

RESTRICCIÓN DE REPRESENTACIONES DE CUADRADO INTEGRABLE DE GRUPOS DE  
LIE SEMISIMPLES A SUBGRUPOS REDUCTIVOS.

POR OSCAR FRANCISCO MÁRQUEZ SOSA

PRESENTADO ANTE LA  
FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA Y FÍSICA  
COMO PARTE DE LOS REQUERIMIENTOS PARA OPTAR  
POR EL TÍTULO DE DOCTOR EN MATEMÁTICA DE LA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

MARZO DE 2013  
©FAMAF-UNC 2013

DIRECTOR: DR. JORGE VARGAS



*Dedicado a  
Mi madre fuente de inspiración*



# Índice general

Abstract	VII
Resumen	IX
Agradecimientos	XI
Introducción	XIII
<b>I Productos tensoriales</b>	<b>1</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>3</b>
1.1. Teoría de caminos de Littelmann . . . . .	3
1.2. Productos tensoriales de Series Discretas Holomorfas . . . . .	7
1.2.1. Generalidades sobre grupos de Lie semisimples . . . . .	7
1.2.2. Grupos de tipo hermitiano . . . . .	9
<b>2. Órbita de <math>\alpha_{nc}</math></b>	<b>13</b>
2.1. Caso $G$ localmente isomorfo a $Sp(n, \mathbb{R})$ . . . . .	14
2.2. Caso $G$ localmente isomorfo a $EIII$ . . . . .	18
2.3. Caso $G$ localmente isomorfo a $EVII$ . . . . .	20
2.4. Caso $G$ localmente isomorfo a $SO(2, 2n)$ $n > 2$ . . . . .	21
2.5. Caso $G$ localmente isomorfo a $SO(2, 2n + 1)$ . . . . .	23
2.6. Caso $G$ localmente isomorfo a $SO^*(2n)$ . . . . .	24
2.7. Caso $G$ localmente isomorfo a $SU(p, q)$ . . . . .	26
<b>3. Descripción de <math>S(\mathfrak{p}^+)</math></b>	<b>29</b>
3.1. Órbita de $v_i^n$ . . . . .	31
3.2. Órbita de $v_1^{n_1} * \cdots * v_k^{n_k}$ . . . . .	38
3.3. Fórmula del caracter y productos tensoriales . . . . .	44
<b>4. Cálculo de <math>P_\eta</math></b>	<b>49</b>
<b>II Restricción de series discretas cuaternionicas o pequeñas</b>	<b>53</b>
<b>5. Introducción</b>	<b>55</b>

<b>6. Parámetros de Harish-Chandra de <math>SU(2, 1)</math> y sus <math>L</math>-tipos</b>	<b>57</b>
<b>7. Fórmula de Dufló y Vargas y sus aplicaciones</b>	<b>59</b>
7.1. Fórmula de Dufló y Vargas . . . . .	59
7.2. Restricción al subgrupo localmente isomorfo a $SU(2, 1)$ . . . . .	60
7.2.1. Caso $G(\mathbb{C})$ de tipo $A_n$ . . . . .	60
7.2.2. Caso $G(\mathbb{C})$ de tipo $B_n$ . . . . .	66
7.2.3. Caso $G(\mathbb{C})$ de tipo $G_2$ . . . . .	71
7.2.4. Caso $G(\mathbb{C})$ de tipo $F_4$ . . . . .	76
7.2.5. Caso $G(\mathbb{C})$ de tipo $E_6$ . . . . .	80
7.2.6. Caso $G(\mathbb{C})$ de tipo $E_7$ . . . . .	83
7.2.7. Caso $G(\mathbb{C})$ de tipo $E_8$ . . . . .	87
7.3. Multiplicidades para el par $SU(2, p) \subseteq SU(2, q)$ . . . . .	90
<b>8. Fórmula de Dufló - Vargas VS Gross - Wallach</b>	<b>97</b>

# Índice de cuadros

1.1. Grupos de Lie simples de tipo hermitiano . . . . .	10
2.1. Generar el grafo $([\gamma_{n,n}]_{\leq A_2}, A_2)$ a partir del grafo $([\gamma_{n,n}]_{\leq}, A_1)$ . . . . .	17
4.1. Pesos fundamentales de $\mathfrak{k}$ y acción del centro $\xi$ para grupos clásicos . . . . .	50
4.2. Pesos fundamentales de $\mathfrak{k}$ y acción del centro $\xi$ para grupos excepcionales . . . . .	50
7.1. Multiplicidad de parámetros de Harish-Chandra de $H$ . . . . .	74





# Índice de figuras

1.1. Raíz simple $\mathbf{u}$ . 1) Camino original. 3) Operador $\mathbf{e}_{\mathbf{u}}$ aplicado al camino . . . . .	5
2.1. Grafo $Sp(n, \mathbb{R})$ . . . . .	15
2.2. Grafo 2 $Sp(n, \mathbb{R})$ . . . . .	16
2.3. Grafo $EIII$ . . . . .	19
2.4. Grafo 2 $EIII$ . . . . .	19
2.5. Grafo 3 $EIII$ . . . . .	19
2.6. Grafo 1 $EVII$ . . . . .	21
2.7. Grafo 1 $SO(2, 2n)$ . . . . .	22
2.8. Grafo $SO(2, 2n + 1)$ . . . . .	24
2.9. Grafo $SO^*(2n)$ . . . . .	25
2.10. Grafo $SU(6, 4)$ . . . . .	27
2.11. Grafo 1 $SU(p, q)$ . . . . .	27
3.1. Dos posibles caminos de $\gamma_{-3}$ a $\gamma_{13}$ , mientras que $\gamma_{23} \not\leq \gamma_4$ ni $\gamma_4 \not\leq \gamma_{23}$ . . . . .	30
3.2. $F^{\text{sup}}, F^{\text{inf}}, E^{\text{sup}}, E^{\text{inf}}$ . . . . .	39
7.1. Restricciones de $G_2$ a $A_2$ . . . . .	74



# Abstract

In these thesis we work on branching laws for discrete series: on the one hand, relate the tensor product decomposition for holomorphic discrete series given by Jakobsen and Vergne and the path model for complex reductive Lie algebras given by Littellmann; on the other hand we study branching laws for some discrete series which are small, in the sense of Gross and Wallach, specially those whose groups admitting quaternionic structure.

Regarding the first problem, in order to study tensor product decomposition for holomorphic discrete series, from a well known result given by Jakobsen and Vergne, the problem can be reduced to a tensor product decomposition for compact groups problem, which we related to Littellmann's path model, in this way we can derive a formula for the decomposition in the holomorphic case in terms of paths.

For the second problem, we take  $G$  a connected semisimple Lie group such that the quotient with one maximal compact subgroup, its a homogeneous manifold such that admits a quaternionic structure. Such groups can be obtained as the real form of a complex group from a Vogan Diagram. This diagram, in turn, determines a Weyl chamber of  $G$  which we call *quaternionic chamber*, which parameterize certain discrete series of  $G$ , but not all. We focus in these kind of discrete series of  $G$  and we call it *quaternionic discrete series*. When  $H$  is a closed reductive subgroup of  $G$  such that the quotient of  $H$  with one maximal compact subgroup also admits a quaternionic structure, so we can also consider quaternionic discrete series of  $H$ . For some subgroups  $H$ , we proved that restriction of a quaternionic discrete series of  $G$  splits into the direct sum of quaternionic discrete series of  $H$ , and determine its multiplicity.

Lastly, we study the relationship of two different branching formulas, one given by Gross and Wallach and the other given by Duflo and Vargas and we try to deduce one in terms of the other.

**Keywords:** Branching Laws, Multiplicity, Hermitian symmetric space, discrete series, Harish Chandra parameter, Littellmann's path model, semisimple Lie group, Weyl group.



# Resumen

En esta tesis tratamos problemas relacionados con restricciones de series discretas: por un lado, relacionar la descomposición del producto tensorial de series discretas holomorfas dada por Jakobsen y Vergne con la teoría de caminos de Littelmann para álgebras de Lie complejas reductivas, y por otro restricción de series discretas pequeñas, en el sentido de Gross y Wallach, en particular, series discretas sobre grupos que admiten estructura cuaterniónica.

Con respecto al primer problema, con el fin de estudiar la descomposición del producto tensorial de dos series discretas holomorfas a partir de un resultado dado por Jakobsen y Vergne el problema se reduce a un problema de productos tensoriales de grupos compactos, el cual lo relacionamos con la teoría de caminos desarrollada por Littelmann, obteniendo de este modo una fórmula para la descomposición del producto tensorial de dos series discretas holomorfas en términos de caminos de Littelmann.

Para el segundo problema, consideramos un grupo de Lie  $G$  semisimple conexo tal que el espacio cociente con un subgrupo compacto maximal es una variedad homogénea que admite una estructura cuaterniónica, entonces  $G$  se puede definir como la forma real de un grupo complejo mediante un diagrama de Vogan. Dicho diagrama corresponde a un sistema de raíces positivo del álgebra complexificada con respecto a una cierta subálgebra de Cartan, y la cámara de Weyl asociada a este sistema, que la denominamos cámara cuaterniónica, y determina parámetros de Harish-Chandra asociados a series discretas de  $G$ . Entonces consideramos la restricción de estas series discretas de  $G$  a cierto subgrupo  $H$  tal que el espacio cociente con un subgrupo compacto maximal de  $H$ , también admite una estructura cuaterniónica. Probamos que las series discretas de  $G$  que tienen parámetros de Harish-Chandra en la cámara cuaterniónica, se descomponen en discretamente en series discretas de  $H$  cuyos parámetros de Harish-Chandra están en la cámara cuaterniónica de  $H$  y determinamos su multiplicidad.

Por último, analizamos dos fórmulas de restricción diferentes a ciertos subgrupos reductivos una dada por Gross y Wallach, y la otra por Duflo y Vargas, y estudiamos cómo relacionarlas una con la otra.

**Math. Subject Classification (2010):** 22E46 Semisimple Lie groups and their representations, 22E47 Representations of Lie and real algebraic groups: algebraic methods, 17B10 Representations, algebraic theory (weights), 17B20 Simple, semisimple, reductive (super)algebras, 17B22 Root systems, 32M15 Hermitian symmetric spaces, bounded symmetric domains, Jordan algebras, 05E10 Combinatorial aspects of representation theory.

**Palabras y frases claves:** Restricciones de representaciones, multiplicidad de una subrepresentación, espacio simétrico hermitiano, series discretas, parámetro de Harish Chandra, caminos de Littelmann, grupo de Lie semisimple, grupo de Weyl.



# Agradecimientos

Este largo camino lleno de alegrías y frustraciones no hubiera sido posible sin la ayuda de todos los que me acompañaron a lo largo de este. Es gratificante haber podido encontrar durante estos años tanta gente amable. Simplemente les quiero decir a todos ellos GRACIAS. En primer lugar quiero agradecer al profesor Nicolás Andruskiewitsch por abrir la opción en que se convirtió en este doctorado. A la república Argentina por su generosidad para conmigo y en su representación al CONICET y al CIEM por su soporte financiero y administrativo.

Quiero agradecer a mi director, el profesor Jorge Vargas, una persona de increíbles actitudes matemáticas, quien su pasión por el conocimiento resulta inspiradora y un ejemplo a seguir; por su generosidad, su paciencia, por la cantidad de cosas que he podido aprender de él, por su constante preocupación, y por sus consejos.

A todos los profesores que me han enseñado muchas cosas y con los cuales siempre hubo una disposición abierta a hablar de matemáticas y discutir; en especial al profesor Leandro Cagliero a quien admiro profundamente por sus altas cualidades humanas y académicas.

A mi comisión asesora: Carina Boyalian, Oscar Bustos y Oscar Brega, por estar siempre pendientes de mi proceso y por sus conversaciones y consejos. A los miembros del jurado por sus correcciones y observaciones y por haber alentado .

A todos mis amigos: a mis “Roomies”: Richar R., Mery S., Eduar A., Lucia F., por haber compartido la convivencia y enseñarme muchas cosas de la vida diaria (por ejemplo a no morir de hambre!); a Felipe H., “el Profe” (alias Edwin Pacheco), Lorena V., Diego Sulca, Jesus, Juan M., Marlon, Pacho, Shirlene... y todos los que se me olvidan en este momento, y en este último año Eugenia y a Marcos con quienes también he compartido muchos cafés y charlas.

A mis compañeros del día a día, las personas que habitaron conmigo la oficina 324 y a los de la of.349; especialmente a Aureliano Guerrero quien siempre tuvo un mate y una palabra que conversar. A mis alumnos (Manuela, Nair, Vanesa, Julieta, Guadalupe, Sofia...) por haberme permitido ser también su amigo.

A mi equipo de fútbol los Borbotones!, que siempre tuvo una sonrisa frente a la derrota :).

Por último quiero agradecer a mi familia, en especial a **Mis hermanos Diego y Carlos Mario y a mi Madre**, que son lo más importante en mi vida, a mi hermano Diego que ha sido mi consejero constante y mi inseparable amigo y a mi Madre porque sin su apoyo y cariño este camino nunca hubiera comenzado y estoy concluyendo esta etapa gracias a ella y a su esfuerzo por darme educación ¡GRACIAS!





# Introducción

Sea  $G$  un grupo de Lie reductivo conexo. La teoría de representaciones estudia mediante métodos analíticos y algebraicos, las posibles acciones de  $G$  sobre un conjunto  $X$ . Cuando  $X$  tiene estructura de espacio topológico, la acción de  $G$  generalmente tiene un tratamiento analítico. Si además  $X$  es un espacio de Hilbert, el tratamiento conlleva analizar problemas analíticos y problemas algebraicos.

Los “bloques fundamentales” son las representaciones que no tienen subrepresentaciones propias no triviales, llamadas *representaciones irreducibles*. En el caso  $G$  compacto las representaciones irreducibles están parametrizadas por sus pesos máximos y todas estas resultan de dimensión finita. Más aún, toda representación de un grupo compacto  $G$  se descompone como suma directa de las subrepresentaciones irreducibles que contiene y se puede dotar a  $X$  de un producto interno, de modo que la acción de cada elemento de  $G$  sobre  $X$  resulte unitaria respecto a este producto interno; estas representaciones se dicen *unitarias*. Para el caso  $G$  no compacto el problema resulta más complejo, en general no toda representación admite un producto interno, sobre  $X$ , de modo que la acción es unitaria y las representaciones unitarias no resultan de dimensión finita. Más aún, no todas las representaciones unitarias se descomponen en suma directa de subrepresentaciones irreducibles.

Sin embargo, un resultado de Harish-Chandra asegura que todo grupo de Lie reductivo es de “tipo I” en el sentido de las álgebras de von Neumann, lo cual implica que dada una representación unitaria de  $G$  sobre un espacio de Hilbert separable, se descompone como la suma directa de Hilbert de todas sus subrepresentaciones irreducibles más un espacio de Hilbert llamado “el espectro continuo”.

Como  $G$  es localmente compacto existe una medida “invariante a izquierda” sobre  $G$ . De modo que si  $X = L^2(G)$  la representación de  $G$  sobre sí mismo dada por la multiplicación a izquierda, induce una representación sobre  $X$  que resulta unitaria. Una subrepresentación irreducible de dicha representación se dice una *serie discreta* de  $G$ .

Sea  $H \subseteq G$  un subgrupo reductivo cerrado de  $G$ , y sea  $(\pi, X)$  una serie discreta de  $G$ . Entonces al restringir  $\pi$  al subgrupo  $H$ , se obtiene una representación de  $H$  sobre  $X$ ,  $(\pi|_H, X)$ , y por tanto por el teorema de Harish-Chandra mencionado  $\pi|_H$  se descompone como suma directa de subrepresentaciones irreducibles de  $H$  más el espectro continuo. Más aún, es bien sabido de la teoría de series discretas (ver apéndice en [GW00]) que en dicha restricción las subrepresentaciones irreducibles de  $H$  que ocurren son unitariamente equivalentes a series discretas de  $H$ ; es decir, el espectro discreto de la restricción de una serie discreta de  $G$  a un subgrupo cerrado  $H$  se descompone en suma directa de series discretas de  $H$ . De este modo surgen tres problemas naturales:

1. ¿Cuáles representaciones irreducibles de  $H$  ocurren en la descomposición de  $(\pi|_H, X)$ ?

2. ¿Bajo qué condiciones se puede asegurar que toda subrepresentación irreducible de  $H$  ocurre un número finito de veces?, es decir, si  $\dim \text{hom}_H(V_\tau, X) < \infty$  para toda representación unitaria irreducible de  $H$ ,  $(\tau, V_\tau)$ .
3. Calcular  $\dim \text{hom}_H(V_\tau, X)$  para toda representación unitaria  $(\tau, V_\tau)$  de  $H$ .

**Definición 0.0.1.** *Una representación unitaria  $(\pi, X)$  de  $G$  tal que para toda representación unitaria irreducible  $(\tau, V_\tau)$  de  $H$ , satisface  $\dim \text{hom}_H(V_\tau, X) < \infty$  y no posee espectro  $H$ -continuo se dice que es  $H$ -admisibile. La descripción explícita de (3) se dice una fórmula de restricción (Branching Law en inglés).*

Este trabajo se centra en analizar restricciones de series discretas en tres casos especiales y en particular en obtener fórmulas de restricción para dichos casos. El trabajo se divide en tres problemas en principio no relacionados.

1. El primero de estos, cuando  $G$  tiene un subgrupo compacto maximal  $K$ , tal que la variedad homogénea  $G/K$  admite estructura hermitiana. En este caso Harish-Chandra (ver [Kna86]) construyó una clase especial de series discretas que se pueden realizar sobre un espacio de Hilbert de funciones holomorfas, llamadas *series discretas holomorfas*. Si  $H$  es un subgrupo cerrado de  $G$  con subgrupo compacto maximal  $L$  tal que  $H/L$  admite estructura hermitiana, bajo ciertas condiciones de compatibilidad, resultados de Jakobsen y Vergne muestran que la restricción de una serie discreta holomorfa de  $G$  se descompone discretamente (i.e. el espectro continuo es cero) y admisiblemente en series discretas *holomorfas* de  $H$ .

En particular, dadas dos series discretas holomorfas de  $G$  su producto tensorial (exterior) es una serie discreta holomorfa del grupo  $G \times G$ . Si  $H$  es el subgrupo diagonal de  $G \times G$ , entonces la fórmula de restricción para  $H$  es equivalente a la descomposición de la representación de  $G$  del producto tensorial (interno) de estas series discretas holomorfas. Por lo tanto, los resultados de Jakobsen y Vergne concluyen que cada serie discreta holomorfa que ocurre en el producto tensorial, ocurre finitas veces; más aún, obtienen una fórmula de descomposición del producto tensorial en términos de ciertas representaciones irreducibles del subgrupo maximal compacto  $K$  de  $G$  y el producto tensorial de estas.

En resumen, el resultado de Jakobsen y Vergne, convierte el problema de tensorizar series discretas holomorfas en un problema de descomposición de productos tensoriales de grupos compactos y este, a su vez, se puede llevar al problema equivalente en álgebras de Lie complejas.

Para entender la descomposición de productos tensoriales, Littelmann en [Lit94], [Lit95] y [Lit97] introduce la teoría de caminos, cuya idea nace en interpretar geoméricamente la teoría combinatoria de tableaux de Young para el caso  $A_n$  y generalizarla para las demás álgebras semisimples complejas. A grandes rasgos, un camino es una curva lineal a trozos sobre el espacio de pesos racionales (ver definición 1.1.1). Siguiendo trabajos de Lakshmibai y Seshadri, Littelmann introduce dos operadores  $\mathbf{e}, \mathbf{f}$  (ver definición 1.1.4) sobre el espacio de caminos y obtiene una fórmula para el caracter de una representación irreducible de un álgebra de Lie semisimple en términos de estos operadores (ver Cap 1,1), dados por

un subconjunto de caminos  $B$ . Con base en esta fórmula obtiene una descomposición del producto tensorial de dos representaciones irreducibles (ver 1.1.10).

Por otro lado, el álgebra de Lie complexificada  $\mathfrak{g}$  de  $G$ , tiene descomposición de Cartan  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ , con  $\mathfrak{k}$  el álgebra de Lie complexificada de  $K$ . La representación adjunta da estructura de  $K$ -módulo al subespacio  $\mathfrak{p}$ . Dado un toro maximal  $T \subseteq K$  la subálgebra  $\mathfrak{t} := \text{Lie}(T) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ , es una subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{k}$  simultáneamente. Tomemos  $\Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$  un sistema de raíces positivo del sistema de raíces  $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ , de modo que el conjunto de raíces positivas no compactas es invariante por el grupo de Weyl de  $K$ ,  $W_K$ . Existen, salvo conjugación por  $W_K$  dos elecciones de  $\Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ . Fijado un  $\Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ , sea  $\Pi$  las raíces simples de  $\Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ . Entonces  $\Pi$  es unión disjunta del subconjunto de raíces simples compactas y el subconjunto de raíces simples no compactas, denotadas por  $\Pi_c$  y  $\Pi_n$  respectivamente. La elección en el sistema de raíces satisface que  $\Pi_n$  tiene un único elemento  $\alpha_{nc}$ .

Sea  $\mathfrak{p}^+ = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})} \mathfrak{g}_{\alpha} \cap \mathfrak{p}$ . Entonces  $\mathfrak{p}^+$  es un  $K$ -submódulo irreducible de  $\mathfrak{p}$ , y por tanto  $S(\mathfrak{p}^+)$  tiene estructura de  $K$ -módulo. Los resultados de Jakobsen y Vergne (ver (1.2.5)) indican que para entender la descomposición del producto tensorial de series holomorfas, es necesario entender la descomposición del producto tensorial de un  $K$ -módulo irreducible con  $S(\mathfrak{p}^+)$ .

Schmid en [Sch69] determinó la descomposición de  $S(\mathfrak{p}^+)$  en  $\mathfrak{k}$ -módulos irreducibles, calculando los pesos máximos de las representaciones irreducibles que ocurren en  $S(\mathfrak{p}^+)$  y sus multiplicidades (todas ocurren con multiplicidad uno).

Para explicar los resultados obtenidos en esta tesis fijemos alguna notación.

**Notación.** a)  $\mathbf{e}_{\alpha}, \mathbf{f}_{\alpha}$  operadores sobre el espacio de caminos definidos por Littelmann (ver definición 1.1.4).

b)  $\theta =$  camino nulo y que anula a todos los caminos (ver notación 1.1.3 capítulo 1).

c) Sea  $A \subseteq \Pi_c$  un subconjunto de raíces simples compactas, y sean  $\zeta, \zeta'$  dos caminos distintos de  $\theta$ , definimos  $\zeta \preceq_A \zeta'$  si  $\zeta = \zeta'$  o si existen raíces compactas simples  $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in A$  tales que  $\mathbf{e}_{\alpha_1} \cdots \mathbf{e}_{\alpha_r}(\zeta) = \zeta'$ ; en este caso decimos que los caminos están unidos por una caminata en el grafo de  $\zeta$  a  $\zeta'$  con aristas en  $A$ .

d) Si  $A = \Pi_c$ , escribiremos  $\zeta \preceq \zeta'$  para denotar  $\zeta \preceq_{\Pi_c} \zeta'$ .

e)  $[\zeta]_{\preceq_A} := \{\eta \mid \zeta \preceq_A \eta\}$ .

f)  $[\zeta]_{\preceq} := [\zeta]_{\preceq_{\Pi_c}}$ . Cada uno de los conjuntos  $[\zeta]_{\preceq}$  es finito.

g) Para un camino  $\zeta$  definimos los conjuntos

$$\begin{aligned} F_{\zeta}^{\text{sup}} &= \{\alpha \in \Pi_c \mid \exists \eta, \zeta \preceq \eta, \mathbf{f}_{\alpha}(\eta) \neq \theta\} & E_{\zeta}^{\text{sup}} &= \{\alpha \in \Pi_c \mid \exists \eta, \zeta \preceq \eta, \mathbf{e}_{\alpha}(\eta) \neq \theta\} \\ F_{\zeta}^{\text{inf}} &= \{\alpha \in \Pi_c \mid \exists \eta, \eta \preceq \zeta, \mathbf{f}_{\alpha}(\eta) \neq \theta\} & E_{\zeta}^{\text{inf}} &= \{\alpha \in \Pi_c \mid \exists \eta, \eta \preceq \zeta, \mathbf{e}_{\alpha}(\eta) \neq \theta\} \end{aligned}$$

h)  $k :=$  Rango real( $G$ ). Identificando la única raíz simple no compacta  $\alpha_{nc}$  con su camino asociado  $t\alpha_{nc}$ ;  $t \in [0, 1]$  (ver definición 1.1.1), definimos inductivamente conjuntos  $A_k \subsetneq \cdots \subsetneq A_1 = \Pi_c$  del siguiente modo:

1)  $A_1 := \Pi_c$ . Supongamos que el conjunto  $A_i$  ha sido definido previamente.

- 2) Consideremos  $[\alpha_{nc}]_{\succeq} = \{\eta \mid \alpha_{nc} \preceq \eta\}$ , el conjunto de elementos mayores o iguales a  $\alpha_{nc}$  con el orden  $\succeq$ .
- 3) Tomemos  $M_i$  el conjunto de elementos maximales de  $[\alpha_{nc}]_{\preceq_{A_i}}$  con respecto a la relación de orden  $\preceq$  (como veremos, para nuestro caso las relaciones de orden  $\preceq_{A_i}$  y  $\preceq$  son iguales en el conjunto  $[\alpha_{nc}]_{\preceq_{A_i}}$ ).
- 4) Sea  $W_i = \{\alpha \in \Pi_c \mid \exists v \in M_i \mathbf{f}_\alpha(v) \neq \theta\}$ . Si  $i < k$ , sea  $A_{i+1} := A_i \setminus W_i$ .

Utilizando esta notación; en el capítulo 2 probaremos el siguiente teorema:

**Teorema I.** *Conservando la notación anterior se tiene:*

- a) Para cada  $i = 1, \dots, k$ ;  $[\alpha_{nc}]_{\preceq_{A_i}}$  tiene elemento máximo  $\nu_i$  con respecto a la relación de orden  $\preceq$ ; esto es,  $M_i = \{\nu_i\}$
- b) Sea  $\nu_k \preceq \dots \preceq \nu_2 \preceq \nu_1$  la sucesión de caminos construida en a). Entonces el conjunto de pesos  $\{\nu_1(1), \dots, \nu_k(1)\}$  es un conjunto fuertemente ortonormal de raíces no compactas positivas.
- c) Dados  $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k \geq 0$  enteros no negativos. Tomemos el camino

$$\pi_{(n_1, \dots, n_k)} = \nu_1^{n_1} * \nu_2^{n_2} * \dots * \nu_k^{n_k}, \quad (\text{ver definición 1.1.2 capítulo 1}).$$

Entonces  $\pi_{(n_1, \dots, n_k)}$  es un camino tal que  $\langle \pi_{(n_1, \dots, n_k)}(t), \alpha \rangle \geq 0$  para todo  $t \in [0, 1]$  y toda  $\alpha \in \Pi_c$ ; es decir, la imagen del camino es dominante respecto a la elección de raíces simples compactas  $\Pi_c$ .

La importancia de este teorema es que obtiene caminos  $\pi_{(n_1, \dots, n_k)} = \nu_1^{n_1} * \nu_2^{n_2} * \dots * \nu_k^{n_k}$ , dominantes respecto a la cámara de Weyl compacta cuyos pesos,  $\pi_{(n_1, \dots, n_k)}(1)$ , son precisamente los pesos máximos descritos por Schmid.

**Teorema II.** *Sean  $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k \geq 0$  enteros no negativos. Conservando la notación del teorema I. Sea*

$$\pi_{(n_1, \dots, n_k)}_{\succeq} = \{\eta \mid \eta \preceq \nu_1^{n_1} * \nu_2^{n_2} * \dots * \nu_k^{n_k}\},$$

la órbita de  $\nu_1^{n_1} * \nu_2^{n_2} * \dots * \nu_k^{n_k}$  por los operadores  $\mathbf{f}$ . Entonces  $\pi_{(n_1, \dots, n_k)}_{\succeq}$  es igual a los caminos  $\zeta_{n_1}^1 * \dots * \zeta_1^1 * \zeta_{n_2}^2 * \dots * \zeta_1^2 * \dots * \zeta_{n_k}^k * \dots * \zeta_1^k$  que satisfacen:

- 1) Para todo  $i, j$ ,  $\zeta_i^j \in [\alpha_{nc}]_{\preceq}$ ; es decir,  $\alpha_{nc} \preceq \zeta_i^j \preceq \nu_i$ .
- 2)  $\zeta_i^j \preceq \zeta_{i-1}^j$  para todo  $j \leq k$ ;  $1 < i \leq n_j$ .
- 3)  $E_{\zeta_i^j}^{\text{sup}} \cap E_{\zeta_i^{j+1}}^{\text{inf}} = \emptyset = F_{\zeta_i^j}^{\text{sup}} \cap F_{\zeta_i^{j+1}}^{\text{inf}}$  para todo  $1 \leq i \leq n_{j+1}$ .

Entonces dados  $n_1 \geq \dots \geq n_k \geq 0$  enteros no negativos, la fórmula del caracter dada por Littellmann (Teorema 1.1.9, Cap 2) implica que el caracter del  $\mathfrak{k}$ -módulo irreducible de peso máximo  $n_1\nu_1(1) + \dots + n_k\nu_k(1)$  es igual a:

$$\text{Char}(V_{n_1\nu_1(1)+\dots+n_k\nu_k(1)}) = \bigoplus_{\tau \in \pi_{(n_1, \dots, n_k)}_{\succeq}} e^{\tau(1)}$$

Por otro lado, los resultados de Schmid concluyen que el caracter del  $\mathfrak{k}$ -módulo  $S(\mathfrak{p}^+)$  cumple

$$\text{Char}(S(\mathfrak{p}^+)) = \sum_{\substack{n_1 \geq \dots \geq n_k \geq 0 \\ n_i \in \mathbb{Z}}} \text{Char} V_{n_1 \nu_1(1) + \dots + n_k \nu_k(1)}.$$

Por tanto, si  $B_k = \bigcup_{\substack{n_1 \geq \dots \geq n_k \geq 0 \\ n_i \in \mathbb{Z}}} \pi_{(n_1, \dots, n_k)} \succeq$ . Las últimas dos expresiones concluyen que el caracter del  $\mathfrak{k}$ -módulo  $S(\mathfrak{p}^+)$  es igual a:

$$\text{Char} S(\mathfrak{p}^+) = \bigoplus_{\tau \in B_k} e^{\tau(1)}$$

El interés en esta formulación del caracter, en lugar de tomar la fórmula dada por Schmid, es que permite combinar los resultados de Jakobsen-Vergne y la fórmula de Littelmann para el producto tensorial para reformular la descomposición del producto tensorial de dos series discretas holomorfas. Antes de formular el resultado, recordaremos el marco general.

Sea  $G$  un grupo de Lie simple,  $K \subseteq G$  un subgrupo compacto maximal tal que  $G/K$  admite estructura hermitiana. Sea  $T \subseteq K$  un toro maximal de  $K$  y  $\mathfrak{t}$  su álgebra de Lie complejificada, por tanto  $\mathfrak{t}$  es una subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{k}$ . Sean  $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$  y  $\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$  sistemas de raíces de  $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{k}$  respectivamente, y  $\Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$  un sistema de raíces positivo tal que todas las raíces simples excepto una son compactas, y sea  $\Phi^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) = \Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) \cap \Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ . Denotemos por  $\alpha_{nc}$  la única raíz simple no compacta y por  $C_G$ , y,  $C_K$  las cámaras de Weyl asociadas a  $\Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ , y,  $\Phi^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$  respectivamente. Sea  $k$  el rango real de  $G$ .

**Teorema III.** *Sean  $(\pi_{\lambda_1}, H_1), (\pi_{\lambda_2}, H_2)$  dos series discretas holomorfas de  $G$  con parámetros de Harish-Chandra  $\lambda_1, \lambda_2$  y  $K$ -tipos minimales  $\Lambda_1, \Lambda_2$  respectivamente, tales que  $\lambda_i \in C_G$  para  $i = 1, 2$ . Para un  $K$ -tipo  $\mu$ , sea  $H(\mu)$  la serie discreta holomorfa con  $K$ -tipo minimal  $\mu$ .*

Sea  $\eta \in C_K$ , y sea  $P_\eta$  el conjunto de los caminos  $\tau \in B_k$  tales que si  $\tau = \zeta_{n_1}^1 * \dots * \zeta_1^1 * \zeta_{n_2}^2 * \dots * \zeta_1^2 * \dots * \zeta_1^k \in \pi_{(n_1, \dots, n_k)} \succeq$ , para cada  $0 \leq s < k$  y cada  $1 \leq l \leq n_{s+1}$  se tiene

$$\eta + \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^{n_j} \zeta_{n_j+1-i}^j(1) + \sum_{i=1}^l \zeta_{n_{s+1}+1-i}^{s+1}(1) \in C_K.$$

En el caso especial  $G = SO(2, 2n+1)$ , suponemos también que  $\langle \eta + \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^{n_j} \zeta_{n_j+1-i}^j(1) + \sum_{i=1}^l \zeta_{n_{s+1}+1-i}^{s+1}(1), \alpha_n^\vee \rangle > 0$ , si  $\langle \zeta_{n_{s+1}+1-l}^{s+1}(1), \alpha \rangle = 0$  para toda  $\alpha \in \Pi_c$ .

Entonces

$$H_1 \otimes H_2 = \bigoplus_{\substack{[\eta, \Lambda_1 \otimes \Lambda_2] \neq 0 \\ \tau \in P_\eta}} m(\eta, \Lambda_1, \Lambda_2) H(\eta + \tau(1))$$

donde  $m(\eta, \Lambda_1, \Lambda_2) = \#(\{\pi = (t\Lambda_1) * (\tau) \mid \tau \preceq (t\Lambda_2); \pi(t) \in C_K, \forall t \in [0, 1], \eta = \pi(1)\})$

El conjunto  $P_\eta$  se calcula explícitamente en ciertos casos, por lo cual las condiciones sobre  $\eta$  se pueden dar en términos de desigualdades omitiendo de este modo las referencias a los caminos.

2. Otra parte del trabajo se desarrolla en el siguiente contexto: Sea  $G(\mathbb{C})$  un grupo de Lie simple, conexo, complejo, simplemente conexo sobre  $\mathbb{C}$ , con álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , entonces existe una forma real  $G$  de  $G(\mathbb{C})$  tal que, si  $K$  es un subgrupo compacto maximal de  $G$ , la variedad homogénea  $G/K$  admite una estructura cuaterniónica. Wallach en [Wal03] demostró que si  $G$  no es de tipo  $C_n$  existe un subgrupo  $H \subseteq G$  localmente isomorfo a  $SU(2, 1)$ . Queremos estudiar la restricción de una serie discreta,  $\pi_\lambda^G$ , de  $G$  a  $H$ .

Si el parámetro de Harish Chandra  $\lambda$  de  $\pi_\lambda^G$  se toma en una cámara de Weyl especial que llamamos cámara cuaterniónica,  $\pi_\lambda^G$  tiene restricción admisible a  $H$ . Por consiguiente, los parámetros de Harish-Chandra  $\mu$  de  $H$  que ocurren en la restricción (salvo conjugación por el subgrupo compacto maximal de  $H$ ) pertenecen a tres posibles cámaras Weyl de  $H$ , dos de dichas cámaras determinan series discretas holomorfas. Nuestro interés se centra en mostrar que los parámetros de  $H$  que aparecen en la restricción pertenecen a la cámara de Weyl cuyas raíces simples son no compactas. Así mismo, es posible dar una fórmula para calcular las multiplicidades de la restricción. Para esto, nuestra herramienta principal corresponde a una fórmula dada por Duflo y Vargas en [DV10] la cual asegura la admisibilidad de la restricción y permite calcular las multiplicidades, así como una fórmula de Heckman [Hec82] que es su análogo para grupos compactos.

**Teorema IV.** *Sea  $\pi_\lambda^G$  una serie discreta de  $G$  con parámetro de Harish-Chandra  $\lambda \in \mathfrak{t}^*$  en la cámara cuaterniónica. La restricción a  $H$  de  $\pi_\lambda^G$  se descompone como suma directa de series discretas de  $H$ , tal que los parámetros de Harish Chandra  $\mu$  de  $H$  asociados a los factores irreducibles de  $\pi_\lambda^G|_H$  pertenecen a la cámara asociada al sistema de raíces tal que las raíces simples son no compactas, es decir, la restricción no tiene factores en la serie discreta holomorfa ni antiholomorfa.*

Cada grupo  $G$  tiene subgrupo compacto maximal  $K$  tal que  $K = K_1 \times K_2$ , donde  $K_2$  es un grupo compacto localmente isomorfo a  $SU(2)$ . Si  $T \subseteq K$  es un toro de  $K$ , la descomposición de  $K$  induce una descomposición de  $\mathfrak{t}^* = (\mathfrak{t} \cap \mathfrak{k}_1)^* \oplus (\mathfrak{t} \cap \mathfrak{k}_2)^*$ , donde  $\mathfrak{k}_i$  es el álgebra de Lie complexificada de  $K_i$  y cada  $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{k}_i$  es una subálgebra toral en el factor  $\mathfrak{k}_i$ . Por tanto un parámetro de Harish-Chandra  $\lambda$  admite la descomposición  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$  con  $\lambda_i \in (\mathfrak{k}_i \cap \mathfrak{t})^*$ . El subgrupo  $L := K \cap H$  es un subgrupo compacto maximal de  $H$  y  $U := T \cap H$  es un toro maximal de  $L$ , y por tanto, por la condición de Rango  $(H) = \text{Rango}(L)$ , la complexificación  $\mathfrak{u}$  de  $\text{Lie}(U)$  es una subálgebra de Cartan de  $H$  tal que  $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{t}$ . Sea  $q_u : \mathfrak{t}^* \rightarrow (\mathfrak{u})^*$  la aplicación restricción.

**Proposición V.** *Sea  $(\pi_{\lambda_1}^{K_1}, V_{\lambda_1})$  la representación irreducible de  $K_1$  con caracter infinitesimal  $\lambda_1$ . Sea  $\Delta(V_{\lambda_1})$  el conjunto de pesos de la representación  $\pi_{\lambda_1}^{K_1}$ , para  $\nu \in \Delta$  sea  $M(\lambda_1, \nu)$  la dimensión del espacio de peso  $\nu$ , extendamos  $\nu$  a  $\mathfrak{k}$  por  $\nu|_{\mathfrak{k}_2} = 0$ . Entonces existen  $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathfrak{u}^*$ ,  $y, d \in \mathbb{Z}$  tales que los parámetros de Harish-Chandra  $\mu$  de  $H$  que satisfacen  $m^H(\lambda, \mu) \neq 0$  son de la forma  $\mu = (n + d)\Lambda_1 + (m + d)\Lambda_2 + q_u(\lambda_2) + q_u(\nu)$  con*

$n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $\nu \in \Delta(V_{\lambda_1})$  y ocurre con multiplicidad

$$\sum_{\substack{\nu \in \Delta(V_{\lambda_1}) \\ n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ \mu = (n+d)\Lambda_1 + (m+d)\Lambda_2 + q_u(\lambda_2) + q_u(\nu)}} M(\lambda_1, \nu) \binom{m+d-1}{d-1} \binom{n+d-1}{d-1}.$$

Las demostraciones se hacen caso por caso en cada  $G$ , obteniendo  $\Lambda_1, \Lambda_2, d$ . Este resultado generaliza el caso de ciertas series discretas estudiado por Wallach en [Wal03], llamadas series discretas cuaterniónicas, quien da la restricción a  $H$  de estas series discretas.

Por otro lado, al igual que en el caso  $SU(2, 1)$ , para  $p < q$  es posible también estudiar las restricciones de  $SU(2, q)$  a  $SU(2, p)$  con parámetros de Harish-Chandra en la cámara cuaterniónica. En este caso, un teorema dado por Duflo y Vargas permite estudiar dicha restricción, primero estudiando la restricción a un subgrupo  $\tilde{H}$  del mismo rango de  $SU(2, p)$ . Usando esta técnica nos concentramos en el problema de entender la restricción.

3. La última parte del trabajo se centra en encontrar la relación entre dos fórmulas de restricción para ciertas series discretas. Sea  $G$  un grupo simple y  $\sigma$  una involución de  $G$ , y sea  $H$  la componente conexa del conjunto de puntos fijos. El par  $(G, H)$  se dice un *par simétrico*, y  $H$  se dice un subgrupo simétrico de  $G$ . En [GW00] Gross y Wallach distinguen ciertas cámaras especiales sobre cada grupo (si existen). Si un parámetro de Harish-Chandra está en alguna de estas cámaras, la serie discreta  $\pi_\lambda$  asociada a dicho parámetro se dice *pequeña* (en el sentido de Gross-Wallach). Las series discretas holomorfas y cuaterniónicas, así como las representaciones de peso máximo de un grupo compacto, son ejemplos de series discretas pequeñas. Gross y Wallach demuestran que la restricción de una serie discreta pequeña  $\pi_\lambda$  a ciertos subgrupos *simétricos*  $H$  es  $H$ -admisibles (def. 0.0.1) y obtienen una fórmula para sus multiplicidades. Por otro lado, la mencionada fórmula de Duflo y Vargas concluye en este caso igualmente la  $H$ -admisibilidad y obtiene otra fórmula, aparentemente distinta, para las multiplicidades. Por tanto, cabe entender cómo se puede deducir la fórmula de Gross-Wallach a partir de la fórmula de Duflo y Vargas. La tercera parte da una deducción de este hecho.

En aras de la claridad, todos los teoremas anteriormente citados son enunciados nuevamente en la tesis conforme se vayan desarrollando los temas. La exposición está organizada del siguiente modo:

La primera parte aborda el problema del producto tensorial de series discretas holomorfas. El primer capítulo explica los resultados obtenidos por Littelmann y la descomposición del producto tensorial en el caso semisimple compleja. La exposición de estos resultados se sigue de los trabajos [Lit94],[Lit95],[Lit97]. Posteriormente, se explican los resultados sobre series discretas dados por Harish-Chandra y la descomposición del producto tensorial formulada por Jakobsen y Vergne.

El capítulo dos calcula la órbita de los operadores de Littelmann sobre  $\alpha_{nc}$  caso por caso y asocia a cada caso un grafo. Esto es importante en dirección a entender los pesos descritos por Schmid, en términos de caminos de Littelmann. Teniendo en cuenta dicho grafo, se pueden obtener los pesos de Schmid de un modo algorítmico, simplemente observando los diagramas asociados. El objetivo de este capítulo es demostrar el teorema I (teorema 2.0.8 capítulo 2).

La importancia de este procedimiento es que permite obtener la fórmula del caracter de  $S(\mathfrak{p}^+)$  como  $\mathfrak{k}$ -módulo en un modo algorítmico (teorema II), y de este modo la descomposición del producto tensorial (teorema III). Finalmente en el capítulo 4 se describe explícitamente el conjunto  $P_\eta$ .

La segunda parte a su vez se divide en tres partes. La primera (capítulos 5-7) aborda la fórmula de descomposición al subgrupo localmente isomorfo a  $SU(2, 1)$ , para esto, se explica la fórmula dada por Duflo y Vargas y los parámetros que Harish-Chandra de  $SU(2, 1)$  para examinar cuáles de dicho parámetros ocurren en la restricción. Los resultados se hacen nuevamente caso por caso y en cada caso se establece el teorema correspondiente al teorema 5 y la proposición 5. La segunda parte (capítulo 8) estudia el caso especial de la restricción  $SU(2, p) \subseteq SU(2, q)$ , obteniendo la descomposición de la restricción. También podemos concluir que la restricción a  $SU(2, p)$  de una serie discreta con parámetro de Harish-Chandra en la cámara cuaterniónica se descompone admisiblemente y discretamente en series discretas de  $SU(2, p)$  cuyos parámetros de Harish Chandra está en la cámara cuaterniónica, este resultado es análogo al del teorema 5. Este resultado es análogo al resultado obtenido por Jakobsen y Vergne para series discretas holomorfas y el resultado de Gross y Wallach para pares simétricos  $(G, H)$  y representaciones pequeñas. Además, en el estudio de esta restricción se usa un interesante método sugerido por Duflo y Vargas, que consiste en restringir la representación a un subgrupo de  $SU(2, p)$  del mismo rango y posteriormente “levantar” la multiplicidad al grupo  $SU(2, p)$ .

Finalmente, la tercera parte (capítulo 9) estudia la relación entre las fórmulas de Duflo y Vargas con la fórmula de Gross y Wallach, en la cual se obtiene una deducción de esta, simplificando la suma dada por Gross y Wallach.



## Parte I

# Productos tensoriales, Series discretas holomorfas y teoría de caminos



# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Teoría de caminos de Littelmann

El objetivo de esta sección, es dar la teoría básica de caminos desarrollada por Littelmann. Nuestra exposición se centra principalmente en los trabajos [Lit94],[Lit95],[Lit97]. En primer lugar se introduce la notación básica y se definen los operadores  $\mathbf{e}$  y  $\mathbf{f}$  (def. 1.1.4), los cuales son fundamentales para poder enunciar el Teorema 1.1.10, así como el Teorema 1.1.9 que son una herramienta fundamental en nuestro trabajo.

Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie compleja semisimple, sea  $\mathfrak{t}$  una subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$  y notemos por  $\mathfrak{X}$  el retículo de pesos enteros, sea  $\mathfrak{X}_{\mathbb{Q}} = \mathfrak{X} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ . En esta sección notaremos por  $[0, 1] := \{t \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq t \leq 1\}$ .

**Definición 1.1.1.** *Un camino de pesos racionales es una función lineal a trozos  $\eta : [0, 1] \rightarrow \mathfrak{X}_{\mathbb{Q}}$  tal que  $\eta(0) = 0$ .*

Dos caminos  $\eta, \mu$  diremos que son equivalentes si son iguales salvo una reparametrización por una función continua  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  no decreciente, biyectiva y lineal a trozos de modo que,  $\mu = \eta \circ f$ .

Por *el peso del camino*  $\pi$  nos referiremos al punto final;  $\pi(1)$ . Un camino se dice que tiene peso entero si  $\pi(1) \in \mathfrak{X}$ .

Cada  $\lambda \in \mathfrak{X}_{\mathbb{Q}}$  tiene trivialmente asociado un camino con peso  $\lambda$ , a saber,  $\pi_{\lambda}(t) = t\lambda$ ,  $t \in [0, 1]$ , el cual, por abuso de notación, escribiremos igualmente por  $\lambda$  y llamaremos *el camino  $\lambda$*  o *el camino asociado a  $\lambda$* . En particular, el camino asociado al peso 0 se dirá el camino trivial o cero. Por abuso de notación identificaremos en ocasiones el camino con su imagen en  $\mathfrak{X}_{\mathbb{Q}}$ , por tanto, diremos que el camino  $\pi$  está contenido en un subconjunto  $E \subseteq \mathfrak{X}_{\mathbb{Q}}$  si  $\pi(t) \in E$  para todo  $t \in [0, 1]$ .

**Definición 1.1.2.** *Dados dos caminos  $\pi_1, \pi_2$ , se yuxtaponen uno después de otro, mediante*

$$(\pi_1 * \pi_2)(t) = \begin{cases} \pi_1(2t) & \text{si } t < 1/2 \\ \pi_1(1) + \pi_2(2t - 1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Se puede demostrar que  $*$  es una operación asociativa, o para ser precisos los caminos  $(\pi_1 * \pi_2) * \pi_3$  y  $\pi_1 * (\pi_2 * \pi_3)$  son equivalentes; de manera que si  $\pi$  es un camino, escribiremos  $\pi^n$  por el camino  $\underbrace{\pi * \cdots * \pi}_n$ .

Obsérvese que si  $\eta_1, \dots, \eta_k$  son caminos, entonces considerando el camino  $(\eta_1 * \cdots * \eta_k)(t)$ , podemos tomar una parametrización de modo que si  $t_0 \in [\frac{l}{k}, \frac{l+1}{k}]$ , para un entero  $0 \leq l \leq k-1$ , entonces  $(\eta_1 * \cdots * \eta_k)(t_0) = \eta_1(1) + \cdots + \eta_l(1) + \phi_l(t_0)\eta_{l+1}$ , con  $\phi_l(t) = nt - l$ .

**Notación 1.1.3.** Por conveniencia introducimos un elemento especial  $\theta$  (estrictamente hablando no es un camino) el cual anula a todos los caminos, esto es, tal que  $\theta * \pi = \pi * \theta = \theta$ .

Fijemos  $\Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$  un sistema de raíces positivo de  $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ , sea  $\alpha$  una raíz simple, y su respectiva coraíz  $\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ . Sea  $\pi$  un camino fijo, sea  $h_\alpha^\pi(t) = \langle \pi(t), \alpha^\vee \rangle$ , y denotemos su mínimo por  $m_\alpha^\pi = \min_{t \in [0,1]} h_\alpha^\pi(t)$ . Definimos dos operadores sobre el camino:

**Definición 1.1.4.** Si  $m_\alpha^\pi > -1$  definimos  $\mathbf{e}_\alpha(\pi) = \theta$ . Si  $m_\alpha^\pi \leq -1$ ; sea  $a \in [0, 1]$  tal que  $h_\alpha^\pi(a) = m_\alpha^\pi$  y es minimal bajo esta condición; y sea  $0 \leq y \leq a$  maximal tal que  $h_\alpha^\pi(t) \geq m_\alpha^\pi + 1$  para todo  $t < y$ . Definimos:

$$\mathbf{e}_\alpha \pi(t) = \begin{cases} \pi(t) & 0 \leq t < y \\ \pi(t) + (1 - \min_{s \leq t} \{1, h_\alpha^\pi(s) - m_\alpha^\pi\})\alpha & y \leq t < a \\ \pi(t) + \alpha & a \leq t < 1 \end{cases}$$

Obsérvese que  $m_\alpha^\pi + 1 - h_\alpha^\pi(t) \in [0, 1]$ , por tanto considerando la función  $r(t) = 1 - \min_{s \leq t} \{1, h_\alpha^\pi(s) - m_\alpha^\pi\}$ , podemos alternativamente definir el operador como:

$$\mathbf{e}_\alpha(\pi) = \begin{cases} \pi(t) + r(t)\alpha & \text{Si } r(0) = 0 \\ \theta & \text{En caso contrario} \end{cases}$$

Análogamente, se puede definir el operador “inverso” de  $\mathbf{e}_\alpha$ .

Sea  $l(t) = \min_{t \leq s \leq 1} \{1, h_\alpha^\pi(s) - m_\alpha^\pi\}$  definimos el operador  $\mathbf{f}_\alpha$ ,

$$\mathbf{f}_\alpha(\pi) = \begin{cases} \pi(t) - r(t)\alpha & \text{Si } l(1) = 1 \\ \theta & \text{En caso contrario} \end{cases}$$

Informalmente, el operador  $\mathbf{e}_\alpha$  “acercas” el camino a la cámara de Weyl dominante en dirección  $\alpha$ , mientras que  $\mathbf{f}_\alpha$  lo aleja y  $\mathbf{e}_\alpha(\pi) = \theta$  si el camino está lo suficientemente cerca a la cámara con respecto de  $\alpha$ . La siguiente proposición da algunas propiedades básicas de los caminos. Sus demostraciones se siguen por cálculo directo de los operadores  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{f}$ . En los capítulos 2-4 haremos un uso sistemático de esta proposición, en particular del inciso 5), en ocasiones sin hacer mención explícita.

**Proposición 1.1.5.** 1. Si  $\mathbf{e}_\alpha(\pi) \neq \theta$ , entonces  $\mathbf{e}_\alpha(\pi)(1) = \pi(1) - 1$ , y  $\mathbf{f}_\alpha \mathbf{e}_\alpha(\pi) = \pi$ .

2. Si  $\mathbf{f}_\alpha(\pi) \neq \theta$ , entonces  $\mathbf{f}_\alpha(\pi)(1) = \pi(1) + 1$ , y  $\mathbf{e}_\alpha \mathbf{f}_\alpha(\pi) = \pi$ .

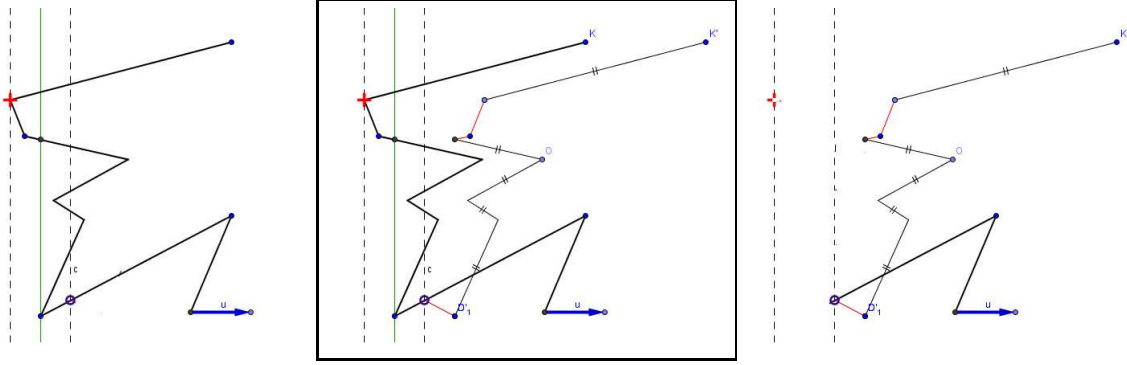


Figura 1.1: Raíz simple  $u$ . 1) Camino original. 3) Operador  $e_u$  aplicado al camino

3. Si  $\pi = \eta_1 * \eta_2$ , y cada  $\eta_i$  satisface que el mínimo  $m_\alpha^{\eta_i}$  es entero y los pesos de los caminos son enteros, en el sentido que  $\pi(1) \in \mathfrak{X}$ , entonces  $m_\alpha^\pi$  es un número entero y  $\mathbf{f}_\alpha(\pi) = \mathbf{f}_\alpha(\eta_1) * \eta_2$  si existe  $N \geq 1$  tal que  $\mathbf{f}_\alpha^N \eta_1 \neq \theta$  pero  $\mathbf{e}_\alpha^N \eta_2 = \theta$  y en otro caso  $\mathbf{f}_\alpha(\pi) = \eta_1 * \mathbf{f}_\alpha(\eta_2)$ .
4. Análogamente si  $\pi = \eta_1 * \eta_2$ ,  $\eta_i$  como antes, entonces  $\mathbf{e}_\alpha(\pi) = \eta_1 * \mathbf{e}_\alpha(\eta_2)$  si existe  $N \geq 1$  tal que  $\mathbf{e}_\alpha^N \eta_1 \neq \theta$  pero  $\mathbf{f}_\alpha^N \eta_2 = \theta$  y en otro caso  $\mathbf{e}_\alpha(\pi) = \mathbf{e}_\alpha(\eta_1) * \eta_2$ .
5. En general, sea  $\pi = \eta_1 * \dots * \eta_k$  tal que  $\eta_i(1) \in \mathfrak{X}$ , y cada mínimo  $m_\alpha^{\eta_i}$  es entero. Entonces  $\mathbf{e}_\alpha(\pi) = \eta_1 * \dots * \mathbf{e}_\alpha(\eta_i) * \dots * \eta_k$ , para algún  $i$  (análogamente con  $\mathbf{f}_\alpha$ ).

**Ejemplo 1.1.6.** 1. Sea  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ , tomemos las raíces simples como  $\alpha_i = e_i - e_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$  (ver capítulo siguiente). Sea  $\pi_{e_1}(t) = te_1 = e_1$  el camino asociado a  $e_1$ . Entonces  $h_{\alpha_i}(t) = \langle te_1, (e_i - e_{i+1})^\vee \rangle = 0$  a menos que  $i = 1$ , en cuyo caso  $h_{\alpha_1}(t) = \langle te_1, e_1 - e_2 \rangle = t$ . El mínimo de esta función es  $m_{\alpha_1} = 0$  y se alcanza únicamente en  $a = 0$ . Así mismo,  $h_{\alpha_1}(1) = 1 \geq 1 + m_{\alpha_1}$ , y  $h_{\alpha_1}$  alcanza  $m_{\alpha_1} + 1$  únicamente en  $b = 1$ . Por tanto  $\mathbf{e}_{\alpha_1}(e_1) = \theta$ ;  $\mathbf{f}_{\alpha_1}(e_1) = S_{\alpha_1}(te_1) = te_2$ . Apliquemos nuevamente el operador  $\mathbf{f}$ , ahora al camino  $e_2$ . En este caso  $h_{\alpha_i} \equiv 0$  salvo cuando  $i = 1, 2$ . En el primer caso, por la primera parte  $\mathbf{e}_{\alpha_1}(e_2) = \mathbf{e}_{\alpha_1}(\mathbf{f}_{\alpha_1}(e_1)) = e_1$ , además  $h_{\alpha_1}(t) = -t$ ;  $m_{\alpha_1} = h_{\alpha_1}(1) = -1$ , luego  $\mathbf{f}_{\alpha_1}(e_2) = \theta$ . En el caso  $h_{\alpha_2}(t) = \langle te_2, e_2 - e_3 \rangle = t$ , entonces procediendo como en el caso anterior podemos ver que  $\mathbf{f}_{\alpha_2}(te_2) = S_{\alpha_2}(te_2) = te_3$ . Similarmente se puede ver que  $\mathbf{f}_{\alpha_i}(te_i) = te_{i+1}$ ; si  $1 \leq i \leq n-1$ ;  $\mathbf{e}_{\alpha_i}(te_i) = te_{i-1}$  si  $2 \leq i \leq n$  y es  $\theta$  para los otros casos. Así pues, la órbita de  $e_1$  aplicándole todos los posibles operadores  $\mathbf{f}$ , nos da el grafo

$$e_1 \xrightarrow{\alpha_1} e_2 \xrightarrow{\alpha_2} e_3 \xrightarrow{\alpha_3} \dots \xrightarrow{\alpha_{n-2}} e_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} e_n$$

2. Si  $\lambda = me_1$ , el camino asociado es  $\lambda = e_1^m$ . Entonces  $\mathbf{f}_{\alpha_i}(\lambda) \neq \theta$  solo si  $i = 1$ , y en este caso, dado que  $\mathbf{e}_{\alpha_1}(e_1) = \theta$ , por la proposición anterior  $\mathbf{f}_{\alpha_1}(e_1 * e_1) = \mathbf{f}_{\alpha_1}(e_1) * e_1 = e_2 * e_1$ . Para este nuevo camino las posibles  $\alpha$  tal que  $\mathbf{f}_\alpha(e_2 * e_1) \neq \theta$ , son  $\alpha_2, \alpha_1$ ; en cuyos casos  $\mathbf{f}_{\alpha_2}(e_2 * e_1) = \mathbf{f}_{\alpha_2}(e_2) * e_1 = e_3 * e_1$ , y,  $\mathbf{f}_{\alpha_1}(e_2 * e_1) = e_2 * \mathbf{f}_{\alpha_1}(e_1) = e_2 * e_2$ . Continuando este proceso, es posible ver que los caminos de la órbita por  $\mathbf{f}$  de  $e_1 * e_1$  son de la forma  $e_r * e_l$  con  $r \leq l$ .

Así mismo  $\mathbf{f}_{\alpha_1}(e_1 * e_1 * e_1) = \mathbf{f}_{\alpha_1}(e_1 * 2e_1) = \mathbf{f}_{\alpha_1}(e_1) * (2e_1) = e_2 * 2e_1 = e_2 * e_1^2$ . Para este nuevo camino el operador  $\mathbf{f}_{\alpha_i}$  es  $\theta$  salvo para  $i = 1, 2$ , en cuyos casos:  $\mathbf{f}_{\alpha_1}(e_2 * e_1^2) = e_2 * e_2 * e_1$ ,

$\mathbf{f}_{\alpha_2}(e_2 * e_1^2) = e_3 * e_1^2$ . Emulando estos casos, podemos ver que todos los elementos de la órbita de  $e_1^m$  por  $\mathbf{f}$  son de la forma  $e_n^{m_n} * \dots * e_2^{m_2} * e_1^{m_1}$  con  $m_1 + \dots + m_n = m$ .

Aplicando los operadores  $\mathbf{e}, \mathbf{f}$  Littelmann desarrolla una importante herramienta en teoría de representaciones que permite traducir problemas a modelos combinatorios. Dado un camino con peso entero  $\tau$  tal que  $\tau(t)$  es dominante para todo  $t$ , entonces por definición  $\mathbf{e}_\alpha(\tau) = \theta$  para toda raíz simple  $\alpha$ , pues  $\langle \tau(t), \alpha^\vee \rangle \geq 0$ . Sin embargo, la órbita de  $\tau$  por  $\mathbf{e}, \mathbf{f}$  puede en principio ser descrita mediante complicadas relaciones de  $\mathbf{e}$  y  $\mathbf{f}$ . Un primer resultado de Littelmann muestra que esta órbita tiene una forma un poco más simple.

**Proposición 1.1.7.** Sea  $\tau$  un camino con peso entero tal que  $\tau(t)$  es dominante respecto a un sistema positivo fijado. Sea  $B_\tau$  el conjunto de caminos  $\eta$  tales que existe una sucesión de raíces simples  $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$  tal que  $T_{\alpha_1} \dots T_{\alpha_p}(\tau) = \eta$ , con  $T_{\alpha_i} = \mathbf{e}_{\alpha_i}$ , o,  $T_{\alpha_i} = \mathbf{f}_{\alpha_i}$ ; esto es,  $B_\tau$  es la órbita de  $\tau$  por los operadores  $\mathbf{e}, \mathbf{f}$  salvo  $\theta$ .

Si  $\eta \in B_\tau$ ,  $\eta$  satisface que  $\eta(t)$  es dominante para todo  $t \in [0, 1]$  si y solo si  $\eta = \tau$ . Más aún, si  $\eta \in B_\tau$  y  $\eta \neq \tau$ , entonces  $\eta = \mathbf{f}_{\alpha_1} \dots \mathbf{f}_{\alpha_p} \tau$  para alguna sucesión de raíces simples  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ .

Un primer resultado de Littelmann se pregunta sobre la relación de dos caminos dominantes con el mismo peso entero.

**Teorema 1.1.8.** Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie compleja,  $\lambda$  un peso entero dominante, relativo a un sistema de raíces positivo  $\Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$  y sea  $C$  la cámara de Weyl asociada a  $\Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ . Sea  $\tau_\lambda$  un camino con peso  $\lambda$ , contenido en  $C$ . Definimos el caracter del camino por

$$\text{char}(\tau_\lambda) := \bigoplus_{\eta \in B_{\tau_\lambda}} e^{\eta(1)}$$

Si  $Q_\lambda$  es otro camino contenido en  $C$ , con peso  $\lambda$ , entonces

$$\text{char}(\tau_\lambda) = \text{char}(Q_\lambda)$$

Este resultado es más débil del probado por Littelmann, que demuestra que existe un isomorfismo entre los dos modelos. Ahora, para  $\tau$  como en el teorema, cada  $\eta \in B_\tau$  se obtiene aplicando ciertos  $\mathbf{f}_\alpha$  a  $\tau$ , por la proposición 1 se tiene que  $\eta$  tiene peso entero (no necesariamente dominante) y también los mínimos de  $\eta$ ,  $m_\alpha^\eta$  son enteros, por tanto podemos esperar encontrar una relación entre el carácter del camino y el caracter de la representación asociada al peso del camino. El resultado más importante de Littelmann consiste en establecer que estas dos expresiones son exactamente lo mismo:

**Teorema 1.1.9** (Fórmula del Caracter de Littelmann). Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie compleja,  $\lambda$  un peso entero dominante, relativo a un sistema de raíces positivo  $\Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ , y sea  $C$  la cámara de Weyl asociada a  $\Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ . Sea  $\tau_\lambda$  un camino con peso  $\lambda$  contenido en  $C$ . Si  $(\pi_\lambda, V_\lambda)$  es la representación irreducible de  $\mathfrak{g}$  con peso máximo  $\lambda$  y  $\text{Char}(V_\lambda)$  es el caracter de la representación entonces:

$$\text{Char}(V_\lambda) = \text{char}(\tau_\lambda).$$

Partiendo de este resultado, Littelmann obtiene la descomposición del producto tensorial de dos representaciones irreducibles de  $\mathfrak{g}$ .

**Teorema 1.1.10.** Sean  $(\pi_\lambda, V_\lambda)$ ,  $(\pi_\mu, V_\mu)$  representaciones irreducibles de  $\mathfrak{g}$  con pesos máximos  $\lambda, \mu$ , sea  $R(\lambda, \mu) = \{\eta = \lambda * \tau \mid \tau \in B_\mu; \eta(t) \in C, \forall t \in [0, 1]\}$  entonces el espacio de representación del producto tensorial se descompone como

$$V_\lambda \otimes V_\mu = \bigoplus_{\eta \in R(\lambda, \mu)} V_{\eta(1)}.$$

donde  $V_\gamma$  es el espacio de representación asociado a la representación irreducible con peso máximo  $\gamma$ .

Esta descomposición juega un papel central en nuestro trabajo, pues a partir de ella, buscamos expresar los productos tensoriales de series discretas holomorfas.

## 1.2. Productos tensoriales de Series Discretas Holomorfas

En esta sección se da la teoría básica y la notación necesaria utilizada a lo largo del texto sobre grupos de Lie semisimples y series discretas. La primera subsección trata sobre generalidades de grupos de Lie semisimples (o similarmente reductivos). La teoría general se puede encontrar en [Kna02],[Kna86],[Hel78],[Wal88] entre otros. Para la definición de series discretas y parámetros de Harish-Chandra [Sch97] y [Kna86]. El principal objetivo de la subsección 1 es definir la series discretas y los parámetros de Harish-Chandra. En la segunda subsección nos enfocamos en el caso hermitiano, mencionando la clasificación de los grupos simples que admiten estructura hermitiana (ver [Kna86], [Hel78]).

Posteriormente mencionamos los resultados necesarios para enunciar el teorema de Jakobsen y Vergne en [JV79] (ver teorema 1.2.5). Así mismo, se enuncia el resultado de Schmid en [Sch69], caracterizando los pesos máximos de las representaciones irreducibles que ocurren en  $S(\mathfrak{p}^+)$  como  $K$ -módulo y su multiplicidad. Por último, enunciamos el teorema II que será probado en el capítulo 3 y posteriormente el teorema 3.3.2 que se sigue directamente del anterior.

### 1.2.1. Generalidades sobre grupos de Lie semisimples

Sea  $G$  un grupo de Lie conexo semisimple, sea  $K$  un subgrupo compacto maximal de  $G$ , supongamos que  $\text{Rango}(K) = \text{Rango}(G)$ , y sea  $T \subseteq K$  un toro maximal de  $K$ . Sean  $\mathfrak{t}_0, \mathfrak{k}_0$  y  $\mathfrak{g}_0$  las álgebras de Lie reales de  $T, K$  y  $G$  respectivamente, y denotemos sus complexificaciones por  $\mathfrak{t}, \mathfrak{k}, \mathfrak{g}$ . El subgrupo  $K$  induce una involución  $\theta$  sobre  $G$  tal que  $K = G^\theta := \{x \in G \mid \theta(x) = x\}$ . Denotemos la diferencial de esta involución igualmente por  $\theta$ . Dado que  $\theta^2 = I_{\mathfrak{g}_0}$  los autovalores de  $\theta$  son  $-1$  y  $1$ ; entonces  $\mathfrak{k}_0$  es el espacio propio asociado al valor propio  $1$ . Por tanto,  $\theta$  es diagonalizable y  $\mathfrak{g}_0$  admite una descomposición en espacios propios de la forma  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$ , con  $\mathfrak{p}_0$  el espacio propio asociado al valor propio  $-1$ . Esta descomposición es llamada *descomposición de Cartan* y  $\theta$  se dice una *involución de Cartan* de  $\mathfrak{g}_0$ . Dado que  $\theta$  es un homomorfismo de álgebras de Lie, se siguen las relaciones

$$[\mathfrak{k}_0, \mathfrak{p}_0] \subseteq \mathfrak{p}_0, \quad [\mathfrak{k}_0, \mathfrak{k}_0] \subseteq \mathfrak{k}_0, \quad [\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_0] \subseteq \mathfrak{k}_0.$$

Por ejemplo, si  $X \in \mathfrak{k}_0$ ,  $Y \in \mathfrak{p}_0$ ,  $\theta([X, Y]) = [\theta(X), \theta(Y)] = [X, -Y] = -[X, Y]$ , luego  $[X, Y]$  es un vector propio con valor propio  $-1$ ; esto es,  $[X, Y] \in \mathfrak{p}_0$ . Las otras conclusiones se demuestran de manera análoga.

Dada una involución de Cartan y  $B$  una forma bilineal no degenerada (por ejemplo la forma de Killing) sobre  $\mathfrak{g}_0$ , definimos  $B_\theta : \mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0 \rightarrow \mathbb{R}$  por  $B_\theta(X, Y) = -B(X, \theta(Y))$ , entonces  $B_\theta$  es una forma bilineal no degenerada definida positiva sobre  $\mathfrak{g}_0$  (ver [Kna02] Cap VI sec 4).

Como por hipótesis  $\text{Rango}(G) = \text{Rango}(K)$ ,  $\mathfrak{t}$  es una subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$ ; por lo que podemos tomar  $\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) \subseteq \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$  sistemas de raíces de  $\mathfrak{k}$  y  $\mathfrak{g}$  y sistemas de raíces positivos  $\Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}), \Phi^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$  de modo que  $\Phi^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) \subseteq \Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ . Notemos por  $\Pi$  las raíces simples relativas a  $\Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ , y  $W_K = W(K, T) = N_K(T)/Z_K(T)$  el grupo de Weyl analítico de  $K$  respecto a  $T$ , dado que  $K$  es compacto  $W_K$  es isomorfo a  $W(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$  el grupo generado por las reflexiones  $S_\alpha$  con  $\alpha \in \Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ . Entonces se tiene la descomposición en espacios de raíces

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Una raíz  $\alpha \in \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ , se dice **compacta** si  $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathfrak{k}$ , y **no compacta** si  $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathfrak{p}$ .

Sea  $\pi : G \rightarrow B(H)$  un homomorfismo de grupos de  $G$  en el espacio de operadores acotados invertibles de un espacio de Hilbert  $H$  (por tanto continuos), tal que la acción de  $G$  en  $H$  es continua con la topología débil, es decir,  $G \times H \rightarrow H, (g, h) \mapsto \pi(g)(h)$  es una función continua. En este caso decimos que el par  $(\pi, H)$  es una representación de  $G$ , o simplemente que  $\pi$  es una representación de  $G$  en el espacio  $H$ . Se dice que  $\pi$  es unitaria, si existe un producto interno en  $H$ , tal que para cada  $g \in G$ ,  $\pi(g) : H \rightarrow H$  es un operador unitario, es decir,  $\langle \pi(g)u, \pi(g)v \rangle = \langle u, v \rangle$ .

Sea  $(\pi, H)$  una representación de  $G$ . Un subespacio cerrado  $V \subseteq H$  se dice *invariante* si  $\pi(g)V \subseteq V$  para todo  $g \in G$ . Una representación  $(\pi, H)$  se dice *irreducible* si los únicos subespacios invariantes (cerrados) son  $0$  y  $H$ .

Dado que  $G$  es un grupo topológico localmente compacto, existe una medida  $dx$  regular e invariante a izquierda sobre  $G$ , que es única salvo un múltiplo constante. Luego podemos considerar el espacio de funciones de cuadrado integrable

$$L^2(G) := \left\{ f : G \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_G |f(x)|^2 dx < \infty \right\},$$

este es un espacio de Hilbert, y  $G$  actúa sobre él por multiplicación a izquierda; esto es,  $l(g)(f)(x) := f(g^{-1}x)$ ,  $g, x \in G, f \in L^2(G)$ , define una representación  $(l, L^2(G))$  de  $G$  llamada la *representación regular a izquierda* de  $G$  en  $L^2(G)$ .

Nuestro objeto de estudio serán representaciones unitarias que pueden ser realizadas como subrepresentaciones de la representación regular a izquierda. Más concretamente, una representación  $(\pi, H_\pi)$  irreducible unitaria de  $G$  se dice *de cuadrado integrable*, si existen  $u, v \in H_\pi$  no nulos tal que la función  $g \mapsto \langle \pi(g)u, v \rangle$  está en  $L^2(G)$ . Si además  $\pi$  es irreducible, se dice que es una *serie discreta* de  $G$ . El siguiente resultado clarifica la notación usada.

**Proposición 1.2.1.** Sea  $(\pi, H_\pi)$  una representación irreducible unitaria de  $G$ . Entonces son equivalentes:

1.  $\pi$  es de cuadrado integrable
2. La función  $g \mapsto \langle \pi(g)u, v \rangle$  está en  $L^2(G)$  para todo  $u, v \in H_\pi$
3.  $(\pi, H_\pi)$  puede ser realizada como un subespacio cerrado de la representación regular a izquierda de  $G$  en  $L^2(G)$ ; esto es, existe un operador unitario inyectivo  $T : H_\pi \rightarrow L^2(G)$



tal que  $l(g)T(v) = T(\pi(g)v)$  (esto dice que  $\pi$  es *unitariamente equivalente* a una subrepresentación de  $l$ ).

*Demostración.* Ver [Kna86], [Wal88], [Sch97]. □

Harish-Chandra demostró que si  $G$  es un grupo de Lie reductivo conexo con  $K \subseteq G$  subgrupo maximal compacto, entonces existen representaciones de cuadrado integrable de  $G$  sólo si  $\text{Rango}(G) = \text{Rango}(K)$ ; en este caso,  $\mathfrak{t}$  es una subálgebra de Cartán de  $\mathfrak{g}$ .

Dado  $\lambda \in i\mathfrak{t}^*$  un elemento regular respecto a  $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ ; i.e.  $\langle \lambda, \alpha \rangle \neq 0$  para toda  $\alpha \in \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ , sea  $\Phi_\lambda^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) := \{\alpha \in \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) \mid \langle \lambda, \alpha \rangle > 0\}$  el sistema positivo de  $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$  determinado por  $\lambda$  y el respectivo sistema compacto positivo  $\Phi_\lambda^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) := \Phi_\lambda^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) \cap \Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ , y sea  $(\Phi_\lambda)_n^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) = \Phi_\lambda^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) \setminus \Phi_\lambda^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ . Sean  $\rho, \rho_k$  la semisuma de las raíces de  $\Phi_\lambda^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$  y  $\Phi_\lambda^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$  respectivamente y sea  $\rho_n = \rho - \rho_k$ . Un resultado fundamental de Harish-Chandra parametriza las series discretas, en términos de elementos regulares  $\lambda \in i\mathfrak{t}^*$ .

**Definición 1.2.2.** *Un elemento  $\lambda \in i\mathfrak{t}^*$  se dice un parámetro de **Harish-Chandra** de  $G$  si es regular respecto a  $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$  y  $e^{\lambda+\rho}$  es un caracter de  $T$*

Sea  $\lambda$  un parámetro de Harish-Chandra de  $G$ , entonces existe una serie discreta  $\pi_\lambda$  con caracter infinitesimal  $\lambda$  [Kna86]. Más aún, el parámetro está unívocamente determinado salvo la órbita del grupo de Weyl  $W_K$ ; es decir,  $\pi_\lambda \approx \pi_\mu$  si y solo si existe  $w \in W_K$  tal que  $w\mu = \lambda$ .

Si consideramos  $\pi_\lambda : G \rightarrow GL(V_\lambda)$  la serie discreta asociada al parámetro de Harish-Chandra  $\lambda$  (o más precisamente un representante de la clase de equivalencia), entonces  $K$  actúa sobre  $V_\lambda$  por restricción. Se puede ver que  $\Lambda := \lambda + \rho_n - \rho_k$  es un  $K$ -peso entero y dominante con respecto al sistema  $\Phi_\lambda^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ . El siguiente resultado debido a Schmid [Sch75] muestra la relevancia de dicho  $\Lambda$ :

**Teorema 1.2.3** (Teorema del  $K$ -tipo mínimo). *El  $K$ -módulo irreducible  $V_\Lambda$  con peso máximo  $\Lambda$  es un  $K$  tipo de  $V_\lambda$  de multiplicidad 1, i.e.  $(\sigma_\Lambda, V_\Lambda)$  es una subrepresentación irreducible de  $(\pi|_K, V_\lambda)$  y  $\dim \text{hom}_K(V_\Lambda, V_\lambda) = 1$ . Más aún, si  $(\sigma_\tau, V_\tau)$  es una representación irreducible de  $K$  con peso máximo  $\tau$ , tal que  $\dim \text{hom}_K(V_\tau, V_\lambda) > 0$ , entonces  $\tau = \Lambda + n_1\alpha_1 + \dots + n_r\alpha_r$ , con  $n_i$  enteros positivos y  $\alpha_i \in (\Phi_\lambda)_n^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$  raíces no compactas positivas.*

El peso  $\Lambda$  se dice el  *$K$ -tipo minimal* de  $V_\lambda$ .

### 1.2.2. Grupos de tipo hermitiano

Supongamos que  $G/K$  es de tipo hermitiano, esto es,  $G/K$  admite una estructura de variedad compleja de tal manera que la acción de  $G$  sobre  $G/K$  es holomorfa. Harish-Chandra demostró que cuando  $G$  es simple  $G/K$  admite esta estructura si y sólo si el centro de  $\mathfrak{k}_0$  es de dimensión 1; utilizando este hecho y la clasificando de las álgebras de Lie reales por medio de diagramas de Vogan, podemos concluir que si  $G$  es simple,  $G$  admite estructura Hermitiana si y sólo si es un grupo de la siguiente tabla con subgrupo compacto maximal  $K$

En este caso considerando la descomposición de Cartan  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ ,  $\mathfrak{p}$  se descompone como  $K$ -módulo en dos submódulos irreducibles,  $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^+ \oplus \mathfrak{p}^-$ . Esta descomposición, determina un sistema de raíces positivas  $\Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$  tal que  $\mathfrak{p}^+ := \bigoplus_{\alpha \in (\Phi_\lambda)_n^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})} \mathfrak{g}_\alpha$ .

$G$	$K$	Diagrama de Vogan
$SU(n, m)$ $Sp(n, \mathbb{R})$	$S(U(n) \times U(m))$ $U(n)$	
$E_{III}$	$SO(10)$	
$E_{VII}$	$E_6$	
$SO^*(2n)$	$U(n)$	
$SO(2, 2n+1)$	$S(O(2) \times O(2n+1))$	
$SO(2, 2n)$	$S(O(2) \times O(2n))$	

Cuadro 1.1: Grupos de Lie simples de tipo hermitiano

**Definición 1.2.4.** Si  $\lambda$  es un parámetro de Harish-Chandra dominante para  $\Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$  entonces la serie discreta  $(\pi_\lambda, H_\lambda)$  asociada al parámetro de Harish-Chandra  $\lambda$ , se dice una serie discreta holomorfa

Sea  $(\tau_\Lambda, V_\tau)$  la representación irreducible de  $K$  con peso máximo  $\Lambda$ , y sea  $r$  la representación de  $\mathfrak{g}_0 (= Lie G)$  sobre el espacio de funciones  $C^\infty$ ,  $f : G \rightarrow V_\tau$  dada por

$$(r(x)f)(g) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(g \exp tx)$$

extendamos  $r$  a  $\mathfrak{g}$ . Sean  $(\pi_{\lambda_1}, H_1), (\pi_{\lambda_2}, H_2)$  dos series discretas holomorfas de  $G$  con parámetros de Harish-Chandra  $\lambda_i$  y  $K$ -tipos minimales  $\Lambda_i$ ,  $i = 1, 2$  respectivamente. Para cada  $i$  sea

$$\mathcal{O}(G, K, \tau_{\Lambda_i}) := \{f : G \rightarrow V_{\Lambda_i} \mid f \text{ analítica, } f(gk) = \tau_{\lambda_i}(k)^{-1}f(g), \forall x \in \mathfrak{p}^-, r(x)f = 0\}$$

entonces la acción a izquierda de  $G$  en si mismo induce una acción sobre  $\mathcal{O}(G, K, \tau_{\Lambda_1})$ .

En virtud de un teorema de Harish-Chandra (ver [HC56] o [Kna86]) cada  $H_i$  puede ser realizado como un subespacio de Hilbert de  $\mathcal{O}(G, K, \tau_{\lambda_i})$ .

Ahora,  $G \times G$  actúa sobre  $H_1 \otimes H_2$  irreduciblemente; por lo anterior  $H_1 \otimes H_2$  se puede realizar como un subespacio de funciones analíticas  $f : G \times G \rightarrow V_{\tau_{\Lambda_1}} \otimes V_{\tau_{\Lambda_2}}$ . Por tanto, si consideramos la restricción de la representación de  $G \times G$  sobre  $H_1 \otimes H_2$  al subgrupo diagonal  $\{(g, g) \mid g \in G\} \simeq G$ , la acción de  $G \times G$  sobre  $\mathcal{O}(G \times G, K \times K, \tau_{\Lambda_1} \otimes \tau_{\Lambda_2})$  restringida a dicho subgrupo se descompone como

$$\mathcal{O}(G \times G, K \times K, \tau_{\Lambda_1} \otimes \tau_{\Lambda_2}) = \bigoplus_{\eta \in i\mathfrak{t}^*} [\eta, \Lambda_1 \otimes \Lambda_2] \mathcal{O}(G, K, \eta), \quad (1.1)$$

donde  $[\eta, \Lambda_1 \otimes \Lambda_2] = \dim \text{hom}_K(V_\eta, V_{\tau_{\Lambda_1}} \otimes V_{\tau_{\Lambda_2}})$  es la multiplicidad de la representación irreducible de  $K$  con peso máximo  $\eta$  en el producto tensorial; así que  $\tau_{\Lambda_1} \otimes \tau_{\Lambda_2} = \bigoplus_{\eta \in i\mathfrak{t}^*} [\eta, \Lambda_1 \otimes \Lambda_2] \tau_\eta$  es la descomposición en suma directa del producto tensorial en representaciones irreducibles de  $K$ .

Usando esta realización Jakobsen-Vergne [JV79] prueban que la descomposición en (1.1) genera la descomposición de  $H_1 \otimes H_2$  como  $G$ -módulo del siguiente modo:

**Teorema 1.2.5** (Jakobsen- Vergne). *Sean  $(\pi_{\lambda_1}, H_1), (\pi_{\lambda_2}, H_2)$  dos series discretas holomorfas de  $G$  con parámetros de Harish-Chandra  $\lambda_1, \lambda_2$  y  $K$ -tipos minimales  $\Lambda_1, \Lambda_2$  respectivamente, tales que  $\lambda_i \in C_G$ . Entonces*

$$H_1 \otimes H_2 = \bigoplus_{\substack{\eta \in i\mathfrak{t}^* \\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}} [\eta, \Lambda_1 \otimes \Lambda_2] H(\tau_\eta \otimes S^n(\mathfrak{p}^+)) \quad (1.2)$$

Así, el problema de descomposición del producto tensorial de series discretas holomorfas, se traduce en un problema de descomposición de productos tensoriales en  $K$ , el cual, pasando al álgebra complexificada,  $\mathfrak{k}$ , se puede analizar usando la teoría de caminos de Littelmann 1.1.10.

Schmid [Sch69] determinó la acción de  $K$  sobre  $S^n(\mathfrak{p}^+)$  caracterizando los pesos máximos que ocurren y sus multiplicidades (todas de dimensión 1), en el siguiente modo: sea  $\gamma_1$  la raíz máxima no compacta positiva; esto es, el peso máximo de la representación de  $K$  sobre  $\mathfrak{p}^+$  (respecto al sistema de raíces positivo  $\Phi^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$  elegido anteriormente). Nuestra elección del sistema positivo de  $\mathfrak{g}$  da un orden  $\mathfrak{t}$  tal que toda raíz no compacta positiva es mayor que toda raíz compacta; sea  $\gamma_2$  la raíz no compacta máxima, respecto a este orden, tal que  $\gamma_1 \pm \gamma_2$  no es raíz, y  $\gamma_2 \neq c\gamma_1$ . Continuando de este modo, obtenemos inductivamente un conjunto de raíces no compactas positivas  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$  fuertemente ortogonales, en el sentido que  $\gamma_i \pm \gamma_j$  no es raíz;  $\gamma_i \neq c\gamma_j$  para todo  $i, j$ , y tal que con respecto al orden mencionado  $\gamma_1 > \gamma_2 > \dots > \gamma_k$ , donde  $k$  es el rango real de  $G$ .

**Teorema 1.2.6** (Schmid [Sch75]). *La descomposición de  $S^n(\mathfrak{p}^+)$  como  $\mathfrak{k}$ -módulo está dada por  $S^n(\mathfrak{p}^+) = \bigoplus V_\mu$  donde  $\mu = n_1\gamma_1 + \dots + n_k\gamma_k$ , con  $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k$ ,  $n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , y  $n_1 + \dots + n_k = n$ . Más aún, cada  $V_\tau$  ocurre con multiplicidad 1.*

Usando este hecho junto con el teorema de descomposición de Littelmann se sigue que si  $\pi_\eta, \pi_\mu$  son dos caminos contenidos en la cámara asociada al sistema positivo  $\Phi^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ ,  $C_K$ , con pesos  $\tau, \mu$  y  $\mu$  en uno de los pesos descritos por Schmid en el teorema anterior, entonces como  $\mathfrak{k}$ -módulo

$$\tau_\eta \otimes S^n(\mathfrak{p}^+) = \bigoplus_{\pi} V_{\pi(1)}, \quad (1.3)$$

donde  $\pi$  son caminos contenidos en la cámara  $C_K$  tales que  $\pi = \pi_\eta * \mathbf{f}_{\alpha_1} \dots \mathbf{f}_{\alpha_j} \pi_\mu$ , para ciertas raíces simples compactas  $\alpha_i$ . De este modo, es conveniente entender la órbita de dichos  $\mu$  por los operadores  $\mathbf{f}$ . Nos concentraremos en este problema en los capítulos siguientes para poder obtener una fórmula para el producto tensorial de series discretas holomorfas.



## Capítulo 2

# Órbita de $\alpha_{nc}$ por los operadores $\mathfrak{f}$ y grafos asociados

En esta sección calcularemos la órbita de  $\alpha_{nc}$  por los operadores  $\mathfrak{f}$ , el objetivo de esto es obtener los pesos descritos por Schmid en términos de caminos en la órbita. Dicha órbita genera un grafo donde podemos obtener estos pesos por un procedimiento algorítmico sobre el grafo. Notaremos por  $\Phi^+$  un sistema de raíces sobre  $\mathfrak{g}$  elegido en cada caso,  $\Phi_n^+$  las raíces no compactas de  $\Phi^+$ ,  $\check{\alpha} = \frac{2}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha$  la coraíz asociada a  $\alpha$ ,  $\Pi$  las raíces simples de  $\Phi^+$  y  $\mathcal{X}_c$  el retículo de pesos racionales de  $\mathfrak{k}$ . El objetivo es obtener el teorema I en cada caso. Recordemos algunos términos de la notación 1 usada en la introducción.

**Notación 2.0.7.** 1. Sea  $A \subseteq \Pi_c$  un subconjunto de raíces simples compactas, y sean  $\zeta, \zeta'$  dos caminos distintos de  $\theta$ , definimos  $\zeta \preceq_A \zeta'$  si  $\zeta = \zeta'$  o si existen raíces compactas simples  $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in A$  tales que  $\mathbf{e}_{\alpha_1} \cdots \mathbf{e}_{\alpha_r}(\zeta) = \zeta'$ ; en este caso decimos que los caminos están unidos por una caminata en el grafo de  $\zeta$  a  $\zeta'$  con aristas en  $A$ . Si  $\zeta \preceq_A \zeta'$  pero  $\zeta \neq \zeta'$ , notaremos  $\zeta \not\preceq_A \zeta'$ .

2. Si  $A = \Pi_c$ , escribiremos  $\zeta \preceq \zeta'$  para denotar  $\zeta \preceq_{\Pi_c} \zeta'$ .

3.  $[\zeta]_{\preceq_A} := \{\eta \mid \zeta \preceq_A \eta\}$ .

4.  $[\zeta]_{\preceq} := [\zeta]_{\preceq_{\Pi_c}}$ . Cada uno de los conjuntos  $[\zeta]_{\preceq}$  es finito.

5.  $k := \text{Rango real}(G)$ . Identificando la única raíz simple no compacta  $\alpha_{nc}$  con su camino asociado  $t\alpha_{nc}$ ;  $t \in [0, 1]$  (ver definición 1.1.1), definimos inductivamente conjuntos  $A_k \subsetneq \cdots \subsetneq A_1 = \Pi_c$  del siguiente modo:

a)  $A_1 := \Pi_c$ . Supongamos que el conjunto  $A_i$  ha sido definido previamente, sea  $\alpha_{nc}$  la única raíz simple no compacta.

b) Consideremos  $[\alpha_{nc}]_{\preceq} = \{\eta \mid \alpha_{nc} \preceq \eta\}$ , el conjunto de elementos mayores e iguales a  $\alpha_{nc}$  con el orden  $\preceq$ .

c) Tomemos  $M_i$  el conjunto de elementos maximales de  $[\alpha_{nc}]_{\preceq_{A_i}}$  con respecto a la relación de orden  $\preceq_{A_i}$  (cabe observar que los ordenes  $\preceq_{A_i}$  y  $\preceq$  coinciden en el conjunto  $[\alpha_{nc}]_{\preceq_{A_i}}$ ).

d) Sea

$$W_i := \{\alpha \in \Pi_c \mid \exists v \in M_i \mathbf{f}_\alpha(v) \neq \theta\}.$$

Si  $i < k$ , sea  $A_{i+1} := A_i \setminus W_i$ .

**Teorema 2.0.8.** *Conservando la notación anterior se tiene:*

- a) Para cada  $i = 1, \dots, k$ ;  $[\alpha_{nc}]_{\preceq A_i}$  tiene elemento máximo  $\nu_i$  con respecto a la relación de orden  $\preceq$ ; esto es,  $W_i = \{\nu_i\}$
- b) Sea  $\nu_k \preceq \dots \preceq \nu_2 \preceq \nu_1$  la sucesión de caminos construida en a). Entonces el conjunto de pesos  $\{\nu_1(1), \dots, \nu_k(1)\}$  es un conjunto de raíces no compactas fuertemente ortonormal.
- c) Dados  $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k \geq 0$  enteros no negativos. Tomemos el camino

$$\pi_{(n_1, \dots, n_k)} = \nu_1^{n_1} * \nu_2^{n_2} * \dots * \nu_k^{n_k}.$$

Entonces  $\pi_{(n_1, \dots, n_k)}$  es un camino tal que para todo  $t \in [0, 1]$ ,  $\langle \pi_{(n_1, \dots, n_k)}(t), \alpha \rangle \geq 0$  para toda  $\alpha \in \Pi_c$ , es decir, la imagen del camino es dominante respecto a la elección de raíces simples compactas  $\Pi_c$ .

En cada caso daremos una cierta numeración de las raíces compactas simples,  $\Pi_c = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ , por lo cual notaremos al operador  $\mathbf{e}_{\alpha_i}$  por  $\mathbf{e}_i$  (el caso  $G = SU(p, q)$  tiene otra numeración que se explica en detalle en la sección). Denotaremos  $\delta_{ij}$  la delta de Kronecker

## 2.1. Caso $G$ localmente isomorfo a $Sp(n, \mathbb{R})$

En este caso, sea  $\alpha_i := \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ ,  $\gamma_i = 2\epsilon_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Entonces las raíces positivas, las raíces simples y las raíces no compactas positivas están dadas por:

$$\begin{aligned} \Phi^+ &= \{\epsilon_i \pm \epsilon_j, 2\epsilon_i\}_{1 \leq i < j \leq n} \\ \Pi &= \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \gamma_n\} \\ \Phi_n^+ &= \{\epsilon_i + \epsilon_j\}_{i \leq j} \\ \gamma_n &= \text{raíz no compacta simple} \\ \alpha_i &= \check{\alpha}_i \end{aligned}$$

Dado que  $\langle \gamma_n, \alpha_i \rangle = -2\delta_{i, n-1}$ ,  $\mathbf{e}_i(\gamma_n) \neq 0$  solo si  $i = n-1$ , en este caso  $h_{n-1}(\gamma_n)(t) = \langle t(2\epsilon_n), \epsilon_{n-1} - \epsilon_n \rangle = -2t$  alcanza el mínimo  $m_{n-1}$  únicamente en  $t = 1$  y  $m_{n-1} + 1$  en  $t = 1/2$ . Por tanto, si descomponemos el camino dado por  $\gamma_n$  de la forma  $\gamma_n = (1/2\gamma_n) * (1/2\gamma_n)$  al aplicar  $\mathbf{e}_{n-1}$  resulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{n-1}(\gamma_n) &= (1/2\gamma_n) * S_{\alpha_{n-1}}(1/2\gamma_n) = (1/2\gamma_n) * (1/2\gamma_n + \alpha_{n-1}) \\ &= (1/2(2\epsilon_n)) * ((1/2(2\epsilon_n)) + (\epsilon_{n-1} - \epsilon_n)) = \epsilon_n * \epsilon_{n-1}. \end{aligned}$$

Llamemos al camino resultante  $\gamma_{n, n-1}$ . Entonces  $h_i(\gamma_{n, n-1}) \neq 0$  solo si  $h_i(\epsilon_n) \neq 0$ , o,  $h_i(\epsilon_{n-1}) \neq 0$ , es decir, si  $i = n-2, n-1$ .

En el primer caso  $h_{n-2}(\epsilon_n) = \langle t\epsilon_n, \epsilon_{n-2} - \epsilon_{n-1} \rangle = 0$  y  $h_{n-2}(\epsilon_{n-1}) = \langle t\epsilon_{n-1}, \epsilon_{n-2} - \epsilon_{n-1} \rangle = -t$ , por tanto, nuevamente la función alcanza el mínimo ( $= -1$ ) en  $t_1 = 1$ , y el punto máximo donde

alcanza el mínimo más uno ( $=0$ ) tal que  $t < t_1$  es  $t_0 = 1/2$ . De este modo,  $\mathbf{e}_{n-2}(\gamma_{n,n-1}) = \epsilon_n * \mathbf{e}_{n-2}(\epsilon_{n-1}) = \epsilon_n * S_{\alpha_{n-2}}(\epsilon_{n-1}) = \epsilon_n * \epsilon_{n-1} + \epsilon_{n-2} - \epsilon_{n-1} = \epsilon_n * \epsilon_{n-2}$ .

En el otro caso,  $h_{n-1}(\epsilon_n) = \langle t\epsilon_n, \epsilon_{n-1} - \epsilon_n \rangle = -t$ , y,  $h_{n-1}(\epsilon_{n-1}) = \langle t\epsilon_{n-1}, \epsilon_{n-1} - \epsilon_n \rangle = t$ , por tanto,

$$h_{n-1}(\gamma_{n,n-1})(t) = \begin{cases} -2t & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ -1 + (2t - 1) & \text{si } 1/2 < t \leq 1 \end{cases}$$

luego el mínimo de  $h_{n-1}(\gamma_{n,n-1})$  es  $-1$  y es alcanzado en  $t_1 = 1/2$ , y en este caso  $t_0 = 0$ . Por tanto  $\mathbf{e}_{n-1}(\gamma_{n,n-1}) = \mathbf{e}(\epsilon_n) * \epsilon_{n-1} = \epsilon_{n-1} * \epsilon_{n-1}$ . En general,

$$\gamma_{ij} := \epsilon_i * \epsilon_j, \quad i \geq j.$$

es un camino en  $\mathcal{X}_c$  tal que  $h_k(\gamma_{i,j}) = \langle \gamma_{ij}, \alpha_k^\vee \rangle < 0$  solo si  $k = i - 1, j - 1$ . Si  $i = j$  repitiendo el análisis anterior  $h_{i-1}(\gamma_{i,i}) = \langle 2t\epsilon_i, \epsilon_{i-1} - \epsilon_i \rangle = -2t$  luego  $\mathbf{e}_{i-1}(\epsilon_i) = \epsilon_i * \mathbf{e}_{i-1}(\epsilon_{i-1}) = \epsilon_i * \epsilon_{i-1}$ .

Si  $i \neq j$  los posibles caminos diferentes de  $\theta$  al calcular  $\mathbf{e}$  son

$$\mathbf{e}_{i-1}(\gamma_{i,j}) = \epsilon_{i-1} * \epsilon_j, \quad \text{y, } \mathbf{e}_{j-1}(\gamma_{i,j}) = \epsilon_i * \epsilon_{j-1}$$

Consideremos el grafo de la órbita de  $\gamma_{n,n}$  (la única raíz no compacta simple), esto es, el conjunto de vértices,  $[\gamma_{n,n}]_{\leq}$ , de los caminos diferentes de  $\theta$  (recordar 1.1.3), con un conjunto de aristas numeradas  $A_1$

$$\begin{aligned} [\gamma_{n,n}]_{\leq} &= \{ \gamma_{i,j} \mid \exists \alpha_{r_1}, \dots, \alpha_{r_k} \in \Pi_c \text{ tal que } \mathbf{e}_{r_k} \mathbf{e}_{r_{k-1}} \cdots \mathbf{e}_{r_1}(\gamma_{n,n}) = \gamma_{i,j}, \quad \gamma_{i,j} \neq \theta \} \cup \{ \gamma_{n,n} \} \\ &= \{ \eta \mid \alpha_{nc} \preceq \eta \} = [\alpha_{nc}]_{\leq} \\ A_1 &= \{ 1, 2, 3, \dots, n-1 \} \end{aligned}$$

donde, existe una arista  $k$  entre  $\gamma_{i,j}$  y  $\gamma_{l,s}$  si  $\mathbf{e}_k(\gamma_{i,j}) = \gamma_{l,s}$ , o,  $\mathbf{e}_k(\gamma_{l,s}) = \gamma_{i,j}$ . En este caso indicamos gráficamente esta situación mediante  $\gamma_{i,j} \xrightarrow{k} \gamma_{l,s}$ , o bien  $\begin{matrix} \gamma_{i,j} \\ | \\ k \\ | \\ \gamma_{l,s} \end{matrix}$ . De este modo podemos representar la órbita de la única raíz no compacta por el siguiente grafo:

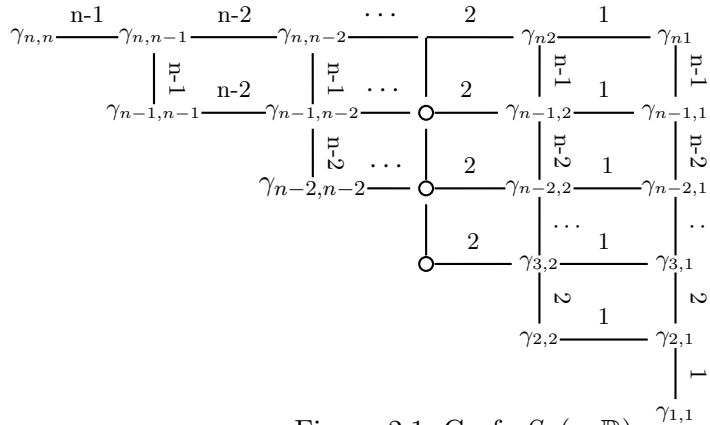


Figura 2.1: Grafo  $Sp(n, \mathbb{R})$

Obsérvese que si  $\alpha_k$  actúa *horizontalmente* (idem *verticalmente*) en el grafo, esto es, si  $\mathbf{e}_k(\gamma_{i,j}) = \gamma_{i,j-1}$  (idem  $\mathbf{e}_k\gamma_{i,j} = \gamma_{i-1,j}$ ) para algún  $i, j$  entonces  $\alpha_k$  actúa horizontalmente (vert.) sobre toda la recta vertical (horizontal) del grafo que contiene a  $\gamma_{i,j}$ , es decir,  $\mathbf{e}_k(\gamma_{i+r,j}) = \gamma_{i+r,j-1}$  para toda  $\gamma_{i+r,j} \in \gamma_{n,n_{\preceq}}$  (igualmente  $\mathbf{e}_k(\gamma_{i,j+s}) = \gamma_{i-1,j+s}$  para toda  $\gamma_{i,j+s} \in \gamma_{n,n_{\preceq}}$ ). Por esta razón bastará etiquetar las aristas de la fila superior y la última columna. De modo que el grafo es representado de la siguiente forma:

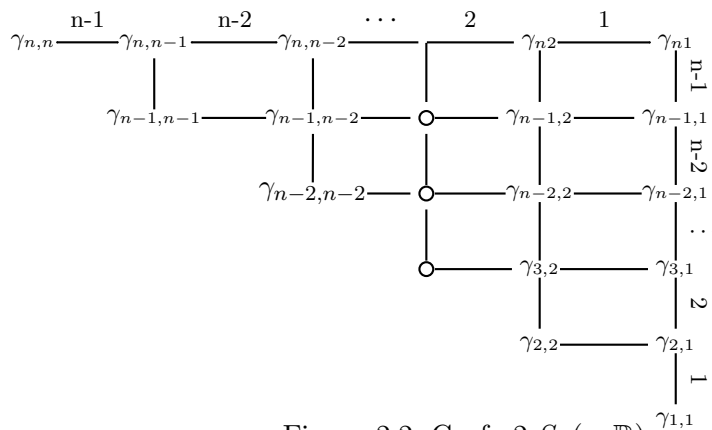


Figura 2.2: Grafo 2  $Sp(n, \mathbb{R})$

Tomando la relación de orden  $\preceq$ , podemos dar al grafo una estructura dirigida del siguiente modo: si dos caminos  $\eta, \tau$  están conectados en el grafo por una arista  $k$ ,  $\tau \xrightarrow{k} \eta$ , y  $\tau \preceq \eta$  entonces la arista de etiqueta  $k$  le asignamos la dirección de  $\tau$  a  $\eta$ ,  $\tau \xrightarrow{k} \eta$ . Obsérvese que si  $\tau$  y  $\eta$  están unidos por la arista  $k$ , por definición se tiene que  $\tau \preceq_{\{\alpha_k\}} \eta$  o  $\eta \preceq_{\{\alpha_k\}} \tau$ . Esto convierte al grafo, en un grafo dirigido en “dirección este y sur”, es decir, si hay una flecha de  $\tau$  a  $\eta$ , entonces  $\eta$  está a la derecha o abajo de  $\tau$ . Por tanto, con el fin de no recargar la notación, no escribiremos las direcciones de la flechas, pensando que el grafo está dirigido de arriba a abajo y de izquierda a derecha.

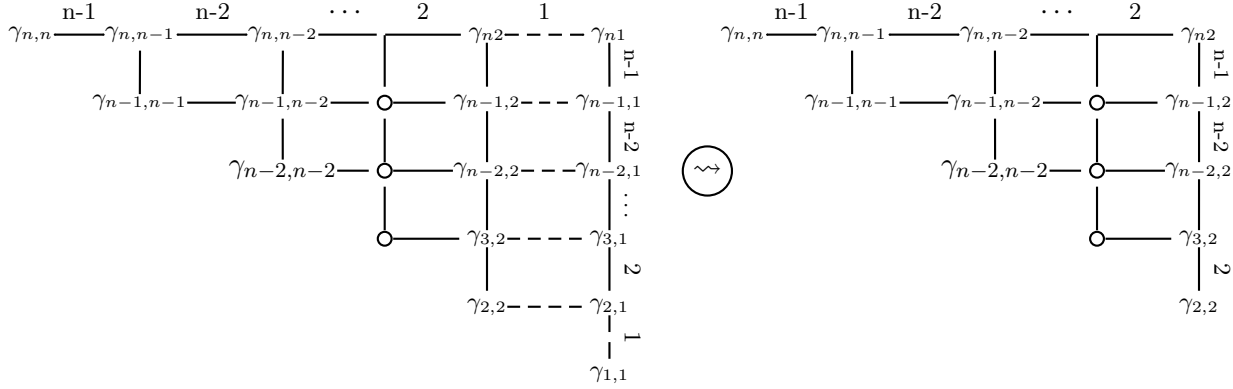
Siguiendo la notación 1 dada en la introducción; con la relación de orden  $\preceq$ , el conjunto  $[\alpha_{\mathbf{nc}}]_{\preceq} = [\gamma_{n,n}]_{\preceq}$  tiene un único elemento maximal; a saber,  $\gamma_{1,1}$  (una observación en el grafo dirigido permite ver esta afirmación). Sea  $W_2 = \{k \in \mathcal{A} \mid \mathbf{f}_k(\gamma_{1,1}) \neq \emptyset\}$ , y sea  $A_2 = \Pi_c \setminus W_2$ . Entonces  $W_2 = \{1\}$  y  $A_2 = \{2, 3, \dots, n-1\}$ .

Recordemos que para un subconjunto  $A \in \Pi_c$ , notamos  $\tau \preceq_A \eta$  si  $\tau = \eta$  o si existen raíces simples  $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in A$  (posiblemente iguales) tales que  $\mathbf{e}_{\alpha_1} \cdots \mathbf{e}_{\alpha_r} \tau = \eta$ . Identificamos  $A_2$  con su correspondiente conjunto de raíces simples  $\{\alpha_i \in \Pi_c \mid i \in A_2\}$ . Sea

$$[\gamma_{n,n}]_{\preceq_{A_2}} := \{\eta \mid \eta \preceq_{A_2} \gamma_{n,n}\}$$

Si tomamos el grafo cuyos vértices son los caminos en  $[\gamma_{n,n}]_{\preceq_{A_2}}$  y cuyas aristas son  $A_2$  uniendo dos vértices bajo la misma regla del grafo  $([\gamma_{n,n}]_{\preceq}, A_1)$ . Entonces  $([\gamma_{n,n}]_{\preceq_{A_2}}, A_2)$ , es un subgrafo de  $([\gamma_{n,n}]_{\preceq}, A_1)$ . Gráficamente, para obtener el subgrafo  $([\gamma_{n,n}]_{\preceq_{A_2}}, A_2)$  a partir del grafo  $([\gamma_{n,n}]_{\preceq}, A_1)$ , eliminamos todas las aristas con etiquetas en  $W_2$ ; es decir, en este caso eliminamos todas las aristas con etiqueta 1. El grafo que se deriva es un grafo con aristas en





Cuadro 2.1: Generar el grafo  $([\gamma_{n,n}]_{\preceq_{A_2}}, A_2)$  a partir del grafo  $([\gamma_{n,n}]_{\preceq}, A_1)$

$A_2$ , pero vértices  $[\gamma_{n,n}]_{\preceq}$ . Tomemos la componente conexa de este grafo que contiene a  $\gamma_{n,n}$ . El resultado de esto es el grafo  $([\gamma_{n,n}]_{\preceq_{A_2}}, A_2)$ .

El subgrafo obtenido  $([\gamma_{n,n}]_{\preceq_{A_2}}, A_2)$  es nuevamente un grafo dirigido con la relación de orden  $\preceq$ . Obsérvese que en este conjunto  $\tau \preceq \eta$ , es lo mismo que  $\tau \preceq_{A_2} \eta$ . Repitiendo el razonamiento anterior,  $[\gamma_{n,n}]_{\preceq_{A_2}}$  es un conjunto ordenado con elemento máximo  $\gamma_{2,2}$ . Sea  $W_3 := \{k \in A_2 \mid \mathbf{f}_k(\gamma_{2,2}) \neq \theta\}$  y  $A_3 := A_2 \setminus W_3 = \{3, 4, \dots, n-1\}$ , considerando el grafo  $([\gamma_{n,n}]_{\preceq_{A_3}}, A_3)$  como un subgrafo de  $([\gamma_{n,n}]_{\preceq_{A_3}}, A_3)$ , podemos concluir de manera similar, que  $[\gamma_{n,n}]_{\preceq_{A_3}}$  tiene un elemento máximo  $\gamma_{3,3}$ .

Procediendo inductivamente obtenemos una sucesión finita de caminos  $\gamma_{1,1}, \gamma_{2,2}, \dots, \gamma_{n,n}$  que satisfacen  $\gamma_{n,n} \preceq \dots \preceq \gamma_{1,1}$ .

*Demostración del teorema 2.0.8.* Por construcción  $\gamma_{i,i} = (t\epsilon_i) * (t\epsilon_i) = 2t\epsilon_i$  tiene peso  $\gamma_{i,i}(1) = 2\epsilon_i$ . Luego la sucesión  $(\gamma_{1,1}(1), \dots, \gamma_{n,n}(1)) = (2\epsilon_1, \dots, 2\epsilon_n)$  es una sucesión de raíces no compactas ortogonales dos a dos y que satisfacen  $\gamma_{i,i}(1) \pm \gamma_{j,j}(1)$  no es una raíz, para todo  $i \neq j$ ; es decir, es la sucesión de raíces no compactas fuertemente ortogonales obtenida por Schmid. Entonces por el teorema de caracterización de Schmid 1.2.6, los pesos máximos que ocurren en  $S(\mathfrak{p}^+)$  son exactamente  $c_1 2\epsilon_1 + \dots + c_n 2\epsilon_n$ , con  $c_i$  enteros no negativos tales que  $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_n \geq 0$ . Esto prueba la partes a) y b) del teorema definiendo  $\nu_i = \gamma_{i,i}$ .

Para la parte c), sea  $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_n \geq 0$  una sucesión de enteros. El camino  $\pi(t) = (\gamma_{1,1}^{c_1} * \gamma_{2,2}^{c_2} * \dots * \gamma_{n,n}^{c_n})(t)$ , para  $t \in [\frac{1}{n}, \frac{l+1}{n}]$  es igual a  $\sum_{i=1}^l c_i \gamma_{i,i}(1) + \phi(t) c_{l+1} \gamma_{l+1,l+1}$  con  $0 \leq \phi(t) \leq 1$  (ver observación después de definición 1.1.2), y tiene peso  $c_1 \gamma_{1,1}(1) + \dots + c_n \gamma_{n,n}(1) = c_1 2\epsilon_1 + \dots + c_n 2\epsilon_n$ . Más aún, para  $\epsilon_i - \epsilon_{i+1} = \alpha_i \in \Pi_c$ , la función

$$\begin{aligned}
h_{\alpha_i}^\pi(t) &= \langle (\gamma_{1,1}^{c_1} * \gamma_{2,2}^{c_2} * \cdots * \gamma_{n,n}^{c_n})(t), \alpha_i^\vee \rangle \\
&= \langle c_1 \gamma_{1,1}(1) + \cdots + c_l \gamma_{l,l}(1) + \phi(t) c_{l+1} \gamma_{l+1,l+1}(t), \alpha_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^l 2(c_j \delta_{i,j} - c_j \delta_{i+1,j}) + \phi(t) (\delta_{i,l} - 2\delta_{i+1,l}) \\
&= \begin{cases} 2(c_i - c_{i+1}) & \text{si } i < l \\ 2(c_l - \phi(t) c_{l+1}) & \text{si } i = l \\ 2(\phi(t) c_{l+1}) & \text{si } i = l + 1 \\ 0 & \text{en otro caso } i < l \end{cases} \tag{2.1}
\end{aligned}$$

Las últimas expresiones son todas mayores o iguales a cero, para todo  $t$  y todo  $i$ , por tanto, la imagen del camino  $\pi$  está totalmente contenida en la cámara de Weyl de  $\mathfrak{k}$  asociada al sistema de raíces simples  $\Pi_c$ , lo que prueba c).  $\square$

## 2.2. Caso $G$ localmente isomorfo a $EIII$

En este caso notemos

$$\gamma_0 := \frac{1}{2} (\epsilon_8 - \epsilon_7 - \epsilon_6 + \epsilon_5 - \epsilon_4 - \epsilon_3 - \epsilon_2 - \epsilon_1)$$

$$\begin{aligned}
\gamma_i &:= \epsilon_5 + \epsilon_i, & \gamma_{-i} &= \epsilon_5 - \epsilon_i & 1 \leq i < 5 \\
\gamma_{i,j} &:= \gamma_0 + \epsilon_i + \epsilon_j, & \gamma_5 &:= \gamma_{12} + \epsilon_3 + \epsilon_4.
\end{aligned}$$

Siguiendo la notación en [Kna02] las raíces simples y las raíces no compactas positivas están dadas por:

$$\begin{aligned}
\Pi &= \{\gamma_0 - \gamma_{-1}, \epsilon_1 + \epsilon_2, \epsilon_2 - \epsilon_1, \epsilon_3 - \epsilon_2, \epsilon_4 - \epsilon_3, \gamma_{-4}\} \\
\Phi_n^+ &= \{\gamma_0, \gamma_{\pm i}, \gamma_{ij}, \gamma_5\}_{1 \leq i < j < 5} \\
\gamma_{-4} &= \text{raíz no compacta simple} \\
\alpha_i &= \check{\alpha}_i \quad \text{para toda raíz } \alpha \text{ simple}
\end{aligned}$$

Numeramos  $\Pi_c$  siguiendo el orden de  $\Pi$  dado arriba, es decir, sea:

$$\alpha_1 = \gamma_0 - \gamma_{-1}, \quad \alpha_2 = \epsilon_1 + \epsilon_2, \quad \alpha_3 = \epsilon_2 - \epsilon_1, \quad \alpha_4 = \epsilon_3 - \epsilon_2, \quad \alpha_5 = \epsilon_4 - \epsilon_3. \tag{2.2}$$

Entonces  $\langle \gamma_{-4}, \alpha_i \rangle = -\delta_{i5}$ . En el caso distinto de cero obtenemos  $h_5(\gamma_{-4})(t) = -t$  cuyo mínimo ( $=-1$ ) se alcanza únicamente en  $t = 1$  y el valor 0 se alcanza en  $t = 0$ . Por tanto, al aplicar  $\mathbf{e}_5$  resulta:

$$\mathbf{e}_5(\gamma_{-4}) = S_{\alpha_5}(\gamma_{-4}) = \gamma_{-4} + \alpha_5 = \gamma_{-3}$$

Entonces  $h_i(\gamma_{-3}) \neq 0$  solo si  $i = 4$ . En este caso  $h_4(\gamma_{-3}) = \langle t\gamma_{-3}, \epsilon_3 - \epsilon_2 \rangle = t\langle \epsilon_5 - \epsilon_3, \epsilon_3 - \epsilon_2 \rangle = -t$ , por un cálculo similar al anterior  $\mathbf{e}_4(\gamma_{-3}) = S_{\alpha_4}(\gamma_{-3}) = \gamma_{-3} + \epsilon_3 - \epsilon_2 = \epsilon_5 - \epsilon_2 = \gamma_{-2}$ .

Similarmente al caso  $Sp(n, \mathbb{R})$ , calculamos  $([\gamma_{-4}]_{\preceq}, A_1)$  el grafo de la órbita de  $\gamma_{-4}$  (la única raíz no compacta simple), el conjunto de vértices de los caminos diferentes de  $\theta$ ,  $[\gamma_{-4}]_{\preceq}$  con un conjunto de aristas numeradas por  $A_1 = \Pi_c$

$$[\gamma_{-4}]_{\preceq} = [\alpha_{nc}]_{\preceq} = \{\eta \mid \alpha_{nc} \preceq \eta\}$$

$$A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Podemos representar el grafo de la siguiente forma:

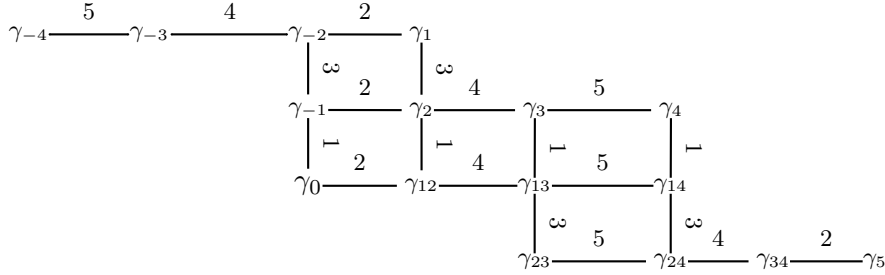


Figura 2.3: Grafo  $EIII$

Considerando el orden  $\preceq$ , repitiendo las consideraciones en el grafo dado de tipo  $Sp(\mathbb{R}, n)$ , proporcionamos al grafo una estructura dirigida. A partir del grafo, es claro que existe un elemento máximo con el orden  $\preceq$ ; a saber,  $\gamma_5$ , cuya etiqueta que lo conecta es 2.

Como antes, sea  $W_2 = \{i \in A_1 \mid \mathbf{f}_i(\gamma_5) \neq \theta\} = \{2\}$  y sea  $A_2 := A_1 \setminus W_2 = \{1, 3, 4, 5\}$ . Tomemos el subgrafo  $([\gamma_{-4}]_{\preceq_{A_2}}, A_2)$ . Repetimos el procedimiento de la sección anterior para obtener  $([\gamma_{-4}]_{\preceq_{A_2}}, A_2)$  a partir de  $([\gamma_{-4}]_{\preceq_{A_1}}, A_1)$ ; esto es, eliminamos del grafo total, las aristas de  $W_2 = \{2\}$ .

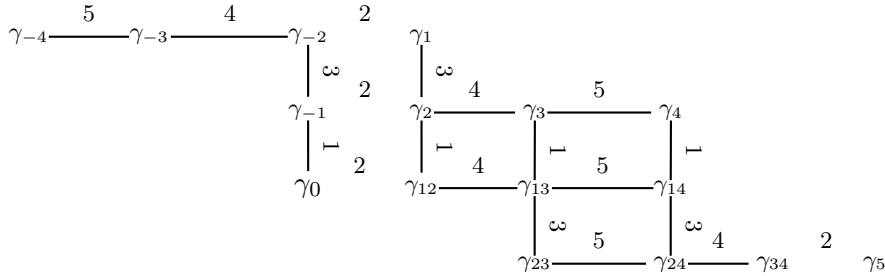


Figura 2.4: Grafo 2  $EIII$

Tomando la componente conexa de  $\gamma_{-4}$ , entonces  $([\gamma_{-4}]_{\preceq_{A_2}}, A_2)$  se representa por:

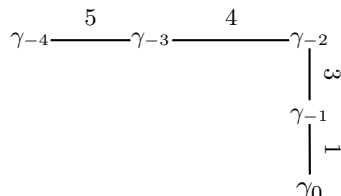


Figura 2.5: Grafo 3  $EIII$

Así,  $\gamma_0$  es el elemento máximo del conjunto  $[\gamma_{-4}]_{\preceq_{A_2}}$  respecto al orden  $\preceq$ . Como el rango real de  $G$  es 2, sean  $\nu_1 := \gamma_5$ ;  $\nu_2 = \gamma_0$ .

*Demostración del teorema 2.0.8.* Por construcción,  $\gamma_1(1) - \gamma_0(1) = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4$  que no es una raíz, así como tampoco  $\gamma_1(1) + \gamma_0(1) = \epsilon_8 - \epsilon_7 - \epsilon_6 + \epsilon_5$  lo es. Además,  $\langle \gamma_1(1), \gamma_0(1) \rangle = 0$ . Por tanto  $\{\gamma_1(1), \gamma_0(1)\}$  es el conjunto de raíces no compactas positivas descrito por Schmid; esto prueba a), b) del teorema.

Sean  $n_1 \geq n_2 \geq 0$ , tomando el camino  $\pi(t) = \gamma_5^{n_1} * \gamma_0^{n_2}$ . Entonces si  $t_0 \in [0, \frac{1}{2})$ ,  $\pi(t) = 2tn_1\gamma_5$ , para una raíz simple compacta  $\alpha_i \in \Pi_c$  se tiene  $\langle \pi(t), \alpha_i \rangle = 2tn_1\langle \gamma_5, \alpha_i \rangle = \delta_{i2} \geq 0$ ; mientras que si  $t_0 \in [\frac{1}{2}, 1]$ ,  $\pi(t) = n_1\gamma_5(1) + (2t-1)n_2\gamma_0$ , y  $\langle \pi(t), \alpha_i \rangle = n_1\delta_{i2} + (2t-1)n_2\langle \gamma_0, \alpha_i \rangle = \delta_{i2} + (2t-1)n_2(\delta_{i1} - \delta_{i2}) \geq 0$ , lo que muestra que la imagen de  $\pi$  está totalmente contenida en la cámara de Weyl dominante determinada por  $\Pi_c$ . Esto prueba c).  $\square$

### 2.3. Caso $G$ localmente isomorfo a $EVII$

En este caso notemos

$$\gamma_0 := \frac{1}{2}(\epsilon_8 - \epsilon_7 + \epsilon_6 - \epsilon_5 - \epsilon_4 - \epsilon_3 - \epsilon_2 - \epsilon_1), \quad \tilde{\gamma}_0 := \frac{1}{2}(\epsilon_8 - \epsilon_7 + \epsilon_6 + \epsilon_5 + \epsilon_4 + \epsilon_3 + \epsilon_2 + \epsilon_1)$$

$$\begin{aligned} \gamma_i &:= \epsilon_6 + \epsilon_i, & \gamma_{-i} &= \epsilon_6 - \epsilon_i & 1 \leq i < 5 \\ \gamma_{i,j} &:= \gamma_0 + \epsilon_i + \epsilon_j & \gamma_{\tilde{i}} &:= \tilde{\gamma}_0 - \epsilon_i. \end{aligned}$$

Siguiendo la notación en [Kna02] las raíces simples y las raíces no compactas positivas están dadas por:

$$\begin{aligned} \Pi &= \{\gamma_0 - \gamma_{-1}, \epsilon_1 + \epsilon_2, \epsilon_2 - \epsilon_1, \epsilon_3 - \epsilon_2, \epsilon_4 - \epsilon_3, \epsilon_5 - \epsilon_4, \gamma_{-5}\} \\ \phi_n^+ &= \{\gamma_0, \gamma_{\pm i}, \gamma_{ij}, \gamma_{\tilde{i}}, \epsilon_8 - \epsilon_7\}_{1 \leq i < j < 6} \\ \gamma_{-5} &= \text{raíz no compacta simple} \\ \alpha_i &= \tilde{\alpha}_i \quad \text{para toda raíz } \alpha \text{ simple} \end{aligned}$$

Definimos  $\alpha_i$  igual que en (2.2) de la sección anterior para  $i = 1, \dots, 5$ , y  $\alpha_6 := \epsilon_5 - \epsilon_4$ . Sea  $A_1 := \{1, \dots, 6\}$ . El grafo  $([\gamma_{-5}]_{\preceq}, A_1)$ . Después de algunos cálculos se puede ver que el grafo se puede representar mediante la figura 2.6.

Entonces,  $\epsilon_8 - \epsilon_7$  es el máximo de  $[\gamma_{-5}]_{\preceq}$  con el orden  $\preceq$ ;  $W_2 = \{1\}$  y  $A_2 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ . El conjunto  $[\gamma_{-5}]_{\preceq_{A_2}}$  tiene elemento máximo  $\gamma_5$ . Sea  $W_3 = \{6\} = \{i \in A_2 \mid \mathbf{f}_i(\gamma_5) \neq \theta\}$  y  $A_3 := A_2 \setminus W_3 = \{2, 3, 4, 5\}$ ; y consideremos  $[\gamma_{-5}]_{\preceq_{A_2}}$ . Entonces  $[\gamma_{-5}]_{\preceq_{A_2}} = \{\gamma_{-5}\}$ , en este caso, la representación del grafo  $([\gamma_{-5}]_{\preceq}, A_1)$  consta de un solo punto  $\gamma_{-5}$ , sin aristas.

*Demostración del teorema 2.0.8.* Sean ( $3 =$  rango real de  $G$ ):

$$\nu_1 = \epsilon_8 - \epsilon_7, \quad \nu_2 = \gamma_5, \quad \nu_3 = \gamma_{-5}$$

Entonces  $(\epsilon_8 - \epsilon_7) \pm \gamma_{\pm 5} = \epsilon_8 - \epsilon_7 \pm (\epsilon_6 \pm \epsilon_5)$  no es una raíz, como tampoco  $\gamma_5 + \gamma_{-5} = 2\epsilon_6$ ;  $\gamma_5 - \gamma_{-5} = 2\epsilon_5$  lo son. Además,  $\{\nu_1(1), \nu_2(1), \nu_3(1)\}$  es un conjunto ortogonal de raíces no compactas. Luego las partes a) y b) del teorema se concluyen.

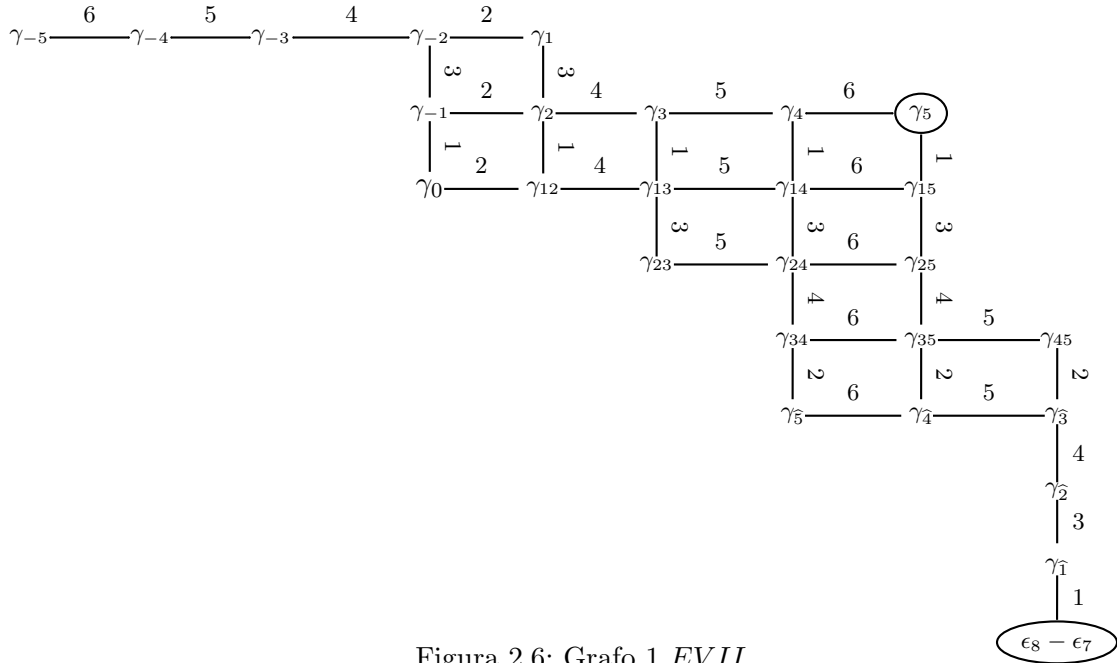


Figura 2.6: Grafo 1  $EVII$

Sean  $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq 0$  enteros, tomando el camino  $\pi(t) = \nu_1^{n_1} * \nu_2^{n_2} * \nu_3^{n_3}$ , un cálculo directo muestra

$$\begin{aligned}
 \langle \pi(t), \alpha_i \rangle &= \begin{cases} \phi_1(t)n_1\delta_{i1}, & \text{Si } t \in [0, \frac{1}{3}) \\ n_1\delta_{i1} + \phi_2(t)n_2(\delta_{i6} - \delta_{i1}), & \text{Si } t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \\ n_1\delta_{i1} + n_2(\delta_{i6} - \delta_{i1}) + \phi_3(t)n_3(-\delta_{i6}), & \text{Si } t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \phi_1(t)n_1\delta_{i1}, & \text{Si } t \in [0, \frac{1}{3}) \\ (n_1 - \phi_2(t)n_2)\delta_{i1} + \phi_2(t)n_2\delta_{i6}, & \text{Si } t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \\ (n_1 - n_2)\delta_{i1} + (n_2 - \phi_3(t)n_3)\delta_{i6}, & \text{Si } t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases} \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

Donde cada  $0 \leq \phi_i(t) = 3t - (i-1) \leq 1$ . Como  $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq 0$ , entonces las últimas expresiones son mayores o iguales a cero, lo que muestra que la imagen de  $\pi$  está totalmente contenida en la cámara de Weyl dominante determinada por  $\Pi_c$ . Esto prueba c). □

## 2.4. Caso $G$ localmente isomorfo a $SO(2, 2n)$ $n > 2$

Sean

$$\alpha_i := \epsilon_i - \epsilon_{i+1}, \quad i < n; \quad \alpha_n := \epsilon_{n-1} + \epsilon_n; \quad \gamma_{-i} = \epsilon_0 - \epsilon_i; \quad \gamma_i = \epsilon_0 + \epsilon_i, \quad 0 < i \leq n.$$

Entonces las raíces positivas, las raíces simples y las raíces no compactas positivas están dadas por:

$$\begin{aligned}\Phi^+ &= \{\epsilon_i \pm \epsilon_j\}_{0 \leq i < j \leq n} \\ \Pi &= \{\gamma_{-1}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \\ \Phi_n^+ &= \{\gamma_i, \gamma_{-i}\}_{0 < i \leq n} \\ \gamma_{-1} &= \text{raíz no compacta simple} \\ \alpha_i &= \check{\alpha}_i\end{aligned}$$

En este caso  $\langle \gamma_{-1}, \alpha_i \rangle = -\delta_{i,1}$ . En el caso donde no se anula tenemos  $h_1(\gamma_{-1})(t) = \langle t(\epsilon_0 - \epsilon_1), \epsilon_1 - \epsilon_2 \rangle = -t$ . La función alcanza el mínimo  $-1$  únicamente en  $t = 1$  y es 0 solo en el caso  $t = 0$ . Por tanto, al aplicar  $\mathbf{e}_1$  resulta:

$$\mathbf{e}_1(\gamma_{-1}) = S_{\alpha_1}(\gamma_{-1}) = \gamma_{-1} + \alpha_1 = \epsilon_0 - \epsilon_1 + \epsilon_1 - \epsilon_2 = \epsilon_0 - \epsilon_2 = \gamma_{-2}.$$

Ahora,  $\mathbf{e}_i(\gamma_{-2}) \neq 0$  solo cuando  $i = 2$ . En este caso, al igual que antes se tiene que  $\mathbf{e}_2(\gamma_{-2}) = \gamma_{-3}$ .

En general, podemos ver que para  $\gamma_{-i}$ ,  $i < n - 1$  la única raíz tal que  $\mathbf{e}_k(\gamma_{-i}) \neq 0$  es  $k = i$ , en cuyo caso  $\mathbf{e}_i(\gamma_{-i}) = S_{\alpha_i}(\gamma_{-i}) = (\epsilon_0 - \epsilon_i) + \epsilon_i - \epsilon_{i+1} = \gamma_{-(i+1)}$ . Se tiene un resultado similar para  $\gamma_i$ ,  $i < n$ .

Analicemos el caso  $\gamma_{-(n-1)}$ , las dos raíces para los cuales el operador  $\mathbf{e}$  es no nulo son  $\alpha_n, \alpha_{n-1}$ . En ambos casos  $h_i(\gamma_{-(n-1)})(t) = -t$ . Así, por un lado tenemos  $\mathbf{e}_n(\gamma_{-(n-1)}) = S_{\alpha_n}(\gamma_{-(n-1)}) = \gamma_{-(n-1)} + \alpha_n = \gamma_n$ . A este último camino solo se le puede aplicar  $\alpha_{n-1}$  dando como resultado  $\mathbf{e}_{n-1}(\gamma_n) = S_{\alpha_{n-1}}(\gamma_n) = \gamma_n + \alpha_{n-1} = \gamma_{n-1}$ .

Del otro lado  $\mathbf{e}_{n-1}(\gamma_{-(n-1)}) = S_{\alpha_{n-1}}(\gamma_{-(n-1)}) = \gamma_{-(n-1)} + \alpha_{n-1} = \gamma_{-n}$ ; para este último camino  $\mathbf{e}_i = 0$  si  $i \neq n$  en cuyo caso  $\mathbf{e}_n(\gamma_{-n}) = S_{\alpha_n}(\gamma_{-n}) = \gamma_{-n} + \alpha_n = \gamma_{n-1}$ .

Así pues, el grafo  $([\gamma_{-1}]_{\leq}, \Pi_c)$  tiene representación dada por la figura 2.7.

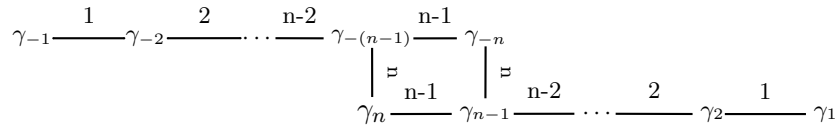


Figura 2.7: Grafo 1  $SO(2, 2n)$

Entonces  $\gamma_1$  es el máximo de  $[\gamma_{-1}]_{\leq}$ ;  $W_2 = \{1\}$  y  $A_2 = A_1 \setminus A_2 = \{2, 3, \dots, n - 1\}$ . Como  $\alpha_1$ , es la única raíz no ortogonal a  $\gamma_{-1}$ , entonces  $[\gamma_{-1}]_{\leq A_2} = \{\gamma_{-1}\}$ .

*Demostración del teorema 2.0.8.* Si  $\nu_1 = \gamma_1$ ;  $\nu_2 = \gamma_{-1}$ , entonces  $\gamma_1 + \gamma_{-1} = 2\epsilon_0$ ;  $\gamma_1 - \gamma_{-1} = 2\epsilon_1$  no son raíces, y  $\{\nu_1, \nu_2\}$  son ortogonales, con lo cual se concluye a) y b) del teorema.

Sean  $c_1 \geq c_2 \geq 0$  enteros; y sea  $\pi(t) = (\gamma_1^{c_1} * \gamma_{-1}^{c_2})(t)$ , si  $t \in [\frac{1}{2}, 1]$  entonces  $\langle \pi(t), \alpha_i \rangle = \langle c_1 \gamma_1 + \phi(t) c_2 \gamma_{-1}, \alpha_i \rangle = c_1 \delta_{i,1} - \phi(t) c_2 \delta_{i,1} \geq 0$ ; mientras que si  $t \in [0, \frac{1}{2}]$ ,  $\langle \pi(t), \alpha_i \rangle = c_1 \phi(t) \delta_{i,1}$ . Esto prueba que  $\pi$  es un camino con imagen contenida en  $C_K$ , por tato se concluye c).  $\square$

## 2.5. Caso $G$ localmente isomorfo a $SO(2, 2n + 1)$

Sea  $\alpha_i := \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$   $i < n$ ,  $\alpha_n := \epsilon_n$ ,  $\gamma_{-i} = \epsilon_0 - \epsilon_i$   $\gamma_i = \epsilon_0 + \epsilon_i$   $1 \leq i \leq n$ . Entonces las raíces positivas, las raíces simples y las raíces no compactas positivas están dadas por:

$$\begin{aligned}\Phi^+ &= \{\epsilon_i \pm \epsilon_j, e_i\}_{0 \leq i < j \leq n} \\ \Pi &= \{\gamma_{-1}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \\ \Phi_n^+ &= \{\gamma_i, \gamma_{-i}, \epsilon_0\}_{1 \leq i \leq n} \\ \gamma_{-1} &= \text{raíz no compacta simple} \\ \alpha_i &= \check{\alpha}_i \text{ si } i \neq n \quad 2\alpha_n = \check{\alpha}_n\end{aligned}$$

El análisis es muy similar al de  $SO(2, 2n)$ , y los cálculos son iguales para  $\gamma_i$   $i \leq n-1$   $\gamma_{-i}$   $i < n-1$ . Para  $\gamma_{-(n-1)}$ , al contrario del caso  $SO(2, 2n)$ ,  $h_i(\gamma_{-(n-1)})(t) \neq 0$  solo para la raíz  $\alpha_{n-1}$ . En este caso podemos ver que  $\mathbf{e}_{n-1}(\gamma_{-(n-1)}) = \gamma_{-n}$ .

Ahora, consideremos el camino  $\gamma_{-n} = t(\epsilon_0 - \epsilon_n)$ . Dado que  $\check{\alpha}_n = 2\alpha_n = 2\epsilon_n$ ,  $h_n(\gamma_{-n})(t) = \langle t(\epsilon_0 - \epsilon_n), 2\epsilon_n \rangle = -2t$  alcanza el mínimo  $-2$  únicamente en  $t = 1$  y es  $-1$  en  $t = 1/2$ . Por tanto, si descomponemos el camino de la forma  $\gamma_{-n} = (1/2\gamma_{-n}) * (1/2\gamma_{-n})$  al aplicar  $\mathbf{e}_n$  resulta:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_n(\gamma_{-n}) &= (1/2\gamma_{-n}) * S_{\alpha_n}(1/2\gamma_{-n}) = (1/2\gamma_{-n}) * (1/2\gamma_{-n} + \alpha_n) \\ &= (1/2(\epsilon_0 - \epsilon_n)) * ((1/2(\epsilon_0 - \epsilon_n)) + (\epsilon_n)) = (1/2(\epsilon_0 - \epsilon_n)) * (1/2(\epsilon_0 + \epsilon_n)).\end{aligned}$$

Llamemos al camino resultante  $\gamma_0$ . Obsérvese que este camino tiene como peso  $\epsilon_0$  (raíz no compacta positiva), además

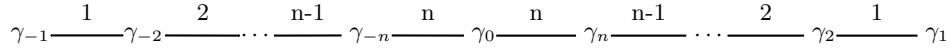
$$\begin{aligned}h_i(\gamma_0) &= \begin{cases} \langle t(\epsilon_0 - \epsilon_n), \check{\alpha}_i \rangle & \text{si } t \leq 1/2 \\ \langle \frac{1}{2}(\epsilon_0 - \epsilon_n), \check{\alpha}_i \rangle + \langle \frac{2t-1}{2}(\epsilon_0 + \epsilon_n), \check{\alpha}_i \rangle & \text{si } t > 1/2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} t(-2\delta_{i,n} + 2\delta_{i,n-1}) & \text{si } t \leq 1/2 \\ \frac{1}{2}(-2\delta_{i,n} + 2\delta_{i,n-1}) + \frac{2t-1}{2}(2\delta_{i,n}) & \text{si } t > 1/2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} t(-2\delta_{i,n} + 2\delta_{i,n-1}) & \text{si } t \leq 1/2 \\ (2t-2)\delta_{i,n} + \delta_{i,n-1} & \text{si } t > 1/2 \end{cases}\end{aligned}$$

Entonces  $h_i(\gamma_0)(t) < 0$  solo si  $i = n$ , en cuyo caso el mínimo  $-1$  se alcanza en  $t = 1/2$  y el único  $t < 1/2$  tal que  $h_i(\gamma_0)(t) = 0$  es  $t = 0$ . Así:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_n(\gamma_0) &= (S_{\alpha_n}(1/2(\epsilon_0 - \epsilon_n))) * (1/2(\epsilon_0 + \epsilon_n)) = (1/2(\epsilon_0 - \epsilon_n) + \epsilon_n) * (1/2(\epsilon_0 + \epsilon_n)) \\ &= (1/2(\epsilon_0 + \epsilon_n)) * (1/2(\epsilon_0 + \epsilon_n)) = \epsilon_0 + \epsilon_n = \gamma_n.\end{aligned}$$

Siguiendo cálculos análogos a  $\gamma_{n-1}$  se puede ver que la única raíz para el cual  $\mathbf{e}_i\gamma_n \neq 0$  es  $\alpha_{n-1}$ . Calculando obtenemos:  $\mathbf{e}_{n-1}\gamma_n = \gamma_{n-1}$ . Resumiendo, si consideramos el grafo  $([\gamma_{-1}]_{\leq}, \Pi_c)$  tiene representación:

El análisis siguiente es el mismo del caso  $SO(2, 2n)$ . A continuación lo repetimos con el fin de clarificar nuestro objetivo:  $\gamma_1$  es el máximo de  $[\gamma_{-1}]_{\leq}$ ;  $W_2 = \{1\}$  y  $A_2 = A_1 \setminus A_2 = \{2, 3, \dots, n-1\}$ .

Figura 2.8: Grafo  $SO(2, 2n + 1)$ 

*Demostración del teorema 2.0.8.*  $\alpha_1$ , es la única raíz no ortogonal a  $\gamma_{-1}$ , entonces  $[\gamma_{-1}]_{\leq A_2} = \{\gamma_{-1}\}$ . Así, si  $\nu_1 = \gamma_1$ ;  $\nu_2 = \gamma_{-1}$ , entonces  $\gamma_1 + \gamma_{-1} = 2\epsilon_0$ ;  $\gamma_1 - \gamma_{-1} = 2\epsilon_1$  no son raíces, y  $\{\nu_1, \nu_2\}$  son ortogonales, con lo cual se concluye a) y b) del teorema.

Sean  $c_1 \geq c_2 \geq 0$  enteros; y sea  $\pi(t) = (\gamma_1^{c_1} * \gamma_{-1}^{c_2})(t)$ , si  $t \in [\frac{1}{2}, 1]$  entonces  $\langle \pi(t), \alpha_i \rangle = \langle c_1 \gamma_1 + \phi(t) c_2 \gamma_{-1}, \alpha_i \rangle = c_1 \delta_{i1} - \phi(t) c_2 \delta_{i1} \geq 0$ ; mientras que si  $t \in [0, \frac{1}{2}]$ ,  $\langle \pi(t), \alpha_i \rangle = c_1 \phi(t) \delta_{i1}$ . Esto prueba que  $\pi$  es un camino con imagen contenida en  $C_K$ , por tato se concluye c).  $\square$

## 2.6. Caso $G$ localmente isomorfo a $SO^*(2n)$

Sea  $\alpha_i := \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$ ,  $i < n$ ;  $\gamma_{i,j} = \epsilon_i + \epsilon_j$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ . Entonces las raíces positivas, las raíces simples y las raíces no compactas positivas están dadas por:

$$\begin{aligned} \Phi^+ &= \{\epsilon_i \pm \epsilon_j\}_{1 \leq i < j \leq n} \\ \Pi &= \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \gamma_{n-1,n}\} \\ \Phi_n^+ &= \{\gamma_{i,j}\}_{i < j} \\ \gamma_{n-1,n} &= \text{raíz no compacta simple} \\ \alpha_i &= \check{\alpha}_i \text{ para toda } i \end{aligned}$$

La única raíz simple compacta no ortogonal a  $\gamma_{n-1,n}$  es  $\alpha_{n-2}$ . En este caso, siguiendo emulando cálculos anteriores se sigue que  $\mathbf{e}_{n-2}(\gamma_{n-1,n}) = S_{\alpha_{n-2}}(\gamma_{n-1,n}) = \gamma_{n-2,n}$ . Así mismo,  $\gamma_{n-2,n}$  tiene solamente dos raíces tales que  $h_i(\gamma_{n-2,n})(t) < 0$ , a saber,  $\alpha_{n-3}, \alpha_{n-1}$ . Aplicando el operador  $\mathbf{e}$  en el primer caso obtenemos  $\mathbf{e}_{n-3}(\gamma_{n-2,n}) = S_{\alpha_{n-3}}(\gamma_{n-2,n}) = \gamma_{n-3,n}$ ; mientras que en el segundo caso  $\mathbf{e}_{n-1}(\gamma_{n-2,n}) = S_{\alpha_{n-1}}(\gamma_{n-2,n}) = \gamma_{n-2,n-1}$ .

En general, dado un camino de la forma  $\gamma_{i,j}$  existen a lo más dos raíces simples para las cuales  $\mathbf{e}_k$  no se anula que son

- $k = i - 1$  en cuyo caso  $\mathbf{e}_{i-1}(\gamma_{i,j}) = \gamma_{i-1,j}$ .
- $k = j - 1$  en cuyo caso  $\mathbf{e}_{j-1}(\gamma_{i,j}) = \gamma_{i,j-1}$ .

Así pues, si  $A_1 = \Pi_c$ , el grafo  $\left([\gamma_{n-1,n}]_{\leq}, A_1\right)$  tiene representación dada por la figura 2.9.

Acá un vértice  $i, j$  representa el camino  $\gamma_{i,j}$ . Por ejemplo, el vértice  $\bullet$  en el grafo 2.9 representa el camino  $\gamma_{3,5}$ , Como antes, escribimos  $\gamma_{i,j} \xrightarrow{k} \gamma_{l,s}$  si  $\mathbf{e}_k(\gamma_{i,j}) = \gamma_{l,s}$ , o,  $\mathbf{e}_k(\gamma_{l,s}) = \gamma_{i,j}$ , y usamos una convención similar a la usada en el caso  $Sp(n, \mathbb{R})$  para evitar algunas etiquetas. Nuestro ejemplo entonces indica que el vértice  $\bullet$  está conectado con las raíces  $\alpha_4, \alpha_5$  (verticales),  $\alpha_3, \alpha_2$  (horizontales).

Ahora,  $\gamma_{1,2}$  es el máximo de  $[\gamma_{n-1,n}]_{\leq}$ . La única raíz que conecta el máximo es  $\alpha_2$ , entonces  $W_2 = \{i \mid \mathbf{f}_i(\gamma_{1,2}) \neq \theta\} = \{2\}$ ,  $A_2 = A_1 \setminus W_2 = \{1, 3, 4, \dots, n-1\}$ . El grafo  $\left([\gamma_{n-1,n}]_{\leq}, A_2\right)$  se puede representar a partir de la representación de  $\left([\gamma_{n-1,n}]_{\leq}, A_1\right)$ , eliminando las aristas de etiqueta 2 y posteriormente tomando la componente conexa de  $\gamma_{n-1,n}$ .



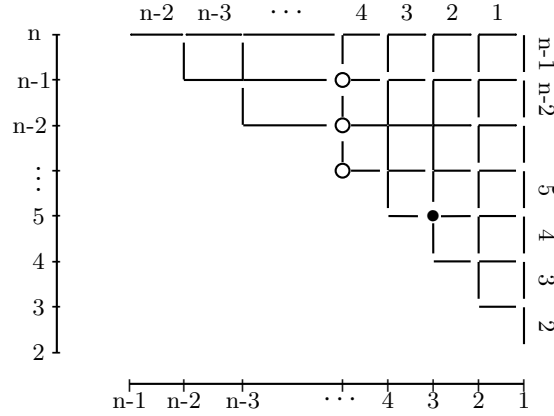
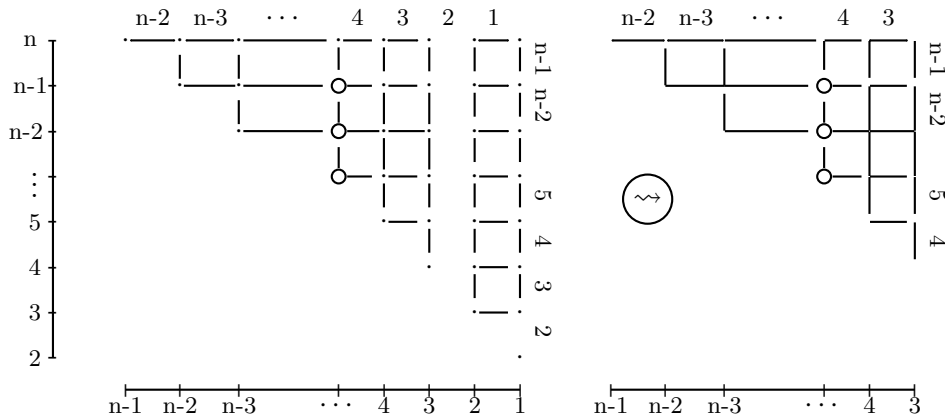


Figura 2.9: Grafo  $SO^*(2n)$



El conjunto  $[\gamma_{-5}]_{\leq A_2}$  tiene elemento máximo  $\gamma_{3,4} = \epsilon_3 + \epsilon_4$ . A partir de los conjuntos  $W_3 = \{i \in A_2 \mid \mathbf{f}_i(\gamma_{3,4}) \neq \theta\} = \{4\}$ ,  $A_3 = A_2 \setminus W_3 = \{1, 3, 5, 6, \dots, n-1\}$  consideremos el grafo  $([\gamma_{n-1,n}]_{\leq A_3}, A_3)$ . Entonces por un análisis similar (elimínese la arista con etiqueta 4 y tómesese la componente conexa del grafo obtenido que contiene a  $\gamma_{n-1,n}$ ), podemos ver que  $\gamma_{5,6}$  es el máximo del conjunto  $[\gamma_{n-1,n}]_{\leq A_3}$ . Iterando el proceso, si  $m < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  y hemos definido el conjunto  $A_m = \{1, 3, 5, \dots, 2m-1, 2m, 2m+1, \dots, n-1\}$  y  $[\gamma_{-5}]_{\leq A_m}$  tiene máximo  $\gamma_{2m-1,2m}$  entonces  $W_{m+1} = \{i \in A_m \mid \mathbf{f}_i(\gamma_{2m-1,2m}) \neq \theta\} = \{2m\}$ ; tomando el conjunto  $A_{m+1} = A_m \setminus W_{m+1} = \{1, 3, 5, \dots, 2m-1, 2m+1, 2m+2, \dots, n-1\}$  podemos ver que el conjunto  $[\gamma_{-5}]_{\leq A_{m+1}}$  tiene elemento máximo  $\gamma_{2m+1,2m+2}$ . De este modo, obtenemos los caminos

$$\gamma_{1,2}, \quad \gamma_{3,4}, \quad \gamma_{5,6}, \quad \gamma_{2k-1,2k}$$

con  $n = 2k + i$ ,  $i \in \{0, 1\}$ .

*Demostración del teorema 2.0.8.* Sea  $\nu_i = \gamma_{2i-1,2i}$  para  $i = 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Sea  $i \neq j$ , como  $2i-1, 2i, 2j-1, 2j$  son todos distintos,  $\nu_i(1) \pm \nu_j(1) = \epsilon_{2i-1} + \epsilon_{2i} \pm (\epsilon_{2j-1} + \epsilon_{2j})$  no es raíz, además  $\langle \nu_i(1), \nu_j(1) \rangle = 0$ , esto prueba las partes 1), 2) del teorema.

Sea  $\pi = \nu^{c_1} * \dots * \nu^{c_k}$  con  $(c_1, \dots, c_k)$  una sucesión creciente de enteros no negativos; entonces  $\pi(t)$  es de la forma  $\pi(t) = c_1 \gamma_{1,2} + \dots + c_m \gamma_{2m-1,2m} + \phi(t) c_m \gamma_{2m+1,2m+2}$ , para cierto  $0 \leq \phi(t) \leq 1$

y cierto  $m < k$ . Luego

$$\langle \pi(t), \alpha_i \rangle = (c_1 - c_2)\delta_{i2} + (c_2 - c_3)\delta_{i4} + \cdots + (c_{m-1} - c_m)\delta_{im} + (c_m - \phi(t)c_{m+1})\delta_{i(m+1)} \geq 0$$

lo cual dice que  $\pi(t) \in C_k$  para todo  $t \in [0, 1]$ . Esto prueba la parte c) del teorema.  $\square$

## 2.7. Caso $G$ localmente isomorfo a $SU(p, q)$

Sea  $\alpha_i := \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$   $1 \leq i < p$ ,  $\beta_j := \epsilon_{p+j} - \epsilon_{p+j+1}$ ,  $1 \leq j < q$   $\gamma_{i,j} = \epsilon_i - \epsilon_{p+j}$   $1 \leq i \leq p$   $1 \leq j \leq q$ . Entonces las raíces positivas, las raíces simples y las raíces no compactas positivas están dadas por:

$$\Phi^+ = \{\epsilon_i - \epsilon_j\}_{1 \leq i < j \leq p+q}$$

$$\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}, \gamma_{p,1}, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{q-1}\}$$

$$\Phi_n^+ = \{\gamma_{i,j}\}_{1 \leq i \leq p} \quad 1 \leq j \leq q$$

$$\gamma_{p,1} = \text{raíz no compacta simple}$$

$$\alpha_i = \check{\alpha}_i \text{ para toda } i$$

$$\beta_j = \check{\beta}_j \text{ para toda } j$$

Como  $\mathfrak{k}$  tiene sistema de raíces no irreducible, esto es,  $\Phi$  se escribe como unión disjunta de dos sistemas de raíces (irreducibles en este caso), usaremos en este caso la notación  $\mathbf{e}_i := \mathbf{e}_{\alpha_i}$ ,  $\mathbf{e}_{\bar{j}} = \mathbf{e}_{\beta_j}$ .

Dado que  $\gamma_{p,1}$  tiene dos raíces no ortogonales, a saber,  $\alpha_{p-1}, \beta_1$  y en ambos casos  $h_i(\gamma_{p,1}) = -t$ , aplicando el operador  $\mathbf{e}$  en el primer caso obtenemos

$$\mathbf{e}_{\alpha_{p-1}}(\gamma_{p,1}) = S_{\alpha_{p-1}}(\gamma_{p,1}) = (\epsilon_p - \epsilon_{p+1}) + (\epsilon_{p-1} - \epsilon_p) = \epsilon_{p-1} - \epsilon_{p+1} = \gamma_{p-1,1};$$

mientras que en el segundo caso

$$\mathbf{e}_{\beta_1}(\gamma_{p,1}) = S_{\beta_1}(\gamma_{p,1}) = (\epsilon_p - \epsilon_{p+1}) + (\epsilon_{p+1} - \epsilon_{p+2}) = \epsilon_p - \epsilon_{p+2} = \gamma_{p,2};$$

.

En general, dado un camino de la forma  $\gamma_{i,j}$  existen a lo más dos raíces simples para las cuales  $\mathbf{e}_k$  no se anula que son

- $k = i - 1$  en cuyo caso  $\mathbf{e}_{i-1}(\gamma_{i,j}) = \gamma_{i-1,j}$ .
- $k = \bar{j}$  en cuyo caso  $\mathbf{e}_{\bar{j}}(\gamma_{i,j}) = \gamma_{i,j+1}$ .

En el caso  $SU(6, 4)$  podemos representar el grafo generado  $\gamma_{5,1}$  mediante:

Un grafo similar se obtiene para cualquier  $p > q$ . En general, el vértice extremo del grafo generado por  $\gamma_{p,1}$  es  $\gamma_{1,q}$  y está conectado a las raíces  $\bar{m} = \beta_m$ ,  $1 = \alpha_1$ . Tomemos el grafo generado por  $\gamma_{p,1}$  y la raíces  $\Pi \setminus \{\alpha_1, \beta_m\}$ . El subgrafo tiene vértice extremo  $\gamma_{2,q-1}$  que es ortogonal a  $\gamma_{1,q}$ . Iterando el proceso, podemos obtener los caminos (para  $p > q$ )

$$\gamma_{1,q}, \gamma_{2,q-1}, \dots, \gamma_{q,1}$$

A este punto, el subgrafo que se produce es de la forma

Aplicando nuevamente el procedimiento se genera un nuevo subgrafo con vértice máximo  $\gamma_{q-1,1}$  cuyo peso no es ortogonal al peso del camino obtenido en el paso anterior  $\gamma_{q,1}$ . Por tanto,  $\gamma_{q-1,1}$  los caminos que consideramos en esta.

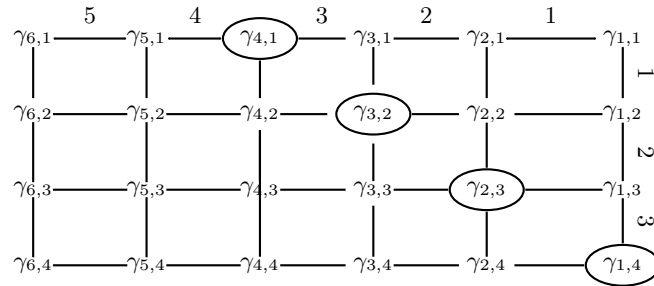


Figura 2.10: Grafo  $SU(6, 4)$

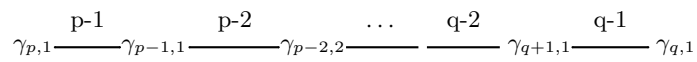


Figura 2.11: Grafo 1  $SU(p, q)$



## Capítulo 3

# Descripción de $S(\mathfrak{p}^+)$

Queremos describir los pesos de  $S(\mathfrak{p}^+)$  en términos de los caminos de Littelmann. Conservaremos la misma notación dada el capítulo anterior para cada grupo. Así pues, si  $G = SU(p, q)$  llamamos  $\gamma_{i,j}$ , al camino  $t(\varepsilon_i - \varepsilon_j)$ , mientras que para  $G = Sp(n, \mathbb{R})$ ,  $\gamma_{i,j}$  se referirá al camino  $(t\varepsilon_i) * (t\varepsilon_j)$ .

La estrategia es la siguiente. En el capítulo anterior calculamos la órbita de  $\alpha_{nc}$ , por los operadores de  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{e}$ , de donde obtuvimos caminos  $v_1, \dots, v_k$ . El teorema de Schmid junto con el teorema demostrado en el capítulo anterior aseguran que los pesos máximos que ocurren en  $S(\mathfrak{p}^+)$  son todos los  $n_1 v_1(1) + \dots + n_k v_k(1)$  con  $n_1 \geq \dots \geq n_k \geq 0$ . En particular, el peso  $v_1(1)$  que ocurre en  $S(\mathfrak{p}^+)$  es precisamente el peso máximo del  $\mathfrak{k}$ -módulo  $\mathfrak{p}^+$  y  $v_1$  es un camino contenido en  $C_K$ , por tanto por el teorema del caracter de Littelmann, el caracter del  $\mathfrak{k}$ -módulo  $\mathfrak{p}^+$  es  $\sum_{\zeta \preceq v_1} e^{\zeta(1)}$ .

El siguiente paso sería entonces calcular el caracter del  $\mathfrak{k}$ -módulo con peso máximo  $n_1 v_1 = v_1^{n_1}$  (proposición 3.1.7), esto es, determinar los caminos de la forma  $\mathbf{f}_{\alpha_{i_1}} \dots \mathbf{f}_{\alpha_{i_s}}(v_1^{n_1})$ . En la sección 2 tomamos  $n_1 v_1 * n_2 v_2 = v_1^{n_1} * v_2^{n_2}$ , y calculamos los caminos de la forma  $\mathbf{f}_{\alpha_{i_1}} \dots \mathbf{f}_{\alpha_{i_s}}(v_1^{n_1})$  (Proposición 3.2.3). Finalmente el cálculo de los elementos

$$\mathbf{f}_{\alpha_{i_1}} \dots \mathbf{f}_{\alpha_{i_s}}(v_1^{n_1} * v_2^{n_2} * \dots * v_k^{n_k})$$

se deduce a partir del caso  $v_1^{n_1} * v_2^{n_2}$  usando técnicas similares (Teorema 3.2.4).

**Definición 3.0.1.** Diremos que un par de vértices  $\zeta_1, \zeta_2 \in [\alpha_{nc}]_{\preceq}$  están unidos por una caminata en el grafo, si  $\zeta_1 \preceq \zeta_2$ . Si  $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_s} \in \Pi_n$  son tales que  $\mathbf{e}_{\alpha_{i_1}} \dots \mathbf{e}_{\alpha_{i_s}}(\zeta_1) = \zeta_2$ , a la sucesión  $(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_s})$  la llamaremos una caminata sobre el grafo de  $\zeta_1$  a  $\zeta_2$ .

Gráficamente  $\zeta_1 \preceq \zeta_2$  si en los grafos obtenidos en el capítulo anterior, podemos hacer un camino con dirección sureste empezando de  $\zeta_1$  y terminando en  $\zeta_2$ . Así por ejemplo, si  $G$  es localmente isomorfo a  $EIII$ , observando el grafo el camino  $\gamma_{-3} \preceq \gamma_{13}$ , pero  $\gamma_4 \not\preceq \gamma_{23}$ .

**Definición 3.0.2.** Sea  $([\alpha_{nc}]_{\preceq A_i}, A_i)$  uno de los grafos o subgrafos obtenidos en el capítulo 2, y tomemos una función  $g : [\alpha_{nc}]_{\preceq A_i} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Entonces decimos que la tripla  $([\alpha_{nc}]_{\preceq A_i}, A_i, g)$  es un diagrama con pesos enteros, el valor de cada vértice  $g(\zeta)$  se dice el peso del vértice y la suma de los vértices de los pesos  $\sum_{\zeta \in [\alpha_{nc}]_{\preceq A_i}} g(\zeta)$  se dice el peso del grafo

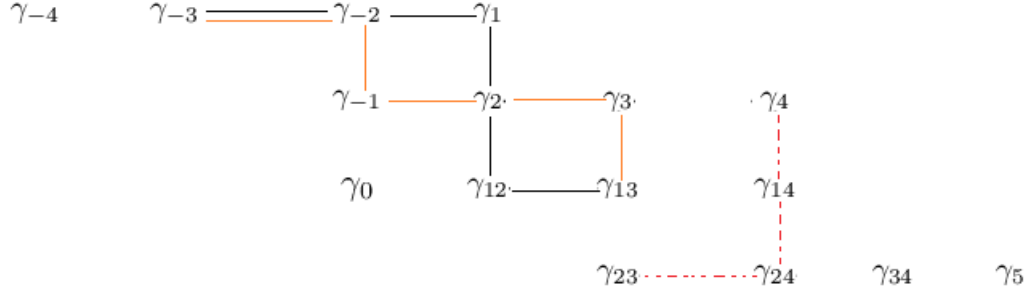


Figura 3.1: Dos posibles caminos de  $\gamma_{-3}$  a  $\gamma_{13}$ , mientras que  $\gamma_{23} \not\preceq \gamma_4$  ni  $\gamma_4 \not\preceq \gamma_{23}$

**Observación 3.0.3.** *Los  $v$ 's construidos en el teorema 2.0.8 tienen la siguiente propiedad.*

- Si  $\mathbf{f}_\alpha^N(v_i) \neq \theta$  entonces  $\mathbf{e}_\alpha^N(v_{i+1}) \neq \theta$ .
- Si  $\mathbf{f}_\alpha^N(\eta) \neq \theta$  o  $\mathbf{e}_\alpha^N(\eta) \neq \theta$  para  $\alpha_{nc} \preceq \eta$  y alguna  $\alpha \in \Pi_c$ , entonces  $N \leq 2$  y es 2 solo cuando  $G$  es de tipo  $C_n$  y  $\eta = v_i$  para algún  $i$ . Es decir,  $\mathbf{f}^N = \theta$ , para  $N > 2$  si  $G$  no es de tipo  $C_n$ , y para  $N > 3$  en el caso de tipo  $C_n$ .
- Como caso particular. Si  $\mathbf{f}_\alpha(v_i) \neq \theta$  entonces  $\mathbf{e}_\alpha(v_i) = \theta$ . Si  $\mathbf{e}_\alpha(v_i) \neq \theta$  entonces  $\mathbf{f}_\alpha(v_i) = \theta$ .
- Si  $G$  es de tipo  $A_n$  existen exactamente dos raíces simples tales que  $\mathbf{f}_\alpha^N(v_i) \neq \theta$ . En otro caso existe una única  $\alpha$ . Es decir  $W_i$  (ver notación 2.0.7 en el capítulo anterior) tiene un solo elemento si  $G$  no es de tipo  $A_n$  y dos elemento si  $G$  es de tipo  $A_n$ .
- Si tomamos dos vértices del grafo  $\zeta_1, \zeta_2$ , que estén unidos por una caminata de  $\zeta_1$  a  $\zeta_2$ , esto es,  $\zeta_1 \preceq \zeta_2$ ; entonces la longitud de todos los posibles caminos que los unen es la misma. Más aún, si  $\zeta_1 = \mathbf{e}_{\alpha_{i1}} \mathbf{e}_{\alpha_{i2}} \cdots \mathbf{e}_{\alpha_{is}}(\zeta_2) = \mathbf{e}_{\beta_1} \mathbf{e}_{\beta_2} \cdots \mathbf{e}_{\beta_l}(\zeta_2)$ , entonces  $s = l$  y existe una permutación entre los multiconjuntos  $\{\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{is}\} = \{\beta_1, \dots, \beta_l\}$ , es decir, las raíces que aparecen son las mismas y aparecen con la misma multiplicidad.
- Si  $\zeta_1 \preceq \zeta_2$  y  $\alpha \in \Pi_c$  es tal que  $\mathbf{e}_\alpha(\zeta_1) \neq \theta$  pero  $\mathbf{e}_\alpha(\zeta_2) = \theta$ , entonces  $\mathbf{e}_\alpha(\zeta_1) \preceq \zeta_2$ . Similarmente, si  $\mathbf{f}_\alpha(\zeta_2) \neq \theta$  pero  $\mathbf{f}_\alpha(\zeta_1) = \theta$ , entonces  $\zeta_1 \preceq \mathbf{f}_\alpha \zeta_2$ .
- En particular, una observación al margen no utilizada en este texto, cabe destacar que si tomamos un camino del grafo comenzando en el vértice mínimo (= raíz no compacta simple) y punto final el vértice máximo, entonces el número de vértices que ocurren en dicho camino es igual a la dimensión de Gelfand Kirilov de  $\mathfrak{g}$  (esta observación vino al mirar la lista de dichas dimensiones dada en un reciente artículo de Kobayashi y Oshima), salvo en el caso  $C_n$ . No se tiene ninguna explicación de este hecho.

### 3.1. Órbita de $v_i^n$

Sea  $\Upsilon = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  el conjunto (ordenado) de los caminos construídos en el teorema 2.0.8. Las observaciones anteriores y la proposición 1.1.5, permiten ver que

$$\mathbf{f}_\alpha(v_1 * v_2) = \begin{cases} \mathbf{f}_\alpha(v_1) * v_2 & \text{Si } \exists N \mathbf{f}_\alpha^N(v_1) \neq \theta \text{ tal que } \mathbf{e}_\alpha^N(v_2) = \theta \\ v_1 * \mathbf{f}_\alpha(v_2) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

en este caso no existe tal  $N$ , luego

$$= v_1 * \mathbf{f}_\alpha(v_2) \tag{3.1}$$

además, hay a lo más dos raíces tales que  $\mathbf{f}_\alpha^N(v_1 * v_2) \neq \theta$ , que son las raíces tales que  $\mathbf{f}_\alpha^N(v_2) \neq \theta$ , las cuales satisfacen también que  $\mathbf{e}_\alpha^N(v_3) \neq \theta$ . Así, procediendo iterativamente

$$\mathbf{f}_\alpha(v_1 * v_2 * v_3) = \begin{cases} \mathbf{f}_\alpha(v_1 * v_2) * v_3 & \text{Si } \exists N \mathbf{f}_\alpha^N(v_1 * v_2) \neq \theta \text{ tal que } \mathbf{e}_\alpha^N(v_3) = \theta \\ v_1 * v_2 * \mathbf{f}_\alpha(v_3) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

por lo anterior:

$$= \begin{cases} v_1 * \mathbf{f}_\alpha(v_2) * v_3 & \text{Si } \exists N \mathbf{f}_\alpha^N(v_2) \neq \theta \text{ tal que } \mathbf{e}_\alpha^N(v_3) = \theta \\ v_1 * v_2 * \mathbf{f}_\alpha(v_3) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

en este caso no existe tal  $N$ , luego

$$= v_1 * v_2 * \mathbf{f}_\alpha(v_3). \tag{3.2}$$

Análogamente, tenemos que para una raíz simple  $\alpha$ ,

$$\mathbf{f}_\alpha(v_1 * v_2 * \dots * v_j) = v_1 * v_2 * \dots * \mathbf{f}_\alpha(v_j).$$

**Notación 3.1.1.** Para una sucesión finita de raíces simples  $\vec{\alpha} = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{is})$ , notaremos por  $\mathbf{f}_{\vec{\alpha}}$  al operador  $\mathbf{f}_{\alpha_{i1}} \cdots \mathbf{f}_{\alpha_{is}}$  y la longitud de  $\vec{\alpha}$  por  $|\vec{\alpha}| = s$

**Lema 3.1.2.** Sea  $G = SO(2, 2n+1)$ , siguiendo la notación de la sección 1 del capítulo anterior,  $\gamma_0^2 \not\preceq \gamma_1^2$

*Demostración.* Si  $\gamma_0^2 \preceq \gamma_1^2$ , entonces existe una sucesión  $\vec{\alpha}$ , tal que  $\mathbf{e}_{\vec{\alpha}}(\gamma_0^2) = \gamma_1^2$ . La única raíz tal que  $\mathbf{e}_\alpha(\gamma_0) \neq \theta$  es  $\alpha = \alpha_n$ , luego

$$\mathbf{e}_n(\gamma_0^2) = \begin{cases} \gamma_0 * \mathbf{e}_n(\gamma_0) & \text{Si } \exists N \mathbf{e}_n^N(\gamma_0) \neq \theta \text{ tal que } \mathbf{f}_n^N(\gamma_0) = \theta \\ \mathbf{e}_n(\gamma_0) * \gamma_0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

si  $\mathbf{e}_n^N(\gamma_0) \neq \theta$  entonces  $N = 1$  en cuyo caso  $\mathbf{f}_n^1(\gamma_0) \neq \theta$ . Entonces

$$= \mathbf{e}_n(\gamma_0) * \gamma_0 = \gamma_n * \gamma_0 \tag{3.3}$$

luego  $\gamma_0 \not\preceq \gamma_n$ . Ahora, para  $j \leq n$  sea  $\gamma_i \not\preceq \gamma_j$ . Dado que existe una única  $\alpha$ , tal que  $\mathbf{f}_\alpha(\gamma_i) \neq \theta$  entonces  $\mathbf{f}_\alpha(\gamma_i) = \gamma_j$ , o  $\mathbf{f}_\alpha(\gamma_i) \not\preceq \gamma_j$ . Si  $\mathbf{f}_\alpha(\gamma_i) = \gamma_j$  entonces  $\gamma_i = \mathbf{e}_\alpha(\gamma_j) \neq \theta$  como  $j < n$  el cálculo del capítulo anterior implica que  $\mathbf{f}_\alpha(\gamma_j) = \theta$ , por tanto  $\mathbf{f}_\alpha(\gamma_i * \gamma_j) = \gamma_i * \mathbf{f}_\alpha(\gamma_j) = \theta$ . En conclusión, si  $\gamma_0^2 \not\preceq \gamma_i * \gamma_j$  entonces  $i \neq j$ . En particular,  $\gamma_0^2 \not\preceq \gamma_1^2$ .  $\square$

**Lema 3.1.3.** *Sea  $G = Sp(n, \mathbb{R})$ , siguiendo la notación de la sección 1 del capítulo anterior; sea  $\mathbf{f}_{\vec{\alpha}}(\gamma_{1,1}^2) = \gamma_{p,q} * \gamma_{k,l}$  para ciertas sucesión  $\vec{\alpha}$ . Si  $p = k$  entonces  $p = q \geq l$ . Análogamente, si  $q = l$  entonces  $l = k \leq p$ .*

Intuitivamente hablando, el lema dice que si dos vértices de la órbita por  $\mathbf{f}$  de  $\gamma_{1,1}^2$  están sobre la misma línea horizontal o vertical, entonces uno de ellos debe estar en la diagonal de la línea. El resultado es también válido reemplazando  $\gamma_{1,1}$  por  $\gamma_{j,j}$ , realizando el mismo análisis.

*Demostración.* Por inducción sobre  $s = |\vec{\alpha}|$ . Primero obsérvese que  $\mathbf{f}_\alpha(\gamma_{1,1}^2) \neq \theta$  solo si  $\alpha = \alpha_1$ , en cuyo caso  $\mathbf{f}_1(\gamma_{1,1}^2) = \gamma_{1,2} * \gamma_{1,1}$ . Supongamos que el resultado es válido para toda sucesión de longitud  $s = |\vec{\alpha}|$ . Sea  $\vec{\beta}$  tal que  $|\vec{\beta}| = s + 1$  y  $\theta \neq \mathbf{f}_{\vec{\beta}}(\gamma_{1,1}^2) = \gamma_{p,q} * \gamma_{p,l}$ , con  $p \geq q$ ,  $p \geq l$ , en particular  $p \neq 1$ . Se puede ver a partir del grafo de  $G$  que  $\mathbf{f}_{\alpha_i}(\gamma_{p,q}) \neq \theta$  solo si  $i = p$ , o  $i = q$ , y  $\mathbf{e}_{\alpha_i}(\gamma_{p,l}) \neq \theta$  solo si  $i = p - 1$ , o  $i = l - 1$ . Si  $l \neq 1$

$$\mathbf{e}_{\alpha_{l-1}}(\gamma_{p,q} * \gamma_{p,l}) = \begin{cases} \gamma_{p,q} * \mathbf{e}_{\alpha_{l-1}}(\gamma_{p,l}) & \text{Si } \exists N \mathbf{e}_{\alpha_{l-1}}^N(\gamma_{p,l}) \neq \theta \text{ tal que } \mathbf{f}_{\alpha_{l-1}}^N(\gamma_{p,q}) = \theta \\ \mathbf{e}_{\alpha_{l-1}}(\gamma_{p,q}) * \gamma_{p,l} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

como  $p > l - 1$

$$= \begin{cases} \gamma_{p,q} * \gamma_{p,l-1} & \text{Si } \mathbf{e}_{\alpha_{l-1}}^N(\gamma_{p,l}) \neq \theta \text{ tal que } \mathbf{f}_{\alpha_{l-1}}^N(\gamma_{p,q}) = \theta \\ \gamma_{p,q-1} * \gamma_{p,l} & \text{si } q = l - 1 \end{cases} \quad (3.4)$$

Como  $\mathbf{e}_{\alpha_{l-1}}(\gamma_{p,q} * \gamma_{p,l})$  se puede escribir de la forma  $\mathbf{f}_{\vec{\alpha}}(\gamma_{1,1}^2)$  con  $|\vec{\alpha}| = s$ , la hipótesis de inducción concluye en el primer caso que  $p = q \geq l - 1$ , y dado que  $p \geq l$ ,  $q \geq l$ . El segundo caso ocurre solo cuando  $q = l - 1$ , en este caso la hipótesis de inducción concluiría que  $q - 1 \geq l$ , lo cual es claramente absurdo, luego este caso no puede ocurrir.

Si  $l = 1$  y  $p \neq q$ ,  $\mathbf{e}_{\alpha_{q-1}}(\gamma_{p,q} * \gamma_{p,1}) = \gamma_{p,q-1} * \gamma_{p,1}$  entonces, al igual que antes, la hipótesis de inducción concluye que  $p = q - 1$ , pero puesto que  $p \geq q$ , esto es imposible. Por tanto  $p = q$ .  $\square$

Retomando el análisis general para cualquier grupo  $G$  del capítulo anterior tenemos el siguiente resultado:

**Lema 3.1.4.** *Sea  $v_i \in \Upsilon$ , supongamos que  $\mathbf{f}_{\alpha_{i1}} \cdots \mathbf{f}_{\alpha_{ik}}(v_i^2) = \zeta_1 * \zeta_2$  y  $(\zeta_1, \zeta_2)$  están unidos por un camino en el grafo y  $\beta$  raíz simple tal que  $\mathbf{f}_\beta(\zeta_1 * \zeta_2) = \zeta_1 * \mathbf{f}_\beta(\zeta_2) \neq \theta$ . Entonces  $(\zeta_1, \mathbf{f}_\beta(\zeta_2))$  están unidos por un camino.*

**Observación 3.1.5.** *La hipótesis  $\mathbf{f}_{\alpha_{i1}} \cdots \mathbf{f}_{\alpha_{ik}}(v_i^2) = \zeta_1 * \zeta_2$  solo se usa para evitar las situaciones  $\zeta_1 = \zeta_2 = \gamma_0$  en el caso  $SO(2, 2n + 1)$  y en el caso  $Sp(n, \mathbb{R})$ :  $\zeta_1 = \gamma_{k,l}$ ,  $\zeta_2 = \gamma_{l+1,l}$ ,  $k > l + 1$ , en donde  $\gamma_{k,l} \preceq \gamma_{l+1,l}$ , y  $\mathbf{f}_{\alpha_1}(\gamma_{k,l} * \gamma_{l+1,l}) = \gamma_{k,l} * \gamma_{l+1,l+1}$ , pero  $\gamma_{k,l} \not\preceq \gamma_{l+1,l+1}$ . En los demás casos de la demostración basta suponer  $\zeta_1 \preceq \zeta_2$  para concluir  $\zeta_1 \preceq \mathbf{f}_\beta(\zeta_2)$ .*

*Demostración del lema.* La prueba se hará por casos.



1.  $G = Sp(n, \mathbb{R})$ . En este caso  $\zeta_1 = \gamma_{i,j}$ ,  $i \geq j$ ;  $\zeta_2 = \gamma_{k,l}$ ,  $k \geq l$  y  $(\zeta_1, \zeta_2)$  están unidos por un camino si  $(i, j) \geq (k, l)$  con el orden lexicográfico usual, luego

$$\mathbf{f}_\beta(\zeta_2) = \begin{cases} \gamma_{k+1,l} & \text{si } \beta = \alpha_k \\ \gamma_{k,l+1} & \text{si } \beta = \alpha_l \\ \theta & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Si  $i = k$ , por el lema anterior  $i = j \geq l$ , luego  $\mathbf{f}_\beta(\zeta_1 * \zeta_2) = \mathbf{f}_\beta(\gamma_{i,i} * \gamma_{i,l})$ . Como  $\mathbf{f}_\beta(\gamma_{i,i} * \gamma_{i,l}) = \gamma_{i,i} * \mathbf{f}_\beta(\gamma_{i,l})$  entonces  $\beta \neq \alpha_i$ , y por tanto si  $l \neq i$ ,  $\beta = \alpha_l$ , luego  $\mathbf{f}_\beta(\gamma_{i,i} * \gamma_{i,l}) = \gamma_{i,i} * \gamma_{i,l+1}$ , como  $i \geq l \neq i$ ;  $i \geq l + 1$ , se sigue que  $\zeta_1 \preceq \mathbf{f}_\beta(\zeta_2)$ . Si  $l = i$  no existe tal  $\beta$ , luego la proposición es trivialmente válida.

Supongamos ahora que  $i > k$ , entonces  $j \geq l$ . Si  $j = l$  un argumento similar al anterior muestra, en virtud del lema previo, que  $\zeta_1 \preceq \mathbf{f}_\beta(\zeta_2)$ . Supongamos pues que  $j > l$ . Entonces puesto que

$$\mathbf{f}_\beta(\zeta_1 * \zeta_2) = \zeta_1 * \mathbf{f}_\beta(\zeta_2) = \begin{cases} \gamma_{i,j} * \gamma_{k+1,l} \\ \gamma_{i,j} * \gamma_{k,l+1} \end{cases}$$

en cualquier caso, las desigualdades estrictas muestran que  $(i, j) \geq (k + 1, j)$  y  $(i, j) \geq (k, j + 1)$ , entonces  $\zeta_1 \preceq \mathbf{f}_\beta(\zeta_2)$ .

2.  $G = SO(2, 2n)$ . Sea  $\zeta_1 \preceq \zeta_2$  y  $\beta$  una raíz simple tal que  $\theta \neq \mathbf{f}_\beta(\zeta_1 * \zeta_2) = \zeta_1 * \mathbf{f}_\beta(\zeta_2)$ . Sea  $\zeta_2 = \gamma_i \neq \gamma_{n-1}$  y  $\zeta_1 = \gamma_j \neq \zeta_2$ . Si  $\mathbf{f}_\alpha(\gamma_i) \neq \theta$  entonces  $\mathbf{f}_\alpha(\gamma_i) = \gamma_{i+1}$  si  $i \neq n$  y  $\mathbf{f}_\alpha \gamma_n = \gamma_{-(n+1)}$ . La condición  $\zeta_1 \preceq \zeta_2$  implica que  $j < 0 < i$ , o,  $0 < i < j$ , o,  $i < j < 0$ . Entonces si  $i \neq n$   $j < 0 < i + 1$ , o,  $0 < i + 1 \leq j$ , o  $i + 1 \leq j < 0$ , luego  $\zeta_1 \preceq \mathbf{f}_\alpha(\zeta_2)$

Supongamos que  $\zeta_1 = \gamma_{-n}$ ,  $\zeta_2 = \gamma_{n-1}$  en este caso  $\mathbf{f}_\beta(\gamma_{n-1}) \neq \theta$ , cuando  $\beta = \alpha_n$ , o,  $\beta = \alpha_{n-1}$ , pero dado que  $\mathbf{f}_{\alpha_{n-1}}(\gamma_{-n} * \gamma_{n-1}) = \mathbf{f}_{\alpha_{n-1}}(\gamma_{-n}) * \gamma_{n-1} = \gamma_{-(n-1)} * \gamma_{n-1}$ , luego  $\beta$  no puede ser  $\alpha_{n-1}$ . En el otro caso  $\mathbf{f}_{\alpha_n}(\gamma_{-n} * \gamma_{n-1}) = \gamma_{-n} * \mathbf{f}_{\alpha_n}(\gamma_{n-1}) = \gamma_{-n} * \gamma_{-n}$ . En cualquier caso, se concluye  $\zeta_1 \preceq \mathbf{f}_\beta(\zeta_2)$

3.  $G = SO(2, 2n + 1)$ . Es análogo al caso  $SO(2, 2n)$  sin considerar el segundo párrafo, ya que el grafo es lineal.
4.  $G = SU(p, q)$ : Como el sistema de raíces es unión de dos sistemas de raíces simples, basta con tener en cuenta el caso  $SU(p, 1)$ . Pero este caso el grafo es lineal al igual que en el caso  $SO(2, 2n + 1)$ . Si  $\zeta_1 \preceq \zeta_2$ , entonces  $\zeta_1 = \gamma_{i,j}$ ,  $\zeta_2 = \gamma_{k,l}$ ;  $i \geq k$ ,  $j \leq l$ , dado que  $\mathbf{f}_{l-1}(\zeta_2) = \gamma_{k,l-1}$ ,  $\mathbf{f}_k(\zeta_2) = \gamma_{k+1,l}$ . Como  $\mathbf{f}_k(\gamma_{k,j} * \gamma_{k,l}) = \mathbf{f}_k(\gamma_{k,j}) * \gamma_{k,l}$ ,  $\mathbf{f}_{l-1}(\gamma_{i,l} * \gamma_{k,l}) = \mathbf{f}_{l-1}(\gamma_{i,l}) * \gamma_{k,l}$  podemos suponer  $i \neq k$ ,  $j \neq l$ . Así  $i \geq k + 1$ ,  $j \geq l - 1$ , luego  $\gamma_{i,j} \preceq \gamma_{k+1,l}$  y también,  $\gamma_{i,j} \preceq \gamma_{k,l-1}$ . De cualquier modo se tiene que  $\zeta_1 \preceq \mathbf{f}_\beta(\zeta_2)$
5.  $G = SO^*(2n)$ : Sea  $\zeta_1 = \gamma_{i,j}$ ,  $\zeta_2 = \gamma_{k,l}$ ,  $i < j$ ,  $k < l$ . Entonces  $\zeta_1 \preceq \zeta_2$  implica que  $(i, j) \leq (k, l)$  con el orden lexicográfico. Si  $\mathbf{f}_\beta(\gamma_{k,l}) \neq \theta$ , entonces

$$\mathbf{f}_\beta(\gamma_{k,l}) = \begin{cases} \gamma_{k+1,l} \\ \gamma_{k,l+1} \end{cases}$$

Dado que  $\mathbf{f}_k(\gamma_{k,j} * \gamma_{k,l}) = \mathbf{f}_k(\gamma_{k,j}) * \gamma_{k,l}$ ;  $\mathbf{f}_l(\gamma_{i,l} * \gamma_{k,l}) = \mathbf{f}_l(\gamma_{i,j}) * \gamma_{k,l}$ , basta considerar  $i \neq k$ ,  $j \neq l$ ; pero en este caso  $i < j$ ,  $j + 1 < l$  así que  $\gamma_{i,j} \preceq \gamma_{k+1,l}$ ;  $\gamma_{i,j} \preceq \gamma_{k,l+1}$ . Luego  $\zeta_1 \preceq \mathbf{f}_\beta(\zeta_2)$ .

6.  $G = EIII, EVI, .$  Si  $\zeta_1 \preceq \zeta_2$ , entonces existe una sucesión de raíces simples  $\vec{\alpha}$  tal que  $\mathbf{f}_{\vec{\alpha}}(\zeta_2) = \zeta_1$ . Sea  $\beta$  simple tal que  $\mathbf{f}_\beta(\zeta) \neq \theta$ , en virtud de una observación anterior  $\mathbf{e}_\beta(\zeta) = \theta$ . La condición  $\mathbf{f}_\beta(\zeta_1 * \zeta_2) = \zeta_1 * \mathbf{f}_\beta(\zeta_2) \neq \theta$ , implica que si  $\mathbf{f}_\beta(\zeta_1) \neq \theta$  entonces  $\mathbf{e}_\beta(\zeta_2) \neq \theta$ , y por tanto se debe tener  $\mathbf{f}_\beta(\zeta_2) = \theta$ , lo cual es absurdo. En conclusión, si  $\mathbf{f}_\beta(\zeta_1 * \zeta_2) = \zeta_1 * \mathbf{f}_\beta(\zeta_2) \neq \theta$ , entonces  $\mathbf{f}_\beta(\zeta_1) = \theta$ . Observando el diagrama esta afirmación dice que podemos elegir el camino entre  $\zeta_1$  y  $\zeta_2$ , de tal forma que  $\vec{\alpha} = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{i,k-1}, \beta)$  y  $\mathbf{f}_{\vec{\alpha}}(\zeta_2) = \zeta_1$ . Por tanto si  $\vec{\alpha}' = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{i,k-1})$ ,  $\mathbf{f}_{\vec{\alpha}'}(\mathbf{f}_\beta(\zeta_2)) = \zeta_1$ . Esto concluye que  $\zeta_1 \preceq \zeta_2$

□

**Corolario 3.1.6.** Sea  $v_i \in \Upsilon$ , y  $\vec{\alpha}$  una sucesión de raíces simples tal que  $\theta \neq \mathbf{f}_{\vec{\alpha}}(v_i^2) = \zeta_1 * \zeta_2$ . Entonces  $\zeta_1 \preceq \zeta_2$ .

*Demostración.* Por inducción en  $s = |\vec{\alpha}|$ . Si  $s = 1$ , por una observación anterior se tiene que si  $\mathbf{f}_\alpha(v_i) \neq \theta$ , entonces  $\mathbf{e}_\alpha(v_i) = \theta$ ; por tanto  $\mathbf{f}_\alpha(v_i * v_i) = \mathbf{f}_\alpha(v_i) * v_i$ , en cuyo caso  $\zeta_1 = \mathbf{f}_\alpha(v_i)$ ,  $\zeta_2 = v_i$  y obviamente  $\mathbf{f}_\alpha(\zeta_1) = \zeta_2$ , esto es,  $\zeta_1 \preceq \zeta_2$ .

Supongamos que para toda sucesión  $\vec{\alpha}$  con  $s = |\vec{\alpha}|$ , tal que  $\theta \neq \mathbf{f}_{\vec{\alpha}}(v_i^2) = \zeta_1 * \zeta_2$ , se tiene que  $\zeta_1 \preceq \zeta_2$ . Sea  $\vec{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_s)$ , tal que  $\theta \neq \mathbf{f}_{\vec{\beta}}(v_i^2) = \zeta_1 * \zeta_2$ , entonces  $\theta \neq \mathbf{f}_{\beta_1} \mathbf{f}_{\beta_2} \dots \mathbf{f}_{\beta_s}(v_i^2) = \mu_1 * \mu_2$ , por hipótesis de inducción  $\mu_1 \preceq \mu_2$ , luego  $\mu_1 = \mu_2$  o existen  $\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{ik} \in \Pi_c$  tales que  $\mathbf{f}_{\alpha_{i1}} \dots \mathbf{f}_{\alpha_{ik}}(\mu_2) = \mu_1$ ; además  $\mathbf{f}_{\beta_0}(\mu_1 * \mu_2) = \zeta_1 * \zeta_2$ .

- Si  $\mu_1 \neq \mu_2$  y  $\mathbf{f}_{\beta_0}(\mu_1 * \mu_2) = \mathbf{f}_{\beta_0}(\mu_1) * \mu_2$ ,  $\mu_2 = \zeta_2$ ,  $\mathbf{f}_{\beta_0}(\mu_1) = \zeta_1$  y por tanto:  $\zeta_1 = \mathbf{f}_{\beta_0} \mu_1 = \mathbf{f}_{\beta_0}(\mathbf{f}_{\alpha_{i1}} \dots \mathbf{f}_{\alpha_{ik}}(\mu_2)) = \mathbf{f}_{\beta_0} \mathbf{f}_{\alpha_{i1}} \dots \mathbf{f}_{\alpha_{ik}}(\zeta_2)$ , luego  $\zeta_1 \preceq \zeta_2$ .
- Si  $\mu_1 = \mu_2$ . Los lemas 3.1.3 y 3.1.2 implican que  $\mu_1 \neq \gamma_0$  si  $G = SO(2, 2n + 1)$  y  $\mu_1 \neq \gamma_{p,p+1}$  si  $G$  es de tipo  $C_n$ . Entonces si  $\mathbf{f}_{\beta_0}(\mu_1) \neq \theta$  por la observación 1 al inicio de este capítulo se sigue que  $\mathbf{e}_{\beta_0}(\mu_1) = \theta$ . Por tanto  $\theta \neq \mathbf{f}_{\beta_0}(\mu_1 * \mu_1) = \mathbf{f}_{\vec{\beta}}(v_i^2)$  implica que  $\mathbf{f}_{\beta_0}(\mu_1) \neq \theta$ , por lo cual  $\mathbf{e}_{\beta_0}(\mu_1) = \theta$ . Por proposición (1.1.5)  $\mathbf{f}_{\beta_0}(\mu_1 * \mu_1) = \mathbf{f}_{\beta_0}(\mu_1) * \mu_1$ , de modo que  $\zeta_1 = \mathbf{f}_{\beta_0}(\mu_1) \preceq \mu_1 = \zeta_2$ .
- Por último, Si  $\mathbf{f}_{\beta_0}(\mu_1 * \mu_2) = \mu_1 * \mathbf{f}_{\beta_0}(\mu_2)$ , el lema anterior concluye que  $\mu_1 \preceq \mathbf{f}_{\beta_0}(\mu_2)$ , luego  $\zeta_1 \preceq \zeta_2$ .

□

**Proposición 3.1.7.** 1. Para cada  $v_j \in \Upsilon$  los elementos distintos de  $\theta$  de la órbita por  $\mathbf{f}$  de  $v_j^n$  son de la forma  $\zeta_1 * \zeta_2 * \dots * \zeta_n$ , tal que para cada  $i$   $\alpha_{nc} \preceq \zeta_i \preceq v_j$ , y el par  $(\zeta_i, \zeta_{i+1})$  están unidos por un camino en el grafo.

2. Recíprocamente, sean  $\alpha_{nc} \preceq \zeta_i \preceq v_j, i = 1, \dots, n$ , y  $\zeta_i \preceq \zeta_{i+1}$ , para todo  $i < n$ .

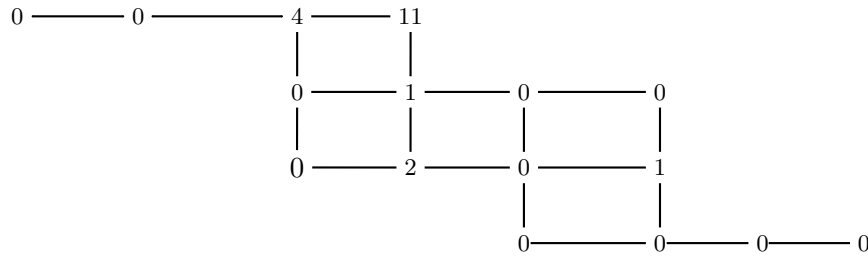
- Si  $G$  no es de tipo  $C_n$  ni  $G$  es localmente isomorfo a  $SO(2, 2n + 1)$ , o,
- $G$  es localmente isomorfo a  $SO(2, 2n + 1)$  y  $\zeta_i = \gamma_0$  a lo más para un  $i$

- $G$  es de tipo  $C_n$  y la sucesión de  $\zeta_i$ 's satisface la siguiente propiedad:  
 Si  $\zeta_i = \gamma_{p,q}$  con  $p \neq q$  entonces  $\zeta_{i+1} = \gamma_{q,q}$ , o,  $\zeta_{i+1} = \gamma_{r,s}$  donde  $r < p, s < q$ .

Entonces existe una sucesión de raíces simples compactas  $\vec{\alpha}$ , tal que  $\mathbf{f}_{\vec{\alpha}}(v_j^n) = \zeta_1 * \dots * \zeta_n$   
 En otras palabras, un elemento de la órbita se puede identificar con un grafo con pesos generado por  $\alpha_{nc}$ , tal que los elementos de peso distinto de cero son precisamente los  $\zeta_i$ , y existe un camino de  $\zeta_1$  a  $\zeta_n$  que pasa por todos los vértices  $\zeta_i$ .

Antes de dar la prueba, ilustremos con unos ejemplos la proposición.

**Ejemplo 3.1.8.** 1. Si  $G$  es de tipo  $E_6$ , entonces al diagrama de pesos del grafo



le corresponde el camino (ver el grafo asociado a  $E_{III}$  del capítulo 2):

$$\pi := \gamma_{-2}^4 * \gamma_1^{11} * \gamma_2 * \gamma_{12}^2 * \gamma_{14} = \underbrace{\gamma_{-2} * \dots * \gamma_{-2}}_4 * \underbrace{\gamma_1 * \dots * \gamma_1}_{11} * \gamma_2 * \gamma_{12} * \gamma_{12} * \gamma_{14}.$$

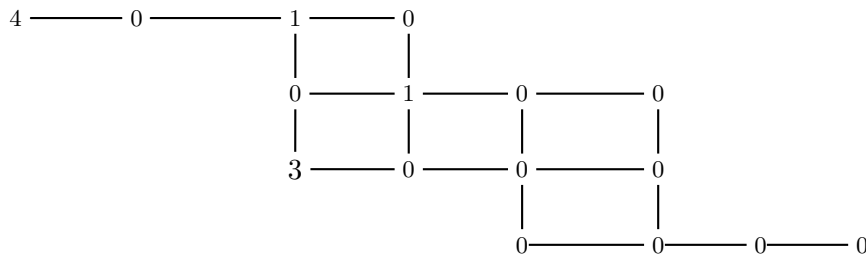
El orden en las concatenaciones se da tomando un camino desde  $\gamma_{-4}$  (camino asociado a la raíz no compacta simple), hasta  $\gamma_5$  (elemento máximo de  $[\alpha_{nc}]_{\leq}$ ); o equivalentemente, el orden se da siguiendo la sucesión  $\gamma_{-2} \preceq \gamma_1 \preceq \gamma_2 \preceq \gamma_{12} \preceq \gamma_{14}$ .

Entonces la proposición concluye que existe una sucesión de raíces simples  $\vec{\alpha}$  tal que  $\mathbf{f}_{\vec{\alpha}}(v_1^{19}) = \pi$ ,

2. Por otro lado, si tomamos el camino

$$\tau := \gamma_{-4}^4 * \gamma_{-2}^3 * \gamma_2 * \gamma_0^3,$$

entonces el diagrama de pesos asociado está dado en el grafo 2.



Es claro que no existe un camino desde  $\gamma_{-4}$  hasta  $\gamma_5$  que pase por  $\gamma_0$  y  $\gamma_2$ . Por tanto, no existe  $\vec{\alpha}$  tal que  $\tau = \mathbf{f}_{\vec{\alpha}}(v_1^m)$ .

*Demostración de la proposición 3.1.7.* 1. Todo elemento distinto de  $\theta$  es de la forma  $\mathbf{f}_{\alpha_1} \cdots \mathbf{f}_{\alpha_s}(v_j^n)$ , o bien es  $v_j^n$ . Por inducción sobre  $s$ , si  $s = 1$ , y  $\mathbf{f}_{\alpha}(v_j) \neq \theta$ , la construcción de los  $v_j$  muestra que  $\alpha$  satisface  $\mathbf{e}_{\alpha}(v_j) = \theta$ , luego

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\alpha}(v_j * v_j^{n-1}) &= \begin{cases} \mathbf{f}_{\alpha}(v_j) * v_j^{n-1} & \text{Si } \exists N \mathbf{f}_{\alpha}^N(v_j) \neq \theta \text{ tal que } \mathbf{e}_{\alpha}^N(v_j^{n-1}) = \theta \\ v_j * \mathbf{f}_{\alpha}(v_j^{n-1}) & \text{en otro caso} \end{cases} \\ &= \mathbf{f}_{\alpha}(v_j) * v_j^{n-1} \end{aligned} \quad (3.5)$$

En este caso  $\zeta_1 = \mathbf{f}_{\alpha}(v_j)$ ,  $\zeta_i = v_j$  para  $i = 2, \dots, n$ . Evidentemente  $\mathbf{e}_{\alpha}(\zeta_1) = \mathbf{e}_{\alpha}(\mathbf{f}_{\alpha}(v_j)) = v_j = \zeta_2$ , luego  $(\zeta_i, \zeta_{i+1})$  están unidos por una caminata en el grafo y la afirmación es válida para el caso  $s = 1$ .

Supongamos que  $\mathbf{f}_{\alpha_1} \cdots \mathbf{f}_{\alpha_s}(v_j^n) = \zeta_1 * \cdots * \zeta_n$  tal que para cada  $i$ ,  $\zeta_i \preceq \zeta_{i+1}$ . Sea  $\beta$  tal que  $\mathbf{f}_{\beta}(\zeta_1 * \cdots * \zeta_n) \neq \theta$ ; entonces  $\mathbf{f}_{\beta}(\zeta_1 * \cdots * \zeta_n) = \zeta_1 * \cdots * \mathbf{f}_{\beta}(\zeta_k) * \cdots * \zeta_n$  para algún  $k$  tal que  $\mathbf{f}_{\beta}(\zeta_k) \neq \theta$ . Notemos  $\mathbf{f}_{\beta}(\zeta_1 * \cdots * \zeta_n) = \xi_1 * \cdots * \xi_n$  con  $\xi_l = \zeta_l$  si  $l \neq k$  y  $\xi_k = \mathbf{f}_{\beta}(\zeta_k)$ ; por hipótesis de inducción  $\xi_i \preceq \xi_{i+1}$  para  $i \neq k, k-1$ . Como

$$\mathbf{f}_{\beta}(\zeta_1 * \cdots * \zeta_n) = \zeta_1 * \cdots * \mathbf{f}_{\beta}(\zeta_k) * \cdots * \zeta_n,$$

entonces

$$\mathbf{f}_{\beta}(\zeta_1 * \cdots * \zeta_n) = \zeta_1 * \cdots * \mathbf{f}_{\beta}(\zeta_{k-1} * \zeta_k) * \zeta_{k+1} * \cdots * \zeta_n = \zeta_1 * \cdots * \zeta_{k-1} * \mathbf{f}_{\beta}(\zeta_k * \zeta_{k+1}) * \cdots * \zeta_n,$$

y también

$$\mathbf{f}_{\beta}(\zeta_{k-1} * \zeta_k) = \zeta_{k-1} * \mathbf{f}_{\beta}(\zeta_k), \quad \mathbf{f}_{\beta}(\zeta_k * \zeta_{k+1}) = \mathbf{f}_{\beta}(\zeta_k) * \zeta_{k+1}.$$

Por el corolario 3.1.6 la primera igualdad satisface  $\xi_{k-1} = \zeta_{k-1} \preceq \mathbf{f}_{\beta}(\zeta_k) = \xi_k$  mientras que la segunda cumple que  $\xi_k = \mathbf{f}_{\beta}(\zeta_k) \preceq \zeta_{k+1} = \xi_{k+1}$ .

2. Sean  $\vec{\alpha}^1, \dots, \vec{\alpha}^n$  sucesiones de raíces compactas, de modo que  $\mathbf{f}_{\vec{\alpha}^i}(v_j) = \zeta_i$ . Sea  $s = \sum_i |\vec{\alpha}^i|$ . Por inducción en  $s$ , si  $s = 1$  la condición  $\zeta_1 \preceq \zeta_2 \preceq \cdots \preceq \zeta_n$  lleva a que  $\theta \neq \zeta_1 = \mathbf{f}_{\alpha}(v_j)$ , mientras que  $\zeta_2 = \zeta_3 = \cdots = \zeta_n = v_j$ . Como  $\mathbf{f}_{\alpha}(v_j) \neq \theta$ , entonces  $\mathbf{e}_{\alpha}(v_j) = \theta$ , y por tanto  $\mathbf{e}_{\alpha}(v_j^{n-1}) = \theta$ . Así, por proposición 1.1.5 se sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\alpha}(v_j * v_j^{n-1}) &= \begin{cases} \mathbf{f}_{\alpha}(v_j) * v_j^{n-1} & \text{Si } \exists N \mathbf{f}_{\alpha}^N(v_j) \neq \theta \text{ tal que } \mathbf{e}_{\alpha}^N(v_j^{n-1}) = \theta \\ v_j * \mathbf{f}_{\alpha}(v_j^{n-1}) & \text{en otro caso} \end{cases} \\ &= \mathbf{f}_{\alpha}(v_j) * v_j^{n-1} = \zeta_1 * \zeta_2 * \cdots * \zeta_n \end{aligned} \quad (3.6)$$

Por tanto, para  $s = 1$  la proposición está demostrada. Para enunciar la hipótesis de inducción, sea una  $n$ -tupla de caminos bajo las condiciones:

- $\zeta_1 \preceq \cdots \preceq \zeta_n$ .
- Para cada  $i$ ,  $\alpha_{nc} \preceq \zeta_i \preceq v_j$ .
- Para cada  $i$ , si  $\zeta_i \neq v_j$ , sea  $\vec{\alpha}^i$  una sucesión de raíces simples tal que  $\mathbf{f}_{\vec{\alpha}^i}(v_j) = \zeta_i$ .

$$\blacksquare s = \sum_i |\vec{\alpha}^i|.$$

Entonces la hipótesis de inducción supone que  $\zeta_1 * \dots * \zeta_n = v_j^n$  o existe una sucesión  $\vec{\alpha}$  tal que  $\mathbf{f}_{\vec{\alpha}}(v_j^n) = \zeta_1 * \dots * \zeta_n$ .

Para probar la proposición, tomemos una  $n$ -tupla de caminos bajo las condiciones:

- $z_1 \preceq \dots \preceq z_n$ .
- Para cada  $i$ ,  $\alpha_{nc} \preceq z_i \preceq v_j$
- Para cada  $i$ , si  $z_i \neq v_j$ , sea  $\vec{\alpha}^i$  tal que  $\mathbf{f}_{\vec{\alpha}^i}(v_j) = z_i$
- $s + 1 = \sum_i |\vec{\alpha}^i|$

Probaremos que existe una sucesión  $\vec{\alpha}$ , de modo que  $\mathbf{f}_{\vec{\alpha}}(v_j^n) = z_1 * \dots * z_n$ .

La condición  $z_i \preceq v_j$ , implica que toda caminata entre  $z_i$  y  $z_{i+1}$  tiene etiquetas en el conjunto  $A_j$  construido en el teorema 2.0.8. Entonces la primera condición es equivalente a  $z_1 \preceq_{A_j} \dots \preceq_{A_j} z_n$ .

- Primero supongamos que existe  $\beta \in A_j$ , tal que  $\mathbf{e}_{\beta}(z_1 * \dots * z_n) = z_1 * \dots * \mathbf{e}_{\beta}(z_l) * \dots * z_n \neq \theta$ , en particular esto implica que  $\mathbf{e}_{\beta}(z_l) \neq \theta$ . A partir de esta hipótesis se siguen los siguientes hechos:
  - Para  $i \neq l, i \neq l - 1$ , sigue valiendo  $z_i \preceq z_{i+1}$ .
  - La condición  $z_{l-1} \preceq \mathbf{e}_{\beta}(z_l)$  se sigue trivialmente pues  $z_l \preceq \mathbf{e}_{\beta}(z_l)$ .
  - Como  $\beta \in A_j$  se sigue que  $\mathbf{e}_{\beta}(z_l) \preceq_{A_j} v_j$ , pues  $v_j$  es el máximo del conjunto  $[\alpha_{nc}]_{\preceq_{A_j}}$ .
  - Si  $l \neq n$ , como  $\mathbf{e}_{\beta}(z_1 * \dots * z_n) = z_1 * \dots * \mathbf{e}_{\beta}(z_l * z_{l+1}) * z_{l+2} * \dots * z_n \neq \theta$ , en particular  $\mathbf{e}_{\beta}(z_l) * z_{l+1} = \mathbf{e}_{\beta}(z_l * z_{l+1}) \neq \theta$ . Pero por proposición 1.1.5

$$\mathbf{e}_{\beta}(z_l * z_{l+1}) = \begin{cases} z_l * \mathbf{e}_{\beta}(z_{l+1}) & \text{Si } \exists N \mathbf{e}_{\beta}^N(z_{l+1}) \neq \theta \text{ tal que } \mathbf{f}_{\beta}^N(z_l) = \theta \\ \mathbf{e}_{\beta}(z_l) * z_{l+1} & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.7)$$

si  $\mathbf{e}_{\beta}(z_{l+1}) \neq \theta$ , esto implicaría que  $\mathbf{f}_{\beta}(z_l) \neq \theta$ , pues  $\mathbf{e}_{\beta}(z_l) * z_{l+1} = \mathbf{e}_{\beta}(z_l * z_{l+1}) \neq \theta$ .

- a) Si  $G$  no es de tipo  $C_n$ , y  $\mathbf{f}_{\beta}(z_l) \neq \theta$ , en particular el caso  $SO(2, 2n + 1)$ , se tiene que  $z_l \neq \gamma_0$  pues  $\mathbf{e}_{\beta}(z_{l+1}) \neq \theta$  y por hipótesis  $z_l \not\preceq z_{l+1}$ . Por tanto  $\mathbf{f}_{\beta}(z_l) \neq \theta$  implica que  $\mathbf{e}_{\beta}(z_l) = \theta$ , lo cual contradice que  $\mathbf{e}_{\beta}(z_1 * \dots * z_n) = z_1 * \dots * \mathbf{e}_{\beta}(z_l) * \dots * z_n \neq \theta$ .
- b) Si  $G$  es de tipo  $C_n$ , como  $\mathbf{f}_{\beta}(z_l) \neq \theta$  y  $\mathbf{e}_{\beta}(z_l) \neq \theta$ , esto implica que  $z_l = \gamma_{p+1,p}$  y  $\beta = \alpha_p$  (ver sección 1 capítulo anterior). Por la hipótesis especial sobre  $G$ ,  $z_{l+1} = \gamma_{p,p}$  o  $\gamma_{r,s}$  con  $r > s > p$ . Pero  $\mathbf{e}_{\alpha_p}(z_{l+1}) = \mathbf{e}_{\beta}(z_{l+1}) \neq \theta$ , lo cual es absurdo.

En cualquiera de los casos se llega a una contradicción. En consecuencia  $\mathbf{e}_{\beta}(z_{l+1}) = \theta$  y  $\mathbf{e}_{\beta}(z_l) \neq \theta$ , y también  $z_l \preceq z_{l+1}$  la observación 3.0.3, concluye que  $\mathbf{e}_{\beta}(z_l) \preceq z_{l+1}$ .

Si  $i \neq l$  sea  $\zeta_i := z_i$ , y,  $\zeta_l := \mathbf{e}_\beta(z_l)$ , entonces la hipótesis de inducción aplicada a la  $n$ -tupla  $\zeta_1 \preceq \dots \preceq \zeta_n$ , asegura que existe una sucesión de raíces simples  $\vec{\alpha}$  tal que  $\mathbf{f}_{\vec{\alpha}}(v_j^n) = \zeta_1 * \dots * \zeta_n = \mathbf{e}_\beta(z_1 * \dots * z_n)$ . Así, dado que  $\mathbf{e}_\beta(z_1 * \dots * z_n) \neq \theta$  aplicando en ambos miembros de la igualdad, se tiene  $\mathbf{f}_\beta(\mathbf{f}_{\vec{\alpha}}(v_j^n)) = z_1 * \dots * z_n$ , lo cual concluye la proposición bajo el supuesto que exista tal  $\beta \in A_j$ .

- Para completar la prueba, veamos que existe tal  $\beta \in A_j$  tal que  $\mathbf{e}_\beta(z_1 * \dots * z_n) \neq \theta$ . Si para alguna  $\beta \in A_j$ ,  $\mathbf{e}_\beta(z_1 * \dots * z_n) = z_1 * \dots * \mathbf{e}_\beta(z_l) * \dots * z_n$  con  $l \neq 1$ , esto implica que  $\mathbf{e}_\beta(z_1 * \dots * z_n) \neq \theta$ .

Supongamos entonces que para toda  $\beta \in A_j$  se cumple  $\mathbf{e}_\beta(z_1 * \dots * z_n) = \mathbf{e}_\beta(z_1) * z_2 * \dots * z_n$ . Si  $z_1 = v_j$  entonces para toda  $i$ ,  $z_i = v_j$  lo que contradice que  $0 < s + 1 = \sum_i \vec{\alpha}^i$ . Entonces  $z_1 \not\preceq_{A_j} v_j$ , y en particular existe  $\beta_0 \in A_j$  tal que  $\mathbf{e}_{\beta_0}(z_1) \neq \theta$ , pero por hipótesis  $\mathbf{e}_{\beta_0}(z_1 * \dots * z_n) = \mathbf{e}_{\beta_0}(z_1) * z_2 * \dots * z_n$ , y por tanto  $\mathbf{e}_{\beta_0}(z_1 * \dots * z_n) \neq \theta$ .

□

### 3.2. Órbita de $v_1^{n_1} * \dots * v_k^{n_k}$

Sea  $v_1, v_2 \in \Upsilon$  los dos primeros caminos construidos en el teorema 2.0.8. A continuación analizaremos la órbita de  $\mathbf{f}$  sobre  $v_1 * v_2$ .

Para un camino  $\zeta$  definimos los conjuntos

$$\begin{aligned} F_\zeta^{\text{sup}} &= \{\alpha \in \Pi_c \mid \exists \eta, \zeta \preceq \eta, \mathbf{f}_\alpha(\eta) \neq \theta\} & E_\zeta^{\text{sup}} &= \{\alpha \in \Pi_c \mid \exists \eta, \zeta \preceq \eta, \mathbf{e}_\alpha(\eta) \neq \theta\} \\ F_\zeta^{\text{inf}} &= \{\alpha \in \Pi_c \mid \exists \eta, \eta \preceq \zeta, \mathbf{f}_\alpha(\eta) \neq \theta\} & E_\zeta^{\text{inf}} &= \{\alpha \in \Pi_c \mid \exists \eta, \eta \preceq \zeta, \mathbf{e}_\alpha(\eta) \neq \theta\} \end{aligned}$$

En términos generales, los elementos de  $E_\zeta^{\text{sup}}$  son aquellas raíces para las cuales existe un camino en el grafo, desde  $\zeta$  a  $v_1$  que pasa por  $\alpha$ ; mientras que el conjunto  $F_\zeta^{\text{sup}}$  no es más que la unión de los conjuntos  $F_{\mathbf{f}_\beta(\zeta)}^{\text{sup}}$ , con  $\beta$  raíz simple. Similarmente,  $F_\zeta^{\text{inf}}$  es el conjunto de raíces tales que existe un camino en el grafo desde  $\alpha_{nc}$  a  $\zeta$  que pasa por  $\alpha$  y  $E_\zeta^{\text{inf}}$  es la unión de los  $F_{\mathbf{e}_\beta(\zeta)}^{\text{sup}}$ , con  $\beta$  simple.

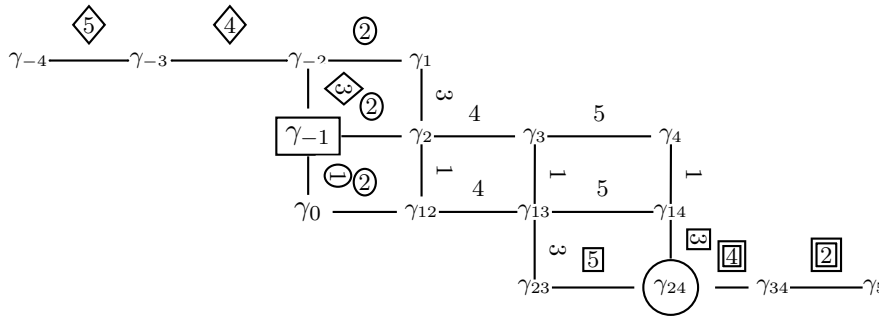
**Ejemplo 3.2.1.** Sea  $G$  de tipo  $E_6$ .

- Para el camino  $\gamma_{24}$  los elementos de  $E_{\gamma_{24}}^{\text{inf}}$  son las raíces correspondientes a las etiquetas marcadas con doble marco rectangular, mientras que  $F_{\gamma_{24}}^{\text{inf}}$  son las raíces en  $E_{\gamma_{24}}^{\text{inf}}$  junto con las raíces con etiqueta marcada con un marco rectangular. Es decir,  $E_{\gamma_{24}}^{\text{inf}} = \{\alpha_4, \alpha_2\}$  y  $F_{\gamma_{24}}^{\text{inf}} = \{\alpha_4, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5\}$ .
- Si tomamos el camino  $\gamma_{-1}$ , los elementos de  $F_{\gamma_{-1}}^{\text{sup}}$  son las raíces correspondientes a las etiquetas marcadas con marco en forma de rombo, mientras que  $E_{\gamma_{-1}}^{\text{sup}}$  son las raíces en  $F_{\gamma_{-1}}^{\text{sup}}$  junto con las raíces con etiqueta marcada con marco circular. Es decir,  $F_{\gamma_{-1}}^{\text{sup}} = \{\alpha_5, \alpha_4, \alpha_3\}$  y  $E_{\gamma_{-1}}^{\text{sup}} = \{\alpha_5, \alpha_4, \alpha_3, \alpha_1, \alpha_2\}$

Nótese que si  $\mu \preceq \zeta$ , entonces

$$\begin{aligned} E_\zeta^{\text{sup}} &\subseteq F_\zeta^{\text{sup}} & E_\zeta^{\text{sup}} &\subseteq E_\mu^{\text{sup}} & F_\zeta^{\text{sup}} &\subseteq F_\mu^{\text{sup}} \\ F_\mu^{\text{inf}} &\subseteq E_\mu^{\text{inf}} & E_\mu^{\text{inf}} &\subseteq E_\zeta^{\text{inf}} & F_\mu^{\text{inf}} &\subseteq F_\zeta^{\text{inf}} \end{aligned}$$

Si  $\mathbf{f}_{\alpha_{i1}} \dots \mathbf{f}_{\alpha_{ik}}(v_1 * v_2) = \zeta_1 * z_1$ , entonces naturalmente  $\zeta_1 \preceq v_1$  y  $\alpha_{nc} \preceq z_1 \preceq v_2$


 Figura 3.2:  $F^{\text{sup}}$ ,  $F^{\text{inf}}$ ,  $E^{\text{sup}}$ ,  $E^{\text{inf}}$ 

**Lema 3.2.2.** Sea  $\mathbf{f}_{\vec{\alpha}}(\underbrace{v_1 * \dots * v_1}_m * \underbrace{v_2 * \dots * v_2}_n) = \zeta_m * \dots * \zeta_1 * z_n * \dots * z_1$ , entonces  $F_{\zeta_i}^{\text{sup}} \cap F_{z_i}^{\text{inf}} = \emptyset$  y  $E_{\zeta_i}^{\text{sup}} \cap E_{z_i}^{\text{inf}} = \emptyset$  para todo  $i \leq n$ .

*Demostración.* Inducción sobre  $s = |\vec{\alpha}|$ .

Si  $s = 1$ ,  $\mathbf{f}_{\vec{\alpha}}(\underbrace{v_1 * \dots * v_1}_m * \underbrace{v_2 * \dots * v_2}_n) = \underbrace{v_1 * \dots * v_1}_m * \underbrace{v_2 * \dots * v_2}_{n-1} * \mathbf{f}_{\alpha}(v_2)$ , en este caso  $F_{v_1}^{\text{sup}} = \{\beta \mid \mathbf{f}_{\beta}(v_1) \neq \theta\} = W_1$ , además  $E_{v_1}^{\text{sup}} = \emptyset$ , así que  $E_{v_1}^{\text{sup}} \cap E_{v_2}^{\text{inf}} = E_{v_1}^{\text{sup}} \cap E_{\mathbf{f}_{\alpha}(v_2)}^{\text{inf}} = \emptyset$ .

Si  $\mathbf{f}_{\beta}(v_1) \neq \theta$  por la construcción de  $v_2$ ,  $\mathbf{f}_{\beta}(v_2) = \theta$ , y además  $\beta \notin F_{v_2}^{\text{inf}}$ , luego  $F_{v_1}^{\text{sup}} \cap F_{v_2}^{\text{inf}} = \emptyset$ . Dado que  $\mathbf{f}_{\alpha}(v_2) \preceq v_2$ , se sigue que  $F_{v_1}^{\text{sup}} \cap F_{\mathbf{f}_{\alpha}(v_2)}^{\text{inf}} \subseteq F_{v_1}^{\text{sup}} \cap F_{v_2}^{\text{inf}} = \emptyset$ .

Supongamos el lema válido para toda sucesión tal que  $|\vec{\alpha}| = s$ .

Sea  $\vec{\alpha}$  una sucesión de longitud  $s$  tal que  $\theta \neq \mathbf{f}_{\vec{\alpha}}(v_1^m * v_2^n) = \zeta_m * \dots * \zeta_1 * z_n * \dots * z_1$  y sea  $\beta$  simple tal que  $\mathbf{f}_{\beta}(\zeta_m * \dots * \zeta_1 * z_n * \dots * z_1) \neq \theta$ . Con el fin de simplificar un poco la notación, omitiremos el asterisco para la concatenación yuxtaponiendo simplemente los caminos; así  $z_2 z_1$  significará el camino  $z_2 * z_1$ .

1. Si  $\mathbf{f}_{\beta}(\zeta_m \dots \zeta_1 z_n \dots z_1) = \zeta_m \dots \zeta_1 z_n \dots \mathbf{f}_{\beta}(z_i) \dots z_1$ , para algún  $i$ , como  $\mathbf{f}_{\beta}(z_j) \preceq z_j$ , entonces al igual que en el caso anterior y por hipótesis de inducción

$$F_{\zeta_j}^{\text{sup}} \cap F_{\mathbf{f}_{\beta}(z_j)}^{\text{inf}} \subseteq F_{\zeta_j}^{\text{sup}} \cap F_{z_j}^{\text{inf}} = \emptyset, \text{ y, } E_{\zeta_j}^{\text{sup}} \cap E_{\mathbf{f}_{\beta}(z_j)}^{\text{inf}} \subseteq E_{\zeta_j}^{\text{sup}} \cap E_{z_j}^{\text{inf}} = \emptyset$$

Esto prueba el lema en este caso.

2. Supongamos  $\mathbf{f}_{\beta}(\zeta_m \dots \zeta_1 z_n \dots z_1) = \zeta_m \dots \mathbf{f}_{\beta}(\zeta_i) \dots \zeta_1 z_n \dots z_1$ . Si  $i > n$  no hay nada que probar. Supongamos que  $i \leq n$ , basta probar que  $\emptyset = E_{\mathbf{f}_{\beta}(\zeta_i)}^{\text{sup}} \cap E_{z_i}^{\text{inf}} = F_{\mathbf{f}_{\beta}(\zeta_i)}^{\text{sup}} \cap F_{z_i}^{\text{inf}}$

- a) Demostremos que  $\emptyset = E_{\mathbf{f}_{\beta}(\zeta_i)}^{\text{sup}} \cap E_{z_i}^{\text{inf}}$ : Como  $E_{\mathbf{f}_{\beta}(\zeta_i)}^{\text{sup}} = E_{\zeta_i}^{\text{sup}} \cup \{\beta\}$ , por hipótesis de inducción  $E_{\zeta_i}^{\text{sup}} \cap E_{z_i}^{\text{inf}} = \emptyset$ . Supongamos que  $\beta \in E_{z_i}^{\text{inf}}$ , como  $\beta \in F_{\zeta_i}^{\text{sup}}$  y  $F_{\zeta_i}^{\text{sup}} \cap F_{z_i}^{\text{inf}} = \emptyset$  entonces  $\beta \in E_{z_i}^{\text{inf}} \setminus F_{z_i}^{\text{inf}}$ , de donde se tiene  $\mathbf{e}_{\beta}(z_i) \neq \theta$  y también  $\mathbf{f}_{\beta}(\zeta_i) \neq \theta$ . Ahora,  $\mathbf{f}_{\beta}(\zeta_m \dots \zeta_1 z_n \dots z_1) = \zeta_m \dots \mathbf{f}_{\beta}(\zeta_i) \dots \zeta_1 z_n \dots z_1$ , entonces:

$$\mathbf{f}_{\beta}((\zeta_m \dots \zeta_{i+1})(\zeta_i \dots \zeta_1 z_n \dots z_i)(z_{i-1} \dots z_1)) = (\zeta_m \dots \zeta_{i+1})\mathbf{f}_{\beta}(\zeta_i \dots \zeta_1 z_n \dots z_i)(z_{i-1} \dots z_1),$$

y también  $\mathbf{f}_{\beta}(\zeta_i \zeta_{i-1} \dots \zeta_1 z_n \dots z_i) = \mathbf{f}_{\beta}(\zeta_i) \zeta_{i-1} \dots \zeta_1 z_n \dots z_i \neq \theta$ . Así mismo

$$\mathbf{f}_{\beta}((\zeta_i \dots \zeta_1 z_n \dots z_{i+1})z_i) = \mathbf{f}_{\beta}(\zeta_i \dots \zeta_1 z_n \dots z_{i+1})z_i,$$

por lo tanto existe un  $N$  tal que  $\mathbf{f}_\beta^N(\zeta_i \cdots \zeta_1 z_n \cdots z_{i+1}) \neq \theta$  y  $\mathbf{e}_\beta^N(z_i) = \theta$ ; dado que  $\mathbf{e}_\beta(z_i) \neq \theta$  entonces  $N \geq 2$ ; como  $G$  no es de tipo  $C_n$ ,  $\mathbf{f}_\beta^2 = \theta$ , luego existe  $\mathbf{f}_\beta(z_j) \neq \theta$  para algún  $j > i$  o  $\mathbf{f}_\beta(\zeta_j) \neq \theta$  para algún  $j < i$ .

El primer caso no es posible puesto que  $\beta \notin F_{z_i}^{\text{inf}}$  y si  $j > i$ ,  $F_{z_i}^{\text{inf}} \supseteq F_{z_j}^{\text{inf}}$ , luego  $\beta \notin F_{z_j}^{\text{inf}}$  y en particular  $\mathbf{f}_\beta(z_j) = \theta$ . Podemos suponer entonces que  $\mathbf{f}_\beta(\zeta_j) \neq \theta$  para algún  $j < i$ . Tomemos  $j_1$  el máximo para esta propiedad. Entonces  $\beta \in F_{\zeta_{j_1}}^{\text{sup}}$  luego las condiciones  $F_{\zeta_i}^{\text{sup}} \cap F_{z_i}^{\text{inf}} = \emptyset$  y  $\beta \in E_{z_i}^{\text{inf}} \subseteq E_{z_{j_1}}^{\text{inf}}$  implican  $\beta \in E_{z_{j_1}}^{\text{inf}} \setminus F_{z_{j_1}}^{\text{inf}}$ , y por tanto  $\mathbf{e}_\beta(z_{j_1}) \neq \theta$  y también  $\mathbf{f}_\beta(\zeta_{j_1}) \neq \theta$ .

Ahora repetimos el argumento anterior, esto es,

$$\mathbf{f}_\beta(\zeta_m \cdots \zeta_1 z_n \cdots z_1) = \zeta_m \cdots \mathbf{f}_\beta(\zeta_i) \cdots \zeta_1 z_n \cdots z_1,$$

implica

$$\mathbf{f}_\beta(\zeta_m \cdots \zeta_{i+1}(\zeta_i \cdots \zeta_1 z_n \cdots z_i \cdots z_{j_1}) z_{j_1-1} \cdots z_1) = (\zeta_m \cdots \zeta_{i+1}) \mathbf{f}_\beta(\zeta_i \cdots \zeta_1 z_n \cdots z_{j_1})(z_{j_1-1} \cdots z_1),$$

entonces  $\theta \neq \mathbf{f}_\beta((\zeta_i \cdots \zeta_1 z_n \cdots z_{i+1}) z_i \cdots z_{j_1}) = \mathbf{f}_\beta(\zeta_i \cdots \zeta_1 z_n \cdots z_{i+1})(z_i \cdots z_{j_1})$ , esto dice que existe un  $M > 0$  tal que  $\mathbf{f}_\beta^M(\zeta_i \cdots \zeta_1 z_n \cdots z_{i+1}) \neq \theta$  y  $\mathbf{e}_\beta^M(z_i \cdots z_{j_1}) = \theta$ . Dado que  $\beta \notin F_{z_k}^{\text{inf}}$ , si  $k < j_1$ , y  $\mathbf{e}_\beta(z_i) \neq \theta$ ,  $\mathbf{e}_\beta(z_{j_1}) \neq \theta$ , entonces  $M \geq 3$ , luego existe un  $l$  distinto de  $i, j_1$  tal que  $\mathbf{f}_\beta(\zeta_l) \neq \theta$ . Por la maximalidad de  $j_1$ ,  $i > j_1 > l$ ; tomando  $j_2$  maximal con esta propiedad y repitiendo el mismo argumento se concluye que  $\mathbf{e}_\beta(z_{j_2}) \neq \theta$  y también  $\mathbf{f}_\beta(\zeta_{j_2}) \neq \theta$ . Procediendo iterativamente, obtenemos una sucesión  $i = j_0 > j_1 > \cdots > j_k$ , tales que  $\mathbf{e}_\beta(z_s) \neq \theta$  si y solo si  $s = j_l$  y también  $\mathbf{f}_\beta(\zeta_{j_l}) \neq \theta$ . Entonces  $j_k > 1$  es minimal tal que  $\mathbf{e}_\beta(z_s) \neq \theta$  y  $\mathbf{f}_\beta(\zeta_s) \neq \theta$ , pero siguiendo el mismo argumento anterior podemos encontrar otro  $l < j_k$  tal que  $\mathbf{e}_\beta(z_l) \neq \theta$  y  $\mathbf{f}_\beta(\zeta_l) \neq \theta$ , lo cual es absurdo.

Por lo tanto  $\{\beta\} \cap E_{z_i}^{\text{inf}} = \emptyset$ ; esto concluye que  $E_{\mathbf{f}_\beta(\zeta_i)}^{\text{sup}} \cap E_{z_i}^{\text{inf}} = \emptyset$ .

- b)  $F_{\mathbf{f}_\beta(\zeta_i)}^{\text{sup}} \cap F_{z_i}^{\text{inf}} = \emptyset$ : El conjunto  $F_{\mathbf{f}_\beta(\zeta_i)}^{\text{sup}}$  consta precisamente del conjunto  $F_{\zeta_i}^{\text{sup}}$  unido con las raíces  $\alpha_0$  tales que  $\mathbf{f}_{\alpha_0} \mathbf{f}_\beta(\zeta_i) \neq \theta$ , y por hipótesis de inducción  $F_{\zeta_i}^{\text{sup}} \cap F_{z_i}^{\text{inf}} = \emptyset$ , tomemos entonces  $\alpha_0$  simple tal que  $\mathbf{f}_{\alpha_0} \mathbf{f}_\beta(\zeta_i) \neq \theta$ , y tal que  $\alpha_0 \notin F_{\zeta_i}^{\text{sup}}$ ; en particular  $\mathbf{f}_{\alpha_0}(\zeta_i) = \theta$ , por tanto  $\mathbf{f}_{\alpha_0} \mathbf{f}_\beta(\zeta_i) \neq \mathbf{f}_\beta \mathbf{f}_{\alpha_0}(\zeta_i) = \theta$ . Entonces  $\alpha_0$  y  $\beta$  son raíces simples no ortogonales, luego son adyacentes en el diagrama de Dynkin. Una observación a los grafos obtenidos permite ver que si dos raíces simples  $\eta_1, \eta_2$  son adyacentes y dos vértices están unidos por una de dichas raíces, digamos  $\mu_1 \xrightarrow{\eta} \mu_2$  entonces  $\mathbf{e}_{\eta_2}(\mu_j) \neq \theta$ , o bien  $\mathbf{f}_{\eta_2}(\mu_j) \neq \theta$  para algún  $j \in \{1, 2\}$  (o ambos).

Con esto en mente supongamos que  $\alpha_0 \in F_{z_i}^{\text{inf}}$ ; entonces existe un  $\mu \preceq z_i$  tal que  $\mathbf{f}_{\alpha_0}(\mu) \neq \theta$ , así  $\mu \xrightarrow{\alpha_0} \mathbf{f}_{\alpha_0}(\mu)$  permite concluir una de las siguientes condiciones

$$\mathbf{e}_\beta(\mu) \neq \theta, \quad \mathbf{e}_\beta(\mathbf{f}_{\alpha_0}(\mu)) \neq \theta, \quad \mathbf{f}_\beta(\mu) \neq \theta, \quad \mathbf{f}_\beta(\mathbf{f}_{\alpha_0}(\mu)) \neq \theta$$

Dado que  $\mathbf{f}_{\alpha_0}(\mu) \preceq \mu \preceq z_i$ , las primeras dos condiciones concluyen que  $\beta \in E_{z_i}^{\text{inf}}$ , mientras que las últimas dos deducen  $\beta \in F_{z_i}^{\text{inf}}$ , pero  $\beta \in F_{\zeta_i}^{\text{sup}}$  lo cual contradice la hipótesis de inducción. Supongamos  $\beta \in E_{z_i}^{\text{inf}}$ , dado que

$$\mathbf{f}_\beta(\zeta_m \cdots \zeta_1 z_n \cdots z_1) = \zeta_m \cdots \mathbf{f}_\beta(\zeta_i) \cdots \zeta_1 z_n \cdots z_1$$



hemos probado anteriormente que  $E_{\mathbf{f}_\beta(\zeta_i)}^{\text{sup}} \cap E_{z_i}^{\text{inf}} = \emptyset$ , lo que implica  $\beta \notin E_{\mathbf{f}_\beta(\zeta_i)}^{\text{sup}}$  lo cual es claramente absurdo, puesto que  $\mathbf{f}_\beta(\zeta_i) \preceq \mathbf{f}_\beta(\zeta_i)$  y  $\mathbf{e}_\beta \mathbf{f}_\beta(\zeta_i) = \zeta_i \neq \theta$ .

Por tanto,  $\alpha_0 \notin F_{z_i}^{\text{inf}}$ , luego  $F_{\mathbf{f}_\beta(\zeta_i)}^{\text{sup}} \cap F_{z_i}^{\text{inf}} = \emptyset$  y la proposición queda demostrada.  $\square$

Este lema dice que la órbita de  $v_1 * v_2$  consiste en caminos  $\zeta_1 * \zeta_2$  tales que hay un camino sobre el grafo de  $\zeta_m$  a  $v_1$ , y otro de  $\alpha_{nc}$  a  $\zeta_2$ , de tal manera que las raíces que aparecen en el segundo no aparecen en el primero ni están conectadas con  $\zeta_m$ . Por ejemplo, si  $G = EIII$  y  $\zeta_m = \gamma_{34}$ , entonces el único camino de  $\zeta_m$  a  $\gamma_5$  pasa por la raíz  $\{\alpha_2\}$ , y a la vez  $\zeta_m$  está conectada también con  $\{\alpha_4\}$ , luego  $E_{\zeta_m} = \{\alpha_4, \alpha_2\}$ . Un camino de  $\alpha_{nc} = \gamma_{-4}$  a un vértice cualquiera, comienza con  $\alpha_5$  y a continuación pasa por  $\alpha_4$  que está en  $E_{\zeta_m}$ , por tanto solo consideramos los vértices  $\alpha_{nc}, \gamma_{-3}$ , es decir, si  $\mathbf{f}_{\vec{\alpha}}(\gamma_5 * \gamma_0) = \gamma_{34} * \zeta_2$  (ver la notación en el caso EIII) los únicos posibles  $\zeta_2$  son  $\alpha_{nc} = \gamma_{-4}, \gamma_{-3}$ . Mostraremos que estas soluciones, de hecho ocurren.

Para el caso  $\gamma_{24}$  los caminos (en realidad solo hay uno) a  $\gamma_5$  pasan por las raíces  $\{\alpha_4, \alpha_2\}$ , y  $\gamma_{24}$  también está conectado con  $\{\alpha_3, \alpha_5\}$ , luego  $E_{v_{24}}\{\alpha_4, \alpha_2, \alpha_5, \alpha_3\}$ , luego si  $\mathbf{f}_{\vec{\alpha}}(\gamma_5 * \gamma_0) = \gamma_{24} * \zeta_2$  y como  $\gamma_{-4}$  está conectado a  $\alpha_5$ , el único posible  $\zeta_2$  es precisamente  $\gamma_{-4}$ .

Un elemento de la órbita de  $v_1^m v_2^n$  consiste en un elemento de la órbita de  $v_1^n$  concatenado con uno de la órbita de  $v_2^n$ ; sin embargo no todas de las dichas concatenaciones dan precisamente un elemento de la órbita de  $v_1^m v_2^n$ . El siguiente resultado calcula exactamente dichos elementos

**Proposición 3.2.3.** Si  $\mathbf{f}_{\vec{\eta}_1}(v_1 \dots v_1) = \zeta_m \dots \zeta_1$ ,  $\mathbf{f}_{\vec{\eta}_2}(v_2 \dots v_2) = z_n \dots z_1$  para algún  $\vec{\eta}_2, \vec{\eta}_1$ , son tales que  $F_{\zeta_i}^{\text{sup}} \cap F_{z_i}^{\text{inf}} = \emptyset$  y  $E_{\zeta_i}^{\text{sup}} \cap E_{z_i}^{\text{inf}} = \emptyset$  para todo  $i \leq n$ . Entonces existe  $\vec{\alpha}$  tal que  $\mathbf{f}_{\vec{\alpha}}(v_1 \dots v_1 v_2 \dots v_2) = \zeta_m \dots \zeta_1 z_n \dots z_1$

*Demostración.* Probaremos el resultado por inducción sobre  $s = |\vec{\eta}_1| + |\vec{\eta}_2|$ . Si  $s = 1$  quiere decir que  $v_1 = \zeta_i, v_2 = z_i$  para todo  $i \neq 1$ , y  $v_1 = \zeta_m, \mathbf{f}_\alpha v_2 = z_n$  o bien  $\mathbf{f}_\alpha v_1 = \zeta_m, v_2 = z_n$ , pero  $\alpha \in E_{\mathbf{f}_\alpha v_1}^{\text{sup}} \cap E_{v_2}^{\text{inf}}$ , por consiguiente solo basta considerar el primero de los casos. En este caso  $\mathbf{f}_\alpha(v_1^m v_2^n) = v_1^m \mathbf{f}_\alpha(v_2^n) = \zeta_m \dots \zeta_1 z_n \dots z_1$ .

Sean  $\mathbf{f}_{\vec{\eta}_1}(v_1^m) = \zeta_m \dots \zeta_1$  y  $\mathbf{f}_{\vec{\eta}_2}(v_2^n) = z_n \dots z_1$  dos caminos tales que para cada  $i$ ,  $F_{\zeta_i}^{\text{sup}} \cap F_{z_i}^{\text{inf}} = \emptyset = E_{\zeta_i}^{\text{sup}} \cap E_{z_i}^{\text{inf}}$ , y  $1 + s = |\vec{\eta}_1| + |\vec{\eta}_2|$ .

En primer lugar, veamos que existen raíces tales que  $\theta \neq \mathbf{e}_\alpha(\zeta_m \dots \zeta_1 z_n \dots z_1)$ . En otro caso,  $\theta = \mathbf{e}_\alpha(\zeta_m \dots \zeta_1 z_n \dots z_1)$  para toda raíz simple  $\alpha$ , por tanto necesariamente  $\theta = \mathbf{e}_\alpha(\zeta_m \dots \zeta_1 z_n \dots z_1) = \mathbf{e}_\alpha(\zeta_m \dots \zeta_1) z_n \dots z_1$ , esto implica que  $\mathbf{e}_\alpha(\zeta_m \dots \zeta_1) = \theta$  para toda  $\alpha$  simple. Dado que  $\mathbf{f}_{\vec{\eta}_1}(v_1^m) = \zeta_m \dots \zeta_1$ , y  $v_1^m$  es un camino contenido en la cámara dominante con peso entero, el único elemento de la órbita de  $v_1^m$  por  $\mathbf{f}$  tal que  $\mathbf{e}_\alpha(\zeta_m \dots \zeta_1) = \theta$  para todo  $\alpha$  es  $v_1^m$ . Entonces  $\zeta_m \dots \zeta_1 = v_1^m$ .

Sea  $\beta$  una raíz simple tal que  $\mathbf{f}_\beta(v_1) \neq \theta$ , de la construcción de  $v_2$  se tiene que  $\beta \notin F_{v_2}^{\text{inf}}$ . Como  $\mathbf{f}_{\alpha_{i1}} \dots \mathbf{f}_{\alpha_{in}}(v_2^n) = z_n \dots z_1 \neq \theta$ , para una sucesión de raíces simples  $(\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in})$ , entonces si  $\tilde{z}_1 \dots \tilde{z}_n = \mathbf{e}_{\alpha_{i1}}(z_n \dots z_1) \neq \theta$ , puesto que  $\mathbf{f}_{\alpha_{i1}}(\tilde{z}_1 \dots \tilde{z}_n) = z_n \dots z_1 \neq \theta$ , existe  $\tilde{z}_i \preceq v_2$  tal que  $\mathbf{f}_{\alpha_{i1}}(\tilde{z}_i) \neq \theta$  y por tanto  $\alpha_{i1} \in F_{\tilde{z}_i}^{\text{inf}}$ .

Además  $\mathbf{e}_{\alpha_{i1}}(v_1^m z_n \dots z_1) = \mathbf{e}_{\alpha_{i1}}(v_1^m) z_n \dots z_1$  solo en el caso que  $\mathbf{f}_{\alpha_{i1}}(v_1^m) \neq \theta$ , luego  $\alpha_{i1} \in F_{v_1}^{\text{sup}} \cap F_{\tilde{z}_i}^{\text{inf}} \subseteq F_{v_1}^{\text{sup}} \cap F_{v_2}^{\text{inf}} = \emptyset$ , lo cual es absurdo.

El anterior análisis concluye que existe  $\alpha_0$  tal que  $\theta \neq \mathbf{e}_{\alpha_0}(\zeta_m \dots \zeta_1 z_n \dots z_1)$ .

1. Si existe una raíz simple  $\alpha_0$  tal que

$$\theta \neq \mathbf{e}_{\alpha_0}(\zeta_m \cdots \zeta_1 z_n \cdots z_1) = \zeta_m \cdots \mathbf{e}_{\alpha_0}(\zeta_{i_0}) \cdots \zeta_1 z_n \cdots z_1,$$

entonces  $\mathbf{f}_{\vec{\eta}_2}(v_2^n) = z_n \cdots z_1$ ;  $\mathbf{e}_{\alpha_0} \mathbf{f}_{\vec{\eta}_1}(v_1^m) = \zeta_m \cdots \mathbf{e}_{\alpha_0}(\zeta_{i_0}) \cdots \zeta_1$ , y podemos tomar  $\vec{\eta}_1 = (\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_s})$ , de modo de  $\alpha_{i_1} = \alpha_0$ , luego si  $\vec{\tau} = (\dots, \alpha_{i_s})$ , entonces  $\mathbf{f}_{\vec{\tau}}(v_1^n) = \zeta_m \cdots \mathbf{e}_{\alpha_0}(\zeta_{i_0}) \cdots \zeta_1$  y  $|\vec{\eta}_2| + |\vec{\tau}| = n$ . Además, para todo  $j \neq i_0$ ,  $F_{\zeta_j}^{\text{sup}} \cap F_{z_j}^{\text{inf}} = \emptyset = E_{\zeta_j}^{\text{sup}} \cap E_{z_j}^{\text{inf}}$ , y en el caso  $i_0$ ,  $F_{\mathbf{e}_{\alpha_0} \zeta_i}^{\text{sup}} \cap F_{z_i}^{\text{inf}} \subseteq F_{\zeta_i}^{\text{sup}} \cap F_{z_i}^{\text{inf}} = \emptyset$ ; y similarmente  $E_{\mathbf{e}_{\alpha_0} \zeta_i}^{\text{sup}} \cap E_{z_j}^{\text{inf}} \subseteq E_{\zeta_i}^{\text{sup}} \cap E_{z_i}^{\text{inf}} = \emptyset$ .

Por hipótesis de inducción existe una sucesión  $\vec{\alpha}$  tal que

$$\mathbf{f}_{\vec{\alpha}}(v_1^m v_2^n) = \zeta_m \cdots \mathbf{e}_{\alpha_0} \zeta_{i_0} \cdots \zeta_1 z_n \cdots z_1 = \mathbf{e}_{\alpha_0}(\zeta_m \cdots \zeta_1 z_n \cdots z_1)$$

y por tanto  $\mathbf{f}_{\alpha_0} \mathbf{f}_{\vec{\alpha}}(v_1^m v_2^n) = \zeta_m \cdots \zeta_1 z_n \cdots z_1$

2. Supongamos que para toda raíz  $\alpha$ , tal que  $\theta \neq \mathbf{e}_{\alpha}(\zeta_m \cdots \zeta_1 z_n \cdots z_1)$  se tiene que  $\mathbf{e}_{\alpha}(\zeta_m \cdots \zeta_1 z_n \cdots z_1) = \zeta_m \cdots \zeta_1 \mathbf{e}_{\alpha}(z_n \cdots z_1)$ . Si  $\zeta_m \cdots \zeta_1 \neq v_1^m$ , sea  $k$  el mínimo tal que  $\zeta_i \neq v_1$ ; entonces  $E_{\zeta_k}^{\text{sup}} \neq \emptyset$ . Sea  $\alpha_0 \in E_{\zeta_k}^{\text{sup}}$ , entonces  $\mathbf{e}_{\alpha_0}(\zeta_m \cdots \zeta_1 z_n \cdots z_1) = \zeta_m \cdots \zeta_1 \mathbf{e}_{\alpha_0}(z_n \cdots z_1)$ , o bien  $\theta = \mathbf{e}_{\alpha_0}(\zeta_m \cdots \zeta_1 z_n \cdots z_1)$ , en cuyo caso  $\mathbf{e}_{\alpha_0}(\zeta_m \cdots \zeta_1) = \theta$ . Si  $\mathbf{e}_{\alpha}(\zeta_m \cdots \zeta_1 z_n \cdots z_1) = \zeta_m \cdots \zeta_1 \mathbf{e}_{\alpha_0}(z_n \cdots z_1)$ , entonces  $\mathbf{e}_{\alpha_0}(z_n \cdots z_1) \neq \theta$  no puede ser de la forma  $\mathbf{e}_{\alpha_0}(z_n \cdots z_k) z_{k-1} \cdots z_1$ , pues en este caso  $\mathbf{e}_{\alpha_0} z_j \neq \theta$ , para algún  $j \geq k$ , de lo cual  $\alpha_0 \in E_{z_j}^{\text{inf}} \cap E_{\zeta_k}^{\text{sup}} \subseteq E_{z_j}^{\text{inf}} \cap E_{\zeta_j}^{\text{sup}} = \emptyset$ , lo cual es absurdo.

Por tanto  $\theta \neq \mathbf{e}_{\alpha_0}(z_n \cdots z_k z_{k-1} \cdots z_1) = z_n \cdots \mathbf{e}_{\alpha_0}(z_j) \cdots z_1$ , para algún  $j_0 < k$ , y  $\mathbf{e}_{\alpha_0}(z_j) \preceq v_2$ , pues  $z_n \cdots \mathbf{e}_{\alpha_0}(z_j) \cdots z_1$  está en la órbita de  $v_2^n$ . Así, para  $j \neq j_0$ ,  $F_{\zeta_j}^{\text{sup}} \cap F_{z_j}^{\text{inf}} = \emptyset$ ;  $E_{\zeta_j}^{\text{sup}} \cap E_{z_j}^{\text{inf}} = \emptyset$ , y para el caso  $j_0$ , como  $\zeta_{j_0} = v_1$   $F_{\zeta_{j_0}}^{\text{sup}} \cap F_{\mathbf{e}_{\alpha_0} z_{j_0}}^{\text{inf}} \subseteq F_{v_1}^{\text{sup}} \cap F_{v_2}^{\text{inf}} = \emptyset$ ; por hipótesis de inducción existe una sucesión  $\vec{\alpha}$  tal que

$$\mathbf{f}_{\vec{\alpha}}(v_1^m v_2^n) = \zeta_m \cdots \zeta_1 z_n \cdots \mathbf{e}_{\alpha_0} z_j \cdots z_1 = \mathbf{e}_{\alpha}(\zeta_m \cdots \zeta_1 z_n \cdots z_1)$$

y por tanto  $\mathbf{f}_{\alpha_0} \mathbf{f}_{\vec{\alpha}}(v_1^m v_2^n) = \zeta_m \cdots \zeta_1 z_n \cdots z_1$

□

**Teorema 3.2.4.** Sean  $n_1 \geq \dots \geq n_k \geq 0$  enteros no negativos. Sea

$$\pi_{(n_1, \dots, n_k)_{\succeq}} = \{\eta \mid \eta \preceq v_1^{n_1} * \dots * v_k^{n_k}\}$$

la órbita de  $v_1^{n_1} * \dots * v_k^{n_k}$  por los operadores  $\mathbf{f}$ . Entonces  $\pi_{(n_1, \dots, n_k)_{\succeq}}$  es igual a los caminos  $\mathfrak{z}_1 * \mathfrak{z}_2 * \dots * \mathfrak{z}_k$  que satisfacen:

- 1)  $\mathfrak{z}_j = \zeta_{j, n_j} * \dots * \zeta_{j, 1}$  y cada  $\zeta_{j, l} \preceq v_j$
- 2)  $\mathfrak{z}_j = \zeta_{j, n_j} * \dots * \zeta_{j, 1} \preceq v_j^{n_j}$  para todo  $j \leq k$ .
- 3)  $E_{\zeta_{j, i}}^{\text{sup}} \cap E_{\zeta_{j+1, i}}^{\text{inf}} = \emptyset = F_{\zeta_{j, i}}^{\text{sup}} \cap F_{\zeta_{j+1, i}}^{\text{inf}}$  para todo  $1 \leq i \leq n_{j+1}$ .

**Observación 3.2.5.** La proposición 3.2.3 junto con el lema 3.2.2 demuestra el teorema para  $n_3 = \dots = n_k = 0$ . El teorema es una consecuencia de la proposición anterior y usa las mismas técnicas. La demostración requiere de la siguiente observación. Si  $G$  es de tipo hermitiano y construimos la sucesión  $v_1, \dots, v_k$  del teorema 2.0.8 del capítulo anterior, entonces  $v_2, \dots, v_k$  es también la sucesión del teorema 2.0.8 para cierto grupo  $G'$  de tipo hermitiano.

**Ejemplo 3.2.6.** 1. Si  $G = Sp(n, \mathbb{R})$  la sucesión  $(v_1, \dots, v_k) = (\epsilon_1 * \epsilon_1, \dots, \epsilon_n * \epsilon_n)$ , entonces  $(v_2, \dots, v_k) = (\epsilon_2 * \epsilon_2, \dots, \epsilon_n * \epsilon_n)$  es la sucesión del teorema 2.0.8 para  $G' = Sp(n-1, \mathbb{R})$  tomando como raíces simples de  $\mathfrak{g}'$ ,  $\{\epsilon_2 - \epsilon_3, \dots, \epsilon_{n-1} - \epsilon_n, 2\epsilon_n\}$  y la única raíz simple no compacta de  $\mathfrak{g}'$  es  $\alpha'_{nc} = 2\epsilon_n$ . Entonces, el grafo obtenido en el capítulo 3 para  $\mathfrak{g}'$  es isomorfo al subgrafo (re-etiquetando las raíces)  $([\alpha_{nc}]_{\preceq A_2}, A_2)$  de  $([\alpha_{nc}]_{\preceq}, A_1)$ . Los caminos  $v'_1, \dots, v'_{k-1}$  corresponden mediante el isomorfismo a  $v_2, \dots, v_k$ .

2. Si  $G$  es localmente isomorfo a  $EVII$ , tenemos  $(v_1, v_2, v_3) = (\epsilon_8 - \epsilon_7, \gamma_5, \gamma_{-5})$ . En este caso, el subgrafo  $([\alpha_{nc}]_{\preceq A_2}, A_2)$  es isomorfo al grafo de  $G'$  localmente isomorfo a  $SO(2, 10)$ . Los caminos  $v'_1, v'_2$  corresponden mediante el isomorfismo a  $v_2, v_3$ .

Entonces la proposición 3.2.3 y el lema 3.2.2 demuestran que si  $\zeta_1^j \dots \zeta_1^j \preceq \underbrace{v_j \dots v_j}_{n_j}$  para

$j = 2, 3$  y  $E_{\zeta_2^{\sup}} \cap E_{\zeta_3^{\inf}} = \emptyset = F_{\zeta_2^{\sup}} \cap F_{\zeta_3^{\inf}}$  para todo  $1 \leq i \leq n_3$ , existe una sucesión de raíces simples compactas  $\vec{\alpha}$ , tal que  $\mathbf{f}_{\vec{\alpha}}(v_2^{n_2} v_3^{n_3}) = \zeta_2^2 \dots \zeta_1^2 \zeta_3^3 \dots \zeta_1^3$ .

En general, si las condiciones 1) y 2) del teorema se cumplen para  $j$  y  $j+1$  y la condición 3) se cumple para  $j$ , entonces  $\mathfrak{z}_j * \mathfrak{z}_{j+1} \preceq v_j^{n_j} * v_{j+1}^{n_{j+1}}$ .

*Demostración del teorema 3.2.4.* Por la condición 1), para cada  $j = 1, \dots, k$ ; existe una sucesión  $\vec{\alpha}_j$  tal que  $\mathbf{f}_{\vec{\alpha}_j}(v_j^{n_j}) = \mathfrak{z}_j$ , entonces  $\mathfrak{z}_1 * \mathfrak{z}_2 * \dots * \mathfrak{z}_k = \mathbf{f}_{\vec{\alpha}_1}(v_1^{n_1}) * \dots * \mathbf{f}_{\vec{\alpha}_k}(v_k^{n_k})$ . Sea  $s = \sum_j |\vec{\alpha}_j|$ . Por inducción sobre  $s$ .

- Si  $s = 1$ ,  $v_j^{n_j} = \mathfrak{z}_j$  salvo para un  $j_0$ , para el cual  $\mathbf{f}_{\beta}(v_{j_0}) * v_{j_0}^{n_{j_0}-1} = \mathbf{f}_{\beta}(v_{j_0}^{n_{j_0}}) = \mathfrak{z}_{j_0}$  para alguna  $\beta \in \Pi_c$ , como  $\beta \in E_{v_{j_0+1}}^{\sup}$  si  $j_0 < k$ , entonces  $j_0 = k$  y  $v_k \neq \alpha_{nc}$ , o,  $j_0$  satisface y  $n_{j_0} > n_{j_0+1}$ ; por lo cual,  $\mathbf{f}_{\beta}^{N_{n_{j_0}}}(\mathfrak{z}_{j_0}) \neq \theta$  pero  $\mathbf{e}_{\beta}^{N_{n_{j_0}}}(\mathfrak{z}_{j_0+1}) = \mathbf{e}_{\beta}^{n_{j_0+1}}(\mathfrak{z}_{j_0+1}) = \mathbf{e}_{\beta}^{n_{j_0+1}}(v_{j_0+1}^{n_{j_0+1}}) = \theta$ . (en el case  $C_n$  hay que reemplazar  $\mathbf{e}_{\beta}^{n_{j_0}}$  por  $\mathbf{e}_{\beta}^{2n_{j_0}}$  similarmente con  $\mathbf{f}$ ) Por construcción de  $v_i$ ,  $\mathbf{f}_{\beta}(v_i) = \theta$  si  $i < j_0$  o  $j_0 + 1 < i$ , luego

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\beta}(v_1^{n_1} * \dots * v_k^{n_k}) &= v_1^{n_1} * \dots * \mathbf{f}_{\beta}(v_{j_0}^{n_{j_0}} * v_{j_0+1}^{n_{j_0+1}}) * \dots * v_k^{n_k} \\ &= v_1^{n_1} * \dots * \mathbf{f}_{\beta}(v_{j_0}^{n_{j_0}}) * v_{j_0+1}^{n_{j_0+1}} * \dots * v_k^{n_k} \\ &= \mathfrak{z}_1 * \mathfrak{z}_2 * \dots * \mathfrak{z}_k \end{aligned} \quad (3.8)$$

- Sean  $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \dots, \mathfrak{z}_k$  que satisfacen las condiciones 1), 2) y 3), y tales que  $s+1 = \sum_j |\vec{\alpha}_j|$  Dado que  $\mathfrak{z}_1 * \mathfrak{z}_2 * \dots * \mathfrak{z}_k \neq v_1^{n_1} * \dots * v_k^{n_k}$ , afirmamos que existe  $\beta \in \Pi_c$  tal que  $\mathbf{e}_{\beta}(\mathfrak{z}_1 * \mathfrak{z}_2 * \dots * \mathfrak{z}_k) \neq \theta$ . En caso tal :

$$\begin{aligned} \theta &\neq \mathbf{f}_{\vec{\alpha}_1}(v_1^{n_1}) * \dots * \mathbf{e}_{\beta}(\mathbf{f}_{\vec{\alpha}_j}(v_j^{n_j}) * \mathbf{f}_{\vec{\alpha}_{j+1}}(v_{j+1}^{n_{j+1}})) * \dots * \mathbf{f}_{\vec{\alpha}_k}(v_k^{n_k}) \\ &= \mathbf{f}_{\vec{\alpha}_1}(v_1^{n_1}) * \dots * \mathbf{e}_{\beta}(\mathbf{f}_{\vec{\eta}}(v_j^{n_j} * v_{j+1}^{n_{j+1}})) * \dots * \mathbf{f}_{\vec{\alpha}_k}(v_k^{n_k}). \end{aligned} \quad (3.9)$$

La última igualdad se sigue de la observación 3.2.5. Sea  $\tilde{\mathfrak{z}}_j * \tilde{\mathfrak{z}}_{j+1} = \mathbf{e}_{\beta}(\mathbf{f}_{\vec{\eta}}(v_j^{n_j} * v_{j+1}^{n_{j+1}}))$ , entonces  $\mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_{j-1}, \tilde{\mathfrak{z}}_j, \tilde{\mathfrak{z}}_{j+1}, \dots, \mathfrak{z}_k$  satisfacen las condiciones 1), 2), 3) y si  $\mathbf{f}_{\vec{\zeta}_j}(v_j^{n_j}) = \tilde{\mathfrak{z}}_j$ ,  $\mathbf{f}_{\vec{\zeta}_{j+1}}(v_{j+1}^{n_{j+1}}) = \tilde{\mathfrak{z}}_{j+1}$ .

Entonces  $s = \sum_{i \neq j, j+1} |\vec{\alpha}_i| + |\vec{\zeta}_j| + |\vec{\zeta}_j|$ , por hipótesis de inducción

$$\mathfrak{z}_1 * \dots * \mathfrak{z}_{j-1} * \tilde{\mathfrak{z}}_j * \tilde{\mathfrak{z}}_{j+1} * \dots * \mathfrak{z}_k \preceq \nu_1^{n_1} * \dots * \nu_k^{n_k},$$

luego

$$\mathfrak{z}_1 * \mathfrak{z}_2 * \dots * \mathfrak{z}_k = \mathbf{e}_\beta(\mathfrak{z}_1 * \dots * \mathfrak{z}_{j-1} * \tilde{\mathfrak{z}}_j * \tilde{\mathfrak{z}}_{j+1} * \dots * \mathfrak{z}_k) \preceq \nu_1^{n_1} * \dots * \nu_k^{n_k}.$$

De modo que basta ver que existe tal  $\beta$ . Sea  $j$  mínimo tal que  $\mathfrak{z}_j \neq \nu_j^{n_j}$ . Existe  $\beta_0 \in A_j$  ( $A_j$  el conjunto del teorema 2.0.8) tal que  $\mathbf{e}_{\beta_0}(\mathfrak{z}_j) \preceq \nu_j$ , en particular  $\mathbf{e}_{\beta_0}(\mathfrak{z}_j) \neq \theta$ . Entonces

$$\mathbf{e}_{\beta_0}(\mathfrak{z}_1 * \mathfrak{z}_2 * \dots * \mathfrak{z}_k) = \begin{cases} \mathbf{e}_{\beta_0}(\mathfrak{z}_1 * \dots * \mathfrak{z}_j) * (\mathfrak{z}_{j+1} \dots * \mathfrak{z}_k) & , o, \\ (\mathfrak{z}_1 * \dots * \mathfrak{z}_j) * \mathbf{e}_{\beta_0}(\mathfrak{z}_{j+1} \dots * \mathfrak{z}_k) \end{cases}$$

el segundo caso en particular implica que  $\mathbf{e}_{\beta_0}(\mathfrak{z}_1 * \mathfrak{z}_2 * \dots * \mathfrak{z}_k) \neq \theta$ . En el primer caso, como  $\beta_0 \in A_j$  para  $i < j$  se tiene que  $\mathbf{f}_{\beta_0}(\nu_i) = \theta$  y por tanto  $\mathbf{e}_{\beta_0}(\mathfrak{z}_1 * \dots * \mathfrak{z}_j) = \mathfrak{z}_1 * \dots * \mathbf{e}_{\beta_0}(\mathfrak{z}_j)$  esto implica que  $\mathbf{e}_{\beta_0}(\mathfrak{z}_1 * \dots * \mathfrak{z}_j) \neq \theta$  y también  $\mathbf{e}_{\beta_0}(\mathfrak{z}_1 * \mathfrak{z}_2 * \dots * \mathfrak{z}_k) \neq \theta$ , con lo cual queda probado el teorema.  $\square$

### 3.3. Fórmula del caracter y productos tensoriales

Ahora tenemos todos los ingredientes para expresar la fórmula del caracter de  $S(\mathfrak{p}^+)$  como  $\mathfrak{k}$ -módulo en términos de caminos. En primer lugar, el caracter se descompone como la suma de los caracteres de las representaciones irreducibles que ocurren en  $S(\mathfrak{p}^+)$  y sus multiplicidades. Por el teorema de Schmid (teorema 1.2.6) los pesos máximos en la cámara dominante  $C_K$  de dichas representaciones son exactamente los elementos de la forma  $n_1\nu_1(1) + \dots + n_k\nu_k(1)$  con  $k$  el rango real de  $G$  y  $n_1 \geq \dots \geq n_k \geq 0$  enteros; y todas las representaciones irreducibles ocurren con multiplicidad 1. Entonces

$$\text{Char}(S(\mathfrak{p}^+)) = \sum_{\substack{n_1 \geq \dots \geq n_k \geq 0 \\ n_i \in \mathbb{Z}}} \text{Char}(V_{n_1\nu_1(1) + \dots + n_k\nu_k(1)}). \quad (3.10)$$

Por la fórmula del caracter de Littelmann (teorema 1.1.9), si  $\pi_{(n_1, \dots, n_k)}$  es un camino cuya imagen está contenida en  $C_K$ , con peso  $n_1\nu_1(1) + \dots + n_k\nu_k(1)$  entonces el caracter del  $\mathfrak{k}$ -módulo  $V_{n_1\nu_1(1) + \dots + n_k\nu_k(1)}$  con peso máximo  $n_1\nu_1(1) + \dots + n_k\nu_k(1)$  es igual a:

$$\text{Char}(V_{n_1\nu_1(1) + \dots + n_k\nu_k(1)}) = \bigoplus_{\tau \in \pi_{(n_1, \dots, n_k)} \succeq} e^{\tau(1)}. \quad (3.11)$$

Por el teorema 2.0.8 el camino  $\nu_1^{n_1} * \dots * \nu_k^{n_k}$  satisface estas condiciones; por tanto, definiendo  $\pi_{(n_1, \dots, n_k)} := \nu_1^{n_1} * \dots * \nu_k^{n_k}$ , sea

$$B_k = \bigcup_{\substack{n_1 \geq \dots \geq n_k \geq 0 \\ n_i \in \mathbb{Z}}} \pi_{(n_1, \dots, n_k)} \succeq,$$

combinando 3.11 y 3.10 se sigue que:

$$\text{Char}(S(\mathfrak{p}^+)) = \bigoplus_{\tau \in B_k} e^{\tau(1)}. \quad (3.12)$$

el teorema 3.2.4 calcula cada conjunto  $\pi_{(n_1, \dots, n_k) \succeq}$  como los caminos  $\zeta_{n_1}^1 * \dots * \zeta_1^1 * \zeta_{n_2}^2 * \dots * \zeta_1^2 * \dots * \zeta_{n_k}^k * \dots * \zeta_1^k$  que satisfacen:

- 1) Para todo  $i, j$ ,  $\zeta_i^j \in \alpha_{nc \preceq}$ ; es decir,  $\alpha_{nc} \preceq \zeta_i^j \preceq \nu_i$ .
- 2)  $\zeta_i^j \preceq \zeta_{i-1}^j$  para todo  $j \leq k$ ;  $1 < i \leq n_j$ .
- 3)  $E_{\zeta_i^j}^{\text{sup}} \cap E_{\zeta_i^{j+1}}^{\text{inf}} = \emptyset = F_{\zeta_i^j}^{\text{sup}} \cap F_{\zeta_i^{j+1}}^{\text{inf}}$  para todo  $1 \leq i \leq n_{j+1}$ .

Ahora, sea  $\eta$  un peso entero dominante respecto a  $C_K$ , sea  $\pi_\eta$  un camino con imagen contenida en  $C_K$  y peso  $\eta$ . Por el teorema 1.1.10 el producto tensorial de  $V_\eta$  con  $S(\mathfrak{p}^+)$  tiene descomposición en suma directa de  $\mathfrak{k}$ -módulos irreducibles de la forma:

$$V_\eta \otimes S(\mathfrak{p}^+) = \bigoplus V_{\pi_\eta(1) + \tau(1)}, \quad (3.13)$$

donde la suma es tomada sobre todos los  $\tau \in B_k$  tales que  $\pi_\eta * \tau$  es un camino con imagen contenida en  $C_K$ . Analizaremos condiciones necesarias y suficientes para asegurar  $(\pi_\eta * \tau)(t) \in C_K$ .

Sea

$$\tau = \zeta_{n_1}^1 * \dots * \zeta_1^1 * \zeta_{n_2}^2 * \dots * \zeta_1^2 * \dots * \zeta_{n_k}^k * \dots * \zeta_1^k. \quad (3.14)$$

Para  $t \in [0, 1]$ ,  $(\pi_\eta * \tau)(t) = \pi_\eta(\phi(t))$ , o bien,  $(\pi_\eta * \tau)(t) = \pi_\eta(1) + \tau(\phi_0(t))$  para una cierta función biyectiva  $0 \leq \phi_0(t) \leq 1$  creciente (ver observación en página 3). Como  $\pi_\eta(t) \in C_K$ , basta considerar el caso  $\pi_\eta(1) + \tau(\phi_0(t))$ .

**Lema 3.3.1.** *Sea  $\tau \in B_k$  escrito en la forma (3.14).*

- a) **Si  $G$  no es localmente isomorfo a  $SO(2, 2n + 1)$ .**  $(\pi_\eta * \tau)(t) \in C_K$ , para todo  $t \in [0, 1]$  si y solo si para todo  $s < k$  y todo  $1 \leq l \leq n_{s+1}$  se satisface:

$$\eta + \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^{n_j} \zeta_i^j(1) + \sum_{i=l+1}^l \zeta_i^{s+1}(1) \in C_K.$$

- b) **Si  $G$  es localmente isomorfo a  $SO(2, 2n + 1)$**   $(\pi_\eta * \tau)(t) \in C_K$ , para todo  $t \in [0, 1]$  si y solo si se satisfacen las siguientes condiciones:

- Para todo  $s < k$  y todo  $1 \leq l \leq n_{s+1}$ ,

$$\eta + \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^{n_j} \zeta_i^j(1) + \sum_{i=l+1}^l \zeta_i^{s+1}(1) \in C_K.$$

- Si  $\zeta_l^{s+1} = \gamma_0$  pero  $\zeta_{l+1}^{s+1} \neq \gamma_0$  entonces

$$\eta + \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^{n_j} \zeta_i^j(1) + \sum_{i=l+1}^l \zeta_i^{s+1}(1) \in (C_K)^o.$$

donde  $(C_K)^o$  denota el interior de  $C_K$

La segunda condición evita los casos del tipo  $\eta = \epsilon_1; \tau = \gamma_0 = \frac{1}{2}(\epsilon_0 - \epsilon_n) * \frac{1}{2}(\epsilon_0 + \epsilon_n)$ . Entonces  $\langle (\eta * \tau)(1/2 + 1/8), \alpha_n^\vee \rangle = \langle \epsilon_1(1) + \frac{1}{2}(\epsilon_0 - \epsilon_n)(1/2), 2\epsilon_n \rangle = -1$ , pero  $\langle (\eta * \gamma_0)(1), \alpha_n^\vee \rangle = 0$ .

Para probar el lema necesitamos previamente la siguiente observación: si  $\zeta \in [\gamma_{\alpha_{nc}}]_{\leq}$  y  $\alpha \in \Pi_c$  de la construcción de cada  $\zeta$  se verifica que si  $h_\alpha(t) := \langle \zeta(t), \alpha^\vee \rangle$  entonces  $h_\alpha(t) \geq 0$  para toda  $t$ , o bien  $h_\alpha(t) \leq 0$  para toda  $t$ . Además, si  $h_\alpha(t) \leq 0$ , entonces  $h_\alpha$  es una función lineal decreciente, salvo en el caso  $G = SO(2, 2n+1)$  cuando  $\zeta = \gamma_0$ , en este caso  $-1 \leq h_\alpha(t) \leq 0$ .

*Demostración.* Para algún  $s < k$  y algún  $1 \leq l \leq n_{s+1}$

$$\begin{aligned} \tau(t) &= \zeta_{n_1}^1(1) + \cdots + \zeta_1^1(1) + \zeta_{n_2}^2(1) + \cdots + \zeta_{l+1}^{s+1}(1) + \zeta_l^{s+1}(\phi_{s+1,l}(t)) \\ &= \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^{n_j} \zeta_i^j(1) + \sum_{i=l+1}^{n_{s+1}} \zeta_i^{s+1}(1) + \zeta_l^{s+1}(\phi_{s+1,l}(t)) \end{aligned} \quad (3.15)$$

con  $0 \leq \phi_{s+1,l}(t) \leq 1$ , cierta función biyectiva. Entonces es claro que si  $\pi_\eta(1) + \tau(\phi_0(t)) \in C_K$  para toda  $t$ , en particular para todo  $\alpha \in \Pi_c$  deben valer la condiciones:

$$\langle \eta + \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^{n_j} \zeta_i^j(1) + \sum_{i=l+1}^l \zeta_i^{s+1}(1), \alpha^\vee \rangle \geq 0 \quad (3.16)$$

$$\langle \eta + \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^{n_j} \zeta_i^j(1) + \sum_{i=l+1}^l \zeta_i^{s+1}(1) + \zeta_l^{s+1}((1)), \alpha^\vee \rangle \geq 0 \quad (3.17)$$

Queremos probar que bajo estas hipótesis también se tiene que:

$$\langle \eta + \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^{n_j} \zeta_i^j(1) + \sum_{i=l+1}^l \zeta_i^{s+1}(1) + \zeta_l^{s+1}(\phi_{s+1,l}(t)), \alpha^\vee \rangle \geq 0.$$

En efecto, fijada  $\alpha$ , si  $\langle \zeta_l^{s+1}(t), \alpha^\vee \rangle \geq 0$  para todo  $t$ , por 3.16 no hay nada que probar. Por otro lado, si  $\langle \zeta_l^{s+1}(t), \alpha^\vee \rangle \leq 0$  para todo  $t$ , entonces por la construcción de cada  $\zeta$ , exceptuando el caso  $SO(2, 2n+1)$ ,  $\zeta = \gamma_0$ , la función  $h_\alpha(t) := \langle \zeta_l^{s+1}(t), \alpha^\vee \rangle$  es lineal y decreciente. Por tanto  $h_\alpha(\phi_{s+1,l}(t)) \leq h_\alpha(1) \leq 0$  y por 3.16 y 3.17 se sigue nuestra afirmación.

Si  $G = SO(2, 2n+1)$  y  $\zeta_l^{s+1}(t) = \gamma_0$ , dado que cada  $\zeta$  es un camino cuyo peso es una raíz no compacta, el lado izquierdo de 3.16 es entero y por tanto mayor o igual a 1; pero  $h_\alpha(t) \geq -1$  por lo tanto se sigue 3.17  $\square$

Finalmente tenemos el teorema, para enunciarlo con fines pedagógicos, recordaremos el marco general: Sea  $G$  un grupo de Lie simple,  $K \subseteq G$  un subgrupo compacto maximal tal que  $G/K$  admite estructura hermitiana,  $k = \text{Rango Real}(G)$ . Sea  $T \subseteq K$  un toro maximal de  $K$  y  $\mathfrak{t}$  su álgebra de Lie complejificada. Sea  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$  la descomposición de Cartan y  $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^+ \oplus \mathfrak{p}^-$

la descomposición de  $\mathfrak{p}$  en  $\mathfrak{k}$ -módulos irreducibles. Sea  $\Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$  un sistema de raíces positivo de  $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$  dada por una subálgebra de Borel  $\mathfrak{b}$  de modo que  $\mathfrak{p}^+ = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{p}$ , entonces respecto a  $\Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$  todas las raíces simples excepto una son compactas. Sea  $\Phi^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) = \Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) \cap \Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ . Notemos por  $\alpha_{nc}$  la única raíz simple no compacta y por  $C_G, C_K$  las cámaras de Weyl asociadas a  $\Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}), \Phi^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$  respectivamente.

**Teorema 3.3.2.** Sean  $(\pi_{\lambda_1}, H_1), (\pi_{\lambda_2}, H_2)$  dos series discretas holomorfas de  $G$  con parámetros de Harish-Chandra  $\lambda_1, \lambda_2$  y  $K$ -tipos minimales  $\Lambda_1, \Lambda_2$  respectivamente, tales que  $\lambda_i \in C_G$ .

Sea  $\eta \in C_K$ , y sea  $P_\eta$  el conjunto de los caminos  $\tau \in B_k$  tales que si  $\tau = \zeta_{n_1}^1 * \dots * \zeta_1^1 * \zeta_{n_2}^2 * \dots * \zeta_1^2 * \dots * \zeta_1^k \in \pi_{(n_1, \dots, n_k)_\Sigma}$ , para cada  $0 \leq s < k$  y cada  $1 \leq l \leq n_{s+1}$  se tiene

$$\eta + \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^{n_j} \zeta_{n_j+1-i}^j(1) + \sum_{i=1}^l \zeta_{n_{s+1}+1-i}^{s+1}(1) \in C_K.$$

Entonces

$$H_1 \otimes H_2 = \bigoplus_{\substack{[\eta, \Lambda_1 \otimes \Lambda_2] \neq 0 \\ \tau \in P_\eta}} m(\eta, \Lambda_1, \Lambda_2) H(\eta + \tau(1))$$

donde  $m(\eta, \Lambda_1, \Lambda_2) = \{\pi \in R(\Lambda_1, \Lambda_2) \mid \eta = \pi(1)\}$ , el conjunto  $R$  es el definido en el teorema 1.1.10 y  $H(\mu)$  es la serie discreta holomorfa con  $K$ -tipo minimal  $\mu$ .

*Demostración.* La fórmula de Jakobsen y Vergne del teorema 1.2.5 concluye:

$$H_1 \otimes H_2 = \bigoplus_{\eta \in i\mathfrak{t}^*} [\eta, \Lambda_1 \otimes \Lambda_2] H(\tau_\eta \otimes S(\mathfrak{p}^+)) \quad (3.18)$$

el lema previo junto con la fórmula 3.13, concluye que el producto tensorial de  $\tau_\eta \otimes S(\mathfrak{p}^+)$ , es precisamente la suma directa de los elementos de a forma  $\eta + \tau(1)$ , con  $\tau \in P_\eta$ . Finalmente, el teorema de descomposición de producto tensorial de Littelmann aplicado al caso  $V_{\Lambda_1} \otimes V_{\Lambda_2}$  concluye que:  $[\eta, \Lambda_1 \otimes \Lambda_2] = m(\eta, \Lambda_1, \Lambda_2)$   $\square$





## Capítulo 4

# Cálculo de $P_\eta$

Sean  $\omega_1, \dots, \omega_N$  los pesos fundamentales correspondientes a las raíces simples  $\Pi_c$ ; en el caso  $SU(p, q)$  tomamos  $\omega_i, \omega_{p+j}$  tales que  $\langle \omega_i, \alpha_{i_0}^\vee \rangle = \delta_{ii_0}$ ,  $\langle \omega_{p+j}, \beta_{j_0}^\vee \rangle = \delta_{jj_0}$ ;  $\langle \omega_i, \beta_{j_0}^\vee \rangle = \langle \omega_{p+j}, \alpha_{i_0}^\vee \rangle = 0$ . Sea  $\xi \in \mathfrak{k}^*$  tal que el centro de  $\mathfrak{k}$  actúa en cada representación irreducible de  $\mathfrak{k}$  por un múltiplo de  $\xi$ . La numeración dada  $\omega_1, \dots, \omega_N$  en el caso  $EIII$  no es la numeración dada por Bourbaki usualmente para un conjunto de raíces simples del grupo  $\mathfrak{k}$ ,  $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(10) \oplus \mathfrak{c}$ , con  $\mathfrak{c}$  el centro de  $\mathfrak{k}$ . La numeración del diagrama de Dynkin de  $\mathfrak{k}$  es la misma del diagrama de  $\mathfrak{g}$  eliminando el vértice cuya raíz es no compacta; así, en el capítulo 2 numeramos:

$$\bullet \cdots \circ \text{---} \overset{\alpha_2}{\circ} \text{---} \circ \text{---} \circ \rightsquigarrow \circ \text{---} \overset{\alpha_2}{\circ} \text{---} \circ \text{---} \circ$$

$\alpha_6 \quad \alpha_5 \quad \alpha_4 \quad \alpha_3 \quad \alpha_1 \quad \alpha_5 \quad \alpha_4 \quad \alpha_3 \quad \alpha_1$

mientras que la numeración usual para el diagrama de Dynkin de tipo  $D_5$  es

$$\circ \text{---} \overset{\alpha_5}{\circ} \text{---} \circ \text{---} \circ$$

$\alpha_4 \quad \alpha_3 \quad \alpha_2 \quad \alpha_1$

esperamos que esto no genere confusión.

Una importante propiedad de los pesos de los caminos  $\zeta \preceq [\alpha_{nc}]_{\preceq}$  es la siguiente: si  $\alpha_1, \alpha_2 \in \Pi_c$  son las raíces tales que  $\mathbf{e}_{\alpha_i}(\zeta) \neq \theta$  para  $i = 1, 2$  (posiblemente solo hay una de tales raíces), y  $\alpha_3, \alpha_4 \in \Pi_c$  son tales que  $\mathbf{f}_{\alpha_j}(\zeta) \neq \theta$  para  $j = 3, 4$ , entonces podemos elegir  $\xi$  tal que  $\zeta(1) + \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 = \xi$ . Más aún, si  $\zeta' \preceq [\alpha_{nc}]_{\preceq}$  es otro camino y  $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \alpha'_4$  se definen similarmente entonces  $\zeta'(1) + \alpha'_1 + \alpha'_2 - \alpha'_3 - \alpha'_4 = \xi$ . La prueba de este hecho se hace por cálculo directo en cada caso, verificando las tablas 4.2 y 4.1

Para  $\alpha \in \Pi_c$  definimos los conjuntos:

$$[\alpha]_{\mathbf{e}} = \{\mu \in [\alpha_{nc}]_{\preceq} \mid \mathbf{e}_\alpha(\mu) \neq \theta\}, \quad [\alpha]_{\mathbf{f}} = \{\mu \in [\alpha_{nc}]_{\preceq} \mid \mathbf{f}_\alpha(\mu) \neq \theta\}$$

Por ejemplo, en el caso  $Sp(n, \mathbb{R})$ ,  $[\alpha_i]_{\mathbf{e}} = \{\gamma_{j,i+1}, \gamma_{i+1,l} \mid l < i+1 \leq j\}$ , mientras que  $[\alpha_i]_{\mathbf{f}} = \{\gamma_{j,i}, \gamma_{i,l} \mid l \leq i+1 < j\}$ . Los conjuntos  $[\alpha]_{\mathbf{e}}, [\alpha]_{\mathbf{f}}$ , son totalmente ordenados respecto a  $\preceq$ .

Entonces

	$\omega_i$	$\xi$
$Sp(n, \mathbb{R})$	$\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_i - \frac{i}{n}(\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_n)$	$\frac{2}{n}(\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_n)$
$SO(2, 2n)$	$\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_i \quad i \neq n-1, n$	$\epsilon_0$
	$\omega_{n-1} = \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \cdots - \epsilon_n)$	
	$\omega_n = \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_n)$	
$SO(2, 2n+1)$	$\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_i \quad i \neq n$	$\epsilon_0$
	$\omega_n = \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_n)$	
$SO^*(2n)$	$\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_i - \frac{i}{n}(\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_n)$	$\frac{2}{n}(\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_n)$
$SU(p, q)$	$\omega_i = \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_i - \frac{i}{p}(\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_p)$	$\frac{1}{q}(\epsilon_{p+1} + \cdots + \epsilon_{p+q}) - \frac{1}{p}(\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_p)$
	$\omega_{p+j} = \epsilon_{p+1} + \cdots + \epsilon_{p+j} - \frac{j}{q}(\epsilon_{p+1} + \cdots + \epsilon_{p+q})$	

Cuadro 4.1: Pesos fundamentales de  $\mathfrak{k}$  y acción del centro  $\xi$  para grupos clásicos

$EIII$	$\omega_1 = \frac{1}{2}(\epsilon_8 - \epsilon_7 - \epsilon_6 - \epsilon_5)$	$\frac{1}{4}(\epsilon_8 - \epsilon_7 - \epsilon_6 - \epsilon_5) + \epsilon_5$
	$\omega_2 = \frac{1}{4}(\epsilon_8 - \epsilon_7 - \epsilon_6 - \epsilon_5) + \frac{1}{2}(\epsilon_4 + \epsilon_3 + \epsilon_2 + \epsilon_1)$	
	$\omega_3 = \frac{1}{2}(\epsilon_8 - \epsilon_7 - \epsilon_6 - \epsilon_5 + \epsilon_4 + \epsilon_3 + \epsilon_2 - \epsilon_1)$	
	$\omega_4 = \frac{1}{2}(\epsilon_8 - \epsilon_7 - \epsilon_6 - \epsilon_5) + \epsilon_4 + \epsilon_3$	
	$\omega_5 = \frac{1}{4}(\epsilon_8 - \epsilon_7 - \epsilon_6 - \epsilon_5) + \epsilon_4$	
$EVII$	$\omega_1 = \frac{2}{3}(\epsilon_8 - \epsilon_7 - \epsilon_6)$	$\frac{1}{3}(\epsilon_8 - \epsilon_7 - \epsilon_6) + \epsilon_6$
	$\omega_2 = \frac{1}{2}(\epsilon_8 - \epsilon_7 - \epsilon_6) + \frac{1}{2}(\epsilon_5 + \epsilon_4 + \epsilon_3 + \epsilon_2 + \epsilon_1)$	
	$\omega_3 = \frac{5}{6}(\epsilon_8 - \epsilon_7 - \epsilon_6) + \frac{3}{6}(\epsilon_5 + \epsilon_4 + \epsilon_3 + \epsilon_2 - \epsilon_1)$	
	$\omega_4 = (\epsilon_8 - \epsilon_7 - \epsilon_6) + \epsilon_5 + \epsilon_4 + \epsilon_3$	
	$\omega_5 = \frac{2}{3}(\epsilon_8 - \epsilon_7 - \epsilon_6) + \epsilon_5 + \epsilon_4$	
	$\omega_6 = \frac{1}{3}(\epsilon_8 - \epsilon_7 - \epsilon_6) + \epsilon_5$	

Cuadro 4.2: Pesos fundamentales de  $\mathfrak{k}$  y acción del centro  $\xi$  para grupos excepcionales

$$\langle \zeta(1), \alpha^\vee \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } \zeta \in [\alpha]_{\mathfrak{f}} \setminus [\alpha]_{\mathfrak{e}} \\ -1 & \text{si } \zeta \in [\alpha]_{\mathfrak{e}} \setminus [\alpha]_{\mathfrak{f}} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (4.1)$$

Si  $\eta = \sum c_i \omega_i + B\xi$ , sea  $\pi_\eta(t) := w_1^{c_1} * \cdots * w_N^{c_N} * \xi^B$  y sea  $\tau = \mathfrak{z}_1 * \mathfrak{z}_2 * \cdots * \mathfrak{z}_k \in B_k$  con  $\mathfrak{z}_j = \zeta_{j,n_j} * \cdots * \zeta_{j,1}$  como en el teorema 3.2.4. Sea

$$h_\alpha^{j,l} := \langle \eta(1) + \zeta_{1,m_1}(1) + \cdots + \zeta_{j,l}(1), \alpha^\vee \rangle.$$

Por (4.1) se sigue que

$$\begin{aligned} h_\alpha^{r,l} &= \langle \eta(1), \alpha^\vee \rangle + \#(\{\zeta_{j,s} \in [\alpha]_{\mathfrak{f}} \mid j < r, \text{ o } j = r, \zeta_{r,s} \preceq \zeta_{r,l}\}) - \#(\{\zeta_{j,i} \in [\alpha]_{\mathfrak{e}} \mid j < r, \text{ o } j = r, \zeta_{r,s} \preceq \zeta_{r,l}\}) \\ &= c_\alpha + \#(\{\zeta_{j,s} \in [\alpha]_{\mathfrak{f}} \mid j < r, \text{ o } j = r, \zeta_{r,s} \preceq \zeta_{r,l}\}) - \#(\{\zeta_{j,i} \in [\alpha]_{\mathfrak{e}} \mid j < r, \text{ o } j = r, \zeta_{r,s} \preceq \zeta_{r,l}\}). \end{aligned}$$

Si  $\alpha$  está fijo, por el lema 3.3.1 para asegurar que  $\langle (\pi_\eta * \tau)(t), \alpha^\vee \rangle \geq 0$  para todo  $t$ , basta ver que para todo  $l, j$ ,  $h_\alpha^{j,l} \geq 0$ , en el caso  $G = SO(2, 2n+1)$ ,  $\alpha = \alpha_n$  la desigualdad debe ser estricta si  $\zeta_{j,l} = \gamma_0$ .

El conjunto de desigualdades  $h_\alpha^{j,l} \geq 0$  determina  $P_\eta$ , sin embargo, veamos que podemos omitir algunas de estas desigualdades. Para esto, sea  $\mathbf{M}_\alpha = \{\mu \in [\alpha]_{\mathfrak{e}} \mid \text{si } e_{\tilde{\alpha}}(\mu) \neq \theta, \alpha = \tilde{\alpha}\}$ .

Como comentario al margen cabe destacar que cada  $\mathbf{M}_\alpha$  tiene a lo más cuatro elementos, este cardinal está relacionado con los coeficientes de la raíz máxima de  $\Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$  escrita como suma de raíces simples, de este hecho no haremos ningún comentario ni uso posterior.

Dado  $\mu \in \mathbf{M}_\alpha$ , para cada  $r$ , si  $l \leq n_r$  es el mínimo tal que  $\zeta_{r,l} \preceq \mu$  (o en otras palabras,  $\zeta_{r,l}$  es el máximo de los  $\zeta_{r,j}$  con el orden  $\preceq$  que satisface  $\zeta_{r,l} \preceq \mu$ ), entonces  $h_\alpha^{r,l} \geq 0$  es equivalente a:

$$c_\alpha \geq \#(\{\zeta_{j,s} \in [\alpha]_{\mathfrak{f}} \mid j < r, \text{ o, } j = r, \zeta_{r,s} \preceq \mu\}) - \#(\{\zeta_{j,i} \in [\alpha]_{\mathfrak{e}} \mid j < r, \text{ o, } j = r, \zeta_{r,s} \preceq \mu\}). \quad (4.2)$$

Por otro lado, fijando nuevamente  $r$ , si  $l$  es tal que existen  $l_0 \neq l$  y  $\mu_0 \in \mathbf{M}_\alpha$  con  $\mu_0 \not\preceq \zeta_{r,l} \not\preceq \zeta_{r,l_0} \preceq \mu$ ; si  $h_\alpha^{r,l_0} \geq 0$ , entonces  $h_\alpha^{r,l} \geq h_\alpha^{r,l_0} \geq 0$ .

Así, las desigualdades de (4.2), dan condiciones necesarias y suficientes para que  $\tau \in P_\eta$ . Este conjunto de desigualdades más que una fórmula puede interpretarse como un algoritmo que determina, dado el peso  $\eta$  y el camino  $\tau$ , si  $\tau \in P_\eta$ .

**Ejemplo 4.0.3.** 1. Sea  $G = SO(2, 8)$ , tomemos  $\eta = 10\omega_1 + 17\omega_2 + 14\omega_3 + 3\omega_4 + 30\xi$  (ver 4.1), sea

$$\tau = \gamma_{-1}^9 \gamma_{-2}^6 \gamma_{-3}^2 \gamma_{-4}^1 \gamma_0^1 \gamma_4^{10} \gamma_3^6 \gamma_2^4 \gamma_1^5 \gamma_{-1}^3$$

por el teorema 3.2.4,  $\tau \in B_k$ . Representemos  $\tau$  en el grafo obtenido en el capítulo dos, mediante

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 4 & & 3 & & 2 & & 1 & & \\ 9 & \text{---} & 6 & \text{---} & 2 & \text{---} & 1 & \text{---} & 1 & \text{---} & 10 & \text{---} & 6 & \text{---} & 4 & \text{---} & 5 & & \\ & & 3 & & & & & & & & & & & & & & & & \end{array}$$

los conjuntos mencionados anteriormente para este caso son:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\alpha_i} &= [\alpha_i]_{\mathfrak{e}} = \{\gamma_{i+1}, \gamma_{-i}\}, & [\alpha_i]_{\mathfrak{f}} &= \{\gamma_{-(i+1)}, \gamma_i\}, & \text{si } i \neq 4, \\ \mathbf{M}_{\alpha_4} &= [\alpha_4]_{\mathfrak{e}} = \{\gamma_0, \gamma_{-4}\}, & [\alpha_4]_{\mathfrak{f}} &= \{\gamma_n, \gamma_0\}. \end{aligned}$$

Para  $\alpha_1$ , entonces

$$10 - 9 \geq 0, \quad 10 - 9 + 6 - 4 \geq 0, \quad 10 - 9 + 6 - 4 + 5 - 3 \geq 0$$

Para  $\alpha_2$

$$17 - 6 \geq 0, \quad 17 - 6 + 2 - 6 \geq 0$$

Para  $\alpha_3$

$$14 - 2 \geq 0, \quad 14 - 2 + 1 - 10 \geq 0$$

Para  $\alpha_4$

$$3 - 1 > 0 \text{ (condición especial sobre } \alpha_4)$$

Este conjunto de desigualdades concluyen que  $\tau \in P_\eta$ , luego

$$\begin{aligned} \eta(1) + \tau(1) &= (10 - 9 + 6 - 4 + 5 - 3)\omega_1 + (17 - 6 + 2 - 6 + 4)\omega_2 + \\ &\quad + (14 - 2 + 1 - 10 + 6)\omega_3 + (3 - 1 + 10)\omega_4 \\ &\quad + (30 + 9 + 6 + 2 + 1 + 1 + 10 + 6 + 4 + 5 + 3)\xi. \\ &= 2\omega_1 + 11\omega_2 + 9\omega_3 + 12\omega_4 + 77\xi \end{aligned}$$

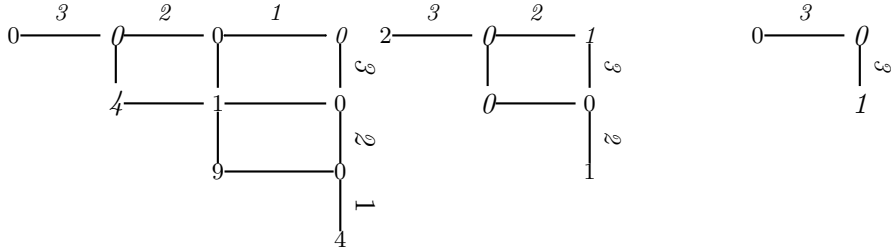
es un peso máximo de  $V_\eta \otimes S(\mathfrak{p}^+)$ . Si cambiamos en  $\tau$   $\gamma_3^6$  por  $\gamma_3^{14}$  es claro que para  $\alpha_2$

$$17 - 6 \geq 0, \quad 17 - 6 + 2 - 14 \leq 0,$$

luego  $\tau \notin P_\eta$ .

2. Sea  $G = Sp(4, \mathbb{R})$ , sea  $\eta = 15\omega_1 + 5\omega_2 + 8\omega_3 + 2\xi$ ,

$$\tau = \gamma_{3,3}^4 \gamma_{3,2} \gamma_{2,2}^9 \gamma_{1,1}^4 \gamma_{4,4}^2 \gamma_{4,2} \gamma_{2,2} \gamma_{3,3}.$$



en este caso  $\mathbf{M}_{\alpha_i} = \{\gamma_{i,i}\}$  y las desigualdades de (4.2) se traducen en este caso en: para  $\alpha_1$

$$15 - (1 + 9) \geq 0, \quad 15 - (1 + 9) + 4 - (1 + 1) \geq 0,$$

para  $\alpha_2$

$$5 - 4 \geq 0, \quad 5 - 4 + 1 + 1 - 1 \geq 0$$

para  $\alpha_3$

$$8 - 2 \geq 0$$

Así que  $\tau \in P_\eta$ .

## Parte II

# Restricción de series discretas cuaternionicas o pequeñas



## Capítulo 5

# Introducción

Sea  $G(\mathbb{C})$  un grupo de Lie reductivo conexo complejo, simplemente conexo sobre  $\mathbb{C}$ , con álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , de la clasificación de las formas reales, se tiene que existe una forma real  $G$  de  $G(\mathbb{C})$  tal que, si  $K$  es un subgrupo compacto maximal de  $G$ , la variedad homogénea  $G/K$  admite una estructura cuaterniónica.

Wallach en [Wal03] demostró que si  $G$  no es de tipo  $C_n$  existe un subgrupo  $H \subseteq G$  localmente isomorfo a  $SU(2, 1)$ . Por tanto podemos considerar la restricción de una serie discreta,  $\pi_\lambda^G$ , de  $G$  a  $H$ . Si el parámetro de Harish-Chandra  $\lambda$  de  $\pi_\lambda^G$  se toma en la cámara de Weyl que llamamos cámara cuaterniónica,  $\pi_\lambda^G$  tiene restricción admisible a  $H$  por consiguiente los parámetros de Harish-Chandra  $\mu$  de  $H$  que contribuyen a la restricción (salvo conjugación por el subgrupo compacto maximal de  $H$ ) pertenecen a tres posibles cámaras Weyl de  $H$ , dos de dichas cámaras determinan series discretas holomorfas. Nuestro interés se centra en demostrar que los parámetros de  $H$  que aparecen en la restricción pertenecen a la cámara de Weyl cuyas raíces simples son no compactas. Para esto analizaremos en primer lugar los posibles parámetros de Harish-Chandra  $H$ , luego enunciaremos y demostraremos el teorema correspondiente para finalizar con una aplicación a la restricción de series discretas cuaterniónicas del grupo  $SU(2, q)$  al subgrupo  $SU(2, p)$ , con  $p < q$ .

La motivación del trabajo surge del trabajo base construido por Jakobsen y Vergne para series discretas holomorfas. En él Jakobsen y Vergne prueban que si  $\pi$  es una serie discreta holomorfa de  $G$ , y  $H$  es un grupo de Lie con subgrupo compacto maximal  $L$  tal que  $H/L$  admite estructura compleja y la inmersión  $H/L \rightarrow G/K$  es holomorfa, entonces la restricción a  $H$  de  $\pi$  es admisible y se descompone discretamente en series discretas *holomorfas* de  $H$ . Este resultado se interpreta en términos de las cámaras de  $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$  y  $\Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{t})$  del siguiente modo:  $G$  es la forma real de un grupo lineal complejo  $G(\mathbb{C})$  con álgebra de Lie  $Lie(G) := \mathfrak{g}_0$  asociada a un diagrama de Vogan, de modo que de las raíces simples, solamente una es no compacta (= coloreada) y con multiplicidad uno en la raíz máxima. Este diagrama determina sistemas de raíces positivos de  $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$  y  $\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$  y cámaras de Weyl  $C_G, C_K$  de  $G$  y  $K$ . Entonces bajo esta elección una serie discreta es holomorfa si es la serie discreta asociada a un parámetro de Harish-Chandra  $\lambda$ , en la cámara de Weyl  $C_G$ .

Si tomamos un sistema de raíces positivo de  $H$  compatible con el sistema de raíces positivo de  $G$ , sea  $C_H$  la cámara de Weyl de  $H$  asociada a este sistema. Entonces la representación  $\pi|_H$  se descompone en suma directa de series discretas de  $H$  de modo que cada factor irreducible en

la suma tiene parámetros de Harish-Chandra de  $H$  que pertenece a  $C_H$ .

Esta pregunta se extiende a nuestro caso; a saber, si  $G$  es un grupo de Lie tal que  $G/K$  admite una estructura cuaterniónica y sea  $H$  un subgrupo de  $G$  tal que  $H/L$  también admite estructura cuaterniónica. El grupo  $G$  se define como la forma real de  $G(\mathbb{C})$  asociada a partir de cierto diagrama de Vogan. Dicho diagrama determina un sistema de raíces positivo de  $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$  y una cámara  $C$  la que llamamos cuaterniónica. Los parámetros de Harish-Chandra en dicha cámara determinan series discretas de  $G$ , las series discretas con parámetros en esta cámara son las series discretas de interés en el presente trabajo. Sin embargo no todas las series discretas de  $G$  tienen parámetros de Harish-Chandra asociados a dicha cámara, y así mismo, no todas las series discretas de  $H$  tienen parámetros de Harish-Chandra asociados a la cámara cuaterniónica de  $H$ . Por tanto, cabe preguntarse, si  $\pi_\lambda$  es una serie discreta de  $G$  con parámetro de Harish-Chandra en la cámara cuaterniónica la restricción a  $H$  de  $\pi_\lambda$  se descompone en series discretas de  $H$  entonces ¿A qué cámaras de  $H$  pertenecen los parámetros de Harish-Chandra de  $H$  que ocurren en la restricción de  $\pi_\lambda$ ? Nuestro desarrollo responde esta pregunta en el ejemplo más simple, esto es, la restricción de  $G$  a (un subgrupo localmente isomorfo a)  $SU(2, 1)$ . En este caso  $SU(2, 1)/L$  admite estructura cuaterniónica e igualmente estructura holomorfa y las series discretas no holomorfas de  $SU(2, 1)$  tienen parámetros de Harish-Chandra en la cámara cuaterniónica.

La exposición de esta parte está organizada del siguiente modo: el capítulo 6 desarrolla la teoría de parámetros de Harish-Chandra y  $L$ -tipos para  $H \simeq SU(2, 1)$ , el objetivo es entender la forma de los posibles parámetros de Harish-Chandra, lo cual es utilizado para el análisis de la restricción de series discretas de  $G$  a  $H$ . El capítulo 7 empieza estudiando la citada fórmula de Duflo y Vargas para posteriormente aplicarla al caso que nos interesa. La sección 7.2 estudia entonces la restricción que hemos mencionado y en ella demostramos el teorema 5 y la proposición 5 caso por caso, cada subsección contiene la proposición y el teorema para el caso dado. La sección 7.3 estudia la restricción del par  $H = SU(2, p)$  a  $G = SU(2, q)$ , en este caso se obtiene un teorema y una proposición análogos a y . Este caso presenta una interesante técnica de restricción sugerida por Duflo y Vargas, la cual consiste en restringir a un subgrupo de  $H$  con el mismo rango de  $H$  y luego “levantar ” la multiplicidad a  $H$ .

Por último el capítulo 8 da los elementos necesarios para enunciar la fórmula de Gross y Wallach para series discretas pequeñas e intenta deducir dicha fórmula a partir de la fórmula de Duflo y Vargas, lo que se encuentra en este caso es que al deducir la fórmula la suma dada por Gross y Wallach se puede reducir la cantidad de sumandos.



## Capítulo 6

# Parámetros de Harish-Chandra de representaciones irreducibles de cuadrado integrable de $SU(2, 1)$ y sus $L$ -tipos

Sea  $H = SU(2, 1)$ , sea  $L \subseteq H$  subgrupo compacto maximal, con toro maximal  $U \subseteq L$ , por tanto  $U$  es un subgrupo de Cartan compacto en  $H$ . Sea  $\mathfrak{u}_0$  el álgebra de Lie de  $U$ . El conjunto de raíces de  $\mathfrak{u}$  en  $\mathfrak{h}$  es:  $\phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{u}) = \{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm\beta\}$ , con  $\pm\alpha_1, \pm\alpha_2$  raíces no compactas,  $\pm\beta$  raíces compactas; elegidas de tal modo que satisfacen  $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta$ , y  $\langle \alpha_1, \beta^\vee \rangle = \langle \alpha_2, \beta^\vee \rangle = 1$ , con  $\beta^\vee = \frac{2}{\langle \beta, \beta \rangle} \beta$ . Si tomamos el sistema positivo de  $\Phi^+(\mathfrak{l}, \mathfrak{u})$  tal que  $\beta$  es positiva, los sistemas de raíces positivos de  $\Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{u})$  que contienen a  $\Phi^+(\mathfrak{l}, \mathfrak{u})$ , es decir, tal que  $\beta \in \phi^+(\mathfrak{h}, \mathfrak{u})$ , están dados por

$$\begin{array}{ll}
 \phi_H = \{\beta, -\alpha_2, \alpha_1\} & \begin{array}{c} \beta \text{ --- } -\alpha_2 \\ \circ \text{ --- } \bullet \end{array} \\
 \phi_A = \{-\alpha_1, \beta, \alpha_2\} & \begin{array}{c} -\alpha_1 \text{ --- } \beta \\ \bullet \text{ --- } \circ \end{array} \\
 \phi_Q = \{\alpha_1, \alpha_2, \beta\} & \begin{array}{c} \alpha_1 \text{ --- } \alpha_2 \\ \bullet \text{ --- } \bullet \end{array}
 \end{array} \tag{6.1}$$

Las cámaras relativas a  $\phi_H, \phi_A, \phi_Q$  las llamaremos holomorfa, antiholomorfa y cuaterniónica respectivamente y las denotaremos por  $C_H, C_A, C_Q$  respectivamente. Un parámetro de Harish-Chandra,  $\tau \in i\mathfrak{u}_0^*$ , de  $\mathfrak{h}$  determina un sistema de raíces positivo  $\Phi_\tau^+$ , si además  $\langle \tau, \beta \rangle > 0$ ,  $\Phi_\tau^+$  es alguno de los sistemas  $\phi_H, \phi_A, \phi_Q$  y  $\tau$  es de la forma

$$\tau = c_1 \Lambda_1^\tau + c_2 \Lambda_2^\tau, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{Z}_{>0},$$

donde los pesos fundamentales  $\Lambda_i^\tau$  en cada sistema están dados respectivamente por:

	$\Lambda_1^\tau$	$\Lambda_2^\tau$	
$\phi_H$	$1/3(\beta + \alpha_1)$	$1/3(-\alpha_2 + \alpha_1)$	(6.2)
$\phi_A$	$1/3(-\alpha_1 + \alpha_2)$	$1/3(\beta + \alpha_2)$	
$\phi_Q$	$1/3(\alpha_1 + \beta)$	$1/3(\alpha_2 + \beta)$	

Sean  $\rho_c, \rho_n^\tau$  la semisuma de las raíces positivas compactas y no compactas respectivamente en  $\Phi_\tau^+$ , el teorema del tipo minimal de Schmid [Sch75] asegura que los  $L$ -tipos de  $\pi_\tau^H$  son de la forma  $\mu = \tau - \rho_c^\tau + \rho_n^\tau + S$ , con  $S$  suma de raíces no compactas positivas en  $\Phi_\tau^+$ . Sea  $P_n$  la función partición relativa a las raíces no compactas en  $\Phi_\tau^+$ , la fórmula de Blattner permite calcular la multiplicidad de los  $L$  tipos,  $m$ , de  $\pi_\tau^H$  mediante la expresión

$$m(\tau, \mu) = \sum_{w \in W_K} \epsilon(w) P_n(w(\mu + \rho_c) - (\tau + \rho_n)) \quad (6.3)$$

Dado que las raíces no compactas en  $\Phi_\tau^+$  forman un conjunto linealmente independiente se sigue que  $P_n \leq 1$ ; más aún, en este caso  $W_K = \{1, S_\beta\}$  luego la suma queda reducida a dos sumandos

$$P_n((\mu + \rho_c^\tau) - (\tau + \rho_n)) - P_n(S_\beta(\mu + \rho_c^\tau) - (\tau + \rho_n^\tau)) \quad (6.4)$$

el primer sumando es igual a 1, pues  $\mu = \tau - \rho_c + \rho_n^\tau + S$ , y  $S$ , es suma de raíces positivas en  $\Phi_\tau^+$ . Por tanto,  $m(\tau, \mu) \neq 0$  si y solo si

$$P_n(S - \langle \mu + \rho_c, \beta^\vee \rangle \beta) = P_n(S_\beta(\mu + \rho_c) - (\tau + \rho_n^\tau)) = 0.$$

- Si  $\tau = c_1 \Lambda_1^\tau + c_2 \Lambda_2^\tau \in C_H$ ;  $\mu + \rho_c = c_1 \frac{1}{3}(\beta + \alpha_1) + c_2 \frac{1}{3}(-\alpha_2 + \alpha_1) + \frac{1}{2}(-\alpha_2 + \alpha_1) + A\alpha_1 + B(-\alpha_2)$ , en consecuencia  $S - \langle \mu + \rho_c, \beta^\vee \rangle \beta = (A - (c_1 + A - B))\alpha_1 + (B + c_1 + A - B)(-\alpha_2) = (B - c_1)\alpha_1 + (c_1 + A)(-\alpha_2)$ , esta última expresión es suma de raíces no compactas positivas ( $(\phi_H)_n^+ = \{\alpha_1, -\alpha_2\}$ ) si y solo si  $B - c_1 \geq 0$  y en este caso  $m(\tau, \mu) = 0$ . Por lo tanto  $m(\tau, \mu) \neq 0$  si y solo si  $B - c_1 < 0$ , en cuyo caso  $m(\tau, \mu) = 1$ . Dado que en esta cámara  $-\rho_c + \rho_n^\tau = -\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}(-\alpha_2 + \alpha_1) = \alpha_1$ , del análisis anterior se sigue que  $0 \neq m(\tau, \mu)$  si y solo si  $\mu = c_1 \frac{1}{3}(\beta + \alpha_1) + c_2 \frac{1}{3}(-\alpha_2 + \alpha_1) + \alpha_1 + A\alpha_1 + B(-\alpha_2)$  satisface  $B < c_1$ ;  $A, B \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$   $\langle \mu, \beta^\vee \rangle \geq 0$
- Un tratamiento análogo para el caso  $\tau = c_1 \Lambda_1^\tau + c_2 \Lambda_2^\tau \in C_A$  permite concluir que  $0 \neq m(\tau, \mu)$  si y solo si  $\mu = c_1 \frac{1}{3}(-\alpha_1 + \alpha_2) + c_2 \frac{1}{3}(\beta + \alpha_2) + \alpha_2 + A\alpha_2 + B(-\alpha_1)$  satisface  $B < c_2$ ;  $A, B \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$
- Si  $\tau = c_1 \Lambda_1^\tau + c_2 \Lambda_2^\tau \in C_Q$ ;  $\mu + \rho_c = c_1 \frac{1}{3}(\alpha_1 + \beta) + c_2 \frac{1}{3}(\alpha_2 + \beta) + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) + A\alpha_1 + B\alpha_2$ , en consecuencia  $S - \langle \mu + \rho_c, \beta^\vee \rangle \beta = (A - (c_1 + c_2 + 1 + A + B))\alpha_1 + (B - (c_1 + c_2 + 1 + A + B))\alpha_2 = -(c_1 + c_2 + 1 + A)\alpha_1 - (c_1 + c_2 + 1 + A)\alpha_2$ , por tanto, el segundo sumando de (6.4) es siempre cero, luego  $m(\tau, \mu) = 1$  para todo  $\mu$  de la forma  $\mu = c_1 \frac{1}{3}(\alpha_1 + \beta) + c_2 \frac{1}{3}(\alpha_2 + \beta) + A\alpha_1 + B\alpha_2$ ;  $A, B \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,

La subálgebra  $\mathfrak{l}$  se descompone como  $\mathfrak{l} = \mathbb{C}H_{\alpha_1} \oplus \mathbb{C}H_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_\beta \oplus \mathfrak{g}_{-\beta} = \mathbb{C}(H_{\alpha_1} - H_{\alpha_2}) \oplus \mathbb{C}(H_{\alpha_1} + H_{\alpha_2}) \oplus \mathfrak{g}_\beta \oplus \mathfrak{g}_{-\beta}$ . Dado que  $\beta^\vee(H_{\alpha_1} - H_{\alpha_2}) = \beta^\vee(H_{\alpha_1}) - \beta^\vee(H_{\alpha_2}) = \langle \beta^\vee, \alpha_1 \rangle - \langle \beta^\vee, \alpha_2 \rangle = 1 - 1 = 0$ , el centro de  $\mathfrak{l}$  tiene por base  $\{H_{\alpha_1} - H_{\alpha_2}\}$ , así mismo una base de  $\mathfrak{u} \cap \mathfrak{l}_{ss}$  es  $\{H_{\alpha_1} + H_{\alpha_2}\}$ . Si  $\xi = 1/6(\alpha_1 - \alpha_2)$  entonces el centro de  $\mathfrak{l}$  actúa en cada representación irreducible de  $\mathfrak{l}$  por un múltiplo de  $\xi$ , y la parte semisimple  $\{H_{\alpha_1} + H_{\alpha_2}\}$  actúa por múltiplo entero del peso fundamental de  $\mathfrak{l}$ ,  $\omega = 1/2\beta$ . Por lo anterior, los pesos de  $L$  en la cámara son de la forma  $\nu = n\omega + m\xi$ . Considerando la tabla (anterior), los parámetros de Harish-Chandra de representaciones irreducibles de  $L$  que ocurren en  $\pi_{c_1 \Lambda_1^\tau + c_2 \Lambda_2^\tau}^H$  se describen del siguiente modo:

		$L$ tipos ( $A, B \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ )	$L$ -tipo en la forma $n\omega + m\xi$
$\phi_H$	$B < c_1$	$c_1 \Lambda_1 + c_2 \Lambda_2 + \alpha_1 + A\alpha_1 + B(-\alpha_2)$	$(c_1 + A + 1 - B)\omega + (c_1 + 2c_2 + 3A + 3 + 3B)\xi$
$\phi_A$	$B < c_2$	$c_1 \Lambda_1 + c_2 \Lambda_2 + \alpha_2 + A\alpha_2 + B(-\alpha_1)$	$(c_2 + A + 1 - B)\omega - (2c_1 + c_2 + 3A + 3 + 3B)\xi$
$\phi_Q$		$c_1 \Lambda_1 + c_2 \Lambda_2 + A\alpha_1 + B\alpha_2$	$(c_1 + A + c_2 + B)\omega + (c_1 + 3A - c_2 - 3B)\xi$

## Capítulo 7

# Fórmula de Duflo y Vargas y sus aplicaciones

### 7.1. Fórmula de Duflo y Vargas

En esta sección explicamos la fórmula dada por Duflo y Vargas [DV10], la cual es eje principal para nuestros resultados. Sea  $G$  un grupo semisimple,  $H \subseteq G$  un subgrupo de Lie cerrado conexo semisimple, y sea  $K \subseteq G$  un subgrupo compacto maximal y suponemos que  $K \cap H$  es un subgrupo compacto maximal de  $H$ . Sea  $T \subseteq K$  un toro maximal de  $K$ , dado que nuestro interés se centra en estudiar representaciones de cuadrado integrable, un teorema de Harish-Chandra asegura que una condición necesaria para que  $G$  tenga representaciones de cuadrado integrable no nulas es que  $\text{Rango}(G) = \text{Rango}(K)$ , por tanto asumiremos esta condición y una similar sobre  $H, K \cap H$ . Así,  $T$  (resp.  $T \cap H$ ) es un subgrupo de Cartan compacto de  $G$  (resp.  $H$ ) y  $\mathfrak{t}$  (resp.  $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}$ ) una subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$  (resp.  $\mathfrak{h}$ ). Sean  $L = K \cap H$ ,  $U = T \cap H$ , y tomemos los sistemas de raíces  $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}), \Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{u})$ . Tomemos un sistema positivo  $\Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$  de  $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ . Sea  $\Psi_n = \Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) \setminus \Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$  las raíces no compactas positivas del sistema de raíces elegido (cambiamos la notación de los capítulos anteriores de  $\Phi_n(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$  a  $\Psi_n$  con el fin de enunciar el teorema de Duflo-Vargas en los mismos términos del artículo original [DV10]).

Recordemos que  $q_u : \mathfrak{t}^* \rightarrow (\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h})^*$  denota la aplicación restricción; sea  $\Phi(\xi, \mathfrak{t}) := \{\alpha \in \Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) \mid q_u(\alpha) = 0\}$ , sea  $W_Z$  el subgrupo de  $W_K$  generado por las reflexiones dadas por las raíces en  $\Phi(\xi, \mathfrak{t})$ ; tomemos un conjunto de representantes  $W_K^Z$  de  $W_Z \setminus W_K$ , el conjunto de las coclases de acción a derecha de  $W_Z$  sobre  $W_K$ .

La representación adjunta de  $\mathfrak{k}$  restringida a  $\mathfrak{l}$ , induce una representación en el cociente  $\mathfrak{l} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{k}/\mathfrak{l})$ . El conjunto de pesos de esta representación (respecto a la subálgebra de Borel  $\mathfrak{u}$ ) está dado por  $\Phi(\mathfrak{k}/\mathfrak{l}, \mathfrak{u}) := q_u(\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) \setminus \Phi(\xi, \mathfrak{t})) \setminus \Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{u})$ . Sea  $\Delta(\mathfrak{k}/\mathfrak{l}, \mathfrak{u})$  un subconjunto de  $\Phi(\mathfrak{k}/\mathfrak{l}, \mathfrak{u})$  tal que  $\Delta(\mathfrak{k}/\mathfrak{l}, \mathfrak{u})$  es la intersección de  $\Phi(\mathfrak{k}/\mathfrak{l}, \mathfrak{u})$  con un semiplano abierto.

**Teorema 7.1.1.** *Sea  $S_w^H = \Delta(\mathfrak{k}/\mathfrak{l}, \mathfrak{u}) \cup (q_u(w\Psi_n) \setminus \Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{u}))$ . Supongamos que para cada  $w \in W_K$ ,  $S_w^H$  es un multiconjunto estricto; es decir,  $S_w^H$  está contenido en un semiplano abierto. Entonces  $\pi_\lambda|_H$  se descompone discretamente en series discretas de  $H$ , y para cada serie discreta de  $\sigma$  de  $H$ ,  $m(\pi_\lambda, \sigma) < \infty$ .*

Cuando  $\pi_\lambda$  satisface la condición  $m(\pi_\lambda, \sigma) < \infty$ , para toda serie discreta  $\sigma$  de  $H$ , se dice que la serie discreta,  $\pi_\lambda$ , es admisible a  $H$ . La condición impuesta sobre los multiconjuntos  $S_w^H$  es

relativa a la elección del sistema positivo  $\Delta(\mathfrak{k}/\mathfrak{l}, \mathfrak{u})$  y el subgrupo compacto maximal  $L$  de  $H$ . Para  $\gamma \in \mathfrak{it}_0^*$ , sea  $\delta_\gamma$  la distribución delta de Dirac centrada en  $\gamma$ ; para  $\gamma \neq 0$ , sea

$$y_\gamma = \sum_{n \geq 0} \delta_{\left(\frac{1}{2}+n\right)\gamma}.$$

Para un subconjunto finito estricto con multiplicidades  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subseteq \mathfrak{it}_0^*$  definimos  $y_A = y_{a_1} * y_{a_2} * \dots * y_{a_k}$ , siendo  $*$  la convolución de medidas. En esta definición algunos de los  $a_i$  pueden ser iguales; más aún, si  $a \in A$  tiene multiplicidad  $r$  (i.e., existen exactamente  $r$ ,  $a_i$  tales que  $a_i = a$ ) entonces

$$\underbrace{y_a * \dots * y_a}_r =: y_a^r = \sum_{n \geq 0} \binom{n+r-1}{r-1} \delta_{\left(\frac{r}{2}+n\right)a}$$

puesto que  $\underbrace{y_a * \dots * y_a}_r =: y_a^r = \sum_{n \geq 0} [n]_r \delta_{\left(\frac{r}{2}+n\right)\gamma}$ , siendo  $[n]_r$  el número de veces que aparece  $\delta_{\left(\frac{r}{2}+n\right)\gamma}$  en el producto de la convolución; esto es,  $[n]_r$  es el número de formas de escribir  $n$  como suma de  $r$  enteros no negativos. Por lo tanto  $[n]_r = \binom{n+r-1}{r-1}$ ,

Sean  $(\pi_\lambda, V_\lambda), (\sigma_\mu, V_\mu)$  series discretas de  $G$  y  $H$  con parámetros de Harish-Chandra  $\lambda$  y  $\mu$  respectivamente y notemos  $m(\pi_\lambda, \sigma_\mu) = \dim \text{hom}_H(V_\mu, V_\lambda |_H)$  la multiplicidad de  $\sigma_\mu$  en  $\pi_\lambda$  como  $H$  módulo.

**Teorema 7.1.2** (Fórmula de Restricción de Duflo Vargas). *Sea  $\lambda$  un parámetro de Harish-Chandra de  $G$ , supongamos que para cada  $w \in W_K$ ,  $S_w^H$  es un multiconjunto contenido en un hiperplano abierto de  $\mathfrak{iu}_0^*$ . Sea  $m^H(\lambda, \cdot) : \mathfrak{iu}^* \rightarrow \mathbb{R}$  la función que satisface la igualdad de distribuciones:*

$$\sum_{\mu \in \mathfrak{iu}^*} m^H(\lambda, \mu) \delta_\mu = \sum_{w \in W_K^Z} \epsilon(w) \varpi(w\lambda) \delta_{q_w(w\lambda)} * y_{S_w^H} \quad (7.1)$$

la función  $m^H(\lambda, \cdot)$  es antisimétrica respecto al grupo de Weyl de  $L$ , es decir  $m^H(\lambda, \mu) = \epsilon(w) m^H(\lambda, w\mu)$  para todo  $w \in W_L$ . Entonces si  $\mu$  es un parámetro de Harish-Chandra de  $H$ ,  $m^H(\lambda, \mu) = m(\pi_\lambda, \sigma_\mu)$ .

Más aún,  $m^H(\lambda, \mu) \neq 0$  implica que  $\mu$  es un parámetro de Harish-Chandra de  $H$ .

## 7.2. Restricción al subgrupo localmente isomorfo a $SU(2, 1)$

### 7.2.1. Caso $G(\mathbb{C})$ de tipo $A_n$ , $G = SU(2, q)$ .

Sea  $G(\mathbb{C})$  de tipo  $A_n$ , entonces  $G \simeq SU(2, q)$ ,  $K := S(U(2) \times U(q))$ , y sea  $T \subseteq K \subseteq G$  un toro maximal de  $K$ , por tanto  $T$  es un subgrupo de Cartan compacto de  $G$ . Notemos por  $\mathfrak{t}_0$  al álgebra de lie de  $T$  y su complexificación por  $\mathfrak{t}$  (similarmente escribiremos  $\mathfrak{k}_0, \mathfrak{k}, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0$ , etc). Sea  $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$  el sistema de raíces de  $\mathfrak{g}$  respecto a  $\mathfrak{t}$ . Sea  $\{\epsilon_1, \delta_1, \dots, \delta_q, \epsilon_2\}$  una base ortogonal de  $\mathbb{R}^{q+2}$ . Identificamos a  $\mathfrak{it}_0^* = \{v \in \mathbb{R}^{q+2} \mid \langle v, \epsilon_1 + \delta_1 + \dots + \delta_2 + \epsilon_2 \rangle = 0\}$ .

Para el sistema de raíces simples  $\Pi := \{\epsilon_1 - \delta_1, \delta_1 - \delta_2, \dots, \delta_i - \delta_{i+1}, \dots, \delta_q - \epsilon_2\}$  consideremos el diagrama de Vogan con raíces compactas (no coloreadas)  $\{\delta_i - \delta_{i+1}\}_{1 \leq i \leq q}$  y raíces no compactas (coloreadas)  $\{\epsilon_1 - \delta_1, \delta_q - \epsilon_2\}$ ,

$$\epsilon_1 - \delta_1 \text{ — } \delta_1 - \delta_2 \text{ — } \delta_2 - \delta_3 \text{ — } \circ \text{ — } \circ \text{ — } \delta_{q-1} - \delta_q \text{ — } \delta_q - \epsilon_2$$

Esta elección determina sistemas positivos  $\Phi^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ ,  $\Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$  de  $\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ , y  $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$  compatibles. Sean  $\Psi_n = \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) \setminus \Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$  las raíces no compactas, y  $\Psi_n^+ = \Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) \cap \Psi_n$  las raíces no compactas positivas; entonces:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) &= \{\pm(\epsilon_1 - \delta_i), \pm(\delta_i - \delta_j), \pm(\delta_i - \epsilon_2), \pm(\epsilon_1 - \epsilon_2)\}_{1 \leq i < j \leq q} \\ \Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) &= \{\epsilon_1 - \delta_i, \delta_i - \delta_j, \delta_i - \epsilon_2, \epsilon_1 - \epsilon_2\}_{1 \leq i < j \leq q} \\ \Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) &= \{\pm(\delta_i - \delta_j), \pm(\epsilon_1 - \epsilon_2)\}_{1 \leq i < j \leq q} \\ \Phi^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) &= \{\delta_i - \delta_j, \epsilon_1 - \epsilon_2\}_{1 \leq i < j \leq q} \\ \Psi_n^+ &= \{\epsilon_1 - \delta_i, \delta_i - \epsilon_2, \}_{1 \leq i < j \leq q} \end{aligned}$$

Dado  $\alpha \in i\mathfrak{t}_0^*$ , sea  $H_\alpha \in i\mathfrak{t}_0$  tal que  $\alpha(H) = \langle H_\alpha, H \rangle$  para todo  $H \in i\mathfrak{t}_0$ ; entonces el conjunto  $\{H_{\epsilon_1 - \delta_1}, H_{\delta_q - \epsilon_2}\} \cup \{H_{\delta_i - \delta_{i+1}}\}_{1 \leq i < j \leq q}$  forma una base para  $i\mathfrak{t}_0$ . Para  $\alpha \in \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ , sean  $X_\alpha, X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}$  tales que  $\{X_\alpha, X_{-\alpha}, H_\alpha\}$  forman una  $\mathfrak{sl}_2$  tripla y  $\overline{X}_\alpha = X_{-\alpha}$  donde  $\overline{X}$  denota la conjugación de  $X \in \mathfrak{g}$  con respecto a  $\mathfrak{g}_0$ .

Consideremos el subgrupo localmente isomorfo a  $SU(2, 1)$  contenido en  $G$  de la siguiente forma. Sea  $\beta = \epsilon_1 - \epsilon_2$  la raíz máxima de  $\mathfrak{g}$  relativo al sistema positivo elegido, y sea  $\alpha_0 = \epsilon_1 - \delta_1 \in \Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$  una raíz simple tal que  $\langle \beta, \alpha_0 \rangle > 0$ . Tomemos  $\mathfrak{h}_0$  la subálgebra de  $\mathfrak{g}_0$  "generada" por las raíces  $\alpha_0, \beta - \alpha_0$ ; esto es, sea

$$\mathfrak{h} := \mathbb{C}H_{\alpha_0} + \mathbb{C}H_{\beta - \alpha_0} \oplus \mathbb{C}X_{\alpha_0} \oplus \mathbb{C}X_{\beta - \alpha_0} \oplus \mathbb{C}X_\beta \oplus \mathbb{C}X_{-\alpha_0} \oplus \mathbb{C}X_{-(\beta - \alpha_0)} \oplus \mathbb{C}X_{-\beta};$$

$\mathfrak{h}$  es una subálgebra de  $\mathfrak{g}$ ; si  $\mathfrak{h}_0 := \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0 \subseteq \mathfrak{g}_0$  entonces es  $\mathfrak{h}_0$  es una subálgebra de  $\mathfrak{g}_0$  isomorfa a  $\mathfrak{su}(2, 1)$  con complexificación  $\mathfrak{h}$ .

Sea  $H$  el subgrupo conexo de  $G$  con álgebra de Lie  $\mathfrak{h}_0$ . Entonces  $H$  es localmente isomorfo a  $SU(2, 1)$ . Más aún, si  $L = K \cap H$ ,  $U = T \cap H$ , entonces  $U$  es un toro maximal de  $L$ ;  $L$  es un subgrupo compacto maximal de  $H$  y también  $U$  es un subgrupo de Cartan compacto de  $H$ . Con esta notación,  $i\mathfrak{u}_0 = \mathbb{R}H_{\epsilon_1 - \delta_1} \oplus \mathbb{R}H_{\delta_1 - \epsilon_2}$ . Consideremos la restricción  $q_u : \mathfrak{t}^* \rightarrow \mathfrak{u}^*$ , de este modo podemos expresar los sistemas de raíces de  $\mathfrak{h}, \mathfrak{l}$  en términos de las raíces de  $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{k}$  mediante:

$$\Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{u}) = \{\pm q_u(\epsilon_1 - \delta_1), \pm q_u(\delta_1 - \epsilon_2), \pm q_u(\epsilon_1 - \epsilon_2)\}$$

Las raíces compactas de  $\mathfrak{h}$  son

$$\Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{u}) = \{\pm q_u(\epsilon_1 - \epsilon_2)\}$$

$$\text{Sea } \Phi(\xi) = \{\alpha \in \Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) \mid q_u(\alpha) = 0\} = \{\pm(\delta_i - \delta_j)\}_{2 \leq i < j \leq q}$$

$$\begin{aligned} \Phi(\mathfrak{k}/\mathfrak{l}, \mathfrak{u}) &= q_u(\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) \setminus \Phi(\xi)) \setminus \Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{u}) \\ &= q_u(\{\pm(\epsilon_1 - \epsilon_2), \pm(\delta_i - \delta_j)\}_{1 \leq i < j \leq q} \setminus \{\pm(\delta_i - \delta_j)\}_{2 \leq i < j \leq q}) \setminus \{\pm(q_u(\epsilon_1 - \epsilon_2))\} \\ &= \{\pm q_u(\delta_1 - \delta_j)\}_{2 \leq j \leq q} \end{aligned}$$

Notemos por  $W_Z$  el subgrupo de  $W_K$  generado por las raíces de  $\Phi(\xi)$ ,  $K$  se descompone como producto de dos grupos simples y su centro,  $K = K_q \times K_2 \times Z_K$ , siendo  $K_q \simeq SU(q)$ ,  $K_2 \simeq SU(2)$  y  $Z_K$  el centro de  $K$ .

El subgrupo  $W_Z$  actúa sobre  $W_{K_q}$  por multiplicación a derecha. Sea  $\{w_1, \dots, w_{q-1}\}$  un conjunto de representantes de  $W_Z \setminus W_{K_q}$ . Dado que los elementos de  $W_Z$  permutan las raíces de  $K_q$ , entonces un conjunto de representantes de  $W_Z \setminus W_K$  es de la forma  $\{w_i, S_\beta w_i\}$  con  $\beta := \epsilon_1 - \epsilon_2$ ,  $i = 1, \dots, q-1$ , por tanto, usando la barra para indicar la restricción a  $\mathfrak{u}$ , para cada  $w_i$  se tiene:

$$\begin{aligned} S_{w_i}^H &:= q_{\mathfrak{u}}(w_i \Psi_n^+) \setminus \Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{u}) \cup \Delta(\mathfrak{k}/\mathfrak{l}, \mathfrak{u}) \\ &= \{\overline{\epsilon_1 - \delta_j}, \overline{\delta_j - \epsilon_2}, \overline{\delta_1 - \delta_j}\}_{2 \leq j \leq q} \\ &= \{\overline{\epsilon_1}, \overline{-\epsilon_2}, \overline{\delta_1}\}, \end{aligned}$$

En la última igualdad cada elemento aparece  $q-1$  veces repetido. Similarmente,

$$\begin{aligned} S_{S_\beta w_i}^H &:= q_{\mathfrak{u}}(S_\beta w_i \Psi_n^+) \setminus \Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{u}) \cup \Delta(\mathfrak{k}/\mathfrak{l}, \mathfrak{u}) \\ &= \{\overline{S_\beta(\epsilon_1 - \delta_j)}, \overline{S_\beta(\delta_j - \epsilon_2)}, \overline{\delta_1 - \delta_j}\} \quad w_i \in W_{K_q}^Z. \end{aligned}$$

Si  $\lambda \in \mathfrak{t}_0^*$  es un parámetro de Harish-Chandra de  $G$  en la cámara determinada por  $\Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ . La descomposición  $K = SU(2) \times SU(q) \times Z_K$  genera una descomposición

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{su}(2) + \mathfrak{t} \cap \mathfrak{su}(q) + \mathfrak{t} \cap \xi_K$$

cada sumando es una subálgebra toral maximal en el sumando de  $\mathfrak{k}$  que lo contiene. Por tanto,  $\lambda$  se escribe como  $\lambda = \lambda_2 + \lambda_q + \lambda_Z$  con  $\lambda_2 \in (\mathfrak{t} \cap \mathfrak{su}(2))^*$ ,  $\lambda_q \in (\mathfrak{t} \cap \mathfrak{su}(q))^*$ ,  $\lambda_Z \in (\mathfrak{t} \cap \xi_K)^*$ . Sean  $\pi_{\lambda_i}^{K_i}$  (resp.  $\pi_{\lambda_Z}^Z$ ) la representación irreducible de  $K_i$  (resp  $Z$ ) de carácter infinitesimal  $\lambda_i$ . Explícitamente,  $\lambda = a_1 \epsilon_1 + b_1 \delta_1 + \dots + b_q \delta_q + a_2 \epsilon_2$  con  $a_1 > b_1 > b_2 > \dots > b_q > a_2$ , entonces

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= (a_1 - a_2) \left( \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2} \right) \\ \lambda_q &= \sum_{i=1}^q \left( b_i + \frac{a_1 + a_2}{q} \right) \delta_i \\ \lambda_Z &= (a_1 + a_2) \left( \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} - \frac{\delta_1 + \dots + \delta_q}{q} \right) \end{aligned} \tag{7.2}$$

Ahora, obsérvese que los  $w_i$  permutan únicamente los  $\delta_i$  y dejan fijos  $\epsilon_1, \epsilon_2$  mientras que  $S_\beta$  permuta  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  y deja fijos cada  $\delta_i$ ; así, la acción de los representantes elegidos de  $W_Z \setminus W_K$  sobre  $\lambda$  verifica

$$S_\beta^l w_i(\lambda) = w_i(\lambda_q) + S_\beta^l(\lambda_2) + \lambda_z, \quad l = 0, 1 \tag{7.3}$$

Sea  $\Phi^+(\xi) = \Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) \cap \Phi(\xi)$ ,  $\Phi^+(\xi)$  es un sistema positivo de  $\Phi(\xi)$  compatible con  $\Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ , y recordemos  $\varpi(\gamma) = \frac{\prod_{\alpha \in \Phi^+(\xi)} \langle \gamma, \alpha \rangle}{\prod_{\alpha \in \Phi^+(\xi)} \langle \alpha, \rho_\xi \rangle}$  el denominador de Weyl. Puesto que  $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$  es un conjunto ortogonal a  $\Phi(\xi)$  por (7.3) se sigue que

$$\varpi(S_\beta w_i \lambda) = \varpi(w_i(\lambda_q + \lambda_Z)) = \varpi(w_i \lambda_q),$$

Motivados por la fórmula de Dufflo-Vargas, queremos calcular:

$$\sum_{w \in W_K^Z} \epsilon(w) \varpi(w\lambda) \delta_{q_u(w(\lambda))} * y_{S_w^H} \quad (7.4)$$

Tomando  $F = \left( \sum_{1 \leq i \leq q-1} \epsilon(w_i) \varpi(w_i(\lambda_q + \lambda_Z)) \delta_{w_i(\lambda_q + \lambda_Z)} * y_{\delta_1}^{q-1} \right)$  y teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, se sigue que (7.4) está dado por:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{q-1} \epsilon(w_i) \varpi(w_i(\lambda_q + \lambda_Z)) \delta_{w_i(\lambda_q + \lambda_Z)} * \delta_{\lambda_2} * y_{\epsilon_1}^{q-1} * y_{-\epsilon_2}^{q-1} * y_{\delta_1}^{q-1} + \\ & - \sum_{i=1}^{q-1} \epsilon(w_i) \varpi(w_i(\lambda_q + \lambda_Z)) \delta_{w_i(\lambda_q + \lambda_Z)} * \delta_{S_\beta(\lambda_2)} * y_{S_\beta(\epsilon_1)}^{q-1} * y_{S_\beta(-\epsilon_2)}^{q-1} * y_{\delta_1}^{q-1} \\ & = F * \left( \delta_{\lambda_2} * y_{\epsilon_1}^{q-1} * y_{-\epsilon_2}^{q-1} - \delta_{S_\beta(\lambda_2)} * y_{S_\beta(\epsilon_1)}^{q-1} * y_{S_\beta(-\epsilon_2)}^{q-1} \right) \end{aligned} \quad (7.5)$$

El primer sumando del término en paréntesis es:

$$\begin{aligned} \delta_{\lambda_2} * y_{\epsilon_1}^{q-1} * y_{-\epsilon_2}^{q-1} &= \delta_{\lambda_2} * \sum_{n \geq 0} \binom{n+q-1-1}{q-1-1} \delta_{\left(\frac{q-1}{2}+n\right)\epsilon_1} * \sum_{m \geq 0} \binom{m+q-1-1}{q-1-1} \delta_{\left(\frac{q-1}{2}+m\right)(-\epsilon_2)} \\ &= \left( \sum_{n, m \geq 0} \binom{n+q-2}{q-2} \binom{m+q-2}{q-2} \delta_{n\epsilon_1 + m(-\epsilon_2) + \frac{q-1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2) + \lambda_2} \right) \end{aligned} \quad (7.6)$$

Cálculos similares a (7.6) verifican que todas las componentes diferentes de cero del segundo sumando de (7.5) son de la forma  $\delta_{r\epsilon_1 + s\epsilon_2}$  con  $r, s \leq 0$ .

Analicemos detalladamente el término  $F$ . Sea  $K_1 := K_q \times K_Z$ , y sea  $L_1 = H \cap K_1 \subseteq K_1$ , calculemos la intersección de  $L_1$  con el toro maximal  $T$ ,  $U_1 := L_1 \cap T$ . Entonces  $\mathfrak{l}_1 \subseteq \mathbb{C}H_{\alpha_0} + \mathbb{C}H_{\beta - \alpha_0} \oplus \mathbb{C}X_\beta \oplus \mathbb{C}X_{-\beta}$ , y dado que  $X_{\pm\beta} \notin \mathfrak{l}_1$  se sigue entonces que  $L_1$  es un toro.

Sea  $\pi_{\lambda_q + \lambda_Z}^{K_1} : K_1 \rightarrow GL(V)$  la representación irreducible de dimensión finita de  $K_1$ , con carácter infinitesimal  $\lambda_q + \lambda_Z$ . Cuando restringimos la representación a  $L_1$  ( $\pi_{\lambda_q + \lambda_Z}|_{L_1}, V$ ) se descompone como suma directa de representaciones irreducibles de  $L_1$ . Por la conmutatividad de  $L_1$ , los caracteres que aparecen en dicha descomposición son precisamente los pesos de la representación de  $\pi_{\lambda_q + \lambda_Z}$  restringidos a  $L_1$ .

Si  $C_1$  es la cámara de Weyl relativa a un sistema positivo de  $\mathfrak{l}_1$  elegido previamente, la fórmula de Dufflo-Vargas aplicada al par  $L_1 \subseteq K_1$  y la representación  $(\pi_{\lambda_q + \lambda_Z}, V)$  concluye la igualdad:

$$\sum_{\nu \in i\mathfrak{w}_1^*} \sum_{\substack{s \in W_{L_1} \\ s(\nu) \in C_1}} \epsilon(s) m^{L_1}(\pi_{\lambda_q + \lambda_Z}, \sigma_{s(\nu)}) \delta_{s(\nu)} = \sum_{w \in W_Z / W_{K_1}} \epsilon(w) \varpi(w(\lambda_q + \lambda_Z)) \delta_{q_{u_1}(w(\lambda_q + \lambda_Z))} * y_{S_w^{L_1}} \quad (7.7)$$

Más aún, como  $L_1$  es un toro  $W_{L_1} = \{0\}$ . Para calcular  $y_{S_w^{L_1}}$  obsérvese que  $S_w^{L_1} = q_{u_1}(S_w^L) \cap \Phi(\mathfrak{k}_1, \mathbf{u}_1) = \{q_{u_1}(\delta_1 - \delta_j)\}_{2 \leq i < j \leq q}$ , y por tanto  $y_{S_w^{L_1}} = y_{q_{u_1}(\delta_1)}^{2q-1}$ .

Extendiendo la igualdad en (7.7) trivialmente a  $\mathbf{u}$ , las observaciones anteriores permiten concluir que  $F = \sum_{\nu \in i\mathbf{u}^*} m(\pi_{\lambda_q + \lambda_Z}, \sigma_\nu) \delta_\nu$ , con  $\nu \in i\mathbf{u}^*$  tal que al restringirlo a  $i\mathbf{u}_1^*$  es un peso restringido de  $\pi_{\lambda_q + \lambda_Z}$ . Entonces (7.5) se puede reescribir de la forma

$$\sum_{\substack{\nu \in i\mathbf{u}^* \\ n, m \geq 0}} M(\lambda, n, m, \nu) \left( \delta_{\nu + n\overline{\epsilon_1} + m\overline{(-\epsilon_2)} + \frac{q-1}{2}(\overline{\epsilon_1 - \epsilon_2}) + \overline{\lambda_2}} - \delta_{\nu - n\overline{\epsilon_1} - m\overline{(-\epsilon_2)} - \frac{q-1}{2}(\overline{\epsilon_1 - \epsilon_2}) - \overline{\lambda_2}} \right) \quad (7.8)$$

con  $M(\lambda, n, m, \nu) = m(\pi_{\lambda_q + \lambda_Z}, \sigma_\nu) \binom{n+q-2}{q-2} \binom{m+q-2}{q-2}$ .

Sea  $\eta$  un parámetro de Harish-Chandra de  $H$  en una cámara tal que la cámara de  $L$  sea compatible con la cámara de  $K$  dada por  $G$ ; esto es,  $\eta$  está en una cámara tal que las raíces compactas positivas de  $\mathfrak{l}$  son restricciones de raíces positivas de  $\mathfrak{k}$ . En nuestro caso esta condición está determinada por las cámaras tales que  $\langle \eta, q_u(\epsilon_1 - \epsilon_2) \rangle \geq 0$ .

Sea  $\delta_{\nu - n\overline{\epsilon_1} - m\overline{(-\epsilon_2)} - \frac{q-1}{2}(\overline{\epsilon_1 - \epsilon_2}) - \overline{\lambda_2}}$  como en el segundo sumando entre paréntesis de (7.8). Entonces satisface:

$$\begin{aligned} \langle \nu - nq_u(\epsilon_1) - mq_u(-\epsilon_2) - \frac{q-1}{2}q_u(\epsilon_1 - \epsilon_2) - q_u(\lambda_2), q_u(\epsilon_1 - \epsilon_2) \rangle &= \\ \langle \nu - nq_u(\epsilon_1) - mq_u(-\epsilon_2) - \frac{q-1}{2}q_u(\epsilon_1 - \epsilon_2) - q_u(\lambda_2), (H_{\epsilon_1 - \epsilon_2}) \rangle &= \\ \nu(H_{\epsilon_1 - \epsilon_2}) - n\epsilon_1(H_{\epsilon_1 - \epsilon_2}) + m\epsilon_2(H_{\epsilon_1 - \epsilon_2}) - \frac{q-1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2)(H_{\epsilon_1 - \epsilon_2}) - \lambda_2(H_{\epsilon_1 - \epsilon_2}) &= \\ -n - m - (q-1) - \lambda_2(H_{\epsilon_1 - \epsilon_2}) &= \\ -n - m - (q-1) - (a_1 - a_2) &< 0 \end{aligned}$$

Luego los parámetros que aparecen en la segunda suma de (7.8) no están en ninguna cámara de  $H$  que sea compatible con  $G$ , en el sentido anteriormente mencionado.

Por tanto, si  $\eta$  es un parámetro de Harish-Chandra  $\eta = \nu + n\overline{\epsilon_1} + m\overline{(-\epsilon_2)} + \frac{q-1}{2}(\overline{\epsilon_1 - \epsilon_2}) + \overline{\lambda_2}$  para ciertos  $n, m, \nu$  como antes;  $\eta$  puede estar en tres posibles cámaras a saber:  $C_H, C_A, C_Q$ .

**Teorema 7.2.1.** *La restricción de  $G$  a  $H$  se descompone discretamente en suma de series discretas, de tal modo que todos los parámetros de Harish-Chandra de  $H$  que aparecen pertenecen a la cámara cuaterniónica; esto es, la restricción no tiene factores en la serie discreta holomorfa, ni antiholomorfa.*

*Demostración.* Si  $\eta$  es un parámetro de Harish-Chandra de  $H$ , entonces siguiendo las condiciones en (6.1) si vemos que  $\langle \eta, \alpha_0 \rangle > 0$ ;  $\langle \eta, \beta - \alpha_0 \rangle > 0$ , entonces  $\langle \eta, \beta \rangle = \langle \eta, \beta - \alpha_0 \rangle + \langle \eta, \alpha_0 \rangle > 0$  esto dice que las raíces positivas de la cámara a la cual pertenece  $\eta$ , son precisamente  $\alpha_0, \beta - \alpha_0, \beta$  y por tanto  $\eta$  está en la cámara cuaterniónica. Así, para  $\eta = \nu + n\overline{\epsilon_1} + m\overline{(-\epsilon_2)} + \frac{q-1}{2}(\overline{\epsilon_1 - \epsilon_2}) + \overline{\lambda_2}$ , se tiene

$$\begin{aligned} \langle \eta, \alpha_0 \rangle &= \langle \eta, q_u(\epsilon_1 - \delta_1) \rangle = \eta(H_{\epsilon_1 - \delta_1}) \\ &= (\nu + n\overline{\epsilon_1} + m\overline{(-\epsilon_2)} + \frac{q-1}{2}(\overline{\epsilon_1 - \epsilon_2}) + \overline{\lambda_2})(H_{\epsilon_1 - \delta_1}) \\ &= \nu(H_{\epsilon_1 - \delta_1}) + n\epsilon_1(H_{\epsilon_1 - \delta_1}) + m(-\epsilon_2)(H_{\epsilon_1 - \delta_1}) + \frac{q-1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2)(H_{\epsilon_1 - \delta_1}) + \lambda_2(H_{\epsilon_1 - \delta_1}) \\ &= \nu(H_{\epsilon_1 - \delta_1}) + n + \frac{q-1}{2} + \frac{a_1 - a_2}{2} \end{aligned}$$



Dado que  $\nu$  es un peso de la representación de  $K_1 := K_q \times K_Z$  irreducible con peso máximo  $\lambda_q + \lambda_Z - \rho_q$ , un teorema de Kostant muestra que  $\nu$  es una combinación convexa de los elementos de la órbita del grupo de Weyl actuando sobre el peso máximo, es decir  $\nu = \sum_{w \in W_{K_1}} c_w w(\lambda_q + \lambda_Z - \rho_q)$ , con  $\sum_w c_w = 1$ ,  $c_w \geq 0$ . Por tanto

$$\begin{aligned}
\nu(H_{\epsilon_1 - \delta_1}) + \frac{a_1 - a_2}{2} &= \sum_{w \in W_{K_1}} c_w w(\lambda_q + \lambda_Z - \rho_q)(H_{\epsilon_1 - \delta_1}) + \frac{a_1 - a_2}{2} \\
&= \sum_{w \in W_{K_1}} c_w \langle w(\lambda_q + \lambda_Z - \rho_q), \epsilon_1 - \delta_1 \rangle + \frac{a_1 - a_2}{2} \\
&= \sum c_w \langle \lambda_q + \lambda_Z - \rho_q, w^{-1}(\epsilon_1 - \delta_1) \rangle + \sum c_w \frac{a_1 - a_2}{2} \\
&= \sum c_w \left( -b_{w^{-1}(1)} - \frac{a_1 + a_2}{q} + \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 + a_2}{q} + \frac{q+1-2w^{-1}(1)}{2} + \frac{a_1 - a_2}{2} \right) \\
&= \sum c_w \left( (-b_{w^{-1}(1)} + a_1) + \frac{q+1-2w^{-1}(1)}{2} \right)
\end{aligned}$$

Dado que  $c_w \geq 0$  para todo  $w$  entonces

$$\begin{aligned}
&\geq \sum c_w \left( w^{-1}(1) + \frac{q+1-2w^{-1}(1)}{2} \right) \\
&= \sum_w c_w \frac{q+1}{2} = \frac{q+1}{2} > 0
\end{aligned}$$

similarmente

$$\begin{aligned}
\langle \eta, \beta - \alpha_0 \rangle &= \langle \eta, q_u(\delta_1 - \epsilon_2) \rangle \\
&= \nu(H_{\delta_1 - \epsilon_2}) + n\epsilon_1(H_{\delta_1 - \epsilon_2}) + m(-\epsilon_2)(H_{\delta_1 - \epsilon_2}) + \frac{q-1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2)(H_{\delta_1 - \epsilon_2}) + \lambda_2(H_{\delta_1 - \epsilon_2}) \\
&= \nu(H_{\delta_1 - \epsilon_2}) + m + \frac{q-1}{2} + \frac{a_1 - a_2}{2}
\end{aligned}$$

además

$$\begin{aligned}
\nu(H_{\delta_1 - \epsilon_2}) + \frac{a_1 - a_2}{2} &= \sum_{w \in W_{K_1}} c_w w(\lambda_q + \lambda_Z - \rho_q)(H_{\delta_1 - \epsilon_2}) + \frac{a_1 - a_2}{2} \\
&= \sum_{w \in W_{K_1}} c_w \langle w(\lambda_q + \lambda_Z - \rho_q), \delta_1 - \epsilon_2 \rangle + \frac{a_1 - a_2}{2} \\
&= \sum c_w \langle \lambda_q + \lambda_Z - \rho_q, w^{-1}(\delta_1 - \epsilon_2) \rangle + \sum c_w \frac{a_1 - a_2}{2} \\
&= \sum c_w \left( b_{w(1)} + \frac{a_1 + a_2}{q} - \frac{a_1 + a_2}{2} - \frac{a_1 + a_2}{q} - \frac{q+1-2w(1)}{2} + \frac{a_1 - a_2}{2} \right) \\
&= \sum c_w \left( b_{w(1)} - a_2 - \frac{q+1-2w(1)}{2} \right) \geq \sum c_w \left( q - w(1) + 1 - \frac{q+1-2w(1)}{2} \right) \\
&= \sum_w c_w \frac{q+1}{2} = \frac{q+1}{2} > 0
\end{aligned}$$

□

Siguiendo los resultados de (6.2) los pesos fundamentales de la cámara cuaterniónica son de la forma  $\Lambda_1 = 1/3q_u(\beta + \alpha_0) = 1/3q_u(2\epsilon_1 - \epsilon_2 - \delta_1) = q_u(\epsilon_1)$ ;  $\Lambda_2 = 1/3q_u(\beta + \beta - \alpha_0) =$

$1/3q_u(\epsilon_1 - 2\epsilon_2 + \delta_1) = q_u(-\epsilon_2)$ . Para algún  $v_0$  peso de la representación asociada al  $K$ -tipo minimal con  $\lambda - \rho_K + \rho_n$  tal que  $v_0$  tiene la misma componente en  $\beta$  que el peso máximo, i.e.,  $\langle \lambda - \rho_K + \rho_n, \beta \rangle = \langle v_0, \beta \rangle$ ; si  $\eta$  es como antes un parámetro en la cámara cuaterniónica,

$$\begin{aligned}
\eta &= \sum_{w \in W_{K_1}} c_w q_u(w(\lambda_q + \lambda_Z - \rho_q)) + n q_u(\epsilon_1) + m q_u(-\epsilon_2) + \frac{q-1}{2} q_u(\epsilon_1 - \epsilon_2) + q_u(\lambda_2) \\
&= \sum_{w \in W_{K_1}} c_w q_u(w(\lambda_q + \lambda_Z + \lambda_2 - \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2) - \rho_q + \frac{q}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2))) + n q_u(\epsilon_1) + m q_u(-\epsilon_2) \\
&= \sum_{w \in W_{K_1}} c_w q_u(w(\lambda - \rho_K + \rho_n)) + (n + \frac{q}{2}) q_u(\epsilon_1) + (m + \frac{q}{2}) q_u(-\epsilon_2) \\
&= q_u(v_0) + n q_u(\epsilon_1) + m q_u(-\epsilon_2) \\
&= q_u(v_0) + n \Lambda_1 + m \Lambda_2
\end{aligned} \tag{7.9}$$

En particular, analicemos el caso estudiado por Wallach, a saber, la representación con parámetro  $\lambda = \rho_G - (k - q - 1)\beta$   $k > q - 1$ , en este caso se verifica  $\lambda_q = \rho_q$ ,  $\lambda_2 = \left(k - \frac{q+1}{2}\right)(\epsilon_1 - \epsilon_2)$ ,  $\lambda_Z = 0$ . Entonces  $v_0$  es de la forma

$$\begin{aligned}
\sum_{w \in W_{K_1}} c_w q_u(w(\lambda - \rho_K + \rho_n)) &= \sum_{w \in W_{K_1}} c_w q_u(w(\lambda_q + \lambda_Z + \lambda_2 - \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2) - \rho_q + \frac{q}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2))) \\
&= \sum_{w \in W_{K_1}} c_w (k - 1) q_u(w(\epsilon_1 - \epsilon_2)) = (k - 1) q_u(\epsilon_1 - \epsilon_2) \\
&= (k - 1)(\Lambda_1 + \Lambda_2)
\end{aligned} \tag{7.10}$$

además, de (7.8)  $M(\lambda, n, m, \nu) = m(\pi_{\lambda_q + \lambda_Z}, \sigma_\nu)^{\binom{n+q-2}{q-2} \binom{m+q-2}{q-2}} = \binom{n+q-2}{q-2} \binom{m+q-2}{q-2}$ , con lo cual recuperamos el resultado:

**Proposición 7.2.2.** Sea  $\lambda = \rho_G - (k - q - 1)\beta$   $k > q - 1$ . Entonces la representación de  $SU(2, q)$  con parámetro de Harish-Chandra  $\lambda$  se descompone como  $\bigoplus_{n, m \geq 0} m^H(\pi_\lambda, \sigma_\nu) \pi_\nu$ , con  $\nu$  de la forma  $(n + k - 1)\Lambda_1 + (m + k - 1)\Lambda_2$  y cada  $\nu$  ocurre con multiplicidad

$$m^H(\pi_\lambda, \sigma_\nu) = \binom{n + q - 2}{q - 2} \binom{m + q - 2}{q - 2}$$

### 7.2.2. Caso $G(\mathbb{C})$ de tipo $B_n$ , $G = SO(4, 2q + 1)$ .

Procedemos similarmente como en el anterior caso. Sea  $G = SO(4, 2q + 1)$ ,  $T \subseteq K \subseteq G$  un toro maximal de  $K$ , luego  $T$  es un subgrupo de Cartan compacto de  $G$ . Sea  $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$  el sistema de raíces de  $\mathfrak{g}$  respecto a  $\mathfrak{t}$ . Sea  $i\mathfrak{t}_0^*$  el subespacio vectorial adyacente al sistema de raíces de  $\mathfrak{g}$  y sea  $\{\delta_0, \delta_1, \epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_q\}$  una base ortonormal de  $i\mathfrak{t}_0^*$ . Tomando como raíces simples el conjunto  $\Pi := \{\delta_0 - \delta_1, \delta_1 - \epsilon_1, \epsilon_1 - \epsilon_2, \dots, \epsilon_{q-1} - \epsilon_q, \epsilon_q\}$ , consideremos el diagrama de Vogan con raíces compactas (no coloreadas)  $\{\delta_0 - \delta_1, \epsilon_i - \epsilon_{i+1}, \epsilon_q\}_{1 \leq i < q}$  y raíces no compactas (coloreadas)  $\{\delta_1 - \epsilon_1\}$ ,

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\delta_0 - \delta_1 & \text{---} & \delta_1 - \epsilon_1 & \text{---} & \epsilon_1 - \epsilon_2 & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \epsilon_{q-1} - \epsilon_q & \text{---} & \epsilon_q \\
\circ & & \bullet & & \circ & & & & & & \circ & \text{---} & \circ
\end{array}$$

Esta elección determina sistemas positivos de  $\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ , y  $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$  compatibles. Sean  $\Psi_n = \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) \setminus \Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$  las raíces no compactas, y  $\Psi_n^+ = \Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) \cap \Psi_n$  las raíces no compactas positivas; entonces:

$$\begin{aligned}\Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) &= \{(\delta_0 \pm \delta_1), (\delta_l \pm \epsilon_i), (\epsilon_i \pm \epsilon_j), \epsilon_i, \delta_l\}_{l=0,1, \ 1 \leq i < j \leq q} \\ \Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) &= \{\pm(\delta_0 \pm \delta_1), \pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j), \pm\epsilon_i\}_{1 \leq i < j \leq q} \\ \Phi^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) &= \{(\delta_0 \pm \delta_1), (\epsilon_i \pm \epsilon_j), \epsilon_i\}_{1 \leq i < j \leq q} \\ \Psi_n^+ &= \{\delta_l \pm \epsilon_i, \delta_l\}_{l=0,1, \ 1 \leq i \leq q}\end{aligned}$$

Sea  $H_\alpha \in i\mathfrak{t}_0$  que represente  $\alpha$ ; entonces el conjunto

$$\{H_{\delta_0 - \delta_1}, H_{\delta_1 - \epsilon_1}\} \cup \{H_{\epsilon_i - \epsilon_{i+1}}, H_{\epsilon_n}\}_{1 \leq i \leq q-1}$$

forma una base para  $i\mathfrak{t}_0$ .

Construimos el subgrupo  $H$  localmente isomorfo a  $SU(2, 1)$  contenido en  $G$  en modo similar al caso anterior. En este caso la raíz máxima  $\beta = \delta_0 + \delta_1$ ,  $\alpha_0 = \delta_1 - \epsilon_1$ , el álgebra de Lie de  $H$  está dada por

$$\mathfrak{h} := \mathbb{C}H_{\alpha_0} + \mathbb{C}H_{\beta - \alpha_0} \oplus \mathbb{C}X_{\alpha_0} \oplus \mathbb{C}X_{\beta - \alpha_0} \oplus \mathbb{C}X_\beta \oplus \mathbb{C}X_{-\alpha_0} \oplus \mathbb{C}X_{-(\beta - \alpha_0)} \oplus \mathbb{C}X_{-\beta}.$$

Como antes  $H$  es el subgrupo conexo de  $G$  con álgebra de Lie  $\mathfrak{h}_0 := \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0$ ;  $H$  es localmente isomorfo a  $SU(2, 1)$ , tomando  $L := K \cap H$ ,  $U := T \cap H$ , entonces  $U$  es un toro maximal de  $L$ ;  $L$  es un subgrupo compacto maximal de  $H$  y también  $U$  es un subgrupo de Cartan compacto de  $H$ . Con esta notación,  $i\mathfrak{u}_0 = \mathbb{R}H_{\delta_1 - \epsilon_1} \oplus \mathbb{R}H_{\epsilon_1 + \delta_0}$ . Consideremos la restricción  $q_u : \mathfrak{k}^* \rightarrow \mathfrak{u}^*$ , entonces podemos expresar los sistemas de raíces de  $\mathfrak{h}, \mathfrak{l}$  en términos de las raíces de  $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{k}$  mediante:

$$\Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{u}) = \{\pm q_u(\delta_1 - \epsilon_1), \pm q_u(\epsilon_1 + \delta_0), \pm q_u(\delta_1 + \delta_0)\}$$

Raíces compactas de  $\mathfrak{h}$

$$\Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{u}) = \{\pm q_u(\delta_1 + \delta_0)\}$$

**Teorema 7.2.3.** *Sea  $\pi_\lambda^G$  una serie discreta de  $G$  con parámetro de Harish-Chandra  $\lambda \in \mathfrak{k}^*$ . La restricción a  $H$  de  $\pi_\lambda^G$  se descompone como suma directa de series discretas de  $H$ , tal que los parámetros de Harish-Chandra  $\mu$  de  $H$  asociados a los factores irreducibles de  $\pi_\lambda^G|_H$  pertenecen a la cámara asociada al sistema de raíces tal que las raíces simples son no compactas, es decir, la restricción no tiene factores en la serie discreta holomorfa ni antiholomorfa.*

Así mismo,  $\Phi(\xi) = \{\alpha \in \Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) \mid q_u(\alpha) = 0\} = \{\pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j), \pm\epsilon_i\}_{2 \leq i < j \leq q}$

$$\begin{aligned}\Phi(\mathfrak{k}/\mathfrak{l}, \mathfrak{u}) &= q_u\left(\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) \setminus \Phi(\xi)\right) \setminus \Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{u}) \\ &= q_u\left(\{\pm(\delta_0 \pm \delta_1), \pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j), \pm\epsilon_i\}_{1 \leq i < j \leq q} \setminus \{\pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j), \pm\epsilon_i\}_{2 \leq i < j \leq q}\right) \setminus \{\pm(q_u(\delta_0 + \delta_1))\} \\ &= \{\pm q_u(\epsilon_1), \pm q_u(\epsilon_1 \pm \epsilon_j), \pm q_u(\delta_0 - \delta_1)\}_{2 \leq j \leq q}\end{aligned}\tag{7.11}$$

Ahora,  $K$  se descompone de la forma  $K = K_q \times K_4$ , tal que  $\mathfrak{k}_q \simeq \mathfrak{so}(q)$ ,  $\mathfrak{k}_4 \simeq \mathfrak{so}(4) \simeq \mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)$ ,  $\mathfrak{z}_\mathfrak{k} = 0$ . Uno de los factores  $\mathfrak{sl}(2)$  corresponde a la  $\mathfrak{sl}_2$  tripla generada por la raíz máxima  $\beta$  mientras que el otro es determinado por la raíz  $\delta_0 - \delta_1$ , notemos estos factores por  $\mathfrak{sl}_\beta$

y  $sl_\delta(2)$  respectivamente. Sean  $K_2, SU_\delta(2)$  los subgrupos conexos de  $K$  con álgebras de Lie  $sl_\beta$  y  $sl_\delta(2)$  respectivamente. La descomposición sobre  $K$  genera una descomposición

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{su}_\beta(2) + \mathfrak{k} \cap \mathfrak{so}(2q+1) + \mathfrak{k} \cap \mathfrak{su}_\delta(2)$$

cada sumando es una subálgebra toral maximal en el sumando de  $\mathfrak{k}$  que lo contiene. Por tanto,  $\lambda$  se escribe como  $\lambda = \lambda_2 + \lambda_q + \lambda_d$  con  $\lambda_2 \in (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{su}_\beta(2))^*$ ,  $\lambda_q \in (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{so}(2q+1))^*$ ,  $\lambda_d \in (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{su}_\delta(2))^*$ . Sean  $\pi_{\lambda_i}^{K_i}$  la representación irreducible de  $K_i$  de carácter infinitesimal  $\lambda_i$ . Explícitamente,

$$\lambda = a_0\delta_0 + a_1\delta_1 + b_1\epsilon_1 + \cdots + b_q\epsilon_q = \lambda_2 + \lambda_d + \lambda_q \text{ con}$$

$$\lambda_d = (a_0 - a_1)\frac{\delta_0 - \delta_1}{2}; \quad \lambda_2 = (a_0 + a_1)\frac{\delta_0 + \delta_1}{2}; \quad \lambda_q = \sum b_i\epsilon_i.$$

Entonces escribiendo  $K$  como  $K = K_1 \times K_2$  con  $K_1 = K_q \times SU_\delta(2)$  y  $\lambda_1 = \lambda_q + \lambda_d$ .

**Proposición 7.2.4.** Sea  $(\pi_{\lambda_1}^{K_1}, V_{\lambda_1})$  la representación irreducible de  $K_1 \simeq SO(2q+1) \times SU_\delta(2)$  con carácter infinitesimal  $\lambda_1$ . Sea  $\Delta(V_{\lambda_1})$  el conjunto de pesos de la representación  $\pi_{\lambda_1}^{K_1}$ , para  $\nu \in \Delta$  sea  $M(\lambda_1, \nu)$  la dimensión del espacio de peso  $\nu$ . Entonces los parámetros de Harish-Chandra  $\mu$  de  $H$  tales que  $m^H(\lambda_1, \mu) \neq 0$  son de la forma  $\mu = (n+2q)q_u(\delta_1) + (m+2q)q_u(\delta_2) + q_u(\lambda_2) + q_u(\nu)$  con  $n, m \in \mathbb{Z}$ ,  $\nu \in \Delta(V_{\lambda_1})$ . Más aún, sea

$$P_\mu := \{(n, m, \nu) \mid n, m \in \mathbb{Z}, \nu \in \Delta(V_{\lambda_1}); \mu = (n+q)q_u(\delta_1) + (m+q)q_u(\delta_2) + q_u(\lambda_2) + q_u(\nu)\}.$$

Entonces  $\mu$  ocurre con multiplicidad

$$\sum_{\substack{\nu \in \Delta(V_{\lambda_1}) \\ (n, m, \nu) \in P_\mu}} M(\lambda_1, \nu) \binom{m+2q-1}{2q-1} \binom{n+2q-1}{2q-1}$$

El resto de la sección se dedicará a demostrar esta proposición y el teorema.

Los elementos de  $W_Z$  permutan las raíces de  $K_q$  y dejan fijas las raíces  $\delta_0 \pm \delta_1$ . Sea  $\tau := S_{\delta_0 - \delta_1}$ , entonces  $\tau$  conmuta con todos los elementos de  $W_Z$ ; Sea  $W_{K_1}^Z = \{w_1, w_2, \dots, w_r\}$  un conjunto de representantes de la acción a derecha de  $W_Z$  sobre  $W_{K_1}$ , Entonces un conjunto de representantes de la acción de  $W_Z$  sobre  $W_K$  es  $\{S_\beta w_i\}$ , con  $w_i \in W_{K_1}^Z$ . Denotando por barra la restricción a  $\mathfrak{u}$ , y observando que  $q_u(\epsilon_j) = 0$  si  $j \neq 1$  y  $q_u(\delta_1 + \epsilon_1 - \delta_0) = 0$ , se tiene para  $w_i \in W_{K_1}^Z$ :

$$\begin{aligned} S_{w_i}^H &:= q_u(w_i \Psi_n^+) \setminus \Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{u}) \cup \Delta(\mathfrak{k}/\mathfrak{l}, \mathfrak{u}) \\ &= \{q_u(\delta_l), q_u(\delta_l \pm \epsilon_j), q_u(\delta_1 + \epsilon_1), q_u(\delta_0 - \epsilon_1), q_u(\epsilon_1), q_u(\epsilon_1 \pm \epsilon_j)\}_{l=0,1} \quad 2 \leq j \leq q \\ &= \underbrace{\{q_u(\delta_1)\}}_{2q}, \underbrace{\{q_u(\delta_0)\}}_{2q}, \underbrace{\{q_u(\epsilon_1)\}}_{2q}. \end{aligned}$$

Así mismo

$$\begin{aligned} S_{S_\beta w_i}^H &:= q_u(S_\beta w_i \Psi_n^+) \setminus \Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{u}) \cup \Delta(\mathfrak{k}/\mathfrak{l}, \mathfrak{u}) \quad w_i \in W_{K_1}^Z, \\ &= \{q_u S_\beta(\delta_l), q_u S_\beta(\delta_l \pm \epsilon_j), q_u S_\beta(\delta_1 + \epsilon_1), q_u S_\beta(\delta_0 - \epsilon_1), q_u(\epsilon_1), q_u(\epsilon_1 \pm \epsilon_j)\}_{l=0,1} \quad 2 \leq j \leq q \\ &= \underbrace{\{q_u(S_\beta \delta_1)\}}_{2q}, \underbrace{\{q_u(S_\beta \delta_0)\}}_{2q}, \underbrace{\{q_u(\epsilon_1)\}}_{2q}. \end{aligned}$$

Ahora, los  $w_i$  actúan sobre los  $\epsilon_i$  permutándolos y cambiándoles de signo y permutando  $\delta_0$  con  $\delta_1$ , por tanto cada  $w_i$  deja fijo  $\lambda_2$  y la acción de los representantes de  $W_Z \setminus W_K$  sobre  $\lambda$  se puede calcular:

$$q_u(S_\beta^a w_i(\lambda)) = q_u(S_\beta^a(\lambda_2) + q_u(w_i(\lambda_q + \lambda_d)) = q_u(S_\beta^a(\lambda_2)) + q_u(w_i(\lambda_1))$$

Sean  $\Phi^+(\xi)$ ,  $\varpi(\gamma)$  como en la fórmula de Duflo y Vargas; entonces  $\varpi(S_\beta^a w_i \lambda) = \varpi(w_i \lambda_1) = \varpi(w_i \lambda_q)$ . Calculemos la expresión

$$\sum_{w \in W_K^Z} \epsilon(w) \varpi(w \lambda) \delta_{q_u(w(\lambda))} * y_{S_\beta^H} \quad (7.12)$$

y tomando  $F = \left( \sum_{w_i \in W_{K_1}^Z} \epsilon(w_i) \varpi(w_i \lambda_1) \delta_{q_u(w_i \lambda_1)} * y_{q_u(\epsilon_1)}^{2q} \right)$  dicha expresión está dada por:

$$\begin{aligned} & \sum_{w_i \in W_{K_1}^Z} \epsilon(w_i) \varpi(w_i \lambda_1) \delta_{q_u(w_i \lambda_1)} * \delta_{q_u(\lambda_2)} * y_{q_u(\epsilon_1)}^{2q} * y_{q_u(\delta_0)}^{2q} * y_{q_u(\delta_1)}^{2q} + \\ & - \sum_{w_i \in W_{K_1}^Z} \epsilon(w_i) \varpi(w_i \lambda_q) \delta_{q_u(w_i \lambda_1)} * \delta_{q_u(S_\beta \lambda_2)} * y_{q_u(\epsilon_1)}^{2q} * y_{q_u(S_\beta \delta_0)}^{2q} * y_{q_u(S_\beta \delta_1)}^{2q} \\ & F * (\delta_{q_u(\lambda_2)} * y_{q_u(\delta_0)}^{2q} * y_{q_u(\delta_1)}^{2q} - \delta_{q_u(S_\beta \lambda_2)} * y_{q_u(S_\beta \delta_0)}^{2q} * y_{q_u(S_\beta \delta_1)}^{2q}) \quad (7.13) \end{aligned}$$

Para calcular  $F$ , aplicamos la fórmula de Heckmann (equivalente a la fórmula de Duflo-Vargas en el caso  $G, H$  compactos) al caso  $K_1 \simeq SO(2q+1) \times SO(2)$ ,  $L_1 := H \cap K_1$ ,  $\lambda_1$ , con lo cual:

$$\sum_{\nu \in i(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{k}_1)^*} m^{L_1}(\pi_{\lambda_1}, \sigma_\nu) \delta_\nu = \sum_{w_i \in W_{K_1}^Z} \epsilon(w) \varpi(w_i \lambda_1) \delta_{q_{\mathfrak{u} \cap \mathfrak{k}_1}(w_i \lambda_1)} * y_{S_{w_i}^{L_1}} \quad (7.14)$$

Entonces  $F$  restringido a  $\mathfrak{u} \cap \mathfrak{k}_1$  es precisamente el lado derecho de (7.14); más aún, para cada  $w_i \in W_{K_1}^Z$ ,  $w_i(\lambda_1)$  al restringir  $(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{su}_\beta(2))$  es cero. Por tanto, extendiendo cada  $\nu \in (\mathfrak{u} \cap \mathfrak{k}_1)^*$  a  $\mathfrak{u}^*$ , definiendo cero sobre  $\mathfrak{u} \cap \mathfrak{su}_\beta(2)$ , se tiene que  $F$  es igual al lado izquierdo de (7.14).

Dado que  $L_1$  tiene álgebra de Lie complejificada  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}_1$ , la descomposición en espacios de peso de  $\mathfrak{l}$  muestra que  $\mathfrak{l}_\alpha \in \mathfrak{k}_2$  para toda raíz  $\alpha$ . Como  $\mathfrak{k}_2 \cap \mathfrak{k}_1 = 0$ , esto muestra que  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}_1$  está contenida en la subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{l}$ , por lo cual  $L_1$  es un toro de  $K_1$ , y por tanto la restricción en (7.14) es simplemente la restricción a espacios de peso. En conclusión, sea  $\Delta(V_{\lambda_1})$  el conjunto de pesos de la representación de  $K_1$  con caracter infinitesimal  $\lambda_1$ , entonces para  $\nu_0 \in i(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{k}_1)^*$ ,  $m^{L_1}(\pi_{\lambda_1}, \sigma_{\nu_0}) \neq 0$  sólo si existe  $\nu \in \Delta(V_{\lambda_1})$  tal que  $q_{\mathfrak{u} \cap \mathfrak{k}_1}(\nu) = \nu_0$ .

Por tanto (7.14), y (7.13) implican que los términos no nulos en la fórmula de Duflo y Vargas, son de la forma  $\mu = (n + \frac{2q}{2})\delta_0 + (m + \frac{2q}{2})\delta_1 + q_u(\lambda_2) + q_u(\nu)$  o de la forma  $\mu = (n + \frac{2q}{2})S_\beta \delta_0 + (m + \frac{2q}{2})S_\beta \delta_1 + q_u(S_\beta \lambda_2) + q_u(\nu)$ , para algún  $n, m$  enteros no negativos y  $\nu \in \Delta(V_{\lambda_1})$ .

Si tomamos el sistema de raíces positivo de  $\Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{u})$  tal que  $q_u(\beta)$  es positiva, entonces como el capítulo 6, la series discretas de  $\mathfrak{h}$  están en correspondencia uno a uno con parámetros de Harish Chandra de  $H$  que pertenece a la unión de las cámaras de Weyl cuaterniónica, holomorfa y antiholomorfa. Por la regularidad del parámetro,, dicho parámetro no está en ninguna de las paredes; es decir, está en una y solo una de las cámaras de Weyl mencionadas.

Dado que  $\nu$  es un peso de una representación de  $\mathfrak{k}_1$  y  $H_\beta \in \mathfrak{k}_2$  entonces  $\nu(H_\beta) = 0$

$$\begin{aligned}
& \left( (n + \frac{2q}{2})S_\beta\delta_0 + (m + \frac{2q}{2})S_\beta\delta_1 + q_u(S_\beta\lambda_2) + q_u(\nu) \right)(H_\beta) = \\
& (n + q)S_\beta\delta_0(H_\beta) + (m + q)S_\beta\delta_1(H_\beta) + q_u(S_\beta\lambda_2)(H_\beta) + q_u(\nu)(H_\beta) = \quad (7.15) \\
& -(n + q) - (m + q) - \lambda_2(H_\beta) + q_u(\nu)(H_\beta) < 0
\end{aligned}$$

Por tanto, para todo  $n, m$  y todo  $\nu$ ,  $(n+q)S_\beta\delta_0 + (m+q)S_\beta\delta_1 + q_u(S_\beta\lambda_2) + q_u(\nu)$  no está en ninguna la cámara de Weyl cuaterniónica, holomorfa ni antiholomorfa. Esto permite concluir que basta analizar los parámetro  $\mu$  de  $H$  de la forma  $\mu = (n + \frac{2q}{2})\delta_0 + (m + \frac{2q}{2})\delta_1 + q_u(\lambda_2) + q_u(\nu)$ . Además, por (7.14), (7.13) y la fórmula de Duflo y Vargas cada parámetro de la forma  $\sum(n+q)\delta_0 + (m+q)\delta_1 + q_u(\lambda_2) + q_u(\nu)$  ocurre  $M(\lambda_1, \nu) \binom{m+2q-1}{2q-1} \binom{n+2q-1}{2q-1}$  veces. Por tanto, la multiplicidad  $m^H(\lambda, \mu)$  depende del número de formas de escribir  $m\mu$  de la forma  $\sum(n+q)\delta_0 + (m+q)\delta_1 + q_u(\lambda_2) + q_u(\nu)$ . Si  $P_\mu := \{(n, m, \nu) \mid n, m \in \mathbb{Z}, \nu \in \Delta(V_{\lambda_1}); \mu = (n+q)q_u(\delta_1) + (m+q)q_u(\delta_2) + q_u(\lambda_2) + q_u(\nu)\}$ . Entonces

$$m^H(\lambda, \mu) = \sum_{\substack{\nu \in \Delta(V_{\lambda_1}) \\ (n, m, \nu) \in P_\mu}} M(\lambda_1, \nu) \binom{m+2q-1}{2q-1} \binom{n+2q-1}{2q-1}$$

Con lo que queda probada la proposición.

Con el fin de demostrar el teorema, basta probar que  $\mu$  es combinación entera positiva de los pesos fundamentales relativos a la cámara cuaterniónica o, equivalentemente, que todos lo  $\mu$  son enteros dominantes respecto a la cámara cuaterniónica. Para esto, como  $\{q_u(\delta_1 - \epsilon_1), q_u(\epsilon_1 + \delta_0)\}$  son las raíces simples en la cámara cuaterniónica, basta ver que  $\mu(H_{\delta_1 - \epsilon_1}) > 0$  y  $\mu(H_{\epsilon_1 + \delta_0}) > 0$ . En efecto,

$$\begin{aligned}
& \left( (n + q)\delta_0 + (m + q)\delta_1 + \lambda_2 + q_u(\nu) \right)(H_{\delta_1 - \epsilon_1}) = \\
& (n + q)\delta_0(H_{\delta_1 - \epsilon_1}) + (m + q)\delta_1(H_{\delta_1 - \epsilon_1}) + \lambda_2(H_{\delta_1 - \epsilon_1}) + q_u(\nu)(H_{\delta_1 - \epsilon_1}) = \quad (7.16) \\
& (m + q) + \lambda_2(H_{\delta_1 - \epsilon_1}) + q_u(\nu)(H_{\delta_1 - \epsilon_1})
\end{aligned}$$

Como  $\nu \in \Delta(V_{\lambda_1})$ , por el teorema de Kostant  $\nu$  es combinación convexa de los elementos de la órbita de grupo de Weyl sobre el peso máximo; es decir,  $\nu = \sum c_i w_i(\lambda_1 + \rho_{K_1})$  para ciertos  $c_i \geq 0$  tales que  $\sum c_i = 1$  y  $w_i \in W_{K_1}$ . Además, puesto que cada  $w_i \in W_{K_1}$  deja fijo  $\lambda_2$ , entonces  $\sum c_i w_i(\lambda_2) = \lambda_2$ .

Para  $w_i \in W_{K_1}$  sean  $sg_i : \{1, \dots, q\} \rightarrow \{-1, 1\}$  y  $\sigma_i, \tau_i$  las permutaciones de  $q$  y  $2$  elementos respectivamente que satisfacen  $w_i(\epsilon_j) = sg_i(j)\epsilon_{\sigma_i(j)}$  para todo  $j = 1, \dots, q$ , y,  $w_i(\delta_l) = \delta_{\tau_i(l)}$  para  $l = 0, 1$ . Entonces:

$$\begin{aligned}
q + (\lambda_2 + \nu)(H_{\delta_1 - \epsilon_1}) &= q + \sum c_i w_i(\lambda_2)(H_{\delta_1 - \epsilon_1}) + \sum c_i w_i(\lambda_1 + \rho_{K_1})(H_{\delta_1 - \epsilon_1}) \\
&= q + \sum c_i w_i(\lambda_2 + \lambda_1 + \rho_{K_1})(H_{\delta_1 - \epsilon_1}) = q + \sum c_i w_i(\lambda + \rho_{K_1})(H_{\delta_1 - \epsilon_1}) \\
&= q + \sum c_i w_i(\lambda)(H_{\delta_1 - \epsilon_1}) + c_i w_i \rho_{K_1}(H_{\delta_1 - \epsilon_1}) \\
&= q + \sum c_i \left( q + (a_{\tau_i(1)} - sg_i(1)b_{\sigma_i(1)}) + \frac{1}{2}((-1)^{\tau_i(1)} - sg_i(1)(2q - 2\sigma_i(1) + 1)) \right)
\end{aligned}$$

Si  $sg_i(1) = -1$  entonces  $a_{\tau_i(1)}, -sg_i(1)b_{\sigma_i(1)}, 2q - 2\sigma_i(1) + 1$  son todos mayores que cero, luego el término entre paréntesis es mayor o igual a cero. Por otro lado, si  $sg_i(1) = 1$ , dado que  $\lambda$  es un parámetro de Harish-Chandra de  $SO(4, 2q+1)$  en la cámara cuaterniónica, entonces  $\langle \lambda, \delta_l - \epsilon_j \rangle >$

0 para todo  $j = 1, \dots, q$ ,  $l = 0, 1$ , por tanto  $a_{\tau_i(1)} - s_{g_i(1)} b_{\sigma_i(1)} = a_{\tau_i(1)} - b_{\sigma_i(1)} = \langle \lambda, \delta_{\tau_i(1)} - \epsilon_{\sigma_i(1)} \rangle > 0$ , mientras que  $q + \frac{1}{2}((-1)^{\tau_i(1)} - (2q - 2\sigma_i(1) + 1)) = \sigma_i(1) + \frac{1}{2}(-1 + (-1)^{\tau_i(1)}) \geq 0$ . En cualquier caso se tiene que  $\left( q + (a_{\tau_i(1)} + s_{g_i(1)} b_{\sigma_i(1)}) + \frac{1}{2}((-1)^{\tau_i(1)} + s_{g_i(1)}(2q - 2\sigma_i(1) + 1)) \right) > 0$ .

Similarmente:

$$\begin{aligned} & \left( (n+q)\delta_0 + (m+q)\delta_1 + \lambda_2 + q_u(\nu) \right) (H_{\epsilon_1 + \delta_0}) = \\ & (n+q)\delta_0(H_{\epsilon_1 + \delta_0}) + (m+q)\delta_1(H_{\epsilon_1 + \delta_0}) + \lambda_2(H_{\epsilon_1 + \delta_0}) + q_u(\nu)(H_{\epsilon_1 + \delta_0}) = \\ & (n+q) + \lambda_2(H_{\epsilon_1 + \delta_0}) + q_u(\nu)(H_{\epsilon_1 + \delta_0}) \end{aligned} \quad (7.17)$$

y conservando la notación

$$\begin{aligned} q + (\lambda_2 + \nu)(H_{\epsilon_1 + \delta_0}) &= \sum c_i w_i(\lambda_2)(H_{\epsilon_1 + \delta_0}) + \sum c_i w_i(\lambda_1 + \rho_{K_1})(H_{\epsilon_1 + \delta_0}) \\ &= q + \sum c_i w_i(\lambda)(H_{\epsilon_1 + \delta_0}) + c_i w_i \rho_{K_1}(H_{\epsilon_1 + \delta_0}) \\ &= \sum c_i \left( q + (a_{\tau_i(0)} + s_{g_i(1)} b_{\sigma_i(1)}) + \frac{1}{2}((-1)^{\tau_i(0)} + s_{g_i(1)}(2q - 2\sigma_i(1) + 1)) \right) \end{aligned}$$

Un razonamiento análogo prueba que los términos entre paréntesis en la suma de arriba son todos positivos. En consecuencia  $\mu(H_{\epsilon_1 + \delta_0}) > 0$  y también  $\mu(H_{\delta_1 - \epsilon_1}) > 0$ , por tanto  $\mu$  pertenece a la cámara de Weyl cuaterniónica, con lo que queda demostrado el teorema.

### 7.2.3. Caso $G(\mathbb{C})$ de tipo $G_2$ $G = G_{2(2)}$ .

Sea  $\mathfrak{g}$  el álgebra de Lie compleja de tipo  $g_2$ . Consideremos la forma real  $\mathfrak{g}_0$  asociada al diagrama de Vogan

$$\begin{array}{c} \circ \\ \alpha_1 \end{array} \Leftarrow \begin{array}{c} \bullet \\ \alpha_2 \end{array},$$

con  $\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle < \langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle$ . Sea  $G$  el grupo de Lie conexo con álgebra de Lie  $\mathfrak{g}_0$ . Entonces  $G$  es una forma real de  $\mathbf{G}_2(\mathbb{C})$ . En este caso  $K \simeq SU(2) \times SU(2)$ , sea  $T \subseteq K \subseteq G$  un toro maximal de  $K$ , luego  $T$  es un subgrupo de Cartan compacto de  $G$ . Sea  $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$  el sistema de raíces de  $\mathfrak{g}$  respecto a  $\mathfrak{t}$ . Un sistema de raíces simples es  $\Pi := \{\alpha_1, \alpha_2\}$ , donde  $\alpha_1$  es compacta y  $\alpha_2$  es no compacta.

Esta elección determina sistemas positivos  $\Phi^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ ,  $\Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$  compatibles. Sean  $\Psi_n = \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) \setminus \Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$  las raíces no compactas, y  $\Psi_n^+ = \Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) \cap \Psi_n$  las raíces no compactas positivas; entonces:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) &= \{\pm\alpha_1, \pm(\alpha_1 + \alpha_2), \pm(2\alpha_1 + \alpha_2), \pm\alpha_2, \pm(3\alpha_1 + \alpha_2), \pm(3\alpha_1 + 2\alpha_2)\} \\ \Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) &= \{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, 3\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + 2\alpha_2\} \\ \Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) &= \{\pm\alpha_1, \pm(3\alpha_1 + 2\alpha_2)\} \\ \Phi^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) &= \{\alpha_1, 3\alpha_1 + 2\alpha_2\} \\ \Psi_n^+ &= \{\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, 3\alpha_1 + \alpha_2\} \end{aligned}$$

Sea  $H_\alpha \in i\mathfrak{t}_0$  que represente  $\alpha \in i\mathfrak{t}_0^*$ ; el conjunto  $\{H_{\alpha_1}, H_{\alpha_2}\}$  forma una base para  $i\mathfrak{t}_0$ .

la raíz máxima de  $\Phi^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$  es  $\beta = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$ ; el álgebra de Lie dada por  $\mathfrak{h} := \mathbb{C}H_{\alpha_2} + \mathbb{C}H_{\beta - \alpha_2} \oplus \mathbb{C}X_{\alpha_2} \oplus \mathbb{C}X_{\beta - \alpha_2} \oplus \mathbb{C}X_\beta \oplus \mathbb{C}X_{-\alpha_2} \oplus \mathbb{C}X_{-(\beta - \alpha_2)} \oplus \mathbb{C}X_{-\beta}$ .

Sea  $H$  el subgrupo conexo de  $G$  con álgebra de Lie  $\mathfrak{h}_0 := \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0$ ;  $H$  es localmente isomorfo a  $SU(2, 1)$ , sea  $L := K \cap H$ ,  $U := T \cap H$ , entonces  $U$  es un toro maximal de  $L$ ;  $L$  es un subgrupo compacto maximal de  $H$  y también  $U$  es un subgrupo de Cartan compacto de  $H$ , y también  $i\mathfrak{u}_0 = \mathbb{R}H_{\alpha_2} \oplus \mathbb{R}H_{\beta - \alpha_2}$ . Por dimensión, la restricción  $q_u : \mathfrak{t}^* \rightarrow \mathfrak{u}^*$  es simplemente la identidad. Entonces

$$\Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{t}) = \{\pm(\alpha_2), \pm(\beta - \alpha_2), \pm(\beta)\} = \{\pm(\alpha_2), \pm(3\alpha_1 + \alpha_2), \pm(3\alpha_1 + 2\alpha_2)\}$$

Raíces compactas de  $\mathfrak{h}$

$$\Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{t}) = \{\pm(3\alpha_1 + 2\alpha_2)\}$$

Recordando las relaciones dadas por el producto interno usual; a saber:  $\langle \alpha_2, \alpha_1^\vee \rangle = -3$ ,  $\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle = 2$ ,  $\langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle = 6$ , como  $\mathfrak{u} = \mathfrak{t}$  es inmediato que  $\Phi(\xi) = \emptyset$ , luego  $W_Z = \{0\}$ ,  $W_K^Z = W_K = \{1, S_{\alpha_1}, S_{\beta}, \tau\}$ , con  $1 = Id_{\mathfrak{t}^*}$   $\tau = S_{\alpha_1}S_{\beta} = S_{\beta}S_{\alpha_1} = -1$

Así

$$\Phi(\mathfrak{k}/\mathfrak{l}, \mathfrak{t}) = \Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) \setminus \Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{t}) = \{\pm(\alpha_1)\}$$

Dado que  $S_{\alpha_1}(\alpha_2) = \alpha_2 + 3\alpha_1$  La acción de  $W_K$  sobre  $\Psi_n^+$  está dada por:

$$\begin{aligned} S_{\alpha_1}(\alpha_1 + \alpha_2) &= 2\alpha_1 + \alpha_2 & S_{\alpha_1}(3\alpha_1 + \alpha_2) &= \alpha_2 \\ S_{\beta}(\alpha_1 + \alpha_2) &= -(2\alpha_1 + \alpha_2) & S_{\beta}(3\alpha_1 + \alpha_2) &= -\alpha_2 \\ \tau(\alpha_1 + \alpha_2) &= -(\alpha_1 + \alpha_2) & \tau(3\alpha_1 + \alpha_2) &= -(3\alpha_1 + \alpha_2) \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} S_1^H &= S_{S_{\alpha_1}}^H := q_u(\Psi_n^+) \setminus \Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{u}) \cup \Delta(\mathfrak{k}/\mathfrak{l}, \mathfrak{u}) \\ &= \{\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2\} \end{aligned}$$

así mismo

$$\begin{aligned} S_\tau^H &= S_{S_{\beta}}^H := q_u(\tau\Psi_n^+) \setminus \Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{u}) \cup \Delta(\mathfrak{k}/\mathfrak{l}, \mathfrak{u}) \\ &= \{-(\alpha_1 + \alpha_2), -(2\alpha_1 + \alpha_2)\} \end{aligned}$$

Sea  $\lambda = c_1(2\alpha_1 + \alpha_2) + c_2\beta$ . La acción de  $W_K$  sobre el primer sumando permuta las raíces no compactas positivas, y sobre el segundo las compactas. La expresión

$$\sum_{w \in W_K^Z} \epsilon(w) \varpi(w\lambda) \delta_{q_u(w\lambda)} * y_{S_w^H} \quad (7.18)$$

se reduce a los cuatro sumandos:

$$\begin{aligned} &\delta_\lambda * y_{\alpha_1 + \alpha_2} * y_{2\alpha_1 + \alpha_2} * y_{\alpha_1} - \delta_{S_{\alpha_1}(\lambda)} * y_{\alpha_1 + \alpha_2} * y_{2\alpha_1 + \alpha_2} * y_{\alpha_1} + \\ &-\delta_{S_{\beta}(\lambda)} * y_{-(\alpha_1 + \alpha_2)} * y_{-(2\alpha_1 + \alpha_2)} * y_{\alpha_1} + \delta_{\tau(\lambda)} * y_{-(\alpha_1 + \alpha_2)} * y_{-(2\alpha_1 + \alpha_2)} * y_{\alpha_1} \end{aligned} \quad (7.19)$$

agrupando términos:

$$\begin{aligned} &y_{\alpha_1 + \alpha_2} * y_{2\alpha_1 + \alpha_2} * y_{\alpha_1} * (\delta_\lambda - \delta_{S_{\alpha_1}(\lambda)}) - y_{-(\alpha_1 + \alpha_2)} * y_{-(2\alpha_1 + \alpha_2)} * y_{\alpha_1} * (\delta_{S_{\beta}(\lambda)} - \delta_{S_{\alpha_1}S_{\beta}\lambda}) \\ &= y_{\alpha_1 + \alpha_2} * y_{2\alpha_1 + \alpha_2} * \delta_\lambda * y_{\alpha_1} * (\delta_0 - \delta_{-c_1\alpha_1}) - y_{-(\alpha_1 + \alpha_2)} * y_{-(2\alpha_1 + \alpha_2)} * \delta_{S_{\beta}(\lambda)} * y_{\alpha_1} * (\delta_0 - \delta_{-c_1\alpha_1}) \\ &= y_{\alpha_1} * (\delta_0 - \delta_{-c_1\alpha_1}) * (y_{\alpha_1 + \alpha_2} * y_{2\alpha_1 + \alpha_2} * \delta_\lambda - y_{-(\alpha_1 + \alpha_2)} * y_{-(2\alpha_1 + \alpha_2)} * \delta_{S_{\beta}(\lambda)}). \end{aligned} \quad (7.20)$$



Varios de los términos en (7.20) pueden calcularse rápidamente, a saber:

$$\begin{aligned}
y_{\alpha_1+\alpha_2} * y_{2\alpha_1+\alpha_2} &= \sum_{n,m \geq 0} \delta_{(1/2+n)(\alpha_1+\alpha_2)} * \delta_{(1/2+m)(2\alpha_1+\alpha_2)} \\
y_{-(\alpha_1+\alpha_2)} * y_{-(2\alpha_1+\alpha_2)} &= y_{S_\beta(\alpha_1+\alpha_2)} * y_{S_\beta(2\alpha_1+\alpha_2)} \\
y_{\alpha_1} * (\delta_0 - \delta_{-c_1\alpha_1}) &= \sum_{n \geq 0} \delta_{(1/2+n)\alpha_1} - \sum_{n \geq 0} \delta_{(1/2+n-c_1)\alpha_1} = - \sum_{j=1}^{c_1} \delta_{(1/2-j)\alpha_1}
\end{aligned} \tag{7.21}$$

Esto permite calcular (7.20)

$$\begin{aligned}
&- \sum_{\substack{0 \leq n,m \\ 1 \leq j \leq c_1}} \delta_{(1/2+n)(\alpha_1+\alpha_2)+(1/2+m)(2\alpha_1+\alpha_2)+\lambda+(1/2-j)\alpha_1} + \\
&+ \sum_{\substack{0 \leq n,m \\ 1 \leq j \leq c_1}} \delta_{S_\beta((1/2+n)(\alpha_1+\alpha_2)+(1/2+m)(2\alpha_1+\alpha_2)+\lambda+(1/2-j)\alpha_1)}
\end{aligned} \tag{7.22}$$

Las representaciones de  $H$  que ocurren, pueden tomarse de tal modo que el parámetro de Harish-Chandra  $\nu$  de  $H$ , satisface  $\langle \nu, \beta \rangle > 0$ . El análisis del capítulo 6 concluye que existen tres posibles cámaras de  $\mathfrak{h}$  que satisfacen esta condición. Los posibles  $\nu$  que ocurren están dados en la expresión anterior. Como  $\alpha_1, \beta$  son ortogonales y  $\langle \alpha_2^\vee, \beta \rangle = \langle \alpha_2, \beta^\vee \rangle = 1$ , para  $\nu = (1/2+n)(\alpha_1 + \alpha_2) + (1/2+m)(2\alpha_1 + \alpha_2) + \lambda + (1/2-j)\alpha_1 = n(\alpha_1 + \alpha_2) + (1+m)(2\alpha_1 + \alpha_2) + \lambda - j\alpha_1 = (n+j+c_2)(\alpha_1 + \alpha_2) + (m+1-j+c_1+c_2)(2\alpha_1 + \alpha_2)$  se verifica directamente que  $\langle \nu, \beta^\vee \rangle = n+m+1+c_1+c_2 > 0$ , para todo  $n, m, j$  como en (7.22). Los parámetros que aparecen en la segunda suma de (7.22) son de la forma  $S_\beta \nu$ , con  $\nu$  como antes, por tanto  $\langle S_\beta \nu, \beta^\vee \rangle = \langle \nu, S_\beta(\beta^\vee) \rangle = \langle \nu, -\beta^\vee \rangle < 0$ . Esto permite concluir que los parámetros que ocurren en la descomposición son exactamente los de la forma  $(n+j+c_2)(\alpha_1 + \alpha_2) + (m+1-j+c_1+c_2)(2\alpha_1 + \alpha_2)$ . Veamos que todos los  $\nu$  están en la misma cámara, a saber, la cámara cuaterniónica; en efecto, los pesos fundamentales de  $\mathfrak{h}$  relativos a dicha cámara son  $\Lambda_1 = \alpha_1 + \alpha_2$ ,  $\Lambda_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2$ , y verifican

$$\begin{aligned}
\langle \nu, \alpha_2^\vee \rangle &= (n+j+c_2)\langle \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2^\vee \rangle = (n+j+c_2) > 0 \\
\langle \nu, (3\alpha_1 + \alpha_2)^\vee \rangle &= (m+1-j+c_1+c_2)\langle 2\alpha_1 + \alpha_2, (3\alpha_1 + \alpha_2)^\vee \rangle = (m+1-j+c_1+c_2) > 0
\end{aligned}$$

Más aún, se pueden calcular las multiplicidades fácilmente obteniendo:

**Proposición 7.2.5.** Si  $\nu = A(\alpha_1 + \alpha_2) + B(2\alpha_1 + \alpha_2)$  es un parámetro de Harish-Chandra en la cámara cuaterniónica de  $\mathfrak{su}(2, 1)$ , entonces  $\nu$  ocurre en  $\pi_{c_1\Lambda_1+c_2\Lambda_2}^{G_2}$  con multiplicidades dada por la tabla 7.1:

*Demostración.* Por lo visto anteriormente,  $\nu$  es de la forma  $(n+j+c_2)\Lambda_1 + (m+1-j+c_1+c_2)\Lambda_2$ , con  $1 \leq j \leq c_1$ , entonces

$$A = n + j + c_2, \quad B = m + 1 - j + c_1 + c_2.$$

	$A \leq c_2$	$c_2 + 1 \leq A < c_1 + c_2 + 1$	$c_1 + c_2 + 1 \leq A$
$B \leq c_2$	0	0	0
$c_2 + 1 \leq B < c_1 + c_2 + 1$	0	$\max\{A + B - c_2 - (c_1 + c_2), 0\}$	$B - c_2$
$c_1 + c_2 + 1 \leq B$	0	$A - c_2$	$c_1$

Cuadro 7.1: Multiplicidad de parámetros de Harish-Chandra de  $H$

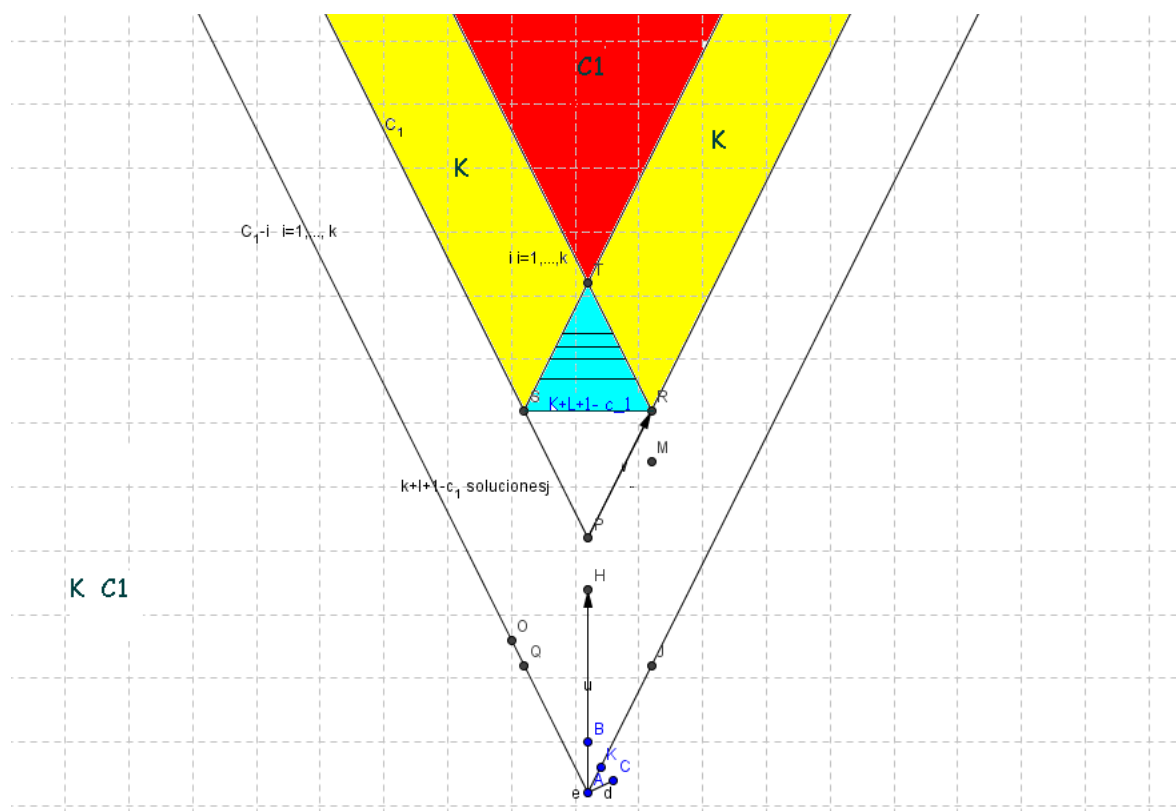


Figura 7.1: Restricciones de  $G_2$  a  $A_2$

Dado que  $j$  es entero positivo y  $n, m, (c_1 - j)$  son enteros no negativos, se tienen las desigualdades  $B > c_2$  o  $A > c_2$ . Luego en el caso de la primera fila o la primera columna de la tabla se sigue que la multiplicidad  $\nu$  es cero.

Además, dado que  $A, B, c_1, c_2$  son fijos, si dado un  $1 \leq j_0 < c_1$ , existen  $n, m$  tales que  $A = n + j_0 + c_2$ ;  $B = m + 1 + c_1 - j_0 + c_2$ , entonces dichos  $n, m$  están determinados por  $j_0$ ; es decir, la multiplicidad  $m(\lambda, \nu) \leq c_1$ . Para calcular dicha multiplicidad, basta ver los valores  $1 \leq j_0 \leq c_1$  para los cuales tienen solución entera no negativa  $n, m$  las ecuaciones

$$A = n + j_0 + c_2; \quad B = m + 1 + c_1 - j_0 + c_2. \quad (7.23)$$

Sea  $j_0 \in \mathbb{Z}$ . Definimos  $n := A - (c_2 + j_0)$  y  $m := B + j_0 - (c_1 + c_2 + 1)$  entonces:

- Si  $c_2 + 1 \leq A < c_1 + c_2 + 1$ ;  $B \geq c_1 + c_2 + 1$ . Si  $1 \leq j_0 \leq A - c_2 \leq c_1$  entonces  $j_0 \leq c_1$  y se tiene que  $n, m$  son enteros que satisfacen  $n \geq 0$  y  $m \geq j_0 \geq 1$ . En consecuencia para dicho  $j_0$  existen (únicos)  $n, m$  soluciones enteras positivas de (7.23). En otro caso, si  $j_0 > A - c_2$  entonces  $n$  satisface  $n < 0$ , por lo cual no existen soluciones enteras no negativas. En consecuencia,  $m(\lambda, \nu) = A - c_2$ .
- Si  $c_1 + c_2 + 1 \leq A$ ;  $c_2 + 1 < B < c_1 + c_2 + 1$ . Dado que  $0 < c_1 + c_2 + 1 - B < c_1$  si elegimos  $j_0$  tal que  $1 \leq -B + (c_1 + c_2 + 1) \leq j_0 \leq c_1$ , entonces  $j_0 \leq c_1$  y  $n, m$  satisfacen  $n \geq c_1 - j_0 + 1 > 0$  y  $m > 0$ . Luego, para tales  $j_0$  existen (únicos)  $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  soluciones de (7.23). Si  $j_0 < B - c_1 + c_2 + 1$  entonces  $m < 0$ , por lo cual no existen soluciones enteras positivas. Por tanto  $m(\lambda, \nu) = B - c_2$ .
- Si  $c_1 + c_2 + 1 \leq A$ ;  $c_1 + c_2 + 1 \leq B$ . Sea  $1 \leq j_0 \leq c_1$ , entonces  $n, m$  satisfacen  $n \geq c_1 - j_0 + 1 > 0$  y  $m \geq j_0 \geq 1$ . En consecuencia para cada  $j_0$  existen (únicos)  $n, m$  soluciones enteras positivas de (7.23). Por tanto  $m(\lambda, \nu) = c_1$ .
- Sea  $c_2 + 1 < A < c_1 + c_2 + 1$ ;  $c_2 + 1 < B < c_1 + c_2 + 1$ . En primer lugar obsérvese que  $A + B - (c_2 + 1) - (c_1 + c_2 + 1) = n + m - 1$ , por lo cual si el término de la derecha es negativo se tendría que  $m(\lambda, \nu) = 0$ . Supongamos entonces que  $0 < A + B - (c_2 + 1) - (c_1 + c_2 + 1)$ , por hipótesis se tienen las desigualdades:

$$0 < (c_1 + c_2 + 1) - B < A - c_2 \leq c_1 \quad (7.24)$$

Sea  $j_0$  tal que  $1 \leq (c_1 + c_2 + 1) - B \leq j_0 \leq A - c_2 \leq c_1$ . Entonces  $m = B - (c_1 + c_2 + 1) + j_0$ ;  $n = A - c_2 - j_0$  son enteros no negativos. Además, si alguna de las desigualdades de  $j_0$  no se cumple,  $j_0 < (c_1 + c_2 + 1) - B$  o  $A - c_2 < j_0$  implicarían que  $n$  o  $m$  serían negativos. En resumen,  $m(\lambda, \nu) = A + B - (c_2 + 1) - (c_1 + c_2)$ . Esto concluye la prueba

□

En particular, para el caso  $\lambda = \rho_G + (k - 3)\beta = (\beta + \alpha_1) + (k - 3)\beta = \Lambda_2 + (k - 2)\beta = (k - 2)\Lambda_1 + (k - 1)\Lambda_2$  entonces  $c_1 = 1$ ;  $c_2 = k - 2$ , por tanto  $c_2 + 1 = k - 1$ ;  $c_2 + c_1 + 1 = k$  y no existen enteros  $R$  tales que  $c_2 + 1 < R < c_1 + c_2 + 1$ . Esto concluye en este caso que segunda fila y columna en la tabla del teorema no existe en este caso; luego si  $\nu = A\Lambda_1 + B\Lambda_2$ ,  $m(\lambda, \nu) \neq 0$  solo cuando  $A > c_1 + c_2 + 1 = k$  y  $B > c_1 + c_2 + 1 = k$ , en cuyo caso la multiplicidad es igual a  $m(\lambda, \nu) = c_1 = 1$ . Este resultado recupera el resultado descrito por Wallach en [Wal03]

### 7.2.4. Caso $G(\mathbb{C})$ de tipo $\mathfrak{f}_4$ , $G = F_{4(4)}$ .

Sea  $\mathfrak{g}$  el álgebra de Lie compleja de tipo  $\mathfrak{f}_4$ . Consideremos la forma real  $\mathfrak{g}_0$  asociada al diagrama de Vogan

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_1 & \text{---} & \alpha_2 & \text{---} & \alpha_3 & \text{---} & \alpha_4 \\ \circ & & \circ & \text{---} & \circ & & \bullet \end{array}$$

con  $\alpha_1, \alpha_2$  raíces cortas y  $\alpha_3, \alpha_4$  raíces largas. Sea  $G$  el grupo de Lie conexo con álgebra de Lie  $\mathfrak{g}_0$ . Entonces  $G$  es una forma real de  $\mathbf{F}_4$  con  $K \simeq SU(2) \times Sp(3)$  subgrupo compacto maximal. Sea  $T \subseteq K \subseteq G$  un toro maximal de  $K$ , luego  $T$  es un subgrupo de Cartan compacto de  $G$ . Sea  $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$  el sistema de raíces de  $\mathfrak{g}$  respecto a  $\mathfrak{t}$ . Existe una base ortonormal  $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4\}$  de  $i\mathfrak{t}_0^*$  de modo que bajo la elección de raíces simples  $\Pi := \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$  con  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  compactas y  $\{\alpha_4\}$  no compacta, las raíces son de la forma:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1/2(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4), & \alpha_2 &= \epsilon_4 \\ \alpha_3 &= \epsilon_3 - \epsilon_4, & \alpha_4 &= \epsilon_2 - \epsilon_3, \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) &= \{\pm 1/2(\epsilon_1 \pm \epsilon_2 \pm \epsilon_3 \pm \epsilon_4), \pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j), \pm\epsilon_i\}_{1 \leq j < i \leq 4} \\ \Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) &= \{1/2(\epsilon_1 \pm \epsilon_2 \pm \epsilon_3 \pm \epsilon_4), (\epsilon_i \pm \epsilon_j), \epsilon_i\}_{1 \leq j < i \leq 4} \\ \Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) &= \{\pm 1/2(\epsilon_1 - \epsilon_2 \pm \epsilon_3 \pm \epsilon_4), \pm(\epsilon_3 \pm \epsilon_4), \pm(\epsilon_1 \pm \epsilon_2), \pm\epsilon_3, \pm\epsilon_4\} \\ \Phi^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) &= \{1/2(\epsilon_1 - \epsilon_2 \pm \epsilon_3 \pm \epsilon_4), (\epsilon_3 \pm \epsilon_4), (\epsilon_1 \pm \epsilon_2), \epsilon_3, \epsilon_4\} \\ \Psi_n^+ &= \{1/2(\epsilon_1 + \epsilon_2 \pm \epsilon_3 \pm \epsilon_4), (\epsilon_1 \pm \epsilon_4), (\epsilon_1 \pm \epsilon_3), (\epsilon_2 \pm \epsilon_4), (\epsilon_2 \pm \epsilon_3), \epsilon_2, \epsilon_1\} \end{aligned}$$

Sea  $H_\alpha \in i\mathfrak{t}_0$  que represente a  $\alpha \in i\mathfrak{t}_0^*$ ; la raíz máxima de  $\Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$  en este caso es  $\beta = \epsilon_1 + \epsilon_2$ ; además  $\alpha_4 = \epsilon_2 - \epsilon_3$  es la única raíz simple que satisface  $\langle \epsilon_1 + \epsilon_2, \alpha_i \rangle \neq 0$ . Tomemos el álgebra de Lie dada por  $\mathfrak{h} := \mathbb{C}H_{\epsilon_2 - \epsilon_3} + \mathbb{C}H_{\epsilon_3 + \epsilon_1} \oplus \mathbb{C}X_{\epsilon_2 - \epsilon_3} \oplus \mathbb{C}X_{\epsilon_3 + \epsilon_1} \oplus \mathbb{C}X_{\epsilon_2 + \epsilon_1} \oplus \mathbb{C}X_{-(\epsilon_2 - \epsilon_3)} \oplus \mathbb{C}X_{-(\epsilon_3 + \epsilon_1)} \oplus \mathbb{C}X_{-(\epsilon_2 + \epsilon_1)}$ .

Sea  $H$  el subgrupo conexo de  $G$  con álgebra de Lie  $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0$ ;  $H$  es isomorfo a  $SU(2, 1)$ , sea  $L := K \cap H$ ,  $U := T \cap H$ , entonces  $U$  es un toro maximal de  $L$ ;  $L$  es un subgrupo compacto maximal de  $H$  y también  $U$  es un subgrupo de Cartan compacto de  $H$ , y también  $i\mathfrak{u}_0 = \mathbb{R}H_{\epsilon_2 - \epsilon_3} \oplus \mathbb{R}H_{\epsilon_3 + \epsilon_1}$ . Si  $q_u : \mathfrak{t}^* \rightarrow \mathfrak{u}^*$  es la restricción, entonces

$$\Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{u}) = \{\pm q_u(\epsilon_2 - \epsilon_3), \pm q_u(\epsilon_3 + \epsilon_1), \pm q_u(\epsilon_2 + \epsilon_1)\}$$

Raíces compactas de  $\mathfrak{h}$

$$\Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{u}) = \{\pm q_u(\epsilon_2 + \epsilon_1)\}$$

**Teorema 7.2.6.** *Sea  $\pi_\lambda^G$  una serie discreta de  $G$  con parámetro de Harish-Chandra  $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ . La restricción a  $H$  de  $\pi_\lambda^G$  se descompone como suma directa de series discretas de  $H$ , tal que los parámetros de Harish-Chandra  $\mu$  de  $H$  asociados a los factores irreducibles de  $\pi_\lambda^G|_H$  pertenecen a la cámara asociada al sistema de raíces tal que las raíces simples son no compactas, es decir, la restricción no tiene factores en la serie discreta holomorfa ni antiholomorfa.*

Por definición de  $\mathfrak{h}$ , las restricciones satisfacen  $q_u(\epsilon_2) + q_u(\epsilon_3) - q_u(\epsilon_1) = 0$ . Si  $\Phi(\xi) := \{\alpha \in \Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) \mid q_u(\alpha) = 0\}$  entonces

$$\Phi(\xi) = \{\pm\epsilon_4, \pm 1/2(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4), \pm 1/2(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4)\}$$

Considerando la descomposición de  $K$  de la forma  $K = K_1 \times K_2$ , con  $K_1 \simeq Sp(3)$ ,  $K_2 \simeq SU(2)$ . La acción de  $W_Z$  sobre  $W_{K_2}$  es trivial y sobre  $W_{K_1}$  actúa sobre las raíces permutando y cambiando los signos al conjunto  $\{1/2(\epsilon_1 - \epsilon_2), 1/2(\epsilon_3 + \epsilon_4), 1/2(\epsilon_3 - \epsilon_4)\}$ . A partir de este conjunto y la raíz máxima  $\beta$ , un conjunto de representantes de  $W_Z \setminus W_K$  es de la forma  $\{w_i, S_\beta w_i\}$ , con  $w_i$  un conjunto de representantes de  $W_Z \setminus W_{K_2}$ . Denotando por barra la restricción a  $\mathfrak{u}$ , y observando que  $\overline{\epsilon_4} = 0$ , y  $\overline{\epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_1} = 0$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathfrak{k}/\mathfrak{l}, \mathfrak{u}) &= q_u\left(\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) \setminus \Phi(\xi)\right) \setminus \Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{u}) \\ &= \{\pm 1/2(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 \pm \epsilon_4), \pm(\epsilon_3 \pm \epsilon_4), \overline{(\epsilon_1 - \epsilon_2)}, \pm\overline{\epsilon_3}\} \\ &= \{\overline{\epsilon_3}, -\overline{\epsilon_3}\} \end{aligned}$$

Observando que cada elemento del anterior multiconjunto tiene multiplicidad 6. Entonces

$$\begin{aligned} S_{w_i}^H &:= q_u(w_i \Psi_n^+) \setminus \Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{u}) \cup \Delta(\mathfrak{k}/\mathfrak{l}, \mathfrak{u}) \\ &= \{\overline{\epsilon_1 \pm \epsilon_4}, \overline{\epsilon_1 - \epsilon_3}, \overline{\epsilon_2 \pm \epsilon_4}, \overline{\epsilon_2 + \epsilon_3}, \overline{\epsilon_2}, \overline{\epsilon_1}, 1/2(\overline{\epsilon_1 + \epsilon_2 \pm \epsilon_3 \pm \epsilon_4}), \underbrace{\overline{\epsilon_3}}_6\} \\ &= \{\underbrace{\overline{\epsilon_1}}_6, \underbrace{\overline{\epsilon_2}}_6, \underbrace{\overline{\epsilon_3}}_6\} \end{aligned}$$

así mismo

$$S_{S_\beta w_i}^H := \{\overline{S_\beta \epsilon_1}, \overline{S_\beta \epsilon_2}, \overline{\epsilon_3}\} = \{\underbrace{-\overline{\epsilon_2}}_6, \underbrace{-\overline{\epsilon_1}}_6, \underbrace{\overline{\epsilon_3}}_6\}$$

Un parámetro de Harish-Chandra de  $\mathfrak{f}_4$  en la cámara asociada a  $\Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$  se escribe como  $\lambda = c_1\Omega_1 + c_2\Omega_2 + c_3\Omega_3 + c_4\Omega_4$ , con  $\Omega_i$  los pesos fundamentales de  $\mathfrak{f}_4$  y  $c_i \neq 0$ . Para la subálgebra  $\mathfrak{k}_1 \subseteq \mathfrak{k}$  sean  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  son sus pesos fundamentales con respecto a  $\Phi^+(\mathfrak{t}_1) := \Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) \cap (\mathfrak{t} \cap \mathfrak{k}_1)$ . Tomando  $\lambda_1 = c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + c_3\omega_3$ ,  $\lambda_2 = (c_1 + 2c_2 + 3c_3 + 2c_4)\frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2}$ , un cálculo directo verifica  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ . A partir de esto, podemos enunciar nuestra proposición a probar

**Proposición 7.2.7.** Sea  $(\pi_{\lambda_1}^{K_1}, V_{\lambda_1})$  la representación irreducible de  $K_1 \simeq Sp(3)$  con carácter infinitesimal  $\lambda_1$ . Sea  $\Delta(V_{\lambda_1})$  el conjunto de pesos de la representación, para  $\nu \in \Delta$  sea  $M(\lambda_1, \nu)$  la dimensión del espacio de peso  $\nu$ . Entonces los parámetros de Harish-Chandra  $\mu$  de  $H$  tales que  $m^H(\lambda_1, \nu) \neq 0$  son de la forma  $\mu = (n + 3)q_u(\epsilon_1) + (m + 3)q_u(\epsilon_2) + q_u(\lambda_2) + q_u(\eta)$  con  $n, m \in \mathbb{Z}$ ,  $\eta \in \Delta(V_{\lambda_1})$  y aparece con multiplicidad

$$\sum_{\substack{\nu \in \Delta(V_{\lambda_1}) \\ q_u(\nu) = q_u(\eta)}} M(\lambda_1, \nu) \binom{m+5}{5} \binom{n+5}{5}$$

Si  $F := \left( \sum_{w_i \in W_{K_1}^Z} \epsilon(w_i) \varpi(w_i \lambda_1) \delta_{w_i \lambda_1} * y_{\epsilon_3}^6 \right)$  podemos verificar que

$$\sum_{w \in W_K^Z} \epsilon(w) \varpi(w \lambda) \delta_{q_u(w(\lambda))} * y_{S^H} = F * \left( \delta_{\bar{\lambda}_2} * y_{\epsilon_1}^6 * y_{\epsilon_2}^6 - \delta_{S_\beta \lambda_2} * y_{S_\beta \epsilon_1}^6 * y_{S_\beta \epsilon_2}^6 \right)$$

$\Omega_1$	$\epsilon_1$	$\omega_1$	$\frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2)$
$\Omega_2$	$\frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4)$	$\omega_2$	$\frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4)$
$\Omega_3$	$2\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$	$\omega_3$	$\frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + 2\epsilon_3)$
$\Omega_4$	$\epsilon_1 + \epsilon_2$	$\omega_{K_2}$	$\frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2)$

Calculando los sumandos del paréntesis

$$\begin{aligned} \delta_{\bar{\lambda}_2} * y_{\epsilon_1}^6 * y_{\epsilon_2}^6 &= \delta_{\bar{\lambda}_2} * \sum_{n,m \geq 0} \binom{n+6-1}{6-1} \binom{m+6-1}{6-1} \delta_{(6/2+n)\bar{\epsilon}_1} * \delta_{(6/2+m)\bar{\epsilon}_2} \\ &= \sum_{n,m \geq 0} \binom{n+5}{5} \binom{m+5}{5} \delta_{(n+3)\bar{\epsilon}_1 + (m+3)\bar{\epsilon}_2 + \bar{\lambda}_2} \\ \delta_{S_\beta \lambda_2} * y_{S_\beta \epsilon_1}^6 * y_{S_\beta \epsilon_2}^6 &= \sum_{n,m \geq 0} \binom{n+5}{5} \binom{m+5}{5} \delta_{-((n+3)\bar{\epsilon}_1 + (m+3)\bar{\epsilon}_2 + \bar{\lambda}_2)} \end{aligned} \quad (7.25)$$

El factor  $F$  es la restricción de la representación del  $K_1 \simeq Sp(3)$ -módulo con carácter infinitesimal  $\lambda_1$ ,  $\pi_{\lambda_1}$ , a  $K_1 \cap L$  que es un toro de  $L$ , luego  $F$  es la descomposición de la representación de  $Sp(3)$  en espacios de peso, restringidos a  $K_1 \cap L$ .

Sea  $\nu \in (\mathfrak{t} \cap \mathfrak{k}_1)^*$  un peso de  $\pi_{\lambda_1}$  y sea  $M(\lambda_1, \nu) = \dim(V_{\lambda_1})_\nu$  la dimensión de su espacio de pesos. Extendemos  $\nu$  a  $\mathfrak{t}^*$  definiendo  $\nu|_{(\mathfrak{t} \cap \mathfrak{k}_1)^*} = 0$ . Por la fórmula de Duflo Vargas, la restricción de la serie discreta de  $G$ ,  $\pi_\lambda$ , a  $H$  viene dada por:

$$\sum_{\substack{n,m \geq 0 \\ \nu}} M(\lambda_1, \nu) \binom{n+5}{5} \binom{m+5}{5} \left( \delta_{(n+3)\bar{\epsilon}_1 + (m+3)\bar{\epsilon}_2 + \bar{\lambda}_2 + \bar{\nu}} - \delta_{S_\beta((n+3)\bar{\epsilon}_1 + (m+3)\bar{\epsilon}_2 + \bar{\lambda}_2) + \bar{\nu}} \right) \quad (7.26)$$

Por tanto, si  $\mu$  es un parámetro de Harish-Chandra de  $H$  tal que  $m^H(\lambda, \mu) \neq 0$ , entonces  $\mu = (n+3)\bar{\epsilon}_1 + (m+3)\bar{\epsilon}_2 + \bar{\lambda}_2 + \nu$ , o bien  $\mu = -((n+3)\bar{\epsilon}_1 + (m+3)\bar{\epsilon}_2 + \bar{\lambda}_2) + \nu$ . Tomemos  $\mu$  en una cámara asociada a un sistema de raíces positivo de  $\mathfrak{h}$  compatible con  $\Phi^+(\mathfrak{l}, \mathbf{u}) = \{q_u(\epsilon_2 + \epsilon_1)\}$ , es decir,  $\mu(H_{\epsilon_2 + \epsilon_1}) > 0$ . Si  $\nu$  es un peso de  $\pi_{\lambda_1}$ , es combinación convexa de los  $w(\lambda_1)$  con  $w \in W_{K_1}$ , como  $W_{K_1}$  está generado por raíces ortogonales a  $\epsilon_2 + \epsilon_1$  y  $\lambda_1$  es ortogonal a  $\epsilon_2 + \epsilon_1$ , entonces  $w(\lambda_1)$  es ortogonal a  $\epsilon_2 + \epsilon_1$  y por tanto  $\nu$  también lo es. Así, si  $\mu = (n+3)\bar{\epsilon}_1 + (m+3)\bar{\epsilon}_2 + \bar{\lambda}_2 + \bar{\nu}$  entonces:

$$\begin{aligned} \mu(H_{\epsilon_2 + \epsilon_1}) &= ((n+3)\bar{\epsilon}_1 + (m+3)\bar{\epsilon}_2 + \bar{\lambda}_2 + \bar{\nu})(H_{\epsilon_2 + \epsilon_1}) \\ &= (n+3)\bar{\epsilon}_1(H_{\epsilon_2 + \epsilon_1}) + (m+3)\bar{\epsilon}_2(H_{\epsilon_2 + \epsilon_1}) + \bar{\lambda}_2(H_{\epsilon_2 + \epsilon_1}) + \nu(H_{\epsilon_2 + \epsilon_1}) \\ &= n + m + 6 + c_1 + 2c_2 + 3c_3 + 2c_4 + \nu(H_{\epsilon_2 + \epsilon_1}) \\ &= n + 3 + m + 3 + c_1 + 2c_2 + 3c_3 + 2c_4 > 0 \end{aligned}$$

mientras que si  $\mu = -((n+3)\bar{\epsilon}_1 + (m+3)\bar{\epsilon}_2 + \bar{\lambda}_2) + \bar{\nu}$

$$\begin{aligned}\mu(H_{\epsilon_2+\epsilon_1}) &= -((n+3)\bar{\epsilon}_1 + (m+3)\bar{\epsilon}_2 + \bar{\lambda}_2) + \bar{\nu})(H_{\epsilon_2+\epsilon_1}) \\ &= -((n+3)\bar{\epsilon}_1 + (m+3)\bar{\epsilon}_2 + \bar{\lambda}_2))(H_{\epsilon_2+\epsilon_1}) \\ &= -(n+3+m+3+c_1+2c_2+3c_3+2c_4) < 0\end{aligned}$$

De modo que los parámetros  $\mu$  son de la forma  $(n+3)\bar{\epsilon}_1 + (m+3)\bar{\epsilon}_2 + \bar{\lambda}_2 + \bar{\nu}$ .

$$\begin{aligned}\mu(H_{\epsilon_2-\epsilon_3}) &= ((n+3)\bar{\epsilon}_1 + (m+3)\bar{\epsilon}_2 + \bar{\lambda}_2 + \bar{\nu})(H_{\epsilon_2-\epsilon_3}) \\ &= (n+3)\bar{\epsilon}_1(H_{\epsilon_2-\epsilon_3}) + (m+3)\bar{\epsilon}_2(H_{\epsilon_2-\epsilon_3}) + \bar{\lambda}_2(H_{\epsilon_2-\epsilon_3}) + \nu(H_{\epsilon_2-\epsilon_3}) \\ &= m+3 + \lambda_2(H_{\epsilon_2-\epsilon_3}) + \nu(H_{\epsilon_2-\epsilon_3})\end{aligned}$$

Como  $\nu \in \Delta(V_{\lambda_1})$ , por el teorema de Kostant  $\nu$  es combinación convexa de los elementos de la órbita de grupo de Weyl sobre el peso máximo; es decir,  $\nu = \sum c_i w_i(\lambda_1 - \rho_{K_1})$  para ciertos  $c_i \geq 0$  tales que  $\sum c_i = 1$  y  $w_i \in W_{K_1}$ . Puesto que cada  $w_i \in W_{K_1}$  deja fijo  $\lambda_2$ , entonces  $\sum c_i w_i(\lambda_2) = \lambda_2$ . Si  $w = S_\alpha$ , para alguna raíz simple, la longitud de  $w$  es 1, luego todas las raíces positivas, salvo  $\alpha$ , tienen imagen por  $w$  otra raíz positiva. En particular, si tomamos una raíz no compacta positiva, su imagen por  $w$  es una raíz no compacta positiva. Dado que los elementos de  $W_{K_1}$  se generan por composición de raíces simples compactas, se sigue que  $w\Psi_n^+ = \Psi_n^+$ .

En consecuencia

$$\begin{aligned}m+3 + \lambda_2(H_{\epsilon_2-\epsilon_3}) + \nu(H_{\epsilon_2-\epsilon_3}) &= m+3 + \sum c_i w_i(\lambda_2)(H_{\epsilon_2-\epsilon_3}) + \sum c_i w_i(\lambda_1 - \rho_{K_1})(H_{\epsilon_2-\epsilon_3}) \\ &= m+3 + \sum c_i w_i(\lambda - \rho_{K_1})(H_{\epsilon_2-\epsilon_3}) \\ &= m+3 + \sum c_i \langle w_i(\lambda - \rho_{K_1}), \epsilon_2 - \epsilon_3 \rangle = \sum c_i \langle \lambda - \rho_{K_1}, w_i^{-1}(\epsilon_2 - \epsilon_3) \rangle \\ &= m + \sum_{\alpha \in \Psi_n^+} c_i (3 + \langle \lambda - \rho_{K_1}, \alpha \rangle)\end{aligned}$$

Como  $\lambda$  es un parámetro de Harish-Chandra en la cámara determinada por  $\Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ , en particular  $\langle \lambda, \alpha \rangle > 0$  para toda  $\alpha \in \Psi_n^+$ , de modo que basta analizar el sumando  $3 - \langle \rho_{K_1}, \alpha \rangle$ . Recordando el conjunto  $\Psi_n^+$  dado al inicio de la sección y dado que  $\rho_{K_1} = 2(\epsilon_1 - \epsilon_2) + \frac{3}{2}\epsilon_3 + \frac{1}{2}\epsilon_4$ , entonces

$$\begin{aligned}\langle \rho_{K_1}, 1/2(\epsilon_1 + \epsilon_2 \pm \epsilon_3 \pm \epsilon_4) \rangle &= \pm 3/4 \pm 1/4 \leq \langle \rho_{K_1}, (\epsilon_1 \pm \epsilon_4) \rangle = 2 \pm 1/2 \leq 3 \\ \langle \rho_{K_1}, (\epsilon_2 \pm \epsilon_4) \rangle &= -2 \pm 1/2 \leq 3 \langle \rho_{K_1}, (\epsilon_2 \pm \epsilon_3) \rangle = -2 \pm 3/2 \leq 3 \\ \langle \rho_{K_1}, \epsilon_2 \rangle &= -2 \leq 3 \langle \rho_{K_1}, \epsilon_1 \rangle = 2 \leq 3 \\ \langle \rho_{K_1}, (\epsilon_1 \pm \epsilon_3) \rangle &= 2 \pm 3/2 \leq 3 + 1/2\end{aligned}$$

Salvo en el último caso, se tiene que  $3 - \langle \rho_{K_1}, \alpha \rangle > 0$ , mientras que en el último  $3 - \langle \rho_{K_1}, \alpha \rangle = -1/2$ . Como  $\langle \lambda, \alpha \rangle > 0$  y  $\lambda$  es un parámetro de Harish-Chandra, en particular  $\langle \lambda, \alpha \rangle$  es entero, luego  $3 - \langle \rho_{K_1}, \alpha \rangle + \langle \lambda, \alpha \rangle > 0$ . Resumiendo,  $\mu(H_{\epsilon_2-\epsilon_3}) > 0$  y un análisis similar lleva a que

$\mu(H_{e_3+e_1}) > 0$ , lo cual concluye que  $\mu$  está en la cámara cuyas raíces simples son no compactas, es decir,  $\mu$  está en la cámara cuaterniónica. Esto demuestra el teorema.

Si se tiene otra expresión de  $\mu$ ,  $\mu = (r+3)\bar{\epsilon}_1 + (s+3)\bar{\epsilon}_2 + \bar{\lambda}_2 + \bar{\eta}$ , entonces evaluando  $\mu(H_{e_2-e_3} + H_{e_3+e_1})$  en ambas expresiones y dado que  $\nu, \eta$  son ortogonales a  $e_2 + e_1$  se tiene que  $n+m = r+s$ . Como  $H_{e_2-e_3} - H_{e_3+e_1}$  está en el centro de  $\mathfrak{l}$ ,  $\alpha(H_{e_2-e_3} - H_{e_3+e_1}) = 0$  para toda raíz  $\alpha$  de  $\mathfrak{l}$ ,  $\mu(H_{e_2-e_3} - H_{e_3+e_1})$  lleva a que  $\nu(H_{e_2-e_3} - H_{e_3+e_1}) = \eta(H_{e_2-e_3} - H_{e_3+e_1})$ , como  $\{H_{e_2-e_3} + H_{e_3+e_1}, H_{e_2-e_3} - H_{e_3+e_1}\}$  es una base de  $\mathfrak{u}$  entonces  $\bar{\nu} = \bar{\eta}$ .

Además,  $n+3 + \lambda(H_{e_2-e_3}) + \nu(H_{e_2-e_3}) = \mu(H_{e_2-e_3}) = r+3 + \lambda(H_{e_2-e_3}) + \nu(H_{e_2-e_3})$ , luego  $n=r$  y también  $n + \lambda(H_{e_3+e_1}) + \nu(H_{e_3+e_1}) = \mu(H_{e_3+e_1}) = r + \lambda(H_{e_3+e_1}) + \nu(H_{e_3+e_1})$  implica  $m=s$ . Por tanto  $n, m$  son únicos y si  $\mu = (n+3)\bar{\epsilon}_1 + (m+3)\bar{\epsilon}_2 + \bar{\lambda}_2 + \bar{\eta}$ . la multiplicidad de  $\mu$  es igual a:

$$m^H(\lambda, \mu) = \sum_{\substack{\nu \\ \bar{\nu}=\bar{\eta}}} M(\lambda_1, \nu) \binom{n+5}{5} \binom{m+5}{5}$$

### 7.2.5. Caso $G(\mathbb{C})$ de tipo $E_6$ , $G \simeq E_{6(2)}$ .

Sea  $\mathfrak{g}$  el álgebra de Lie compleja de tipo  $E_6$ . Consideremos la forma real  $\mathfrak{g}_0$  asociada al diagrama de Vogan

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \alpha_2 & & & & \\ & & & & \bullet & & & & \\ & & & & | & & & & \\ \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ \\ \alpha_6 & & \alpha_5 & & \alpha_4 & & \alpha_3 & & \alpha_1 \end{array}$$

Sea  $G$  el grupo de Lie conexo con álgebra de Lie  $\mathfrak{g}_0$ . Entonces  $G$  es una forma real de  $\mathbf{E}_6(\mathbb{C})$  con subgrupo compacto maximal  $K \simeq SU(2) \times SU(6)$ . Sea  $T \subseteq K \subseteq G$  un toro maximal de  $K$  por tanto  $T$  es un subgrupo de Cartan compacto de  $G$ . Sea  $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$  el sistema de raíces de  $\mathfrak{g}$  respecto a  $\mathfrak{t}$ . Sea  $\{e_1, \dots, e_8\}$  una base ortonormal de  $i\mathfrak{t}_0^*$ , bajo la elección de raíces simples  $\Pi := \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$  con  $\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$  raíces compactas y  $\alpha_2$  no compacta. Es conveniente expresar las raíces en términos de  $\{e_1, \dots, e_8\}$  en lugar de las raíces simples; Así pues,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1/2(e_8 - e_7 - e_6 - e_5 - e_4 - e_3 - e_2 + e_1), & \alpha_2 &= e_2 + e_1 & \alpha_3 &= e_2 - e_1 \\ \alpha_4 &= e_3 - e_2 & \alpha_5 &= e_4 - e_3 & \alpha_6 &= e_5 - e_4 \end{aligned}$$

$$\Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) = \left\{ \frac{1}{2} \left( e_8 - e_7 - e_6 + \sum_{i=1}^5 (-1)^{l_i} e_i \right), (e_i \pm e_j) \right\}_{1 \leq j < i \leq 5, \prod (-1)^{l_i} = 1}$$

$$\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) = \left\{ \pm \frac{1}{2} \left( e_8 - e_7 - e_6 - \sum_{i=1}^5 e_i \right) + e_i, \pm(e_i - e_j) \right\}_{1 \leq j < i \leq 5}$$

$$\Phi^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) = \left\{ \frac{1}{2} \left( e_8 - e_7 - e_6 - \sum_{i=1}^5 e_i \right) + e_i, (e_i - e_j) \right\}_{1 \leq j < i \leq 5}$$

$$\Psi_n^+ = \left\{ \frac{1}{2} \left( e_8 - e_7 - e_6 + \sum_{i=1}^5 e_i \right) - (e_i + e_j), (e_i + e_j) \right\}_{1 \leq j < i \leq 5}$$



Sea  $H_\alpha \in i\mathfrak{t}_0$  que representa  $\alpha$ ; la raíz máxima de  $\Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$  en este caso es  $\beta = \frac{1}{2}(e_8 - e_7 - e_6 + \sum_{i=1}^5 e_i)$ ; la raíz  $\alpha_2 = e_1 + e_2$  es la única raíz simple que satisface  $\langle \beta, \alpha_i \rangle \neq 0$ . Tomemos entonces el álgebra de Lie dada por

$$\mathfrak{h} := \mathbb{C}H_{\alpha_2} + \mathbb{C}H_{\alpha_2 - \beta} \oplus \mathbb{C}X_{\alpha_2} \oplus \mathbb{C}X_{\alpha_2 - \beta} \oplus \mathbb{C}X_\beta \oplus \mathbb{C}X_{-\alpha_2} \oplus \mathbb{C}X_{-(\alpha_2 - \beta)} \oplus \mathbb{C}X_{-\beta}.$$

Sea  $H$  el subgrupo conexo de  $G$  con álgebra de Lie  $\mathfrak{h}_0 := \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0$ ;  $H$  es localmente isomorfo a  $SU(2, 1)$ , sea  $L := K \cap H$ ,  $U := T \cap H$ , entonces  $U$  es un toro maximal de  $L$ ;  $L$  es un subgrupo compacto maximal de  $H$  y también  $U$  es un subgrupo de Cartan compacto de  $H$ , y también  $i\mathfrak{u}_0 = \mathbb{R}H_{e_1 + e_2} \oplus \mathbb{R}H_{\frac{1}{2}(e_8 - \sum e_i) - (e_2 + e_1)}$ . Si  $q_u : \mathfrak{t}^* \rightarrow \mathfrak{u}^*$  es la restricción, entonces

$$\Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{u}) = \left\{ \pm q_u(e_1 + e_2), \pm \frac{1}{2} q_u \left( e_8 + \sum e_i \right) - q_u(e_2 + e_1), \pm \frac{1}{2} q_u \left( e_8 + \sum e_i \right) \right\}$$

Raíces compactas de  $\mathfrak{h}$

$$\Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{u}) = \left\{ \pm \frac{1}{2} q_u(e_8 - e_7 - e_6 + e_5 + e_4 + e_3 + e_2 + e_1) \right\}$$

Si  $\Phi(\xi) := \{\alpha \in \Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) \mid q_u(\alpha) = 0\}$  entonces

$$\Phi(\xi) = \left\{ \pm \frac{1}{2}(e_8 - \sum e_i) + e_2, \frac{1}{2}(e_8 - \sum e_i) + e_1, \pm(e_5 - e_4), \pm(e_5 - e_3), \pm(e_4 - e_3), \pm(e_2 - e_1) \right\}.$$

El subgrupo compacto maximal  $K$  se descompone de la forma  $K = K_1 \times K_2$ , con  $K_1 \simeq SU(6)$ ,  $K_2 \simeq SU(2)$ . La acción de  $W_Z$  sobre  $W_{K_2}$  es trivial. Sea  $W_{K_1}^Z$  un conjunto de representante de la acción a derecha de  $W_Z$  sobre  $W_{K_1}$ . Entonces un conjunto de representantes de la acción de  $W_Z$  sobre  $W_K$  es  $S_\beta^a w_i$ , con  $a = 0, 1$ ,  $w_i \in W_{K_1}^Z$ . Dado que  $q_u \left( \frac{1}{2}(e_4 + e_3 + e_2 + e_1) + \frac{1}{2}(e_8 - e_7 - e_6 + e_5) + \frac{1}{2}(e_4 + e_3) \right) = 0$ , para todo  $w_i \in W_{K_1}^Z$  si notamos por  $\underbrace{A}_9$  un elemento  $A$  aparece con multiplicidad 9, entonces:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathfrak{k}/\mathfrak{l}, \mathfrak{u}) &= q_u \left( \Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) \setminus \Phi(\xi) \right) \setminus \Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{u}) \\ &= \left\{ \pm \frac{1}{2} q_u \left( e_8 - \sum e_i \right) + e_i, \pm q_u(e_i - e_j) \right\}_{i=3,4,5; j=1,2} \\ &= \underbrace{\left\{ \pm \frac{1}{2} q_u(e_4 + e_3 - e_2 - e_1) \right\}}_9 \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} S_{w_i}^H &:= q_u(w_i \Psi_n^+) \setminus \Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{u}) \cup \Delta(\mathfrak{k}/\mathfrak{l}, \mathfrak{u}) \\ &= \left\{ \frac{1}{2} q_u(e_8 - e_7 - e_6 - e_5 - e_4 - e_3 + e_2 + e_1) + q_u(e_i), q_u(e_i + e_1), q_u(e_i + e_2) \right\}_{3 \leq i \leq 5} \cup \\ &\quad \left\{ \frac{1}{2} q_u \left( e_8 - e_7 - e_6 + \sum e_l \right) - q_u(e_i + e_k), q_u(e_i + e_j) \right\}_{\substack{3 \leq i < j \leq 5 \\ k=1,2}} \cup \Delta(\mathfrak{k}/\mathfrak{l}, \mathfrak{u}) \\ &= \underbrace{\left\{ \frac{1}{2} q_u(e_4 + e_3 + e_2 + e_1) \right\}}_9 \cup \underbrace{\left\{ \frac{1}{2} q_u(e_8 - e_7 - e_6 + e_5) \right\}}_9 \cup \underbrace{\left\{ \frac{1}{2} q_u(e_4 + e_3 - e_2 - e_1) \right\}}_9 \end{aligned}$$

así mismo

$$S_{S_\beta w_i}^H := \underbrace{\left\{ \frac{1}{2} q_u S_\beta(e_4 + e_3 + e_2 + e_1) \right\}}_9 \cup \underbrace{\left\{ \frac{1}{2} q_u S_\beta(e_8 - e_7 - e_6 + e_5) \right\}}_9 \cup \underbrace{\left\{ \frac{1}{2} q_u(e_4 + e_3 - e_2 - e_1) \right\}}_9$$

Sea  $\Lambda_1 = \frac{1}{2}q_u(e_4 + e_3 + e_2 + e_1)$ ;  $\Lambda_2 = \frac{1}{2}q_u(e_8 - e_7 - e_6 + e_5)$

Un parámetro de Harish-Chandra de  $\mathfrak{e}_6$  en la cámara asociada a  $\Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$  se escribe como  $\lambda = \sum_{i=1}^6 c_i \Omega_i$ , con  $\Omega_i$  los pesos fundamentales de  $\mathfrak{e}_6$  respecto a  $\Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$  y  $c_i > 0$ . Para  $i \neq 2$ , sean  $\omega_i \in (\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{t})^*$  tales que para  $j \neq 2$ ,  $\langle \alpha_j^\vee, \omega_i \rangle = \delta_{ij}$ , entonces  $\{\omega_1, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$  son los pesos fundamentales (con raíces simples  $\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$ ) de la subálgebra  $\mathfrak{k}_1 \subseteq \mathfrak{k}$  respecto al sistema de raíces positivo  $\Phi^+(\mathfrak{t}_1) := \Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) \cap (\mathfrak{t} \cap \mathfrak{k}_1)^*$ . Tomando

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= c_1 \omega_1 + c_3 \omega_3 + c_4 \omega_4 + c_5 \omega_5 + c_6 \omega_6 \\ \lambda_2 &= (c_1 + 2c_2 + 2c_3 + 3c_4 + 2c_5 + c_6) \frac{1}{4} (\epsilon_8 - \epsilon_7 - \epsilon_6 + \epsilon_5 + \epsilon_4 + \epsilon_3 + \epsilon_2 + \epsilon_1) \end{aligned} \quad (7.27)$$

un cálculo directo verifica  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ .

Si  $F := \left( \sum_{w_i \in W_{K_1}^Z} \epsilon(w_i) \varpi(w_i \lambda_1) \delta_{q_u(w_i \lambda_1)} * y_{\frac{9}{2}q_u(e_4+e_3-e_2-e_1)}^9 \right)$  entonces

$$\sum_{w \in W_K^Z} \epsilon(w) \varpi(w \lambda) \delta_{q_u(w \lambda)} * y_{S_w^H} = F * \left( \delta_{q_u(\lambda_2)} * y_{\Lambda_1}^9 * y_{\Lambda_2}^9 - \delta_{q_u(S_\beta \lambda_2)} * y_{-\Lambda_1}^9 * y_{-\Lambda_2}^9 \right)$$

$\Omega_1$	$\frac{1}{3}(2\epsilon_8 - 2\epsilon_7 - 2\epsilon_6)$	$\omega_1$	$\frac{5}{12}(\epsilon_8 - \epsilon_7 - \epsilon_6) + \frac{1}{4}(-\epsilon_5 - \epsilon_4 - \epsilon_3 - \epsilon_2 - \epsilon_1)$
$\Omega_2$	$\frac{1}{2}(\epsilon_8 - \epsilon_7 - \epsilon_6 + \sum_{i=1}^5 \epsilon_i)$	$\omega_{K_2}$	$\frac{1}{4}(\epsilon_8 - \epsilon_7 - \epsilon_6 + \epsilon_5 + \epsilon_4 + \epsilon_3 + \epsilon_2 + \epsilon_1)$
$\Omega_3$	$\frac{1}{6}(5\epsilon_8 - 5\epsilon_7 - 5\epsilon_6 + 3\sum_{i=2}^5 \epsilon_i - 3\epsilon_1)$	$\omega_3$	$\frac{1}{3}(\epsilon_8 - \epsilon_7 - \epsilon_6) - \epsilon_1$
$\Omega_4$	$\epsilon_8 - \epsilon_7 - \epsilon_6 + \epsilon_5 + \epsilon_4 + \epsilon_3$	$\omega_4$	$\frac{1}{3}(\epsilon_8 - \epsilon_7 - \epsilon_6 + \epsilon_5 + \epsilon_4 + \epsilon_3 - 3\epsilon_2 - 3\epsilon_1) - \epsilon_1$
$\Omega_5$	$\frac{1}{3}(2\epsilon_8 - 2\epsilon_7 - 2\epsilon_6 + 3\epsilon_5 + 3\epsilon_4)$	$\omega_5$	$\frac{1}{6}(1\epsilon_8 - \epsilon_7 - \epsilon_6) + \frac{1}{2}(\epsilon_5 + \epsilon_4 - \epsilon_3 - \epsilon_2 - \epsilon_1)$
$\Omega_6$	$\frac{1}{3}(\epsilon_8 - \epsilon_7 - \epsilon_6 + 3\epsilon_5)$	$\omega_6$	$\frac{1}{12}(\epsilon_8 - \epsilon_7 - \epsilon_6) + \frac{1}{4}(3\epsilon_5 - \epsilon_4 - \epsilon_3 - \epsilon_2 - \epsilon_1)$

Calculando los sumandos del paréntesis

$$\begin{aligned} \delta_{q_u(\lambda_2)} * y_{\Lambda_1}^9 * y_{\Lambda_2}^9 &= \delta_{q_u(\lambda_2)} * \sum_{n,m \geq 0} \binom{n+9-1}{9-1} \binom{m+9-1}{9-1} \delta_{(9/2+n)\Lambda_1} * \delta_{(9/2+m)\Lambda_2} \\ &= \sum_{n,m \geq 0} \binom{n+8}{8} \binom{m+8}{8} \delta_{(n+15/2)\Lambda_1 + (m+9/2)\Lambda_2 + q_u(\lambda_2)} \\ \delta_{q_u(S_\beta \lambda_2)} * y_{\Lambda_1}^9 * y_{\Lambda_2}^9 &= \sum_{n,m \geq 0} \binom{n+8}{8} \binom{m+8}{8} \delta_{S_\beta((n+9/2)\Lambda_1 + (m+9/2)\Lambda_2) + q_u(\lambda_2)} \end{aligned} \quad (7.28)$$

El factor  $F$  es la restricción de la representación del  $K_1 \simeq SU(6)$ -módulo con carácter infinitesimal  $\lambda_1$ ,  $\pi_{\lambda_1}$ , a  $K_1 \cap L$  que es un toro de  $L$ , luego  $F$  es la descomposición de la representación de  $SU(6)$  en espacios de peso, restringidos a  $K_1 \cap L$ .

Sea  $\nu \in (\mathfrak{t} \cap \mathfrak{k}_1)^*$  un peso de  $\pi_{\lambda_1}$  y sea  $M(\lambda_1, \nu) = \dim(V_{\lambda_1})_\nu$  la dimensión de su espacio de pesos. Extendemos  $\nu$  a  $\mathfrak{t}^*$  definiendo  $\nu|_{(\mathfrak{t} \cap \mathfrak{k}_1)^*} = 0$ . Por la fórmula de Duflo Vargas, la restricción de la serie discreta de  $G$ ,  $\pi_\lambda$ , a  $H$  se obtiene calculando:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n,m \geq 0 \\ \nu}} M(\lambda_1, \nu) \binom{n+8}{8} \binom{m+8}{8} \delta_{(n+9/2)\Lambda_1 + (m+9/2)\Lambda_2 + q_u(\lambda_2) + q_u(\nu)} \\ - \sum_{\substack{n,m \geq 0 \\ \nu}} M(\lambda_1, \nu) \binom{n+8}{8} \binom{m+8}{8} \delta_{S_\beta((n+9/2)\Lambda_1 + (m+9/2)\Lambda_2) + q_u(\lambda_2) + q_u(\nu)}. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Por tanto, si  $\mu$  es un parámetro de Harish-Chandra de  $H$  tal que  $m^H(\lambda, \mu) \neq 0$ , entonces  $\mu = (n + 9/2)\Lambda_1 + (m + 9/2)\Lambda_2 + q_u(\lambda_2) + \nu$ , o bien  $\mu = -((n + 9/2)\Lambda_1 + (m + 9/2)\Lambda_2 + q_u(\lambda_2)) + \nu$ . Tomemos  $\mu$  en una cámara asociada a un sistema de raíces positivo de  $\Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{u})$  compatible con  $\Phi^+(\mathfrak{l}, \mathfrak{u}) = \{\frac{1}{2}q_u(e_8 - e_7 - e_6 + e_5 + e_4 + e_3 + e_2 + e_1)\}$ , es decir, tal que  $\mu(H_{\frac{1}{2}(e_8 - e_7 - e_6 + e_5 + e_4 + e_3 + e_2 + e_1)}) > 0$ . Si  $\nu$  es un peso de  $\pi_{\lambda_1}$ , es combinación convexa de los  $w(\lambda_1)$  con  $w \in W_{K_1}$ , como  $W_{K_1}$  está generado por raíces ortogonales a  $\frac{1}{2}(e_8 - e_7 - e_6 + e_5 + e_4 + e_3 + e_2 + e_1)$  y  $\lambda_1$  es ortogonal a  $\beta$ , entonces  $w(\lambda_1)$  es ortogonal a  $\beta$  y por tanto  $\nu$  también lo es. Luego, si  $\mu = (n + 9/2)\Lambda_1 + (m + 9/2)\Lambda_2 + q_u(\lambda_2) + q_u(\nu)$  entonces:

$$\begin{aligned} \mu(H_\beta) &= ((n + 9/2)\Lambda_1 + (m + 9/2)\Lambda_2 + \lambda_2 + q_u(\nu))(H_\beta) \\ &= (n + 9/2)\Lambda_1(H_\beta) + (m + 9/2)\Lambda_2(H_\beta) + q_u(\lambda_2)(H_\beta) + \nu(H_\beta) \\ &= n + m + 9 + c_1 + 2c_2 + 2c_3 + 3c_4 + 2c_5 + c_6 + \nu(H_\beta) \\ &= n + m + 9 + c_1 + 2c_2 + 2c_3 + 3c_4 + 2c_5 + c_6 > 0 \end{aligned}$$

mientras que si  $\mu = -(n + 9/2)\Lambda_1 - (m + 9/2)\Lambda_2 - q_u(\lambda_2) + q_u(\nu)$

$$\begin{aligned} \mu(H_{e_2+e_1}) &= (-((n + 9/2)\Lambda_1 + (m + 9/2)\Lambda_2 + q_u(\lambda_2)) + q_u(\nu))(H_\beta) \\ &= (-((n + 9/2)\bar{e}_1 + (m + 9/2)\bar{e}_2 + q_u(\lambda_2)))(H_\beta) \\ &= -(n + m + 9 + c_1 + 2c_2 + 2c_3 + 3c_4 + 2c_5 + c_6) < 0 \end{aligned}$$

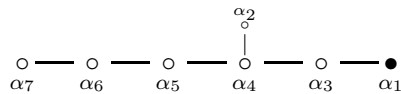
De este modo, los parámetros  $\mu$  son de la forma  $(n + 9/2)\Lambda_1 + (m + 9/2)\Lambda_2 + \lambda_2 + q_u(\nu)$ . Más aún, si se tiene otra expresión de  $\mu$ ,  $\mu = (r + 9/2)\Lambda_1 + (s + 9/2)\Lambda_2 + \lambda_2 + \bar{\eta}$ , entonces evaluando  $\mu(H_\beta)$  en ambas expresiones y dado que  $\nu, \eta$  son ortogonales a  $\beta$  se tiene que  $n + m = r + s$ . Similarmente,  $\mu(H_{\alpha_2} + H_{\alpha_2 - \beta})$  lleva a que  $\nu(H_{\alpha_2} + H_{\alpha_2 - \beta}) = \eta(H_{\alpha_2} + H_{\alpha_2 - \beta})$ , como  $\{H_\beta, H_{\alpha_2} + H_{\alpha_2 - \beta}\}$  es una base de  $\mathfrak{u}$  entonces  $q_u(\nu) = q_u(\eta)$ .

Además,  $n + 9/2 + \lambda(H_{\alpha_2}) + \nu(H_{\alpha_2}) = \mu(H_{\alpha_2}) = r + 9/2 + \lambda(H_{\alpha_2}) + \nu(H_{\alpha_2})$ , luego  $n = r$  y también  $n + 9/2 + \lambda(H_{\alpha_2 - \beta}) + \nu(H_{\alpha_2 - \beta}) = \mu(H_{\alpha_2 - \beta}) = r + 9/2 + \lambda(H_{\alpha_2 - \beta}) + \nu(H_{\alpha_2 - \beta})$  implica  $m = s$ . Por tanto  $n, m$  son únicos y si  $\mu = (n + 9/2)\Lambda_1 + (m + 9/2)\Lambda_2 + q_u(\lambda_2) + q_u(\eta)$ . la multiplicidad de  $\tau_\mu$  en  $\pi_\lambda$  es igual a:

$$m^H(\lambda, \mu) = \sum_{\substack{\nu \\ q_u(\nu) = q_u(\eta)}} M(\lambda_1, \nu) \binom{n+8}{8} \binom{m+8}{8}$$

### 7.2.6. Caso $G(C) = E_7$ , $G \simeq \mathfrak{e}_{7(-5)}$ .

Sea  $\mathfrak{g}$  el álgebra de Lie compleja de tipo  $E_7$ . Consideremos la forma real  $\mathfrak{g}_0$  asociada al diagrama de Vogan



Sea  $G$  el grupo de Lie conexo con álgebra de Lie  $\mathfrak{g}_0$ . Entonces  $G$  es una forma real de  $\mathbf{E}_7$ . Sea  $T \subseteq K \subseteq G$  un toro maximal de  $K$  por tanto  $T$  es un subgrupo de Cartan compacto de  $G$ . Sea  $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$  el sistema de raíces de  $\mathfrak{g}$  respecto a  $\mathfrak{t}$ . Bajo esta elección las raíces simples son

$\Pi := \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$  con  $\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$  raíces compactas y  $\alpha_1$  no compacta. Es conveniente expresar las raíces en términos de una base ortonormal  $\{e_1, \dots, e_8\}$  de  $\mathfrak{t}$  así:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1/2(e_8 - e_7 - e_6 - e_5 - e_4 - e_3 - e_2 + e_1), & \alpha_2 &= e_2 + e_1 & \alpha_3 &= e_2 - e_1 \\ \alpha_4 &= e_3 - e_2, & \alpha_5 &= e_4 - e_3, & \alpha_6 &= e_5 - e_4, & \alpha_7 &= e_6 - e_5 \end{aligned}$$

Entonces conjuntos de raíces son:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) &= \left\{ \pm \frac{1}{2} \left( e_8 - e_7 + \sum_{i=1}^6 (-1)^{l_i} e_i \right), \pm(e_i \pm e_j), \pm(e_8 - e_7) \right\}_{1 \leq j < i \leq 6, \prod (-1)^{l_i} = -1} \\ \Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) &= \left\{ \frac{1}{2} \left( e_8 - e_7 + \sum_{i=1}^6 (-1)^{l_i} e_i \right), e_i \pm e_j, e_8 - e_7 \right\}_{1 \leq j < i \leq 6, \prod (-1)^{l_i} = -1} \\ \Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) &= \{ \pm(e_i \pm e_j), \pm(e_8 - e_7) \}_{1 \leq j < i \leq 6} \\ \Phi^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) &= \{ e_i \pm e_j, e_8 - e_7 \}_{1 \leq j < i \leq 6} \\ \Psi_n^+ &= \left\{ \frac{1}{2} \left( e_8 - e_7 + \sum_{i=1}^6 (-1)^{l_i} e_i \right) \right\}_{\prod (-1)^{l_i} = -1} \end{aligned}$$

Sea  $H_\alpha \in i\mathfrak{t}_0$  tal que  $\alpha(H) = \langle H, H_\alpha \rangle$  para todo  $H \in \mathfrak{t}$ ; la raíz máxima de  $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$  en este caso es  $\beta = e_8 - e_7$ ; la raíz  $\alpha_1 = 1/2(e_8 - e_7 - e_6 - e_5 - e_4 - e_3 - e_2 + e_1)$  es la única raíz simple que satisface  $\langle \beta, \alpha_i \rangle \neq 0$ . Tomemos entonces el álgebra de Lie

$$\mathfrak{h} := \mathbb{C}H_{\alpha_1} + \mathbb{C}H_{\alpha_1 - \beta} \oplus \mathbb{C}X_{\alpha_1} \oplus \mathbb{C}X_{\alpha_1 - \beta} \oplus \mathbb{C}X_\beta \oplus \mathbb{C}X_{-\alpha_1} \oplus \mathbb{C}X_{-\alpha_1 + \beta} \oplus \mathbb{C}X_{-\beta}.$$

Sea  $H$  el subgrupo conexo de  $G$  con álgebra de Lie  $\mathfrak{h}_0 := \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0$ ;  $H$  es localmente isomorfo a  $SU(2, 1)$ , sean  $L := K \cap H$ ,  $U := T \cap H$ , entonces  $U$  es un toro maximal de  $L$ ;  $L$  es un subgrupo compacto maximal de  $H$  y también  $U$  es un subgrupo de Cartan compacto de  $H$ , y  $i\mathfrak{u}_0 = \mathbb{R}H_{\frac{1}{2}(e_8 - e_7 - \sum e_i) + e_1} \oplus \mathbb{R}H_{\frac{1}{2}(e_8 - e_7 + \sum e_i) - e_1}$ . Si  $q_u : \mathfrak{t}^* \rightarrow \mathfrak{u}^*$  es la restricción, entonces

$$\Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{u}) = \left\{ \pm \frac{1}{2} q_u \left( e_8 - e_7 + e_1 - \sum e_i \right), \frac{1}{2} q_u \left( e_8 - e_7 - e_1 + \sum e_i \right), \pm q_u(e_8 - e_7) \right\}$$

Raíces compactas de  $\mathfrak{h}$

$$\Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{u}) = \{ \pm q_u(e_8 - e_7) \}$$

Si  $\Phi(\xi) := \{ \alpha \in \Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) \mid q_u(\alpha) = 0 \}$  entonces

$$\Phi(\xi) = \{ \pm(e_i - e_j), \pm(e_j + e_1) \}_{1 < j < i \leq 6}.$$

El subgrupo compacto maximal  $K$  se descompone de la forma  $K = K_1 \times K_2$ , con  $K_1 \simeq SO(12)$ ,  $K_2 \simeq SU(2)$ . La acción de  $W_Z$  sobre  $W_{K_2}$  es trivial. Sea  $W_{K_1}^Z$  un conjunto de representante de la acción a derecha de  $W_Z$  sobre  $W_{K_1}$ . Entonces un conjunto de representantes de la acción de  $W_Z$  sobre  $W_K$  es  $S_\beta^a w_i$ , con  $a = 0, 1$ ,  $w_i \in W_{K_1}^Z$ . Dado que

$$q_u \left( \frac{1}{2} (e_8 - e_7 - e_6 - e_5) + \frac{1}{2} (e_4 + e_3 + e_2 - e_1) + \frac{-1}{2} (e_8 - e_7 + e_6 + e_5) \right) = 0,$$

para  $w_i \in W_{K_1}^Z$  se tiene:

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathfrak{k}/\mathfrak{l}, \mathfrak{u}) &= q_u \left( \Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) \setminus \Phi(\xi) \right) \setminus \Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{u}) \\
&= \{ \pm q_u(e_i + e_j), \pm q_u(e_j - e_1) \}_{1 < j < i \leq 6} \\
&= \underbrace{\{ \pm \frac{1}{2} q_u(e_4 + e_3 + e_2 - e_1) \}}_{15}
\end{aligned}$$

Como siempre, la notación  $\underbrace{A}_m$  indica que el elemento  $A$  aparece con multiplicidad  $m$ . Entonces

$$\begin{aligned}
S_{w_i}^H &:= q_u(w_i \Psi_n^+) \setminus \Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{u}) \cup \Delta(\mathfrak{k}/\mathfrak{l}, \mathfrak{u}) \\
&= \{ \frac{1}{2} q_u(e_8 - e_7 - e_6 - e_5 - e_4 - e_3 + e_2 + e_1) + q_u(e_i), q_u(e_i + e_1), q_u(e_i + e_2) \}_{3 \leq i \leq 5} \cup \\
&\quad \{ \frac{1}{2} q_u(e_8 - e_7 - e_6 + \sum_{k=1,2} e_l) - q_u(e_i + e_k), q_u(e_i + e_j) \}_{3 \leq i < j \leq 5} \cup \Delta(\mathfrak{k}/\mathfrak{l}, \mathfrak{u}) \\
&= \underbrace{\{ q_u \frac{1}{2} (e_8 - e_7 - e_6 - e_5) \}}_{15} \cup \underbrace{\{ q_u \frac{1}{2} (e_8 - e_7 + e_6 + e_5) \}}_{15} \cup \underbrace{\{ q_u \frac{1}{2} (e_4 + e_3 + e_2 - e_1) \}}_{15}
\end{aligned}$$

así mismo

$$S_{S_\beta}^H := \underbrace{\{ q_u \frac{1}{2} S_\beta (e_8 - e_7 - e_6 - e_5) \}}_{15} \cup \underbrace{\{ q_u \frac{1}{2} S_\beta (e_8 - e_7 + e_6 + e_5) \}}_{15} \cup \underbrace{\{ q_u \frac{1}{2} (e_4 + e_3 + e_2 - e_1) \}}_{15}$$

Sea  $\Lambda_1 = \frac{1}{2} q_u(e_8 - e_7 - e_6 - e_5)$ ;  $\Lambda_2 = \frac{1}{2} q_u(e_8 - e_7 + e_6 + e_5)$ . Un parámetro de Harish-Chandra de  $\mathfrak{e}_7$  en la cámara asociada a  $\Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$  se escribe como  $\lambda = \sum_{i=1}^7 c_i \Omega_i$ , con  $\Omega_i$  los pesos fundamentales de  $\mathfrak{e}_7$  respecto a  $\Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$  y  $c_i > 0$ . Para  $i \neq 1$ , sean  $\omega_i \in (\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{t})^*$  tales que para  $j \neq 1, \langle \alpha_j^\vee, \omega_i \rangle = \delta_{ij}$ , entonces  $\{\omega_2, \dots, \omega_7\}$  son los pesos fundamentales (con raíces simples  $\{\alpha_2, \dots, \alpha_7\}$ ) de la subálgebra  $\mathfrak{k}_1 \subseteq \mathfrak{k}$  respecto al sistema de raíces positivo  $\Phi^+(\mathfrak{t}_1) := \Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) \cap (\mathfrak{t} \cap \mathfrak{k}_1)^*$ . Tomando  $\lambda_1 = \sum_{i=2}^6 c_i \omega_i$ ,  $\lambda_2 = (2c_1 + 2c_2 + 3c_3 + 4c_4 + 3c_5 + 2c_6 + 1c_7) \frac{\epsilon_8 - \epsilon_7}{2}$ , un cálculo directo verifica  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ . Si  $F := \left( \sum_{w_i \in W_{K_1}^Z} \epsilon(w_i) \varpi(w_i \lambda_1) \delta_{q_u(w_i \lambda_1)} * y_{\frac{1}{2} q_u(e_4 + e_3 + e_2 - e_1)}^{15} \right)$  entonces

$$\sum_{w \in W_K^Z} \epsilon(w) \varpi(w \lambda) \delta_{q_u(w \lambda)} * y_{S_w^H} = F * \left( \delta_{q_u(\lambda_2)} * y_{\Lambda_1}^{15} * y_{\Lambda_2}^{15} - \delta_{q_u(S_\beta \lambda_2)} * y_{-\Lambda_1}^{15} * y_{-\Lambda_2}^{15} \right)$$

$\Omega_1$	$\epsilon_8 - \epsilon_7$	$\omega_{K_2}$	$\frac{1}{2}(\epsilon_8 - \epsilon_7)$
$\Omega_2$	$\frac{1}{2} \left( 2\epsilon_8 - 2\epsilon_7 + \sum_{i=1}^6 \epsilon_i \right)$	$\omega_2$	$\frac{1}{2} (\epsilon_6 + \epsilon_5 + \epsilon_4 + \epsilon_3 + \epsilon_2 + \epsilon_1)$
$\Omega_3$	$\frac{1}{2} \left( 3\epsilon_8 - 3\epsilon_7 + \sum_{i=2}^6 \epsilon_i - \epsilon_1 \right)$	$\omega_3$	$\frac{1}{2} (\epsilon_6 + \epsilon_5 + \epsilon_4 + \epsilon_3 + \epsilon_2 - \epsilon_1)$
$\Omega_4$	$2\epsilon_8 - 2\epsilon_7 + \sum_{i=3}^6 \epsilon_i$	$\omega_4$	$\epsilon_6 + \epsilon_5 + \epsilon_4 + \epsilon_3$
$\Omega_5$	$\frac{1}{2} (3\epsilon_8 - 3\epsilon_7 + 2 \sum_{i=4}^6 \epsilon_i)$	$\omega_5$	$\epsilon_6 + \epsilon_5 + \epsilon_4$
$\Omega_6$	$\epsilon_8 - \epsilon_7 + \epsilon_6 + \epsilon_5$	$\omega_6$	$\epsilon_6 + \epsilon_5$
$\Omega_7$	$\frac{1}{2} (\epsilon_8 - \epsilon_7 + 2\epsilon_6)$	$\omega_7$	$\epsilon_6$

Calculando los sumandos del paréntesis

$$\begin{aligned}
\delta_{q_u(\lambda_2)} * y_{\Lambda_1}^{15} * y_{\Lambda_2}^{15} &= \delta_{q_u(\lambda_2)} * \sum_{n,m \geq 0} \binom{n+15-1}{15-1} \binom{m+15-1}{15-1} \delta_{(15/2+n)\Lambda_1} * \delta_{(15/2+m)\Lambda_2} \\
&= \sum_{n,m \geq 0} \binom{n+14}{14} \binom{m+14}{14} \delta_{(n+15/2)\Lambda_1 + (m+15/2)\Lambda_2 + q_u(\lambda_2)} \quad (7.30) \\
\delta_{q_u(S_\beta \lambda_2)} * y_{\Lambda_1}^{15} * y_{\Lambda_2}^{15} &= \sum_{n,m \geq 0} \binom{n+14}{14} \binom{m+14}{14} \delta_{S_\beta((n+15/2)\Lambda_1 + (m+15/2)\Lambda_2 + q_u(\lambda_2))}
\end{aligned}$$

El factor  $F$  es la restricción de la representación del  $K_1 \simeq SO(12)$ -módulo con carácter infinitesimal  $\lambda_1$ ,  $\pi_{\lambda_1}$ , a  $K_1 \cap L$  que es un toro de  $L$ , luego  $F$  es la descomposición de la representación de  $SO(12)$  en espacios de peso, restringidos a  $K_1 \cap L$ .

Sea  $\nu \in (\mathfrak{t} \cap \mathfrak{k}_1)^*$  un peso de  $\pi_{\lambda_1}$  y sea  $M(\lambda_1, \nu) = \dim(V_{\lambda_1})_\nu$  la dimensión de su espacio de pesos. Extendemos  $\nu$  a  $\mathfrak{t}^*$  definiendo  $\nu|_{(\mathfrak{t} \cap \mathfrak{k}_1)^*} = 0$ . Por la fórmula de Duflo Vargas, la restricción de la serie discreta de  $G$ ,  $\pi_\lambda$ , a  $H$  se obtiene calculando:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{n,m \geq 0 \\ \nu}} M(\lambda_1, \nu) \binom{n+8}{8} \binom{m+14}{14} \delta_{(n+15/2)\Lambda_1 + (m+15/2)\Lambda_2 + q_u(\lambda_2) + q_u(\nu)} \\
&\quad - \sum_{\substack{n,m \geq 0 \\ \nu}} M(\lambda_1, \nu) \binom{n+8}{8} \binom{m+14}{14} \delta_{S_\beta((n+15/2)\Lambda_1 + (m+15/2)\Lambda_2 + q_u(\lambda_2)) + q_u(\nu)} \quad (7.31)
\end{aligned}$$

Por tanto, si  $\mu$  es un parámetro de Harish-Chandra de  $H$  tal que  $m^H(\lambda, \mu) \neq 0$ , entonces  $\mu = (n + 15/2)\Lambda_1 + (m + 15/2)\Lambda_2 + \bar{\lambda}_2 + \nu$ , o bien  $\mu = -((n + 15/2)\Lambda_1 + (m + 15/2)\Lambda_2 + \bar{\lambda}_2) + \nu$ . Tomemos  $\mu$  en una cámara asociada a un sistema de raíces positivo de  $\Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{u})$  compatible con  $\Phi^+(\mathfrak{l}, \mathfrak{u}) = \{q_u(e_8 - e_7)\}$ , es decir, tal que  $\mu(H_{e_8 - e_7}) > 0$ . Si  $\nu$  es un peso de  $\pi_{\lambda_1}$ , es combinación convexa de los  $w(\lambda_1)$  con  $w \in W_{K_1}$ , como  $W_{K_1}$  está generado por raíces ortogonales a  $e_8 - e_7$  y  $\lambda_1$  es ortogonal a  $e_8 - e_7$ , entonces  $w(\lambda_1)$  es ortogonal a  $e_8 - e_7$  y por tanto  $\nu$  también lo es. Luego, si  $\mu = (n + 15/2)\Lambda_1 + (m + 15/2)\Lambda_2 + q_u(\lambda_2) + q_u(\nu)$  entonces:

$$\begin{aligned}
\mu(H_\beta) &= ((n + 15/2)\Lambda_1 + (m + 15/2)\Lambda_2 + \lambda_2 + q_u(\nu))(H_{e_8 - e_7}) \\
&= (n + 15/2)\Lambda_1(H_{e_8 - e_7}) + (m + 15/2)\Lambda_2(H_{e_8 - e_7}) + q_u(\lambda_2)(H_{e_8 - e_7}) + \nu(H_{e_8 - e_7}) \\
&= n + m + 15 + 2c_1 + 2c_2 + 3c_3 + 4c_4 + 3c_5 + 2c_6 + 1c_7 + \nu(H_{e_8 - e_7}) \\
&= n + m + 15 + 2c_1 + 2c_2 + 3c_3 + 4c_4 + 3c_5 + 2c_6 + 1c_7 > 0
\end{aligned}$$

mientras que si  $\mu = -(n + 15/2)\Lambda_1 - (m + 15/2)\Lambda_2 - q_u(\lambda_2) + q_u(\nu)$

$$\begin{aligned}
\mu(H_{e_8 - e_7}) &= (-((n + 15/2)\Lambda_1 + (m + 15/2)\Lambda_2 + q_u(\lambda_2)) + q_u(\nu))(H_{e_8 - e_7}) \\
&= (-((n + 15/2)\Lambda_1 + (m + 15/2)\Lambda_2 + q_u(\lambda_2)))(H_{e_8 - e_7}) \\
&= -(n + m + 15 + 2c_1 + 2c_2 + 3c_3 + 4c_4 + 3c_5 + 2c_6 + 1c_7) < 0
\end{aligned}$$

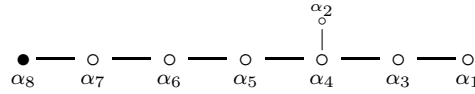
De este modo, los parámetros  $\mu$  son de la forma  $(n + 15/2)\Lambda_1 + (m + 15/2)\Lambda_2 + \lambda_2 + q_u(\nu)$ . Más aún, si se tiene otra expresión de  $\mu$ ,  $\mu = (r + 15/2)\Lambda_1 + (s + 15/2)\Lambda_2 + \lambda_2 + q_u(\eta)$ , entonces evaluando  $\mu(H_\beta)$  en ambas expresiones y dado que  $\nu, \eta$  son ortogonales a  $\beta$  se tiene que  $n + m = r + s$ .

Similarmente,  $\mu(H_{\alpha_2} + H_{\alpha_2 - \beta})$  lleva a que  $\nu(H_{\alpha_2} + H_{\alpha_2 - \beta}) = \eta(H_{\alpha_2} + H_{\alpha_2 - \beta})$ , como  $\{H_{\beta}, H_{\alpha_2} + H_{\alpha_2 - \beta}\}$  es una base de  $\mathfrak{u}$  entonces  $q_u(\nu) = q_u(\eta)$ . Además,  $n + 15/2 + \lambda(H_{\alpha_2}) + \nu(H_{\alpha_2}) = \mu(H_{\alpha_2}) = r + 15/2 + \lambda(H_{\alpha_2}) + \nu(H_{\alpha_2})$ , luego  $n = r$  y también  $n + 15/2 + \lambda(H_{\alpha_2 - \beta}) + \nu(H_{\alpha_2 - \beta}) = \mu(H_{\alpha_2 - \beta}) = r + 15/2 + \lambda(H_{\alpha_2 - \beta}) + \nu(H_{\alpha_2 - \beta})$  implica  $m = s$ . Por tanto  $n, m$  son únicos y si  $\mu = (n + 15/2)\Lambda_1 + (m + 15/2)\Lambda_2 + q_u(\lambda_2) + q_u(\eta)$ . la multiplicidad de  $\tau_\mu$  en  $\pi_\lambda$  es igual a:

$$m^H(\lambda, \mu) = \sum_{\substack{\nu \\ q_u(\nu) = q_u(\eta)}} M(\lambda_1, \nu) \binom{n+14}{14} \binom{m+14}{14}$$

### 7.2.7. Caso $G(\mathbb{C})$ de tipo $E_8$ , $G \simeq E_{(-24)}$ .

Sea  $\mathfrak{g}$  el álgebra de Lie compleja de tipo  $E_8$ . Consideremos la forma real  $\mathfrak{g}_0$  asociada al diagrama de Vogan



Sea  $G$  el grupo de Lie conexo con álgebra de Lie  $\mathfrak{g}_0$ . Entonces  $G$  es una forma real de  $\mathbf{E}_8$ , con subgrupo compacto maximal  $K \simeq K_1 \times SU(2)$  y  $K_1$  de tipo  $E_7$ . Sea  $T \subseteq K \subseteq G$  un toro maximal de  $K$  por tanto  $T$  es un subgrupo de Cartan compacto de  $G$ . Sea  $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$  el sistema de raíces de  $\mathfrak{g}$  respecto a  $\mathfrak{t}$ . Bajo esta elección las raíces simples son  $\Pi := \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$  con  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$  raíces compactas y  $\alpha_8$  raíz no compacta. Sea  $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_8\}$  una base ortonormal de  $i\mathfrak{t}_0^*$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1/2(\epsilon_8 - \epsilon_7 - \epsilon_6 - \epsilon_5 - \epsilon_4 - \epsilon_3 - \epsilon_2 + \epsilon_1), & \alpha_2 &= \epsilon_2 + \epsilon_1, & \alpha_3 &= \epsilon_2 - \epsilon_1 \\ \alpha_4 &= \epsilon_3 - \epsilon_2, & \alpha_5 &= \epsilon_4 - \epsilon_3, & \alpha_6 &= \epsilon_5 - \epsilon_4, & \alpha_7 &= \epsilon_6 - \epsilon_5, & \alpha_8 &= \epsilon_7 - \epsilon_6 \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) &= \left\{ \frac{1}{2}(\epsilon_8 + \sum_{i=1}^7 (-1)^{l_i} \epsilon_i), \epsilon_i \pm \epsilon_j \right\}_{\substack{\prod_{i=1}^7 (-1)^{l_i} = 1 \\ 1 \leq j < i \leq 8}} \\ \Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) &= \left\{ \pm \frac{1}{2}(\epsilon_8 - \epsilon_7 + \sum_{i=1}^6 (-1)^{l_i} \epsilon_i), \pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j), \pm(\epsilon_8 \pm \epsilon_7) \right\}_{\substack{\prod_{i=1}^6 (-1)^{l_i} = -1 \\ 1 \leq j < i \leq 6}} \\ \Phi^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) &= \left\{ \frac{1}{2}(\epsilon_8 - \epsilon_7 + \sum_{i=1}^6 (-1)^{l_i} \epsilon_i), \epsilon_i \pm \epsilon_j, \epsilon_8 \pm \epsilon_7 \right\}_{\substack{\prod_{i=1}^6 (-1)^{l_i} = -1 \\ 1 \leq j < i \leq 6}} \\ \Psi_n^+ &= \left\{ \frac{1}{2}(\epsilon_8 + \epsilon_7 + \sum_{i=1}^6 (-1)^{l_i} \epsilon_i), \epsilon_8 \pm \epsilon_j, \epsilon_7 \pm \epsilon_j \right\}_{\substack{\prod_{i=1}^6 (-1)^{l_i} = 1 \\ 1 \leq j < i \leq 6}} \end{aligned}$$

Sea  $H_\alpha \in i\mathfrak{t}_0$ ; la raíz máxima de  $\Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$  es  $\beta = \epsilon_8 + \epsilon_7$ ; la raíz  $\alpha_1 = \epsilon_7 - \epsilon_6$  es la única raíz simple que satisface  $\langle \beta, \alpha_i \rangle \neq 0$ . Tomemos entonces el álgebra de Lie dada por  $\mathfrak{h} := \mathbb{C}H_{\epsilon_7 - \epsilon_6} + \mathbb{C}H_{\epsilon_6 + \epsilon_8} \oplus \mathbb{C}X_{\epsilon_7 - \epsilon_6} \oplus \mathbb{C}X_{\epsilon_6 + \epsilon_8} \oplus \mathbb{C}X_{\epsilon_8 + \epsilon_7} \oplus \mathbb{C}X_{-(\epsilon_7 - \epsilon_6)} \oplus \mathbb{C}X_{-(\epsilon_6 + \epsilon_8)} \oplus \mathbb{C}X_{-(\epsilon_8 + \epsilon_7)}$ .

Sea  $H$  el subgrupo conexo de  $G$  con álgebra de Lie  $\mathfrak{h}_0 := \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0$ ;  $H$  es isomorfo a  $SU(2, 1)$ , sea  $L := K \cap H$ ,  $U := T \cap H$ , entonces  $U$  es un toro maximal de  $L$ ;  $L$  es un subgrupo compacto maximal de  $H$  y también  $U$  es un subgrupo de Cartan compacto de  $H$ , y también  $i\mathfrak{u}_0 = \mathbb{R}H_{\epsilon_7 - \epsilon_6} + \mathbb{R}H_{\epsilon_6 + \epsilon_8}$ . Si  $q_u : \mathfrak{t}^* \rightarrow \mathfrak{u}^*$  es la restricción, entonces

$$\Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{u}) = \{\pm(\epsilon_7 - \epsilon_6), \pm(\epsilon_6 + \epsilon_8), \pm(\epsilon_7 + \epsilon_8)\}$$

Raíces compactas de  $\mathfrak{h}$

$$\Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{u}) = \{\pm q_u(\epsilon_8 + \epsilon_7)\}$$

Si  $\Phi(\xi) := \{\alpha \in \Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) \mid q_u(\alpha) = 0\}$  entonces

$$\Phi(\xi) = \left\{ \pm \frac{1}{2} \left( \epsilon_8 - \epsilon_7 - \epsilon_6 \sum_{i=1}^5 (-1)^{l_i} \epsilon_i \right), \pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j) \right\}_{\substack{\prod_{i=1}^5 (-1)^{l_i} = 1 \\ 1 \leq j < i \leq 5}}$$

La acción de  $W_Z$  sobre  $W_{K_2}$  es trivial. Sea  $W_{K_1}^Z$  el conjunto de representante minimal de la acción a derecha de  $W_Z$  sobre  $W_{K_1}$ . Entonces los representantes minimal de la acción de  $W_Z$  sobre  $W_K$  son de la forma  $S_{\beta}^a w_i$ , con  $a = 0, 1, w_i \in W_{K_1}^Z$ , por tanto dado que  $q_u(\epsilon_7 + \epsilon_6 - \epsilon_8) = 0$ ,

$$\begin{aligned} \Phi(\mathfrak{k}/\mathfrak{l}, \mathfrak{u}) &= q_u \left( \Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) \setminus \Phi(\xi) \right) \setminus \Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{u}) \\ &= \left\{ \pm \frac{1}{2} q_u \left( \epsilon_8 - \epsilon_7 + \epsilon_6 + \sum_{i=1}^5 (-1)^{l_i} \epsilon_i \right), \pm q_u(\epsilon_6 \pm \epsilon_i), \pm q_u(\epsilon_8 - \epsilon_7) \right\}_{\substack{\prod_{i=1}^5 (-1)^{l_i} = 1 \\ 1 \leq j < i \leq 5}} \\ &= \underbrace{\{\pm q_u(\epsilon_6)\}}_{27} \end{aligned}$$

Como siempre, la notación  $\underbrace{A}_m$  indica que el elemento  $A$  aparece con multiplicidad  $m$ . Entonces

$$\begin{aligned} S_{w_i}^H &:= q_u(w_i \Psi_n^+) \setminus \Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{u}) \cup \Delta(\mathfrak{k}/\mathfrak{l}, \mathfrak{u}) \\ &= \left\{ \frac{1}{2} q_u \left( \epsilon_8 + \epsilon_7 - \epsilon_6 + \sum_{i=1}^5 (-1)^{l_i} \epsilon_i \right), q_u(\epsilon_7 \pm \epsilon_j), q_u(\epsilon_7 + \epsilon_6) \right\}_{\substack{\prod_{i=1}^5 (-1)^{l_i} = 1 \\ 1 \leq j < i \leq 5}} \cup \\ &\quad \left\{ \frac{1}{2} q_u \left( \epsilon_8 + \epsilon_7 + \epsilon_6 + \sum_{i=1}^5 (-1)^{l_i} \epsilon_i \right), q_u(\epsilon_8 \pm \epsilon_j), q_u(\epsilon_8 - \epsilon_6) \right\}_{\substack{\prod_{i=1}^5 (-1)^{l_i} = 1 \\ 1 \leq j < i \leq 5}} \cup \Delta(\mathfrak{k}/\mathfrak{l}, \mathfrak{u}) \\ &= \underbrace{\{q_u(\epsilon_7)\}}_{27} \underbrace{\{q_u(\epsilon_8)\}}_{27} \underbrace{\{q_u(\epsilon_6)\}}_{27} \end{aligned}$$

así mismo

$$S_{S_{\beta}^H w_i}^H := \underbrace{\{q_u S_{\beta}(\epsilon_7)\}}_{27} \underbrace{\{q_u S_{\beta}(\epsilon_8)\}}_{27} \underbrace{\{q_u(\epsilon_6)\}}_{27}$$

Sea  $\Lambda_1 = q_u(\epsilon_7)$ ;  $\Lambda_2 = q_u(\epsilon_8)$  Un parámetro de Harish-Chandra de  $\mathfrak{e}_8$  en la cámara asociada a  $\Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$  se escribe como  $\lambda = \sum_{i=1}^8 c_i \Omega_i$ , con  $\Omega_i$  los pesos fundamentales de  $\mathfrak{e}_8$  respecto a  $\Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$  y  $c_i > 0$ . Para  $i \neq 8$ , sean  $\omega_i \in (\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{t})^*$  tales que para  $j \neq 8$ ,  $\langle \alpha_j^\vee, \omega_i \rangle = \delta_{ij}$ , entonces  $\omega_i$  son los pesos fundamentales de la subálgebra  $\mathfrak{k}_1 \subseteq \mathfrak{k}$  respecto al sistema de raíces positivo  $\Phi^+(\mathfrak{t}_1) := \Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) \cap (\mathfrak{t} \cap \mathfrak{k}_1)^*$ . Tomando  $\lambda_1 = \sum_{i=1}^7 c_i \omega_i$ ,  $\lambda_2 = (2c_1 + 3c_2 + 4c_3 + 6c_4 + 5c_5 + 4c_6 + 3c_7 + 2c_8) \frac{\epsilon_8 + \epsilon_7}{2}$ , un cálculo

directo verifica (ver tabla)  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ . Si  $F := \left( \sum_{w_i \in W_{K_1}^Z} \epsilon(w_i) \varpi(w_i \lambda_1) \delta_{q_u(w_i \lambda_1)} * y_{q_u(\epsilon_6)}^{27} \right)$



entonces

$$\sum_{w \in W_K^Z} \epsilon(w) \varpi(w\lambda) \delta_{q_u(w\lambda)} * y_{S_w^H} = F * \left( \delta_{q_u(\lambda_2)} * y_{\Lambda_1}^{27} * y_{\Lambda_2}^{27} - \delta_{q_u(S_\beta \lambda_2)} * y_{-\Lambda_1}^{27} * y_{-\Lambda_2}^{27} \right)$$

$\Omega_1$	$2\epsilon_8$	$\omega_1$	$\epsilon_8 - \epsilon_7$
$\Omega_2$	$\frac{1}{2} \left( 5\epsilon_8 + \sum_{i=1}^7 \epsilon_i \right)$	$\omega_2$	$\frac{1}{2} \left( 2\epsilon_8 - 2\epsilon_7 + \sum_{i=1}^6 \epsilon_i \right)$
$\Omega_3$	$\frac{1}{2} \left( 3\epsilon_8 + \sum_{i=2}^7 \epsilon_i - \epsilon_1 \right)$	$\omega_3$	$\frac{1}{2} \left( 3\epsilon_8 - 3\epsilon_7 + \sum_{i=2}^6 \epsilon_i - \epsilon_1 \right)$
$\Omega_4$	$5\epsilon_8 + \sum_{i=3}^7 \epsilon_i$	$\omega_4$	$2\epsilon_8 - 2\epsilon_7 + \sum_{i=3}^6 \epsilon_i$
$\Omega_5$	$4\epsilon_8 + \sum_{i=4}^7 \epsilon_i$	$\omega_5$	$\frac{1}{2} (3\epsilon_8 - 3\epsilon_7 + 2 \sum_{i=4}^6 \epsilon_i)$
$\Omega_6$	$3\epsilon_8 + \sum_{i=5}^7 \epsilon_i$	$\omega_6$	$\epsilon_8 - \epsilon_7 + \epsilon_6 + \epsilon_5$
$\Omega_7$	$2\epsilon_8 + \epsilon_7 + \epsilon_6$	$\omega_7$	$\frac{1}{2} (\epsilon_8 - \epsilon_7 + 2\epsilon_6)$
$\Omega_8$	$\epsilon_8 + \epsilon_7$	$\omega_{K_2}$	$\frac{1}{2} (\epsilon_8 + \epsilon_7)$

Calculando los sumandos del paréntesis

$$\begin{aligned} \delta_{\bar{\lambda}_2} * y_{\Lambda_1}^{27} * y_{\Lambda_2}^{27} &= \delta_{\bar{\lambda}_2} * \sum_{n,m \geq 0} \binom{n+27-1}{27-1} \binom{m+27-1}{27-1} \delta_{(27/2+n)\Lambda_1} * \delta_{(27/2+m)\Lambda_2} \\ &= \sum_{n,m \geq 0} \binom{n+26}{26} \binom{m+26}{26} \delta_{(n+27/2)\Lambda_1 + (m+27/2)\Lambda_2 + q_u(\lambda_2)} \\ \delta_{\overline{S_\beta \lambda_2}} * y_{\Lambda_1}^{27} * y_{\Lambda_2}^{27} &= \sum_{n,m \geq 0} \binom{n+26}{26} \binom{m+26}{26} \delta_{S_\beta((n+27/2)\Lambda_1 + (m+27/2)\Lambda_2 + q_u(\lambda_2))} \end{aligned} \quad (7.32)$$

El factor  $F$  es la restricción de la representación del  $K_1 \simeq \mathfrak{e}_{-(24)}$ -módulo con carácter infinitesimal  $\lambda_1$ ,  $\pi_{\lambda_1}$ , a  $K_1 \cap L$  que es un toro de  $L$ , luego  $F$  es la descomposición de la representación de  $\mathfrak{e}_{-(24)}$  en espacios de peso, restringidos a  $K_1 \cap L$ .

Sea  $\nu \in (\mathfrak{t} \cap \mathfrak{k}_1)^*$  un peso de  $\pi_{\lambda_1}$  y sea  $M(\lambda_1, \nu) = \dim(V_{\lambda_1})_\nu$  la dimensión de su espacio de pesos. Extendemos  $\nu$  a  $\mathfrak{t}^*$  definiendo  $\nu|_{(\mathfrak{t} \cap \mathfrak{k}_1)^*} = 0$ . Por la fórmula de Duflo Vargas, la restricción de la serie discreta de  $G$ ,  $\pi_\lambda$ , a  $H$  se obtiene calculando:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n,m \geq 0 \\ \nu}} M(\lambda_1, \nu) \binom{n+8}{8} \binom{m+14}{14} \delta_{(n+27/2)\Lambda_1 + (m+27/2)\Lambda_2 + q_u(\lambda_2) + q_u(\nu)} \\ - \sum_{\substack{n,m \geq 0 \\ \nu}} M(\lambda_1, \nu) \binom{n+8}{8} \binom{m+14}{14} \delta_{S_\beta((n+27/2)\Lambda_1 + (m+27/2)\Lambda_2 + q_u(\lambda_2) + q_u(\nu))} \end{aligned} \quad (7.33)$$

Por tanto, si  $\mu$  es un parámetro de Harish-Chandra de  $H$  tal que  $m^H(\lambda, \mu) \neq 0$ , entonces  $\mu = (n + 27/2)\Lambda_1 + (m + 27/2)\Lambda_2 + q_u(\lambda_2) + q_u(\nu)$ , o bien  $\mu = -((n + 27/2)\Lambda_1 + (m + 27/2)\Lambda_2 + q_u(\lambda_2)) + q_u(\nu)$ . Tomemos  $\mu$  en una cámara asociada a un sistema de raíces positivo de  $\Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{u})$  compatible con  $\Phi^+(\mathfrak{l}, \mathfrak{u}) = \{q_u(e_8 + e_7)\}$ , es decir, tal que  $\mu(H_{e_8+e_7}) > 0$ . Si  $\nu$  es un peso de  $\pi_{\lambda_1}$ , es combinación convexa de los  $w(\lambda_1)$  con  $w \in W_{K_1}$ , como  $W_{K_1}$  está generado por raíces ortogonales a  $e_8 + e_7$  y  $\lambda_1$  es ortogonal a  $e_8 + e_7$ , entonces  $w(\lambda_1)$  es ortogonal a  $e_8 + e_7$  y por

tanto  $\nu$  también lo es. Luego, si  $\mu = (n + 27/2)\Lambda_1 + (m + 27/2)\Lambda_2 + q_u(\lambda_2) + q_u(\nu)$  entonces:

$$\begin{aligned}\mu(H_{e_8+e_7}) &= ((n + 27/2)\Lambda_1 + (m + 27/2)\Lambda_2 + \lambda_2 + q_u(\nu))(H_{e_8+e_7}) \\ &= (n + 27/2)\Lambda_1(H_{e_8+e_7}) + (m + 27/2)\Lambda_2(H_{e_8+e_7}) + q_u(\lambda_2)(H_{e_8+e_7}) + \nu(H_{e_8+e_7}) \\ &= n + m + 27 + 2c_1 + 3c_2 + 4c_3 + 6c_4 + 5c_5 + 4c_6 + 3c_7 + 2c_8 + \nu(H_{e_8+e_7}) \\ &= n + m + 27 + 2c_1 + 3c_2 + 4c_3 + 6c_4 + 5c_5 + 4c_6 + 3c_7 + 2c_8 > 0\end{aligned}$$

mientras que si  $\mu = -(n + 27/2)\Lambda_1 - (m + 27/2)\Lambda_2 - q_u(\lambda_2) + q_u(\nu)$

$$\begin{aligned}\mu(H_{e_8+e_7}) &= (-((n + 27/2)\Lambda_1 + (m + 27/2)\Lambda_2 + q_u(\lambda_2)) + q_u(\nu))(H_{e_8+e_7}) \\ &= (-((n + 27/2)\Lambda_1 + (m + 27/2)\Lambda_2 + q_u(\lambda_2))(H_{e_8+e_7}) \\ &= -(n + m + 27 + 2c_1 + 3c_2 + 4c_3 + 6c_4 + 5c_5 + 4c_6 + 3c_7 + 2c_8) < 0\end{aligned}$$

De este modo, los parámetros  $\mu$  son de la forma  $(n + 27/2)\Lambda_1 + (m + 27/2)\Lambda_2 + \lambda_2 + q_u(\nu)$ . Más aún, si se tiene otra expresión de  $\mu$ ,  $\mu = (r + 27/2)\Lambda_1 + (s + 27/2)\Lambda_2 + \lambda_2 + q_u(\eta)$ , entonces evaluando  $\mu(H_{e_8+e_7})$  en ambas expresiones y dado que  $\nu, \eta$  son ortogonales a  $e_8 + e_7$  se tiene que  $n + m = r + s$ . Similarmente,  $\mu(H_{e_7-e_6} + H_{e_6+e_8})$  lleva a que  $\nu(H_{e_7-e_6} + H_{e_6+e_8}) = \eta(H_{e_7-e_6} + H_{e_6+e_8})$ , como  $\{H_{e_8+e_7}, H_{e_7-e_6} + H_{e_6+e_8}\}$  es una base de  $\mathfrak{u}$  entonces  $q_u(\nu) = q_u(\eta)$ .

Además,  $n + 27/2 + \lambda(H_{e_7-e_6}) + \nu(H_{e_7-e_6}) = \mu(H_{e_7-e_6}) = r + 27/2 + \lambda(H_{e_7-e_6}) + \nu(H_{e_7-e_6})$ , luego  $n = r$  y también  $n + 27/2 + \lambda(H_{e_6+e_8}) + \nu(H_{e_6+e_8}) = \mu(H_{e_6+e_8}) = r + 27/2 + \lambda(H_{e_6+e_8}) + \nu(H_{e_6+e_8})$  implica  $m = s$ . Por tanto  $n, m$  son únicos y si  $\mu = (n + 27/2)\Lambda_1 + (m + 27/2)\Lambda_2 + q_u(\lambda_2) + q_u(\eta)$ . la multiplicidad de  $\tau_\mu$  en  $\pi_\lambda$  es igual a:

$$m^H(\lambda, \mu) = \sum_{\substack{\nu \\ q_u(\nu)=q_u(\eta)}} M(\lambda_1, \nu) \binom{n+26}{26} \binom{m+26}{26}$$

### 7.3. Multiplicidades de la restricción para el par $SU(2, p) \subseteq SU(2, q)$

Sean  $G = SU(2, q)$ ,  $H = SU(2, p)$ , entonces podemos ver  $H$  como un subgrupo de  $G$  del modo usual, por lo tanto, si  $\pi_\lambda^G$  es una representación de cuadrado integrable de  $G$  con parámetro de Harish-Chandra  $\lambda$  queremos analizar la restricción de  $\pi_\lambda^G$  al subgrupo  $H$ . Antes de entrar en detalles, enunciaremos la técnica empleada de un modo general.

Para  $\alpha \in \mathfrak{u}^*$  sea  $d_\alpha = \delta_{-\alpha/2} - \delta_{\alpha/2}$ , entonces

$$d_\alpha * y_\alpha = y_\alpha * d_\alpha = y_\alpha * \delta_{-\alpha/2} - y_\alpha * \delta_{\alpha/2} = \sum_{n \geq 0} \delta_{n\alpha} - \sum_{n \geq 0} \delta_{(n+1)\alpha} = \delta_0, \quad (7.34)$$

y también  $d_{-\alpha} * y_\alpha = -d_\alpha * y_\alpha = -\delta_0$ . Si  $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \subseteq \mathfrak{u}^*$  es un multiconjunto estricto de  $\mathfrak{h}$ , definimos  $d_S = d_{\alpha_1} * d_{\alpha_2} * \dots * d_{\alpha_k}$ , se sigue de (7.34) que  $d_S * y_S = \delta_0$ . Sea  $L \subseteq H$  es un subgrupo compacto del mismo rango de  $H$ , sea  $\mathfrak{u}$  una subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{l}$  por tanto también es subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{h}$ . Sea  $G$  un grupo de Lie que contiene a  $H$ , y  $\lambda$  un parámetro de Harish-Chandra de  $G$ ; y sea  $\pi_\lambda^G$  una serie discreta con parámetro de Harish-Chandra  $\lambda$ , para calcular la descomposición en  $H$  de  $\pi_\lambda^G$ , un teorema de Duflo y Vargas [DV10] relaciona las multiplicidades de la restricción a  $H$  con las de las multiplicidades la restricción a  $L$ .

**Teorema 7.3.1.** *Supongamos que  $\pi_\lambda^G$  tiene restricción admisible a  $H$ . Sea  $S_{\mathfrak{h}/\mathfrak{l}}$  un sistema positivo de  $\Phi(\mathfrak{h}/\mathfrak{l}, \mathfrak{u})$ . Entonces*

$$d_{S_{\mathfrak{h}/\mathfrak{l}}} * \sum_{\nu \in \mathfrak{u}^*} m^L(\lambda, \nu) \delta_\nu = \pm \sum_{\mu \in \mathfrak{u}^*} m^H(\lambda, \mu) \delta_\mu \quad (7.35)$$

Sean  $\tilde{H} \subseteq H$  grupos de Lie del mismo rango. Sean  $L, \tilde{L} := \tilde{H} \cap L$  subgrupos compactos maximales de  $H$  y  $\tilde{H}$  respectivamente, y supongamos que  $H, \tilde{H}$  tienen el mismo rango que  $L, \tilde{L}$  (en particular esto vale si  $H, \tilde{H}$  tienen representaciones de cuadrado integrable no nulas). Entonces  $\text{Rango}(L) = \text{Rango}(H) = \text{Rango}(\tilde{H}) = \text{Rango}(\tilde{L})$ .

**Proposición 7.3.2.** Si  $\tilde{H} \subseteq H$  son subgrupos de Lie del mismo rango de un grupo  $G$ . Sea  $\lambda$  un parámetro de Harish-Chandra de  $G$ , tal que  $\pi_\lambda^G$  tiene restricción admisible a  $\tilde{H}$  y a  $H$ , entonces

$$d_{S_{\mathfrak{h}/\tilde{\mathfrak{h}}}} * \sum_{\nu \in \mathfrak{u}^*} m^{\tilde{H}}(\lambda, \nu) \delta_\nu = \pm \sum_{\mu \in \mathfrak{u}^*} m^H(\lambda, \mu) \delta_\mu \quad (7.36)$$

*Demostración.* Primero, apliquemos el teorema 7.3.1 para el caso  $\tilde{L} \subseteq H$ , entonces

$$d_{S_{\mathfrak{h}/\tilde{\mathfrak{l}}}} * \sum_{\eta \in \mathfrak{u}^*} m^{\tilde{L}}(\lambda, \eta) \delta_\eta = \pm \sum_{\mu \in \mathfrak{u}^*} m^H(\lambda, \mu) \delta_\mu \quad (7.37)$$

Aplicando nuevamente el teorema esta vez al caso  $\tilde{L} \subseteq \tilde{H}$  se tiene que

$$d_{S_{\tilde{\mathfrak{h}}/\tilde{\mathfrak{l}}}} * \sum_{\eta \in \mathfrak{u}^*} m^{\tilde{L}}(\lambda, \eta) \delta_\eta = \pm \sum_{\nu \in \mathfrak{u}^*} m^{\tilde{H}}(\lambda, \nu) \delta_\nu \quad (7.38)$$

Entonces

$$\sum_{\eta \in \mathfrak{u}^*} m^{\tilde{L}}(\lambda, \eta) \delta_\eta = \pm \delta_{S_{\tilde{\mathfrak{h}}/\tilde{\mathfrak{l}}}} * \sum_{\nu \in \mathfrak{u}^*} m^{\tilde{H}}(\lambda, \nu) \delta_\nu \quad (7.39)$$

De modo que (7.37) y (7.39) concluyen

$$d_{S_{\mathfrak{h}/\tilde{\mathfrak{l}}}} * \delta_{S_{\tilde{\mathfrak{h}}/\tilde{\mathfrak{l}}}} * \sum_{\nu \in \mathfrak{u}^*} m^{\tilde{H}}(\lambda, \nu) \delta_\nu = \pm \sum_{\mu \in \mathfrak{u}^*} m^H(\lambda, \mu) \delta_\mu \quad (7.40)$$

El multiconjunto  $S_{\mathfrak{h}/\tilde{\mathfrak{l}}} = \{\alpha \in \Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{u}) \mid \alpha \notin \Phi(\tilde{\mathfrak{l}}, \mathfrak{u})\}$  se escribe como unión disjunta de  $S_{\tilde{\mathfrak{h}}/\tilde{\mathfrak{l}}} = \{\alpha \in \Phi(\tilde{\mathfrak{h}}, \mathfrak{u}) \mid \alpha \notin \Phi(\tilde{\mathfrak{l}}, \mathfrak{u})\}$  y  $S_{\mathfrak{h}/\tilde{\mathfrak{h}}} = \{\alpha \in \Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{u}) \mid \alpha \notin \Phi(\tilde{\mathfrak{h}}, \mathfrak{u})\}$ , y por tanto

$$d_{S_{\mathfrak{h}/\tilde{\mathfrak{l}}}} * \delta_{S_{\tilde{\mathfrak{h}}/\tilde{\mathfrak{l}}}} = d_{S_{\mathfrak{h}/\tilde{\mathfrak{h}}}} * d_{S_{\tilde{\mathfrak{h}}/\tilde{\mathfrak{l}}}} * \delta_{S_{\tilde{\mathfrak{h}}/\tilde{\mathfrak{l}}}} = d_{S_{\mathfrak{h}/\tilde{\mathfrak{h}}}} * \delta_0 = d_{S_{\mathfrak{h}/\tilde{\mathfrak{h}}}}$$

Esta igualdad y (7.40) demuestran la proposición  $\square$

Concentrándonos en el caso  $G = SU(2, q) := \{A \in SL(q+2, \mathbb{C}) \mid A^* I_{2,q} A = I_{2,q}\}$ , con  $I_{2,q}$  la matriz diagonal  $\text{diag}(1, 1, -1, -1, \dots, -1)$ . Sean  $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}), \Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}), \Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}), \Phi^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ , los conjuntos definidos en la sección 1. Identificamos el grupo  $SU(2, p)$ ,  $p < q$ , con un subgrupo  $H \subseteq G$  de manera usual; a saber  $H = \left\{ A \in G \mid A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & I_{q-p} \end{pmatrix} B \in SU(2, p) \right\}$ .

Sea  $\lambda \in \Phi^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$  un parámetro de Harish-Chandra de  $G$ , entonces la restricción de  $\pi_\lambda^G$  a  $H$  es admisible y se descompone en suma directa series discretas, cuyos parámetros de Harish-Chandra de  $H$  pertenecen a una única cámara de Weyl de  $H$ , que es compatible con la cámara de  $G$ . Más exactamente, sea  $K$  un subgrupo maximal compacto de  $G$ ; Sea  $\lambda \in i\mathfrak{t}^*$  un parámetro de Harish-Chandra de  $G$ , entonces  $K = K_1 \times K_2 \times Z$  y esta descomposición genera una descomposición

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{k}_2 + \mathfrak{t} \cap \mathfrak{k}_1 + \mathfrak{t} \cap \xi_K$$

donde cada sumando es una subálgebra toral maximal en el sumando de  $\mathfrak{k}$  que lo contiene. Por tanto,  $\lambda$  se escribe como  $\lambda = \lambda_2 + \lambda_1 + \lambda_Z$  con  $\lambda_2 \in (\mathfrak{t} \cap \mathfrak{k}_2)^*$ ,  $\lambda_1 \in (\mathfrak{t} \cap \mathfrak{k}_1)^*$ ,  $\lambda_Z \in (\mathfrak{t} \cap \xi_K)^*$  (como en la sección 1).

**Teorema 7.3.3.** *Sea  $(\pi_{\lambda_1 + \lambda_Z}^{K_1 \times Z}, V_{\lambda_1 + \lambda_Z})$  la representación irreducible de  $K_1 \times Z$  con carácter infinitesimal  $\lambda_1 + \lambda_Z$ . Sea  $\Delta(V_{\lambda_1 + \lambda_Z})$  el conjunto de pesos de la representación  $\pi_{\lambda_1 + \lambda_Z}^{K_1 \times Z}$ , para  $\nu \in \Delta$  sea  $\dim(V_{\lambda_1 + \lambda_Z})_{\nu_0}$  la dimensión del espacio de peso  $\nu$ . Entonces los parámetros de Harish-Chandra  $\mu$  de  $H$  tales que  $m^H(\lambda, \mu) \neq 0$  son de la forma  $\mu = \nu + n\Lambda_1 + m\Lambda_2 + \frac{q-p}{2}(\Lambda_1 + \Lambda_2) + q_u(\lambda_2)$  con  $n, m \in \mathbb{Z}$ ,  $\eta \in \Delta(V_{\lambda_1})$  y  $\pi_\mu^H$  ocurre con multiplicidad*

$$\sum_{\substack{\nu_0 \in \Delta(V_{\lambda_1 + \lambda_Z}) \\ q_u(\nu_0) = \nu}} \dim(V_{\lambda_1 + \lambda_Z})_{\nu_0} \binom{m+q-p-1}{q-p-1} \binom{n+q-p-1}{q-p-1}$$

Sea  $T \subseteq K$  un toro maximal de  $K$  y sea  $U = T \cap H$ , entonces  $Y$  es un toro maximal de  $L := H \cap K$ , consideremos el subgrupo  $\tilde{G}$  de  $G$  localmente isomorfo a  $SU(2, 1)$ , construido en la sección 1, y sea  $\tilde{H} = \tilde{G} + U$ . Un toro maximal de  $\tilde{G} \cap K$  tiene álgebra de Lie complexificada con base  $\{H_{\epsilon_1 - \delta_1}, H_{\delta_1 - \epsilon_2}\}$ , mientras que el álgebra de Lie complexificada de  $U$  tiene por base  $\{H_{\epsilon_1 - \delta_1}, H_{\delta_1 - \delta_2}, \dots, H_{\delta_p - \epsilon_2}\}$ ; puesto que  $H_{\delta_1 - \epsilon_2} = H_{\delta_1 - \delta_2} + H_{\delta_2 - \delta_3} \dots + H_{\delta_p - \epsilon_2}$ , entonces  $\text{Rango}(H) = \text{Rango}(\tilde{H})$ .

Las multiplicidades de la restricción de  $\pi_\lambda^G$  de  $G$  a  $\tilde{H}$  se calculan usando la fórmula de Duflo-Vargas:

$$\pm \sum_{\nu \in \mathfrak{u}^*} m^{\tilde{H}}(\lambda, \mu) \delta_\mu = \left( \sum_{w \in W_Z \backslash W_K} \epsilon(w) \varpi(w\lambda) \delta_{q_u(w\lambda)} * y_{S_w^{\tilde{H}}} \right)$$

En este caso,  $\Phi(\xi) = \{\pm(\delta_i - \delta_j)\}_{p < i < j \leq q}$ , en este caso la acción de  $W_Z$  sobre  $W_{K_2}$  es trivial; por tanto si  $W_{K_1}^Z$  es un conjunto de representantes de la acción a derecha de  $W_Z$  sobre  $W_{K_1}$ , un conjunto de representantes de la acción a derecha de  $W_Z$  sobre  $W_K$ , es de la forma  $W_K^Z = \{wS_\beta \mid w \in W_{K_1}^Z; \beta = \epsilon_1 - \epsilon_2\}$ . La elección del sistema de raíces positivo, da como conjunto de raíces no compactas positivas  $\Psi_n^+ = \{\epsilon_1 - \delta_i, \delta_i - \epsilon_2\}_{1 \leq i \leq q}$ ; para  $w \in W_{K_1}^Z$  entonces  $w\Phi_n^+ = \Phi_n^+$  y  $S_\beta w\Phi_n^+ = -\Phi_n^+$ . Sea  $\mathbf{S}_n = q_u(\Psi_n^+) \setminus \Phi(\mathfrak{h}', \mathfrak{u})$ .

Como  $\Phi(\tilde{\mathfrak{h}}, \mathfrak{u}) = \{\pm q_u(\epsilon_1 - \delta_1), \pm q_u(\delta_1 - \epsilon_2), \pm q_u(\epsilon_1 - \epsilon_2)\}$  y  $\Phi(\tilde{\mathfrak{l}}, \mathfrak{u}) = \{\pm q_u(\epsilon_1 - \epsilon_2)\}$ , entonces para  $w \in W_{K_1}^Z$ :

$$\begin{aligned} \Phi(\mathfrak{k}/\tilde{\mathfrak{l}}, \mathfrak{u}) &= \{\pm q_u(\delta_i - \delta_j)\}_{i \leq p < j}, \\ S_w^{\tilde{H}} &= \Phi(\mathfrak{k}/\tilde{\mathfrak{l}}, \mathfrak{u}) \cup \mathbf{S}_n = \{q_u(\delta_i - \delta_j), q_u(\epsilon_1 - \delta_j), q_u(\delta_j - \epsilon_2)\}_{2 \leq j; i \leq p; i < j} \end{aligned} \tag{7.41}$$

Así, podemos tomar como un sistema positivo de  $\Phi(\mathfrak{h}/\tilde{\mathfrak{h}}, \mathfrak{u})$  al conjunto

$$S_{\mathfrak{h}/\tilde{\mathfrak{h}}} = \{q_u(\delta_j - \epsilon_2), q_u(\epsilon_1 - \delta_j)\}_{2 \leq j \leq p}.$$

En consecuencia el lado izquierdo de (7.36) es igual a

$$d_{S_{\mathfrak{h}/\tilde{\mathfrak{h}}}} * \left( \sum_{w \in W_{K_1}^Z} \epsilon(w) \varpi(w(\lambda_1 + \lambda_Z)) \delta_{q_u(w(\lambda_1 + \lambda_Z))} * y_{\Phi^+(\mathfrak{k}/\tilde{\mathfrak{l}}, \mathfrak{u})} \right) * \left( \delta_{q_u(\lambda_2)} * y_{\mathbf{S}_n} - \delta_{q_u(S_\beta \lambda_2)} * y_{-\mathbf{S}_n} \right) \quad (7.42)$$

El conjunto  $\mathbf{S}_n$  es igual a la unión disjunta de  $S_{\mathfrak{h}/\tilde{\mathfrak{h}}}$  y  $\mathbf{S}_2 = \{q_u(\delta_j - \epsilon_2), q_u(\epsilon_1 - \delta_j)\}_{p < j \leq q}$ , entonces  $y_{\mathbf{S}_n} = y_{S_{\mathfrak{h}/\tilde{\mathfrak{h}}}} * y_{\mathbf{S}_2}$ . Así,

$$d_{S_{\mathfrak{h}/\tilde{\mathfrak{h}}}} * \left( \delta_{q_u(\lambda_2)} * y_{\mathbf{S}_n} - \delta_{q_u(S_\beta \lambda_2)} * y_{-\mathbf{S}_n} \right) = \delta_{q_u(\lambda_2)} * y_{\mathbf{S}_2} + \delta_{-q_u(\lambda_2)} * y_{-\mathbf{S}_2}. \quad (7.43)$$

Además, si  $j > p$ ,  $1 \leq i < p$ , entonces

$$\begin{aligned} q_u(\epsilon_1 - \delta_j)(H_{\delta_i - \delta_{i+1}}) &= q_u(\epsilon_1)(H_{\delta_i - \delta_{i+1}}) = 0; & q_u(\delta_j - \epsilon_2)(H_{\delta_i - \delta_{i+1}}) &= q_u(\epsilon_2)(H_{\delta_i - \delta_{i+1}}) = 0 \\ q_u(\epsilon_1 - \delta_j)(H_{\epsilon_1 - \delta_1}) &= q_u(\epsilon_1)(H_{\epsilon_1 - \delta_1}) = 1; & q_u(\delta_j - \epsilon_2)(H_{\epsilon_1 - \delta_1}) &= q_u(\epsilon_2)(H_{\epsilon_1 - \delta_1}) = 0 \\ q_u(\epsilon_1 - \delta_j)(H_{\delta_p - \epsilon_2}) &= q_u(\epsilon_1)(H_{\delta_p - \epsilon_2}) = 0; & q_u(\delta_j - \epsilon_2)(H_{\delta_p - \epsilon_2}) &= q_u(\epsilon_2)(H_{\delta_p - \epsilon_2}) = 1 \end{aligned}$$

Dado que  $\{H_{\epsilon_1 - \delta_1}, H_{\delta_1 - \delta_2}, \dots, H_{\delta_{p-1} - \delta_p}, H_{\delta_p - \epsilon_2}\}$  es una base de  $\mathfrak{u}$  entonces  $q_u(\epsilon_1 - \delta_j) = q_u(\epsilon_1)$ ;  $q_u(\delta_j - \epsilon_2) = q_u(-\epsilon_2)$  para todo  $i > p$ . Sean  $\Lambda_1 = q_u(\epsilon_1)$ ;  $\Lambda_2 = q_u(-\epsilon_2)$ , entonces  $\mathbf{S}_2 = \{\Lambda_1, \Lambda_2\}$  y cada elemento tiene multiplicidad  $q - p$ . Entonces (7.43) es igual a

$$\sum_{n, m \geq 0} \binom{m+q-p-1}{q-p-1} \binom{n+q-p-1}{q-p-1} \left( \delta_{q_u \lambda_2 + n \Lambda_1 + m \Lambda_2 + \frac{q-p}{2}(\Lambda_1 + \Lambda_2)} + \delta_{-q_u \lambda_2 - n \Lambda_1 - m \Lambda_2 - \frac{q-p}{2}(\Lambda_1 + \Lambda_2)} \right) \quad (7.44)$$

Para calcular la última sumatoria en (7.42), sea  $(\pi_{\lambda_1 + \lambda_Z}^{K_1 \times Z}, V_{\lambda_1 + \lambda_Z})$  la representación irreducible de  $K_1 \times Z$  con carácter infinitesimal  $\lambda_1 + \lambda_Z$ . El subgrupo  $(K_1 \times Z) \cap L$  tiene álgebra de Lie complejificada  $Lie_{\mathbb{C}}((K_1 \times Z) \cap L) =: \mathfrak{u}_1 = \bigoplus_{i=1}^{p-1} \mathbb{C} H_{\delta_i - \delta_{i+1}} \oplus \mathbb{C}(H_{\epsilon_1 - \delta_1} - H_{\delta_1 - \epsilon_2})$ , luego  $(K_1 \times Z) \cap L \subseteq U$  es un toro y además  $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_1 \oplus \mathbb{C} H_{\epsilon_1 - \epsilon_2}$ . En consecuencia, la restricción de  $\pi_{\lambda_1 + \lambda_Z}^{K_1 \times Z}$  al subgrupo  $(K_1 \times Z) \cap L$  es precisamente la descomposición en espacios de peso restringidos a la subálgebra abeliana  $\mathfrak{u}_1$ . Por la fórmula de Heckman:

$$\sum_{w \in W_{K_1}^Z} \epsilon(w) \varpi(w(\lambda_1 + \lambda_Z)) \delta_{q_{\mathfrak{u}_1}(w(\lambda_1 + \lambda_Z))} * y_{\Phi^+(\mathfrak{k}_1 \oplus \xi_{\mathfrak{k}}/\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_1)} = \sum_{\nu \in \mathfrak{u}_1^*} m^{(K_1 \times Z) \cap L}(\lambda_1 + \lambda_Z, \nu) \delta_{\nu} \quad (7.45)$$

Los elementos del conjunto  $\Phi^+(\mathfrak{k}_1 \oplus \xi_{\mathfrak{k}}/\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_1)$  son exactamente los elementos de  $\Phi^+(\mathfrak{k}/\tilde{\mathfrak{l}}, \mathfrak{u})$  restringidos a  $\mathfrak{u}_1$ . Más aún, dado que  $w(\lambda_1 + \lambda_Z)(H_{\epsilon_1 - \epsilon_2}) = 0$  para todo  $w \in W_{K_1}^Z$  y  $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_1 \oplus \mathbb{C} H_{\epsilon_1 - \epsilon_2}$ , los elementos  $\delta_{q_{\mathfrak{u}_1}(w(\lambda_1 + \lambda_Z))}$  son simplemente las restricciones a  $\mathfrak{u}_1$  de  $\delta_{q_u(w(\lambda_1 + \lambda_Z))}$ ; en virtud de lo cual la última sumatoria en (7.42) es igual en  $\mathfrak{u}_1$  al lado izquierdo de (7.45) y es cero en  $\mathbb{C} H_{\epsilon_1 - \epsilon_2}$ . Por tanto, si extendemos cada  $\nu \in \mathfrak{u}_1^*$  a  $\mathfrak{u}^*$  definiendo  $\nu(H_{\epsilon_1 - \epsilon_2}) = 0$ , el lado derecho de (7.45) es igual a la sumatoria en (7.42).

Sea  $\Delta(V_{\lambda_1+\lambda_Z})$  el conjunto de pesos de  $\pi_{\lambda_1+\lambda_Z}^{K_1 \times Z}$ . Los  $\nu \in \mathfrak{u}_1^*$  del lado derecho de (7.45) que satisfacen  $m^{(K_1 \times Z) \cap L}(\lambda_1 + \lambda_Z, \nu) \neq 0$  son de la forma  $\nu = q_{u_0}(\nu_0)$  para algún  $\nu_0 \in \Delta(V_{\lambda_1+\lambda_Z})$ , luego

$$m^{(K_1 \times Z) \cap L}(\lambda_1 + \lambda_Z, \nu) = \sum_{\substack{\nu_0 \in \Delta(V_{\lambda_1+\lambda_Z}) \\ q_{u_1}(\nu_0) = \nu}} \dim(V_{\lambda_1+\lambda_Z})_{\nu_0} \quad (7.46)$$

Las igualdades (7.46), (7.36), (7.43), (7.42) concluyen

$$\pm \sum_{\mu \in \mathfrak{u}^*} m^H(\lambda, \mu) \delta_\mu = \sum_{\nu \in \mathfrak{u}_1^*} \sum_{\substack{\nu_0 \in \Delta(V_{\lambda_1+\lambda_Z}) \\ q_{u_1}(\nu_0) = \nu}} \dim(V_{\lambda_1+\lambda_Z})_{\nu_0} \left( \delta_{q_u(\nu_0)} * \delta_{q_u(\lambda_2)} * y_{S_n} - \delta_{q_u(\nu_0)} * \delta_{q_u(S_\beta \lambda_2)} * y_{-S_n} \right) \quad (7.47)$$

Entonces por (7.47) y (7.44) los parámetros de Harish-Chandra,  $\mu$ , de  $H$  tales  $m^H(\lambda, \mu) \neq 0$  son de la forma  $\mu = \nu + n\Lambda_1 + m\Lambda_2 + \frac{q-p}{2}(\Lambda_1 + \Lambda_2) + q_u(\lambda_2)$ , o bien,  $\mu = \nu - n\Lambda_1 - m\Lambda_2 - \frac{q-p}{2}(\Lambda_1 + \Lambda_2) - q_u(\lambda_2)$ , con  $\nu \in \mathfrak{u}^*$  tal que existe  $\nu_0 \in \Delta(V_{\lambda_1+\lambda_Z})$  con  $q_u(\nu_0) = \nu$ ;  $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ .

Para  $\nu_0$  un peso de una representación irreducible, un teorema de Kostant asegura que  $\nu_0 = \sum_{w \in W_{K_1}} c_w w(\lambda_1 + \lambda_Z + \rho_{K_1})$ ; con  $\sum c_w = 1$ ,  $c_w \geq 0$ . ¿En qué cámara están la restricciones?. La condición de compatibilidad entre los sistemas de raíces positivos de  $K$  y  $L$  implica que  $q_u(\epsilon_1 - \epsilon_2)$  es una raíz positiva con respecto a la cámara determinada por  $\mu$ ; es decir,  $\mu(H_{\epsilon_1 - \epsilon_2}) \geq 0$ . Por lo tanto, si  $\mu = \nu - n\Lambda_1 - m\Lambda_2 - \frac{q-p}{2}(\Lambda_1 + \Lambda_2) - q_u(\lambda_2)$

$$\begin{aligned} & (\nu - n\Lambda_1 - m\Lambda_2 - \frac{q-p}{2}(\Lambda_1 + \Lambda_2) - q_u(\lambda_2))(H_{\epsilon_1 - \epsilon_2}) = \\ & \nu_0(H_{\epsilon_1 - \epsilon_2}) - n\Lambda_1(H_{\epsilon_1 - \epsilon_2}) - m\Lambda_2(H_{\epsilon_1 - \epsilon_2}) - \frac{q-p}{2}(\Lambda_1 + \Lambda_2)(H_{\epsilon_1 - \epsilon_2}) - \lambda_2(H_{\epsilon_1 - \epsilon_2}) = \\ & -n - m - (q-p) - \lambda_2(H_{\epsilon_1 - \epsilon_2}) = -n - m - (q-p) - (a_1 - a_2) < 0 \end{aligned}$$

La última igualdad se sigue de (7.2) en la sección 1. Esto concluye que los parámetros  $\mu$  que aparecen en la restricción son de la forma

$$\mu = \nu + n\Lambda_1 + m\Lambda_2 + \frac{q-p}{2}(\Lambda_1 + \Lambda_2) + q_u(\lambda_2)$$

Más aún, si también  $\mu = \eta + r\Lambda_1 + s\Lambda_2 + \frac{q-p}{2}(\Lambda_1 + \Lambda_2) + q_u(\lambda_2)$  para algún  $\eta = q_u(\eta_0)r$ ,  $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , donde  $\eta_0 \in \Delta(V_{\lambda_1+\lambda_Z})$ , entonces dado que  $(\lambda_1 + \lambda_Z - \rho_{K_1})(H_{\epsilon_1 - \epsilon_2}) = 0$  y  $W_{K_1}$  está generado por raíces ortogonales a  $\epsilon_1 - \epsilon_2$  se sigue que  $\eta_0(H_{\epsilon_1 - \epsilon_2}) = \nu_0(H_{\epsilon_1 - \epsilon_2}) = 0$ , pues  $\eta_0, \nu_0$  son combinaciones convexas de  $w(\lambda_1 + \lambda_Z - \rho_{K_1})$ ,  $w \in W_{K_1}$ . Por tanto evaluando  $\mu(H_{\epsilon_1 - \epsilon_2})$  se tiene que  $n + m + q - p + \lambda_2(H_{\epsilon_1 - \epsilon_2}) = r + s + q - p + \lambda_2(H_{\epsilon_1 - \epsilon_2})$ , luego  $n + m = r + s$ . Por otro lado, sea  $\tilde{H} = \sum_{i=1}^p H_{\epsilon_1 - \delta_i} + H_{\epsilon_2 - \delta_i} \in \mathfrak{u}$  así que  $\Lambda_1(\tilde{H}) = p$ ;  $\Lambda_2(\tilde{H}) = -p$  considerando  $\mu(H)$  en ambas expresiones se sigue que  $\eta_0(\tilde{H}) + pn - pm = \nu_0(\tilde{H}) + pr - ps$ ; dado que  $\tilde{H}$  está en el centro de  $\mathfrak{l}$ ,  $w(\lambda_1 + \lambda_Z - \rho_{K_1})(\tilde{H}) = (\lambda_1 + \lambda_Z - \rho_{K_1})(\tilde{H})$  para todo  $w \in W_{K_1}$ ; como  $\nu_0, \eta_0$  con combinaciones convexas de estos elementos, se sigue que  $\nu_0(\tilde{H}) = \eta_0(\tilde{H})$ , luego  $pn - pm = pr - ps$ , y como  $m + n = r + s$  se sigue que  $n = r$ ;  $m = s$  y por tanto  $q_u(\nu_0) = q_u(\eta_0)$ . Entonces por (7.47), y (7.44) la multiplicidad de  $\mu$  es

$$\sum_{\substack{\nu_0 \in \Delta(V_{\lambda_1+\lambda_Z}) \\ q_{u_1}(\nu_0) = \nu}} \dim(V_{\lambda_1+\lambda_Z})_{\nu_0} \binom{m+q-p-1}{q-p-1} \binom{n+q-p-1}{q-p-1}$$

Más aún, para  $1 \leq i \leq p$  se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle \nu + q_{\mathbf{u}}(\lambda_2), \epsilon_1 - \delta_i \rangle &= \sum_{w \in W_{K_1}} c_w \langle w(\lambda_1 + \lambda_Z - \rho_{K_1}) + q_{\mathbf{u}}(\lambda_2), \epsilon_1 - \delta_i \rangle \\
&= \sum_{w \in W_{K_1}} c_w \langle q_{\mathbf{u}}(\lambda) - \rho_{K_1}, w^{-1}(\epsilon_1 - \delta_i) \rangle \\
&= \sum_{w \in W_{K_1}} c_w \left( a_1 - b_{w^{-1}(i)} + \frac{q+1-2w^{-1}(i)}{2} \right) \\
&\geq \sum_{w \in W_{K_1}} c_w \left( w^{-1}(i) + \frac{q+1-2w^{-1}(i)}{2} \right) = \sum_{w \in W_{K_1}} c_w \frac{q+1}{2} = \frac{q+1}{2} > 0
\end{aligned}$$

y similarmente

$$\begin{aligned}
\langle \nu + q_{\mathbf{u}}(\lambda_2), \delta_i - \epsilon_2 \rangle &= \sum_{w \in W_{K_1}} c_w \langle w(\lambda_1 + \lambda_Z - \rho_{K_1}) + q_{\mathbf{u}}(\lambda_2), \delta_i - \epsilon_2 \rangle \\
&= \sum_{w \in W_{K_1}} c_w \langle q_{\mathbf{u}}(\lambda) - \rho_{K_1}, w^{-1}(\delta_i - \epsilon_2) \rangle \\
&= \sum_{w \in W_{K_1}} c_w \left( -a_2 + b_{w^{-1}(i)} - \frac{q+1-2w^{-1}(i)}{2} \right) \\
&\geq \sum_{w \in W_{K_1}} c_w \left( q - w^{-1}(i) + 1 - \frac{q+1-2w^{-1}(i)}{2} \right) = \sum_{w \in W_{K_1}} c_w \frac{q+1}{2} = \frac{q+1}{2} > 0
\end{aligned}$$

entonces  $\langle \mu, \epsilon_1 - \delta_i \rangle > \frac{q+1}{2} + n + \frac{q-p}{2} > 0$ ;  $\langle \mu, \delta_i - \epsilon_2 \rangle > \frac{q+1}{2} + m + \frac{q-p}{2} > 0$ .

Si  $\mu$  es un parámetro de Harish-Chandra con  $m(\lambda, \mu) \neq 0$ , sea  $\Phi_{\mu} = \{\alpha \in \Phi(\mathfrak{h}, \mathbf{u}) \mid \langle \alpha, \mu \rangle > 0\}$  el sistema de raíces positivo de  $\Phi(\mathfrak{h}, \mathbf{u})$  determinado por  $\mu$ . Por lo anterior, las raíces no compactas positivas de  $\Phi(\mathfrak{h}, \mathbf{u})$  son  $\{\epsilon_1 - \delta_i, \delta_i - \epsilon_2\}$ , y para algún  $w \in W_{K_p}$ ,  $\Phi_{w\mu} \cap \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) = \{\epsilon_1 - \delta_i, \delta_i - \delta_j, \delta_i - \epsilon_2\}_{1 \leq i < j \leq p}$ , por un teorema de Harish-Chandra  $\pi_{\mu}$  y  $\pi_{w\mu}$  son unitariamente equivalentes.





## Capítulo 8

# Relación entre la fórmula de Duflo - Vargas y la fórmula de Gross - Wallach

Sea  $G$  un grupo de Lie conexo, simplemente conexo, sea  $K \subseteq G$  subgrupo compacto maximal, y  $T$  un toro maximal de  $K$  tal que el álgebra de Lie de  $T$  complexificada  $\mathfrak{t}$  es una subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g} := \text{Lie}(G) \otimes \mathbb{C}$ . Sea  $\sigma$  una involución de  $G$  y  $H$  la componente conexa del conjunto de puntos fijos de  $\sigma$ ;  $H = (G^\sigma)_o = (\{x \in G \mid \sigma(x) = x\})_o$ ; en este caso el par  $(G, H)$  se dice un par simétrico y  $H$  se dice un subgrupo simétrico de  $G$ . Sea  $\theta$  la involución de Cartan de  $G$  relativa a  $K$ ; esto es,  $K$  es el conjunto de puntos fijos de  $\theta$ , entonces el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  se descompone como  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ . Supondremos que  $\theta$  y  $\sigma$  conmutan. Entonces  $H$  tiene subgrupo compacto maximal  $K \cap H$  y  $T \cap H$  es un toro maximal de  $K \cap H$ , más aún,  $\text{Rango}(K \cap H) = \text{Rango}(H)$ , luego  $(\mathfrak{t}_0 \cap \mathfrak{h}_0) \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}$  es una subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{h}$ .

Dado un parámetro de Harish-Chandra  $\lambda$  de  $G$ , consideremos  $\Phi_\lambda^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$  el sistema de raíces positivo para el cual  $\lambda$  es dominante, y tomemos  $\beta$  la raíz máxima relativa a este sistema. Entonces  $\beta$  se escribe como combinación entera positiva de las raíces simples  $\Pi$ ,  $\beta = \sum_{\alpha \in \Pi} m_\alpha \alpha$ . Sea  $\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$  las raíces de  $\mathfrak{k}$ , elegimos el sistema positivo  $\Phi^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) = \Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) \cap \Phi_\lambda^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ . Sea  $\Psi_n = \Phi_\lambda^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) \setminus \Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$  las raíces no compactas positivas, y sea  $\Pi_n = \Pi \cap \Psi_n$  las raíces simples no compactas. La representación asociada a  $\lambda$ ,  $\pi_\lambda$ , se dice pequeña (en el sentido de Gross-Wallach) si  $M(\lambda) = \sum_{\alpha \in \Pi_n} m_\alpha \leq 2$ , en este caso, existen a lo más dos raíces simples no compactas.

- Si  $M(\lambda) = 0$  entonces  $G = K$  es compacto.
- Si  $M(\lambda) = 1$ , entonces  $G/K$  tiene estructura hermitiana. Sea  $\mathfrak{k}_1$  la subálgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  generada por las raíces simples compactas, y sea  $\mathfrak{c}$ , el centro de  $\mathfrak{k}$ , entonces  $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{c}$ .
- Si  $M(\lambda) = 2$ , entonces  $\beta$  es compacta. Si tomamos el diagrama de Vogan de  $G$ , respecto a nuestro sistema de raíces simples elegido, y lo extendemos agregándole un vértice correspondiente a la raíz  $-\beta$ , y el número de aristas según la construcción clásica, es decir, un vértice  $\alpha$  del diagrama de Vogan está conectado al vértice  $-\beta$  por  $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle \langle \beta, \alpha^\vee \rangle$  aristas. Entonces el nuevo diagrama tiene a lo más dos vértices coloreados y a lo más componentes

conexas de raíces no coloreadas.  $\Delta_c$  el subdiagrama consistente de las raíces simples compactas. Sea  $\Delta^1$  la componente conexa de  $\Delta_c$  que contiene a  $-\beta$ , y sea  $\Delta^2$  el complemento de  $\Delta^1$  en  $\Delta_c$ . Para  $i = 1, 2$  sean  $\mathfrak{k}_i$  las subálgebras de  $\mathfrak{k}$ , generadas por las raíces  $\Delta^i$ . Entonces  $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{c}$  [GW00], [ØW10]. Sea  $K_1$  el subgrupo de  $K$  conexo, simplemente conexo, con álgebra de lie  $\mathfrak{k}_1$ .

Supongamos que  $M(\lambda) = 2$ . La fórmula de Gross-Wallach, calcula la descomposición de una representación pequeña,  $\pi_\lambda$ , de  $G$  a un subgrupo simétrico  $H$  que contiene a  $K_1$ , pasando a su análogo algebraico, esto es, calcula la descomposición del  $(\mathfrak{g}, K)$ -módulo asociado a la representación  $(\pi_\lambda, G)$  en  $(\mathfrak{h}, K \cap H)$ -módulos. Para enunciar dicha fórmula fijemos notación. Supongamos  $\lambda$  un parámetro de Harish-Chandra de  $G$  con sistema de raíces positivo  $\Phi_\lambda$  tal que  $M(\lambda) = 2$ . Sea  $s_K$  el único elemento del grupo de Weyl,  $W_K$ , de  $K$  de longitud máxima, por tanto  $s_K \Phi^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) = -\Phi^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ . Entonces si  $P := -s_K \Phi_\lambda$  se obtiene un sistema de raíces positivo tal que  $P \cap \Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) = \Phi^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ . Sea  $\mathfrak{b}$  el subgrupo de Borel definido por  $P$ . Sea  $h_1 = -\sum_{\alpha \in \Pi_n} s_K(H_\alpha)$  (esta suma tiene a lo más dos elementos no nulos), y tomemos la subálgebra parabólica de  $\mathfrak{q}$  generada por  $h_1$ :

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha(h_1) \geq 0} \mathfrak{q}_\alpha = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$$

donde  $\mathfrak{l}$  es el factor de Levi de  $\mathfrak{q}$  y  $\mathfrak{u}$  el radical nilpotente. Sea  $L$  el subgrupo conexo de  $K$  cuya álgebra de Lie complexificada es  $\mathfrak{l}$ , obsérvese que el conjunto  $\Phi^+(\mathfrak{l}, \mathfrak{t}) := \{\alpha \in \Phi^+(\mathfrak{l}, \mathfrak{t}) \mid \alpha(h_1) = 0\}$  es un sistema de raíces positivo de  $L$ . Como es usual, sean  $\rho_L, \rho_K$  la semisuma de las raíces en  $\Phi^+(\mathfrak{l}, \mathfrak{t})$  y  $\Phi^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$  respectivamente; para el parámetro de Harish-Chandra  $\lambda$ , definimos  $\Lambda = s_L s_K(\lambda + \rho_G) - 2\rho_L$ . Entonces  $\Lambda$  es un peso entero dominante respecto al sistema  $\Phi^+(\mathfrak{l}, \mathfrak{t})$ , y podemos considerar el  $L$ -módulo irreducible  $F^\Lambda$  con peso máximo  $\Lambda$ .

Sea  $H$  un subgrupo simétrico de  $G$  que contiene a  $K_1$ , y  $\mathfrak{h}$  su álgebra de Lie complexificada entonces  $\mathfrak{q}_H := \mathfrak{q} \cap \mathfrak{h}$  es una subálgebra parabólica de  $\mathfrak{h}$ . Tomemos  $\mathfrak{b}_H = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{h}$  entonces, salvo conjugación por  $K \cap H$ ,  $\mathfrak{b}_H$  es la única subálgebra de Borel  $\theta$  estable en  $\mathfrak{q}_H$ . Tal elección de  $\mathfrak{b}_H$  determina un sistema positivo de  $\Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{t})$ ,  $P_H$ . Sea  $s_{H \cap K}$  el elemento de longitud máxima del grupo de Weyl de  $K \cap H$  correspondiente a la elección de la subálgebra de Borel  $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{b}_H$  y tomemos el sistema de raíces positivo de  $\mathfrak{h}$ ,  $\Phi^+(\mathfrak{h}, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{t}) := -s_{K \cap H} P_H$ . Sea  $\tilde{K}$  el subgrupo compacto dual de  $H$  correspondiente a la elección de subgrupo compacto maximal  $K \cap H$ .

**Teorema 8.0.4** (Gross-Wallach). *Sea  $D_\lambda$  el  $(\mathfrak{g}, K)$  módulo de la serie discreta con parámetro de Harish-Chandra  $\lambda$ , de  $G$ , y sea  $D_\mu^H$  el  $(\mathfrak{h}, H \cap K)$ -módulo con parámetro de Harish-Chandra  $\mu$ , de  $H$  en la cámara determinada por  $P_H$ . Sea  $\rho_{\tilde{K}}$  la semisuma de las raíces en  $P_H$  Entonces*

$$D_\lambda = \bigoplus_{\nu \in \mathfrak{h}^*} m^H(\lambda, \mu) D_\mu^H$$

Más aún, si  $F^\Lambda|_L = \bigoplus F^{\Lambda_i}$  es la restricción de  $F^\Lambda$  en  $L \cap H$ -submódulos irreducibles entonces la multiplicidad es igual a

$$m^H(\lambda, \mu) = (-1)^{\frac{1}{2} \dim(H/L \cap H)} \sum_i \sum_{w \in W_{\tilde{K}}} e(w) p_{\mathfrak{u}/(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{h})}(\Lambda_i + \rho_{\tilde{K}} + w s_{H \cap K}(\mu))$$

donde  $p_{\mathfrak{u}/(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{h})}$  es la función partición del conjunto

$$\Phi(\mathfrak{u}/(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{h}), \mathfrak{t} \cap \mathfrak{u}) = q_{\mathfrak{u} \cap \mathfrak{t}}(\{\alpha \in \Phi(\mathfrak{u}, \mathfrak{t}) \mid q_{\mathfrak{u} \cap \mathfrak{t}}(\alpha) \neq 0\}) \setminus \Phi((\mathfrak{u} \cap \mathfrak{h}), (\mathfrak{u} \cap \mathfrak{t}))$$

Para analizar la relación entre esta fórmula y la fórmula de Duflo y Vargas, en lugar de tomar el parámetro de Harish-Chandra  $\lambda$  consideramos  $s_K \lambda$ . Por un teorema de Harish-Chandra si  $\pi_\lambda, \pi_{s_K \lambda}$  son las series discretas de  $G$  con parámetros de Harish-Chandra asociados  $\lambda, s_K \lambda$  respectivamente, entonces  $\pi_\lambda, \pi_{s_K \lambda}$  son unitariamente equivalentes. Por tanto analizar la descomposición de  $\pi_\lambda$  es exactamente analizar la descomposición de  $\pi_{s_K \lambda}$ . La ventaja de analizar la segunda representación con respecto a la primera, es que el sistema de raíces positivo  $\Phi_{s_K \lambda}$  determinado por  $s_K \lambda$  es precisamente  $-P$  dado en él desarrollo de Gross-Wallach.

Para  $i = 1, 2$  sean  $\mathfrak{u}_i := \bigoplus_{\alpha(h_1)=i} \mathfrak{g}_\alpha$ ;  $\Phi(\mathfrak{u}_i, \mathfrak{t}) := \{\alpha \mid \alpha(h_1) = i\}$ . Obsérvese que  $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_1 \oplus \mathfrak{u}_2$  y  $\mathfrak{u}_2 \subseteq \mathfrak{k}_1$ ; además, las raíces no compactas positivas respecto a  $\Phi_{s_K \lambda}$  son  $-\Phi(\mathfrak{u}_1, \mathfrak{t})$ , mientras que las raíces compactas positivas son  $-(\Phi^+(\mathfrak{l}, \mathfrak{t}) \cup \Phi(\mathfrak{u}_2, \mathfrak{t}))$ , las raíces simples de  $\Phi_{s_K \lambda}$  están en  $\Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{t}) \cup \Phi(\mathfrak{u}_1, \mathfrak{t})$

Sea  $w' \in W_L$  de longitud  $l$ , entonces  $w'$  permuta las raíces positivas, excepto  $l$  raíces positivas de  $\Phi^+(\mathfrak{l}, \mathfrak{t})$  cuyas imágenes por  $w'$  son raíces negativas. Visto como un elemento de  $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ ,  $w'$  tiene la misma longitud  $l$ , esto es,  $w'$  permuta todas excepto  $l$  raíces positivas de  $\Phi_{s_K \lambda}$ , las cuales son precisamente raíces de  $\Phi^+(\mathfrak{l}, \mathfrak{t})$ . Por tanto la imagen por  $w'$  de una raíz no compacta positiva es una raíz positiva; más aún,  $w'$  es generado por raíces compactas, luego la imagen por  $w'$  de una raíz no compacta es una raíz no compacta. Por lo tanto, si  $w' \in W_L$ ,  $w' \mathfrak{u}_1 = \mathfrak{u}_1$ .

Sea  $W^L := \{w_0 \in W_K \mid l(w_0 w') > l(w_0) \text{ para todo } w' \in W_L\}$ . Todo elemento de  $w \in W_K$  se puede escribir de forma única como  $w = w' w_0$  con  $w' \in W_L$  y  $w_0 \in W^L$ . Luego si  $w = w' w_0$  con  $S_{w_0}^H = S_{w_0^{-1}}^H$ . A nivel de álgebras complejas se tiene

$$\begin{aligned} \mathfrak{k} &= \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{k}_2 \oplus \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{l} &= \mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{k}_2 \oplus \mathfrak{c}_1 \\ \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h} &= \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{c}_2 & \mathfrak{l} \cap \mathfrak{h} &= \mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{c}_2 \\ \Phi(\mathfrak{k}/\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}) &= \Phi(\mathfrak{l}/\mathfrak{l} \cap \mathfrak{h}) = \Phi(\mathfrak{k}_2/\mathfrak{m}_2) & W_L &= W_{L_1} \times W_{K_2} \\ W_K &= W_L \times W^L = W_{K_1} \times W_{K_2} & W_{K \cap H} &= W_{K_1} \times W_{M_2} \end{aligned}$$

Por hipótesis  $H$  contiene a  $K_1$ , por lo cual, si  $q_{\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}}$  denota la restricción de  $\mathfrak{t}^*$  a  $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}^*$ , la descomposición de  $K = K_1 \times K_2 \times Z_k$  genera una descomposición a nivel de subálgebras  $\mathfrak{t} = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{t} \cap \mathfrak{k}_2 \oplus \mathfrak{t} \cap \mathfrak{c}$  donde cada sumando es una subálgebra toral maximal en el sumando de  $\mathfrak{k}$  que lo contiene, por tanto todo  $\eta \in \mathfrak{t}^*$  se escribe como  $\eta = \eta_1 + \eta_2 + \eta_c$  con cada  $\eta_i \in (\mathfrak{t} \cap \mathfrak{k}_i)^*$ ,  $\eta_c \in (\mathfrak{t} \cap \mathfrak{k}_c)^*$ . Así, pasando a la subálgebra se tiene la descomposición  $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{t} \cap \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{t} \cap \mathfrak{c}$  por lo cual la restricción  $q_{\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}}$  sobre el primer sumando es la identidad.

Sea  $w_0 \in W^L$ , dado que  $W_{K_2} \subseteq W_L$ , actúa trivialmente sobre el segundo y tercer sumando, por tanto

$$q_{\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}}(w_0(\eta_1 + \eta_2 + \eta_c)) = q_{\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}}(w_0(\eta_1) + \eta_2 + \eta_c) = w_0(\eta_1) + q_{\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}}(\eta_2 + \eta_c) = w_0 q_{\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}}(\eta_1 + \eta_2 + \eta_c)$$

Dado que  $\Phi(\mathfrak{h}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}, \mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}) = \Phi((\mathfrak{u}_1 \oplus \bar{\mathfrak{u}}_1) \cap \mathfrak{h}, \mathfrak{t} \cap \mathfrak{h})$ , y si tomamos  $\Delta(\mathfrak{k}/\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h})$  un sistema positivo de  $\Phi(\mathfrak{k}/\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}, \mathfrak{t} \cap \mathfrak{h})$ , como  $q_{\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}}(w_0(\eta)) = w_0 q_{\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}}(\eta)$ , para todo  $w_0 \in W^L$  se tiene entonces

que

$$\begin{aligned}
S_{w_0^{-1}}^H &= \Delta(\mathfrak{k}/\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}) \cup q_{\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}}(-w_0^{-1}\Phi(\mathbf{u}_1, \mathfrak{t})) \setminus \Phi((\mathbf{u}_1 \oplus \bar{\mathbf{u}}_1) \cap \mathfrak{h}, \mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}) \\
&= \Delta(\mathfrak{k}/\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}) \cup w_0^{-1}(-q_{\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}}\Phi(\mathbf{u}_1, \mathfrak{t})) \setminus \Phi((\mathbf{u}_1 \oplus \bar{\mathbf{u}}_1) \cap \mathfrak{h}, \mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}) \\
&= \Delta(\mathfrak{k}/\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}) \cup w_0^{-1}(-\Phi(\mathbf{u}_1/\mathbf{u}_1 \cap \mathfrak{h}))
\end{aligned}$$

Aplicando la fórmula de Duflo Vargas para el análisis de la restricción de la serie discreta de  $G$  con parámetro de Harish-Chandra  $s_K \lambda$  al subgrupo  $H$  se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu \in i(\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h})^*} m^H(s_K \lambda, \mu) \delta_\mu &= \sum_{w \in W_K} \epsilon(w) \delta_{q_{\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}}(ws_K \lambda)} * y_{S_w^H} \\
&= \sum_{w \in W_K} \epsilon(w^{-1}) \delta_{q_{\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}}(w^{-1}s_K \lambda)} * y_{S_{w^{-1}}^H} \\
&= \sum_{\substack{w_0 \in W^L \\ w' \in W^L}} \epsilon(w_0) \epsilon(w') \delta_{q_{\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}}(w_0^{-1}(w')^{-1}s_K \lambda)} * y_{S_{w_0^{-1}}^H} \\
&= \sum_{w_0 \in W^L} \sum_{w' \in W^L} \epsilon(w_0) \epsilon(w') \delta_{w_0^{-1}q_{\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}}(w'^{-1}s_K \lambda)} * y_{-w_0^{-1}q_{\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}}(\Phi(\mathbf{u}_1/\mathbf{u}_1 \cap \mathfrak{h}))} * y_{\Delta(\mathfrak{k}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k})}
\end{aligned} \tag{8.1}$$

Dado que el segundo término de la convolución no depende de  $W_L$ , la última suma es igual a

$$\begin{aligned}
&\sum_{w_0 \in W^L} \epsilon(w_0) y_{-w_0^{-1}q_{\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}}(\Phi(\mathbf{u}_1/\mathbf{u}_1 \cap \mathfrak{h}))} \left( \sum_{w' \in W^L} \epsilon(w') \delta_{w_0^{-1}q_{\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}}(w'^{-1}s_K \lambda)} * y_{\Delta(\mathfrak{k}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k})} \right) \\
&= \sum_{w_0 \in W^L} \epsilon(w_0) y_{-w_0^{-1}q_{\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}}(\Phi(\mathbf{u}_1/\mathbf{u}_1 \cap \mathfrak{h}))} * \delta_{w_0^{-1}q_{\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}}(\rho_u)} * \left( \sum_{w' \in W^L} \epsilon(w') \delta_{w_0^{-1}q_{\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}}(w'^{-1}s_K \lambda - \rho_u)} * y_{\Delta(\mathfrak{k}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k})} \right)
\end{aligned} \tag{8.2}$$

Queremos calcular la sumatoria en paréntesis. Como  $\Delta(\mathfrak{k}/\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}) \subseteq \Phi(\mathfrak{k}_2/\mathfrak{m}_2)$ , y para todo  $w_0 \in W^L$  la acción sobre  $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{k}_2$  es trivial, entonces  $w_0 \Delta(\mathfrak{k}/\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}) = \Delta(\mathfrak{k}/\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h})$  y también  $w_0^{-1} \Delta(\mathfrak{k}/\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}) = \Delta(\mathfrak{k}/\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h})$ .

Antes de continuar, recordemos un hecho general sobre distribuciones. Dada una distribución  $S$  sobre  $\mathbb{R}^n$ , y un isomorfismo lineal  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , entonces  $F$  induce una aplicación  $F' : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ ; esta aplicación induce a su vez otra distribución sobre  $\mathbb{R}^n$  notada  $S \circ F$  del siguiente modo: si  $\phi \in D(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  es una función test,  $(S \circ F)(\phi) = S(F'(\phi)) = S(\phi \circ F)$ . Se verifica que, en efecto,  $S \circ F$  es una distribución sobre  $\mathbb{R}^n$ . Para nuestro caso, la distribución delta y  $(w : i\mathfrak{t}^* \rightarrow i\mathfrak{t}^*) \in W_K$ , por definición si  $\phi \in D(\mathfrak{t}^*) \subseteq \mathcal{C}^\infty$  es una función test y  $\eta \in i\mathfrak{t}^*$  entonces

$$\delta_{w\eta}(\phi) = \phi(w\eta) = (\phi \circ w)(\eta) = (\delta_\eta \circ w_0)(\phi) \tag{8.3}$$

Luego una suma de la forma  $\sum_i a_i \delta_{w_0^{-1}\eta_i}$  es igual a  $(\sum_i a_i \delta_{\eta_i}) \circ (w_0^{-1})$ . Además, por la linealidad de  $w$  se satisface  $(\delta_\eta * \delta_\tau) \circ w = \delta_{\eta+\tau} \circ w = \delta_{w(\eta+\tau)} = \delta_{w\eta} * \delta_{w\tau}$ .

Si  $\Lambda = s_L s_K(\lambda + \rho_G) - 2\rho_L$ , entonces la representación irreducible de  $L$  de peso máximo  $\Lambda$  tiene carácter infinitesimal

$$\begin{aligned} \Lambda + \rho_L &= s_L s_K(\lambda + \rho_G) - \rho_L = s_L(s_K(\lambda) + s_K(\rho_K) + s_K(\rho_n) - s_L(\rho_L)) = \\ &= s_L(s_K(\lambda) - \rho_K - \rho_{u_1} + \rho_L) = s_L(s_K(\lambda) - \rho_{u_2} - \rho_L - \rho_{u_1} + \rho_L) = s_L(s_K(\lambda) - \rho_u) \end{aligned} \quad (8.4)$$

Dado que  $\mathfrak{l}$  y  $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{h}$  son subálgebras de Levi de  $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{h}$  tienen subálgebras de Cartan  $\mathfrak{t}$  y  $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}$  respectivamente. Aplicando la fórmula D-V de la restricción de  $L$  a  $L \cap H$  de la representación con parámetro de Harish-Chandra  $\Lambda + \rho_L$

$$\begin{aligned} \sum_{\nu \in i(\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h})^*} m^{L \cap H}(\Lambda + \rho_L, \nu) \delta_\nu &= \sum_{w \in W_L} \epsilon(w) \delta_{q_{\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}}(w(\Lambda + \rho_L))} * y_{\Phi^+(\mathfrak{l}/\mathfrak{l} \cap \mathfrak{h})} \\ &= \sum_{w \in W_L} \epsilon(w) \delta_{q_{\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}}(w(s_L(s_K(\lambda) - \rho_u)))} * y_{\Delta(\mathfrak{k}/\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h})} \\ &= \sum_{w \in W_L} \epsilon(w) e(s_L) \delta_{q_{\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}}(w(s_K(\lambda) - \rho_u))} * y_{\Delta(\mathfrak{k}/\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h})} \end{aligned}$$

Entonces para todo  $w_0 \in W^L$

$$\begin{aligned} \sum_{\nu \in i(\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h})^*} m^{L \cap H}(\Lambda + \rho_L, \nu) \delta_\nu \circ (w_0^{-1}) &= \sum_{w \in W_L} \epsilon(w) e(s_L) \delta_{q_{\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}}(w(s_K(\lambda) - \rho_u))} * y_{\Delta(\mathfrak{k}/\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h})} \circ (w_0^{-1}) \\ &= \sum_{w \in W_L} \epsilon(w) e(s_L) \delta_{w_0^{-1} q_{\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}}(w(s_K(\lambda) - \rho_u))} * y_{w_0^{-1} \Delta(\mathfrak{k}/\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h})} \\ &= \sum_{w \in W_L} \epsilon(w) e(s_L) \delta_{w_0^{-1} q_{\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}}(w(s_K(\lambda) - \rho_u))} * y_{\Delta(\mathfrak{k}/\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h})} \end{aligned}$$

El término de la derecha es precisamente término de la sumatoria entre paréntesis de (8.2). Esto junto con (8.1), concluye:

$$\sum_{\mu \in i(\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h})^*} m^H(s_K \lambda, \mu) \delta_\mu = \sum_{\substack{w_0 \in W^L \\ \nu \in i(\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h})^*}} \epsilon(w_0) m^{L \cap H}(\Lambda + \rho_L, \nu) \delta_{w_0^{-1} \nu} * y_{-w_0^{-1} q_{\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}}(\Phi(u_1/u_1 \cap \mathfrak{h}))} * \delta_{w_0^{-1} q_{\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}}(\rho_u)}$$

por tanto si  $m^H(s_K \lambda, \mu) \neq 0$ , entonces para algún  $Q = \sum_{\alpha \in \Phi^+(u_1/u_1 \cap \mathfrak{h})} n_\alpha \alpha$  y algún carácter infinitesimal  $\nu$  tal que  $m^{L \cap H}(\Lambda + \rho_L, \nu) \neq 0$  de  $\mu$  es de la forma

$$\mu = -w_0^{-1}(Q + q_{\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}} \rho_{u_1} - \rho_{u_1 \cap \mathfrak{h}}) + w_0^{-1}(\nu) + w_0^{-1} q_{\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}} \rho_u$$

además,  $-q_{\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}} \rho_{u_1} + \rho_{u_1 \cap \mathfrak{h}} + q_{\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}} \rho_u = -q_{\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}} \rho_{u_1} + \rho_{u_1 \cap \mathfrak{h}} + q_{\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}} \rho_{u_1} + q_{\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}} \rho_{u_2} = \rho_{u_1 \cap \mathfrak{h}} + \rho_{u_2 \cap \mathfrak{h}} = \rho_{u \cap \mathfrak{h}}$  luego  $Q = w_0(-\mu) + \nu + \rho_{u \cap \mathfrak{h}}$ . Como  $m^{L \cap H}(\Lambda + \rho_L, \nu) \neq 0$ , la representación irreducible de  $L \cap H$  con carácter infinitesimal  $\nu$ ,  $(\sigma, F^{\Lambda_\nu})$ , ocurre en la representación irreducible de  $L$  con carácter infinitesimal  $\Lambda + \rho_L$ ,  $(\pi, F^\Lambda)$ . En términos de pesos máximos el peso máximo de  $\sigma$  es  $\Lambda_\nu = \nu - \rho_{L \cap H}$ , luego  $F^\Lambda = \oplus F^{\Lambda_\nu}$ , así que

$$Q = w_0(-\mu) + \Lambda_\nu + \rho_{L \cap H} + \rho_{u \cap \mathfrak{h}} = w_0(-\mu) + \Lambda_\nu + \rho_{\tilde{K}}. \quad (8.5)$$

Dado un  $\Lambda_\nu$  fijo, el número de expresiones  $Q$  para las cuales (8.5) se satisface es precisamente  $P_{\mathfrak{u}/(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{h})}(w_0(-\mu) + \Lambda_\nu + \rho_{\widehat{K}})$ , esto concluye que la multiplicidad es igual a:

$$m^H(s_K \lambda, \mu) = \pm \sum_{\nu} m^{L \cap H}(\Lambda + \rho_L, \nu) \sum_{w_0 \in W^L} \epsilon(w_0) P_{\mathfrak{u}/(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{h})}(w_0(-\mu) + \Lambda_\nu + \rho_{\widehat{K}})$$

Si  $\mu \in \Phi^+(\mathfrak{h}, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{t})$ , existe  $\mu_0$  dominante respecto a  $P_H$ , tal que  $\mu = -s_{K \cap H} \mu_0$ .

Obsérvese que  $W^L \subseteq W_{\widehat{K}}$ , esto concluye la suma de la multiplicidad en la fórmula de Gross-Wallach se puede simplificar a la suma sobre el conjunto  $W^L$ . Entonces

**Corolario 8.0.5.** *Si  $\mu_0 \in P_H$*

$$0 = \sum_{\nu \in i\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}^*} \sum_{w \in W_{\widehat{K}} \setminus W^L} \epsilon(w) m^{H \cap L}(\lambda, \mu) P_{\mathfrak{u}/(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{h})}(w_0(s_{H \cap K} \mu_0) + \Lambda_\nu + \rho_{\widehat{K}})$$

# Bibliografía

- [DV10] M. Duffo and J. Vargas, *Branching laws for square integrable representations*, Proc. Japan Acad. Sci. Serie A, Math. Sci. **86** (2010), no. 3, 49–54.
- [GL05] S. Gaussent and P. Littelmann, *LS-galleries, the path model, and MV-cycles*, Duke Math. J. **127** (2005), 35–88.
- [GL12] ———, *One-skeleton galleries, the path model and a generalization of Macdonald’s formula for Hall-Littlewood polynomials*, Int. Math. Res. Not. IMRN **12** (2012), no. 4, 2649–2707.
- [GW96] B. Gross and N. Wallach, *On quaternionic discrete series representations, and their continuations*, J. reine angew. Math **481** (1996), 73–123.
- [GW00] ———, *Restriction of small discrete series representations to symmetric subgroups*, Proc. Sympos. Pure Math. **68** (2000), 275–285, AMS.
- [HC56] Harish-Chandra, *Representations of semisimple Lie groups. V.*, Amer. J. Math. **78** (1956), 1–41.
- [Hec82] G. Heckman, *Projections of orbits and asymptotic behavior of multiplicities for compact connected Lie groups.*, Invent. Math. **67** (1982), no. 1, 333–356.
- [Hel78] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Pure and Appl. Math., Academic Press, 1978.
- [Hum80] J. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Springer, 1980.
- [JV79] H. Jakobsen and M. Vergne, *Restrictions and expansions of holomorphic representations*, J. Funct. Anal. (1979).
- [Kna86] A. Knapp, *Representation theory of semisimple groups: An overview based on examples*, Princeton Landmarks in Mathematics., Princeton University Press, 1986.
- [Kna02] ———, *Lie groups beyond an introduction*, Progress in Mathematics, vol. 140, Birkhäuser, 2002.
- [Kob98] T. Kobayashi, *Discrete decomposability of the restriction of  $a_q(\lambda)$  with respect to reductive subgroups*, Invent. Math. **131** (1998), 229–256.

- [Kob05] ———, *Restriction of unitary representations of real reductive groups*, Lie Theory, Unitary Representations and Compactifications of Symmetric Spaces (J. Anker and B. Orsted, eds.), Birkhäuser, 2005, pp. 139–202.
- [Lit94] P. Littelmann, *A Littlewood-Richardson rule for symmetrizable Kac-Moody algebras*, Invent. Math. **116** (1994), 329–346.
- [Lit95] ———, *Paths and root operators in representation theory*, Ann. of Math. **142** (1995), 499–525.
- [Lit97] ———, *Characters of representations and paths in  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$* , Proc. Symp. Pure Math. (1997), AMS.
- [Mar75] S. Martens, *The characters of the holomorphic discrete series*.
- [ØW10] B. Ørsted and J. Wolf, *Geometry of the Borel-de Siebenthal discrete series*, J. Lie Theory **20** (2010), 175–212.
- [Sch69] W. Schmid, *Die randwerte holomorpher funktionen auf hermitesch symmetrischen Räumen*, Invent. Math. **9** (1969), 61–80.
- [Sch75] ———, *Some properties of square integrable representations of semisimple Lie groups*, Ann. of Math. **102** (1975), 535–564.
- [Sch97] ———, *Discrete series*, Proc. of Symposia in Pure Math. **61** (1997), 83–113.
- [Wal88] N. Wallach, *Real reductive groups. I.*, Pure and Applied Mathematics, Academic Press, Inc., 1988.
- [Wal03] ———, *Generalized Whittaker vectors for holomorphic and quaternionic representations*, Comment. Math. Helv. **78** (2003), 266–307.