Sobre la estructura de las categorías de fusión con pocos grados irreducibles

por Julia Yael Plavnik

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía y Física como parte de los requerimientos para la obtención del grado de Doctora en Matemática de la

Universidad Nacional de Córdoba

Marzo de 2013

Directora: Dra. Sonia Natale

A mis padres que me dieron la vida
y me enseñaron a amarla.
A Mario por llenar mi vida de amor.

Dios, concédeme...
la serenidad
para aceptar las cosas
que no puedo cambiar,
el valor
para cambiar aquellas que puedo, y
la sabiduría
para reconocer la diferencia.

Resumen

En la primera parte de esta tesis, probamos algunos resultados estructurales sobre ciertas clases de categorías de fusión íntegras y álgebras de Hopf semisimples bajo restricciones sobre el conjunto de sus grados irreducibles. Nos concentramos especialmente en el caso de dimensión impar.

La segunda parte está dedicada al caso par. El resultado principal es que una categoría de fusión $\mathcal{C}$ débilmente íntegra cuyos objetos simples tienen dimensión de Frobenius-Perron a lo sumo 2 es resoluble. Más aún, mostramos que una tal categoría de fusión es de tipo grupo en el caso extremo en que el grupo de graduación universal de $\mathcal{C}$ sea trivial.

Palabras claves: categoría de fusión, álgebra de Hopf semisimple, grados irreducibles.

2010 Mathematics subject Classification: 18D10, 16T05.

Abstract

In the first part of this thesis, we prove some results on the structure of certain classes of integral fusion categories and semisimple Hopf algebras under restrictions on the set of its irreducible degrees. We pay special attention to the odd-dimensional case.

The second part is devoted to the even case. The main result in this part is that a weakly integral braided fusion category $\mathcal{C}$ such that every simple object of $\mathcal{C}$ has Frobenius-Perron dimension at most 2 is solvable. In addition, we show that such a fusion category is group-theoretical in the extreme case when the universal grading group of $\mathcal{C}$ is trivial.

Key words: fusion category, semisimple Hopf algebra, irreducible degrees.

2010 Mathematics subject Classification: 18D10, 16T05.

Agradecimientos

A Sonia Natale, mi directora, por su guía y por mostrarme lo que es hacer Matemática con compromiso y seriedad.

A FaMAF, CIEM, CONICET y SECyT por brindarme el ambiente propicio y el apoyo económico para desarrollar esta tesis doctoral.

Al jurado, Carina Boyallian, Daniel Penazzi y Eric Rowell, por sus comentarios y correcciones que mejoraron la calidad de este trabajo.

A Nancy Moyano y Claudia Aguirre por su excelente predisposición y su cariño.

Al grupo de cuánticos de la facultad que crece día a día en un ambiente de colaboración mutua y generosidad. A Martín Mombelli por creer en mí, a César Galindo por su apoyo constante, a Gastón García por escucharme y alentarme siempre. A las chicas que llegaron para acompañarme: Fiore, Meli y Euge. Especialmente a Adriana Mejía y Edwin Pacheco por brindarme su amistad y confianza.

A Nicolás Andruskiewitsch que genera, impulsa y posibilita este núcleo de trabajo, guiándonos para que podamos hacer con pasión y dedicación lo que nos gusta.

A Inés Pacharoni, Juan Pablo Rossetti y Patricia Kisbye que estimulan y valoran mi trabajo.

A Eric Rowell por hacerme sentir tan cómoda y cuidada en mi visita a Texas y por renovar mis ganas de hacer matemática con su generosidad para trabajar.

A Daniel Penazzi por ser un ejemplo de docente comprometido, por contagiarme su entusiasmo y por confiar en mí mucho más que yo.

A Roberto Miatello, a quien tengo que agradecerle especialmente el estar hoy aquí, por su apoyo incondicional, por escucharme una y mil veces y por aconsejarme con cariño. Sin vos no hubiera terminado este doctorado... Siempre avanti, Roberto.

A mis amigos del master: Maguis, Marti, Juan Pablo, Hugo, Misha y Floris con quienes convertimos nuestra estancia en Utrecht en un hogar, y especialmente a Edisson por ser mi confidente, por estar presente aun a la distancia cada vez que lo necesité con una palabra de aliento, con cariño, con un consejo o un chiste.

A Oscar Márquez, Aureliano Guerrero, Richar Podestá y Paulo Tirao por hacer más divertidos los pasillos de la facultad.

A mis compañeros de oficina por los mates, por acompañarme en el día a día y por darme ánimos, especialmente a Matías Hernandez y a Marcos Origlia por las charlas compartidas y su optimismo.

A mis alumnitos por hacerme reír con su frescura y reconfortarme con su calidez... A Martincito por su cariño y amistad.

A los chicos: Bolita, Felix, Brunito y Carli por incluírme en los asados como uno más, por hacerme reír y por sus abrazos.

A mis amigos Dami, Vane, Juampi, Mavi y Mati, con quienes compartimos mucho más que noches, risas y mates.

A Iván con quien nuestra amistad creció no sólo en el compartir (clases, francés, congresos, mates y charlas) sino también en el respeto de tiempos y silencios. Gracias por darme ánimos, por escucharme y confiar en mí.

A mi profe Sandra López Banús por cuidarme y por ser mi compinche, y a Soraya por compartir la recta final con alegría y cariño sincero.

A mi profe Miriam Santaularia por quererme como a una hija y llenar de colores mis sábados con su cariño.

A la familia Arroyo por haberme adoptado hace muchos años, dándome siempre un lugar especial en su casa, sus corazones y su familia.

A mi gente de siempre que llenan de alegría y calidez mis días: Silvita, Moni, mis tíos y tías, mis primos. A Martu por su luz. A mi amigo Guille por esta amistad que crece sin importar tiempos ni distancias. A mis amigas tangueras Lili y Fer por las milongas, charlas y risas compartidas.

A mi hermanita Eli por ser mi compañera de aventuras y compartir tantas locuras, por su apoyo y generosidad.

A mi Jose querida, Marijó, Octi y Tino por hacerme sentir de la familia y por llenarme de amor.

A una mujer, a una amiga que admiro y quiero profundamente, Monique, que ya es parte de la familia, por cuidarme y estar a mi lado incondicionalmente.

A mi bf Eric, con quien en poco tiempo creamos un lazo profundo, por acompañarme, por escucharme, por dejarme conocerlo, por las tardes de escaladas, por las noches de juegos y por mostrarme otra visión de la vida.

A mi dream team Romina y Ramiro. A Ramiro... Peque tenés un lugar especial en mi corazón por tu paciencia, por ser tan buena persona, por comprender hace tiempo quién soy realmente, y a Neda porque juntos me abrieron las puertas de su hogar con tanto cariño. A mi gordita, Romi, mi amiga con mayúsculas, quien me respeta y acompaña estando siempre en presencia, en silencio y de muchas otras formas. Las dos sabemos que si el otro es realmente importante cualquier diferencia es pequeña...

A mi amor, Marito, por ser (pidiendo prestadas estas palabras) "mi amor, mi cómplice y todo...", por ser mi compañero en esta hermosa aventura de la vida, porque cada día con vos es mágico y por enriquecerme con tu forma de ver el mundo. A tu lado soy mejor persona, gordito, es lindo poder crecer juntos en las diferencias.

Algunos dicen que la familia verdadera es la que se elige, no la que nos toca. Yo me siento doblemente afortunada: estoy rodeada de gente hermosa que la vida me fue presentando y por sobre todas las cosas tengo la bendición de ser parte de esta familia, mi familia...

Por eso quiero agradecerles a los amores de mi vida, las personas que hacen que todo tenga

sentido: a mi papá Mario, a mi mamá Silvia, a mi hermanito Franco y mi perra Canela. A Franco por su inagotable paciencia, su gran corazón, su calidez y sus mimos. A mi mamá por su amor incondicional, por ser mi remanso, por su entrega, por su humildad y por recordarme siempre con su ejemplo qué es lo esencial en la vida. A mi papá, a quien admiro profundamente por su calidad humana y su capacidad inmensa de amar, entre tantas otras cosas, por creer en mí, por darme alas y mostrarme cómo volar, por ayudarme a iluminar el camino cuando la oscuridad parece invadirme y por contenerme. A ambos por esos abrazos en los que puedo sentirme como una nena chiquita y que me permiten confiar en que todo va a estar bien y por educarme con amor, respeto, confianza y libertad.

Índice general

Introducción

Generalidades e introducción del problema.

Las primeras definiciones formales de álgebra de Hopf se remontan a la década del '50 y surgieron en trabajos de Borel (1953) y Cartier (1965). Este último introdujo en [C] el concepto de *hiperálgebra*, que en la actualidad conocemos como una biálgebra coconmutativa, dotada de una estructura extra que da lugar a una antípoda, siendo inspirado por los trabajos sobre grupos algebraicos de Dieudonné. Por su parte, en su trabajo [Bo], Armand Borel denomina *algèbre de Hopf* a un álgebra munida de un coproducto no necesariamente coasociativo, utilizándolas en el estudio de la homología de espacios homogéneos. A principios de los '60, ambas ramas de investigación se entremezclan. Pero fue recién a fines de esta década que la noción de álgebra de Hopf se independiza, al publicarse en el año 1969 el libro de Sweedler [Sw]. Referimos a [AF] al lector interesado en profundizar en el origen e historia de esta noción.

En 1986, Drinfeld introdujo el concepto de *grupo cuántico* en su conferencia [D], lo cual significó un punto clave en el desarrollo de la teoría de álgebras de Hopf. Éstos son una clase particular de las mismas que pueden ser presentados como deformaciones en un parámetro de álgebras universales de álgebras de Lie o de álgebras de funciones regulares de grupos algebraicos afines. En la misma época, las *álgebras envolventes cuantizadas* $U_q(\mathfrak{g})$ (deformaciones por un parámetro q del álgebra envolvente universal asociada a un álgebra de Lie semisimple $\mathfrak{g}$ de dimensión finita) fueron consideradas de manera independiente por Jimbo [Ji]. Los grupos cuánticos son de interés, entre otras cosas, pues codifican naturalmente la simetría de categorías trenzadas; esto es, categorías $\mathcal{C}$ que admiten un producto tensorial asociativo, junto con una transformación natural de *conmutatividad* $c : \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \to \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$. Cabe destacar, que en este caso, $c_{V,W} : V \otimes W \to W \otimes V$ no es necesariamente involutiva, por lo cual este tipo de categorías aparecen en diversas áreas, por ejemplo, relacionadas con la teoría conforme de campos, invariantes de variedades topológicas de dimensión baja, etc.

El problema de clasificación de las álgebras de Hopf ha cobrado considerable impulso en los últimos años. El mismo se ha dividido en dos ramas: álgebras de Hopf semisimples y no semisimples. Para el análisis y comprensión de cada una se han desarrollado técnicas bien diferentes. Por ejemplo, las álgebras de Hopf semisimples pueden pensarse como una generalización no conmutativa de los grupos finitos. Por otro lado, dada la amplitud de la familia de álgebras de Hopf no semisimple su estudio se ha profundizado especialmente en una subfamilia propia: las álgebras de Hopf punteadas. En este último caso, a partir de una serie de trabajos de Andruskiewitsch y Schneider, se sabe que bajo ciertas condiciones, si el corradical es un grupo abeliano, el álgebra de Hopf es esencialmente una generalización de un grupo cuántico [AS]. La mayor parte de los resultados de clasificación conocidos se refieren a ciertas clases particulares, como por ejemplo (quasi)triangulares [EG], semisimples o punteadas.

Recientemente, la teoría de categorías tensoriales se ha convertido en una herramienta importante en el estudio de numerosos problemas de matemática y física. La relación entre los grupos cuánticos con los invariantes de nudos y variedades de baja dimensión, así como también con la teoría de subfactores, puede ser explicada adecuadamente usando este tipo de categorías.

Una categoría tensorial sobre un cuerpo algebraicamente cerrado $\mathbf{k}$ es una categoría monoidal, abeliana $\mathbf{k}$-lineal, rígida, cuyo objeto unidad es simple. Este concepto, introducido por MacLane y Benabou [Be] en la década de los '60, engloba a las categorías de representaciones de grupos, de álgebras de Lie y, más generalmente, de álgebras de Hopf.

En el año 1990, Drinfeld introduce en [D2] la noción de cuasi-álgebra Hopf, que surge de debilitar la condición de coasociatividad del coproducto, pero de modo tal que la categoría de representaciones sigue siendo tensorial. Precisamente, una propiedad distintiva de las (cuasi-)álgebras de Hopf de dimensión finita es que la categoría de sus representaciones de dimensión finita es una categoría tensorial finita en el sentido de [EO]. Como mencionamos anteriormente, este tipo de categorías aparecen en distintas áreas de la matemática y la física. Por ejemplo, las álgebras de Hopf semisimples juegan un rol fundamental en la teoría de campos conformes racionales, mientras que las álgebras de Hopf no semisimples se relacionan con las teorías de campos conformes logarítmicos, ver [Gab].

Además, las categorías de representaciones de dimensión finita de (cuasi-)álgebras de Hopf de dimensión finita tienen la particularidad de estar munidas de un (cuasi-)funtor de fibra en la categoría de espacios vectoriales, lo que las distingue en la clase de categorías tensoriales. La implicación recíproca también es cierta. Es decir, si una categoría tensorial admite un funtor de fibra (respectivamente, un cuasi funtor de fibra), entonces, utilizando una generalización de la teoría de reconstrucción de Tannaka-Krein para álgebras Hopf (respectivamente, cuasi-álgebras de Hopf), es posible construir un álgebra de Hopf (respectivamente, una cuasi-álgebra de Hopf) cuya categoría de comódulos es tensorialmente equivalente a la categoría tensorial inicial.

Las categorías tensoriales pueden ser, a su vez, divididas en dos tipos: las semisimples y las no semisimples. Desde luego, el estudio de cada una de estas familias se subdivide en diversos tipos. Dentro de las categorías tensoriales semisimples, una clase que ha cobrado gran interés es la de las *categorías de fusión*. Éstas son categorías tensoriales semisimples que poseen un número finito de clases de isomorfismos de objetos simples.

Las categorías de representaciones de dimensión finita de cuasi-álgebras de Hopf semisimples son exactamente las categorías de fusión íntegras, es decir, aquellas cuyos objetos simples tienen dimensión de Frobenius-Perron entera. Esta conexión permite que los avances en una de las direcciones se refleje, a su vez, en la otra. Por ejemplo, algunos resultados sobre categorías de fusión han contribuído al progreso en la caracterización de las cuasi-álgebras de Hopf semisimples, siendo este el caso de las de dimensión p^n, con p un número primo, y el de las de dimensión menor que 60.

Las dimensiones de Frobenius-Perron son un invariante importante, más generalmente, el anillo de Grothendieck $\mathbb{G}(\mathcal{C})$ de una categoría de fusión $\mathcal{C}$ lo es. Muchas propiedades de estas categorías pueden deducirse a partir del estudio de su anillo de Grothendieck, por ejemplo, basta conocer dicho anillo para decidir si la categoría es *nilpotente* [GN].

También se han generalizado ciertos teoremas clásicos de la teoría de grupos al contexto de las categorías de fusión. Por ejemplo, Etingof, Nikshych y Ostrik probaron un análogo al Teorema de Burnside: si $\mathcal{C}$ es una categoría de fusión cuya dimensión de Frobenius-Perron es $p^r q^s$, con p y q primos distintos, entonces $\mathcal{C}$ es resoluble.

Por el momento, una clasificación de las categorías de fusión parece estar fuera de alcance. Por lo tanto, una forma de avanzar en su estudio es buscar nuevos ejemplos y contrucciones, como lo son las extensiones y equivariantizaciones por un grupo finito. Una estrategia para abordar el problema de comprender la estructura de este tipo de categorías es centrarse en el estudio de un conjunto más reducido de las mismas, es decir imponerle alguna condición extra. Por ejemplo, en los últimos años se han hecho grandes esfuerzos para entender las categorías modulares de rango pequeño, puesto que son de gran interés en el área de la computación cuántica. Asimismo se han estudiado las categorías de fusión "pequeñas", en otros sentidos como por ejemplo categorías de fusión con dimensión de Frobenius-Perron baja o con pocas dimensiones de Frobenius-Perron de los objetos simples, entre otras.

De la misma forma en que el estudio de los módulos ayuda a la comprensión de la estructura de los anillos, la comprensión de las *categorías módulo* colabora al entendimiento de las categorías de fusión. En los años sesenta esta noción apareció en los trabajos de Bénabou [Be]. En la actualidad, debido a los trabajos [O1, O2, EO] de Etingof y Ostrik, nuevamente ha cobrado gran importancia, tanto en el caso semisimple como en otros más generales. Las categorías módulos son una fuente de información acerca de la categoría tensorial asociada. Por ejemplo, dada la complejidad del problema de clasificación de las categorías de fusión, otro enfoque alternativo es el de clasificarlas salvo *Morita equivalencia*, noción que involucra la existencia de una categoría módulo indescomponible y categorifica la noción clásica de Morita equivalencia en el contexto de anillos. Una clase destacada de categorías de fusión es la dada por las de tipo grupo, es decir, aquellas Morita equivalentes a una categoría de fusión punteada. Puesto que las categorías de fusión punteadas se conocen en detalle, demostrar que una cierta categoría es de tipo grupo es uno de los ojetivos para avanzar en el problema de caracterización.

Principales resultados obtenidos.

A lo largo de esta monografía, denotaremos por $\mathbf{k}$ un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 0.

Los principales resultados y conceptos de la tesis están organizados de la siguiente manera. En el Capítulo 1 recordamos las diferentes nociones matemáticas existentes en la literatura clásica que serán utilizadas a lo largo de la tesis, con el objetivo de que resulte lo más autocontenida posible. Específicamente, en la primer parte abordamos ciertas nociones y resultados de la teoría de grupos finitos, muchos de los cuales motivaron el estudio de los mismos en un contexto más general, el de las categorías de fusión. A continuación damos definiciones, ejemplos y resultados básicos sobre categorías abelianas y tensoriales. En las últimas secciones nos dedicamos a recordar algunas nociones y resultados sobre álgebras de Hopf, profundizando sobre propiedades de las álgebras de Hopf semisimples, las extensiones abelianas y las álgebras de Hopf cuasitriangulares. El capítulo concluye con un breve comentario sobre categorías módulos.

En el Capítulo 2 se definen las categorías de fusión, que son uno de los objetos de estudio principales de este trabajo junto con las álgebras de Hopf semisimples. Además se presentan varios ejemplos conocidos de este tipo de categorías. En las secciones posteriores se estudian conceptos fundamentales para los resultados de los capítulos subsiguientes de esta tesis. Por ejemplo, los de de dimensión de Frobenius-Perron, nilpotencia y resolubilidad de categorías de fusión, categorías de tipo grupo, extensiones y equivariantizaciones de categorías de fusión por un grupo finito, categorías modulares, entre otros.

El Capítulo 3 contiene los resultados del trabajo [NP]. En el mismo, consideramos el problema general de determinar la estructura de una categoría de fusión $\mathcal{C}$ a partir del conjunto $\mathrm{c.d.}(\mathcal{C})$ de dimensiones de Frobenius-Perron de los objetos simples de $\mathcal{C}$. Específicamente nos concentramos en el caso en que $\mathrm{c.d.}(\mathcal{C}) = \{1, p\}$, con p un número primo. Mostramos varios resultados de estructura relacionados con las nociones de nilpotencia y resolubilidad de categorías de fusión, introducidas por Etingof, Gelaki, Nikshych y Ostrik [ENO2], [GN]. Los resultados principales del Capítulo 3 se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 3.0.5 *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión sobre $\mathbf{k}$. Entonces tenemos:*

(i) Supongamos que $\mathcal{C}$ es débilmente de tipo grupo y tiene dimensión impar. Entonces $\mathcal{C}$ es resoluble.

Sea p un número primo.

(ii) Supongamos que $\mathcal{C}$ es trenzada y tiene dimensión impar. Asumamos además que el conjunto de grados irreducibles satisface $\mathrm{c.d.}(\mathcal{C}) \subseteq \{p^m : m \geq 0\}$. Entonces $\mathcal{C}$ es resoluble.

(iii) Supongamos que $\mathrm{c.d.}(\mathcal{C}) \subseteq \{1, p\}$. Entonces $\mathcal{C}$ es resoluble en cualquiera de los siguientes casos:

- $\mathcal{C}$ es de la forma $\mathcal{C}(G, \omega, \mathbb{Z}_p, \alpha)$, es decir, es una categoría de fusión de tipo grupo, y el grupo $G(\mathcal{C})$ tiene orden p.

- $\mathcal{C}$ es una categoría casi-grupo.

- $\mathcal{C} = \operatorname{Rep} H$, con H un álgebra de Hopf cuasitriangular semisimple y $p = 2$.

(iv) Sea H un álgebra de Hopf semisimple tal que $\mathrm{c.d.}(H) \subseteq \{1, p\}$. Entonces H^* es nilpotente en cualquiera de los siguientes casos:

- $|G(H^*)| = p$ y p divide a $|G(H)|$.

- $|G(H^*)| = p$ y H es cuasitriangular.

- H es de tipo $(1, p; p, 1)$ como álgebra.

(v) Sea H un álgebra de Hopf semisimple tal que $\mathrm{c.d.}(H) \subseteq \{1, 2\}$. Entonces: - H es débilmente de tipo grupo y, más aún, es de tipo grupo si $H = H_{\mathrm{ad}}$. - El grupo $G(H)$ es resoluble.

(vi) Sea H un álgebra de Hopf semisimple de tipo $(1, p; p, 1)$ como álgebra. Entonces H es isomorfa al twisting *del álgebra de grupo $\mathbf{k}N$, donde o bien $p = 2$ y $N = \mathbb{S}_3$ o $p = 2^{\alpha-1}$, $\alpha > 1$, y N es el grupo afín del cuerpo $\mathbb{F}_{2^\alpha}$.*

Finalmente, en el Capítulo 4 presentamos los resultados del trabajo [NP2]. En este caso, nos focalizamos en el estudio de categorías de fusión trenzadas, no necesariamente íntegras, cuyos objetos simples tienen dimensiones de Frobenius-Perron a lo sumo 2. En las primeras secciones presentamos ejemplos, que aparecen en la literatura, de categorías con estas propiedades. Los principales resultados son los siguientes teoremas:

Teorema 4.2.11 *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión trenzada débilmente íntegra tal que $\operatorname{FPdim} X \leq 2$, para todo objeto simple X en $\mathcal{C}$. Entonces $\mathcal{C}$ es resoluble.*

El Teorema 4.2.11 extiende los resultados del Capítulo 3 para álgebras de Hopf semisimples cuasitriangulares. Esto implica, en particular, que toda categoría de fusión trenzada con $\mathrm{c.d.}(\mathcal{C}) = \{1, 2\}$ es débilmente de tipo grupo.

Un resultado conocido sobre categorías de fusión trenzadas íntegras nilpotentes es que siempre son de tipo grupo [DGNO, Theorem 6.10]. La misma conclusión es válida en el caso extremo opuesto donde las dimensiones de Frobenius-Perron de los objetos simples son a lo sumo 2.

Teorema *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión trenzada débilmente íntegra tal que* $\operatorname{FPdim} X \leq 2$, *para todo objeto simple X en $\mathcal{C}$. Supongamos que $\mathcal{C}$ es igual a su subcategoría adjunta $\mathcal{C}_{\mathrm{ad}}$, es decir, la graduación universal $U(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ es trivial. Entonces $\mathcal{C}$ es de tipo grupo.*

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentaremos las definiciones y ejemplos básicos sobre categorías abelianas, álgebras de Hopf y la teoría de grupos finitos, que serán esenciales a lo largo de este trabajo.

También recordaremos definiciones y nociones sobre categorías tensoriales. En capítulos posteriores nos adentraremos en el estudio de una clase particular de este tipo de categorías, para lo cual será importante este estudio previo de las mismas. La bibliografía recomendada para este tema es [BaKi, EGNO, Kas, McL].

Las referencias principales para la teoría de álgebras de Hopf son [Kas, Mo, Sch, Sw], para la teoría general de categorías [McL, F], y para la teoría de grupos finitos [I, Ro].

Denotaremos por $\mathbf{k}$ al cuerpo de base con el cual trabajaremos.

1.1. Nociones de la teoría de grupos finitos

Sea G un grupo. Consideramos los subgrupos de G definidos recursivamente de la siguiente forma:

$$Z_0 = \{e\}, \quad Z_{i+1} \doteq \{x \in G : [x, y] \in Z_i, \forall y \in G\}, \quad \forall i \geq 0,$$

donde por $[x, y]$ denotamos al conmutador entre los elementos x e y de G.

Notemos que $Z_i \trianglelefteq G$ y, para cada i, el grupo Z_{i+1}/Z_i se identifica con el centro $Z(G/Z_i)$ de G/Z_i. En particular, Z_1 es el centro $Z(G)$ de G.

La sucesión (ascendente) de estos subgrupos: $\{e\} = Z_0 \triangleleft Z_1 \triangleleft \cdots \triangleleft Z_i \triangleleft \dots$ es la *serie central ascendente* del grupo G.

De manera similar, podemos definir la *serie central descendente* del grupo G como la sucesión descendente de subgrupos:

$$\cdots \trianglelefteq G_i \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_0 = G,$$

donde cada $G_{i+1} \doteq [G_i, G]$, es decir, el subgrupo de G generado por todos los conmutadores $[x, y]$, con $x \in G_i$, $y \in G$.

Definición 1.1.1. Un grupo G se dice *nilpotente* si su serie central descendente converge al subgrupo trivial, es decir, si existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $G_n = \{e\}$. Equivalentemente, G es *nilpotente* si existe $n \in \mathbb{Z}$

tal que $Z_n = G$.

Un grupo nilpotente G tiene *clase de nilpotencia* n si la longitud de su serie central ascendente (o descendente) es n, o sea, es el mínimo entero para el cual $Z_n = G$ (respectivamente $G_n = \{e\}$).

Todo grupo abeliano es nilpotente. También se puede ver que, dado un número primo p, todos los p-grupos finitos (es decir, los grupos de orden igual a una potencia de p) son nilpotentes. Además, se sabe que todo grupo finito nilpotente es el producto directo de p-grupos. Más aún, un grupo finito G es nilpotente si y sólo si es el producto directo de sus subgrupos de Sylow.

El subgrupo de *Frattini* de G está definido como la intersección de todos los subgrupos maximales de G y será denotado $\mathrm{Frat}(G)$. A continuación enunciamos sin demostración un resultado de Wielandt y uno de Hall que involucran al subgrupo de Frattini de G.

Teorema 1.1.2. *(Wielandt.) Sea G un grupo finito. Entonces G es nilpotente si y sólo si $G' \doteq [G,G] \leq \mathrm{Frat}(G)$.*

Demostración. Ver [Ro, Theorem 5.2.16]. □

Teorema 1.1.3. *(Hall.) Sea p un número primo y G un grupo de orden p^m. Supongamos que el subgrupo de Frattini $\mathrm{Frat}(G)$ tiene índice p^r. Entonces el orden de $C_{\mathrm{Aut}\,G}(G/\mathrm{Frat}(G))$ divide a $p^{(m-r)r}$ y el orden del grupo $\mathrm{Aut}\,G$ de automorfismos de G divide al número $np^{(m-r)r}$, donde n es el orden del grupo $\mathrm{GL}(r,p)$.*

Demostración. Ver [Ro, Theorem 5.3.3]. □

El *subgrupo de Fitting* de G, al cual denotaremos $\mathrm{Fit}(G)$, es el único subgrupo nilpotente normal maximal de G.

Dados X un subconjunto no vacío del grupo G y g un elemento de dicho grupo, el *conjugado* de X por g es el subconjunto

$$X^g = g^{-1}Xg = \{g^{-1}xg : x \in G\}.$$

Definición 1.1.4. Diremos que el grupo G es un *grupo de Frobenius* con *complemento de Frobenius* $H < G$ si $H \bigcap H^g = \{e\}$ siempre que $g \notin H$.

Teorema 1.1.5. *(Teorema de Frobenius.) Sea G un grupo de Frobenius con complemento H. Entonces $N = G \setminus \bigcap_{x\in G}(H \setminus \{e\})^x$ es un subgrupo normal en G tal que $HN = G$ y $H \bigcap N = \{e\}$.*

Demostración. Ver [Ro, Theorem 8.5.5]. □

Observación 1.1.6. El subgrupo normal N del Teorema 1.1.5 es el *núcleo de Frobenius* de G. Además,por un resultado de Thompson, N es un grupo nilpotente (ver por ejemplo, [Ro, Theorem 10.5.6], [I, Theorem (7.2)]). Más aún, el núcleo de Frobenius de G es único y es igual al subgrupo de Fitting $\mathrm{Fit}(G)$ de G [Ro, Exercise 10.5.8].

Otro concepto relevante es el de *serie derivada* del grupo G. Ésta es la sucesión normal descendente $G = G^{(0)} \trianglerighteq G^{(1)} \trianglerighteq G^{(2)} \trianglerighteq \dots$, donde $G^{(i)} \doteq [G^{(i-1)}, G^{(i-1)}]$ para todo $i \geq 1$.

Definición 1.1.7. Un grupo se dice *resoluble* si su serie derivada converge al subgrupo trivial.

Si G es un grupo resoluble, el menor entero n para el cual $G^{(n)} = \{e\}$ es llamado la *longitud derivada* de G.

Todo grupo abeliano es resoluble. Más aún, si un grupo G es nilpotente entonces también es resoluble. Además, toda extensión de grupos finitos resolubles es resoluble. Explícitamente, si $1 \to H \to G \to K \to 1$ es una sucesión exacta entonces el grupo G es resoluble si y sólo si H y K son resolubles. Por lo tanto, el producto semidirecto (y, en particular, el producto directo) de grupos resolubles es resoluble.

Definición 1.1.8. Una *factorización exacta* de un grupo G es un par de subgrupos Γ, F de G tal que el mapa de multiplicación induce una biyección $m : F \times \Gamma \to G$.

Asociadas a una factorización exacta de un grupo G tenemos una acción a derecha $\triangleleft$: $\Gamma \times F \to \Gamma$ y una acción a izquierda $\triangleright$: $\Gamma \times F \to F$, definidas por $sx = (s \triangleright x)(s \triangleleft x)$, para todo $s \in \Gamma$, $x \in F$. Estas acciones cumplen las siguientes condiciones de compatibilidad:

(i) $s \triangleright xy = (s \triangleright x)((s \triangleleft x) \triangleright y)$,

(ii) $st \triangleleft x = (s \triangleleft (t \triangleright x))(t \triangleleft x)$,

para todo s, $t \in \Gamma$, x, $y \in F$. Se sigue que $s \triangleright 1 = 1$ y $1 \triangleleft x = 1$, para todo $s \in \Gamma$, $x \in F$.

El conjunto $(\Gamma, F, \triangleleft, \triangleright)$ de estos grupos y acciones compatibles es denominado un *matched pair* de grupos. Recíprocamente, dado un *matched pair* de grupos F, Γ, podemos encontrar un grupo G y una factorización exacta $G = F\Gamma$.

Sea (Γ, F) un *matched pair* de grupos. Denotaremos por $F \bowtie \Gamma$ a la única estructura de grupo en el conjunto $F \times \Gamma$ con unidad $(1, 1)$ tal que:

$$(x, s)(y, t) = (x(s \triangleright y), (s \triangleleft y)t),$$

para todo x, $y \in F$, s, $t \in \Gamma$. Este grupo es llamado el *producto bicruzado* de F y Γ. Más aún, los grupos F y Γ pueden indentificarse, respectivamente, con los subgrupos $F \times \{1\}$ y $\{1\} \times \Gamma$ de $F \bowtie \Gamma$, y todo elemento (x, s) de $F \bowtie \Gamma$ se escribe de manera única como producto de un elemento de $F \times \{1\}$ y un elemento de $\{1\} \times \Gamma$ de la siguiente forma

$$(x, s) = (x, 1)(1, s).$$

Recíprocamente, sean G un grupo y F y Γ una factorización exacta de G, es decir, subgrupos de G para los cuales el mapa de multiplicación induce una biyección $m : F \times \Gamma \to G$. Entonces el par (Γ, F) es un *matched pair* de grupos, y la biyección anterior induce un isomorfismo de grupos del producto bicruzado $F \bowtie \Gamma$ en G. Ver [Kas, Proposition IX.1.2].

Un punto de interés sobre las factorizaciones exactas $G = F\Gamma$ de grupos es que, muchas veces, se pueden obtener resultados importantes sobre la estructura de G imponiendo condiciones a los grupos F y Γ. El siguiente teorema debido a Wielandt es un ejemplo de esto.

Teorema 1.1.9. *Si Γ y F son grupos nilpotentes entonces el grupo $G \doteq F \bowtie \Gamma$ es resoluble.*

Demostración. Ver [W]. □

A continuación enunciamos, sin demostración, dos resultados clásicos muy importantes, debidos a Burnside y a Feit y Thompson, que determinan la resolubilidad de ciertos grupos en términos de su orden.

Teorema 1.1.10. *(Teorema de Burnside.) Si G es un grupo finito de orden $p^a q^b$, con p y q primos distintos y $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, entonces G es resoluble.*

Teorema 1.1.11. *(Teorema de Feit-Thompson.) Todo grupo finito de orden impar es resoluble.*

Demostración. Ver [FT]. □

1.1.1. Grados irreducibles de un grupo finito

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbf{k}$ y sea $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación del grupo G en V. El *caracter* asociado a la representación ρ es la función $\chi_\rho : G \to k$ dada por $\chi_\rho(g) = \mathrm{Tr}(\rho(g))$, donde Tr es la función traza en $\mathrm{GL}(V)$. Un caracter χ_ρ se dice *irreducible* si la representación asociada ρ es irreducible. Cuando G sea un grupo finito denotaremos por $\widehat{G}$ al grupo de caracteres de G.

Definición 1.1.12. El *grado del caracter* χ_ρ es el valor $\chi_\rho(e)$ de dicho carater en e, o sea, es igual al grado $\deg \rho$ de la representación asociada.

Siguiendo la notación de Isaacs [I, Chapter 12], llamaremos $\mathrm{c.\,d.}(G)$ al conjunto de grados de los caracteres irreducibles del grupo G, es decir

$$\mathrm{c.\,d.}(G) = \{\chi(e) : \chi \text{ caracter irreducible de } G\}.$$

En lo que resta de esta subsección consideraremos que el cuerpo de base $\mathbf{k}$ es algebraicamente cerrado y de característica 0.

Muchas veces, imponer restricciones en el conjunto $\mathrm{c.\,d.}(G)$ da información sustancial sobre la estructura del grupo G. Algunos resultados que ejemplifican esta situación se presentan a continuación.

Teorema 1.1.13. *Sea $\mathrm{c.\,d.}(G) = \{1, m\}$. Al menos una de las siguientes afirmaciones es verdadera:*

1. *G tiene un subgrupo normal abeliano de índice m,*
2. *el número natural m es igual a p^k para algún primo p. Además G es el producto directo de un p-grupo y un grupo abeliano.*

Demostración. Ver [I, Theorem 12.5]. □

Para el caso en que m es primo se tienen resultados más específicos.

Teorema 1.1.14. *Sean G es un grupo no abeliano y p un número primo. Entonces $\mathrm{c.\,d.}(G) = \{1, p\}$ si y sólo si alguna de las siguientes afirmaciones se cumple:*

1. *G tiene un subgrupo normal abeliano A de índice p,*

2. *El centro $Z(G)$ de G tiene índice p^3 en G.*

Demostración. Ver [I, Theorem 12.11]. □

Teorema 1.1.15. *Si $|\,\mathrm{c.\,d.}(G)| = 3$ entonces G es resoluble y su longitud derivada es menor o igual a 3.*

Demostración. Ver [I, Theorem 12.15]. □

Corolario 1.1.16. *Si $|\,\mathrm{c.\,d.}(G)| \leq 3$ entonces G es resoluble.*

1.2. Categorías abelianas

En esta tesis nos centraremos en el estudio de categorías tales que la clase de objetos es un conjunto, es decir categorías pequeñas.

Definición 1.2.1. Una categoría $\mathcal{C}$ se dice *aditiva* sobre $\mathbf{k}$ si satisface las siguientes condiciones:

(i) Los conjuntos de morfismos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ son espacios vectoriales sobre $\mathbf{k}$ y las composiciones

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z), \quad (\psi,\phi) \to \psi \circ \phi$$

son $\mathbf{k}$-bilineales para todo $X, Y, Z \in \mathcal{C}$.

(ii) Existe un objeto cero $0 \in \mathcal{C}$ tal que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,0) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(0,X) = 0$ es el espacio vectorial cero, para todo $X \in \mathcal{C}$.

(iii) Existen sumas directas finitas en $\mathcal{C}$.

Una categoría aditiva sobre $\mathbf{k}$ es *abeliana* $\mathbf{k}$*-lineal*, si las siguientes condiciones se satisfacen:

(iv) Todo morfismo $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ tiene un núcleo $\mathrm{Ker}\,\phi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}$ y un conúcleo $\mathrm{Coker}\,\phi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}$. Todo morfismo es una composición de un epimorfismo seguido de un monomorfismo. Si $\mathrm{Ker}\,\phi = 0$, entonces $\phi = \mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}\,\phi)$; si $\mathrm{Coker}\,\phi = 0$, entonces $\phi = \mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}\,\phi)$.

En este trabajo, todos los funtores entre categorías aditivas $\mathbf{k}$-lineales considerados serán aditivos $\mathbf{k}$-lineales. Asimismo, las transformaciones naturales serán transformaciones naturales $\mathbf{k}$-lineales. Recordemos que un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre categorías aditivas ($\mathbf{k}$-lineales) es aditivo ($\mathbf{k}$-lineal) si, para todo X,$Y \in \mathcal{C}$, la función inducida $F_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y))$ dada por $f \to F(f)$ es un homomorfismo de grupos (es $\mathbf{k}$-lineal). Diremos que un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre categorías abelianas es una *inmersión* si es un funtor fiel y pleno, es decir, si, para todo X,$Y \in \mathcal{C}$, la función inducida $F_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y))$ dada por $f \to F(f)$ es inyectiva y sobreyectiva, respectivamente.

El Teorema de Freyd-Mitchell establece que toda categoría abeliana puede caracterizarse como una subcategoría plena de la categoría de módulos a izquierda sobre un anillo, la cual es cerrada bajo suma directas, núcleos, conúcleos e imágenes de morfismos. Esto nos permite visualizar los principales conceptos de la teoría de categorías abelianas en términos de la teoría clásica de módulos sobre anillos.

Ejemplo 1.2.2. Sea G un grupo. La categoría $\mathbf{Rep}\, G$ de representaciones de G en $\mathbf{k}$ es una categoría abeliana $\mathbf{k}$-lineal, como así también lo es la categoría $\mathrm{Rep}\, G$ de representaciones de dimensión finita de G en $\mathbf{k}$.

Ejemplo 1.2.3. Sea A una $\mathbf{k}$-álgebra asociativa unitaria. La categoría A-Mod (Mod-A) de A-módulos a izquierda (a derecha) es una categoría abeliana $\mathbf{k}$-lineal. También, su subcategoría A-mod (mod-A) de A-módulos a izquierda (a derecha) de dimensión finita es abeliana $\mathbf{k}$-lineal.

Ejemplo 1.2.4. Sea C una $\mathbf{k}$-coálgebra coasociativa counitaria. La categoría C-Comod (Comod-C) de C-comódulos a izquierda (a derecha) es una categoría abeliana $\mathbf{k}$-lineal. También, su subcategoría C-comod (comod-C) de C-módulos a izquierda (a derecha) de dimensión finita es abeliana $\mathbf{k}$-lineal.

En esta monografía siempre consideraremos $\mathbf{k}$-(co)álgebras (co)asociativas (co)unitarias.

Definición 1.2.5. Un objeto X de una categoría abeliana $\mathcal{C}$ es llamado *simple* si todo monomorfismo $Y \to X$ en $\mathcal{C}$ es cero o es un isomorfismo. Si todo objeto en $\mathcal{C}$ es suma directa de simples, la categoría $\mathcal{C}$ se dice *semisimple*.

Un objeto X en una categoría abeliana $\mathbf{k}$-lineal $\mathcal{C}$ es llamado *escalar* si $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X) \cong \mathbf{k}$. Todo objeto escalar es simple y, cuando $\mathbf{k}$ es un cuerpo algebraicamente cerrado, vale la recíproca, es decir todo objeto simple es escalar.

Consideramos X, Y objetos de $\mathcal{C}$. El objeto Y se dice un *subobjeto* de X, si existe un monomorfismo $Z \to X$, tal que Z es isomorfo a Y. De la misma forma, si existe un epimorfismo $X \to Z$, tal que Z es isomorfo a Y, el objeto Y es un *cociente* de X. Si Y es un cociente de un subobjeto de X diremos que Y es un *subcociente* de X.

Dadas $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ dos categorías abelianas, la categoría de funtores aditivos y exactos de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ será denotada $\mathcal{F}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, siendo los morfismos en la misma las transformaciones naturales $\mathbf{k}$-lineales entre funtores. En el caso en que $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ coincidan usaremos la notación $\mathrm{End}(\mathcal{C})$.

1.3. Categorías monoidales

Definición 1.3.1. Una *categoría monoidal* es una colección $(\mathcal{C}, \otimes, a, \mathbf{1}, l, r)$, donde $\mathcal{C}$ es una categoría, $\mathbf{1}$ es un objeto de $\mathcal{C}$, llamado objeto *unidad*, $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es un funtor, llamado *producto tensorial*, $a_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z)$, $r_X : X \otimes \mathbf{1} \to X$, $l_X : \mathbf{1} \otimes X \to X$ son isomorfismos naturales, para X, Y, $Z \in \mathcal{C}$, tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W \arrow[r, "a_{X\otimes Y,Z,W}"] \arrow[d, "a_{X,Y,Z}\otimes \mathrm{id}_W"'] & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W) \arrow[r, "a_{X,Y,Z\otimes W}"] & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W)) \\
(X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W \arrow[rr, "a_{X,Y\otimes Z,W}"'] & & X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes W) \arrow[u, "\mathrm{id}_X \otimes a_{Y,Z,W}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes \mathbf{1}) \otimes Y \arrow[rr, "r_X \otimes \mathrm{id}_Y"] \arrow[dr, "a_{X,\mathbf{1},Y}"'] & & X \otimes Y \\
& X \otimes (\mathbf{1} \otimes Y) \arrow[ur, "\mathrm{id}_X \otimes l_Y"'] &
\end{tikzcd}$$

Estos diagramas reciben los nombres de *identidad del pentágono* e *identidad del triángulo*, respectivamente.

Sean $(\mathcal{C}, \otimes, a, \mathbf{1}, l, r)$ y $(\mathcal{C}', \otimes', a', \mathbf{1}', l', r')$ dos categorías monoidales. Un *funtor monoidal* entre dichas categorías es una terna (F, J, u), donde $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ es un funtor, $u : F(\mathbf{1}) \to \mathbf{1}'$ es un isomorfismo, y $J : \otimes' \circ (F \times F) \to F \circ \otimes$ es un isomorfismo natural, tales que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd}
(F(X) \otimes' F(Y)) \otimes' F(Z) \arrow[r, "a'_{F(X),F(Y),F(Z)}"] \arrow[d, "J_{X,Y} \otimes' \mathrm{id}_{F(Z)}"'] & F(X) \otimes' (F(Y) \otimes' F(Z)) \arrow[d, "\mathrm{id}_{F(X)} \otimes' J_{Y,Z}"] \\
F(X \otimes Y) \otimes' F(Z) \arrow[d, "J_{X \otimes Y, Z}"'] & F(X) \otimes' F(Y \otimes Z) \arrow[d, "J_{X, Y \otimes Z}"] \\
F((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[r, "F(a_{X,Y,Z})"'] & F(X \otimes (Y \otimes Z)),
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
F(\mathbf{1} \otimes X) \arrow[r, "J_{\mathbf{1},X}"] \arrow[d, "F(l_X)"'] & F(\mathbf{1}) \otimes' F(X) \arrow[d, "u \otimes' \mathrm{id}_{F(X)}"] \\
F(X) & \mathbf{1}' \otimes' F(X), \arrow[l, "l'_{F(X)}"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
F(X \otimes \mathbf{1}) \arrow[r, "J_{X,\mathbf{1}}"] \arrow[d, "F(r_X)"'] & F(X) \otimes' F(\mathbf{1}) \arrow[d, "\mathrm{id}_{F(X)} \otimes' u"] \\
F(X) & F(X) \otimes' \mathbf{1}', \arrow[l, "r'_{F(X)}"]
\end{tikzcd}$$

para todos los objetos X, Y, Z de $\mathcal{C}$.

Un funtor monoidal (F, J, u) es una *equivalencia de categorías monoidales* si F es una equivalencia de categorías.

Diremos que la categoría monoidal $(\mathcal{C}, \otimes, a, \mathbf{1}, l, r)$ es *estricta* si los isomorfismos naturales de asociatividad y unidad, a, l y r, son identidades.

Observación 1.3.2. La identidad del Pentágono establece que las diferentes posibles formas de asociar el producto tensorial de 4 objetos en una categoría monoidal $\mathcal{C}$ dan el mismo resultado. Inductivamente, esto implica, que todas las posibles maneras de asociar el producto de un número (finito) cualquiera de objetos de $\mathcal{C}$ dan el mismo resultado.

Toda categoría monoidal $\mathcal{C}$ es equivalente a una subcategoría monoidal plena de una categoría monoidal estricta. Este resultado se conoce como el Teorema de Coherencia de Maclane y permite dar demostraciones de propiedades generales restringiéndose a considerar el caso estricto.

Una categoría monoidal abeliana es una categoría monoidal, cuya categoría subyacente es abeliana y el producto tensorial es un funtor biaditivo. Si además el producto tensorial es exacto, la categoría monoidal se suele llamar monoidal abeliana exacta.

Hay muchos ejemplos de categorías monoidales, presentaremos algunos a continuación.

Ejemplo 1.3.3. La categoría **Sets** de conjuntos es una categoría monoidal. El producto tensorial es el producto cartesiano y el objeto unidad es el conjunto de un elemento. Los mosfismos de asociatividad y unidad son los obvios. Esto también vale para la subcategoría Sets de conjuntos finitos.

Este ejemplo puede generalizarse al considerar la categoría de conjuntos con alguna estructura extra, como por ejemplo grupos, espacios topológicos, entre otras.

Ejemplo 1.3.4. La categoría **Vec** de espacios vectoriales sobre $\mathbf{k}$ es una categoría monoidal, con $\otimes = \otimes_{\mathbf{k}}$, $\mathbf{1} = \mathbf{k}$, y los morfismos a, l y r son los isomorfismos usuales de espacios vectoriales. Lo mismo es cierto para la subcategoría Vec de espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\mathbf{k}$.

Más aún, si reemplazamos al cuerpo $\mathbf{k}$ por un anillo unitario conmutativo R, vemos entonces que las categorías de R-módulos y de R-módulos de dimensión finita son monoidales.

Ejemplo 1.3.5. Sea G un grupo. La categoría $\mathbf{Rep}\, G$ de representaciones de G sobre el cuerpo $\mathbf{k}$ es una categoría monoidal con la estructura que detallaremos a continuación. Dada una representación V, denotaremos por $\rho_V : G \to \mathrm{GL}(V)$ al mapa correspondiente. Entonces, el producto tensorial de dos representaciones $\rho_V : G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\rho_W : G \to \mathrm{GL}(W)$ es la representación en $V \otimes W = V \otimes_{\mathbf{k}} W$ definida por la fórmula $\rho_{V\otimes W}(g) = \rho_V(g) \otimes \rho_W(g)$, es decir, la representación diagonal. La unidad es $\mathbf{1} = \mathbf{k}$, la representación trivial. De la misma manera, la subcategoría $\mathrm{Rep}\, G$ de representaciones de dimensión finita del grupo G sobre $\mathbf{k}$ es monoidal.

Ejemplo 1.3.6. Denotaremos por $\mathbf{C}(G)$ la categoría de $\mathbf{k}$-espacios vectoriales G-graduados, es decir, los objetos de la categoría son espacios vectoriales V con una descomposición $V = \oplus_{g\in G} V_g$, y los morfismos son las transformaciones lineales que respetan la graduación.

Podemos definir el producto tensorial en esta categoría de la siguiente forma: $(V \otimes W)_g = \oplus_{x\in G} V_x \otimes W_{x^{-1}g}$, y al objeto unidad por $\mathbf{1}_e = \mathbf{k}$ y $\mathbf{1}_g = 0$ si $g \neq e$. Así, si consideramos a, l y r en la manera obvia (como los isomorfismos de asociatividad y unidad de espacios vectoriales), la categoría $\mathbf{C}(G)$ es monoidal.

Similarmente, podemos definir una estructura monoidal en la categoría $\mathcal{C}(G)$ de $\mathbf{k}$-espacios vectoriales de dimensión finita G-graduados.

En la categoría $\mathcal{C}(G)$ tenemos ciertos objetos distinguidos δ_g ($g \in G$) que son simples, no isomorfos dos a dos, y están definidos por $(\delta_g)_x = \mathbf{k}$ si $x = g$ y $(\delta_g)_x = 0$ si $x \neq g$, o sea, δ_g es un espacio vectorial unidimensional concentrado en grado g. Para estos objetos, la fórmula del producto tensorial se reduce a $\delta_g \otimes \delta_h = \delta_{gh}$. Su importancia radica en que cualquier objeto de $\mathcal{C}(G)$ puede escribirse como una suma directa de los $(\delta_g)_{g\in G}$ con multiplicidades enteras no negativas.

Ejemplo 1.3.7. Ahora daremos una generalización del ejemplo anterior en la cual mostraremos que el isomorfismo de asociatividad no siempre es el trivial.

Sean G un grupo y $\omega : G \times G \times G \to k^\times$ un 3-cociclo en G. Definimos la categoría monoidal $\mathcal{C}(G,\omega)$ de la siguiente forma. Como categoría abeliana $\mathcal{C}(G,\omega)$ es igual a $\mathcal{C}(G)$, y tanto el producto vectorial como el objeto unidad se definen de la misma forma. El cambio reside en el isomorfismo de asociatividad. En este caso, el isomorfismo a^ω está definido por la siguiente fórmula:

$$a^\omega_{U,V,W}((u \otimes v) \otimes w) = \omega(g,f,h) u \otimes (v \otimes w) : (U \otimes V) \otimes W \to U \otimes (V \otimes W),$$

para elementos homogéneos $u \in U_g$, $v \in V_f$, $w \in W_h$ de U, V, $W \in \mathcal{C}$, respectivamente.

Notar que $\mathcal{C}(G,1)$ coincide con la categoría $\mathcal{C}(G)$ del ejemplo anterior.

Ejemplo 1.3.8. Dada una categoría $\mathcal{C}$, la categoría $\operatorname{End}(\mathcal{C})$ de todos los endofuntores de $\mathcal{C}$ es una categoría monoidal estricta, donde el producto tensorial está dado por la composición de funtores. Si $\mathcal{C}$ es una categoría abeliana, la categoría $\operatorname{End}(\mathcal{C})$ también lo es.

1.4. Dualidad en categorías monoidales

Definición 1.4.1. Sean $\mathcal{C}$ una categoría monoidal y V un objeto en $\mathcal{C}$. Un *dual a derecha* de V es una terna $(V^*, \mathrm{ev}_V, \mathrm{coev}_V)$, donde $V^* \in \mathcal{C}$, y $\mathrm{ev}_V : V^* \otimes V \to \mathbf{1}$, $\mathrm{coev}_V : \mathbf{1} \to V \otimes V^*$ son morfismos (llamados *evaluación* y *coevaluación*) tales que las siguientes composiciones son la identidad de V y de V^*, respectivamente:

$$V \simeq \mathbf{1} \otimes V \xrightarrow{\mathrm{coev}_V \otimes \mathrm{id}_V} (V \otimes V^*) \otimes V \xrightarrow{a_{V,V^*,V}} V \otimes (V^* \otimes V) \xrightarrow{\mathrm{id}_V \otimes \mathrm{ev}_V} V \otimes \mathbf{1} \simeq V,$$

$$V^* \simeq V^* \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{\mathrm{id}_{V^*} \otimes \mathrm{coev}_V} V^* \otimes (V \otimes V^*) \xrightarrow{a^{-1}_{V^*,V,V^*}} (V^* \otimes V) \otimes V^* \xrightarrow{\mathrm{ev}_V \otimes \mathrm{id}_{V^*}} \mathbf{1} \otimes V^* \simeq V^*.$$

Análogamente, un *dual a izquierda* de V en la categoría monoidal $\mathcal{C}$ es una terna $({}^*V, \mathrm{ev}'_V, \mathrm{coev}'_V)$, donde ${}^*V \in \mathcal{C}$, y $\mathrm{ev}'_V : V \otimes {}^*V \to \mathbf{1}$, $\mathrm{coev}'_V : \mathbf{1} \to {}^*V \otimes V$ son morfismos tales que las siguientes composiciones son la identidad de V y de V^*, respectivamente:

$$V \simeq V \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{\mathrm{id}_V \otimes \mathrm{coev}'_V} V \otimes ({}^*V \otimes V) \xrightarrow{a^{-1}_{V,{}^*V,V}} (V \otimes {}^*V) \otimes V) \xrightarrow{\mathrm{ev}'_V \otimes \mathrm{id}_V} \mathbf{1} \otimes V \simeq V,$$

$${}^*V \simeq \mathbf{1} \otimes {}^*V \xrightarrow{\mathrm{coev}'_V \otimes \mathrm{id}_{{}^*V}} ({}^*V \otimes V) \otimes {}^*V \xrightarrow{a_{{}^*V,V,V^*}} {}^*V \otimes (V \otimes {}^*V) \xrightarrow{\mathrm{id}_{{}^*V} \otimes \mathrm{ev}'_V} {}^*V \otimes \mathbf{1} \simeq {}^*V.$$

Una categoría monoidal se dice *rígida* si todo objeto admite un dual a izquierda y un dual a derecha.

Notemos que al cambiar el orden del producto tensorial se transforman duales a derecha en duales a izquierda. Es por esto que las propiedades sobre duales a derecha se corresponden naturalmente con propiedades sobre duales a izquierda.

Si $V \in \mathcal{C}$ tiene dual a derecha (respectivamente, a izquierda), entonces éste es único salvo un isomorfismo canónico.

Sean V y W objetos de $\mathcal{C}$ que tienen duales a derecha V^* y W^*, respectivamente. Si $f: V \to W$ es un morfismo, definimos el dual a derecha $f^*: W^* \to V^*$ de f como la composición:

$$W^* \xrightarrow{\mathrm{id}_{W^*} \otimes \mathrm{coev}_V} W^* \otimes (V \otimes V^*) \xrightarrow{a^{-1}_{W^*,V,V^*}} (W^* \otimes V) \otimes V^* \xrightarrow{(\mathrm{id}_{W^*} \otimes f) \otimes \mathrm{id}_{V^*}} (W^* \otimes W) \otimes V^* \xrightarrow{\mathrm{ev}_W \otimes \mathrm{id}_{V^*}} V^*.$$

Si existen duales a izquierda de V y W, el dual a izquierda ${}^*f: {}^*W \to {}^*V$ de f se define como una composición similar a la anterior.

De esta forma, si $\mathcal{C}$ es rígida, se tienen así dos equivalencias de categorías $\mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}: V \to V^*$ y $V \to {}^*V$.

Ejemplo 1.4.2. La categoría $\operatorname{Rep} G$ de representaciones de *dimensión finita* de G sobre $\mathbf{k}$ es rígida. De hecho, el dual de la representación (V, ρ_V) es la representación (V^*, ρ_{V^*}), donde ρ_{V^*} es la representación contragradiente, es decir, $\rho_{V^*}(g) = (\rho_V(g^{-1}))^*$, $g \in G$.

Ejemplo 1.4.3. La categoría $\mathcal{C}(G)$ de $\mathbf{k}$-espacios vectoriales de *dimensión finita* G-graduados es rígida definiendo $(\delta_g)^* = \delta_{g^{-1}}$ para todo $g \in G$. Lo mismo sucede para la categoría $\mathcal{C}(G, \omega)$, que generaliza este ejemplo.

Observación 1.4.4. Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ categorías monoidales. Supongamos que $(F, J): \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un funtor monoidal con los correspondientes isomorfismos $u: F(\mathbf{1}) \to \mathbf{1}$. Si X es un objeto en $\mathcal{C}$ con dual a derecha X^* entonces $F(X^*)$ es un dual a derecha de $F(X)$ con evaluación y coevaluación dadas por

$$\mathrm{ev}_{F(X)}: F(X^*) \otimes F(X) \xrightarrow{J_{X,X^*}} F(X^* \otimes X) \xrightarrow{F(\mathrm{ev}_X)} F(\mathbf{1}) = \mathbf{1},$$
$$\mathrm{coev}_{F(X)}: \mathbf{1} = F(\mathbf{1}) \xrightarrow{F(\mathrm{coev}_X)} F(X \otimes X^*) \xrightarrow{J^{-1}_{X,X^*}} F(X) \otimes F(X^*).$$

Se tiene un resultado análogo para duales a izquierda.

Lema 1.4.5. *Dada una categoría monoidal rígida $\mathcal{C}$ se tienen las adjunciones*

$$\phi: \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(U \otimes V, W) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(U, W \otimes V^*),$$
$$\psi: \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(U, V \otimes W) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(V^* \otimes U, W),$$

definidas por las fórmulas $\phi(f) = (f \otimes \mathrm{id}_{V^*})(\mathrm{id}_U \otimes \mathrm{coev}_V)$, $\psi(f) = (\mathrm{ev}_V \otimes \mathrm{id}_W)(\mathrm{id}_{V^*} \otimes f)$, respectivamente.

Si $\mathcal{C}$ es un categoría monoidal rígida diremos que un objeto V en $\mathcal{C}$ es *inversible* si los morfismos evaluación y coevaluación, $\mathrm{ev}_V: V^* \otimes V \to \mathbf{1}$ y $\mathrm{coev}_V: \mathbf{1} \to V \otimes V^*$ respectivamente, son isomorfismos. Por ejemplo, en la categoría $\mathcal{C}(G, \omega)$ los objetos inversibles son los objetos δ_g, $g \in G$.

Si $V \in \mathcal{C}$ es un objeto inversible entonces $V^* \cong {}^*V$ y su dual V^* es inversible. Además, si $W \in \mathcal{C}$ es otro objeto inversible, el producto tensorial $V \otimes W$ es inversible.

1.5. Categorías tensoriales: definiciones y ejemplos

Definición 1.5.1. Una categoría $\mathbf{k}$-lineal abeliana pequeña $\mathcal{C}$ se dice *localmente finita* si todo objeto de $\mathcal{C}$ es de longitud finita y los espacios de morfismos $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ son espacios vectoriales de dimensión finita, para todo X, $Y \in \mathcal{C}$.

Una *categoría tensorial* [EGNO] es una categoría monoidal rígida, localmente finita, tal que el bifuntor $\otimes$ es bilineal en los morfismos y el objeto unidad $\mathbf{1}$ es simple (y, por lo tanto, $\mathrm{End}(\mathbf{1}) = \mathbf{k}$ cuando el cuerpo de base $\mathbf{k}$ es algebraicamente cerrado).

Algunos ejemplos de categorías tensoriales son los siguientes:

Ejemplo 1.5.2.

1. La categoría Vec de $\mathbf{k}$-espacios vectoriales de dimensión finita.
2. La categoría $\mathrm{Rep}\, G$ de representaciones de dimensión finita del grupo G sobre $\mathbf{k}$.
3. La categoría $\mathcal{C}(G)$ de $\mathbf{k}$-espacios vectoriales de dimensión finita graduados por el grupo G.
4. La categoría $\mathcal{C}(G, \omega)$ de $\mathbf{k}$-espacios vectoriales de dimensión finita graduados por el grupo G con asociatividad determinada por un 3-cociclo ω.

Definición 1.5.3. Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ dos categorías tensoriales y $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor fiel y exacto. Diremos que F es un *funtor cuasi-tensorial* si $F(\mathbf{1}_\mathcal{C}) = \mathbf{1}_\mathcal{D}$, y además está munido de un isomorfismo funtorial $J : \otimes_\mathcal{D} \circ (F \times F) \to F \circ \otimes_\mathcal{C}$.

Un funtor cuasi-tensorial (F, J) es un *funtor tensorial* si J es una estructura monoidal, es decir, si J satisface (1.3.1).

Definición 1.5.4. Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial. Un funtor cuasi-tensorial F de $\mathcal{C}$ en la categoría Vec de espacios vectoriales de dimensión finita es un *funtor de cuasi-fibra*. Si además F es un funtor tensorial, entonces diremos que F es un *funtor de fibra*.

Ejemplo 1.5.5. Sean G un grupo y $\omega \in H^3(G, \mathbf{k}^\times)$. El funtor de olvido $\mathcal{C}(G) \to \mathrm{Vec}$ es un funtor de fibra, mientras que el funtor de olvido $\mathcal{C}(G, \omega) \to \mathrm{Vec}$ es un funtor de cuasi-fibra (donde podemos elegir J arbitrariamente). Este último es un funtor de fibra si y sólo si ω es cohomológicamente trivial.

1.5.1. El anillo de Grothendieck de $\mathcal{C}$

Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana localmente finita sobre $\mathbf{k}$. Dados X, $Y \in \mathcal{C}$, Y un objeto simple, denotaremos por $[X : Y]$ la multiplicidad de Y en la serie de composición de Jordan-Hölder de X.

El grupo de Grothendieck $\mathbb{G}(\mathcal{C})$ es el grupo abeliano libre generado por las clases de isomorfismo X_i, $i \in I$, de objetos simples en $\mathcal{C}$. A cada objeto X de $\mathcal{C}$ le podemos asociar canónicamente su clase $[X]$ en $\mathbb{G}(\mathcal{C})$ dada por la fórmula $[X] = \sum_{i \in I} [X : X_i] X_i$. Claramente, si $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ entonces $[Y] = [X] + [Z]$.

Cuando no haya lugar a confusión escribiremos X en lugar de $[X]$, haciendo un abuso de la notación.

Si $\mathcal{C}$ es una categoría tensorial rígida, entonces el grupo de Grothendieck de $\mathcal{C}$ tiene estructura de anillo. De hecho, podemos considerar el siguiente producto asociativo $[X][Y] = [X \otimes Y]$ para X, $Y \in \mathcal{C}$, y el elemento identidad $1 = [\mathbf{1}]$. Llamaremos a este anillo $\mathbb{G}(\mathcal{C})$ el anillo de Grothendieck de $\mathcal{C}$, el cual está munido de una involución $* : \mathbb{G}(\mathcal{C}) \to \mathbb{G}(\mathcal{C})$, dada por $[X]^* = [X^*]$.

Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ categorías tensoriales y $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor cuasi-tensorial. Entonces F induce un homomorfismo de anillos unitarios $[F] : \mathbb{G}(\mathcal{C}) \to \mathbb{G}(\mathcal{D})$, al cual denotaremos simplemente F cuando el contexto no de lugar a confusión.

1.6. Categorías trenzadas y el centro de Drinfeld

Definición 1.6.1. Diremos que una categoría monoidal $\mathcal{C}$ es *trenzada* si está munida de un isomorfismo natural (denominado *trenza*), $\sigma_{U,V} : U \otimes V \to V \otimes U$, que satisface las identidades hexagonales, es decir, los siguientes diagramas son conmutativos

$$\begin{tikzcd}
(U \otimes V) \otimes W \arrow[r, "a_{U,V,W}"] \arrow[d, "\sigma_{U,V} \otimes \mathrm{id}_W"'] & U \otimes (V \otimes W) \arrow[r, "\sigma_{U,V \otimes W}"] & (V \otimes W) \otimes U \arrow[d, "a_{V,W,U}"] \\
(V \otimes U) \otimes W \arrow[r, "a_{V,U,W}"'] & V \otimes (U \otimes W) \arrow[r, "\mathrm{id}_V \otimes \sigma_{U,W}"'] & V \otimes (W \otimes U),
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
U \otimes (V \otimes W) \arrow[r, "a^{-1}_{U,V,W}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_U \otimes \sigma_{V,W}"'] & (U \otimes V) \otimes W \arrow[r, "\sigma_{U \otimes V,W}"] & W \otimes (U \otimes V) \arrow[d, "a^{-1}_{W,U,V}"] \\
U \otimes (W \otimes V) \arrow[r, "a^{-1}_{U,W,V}"'] & (U \otimes W) \otimes V \arrow[r, "\sigma_{U,W} \otimes \mathrm{id}_V"'] & (W \otimes U) \otimes V,
\end{tikzcd}$$

para todo U, V, $W \in \mathcal{C}$. Si además la trenza cumple que $\sigma_{V,U}\sigma_{U,V} = \mathrm{id}_{U \otimes V}$ para todo U, $V \in \mathcal{C}$ (es decir, σ es involutiva) entonces la categoría $\mathcal{C}$ es *simétrica.*

Un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ monoidal entre las categorías trenzadas $(\mathcal{C}, \sigma)$ y $(\mathcal{C}', \sigma')$ se dice *trenzado* si el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
F(U) \otimes F(V) \arrow[r, "\sigma'_{F(U),F(V)}"] \arrow[d, "J_{U,V}"'] & F(V) \otimes F(U) \arrow[d, "J_{V,U}"] \\
F(U \otimes V) \arrow[r, "F(\sigma_{U,V})"'] & F(V \otimes U),
\end{tikzcd}$$

para todo U, $V \in \mathcal{C}$.

A continuación presentaremos la definición del centro de una categoría. A toda categoría monoidal $\mathcal{C}$ es posible asociarle una categoría monoidal tranzada $Z(\mathcal{C})$. Esta contrucción es debida a Drinfeld, es por esto que llamaremos a $Z(\mathcal{C})$ el *centro de Drinfeld* de la categoría $\mathcal{C}$. Ver [Kas, Sección XIII.4].

Definición 1.6.2. Sea $(\mathcal{C}, \otimes, a, \mathbf{1}, l, r)$ una categoría monoidal. El *centro de Drinfeld* $Z(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ es la categoría cuyos objetos son pares ordenados $(V, c_{-,V})$, formados por un objeto $V \in \mathcal{C}$, y un isomorfismo natural $c_{-,V} : \bullet \otimes V \to V \otimes \bullet$ con la propiedad de que

$$c_{X \otimes Y,V} = a_{V,X,Y}(c_{X,V} \otimes \mathrm{id}_Y)a^{-1}_{X,V,Y}(\mathrm{id}_X \otimes c_{Y,V})a_{X,Y,V},$$

para todo X, $Y \in \mathcal{C}$.

Un morfismo $f : (V, c_{-,V}) \to (W, c_{-,W})$ en $Z(\mathcal{C})$ es un morfismo $f : V \to W$ en $\mathcal{C}$ que satisface

$$\begin{array}{ccc} X \otimes V & \xrightarrow{c_{X,V}} & V \otimes X \\ {\scriptstyle \mathrm{id}_X \otimes f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f \otimes \mathrm{id}_X} \\ X \otimes W & \xrightarrow[c_{X,W}]{} & W \otimes X, \end{array}$$

para todo $X \in \mathcal{C}$.

Teorema 1.6.3. *El centro de Drinfeld $Z(\mathcal{C})$ de la categoría monoidal $(\mathcal{C}, \otimes, a, \mathbf{1}, l, r)$ es una categoría monoidal trenzada, con la siguiente estructura:*

1. *El producto tensorial está definido por $(V, c_{-,V}) \otimes (W, c_{-,W}) := (V \otimes W, c_{-,V\otimes W})$, siendo $c_{-,V\otimes W} : \bullet \otimes (V \otimes W) \to (V \otimes W) \otimes \bullet$ el isomorfismo natural dado por:*
$$c_{X,V\otimes W} := a^{-1}_{V,W,X}(\mathrm{id}_V \otimes c_{X,W})a_{V,X,W}(c_{X,V} \otimes \mathrm{id}_W)a^{-1}_{X,V,W},$$
para cada objeto $X \in \mathcal{C}$;
2. *El objeto unidad es $(\mathbf{1}, l^{-1}r)$;*
3. *La trenza está definida como $c_{V,W} : (V, c_{-,V}) \otimes (W, c_{-,W}) \to (W, c_{-,W}) \otimes (V, c_{-,V})$.*

Además, existe un funtor monoidal $F : Z(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ dado por $F(V, c_{-,V}) = V$.

1.7. Álgebras de Hopf

En esta sección recordaremos algunos ejemplos y conceptos básicos de la teoría de álgebras de Hopf.

Definición 1.7.1. Sea C una coálgebra.

(i) Si un elemento $c \in C \setminus \{0\}$ cumple que $\Delta(c) = c \otimes c$ entonces diremos que c es de *tipo grupo*. Denotaremos por $G(C)$ al conjunto de elementos de tipo grupo de C.

(ii) Sean a, $b \in G(C)$. Diremos que un elemento $c \in C$ es (a, b)-*casi primitivo* si $\Delta(c) = a\otimes c+c\otimes b$. Denotaremos al conjunto de todos los elementos (a, b)-casi primitivos por $\mathcal{P}_{a,b}$.

Se tiene que $k(a - b) \subseteq \mathcal{P}_{a,b}$. Un elemento casi-primitivo $c \in C$ es *trivial* si $c \in k[G(C)]$.

Una coálgebra C se dice *simple* si no posee subcoálgebras propias y se dice *cosemisimple* si es suma directa de subcoálgebras simples.

Para facilitar el trabajo con coálgebras usaremos la *notación sigma* de Sweedler: si c es un elemento de una coálgebra (C, Δ, ε), denotaremos al elemento $\Delta(c) = \sum_i a_i \otimes b_i \in C \otimes C$ de la siguiente forma:
$$\Delta(c) = c_1 \otimes c_2.$$

Observemos que $1 \in G(B)$. Luego, los *elementos primitivos* son los elementos casi-primitivos $\mathcal{P}_{1,1}(B)$ de B y los denotaremos simplemente por $\mathcal{P}(B)$.

Definición 1.7.2. Sean (C, Δ, ε) una coálgebra y (A, m, u) un álgebra. Definimos el *producto de convolución* en $\mathrm{Hom}_k(C, A)$ mediante la siguiente fórmula:

$$(f * g)(c) = f(c_1)g(c_2), \qquad f,\ g \in \mathrm{Hom}_k(C, A),\ c \in C.$$

Luego $\mathrm{Hom}_k(C, A)$ tiene estructura de $\mathbf{k}$-álgebra con unidad $u \circ \varepsilon$.

Definición 1.7.3. Un *álgebra de Hopf* es una colección $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$, donde (H, m, u) es un álgebra asociativa con unidad u, (H, Δ, ε) es una coálgebra coasociativa con counidad ε, los mapas Δ y ε son morfismos de álgebras y además existe un elemento $\mathcal{S} \in \mathrm{Hom}_k(H, H)$ que es inverso de la identidad id_H con respecto al producto de convolución. Esto es, $\mathcal{S}$ satisface las siguientes igualdades:

$$\mathcal{S}(h_1)h_2 = \varepsilon(h)1_H = h_1\mathcal{S}(h_2),$$

para todo $h \in H$. En tal caso, llamaremos a $\mathcal{S}$ la *antípoda* del álgebra de Hopf H.

Notemos que la condición de que Δ y ε sean morfismos de álgebras es equivalente a la condición de que m y u sean morfismos de coálgebras.

Sean H, K dos álgebras de Hopf. Diremos que $f : H \to K$ es un *morfismo de álgebras de Hopf* si es simultáneamente un morfismo de álgebras y un morfismo de coálgebras, y se cumple que $f(\mathcal{S}_H(h)) = \mathcal{S}_K(f(h))$ para todo $h \in H$. Más aún, puede mostrarse que si $f : H \to K$ es un morfismo de álgebras y coálgebras entre dos álgebras de Hopf, entonces automáticamente f preserva la antípoda, o sea f es un morfismo de álgebras de Hopf.

Un *ideal de Hopf* de H es un bi-ideal I de H (es decir, I es un ideal bilátero y un coideal de H) para el cual $\mathcal{S}(I) \subseteq I$. Por lo tanto, $I \subseteq H$ es un ideal de Hopf si y sólo si el espacio vectorial cociente H/I es un álgebra de Hopf. Observemos que el coideal $H^+ = \mathrm{Ker}\,\varepsilon$ es un ideal de Hopf de H, al cual llamaremos el *ideal de aumentación* de H. Más generalmente, si R es una subálgebra de H definimos $R^+ \doteq R \cap \mathrm{Ker}\,\varepsilon$.

Una propiedad importante de las álgebras de Hopf se presenta a continuación.

Observación 1.7.4. Dada una $\mathbf{k}$-álgebra de Hopf H, la categoría H-Mod y su subcategoría H-mod son categorías monoidales. De hecho, dados V, $W \in H$-Mod, podemos definir el producto tensorial a partir de la acción diagonal determinada por la comultiplicación de H, es decir $V \otimes W \in H$-Mod con la acción

$$h \cdot (v \otimes w) := h_1 \cdot v \otimes h_2 \cdot w,$$

para todo $h \in H$, $v \in V$, $w \in W$. La unidad es el espacio vetorial unidimensional $\mathbf{k}$ con la acción trivial dada por la counidad de H, o sea, $\mathbf{1} = \mathbf{k}$, donde $h \cdot 1 = \varepsilon(h)$. Los isomorfismos de asociatividad y unidad son los triviales (al igual que en Vec).

Más aún, si la antípoda de H es biyectiva, la categoría H-mod es rígida. De hecho, el dual a izquierda de V está dada por el espacio vectorial dual con la acción $(h \cdot f)(v) = f(S^{-1}(h) \cdot v)$, para todo $h \in H$, $v \in V$ y $f \in^* V$. De manera similar, el dual a derecha de V es el espacio vectorial dual con la acción $(h \cdot f)(v) = f(S(h) \cdot v)$, para todo $h \in H$, $v \in V$ y $f \in V^*$. Por lo tanto, H-mod es una categoría tensorial.

Si K es otra álgebra de Hopf y $f : H \to K$ es un morfismo de álgebras de Hopf, tal morfismo induce canónicamente un funtor tensorial $F : K$-Mod $\to H$-Mod, donde para cada $V \in K$-Mod, $F(V)$ es el mismo espacio vectorial V con la acción

$$h \cdot_H v = f(h) \cdot_K v,$$

para todo $h \in H$, $v \in V$.

Todo lo probado anteriormente para las categorías H-Mod y H-mod es válido también para sus análogos a derecha, las categorías Mod-H y mod-H.

De ahora en más, fijaremos la notación $\operatorname{Rep} H$ para la categoría de representaciones (módulos a izquierda) de dimensión finita del álgebra de Hopf H sobre el cuerpo $\mathbf{k}$.

A continuación introduciremos algunos ejemplos básicos de álgebras de Hopf.

Ejemplo 1.7.5. Sea G un grupo. Entonces el álgebra de grupo $\mathbf{k}G$ tiene la estructura de álgebra de Hopf dada por la extensión lineal de las aplicaciones

$$\Delta(g) = g \otimes g, \quad \varepsilon(g) = 1 \ \text{ y } S(g) = g^{-1}, \quad \forall\, g \in G.$$

Si G es un grupo finito, el álgebra de funciones de G en $\mathbf{k}$, a la cual denotaremos $\mathbf{k}^G$, es un álgebra de Hopf. Dicha álgebra tiene una base de elementos idempotentes $(e_g)_{g\in G}$, con

$$e_g(h) = \begin{cases} 0 & \text{si } h \neq g, \\ 1 & \text{si } h = g, \end{cases}$$

de modo que $1 = \sum_{g\in G} e_g$. Así, en términos de esta base, la estructura de coálgebra y la antípoda de $\mathbf{k}^\Gamma$ están dadas por las siguientes fórmulas

$$\Delta(e_g) = \sum_{h\in\Gamma} e_h \otimes e_{h^{-1}g}, \qquad \varepsilon(e_g) = \delta_{1,g}, \qquad \mathcal{S}(e_g) = e_{g^{-1}}.$$

Ejemplo 1.7.6. El álgebra envolvente universal $U(\mathfrak{g})$ de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Hopf, con la estructura dada para cada $x \in \mathfrak{g}$ por

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x, \qquad \varepsilon(x) = 0, \qquad \mathcal{S}(x) = -x.$$

De esta forma $x \in \mathcal{P}(U(\mathfrak{g}))$, para todo $x \in \mathfrak{g}$. Más aún, se puede probar que $\mathcal{P}(U(\mathfrak{g})) = \mathfrak{g}$.

Ejemplo 1.7.7. Sean $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ y $q \in k$ una raíz N-ésima primitiva de la unidad. El *álgebra de Taft* $T(q)$ es la $\mathbf{k}$-álgebra dada por generadores g, x y relaciones $g^N = 1$, $x^N = 0$ y $gx = qxg$. Consideremos la estructura en $T(q)$ dada por

$$\Delta g = g \otimes g, \qquad \Delta x = x \otimes 1 + g \otimes x,$$

de modo que $\varepsilon(g) = 1$, $\varepsilon(x) = 0$, $\mathcal{S}(g) = g^{-1}$ y $\mathcal{S}(x) = -g^{-1}x$. Se puede ver que con esta estructura $T(q)$ es un álgebra de Hopf *no* semisimple de dimensión N^2 y $G(T(q)) = \langle g \rangle \simeq \mathbb{Z}/(N)$. La noción de álgebra de Hopf semisimple se presenta en la Subsección 1.7.1.

Ejemplo 1.7.8. Sea $(H, m, u, \Delta, \varepsilon, \mathcal{S})$ un álgebra de Hopf con antípoda biyectiva. Entonces tanto $(H^{\mathrm{op}}, m^{\mathrm{op}}, u, \Delta, \varepsilon, \mathcal{S}^{-1})$ como $(H^{\mathrm{cop}}, m, u, \Delta^{\mathrm{cop}}, \varepsilon, \mathcal{S}^{-1})$ son álgebras de Hopf, donde H^{op} es igual a H como coálgebra pero la estructura de álgebra viene dada por la multiplicación opuesta a la de H y H^{cop} es igual a H como álgebra pero con la comultiplicación opuesta, esto es, $\Delta^{\mathrm{cop}} = h_2 \otimes h_1$, para todo $h \in H$.

Definición 1.7.9. Sean H un álgebra de Hopf y M un H-comódulo a derecha. Definimos el *conjunto de coinvariantes* de H en M como el subespacio $M^{\mathrm{co}\, H} = \{m \in M : \rho(m) = m \otimes 1\}$.

De la misma forma, si M es un H-comódulo a izquierda, el conjunto de coinvariantes de H en M es el subespacio ${}^{\mathrm{co}\, H}M = \{m \in M : \lambda(m) = 1 \otimes m\}$.

Si A y H son álgebras de Hopf y $\pi : A \to H$ un morfismo de álgebras de Hopf, entonces A admite una estructura de H-comódulo a derecha y a izquierda. En este caso, los espacios coinvariantes, que denotaremos por $A^{\operatorname{co} H} = A^{\operatorname{co}\pi}$ y ${}^{\operatorname{co} H}A = {}^{\operatorname{co}\pi}A$, están dados por

$$A^{\operatorname{co}\pi} = \{a \in A : (\operatorname{id} \otimes \pi)\Delta(a) = a \otimes 1\} \text{ y } {}^{\operatorname{co}\pi}A = \{a \in A : (\pi \otimes \operatorname{id})\Delta(a) = 1 \otimes a\}.$$

Notar que estos espacios son subálgebras de A, a las cuales denominaremos subálgebras de *coinvariantes* de A.

Un álgebra de Hopf H de dimensión finita se dice *trivial* si es conmutativa o coconmutativa. Entonces H es trivial si y sólo si es isomofa a un álgebra de grupo o al dual de un álgebra de grupo.

1.7.1. Álgebras de Hopf semisimples

En esta subsección recordaremos algunas convenciones y la terminología de [N5] sobre álgebras de Hopf semisimples y cosemisimples, caraceteres de las mismas y también algunos resultados básicos que nos serán de utilidad a lo largo del trabajo.

Definición 1.7.10. Diremos que un álgebra de Hopf H es *semisimple* si es semisimple como álgebra sobre $\mathbf{k}$, es decir, si todo H-módulo a izquierda es completamente reducible. Análogamente, diremos que H es un álgebra de Hopf *cosemisimple* si es cosemisimple como coálgebra sobre $\mathbf{k}$

Cuando $\mathbf{k}$ es un cuerpo de característica 0 se tiene el siguiente importante resultado debido a Larson y Radford [LR, LR2].

Teorema 1.7.11. *Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita sobre $\mathbf{k}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- *H es semisimple,*
- *H es cosemisimple,*
- $S^2 = \operatorname{id}$.

Una consecuencia importante del Teorema Fundamental para módulos de Hopf [Mo, 1.9.4] es que toda álgebra de Hopf semisimple tiene dimensión finita [Sw].

En lo que resta, supondremos que H es un álgebra de Hopf semisimple (y, por lo tanto, de dimensión finita) sobre $\mathbf{k}$. Por el Teorema de Wedderburn, H es isomorfa, como álgebra, a la suma directa de álgebra de matrices

$$H \simeq \mathbf{k}^{(n)} \oplus \bigoplus_{i=1}^{r} M_{d_i}(\mathbf{k})^{(n_i)}, \tag{1.1}$$

con $n = |G(H^*)|$.

A continuación enunciamos un resultado similar al Teorema de Lagrange para álgebras de Hopf debido a Nichols-Zoeller [NZ].

Teorema 1.7.12. *(Teorema de Nichols-Zoeller) Sean H un álgebra de Hopf de dimensión finita y K una subálgebra de Hopf de H. Todo (H, K)-módulo de Hopf es libre como K-módulo. En particular, H es un K-módulo libre y, por lo tanto,* $\dim_{\mathbf{k}} K$ *divide a* $\dim_{\mathbf{k}} H$.

Como consecuencia del Teorema de Nichols-Zoeller tenemos que, en nuestro caso, $n = |G(H^*)|$ divide tanto a $\dim H$ como a $n_i d_i^2$, para todo $i = 1, \dots, r$.

Sea V un H-módulo. El *caracter* de V es el elemento $\chi = \chi_V$ de H^* definido por $\chi(h) = \mathrm{Tr}_V(h)$, para todo $h \in H$. Diremos que el caracter χ_V es irreducible si V es irreducible como H-módulo, y el *grado* de χ es el entero $\deg \chi = \chi(1) = \dim_{\mathbf{k}} V$.

Denotaremos por $R(H)$ al *álgebra de caracteres* de H, es decir, a la subálgebra semisimple de H^* generada por el conjunto $\mathrm{Irr}(H)$ de caracteres irreducibles de H. El álgebra de caracteres $R(H)$ es isomorfa, vía el mapa $V \to \chi_V$, a la extensión de escalares $\mathbf{k} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{G}(\mathrm{Rep}\, H)$ del anillo de Grothendieck de la categoría $\mathrm{Rep}\, H$. En particular, tenemos una identificación $\mathrm{Irr}(H) \simeq \mathrm{Irr}(\mathrm{Rep}\, H)$. Además, hay una correspondencia biyectiva entre los cocientes de Hopf de H y las subálgebras estándares de $R(H)$, es decir, las subálgebras generadas por caracteres irreducibles de H. Esta correspondencia asigna al álgebra de Hopf cociente $H \to \overline{H}$ su álgebra de caracteres $R(\overline{H}) \subseteq R(H)$. Ver [NR].

Definición 1.7.13. Diremos que H es *de tipo* $(1, n; d_1, n_1; \dots; d_r, n_r)$ *como álgebra* si tenemos un isomorfismo como en (1.1). De la misma forma, diremos que H es *de tipo* $(1, n; d_1, n_1; \dots; d_r, n_r)$ *como coálgebra* si H^* es de tipo $(1, n; d_1, n_1; \dots; d_r, n_r)$ como álgebra.

Observemos que, en este contexto, el grupo de objetos inversibles de la categoría de representaciones de dimensión finita de H es $G(\mathrm{Rep}\, H) = G(H^*)$. El estabilizador del caracter χ, bajo la multiplicación a izquierda por elementos en $G(H^*)$, será denotado por $G[\chi]$. Nuevamente, por el teorema de Nichols-Zoeller [NZ], el orden del estabilizador $|G[\chi]|$ divide a $(\deg \chi)^2$.

Siguiendo la notación de [I, Chapter 12], denotaremos por $\mathrm{c.\,d.}(H)$ al conjuto de grados de los caracteres irreducibles de H, es decir,

$$\mathrm{c.\,d.}(H) = \{\deg \chi : \chi \in \mathrm{Irr}(H)\}.$$

Luego, si H es de tipo $(1, n; d_1, n_1; \dots; d_r, n_r)$ como álgebra entonces $\mathrm{c.\,d.}(H) = \{1, d_1, \dots, d_r\}$.

1.8. Extensiones de álgebras de Hopf

En esta sección recordaremos brevemente las definiciones y nociones básicas referidas a extensiones de álgebras de Hopf. Referimos al lector interesado en profundizar en estos temas, en particular en el estudio de la teoría de cohomología subyacente a este tipo de extensiones, a los trabajos [AD] y [Ma1, Ma3] de Andruskiewitsch y Devoto, y de Masuoka, respectivamente.

Definición 1.8.1. Sean A, B y H álgebras de Hopf de dimensión finita sobre $\mathbf{k}$. Diremos que A es una *extensión* de B por H si existe una sucesión de morfismos de álgebras de Hopf

$$\mathbf{k} \to B \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} H \to \mathbf{k};$$

que satisface las siguientes condiciones:

(i) ι es inyectivo,

(ii) π es sobreyectivo,

(iii) $\mathrm{Ker}\, \pi = AB^+$,

(iv) $B = {}^{\mathrm{co}\,\pi}A$.

Generalmente identificaremos a B con su imagen en A y, cuando no haya lugar a confusión, diremos simplemente que A es una H-extensión de B. Se dice que A es una *extensión central* de B cuando la imagen de B es central en A. La sucesión se dice *cocentral* si la sucesión exacta dual es central. Una sucesión con las propiedades (i) a (iv) se dice una *sucesión exacta* de álgebras de Hopf.

Si G es un grupo finito, N un subgrupo normal de G y consideramos el grupo cociente $F = G/N$, entonces la sucesión $\mathbf{k} \to \mathbf{k}N \to \mathbf{k}G \to \mathbf{k}F \to \mathbf{k}$ es una sucesión exacta de álgebras de Hopf. De esta forma, la Definición 1.8.1 puede verse como una generalización de la definición usual de sucesión exacta corta de grupos.

Recordemos que un *matched pair* de grupos es un par de grupos finitos F y Γ con acciones $\triangleleft : \Gamma \times F \to \Gamma$, $\triangleright : \Gamma \times F \to F$ compatibles en el sentido que:

(i) $s \triangleright xy = (s \triangleright x)((s \triangleleft x) \triangleright y)$,

(ii) $st \triangleleft x = (s \triangleleft (t \triangleright x))(t \triangleleft x)$,

para todo s, $t \in \Gamma$, x, $y \in F$.

Recordemos también que una factorización exacta $G = F\Gamma$ de un grupo G es equivalente a que el par de grupos finitos F y Γ sea un *matched pair*, junto con las acciones $\triangleleft : \Gamma \times F \to \Gamma$, $\triangleright : \Gamma \times F \to F$ determinadas por la relación $sx = (x \triangleleft s)(x \triangleright s)$, $x \in F$, $s \in \Gamma$. Ver la Definición 1.1.8.

A partir de la noción de *matched pair* se tiene la de *productos bicruzados*, construcción debida a G. I. Kac [Ka].

Dado un *matched pair* $(F, \Gamma, \triangleleft, \triangleright)$ definimos una acción a izquierda de F en $\mathbf{k}^\Gamma$ mediante la fórmula $(x \cdot \alpha)(g) = \alpha(g \triangleleft x)$, $\alpha \in \mathbf{k}^\Gamma$, $\mathfrak{g} \in \Gamma$, $x \in F$. En particular, $x \cdot e_g = e_{g \triangleleft x^{-1}}$. Similarmente, definimos una acción a derecha de Γ en $\mathbf{k}^F$ por $(\beta \cdot g)(x) = \beta(x \triangleright g)$, $\beta \in \mathbf{k}^F$, $\mathfrak{g} \in \Gamma$, $x \in F$.

Sean $\sigma : F \times F \to (k^\times)^\Gamma$ y $\tau : \Gamma \times \Gamma \to (k^\times)^F$ 2-cociclos normalizados. Si los escribimos como $\sigma = \sum_{g \in \Gamma} \sigma_g e_g$ y $\tau = \sum_{x \in F} \tau_x e_x$, la condición de cociclo y la normalización se traducen, para σ y τ respectivamente, de la siguiente forma:

$$\sigma_{g \triangleleft x}(y, z)\sigma_g(x, yz) = \sigma_g(xy, z)\sigma_g(x, y), \tag{1.2}$$

$$\sigma_g(x, 1) = 1 = \sigma_g(1, x), \text{ y} \tag{1.3}$$

$$\tau_x(gh, k)\tau_{k \triangleright x}(g, h) = \tau_x(h, k)\tau_x(g, hk), \tag{1.4}$$

$$\tau_x(g, 1) = 1 = \tau_x(1, g), \tag{1.5}$$

para g, h, $k \in \Gamma$, x, y, $z \in F$.

El producto bicruzado $\mathbf{k}^\Gamma {}^\tau\#_\sigma \mathbf{k}F$ asociado a los datos anteriores es, como espacio vectorial, igual a $\mathbf{k}^\Gamma \otimes \mathbf{k}F$, y la multiplicación y comultiplicación están determinadas por:

$$(e_s \# x)(e_t \# y) = \delta_{s \triangleleft x, t}\, \sigma_s(x, y)\, e_s \# xy,$$

$$\Delta(e_s \# x) = \sum_{gh = s} \tau_x(g, h)\, e_g \#(h \triangleright x) \otimes e_h \# x,$$

para $s, t \in \Gamma$, $x, y \in F$.

Además, cuando la característica del cuerpo $\mathbf{k}$ no divide al orden del grupo F, el producto bicruzado $H = \mathbf{k}^{\Gamma}\,{}^{\tau}\#_{\sigma}\mathbf{k}F$ es un álgebra de Hopf semisimple si los cociclos σ y τ cumplen que:

$$\sigma_{ts}(x,y)\tau_{xy}(t,s) = \tau_x(t,s)\tau_y(t \triangleleft (s \triangleright x), s \triangleleft x)\sigma_t(s \triangleright x, (s \triangleleft x) \triangleright y)\sigma_s(x,y), \tag{1.6}$$

para s, $t \in \Gamma$, x, $y \in F$. Notar que esta condición da la siguiente normalización:

$$\sigma_1(g,h) = 1, \quad \tau_1(x,y) = 1, \tag{1.7}$$

para g, $h \in \Gamma$; x, $y \in F$. En este caso, la antípoda de H está dada por

$$S(e_g\#x) = \sigma_{(g\triangleleft x)^{-1}}((g \triangleright x)^{-1}, g \triangleright x)^{-1}\tau_x(g-1,g)^{-1}e_{(g\triangleleft x)^{-1}}(g \triangleright x)^{-1},$$

para todo $g \in \Gamma$, $x \in F$.

Tenemos la siguiente sucesión exacta *abeliana* asociada al producto bicruzado $H = \mathbf{k}^{\Gamma}\,{}^{\tau}\#_{\sigma}\mathbf{k}F$

$$\mathbf{k} \to \mathbf{k}^{\Gamma} \to H \to \mathbf{k}F \to \mathbf{k}, \tag{1.8}$$

donde todas las aplicaciones son las canónicas.

Más aún, toda álgebra de Hopf que admite una tal extensión abeliana es necesariamente isomorfa a un producto bicruzado. El conjunto de clases de equivalencias de extensiones abelianas de la forma (1.8) es un grupo abeliano, con el producto Baer de extensiones, al cual denotaremos $\operatorname{Opext}(\mathbf{k}^{\Gamma}, \mathbf{k}F)$.

La clase de un elemento del grupo $\operatorname{Opext}(\mathbf{k}^{\Gamma}, \mathbf{k}F)$ puede representarse por un par (τ, σ), donde $\sigma : \Gamma^{\times 2} \times F \to \mathbf{k}^{\times}$ y $\tau : \Gamma \times F^{\times 2} \to \mathbf{k}^{\times}$ son mapas que satisfacen las condiciones (1.2) y (1.6). Además, el grupo $\operatorname{Opext}(\mathbf{k}^{\Gamma}, \mathbf{k}F)$ puede ser descripto como el primer grupo de cohomología de cierto complejo doble, esto fue hecho por Masuoka en [Ma1, Proposition 5.2].

Proposición 1.8.2. *Consideremos* (A) *y* (A') *clases de equivalencias de extensiones abelianas en* $\operatorname{Opext}(H,K)$. *Entonces existe un* 2*-cociclo* θ *de* H *tal que* (A^{θ}) *es equivalente a* (A') *si y sólo si* (A) *y* (A') *son iguales en el conúcleo* $\operatorname{Opext}(H,K)/\operatorname{Im}\delta$ *del morfismo de grupos inducido* $\delta : H^2(H, \mathbf{k}) \to \operatorname{Opext}(H,K)$.

Demostración. Ver [Ma3, Proposition 3.1]. □

A continuación enunciaremos un teorema que muestra que el grupo $\operatorname{Opext}(\mathbf{k}^{\Gamma}, \mathbf{k}F)$ encaja en una sucesión exacta, la cual es conocida como la *sucesión exacta de Kac*. Esta sucesión es de gran utilidad, en particular es posible probar que, cuando el cuerpo $\mathbf{k}$ es algebraicamente cerrado, el grupo $\operatorname{Opext}(\mathbf{k}F, \mathbf{k}^{\Gamma})$ es finito, mientras que $\operatorname{Aut}(\mathbf{k}^{\Gamma}\#\mathbf{k}F)$ siempre es finito.

Teorema 1.8.3. *Tenemos una sucesión exacta*

$$\begin{aligned} 0 &\to H^1(F \bowtie \Gamma, \mathbf{k}^{\times}) \overset{\text{res}}{\to} H^1(F, \mathbf{k}^{\times}) \oplus H^1(\Gamma, \mathbf{k}^{\times}) \to \operatorname{Aut}(\mathbf{k}^{\Gamma}\#\mathbf{k}F) \\ &\to H^2(F \bowtie \Gamma, \mathbf{k}^{\times}) \overset{\text{res}}{\to} H^2(F, \mathbf{k}^{\times}) \oplus H^2(\Gamma, \mathbf{k}^{\times}) \to \operatorname{Opext}(\mathbf{k}F, \mathbf{k}^{\Gamma}) \\ &\overset{\overline{\omega}}{\to} H^3(F \bowtie \Gamma, \mathbf{k}^{\times}) \overset{\text{res}}{\to} H^3(F, \mathbf{k}^{\times}) \oplus H^3(\Gamma, \mathbf{k}^{\times}), \end{aligned}$$

donde $H^{\cdot}$ *denota el grupo de cohomología con coeficientes en el módulo trivial* $\mathbf{k}^{\times}$.

Demostración. Ver [Ma3, Theorem 1.10], [Ka, (3.14)]. □

En el trabajo [KMM], los autores muestran que las representaciones irreducibles de H están clasificadas por pares (s, U_s), donde s es un representante de las órbitas de la acción de F en Γ, $F_s \doteq F \cap sFs^{-1}$ es el estabilizador de $s \in \Gamma$, y U_s es una representación irreducible del álgebra de grupo torcida $\mathbf{k}_{\sigma_s}F_s$, es decir, una representación proyectiva irreducible de F_s con cociclo σ_s, donde $\sigma_s(x,y) = \sigma(x,y)(s)$, $x, y \in F$, $s \in \Gamma$. Observemos que restringiendo $\sigma_s : F \times F \to \mathbf{k}^\times$ al estabilizador F_s obtenemos un 2-cociclo en F_s, para todo $s \in \Gamma$. Dado un par (s, U_s), la representación irreducible correspondiente está dada por

$$W_{(s,U_s)} \doteq \operatorname{Ind}_{\mathbf{k}^\Gamma \otimes \mathbf{k}F_s}^{H} s \otimes U_s. \tag{1.9}$$

Los siguientes hechos sobre (co)centralidad de sucesiones exactas abelianas son bien conocidos.

Lema 1.8.4. *Consideremos una sucesión exacta abeliana como en* (1.8)*. Entonces:*

(i) La sucesión es central si y sólo si la acción $\triangleleft\colon \Gamma \times F \to \Gamma$ *es trivial. En este caso, el grupo* $G = F \bowtie \Gamma$ *es un producto semidirecto* $G \simeq F \rtimes \Gamma$ *con respecto a la acción* $\triangleright\colon \Gamma \times F \to F$.

(ii) La sucesión es cocentral si y sólo si la acción $\triangleright\colon \Gamma \times F \to F$ *es trivial. En este caso, el grupo* $G = F \bowtie \Gamma$ *es un producto semidirecto* $G \simeq F \ltimes \Gamma$ *con respecto a la acción* $\triangleleft\colon \Gamma \times F \to \Gamma$. □

1.9. Álgebras de Hopf cuasitriangulares

Definición 1.9.1. Una $\mathbf{k}$-álgebra de Hopf H se dice *cuasitriangular* si existe un elemento $R \in H \otimes H$ inversible, al cual llamaremos *R-matriz* o *estructura cuasitriangular*, que satisface las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}
&(\Delta \otimes \mathrm{id})(R) = R_{13}R_{23},\\
&(\mathrm{id} \otimes \Delta)(R) = R_{13}R_{12},\\
&\Delta^{\mathrm{cop}}(h) = R\Delta(h)R^{-1},\\
&(\epsilon \otimes \mathrm{id})(R) = 1 = (\mathrm{id} \otimes \epsilon)(R),
\end{aligned}$$

para todo $h \in H$, donde por R_{12} denotamos al elemento $R \otimes 1 \in H^{\otimes 3}$ y de manera similar a los elementos R_{13} y R_{23}.

Por ejemplo, dado un grupo finito G, el álgebra de grupo $\mathbf{k}G$ es un álgebra de Hopf cuasitriangular con $R = 1 \otimes 1$. Por otro lado, el álgebra de Hopf dual $\mathbf{k}^G$ admite una estructura cuasitriangular si y sólo si el grupo G es abeliano.

Un álgebra de Hopf cuasitriangular H puede admitir más de una R-matriz.

Observación 1.9.2. Una propiedad destacada de las álgebras de Hopf cuasitriangulares es que la existencia de una R-matriz en H hace de la categoría $\operatorname{Rep} H$ una categoría tensorial trenzada. Ver [BaKi].

Un ejemplo fundamental de álgebra de Hopf cuasitriangular es el *doble de Drinfeld* $D(H)$ de un álgebra de Hopf H de dimensión finita. Recordemos que, como coálgebra, $D(H)$ es igual a $H^{*\,\mathrm{cop}} \otimes H$. Una estructura cuasitriangular canónica en $D(H)$ está dada por la R-matriz $\mathcal{R} = \sum_i h^i \otimes h_i$, donde

$(h_i)_i$ es una base de H y $(h^i)_i$ es la base dual. Además, la categoría $\operatorname{Rep} D(H)$ es equivalente, como categoría tensorial trenzada, al centro de Drinfeld $Z(\operatorname{Rep} H)$ de $\operatorname{Rep} H$.

Para la definición precisa de $D(H)$ recomendamos la lectura de [Mo, Definition 10.3.5], donde también se encuentran otras propiedades básicas de este álgebra de Hopf.

Dada un álgebra de Hopf cuasitriangular (H, R) podemos definir morfismos de álgebras de Hopf $f_R : H^{*\mathrm{cop}} \to H$ y $f_{R_{21}} : H^* \to H^{\mathrm{op}}$ mediante las siguientes fórmulas

$$f_R(p) = p(R^{(1)})R^{(2)}, \quad f_{R_{21}}(p) = p(R^{(2)})R^{(1)},$$

para todo $p \in H^*$, con $R = R^{(1)} \otimes R^{(2)} \in H \otimes H$.

Las imágenes de estos morfismos son subálgebras de Hopf de H que denotaremos $H_+ = f_R(H^*)$ y $H_- = f_{R_{21}}(H^*)$, y satisfacen que $H_+ \simeq (H_-^*)^{\mathrm{cop}}$. La subálgebra de Hopf $H_R \doteq H_-H_+ = H_+H_-$, es decir, la subálgebra de Hopf generada por H_+ y H_-, es la subálgebra de Hopf cuasitriangular *minimal* de H. Ver [R2]. Además, la multiplicación de H determina un morfismo suryectivo de álgebras de Hopf $D(H_-) \to H_R$, por [R2, Theorem 2].

Dado $\eta \in G(H^*)$ definimos $g_\eta = R^{(1)}\eta(R^{(2)})$. A continuación enunciamos un resultado de Radford que muestra una relación interesante entre los grupos $G(A^*)$ y $G(A)$.

Proposición 1.9.3. *[R1, Proposition 3] Supongamos que (H, R) es un álgebra de Hopf cuasitriangular de dimensión finita, y sea $\eta \in G(H^*)$. Entonces:*

1. *$g_\eta \in G(H)$,*
2. *el mapa $G(H^*) \to G(H)$ dado por $\eta \to g_\eta$ es un anti-homomorfismo de grupos,*
3. *$(h \leftharpoonup \eta)g_\eta = g_\eta(\eta \rightharpoonup h)$, para todo $h \in H$, y*
4. *η es central si y sólo si g_η es central.*

Las acciones $\leftharpoonup$, $\rightharpoonup$, que aparecen en el enunciado del teorema anterior, están asociadas a la condición sobre Δ^{cop} que satisface H por ser cuasi-triangular. Ver [R1, Section 2].

Observación 1.9.4. Notemos que si $\eta \in G(H^*)$ entonces $f_{R_{21}}(\eta) = g_\eta$. Luego, como consecuencia de la Proposición 1.9.3, tenemos que:

$$f_{R_{21}}(G(H^*) \cap Z(H^*)) \subseteq G(H) \cap Z(H).$$

Notemos que considerando $g^\eta = \eta(R^{(1)})R^{(2)}$, para $\eta \in G(H^*)$, es posible probar resultados similares a los de la Proposición 1.9.3. Así, también tenemos que:

$$f_R(G(H^*) \cap Z(H^*)) \subseteq G(H) \cap Z(H).$$

Definición 1.9.5. [ReS] Un álgebra de Hopf cuasitriangular (H, R) es *factorizable* si el mapa $\Phi_R : H^* \to H$ es un isomorfismo, donde $\Phi_R(p) = p(Q^{(1)})Q^{(2)}$, para $p \in H^*$, con $Q = Q^{(1)} \otimes Q^{(2)} = R_{21}R \in H \otimes H$.

Por otro lado, si $\Phi_R = \epsilon 1$ (o equivalentemente, $R_{21}R = 1 \otimes 1$), entonces diremos que (H, R) es *triangular*.

Etingof y Gelaki dieron una clasificación completa de las álgebras de Hopf triangulares de dimensión finita en [EG]. En particular, tenemos H es isomorfa, como álgebra de Hopf, a una deformación $(kG)^J$ del álgebra de grupo de algún grupo finito G cuando (H, R) es un álgebra de Hopf cuasitriangular semisimple.

El doble de Drinfeld $(D(H), \mathcal{R})$ es un álgebra de Hopf cuasitriangular *factorizable*, siendo en este caso $D(H)_+ = H$ y $D(H)_- = H^{*\mathrm{cop}}$.

En el Capítulo 3 nos será de utilidad el siguiente teorema sobre álgebras de Hopf factorizables. Una versión categórica de este resultado fue probado en [GN].

Teorema 1.9.6. *[Sch2, Theorem 2.3]. Sea (H, R) un álgebra de Hopf factorizable. Entonces el mapa Φ_R induce un isomorfismo de grupos $G(H^*) \to G(H) \cap Z(H)$.*

Notemos que es posible identificar $G(D(H)) = G(H^*) \times G(H)$ y, bajo esta identificación, el Teorema 1.9.6 da un isomorfismo de grupos $G(D(H)^*) \to G(D(H)) \cap Z(D(H))$, $g\#f \mapsto f\#g$. Ver también [R2]. En particular, si $f = \epsilon$, entonces $g \in G(H) \cap Z(H)$, y además si $g = 1$, tenemos que $f \in G(H^*) \cap Z(H^*)$.

Si (H, R) es un álgebra de Hopf cuasitriangular de dimensión finita entonces existe un morfismo de álgebras de Hopf suryectivo $f : D(H) \to H$ tal que $(f \otimes f)\mathcal{R} = R$. Más aún, dicho morfismo f está determinado por $f(p \otimes h) = f_R(p)h$, para todo $p \in H^*$, $h \in H$.

Esto corresponde a la inclusión canónica de categorías tensoriales trenzadas de $\operatorname{Rep} H$ (con la trenza dada por la acción de la R-matriz) en su centro. En particular, el grupo $G(H^*)$ puede ser identificado con un subgrupo del grupo $G(D(H)^*)$ cuando H es cuasitriangular.

1.10. Cuasi-Álgebras de Hopf

Definición 1.10.1. [D2] Una *cuasi-biálgebra* es una colección $(H, \Delta, \varepsilon, \phi)$ formada por una **k**-álgebra H asociativa y unitaria, morfismos de álgebras $\varepsilon : H \to k$ y $\Delta : H \otimes H \to H$ y un elemento inversible $\phi \in H^{\otimes 3}$ que satisface para todo $h \in H$:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id}\, \Delta)(\phi)(\Delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(\phi) &= (1 \otimes \phi)(\mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id})(\phi)(\phi \otimes 1),\\
(\mathrm{id} \otimes \varepsilon \otimes \mathrm{id})(\phi) &= 1 \otimes 1,\\
(\varepsilon \otimes \mathrm{id})\Delta(h) = h &= (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)\Delta(h),\\
\phi(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(h)\phi^{-1} &= (\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta(h).
\end{aligned}$$

Diremos que una cuasi-biálgebra (H, ϕ) es una *cuasi-álgebra de Hopf* si existe un isomorfismo de álgebras $S : H \to H^{\mathrm{op}}$ y elementos α, $\beta \in H$ tales que, si denotamos por $\phi = \phi^{(1)} \otimes \phi^{(2)} \otimes \phi^{(3)}$ y $\phi^{-1} = \phi^{(-1)} \otimes \phi^{(-2)} \otimes \phi^{(-3)}$, se cumple para todo $h \in H$ que

$$\begin{aligned}
S(h_1)\alpha h_2 &= \varepsilon(h)\alpha,\\
h_1 \beta S(h_2) &= \varepsilon(h)\beta,\\
\phi^{(1)}\beta S(\phi^{(2)})\alpha\phi^{(3)} = 1 &= S(\phi^{(-1)})\alpha\phi^{(-2)}\beta S(\phi^{(-3)}).
\end{aligned}$$

Llamaremos a la aplicación S la *cuasi-antípoda* de H.

Notemos que, cuando $\phi = 1$ y $\alpha = \beta = 1$, H es un álgebra de Hopf .

La categoría $\operatorname{Rep} H \doteq \operatorname{Rep}(H, \phi)$ de representaciones de dimensión finita de una cuasi-álgebra de Hopf H es una categoría tensorial sobre $\mathbf{k}$. El isomorfismo de asociatividad está determinado por la acción natural de ϕ. El dual a izquierda de un objeto $V \in \operatorname{Rep} H$ es el espacio vectorial dual V^* junto con la acción de H dada por $(h \cdot f)(v) = f(S(h) \cdot v)$, para todo $h \in H$, $f \in V^*$ y $v \in V$. El morfismo de evaluación, $\mathrm{ev} : V^* \otimes V \to \mathbf{k}$, es $\mathrm{ev}(f \otimes v) = hf(\alpha \cdot v)$, con $f \in V^*$ y $v \in V$, mientras que el de coevaluación, $\mathrm{coev} : \mathbf{k} \to V \otimes V^*$, está determinado por $1 \to \sum \beta \cdot v_i \otimes v^i$, donde (v_i) y (v^i) son bases duales de V.

Sean H, H' cuasi-álgebras de Hopf. Diremos que H y H' son *twist equivalentes* si existe un elemento inversible $F \in H \otimes H$ tal que H_F y H' son isomorfas como cuasi-biálgebras. Al elemento F se lo llama *twist*. Supondremos que F es un *twist* normalizado, o sea, satisface que $(\varepsilon \otimes \mathrm{id})(F) = 1 = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(F)$.

La cuasi-álgebra de Hopf H_F es la cuasi-álgebra de Hopf torcida por el *twist* F. Más precisamente, H_F es la colección $(H, \Delta_F, \varepsilon, \phi_F, S_F, \alpha_F, \beta_F)$, con

$$\begin{aligned}
\Delta_F(h) &= F\Delta(h)F^{-1}, \\
\phi_F &= (1 \otimes F)(\mathrm{id} \otimes \Delta)(F)\phi(\Delta \otimes \mathrm{id})(F^{-1})(F^{-1} \otimes 1), \\
\alpha_F &= S(F^{(-1)})\alpha F(-2), \\
\beta_F &= F^{(1)}\beta S(F^{(2)}),
\end{aligned}$$

donde $F = F^{(1)} \otimes F^{(2)}$, $F^{-1} = F^{(-1)} \otimes F^{(-2)}$.

Una propiedad importante es que dada una cuasi-álgebra de Hopf (H, ϕ), el funtor de olvido de la categoría $\operatorname{Rep} H$ es un cuasi-funtor de fibra $\operatorname{Rep} H \to \mathrm{Vec}$. Más aún, H es un álgebra de Hopf, si y sólo si, $\operatorname{Rep} H$ posee un funtor de fibra.

La afirmación recíproca también es verdadera, es decir, si $\mathcal{C}$ es una categoría tensorial munida de un cuasi-funtor de fibra $(F, J) : \mathcal{C} \to \mathrm{Vec}$, entonces existe una cuasi-álgebra de Hopf H tal que $\mathcal{C} = \operatorname{Rep} H$. De hecho, $H = \operatorname{End} F$ es una cuasi-álgebra de Hopf con el coproducto $\Delta : H \otimes H \to H \cong \operatorname{End}(F \times F)$, dado por $T \to JTJ^{-1}$, la counidad $\varepsilon(T) \doteq T\mid_{F(1)}$, y la antípoda definida como $S(T)\mid_{F(X)} \doteq (T\mid_{F(X^*)})^*$.

El siguiente teorema generaliza un resultado similar, debido a Schauenburg, en el contexto de álgebras de Hopf de dimensión finita.

Teorema 1.10.2. *Las cuasi-álgebras de Hopf de dimensión finita H y H' son* twist *equivalentes si y sólo si $\operatorname{Rep} H$ y $\operatorname{Rep} H'$ son equivalentes como categorías tensoriales.*

Ejemplo 1.10.3. Sean G un grupo finito y $\omega : G \times G \times G \to \mathbf{k}^\times$ un 3-cociclo normalizado. El álgebra $\mathbf{k}^G$ de funciones en el grupo finito G admite una estructura de cuasi-álgebra de Hopf con asociador determinado por ω, a la cual denotaremos $(\mathbf{k}^G, \omega)$.

Para esto recordemos que $\omega : G \times G \times G \to \mathbf{k}^\times$ es un 3-cociclo normalizado si, para todo a, b, c, $d \in G$, se cumplen ls siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}
\omega(ab, c, d)\omega(a, b, cd) &= \omega(a, b, c)\omega(a, bc, d)\omega(b, c, d), \\
\omega(e, a, b) &= \omega(a, e, b) = \omega(a, b, e) = 1,
\end{aligned}$$

donde e es la identidad del grupo G

Podemos considerar en $\mathbf{k}^G$ la comultiplicación usual de funciones. En este caso, el asociador está dado por el 3-cociclo normalizado $\omega \in \mathbf{k}^{G\times G\times G} \cong (\mathbf{k}^G)^{\otimes 3}$. La antípoda está definida por $S(e_g) = e_{g^{-1}}$, mientras que $\alpha = 1$ y $\beta = \sum_{g\in G} \omega(g, g^{-1}, g)e_g$, con $e_g \in \mathbf{k}^G$ los idempotentes canónicos.

Notemos que la categoría $\operatorname{Rep}(\mathbf{k}^G)$ coincide con la categoría $\mathcal{C}(G, \omega)$ mencionada anteriormente.

Ejemplo 1.10.4. La familia de cuasi-álgebras de Hopf que presentaremos a continuación fue introducida en [DiPR].

Nuevamente consideremos un grupo finito G y un 3-cociclo normalizado $\omega : G \times G \times G \to \mathbf{k}^\times$.

Sean $\triangleright : G \times G \to G$ la acción trivial y $\triangleleft : G \times G \to G$ la acción adjunta de G sobre sí mismo, es decir,

$$g \triangleright a \doteq a \text{ y } a \triangleleft g \doteq g^{-1}ag.$$

Definimos $\theta_g, \gamma_g : G \times G \to \mathbf{k}^\times$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\theta_g(x, y) &= \frac{\omega(g, x, y)\omega(x, y, g \triangleleft (xy))}{\omega(x, g \triangleleft x, y)},\\
\gamma_g(x, y) &= \frac{\omega(x, y, g)\omega(g, x \triangleleft g, y \triangleleft g)}{\omega(x, g, y \triangleleft g)},
\end{aligned}$$

para todo x, y, $g \in G$.

Sea $D^\omega G$ la cuasi-álgebra de Hopf definida como sigue. Como espacio vectorial $D^\omega G = \mathbf{k}^G \otimes \mathbf{k}G$ con las siguientes multiplicación y comultiplicación:

$$\begin{aligned}
(e_g\#x)(e_h\#y) &= \theta_g(x, y)\delta_{g\triangleleft x,h}e_g\#xy,\\
\Delta(e_g\#x) &= \sum_{st=g} \gamma_x(s, t)e_s\#x \otimes e_t\#x.
\end{aligned}$$

Definimos el asociador $\phi = \sum\limits_{g,h,k\in G} \omega(g, h, k)^{-1}e_g \otimes e_h \otimes e_k$, los elementos de $\mathbf{k}^G \otimes \mathbf{k}G$: $\alpha = 1$ y $\beta = \sum_{g\in G} \omega(g, g^{-1}, g)e_g\#1$, y la antípoda $S(e_g\#x) = \theta_{g^{-1}}(x, x^{-1})\gamma_x(g, g^{-1})e_{g^{-1}\triangleleft x}\#x^{-1}$.

Además, esta cuasi-álgebra de Hopf satisface que $\operatorname{Rep} D^\omega G = Z(\mathcal{C}(G, \omega))$.

1.11. Categorías módulo sobre categorías tensoriales

La noción de categoría tensorial categorifica la noción de anillo. De la misma forma, la noción de categoría módulo categorifica la de módulo sobre un anillo. En esta sección desarrollaremos la teoría de categorías módulo sobre categorás tensoriales, la cual no sólo es interesante en sí misma, sino que es también fundamental para entender las categorías tensoriales, de la misma forma que el estudio de los módulos ayuda a la comprensión de la estructura de los anillos. Para los resultados y definiciones básicas de esta parte referimos a [EGNO, O2].

Un *álgebra* en una categoría monoidal $(\mathcal{C}, \otimes, a, \mathbf{1}, l, r)$ es una terna $A = (A, m, \eta)$, donde A es un objeto de $\mathcal{C}$ y $m : A \otimes A \to A$, $\eta : \mathbf{1} \to A$ son morfismos en $\mathcal{C}$, llamados multiplicación y unidad, respectivamente, que satisfacen los axiomas usuales de asociatividad y unidad. En el caso en que $\mathcal{C} = \mathbf{Vec}$ la definición se reduce a la de álgebra asociativa de dimensión finita con unidad.

Ejemplo 1.11.1. 1. El objeto unidad $\mathbf{1}$ es un álgebra en $\mathcal{C}$.

2. El álgebra de funciones $\mathbf{k}^G$ de un grupo finito G en el cuerpo de base $\mathbf{k}$ es un álgebra en $\operatorname{Rep} G$ (G actúa sobre sí mismo por multiplicación a izquierda y, por lo tanto, actúa en $\mathbf{k}^G$ vía la acción contragradiente a la anterior).

3. Las álgebras en $\mathcal{C}(G)$ son exactamente las $\mathbf{k}$-álgebras G-graduadas.

4. Podemos generalizar el ejemplo del inciso anterior como sigue. Sea ω un 3-cociclo en G a valores en $\mathbf{k}^\times$, y sea ψ una 2-cocadena de G tal que $\omega = d\psi$. Entonces, podemos considerar el álgebra de grupo torcida $\mathbf{k}_\psi H$ en $\mathcal{C}(G,\omega)$, siendo ésta el objeto $\oplus_{h\in H}\delta_h$ de $\mathcal{C}(G,\omega)$, y podemos munirla con multiplicación $\delta_h \cdot \delta'_h = \psi(h,h')\delta_{hh'}$. El álgebra $\mathbf{k}_\psi H$ es asociativa en el sentido usual si y sólo si ω es trivial, pero siempre es asociativa en la categoría $\mathcal{C}(G,\omega)$.

Sea A un álgebra en $\mathcal{C}$. Un A-módulo a izquierda es un par (M,μ), donde $M \in \mathcal{C}$, y $\mu : A\otimes M \to M$ es un morfismo que satisface axiomas similares a los usuales para módulos sobre anillos. Un morfismo de A-módulos a izquierda $f : (M,\mu) \to (M',\mu')$ es un morfismo $f : M \to M'$ en $\mathcal{C}$, que conmuta con la acción de A, es decir $f\circ\mu = \mu'\circ(f\otimes \mathrm{id}_A)$. El conjunto de morfismos de A-módulos de M en M' será denotado por $\operatorname{Hom}_A(M,M')$. Notar que éste es un subconjunto de $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(M,M')$. De manera análoga, podemos definir las nociones de A-módulos a derecha y A-bimódulos y sus respectivos morfismos. Las categorías de A-módulos a izquierda, A-módulos a derecha y A-bimódulos en $\mathcal{C}$ serán denotadas por ${}_A\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_A$ y ${}_A\mathcal{C}_A$, respectivamente. Éstas son categorías semisimples si A es un álgebra separable sobre $\mathbf{k}$. Luego, si $\mathbf{k}$ es un cuerpo de característica cero, dichas categorías son semisimples si A lo es.

Definición 1.11.2. Una *categoría módulo* (a izquierda) sobre una categoría tensorial $\mathcal{C}$, o una *representación* de $\mathcal{C}$, es una categoría abeliana $\mathcal{M}$ equipada con un bifuntor exacto $\otimes^{\mathcal{M}} : \mathcal{C}\times\mathcal{M} \to \mathcal{M}$, junto con isomorfismos naturales $a^{\mathcal{M}}_{X,Y,M} : (X\otimes Y)\otimes^{\mathcal{M}} M \to X\otimes^{\mathcal{M}}(Y\otimes^{\mathcal{M}} M)$, $l^{\mathcal{M}}_M : \mathbf{1}\otimes^{\mathcal{M}} M \to M$ tales que los siguientes diagramas conmutan:

<u>Asociatividad</u>:

$$\begin{tikzcd}
((X\otimes Y)\otimes Z)\otimes^{\mathcal{M}} M \arrow[r, "a^{\mathcal{M}}_{X\otimes Y,Z,M}"] \arrow[d, "a_{X,Y,Z}\otimes^{\mathcal{M}}\mathrm{id}_M"'] & (X\otimes Y)\otimes(Z\otimes^{\mathcal{M}} M) \arrow[r, "a^{\mathcal{M}}_{X,Y,Z\otimes^{\mathcal{M}} M}"] & X\otimes(Y\otimes(Z\otimes^{\mathcal{M}} M)) \\
(X\otimes(Y\otimes Z))\otimes^{\mathcal{M}} M \arrow[rr, "a^{\mathcal{M}}_{X,Y\otimes Z,M}"'] & & X\otimes((Y\otimes Z)\otimes^{\mathcal{M}} M) \arrow[u, "\mathrm{id}_X\otimes a^{\mathcal{M}}_{Y,Z,W}"']
\end{tikzcd}$$

<u>Unidad</u>:

$$\begin{tikzcd}
(X\otimes\mathbf{1})\otimes^{\mathcal{M}} M \arrow[rr, "r_X\otimes^{\mathcal{M}}\mathrm{id}_M"] \arrow[dr, "a^{\mathcal{M}}_{X,\mathbf{1},M}"'] & & X\otimes^{\mathcal{M}} M \\
& X\otimes^{\mathcal{M}}(\mathbf{1}\otimes^{\mathcal{M}} M) \arrow[ur, "\mathrm{id}_X\otimes^{\mathcal{M}} l^{\mathcal{M}}_M"'] &
\end{tikzcd}$$

Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}'$ categorías módulo sobre $\mathcal{C}$. Un funtor de $\mathcal{C}$-módulos de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{M}'$ es un par (F, s), donde $F : \mathcal{M} \to M'$ es un funtor, $s_{X,M} : F(X \otimes^{\mathcal{M}} M) \to X \otimes^{\mathcal{M}'} F(M)$ es una familia de isomorfismos naturales, $X \in \mathcal{C}$, $M \in \mathcal{M}$, tales que los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
F(X \otimes (Y \otimes^{\mathcal{M}} M)) \arrow[d, "s_{X, Y \otimes^{\mathcal{M}} M}"'] & F((X \otimes Y) \otimes^{\mathcal{M}} M) \arrow[l, "F(a^{\mathcal{M}}_{X,Y,M})"'] \arrow[r, "s_{X \otimes Y, M}"] & (X \otimes Y) \otimes^{\mathcal{M}'} F(M) \arrow[d, "a^{\mathcal{M}'}_{X,Y,F(M)}"] \\
(X \otimes F(Y \otimes^{\mathcal{M}} M) \arrow[rr, "\mathrm{id}_X \otimes^{\mathcal{M}'} s_{Y,M}"'] & & X \otimes (Y \otimes^{\mathcal{M}'} F(M))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
F(\mathbf{1} \otimes^{\mathcal{M}} M) \arrow[rr, "s_{\mathbf{1},M}"] \arrow[dr, "F(l^{\mathcal{M}}_M)"'] & & \mathbf{1} \otimes^{\mathcal{M}'} F(M) \arrow[dl, "\mathrm{id}_{\mathbf{1}} \otimes^{\mathcal{M}'} l^{\mathcal{M}'}_{F(M)}"] \\
& F(M) &
\end{tikzcd}$$

Observación 1.11.3. En [O2, Definition 6] se considera la noción de categoría módulo sobre una categoría monoidal semisimple, para la cual se pide, adicionalmente, que la categoría módulo sea semisimple y que el bifuntor que da lugar a la acción sea aditivo.

Una categoría módulo es *indescomponible* si no es equivalente a la suma directa de dos categorías módulo no triviales.

A continuación listaremos algunos ejemplos de categorías módulo.

Ejemplo 1.11.4. Si $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \otimes, a, \mathbf{1}, l, r)$ es una categoría tensorial, entonces $\mathcal{C}$ es una categoría módulo sobre sí misma vía $\otimes$.

Ejemplo 1.11.5. Si H es un álgebra de Hopf y $\lambda : A \to H \otimes A$ es un H-comódulo álgebra a izquierda, entonces la categoría de A-módulos a izquierda de dimensión finita, ${}_A\mathcal{M}$ es una representación de $\mathrm{Rep}(H)$. La acción $\overline{\otimes} : \mathrm{Rep}(H) \times_A \mathcal{M} \to_A \mathcal{M}$ está dada por $V \overline{\otimes} M = V \otimes M$, para $V \in \mathrm{Rep}(H)$, $M \in_A \mathcal{M}$. La estructura de A-módulo en $V \otimes M$ está dada por la coacción λ.

Sean $\mathcal{C}$ una categoría de fusión y $\mathcal{M}$ una categoría módulo a izquierda indescomponible sobre $\mathcal{C}$. La categoría $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}} = \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ de endofuntores de $\mathcal{C}$-módulos de $\mathcal{M}$ es una categoría tensorial. El producto tensorial es la composición de funtores y el objeto identidad es el funtor identidad. Los duales de los funtores son sus adjuntos (el adjunto de un funtor de $\mathcal{C}$-módulos tiene estructura natural de funtor de $\mathcal{C}$-módulos debido a que $\mathcal{C}$ es una categoría rígida). Diremos que $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$ es la *categoría dual* de $\mathcal{C}$ con respecto a $\mathcal{M}$. Cuando $\mathcal{C}$ es semisimple y $\mathcal{M}$ es un $\mathcal{C}$-módulo semisimple indescomponible la categoría $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$ también es semisimple.

La noción de Morita equivalencia en el contexto de las categorías tensoriales ha sido introducida por M. Mueger [Mu2] en paralelo a la noción clásica de Morita equivalencia entre anillos. Para esto se reemplazan los módulos sobre anillos por categorías módulo sobre categorías tensoriales.

Definición 1.11.6. Las categorías tensoriales $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son *Morita equivalentes* si $\mathcal{D} \cong (\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}})^{\mathrm{op}}$ para alguna categoría módulo $\mathcal{M}$ indescomponible sobre $\mathcal{C}$.

Por ejemplo, dado un grupo finito G, las categorías $\mathrm{Rep}(G)$ y $\mathcal{C}(G)$ son equivalentes Morita.

Teorema 1.11.7. *Dos categorías de fusión $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son equivalentes Morita si y sólo si sus centros de Drinfeld $Z(\mathcal{C})$ y $Z(\mathcal{D})$ son equivalentes como categorías tensoriales trenzadas.*

Demostración. Ver [ENO2, Theorem 3.1]. □

Capítulo 2

Categorías de fusión

En este capítulo recordaremos propiedades y definiciones asociadas a una clase particular de categorías tensoriales, las categorías de fusión, siendo éstas uno de los principales objetos de estudio de esta tesis. La bibliografía recomendada para estos temas es [BaKi, DGNO2, EGNO, ENO, ENO2, GN, O2]. A lo largo del mismo, trabajaremos sobre un cuerpo $\mathbf{k}$ algebraicamente cerrado y de característica 0.

2.1. Definiciones y ejemplos

Definición 2.1.1. Una *categoría de fusión* sobre $\mathbf{k}$ es una categoría tensorial semisimple que posee una cantidad finita de clases de isomorfismos de objetos simples.

A continuación listamos algunos ejemplos.

1. La categoría $\operatorname{Rep} G$ es una categoría de fusión si el grupo G es finito.
2. La categoría $\mathcal{C}(G, \omega)$ es una categoría de fusión cuando $\omega : G \times G \times G \to \mathbf{k}^{\times}$ es un 3-cociclo y G es un grupo finito. En particular, la categoría $\mathcal{C}(G)$ es de fusión si G es un grupo finito.
3. La categoría $\operatorname{Rep} H$ es una categoría de fusión si y sólo si H es un (cuasi-)álgebra de Hopf semisimple (necesariamente de dimensión finita) sobre $\mathbf{k}$.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión sobre $\mathbf{k}$. Una subcategoría tensorial plena $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ (esto es, una subcategoría tal que $\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, para todo X, $Y \in \mathcal{D}$) es una *subcategoría de fusión* de $\mathcal{C}$ si para todo objeto X en $\mathcal{C}$ isomorfo a un sumando directo de un objeto en $\mathcal{D}$ se tiene que $X \in \mathcal{D}$. Una subcategoría de fusión es necesariamente rígida, por lo cual es una categoría de fusión en sí misma [DGNO2, Corollary F.7 (i)].

La subcategoría de fusión *generada* por una colección $\mathcal{X}$ de objetos de $\mathcal{C}$ es la menor subcategoría de fusión que contiene a $\mathcal{X}$, y la denotaremos por $\mathcal{C}[\mathcal{X}]$. Cuando el conjunto $\mathcal{X}$ está formado por un único objeto X en $\mathcal{C}$, escribiremos simplemente $\mathcal{C}[X]$. De manera análoga a la teoría de caracteres, diremos que X es un objeto *fiel* de $\mathcal{C}$ si X genera toda la categoría de fusión $\mathcal{C}$, es decir, $\mathcal{C}[X] = \mathcal{C}$. Definimos la *subcategoría adjunta* $\mathcal{C}_{\mathrm{ad}}$ de la categoría de fusión $\mathcal{C}$ como la subcategoría de fusión generada por los $X \otimes X^*$, con X recorriendo los objetos simples de $\mathcal{C}$. Por ejemplo, si $\mathcal{C} = \operatorname{Rep} G$, con G un grupo finito, la subcategoría adjunta es $\mathcal{C}_{\mathrm{ad}} = \mathrm{Rep}(G/Z(G))$, donde $Z(G)$ es el centro de G. En el caso en que $\mathcal{C} = \mathcal{C}(G, \omega)$, con G un grupo finito y $\omega : G \times G \times G \to \mathbf{k}^\times$ un 3-cociclo, tenemos que la subcategoría adjunta es $\mathcal{C}_{\mathrm{ad}} = \mathrm{Vec}$, pues

$$\delta_g \otimes \delta_{g^*} = \delta_g \otimes \delta_{g^{-1}} = \delta_{gg^{-1}} = \delta_e = \mathbf{1}. \tag{2.1}$$

Diremos que una categoría de fusión es *punteada* si todos los objetos simples son inversibles. Se puede ver fácilmente que toda categoría de fusión punteada es equivalente a una categoría $\mathcal{C}(G, \omega)$ como la del ejemplo 1.3.7.

El conjunto de clases de isomorfismos de objetos inversibles de una categoría de fusión $\mathcal{C}$ tiene estructura de grupo, con el producto dado por $\otimes$ y elemento identidad $\mathbf{1}$, y lo denotaremos $G(\mathcal{C})$. La subcategoría de fusión $\mathcal{C}_{pt}$ de $\mathcal{C}$ es la subcategoría de fusión generada por $G(\mathcal{C})$, ésta es la subcategoría punteada maximal de $\mathcal{C}$.

Denotaremos por $\mathrm{Irr}\,\mathcal{C}$ al conjunto de clases de isomorfismos de objetos simples de la categoría $\mathcal{C}$, y si X es un objeto simple diremos que $X \in \mathrm{Irr}\,\mathcal{C}$, abusando de la notación. El conjunto $\mathrm{Irr}(\mathcal{C})$ es una *base* sobre $\mathbb{Z}$ del anillo de Grothendieck $\mathbb{G}(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$, introducido en la Subsección 1.5.1. En dicha sección mencionamos que, para alivianar la notación, denotaremos a la clase $[X]$ de X en $\mathbb{G}(\mathcal{C})$ simplemente por X. Notemos que dados X, $Y \in \mathrm{Irr}\,\mathcal{C}$, como consecuencia del Lema de Schur para categorías abelianas, tenemos que

$$\mathrm{Hom}(X, Y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad X \neq Y, \\ \mathbf{k}\,\mathrm{id}_X & \text{si} \quad X = Y. \end{cases}$$

De esta forma, todo objeto X en $\mathcal{C}$ está determinado, salvo isomorfismos, por lo espacios de morfismos $\mathrm{Hom}(Y, X)$, con $Y \in \mathrm{Irr}\,\mathcal{C}$. De hecho, la clase de X se descompone como $X = \sum_{Y \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})} m(Y, X) Y$, donde $m(Y, X) = \dim \mathrm{Hom}(Y, X)$ es la multiplicidad de Y en X.

Se cumplen las siguientes relaciones para todo X, Y, $Z \in \mathcal{C}$:

$$m(X, Y \otimes Z) = m(Y^*, Z \otimes X^*) = m(Y, X \otimes Z^*). \tag{2.2}$$

Como la categoría $\mathcal{C}$ es de fusión el conjunto $\mathrm{Irr}\,\mathcal{C}$ es finito, digamos $\mathrm{Irr}\,\mathcal{C} = \{X_i\}_{i \in I}$, con $X_0 = \mathbf{1}$ y $0 \in I$ finito. De la discusión en los párrafos previos se sigue que, con respecto a la base $\mathrm{Irr}\,\mathcal{C}$ de $\mathbb{G}(\mathcal{C})$, el producto $X_i X_j = \sum_{k \in I} N_{ij}^k X_k$, con $N_{ij}^k = \dim \mathrm{Hom}(X_k, X_i \otimes X_j)$ enteros no negativos. Además, si denotamos por X_{i^*} a la imagen de X_i bajo la involución * inducida por la rigidez de $\mathcal{C}$ (ver Subsección 1.5.1), como consecuencia de (2.2) los coeficientes satisfacen que

$$N_{ij}^k = N_{jk^*}^{i^*} = N_{kj^*}^{i} = N_{k^*i}^{j^*} = N_{j^*i^*}^{k^*}, \quad N_{ij}^0 = \delta_{ij^*}. \tag{2.3}$$

Un anillo con estas propiedades es un *anillo de fusión* y las constantes N_{ij}^k se denominan coeficientes o *reglas de fusión*. Es por esto que al anillo de Grothendieck $\mathbb{G}(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ suele ser llamado también el anillo de fusión de $\mathcal{C}$.

Diremos que dos categorías tensoriales son *Grothendieck equivalentes* si comparten las mismas reglas de fusión, es decir, si sus anillos de Grothendieck son isomorfos como anillos de fusión. Ver [NaR, Definition 4.1].

Dado $X \in \operatorname{Irr}(\mathcal{C})$, definimos el subgrupo $G[X] = \{g \in G(\mathcal{C})/g \otimes X = X\}$ de $\mathbb{G}(\mathcal{C})$, es decir, $G[X]$ es el estabilizador de X por multiplicación a izquierda por clases de isomorfismos de objetos inversibles, o sea, objetos en $G(\mathcal{C})$. De la ecuación (2.2) se desprende que

$$G[X] = \{g \in G(\mathcal{C}) : m(g, X \otimes X^*) > 0\} = \{g \in G(\mathcal{C}) : m(g, X \otimes X^*) = 1\},$$

para todo $X \in \operatorname{Irr} \mathcal{C}$.

2.2. Dimensiones de Frobenius-Perron

En esta subsección introduciremos la noción de dimensión de Frobenius-Perron de una categoría de fusión, así como también la de sus objetos. Con este fin enunciaremos, sin demostración, un teorema de la teoría clásica del álgebra lineal (ver [Ga, XIII.2]) que jugará un rol crucial en la teoría de categorías tensoriales.

Teorema 2.2.1. *(Teorema de Frobenius-Perron) Sea A una matriz cuadrada con entradas no negativas.*

1. *A tiene un autovalor real no negativo. El mayor autovalor real no negativo $\lambda(A)$ de A domina los valores absolutos de todos los otros autovalores de A, es decir el radio espectral de A es un autovalor.*

2. *Si A tiene entradas estrictamente positivas entonces $\lambda(A)$ es un autovalor positivo simple, y el autovector correspondiente puede ser normalizado para tener entradas estrictamente positivas.*

3. *Si A tiene un autovector v con entradas estrictamente positivas, entonces el autovalor correspondiente es $\lambda(A)$.*

Proposición 2.2.2. *(Kronecker) Sea A una matriz con entradas enteras no negativas tal que $\lambda(AA^t) = \lambda(A)^2$. Si $\lambda(A) < 2$ entonces $\lambda(A) = 2cos(\pi/n)$ para algún entero $n \geq 2$.*

Definición 2.2.3. Sea X un objeto de la categoría de fusión $\mathcal{C}$. La dimensión de Frobenius-Perron de X, la cual será denotada por $\operatorname{FPdim} X$, es el autovalor real no negativo maximal de la matriz de multiplicación a izquierda por X en $\mathbb{G}(\mathcal{C})$, el anillo de fusión de $\mathcal{C}$. La dimensión de Frobenius-Perron, $\operatorname{FPdim} \mathcal{C}$, de $\mathcal{C}$ se define como la suma de los cuadrados de las dimensiones de Frobenius-Perron de los objetos simples de $\mathcal{C}$, es decir, $\operatorname{FPdim} \mathcal{C} = \sum_{X \in \operatorname{Irr}(\mathcal{C})} \operatorname{FPdim}(X)^2$.

Etingof, Nikshych y Ostrik estudiaron esta noción en detalle en [ENO] y demostraron muchas propiedades relacionadas. Recomendamos al lector interesado en profundizar en el tema la Sección 8 de dicho trabajo. A continuación, recordaremos algunos de estos resultados.

Teorema 2.2.4. *La asignación $X \to \operatorname{FPdim} X$ se extiende a un morfismo de álgebras $\mathbb{G}(\mathcal{C}) \to \mathbf{k}$. Más aún,* FPdim *es el único morfismo de álgebras $\mathbb{G}(\mathcal{C}) \to \mathbf{k}$ que aplica los objetos simples de la categoría $\mathcal{C}$ en números positivos.*

Corolario 2.2.5. *Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor cuasi-tensorial entre categorías de fusión, entonces $\operatorname{FPdim}_{\mathcal{D}} F(X) = \operatorname{FPdim}_{\mathcal{C}} X$, para todo X en $\mathcal{C}$.*

Observación 2.2.6. La dimensión de Frobenius-Perron de categorías de fusión es un invariante respecto de Morita equivalencias. En particular, $\operatorname{FPdim} Z(\mathcal{C}) = (\operatorname{FPdim} \mathcal{C})^2$, donde $Z(\mathcal{C})$ es el centro de Drinfeld de la categoría de fusión $\mathcal{C}$.

Lema 2.2.7. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión sobre $\mathbf{k}$. Si $\mathcal{D}$ es una subcategoría tensorial plena de $\mathcal{C}$ o una categoría de fusión para la cual existe un funtor tensorial suryectivo $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entonces el cociente* $\operatorname{FPdim} \mathcal{C} / \operatorname{FPdim} \mathcal{D}$ *es un entero algebraico.*

Demostración. Si se cumple la primera hipótesis, la afirmación se sigue de [ENO, Proposition 8.15], mientras que si vale la segunda, el enunciado es consecuencia de [ENO, Corollary 8.11]. □

Teorema 2.2.8.
1. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión trenzada déblimente íntegra. Entonces, para todo objeto simple $X \in \mathcal{C}$, el cociente* $\operatorname{FPdim} \mathcal{C} / \operatorname{FPdim} X$ *es la raíz cuadrada de un entero.*
2. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión trenzada no degenerada déblimente íntegra. Entonces, para todo objeto simple $X \in \mathcal{C}$, el cociente* $\operatorname{FPdim} \mathcal{C} / \operatorname{FPdim} X^2$ *es un entero.*

Demostración. Ver [ENO2, Theorem 2.11.] □

2.2.1. Grados irreducibles

Continuando con la analogía con la teoría de caracteres de grupos finitos de la Subsección 1.1.1, diremos que los *grados irreducibles* de $\mathcal{C}$ son los números reales positivos $\operatorname{FPdim} X$, $X \in \operatorname{Irr}(\mathcal{C})$, es decir, los grados irreducibles son la dimensiones de Frobenius-Perron de los objetos simples de la categoría de fusión $\mathcal{C}$. Denotaremos al conjunto de grados irreducibles de $\mathcal{C}$ por

$$\mathrm{c.d.}(\mathcal{C}) = \{\operatorname{FPdim} X : X \in \operatorname{Irr}(\mathcal{C})\}.$$

Una categoría de fusión $\mathcal{C}$ es *íntegra* si $\mathrm{c.d.}(\mathcal{C}) \subseteq \mathbb{N}$. Cuando la dimensión de Frobenius-Perron de $\mathcal{C}$ es un número entero positivo se dice que $\mathcal{C}$ es una categoría *débilmente íntegra*.

Cuando $\mathcal{C}$ es la categoría de representaciones de dimensión finita de una cuasi-álgebra de Hopf semisimple, las dimensiones de Frobenius-Perron de los objetos coinciden con las dimensiones de los espacios vectoriales subyacentes. Por lo tanto, $\operatorname{Rep} H$ es una categoría íntegra, para toda cuasi-álgebra de Hopf H. Más aún, toda categoría de fusión íntegra es de esta forma, es decir, $\mathcal{C}$ es íntegra si y sólo si es equivalente a la categoría de representaciones de dimensión finita de una cuasi-álgebra de Hopf semisimple [ENO, Theorem 8.33].

Algunas propiedades de la categoría de fusión $\mathcal{C}$ se relacionan fuertemente con las dimensiones de Frobenius-Perron. Por ejemplo, tenemos que en el anillo de Grothendieck $\mathbb{G}(\mathcal{C})$ se cumple:

$$XX^* = \sum_{g \in G[X]} g + \sum_{\substack{\operatorname{FPdim} Y > 1, \\ Y \in \operatorname{Irr} \mathcal{C}}} m(Y, XX^*)Y. \tag{2.4}$$

Observación 2.2.9. Se desprende de la Ecuación (2.4) que $g \in \mathcal{C}$ es inversible si y sólo si $\operatorname{FPdim} g = 1$.

Supongamos que $\mathcal{C}$ es una categoría de fusión íntegra con $|\mathrm{c.d.}(\mathcal{C})| = 2$. Más precisamente, consideremos $\mathrm{c.d.}(\mathcal{C}) = \{1, d\}$, para algún número entero $d > 1$. Afirmamos que d divide al orden del estabilizador $G[X]$, para todo $X \in \operatorname{Irr}(\mathcal{C})$ con $\operatorname{FPdim} X > 1$. En particular, d divide al orden de

$G(\mathcal{C})$, y por lo tanto $G(\mathcal{C}) \neq \mathbf{1}$. Efectivamente, si $X \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$ con $\mathrm{FPdim}\, X = d$, podemos reescribir la Ecuación (2.4) de la siguiente forma:

$$XX^* = \sum_{g \in G[X]} g + \sum_{\mathrm{FPdim}\, Y = d} m(Y, XX^*)Y.$$

Luego, tomando dimensiones de Frobenius-Perron, la afirmación queda probada. Observemos que $\mathrm{FPdim}(\sum_{g \in G[X]} g) \geq 1$, pues $\mathbf{1} \in G[X]$ para todo $X \in \mathcal{C}$.

2.3. Categorías de Tambara-Yamagami

Un ejemplo importante de categorías de fusión son las llamadas categorías de Tambara-Yamagami, introducidas por los mismos en su trabajo [TY]. En esta sección comentaremos brevemente su construcción.

Consideremos los siguientes datos:

- Un grupo *abeliano finito* G (con elemento identidad e y notación multiplicativa para el producto).
- Un bicaracter $\chi : G \times G \to \mathbf{k}^\times$ *simétrico no degenerado*, es decir, para todo a, b, $c \in G$ tenemos que $\chi(a, b) = \chi(b, a)$, $\chi(ab, c) = \chi(a, c)\chi(b, c)$ y la aplicación inducida $f : G \to \widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbf{k}^\times)$, $f(a)(b) = \chi(a, b)$, es un isomorfismo.
- Un elemento $\tau \in \mathbf{k}$ tal que $|G|\tau^2 = 1$.

Definimos la categoría de Tambara-Yamagami $\mathcal{TY} = \mathcal{TY}(G, \chi, \tau)$ asociada a los datos anteriores como la categoría semisimple cuyas clases de isomorfismos de objetos simples son $\mathrm{Irr}\,\mathcal{TY} = G \cup \{X\}$, con $X \notin G$. Los morfismos están determinados por $\mathrm{Hom}(s, t) = \delta_{s,t}\mathbf{k}$, para s, $t \in \mathrm{Irr}\,\mathcal{TY}$. El morfismo identidad $s \to s$ es el elemento $1 \in \mathbf{k}$. El objeto identidad es $\mathbf{1} = e \in G$ y las reglas de fusión de la categoría son las siguientes

$$g \otimes h = gh, \quad X \otimes X = \oplus_{g \in G} g, \tag{2.5}$$

para todo g, $h \in G$. Los duales en $\mathcal{TY}$ están dados por $X^* = X$ y $g^* = g^{-1}$, para $g \in G$. Además, dado que X es el único simple no inversible en $\mathcal{TY}$, se deduce que $g \otimes X = X = X \otimes g$, para todo $g \in G$, es decir, el estabilizador $G[X]$ de X es el grupo G.

Observación 2.3.1. La dimensión de Frobenius-Perron de X es $\mathrm{FPdim}\, X = |\tau|^{-1}$ y, por lo tanto, tenemos que $\mathrm{FPdim}\,\mathcal{TY} = 2|G|$.

Luego, la categoría de Tambara-Yamagami $\mathcal{TY}$ siempre es débilmente íntegra y, es íntegra si y sólo si $|\tau|^{-1}$ es un número entero, en cuyo caso es equivalente a la categoría de representaciones de dimensión finita de una cuasi-álgebra de Hopf.

De esta forma, la categoría de Tambara-Yamagami $\mathcal{TY} = \mathcal{TY}(G, \chi, \tau)$ es una categoría de fusión y tenemos el siguiente teorema de caracterización.

Teorema 2.3.2. *[TY] Sea G un grupo finito. Consideremos el anillo de fusión K con base $G \cup \{X\}$ y multiplicación $a \cdot b = ab$, $a \cdot X = X = X \cdot a$, $X \cdot X = \sum_{a \in G} a$, para todo $a \in G$, con la involución $a^* = a^{-1}$, $X^* = X$. Supongamos que $\mathcal{C}$ es una pre-categoría de fusión tal que $\mathbb{G}(\mathcal{C}) \cong K$. Entonces*

G es abeliano, y existen un caracter simétrico no degenerado $\chi : G \times G \to \mathbf{k}^\times$ y un elemento $\tau \in \mathbf{k}$, con $\tau^2|G| = 1$, tales que $\mathcal{C} \cong \mathcal{TY}(G, \chi, \tau)$. Además, $\mathcal{TY}(G, \chi, \tau) \cong \mathcal{TY}(G, \chi', \tau')$ si y sólo si $\tau = \tau'$ y χ, χ' son conjugados por un automorfismo de G.

Las condiciones sobre G (que sea un grupo abeliano cuyo orden es un cuadrado en $\mathbf{k}^\times$) son necesarias para la existencia de una realización del anillo K. Por lo tanto, existen anillos de fusión que no admiten realizaciones.

En el resultado principal del trabajo [Si1] se dieron condiciones suficientes y necesarias para la existencia de trenzas, y la parametrización de las distintas posibles trenzas, en una categoría $\mathcal{TY}$ de Tambara-Yamagami con $G(\mathcal{TY}) = G$ un grupo abeliano finito.

Teorema 2.3.3. *[Si1, Theorem 1.2] Sean G un grupo abeliano finito y $\mathcal{C}$ una categoría de Tambara-Yamagami con $G(\mathcal{C}) = G$. Entonces*

- *$\mathcal{C}$ admite una estructura trenzada si y sólo si G es un 2-grupo abeliano elemental; esto es, todo elemento tiene orden 2.*
- *Las trenzas no equivalentes en $\mathcal{C}$ están en correspondencia uno a uno con las $(n+1)$-uplas $(\delta_1, \ldots, \delta_n, \epsilon)$, con $\epsilon = \pm 1$, $\delta_i = \pm 1$ para todo i, y n el rango del grupo G.*
- *Cada trenza de $\mathcal{C}$ tiene exactamente dos posibles elecciones de* twist *compatibles.*

Ejemplo 2.3.4. Un ejemplo de categorías de Tambara-Yamagami viene dado por las categorías de Ising: éstas son categorías de fusión cuyo único objeto simple no inversible X cumple que $X^{\otimes 2} = \mathbf{1} \oplus a$, donde a es el generador del grupo de objetos inversibles, el cual es isomorfo a $\mathbb{Z}_2$. En particular, tenemos que el conjunto de grados irreducibles es $\mathrm{c.d.}(\mathcal{C}) = \{1, \sqrt{2}\}$ y $\operatorname{FPdim} \mathcal{C} = 4$, por lo cual son categorías de fusión débilmente íntegras pero *no* son íntegras. Además, por [DGNO2, Corollary B.12], toda categoría de Ising trenzada es modular.

Las categorías de Ising fueron estudiadas, por ejemplo, en [DGNO2, Appendix B].

2.4. Categorías casi-grupo

En esta sección daremos otro ejemplo de categoría de fusión, las llamadas categorías casi-grupo, que fueron estudiadas por Jacob Siehler [Si2] y extienden las categorías de Tambara-Yamagami, descriptas en la Sección 2.3.

Una *categoría casi-grupo* es una categoría de fusión que posee exactamente un objeto simple no inversible, salvo isomorfismos. Además, si una tal categoría posee estructura trenzada diremos, simplemente, que es una categoría casi-grupo trenzada.

A continuación describiremos las reglas de fusión de una categoría casi-grupo y veremos que están determinadas por cierta data (G, κ), con G un grupo finito y κ un número entero. Sean $\mathcal{C}$ una categoría casi-grupo y X el objeto no inversible en $\mathcal{C}$. De esta forma, $\operatorname{Irr}(\mathcal{C}) = G(\mathcal{C}) \bigcup \{X\}$, con $X \notin G(\mathcal{C})$. Recordemos que $G(\mathcal{C})$ es el grupo (con el producto tensorial) de clases de isomorfismos de objetos inversibles de $\mathcal{C}$. Sea $g \in G(\mathcal{C})$. Como g es inversible y X es simple no inversible, $g \otimes X$ es un objeto simple no inversible de $\mathcal{C}$, y por lo tanto $g \otimes X \simeq X$, para todo $g \in G(\mathcal{C})$. De la misma forma, dado que X^* es un objeto simple no inversible de $\mathcal{C}$, tenemos $X^* \simeq X$. Así, en nuestro caso, la Ecuación (2.4) queda

$$X \otimes X \simeq \bigoplus_{g \in G(\mathcal{C})} g \oplus \kappa X, \tag{2.6}$$

donde $\kappa = \dim \operatorname{Hom}(X, X \otimes X)$ es un número entero no negativo. Luego, las reglas de fusión de la categoría casi-grupo $\mathcal{C}$ están definidas por el par $(G(\mathcal{C}), \kappa)$.

Observación 2.4.1. Se deduce de (2.6) que la dimensión de Frobenius-Perron de X es solución (positiva) de la ecuación cuadrática $(\operatorname{FPdim} X)^2 - \kappa \operatorname{FPdim} X - |G| = 0$. Por lo tanto, tenemos que $\operatorname{FPdim} X = \frac{\kappa + (\kappa^2 + 4|G|)^{1/2}}{2}$. De esta forma, $\operatorname{FPdim} \mathcal{C} = 2|G| + \kappa \operatorname{FPdim} X$.

Luego, la categoría casi-grupo $\mathcal{C}$ es íntegra si y sólo si $\kappa^2 + 4|G|$ es un cuadrado perfecto, puesto que κ y $(\kappa^2 + 4|G|)^{1/2}$ tienen la misma paridad. Recordemos que, en este caso, $\mathcal{C}$ es equivalente a la categoría de representaciones de dimensión finita de una cuasi-álgebra de Hopf.

Observación 2.4.2. **Caso $\kappa = 0$:** Las categorías casi-grupo con regla de fusión del tipo $(G, 0)$ son precisamente las categorías de Tambara-Yamagami discutidas en la Sección 2.3. Éstas fueron clasificadas, salvo equivalencia tensoriales, en [TY]. Ver el Teorema 2.3.2.

Además, por [Si2, Theorem 1.2], en el caso $|G| = \kappa + 1$, la regla de fusión de casi-grupo (G, κ) admite una estructura monoidal si y sólo si G es el grupo multiplicativo de un cuerpo finito, es decir, es cíclico de orden $p^\alpha - 1$. Para probar que la condición es necesaria, en [Si2], se examinaron las ecuaciones del pentágono en la categoría, y se mostró que el grupo G debe tener cierta estructura, y que sólo los grupos especificados la tienen. Además, en el mismo trabajo, se dieron dos pruebas distintas de que la condición es suficiente. En una se construyen grupos cuyas categorías de representaciones tienen las reglas de fusión especificadas. La otra prueba usa nuevamente un análisis de las ecuaciones del pentágono.

En [Tho] se deduce, de los resultados de P. Deligne y G. Seitz, una clasificación de las categorías casi-grupo simétricas, es decir, aquellas que admiten una trenza involutiva.

Proposición 2.4.3. *[Tho, Proposition 1.4.] Sea $\mathcal{C}$ una categoría casi-grupo simétrica con reglas de fusión determinadas por el par (G, κ), con $\kappa \neq 0$. Entonces $\mathcal{C}$ es equivalente, como categoría tensorial trenzada, a la categoría $\operatorname{Rep}(\mathbb{F}_{p^l} \rtimes \mathbb{F}^*_{p^l})$, para $p^l \neq 2$.*

El resultado principal de [Tho] es la descripción de las categorías casi grupo trenzadas no simétricas.

Teorema 2.4.4. *[Tho, Theorem 1.5.] Sea $\mathcal{C}$ una categoría casi-grupo trenzada no símetrica con reglas de fusión dadas por el par (G, κ), con $\kappa \neq 0$. Entonces G es el grupo trivial, o $\mathbb{Z}_2$, o bien $\mathbb{Z}_3$. Más aún, si G es trivial entonces se tienen (salvo equivalencias de categorías tensoriales trenzadas) cuatro categorías casi-grupos trenzadas asociadas. Todas estas categorías tienen reglas de fusión dadas por el par $(\{1\}, 1)$. Si $G = \mathbb{Z}_2$, entonces hay dos categorías casi-grupo asociadas, ambas con reglas de fusión determinadas por el par $(\mathbb{Z}_2, 1)$. Finalmente, si $G = \mathbb{Z}_3$, entonces existe una categoría casi-grupo asociada cuyas reglas de fusión quedan definidas por el par $(\mathbb{Z}_3, 2)$.*

Observación 2.4.5. Notemos que la Proposición 2.4.3, el Teorema 2.4.4 y el Teorema 2.3.3 dan una clasificación completa de las categorías casi-grupo trenzadas.

2.5. Categorías de tipo grupo

Las categorías de tipo grupo se construyen a partir de grupos finitos y fueron definidas por Ostrik en [O1]. Luego fueron estudiadas en profundidad por Etingof, Nikshych y Ostrik en [ENO].

Una categoría de fusión de *tipo grupo* es una categoría de fusión equivalente a la categoría $\mathcal{C}(G, \omega, F, \alpha)$ de $\mathbf{k}_\alpha F$-bimódulos en la categoría $\mathcal{C}(G, \omega)$, donde G es un grupo finito, $\omega : G^{\times 3} \to \mathbf{k}^\times$ un 3-cociclo, $F \subseteq G$ un subgrupo y $\alpha \in C^2(F, \mathbf{k}^\times)$ una 2-cocadena en F que satisface $\omega|_F = d\alpha$. Esta última condición hace que el álgebra de grupo torcida $\mathbf{k}_\alpha F$ sea un álgebra asociativa en la categoría $\mathcal{C}(G, \omega)$ de espacios vectoriales G-graduados de dimensión finita.

Los objetos simples de una categoría de fusión de tipo grupo $\mathcal{C} = \mathcal{C}(G, \omega, F, \alpha)$ están clasificados por pares (s, U_s), con s recorriendo el conjunto de representantes de coclases dobles de F en G, es decir, las órbitas de la acción de F en el espacio $F\backslash G$ de coclases a izquierda de F en G, $F_s = F \cap sFs^{-1}$ el estabilizador de $s \in F\backslash G$, y U_s una representación irreducible del álgebra de grupo torcida $\mathbf{k}_{\sigma_s} F_s$, esto es, una representación proyectiva irreducible de F_s con respecto a cierto 2-cociclo σ_s determinado por ω. Ver [GNa, Theorem 5.1].

La dimensión de la representación irreducible $W_{(s,U_s)}$ correspondiente a un tal par (s, U_s) es

$$\dim W_{(s,U_s)} = [F : F_s] \dim U_s. \tag{2.7}$$

Corolario 2.5.1. *Los grados irreducibles de la categoría $\mathcal{C}(G, \omega, F, \alpha)$ dividen al orden de F.*

Observación 2.5.2. Se sigue del Corolario 2.5.1 que $\operatorname{FPdim} X \in \mathbb{Z}$, para todo $X \in \operatorname{Irr} \mathcal{C}(G, \omega, F, \alpha)$. Así, la categoría de tipo grupo $\mathcal{C} = \mathcal{C}(G, \omega, F, \alpha)$ es una categoría de fusión íntegra. En particular, $\mathcal{C}$ es equivalente a la categoría de representaciones de dimensión finita de una cuasi-álgebra de Hopf semisimple. Una construcción explícita de una cuasi-álgebra de Hopf H para la cual $\operatorname{Rep} H \simeq \mathcal{C}$ fue dada en [N2].

Como álgebra, H es el producto cruzado $\mathbf{k}^{F\backslash G} \#_\sigma \mathbf{k}F$, donde $F\backslash G$ es el espacio de coclases a izquierda de F en G con la acción natural de F, y σ es cierto 2-cociclo determinado por ω.

De esta forma, las representaciones irreducibles de H, es decir, los objetos simples de $\mathcal{C}$, pueden describirse usando los resultados para productos cruzados de grupos dados en [MW]: esto está detallado en [N2, Proposition 5.5].

El grupo $G(\mathcal{C})$ de clases de isomorfismos de objetos invertibles en $\mathcal{C}$ encaja en una sucesión exacta

$$1 \to \widehat{F} \to G(\mathcal{C}) \to K \to 1, \tag{2.8}$$

con $K = \{x \in N_G(F) : [\sigma_x] = 1\}$. Ver [GNa, Theorem 5.2].

Diremos que una (cuasi-)álgebra de Hopf semisimple H es de tipo grupo si la categoría $\operatorname{Rep} H$ es de tipo grupo. En [Ni] se construyeron ejemplos de álgebras de Hopf semisimples que no son de tipo grupo.

Dada $\mathcal{C} = \mathcal{C}(G, \omega, F, \alpha)$ una categoría de fusión de tipo grupo, consideremos un subgrupo Γ de G, y un 2-cociclo $\beta \in Z^2(\Gamma, \mathbf{k}^\times)$, tales que

- la clase $\omega|_\Gamma$ es trivial;
- $G = F\Gamma$;

- la clase $\alpha|_{F\cap\Gamma}\beta^{-1}|_{F\cap\Gamma}$ es no degenerada.

En este caso, existe un álgebra de Hopf semisimple H cuya categoría de representaciones de dimensión finita $\operatorname{Rep} H$ es equivalente a $\mathcal{C}$. En el trabajo [O1] se mostró que las clases de equivalencia de subgrupos Γ de G que satisfacen las condiciones anteriores clasifican los funtores de fibra $\mathcal{C} \mapsto \mathrm{Vec}$; esto corresponde a las diferentes álgebras de Hopf H.

Como consecuencia de la definición tenemos que una categoría de fusión es de tipo grupo si y sólo si es Morita equivalente una categoría de fusión punteada $\mathcal{C}(G, \omega)$ [O1], [ENO, Proposition 8.42].

La clase de categorías de fusión de tipo grupo es cerrada bajo productos tensoriales, tomar categorías duales con respecto a categorías módulo indescomponibles, categorías opuestas, subcategorías plenas y cocientes [O1], [ENO, Proposition 8.44]. Así, el centro de Drinfeld $Z(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ es de tipo grupo si y sólo si $\mathcal{C}$ es de tipo grupo.

Los resultados de [N1] dan otra caracterización de las categorías de tipo grupo:

Teorema 2.5.3. *Sea H una cuasi-álgebra de Hopf semisimple. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *H es de tipo grupo.*
2. *$D(H)$ es* twist *equivalente a $D^{\omega}(G)$, para algún grupo finito G y un 3-cociclo $\omega \in Z(G, \mathbf{k}^{\times})$.*

Observación 2.5.4. Recordemos que asociada al producto bicruzado $H = \mathbf{k}^{\Gamma}\,{}^{\tau}\#_{\sigma}\mathbf{k}F$ tenemos la siguiente sucesión exacta *abeliana*

$$\mathbf{k} \to \mathbf{k}^{\Gamma} \to H \to \mathbf{k}F \to \mathbf{k}, \tag{2.9}$$

donde todas las aplicaciones son las canónicas. Más aún, toda álgebra de Hopf que admite una tal extensión abeliana es necesariamente isomorfa a un producto bicruzado. Ver Sección 1.8.

El álgebra de Hopf H es de tipo grupo. De hecho, por [N1, 4.2], tenemos una equivalencia de categorías de fusión $\operatorname{Rep} H \simeq \mathcal{C}(G, \omega, F, 1)$, donde $\omega : G \times G \times G \to \mathbf{k}^{\times}$ es el 3-cociclo asociado al elemento de $\operatorname{Opext}(k^{\Gamma}, kF)$ correspondiente a la sucesión (2.9) en la *sucesión exacta de Kac* (ver el Teorema 1.8.3).

En el trabajo [GNaN], los autores dieron un criterio para determinar cuándo una categoría de Tambara-Yamagami, introducidas en la Sección 2.3, es de tipo grupo. Recordemos que un subgrupo $L \subset G$ se dice *Lagrangiano* (con respecto al bicaracter χ) si $L = L^{\perp}$ con respecto al producto interno dado por χ en G.

Teorema 2.5.5. *[GNaN, Theorem 4.6] Sea $\mathcal{C} = \mathcal{TY}(G, \chi, \tau)$ una categoría de fusión de Tambara-Yamagami. Entonces $\mathcal{C}$ es de tipo grupo si y sólo si G contiene un subgrupo Lagrangiano (con respecto al bicaracter χ).*

Además, el siguiente Lema da condiciones suficientes para que en un 2-grupo abeliano contenga un subgrupo Langrangiano.

Lema 2.5.6. *Sean G un 2-grupo abeliano y χ una forma bilineal simétrica no degenerada en G. Si $|G| = 2^{2n}$ entonces G contiene un subgrupo Lagrangiano.*

Demostración. Ver [GNaN, Lemma 4.5]. □

2.6. Equivariantización y de-equivariantización

Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial sobre $\mathbf{k}$. Denotamos por $\operatorname{End}_{\otimes}\mathcal{C}$ la categoría monoidal cuyos objetos son los endofuntores tensoriales de $\mathcal{C}$, los morfismos son las transformaciones naturales monoidales, el producto tensorial es la composición de funtores tensoriales y el objeto unidad es el funtor identidad $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$. Dado un grupo G, denotaremos por $\underline{G}$ la categoría monoidal estricta cuyos objetos son los elementos de G, los morfismos son las identidades y el producto tensorial es la multiplicación de elementos en el grupo G.

Una acción del grupo G en la categoría tensorial $\mathcal{C}$ (por autoequivalencias tensoriales) es un funtor fuertemente monoidal $\rho : \underline{G} \to \operatorname{End}_{\otimes}\mathcal{C}$. Esto es equivalente a contar con los siguientes datos:

1. Para cada $g \in G$, un endofuntor tensorial $\rho^g : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$,
2. Para $g, h \in G$, un isomorfismo monoidal $\rho_2^{g,h} : \rho^g\rho^h \xrightarrow{\sim} \rho^{gh}$,
3. Un isomorfismo monoidal $\rho_0 : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} \rho^e$,

tales que los siguientes diagramas son conmutativos

$$\begin{tikzcd}
\rho^g\rho^h\rho^k \arrow[r, "\rho_2^{g,h}\rho^k"] \arrow[d, "\rho^g\rho_2^{h,k}"'] & \rho^{gh}\rho^k \arrow[d, "\rho_2^{gh,k}"] \\
\rho^g\rho^{hk} \arrow[r, "\rho_2^{g,hk}"'] & \rho^{ghk}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\rho^g \arrow[r, "\rho^g\rho_0"] \arrow[d, "\rho_0\rho^g"'] \arrow[dr, "="] & \rho^g\rho^e \arrow[d, "\rho_2^{g,e}"] \\
\rho^e\rho^g \arrow[r, "\rho_2^{e,g}"'] & \rho^g,
\end{tikzcd}$$

para todo $g,\ h,\ k \in G$.

Notemos que si ρ es una acción monoidal de G en $\mathcal{C}$, cada ρ^g es una autoequivalencia tensorial de $\mathcal{C}$, cuya cuasi-inversa es $\rho^{g^{-1}}$, con $g \in G$.

Sea $\rho : \underline{G} \to \operatorname{Aut}_{\otimes}\mathcal{C}$ una acción del grupo G en una categoría tensorial $\mathcal{C}$. Un *objeto G-equivariante* en $\mathcal{C}$ es un par (X, u), donde X es un objeto en $\mathcal{C}$ y u es una familia de isomorfismos $(u^g)_{g\in G}$, con $u^g : \rho^g X \to X$, para cada $g \in G$, satisfaciendo

$$u^g\rho^g(u^h) = u^{gh}\rho_{2X}^{g,h}, \quad u_1\rho_{0X} = \mathrm{id}_X, \tag{2.10}$$

para todo $g,\ h \in G$. Un *morfismo G-equivariante* $f : (X, u) \to (Y, v)$ entre dos ojetos G-equivariantes es un morfismo $f : X \to Y$ en la categoría $\mathcal{C}$ tal que $fu^g = v^g f$, para todo $g \in G$.

La *G-equivariantización* de la categoría $\mathcal{C}$ por el grupo G es la categoría $\mathcal{C}^G$ de objetos y morfismos G-equivariantes de $\mathcal{C}$. El objeto unidad de $\mathcal{C}^G$ es $(1, \rho_0^{g^{-1}})$ y el producto tensorial de dos objetos G-equivariantes (X, u) y (Y, v) está dado por $(X, u)\otimes(Y, v) = (X\otimes Y, w)$, con $w^g = (u^g\otimes v^g){\rho^g}^{-1}_{2_{X,Y}}$, para $g \in G$, y $w = (w_g)_{g\in G}$. El funtor de olvido $F : \mathcal{C}^G \to \mathcal{C}$, $F(X, u) = X$ es un funtor fiel.

Si $\mathcal{C}$ es una categoría de fusión y G un grupo finito, dado que $\mathbf{k}$ es un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 0, entonces la equivariantización $\mathcal{C}^G$ es una categoría de fusión, y su dimensión de Frobenius-Perron es $\operatorname{FPdim}\mathcal{C}^G = |G| \operatorname{FPdim}\mathcal{C}$.

El ejemplo más simple es considerar la acción trivial ρ de un grupo finito G en la categoría Vec. En este caso, la equivariantización es la categoría de representaciones de dimensión finita de G, es decir, $(\mathrm{Vec})^G = \operatorname{Rep} G$.

En el trabajo [BuN] se caracterizaron los objetos simples de la equivariantización $\mathcal{C}^G$ en términos de los objetos simples de $\mathcal{C}$. Notemos que la acción del grupo G permuta las clases de isomorfismo de los objetos simples de $\mathcal{C}$. Dado $Y \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$, denotaremos por $G_Y \doteq \mathrm{St}_G(Y) \subseteq G$ al subgrupo de inercia de Y, esto es,

$$G_Y = \{g \in G : \rho^g(Y) \simeq Y\}.$$

Luego, el objeto simple Y tiene exactamente $n = [G : G_Y]$ G-conjugados $Y = Y_1, \dots, Y_n$ mútuamente no isomorfos. Sea $g_1 = e, \dots, g_n$ un conjunto completo de representantes de coclases a izquierda de G_Y en G. Tenemos que $Y_j \simeq \rho^{g_j} Y$ para $1 \leq j \leq n$. Ahora, si $M = (X, \mu)$ es un objeto simple de $\mathcal{C}^G$ tal que Y es una componente simple de X en $\mathcal{C}$ entonces $X \simeq m \oplus_{i=1}^n Y_i$, donde $m = \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ [BuN, Proposition 2.1].

Observación 2.6.1. [BuN, Corollary 2.2] Se desprende de lo anterior que la dimensión de Frobenius-Perron del objeto simple $M = (X, \mu)$ de $\mathcal{C}^G$ es $\mathrm{FPdim}\, M = m[G : G_Y] \,\mathrm{FPdim}\, Y$, con $m = \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ como antes.

Otra referencia sobre descripciones de los objetos simples de una equivariantización es [NaNW].

Observación 2.6.2. Consideremos una categoría de fusión trenzada $\mathcal{C}$ de tipo grupo. En este caso, la categoría $\mathcal{C}$ es una equivariantización de una categoría de fusión punteada, o sea, $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}^G$, con $\mathcal{D}$ una categoría de fusión punteada y G es un grupo finito que actúa en $\mathcal{D}$ por autoequivalencias tensoriales [NaNW].

Recordemos que el producto tensorial de Deligne de categorías abelianas es cierta construcción universal que da lugar a una nueva categoría. Pero, en el caso en que las categorías $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ son semisimples, el producto tensorial de Deligne $\mathcal{A}_1 \boxtimes \mathcal{A}_2$ es simplemente la categoría cuyos objetos simples son $X_1 \boxtimes X_2$, con $X_i \in \mathcal{A}_i$ simple. Sean $\mathcal{C}$ una categoría de fusión y G un grupo finito actuando en $\mathcal{C}$. La *categoría producto cruzado* $\mathcal{C} \rtimes G$ fue definida en [T] de la siguiente forma. Como categoría abeliana, $\mathcal{C} \rtimes G$ es el *producto tensorial de Deligne* de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}(G)$, es decir $\mathcal{C} \rtimes G = \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{C}(G)$. El producto tensorial en $\mathcal{C} \rtimes G$ está dado por la siguiente fórmula:

$$(X \boxtimes g) \otimes (Y \boxtimes h) \doteq (X \otimes \rho^g(Y)) \boxtimes gh, \quad X, Y \in \mathcal{C}, g, h \in G.$$

Notemos que $\mathcal{M} = \mathcal{C}$ es naturalmente una categoría módulo sobre $\mathcal{C} \rtimes G$.

Tenemos la siguiente caracterización de la G-equivariantización de una categoría de fusión $\mathcal{C}$ en términos de la categoría introducida anteriormente.

Proposición 2.6.3. *Las categorías $\mathcal{C}^G$ y $\mathcal{C} \rtimes G$ son Morita equivalentes, es decir, $\mathcal{C}^G \simeq (\mathcal{C} \rtimes G)^*_{\mathcal{M}}$.*

Demostración. Ver [ENO2, Proposition 2.2], [Ni, Proposition 3.2]. □

Un resultado similar para el contexto más general de las categorías tensoriales fue probado por Tambara en [T, Theorem 4.1].

De la discusión anterior se deduce la siguiente caracterización de las acciones de un grupo finito en categorías de fusión punteadas. Sean $\mathcal{C}$ una categoría de fusión punteada y G un grupo finito actuando por autoequivalencias tensoriales en $\mathcal{C}$. Entonces, $\mathcal{C}^G$ es Morita equivalente a una categoría punteada $\mathcal{C}(A \rtimes \mathbb{G}, \tilde{\omega})$, donde $A \rtimes G$ es el producto semidirecto con respecto a la acción inducida de G en el grupo A de objetos inversibles de $\mathcal{C}$, y $\tilde{\omega} : (A \rtimes \mathbb{G})^{\times 3} \to \mathbf{k}^\times$ es cierto 3-cociclo asociado al 3-cociclo $\omega : A^{\times 3} \to \mathbf{k}^\times$ que determina la asociatividad en $\mathcal{C}$.

Diremos que un funtor tensorial $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre categorías tensoriales es una *equivariantización* si existe un grupo fnito G actuando en $\mathcal{D}$ por autoequivalencias y una equivalencia entre categorías tensoriales $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}^G$ sobre $\mathcal{D}$, es decir, el triángulo de funtores tensoriales

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[dr] & & \mathcal{D}^G \arrow[dl] \\ & \mathcal{D} & \end{tikzcd}$$

conmuta, a menos de un isomorfismo monoidal $\mathbf{k}$-lineal.

A continuación recordaremos brevemente el proceso de de-equivariantización, que es una construcción inversa a la de la equivariantización y fue introducida por Bruguières y Müger en los trabajos [Br] y [Mu1], repectivamente.

Una categoría de fusión simétrica $\mathcal{C}$ se dice *tannakiana* si existe un grupo finito G y una equivalencia de categorías de fusión trenzadas $\mathcal{C} \simeq \operatorname{Rep} G$. Ver, por ejemplo, la Definición 1.6.1, [DGNO2, Definition 2.47] o la Sección 2.10. Sean $\mathcal{C}$ una categoría de fusión y $\varepsilon = \operatorname{Rep}(G)$ una categoría de fusión tannakiana equipada con un funtor tensorial trenzado $\varepsilon \to Z(\mathcal{C})$ tal que la composición con el funtor de olvido $\varepsilon \to Z(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ es fiel y plena. Denotaremos por A al álgebra de funciones en G, es decir, $A = \operatorname{Fun}(G)$. Ésta es un álgebra conmutativa en ε, por lo cual su imagen es un álgebra conmutativa en $Z(\mathcal{C})$. Así, podemos considerar la categoría $\mathcal{C}_G$ de A-módulos en $\mathcal{C}$, que es una categoría de fusión, y la llamaremos la *de-equivariantización* (o *categoría de fibra*) de $\mathcal{C}$.

El funtor tensorial canónico $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_G$, $X \to A \otimes X$ es *dominante*, es decir, todo objeto de $\mathcal{C}_G$ es un subobjeto de $F(X)$, para algún objeto $X \in \mathcal{C}$. Además, el grupo G actúa por autoequivalencias tensoriales en $\mathcal{C}_G$; esta acción es la inducida por la acción de G en A por traslación a derecha [Mu1], [DGNO2]. Más aún, existe una biyección entre subcategorías de $\mathcal{C}$ que contienen la imagen de $\varepsilon = \operatorname{Rep}(G)$ y subcategorías G-estables de $\mathcal{C}_G$, y preserva las subcategorás tannakianas. Como mencionamos anteriormente, los procesos de equivariantización y de-equivariantización son mutuamente inversos, es decir, existen equivalencias canónicas: $(\mathcal{C}_G)^G \simeq \mathcal{C}$ y $(\mathcal{C}^G)_G \simeq \mathcal{C}$. Se sigue que $\operatorname{FPdim} \mathcal{C} = |G| \operatorname{FPdim} \mathcal{C}_G$.

Podemos aplicar la construcción anterior cuando $\mathcal{C}$ es una categoría de fusión trenzada que contiene una subcategoría tannakiana $\varepsilon = \operatorname{Rep}(G)$. En este caso, la trenza de $\mathcal{C}$ hace del funtor de de-equivariantización F un funtor *central*, esto es, F se factoriza por un funtor trenzado $\mathcal{C} \to Z(\mathcal{C}_G)$.

Observación 2.6.4. La categoría $\mathcal{C}_G$ no es, en general, trenzada pero si $\varepsilon \subseteq Z_2(\mathcal{C})$ entonces $\mathcal{C}_G$ es una categoría de fusión trenzada con la trenza heredada de $\mathcal{C}$. Cuando $\varepsilon = Z_2(\mathcal{C})$, la categoría $\mathcal{C}_G$ es no degenerada. Ver [ENO2, Remark 2.3].

El centro de Müger $Z_2(\mathcal{C})$ de una categoría de fusión trenzada y la noción de categoría no degenerada son introducidos en la Sección 2.10.

2.7. Graduación de una categoría de fusión por un grupo finito

En esta sección recordaremos la definición de graduación por un grupo finito G en el contexto de las categorías de fusión, la cual es una herramienta de gran utilidad para dar nuevos ejemplos a partir de categorías de fusión conocidas. También mencionaremos algunas de las propiedades básicas de esta construcción, para lo cual seguiremos [GN]

Definición 2.7.1. Sea G un grupo finito. Una *G-graduación* de una categoría de fusión $\mathcal{C}$ es una decomposición de $\mathcal{C}$ como suma directa de subcategorías abelianas plenas $\mathcal{C} = \oplus_{g\in G}\mathcal{C}_g$, tal que $\mathcal{C}_g^* = \mathcal{C}_{g^{-1}}$ y el producto tensorial $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ mapea $\mathcal{C}_g \times \mathcal{C}_h$ en $\mathcal{C}_{gh}$.

La graduación es *fiel* si $\mathcal{C}_g \neq 0$, para todo $g \in G$. En este caso, diremos que $\mathcal{C}$ es una *G-extension* de $\mathcal{C}_e$.

Notemos que la *componente trivial* $\mathcal{C}_e$ (es decir, la correspondiente al elemento neutro $e \in G$) es una subcategoría de fusión de $\mathcal{C}$, y cada $\mathcal{C}_g$ es una categoría bimódulo sobre $\mathcal{C}_e$.

Observación 2.7.2. Si $\mathcal{C}$ es una G-extensión de $\mathcal{C}_e$, entonces $\operatorname{FPdim}\mathcal{C}_g = \operatorname{FPdim}\mathcal{C}_e$, para todo $g \in G$, y la dimensión de Frobenius-Perron de la categoría es $\operatorname{FPdim}\mathcal{C} = |G| \operatorname{FPdim}\mathcal{C}_e$. Ver [DGNO2, Corollary 4.28].

La siguiente proposición caracteriza las G-extensiones para el caso particular en que $\mathcal{C}$ es la categoría de representaciones de dimensión finita de un álgebra de Hopf semisimple H. Este resultado es una consecuencia inmediata de [GN, Theorem 3.8].

Proposición 2.7.3. *Sea H un álgebra de Hopf semisimple. Consideremos la categoría de fusión $\mathcal{C} = \operatorname{Rep} H$. Entonces una G-graduación fiel de $\mathcal{C}$ correspondonde a una sucesión exacta* central *de álgebras de Hopf $\mathbf{k} \to \mathbf{k}^G \to H \to \overline{H} \to \mathbf{k}$, tal que* $\operatorname{Rep} \overline{H} = \mathcal{C}_e$.

2.7.1. Graduación universal

Gelaki y Nikshych probaron, en el trabajo [GN], que para toda categoría de fusión $\mathcal{C}$ existe una graduación fiel canónica: $\mathcal{C} = \oplus_{g\in U(\mathcal{C})}\mathcal{C}_g$. Esta graduación es llamada la *graduación universal* y el grupo $U(\mathcal{C})$ es denominado el *grupo de graduación universal* de $\mathcal{C}$.

Además, la componente trivial de la graduación universal es la subcategoría adjunta de $\mathcal{C}$, es decir, $\mathcal{C}_e = \mathcal{C}_{\text{ad}}$. Recordemos que la subcategoría adjunta $\mathcal{C}_{\text{ad}}$ de $\mathcal{C}$ es la subcategoría generada por $X \otimes X^*$, con $X \in \operatorname{Irr}\mathcal{C}$.

El nombre de graduación universal se debe a que dicha graduación satisface la siguiente propiedad universal: cualquier G-graduación fiel de la categoría $\mathcal{C}$ está determinada por un epimorfismo de grupos $\pi : U(\mathcal{C}) \to G$. Ver [GN, Corollary 3.7].

Observación 2.7.4. Cuando $\mathcal{C} = \operatorname{Rep} H$, para un álgebra de Hopf semisimple Hopf H, la subcategoría adjunta $\mathcal{C}_{\text{ad}} = \operatorname{Rep} H/HK^+$, con $K = \mathbf{k}^{U(\mathcal{C})}$ la subálgebra de Hopf maximal central de H.

Ejemplo 2.7.5. Si $\mathcal{C} = \mathcal{TY}(G, \chi, \tau)$ es una categoría de Tambara-Yamagami entonces $\mathcal{C}$ es una $\mathbb{Z}_2$-extensión de una categoría de fusión punteada.

Denotemos por X al único objeto simple no inversible de $\mathcal{C}$. Como $X \otimes X^* = \oplus_{g\in G} g$ tenemos que la subcategoría adjunta $\mathcal{C}_{\text{ad}}$ es punteada, esto es $\mathcal{C}_{\text{ad}} = \mathcal{C}_{pt}$. Por lo tanto, podemos descomponer a la categoría como $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\text{ad}} \oplus \mathcal{C}[X]$, donde $\mathcal{C}[X]$ es la subcategoría aditiva generada por X. Notemos que, en este caso, la componente trivial de la graduación es $\mathcal{C}_{\text{ad}}$.

2.8. Nilpotencia de categorías de fusión

Definición 2.8.1. [GN, ENO2] Una categoría de fusión $\mathcal{C}$ es *nilpotente* si existen una sucesión de categorías de fusión

$$\mathcal{C}_0 = \mathrm{Vec}, \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n = \mathcal{C},$$

y una sucesión $G_1, \ldots, G_n$ de grupos finitos tales que $\mathcal{C}_i$ es una G_i-extensión de $\mathcal{C}_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$. Diremos que $\mathcal{C}$ es *cíclicamente nilpotente* si los grupos pueden elegirse cíclicos (o equivalentemente, cíclicos de orden primo).

Luego, tenemos que una categoría de fusión $\mathcal{C}$ es nilpotente si toda subcategoría de fusión no trivial de $\mathcal{C}$ admite una graduación no trivial por un grupo finito.

La serie central ascendente de la categoría de fusión $\mathcal{C}$ se define recursivamente, en términos de la subcategoría adjunta, de la siguiente forma:

$$\mathcal{C}^{(0)} = \mathcal{C}, \quad \mathcal{C}^{(1)} = \mathcal{C}_{\mathrm{ad}}, \quad \mathcal{C}^{(n)} = (\mathcal{C}^{(n-1)})_{\mathrm{ad}},$$

para todo entero $n \geq 1$.

La noción de nilpotencia también puede expresarse mediante la serie central acendente [GN, Definition 4.4]. Una categoría de fusión $\mathcal{C}$ es *nilpotente* si su serie central ascendente converge a la categoría Vec de espacios vectoriales de dimensión finita, es decir, si existe un número entero n para el cual $\mathcal{C}^{(n)} = \mathrm{Vec}$. El menor n para el cual esto se cumple se llama la clase de nilpotencia de $\mathcal{C}$.

Además, diremos que una (cuasi-)álgebra de Hopf semisimple H es nilpotente si su categoría de representaciones $\mathrm{Rep}\, H$ es nilpotente.

Ejemplo 2.8.2. Sea G un grupo finito. La categoría $\mathcal{C} = \mathrm{Rep}\, G$ es nilpotente si y sólo si el grupo G es nilpotente.

Recordemos que un grupo G es nilpotente si y sólo si G posee una serie normal de subgrupos $1 = Z_0 \trianglelefteq Z_1 = Z(G) \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq Z_n = G$ con $Z_{i+1}/Z_i = Z(G/Z_i)$. Además, la subcategoría adjunta de $\mathcal{C} = \mathrm{Rep}\, G$ es $\mathcal{C}_{\mathrm{ad}} = \mathrm{Rep}(G/Z(G))$. Por lo tanto, haciendo inducción en n, podemos ver que $\mathcal{C}^{(n)} = \mathrm{Rep}\, G/Z_n$, para todo $n \geq 1$. La afirmación se sigue de manera inmediata de este hecho.

Ejemplo 2.8.3. Sean G un grupo finito y $\omega : G \times G \times G \to \mathbf{k}^\times$ un 3-cociclo en G. La categoría $\mathcal{C} = \mathcal{C}(G, \omega)$ es siempre nilpotente. Esto se debe a que $\mathcal{C}_{\mathrm{ad}} = \mathrm{Vec}$, por (2.1). Más aún, las categorías con clase de nilpotencia 1 son exactamente de esta forma, esto es, categorías de fusión punteadas.

Ejemplo 2.8.4. Las categorías de Tambara-Yamagami son nilpotentes con clase de nilpotencia 2. Estaa afirmación se sigue del hecho que, para esta tipo de categorías, la subcategoría adjunta es punteada y, por el ejemplo anterior, tiene clase de nilpotencia 1.

El siguiente teorema extiende al contexto categórico un conocido resultado para grupos finitos.

Teorema 2.8.5. *Sea p un número primo. Consideremos una categoría de fusión $\mathcal{C}$ cuya dimensión de Frobenius-Perron es p^n, con $n \geq 1$. Entonces:*

(i) Existe un automorfismo no trivial $g \in \mathrm{Aut}_\otimes(\mathrm{Id}_\mathcal{C})$ de orden p, tal que $\mathcal{C}$ es $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-graduada de la siguiente forma. La categoría se descompone como $\mathcal{C} = \oplus_{j=0}^{p-1} \mathcal{C}_j$, donde $\mathcal{C}_j$ está generada por los objetos simples X tales $g|_X = e^{2\pi j/p}$. Las dimensiones de Frobenius-Perron de la categoría de fusión $\mathcal{C}_0$ y de sus categorías módulos $\mathcal{C}_j$ coinciden, y son iguales a p^{n-1}.

(ii) La categoría $\mathcal{C}$ admite una filtración por subcategorías de fusión $\mathcal{C} \supset \mathcal{C}^{(1)} \supset \cdots \supset \mathcal{C}^{(n)} = \mathrm{Vec}$, con $\dim \mathcal{C}^{(i)} = p^i$

Demostración. Ver [ENO, Theorem 8.28]. □

De esto sigue que, si $\mathcal{C}$ es una p-categoría de fusión, o sea $\mathrm{FPdim}\,\mathcal{C} = p^n$, entonces $\mathcal{C}$ es nilpotente.

Teorema 2.8.6. *[GN, Theorem 6.10] Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión trenzada. Entonces $\mathcal{C}$ es nilpotente si y sólo su centro de Drinfeld $Z(\mathcal{C})$ es nilpotente.*

2.9. Resolubilidad de categorías de fusión

En esta sección introduciremos ciertas nociones que fueron el principal objeto de estudio del trabajo [ENO2].

Una categoría de fusión $\mathcal{C}$ es *débilmente de tipo grupo* si es Morita equivalente a una categoría de fusión nilpotente. Si $\mathcal{C}$ es Morita equivalente a una categoría de fusión cíclicamente nilpotente diremos que $\mathcal{C}$ es *resoluble*. Equivalentemeatente, por [ENO2, Proposition 4.4], la categoría de fusión $\mathcal{C}$ es resoluble si existe una sucesión de categorías de fusión $\mathcal{C}_0 = \mathrm{Vec}, \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n = \mathcal{C}$, donde cada $\mathcal{C}_i$ se obtiene como una G_i-equivariantización o una G_i-extensión de $\mathcal{C}_{i-1}$, con $G_1, \ldots, G_n$ grupos cíclicos de orden primo.

Observemos que toda categoría de fusión de tipo grupo es débilmente de tipo grupo, pues las categorías de tipo grupo son aquellas Morita equivalente a categorías de fusión punteadas; ver Sección 2.5.

Diremos que una (cuasi)-álgebra de Hopf semisimple H es *débilmente de tipo grupo* o *resoluble*, si la categoría $\mathrm{Rep}\, H$ es débilmente de tipo grupo o resoluble, respectivamente.

A continuación se resumen las propiedades básicas de las categorías de fusión débilmente de tipo grupo.

Proposición 2.9.1. *La clase de categorías de fusión débilmente de tipo grupo es cerrada por extensiones y equivariantizaciones, equivalencia Morita, productos tensoriales, centros de Drinfeld, subcategorías y cocientes de categorías.*

Demostración. Ver [ENO2, Proposition 4.1]. □

La siguiente proposición da algunos ejemplos básicos y detalla las propiedades principales de las categorías resolubles.

Proposición 2.9.2.
1. *La clase de categorías de fusión resolubles es cerrada por extensiones y equivariantizaciones por grupos resolubles, equivalencia Morita, productos tensoriales, centros de Drinfeld, subcategorías y cocientes de categorías.*
2. *Sean G un grupo finito y $\omega \in H^3(G, \mathbf{k}^\times)$ un 3-cociclo. Entonces, las categorías $\mathrm{Rep}\, G$ y $\mathcal{C}(G, \omega)$ son resolubles si y sólo si G es un grupo resoluble.*
3. *Toda categoría de fusión trenzada nilpotente es resoluble*

4. Una categoría de fusión trenzada resoluble $\mathcal{C} \neq \mathrm{Vec}$ *contiene un objeto inversible no trivial.*

Demostración. Ver [ENO2, Proposition 4.5]. □

Observación 2.9.3. A diferencia del caso de grupos finitos, que la categoría $\mathcal{C}$ sea nilpotente no implica que $\mathcal{C}$ sea resoluble. Por ejemplo, la categoría $\mathcal{C}(G, \omega)$ es nilpotente para todo grupo G y 3-cociclo $\omega : G \times G \times G \to \mathbf{k}^\times$, mientras que es resoluble si y sólo si G es un grupo resoluble.

Pero, por la Proposición 2.9.2, tenemos que si $\mathcal{C}$ una categoría de fusión trenzada, entonces $\mathcal{C}$ nilpotente implica que $\mathcal{C}$ es resoluble; ver también [ENO2, Proposition 4.5(iii)].

Etingof, Nikshych y Ostrik probaron una versión del clásico Teorema de Burnside en el contexto de las categorías de fusión.

Teorema 2.9.4. *Sea* $\mathcal{C}$ *una categoría de fusión. Si la dimensión de Frobenius-Perron de* $\mathcal{C}$ *es* $\mathrm{FPdim}\,\mathcal{C} = p^r q^s$*, con* p *y* q *números primos, y* r*,* s *enteros no negativos, entonces* $\mathcal{C}$ *es resoluble.*

Demostración. Ver [ENO2, Theorem 1.6]. □

2.10. Categorías modulares. Modularización

Consideremos una categoría de fusión trenzada $\mathcal{C}$, es decir, una categoría de fusión $\mathcal{C}$ equipada con una familia de isomorfismos naturales $\sigma_{X,Y} : X \otimes Y \to Y \otimes X$, para $X, Y \in \mathcal{C}$, que satisfacen los axiomas del hexágono. En la Sección 1.6 se encuentra la definición precisa.

Una *estructura pivotal* en una categoría de fusión $\mathcal{C}$ es un isomorfismo $i : \mathrm{Id} \to {}^{**}$ de funtores tensoriales. Diremos que una categoría de fusión equipada con una estructura pivotal es una *categoría de fusión pivotal*. Por ejemplo, si H es un álgebra de Hopf semisimple sobre $\mathbf{k}$ entonces la categoría $\mathrm{Rep}\, H$ es pivotal. Este hecho se sigue del Teorema de Larson-Radford (ver Teorema 1.7.11), ya que bajo estas hipótesis el cuadrado de la antípoda de H es la identidad y, por lo tanto, $\mathrm{Id} = {}^{**}$. Más aún, este resultado se extiende al caso en que H es una cuasi-álgebra de Hopf semisimple sobre $\mathbf{k}$ [ENO, Proposition 8.23].

Recordemos que en una categoría de fusión, todo objeto simple X es isomorfo a su doble dual X^{**} (ver, por ejemplo, [O2]). Luego, dado un objeto $X \in \mathcal{C}$ y un isomorfismo $f : X \to X^{**}$ definimos la *traza cuántica* $\mathrm{Tr}_X(f)$ de la siguiente forma:

$$\mathrm{Tr}_X(f) = \mathrm{ev}_{X^*} \circ (f \otimes \mathrm{id}_{X^*}) \circ \mathrm{coev}_X,$$

donde $\mathrm{ev}_X : X^* \otimes X \to \mathbf{1}$ y $\mathrm{coev}_X : \mathbf{1} \to X \otimes X^*$ son, repectivamente, los morfismos de evaluación y coevaluación de X, introducidos en la Sección 1.4. Para más detalles sobre la definición de traza cuántica recomendamos la lectura de [BaKi].

Así, dada una categoría de fusión pivotal $\mathcal{C}$ podemos definir la *dimensión global (o categórica)* de un objeto X de $\mathcal{C}$ como:

$$\dim X = \mathrm{Tr}_X(i_X),$$

donde $i : \mathrm{Id} \to {}^{**}$ es la estructura pivotal de $\mathcal{C}$. La dimensión global (o categórica) de la categoría de fusión $\mathcal{C}$ está dada por

$$\dim \mathcal{C} = \sum_{X \in \mathrm{Irr}\, \mathcal{C}} \dim X \dim X^*.$$

Notemos que en una categoría pivotal $\mathcal{C}$, las dimensiones globales de los objetos simples no son necesariamente números reales. Basta considerar la categoría $\operatorname{Rep} G$, donde G es un grupo finito, con la estructura pivotal i dada por un elemento central no trivial de G. En general, $\dim X^* \neq \dim X$.

Una categoría pivotal $\mathcal{C}$ es *esférica* si y sólo si las dimensiones globales a izquierda y derecha coinciden, lo cual es equivalente a que $\dim X = \dim X^*$, para todo objeto simple X en $\mathcal{C}$. En este caso, la dimensión global de $\mathcal{C}$ es $\dim \mathcal{C} = \sum_{X \in \operatorname{Irr} \mathcal{C}} (\dim X)^2$.

Definición 2.10.1. Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión (estricta) trenzada, con trenza σ. Una *estructura ribbon* en $\mathcal{C}$ es un isomorfismo natural $\theta : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$, al cual llamaremos *twist*. Explícitamente, esto es una familia de isomorfismos naturales $\theta_X : X \to X$ que satisfacen:

$$\begin{aligned} \theta_{X \otimes Y} &= (\theta_X \otimes \theta_Y) \circ \sigma_{Y,X} \circ \sigma_{X,Y}, \\ \theta_{\,^*X} &= \,^*(\theta_X), \end{aligned}$$

para todo X, $Y \in \mathcal{C}$.

Notemos que, cuando la trenza σ es simétrica, el ismorfismo natural θ es monoidal. Un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre categorías munidas de estructura ribbon se dice *balanceado (o ribbon)* si es un funtor trenzado compatible con las correspondientes estrcuturas ribbon, es decir, tal que $F(\theta_X) = \theta_{F(X)}$, para todo $X \in \mathcal{C}$.

Además, diremos que una categoría $\mathcal{C}$ es *premodular* si está equipada con una estructura esférica, esto es, $\mathcal{C}$ tiene una estructura pivotal tal que las dimensiones categóricas a izquierda y derecha coinciden, es decir, $\dim X = \dim X^*$, para todo $X \in \mathcal{C}$. Equivalentemente, $\mathcal{C}$ es premodular si está munida de una estructura ribbon compatible [Br, Mu3]. De hecho, si $\mathcal{C}$ es una categoría esférica (con trenza σ), definiendo $\theta_X = (\mathrm{Tr}_X \otimes \mathrm{id}_X)(\sigma_{X,X})$ obtenemos una estructura ribbon compatible con la trenza σ. De manera similar se puede probar la afirmación recíproca.

A continuación introduciremos la noción de categoría modular. Con este fin vamos a presentar primero el Centro de Müger de una categoría de fusión trenzada, así como también algunos otros conceptos relacionados.

Diremos que dos objetos X e Y de una categoría de fusión trenzada $\mathcal{C}$ se *centralizan mutuamente* si $\sigma_{Y,X}\sigma_{X,Y} = \mathrm{id}_{X \otimes Y}$. El *centralizador* $\mathcal{D}'$ de una subcategoría de fusión $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ se define como la subcategoría plena de los objetos de $\mathcal{C}$ que centralizan a todos los objetos de $\mathcal{D}$, es decir,

$$\mathcal{D}' = \{X \in \mathcal{C} : \sigma_{Y,X}\sigma_{X,Y} = \mathrm{id}_{X \otimes Y}, \forall\, Y \in \mathcal{D}\}.$$

El centralizador $\mathcal{D}'$ es una subcategoría de fusión de $\mathcal{C}$.

El *centro de Müger (o centro simétrico)* $Z_2(\mathcal{C})$ de una categoría de fusión trenzada $\mathcal{C}$ es el centralizador de $\mathcal{C}$, esto es, $Z_2(\mathcal{C}) \doteq \mathcal{C}'$. Los objetos de esta subcategoría son llamados *centrales*, *degenerados* o *transparentes*.

Una categoría de fusión trenzada $\mathcal{C}$ se dice *simétrica* si su centro de Müger es toda la categoría, es decir, $Z_2(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$. Esto es equivalente a requerir que la trenza σ cumpla que $\sigma_{Y,X}\sigma_{X,Y} = \mathrm{id}_{X \otimes Y}$, para todo X, $Y \in \mathcal{C}$, y en tal caso la trenza σ es llamada simétrica. Ver también la Definición 1.6.1. En particular, el centro de Müger $Z_2(\mathcal{C})$ es una subcategoría simétrica de $\mathcal{C}$.

Sea G un grupo finito. La categoría $\operatorname{Rep} G$, con la trenza estándar $\sigma_{XY}(x \otimes y) \doteq y \otimes x$, es un ejemplo de categoría de fusión simétrica. Más aún, Deligne probó que toda categoría de fusión simétrica es equivalente a una generalización de $\operatorname{Rep} G$. Ver [De, Corollaire 0.8]. Una categoría simétrica $\mathcal{C}$ es *Tannakiana* si existe un grupo finito G tal que $\mathcal{C}$ es equivalente a $\operatorname{Rep} G$ como categorías de fusión trenzadas. Otras definiciones equivalentes pueden encontrarse en [DGNO2, Definition 2.47].

En el caso extremo opuesto, esto es, cuando $\mathcal{C}$ es una categoría de fusión trenzada con centro de Müger trivial, diremos que $\mathcal{C}$ es *no degenerada*. Una categoría *modular* es una categoría premodular no degenerada.

Teorema 2.10.2. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión modular. Entonces el grupo de graduación universal $U(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ es isomorfo al grupo de caracteres de $G(\mathcal{C})$, es decir, $U(\mathcal{C}) \simeq \widehat{G(\mathcal{C})}$.*

Demostración. Ver [GN, Theorem 6.2]. □

Una categoría de fusión $\mathcal{C}$ es *pseudo-unitaria* si la dimensión global y la dimensión de Frobenius-Perron de $\mathcal{C}$ coinciden, es decir, $\dim \mathcal{C} = \operatorname{FPdim} \mathcal{C}$.

Observación 2.10.3. Si $\mathcal{C}$ es una categoría pseudo-unitaria entonces tiene una estructura canónica esférica con respecto a la cual las dimensiones categóricas de todos los objetos simples coinciden con las dimensiones de Frobenius-Perron de los mismos [ENO, Proposition 8.23].

En particular, este es el caso de las categorías débilmente íntegras, dado que son automáticamente pseudo-unitarias por [ENO, Proposition 8.24]. Así, toda categoría de fusión débilmente íntegra no degenerada es canónicamente una categoría modular.

A continuación comentaremos brevemente el proceso de modularización, el cual es un caso particular de equivariantización, y fue introducido por Bruguieres y Müger en los trabajos [Br] y [Mu1], respectivamente. Además, la modularización da lugar a una sucesión exacta de categorías de fusión, como se muestra en la Observación 2.11.4.

A continuación daremos dos definiciones de *modularización* y daremos una idea de cómo mostrar que son equivalentes.

Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor tensorial entre categorías de fusión. Entonces F es *dominante* si todo objeto simple Y de $\mathcal{D}$ es un subobjeto de $F(X)$ para algún objeto simple X de $\mathcal{C}$.

Definición 2.10.4. Una *modularización* de una categoría pre-modular $\mathcal{C}$ es un funtor balanceado dominante $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, con $\mathcal{D}$ una categoría modular.

Como el funtor F es trenzado y dominante entonces debe trivializar $Z_2(\mathcal{C})$, es decir $F(X)$ es un múltiplo de la identidad para todo $X \in Z_2(\mathcal{C})$.

Teorema 2.10.5. *[Br] Una categoría pre-modular admite una modularización si y sólo el centro de Müger $Z_2(\mathcal{C})$ es Tannakiana, esto es, existe un grupo finito G tal que $Z_2(\mathcal{C}) \simeq \operatorname{Rep} G$ como categorías trenzadas.*

Lema 2.10.6. *Si $\mathcal{C}$ es una categoría de fusión trenzada sobre $\mathbf{k}$ cuya dimensión de Frobenius-Perron es un número natural impar entonces $\mathcal{C}$, equipada con su estructura esférica canónica, es modularizable.*

Demostración. Ver [BrN, Lemma 7.2]. □

2.11. Sucesiones exactas de categorías de fusión

En esta sección recordaremos la noción de sucesión exacta en el contexto de las categorías de fusión, introducida en [BrN], y algunas de sus propiedades básicas. Es posible, por ejemplo, reinterpretar el proceso de equivariantización bajo la acción de un grupo finito en un categoría de fusión y, en particular, la modularización, en términos de sucesiones exactas.

Recordemos que un funtor tensorial $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre categorías de fusión se dice *dominante* si todo objeto simple Y de $\mathcal{D}$ es un subobjeto de $F(X)$ para algún objeto simple X de $\mathcal{C}$. Además, un objeto se dice *trivial* si es isomorfo a $\mathbf{1}^n$, para algún número natural n. Diremos que el funtor tensorial F es *normal* si para todo objeto simple $X \in \mathcal{C}$ satisface que si $F(X)$ contiene una copia del objeto unidad $\mathbf{1}$ entonces $F(X)$ es trivial.

Denotaremos por $\mathfrak{Ker}_F \subseteq \mathcal{C}$ a la subcategoría tensorial plena de objetos X de $\mathcal{C}$ para los cuales $F(X)$ es trivial. Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son categorías de fusión, F es normal si y sólo si todo objeto simple $X \in \mathcal{C}$ con $\mathrm{Hom}(\mathbf{1}, F(X)) \neq 0$ pertenece a $\mathfrak{Ker}_F$, por [BrN, Proposition 3.5 (2)].

Definición 2.11.1. Sean $\mathcal{C}^{'}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}^{''}$ categorías tensoriales sobre $\mathbf{k}$. Una sucesión de funtores tensoriales

$$\mathcal{C}' \xrightarrow{i} \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{C}'' \tag{2.11}$$

es una *sucesión exacta* de categorías tensoriales si

- F es dominante y normal;
- i induce una equivalencia entre $\mathcal{C}^{'}$ y $\mathfrak{Ker}_F \subseteq \mathcal{C}$.

Por ejemplo, una sucesión exacta de grupos $1 \to G^{'} \to G \to G^{''} \to 1$ da lugar a una sucesión exacta de categorías tensoriales:

$$\mathcal{C}(G^{'}) \to \mathcal{C}(G) \to \mathcal{C}(G^{''}).$$

Además, en el caso en que G es un grupo finito tenemos asociada otra sucesión exacta:

$$\mathrm{Rep}\, G^{''} \to \mathrm{Rep}\, G \to \mathrm{Rep}\, G^{'}.$$

Observación 2.11.2. Un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{''}$ normal y dominante da lugar a la sucesión exacta de categorías tensoriales $\mathfrak{Ker}_F \to \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{C}^{''}$.

Sean $\mathcal{C}$ una categoría de fusión sobre $\mathbf{k}$ y G un grupo finito actuando por autoequivalencias tensoriales en $\mathcal{C}$. El funtor de olvido $\mathcal{C}^G \to \mathcal{C}$ es un funtor dominante y define una sucesión exacta de categorías de fusión:

$$\mathrm{Rep}\, G \to \mathcal{C}^G \to \mathcal{C}. \tag{2.12}$$

Proposición 2.11.3. *Sean $\mathcal{C}^{'}$, $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}^{''}$ categorías de fusión y $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{''}$ e $i : \mathcal{C}^{'} \to \mathcal{C}$ funtores tensoriales. Supongamos que F es dominante, i es pleno y se tiene la inclusión $i(\mathcal{C}) \subseteq \mathfrak{Ker}\, F$. Entonces $\mathrm{FPdim}\, \mathcal{C} \geq \mathrm{FPdim}\, \mathcal{C}' \,\mathrm{FPdim}\, \mathcal{C}^{''}$. Más aún, la sucesión*

$$\mathcal{C}' \xrightarrow{i} \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{C}''$$

es exacta si y sólo si $\mathrm{FPdim}\, \mathcal{C} = \mathrm{FPdim}\, \mathcal{C}' \,\mathrm{FPdim}\, \mathcal{C}^{''}$. Además, en tal caso, para la dimensión de Frobenius-Perron de todo objeto simple $Y \in \mathcal{C}^{''}$ tenemos la siguiente fórmula:

$$\mathrm{FPdim}\, Y = \frac{1}{\mathrm{FPdim}\, \mathcal{C}'} \sum_{X \in \mathrm{Irr}\, \mathcal{C}} m(Y, F(X))\, \mathrm{FPdim}\, X,$$

donde $m(Y, F(X))$ *es la multiplicidad de* Y *en* $F(X)$*.*

Demostración. Ver [BrN, Proposition 4.10]. □

Diremos que una sucesión exacta de categorías tensoriales es una *sucesión exacta trenzada* si todas las categorías y funtores involucrados son trenzados. Si $\mathcal{C}' \to \mathcal{C} \to C''$ es una sucesión exacta trenzada entonces $\mathcal{C}'$ es una subcategoría de la categoría de fusión $Z_2(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}$ de objetos transparentes de $\mathcal{C}$.

Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor tensorial trenzado entre categorías de fusión trenzadas que admite un adjunto a izquierda. Supongamos que F es normal y dominante. Entonces existe un grupo finito G actuando en $\mathcal{D}$ por autoequivalencias tensoriales trenzadas y una equivalencia tensorial trenzada $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}^G$ sobre $\mathcal{C}$. Ver [BrN, Corollary 5.31].

Observación 2.11.4. Como mencionamos anteriormente, el proceso de modularización es un caso especial del de de-equivariantización. Esto fue probado en [BrN, Example 5.33]. A continuación haremos un pequeño repaso de este hecho.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría premodular. Supongamos que $\mathcal{C}$ es modularizable, y denotemos su modularización por $F : \mathcal{C} \to \widetilde{\mathcal{C}}$. Dicho funtor es dominante, normal y cumple que $\mathfrak{Ker}_F = Z_2(\mathcal{C})$. Luego, tenemos la siguiente sucesión exacta de categorías de fusión asociada a F:

$$Z_2(\mathcal{C}) \to \mathcal{C} \xrightarrow{F} \widetilde{\mathcal{C}}.$$

Más aún, el funtor F es una equivariantización, por ser un funtor trenzado. Como el centro de Müger $Z_2(\mathcal{C})$ es una categoría tannakiana tenemos una equivalencia tensorial simétrica $Z_2(\mathcal{C}) \simeq \operatorname{Rep} G$, donde G es un grupo finito actuando en $\widetilde{\mathcal{C}}$. Entonces, la categoría $\mathcal{C}$ es la equivariantización de la categoría modular $\widetilde{\mathcal{C}}$ bajo la acción de G, es decir, $\mathcal{C} \simeq \widetilde{\mathcal{C}}^G$.

Capítulo 3

Grados irreducibles

En este capítulo daremos resultados estructurales sobre álgebras de Hopf semisimples y categorías de fusión íntegras, bajo ciertas restricciones sobre el conjunto de grados irreducibles de las mismas. Particularmente, centraremos nuestra atención en el caso en que los grados irreducibles toman exactamente los valores 1 y p, con p un número primo. En todo lo que sigue asumiremos que el cuepor $\mathbf{k}$ es algebraicamente cerrado de característica 0.

Los resultados de este Capítulo demuestran el siguiente teorema.

Teorema 3.0.5. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión sobre $\mathbf{k}$. Entonces tenemos:*

(i) Supongamos que $\mathcal{C}$ es débilmente de tipo grupo y tiene dimensión impar. Entonces $\mathcal{C}$ es resoluble.

Sea p un número primo.

(ii) Supongamos que $\mathcal{C}$ es trenzada y tiene dimensión impar. Asumamos además que el conjunto de grados irreducibles satisface $\mathrm{c.\,d.}(\mathcal{C}) \subseteq \{p^m : m \geq 0\}$. Entonces $\mathcal{C}$ es resoluble.

(iii) Supongamos que $\mathrm{c.\,d.}(\mathcal{C}) \subseteq \{1, p\}$. Entonces $\mathcal{C}$ es resoluble en cualquiera de los siguientes casos:

- $\mathcal{C}$ es de la forma $\mathcal{C}(G, \omega, \mathbb{Z}_p, \alpha)$, es decir, es una categoría de fusión de tipo grupo, y el grupo $G(\mathcal{C})$ tiene orden p.

- $\mathcal{C}$ es una categoría casi-grupo.

- $\mathcal{C} = \operatorname{Rep} H$, con H un álgebra de Hopf cuasitriangular semisimple y $p = 2$.

(iv) Sea H un álgebra de Hopf semisimple tal que $\mathrm{c.\,d.}(H) \subseteq \{1, p\}$. Entonces H^* es nilpotente en cualquiera de los siguientes casos:

- $|G(H^*)| = p$ y p divide a $|G(H)|$.

- $|G(H^*)| = p$ y H es cuasitriangular.

- H es de tipo $(1, p; p, 1)$ como álgebra.

(v) Sea H un álgebra de Hopf semisimple tal que $\mathrm{c.\,d.}(H) \subseteq \{1, 2\}$. Entonces: - H es débilmente de tipo grupo, y más aún, es de tipo grupo si $H = H_{\mathrm{ad}}$. - El grupo $G(H)$ es resoluble.

(vi) Sea H un álgebra de Hopf semisimple de tipo $(1, p; p, 1)$ como álgebra. Entonces H es isomorfa

al twisting *del álgebra de grupo* $\mathbf{k}N$*, donde o bien* $p = 2$ *y* $N = \mathbb{S}_3$ *o* $p = 2^{\alpha-1}$*,* $\alpha > 1$*, y* N *es el grupo afín del cuerpo* $\mathbb{F}_{2^\alpha}$*.*

La prueba de la parte (i) del teorema es una consecuencia del Teorema de Feit-Thompson [FT] que dice que todo grupo finito de orden impar es resoluble. Los detalles se encuentran en la prueba de la Proposición 3.4.1.

El Teorema 3.4.3 prueba la parte (ii). El inciso (iii) sigue del Corolario 3.2.4, el Teorema 3.3.2 y el Teorema 3.3.12 mientras que la Proposición 3.1.10, la Proposición 3.1.11 y la Proposición 3.1.14 implican el punto (iv).

Además, por [N6, Corollary 4.5], las álgebras de Hopf semisimples H en (iv) son *semiresolubles por abajo* en el sentido de [MW]. Combinando el Teorema 3.3.4 y el Corolario 3.3.9 obtenemos el item (v) del teorema. Finalmente, la parte (vi) se deduce del Teorema 3.1.15.

3.1. Nilpotencia

3.1.1. Nilpotencia de una extensión abeliana

En esta subsección analizaremos las condiciones que aseguran la nilpotencia de un álgebra de Hopf H que encaja en una sucesión exacta abeliana de la forma

$$\mathbf{k} \to \mathbf{k}^\Gamma \to H \to \mathbf{k}F \to \mathbf{k}. \tag{3.1}$$

Recordemos que una tal álgebra de Hopf está asociada a un producto bicruzado $H = \mathbf{k}^\Gamma {}^\tau\#_\sigma \mathbf{k}F$, como mencionamos en la Sección 2.5. Más aún, por la Observación 2.5.4, tenemos que $\operatorname{Rep} H \simeq \mathcal{C}(G, \omega, F, 1)$, donde $G = F \bowtie \Gamma$ el grupo factorizable asociado y ω es el 3-cociclo asociado a la sucesión exacta de Kac, presentada en la Sección 1.8. Por lo tanto, H es un álgebra de Hopf de tipo grupo.

Por otro lado, una categoría de fusión de tipo grupo $\mathcal{C}(G, \omega, F, \alpha)$ es nilpotente si y sólo si la clausura normal de F en G es nilpotente [GNa, Corollary 4.3]. Además, esto sucede si y sólo si F es un subgrupo nilpotente y subnormal de G, lo cual es quivalente a que F esté contenido en el subgrupo de Fitting $\operatorname{Fit}(G)$ de G, ver [GNa, Subsection 2.3]. Así, combinando esto con la Observación 2.5.4, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.1.1. *Sean* $\mathbf{k} \to \mathbf{k}^\Gamma \to H \to \mathbf{k}F \to \mathbf{k}$ *una sucesión exacta abeliana y* $G = F \bowtie \Gamma$ *el grupo factorizable asociado. Entonces* H *es nilpotente si y sólo si* $F \subseteq \operatorname{Fit}(G)$*.*

Observación 3.1.2. Supongamos que la sucesión exacta (3.1) es central. Entonces, se sigue del Lema 1.8.4 que F es un subgrupo normal de G. Así, H es nilpotente si y sólo si F es nilpotente, por la Proposición 3.1.1.

Sea p un número primo. En lo que resta de esta subsección consideramos el caso en que H es un álgebra de Hopf semisimple no trivial que encaja en una sucesión exacta de la siguiente forma

$$\mathbf{k} \to \mathbf{k}^{\mathbb{Z}_p} \to H \to \mathbf{k}F \to \mathbf{k}. \tag{3.2}$$

Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión de tipo grupo de la forma $\mathcal{C} = \mathcal{C}(G, \omega, \mathbb{Z}_p, \alpha)$ (Notemos que podemos asumir $\alpha = 1$). En particular, p divide al orden de $G(\mathcal{C})$. Además, por el Corolario 2.5.1, tenemos que $\operatorname{c.d.}(\mathcal{C}) \subseteq \{1, p\}$.

Lema 3.1.3. *Sea $\mathcal{C} = \mathcal{C}(G, \omega, \mathbb{Z}_p, \alpha)$. Supongamos también que $|G(\mathcal{C})| = p$. Entonces G es un grupo de Frobenius con complemento de Frobenius $\mathbb{Z}_p$.*

Demostración. La descripción de las representaciones irreducibles de las categorías de tipo grupo, dada en la Subsección 2.5, combinada con la hipótesis $|G(\mathcal{C})| = p$, implica que $g\,\mathbb{Z}_p\,g^{-1} \cap \mathbb{Z}_p = \{e\}$, para todo $g \in G \backslash \mathbb{Z}_p$. De hecho, todas los objetos simples inversibles de $\mathcal{C}$ están en correspondencia con pares (s, U_s) para los cuales $(\mathbb{Z}_p)_s = \mathbb{Z}_p$. En tal caso, $\mathbf{k}_{\sigma_s}(\mathbb{Z}_p)_s = \mathbf{k}\mathbb{Z}_p$. Además, para un tal s hay asociadas p representaciones irreducibles U_s de grado 1. Ahora, como el orden de $G(\mathcal{C})$ es p, $\mathcal{C}$ posee exactamente p objetos simples inversibles. Por lo tanto, tenemos que $s = e$. En particular, la acción de $\mathbb{Z}_p$ en $\mathbb{Z}_p \backslash G$ no tiene puntos fijos no triviales, es decir, $s \neq e$.

Esta condición es, justamente, la que hace de G un grupo de Frobenius con complemento de Frobenius $\mathbb{Z}_p$, que es lo que queríamos probar. Ver la Definición 1.1.4. □

Observación 3.1.4. Sea G un grupo de Frobenius con complemento de Frobenius $\mathbb{Z}_p$, como en el Lema 3.1.3. El núcleo de Frobenius de G es un subgrupo normal $N \lhd G$, por el Teorema de Frobenius (ver Teorema 1.1.5). Además G es un producto semidirecto $G = N \rtimes \mathbb{Z}_p$.

Más aún, N es un grupo nilpotente, por un teorema de Thompson [Ro, Theorem 10.5.6], [I, Theorem (7.2)]. De hecho, el núcleo de Frobenius es igual al subgrupo de Fitting de G, es decir, $N = \operatorname{Fit}(G)$ [Ro, Exercise 10.5.8].

Como consecuencia tenemos la siguiente:

Proposición 3.1.5. *Consideremos la sucesión exacta abeliana* (3.2) *y supongamos que $|G(H)| = p$. Entonces:*

(i) La sucesión es central, esto es, $G(H) \subseteq Z(H)$.

(ii) El grupo $G = F \bowtie \mathbb{Z}_p$ es un grupo de Frobenius con núcleo F. En particular, F es un grupo nilpotente.

Demostración. Seguiremos la línea de la demostración de [IK, Proposition X.7 (i)]. Consideremos el *matched pair* de grupos $(F, \mathbb{Z}_p)$ asociado a la sucesión exacta abeliana (3.2), como en la Sección 1.8. Sea $G = F \bowtie \mathbb{Z}_p$ el correspondiente grupo factorizable.

La sucesión dual asociada es $\mathbf{k} \to \mathbf{k}^F \to H^* \to \mathbf{k}\mathbb{Z}_p \to \mathbf{k}$, de lo cual se sigue que la categoría de fusión $\operatorname{Rep} H^* \simeq \mathcal{C}(G, \omega, \mathbb{Z}_p, 1)$ es de tipo grupo, por el Corolario 2.5.4. Además, por hipótesis, el grupo $G(\operatorname{Rep} H^*) = G(H)$ es de orden p. Ahora, por el Lema 3.1.3, G es un grupo de Frobenius con complemento de Frobenius $\mathbb{Z}_p$. Así, la Observación 3.1.4 implica que G es un producto semidirecto $G = N \rtimes \mathbb{Z}_p$, con $N = \operatorname{Fit}(G)$ un subgrupo nilpotente.

De la misma forma que en la prueba del Lema 3.1.3, puesto que el orden del grupo $G(H)$ es p, la acción de $\mathbb{Z}_p$ en F no tiene puntos fijos no triviales. Luego, el subgrupo estabilizador de $g \in F$ es trivial para todo $g \neq e$. Por lo tanto, la órbita de g tiene orden p cuando $g \neq e$. Así, descomponiendo a F como unión disjunta de $\mathbb{Z}_p$-órbitas, podemos ver que $|F| \equiv 1 \pmod{p}$. En particular, el orden de F no es divisible por p. En consecuencia, como G/N tiene orden p, la proyección canónica $G \to G/N$ mapea trivialmente a F y, por lo tanto, $F \subseteq N$. Entonces, dado que ambos grupos tienen el mismo orden, resulta que $F = N$. Esto prueba (ii). Como $F = N$ es normal en G, el inciso (i) sigue del Lema 1.8.4. □

Corolario 3.1.6. *Sea* $\mathbf{k} \to \mathbf{k}^{\mathbb{Z}_p} \to H \to \mathbf{k}F \to \mathbf{k}$ *una sucesión exacta abeliana tal que* $|G(H)| = p$. *Entonces* H *es nilpotente.*

Demostración. Sigue de la Proposición 3.1.5, como consecuencia de la Observación 3.1.2. □

Observación 3.1.7. En vista de [IK, Theorem IX.8 (iii)], si H es un álgebra de Kac con $|G(H)| = p$ y $\mathrm{c.\,d.}(H^*) = \{1, p\}$ entonces H es una extensión abeliana central asociada a una acción del grupo cíclico de orden p en un grupo nilpotente. Luego, por Corolario 3.1.6, H es un álgebra de Hopf nilpotente.

Observación 3.1.8. La hipótesis (dual) $\mathrm{c.\,d.}(H) = \{1, p\}$ no implica, en general, que H sea nilpotente. Por ejemplo, consideremos H el álgebra de grupo de un producto semidirecto no abeliano $F \rtimes \mathbb{Z}_p$, con F un grupo abeliano de orden coprimo con p.

Por otro lado, la hipótesis sobre el orden de $G(H)$ en el Corolario 3.1.6 y en la Proposición 3.1.5 es esencial. Concretamente, para todo número primo p, existen álgebras de Hopf semisimples H *no* nilpotentes con $\mathrm{c.\,d.}(H^*) = \{1, p\}$.

Por ejemplo, tomemos un grupo F no nilpotente con un automorfismo de orden p (como ser el grupo simétrico $F = \mathbb{S}_n$, con $n > 6$ suficientemente grande). Consideremos la correspondiente acción de $\mathbb{Z}_p$ en F por automorfismos de grupo y el producto semidirecto $G = F \rtimes \mathbb{Z}_p$ asociado a dicha acción. Esto da lugar a una sucesión exacta abeliana (que se escinde) $\mathbf{k} \to \mathbf{k}^{\mathbb{Z}_p} \to H \to \mathbf{k}F \to \mathbf{k}$, tal que H es no conmutativa y no coconmutativa. Más aún, en vista de la Observación 2.5.1, tenemos que $\mathrm{c.\,d.}(H^*) = \{1, p\}$. Pero, dado que consideramos un grupo F no nilpotente, H es no nilpotente, por la Observación 3.1.2.

Ahora exploraremos el caso en que el orden del grupo $G(H^*)$ es p y el conjunto de grados irreducibles es $\mathrm{c.\,d.}(H) = \{1, p\}$, para algún número primo p. Se sabe, por ejemplo, que si $p = 2$ entonces las hipótesis implican que H es un álgebra de Hopf coconmutativa [BN, Proposition 6.8], [IK, Corollary IX.9].

Lema 3.1.9. *Supongamos que* $\mathrm{c.\,d.}(H^*) = \{1, p\}$, *para algún primo* p. *Entonces* $H/(kG(H))^+H$ *es una coálgebra coconmutativa.*

Demostración. Sea χ un caracter irreducible de grado p de H^*. Como en la Subsección 2.2.1, tenemos que

$$\chi\chi^* = \sum_{g \in G[\chi]} g + \sum_{\deg \lambda = p} \lambda.$$

Así, tomando grados en la igualdad anterior, vemos que p divide al orden del subgrupo $G[\chi]$. Luego el estabilizador $G[\chi]$ tiene orden $p = \deg \chi$ o bien p^2, pues $|G[\chi]|$ divide a $(\deg \chi)^2$ como consecuencia del Teorema de Nichols-Zoeller (ver Teorema 1.7.12).

Sea C la subcoálgebra de H que contiene a χ. Se cumple que $G[\chi]C = C$, pues $\chi = g\chi$ para todo $g \in G[\chi]$. Si $|G[\chi]| = p^2$, la coálgebra $C/(\mathbf{k}G[\chi])^+C$ es unidimensional y, por lo tanto, es coconmutativa. En el caso en que el orden de $G[\chi]$ es igual a $p = \deg \chi$ se tiene también que $C/(\mathbf{k}G[\chi])^+C$ es una coálgebra coconmutativa [N5, Remark 3.2.7]. Entonces $H/(\mathbf{k}G(H))^+H$ es una coálgebra coconmutativa, por [N5, Corollary 3.3.2]. □

3.1.2. Resultados para el tipo $(1, p; p, n)$

Sea p un número primo. A lo largo de esta sección H denotará un álgebra de Hopf semisimple con $\mathrm{c.d.}(H) = \{1, p\}$ y $|G(H^*)| = p$. En otras palabras, H es de tipo $(1, p; p, n)$ como álgebra. Recordemos que la noción de tipo de un álgebra semisimple fue introducida en la Subsección 1.7.1.

Proposición 3.1.10. *Supongamos que p divide al orden de $G(H)$. Entonces $G(H^*) \subseteq Z(H^*)$ y H^* es un álgebra de Hopf nilpotente.*

Demostración. Como por hipótesis p divide a $|G(H)|$, entonces existe un subgrupo G de $G(H)$ con $|G| = p$, o sea, $G \simeq \mathbb{Z}_p$. La inclusión de álgebras de Hopf $\mathbf{k}G \to H$ induce la siguiente sucesión:

$$\mathbf{k}G(H^*) \xrightarrow{i} H^* \xrightarrow{\pi} \mathbf{k}G,$$

con π suryectiva. Tomando $A = \mathbf{k}G(H^*)$ y $B = \mathbf{k}G$ en [N5, Lemma 4.1.9], tenemos que la composición $\pi \circ i : \mathbf{k}G(H^*) \to \mathbf{k}G$ es un isomorfismo y, además, $H^* \simeq R\#\mathbf{k}G(H^*) \simeq R\#\mathbb{Z}_p$ es un biproducto, donde $R \doteq (H^*)^{\mathrm{co}\,\pi}$ es un álgebra de Hopf semisimple trenzada sobre $\mathbb{Z}_p$.

Dado que $R \simeq H^*/H^*\mathbf{k}G(H^*)^+$ como coálgebras, por el Lema 3.1.9, tenemos que R es coconmutativa. Entonces R es trivial, por [So, Proposition 7.2], pues $p \nmid 1 + np = \dim R$. Así, se sigue de [N5, Proposition 4.6.1] que, H^* encaja en una sucesión exacta *central* abeliana

$$\mathbf{k} \to \mathbf{k}\mathbb{Z}_p \to H^* \to R \to \mathbf{k}.$$

Ahora, como la extensión es abeliana existe un grupo F tal que $R \simeq \mathbf{k}F$. Luego, el Corolario 3.1.6 implica que H^* es un álgebra de Hopf nilpotente. $\square$

Proposición 3.1.11. *Supongamos que H es cuasitriangular. Entonces $G(H^*) \subseteq Z(H^*)$ y el álgebra de Hopf dual H^* es nilpotente.*

Demostración. Consideremos el doble de Drinfeld $D(H)$ del álgebra de Hopf H. Como H es cuasitriangular, el grupo de elementos de tipo grupo $G(H^*) \simeq \mathbb{Z}_p$ de H^* es isomorfo a un subgrupo de $G(D(H)^*)$. Por lo tanto, $G(D(H)^*)$ posee un elemento $g\#f$ de orden p. Como mencionamos en la Subsección 1.9, tenemos que $G(D(H)^*) \simeq G(D(H)) \cap Z(D(H)) \subseteq G(D(H)) = G(H^*) \times G(H)$.

En particular, el elemento $f\#g \in G(D(H)) \cap Z(D(H))$ es de orden p. Si g también es de orden p, el orden de $G(H)$ es divisible por p, y la afirmación sigue de la Proposición 3.1.10. Luego, asumiremos que $g = 1$. Entonces $f \in G(H^*) \cap Z(H^*)$ es de orden p. Ahora, como $G(H^*) \simeq \mathbb{Z}_p$, tenemos que $G(H^*) \subseteq Z(H^*)$.

De esta forma, por el Lema 3.1.9, H^* encaja en una sucesión exacta central abeliana $\mathbf{k} \to \mathbf{k}^{\mathbb{Z}_p} \to H^* \to \mathbf{k}F \to \mathbf{k}$, donde F es un grupo finito tal que $\mathbf{k}F \simeq H^*/H^*(\mathbf{k}^{\mathbb{Z}_p})^+$. En vista de la suposición sobre la estructura de álgebra de H, el Corolario 3.1.6 implica que H^* es nilpotente, como habíamos afirmado. $\square$

3.1.3. Resultados para el tipo $(1, p; p, 1)$

Ahora discutiremos el caso en que el álgebra de Hopf semisimple (no necesariamente cuasitriangular) H es de tipo $(1, p; p, 1)$ como álgebra. En particular, la dimensión $\dim H = p(p + 1)$ es un número par.

Notar que bajo estas hipótesis la categoría $\operatorname{Rep} H$ es una *categoría casi-grupo* con reglas de fusión dadas por el grupo $G = G(H^*) \simeq \mathbb{Z}_p$ y un número entero κ [Si2]. En la Sección 2.4 hemos recordado las nociones y resultados principales sobre esta clase de categorías de fusión.

Sea χ el caracter irreducible de H de grado p. Dado que $\chi = \chi^*$ y $\chi g = \chi = g\chi$, para todo $g \in G$, tenemos que

$$\chi^2 = \sum_{g \in G(H^*)} g + \kappa\chi.$$

Tomando grados en la ecuación anterior, obtenemos que $p^2 = p + \kappa p$ y, por lo tanto, $\kappa = p - 1$.

La siguiente proposición nos será de utilidad en lo que sigue. Un enunciado más general será probado en el Teorema 3.3.2.

Proposición 3.1.12. *Supongamos que H es un álgebra de Hopf semisimple de tipo $(1, p; p, 1)$ como álgebra. Entonces una de las siguientes afirmaciones es verdadera:*

(i) $p = 2$ *y* $H \simeq \mathbf{k}\mathbb{S}_3$, *o*

(ii) $p = 2^\alpha - 1$ * *y* $\dim H = 2^\alpha p$.

En particular, H es resoluble.

Demostración. Por [Si2, Theorem 1.2], tenemos que $G(H^*) \simeq \mathbb{Z}_{q^\alpha - 1}$, para algún primo q y $\alpha \geq 1$. Pero, como H es de tipo $(1, p; p, 1)$ como álgebra, el grupo $G(H^*)$ tiene orden p. Luego $p = q^\alpha - 1$. Si $q > 2$, el número primo p es par, por lo cual resultan $p = 2$ y $q = 3$. Esto implica que $H \simeq \mathbf{k}\mathbb{S}_3$ es coconmutativa. En caso contrario, $q = 2$ y el primo p tiene la expresión particular $p = 2^\alpha - 1$.

Luego, la dimensión de H es igual a 6 o a $p(p+1) = 2^\alpha p$. Por el Teorema de Burnside para categorías de fusión (ver [ENO2, Theorem 1.6], Teorema 2.9.4), el álgebra de Hopf H es resoluble. □

Observación 3.1.13. Sea p un número primo tal que $p = 2^\alpha - 1$, como en la Proposición 3.1.12. Consideremos el grupo afín N del cuerpo $\mathbb{F}_{2^\alpha}$, esto es, N es el producto semidirecto $\mathbb{F}_{2^\alpha} \rtimes \mathbb{F}_{2^\alpha}^\times$ con respecto a la acción natural de $\mathbb{F}_{2^\alpha}^\times$ en $\mathbb{F}_{2^\alpha}$. Entonces, el grupo N tiene el tipo prescripto como álgebra (ver la construcción dada en [Si2, Subsection 4.1]).

Más aún, supongamos que p es (cualquier) número primo y N es un grupo cuya álgebra de grupo tiene tipo $(1, p; p, 1)$ como álgebra. Entonces N tiene orden $p(p+1)$ y, se sigue del resultado principal de [Se] que, $p = 2$ y $N \simeq \mathbb{S}_3$ o bien $p = 2^\alpha - 1$, $\alpha > 1$, y $N \simeq \mathbb{F}_{2^\alpha} \rtimes \mathbb{F}_{2^\alpha}^\times$.

Proposición 3.1.14. *Sea H un álgebra de Hopf semisimple de tipo $(1, p; p, 1)$ como álgebra. Entonces $G(H^*) \subseteq Z(H^*)$ y el álgebra de Hopf dual H^* es nilpotente.*

Demostración. Hemos probado en la Proposición 3.1.12 que bajo estas hipótesis H es resoluble. Como mencionamos en la Sección 1.9, $\operatorname{Rep} D(H) \simeq Z(\operatorname{Rep} H)$. Entonces, por el Teorema 2.9.2, el doble de Drinfeld $D(H)$ también es resoluble. El Teorema 2.9.2 (ver también [ENO2, Proposition 4.5 (iv)]) implica que, por ser resoluble, $D(H)$ tiene representaciones no triviales de dimensión 1, esto es, el grupo $G(D(H)^*)$ es no trivial. Además, tenemos que $G(D(H)^*) \simeq G(D(H)) \cap Z(D(H)) \subseteq G(D(H)) = G(H^*) \times G(H)$; ver Subsección 1.9.

Ahora procederemos como en la prueba de la Proposición 3.1.11. Consideremos un elemento no trivial $f\#g \in G(D(H)) \cap Z(D(H))$. Si $f = 1$, entonces $1 \neq g \in Z(H) \cap G(H)$. Así, H^* encaja en

* un tal número primo es llamado un *primo de Mersenne*, en particular α debe ser primo.

una extensión cocentral $\mathbf{k} \to K \to H^* \to \mathbf{k}^{\langle g\rangle} \to \mathbf{k}$, donde K es una subálgebra de Hopf normal *propia.* La suposición en la estructura de álgebra de H implica que $K = \mathbf{k}G(H^*)$. Por lo tanto, $\mathbf{k}G(H^*)$ es normal en H^* y la extensión es abeliana, por el Lema 3.1.9. La afirmación se sigue, en este caso, de la Proposición 3.1.5 (i) y el Corolario 3.1.6.

Luego, podemos asumir que $f \neq 1$. En particular, f es de orden p.

Si $|f| = |g| = p = |G(H^*)|$, tenemos que p divide al orden de $G(H)$. Entonces $G(H^*) \subseteq Z(H^*)$ y H^* es nilpotente, por la Proposición 3.1.10.

En caso contrario, el orden de g es n, con $n \neq p$. Si $f^n = 1$, entonces p divide a n y, por lo tanto, p divide a $|G(H)|$. Como antes, el resultado se sigue de la Proposición 3.1.10. Si $f^n \neq 1$, entonces $f^n\#1 = (f^n\#g^n) = (f\#g)^n \in Z(D(H))$. Esto implica que f^n es un elemento de tipo grupo (no trivial) *central* en H^*. Como por hipótesis H es de tipo $(1, p; p, 1)$ como álgebra, el grupo $G(H^*)$ tiene orden p y, por lo tanto, $G(H^*) \subseteq Z(H^*)$.

De esta forma, por el Lema 3.1.9, el álgebra de Hopf dual H^* encaja en una sucesión exacta central abeliana $\mathbf{k} \to \mathbf{k}^{\mathbb{Z}_p} \to H^* \to \mathbf{k}F \to \mathbf{k}$, donde F es un grupo finito tal que $\mathbf{k}F \simeq H^*/H^*(\mathbf{k}^{\mathbb{Z}_p})^+$. Como la hipótesis sobre H implica que $|G(H^*)| = p$, se sigue del Corolario 3.1.6 que H^* es nilpotente, como habíamos afirmado. □

Teorema 3.1.15. *Sea H un álgebra de Hopf semisimple de tipo $(1, p, p, 1)$ como álgebra. Entonces $p = 2$ y $H \simeq \mathbf{k}\mathbb{S}_3$, o bien H es isomorfa a un* twisting *del álgebra de grupo $\mathbf{k}N$, donde $p = 2^\alpha - 1$, $\alpha > 1$ y N es el grupo afín del cuerpo $\mathbb{F}_{2^\alpha}$.*

Demostración. Podemos suponer que H es no coconmutativa y, por lo tanto, p es impar. Recordemos que, por la Proposición 3.1.12, si $p = 2$ entonces $H \simeq \mathbf{k}\mathbb{S}_3$ es conmutativa. Como consecuencia de la Proposiciónes 3.1.14 tenemos que $G(H^*) \subseteq Z(H^*)$. Luego, combinando esto con el Lema 3.1.9, obtenemos que el álgebra de Hopf dual H^* encaja en una sucesión exacta central abeliana $\mathbf{k} \to \mathbf{k}^{\mathbb{Z}_p} \to H^* \to \mathbf{k}F \to \mathbf{k}$, donde F es un grupo finito de orden $p + 1 = 2^\alpha$, pues la dimensión de H es $2^\alpha p$ por la Proposición 3.1.12. Dado que la sucesión es central, el Lema 1.8.4 implica que la acción $\triangleleft$: $\mathbb{Z}_p \times F \to \mathbb{Z}_p$ es trivial, mientras que la acción $\triangleright$: $\mathbb{Z}_p \times F \to F$ está determinada por un automorfismo $\varphi \in \operatorname{Aut} F$ de orden $p = 2^\alpha - 1$.

Primero mostraremos que el grupo F es abeliano. En efecto, por el Teorema 1.1.3, como F es un 2-grupo, el orden del grupo $\operatorname{Aut} F$ divide al número $n2^{(\alpha-r)r}$, con $n = |\operatorname{GL}(r, 2)|$ y 2^r el índice en F del subgrupo de Frattini $\operatorname{Frat}(F)$ (el cual se define como la intersección de todos los subgrupos maximales de F [Ro, pp. 135], ver Sección 1.1). En particular, tenemos que $r \leq \alpha$.

Además, el orden de φ divide al orden de $\operatorname{Aut} F$ y, por transitividad, a $|\operatorname{GL}(r, 2)| = (2^r - 1)(2^r - 2) \dots (2^r - 2^{r-1})$. Luego, el número primo $p = 2^\alpha - 1$ divide a $2^r - 1$. De esto se deduce que $r = \alpha$ y, por lo tanto, $\operatorname{Frat}(F) = 1$.

Dado que F es nilpotente (por ser un 2-grupo), el Teorema de Wielandt (Teorema 1.1.2) implica que, el subgrupo conmutador $[F, F]$ de F es un subgrupo de $\operatorname{Frat}(F)$. Pero hemos probado anteriormente que en nuestro caso el subgrupo de Frattini de F es trivial. Luego $[F, F] = 1$. De esta forma, el grupo F es abeliano, como habíamos afirmado.

Consideremos ahora la extensión escindida $B_0 = \mathbf{k}^{\mathbb{Z}_p}\#\mathbf{k}F$, asociada al *matched pair* de grupos $(\mathbb{Z}_p, F)$. Dado que B_0 es una extensión central y el grupo F es abeliano, tenemos que B_0 es un álgebra conmutativa. Esto dice que B_0 es isomorfa al álgebra de funciones $\mathbf{k}^N$, con $N = F \rtimes \mathbb{Z}_p$.

Notemos que el orden $|F| = 2^\alpha$ es coprimo con p. Combinando [N4, Proposition 5.22] y la Proposición 1.8.2 tenemos que el álgebra de Hopf dual H^* se obtiene de la extensión escindida $B_0 = \mathbf{k}^{\mathbb{Z}_p}\#\mathbf{k}F \simeq \mathbf{k}^N$ por una deformación de la multiplicación. De hecho, el representante de la clase de H^* en el grupo $\operatorname{Opext}(\mathbf{k}F, \mathbf{k}^{\mathbb{Z}_p})$ es la imagen de un elemento de $H^2(F, \mathbf{k}^\times)$ por el mapa $H^2(F, \mathbf{k}^\times) \oplus H^2(\mathbb{Z}_p, \mathbf{k}^\times) \simeq H^2(F, \mathbf{k}^\times) \to \operatorname{Opext}(\mathbf{k}F, \mathbf{k}^{\mathbb{Z}_p})$ en la sucesión exacta de Kac [Ma3, Theorem 1.10]; Teorema 1.8.3. Entonces la afirmación sigue de la Proposición 1.8.2. Dualizando, obtenemos que H es un *twisting* del álgebra de grupo $\mathbf{k}N$.

Finalmente, como dijimos en la Observación 3.1.13, la suposición sobre la estructura de álgebra de H implica que N es el grupo afín del cuerpo $\mathbb{F}_{2^\alpha}$. □

Observación 3.1.16. Si N es un grupo cuya álgebra de grupo $\mathbf{k}N$ es de tipo $(1, p, p, 1)$ como álgebra y $J \in \mathbf{k}N \otimes \mathbf{k}N$ es un *twist*, entonces el álgebra de Hopf torcida $H = (\mathbf{k}N)^J$ también es de tipo $(1, p, p, 1)$ como álgebra.

Corolario 3.1.17. *Sea H un álgebra de Hopf semisimple de tipo $(1, p, p, 1)$ como álgebra. Entonces $\operatorname{Rep} H \simeq \operatorname{Rep} N$, donde $N = \mathbb{S}_3$ o bien N es el grupo afín del cuerpo $\mathbb{F}_{2^\alpha}$, para algún $\alpha > 1$.*

3.2. Resolubilidad

3.2.1. Resolubilidad de una extensión abeliana

La clase de categorías de fusión resolubles es invariante bajo equivalencia Morita [ENO2, Proposition 4.5 (i)], Teorema 2.9.2. Recordemos que una categoría de fusión es de tipo grupo si es Morita equivalente a una categoría de fusión punteada. Además, por el Teorema 2.9.2, una categoría de fusión punteada $\mathcal{C}$ es resoluble si y sólo si el grupo $G(\mathcal{C})$ es resoluble. Así, una categoría de fusión de tipo grupo $\mathcal{C}(G, \omega, F, \alpha)$ es resoluble si y sólo si el grupo G lo es.

Observación 3.2.1. Como consecuencia del Teorema de Feit-Thompson (ver Teorema 1.1.11, [FT]), si el orden del grupo G es impar entonces $\mathcal{C}(G, \omega, F, \alpha)$ es resoluble. En la Proposición 3.4.1 hemos generalizado este hecho al contexto de las categorías de fusión débilmente de tipo grupo.

De estos comentarios se desprende la siguiente caracterización de las extensiones abelianas resolubles.

Corolario 3.2.2. *Sea H un álgebra de Hopf semisimple que encaja en una sucesión exacta abeliana como* (3.1)*. Entonces H es resoluble si y sólo si el grupo factorizable asociado $G = F \bowtie \Gamma$ es resoluble.*

En particular, si H es un álgebra de Hopf resoluble, los grupos F y Γ también son resolubles.

Corolario 3.2.3. *Sean H y G como en el Corolario 3.2.2. Supongamos que los grupos Γ y F son nilpotentes. Entonces el álgebra de Hopf H es resoluble.*

Demostración. Dado que los grupos Γ y F son nilpotentes por hipótesis, el Teorema 1.1.9 implica que el grupo $G = F \bowtie \Gamma$ es resoluble. De esta forma, el resultado se sigue del Corolario 3.2.2. □

Luego, las extensiones abelianas en la Proposición 3.1.5 son resolubles, puesto que tanto $\mathbb{Z}_p$ como F son nilpotentes.

Corolario 3.2.4. *Sea p un número primo. Consideremos la categoría de fusión de tipo grupo $\mathcal{C} = \mathcal{C}(G, \omega, \mathbb{Z}_p, \alpha)$. Supongamos que el orden del grupo $G(\mathcal{C})$ es igual a p. Entonces $\mathcal{C}$ es resoluble.*

Demostración. Asociada a una categoría de fusión de tipo grupo $\mathcal{C}$ tenemos un álgebra de Hopf semisimple H que encaja en una sucesión como (3.1), tal que $\mathcal{C} \simeq \operatorname{Rep} H$. En particular, para el caso en que $\mathcal{C} = \mathcal{C}(G, \omega, \mathbb{Z}_p, \alpha)$, el álgebra de Hopf asociada H encaja en una sucesión exacta como la dada en (3.2). Denotaremos por G al grupo fatorizable determinado por dicha sucesión. Algunos detalles sobre esta correspondencia pueden encontrarse en la Observación 2.5.4.

Como por hipótesis $|G(\mathcal{C})| = p$, sigue del Lema 3.1.3 que G es un grupo de Frobenius con complemento de Frobenius $\mathbb{Z}_p$. Además, por la Observación 3.1.4, el núcleo de Frobenius N de G es un grupo nilpotente y G es un producto semidirecto $G = N \rtimes \mathbb{Z}_p$. Así, el Corolario 3.2.3 implica que H es un álgebra de Hopf resoluble. De esta forma, tenemos que $\mathcal{C} \simeq \operatorname{Rep} H$ es resoluble. □

3.3. Resolubilidad a partir de las dimensiones irreducibles

Sea p un número primo. En esta sección nos dedicaremos al estudio de categorías de fusión $\mathcal{C}$ cuyo conjunto de dimensiones irreducibles sea de la forma $\mathrm{c.d.}(\mathcal{C}) = \{1, p\}$. Nuestro objetivo es probar algunos resultados estructurales sobre $\mathcal{C}$ concernientes, principalmente, a la resolubilidad de la categoría, bajo ciertas restricciones adicionales.

Recordemos que en el caso en que G es un grupo finito sabemos, por el Corolario 1.1.16, que la misma restricción sobre $\mathrm{c.d.}(G)$ implica que el grupo G y por lo tanto, la categoría $\operatorname{Rep} G$, son resolubles.

Observación 3.3.1. Si H es un álgebra de Hopf semisimple con $\mathrm{c.d.}(H) = \{1, p\}$ y G es un grupo finito, entonces el álgebra de Hopf producto tensorial $A = H \otimes \mathbf{k}^G$ también satisface la condición $\mathrm{c.d.}(A) = \{1, p\}$. Esta afirmación sigue del hecho de que los módulos irreducibles de A son productos tensoriales de módulos irreducibles de H y $\mathbf{k}^G$, sumado a que $\mathrm{c.d.}(\mathbf{k}^G) = \{1\}$.

Sin embargo, A no es un álgebra de Hopf resoluble a menos que el grupo G sea resoluble. De hecho, $\mathbf{k}^G$ es tanto una subálgebra de Hopf como un álgebra de Hopf cociente de A.

El siguiente teorema generaliza la Proposición 3.1.12.

Teorema 3.3.2. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría casi-grupo con* $\mathrm{c.d.}(\mathcal{C}) = \{1, p\}$. *Entonces $\mathcal{C}$ es resoluble.*

Demostración. Seguiremos la notación introducida en la Sección 2.4. Sea (G, κ) el par que determina las reglas de fusión de la categoría y denotemos por X al objeto no inversible de $\mathcal{C}$. Como mencionamos en la Sección 2.4, tenemos la siguiente relación:

$$X^2 = \sum_{g \in G} g + \kappa X. \tag{3.3}$$

La restricción sobre el conjunto $\mathrm{c.d.}(\mathcal{C})$ implica que $\operatorname{FPdim} X = p$. Recordemos que si $g \in G$, por ser un objeto inversible en $\mathcal{C}$, cumple que $\operatorname{FPdim} g = 1$. Por lo tanto, la dimensión de Frobenius-Perron de la categoría es $\operatorname{FPdim} \mathcal{C} = |G| + p^2$. Ahora, como por el Lema 2.2.7 tenemos que $|G| = \operatorname{FPdim} \mathcal{C}_{pt}$ divide a $\operatorname{FPdim} \mathcal{C}$, se sigue que el orden del grupo G es igual a p o a p^2. Notemos que la posibilidad de que el grupo G sea trivial se descarta tomando dimensiones de Frobenius-Perron en (3.3).

Si $|G| = p^2$, considerando nuevamente las dimensiones de Frobenius-Perron en la Ecuación (3.3), obtenemos que $\kappa = 0$. Por lo tanto, $\mathcal{C}$ es una categoría de Tambara-Yamagami, las cuales fueron introducidas en la Sección 2.3, [TY]. En particular, $\mathcal{C}$ es una $\mathbb{Z}_2$-extensión de una categoría punteada equivalente a $\mathcal{C}(G)$. Como el grupo G es un p-grupo, es nilpotente y, por lo tanto, resoluble. Luego, por el Teorema 2.9.2, la categoría punteada $\mathcal{C}(G)$ es resoluble. Dado que la categoría $\mathcal{C}$ es una extensión de una categoría resoluble por un grupo resoluble, por el Teorema 2.9.2, tenemos que $\mathcal{C}$ es resoluble en este caso.

Supongamos ahora que $|G| = p$. De la misma forma que en el párrafo anterior se deduce que $\kappa = p - 1$. Procediendo como en la prueba de la Proposición 3.1.12, usando [Si2, Theorem 1.2], se sigue que $\operatorname{FPdim} \mathcal{C} = p(p+1)$ es igual a 6 o bien $\operatorname{FPdim} \mathcal{C} = p2^{\alpha}$, con p un número primo impar. Así, por el Teorema de Burnside para categorías de fusión [ENO2, Theorem 1.6], la categoría $\mathcal{C}$ es resoluble también en este caso. Ver el Teorema 2.9.4. □

El próximo teorema, concerniente al caso en que $\mathcal{C} = \operatorname{Rep} H$, es una consecuencia de la Proposición 3.1.11. En la Sección 3.4.2, bajo restricciones adicionales en la dimensión de Frobenius-Perron de la categoría, probaremos una versión de este resultado en un contexto más general.

Teorema 3.3.3. *Sea H un álgebra de Hopf semisimple de tipo $(1, p; p, n)$ como álgebra. Supongamos también que H es cuasitriangular. Entonces H es resoluble.*

Demostración. Hemos probado en la Proposición 3.1.11 que, bajo estas condiciones, el álgebra de Hopf dual H^* es nilpotente. Más aún, por el Lema 3.1.9, H encaja en una sucesión exacta cocentral abeliana $\mathbf{k} \to \mathbf{k}^F \to H \to \mathbf{k}\mathbb{Z}_p \to \mathbf{k}$, con F un grupo nilpotente. Entonces H es resoluble, por el Corolario 3.2.3. □

En lo que resta de esta sección nos restringiremos al caso en que $\mathcal{C} = \operatorname{Rep} H$, con H un álgebra de Hopf semisimple.

3.3.1. El caso $p = 2$

Sea H un álgebra de Hopf semisimple para la cual $\operatorname{c.d.}(H) \subseteq \{1, 2\}$. Por [BN, Theorem 6.4], una de las siguientes afirmaciones es verdadera:

(i) Existe una sucesión exacta abeliana cocentral $\mathbf{k} \to \mathbf{k}^F \to H \to \mathbf{k}\Gamma \to \mathbf{k}$, donde F es un grupo finito y $\Gamma \simeq {\mathbb{Z}_2}^n$, $n \geq 1$, o bien

(ii) Existe una sucesión exacta central $\mathbf{k} \to \mathbf{k}^U \to H \to B \to \mathbf{k}$, donde $B = H_{\mathrm{ad}}$ es un álgebra de Hopf cociente propia y el grupo $U = U(\operatorname{Rep} H)$ es el grupo de graduación universal de la categoría de H-módulos de dimensión finita.

En particular, si $H = H_{\mathrm{ad}}$ entonces H satisface (i).

Como consecuencia tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.3.4. *Sea H un álgebra de Hopf semisimple con $\operatorname{c.d.}(H) \subseteq \{1, 2\}$. Entonces H es débilmente de tipo grupo. Más aún, si $H = H_{\mathrm{ad}}$ entonces H es de tipo grupo.*

Demostración. Las hipótesis sobre H implican que ésta satisface (i) o (ii) del párrafo anterior. Si se cumple la primera afirmación, es decir (i), entonces H es de tipo grupo por la Observación 2.5.4.

En caso contrario, H satisface (ii) y, por lo tanto, la categoría $\operatorname{Rep} H$ es una U-extensión de $\operatorname{Rep} B$, en vista de la Proposición 2.7.3. Notemos además que, como B es un cociente del álgebra de Hopf H, el conjunto de grados irreducibles de B también cumple que $\mathrm{c.d.}(B) \subseteq \{1, 2\}$. Luego, por un argumento inductivo, podemos suponer que B es débilmente de tipo grupo. Por lo tanto, H también es débilmente de tipo grupo, puesto que $\operatorname{Rep} H$ es una extensión de una categoría débilmente de tipo grupo por un grupo finito [ENO2, Proposition 4.1]; Teorema 2.9.1. □

A continuación discutiremos las condiciones que garantizan la resolubilidad de H. El siguiente resultado fue probado en [BN, Proposition 6.8].

Proposición 3.3.5. *Sea H un álgebra de Hopf semisimple de tipo $(1, 2; 2, n)$ como álgebra. Entonces H es coconmutativa.*

Luego, un álgebra de Hopf H que satisface las hipótesis de la proposición anterior es isomorfa al álgebra de grupo kG, para algún grupo finito G. Más aún, la suposición sobre la estructura de álgebra de H implica que $|\,\mathrm{c.d.}(G)| = 2$ y, por el Corolario 1.1.16, el grupo G es resoluble. Así, el álgebra de Hopf H es resoluble.

Lema 3.3.6. *Sea H un álgebra de Hopf semisimple con $\mathrm{c.d.}(H) \subseteq \{1, 2\}$. Supongamos además que $H = H_{\mathrm{ad}}$. Entonces H es resoluble si y sólo si el grupo F en (i) es resoluble.*

Demostración. Dado que, por hipótesis, H es igual a su subálgebra adjunta H_{ad} entonces H satisface (i). Por el Corolario 3.2.2, H es resoluble si y sólo si el correspondiente grupo factorizable $G = F \bowtie \Gamma$ es resoluble. Pero, como la sucesión en (i) es cocentral, la acción $\triangleright \colon \Gamma \times F \to F$ es trivial y el grupo G es un producto semidirecto: $G = F \rtimes \Gamma$, con $\Gamma \simeq {\mathbb{Z}_2}^n$, por el Lema 1.8.4. Esto prueba el Lema, pues los subgrupos de un grupo resoluble son resolubles y el producto semidirecto de grupos resolubles es resoluble. □

Observación 3.3.7. Supongamos que H tiene un caracter irreducible y fiel χ de grado 2, que cumple que $\chi\chi^* = \chi^*\chi$. Se sigue de [BN, Theorem 3.5] que H encaja en una sucesión exacta abeliana central $k \to k^{\mathbb{Z}_m} \to H \to kT \to k$, para algún grupo polihedral T de orden par y para algún $m \geq 1$. En particular, el grupo T es necesariamente cíclico o dihedral, puesto que $\mathrm{c.d.}(H) = \{1, 2\}$. Para una descripción de los grupos polihedrales y los grados de sus caracteres consultar, por ejemplo, [BN, pp. 10]. Por lo tanto H es resoluble en este caso.

Notemos que cuando H es cuasitriangular la hipótesis sobre χ se cumple automáticamente; por lo cual la conclusión vale también en este caso. En la próxima subsección damos un resultado más general en este contexto: en el Teorema 3.3.12 probamos que toda álgebra de Hopf semisimple cuasitriangular con $\mathrm{c.d.}(H) \subseteq \{1, 2\}$ siempre es resoluble.

A continuación probaremos algunos resultados que nos serán de utilidad en lo que sigue.

Lema 3.3.8. *Sean H un álgebra de Hopf semisimple con $\mathrm{c.d.}(H) \subseteq \{1, 2\}$ y K una subálgebra de Hopf o un álgebra de Hopf cociente de H. Entonces $\mathrm{c.d.}(K) \subseteq \{1, 2\}$.*

Demostración. Basta ver que la afirmación es verdadera cuando $K \subseteq H$ es una subálgebra de Hopf. En este caso, el enunciado se sigue de la suryectividad del funtor restricción $\operatorname{Rep} H \to \operatorname{Rep} K$. □

Corolario 3.3.9. *Sea H un álgebra de Hopf semisimple. Si* $\operatorname{c.d.}(H) \subseteq \{1, 2\}$*, entonces el grupo* $G(H)$ *es resoluble.*

Lema 3.3.10. *Sea H un álgebra de Hopf semisimple para la cual* $\operatorname{c.d.}(H), \operatorname{c.d.}(H^*) \subseteq \{1, 2\}$*. Entonces H es resoluble.*

Demostración. Por inducción en la dimensión de H.

Consideremos el grupo de graduación universal U de la categoría $\operatorname{Rep} H$. Recordemos que, en vista de la Proposición 2.7.3 y la Observación 2.7.4, a la graduación universal de $\operatorname{Rep} H$ le corresponde la siguiente sucesión exacta central de álgebras de Hopf:

$$\mathbf{k} \to \mathbf{k}^U \to H \to H_{\mathrm{ad}} \to \mathbf{k}.$$

Dualizando dicha sucesión, vemos que $H^* \to \mathbf{k}U$ es un álgebra de Hopf cociente, y el Lema 3.3.8 implica que $\operatorname{c.d.}(U) \subseteq \{1, 2\}$. Luego, por el Corolario 1.1.16, el grupo U es resoluble.

Supongamos primero que $H_{\mathrm{ad}} \subsetneq H$. Nuevamente, en vista del Lema 3.3.8, tenemos que $\operatorname{c.d.}(H_{\mathrm{ad}})$, $\operatorname{c.d.}(H_{\mathrm{ad}}^*) \subseteq \{1, 2\}$. Por hipótesis inductiva, la subálgebra adjunta H_{ad} es resoluble. De esta forma, el álgebra de Hopf H es resoluble, puesto que tanto U como $\operatorname{Rep} H_{\mathrm{ad}}$ son resolubles y la categoría $\operatorname{Rep} H$ es una U-extensión de $\operatorname{Rep} H_{\mathrm{ad}}$ [ENO2, Proposition 4.5 (i)], Teorema 2.9.2.

Sólo resta considerar el caso en que $H_{\mathrm{ad}} = H$. Como observamos al comienzo de esta subsección, en este caso tenemos, por [BN, Theorem 6.4], que H satisface la condición (i), es decir, H encaja en una sucesión exacta abeliana cocentral $\mathbf{k} \to \mathbf{k}^F \to H \to \mathbf{k}\Gamma \to \mathbf{k}$, con Γ un grupo abeliano no trivial.

En particular, la subálgebra de Hopf $\mathbf{k}^\Gamma \subseteq H^*$ es central no trivial y, por lo tanto, $H_{\mathrm{ad}}^* \subsetneq H^*$. Como antes, la hipótesis inductiva implica que, H_{ad}^* y, de este modo, H^* son resolubles. Entonces H también lo es. Esto concluye la prueba del lema. □

3.3.2. El caso cuasitriangular

En esta subsección asumiremos que H es un álgebra de Hopf semisimple cuasitriangular y consideraremos $R \in H \otimes H$ una R-matriz. A lo largo de la misma haremos uso de la notación introducida en la Sección 1.9.

Observación 3.3.11. Como la categoría $\operatorname{Rep} H$ es trenzada, el grupo de graduación universal $U = U(\operatorname{Rep} H)$ es abeliano y, en particular, resoluble.

Teorema 3.3.12. *Sea H un álgebra de Hopf semisimple cuasitriangular tal que* $\operatorname{c.d.}(H) \subseteq \{1, 2\}$*. Entonces H es resoluble.*

Demostración. Si $\operatorname{c.d.}(H) = \{1\}$, entonces H es conmutativa y, por ser cuasitriangular, es isomorfa al álgebra de grupo de un grupo abeliano. Por lo tanto, en este caso, H es resoluble. Luego podemos suponer que $\operatorname{c.d.}(H) = \{1, 2\}$.

Consideremos ahora las subálgebras de Hopf $H_+, H_- \subseteq H$. Por el Lema 3.3.8, tenemos que $\operatorname{c.d.}(H_+)$, $\operatorname{c.d.}(H_-) \subseteq \{1, 2\}$. Entonces $\operatorname{c.d.}(H_-), \operatorname{c.d.}(H_-^*) \subseteq \{1, 2\}$, puesto que $(H_-^*)^{\mathrm{cop}} \simeq H_+$. Así, por el Lemma 3.3.10, H_- es resoluble.

Entonces, el doble de Drinfeld $D(H_-)$ y su imagen homeomorfa H_R también son resolubles [ENO2, Proposition 4.5 (i)], Teorema 2.9.2. Vamos a suponer, por lo tanto, que $H_R \subsetneq H$.

Observemos que H_{ad}, al ser un cociente de H, también es cuasitriangular y, por el Lema 3.3.8, el conjunto de sus grados irreducibles satisface que $\mathrm{c.d.}(H_{\mathrm{ad}}) \subseteq \{1, 2\}$. Inductivamente, podemos suponer que $H = H_{\mathrm{ad}}$ y, en particular, sigue de la Observación 2.7.4 que $G(H) \cap Z(H) = 1$. En efecto, por la Observación 3.3.11, el grupo U es abeliano y, además, la categoría $\operatorname{Rep} H$ es una U-extensión de $\operatorname{Rep} H_{\mathrm{ad}}$. Pero, la extensión de una categoría de fusión resoluble por un grupo resoluble resulta resoluble por [ENO2, Proposition 4.5 (i)], Teorema 2.9.2. Así, H es resoluble si H_{ad} lo es.

De esta forma, por [BN, Theorem 6.4], H encaja en una sucesión exacta abeliana cocentral $k \to k^F \to H \to k\Gamma \to k$, donde Γ es un grupo abeliano elemental no trivial con exponente 2. Luego, en vista del Lema 3.3.6, es suficiente probar que el grupo F es resoluble.

Además, tenemos que $\widehat{\Gamma} \subseteq G(H^*) \cap Z(H^*)$ y, por la Observación 1.9.4, se cumple que

$$f_{R_{21}}(G(H^*) \cap Z(H^*)) \subseteq G(H) \cap Z(H).$$

Es por esto que podemos suponer que la restricción de $f_{R_{21}}$ a $\widehat{\Gamma}$ es idénticamente 1 y, de manera similar, vamos a suponer que la restricción de f_R a $\widehat{\Gamma}$ es también igual a 1. Entonces, los morfismos f_R y $f_{R_{21}}$ se factorizan a través del cociente $H^*/H^*(k\widehat{\Gamma})^+ \simeq kF$.

Por lo tanto, las subálgebras $H_+ = f_R(H^*)$ y $H_- = f_{R_{21}}(H^*)$ son coconmutativas. Más aún, como $H_+ \simeq H_-^{*\,\mathrm{cop}}$, también son subálgebras conmutativas. En particular, $H_R = H_+H_-$ es coconmutativa. Luego, se cumple que $\Phi_R(H^*) \subseteq H_R \subseteq kG(H)$.

Por [N3, Theorem 4.11], $\Phi_R(H^*)$ es una subálgebra de Hopf normal conmutativa y coconmutativa que es necesariamente resoluble, pues H_R lo es. De esta forma, $\Phi_R(H^*) \simeq kT$, con $T \subseteq G(H)$ un subgrupo abeliano [N3, Example 2.1]. Además, existe una sucesión exacta de álgebras de Hopf

$$k \to kT \to H \xrightarrow{\pi} \overline{H} \to k,$$

donde $\overline{H}$ es una cierta álgebra de Hopf triangular canónica.

Como $\overline{H}$ es triangular entonces es un *twisting* del álgebra de grupo de algún grupo finito L, o sea, $\overline{H} \simeq (kL)^J$. Dado que $\mathrm{c.d.}(L) = \mathrm{c.d.}(\overline{H}) \subseteq \{1, 2\}$, por el Corolario 1.1.16, el grupo L es resoluble. Así, el álgebra de Hopf $\overline{H}$ es resoluble, pues $\operatorname{Rep} \overline{H} \simeq \operatorname{Rep} L$.

La restricción del morfismo $\pi : H \to \overline{H}$ a la subálgebra de Hopf $k^F \subseteq H$ da lugar a la siguiente sucesión exacta:

$$k \to kT \cap k^F \to k^F \xrightarrow{\pi|_{k^F}} \pi(k^F) \to k.$$

Luego, tenemos que $kT \cap k^F = k^{\overline{F}}$ y $\pi(k^F) = k^S$, donde $\overline{F}$ es un cociente y S es un subgrupo del grupo F, de manera que la sucesión anterior induce la siguiente sucesión exacta de grupos:

$$1 \to S \to F \to \overline{F} \to 1.$$

Dado que $k^{\overline{F}} = kT \cap k^F$ es coconmutativa, el grupo $\overline{F}$ es abeliano. Además, S es resoluble, pues k^S es una subálgebra de Hopf de $\overline{H}$. En consecuencia, el grupo F es resoluble. Por lo tanto, H es resoluble, lo cual completa la prueba del teorema. $\square$

3.4. Categorías de fusión de dimensión impar

A lo largo de esta sección, p denotará un número primo y $\mathcal{C}$ una categoría de fusión sobre $\mathbf{k}$. Recordemos que el conjunto de dimensiones irreducibles de $\mathcal{C}$ fue definido en la Subsección 2.2.1 como $\mathrm{c.d.}(\mathcal{C}) = \{\mathrm{FPdim}\, X : X \in \mathrm{Irr}\, \mathcal{C}\}$.

En esta sección consideramos categorías de fusión *débilmente íntegras*, es decir, aquellas cuya dimensión de Frobenius-Perron es un número natural. Además, le impondremos a $\mathcal{C}$ la condición de que $\mathrm{FPdim}\, \mathcal{C}$ sea un número *impar* y, por lo tanto, la categoría de fusión $\mathcal{C}$ es *íntegra* [DGNO2, Corollary 2.22]. Luego, $\mathcal{C}$ es equivalente a la categoría de representationes de dimensión finita de una cuasi-álgebra Hopf semisimple [ENO, Theorem 8.33].

3.4.1. Categorías de fusión débilmente de tipo grupo de dimensión impar

El siguiente resultado es una consecuencia del Teorema de Feit-Thompson [FT]. Ver Teorema 1.1.11.

Proposición 3.4.1. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría débilmente de tipo grupo. Supongamos además que $\mathrm{FPdim}\, \mathcal{C}$ es un entero impar. Entonces $\mathcal{C}$ es resoluble.*

Como mencionamos anteriormente, dado que la dimensión de Frobenius-Perron de $\mathcal{C}$ es un entero impar entonces $\mathrm{c.d.}(\mathcal{C}) \subseteq \mathbb{Z}$, es decir, $\mathcal{C}$ es un categoría de fusión íntegra [DGNO2, Corollary 2.22].

Demostración. Por definición, $\mathcal{C}$ es equivalente Morita a una categoría de fusión nilpotente. Como, por el Teorema 2.9.2, la resolubilidad de las categorías de fusión es invariante bajo equivalencia Morita es suficiente probar que una categoría de fusión *nilpotente* cuya dimensión de Frobenius-Perron es impar es resoluble.

Supongamos entonces que $\mathcal{C}$ es una categoría de fusión nilpotente, es decir, $\mathcal{C}$ es una G-extensión de una subcategoría de fusión $\widetilde{\mathcal{C}}$, con G un grupo finito no trivial. En particular, se sigue de la Observación 2.7.2 que $\mathrm{FPdim}\, \mathcal{C} = |G|\, \mathrm{FPdim}\, \widetilde{\mathcal{C}}$. Dado que la dimensión de Frobenius-Perron de $\mathcal{C}$ es impar, el orden de G y $\mathrm{FPdim}\, \widetilde{\mathcal{C}}$ también son impares, como consecuencia del Lema 2.2.7. Por el Teorema de Feit-Thompson, el grupo G es resoluble. Además, $\widetilde{\mathcal{C}}$ es nilpotente, por ser una subcategoría de fusión de una categoría nilpotente, y $\mathrm{FPdim}\, \widetilde{\mathcal{C}} < \mathrm{FPdim}\, \mathcal{C}$, pues $|G| > 1$.

De esta forma, el teorema sigue por inducción en la dimensión de Frobenius-Perron de la categoría, aplicando el Teorema 2.9.2. □

3.4.2. Categorías de fusión trenzadas

A continuación, enunciamos el siguiente resultado cuya demostración se basa en la descripción de los objetos simples de una equivariantización.

Lema 3.4.2. *Sea G un grupo finito actuando en una categoría de fusión $\mathcal{C}$ por autoequivalencias tensoriales. Supongamos que $\mathrm{c.d.}(\mathcal{C}^G) \subseteq \{p^m : m \geq 0\}$, con p un número primo. Entonces $\mathrm{c.d.}(\mathcal{C}) \subseteq \{p^m : m \geq 0\}$.*

Demostración. Recordemos que en la Sección 2.6 dimos una descripción de los objetos simples de una equivariantización debida a Burciu y Natale. En particular, se obtiene a partir de esta caracterización que la dimensión de Frobenius-Perron de un objeto simple $M = (X, \mu)$ de $\mathcal{C}^G$ es

$$\operatorname{FPdim} M = m[G : G_Y] \operatorname{FPdim} Y,$$

donde Y es una componente simple de X en $\mathcal{C}$, $G_Y \doteq \operatorname{St}_G(Y) \subseteq G$ es el subgrupo de inercia de Y y $m = \dim \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Ver la Observación 2.6.1. Luego $\operatorname{FPdim} Y$ divide a $\operatorname{FPdim} M$.

La hipótesis sobre $\mathcal{C}^G$ implica que la dimensión de Frobenius-Perron de M es una potencia del número primo p y, por lo tanto, la dimensión de Frobenius-Perron de Y también lo es. Esto prueba el lema. □

Teorema 3.4.3. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión trenzada tal que $\operatorname{c.d.}(\mathcal{C}) \subseteq \{p^m : m \geq 0\}$, con p un número primo. Supongamos además que $\operatorname{FPdim} \mathcal{C}$ es impar. Entonces $\mathcal{C}$ es resoluble.*

Demostración. Por inducción en $\operatorname{FPdim} \mathcal{C}$. Notemos que, por el Lema 2.2.7, las subcategorías de fusión de $\mathcal{C}$ son también de dimensión impar.

Si $\operatorname{c.d.}(\mathcal{C}) = \{1\}$ entonces $\mathcal{C}$ es punteada. Luego, la categoría de fusión $\mathcal{C}$ es equivalente a $\mathcal{C}(G, \omega)$, para algún grupo abeliano G y algún 3-cociclo $\omega : G \times G \times G \to \mathbf{k}^\times$. Como el orden de G es impar, por el Teorema de Feit-Thompson, el grupo G es resoluble. De esta forma, la categoría $\mathcal{C}$ es resoluble, por el Teorema 2.9.2; [ENO2, Proposition 4.5 (ii)].

Supongamos ahora que $\mathcal{C}$ no es punteada. En este caso, todos los objetos simples no inversibles de $\mathcal{C}$ tienen dimensión de Frobenius-Perron p^m, para algún $m \geq 1$. Como la categoría $\mathcal{C}$ es trezada el grupo $G(\mathcal{C})$ de objetos inversibles de $\mathcal{C}$ es abeliano. Además, $G(\mathcal{C})$ es no trivial. Más aún, p divide al orden del grupo $G(\mathcal{C})$; lo cual se deduce tomando dimensiones de Frobenius-Perron en la descomposición (2.4) del producto tensorial $X \otimes X^*$, para algún objeto X simple no inversible de la categoría $\mathcal{C}$.

Notemos que $\mathcal{C}$ es una categoría de fusión premodular con respecto a su estructura esférica canónica, por la Observación 2.10.3, puesto que $\mathcal{C}$ es débilmente íntegra. Entonces, la categoría $\mathcal{C}$ es modularizable, en vista del Lema 2.10.6.

Sea $\widetilde{\mathcal{C}}$ la modularización de $\mathcal{C}$, la cual es una categoría modular sobre $\mathbf{k}$. Luego, $\mathcal{C}$ es una equivariantización $\mathcal{C} \simeq \widetilde{\mathcal{C}}^G$ con respecto a la acción de un cierto grupo G en $\widetilde{\mathcal{C}}$, como fue explicado en la Observación 2.11.4. De hecho, el funtor modularización $\mathcal{C} \to \widetilde{\mathcal{C}}$ induce una sucesión exacta de categorías de fusión $\operatorname{Rep} G \to \mathcal{C} \to \widetilde{\mathcal{C}}$, que viene de la equivariantización; ver [BrN, Example 5.33].

Por construcción del grupo G, la categoría $\operatorname{Rep} G$ es la subcategoría de fusión (tannakiana) de objetos transparentes en $\mathcal{C}$. Por lo tanto, hay una inmersión de categorías de fusión trenzadas $\operatorname{Rep} G \subseteq \mathcal{C}$. En particular, por el Lema 2.2.7, el orden de G es impar. Así, el grupo G es resoluble, por el Teorema de Feit-Thompson [FT].

Por el Lema 3.4.2, tenemos que $\operatorname{c.d.}(\widetilde{\mathcal{C}}) \subseteq \{p^m : m \geq 0\}$. Luego, por inducción, y dado que la equivariantización de una categoría de fusión resoluble bajo la acción de un grupo resoluble también es resoluble, podemos y vamos a asumir en lo que sigue que $\mathcal{C} = \widetilde{\mathcal{C}}$ es modular.

Bajo esta hipótesis, el grupo de graduación universal $U(\mathcal{C})$ es abeliano e isomorfo al grupo de caracteres $\widehat{G(\mathcal{C})}$ de $G(\mathcal{C})$, por el Teorema 2.10.2. En particular, el grupo $U(\mathcal{C})$ es no trivial. Por lo tanto, sigue de la Observación 2.7.2 que $\operatorname{FPdim} \mathcal{C}_{\mathrm{ad}} < \operatorname{FPdim} \mathcal{C}$. Al ser una subcategoría de fusión de $\mathcal{C}$, la subcategoría adjunta $\mathcal{C}_{\mathrm{ad}}$ también es una categoría de fusión trenzada con dimensión de Frobenius-Perron impar y tal que $\mathrm{c.d.}(\mathcal{C}_{\mathrm{ad}}) \subseteq \{p^m : m \geq 0\}$. Luego, por hipótesis inductiva, $\mathcal{C}_{\mathrm{ad}}$ es resoluble. Además, $\mathcal{C}$ es una $U(\mathcal{C})$-extensión de su subcategoría adjunta $\mathcal{C}_{\mathrm{ad}}$ y, por el Teorema 2.9.2, la extensión de una categoría de fusión resoluble por un grupo resoluble es resoluble. Entonces, la categoría $\mathcal{C}$ es resoluble, como habíamos afirmado. $\square$

Capítulo 4

Resolubilidad de una clase de categorías de fusión trenzadas

Recordemos que $\mathbf{k}$ es un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 0. En este capítulo continuaremos con el análisis del problema de dar resultados estructurales sobre una categoría de fusión $\mathcal{C}$ bajo ciertas restricciones sobre el conjunto $\mathrm{cd}(\mathcal{C})$ de dimensiones de Frobenius-Perron de los objetos simples de $\mathcal{C}$. Nos concentraremos especialmente en cuestiones relacionadas con las nociones de categoría de fusión de tipo grupo y de resolubilidad de una categoría de fusión. El Teorema 4.2.11 extiende los resultados del Capítulo 3 para álgebras de Hopf semisimples cuasitriangulares. En particular, este teorema implica que toda categoría de fusión trenzada débilmente íntegra cuyos objetos simples tienen dimensiones de Frobenius-Perron a lo sumo 2 es débilmente de tipo grupo. Por lo tanto, esto apoya la conjetura de que toda categoría de fusión débilmente íntegra es débilmente de tipo grupo. Ver [ENO2, Question 2].

Otro de los resultados principales del capítulo es el Teorema 4.2.13, en el cual mostramos que una categoría de fusión trenzada débilmente íntegra $\mathcal{C}$ cuyos objetos simples tienen dimensiones de Frobenius-Perron a lo sumo 2 es de tipo grupo en el caso extremo en el que la graduación universal de $\mathcal{C}$ es trivial. Es sabido también que la misma conclusión es válida en el caso extremo opuesto, es decir, cuando $\mathcal{C}$ es una categoría de fusión íntegra nilpotente.

Algunas de las pruebas de estos resultados se basan en los obtenidos por Naidu y Rowell [NaR], para el caso específico en que $\mathcal{C}$ tiene un objeto simple fiel autodual.

4.1. Algunas familias de ejemplos

4.1.1. Ejemplos de categorías de fusión con grados irreducibles a lo sumo 2

En esta subsección discutiremos ejemplos, que aparecen en la literatura, de categorías de fusión débilmente íntegras para las cuales las dimensiones de Frobenius-Perron de sus objetos simples son a lo sumo 2.

Ejemplo 4.1.1. Sea Γ un grupo finito. Consideremos un álgebra de Hopf H que encaja en una sucesión exacta abeliana:

$$\mathbf{k} \to \mathbf{k}^{\Gamma} \to H \to \mathbf{k}\mathbb{Z}_2 \to \mathbf{k}, \tag{4.1}$$

y su categoría de representaciones de dimensión finita $\mathcal{C} = \operatorname{Rep} H$. Entonces $\mathrm{c.d.}(\mathcal{C}) \subseteq \{1, 2\}$ y, se cumple la igualdad si la acción correspondiente de $\mathbb{Z}_2$ en Γ es no trivial.

Todos estos ejemplos son de tipo grupo puesto que, por la Observación 2.5.4, tenemos la siguiente equivalencia de categorías de fusión $\operatorname{Rep} H \simeq \mathcal{C}(G, \omega, \mathbb{Z}_2, 1)$, donde $\omega : G \times G \times G \to \mathbf{k}^\times$ es el 3-cociclo asociado a la sucesión exacta de Kac, que fue introducida en el Teorema 1.8.3.

Además, como consecuencia de [BN, Theorem 6.4], toda álgebra de Hopf cosemisimple H con $\mathrm{c.d.}(\mathcal{C}) \subseteq \{1, 2\}$ es de tipo grupo si $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathrm{ad}}$. Ver Teorema 3.3.4.

Las álgebras de Hopf

$$\mathcal{A}_{4m}^*, \mathcal{B}_{4m}^* \quad m \geq 2,$$

tienen dimensión $4m$ y fueron introducidas por Masuoka [Ma2]. Éstas son ejemplos no triviales de álgebras de Hopf cosemisimples que encajan en un sucesión exacta como (4.1). En estos casos, Γ es un grupo dihedral.

A continuación comentaremos la idea de la construcción y algunas propiedades básicas de sus álgebras duales, es decir, $\mathcal{A}_{4m}$ y $\mathcal{B}_{4m}$, con $m \geq 2$. Sea $K = \mathbf{k}\langle a \rangle$ el álgebra de Hopf de grupo del grupo cíclico $\mathbb{Z}_2 = \langle a \rangle$ de orden 2. Ésta se identifica, vía el único isomorfismo, con su dual $\mathbf{k}^{\langle a \rangle}$.

Consideremos un entero $m \geq 2$. Así, $\mathcal{A}_{4m}$ se define como el álgebra de Hopf que incluye a K como subálgebra de Hopf central, y está generada sobre K por dos elementos s_-, s_+ sujetos a las siguientes relaciones:

$$s_\pm^2 = 1, \quad (s_+ s_-)^m = 1, \tag{4.2}$$

y ciertas fórmulas para la comultiplicación, counidad y antípoda. El álgebra de Hopf $\mathcal{B}_{4m}$ se define de manera similar, reemplazando la relación $(s_+ s_-)^m = 1$ por $(s_+ s_-)^m = a$.

Notemos que las relaciones dadas por (4.2) coinciden con la presentación del grupo dihedral D_{2m}, como grupo de Coxeter, tomando $t = s_-$ y $z = (s_+ s_-)$; ver la subsección 4.1.2. Además, las álgebras de Hopf $\mathcal{A}_{4m}$ $(m \geq 3)$ y $\mathcal{B}_{4m}$ $(m \geq 2)$ son semisimples, no isomorfas entre sí, no conmutativas ni coconmutativas. Consideremos ahora el *matched pair* $(D_{2m}, \mathbb{Z}_2, \triangleright, \triangleleft)$, donde $\triangleright : \mathbb{Z}_2 \times D_{2m} \to D_{2m}$ es la acción dada por $a \triangleright s_\pm = s_\mp$ y $\triangleleft : D_{2m} \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ la acción trivial. Las álgebras de Hopf $\mathcal{A}_{4m}$ y $\mathcal{B}_{4m}$ dan extensiones asociadas a este matched pair. Más aún, éstas son las únicas, salvo equivalencias, es decir, $\operatorname{Opext}(\mathbf{k}D_{2m}, \mathbf{k}^{\mathbb{Z}_2}) \simeq \mathbb{Z}_2$.

Recordemos que dos álgebras de Hopf de dimensión finita son deformaciones por cociclo una de la otra si y sólo si las categorías de comódulos de dimensión finita sobre ellas son monoidalmente equivalentes [S, Corollary 5.9]. Además, Schauenburg probó que las categorías de corepresentaciones de dos álgebras de Hopf H y K son monoidalmente equivalentes si y sólo si existe un objeto (H, K)-biGalois. Para el álgebra de Hopf $\mathcal{B}_{4m}$ cualquier objeto Galois a derecha es trivial, mientras que para cada $m \geq 3$ existe un objeto $(\mathcal{A}_{4m}, \widehat{\mathcal{D}}_{4m})$-biGalois, donde $\widehat{\mathcal{D}}_{4m}$ es cierta álgebra de Hopf definida también en [Ma2, Definition 3.1 (1)]. Por lo tanto, $\mathcal{A}_{4m}$ se obtiene como una deformación por cociclo de $\widehat{\mathcal{D}}_{4m}$. Más aún, no hay otras deformaciones por cociclo de éstas álgebras de Hopf.

Ejemplo 4.1.2. Sea $\mathcal{C} = \mathcal{TY}(G, \chi, \tau)$ la categoría de Tambara-Yamagami asociada al grupo finito (necesariamente abeliano) G, al bicarater no degenerado simétrico $\chi : G \times G \to \mathbf{k}^\times$ y al elemento $\tau \in \mathbf{k}$ que satisface que $|G|\tau^2 = 1$ [TY]. En la Sección 2.3 se recordaron las propiedades básicas de este tipo de categorías. Se desprende de la Ecuación (2.5) que el conjunto de grados irreducibles es $\mathrm{c.d.}(\mathcal{C}) = \{1, 2\}$ si y sólo si el grupo G es de orden 4 y, en tal caso, tenemos que $\operatorname{FPdim} \mathcal{C} = 8$ por la Observación 2.3.1.

Si $G \simeq \mathbb{Z}_4$, existen dos posibles categorías de fusión $\mathcal{C}$. Como G no es un 2-grupo abeliano elemental, ninguna de éstas es trenzada, por el Teorema 2.3.3.

Ahora, si $G \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ existen exactamente cuatro clases de categorías de Tambara-Yamagami con grados de irreducibles 1 y 2, por [TY, Theorem 4.1]. Tres de éstas son (equivalentes a) las categorías de representationes de álgebras de Hopf de dimensión 8: el álgebra de grupo del grupo dihedral de orden 8, el álgebra de grupo de los cuaterniones y el álgebra de Hopf de Kac-Paljutkin H_8. La restante categoría de fusión, que tiene el mismo bicarater χ que H_8 pero $\tau = -1/2$, no se realiza como la categoría de representationes de un álgebra de Hopf. Dado que G es un 2-grupo abeliano elemental, todas estas categorías admiten una trenza, por el Teorema 2.3.3.

Todas las categorías de fusión en este ejemplo son de tipo grupo. De hecho, dado que tanto $\mathbb{Z}_4$ como $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ son 2-grupos abelianos y ambos tienen orden 2^2, para todo bicaracter no degenerado simétrico $\chi : G \times G \to k^\times$, se sigue del Lema 2.5.6 que G contiene un subgrupo Lagrangiano con respecto a χ . Por lo tanto, el Teorema 2.5.5 implica que la categoría $\mathcal{TY}(G, \chi, \tau)$ es de tipo grupo. Ver también [GNaN, Theorem 4.6].

Ejemplo 4.1.3. Recordemos que una categoría casi grupo es una categoría de fusión con exactamente una clase de isomorfismo de objetos simples no inversibles. En la notación de [Si1], las reglas de fusión de $\mathcal{C}$ están determinadas por un par (G, κ), donde G es el grupo de objetos inversibles de $\mathcal{C}$ y κ es un entero no negativo. En la Sección 2.4 hemos presentado los resultados más destacados sobre esta clase de categorías de fusión.

Como mencionamos en la Observación 2.4.2, las categorías casi grupo con reglas de fusión $(G, 0)$ para algún grupo finito G son las categorías de Tambara-Yamagami, que hemos discutido en el ejemplo anterior. Entonces consideremos ahora categorías casi grupo con reglas de fusión (G, κ) para algún grupo finito G y un entero κ *positivo*.

Se deduce de la Ecuación (2.6) que $\mathrm{c.d.}(\mathcal{C}) = \{1, 2\}$ si y sólo si el grupo G tiene orden 2 y $\kappa = 1$, es decir, si $\mathcal{C}$ es una categoría casi grupo de tipo $(\mathbb{Z}_2, 1)$. En este caso, la Observación 2.4.1 implica que $\mathrm{FPdim}\, \mathcal{C} = 6$ y, dado que $\kappa > 0$, la categoría $\mathcal{C}$ es de tipo grupo [EGO, Theorem 1.1]. Además, por el Teorema 2.4.4, existen, salvo equivalencia, dos categorías casi grupo trenzadas no simétricas con reglas de fusión $(\mathbb{Z}_2, 1)$.

Ejemplo 4.1.4. Las categorías de Ising son un ejemplo de categorías de fusión trenzadas débilmente íntegras que *no* son íntegras, y satisfacen que todos sus objetos simples tienen dimensión de Frobenius-Perron ≤ 2. Estas categorías fueron estudiadas, por ejemplo, en [DGNO2, Appendix B]. En este caso, existe un único objeto simple no inversible X y cumple que $X^{\otimes 2} = \mathbf{1} \oplus a$, donde a es el generador del grupo de objetos inversibles, el cual es isomorfo a $\mathbb{Z}_2$. En particular, éstas son categorías de Tambara-Yamagami. Luego, tenemos que el conjunto de grados irreducibles es $\mathrm{c.d.}(\mathcal{C}) = \{1, \sqrt{2}\}$ y $\mathrm{FPdim}\, \mathcal{C} = 4$. Además, toda categoría de Ising trenzada es modular, por [DGNO2, Corollary B.12].

Otros ejemplos son los dados por las categorías de fusión trenzadas con reglas de fusión de tipo Tambara-Yamagami generalizada $(G, \mathbb{Z}_2)$, con G un grupo finito. Ver [Li]. En éstos, la categoría $\mathcal{C}$ no es punteada, el grupo de objetos inversibles es G, y $\mathbb{Z}_2 \simeq \Gamma \subseteq G$ es un subgrupo tal que $X \otimes X^* \simeq \oplus_{h \in \Gamma} h$, para todos los objetos simples no inversibles X de $\mathcal{C}$. Así, también tenemos en este caso que $\mathrm{c.d.}(\mathcal{C}) = \{1, \sqrt{2}\}$.

Sigue de la Observación 2.5.2 que, como ninguna de estas categorías es íntegra, estos ejemplos *no* son de tipo grupo.

Ejemplo 4.1.5. Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión trenzada de tipo grupo. Entonces $\mathcal{C}$ es una equivariantización de una categoría de fusión punteada, o sea, $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}^G$, con $\mathcal{D}$ una categoría de fusión punteada y G es un grupo finito que actúa en $\mathcal{D}$ por autoequivalencias tensoriales [NaNW]. En este caso, $\mathcal{C}$ contiene a la categoría $\operatorname{Rep} G$ de representaciones de dimensión finita de G como una subcategoría de fusión.

Supongamos que $\mathrm{c.d.}(\mathcal{C}) = \{1, p\}$, con p un número primo cualquiera. Entonces $\mathrm{c.d.}(G) \subseteq \{1, p\}$. En particular, el grupo G debe tener un p-complemento abeliano normal; más aún, o bien G contiene un subgrupo normal abeliano de índice p o el centro $Z(G)$ tiene índice p^3. Ver [I, Theorems 6.9, 12.11].

4.1.2. Reglas de fusión de tipo dihedral

Sea D_n el grupo dihedral de orden $2n$, $n \geq 1$. Recordemos que D_n tiene una presentación por generadores t, z y relaciones $t^2 = 1 = z^n$, $tz = z^{-1}t$.

La siguiente proposición describe las reglas de fusión de $\operatorname{Rep} D_n$ (*c.f.* [Ma2]).

Proposición 4.1.6. *1. Supongamos que n es un número natural* impar. *Entonces las clases de isomorfismos de los objetos simples de* $\operatorname{Rep} D_n$ *están representadas por* 2 *objetos inversibles,* $\mathbf{1}$ *y* g*, y* $r = (n-1)/2$ *objetos simples* $X_1, \dots, X_r$*, de dimensión* 2*, tales que*

$$g \otimes X_i = X_i = X_i \otimes g, \qquad \forall i = 1, \dots, r,$$
$$X_i \otimes X_j = \begin{cases} X_{i+j} \oplus X_{|i-j|}, & \textit{if} \quad i+j \leq r, \\ X_{n-(i+j)} \oplus X_{|i-j|}, & \textit{if} \quad i+j > r; \end{cases}$$

donde $X_0 = \mathbf{1} \oplus g$.

2. *Supongamos que n es un número natural* par*, esto es $n = 2m$. Entonces las clases de isomorfismos de los objetos simples de* $\operatorname{Rep} D_n$ *están representadas por* 4 *objetos inversibles,* $\mathbf{1}$*,* g*,* h*,* $f = gh$*, y* $m-1$ *objetos simples* $X_1, \dots, X_{m-1}$*, de dimensión* 2*, tales que*

$$g \otimes X_i = X_i = X_i \otimes g, \qquad \forall i = 1, \dots, m-1,$$
$$h \otimes X_i = X_{m-i} = X_i \otimes h, \qquad \forall i = 1, \dots, m-1,$$
$$X_i \otimes X_j = \begin{cases} X_{i+j} \oplus X_{|i-j|}, & \textit{si} \quad i+j \leq m, \\ X_{2m-(i+j)} \oplus X_{|i+j|}, & \textit{si} \quad i+j > m; \end{cases}$$

donde $X_0 = \mathbf{1} \oplus g$ *y* $X_m = h \oplus f$.

En particular, el grupo de objetos inversibles en $\operatorname{Rep} D_n$ *es isomorfo a* $\mathbb{Z}_2$ *si* n *es impar, y a* $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ *si* n *es par.*

Observación 4.1.7. Supongamos que 4 divide a $n = 2m$. Entonces $X_{m/2}$ es un punto fijo de la multiplicación (a izquierda y a derecha) por cualquiera de los objetos inversibles de $\operatorname{Rep} D_n$.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión con $\mathrm{c.d.}(\mathcal{C}) = \{1, 2\}$. Supongamos que el anillo de Grothendieck de $\mathcal{C}$ es conmutativo (por ejemplo, este es el caso si $\mathcal{C}$ es trenzada). Asumamos también que las siguientes condiciones se cumplen:

(a) Todos los objetos son autoduales, o sea $X \simeq X^*$, para todo objeto X de $\mathcal{C}$.

(b) $\mathcal{C}$ tiene un objeto simple fiel, es decir, la subcategoría de fusión generada por dicho objeto simple es igual a $\mathcal{C}$.

Naidu y Rowell mostraron en [NaR, Theorem 4.2] que, bajo estas hipótesis, la categoría de fusión $\mathcal{C}$ es Grothendieck equivalente a $\operatorname{Rep} D_n$, es decir, que estas categorías comparten las mismas reglas de fusión. Más aún, $\mathcal{C}$ es necesariamente de tipo grupo.

Es posible prescindir de la hipótesis de que todos los objetos sean autoduales pero, en tal caso, debemos requerir que el objeto simple fiel cumpla la condición de ser autodual. Concretamente, supongamos que $\mathcal{C}$ no es autodual pero satisface que:

(b') $\mathcal{C}$ tiene un objeto simple fiel autodual.

En este caso, por [NaR, Remark 4.4], la categoría de fusión $\mathcal{C}$ también es de tipo grupo y es Grothendieck equivalente a $\operatorname{Rep} \widetilde{D}_n$, con n impar. Aquí $\widetilde{D}_n$ es el grupo de cuaterniones generalizado (dihedral binario) de orden $4n$, o sea, el grupo presentado por generadores a, s, con relaciones $a^{2n} = 1$, $s^2 = a^n$, $s^{-1}as = a^{-1}$. Observemos que, para n impar, $\widetilde{D}_n$ es isomorfo al producto semidirecto $\mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_4$, con respecto a la acción dada por la inversión, considerada en [NaR]. Por otro lado, para n par, $\operatorname{Rep} \widetilde{D}_n$ es Grothendieck equivalente a $\operatorname{Rep} D_{2n}$, mientras que $\mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_4$ no tiene representaciones fieles de grado 2.

Lema 4.1.8. *Sea $n \geq 2$. Luego $(\operatorname{Rep} \widetilde{D}_n)_{\mathrm{ad}} = \operatorname{Rep} D_n$. Además,*

$$(\operatorname{Rep} D_n)_{\mathrm{ad}} = \begin{cases} \operatorname{Rep} D_{n/2}, & si \quad n \quad es\ par, \\ \operatorname{Rep} D_n, & if \quad n \quad es\ impar. \end{cases}$$

Demostración. Recordemos que cuando $\mathcal{C} = \operatorname{Rep} G$, con G un grupo finito, tenemos que la subcategoría adjunta es $\mathcal{C}_{\mathrm{ad}} = \operatorname{Rep} G/Z(G)$ [GN]. Así, la primera de las afirmaciones se sigue del hecho de que el centro de $\tilde{D}_n$ es igual a $\{1, s^2\} \simeq \mathbb{Z}_2$. Por otro lado, el centro $Z(D_n)$ es trivial si n es impar, e igual a $\{1, z^{n/2}\} \simeq \mathbb{Z}_2$ si n es par. Esto implica la segunda afirmación y concluye la demostración del lema. □

4.2. Resultados principales

Proposición 4.2.1. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión premodular. Supongamos que $\mathcal{C}$ tiene un objeto inversible g de orden n y un objeto simple X tal que*

1. *$g \otimes X = X$, y*
2. *g centraliza a X.*

Entonces tenemos que

(i) $\mathcal{C}$ es una equivariantización por el grupo cíclico $\mathbb{Z}_n$ de una categoría de fusión $\widetilde{\mathcal{C}}$.

(ii) Si $g \in Z_2(\mathcal{C})$, entonces $\widetilde{\mathcal{C}}$ es trenzada.

Demostración. La condición 1 asegura la existencia de un funtor de fibra en la categoría de fusión $\mathcal{C}[g]$ generada por g. Entonces $\mathcal{C}[g]$ es equivalente a $\operatorname{Rep}\mathbb{Z}_n$ como categorías de fusión. Ver [EGO, Section 6].

Más aún, son equivalentes como categorías de fusión trenzadas. En efecto, se sigue de 1 que $\mathcal{C}[g] \subseteq \mathcal{C}[X]$ y, de esta forma, $\mathcal{C}[g] \subseteq Z_2(\mathcal{C}[X])$, por 2. Luego, la categoría $\mathcal{C}[g]$ es simétrica. Entonces, los únicos *twists* posibles en $\mathcal{C}$ son $\theta_h = 1$ y $\theta_h = -1$, para todo $h \in \langle g \rangle$. Pero, dado que h centraliza a X y $h \otimes X = X$, el *twist* θ_h no es igual a -1 [Mu2, Lemma 5.4]. Entonces $\theta_h = 1$, para todo $h \in \langle g \rangle$. Por lo tanto, $\mathcal{C}[g] \simeq \operatorname{Rep}\mathbb{Z}_n$ como categorías de fusión trenzadas, como habíamos afirmado.

Sea $\Gamma = \langle g \rangle \subseteq G(\mathcal{C})$. La de-equivariantización $\widetilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C}_\Gamma$ de $\mathcal{C}$ por Γ es una categoría de fusión, pues todo $h \in \Gamma$ tiene dimensión de Frobenius-Perron 1 y $\theta_h = 1$ [DGNO2, Theorem 4.18 (i)]. De esta forma, hay una equivalencia canónica $\mathcal{C} \simeq (\mathcal{C}_\Gamma)^\Gamma$ entre la categoría $\mathcal{C}$ y la Γ-equivariantización de $\widetilde{\mathcal{C}}$, lo cual prueba (i). Es más, ésta es una equivalencia de categorías de fusión trenzadas cuando $g \in Z_2(\mathcal{C})$, por la Observación 2.6.4, [DGNO2, Theorem 4.18 (ii)]. Así obtenemos (ii). Esto prueba la proposición. ☐

Recordemos que en la Sección 2.8 hemos introducido la noción de serie central ascendente de una categoría de fusión $\mathcal{C}$, que está definida recursivamente de la siguiente forma:

$$\mathcal{C}^{(0)} = \mathcal{C}, \quad \mathcal{C}^{(1)} = \mathcal{C}_{\mathrm{ad}}, \quad \mathcal{C}^{(n)} = (\mathcal{C}^{(n-1)})_{\mathrm{ad}},$$

para todo entero $n \geq 1$.

Lema 4.2.2. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión cuyo anillo de Grothendieck es conmutativo. Supongamos además que $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathrm{ad}}$. Si $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_s$ son subcategorías de fusión que generan $\mathcal{C}$ como categoría de fusión, entonces $\mathcal{D}_1^{(m)}, \dots, \mathcal{D}_s^{(m)}$ también generan $\mathcal{C}$ como categoría de fusión, $\forall m \geq 0$.*

Demostración. Como las subcategorías $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_s$ generan $\mathcal{C}$, entonces $(\mathcal{D}_1)_{\mathrm{ad}}, \dots, (\mathcal{D}_s)_{\mathrm{ad}}$ también generan la categoría $\mathcal{C}$. En efecto, sea X un objeto simple de $\mathcal{C}$. Existen objetos simples $X_{i_1}, \dots, X_{i_t}$, con $X_{i_l} \in \mathcal{D}_{i_l}$, $1 \leq i_1, \dots, i_t \leq s$, tales que X es un sumando directo de $X_{i_1} \otimes \cdots \otimes X_{i_t}$. Entonces $X \otimes X^*$ es un sumando directo de

$$X_{i_1} \otimes \cdots \otimes X_{i_t} \otimes X_{i_t}^* \otimes \cdots \otimes X_{i_1}^* \simeq (X_{i_1} \otimes X_{i_1}^*) \otimes \cdots \otimes (X_{i_t} \otimes X_{i_t}^*),$$

pues el anillo de Grothendieck de $\mathcal{C}$ es conmutativo Notemos que los objetos en el lado derecho pertenecen a la subcategoría de fusión generada por $(\mathcal{D}_1)_{\mathrm{ad}}, \dots, (\mathcal{D}_s)_{\mathrm{ad}}$. Ahora, como X fue elegido arbitrariamente, tenemos que $(\mathcal{D}_1)_{\mathrm{ad}}, \dots, (\mathcal{D}_s)_{\mathrm{ad}}$ generan la subcategoría adjunta $\mathcal{C}_{\mathrm{ad}}$. Pero, por hipótesis, $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathrm{ad}}$. Así, hemos probado que $(\mathcal{D}_1)_{\mathrm{ad}}, \dots, (\mathcal{D}_s)_{\mathrm{ad}}$ generan la categoría $\mathcal{C}$.

De esta forma, el lema se sigue por inducción en n, dado que $\mathcal{D}_j^{(n)} = (\mathcal{D}_j^{(n-1)})_{\mathrm{ad}}$, para todo $j = 1, \dots s$, $n \geq 1$. ☐

4.2.1. Categorías de fusión trenzadas con grados irreducibles 1 y 2

A lo largo de esta subsección, $\mathcal{C}$ denotará una categoría de fusión trenzada con $\mathrm{c.d.}(\mathcal{C}) = \{1, 2\}$. Consideramos a $\mathcal{C}$ como una categoría premodular con respecto a su estructura esférica canónica, como en la Observación 2.10.3.

Observación 4.2.3. Notemos que el grupo estabilizador $G[X]$ es no trivial, para todo objeto X simple no inversible en $\mathcal{C}$, es decir, para X simple con $\operatorname{FPdim} X = 2$. Más aún, sigue de la Ecuación (2.4) que $|G[X]| = 2$ o 4. En particular, el grupo abeliano $G(\mathcal{C})$ es no trivial.

Proposición 4.2.4. *Sea g un objeto inversible de orden 2 tal que $\theta_g = 1$. Supongamos que g genera el centro de Müger $Z_2(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ como categoría de fusión. Entonces $\mathcal{C}$ es la equivariantización de una categoría de fusión modular $\widetilde{\mathcal{C}}$ por el grupo $\mathbb{Z}_2$. Más aún,* $\mathrm{c.d.}(\widetilde{\mathcal{C}}) \subseteq \{1, 2\}$.

Demostración. Por hipótesis, $Z_2(\mathcal{C}) \simeq \operatorname{Rep} \mathbb{Z}_2$ es una categoría tannakiana. Entonces, como mencionamos en la Sección 2.6, la de-equivariantización $\widetilde{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}$ por $Z_2(\mathcal{C})$ es una categoría modular y hay una acción de $\mathbb{Z}_2$ en $\widetilde{\mathcal{C}}$ tal que $\mathcal{C} \simeq \widetilde{\mathcal{C}}^{\mathbb{Z}_2}$. Además, como $\mathrm{c.d.}(\widetilde{\mathcal{C}}^{\mathbb{Z}_2}) = \mathrm{c.d.}(\mathcal{C}) = \{1, 2\}$, por el Lema 3.4.2 tenemos que $\mathrm{c.d.}(\widetilde{\mathcal{C}}) \subseteq \{1, 2\}$. $\square$

Lema 4.2.5. *Supongamos que $\mathcal{C}_{\mathrm{ad}} \subsetneq \mathcal{C}$ es resoluble. Entonces, la categoría de fusión $\mathcal{C}$ es resoluble.*

Demostración. Como $\mathcal{C}$ es una categoría de fusión trenzada, se deduce del Teorema 2.10.2 que, su grupo de graduación universal $U(\mathcal{C})$ es abeliano. Recordemos que toda extensión de una categoría resoluble por un grupo resoluble es también resoluble [ENO2, Proposition 4.5 (i)]; ver Teorema 2.9.2. Por hipótesis, la subcategoría adjunta $\mathcal{C}_{\mathrm{ad}}$ es resoluble, y dado que $\mathcal{C}$ es una $U(\mathcal{C})$-extensión de $\mathcal{C}_{\mathrm{ad}}$, entonces $\mathcal{C}$ es resoluble. $\square$

Lema 4.2.6. *Supongamos que $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathrm{ad}}$. Entonces* $\operatorname{FPdim} Z_2(\mathcal{C}) \geq 2$.

Demostración. Supongamos, por el contrario, que $\operatorname{FPdim} Z_2(\mathcal{C}) = 1$. En este caso, $\mathcal{C}$ es modular y, por el Teorema 2.10.2, tenemos un isomorfismo de grupos $U(\mathcal{C}) \simeq \widehat{G(\mathcal{C})}$. Luego, se sigue de la Observación 4.2.3 que el grupo $U(\mathcal{C})$ es no trivial. Pero, combinando esto con la Observación 2.7.2 obtenemos que $\mathcal{C}_{\mathrm{ad}} \subsetneq \mathcal{C}$, contradiciendo la hipótesis. Así, $\operatorname{FPdim} Z_2(\mathcal{C}) \geq 2$, como habíamos afirmado. $\square$

Lema 4.2.7. *Supongamos que la categoría de fusión $\mathcal{C}$ está generada por un objeto simple X que es autodual, es decir $X \simeq X^*$, y cuya dimensión de Forbenius-Perron es igual a 2. Entonces tenemos que*

(i) $\mathcal{C}$ no es modular.

Además, cuando $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathrm{ad}}$ también se cumple que

(ii) Hay un isomorfismo de grupos $G(\mathcal{C}) \simeq \mathbb{Z}_2$.

(iii) $G(\mathcal{C}) \subseteq Z_2(\mathcal{C})$.

Demostración. Como mencionamos en la Sección 4.1.2, bajo estas hipótesis, la categoría de fusión $\mathcal{C}$ es Grothendieck equivalente a $\operatorname{Rep} D_n$ o $\operatorname{Rep} \widetilde{D}_{2n+1}$, para algún $n \geq 1$. Ver [NaR, Theorem 4.2; Remark 4.4]. En el primer caso, dado que el grupo de graduación universal es un invariante Grothendieck, tenemos que $U(\mathcal{C})$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_2$ si n es par y es trivial si n es impar. Pero el grupo $G(\mathcal{C})$, que también es un invariante Grothendieck, es isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ si n es par y a $\mathbb{Z}_2$ si n es impar, por la Proposición 4.1.2. Entonces, para todo n, los grupos $U(\mathcal{C})$ y $\widehat{G(\mathcal{C})}$ son no isomorfos. Así, como consecuencia del Teorema 2.10.2, $\mathcal{C}$ no es modular. De manera similar, si $\mathcal{C}$

es Grothendieck equivalente a $\operatorname{Rep}\widetilde{D}_{2n+1}$, tenemos que $U(\mathcal{C}) \simeq \mathbb{Z}_2$ y $G(\mathcal{C}) \simeq \mathbb{Z}_4$. Por lo tanto, $\mathcal{C}$ tampoco es modular en este caso. Luego, la afirmación (i) queda demostrada.

Notemos ahora que, por el Lema 4.1.8, la hipótesis $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathrm{ad}}$ implica que $\mathcal{C}$ es Grothendieck equivalente a la categoría $\operatorname{Rep} D_n$, para algún n *impar*. Entonces (ii) se sigue inmediatamente de las reglas de fusión de $\operatorname{Rep} D_n$ (para n impar), descriptas en la Proposición 4.1.2. Además, por (i), el centro de Müger $Z_2(\mathcal{C})$ es no trivial. Luego, se deduce de la Observación 4.2.3 que el grupo $G(Z_2(\mathcal{C}))$ es no trivial, puesto que $\mathrm{c.d.}(Z_2(\mathcal{C})) \subseteq \{1, 2\}$. Por lo tanto, $G(Z_2(\mathcal{C})) = G(\mathcal{C}) \simeq \mathbb{Z}_2$, y queda probada (iii). $\square$

Observación 4.2.8. Si $\mathcal{C}$ es una categoría de fusión como en el Lema 4.2.7, entonces la hipótesis $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathrm{ad}}$ es lo mismo que decir que $\mathcal{C}$ es Grothendieck equivalente a $\operatorname{Rep} D_n$, para algún $n \geq 1$ *impar*.

Lema 4.2.9. *Supongamos que $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathrm{ad}}$. Entonces $\mathcal{C}$ está generada por subcategorías de fusión $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_s$, $s \geq 1$, donde cada $\mathcal{D}_i$ es Grothendieck equivalente a $\operatorname{Rep} D_{n_i}$, con n_i un número natural impar, para todo $i = 1, \dots, s$.*

Demostración. Tenemos que $\mathcal{C} = \mathcal{C}[X_1, \dots, X_s]$, para algunos objetos $X_1, \dots, X_s$ simples en $\mathcal{C}$. Consideramos $\mathcal{D}_i = \mathcal{C}[X_i]$ la subcategoría de fusión generada por X_i, $i = 1, \dots, s$. Entonces, por el Lema 4.2.2, las subcategorías adjuntas $(\mathcal{D}_1)_{\mathrm{ad}}, \dots, (\mathcal{D}_s)_{\mathrm{ad}}$ generan $\mathcal{C}$ como categoría de fusión. Así, basta considerar los objetos simples X_i cuya dimensión de Frobenius-Perron es igual a 2, pues en caso contrario, $\operatorname{FPdim} X_i = 1$ y $X_i \otimes X_i^* \simeq \mathbf{1}$.

Más aún, iterando la aplicación del Lema 4.2.2, podemos suponer también que el orden del estabilizador $G[X_i]$ es 2, para todo $i = 1, \dots, s$. En caso contrario, por la Observación 4.2.3, el grupo $G[X_i]$ tiene orden 4. Así, $X_i \otimes X_i^* \simeq \bigoplus_{g \in G[X_i]} g$ y la subcategoría adjunta $(\mathcal{D}_i)_{\mathrm{ad}}$ es punteada. Por lo tanto, vamos a considerar $G[X_i] = \{\mathbf{1}, g_i\}$, para todo $i = 1, \dots, s$. De esta forma, tenemos una descomposición $X_i \otimes X_i^* \simeq \mathbf{1} \oplus g_i \oplus X_i'$, donde X_i' es un objeto simple autodual con dimensión de Frobenius-Perron igual a 2. Dado que el objeto $X_i \otimes X_i^*$ es un generador de la subcategoría $(\mathcal{D}_i)_{\mathrm{ad}}$, las reducciones anteriores nos permiten suponer que $\mathcal{D}_i = \mathcal{C}[X_i]$, con X_i un objeto simple autodual de $\mathcal{C}$ tal que $\operatorname{FPdim} X_i = 2$, $\forall i = 1, \dots, s$.

Afirmamos ahora que los X_i's pueden ser elegidos de manera tal que $(\mathcal{D}_i)_{\mathrm{ad}} \simeq \mathcal{D}_i$. Como observamos en la Sección 4.1.2, por [NaR, Theorem 4.2; Remark 4.4], la categoría $\mathcal{D}_i$ es Grothendieck equivalente a $\operatorname{Rep} D_{n_i}$ o bien a $\operatorname{Rep}\widetilde{D}_{2n_i+1}$, con $n_i \geq 1$. Entonces, iterando nuevamente la aplicación del Lema 4.2.2 y utilizando la Observación 4.1.8, podemos concluir que $\mathcal{C} = \mathcal{C}[\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_s]$, donde $\mathcal{D}_j$ es una subcategoría de fusión Grothendieck equivalente a $\operatorname{Rep} D_{n_j}$, con n_j un número natural impar, para todo $j = 1, \dots, s$. De esta forma, hemos completado la demostración del lema. $\square$

4.2.2. Resultados estructurales

Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión débilmente íntegra. Se sigue de [GN, Theorem 3.10] que, o bien $\mathcal{C}$ es íntegra o $\mathcal{C}$ es una $\mathbb{Z}_2$-extensión de una subcategoría de fusión $\mathcal{D}$. En particular, si $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathrm{ad}}$, entonces $\mathcal{C}$ es necesariamente íntegra.

Lema 4.2.10. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión y sean X, X' objetos simples de $\mathcal{C}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) El producto tensorial $X^* \otimes X'$ es simple.

(ii) Para todo objeto simple $Y \neq \mathbf{1}$ de $\mathcal{C}$, o bien $m(Y, X \otimes X^*) = 0$ o $m(Y, X' \otimes X'^*) = 0$.

En particular, si $X^* \otimes X'$ no es simple, entonces $\mathcal{C}[X]_{\mathrm{ad}} \cap \mathcal{C}[X']_{\mathrm{ad}}$ es no trivial.

La equivalencia entre (i) y (ii) fue probada en [BN, Lemma 6.1] para el caso en que $\mathcal{C}$ es la categoría de (co)representaciones de un álgebra de Hopf semisimple. Notar que la prueba *loc. cit.* funciona también en este contexto más general.

Demostración. Sea $Z = X \otimes (X')^*$. Entonces Z es irreducible si y sólo si $m(\mathbf{1}, Z \otimes Z^*) = 1$. Por otro lado, escribiendo la Ecuación (2.4) para $(X')^*$ resulta que:

$$Z \otimes Z^* = X \otimes (X')^* \otimes X' \otimes X^* = X^* \otimes X \oplus \bigoplus_{Y \neq \mathbf{1}} m(Y, X' \otimes (X')^*) X^* \otimes Y \otimes X.$$

De esta forma, $m(\mathbf{1}, Z \otimes Z^*) = 1$ si y sólo si para todo $Y \neq \mathbf{1}$ con $m(Y, X' \otimes (X')^*) > 0$, tenemos que $m(\mathbf{1}, X^* \otimes Y \otimes X) = 0$ o, equivalentemente, $m(Y, X \otimes X^*) = 0$. □

Teorema 4.2.11. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión trenzada débilmente íntegra tal que* $\mathrm{FPdim}\, X \leq 2$, *para todo objeto simple X en $\mathcal{C}$. Entonces $\mathcal{C}$ es resoluble.*

Demostración. La prueba es por inducción en $\mathrm{FPdim}\, \mathcal{C}$. Como mencionamos al comienzo de esta subsección, si $\mathcal{C}$ no es íntegra, entonces es una $\mathbb{Z}_2$-extensión de una subcategoría de fusión $\mathcal{D}$. Como $\mathcal{D}$ también satisface las hipótesis del teorema, entonces $\mathcal{D}$ es resoluble por hipótesis inductiva. De esta forma, por el Teorema 2.9.2, $\mathcal{C}$ es resoluble. Por lo tanto, vamos a suponer que $\mathcal{C}$ es una categoría de fusión íntegra.

En vista del Lema 4.2.5, podemos suponer que $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathrm{ad}}$. Luego, se sigue del Lema 4.2.9 que, la categoría de fusión $\mathcal{C}$ está generada por subcategorías de fusión $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_s$, $s \geq 1$, con $\mathcal{D}_j$ Grothendieck equivalente a $\mathrm{Rep}\, D_{n_j}$, donde n_j es un número natural impar, $\forall j = 1, \dots, s$.

Por el Lema 4.2.7, el grupo $G(\mathcal{D}_j)$ tiene orden 2, esto es $G(\mathcal{D}_j) = \{\mathbf{1}, g_j\}$, $\forall j = 1, \dots, s$. Afirmamos que $g_i = g_j$, $\forall\, 1 \leq i, j \leq s$. En efecto, sea $\mathcal{D}_j = \mathcal{C}[X^{(j)}]$, con $X^{(j)} = X_1^{(j)}$ en la notación de la Proposición 4.1.6. Así, tenemos que $(X^{(j)})^{\otimes 2} = \mathbf{1} \oplus g_j \oplus X_2^{(j)}$. Fijemos $1 \leq i, j \leq s$. Como $\mathcal{C}$ no tiene objetos simples de dimensión de Frobenius-Perron 4 entonces, por el Lema 4.2.10, o bien $g_i = g_j$ o $X_2^{(j)} \simeq X_2^{(i)}$. En el primer caso la afirmación se cumple inmediatamente. Notemos que, en el segundo caso, tenemos que $\{1, g_j\} = G[X_2^{(j)}] = G[X_2^{(i)}] = \{1, g_i\}$ y, de esta forma, también vale que $g_j = g_i$. Sea $g = g_j = g_i$.

Ahora, por el Lema 4.2.7, el objeto g pertenece al centralizador $\mathcal{D}_i'$, $\forall\, i = 1, \dots, s$. Más aún, como $\mathcal{C}$ está generada por las subcategorías $\mathcal{D}_i$, $1 \leq i \leq s$, entonces g es un objeto transparente de $\mathcal{C}$, es decir, $g \in Z_2(\mathcal{C})$. Luego, $\mathcal{C}$ es la equivariantización por $\mathbb{Z}_2$ de una categoría de fusión trenzada $\widetilde{\mathcal{C}}$, por el inciso (ii) del Teorema 4.2.1. En particular, se sigue del Lema 3.4.2 que $\mathrm{FPdim}\, \widetilde{\mathcal{C}} = \mathrm{FPdim}\, \mathcal{C}/2$ y $\mathrm{c.d.}(\widetilde{\mathcal{C}}) \subseteq \{1, 2\}$. Por hipótesis inductiva, $\widetilde{\mathcal{C}}$ es resoluble. Entonces, como consecuencia del Teorema 2.9.2, $\mathcal{C}$ también es resoluble, por ser la equivariantización de una categoría de fusión resoluble por un grupo resoluble. □

Teorema 4.2.12. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión trenzada débilmente íntegra tal que* $\operatorname{FPdim} X \leq 2$, *para todo objeto simple X en $\mathcal{C}$. Supongamos además que $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathrm{ad}}$. Entonces $\mathcal{C}$ es Morita equivalente a una categoría de fusión punteada $\mathcal{C}(A \rtimes \mathbb{Z}_2, \tilde{\omega})$, donde A es un grupo abeliano munido de una acción de $\mathbb{Z}_2$ por automorfismos de grupo, y $\tilde{\omega} \in H^3(A \rtimes \mathbb{Z}_2, \mathbf{k}^\times)$ es cierto 3-cociclo en el producto semidirecto $A \rtimes \mathbb{Z}_2$.*

Demostración. La hipótesis $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathrm{ad}}$ implica que la categoría de fusión $\mathcal{C}$ es íntegra. Por lo tanto, vamos a suponer que el conjunto de dimensiones irreducibles es $\mathrm{c.d.}(\mathcal{C}) = \{1, 2\}$. Así, en vista del Lema 4.2.9, $\mathcal{C}$ está generada por subcategorías de fusión $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_s$, $s \geq 1$, donde cada $\mathcal{D}_i$ es Grothendieck equivalente a $\operatorname{Rep} D_{n_i}$, con n_i es un número natural impar, para todo $i = 1, \ldots, s$. De la misma forma que en la prueba del Teorema 4.2.11, la hipótesis $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathrm{ad}}$ implica que $G(\mathcal{D}_i) = \{\mathbf{1}, g\}$, para todo $1 \leq i \leq s$, y el estabilizador $\mathcal{C}[g] \simeq \operatorname{Rep} \mathbb{Z}_2$ es una subcategoría tannakiana del centro de Müger $Z_2(\mathcal{C})$. Luego, se sigue de la Observación 2.6.4 que $\mathcal{C} \simeq \tilde{\mathcal{C}}^{\mathbb{Z}_2}$ es la equivariantización por $\mathbb{Z}_2$ de una categoría de fusión trenzada $\tilde{\mathcal{C}}$.

Como mencionamos en la Sección 2.11, la equivariantización de una categoría de fusión bajo una acción por automorfismos de grupos da lugar a una sucesión exacta de categorías de fusión. En nuestra situación tenemos la siguiente sucesión exacta de funtores tensoriales trenzados:

$$\operatorname{Rep} \mathbb{Z}_2 \to \mathcal{C} \xrightarrow{F} \tilde{\mathcal{C}}. \tag{4.3}$$

Pero, como además $\mathcal{C}[g] \subseteq \mathcal{D}_i$, la sucesión (4.3) induce por restricción una nueva sucesión exacta:

$$\operatorname{Rep} \mathbb{Z}_2 \to \mathcal{D}_i \to \tilde{\mathcal{C}}_i, \tag{4.4}$$

para todo $i = 1, \ldots, s$, donde $\tilde{\mathcal{C}}_i$ es la imagen esencial de $\mathcal{D}_i$ en $\tilde{\mathcal{C}}$ bajo el funtor F. De esta forma, $\tilde{\mathcal{C}}_i$ es una subcategoría de fusión de $\tilde{\mathcal{C}}$, para todo $i = 1, \ldots, s$. Más aún, $\tilde{\mathcal{C}}_1, \ldots, \tilde{\mathcal{C}}_s$ generan $\tilde{\mathcal{C}}$ como categoría de fusión. Notemos también que $\mathrm{c.d.}(\tilde{\mathcal{C}}), \mathrm{c.d.}(\tilde{\mathcal{C}}_i) \subseteq \{1, 2\}$, para todo $i = 1, \ldots, s$. Por otro lado, la exactitud de la sucesión (4.4) implica que $2n_i = \operatorname{FPdim} \mathcal{D}_i = 2 \operatorname{FPdim} \tilde{\mathcal{C}}_i$, por la Proposición 2.11.3. Luego, el número natural $\operatorname{FPdim} \tilde{\mathcal{C}}_i = n_i$ es impar.

Dado que $\tilde{\mathcal{C}}_i$ es una categoría de fusión trenzada íntegra, la dimensión de Frobenius-Perron de cada objeto simple de $\tilde{\mathcal{C}}_i$ divide a la dimensión de Frobenius-Perron de $\tilde{\mathcal{C}}_i$, por el Teorema 2.2.8. De esta forma, como $\mathrm{c.d.}(\tilde{\mathcal{C}}_i) \subseteq \{1, 2\}$ y $\operatorname{FPdim} \tilde{\mathcal{C}}_i = n_i$ es impar, tenemos que $\operatorname{FPdim} Y = 1$, para todo $Y \in \operatorname{Irr}(\tilde{\mathcal{C}}_i)$. Esto significa que $\tilde{\mathcal{C}}_i$ es una categoría de fusión trenzada punteada, para todo $i = 1, \ldots, s$. Entonces $\tilde{\mathcal{C}}$ también es punteada, pues $\tilde{\mathcal{C}}_1, \ldots, \tilde{\mathcal{C}}_s$ generan $\tilde{\mathcal{C}}$ como categoría de fusión. De esta forma, $\tilde{\mathcal{C}} \simeq \mathcal{C}(A, \omega)$ como categorías de fusión, donde A es un grupo abeliano y $\omega \in H^3(A, k^\times)$.

Las acciones de grupos en categorías de fusión punteadas fueron clasificadas por Tambara [T]. Se sigue de [T, Theorem 4.1] que la categoría de fusión $\mathcal{C} \simeq \tilde{\mathcal{C}}^{\mathbb{Z}_2}$ es Morita equivalente a una categoría punteada $\mathcal{C}(A \rtimes \mathbb{Z}_2, \tilde{\omega})$, donde $A \rtimes \mathbb{Z}_2$ es el producto semidirecto con respecto a la acción inducida de $\mathbb{Z}_2$ en el grupo A de objetos inversibles de $\tilde{\mathcal{C}}$, y $\tilde{\omega} : (A \rtimes \mathbb{Z}_2)^{\times 3} \to \mathbf{k}^\times$ es cierto 3-cociclo. ☐

Se sabe que una categoría de fusión trenzada nilpotente, que además es íntegra, siempre es de tipo grupo [DGNO, Theorem 6.10]. A continuación mostraremos que la misma conclusión es válida en el caso extremo opuesto.

Teorema 4.2.13. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión trenzada débilmente íntegra tal que* $\operatorname{FPdim} X \leq 2$, *para todo objeto simple X en $\mathcal{C}$. Supongamos que el grupo de graduación universal $U(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ es trivial. Entonces $\mathcal{C}$ es de tipo grupo.*

Demostración. La prueba es una consecuencia inmediata del Teorema 4.2.12. □

Observación 4.2.14. Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión trenzada tal que $\mathrm{c.d.}(\mathcal{C}) = \{1, 2\}$. Supongamos además que $\mathcal{C}$ es nilpotente. Luego, por [DGNO, Theorem 1.1], la categoría de fusión $\mathcal{C}$ admite una decomposición única (a menos de una reordenación de los factores) como producto tensorial $\mathcal{C}_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{C}_m$, donde cada $\mathcal{C}_i$ es una categoría de fusión trenzada con dimensión de Frobenius-Perron igual a $p_i^{m_i}$, para algunos números primos $p_1, \dots, p_m$, distintos dos a dos. De esta forma, tenemos que $\mathcal{C}_i$ es una categoría de fusión trenzada e íntegra, para todo $i = 1, \dots, m$, y, se sigue de [ENO2, Theorem 2.11], que $\mathcal{C}_i$ es punteada siempre que $p_i > 2$. Entonces, tenemos una equivalencia de categorías de fusión trenzadas $\mathcal{C} \simeq \mathcal{C}_1 \boxtimes \mathcal{B}$, donde $\mathcal{B}$ es una categoría de fusión trenzada punteada, y $\mathcal{C}_1$ es una categoría de fusión trenzada cuya dimensión de Frobenius-Perron es 2^m y tal que $\mathrm{c.d.}(\mathcal{C}_1) = \{1, 2\}$.

Observación 4.2.15. Notemos que, al ser una categoría de tipo grupo, una categoría de fusión trenzada $\mathcal{C}$ que satisface las hipótesis del Teorema 4.2.13 tiene la propiedad **F**, esto es, todas las representaciones asociadas del grupo de trenzas en las potencias tensoriales de objetos de $\mathcal{C}$ se factoriza sobre grupos finitos. Ver [ERW, Corollary 4.4].

Se conjetura que toda categoría de fusión trenzada débilmente íntegra tiene la propiedad **F** [NaR]. Se ha demostrado en [NaR, Corollary 4.3] que dicha conjetura es verdadera para categorías de fusión trenzadas $\mathcal{C}$ con $\mathrm{c.d.}(\mathcal{C}) = \{1, 2\}$ tales que todos los objetos de $\mathcal{C}$ son autoduales.

Bibliografía

[AD] N. Andruskiewitsch, J. Devoto, *Extensions of Hopf algebras*, St. Petersburg. Math. J. **7** (1) (1996), 17–52; translation from Algebra Anal. **7** (1) (1995), 22–61.

[AF] N. Andruskiewitsch, W. Ferrer, *The beginnings of the theory of Hopf algebras*, Acta Appl. Math. **108** (2009), 3–17.

[AS] N. Andruskiewitsch, H.-J. Schneider, *On the classification of finite-dimensional pointed Hopf algebras*, Ann. of Math. (2) **171** (2010), No. 1, 375–417.

[BaKi] B. Bakalov, A. Kirillov Jr., *Lectures on Tensor categories and modular functors*, AMS, Providence, (2001).

[Be] J. Bénabou, *Introduction to bicategories*, Reports of the Midwest Category Seminar, Lecture notes in Math. **47** (1967), 1–77, Springer, Berlin.

[BN] J. Bichon, S. Natale, *Hopf algebra deformations of binary polyhedral groups*, Transform. Groups **16** (2011), No. 2, 339–374.

[BuN] S. Burciu, S. Natale, *Fusion rules of equivariantizations of fusion categories*, J. Math. Phys. **54**, (2013) 013511.

[Bo] A. Borel, *Sur la cohomologie des espaces fibres principaux et des espaces homogenes des groupes de Lie compacts*, Ann. of Math. (2) **57** (1953), 115–207.

[Br] A. Bruguières, *Catégories prémodulaires, modularisations et invariants des variétés de dimension* 3, Math. Ann. **316** (2000), No. 2, 215–236.

[BrN] A. Bruguières, S. Natale, *Exact sequences of tensor categories*, Int. Math. Res. Not. IMRN **2011** (2011), No. 24, 5644–5705.

[C] P. Cartier, *Hyperalgebres et groupes de Lie formels*, Seminaire “Sophus Lie” 2e annee: 1955/56 (1957).

[De] P. Deligne, *Catégories tensorielles*, Mosc. Math. J. **2** (2002), No. 2, 227–248.

[DiPR] R. Dijkgraaf, V. Pasquier, P. Roche, *Quasi-quantum groups related to orbifold models*, Proc. Modern Quantum Field Theory, Tata Institute, Bombay (1990), 375–383.

[D] V. Drinfeld, *Quantum groups*, Proc. Int. Congr. Math., Berkeley 1986, Vol. **1** (1987), 798–820.

[D2] V. Drinfeld, *Quasi-Hopf algebras*, (Russian) Algebra Anal. **1** (1989), No. 6, 114–148; (English translation) Leningr. Math. J. **1** (1990), No. 6, 1419–1457.

[DGNO] V. Drinfeld, S. Gelaki, D. Nikshych, V. Ostrik, *Group-theoretical properties of nilpotent modular categories*, preprint `arXiv:0704.0195` (2007).

[DGNO2] V. Drinfeld, S. Gelaki, D. Nikshych, V. Ostrik, *On braided fusion categories I*, Selecta Math. (N. S.) **16** (2010), No. 1, 1–119.

[EG] P. Etingof, S. Gelaki, *The classification of finite dimensional triangular Hopf algebras over an algebraically closed field of characteristic 0*, Mosc. Math. J. **3** (2003), No. 1, 37–43.

[EGNO] P. Etingof, S. Gelaki, D. Nikshych, V. Ostrik, *Tensor Categories*, Lecture notes of the MIT course 'Tensor categories' by P. Etingof, http://www-math.mit.edu/ etingof/tenscat.pdf.

[EGO] P. Etingof, S. Gelaki, V. Ostrik, *Classification of fusion categories of dimension pq*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2004), No. 57, 3041–3056.

[ENO] P. Etingof, D. Nikshych, V. Ostrik, *On fusion categories*, Ann. of Math. (2) **162** (2005), No. 2, 581–642.

[ENO2] P. Etingof, D. Nikshych, V. Ostrik, *Weakly group-theoretical and solvable fusion categories*, Adv. Math. **226** (2011), No. 1, 176–205.

[EO] P. Etingof, V. Ostrik, *Finite tensor categories*. Mosc. Math. J. **4** (2004), No. 3, 627–654, 782–783.

[ERW] P. Etingof, E. Rowell, S. Witherspoon, *Braid group representations from quantum doubles of finite groups*, Pacific J. Math. **234** (2008), No. 1, 33–41.

[FT] W. Feit, J. Thompson, *Solvability of groups of odd order*, Pacific J. Math. **13** (1963), 775–1029.

[F] P. Freyd, *Abelian categories. An introduction to the theory of functors*, Harper's Series in Modern Mathematics (1964), Harper & Row, New York-Evanston-London.

[Gab] M. Gaberdiel, *An algebraic approach to logarithmic conformal field theory*, Internat. J. Modern Phys. A **18** (2003), No. 25, 4593–4638.

[Ga] F. R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, A.M.S. Chelsea Publishing (1998), Providence, RI.

[GNa] S. Gelaki, D. Naidu, *Some properties of group-theoretical categories*, J. Algebra **322** (2009), No. 8, 2631–2641.

[GNaN] S. Gelaki, D. Naidu, D. Nikshych, *Centers of graded fusion categories*, Algebra Number Theory **3** (2009), No. 8, 959-990.

[GN] S. Gelaki, D. Nikshych, *Nilpotent fusion categories*, Adv. Math. **217** (2008), No. 3, 1053–1071.

[I] I. Isaacs, *Character theory of finite groups*, Pure and Applied Mathematics **69** (1976), Academic Press, New York.

[IK] M. Izumi, H. Kosaki, *Kac algebras arising from composition of subfactors: general theory and classification*, Mem. Amer. Math. Soc. **750** (2007).

[Ji] M. Jimbo, *A q-difference analogue of $U(g)$ and the Yang Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **10** (1985), 63–69.

[KMM] Y. Kashina, G. Mason, S. Montgomery, *Computing the Frobenius-Schur indicator for abelian extensions of Hopf algebras*, J. Algebra **251** (2002), No. 2, 888–913.

[Ka] G. Kac, *Extensions of groups to ring groups*, Math. USSR. Sb. **5** (1968), 451–474.

[Kas] C. Kassel, *Quantum Groups*, Graduate Texts in Mathematics **155** (1995). New York, NY: Springer-Verlag.

[LR] R.Larson, D.Radford, *Semisimple cosemisimple Hopf algebras.* Amer. J. Math. **110** (1988), No.1, 187–195.

[LR2] R.Larson, D.Radford, *Finite dimensional cosemisimple Hopf algebras in characteristic 0 are semisimple*, J.Algebra **117** (1988), No. 2, 267–289.

[Li] J. Liptrap, *Generalized Tambara-Yamagami categories*, to appear in J.Algebra, preprint `arXiv:1002.3166v2`(2010).

[McL] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician.* Graduate Texts in Mathematics, 2nd edition (1997). New York, NY: Springer Verlarg.

[Ma1] A. Masuoka, *Extensions of Hopf algebras*, Trabajos de Matemática **41/99**, Universidad Nacional de Córdoba (1999).

[Ma2] A. Masuoka, *Cocycle deformations and Galois objects for some cosemisimple Hopf algebras of finite dimension*, Contemp. Math. **267** (2000), 195–214.

[Ma3] A. Masuoka, *Hopf algebra extensions and cohomology*, Math. Sci. Res. Inst. Publ. **43** (2002), 167–209.

[Mo] S. Montgomery, *Hopf algebras and their action on rings*, CBMS Regional Conference Series **82** (1993).

[MW] S. Montgomery, Sarah Witherspoon, *Irreducible representations of crossed products*, J. Pure Appl. Algebra **129** (1998), No. 3, 315–326.

[Mu1] M. Müger, *Galois theory for braided tensor categories and the modular closure*, Adv. Math. **150** (2000), No.2, 151–201.

[Mu2] M. Müger, *From subfactors to categories and topology. I. Frobenius algebras in and Morita equivalence of tensor categories*, J. Pure Appl. Algebra **180** (2003), No. 1-2, 81–157.

[Mu3] M. Müger, *On the structure of modular categories*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **87** (2003), No. 2, 291–308.

[NaNW] D. Naidu, D. Nikshych, Sarah Witherspoon, *Fusion subcategories of representation categories of twisted quantum doubles of finite groups*, Int. Math. Res. Not. IMRN **2009** (2009), No. 22, 4183–4219.

[NaR] D. Naidu, E. Rowell, *A finiteness property for braided fusion categories*, Algebr. Represent. Theory **14** (2011), No. 5, 837–855.

[N1] S. Natale, *On group-theoretical Hopf algebras and exact factorizations of finite groups*, J. Algebra **270** (2003), No. 1, 199–211.

[N2] S. Natale, *Frobenius-Schur indicators for a class of fusion categories*, Pacific J. Math. **221** (2005), No. 2, 353–378.

[N3] S. Natale, *R-matrices and Hopf algebra quotients*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2006), No. 18, 1–18.

[N4] S. Natale, *On the exponent of tensor categories coming from finite groups*, Israel J. Math. **162** (2007), 253–273.

[N5] S. Natale, *Semisolvavility of Semisimple Hopf Algebras of Low Dimension*. Mem. Amer. Math. Soc. **186**, 874, (2007).

[N6] S. Natale, *Semisimple Hopf algebras and their representations*, Publ. Mat. Urug. **12** (2011), 123–167.

[NP] S. Natale, J. Plavnik, *On fusion categories with few irreducibles degrees*, Algebra Number Theory **6** (2012), No. 6, 1171–1197.

[NP2] S. Natale, J. Plavnik, *Solvability of a class of braided fusion categories*, to appear in Appl. Categor. Struct. doi:10.1007/s10485-012-9299-y (2013), preprint `arXiv:1205.2394`.

[NR] W. Nichols, M. Richmond, *The Grothendieck group of a Hopf algebra*. J. Pure Appl. Algebra **106** (1996), No. 3, 297–306.

[NZ] W. Nichols, M. Zoeller, *A Hopf algebra freeness Theorem*. Amer. J. Math. **111** (1989), No.2, 381–385.

[Ni] D.Nikshych, *Non-group-theoretical semisimple Hopf algebras from group actions on fusion categories*, Selecta Math. (N.S.) **14**, No. 1 (2008), 145–161.

[O1] V. Ostrik, *Module categories over the Drinfeld double of a finite group*, Int. Math. Res. Not. IMRN **2003** (2003), 1507–1520.

[O2] V. Ostrik, *Module categories, Weak Hopf Algebras and Modular invariants*, Transform. Groups **8** (2003), No 2, 177–206.

[R1] D. Radford, *On the antipode of a quasitriangular Hopf algebra*, J. Algebra **151** (1992), No. 1, 1–11.

[R2] D. Radford, *Minimal quasitriangular Hopf algebras*, J. Algebra **157** (1993), No.2, 285–315.

[ReS] N. Reshetikhin, M. Semenov-Tian-Shansky, *Quantum R-matrices and factorization problems*, J. Geom. Phys. **5** (1988), No.4, 533–550.

[Ro] D. Robinson, *A course in the theory of groups*, Graduate Texts Math. **80**, Springer-Verlag, Berlin (1982).

[S] P. Schauenburg, *Hopf Bigalois extensions*, Comm. Algebra **24** (1996), No.12, 3797–3825.

[Sch] H.-J. Schneider, *Lectures on Hopf algebras*. Trabajos de Matemática 31/95 (FaMAF, 1995).

[Sch2] H.-J. Schneider, *Some properties of factorizable Hopf algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), No.7, 1891–1898.

[Se] G. Seitz, *Finite groups having only one irreducible representation of degree greater than one*, Proc. Amer. Math. Soc. **19** (1968), 459–461.

[Si1] J. Siehler, *Braided near-group categories*, preprint `arXiv:math/0011037v1` (2000).

[Si2] J. Siehler, *Near-group categories*, Algebr. Geom. Topol. **3** (2003), 719–775.

[So] Y. Sommerhäuser, *Yetter-Drinfel'd Hopf algebras over groups of prime order*, Lectures Notes in Mathematics. **1789** (2002), Springer-Verlag.

[Sw] M. Sweedler, *Hopf algebras*, Benjamin, New York (1969).

[T] D. Tambara, *Invariants and semi-direct products for finite group actions on tensor categories*, J. Math. Soc. Japan **53** (2001), No. 2, 429–456.

[TY] D. Tambara, S. Yamagami, *Tensor categories with fusion rules of self-duality for finite abelian groups*, J. Algebra **209** (1998), No. 2, 692–707.

[Tho] J. Thornton, *On braided near-group categories*, preprint `arXiv:1102.4640v1` (2011).

[W] H. Wielandt, *Uber Produkte von nilpotenten Gruppen*, Illinois J. Math. **2** (1958), No. 4B, 611–618.