f = 0$ ó $g = 0$ entonces por definición $\mathfrak{p}^a_{-1} = 0$.

(b) Sea $\mathfrak{p}$ una subálgebra parabólica no degenerada de $\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l}$, entonces existe $a = z^{-1}f(T_q)E_{12} + g(T_q)E_{21} \in \mathfrak{p}_{-\frac{1}{2}}$ tal que f y g son no nulos, luego la demostración sigue de (a). $\square$

Una funcional $\lambda \in (\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l})^*_0$ esta caracterizada por sus niveles, $\Delta_n = \lambda(T_q^n E_{11} - T_q^{-n} E_{22})$ con $n \in \mathbb{Z}$ y la carga central $\lambda(C) = c$. Además, definimos $\Delta^0_n = (\Delta_n - \Delta_{-n}) = \lambda((T_q^n - T_q^{-n})E_{11} + (T_q^n - T_q^{-n})E_{22})$. Consideremos la serie generatriz $\Delta_\lambda(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Delta_n x^{-n}$, y sea

$$\Delta^0_\lambda(x) = \Delta_\lambda(x) - \Delta_\lambda(x^{-1}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Delta^0_n x^{-n}.$$

TEOREMA 2.9. *Un $\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l}$-módulo de peso máximo irreducible $L(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l}, \lambda)$ es cuasifinito si y sólo si, satisface una de las siguientes condiciones equivalentes;*

(a) Existen $f(w)$, $g(w)$ polinomios de Laurent tales que

$$g(x)\Delta^0_\lambda(x) = 0,$$
$$f(x)\Delta^0_\lambda(q^{-\frac{1}{2}}x) = 0.$$

(b) Existen $P_{12}(x)$ y $P_{21}(x)$ cuasipolinomios tales que

$$P_{12}(n) = q^{-\frac{n}{2}}\Delta^0_n,$$
$$P_{21}(n) = \Delta^0_n,$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

DEMOSTRACIÓN. Por Teorema 1.3, $L(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l}, \lambda)$ es cuasifinito si y sólo si existe $a \in (\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l})_{-\frac{1}{2}}$, no degenerado, tal que $\lambda([(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l})_{\frac{1}{2}}, a]) = 0$.

Ahora, sea $a = z^{-1}f(q^{-\frac{1}{2}}T_q)E_{12} + g(T_q)E_{21} \in (\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}^{\pm\pm}_{q,k,l})_{-\frac{1}{2}}$, con $f(w) = \sum_j f_j w^j \in \mathbb{C}[w^{-1}, w]^{(\delta_{-1}, l-k)}$ y $g(w) = \sum_j g_j w^j \in \mathbb{C}[w^{-1}, w]^{(\delta'_{-1}, -l)}$ no nulos. Entonces por Corolario 2.8.(a), a es un elemento no degenerado. Luego, $\lambda([(\widehat{\mathcal{S}\mathfrak{S}}_{q,k})_{\frac{1}{2}}, a]) = 0$ si y sólo si, para todo $i \in \mathbb{Z}$

$$\lambda([(T_q^i - (-1)^{\delta_0} T_q^{l-i})E_{12}, a]) = 0, \tag{2.14}$$

y

$$\lambda([z(q^{\frac{i}{2}}T_q^i - (-1)^{\delta'_0} q^{\frac{k-l-i}{2}} T_q^{k-l-i})E_{21}, a]) = 0. \tag{2.15}$$

Por (2.14) obtenemos

$$\begin{aligned} 0 =& \lambda(g(T_q)(T_q^i - (-1)^{\delta_0} T_q^{l-i})Id) \\ =& \sum_j g_j \Delta^0_{i+j} \end{aligned} \tag{2.16}$$

Multiplicando (2.16) por x^{-i} y sumando sobre $i \in \mathbb{Z}$, obtenemos

$$\begin{aligned} 0 =& \sum_{i,j} g_j \Delta^0_{i+j} x^{-i} \\ =& g(x)\Delta^0_\lambda(x). \end{aligned}$$

Luego, por (2.15) y usado Observación 1.8, obtenemos

$$\begin{aligned}
0 =&\lambda\left(\left(\sum_j f_j q^{\frac{i+j}{2}} T_q^{i+j} - \sum_j f_j q^{-\frac{i+j}{2}} T_q^{-i-j}\right) E_{11}\right.\\
&+\left.\left(\sum_j f_j q^{-\frac{i+j}{2}} T_q^{i+j} - \sum_j f_j q^{\frac{i+j}{2}} T_q^{-i-j}\right) E_{22}\right)\\
&+\left(\sum_j f_j q^{-\frac{i+j}{2}} T_q^{i+j} - \sum_j f_j q^{\frac{i+j}{2}} T_q^{-i-j}\right)_0 c\\
=&\sum_j f_j q^{\frac{i+j}{2}} \Delta_{i+j} - \sum_j f_j q^{-\frac{i+j}{2}} \Delta_{-i-j}.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Multiplicando (2.17) por x^{-i} y sumando sobre $i \in \mathbb{Z}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
0 =&\sum_{i,j} f_j q^{\frac{i+j}{2}} \Delta_{i+j} x^{-i-j} x^j - \sum_{i,j} f_j q^{-\frac{i+j}{2}} \Delta_{-i-j} x^{-i-j} x^j\\
=&\sum_j f_j \Delta_\lambda(q^{-\frac{1}{2}} x) x^j - \sum_j f_j \Delta_\lambda(q^{\frac{1}{2}} x^{-1}) x^j\\
=&f(x)\Delta_\lambda^0(q^{-\frac{1}{2}} x).
\end{aligned}$$

La equivalencia entre (a) y (b) sigue de la Proposición 2.2. $\square$

Bibliografía

[1] Awata, H., Fukuma, M., Matsuo, Y. and Odake, S., *Subalgebras of* $W_{1+\infty}$ *and their quasi-finite representations*, J. Phys. A **28**, 105-112 (1995).

[2] Awata, Hidetoshi; Fukuma, Masafumi; Matsuo,Yutaka; Odake, Satoru; *Quasifinite highest weight modules over the super* $W_{1+\infty}$ *algebra.* Comm. Math. Phys. 170 (1995), no. 1, 151-179.

[3] Bloch, S., *Zeta values and differential operators on the circle*, J. Algebra **182**, 476-500 (1996).

[4] Boyallian, C., Kac, V. G., Liberati, J. I., and Yan, C. *Quasifinite highest weight module over the Lie algebra of matrix differential operators on the circle*, J. Math. Phys. **39**, 2910-2928 (1998).

[5] C. Boyallian and J. Liberati; *Classical Lie subalgebras of the Lie algebra of matrix differential operators on the circle*, Journal of Math. Phys 42 (2001), 3735-3753.

[6] Boyallian, C. and Liberati, J. I., *Representations of symplectic type subalgebra of* W_∞, J. Math. Phys. **44**, 2192-2205 (2003).

[7] Boyallian, C. and Liberati, J. I., *Representations of classical Lie subalgebras of quantum pseudodifferential operators* J. Math. Phys. **46**, 033516 (2005).

[8] Boyallian, C. and Meinardi, Vanesa, *Quasifinite representations of the Lie superalgebra of quantum pseudodifferential operators*, Lett. Math. Phys. **49**, 023505 (2008).

[9] Cheng, Shun-Jen and Wang, Weiqiang, *Lie subalgebras of Differential Operators on the Super Circle*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **39**, 545-600 (2003).

[10] José I. García; José I. Liberati; *Quasifinite representations of classical Lie subalgebras of* $W_{\infty,p}$, arXiv:1207.1151.

[11] José I. García; José I. Liberati; *Quasifinite representations of classical subalgebras of the Lie superalgebra of quantum pseudodifferential operators*, preprint.

[12] Kac, V. G. and Liberati, J. I., *Unitary quasifinite representations of* W_∞, Lett. Math. Phys. **53**, 11-27 (2000).

[13] Kac, V. G. and Radul, A., *Quasifinite highest weight modules over the Lie algebra of differential operators on the circle*, Commun. Math. Phys. **157**, 429-457 (1993).

[14] Kac, V. G., Wang, W., and Yang, C., *Quasifinite representations of classical Lie subalgebras of* $W_{1+\infty}$, Adv. Math. **139**, 56-140 (1998).