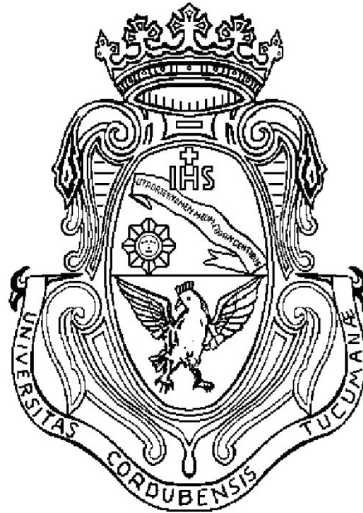


EDISON ALBERTO FERNÁNDEZ CULMA

SOBRE LAS ÓRBITAS DISTINGUIDAS DE REPRESENTACIONES
REDUCTIVAS Y APLICACIONES



UNIVERSIDAD NACIONAL
DE CÓRDOBA

Facultad de Matemática, Astronomía y Física

Tesis de doctorado:
SOBRE LAS ÓRBITAS DISTINGUIDAS DE REPRESENTACIONES
REDUCTIVAS Y APLICACIONES

Por:
EDISON ALBERTO FERNÁNDEZ CULMA

Bajo la dirección de:
DR. JORGE RUBÉN LAURET

Tesis presentada ante la Facultad de Matemática, Astronomía y Física como parte de los requerimientos para la obtención del grado de Doctor en Matemática de la Universidad Nacional de Córdoba

Edison Alberto Fernández Culma,

Sobre las órbitas distinguidas de representaciones reductivas y aplicaciones.

Title in English: *On distinguished orbits of reductive representations and application.*



Con el apoyo de CONICET; Beca Interna de Postgrado con Países Latinoamericanos.

(Fully supported by a CONICET fellowship).

© FaMAF-UNC 2012.

ABSTRACT

In this work, we prove a generalization of the well-known Nikolayevsky's nice basis criterion ([Nik2, Theorem 3]) in the following sense: we introduce the notion of *nice space* of a reductive representation and in the case that such representation is rational (like in the theory of algebraic groups), we give an easy-to-check convex geometry condition to determine when the orbit of an element in a nice space contains critical points of the norm squared of the moment map of the representation (i.e. the orbit is *distinguished*). Also, we give many characterizations of a nice space which are very useful in practice.

As an application of the above results, we characterize the stratified set of (real or complex) ternary forms of any degree with respect to the natural action of $GL_3(\mathbb{F})$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$, respectively $\mathbb{F} = \mathbb{C}$). We also give tools to construct minimal compatible metrics for geometric structures on nilmanifolds and use them to study the existence problem of such metrics. We classify compatible minimal metrics for symplectic 2-step nilpotent Lie algebras of dimension 6.

A second main result in the thesis is the classification of 7-dimensional Einstein nilradicals. To obtain such classification, we make use of some results given by Nikolayevsky in [Nik2], and particularly the already mentioned nice basis criterion.

[2010] Primary 22E45; Secondary 53C25; 53C30; 20G20; 22E25; 13A50; 11E20

Key words and phrases: real and complex reductive groups, algebraic groups, reductive representations, ternary forms, Einstein manifolds, Einstein nilradicals, minimal compatible metric for geometric structures on nilmanifolds, symplectic-nilpotent Lie algebras

RESUMEN

En este trabajo, probamos una generalización del conocido criterio de la base nice de Nikolayevsky ([Nik2, Theorem 3]) en el siguiente sentido: introducimos la noción de *espacio nice* de una representación reductiva y en el caso que tal representación sea racional (como en la teoría de grupos algebraicos), damos una condición en términos de geometría convexa fácil de verificar, para determinar cuándo la órbita de un elemento de un espacio nice contiene puntos críticos de la función cuadrado de la norma de la aplicación momento de la representación (es decir, la órbita es *distinguida*). También damos varias caracterizaciones de un espacio nice que son muy útiles en la práctica.

Como aplicación de los anteriores resultados, caracterizamos el conjunto estratificante de las formas ternarias (reales o complejas) de cualquier grado con respecto a la acción natural de $GL_3(\mathbb{F})$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$, respectivamente \mathbb{C}). También damos herramientas para construir métricas minimales compatibles con estructuras geométricas sobre nilvariedades, y las usamos para estudiar la existencia de tales métricas. Obtenemos una clasificación de las métricas minimales compatibles con las álgebras de Lie 2-pasos nilpotentes simplécticas de dimensión 6.

Un segundo resultado central de la tesis es la clasificación de los nilradicales Einstein de dimensión 7. Para obtener tal clasificación hacemos uso de algunos resultados dados por Nikolayevsky en [Nik2], y en particular, del ya mencionado criterio de la base nice.

[2010] Primary 22E45; Secondary 53C25; 53C30; 20G20; 22E25; 13A50; 11E20

Palabras y frases claves: grupos reductivos reales y complejos, grupos algebraicos, representaciones reductivas, formas ternarias, variedades Einstein, nilradicales Einstein, métricas minimales compatibles con estructuras geométricas sobre nilvariedades, álgebras de Lie nilpotentes simplécticas.

TABLA DE CONTENIDOS

Abstract	v
Resumen	vi
Introducción	ix
1 PRELIMINARES SOBRE TEORÍA GEOMÉTRICA DE INVARIANTES REAL Y COM- PLEJA	1
1.1 Grupos reductivos Complejos y Reales	1
1.1.1 Grupos reductivos Complejos	1
1.1.2 Grupos reductivos Reales	8
1.2 Aplicación momento de representaciones reductivas	11
2 LOS ESPACIOS <i>nice</i> DE UNA REPRESENTACIÓN REDUCTIVA	19
2.1 Convexidad de la aplicación momento para representaciones de toros	19
2.1.1 Funciones convexas	19
2.1.2 Geometría convexa	20
2.2 Generalización del Criterio de Nikolayevsky	26
2.2.1 Grupos algebraicos	26
2.2.2 Acciones detectables	29
2.3 Cómo saber si su A -espacio es nice	30
3 SOBRE LAS FORMAS TERNARIAS	33
3.1 Conjunto estratificante de las formas ternarias	33
3.2 Formas ternarias Cuárticas Reales y Complejas	35
4 CLASIFICACIÓN DE LOS NILRADICALES EINSTEIN DE DIMENSIÓN 7	41
4.1 Preliminares sobre nilradicales Einstein	41
4.1.1 Teoremas de Nikolayevsky	44
4.2 La clasificación	46
5 ESTRUCTURAS GEOMÉTRICAS SOBRE GRUPOS DE LIE NILPOTENTES	59
5.1 Métricas compatibles minimales	59
5.2 Álgebras de Lie 2-pasos nilpotente simplécticas de dimensión 6	62
APÉNDICE	65
A APÉNDICE: CUENTAS DE RESPALDO	67
A.1 Clasificación de los nilradicales Einstein de dimensión 7	67
A.1.1 Rango cero	67
A.1.2 Rango uno	70
A.1.3 Rango dos	98
A.1.4 Rango tres	125
A.1.5 Rango cuatro	137
A.2 Álgebras de Lie 2-pasos nilpotentes simplécticas de dimensión 6	139
A.3 Algunos procedimientos con Maple TM 15	154
Bibliografía	159

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Órbita distinguida en la clausura	15
Figura 2	Punto Expuesto	21
Figura 3	Triángulo de pesos de las ternarias cuárticas	36

LISTA DE TABLAS

Tabla 1	Clasificación de las órbitas distinguidas no minimales en $\mathbb{R}[x, y, z]_4$ por acción de $GL_3(\mathbb{R})$	37
Tabla 2	Formas canónicas para las formas binarias cuárticas	38
Tabla 3	Formas canónicas para las formas binarias cúbicas	39
Tabla 4	Formas canónicas para las formas binarias cuadráticas	39
Tabla 5	Nilradicales Einstein de dimensión 7. Rango 1	50
Tabla 6	Nilradicales Einstein de dimensión 7. Rango 2	53
Tabla 7	Nilradicales Einstein de dimensión 7. Rango 3	56
Tabla 8	Nilradicales Einstein de dimensión 7. Rango 4	57
Tabla 9	Clasificación de las métricas compatibles minimales sobre las álgebras de Lie 2-pasos nilpotentes simplécticas	63

INTRODUCCIÓN

Es bien sabido que la Teoría geométrica de invariantes (*GIT*) ha jugado un papel importante en el estudio de las solvariedades Einstein (por ejemplo, [Heb], [Lau5, Theorem 3.1] y [Nik2]), y más generalmente, en la teoría de las solvariedades solitones de Ricci ([Lau6, Theorem 4.8]). Hay una intrigante relación entre el *flujo de Ricci* sobre nilvariedades y el flujo gradiente del cuadrado de la norma de la *aplicación momento* asociada a la acción natural de $GL_n(\mathbb{R})$ sobre $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^n$, y es por esta relación que los recientes avances en el estudio de los solitones de Ricci han venido de la aplicación de *GIT* a la mencionada acción.

Motivados por lo que se conoce como el *criterio de la base nice de Nikolayevsky* ([Nik2, Theorem 3] o Teorema 4.1.11), el cual es considerado como una herramienta fundamental para estudiar los *nilradicales Einstein*, en esta tesis estudiamos las *representaciones reductivas* y algunas propiedades de convexidad que están asociadas a éstas, y mostramos que tal criterio es un hecho general de la teoría de dichas representaciones. A partir de este resultado, damos una serie de aplicaciones al estudio de las *formas ternarias* y al problema de existencia de *métricas compatibles minimales* para estructuras geométricas sobre grupos de Lie nilpotentes (como son definidas en [Lau3]). Un segundo resultado central de la tesis es la clasificación completa de los nilradicales Einstein de dimensión 7, trabajo en el cual el criterio de Nikolayevsky fue de suma utilidad.

Sea $\widehat{G} = U^{\mathbb{C}} = U \exp(\sqrt{-1}u)$ un grupo reductivo complejo donde U es un grupo de Lie compacto y $u = \text{Lie}(U)$. Sea G un subgrupo cerrado de \widehat{G} (en la topología usual). Se dice que G es un *grupo reductivo real* (en el sentido de [HSS]) si la función

$$\begin{aligned} \psi : K \times \mathfrak{p} &\longrightarrow G \\ (k, X) &\longmapsto k \exp(X) \end{aligned}'$$

es un difeomorfismo, donde $K := G \cap U$ y $\mathfrak{p} := \text{Lie}(\mathfrak{g}) \cap \sqrt{-1}u$.

Por *representación reductiva* entenderemos cualquier representación holomorfa de \widehat{G} o una representación de G que se obtiene por restricción de una representación reductiva de \widehat{G} ([Sto1, Real reductive representation]).

De ahora en más, $G = K \exp(\mathfrak{p})$ representa un grupo reductivo complejo o real, $\tau : G \longrightarrow GL(V)$ denota una representación reductiva real o compleja según sea \widehat{G} y $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ es la respectiva representación del álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$.

Dada una representación reductiva se pueden construir productos internos sobre \mathfrak{g} y V , los cuales denotaremos por $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ respectivamente, tales que K actúa por isometrías y \mathfrak{p} actúa por operadores simétricos sobre \mathfrak{g} y V (la acción sobre \mathfrak{g} es via la representación adjunta). A partir de tales productos internos se define implícitamente la *aplicación momento* de la representación

$$\begin{aligned} m_{\mathfrak{g}} : V \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ \langle\langle m_{\mathfrak{g}}(v), X \rangle\rangle &= \frac{1}{\|v\|^2} \langle \pi(X)v, v \rangle, \end{aligned}$$

para todo $X \in \mathfrak{g}$ y $v \in V \setminus \{0\}$, como también se define la función *cuadrado de la norma de la aplicación momento*

$$\begin{aligned} F_{\mathfrak{g}} : V \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \|m_{\mathfrak{g}}(v)\|^2 \end{aligned}'$$

En el caso complejo, $m_{\mathfrak{g}}$ es en efecto una aplicación momento como en geometría simpléctica y fue considerada por Linda Ness en [Nes] para estudiar el espacio de órbitas de representaciones reductivas complejas.

Es notable cómo los resultados dados por Ness en [Nes] atrapan muchos de los hechos que se sabían sobre el conjunto de *vectores semiestables* (vectores que no tienen al vector nulo en la clausura de su órbita) e incorporan nuevas herramientas y teoremas para estudiar el “complicado” *cono nulo* (vectores no nulos que tienen al vector nulo en la clausura de su órbita).

Impulsados por el trabajo de Ness, como también por los resultados de Frances Kirwan en [Kir2], muchos trabajos fueron realizados a lo largo de los siguientes 25 años para llevar al contexto de los grupos reductivos reales la línea de trabajo de Kirwan y Ness. Esta tarea ha sido realizada; y de forma mucho más general, dentro del proyecto de Peter Heinzner y Gerald Schwarz de realizar una “Teoría geométrica de invariantes” para acciones de grupos de Lie reales sobre subvariedades reales de variedades Kähler (ver, [HSchw], [HSS]).

En este trabajo usamos los anteriores artículos para estudiar las *órbitas distinguidas* de representaciones reductivas. Por órbita distinguida se entiende una órbita que tiene un punto crítico de $F_{\mathfrak{g}}$. Las órbitas distinguidas tienen un papel destacado en el estudio del conjunto de órbitas; por mencionar alguno, las órbitas cerradas son órbitas distinguidas (en el conjunto de órbitas cerradas es el único lugar donde el anillo de invariantes puede ayudar a distinguir órbitas).

Para explicar de la mejor forma nuestros resultados, necesitamos introducir más conceptos. Fijemos una subálgebra de \mathfrak{g} maximal en \mathfrak{p} (la cual resulta ser abeliana) y denotémosla por \mathfrak{a} (en el caso complejo, esto es equivalente a tomar un toro en U). Por las propiedades de los productos internos $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$, tenemos una descomposición en espacios pesos de \mathfrak{g} y V

$$\mathfrak{g} = \underbrace{\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}}_{\mathfrak{g}_0} \oplus \bigoplus_{\lambda \in \Delta(\mathfrak{g})} \mathfrak{g}_{\lambda}, \quad (1)$$

$$V = \bigoplus_{\alpha \in \Delta(V)} V_{\alpha}, \quad (2)$$

donde $\Delta(\mathfrak{g})$ y $\Delta(V)$ son subconjuntos de \mathfrak{a} con $0 \notin \Delta(\mathfrak{g})$, los cuales son llamados respectivamente *conjunto de raíces* y *conjunto de pesos* de la representación, y

$$\mathfrak{g}_{\lambda} = \{Y \in \mathfrak{g} / \text{ad}(X)Y = \langle\langle X, \lambda \rangle\rangle Y, \forall X \in \mathfrak{a}\}, \quad (3)$$

$$V_{\alpha} = \{v \in V / \pi(X)v = \langle\langle X, \alpha \rangle\rangle v, \forall X \in \mathfrak{a}\}, \quad (4)$$

son los *espacios raíces* y *espacios de vectores pesos* respectivamente.

Notación. Consideremos $v \in V \setminus \{0\}$, digamos $v = v_1 + \dots + v_s$ con cada $v_i \in V_{\alpha_i}$ como en la descomposición dada en (2). Por $\mathfrak{R}(v)$ denotaremos el conjunto ordenado de los *pesos relacionados* con v , esto es:

$$\mathfrak{R}(v) := \{\alpha_i \in \Delta(V) / v_i \neq 0\}$$

Decimos que un subespacio W de V es *nice*, si W es A -invariante ($A = \exp(\mathfrak{a})$) y $m_{\mathfrak{g}}(w) \in \mathfrak{a}$ para todo $w \in W \setminus \{0\}$.

Usando ideas de Nikolayevsky en [Nik1] y resultados dados por Jablonski en [Jab1], obtenemos el siguiente resultado, el cual puede ser considerado como una generalización del criterio de la base nice de Nikolayevsky

Teorema. Sean G un grupo algebraico reductivo lineal (real ó complejo) y $\tau : G \rightarrow GL(V)$ una representación reductiva racional. Sea W un espacio nice de V y $w \in W$ un vector no nulo. Entonces, w tiene una órbita distinguida si y sólo si el vector de norma mínima de la cápsula convexa de $\mathfrak{R}(w)$ está en el interior relativo de dicha cápsula.

En el teorema, la noción de *racional*, coincide con la utilizada en geometría algebraica salvo en el caso real, donde racional es un término usado por Jablonski para representaciones que son restricción de una representación reductiva compleja racional *definida sobre \mathbb{R}* de un grupo reductivo complejo definido sobre \mathbb{R} (ver [Jab3]).

Es conveniente aclarar que en el recíproco de este teorema no usamos los resultados de Jablonski, así que este hecho puede ser usado para cualquier representación reductiva sin ninguna hipótesis de tipo algebraico sobre el grupo o la representación. Para probar este sentido de la equivalencia dimos una prueba elemental del conocido teorema de convexidad de Atiyah-Guillemin-Sternberg ([Ati, Theorem 2] y [GS1, Theorem 5.2]) en el caso particular de $T^{\mathbb{C}}$ -órbitas con $T^{\mathbb{C}}$ un toro complexificado y la acción es via una representación reductiva de $T^{\mathbb{C}}$. La prueba que damos también es válida para representaciones reductivas reales de grupos de Lie abelianos conexos de rango 0 (sin parte compacta). Por tanto, mostramos que el caso real se puede desarrollar de manera independiente al caso complejo y así nuestro resultado es distinto al dado en [HSto] en el caso particular de representaciones reductivas, pues [HSto, Proposition 3] usa fuertemente el respectivo resultado del caso complejo.

Es claro que nuestra generalización del criterio de Nikolayevsky proporciona una forma sencilla de saber cuándo la órbita de un elemento nice es distinguida, pues el problema de saber si un polígono tiene al vector de norma mínima en su interior es equivalente a encontrar una *solución positiva* a un sistema lineal de la forma $Ux = t[1]$ para algún $t \in \mathbb{R}$ (en nuestro caso, la matriz U es la matriz de Gram de $(\mathfrak{R}(w), \langle \cdot, \cdot \rangle)$). Siguiendo ideas dadas en [LW2], también damos una caracterización de los espacios nice de una representación reductiva que permite en la práctica saber de forma directa cuándo un espacio A -invariante es nice. En los siguientes resultados, consideramos la descomposición de un subespacio A -invariante W de V como en la ecuación (2) y los respectivos vectores pesos $\Delta(W)$.

Teorema. Sea W un subespacio A -invariante de V . Entonces, W es nice sí y solo si para cualquier $\alpha_i, \alpha_j \in \Delta(W)$ tales que $\alpha_j - \alpha_i \in \Delta(\mathfrak{g})$, se satisface que $\text{Proy}_W \pi(Y)w_i = 0$ para cualquier $Y \in \mathfrak{g}_Y$, $w_i \in W_i$ donde Proy_W es la proyección sobre W con respecto al producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $\gamma = \alpha_j - \alpha_i$.

Corolario. Sea W un subespacio A -invariante de V . Si para todo α_i y α_j en $\Delta(W)$, $\alpha_i - \alpha_j \notin \Delta(\mathfrak{g})^+$, entonces W es nice.

Como aplicación de los anteriores Teoremas obtenemos los siguientes resultados sobre formas ternarias

Teorema. Sea $V = \mathbb{F}[x, y, z]_d$ el espacio vectorial de las formas ternarias de grado d con coeficientes en \mathbb{F} (donde \mathbb{F} puede ser los números complejos ó los números reales). El conjunto estratificante de $V \setminus \{0\}$ para la acción natural de $GL_n(\mathbb{F})$ sobre V (la acción por cambio lineal de base) está dado por:

$$\mathcal{B} = \{\text{ccm}(\alpha_i, \alpha_j) / \alpha_i, \alpha_j \in \Delta(V) \text{ y } \alpha_i - \alpha_j \notin \Delta(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F}))\} \cap \overline{\mathfrak{a}^+}$$

Teorema. La clasificación de las órbitas distinguidas en el cono nulo de $\mathbb{R}[x, y, z]_4$ por la acción natural de $SL_3(\mathbb{R})$ está dada en la siguiente tabla

Tipo β	Espacio Z_β	Puntos críticos
$(\frac{8}{7}, \frac{9}{7}, \frac{11}{7})$	$\alpha x^2 z^2 + by^3 z$	$a = \pm\sqrt{\frac{1}{7}}, b = \sqrt{\frac{1}{14}}$
$(1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})$	$\alpha xz^3 + bxyz^2 + cxy^2 z + dxy^3$	$x[y^3 + yz^2]$ $x[y^3 - yz^2]$
$(\frac{6}{7}, \frac{10}{7}, \frac{12}{7})$	$\alpha xy z^2 + by^4$	$a = \sqrt{\frac{3}{7}}, b = \pm\sqrt{\frac{1}{168}}$
$(\frac{5}{6}, \frac{8}{6}, \frac{11}{6})$	$\alpha xy z^2 + by^3 z$	$a = \sqrt{\frac{5}{12}}, b = \sqrt{\frac{1}{36}}$
$(1, 1, 2)$	$\alpha x^2 z^2 + bxyz^2 + cy^2 z^2$	$z^2[x^2 + y^2]$ $-z^2[x^2 + y^2]$ $z^2[x^2 - y^2]$
$(\frac{8}{13}, \frac{20}{13}, \frac{24}{13})$	$\alpha xz^3 + by^4$	$a = \sqrt{\frac{4}{39}}, b = \pm\sqrt{\frac{5}{312}}$
$(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2)$	$\alpha xz^3 + by^3 z$	$a = \frac{1}{\sqrt{12}}, b = \frac{1}{\sqrt{12}}$
$(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3})$	$\alpha xz^3 + by^2 z^2$	$a = \sqrt{\frac{1}{18}}, b = \pm\sqrt{\frac{1}{6}}$
$(0, 2, 2)$	$\sum_{i=0}^4 a_i y^{4-i} z^i$	$y^4 + 2ty^2 z^2 + z^4$ ($t \in \mathbb{R}$) $-[y^4 + 2ty^2 z^2 + z^4]$ ($-1 \leq t$) $y^4 + 2ty^2 z^2 - z^4$ ($t \in \mathbb{R}$)
$(0, 1, 3)$	ayz^3	$a = \sqrt{\frac{1}{6}}$
$(0, 0, 4)$	az^4	$a = \pm\sqrt{\frac{1}{24}}$

En el anterior Teorema, la notación $\text{ccm}(\alpha_i, \alpha_j)$ representa al vector de norma mínima en la cápsula convexa de α_i y α_j y donde estos dos pueden representar al mismo peso.

Sea (N_μ, γ) un grupo de Lie nilpotente de clase γ ([Lau3, Definition 2.1]) y sin pérdida de generalidad supongamos que el grupo (algebraico) G_γ (el subgrupo de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ que preserva la estructura geométrica γ) es compatible con la descomposición de Cartan de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$: $G_\gamma = K_\gamma \exp(\mathfrak{p}_\gamma)$, con $K_\gamma = G_\gamma \cap \text{O}(n)$ y $\mathfrak{p}_\gamma = \mathfrak{g}_\gamma \cap \text{sym}(n)$, donde $\text{sym}(n)$ es el espacio vectorial de las matrices simétricas. Denotemos por $\mathfrak{a}_\gamma := \mathfrak{a} \cap \mathfrak{p}_\gamma$ donde \mathfrak{a} corresponde al conjunto de matrices diagonales; así \mathfrak{a}_γ es abeliana maximal en \mathfrak{p}_γ , y sea $A_\gamma := \exp(\mathfrak{a}_\gamma)$. Consideremos la acción natural de G_γ sobre $V := \Lambda^2(\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^n$ (la acción por cambio de base) y dada $\mu \in \Lambda^2(\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^n$, denotemos por $\mathfrak{R}_\gamma(\mu)$ el conjunto de pesos relacionados con μ para la descomposición en vectores pesos de V con respecto a esta acción (como en la ecuación (2)). Siguiendo estas notaciones, otro de nuestros resultados da una herramienta para estudiar la existencia de métricas compatibles minimales:

Teorema. *Sea W un espacio nice de V con respecto a la acción de G_γ y sea (N_μ, γ) un grupo de Lie nilpotente de clase γ con $\mu \in W$. (N_μ, γ) admite una métrica compatible minimal si y solamente si el vector de norma mínima de la cápsula convexa de $\mathfrak{R}_\gamma(w)$ está en el interior relativo de dicha cápsula.*

Con el anterior Teorema estudiamos los solitones de Ricci para el flujo de Ricci anti-complejificado sobre las álgebras de Lie nilpotentes simplécticas de dimensión 6. Un resultado de este estudio es el siguiente

Teorema. *Todas las álgebras de Lie 2-pasos nilpotentes simplécticas de dimensión 6 admiten una métrica solitón de Ricci para el flujo de Ricci anti-complejificado (módulo la clasificación dada en [KGM])^{*}.*

^{*}Debemos decir que la clasificación dada en [KGM, Theorem 5] tiene algunos errores; varios han sido corregidos por comunicación personal con los autores pero aún así quedan muchos por resolver

Debemos mencionar que el anterior Teorema no fue probado en su totalidad usando la noción de Nice. Algunas álgebras fueron estudiadas por métodos similares a los introducidos en [Fer1] (razonando de manera similar a [Fer1, Example 1.] con la gran diferencia que en este caso no tenemos una derivación pre-Einstein; debemos proponer un candidato en esta nueva situación). Este problema motiva a realizar un trabajo como aquel que fue hecho por Nikolayevsky en [Nik2], para estudiar métricas compatibles minimales para cualquier estructura geométrica (este es un trabajo en desarrollo por fuera de la tesis: [Fer4]).

Un último resultado de la tesis fue la clasificación de los nilradicales Einstein de dimensión 7. La clasificación hasta dimensión 5 fue hecha por Lauret en [Lau2] y en dimensión 6, tal resultado se debe a Cynthia Will (ver [Will]). En los últimos 10 años se llegó a pensar que la clasificación en dimensión 7 era poco “esperanzadora” en el sentido que en esta dimensión se tiene un gran número de familias de álgebras de Lie nilpotentes y muchas de estas contienen curvas de álgebras de Lie no isomorfas dos a dos. En la tesis usamos los resultados dados por Nikolayevsky en [Nik2] para obtener la clasificación en dimensión 7 y a manera de apéndice, proporcionamos al lector un estudio detallado de cada álgebra junto con las cuentas necesarias para determinar si tal álgebra es Einstein ó no.

PRELIMINARES SOBRE TEORÍA GEOMÉTRICA DE INVARIANTES REAL Y COMPLEJA

In fact, it is quite depressing to see how long it is taking us collectively to truly sort out symplectic geometry. I became aware of this especially when one fine afternoon in 1980, Michael Atiyah and I were trying to work in my office at Harvard. I say trying, because the noise in the neighboring office made by Sternberg and Guillemin made it difficult. So we went next door to arrange a truce and in the process discovered that we were grosso modo doing the same thing. Later Mumford joined us, and before the afternoon was over we saw how Mumford's "stability theory" fitted with Morse theory. —
 R. Bott [Bot]

1.1 GRUPOS REDUCTIVOS COMPLEJOS Y REALES

1.1.1 Grupos reductivos Complejos

En esta sección, presentaremos aquellas propiedades de los grupos reductivos complejos que serán indispensables para el desarrollo del resto de las secciones. Algunas de estas propiedades son de tipo introductorio en el estudio de grupos reductivos complejos, así que el lector puede tratar superficialmente la sección y volver a esta cuando sea necesario sin mayor dificultad.

En la literatura, la noción de grupo reductivo puede tener distintas aproximaciones (no equivalentes entre sí). Por mencionar un ejemplo, las distintas definiciones de grupo reductivo real son muchas veces objeto de dudas e incluso de debate.

El caso de los grupos reductivos complejos es el "mejor" modelo para lo que debería ser un grupo reductivo. Nosotros trabajaremos con la definición dada en [HNe], que si bien, a primera vista no es del todo intuitiva, tal definición es muy útil desde un punto de vista práctico y nos ayudará a desarrollar mas rápidamente la sección.

Definición 1.1.1. [HNe, Definition 15.2.7] Un grupo de Lie complejo \widehat{G} es llamado *reductivo complejo*, si existe un subgrupo de Lie compacto U tal que $\widehat{G} = U^{\mathbb{C}}$ donde $U^{\mathbb{C}}$ es la *complexificación universal* de U

Recordemos que, dado un grupo de Lie G , la *complexificación universal* de G , $G^{\mathbb{C}}$ (ver [HNe, Definition 15.1.2]), es el único grupo de Lie complejo que satisface la siguiente propiedad universal: Existe un homomorfismo de grupos de Lie (reales) $\phi_G : G \rightarrow G^{\mathbb{C}}$ tal que para

todo homomorfismo de G a un grupo de Lie complejo H , $\psi : G \rightarrow H$, existe un único homomorfismo holomorfo $\psi^{\mathbb{C}} : G^{\mathbb{C}} \rightarrow H$ tal que $\psi^{\mathbb{C}} \circ \phi_G = \psi$

$$\begin{array}{ccc} G^{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\psi^{\mathbb{C}}} & H \\ \uparrow \phi_G & \nearrow \psi & \\ G & & \end{array}$$

Se sigue así que $\text{Lie}(G^{\mathbb{C}}) = \text{Lie}(G)^{\mathbb{C}}$, donde por $\text{Lie}(G)$ estamos denotando al álgebra de Lie de G . Nosotros sugerimos al lector interesado sobre la prueba de la existencia de la complejificación ver [HNe, Theorem 15.1.4].

Dado que una de las próximas secciones está destinada al estudio de representaciones de grupos abelianos, es conveniente introducir la siguiente definición

Definición 1.1.2. [HNe, Definition 15.2.7] Sea T un toro compacto. Su complejificación $T^{\mathbb{C}}$ es llamada *toro complejificado*

No se debe confundir la anterior definición con la idea de un *toro complejo*. Un toro complejificado no es más que varias copias del grupo multiplicativo \mathbb{C}^{\times} (los números complejos sin el cero) mientras que un toro complejo es un grupo compacto complejo de la forma $\mathbb{C}^n / (\mathbb{Z}^n + \sqrt{-1}\mathbb{Z}^n)$ (estos últimos no admiten representaciones holomorfas fieles de dimensión finita).

Nota 1.1.3. Una forma de “ver” un grupo reductivo complejo es usando el siguiente hecho. Sea U un grupo de Lie compacto. Es sabido que U admite una representación fiel en el grupo $U(n)$, las matrices unitarias (por ejemplo, ver [HNe, Theorem 12.3.9]). Consideremos en $GL_n(\mathbb{C})$ el grupo de Lie conexo ${}^{\mathbb{C}}U$ tal que $\text{Lie}({}^{\mathbb{C}}U) = \mathfrak{u}^{\mathbb{C}}$ donde $\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}$ es la complejificación del álgebra de Lie $\mathfrak{u} = \text{Lie}(U)$; ${}^{\mathbb{C}}U$ debe ser la complejificación de U . O también, en virtud a la propiedad universal de la complejificación, se sigue que todo grupo reductivo complejo admite una representación fiel holomorfa en $GL_n(\mathbb{C})$.

De hecho, los grupos reductivos complejos no son simples subgrupos de $GL_n(\mathbb{C})$; estos son subgrupos algebraicos complejos. Citamos el siguiente teorema para completar un poco más el panorama sobre grupos reductivos complejos. Las nociones técnicas de grupos algebraicos serán dadas en la sección 2 del próximo capítulo (ver en particular definiciones 2.2.6 y 2.2.15), ya que los resultados usados de [Jab1] usan fuertemente las propiedades de tales grupos.

Teorema 1.1.4. [Lee, Theorem 5.11] *Todo grupo reductivo complejo tiene una única estructura de grupo algebraico complejo de tal forma que las representaciones holomorfas son representaciones racionales.*

Una de las propiedades más útiles de los grupos reductivos complejos es la llamada descomposición global de Cartan (o también llamada, descomposición polar). Esta descomposición es una de las tantas que son esenciales en el desarrollo de la teoría que estudiamos en esta tesis.

Teorema 1.1.5. [HNe, Theorem 15.2.1] *Sea $\widehat{G} = U^{\mathbb{C}}$ un grupo reductivo complejo, entonces*

1. U es un subgrupo compacto maximal de \widehat{G} ; esto es, si U' es un subgrupo compacto de \widehat{G} tal que $U \subseteq U'$ entonces $U = U'$
2. (*Descomposición global de Cartan*) La función

$$\begin{aligned} \varphi : U \times \sqrt{-1}\mathfrak{u} &\longrightarrow \widehat{G} \\ (u, \sqrt{-1}X) &\longmapsto u \exp(\sqrt{-1}X) \end{aligned}$$

es un difeomorfismo.

3. U intersecta toda componente conexa de \widehat{G} , y por tanto, \widehat{G} tiene finitas componentes conexas.

Es fácil ver que cualquier representación de un grupo compacto es completamente reducible. El *truco unitario de Weyl* nos dice que lo mismo es cierto para los grupos reductivos complejos y esto lo podemos razonar de forma heurística a partir de la definición que dimos de grupo reductivo complejo; la teoría de representaciones de los grupos reductivos complejos está controlada por el estudio de sus subgrupos compactos (maximales).

Teorema 1.1.6. [HNe, Theorem 15.2.10] *Toda representación holomorfa de un grupo reductivo complejo es completamente reducible.*

Recordemos que un álgebra de Lie es *reductiva* si su representación adjunta es completamente reducible (o lo que es lo mismo, todo ideal tiene un complemento lineal que es ideal también). Usando las ideas en la prueba del teorema anterior al caso de la representación adjunta, es inmediato probar que

Corolario 1.1.7. *El álgebra de Lie de un grupo reductivo complejo es un álgebra de Lie reductiva*

En este punto, es importante destacar que la noción de grupo reductivo complejo está determinada por la Nota 1.1.3, por la parte 3 del Teorema 1.1.5, y el Corolario anterior junto con el Teorema 1.1.6. Las siguientes son otras de las definiciones con las que se suele encontrar la noción de grupo reductivo complejo

Teorema 1.1.8. [HNe, Theorem 15.3.11] (*Caracterizaciones de Grupo reductivo complejo*) *Sea \widehat{G} un grupo de Lie tal que $\text{Lie}(\widehat{G})$ es una álgebra de Lie reductiva y tiene finitas componentes conexas. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes*

1. \widehat{G} admite una representación fiel holomorfa de dimensión finita y todas las representaciones holomorfas de \widehat{G} de dimensión finita son completamente reducibles.
2. \widehat{G} es la complexificación universal $U^{\mathbb{C}}$ de un grupo de Lie conexo y compacto
3. $Z(\widehat{G}_0)_0 \simeq (\mathbb{C}^{\times})^n$, es decir, la componente conexa de la identidad del centro de \widehat{G}_0 es un toro complexificado.

En lo que resta de la sección haremos énfasis en el estudio de las representaciones holomorfas de los grupos reductivos complejos. Sea $\widehat{G} = U^{\mathbb{C}}$ un grupo reductivo complejo con U subgrupo compacto maximal de \widehat{G} , sea $\mathfrak{u} := \text{Lie}(U)$ y así $\widehat{\mathfrak{g}} := \text{Lie}(\widehat{G})$ es tal que

$$\widehat{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{u} \oplus \sqrt{-1}\mathfrak{u} \tag{5}$$

Consideremos $\widehat{\tau}: \widehat{G} \rightarrow \text{GL}(\widehat{V})$ una representación holomorfa de \widehat{G} sobre un espacio vectorial complejo \widehat{V} y denotemos por $\widehat{\pi}$ la diferencial de $\widehat{\tau}$ en la identidad e de \widehat{G} ; $\widehat{\pi}: \widehat{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(\widehat{V})$ es una representación del álgebra de Lie $\widehat{\mathfrak{g}} := \text{Lie}(\widehat{G})$.

Dotemos a \widehat{V} de un producto interno hermitiano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tal que U actúa por isometrías, y en consecuencia $\sqrt{-1}\mathfrak{u}$ actúa por operadores Hermitianos, esto es:

$$\langle \widehat{\pi}(X)v, w \rangle = \langle v, \widehat{\pi}(X)w \rangle, \forall X \in \sqrt{-1}\mathfrak{u}, \forall v, w \in \widehat{V}.$$

Así también, dotemos a \mathfrak{u} de un producto interno (real) tal que U actúa bajo la representación adjunta por isometrías sobre \mathfrak{u} . Tal producto interno lo podemos extender a un producto interno Hermitiano sobre $\widehat{\mathfrak{g}}$ tal que U actúa por isometrías, y así, $\sqrt{-1}\mathfrak{u}$ actúa por operadores Hermitianos sobre $\widehat{\mathfrak{g}}$. Este producto interno Hermitiano sobre $\widehat{\mathfrak{g}}$ lo denotaremos por $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$.

Consideremos el mapa

$$\begin{aligned} \theta : u \oplus \sqrt{-1}u &\longrightarrow u \oplus \sqrt{-1}u, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{u}. \\ X + \sqrt{-1}Y &\longmapsto X - \sqrt{-1}Y \end{aligned}$$

θ es una involución (de Cartan) del álgebra de Lie real $\widehat{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}}$ y satisface la propiedad

$$\theta(zY) = \bar{z}\theta(Y), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \forall Y \in \widehat{\mathfrak{g}}. \quad (6)$$

La siguiente proposición resume las propiedades de los productos internos definidos arriba.

Proposición 1.1.9. *Para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$*

1. $\widehat{\pi}(X)^* = -\widehat{\pi}(\theta(X))$, donde $\widehat{\pi}(X)^*$ es el operador adjunto de $\widehat{\pi}(X)$ con respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$
2. $\text{ad}(X)^* = -\text{ad}(\theta(X))$, donde $\text{ad}(X)^*$ es el operador adjunto de $\text{ad}(X)$ con respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$
3. $\langle \langle \theta(X), \theta(Y) \rangle \rangle = \overline{\langle \langle X, Y \rangle \rangle}$
4. $\text{Re}\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno real sobre $\widehat{V}_{\mathbb{R}}$ tal que U actúa por isometrías y $\sqrt{-1}u$ actúa por operadores simétricos.
5. $\text{Re}\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno real sobre $\widehat{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}}$ tal que U actúa por isometrías y $\sqrt{-1}u$ actúa por operadores simétricos.
6. θ es una isometría de $\text{Re}\langle \cdot, \cdot \rangle$. En consecuencia, $\widehat{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}} = u \oplus \sqrt{-1}u$; descomposición ortogonal con respecto a $\text{Re}\langle \cdot, \cdot \rangle$

Consideremos un toro maximal de \widehat{G} , $T^{\mathbb{C}}$, dado por la complejificación de un toro maximal de U , T (es decir, T es subgrupo abeliano conexo maximal de U). Así, $\text{Lie}(T)^{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ con $\text{Lie}(T) := \mathfrak{t}$ y $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{t} \oplus \sqrt{-1}\mathfrak{t}$. Notemos que $\{\pi(X)/X \in \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}\}$ y $\{\text{ad}(X)/X \in \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}\}$ son familias de operadores normales que conmutan simultáneamente (por 1 y 2 en Proposición 1.1.9). Esto induce una descomposición en espacio de raíces de $\widehat{\mathfrak{g}}$

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{\lambda \in \Delta(\widehat{\mathfrak{g}})} \widehat{\mathfrak{g}}_{\lambda}, \quad (7)$$

donde $\Delta(\widehat{\mathfrak{g}})$ es un subconjunto finito de elementos no nulos de $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ llamado *conjunto de raíces* de $\widehat{\mathfrak{g}}$ y

$$\widehat{\mathfrak{g}}_{\lambda} = \{Y \in \widehat{\mathfrak{g}} / \text{ad}(X)Y = \langle \langle X, \lambda \rangle \rangle Y, \quad \forall X \in \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}\}, \quad (8)$$

$$\widehat{\mathfrak{g}}_0 := \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}, \quad (9)$$

y una descomposición en espacios pesos de \widehat{V} ,

$$\widehat{V} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta(\widehat{V})} \widehat{V}_{\alpha}, \quad (10)$$

con $\Delta(\widehat{V})$ un subconjunto finito de $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ (en este caso el vector nulo puede pertenecer a $\Delta(\widehat{V})$) y

$$\widehat{V}_{\alpha} = \{v \in \widehat{V} / \widehat{\pi}(X)v = \langle \langle X, \alpha \rangle \rangle v \quad \forall X \in \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}\}. \quad (11)$$

$\Delta(\widehat{V})$ es llamado *conjunto de pesos* de la representación y un vector $v \in \widehat{V}_{\alpha}$ con $\alpha \in \Delta(\widehat{V})$ es llamado *vector peso* de peso α . Por analogía a lo que será el desarrollo del caso de los grupos reductivos reales, permítanos denotar por $\widehat{\mathfrak{a}}$ el álgebra abeliana real $\sqrt{-1}\mathfrak{t}$.

Presentamos algunos resultados conocidos sobre pesos y raíces. Muchos de estos resultados se pueden encontrar en [Sep, Corollary 6.22].

Proposición 1.1.10.

1. $\Delta(\widehat{\mathfrak{g}})$ y $\Delta(\widehat{V})$ son subconjuntos de $\widehat{\mathfrak{a}}$.
2. $[\widehat{\mathfrak{g}}_{\lambda_1}, \widehat{\mathfrak{g}}_{\lambda_2}] \subseteq \widehat{\mathfrak{g}}_{\lambda_1 + \lambda_2}$. En consecuencia, si $[\widehat{\mathfrak{g}}_{\lambda_1}, \widehat{\mathfrak{g}}_{\lambda_2}] \neq \{0\}$ entonces $\lambda_1 + \lambda_2 \in \Delta(\widehat{\mathfrak{g}}) \cup 0$.
3. $\theta(\widehat{\mathfrak{g}}_{\lambda}) = \widehat{\mathfrak{g}}_{\theta(\lambda)} = \widehat{\mathfrak{g}}_{-\lambda}$. Así pues, $\lambda \in \Delta(\widehat{\mathfrak{g}})$ si y solo si $-\lambda \in \Delta(\widehat{\mathfrak{g}})$.
4. Para cualquier $Y \in \widehat{\mathfrak{g}}_{\lambda}$ y $Z \in \widehat{\mathfrak{g}}_{-\lambda}$, $[Z, Y] = \langle\langle Y, \theta(Z) \rangle\rangle \lambda$.
5. Sea $Y_{\lambda} \in \widehat{\mathfrak{g}}_{\lambda}$ de norma 1 y hagamos

$$E_{\lambda} = \frac{\sqrt{2}}{\|\lambda\|} Y_{\lambda}, F_{\lambda} = -\frac{\sqrt{2}}{\|\lambda\|} \theta(Y_{\lambda}), H_{\lambda} = \frac{2}{\|\lambda\|^2} \lambda \quad (12)$$

entonces la aplicación

$$\begin{cases} \iota_{\lambda} : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \widehat{\mathfrak{g}} \\ E := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto E_{\lambda} \\ F := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto F_{\lambda} \\ H := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \longmapsto H_{\lambda} \end{cases}$$

Es un monomorfismo de álgebras de Lie el cual se extiende a un monomorfismo de grupos de Lie complejos de $SL_2(\mathbb{C})$ en \widehat{G} .

6. $\exp(2\pi\sqrt{-1}H_{\lambda}) = e$ con e la identidad de \widehat{G} y en consecuencia $\langle\langle H_{\lambda}, \lambda' \rangle\rangle \in \{0, 1, 2, 3\}$ para todo $\lambda' \in \Delta(\widehat{\mathfrak{g}})$.
7. Para cualquier $\lambda \in \Delta(\widehat{\mathfrak{g}})$, $\dim_{\mathbb{C}} \widehat{\mathfrak{g}}_{\lambda} = 1$. Además $n\lambda \notin \Delta(\widehat{\mathfrak{g}})$ para cualquier $n \geq 2$.
8. $\pi(\widehat{\mathfrak{g}}_{\lambda})\widehat{V}_{\alpha} \subseteq \widehat{V}_{\lambda+\alpha}$. En consecuencia, si $\pi(\widehat{\mathfrak{g}}_{\lambda})\widehat{V}_{\alpha} \neq \{0\}$ entonces $\lambda + \alpha \in \Delta(\widehat{V})$.
9. Sea H_{λ} con $\lambda \in \Delta(\widehat{\mathfrak{g}})$ como en la ecuación (12) y sea $\alpha \in \Delta(\widehat{V})$ entonces $\langle\langle H_{\lambda}, \alpha \rangle\rangle \in \mathbb{Z}$.

Demostración

1. Para este punto, es suficiente con ver $\operatorname{Re}\langle\langle X, \lambda \rangle\rangle = 0$ para todo $X \in \mathfrak{t}$ y $\lambda \in \Delta(\widehat{\mathfrak{g}})$. Sea $Y \in \widehat{\mathfrak{g}}_{\lambda}$ con $Y \neq 0$. Por un lado $\langle\langle \operatorname{ad}(X)Y, Y \rangle\rangle = \langle\langle X, \lambda \rangle\rangle \|Y\|^2$, y como U actúa por isometrías $\langle\langle \operatorname{ad}(X)Y, Y \rangle\rangle = -\langle\langle Y, \operatorname{ad}(X)Y \rangle\rangle = -\overline{\langle\langle X, \lambda \rangle\rangle} \|Y\|^2$. De estas dos igualdades se sigue $\langle\langle X, \lambda \rangle\rangle = -\overline{\langle\langle X, \lambda \rangle\rangle}$, por lo que $\operatorname{Re}\langle\langle X, \lambda \rangle\rangle = 0$.
2. Consideremos $X \in \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ y un $Y \in \widehat{\mathfrak{g}}_{\lambda}$ arbitrario. $\operatorname{ad}(X)\theta(Y) = [X, \theta(Y)] = [\theta(\theta(X)), \theta(Y)] = \theta([\theta(X), Y])$. Como $\theta(X) \in \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$, entonces $\operatorname{ad}(X)\theta(Y) = \theta(\langle\langle \theta(X), \lambda \rangle\rangle Y) = \overline{\langle\langle \theta(X), \lambda \rangle\rangle} \theta(Y) = \overline{\langle\langle \theta(X), \theta(\theta(\lambda)) \rangle\rangle} \theta(Y) = \langle\langle X, \theta(\lambda) \rangle\rangle \theta(Y)$. Acá hemos hecho uso de lo citado en la proposición 1.1.9. Es claro que de la igualdad se sigue lo afirmado.
3. Para ver eso es suficiente con recordar que $\operatorname{ad}(\cdot)$ es una derivación de $\widehat{\mathfrak{g}}$.

4. Sea $Y \in \widehat{\mathfrak{g}}_\lambda$ y $Z \in \widehat{\mathfrak{g}}_{-\lambda}$. Por el ítem anterior $[Z, Y] \in \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$. Sea $X \in \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ arbitrario

$$\begin{aligned} \langle\langle [Z, Y], X \rangle\rangle &= \langle\langle \text{ad}(Z)Y, X \rangle\rangle = \langle\langle Y, \text{ad}(Z)^* X \rangle\rangle \\ &= \langle\langle Y, [X, \theta(Z)] \rangle\rangle = \langle\langle Y, \langle\langle X, \lambda \rangle\rangle \theta(Z) \rangle\rangle \\ &= \overline{\langle\langle X, \lambda \rangle\rangle} \langle\langle Y, \theta(Z) \rangle\rangle = \langle\langle \lambda, X \rangle\rangle \langle\langle Y, \theta(Z) \rangle\rangle \\ &= \langle\langle \langle\langle Y, \theta(Z) \rangle\rangle \lambda, X \rangle\rangle \end{aligned}$$

De lo anterior se sigue $[Z, Y] = \langle\langle Y, \theta(Z) \rangle\rangle \lambda$

5. Es rutinario verificar que en efecto ι_λ es un monomorfismo de álgebras de Lie. Dado que $SL(2, \mathbb{C})$ es simplemente conexo, la existencia de un monomorfismo de $SL_2(\mathbb{C})$ en \widehat{G} se sigue de [Bki, Chapitre III, §6, Théorème 1].

6. Dado que $e^{2\pi\sqrt{-1}H} = \text{Id}$, donde Id representa la matrix identidad, se sigue por el monomorfismo de grupos de Lie dado en el punto anterior que $\exp(2\pi\sqrt{-1}H_\lambda) = e$ con e la identidad de \widehat{G} . Ahora, veamos que $\langle\langle H_\lambda, \lambda' \rangle\rangle \in \mathbb{Z}$. Sea $Y \in \widehat{\mathfrak{g}}_{\lambda'}$,

$$Y = \text{Ad}(e)Y = \text{Ad}(\exp(2\pi\sqrt{-1}H_\lambda))Y = e^{\text{ad}(2\pi\sqrt{-1}H_\lambda)}Y = e^{\langle\langle 2\pi\sqrt{-1}H_\lambda, \lambda' \rangle\rangle}Y$$

Así pues $e^{\langle\langle 2\pi\sqrt{-1}H_\lambda, \lambda' \rangle\rangle} = 1$ o lo que es lo mismo $\langle\langle 2\pi\sqrt{-1}H_\lambda, \lambda' \rangle\rangle = 2n\pi\sqrt{-1}$ con $n \in \mathbb{Z}$. Para terminar la prueba de este punto, consideremos el producto de $\langle\langle H_\lambda, \lambda' \rangle\rangle$ y $\langle\langle \lambda, H_{\lambda'} \rangle\rangle$; tal producto es un número entero e igual a $4 \cos^2(\beta)$ con β el ángulo entre λ y λ' . Dado que $\langle\langle H_\lambda, \lambda' \rangle\rangle$ es un entero, se sigue que $\langle\langle H_\lambda, \lambda' \rangle\rangle \in \pm\{0, 1, 2, 3, 4\}$. El caso $\langle\langle H_\lambda, \lambda' \rangle\rangle = 4$ lo podemos descartar usando el siguiente punto (pues tal igualdad implica que λ y λ' son linealmente dependientes).

7. Definamos \mathfrak{h} como:

$$\mathfrak{h} := \mathbb{C}F_\lambda \oplus \mathbb{C}H_\lambda \oplus \bigoplus_{n \geq 1} \widehat{\mathfrak{g}}_{n\lambda}$$

\mathfrak{h} es un espacio invariante de $\text{ad}(E_\lambda)$, $\text{ad}(F_\lambda)$ y $\text{ad}(H_\lambda)$ por los ítems 2 y 4. Como $[E_\lambda, F_\lambda] = H_\lambda$ entonces

$$\text{ad}(H_\lambda)|_{\mathfrak{h}} = \text{ad}(E_\lambda)|_{\mathfrak{h}} \text{ad}(F_\lambda)|_{\mathfrak{h}} - \text{ad}(F_\lambda)|_{\mathfrak{h}} \text{ad}(E_\lambda)|_{\mathfrak{h}}$$

por lo que $\text{tr}(\text{ad}(H_\lambda)|_{\mathfrak{h}}) = 0$. Por otro lado, dado que \mathfrak{h} está escrita en una base que diagonaliza a $\text{ad}(H_\lambda)|_{\mathfrak{h}}$, tenemos que $\text{tr}(\text{ad}(H_\lambda)|_{\mathfrak{h}}) = \langle\langle H_\lambda, -\lambda \rangle\rangle + \sum_{n \geq 1} n \langle\langle H_\lambda, \lambda \rangle\rangle \dim_{\mathbb{C}} \widehat{\mathfrak{g}}_{n\lambda}$ es decir, $\text{tr}(\text{ad}(H_\lambda)|_{\mathfrak{h}}) = -2 + \sum_{n \geq 1} 2n \dim_{\mathbb{C}} \widehat{\mathfrak{g}}_{n\lambda}$. Lo anterior implica que $\dim_{\mathbb{C}} \widehat{\mathfrak{g}}_\lambda = 1$ y $\dim_{\mathbb{C}} \widehat{\mathfrak{g}}_{n\lambda} = 0$ para todo $n \geq 2$.

8. Este punto es similar al ítem 2.

9. Este punto es similar al ítem 6. ■

De la anterior proposición tenemos que $\Delta(\widehat{\mathfrak{g}})$ es un subconjunto de $\widehat{\mathfrak{a}}$, así pues, en el espacio vectorial real $\widehat{\mathfrak{a}}$ con el producto interno (real) $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ consideremos un vector X tal que $\langle\langle X, \lambda \rangle\rangle \neq 0$ para todo $\lambda \in \Delta(\widehat{\mathfrak{g}})$. El vector X es llamado *elemento regular* y permite definir un conjunto de *raíces positivas* como:

$$\Delta(\widehat{\mathfrak{g}})^+ = \{\lambda \in \Delta(\widehat{\mathfrak{g}}) / \langle\langle X, \lambda \rangle\rangle > 0\}$$

y una *cámara de Weyl*

$$\widehat{\mathfrak{a}}^+ = \{Y \in \widehat{\mathfrak{a}} / \langle\langle Y, \lambda \rangle\rangle > 0, \lambda \in \Delta(\widehat{\mathfrak{g}})^+\}.$$

Notemos que $\Delta(\widehat{\mathfrak{g}}) = \Delta(\widehat{\mathfrak{g}})^+ \cup \Delta(\widehat{\mathfrak{g}})^-$ con $\Delta(\widehat{\mathfrak{g}})^- = -\Delta(\widehat{\mathfrak{g}})^+$ (por ítem 3 en la anterior proposición).

Es así que cada elemento regular define una cámara de Weyl como arriba. La cantidad de cámaras de Weyl es finita y son las componentes conexas de

$$\widehat{\mathfrak{a}} \setminus \bigcup_{\lambda \in \Delta(\widehat{\mathfrak{g}})} \lambda^\perp$$

donde λ^\perp es el espacio ortogonal de λ en $\widehat{\mathfrak{a}}$; $\lambda^\perp = \{X \in \widehat{\mathfrak{a}} / \langle X, \lambda \rangle = 0\}$. Recordemos que cualquier toro maximal de U , digamos T , es abierto en su normalizador, $N(T, U)$, y por tanto tiene índice finito en éste (ver, por ejemplo, [HoM, Lemma 6.21. (iii)]). Así pues, definamos el grupo finito

$$W(T, G) = N(T, U)/T,$$

el cual es llamado *grupo de Weyl* de G con respecto a T . Es fácil ver que la acción de $N(T, U)$ sobre $\widehat{\mathfrak{a}} = \sqrt{-1}\mathfrak{t}$ (via la representación adjunta) desciende a una acción de $W(T, G)$

Teorema 1.1.11. [Sep, Theorem 6.36 y 6.43]

1. La acción de $W(T, G)$ sobre $\widehat{\mathfrak{a}}$ es fiel y además $W(T, G)$ es un subgrupo de isometrías de $(\widehat{\mathfrak{a}}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. También, la acción de $W(T, G)$ sobre $\Delta(\widehat{\mathfrak{g}})$ es fiel.
2. Sean t_1 y t_2 en T . Existe $u \in U$ tal que $ut_1u^{-1} = t_2$ si y solo si existe $w \in N(T, U)$ tal que $wt_1w^{-1} = t_2$.
3. $W(T, G)$ actúa simple y transitivamente en el conjunto de las cámaras de Weyl.

Para terminar la sección, enunciemos algunas descomposiciones muy importantes de los grupos reductivos complejos. Para esto, consideremos el álgebra de Lie

$$\widehat{\mathfrak{n}}^+ = \bigoplus_{\lambda \in \Delta(\widehat{\mathfrak{g}})^+} \widehat{\mathfrak{g}}_\lambda \tag{13}$$

y \widehat{N} el subgrupo de Lie conexo de \widehat{G} con álgebra de Lie $\widehat{\mathfrak{n}}^+$, y sea $\widehat{A} = \exp(\widehat{\mathfrak{a}})$.

Teorema 1.1.12.

1. [Sep, Theorem 5.9] (*Conjugación de los toros maximales*) $u = \bigcup_{u \in U} \text{Ad}(u)\mathfrak{t}$.
2. [Sep, Theorem 5.12] (*Teorema del Toro maximal*) $U_0 = \exp(u)$ y en consecuencia $U_0 = \bigcup_{u \in U} uTu^{-1}$.
3. (*Descomposición Polar*) $\widehat{G} = U\widehat{A}U$. En esta descomposición, el factor en \widehat{A} es único salvo la acción del grupo de Weyl.
4. [Sep, Lemma 7.49] (*Descomposición de Iwasawa*) La función

$$\begin{aligned} \varphi : U \times \widehat{A} \times \widehat{N} &\longrightarrow \widehat{G} \\ (u, a, n) &\longmapsto uan \end{aligned}$$

es un difeomorfismo.

1.1.2 Grupos reductivos Reales

Dado que vamos a trabajar en las condiciones de los trabajos de Heinzner y Schwarz (y colaboradores), nosotros adoptaremos la noción que ellos tienen de grupo reductivo real.

Definición 1.1.13. [HSS, Section 2] Sea U un grupo de Lie compacto y $\widehat{G} = U^{\mathbb{C}}$ el correspondiente grupo reductivo complejo con descomposición de Cartan $\widehat{G} = U \exp(\sqrt{-1}\mathfrak{u})$. Un subgrupo de Lie real **cerrado** G de \widehat{G} es llamado *grupo reductivo real*, si G es compatible con la descomposición de Cartan de \widehat{G} , esto es:

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{K} \times \mathfrak{p} &\longrightarrow G \\ (k, X) &\longmapsto k \exp(X) \end{aligned}$$

es un difeomorfismo, donde $K = G \cap U$ y $\mathfrak{p} = \mathfrak{g} \cap \sqrt{-1}\mathfrak{u}$.

Es decir, en este trabajo, cuando decimos que G es un grupo reductivo real, debemos pensar que “más arriba” tenemos un grupo reductivo complejo que “hereda” sus propiedades a G . Notemos que K es un subgrupo compacto maximal de G y $\mathfrak{g} := \text{Lie}(G) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ con $\mathfrak{k} := \text{Lie}(K)$.

Las representaciones que consideraremos de estos grupos son aquellas permitidas por [HSS].

Definición 1.1.14. [Sto1, Section 2] Una representación de un grupo reductivo real, $\tau: G \rightarrow \text{GL}(V)$, se dice *representación reductiva real* si ésta se extiende a una representación holomorfa de \widehat{G} , $\widehat{\tau}: \widehat{G} \rightarrow \text{GL}(\widehat{V})$ con \widehat{G} como en la definición anterior.

De ahora en más, denotaremos por π a la diferencial de τ en la identidad e de G teniendo así una representación del álgebra de Lie, $\pi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$.

Pese a que las anteriores definiciones parecen muy restrictivas, muchos de los ejemplos clásicos satisfacen estas condiciones, como también las aplicaciones que veremos en este trabajo. Las anteriores condiciones permiten tener herramientas de trabajo y resultados similares al caso complejo, teniendo así que la teoría geométrica de invariantes tanto real como compleja casi que se puede realizar simultáneamente y de forma completamente similar.

Un primer beneficio que tiene la noción de representación reductiva real es que se puede dotar al espacio vectorial de base con un producto interno tal que K actúa por isometrías y \mathfrak{p} actúa por operadores simétricos. A diferencia del caso complejo, no toda representación de un grupo reductivo real dispone de esta propiedad; el grupo K y el espacio vectorial \mathfrak{p} no están “conectados” como sucede en los grupos reductivos complejos (es fácil exhibir una representación continua de un grupo reductivo real tal que el espacio vectorial de base no admita un producto interno con la propiedad mencionada). Para probar la primera afirmación es suficiente con considerar el producto interno (real) dado en la Proposición 1.1.9 en el ítem 4 con respecto a la representación $\widehat{\tau}: \widehat{G} \rightarrow \text{GL}(\widehat{V})$; la conclusión se sigue dado que $K \subseteq U$ y $\mathfrak{p} \subseteq \sqrt{-1}\mathfrak{u}$.

De la misma forma, tomemos en $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ un producto interno tal que K actúa por isometrías bajo la representación adjunta y \mathfrak{p} actúa por operadores simétricos (por Proposición 1.1.9 ítem 5).

Recordemos que tales productos internos eran denotados por $\text{Re}\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $\text{Re}\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ respectivamente. Dado que a lo largo del trabajo usaremos en mayor medida estos productos internos reales en lugar de los respectivos productos internos Hermitianos, refrescamos la notación y evitamos el símbolo Re para la parte real de tal forma que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ simbolicen los productos internos reales ya mencionados. Cuando sea necesario volver hablar de los productos

internos Hermitianos (como sucederá en el Capítulo 2) haremos la aclaración pertinente, manteniendo siempre claro que tal abuso de notación no genera inconveniente ni inconsistencias en el desarrollo del trabajo (lo cual puede suceder si no se tiene la prudencia necesaria).

También nos gustaría hacer una segunda invitación al lector de adoptar como parte de la definición de representación reductiva real la existencia de estos dos productos internos; el del espacio base de la representación y el del álgebra de Lie. Así también, unificando esta noción con el caso complejo, podríamos pensar que una *representación reductiva compleja* es una representación holomorfa de un grupo reductivo complejo junto con los ya mencionados productos internos reales. Hacemos este cambio de manera informal para conservar las definiciones ya establecidas, pero como se verá a lo largo de este trabajo, para nosotros es indispensable contar con estas condiciones las cuales aparecen en los ejemplos clásicos.

La involución de Cartan de \mathfrak{g} está dada por la restricción de la involución de $\widehat{\mathfrak{g}}$

$$\begin{aligned} \theta : \mathfrak{k} \times \mathfrak{p} &\longrightarrow \mathfrak{k} \times \mathfrak{p} \\ X + Y &\longmapsto X - Y \end{aligned}, \quad \forall X \in \mathfrak{k}, Y \in \mathfrak{p}. \quad (14)$$

Dado que $[u, u] \subseteq u$, $[\sqrt{-1}u, u] \subseteq \sqrt{-1}u$ y $[\sqrt{-1}u, \sqrt{-1}u] \subseteq u$, entonces, en este caso tenemos $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subseteq \mathfrak{k}$, $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p}$ y $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k}$.

Fijemos una subálgebra de \mathfrak{g} maximal en \mathfrak{p} , \mathfrak{a} . Dado que $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k}$, \mathfrak{a} es abeliana. Así, podemos descomponer a \mathfrak{g} y V de forma similar como en ecuación 7 y 10. Esto se da, pues $\{\pi(X)/X \in \mathfrak{a}\}$ y $\{\text{ad}(X)/X \in \mathfrak{a}\}$ es una familia de operadores simétricos que conmutan. Es así que \mathfrak{g} tiene una descomposición en *raíces restringidas*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \bigoplus_{\lambda \in \Delta(\mathfrak{g})} \mathfrak{g}_\lambda, \quad (15)$$

donde $\Delta(\mathfrak{g})$ es un subconjunto de vectores no nulos de \mathfrak{a} y

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_\lambda &= \{Y \in \mathfrak{g} / \text{ad}(X)Y = \langle \langle X, \lambda \rangle \rangle Y, \forall X \in \mathfrak{a}\}, \\ \mathfrak{m} &= \{Y \in \mathfrak{k} / \text{ad}(X)Y = 0, \forall X \in \mathfrak{a}\}, \quad \mathfrak{g}_0 := \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}, \end{aligned} \quad (16)$$

y con respecto al espacio vectorial real V tenemos

$$V = \bigoplus_{\alpha \in \Delta(V)} V_\alpha, \quad (17)$$

con $\Delta(V)$ un subconjunto de \mathfrak{a} (conteniendo posiblemente al vector cero) tal que

$$V_\alpha = \{v \in V / \pi(X)v = \langle \langle X, \alpha \rangle \rangle v, \forall X \in \mathfrak{a}\}. \quad (18)$$

En este punto, permítanos hacer un resumen de aquellas propiedades que se daban en el caso complejo y que se mantienen para el caso real.

Proposición 1.1.15. *Sea G un grupo reductivo real, $\tau : G \longrightarrow GL(V)$ representación reductiva real con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$ como arriba. Entonces, para todo X, Y en \mathfrak{g} ,*

1. $\pi(X)^T = -\pi(\theta(X))$, donde $\pi(X)^T$ es el operador transpuesto de $\pi(X)$ con respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
2. $\text{ad}(X)^T = -\text{ad}(\theta(X))$, donde $\text{ad}(X)^T$ es el operador transpuesto de $\text{ad}(X)$ con respecto a $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$.
3. θ es una isometría de $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$. En consecuencia, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$.

4. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno sobre V tal que K actúa por isometrías y \mathfrak{p} actúa por operadores simétricos.
5. $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ es un producto interno sobre \mathfrak{g} tal que K actúa por isometrías y \mathfrak{p} actúa por operadores simétricos (con respecto a la representación adjunta).
6. $\theta(\mathfrak{g}_\lambda) = \mathfrak{g}_{\theta(\lambda)} = \mathfrak{g}_{-\lambda}$. En consecuencia, $\lambda \in \Delta(\mathfrak{g})$ si y solo si $-\lambda \in \Delta(\mathfrak{g})$.
7. $[\mathfrak{g}_{\lambda_1}, \mathfrak{g}_{\lambda_2}] \subseteq \mathfrak{g}_{\lambda_1 + \lambda_2}$. En consecuencia, si $[\mathfrak{g}_{\lambda_1}, \mathfrak{g}_{\lambda_2}] \neq \{0\}$ entonces $\lambda_1 + \lambda_2 \in \Delta(\mathfrak{g}) \cup 0$.
8. Para cualquier $Z \in \mathfrak{g}_\lambda$, $[\theta(Z), Z] \in \mathfrak{a}$ y así, $[\theta(Z), Z] = \|Z\|^2 \lambda$.
9. $\pi(\mathfrak{g}_\lambda)V_\alpha \subseteq V_{\lambda + \alpha}$. En consecuencia, si $\pi(\mathfrak{g}_\lambda)V_\alpha \neq \{0\}$ entonces $\lambda + \alpha \in \Delta(V)$.

Nota 1.1.16. En [Kna] podemos encontrar la siguiente noción para grupo reductivo real

Definición 1.1.17. [Kna, VII, Section 2.] Un **grupo de Lie reductivo** es una 4-tupla (G, K, θ, B) tal que G es un grupo de Lie, K es un subgrupo compacto de G , θ es un automorfismo e involución del álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$, B es una forma bilinear de \mathfrak{g} θ -invariante, $\text{Ad}(G)$ -invariante y no degenerada, donde además se satisface

- (i) \mathfrak{g} es una álgebra de Lie reductiva.
- (ii) La descomposición de \mathfrak{g} en términos de los espacios propios de θ es $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, donde $\mathfrak{k} = \text{Lie}(K)$ es el conjunto de puntos fijos de θ ; y así \mathfrak{p} es el correspondiente espacio propio de autovalor -1 .
- (iii) \mathfrak{k} y \mathfrak{p} son ortogonales bajo B , y B es definida positiva sobre \mathfrak{p} y definida negativa sobre \mathfrak{k} .
- (iv) La función

$$\begin{aligned} \varphi : K \times \mathfrak{p} &\longrightarrow G \\ (k, X) &\longmapsto k \exp(X) \end{aligned}$$

es un difeomorfismo sobre G .

- (v) Todo automorfismo $\text{Ad}(g)$ de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ es **interno** para $g \in G$, es decir, es dado por algún $\psi \in \text{INT } \mathfrak{g}$.

Sea G un grupo reductivo real en el sentido de la Definición 1.1.14 con K como en la definición, θ como en la Ecuación (14) y $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ como en la Proposición 1.1.15. Es fácil verificar que la 4-tupla $(G, K, \theta, -\langle\langle \cdot, \theta(\cdot) \rangle\rangle)$ es reductivo en el sentido de Knapp.

Para terminar con los preliminares sobre grupos reductivos, definamos el grupo de Weyl en esta situación. Como en el caso complejo, fijemos un vector regular del espacio vectorial con producto interno $(\mathfrak{a}, \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle)$ (un $X \in \mathfrak{a}$ tal que $\langle\langle X, \lambda \rangle\rangle \neq 0$, $\forall \lambda \in \Delta(\mathfrak{g})$), definamos $\Delta(\mathfrak{g})^+$ y \mathfrak{a}^+ de manera totalmente análoga al caso complejo. Se define el *grupo de Weyl* de G con respecto a \mathfrak{a} ([Kna, VII, Section 2.]), el cual denotaremos por $W(\mathfrak{a}, G)$, como $W(\mathfrak{a}, G) := N(\mathfrak{a}, K)/Z(\mathfrak{a}, K)$, donde $N(\mathfrak{a}, K)$ es el normalizador de \mathfrak{a} en K ,

$$N(\mathfrak{a}, K) = \{k \in K / \text{Ad}(k)\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}\},$$

y $Z(\mathfrak{a}, K)$ es el centralizador de \mathfrak{a} en K ,

$$Z(\mathfrak{a}, K) = \{k \in K / \text{Ad}(k)x = x, \forall x \in \mathfrak{a}\}.$$

Teorema 1.1.18.

1. [Kna, VI, Section 5, Lemma 6.56] $W(\mathfrak{a}, G)$ es un grupo finito.
2. La acción de $W(\mathfrak{a}, G)$ sobre \mathfrak{a} es fiel y además $W(\mathfrak{a}, G)$ es un subconjunto de las isometrías de $(\mathfrak{a}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. También, la acción de $W(\mathfrak{a}, G)$ sobre $\Delta(\mathfrak{g})$ es fiel.
3. [Kna, VII, Section 3, Lemma 7.38] Sea $A = \exp(\mathfrak{a})$ y sean α_1 y α_2 en A . Existe $k \in K$ tal que $k\alpha_1 k^{-1} = \alpha_2$ si y solo si existe $w \in N(\mathfrak{a}, K)$ tal que $w\alpha_1 w^{-1} = \alpha_2$.
4. [Kna, VII, Section 2, Proposition 7.32] $W(\mathfrak{a}, G)$ actúa simple y transitivamente en el conjunto de las cámaras de Weyl.

Por último, sea \mathfrak{n}^+ y N de forma similar al caso complejo.

Teorema 1.1.19.

1. [Kna, VII, Section 2, Proposition 7.29] (**Conjugación de los toros maximales**) $\mathfrak{p} = \bigcup_{k \in K} \text{Ad}(k)\mathfrak{a}$.
2. [Kna, VII, Section 3, Proposition 7.39] (**Descomposición Polar**) $G = KAK$. En esta descomposición, el factor en A es único salvo la acción del grupo de Weyl.
3. [Kna, VII, Section 2, Proposition 7.31] (**Descomposición de Iwasawa**) La función

$$\begin{aligned} \varphi : K \times A \times N &\longrightarrow G \\ (k, a, n) &\longmapsto kan \end{aligned}$$

es un difeomorfismo.

1.2 APLICACIÓN MOMENTO DE REPRESENTACIONES REDUCTIVAS

Estamos en condiciones de introducir el objeto de estudio en este trabajo, la aplicación momento de una representación reductiva.

Como modelo de una representación reductiva podemos tomar el caso real: tenemos un grupo reductivo (real) $G = K \exp(\mathfrak{p})$, una representación reductiva real $\tau : G \longrightarrow GL(V)$, $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ la respectiva representación del álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ dada por τ y los productos internos reales $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre \mathfrak{g} y V respectivamente tal que K actúa por isometrías tanto en \mathfrak{g} como en V , y \mathfrak{p} actúa por operadores simétricos sobre \mathfrak{g} y V .

Dado $v \in V$, consideremos la función

$$\begin{aligned} \rho_v : G &\longrightarrow \mathbb{R} \\ g &\longmapsto \|g \cdot v\|^2 \end{aligned}$$

y sea $(d\rho_v)_e$ la diferencial de ρ_v en la identidad e de G . Como K actúa por isometrías, tenemos que $(d\rho_v)_e(\mathfrak{k}) = \{0\}$. Es así que si usamos el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de \mathfrak{g} para identificar a $(d\rho_v)_e$ con un vector en \mathfrak{g} , entonces tal vector es ortogonal a \mathfrak{k} , o lo que es lo mismo, tal vector está en \mathfrak{p} (por 1.1.9 ítem 6 y 1.1.15 ítem 3).

Notemos que si un $v \in V$ es tal que su G -órbita es cerrada, entonces ρ_v alcanza un valor mínimo global. Pues bien, el recíproco de esta afirmación también es cierto y es un resultado probado por George Kempf (quien además completó el programa de teoría geométrica de invariantes de Mumford con sus resultados sobre vectores inestables) y Linda Ness (estudiante

de Mumford) para el caso complejo. En el caso real, la misma afirmación es probada por Roger Richardson y Peter Slodowy para representaciones racionales de los puntos reales de grupos reductivos complejos y en forma general, dentro de la propuesta de teoría geométrica de invariantes de Peter Heinzner y Gerald Schwarz, podemos encontrar una prueba de la afirmación en [HSchw] y la cual, como hemos mencionado en varias ocasiones, está en un contexto más general que el de las representaciones y no hace exigencias de tipo algebraico.

Teorema 1.2.1. [KN, Theorem 0.2], [RS, Theorem 4.4] y [HSchw, Corollary 14.16] Sea $v \in V$. Entonces, la G -órbita de v es cerrada si y solo si la función ρ_v tiene un valor mínimo.

Es así que es conveniente incorporar la siguiente definición dada inicialmente en [Nes].

Definición 1.2.2. [Nes, Definition 2.2] y [RS, Definition 4.1] Un vector $v \in V$ es un *vector minimal* para G si $\|g \cdot v\| \geq \|v\|$ para todo $g \in G$. El conjunto de vectores minimales será denotado por \mathcal{M} .

Luego, una órbita es cerrada si y solo si tal órbita interseca al conjunto \mathcal{M} .

Es así que la noción de vector minimal tiene importancia en el estudio del espacio de órbitas pues da cuentas de las órbitas cerradas de la representación (las cuales, como bien sabemos, son las únicas que el anillo de invariantes puede distinguir [MFK, Corollary 1.2]).

Una pregunta natural es cómo son los puntos minimales de una órbita cerrada. Por ejemplo, si v es minimal, es claro que la K -órbita de v está formada por vectores minimales. De hecho, un segundo resultado nos dice que estos son los únicos vectores minimales en una órbita cerrada; es decir, toda órbita cerrada tiene un "único" vector minimal (unicidad salvo isometría). Damos a continuación una prueba de este hecho, la cual usa propiedades de convexidad que están implícitas en muchas funciones asociadas a representaciones reductivas (tanto en el caso real como el complejo).

Teorema 1.2.3. [KN, Theorem 0.1] y [HSchw, Lemma 5.5] Sea $v \in V$ un vector minimal de $G \cdot v$. Entonces $G \cdot v \cap \mathcal{M} = K \cdot v$.

Demostración Sea v_0 otro vector minimal de $G \cdot v$. De la descomposición de Cartan de G tenemos que $v_0 = k \exp(X)v$ con $k \in K$ y $X \in \mathfrak{p}$. Como vimos antes, $k^{-1}v_0 = \exp(X)v$ es también un vector minimal.

Consideremos la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \|\exp(tX)v\|^2 \end{aligned}$$

y denotemos por $v_t := \exp(tX)v$ (por tanto, $v_t' = \pi(X)v_t$). Es fácil ver que $f'(t) = 2\langle \pi(X)v_t, v_t \rangle$ y así $f''(t) = 2(\langle \pi(X)\pi(X)v_t, v_t \rangle + \langle \pi(X)v_t, \pi(X)v_t \rangle)$. Recordemos que nuestro producto interno en V es tal que \mathfrak{p} actúa por operadores simétricos (o Hermitianos en el caso complejo), luego

$$f''(t) = 4\|\pi(X)v_t\|^2.$$

Afirmación: $\pi(X)v_t = 0$, o lo que es equivalente, $\pi(X)v = 0$.

De no ser así, entonces f'' es positiva y en consecuencia, f es una función convexa. Pero f tiene dos puntos críticos: $t = 0$ y $t = 1$ correspondientes a los vectores minimales v y $\exp(X)v$, lo cual no puede ser pues si una función convexa alcanza un valor mínimo, lo alcanza en un único punto.

Luego, $\pi(X)v = 0$, por lo que $\exp(v) = v$ y así $v_0 = kv$. ■

Un corolario que se sigue de la prueba del teorema es que la isotropía de un vector minimal v tiene la forma $K_v \exp(\mathfrak{p}_v)$ con $K_v = K \cap G_v$ y $\mathfrak{p}_v = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}_v$.

Retomemos el estudio de las funciones ρ_v . Denotemos por $\tilde{m}_g(v)$ el único vector en \mathfrak{g} que realiza el funcional lineal $(d\rho_v)_e$ con respecto al producto interno de \mathfrak{g} , $\langle \cdot, \cdot \rangle$, es decir, \tilde{m}_g se define implícitamente como

$$\begin{aligned} \tilde{m}_g : V &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ \langle \tilde{m}_g(v), X \rangle &= (d\rho_v)_e X \\ &= 2\langle \pi(X)v, v \rangle \end{aligned}$$

con $v \in V$ y $X \in \mathfrak{g}$.

Notemos que la imagen de \tilde{m}_g está contenida en \mathfrak{p} debido a que K actúa por isometrías. También se ve que $\tilde{m}_g(tv) = t^2 \tilde{m}_g(v)$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$. De esto último, podemos considerar la normalización de \tilde{m}_g

$$m_g(v) = \frac{\tilde{m}_g(v)}{2\|v\|^2}, \quad v \in V \setminus \{0\},$$

la cual recibe el nombre de *aplicación momento*. En el caso real, se puede añadir el término “*restringida*” (ver [Sto1, Section 2]) para darle fuerza al hecho que en el caso complejo tal función m_g es en efecto una aplicación momento como en geometría simpléctica ([Nes, Corollary 1.2.1]) y la respectiva función para representaciones reductivas reales no es más que la restricción de la aplicación momento de la representación reductiva compleja asociada (como en la Definición 1.1.14). Sea $\widehat{\tau} : \widehat{G} \longrightarrow GL(\widehat{V})$ una representación holomorfa de \widehat{G} . Como \widehat{G} actúa por operadores lineales, esta representación induce una acción de \widehat{G} sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}(\widehat{V})$, el espacio proyectivo complejo de \widehat{V} . Sea ω la métrica de Fubini Study sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}(\widehat{V})$ inducida por el producto interno Hermitiano definido sobre \widehat{V} en la Subsección 1.1.1. U actúa sobre $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}(\widehat{V})$ preservando la estructura simpléctica ω y la correspondiente aplicación momento $\mu : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}(\widehat{V}) \longrightarrow \mathfrak{u}^*$ es definida por la ecuación $d\mu^\xi = \iota_{\xi_*} \omega$. Aquí, ξ_* denota el campo inducido por el grupo monoparamétrico $\{\exp(t\xi)\}_{t \in \mathbb{R}}$ y ι_{ξ_*} es la contracción de ω con ξ_* . Después de hacer las identificaciones correspondientes, μ_g es la aplicación momento.

De la discusión que tuvimos sobre vectores minimales, tenemos que el conjunto de vectores minimales \mathcal{M} está dado por los ceros de la aplicación momento, y una órbita es cerrada si y solamente si la órbita tiene ceros de la aplicación momento (obviamente no estamos considerando la órbita del vector nulo, la cual siempre es cerrada).

Asociada a la aplicación momento, consideremos la función dada por el cuadrado de su norma

$$\begin{aligned} F_g : V \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \|m_g(v)\|^2 \end{aligned}$$

Nes y paralelamente Frances Kirwan (una estudiante de Atiyah) muestran que la aplicación momento tiene una relación muy estrecha con la teoría geométrica de invariantes y es así que tal función puede ser usada para estudiar el espacio de órbitas. Ellas estudian las propiedades de los puntos críticos de F_g y las trayectorias de su flujo gradiente. De este estudio se dieron resultados que permitían estudiar el “salvaje” *cono nulo*, \mathcal{N} , (este es el conjunto algebraico dado por los *vectores inestables*; aquellos vectores no nulos que tienen al cero en su clausura).

Dentro de los puntos críticos de F_g tenemos los ya mencionados vectores minimales, los cuales son los únicos que tienen su órbita cerrada. Es sabido que éstos tienen un papel destacado en el conjunto de los *vectores semiestables*, V_{ss} ; aquellos vectores no nulos que no tienen al cero en su clausura.

Teorema 1.2.4.

1. [Nes, Lemma 2.3] y [HSchw, Corollary 14.17] Dado $v \in V_{ss}$, $\overline{G \cdot v} \cap V_{ss}$ contiene una única órbita cerrada.
2. [Nes, Theorem 1.4], [Kir2, Theorem 7.4] y [HSchw, Theorem 13.5] Hay un cociente $V_{ss} // G$ (llamado cociente de Hilbert) el cual parametriza las órbitas cerradas en V_{ss} . La inclusión $\mathcal{M} \hookrightarrow V_{ss}$ induce un homeomorfismo

$$\mathcal{M}/K \simeq V_{ss} // G.$$

En el caso complejo, $V_{ss} // G$ es la **reducción de Marsden-Weinstein** determinada por la aplicación momento m_g vista en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}(V)$ la cual es una variedad proyectiva.

Es notable que los demás puntos críticos de F_g (los no minimales) tienen las mismas propiedades que los puntos críticos minimales. Es fácil ver que un punto crítico de F_g no minimal está en el cono nulo; así, los siguientes teoremas muestran que tales punto críticos también son destacados.

Definición 1.2.5. [Jab1, Definition 2.6] Una G -órbita se dice *G -distinguida* si contiene un punto crítico de F_g y tal punto crítico es llamado *distinguido*.

Teorema 1.2.6.

1. [Nes, Theorem 6.2] [HSS, Corollary 6.10 y 6.11] Sea $v \in V \setminus \{0\}$ un punto crítico de F_g , entonces $F_g|_{G \cdot v}$ alcanza su valor mínimo en v y éste es el único punto (salvo isometría y escalamiento) sobre el cual $F_g|_{G \cdot v}$ toma su valor mínimo.
2. [Nes, Theorem 6.2], [Kir2, Theorem 6.18] y [HSS, Theorem 7.3 y Corollary 7.6] (**Estratificación de Kirwan-Ness**) El flujo gradiente de F_g determina una estratificación de $V \setminus \{0\}$, es decir

$$V \setminus \{0\} = \bigcup_{\beta \in \bar{\mathfrak{a}}^+} \mathcal{S}_\beta,$$

donde los estratos \mathcal{S}_β están dados por

$$\mathcal{S}_\beta = \left\{ v \in V \setminus \{0\} / \lim_{t \rightarrow -\infty} s_v(t) \in \mathcal{C}(\beta) \right\}.$$

$s_v(t)$ es la curva integral por v del campo gradiente de F_g y $\mathcal{C}(\beta)$ es

$$\mathcal{C}(\beta) = \{v \in V \setminus \{0\} / v \text{ es un punto crítico de } F_g \text{ y } m_g(v) \in \text{Ad}(K)\beta\}.$$

Dichos estratos satisfacen

$$\overline{\mathcal{S}_\beta} \subseteq \mathcal{S}_\beta \cup \{\mathcal{S}_{\beta'} / \|\beta'\| > \|\beta\|\}.$$

3. [HSS, Theorem 5.4] Dado $v \in \mathcal{S}_\beta$ entonces $\overline{G \cdot v} \cap \mathcal{S}_\beta$ contiene una única órbita distinguida (Fig. 1).

Denotemos por \mathcal{B} el conjunto de los $\beta \in \bar{\mathfrak{a}}^+$ tal que $\mathcal{S}_\beta \neq \emptyset$ o lo que es lo mismo

$$\mathcal{B} = \{\beta \in \bar{\mathfrak{a}}^+ / \mathcal{C}(\beta) \neq \emptyset\}.$$

A \mathcal{B} le daremos el nombre de *conjunto estratificante*. Otro resultado destacable sobre las propiedades de la estratificación es el que dice que el conjunto \mathcal{B} es finito (y por tanto hay finitos estratos). Vamos a dar una prueba de este hecho la cual nos obliga a introducir algunas definiciones que manejaremos a lo largo de todo el trabajo y permitirán ver la estratificación desde un punto de vista más algebraico.

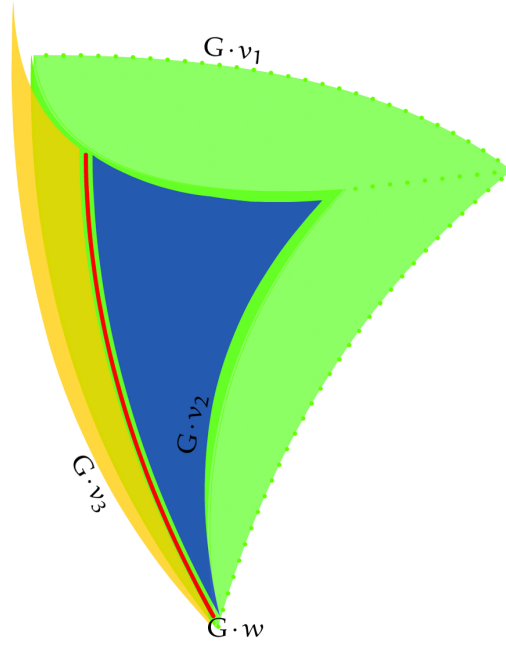


Figura 1: Órbita distinguida en la clausura
 $G \cdot w$ representa la órbita distinguida en la clausura de las órbitas de v_1, v_2 y v_3

Notación 1.2.7. Sea $S \subseteq \mathfrak{a}$ un conjunto finito. Denotaremos por $CC(S)$ a la *cápsula convexa* generada por el conjunto S mientras que por $Af(S)$ denotaremos el *subespacio afín* generado por S . $ccm(S)$ denotará al único vector de norma mínima en $CC(S)$ y será llamado *combinación convexa mínima*. La notación $\text{int}(CC(S))$ representa el interior de $CC(S)$ relativo a la topología usual de $Af(S)$.

Notación 1.2.8. Consideremos $v \in V \setminus \{0\}$, digamos $v = v_1 + \dots + v_s$ con cada $v_i \in V_{\alpha_i}$ como en la descomposición dada en (10) para el caso complejo ó (17) para el caso real. Por $\mathfrak{R}(v)$ denotaremos el conjunto ordenado de los *pesos relacionados* con v , esto es:

$$\mathfrak{R}(v) := \{\alpha_i \in \Delta(V) / v_i \neq 0\}$$

y por β_v denotaremos a $ccm(\mathfrak{R}(v))$

Proposición 1.2.9.

1. La aplicación momento es K -equivariante; es decir $m_{\mathfrak{g}} \circ \tau(k) = \text{Ad}(k) \circ m_{\mathfrak{g}}$ para todo $k \in K$.
2. Sea H un subgrupo reductivo de G compatible con la descomposición de Cartan de G (y así de \widehat{G} en el caso de G reductivo real). Entonces, $m_{\mathfrak{h}} = \text{Proy}_{\mathfrak{h}} \circ m_{\mathfrak{g}}$ donde $\text{Lie}(H) = \mathfrak{h}$ y $\text{Proy}_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ es la proyección ortogonal de \mathfrak{g} sobre \mathfrak{h} con respecto al producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
3. El gradiente de la función $F_{\mathfrak{h}}$ en $v \in V \setminus \{0\}$ es dado por

$$(\text{grad } F_{\mathfrak{h}})_v = \frac{4}{\|v\|^2} (\pi(m_{\mathfrak{h}}(v))v - F_{\mathfrak{h}}(v)v)$$

En consecuencia, $v \in V \setminus \{0\}$ es punto crítico de $F_{\mathfrak{h}}$ si y solo si $\pi(m_{\mathfrak{h}}(v))v = tv$ para algún $t \in \mathbb{R}$.

4. Sea $v \in V \setminus \{0\}$ tal que $m_{\mathfrak{g}}(v) = \beta \in \mathfrak{a}$. Entonces

- a) $m_{\mathfrak{g}}(v) \in \text{int}(\text{CC}(\mathfrak{A}(v)))$
- b) v es punto crítico de $F_{\mathfrak{g}}$ si y solo si $\beta = \text{ccm}(\mathfrak{A}(v))$.

5. Dado $\beta \in \mathfrak{p}$ consideremos

$$\mathcal{C}(\beta) = \{v \in V \setminus \{0\} / v \text{ es un punto crítico de } F_{\mathfrak{g}} \text{ y } m_{\mathfrak{g}}(v) \in \text{Ad}(\mathbf{K})\beta\}$$

entonces, la familia de conjuntos

$$\{\mathcal{C}(\beta) / \mathcal{C}(\beta) \neq \emptyset\}$$

es una familia finita.

Demostración

1. , 2. y 3. Se verifican fácilmente y obviamos la demostración.
3. Sea $v \in V \setminus \{0\}$, $v = \sum v_i$ la descomposición de v en vectores pesos y supongamos que $m_{\mathfrak{g}}(v) = \beta \in \mathfrak{a}$. Antes de continuar, recordemos que en el caso complejo la restricción sobre $\hat{\mathfrak{a}}$ del producto interno Hermitiano definido en $\hat{\mathfrak{g}}$, es un producto interno real. Es así que no hay contradicción, durante esta prueba, en el abuso de notación para denotar a $\text{Re}\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ por simplemente $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ cuando operamos con elementos de $\hat{\mathfrak{a}}$; como puede ser un $X \in \hat{\mathfrak{a}}$ y un peso α_i . Hacemos esta salvedad porque vamos a usar frecuentemente los pesos de la representación y en el caso complejo, estos están definidos a partir del producto interno Hermitiano.

Sea $X \in \mathfrak{a}$ arbitrario,

$$\begin{aligned} \langle\langle m_{\mathfrak{g}}(v), X \rangle\rangle &= \frac{1}{\|v\|^2} \langle \pi(X)v, v \rangle = \frac{1}{\|v\|^2} \langle \pi(X) \sum_i v_i, \sum_j v_j \rangle \\ &= \frac{1}{\|v\|^2} \langle \sum_i \langle\langle X, \alpha_i \rangle\rangle v_i, \sum_j v_j \rangle = \frac{1}{\sum_k \|v_k\|^2} \sum_i \langle\langle X, \alpha_i \rangle\rangle \|v_i\|^2 \\ &= \langle\langle \frac{1}{\sum_k \|v_k\|^2} \sum_i \|v_i\|^2 \alpha_i, X \rangle\rangle \end{aligned}$$

Esto implica que

$$m_{\mathfrak{g}}(v) = \frac{1}{\sum_k \|v_k\|^2} \sum_i \|v_i\|^2 \alpha_i \tag{19}$$

y así $m_{\mathfrak{g}}(v) \in \text{int}(\text{CC}(\mathfrak{A}(v)))$.

Para probar la parte b), supongamos que v es punto crítico de $F_{\mathfrak{g}}$; y así $\pi(\beta)v = \|\beta\|^2 v$ por la parte 3. (pues $\beta = m_{\mathfrak{g}}(v)$). Esta igualdad implica que

$$\langle\langle \beta, \alpha_i \rangle\rangle = \|\beta\|^2, \forall \alpha_i \in \mathfrak{A}(v).$$

Es decir que $\mathfrak{A}(v)$ está contenido en el espacio afín

$$\{Y \in \mathfrak{a} / \langle\langle Y, \beta \rangle\rangle = 0\} + \beta$$

en el cual β tiene mínima norma. Es por esto que $\text{CC}(\mathfrak{A}(v))$ también está contenido en tal espacio afín y como $\beta \in \text{CC}(\mathfrak{A}(v))$, se sigue $\beta = \text{ccm}(\mathfrak{A}(v))$. En la otra dirección, supongamos que $\beta = \text{ccm}(\mathfrak{A}(v))$. Así

$$\langle\langle \beta, \alpha_i \rangle\rangle \geq \|\beta\|^2, \forall \alpha_i \in \mathfrak{A}(v)$$

por la caracterización del vector de norma mínima en una cápsula convexa. Como $\beta \in \text{int}(\text{CC}(\mathfrak{A}(v)))$ entonces existen $r_i > 0$ tales que

$$\beta = \sum r_i \alpha_i \text{ con } \sum r_i = 1. \quad (20)$$

Afirmación: $\langle\langle \beta, \alpha_i \rangle\rangle = \|\beta\|^2, \forall \alpha_i \in \mathfrak{A}(v)$. Supongamos lo contrario; que existe un $\alpha_i \in \mathfrak{A}(v)$ tal que $\langle\langle \beta, \alpha_i \rangle\rangle > \|\beta\|^2$. De esta desigualdad tenemos que

$$\sum_j r_j \langle\langle \beta, \alpha_i \rangle\rangle > \|\beta\|^2$$

pero por otro lado, tomando producto interno a la ecuación (20) con β , tenemos que

$$\|\beta\|^2 = \sum_j r_j \langle\langle \beta, \alpha_i \rangle\rangle$$

teniendo así un absurdo. Por tanto nuestra afirmación es cierta y esta implica que $\pi(\beta)v = \pi(m_g(v))v = F_g(v)v$; v es punto crítico de F_g .

4. Para contar los conjuntos $\mathcal{C}(\beta)$, usemos los teoremas citados en las primeras secciones. Sea $\tilde{\beta} \in \mathfrak{p}$ tal que $\mathcal{C}(\tilde{\beta}) \neq \emptyset$. Sabemos por los Teoremas 1.1.12 ítem 1., 1.1.11 ítem 3., 1.1.19 ítem 1. y 1.1.18 ítem 4. que existe un único $\beta \in \overline{\mathfrak{a}^+}$ en la intersección $\text{Ad}(K)\beta \cap \overline{\mathfrak{a}^+}$. Así pues $\mathcal{C}(\tilde{\beta}) = \mathcal{C}(\beta)$. Además en $\mathcal{C}(\beta)$ debe existir un v tal que es punto crítico de F_g y $m_g(v) = \beta$. En efecto, sea $\tilde{v} \in \mathcal{C}(\beta)$ punto crítico de F_g con $m_g(\tilde{v}) = \text{Ad}(k)\beta$ para algún $k \in K$. Tomemos a $v := k^{-1}\tilde{v}$,

$$m_g(v) = m_g(k^{-1}v) = \text{Ad}(k^{-1})m_g(\tilde{v}) = \beta$$

y v es punto crítico, pues

$$\pi(m_g(v))v = \pi(\text{Ad}(k^{-1})m_g(\tilde{v}))k^{-1}\tilde{v} = k^{-1}\pi(m_g(\tilde{v}))kk^{-1}\tilde{v} = k^{-1}(t\tilde{v}) = tv$$

donde $t \in \mathbb{R}$. Usando este v y el punto anterior, el vector β es igual β_v . De esto se sigue que la cantidad de conjuntos $\mathcal{C}(\beta)$ no vacíos está acotado por los posibles β_v con $v \in V \setminus \{0\}$ y como solo hay una cantidad finita de cápsulas convexas de pesos pues solo tenemos finitos pesos, entonces la cantidad de mínimas combinaciones convexas es finita; de lo que se sigue la conclusión. ■

Nota 1.2.10. Hemos probado que el conjunto estratificante \mathcal{B} es finito y está contenido en el conjunto de las mínimas combinaciones convexas de pesos. No es difícil ver que no toda mínima combinación convexa define un estrato.

Usando esta terminología, tenemos la siguiente definición equivalente para los estratos que es de naturaleza algebraica y muy útil en la práctica

Teorema 1.2.11. [Kir2, Theorem 12.26] Sea \mathcal{S}_β como en el Teorema 1.2.6. Entonces

$$\mathcal{S}_\beta = \{v \in V \setminus \{0\} / \beta \text{ es un elemento de norma máxima en } \{\beta_{gv}\}_{g \in G}\}. \quad (21)$$

La aplicación momento tiene ciertas *propiedades de convexidad* que han sido probadas en trabajos notables, dentro de los cuales destacamos los realizados por David Mumford ([Nes, Appendix]), Michael Atiyah ([Ati]), Shlomo Sternberg junto con quien fue su alumno, Victor Guillemin ([GS₁, GS₂]), Frances Kirwan ([Kir₁]) y el reciente trabajo realizado en ([HSchu]) por Peter Heinzner y Patrick Schützdeller. La relevancia que tienen estos resultados es que permiten describir en cierto sentido la imagen de la aplicación momento y determinan la estratificación.

De estas propiedades de convexidad, podemos derivar resultados que permiten estudiar las órbitas distinguidas. Una clara muestra, es nuestra generalización del criterio de la base nice de Nikolayevsky (Teorema 2.2.21) el cual ha sido probado usando la propiedad de convexidad en el Teorema 2.1.5, donde tal propiedad está relacionada con el conocido Teorema de Convexidad de Atiyah-Guillemin-Sternberg.

Es así que en este capítulo introducimos los espacios nice de una representación, para los cuales, de alguna forma, “su teoría geométrica de invariantes” se limita al estudio de la acción del grupo $A = \exp(\mathfrak{a})$. Dado que esta cualidad hace interesante a un espacio nice, al final del capítulo, nos enfocamos en caracterizar este tipo de espacios de la forma más simple y obtenemos algunas equivalencias que son de fácil implementación en la práctica.

2.1 CONVEXIDAD DE LA APLICACIÓN MOMENTO PARA REPRESENTACIONES DE TOROS

Antes de probar el teorema central de la sección, vamos a citar algunos resultados elementales e introductorios de la teoría de funciones convexas y de geometría convexa. Invitamos al lector a consultar nuestras referencias sobre estos resultados y a leer otros teoremas relacionados para familiarizarse con las respectivas áreas.

Nuestro interés es usar tales resultados para demostrar propiedades de convexidad de la aplicación momento en una forma sencilla y amigable con el lector que no esté acostumbrado con los prerrequisitos de trabajos como [HSto] o [HSS].

2.1.1 Funciones convexas

Definición 2.1.1. [Nee, Definiciones en V.3] Sean V un espacio vectorial real y

$$f : V \longrightarrow \mathbb{R}_\infty := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

una *función convexa*. El conjunto $D_f := f^{-1}(\mathbb{R})$ es llamado el *dominio* de f .

La función

$$\begin{aligned} f^* : V^* &\longrightarrow \mathbb{R}_\infty \\ \xi &\longmapsto \sup_V(\xi - f) \end{aligned}$$

es llamada la *conjugada* de f

Teorema 2.1.2. [Nee, Corollary V.3.32] (**Teorema de Convexidad de Fenchel**) Sea $f \in \mathcal{C}^2(V)$ tal que la matrix Hessiana, $d^2 f(X)$ es definida positiva para todo $X \in V$. Entonces df mapea a V difeomorficamente sobre el conjunto convexo abierto $\text{int } D_{f^*}$ y $df^* : \text{int } D_{f^*} \longrightarrow V$ es la inversa de df

2.1.2 Geometría convexa

Definición 2.1.3. [Gru, Definiciones en 2.4] Sea Γ un subconjunto convexo de \mathbb{R}^n . Un punto $X \in \Gamma$ es llamado *punto extremo* de Γ si este no pertenece al interior relativo de cualquier segmento contenido en Γ ; es decir, X es un punto extremo si $X = tY + (1-t)Z$ con $0 < t < 1$, Y y Z en Γ implica $X = Y = Z$.

Un punto $X \in \Gamma$ es llamado un *punto expuesto* de Γ si existe un *hiperplano de soporte* de Γ cuya intersección con Γ es solo el punto X (Fig. 2); esto es, existe un hiperplano de \mathbb{R}^n , digamos $\Pi = \{Y \in \mathbb{R}^n / \langle Y, H \rangle = h\}$ con $H \in \mathbb{R}^n$, $h \in \mathbb{R}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interno de \mathbb{R}^n , tal que $\langle Y, H \rangle \geq h$ para todo $Y \in \Gamma$ y la igualdad se da sí y solo sí $X = Y$.

El conjunto de los puntos expuestos de Γ es denotado $\text{xp}(\Gamma)$ y el de los extremos por $\text{xt}(\Gamma)$

Intuitivamente, un punto extremo es una “esquina”. Es fácil ver que $\text{xp}(\Gamma) \subseteq \text{xt}(\Gamma)$ para todo convexo Γ .

Teorema 2.1.4. [Gru, Theorems 2.4.5 and 2.4.9]

1. (**Teorema de Minkowski-Krein-Milman**) Sea Γ un subconjunto convexo y compacto de \mathbb{R}^n . Entonces $\Gamma = \text{CC}(\text{xt}(\Gamma))$. Más aún, si $\Gamma = \text{CC}(R)$ entonces $R \supseteq \text{xt}(\Gamma)$.
2. (**Teorema de Straszewicz**) Si Γ es un subconjunto convexo y cerrado de \mathbb{R}^n entonces $\text{xt}(\Gamma) \subseteq \overline{\text{xp}(\Gamma)}$
3. Si $\Gamma = \text{CC}(R)$ con R un subconjunto finito de \mathbb{R}^n (Γ es un polígono) entonces $\Gamma = \text{CC}(\text{xp}(\Gamma))$ y $R \supseteq \text{xp}(\Gamma)$

A partir de estos resultados vamos a dar una prueba elemental sobre la convexidad de la aplicación momento para representaciones reductivas de toros complexificados o grupos abelianos conexos de rango 0. Dado que el caso complejo es un poco más delicado en cuanto al uso de notación, vamos a dar la prueba con todo rigor en esta situación y omitimos la prueba del caso real la cual es completamente análoga a lo que probaremos a continuación. Es así que a lo largo de la prueba $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotarán los productos internos Hermitianos definidos en la Sección 1.1.1. y por $\text{Re}\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $\text{Re}\langle \cdot, \cdot \rangle$ los respectivos productos internos reales.

Teorema 2.1.5. Sean T un toro compacto, $\text{Lie}(T) = \mathfrak{t}$, $T^{\mathbb{C}}$ el respectivo toro complexificado y $\tau : T^{\mathbb{C}} \longrightarrow \text{GL}(\hat{V})$ una representación holomorfa de $T^{\mathbb{C}}$. Sea $v \in \hat{V}$ no nulo y $v = v_1 + \dots + v_s$ su descomposición en vectores pesos como en la ecuación (10). Entonces

$$m_{\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}}(T^{\mathbb{C}} \cdot v) = \text{int}(\text{CC}(\mathfrak{R}(v)))$$

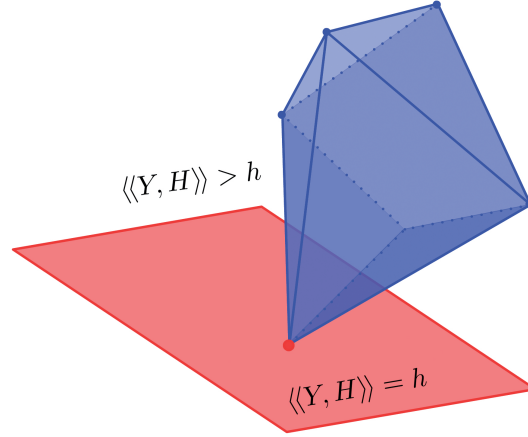


Figura 2: Punto Expuesto

Demostración Sea $X \in \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$. Primero, permítanos encontrar una fórmula para $m_{\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}}(\exp(X)v)$ (como en la ecuación (19)). Para esto, abreviaremos por \tilde{v} el vector $\exp(X)v$. Es fácil ver que

$$\tilde{v} = \sum_{\alpha_i \in \mathfrak{R}(v)} e^{\langle\langle X, \alpha_i \rangle\rangle} v_i$$

y así

$$\|\tilde{v}\|^2 = \sum_{\alpha_i \in \mathfrak{R}(v)} e^{2\operatorname{Re}\langle\langle X, \alpha_i \rangle\rangle} \|v_i\|^2.$$

Consideremos un $Y \in \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ arbitrario

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\langle\langle m_{\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}}(\tilde{v}), Y \rangle\rangle &= \frac{1}{\|\tilde{v}\|^2} \operatorname{Re}\langle\langle \pi(Y)\tilde{v}, \tilde{v} \rangle\rangle \\ &= \frac{1}{\|\tilde{v}\|^2} \operatorname{Re}\langle\langle \pi(Y) \sum_i e^{\langle\langle X, \alpha_i \rangle\rangle} v_i, \sum_j e^{\langle\langle X, \alpha_j \rangle\rangle} v_j \rangle\rangle \\ &= \frac{1}{\|\tilde{v}\|^2} \operatorname{Re}\langle\langle \sum_i e^{\langle\langle X, \alpha_i \rangle\rangle} \langle\langle Y, \alpha_i \rangle\rangle v_i, \sum_j e^{\langle\langle X, \alpha_j \rangle\rangle} v_j \rangle\rangle \\ &= \frac{1}{\|\tilde{v}\|^2} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{i,j} e^{\langle\langle X, \alpha_i \rangle\rangle} e^{\overline{\langle\langle X, \alpha_j \rangle\rangle}} \langle\langle Y, \alpha_i \rangle\rangle \langle v_i, v_j \rangle \right\} \\ &= \frac{1}{\|\tilde{v}\|^2} \operatorname{Re} \left\{ \sum_i e^{2\operatorname{Re}\langle\langle X, \alpha_i \rangle\rangle} \langle\langle Y, \alpha_i \rangle\rangle \|v_i\|^2 \right\} \\ &= \frac{1}{\|\tilde{v}\|^2} \sum_i e^{2\operatorname{Re}\langle\langle X, \alpha_i \rangle\rangle} \|v_i\|^2 \operatorname{Re}\langle\langle Y, \alpha_i \rangle\rangle \\ &= \operatorname{Re}\langle\langle \frac{1}{\|\tilde{v}\|^2} \sum_{\alpha_i \in \mathfrak{R}(v)} e^{2\operatorname{Re}\langle\langle X, \alpha_i \rangle\rangle} \|v_i\|^2 \alpha_i, Y \rangle\rangle. \end{aligned}$$

Esto último implica

$$m_{\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}}(\tilde{v}) = \frac{1}{\sum_{\alpha_i \in \mathfrak{R}(v)} e^{2\operatorname{Re}\langle\langle X, \alpha_i \rangle\rangle} \|v_i\|^2} \sum_{\alpha_i \in \mathfrak{R}(v)} e^{2\operatorname{Re}\langle\langle X, \alpha_i \rangle\rangle} \|v_i\|^2 \alpha_i. \quad (22)$$

Ahora probemos que $m_{\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}}(\mathbb{T}^{\mathbb{C}} \cdot v)$ es un conjunto convexo. Para hacer esto, aplicaremos el teorema de convexidad de Fenchel. Sea $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ cualquier subespacio compatible con la descomposición de Cartan de $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ y consideremos la función

$$\begin{aligned} \rho : \mathfrak{b} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X &\longmapsto \ln \|\exp(X)v\|^2 \end{aligned}$$

Usando que \mathfrak{b} es abeliana, es fácil comprobar que

$$m_{\mathfrak{b}}(\exp(Y)v) = \frac{1}{2}(d\rho_{\mathfrak{b}})_Y$$

donde hemos identificado a \mathfrak{b} con \mathfrak{b}^* por medio de $\text{Re}\langle \cdot, \cdot \rangle$. Así pues, la imagen de $d\rho_{\mathfrak{b}}$ es igual a $2m_{\mathfrak{b}}(B \cdot v)$ ($B = \exp(\mathfrak{b})$).

La idea de la prueba es aplicar el Teorema de Fenchel a cierto $\rho_{\mathfrak{b}}$ y luego relacionar $m_{\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}}$ con $m_{\mathfrak{b}}$. Recordemos que es necesario tener que $d^2\rho_{\mathfrak{b}}$ sea definida positiva para todo $X \in \mathfrak{b}$, así que calculemos $d^2\rho_{\mathfrak{b}}$ para cualquier \mathfrak{b} compatible con $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$. Sean $X, Y \in \mathfrak{b}$

$$\begin{aligned} \text{Re}\langle (d^2\rho_{\mathfrak{b}})_X Y, Y \rangle &= \text{Re}\langle \left. \frac{d}{dt} \right|_0 d\rho_{\mathfrak{b}}(X+tY), Y \rangle = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \text{Re}\langle 2m_{\mathfrak{b}}(\exp(X+tY)v), Y \rangle \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \text{Re}\langle 2m_{\mathfrak{b}}(\exp(tY)\tilde{v}), Y \rangle \\ &= 2 \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \frac{1}{\|\exp(tY)\tilde{v}\|^2} \text{Re}\langle \pi(Y)\exp(tY)\tilde{v}, \exp(tY)\tilde{v} \rangle \\ &= \frac{2}{\|\tilde{v}\|^4} \{ (\text{Re}\langle \pi(Y)\pi(Y)\tilde{v}, \tilde{v} \rangle + \text{Re}\langle \pi(Y)\tilde{v}, \pi(Y)\tilde{v} \rangle) \|\tilde{v}\|^2 \\ &\quad - 2\text{Re}\langle \pi(Y)\tilde{v}, \tilde{v} \rangle \text{Re}\langle \pi(Y)\tilde{v}, \tilde{v} \rangle \} \\ &= \frac{2}{\|\tilde{v}\|^4} \{ (\text{Re}\langle \pi(Y)\tilde{v}, \pi(Y)^*\tilde{v} \rangle + \text{Re}\langle \pi(Y)\tilde{v}, \pi(Y)\tilde{v} \rangle) \|\tilde{v}\|^2 - 2\text{Re}\langle \pi(Y)\tilde{v}, \tilde{v} \rangle^2 \} \\ &= \frac{2}{\|\tilde{v}\|^4} \{ \text{Re}\langle \pi(Y)\tilde{v}, \pi(Y)^*\tilde{v} + \pi(Y)\tilde{v} \rangle \|\tilde{v}\|^2 - 2\text{Re}\langle \pi(Y)\tilde{v}, \tilde{v} \rangle^2 \}. \end{aligned}$$

Para entender mejor la última igualdad, debemos aprovechar más que \mathfrak{b} es compatible con $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ ($\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1 \oplus \sqrt{-1}\mathfrak{b}_2$, con $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ subespacios de \mathfrak{t}). Escribamos a Y como $Y_1 + \sqrt{-1}Y_2$ con $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{t}$; así $\pi(Y)^* = -\pi(\theta(Y)) = -\pi(Y_1) + \pi(\sqrt{-1}Y_2)$ (por proposición 1.1.9 ítem 1) y estudiemos por separado cada uno de los sumandos en la última igualdad,

$$\begin{aligned} \text{Re}\langle \pi(Y)\tilde{v}, \pi(Y)^*\tilde{v} + \pi(Y)\tilde{v} \rangle &= 2\text{Re}\langle \pi(Y)\tilde{v}, \pi(\sqrt{-1}Y_2)\tilde{v} \rangle \\ &= 2\text{Re}\langle \pi(Y_1)\tilde{v}, \pi(\sqrt{-1}Y_2)\tilde{v} \rangle + 2\|\pi(\sqrt{-1}Y_2)\tilde{v}\|^2 \\ &= 2\|\pi(\sqrt{-1}Y_2)\tilde{v}\|^2 \end{aligned}$$

donde hemos usado que $\text{Re}\langle \pi(Y_1)\tilde{v}, \pi(\sqrt{-1}Y_2)\tilde{v} \rangle = 0$ pues \mathfrak{t} es abeliana y $\pi(Y_1), \pi(\sqrt{-1}Y_2)$ son operadores antisimétricos y simétricos respectivamente (ver proposición 1.1.9 ítem 4).

Con respecto al término $\text{Re}\langle \pi(Y)\tilde{v}, \tilde{v} \rangle^2$, dado que $\pi(Y_1)$ es antisimétrico, se tiene $\text{Re}\langle \pi(Y)\tilde{v}, \tilde{v} \rangle^2 = \text{Re}\langle \pi(\sqrt{-1}Y_2)\tilde{v}, \tilde{v} \rangle^2$. Reemplazando estos últimos en la ecuación para $\text{Re}\langle (d^2\rho_{\mathfrak{b}})_X Y, Y \rangle$ tenemos

$$\text{Re}\langle (d^2\rho_{\mathfrak{b}})_X Y, Y \rangle = \frac{8}{\|\tilde{v}\|^2} \{ \|\pi(\sqrt{-1}Y_2)\tilde{v}\|^2 \|\tilde{v}\|^2 - \text{Re}\langle \pi(\sqrt{-1}Y_2)\tilde{v}, \tilde{v} \rangle^2 \}.$$

Se sigue de la desigualdad de Cauchy-Schwarz que $\text{Re}\langle (d^2\rho_{\mathfrak{b}})_X Y, Y \rangle \geq 0$ y la igualdad se da si y solamente si $\pi(\sqrt{-1}Y_2)\tilde{v} = t\tilde{v}$ para algún $t \in \mathbb{R}$. Notemos que esta última condición

es equivalente a que $\pi(\sqrt{-1}Y_2)v = tv$ para algún $t \in \mathbb{R}$, pues \mathfrak{t} es abeliana (no olvidemos que estamos denotando por \tilde{v} al vector $\exp(X)v$, en principio tales condiciones no tienen por qué ser equivalentes).

De este análisis, tenemos que nuestro candidato a $\tilde{\mathfrak{b}}$ debería ser el complemento ortogonal de $\mathfrak{h}(v)$ en $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ donde

$$\mathfrak{h}(v) := \{Y \in \sqrt{-1}\mathfrak{t} / \pi(Y)v = tv \text{ para algún } t \in \mathbb{R}\}$$

es decir, tomemos como $\tilde{\mathfrak{b}} = \mathfrak{t} \dot{\oplus} (\sqrt{-1}\mathfrak{t} \dot{\ominus} \mathfrak{h}(v))$. Antes de relacionar a $\mathfrak{m}_{\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}}$ con $\mathfrak{m}_{\tilde{\mathfrak{b}}}$, es necesario hacer la siguiente observación sobre $\mathfrak{h}(v)$. Consideremos la isotropía de v en $\sqrt{-1}\mathfrak{t}$, esto es:

$$(\sqrt{-1}\mathfrak{t})_v = \{Y \in \sqrt{-1}\mathfrak{t} / \pi(Y)v = 0\}$$

Es fácil ver que $(\sqrt{-1}\mathfrak{t})_v$ es un ideal de $\mathfrak{h}(v)$ de codimensión 1 ó 0 (tomar el funcional $\psi : \mathfrak{h}(v) \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi(Y) = \text{Re}\langle \pi(Y)v, v \rangle$). Luego

$$\mathfrak{h}(v) = (\sqrt{-1}\mathfrak{t})_v \tag{23}$$

ó

$$\mathfrak{h}(v) = (\sqrt{-1}\mathfrak{t})_v \dot{\oplus} \mathbb{R}Z \tag{24}$$

donde $Z \in \sqrt{-1}\mathfrak{t}$ es tal que $\pi(Z)v = v$.

Ahora bien, sea $X \in \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$. Notemos que $\mathfrak{m}_{\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}}(\exp(X)v) = \mathfrak{m}_{\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}}(\exp(X')v)$ donde X' es la componente de X en $\tilde{\mathfrak{b}}$. En efecto, descompongamos a X como $X' + X''$ con $X' \in \tilde{\mathfrak{b}}$ y $X'' \in \mathfrak{h}(v)$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_{\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}}(\exp(X)v) &= \mathfrak{m}_{\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}}(\exp(X')\exp(X'')v) \\ &= \mathfrak{m}_{\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}}(t\exp(X')v) \text{ para algún } t \in \mathbb{R} \\ &= \mathfrak{m}_{\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}}(\exp(X')v) \end{aligned}$$

donde hemos usado nuevamente que \mathfrak{t} es abeliana y que $\mathfrak{m}_{\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}}$ es invariante por escalamiento. Un segundo hecho que es fácil notar es que para todo $X \in \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$

$$\mathfrak{m}_{\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}}(\exp(v)) \in \sqrt{-1}\mathfrak{t} \dot{\ominus} (\sqrt{-1}\mathfrak{t})_v \tag{25}$$

Ahora por fin estamos en condiciones de describir $\mathfrak{m}_{\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}}(\mathbb{T}^{\mathbb{C}} \cdot v)$. Hemos visto que $\mathfrak{m}_{\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}}(\exp(X)v) \perp (\sqrt{-1}\mathfrak{t})_v$, luego, es posible que $\mathfrak{m}_{\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}}(\exp(X)v)$ tenga componente en el vector Z dado en la ecuación (24) (cuando se cumpla tal caso). El valor de tal componente siempre es 1:

$$\begin{aligned} \text{Re}\langle \mathfrak{m}_{\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}}(\exp(X)v), Z \rangle &= \frac{1}{\|\exp(X)v\|^2} \text{Re}\langle \pi(Z)\exp(X)v, \exp(X)v \rangle \\ &= \frac{1}{\|\exp(X)v\|^2} \text{Re}\langle \exp(X)\pi(Z)v, \exp(X)v \rangle \\ &= \frac{1}{\|\exp(X)v\|^2} \text{Re}\langle \exp(X)v, \exp(X)v \rangle \\ &= 1. \end{aligned}$$

Recordando que $\mathfrak{m}_{\tilde{\mathfrak{b}}}$ no es más que la proyección de $\mathfrak{m}_{\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}}$ sobre $\tilde{\mathfrak{b}}$ (Proposición 1.2.9 ítem 2), tenemos

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_{\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}}(\exp(X)v) &= \mathfrak{m}_{\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}}(\exp(X')v) \\ &= \text{Proy}_{\tilde{\mathfrak{b}}} \mathfrak{m}_{\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}}(\exp(X')v) + \text{Proy}_{\mathfrak{h}(v)} \mathfrak{m}_{\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}}(\exp(X')v) \\ &= \mathfrak{m}_{\tilde{\mathfrak{b}}}(\exp(X')v) + \text{Proy}_{\mathfrak{h}(v)} \mathfrak{m}_{\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}}(\exp(X')v) \\ &= \begin{cases} \mathfrak{m}_{\tilde{\mathfrak{b}}}(\exp(X') \cdot v), & \text{si } \mathfrak{h}(v) = (\sqrt{-1}\mathfrak{t})_v \\ \mathfrak{m}_{\tilde{\mathfrak{b}}}(\exp(X') \cdot v) + \frac{Z}{\|Z\|^2}, & \text{si } \mathfrak{h}(v) = (\sqrt{-1}\mathfrak{t})_v \dot{\oplus} \mathbb{R}Z \end{cases} \end{aligned} \tag{26}$$

Así pues $m_{\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}}(\mathbb{T}^{\mathbb{C}} \cdot \nu) = m_{\tilde{\mathfrak{b}}}(\tilde{\mathbb{B}} \cdot \nu)$ ó $m_{\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}}(\mathbb{T}^{\mathbb{C}} \cdot \nu) = m_{\tilde{\mathfrak{b}}}(\tilde{\mathbb{B}} \cdot \nu) + \frac{z}{\|z\|^2}$, y como $m_{\tilde{\mathfrak{b}}}(\tilde{\mathbb{B}} \cdot \nu)$ es un conjunto convexo por lo dicho anteriormente ($\rho_{\tilde{\mathfrak{b}}}$ satisface las hipótesis del teorema de Fenchel) entonces, no importa cuál sea el caso, $m_{\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}}(\mathbb{T}^{\mathbb{C}} \cdot \nu)$ es un conjunto convexo.

Para terminar la totalidad de la prueba, es suficiente con probar que $\overline{m_{\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}}(\mathbb{T}^{\mathbb{C}} \cdot \nu)} = \text{CC}(\mathfrak{A}(\nu))$ (en virtud al teorema [Gru, Theorem 2.1.7], tenemos que para todo conjunto convexo Γ de \mathbb{R}^n , $\text{int}(\overline{\Gamma}) = \text{int}(\Gamma)$). Para ver esto, basta con mostrar que cada punto expuesto de $\text{CC}(\mathfrak{A}(\nu))$ está en $\overline{m_{\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}}(\mathbb{T}^{\mathbb{C}} \cdot \nu)}$ (por el Teorema 2.1.4 ítem 3). Sea α_i un punto expuesto $\text{CC}(\mathfrak{A}(\nu))$, así existen $H_i \in \mathfrak{a}$ y $h_i \in \mathbb{R}$ tal que para cada $X \in \text{CC}(\mathfrak{A}(\nu))$, $\langle X, H_i \rangle \geq h_i$ donde la igualdad se da si y solo si $X = \alpha_i$. Usando la fórmula en la ecuación (22) se tiene

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} m_{\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}}(\exp(tH_i) \cdot \nu) = \alpha_i.$$

Luego, de todo lo anterior, dado que $m_{\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}}(\mathbb{T}^{\mathbb{C}} \cdot \nu)$ es un conjunto convexo tal que $\overline{m_{\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}}(\mathbb{T}^{\mathbb{C}} \cdot \nu)} = \text{CC}(\mathfrak{A}(\nu))$, entonces $m_{\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}}(\mathbb{T}^{\mathbb{C}} \cdot \nu) = \text{int}(\text{CC}(\mathfrak{A}(\nu)))$. ■

Invitamos al lector a probar el resultado similar para el caso de grupos abelianos conexos de rango 0 (sin parte compacta); la prueba es totalmente similar a la anterior. En este sentido, nuestra prueba difiere de aquella dada en [HSto, Proposition 3] (vista en el caso particular de las representaciones) pues tal prueba usa fuertemente el respectivo teorema en el caso complejo.

Teorema 2.1.6. Sean $A = (\mathbb{R}_{>0})^n$ grupo abeliano conexo de rango 0 y $\tau : A \rightarrow \text{GL}(V)$ una representación reductiva real de A . Sea $\nu \in \hat{V}$ no nulo y $\nu = \nu_1 + \dots + \nu_s$ su descomposición en vectores pesos como en la ecuación (17). Entonces

$$m_{\mathfrak{g}}(A \cdot \nu) = \text{int}(\text{CC}(\mathfrak{A}(\nu)))$$

Nota 2.1.7. Podemos cerrar esta sección recordando el conocido teorema de convexidad de Atiyah-Guillemin-Sternberg

Teorema 2.1.8. [Ati, Theorem 2] y [GS1, Theorem 5.2] (**Teorema de convexidad de Atiyah-Guillemin-Sternberg**) Sea M una variedad simpléctica conexa compacta sobre la cual un toro T actúa en forma Hamiltoniana con respectiva aplicación momento $\mu : M \rightarrow \mathfrak{t}^*$. Entonces la imagen $\mu(M)$ de μ es un polígono en \mathfrak{t}^* , llamado el T -polígono momento. Mas aún, es igual a la cápsula convexa de la imagen de los puntos fijos de la T -acción.

Es así que el Teorema 2.1.5 no es más que la aplicación del teorema de Atiyah-Guillemin-Sternberg a las representaciones reductivas complejas y sus órbitas. Para el caso real, nos llama poderosamente la atención que dicho resultado es independiente de cualquier referencia al caso complejo y motiva la pregunta ¿es posible desligar la teoría geométrica de invariantes real del caso complejo? Por ejemplo, para probar el Teorema 2.1.6 solo se necesita que el grupo actúe por operadores simétricos. Desarrollar una teoría geométrica de invariantes real para estudiar representaciones de grupos reductivos reales (en el sentido más amplio) usando razonamientos propios de Teoría de Lie, haría mas accesible tal teoría pues el mayor de los inconvenientes que encontramos al razonar desde los trabajos de Heinzner, Schwarz y colaboradores, es la cantidad de prerrequisitos que son necesarios para estudiar tales trabajos.

Para cerrar esta sección, introduzcamos uno de los conceptos principales de la tesis y demos el primer paso para obtener la generalización del criterio de Nikolayevsky.

Definición 2.1.9. Un subespacio W de V es llamado un *espacio nice** si este es un espacio A -invariante y $\mathfrak{m}_{\mathfrak{g}}(w) \in \mathfrak{a}$ para todo $w \in W \setminus \{0\}$.

Nota 2.1.10. Recordemos que en el caso complejo \mathfrak{a} corresponde a $\sqrt{-1}\mathfrak{t}$ con \mathfrak{t} el álgebra de Lie de un toro maximal en U , mientras que en el caso real \mathfrak{a} es una álgebra abeliana maximal contenida en \mathfrak{p} .

Nota 2.1.11. En el caso complejo, si W es un espacio nice, entonces $\mathfrak{m}_{\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}}(w) = \mathfrak{m}_{\widehat{\mathfrak{g}}}(w)$ para todo $w \in W \setminus \{0\}$ pues $T^{\mathbb{C}}$ es compatible con la descomposición de Cartan de \widehat{G} (ver Teorema 1.2.9 item 2). Para el caso real, se tiene $\mathfrak{m}_{\mathfrak{a}}(w) = \mathfrak{m}_{\mathfrak{g}}(w)$ para todo $w \in W \setminus \{0\}$ por la misma razón que en el caso complejo ($A = \exp(\mathfrak{a})$ es un grupo compatible).

Proposición 2.1.12. Sean W un espacio nice y $w \in W \setminus \{0\}$. Si $\text{ccm}(\mathfrak{R}(w)) \in \text{int}(\text{CC}(\mathfrak{R}(w)))$, entonces la órbita de w es distinguida. Más aún, existe un $X \in \mathfrak{a}$ tal que $\exp(X)w$ es un punto crítico de $F_{\widehat{\mathfrak{g}}}$.

Demostración Daremos la prueba para el caso complejo. La respectiva prueba para el caso real es similar al caso complejo. Supongamos que $\text{mcc}(\mathfrak{R}(w)) \in \text{int}(\text{CH}(\mathfrak{R}(w)))$. Por la Proposición 2.1.5 existe $Y \in \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ tal que $\mathfrak{m}_{\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}}(\exp(Y)w) = \text{mcc}(\mathfrak{R}(w))$. Como W es un espacio nice, $\mathfrak{m}_{\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}}(\exp(Y)w) = \mathfrak{m}_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\exp(Y)w)$ y así pues, por la Proposición 1.2.9 item 4, $\exp(Y) \cdot w$ es un punto crítico de $F_{\widehat{\mathfrak{g}}}$; la G -órbita de w es distinguida. Para ver la parte final, descompongamos a Y como $Y = X + X'$ con $X' \in \mathfrak{t}$ y $X \in \sqrt{-1}\mathfrak{t}$. Así $\exp(Y)w = \exp(X')\exp(X)w$ y como $\exp(X') \in U$, entonces $\exp(-X')\exp(Y)w$ también es punto crítico de $F_{\widehat{\mathfrak{g}}}$, y por tanto $\exp(X)w$ es un punto crítico con $X \in \widehat{\mathfrak{a}}$. ■

Notación 2.1.13. Sean w un elemento nice (esto es w está en algún espacio nice W) y consideremos el conjunto ordenado $\mathfrak{R}(w)$. Denotamos por \mathbf{U}_w la *matriz de Gram* de $(\mathfrak{R}(w), \langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle)$, es decir,

$$\mathbf{U}_w(p, q) = \langle \langle \mathfrak{R}(w)_p, \mathfrak{R}(w)_q \rangle \rangle \quad (27)$$

con $1 \leq p, q \leq \#\mathfrak{R}(w)$

Usando el método de multiplicadores de Lagrange, se tienen los siguientes corolarios que pueden ser verificados facilmente.

Corolario 2.1.14. Sea w un elemento nice. Si la ecuación

$$\mathbf{U}_w[x_i] = \lambda[1] \quad (28)$$

tiene una solución $[x_i]$ tal que cada x_i es positiva (solución positiva) y $\sum x_i = 1$, y esto para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces la órbita $G \cdot w$ es una órbita distinguida.

Corolario 2.1.15. Sea w un elemento nice y supongamos que existen $H \in \mathfrak{a}$, $H \neq 0$, y $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, tales que para todo $\alpha \in \mathfrak{R}(w)$, $\langle \langle \alpha, H \rangle \rangle = h$ (esto es, $\mathfrak{R}(w)$ está contenida en el afín generado por (H, h)). Si la ecuación

$$\mathbf{U}_w[x_i] = [1] \quad (29)$$

tiene una solución positiva $[x_i]$, entonces $G \cdot w$ es una órbita distinguida.

*En el contexto de los nilradicales Einstein, esta noción puede encontrarse como *stably Ricci-diagonal*, término que fue introducido por Tracy Payne para aquellas álgebras de Lie que tienen una base tal que cualquier producto interno que mantenga esta base ortogonal tiene tensor de Ricci diagonal; si el álgebra de Lie es nilpotente, la noción de nice es igual a la dada por Payne. En [Jab1] no hay un nombre para la noción de espacio nice pero sin lugar a dudas, en tal trabajo podría llamarse espacio *A-detectable*. Dado que nuestra motivación viene del criterio de la base Nice de Nikolayevsky y el lema [LW1, Lemma 3.9], nosotros preferimos mantener el nombre *nice* para esta definición.

2.2 GENERALIZACIÓN DEL CRITERIO DE NIKOLAYEVSKY

Para obtener el recíproco de la Proposición 2.1.12, usamos los resultados de Jablonski dados en [Jab1], los cuales usan fuertemente las propiedades de los grupos reductivos algebraicos. Es por esto que en la primera parte de esta sección haremos un corto repaso de algunos términos propios de geometría algebraica y grupos algebraicos. A lo largo de esta sección \mathbb{F} puede representar tanto al campo de los números complejos \mathbb{C} como a los números reales \mathbb{R}

2.2.1 Grupos algebraicos

Definición 2.2.1. [OV, Chapter 2, §1, 1°] Sea I un subconjunto del anillo de polinomios sobre \mathbb{F} en n variables; $I \subseteq \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$. El conjunto de todos los ceros comunes de los polinomios en I es llamado *conjunto algebraico* (*complejo* si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ó *real* si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$) y es denotado (usualmente) por $V(I)$,

$$V(I) := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n / p(x_1, \dots, x_n) = 0, \forall p \in I\}.$$

Un resultado clásico y célebre en Geometría algebraica es el llamado *Teorema de la base de Hilbert* (*Hilbertscher Basissatz*) el cual dice que si R es un *anillo Noetheriano* (todos sus ideales son finitamente generados) entonces el anillo de polinomios sobre R en n variables $R[x_1, \dots, x_n]$ también es Noetheriano. Dado que un cuerpo \mathbb{F} es trivialmente Noetheriano, entonces $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ es Noetheriano. Usando este hecho, es muy fácil ver que todo conjunto algebraico de \mathbb{F}^n puede realizarse como el conjunto de los ceros comunes de un conjunto finito de polinomios.

Los conjuntos algebraicos tienen un tipo especial de funciones que permiten que estos se relacionen. Estas funciones reciben el nombre de *regulares* o también *polinomiales*. Nosotros adoptamos el primer nombre aunque advertimos que en geometría algebraica la noción de función regular se usa de una forma mucho más general.

Definición 2.2.2. [OV, Chapter 2, §1, 1°] Sea M un conjunto algebraico de \mathbb{F}^n . Una función $f : M \rightarrow \mathbb{F}$ es llamada *función regular*, si existe $p \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ tal que $f \equiv p|_M$

Notemos que dos polinomios en $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ podrían definir la misma función regular sobre un conjunto algebraico de \mathbb{F}^n . Sea M un conjunto algebraico de \mathbb{F}^n y consideremos el ideal $I(M)$ de $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ dado por todos los polinomios que se anulan en $I(M)$,

$$I(M) = \{p \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n] / p(x_1, \dots, x_n) = 0, \forall (x_1, \dots, x_n) \in M\}.$$

Así pues, el conjunto de las funciones regulares de M es parametrizado por el cociente $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]/I(M)$. Este cociente es llamado la *álgebra de coordenadas* de M y es denotada por $\mathbb{F}[M]$.

Definición 2.2.3. [OV, Chapter 2, §1, 2°] Sean $M \subseteq \mathbb{F}^m$ y $N \subseteq \mathbb{F}^n$ dos conjuntos algebraicos. Una función $\psi : M \rightarrow N$ es llamada un *morfismo regular* (o también, *mapeo regular*), si éste es dado por n funciones regulares de M , es decir, existen p_1, \dots, p_n polinomios en $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_m]$ tales que

$$\psi(x) = (p_1(x), \dots, p_n(x)), \forall x \in M.$$

Es importante resaltar que todo morfismo regular de M en N , $\psi : M \rightarrow N$ induce un homomorfismo entre sus álgebras de coordenadas, $\psi^* : \mathbb{F}[N] \rightarrow \mathbb{F}[M]$ (un *comorfismo*), el cual se define como

$$\psi^*(g)x = g(\psi(x)), \forall g \in \mathbb{F}[N], x \in M.$$

De hecho, se puede mostrar que todo homomorfismo de anillos entre $\mathbb{F}[N]$ y $\mathbb{F}[M]$ es dado por un morfismo regular entre M y N .

La siguiente noción es de suma importancia para el estudio de los grupos algebraicos reales así que es conveniente tenerla muy presente

Definición 2.2.4. [Mum, Chapter II, §4], [Bor, Chapter AG, §12, 12,1] [Spr, Chapter 2, §1, 1.1] Un conjunto algebraico complejo M en \mathbb{C}^n se dice que es *definido sobre \mathbb{R}* (o también, que es un \mathbb{R} -conjunto algebraico), si M puede ser descrito como el conjunto de los ceros comunes de polinomios con coeficientes reales y el conjunto algebraico real $M(\mathbb{R}) := M \cap \mathbb{R}^n$ es llamado *el conjunto de puntos reales* de M .

Sea M un conjunto algebraico complejo definido sobre \mathbb{R} y como arriba, consideremos el ideal $I(M)$ formado por los polinomios que se anulan en M . Denotemos por $I(M)_{\mathbb{R}} := I(M) \cap \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$. Se puede ver que

$$\mathbb{C}[M] = (\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]/I(M)_{\mathbb{R}}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

Definición 2.2.5. [Spr, Chapter 2, §1, 1.2] Sean M, N dos conjuntos algebraicos complejos definidos sobre \mathbb{R} . Un morfismo regular $\phi : M \rightarrow N$ es llamado *definido sobre \mathbb{R}* si las funciones coordenadas de ϕ son funciones regulares con coeficientes en \mathbb{R} .

Consideremos la familia de todos los conjuntos algebraicos de \mathbb{F}^n . Es fácil ver que tal familia determina una topología en \mathbb{F}^n ([OV, Chapter 2, §1, 3°]) la cual recibe el nombre de *topología Zariski*. Esta topología se define considerando a los conjuntos algebraicos como los conjuntos cerrados. Dado que en \mathbb{R}^n y \mathbb{C}^n también podemos considerar la topología usual, entonces las nociones propias de topología consideradas en la topología Zariski suelen ir acompañadas con el nombre *Zariski*, por ejemplo, si un conjunto es cerrado en la topología Zariski, entonces se dice que tal conjunto es *cerrado Zariski*. Esta aclaración es importante hacerla porque trabajaremos simultáneamente con ambas topologías.

Definición 2.2.6. [OV, Chapter 3, §1, 1°] Sea G un grupo el cual también es un conjunto algebraico de \mathbb{F}^n . Decimos que G es un *grupo algebraico* (*complejo* si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ó *Real* si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$) si los mapeos dados por el producto y la inversa del grupo son regulares. Un subgrupo algebraico de un grupo algebraico es un subgrupo el cual es un subconjunto cerrado Zariski.

Así pues, un subgrupo algebraico es un grupo algebraico con respecto a su estructura de conjunto algebraico y la operación de grupo que lo hace subgrupo. Mas aún, la *clausura Zariski* de cualquier subgrupo (abstracto) de un grupo algebraico es un subgrupo algebraico.

Ejemplo 2.2.7. El primer ejemplo por excelencia es el grupo lineal general real o complejo, el cual denotamos por $GL_n(\mathbb{R})$ y respectivamente $GL_n(\mathbb{C})$. Para ver su estructura de conjunto algebraico, consideremos el espacio afín $\mathbb{F}^{n^2} \times \mathbb{F}$ con coordenadas (a_{ij}, t) . $GL_n(\mathbb{F})$ se puede identificar con el conjunto algebraico G definido por la ecuación polinomial en $\mathbb{F}^{n^2} \times \mathbb{F}$

$$\det(a_{ij})t = 1.$$

Así, un punto $x = (a_{ij}, t) \in G$ representa la matriz (a_{ij}) con determinante $\det(a_{ij}) = \frac{1}{t}$. La multiplicación $\cdot : G \times G \rightarrow G$ claramente es una aplicación regular, y la inversa

$$\begin{aligned} \iota : G &\rightarrow G \\ (a_{ij}, t) &\mapsto (b_{ij}, \det(a_{ij})) \end{aligned}$$

donde b_{ij} es el polinomio de $\mathbb{F}^{n^2} \times \mathbb{F}$ dado por $b_{ij} = (-1)^{i+j} t m_{ji}$ con m_{ji} el menor (i, j) de (a_{ij}) , también es regular.

Notemos que las funciones regulares de G son funciones de la forma $f(a_{ij})t^d$ con f un polinomio en las entradas de la matriz (a_{ij}) y $d \in \mathbb{N}$. Dado que $t = \frac{1}{\det(a_{ij})}$, entonces el anillo de coordenadas de G es el anillo de polinomios

$$\mathbb{F}[a_{ij}, \det(a_{ij})^{-1}];$$

cocientes de polinomios en las entradas de la matriz con potencias enteras positivas de la función determinante.

Ejemplo 2.2.8. Los grupos de isometrías de formas bilineales no degeneradas son un ejemplos típicos de grupos algebraicos. Sea $B : \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}$ una forma bilineal sobre \mathbb{F}^n . El grupo de isometrías de B es el grupo

$$O(\mathbb{F}^n, B) := \{g \in GL_n(\mathbb{F}) / B(gv, gw) = B(v, w), \forall v, w \in \mathbb{F}^n\}.$$

Consideremos la matriz J de la forma bilineal B , $J(i, j) := B(e_i, e_j)$, así $B([a_i], [b_j]) = [a_i]^T J [b_j]$. Una matriz g en $GL_n(\mathbb{F})$ pertenece a $O(\mathbb{F}^n, B)$ si y solo si

$$g^T J g = J.$$

Lo que implica que $O(\mathbb{F}^n, B)$ es un subconjunto algebraico de $GL_n(\mathbb{F})$ y en consecuencia, un grupo algebraico.

La conexión entre los grupos algebraicos y la Teoría de Lie, es que estos son grupos de Lie. De hecho, muchos de los grupos reductivos reales que estudiaremos son grupos algebraicos reales.

Teorema 2.2.9. [OV, Theorem 2 en Chapter 3, §1, 1°] *Cualquier grupo algebraico complejo (ó real) es un grupo de Lie complejo (respectivamente real). Asimismo, cualquier subgrupo algebraico de un grupo algebraico complejo o real es un subgrupo de Lie.*

Definición 2.2.10. [OV, Chapter 3, §1, 1°] Un subgrupo algebraico de un grupo general lineal es llamado *grupo lineal algebraico* (complejo o real según el cuerpo de definición).

Siguiendo la definición 2.2.4, tenemos la respectiva noción para grupos algebraicos

Definición 2.2.11. [Bor, Chapter I, §1, 1.1][Spr, Chapter 2, §2, 2.1] Sea \widehat{G} un grupo algebraico complejo, el cual como conjunto algebraico complejo es definido sobre \mathbb{C} , y tal que el producto y la inversa son mapeos definidos sobre \mathbb{C} , entonces \widehat{G} es llamado un *grupo algebraico complejo definido sobre \mathbb{C}* o también \mathbb{C} -grupo algebraico.

De la definición, se sigue que el conjunto de puntos reales de un \mathbb{C} -grupo algebraico es un grupo algebraico real. La siguiente proposición nos habla un poco más sobre los subgrupos de los \mathbb{C} -grupos algebraicos.

Proposición 2.2.12. [Bor, Proposition 1.3 en Chapter I, §1] Sea \widehat{G} un \mathbb{C} -grupo algebraico y H un subgrupo de \widehat{G} . Entonces la clausura Zariski de H en \widehat{G} , \overline{H}^Z es un subgrupo algebraico de \widehat{G} . Si además H es invariante por la conjugación de números complejos en sus coordenadas, entonces \overline{H}^Z es definido sobre \mathbb{R} .

Ejemplo 2.2.13. Entre ejemplos importantes de \mathbb{R} -grupos tenemos a los grupos reductivos complejos. Sea U un grupo de Lie compacto. Es sabido que U admite una representación fiel que lo hace un grupo lineal algebraico real de $GL_n(\mathbb{C})$ y que la complexificación universal $U^{\mathbb{C}}$ de U es la clausura Zariski de U en $GL_n(\mathbb{C})$ (ver, por ejemplo, [GOV, Proposition 2.5 en Chapter 4, §2, 2.5]). Es así que $U^{\mathbb{C}}$ es un \mathbb{R} -grupo algebraico complejo cuyo puntos reales está dado por el compacto maximal U .

Ejemplo 2.2.14. Consideremos un grupo reductivo real $G = \text{Kexp}(\mathfrak{p})$ (como en la definición 1.1.13) con $\widehat{G} = U^{\mathbb{C}}$ el grupo reductivo complejo que “hereda” su estructura a G . Es mostrado en [HSto, Lemma 1], que G se puede definir como reductivo real usando un grupo reductivo complejo \widehat{G}_0 tal que G es Zariski denso en \widehat{G}_0 . Tal $\widehat{G}_0 = U_0^{\mathbb{C}}$ esta dado por U_0 siendo el menor cerrado de U (en la topología usual) tal que contiene a $\exp(\mathfrak{k} + \sqrt{-1}\mathfrak{p})$. Así pues, podemos redefinir la definición de grupo reductivo real tomando un \widehat{G} tal que G es Zariski denso en \widehat{G} .

Definición 2.2.15. [Bor, Chapter I, §1, 1.6] Sea \widehat{G} un grupo algebraico complejo y $\widehat{\tau} : \widehat{G} \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ un homomorfismo de grupos. Decimos que $\widehat{\tau}$ es una *representación racional* de \widehat{G} si $\widehat{\tau}$ es un morfismo regular entre los conjuntos algebraicos \widehat{G} y $GL_n(\mathbb{C})$. Si \widehat{G} es un \mathbb{R} -grupo algebraico, decimos que $\widehat{\tau}$ es *definida sobre \mathbb{R}* si $\widehat{\tau}$ es un morfismo regular definido sobre \mathbb{R} .

En cuanto a los grupos algebraicos reales, es conveniente considerar la siguiente definición que es usada en algunas de nuestras referencias principales ([Jab1], [Jab3])

Definición 2.2.16. Sean \widehat{G} un grupo algebraico complejo y G un grupo algebraico real contenido en los puntos reales de \widehat{G} , y denotemos por \overline{G}^Z la clausura Zariski de G en \widehat{G} . Una representación $\tau : G \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ se dice *racional*, si es la restricción de una representación racional $\widehat{\tau} : \overline{G}^Z \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ la cual es definida sobre \mathbb{R} .

2.2.2 Acciones detectables

A lo largo de esta sección, G denotará un grupo lineal algebraico reductivo y $\tau : G \rightarrow GL(V)$ será una representación racional de G .

Definición 2.2.17. [Jab1, Definition 2.9] Sean H un subgrupo compatible con la descomposición de Cartan de G , $\text{Lie}(H) = \mathfrak{h}$ y W una subvariedad suave H -estable de V . Decimos que la G -acción es *H-detectable a lo largo de W* si $\mathfrak{m}_{\mathfrak{g}}(w) \in \mathfrak{h}$ para $w \in W$.

Nota 2.2.18. Notemos que, W es un espacio nice si y solo si la acción dada por la representación $\tau : G \rightarrow GL(V)$ es A -detectable a lo largo de W .

Teorema 2.2.19. [Jab1, Corollary 3.4] Sea G, H, W, V como arriba y asumamos que W es un conjunto cerrado. Fijemos un $w \in W$, entonces $G \cdot w$ es una órbita distinguida para la G -acción si y solo si $H \cdot w$ es una órbita distinguida para la H -acción.

De este teorema se tiene el recíproco de la Proposición 2.1.12

Proposición 2.2.20. Sean W un espacio nice y $w \in W \setminus \{0\}$ tal que $G \cdot w$ es una órbita distinguida, entonces

$$\text{ccm}(\mathfrak{A}(w)) \in \text{int}(\text{CC}(\mathfrak{A}(w))).$$

Demostración Consideremos el caso complejo; el caso real es similar. Como W es A -invariante, es fácil ver que W también es $T^{\mathbb{C}}$ -invariante. Dado que $G \cdot w$ es distinguida, entonces por el Teorema 2.2.19, $T^{\mathbb{C}} \cdot w$ es una órbita distinguida para la $T^{\mathbb{C}}$ -acción. Así pues existe $\tilde{w} \in T^{\mathbb{C}} \cdot w$

punto crítico de $F_{\mathfrak{t}_C}$. Por el Teorema 1.2.6 ítem 1 se tiene que $\|m_{\mathfrak{t}_C}(\tilde{w})\|^2 \leq \|m_{\mathfrak{t}_C}(w')\|^2$ para todo $w' \in T^C \cdot w$. Se sigue del Teorema 2.1.5 que $m_{\mathfrak{t}_C}(\tilde{w})$ es un vector de norma mínima en el interior de $\mathfrak{R}(w)$ y por un argumento de continuidad, también debe ser un vector de norma mínima para toda la cápsula convexa; por lo cual $\text{ccm}(\mathfrak{R}(w)) \in \text{int}(\text{CC}(\mathfrak{R}(w)))$. ■

De las Proposiciones 2.1.12 y 2.2.20 tenemos uno de los principales resultados de la tesis

Teorema 2.2.21. (Criterio generalizado de la base nice de Nikolayevsky) Sean G un grupo lineal algebraico reductivo y $\tau : G \rightarrow \text{GL}(V)$ una representación racional de G y consideremos un elemento nice w . La órbita $G \cdot w$ es distinguida si y solamente si

$$\text{ccm}(\mathfrak{R}(w)) \in \text{int}(\text{CC}(\mathfrak{R}(w))).$$

En cualquiera de los casos que se de, existe un $X \in \mathfrak{a}$ tal que $\exp(X)w$ es punto crítico de F_g .

Recomendamos hacer una lectura del criterio de Nikolayevsky (ver Teorema 4.1.11) para ver que, en efecto, el anterior teorema es una generalización del mencionado criterio.

Los siguientes corolarios son de utilidad en la práctica

Corolario 2.2.22. Sea w un elemento nice. La órbita $G \cdot w$ es una órbita distinguida si y solamente si la ecuación

$$\mathbf{U}_w[x_i] = \lambda[1], \quad (30)$$

tiene una solución positiva $[x_i]$ con $\sum x_i = 1$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.

Corolario 2.2.23. Sea w un elemento nice y supongamos que existen $H \in \mathfrak{a}$, $H \neq 0$, y $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, tales que para todo $\alpha \in \mathfrak{R}(w)$, $\langle \alpha, H \rangle = h$. La órbita $G \cdot w$ es una órbita distinguida si y solamente si la ecuación

$$\mathbf{U}_w[x_i] = [1], \quad (31)$$

tiene una solución positiva $[x_i]$.

Nota 2.2.24. Creemos que el anterior teorema es válido en el contexto general que venimos planteando; es decir, sin recurrir a alguna hipótesis de tipo algebraico sobre el grupo y la representación. Una prueba de este hecho sería interesante pues forzaría a probar los resultados de Jablonski en tal contexto y los cuales consideramos muy importantes para el estudio de las órbitas distinguidas.

2.3 CÓMO SABER SI SU A-ESPACIO ES NICE

Ya vimos que, para los elementos nice, es muy fácil saber si su órbita es distinguida. Esta sección está destinada a caracterizar los espacios nice de la forma más simple posible para tener herramientas que se puedan implementar en la práctica. Nuestra motivación en esta sección, son los resultados dados en [LW2].

En este punto retornamos al nivel de generalidad que veníamos planteando sobre los grupos reductivos y sus representaciones (no es necesaria ninguna hipótesis adicional como en la sección anterior). De ahora en más, W representa un espacio A -invariante y por $\Delta(W)$ denotaremos los pesos de la descomposición de W en espacios pesos (como en las descomposiciones (10) y (17)). Esto es $\Delta(W)$ es un subconjunto de \mathfrak{a} tal que

$$W = \bigoplus_{\alpha \in \Delta(W)} W_{\alpha}, \quad (32)$$

donde

$$W_\alpha = \{w \in W / \pi(X)w = \langle\langle X, \alpha \rangle\rangle w, \forall X \in \mathfrak{a}\}. \quad (33)$$

Nota 2.3.1. Dado que $\pi|_{\mathfrak{a}} : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ es una representación completamente reducible de \mathfrak{a} , tenemos que $\Delta(W)$ es un subconjunto de $\Delta(V)$ y cada W_{α_i} es un subespacio de algún V_j . Por esta razón, no hay problema en considerar el conjunto $\mathfrak{R}(w)$ con respecto a la descomposición (32) para todo $w \in W$; no se está cayendo en abuso de notación.

Lema 2.3.2. Sean $\lambda \in \Delta(\mathfrak{g})$, $Y \in \mathfrak{g}_\lambda$, $\alpha_i \in \Delta(W)$ y $w_i \in W_{\alpha_i}$ tales que $\pi(Y)w_i \neq 0$, entonces $\pi(Y)w_i$ es un vector propio simultáneo para la familia $\{\pi(X)\}_{X \in \mathfrak{a}}$. Más aún, si $\text{Proj}_W \pi(Y)w_i$ es diferente de cero, entonces $\text{Proj}_W \pi(Y)w_i$ es un vector peso correspondiente al peso $\lambda + \alpha_i$, y en consecuencia, $\lambda + \alpha_i = \alpha_j$ para algún $\alpha_j \in \Delta(W)$ con $\alpha_i \neq \alpha_j$.

La prueba del lema es similar a Proposición 1.1.10 ítem 8 o Proposición 1.1.15 ítem 9.

Corolario 2.3.3. Fijemos un espacio peso W_{α_i} de la descomposición (32). W_i es un espacio nice donde todos sus puntos son puntos críticos de $F_{\mathfrak{g}}$ con $m_{\mathfrak{g}}(w_i) = \alpha_i$ para todo $w_i \in W_{\alpha_i}$.

Demostración Debemos probar que $m_{\mathfrak{g}}(w_i) \in \mathfrak{a}$. Por la definición de la aplicación momento y la descomposición en espacios raíces de \mathfrak{g} (ecuaciones 7 y 15), esto es equivalente a ver $\langle \pi(Y)w_i, w_i \rangle = 0$ para todo $\lambda \in \Delta(\mathfrak{g})$ y $Y \in \mathfrak{g}_\lambda$.

Sea $w = \text{Proj}_W \pi(Y)w_i$, así $\langle \pi(Y)w_i, w_i \rangle = \langle w, w_i \rangle$. Si $w = 0$, entonces no hay nada que probar. En otro caso, por el Lema previo, w es un vector peso de peso $\lambda + \alpha_i$. Cómo $\lambda \neq 0$, $\lambda + \alpha_i \neq \alpha_i$ lo cual da que $w \perp w_i$.

De la Ecuación (22), tenemos que $m_{\mathfrak{g}}(w_i) = \alpha_i$ y así $\pi(m_{\mathfrak{g}}(w_i))w_i = \pi(\alpha_i)w_i = \langle\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle\rangle w_i$; w_i es un punto crítico de $F_{\mathfrak{g}}$ ■

Lema 2.3.4. Supongamos que para aquellos $\alpha_i, \alpha_j \in \Delta(W)$ tales que $\alpha_j - \alpha_i \in \Delta(\mathfrak{g})$ se satisface $\text{Proj}_W \pi(X)w_i = 0$ con cualquier $X \in \mathfrak{g}_\lambda$ y $w_i \in W_{\alpha_i}$ donde $\lambda = \alpha_j - \alpha_i$. Entonces,

$$\langle \pi(Y)w_i, w_j \rangle = 0 \quad (34)$$

para cualquier $\lambda \in \Delta(\mathfrak{g})$, $Y \in \mathfrak{g}_\lambda$, $\alpha_i, \alpha_j \in \Delta(W)$, $w_i \in W_{\alpha_i}$ y $w_j \in W_{\alpha_j}$.

Demostración Razonemos por el absurdo, así podemos encontrar $\lambda \in \Delta(\mathfrak{g})$, $Y \in \mathfrak{g}_\lambda$, $\alpha_i, \alpha_j \in \Delta(W)$, $w_i \in W_{\alpha_i}$ y $w_j \in W_{\alpha_j}$ tales que $\langle \pi(Y)w_i, w_j \rangle \neq 0$. Esto fuerza $\text{Proj}_W \pi(Y)w_i \neq 0$ y así del Lema 2.3.2, $\text{Proj}_W \pi(Y)w_i \neq 0$ es un vector peso de peso $\lambda + \alpha_i = \alpha_j$. Esto da $\alpha_j - \alpha_i \in \Delta(\mathfrak{g})$ y por hipótesis $\text{Proj}_W \pi(Y)w_i = 0$; esto es una contradicción. ■

Teorema 2.3.5. Sea W subespacio A-invariante de V . W es nice si y solo si para cualquier $\alpha_i, \alpha_j \in \Delta(W)$ tales que $\alpha_j - \alpha_i \in \Delta(\mathfrak{g})$ se satisface $\text{Proj}_W \pi(Y)w_i = 0$ con cualquier $Y \in \mathfrak{g}_\lambda$ y $w_i \in W_{\alpha_i}$ donde $\lambda = \alpha_j - \alpha_i$.

Demostración Supongamos que W es nice y sean $\alpha_i, \alpha_j \in \Delta(W)$ tales que $\alpha_j - \alpha_i \in \Delta(\mathfrak{g})$, digamos $\alpha_j - \alpha_i = \lambda$ con $\lambda \in \Delta(\mathfrak{g})$. Debemos probar que $\text{Proj}_W \pi(Y)w_i = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{g}_\lambda$ y $w_i \in W_{\alpha_i}$. Como $\text{Proj}_W \pi(Y)w_i \in W_{\alpha_j}$ (del Lema 2.3.2), es suficiente probar

$$\langle \text{Proj}_W \pi(Y)w_i, w_j \rangle = 0, \forall w_j \in W_{\alpha_j}. \quad (35)$$

Consideremos un $w_j \in W_{\alpha_j}$ y hagamos $w = w_i + w_j$. Como W es nice, $m_{\mathfrak{g}}(w) \in \mathfrak{a}$ así que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle m_{\mathfrak{g}}(w), Y \rangle \\ &= \langle \pi(Y)(w_i + w_j), w_i + w_j \rangle \\ &= \langle \pi(Y)w_i, w_i \rangle + \langle \pi(Y)w_i, w_j \rangle + \langle \pi(Y)w_j, w_i \rangle + \langle \pi(Y)w_j, w_j \rangle \\ &= \langle \pi(Y)w_i, w_j \rangle + \langle \pi(Y)w_j, w_i \rangle \end{aligned}$$

donde hemos usado que $\langle \pi(Y)w_i, w_i \rangle = \langle \pi(Y)w_j, w_j \rangle = 0$ por el Corolario 2.3.3.

Note que $\langle \pi(Y)w_j, w_i \rangle = 0$. En efecto. Si suponemos lo contrario; $\langle \pi(Y)w_j, w_i \rangle \neq 0$, como en la prueba del Lema 2.3.4, tenemos que $\text{Proj}_W \pi(Y)w_j$ es un vector peso de peso $\lambda + \alpha_j = \alpha_i$. Pero, $\lambda + \alpha_i = \alpha_j$ pues $\alpha_j - \alpha_i = \lambda$, así tenemos una contradicción ya que $\lambda \neq 0$.

De acuerdo a lo anterior, $0 = \langle \pi(Y)w_i, w_j \rangle = \langle \text{Proj}_W \pi(Y)w_i, w_j \rangle$

Ahora procedemos a probar la condición necesaria. Sea $w \in W$, $w = \sum w_i$ y sea $Y \in \mathfrak{g}_\lambda$ con $\lambda \in \Delta(\mathfrak{g})$. Debemos ver que $\langle m_{\mathfrak{g}}(w), Y \rangle = 0$

$$\begin{aligned} \langle m_{\mathfrak{g}}(w), Y \rangle &= \frac{1}{\|w\|^2} \langle \pi(Y)w, w \rangle \\ &= \frac{1}{\|w\|^2} \sum_{i,j} \langle \pi(Y)w_i, w_j \rangle. \end{aligned}$$

Del Lema 2.3.4, se sigue la prueba. ■

Por la θ -invariancia de $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$ (1.1.9 ítem 6 y 1.1.15 ítem 3) y del hecho que $\theta(\mathfrak{g}_\lambda) = \mathfrak{g}_{-\lambda}$ para cada $\lambda \in \Delta(\mathfrak{g})$ tenemos el siguiente corolario

Corolario 2.3.6. *Sea W un subespacio A -invariante de V . W es nice si y solo si para todo $\lambda \in \Delta(\mathfrak{g})^+$ y $\alpha_i, \alpha_j \in \Delta(W)$*

$$\pi(\mathfrak{g}_\lambda)(W_{\alpha_i}) \perp W_{\alpha_j}.$$

Un obvio pero muy útil corolario es el siguiente

Corolario 2.3.7. *Sea W un subespacio A -invariante de V . Si para todo α_i y α_j en $\Delta(W)$, $\alpha_i - \alpha_j \notin \Delta(\mathfrak{g})^+$ entonces W es nice.*

Y una interesante consecuencia de estos resultados es

Corolario 2.3.8. *Sea α_i y α_j tales que $W = W_{\alpha_i} \dot{\oplus} W_{\alpha_j}$ es un espacio nice. Entonces $\text{mcc}(\{\alpha_i, \alpha_j\})$ define un estrato.*

Demostración Si $\text{ccm}(\{\alpha_i, \alpha_j\})$ es α_i ó α_j , tenemos del Corolario 2.3.3 la conclusión para este caso. En el otro caso, $\text{ccm}(\{\alpha_i, \alpha_j\})$ está en el interior de $\text{CC}\{\alpha_i, \alpha_j\}$. De los Teoremas 2.1.12 y 1.2.6 ítem 2 tenemos la prueba para este caso. ■

Nota 2.3.9. Notemos que el anterior corolario se puede generalizar en el sentido que el vector de mínima norma de la cápsula convexa de los pesos de un espacio nice determinan un estrato.

3.1 CONJUNTO ESTRATIFICANTE DE LAS FORMAS TERNARIAS

En este capítulo, $G := GL_n(\mathbb{R})$, un compacto maximal en G es $O(n)$, $\mathfrak{g} := \text{Lie}(G) = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) = \mathfrak{so}(n) \oplus \text{sym}(n)$ donde $\text{sym}(n)$ es el espacio vectorial de las matrices simétricas y $\mathfrak{k} := \mathfrak{so}(n)$. El producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno usual de \mathfrak{g} ; es decir $\langle X, Y \rangle = \text{tr}(XY^T)$ para todo X, Y en \mathfrak{g} . Una subálgebra abeliana maximal en \mathfrak{p} es $\mathfrak{a} = \{(a_1 \dots a_n) := \text{Diag}(a_1 \dots a_n) / a_i \in \mathbb{R}\}$ y una cámara de Weyl es el conjunto $\mathfrak{a}^+ = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathfrak{a} / a_1 < \dots < a_n\}$. La descomposición en espacio de raíces restringidas de \mathfrak{g} es dada por

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \bigoplus_{i \neq j}^{\perp} \mathbb{R}E_{ij}, \quad (36)$$

con $\Delta(\mathfrak{g}) = \{\lambda_{ij} := E_{ii} - E_{jj} / i \neq j\}$ ($\{E_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq n}$ es la base canónica de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$).

$V := \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]_d$ es el espacio vectorial de todos los polinomios homogéneos de grado d en n variables (*formas n -arias de grado d*) y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno de V tal que los monomios son ortogonales y $\|x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n}\|^2 = d_1! \dots d_n!$. Los resultados de esta sección se pueden llevar al caso complejo sin dificultad.

La acción de G sobre V es dado por cambio lineal de variables, esto es, dado $g \in G$ y $p \in V$,

$$g \cdot p(x_1, \dots, x_n) = p \left(g^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right). \quad (37)$$

Se ve fácilmente que

$$\pi(E_{ij})p = \frac{d}{dt} \big|_0 p(e^{-tE_{ij}} \bullet) = -x_j \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad (38)$$

para todo $p \in V$ y que la base de vectores pesos de V son los monomios, pues

$$\pi(Y)x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n} = - \left(\sum_{i=1}^n y_i d_i \right) x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n},$$

para todo $Y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathfrak{a}$. En consecuencia

$$\Delta(V) = \{\alpha = -(d_1, \dots, d_n) \in \mathfrak{a} / \sum d_i = d\}.$$

De ahora en más, dado $\alpha \in \Delta(V)$, digamos $\alpha = -(d_1, \dots, d_n)$ con $\sum d_i = d$, denotaremos por x^α el monomio $x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n}$ (x en letra minúscula y en negrita).

Nota 3.1.1. Como la matriz identidad, Id , la cual está en \mathfrak{a} , actúa como $\pi(\text{Id})p = -dp$ para todo $p \in V$ (**Teorema de funciones homogéneas de Euler**), tenemos por el Teorema 1.2.9 ítem 3 que los puntos críticos de $F_{\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})}$ y $F_{\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})}$ son los mismos. Mas aún, la estratificación para la acción de $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ sobre V es la misma que aquella correspondiente a la acción de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ (salvo una traslación entre los conjuntos estratificantes \mathcal{B}' 's).

Ahora aplicaremos los resultados previos para obtener nuevos resultados sobre las formas ternarias ($n = 3$) de cualquier grado. El caso $n = 2$ fue estudiado por Ness en [Nes, Lemma 10.4], donde prueba que las órbitas distinguidas en el cono nulo por acción de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ corresponden a las órbitas de los monomios.

Primero, observemos que los pesos $\Delta(V)$ están en el triángulo equilátero con vértices $-(d, 0, 0)$, $-(0, d, 0)$ y $-(0, 0, d)$. Así pues, se sigue que si $\Phi \subseteq \Delta(V)$ entonces $\text{CC}(\Phi)$ está contenida en tal triángulo. Más aún, es obvio que $\beta = \text{ccm}(\Phi)$ si y solo si β es el único vector de $\text{CC}(\Phi)$ más cercano al baricentro del triángulo. De esta observación tenemos que, para cualquier subconjunto Φ de $\Delta(V)$, la mínima combinación convexa de $\text{CC}(\Phi)$ tiene dos opciones: es igual a $-(\frac{d}{3}, \frac{d}{3}, \frac{d}{3})$ ó existen α_i y α_j en Φ tales que $\text{ccm}(\Phi) = \text{ccm}(\{\alpha_i, \alpha_j\})$. Permítanos denotar por β_0 el baricentro del mencionado triángulo; $\beta_0 = -(\frac{d}{3}, \frac{d}{3}, \frac{d}{3})$. Notemos que β_0 también se puede realizar como la mínima combinación convexa de dos pesos:

$$\beta_0 = \text{ccm}(\{\alpha_i, \alpha_j\}) = \begin{cases} \alpha_i = (k, k, 0), \alpha_j = (0, 0, 2k) & \text{si } d = 2k \\ \alpha_i = (k, k, 1), \alpha_j = (0, 0, 2k + 1) & \text{si } d = 2k + 1 \end{cases}.$$

Mejor aún, en cualquiera de los casos, $W = \mathbb{R}\mathbf{x}^{\alpha_i} \dot{\oplus} \mathbb{R}\mathbf{x}^{\alpha_j}$ es un espacio nice. Mostraremos que esto también se da para todo β tal que su estrato \mathcal{S}_β es no vacío.

Lema 3.1.2. *Sea α_i, α_j en $\Delta(V)$ y $W = \mathbb{R}\mathbf{x}^{\alpha_i} \dot{\oplus} \mathbb{R}\mathbf{x}^{\alpha_j}$. W es un espacio nice si y solo si $\alpha_j - \alpha_i \notin \Delta(\mathfrak{g})$*

Demostración Del Corolario 2.3.7, sólo tenemos que probar la condición necesaria. Sea W un espacio nice y razonando por el absurdo, supongamos que $\alpha_j - \alpha_i \in \Delta(\mathfrak{g})$. Sea $\alpha_i = -(m_1, m_2, m_3)$ y $\alpha_j = -(n_1, n_2, n_3)$ y sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $\alpha_j - \alpha_i = \lambda_{12} = E_{11} - E_{22} = (1, -1, 0)$. Así, $m_1 = 1 + n_1$, $m_2 = n_2 - 1$ y $m_3 = n_3$. Sea $Y = E_{12}$, $Y \in \mathfrak{g}_{\lambda_{12}}$

$$\begin{aligned} \pi(Y)\mathbf{x}^{\alpha_i} &= \pi(E_{12})x^{1+n_1}y^{n_2-1}z^{n_3} \\ &= (1+n_1)x^{n_1}y^{n_2}z^{n_3} \\ &= (1+n_1)\mathbf{x}^{\alpha_j} \end{aligned}$$

Por tanto, $\text{Proj}_W \pi(Y)\mathbf{x}^{\alpha_j} \neq 0$, lo cual contradice nuestra caracterización de espacio nice (Teorema 4.1.9). ■

Lema 3.1.3. *Sea $\beta \in \mathfrak{a}$ tal que $\beta \notin \Delta(V)$ y $\mathcal{S}_\beta \neq \emptyset$, entonces existe α_i y α_j en $\Delta(V)$ tal que $W = \mathbb{R}\mathbf{x}^{\alpha_i} \dot{\oplus} \mathbb{R}\mathbf{x}^{\alpha_j}$ es un espacio nice y $\beta = \text{ccm}(\{\alpha_i, \alpha_j\})$ y así existe un binomio $q \in W$ tal que q es un punto crítico de $F_{\mathfrak{g}}$ y $q \in \mathcal{S}_\beta$*

Demostración Por lo observado anteriormente, sabemos que β se puede realizar como la combinación convexa de dos pesos; existen $\tilde{\alpha}_i$ y $\tilde{\alpha}_j$ en $\Delta(V)$ tal que $\beta = \text{ccm}(\{\tilde{\alpha}_i, \tilde{\alpha}_j\})$. Si $\tilde{\alpha}_i$ y $\tilde{\alpha}_j$ satisfacen la conclusión del lema, entonces no hay nada que probar. En otro caso, por el Lema anterior, $\tilde{\alpha}_j - \tilde{\alpha}_i \in \Delta(\mathfrak{g})$, digamos $\tilde{\alpha}_j - \tilde{\alpha}_i = (1, -1, 0)$; esta suposición no involucra pérdida de generalidad. Como en el previo lema, $\tilde{\alpha}_i = -(1+n_1, n_2-1, n_3)$ y $\tilde{\alpha}_j = -(n_1, n_2, n_3)$. Es fácil ver que $\alpha_i = -(0, n_1+n_2, n_3)$ y $\alpha_j = -(n_1+n_2, 0, n_3)$ están en $\text{Af}(\{\tilde{\alpha}_i, \tilde{\alpha}_j\})$, y dado que $\beta \in \text{int}(\text{CC}(\{\tilde{\alpha}_i, \tilde{\alpha}_j\}))$, entonces $\beta = \text{ccm}(\{\alpha_i, \alpha_j\})$. Así pues, el par α_i y α_j prueba la parte de la existencia, porque se debe cumplir que $n_1 + n_2 > 1$; de lo contrario, $\beta = -(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, d-1)$ y $\mathcal{S}_\beta = \emptyset$. ■

Lema 3.1.4. Sea $\beta = -(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, d-1)$ (ó $-(\frac{1}{2}, d-1, \frac{1}{2}), -(d-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$) entonces \mathcal{S}_β no es un estrato.

Demostración Es suficiente para nuestro propósito mostrar que \mathcal{S}_β no tiene puntos críticos de F_g ; debemos probar que no existe un $q \in V$ tal que $m_g(q) = \beta$ y $\pi(\beta)q = \|\beta\|^2 q$. Si $q = \sum_{\alpha \in \Delta(V)} a_\alpha x^\alpha$, entonces $\pi(\beta)q = \|\beta\|^2 q$ si y solo si $q \in \mathbb{R}x^{\alpha_{i_1}} \oplus \dots \oplus \mathbb{R}x^{\alpha_{i_s}}$ con $\langle \alpha_{i_j}, \beta \rangle = \|\beta\|^2$; esto es, α_{i_j} 's están en el espacio afín

$$\Omega = \{X \in \mathfrak{a} / \langle X, \beta \rangle = \|\beta\|^2\}. \quad (39)$$

Como Ω intercepta el triángulo equilátero en un espacio afín de dimensión 1, el cual tiene sólo dos pesos de $\Delta(V)$; éstos son $\alpha_i = (1, 0, d-1)$ y $\alpha_j = (0, 1, d-1)$. Así pues, un tal q es de la forma $axz^{d-1} + byz^{d-1}$. Se ve fácilmente que q está en la órbita de $p = cxz^{d-1}$ y como $p \in \mathcal{S}_{\beta'}$ con $\beta' = -(1, 0, d-1)$, se sigue que \mathcal{S}_β es vacío por definición de estrato. ■

Los lemas anteriores prueban nuestro resultado principal de esta sección

Teorema 3.1.5. Sea \mathcal{B} el conjunto estratificante para la acción de $GL_n(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}[x, y, z]_d$. Entonces

$$\mathcal{B} = \{\beta = \text{ccm}(\{\alpha_i, \alpha_j\}) / \alpha_i, \alpha_j \in \Delta(V) \text{ con } \alpha_j - \alpha_i \notin \Delta(\mathfrak{g})\} \cap \bar{\mathfrak{a}}^+ \quad (40)$$

3.2 FORMAS TERNARIAS CUÁRTICAS REALES Y COMPLEJAS

Aplicaremos el teorema anterior para estudiar la estratificación en las formas ternarias cuárticas reales (el caso complejo es más sencillo y se realiza de forma análoga).

Los resultados de la sección anterior muestran que es fácil encontrar el conjunto \mathcal{B} pero el problema de encontrar los puntos críticos de F_g en cada estrato sigue siendo muy difícil! Tan solo encontrar los puntos críticos de F_g en \mathcal{S}_{β_0} (recuerde que $\beta_0 = -(\frac{d}{3}, \frac{d}{3}, \frac{d}{3})$) nos lleva a la clasificación de las órbitas cerradas en V por acción de $SL_3(\mathbb{R})$. Ahora, nosotros exploramos tal problema en el caso de las ternarias cuárticas ($n = 3$ y $d = 4$, Figura 3). En el triángulo de la Figura 3, los puntos azules representan al conjunto de pesos y los β 's son las mínimas combinaciones convexas de los pesos en $\bar{\mathfrak{a}}^+$. Usando el Teorema 3.1.5, el conjunto \mathcal{B} se encuentra por cálculo directo. Para encontrar las órbitas distinguidas, tomamos $\beta \in \mathcal{B}$. Las órbitas distinguidas de tipo β están dadas por los puntos críticos p que satisfacen $\pi(\beta)p = \|\beta\|^2 p$ y $m_{g|_3(\mathbb{R})}(p) = \beta$; así pues, calculamos el subespacio Z_β de V dado por

$$Z_\beta := \left\{ p = \sum_{\alpha \in \Delta(V)} a_\alpha x^\alpha / \langle \alpha, \beta \rangle = \|\beta\|^2 \text{ con } a_\alpha \neq 0 \right\}. \quad (41)$$

Este subespacio está asociado al espacio afín

$$\Omega(\beta) = \{X \in \mathfrak{a} / \langle X, \beta \rangle = \|\beta\|^2\},$$

y es así que debemos encontrar los pesos en la intersección de $\Omega(\beta)$ con el triángulo equilátero (la cual es un conjunto convexo de dimensión k con $0 \leq k \leq 2$). Por último, resolvemos el problema de determinar el conjunto

$$\{p \in Z_\beta / m_{g|_n(\mathbb{R})}(p) = \beta \text{ con } \|p\| = 1\}, \quad (42)$$

donde, recordemos que la aplicación momento para la acción de $GL_n(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]_d$ está dada por

$$m_{g|_n(\mathbb{R})}(p) = \frac{-1}{\|p\|^2} \left(\langle x_j \frac{\partial p}{\partial x_i}, p \rangle \right), \quad \forall p \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]_d \setminus \{0\}.$$

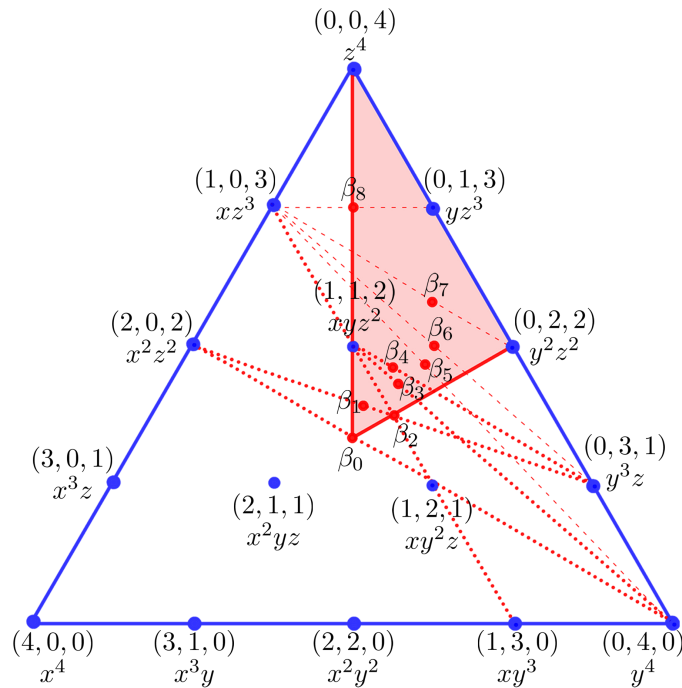


Figura 3: Triángulo de pesos de las ternarias cuárticas

El caso β_0 , como dijimos antes, corresponde a los puntos críticos en \mathcal{S}_{β_0} ; las órbitas cerradas por la acción de $SL_3(\mathbb{R})$ y los cuales son llamados puntos críticos minimales (son mínimos globales de F_g).

En la Tabla 1, la tercera columna muestra la forma que debe tener el punto crítico según el estrato dado en la columna tipo. Para $\beta_2 = (1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, un punto crítico debe ser de la forma $p = x(az^3 + byz^2 + cy^2z + dy^3)$. En este caso, es fácil ver que p es punto crítico si y solo si la forma binaria de grado 3, $\frac{p}{x} = az^3 + byz^2 + cy^2z + dy^3$ tiene órbita cerrada por la acción de $SL_2(\mathbb{R})$ (esto se hace al igualar la aplicación momento de p con β_2). Lo mismo sucede para los candidatos a puntos críticos de tipo $(1, 1, 2)$ y $(0, 2, 2)$. En el primer caso, un punto crítico debe ser de la forma $q = z^2(ax^2 + bxy + cy^2)$ y es así que se debe cumplir que la forma binaria cuadrática $\frac{q}{z^2} = ax^2 + bxy + cy^2$ debe tener su $SL_2(\mathbb{R})$ -órbita cerrada. En el último caso tenemos directamente una forma binaria cuártica, que al igual de los casos ya mencionados, debe tener su $SL_2(\mathbb{R})$ -órbita cerrada. En esta situación, utilizamos las conocidas formas canónicas para las formas binarias de grado pequeño (ver por ejemplo, [Gur, Chapter V: 22.4, 23.2, §25 Exercises 13 y 14] o [Olv, Pag. 9, Pag. 28, Pag.30-Exercise 2.25]); disponiendo de tal clasificación, es fácil ver quiénes tienen su $SL_2(\mathbb{R})$ órbita cerrada. Para comodidad del lector, en las Tablas 2, 3 y 4 recordamos las formas canónicas para las formas binarias reales y complejas de grado 4,3 y 2.

En el resto de los casos tenemos que los puntos críticos están dados por *binomios nice* ó un vector peso; en estos casos es muy simple encontrar todos los puntos críticos por cálculo explícito del conjunto en la ecuación (42).

Teorema 3.2.1. *La clasificación de las órbitas distinguidas en el cono nulo de $\mathbb{R}[x, y, z]_4$ para la acción natural de $SL_3(\mathbb{R})$ está dada por la Tabla 1.*

Nota 3.2.2. Si bien, aunque nuestros resultados no alcanzan a clasificar las órbitas cerradas, con éstos podemos dar familias de órbitas cerradas. Por ejemplo, consideremos una familia

Nt.	Tipo	Punto Crítico	
β_0	$(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$	$\sum_{\alpha \in \Delta(V)} a_\alpha x^\alpha$	minimal
β_1	$(\frac{8}{7}, \frac{9}{7}, \frac{11}{7})$	$ax^2z^2 + by^3z$	$a = \pm\sqrt{\frac{1}{7}}, b = \sqrt{\frac{1}{14}}$
β_2	$(1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})$	$x(az^3 + bz^2y + czy^2 + dy^3)$	$x[y^3 + yz^2]$
			$x[y^3 - yz^2]$
β_3	$(\frac{6}{7}, \frac{10}{7}, \frac{12}{7})$	$axyz^2 + by^4$	$a = \sqrt{\frac{3}{7}}, b = \pm\sqrt{\frac{1}{168}}$
β_4	$(\frac{5}{6}, \frac{8}{6}, \frac{11}{6})$	$axyz^2 + by^3z$	$a = \sqrt{\frac{5}{12}}, b = \sqrt{\frac{1}{36}}$
α_{xyz^2}	$(1, 1, 2)$	$z^2(ax^2 + bxy + cy^2)$	$z^2[x^2 + y^2]$
			$-z^2[x^2 + y^2]$
			$z^2[x^2 - y^2]$
β_5	$(\frac{8}{13}, \frac{20}{13}, \frac{24}{13})$	$axz^3 + by^4$	$a = \sqrt{\frac{4}{39}}, b = \pm\sqrt{\frac{5}{312}}$
β_6	$(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2)$	$axz^3 + by^3z$	$a = \sqrt{\frac{1}{12}}, b = \sqrt{\frac{1}{12}}$
β_7	$(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3})$	$axz^3 + by^2z^2$	$a = \sqrt{\frac{1}{18}}, b = \pm\sqrt{\frac{1}{6}}$
$\alpha_{y^2z^2}$	$(0, 2, 2)$	$\sum_{i=0}^4 a_i y^{4-i} z^i$	$y^4 + 2ty^2z^2 + z^4$ ($t \in \mathbb{R}$)
			$-[y^4 + 2ty^2z^2 + z^4]$ ($-1 \leq t$)
			$y^4 + 2ty^2z^2 - z^4$ ($t \in \mathbb{R}$)
β_8	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3)$	$axz^3 + byz^3$	vacío
α_{yz^3}	$(0, 1, 3)$	ayz^3	$a = \sqrt{\frac{1}{6}}$
α_{z^4}	$(0, 0, 4)$	az^4	$a = \pm\sqrt{\frac{1}{24}}$

Tabla 1: Clasificación de las órbitas distinguidas no minimales en $\mathbb{R}[x, y, z]_4$ por acción de $GL_3(\mathbb{R})$

maximal de pesos que no sean *vecinos* entre ellos (por *vecinos* queremos definir aquellos pares de pesos cuya resta está en las raíces de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$) y cuya cápsula convexa contenga el baricentro. Por el Corolario 2.3.7 el espacio generado por tal familia es Nice y un polinomio cuyo conjunto de pesos relacionado sea tal familia debe tener la órbita cerrada por acción de $SL_n(\mathbb{R})$ (por la Proposición 2.1.12 y Teorema 1.2.1). Por ejemplo, los polinomios de la forma $p_{a,\dots,f}(x, y, z) = ax^4 + by^4 + cz^4 + dx^2y^2 + ex^2z^2 + fy^2z^2$ con coeficientes no nulos, deben tener su $SL_3(\mathbb{R})$ -órbita cerrada. En esta familia de polinomios podemos encontrar la siguiente familia de polinomios minimales no isomorfos entre sí

$$F(d, e, f) := \left\{ p_{a,\dots,f}(x, y, z) / \begin{array}{l} d \leq e \leq f, d^2 + e^2, d^2 + f^2, e^2 + f^2 \leq \frac{1}{6} \\ a = -\frac{1}{2}\sqrt{2 - 12(d^2 + e^2)}, b = -\frac{1}{2}\sqrt{2 - 12(d^2 + f^2)}, \\ c = -\frac{1}{2}\sqrt{2 - 12(e^2 + f^2)} \end{array} \right\}.$$

La afirmación es fácil de probar usando el Teorema 1.2.3 y el *laplaciano*; el cual es un $O(3)$ -covariante (si $p = k \cdot q$ con $k \in O(3)$ entonces $L(p) = k \cdot L(q)$), así que omitimos la prueba.

Formas Canónicas			
Formas Binarias Cuárticas			
Tipo	Sobre \mathbb{C}	Tipo	Sobre \mathbb{R}
I	$x^4 + 2tx^2y^2 + y^4$ ($t \neq 1$)	a.	$x^4 + 2tx^2y^2 + y^4$ ($-1 < t \neq 1$)
		b.	$-[x^4 + 2tx^2y^2 + y^4]$ ($-1 < t \neq 1$)
		c.	$x^4 + 2tx^2y^2 - y^4$ ($t \in \mathbb{R}$)
		d.	$x^4 + 2tx^2y^2 + y^4$ ($-1 > t$)
II	$x^2y^2 + y^4$	a.	$x^2y^2 + y^4$
		b.	$-[x^2y^2 + y^4]$
		c.	$x^2y^2 - y^4$
		d.	$-[x^2y^2 - y^4]$
III	x^2y^2	a.	x^2y^2
		b.	$-[x^2y^2]$
		c.	$x^4 + 2x^2y^2 + y^4$
		d.	$-[x^4 + 2x^2y^2 + y^4]$
IV	x^3y	a.	x^3y
V	x^4	a.	x^4
		b.	$-x^4$
VI	0	a.	0

Tabla 2: Formas canónicas para las formas binarias cuárticas

Formas Canónicas Formas Binarias Cúbicas			
Tipo	Sobre C	Tipo	Sobre R
I	$y^3 + yx^2$	a.	$y^3 + yx^2$
		b.	$y^3 - yx^2$
II	y^2x	a.	y^2x
III	y^3	a.	y^3
IV	0	a.	0

Tabla 3: Formas canónicas para las formas binarias cúbicas

Formas Canónicas Formas Binarias Cuadráticas			
Tipo	Sobre C	Tipo	Sobre R
I	$x^2 + y^2$	a.	$x^2 + y^2$
		b.	$-[x^2 + y^2]$
		c.	$x^2 - y^2$
II	x^2	a.	x^2
		b.	$-x^2$
III	0	a.	0

Tabla 4: Formas canónicas para las formas binarias cuadráticas

The next step in the explicit classification of rank-one Einstein solomanifolds (dimensión 8) is really hard. There are more than one hundred 7-dimensional graded nilpotent Lie algebras besides some continuous families depending on one parameter.

— C. Will [Will]

En el estudio de las variedades Einstein, un gran reto es la conocida conjetura de Alekseevskii (ver [Ale] o [Bes, Conjecture 7.57]), la cual esencialmente afirma que cualquier variedad Einstein homogénea con curvatura escalar negativa es isométrica a un grupo de Lie soluble simplemente conexo dotado con una métrica invariante a izquierda (es decir, una *solvariedad*).

Por resultados debidos a Heber y Lauret es sabido que la clasificación y estructura de las solvariedades Einstein, y más generalmente, de las *solvariedades solitones de Ricci* ([Lau6, Theorem 4.8]), recae en el estudio de los *nilradicales Einstein*. Es por esto que muchos trabajos se han dirigido hacia el estudio de tales álgebras, las cuales se caracterizan por admitir una métrica invariante a izquierda que es una métrica solitón al flujo de Ricci sobre el respectivo grupo de Lie nilpotente simplemente conexo.

Los nilradicales Einstein fueron clasificados hasta dimensión 5 por Lauret en [Lau2] y en dimensión 6, por Cynthia Will en el 2002 ([Will]). Por mucho tiempo se pensó que la clasificación en dimensión 7 era un problema poco “esperanzador” pues como dice la cita, en esta dimensión se tiene una infinidad de álgebras de Lie. El objetivo de este capítulo es dar la clasificación de los nilradicales Einstein de dimensión 7 usando los fuertes resultados dados por Nikolayevsky en [Nik2]. Para este fin, empleamos la clasificación de Carles de las álgebras de Lie nilpotentes complejas de dimensión 7 y estudiamos cada álgebra en detalle aplicando tres técnicas que se derivan de [Nik2].

4.1 PRELIMINARES SOBRE NILRADICALES EINSTEIN

En esta sección haremos un resumen de los resultados conocidos sobre nilradicales Einstein. En [Lau4], el lector interesado puede encontrar un resumen más detallado y completo.

Definición 4.1.1. [Lau6, Definition 2.2] Una métrica invariante a izquierda $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre un grupo de Lie soluble simplemente conexo S es llamada *métrica solsolitón* si el correspondiente operador de Ricci satisface

$$\text{Ric}_{\langle \cdot, \cdot \rangle} = c \text{Id} + D \tag{43}$$

para algún $c \in \mathbb{R}$ y $D \in \text{Der}(\mathfrak{s})$. Cuando el grupo es nilpotente tal métrica es llamada *nilsolitón*.

Se puede ver que cualquier métrica invariante a izquierda $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre un grupo de Lie simplemente conexo G satisfaciendo la ecuación (43) es un solitón de Ricci, es decir, su tensor de Ricci satisface

$$\text{ric}(\langle \cdot, \cdot \rangle) = c\langle \cdot, \cdot \rangle + L_X\langle \cdot, \cdot \rangle, \text{ para algún } c \in \mathbb{R}, X \in \mathfrak{X}(G)$$

donde L_X es la derivada de Lie en la dirección del campo X .

Todos los ejemplos conocidos hasta ahora de *solitones de Ricci homogéneos no triviales* son isométricos a grupos de Lie simplemente conexos dotados con una métrica solsolitón. De este hecho se deriva la recién formulada *conjetura generalizada de Alekseevskii* (planteadas por J. Lauret), la cual afirma que estos van a ser los únicos ejemplos.

El siguiente teorema exhibe a las métricas nilsolitón como las piezas fundamentales en la construcción de métricas solsolitón.

Teorema 4.1.2. [Lau6, Theorem 4.8] Sea S una solvariedad con álgebra de Lie métrica $(\mathfrak{s}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ y consideremos la descomposición ortogonal $\mathfrak{s} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, donde \mathfrak{n} es el nilradical de \mathfrak{s} y N es el grupo de Lie simplemente conexo con $\text{Lie}(N) = \mathfrak{n}$. Entonces $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es una métrica solsolitón con $\text{Ric}_{\langle \cdot, \cdot \rangle} = c \text{Id} + D$, $c < 0$ y $D \in \text{Der}(\mathfrak{s})$ si y solo si las siguientes condiciones se dan

- $\langle \cdot, \cdot \rangle' := \langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{n} \times \mathfrak{n}}$ es una métrica nilsolitón con operador de Ricci, $\text{Ric}_{\langle \cdot, \cdot \rangle'} = c \text{Id} + D'$ con $D' \in \text{Der}(\mathfrak{n})$.
- $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = 0$.
- $\text{ad}(A)$ es un operador normal para todo $A \in \mathfrak{a}$.
- $\langle A, A \rangle = -\frac{1}{c} \text{tr}(S(\text{ad}(A))^2)$ para todo $A \in \mathfrak{a}$, donde $S(\text{ad}(A)) = \frac{1}{2}(\text{ad}(A) + \text{ad}(A)^T)$.

Definición 4.1.3. [Nik2, Definition 1] Un álgebra de Lie nilpotente la cual es el nilradical de una álgebra de Lie soluble métrica Einstein es llamada *nilradical Einstein* y su métrica nilsolitón $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ (por teorema 4.1.2) define la derivación Einstein $\phi := \text{Ric}_{\langle \cdot, \cdot \rangle'} - c \text{Id}$. El conjunto ordenado de valores propios $d_i \in \mathbb{N}$ de (un apropiado múltiplo de la) derivación Einstein, junto con las multiplicidades n_i es llamado *tipo de autovalor*, el cual es escrito como $(d_1 < \dots < d_r; n_1, \dots, n_r)$

La teoría geométrica de invariantes es una herramienta muy importante en la teoría de las métricas solsolitón y la conexión es vía la aplicación momento para la acción natural de $GL_n(\mathbb{R})$ sobre $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^n$ (por cambio de base)

$$g \cdot \mu(X, Y) := g\mu(g^{-1}X, g^{-1}Y), \forall g \in GL_n(\mathbb{R}), \mu \in \Lambda^2(\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^n, X, Y \in \mathbb{R}^n.$$

Sea V el espacio vectorial $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^n$. Si $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ es la base canónica de $(\mathbb{R}^n)^*$, dual a la base canónica $\{e_1, \dots, e_n\}$ de \mathbb{R}^n entonces $\mu_{ij}^k = (e_i^* \wedge e_j^*) \otimes e_k$ con $1 \leq i < j \leq n$, $1 \leq k \leq n$ es la base canónica de V . En V consideramos el producto interno inducido por el producto interno canónico de \mathbb{R}^n ,

$$\langle \mu, \gamma \rangle := \sum_{ijk} \langle \mu(e_i, e_j), e_k \rangle \langle \gamma(e_i, e_j), e_k \rangle, \forall \mu, \gamma \in V. \tag{44}$$

Tal producto interno es tal que $O(n, \mathbb{R})$ actúa por isometrías y $\text{sym}(n)$ -actúa por operadores simétricos, donde la acción de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ sobre V es

$$A \cdot \mu(X, Y) = A\mu(X, Y) - \mu(AX, Y) - \mu(X, AY), \forall A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}), \mu \in V, X, Y \in \mathbb{R}^n.$$

Sea $\mu \in V \setminus \{0\}$ un corchete de álgebra de Lie y denotemos por Ric_μ el operador de Ricci de la nilvariedad $(N_\mu, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ con N_μ el grupo de Lie simplemente conexo tal que $\text{Lie}(N_\mu) = (\mathbb{R}^n, \mu)$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno canónico de \mathbb{R}^n . Si por m denotamos la aplicación momento para la representación reductiva de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ sobre V , entonces

$$m(\mu) = \frac{4}{\|\mu\|^2} \text{Ric}_\mu, \quad (45)$$

es decir, si $\tilde{m} := 4\text{Ric}_\mu$ (la aplicación momento sin normalizar) entonces \tilde{m} está dada por:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{m}(\mu)X, Y \rangle = & -2 \sum_{ij} \langle \mu(X, e_i), e_j \rangle \langle \mu(Y, e_i), e_j \rangle \\ & + \sum_{ij} \langle \mu(e_i, e_j), X \rangle \langle \mu(e_i, e_j), Y \rangle, \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (46)$$

Teorema 4.1.4. [Lau4, Theorem 4.2.] Sea $\mu \in V \setminus \{0\}$ un corchete de álgebra de Lie nilpotente. El álgebra de Lie nilpotente (\mathbb{R}^n, μ) es un nilradical Einstein si y solo si existe $\tilde{\mu} \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \cdot \mu$ tal que $\text{Ric}_{\tilde{\mu}} \in \mathbb{R}I \oplus \text{Der}(\tilde{\mu})$, o equivalentemente, $\text{GL}_n(\mathbb{R}) \cdot \mu$ es una órbita distinguida para la acción de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ sobre $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^n$

Por cercanía con la teoría geométrica de invariantes, los cálculos en el apéndice y en este capítulo son hechos con \tilde{m} en lugar de Ric .

Un corolario inmediato que se sigue del teorema anterior

Corolario 4.1.5. [Fer1, Corollary 2] Sea $\mu \in V \setminus \{0\}$ un corchete de álgebra de Lie nilpotente. El álgebra de Lie nilpotente (\mathbb{R}^n, μ) es un nilradical Einstein con tipo de autovalor $(d_1 < \dots < d_r; n_1, \dots, n_r)$ si y solo si existe $\tilde{\mu} \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \cdot \mu$ tal que:

$$\tilde{m}(\tilde{\mu}) = \frac{\sum n_i d_i}{n \sum n_i d_i^2 - (\sum n_i d_i)^2} \left(-\frac{\sum n_i d_i^2}{\sum n_i d_i} I + \text{Diag} \left(\underbrace{d_1}_{n_1 \text{ veces}}, \dots, \underbrace{d_r}_{n_r \text{ veces}} \right) \right) \quad (47)$$

donde $d_i, i = 1, \dots, r$ son enteros positivos sin divisor común y $\text{Diag}(d_1, \dots, d_r)$ es una derivación de $\tilde{\mu}$.

Demostración Sea $\mu_0 \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \cdot \mu$ tal que $\tilde{m}(\mu_0) = c_{\mu_0} I + \phi$. Como la matriz de $\tilde{m}(\mu_0)$ en la base canónica de \mathbb{R}^n es simétrica, entonces existe $k \in O(7)$ tal que $k\tilde{m}(\mu_0)k^{-1} = \text{Diag}(x_1, \dots, x_n)$ con $x_1 \leq \dots \leq x_n$ y así $k\phi k^{-1} = a \text{Diag}(d_1, \dots, d_r)$, donde $d_1 < \dots < d_r$ son los valores propios de la derivación Einstein ϕ con multiplicidades n_1, \dots, n_r . Usando que la aplicación momento es $O(7)$ -equivariante, tenemos que

$$\tilde{m}(k \cdot \mu_0) = c_{\mu_0} I + a \text{Diag}(d_1, \dots, d_r). \quad (48)$$

Ahora, como la aplicación momento es ortogonal a toda derivación simétrica, si tomamos producto interno a la ecuación (48) con $\text{Diag}(d_1, \dots, d_r)$, tenemos que

$$a = -c_{\mu_0} \frac{\sum n_i d_i}{\sum n_i d_i^2}$$

y por lo tanto, reemplazando a en (48)

$$\tilde{m}(k \cdot \mu_0) = c_{\mu_0} \left(I - \frac{\sum n_i d_i}{\sum n_i d_i^2} \text{Diag}(d_1, \dots, d_r) \right). \quad (49)$$

Recordemos que para todo $\lambda \in V$, $\text{tr}(\tilde{m}(\lambda)) = -\|\lambda\|^2$, así, si usamos este hecho en (49), se sigue que

$$c_{\mu_0} = -\|c_{\mu_0}\|^2 / \left(n - \frac{(\sum n_i d_i)^2}{\sum n_i d_i^2} \right).$$

El denominador en la expresión anterior es distinta de cero por la desigualdad Cauchy-Schwarz y dado que $\phi \notin \mathbb{R}I$. En consecuencia

$$\frac{\tilde{m}(k \cdot \mu_0)}{\|k \cdot \mu_0\|^2} = \tilde{m} \left(\frac{k \cdot \mu_0}{\|k \cdot \mu_0\|} \right) = (47)$$

y, como $\frac{k \cdot \mu_0}{\|k \cdot \mu_0\|} \in GL_n(\mathbb{R}) \cdot \mu$, haciendo $\tilde{\mu} = \frac{k \cdot \mu_0}{\|k \cdot \mu_0\|}$ tenemos la conclusión de la prueba. ■

La importancia de la expresión (47) es que esta solo depende del tipo de autovalor. Nosotros mostramos cómo usar la *derivación pre-Einstein* (definición 4.1.6) y el Corolario 4.1.5 para encontrar nilradicales Einstein de un tipo de autovalor fijo.

Si (\mathbb{R}^n, μ) es un nilradical Einstein con tipo de autovalor $(d_1 < \dots < d_r; n_1, \dots, n_r)$, entonces el valor

$$\left(n - \frac{(\sum n_i d_i)^2}{\sum n_i d_i^2} \right)^{-1} \tag{50}$$

es el mínimo valor de la función

$$\begin{aligned} F: V \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \|m(v)\|^2 \end{aligned} \tag{51}$$

que la función toma sobre $GL_n(\mathbb{R}) \cdot \mu$. F mide cuán lejos está la derivación Einstein de ser un múltiplo de la identidad. Como hay finitos tipos de autovalores (o equivalentemente, hay finitos estratos), entonces la expresión (50) toma finitos valores los cuales pueden ser usados para estudiar las degeneraciones que se dan en $\mathfrak{N}_n(\mathbb{R})$ via la estratificación ($\mathfrak{N}_n(\mathbb{R})$ es el conjunto algebraico formado por los corchetes de Lie de álgebras de Lie nilpotentes).

4.1.1 Teoremas de Nikolayevsky

Para terminar, revisamos algunas definiciones y resultados de [Nik2].

Definición 4.1.6. [Nik2, Definition 2] Una derivación ϕ de una álgebra de Lie \mathfrak{g} es llamada *pre-Einstein*, si esta es semisimple con todos los valores propios reales, y

$$\text{tr}(\phi\psi) = \text{tr}(\psi), \text{ para cualquier } \psi \in \text{Der}(\mathfrak{g}). \tag{52}$$

Teorema 4.1.7. [Nik2, Theorem 1]

1. (a) Cualquier álgebra de Lie \mathfrak{g} admite una derivación pre-Einstein $\phi_{\mathfrak{g}}$.
 (b) La derivación $\phi_{\mathfrak{g}}$ es única salvo un automorfismo de \mathfrak{g} .
 (c) Todos los valores propios de $\phi_{\mathfrak{g}}$ son números racionales.
2. Sea \mathfrak{n} un álgebra de Lie nilpotente, con ϕ una derivación pre-Einstein. Si \mathfrak{n} es un nilradical Einstein, entonces su derivación Einstein es positivamente proporcional a ϕ (salvo conjugación por un automorfismo) y

$$\phi > 0 \text{ and } \text{ad}_{\phi} \geq 0, \tag{53}$$

es decir, todos los valores propios de ϕ son positivos y todos los valores propios de ad_ϕ son no negativos.

Hay un grupo de Lie real reductivo G_ϕ , vinculado a una derivación pre-Einstein. Consideremos

$$\mathfrak{g}_\phi := \{\alpha \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) : [\alpha, \phi] = 0, \text{tr}(\alpha\phi) = 0, \text{tr}(\alpha) = 0\} \quad (54)$$

y sea G_ϕ el subgrupo de Lie conexo de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ con álgebra de Lie \mathfrak{g}_ϕ . El grupo G_ϕ es de hecho la componente de la identidad del grupo algebraico real \widetilde{G}_ϕ el cual es dado por

$$\widetilde{G}_\phi := \{\text{Diag}(g_1, \dots, g_r) / g_i \in \text{GL}_{n_i}(\mathbb{R}), \prod \det(g_i) = \prod \det(g_i)^{d_i} = 1\}$$

donde $\phi = a \text{Diag}(\underbrace{d_1}_{n_1 \text{ veces}}, \dots, \underbrace{d_r}_{n_r \text{ veces}})$ con a siendo el mínimo común denominador de los valores propios de la derivación pre-Einstein ϕ .

La relevancia del grupo G_ϕ en el estudio de los nilradicales Einstein es dado por el siguiente teorema.

Teorema 4.1.8. [Nik2, Theorem 5] Sea μ un corchete de álgebra de Lie nilpotente. Para el álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{n} = (\mathbb{R}^n, \mu)$ con una derivación pre-Einstein ϕ , las siguientes condiciones son equivalentes:

- (i) \mathfrak{n} es un nilradical Einstein.
- (ii) La órbita $G_\phi \cdot \mu$ es cerrada en V .
- (iii) La función $\rho_\mu : G_\phi \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\rho_\mu(g) = \|g \cdot \mu\|^2$ alcanza mínimo.

Supongamos que la órbita $G_\phi \cdot \mu$ no es cerrada. Entonces existe una única órbita cerrada $G_\phi \cdot \mu_0 \subset G_\phi \cdot \mu$ tal que el álgebra $\mathfrak{n}_0 = (\mathbb{R}^n, \mu_0)$ es un nilradical Einstein no isomorfo a \mathfrak{n} y existe una matriz simétrica $A \in \mathfrak{g}_\phi$, con autovalores enteros, tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(tA) \cdot \mu = \mu_0$

El producto interno en V (y así la norma usada en el Teorema 4.1.8) es el inducido por el producto interno canónico de \mathbb{R}^n .

Definición 4.1.9. Sea $\{X_1, \dots, X_n\}$ una base de un álgebra de Lie nilpotente \mathfrak{n} , con $[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k X_k$. La base $\{X_i\}$ es llamada *nice*, si para todo i, j , $\#\{k : c_{ij}^k \neq 0\} \leq 1$ y para todo i, k , $\#\{j : c_{ij}^k \neq 0\} \leq 1$.

Nota 4.1.10. Es fácil ver que si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base nice de un álgebra de Lie nilpotente \mathfrak{n} con $[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k e_k$ entonces $W = \text{span}(\{\mu_{i,j}^k / c_{i,j}^k \neq 0\})$ es un espacio nice, ya que las dos condiciones en la definición implican $\langle \widetilde{m}(\mu) e_i, e_j \rangle = 0$ para $i \neq j$ (ver fórmula 46).

Hasta dimensión 6, hay solo un álgebra de Lie nilpotente que no admite una base nice, la cual es denotada por $L_{6,11}$ en [Gra]. En efecto, siguiendo la clasificación de Graaf, $L_{6,11}$ es la única que no está escrita en una base nice. Las dimensiones en la serie central descendente y derivada para $L_{6,11}$ son $(6, 3, 2, 1, 0)$ y $(6, 3, 0)$, respectivamente, y es fácil ver que si un álgebra de Lie nilpotente de dimensión 6 admitiendo una base nice tiene las mismas dimensiones en su serie central descendente y derivada que $L_{6,11}$, entonces tal álgebra debe ser isomorfa a $L_{6,12}$, $L_{6,13}$, $L_{5,6} \oplus \mathbb{R}x_6$ o $L_{5,7} \oplus \mathbb{R}x_6$. Así $L_{6,11}$ no puede admitir una base nice. En dimensión 7, cualquier álgebra de Lie nilpotente compleja de rango mayor ó igual que 3 tiene una base nice (por verificación directa de la lista en [M]). Es fácil ver que cualquier álgebra de Lie

nilpotente admitiendo una derivación semisimple con todos los autovalores distintos admite una base nice (en particular toda álgebra de Lie filiforme admitiendo una \mathbb{N} -graduación). Aunque la condición de tener una base nice parece “muy exclusiva”, ésta es satisfecha por muchas familias de álgebras de Lie nilpotentes.

Sea $\{E_{ij}\}$ la base canónica de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ y hagamos $\alpha_{ij}^k = E_{kk} - E_{ii} - E_{jj}$ con $1 \leq i < j \leq n$ y $1 \leq k \leq n$; estos son los pesos de la representación de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ sobre V (via la acción de $GL_n(\mathbb{R})$ sobre V). Estamos en condiciones de establecer el criterio de la base nice de Nikolayevsky.

Teorema 4.1.11. [Nik2, Theorem 3.] Sea $\mathfrak{n} = (\mathbb{R}^n, \mu)$ un álgebra de Lie nilpotente, con $\mu = \sum c_{ij}^k \mu_{ij}^k$, $\mu \neq 0$. Sea F un conjunto ordenado de los pesos que están relacionados con μ (i.e. $\alpha_{ij}^k \in F$ si y sólo si $c_{ij}^k \neq 0$). Sea $m = \#F$ y definamos la matriz de (Gram) $\mathbf{U} \in M(m, \mathbb{R})$ como

$$\mathbf{U}_{p,q} := \text{tr}(F(p)F(q)).$$

Si la base canónica $\{e_i\}_{i=1}^n$ es una base nice entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- (i) \mathfrak{n} es un nilradical Einstein.
- (ii) El vector de norma mínima de la cápsula convexa de F está en el interior de la cápsula.
- (iii) La ecuación $\mathbf{U}\mathbf{x} = [1]_m$ tiene al menos una solución \mathbf{x} con coordenadas positivas.

Nota 4.1.12. Invitamos al lector a comparar el anterior teorema con el corolario 2.2.23.

Teorema 4.1.13. [Nik2, Theorem 6] Sean \mathfrak{n}_1 y \mathfrak{n}_2 dos álgebras de Lie nilpotentes (reales) las cuales son isomorfas vistas sobre \mathbb{C} . \mathfrak{n}_1 es nilradical Einstein si y solo si \mathfrak{n}_2 es nilradical Einstein. En cualquiera de los casos, ambas tienen el mismo tipo.

4.2 LA CLASIFICACIÓN

Los nilradicales Einstein fueron clasificados hasta dimensión 5 por Jorge Lauret y en dimensión 6 por Cynthia Will ([Lau2], [Will]). La idea de esta sección es obtener la clasificación en dimensión 7. Para hacer esto usamos la clasificación de Carles de las álgebras de Lie nilpotentes complejas en dimensión 7 ([Car] y con un par de correcciones dadas por Magnin en [M]). En la clasificación de Carles, cada álgebra puede ser interpretada como una álgebra de Lie real y cualquier otra real, debe ser equivalente a una de estas sobre \mathbb{C} (en este sentido, por el Teorema 4.1.13, la clasificación esta completa con solo considerar la lista de Carles). Las álgebras de Lie nilpotentes complejas se pueden ver como una lista de 117 algebras indescomponibles (no isomorfas), 6 familias monoparamétricas álgebras de Lie nilpotentes (no isomorfas entre si) y las álgebras descomponibles. Como cualquier álgebra de Lie nilpotente de dimensión menor ó igual que 6 es un nilradical Einstein ([Lau2], [Will]) y suma directa de nilradicales Einstein es de nuevo un nilradical Einstein, entonces nosotros nos enfocamos en estudiar álgebras indescomponibles.

Si una álgebra de Lie nilpotente está escrita en una *base nice* (ver Definición 4.1.9), entonces usando el Teorema 4.1.11 es muy fácil probar si el álgebra en cuestión es Einstein ó no. En [M], tan solo 20 álgebras y una familia monoparamétrica de rango ≥ 1 no están escritas en una base nice, así que estas son estudiadas por otro métodos. Estos son

- Exhibiendo un producto interno nilsolitón (see Corolario 4.1.5).
- Estudiando la clausura de la órbita de un corchete de la álgebra de Lie por la acción de G_ϕ (Teorema 4.1.8).

Estas tres principales técnicas han sido aplicadas a cada álgebra en [M] de rango ≥ 1 y la clasificación completa de los nilradicales Einstein de dimensión 7 es dada en las Tablas 5, 6, 7, 8, de acuerdo a sus rangos. Damos ejemplos muy ilustrativos para entender la implementación de estas técnicas; cada álgebra puede ser estudiada en una forma completamente análoga y directa como en los ejemplos. Nosotros sugerimos al lector ir al apéndice 1 para más información sobre cada álgebra, incluyendo los cálculos, soluciones a ecuaciones e isomorfismos que hemos usado para obtener la clasificación completa.

Las primeras álgebras de Lie nilpotentes de rango cero (también conocidas como *álgebras de Lie característicamente nilpotentes*) aparecen en dimensión 7. Estas no pueden ser nilradicales Einstein pues ellas no admiten una \mathbb{N} -graduación. En dimensión 7, esta familia tiene 7 álgebras de Lie nilpotentes y una familia monoparamétrica. Para rango ≥ 1 , conseguimos 82 nilradicales Einstein indescomponibles (de un total de 110 álgebras indescomponibles) y 5 familias monoparamétricas de nilradicales Einstein (con la excepción de a lo más dos puntos en cada familia monoparamétrica).

Indudablemente, nuestra herramienta principal es el criterio de la base nice de Nikolayevsky y la clasificación de Carles. Siguiendo [M], las únicas álgebras de rango ≥ 1 que no están escritas en una base nice son 1.2(ii), 1.2(iv), 1.3(i_λ), 1.3(ii), 1.3(v), 1.11, 1.12, 1.13, 1.14, 1.15, 1.16, 1.17, 1.18, 1.21, 2.2, 2.11, 2.24, 2.25, 2.26, 2.27, 2.37. Alguna de estas álgebras puede admitir o no una base nice.

Teorema 4.2.1. *La clasificación de nilradicales Einstein indescomponibles de dimensión 7 es dado de acuerdo a su rango en las Tablas 5, 6, 7 y 8.*

La notación en las tablas es como sigue:

\checkmark := SI, $-$:= No, NE := Nilradical Einstein, Derivación pre-Einstein := "Damos una derivación pre-Einstein con respecto a la base canónica", Min := Mínimo de $F|_{GL_n(\mathbb{R}) \cdot \mu}$ (calculado usando la fórmula (50) con 3 decimales), dim SCD := Dimensiones en la serie central descendente y dim Der := Dimensión del álgebra de derivaciones.

En dim SCD nosotros omitimos el primer término, el cual es siempre 7. Así por ejemplo, el álgebra $\mathfrak{n} = (\mathbb{R}^n, \mu)$ con $\mu = 1.3(i_0)$ no es un nilradical Einstein y así el mínimo de $F|_{GL_n(\mathbb{R}) \cdot \mu}$ no existe, la dimensión de su álgebra de derivaciones es 13 y las dimensiones en la series central descendente son (7,4,2,1,0) que corresponde a $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_0 \geq \mathfrak{n}_1 = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}_0] \geq \mathfrak{n}_2 = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}_1] \geq \mathfrak{n}_3 = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}_2] \geq \mathfrak{n}_4 = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}_3] = 0$.

Ejemplo 4.2.2. Exhbiendo un producto interno nilsolitón

En este ejemplo mostramos cómo exhibir un producto interno nilsolitón. Consideremos $\mathfrak{g}_{1,17}$

$$\mu := \begin{cases} [e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_5, \\ [e_2, e_5] = e_6, [e_2, e_6] = e_7, [e_3, e_4] = -e_7, [e_3, e_5] = e_7 \end{cases}$$

Esta álgebra es de rango 1 y su toro maximal de derivaciones es generado por $\text{Diag}(1, 1, 2, 3, 3, 4, 5)$. Se sigue del corolario 4.1.5 que si $\mathfrak{g}_{1,17}$ es un nilradical Einstein, entonces debería haber un corchete de álgebra de Lie $\tilde{\mu}$ en $GL_7(\mathbb{R}) \cdot \mu$ con $\text{Diag}(1, 1, 2, 3, 3, 4, 5)$ como derivación Einstein y aplicación momento igual a

$$\tilde{m}(\tilde{\mu}) = \text{Diag} \left(-\frac{23}{47'}, -\frac{23}{47'}, -\frac{27}{94'}, -\frac{4}{47'}, -\frac{4}{47'}, \frac{11}{94'}, \frac{15}{47'} \right) \quad (55)$$

Ahora bien, cualquier corchete de un álgebra admitiendo a $\text{Diag}(1, 1, 2, 3, 3, 4, 5)$ como una derivación es de la forma

$$\mu(a_1, \dots, a_{13}) := \begin{cases} [e_1, e_2] = a_1 e_3, [e_1, e_3] = a_2 e_4 + a_3 e_5, \\ [e_1, e_4] = a_4 e_6, [e_1, e_5] = a_5 e_6, [e_1, e_6] = a_6 e_7, \\ [e_2, e_3] = a_7 e_4 + a_8 e_5, [e_2, e_4] = a_9 e_6, [e_2, e_5] = a_{10} e_6, \\ [e_2, e_6] = a_{11} e_7, [e_3, e_4] = a_{12} e_7, [e_3, e_5] = a_{13} e_7. \end{cases}$$

Si J representa la condición de Jacobi, entonces los nilradicales Einstein con tipo de autovalor $(1 < 2 < 3 < 4 < 5; 2, 1, 2, 1, 1)$ son caracterizados por $J(\mu(a_1, \dots, a_{13})) = 0$ y $m(\mu(a_1, \dots, a_{13}))$ como en (55), o equivalentemente, por el siguiente sistema de ecuaciones polinomiales:

$$\begin{aligned} m(\mu(a_1, \dots, a_{13})) & \begin{cases} -2a_1^2 - 2a_2^2 - 2a_3^2 - 2a_4^2 - 2a_5^2 - 2a_6^2 = -\frac{23}{47}, \\ -2a_2 a_7 - 2a_3 a_8 - 2a_4 a_9 - 2a_5 a_{10} - 2a_6 a_{11} = 0, \\ -2a_1^2 - 2a_7^2 - 2a_8^2 - 2a_9^2 - 2a_{10}^2 - 2a_{11}^2 = -\frac{23}{47}, \\ 2a_1^2 - 2a_2^2 - 2a_3^2 - 2a_7^2 - 2a_8^2 - 2a_{12}^2 - 2a_{13}^2 = -\frac{27}{94}, \\ 2a_2^2 - 2a_4^2 + 2a_7^2 - 2a_9^2 - 2a_{12}^2 = -\frac{4}{47}, \\ 2a_2 a_3 - 2a_4 a_5 + 2a_7 a_8 - 2a_9 a_{10} - 2a_{12} a_{13} = 0, \\ 2a_3^2 - 2a_5^2 + 2a_8^2 - 2a_{10}^2 - 2a_{13}^2 = -\frac{4}{47}, \\ 2a_4^2 + 2a_5^2 - 2a_6^2 + 2a_9^2 + 2a_{10}^2 - 2a_{11}^2 = \frac{11}{94}, \\ 2a_6^2 + 2a_{11}^2 + 2a_{12}^2 + 2a_{13}^2 = \frac{15}{47}. \end{cases} \\ J(\mu(a_1, \dots, a_{13})) & \begin{cases} -a_{10} a_6 + a_5 a_{11} + a_1 a_{13} = 0, \\ -a_9 a_6 + a_4 a_{11} + a_1 a_{12} = 0, \\ -a_8 a_5 + a_3 a_{10} - a_7 a_4 + a_2 a_9 = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

Como un tipo de autovalor puede tener varios nilradicales Einstein no isomorfos, entonces debemos encontrar una solución tal que su corchete de álgebra de Lie nilpotente sea isomorfo a $\mathfrak{g}_{1.17}$. Resolviendo tal sistema (por ejemplo, usando bases de Gröbner), nosotros encontramos algunas soluciones dadas por

$$\begin{aligned} a_1 &= \pm \frac{\sqrt{611}}{94}, a_2 = 0, a_3 = \pm \frac{\sqrt{235}}{47}, a_4 = 0, a_5 = \pm \frac{\sqrt{611}}{94}, a_6 = 0, \\ a_7 &= \pm \frac{\sqrt{235}}{94}, a_8 = 0, a_9 = \pm \frac{\sqrt{611}}{94}, a_{10} = 0, a_{11} = \pm \frac{\sqrt{705}}{94}, \\ a_{12} &= 0, a_{13} = -\frac{a_5 a_{11}}{a_1}. \end{aligned} \tag{56}$$

Fijando una de estas, tenemos un nilradical Einstein $(\mathbb{R}^n, \tilde{\mu})$ dado por

$$\tilde{\mu} := \begin{cases} [e_1, e_2] = \frac{\sqrt{611}}{94} e_3, [e_1, e_3] = \frac{\sqrt{235}}{47} e_5, [e_1, e_5] = \frac{\sqrt{611}}{94} e_6, [e_2, e_3] = \frac{\sqrt{235}}{94} e_4, \\ [e_2, e_4] = \frac{\sqrt{611}}{94} e_6, [e_2, e_6] = \frac{\sqrt{705}}{94} e_7, [e_3, e_5] = -\frac{\sqrt{705}}{94} e_7 \end{cases}$$

Para encontrar un isomorfismo, como la transformación $\text{Diag}(1, 1, 2, 3, 3, 4, 5)$ con respecto a la base canónica $\{e_i\}$ es una derivación de ambas álgebras, podemos intentar asumiendo un isomorfismo dado por una matrix en $GL_7(\mathbb{R})$ que conmute con $\text{Diag}(1, 1, 2, 3, 3, 4, 5)$,

$$g = \text{Diag} \left(\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix}, b_{3,3}, \begin{pmatrix} b_{4,4} & b_{4,5} \\ b_{5,4} & b_{5,5} \end{pmatrix}, b_{6,6}, b_{7,7} \right)$$

Resolviendo la ecuación $g \cdot \mu = \tilde{\mu}$ conseguimos

$$g = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{1222}}{47} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{65}}{47} & \frac{\sqrt{65}}{47} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{130}}{47} & -\frac{\sqrt{130}}{47} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{13\sqrt{470}}{2209} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{65\sqrt{3}}{2209} \end{pmatrix},$$

y así $g_{1.17}$ es un nilradical Einstein.

Rango uno					
n	NE	derivación pre-Einstein	Min	dim Der	dim SCD
1.01(i)	-	(0, 1, 0, 1, 1, 1, 1)	-	11	(4, 3, 2, 1)
1.01(ii)	-	(0, 1, 0, 1, 1, 1, 1)	-	12	(4, 3, 2, 1)
1.02	-	$\frac{1}{2}(0, 1, 1, 1, 2, 2, 3)$	-	11	(5, 4, 2, 1)
1.03	-	$\frac{2}{3}(0, 1, 1, 1, 1, 2, 2)$	-	11	(5, 4, 2, 1)
1.1(i $_{\lambda}$) $\lambda \neq 0, 1$	✓	$\frac{1}{5}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$	0.714	10	(5, 4, 3, 2, 1)
1.1(i $_{\lambda}$) $\lambda = 0$	-	$\frac{1}{5}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$	-	10	(5, 4, 3, 2, 1)
1.1(i $_{\lambda}$) $\lambda = 1$	-	$\frac{1}{5}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$	-	11	(5, 4, 3, 2, 1)
1.1(ii)	-	$\frac{1}{5}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$	-	11	(5, 4, 3, 2, 1)
1.1(iii)	✓	$\frac{1}{5}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$	0.714	10	(5, 4, 3, 2)
1.1(iv)	-	$\frac{1}{5}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$	-	11	(5, 4, 2, 1)
1.1(v)	-	$\frac{1}{5}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$	-	10	(4, 3, 2, 1)
1.1(vi)	-	$\frac{1}{5}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$	-	11	(4, 3, 2, 1)
1.2(i $_{\lambda}$) $\lambda \neq 0, 1$	✓	$\frac{4}{11}(1, 1, 2, 2, 3, 3, 4)$	0.846	12	(4, 3, 1)
1.2(i $_{\lambda}$) $\lambda = 0$	✓	$\frac{4}{11}(1, 1, 2, 2, 3, 3, 4)$	0.846	12	(4, 3, 1)
1.2(i $_{\lambda}$) $\lambda = 1$	✓	$\frac{4}{11}(1, 1, 2, 2, 3, 3, 4)$	0.846	12	(4, 3, 1)
1.2(ii)	-	$\frac{4}{11}(1, 1, 2, 2, 3, 3, 4)$	-	12	(4, 3, 1)
1.2(iii)	-	$\frac{4}{11}(1, 1, 2, 2, 3, 3, 4)$	-	12	(4, 3, 1)
1.2(iv)	-	$\frac{4}{11}(1, 1, 2, 2, 3, 3, 4)$	-	12	(4, 2, 1)
1.3(i $_{\lambda}$) $\lambda \neq 0$	✓	$\frac{5}{17}(1, 2, 2, 3, 3, 4, 5)$	0.895	13	(4, 2, 1)

Rango uno					
n	NE	derivación pre-Einstein	Min	dim Der	dim SCD
1.3(i _λ) λ = 0	-	$\frac{5}{17}(1, 2, 2, 3, 3, 4, 5)$	-	13	(4, 2, 1)
1.3(ii)	-	$\frac{5}{17}(1, 2, 2, 3, 3, 4, 5)$	-	14	(4, 2, 1)
1.3(iii)	✓	$\frac{5}{17}(1, 2, 2, 3, 3, 4, 5)$	0.895	13	(4, 2, 1)
1.3(iv)	-	$\frac{5}{17}(1, 2, 2, 3, 3, 4, 5)$	-	13	(4, 2)
1.3(v)	-	$\frac{5}{17}(1, 2, 2, 3, 3, 4, 5)$	-	13	(3, 2, 1)
1.4	✓	$\frac{17}{100}(1, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$	0.820	12	(5, 4, 3, 2, 1)
1.5	✓	$\frac{5}{31}(1, 3, 4, 5, 6, 7, 9)$	0.738	11	(5, 4, 3, 2)
1.6	✓	$\frac{5}{34}(1, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$	0.895	12	(5, 4, 3, 2, 1)
1.7	✓	$\frac{5}{29}(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$	1.04	15	(4, 2)
1.8	-	$\frac{20}{139}(2, 4, 3, 6, 7, 8, 10)$	-	11	(4, 2, 1)
1.9	-	$\frac{10}{67}(2, 3, 6, 5, 7, 8, 9)$	-	14	(4, 3, 1)
1.10	✓	$\frac{45}{353}(2, 3, 5, 7, 8, 9, 11)$	0.792	11	(5, 4, 2, 1)
1.11	✓	$\frac{6}{25}(1, 2, 3, 3, 4, 5, 6)$	0.806	11	(4, 3, 2, 1)
1.12	✓	$\frac{25}{107}(1, 2, 4, 3, 4, 5, 6)$	0.863	12	(4, 3, 2, 1)
1.13	✓	$\frac{13}{58}(1, 2, 3, 4, 5, 5, 6)$	0.853	12	(5, 4, 2, 1)
1.14	✓	$\frac{9}{43}(1, 2, 3, 4, 5, 5, 7)$	0.741	11	(5, 4, 2, 1)
1.15	✓	$\frac{15}{76}(1, 3, 4, 4, 5, 6, 7)$	0.927	13	(4, 3, 2, 1)
1.16	✓	$\frac{11}{40}(1, 2, 3, 3, 4, 4, 5)$	1.05	15	(4, 2, 1)
1.17	✓	$\frac{19}{65}(1, 1, 2, 3, 3, 4, 5)$	0.692	11	(5, 4, 2, 1)
1.18	✓	$\frac{23}{89}(1, 2, 3, 3, 4, 5, 5)$	0.947	13	(4, 3, 1)
1.19	✓	$\frac{13}{29}(1, 1, 1, 2, 2, 3, 3)$	0.853	11	(4, 2)
1.20	-	$\frac{8}{47}(1, 2, 3, 5, 6, 7, 8)$	-	11	(4, 3, 2, 1)
1.21	-	$\frac{25}{113}(1, 2, 3, 3, 4, 5, 7)$	-	11	(4, 3, 2, 1)

Tabla 5: Nilradicales Einstein de dimensión 7. Rango 1

Ejemplo 4.2.3. Mostrando que la G_ϕ -órbita es cerrada

En este ejemplo consideramos exclusivamente a $\mathfrak{g}_{1.3(i_\lambda)}$. Esta familia monoparamétrica es la única que no puede ser cubierta por los otros ejemplos.

$$\mu := \begin{cases} [e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_5, [e_1, e_4] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_6, \\ [e_2, e_4] = \lambda e_7, [e_2, e_5] = e_7, [e_3, e_5] = e_7. \end{cases}$$

Para cualquier $\lambda \neq 0$, $\mathfrak{g}_{1.3(i_\lambda)}$ es un nilradical Einstein. Nosotros probamos esto por contradicción; asumamos que $\mathfrak{g}_{1.3(i_\lambda)}$ no es un nilradical Einstein. La derivación ϕ dada por la matrix diagonal $\frac{5}{17} \text{Diag}(1, 2, 2, 3, 3, 4, 5)$ con respecto a la base $\{e_i\}$ es una derivación pre-Einstein. Se sigue del teorema 4.1.8 que la órbita $G_\phi \cdot \mu$ no es cerrada y así existe $Y \in \mathfrak{g}_\phi$, Y una matrix

simétrica, tal que μ se degenera por la acción del grupo monoparamétrico $\exp(tY)$ cuando $t \rightarrow \infty$. Como $Y \in \mathfrak{g}_\phi$ y Y es simétrica, entonces existe $X = \text{Diag}(a_1, \dots, a_7) \in \mathfrak{g}_\phi$ y $A(\alpha)$, $B(\beta)$ en $\text{SO}_2(\mathbb{R})$ tales que

$$Y = \text{Diag}(1, A(-\alpha), B(-\beta), 1, 1) X \text{Diag}(1, A(\alpha), B(\beta), 1, 1).$$

Como la acción es continua, se sigue que μ también se degenera por la acción de

$$g_t := \exp(tX) \text{Diag}(1, A(\alpha), B(\beta), 1, 1)$$

cuando $t \rightarrow \infty$. La contradicción se encontrará en este último hecho. La acción de g_t en μ es

$$g_t \cdot \mu = \begin{cases} [e_1, e_2] = e^{-t(a_1+a_2-a_4)} \cos(\alpha - \beta) e_4 - e^{-t(a_1+a_2-a_5)} \sin(\alpha - \beta) e_5, \\ [e_1, e_3] = e^{-t(a_1+a_3-a_4)} \sin(\alpha - \beta) e_4 + e^{-t(a_1+a_3-a_5)} \cos(\alpha - \beta) e_5, \\ [e_1, e_4] = e^{-t(a_1+a_4-a_6)} \cos(\beta) e_6, [e_1, e_5] = e^{-t(a_1+a_5-a_6)} \sin(\beta) e_6, \\ [e_1, e_6] = e^{-t(a_1+a_6-a_7)} e_7, [e_2, e_3] = e^{-t(a_2+a_3-a_6)} e_6, \\ [e_2, e_4] = e^{-t(a_2+a_4-a_7)} f_{2,4}(\alpha, \beta) e_7, \\ [e_2, e_5] = e^{-t(a_2+a_5-a_7)} f_{2,5}(\alpha, \beta) e_7, \\ [e_3, e_4] = e^{-t(a_3+a_4-a_7)} f_{3,4}(\alpha, \beta) e_7, \\ [e_3, e_5] = e^{-t(a_3+a_5-a_7)} f_{3,5}(\alpha, \beta) e_7, \end{cases}$$

con

$$\begin{aligned} f_{2,4}(\alpha, \beta) &= (\cos(\alpha) \cos(\beta) \lambda + \sin(\alpha) \sin(\beta) - \cos(\alpha) \sin(\beta)), \\ f_{2,5}(\alpha, \beta) &= (\cos(\alpha) \sin(\beta) \lambda - \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cos(\beta)), \\ f_{3,4}(\alpha, \beta) &= (\sin(\alpha) \cos(\beta) \lambda - \cos(\alpha) \sin(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)), \\ f_{3,5}(\alpha, \beta) &= (\sin(\alpha) \sin(\beta) \lambda + \cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cos(\beta)). \end{aligned}$$

Dependiendo de los valores de α y β , algunos términos son cero en el corchete de álgebra de Lie $g_t \cdot \mu$ y como la degeneración es determinada por los términos no nulos, nuestra atención estará en el exponente del factor exponencial de tales términos; cuando $t > 0$, tales exponentes deben ser no negativos.

Es fácil ver que los pares de funciones $\{f_{2,4}, f_{2,5}\}$, $\{f_{2,4}, f_{3,4}\}$, $\{f_{2,5}, f_{3,5}\}$ y $\{f_{3,4}, f_{3,5}\}$ no se anulan simultáneamente (como las funciones \sin y \cos). Nosotros tenemos los siguientes casos dependiendo de cuáles términos son no nulos.

I) $\cos(\beta)$ y $\sin(\beta)$ son no nulos,

1. $\cos(\alpha - \beta)$, $f_{2,4}$, $f_{3,4}$ son no nulos.

Si este es el caso, entonces debemos tener que a_1, \dots, a_7 satisfacen: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 0$, $a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 3a_4 + 3a_5 + 4a_6 + 5a_7 = 0$ como $X \in \mathfrak{g}_\phi$ y $a_1 + a_6 - a_7 \geq 0$, $a_2 + a_3 - a_6 \geq 0$, $a_1 + a_4 - a_6 \geq 0$, $a_1 + a_5 - a_6 \geq 0$, $a_1 + a_2 - a_4 \geq 0$, $a_1 + a_3 - a_5 \geq 0$, $a_2 + a_4 - a_7 \geq 0$ and $a_3 + a_4 - a_7 \geq 0$.

En lugar de resolver este sistema de desigualdades, nosotros podemos hacer el siguiente truco: introducimos una nueva variable c_i por cada desigualdad q_i y consideramos la ecuación $q_i - c_i^2 = 0$ y así debemos resolver el sistema de ecuaciones polinomiales:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 0, \\ a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 3a_4 + 3a_5 + 4a_6 + 5a_7 = 0, \\ a_1 + a_6 - a_7 - c_1^2 = 0, a_2 + a_3 - a_6 - c_2^2 = 0, \\ a_1 + a_4 - a_6 - c_3^2 = 0, a_1 + a_5 - a_6 - c_4^2 = 0, \\ a_1 + a_2 - a_4 - c_5^2 = 0, a_1 + a_3 - a_5 - c_6^2 = 0, \\ a_2 + a_4 - a_7 - c_7^2 = 0, a_3 + a_4 - a_7 - c_8^2 = 0. \end{array} \right.$$

De este sistema se sigue que $c_1^2 + 4c_4^2 + 5c_5^2 + 2c_6^2 + 2c_7^2 + 5c_8^2 = 0$, $c_2^2 - 6c_5^2 - 6c_8^2 - 4c_4^2 - 2c_6^2 - 2c_7^2 = 0$ y $c_3^2 + c_5^2 + c_8^2 - c_4^2 - c_6^2 - c_7^2 = 0$. Por la primera igualdad c_1, c_4, c_5, c_6, c_7 y c_8 son cero y así c_2 como c_3 deben ser cero también. La degeneración es por tanto trivial y en este caso conseguimos una contradicción. Los casos restantes son completamente similares (y pueden ser vistos en el apéndice). Así, no importa cuál sea el caso, la degeneración es trivial. En consecuencia $\mathfrak{g}_{1.3(i_\lambda)}$, con $\lambda \neq 0$, debe ser un nilradical Einstein.

Rango dos					
n	NE	Derivación pre-Einstein	Min	dim Der	dim SCD
2.1(i_λ) $\lambda \neq 0, 1$	✓	$\frac{2}{19}(3, 5, 6, 8, 9, 11, 14)$	0.905	14	(4, 2, 1)
2.1(i_λ) $\lambda = 0$	-	$\frac{2}{19}(3, 5, 6, 8, 9, 11, 14)$	-	14	(4, 2, 1)
2.1(i_λ) $\lambda = 1$	✓	$\frac{2}{19}(3, 5, 6, 8, 9, 11, 14)$	0.905	14	(4, 2, 1)
2.1(ii)	✓	$\frac{2}{19}(3, 5, 6, 8, 9, 11, 14)$	0.905	14	(4, 2, 1)
2.1(iii)	✓	$\frac{2}{19}(3, 5, 6, 8, 9, 11, 14)$	0.905	14	(3, 2, 1)
2.1(iv)	-	$\frac{2}{19}(3, 5, 6, 8, 9, 11, 14)$	-	14	(3, 1)
2.1(v)	-	$\frac{2}{19}(3, 5, 6, 8, 9, 11, 14)$	-	14	(4, 2)
2.2	-	$\frac{1}{2}(1, 1, 1, 2, 2, 2, 3)$	-	15	(4, 1)
2.3	✓	$\frac{2}{37}(1, 16, 17, 18, 19, 20, 21)$	1.06	13	(5, 4, 3, 2, 1)
2.4	✓	$\frac{7}{52}(1, 4, 5, 6, 7, 8, 11)$	0.743	12	(5, 4, 3, 2)
2.5	✓	$\frac{1}{5}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$	0.714	12	(5, 4, 2, 1)
2.6	✓	$\frac{1}{52}(10, 23, 33, 43, 56, 53, 76)$	0.743	12	(5, 4, 2, 1)
2.7	✓	$\frac{1}{18}(3, 10, 13, 16, 23, 19, 22)$	0.9	13	(5, 4, 2, 1)
2.8	✓	$\frac{1}{12}(3, 5, 8, 11, 13, 14, 16)$	0.857	13	(5, 4, 2)
2.9	✓	$\frac{9}{28}(1, 1, 2, 3, 3, 4, 4)$	0.824	12	(5, 4, 2)
2.10	-	$\frac{1}{5}(1, 2, 6, 3, 4, 5, 7)$	-	12	(4, 3, 2, 1)
2.11	✓	$\frac{1}{36}(9, 19, 28, 28, 37, 47, 46)$	0.947	14	(4, 3, 1)
2.12	✓	$\frac{1}{9}(3, 5, 5, 8, 8, 11, 13)$	0.9	14	(4, 2)
2.13	✓	$\frac{1}{60}(16, 21, 48, 37, 53, 69, 90)$	0.698	12	(4, 3, 2, 1)
2.14	✓	$\frac{1}{5}(1, 3, 2, 4, 5, 6, 7)$	0.714	12	(4, 3, 2, 1)

Rango dos					
n	NE	Derivación pre-Einstein	Min	dim Der	dim SCD
2.15	✓	$\frac{1}{5}(1, 3, 3, 4, 5, 6, 7)$	0.833	13	(4, 3, 2, 1)
2.16	✓	$\frac{1}{27}(5, 17, 20, 22, 27, 32, 37)$	0.931	14	(4, 3, 2, 1)
2.17	✓	$\frac{1}{12}(4, 5, 8, 9, 13, 14, 17)$	0.857	13	(4, 3, 1)
2.18	✓	$\frac{1}{68}(20, 31, 60, 51, 71, 82, 91)$	0.971	15	(4, 3, 1)
2.19	-	$\frac{1}{4}(1, 2, 4, 3, 4, 5, 5)$	-	15	(4, 3, 1)
2.20	✓	$\frac{2}{37}(5, 16, 10, 21, 15, 20, 25)$	1.06	16	(4, 2, 1)
2.21	✓	$\frac{1}{31}(8, 19, 24, 27, 32, 35, 43)$	1.07	16	(4, 2, 1)
2.22	✓	$\frac{1}{19}(5, 14, 10, 15, 24, 20, 25)$	0.950	14	(4, 2, 1)
2.23	-	$\frac{4}{11}(1, 1, 2, 2, 3, 3, 4)$	-	13	(3, 1)
2.24	✓	$\frac{1}{17}(5, 9, 10, 14, 19, 19, 24)$	0.895	13	(4, 2, 1)
2.25	✓	$\frac{5}{17}(1, 2, 2, 3, 3, 4, 5)$	0.895	14	(3, 2, 1)
2.26	✓	$\frac{1}{17}(7, 10, 7, 17, 14, 21, 24)$	0.895	13	(4, 2)
2.27	✓	$\frac{1}{15}(6, 7, 14, 13, 13, 19, 20)$	1.15	17	(3, 2)
2.28	✓	$\frac{4}{37}(4, 5, 6, 8, 9, 10, 14)$	1.06	16	(3, 1)
2.29	-	$\frac{1}{41}(15, 22, 30, 29, 37, 52, 59)$	-	14	(3, 2)
2.30	✓	$\frac{4}{27}(2, 4, 5, 5, 6, 8, 10)$	0.931	15	(3, 2, 1)
2.31	✓	$\frac{1}{39}(14, 15, 27, 29, 42, 43, 57)$	0.848	13	(4, 2, 1)
2.32	✓	$\frac{2}{27}(3, 10, 8, 13, 11, 16, 19)$	0.931	14	(4, 2, 1)
2.33	✓	$\frac{1}{33}(10, 18, 15, 28, 33, 38, 48)$	0.805	12	(4, 2, 1)
2.34	✓	$\frac{1}{47}(22, 20, 21, 42, 43, 62, 64)$	0.854	12	(4, 2)
2.35	✓	$\frac{1}{13}(5, 6, 7, 11, 12, 17, 18)$	0.867	12	(4, 2)
2.36	✓	$\frac{1}{23}(18, 13, 10, 15, 28, 23, 33)$	1.10	16	(3, 1)
2.37	✓	$\frac{4}{11}(1, 1, 2, 2, 3, 3, 4)$	0.846	13	(4, 3, 1)
2.38	✓	$\frac{7}{16}(1, 1, 2, 2, 2, 3, 3)$	1.14	16	(3, 2)
2.39	✓	$\frac{1}{16}(5, 11, 10, 16, 15, 21, 20)$	1.14	17	(4, 2)
2.40	✓	$\frac{1}{23}(9, 10, 19, 18, 28, 29, 27)$	1.10	16	(4, 2)
2.41	✓	$\frac{1}{7}(2, 3, 5, 6, 7, 8, 10)$	0.875	13	(4, 3, 1)
2.42	-	$\frac{1}{41}(11, 22, 30, 33, 41, 52, 55)$	-	14	(4, 2)
2.43	✓	$\frac{1}{37}(11, 29, 20, 40, 31, 42, 51)$	1.06	16	(4, 2)
2.44	✓	$\frac{1}{37}(15, 19, 23, 34, 38, 42, 53)$	1.06	16	(4, 1)
2.45	✓	$\frac{1}{14}(6, 7, 11, 12, 13, 19, 18)$	1.17	17	(3, 1)

Tabla 6: Nilradicales Einstein de dimensión 7. Rango 2

Ejemplo 4.2.4. Degeneración por acción del grupo G_ϕ

En este ejemplo, mostramos cómo encontrar una degeneración no trivial por acción de un grupo monoparamétrico diagonal. Consideremos $\mathfrak{g}_{2.2}$:

$$\mu := \begin{cases} [e_1, e_2] = e_5, [e_1, e_3] = e_6, [e_1, e_4] = 2e_7, [e_2, e_3] = e_4, [e_2, e_6] = e_7, \\ [e_3, e_5] = -e_7, [e_3, e_6] = e_7. \end{cases}$$

$\mathfrak{g}_{2.2}$ es un álgebra de Lie nilpotente de rango 2 con un toro maximal de derivaciones generado por $D_1 = \text{Diag}(1, 0, 0, 0, 1, 1, 1)$ y $D_2 = \text{Diag}(0, 1, 1, 2, 1, 1, 2)$ (con respecto a la base $\{e_i\}$). Si $\phi = aD_1 + bD_2$ es una derivación pre-Einstein, entonces a, b son encontrados resolviendo el sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{cases} \text{tr}(\phi D_1) = \text{tr}(D_1), \\ \text{tr}(\phi D_2) = \text{tr}(D_2). \end{cases}$$

Es así que tenemos $\phi = \frac{1}{2}D_1 + \frac{1}{2}D_2 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 2, 2, 3)$, y por tanto, si $\mathfrak{g}_{2.2}$ fuera un nilradical Einstein, entonces este sería de tipo de autovalor $(1 < 2 < 3; 3, 3, 1)$. El método usado en el Ejemplo 4.2.2 aplicado a esta álgebra es muy engorroso porque el sistema de ecuaciones polinomiales correspondiente al tipo de autovalor $(1 < 2 < 3; 3, 3, 1)$ tiene infinitas soluciones cuyas álgebras son no isomorfas; la familia monoparamétrica 3.1(λ) con $\lambda \neq 0 \neq 1$ es una curva de nilradicales Einstein de tipo $(1 < 2 < 3; 3, 3, 1)$. Analizando soluciones de tal sistema, vemos que no hay soluciones correspondientes al álgebra $\mathfrak{g}_{2.2}$. Es así que debemos buscar otro camino para probar que $\mathfrak{g}_{2.2}$ no es un nilradical Einstein. Por el Teorema 4.1.8, intentamos encontrar una degeneración no trivial de $\mathfrak{g}_{2.2}$ por la acción de un subgrupo monoparamétrico diagonal de G_ϕ . Sea $X \in \mathfrak{g}_\phi$ una matrix diagonal, $X = \text{Diag}(a_1, \dots, a_7)$. Como $\text{tr}(X\phi) = 0$ y $\text{tr}(X) = 0$ entonces $a_4 = -a_5 - a_6 - 2a_7$ y $a_1 = a_7 - a_2 - a_3$. La acción de $g_t = \exp(tX)$ sobre μ es

$$\mu_t := \begin{cases} [e_1, e_2] = e^{t(-a_7+a_3+a_5)}e_5, [e_1, e_3] = e^{t(-a_7+a_2+a_6)}e_6, \\ [e_1, e_4] = 2e^{t(a_2+a_3+a_5+a_6+2a_7)}e_7, [e_2, e_3] = e^{t(-a_2-a_3-a_5-a_6-2a_7)}e_4, \\ [e_2, e_6] = e^{t(a_7-a_2-a_6)}e_7, [e_3, e_5] = -e^{t(a_7-a_3-a_5)}e_7, [e_3, e_6] = e^{t(a_7-a_3-a_6)}e_7. \end{cases}$$

Para encontrar una degeneración no trivial cuando $t \rightarrow \infty$, necesitamos que los exponentes sean no positivos y con al menos uno negativo. Haciendo el mismo truco como en el Ejemplo 4.2.3, nosotros conseguimos

$$\begin{cases} -a_7 + a_3 + a_5 = -b_1^2, -a_7 + a_2 + a_6 = -b_2^2 \\ a_2 + a_3 + a_5 + a_6 + 2a_7 = -b_3^2, -a_2 - a_3 - a_5 - a_6 - 2a_7 = -b_4^2 \\ a_7 - a_2 - a_6 = -b_5^2, a_7 - a_3 - a_5 = -b_6^2, a_7 - a_3 - a_6 = -b_7^2 \end{cases}$$

cuyas soluciones están dadas por

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{4}b_4^2 - a_5 - b_7^2 + \frac{3}{4}b_5^2 + \frac{3}{4}b_6^2, a_3 = -a_5 + \frac{1}{4}b_4^2 - \frac{1}{4}b_5^2 + \frac{3}{4}b_6^2, \\ a_5 &= a_5, a_6 = a_5 + b_7^2 - b_6^2, a_7 = \frac{1}{4}b_4^2 - \frac{1}{4}b_5^2 - \frac{1}{4}b_6^2, b_1 = \pm\sqrt{-1}b_6, \\ b_2 &= \pm\sqrt{-1}b_5, b_3 = \pm\sqrt{-1}b_4, b_4 = b_4, b_5 = b_5, b_6 = b_6, b_7 = b_7. \end{aligned} \quad (57)$$

Como las soluciones deben ser reales, entonces $b_4 = b_5 = b_6 = 0$, y es así que $b_1 = b_2 = b_3 = 0$. Por tanto, para que la degeneración sea no trivial, necesitamos que $b_7 \neq 0$. Haciendo $b_7 = 1$ y $a_5 = 0$, conseguimos $a_2 = -1, a_3 = 0, a_6 = 1, a_7 = 0, a_1 = 1$ y $a_4 = -1$, por lo cual

$$X = \text{Diag}(1, -1, 0, -1, 0, 1, 0).$$

Cuando t tiende a infinito $\mathfrak{g}_t \cdot \mu \rightarrow \tilde{\mu}$

$$\tilde{\mu} := \left\{ \begin{array}{l} [e_1, e_2] = e_5, [e_1, e_3] = e_6, [e_1, e_4] = 2e_7, [e_2, e_3] = e_4, [e_2, e_6] = e_7, [e_3, e_5] = -e_7. \end{array} \right.$$

$(\mathbb{R}^7, \tilde{\mu})$ es no isomorfa a (\mathbb{R}^7, μ) pues $\dim \text{Der}(\mathbb{R}^7, \mu) = 15$ y $\dim \text{Der}(\mathbb{R}^7, \tilde{\mu}) = 17$. Luego la G_ϕ -órbita de μ es no cerrada y en consecuencia $\mathfrak{g}_{2,2}$ no es un nilradical Einstein.

Ejemplo 4.2.5. Aplicando el criterio de la base nice de Nikolayevsky

Consideremos $\mathfrak{g}_{3.1(i_\lambda)}$

$$\left\{ \begin{array}{l} [e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_5, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_6, [e_2, e_5] = \lambda e_7, \\ [e_3, e_4] = (\lambda - 1)e_7. \end{array} \right.$$

La base $\{e_1, \dots, e_7\}$ es una base nice para $\mathfrak{g}_{3.1(i_\lambda)}$ con cualquier λ . Podemos usar el Teorema 4.1.11. Si $\lambda \neq 0, 1$, la matriz \mathbf{U} es dada por

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

La solución general al problema $\mathbf{U}\mathbf{x} = [1]_6$ es dada por

$$\mathbf{x} = \left(t_2, t_1, \frac{1}{2} - t_1 - t_2, \frac{1}{2} - t_1 - t_2, t_1, t_2 \right)^T.$$

Tomando t_1 y t_2 tales que $0 < t_1 < \frac{1}{2}$, $t_2 < \frac{1}{2} - t_1$ conseguimos una solución con coordenadas positivas. Así pues, $\mathfrak{g}_{3.1(i_\lambda)}$ con $\lambda \neq 0, 1$ es un Nilradical.

Si $\lambda = 0$ la matriz \mathbf{U} correspondiente a $\mathfrak{g}_{3.1(i_0)}$ es

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

La solución general al problema $\mathbf{U}\mathbf{x} = [1]_6$ es

$$\left(t, 0, \frac{1}{2} - t, \frac{1}{2} - t, t \right)^T,$$

y se sigue de la nulidad de la segunda coordenada, que $\mathfrak{g}_{3.1(i_0)}$ no es nilradical Einstein. Por un razonamiento análogo, uno obtiene que $\mathfrak{g}_{3.1(i_1)}$ no es un nilradical Einstein.

Rango tres					
n	NE	Derivación pre-Einstein	Min	dim Der	dim SCD
3.1(i_λ) $\lambda \neq 0, 1$	✓	$\frac{1}{2}(1, 1, 1, 2, 2, 2, 3)$	1	15	(4, 1)
3.1(i_λ) $\lambda = 0$	-	$\frac{1}{2}(1, 1, 1, 2, 2, 2, 3)$	-	15	(4, 1)
3.1(i_λ) $\lambda = 1$	-	$\frac{1}{2}(1, 1, 1, 2, 2, 2, 3)$	-	15	(4, 1)
3.1(iii)	-	$\frac{1}{2}(1, 1, 1, 2, 2, 2, 3)$	-	15	(3, 1)
3.2	✓	$\frac{2}{13}(1, 5, 6, 6, 7, 7, 8)$	1.18	17	(4, 2, 1)
3.3	✓	$\frac{1}{21}(5, 12, 15, 17, 27, 22, 27)$	0.954	15	(4, 2, 1)
3.4	✓	$\frac{1}{12}(6, 5, 5, 11, 11, 16, 16)$	0.857	13	(4, 2,)
3.5	✓	$\frac{1}{20}(10, 7, 11, 17, 21, 24, 28)$	0.909	14	(4, 2)
3.6	✓	$\frac{1}{13}(5, 9, 7, 14, 12, 16, 17)$	1.18	18	(4, 1)
3.7	-	$\frac{1}{3}(1, 2, 2, 2, 3, 4, 4)$	-	15	(3, 1)
3.8	✓	$\frac{1}{5}(2, 3, 4, 4, 5, 6, 7)$	1.25	19	(3, 1)
3.9	✓	$\frac{2}{13}(3, 3, 5, 6, 6, 8, 9)$	1.18	18	(3, 1)
3.10	✓	$\frac{1}{20}(12, 7, 11, 16, 19, 23, 30)$	0.909	15	(3, 1)
3.11	✓	$\frac{1}{13}(5, 7, 12, 10, 12, 17, 17)$	1.18	18	(3, 1)
3.12	✓	$\frac{5}{8}(1, 1, 1, 1, 2, 2, 2)$	1.33	19	(3)
3.13	✓	$\frac{1}{21}(8, 11, 15, 15, 19, 27, 30)$	0.954	16	(3, 2)
3.14	✓	$\frac{1}{13}(5, 9, 9, 10, 14, 14, 19)$	1.18	18	(3, 1)
3.15	✓	$\frac{1}{11}(6, 5, 7, 9, 11, 13, 16)$	1.10	17	(3, 1)
3.16	✓	$\frac{1}{12}(5, 8, 5, 8, 13, 13, 18)$	0.857	14	(3, 1)
3.17	✓	$\frac{5}{21}(1, 3, 3, 3, 4, 5, 6)$	0.954	16	(3, 2, 1)
3.18	✓	$\frac{2}{13}(3, 4, 5, 5, 6, 7, 10)$	1.18	19	(2, 1)
3.19	✓	$\frac{1}{8}(5, 6, 6, 5, 6, 11, 11)$	1.33	19	(2)
3.20	✓	$\frac{1}{5}(1, 4, 4, 5, 5, 6, 6)$	1.25	19	(4, 2)
3.21	✓	$\frac{1}{21}(6, 15, 11, 21, 17, 27, 28)$	0.954	15	(4, 2)
3.22	✓	$\frac{1}{20}(7, 12, 10, 19, 17, 29, 24)$	0.909	15	(4, 2)
3.23	✓	$\frac{1}{11}(4, 5, 9, 9, 13, 14, 13)$	1.10	17	(4, 2)
3.24	✓	$\frac{1}{6}(5, 3, 4, 4, 8, 7, 7)$	1.50	22	(3)

Tabla 7: Nilradicales Einstein de dimensión 7. Rango 3

Rango cuatro					
n	NE	Derivación pre-Einstein	Min	dim Der	dim SCD
4.1	✓	$\frac{1}{7}(4, 5, 4, 5, 9, 8, 9)$	1.4	20	(3)
4.2	✓	$\frac{2}{5}(1, 2, 2, 2, 3, 3, 3)$	1.67	25	(3)
4.3	✓	$\frac{1}{7}(5, 5, 6, 5, 4, 10, 9)$	1.4	21	(2)
4.4	✓	$\frac{4}{5}(1, 1, 1, 1, 1, 1, 2)$	1.67	28	(1)

Tabla 8: Nilradicales Einstein de dimensión 7. Rango 4

A weakness of this approach (ver [Lau3]) is however the existence problem; the theorem (Theorem 1.1) does not even suggest when such a distinguished metric does exist. How special are the symplectic or (almost-) complex structures admitting a minimal metric?.

— J. Lauret [Lau3]

5.1 MÉTRICAS COMPATIBLES MINIMALES

Sea N un grupo de Lie nilpotente (simplemente conexo) dotado con una estructura geométrica dada por traslación a izquierda de un tensor en $\mathfrak{n} = \text{Lie}(N)$. En [Lau3], Lauret estudia el problema de distinguir una métrica invariante izquierda de \mathfrak{n} entre todas las métricas invariantes izquierda que se “llevan bien” con la estructura geométrica fija. Si por $\mu : \mathfrak{n} \times \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{n}$ denotamos el corchete del álgebra de Lie \mathfrak{n} y por γ el tensor de \mathfrak{n} que define la estructura geométrica, las siguientes condiciones dan una situación en la cual ciertos pares (N, γ) tienen una métrica invariante a izquierda que es “compatible” con γ , única (salvo isometría y escalamiento) e “inmejorable” (en un sentido que se precisará más adelante).

Cómo en el capítulo anterior, $V := \Lambda^2(\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^n$, $G := \text{GL}_n(\mathbb{R})$ y la acción de G sobre V es por cambio de base. El álgebra de Lie nilpotente \mathfrak{n} está dada por un corchete $\mu \in V$; $\mathfrak{n} = (\mathbb{R}^n, \mu)$.

Definición 5.1.1. [Lau3, Definition 2.1] Una *estructura geométrica invariante* sobre N es aquella dada por traslación izquierda de un tensor γ sobre \mathfrak{n} satisfaciendo las siguientes condiciones:

(i) γ es no degenerada en “alguna forma” y esta propiedad se mantiene por la acción natural de $\text{GL}(\mathfrak{n})$ sobre γ .

(ii) *Condición de integrabilidad:*

$$\text{IC}(\gamma, \mu) = 0$$

donde $\text{IC}(\gamma, \mu)$ es otro tensor, el cual sólo depende de μ y γ , y es polinomial sobre μ . Además la siguiente propiedad de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ -equivarianza se da:

$$\text{IC}(g \cdot \gamma, g \cdot \mu) = g \cdot \text{IC}(\gamma, \mu), \quad \forall g \in \text{GL}_n(\mathbb{R}).$$

(iii) *Condición de Ortogonalidad:* Una métrica Riemanniana invariante a izquierda sobre N se dice compatible con (N, γ) si el correspondiente producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre \mathfrak{n} satisface una *condición de ortogonalidad*

$$\text{OC}(\gamma, \langle \cdot, \cdot \rangle) = 0$$

donde $OC(\gamma, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un tensor en el cual sólo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y γ están involucrados y el mapa OC es $GL_n(\mathbb{R})$ -equivariante:

$$OC(g \cdot \gamma, g \cdot \mu) = g \cdot OC(\gamma, \mu), \forall g \in GL_n(\mathbb{R})$$

Es denotado por $C = C(N, \gamma)$ el conjunto de todas las métricas invariantes a izquierda sobre N que son compatibles con (N, γ) , esto es

$$C = \{ \langle \cdot, \cdot \rangle / OC(\gamma, \langle \cdot, \cdot \rangle) = 0 \}.$$

(iv) El grupo (algebraico)

$$G_\gamma = \{ g \in GL_n(\mathbb{R}) / g \cdot \gamma = \gamma \}$$

es reductivo y auto adjunto (es decir $g^T \in G_\gamma$ para cualquier $g \in G_\gamma$) con respecto a algún $\langle \cdot, \cdot \rangle \in C$.

(v) $C = G_\gamma$ para cualquier $\langle \cdot, \cdot \rangle \in C$ (recuerde que $g \cdot \langle \cdot, \cdot \rangle = \langle g^{-1} \cdot, g^{-1} \cdot \rangle$).

Un par (N, γ) satisfaciendo estas condiciones es llamado *grupo de Lie nilpotente de clase γ* .

Definición 5.1.2. [Lau3, Definition 2.2] Para cada métrica compatible $\langle \cdot, \cdot \rangle$, nosotros consideramos la proyección ortogonal $Ric_{\langle \cdot, \cdot \rangle}^\gamma$ de el operador de Ricci $Ric_{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ sobre $\mathfrak{g}_\gamma = Lie(G_\gamma)$ con respecto al producto interno usual de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$, $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$. $Ric_{\langle \cdot, \cdot \rangle}^\gamma$ es llamado *operador de Ricci invariante*, y el correspondiente *tensor de Ricci invariante* es dado por $ric^\gamma = \langle Ric^\gamma \cdot, \cdot \rangle$.

Definición 5.1.3. [Lau3, Definition 2.3] Una métrica invariante a izquierda $\langle \cdot, \cdot \rangle$ compatible con un grupo de Lie nilpotente de clase γ (N, γ) es llamada *minimal* si

$$\|Ric_{\langle \cdot, \cdot \rangle}^\gamma\|^2 = \min\{\|Ric_{\langle \cdot, \cdot \rangle}^\gamma\|^2 / \langle \cdot, \cdot \rangle' \in C(N, \gamma), sc(\langle \cdot, \cdot \rangle') = ct\}$$

donde ct es cierta constante.

Estas nociones fueron dadas por Lauret, quien estuvo motivado por sus estudios sobre solvariedades Einstein. Tales métricas compatibles minimales (cuando existen) tienen ciertas “propiedades privilegiadas”: unicidad, puntos de equilibrios de flujos geométricos (Teorema 5.1.5), grupo de isometrías grandes, etc. *A priori*, tales propiedades no son obvias desde la definición, pero debido a la intrigante relación entre el *flujo de Ricci normalizado* sobre grupos de Lie nilpotentes ([Lau3, Proposition 2.5]) y el *flujo gradiente del cuadrado de la norma de la aplicación momento*, estas propiedades se derivan de las descritas en el capítulo 1. Nosotros invitamos al lector interesado a consultar [Lau3] para un completa discusión de estas nociones y esta conexión.

Sea $\mu \in V$ y (N_μ, γ) un grupo de Lie nilpotente de clase γ . Sin pérdida de generalidad, de ahora en más, permítanos suponer que el producto interno canónico de \mathbb{R}^n (el cual también denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$) es compatible con γ y que G_γ es autoadjunto con respecto a este. Así G_γ es compatible con la descomposición de Cartan usual de $GL_n(\mathbb{R})$ como se había dicho antes: $G_\gamma = K_\gamma \exp(\mathfrak{p}_\gamma)$ con $K_\gamma = G_\gamma \cap O(n, \mathbb{R})$ es un subgrupo compacto maximal de G_γ y $\mathfrak{p}_\gamma = \mathfrak{g}_\gamma \cap \text{sym}(n)$ es un subespacio vectorial el espacio de matrices simétricas. Se sigue así que $m_{\mathfrak{g}_\gamma}(v)$ es la proyección ortogonal de $m_{\mathfrak{g}_\gamma}(v)$ sobre \mathfrak{p}_γ para todo $v \in V \setminus \{0\}$.

Proposición 5.1.4. [Lau3, Proposition 4.2] Sea (N_μ, γ) un grupo de Lie nilpotente de clase γ . Entonces

(i)

$$\mathfrak{m}_{\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})}(\mu) = \frac{4}{\|\mu\|^2} \text{Ric}_\mu$$

donde Ric_μ es el operador de Ricci de la variedad Riemanniana $(N_\mu, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

(ii)

$$\mathfrak{m}_{\mathfrak{g}_\gamma}(\mu) = \frac{4}{\|\mu\|^2} \text{Ric}_\mu^\gamma$$

donde Ric_μ^γ es el operador de Ricci invariante de $(N_\mu, \gamma, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Teorema 5.1.5. [Lau3, Proposition 4.3 and 4.4] Sea (N_μ, γ) un grupo de Lie nilpotente de clase γ , sean $\tilde{\mu} = g \cdot \mu$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle = g \cdot \langle \cdot, \cdot \rangle$ con $g \in G_\gamma$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- (i) $\tilde{\mu}$ es un punto crítico de $F_{\mathfrak{g}_\gamma}$.
- (ii) $F_{\mathfrak{g}_\gamma} |_{G_\gamma \cdot \mu}$ alcanza su valor mínimo en $\tilde{\mu}$.
- (iii) $\text{Ric}_{\tilde{\mu}}^\gamma = c \text{Id} + D$ para algún $c \in \mathbb{R}$ y $D \in \text{Der}(\tilde{\mu})$.
- (iv) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define una métrica compatible minimal.
- (v) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un solitón de Ricci invariante. ([Lau3, Definition 2.6]).
- (vi) $\text{Ric}_{(\cdot, \cdot)}^\gamma = c \text{Id} + D$ para algún $c \in \mathbb{R}$ y $D \in \text{Der}(\mu)$

Más aún, hay a lo más una métrica invariante a izquierda compatible con (N, γ) (salvo isometría y escalamiento) satisfaciendo cualquiera de las condiciones anteriores.

El teorema anterior muestra que el problema de existencia para métricas compatibles minimales es equivalente a saber si una G_γ -órbita es distinguida para la acción de G_γ sobre $V := \Lambda^2(\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^n$. Es así que nuestros resultados del capítulo 2 sirven para estudiar este problema y resolverlo parcialmente; para los espacios nice de la acción de G_γ sobre V .

Denotemos por $\mathfrak{a}_\gamma := \mathfrak{a} \cap \mathfrak{p}_\gamma$ una subálgebra abeliana de \mathfrak{g}_γ maximal en \mathfrak{p}_γ y $A_\gamma := \exp(\mathfrak{a}_\gamma)$. Como estamos considerando varios grupos y sus respectivas aplicaciones momento, es conveniente introducir la siguiente notación:

Definición 5.1.6. Sea G_γ un subgrupo reductivo $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ compatible con la descomposición de Cartan usual de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ y sea W un subespacio A_γ -invariante de $V := \Lambda^2(\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^n$. Nosotros llamamos a W A_γ -nice si W es un espacio nice con respecto a la acción de G_γ sobre V ; es decir $\text{Proj}_{\mathfrak{p}_\gamma} \mathfrak{m}_{\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})}(W) \subseteq \mathfrak{a}_\gamma$.

Notación 5.1.7. Denotemos por $\mathfrak{R}_\gamma(\mu)$ el conjunto ordenado de los pesos relacionados con μ con respecto a la acción de G_γ sobre V . Es claro que $\mathfrak{R}_\gamma(\mu) = \text{Proj}_{\mathfrak{a}_\gamma} \mathfrak{R}(\mu)$ donde $\mathfrak{R}(\mu)$ son los pesos relacionados con μ a la acción de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ sobre V .

Usando esta notación y los resultados que dimos en el capítulo 2 tenemos este resultado que permite estudiar el problema de métricas compatibles minimales.

Teorema 5.1.8. Sea W un espacio A_γ -nice y sea (N_μ, γ) un grupo de Lie nilpotente de clase γ con $\mu \in W$. (N_μ, γ) admite una métrica compatible minimal si y solo si la ecuación

$$\mathbf{U}_\mu^\gamma[x_i] = \lambda[1]$$

tiene una solución $[x_i]$ tal que cada x_i es positiva y $\sum x_i = 1$, para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. Aquí, \mathbf{U}_μ^γ es la matriz de Gram $(\mathfrak{R}_\gamma(\mu), \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

5.2 ÁLGEBRAS DE LIE 2-PASOS NILPOTENTE SIMPLÉCTICAS DE DIMENSIÓN 6

En esta sección queremos estudiar las métricas compatibles minimales sobre las álgebras de Lie 2-pasos nilpotentes simplécticas de dimensión 6. En este caso, las métricas compatibles minimales coinciden con solitones de Ricci al *Flujo de Ricci Anti-complexificado*. Para hacer esto, vamos a usar la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes simplécticas de dimensión 6 dada en [KGM]. En tal dimensión ya se tienen familias infinitas incluso dentro de las álgebras de Lie 2-pasos nilpotente.

Teorema 5.2.1. [KGM, Theorem 5] Sea $\omega_{cn} := e_1^* \wedge e_6^* + e_2^* \wedge e_5^* + e_3^* \wedge e_4^*$ la forma simpléctica canónica de \mathbb{R}^6 . Entonces toda álgebra de Lie 2-pasos nilpotente simpléctica de dimensión 6, $(\mathbb{R}^6, \mu, \omega_{cn})$, está dada por alguno de los siguientes corchetes:

$$16. (a) [e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_5] = e_6, [e_2, e_4] = e_6, [e_4, e_5] = e_3$$

$$16. (b) [e_1, e_2] = -e_3, [e_1, e_5] = -e_6, [e_2, e_4] = e_6, [e_4, e_5] = e_3$$

$$17. [e_1, e_3] = e_5, [e_1, e_4] = e_6, [e_2, e_3] = e_6$$

$$18. (a_t) [e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = \frac{t}{t-1}e_5, [e_2, e_3] = \frac{1}{t-1}e_6 \text{ con } t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

$$18. (b_t) [e_1, e_2] = -2te_4, [e_1, e_3] = -2te_5 + (1+t^2)e_6, [e_2, e_3] = e_5$$

$$18. (c) [e_1, e_2] = 2e_4, [e_1, e_3] = -2e_4 + e_5, [e_2, e_3] = -e_6$$

$$23. (a) [e_1, e_2] = e_5, [e_1, e_3] = e_6$$

$$23. (b) [e_1, e_2] = -e_4, [e_2, e_3] = e_6$$

$$23. (c) [e_1, e_2] = e_5, [e_1, e_4] = e_3$$

$$24. (a) [e_1, e_4] = e_6, [e_2, e_3] = e_5$$

$$24. (b) [e_3, e_6] = -e_1, [e_4, e_5] = -e_2$$

$$25. [e_1, e_2] = e_6$$

Debemos decir que hemos encontrado varios errores en el trabajo [KGM]. Uno de ellos corresponde al corchete [23. (c)] cuya corrección nos ha sido comunicada por los autores. La estructura simpléctica dada en [KGM, 16. (b)] también es incorrecta y en este caso los autores no se han pronunciado al respecto.

Teorema 5.2.2. Toda álgebra de Lie 2-pasos nilpotente simpléctica de dimensión 6 que se encuentre en la lista anterior posee una métrica compatible minimal. Un punto crítico de $F_{\mathfrak{sp}_6(\mathbb{R})}$ en la $SP_6(\mathbb{R})$ -órbita es dado en la Tabla 9.

La notación empleada en la Tabla 9 es la siguiente. En la columna de punto crítico se da un punto crítico $\tilde{\mu}$ en la $SP_6(\mathbb{R})$ -órbita (el cual define la métrica compatible minimal). En la columna $\|\beta\|^2$ se da el cuadrado de la norma del estrato que define el punto crítico $\tilde{\mu}$ y en Derivación, damos la derivación de $(\mathbb{R}^6, \tilde{\mu})$ tal que

$$m_{\mathfrak{sp}_6(\mathbb{R})}(\tilde{\mu}) = -\|\beta\|^2 \text{Id} + \text{Derivación}.$$

Y en la última columna damos la dimensión del grupo de automorfismos del álgebra de Lie 2-pasos nilpotente simpléctica $(\mathbb{R}^6, \tilde{\mu}, \omega_{cn})$.

Not.	Punto Crítico	Derivación	$\ \beta\ ^2$	dim Aut
16.(a)	$[e_1, e_2] = \frac{\sqrt{2}}{4} e_3, [e_1, e_5] = \frac{\sqrt{2}}{4} e_6,$ $[e_2, e_4] = \frac{\sqrt{2}}{4} e_6, [e_4, e_5] = \frac{\sqrt{2}}{4} e_3$	$\frac{1}{2} \text{Diag}(1, 2, 3, 1, 2, 3)$	1	6
17.	$[e_1, e_3] = \frac{\sqrt{6}}{6} e_5, [e_1, e_4] = \frac{\sqrt{6}}{6} e_6,$ $[e_2, e_3] = \frac{\sqrt{6}}{6} e_6$	$\frac{1}{6} \text{Diag}(3, 5, 6, 8, 9, 11)$	$\frac{7}{6}$	7
18.(a _t)	$[e_1, e_2] = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(t-1)^2}{t^2-t+1}} e_4,$ $[e_1, e_3] = \frac{t}{2(t-1)} \sqrt{\frac{(t-1)^2}{t^2-t+1}} e_5,$ $[e_2, e_3] = \frac{1}{2(t-1)} \sqrt{\frac{(t-1)^2}{t^2-t+1}} e_6$	$\text{Diag}(1, 1, 1, 2, 2, 2)$	$\frac{3}{2}$	8
18.(b _t)	$[e_1, e_2] = \frac{t}{\sqrt{3}t^2+1} e_4,$ $[e_1, e_3] = \frac{t}{2\sqrt{3}t^2+1} e_5 + \frac{1}{2\sqrt{3}t^2+1} e_6,$ $[e_2, e_3] = \frac{1}{2\sqrt{3}t^2+1} e_5 - \frac{t}{2\sqrt{3}t^2+1} e_6$	$\text{Diag}(1, 1, 1, 2, 2, 2)$	$\frac{3}{2}$	8
18.(c)	$[e_1, e_2] = -\frac{\sqrt{3}}{12} e_4 - \frac{\sqrt{3}}{4} e_5,$ $[e_1, e_3] = \frac{\sqrt{3}}{4} e_4 + \frac{\sqrt{3}}{12} e_5,$ $[e_2, e_3] = \frac{\sqrt{3}}{6} e_6$	$\text{Diag}(1, 1, 1, 2, 2, 2)$	$\frac{3}{2}$	10
23.(a)	$[e_1, e_2] = \frac{1}{2} e_5, [e_1, e_3] = \frac{1}{2} e_6$	$\frac{1}{4} \text{Diag}(4, 5, 6, 8, 9, 10)$	$\frac{7}{4}$	9
23.(b)	$[e_1, e_2] = -\frac{1}{2} e_4, [e_2, e_3] = \frac{1}{2} e_6$	$\text{Diag}(1, 1, 1, 2, 2, 2)$	$\frac{3}{2}$	8
23.(c)	$[e_1, e_2] = \frac{1}{2} e_5, [e_1, e_4] = \frac{1}{2} e_3$	$\text{Diag}(1, 1, 2, 1, 2, 2)$	$\frac{3}{2}$	8
24.(a)	$[e_1, e_4] = \frac{1}{2} e_6, [e_2, e_3] = \frac{1}{2} e_5$	$2 \text{Diag}(1, 1, 2, 2, 3, 3)$	1	6
24.(b)	$[e_3, e_6] = -\frac{1}{2} e_1, [e_4, e_5] = -\frac{1}{2} e_2$	$\frac{1}{2} \text{Diag}(3, 3, 2, 2, 1, 1)$	1	6
25.	$[e_1, e_2] = \frac{\sqrt{2}}{2} e_6$	$\frac{1}{2} \text{Diag}(3, 4, 5, 5, 6, 7)$	$\frac{5}{2}$	12

Tabla 9: Clasificación de las métricas compatibles minimales sobre las álgebras de Lie 2-pasos nilpotentes simplécticas

En tal lista, casi todas se pueden estudiar con el criterio dado en 5.1.8. Las álgebras 18. (b_t) y 18. (c) son estudiadas con un método similar al dado 4.2.2 (salvo que en este caso no tenemos un candidato para una derivación “pre-Einstein”). El siguiente ejemplo muestra cómo se obtiene el teorema anterior; salvo 18. (b_t) y 18. (c), todas las demás se estudian como en el ejemplo. Invitamos al lector a revisar el apéndice donde cada álgebra es estudiada en detalle.

Ejemplo 5.2.3. Consideremos el álgebra de Lie $n := (\mathbb{R}^n, \mu)$ dada por la suma directa de dos álgebras de Lie de Heisenberg de dimensión 3

$$\mu := \{[e_1, e_4] = e_6, [e_2, e_3] = e_5$$

y consideremos la estructura simpléctica

$$\omega := e_1^* \wedge e_6^* + e_2^* \wedge e_5^* + e_3^* \wedge e_4^*.$$

Estos datos corresponden a la álgebra de Lie 2-pasos nilpotente simpléctica $(\mathbb{R}^n, \mu, \omega)$ dada en 24. (a).

Es fácil ver que el producto interno canónico de \mathbb{R}^6 define una métrica compatible con $(\mathbb{R}^n, \mu, \omega)$ y que $G_\omega = \text{SP}(6, \mathbb{R})$ es autoadjunto con respecto a este. Cualquier métrica compatible con ω está en $\text{SP}(6, \mathbb{R}) \cdot \langle \cdot, \cdot \rangle$, así que debemos minimizar $\|\text{Ric}_{(\cdot, \cdot)}^\omega\|^2$ a lo largo de la órbita de métricas $\text{SP}(6, \mathbb{R}) \cdot \langle \cdot, \cdot \rangle$, lo cual es equivalente a minimizar $\|m_{\text{sp}(6, \mathbb{R})}\|^2$ sobre la $\text{SP}(6, \mathbb{R})$ -órbita de μ . Por el teorema 5.1.5, debemos mostrar que $\text{SP}(6, \mathbb{R}) \cdot \mu$ es una órbita $\text{SP}(6, \mathbb{R})$ -distinguida.

Sea

$$W = \text{span}_{\mathbb{R}}\{\mu_{14}^6, \mu_{23}^5\},$$

veamos que W es un espacio A_ω -nice. Una forma de hacer esto es notando que W es un espacio nice para la acción de $\text{GL}_6(\mathbb{R})$; así $\text{Proj}_{\mathfrak{p}_\omega} \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}_\omega$ y se sigue que W es un espacio \mathfrak{a}_ω -nice.

Otra forma de ver esto es usando el Corolario 2.3.7. El conjunto de raíces $\Delta(\mathfrak{sp}(6, \mathbb{R}))$ es dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} \pm \text{Diag}(1, 0, 0, 0, 0, -1), \quad \pm \text{Diag}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), \quad \pm \text{Diag}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), \\ \pm \text{Diag}(0, 1, 0, 0, -1, 0), \quad \pm \text{Diag}(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}), \quad \pm \text{Diag}(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}), \\ \pm \text{Diag}(0, 0, 1, -1, 0, 0), \quad \pm \text{Diag}(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0), \quad \pm \text{Diag}(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0), \end{array} \right\}.$$

Los pesos de W con respecto a la acción de $\text{SP}(6, \mathbb{R})$ son

$$\{\alpha_1 := \text{Diag}(-1, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 1), \alpha_2 := \text{Diag}(0, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0)\}.$$

Como $\alpha_1 - \alpha_2 \notin \Delta(\mathfrak{sp}(6, \mathbb{R}))$, se sigue que W es un espacio \mathfrak{a}_ω -nice.

En virtud de 5.1.8, necesitamos mostrar que $\text{mcc}(\alpha_1, \alpha_2) \in \text{int}(\text{CH}(\{\alpha_1, \alpha_2\}))$.

$$U_\mu^Y = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Como $X = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ es una solución positiva al problema $U_\mu^Y = \lambda[1]_2$, se sigue que $(N_\mu, \omega(\pm))$ admite una métrica compatible minimal.

Para encontrar tal métrica, resolvemos el problema

$$m_{\text{sp}(6, \mathbb{R})}(\exp(X) \cdot \mu) = \text{mcc}(\{\alpha_1, \alpha_2\}) = \text{Diag}(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \quad (58)$$

con $X \in \mathfrak{a}_\omega$; $X = \text{Diag}(a, b, c, -c, -b, -a)$. Permítanos denotar por $\tilde{\mu}$ a $\exp(X) \cdot \mu$

$$\tilde{\mu} = \left\{ [e_1, e_4] = \frac{e^c}{e^{2a}} e_6, [e_2, e_3] = \frac{1}{e^{2b+c}} e_5. \right.$$

Así, tenemos que

$$m_{\text{sp}(6, \mathbb{R})}(\tilde{\mu}) = \text{Diag}(-2e^{2c-4a}, -2e^{-4b-2c}, e^{2c-4a} - e^{-4b-2c}, e^{-4b-2c} - e^{2c-4a}, 2e^{-4b-2c}, 2e^{2c-4a}).$$

Haciendo $X = (\ln(2), 0, \ln(2), -\ln(2), 0, -\ln(2))$, encontramos una solución a la ecuación (58), así $\tilde{\mu} = \frac{1}{2}\mu$ es un punto crítico de $F_{\text{sp}(6, \mathbb{R})}$ el cual define la métrica compatible minimal de (N_μ, ω) .

APÉNDICE

APÉNDICE: CUENTAS DE RESPALDO

A.1 CLASIFICACIÓN DE LOS NILRADICALES EINSTEIN DE DIMENSIÓN 7

Para conseguir la clasificación de los nilradicales Einstein de dimensión 7, nosotros seguimos la clasificación de Carles de las álgebras de Lie nilpotentes complejas en bajas dimensiones (con un par de correcciones por Magnin in [M]). En [Car], Carles compara su trabajo con previas clasificaciones; las dadas por Romdhani, Safiullina y Seeley. Nosotros recordamos también esa parte del trabajo de Carles. La notación es la siguiente:

CARLES	ROMDHANI	SAFIULLINA	SELLEY
dim Der	dim Serie derivada		dim Serie C. Desc.

La diferencia entre la lista dada en [Car] y aquella en [M] son las álgebras 1.01(i), 1.01(ii), 1.8, 1.9, 1.12, 2.2, 2.10, 2.45, 2.46, 3.1(ii) de la lista de Carles. Por ejemplo, en [Car], 2.45 es isomorfa a 2.38 y 2.46 es isomorfa a 2.36, así que Magnin omite 2.46 y corrige 2.45.

En [M], las únicas álgebras de rango ≥ 1 que no están escritas en una base nice son 1.2(ii), 1.2(iv), 1.3(i $_{\lambda}$), 1.3(ii), 1.3(v), 1.11, 1.12, 1.13, 1.14, 1.15, 1.16, 1.17, 1.18, 1.21, 2.2, 2.11, 2.24, 2.25, 2.26, 2.27, 2.37. Las álgebras restantes son muy fáciles de estudiar aplicando el criterio de la base nice de Nikolayevsky [Nik1, Theorem 3.].

En los casos donde hemos dado un nilsoliton de forma explícita para probar que cierta álgebra es un nilradical Einstein, nosotros también damos el correspondiente isomorfismo.

Como cualquier álgebra de Lie nilpotente de dimensión menor ó igual a 6 es un nilradical Einstein y la suma directa de nilradicales Einstein es un nilradical Einstein, entonces nosotros nos enfocamos en estudiar álgebras indescomponibles.

Sea m la aplicación momento sin normalizar para la acción de $GL_n(\mathbb{R})$ sobre $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^n$ por "cambio de base"(cf. [Lau1]). Sea $\mu \in V$ un corchete de álgebra de Lie y denotemos por Ric_{μ} el operador de Ricci de la nilvariedad $(N_{\mu}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, donde N_{μ} es el grupo de Lie simplemente conexo con $\text{Lie}(N_{\mu}) = (\mathbb{R}^n, \mu)$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno canónico de \mathbb{R}^n , entonces

$$m(\mu) = 4\text{Ric}_{\mu}. \quad (59)$$

Por familiaridad con teoría geométrica de invariantes, nosotros trabajamos con m en lugar de Ric , así que las cuentas están hechas usando m .

A.1.1 Rango cero

Recuerde que un álgebra de Lie nilpotente de rango cero(también llamada álgebra característicamente nilpotente) no puede ser un nilradical Einstein pues éstas no admiten una \mathbb{N} -graduación. Así, las siguientes álgebras no son nilradicales Einstein:

0.1	$n_{7,2}$		(1,2,3,4,5,7)F
dim Der 10	dim Serie derivada (7,5,1,0)		dim Serie C. Desc. (7,5,4,3,2,1,0)

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_1, e_5] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_6, [e_2, e_4] = e_7, [e_2, e_5] = e_7, [e_3, e_4] = -e_7$$

0.2	$n_{7,4}$	L_{75}^{33}	(1,2,3,4,5,7)H
dim Der 10	dim Serie derivada (7,5,0)		dim Serie C. Desc. (7,5,4,3,2,1,0)

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_1, e_5] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_5 + e_7, [e_2, e_4] = e_6, [e_2, e_5] = e_7$$

0.3	$n_{7,7}$	L_{75}^{34}	(1,2,3,4,5,7)E
dim Der 11	dim Serie derivada (7,5,0)		dim Serie C. Desc. (7,5,4,3,2,1,0)

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_1, e_5] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_6 + e_7, [e_2, e_4] = e_7$$

0.4 $_{\lambda}$	$n_{7,14}^{\lambda}$	$L_{74}^{25}(n_3)$ ($\alpha = \lambda$)	(1,2,4,5,7)N ($\xi = \frac{\lambda+2\sqrt{-1}}{\lambda-2\sqrt{-1}} \neq 1,$ $\lambda \neq \pm 2\sqrt{-1}$) (1,2,4,5,7)M ($\xi = 0, \lambda = -2\sqrt{-1}$)
dim Der 10	dim Serie derivada (7,5,1,0)		dim Serie C. Desc. (7,5,4,2,1,0)

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = \lambda e_7 + e_6, [e_1, e_5] = e_7, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_5, [e_2, e_4] = e_7, [e_2, e_5] = e_6, [e_3, e_5] = e_7$$

0.5	$n_{7,16}$	$L_{74}^{17}(n_3)$	(1,2,4,5,7)N $\xi = 1$
dim Der 10	dim Serie derivada (7,5,1,0)		dim Serie C. Desc. (7,5,4,2,1,0)

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_6 + e_7, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_5, [e_2, e_5] = e_6, [e_3, e_5] = e_7$$

0.6	$\mathfrak{n}_{7,20}$	$L_{74}^{26}(\mathfrak{n}_3)$ ($\alpha \neq 0$)	(1,2,4,5,7)J
dim Der 10	dim Serie derivada (7,5,1,0)	dim Serie C. Desc. (7,5,4,2,1,0)	

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_7, [e_1, e_5] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_5, [e_2, e_4] = e_6, [e_2, e_5] = e_7, [e_3, e_4] = e_7$$

0.7	$\mathfrak{n}_{7,25}$		(1,3,4,5,7)I
dim Der 10	dim Serie derivada (7,5,1,0)	dim Serie C. Desc. (7,5,4,2,1,0)	

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_7, [e_1, e_5] = e_7, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_5, [e_2, e_4] = e_6, [e_2, e_5] = e_6, [e_3, e_5] = e_7$$

0.8	$\mathfrak{n}_{7,34}$	$L_{74}^{22}(\mathfrak{n}_3)$	(1,2,4,5,7)G
dim Der 10	dim Serie derivada (7,4,1,0)	dim Serie C. Desc. (7,4,3,2,1,0)	

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_7, [e_1, e_4] = e_5, [e_1, e_5] = e_6, [e_2, e_3] = e_6, [e_2, e_4] = e_6, [e_2, e_6] = e_7, [e_4, e_5] = -e_7$$

A.1.2 Rango uno

1.01(i)	$n_{7,43}$	L_{75}^{12}	(1,2,3,5,7)B
dim Der 11	dim Serie derivada (7,4,0)		dim Serie C. Desc. (7,4,3,2,1,0)

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_1, e_5] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_5 + e_7, [e_3, e_4] = -e_6, [e_3, e_5] = -e_7$$

Derivación pre-Einstein: $\phi = \text{Diag}(0, 1, 0, 1, 1, 1, 1)$. Esta álgebra no es un nilradical Einstein por [Nik2, Theorem 1]; $\phi \not\asymp 0$.

1.01(ii)	$n_{7,47}$	L_{75}^{13}	(1,2,4,5,7)B
dim Der 12	dim Serie derivada (7,4,0)		dim Serie C. Desc. (7,4,3,2,1,0)

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_1, e_5] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_6 + e_7, [e_3, e_4] = -e_7$$

Derivación pre-Einstein: $\phi = \text{Diag}(0, 1, 0, 1, 1, 1, 1)$. Esta álgebra no es un nilradical Einstein por [Nik2, Theorem 1]; $\phi \not\asymp 0$.

1.02	$n_{7,23}$		(1,2,4,5,7)K
dim Der 11	dim Serie derivada (7,5,1,0)		dim Serie C. Desc. (7,5,4,2,1,0)

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_5] = e_6, [e_2, e_3] = e_5, [e_2, e_4] = e_6, [e_2, e_5] = e_7, [e_2, e_6] = e_7, [e_3, e_5] = -e_7$$

Derivación pre-Einstein: $\phi = \frac{1}{2} \text{Diag}(0, 1, 1, 1, 2, 2, 3)$. Esta álgebra no es un nilradical Einstein por [Nik2, Theorem 1]; $\phi \not\asymp 0$.

1.03	$n_{7,26}$	$L_{74}^{13}(n_3)$	(1,3,4,5,7)G
dim Der 11	dim Serie derivada (7,5,1,0)		dim Serie C. Desc. (7,5,4,2,1,0)

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_6, [e_2, e_4] = e_7, [e_2, e_5] = e_7, [e_3, e_4] = -e_7$$

Derivación pre-Einstein: $\phi = \frac{2}{3} \text{Diag}(0, 1, 1, 1, 1, 2, 2)$. Esta álgebra no es un nilradical Einstein por [Nik2, Theorem 1]; $\phi \not\asymp 0$.

1.1(i_λ) $\lambda \neq 0, 1$	$n_{7,1}^\lambda$ $\lambda \neq 0, 1$		(1,2,3,4,5,7)I ($\xi = \lambda, \xi \neq 0$)
dim Der 10	dim Serie derivada (7,5,1,0)	dim Serie C. Desc. (7,5,4,3,2,1,0)	

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_1, e_5] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_5, [e_2, e_4] = e_6, [e_2, e_5] = \lambda e_7, [e_3, e_4] = (1 - \lambda)e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Una solución a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{10}(1, 2, 2, 2, 1, 2, 1, 2, 1)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Derivación pre-Einstein: $\frac{1}{5} \text{Diag}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$
 $\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{5}{7} \approx 0.7142857143$

1.1(i_λ) $\lambda = 0$	$n_{7,1}^\lambda$ $\lambda = 0$		(1,2,3,4,5,7)I ($\xi = 0$)
dim Der 10	dim Serie derivada (7,5,1,0)	dim Serie C. Desc. (7,5,4,3,2,1,0)	

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_1, e_5] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_5, [e_2, e_4] = e_6, [e_3, e_4] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = (t_2, -\frac{1}{5} + t_1 + t_2, 0, \frac{3}{5} - t_1 - t_2, \frac{2}{5} - t_2, \frac{3}{5} - t_1 - t_2, t_1, t_2)^T$. Esta álgebra no es un nilradical Einstein.

Derivación pre-Einstein: $\frac{1}{5} \text{Diag}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$

1.1(i $_{\lambda}$) $\lambda = 1$	$n_{7,1}^{\lambda}$ $\lambda = 1$	L_{75}^{30}	$(1, 2, 3, 4, 5, 7)G$
dim Der 11	dim Serie derivada $(7, 5, 0)$	dim Serie C. Desc. $(7, 5, 4, 3, 2, 1, 0)$	

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_1, e_5] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_5, [e_2, e_4] = e_6, [e_2, e_5] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = (0, \frac{2}{5} - t_1, \frac{3}{5} - t_1 - t_2, t_1, -\frac{1}{5} + t_1 + t_2, t_1, t_2, \frac{3}{5} - t_1 - t_2)^T$. Esta álgebra no es un nilradical Einstein.

Derivación pre-Einstein: $\frac{1}{5} \text{Diag}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$

1.1(ii)	$n_{7,3}$		$(1, 2, 3, 4, 5, 7)C$
dim Der 11	dim Serie derivada $(7, 5, 1, 0)$	dim Serie C. Desc. $(7, 5, 4, 3, 2, 1, 0)$	

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_1, e_5] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_5] = e_7, [e_3, e_4] = -e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = (t_1, \frac{2}{5}, \frac{3}{5} - t_1, 0, -\frac{1}{5}, \frac{3}{5} - t_1, t_1)^T$. Esta álgebra no es un nilradical Einstein.

Derivación pre-Einstein: $\frac{1}{5} \text{Diag}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$

1.1(iii)	$\mathfrak{n}_{7,11}$	$L_{74}^{41}(\mathfrak{n}_3)$	(2, 3, 4, 5, 7)G
dim Der 10	dim Serie derivada (7, 5, 1, 0)		dim Serie C. Desc. (7, 5, 4, 3, 2, 0)

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_1, e_5] = e_6, [e_2, e_3] = e_5, [e_2, e_4] = e_6, [e_2, e_5] = -e_7, [e_3, e_4] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Una solución a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{10}(2, 3, 2, 1, 1, 1, 2, 2)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Derivación pre-Einstein: $\frac{1}{5} \text{Diag}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{5}{7} \approx 0.714$$

1.1(iv)	$\mathfrak{n}_{7,22}$	$L_{74}^{27}(\mathfrak{n}_3)$	(1, 2, 4, 5, 7)I
dim Der 11	dim Serie derivada (7, 5, 1, 0)		dim Serie C. Desc. (7, 5, 4, 2, 1, 0)

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_5] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_5, [e_2, e_4] = e_6, [e_2, e_5] = e_7, [e_3, e_4] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $\mathbf{U}x = [1]$: $x = (\frac{2}{5} - t_1, \frac{1}{5} - t_1 + t_2, \frac{1}{5} - t_2 + t_1, t_1, \frac{1}{5} - t_2 + t_1, t_2, 0, \frac{2}{5} - t_1)^T$. Esta álgebra no es un nilradical Einstein.

Derivación pre-Einstein: $\frac{1}{5}$ Diag(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)

1.1(v)	$n_{7,42}$	$L_{74}^2(3\mathbb{C})$	(1, 2, 3, 5, 7)C
dim Der 10	dim Serie derivada (7, 4, 0)		dim Serie C. Desc. (7, 4, 3, 2, 1, 0)

$[e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_1, e_5] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_5, [e_2, e_4] = e_6, [e_2, e_5] = e_7, [e_3, e_4] = -e_7$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $\mathbf{U}x = [1]$: $x = (\frac{2}{5} - t_1, \frac{3}{5} - t_1 - t_2, t_1, -\frac{1}{5} + t_1 + t_2, t_1, t_2, \frac{3}{5} - t_1 - t_2, 0)^T$. Esta álgebra no es un nilradical Einstein.

Derivación pre-Einstein: $\frac{1}{5}$ Diag(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)

1.1(vi)	$n_{7,38}$	$L_{74}^7(n_3)$	(1, 3, 4, 5, 7)E
dim Der 11	dim Serie derivada (7, 4, 1, 0)		dim Serie C. Desc. (7, 4, 3, 2, 1, 0)

$[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_5, [e_2, e_5] = e_7, [e_3, e_4] = -e_7$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $\mathbf{U}x = [1]$: $x = (t_1, \frac{2}{5}, \frac{3}{5} - t_1, -\frac{1}{5}, 0, \frac{3}{5} - t_1, t_1)^T$. Esta álgebra no es un nilradical Einstein.

Derivación pre-Einstein: $\frac{1}{5} \text{Diag}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$

$1.2(i_\lambda)$ $\lambda \neq 0, 1$	$n_{7,52}^\lambda$ [Car]	$L_{74}^8(3C)$ [Car]	$(1, 3, 5, 7)S$ [Car]
dim Der 12	dim Serie derivada (7, 4, 0)		dim Serie C. Desc. (7, 4, 3, 1, 0)

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_6, [e_1, e_4] = e_5, [e_1, e_5] = e_7, [e_2, e_3] = \lambda e_5, [e_2, e_4] = e_6, [e_2, e_6] = e_7, [e_3, e_4] = (1 - \lambda)e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Una solución a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{44}(7, 6, 8, 7, 3, 8, 10, 3)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Derivación pre-Einstein: $\frac{4}{11} \text{Diag}(1, 1, 2, 2, 3, 3, 4)$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{11}{13} \approx 0.846$$

$1.2(i_\lambda)$ $\lambda = 0$	$n_{7,52}^\lambda$ [Car]	$L_{74}^8(3C)$ [Car]	$(1, 3, 5, 7)S$ [Car]
dim Der 12	dim Serie derivada (7, 4, 0)		dim Serie C. Desc. (7, 4, 3, 1, 0)

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_6, [e_1, e_4] = e_5, [e_1, e_5] = e_7, [e_2, e_4] = e_6, [e_2, e_6] = e_7, [e_3, e_4] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Una solución a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{22}(5, 3, 4, 2, 4, 5, 3)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Derivación pre-Einstein: $\frac{4}{11} \text{Diag}(1, 1, 2, 2, 3, 3, 4)$
 $\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{11}{13} \approx 0.846$

1.2(i λ) $\lambda = 1$	$n_{7,52}^\lambda$ [Car]	$L_{74}^8(3\mathbb{C})$ [Car]	(1, 3, 5, 7)S [Car]
dim Der 12	dim Serie derivada (7, 4, 0)		dim Serie C. Desc. (7, 4, 3, 1, 0)

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_6, [e_1, e_4] = e_5, [e_1, e_5] = e_7, [e_2, e_3] = e_5, [e_2, e_4] = e_6, [e_2, e_6] = e_7$$

{e₁...e₇} es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Una solución a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{22}(2, 3, 4, 5, 3, 4, 5)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Derivación pre-Einstein: $\frac{4}{11} \text{Diag}(1, 1, 2, 2, 3, 3, 4)$.
 $\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{11}{13} \approx 0.846$

1.2(ii)		$L_{74}^{11}(n_3)$	(1, 3, 5, 7)S $\xi = 0$
dim Der 12	dim Serie derivada (7, 4, 0)		dim Serie C. Desc. (7, 4, 3, 1, 0)

$$\mu := \begin{cases} [e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_1, e_5] = e_7, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_6, \\ [e_2, e_4] = e_6, [e_2, e_5] = e_7, [e_3, e_4] = -e_7 \end{cases}$$

Esta álgebra no es un nilradical Einstein por [Nik2, Theorem 5]. En efecto,

Derivación Pre-Einstein $\phi = \frac{4}{11} \text{Diag}(1, 1, 2, 2, 3, 3, 4)$.

Sea $X = \text{Diag}(1, -1, 0, 0, 1, -1, 0)$. $X \in \mathfrak{g}_\phi$ y por tanto $g_t = \exp(tX) \in G_\phi$.

$$g_t \cdot \mu = \begin{cases} [e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_1, e_5] = e^{-2t}e_7, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_6, \\ [e_2, e_4] = e_6, [e_2, e_5] = e_7, [e_3, e_4] = -e_7 \end{cases}$$

La G_ϕ -órbita de μ no es cerrada porque $g_t \cdot \mu \rightarrow \tilde{\mu}$ cuando $t \rightarrow \infty$ y $(\mathbb{R}^7, \tilde{\mu})$ no es isomorfa a (\mathbb{R}^7, μ) ; (\mathbb{R}^7, μ) tiene rango = 1 y $(\mathbb{R}^7, \tilde{\mu})$ tiene rango = 2 con toro maximal de derivaciones semisimples generado por $D1 = \text{Diag}(1, 0, 1, 1, 2, 1, 2)$ y $D2 = \text{Diag}(0, 1, 1, 1, 1, 2, 2)$

1.2(iii)	$n_{7,54}$	$L_{74}^{39}(3C)$	$(2, 3, 5, 7)D$
dim Der 12	dim Serie derivada $(7, 4, 0)$		dim Serie C. Desc. $(7, 4, 3, 1, 0)$

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_6, [e_1, e_4] = e_5, [e_1, e_5] = e_7, [e_2, e_3] = e_5, [e_2, e_4] = e_6, [e_3, e_4] = -e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = (\frac{1}{11} + t_1, -\frac{1}{11}, \frac{2}{11}, \frac{5}{11} - t_1, \frac{4}{11} - t_1, \frac{2}{11}, t_1)^T$. Esta álgebra no es un nilradical Einstein.

Derivación pre-Einstein: $\frac{4}{11} \text{Diag}(1, 1, 2, 2, 3, 3, 4)$

1.2(iv)	$n_{7,72}$	$L_{74}^{16}(3C)$	$(1, 3, 5, 7)H$
dim Der 12	dim Serie derivada $(7, 4, 0)$		dim Serie C. Desc. $(7, 4, 2, 1, 0)$

$$\mu := \begin{cases} [e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_4] = e_6, [e_1, e_5] = -e_7, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_5, \\ [e_2, e_5] = e_7, [e_3, e_4] = e_7 \end{cases}$$

Esta álgebra no es un nilradical Einstein por [Nik2, Theorem 5]. En efecto,

Derivación Pre-Einstein $\phi = \frac{4}{11} \text{Diag}(1, 1, 2, 2, 3, 3, 4)$.

Sea $X = \text{Diag}(3, -10, 18, -8, 7, -6, -4)$. $X \in \mathfrak{g}_\phi$ y por tanto $g_t = \exp(tX) \in G_\phi$.

$$g_t \cdot \mu = \begin{cases} [e_1, e_2] = e^{-t}e_4, [e_1, e_4] = e^{-t}e_6, [e_1, e_5] = -e^{-14t}e_7, [e_1, e_6] = e^{-t}e_7, \\ [e_2, e_3] = e^{-t}e_5, [e_2, e_5] = e^{-t}e_7, [e_3, e_4] = e^{-14t}e_7 \end{cases}$$

La G_ϕ -órbita de μ no es cerrada porque $g_t \cdot \mu \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$

1.3(i λ) $\lambda \neq 0$	$n_{7,62}^\lambda$	$L_{74}^{15}(3C)$ $(\alpha = \lambda)$	$(1, 3, 5, 7)N$ $\xi = \lambda$
dim Der 13	dim Serie derivada $(7, 4, 0)$		dim Serie C. Desc. $(7, 4, 2, 1, 0)$

$$\mu := \begin{cases} [e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_5, [e_1, e_4] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_6, \\ [e_2, e_4] = \lambda e_7, [e_2, e_5] = e_7, [e_3, e_5] = e_7 \end{cases}$$

Para cualquier $\lambda \neq 0$, $\mathfrak{g}_{1.3(i_\lambda)}$ es un nilradical Einstein. Nosotros probamos esto por contradicción; asumamos que $\mathfrak{g}_{1.3(i_\lambda)}$ no es un nilradical Einstein. La derivación ϕ dada por la matrix diagonal $\frac{5}{17} \text{Diag}(1, 2, 2, 3, 3, 4, 5)$ con respecto a la base $\{e_i\}$ es una derivación pre-Einstein. Se sigue del teorema 4.1.8 que la órbita $G_\phi \cdot \mu$ no es cerrada y así existe $Y \in \mathfrak{g}_\phi$, Y una matrix simétrica, tal que μ se degenera por la acción del grupo monoparamétrico $\exp(tY)$ cuando $t \rightarrow \infty$. Como $Y \in \mathfrak{g}_\phi$ y Y es simétrica, entonces existe $X = \text{Diag}(a_1, \dots, a_7) \in \mathfrak{g}_\phi$ y $A(\alpha)$, $B(\beta)$ en $\text{SO}_2(\mathbb{R})$ tales que

$$Y = \text{Diag}(1, A(-\alpha), B(-\beta), 1, 1) X \text{Diag}(1, A(\alpha), B(\beta), 1, 1).$$

Cómo la acción es continua, se sigue que μ también se degenera por la acción de

$$g_t := \exp(tX) \text{Diag}(1, A(\alpha), B(\beta), 1, 1)$$

cuando $t \rightarrow \infty$. La contradicción se encontrará en este último hecho. La acción de g_t en μ es

$$g_t \cdot \mu = \begin{cases} [e_1, e_2] = e^{-t(a_1+a_2-a_4)} \cos(\alpha - \beta) e_4 - e^{-t(a_1+a_2-a_5)} \sin(\alpha - \beta) e_5, \\ [e_1, e_3] = e^{-t(a_1+a_3-a_4)} \sin(\alpha - \beta) e_4 + e^{-t(a_1+a_3-a_5)} \cos(\alpha - \beta) e_5, \\ [e_1, e_4] = e^{-t(a_1+a_4-a_6)} \cos(\beta) e_6, [e_1, e_5] = e^{-t(a_1+a_5-a_6)} \sin(\beta) e_6, \\ [e_1, e_6] = e^{-t(a_1+a_6-a_7)} e_7, [e_2, e_3] = e^{-t(a_2+a_3-a_6)} e_6, \\ [e_2, e_4] = e^{-t(a_2+a_4-a_7)} f_{2,4}(\alpha, \beta) e_7, \\ [e_2, e_5] = e^{-t(a_2+a_5-a_7)} f_{2,5}(\alpha, \beta) e_7, \\ [e_3, e_4] = e^{-t(a_3+a_4-a_7)} f_{3,4}(\alpha, \beta) e_7, \\ [e_3, e_5] = e^{-t(a_3+a_5-a_7)} f_{3,5}(\alpha, \beta) e_7. \end{cases}$$

con

$$\begin{aligned} f_{2,4}(\alpha, \beta) &= (\cos(\alpha) \cos(\beta) \lambda + \sin(\alpha) \sin(\beta) - \cos(\alpha) \sin(\beta)), \\ f_{2,5}(\alpha, \beta) &= (\cos(\alpha) \sin(\beta) \lambda - \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cos(\beta)), \\ f_{3,4}(\alpha, \beta) &= (\sin(\alpha) \cos(\beta) \lambda - \cos(\alpha) \sin(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)), \\ f_{3,5}(\alpha, \beta) &= (\sin(\alpha) \sin(\beta) \lambda + \cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cos(\beta)). \end{aligned}$$

Dependiendo de los valores de α y β , algunos términos son cero en el corchete de algebra de Lie $g_t \cdot \mu$ y como la degeneración es determinada por los términos no nulos, nuestra atención estará en el exponente del factor exponencial de tales términos; cuando $t > 0$, tales exponentes deben ser no negativos.

Es fácil ver que los pares de funciones $\{f_{2,4}, f_{2,5}\}$, $\{f_{2,4}, f_{3,4}\}$, $\{f_{2,5}, f_{3,5}\}$ y $\{f_{3,4}, f_{3,5}\}$ no se anulan simultáneamente (como las funciones sin y cos). Nosotros tenemos los siguientes casos dependiendo de cuales términos son no nulos.

I) $\cos(\beta)$ y $\sin(\beta)$ son no nulos

1. $\cos(\alpha - \beta)$, $f_{2,4}$, $f_{3,4}$ son no nulos

Si este es el caso, entonces debemos tener que a_1, \dots, a_7 satisfacen: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 0$, $a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 3a_4 + 3a_5 + 4a_6 + 5a_7 = 0$ Como $X \in \mathfrak{g}_\phi$ y $a_1 + a_6 - a_7 \geq 0$, $a_2 + a_3 - a_6 \geq 0$, $a_1 + a_4 - a_6 \geq 0$, $a_1 + a_5 - a_6 \geq 0$, $a_1 + a_2 - a_4 \geq 0$, $a_1 + a_3 - a_5 \geq 0$, $a_2 + a_4 - a_7 \geq 0$ y $a_3 + a_4 - a_7 \geq 0$.

En lugar de resolver este sistema de desigualdades, nosotros podemos hacer el siguiente truco: introducimos una nueva variable c_i por cada desigualdad q_i y consideramos la ecuación $q_i - c_i^2 = 0$ y así debemos resolver el sistema de ecuaciones polinomiales:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 0, \\ a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 3a_4 + 3a_5 + 4a_6 + 5a_7 = 0, \\ a_1 + a_6 - a_7 - c_1^2 = 0, a_2 + a_3 - a_6 - c_2^2 = 0, \\ a_1 + a_4 - a_6 - c_3^2 = 0, a_1 + a_5 - a_6 - c_4^2 = 0, \\ a_1 + a_2 - a_4 - c_5^2 = 0, a_1 + a_3 - a_5 - c_6^2 = 0, \\ a_2 + a_4 - a_7 - c_7^2 = 0, a_3 + a_4 - a_7 - c_8^2 = 0. \end{cases}$$

De este sistema se sigue que $c_1^2 + 4c_4^2 + 5c_5^2 + 2c_6^2 + 2c_7^2 + 5c_8^2 = 0$, $c_2^2 - 6c_5^2 - 6c_8^2 - 4c_4^2 - 2c_6^2 - 2c_7^2 = 0$ y $c_3^2 + c_5^2 + c_8^2 - c_4^2 - c_6^2 - c_7^2 = 0$. Por la primera igualdad c_1, c_4, c_5, c_6, c_7 y c_8 son cero y así c_2 como c_3 deben ser cero también. La degeneración es, por tanto, trivial y en este caso conseguimos una contradicción.

2. $\cos(\alpha - \beta)$, $f_{2,4}$, $f_{3,5}$ son no nulos

En este caso, la degeneración da una solución no trivial al sistema de ecuaciones polinomiales $\{p_1 = 0, p_2 = 0, q_7 = 0, q_8 = 0, q_5 = 0, q_6 = 0\} \cup \{q_1 = 0, q_4 = 0\} \cup \{q_9 = 0\} \cup \{q_{12} = 0\}$.

Resolviendo este sistema, tenemos que $b_1 = \frac{1}{2}\sqrt{20b_7^2 + 18b_8^2 + 8b_6^2 - 4b_{12}^2}$, $b_4 = \frac{1}{2}\sqrt{-8b_6^2 - 12b_7^2 - 10b_8^2 - 4b_9^2}$, $b_5 = \frac{1}{2}\sqrt{-4b_6^2 - 16b_7^2 - 14b_8^2}$ y $b_6, b_7, b_8, b_9, b_{12} \in \mathbb{R}$.

Así, $b_6 = 0, b_7 = 0, b_8 = 0, b_9 = 0$ y se sigue que $b_4 = 0, b_5 = 0, b_1 = \pm\sqrt{-1}b_{12}$. Luego, debe pasar que $b_{12} = 0$ y en consecuencia $b_1 = 0$. No hay una degeneración no trivial.

3. $\cos(\alpha - \beta)$, $f_{2,5}$, $f_{3,4}$ son no nulos

En este caso, la degeneración da una solución no trivial al sistema de ecuaciones polinomiales $\{p_1 = 0, p_2 = 0, q_7 = 0, q_8 = 0, q_5 = 0, q_6 = 0\} \cup \{q_1 = 0, q_4 = 0\} \cup \{q_{10} = 0\} \cup \{q_{11} = 0\}$.

Resolviendo este sistema, tenemos que $b_1 = \sqrt{-b_{11}^2 + b_7^2 + b_8^2}$, $b_{10} = \sqrt{-b_4^2 + b_7^2 + b_8^2}$, $b_5 = \frac{1}{2}\sqrt{-16b_7^2 - 14b_8^2 - 4b_6^2}$ y $b_6, b_7, b_8, b_{11}, b_4 \in \mathbb{R}$.

Así, $b_6 = 0, b_7 = 0, b_8 = 0$ y se sigue que $b_5 = 0, b_1 = \pm\sqrt{-1}b_{11}, b_{10} = \pm\sqrt{-1}b_4$. Luego, debe pasar que $b_{11} = 0, b_4 = 0$ y en consecuencia $b_1 = 0$ y $b_{10} = 0$. No hay una degeneración no trivial.

4. $\cos(\alpha - \beta)$, $f_{2,5}$, $f_{3,5}$ son no nulos

Como $f_{2,4}$ y $f_{3,4}$ no se anulan simultáneamente, este caso está incluido en el caso I) 2. y I) 3. No hay una degeneración no trivial.

5. $\sin(\alpha - \beta)$, $f_{2,4}$, $f_{3,4}$ son no nulos

En este caso, la degeneración da una solución no trivial al sistema de ecuaciones polinomiales $\{p_1 = 0, p_2 = 0, q_7 = 0, q_8 = 0, q_5 = 0, q_6 = 0\} \cup \{q_2 = 0, q_3 = 0\} \cup \{q_9 = 0\} \cup \{q_{11} = 0\}$.

Resolviendo este sistema, tenemos que $b_{11} = \frac{1}{2}\sqrt{-12b_7^2 - 10b_8^2 - 4b_2^2 - 8b_6^2}$, $b_3 = \sqrt{b_8^2 - b_9^2 + b_7^2}$, $b_5 = \frac{1}{2}\sqrt{-16b_7^2 - 14b_8^2 - 4b_6^2}$ y $b_6, b_7, b_8, b_9, b_2 \in \mathbb{R}$.

Así, $b_7 = 0$, $b_8 = 0$, $b_2 = 0$, $b_6 = 0$ y se sigue que $b_{11} = 0$, $b_3 = \pm\sqrt{-1}b_9$, $b_5 = 0$. Luego, debe pasar que $b_9 = 0$, y en consecuencia $b_3 = 0$. No hay una degeneración no trivial.

6. $\sin(\alpha - \beta)$, $f_{2,4}$, $f_{3,5}$ son no nulos

En este caso, la degeneración da una solución no trivial al sistema de ecuaciones polinomiales $\{p_1 = 0, p_2 = 0, q_7 = 0, q_8 = 0, q_5 = 0, q_6 = 0\} \cup \{q_2 = 0, q_3 = 0\} \cup \{q_9 = 0\} \cup \{q_{12} = 0\}$.

Resolviendo este sistema, tenemos que $b_{12} = \sqrt{b_7^2 + b_8^2 - b_2^2}$, $b_3 = \sqrt{b_7^2 + b_8^2 - b_9^2}$, $b_5 = \frac{1}{2}\sqrt{-16b_7^2 - 14b_8^2 - 4b_6^2}$ y $b_2, b_6, b_7, b_8, b_9 \in \mathbb{R}$.

Así, $b_6 = 0$, $b_7 = 0$, $b_8 = 0$ y se sigue que $b_{12} = \pm\sqrt{-1}b_2$, $b_3 = \pm\sqrt{-1}b_9$, $b_5 = 0$. Luego, debe pasar que $b_9 = 0$, $b_2 = 0$, y en consecuencia $b_{12} = 0$ y b_{b_3} . No hay una degeneración no trivial.

7. $\sin(\alpha - \beta)$, $f_{2,5}$, $f_{3,4}$ son no nulos

En este caso, la degeneración da una solución no trivial al sistema de ecuaciones polinomiales $\{p_1 = 0, p_2 = 0, q_7 = 0, q_8 = 0, q_5 = 0, q_6 = 0\} \cup \{q_2 = 0, q_3 = 0\} \cup \{q_{10} = 0\} \cup \{q_{11} = 0\}$.

Resolviendo este sistema, tenemos que $b_{10} = \frac{1}{2}\sqrt{20b_7^2 + 18b_8^2 - 4b_3^2 + 8b_6^2}$, $b_{11} = \frac{1}{2}\sqrt{-12b_7^2 - 10b_8^2 - 4b_2^2 - 8b_6^2}$, $b_5 = \frac{1}{2}\sqrt{-16b_7^2 - 14b_8^2 - 4b_6^2}$ y $b_6, b_7, b_8, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$.

Así, $b_6 = 0$, $b_7 = 0$, $b_8 = 0$, $b_2 = 0$ y se sigue que $b_{11} = 0$, $b_5 = 0$, $b_{10} = \pm\sqrt{-1}b_3$. Luego, debe pasar que $b_3 = 0$, y en consecuencia $b_{10} = 0$. No hay una degeneración no trivial.

8. $\sin(\alpha - \beta)$, $f_{2,5}$, $f_{3,5}$ son no nulos

Como $f_{2,4}$ y $f_{3,4}$ no se anulan simultáneamente, este caso está incluido en el caso I) 6. y I) 7. No hay una degeneración no trivial.

II) $\cos(\beta) = 0$ ($\sin(\beta) = \pm 1$)

$$g_t \cdot \mu = \begin{cases} [e_1, e_2] = e^{-t(a_1+a_2-a_4)} \pm \sin(\alpha)e_4 - e^{-t(a_1+a_2-a_5)} \mp \cos(\alpha)e_5, \\ [e_1, e_3] = e^{-t(a_1+a_3-a_4)} \mp \cos(\alpha)e_4 + e^{-t(a_1+a_3-a_5)} \pm \sin(\alpha)e_5, \\ [e_1, e_5] = e^{-t(a_1+a_5-a_6)} \pm e_6, \\ [e_1, e_6] = e^{-t(a_1+a_6-a_7)}e_7, [e_2, e_3] = e^{-t(a_2+a_3-a_6)}e_6, \\ [e_2, e_4] = e^{-t(a_2+a_4-a_7)}(\pm \sin(\alpha) \mp \cos(\alpha))e_7, \\ [e_2, e_5] = e^{-t(a_2+a_5-a_7)} \pm \lambda \cos(\alpha)e_7, \\ [e_3, e_4] = e^{-t(a_3+a_4-a_7)}(\mp \cos(\alpha) \mp \sin(\alpha))e_7, \\ [e_3, e_5] = e^{-t(a_3+a_5-a_7)} \mp \lambda \sin(\alpha)e_7 \end{cases}$$

1. $\sin(\alpha)$ y $\cos(\alpha)$ son no nulos

Recordemos que $f_{2,4}$ y $f_{3,4}$ no se anulan simultáneamente.

a. $f_{2,4}$ es no nulo

En este caso, la degeneración da una solución no trivial al sistema de ecuaciones polinómicas $\{p_1 = 0, p_2 = 0, q_7 = 0, q_8 = 0, q_6 = 0\} \cup \{q_1 = 0, q_2 = 0, q_3 = 0, q_4 = 0\} \cup \{q_{10} = 0, q_{12} = 0\} \cup \{q_9 = 0\}$.

Resolviendo este sistema, tenemos que

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & 8b_7^2 + 7b_8^2 + 4b_6^2 - 2b_1^2 + 2b_2^2 = 0 \\ \text{ii)} \quad & 10b_7^2 + 9b_8^2 + 4b_6^2 - 2b_{10}^2 - 2b_3^2 = 0 \\ \text{iii)} \quad & 2b_7^2 + 2b_8^2 - 2b_{10}^2 - 2b_4^2 = 0 \\ \text{iv)} \quad & 10b_7^2 + 9b_8^2 + 4b_6^2 - 2b_1^2 - 2b_{12}^2 = 0 \\ \text{v)} \quad & 8b_7^2 + 7b_8^2 + 4b_6^2 - 2b_{10}^2 + 2b_9^2 = 0 \end{aligned}$$

Despejando $2b_{10}^2$ en iii) y reemplazando esta expresión en v)

$$8b_7^2 + 7b_8^2 + 4b_6^2 + (2b_4^2 - 2b_7^2 - 2b_8^2) + 2b_9^2 = 0$$

Así, $b_7 = 0$, $b_8 = 0$, $b_6 = 0$, $b_4 = 0$ y $b_9 = 0$ y se sigue que $b_{10} = 0$, $b_{10}^2 + b_3^2 = 0$, $b_1^2 + b_{12}^2 = 0$, $b_1^2 - b_2^2 = 0$. Luego, debe pasar que $b_{10} = 0$, $b_3 = 0$, $b_1 = 0$, $b_{12} = 0$ y $b_2 = 0$. No hay una degeneración no trivial.

b. $f_{3,4}$ es no nulo

En este caso, la degeneración da una solución no trivial al sistema de ecuaciones polinómicas $\{p_1 = 0, p_2 = 0, q_7 = 0, q_8 = 0, q_6 = 0\} \cup \{q_1 = 0, q_2 = 0, q_3 = 0, q_4 = 0\} \cup \{q_{10} = 0, q_{12} = 0\} \cup \{q_{11} = 0\}$.

Resolviendo este sistema, tenemos que

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & 8b_7^2 + 7b_8^2 + 4b_6^2 - 2b_1^2 + 2b_2^2 = 0 \\ \text{ii)} \quad & 10b_7^2 + 9b_8^2 + 4b_6^2 - 2b_{10}^2 - 2b_3^2 = 0 \\ \text{iii)} \quad & 2b_7^2 + 2b_8^2 - 2b_{10}^2 - 2b_4^2 = 0 \\ \text{iv)} \quad & 10b_7^2 + 9b_8^2 + 4b_6^2 - 2b_1^2 - 2b_{12}^2 = 0 \\ \text{v)} \quad & 2b_7^2 + 2b_8^2 - 2b_1^2 - 2b_{11}^2 = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación v) para $2b_1^2$ y reemplazando en i)

$$8b_7^2 + 7b_8^2 + 4b_6^2 + (2b_{11}^2 - 2b_7^2 - 2b_8^2) + 2b_2^2 = 0$$

Así, $b_7 = 0$, $b_8 = 0$, $b_6 = 0$, $b_{11} = 0$, $b_2 = 0$ y se sigue que $b_1^2 + b_{11}^2 = 0$, $b_1^2 + b_{12}^2 = 0$, $b_{10}^2 + b_4^2 = 0$, $b_{10}^2 + b_3^2 = 0$ y $b_1^2 - b_2^2 = 0$. Luego, debe pasar que $b_1 = 0$, $b_{12} = 0$, $b_{10}^2 = 0$, $b_4 = 0$, $b_3^2 = 0$ y $b_2 = 0$. No hay una degeneración no trivial.

2. $\sin(\alpha) = 0$ ($\cos(\alpha) = \pm 1$)

En este caso, la degeneración da una solución no trivial al sistema de ecuaciones polinómicas $\{p_1 = 0, p_2 = 0, q_7 = 0, q_8 = 0, q_6 = 0\} \cup \{q_2 = 0, q_3 = 0\} \cup \{q_9 = 0, q_{10} = 0, q_{11} = 0\}$.

Resolviendo este sistema, tenemos que $b_{10} = \frac{1}{2}\sqrt{16b_7^2 + 14b_8^2 + 4b_9^2 + 8b_6^2}$, $b_2 = \frac{1}{2}\sqrt{-4b_{11}^2 - 8b_6^2 - 10b_8^2 - 12b_7^2}$, $b_3 = \sqrt{-b_9^2 + b_8^2 + b_7^2}$ y $b_6, b_7, b_8, b_9, b_{11} \in \mathbb{R}$. Así, $b_6 = 0, b_7 = 0, b_8 = 0, b_9 = 0$ y se sigue que $b_{10} = 0, b_3 = 0$ y $b_2 = \pm\sqrt{-1}b_{11}$. Luego, debe pasar que $b_{11} = 0$. No hay una degeneración no trivial.

3. $\cos(\alpha) = 0$ ($\sin(\alpha) = \pm 1$)

En este caso, la degeneración da una solución no trivial al sistema de ecuaciones polinómicas $\{p_1 = 0, p_2 = 0, q_7 = 0, q_8 = 0, q_6 = 0\} \cup \{q_1 = 0, q_4 = 0\} \cup \{q_9 = 0, q_{11} = 0, q_{12} = 0\}$.

Resolviendo este sistema, tenemos que $b_1 = \sqrt{-b_{11}^2 + b_8^2 + b_7^2}$, $b_{12} = \frac{1}{2}\sqrt{16b_7^2 + 14b_8^2 + 4b_{11}^2 + 8b_6^2}$, $b_9 = \frac{1}{2}\sqrt{-4b_4^2 - 8b_6^2 - 10b_8^2 - 12b_7^2}$ y $b_{11}, b_4, b_6, b_7, b_8 \in \mathbb{R}$. Así, $b_4 = 0, b_6 = 0, b_7 = 0, b_8 = 0$ y se sigue que $b_9 = 0, b_{12} = b_{11}$, y $b_1 = \pm\sqrt{-1}b_{11}$. Luego, debe pasar que $b_{11} = 0$ y en consecuencia $b_{12} = 0, b_1 = 0$. No hay una degeneración no trivial.

III) $\sin(\beta) = 0$ ($\cos(\beta) = \pm 1$)

$$g_t \cdot \mu = \begin{cases} [e_1, e_2] = e^{-t(a_1+a_2-a_4)} \pm \cos(\alpha) e_4 - e^{-t(a_1+a_2-a_5)} \pm \sin(\alpha) e_5, \\ [e_1, e_3] = e^{-t(a_1+a_3-a_4)} \pm \sin(\alpha) e_4 + e^{-t(a_1+a_3-a_5)} \pm \cos(\alpha) e_5, \\ [e_1, e_4] = e^{-t(a_1+a_4-a_6)} \pm e_6, \\ [e_1, e_6] = e^{-t(a_1+a_6-a_7)} e_7, [e_2, e_3] = e^{-t(a_2+a_3-a_6)} e_6, \\ [e_2, e_4] = e^{-t(a_2+a_4-a_7)} \pm \cos(\alpha) \lambda e_7, \\ [e_2, e_5] = e^{-t(a_2+a_5-a_7)} (\mp \sin(\alpha) \pm \cos(\alpha)) e_7, \\ [e_3, e_4] = e^{-t(a_3+a_4-a_7)} \pm \sin(\alpha) \lambda e_7, \\ [e_3, e_5] = e^{-t(a_3+a_5-a_7)} (\pm \cos(\alpha) \pm \sin(\alpha)) e_7 \end{cases}$$

1. $\sin(\alpha)$ y $\cos(\alpha)$ son no nulos

We recall that $f_{2,5}$ y $f_{3,5}$ do not vanish simultaneously.

a. $f_{2,5}$ es no nulo

En este caso, la degeneración da una solución no trivial al sistema de ecuaciones polinómicas $\{p_1 = 0, p_2 = 0, q_7 = 0, q_8 = 0, q_5 = 0\} \cup \{q_1 = 0, q_2 = 0, q_3 = 0, q_4 = 0\} \cup \{q_9 = 0, q_{11} = 0\} \cup \{q_{10} = 0\}$.

- i) $8b_7^2 + 7b_8^2 + 4b_5^2 - 2b_2^2 + 2b_1^2 = 0$
- ii) $2b_7^2 + 2b_8^2 - 2b_9^2 - 2b_3^2 = 0$
- iii) $10b_7^2 + 9b_8^2 + 4b_5^2 - 2b_9^2 - 2b_4^2 = 0$
- iv) $b_7^2 + b_8^2 - b_1^2 - b_{11}^2 = 0$
- v) $8b_7^2 + 7b_8^2 - 2b_9^2 + 4b_5^2 + 2b_{10}^2 = 0$

Resolviendo ii) para $2b_9^2$ y reemplazando en v)

$$8b_7^2 + 7b_8^2 + (2b_3^2 - 2b_7^2 - 2b_8^2) + 4b_5^2 + 2b_{10}^2 = 0$$

Así, $b_7 = 0$, $b_8 = 0$, $b_3 = 0$, $b_5 = 0$, $b_{10} = 0$ y se sigue que $b_1^2 + b_{11}^2 = 0$, $b_9^2 + b_4^2$, $b_9^2 + b_3^2 = 0$ y $b_9^2 + b_1^2 = 0$. Luego, debe pasar que $b_1^2 = 0$, $b_{11}^2 = 0$, $b_9^2 = 0$, $b_4^2 = 0$, $b_3^2 = 0$. No hay una degeneración no trivial.

b. $f_{3,5}$ es no nulo

En este caso, la degeneración da una solución no trivial al sistema de ecuaciones polinómicas $\{p_1 = 0, p_2 = 0, q_7 = 0, q_8 = 0, q_5 = 0\} \cup \{q_1 = 0, q_2 = 0, q_3 = 0, q_4 = 0\} \cup \{q_9 = 0, q_{11} = 0\} \cup \{q_{10} = 0\}$.

Resolviendo este sistema, tenemos que

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & 8b_7^2 + 7b_8^2 + 4b_5^2 - 2b_2^2 + 2b_1^2 = 0 \\ \text{ii)} \quad & 2b_7^2 + 2b_8^2 - 2b_9^2 - 2b_3^2 = 0 \\ \text{iii)} \quad & 10b_7^2 + 9b_8^2 + 4b_5^2 - 2b_9^2 - 2b_4^2 = 0 \\ \text{iv)} \quad & b_7^2 + b_8^2 - b_1^2 - b_{11}^2 = 0 \\ \text{v)} \quad & 6b_7^2 + 5b_8^2 + 2b_1^2 + 4b_5^2 + 2b_{12}^2 = 0 \end{aligned}$$

De v) se sigue que $b_7 = 0$, $b_8 = 0$, $b_1 = 0$, $b_5 = 0$, $b_{12} = 0$ y así $b_2^2 + b_1^2 = 0$, $b_9^2 + b_3^2 = 0$, $b_9^2 + b_4^2 = 0$, $b_{11}^2 = 0$. Luego, debe pasar que $b_1 = 0$, $b_2 = 0$, $b_3 = 0$, $b_4 = 0$, $b_9 = 0$ y $b_{11} = 0$. No hay una degeneración no trivial.

2. $\sin(\alpha) = 0$ ($\cos(\alpha) = \pm 1$)

En este caso, la degeneración da una solución no trivial al sistema de ecuaciones polinómicas $\{p_1 = 0, p_2 = 0, q_7 = 0, q_8 = 0, q_5 = 0\} \cup \{q_1 = 0, q_4 = 0\} \cup \{q_9 = 0, q_{10} = 0, q_{12} = 0\}$.

Resolviendo este sistema, tenemos que $b_{12} = \frac{1}{2}\sqrt{-4b_1^2 - 8b_5^2 - 10b_8^2 - 12b_7^2}$, $b_4 = \sqrt{-b_{10}^2 + b_8^2 + b_7^2}$, $b_9 = \frac{1}{2}\sqrt{16b_7^2 + 14b_8^2 + 4b_{10}^2 + 8b_5^2}$, $b_1, b_{10}, b_5, b_7, b_8 \in \mathbb{R}$. Así, $b_5 = 0$, $b_7 = 0$, $b_8 = 0$, $b_1 = 0$ y se sigue que $b_{12} = 0$, $b_4 = \pm\sqrt{-1}b_{10}$, $b_9 = b_{10}$. Luego, debe pasar que $b_{10} = 0$ y en consecuencia $b_4 = 0$, $b_9 = 0$. No hay una degeneración no trivial.

3. $\cos(\alpha) = 0$ ($\sin(\alpha) = \pm 1$)

En este caso, la degeneración da una solución no trivial al sistema de ecuaciones polinómicas $\{p_1 = 0, p_2 = 0, q_7 = 0, q_8 = 0, q_5 = 0\} \cup \{q_2 = 0, q_3 = 0\} \cup \{q_{10} = 0, q_{12} = 0, q_{11} = 0\}$.

Resolviendo este sistema, tenemos que $b_{11} = \frac{1}{2}\sqrt{16b_7^2 + 14b_8^2 + 4b_{12}^2 + 8b_5^2}$, $b_2 = \sqrt{-b_{12}^2 + b_8^2 + b_7^2}$, $b_3 = \frac{1}{2}\sqrt{-4b_{10}^2 - 8b_5^2 - 10b_8^2 - 12b_7^2}$, $b_5, b_7, b_8, b_{12}, b_{10}$. Así, $b_5 = 0$, $b_7 = 0$, $b_8 = 0$, $b_{10} = 0$ y se sigue que $b_{12} = b_{11}$, $b_2 = \pm\sqrt{-1}b_{11}$, $b_3 = 0$. Luego, debe pasar que $b_{11} = 0$ y en consecuencia $b_{12} = 0$, $b_2 = 0$. No hay una degeneración no trivial.

En cualquier caso, no hay una degeneración no trivial. Así, $1.3(i_\lambda)$ debe ser nilradical Einstein para cualquier $\lambda \neq 0$

Derivación pre-Einstein: $\frac{5}{17} \text{Diag}(1, 2, 2, 3, 3, 4, 5)$
 $\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{17}{19} \approx 0.895$

1.3(i λ) $\lambda = 0$	$n_{7,62}^\lambda$ $\lambda = 0$	$L_{74}^{15}(3C)$ [Car]	$(1, 3, 5, 7)N$ $(\xi = 0)$
dim Der 13	dim Serie derivada (7, 4, 0)	dim Serie C. Desc. (7, 4, 2, 1, 0)	

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_5, [e_1, e_4] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_6, [e_2, e_5] = e_7, [e_3, e_5] = e_7$$

Esta álgebra no es un nilradical Einstein por [Nik2, Theorem 5]. En efecto,

Derivación Pre-Einstein $\frac{5}{17} \text{Diag}(1, 2, 2, 3, 3, 4, 5)$.

Sea $X = \text{Diag}\left(1, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, -1, -1, 0, 1\right)$. $X \in \mathfrak{g}_\Phi$ Por tanto, $g_t = \exp(tX) \in G_\Phi$.

$$g_t \cdot \mu = \begin{cases} [e_1, e_2] = \frac{1}{2}(1 + e^{-4t})e_4 + \frac{1}{2}(e^{-4t} - 1)e_5, \\ [e_1, e_3] = \frac{1}{2}(e^{-4t} - 1)e_4 + \frac{1}{2}(1 + e^{-4t})e_5, \\ [e_1, e_4] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_6, [e_2, e_5] = e_7, [e_3, e_5] = e_7 \end{cases}$$

La G_Φ -órbita de μ no es cerrada porque $g_t \cdot \mu \rightarrow \tilde{\mu}$ cuando $t \rightarrow \infty$ y $(\mathbb{R}^7, \tilde{\mu})$ no es isomorfa a (\mathbb{R}^7, μ) ; $\dim \text{Der}(\mathbb{R}^7, \mu) = 13$ y $\dim \text{Der}(\mathbb{R}^7, \tilde{\mu}) = 14$

1.3(ii)	$n_{7,63}$		$(1, 3, 5, 7)L$
dim Der 14	dim Serie derivada (7, 4, 0)	dim Serie C. Desc. (7, 4, 2, 1, 0)	

$$\mu := \begin{cases} [e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_5, [e_1, e_4] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_6, \\ [e_2, e_4] = e_7, [e_2, e_5] = \frac{1}{2}e_7, [e_3, e_4] = -\frac{1}{2}e_7 \end{cases}$$

Esta álgebra no es un nilradical Einstein por [Nik2, Theorem 5]. En efecto,

Derivación Pre-Einstein $\phi = \frac{5}{17} \text{Diag}(1, 2, 2, 3, 3, 4, 5)$.

Sea $X = \text{Diag}(-145, 730, -294, 293, -731, 148, -1)$. $X \in \mathfrak{g}_\Phi$ por tanto, $g_t = \exp(tX) \in G_\Phi$.

$$g_t \cdot \mu = \begin{cases} [e_1, e_2] = e^{-292t}e_4, [e_1, e_3] = e^{-292t}e_5, [e_1, e_4] = e_6, \\ [e_1, e_6] = e^{-4t}e_7, [e_2, e_3] = e^{-288t}e_6, [e_2, e_4] = e^{-1024t}e_7, \\ [e_2, e_5] = \frac{1}{2}e_7, [e_3, e_4] = -\frac{1}{2}e_7 \end{cases}$$

La G_Φ -órbita de μ no es cerrda porque $g_t \cdot \mu \rightarrow \tilde{\mu}$ cuando $t \rightarrow \infty$ y $(\mathbb{R}^7, \tilde{\mu})$ no es isomorfa a (\mathbb{R}^7, μ) ; $\dim \text{Der}(\mathbb{R}^7, \mu) = 14$ y $\dim \text{Der}(\mathbb{R}^7, \tilde{\mu}) = 21$

1.3(iii)	$n_{7,65}$	$L_{74}^{18}(3C)$	$(1, 3, 5, 7)F$
dim Der 13	dim Serie derivada (7, 4, 0)	dim Serie C. Desc. (7, 4, 2, 1, 0)	

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_5, [e_1, e_4] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_4] = e_7, [e_3, e_5] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{34}(9, 5, 8, 2, 5, 9)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Derivación pre-Einstein: $\frac{5}{17} \text{Diag}(1, 2, 2, 3, 3, 4, 5)$.

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{17}{9} \approx 0.895$$

1.3(iv)	$n_{7,87}$	$L_{74}^{35}(3C)$	$(2, 4, 7)R$
dim Der 13	dim Serie derivada $(7, 4, 0)$		dim Serie C. Desc. $(7, 4, 2, 0)$

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_5, [e_1, e_4] = e_6, [e_2, e_3] = e_6, [e_2, e_4] = e_7, [e_3, e_5] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{17}(5, 3, 4, -1, 3, 5)^T$. Esta álgebra no es un nilradical Einstein.

Derivación pre-Einstein: $\frac{5}{17}(1, 2, 2, 3, 3, 4, 5)$

1.3(v)	$n_{7,99}$	$L_{74}^{20}(n_3)$	$(1, 3, 5, 7)C$
dim Der 13	dim Serie derivada $(7, 3, 0)$		dim Serie C. Desc. $(7, 3, 2, 1, 0)$

$$\mu := \begin{cases} [e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_4] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_6, [e_2, e_4] = e_7, \\ [e_3, e_4] = -e_7, [e_3, e_5] = -e_7 \end{cases}$$

Esta álgebra no es un nilradical Einstein por [Nik2, Theorem 5]. En efecto,

Derivación Pre-Einstein $\phi = \frac{5}{17} \text{Diag}(1, 2, 2, 3, 3, 4, 5)$.

Sea $X = \text{Diag}(-1, 2, -2, 1, 1, 0, -1)$. $X \in \mathfrak{g}_\phi$ por tanto, $g_t = \exp(tX) \in G_\phi$.

$$g_t \cdot \mu = \begin{cases} [e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_4] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_6, \\ [e_2, e_4] = e^{-4t}e_7, [e_3, e_4] = -e_7, [e_3, e_5] = -e_7 \end{cases}$$

La G_ϕ -órbita de μ no es cerrada porque $g_t \cdot \mu \rightarrow \tilde{\mu}$ cuando $t \rightarrow \infty$ y $(\mathbb{R}^7, \tilde{\mu})$ no es isomorfa a (\mathbb{R}^7, μ) ; (\mathbb{R}^7, μ) tiene rango = 1 y $(\mathbb{R}^7, \tilde{\mu})$ tiene rango = 2 con toro maximal de derivaciones semisimples generado por $D1 = \text{Diag}(1, 0, 2, 1, 1, 2, 3)$ y $D2 = \text{Diag}(0, 1, 0, 1, 1, 1, 1)$

1.4	$n_{7,8}$	L_{75}^{31}	(1,2,3,4,5,7)
dim Der 12	dim Serie derivada (7,5,0)	dim Serie C. Desc. (7,5,4,3,2,1,0)	

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_1, e_5] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_6, [e_2, e_4] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Una solución a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{100}(10, 21, 18, 16, 18, 21, 18)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Derivación pre-Einstein: $\frac{17}{100} \text{Diag}(1, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$.
 $\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{50}{61} \approx 0.8196721312$

1.5	$n_{7,12}$	$L_{74}^{36}(n_3)$	(2,3,4,5,7)D
dim Der 11	dim Serie derivada (7,5,1,0)	dim Serie C. Desc. (7,5,4,3,2,0)	

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_1, e_5] = e_6, [e_2, e_3] = e_6, [e_2, e_5] = -e_7, [e_3, e_4] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Una solución a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{31}(7, 9, 8, 2, 2, 7, 7)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.
 Derivación pre-Einstein: $\frac{5}{31} \text{Diag}(1, 3, 4, 5, 6, 7, 9)$.
 $\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{31}{42} \approx 0.7380952381$

1.6	$n_{7,9}$	L_{75}^{32}	(1,2,3,4,5,7)B
dim Der 12	dim Serie derivada (7,5,0)		dim Serie C. Desc. (7,5,4,3,2,1,0)

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_1, e_5] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{34}(5, 5, 9, 8, 2, 9)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Derivación pre-Einstein: $\frac{5}{34} \text{Diag}(1, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$.
 $\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{17}{19} \approx 0.8947368421$

1.7		L_{75}^{56}	(2,4,7)O
dim Der 15	dim Serie derivada (7,4,0)		dim Serie C. Desc. (7,4,2,0)

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_5, [e_1, e_4] = e_6, [e_1, e_5] = e_7, [e_2, e_3] = e_6, [e_2, e_4] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{29}(5, 6, 3, 5, 3, 6)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Derivación pre-Einstein: $\frac{5}{29} \text{Diag}(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$.
 $\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{29}{28} \approx 1.04$

1.8	$n_{7,70}$	$L_{74}^{14}(3C)$	$(1,3,5,7)J$
dim Der 11	dim Serie derivada $(7,4,0)$	dim Serie C. Desc. $(7,4,2,1,0)$	

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_4] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_5, [e_2, e_4] = e_7, [e_3, e_5] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{139}(24, 48, 27, 40, -5, 39)^T$. Esta álgebra no es un nilradical Einstein.

Derivación pre-Einstein: $\frac{20}{139} \text{Diag}(2, 4, 3, 6, 7, 8, 10)$

1.9	$n_{7,59}$	L_{75}^{55}	$(2,4,5,7)K$
dim Der 14	dim Serie derivada $(7,4,0)$	dim Serie C. Desc. $(7,4,3,1,0)$	

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_6, [e_1, e_4] = e_5, [e_1, e_5] = e_7, [e_2, e_3] = e_7, [e_2, e_4] = e_6$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{67}(15, -1, 18, 15, 8, 14)^T$. Esta álgebra no es un nilradical Einstein.

Derivación pre-Einstein: $\frac{10}{67} \text{Diag}(2, 3, 6, 5, 7, 8, 9)$

1.10	$n_{7,29}$	L_{75}^{36}	$(1,3,4,5,7)F$
dim Der 11	dim Serie derivada $(7,5,0)$	dim Serie C. Desc. $(7,5,4,2,1,0)$	

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_5, [e_2, e_5] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{353}(35, 68, 106, 54, 95, 88)^T$. It is Einstein nilradical.

Derivación pre-Einstein: $\frac{45}{353} \text{Diag}(2, 3, 5, 7, 8, 9, 11)$.

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{353}{446} \approx 0.792$$

1.11	$n_{7,46}$	$L_{74}^3(3C)$	(1,2,4,5,7)E
dim Der 11	dim Serie derivada (7,4,0)		dim Serie C. Desc. (7,4,3,2,1,0)

$$\mu := \begin{cases} [e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_1, e_5] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_6, \\ [e_2, e_4] = e_6, [e_2, e_5] = e_7, [e_3, e_4] = -e_7 \end{cases}$$

Sea $g \in GL_7(\mathbb{R})$ dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2170}}{155} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3990}}{1767} & \frac{7\sqrt{3990}}{8835} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{42}}{93} & \frac{\sqrt{42}}{93} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{28\sqrt{5890}}{91295} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{56\sqrt{95}}{91295} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{28\sqrt{23870}}{2830145} \end{pmatrix}$$

cuya inversa g^{-1} es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2170}}{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{31\sqrt{3990}}{168} & \frac{31\sqrt{42}}{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{31\sqrt{3990}}{168} & \frac{155\sqrt{42}}{168} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{31\sqrt{5890}}{56} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{961\sqrt{95}}{56} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{18259\sqrt{23870}}{4312} \end{pmatrix}$$

La acción de g sobre μ da una álgebra de Lie isomorfa, $g \cdot \mu = \tilde{\mu}$

$$\tilde{\mu} := \begin{cases} [e_1, e_2] = \frac{7\sqrt{1767}}{1767} e_3 + \frac{\sqrt{465}}{93} e_4, [e_1, e_3] = \frac{\sqrt{651}}{93} e_5, [e_1, e_4] = \frac{\sqrt{61845}}{1767} e_5, \\ [e_1, e_5] = \frac{\sqrt{62}}{31} e_6, [e_1, e_6] = \frac{\sqrt{90706}}{1178} e_7, [e_2, e_4] = \frac{4\sqrt{1767}}{589} e_6, \\ [e_2, e_5] = \frac{\sqrt{64790}}{1178} e_7, [e_3, e_4] = \frac{\sqrt{90706}}{1178} e_7 \end{cases}$$

Por un cálculo directo, es fácil ver que el moment map de $\tilde{\mu}$ con respecto a la base ordenada $\{e_1, \dots, e_7\}$ es:

$$\begin{aligned} m(\tilde{\mu}) &= \text{Diag}\left(-\frac{19}{31}, -\frac{13}{31}, -\frac{7}{31}, -\frac{7}{31}, -\frac{1}{31}, \frac{5}{31}, \frac{11}{31}\right) \\ &= -\frac{25}{31}\text{Id} + \frac{6}{31}\text{Diag}(1, 2, 3, 3, 4, 5, 6) \end{aligned}$$

Como $\text{Diag}(1, 2, 3, 3, 4, 5, 6)$ es una derivación del álgebra de Lie $(\mathbb{R}^7, \tilde{\mu})$ entonces por [Lau3, Theorem 4.2], Esta álgebra es un nilradical Einstein.

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{25}{31} \approx 0.806$$

1.12	$n_{7,49}$	L_{75}^{44}	$(1, 3, 4, 5, 7)D$
dim Der 12	dim Serie derivada $(7, 4, 0)$	dim Serie C. Desc. $(7, 4, 3, 2, 1, 0)$	

$$\mu := \begin{cases} [e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_1, e_5] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_7, \\ [e_2, e_4] = e_6, [e_2, e_5] = e_7 \end{cases}$$

Sea $g \in \text{GL}_7(\mathbb{R})$ dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{14322}}{434} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{33\sqrt{1085}}{53816} & 0 & \frac{33\sqrt{1085}}{53816} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3\sqrt{385}}{868} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3\sqrt{23870}}{26908} & 0 & \frac{3\sqrt{23870}}{53816} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{99\sqrt{35}}{107632} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{99\sqrt{11935}}{6673184} \end{pmatrix}$$

cuya inversa g^{-1} es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{14322}}{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{248\sqrt{1085}}{495} & 0 & -\frac{124\sqrt{23870}}{495} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{124\sqrt{385}}{165} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{496\sqrt{1085}}{495} & 0 & \frac{124\sqrt{23870}}{495} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{15376\sqrt{35}}{495} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{30752\sqrt{11935}}{5445} \end{pmatrix}$$

La acción de g sobre μ da una álgebra de Lie isomorfa, $g \cdot \mu = \tilde{\mu}$

$$\tilde{\mu} := \begin{cases} [e_1, e_2] = \frac{\sqrt{930}}{124}e_4, [e_1, e_3] = \frac{\sqrt{31}}{31}e_6, [e_1, e_4] = \frac{\sqrt{341}}{62}e_3 + \frac{\sqrt{62}}{62}e_5, \\ [e_1, e_5] = \frac{\sqrt{682}}{124}e_6, [e_1, e_6] = \frac{\sqrt{341}}{62}e_7, [e_2, e_3] = \frac{\sqrt{1302}}{124}e_7, [e_2, e_4] = \frac{\sqrt{1302}}{124}e_6 \end{cases}$$

Por un cálculo directo, es fácil ver que el moment map de $\tilde{\mu}$ con respecto a la base ordenada $\{e_1, \dots, e_7\}$ es:

$$\begin{aligned} m(\tilde{\mu}) &= \text{Diag}\left(-\frac{41}{62}, -\frac{57}{124}, -\frac{7}{124}, -\frac{8}{31}, -\frac{7}{124}, \frac{9}{62}, \frac{43}{124}\right) \\ &= -\frac{107}{124}\text{Id} + \frac{25}{124}\text{Diag}(1, 2, 4, 3, 4, 5, 6) \end{aligned}$$

Como $(1, 2, 4, 3, 4, 5, 6)$ es una derivación del álgebra de Lie $(\mathbb{R}^7, \tilde{\mu})$ entonces por [Lau3, Theorem 4.2], Esta álgebra es un nilradical Einstein.

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{107}{124} \approx 0.863$$

1.13	$\mathfrak{n}_{7,30}$	L_{75}^{37}	$(2,3,4,5,7)E$
dim Der 12	dim Serie derivada $(7,5,0)$	dim Serie C. Desc. $(7,5,4,2,1,0)$	

$$\mu := \begin{cases} [e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_6, [e_1, e_5] = e_7, [e_1, e_6] = e_7, \\ [e_2, e_3] = e_5, [e_2, e_4] = e_7 \end{cases}$$

Sea $g \in GL_7(\mathbb{R})$ dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{17}}{17} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3\sqrt{2}}{68} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3\sqrt{238}}{2312} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{9\sqrt{154}}{25432} & \frac{9\sqrt{154}}{25432} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3\sqrt{77}}{12716} & -\frac{21\sqrt{77}}{50864} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{9\sqrt{119}}{78608} \end{pmatrix}$$

cuya inversa g^{-1} es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{17} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{34\sqrt{2}}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{68\sqrt{238}}{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1156\sqrt{154}}{99} & \frac{4624\sqrt{77}}{231} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4624\sqrt{154}}{693} & -\frac{4624\sqrt{77}}{231} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4624\sqrt{119}}{63} \end{pmatrix}$$

La acción de g sobre μ da una álgebra de Lie isomorfa, $g \cdot \mu = \tilde{\mu}$

$$\tilde{\mu} := \begin{cases} [e_1, e_2] = \frac{3\sqrt{34}}{68} e_3, [e_1, e_3] = \frac{\sqrt{119}}{34} e_4, [e_1, e_4] = \frac{3\sqrt{187}}{187} e_5 - \frac{7\sqrt{374}}{748} e_6, \\ [e_1, e_5] = \frac{\sqrt{374}}{68} e_7, [e_2, e_3] = \frac{3\sqrt{1309}}{374} e_5 + \frac{\sqrt{2618}}{374} e_6, [e_2, e_4] = \frac{3\sqrt{34}}{68} e_7 \end{cases}$$

Por un cálculo directo, es fácil ver que el moment map de $\tilde{\mu}$ con respecto a la base ordenada $\{e_1, \dots, e_7\}$ es:

$$\begin{aligned} m(\tilde{\mu}) &= \text{Diag}\left(-\frac{45}{68}, -\frac{8}{17}, -\frac{19}{68}, -\frac{3}{34}, \frac{7}{68}, \frac{7}{68}, \frac{5}{17}\right) \\ &= -\frac{29}{34} \text{Id} + \frac{13}{68} \text{Diag}(1, 2, 3, 4, 5, 5, 6) \end{aligned}$$

Como $\text{Diag}(1, 2, 3, 4, 5, 5, 6)$ es una derivación del álgebra de Lie $(\mathbb{R}^7, \tilde{\mu})$ entonces por [Lau3, Theorem 4.2], Esta álgebra es un nilradical Einstein.

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{29}{34} \approx 0.853$$

1.14	$\mathfrak{n}_{7,27}$	$L_{74}^{32}(\mathfrak{n}_3)$	$(2,3,4,5,7)F$
dim Der 11	dim Serie derivada $(7,5,1,0)$	dim Serie C. Desc. $(7,5,4,2,1,0)$	

$$\mu := \begin{cases} [e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_6, [e_2, e_3] = e_5, [e_2, e_5] = -e_7, \\ [e_2, e_6] = -e_7, [e_3, e_4] = e_7 \end{cases}$$

Sea $g \in GL_7(\mathbb{R})$ dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3\sqrt{293683}}{2378} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{57\sqrt{299}}{4756} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{741\sqrt{667}}{275848} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{51129\sqrt{908314}}{2397670816} & -\frac{51129\sqrt{908314}}{2397670816} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{126711\sqrt{99958}}{2397670816} & -\frac{741\sqrt{99958}}{58479776} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2914353\sqrt{5863}}{53789256608} \end{pmatrix}$$

cuya inversa g^{-1} es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{293683}}{741} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4756\sqrt{299}}{17043} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{9512\sqrt{667}}{17043} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5654884\sqrt{908314}}{566355933} & \frac{137924\sqrt{99958}}{903279} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{137924\sqrt{908314}}{3312023} & -\frac{137924\sqrt{99958}}{903279} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1311933088\sqrt{5863}}{416752479} \end{pmatrix}$$

La acción de g sobre μ da una álgebra de Lie isomorfa, $g \cdot \mu = \tilde{\mu}$

$$\tilde{\mu} := \begin{cases} [e_1, e_2] = -\frac{\sqrt{519593}}{2378}e_3, [e_1, e_3] = \frac{\sqrt{377}}{58}e_4, \\ [e_1, e_4] = \frac{3\sqrt{605845438}}{252068}e_5 + \frac{\sqrt{126034}}{6148}e_6, [e_2, e_3] = \frac{\sqrt{777722}}{6148}e_5 - \frac{3\sqrt{58406}}{6148}e_6, \\ [e_2, e_5] = \frac{\sqrt{126034}}{1189}e_7, [e_3, e_4] = \frac{3\sqrt{13079}}{1189}e_7 \end{cases}$$

Por un cálculo directo, es fácil ver que el moment map de $\tilde{\mu}$ con respecto a la base ordenada $\{e_1, \dots, e_7\}$ es:

$$\begin{aligned} m(\tilde{\mu}) &= \text{Diag}\left(-\frac{17}{29}, -\frac{25}{58}, -\frac{8}{29}, -\frac{7}{58}, \frac{1}{29}, \frac{1}{29}, \frac{10}{29}\right) \\ &= -\frac{43}{58}\text{Id} + \frac{9}{58}\text{Diag}(1, 2, 3, 4, 5, 5, 7) \end{aligned}$$

Como $\text{Diag}(1, 2, 3, 4, 5, 5, 7)$ es una derivación del álgebra de Lie $(\mathbb{R}^7, \tilde{\mu})$ entonces por [Lau3, Theorem 4.2], Esta álgebra es un nilradical Einstein.

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{43}{58} \approx 0.741$$

1.15	$\mathfrak{n}_{7,50}$	L_{75}^{41}	$(1, 3, 4, 5, 7)B$
dim Der 13	dim Serie derivada (7,4,0)		dim Serie C. Desc. (7,4,3,2,1,0)

$$\mu := \begin{cases} [e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_1, e_5] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_7, \\ [e_2, e_4] = e_7 \end{cases}$$

Sea $g \in GL_7(\mathbb{R})$ dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{11}}{41} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5\sqrt{47355}}{282408} & \frac{2\sqrt{47355}}{35301} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{1231230}}{70602} & \frac{\sqrt{1231230}}{70602} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{1430}}{6724} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{11\sqrt{2665}}{275684} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{11\sqrt{130}}{275684} \end{pmatrix}$$

cuya inversa g^{-1} es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{41\sqrt{11}}{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{328\sqrt{47355}}{1155} & \frac{656\sqrt{1231230}}{15015} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{328\sqrt{47355}}{1155} & \frac{41\sqrt{1231230}}{3003} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3362\sqrt{1430}}{715} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6724\sqrt{2665}}{715} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{137842\sqrt{130}}{715} \end{pmatrix}$$

La acción de g sobre μ da una álgebra de Lie isomorfa, $g \cdot \mu = \tilde{\mu}$

$$\tilde{\mu} := \begin{cases} [e_1, e_2] = \frac{2\sqrt{4305}}{861} e_3 + \frac{\sqrt{111930}}{1722} e_4, [e_1, e_3] = \frac{2\sqrt{22386}}{861} e_5, [e_1, e_4] = \frac{5\sqrt{861}}{1722} e_5, \\ [e_1, e_5] = \frac{\sqrt{902}}{82} e_6, [e_1, e_6] = \frac{\sqrt{82}}{41} e_7, [e_2, e_4] = \frac{\sqrt{861}}{82} e_7 \end{cases}$$

Por un cálculo directo, es fácil ver que el moment map de $\tilde{\mu}$ con respecto a la base ordenada $\{e_1, \dots, e_7\}$ es:

$$\begin{aligned} m(\tilde{\mu}) &= \text{Diag}\left(-\frac{61}{82}, -\frac{31}{82}, -\frac{8}{41}, -\frac{8}{41}, -\frac{1}{82}, \frac{7}{41}, \frac{29}{82}\right) \\ &= -\frac{38}{41} \text{Id} + \frac{15}{82} \text{Diag}(1, 3, 4, 4, 5, 6, 7) \end{aligned}$$

Como $\text{Diag}(1, 3, 4, 4, 5, 6, 7)$ es una derivación del álgebra de Lie $(\mathbb{R}^7, \tilde{\mu})$ entonces por [Lau3, Theorem 4.2], Esta álgebra es un nilradical Einstein.

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{38}{41} \approx 0.927$$

1.16	L_{75}^{50}	$(2, 4, 5, 7)D$
dim Der 15	dim Serie derivada (7, 4, 0)	dim Serie C. Desc. (7, 4, 2, 1, 0)

$$\mu := \begin{cases} [e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_5, [e_1, e_4] = e_6, [e_1, e_5] = e_7, [e_1, e_6] = e_7, \\ [e_2, e_3] = e_7 \end{cases}$$

Sea $g \in GL_7(\mathbb{R})$ dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{95}}{38} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{30}}{76} & \frac{\sqrt{30}}{76} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{15}}{76} & -\frac{\sqrt{15}}{76} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{285}}{1444} & -\frac{\sqrt{285}}{1444} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5\sqrt{57}}{1444} & \frac{5\sqrt{57}}{1444} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{15\sqrt{2}}{2888} \end{pmatrix}$$

cuya inversa g^{-1} es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{95}}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{19\sqrt{30}}{15} & \frac{38\sqrt{15}}{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{19\sqrt{30}}{15} & -\frac{38\sqrt{15}}{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{38\sqrt{285}}{15} & \frac{38\sqrt{57}}{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{38\sqrt{285}}{15} & \frac{38\sqrt{57}}{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1444\sqrt{2}}{15} \end{pmatrix}$$

La acción de g sobre μ da una álgebra de Lie isomorfa, $g \cdot \mu = \tilde{\mu}$

$$\tilde{\mu} := \begin{cases} [e_1, e_2] = \frac{\sqrt{114}}{38} e_3 + \frac{\sqrt{57}}{38} e_4, [e_1, e_3] = \frac{\sqrt{190}}{38} e_6, [e_1, e_4] = \frac{\sqrt{19}}{19} e_5, \\ [e_1, e_6] = \frac{\sqrt{114}}{38} e_7, [e_2, e_3] = \frac{\sqrt{57}}{38} e_7, [e_2, e_4] = \frac{\sqrt{114}}{38} e_7 \end{cases}$$

Por un cálculo directo, es fácil ver que el moment map de $\tilde{\mu}$ con respecto a la base ordenada $\{e_1, \dots, e_7\}$ es:

$$\begin{aligned} m(\tilde{\mu}) &= \text{Diag}\left(-\frac{29}{38}, -\frac{9}{19}, -\frac{7}{38}, -\frac{7}{38}, \frac{2}{19}, \frac{2}{19}, \frac{15}{38}\right) \\ &= -\frac{20}{19} \text{Id} + \frac{11}{38} \text{Diag}(1, 2, 3, 3, 4, 4, 5) \end{aligned}$$

Como $\text{Diag}(1, 2, 3, 3, 4, 4, 5)$ es una derivación del álgebra de Lie $(\mathbb{R}^7, \tilde{\mu})$ entonces por [Lau3, Theorem 4.2], Esta álgebra es un nilradical Einstein.

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{20}{19} \approx 1.05$$

1.17	$\mathfrak{n}_{7,18}$	$L_{74}^{18}(\mathfrak{n}_3)$	$(1, 2, 4, 5, 7)L$
dim Der 11	dim Serie derivada $(7, 5, 1, 0)$	dim Serie C. Desc. $(7, 5, 4, 2, 1, 0)$	

$$\mu := \begin{cases} [e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_5, \\ [e_2, e_5] = e_6, [e_2, e_6] = e_7, [e_3, e_4] = -e_7, [e_3, e_5] = e_7 \end{cases}$$

Sea $g \in \text{GL}_7(\mathbb{R})$ dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{611}\sqrt{2}}{47} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{13}\sqrt{5}}{47} & \frac{\sqrt{13}\sqrt{5}}{47} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{13}\sqrt{5}\sqrt{2}}{47} & -\frac{\sqrt{13}\sqrt{5}\sqrt{2}}{47} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{2209}\sqrt{47}\sqrt{5}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{65\sqrt{3}}{2209} \end{pmatrix}$$

cuya inversa g^{-1} es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{611}\sqrt{2}}{26} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{47\sqrt{13}\sqrt{5}}{130} & \frac{47\sqrt{13}\sqrt{5}\sqrt{2}}{260} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{47\sqrt{13}\sqrt{5}}{130} & -\frac{47\sqrt{13}\sqrt{5}\sqrt{2}}{260} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{47\sqrt{47}\sqrt{5}\sqrt{2}}{130} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2209\sqrt{3}}{195} \end{pmatrix}$$

La acción de g sobre μ da una álgebra de Lie isomorfa, $g \cdot \mu = \tilde{\mu}$

$$\tilde{\mu} := \begin{cases} [e_1, e_2] = \frac{\sqrt{611}}{94} e_3, [e_1, e_3] = \frac{\sqrt{235}}{47} e_5, [e_1, e_5] = \frac{\sqrt{611}}{94} e_6, [e_2, e_3] = \frac{\sqrt{235}}{94} e_4, \\ [e_2, e_4] = \frac{\sqrt{611}}{94} e_6, [e_2, e_6] = \frac{\sqrt{705}}{94} e_7, [e_3, e_5] = -\frac{\sqrt{705}}{94} e_7 \end{cases}$$

Por un cálculo directo, es fácil ver que el moment map de $\tilde{\mu}$ con respecto a la base ordenada $\{e_1, \dots, e_7\}$ es:

$$\begin{aligned} m(\tilde{\mu}) &= \text{Diag}\left(-\frac{23}{47}, -\frac{23}{47}, -\frac{27}{94}, -\frac{4}{47}, -\frac{4}{47}, \frac{11}{94}, \frac{15}{47}\right) \\ &= -\frac{65}{94} \text{Id} + \frac{19}{94} \text{Diag}(1, 1, 2, 3, 3, 4, 5) \end{aligned}$$

Como $\text{Diag}(1, 1, 2, 3, 3, 4, 5)$ es una derivación del álgebra de Lie $(\mathbb{R}^7, \tilde{\mu})$ entonces por [Lau3, Theorem 4.2], Esta álgebra es un nilradical Einstein.

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{65}{94} \approx 0.692$$

Otra forma de probar que 1.17 es un nilradical Einstein

Sea $g \in \text{GL}_7(\mathbb{R})$ dada por

$$\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cuya inversa g^{-1} es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

La acción de g sobre μ da una álgebra de Lie isomorfa, $g \cdot \mu = \tilde{\mu}$

$$\tilde{\mu} := \begin{cases} [e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_5, \\ [e_2, e_5] = e_6, [e_3, e_5] = e_7 \end{cases}$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice of $(\mathbb{R}^n, \tilde{\mu})$

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Una solución a $U_{\tilde{\mu}}x = [1]$: $x = \frac{1}{65}(13, 5, 13, 15, 20, 13, 15)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

1.18	$\mathfrak{n}_{7,57}$		$(2, 4, 5, 7)J$
dim Der 13	dim Serie derivada $(7, 4, 0)$		dim Serie C. Desc. $(7, 4, 3, 1, 0)$

$$\mu := \{ [e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_1, e_5] = e_7, [e_2, e_3] = e_6 + e_7, [e_2, e_4] = e_6 \}$$

Sea $g \in GL_7(\mathbb{R})$ dada por

$$\begin{pmatrix} 2\sqrt{94} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12\sqrt{1551} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18\sqrt{1034} & -54\sqrt{1034} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -198\sqrt{94} & -198\sqrt{94} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2376\sqrt{47} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2376\sqrt{20163} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7128\sqrt{141} & -9504\sqrt{141} \end{pmatrix}$$

cuya inversa g^{-1} es

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{94}}{188} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{1551}}{18612} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{1034}}{74448} & -\frac{\sqrt{94}}{24816} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{1034}}{74448} & -\frac{\sqrt{94}}{74448} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{47}}{111672} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{80652}}{95814576} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{20163}}{63876384} & -\frac{\sqrt{141}}{1340064} \end{pmatrix}$$

La acción de g sobre μ da una álgebra de Lie isomorfa, $g \cdot \mu = \tilde{\mu}$

$$\tilde{\mu} := \begin{cases} [e_1, e_2] = \frac{3\sqrt{141}}{188}e_3 + \frac{\sqrt{1551}}{188}e_4, [e_1, e_3] = \frac{3\sqrt{517}}{188}e_5, [e_1, e_4] = \frac{3\sqrt{47}}{188}e_5, \\ [e_1, e_5] = \frac{\sqrt{282}}{47}e_7, [e_2, e_3] = \frac{\sqrt{94}}{94}e_7, [e_2, e_4] = \frac{\sqrt{1222}}{94}e_6 \end{cases}$$

Por un cálculo directo, es fácil ver que el moment map de $\tilde{\mu}$ con respecto a la base ordenada $\{e_1, \dots, e_7\}$ es:

$$\begin{aligned} m(\tilde{\mu}) &= \text{Diag}\left(-\frac{33}{47}, -\frac{43}{94}, -\frac{10}{47}, -\frac{10}{47}, \frac{3}{94}, \frac{13}{47}, \frac{13}{47}\right) \\ &= -\frac{89}{94}\text{Id} + \frac{23}{94}\text{Diag}(1, 2, 3, 3, 4, 5, 5) \end{aligned}$$

Como $\text{Diag}(1, 2, 3, 3, 4, 5, 5)$ es una derivación del álgebra de Lie $(\mathbb{R}^7, \tilde{\mu})$ entonces por [Lau3, Theorem 4.2], Esta álgebra es un nilradical Einstein.

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{89}{94} \approx 0.947$$

1.19	$\mathfrak{n}_{7,81}$	$L_{74}^{29}(3C)$	$(2, 4, 7)H$
dim Der 11	dim Serie derivada $(7, 4, 0)$		dim Serie C. Desc. $(7, 4, 2, 0)$

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_5, [e_1, e_4] = e_7, [e_1, e_5] = e_6, [e_2, e_4] = e_6, [e_3, e_5] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución general a $\mathbf{U}x = [1]$: $x = \frac{1}{29}(7, 7, 1, 1, 9, 9)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.
 Derivación pre-Einstein: $\frac{13}{29} \text{Diag}(1, 1, 1, 2, 2, 3, 3)$.
 $\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{29}{34} \approx 0.8529411765$

1.20	$n_{7,35}$	$L_{74}^{23}(n_3)$	(1, 2, 4, 5, 7)D
dim Der 11	dim Serie derivada (7, 4, 1, 0)		dim Serie C. Desc. (7, 4, 3, 2, 1, 0)

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_5] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_4, [e_2, e_4] = e_6, [e_2, e_5] = e_7, [e_3, e_4] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $\mathbf{U}x = [1]$: $x = (\frac{24}{47} - t, \frac{12}{47}, \frac{3}{47} + t, \frac{20}{47}, t, -\frac{13}{47}, \frac{27}{47} - t)^T$. Esta álgebra no es un nilradical Einstein.

Derivación pre-Einstein: $\frac{8}{47} \text{Diag}(1, 2, 3, 5, 6, 7, 8)$

1.21	$n_{7,36}$	$L_{74}^{15}(n_3)$	(1, 2, 4, 5, 7)F
dim Der 11	dim Serie derivada (7, 4, 1, 0)		dim Serie C. Desc. (7, 4, 3, 2, 1, 0)

$$\mu := \begin{cases} [e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_1, e_5] = e_6, [e_2, e_3] = e_6, [e_2, e_4] = e_6, \\ [e_2, e_6] = e_7, [e_4, e_5] = -e_7 \end{cases}$$

Esta álgebra no es un nilradical Einstein por [Nik2, Theorem 5]. En efecto,

Derivación Pre-Einstein $\phi = \frac{25}{113} \text{Diag}(1, 2, 3, 3, 4, 5, 7)$.

Sea $X = \text{Diag}(-4, 23, -28, 10, -1, -8, 8)$. $X \in \mathfrak{g}_\phi$ por tanto, $g_t = \exp(tX) \in G_\phi$.

$$g_t \cdot \mu = \begin{cases} [e_1, e_2] = e^{-9t}e_4, [e_1, e_4] = e^{-7t}e_5, [e_1, e_5] = e^{-3t}e_6, [e_2, e_3] = e^{-3t}e_6, \\ [e_2, e_4] = e^{-41t}e_6, [e_2, e_6] = e^{-7t}e_7, [e_4, e_5] = -e^{-t}e_7 \end{cases}$$

La G_ϕ -órbita de μ no es cerrada porque $g_t \cdot \mu \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

A.1.3 *Rango dos*

$2.1(i_\lambda)$ $\lambda \neq 0, 1$	$n_{7,64}^\lambda$	$L_{74}^{17}(3C)$ [Car]	$(1,3,5,7)M$ $\xi = \lambda, \xi \neq 0, 1$
dim Der 14	dim Serie derivada (7,4,0)	dim Serie C. Desc. (7,4,2,1,0)	

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_5, [e_1, e_4] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_6, [e_2, e_5] = \lambda e_7, [e_3, e_4] = (\lambda - 1)e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Una solución a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{38}(5, 7, 8, 6, 4, 9, 3)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 2, 1, 3, 2, 3), D_2 = \text{Diag}(0, 1, 0, 1, 0, 1, 1).$$

Derivación pre-Einstein: $\frac{2}{19} \text{Diag}(3, 5, 6, 8, 9, 11, 14)$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{19}{21} \approx 0.905$$

$2.1(i_\lambda)$ $\lambda = 0$	$n_{7,64}^\lambda$ $\lambda = 0$	L_{75}^1	$(2,3,5,7)B$
dim Der 14	dim Serie derivada (7,4,0)	dim Serie C. Desc. (7,4,2,1,0)	

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_5, [e_1, e_4] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_6, [e_3, e_4] = -e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = (\frac{1}{19} + t, -\frac{1}{19}, \frac{4}{19}, \frac{9}{19} - t, \frac{8}{19} - t, t)^T$. Esta álgebra no es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:
 $D_1 = \text{Diag}(1, 0, 2, 1, 3, 2, 3)$, $D_2 = \text{Diag}(0, 1, 0, 1, 0, 1, 1)$.
 Derivación pre-Einstein: $\frac{2}{19} \text{Diag}(3, 5, 6, 8, 9, 11, 14)$

2.1(i $_{\lambda}$) $\lambda = 1$	$n_{7,64}^{\lambda}$ $\lambda = 1$	$L_{74}^{17}(3C)$ [Car]	(1, 3, 5, 7)M $\xi = 1$
dim Der 14	dim Serie derivada (7, 4, 0)	dim Serie C. Desc. (7, 4, 2, 1, 0)	

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_5, [e_1, e_4] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_6, [e_2, e_5] = e_7$$

{ $e_1 \dots e_7$ } es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = (\frac{1}{19}, -\frac{1}{19} + t, \frac{4}{19}, \frac{9}{19} - t, \frac{8}{19} - t, t)$ y una solución particular es $x = \frac{1}{38}(2, 7, 8, 9, 7, 9)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:
 $D_1 = \text{Diag}(1, 0, 2, 1, 3, 2, 3)$, $D_2 = \text{Diag}(0, 1, 0, 1, 0, 1, 1)$.
 Derivación pre-Einstein: $\frac{2}{19} \text{Diag}(3, 5, 6, 8, 9, 11, 14)$
 $\|\mathcal{S}_{\beta}\|^2 = \frac{19}{21} \approx 0.905$

2.1(ii)	$n_{7,69}$	$L_{74}^{17}(3C)$ $b = 0$	(1, 3, 5, 7)D
dim Der 14	dim Serie derivada (7, 4, 0)	dim Serie C. Desc. (7, 4, 2, 1, 0)	

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_5, [e_1, e_4] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_5] = e_7, [e_3, e_4] = e_7$$

{ $e_1 \dots e_7$ } es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Una solución a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{19}(4, 4, 4, 1, 5, 3)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 2, 1, 3, 2, 3), D_2 = \text{Diag}(0, 1, 0, 1, 0, 1, 1).$$

Derivación pre-Einstein: $\frac{2}{19} \text{Diag}(3, 5, 6, 8, 9, 11, 14)$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{19}{21} \approx 0.905$$

2.1(iii)	$n_{7,101}$	$L_{74}^1(3C)$	$(1, 3, 5, 7)A$
dim Der 14	dim Serie derivada $(7, 3, 0)$	dim Serie C. Desc. $(7, 3, 2, 1, 0)$	

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_4] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_6, [e_2, e_5] = e_7, [e_3, e_4] = -e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = (\frac{1}{19} + t, \frac{4}{19}, \frac{8}{19} - t, \frac{7}{19} - t, \frac{1}{19}, t)$ y una solución particular es $x = \frac{1}{19}(4, 4, 5, 4, 1, 3)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 2, 1, 3, 2, 3), D_2 = \text{Diag}(0, 1, 0, 1, 0, 1, 1).$$

Derivación pre-Einstein: $\frac{2}{19} \text{Diag}(3, 5, 6, 8, 9, 11, 14)$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{19}{21} \approx 0.905$$

2.1(iv)		$L_{74}^{17}(3C)$ $b = -1$	$(1, 3, 7)D$
dim Der 14	dim Serie derivada $(7, 3, 0)$	dim Serie C. Desc. $(7, 3, 1, 0)$	

$$[e_1, e_3] = e_5, [e_1, e_4] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_6, [e_2, e_5] = e_7, [e_3, e_4] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = (\frac{8}{19} - t, \frac{4}{19}, \frac{1}{19} + t, t, \frac{9}{19} - t, -\frac{1}{19})^T$. Esta álgebra no es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:
 $D_1 = \text{Diag}(1, 0, 2, 1, 3, 2, 3)$, $D_2 = \text{Diag}(0, 1, 0, 1, 0, 1, 1)$.
 Derivación pre-Einstein: $\frac{2}{19} \text{Diag}(3, 5, 6, 8, 9, 11, 14)$

2.1(v)	$L_{74}^{34}(3C)$	$(2, 4, 7)Q$
dim Der 14	dim Serie derivada $(7, 4, 0)$	dim Serie C. Desc. $(7, 4, 2, 0)$

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_5, [e_1, e_4] = e_6, [e_2, e_3] = e_6, [e_2, e_5] = e_7, [e_3, e_4] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = (\frac{1}{19} + t, \frac{8}{19} - t, \frac{4}{19}, -\frac{1}{19}, \frac{9}{19} - t, t)^T$. Esta álgebra no es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:
 $D_1 = \text{Diag}(1, 0, 2, 1, 3, 2, 3)$, $D_2 = \text{Diag}(0, 1, 0, 1, 0, 1, 1)$.
 Derivación pre-Einstein: $\frac{2}{19} \text{Diag}(3, 5, 6, 8, 9, 11, 14)$

2.2	$n_{7,95}$	$(1, 4, 7)D$
dim Der 15	dim Serie derivada $(7, 4, 0)$	dim Serie C. Desc. $(7, 4, 1, 0)$

$$\mu := \begin{cases} [e_1, e_2] = e_5, [e_1, e_3] = e_6, [e_1, e_4] = 2e_7, [e_2, e_3] = e_4, [e_2, e_6] = e_7, \\ [e_3, e_5] = -e_7, [e_3, e_6] = e_7 \end{cases}$$

Esta álgebra no es un nilradical Einstein por [Nik2, Theorem 5]. En efecto,

Derivación Pre-Einstein $\phi = \frac{1}{2} \text{Diag}(1, 1, 1, 2, 2, 2, 3)$.
 Sea $X = \text{Diag}(1, -1, 0, -1, 0, 1, 0)$. $X \in \mathfrak{g}_\phi$ por tanto, $g_t = \exp(tX) \in G_\phi$.

$$g_t \cdot \mu = \begin{cases} [e_1, e_2] = e_5, [e_1, e_3] = e_6, [e_1, e_4] = 2e_7, [e_2, e_3] = e_4, [e_2, e_6] = e_7, \\ [e_3, e_5] = -e_7, [e_3, e_6] = e^{-t}e_7 \end{cases}$$

La G_ϕ -órbita de μ no es cerrada porque $g_t \cdot \mu \rightarrow \tilde{\mu}$ cuando $t \rightarrow \infty$ y $(\mathbb{R}^7, \tilde{\mu})$ no es isomorfa a (\mathbb{R}^7, μ) ; $\dim \text{Der}(\mathbb{R}^7, \mu) = 15$ y $\dim \text{Der}(\mathbb{R}^7, \tilde{\mu}) = 17$.

2.3	$n_{7,10}$	L_{76}^1	(1,2,3,4,5,7)A
dim Der 13	dim Serie derivada (7,5,0)	dim Serie C. Desc. (7,5,4,3,2,1,0)	

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_1, e_5] = e_6, [e_1, e_6] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{37}(5, 8, 9, 8, 5)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 1, 2, 3, 4, 5), D_2 = \text{Diag}(0, 1, 1, 1, 1, 1, 1).$$

$$\text{Derivación pre-Einstein: } \frac{2}{37} \text{Diag}(1, 16, 17, 18, 19, 20, 21)$$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{37}{35} \approx 1.06$$

2.4	$n_{7,13}$	$L_{74}^{37}(n_3)$	(2,3,4,5,7)C
dim Der 12	dim Serie derivada (7,5,1,0)	dim Serie C. Desc. (7,5,4,3,2,0)	

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_1, e_5] = e_6, [e_2, e_5] = -e_7, [e_3, e_4] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{52}(12, 16, 13, 4, 12, 13)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 1, 2, 3, 4, 3), D_2 = \text{Diag}(0, 1, 1, 1, 1, 1, 2).$$

$$\text{Derivación pre-Einstein: } \frac{7}{52} \text{Diag}(1, 4, 5, 6, 7, 8, 11)$$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{26}{35} \approx 0.743$$

2.5	$n_{7,24}$	$L_{74}^{19}(n_3)$	(1,2,4,5,7)H
dim Der 12	dim Serie derivada (7,5,1,0)	dim Serie C. Desc. (7,5,4,2,1,0)	

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_5] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_5, [e_2, e_4] = e_6, [e_3, e_4] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = (t_1, -\frac{1}{5} + t_1 + t_2, \frac{3}{5} - t_1 - t_2, \frac{2}{5} - t_1, \frac{3}{5} - t_1 - t_2, t_2, t_1)$ a particular solution is $x = \frac{1}{5}(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 1, 2, 1, 2, 3), D_2 = \text{Diag}(0, 1, 1, 1, 2, 2, 2).$$

Derivación pre-Einstein: $\frac{1}{5} \text{Diag}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{5}{7} \approx 0.714$$

2.6	$\mathfrak{n}_{7,28}$	$L_{74}^{31}(\mathfrak{n}_3)$	$(2, 3, 4, 5, 7)B$
dim Der 12	dim Serie derivada $(7, 5, 1, 0)$	dim Serie C. Desc. $(7, 5, 4, 2, 1, 0)$	

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_6, [e_2, e_3] = e_5, [e_2, e_6] = e_7, [e_3, e_4] = -e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Una solución a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{52}(13, 16, 13, 4, 12, 12)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 1, 2, 1, 3, 3), D_2 = \text{Diag}(0, 1, 1, 1, 2, 1, 2).$$

Derivación pre-Einstein: $\frac{1}{52} \text{Diag}(10, 23, 33, 43, 56, 53, 76)$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{26}{35} \approx 0.743$$

2.7	$\mathfrak{n}_{7,31}$	L_{75}^{35}	$(2, 3, 4, 5, 7)A$
dim Der 13	dim Serie derivada $(7, 5, 0)$	dim Serie C. Desc. $(7, 5, 4, 2, 1, 0)$	

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_5]$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{18}(3, 3, 5, 4, 5)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 1, 2, 1, 3, 4), D_2 = \text{Diag}(0, 1, 1, 1, 2, 1, 1).$$

$$\text{Derivación pre-Einstein: } \frac{1}{18} \text{Diag}(3, 10, 13, 16, 23, 19, 22)$$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{9}{10} \approx 0.9$$

2.8	$n_{7,32}$	L_{75}^{38}	$(2, 4, 5, 7)M$
dim Der 13	dim Serie derivada $(7, 5, 0)$	dim Serie C. Desc. $(7, 5, 4, 2, 0)$	

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_6, [e_1, e_5] = e_7, [e_2, e_3] = e_5, [e_2, e_4] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = (\frac{1}{6}, \frac{1}{12} + t, \frac{1}{6}, \frac{1}{3} - t, \frac{5}{12} - t, t)$ y una solución particular es $x = \frac{1}{24}(4, 6, 4, 4, 6, 4)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 1, 2, 1, 3, 2), D_2 = \text{Diag}(0, 1, 1, 1, 2, 1, 2).$$

$$\text{Derivación pre-Einstein: } \frac{1}{12} \text{Diag}(3, 5, 8, 11, 13, 14, 16)$$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{6}{7} \approx 0.857$$

2.9	$n_{7,33}$	L_{75}^{39}	$(2, 4, 5, 7)L$
dim Der 12	dim Serie derivada $(7, 5, 0)$	dim Serie C. Desc. $(7, 5, 4, 2, 0)$	

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_6, [e_2, e_3] = e_5, [e_2, e_5] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{28}(4, 7, 8, 7, 8)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 1, 2, 1, 3, 1), D_2 = \text{Diag}(0, 1, 1, 1, 2, 1, 3).$$

$$\text{Derivación pre-Einstein: } \frac{9}{28} \text{Diag}(1, 1, 2, 3, 3, 4, 4)$$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{14}{17} \approx 0.824$$

2.10	$n_{7,39}$	$L_{74}^8(n_3)$	$(1, 3, 4, 5, 7)C$
dim Der 12	dim Serie derivada $(7, 4, 1, 0)$		dim Serie C. Desc. $(7, 4, 3, 2, 1, 0)$

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_7, [e_1, e_4] = e_5, [e_1, e_5] = e_6, [e_2, e_6] = e_7, [e_4, e_5] = -e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = (t, -\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5} - t, \frac{3}{5} - t, t)^T$. Esta álgebra no es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 2, 1, 2, 3, 3), D_2 = \text{Diag}(0, 1, 2, 1, 1, 1, 2).$$

$$\text{Derivación pre-Einstein: } \frac{1}{5} \text{Diag}(1, 2, 6, 3, 4, 5, 7)$$

2.11	$n_{7,58}$		$(2, 4, 5, 7)E$
dim Der 14	dim Serie derivada $(7, 4, 0)$		dim Serie C. Desc. $(7, 4, 3, 1, 0)$

$$\mu := \left\{ [e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_1, e_5] = e_7, [e_2, e_3] = e_6, [e_2, e_4] = e_6 \right.$$

Sea $g \in GL_7(\mathbb{R})$ dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4\sqrt{1254}}{9} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4\sqrt{7}}{3} & -\frac{4\sqrt{7}}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2\sqrt{1463}}{57} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{88\sqrt{42}}{27} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{770}}{57} \end{pmatrix}$$

cuya inversa g^{-1} es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3\sqrt{1254}}{1672} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{11} & -\frac{6\sqrt{7}}{77} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{11} & -\frac{2\sqrt{7}}{308} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3\sqrt{1463}}{154} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{9\sqrt{42}}{1232} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{57\sqrt{770}}{770} \end{pmatrix}$$

La acción de g sobre μ da una álgebra de Lie isomorfa, $g \cdot \mu = \tilde{\mu}$

$$\tilde{\mu} := \begin{cases} [e_1, e_2] = \frac{\sqrt{1254}}{209} e_3 + \frac{\sqrt{8778}}{418} e_4, [e_1, e_3] = \frac{2\sqrt{1463}}{209} e_5, [e_1, e_4] = \frac{3\sqrt{209}}{418} e_5, \\ [e_1, e_5] = \frac{\sqrt{190}}{38} e_7, [e_2, e_4] = \frac{\sqrt{209}}{38} e_6 \end{cases}$$

Por un cálculo directo, es fácil ver que el moment map de $\tilde{\mu}$ con respecto a la base ordenada $\{e_1, \dots, e_7\}$ es:

$$\begin{aligned} m(\tilde{\mu}) &= \text{Diag}\left(-\frac{27}{38}, -\frac{17}{38}, -\frac{4}{19}, -\frac{4}{19}, \frac{1}{38}, \frac{11}{38}, \frac{5}{19}\right) \\ &= -\frac{18}{19} \text{Id} + \frac{1}{38} \text{Diag}(9, 19, 28, 28, 37, 47, 46) \end{aligned}$$

Como $\text{Diag}(9, 19, 28, 28, 37, 47, 46)$ es una derivación del álgebra de Lie $(\mathbb{R}^7, \tilde{\mu})$ entonces por [Lau3, Theorem 4.2], Esta álgebra es un nilradical Einstein.

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{18}{19} \approx 0.947$$

2.12	$\mathfrak{n}_{7,91}$	$L_{74}^{37}(3C)$	$(2, 4, 7)E$
dim Der 14	dim Serie derivada $(7, 4, 0)$	dim Serie C. Desc. $(7, 4, 2, 0)$	

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_5, [e_1, e_4] = e_6, [e_2, e_4] = e_7, [e_3, e_5] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{18}(5, 3, 4, 3, 5)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:
 $D_1 = \text{Diag}(1,0,0,1,1,2,1)$, $D_2 = \text{Diag}(0,1,1,1,1,1,2)$.
 Derivación pre-Einstein: $\frac{1}{9} \text{Diag}(3,5,5,8,8,11,13)$
 $\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{9}{10} \approx 0.9$

2.13	$\mathfrak{n}_{7,37}$	$L_{74}^{16}(\mathfrak{n}_3)$	(1,2,4,5,7)C
dim Der 12	dim Serie derivada (7,4,1,0)		dim Serie C. Desc. (7,4,3,2,1,0)

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_1, e_5] = e_6, [e_2, e_3] = e_6, [e_2, e_6] = e_7, [e_4, e_5] = -e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Una solución a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{60}(12, 20, 12, 12, 15, 15)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:
 $D_1 = \text{Diag}(1,0,3,1,2,3,3)$, $D_2 = \text{Diag}(0,1,0,1,1,1,2)$.
 Derivación pre-Einstein: $\frac{1}{60} \text{Diag}(16,21,48,37,53,69,90)$
 $\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{30}{43} \approx 0.698$

2.14	$\mathfrak{n}_{7,45}$	L_{75}^9	(1,2,3,5,7)A
dim Der 12	dim Serie derivada (7,4,0)		dim Serie C. Desc. (7,4,3,2,1,0)

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_1, e_5] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_5, [e_3, e_4] = -e_6, [e_3, e_5] = -e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Una solución a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{5}(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1,0,2,1,2,3,4), D_2 = \text{Diag}(0,1,0,1,1,1,1).$$

$$\text{Derivación pre-Einstein: } \frac{1}{5} \text{Diag}(1,3,2,4,5,6,7)$$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{5}{7} \approx 0.714$$

2.15	$n_{7,48}$	L_{75}^{10}	$(1,2,4,5,7)A$
dim Der 13	dim Serie derivada (7,4,0)	dim Serie C. Desc. (7,4,3,2,1,0)	

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_1, e_5] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_6, [e_3, e_4] = -e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Una solución a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{5}(1, 1, 1, 1, 1, 1)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1,0,3,1,2,3,4), D_2 = \text{Diag}(0,1,0,1,1,1,1).$$

$$\text{Derivación pre-Einstein: } \frac{1}{5} \text{Diag}(1,3,3,4,5,6,7)$$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{5}{6} \approx 0.833$$

2.16	$n_{7,51}$	L_{75}^{11}	$(1,3,4,5,7)A$
dim Der 14	dim Serie derivada (7,4,0)	dim Serie C. Desc. (7,4,3,2,1,0)	

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_1, e_5] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{27}(3, 8, 8, 3, 7)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1,0,4,1,2,3,4), D_2 = \text{Diag}(0,1,0,1,1,1,1).$$

Derivación pre-Einstein: $\frac{1}{27} \text{Diag}(5, 17, 20, 22, 27, 32, 37)$
 $\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{27}{29} \approx 0.931$

2.17	$n_{7,56}$	$L_{74}^{40}(3C)$	$(2, 3, 5, 7)C$
dim Der 13	dim Serie derivada (7, 4, 0)		dim Serie C. Desc. (7, 4, 3, 1, 0)

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_1, e_5] = e_7, [e_2, e_3] = e_5, [e_2, e_4] = e_6, [e_3, e_4] = -e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Una solución a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{24}(6, 4, 6, 4, 4, 4)^T$. It is an Einstein nilradical.

Toro maximal de derivaciones semisimples:
 $D_1 = \text{Diag}(1, 0, 2, 1, 2, 1, 3)$, $D_2 = \text{Diag}(0, 1, 0, 1, 1, 2, 1)$.
 Derivación pre-Einstein: $\frac{1}{12} \text{Diag}(4, 5, 8, 9, 13, 14, 17)$
 $\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{6}{7} \approx 0.857$

2.18	$n_{7,60}$	L_{75}^{59}	$(2, 4, 5, 7)H$
dim Der 15	dim Serie derivada (7, 4, 0)		dim Serie C. Desc. (7, 4, 3, 1, 0)

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_1, e_5] = e_7, [e_2, e_3] = e_7, [e_2, e_4] = e_6$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{68}(15, 18, 15, 8, 14)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:
 $D_1 = \text{Diag}(1, 0, 3, 1, 2, 1, 3)$, $D_2 = \text{Diag}(0, 1, 0, 1, 1, 2, 1)$.
 Derivación pre-Einstein: $\frac{1}{68} \text{Diag}(20, 31, 60, 51, 71, 82, 91)$
 $\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{34}{35} \approx 0.971$

2.19	$n_{7,61}$	L_{75}^{48}	(2,4,5,7)G
dim Der 15	dim Serie derivada (7,4,0)	dim Serie C. Desc. (7,4,3,1,0)	

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_6, [e_1, e_4] = e_5, [e_1, e_5] = e_7, [e_2, e_4] = e_6$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{4}(1, 0, 1, 1, 1)^T$. Esta álgebra no es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 0, 1, 2, 1, 3), D_2 = \text{Diag}(0, 1, 2, 1, 1, 2, 1).$$

$$\text{Derivación pre-Einstein: } \frac{1}{4} \text{Diag}(1, 2, 4, 3, 4, 5, 5)$$

2.20	$n_{7,76}$	L_{75}^{46}	(2,4,5,7)F
dim Der 16	dim Serie derivada (7,4,0)	dim Serie C. Desc. (7,4,2,1,0)	

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_5, [e_1, e_5] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_3, e_5] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{37}(5, 9, 8, 5, 8)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 2, 1, 3, 4, 5), D_2 = \text{Diag}(0, 1, 0, 1, 0, 0, 0).$$

$$\text{Derivación pre-Einstein: } \frac{2}{37} \text{Diag}(5, 16, 10, 21, 15, 20, 25) \|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{37}{35} \approx 1.06$$

2.21	$n_{7,77}$	L_{75}^2	(2,4,5,7)C
dim Der 16	dim Serie derivada (7,4,0)	dim Serie C. Desc. (7,4,2,1,0)	

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_5, [e_1, e_4] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{31}(6, 1, 10, 6, 6)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 3, 1, 4, 2, 3), D_2 = \text{Diag}(0, 1, 0, 1, 0, 1, 1).$$

$$\text{Derivación pre-Einstein: } \frac{1}{31} \text{Diag}(8, 19, 24, 27, 32, 35, 43)$$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{31}{29} \approx 1.07$$

2.22	$n_{7,79}$	L_{75}^{57}	$(2, 4, 5, 7)I$
dim Der 14	dim Serie derivada $(7, 4, 0)$	dim Serie C. Desc. $(7, 4, 2, 1, 0)$	

$$[e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_5, [e_3, e_4] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{19}(3, 6, 5, 5, 1)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 2, 3, 2, 4, 5), D_2 = \text{Diag}(0, 1, 0, 0, 1, 0, 0).$$

$$\text{Derivación pre-Einstein: } \frac{1}{19} \text{Diag}(5, 14, 10, 15, 24, 20, 25)$$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{19}{20} \approx 0.950$$

2.23	$n_{7,107}$	$L_{74}^6(3C)$	$(1, 3, 7)?$ [Car]
dim Der 13	dim Serie derivada $(7, 3, 0)$	dim Serie C. Desc. $(7, 3, 1, 0)$	

$$[e_1, e_4] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_5, [e_2, e_5] = e_7, [e_3, e_4] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{11}(4, 3, 4, 3, -1)^T$. Esta álgebra no es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 2, 0, 2, 1, 2), D_2 = \text{Diag}(0, 1, 0, 2, 1, 2, 2).$$

Derivación pre-Einstein: $\frac{4}{11} \text{Diag}(1, 1, 2, 2, 3, 3, 4)$

2.24	$n_{7,73}$	L_{75}^{17}	$(2, 3, 5, 7)A$
dim Der 13	dim Serie derivada $(7, 4, 0)$	dim Serie C. Desc. $(7, 4, 2, 1, 0)$	

$$\mu := \begin{cases} [e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_4] = e_6, [e_1, e_5] = -e_7, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_5, \\ [e_3, e_4] = e_7 \end{cases}$$

Sea $g \in GL_7(\mathbb{R})$ dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{38}}{19} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{38}}{19} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{19} & -\frac{\sqrt{3}}{19} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{19} & \frac{1}{19} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{114}}{361} \end{pmatrix}$$

cuya inversa g^{-1} es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{38}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{38}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{19\sqrt{3}}{6} & \frac{19}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{19\sqrt{3}}{6} & \frac{19}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{19\sqrt{114}}{6} \end{pmatrix}$$

La acción de g sobre μ da una álgebra de Lie isomorfa, $g \cdot \mu = \tilde{\mu}$

$$\tilde{\mu} := \begin{cases} [e_1, e_2] = -\frac{\sqrt{38}}{19} e_4, [e_1, e_4] = \frac{\sqrt{114}}{38} e_5 - \frac{\sqrt{38}}{38} e_6, [e_1, e_5] = \frac{\sqrt{38}}{19} e_7, \\ [e_2, e_3] = \frac{\sqrt{114}}{38} e_5 + \frac{\sqrt{38}}{38} e_6, [e_3, e_4] = \frac{\sqrt{114}}{38} e_7 \end{cases}$$

Por un cálculo directo, es fácil ver que el moment map de $\tilde{\mu}$ con respecto a la base ordenada $\{e_1, \dots, e_7\}$ es:

$$\begin{aligned} m(\tilde{\mu}) &= \text{Diag}\left(-\frac{12}{19}, -\frac{8}{19}, -\frac{7}{19}, -\frac{3}{19}, \frac{2}{19}, \frac{2}{19}, \frac{7}{19}\right) \\ &= -\frac{17}{19} \text{Id} + \frac{1}{19} \text{Diag}(5, 9, 10, 14, 19, 19, 24) \end{aligned}$$

Como $\text{Diag}(5, 9, 10, 14, 19, 19, 24)$ es una derivación del álgebra de Lie $(\mathbb{R}^7, \tilde{\mu})$ entonces por [Lau3, Theorem 4.2], Esta álgebra es un nilradical Einstein.

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{17}{9} \approx 0.895$$

2.25	$\mathfrak{n}_{7,100}$	L_{75}^{18}	$(1, 3, 5, 7)B$
dim Der 14	dim Serie derivada $(7, 3, 0)$	dim Serie C. Desc. $(7, 3, 2, 1, 0)$	

$$\mu := \begin{cases} [e_1, e_2] = e_5, [e_1, e_5] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_6, [e_3, e_4] = -e_7, \\ [e_3, e_5] = -e_7 \end{cases}$$

Sea $g \in \text{GL}_7(\mathbb{R})$ dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{38}}{19} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{38}}{38} & \frac{\sqrt{38}}{19} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{114}}{38} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{19} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{114}}{361} \end{pmatrix}$$

cuya inversa g^{-1} es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{38}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{114}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{38}}{2} & -\frac{\sqrt{114}}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{19\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{19\sqrt{114}}{6} \end{pmatrix}$$

La acción de g sobre μ da una álgebra de Lie isomorfa, $g \cdot \mu = \tilde{\mu}$

$$\tilde{\mu} := \begin{cases} [e_1, e_3] = \frac{\sqrt{38}}{19} e_4, [e_1, e_4] = -\frac{\sqrt{114}}{38} e_6, [e_1, e_5] = \frac{\sqrt{38}}{38} e_6, [e_1, e_6] = \frac{\sqrt{38}}{19} e_7, \\ [e_2, e_3] = \frac{\sqrt{114}}{38} e_6, [e_2, e_4] = \frac{\sqrt{114}}{38} e_7, [e_2, e_5] = \frac{\sqrt{38}}{38} e_7 \end{cases}$$

Por un cálculo directo, es fácil ver que el moment map de $\tilde{\mu}$ con respecto a la base ordenada $\{e_1, \dots, e_7\}$ es:

$$\begin{aligned} m(\tilde{\mu}) &= \text{Diag}\left(-\frac{12}{19}, -\frac{7}{19}, -\frac{7}{19}, -\frac{2}{19}, -\frac{2}{19}, \frac{3}{19}, \frac{8}{19}\right) \\ &= -\frac{17}{19} \text{Id} + \frac{5}{19} \text{Diag}(1, 2, 2, 3, 3, 4, 5) \end{aligned}$$

Como $\text{Diag}(1, 2, 2, 3, 3, 4, 5)$ es una derivación del álgebra de Lie $(\mathbb{R}^7, \tilde{\mu})$ entonces por [Lau3, Theorem 4.2], Esta álgebra es un nilradical Einstein.

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{17}{9} \approx 0.895$$

2.26	$\mathfrak{n}_{7,85}$	$L_{74}^{38}(3C)$	$(2, 4, 7)J$
dim Der 13	dim Serie derivada $(7, 4, 0)$	dim Serie C. Desc. $(7, 4, 2, 0)$	

$$\tilde{\mu} := \{ [e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_5, [e_1, e_5] = e_6, [e_2, e_5] = e_7, [e_3, e_4] = e_7, [e_3, e_5] = e_6$$

Sea $g \in GL_7(\mathbb{R})$ dada por

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{114}}{19} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2\sqrt{114}}{19} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12}{19} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{19} \end{pmatrix}$$

cuya inversa g^{-1} es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{114}}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{114}}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{19}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{19}{6} \end{pmatrix}$$

La acción de g sobre μ da una álgebra de Lie isomorfa, $g \cdot \mu = \tilde{\mu}$

$$\tilde{\mu} := \begin{cases} [e_1, e_2] = \frac{\sqrt{114}}{38} e_4, [e_1, e_3] = \frac{1}{19} \sqrt{38} e_5, [e_1, e_5] = \frac{\sqrt{114}}{38} e_6, \\ [e_2, e_3] = \frac{\sqrt{38}}{38} e_4, [e_2, e_5] = \frac{1}{38} \sqrt{114} e_7, [e_3, e_4] = \frac{\sqrt{38}}{19} e_7, \\ [e_3, e_5] = \frac{\sqrt{38}}{38} e_6 \end{cases}$$

Por un cálculo directo, es fácil ver que el moment map de $\tilde{\mu}$ con respecto a la base ordenada $\{e_1, \dots, e_7\}$ es:

$$\begin{aligned} m(\tilde{\mu}) &= \text{Diag}\left(-\frac{10}{19}, -\frac{7}{19}, -\frac{10}{19}, 0, -\frac{3}{19}, \frac{4}{19}, \frac{7}{19}\right) \\ &= -\frac{17}{19} \text{Id} + \frac{1}{19} \text{Diag}(7, 10, 7, 17, 14, 21, 24) \end{aligned}$$

Como $\text{Diag}(7, 10, 7, 17, 14, 21, 24)$ es una derivación del álgebra de Lie $(\mathbb{R}^7, \tilde{\mu})$ entonces por [Lau3, Theorem 4.2], Esta álgebra es un nilradical Einstein.

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{17}{19} \approx 0.895$$

2.27	$\mathfrak{n}_{7,106}$		(2,5,7)I
dim Der 17	dim Serie derivada (7,3,0)		dim Serie C. Desc. (7,3,2,0)

$$\mu := \{ [e_1, e_2] = e_5, [e_1, e_3] = e_7, [e_1, e_5] = e_6, [e_2, e_4] = e_7, [e_2, e_5] = e_7$$

Sea $g \in GL_7(\mathbb{R})$ dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{26}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{78}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{78}}{26} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

cuya inversa g^{-1} es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{26}}{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{78}}{39} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{78}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

La acción de g sobre μ da una álgebra de Lie isomorfa, $g \cdot \mu = \tilde{\mu}$

$$\tilde{\mu} := \begin{cases} [e_1, e_2] = \frac{\sqrt{26}}{26} e_4 + \frac{\sqrt{78}}{26} e_5, [e_1, e_3] = \frac{\sqrt{26}}{26} e_7, [e_1, e_5] = \frac{\sqrt{26}}{13} e_6, \\ [e_2, e_4] = \frac{\sqrt{78}}{26} e_7, [e_2, e_5] = \frac{\sqrt{26}}{26} e_7 \end{cases}$$

Por un cálculo directo, es fácil ver que el moment map de $\tilde{\mu}$ con respecto a la base ordenada $\{e_1, \dots, e_7\}$ es:

$$\begin{aligned} m(\tilde{\mu}) &= \text{Diag}\left(-\frac{9}{13}, -\frac{8}{13}, -\frac{1}{13}, -\frac{2}{13}, -\frac{2}{13}, \frac{4}{13}, \frac{5}{13}\right) \\ &= -\frac{15}{13} \text{Id} + \frac{1}{13} \text{Diag}(6, 7, 14, 13, 13, 19, 20) \end{aligned}$$

Como $\text{Diag}(6, 7, 14, 13, 13, 19, 20)$ es una derivación del álgebra de Lie $(\mathbb{R}^7, \tilde{\mu})$ entonces por [Lau3, Theorem 4.2], Esta álgebra es un nilradical Einstein.

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{15}{13} \approx 1.15$$

2.28	$\mathfrak{n}_{7,112}$	$L_{74}^{11}(3C)$	$(1, 4, 7)B$
dim Der 16	dim Serie derivada $(7, 3, 0)$	dim Serie C. Desc. $(7, 3, 1, 0)$	

$$[e_1, e_2] = e_5, [e_1, e_3] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_5] = e_7, [e_3, e_4] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{37}(8, 8, 5, 9, 5)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 0, -1, 2, 1, 0, 1), D_2 = \text{Diag}(0, 1, 2, 0, 1, 2, 2).$$

$$\text{Derivación pre-Einstein: } \frac{4}{37} \text{Diag}(4, 5, 6, 8, 9, 10, 14)$$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{37}{35} \approx 1.06$$

2.29	$\mathfrak{n}_{7,104}$	$L_{74}^{27}(3C)$	$(2, 5, 7)L$
dim Der 14	dim Serie derivada $(7, 3, 0)$	dim Serie C. Desc. $(7, 3, 2, 0)$	

$$[e_1, e_2] = e_5, [e_1, e_5] = e_6, [e_2, e_3] = e_6, [e_2, e_5] = e_7, [e_3, e_4] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{41}(14, 12, -1, 6, 12)^T$. Esta álgebra no es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 2, -1, 1, 2, 1), D_2 = \text{Diag}(0, 1, 0, 2, 1, 1, 2).$$

$$\text{Derivación pre-Einstein: } \frac{1}{41} \text{Diag}(15, 22, 30, 29, 37, 52, 59)$$

2.30	$n_{7,102}$	$L_{74}^{12}(3C)$	$(1, 4, 5, 7)B$
dim Der 15	dim Serie derivada $(7, 3, 0)$		dim Serie C. Desc. $(7, 3, 2, 1, 0)$

$$[e_1, e_2] = e_5, [e_1, e_5] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_5] = e_7, [e_3, e_4] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{27}(8, 8, 3, 3, 7)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 2, 0, 5, 3, 4, 5), D_2 = \text{Diag}(0, 0, 1, -1, 0, 0, 0).$$

$$\text{Derivación pre-Einstein: } \frac{4}{27} \text{Diag}(2, 4, 5, 5, 6, 8, 10)$$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{27}{29} \approx 0.931$$

2.31	$n_{7,74}$		$(1, 3, 5, 7)G$
dim Der 13	dim Serie derivada $(7, 4, 0)$		dim Serie C. Desc. $(7, 4, 2, 1, 0)$

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_4] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_5, [e_2, e_5] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{39}(3, 13, 9, 12, 9)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 3, 1, 3, 2, 3), D_2 = \text{Diag}(0, 1, -1, 1, 0, 1, 1).$$

$$\text{Derivación pre-Einstein: } \frac{1}{39} \text{Diag}(14, 15, 27, 29, 42, 43, 57)$$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{39}{46} \approx 0.848$$

2.32	$n_{7,67}$	L_{75}^{43}	$(1, 3, 5, 7)E$
dim Der 14	dim Serie derivada $(7, 4, 0)$	dim Serie C. Desc. $(7, 4, 2, 1, 0)$	

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_5, [e_1, e_4] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_3, e_5] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{27}(7, 3, 8, 3, 8)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 1, 1, 2, 2, 3), D_2 = \text{Diag}(0, 2, 1, 2, 1, 2, 2).$$

$$\text{Derivación pre-Einstein: } \frac{2}{27} \text{Diag}(3, 10, 8, 13, 11, 16, 19)$$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{27}{29} \approx 0.931$$

2.33	$n_{7,71}$	L_{75}^{16}	$(1, 3, 5, 7)I$
dim Der 12	dim Serie derivada $(7, 4, 0)$	dim Serie C. Desc. $(7, 4, 2, 1, 0)$	

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_4] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_5, [e_3, e_5] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $\mathbf{U}x = [1]$: $x = \frac{1}{33}(6, 11, 6, 9, 9)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$D_1 = \text{Diag}(2, 0, 3, 2, 3, 4, 6)$, $D_2 = \text{Diag}(0, 1, 0, 1, 1, 1, 1)$.

Derivación pre-Einstein: $\frac{1}{33} \text{Diag}(10, 18, 15, 28, 33, 38, 48)$

$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{33}{41} \approx 0.805$

2.34	$n_{7,82}$		$(2,4,7)G$
dim Der 12	dim Serie derivada $(7,4,0)$		dim Serie C. Desc. $(7,4,2,0)$

$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_5, [e_1, e_4] = e_7, [e_2, e_4] = e_6, [e_3, e_5] = e_7$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $\mathbf{U}x = [1]$: $x = \frac{1}{47}(12, 11, 2, 15, 15)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$D_1 = \text{Diag}(2, 0, 1, 2, 3, 2, 4)$, $D_2 = \text{Diag}(0, 2, 1, 2, 1, 4, 2)$.

Derivación pre-Einstein: $\frac{1}{47} \text{Diag}(22, 20, 21, 42, 43, 62, 64)$

$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{47}{55} \approx 0.854$

2.35	$n_{7,84}$	$L_{74}^{28}(3C)$	$(2,4,7)K$
dim Der 12	dim Serie derivada $(7,4,0)$		dim Serie C. Desc. $(7,4,2,0)$

$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_5, [e_1, e_5] = e_6, [e_2, e_4] = e_6, [e_2, e_5] = e_7, [e_3, e_4] = e_7$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Una solución a $\mathbf{U}x = [1]$: $x = \frac{1}{13}(2, 4, 2, 2, 3, 2)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:
 $D_1 = \text{Diag}(1, 0, -1, 1, 0, 1, 0)$, $D_2 = \text{Diag}(0, 1, 2, 1, 2, 2, 3)$.
 Derivación pre-Einstein: $\frac{1}{3} \text{Diag}(5, 6, 7, 11, 12, 17, 18)$
 $\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{13}{15} \approx 0.867$

2.36	$n_{7,118}$	L_{75}^{24}	$(2,5,7)?$ [Car]
dim Der 16	dim Serie derivada (7,3,0)	dim Serie C. Desc. (7,3,1,0)	

$$[e_1, e_3] = e_5, [e_1, e_4] = e_7, [e_2, e_3] = e_6, [e_2, e_4] = -e_5, [e_3, e_6] = -e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{23}(1, 4, 6, 4, 6)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:
 $D_1 = \text{Diag}(1, 0, 2, 3, 3, 2, 4)$, $D_2 = \text{Diag}(0, 1, -2, -3, -2, -1, -3)$.
 Derivación pre-Einstein: $\frac{1}{23} \text{Diag}(18, 13, 10, 15, 28, 23, 33)$
 $\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{23}{21} \approx 1.10$

2.37	$n_{7,52}^\lambda$ $\lambda = -1$	$L_{74}^8(3C)$ $\alpha = 0$ $\beta = \frac{1}{2}$	$(1,3,5,7)R$
dim Der 13	dim Serie derivada (7,4,0)	dim Serie C. Desc. (7,4,3,1,0)	

$$\mu := \begin{cases} [e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_5, [e_1, e_4] = e_5, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_4] = e_6, \\ [e_2, e_5] = e_7, [e_3, e_4] = e_7 \end{cases}$$

Sea $g \in GL_7(\mathbb{C})$ dada por

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{\frac{3\pi}{4}\sqrt{-1}} & \sqrt{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}e^{\frac{5\pi}{4}\sqrt{-1}} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}e^{\frac{3\pi}{4}\sqrt{-1}} & e^{\frac{3\pi}{4}\sqrt{-1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{-1} & e^{\frac{5\pi}{4}\sqrt{-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & e^{\frac{7\pi}{4}\sqrt{-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cuya inversa g^{-1} es

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{5\pi}{4}\sqrt{-1}} & e^{\frac{3\pi}{4}\sqrt{-1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{-1} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2e^{\frac{7\pi}{4}\sqrt{-1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{5\pi}{4}\sqrt{-1}} & e^{\frac{3\pi}{4}\sqrt{-1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{-1}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}\sqrt{-1}} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}e^{\frac{3\pi}{4}\sqrt{-1}} & \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La acción de g sobre μ da una álgebra de Lie isomorfa, $g \cdot \mu = \tilde{\mu}$

$$\tilde{\mu} := \begin{cases} [e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_5, [e_1, e_4] = e_6, [e_1, e_5] = e_7, [e_2, e_3] = -e_6, \\ [e_2, e_4] = e_5, [e_2, e_6] = -e_7, [e_3, e_4] = 2e_7 \end{cases}$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice of $(\mathbb{R}^n, \tilde{\mu})$

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Una solución a $U_{\tilde{\mu}}x = [1]$: $x = \frac{1}{22}(4, 4, 3, 3, 4, 1, 5, 2)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 1, 2, 2, 3, 3, 4), D_2 = \text{Diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 0, 0, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 0\right).$$

Derivación pre-Einstein: $\frac{4}{11} \text{Diag}(1, 1, 2, 2, 3, 3, 4)$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{11}{13} \approx 0.846$$

2.38		(2,5,7)J
dim Der 16	dim Serie derivada (7,3,0)	dim Serie C. Desc. (7,3,2,0)

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_6, [e_1, e_5] = e_7, [e_2, e_3] = e_7, [e_2, e_4] = e_6$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{16}(4, 3, 2, 3, 2)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:
 $D_1 = \text{Diag}(1, 0, 1, 2, 0, 2, 1)$, $D_2 = \text{Diag}(0, 1, 1, 0, 2, 1, 2)$.
 Derivación pre-Einstein: $\frac{7}{16} \text{Diag}(1, 1, 2, 2, 2, 3, 3)$
 $\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{8}{7} \approx 1.14$

2.39		$L_{\frac{7}{5}}^{47}$	(2,4,7)L
dim Der 17	dim Serie derivada (7,4,0)	dim Serie C. Desc. (7,4,2,0)	

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_5, [e_1, e_4] = e_6, [e_1, e_5] = e_7, [e_2, e_3] = e_6$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{16}(2, 3, 2, 4, 3)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:
 $D_1 = \text{Diag}(1, 0, 2, 1, 3, 2, 4)$, $D_2 = \text{Diag}(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$.
 Derivación pre-Einstein: $\frac{1}{16} \text{Diag}(5, 11, 10, 16, 15, 21, 20)$
 $\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{8}{7} \approx 1.14$

2.40			(3,5,7)C
dim Der 16	dim Serie derivada (7,4,0)	dim Serie C. Desc. (7,4,2,0)	

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_5, [e_1, e_4] = e_7, [e_2, e_3] = e_6, [e_2, e_4] = e_5$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{23}(6, 4, 4, 6, 1)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:
 $D_1 = \text{Diag}(1, 0, 1, 2, 2, 1, 3)$, $D_2 = \text{Diag}(0, 1, 1, 0, 1, 2, 0)$.

Derivación pre-Einstein: $\frac{1}{23} \text{Diag}(9, 10, 19, 18, 28, 29, 27)$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{23}{21} \approx 1.10$$

2.41		$(1, 3, 5, 7)O$
dim Der 13	dim Serie derivada $(7, 4, 0)$	dim Serie C. Desc. $(7, 4, 3, 1, 0)$

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_5, [e_1, e_4] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_6, [e_2, e_5] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Una solución a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{7}(1, 2, 1, 1, 1, 2)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 1, 0, 2, 1, 2), D_2 = \text{Diag}(0, 1, 1, 2, 1, 2, 2).$$

Derivación pre-Einstein: $\frac{1}{7} \text{Diag}(2, 3, 5, 6, 7, 8, 10)$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{7}{8} \approx 0.875$$

2.42		L_{75}^{58}	$(2, 4, 7)M$
dim Der 14	dim Serie derivada $(7, 4, 0)$	dim Serie C. Desc. $(7, 4, 2, 0)$	

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_5, [e_1, e_5] = e_6, [e_2, e_3] = e_6, [e_2, e_4] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{41}(6, 12, 12, -1, 14)^T$. Esta álgebra no es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 2, 0, 3, 1, 2, 5), D_2 = \text{Diag}(0, 0, 1, 0, 1, 1, 0).$$

Derivación pre-Einstein: $\frac{1}{41} \text{Diag}(11, 22, 30, 33, 41, 52, 55)$

2.43		L_{75}^{52}	$(2,4,7)C$
dim Der 16	dim Serie derivada $(7,4,0)$	dim Serie C. Desc. $(7,4,2,0)$	

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_5, [e_1, e_4] = e_7, [e_1, e_5] = e_6, [e_3, e_5] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{37}(8, 8, 5, 5, 9)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(2, 0, 1, 2, 3, 5, 4), D_2 = \text{Diag}(0, 2, 1, 2, 1, 1, 2).$$

$$\text{Derivación pre-Einstein: } \frac{1}{37} \text{Diag}(11, 29, 20, 40, 31, 42, 51)$$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{37}{35} \approx 1.06$$

2.44		L_{75}^{60}	$(2,4,7)N$
dim Der 16	dim Serie derivada $(7,4,0)$	dim Serie C. Desc. $(7,4,1,0)$	

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_5, [e_1, e_5] = e_7, [e_2, e_3] = e_6, [e_2, e_4] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{37}(5, 9, 8, 5, 8)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 0, -1, 1, 0, -1, 1), D_2 = \text{Diag}(0, 1, 2, 1, 2, 3, 2).$$

$$\text{Derivación pre-Einstein: } \frac{1}{37} \text{Diag}(15, 19, 23, 34, 38, 42, 53)$$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{37}{35} \approx 1.06$$

2.45			$(2,5,7)D$
dim Der 17	dim Serie derivada $(7,3,0)$	dim Serie C. Desc. $(7,3,1,0)$	

$$[e_1, e_2] = e_5, [e_1, e_4] = e_7, [e_1, e_5] = e_6, [e_2, e_3] = e_7, [e_2, e_4] = e_6$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $\mathbf{U}\chi = [1]$: $\chi = \frac{1}{14}(3, 1, 4, 3, 1)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 3, 2, 1, 2, 3), D_2 = \text{Diag}(0, 1, -1, 0, 1, 1, 0).$$

Derivación pre-Einstein: $\frac{1}{14} \text{Diag}(6, 7, 11, 12, 13, 19, 18)$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{7}{6} \approx 1.17$$

A.1.4 Rango tres

3.1(i_λ) $\lambda \neq 0, 1$	$n_{7,93}^\lambda$	$L_{74}^{24}(3C)$ $\beta = \frac{1}{\lambda-1}$ $\beta \neq -1$	(1,4,7)E ($\xi = \lambda$)
dim Der 15	dim Serie derivada (7,4,0)	dim Serie C. Desc. (7,4,1,0)	

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_5, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_6, [e_2, e_5] = ae_7, [e_3, e_4] = (a-1)e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Una solución a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{8}(1, 2, 1, 1, 2, 1)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 0, 1, 1, 0, 1), D_2 = \text{Diag}(0, 1, 0, 1, 0, 1, 1), D_3 = \text{Diag}(0, 0, 1, 0, 1, 1, 1).$$

$$\text{Derivación pre-Einstein: } \frac{1}{2} \text{Diag}(1, 1, 1, 2, 2, 2, 3) \|\mathcal{S}_\beta\|^2 = 1$$

3.1(i_λ) $\lambda = 0$	$n_{7,93}^\lambda$ $\lambda = 0$	$L_{74}^{34}(3C)$ [Car]	(2,4,7)?
dim Der 15	dim Serie derivada (7,4,0)	dim Serie C. Desc. (7,4,1,0)	

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_5, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_6, [e_3, e_4] = -e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = (t, 0, \frac{1}{2} - t, \frac{1}{2} - t, t)^T$. Esta álgebra no es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 0, 1, 1, 0, 1), D_2 = \text{Diag}(0, 1, 0, 1, 0, 1, 1), D_3 = \text{Diag}(0, 0, 1, 0, 1, 1, 1).$$

$$\text{Derivación pre-Einstein: } \frac{1}{2} \text{Diag}(1, 1, 1, 2, 2, 2, 3)$$

3.1(i $_{\lambda}$)	\mathfrak{n}_7^{93} $\lambda = 1$	L_{75}^5	(2,4,7)? [Car]
dim Der 15	dim Serie derivada (7,4,0)	dim Serie C. Desc. (7,4,1,0)	

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_5, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_6, [e_2, e_5] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = (0, t, \frac{1}{2} - t, \frac{1}{2} - t, t)^T$. Esta álgebra no es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 0, 1, 1, 0, 1), D_2 = \text{Diag}(0, 1, 0, 1, 0, 1, 1), D_3 = \text{Diag}(0, 0, 1, 0, 1, 1, 1).$$

Derivación pre-Einstein: $\frac{1}{2} \text{Diag}(1, 1, 1, 2, 2, 2, 3)$

3.1(iii)	$\mathfrak{n}_{7,113}$	$L_{74}^{20}(3C)$	(1,4,7)A
dim Der 15	dim Serie derivada (7,3,0)	dim Serie C. Desc. (7,3,1,0)	

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_5, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_5] = e_7, [e_3, e_4] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = (t, \frac{1}{2} - t, 0, \frac{1}{2} - t, t)^T$. Esta álgebra no es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 0, 1, 1, 0, 1), D_2 = \text{Diag}(0, 1, 0, 1, 0, 1, 1), D_3 = \text{Diag}(0, 0, 1, 0, 1, 1, 1).$$

Derivación pre-Einstein: $\frac{1}{2} \text{Diag}(1, 1, 1, 2, 2, 2, 3)$

3.2	$\mathfrak{n}_{7,78}$	L_{76}^2	(2,4,5,7)A
dim Der 17	dim Serie derivada (7,4,0)	dim Serie C. Desc. (7,4,2,1,0)	

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_5, [e_1, e_4] = e_6, [e_1, e_6] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{13}(3, 1, 4, 3)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 0, 1, 1, 2, 3), D_2 = \text{Diag}(0, 1, 0, 1, 0, 1, 1), D_3 = \text{Diag}(0, 0, 1, 0, 1, 0, 0).$$

$$\text{Derivación pre-Einstein: } \frac{2}{13} \text{Diag}(1, 5, 6, 6, 7, 7, 8)$$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{13}{11} \approx 1.18$$

3.3	$n_{7,80}$	L_{75}^{14}	$(2, 4, 5, 7)B$
dim Der 15	dim Serie derivada $(7, 4, 0)$	dim Serie C. Desc. $(7, 4, 2, 1, 0)$	

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_4] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_3] = e_5$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{21}(3, 7, 6, 6)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 0, 1, 0, 2, 3), D_2 = \text{Diag}(0, 1, 0, 1, 1, 1, 1), D_3 = \text{Diag}(0, 0, 1, 0, 1, 0, 0).$$

$$\text{Derivación pre-Einstein: } \frac{1}{21} \text{Diag}(5, 12, 15, 17, 27, 22, 27)$$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{21}{22} \approx 0.954$$

3.4	$n_{7,83}$	L_{75}^{26}	$(2, 4, 7)F$
dim Der 13	dim Serie derivada $(7, 4, 0)$	dim Serie C. Desc. $(7, 4, 2, 0)$	

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_5, [e_2, e_4] = e_6, [e_3, e_5] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $\mathbf{U}x = [1]$: $x = \frac{1}{12}(3, 3, 4, 4)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 0, 1, 1, 1, 1)$, $D_2 = \text{Diag}(0, 1, 0, 1, 0, 2, 0)$, $D_3 = \text{Diag}(0, 0, 1, 0, 1, 0, 2)$.

Derivación pre-Einstein: $\frac{1}{12} \text{Diag}(6, 5, 5, 11, 11, 16, 16)$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{6}{7} \approx 0.857$$

3.5	$n_{7,86}$	L_{75}^{23}	$(2, 4, 7)I$
dim Der 14	dim Serie derivada $(7, 4, 0)$	dim Serie C. Desc. $(7, 4, 2, 0)$	

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_5, [e_2, e_4] = e_6, [e_2, e_5] = e_7, [e_3, e_4] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Una solución a $\mathbf{U}x = [1]$: $x = \frac{1}{20}(5, 5, 4, 4, 4)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 0, 1, 1, 1, 1)$, $D_2 = \text{Diag}(0, 1, 0, 1, 0, 2, 1)$, $D_3 = \text{Diag}(0, 0, 1, 0, 1, 0, 1)$.

Derivación pre-Einstein: $\frac{1}{20} \text{Diag}(10, 7, 11, 17, 21, 24, 28)$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{10}{11} \approx 0.909$$

3.6	$n_{7,98}$	L_{75}^3	$(3, 5, 7)A$
dim Der 18	dim Serie derivada $(7, 4, 0)$	dim Serie C. Desc. $(7, 4, 1, 0)$	

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_5, [e_1, e_5] = e_7, [e_2, e_3] = e_6$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{13}(1, 3, 4, 3)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 0, 1, 1, 0, 2), D_2 = \text{Diag}(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0), D_3 = \text{Diag}(0, 0, 1, 0, 1, 1, 1).$$

$$\text{Derivación pre-Einstein: } \frac{1}{13} \text{Diag}(5, 9, 7, 14, 12, 16, 17)$$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{13}{11} \approx 1.18$$

3.7	$n_{7,117}$	L_{75}^{25}	(2,5,7)H
dim Der 15	dim Serie derivada (7,3,0)	dim Serie C. Desc. (7,3,1,0)	

$$[e_1, e_2] = e_5, [e_1, e_5] = e_6, [e_2, e_4] = e_6, [e_3, e_4] = -e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{3}(1, 1, 0, 1)^T$. Esta álgebra no es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 0, 2, 1, 2, 2), D_2 = \text{Diag}(0, 1, 0, 0, 1, 1, 0), D_3 = \text{Diag}(0, 0, 1, 0, 0, 0, 1).$$

$$\text{Derivación pre-Einstein: } \frac{1}{3} \text{Diag}(1, 2, 2, 2, 3, 4, 4)$$

3.8	$n_{7,121}$	L_{75}^{19}	(2,5,7)A
dim Der 19	dim Serie derivada (7,3,0)	dim Serie C. Desc. (7,3,1,0)	

$$[e_1, e_2] = e_5, [e_1, e_3] = e_6, [e_1, e_5] = e_7, [e_2, e_4] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{5}(1, 1, 1, 1)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 0, 2, 1, 1, 2), D_2 = \text{Diag}(0, 1, 0, 0, 1, 0, 1), D_3 = \text{Diag}(0, 0, 1, 0, 0, 1, 0).$$

$$\text{Derivación pre-Einstein: } \frac{1}{5} \text{Diag}(2, 3, 4, 4, 5, 6, 7)$$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{5}{4} = 1.25$$

3.9	$\mathfrak{n}_{7,123}$		(2,5,7)C
dim Der 18	dim Serie derivada (7,3,0)		dim Serie C. Desc. (7,3,1,0)

$$[e_1, e_2] = e_5, [e_1, e_5] = -e_7, [e_2, e_3] = e_6, [e_2, e_4] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{13}(3, 4, 3, 1)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 0, 2, 1, 0, 2), D_2 = \text{Diag}(0, 1, 0, 0, 1, 1, 1), D_3 = \text{Diag}(0, 0, 1, 0, 0, 1, 0).$$

Derivación pre-Einstein: $\frac{2}{13} \text{Diag}(3, 3, 5, 6, 6, 8, 9)$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{13}{11} \approx 1.18$$

3.10	$\mathfrak{n}_{7,111}$		(1,3,7)C
dim Der 15	dim Serie derivada (7,3,0)		dim Serie C. Desc. (7,3,1,0)

$$[e_1, e_2] = e_5, [e_1, e_3] = e_6, [e_2, e_4] = e_6, [e_2, e_6] = e_7, [e_3, e_5] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Una solución a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{20}(4, 4, 4, 5, 5)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 0, 1, 1, 1, 1), D_2 = \text{Diag}(0, 1, 0, -1, 1, 0, 1), D_3 = \text{Diag}(0, 0, 1, 1, 0, 1, 1).$$

Derivación pre-Einstein: $\frac{1}{20} \text{Diag}(12, 7, 11, 16, 19, 23, 30)$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{10}{11} \approx 0.91$$

3.11	$\mathfrak{n}_{7,119}$	L_{75}^{20}	(2,5,7)B
dim Der 18	dim Serie derivada (7,3,0)		dim Serie C. Desc. (7,3,1,0)

$$[e_1, e_2] = e_5, [e_1, e_3] = e_6, [e_1, e_5] = e_7, [e_2, e_4] = e_6$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{13}(3, 1, 4, 3)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 0, 1, 1, 1, 2), D_2 = \text{Diag}(0, 1, 0, -1, 1, 0, 1), D_3 = \text{Diag}(0, 0, 1, 1, 0, 1, 0).$$

$$\text{Derivación pre-Einstein: } \frac{1}{13} \text{Diag}(5, 7, 12, 10, 12, 17, 17)$$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{13}{11} \approx 1.18$$

3.12	$n_{7,124}$	L_{75}^{28}	(3,7)D
dim Der 19	dim Serie derivada (7,3,0)	dim Serie C. Desc. (7,3,0)	

$$[e_1, e_2] = e_5, [e_1, e_3] = e_6, [e_2, e_4] = e_6, [e_3, e_4] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{8}(2, 1, 1, 2)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 0, 1, 1, 1, 1), D_2 = \text{Diag}(0, 1, 0, -1, 1, 0, -1), D_3 = \text{Diag}(0, 0, 1, 1, 0, 1, 2).$$

$$\text{Derivación pre-Einstein: } \frac{5}{8} \text{Diag}(1, 1, 1, 1, 2, 2, 2)$$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{4}{3} \approx 1.33$$

3.13	$n_{7,105}$	$L_{74}^{33}(3C)$	(2,5,7)K
dim Der 16	dim Serie derivada (7,3,0)	dim Serie C. Desc. (7,3,2,0)	

$$[e_1, e_2] = e_5, [e_1, e_5] = e_6, [e_2, e_5] = e_7, [e_3, e_4] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $\mathbf{U}x = [1]$: $x = \frac{1}{21}(7, 6, 3, 6)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 0, 1, 1, 2, 1)$, $D_2 = \text{Diag}(0, 1, 0, 2, 1, 1, 2)$, $D_3 = \text{Diag}(0, 0, 1, -1, 0, 0, 0)$.

Derivación pre-Einstein: $\frac{1}{21} \text{Diag}(8, 11, 15, 15, 19, 27, 30)$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{21}{22} \approx 0.954$$

3.14	$n_{7,120}$	L_{75}^4	$(2, 5, 7)F$
dim Der 18	dim Serie derivada $(7, 3, 0)$	dim Serie C. Desc. $(7, 3, 1, 0)$	

$$[e_1, e_2] = e_5, [e_1, e_3] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_4] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $\mathbf{U}x = [1]$: $x = \frac{1}{13}(1, 4, 3, 3)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 0, 2, 1, 1, 2)$, $D_2 = \text{Diag}(0, 1, 0, -1, 1, 0, 0)$, $D_3 = \text{Diag}(0, 0, 1, 1, 0, 1, 1)$.

Derivación pre-Einstein: $\frac{1}{13} \text{Diag}(5, 9, 9, 10, 14, 14, 19)$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{13}{11} \approx 1.18$$

3.15	$n_{7,122}$	L_{75}^{27}	$(2, 5, 7)E$
dim Der 17	dim Serie derivada $(7, 3, 0)$	dim Serie C. Desc. $(7, 3, 1, 0)$	

$$[e_1, e_2] = e_5, [e_1, e_3] = e_6, [e_2, e_5] = e_7, [e_3, e_4] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $\mathbf{U}x = [1]$: $x = \frac{1}{11}(3, 2, 3, 2)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 0, 1, 1, 1, 1), D_2 = \text{Diag}(0, 1, 0, 2, 1, 0, 2), D_3 = \text{Diag}(0, 0, 1, -1, 0, 1, 0).$$

$$\text{Derivación pre-Einstein: } \frac{1}{11} \text{Diag}(6, 5, 7, 9, 11, 13, 16)$$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{11}{10} = 1.10$$

3.16	$n_{7,108}$		(1, 3, 7)A
dim Der 14	dim Serie derivada (7, 3, 0)		dim Serie C. Desc. (7, 3, 1, 0)

$$[e_1, e_2] = e_5, [e_1, e_5] = e_7, [e_3, e_4] = e_6, [e_3, e_6] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{12}(4, 3, 4, 3)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 0, 2, 1, 2, 2), D_2 = \text{Diag}(0, 1, 0, 1, 1, 1, 1), D_3 = \text{Diag}(0, 0, 1, -2, 0, -1, 0).$$

$$\text{Derivación pre-Einstein: } \frac{1}{12} \text{Diag}(5, 8, 5, 8, 13, 13, 18)$$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{6}{7} \approx 0.857$$

3.17	$n_{7,103}$	L_{75}^{15}	(1, 4, 5, 7)A
dim Der 16	dim Serie derivada (7, 3, 0)		dim Serie C. Desc. (7, 3, 2, 1, 0)

$$[e_1, e_2] = e_5, [e_1, e_5] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_3, e_4] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{21}(6, 7, 3, 6)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 0, 3, 1, 2, 3), D_2 = \text{Diag}(0, 1, 0, 1, 1, 1, 1), D_3 = \text{Diag}(0, 0, 1, -1, 0, 0, 0).$$

$$\text{Derivación pre-Einstein: } \frac{5}{21} \text{Diag}(1, 3, 3, 3, 4, 5, 6)$$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{21}{22} \approx 0.954$$

3.18	$n_{7,128}$	$L_{74}^9(3C)$	$(1,5,7)?$
dim Der 19	dim Serie derivada $(7,2,0)$	dim Serie C. Desc. $(7,2,1,0)$	

$$[e_1, e_2] = e_6, [e_1, e_6] = e_7, [e_2, e_5] = e_7, [e_3, e_4] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{13}(4, 3, 1, 3)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 0, 2, 2, 1, 2), D_2 = \text{Diag}(0, 1, 0, 1, 0, 1, 1), D_3 = \text{Diag}(0, 0, 1, -1, 0, 0, 0).$$

$$\text{Derivación pre-Einstein: } \frac{2}{13} \text{Diag}(3, 4, 5, 5, 6, 7, 10)$$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{13}{11} \approx 1.18$$

3.19	$n_{7,129}$	$L_{74}^{26}(3C)$	$(2,7)B$
dim Der 19	dim Serie derivada $(7,2,0)$	dim Serie C. Desc. $(7,2,0)$	

$$[e_1, e_2] = e_6, [e_1, e_3] = e_7, [e_3, e_4] = e_6, [e_4, e_5] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{8}(2, 1, 1, 2)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 0, 1, 0, 1, 1), D_2 = \text{Diag}(0, 1, 0, 1, -1, 1, 0), D_3 = \text{Diag}(0, 0, 1, -1, 2, 0, 1).$$

$$\text{Derivación pre-Einstein: } \frac{1}{8} \text{Diag}(5, 6, 6, 5, 6, 11, 11)$$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{4}{3} \approx 1.33$$

3.20		L_{76}^3	$(2,4,7)A$
dim Der 19	dim Serie derivada $(7,4,0)$	dim Serie C. Desc. $(7,4,2,0)$	

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_5, [e_1, e_4] = e_6, [e_1, e_5] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{5}(1, 1, 1, 1)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 0, 1, 1, 2, 2), D_2 = \text{Diag}(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0), D_3 = \text{Diag}(0, 0, 1, 0, 1, 0, 1).$$

$$\text{Derivación pre-Einstein: } \frac{1}{5} \text{Diag}(1, 4, 4, 5, 5, 6, 6)$$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{5}{4} = 1.25$$

3.21	L_{75}^{54}	(2,4,7)B
dim Der 15	dim Serie derivada (7,4,0)	dim Serie C. Desc. (7,4,2,0)

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_5, [e_1, e_4] = e_6, [e_3, e_5] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{21}(6, 3, 6, 7)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 0, 1, 1, 2, 1), D_2 = \text{Diag}(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0), D_3 = \text{Diag}(0, 0, 1, 0, 1, 0, 2).$$

$$\text{Derivación pre-Einstein: } \frac{1}{21} \text{Diag}(6, 15, 11, 21, 17, 27, 28)$$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{21}{22} \approx 0.954$$

3.22	$L_{74}^{36}(3C)$	(2,4,7)D
dim Der 15	dim Serie derivada (7,4,0)	dim Serie C. Desc. (7,4,2,0)

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_5, [e_1, e_5] = e_7, [e_2, e_5] = e_6, [e_3, e_4] = e_6$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Una solución a $\mathbf{U}\mathbf{x} = [1]$: $\mathbf{x} = \frac{1}{20}(4, 5, 4, 4, 5)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 0, 1, 1, 1, 2)$, $D_2 = \text{Diag}(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$, $D_3 = \text{Diag}(0, 0, 1, 0, 1, 1, 1)$.

Derivación pre-Einstein: $\frac{1}{20} \text{Diag}(7, 12, 10, 19, 17, 29, 24)$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{10}{11} \approx 0.909$$

3.23		L_{75}^{62}	(3, 5, 7)B
dim Der 17	dim Serie derivada (7, 4, 0)		dim Serie C. Desc. (7, 4, 2, 0)

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_5, [e_1, e_4] = e_7, [e_2, e_3] = e_6$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $\mathbf{U}\mathbf{x} = [1]$: $\mathbf{x} = \frac{1}{11}(3, 2, 2, 3)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 1, 0, 2, 1, 1)$, $D_2 = \text{Diag}(0, 1, 1, 0, 1, 2, 0)$, $D_3 = \text{Diag}(0, 0, 0, 1, 0, 0, 1)$.

Derivación pre-Einstein: $\frac{1}{11} \text{Diag}(4, 5, 9, 9, 13, 14, 13)$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{11}{10} = 1.10$$

3.24		L_{75}^7	(3, 7)C
dim Der 22	dim Serie derivada (7, 3, 0)		dim Serie C. Desc. (7, 3, 0)

$$[e_1, e_2] = e_5, [e_2, e_3] = e_6, [e_2, e_4] = e_7, [e_3, e_4] = e_5$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{6}(1, 1, 1, 1)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 0, 1, 1, 0, 1)$, $D_2 = \text{Diag}(0, 1, 0, 1, 1, 1, 2)$, $D_3 = \text{Diag}(0, 0, 1, -1, 0, 1, -1)$.

Derivación pre-Einstein: $\frac{1}{6} \text{Diag}(5, 3, 4, 4, 8, 7, 7)$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{3}{2} \approx 1.50$$

A.1.5 Rango cuatro

4.1	$n_{7,125}$	L_{75}^6	(3,7)B
dim Der 20	dim Serie derivada (7,3,0)		dim Serie C. Desc. (7,3,0)

$$[e_1, e_2] = e_5, [e_1, e_3] = e_6, [e_3, e_4] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{7}(2, 1, 2)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 0, 0, 1, 1, 0)$, $D_2 = \text{Diag}(0, 1, 0, 0, 1, 0, 0)$, $D_3 = \text{Diag}(0, 0, 1, 0, 0, 1, 1)$,

$D_4 = \text{Diag}(0, 0, 0, 1, 0, 0, 1)$.

Derivación pre-Einstein: $\frac{1}{7} \text{Diag}(4, 5, 4, 5, 9, 8, 9)$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{7}{5} = 1.4$$

4.2	$n_{7,126}$	L_{76}^4	(3,7)A
dim Der 25	dim Serie derivada (7,3,0)		dim Serie C. Desc. (7,3,0)

$$[e_1, e_2] = e_5, [e_1, e_3] = e_6, [e_1, e_4] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $Ux = [1]$: $x = \frac{1}{5}(1, 1, 1)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 0, 0, 1, 1, 1), D_2 = \text{Diag}(0, 1, 0, 0, 1, 0, 0), D_3 = \text{Diag}(0, 0, 1, 0, 0, 1, 0), \\ D_4 = \text{Diag}(0, 0, 0, 1, 0, 0, 1).$$

Derivación pre-Einstein: $\frac{2}{5} \text{Diag}(1, 2, 2, 2, 3, 3, 3)$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{5}{3} \approx 1.67$$

4.3	$\mathfrak{n}_{7,130}$		$(2, 7)A$
dim Der 21	dim Serie derivada $(7, 2, 0)$		dim Serie C. Desc. $(7, 2, 0)$

$$[e_1, e_2] = e_6, [e_3, e_5] = e_6, [e_4, e_5] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $\mathbf{U}x = [1]$: $x = \frac{1}{7}(2, 1, 2)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 0, 0, 1, 1, 1), D_2 = \text{Diag}(0, 1, 0, 0, 1, 1, 1), D_3 = \text{Diag}(0, 0, 1, 0, -1, 0, -1), \\ D_4 = \text{Diag}(0, 0, 0, 1, 0, 0, 1).$$

Derivación pre-Einstein: $\frac{1}{7} \text{Diag}(5, 5, 6, 5, 4, 10, 9)$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{7}{5} = 1.4$$

4.4	$\mathfrak{n}_{7,131}$		$(1, 7)$
dim Der 28	dim Serie derivada $(7, 1, 0)$		dim Serie C. Desc. $(7, 1, 0)$

$$[e_1, e_4] = e_7, [e_2, e_5] = e_7, [e_3, e_6] = e_7$$

$\{e_1 \dots e_7\}$ es una base nice.

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución general a $\mathbf{U}x = [1]$: $x = \frac{1}{5}(1, 1, 1)^T$. Esta álgebra es un nilradical Einstein.

Toro maximal de derivaciones semisimples:

$$D_1 = \text{Diag}(1, 0, 0, 0, 1, 1, 1), D_2 = \text{Diag}(0, 1, 0, 0, -1, 0, 0), D_3 = \text{Diag}(0, 0, 1, 0, 0, -1, 0), \\ D_4 = \text{Diag}(0, 0, 0, 1, 1, 1, 1).$$

Derivación pre-Einstein: $\frac{4}{5} \text{Diag}(1, 1, 1, 1, 1, 1, 2)$

$$\|\mathcal{S}_\beta\|^2 = \frac{5}{3} \approx 1.67$$

A.2 ÁLGEBRAS DE LIE 2-PASOS NILPOTENTES SIMPLÉCTICAS DE DIMENSIÓN 6

En esta sección estudiamos detalladamente las estructuras simplécticas dadas en [KGM] a las álgebras de Lie 2-pasos nilpotente simplécticas de dimensión 6 como una aplicación del capítulo 5. Las demás familias de nilpotencia en esta dimensión es un trabajo en desarrollo (fuera de la tesis: [Fer4]).

En dimensión 6 hay varias clasificaciones de las álgebras de Lie nilpotentes reales. Nosotros vamos a comparar la lista dada en [KGM] con la lista en [Sal] y la clasificación de de Graaf en [Gra]. La notación es la siguiente

[KGM, Theorem 5] #	[Gra] L#	[Sal] #
dim Der	Números de Betti	dim Serie C. Desc.

En [KGM] hemos encontrado una serie de errores. Los autores nos han dado las correcciones para algunos, mientras que otros siguen sin resolver. En nuestro estudio vamos a dejar señalado los errores que encontramos y por tanto nos limitamos a estudiar las estructuras simplécticas que estan bien definidas.

[KGM, Theorem 5] 16.	[Gra] L _{6,22} (-1)	[Sal] 28.
dim Der 16	Números de Betti (4,8,10,8,4,1)	dim Serie C. Desc. (6,2,0)

$$[e_1, e_2] = e_5, [e_1, e_3] = e_6, [e_2, e_4] = e_6, [e_3, e_4] = -e_5$$

$$16. \omega_1 = e_1^* \wedge e_6^* + e_2^* \wedge e_3^* - e_4^* \wedge e_5^*$$

Esta estructura es equivalente a tener

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_5] = e_6, [e_2, e_4] = e_6, [e_4, e_5] = e_3 \\ \omega_{cn} = e_1^* \wedge e_6^* + e_2^* \wedge e_5^* + e_3^* \wedge e_4^* \end{cases}$$

usando el cambio de base

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

cuya inversa está dada por

$$g^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El anterior corchete está escrito en una base nice para la acción de $SP_6(\mathbb{R})$. Es fácil ver que esta estructura admite una métrica minimal por 2.1.12 y un punto crítico para la $SP_6(\mathbb{R})$ -órbita es dado por $\exp(X)$ con $X = \text{Diag}(\frac{3}{4} \ln(2), 0, -\frac{3}{4} \ln(2), \frac{3}{4} \ln(2), 0, -\frac{3}{4} \ln(2))$; se ve que $X \in \mathfrak{sp}(6, \mathbb{R})$ y el cambio de base dado por $\exp(X)$ da el corchete

$$\mu := \left\{ [e_1, e_2] = \frac{\sqrt{2}}{4} e_3, [e_1, e_5] = \frac{\sqrt{2}}{4} e_6, [e_2, e_4] = \frac{\sqrt{2}}{4} e_6, [e_4, e_5] = \frac{\sqrt{2}}{4} e_3 \right.$$

que es tal que la aplicación momento de $GL_6(\mathbb{R})$ evaluada en μ es

$$\frac{1}{2} \text{Diag}(-1, -1, 1, -1, -1, 1)$$

y así, la aplicación momento de $SL_6\mathbb{R}$ evaluada en μ es

$$\frac{1}{2} \text{Diag}(-1, 0, 1, -1, 0, 1) = -\text{Id} + \frac{1}{2} \text{Diag}(1, 2, 3, 1, 2, 3)$$

y como $\text{Diag}(1, 2, 3, 1, 2, 3)$ es derivación, entonces se sigue la afirmación.

Información adicional

Las derivaciones de $(\mathbb{R}^6, \mu, \omega)$ son de la forma

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -m_{6,3} & 0 & 0 \\ -m_{6,5} & 0 & 0 & m_{6,2} & -2m_{6,3} & 0 \\ -m_{6,4} & -m_{6,5} & 0 & m_{3,4} & m_{6,2} & -m_{6,3} \\ m_{6,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{6,2} & 2m_{6,3} & 0 & m_{6,5} & 0 & 0 \\ m_{6,1} & m_{6,2} & m_{6,3} & m_{6,4} & m_{6,5} & 0 \end{bmatrix}$$

Así pues, $\dim \text{Der}(\mathbb{R}^6, \mu, \omega) = 6$

$$16. \omega_2 = e_1^* \wedge e_6^* - e_2^* \wedge e_3^* + e_4^* \wedge e_5^*$$

Esta **NO** es una estructura simpléctica para 16. En efecto, consideremos la terna (e_1, e_2, e_4) y evaluemos en $d_{16} \omega_2$

$$\omega_2([e_1, e_2], e_4) + \omega_2([e_2, e_4], e_1) + \omega_2([e_4, e_1], e_2) = \omega_2(e_5, e_4) + \omega_2(e_6, e_1) + \omega_2(0, e_2) \neq 0$$

[KGM, Theorem 5] 17.	[Gra] $L_{6,22}(0)$	[Sal] 29.
dim Der 17	Números de Betti (4,8,10,8,4,1)	dim Serie C. Desc. (6,2,0)

$$[e_1, e_3] = e_5, [e_1, e_4] = e_6, [e_2, e_3] = e_6$$

$$17. \omega_1 = e_1^* \wedge e_6^* + e_2^* \wedge e_5^* + e_3^* \wedge e_4^*$$

Este corchete esta en una base nice para la acción de $SP_6(\mathbb{R})$. Es fácil ver que esta estructura admite una métrica minimal por 2.1.12 y un punto crítico para la $SP_6(\mathbb{R})$ -órbita es dado por $\exp(X)$ con $X = \text{Diag}(0, \ln(6), -\frac{1}{2} \ln(6), \frac{1}{2} \ln(6), -\ln(6), 0)$; se ve que $X \in \mathfrak{sp}(6, \mathbb{R})$ y el cambio de base dado por $\exp(X)$ da el corchete

$$[e_1, e_3] = \frac{\sqrt{6}}{6} e_5, [e_1, e_4] = \frac{\sqrt{6}}{6} e_6, [e_2, e_3] = \frac{\sqrt{6}}{6} e_6$$

que es tal que la aplicación momento de $GL_6(\mathbb{R})$ evaluada en μ es

$$\frac{1}{3} \text{Diag}(-2, -1, -2, -1, 1, 2)$$

y así, la aplicación momento de $SL_6\mathbb{R}$ evaluada en μ es

$$\frac{1}{6} \text{Diag}(-4, -2, -1, 1, 2, 4) = -\frac{7}{6} \text{Id} + \frac{1}{6} \text{Diag}(3, 5, 6, 8, 9, 11)$$

y como $\text{Diag}(3, 5, 6, 8, 9, 11)$ es derivación, entonces se sigue la afirmación.

Información adicional

Las derivaciones de esta álgebra de Lie nilpotente simpléctica son de la forma

$$\begin{bmatrix} -m_{6,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m_{6,5} & 3m_{6,6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m_{6,4} & 0 & -2m_{6,6} & 0 & 0 & 0 \\ m_{6,3} & -m_{6,4} & 2m_{6,5} & 2m_{6,6} & 0 & 0 \\ m_{6,2} & m_{5,2} & -m_{6,4} & 0 & -3m_{6,6} & 0 \\ m_{6,1} & m_{6,2} & m_{6,3} & m_{6,4} & m_{6,5} & m_{6,6} \end{bmatrix}$$

Así pues, $\dim \text{Der}(\mathbb{R}^6, \mu, \omega) = 7$

[KGM, Theorem 5] 18.	[Gra] $L_{6,26}$	[Sal] 24.
dim Der 18	Números de Betti (3,8,12,8,3,1)	dim Serie C. Desc. (6,3,0)

$$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_5, [e_2, e_3] = e_6$$

$$18. \omega_1(a) = e_1^* \wedge e_6^* + ae_2^* \wedge e_5^* + (a-1)e_3^* \wedge e_4^* \text{ con } a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

Esta estructura es equivalente a tener

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = \frac{a}{a-1}e_5, [e_2, e_3] = \frac{1}{a-1}e_6 \\ \omega_{cn} = e_1^* \wedge e_6^* + e_2^* \wedge e_5^* + e_3^* \wedge e_4^* \end{cases}$$

usando el cambio de base

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El anterior corchete esta escrito en una base nice para la acción de $SP_6(\mathbb{R})$. Es fácil ver que esta estructura admite una métrica minimal por 2.1.12 y un punto crítico para la $SP_6(\mathbb{R})$ -órbita es dado por $\exp(X)$ con $X = \text{Diag}(-\frac{1}{2} \ln(\frac{1}{4} \frac{a^2-2a+1}{a^2-a+1}), 0, 0, 0, 0, \frac{1}{2} \ln(\frac{1}{4} \frac{a^2-2a+1}{a^2-a+1}))$; se ve que $X \in \mathfrak{sp}(6, \mathbb{R})$ y el cambio de base dado por $\exp(X)$ da el corchete

$$\mu := \begin{cases} [e_1, e_2] = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(a-1)^2}{a^2-a+1}} e_4, [e_1, e_3] = \frac{a}{2(a-1)} \sqrt{\frac{(a-1)^2}{a^2-a+1}} e_5, \\ [e_2, e_3] = \frac{1}{2(a-1)} \sqrt{\frac{(a-1)^2}{a^2-a+1}} e_6 \end{cases}$$

que es tal que la aplicación momento de $GL_6(\mathbb{R})$ evaluada en μ es

$$\frac{1}{a^2-a+1} \text{Diag}(-a^2+a-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}a^2+a-1, -\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}(a-1)^2, \frac{1}{2}a^2, \frac{1}{2})$$

y así, la aplicación momento de $SL_6\mathbb{R}$ evaluada en μ es

$$\frac{1}{2} \text{Diag}(-1, -1, -1, 1, 1, 1) = -\frac{3}{2} \text{Id} + \text{Diag}(1, 1, 1, 2, 2, 2)$$

y como $\text{Diag}(1, 1, 1, 2, 2, 2)$ es derivación, entonces se sigue la afirmación.

Información adicional

Las derivaciones de $(\mathbb{R}^6, \mu, \omega)$ son de la forma

$$\begin{bmatrix} -m_{6,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m_{5,5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{5,5} + m_{6,6} & 0 & 0 & 0 \\ m_{6,3} & m_{5,3} & m_{4,3} & -m_{5,5} - m_{6,6} & 0 & 0 \\ m_{6,2} & m_{5,2} & m_{5,3} & 0 & m_{5,5} & 0 \\ m_{6,1} & m_{6,2} & m_{6,3} & 0 & 0 & m_{6,6} \end{bmatrix}$$

Así pues, $\dim \text{Der}(\mathbb{R}^6, \mu, \omega) = 8$

$$18. \omega_2(\alpha) = e_1^* \wedge e_5^* + \alpha e_1^* \wedge e_6^* - \alpha e_2^* \wedge e_5^* + e_2^* \wedge e_6^* - 2\alpha e_3^* \wedge e_4^* \text{ con } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Esta estructura es equivalente a tener

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = -2\alpha e_4, [e_1, e_3] = -2\alpha e_5 + (1 + \alpha^2) e_6, [e_2, e_3] = e_5 \\ \omega_{\text{cn}} = e_1^* \wedge e_6^* + e_2^* \wedge e_5^* + e_3^* \wedge e_4^* \end{cases}$$

usando el cambio de base

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 + \alpha^2 & 0 \end{bmatrix}$$

cuya inversa está dada por

$$g^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(2\alpha)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1 + \alpha^2)^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} \end{bmatrix}$$

Consideremos el segundo cambio de base dado por

$$s(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{3\alpha^2 + 1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (2\sqrt{3\alpha^2 + 1})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

cuya inversa esta dada por

$$s(a)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2\sqrt{3}a^2+1)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{3}a^2+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

Se comprueba directamente que $s(a) \in SP(6, \mathbb{R})$ y este da el corchete

$$\mu := \begin{cases} [e_1, e_2] = \frac{a}{\sqrt{3}a^2+1}e_4, [e_1, e_3] = \frac{a}{2\sqrt{3}a^2+1}e_5 + \frac{1}{2\sqrt{3}a^2+1}e_6, \\ [e_2, e_3] = \frac{1}{2\sqrt{3}a^2+1}e_5 - \frac{a}{2\sqrt{3}a^2+1}e_6 \end{cases}$$

La aplicación momento de $GL_6(\mathbb{R})$ evaluada en μ es

$$\frac{1}{3a^2+1} \text{Diag}\left(-\frac{5}{2}a^2 - \frac{1}{2}, -\frac{5}{2}a^2 - \frac{1}{2}, -a^2 - 1, 2a^2, \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}\right)$$

y así, la aplicación momento de $SL_6\mathbb{R}$ evaluada en μ es

$$\frac{1}{2} \text{Diag}(-1, -1, -1, 1, 1, 1) = -\frac{3}{2} \text{Id} + \text{Diag}(1, 1, 1, 2, 2, 2)$$

y como $\text{Diag}(1, 1, 1, 2, 2, 2)$ es derivación, entonces μ es un punto crítico en la $SP(6, \mathbb{R})$ -órbita.

Información adicional

Las derivaciones de esta álgebra de Lie nilpotente simpléctica son de la forma

$$\begin{bmatrix} -m_{6,6} & m_{6,5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m_{6,5} & -m_{6,6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2m_{6,6} & 0 & 0 & 0 \\ m_{6,3} & m_{5,3} & m_{4,3} & -2m_{6,6} & 0 & 0 \\ m_{6,2} & m_{5,2} & m_{5,3} & 0 & m_{6,6} & -m_{6,5} \\ m_{6,1} & m_{6,2} & m_{6,3} & 0 & m_{6,5} & m_{6,6} \end{bmatrix}$$

Así pues, $\dim \text{Der}(\mathbb{R}^6, \mu, \omega) = 8$

$$18. \omega_3 = e_3^* \wedge e_5^* - e_1^* \wedge e_6^* + e_2^* \wedge e_5^* + 2e_3^* \wedge e_4^*$$

Esta estructura es equivalente a tener

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = 2e_4, [e_1, e_3] = -2e_4 + e_5, [e_2, e_3] = -e_6 \\ \omega_{cn} = e_1^* \wedge e_6^* + e_2^* \wedge e_5^* + e_3^* \wedge e_4^* \end{cases}$$

usando el cambio de base

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

cuya inversa está dada por

$$g^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Consideremos el segundo cambio de base dado por

$$s = \begin{bmatrix} -\frac{3\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2\sqrt{3}}{9} \end{bmatrix}$$

cuya inversa esta dada por

$$s^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{3}}{9} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Se comprueba directamente que $s(a) \in SP(6, \mathbb{R})$ y este da el corchete

$$\mu := \left\{ [e_1, e_2] = -\frac{\sqrt{3}}{12}e_4 - \frac{\sqrt{3}}{4}e_5, [e_1, e_3] = \frac{\sqrt{3}}{4}e_4 + \frac{\sqrt{3}}{12}e_5, [e_2, e_3] = \frac{\sqrt{3}}{6}e_6 \right.$$

La aplicación momento de $GL_6(\mathbb{R})$ evaluada en μ es

$$\begin{bmatrix} -\frac{5}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{12} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{7}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

y así, la aplicación momento de $SL_6\mathbb{R}$ evaluada en μ es

$$\frac{1}{2} \text{Diag}(-1, -1, -1, 1, 1, 1) = -\frac{3}{2} \text{Id} + \text{Diag}(1, 1, 1, 2, 2, 2)$$

y como $\text{Diag}(1, 1, 1, 2, 2, 2)$ es derivación, entonces μ es un punto crítico en la $SP(6, \mathbb{R})$ -órbita.

Información adicional

Las derivaciones de esta álgebra de Lie nilpotente simpléctica son de la forma

$$\begin{bmatrix} 2m_{5,5} & -m_{5,6} & m_{5,6} & 0 & 0 & 0 \\ -m_{6,5} & -m_{5,5} & -m_{5,4} & 0 & 0 & 0 \\ m_{6,5} & -m_{5,4} & -m_{5,5} & 0 & 0 & 0 \\ m_{6,3} & m_{5,3} & m_{4,3} & m_{5,5} & m_{5,4} & -m_{5,6} \\ m_{6,2} & m_{5,2} & m_{5,3} & m_{5,4} & m_{5,5} & m_{5,6} \\ m_{6,1} & m_{6,2} & m_{6,3} & -m_{6,5} & m_{6,5} & -2m_{5,5} \end{bmatrix}$$

Así pues, $\dim \text{Der}(\mathbb{R}^6, \mu, \omega) = 10$

[KGM, Theorem 5] 23	[Gra] $L_{5,8} \oplus \mathbb{R}$	[Sal] 31.
dim Der 19	Números de Betti (4, 9, 12, 9, 4, 1)	dim Serie C. Desc. (6, 2, 0)

$$[e_1, e_2] = e_5, [e_1, e_3] = e_6$$

$$23. \omega_1 = e_1^* \wedge e_6^* + e_2^* \wedge e_5^* + e_3^* \wedge e_4^*$$

Este corchete esta en una base nice para la acción de $SP_6(\mathbb{R})$. Es fácil ver que esta estructura admite una métrica minimal por 2.1.12 y un punto crítico para la $SP_6(\mathbb{R})$ -órbita es dado por $\exp(X)$ con $X = \text{Diag}(\ln(2), 0, -\ln(2), \ln(2), 0, -\ln(2))$; se ve que $X \in \mathfrak{sp}(6, \mathbb{R})$ y el cambio de base dado por $\exp(X)$ da el corchete

$$\mu := \left\{ [e_1, e_2] = \frac{1}{2} e_5, [e_1, e_3] = \frac{1}{2} e_6 \right.$$

que es tal que la aplicación momento de $GL_6(\mathbb{R})$ evaluada en μ es

$$\frac{1}{2} \text{Diag}(-2, -1, -1, 0, 1, 1]$$

y así, la aplicación momento de $SL_6\mathbb{R}$ evaluada en μ es

$$\frac{1}{4} \text{Diag}(-3, -2, -1, 1, 2, 3) = -\frac{7}{4} \text{Id} + \frac{1}{4} \text{Diag}(4, 5, 6, 8, 9, 10)$$

y como $\text{Diag}(4, 5, 6, 8, 9, 10)$ es derivación, entonces se sigue la afirmación.

Información adicional

Las derivaciones de $(\mathbb{R}^6, \mu, \omega)$ son de la forma

$$\begin{bmatrix} 2 m_{5,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m_{6,5} & -m_{5,5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m_{6,4} & m_{6,5} & -4 m_{5,5} & 0 & 0 & 0 \\ m_{6,3} & m_{5,3} & m_{4,3} & 4 m_{5,5} & 0 & 0 \\ m_{6,2} & m_{5,2} & m_{5,3} & -m_{6,5} & m_{5,5} & 0 \\ m_{6,1} & m_{6,2} & m_{6,3} & m_{6,4} & m_{6,5} & -2 m_{5,5} \end{bmatrix}$$

Así pues, $\dim \text{Der}(\mathbb{R}^6, \mu, \omega) = 9$

$$23. \omega_2 = e_1^* \wedge e_4^* + e_2^* \wedge e_6^* + e_3^* \wedge e_5^*$$

Esta estructura es equivalente a tener

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = -e_4, [e_2, e_3] = e_6 \\ \omega_{cn} = e_1^* \wedge e_6^* + e_2^* \wedge e_5^* + e_3^* \wedge e_4^* \end{cases}$$

usando el cambio de base

$$g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

cuya inversa está dada por

$$g^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El anterior corchete esta escrito en una base nice para la acción de $SP_6(\mathbb{R})$. Es fácil ver que esta estructura admite una métrica minimal por 2.1.12 y un punto crítico para la $SP_6(\mathbb{R})$ -órbita es dado por $\exp(X)$ con $X = \text{Diag}(\ln(2), 0, 0, 0, 0, -\ln(2))$; se ve que $X \in \mathfrak{sp}(6, \mathbb{R})$ y el cambio de base dado por $\exp(X)$ da el corchete

$$\mu := \left\{ [e_1, e_2] = -\frac{1}{2} e_4, [e_2, e_3] = \frac{1}{2} e_6 \right.$$

que es tal que la aplicación momento de $GL_6(\mathbb{R})$ evaluada en μ es

$$\frac{1}{2} \text{Diag}(-1, -2, -1, 1, 0, 1)$$

y así, la aplicación momento de $SL_6\mathbb{R}$ evaluada en μ es

$$\frac{1}{2} \text{Diag}(-1, -1, -1, 1, 1, 1) = -\frac{3}{2} \text{Id} + \text{Diag}(1, 1, 1, 2, 2, 2)$$

y como $\text{Diag}(1, 1, 1, 2, 2, 2)$ es derivación, entonces se sigue la afirmación.

Información adicional

Las derivaciones de $(\mathbb{R}^6, \mu, \omega)$ son de la forma

$$\begin{bmatrix} -m_{6,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m_{5,5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{5,5} + m_{6,6} & 0 & 0 & 0 \\ m_{6,3} & m_{5,3} & m_{4,3} & -m_{5,5} - m_{6,6} & 0 & 0 \\ m_{6,2} & m_{5,2} & m_{5,3} & 0 & m_{5,5} & 0 \\ m_{6,1} & m_{6,2} & m_{6,3} & 0 & 0 & m_{6,6} \end{bmatrix}$$

Así pues, $\dim \text{Der}(\mathbb{R}^6, \mu, \omega) = 8$

$$23. \omega_3 = e_1^* \wedge e_4^* + e_2^* \wedge e_6^* - e_3^* \wedge e_5^*$$

Esta **NO** es una estructura simpléctica para 23. En efecto, consideremos la terna (e_1, e_2, e_3) y evaluemos en $d_{23} \omega_3$

$$\omega_3([e_1, e_2], e_3) + \omega_3([e_2, e_3], e_1) + \omega_3([e_3, e_1], e_2) = \omega_3(e_5, e_3) + \omega_3(0, e_1) + \omega_3(-e_6, e_2) \neq 0$$

La siguiente corrección nos ha sido dada por los autores de [KGM].

$$23. \widetilde{\omega}_3 = e_1^* \wedge e_4^* + e_2^* \wedge e_5^* - e_3^* \wedge e_6^*$$

Esta estructura es equivalente a tener

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = e_5, [e_1, e_4] = e_3 \\ \omega_{cn} = e_1^* \wedge e_6^* + e_2^* \wedge e_5^* + e_3^* \wedge e_4^* \end{cases}$$

usando el cambio de base

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cuya inversa está dada por

$$g^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El anterior corchete está escrito en una base nice para la acción de $SP_6(\mathbb{R})$. Es fácil ver que esta estructura admite una métrica minimal por 2.1.12 y un punto crítico para la $SP_6(\mathbb{R})$ -órbita es dado por $\exp(X)$ con $X = \text{Diag}(\ln(2), 0, 0, 0, 0, -\ln(2))$; se ve que $X \in \mathfrak{sp}(6, \mathbb{R})$ y el cambio de base dado por $\exp(X)$ da el corchete

$$\mu := \left\{ [e_1, e_2] = \frac{1}{2} e_5, [e_1, e_4] = \frac{1}{2} e_3 \right.$$

que es tal que la aplicación momento de $GL_6(\mathbb{R})$ evaluada en μ es

$$\frac{1}{2} \text{Diag}(-2, -1, 1, -1, 1, 0)$$

y así, la aplicación momento de $SL_6\mathbb{R}$ evaluada en μ es

$$\frac{1}{2} \text{Diag}(-1, -1, 1, -1, 1, 1) = -\frac{3}{2} \text{Id} + \text{Diag}(1, 1, 2, 1, 2, 2)$$

y como $\text{Diag}(1, 1, 2, 1, 2, 2)$ es derivación, entonces se sigue la afirmación.

Información adicional

Las derivaciones de esta álgebra de Lie nilpotente simpléctica son de la forma

$$\begin{bmatrix} 2m_{5,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m_{5,5} & 0 & m_{5,3} & 0 & 0 \\ -m_{6,4} & -m_{5,4} & m_{5,5} & m_{3,4} & m_{5,3} & 0 \\ 0 & m_{5,3} & 0 & -m_{5,5} & 0 & 0 \\ m_{6,2} & m_{5,2} & m_{5,3} & m_{5,4} & m_{5,5} & 0 \\ m_{6,1} & m_{6,2} & 0 & m_{6,4} & 0 & -2m_{5,5} \end{bmatrix}$$

Así pues, $\dim \text{Der}(\mathbb{R}^6, \mu, \omega) = 8$

[KGM, Theorem 5] 24.	[Gra] $L_{6,22}(+1)$	[Sal] 30.
dim Der 16	Números de Betti (4,8,10,8,4,1)	dim Serie C. Desc. (6,2,0)

$$[e_1, e_4] = e_6, [e_2, e_3] = e_5$$

$$24. \omega_1 = e_1^* \wedge e_6^* + e_2^* \wedge e_5^* + e_3^* \wedge e_4^*$$

Este corchete esta en una base nice para la acción de $SP_6(\mathbb{R})$. Es fácil ver que esta estructura admite una métrica minimal por 2.1.12 y un punto crítico para la $SP_6(\mathbb{R})$ -órbita es dado por $\exp(X)$ con $X = \text{Diag}(\ln(2), 0, \ln(2), -\ln(2), 0, -\ln(2))$; se ve que $X \in \mathfrak{sp}(6, \mathbb{R})$ y el cambio de base dado por $\exp(X)$ da el corchete

$$[e_1, e_4] = \frac{1}{2} e_6, [e_2, e_3] = \frac{1}{2} e_5$$

que es tal que la aplicación momento de $GL_6(\mathbb{R})$ evaluada en μ es

$$\frac{1}{2} \text{Diag}(-1, -1, -1, -1, 1, 1)$$

y así, la aplicación momento de $SL_6\mathbb{R}$ evaluada en μ es

$$\frac{1}{2} \text{Diag}(-1, -1, 0, 0, 1, 1) = -\text{Id} + 2 \text{Diag}(1, 1, 2, 2, 3, 3)$$

y como $\text{Diag}(1, 1, 2, 2, 3, 3)$ es derivación, entonces se sigue la afirmación.

Información adicional

Las derivaciones de esta álgebra de Lie nilpotente simpléctica son de la forma

$$\begin{bmatrix} -m_{6,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{6,6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m_{5,4} & -2m_{6,6} & 0 & 0 & 0 \\ m_{6,3} & 0 & 0 & 2m_{6,6} & 0 & 0 \\ m_{6,2} & m_{5,2} & 0 & m_{5,4} & -m_{6,6} & 0 \\ m_{6,1} & m_{6,2} & m_{6,3} & 0 & 0 & m_{6,6} \end{bmatrix}$$

Así pues, $\dim \text{Der}(\mathbb{R}^6, \mu, \omega) = 6$

$$24. \omega_2 = -e_1^* \wedge e_6^* - e_2^* \wedge e_5^* - e_3^* \wedge e_4^*$$

Esta estructura es equivalente a tener

$$\begin{cases} [e_3, e_6] = -e_1, [e_4, e_5] = -e_2 \\ \omega_{cn} = e_1^* \wedge e_6^* + e_2^* \wedge e_5^* + e_3^* \wedge e_4^* \end{cases}$$

usando el cambio de base

$$g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cuya inversa está dada por

$$g^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El anterior corchete está escrito en una base nice para la acción de $SP_6(\mathbb{R})$. Es fácil ver que esta estructura admite una métrica minimal por 2.1.12 y un punto crítico para la $SP_6(\mathbb{R})$ -órbita es dado por $\exp(X)$ con $X = \text{Diag}(-\ln(2), 0, -\ln(2), \ln(2), 0, \ln(2))$; se ve que $X \in \mathfrak{sp}(6, \mathbb{R})$ y el cambio de base dado por $\exp(X)$ da el corchete

$$\mu := \left\{ [e_3, e_6] = -\frac{1}{2} e_1, [e_4, e_5] = -\frac{1}{2} e_2 \right.$$

que es tal que la aplicación momento de $GL_6(\mathbb{R})$ evaluada en μ es

$$\frac{1}{2} \text{Diag}(1, 1, -1, -1, -1, -1)$$

y así, la aplicación momento de $SL_6\mathbb{R}$ evaluada en μ es

$$\frac{1}{2} \text{Diag}(1, 1, 0, 0, -1, -1) = -\text{Id} + \frac{1}{2} \text{Diag}(3, 3, 2, 2, 1, 1)$$

y como $\text{Diag}(3, 3, 2, 2, 1, 1)$ es derivación, entonces se sigue la afirmación.

Información adicional

Las derivaciones de $(\mathbb{R}^6, \mu, \omega)$ son de la forma

$$\begin{bmatrix} -m_{6,6} & 0 & 0 & m_{3,6} & m_{2,6} & m_{1,6} \\ 0 & m_{6,6} & -m_{4,5} & 0 & m_{2,5} & m_{2,6} \\ 0 & 0 & -2m_{6,6} & 0 & 0 & m_{3,6} \\ 0 & 0 & 0 & 2m_{6,6} & m_{4,5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -m_{6,6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{6,6} \end{bmatrix}$$

Así pues, $\dim \text{Der}(\mathbb{R}^6, \mu, \omega) = 6$

[KGM, Theorem 5] 25.	[Gra] $L_{3,2} \oplus \mathbb{R}^3$	[Sal] 33.
dim Der 24	Números de Betti (5, 11, 14, 11, 5, 1)	dim Serie C. Desc. (6, 1, 0)

$$[e_1, e_2] = e_6$$

25. $\omega_1 = e_1^* \wedge e_6^* + e_2^* \wedge e_5^* + e_3^* \wedge e_4^*$

Este corchete esta en una base nice para la acción de $SP_6(\mathbb{R})$. Es fácil ver que esta estructura admite una métrica minimal por 2.1.12 y un punto crítico para la $SP_6(\mathbb{R})$ -órbita es dado por $\exp(X)$ con $X = \text{Diag}(0, \frac{1}{2} \ln(2), 0, 0, -\frac{1}{2} \ln(2), 0)$; se ve que $X \in \mathfrak{sp}(6, \mathbb{R})$ y el cambio de base dado por $\exp(X)$ da el corchete

$$\mu := \left\{ [e_1, e_2] = \frac{\sqrt{2}}{2} e_6 \right.$$

que es tal que la aplicación momento de $GL_6(\mathbb{R})$ evaluada en μ es

$$\text{diag}(-1, -1, 0, 0, 0, 1)$$

y así, la aplicación momento de $SL_6\mathbb{R}$ evaluada en μ es

$$\frac{1}{2} \text{Diag}(-2, -1, 0, 0, 1, 2) = -\frac{5}{2} \text{Id} + \frac{1}{2} \text{Diag}(3, 4, 5, 5, 6, 7)$$

y como $\text{Diag}(3,4,5,5,6,7)$ es derivación, entonces se sigue la afirmación.

Información adicional

Las derivaciones de $(\mathbb{R}^6, \mu, \omega)$ son de la forma

$$\begin{bmatrix} -m_{6,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m_{6,5} & 2m_{6,6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m_{6,4} & -m_{5,4} & -m_{4,4} & m_{3,4} & 0 & 0 \\ m_{6,3} & m_{5,3} & m_{4,3} & m_{4,4} & 0 & 0 \\ m_{6,2} & m_{5,2} & m_{5,3} & m_{5,4} & -2m_{6,6} & 0 \\ m_{6,1} & m_{6,2} & m_{6,3} & m_{6,4} & m_{6,5} & m_{6,6} \end{bmatrix}$$

Así pues, $\dim \text{Der}(\mathbb{R}^6, \mu, \omega) = 12$

A.3 ALGUNOS PROCEDIMIENTOS CON MAPLE™15

Presentamos algunos procedimientos hechos en Maple™15,* para hacer las cuentas anteriores. Tales procedimientos usan fundamentalmente el excelente paquete *LieAlgebras*.

Advertimos que los siguientes procedimientos no son “óptimos” (en el sentido de la Teoría de Algoritmos) pero estamos seguros que realizan muy bien su trabajo. Por ejemplo, hay algunos ciclos que se pueden detener cuando no se cumple cierta condición, pero tratamos de evitar tales controles para presentar de la forma mas sencilla “el cómo” se pueden realizar tales procesos y familiarizarnos con el uso de algunas funciones preestablecidas del software Maple™15.

```

Aleksievskii.mw *InfoLIE - FaMAF.mw
>
Definimos la álgebra de Lie:
dim es la dimensión, corchete es un corchete de la álgebra de Lie en la base {x1 ... }
> restart :
> with(DifferentialGeometry) : with(LieAlgebras) : with(LinearAlgebra) : with(linalg) :
  with(LieAlgebraCohomology) : with(SolveTools[Inequality]) :
> dim := 7 :
> corchete := [[x1, x2] = x3, [x1, x3] = x4, [x1, x4] = x6, [x1, x6] = x7, [x2, x3] = x5, [x2, x5] = x6,
  [x2, x6] = x7, [x3, x4] = -x7, [x3, x5] = x7] :
> L := LieAlgebraData(corchete, [x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7], Alg1);
L := [[e1, e2] = e3, [e1, e3] = e4, [e1, e4] = e6, [e1, e6] = e7, [e2, e3] = e5, [e2, e5] = e6, [e2, e6]
  = e7, [e3, e4] = -e7, [e3, e5] = e7]
> DGsetup(L);
Lie algebra: Alg1
Almacenamos todas las constantes de estructura en un arreglo
> C := Array(1..dim, 1..dim, 1..dim, (i, j, k) -> Tools:-DGinfo([i, j, k],
  "LieBracketStructureFunction")) :

```

En [M], cada corchete esta dado en una base que diagonaliza un toro maximal de derivaciones. Para encontrar la derivación pre-Einstein, es suficiente con encontrar las *derivaciones exteriores* y solucionar el sistema lineal que resulta de la condición de pre-Einstein en el conjunto de las derivaciones diagonales.

```

Encontramos una derivación Pre-Einstein.
En la clasificación de Carles, la base de la álgebra de Lie es tal que diagonaliza un toro maximal de
derivaciones.
Hacer r igual al rango del álgebra de Lie nilpotente.
> DerO := Derivations("Outer") :
> r :=
Identificar  $i_{\{1\}}, \dots, i_{\{r\}}$  tales que  $DerO[i_{\{j\}}]$  es una matrix diagonal. Hacer el arreglo indice con tales i's.
> indice := [

```

*Maple™15 ha sido autorizado para su uso en la Facultad de Matemática, Astronomía y Física - Universidad Nacional de Córdoba, bajo una *Licencia de Red* dada para la supercomputadora **shiva**.

Una derivación semisimple ϕ es pre-Einstein si satisface $\langle\langle\phi, D\rangle\rangle = \text{tr}(D)$. En la matrix M guardamos los productos internos de las derivaciones diagonales y en el vector tr guardamos las trazas de tales derivaciones.

```

Resolvemos el sistema lineal que define a la derivación Pre-Einstein
> M := Matrix(1 ..r, 1 ..r, 0) :
  tr := Matrix(1 ..r, 1, 0) :
> for i from 1 to r do
  tr[i, 1] := Trace(DerO[indice[i]]) :
  for j from i to r do
  M[i, j] := Trace(DerO[indice[i]].DerO[indice[j]]) :
  M[j, i] := M[i, j] :
  end do:
  end do:
Calculamos la Pre-Einstein
> phi := Matrix(1 ..dim, 1 ..dim, 0) :
  coor := M-1.tr :
> for i from 1 to r do
  phi := phi + coor[i, 1].DerO[indice[i]] :
  end do:
phi;

```

Acá damos un procedimiento para verificar cada una de las dos condiciones de base nice (ver 4.1.9). En caso de no cumplir alguna, imprimimos también cuales son los vectores que no permiten que se satisfaga la condición.

```

Miramos si el álgebra de Lie nilpotente está escrita en una base nice;
debemos verificar las dos condiciones de la definición.
Cóndición 1 de la definición
> for i from 1 to dim - 1 do
  for j from i + 1 to dim do
  cont := 0 :
  for k from 1 to dim do if C[i, j, k] ≠ 0 then cont := cont + 1 : end if: end do:
  if cont ≥ 2 then print(No Nice, condicionA, i, j); i := dim + 1 : j := dim + 1 :
  elif i = dim - 1 then print(Nice, condicionA); end if:
  end do:
  end do;
Nice, condicionA (3)
Cóndición 2 de la definición
> for i from 1 to dim do
  for k from 1 to dim do
  cont := 0 :
  for j from 1 to dim do if C[i, j, k] ≠ 0 then cont := cont + 1 : end if: end do:
  if cont ≥ 2 then print(No Nice, condicionB, i, k); i := dim + 1 : k := dim + 1 :
  elif i = dim and k = dim then print(Nice, condicionB);
  end if:
  end do:
  end do;
No Nice, condicionB, 3, 7 (4)

```

Un procedimiento para dar el conjunto de pesos relacionados, *carPesosRel* es el número de tales pesos.

```

[ Calcular los pesos relacionados con el corchete dado. carPesosRel es la cantidad de pesos.
> carPesosRel := 0 :
> for i from 1 to dim - 1 do
  for j from i + 1 to dim do
    for k from 1 to dim do
      if  $C[i, j, k] \neq 0$  then
        carPesosRel := carPesosRel + 1 :
        peso := Matrix(1 ..dim, 1 ..dim, 0) :
        peso[k, k] := peso[k, k] + 1 : peso[i, i] := peso[i, i] - 1 : peso[j, j] := -1 :
        PesosRel[carPesosRel] := peso :
      end if:
    end do:
  end do:
end do:

```

Si hemos mostrado que nuestra álgebra de Lie está escrita en una base nice, entonces procedemos a estudiarla con el criterio de la base Nice.

```

[ Matriz de Gram
> U := Matrix(1 ...carPesosRel, 1 ...carPesosRel, 0) :
> for i from 1 to carPesosRel do
  for j from 1 to carPesosRel do
    U[i, j] := Trace(PesosRel[i].PesosRel[j]) :
    U[j, i] := U[i, j] :
  end do:
end do:

```

Una vez calculada la matriz de Gram, pasamos a solucionar el problema $\mathbf{U}x = [1]$. En el arreglo *Sol* guardamos las entradas de la solución general comparándolas con el valor 0 y pasamos a solucionar el sistema de inecuaciones por el comando *solve*,

```

[ Encontramos la solución general al problema  $Ux=[1]$ 
> VectorUno := Matrix(1 ..carPesosRel, 1, 1) :
> Solucion := LinearSolve(U, VectorUno, method='solve', free='s');
> Sol := { } :
> for i from 1 to carPesosRel do
  Sol := Sol union {Solucion[i][1] > 0} :
end do:
> solve(Sol)

```

Un procedimiento para calcular la aplicación momento.

```

[ Calcular la Aplicación Momento (Operador de Ricci) con respecto a  $GL(dim, \mathbb{R})$ 
> Moment := Matrix(1 ..dim, 1 ..dim, 0) :
> for i from 1 to dim do
  for j from 1 to dim do
    for k from 1 to dim do
      for l from 1 to dim do
        Moment[i, j] := Moment[i, j] + C[k, l, i]·C[k, l, j] - 2·C[i, k, l]·C[j, k, l] :
      end do:
    end do:
    Moment[j, i] := Moment[i, j] :
  end do:
end do:
> Moment;

```

Para desarrollar los cálculos del Capítulo 5, fue necesario dar un proceso para calcular la base de $\mathfrak{p}_{\omega_{cn}}$. Tal base la podemos dividir en tres conjuntos donde uno de estos conjuntos esta formado por matrices diagonales (la abeliana maximal). Una vez dada una abeliana maximal de $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R})$, este conjunto puede usarse para encontrar los pesos relacionados de un corchete con respecto a la acción de $SP_{2n}(\mathbb{R})$.

```

[ Base de  $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R}) \cap \mathfrak{sim}(2n) / SimSP$ 
Abeliana maximal
> n := 3 :
> for i from 1 to n do
  ab := Matrix(1 ..2·n, 1 ..2·n, 0) :
  ab[i, i] := 1 : ab[2·n + 1 - i, 2·n + 1 - i] := -1 :
  SimSP[i] := ab :
end do:
[ Base de  $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R}) \cap \mathfrak{sim}(2n) / SimSP$ 
Base PARTE I
> carSimSP := n :
  for i from 1 to n do
    for j from i + 1 to n do
      base := Matrix(1 ..2·n, 1 ..2·n, 0) :
      carSimSP := carSimSP + 1 :
      base[i, j] := 1 :
      base[j, i] := 1 :
      base[2·n + 1 - j, 2·n + 1 - i] := -1 :
      base[2·n + 1 - i, 2·n + 1 - j] := -1 :
      SimSP[carSimSP] := base :
    end do:
  end do:

```

```

Base de  $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R}) \cap \mathfrak{sim}(2n)$ 
Base PARTE II
> for i from 1 to n do
  for j from n + 1 to 2·n + 1 - i do
    base := Matrix(1..2·n, 1..2·n, 0) :
    carSimSP := carSimSP + 1 :
    base[i, j] := 1 :
    base[j, i] := 1 :
    base[2·n + 1 - j, 2·n + 1 - i] := 1 :
    base[2·n + 1 - i, 2·n + 1 - j] := 1 :
    SimSP[carSimSP] := base :
  end do:
end do:

```

La aplicación momento para la acción de $SP_{2n}(\mathbb{R})$ sobre $\Lambda^2(\mathbb{R}^{2n})^* \otimes \mathbb{R}^{2n}$, nos es mas que la proyección de la aplicación momento de la acción de $GL_{2n}(\mathbb{R})$ sobre $\mathfrak{p}_{\omega_{cn}}$.

```

Calcular la Aplicación Momento con respecto a  $SP(2n, \mathbb{R})$ 
Proyección sobre  $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R}) \cap \mathfrak{sim}(2n)$ 
> MomentSP := 0 :
  for i from 1 to carSimSP do
    MomentSP := MomentSP +  $\frac{\text{Trace}(\text{Moment.SimSP}[i])}{\text{Trace}(\text{SimSP}[i].\text{SimSP}[i])} \cdot \text{SimSP}[i]$  :
  end do:
> MomentSP;

```

Otros comandos que son muy útiles son:

$$Eq, Der := \text{Query}(\text{Alg1}, \text{Matriz}, \{\text{incógnitas}\}, \text{"Derivation"}),$$

el cual, dada una matriz cuyas entradas son indeterminadas, da condiciones sobre las indeterminadas para que tal matriz sea una derivación de la álgebra, Alg1 .

$$EQ, SOLN := \text{Query}(\text{Alg1}, \text{Alg2}, \text{Matriz}, \{\text{incógnitas}\}, \text{"Homomorphism"}),$$

el cual da condiciones para que una matriz en indeterminadas sea un homomorfismo de las álgebras de Lie Alg1 y Alg2 .

Los comandos $\text{Transformation}(\text{Alg1}, \text{Alg1}, \text{Matriz})$, evalDG , $\text{ChangeFrame}(\text{Alg1})$ y LieAlgebraData pueden ser usados en conjunto para cambiar la base de una álgebra de Lie Alg1 . Se usa la base dada por la matriz de cambio de base Matriz .

BIBLIOGRAFÍA

- [Ale] D. V. Alekseevskii: *Homogeneous Riemannian spaces of negative curvature*. Math. USSR Sbornik, Vol. **25** No. 1 (1975) 87–109. Translated from the Russian by A. West.
- [Ati] M. F. Atiyah: *Convexity and commuting Hamiltonians*. Bull. London Math. Soc., **14** (1982) 1–15.
- [Bes] A. Besse: *Einstein manifolds*. Reprint of the 1987 edition, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg (2008).
- [Bir] D. Birkes: *Orbits of linear algebraic groups*. Annals of Math., **93** (1971) 459–475
- [Bot] R. Bott: *Morse Theory Indomitable*. Publ. Math. I.I.H.E.S., **68** 1 (1988) 99–114.
- [BOR] P. Birtea, J. P. Ortega, T. S. Ratiu: *Openness and convexity for momentum maps*. Trans. Amer. Math. Soc., **361** (2009) 603–630.
- [Bor] A. Borel: *Linear algebraic groups*. Graduate Texts in Mathematics Vol. **126**. Second Enlarged Edition, Springer-Verlag, New York (1991).
- [Bki] N. Bourbaki: *Éléments de mathématique: Groupes et algèbres de Lie. Chapitre 2 et 3*. Springer-Verlag, New York (2006).
- [Car] R. Carles: *Weight systems for complex nilpotent Lie algebras and application to the varieties of Lie algebras*. Publ. Univ. Poitiers, **96** (1996), 43 páginas.
- [EJ] P. Eberlein, and M. Jablonski: *Closed orbits of semisimple group actions and the real Hilbert-Mumford function*. New Developments in Lie Theory and Geometry, Contemp. Math., **491** (2009), 283–321.
- [Fer1] E. A. Fernández-Culma: *Classification of 7-dimensional Einstein Nilradicals*. Transformation Groups, **17** (2012) 639–656.
- [Fer2] E. A. Fernández-Culma: *Classification of 7-dimensional Einstein Nilradicals II*. arXiv.org (2011).
- [Fer3] E. A. Fernández-Culma: *On distinguished orbits of reductive representations*. **Artículo en preparación.**
- [Fer4] E. A. Fernández-Culma: *Anti-complexified Ricci flow on 6-dimensional Symplectic Nilpotent Lie Algebras and its Ricci solitons*. **Artículo en preparación.**
- [Gon] M.-P. GONG, *Classification of nilpotent Lie algebras of dimension 7 (Over Algebraically Closed Fields and \mathbb{R})*, Ph.D. thesis, University of Waterloo, Waterloo, Canada (1998).
- [GOV] V. V. Gorbatsevich, A. L. Onishchik, E. B. Vinberg: *Structure of Lie Groups and Lie Algebras*. In: Encyclopaedia of Mathematical Sciences Vol. **41**, Lie Groups and Lie Algebras III - Structure of Lie Groups and Lie Algebras. A.L. Onishchik, E. B. Vinberg (Editores). Springer-Verlag, Berlin (1991). Translated from the Russian by V. Minachin.

- [Gra] W. A. de Graaf: *Classification of 6-dimensional nilpotent Lie algebras over fields of characteristic not 2*. J. Algebra **309** (2007), 640–653.
- [Gru] B. Grünbaum: *Convex Polytopes*. Graduate Texts in Math. **221**, Springer-Verlag, New York (2003). Second edition prepared by V. Kaibel, V. Klee and G. M. Ziegler
- [GS1] V. Guillemin, and S. Sternberg: *Convexity properties of the moment map*. Invent. Math., **67** (1982) 491–513.
- [GS2] V. Guillemin, and S. Sternberg: *Convexity properties of the moment map. II*. Invent. Math., **77** (1984) 533–546.
- [Gur] G. B Gurevich: *Foundations of the theory of algebraic invariants*. P. Noordhoff, Groningen, The Netherlands (1964). Translated by J.R.M. Radok, A.J.M. Spencer.
- [Heb] J. Heber: *Noncompact homogeneous Einstein spaces*. Invent. math. **133** (1998), 279–352.
- [HSchw] P. Heinzner, G. W. Schwarz: *Cartan decomposition of the moment map*. Math. Ann. **337** (2007) 197–232
- [HSto] P. Heinzner, H. Stötzel: *Semistable points with respect to real forms*. Math. Ann. **338** (2007) 1–9
- [HSS] P. Heinzner, G. W. Schwarz, H. Stötzel: *Stratifications with respect to actions of real reductive groups*. Compositio Math., **144** (2008) 163–185
- [HSchu] P. Heinzner, P. Schützdeller: *Convexity properties of gradient maps*. Adv. Math., **225** (2010) 1119–1133.
- [Hes] W. H. Hesselink: *Uniform instability in reductive groups*. J. Reine Angew. Math., **303-304** (1978) 74–96.
- [HNe] J. Hilgert, K. H. Neeb: *Structure and Geometry of Lie Groups*. Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York (2012)
- [HoM] K. H. Hofmann, S. A. Morris: *The structure of compact groups: A primer for the student – a handbook for the expert*. De Gruyter Studies in Mathematics 25, Walter de Gruyter, Berlin (2006). 2nd Revised and Augmented Edition.
- [Jab1] M. Jablonski: *Detecting orbits along subvarieties via the moment map*. Münster J. Math., **3** (2010), 67–88.
- [Jab2] M. Jablonski: *Concerning the existence of Einstein and Ricci soliton metrics on solvable Lie groups*. Geometry & Topology, **15** (2011) 735–764.
- [Jab3] M. Jablonski: *Distinguished orbits of Reductive groups*. **Por aparecer en** The Rocky Mountain Journal of Mathematics.
- [KP] H. K. Kadioğlu, T. L. Payne: *Computational Methods for Nilsoliton Metric Lie Algebras I*. paper under review (2011).
- [Kem] G. R. Kempf: *Instability in invariant theory*. Annals of Math., **108** (1978) 299–316.
- [KN] G. R. Kempf, L. Ness: *The length of vectors in representation spaces*. In: Algebraic Geometry, Summer Meeting, University of Copenhagen, Copenhagen, (1978). Edited by K. Lønsted. Lecture Notes in Mathematics **732**, Springer-Verlag, Berlin (1979).

- [KGM] Yu. Khakimdjano, M. Goze, and A. Medina: *Symplectic or contact structures on Lie groups*. *Differential Geometry and its Applications*, **21** (2004) 41–54.
- [Kir1] F. Kirwan: *Convexity properties of the moment mapping. III*. *Invent. Math.*, **77** (1984) 547–552
- [Kir2] F. Kirwan: *Cohomology of Quotients in Symplectic and Algebraic Geometry*. *Mathematical Notes* **31**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1984.
- [Kna] A. W. Kna: *Lie Groups Beyond an Introduction*. *Progress in Mathematics* Vol. **140**, Birkhäuser-Verlag, Boston (2005). 2nd Edition, 3rd Printing.
- [Lau1] J. Lauret: *Standard Einstein solvmanifolds as critical points*. *Quart. J. Math.* **52** (2001), 463–470.
- [Lau2] J. Lauret: *Finding Einstein solvmanifolds by a variational method*. *Math. Z.* **241** (2002), 83–99.
- [Lau3] J. Lauret: *A canonical compatible metric for geometric structures on nilmanifolds*. *Ann. Global Anal. Geom.*, **30** (2006) 107–138.
- [Lau4] J. LAURET, *Einstein solvmanifolds and nilsolitons*, *Contemporary Mathematics* Volume **491** (2009), 35 p.
- [Lau5] J. Lauret: *Einstein solvmanifolds are standard*. *Annals of Math.*, **172** (2010) 1859–1877.
- [Lau6] J. Lauret: *Ricci soliton solvmanifolds*. *J. Reine Angew. Math.* **650** (2011) 1–21.
- [LW1] J. Lauret, and C. Will: *Einstein solvmanifolds: existence and non-existence questions*. *Math. Ann.* **350** (2011), 199–225.
- [LW2] J. Lauret, C. Will: *On the diagonalization of the Ricci flow on Lie groups*. **Por aparecer en** *Proceedings of the American Mathematical Society*. (2011).
- [Lee] D. H. Lee: *The Structure of Complex Lie Groups*. *Research Notes in Mathematics* **429**, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton (2002)
- [Ler] E. Lerman: *Gradient flow of the norm squared of a moment map*. *L'Enseign. Math.*, **51** (2005) 117–127.
- [M] L. Magnin: *Adjoint and Trivial Cohomology Tables for Indecomposable Nilpotent Lie Algebras of Dimension ≤ 7 over \mathbb{C}* , e-Book, 2nd Corrected Edition 2007, http://math.u-bourgogne.fr/topology/magnin/public_html/Magnin2.ps
- [Mar] A. Marian: *On the real moment map*. *Math. Res. Lett.*, **8** (2001) 779–788.
- [Mos] G. D. Mostow: *Self-adjoint groups*. *Annals of Math.*, **62** (1955) 44–55.
- [Mum] D. Mumford: *The Red Book of Varieties and Schemes*. *Lecture Notes in Mathematics* Vol. **1358**. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1999). Second Expanded Edition, Includes the Michigan Lectures (1974) on Curves and their Jacobians.
- [MFK] D. Mumford, J. Fogarty, F. Kirwan: *Geometric invariant theory*. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete* **34**. Third Enlarged Edition, Springer-Verlag, New York (1994). 2nd printing edition (2003).

- [Nee] K. H. Neeb: *Holomorphy and Convexity in Lie Theory*. De Gruyter expositions in mathematics **28**, Walter de Gruyter, Berlin (2000).
- [Nei] C. Neidhardt: *A convexity theorem for noncommutative gradient flows*. *Transform. Groups* **4** (1999) 375–404
- [Nes] L. Ness: *A stratification of the null cone via the moment map*. *Amer. J. Math.* **106** (1984). 1281–1329 (con un apendice por D. Mumford)
- [Nik1] Y. Nikolayevsky: *Einstein solomanifolds with a simple Einstein derivation*. *Geom. Dedicata* **135** (2008), 87–102.
- [Nik2] Y. Nikolayevsky: *Einstein solomanifolds and the pre-Einstein derivation*. *Trans. Amer. Math. Soc.* **363** (2011), 3935–3958.
- [Olv] P. J. Olver: *Classical Invariant Theory*. London Mathematical Society Student Texts **44**, Cambridge University Press, London, United Kingdom (1999).
- [OV] A. L. Onishchik, E. B. Vinberg *Lie Groups and Algebraic Groups*. Springer Series in Soviet Mathematics, Springer-Verlag, Berlin (1990). 1 edition, Translated from the Russian by D.A. Leites.
- [PV] V. L. Popov, E. B. Vinberg: *Invariant theory*. In: *Encyclopaedia of Mathematical Sciences Vol. 55, Algebraic Geometry IV - Linear Algebraic Groups, Invariant Theory*. A.N. Parshin, I.R. Shafarevich (Editores). Springer-Verlag, Berlin (1994). Translated from the Russian by G. A. Kandall.
- [RS] R. W. Richardson, and P. J. Slodowy: *Minimum vectors for real reductive algebraic groups*. *J. London Math. Soc.*, **s2-42** (1990) 409–429.
- [RuSan] W. Rump, and J. Santoso: *Convexity of momentum maps: A topological analysis*. *Topology and its Applications*, **159** (2012) 1288–1299.
- [Sal] S. M. Salamon: *Complex structures on nilpotent Lie algebras*. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **157** (2001) 311–333.
- [Sep] M. Sepanski: *Compact Lie Groups* Graduate Texts in Mathematics **235**, Springer, New York (2010)
- [Sja] R. Sjamaar: *Convexity properties of the moment mapping re-examined*. *Adv. Math.*, **138** (1998) 46–91.
- [Spr] T. A. Springer: *Linear algebraic groups*. In: *Encyclopaedia of Mathematical Sciences Vol. 55, Algebraic Geometry IV - Linear Algebraic Groups. Invariant Theory*, A.N. Parshin, I.R. Shafarevich (Editores). Springer-Verlag, Berlin (1994).
- [Sto1] H. Stötzel: *Closed orbits of Real reductive representations*. *arXiv.org* (2009).
- [Sto2] H. Stötzel: *A quotient restriction theorem for actions of real reductive groups*. *J. reine u. angew. Math.*, **640** (2010) 117–234
- [Wild] N. J. Wildberger: *The Moment Map of a Lie Group Representation*. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **330** (1992), 257–268.

- [Will] C. Will: *Rank-one Einstein solomanifolds of dimension 7*. *Diff. Geom. Appl* **19** (2003), 307–318.
- [Woo] C. Woodward: *Moment maps and geometric invariant theory*. *Les cours du CIRM. Actions hamiltoniennes: Invariants et Classification*. **1** (2010) 55–98.

ÍNDICE ANALÍTICO

- CC
 - ver* Cápsula Convexa, 15
- \mathbb{R} -conjunto algebraico
 - ver* conjunto algebraico definido sobre \mathbb{R} , 27
- Af
 - ver* Espacio Afín, 15
- ccm
 - ver* combinación convexa mínima, 15
- U_w
 - ver* matriz de Gram, 25
- $\text{int}(\text{CC}(\cdot))$
 - ver* interior relativo, 15
- $\mathfrak{R}(\cdot)$
 - ver* Pesos Relacionados Con \cdot , 15
- $m_g(\cdot)$
 - ver* Aplicación Momento, 13, 15
- F_g
 - ver* cuadrado de la norma de la aplicación momento, 13
- xp
 - ver* punto expuesto, 20
- xt
 - ver* punto extremo, 20
- Acción Detectable, 29
- Algebra de Coordenadas, 26
- Algebra de Lie característicamente nilpotente, 47
- Algebra de Lie Nilpotente Simpléctica, 62
 - álgebra de Lie 2-pasos nilpotente simpléctica, 62
 - flujo de Ricci anti-complexificado, 62
- Algebra de Lie Reductiva, 3
- Aplicación Momento, 13
 - Aplicación momento restringida, 13
 - cuadrado de la norma de la aplicación momento, 13
- Base Nice, 45
- Binomio Nice, 36
- Cápsula Convexa, 15
 - combinación convexa mínima, 15
 - interior relativo, 15
- Complexificación Universal, 1
- Conjunto Algebraico, 26
 - conjunto algebraico complejo, 26
 - conjunto algebraico definido sobre \mathbb{R} , 27
 - conjunto algebraico real, 26
 - conjunto de puntos reales, 27
- Conjunto Convexo
 - hiperplano de soporte, 20
 - polítopo, 20
 - punto expuesto, 20
 - punto extremo, 20
- Conjunto de Pesos, 4
 - peso, 4
 - vector peso, 4
- Conjunto de Raíces, 4
 - cámara de Weyl, 6
 - elemento regular, 6
 - grupo de Weyl, 7
 - raíces positivas, 6
- Conjunto de Raíces Restringidas, 9
 - Grupo de Weyl, 10
- Cono Nulo, 13
- Criterio de la Base Nice de Nikolayevsky, 46
- Criterio generalizado de la base nice de Nikolayevsky, 25, 30
- Derivación pre-Einstein, 44
- Espacio Afín, 15
- Espacio Nice, 25
 - elemento nice, 25
 - espacio A_γ -nice, 61
 - matriz de Gram, 25
 - solución positiva, 25
- Estratificación
 - conjunto estratificante, 14
 - estrato, 14
- Estructura Geométrica Invariante, 59
 - condición de integrabilidad, 59

- condición de ortogonalidad, 59
- Formas n-arias de Grado d , 33
- Función Convexa, 19
 - conjugada, 20
 - dominio, 19
- Función Polinomial
 - ver también* Función Regular, 26
- Función Regular, 26
- Grupo Algebraico, 27
 - grupo algebraico complejo, 27
 - grupo algebraico complejo definido sobre \mathbb{R} , 28
 - grupo algebraico real, 27
- Grupo de Lie Nilpotente de Clase γ , 60
 - métrica compatible minimal, 60
- Grupo Lineal Algebraico, 28
 - grupo lineal algebraico complejo, 28
 - grupo lineal algebraico real, 28
- Grupo Reductivo
 - grupo compatible, 8
 - grupo reductivo complejo, 1
 - grupo reductivo real, 8
 - subgrupo compacto maximal, 2
 - toro complexificado, 2
- Métrica Solsolitón, 41
 - métrica nilsolitón, 42
 - tipo de autovalor, 42
- Mapeo Regular
 - ver* Morfismo Regular, 26
- Morfismo Regular, 26
 - morfismo regular definido sobre \mathbb{R} , 27
- Operador de Ricci Invariante, 60
- Orbita Cerrada, 11
- Orbita Distinguida, 14
- Pesos Relacionados Con \cdot , 15
- Pesos vecinos, 37
- Punto Crítico Distinguido, 14
- Representación Racional Compleja, 29
 - representación racional definida sobre \mathbb{R} , 29
- Representación Racional Real, 29
- Representación Reductiva
 - representación reductiva compleja, 9
 - representación reductiva real, 8
- Teorema de Convexidad de Atiyah-Guillemin-Sternberg, 24
 - polítopo momento, 24
- Topología Zariski, 27
 - cerrado Zariski, 27
 - clausura Zariski, 27
- Toro Complejo, 2
- Truco Unitario de Weyl, 3
- Vector Minimal, 12
- Vectores Inestables, 13
- Vectores Semiestables, 13

DECLARACIÓN

Declaro que esta tesis, así como los resultados en ella reportados, son producto de mi trabajo y que hasta donde yo sé, no contiene material previamente publicado o escrito por otra persona, excepto donde se reconoce como tal a través de citas y con propósitos exclusivos de ilustración o comparación. En este sentido, afirmo que cualquier información presentada sin citar a un tercero es de mi propia autoría. Así mismo, declaro que este trabajo no contiene material que haya sido utilizado para obtener algún grado o diploma en alguna otra institución educativa excepto donde se reconoce como tal.

Córdoba, Argentina, 2012

Edison Alberto Fernández Culma

Dra. Alicia Dickenstein
Jurado externo

Dra. Laura Barberis
Grupo de Geometría

Dra. Sonia Natale
Grupo Teoría de Lie