

Sobre el flujo de Ricci en variedades homogéneas

por Romina Melisa Arroyo

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía y Física como parte de los requerimientos para la obtención del grado de Doctor en Matemática de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Marzo de 2013

©FAMAF-UNC 2013

Director: Dr. Jorge Lauret

A mi sobrina Camila

Resumen

El flujo de Ricci es una muy conocida ecuación de evolución para una curva de métricas en una variedad Riemanniana dada. En el caso homogéneo, es equivalente de una manera natural y específica al flujo de corchetes, que es una ecuación diferencial ordinaria para una curva de álgebras de Lie. El objetivo de esta tesis es estudiar el flujo de Ricci en variedades Riemannianas homogéneas (i.e. cuando el grupo de isometrías actúa transitivamente en la variedad), utilizando como herramienta principal el flujo de corchetes. Hemos estudiado el flujo de Ricci en una clase particular de solvariedades: aquellas cuya álgebra de Lie posee un ideal abeliano de codimensión 1, el flujo de Ricci en variedades homogéneas simplemente conexas de dimensión 4 y los solitones de Ricci homogéneos en dimensiones bajas (una clase especial de métricas que tienen la particularidad de que su geometría no cambia a lo largo del flujo de Ricci).

Palabras claves: Flujo de Ricci, variedades homogéneas, solvariedades, solitones de Ricci.

2010 Mathematics subject Classification: 53C44, 53C30, 53C25, 22E25.

Abstract

The Ricci flow is a well-known evolution equation for a curve of Riemannian metrics on a given manifold. In the homogeneous case, it is equivalent in a natural and specific way to the bracket flow, that is an ordinary differential equation for a curve of Lie algebras. The objective of this thesis is to study the Ricci flow in homogeneous manifolds (i.e. its isometry group acts transitively on the manifold) by using the bracket flow as main tool. We have studied the Ricci flow for solvmanifolds whose Lie algebra has an abelian ideal of codimension one, the Ricci flow in simply connected homogeneous manifolds of dimension 4 and homogeneous Ricci solitons in low dimensions (a special kind of metrics in which its geometry does not change along the Ricci flow).

Key words: Ricci flow, homogeneous manifolds, solvmanifolds, Ricci solitons.

2010 Mathematics subject Classification: 53C44, 53C30, 53C25, 22E25.

Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar a mi director, Jorge Lauret, porque además de haber sido un excelente director, ha sido una excelente persona conmigo. Me ha enseñado, guiado y aconsejado durante todos estos años, pero sobre todas las cosas siempre me ha apoyado.

A Ramiro Lafuente con quien hemos tenido infinitas charlas acerca del flujo de Ricci. Porque gracias a las conversaciones con él he podido comprender muchos de los conceptos involucrados en esta tesis. Porque en estos últimos años se ha convertido en un gran amigo para mí, con quien comparto todo, no sólo mis días en la facultad, y de quien he recibido un apoyo incomparable.

A la FaMAF y al CIEM por haberme brindado el lugar de trabajo. En especial, me gustaría agradecerles a mi comisión asesora de doctorado, al tribunal de esta tesis, y a Nancy Moyano, quien siempre tuvo la mejor predisposición para conmigo. También me gustaría agradecerles a CONICET, SeCyT y FONCyT por el apoyo económico.

A mi familia, por haberme apoyado siempre en todas las decisiones de mi vida, porque soy la persona que soy gracias a todas las cosas que me han enseñado y a todo el amor que me han brindado. Por haberme acompañado y aconsejado en cada momento de mi carrera, porque sin ellos nada hubiese sido posible.

A mi madrina y a mi padrino porque siempre han estado a mi lado.

A mi novio, Eric Destefanis, por el amor y el apoyo incondicional que me ha brindado en este último tiempo. Por acompañarme en este camino con tanta alegría y dulzura, y por haber sido un pilar muy importante para mí.

A mi compañera y amiga, Julia Yael Plavnik, quien vivió conmigo segundo a segundo mi licenciatura y mi doctorado. Por haber estado siempre más que incondicionalmente alegrándose en los buenos momentos y llorando en los malos. Porque con su amor, su cariño y su ternura hizo que estos años sean más lindos para mí. También quisiera agradecerle a la familia Plavnik, quien me abrió con todo amor las puertas de su casa como si fuera la mía.

A Yamile Godoy, porque miro hacia atrás y recuerdo un montón de momentos compartidos desde los últimos años de la licenciatura. Porque ha sido una gran compañera de estudio y una gran amiga siempre. A Silvio Reggiani, quien completaba este grupo de estudio, de quien he aprendido muchísimo siempre y con quien he compartido muchísimo desde que nos conocimos.

A Roberto Miatello e Isabel Dotti, quienes hicieron que en la facultad me sintiera como en casa desde los primeros años de la licenciatura. Porque siempre que he tenido alguna inquietud he tocado las puertas de sus oficinas y me han aconsejado de la mejor manera. A María Laura Barberis por la predisposición para conmigo. Porque he tenido innumerable cantidad de consultas en alguna materia de posgrado. A Leandro Cagliero y a Jorge Vargas, quienes también han sido muy generosos

ayudándome para el examen de calificaciones. A Juan Pablo Rossetti e Inés Pacharoni, con quienes he tenido el gusto de trabajar como docente. Por la confianza que siento que depositaron siempre en mi y porque he aprendido mucho de ellos. Y en general a todos los profesores de esta facultad que siempre tienen la mejor predisposición con todos los alumnos.

A Vanesa Meinardi y Damián Knopoff, dos grandes amigos que me ha dado esta facultad, quienes han hecho que esta etapa haya sido más linda y divertida.

A mis compañeros y amigos del doctorado, en especial a los de la oficina, con quienes compartí más que mi doctorado y de quienes he aprendido muchísimo.

A mis amigas de la vida, Gabriela Pedraza y Belén García, quienes me acompañaron incondicionalmente siempre durante tantos años. A las familias Pedraza y García-Neyra porque hace muchísimos años que son como mi familia. En especial a Andrea y Alejandra García a quienes me une una hermosa amistad. También quiero agradecerle a Andrea Godoy, a quien conocí hace muy pocos años pero me ha acompañado siempre desde el primer día en que nos conocimos.

A las personas que me acompañaron en la facultad, en especial a Natalia Clementi, mis compañeros de la licenciatura, y a Emilio Lauret e Iván Angiono, dos personas a quienes les tengo un gran cariño.

Por último quiero agradecerles a todas las personas que me han acompañado y apoyado durante toda esta etapa y desde siempre.

Índice general

Resumen	III
Abstract	v
Agradecimientos	VII
Introducción	XI
1. Preliminares	1
1.1. Flujo de Ricci	1
1.2. El espacio de las variedades homogéneas	2
1.3. Curvatura de Ricci	5
1.4. Curvaturas Seccionales	6
1.5. Flujo de Ricci homogéneo	6
1.6. Flujos normalizados	8
1.7. Convergencia de variedades	9
1.8. Sistemas dinámicos y conjuntos límites	10
2. El flujo de Ricci en una clase de solvariedades	13
2.1. Flujo de corchetes en una clase de solvariedades	13
2.2. Puntos límites	21
2.3. Normalizando por la norma del corchete	23
2.4. Curvatura Negativa	26
3. El flujo de Ricci en variedades homogéneas simplemente conexas de dimensión 4	31
3.1. Flujo de Ricci	31
3.1.1. $6 \leq \dim(G) \leq 10$	32

3.1.2.	$\dim(G) = 5$	34
3.1.3.	$\dim(G) = 4$	41
3.2.	Flujo de Ricci normalizado	48
3.2.1.	$6 \leq \dim(G) \leq 10$	48
3.2.2.	$\dim(G) = 5$	48
3.2.3.	$\dim(G) = 4$	52
4.	Solitones de Ricci homogéneos en dimensiones bajas	57
4.1.	$\dim(G/K) = 3$	60
4.1.1.	$\dim \mathfrak{g} = 3$	60
4.1.2.	$\dim \mathfrak{g} = 4$	60
4.2.	$\dim(G/K) = 4$	61
4.2.1.	$\dim \mathfrak{g} = 4$	62
4.2.2.	$\dim \mathfrak{g} = 5$	63
4.3.	$\dim(G/K) = 5$	67
4.3.1.	$\dim \mathfrak{g} = 5$	67
4.3.2.	$\dim \mathfrak{g} = 6$	69
4.3.3.	$\dim \mathfrak{g} = 7$	73

Introducción

Uno de los resultados más importantes probados en la última década es la Conjetura de Geometrización de Thurston sobre la clasificación de variedades cerradas de dimensión 3, de la cual se deduce como corolario la Conjetura de Poincaré: toda variedad cerrada 3-dimensional y simplemente conexa es homeomorfa a la esfera. En la prueba de la misma, G. Perelman usa como herramienta principal la ecuación del flujo de Ricci (ver [P1], [P2] y [P3]): Dada (M, g) una variedad Riemanniana el flujo de Ricci es la siguiente ecuación de evolución para una curva de métricas Riemannianas

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t) = -2 \text{Rc}(g(t)), \quad g(0) = g,$$

donde $\text{Rc}(g(t))$ es el tensor de Ricci de la métrica $g(t)$. Esta ecuación diferencial en derivadas parciales fue introducida por primera vez por R. Hamilton en 1982 en [Hm], quien comenzó a abordar la conjetura mencionada anteriormente y desarrolló junto a otros matemáticos una teoría muy importante acerca de sus soluciones (ver [C] para más información). Un aporte conceptual muy interesante de toda esta maquinaria son los solitones de Ricci, una clase especial de métricas que tienen la particularidad de que su geometría no cambia a lo largo del flujo.

En los últimos años, el flujo de Ricci ha demostrado ser una herramienta muy importante. Se han obtenido resultados de gran peso, no sólo en geometría Riemanniana n -dimensional, sino también en Topología y Geometría diferencial y debido a esto se ha convertido en un tema de investigación en sí mismo.

El objetivo de esta tesis es estudiar el flujo de Ricci en variedades Riemannianas homogéneas (i.e. cuando el grupo de isometrías actúa transitivamente en la variedad). En este caso, todos los puntos lucen de la misma manera y entonces el flujo de Ricci se reduce a una ecuación diferencial ordinaria. Si bien la dificultad de nuestro estudio se reduce bastante, estudiar una ecuación diferencial ordinaria puede ser muy difícil y mucho más aun puede llegar a serlo querer resolverla. Por esto, a lo largo de este trabajo, el objetivo no será resolver explícitamente las ecuaciones, sino estudiar el comportamiento cualitativo de las mismas. Nuestra herramienta principal, introducida por J. Lauret en [L4], es una ecuación diferencial para una curva de álgebras de Lie llamada flujo de corchetes, la cual es equivalente en un sentido natural y específico al flujo de Ricci y cuyo estudio cualitativo en la curvatura y cualquier invariante Riemanniano es el mismo. Más precisamente, si (M, g) es una variedad Riemanniana homogénea y simplemente conexa, por Teorema 1.5.3, la solución del flujo de Ricci está dada por $g(t) = \varphi(t)^*g_{\mu(t)}$, donde $\mu(t)$ es una familia de corchetes de Lie que resuelven una ecuación diferencial ordinaria llamada flujo de corchetes y $\varphi(t)$ es una familia monoparamétrica de difeomorfismos.

Después de algunos preliminares en el Capítulo 1, en donde daremos algunas definiciones básicas y enunciaremos algunos resultados acerca del flujo de Ricci y del flujo de corchetes que son necesarios para entender esta tesis, en el Capítulo 2 dedicaremos nuestro estudio al flujo de Ricci en una clase

particular de solvariedades: aquéllas cuya álgebra de Lie posee un ideal abeliano de codimensión 1. El objetivo de este capítulo es intentar obtener resultados similares a los obtenidos en [L2] en el caso nilpotente. Estudiamos entonces el flujo de Ricci en una solvariedad cuya álgebra de Lie tiene un ideal abeliano de codimensión uno, i.e. en un grupo de Lie soluble simplemente conexo con álgebra de Lie que posee un ideal abeliano de codimensión uno junto con una métrica Riemanniana invariante a izquierda. La solución $g(t)$ es una métrica invariante a izquierda para todo t y entonces cada $g(t)$ es determinada por un producto interno en el álgebra de Lie. Continuando con el enfoque de [L4], para estudiar la evolución de estas métricas, vamos a variar corchetes de Lie en lugar de variar productos internos.

Sea μ un corchete de Lie en \mathbb{R}^{n+1} con un ideal abeliano de codimensión uno. Podemos suponer que μ está determinado por $A = \text{ad}_\mu(e_0)|_{\mathbb{R}^n} \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$, donde $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}e_0 \oplus \mathbb{R}^n$ y \mathbb{R}^n es el ideal abeliano, y por lo tanto lo denotaremos por μ_A . Cada μ_A determina una variedad Riemanniana (G_{μ_A}, g_{μ_A}) , donde G_{μ_A} es el grupo de Lie simplemente conexo con álgebra de Lie $(\mathbb{R}^{n+1}, \mu_A)$ y g_{μ_A} es la métrica invariante a izquierda determinada por $\langle \cdot, \cdot \rangle$, el producto interno canónico en \mathbb{R}^{n+1} . Toda solvariedad cuya álgebra de Lie posee un ideal abeliano de codimensión uno es isométrica a alguna μ_A . En Lema 2.1.1, probamos que el flujo de corchetes es $\mu(t) = \mu_{A(t)}$, donde $A(t) \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ es la solución de la siguiente ecuación diferencial ordinaria,

$$\frac{d}{dt}A = -\text{tr}(S(A)^2)A + \frac{1}{2}[A, [A, A^t]] - \frac{1}{2}\text{tr}(A)[A, A^t], \quad A(0) = A,$$

y entonces estudiamos la evolución de la matriz A . Los principales resultados en este capítulo pueden ser resumidos en los siguientes items:

- La solución del flujo de Ricci $g(t)$ está definida para todo $t \in (T_-, \infty)$, donde $-\infty < T_- < 0$, y si $\text{tr}(A^2) \geq 0$, entonces $g(t)$ es una solución de Tipo-III (ver Proposición 2.1.6 y Proposición 2.1.13).
- La funcional $\frac{\| [A(t), A(t)^t] \|}{\| A(t) \|^2}$ es estrictamente decreciente a menos que μ_A sea un solitón algebraico (una clase particular de solitones de Ricci que contienen mucha información algebraica), en cuyo caso es constante (ver Lema 2.3.1). Esto sucede precisamente cuando A es una matriz normal o una matriz nilpotente especial (ver Proposición 2.1.3).
- Para toda sucesión $t_k \rightarrow \infty$, existe una subsucesión de $(G_{\mu_{A(t_k)}}, g_{\mu_{A(t_k)}})$, la cual converge en la topología punteada a una variedad plana, salvo isometría local (ver Corolario 2.1.10).
- Si $\text{tr}(A) = 0$ (i.e. G_{μ_A} unimodular), entonces $B(t) = \frac{A(t)}{\|A(t)\|}$ converge a una matriz B_∞ , cuando $t \rightarrow \infty$ (ver Lema 2.2.1 y Observación 2.2.2).
- Para toda sucesión $t_k \rightarrow \infty$, existe una subsucesión de $(G_{\mu_{B(t_k)}}, g_{\mu_{B(t_k)}})$, la cual converge en la topología punteada a $(G_{\mu_{B_\infty}}, g_{\mu_{B_\infty}})$ (salvo isometría local), el cual es un solitón algebraico. Además, $(G_{\mu_{B_\infty}}, g_{\mu_{B_\infty}})$ no es plana, a menos que todos los autovalores de A sean imaginarios puros (ver Teorema 2.3.4).
- Si G_{μ_A} admite una métrica Riemanniana invariante a izquierda con curvatura negativa, entonces existe $t_0 > 0$ tal que $g(t)$ tiene curvatura negativa para todo $t \geq t_0$ (ver Teorema 2.4.5). Esto no se cumple para solvariedades en general (ver Ejemplo 2.4.6).

En el Capítulo 3 dedicamos nuestro estudio al flujo de Ricci en variedades homogéneas simplemente conexas de dimensión 4. Para realizar el análisis utilizamos el teorema de clasificación de los espacios

Riemannianos homogéneos simplemente conexos de dimensión 4 probado por B. Bergery en [BB]. En este teorema, la clasificación es obtenida en función de la dimensión del grupo de Lie que actúa en la variedad, es decir, en función de $\dim(G)$, si $M = (G/K, g)$. Analizaremos caso por caso, respetando esta clasificación. En los casos en los cuales $6 \leq \dim G$ haremos algunos comentarios acerca del flujo de Ricci ya que el análisis es muy sencillo. En los casos $\dim G = 4$ y 5 el análisis es más complicado. La herramienta que utilizaremos para estudiar estos dos casos será el flujo de corchetes.

Vale la pena destacar, que otros autores también han estudiado el flujo de Ricci en dimensión 4. En [IJL] se estudia el flujo de Ricci para la familia de métricas en donde la métrica inicial se puede diagonalizar y el flujo de Ricci preserva la diagonalización. Nuestro análisis será totalmente diferente debido a que utilizaremos otro enfoque. Obtendremos resultados en una gran cantidad de variedades homogéneas no analizadas en [IJL].

Los principales resultados obtenidos en este capítulo son:

Si $\dim G = 4$, entonces el álgebra de Lie de G o bien posee un ideal abeliano de codimensión 1, y entonces el análisis del flujo de corchetes es el del Capítulo 2, o es isomorfa a una de las álgebras de (3.13). Para estudiar estas últimas, hemos analizado el flujo de corchetes para dos familias de álgebras de Lie:

Consideremos $(\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interno fijo en \mathbb{R}^4 , $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ una base ortonormal para $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y definimos $\mu := \mu_{A,h}$ en \mathbb{R}^4 como sigue:

$$\mu(e_0, e_i) = Ae_i, \quad i = 1, \dots, 3, \quad \mu(e_1, e_2) = he_3,$$

donde $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & \text{tr}(B) \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}_3(\mathbb{R})$, $B \in \mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})$ y $h \in \mathbb{R}$. Denotaremos a estas álgebras por $(\mathbb{R}^4, \mu_{A,h})$, o simplemente $\mu_{A,h}$. En Lema 3.1.3, probamos que el flujo de corchetes es $\mu(t) = \mu_{A(t),h(t)}$, donde $A(t)$ y $h(t)$ satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} A = -\text{tr}(S(A)^2)A + \frac{1}{2}[A, [A, A^t]] - \frac{1}{2}\text{tr}(A)[A, A^t], & A(0) = A, \\ \frac{d}{dt} h = -\frac{3}{2}h^3 & h(0) = h. \end{cases}$$

Los principales resultados para esta familia de álgebras de Lie pueden ser resumidos en los siguientes items:

- La solución del flujo de Ricci $g(t)$ está definida para todo $t \in (T_-, \infty)$, donde $-\infty < T_- < 0$, y si $\text{tr}(A^2) \geq 0$, entonces $g(t)$ es una solución de tipo-III.
- $\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = A_\infty$, $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$ y $\mu_{A(t),h(t)} \rightarrow \mu_{A_\infty}$.
- Para toda sucesión existe una subsucesión en la cual el flujo de Ricci converge en la topología punteada a una variedad plana, salvo isometría local.
- Si $\text{Spec}(A) \subset \mathbb{R}$ entonces $g_{\mu_{A(t),h(t)}} \rightarrow g_{\mu_{A_\infty}}$ suavemente en \mathbb{R}^4 , donde $g_{\mu_{A(t),h(t)}}$ y $g_{\mu_{A_\infty}}$ son las métricas invariantes a izquierda determinadas por el producto interno fijo $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Consideremos $(\mathbb{R}^{n+2}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interno fijo en \mathbb{R}^{n+2} , $\{e_1, \dots, e_{n+2}\}$ una base ortonormal para $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y definimos $\mu := \mu_{A,B}$ en \mathbb{R}^{n+2} como sigue:

$$\mu(e_1, e_i) = Ae_i, \quad i \geq 3, \quad \mu(e_2, e_i) = Be_i, \quad i \geq 3,$$

donde $A, B \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ tales que $[A, B] = 0$. Denotaremos a estas álgebras por $(\mathbb{R}^{n+2}, \mu_{A,B})$, o simplemente $\mu_{A,B}$. En Proposición 3.1.7, probamos que el flujo de corchetes es $\mu(t) = \mu_{A(t), B(t)}$, donde $A(t)$ y $B(t)$ satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}A &= -\operatorname{tr}(S(A)^2)A - \operatorname{tr}(S(A)S(B))B + \frac{1}{2}[A, [A, A^t]] + \frac{1}{2}[A, [B, B^t]] \\ &\quad - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(A)[A, A^t] - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(B)[A, B^t], \quad A(0) = A, \\ \frac{d}{dt}B &= -\operatorname{tr}(S(B)^2)B - \operatorname{tr}(S(A)S(B))A + \frac{1}{2}[B, [A, A^t]] + \frac{1}{2}[B, [B, B^t]] \\ &\quad - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(A)[B, A^t] - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(B)[B, B^t], \quad B(0) = B. \end{aligned}$$

Los principales resultados para esta familia de álgebras de Lie pueden ser resumidos en los siguientes items:

- La solución del flujo de Ricci $g(t)$ está definida para todo $t \in (T_-, \infty)$, donde $-\infty < T_- < 0$.
- Para toda sucesión, existe una subsucesión en la cual el flujo de Ricci converge en la topología punteada a una variedad plana, salvo isometría local.

Si $\dim G = 5$ y G es soluble, el teorema de clasificación (ver Teorema 3.1.1) nos asegura que existe un subgrupo normal H de G , conexo, simplemente conexo y transitivo en M . Luego M es isométrica a H equipada con una métrica Riemanniana invariante a izquierda (ver [GW, Sección 1]), es decir, es isométrica a un grupo de Lie soluble de dimensión 4 munido de una métrica Riemanniana invariante a izquierda, i.e. se reduce al caso $\dim G = 4$. Si G no es soluble, hemos estudiado los diagramas de fases correspondientes al flujo de corchetes partiendo de métricas G -invariantes, obteniendo así una visión global del flujo de Ricci para dichas métricas. Hemos determinado todas las soluciones antiguas (i.e. soluciones definidas en el intervalo $(-\infty, 0]$). Además, hallamos todas las métricas que producen soluciones al flujo de corchetes que convergen, y, en este caso, se probó que para toda sucesión, existe una subsucesión en la cual el flujo de Ricci converge con la topología punteada a una métrica plana en $E(2) \times \mathbb{R}$, donde $E(2)$ es el grupo de los movimientos rígidos del espacio euclídeo 2-dimensional. Para evitar este tipo de convergencia, y conseguir un límite más interesante, consideramos diferentes normalizaciones del flujo de corchetes. Obtuvimos que para algunas métricas es inevitable la convergencia a una métrica plana, i.e. para toda normalización del flujo de corchetes, el límite de dichas métricas será plano, mientras que en el resto de las métricas siempre existe una normalización adecuada y una sucesión en la cual el flujo de Ricci converge a un solitón algebraico no plano.

El Capítulo 4 está dedicado al estudio de los solitones de Ricci homogéneos, es decir, métricas completas homogéneas g en una variedad diferenciable dada M , tales que la curva de métricas

$$g(t) = (-2ct + 1)\phi_t^*g,$$

es solución al flujo de Ricci, para algún $c \in \mathbb{R}$ y para algún grupo monoparamétrico ϕ_t de difeomorfismos de M . Dedicaremos nuestro estudio al caso de expansión, es decir, $c < 0$, debido a que los casos $c = 0$ y $c > 0$ ya han sido estudiados.

Una definición que surge muy naturalmente al querer considerar la estructura algebraica en el caso homogéneo, es la definición de solitón semi-algebraico:

Definición. [J, Definición 1.4] Un espacio Riemanniano homogéneo $(G/K, g)$ es llamado un solitón semi-algebraico si existe una familia monoparamétrica $\tilde{\varphi}_t \in \operatorname{Aut}(G)$ con $\tilde{\varphi}_t(K) = K$ tal que

$$g(t) = c_t\varphi_t^*g, \quad g(0) = g,$$

es una solución al flujo de Ricci para alguna función escalar $c_t > 0$, donde $\varphi_t \in \text{Diff}(G/K)$ es el difeomorfismo equivariante determinado por $\tilde{\varphi}_t$.

En [J, Proposición 2.2], M. Jablonski probó que todo solitón de Ricci homogéneo (M, g) es un solitón semi-algebraico con respecto a su grupo de isometrías $G = \text{I}(M, g)$. Debido a este resultado, estudiaremos solitones semi-algebraicos, y para hacer esto utilizaremos los resultados de estructura obtenidos por R. Lafuente y J. Lauret en [LL2].

Los resultados obtenidos en este capítulo son:

- Clasificación de los solitones semi-algebraicos de expansión no Einstein en dimensión 3 y 4, salvo isometría equivariante (ver Cuadros 4.1 y 4.2), y el siguiente teorema:

Teorema. *Todo solitón semi-algebraico simplemente conexo de expansión de dimensión 3 y 4 es isométrico a un solsolitón.*

- Resultados parciales salvo isometría en dimensión 5 :

Teorema. *Sea $(G/K, g)$ un solitón semi-algebraico simplemente conexo de expansión de dimensión 5. Si $\dim G = 5, 6, 7$ o 15 , entonces es isométrico a un solsolitón.*

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo definiremos los conceptos básicos que utilizaremos a lo largo de la tesis. Comenzaremos dando la definición de flujo de Ricci y algunas relacionadas con él. Seguiremos con las definiciones de variedades homogéneas y espacios Riemannianos homogéneos, las cuales están muy relacionadas entre sí, para luego definir el conjunto $\mathcal{H}_{q,n}$, el cual parametrizará a los espacios Riemannianos homogéneos simplemente conexos, casi efectivos, de dimensión n y con isotropía de dimensión q . Luego, concentraremos nuestro estudio en el flujo de Ricci homogéneo. Introduciremos el flujo de corchetes y un teorema que relaciona a éste con el flujo de Ricci. Al final del capítulo, recordaremos algunos conceptos y resultados de ecuaciones diferenciales, los cuales corresponden, más precisamente, a la teoría de sistemas no lineales y autónomos, en la cual está inmersa la ecuación del flujo de corchetes.

1.1. Flujo de Ricci

Definición 1.1.1. Sea (M, g_0) una variedad Riemanniana. El flujo de Ricci de (M, g_0) es la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales:

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2 \text{Rc}(g(t)), \quad g(0) = g_0, \quad (1.1)$$

donde $g(t)$ es una curva de métricas Riemannianas en M y $\text{Rc}(g(t))$ el tensor de Ricci de la métrica $g(t)$.

Esta ecuación diferencial fue introducida por R. Hamilton en los 80's en [Hm], quien probó utilizando el flujo de Ricci que toda 3-variedad compacta que admite una métrica Riemanniana con curvatura de Ricci estrictamente positiva, también admite una métrica de curvatura constante positiva. Recientemente, el flujo de Ricci se ha convertido en un tema de investigación muy interesante y activo debido a la cantidad de resultados que han sido probados usándolo como herramienta, como ejemplo a destacar, la Conjetura de Geometrización de Thurston, de la que se puede deducir la Conjetura de Poincaré.

Un concepto muy importante, el cual es una generalización de las métricas de Einstein (i.e. $\text{Rc}(g) = cg$), es el de los *solitones de Ricci*:

Definición 1.1.2. Una métrica Riemanniana completa g en una variedad diferenciable M se dice un solitón de Ricci si su tensor de Ricci satisface:

$$\text{Rc}(g) = cg + L_X g, \quad \text{para algún } c \in \mathbb{R}, \quad X \in \mathfrak{X}(M) \text{ completo,}$$

donde $\mathfrak{X}(M)$ denota el espacio de todos los campos vectoriales diferenciables en M y L_X la derivada de Lie en la dirección del campo X .

Equivalentemente, g es un solitón de Ricci si y sólo si la curva de métricas en M

$$g(t) = (-2ct + 1)\phi_t^* g \tag{1.2}$$

es una solución del flujo de Ricci, para algún grupo monoparamétrico ϕ_t de difeomorfismos de M . Es decir, son las métricas que evolucionan sólo por la acción de difeomorfismos y múltiplos escalares. De acuerdo a (1.2), los solitones de Ricci son llamados *de expansión*, *estables* o *de contracción*, dependiendo de si $c < 0$, $c = 0$ o $c > 0$. El escalar c suele denominarse *constante cosmológica*. Para más información acerca de los solitones de Ricci, ver [C].

Definición 1.1.3. Una solución $g(t)$ del flujo de Ricci se dice de Tipo-III si está definida para todo $t \in [0, \infty)$ y existe un $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|\text{Rm}(g(t))\| \leq \frac{C}{t}, \quad \text{para todo } t \in (0, \infty),$$

donde $\text{Rm}(g(t))$ es el tensor de curvatura de Riemann de la métrica $g(t)$.

1.2. El espacio de las variedades homogéneas

En esta sección vamos a estudiar el espacio de las variedades homogéneas. Para esto, parametrizaremos al conjunto de todos los espacios homogéneos, simplemente conexos, de dimensión n , con isotropía de dimensión q , por un subconjunto $\mathcal{H}_{q,n}$ de la variedad de álgebras de Lie $(q+n)$ -dimensionales.

Definición 1.2.1. Una variedad Riemanniana (M, g) se dice homogénea si su grupo de isometrías $I(M, g)$ actúa transitivamente en M .

Es bien conocido que $I(M, g)$ con la topología compacto-abierta admite una estructura diferenciable tal que es un grupo de Lie de transformaciones de M , y el subgrupo de isotropía $I_p(M, g)$ es compacto, para todo $p \in M$ (ver [MS]).

Definición 1.2.2. G/K se dice un espacio homogéneo si G es un grupo de Lie y $K \subset G$ un subgrupo de Lie cerrado de G .

Definición 1.2.3. Una métrica Riemanniana g en un espacio homogéneo G/K es G -invariante si $\tau_h : G/K \rightarrow G/K$, $\tau_h(uK) := huK$, para todo $u \in G$, es isometría para todo $h \in G$. En tal caso, $(G/K, g)$ se llama un espacio Riemanniano homogéneo.

Sea (M, g) una variedad homogénea conexa y G un subgrupo de Lie cerrado de $I(M, g)$ que actúa transitivamente en M , entonces podemos identificar a M con G/K , donde $K = G \cap I_p(M, g)$,

para algún $p \in M$. Si denotamos por \mathfrak{g} y \mathfrak{k} a las álgebras de Lie de G y K respectivamente, como K es compacto, existe un complemento \mathfrak{p} de \mathfrak{k} , $\text{Ad}(K)$ -invariante, tal que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}.$$

Esta descomposición es llamada una *descomposición reductiva* y no necesariamente es única. Consideremos en G/K la métrica G -invariante $g_{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ determinada por

$$\langle \cdot, \cdot \rangle := g(p),$$

el producto interno $\text{Ad}(K)$ -invariante en \mathfrak{p} definido por g . Luego, $(G/K, g_{\langle \cdot, \cdot \rangle})$ es una presentación de (M, g) como espacio Riemanniano homogéneo.

Observar que el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ puede ser extendido a un producto interno $\text{Ad}(K)$ -invariante en \mathfrak{g} tal que $\langle \mathfrak{k}, \mathfrak{p} \rangle = 0$. Llamaremos a $(\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ una *descomposición métrica reductiva*.

Sin embargo, no es necesario pedir $G \subset \text{I}(M, g)$ (i.e. que la acción sea efectiva) para obtener una presentación de (M, g) como espacio homogéneo. Es suficiente una acción transitiva de G en $M = G/K$, donde K es el subgrupo de isotropía de algún punto, que sea *casi efectiva* (i.e. que K no contenga subgrupos normales no discretos de G , o equivalentemente, que el subgrupo normal $\{g \in G : ghK = hK, \forall h \in G\}$ sea discreto) con una descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ y un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, ambos $\text{Ad}(K)$ -invariantes. En este caso más general, K podría no ser compacto, pero es fácil probar que $\text{Ad}(K)$ es compacto en $\text{GL}(\mathfrak{g})$ y por lo tanto, a $(G/K, g)$ se le puede adjuntar una descomposición métrica reductiva $(\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Definamos ahora el conjunto $\mathcal{H}_{q,n}$, el cual es un conjunto cuyos elementos son espacios Riemannianos homogéneos y tal que cualquier espacio Riemanniano homogéneo simplemente conexo y casi efectivo de dimensión n y con isotropía q -dimensional es representado por al menos un punto en dicho conjunto.

Fijemos primero una descomposición de suma directa de espacios vectoriales $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ y un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en \mathfrak{p} . Consideremos

$$V_{\mathfrak{g}} = V_{\dim \mathfrak{g}} := \{\mu : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} : \mu \text{ es bilineal y antisimétrica}\},$$

$$\mathfrak{L}_{\mathfrak{g}} = \mathfrak{L}_{\dim \mathfrak{g}} := \{\mu \in V_{\mathfrak{g}} : \mu \text{ satisface Jacobi}\}$$

y $\text{ad}_{\mu} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ la representación adjunta de $\mu \in \mathfrak{L}_{\mathfrak{g}}$ (i.e. $\text{ad}_{\mu} x(y) = \mu(x, y)$).

Sea $\mu \in \mathfrak{L}_{\mathfrak{g}}$ tal que:

$$(h1) \quad \mu(\mathfrak{k}, \mathfrak{k}) \subset \mathfrak{k} \text{ y } \mu(\mathfrak{k}, \mathfrak{p}) \subset \mathfrak{p}.$$

(h2) Si G_{μ} denota el grupo de Lie simplemente conexo con álgebra de Lie (\mathfrak{g}, μ) y K_{μ} es el subgrupo de Lie conexo de G_{μ} con álgebra de Lie $(\mathfrak{k}, \mu|_{\mathfrak{k} \times \mathfrak{k}})$, entonces K_{μ} es cerrado en G_{μ} .

(h3) $(\text{ad}_{\mu} Z|_{\mathfrak{p}})^t = -\text{ad}_{\mu} Z|_{\mathfrak{p}}$, para todo $Z \in \mathfrak{k}$ (la transpuesta respecto de $\langle \cdot, \cdot \rangle$).

$$(h4) \quad \{Z \in \mathfrak{k} : \mu(Z, \mathfrak{p}) = 0\} = 0.$$

Entonces $(G_{\mu}/K_{\mu}, g_{\mu})$, con g_{μ} la métrica G_{μ} -invariante definida en eK_{μ} como sigue $g_{\mu}(eK_{\mu}) = \langle \cdot, \cdot \rangle$, donde $e \in G_{\mu}$ es la identidad del grupo, es un espacio Riemanniano homogéneo simplemente conexo

con $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ descomposición reductiva, casi efectiva. En efecto, de la condición (h1) obtenemos que $(\mathfrak{k}, \mu|_{\mathfrak{k} \times \mathfrak{k}})$ es subálgebra de Lie de (\mathfrak{g}, μ) , y por lo tanto, podemos considerar K_μ el único subgrupo de Lie conexo de G_μ con álgebra de Lie $(\mathfrak{k}, \mu|_{\mathfrak{k} \times \mathfrak{k}})$, el cual es cerrado por la condición (h2). Este último hecho, asegura que G_μ/K_μ admite una única estructura de variedad diferenciable tal que la acción de G_μ en G_μ/K_μ es suave (ver [War, 3.58,3.63]). De la condición (h3) se sigue que \mathfrak{p} es $\text{Ad}(K_\mu)$ -invariante, pues K_μ es conexo y de (h4) obtenemos que la acción es casi-efectiva.

Definición 1.2.4. Si $n = \dim \mathfrak{p}$ y $q = \dim \mathfrak{k}$, definimos

$$\mathcal{H}_{q,n} := \{\mu \in \mathfrak{L}_{q+n} : \mu \text{ satisface (h1)-(h4)}\}.$$

Observaciones:

- Si $q = 0$, entonces $\mathfrak{g} = \mathfrak{p}$, $\mathcal{H}_{0,n} = \mathfrak{L}_n$ y cada $\mu \in \mathcal{H}_{0,n}$ define una métrica invariante a izquierda g_μ en G_μ .
- $\mathcal{H}_n = \bigcup_{q=0}^{n(n-1)/2} \mathcal{H}_{q,n} = \{\text{espacios Riemannianos homogéneos simplemente conexos } n\text{-dimensionales y casi-efectivos}\}$.
- $\mathcal{H}_{q,n}$ puede ser un subconjunto vacío, por ejemplo, $\mathcal{H}_{2,3}$.

Como los espacios homogéneos contienen mucha información algebraica, es muy natural considerar alguna relación de equivalencia entre espacios homogéneos en donde esta información esté involucrada. Dados G/K y G'/K' dos espacios homogéneos, diremos que son *equivariantemente difeomorfos* si existe $\tilde{\varphi} : G \rightarrow G'$ isomorfismo de grupos de Lie tal que $\tilde{\varphi}(K) = K'$. $\tilde{\varphi}$ induce un mapa $\varphi : G/K \rightarrow G'/K'$ al cual denominaremos *difeomorfismo equivariante*. Definimos también que dos espacios Riemannianos homogéneos $(G/K, g_{\langle \cdot, \cdot \rangle})$ y $(G'/K', g_{\langle \cdot, \cdot \rangle'})$ son *equivariantemente isométricos* si $g_{\langle \cdot, \cdot \rangle} = \varphi^* g_{\langle \cdot, \cdot \rangle'}$ para algún difeomorfismo equivariante $\varphi : G/K \rightarrow G'/K'$ (i.e. $d\varphi|_{eK}$ es además una isometría entre los espacios con producto interno $(\mathfrak{p}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ y $(\mathfrak{p}', \langle \cdot, \cdot \rangle')$).

Antes de enunciar la siguiente proposición, que será muy usada en este trabajo, notemos que fijando una base de \mathfrak{k} y una base ortonormal de \mathfrak{p} podemos identificar $\text{GL}(\mathfrak{g})$, $\text{GL}(\mathfrak{k})$, $\text{GL}(\mathfrak{p})$ y $\text{O}(\mathfrak{p}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ con $\text{GL}_{q+n}(\mathbb{R})$, $\text{GL}_q(\mathbb{R})$, $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ y $\text{O}(n)$ respectivamente.

Hay una acción lineal natural de $\text{GL}_{q+n}(\mathbb{R})$ en V_{q+n} definida como sigue:

$$h.\mu(X, Y) = h\mu(h^{-1}X, h^{-1}Y), \quad X, Y \in \mathfrak{g}, \quad h \in \text{GL}_{q+n}(\mathbb{R}), \quad \mu \in V_{q+n}. \quad (1.3)$$

Proposición 1.2.5. [L3, Proposición 4.2] Si $\mu \in \mathcal{H}_{q,n}$ entonces $h.\mu \in \mathcal{H}_{q,n}$ para toda $h \in \text{GL}_{q+n}(\mathbb{R})$ de la forma

$$h := \begin{bmatrix} h_q & 0 \\ 0 & h_n \end{bmatrix} \in \text{GL}_{q+n}(\mathbb{R}), \quad h_q \in \text{GL}_q(\mathbb{R}), \quad h_n \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), \quad (1.4)$$

tal que

$$[h_n^t h_n, \text{ad}_\mu \mathfrak{k}|_{\mathfrak{p}}] = 0. \quad (1.5)$$

En este caso, $G_{h.\mu}/K_{h.\mu}$ y G_μ/K_μ son equivariantemente difeomorfos y $(G_{h.\mu}/K_{h.\mu}, g_{h.\mu})$ es equivariantemente isométrico a $(G_\mu/K_\mu, g_{\langle h_n \cdot, h_n \cdot \rangle})$.

Observación 1.2.6. En particular, de la Proposición 1.2.5 se sigue que si $\mu \in \mathcal{H}_{q,n}$ entonces el subconjunto

$$\{h.\mu : h_q = I, h_n \text{ satisface (1.5)}\} \subset \mathcal{H}_{q,n},$$

parametriza el conjunto de todas las métricas G_μ -invariantes en G_μ/K_μ .

Para cada $\mu \in \mathcal{H}_{q,n}$, definamos

$$U_\mu = \{h_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : h_n^t h_n \in \mathrm{End}_{\mathrm{ad}_\mu}(\mathfrak{p})\}, \quad (1.6)$$

donde $\mathrm{End}_{\mathrm{ad}_\mu}(\mathfrak{p})$ es el espacio de los operadores de entrelazamiento de la representación de isotropía $\mathrm{ad}_\mu : \mathfrak{k} \rightarrow \mathrm{End}(\mathfrak{p})$. En [L3], J. Lauret explica cómo calcular U_μ y demuestra que para cada $\mu \in \mathcal{H}_{q,n}$ el conjunto $U_\mu \cdot \mu$ parametriza el conjunto de todas las métricas G_μ -invariantes en G_μ/K_μ , donde $U_\mu \hookrightarrow \mathrm{GL}_{q+n}(\mathbb{R})$ de manera usual.

1.3. Curvatura de Ricci

En esta sección vamos a estudiar el operador de Ricci del espacio Riemanniano homogéneo $(G_\mu/K_\mu, g_\mu)$, para toda $\mu \in \mathcal{H}_{q,n}$. Recordar que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ es la descomposición reductiva $\mathrm{Ad}(K_\mu)$ -invariante y $g_\mu(eK_\mu) = \langle \cdot, \cdot \rangle$.

El operador de Ricci Ric_μ de $(G_\mu/K_\mu, g_\mu)$ está dado por (ver [B, 7.38]):

$$\mathrm{Ric}_\mu = M_\mu - \frac{1}{2}B_\mu - S(\mathrm{ad}_\mu H_\mu|_{\mathfrak{p}}), \quad (1.7)$$

donde

- $M_\mu : \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}$ es el operador simétrico definido por:

$$\begin{aligned} \langle M_\mu X, Y \rangle &= -\frac{1}{2} \sum \langle \mu(X, X_i), X_j \rangle \langle \mu(Y, X_i), X_j \rangle \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum \langle \mu(X_i, X_j), X \rangle \langle \mu(X_i, X_j), Y \rangle, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{p}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

donde $\{X_i\}$ es una base ortonormal de \mathfrak{p} .

- $B_\mu : \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}$ es el operador simétrico definido por:

$$\langle B_\mu X, Y \rangle = \mathrm{tr} \mathrm{ad}_\mu X \mathrm{ad}_\mu Y, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{p}.$$

- $S : \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$, $S(A) = \frac{1}{2}(A + A^t)$, es la parte simétrica de un operador.
- H_μ es el único elemento en \mathfrak{p} que satisface $\langle H_\mu, X \rangle = \mathrm{tr} \mathrm{ad}_\mu X$ para todo $X \in \mathfrak{p}$.

Si consideramos las \mathfrak{k} y \mathfrak{p} -componentes de $\mu|_{\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}}$, es decir,

$$\mu(X, Y) = \mu_{\mathfrak{k}}(X, Y) + \mu_{\mathfrak{p}}(X, Y), \quad \mu_{\mathfrak{k}}(X, Y) \in \mathfrak{k}, \quad \mu_{\mathfrak{p}}(X, Y) \in \mathfrak{p}, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{p}, \quad (1.9)$$

podemos reescribir la fórmula (1.7) de la siguiente manera:

$$\mathrm{Ric}_\mu = M_{\mu_{\mathfrak{p}}} - \frac{1}{2}B_\mu - S(\mathrm{ad}_{\mu_{\mathfrak{p}}} H_{\mu_{\mathfrak{p}}}) \quad (1.10)$$

ya que H_μ y M_μ sólo dependen de \mathfrak{p} .

1.4. Curvaturas Seccionales

En esta sección haremos un breve repaso de las curvaturas seccionales en un espacio Riemanniano homogéneo (para más información, ver [B, Teorema 7.30]).

Si $(G/K, g)$ es un espacio Riemanniano homogéneo, con $(\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ una descomposición métrica reductiva, podemos identificar a un $X \in \mathfrak{g}$ con un campo en G/K de la siguiente manera,

$$X(hK) := \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \exp(tX)hK,$$

donde $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ es la exponencial de Lie, y se puede ver que si $X, Y \in \mathfrak{g}$ entonces $[X, Y] = -[X, Y]_{\mathfrak{g}}$. Consideramos $[X, Y]_{\mathfrak{k}}$ y $[X, Y]_{\mathfrak{p}}$ las componentes en \mathfrak{k} y en \mathfrak{p} respectivamente de $[X, Y]_{\mathfrak{g}}$, para todo $X, Y \in \mathfrak{p}$. Luego la curvatura seccional de $X, Y \in \mathfrak{p}$ está dada por:

$$K(X, Y) = -\frac{3}{4} \|[X, Y]_{\mathfrak{p}}\|^2 - \frac{1}{2} \langle [X, [X, Y]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{p}}, Y \rangle - \frac{1}{2} \langle [Y, [Y, X]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{p}}, X \rangle + \|U(X, Y)\|^2 - \langle U(X, X), U(Y, Y) \rangle, \quad (1.11)$$

donde $U : \mathfrak{p} \times \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}$, está definida por $2\langle U(X, Y), Z \rangle = \langle [Z, X]_{\mathfrak{p}}, Y \rangle + \langle X, [Z, Y]_{\mathfrak{p}} \rangle$, para todo $Z \in \mathfrak{p}$. Si además, $\|X\| = \|Y\| = 1$ y $\langle X, Y \rangle = 0$, esto da la curvatura seccional del plano generado por X e Y .

1.5. Flujo de Ricci homogéneo

Sea (M, g_0) una variedad homogénea simplemente conexa y $(G_{\mu_0}/K_{\mu_0}, g_{\mu_0})$ una presentación de (M, g_0) como espacio Riemanniano homogéneo, para algún $\mu_0 \in \mathcal{H}_{q,n}$. Sea $g(t)$ la solución del flujo de Ricci de (M, g_0) (ver (1.1)). Como g_0 es homogénea, y por lo tanto completa y de curvatura acotada, entonces existe solución en tiempo corto de (1.1) debido a [S]. Alternativamente, se puede pedir G_{μ_0} -invariancia de $g(t)$ para todo t , y entonces $(M, g(t))$ tendría, como espacio homogéneo, la presentación $(G_{\mu_0}/K_{\mu_0}, g_{\langle \cdot, \cdot \rangle_t})$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_t = g(t)(eK_{\mu_0})$. La ecuación del flujo de Ricci (1.1) es por lo tanto equivalente a la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\left. \frac{d}{dt} \langle \cdot, \cdot \rangle_t = -2 \text{Rc}(\langle \cdot, \cdot \rangle_t), \quad \langle \cdot, \cdot \rangle_0 = \langle \cdot, \cdot \rangle, \quad (1.12)$$

donde $\text{Rc}(\langle \cdot, \cdot \rangle_t) := \text{Rc}(g(t))(eK_{\mu_0})$, y entonces, la unicidad y existencia en corto tiempo de la solución en la clase de métricas G_{μ_0} -invariantes está garantizada. De esta manera, $g(t)$ es homogénea para todo t , y entonces la unicidad dentro del conjunto de métricas completas y de curvatura acotada se sigue de [ChZ]. Es simple probar que el resultado de unicidad implica la G_{μ_0} -invariancia, pues la solución debe preservar isometrías. La necesidad de este argumento circular es debido al hecho de que la unicidad de la solución del flujo de Ricci es aún un problema abierto en el caso general no compacto (ver [Ch]). En conclusión, existe una única solución al flujo de Ricci partiendo de g_0 dentro del conjunto de métricas completas y de curvatura acotada, y dicha solución es G_{μ_0} -invariante (en particular, es homogénea), si g_0 lo era.

Como hemos representado a los espacios Riemannianos homogéneos con al menos un punto de $\mathcal{H}_{q,n}$, es natural preguntarse cómo se comporta el flujo de Ricci en ese conjunto, es decir, ¿cómo es la ecuación de evolución de una curva $\mu(t) \in \mathcal{H}_{q,n}$ tal que $(G_{\mu(t)}/K_{\mu(t)}, g_{\mu(t)})$ sea el flujo de Ricci? Para esto primero definamos lo siguiente:

Definición 1.5.1. Sea $\mu_0 \in \mathcal{H}_{q,n}$. El flujo de corchetes que empieza en μ_0 es la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{d}{dt}\mu(t) = \delta_{\mu(t)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{Ric}_{\mu(t)} \end{pmatrix}, \quad \mu(0) = \mu_0, \quad (1.13)$$

donde $\delta_{\mu}(A) = \mu(A\cdot, \cdot) + \mu(\cdot, A\cdot) - A\mu(\cdot, \cdot)$, $A \in \text{GL}_{q+n}(\mathbb{R})$, $\mu \in V_{q+n}$.

Observación 1.5.2. Si $\mu_0 \in \mathcal{H}_{q,n}$ y $\mu(t)$ es una solución de (1.13), entonces $\mu(t) \in \mathcal{H}_{q,n}$, para todo t (ver [L4, Lema 3.2]).

Dada (M, g_0) una variedad Riemanniana homogénea simplemente conexa y $(G_{\mu_0}/K_{\mu_0}, g_{\mu_0})$, $\mu_0 \in \mathcal{H}_{q,n}$, una presentación como espacio homogéneo, consideremos $g(t)$ la solución al flujo de Ricci que comienza en g_0 (ver (1.1)), $\langle \cdot, \cdot \rangle_t$ la solución al flujo de Ricci homogéneo que empieza en $\langle \cdot, \cdot \rangle_0 = \langle \cdot, \cdot \rangle$ (ver (1.12)), $\mu(t)$ la solución al flujo de corchetes que empieza en μ_0 (ver (1.13)) y las siguientes familias monoparamétricas:

$$(M, g(t)), \quad (G_{\mu_0}/K_{\mu_0}, g_{\langle \cdot, \cdot \rangle_t}), \quad (G_{\mu(t)}/K_{\mu(t)}, g_{\mu(t)}). \quad (1.14)$$

El siguiente Teorema muestra cómo el flujo de Ricci y el flujo de corchetes están relacionados:

Teorema 1.5.3. [L4, Teorema 3.3] *Existe una familia monoparamétrica de difeomorfismos*

$$\varphi(t) : M \rightarrow G_{\mu(t)}/K_{\mu(t)} \text{ tal que } g(t) = \varphi(t)^* g_{\mu(t)}, \text{ para todo } t \in (a, b).$$

Más aún, si identificamos $M = G_{\mu_0}/K_{\mu_0}$, entonces $\varphi(t) : G_{\mu_0}/K_{\mu_0} \rightarrow G_{\mu(t)}/K_{\mu(t)}$ puede ser elegido como el difeomorfismo equivariante determinado por el isomorfismo de grupos de Lie entre G_{μ_0} y $G_{\mu(t)}$ con derivada $\tilde{h} := \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, donde $h(t) := d\varphi(t)|_{eK_{\mu_0}} : \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}$ es la solución a cualquiera de las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$(1) \quad \frac{d}{dt}h = -h \text{ Ric}(\langle \cdot, \cdot \rangle_t), \quad h(0) = I.$$

$$(2) \quad \frac{d}{dt}h = -\text{Ric}_{\mu(t)} h, \quad h(0) = I.$$

Las siguientes condiciones se cumplen:

$$(3) \quad \langle \cdot, \cdot \rangle_t = \langle h\cdot, h\cdot \rangle.$$

$$(4) \quad \mu(t) = \tilde{h}\mu_0(\tilde{h}^{-1}\cdot, \tilde{h}^{-1}\cdot).$$

Por lo tanto, el flujo de Ricci $g(t)$ puede ser obtenido del flujo de corchetes $\mu(t)$ resolviendo la ecuación diferencial (2) y aplicando a (3). De la misma manera, podemos obtener $\mu(t)$ resolviendo (1) y reemplazando en (4).

En particular, podemos observar que ambos flujos están definidos en el mismo intervalo de tiempo, y para cada tiempo t , las variedades Riemannianas de (1.14) son isométricas dos a dos y por lo tanto, el comportamiento de la curvatura y de cualquier invariante Riemanniano a lo largo del flujo de Ricci $g(t)$ puede ser estudiado a lo largo del flujo de corchetes $g_{\mu(t)}$. Para más información, ver [L4].

Como a lo largo del flujo de corchetes se tiene que $\mu(t)|_{\mathfrak{k} \times \mathfrak{g}} = \mu_0|_{\mathfrak{k} \times \mathfrak{g}}$, para todo $t \in (a, b)$ (ver [L4, (29), (31)]), tenemos que la ecuación (1.13) puede ser escrita como el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mu_{\mathfrak{k}} = \mu_{\mathfrak{k}}(\text{Ric}_{\mu} \cdot, \cdot) + \mu_{\mathfrak{k}}(\cdot, \text{Ric}_{\mu} \cdot), \\ \frac{d}{dt}\mu_{\mathfrak{p}} = \delta_{\mu_{\mathfrak{p}}}(\text{Ric}_{\mu})\mu_{\mathfrak{p}}. \end{cases} \quad \mu_{\mathfrak{k}}(0) + \mu_{\mathfrak{p}}(0) = \mu_0, \quad (1.15)$$

donde $\mu_{\mathfrak{k}}$ y $\mu_{\mathfrak{p}}$ son como en (1.9).

Antes de concluir con esta sección vamos a introducir el concepto de solitón algebraico. Volvamos nuevamente a la Definición 1.1.2. En el caso homogéneo todos los ejemplos no triviales de solitones de Ricci son isométricos a un *solsolitón*, un grupo de Lie soluble S munido de una métrica Riemanniana invariante a izquierda g , la cual satisface

$$\text{Ric}(g) = cI + D, \quad \text{para algún } c \in \mathbb{R}, \quad D \in \text{Der}(\mathfrak{s}),$$

donde $\text{Ric}(g)$ es el operador de Ricci de la métrica g y \mathfrak{s} es el álgebra de Lie de S . En el caso en que S es nilpotente, son llamados *nilsolitones*. El concepto de solitón algebraico generaliza al concepto de solsolitón a espacios homogéneos en general.

Definición 1.5.4. Un espacio homogéneo simplemente conexo $(G/K, g_{\langle \cdot, \cdot \rangle})$ con una descomposición reductiva $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, se dice solitón algebraico si existe $c \in \mathbb{R}$ y $D \in \text{Der}(\mathfrak{g})$ tal que $D\mathfrak{k} \subset \mathfrak{k}$ y

$$\text{Ric}(g_{\langle \cdot, \cdot \rangle}) = cI + D_{\mathfrak{p}},$$

donde $\text{Ric}(g_{\langle \cdot, \cdot \rangle})$ es el operador de Ricci de $(G/K, g_{\langle \cdot, \cdot \rangle})$, $D_{\mathfrak{p}} := pr \circ D|_{\mathfrak{p}}$ y $pr : \mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}$ es la proyección lineal.

Todo solitón algebraico simplemente conexo es un solitón de Ricci (ver [LL1, Proposición 3.3]). Para poder relacionar a los solitones algebraicos con los solitones semi-algebraicos definidos en la Introducción, consideremos $(G/K, g)$ un solitón semi-algebraico con una descomposición reductiva $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. Se tiene que

$$\text{Ric} = cI + \frac{1}{2}(D_{\mathfrak{p}} + D_{\mathfrak{p}}^t), \quad \text{para algún } c \in \mathbb{R},$$

donde Ric es el operador de Ricci de $(G/K, g)$, $D \in \text{Der}(\mathfrak{g})$ tal que $D\mathfrak{k} \subset \mathfrak{k}$, $D_{\mathfrak{p}} := pr \circ D|_{\mathfrak{p}}$ y $pr : \mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}$ es la proyección lineal (ver [LL1, Sección 3] y [J, Sección 2]). Luego, si la derivación D es simétrica, $(G/K, g)$ es un solitón algebraico. Por lo tanto, todo solitón algebraico es semi-algebraico. Sin embargo, no se sabe si vale la recíproca. Todos los ejemplos conocidos hasta el momento son de tipo algebraico.

1.6. Flujos normalizados

Definición 1.6.1. Sea (M, g_0) una variedad Riemanniana. El *flujo de Ricci r -normalizado* de (M, g_0) es la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales:

$$\frac{\partial}{\partial t}g^r(t) = -2\text{Rc}(g^r(t)) - 2r(t)g^r(t), \quad g^r(0) = g_0, \quad (1.16)$$

para alguna *función normalización* $r(t)$.

Las normalizaciones son usadas para evitar que soluciones del flujo de Ricci converjan a métricas planas, así como también para evitar singularidades en tiempo finito.

En el caso homogéneo, i.e. $(M, g_0) = (G_{\mu_0}/K_{\mu_0}, g_{\mu_0})$, $\mu_0 \in \mathcal{H}_{q,n}$, el flujo de Ricci normalizado se convierte en la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{d}{dt}\langle \cdot, \cdot \rangle_t^r = -2\text{Rc}(\langle \cdot, \cdot \rangle_t^r) - 2r(t)\langle \cdot, \cdot \rangle_t^r, \quad \langle \cdot, \cdot \rangle_0^r = \langle \cdot, \cdot \rangle, \quad (1.17)$$

y surge nuevamente la pregunta natural de cómo se comporta el flujo de Ricci en $\mathcal{H}_{q,n}$.

Definición 1.6.2. Sea $\mu_0 \in \mathcal{H}_{q,n}$. El flujo de corchetes r -normalizado que empieza en μ_0 es la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{d}{dt}\mu^r(t) = \delta_{\mu^r(t)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{Ric}_{\mu^r(t)} + r(t)I \end{pmatrix}, \quad \mu^r(0) = \mu_0. \quad (1.18)$$

Otra forma equivalente de escribir la ecuación diferencial (1.18) es la siguiente:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mu_{\mathfrak{k}}^r = \mu_{\mathfrak{k}}^r(\text{Ric}_{\mu^r} \cdot, \cdot) + \mu_{\mathfrak{k}}^r(\cdot, \text{Ric}_{\mu^r} \cdot) + 2r\mu_{\mathfrak{k}}^r(\cdot, \cdot), \\ \frac{d}{dt}\mu_{\mathfrak{p}}^r = \delta_{\mu_{\mathfrak{p}}^r}(\text{Ric}_{\mu^r})\mu_{\mathfrak{p}}^r + r\mu_{\mathfrak{p}}^r. \end{cases} \quad \mu_{\mathfrak{k}}^r(0) + \mu_{\mathfrak{p}}^r(0) = \mu_0|_{\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}}, \quad (1.19)$$

Entonces nos preguntamos de qué manera están relacionados el flujo de Ricci normalizado y el flujo de corchetes normalizado.

Teorema 1.6.3. [L4, Teorema 3.10] Dada (M, g_0) una variedad Riemanniana homogénea simplemente conexa y $(G_{\mu_0}/K_{\mu_0}, g_{\mu_0})$, $\mu_0 \in \mathcal{H}_{q,n}$, una presentación como espacio homogéneo, consideremos $g^r(t)$ la solución al flujo de Ricci r -normalizado que comienza en g_0 (ver (1.16)) y $\mu^r(t)$ la solución al flujo de corchetes que empieza en μ_0 (ver (1.18)). Entonces existe una familia monoparamétrica de difeomorfismos $\varphi^r(t) : M \rightarrow G_{\mu^r(t)}/K_{\mu^r(t)}$, tal que $g^r(t) = \varphi^r(t)^*g_{\mu^r(t)}$, para todo $t \in (a, b)$.

1.7. Convergencia de variedades

En esta sección, asumiremos que todas las variedades son conexas y todas las métricas Riemannianas son suaves (i.e. C^∞) y completas.

Definición 1.7.1. Sea M una variedad diferenciable. Una sucesión g_k de métricas Riemannianas en M se dice que converge (suavemente) a la métrica Riemanniana g cuando $k \rightarrow \infty$ (y se lo denota $g_k \rightarrow g$) si para todo subconjunto compacto $K \subset M$, el tensor $g_k - g$ y sus derivadas covariantes de todos los órdenes (con respecto a una conexión fija) convergen uniformemente a cero en K .

Una *variedad Riemanniana punteada* (M, g, p) es una variedad Riemanniana (M, g) con un punto $p \in M$ (punto base o punto de referencia).

En la siguiente definición vamos a introducir una noción de convergencia que es invariante por difeomorfismos.

Definición 1.7.2. (Topología punteada suave o de Cheeger-Gromov) Una sucesión (M_k, g_k, p_k) de variedades Riemannianas punteadas se dice que converge en la topología punteada a una variedad Riemanniana punteada (M, g, p) cuando $k \rightarrow \infty$ si existen

- una sucesión de conjuntos abiertos $\Omega_k \subset M$ que contienen a p , tal que para todo subconjunto compacto $K \subset M$ se satisfaga que $K \subset \Omega_k$ para k suficientemente grande;
- una sucesión de mapas suaves $\phi_k : \Omega_k \rightarrow M_k$ los cuales son difeomorfismos sobre su imagen que satisfagan que $\phi_k(p) = p_k$ para todo k ;

tales que

$$\phi_k^* g_k \rightarrow g$$

suavemente cuando $k \rightarrow \infty$ en M (o más precisamente, en todo subconjunto compacto de M).

Observar que en el caso homogéneo los puntos bases p_k y p no juegan ningún rol importante en la convergencia en el sentido que usando la homogeneidad podemos cambiarlos por otra sucesión $q_k \in M_k$ y $q \in M$. En [L3] se estudia esta convergencia en el caso homogéneo. Para más información acerca del rol de los puntos base en el caso no homogéneo ver por ejemplo [T, Sección 7.1].

En lo que sigue, vamos a introducir una definición para luego enunciar un teorema que utilizaremos en los siguientes capítulos.

Definición 1.7.3. El radio de inyectividad de Lie de $(G_\mu/K_\mu, g_\mu)$, $\mu \in \mathcal{H}_{q,n}$, es el mayor $r_\mu > 0$ tal que

$$\psi_\mu := \pi_\mu \circ \exp_\mu : B(0, r_\mu) \rightarrow G_\mu/K_\mu$$

es un difeomorfismo sobre su imagen, donde $\exp_\mu : \mathfrak{g} \rightarrow G_\mu$ es la exponencial de Lie, $\pi_\mu : G_\mu \rightarrow G_\mu/K_\mu$ es la proyección al cociente y $B(0, r_\mu)$ denota la bola euclídea de radio r_μ en $(\mathfrak{p}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Teorema 1.7.4. [L3, Teorema 6.14] Sea μ_k una sucesión tal que $\mu_k \rightarrow \lambda$ en $\mathcal{H}_{q,n}$, cuando $k \rightarrow \infty$, y supongamos que $\inf_k r_{\mu_k} > 0$. Entonces existe una subsucesión de $(G_{\mu_k}/K_{\mu_k}, g_{\mu_k})$ que converge en la topología punteada a una variedad homogénea localmente isométrica a $(G_\lambda/K_\lambda, g_\lambda)$.

Observación 1.7.5. El enunciado del teorema original es más largo que el que acabamos de dar.

Observación 1.7.6. En [L3, Lema 6.19] se probó que si $\mu \in \mathcal{H}_{0,n}$ entonces $r_\mu \geq \frac{\pi}{\|\mu\|}$ y entonces la hipótesis del radio de inyectividad en el teorema anterior no es necesaria pues siempre se cumple.

1.8. Sistemas dinámicos y conjuntos límites

En esta sección vamos a definir algunos conceptos de ecuaciones diferenciales y vamos a enunciar algunos teoremas que usaremos más adelante (para más información ver por ejemplo [F]). Cabe aclarar que estamos interesados en estudiar sistemas no lineales y autónomos como lo es la ecuación del flujo de corchetes en el caso homogéneo. Consideremos entonces de ahora en adelante el siguiente sistema de ecuaciones no lineales y autónomo con condición inicial:

$$x' = f(x), \quad x(0) = x_0, \tag{1.20}$$

donde

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{y} \quad f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix},$$

es una función de un subconjunto de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n . La hipótesis general de partida será que las funciones $f_i(x_1, \dots, x_n)$ y $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1 \dots, n$, son continuas en un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

El siguiente teorema afirma la existencia de la solución en tiempo corto:

Teorema 1.8.1. *Dado $x_0 \in \Omega$, existe una función $x(t)$ definida en un intervalo maximal abierto (α, ω) tal que*

$$x' = f(x), \quad x(0) = x_0.$$

Un teorema básico pero que usaremos en varias oportunidades y que nos proporciona información acerca del intervalo de definición de la solución es el siguiente:

Teorema 1.8.2. *Si $x(t)$ permanece en un subconjunto cerrado y acotado $B \subset \Omega$ para todo $t \in [t_0, \omega)$, entonces $\omega = \infty$.*

Resolver explícitamente este tipo de sistemas en muchos casos resulta imposible, por lo que el objetivo, en general, es entender cualitativamente el comportamiento de sus soluciones. Es decir, entender el *diagrama de fases* del sistema, que es el conjunto de las trayectorias (recorrido) de las soluciones en \mathbb{R}^n . Con este objetivo, si $x(t), y(t)$ son dos soluciones del sistema $x' = f(x)$, es muy natural preguntarse si las trayectorias pueden cortarse en algún punto. La respuesta a esta pregunta está dada por la siguiente proposición:

Proposición 1.8.3. *Sean $x(t), y(t)$ dos soluciones de $x' = f(x)$ tales que $x(t_1) = y(t_2)$, para ciertos $t_1, t_2, t_1 \neq t_2$. Entonces $y(t) = x(t + t_1 - t_2)$ para todo t del intervalo de definición de $y(t)$. Como consecuencia, los recorridos en \mathbb{R}^n de las dos soluciones $x(t), y(t)$, o bien no tienen ningún punto en común o bien coinciden y $x(t), y(t)$ satisfacen $y(t) = x(t + c)$ para un cierto $c \in \mathbb{R}$.*

Por otro lado, también surge la siguiente pregunta muy natural: ¿puede una trayectoria cortarse a sí misma?

Proposición 1.8.4. *Si para una solución $x(t)$ de $x' = f(x)$ existen $t_1, t_2, t_1 \neq t_2$ tales que $x(t_1) = x(t_2)$, entonces:*

- (i) O bien $x(t) = x \in \Omega$.
- (ii) O bien existe un mínimo número positivo T tal que $x(t + T) = x(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Las dos proposiciones anteriores nos dan un panorama de cómo se comportan las trayectorias del sistema. Aún así el comportamiento puede ser muy complicado. En el caso de las trayectorias acotadas en \mathbb{R}^n , una pregunta muy natural que surge es si existe $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$, para $x(t)$ una solución del sistema. Para comenzar a entender esta pregunta enunciemos la siguiente definición:

Definición 1.8.5. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $x(t)$ la solución al sistema (1.20) con condición inicial $x(0) = x_0$. Un punto $y \in \Omega$ es omega-límite de x_0 si existe una sucesión de tiempos $t_k \rightarrow \infty$ tal que $y = \lim_{k \rightarrow \infty} x(t_k)$. El conjunto omega-límite de x_0 , denotado ω -límite de x_0 , es el formado por todos los puntos omega-límite de x_0 .

El siguiente teorema nos va a proporcionar propiedades del conjunto ω -límite:

Teorema 1.8.6. *Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $x(t)$ la solución al sistema (1.20) con condición inicial $x(0) = x_0$. Si $x(t)$ es acotada, entonces el conjunto ω -límite de x_0 es no vacío, acotado, cerrado, invariante y conexo.*

En sistemas planos, surgen con frecuencia los *ciclos límites*, es decir, el conjunto ω -límite consta de una sola trayectoria y es periódica. A continuación enunciaremos un teorema muy conocido en sistemas planos.

Teorema 1.8.7. *(Poincaré - Bendixson) Sean $n = 2$, $x_0 \in \mathbb{R}^2$ y $x(t)$ la solución al sistema (1.20) con condición inicial $x(0) = x_0$. Si $x(t)$ es acotada y el conjunto ω -límite no contiene ningún punto fijo (i.e. $f(y) = 0$), entonces es una trayectoria periódica.*

Este teorema garantiza que el comportamiento dinámico de los sistemas autónomos planos está descrito de manera sencilla. La pregunta es qué sucede para $n \geq 3$. En dimensiones superiores a 2 “hay más espacio”, y una órbita puede acercarse, alejarse y arrollarse alrededor de sí misma sin cortarse. Una diferencia aparece en el fenómeno de la *recurrencia*, es decir, cuando en todo entorno de x_0 existen infinitos puntos de la trayectoria (x_0 es omega-límite de x_0). Su característica fundamental es que el conjunto ω -límite de cada una de las trayectoria no cerradas muchas veces está lejos de ser un punto o un ciclo límite. Además de este tipo de fenómeno hay otros aún más extraños. A modo de ejemplo citaremos brevemente el sistema de Lorenz, el cual tiene una dinámica impredecible,

$$\begin{cases} x' = -\sigma x + \sigma y, \\ y' = -xz + rx - y, \\ z' = xy - bz. \end{cases}$$

Este sistema fue analizado por Lorenz, quien observó que para ciertos valores de los parámetros encontraba dinámicas acotadas y no periódicas, unido al fenómeno de la dependencia sensible de las condiciones iniciales (una de las características más importantes de la dinámica caótica).

Capítulo 2

El flujo de Ricci en una clase de solvariedades

El objetivo de este capítulo es estudiar el flujo de Ricci en una clase particular de solvariedades, más precisamente, aquellas cuya álgebra de Lie posee un ideal abeliano de codimensión 1. Para hacer esto analizaremos el flujo de corchetes (ver Definición 1.5.1 en la Sección 1.5 del Capítulo 1) que empieza en las álgebras de Lie métricas que corresponden a las solvariedades mencionadas anteriormente. Veremos cuál es la ecuación diferencial del flujo de corchetes, cómo evolucionan las soluciones y cuáles son los intervalos de definición de las mismas. Además, demostraremos que el conjunto ω -límite es un punto y veremos algunos comportamientos de las soluciones y de los límites. También daremos una condición suficiente para que algunas soluciones sean de Tipo-III. Probaremos que para toda sucesión, existe una subsucesión en la cual el flujo de Ricci converge a una métrica plana, y por lo tanto para evitar este tipo de convergencia analizaremos una normalización del flujo de corchetes. Presentaremos una función monótona decreciente a lo largo del flujo normalizado, la cual nos permitirá demostrar que para toda sucesión, existe una subsucesión en la cual el flujo de corchetes normalizado converge a un solitón algebraico y así poder determinar cuáles de los límites corresponden a variedades planas. Por último, estudiaremos el comportamiento de las curvaturas seccionales a lo largo del flujo. Probaremos que si un grupo de Lie en esta clase admite una métrica Riemanniana invariante a izquierda con todas sus curvaturas seccionales negativas, entonces las curvaturas seccionales de cualquier solución del flujo de Ricci se convertirán en negativas en tiempo finito. También observaremos que ésta es una propiedad de esta clase de solvariedades y no de cualquier solvariedad. Este capítulo se basa en el artículo [A].

2.1. Flujo de corchetes en una clase de solvariedades

En esta sección estudiaremos el flujo de corchetes de un álgebra de Lie métrica soluble con un ideal abeliano de codimensión 1, donde un *álgebra de Lie métrica* simplemente será un par $(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ con \mathfrak{g} un álgebra de Lie y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interno en \mathfrak{g} . Observar que cada álgebra de Lie métrica $(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, con \mathfrak{g} soluble, determina una *solvariedad*, i.e. un grupo de Lie soluble simplemente conexo G junto con una métrica Riemanniana invariante a izquierda g .

Consideremos $(\mathbb{R}^{n+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interno canónico en \mathbb{R}^{n+1} . Si la dimensión del álgebra de Lie es $(n + 1)$, entonces salvo isomorfismo podemos asumir que el corchete de Lie tiene

la siguiente forma con respecto a la base canónica $\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$:

$$\mu_A(e_0, e_i) = Ae_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad \mu_A(e_i, e_j) = 0, \quad \forall i, j \geq 1, \quad A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}),$$

donde pensamos a $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ como un operador actuando en \mathbb{R}^n , el subespacio generado por $\{e_1, \dots, e_n\}$ (i.e. el ideal abeliano de codimensión 1). A partir de ahora, denotaremos a estas álgebras por $(\mathbb{R}^{n+1}, \mu_A)$, o simplemente μ_A .

Lema 2.1.1. *Si $A_0 \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$, entonces el flujo de corchetes que empieza en μ_{A_0} está dado por $\mu_{A(t)}$, $t \in (T_-, T_+)$, donde $A(t)$ satisface la siguiente ecuación diferencial ordinaria:*

$$\frac{d}{dt}A = -\operatorname{tr}(S(A)^2)A + \frac{1}{2}[A, [A, A^t]] - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(A)[A, A^t], \quad A(0) = A_0. \quad (2.1)$$

Demostración. Usando la fórmula para el operador de Ricci de una solvariedad (ver (1.7) o [L1, Sección 4]), obtenemos que el operador de Ricci de (G_{μ_A}, g_{μ_A}) con respecto a la base canónica es representado por la siguiente matriz:

$$\operatorname{Ric}_{\mu_A} = \begin{pmatrix} -\operatorname{tr}(S(A)^2) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}[A, A^t] - \operatorname{tr}(A)S(A) \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

donde $S(A) = \frac{1}{2}(A + A^t)$ es la parte simétrica de la matriz A y $\operatorname{tr}(A)$ es la traza. Entonces,

$$\begin{aligned} \delta_{\mu_A}(\operatorname{Ric}_{\mu_A})(e_0, e_i) &= \mu_A(\operatorname{Ric}_{\mu_A} e_0, e_i) + \mu_A(e_0, \operatorname{Ric}_{\mu_A} e_i) - \operatorname{Ric}_{\mu_A} \mu_A(e_0, e_i) \\ &= -\operatorname{tr}(S(A)^2)Ae_i + A \operatorname{Ric}_{\mu_A}|_{\mathbb{R}^n} e_i - \operatorname{Ric}_{\mu_A}|_{\mathbb{R}^n} Ae_i \\ &= -\operatorname{tr}(S(A)^2)Ae_i + [A, \operatorname{Ric}_{\mu_A}|_{\mathbb{R}^n}]e_i \\ &= \left(-\operatorname{tr}(S(A)^2)A + \frac{1}{2}[A, [A, A^t]] - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(A)[A, A^t]\right) e_i, \end{aligned}$$

y por otro lado, tenemos que $\delta_{\mu_A}(\operatorname{Ric}_{\mu_A})(e_i, e_j) = 0$, para todo $i, j \geq 1$, pues $\mu_A|_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} = 0$. Por lo tanto,

$$\delta_{\mu_A}(\operatorname{Ric}_{\mu_A}) = \mu_B, \quad \text{donde } B = -\operatorname{tr}(S(A)^2)A + \frac{1}{2}[A, [A, A^t]] - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(A)[A, A^t].$$

Entonces, esta familia de álgebras de Lie es invariante por el flujo de corchetes, el cual es equivalente a (2.1). Además, el intervalo maximal de definición de $\mu_{A(t)}$, es de la forma (T_-, T_+) para $-\infty \leq T_- < 0 < T_+ \leq \infty$, ya que (2.1) es una ecuación diferencial ordinaria. \square

Así, dada una matriz A_0 , tenemos que el flujo de corchetes que empieza en μ_{A_0} es equivalente a una ecuación de evolución para una curva de matrices con condición inicial A_0 . De ahora en adelante, muchas veces pensaremos al flujo de corchetes que empieza en μ_{A_0} simplemente como esta evolución.

Observación 2.1.2. Notar que los únicos puntos fijos del sistema (2.1) son las matrices antisimétricas, las cuales son precisamente las solvariedades planas de la forma μ_A , pues por (2.2) ellas son precisamente las Ricci-planas (ver [AK] y [Mil]).

Proposición 2.1.3. *Para cualquier $A_0 \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (i) μ_{A_0} es un solitón algebraico.
- (ii) A_0 es una matriz normal o A_0 es una matriz nilpotente tal que $[A_0, [A_0, A_0^t]] = cA_0$, para algún $c \in \mathbb{R}$.

Más aún, en tal caso, la evolución del flujo de corchetes está respectivamente dada por

$$A(t) = (2 \operatorname{tr}(S(A_0)^2)t + 1)^{-1/2} A_0 \quad \text{o} \quad A(t) = ((-\|A_0\|^2 + c)t + 1)^{-1/2} A_0.$$

Demostración. Suponiendo (i), tenemos los siguientes dos casos:

- Si el nilradical de μ_{A_0} (el ideal nilpotente maximal de μ_{A_0}) tiene dimensión n , entonces A_0 es una matriz normal (ver [L1, Teorema 4.8]).
- Si el nilradical de μ_{A_0} tiene dimensión $n + 1$, entonces μ_{A_0} es nilpotente y por lo tanto A_0 es una matriz nilpotente. Además, de (2.2), tenemos que

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\|A_0\|^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}[A_0, A_0^t] \end{pmatrix} = \operatorname{Ric}_{\mu_{A_0}} = cI + D.$$

Se sigue que $D(e_0) = \lambda e_0$. También, sabemos que $[\operatorname{ad}_{\mu_{A_0}}(e_0), D] = -\operatorname{ad}_{\mu_{A_0}}(D(e_0))$, por lo tanto

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}[A_0, [A_0, A_0^t]] \end{pmatrix} = [\operatorname{ad}_{\mu_{A_0}}(e_0), \operatorname{Ric}_{\mu_{A_0}}] = [\operatorname{ad}_{\mu_{A_0}}(e_0), D] = -\lambda \operatorname{ad}_{\mu_{A_0}}(e_0) = -\lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_0 \end{pmatrix}.$$

Recíprocamente, si A_0 es una matriz normal, entonces μ_{A_0} es un solitón algebraico (ver [L1, Teorema 4.8]) y si A_0 es una matriz nilpotente que satisface $[A_0, [A_0, A_0^t]] = cA_0$, entonces

$$\operatorname{Ric}_{\mu_{A_0}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\|A_0\|^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}[A_0, A_0^t] \end{pmatrix} = \frac{c-\|A_0\|^2}{2}I + \begin{pmatrix} -\frac{c}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{c}{2}I + \frac{1}{2}\|A_0\|^2I + \frac{1}{2}[A_0, A_0^t] \end{pmatrix},$$

y es fácil ver que $\begin{pmatrix} -\frac{c}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{c}{2}I + \frac{1}{2}\|A_0\|^2I + \frac{1}{2}[A_0, A_0^t] \end{pmatrix}$ es una derivación de μ_{A_0} , y por lo tanto, el ítem (i) es probado.

Finalmente, si μ_{A_0} es un solitón algebraico, la familia $A(t) = a(t)A_0$ es invariante por el flujo. Por lo tanto, tenemos que

- Si A_0 es normal, el flujo de corchetes es equivalente a la siguiente ecuación diferencial para $a = a(t)$:

$$a' = -\operatorname{tr}(S(A_0)^2)a^3, \quad a(0) = 1,$$

y por lo tanto, la solución es $A(t) = (2 \operatorname{tr}(S(A_0)^2)t + 1)^{-1/2} A_0$.

- Si A_0 es nilpotente, entonces el flujo de corchetes es equivalente a

$$a' = \frac{-\|A_0\|^2 + c}{2}a^3, \quad a(0) = 1,$$

y por lo tanto, la solución es $A(t) = ((-\|A_0\|^2 + c)t + 1)^{-1/2} A_0$.

□

En el siguiente lema estudiaremos cómo evoluciona la solución a la ecuación (2.1).

Lema 2.1.4. Dada $A_0 \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$, el flujo de corchetes que empieza en μ_{A_0} es $\mu_{A(t)}$, con $A(t)$ de la siguiente forma:

$$A(t) = a(t)\varphi_t A_0 \varphi_t^{-1}, \quad (2.3)$$

donde $a(t)$ es una función a valores reales, positiva, no-creciente, y $\varphi_t \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, para cada t .

Demostración. Sea $h(t) = \begin{pmatrix} b(t) & 0 \\ 0 & \varphi_t \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$, con $b(t)$ una función a valores reales y $\varphi_t \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, entonces

$$-\mathrm{Ric}_{\mu(t)} h = - \begin{pmatrix} -\mathrm{tr}(S(A)^2)b(t) & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2}[A, A^t] - \mathrm{tr}(A)S(A)) \varphi_t \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, el mapa h en (2) de Teorema 1.5.3 tiene la siguiente forma:

$$h(t) = \begin{pmatrix} b(t) & 0 \\ 0 & \varphi_t \end{pmatrix}$$

y entonces por (4) del mismo teorema sabemos que

$$\mu(t) = h(t) \cdot \mu_{A_0} = \mu_{\frac{1}{b(t)} \varphi_t A_0 \varphi_t^{-1}}.$$

Además,

$$\begin{cases} b'(t) = \mathrm{tr}(S(A(t))^2)b(t), \\ b(0) = 1. \end{cases}$$

Luego, tenemos que b es una función positiva y no-decreciente. Si $a(t) = \frac{1}{b(t)}$, se sigue entonces que $a(t)$ es una función positiva y no-creciente. \square

De manera ilustrativa, vamos a analizar un ejemplo a lo largo de todo el capítulo.

Ejemplo 2.1.5. Sea $A_0 := \begin{pmatrix} 0 & x_0 \\ y_0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})$. Proponiendo como solución de la ecuación diferencial (2.1) a la matriz

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & x(t) \\ y(t) & 0 \end{pmatrix},$$

podemos observar que esta familia de matrices es invariante por el flujo y (2.1) es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en las variables $x(t) = x$ e $y(t) = y$:

$$\begin{cases} x' = x(x+y)(-\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y), & x(0) = x_0, \\ y' = y(x+y)(-\frac{3}{2}y + \frac{1}{2}x), & y(0) = y_0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Luego, para entender el flujo de corchetes que empieza en μ_{A_0} , debemos entender el sistema (2.4). El objetivo no es resolver el sistema, que de hecho, a simple vista, no parece nada fácil de resolver siendo que estamos trabajando en matrices 2×2 , es decir, la dimensión más baja posible, y con la menor cantidad de parámetros. Para visualizar un poco el problema, veamos la Figura 2.1 dibujada con Maple, en donde se puede observar a y en función de x . Notemos que es suficiente analizar $0 \leq x_0$, ya que si (x, y) es la solución del sistema (2.4) que empieza en (x_0, y_0) , entonces $(-x, -y)$ es la solución que empieza en $(-x_0, -y_0)$.

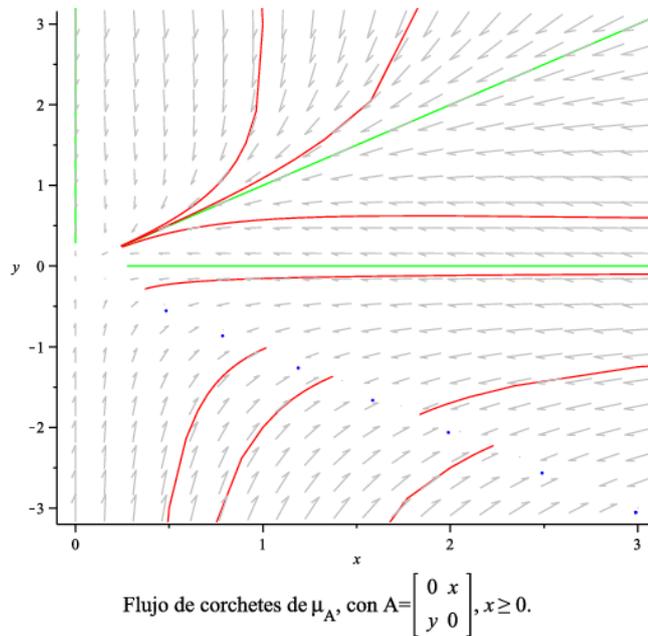


Figura 2.1:

Quizás el sistema resulta un poco más ameno para el caso en el cual $x_0 y_0 > 0$. Por ejemplo, algo que resulta fácil de ver es que si $x(t)$ e $y(t)$ están definidas en $[0, \infty)$ entonces $x(t), y(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. En efecto, tenemos tres posibles casos, $x_0 = y_0$, $x_0 > y_0$ o $x_0 < y_0$. Si $x_0 = y_0$, entonces A_0 es una matriz simétrica, y por lo tanto normal. De lo que se sigue que el flujo de corchetes evoluciona como en la Proposición 2.1.3 y $A(t) \rightarrow 0$. Si $x_0 < y_0$, entonces $x(t) < y(t)$, para todo t (ver Proposición 1.8.3). Pero $y(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, pues de (2.4) obtenemos que $y' < -\frac{3}{2}y^3$, y por lo tanto y está mayorada por una función que tiende a cero. Luego, como $x(t) < y(t)$, entonces $x(t)$ también tiende a cero. Si $x_0 > y_0$, de manera análoga a $x_0 < y_0$, se tiene que $x(t), y(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

La pregunta que surge para este ejemplo ahora es la siguiente: ¿Están $x(t)$ e $y(t)$ definidas en $[0, \infty)$? Observando la figura, podemos ver que las trayectorias parecen permanecer en un conjunto compacto. Si esto fuera verdad, entonces del Teorema 1.8.2 se seguiría que las soluciones están definidas en el intervalo $[0, \infty)$.

También podemos notar en la figura que $x(t)$ parece tender a $-y(t)$, es decir, $A(t)$ parece tender a una matriz antisimétrica. Observemos que lo que sí parece más difícil de conjeturar en el caso $x_0 y_0 < 0$ es el límite de las soluciones. Nuevamente haremos hincapié en que sólo nos interesará un análisis cualitativo de las soluciones, por lo que no vamos a calcular explícitamente cuál es el límite de las soluciones en caso de existir.

En la siguiente proposición analizaremos el intervalo maximal de tiempo de la solución $A(t)$. Un punto importante a observar aquí es que $-\infty < T_-$ pues $(G_{\mu_{A(t)}}, g_{\mu_{A(t)}})$ siempre tiene curvatura escalar no-positiva (ver (2.2)).

Proposición 2.1.6. $A(t)$ está definida para todo $t \in (T_-, \infty)$ (i.e. $T_+ = \infty$).

Demostración. Por la bilinealidad del producto interno tenemos que para $A = A(t)$

$$\frac{d}{dt}\|A\|^2 = \frac{d}{dt}\langle A, A \rangle = 2\langle A, \frac{d}{dt}A \rangle,$$

y reemplazando por $\frac{d}{dt}A$ (ver (2.1))

$$\frac{d}{dt}\|A\|^2 = 2\langle A, -\operatorname{tr}(S(A)^2)A \rangle + 2\langle A, \frac{1}{2}[A, [A, A^t]] \rangle - 2\langle A, \frac{1}{2}\operatorname{tr}(A)[A, A^t] \rangle,$$

pero como $\langle A, [A, [A, A^t]] \rangle = -\|[A, A^t]\|^2$ y $\langle A, [A, A^t] \rangle = 0$ obtenemos que

$$\frac{d}{dt}\|A\|^2 = -2\operatorname{tr}(S(A)^2)\|A\|^2 - \|[A, A^t]\|^2, \quad (2.5)$$

y por lo tanto

$$\frac{d}{dt}\|A\|^2 \leq 0,$$

lo que implica que $\|A\|^2$ decrece y entonces $A = A(t)$ está definida para todo $t \in (T_-, \infty)$ ya que permanece en un conjunto compacto (ver Teorema 1.8.2). \square

Observación 2.1.7. Por Teorema 1.5.3 y la proposición anterior tenemos que el flujo de Ricci que empieza en cualquier solvariedad $(G_{\mu_{A_0}}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ está definido para $t \in (T_-, \infty)$. Estas soluciones son llamadas soluciones inmortales.

Ahora sí podemos afirmar que si $x_0y_0 > 0$ en el Ejemplo 2.1.5 entonces $x(t)$ e $y(t)$ están definidas en $[0, \infty)$, y por lo tanto, $A(t)$ converge a la matriz nula. Pero aún no sabemos nada de lo que sucede cuando $x_0y_0 < 0$.

En las siguientes proposiciones analizaremos características de las soluciones.

Proposición 2.1.8. *Supongamos que $A(t_k) \rightarrow A_\infty$, para alguna sucesión $t_k \rightarrow \infty$. Entonces $\operatorname{Spec}(A_\infty) = a_\infty \operatorname{Spec}(A_0)$, para algún $a_\infty \in \mathbb{R}$. Aquí $\operatorname{Spec}(B)$ denota el conjunto de los n autovalores complejos de la matriz $B \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$.*

Demostración. Por Lema 2.1.4, sabemos que $A(t) = a(t)\varphi_t A_0 \varphi_t^{-1}$, por lo tanto,

$$\operatorname{Spec}(A(t_k)) = a(t_k) \operatorname{Spec}(\varphi_{t_k} A_0 \varphi_{t_k}^{-1}) = a(t_k) \operatorname{Spec}(A_0), \quad \forall t_k \in (T_-, \infty).$$

Entonces, como $A(t_k) \rightarrow A_\infty$, tenemos que

$$\operatorname{Spec}(A_\infty) = a_\infty \operatorname{Spec}(A_0),$$

donde $a_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} a(t_k)$ (recordar que por Lema 2.1.4, $a(t)$ es una función positiva y no-creciente). \square

Proposición 2.1.9. *$\operatorname{tr}(S(A(t))^2)$ es una función estrictamente decreciente si A_0 no es antisimétrica. Más aún, $\operatorname{tr}(S(A(t))^2) \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$.*

Demostración. Recordemos que $S(A) = \frac{1}{2}(A + A^t)$, y por lo tanto,

$$\operatorname{tr}(S(A)^2) = \frac{1}{2}\|A\|^2 + \frac{1}{2}\operatorname{tr}(A^2). \quad (2.6)$$

Como en Proposición 2.1.6 hemos estudiado $\frac{d}{dt}\|A\|^2$, sólo analizaremos $\frac{d}{dt}\operatorname{tr}(A^2)$. Usando (2.1), obtenemos que

$$\frac{d}{dt}\operatorname{tr}(A^2) = \frac{d}{dt}\langle A, A^t \rangle = \langle \frac{d}{dt}A, A^t \rangle + \langle A, \frac{d}{dt}A^t \rangle = 2\langle \frac{d}{dt}A, A^t \rangle = -2\operatorname{tr}(S(A)^2)\operatorname{tr}(A^2). \quad (2.7)$$

Por lo tanto, se sigue de (2.5) y (2.7) que

$$\frac{d}{dt} \operatorname{tr}(S(A)^2) = -2 \operatorname{tr}(S(A)^2)^2 - \frac{1}{2} \|[A, A^t]\|^2 \leq 0,$$

y si existe t_0 tal que $\frac{d}{dt}|_{t=t_0} \operatorname{tr}(S(A)^2) = 0$, entonces $A(t_0)$ es antisimétrica y luego $A(t) = A(t_0)$, para todo t . Recíprocamente, si A_0 es antisimétrica, tenemos que $\frac{d}{dt} \operatorname{tr}(S(A)^2) = 0$. Por lo tanto, $\operatorname{tr}(S(A)^2)$ es estrictamente decreciente si A_0 no es antisimétrica.

Además,

$$\frac{d}{dt} \operatorname{tr}(S(A)^2) \leq -2 \operatorname{tr}(S(A)^2)^2,$$

y entonces $\operatorname{tr}(S(A)^2)$ es mayorada por

$$x(t) = \frac{1}{2t + (\operatorname{tr}(S(A(0))^2))^{-1}},$$

la solución de $\frac{d}{dt}x = -2x^2$. Por lo tanto, $\operatorname{tr}(S(A(t))^2) \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$. \square

Después de estas proposiciones ya sabemos que en el Ejemplo 2.1.5, si $A(t)$ tiende a A_∞ entonces

$$A_\infty = \begin{pmatrix} 0 & x_\infty \\ -x_\infty & 0 \end{pmatrix}.$$

Recordemos que si G_{μ_A} es el grupo de Lie soluble simplemente conexo con álgebra de Lie $(\mathbb{R}^{n+1}, \mu_A)$, entonces g_{μ_A} denota la métrica Riemanniana invariante a izquierda en G_{μ_A} tal que $g_{\mu_A}(e) = \langle \cdot, \cdot \rangle$, donde e es la identidad del grupo G_{μ_A} y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno canónico en \mathbb{R}^{n+1} .

Corolario 2.1.10. *Si $A(t) \rightarrow A_\infty$, cuando $t \rightarrow \infty$, entonces A_∞ es una matriz antisimétrica y para toda sucesión $t_k \rightarrow \infty$, existe una subsucesión de $(G_{\mu_{A(t_k)}}, g_{\mu_{A(t_k)}})$, la cual converge en la topología punteada a una variedad localmente isométrica a $(G_{\mu_{A_\infty}}, g_{\mu_{A_\infty}})$, la cual es plana.*

Demostración. Por Proposición 2.1.9, sabemos que $S(A(t)) \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$, por lo tanto, A_∞ es antisimétrica y entonces $(G_{\mu_{A_\infty}}, g_{\mu_{A_\infty}})$ es plana (ver Observación 2.1.2).

Finalmente, como $\mu_{A(t)} \rightarrow \mu_{A_\infty}$, por Teorema 1.7.4 y Observación 1.7.6 (ver también [L3, Corolario 6.20]), para toda sucesión $t_k \rightarrow \infty$, existe una subsucesión de $(G_{\mu_{A(t_k)}}, g_{\mu_{A(t_k)}})$, la cual converge en la topología punteada a una variedad localmente isométrica a $(G_{\mu_{A_\infty}}, g_{\mu_{A_\infty}})$, la cual es plana, por lo visto anteriormente. \square

En la siguiente proposición, probamos que bajo una hipótesis adicional, la convergencia es suave.

Proposición 2.1.11. *Si $\operatorname{Spec}(A_0) \not\subseteq i\mathbb{R}$ y $A(t) \rightarrow A_\infty$, cuando $t \rightarrow \infty$, entonces $g_{\mu_{A(t)}} \rightarrow g_{\mu_{A_\infty}}$ suavemente en \mathbb{R}^{n+1} .*

Demostración. Para cada μ_A , definimos $\psi : \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^n \rightarrow G_{\mu_A}$ por

$$\psi(r, x) = \exp_{\mu_A}(re_0) \exp_{\mu_A}(x), \quad r \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.8)$$

donde $\exp_{\mu_A} : (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^n, \mu_A) \rightarrow G_{\mu_A}$ es la exponencial de Lie de G_{μ_A} .

Sea $\varphi : (\mathbb{R}^{n+1}, \mu_A) \rightarrow (\mathfrak{gl}_{n+1}(\mathbb{R}), [\cdot, \cdot])$ la transformación lineal tal que $\varphi(e_0) = X_0$ y $\varphi(e_i) = X_i$, $i = 1, \dots, n$, donde $X_0 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $X_i = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{e}_i^t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Entonces φ resulta un isomorfismo de álgebras de Lie.

Por lo tanto, bajo el isomorfismo φ , tenemos que

$$\psi(r, x) = \exp(rX_0) \exp(x), \quad r \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

donde \exp es la función exponencial de las matrices.

Entonces

$$\psi(r, x) = \exp(rX_0) \exp(x) = \exp(rX_0) \exp(x_1 X_1 + \dots + x_n X_n),$$

pero $\exp(rX_0) = \begin{pmatrix} \exp(rA) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\exp(x) = \begin{pmatrix} I & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, por lo tanto,

$$\psi(r, x) = \begin{pmatrix} \exp(rA) & \exp(rA)x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es fácil ver que si $\text{Spec}(A) \not\subseteq i\mathbb{R}$ o $A = 0$, entonces ψ es un difeomorfismo. Por lo tanto, como $\text{Spec}(A_0) \not\subseteq i\mathbb{R}$, tenemos que $\text{Spec}(A(t)) \not\subseteq i\mathbb{R}$ y $\text{Spec}(A_\infty) \not\subseteq i\mathbb{R}$ o $A_\infty = 0$ por Proposición 2.1.8. Luego, $g_{\mu_{A(t)}} \rightarrow g_{\mu_{A_\infty}}$ suavemente en \mathbb{R}^n (ver [L3, Nota 6.11]). \square

De la Proposición anterior se sigue directamente que si μ_{A_0} es completamente soluble, es decir, $\text{Spec}(\text{ad}_{\mu_{A_0}} x) \subset \mathbb{R}$, para todo x , entonces la convergencia es suave. En la siguiente proposición daremos una prueba alternativa de este hecho.

Proposición 2.1.12. *Si $\text{Spec}(A_0) \subset \mathbb{R}$ y $A(t) \rightarrow A_\infty$ entonces $g_{\mu_{A(t)}} \rightarrow g_{\mu_{A_\infty}}$ suavemente en \mathbb{R}^n .*

Demostración. Si $\text{Spec}(A_0) \subset \mathbb{R}$, entonces $\text{Spec}(A(t)) \subset \mathbb{R}$ para todo t . Por lo tanto, $\mu_{A(t)}$ es completamente soluble para todo t , de lo que se sigue que $g_{\mu_{A(t)}} \rightarrow g_{\mu_{A_\infty}}$ suavemente en \mathbb{R}^n (ver [L3, Corolario 6.20]). \square

Recordar que si la norma del tensor de Riemann decae más lento que la función $\frac{C}{t}$, donde C es una constante, entonces la solución del flujo de Ricci es una solución de Tipo-III (ver Definición 1.1.3 en la Sección 1.1 del Capítulo 1).

Proposición 2.1.13. *Para toda μ_{A_0} con $\text{tr}(A_0^2) \geq 0$, el flujo de Ricci $g(t)$ con $g(0) = g_{\mu_{A_0}}$ es una solución de Tipo-III, para alguna constante C_{n+1} que sólo depende de la dimensión $n + 1$.*

Demostración. En Proposición 2.1.6, probamos que $\mu_{A(t)}$ está definida para $t \in [0, \infty)$.

Observemos que, usando (2.7) y Proposición 1.8.3, si $\text{tr}(A_0^2) \geq 0$ entonces $\text{tr}(A(t)^2) \geq 0$ para todo t . Además, en Proposición 2.1.9, probamos que $\text{tr}(S(A)^2) \leq \frac{1}{2t + (\text{tr}(S(A(0))^2))^{-1}}$. Por lo tanto, de (2.6) obtenemos que

$$\|\text{Rm}(\mu_A)\| = \|\mu_A\|^2 \|\text{Rm}(\frac{\mu_A}{\|\mu_A\|})\| = 2\|A\|^2 \|\text{Rm}(\frac{\mu_A}{\|\mu_A\|})\| \leq \frac{4C}{2t + (\text{tr}(S(A(0))^2))^{-1}} \leq \frac{2C}{t},$$

donde C es el máximo de la función continua $\mu \rightarrow \|\text{Rm}(\mu)\|$ restringida a la esfera unitaria de \mathfrak{L}_{n+1} . \square

Gracias a los resultados anteriores ya sabemos bastante de nuestro Ejemplo 2.1.5, aunque conocemos un poco más del caso $x_0 y_0 > 0$ ya que $\text{tr}(A_0^2) > 0$ y $\text{Spec}(A_0) \not\subseteq i\mathbb{R}$. En el caso $x_0 y_0 < 0$, estas condiciones no se dan. ¿Tendrán alguna particularidad las matrices A_0 con $\text{Spec}(A_0) \subset i\mathbb{R}$?

Una pregunta que aún nunca fue contestada es si los flujos convergen o no. La siguiente sección está completamente dedicada a responder esta pregunta.

2.2. Puntos límites

En esta sección estudiaremos el conjunto ω -límite del flujo de corchetes $\mu_{A(t)}$ que empieza en μ_{A_0} (ver Definición 1.8.5 en la Sección 1.8 del Capítulo 1). Para hacer esto, analizaremos dos casos: cuando $\text{tr}(A_0) = 0$ (i.e. μ_{A_0} es unimodular) y cuando $\text{tr}(A_0) \neq 0$.

Supongamos primero que $\text{tr}(A_0) = 0$.

Consideremos la funcional $F(A) = \|[A, A^t]\|^2$, la cual es el cuadrado de la norma de la aplicación momento para la acción conjugación del grupo reductivo real $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ en el espacio vectorial $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$, y calculemos su gradiente:

$$\begin{aligned} \langle \text{grad}(F)_A, B \rangle &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(A + tB) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \|[A + tB, A^t + tB^t]\|^2 \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle [A + tB, A^t + tB^t], [A + tB, A^t + tB^t] \rangle \\ &= 2 \langle [A, A^t], \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} [A + tB, A^t + tB^t] \rangle \\ &= 2 \langle [A, A^t], [B, A^t] + [A, B^t] \rangle \\ &= 4 \langle [A, A^t], [B, A^t] \rangle = -4 \langle [A, [A, A^t]], B \rangle. \end{aligned}$$

Entonces, $\text{grad}(F)_A = -4[A, [A, A^t]]$ y el flujo gradiente negativo de F está dado por

$$\left. \frac{d}{dt} \bar{A}(t) \right| = 4[\bar{A}(t), [\bar{A}(t), \bar{A}(t)^t]]. \quad (2.9)$$

Observemos que $\|\bar{A}\|$ es una función decreciente. En efecto,

$$\left. \frac{d}{dt} \|\bar{A}\|^2 \right| = 2 \langle \left. \frac{d}{dt} \bar{A}, \bar{A} \right\rangle = 8 \langle [\bar{A}, [\bar{A}, \bar{A}^t]], \bar{A} \rangle = -8 \|\bar{A}, \bar{A}^t\|^2,$$

pues $\langle [\bar{A}, [\bar{A}, \bar{A}^t]], \bar{A} \rangle = -\|\bar{A}, \bar{A}^t\|^2$. Por lo tanto, $\bar{A}(t)$ tiene un punto límite A_∞^1 y entonces tenemos que existe el límite de $\bar{A}(t)$, cuando $t \rightarrow \infty$ y es único (ver [KMP, Introducción]). Además, si $\bar{A}(t) \rightarrow A_\infty^1$, tenemos dos casos:

- Si $A_\infty^1 \neq 0$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\bar{A}(t)}{\|\bar{A}(t)\|}$ existe y $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\bar{A}(t)}{\|\bar{A}(t)\|} = \frac{A_\infty^1}{\|A_\infty^1\|}$.
- Si $A_\infty^1 = 0$, entonces por [KMP, Teorema 7.1], $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\bar{A}(t)}{\|\bar{A}(t)\|}$ existe.

Si A_0 es nilpotente, entonces μ_{A_0} es nilpotente y por lo tanto el flujo de corchetes que empieza en μ_{A_0} ha sido estudiado en [L2]. Luego, asumiremos que A_0 no es nilpotente.

Lema 2.2.1. *Supongamos que $\text{tr}(A_0) = 0$ y A_0 no es nilpotente. Sean $\mu_{A(t)}$ el flujo de corchetes que empieza en μ_{A_0} y $\bar{A}(t)$ el flujo gradiente negativo (2.9) que empieza en A_0 . Entonces el límite de $\frac{A(t)}{\|A(t)\|}$ existe y*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A(t)}{\|A(t)\|} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\bar{A}(t)}{\|\bar{A}(t)\|}.$$

Demostración. Probemos que, salvo múltiplo y reparametrización del tiempo, el flujo de corchetes $A(t)$ que empieza en A_0 es igual a $\bar{A}(t)$, la solución de (2.9) empezando en A_0 , i.e. queremos mostrar que existen $c(t)$ y $\tau(t)$ tales que $A(t) = c(t)\bar{A}(\tau(t))$.

Sean $c(t)$ y $\tau(t)$ las soluciones al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} c'(t) &= -\operatorname{tr}(S(\bar{A}(\tau(t))^2))c(t)^3, & c(0) &= 1, \\ \tau'(t) &= \frac{1}{8}c(t)^2, & \tau(0) &= 0. \end{aligned}$$

Es fácil ver que $c(t)$ y $\tau(t)$ están definidas para todo t , y con un simple cálculo es fácil de verificar que $c(t)\bar{A}(\tau(t))$ es una solución de la ecuación (2.1), por lo tanto, por unicidad,

$$A(t) = c(t)\bar{A}(\tau(t)), \quad \forall t \in [0, \infty).$$

Si $\tau(t) \rightarrow \infty$ entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A(t)}{\|A(t)\|} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\bar{A}(\tau(t))}{\|\bar{A}(\tau(t))\|} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\bar{A}(t)}{\|\bar{A}(t)\|}.$$

Supongamos que $\tau(t) \rightarrow L$, $L < \infty$, cuando $t \rightarrow \infty$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A(t)}{\|A(t)\|} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\bar{A}(\tau(t))}{\|\bar{A}(\tau(t))\|} = \frac{\bar{A}(L)}{\|\bar{A}(L)\|}.$$

Esto implica que $\frac{\bar{A}(L)}{\|\bar{A}(L)\|}$ es un solitón algebraico, pues éste es el límite de una normalización del flujo (ver [LL1, Proposición 4.1]). Como, A_0 no es nilpotente y $\bar{A}(t)$ es conjugada a A_0 , para cada t , tenemos entonces que $\frac{\bar{A}(L)}{\|\bar{A}(L)\|}$ es normal (ver Proposición 2.1.3), i.e. $\bar{A}(L)$ es normal. Por lo tanto, $\bar{A}(t) = \bar{A}(L)$, para todo $t \geq L$, por (2.9).

Luego,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A(t)}{\|A(t)\|} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\bar{A}(\tau(t))}{\|\bar{A}(\tau(t))\|} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\bar{A}(t)}{\|\bar{A}(t)\|},$$

como queríamos probar. \square

Observación 2.2.2. Se sigue de Lema 2.2.1 y [L2, Sección 7] que si μ_{A_0} es unimodular, i.e. $\operatorname{tr}(A_0) = 0$, entonces el límite de $\frac{A(t)}{\|A(t)\|}$ existe.

Lema 2.2.3. Si $\operatorname{tr}(A_0) \neq 0$, entonces $A(t) \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$.

Demostración. Sabemos que $A(t) = a(t)\varphi_t A_0 \varphi_t^{-1}$ por Lema 2.1.4, por lo tanto,

$$\operatorname{tr}(A(t)) = a(t) \operatorname{tr}(A_0).$$

Si $A(t_k) \rightarrow A_\infty$, entonces

$$a(t_k) \operatorname{tr}(A_0) = \operatorname{tr}(A(t_k)) \rightarrow \operatorname{tr}(A_\infty) = 0,$$

por lo tanto, como $\operatorname{tr}(A_0) \neq 0$, tenemos que $a(t_k) \rightarrow 0$.

Por otro lado,

$$\operatorname{Spec}(A(t_k)) = a(t_k) \operatorname{Spec}(A_0) \rightarrow \operatorname{Spec}(A_\infty).$$

Luego, $\operatorname{Spec}(A_\infty) = 0$. Entonces $A_\infty = 0$, pues A_∞ es una matriz antisimétrica. \square

De los dos lemas anteriores se desprende el siguiente teorema, el cual nos proporciona información acerca del conjunto ω -límite de μ_{A_0} , para cualquier $A_0 \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$.

Teorema 2.2.4. *El conjunto ω -límite de μ_{A_0} es un punto, para toda $A_0 \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$.*

Demostración. Por Lema 2.2.3, tenemos que si $\text{tr}(A_0) \neq 0$, entonces $A(t) \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$. Si $\text{tr}(A_0) = 0$, sabemos por Observación 2.2.2 que $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A(t)}{\|A(t)\|}$ existe, digamos A_∞^2 . Luego, tenemos que $\lim_{t \rightarrow \infty} A(t)$ existe, es decir, $A(t) \rightarrow A_\infty$, para alguna matriz A_∞ . En efecto, la norma de $A(t)$ decrece y por lo tanto $\lim_{t \rightarrow \infty} \|A(t)\| = \alpha$. Si $\alpha = 0$, entonces $A(t) \rightarrow 0$ y si $\alpha > 0$, tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha \frac{A(t)}{\|A(t)\|} = \alpha A_\infty^2,$$

lo que completa la prueba. □

Todos los resultados obtenidos pueden ser resumidos en el siguiente teorema.

Teorema 2.2.5. *Dada $A_0 \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$, consideramos el flujo de corchetes $\mu_{A(t)}$ que empieza en μ_{A_0} y $g(t)$ el flujo de Ricci que empieza en $g_{\mu_{A_0}}$. Entonces,*

- (i) $g(t)$ está definido para todo $t \in (T_-, \infty)$, donde $-\infty < T_- < 0$.
- (ii) El conjunto ω -límite de μ_{A_0} es un punto. Más aún, $A(t) \rightarrow A_\infty$ y por lo tanto, $\mu_{A(t)} \rightarrow \mu_{A_\infty}$.
- (iii) Para toda sucesión $t_k \rightarrow \infty$, existe una subsucesión de $(G_{\mu_{A(t_k)}}, g_{\mu_{A(t_k)}})$, la cual converge en la topología punteada a una variedad localmente isométrica a $(G_{\mu_{A_\infty}}, g_{\mu_{A_\infty}})$, la cual es plana.
- (iv) Si $\text{Spec}(A_0) \not\subseteq i\mathbb{R}$, entonces $g_{\mu_{A(t)}} \rightarrow g_{\mu_{A_\infty}}$ suavemente en \mathbb{R}^{n+1} .
- (v) Si $\text{tr}(A_0^2) \geq 0$, el flujo de Ricci $g(t)$ con $g(0) = g_{\mu_{A_0}}$ es una solución de Tipo-III, para alguna constante C_{n+1} que sólo depende de la dimensión $n+1$.

Regresemos al Ejemplo 2.1.5 y consideremos a y en función de x como en la Figura 2.1. En esta sección y en la anterior, probamos que las soluciones convergen a puntos en el plano de la forma $(x_\infty, -x_\infty)$, los cuales son precisamente los puntos fijos del sistema y corresponden a matrices antisimétricas (las cuales corresponden a métricas planas). También, observemos que los puntos de la forma (x_0, x_0) , $(x_0, 0)$ y $(0, y_0)$ corresponden a solitones algebraicos (ellos se corresponden con matrices simétricas y matrices nilpotentes especiales). A pesar del hecho de que las soluciones en el plano superior convergen a cero, podemos ver en la figura que ellas se están aproximando a la línea de solitones $y = x$, por lo tanto, considerando una normalización adecuada podríamos obtener convergencia de las soluciones a solitones algebraicos no planos. Este será el tema que analizaremos en la siguiente sección.

2.3. Normalizando por la norma del corchete

De acuerdo al Teorema 2.2.5 (iii), para toda sucesión $t_k \rightarrow \infty$, existe una subsucesión en la cual el flujo de Ricci converge con la topología punteada a una variedad plana. Para evitar este tipo de convergencia y obtener un límite más interesante, consideramos diferentes normalizaciones del flujo.

En esta sección, estudiaremos el flujo de corchetes normalizado por la norma del corchete, i.e. si $\mu_{A(t)}$ es el flujo de corchetes que empieza en μ_{A_0} , estudiaremos $\frac{A(t)}{\|A(t)\|}$. Para hacer esto, vamos a introducir una función positiva y no-creciente a lo largo del flujo $\frac{A(t)}{\|A(t)\|}$, la cual será estrictamente decreciente excepto que μ_{A_0} sea un solitón algebraico. Esta función nos permitirá probar que para toda sucesión $t_k \rightarrow \infty$, existe una subsucesión en la cual el flujo de corchetes normalizado siempre converge a un solitón algebraico. Finalmente, podremos determinar cuáles de los límites corresponden a variedades planas.

Lema 2.3.1. *Sean $\mu_{A(t)}$ el flujo de corchetes que empieza en μ_{A_0} y $B(t) = \frac{A(t)}{\|A(t)\|}$. Entonces $F(B) = \|[B, B^t]\|^2$ es una función positiva y no-creciente a lo largo del flujo. Más aún, $\frac{d}{dt}|_{t=t_0} F(B) = 0$, para algún t_0 , si y sólo si $\mu_{B(0)}$ es un solitón algebraico.*

Demostración. Consideremos $F : \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(C) = \|[C, C^t]\|^2, \quad C \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}).$$

Entonces

$$\frac{d}{dt} F \left(\frac{A}{\|A\|} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\|[A, A^t]\|^2}{\|A\|^4} = \frac{1}{\|A\|^8} \left(\|A\|^4 \frac{d}{dt} \|[A, A^t]\|^2 - \|[A, A^t]\|^2 \frac{d}{dt} \|A\|^4 \right).$$

Usando la bilinealidad del producto interno y del corchete de Lie obtenemos que

$$\frac{d}{dt} \|[A, A^t]\|^2 = -4 \operatorname{tr}(S(A)^2) \|[A, A^t]\|^2 - 2 \|[A, [A, A^t]]\|^2,$$

y usando (2.5) tenemos que

$$\frac{d}{dt} \|A\|^4 = 2 \|A\|^2 \frac{d}{dt} \|A\|^2 = -4 \operatorname{tr}(S(A)^2) \|A\|^4 - 2 \|A\|^2 \|[A, A^t]\|^2.$$

Luego, si consideramos $B = \frac{A}{\|A\|}$, se sigue que

$$\frac{d}{dt} F \left(\frac{A}{\|A\|} \right) = 2 \|A\|^2 \left(\|[B, B^t]\|^4 - \|B\|^2 \|[B, [B, B^t]]\|^2 \right) \leq 0, \quad (2.10)$$

utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Más aún, si existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{d}{dt}|_{t=t_0} F \left(\frac{A}{\|A\|} \right) = 0$, entonces se da la igualdad en Cauchy-Schwarz y existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$[B(t_0), [B(t_0), B(t_0)^t]] = cB(t_0). \quad (2.11)$$

Luego, tenemos dos casos:

- Si $c = 0$, entonces $[B(t_0), [B(t_0), B(t_0)^t]] = 0$, y por lo tanto $\operatorname{tr}([B(t_0), [B(t_0), B(t_0)^t]]B(t_0)^t) = 0$. Esto implica que $\|[B(t_0), B(t_0)^t]\|^2 = 0$, i.e. $B(t_0)$ es normal y $\mu_{B(t_0)}$ es un solitón algebraico (ver Proposición 2.1.3). Por otro lado, usando (2.1) y (2.5), es fácil ver que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} B &= \frac{d}{dt} \frac{A}{\|A\|} = \frac{1}{2\|A\|} \left([A, [A, A^t]] - \operatorname{tr}(A)[A, A^t] + \frac{\|[A, A^t]\|^2}{\|A\|^2} A \right) \\ &= \frac{\|A\|^2}{2} \left([B, [B, B^t]] - \operatorname{tr}(B)[B, B^t] + \|[B, B^t]\|^2 B \right), \end{aligned} \quad (2.12)$$

por lo tanto, $B(t) = B(t_0)$, para todo t , pues $B(t_0)$ es un punto fijo de (2.12). Se sigue que $\mu_{B(t)} = \mu_{B(t_0)}$ para todo t .

- Si $c \neq 0$, entonces usando (2.11), obtenemos que $\text{tr}(B(t_0)) = 0$ y $\text{tr}(B(t_0)^k) = 0$, ya que

$$\begin{aligned} c \text{tr}(B(t_0)^{k+1}) &= \text{tr}([B(t_0), [B(t_0), B(t_0)^t]]B(t_0)^k) \\ &= \text{tr}([B(t_0)^k, B(t_0)][B(t_0), B(t_0)^t]) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $B(t_0)$ es una matriz nilpotente que satisface (2.11), y entonces por Proposición 2.1.3 tenemos que $\mu_{B(t_0)}$ es un solitón algebraico. Además, $B(t_0)$ es un punto fijo de (2.12), por lo tanto, $\mu_{B(t)} = \mu_{B(t_0)}$ para todo t .

Recíprocamente, si $\mu_{B(0)}$ es un solitón algebraico, entonces usando (2.10), tenemos que $\frac{d}{dt}F\left(\frac{A}{\|A\|}\right) = 0$. \square

Corolario 2.3.2. Sean $\mu_{A(t)}$ el flujo de corchetes que empieza en μ_{A_0} y $B(t) = \frac{A(t)}{\|A(t)\|}$. Entonces para toda sucesión $t_k \rightarrow \infty$, existe una subsucesión de $(G_{\mu_{B(t_k)}}, g_{\mu_{B(t_k)}})$, que converge en la topología punteada a un solitón algebraico $(G_{\mu_{B_\infty}}, g_{\mu_{B_\infty}})$.

Demostración. Toda sucesión $B(t_k)$ tiene una subsucesión convergente pues $\|B(t)\| = 1$, i.e. pasando a una subsucesión, $B(t_k)$ converge a una matriz B_∞ . Entonces μ_{B_∞} es un solitón algebraico por Lema 2.3.1, pues B_∞ es un punto fijo del flujo. \square

Antes de enunciar el teorema de convergencia, demostraremos el siguiente lema técnico. De ahora en adelante, en toda la sección, denotaremos por $B(t) = \frac{A(t)}{\|A(t)\|}$.

Lema 2.3.3. Las siguientes ecuaciones de evolución a lo largo del flujo normalizado por la norma del corchete se satisfacen:

$$\begin{aligned} (i) \quad \frac{d}{dt} \text{tr}(B) &= \frac{1}{2} \|A\|^2 \|[B, B^t]\|^2 \text{tr}(B), \\ (ii) \quad \frac{d}{dt} \text{tr}(B^2) &= \|A\|^2 \|[B, B^t]\|^2 \text{tr}(B^2). \end{aligned}$$

Demostración. Para probar (i), usamos (2.1) y (2.5). Parte (ii) se sigue de (2.7) y (2.5). \square

Teorema 2.3.4. Para toda sucesión $t_k \rightarrow \infty$, existe una subsucesión de $(G_{\mu_{B(t_k)}}, g_{\mu_{B(t_k)}})$, la cual converge en la topología punteada a un solitón algebraico $(G_{\mu_{B_\infty}}, g_{\mu_{B_\infty}})$. Más aún, las siguientes condiciones son equivalentes:

- (i) $\text{Spec}(A_0) \subset i\mathbb{R}$.
- (ii) $(G_{\mu_{B_\infty}}, g_{\mu_{B_\infty}})$ es plana.

Demostración. Como $\|B(t)\| = 1$, toda sucesión posee una subsucesión convergente, i.e., $B(t_k)$ converge a B_∞ , el cual es un solitón algebraico (ver Corolario 2.3.2). Usando (2.3), tenemos que

$$\text{Spec}(B(t_k)) = \text{Spec}\left(\frac{A(t_k)}{\|A(t_k)\|}\right) = \frac{a(t_k)}{\|A(t_k)\|} \text{Spec}(A_0). \quad (2.13)$$

Si $\text{Spec}(A_0) \subset i\mathbb{R}$, entonces $\text{tr}(B(0)^2) = \text{tr}\left(\frac{A_0^2}{\|A_0\|^2}\right) < 0$, y por lo tanto, por Proposición 2.3.3 (ii), tenemos que $\text{tr}(B(t)^2) < 0$ para todo t , y $\text{tr}(B(t)^2)$ es una función decreciente. Se sigue que

$\text{tr}(B_\infty^2) < 0$ y entonces B_∞ es normal, pues B_∞ es un solitón algebraico (ver Proposición 2.1.3). Por lo tanto, por (2.13), tenemos que $\text{Spec}(B_\infty) \subset i\mathbb{R}$ y B_∞ es una matriz antisimétrica. Recíprocamente, si B_∞ es una matriz antisimétrica, entonces $\text{Spec}(B_\infty) \subset i\mathbb{R}$, por lo tanto, usando (2.13), tenemos que $\text{Spec}(A_0) \subset i\mathbb{R}$. \square

Claramente no era casualidad lo que estaba sucediendo en el Ejemplo 2.1.5. Después de demostrar el teorema anterior nos damos cuenta que una matriz A_0 con $x_0y_0 < 0$ es muy distinta a cualquiera de las matrices que se encuentran en el semiplano superior de la Figura 2.1 ya que $\text{Spec}(A_0) \subset i\mathbb{R}$.

Nuevamente aquí, nos preguntamos qué sucede con el conjunto ω -límite de $\frac{A(t)}{\|A(t)\|}$. Recordar que en Sección 2.2 probamos que si $\text{tr}(A_0) = 0$, entonces el conjunto ω -límite de $\frac{A(t)}{\|A(t)\|}$ es un punto. En la siguiente proposición analizaremos el caso $\text{tr}(A_0) \neq 0$.

Proposición 2.3.5. *Si $\text{tr}(A_0) \neq 0$ y $B(t_k) \rightarrow B_\infty$, para alguna sucesión $t_k \rightarrow \infty$, entonces el conjunto ω -límite de $\frac{A(t)}{\|A(t)\|}$ está contenido en $O(n) \cdot B_\infty$.*

Demostración. Sea A_0 tal que $\text{tr}(A_0) \neq 0$ y supongamos que $B(t_k) \rightarrow B_\infty^1$ y $B(s_l) \rightarrow B_\infty^2$. Queremos ver que B_∞^1 y B_∞^2 son conjugadas por una matriz ortogonal.

- Si $\text{tr}(A_0) < 0$, entonces $\text{tr}(B(0)) < 0$, y Proposición 2.3.3 (i), $\text{tr}(B(t)) < 0$. Por lo tanto $\text{tr}(B(t))$ es una función decreciente y se sigue que $\text{tr}(B(t)) < \text{tr}(B(0))$, para todo t .
- Si $\text{tr}(A_0) > 0$, entonces $\text{tr}(B(0)) > 0$ y por Proposición 2.3.3 (i), $\text{tr}(B(t)) > 0$. Por lo tanto $\text{tr}(B(t))$ es una función creciente y se sigue que $\text{tr}(B(0)) < \text{tr}(B(t))$, para todo t .

Luego, $\text{tr}(B_\infty^1) \neq 0$ y $\text{tr}(B_\infty^2) \neq 0$. Además, la función $\text{tr}(B(t))$ es creciente o es decreciente. Por lo tanto, $\text{tr}(B_\infty^1) = \text{tr}(B_\infty^2)$. Como, además sabemos que $\text{tr}(A_0) \neq 0$, usando (2.3) se sigue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a(t_k)}{\|A(t_k)\|} = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{a(s_l)}{\|A(s_l)\|},$$

pues

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a(t_k)}{\|A(t_k)\|} \text{tr}(A_0) = \text{tr}(B_\infty^1) = \text{tr}(B_\infty^2) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{a(s_l)}{\|A(s_l)\|} \text{tr}(A_0),$$

y por lo tanto,

$$\text{Spec}(B_\infty^1) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a(t_k)}{\|A(t_k)\|} \text{Spec}(A_0) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{a(s_l)}{\|A(s_l)\|} \text{Spec}(A_0) = \text{Spec}(B_\infty^2).$$

Finalmente, observemos que B_∞^1 y B_∞^2 son matrices normales, pues $\mu_{B_\infty^1}$ y $\mu_{B_\infty^2}$ son solitones algebraicos (ver Corolario 2.3.2), y por lo tanto, B_∞^1 y B_∞^2 son normales o nilpotentes (ver Proposición 2.1.3). Como $\text{tr}(B_\infty^1) \neq 0$ y $\text{tr}(B_\infty^2) \neq 0$, entonces no pueden ser nilpotentes. Luego, tenemos dos matrices normales con el mismo espectro. Se concluye que las matrices deben ser conjugadas por una matriz ortogonal (ver [HK]). \square

2.4. Curvatura Negativa

En esta sección analizaremos cómo evoluciona la curvatura a lo largo del flujo de Ricci. Definimos la curvatura seccional K de $(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, un álgebra de Lie munida con un producto interno, como

la curvatura seccional de (G, g) , donde G es el grupo de Lie simplemente conexo con álgebra de Lie \mathfrak{g} y g es la métrica Riemanniana invariante a izquierda en G tal que $g(0) = \langle \cdot, \cdot \rangle$. En el caso de $(\mathbb{R}^{n+1}, \mu_A, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, simplemente denotaremos K_A . Diremos que una variedad Riemanniana tiene curvatura negativa, y lo denotaremos por $K < 0$, si todas sus curvaturas seccionales son estrictamente negativas.

A continuación enunciaremos dos teoremas probados por Heintze en [H]. El Teorema 2.4.1 da condiciones necesarias y suficientes para que ciertas álgebras de Lie solubles con un producto interno tengan curvatura negativa, mientras que el Teorema 2.4.3 da condiciones necesarias y suficientes para que un álgebra de Lie soluble admita un producto interno con curvatura negativa.

Teorema 2.4.1. [H, Teorema 1] *Sea $(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un álgebra de Lie soluble con un producto interno tal que el álgebra derivada sea abeliana (i.e. $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ abeliana). Entonces $K < 0$ si y sólo si se dan las siguientes condiciones:*

(A) $\dim \mathfrak{g}' = \dim \mathfrak{g} - 1$.

(B) *Existe un vector unitario $A_0 \in \mathfrak{g}$, ortogonal a \mathfrak{g}' , tal que $D_0 : \mathfrak{g}' \rightarrow \mathfrak{g}'$ es definida positiva, donde D_0 es la parte simétrica de $\text{ad}_{A_0}|_{\mathfrak{g}'} : \mathfrak{g}' \rightarrow \mathfrak{g}'$.*

(C) *Si S_0 es la parte antisimétrica de $\text{ad}_{A_0}|_{\mathfrak{g}'}$, entonces $(D_0^2 + [D_0, S_0])|_{\mathfrak{g}'}$ también es definida positiva.*

Observación 2.4.2. Observemos que en el caso de las μ_A 's, la suposición de que el álgebra derivada sea abeliana siempre es verdadera. Por lo tanto, $K_A < 0$ si y sólo si se dan las condiciones (A) - (C). Además, si suponemos que A es normal e invertible, entonces $K_A < 0$ si y sólo si se da (B), pues (A) se satisface debido a que A es invertible y la condición (C) es implicada por (B).

Teorema 2.4.3. [H, Teorema 3] *Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie soluble. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) \mathfrak{g} admite un producto interno con curvatura negativa.

(ii) $\dim \mathfrak{g}' = \dim \mathfrak{g} - 1$ y existe $A_0 \in \mathfrak{g}$ tal que $\text{Re}(\text{Spec}(\text{ad}_{A_0}|_{\mathfrak{g}'})) > 0$, donde $\text{Re}(\text{Spec}(B))$ denota la parte real del espectro de la matriz B .

Observación 2.4.4. Notar que si A es invertible entonces G_{μ_A} admite una métrica Riemanniana invariante a izquierda con $K < 0$ si y sólo si $\text{Re}(\text{Spec}(A)) > 0$ ó $\text{Re}(\text{Spec}(A)) < 0$.

Teorema 2.4.5. *Sea $G_{\mu_{A_0}}$ un grupo de Lie soluble que admite una métrica Riemanniana invariante a izquierda con curvatura negativa. Si $\mu_{A(t)}$ es el flujo de corchetes que empieza en μ_{A_0} , entonces existe $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que $K_{A(t)} < 0$, para todo $t \geq s_0$.*

Demostración. Es suficiente probar que el teorema es verdadero para $B(t) = \frac{A(t)}{\|A(t)\|}$, i.e. existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $K_{B(t)} < 0$, para todo $t \geq t_0$. En efecto, para cada t , $\mu_{A(t)}$ y $\mu_{B(t)}$ difieren sólo por un escalar.

Por hipótesis, $G_{\mu_{A_0}}$ admite una métrica Riemanniana invariante a izquierda con curvatura negativa, entonces usando Observación 2.4.4, tenemos que $\text{Re}(\text{Spec}(A_0)) > 0$ o $\text{Re}(\text{Spec}(A_0)) < 0$.

Supongamos que, pasando a una subsucesión, $B(t_k)$ converge a B_∞ , cuando $k \rightarrow \infty$. Entonces, por un argumento similar al de la prueba de la Proposición 2.3.5, tenemos que B_∞ es normal y

$$\text{Spec}(B_\infty) = \alpha \text{Spec}(A_0), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0.$$

Por lo tanto, $\text{Re}(\text{Spec}(B_\infty)) > 0$ o $\text{Re}(\text{Spec}(B_\infty)) < 0$. Entonces $S(B_\infty)$ es definida positiva o definida negativa. Se sigue de Observación 2.4.2 que $K_{B_\infty} < 0$. Entonces, existe $L \in \mathbb{N}$ tal que $K_{B(t_k)} < 0$, para todo $k \geq L$.

Finalmente, debe existir t_0 tal que $K_{B(t)} < 0$, para todo $t \geq t_0$, pues de cualquier otra manera podríamos extraer una subsucesión convergente $B(t_k)$, cuyas curvaturas seccionales no sean estrictamente negativas, y esto contradice el párrafo anterior. \square

Ahora la pregunta es si sucede lo mismo en el caso general. Es decir, si un grupo de Lie soluble admite una métrica Riemanniana de curvatura negativa, entonces ¿la curvatura de cualquier solución del flujo de Ricci se convertirá en negativa a partir de cierto tiempo?

Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.4.6. Consideremos $(\mu_{\lambda,\alpha}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ definida como sigue:

$$\mu_{\lambda,\alpha}(e_0, e_i) = \alpha \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & 1 - \lambda & \\ & & 1 \end{pmatrix} e_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad \mu_{\lambda,\alpha}(e_1, e_2) = e_3,$$

y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interno para el cual $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ es una base ortonormal. Por [L1, Teorema 4.8] sabemos que $(\mu_{\lambda,\alpha}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un solsolitón si y sólo si $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2(\lambda^2 + (1-\lambda)^2 + 1)}}$. Consideremos el plano 2-dimensional $\pi = \langle e_1, e_3 \rangle$ y calculemos su curvatura seccional (ver (1.11) en el Capítulo 1):

$$K(e_1, e_3) = \|U(e_1, e_3)\|^2 - \langle U(e_1, e_1), U(e_3, e_3) \rangle = \frac{1}{4} - \frac{3\lambda}{\lambda^2 + (1-\lambda)^2 + 1}.$$

Por lo tanto,

$$K(e_1, e_3) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4} - \frac{3\lambda}{\lambda^2 + (1-\lambda)^2 + 1} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \leq 2 - \sqrt{3} \quad \text{ó} \quad \lambda \geq 2 + \sqrt{3}.$$

Observemos que si $0 < \lambda \leq 2 - \sqrt{3}$, entonces $0 < 1 - \lambda$, y por lo tanto $\text{ad}(e_0)$ es una matriz tal que $\text{Re}(\text{Spec}(\text{ad}(e_0))) > 0$. Luego, el Teorema 2.4.3 dice que si $0 < \lambda \leq 2 - \sqrt{3}$, entonces $G_{\mu_{\lambda,\alpha}}$, con $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2(\lambda^2 + (1-\lambda)^2 + 1)}}$, admite un producto interno con curvatura negativa. Por otro lado, como $(\mu_{\lambda,\alpha}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un solitón algebraico, si $\mu(t)$ es el flujo de corchetes que empieza en $\mu_{\lambda,\alpha}$, entonces $(G_{\mu(t)}, g_{\mu(t)})$ tiene planos con curvatura mayor o igual a cero para todo t . Lo cual da una respuesta negativa a nuestra pregunta.

Lo siguiente que nos preguntamos es qué sucede con el flujo de Ricci cuando comienzo con una métrica cuyas curvaturas seccionales son todas negativas. Para esto vamos a introducir otro teorema probado por Heintze en [H].

Sea $(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un álgebra de Lie soluble con un producto interno tal que se satisfacen (A) - (C) del Teorema 2.4.1. Entonces tenemos una descomposición ortogonal $\mathfrak{g} = A_0 + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Para cada $\alpha > 0$, sea $(\mathfrak{g}_\alpha, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ el álgebra de Lie con el mismo producto interno que $(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ pero con la siguiente modificación en el corchete de Lie

$$[A_0, X]_\alpha := \alpha[A_0, X], \quad \text{para todo } X \in \mathfrak{g}' = \mathfrak{g}'_\alpha.$$

Teorema 2.4.7. [H, Teorema 2] Sea $(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un álgebra de Lie soluble con un producto interno y supongamos que (A) - (C) se satisfacen. Entonces existe $\alpha_0 > 0$ tal que $(\mathfrak{g}_\alpha, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ tiene curvatura negativa para todo $\alpha \geq \alpha_0$.

Volvamos al Ejemplo 2.4.6. Sea λ fijo y consideremos el flujo de corchetes $\mu(t)$ que empieza en $\mu_{\alpha,\lambda}$. Entonces $\mu(t)$ es como sigue:

$$\mu(t)(e_0, e_i) = \alpha(t) \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & 1 - \lambda & \\ & & 1 \end{pmatrix} e_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad \mu(t)(e_1, e_2) = h(t)e_3, \quad (2.14)$$

con $\alpha = \alpha(t)$ y $h = h(t)$ que satisfacen las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \alpha' = -c_\lambda \alpha^3, & \alpha(0) = \alpha, \\ h' = -\frac{3}{2}h^3, & h(0) = 1, \end{cases}$$

donde $c_\lambda = (\lambda^2 + (1 - \lambda)^2 + 1)$. Por lo tanto, resolviendo las ecuaciones diferenciales obtenemos que $\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2c_\lambda t + \alpha^{-2}}}$ y $h(t) = \frac{1}{\sqrt{3t+1}}$. Claramente, en este caso, el flujo de corchetes converge a una métrica plana, pero observemos que para cada t tenemos que

$$K(e_1, e_3) = \frac{h^2}{4} - \lambda\alpha^2 = \frac{1}{4(3t+1)} - \frac{\lambda}{2c_\lambda t + \alpha_0^{-2}}.$$

Luego,

$$K(e_1, e_3) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4(3t+1)} \geq \frac{\lambda}{2c_\lambda t + \alpha_0^{-2}} \quad \Leftrightarrow \quad (2c_\lambda - 12\lambda)t \geq 4\lambda - \alpha_0^{-2}.$$

Además, $2c_\lambda - 12\lambda = 2(2\lambda^2 - 2\lambda + 2) - 12\lambda = 4\lambda^2 - 4\lambda + 4 - 12\lambda = 4\lambda^2 - 16\lambda + 4 = 4(\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 4((\lambda - 2)^2 - 3)$. Por lo tanto, si $0 < \lambda \leq 2 - \sqrt{3}$, existe t_0 tal que $K(e_1, e_3) \geq 0$, para todo $t \geq t_0$.

Sea λ tal que $0 < \lambda \leq 2 - \sqrt{3}$ y consideremos $\mu_{\alpha,\lambda}$, $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$. Entonces $(\mu_{\alpha,\lambda}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un álgebra de Lie soluble con un producto interno que satisface (A) - (C). Por lo tanto, por Teorema 2.4.7 sabemos que existe $\alpha_0 > 0$ tal que $((\mu_{\alpha,\lambda})_{\alpha_0}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ tiene curvatura negativa. Luego, $(\mu_{\alpha\alpha_0,\lambda}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ tiene curvatura negativa. Por otro lado, sabemos que si $\mu(t)$ es el flujo de corchetes que empieza en $\mu_{\alpha\alpha_0,\lambda}$, existe t_0 tal que para todo $t \geq t_0$, $(G_{\mu(t)}, g_{\mu(t)})$ tiene planos con curvatura mayor o igual a cero.

Capítulo 3

El flujo de Ricci en variedades homogéneas simplemente conexas de dimensión 4

En este capítulo analizaremos el flujo de Ricci en las variedades Riemannianas homogéneas simplemente conexas de dimensión 4. Para hacer esto, utilizaremos la clasificación de los espacios Riemannianos homogéneos de dimensión 4 dada en [BB], la cual fue construida en función de la dimensión del grupo de Lie que actúa en la variedad. Si la dimensión del grupo es “grande”, entonces el análisis del flujo de Ricci será muy sencillo a diferencia de cuando la dimensión del grupo es “pequeña”. En este caso el análisis será más complicado y la manera que utilizaremos de estudiar el flujo de Ricci será analizando el flujo de corchetes. Dicho análisis será efectuado de manera exhaustiva, analizando caso por caso. Finalmente, también estudiaremos el comportamiento del flujo de corchetes normalizado por alguna función de normalización en cada caso.

3.1. Flujo de Ricci

En esta sección estudiaremos el flujo de Ricci en las variedades homogéneas simplemente conexas de dimensión 4. Antes de presentar el teorema de clasificación descrito en [BB], fijemos la notación que usaremos:

- S^n , la esfera unitaria de dimensión n .
- \mathbb{H}^n , el espacio hiperbólico de dimensión n .
- $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, el espacio proyectivo complejo de dimensión compleja 2.
- $\mathbb{C}\mathbb{H}^2$, el espacio hiperbólico complejo de dimensión compleja 2.
- $\mathrm{SO}(n)$, el subgrupo ortogonal especial de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
- $\mathrm{CO}(n)$, el grupo ortogonal conforme, i.e. el producto del grupo ortogonal con el grupo de dilataciones.

- $U(n)$, el grupo unitario.
- $SU(n)$, el grupo especial unitario.
- $PU(n)$, el cociente de $SU(n)$ por su centro.
- $SO_0(n, 1)$, la componente conexa de la identidad del grupo que deja invariante una forma cuadrática de signatura $(n, 1)$ en \mathbb{R}^{n+1} .
- Z^2 , el único grupo soluble no abeliano de dimensión 2.
- $\mathbb{R}^n \rtimes G$, el producto semidirecto de los grupos \mathbb{R}^n y G , donde la representación en todos los casos será la usual.
- $\widehat{SL}_2(\mathbb{R})$, el cubrimiento universal de $SL_2(\mathbb{R})$.
- $U(p, q)$, el grupo unitario que deja invariante una forma pseudo-hermitiana de signatura (p, q) en \mathbb{C}^{p+q} .
- $SU(p, q) = U(p, q) \cap SL_{p+q}(\mathbb{C})$.

También recordemos que un espacio Riemanniano homogéneo es un par $(G/K, g)$, con g una métrica Riemanniana G -invariante (ver Definiciones 1.2.2 y 1.2.3 en Sección 1.2 del Capítulo 1).

Teorema 3.1.1. *[BB, Teorema 4.1] Los espacios Riemannianos M , de dimensión 4, simplemente conexos y homogéneos se pueden clasificar salvo isometría equivariante de acuerdo a G de la siguiente manera:*

1. Si $\dim(G) = 4$, M es un grupo de Lie simplemente conexo G muniendo de una métrica Riemanniana invariante a izquierda. En particular, G es soluble o G es uno de los siguientes grupos: $\mathbb{R} \times SU(2)$, $\mathbb{R} \times \widehat{SL}_2(\mathbb{R})$.
2. Si $\dim(G) = 5$, se pueden distinguir dos casos: O bien G es soluble, y entonces existe un subgrupo normal H de G , conexo y simplemente conexo, transitivo en M y tal que G es el producto semidirecto de H por un grupo compacto a 1-parámetro de los automorfismos de H , o bien G no es soluble y es uno de los grupos del Cuadro 3.1.
3. Si $6 \leq \dim(G) \leq 10$, entonces G es uno de los grupos del Cuadro 3.2.

Ahora sí, comenzaremos el estudio del flujo de Ricci en los espacios Riemannianos homogéneos de dimensión 4. Dividiremos el análisis en tres grandes casos de acuerdo a la dimensión del grupo que actúa transitivamente. Primero estudiaremos el caso $6 \leq \dim(G) \leq 10$, luego seguiremos con $\dim(G) = 5$ y por último $\dim(G) = 4$.

3.1.1. $6 \leq \dim(G) \leq 10$

En esta subsección estudiaremos qué sucede con el flujo de Ricci caso por caso. Antes de comenzar con el análisis, fijemos un poco más de notación: g_{S^n} denotará la métrica redonda de S^n , es decir, la métrica en S^n con curvatura seccional constante 1, y $g_{\mathbb{H}^n}$ la métrica en \mathbb{H}^n con curvatura seccional constante -1 .

Cuadro 3.1:

G	K	M	métricas
$\mathbb{R}^2 \times \text{SO}(3)$ $\mathbb{R}^2 \times \text{SO}_0(2, 1)$ $\mathbb{Z}^2 \times \text{SO}(3)$ $\mathbb{Z}^2 \times \text{SO}_0(2, 1)$	$\text{SO}(2)$ $\text{SO}(2)$ $\text{SO}(2)$ $\text{SO}(2)$	$\mathbb{R}^2 \times S^2$ $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{H}^2$ $\mathbb{H}^2 \times S^2$ $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$	producto de métricas de curvatura constante
$\mathbb{R} \times \text{U}(2)$	$\text{U}(1)$	$\mathbb{R} \times S^3$	producto de una métrica de \mathbb{R} y una de Berger en S^3
$\mathbb{R} \times \text{U}(1, 1)$	$\text{U}(1)$	$\mathbb{R} \times \widehat{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$	producto de una métrica de \mathbb{R} y una $\text{SO}(2)$ -invariante en $\widehat{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$
$\mathbb{R}^2 \rtimes \text{SL}_2(\mathbb{R})$	$\text{SO}(2)$	difeo a \mathbb{R}^4	métrica no producto en donde la curvatura alcanza los dos signos.

Cuadro 3.2:

$\dim(G)$	G	K	M	métricas
10	$\text{SO}(5)$	$\text{SO}(4)$	S^4	de curvatura constante
	$\text{SO}_0(4, 1)$	$\text{SO}(4)$	\mathbb{H}^4	de curvatura constante
	$\mathbb{R}^4 \rtimes \text{SO}(4)$	$\text{SO}(4)$	\mathbb{R}^4	plana
8	$\text{PU}(3)$	$\text{P}(\text{U}(2) \times \text{U}(1))$	$\mathbb{C}\mathbb{P}^2$	simétrica
	$\text{SU}(2, 1)$	$\text{S}(\text{U}(2) \times \text{U}(1))$	$\mathbb{C}\mathbb{H}^2$	simétrica
	$\mathbb{R}^4 \rtimes \text{U}(2)$	$\text{U}(2)$	\mathbb{R}^4	plana
7	$\mathbb{R} \times \text{SO}(4)$ $\mathbb{R} \times \text{SO}_0(3, 1)$	$\text{SO}(3)$ $\text{SO}(3)$	$\mathbb{R} \times S^3$ $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^3$	producto de una métrica de \mathbb{R} y una de curvatura constante
	$\mathbb{R}^4 \rtimes \text{SU}(2)$ $\mathbb{R}^3 \rtimes \text{CO}(3)$	$\text{SU}(2)$ $\text{SO}(3)$	\mathbb{R}^4 \mathbb{H}^4	plana de curvatura constante < 0
6	$\text{SO}(3) \times \text{SO}(3)$	$\text{SO}(2) \times \text{SO}(2)$	$S^2 \times S^2$	producto de métricas de curvatura constante
	$\text{SO}(3) \times \text{SO}_0(2, 1)$	$\text{SO}(2) \times \text{SO}(2)$	$S^2 \times \mathbb{H}^2$	
	$\text{SO}(3) \times (\mathbb{R}^2 \rtimes \text{SO}(2))$	$\text{SO}(2) \times \text{SO}(2)$	$S^2 \times \mathbb{R}^2$	
	$\text{SO}_0(2, 1) \times \text{SO}_0(2, 1)$	$\text{SO}(2) \times \text{SO}(2)$	$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$	
	$\text{SO}_0(2, 1) \times (\mathbb{R}^2 \rtimes \text{SO}(2))$	$\text{SO}(2) \times \text{SO}(2)$	$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}^2$	
	$\mathbb{R}^4 \rtimes (\text{SO}(2) \times \text{SO}(2))$	$\text{SO}(2) \times \text{SO}(2)$	\mathbb{R}^4	plana

- Si $\dim(G) = 10$, sabemos por Cuadro 3.2 que la métrica en los tres casos es Einstein, y por lo tanto, si la métrica inicial es Einstein, es decir, satisface que $\text{Rc}(g) = cg$, con $c \in \mathbb{R}$, entonces la solución al flujo de Ricci es $g(t) = (1 - 2ct)g$.
- Si $\dim(G) = 8$, sabemos por Cuadro 3.2 que la métrica en los tres casos es Einstein.
- Si $\dim(G) = 7$, tenemos 4 casos. En los dos primeros casos sabemos que las únicas métricas G -invariantes son productos de \mathbb{R} con una métrica de curvatura constante. Además, sabemos que salvo múltiplo la única métrica de curvatura constante en S^3 es g_{S^3} y en \mathbb{H}^3 es $g_{\mathbb{H}^3}$. Por lo tanto, la métrica inicial debe ser un solitón de Ricci con constante cosmológica igual a la curvatura de la métrica en S^3 o \mathbb{H}^3 . En los últimos dos casos, las métricas son Einstein.
- Si $\dim(G) = 6$, o bien la métrica es la plana, o bien es alguna de las cinco primeras. Para estas últimas, sabemos que las únicas métricas G -invariantes son métricas producto de curvatura constante, y por lo tanto, producto de métricas que son múltiplos de g_{S^2} , $g_{\mathbb{H}^2}$ o la métrica plana en \mathbb{R}^2 , a la que denotaremos por $du_1^2 + du_2^2$. Por lo tanto, el flujo de Ricci en cada caso es como sigue:

- Si la métrica inicial en $S^2 \times S^2$ es $g_0 = R_1^2 g_{S^2} + R_2^2 g_{S^2}$, con R_1, R_2 constantes, entonces la solución al flujo de Ricci que empieza en g_0 es la siguiente:

$$g(t) = (R_1^2 - 2t)g_{S^2} + (R_2^2 - 2t)g_{S^2}, \quad -\infty < t < \min\left\{\frac{R_1^2}{2}, \frac{R_2^2}{2}\right\}.$$

- Si la métrica inicial en $S^2 \times \mathbb{H}^2$ es $g_0 = R_1^2 g_{S^2} + R_2^2 g_{\mathbb{H}^2}$, con R_1, R_2 constantes, entonces la solución al flujo de Ricci que empieza en g_0 es la siguiente:

$$g(t) = (R_1^2 - 2t)g_{S^2} + (R_2^2 + 2t)g_{\mathbb{H}^2}, \quad -\frac{R_2^2}{2} < t < \frac{R_1^2}{2}.$$

- Si la métrica inicial en $S^2 \times \mathbb{R}^2$ es $g_0 = R^2 g_{S^2} + du_1^2 + du_2^2$, con R constante, entonces la solución al flujo de Ricci que empieza en g_0 es la siguiente:

$$g(t) = (R^2 - 2t)g_{S^2} + du_1^2 + du_2^2, \quad -\infty < t < \frac{R^2}{2}.$$

- Si la métrica inicial en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ es $g_0 = R_1^2 g_{\mathbb{H}^2} + R_2^2 g_{\mathbb{H}^2}$, con R_1, R_2 constantes, entonces la solución al flujo de Ricci que empieza en g_0 es la siguiente:

$$g(t) = (R_1^2 + 2t)g_{\mathbb{H}^2} + (R_2^2 + 2t)g_{\mathbb{H}^2}, \quad \max\left\{-\frac{R_1^2}{2}, -\frac{R_2^2}{2}\right\} < t < \infty.$$

- Si la métrica inicial en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}^2$ es $g_0 = R^2 g_{\mathbb{H}^2} + du_1^2 + du_2^2$, con R constante, entonces la solución al flujo de Ricci que empieza en g_0 es la siguiente:

$$g(t) = (R^2 + 2t)g_{\mathbb{H}^2} + du_1^2 + du_2^2, \quad -\frac{R^2}{2} < t < \infty.$$

3.1.2. $\dim(G) = 5$

Si G es un grupo de Lie con $\dim(G) = 5$ podemos distinguir dos casos: o bien G es soluble, o bien G es uno de los grupos del Cuadro 3.1. Estudiaremos estos dos casos por separado:

G soluble

Si G es un grupo de Lie soluble, entonces el Teorema 3.1.1 nos asegura que existe un subgrupo normal H de G , conexo y simplemente conexo, transitivo en M y tal que G es el producto semidirecto de H por un grupo compacto a 1-parámetro de los automorfismos de H . Luego M es isométrica a H equipada con una métrica Riemanniana invariante a izquierda (ver [GW, Sección 1]), es decir, es isométrica a un grupo de Lie soluble de dimensión 4 muido de una métrica Riemanniana invariante a izquierda, los cuales van a ser estudiados en la Subsección 3.1.3.

Cuadro 3.1

Ahora analizaremos los casos en los cuales G es uno de los grupos del Cuadro 3.1.

Consideremos la descomposición $\mathbb{R}^5 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^4$, $\{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canónica de \mathbb{R}^5 , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interno canónico en \mathbb{R}^4 y $\mu = \mu_{a,b,c,d,e,f} \in V_{1+4}$ dado por

$$\begin{cases} \mu(e_3, e_0) = de_2, & \mu(e_2, e_3) = ae_1 + be_0, & \mu(e_3, e_1) = ce_2, & \mu(e_1, e_4) = ee_1 + fe_4, \\ \mu(e_0, e_2) = de_3, & & \mu(e_1, e_2) = ce_3. \end{cases} \quad (3.1)$$

Recordemos que $\mu \in \mathcal{H}_{q,n}$ si $\mu \in \mathfrak{L}_{q+n}$ y satisface las condiciones (h1)-(h4) (ver Definición 1.2.4 en la Sección 1.2 del Capítulo 1).

Luego, $\mu \in \mathfrak{L}_{1+4}$ si y sólo si $ce = 0$, $ea = 0$ y $af = 0$. Calculando la forma de Killing, es fácil concluir que algunas álgebras de Lie obtenidas son:

$$\mu \simeq \begin{cases} \mathbb{R}^2 \oplus \mathfrak{su}(2), & ac + bd > 0, e = 0, f = 0, \\ \mathbb{R}^2 \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}), & ac + bd < 0, e = 0, f = 0, \\ \mathfrak{z}^2 \oplus \mathfrak{su}(2), & bd > 0, a = 0, c = 0, e \neq 0, f \neq 0, \\ \mathfrak{z}^2 \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}), & bd < 0, a = 0, c = 0, e \neq 0, f \neq 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

donde $\mathfrak{su}(2)$, $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ y \mathfrak{z}^2 son las álgebras de Lie de los grupos de Lie $SU(2)$, $\widehat{SL}_2(\mathbb{R})$ y Z^2 respectivamente. La condición (h1) se satisface. Analizando caso por caso, se puede ver que la condición (h2) también se satisface. En el primer caso, por ejemplo, se puede utilizar el isomorfismo $G_\mu \simeq \mathbb{R}^2 \times SU(2)$ para ver que K_μ es un espiral dentro de $\mathbb{R} \times S^1$ y entonces K_μ es cerrado en G_μ . La condición (h3) se cumple. En efecto, la matriz de $\text{ad}_\mu(e_0)$ respecto de la base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ es

$$\text{ad}_\mu(e_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por último, (h4) se satisface si y sólo si $d \neq 0$. Por lo tanto, podemos concluir que $\mu_{a,b,c,d,e,f} \in \mathcal{H}_{1,4}$ si y sólo si $ce = 0$, $ea = 0$, $af = 0$ y $d \neq 0$, y las geometrías respectivamente obtenidas de las álgebras de Lie de (3.2) son:

$$G_\mu/K_\mu = \begin{cases} S^3 \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^2 \times S^2, \\ \widehat{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^2 \times \mathbb{H}^2, \\ \mathbb{H}^2 \times S^2, \\ \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2. \end{cases} \quad (3.3)$$

Observar que $\mathbb{R}^2 \times S^2$ y $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{H}^2$ son obtenidas en (3.3) de los dos primeros casos de (3.2) cuando $a = 0$ y $b \neq 0$.

Veamos entonces cómo es el flujo de corchetes introducido en (1.13) para $\mu = \mu_{a,b,c,d,e,f} \in \mathcal{H}_{1,4}$. Usando (1.7) obtenemos que la matriz de Ric_μ respecto de la base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ es la siguiente:

$$\text{Ric}_\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a^2 - e^2 - f^2 & & & \\ & -\frac{1}{2}a^2 + (ac + bd) & & \\ & & -\frac{1}{2}a^2 + (ac + bd) & \\ & & & -e^2 - f^2 \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

y por lo tanto, la familia $\mu_{a,b,c,d,e,f}$ es invariante por el flujo de corchetes, el cual es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en las variables $a = a(t), b = b(t), c = c(t), e = e(t)$ y $f = f(t)$:

$$\begin{cases} a' = \left(-\frac{3}{2}a^2 + 2(ac + bd) + e^2 + f^2\right) a, \\ b' = \left(-a^2 + 2(ac + bd)\right) b, \\ c' = \left(\frac{1}{2}a^2 - e^2 - f^2\right) c, \\ e' = -(e^2 + f^2) e, \\ f' = \left(\frac{1}{2}a^2 - e^2 - f^2\right) f. \end{cases} \quad (3.5)$$

Luego, si nuestro flujo de corchetes empieza en $\mu_{a_0,b_0,c_0,d_0,e_0,f_0}$ entonces tenemos los siguientes casos:

- Si $e_0 = 0$ y $f_0 = 0$, entonces para $d = 1$, tenemos que (3.5) es como sigue:

$$\begin{cases} a' = \left(-\frac{3}{4}a^2 + ac + b\right) 2a, & a(0) = a_0, \\ b' = \left(-\frac{1}{2}a^2 + ac + b\right) 2b, & b(0) = b_0, \\ c' = \frac{1}{2}a^2 c, & c(0) = c_0, \\ e = 0, \\ f = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Observar que

$$(ac)' = a'c + ac' = \left(-\frac{3}{4}a^2 + ac + b\right) 2ac + \frac{1}{2}a^3 c = 2\left(-\frac{1}{2}a^2 + ac + b\right) ac,$$

y entonces

$$\left(\frac{b}{ac}\right)' = \frac{b'ac - b(ac)'}{(ac)^2} = \frac{\left(-\frac{1}{2}a^2 + ac + b\right) 2bac - \left(-\frac{1}{2}a^2 + ac + b\right) 2acb}{(ac)^2} = 0.$$

De lo que se sigue que si $a_0 c_0 \neq 0$, entonces $b = \lambda ac$, $\lambda \in \mathbb{R}$ constante. Tenemos entonces dos casos:

- Si $a_0 c_0 \neq 0$, entonces el flujo de corchetes para $\mu_{a_0,b_0,c_0,1,0,0} \in \mathcal{H}_{1,4}$ es:

$$\begin{cases} a' = \left(-\frac{3}{4}a^2 + ac + b\right) 2a, & a(0) = a_0, \\ c' = \frac{1}{2}a^2 c, & c(0) = c_0, \\ b = \lambda ac, & b(0) = b_0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Para comenzar a analizar el sistema, observemos primero que basta estudiar el caso $a_0 \geq 0$, ya que si (a, c) es solución con condiciones iniciales (a_0, c_0) entonces $(-a, -c)$ es solución con condiciones iniciales $(-a_0, -c_0)$.

Si $\lambda + 1 = 0$, i.e. $\lambda = -1$, entonces la solución de (3.7) es $\left(\frac{1}{(3t+a_0^{-2})^{\frac{1}{2}}}, c_0 a_0^{\frac{1}{3}}(3t+a_0^{-2})^{\frac{1}{6}}\right)$.

De lo que se sigue que la solución está definida para todo t en el intervalo $\left(-\frac{1}{3a_0^2}, \infty\right)$ y que c diverge. Claramente, ninguna de estas soluciones es antigua, es decir, ninguna de estas soluciones está definida en el intervalo $(-\infty, 0]$.

Si $\lambda + 1 \neq 0$, la recta $c = \frac{a}{\lambda + 1}$ es invariante por el flujo, es decir, si las condiciones iniciales satisfacen que $c_0 = \frac{a_0}{\lambda + 1}$ entonces $\left(\frac{1}{(-t+a_0^{-2})^{\frac{1}{2}}}, \frac{1}{(\lambda + 1)(-t+a_0^{-2})^{\frac{1}{2}}}\right)$ es la solución que empieza en (a_0, c_0) . Observemos que de acuerdo al signo de $\lambda + 1$ la pendiente de esta recta será positiva o negativa. No obstante, el análisis en ambos casos es similar, por lo tanto, el objetivo de lo que sigue será estudiar el caso $\lambda + 1 > 0$.

A modo de entender el sistema, veamos la Figura 3.1, dibujada con Maple, en donde se puede observar a c en función de a en el caso $\lambda = 1$. Observar que si $c_0 < 0$ entonces

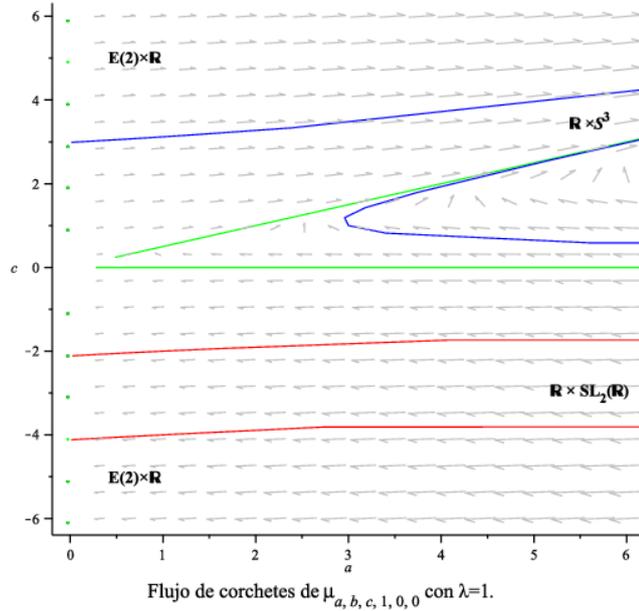


Figura 3.1:

$c < 0$ y $c' < 0$ por (3.7), por lo tanto c decrece y está definida para todo t en el intervalo $[0, \infty)$. Además, a tiende a 0, pues de (3.7) obtenemos que $a' \leq -\frac{3}{2}a^3$. Por lo tanto $\mu_{a,b,c,1,0,0} \rightarrow \mu_{0,0,c_\infty,1,0,0}$, llamemos λ a este límite. Entonces para toda sucesión $t_k \rightarrow \infty$, existe una subsucesión de $(G_{\mu(t_k)}/K_{\mu(t_k)}, g_{\mu(t_k)})$, la cual converge en la topología punteada a una variedad localmente isométrica a $(G_\lambda/K_\lambda, g_\lambda)$, la cual es plana por ser Ricci plana (ver (3.4)) y corresponde a una métrica en $E(2) \times \mathbb{R}$, donde $E(2)$ es el grupo de los movimientos rígidos del espacio euclídeo 2-dimensional (ver Ejemplo 2.5 en [L4] y Teorema 1.7.4). Si $c_0 > 0$, entonces $c > 0$ y $c' > 0$, por lo tanto c crece indefinidamente. También podemos notar que la región $c > \frac{a}{\lambda + 1}$ es invariante por el flujo y analizando el flujo para atrás obtenemos que

$$\frac{d}{dt} (a^2 + c^2) = -2a^2 \left(-\frac{3}{2}a^2 + 2(\lambda + 1)ac\right) - a^2c^2 \leq 0.$$

Entonces las soluciones dentro de esta región están definidas para $t \in (-\infty, 0]$ y por lo tanto producen soluciones antiguas. Observando el flujo para atrás en la región $c \leq \frac{a}{\lambda+1}$ y suponiendo por el absurdo que las soluciones están definidas en el intervalo $[0, \infty)$, se puede ver que no hay soluciones antiguas.

- Si $a_0 c_0 = 0$ entonces $a_0 = 0$ o $c_0 = 0$. Como el caso $c_0 = 0$ ha sido analizado en [L4, Sección 3], analizaremos el caso $a_0 = 0$. De (3.6), obtenemos que

$$\begin{cases} b' = 2b^2, & b(0) = b_0, \\ c' = 0, & c(0) = c_0. \end{cases}$$

Y por lo tanto, la solución al sistema es $a(t) = 0$, $b(t) = \frac{1}{-2t+b_0^{-1}}$ y $c(t) = c_0$. Luego, tenemos dos casos

- Si $b_0 < 0$, entonces la solución está definida en el intervalo $(\frac{1}{2b_0}, \infty)$ y entonces $b(t) \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$. Luego, para toda sucesión $t_k \rightarrow \infty$, existe una subsucesión de $(G_{\mu(t_k)}/K_{\mu(t_k)}, g_{\mu(t_k)})$, la cual converge en la topología punteada a una métrica plana en $E(2) \times \mathbb{R}$, salvo isometría local.
- Si $b_0 > 0$, entonces la solución está definida en el intervalo $(-\infty, \frac{1}{2b_0})$ y $b(t)$ diverge.

- Si $e_0 \neq 0$, $f_0 \neq 0$, $d = 1$ y $a_0 = c_0 = 0$, entonces de (3.5) se sigue que

$$\begin{cases} b' = 2b^2, & b(0) = b_0, \\ e' = -(e^2 + f^2)e, & e(0) = e_0, \\ f' = -(e^2 + f^2)f, & f(0) = f_0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Luego $b(t) = \frac{1}{-2t+b_0^{-1}}$,

$$\frac{e'}{f'} = \frac{-(e^2 + f^2)e}{-(e^2 + f^2)f} = \frac{e}{f},$$

y entonces $e'f - ef' = 0$. Por lo tanto, $\frac{e}{f} = \alpha$, α constante. Pero α tiene que ser igual a $\frac{e_0}{f_0}$ y por lo tanto $e = \frac{e_0}{f_0}f$.

Es fácil ver que podemos suponer que $e_0 > 0$ y por lo tanto usando (3.8) tenemos que $e > 0$ y $e' < 0$, es decir, e decrece y está definida para todo t en el intervalo $[0, \infty)$ y por lo tanto f también. Tenemos entonces dos casos:

- Si $b_0 < 0$, entonces $b(t)$ está definida en el intervalo $(\frac{1}{2b_0}, \infty)$ y entonces la solución de (3.8) está definida en $[0, \infty)$. Luego, $b(t) \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$. Por otro lado, usando nuevamente (3.8), tenemos que $e' \leq -e^3$, de lo que se sigue que

$$e(t) \leq \frac{1}{\sqrt{2t+e_0^{-2}}},$$

y por lo tanto $e(t), f(t) \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$. Luego, para toda sucesión $t_k \rightarrow \infty$, existe una subsucesión de $(G_{\mu(t_k)}/K_{\mu(t_k)}, g_{\mu(t_k)})$, la cual converge en la topología punteada a una métrica plana en $E(2) \times \mathbb{R}$, salvo isometría local.

- Si $b_0 > 0$, entonces $b(t)$ está definida en el intervalo $(-\infty, \frac{1}{2b_0})$ y crece. Luego, la solución diverge. Por otro lado, es fácil ver que la solución de (3.8) no puede ser antigua. En efecto, observando el flujo para atrás, obtenemos que $e' \geq e^3$ y por lo tanto $e(t) \geq \frac{1}{\sqrt{-2t+e_0^{-2}}}$, la cual tiende a infinito en tiempo finito.

Veamos ahora que con las $\mu_{a,b,c,d,e,f}$'s obtengo todas las métricas homogéneas en $S^3 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2 \times S^2$, $\widehat{\text{SL}}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{H}^2$, $\mathbb{H}^2 \times S^2$ y $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$. Para esto vamos a aplicar la Proposición 1.2.5 (ver también Observación 1.2.6). Calculemos entonces U_μ (ver (1.6) en el Capítulo 1, Sección 1.2) para $\mu := \mu_{a,b,c,1,e,f} \in \mathcal{H}_{1,4}$. La matriz de $\text{ad}_\mu(e_0)$ respecto de la base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ es la que sigue:

$$\text{ad}_\mu(e_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$U_\mu = \left\{ AB : A \in \text{O}(4), B = \left(\begin{array}{c|cc|c} h & 0 & 0 & j \\ \hline 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ \hline k & 0 & 0 & l \end{array} \right), h, j, k, l, m \in \mathbb{R} \right\}.$$

Pero,

$$\left\{ \text{O}(4) \left(\begin{array}{c|cc|c} h & 0 & 0 & j \\ \hline 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ \hline k & 0 & 0 & j \end{array} \right), h, j, k, l, m \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \text{O}(4) \left(\begin{array}{c|cc|c} h & 0 & 0 & j \\ \hline 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & l \end{array} \right), h, j, l, m \in \mathbb{R} \right\}.$$

Luego,

$$U_\mu = \left\{ AB : A \in \text{O}(4), B = \left(\begin{array}{c|cc|c} h & 0 & 0 & j \\ \hline 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & l \end{array} \right), h, j, l, m \in \mathbb{R} \right\}.$$

- $S^3 \times \mathbb{R}$: Tomo $\mu = \mu_{1,1,1,1,0,0} \in \mathcal{H}_{1,4}$, el conjunto $U_\mu \cdot \mu$ parametriza el conjunto de métricas G_μ -invariantes. Veamos que $U_\mu \cdot \mu$ es cubierto por todas las $\mu_{a,b,c,d,e,f}$'s. Sea

$$g = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & & & \\ \hline & h & 0 & 0 & j \\ & 0 & m & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & m & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & l \end{array} \right). \quad (3.9)$$

Luego, $g \cdot \mu = \mu_{\frac{h}{m^2}, \frac{1}{m^2}, \frac{1}{h}, 1, 0, 0} \in \mu_{a,b,c,d,e,f}$. Por lo tanto, $U_\mu \cdot \mu$ es cubierto por las $\mu_{a,b,c,d,e,f}$'s.

- $\mathbb{R}^2 \times S^2$: Tomo $\mu = \mu_{0,1,1,1,0,0} \in \mathcal{H}_{1,4}$ y sea g como en (3.9). Como $g \cdot \mu = \mu_{0, \frac{1}{m^2}, \frac{1}{h}, 1, 0, 0} \in \mu_{a,b,c,d,e,f}$, entonces $U_\mu \cdot \mu$ es cubierto por las $\mu_{a,b,c,d,e,f}$'s.
- $\widehat{\text{SL}}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$: Tomo $\mu = \mu_{-1, -1, 1, 1, 0, 0} \in \mathcal{H}_{1,4}$ y sea g como en (3.9). Como $g \cdot \mu = \mu_{-\frac{h}{m^2}, -\frac{1}{m^2}, \frac{1}{h}, 1, 0, 0} \in \mu_{a,b,c,d,e,f}$, entonces $U_\mu \cdot \mu$ es cubierto por las $\mu_{a,b,c,d,e,f}$'s.
- $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{H}^2$: Tomo $\mu = \mu_{0, -1, 1, 1, 0, 0} \in \mathcal{H}_{1,4}$ y sea g como en (3.9). Como $g \cdot \mu = \mu_{0, -\frac{1}{m^2}, \frac{1}{h}, 1, 0, 0} \in \mu_{a,b,c,d,e,f}$, entonces $U_\mu \cdot \mu$ es cubierto por las $\mu_{a,b,c,d,e,f}$'s.

- $\mathbb{H}^2 \times S^2$: Tomo $\mu = \mu_{0,1,0,1,1,1} \in \mathcal{H}_{1,4}$ y sea g como en (3.9). Como $g \cdot \mu = \mu_{0, \frac{1}{m^2}, 0, 1, \frac{h+j}{hl}, \frac{1}{h}} \in \mu_{a,b,c,d,e,f}$, entonces $U_\mu \cdot \mu$ es cubierto por las $\mu_{a,b,c,d,e,f}$'s.
- $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$: Tomo $\mu = \mu_{0,-1,0,1,1,1} \in \mathcal{H}_{1,4}$ y sea g como en (3.9). Como $g \cdot \mu = \mu_{0, -\frac{1}{m^2}, 0, 1, \frac{h+j}{hl}, \frac{1}{h}} \in \mu_{a,b,c,d,e,f}$, entonces $U_\mu \cdot \mu$ es cubierto por las $\mu_{a,b,c,d,e,f}$'s.

Observemos que sólo falta analizar el último caso del Cuadro 3.1.

Consideremos la descomposición $\mathbb{R}^5 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^4$, $\{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base de \mathbb{R}^5 , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interno canónico en \mathbb{R}^4 respecto de la base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ y $\mu = \mu_{a,b} \in V_{1+4}$ dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu(e_2, e_0) = be_1, \quad \mu(e_1, e_2) = ae_0, \quad \mu(e_0, e_3) = -\frac{b}{2}e_4, \\ \mu(e_0, e_1) = be_2, \quad \mu(e_0, e_4) = \frac{b}{2}e_3, \\ \mu(e_1, e_3) = \frac{\sqrt{-ab}}{2}e_4, \\ \mu(e_1, e_4) = \frac{\sqrt{-ab}}{2}e_3, \\ \mu(e_2, e_3) = \frac{\sqrt{-ab}}{2}e_3, \\ \mu(e_2, e_4) = -\frac{\sqrt{-ab}}{2}e_4. \end{array} \right. \quad (3.10)$$

$\mu_{a,b}$ es isomorfa a $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$ si $ab < 0$ considerando la siguiente representación:

$$e_0 = \frac{b}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \frac{\sqrt{-ab}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{\sqrt{-ab}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es fácil ver que (h1), (h2) y (h3) se cumplen, y que (h4) se satisface si y sólo si $b \neq 0$.

El operador de Ricci, Ric_μ , respecto de la base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ es el que sigue

$$\text{Ric}_\mu = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}ab & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}ab & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

y por lo tanto, la familia $\mu_{a,b}$ es invariante por el flujo, el cual es equivalente a la siguiente ecuación diferencial ordinaria en $a(t)$:

$$\{a' = 3a^2b_0, \quad a(0) = a_0.\}$$

De lo que se sigue que $a(t) = \frac{1}{-3b_0t + a_0 - 1}$. Luego si $b_0 \neq 0$, entonces $a(t)$ está definida en el intervalo $(\frac{1}{3a_0b_0}, \infty)$ y por lo tanto $a(t) \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$. Luego, para toda sucesión $t_k \rightarrow \infty$, existe una subsucesión de $(G_{\mu(t_k)}/K_{\mu(t_k)}, g_{\mu(t_k)})$, la cual converge en la topología punteada a una métrica plana en $E(2) \times \mathbb{R}$, salvo isometría local. Observar que estas soluciones nunca pueden ser antiguas.

Veamos que con las $\mu_{a,b}$'s se cubren todas las métricas. Para esto vamos a aplicar la Proposición 1.2.5. Calculemos entonces U_μ para $\mu := \mu_{a,b} \in \mathcal{H}_{1,4}$. La matriz de $\text{ad}_\mu(e_0)$ respecto de la base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ es la que sigue:

$$\text{ad}_\mu(e_0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$U_\mu = \left\{ AB : A \in O(4), B = \begin{pmatrix} r_1 I_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & r_2 I_{2 \times 2} \end{pmatrix}, r_1, r_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sea

$$g = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & r_1 I_{2 \times 2} & \\ & & r_2 I_{2 \times 2} \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Si $\mu := \mu_{-1,1} \in \mathcal{H}_{1,4}$ y g es como en (3.12), como $g \cdot \mu = \mu_{-\frac{1}{r_1^2}, 1} \in \mu_{a,b}$, entonces $U_\mu \cdot \mu$ es cubierto por las $\mu_{a,b}$'s.

Teorema 3.1.2. *Sea G uno de los grupos del Cuadro 3.1. Entonces $(G/K, g)$ es isométrico a $(G_\mu/K_\mu, g_\mu)$ con $\mu = \mu_{a,b,c,1,0,0}$, $\mu = \mu_{0,b,0,1,e,f}$ (ver (3.1)) ó $\mu = \mu_{a,b}$ (ver (3.10)). Si $\mu(t)$ el flujo de corchetes que empieza en μ , entonces $\|\mu(t)\| \rightarrow \infty$ o $\mu(t)$ está definida para todo $t \in [0, \infty)$ y para toda sucesión $t_k \rightarrow \infty$, existe una subsucesión de $(G_{\mu(t_k)}/K_{\mu(t_k)}, g_{\mu(t_k)})$, la cual converge en la topología punteada a una métrica plana en $E(2) \times \mathbb{R}$, salvo isometría local. Además, $g_{\mu(t)}$ es una solución antigua si y sólo si μ es una de las siguientes:*

- $\mu_{a,b,c,1,0,0}$, con $b = \lambda ac$, $\lambda + 1 > 0$ y $c > \frac{a}{\lambda+1}$.
- $\mu_{a,b,c,1,0,0}$, con $b = \lambda ac$, $\lambda + 1 < 0$ y $c < \frac{a}{\lambda+1}$.
- $\mu_{a,b,0,1,0,0}$, con $b \geq a^2$.
- $\mu_{0,b,c,1,0,0}$, con $b \geq 0$.

3.1.3. $\dim(G) = 4$

Si G es un grupo de Lie soluble de dimensión 4, entonces el álgebra de Lie de G o bien tiene un ideal abeliano de codimensión 1, y por lo tanto el flujo de corchetes ha sido estudiado en el Capítulo 2, o es isomorfa a una de las siguientes álgebras de Lie (ver [ABDO]):

$$\begin{array}{llll} \partial_4 : & [e_0, e_1] = e_1, & [e_0, e_2] = -e_2, & [e_1, e_2] = e_3; \\ \partial_{4,\lambda}, \lambda \geq \frac{1}{2} : & [e_0, e_1] = \lambda e_1, & [e_0, e_2] = (1 - \lambda)e_2, & [e_0, e_3] = e_3, \quad [e_1, e_2] = e_3; \\ \partial'_{4,\lambda}, \lambda \geq 0 : & [e_0, e_1] = \lambda e_1 - e_2, & [e_0, e_2] = e_1 + \lambda e_2, & [e_0, e_3] = 2\lambda e_3, \quad [e_1, e_2] = e_3; \\ h_4 : & [e_0, e_1] = e_1, & [e_0, e_2] = e_1 + e_2, & [e_0, e_3] = 2e_3, \quad [e_1, e_2] = e_3; \\ \mathfrak{aff}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{aff}(\mathbb{R}) : & [e_0, e_1] = e_1, & [e_2, e_3] = e_3; & \\ \mathfrak{aff}(\mathbb{C}) : & [e_0, e_2] = e_2, & [e_0, e_3] = e_3, & [e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = -e_2. \end{array} \quad (3.13)$$

Para estudiar el flujo de corchetes vamos a separar a estas álgebras en dos grupos los cuales serán estudiados por separado. El primer caso involucrará a las primeras cuatro álgebras de (3.13), y el segundo, a las últimas dos.

Primer caso

Considero $(\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interno fijo en \mathbb{R}^4 , y $\mu_0 \in \mathfrak{L}_4$, un corchete de Lie soluble tal que $\mu_0 = \mathbb{R} \times \mu_{h_3}$, donde $(\mathbb{R}^3, \mu_{h_3})$ es el álgebra de Lie de Heisenberg de dimensión 3.

Luego, existe una base ortonormal $\{e_0, \dots, e_3\}$ tal que la matriz de $\text{ad}_{\mu_0}(e_0)$ respecto de esta base tiene la siguiente forma:

$$\text{ad}_{\mu_0}(e_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix},$$

con $A \in \mathfrak{gl}_3(\mathbb{R})$, $(\langle e_1, e_2, e_3 \rangle, \mu_0|_{\langle e_1, e_2, e_3 \rangle})$ el nilradical de (\mathbb{R}^4, μ_0) al que denotaremos por \mathfrak{n}_0 , el cual es isomorfo a $(\mathbb{R}^3, \mu_{h_3})$.

Luego $\mu_{A,\lambda} := \mu_0$ es un corchete de Lie en $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3 = \langle e_0 \rangle \oplus \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$, con $\lambda \in \mathfrak{L}_3$, $(\mathbb{R}^3, \lambda) \simeq (\mathbb{R}^3, h_3)$, i.e, $\lambda = g \cdot \mu_{h_3}$, $g \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$.

Si $\mu(t)$ es el flujo de corchetes que empieza en μ_0 , entonces no necesariamente sucede que el espacio vectorial subyacente al nilradical de $(\mathbb{R}^4, \mu(t))$ sea el mismo que el de \mathfrak{n}_0 , por lo tanto, $\mu(t)$ no necesariamente es de la forma $\mu_{A(t),\lambda(t)}$ (respecto a la descomposición $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$ de arriba). Es por esto que estudiaremos una familia de álgebras de Lie en donde los espacios subyacentes son los mismos, las cuales presentaremos a continuación:

Consideremos $(\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ una base ortonormal para $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y definimos $\mu := \mu_{A,h}$ en \mathbb{R}^4 como sigue:

$$\mu(e_0, e_i) = Ae_i, \quad i = 1, \dots, 3, \quad \mu(e_1, e_2) = he_3, \quad (3.14)$$

donde $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & \text{tr}(B) \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}_3(\mathbb{R})$, $B \in \mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})$ y $h \in \mathbb{R}$. A partir de ahora denotaremos a estas álgebras por $(\mathbb{R}^4, \mu_{A,h})$, o simplemente $\mu_{A,h}$.

Lema 3.1.3. Si $A_0 = \begin{pmatrix} B_0 & 0 \\ 0 & \text{tr}(B_0) \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}_3(\mathbb{R})$, $B_0 \in \mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})$ y $h_0 \in \mathbb{R}$, entonces el flujo de corchetes que empieza en μ_{A_0, h_0} está dado por $\mu_{A(t), h(t)}$, $t \in (T_-, T_+)$, donde $A(t)$ y $h(t)$ satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} A = -\text{tr}(S(A)^2)A + \frac{1}{2}[A, [A, A^t]] - \frac{1}{2}\text{tr}(A)[A, A^t], & A(0) = A_0, \\ \frac{d}{dt} h = -\frac{3}{2}h^3 & h(0) = h_0. \end{cases} \quad (3.15)$$

Demostración. Usando la fórmula para el operador de Ricci de una solvariedad (ver (1.7) o [L1, Sección 4]), obtenemos que el operador de Ricci de $(G_{\mu_{A,h}}, g_{\mu_{A,h}})$ respecto de la base $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ está representado por la siguiente matriz:

$$\text{Ric}_{\mu_{A,h}} = \begin{pmatrix} -\text{tr}(S(A)^2) & & & \\ 0 & \frac{1}{2}[A, A^t] - \text{tr}(A)S(A) + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}h^2 & & \\ & -\frac{1}{2}h^2 & \\ & & \frac{1}{2}h^2 \end{pmatrix} & & \\ & & & & \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$\delta_{\mu_{A,h}}(\text{Ric}_{\mu_{A,h}})(e_0, e_i) = (-\text{tr}(S(A)^2)A + \frac{1}{2}[A, [A, A^t]] - \frac{1}{2}\text{tr}(A)[A, A^t])e_i$$

y

$$\delta_{\mu_{A,h}}(\text{Ric}_{\mu_{A,h}})(e_1, e_2) = -\frac{3}{2}h^3 e_3.$$

Por lo tanto,

$$\delta_{\mu_{A,h}}(\text{Ric}_{\mu_{A,h}}) = \mu_{C,f}, \quad \text{donde } C = -\text{tr}(S(A)^2)A + \frac{1}{2}[A, [A, A^t]] - \frac{1}{2}\text{tr}(A)[A, A^t] \quad \text{y} \quad f = -\frac{3}{2}h^3.$$

Entonces, esta familia de álgebras de Lie es invariante por el flujo de corchetes, el cual es equivalente a (3.15). Además, el intervalo maximal de definición de $\mu_{A(t),h(t)}$, es de la forma (T_-, T_+) para $-\infty \leq T_- < 0 < T_+ \leq \infty$, ya que (3.15) es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. \square

Observación 3.1.4. Observar que la ecuación para A es la misma que ya se analizó en el Capítulo 2 y que $h(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, pues $h(t) = \frac{1}{(3t+h_0^{-2})^{\frac{1}{2}}}$.

Teorema 3.1.5. *Sea $A_0 \in \mathfrak{gl}_3(\mathbb{R})$, $A_0 = \begin{pmatrix} B_0 & 0 \\ 0 & \text{tr}(B_0) \end{pmatrix}$ y $h_0 \in \mathbb{R}$. Consideremos $\mu_{A(t),h(t)}$ el flujo de corchetes que empieza en μ_{A_0,h_0} y $g(t)$ el flujo de Ricci que empieza en $g_{\mu_{A_0,h_0}}$. Entonces:*

- (i) $g(t)$ está definido para todo $t \in (T_-, \infty)$, $-\infty < T_- < 0$.
- (ii) El conjunto ω -límite de μ_{A_0,h_0} es un punto. Más aún, $A(t) \rightarrow A_\infty$, y por lo tanto, $\mu_{A(t),h(t)} \rightarrow \mu_{A_\infty}$.
- (iii) Para toda sucesión, existe una subsucesión de $(G_{\mu_{A(t_k),h(t_k)}}, g_{\mu_{A(t_k),h(t_k)}})$, la cual converge en la topología punteada a una variedad localmente isométrica a $(G_{\mu_{A_\infty}}, g_{\mu_{A_\infty}})$, la cual es plana.
- (iv) Si $\text{Spec}(A_0) \subset \mathbb{R}$ entonces $g_{\mu_{A(t),h(t)}} \rightarrow g_{\mu_{A_\infty}}$ suavemente en \mathbb{R}^4 .
- (v) Para toda μ_{A_0,h_0} tal que $\text{tr}(A_0^2) \geq 0$, el flujo de Ricci $g(t)$ con $g(0) = g_{\mu_{A_0,h_0}}$ es una solución de tipo-III.

Demostración. $A(t)$ está definida para todo $t \in (T_-, \infty)$ por Observación 3.1.4 y Proposición 2.1.6 (ver también Teorema 2.2.5 (i)). Por lo tanto, como $h(t)$ está definida en $(-\frac{h_0^{-2}}{3}, \infty)$, tenemos que $\mu_{A(t),h(t)}$ está definida en $(\max\{T_-, -\frac{h_0^{-2}}{3}\}, \infty)$. Luego, denotando por T_- a $\max\{T_-, -\frac{h_0^{-2}}{3}\}$ se prueba (i). El item (ii) sigue directamente de Teorema 2.2.4 y del hecho que $h(t) \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$. Para probar (iii) observamos que $\mu_{A(t),h(t)} \rightarrow \mu_{A_\infty}$ y usamos Teorema 1.7.4 (ver también Corolario 2.1.10). (iv) sigue directamente del hecho que $A(t)$ es la solución de la misma ecuación diferencial que se analizó en el Capítulo 2. Por lo tanto, si $\text{Spec}(A_0) \subset \mathbb{R}$, entonces $\text{Spec}(A(t)) \subset \mathbb{R}$, para todo t (ver Proposición 2.1.12). Para probar (v) daremos una prueba similar a la de Proposición 2.1.13. Sabemos que $h(t) = \frac{1}{(3t+h_0^{-2})^{\frac{1}{2}}}$ y que $\text{tr}(S(A)^2) \leq \frac{1}{2t+(\text{tr}(S(A(0))^2))^{-1}}$. Por lo tanto, de (2.6) obtenemos que

$$\begin{aligned} \|\text{Rm}(\mu_{A,h})\| &= \|\mu_{A,h}\|^2 \|\text{Rm}(\frac{\mu_{A,h}}{\|\mu_{A,h}\|})\| = (2\|A\|^2 + 2\|h\|^2) \|\text{Rm}(\frac{\mu_{A,h}}{\|\mu_{A,h}\|})\| \\ &\leq \left(\frac{4}{2t+(\text{tr}(S(A(0))^2))^{-1}} + \frac{2}{3t+h_0^{-2}} \right) C \leq \frac{\tilde{C}}{t}, \end{aligned}$$

donde C es el máximo de la función continua $\mu \rightarrow \|\text{Rm}(\mu)\|$ restringida a la esfera unitaria de \mathfrak{L}_4 . \square

Segundo caso

Recordemos que en este caso, los grupos de Lie que queremos analizar son los grupos de Lie simplemente conexos con álgebra de Lie $\mathfrak{aff}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{aff}(\mathbb{R})$ y $\mathfrak{aff}(\mathbb{C})$, para las cuales existe alguna base $\{e_1, \dots, e_4\}$ tal que el corchete de Lie es el siguiente:

$$\begin{aligned} \mathfrak{aff}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{aff}(\mathbb{R}) : & [e_1, e_3] = e_3, & [e_2, e_4] = e_4; \\ \mathfrak{aff}(\mathbb{C}) : & [e_1, e_3] = e_3, & [e_1, e_4] = e_4, & [e_2, e_3] = e_4, & [e_2, e_4] = -e_3. \end{aligned}$$

Consideremos $(\mathbb{R}^{n+2}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interno fijo en \mathbb{R}^{n+2} , y $\mu_{A,B} := \mu \in \mathfrak{L}_{n+2}$, un corchete de Lie soluble de la siguiente forma:

$$\mu(e_1, e_i) = Ae_i, \quad i \geq 3, \quad \mu(e_2, e_i) = Be_i, \quad i \geq 3,$$

donde pensamos a $A, B \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ como operadores actuando en el subespacio generado por $\{e_3, e_4, \dots, e_{n+2}\}$, tales que $[A, B] = 0$. Observemos que las dos álgebras que queremos estudiar son de este tipo y que para poder estudiar el flujo de corchetes, lo primero que debemos calcular es el operador de Ricci, para lo cual tener una base ortonormal es muy importante.

Dada $\mu_{A,B}$, el álgebra derivada, i.e. $\mu_{A,B}(\mathbb{R}^{n+2}, \mathbb{R}^{n+2})$, es un ideal abeliano de dimensión n , el cual tiene complemento ortogonal de dimensión 2. Por lo tanto, es fácil, calcular el corchete en una base ortonormal elegida de manera que los primeros dos elementos de la base pertenezcan al complemento ortogonal del álgebra derivada y sean ortonormales entre sí, y los n restantes pertenezcan a $\mu_{A,B}(\mathbb{R}^{n+2}, \mathbb{R}^{n+2})$ y sean ortonormales entre sí. Ésta es una base ortonormal en la cual el corchete de Lie no necesariamente se escribe como una $\mu_{C,D}$, con $C, D \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$, debido a que el complemento ortogonal de $\mu_{A,B}(\mathbb{R}^{n+2}, \mathbb{R}^{n+2})$ no necesariamente es abeliano. Por esta causa, es que vamos a estudiar el flujo de corchetes de aquellas álgebras de Lie que tengan la propiedad de que el complemento ortogonal del álgebra derivada sea abeliano.

Consideremos entonces $\mu_{A,B} := \mu \in \mathfrak{L}_{n+2}$ y una base ortonormal $\{e_1, \dots, e_{n+2}\}$ tal que el corchete de Lie respecto de esta base es como sigue:

$$\mu(e_1, e_i) = Ae_i, \quad i \geq 3, \quad \mu(e_2, e_i) = Be_i, \quad i \geq 3, \quad (3.16)$$

donde $A, B \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ tales que $[A, B] = 0$.

Usando nuevamente la fórmula para el operador de Ricci de una solvariedad, obtenemos que el operador de Ricci de $(G_{\mu_{A,B}}, g_{\mu_{A,B}})$ respecto de la base $\{e_1, \dots, e_{n+2}\}$ está representado por la siguiente matriz:

$$\text{Ric}_\mu = \begin{pmatrix} -\text{tr}(S(A)^2) & -\text{tr}(S(A)S(B)) & 0 \\ -\text{tr}(S(A)S(B)) & -\text{tr}(S(B)^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}[A, A^t] + \frac{1}{2}[B, B^t] - \text{tr}(A)S(A) - \text{tr}(B)S(B) \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\delta_{\mu_{A,B}}(\text{Ric}_{\mu_{A,B}})(e_1, e_i) = \left(-\text{tr}(S(A)^2)A - \text{tr}(S(A)S(B))B + \frac{1}{2}[A, [A, A^t]] + \frac{1}{2}[A, [B, B^t]] - \frac{1}{2}\text{tr}(A)[A, A^t] - \frac{1}{2}\text{tr}(B)[A, B] - \frac{1}{2}\text{tr}(B)[A, B^t] \right) e_i,$$

y

$$\delta_{\mu_{A,B}}(\text{Ric}_{\mu_{A,B}})(e_2, e_i) = \left(-\text{tr}(S(B)^2)B - \text{tr}(S(A)S(B))A + \frac{1}{2}[B, [A, A^t]] + \frac{1}{2}[B, [B, B^t]] - \frac{1}{2}\text{tr}(A)[B, A] - \frac{1}{2}\text{tr}(A)[B, A^t] - \frac{1}{2}\text{tr}(B)[B, B^t] \right) e_i,$$

y entonces, $\delta_{\mu_{A,B}}(\text{Ric}_{\mu_{A,B}}) = \mu_{C,D}$ con

$$C = -\text{tr}(S(A)^2)A - \text{tr}(S(A)S(B))B + \frac{1}{2}[A, [A, A^t]] + \frac{1}{2}[A, [B, B^t]] - \frac{1}{2}\text{tr}(A)[A, A^t] - \frac{1}{2}\text{tr}(B)[A, B] - \frac{1}{2}\text{tr}(B)[A, B^t],$$

$$D = -\text{tr}(S(B)^2)B - \text{tr}(S(A)S(B))A + \frac{1}{2}[B, [A, A^t]] + \frac{1}{2}[B, [B, B^t]] - \frac{1}{2}\text{tr}(A)[B, A] - \frac{1}{2}\text{tr}(A)[B, A^t] - \frac{1}{2}\text{tr}(B)[B, B^t].$$

Luego, esta familia de álgebras de Lie es invariante por el flujo. Por lo tanto, si $A_0, B_0 \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$, el flujo de corchetes que empieza en μ_{A_0, B_0} es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}A &= -\operatorname{tr}(S(A)^2)A - \operatorname{tr}(S(A)S(B))B + \frac{1}{2}[A, [A, A^t]] + \frac{1}{2}[A, [B, B^t]] - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(A)[A, A^t] \\ &\quad - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(B)[A, B] - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(B)[A, B^t], \quad A(0) = A_0, \\ \frac{d}{dt}B &= -\operatorname{tr}(S(B)^2)B - \operatorname{tr}(S(A)S(B))A + \frac{1}{2}[B, [A, A^t]] + \frac{1}{2}[B, [B, B^t]] - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(A)[B, A] \\ &\quad - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(A)[B, A^t] - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(B)[B, B^t], \quad B(0) = B_0.\end{aligned}\tag{3.18}$$

De ahora en adelante, pensaremos muchas veces al flujo de corchetes que empieza en μ_{A_0, B_0} como la evolución de las matrices A_0 y B_0 . La siguiente proposición nos muestra que A y B conmutan a lo largo del flujo:

Proposición 3.1.6. $[A(t), B(t)] = 0$ para todo t .

Demostración. De la bilinealidad del corchete obtenemos que

$$\frac{d}{dt}[A, B] = \left[\frac{d}{dt}A, B\right] + \left[A, \frac{d}{dt}B\right],$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned}\left[\frac{d}{dt}A, B\right] &= -\operatorname{tr}(S(A)^2)[A, B] - \operatorname{tr}(S(A)S(B))[B, B] + \frac{1}{2}[[A, [A, A^t]], B] + \frac{1}{2}[[A, [B, B^t]], B] \\ &\quad - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(A)[[A, A^t], B] - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(B)[[A, B], B] - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(B)[[A, B^t], B], \\ \left[A, \frac{d}{dt}B\right] &= -\operatorname{tr}(S(B)^2)[A, B] - \operatorname{tr}(S(A)S(B))[A, A] + \frac{1}{2}[A, [B, [A, A^t]]] + \frac{1}{2}[A, [B, [B, B^t]]] \\ &\quad - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(A)[A, [B, A]] - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(A)[A, [B, A^t]] - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(B)[A, [B, B^t]].\end{aligned}\tag{3.19}$$

Sumando y trabajando algebraicamente en (3.19), obtenemos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[A, B] &= -\operatorname{tr}(S(A)^2)[A, B] - \operatorname{tr}(S(B)^2)[A, B] + \frac{1}{2}[[A, B], [A, A^t]] + \frac{1}{2}[[A, B], [B, B^t]] \\ &\quad - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(A)[[A, B], A^t] - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(B)[[A, B], B] - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(B)[[A, B], B^t] \\ &\quad - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(A)[A, [B, A]].\end{aligned}\tag{3.20}$$

Por lo tanto, como $[A(t), B(t)] = 0$ satisface la ecuación diferencial (3.20), por unicidad de la solución se obtiene que $[A(t), B(t)] = 0$ para todo t . \square

Luego, resumiendo lo probado arriba, escribimos la siguiente proposición:

Proposición 3.1.7. Si $A_0, B_0 \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ tales que $[A_0, B_0] = 0$, entonces el flujo de corchetes que empieza en μ_{A_0, B_0} está dado por $\mu_{A(t), B(t)}$, $t \in (T_-, T_+)$, donde $A(t), B(t)$ satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}A &= -\operatorname{tr}(S(A)^2)A - \operatorname{tr}(S(A)S(B))B + \frac{1}{2}[A, [A, A^t]] + \frac{1}{2}[A, [B, B^t]] \\ &\quad - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(A)[A, A^t] - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(B)[A, B^t], \quad A(0) = A_0, \\ \frac{d}{dt}B &= -\operatorname{tr}(S(B)^2)B - \operatorname{tr}(S(A)S(B))A + \frac{1}{2}[B, [A, A^t]] + \frac{1}{2}[B, [B, B^t]] \\ &\quad - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(A)[B, A^t] - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(B)[B, B^t], \quad B(0) = B_0.\end{aligned}\tag{3.21}$$

Ahora comienzan las preguntas que están relacionadas con el intervalo de definición y la convergencia de las matrices $A(t)$ y $B(t)$. En las siguientes proposiciones analizamos el intervalo maximal de definición de las soluciones hacia adelante y probamos que los límites de las soluciones deben ser matrices antisimétricas.

Proposición 3.1.8. $A(t)$ y $B(t)$ están definidas para todo $t \in [0, \infty)$.

Demostración. Por (3.21) tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|A\|^2 = & 2\langle A, -\operatorname{tr}(S(A)^2)A - \operatorname{tr}(S(A)S(B))B + \frac{1}{2}[A, [A, A^t]] \\ & + \frac{1}{2}[A, [B, B^t]] - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(A)[A, A^t] - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(B)[A, B^t] \rangle. \end{aligned}$$

Usando que $\langle A, [A, [A, A^t]] \rangle = -\|[A, A^t]\|^2$, $\langle A, [A, [B, B^t]] \rangle = -\|[A, B^t]\|^2$, $\langle A, [A, A^t] \rangle = 0$ y $\langle A, [A, B^t] \rangle = 0$, obtenemos que

$$\frac{d}{dt} \|A\|^2 = -2\operatorname{tr}(S(A)^2)\|A\|^2 - 2\operatorname{tr}(S(A)S(B))\langle A, B \rangle - \|[A, A^t]\|^2 - \|[A, B^t]\|^2.$$

Haciendo lo mismo para B , obtenemos que

$$\frac{d}{dt} \|B\|^2 = -2\operatorname{tr}(S(B)^2)\|B\|^2 - 2\operatorname{tr}(S(A)S(B))\langle A, B \rangle - \|[B, B^t]\|^2 - \|[B, A^t]\|^2.$$

Luego,

$$\frac{d}{dt} (\|A\|^2 + \|B\|^2) \leq -2\operatorname{tr}(S(A)^2)\|A\|^2 - 2\operatorname{tr}(S(B)^2)\|B\|^2 - 4\operatorname{tr}(S(A)S(B))\langle A, B \rangle.$$

Veamos entonces que $\frac{d}{dt} (\|A\|^2 + \|B\|^2) \leq 0$, demostrando que

$$-4\operatorname{tr}(S(A)S(B))\langle A, B \rangle \leq 2\operatorname{tr}(S(A)^2)\|A\|^2 + 2\operatorname{tr}(S(B)^2)\|B\|^2.$$

$$\begin{aligned} 4|\operatorname{tr}(S(A)S(B))\langle A, B \rangle| &= 4|\langle S(A), S(B) \rangle|\langle A, B \rangle| \leq 4\|S(A)\|\|S(B)\|\|A\|\|B\| \\ &= 4\|S(A)\|\|A\|\|S(B)\|\|B\| \leq 2(\|S(A)\|^2\|A\|^2 + \|S(B)\|^2\|B\|^2), \end{aligned}$$

donde en la primera desigualdad usamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz y en la última, la desigualdad de la media geométrica y la media aritmética.

Por lo tanto, $\frac{d}{dt} (\|A\|^2 + \|B\|^2) \leq 0$, es decir, $\|A\|^2 + \|B\|^2$ es una función que decrece y entonces permanece en un conjunto compacto. De esto se sigue que $A(t)$ y $B(t)$, ambas están definidas para todo $t \in [0, \infty)$. \square

Proposición 3.1.9. $\operatorname{tr}(S(A(t))^2)$ y $\operatorname{tr}(S(B(t))^2)$ decrecen. Más aún,

$$\operatorname{tr}(S(A(t))^2) \rightarrow 0 \text{ y } \operatorname{tr}(S(B(t))^2) \rightarrow 0, \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Demostración. Vamos a dar sólo la prueba para $\operatorname{tr}(S(A(t))^2)$, pues la prueba para $\operatorname{tr}(S(B(t))^2)$ es análoga.

Sabemos que $\operatorname{tr}(S(A)^2) = \frac{1}{2}\|A\|^2 + \frac{1}{2}\operatorname{tr}(A^2)$, por lo tanto para calcular $\frac{d}{dt} \operatorname{tr}(S(A)^2)$ vamos a calcular $\frac{d}{dt} \operatorname{tr}(A^2)$, ya que en Proposición 3.1.8 calculamos $\frac{d}{dt} \|A\|^2$.

$$\frac{d}{dt} \operatorname{tr}(A^2) = \frac{d}{dt} \langle A, A^t \rangle = \left\langle \frac{d}{dt} A, A^t \right\rangle + \left\langle A, \frac{d}{dt} A^t \right\rangle.$$

Usando las propiedades del corchete y del producto interno se obtiene que

$$\frac{d}{dt} \operatorname{tr}(A^2) = -2 \operatorname{tr}(S(A)^2) \operatorname{tr}(A^2) - 2 \operatorname{tr}(S(A)S(B)) \operatorname{tr}(BA).$$

Finalmente,

$$\frac{d}{dt} \operatorname{tr}(S(A)^2) = -2 \operatorname{tr}(S(A)^2)^2 - \operatorname{tr}(S(A)S(B))^2 - \frac{1}{2} \|[A, A^t]\|^2 - \frac{1}{2} \|[A, B^t]\|^2.$$

De lo que se deduce que

$$\frac{d}{dt} \operatorname{tr}(S(A)^2) \leq -2 \operatorname{tr}(S(A)^2)^2,$$

y por lo tanto $\operatorname{tr}(S(A)^2)$ está mayorada por la función $x = x(t)$ que satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dt} x = -2x^2,$$

la cual tiende a 0 cuando $t \rightarrow \infty$. □

Teorema 3.1.10. *Para toda sucesión $t_k \rightarrow \infty$, existe una subsucesión de $(G_{\mu_{A(t_k), B(t_k)}}, g_{\mu_{A(t_k), B(t_k)}})$, la cual converge en la topología punteada a una variedad localmente isométrica a $(G_{\mu_{A_\infty, B_\infty}}, g_{\mu_{A_\infty, B_\infty}})$, la cual es plana, donde A_∞ y B_∞ son los límites de las subsucesiones de $A(t_k)$ y $B(t_k)$ respectivamente.*

Demostración. Observemos que como $A(t)$ y $B(t)$ permanecen en un conjunto compacto (ver la prueba de la Proposición 3.1.8), entonces toda sucesión de la forma $(A(t_k), B(t_k))$ posee una subsucesión convergente. Llamemos nuevamente $(A(t_k), B(t_k))$ a esta subsucesión y (A_∞, B_∞) al límite de la misma.

Se sigue directamente de la Proposición 3.1.9 que $S(A(t_k)) \rightarrow 0$ y $S(B(t_k)) \rightarrow 0$, cuando $k \rightarrow \infty$, por lo tanto, A_∞ y B_∞ son antisimétricas y $(G_{\mu_{A_\infty, B_\infty}}, g_{\mu_{A_\infty, B_\infty}})$ es plana, por ser Ricci-plana (ver (3.17)).

Por último, como $\mu_{A(t_k), B(t_k)} \rightarrow \mu_{A_\infty, B_\infty}$, por Teorema 1.7.4 (ver también [L3, Corolario 6.20]) sabemos que existe una subsucesión de $(G_{\mu_{A(t_k), B(t_k)}}, g_{\mu_{A(t_k), B(t_k)}})$, a la que renombramos de la misma manera, que converge en la topología punteada a $(G_{\mu_{A_\infty, B_\infty}}, g_{\mu_{A_\infty, B_\infty}})$, salvo isometría local, y es plana por lo dicho anteriormente. □

Si G no es un grupo de Lie soluble, entonces G es $\mathbb{R} \times \mathrm{SU}(2)$ o $\mathbb{R} \times \widehat{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$. En estos dos casos, sólo haremos algunos comentarios con respecto al análisis del flujo de Ricci, ya que el comportamiento del flujo de corchetes para estos casos es muy complicado. Observemos que la estructura producto es invariante por el flujo de Ricci, por lo tanto, para analizar el flujo de Ricci en una métrica producto, sólo necesitamos estudiarlo en cualquier métrica inicial de las variedades $\mathrm{SU}(2)$ y $\widehat{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$, y esto ha sido estudiado por D. Glickenstein y T. Payne en [GP]. Otros autores que han estudiado el flujo de Ricci en estos grupos de Lie son J. Isenberg, M. Jackson, P. Lu en [IJL]. En dicho trabajo, ellos proponen estudiar el flujo de Ricci para la familia de métricas en donde la métrica inicial se puede diagonalizar y el flujo de Ricci preserva la diagonalización, sin embargo la dificultad de dicho problema es tan grande que sólo analizan algunas métricas no producto con la propiedad mencionada anteriormente.

3.2. Flujo de Ricci normalizado

En esta sección analizaremos el flujo de Ricci normalizado en las variedades Riemannianas homogéneas simplemente conexas de dimensión 4. Si $6 \leq \dim(G) \leq 10$, haremos simplemente algunos comentarios respecto de las normalizaciones del flujo de Ricci, mientras que si $\dim(G) = 4$ o 5, estudiaremos diferentes normalizaciones del flujo de corchetes obtenido en la Sección 3.1.

3.2.1. $6 \leq \dim(G) \leq 10$

Sólo haremos algunas acotaciones para entender el flujo de Ricci normalizado ya que el análisis es muy simple en estos casos. En los casos en los cuales $\dim(G) \geq 7$, o $\dim(G) = 6$ y M es $\mathbb{R}^2 \times S^2$, $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{H}^2$ o \mathbb{R}^4 , es fácil ver que para algunas r -normalizaciones (como por ejemplo, curvatura escalar o norma), las trayectorias del flujo de Ricci normalizado resultan ser un punto (i.e. solitones de Ricci). En el caso de $\dim(G) = 6$, con M distinta de las mencionadas anteriormente, el análisis para algunas r -normalizaciones se reduce a sólo a analizar un límite, ya que las trayectorias del flujo de Ricci normalizado son unidimensionales.

3.2.2. $\dim(G) = 5$

Si G es un grupo de Lie con $\dim(G) = 5$, recordemos que o bien G es soluble, o bien G es uno de los grupos del Cuadro 3.1.

G soluble

Sabemos que si G es un grupo de Lie soluble entonces M es isométrica a un grupo de Lie soluble de dimensión 4 munido con una métrica Riemanniana invariante a izquierda. Por lo tanto, el estudio del flujo de corchetes normalizado va a ser estudiado en la Subsección 3.2.3.

Cuadro 3.1

Ahora estudiaremos los grupos G del Cuadro 3.1.

Consideremos primero $\mu_{a,b,c,d,e,f}$ y recordemos que normalizando con $r(t) = 4 \frac{\text{tr}(\text{Ric}_{\mu^r} M_{\mu_p^r})}{\|\mu_p^r\|^2}$ obtenemos $\|\mu_p^r\| = \|\mu_p(0)\|$ (ver [L4, Ejemplo 3.14]).

- Caso $e_0 = 0, f_0 = 0$:

Sea $\mu_{a_0,b_0,c_0,1,0,0}$ tal que $2a_0^2 + 4c_0^2 = 1$. Tomando $r(t) = \frac{-2a^2c^2 + 3a^4 - 4a^2(ac+b)}{2a^2 + 4c^2}$, para $a = a(t)$, $b = b(t)$ y $c = c(t)$, obtenemos que $2a^2 + 4c^2 = 1$. De lo que se sigue que el flujo de corchetes normalizado es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales en las variables a, b, c :

$$\begin{cases} a' = \left(-\frac{3}{2}a^2 + 2(ac+b) - 2a^2c^2 + 3a^4 - 4a^2(ac+b)\right) a, & a(0) = a_0, \\ b' = \left(-a^2 + 2(ac+b) - 4a^2c^2 + 6a^4 - 8a^2(ac+b)\right) b, & b(0) = b_0, \\ c' = \left(\frac{1}{2}a^2 - 2a^2c^2 + 3a^4 - 4a^2(ac+b)\right) c, & c(0) = c_0. \end{cases} \quad (3.22)$$

Observemos que $(\frac{b}{ac})' = 0$. Por lo tanto, si $a_0c_0 \neq 0$, entonces $b = \lambda ac$, λ constante, $\lambda \in \mathbb{R}$. Tenemos entonces dos casos, $a_0c_0 \neq 0$ y $a_0c_0 = 0$.

- Si $a_0c_0 \neq 0$, entonces $b = \lambda ac$, para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. Luego, el sistema (3.22) es equivalente al que sigue

$$\begin{cases} a' = \left(-\frac{3}{2}a^2 + 2(\lambda + 1)ac - 2a^2c^2 + 3a^4 - 4a^3(\lambda + 1)c\right) a, & a(0) = a_0, \\ c' = \left(\frac{1}{2}a^2 - 2a^2c^2 + 3a^4 - 4a^3(\lambda + 1)c\right) c, & c(0) = c_0, \end{cases}$$

con $2a^2 + 4c^2 = 1$.

Para analizar el sistema, nuevamente podemos suponer que $a_0 \geq 0$. Notemos además que si $\lambda + 1 \neq 0$, entonces $c' = 0$ si y sólo si $c = 0$, $c = \frac{a}{\lambda + 1}$ o $a = 0$. Por lo tanto, los únicos puntos fijos del sistema que satisfacen la condición $2a^2 + 4c^2 = 1$ son $(0, \pm\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ y $\left(\frac{\lambda + 1}{\sqrt{2(\lambda + 1)^2 + 4}}, \frac{1}{\sqrt{2(\lambda + 1)^2 + 4}}\right)$.

A modo de entender el flujo, analicemos el caso $\lambda + 1 > 0$ y para visualizarlo observemos la Figura 3.2.

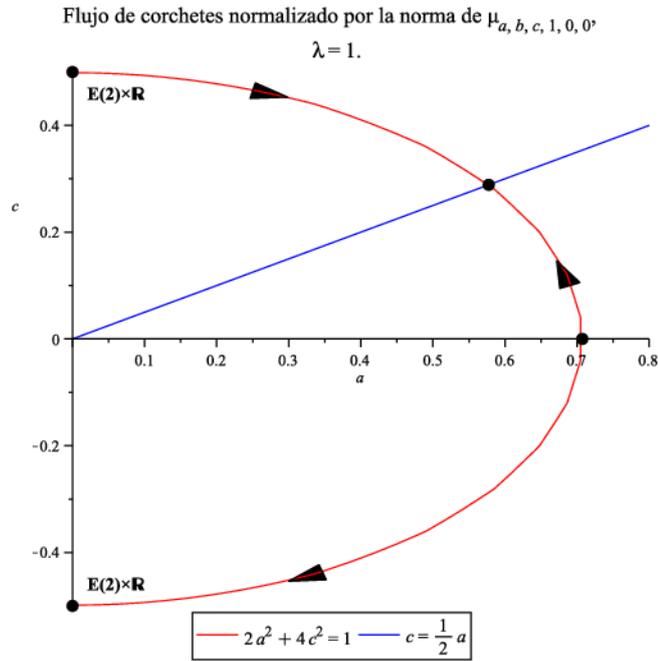


Figura 3.2:

- Si $0 < \frac{a_0}{\lambda + 1} < c_0$, entonces $c' < 0$ y por lo tanto c decrece y $\mu_{a,b,c,1,0,0} \rightarrow \mu_{a, \frac{\lambda a^2}{\lambda + 1}, \frac{a}{\lambda + 1}, 1, 0, 0}$, el cual es un solitón algebraico pues

$$\text{Ric}_\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a^2 & & & \\ & \frac{1}{2}a^2 & & \\ & & \frac{1}{2}a^2 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}a^2 I + \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & -\frac{1}{2}a^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}a^2 I + \tilde{D},$$

y si consideramos $D = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & -\frac{1}{2}a^2 \end{pmatrix}$, entonces tenemos que $\tilde{D} = D|_{\mathbb{R}^4}$ y $D \in \text{Der} \left(\mu_{a, \frac{\lambda a^2}{\lambda+1}, \frac{a}{\lambda+1}, 1, 0, 0} \right)$.

- Si $0 < c_0 < \frac{a_0}{\lambda+1}$, entonces $c' > 0$ y por lo tanto c crece y $\mu_{a,b,c,1,0,0} \rightarrow \mu_{a, \frac{\lambda a^2}{\lambda+1}, \frac{a}{\lambda+1}, 1, 0, 0}$, el cual es un solitón algebraico por lo visto en el item anterior.
- Si $c_0 < 0$, entonces $c' < 0$ y por lo tanto c decrece. Luego $\mu_{a,b,c,1,0,0} \rightarrow \mu_{0,0,-\frac{1}{2},1,0,0}$, el cual determina una métrica plana, por ser Ricci-plana (ver (3.4)). Además, bajo cualquier normalización tendremos convergencia a una métrica plana usando [LL1, Proposición 4.1], pues $\mu_{0,0,-\frac{1}{2},1,0,0}|_{\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4} \neq 0$.

El análisis para $\lambda + 1 < 0$, es totalmente análogo al anterior.

Estudiemos entonces qué sucede cuando $\lambda + 1 = 0$, es decir, $b = -ac$. En este caso, el sistema (3.22) es como sigue

$$\begin{cases} a' = a^3 \left(-\frac{3}{2} - 2c^2 + 3a^2 \right), & a(0) = a_0, \\ c' = 4a^4 c, & c(0) = c_0, \end{cases}$$

con $2a^2 + 4c^2 = 1$. Los únicos puntos fijos del sistema que satisfacen la condición $2a^2 + 4c^2 = 1$ son $(0, \pm\frac{1}{2})$ y $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$. Luego,

- Si $c_0 < 0$, entonces $c < 0$ y por lo tanto $c' < 0$ y c decrece. De lo que se sigue que $\mu_{a,b,c,1,0,0} \rightarrow \mu_{0,0,-\frac{1}{2},1,0,0}$.
- Si $c_0 > 0$, entonces $c > 0$ y por lo tanto $c' > 0$ y c crece. De lo que se sigue que $\mu_{a,b,c,1,0,0} \rightarrow \mu_{0,0,\frac{1}{2},1,0,0}$.

Ambas métricas son planas, por ser Ricci-planas, con $\mu_{0,0,\pm\frac{1}{2},1,0,0}|_{\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4} \neq 0$, por lo tanto, bajo cualquier normalización tendremos convergencia a una métrica plana (ver [LL1, Proposición 4.1]).

- Si $a_0 c_0 = 0$, entonces $a_0 = 0$ o $c_0 = 0$. Como el caso $c_0 = 0$ ha sido analizado en [L4, Sección 3], analizaremos el caso $a_0 = 0$. Aquí el sistema (3.22) es el que sigue

$$\begin{cases} b' = 2b^2, & b(0) = b_0, \\ c' = 0, & c(0) = c_0. \end{cases}$$

Pero como $2a^2 + 4c^2 = 1$ y $a = 0$, entonces $c(t) = \pm\frac{1}{2}$. Por lo tanto, $b(t) = \frac{1}{-2t+b_0-1}$. Luego, si $b_0 < 0$, entonces $b(t) \rightarrow 0$ y por lo tanto, $\mu_{0,b,\pm\frac{1}{2},1,0,0} \rightarrow \mu_{0,0,\pm\frac{1}{2},1,0,0}$, el cual determina una métrica plana por ser Ricci-plana y nuevamente bajo cualquier normalización tendremos convergencia a una métrica plana pues $\mu_{0,0,\pm\frac{1}{2},1,0,0}|_{\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4} \neq 0$. Sin embargo, si $b_0 > 0$, entonces la solución $b(t)$ diverge. Veamos si con alguna otra normalización podemos conseguir convergencia para $b_0 > 0$.

Tomando $r(t) = -b(t)$ obtenemos que la curvatura escalar (i.e. la traza del operador de Ricci, a la que denotaremos por $R(\mu^r)$) es constante $R(\mu^r) = R(\mu_0)$. De lo que se sigue

que si $R(\mu_0) = 1$ entonces el flujo de corchetes normalizado es el que sigue:

$$\begin{cases} b' = 0, & b(0) = b_0, \\ c' = -\frac{1}{2}c, & c(0) = c_0. \end{cases}$$

Luego, obtenemos que $b(t) = \frac{1}{2}$ y $c(t) = c_0 \exp(-\frac{1}{2}t)$, por lo tanto, $\mu_{0, \frac{1}{2}, c, 1, 0, 0} \rightarrow \mu_{0, \frac{1}{2}, 0, 1, 0, 0}$, el cual es un solitón algebraico pues

$$\text{Ric}_\mu = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \frac{1}{2} & & \\ & & \frac{1}{2} & \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}I + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}I + \tilde{D},$$

y si consideramos $D = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & -\frac{1}{2} & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \\ & & & & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, entonces tenemos que $\tilde{D} = D|_{\mathbb{R}^4}$ y $D \in \text{Der} \left(\mu_{0, \frac{1}{2}, 0, 1, 0, 0} \right)$.

- Caso $e_0 \neq 0, f_0 \neq 0, d = 1, a_0 = c_0 = 0$:

Sea $\mu_{0, b_0, 0, 1, e_0, f_0}$ tal que $2e_0^2 + 2f_0^2 = 1$. Entonces tomando $r = e^2 + f^2$, obtenemos que $\|\mu_p^r\| = \|\mu_0\| = 1$. Luego, el flujo de corchetes normalizado es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales en las variables $b = b(t)$, $e = e(t)$ y $f = f(t)$:

$$\begin{cases} b' = (2b + 1)b, & b(0) = b_0, \\ e' = 0, & e(0) = e_0, \\ f' = 0, & f(0) = f_0. \end{cases}$$

Entonces, los puntos fijos del sistema son los puntos de la forma $(-\frac{1}{2}, e_0, f_0)$ y $(0, e_0, f_0)$. Luego,

- Si $b_0 < -\frac{1}{2}$, entonces $b < -\frac{1}{2}$ y $b' > 0$, por lo tanto b crece y $\mu_{0, b, 0, 1, e_0, f_0} \rightarrow \mu_{0, -\frac{1}{2}, 0, 1, e_0, f_0}$, el cual es un solitón algebraico pues $\text{Ric}_\mu = -\frac{1}{2}I$.
- Si $-\frac{1}{2} < b_0 < 0$, entonces $b' < 0$, y por lo tanto b decrece. Luego $\mu_{0, b, 0, 1, e_0, f_0} \rightarrow \mu_{0, -\frac{1}{2}, 0, 1, e_0, f_0}$, el cual es un solitón algebraico por el item anterior.
- Si $b_0 > 0$, la solución $b(t)$ diverge y por lo tanto consideraremos otra normalización. Sea $r(t) = -b(t)$, luego el flujo de corchetes normalizado es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} b' = 0, & b(0) = b_0, \\ e' = -(e^2 + f^2 + b)e, & e(0) = e_0, \\ f' = -(e^2 + f^2 + b)f, & f(0) = f_0. \end{cases}$$

Es fácil ver que para analizar el sistema es suficiente considerar $e_0 > 0$. Como $e_0 > 0$, entonces $e > 0$. Además como $b_0 > 0$, tenemos que $e' < 0$ y por lo tanto e decrece. Por otro lado, $\left(\frac{f}{e}\right)' = 0$, entonces tenemos que $f = \frac{f_0}{e_0}e$. Luego, tanto e como f tienden a cero y $\mu_{0, b_0, 0, 1, e, f} \rightarrow \mu_{0, b_0, 0, 1, 0, 0}$, el cual es un solitón algebraico no plano (análogo a $b_0 = \frac{1}{2}$).

Observar que sólo falta analizar el caso en que $G = \mathbb{R}^2 \rtimes \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, el cual es muy simple debido a que nuestras álgebras de Lie $\mu_{a,b}$ dependen sólo de un parámetro y al normalizar por curvatura escalar por ejemplo, éste va a depender del otro que está fijo. Recordemos también que $ab < 0$ y por lo tanto, todas nuestras álgebras determinan métricas con curvatura escalar negativa. Consideremos μ_{a_0,b_0} con $3a_0b_0 = -1$. Si tomamos $r(t) = \frac{3}{2}ab$ entonces $R(\mu^r)$ es contante y es igual a -1 . De lo que se sigue que $a = -\frac{1}{3b}$ y b_0 está fijo.

En el siguiente teorema resumiremos los resultados obtenidos en esta subsección:

Teorema 3.2.1. *Sean $\mu_{a,b,c,d,e,f}$ como en (3.1) con $a \geq 0$ y $\mu_{a,b}$ como en (3.10).*

- *Si $ac \neq 0$, $c > 0$, $b = \lambda ac$ y $\lambda + 1 > 0$, entonces el flujo de corchetes normalizado por la norma que empieza en $\mu_{a,b,c,1,0,0}$ converge a un solitón algebraico no plano.*
- *Si $ac \neq 0$, $c < 0$, $b = \lambda ac$ y $\lambda + 1 > 0$, entonces el flujo de corchetes normalizado que empieza en $\mu_{a,b,c,1,0,0}$ converge a una variedad plana, para toda normalización.*
- *Si $ac \neq 0$, $c > 0$, $b = \lambda ac$ y $\lambda + 1 < 0$, entonces el flujo de corchetes normalizado que empieza en $\mu_{a,b,c,1,0,0}$ converge a una variedad plana, para toda normalización.*
- *Si $ac \neq 0$, $c < 0$, $b = \lambda ac$ y $\lambda + 1 < 0$, entonces el flujo de corchetes normalizado por la norma que empieza en $\mu_{a,b,c,1,0,0}$ converge a un solitón algebraico no plano.*
- *Si $ac \neq 0$, $c \neq 0$, $b = \lambda ac$ y $\lambda + 1 = 0$, entonces el flujo de corchetes normalizado que empieza en $\mu_{a,b,c,1,0,0}$ converge a una variedad plana, para toda normalización.*
- *Si $c = 0$, entonces el flujo de corchetes normalizado que empieza en $\mu_{a,b,0,1,0,0}$ converge a un solitón algebraico no plano, para alguna normalización.*
- *Si $a = 0$ y $b < 0$, entonces el flujo de corchetes normalizado que empieza en $\mu_{0,b,c,1,0,0}$ converge a una variedad plana, para toda normalización.*
- *Si $a = 0$ y $b > 0$, entonces el flujo de corchetes normalizado por la norma que empieza en $\mu_{0,b,c,1,0,0}$ converge a un solitón algebraico no plano.*
- *Si $b < 0$, $e \neq 0$ y $f \neq 0$, entonces el flujo de corchetes normalizado por la norma que empieza en $\mu_{0,b,0,1,e,f}$ converge a un solitón algebraico no plano.*
- *Si $b > 0$, $e \neq 0$ y $f \neq 0$, entonces el flujo de corchetes normalizado que empieza en $\mu_{0,b,0,1,e,f}$ converge a un solitón algebraico no plano, para alguna normalización.*
- *Si $ab < 0$, entonces el flujo de corchetes normalizado por curvatura escalar que empieza en $\mu_{a,b}$ converge a un solitón algebraico no plano.*

3.2.3. $\dim(G) = 4$

Recordar que si G es un grupo de Lie soluble de dimensión 4, entonces el álgebra de Lie de G o bien posee un ideal abeliano de codimensión 1, y por lo tanto, el flujo de corchetes normalizado ha sido estudiado en el Capítulo 2, o es isomorfa a una de las álgebras de Lie de (3.13). Para estudiar el flujo de corchetes normalizado en estas últimas, vamos a volver a separar en dos casos. El primer caso involucrará a las primeras cuatro álgebras de Lie de (3.13), y el segundo, a las últimas dos.

Primer caso

Recordemos que en Subsección 3.1.3 analizamos el flujo de corchetes para la familia de álgebras de Lie (3.14), el cual es equivalente al sistema (3.15). Para analizar el flujo de corchetes normalizado por la norma del corchete, analizaremos $\frac{A}{\sqrt{\|A\|^2+h^2}}$ y $\frac{h}{\sqrt{\|A\|^2+h^2}}$.

En el Capítulo 2, probamos que existe $\lim_{t \rightarrow \infty} A(t)$, digamos, A_∞ , por lo tanto, podemos separar en dos casos:

- Si $A(t) \rightarrow A_\infty$ y $A_\infty \neq 0$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A(t)}{\sqrt{\|A(t)\|^2+h(t)^2}} = \frac{A_\infty}{\|A_\infty\|}$$

y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h(t)}{\sqrt{\|A(t)\|^2+h(t)^2}} = 0,$$

pues $h(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Luego $\mu \frac{A(t)}{\sqrt{\|A(t)\|^2+h(t)^2}}, \frac{h(t)}{\sqrt{\|A(t)\|^2+h(t)^2}} \rightarrow \mu \frac{A_\infty}{\|A_\infty\|}$, el cual es un solitón algebraico por ser límite del flujo de corchetes normalizado estudiado en la Sección 2.3 del Capítulo 2 (ver también [LL1, Proposición 4.1 (ii)]).

- Si $A(t) \rightarrow 0$, entonces para estudiar la convergencia sería muy bueno entender $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|A\|}{h}$, el cual no es trivial de comprender ya que ambas funciones, $\|A(t)\|$ y $h(t)$, tienden a cero. Como primera observación, notemos que el límite $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|A\|}{h}$ existe ya que ambas funciones son monótonas decrecientes y cóncavas hacia arriba. En efecto, se sigue de la prueba de la Proposición 2.1.6 y de que $h(t) = \frac{1}{(3t+h_0^{-2})^{\frac{1}{2}}}$, que ambas funciones decrecen. Por otro lado, calculando la derivada segunda de ambas, se puede ver que ambas funciones son cóncavas hacia arriba.

- Si $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|A\|}{h} = 0$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h(t)}{\sqrt{\|A(t)\|^2+h(t)^2}} = 1$, pues

$$\frac{h}{\sqrt{\|A\|^2+h^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\|A\|^2+h^2}{h^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\|A\|^2}{h^2}+1}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\|A\|}{h}\right)^2+1}}. \quad (3.23)$$

Por otro lado, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A(t)}{\sqrt{\|A(t)\|^2+h(t)^2}} = 0$, pues

$$\frac{\|A\|}{\sqrt{\|A\|^2+h^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\|A\|^2+h^2}{\|A\|^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{h^2}{\|A\|^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{h}{\|A\|}\right)^2}}. \quad (3.24)$$

Luego, $\mu \frac{A(t)}{\sqrt{\|A(t)\|^2+h(t)^2}}, \frac{h(t)}{\sqrt{\|A(t)\|^2+h(t)^2}} \rightarrow \mu_{0,1}$, el cual es un solitón algebraico no plano.

- Si $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|A\|}{h} = \infty$, entonces usando (3.23) obtenemos que $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h(t)}{\sqrt{\|A(t)\|^2+h(t)^2}} = 0$. Recordemos que en la Sección 2.3 del Capítulo 2 vimos que para toda sucesión $\{t_k\} \rightarrow \infty$, existe una subsucesión de $\{t_k\}$, a la cual denotaremos nuevamente por $\{t_k\}$, tal que $\frac{A(t_k)}{\|A(t_k)\|} \rightarrow B_\infty$ y μ_{B_∞} es un solitón algebraico. Se sigue de (3.24) que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A(t_k)}{\sqrt{\|A(t_k)\|^2+h(t_k)^2}} = B_\infty,$$

pues

$$\frac{A}{\sqrt{\|A\|^2+h^2}} = \frac{A}{\|A\|\sqrt{\frac{\|A\|^2+h^2}{\|A\|^2}}}. \quad (3.25)$$

Por lo tanto, $\mu \frac{A(t_k)}{\sqrt{\|A(t_k)\|^2+h(t_k)^2}}, \frac{h(t_k)}{\sqrt{\|A(t_k)\|^2+h(t_k)^2}} \rightarrow \mu_{B_\infty}$, el cual es un solitón algebraico. Recordar que es un solitón algebraico plano si y sólo si $\text{Spec}(A(0)) \subset i\mathbb{R}$ (ver Teorema 2.3.4).

- Si $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|A\|}{h} = \alpha$, con α constante, y $\{t_k\}$ es una sucesión convergente de $\frac{A(t)}{\|A(t)\|}$, es decir, $\frac{A(t_k)}{\|A(t_k)\|} \rightarrow B_\infty$, entonces se sigue de (3.23), (3.24) y (3.25) que

$$\mu \frac{A(t_k)}{\sqrt{\|A(t_k)\|^2+h(t_k)^2}}, \frac{h(t_k)}{\sqrt{\|A(t_k)\|^2+h(t_k)^2}} \rightarrow \mu_\alpha \frac{B_\infty}{\sqrt{1+\alpha^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}.$$

En este caso, no hemos podido probar que $\mu_\alpha \frac{B_\infty}{\sqrt{1+\alpha^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$ sea un solitón algebraico.

Observemos que si no lo fuera, entonces estaríamos en una situación caótica (ver [LL1, Proposición 4.1 (ii)]). En el siguiente ejemplo, observamos que este tipo de límites realmente se da. En este caso, la convergencia es a un solitón.

Ejemplo 3.2.2. Recordemos nuevamente el Ejemplo 2.4.6. Si fijamos λ , entonces el flujo de corchetes que empieza en $\mu_{\alpha,\lambda}$ evoluciona como en (2.14) con $\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2(\lambda^2+(1-\lambda)^2+1)t+\alpha^{-2}}}$ y $h(t) = \frac{1}{\sqrt{3t+1}}$. Por lo tanto, en este caso tenemos que $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|A\|}{h} = \sqrt{\frac{3}{2}}$, y entonces

$$\mu \frac{A(t)}{\sqrt{\|A(t)\|^2+h(t)^2}}, \frac{h(t)}{\sqrt{\|A(t)\|^2+h(t)^2}} \rightarrow \mu \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} A_\infty, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \text{ con } A_\infty = \frac{1}{\sqrt{(\lambda^2+(1-\lambda)^2+1)}} \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & 1-\lambda & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Segundo caso

En esta subsección, haremos algunos comentarios respecto del flujo de corchetes normalizado por la norma del corchete, ya que el estudio del mismo parece ser muy complicado al igual que la normalización por curvatura escalar y por volumen. Recordemos que en Subsección 3.1.3 analizamos el flujo de corchetes para la familia de álgebras de Lie (3.16), el cual es equivalente al sistema (3.21). Para analizar el flujo de corchetes normalizado por la norma del corchete, analizaremos $\frac{A}{\sqrt{\|A\|^2+\|B\|^2}}$ y $\frac{B}{\sqrt{\|A\|^2+\|B\|^2}}$.

Sabemos que para toda sucesión $t_k \rightarrow \infty$, existe una subsucesión, a la que llamaremos nuevamente $\{t_k\}$, tal que $A(t_k)$ y $B(t_k)$ convergen, es decir, $\lim_{k \rightarrow \infty} A(t_k) = A_\infty$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} B(t_k) = B_\infty$. Recordemos que por Proposición 3.1.9, A_∞ y B_∞ son antisimétricas.

- Si $A_\infty \neq 0$ y $B_\infty \neq 0$, entonces

$$\mu \frac{A(t_k)}{\sqrt{\|A(t_k)\|^2+\|B(t_k)\|^2}}, \frac{B(t_k)}{\sqrt{\|A(t_k)\|^2+\|B(t_k)\|^2}} \rightarrow \mu \frac{A_\infty}{\sqrt{\|A_\infty\|^2+\|B_\infty\|^2}}, \frac{B_\infty}{\sqrt{\|A_\infty\|^2+\|B_\infty\|^2}},$$

con $\mu \frac{A_\infty}{\sqrt{\|A_\infty\|^2+\|B_\infty\|^2}}, \frac{B_\infty}{\sqrt{\|A_\infty\|^2+\|B_\infty\|^2}}$ un solitón plano (ver [L1, Teorema 4.8] y (3.17)).

- Si $A_\infty \neq 0$ ó $B_\infty \neq 0$, es decir, alguno de los límites es distinto de cero, supongamos $A_\infty \neq 0$ y $B_\infty = 0$, obtenemos que

$$\mu \frac{A(t_k)}{\sqrt{\|A(t_k)\|^2 + \|B(t_k)\|^2}}, \frac{B(t_k)}{\sqrt{\|A(t_k)\|^2 + \|B(t_k)\|^2}} \rightarrow \mu \frac{A_\infty}{\|A_\infty\|},$$

con $\mu \frac{A_\infty}{\|A_\infty\|}$ un solitón plano (ver [L1, Teorema 4.8] y (3.17)).

- Si $A_\infty = 0$ y $B_\infty = 0$, entonces una buena manera de entender la convergencia sería entender $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|A\|}{\|B\|}$, ya que

$$\frac{A}{\sqrt{\|A\|^2 + \|B\|^2}} = \frac{A}{\|A\| \sqrt{1 + \left(\frac{\|B\|}{\|A\|}\right)^2}} \quad \text{y} \quad \frac{B}{\sqrt{\|A\|^2 + \|B\|^2}} = \frac{B}{\|B\| \sqrt{1 + \left(\frac{\|A\|}{\|B\|}\right)^2}}.$$

En este caso, no tenemos la suerte de saber que las funciones $\|A\|$ y $\|B\|$ decrecen y son cóncavas hacia arriba como en el caso anterior, por lo cual, en principio, el $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|A\|}{\|B\|}$ podría no existir. Suponiendo que este límite existe, digamos $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|A\|}{\|B\|} = \alpha$, tenemos los siguientes tres casos:

- Si $\alpha = 0$, existe una subsucesión de $\{t_k\}$, a la cual llamaremos nuevamente $\{t_k\}$, tal que $\frac{A(t_k)}{\|A(t_k)\|}$ y $\frac{B(t_k)}{\|B(t_k)\|}$ convergen. Llamemos A_∞ y B_∞ a dichos límites. Entonces

$$\mu \frac{A(t_k)}{\sqrt{\|A(t_k)\|^2 + \|B(t_k)\|^2}}, \frac{B(t_k)}{\sqrt{\|A(t_k)\|^2 + \|B(t_k)\|^2}} \rightarrow \mu B_\infty,$$

el cual es un solitón algebraico por lo visto en la Sección 2.3 del Capítulo 2.

- Si $\alpha = \infty$, de manera análoga al caso anterior obtenemos que

$$\mu \frac{A(t_k)}{\sqrt{\|A(t_k)\|^2 + \|B(t_k)\|^2}}, \frac{B(t_k)}{\sqrt{\|A(t_k)\|^2 + \|B(t_k)\|^2}} \rightarrow \mu A_\infty,$$

el cual es un solitón algebraico.

- Si $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq \infty$, entonces existe una subsucesión de $\{t_k\}$ tal que

$$\mu \frac{A(t_k)}{\sqrt{\|A(t_k)\|^2 + \|B(t_k)\|^2}}, \frac{B(t_k)}{\sqrt{\|A(t_k)\|^2 + \|B(t_k)\|^2}} \rightarrow \mu \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}} A_\infty, \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} B_\infty,$$

y nuevamente aquí no hemos podido probar que $\mu \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}} A_\infty, \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} B_\infty$ sea un solitón algebraico.

Capítulo 4

Solitones de Ricci homogéneos en dimensiones bajas

El objetivo de este capítulo es estudiar los solitones de Ricci homogéneos en dimensiones bajas. Recordemos que una métrica g en una variedad diferenciable M se dice un solitón de Ricci si su tensor de Ricci satisface:

$$\text{Rc}(g) = cg + L_X g, \quad \text{para algún } c \in \mathbb{R}, \quad X \in \mathfrak{X}(M) \text{ completo.}$$

Si (M, g) es un solitón de Ricci estable (i.e. $c = 0$), entonces se puede probar, usando la ecuación diferencial ordinaria (1.1) del flujo de Ricci, que $\text{Rc}(g) = 0$, es decir, es Ricci-plano, y por lo tanto, es plano por ser homogéneo (ver [AK]). En el caso de que sea de contracción ($c > 0$), se sigue de [N, Teorema 1.2] que g es de tipo gradiente, y por lo tanto, (M, g) debe ser isométrico a un cociente de $N \times \mathbb{R}^k$, donde N es una variedad homogénea Einstein con curvatura escalar positiva (ver [PW]). Por lo tanto, nuestro estudio se concentrará en el caso de expansión, es decir, $c < 0$.

Definición 4.0.3. Un espacio Riemanniano homogéneo $(G/K, g)$ es llamado un solitón semi-algebraico si existe una familia monoparamétrica $\tilde{\varphi}_t \in \text{Aut}(G)$ con $\tilde{\varphi}_t(K) = K$ tal que

$$g(t) = c_t \varphi_t^* g, \quad g(0) = g,$$

es una solución al flujo de Ricci para alguna función escalar $c_t > 0$, donde $\varphi_t \in \text{Diff}(G/K)$ es el difeomorfismo equivariante determinado por $\tilde{\varphi}_t$.

En [J, Proposición 2.2], M. Jablonski probó que todo solitón de Ricci homogéneo (M, g) es un solitón semi-algebraico con respecto a su grupo de isometrías $G = \text{I}(M, g)$. Debido a este resultado, estudiaremos solitones semi-algebraicos, y para hacer esto utilizaremos los resultados de estructura obtenidos por R. Lafuente y J. Lauret en [LL2].

Consideremos entonces $(G/K, g)$ un espacio Riemanniano homogéneo junto con una descomposición métrica reductiva $(\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ tal que $B(\mathfrak{k}, \mathfrak{p}) = 0$, donde B es la forma de Killing de \mathfrak{g} (siempre existe por [LL1, Lema 2.1]). Sea \mathfrak{n} el nilradical de \mathfrak{g} , es decir, el ideal nilpotente maximal de \mathfrak{g} , y

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n},$$

la descomposición ortogonal con respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (\mathfrak{n} está contenido en \mathfrak{p} pues \mathfrak{n} está contenido en el núcleo de B). Entonces \mathfrak{g} se descompone como sigue:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}, \quad (4.1)$$

y el corchete de Lie satisface las siguientes relaciones (ver [LL2, Sección 2])

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}, \quad [\mathfrak{g}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n}. \quad (4.2)$$

A continuación enunciaremos el teorema principal de [LL2] y un corolario del mismo. Estos resultados serán usados a lo largo de todo el capítulo.

Teorema 4.0.4. [LL2, Teorema 4.6] *Sea $(G/K, g)$ un espacio Riemanniano homogéneo con una descomposición métrica reductiva $(\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ tal que $B(\mathfrak{k}, \mathfrak{p}) = 0$. Consideremos en \mathfrak{g} la descomposición (4.1). Si $(G/K, g)$ es un solitón semi-algebraico con constante cosmológica $c < 0$, entonces las siguientes condiciones se satisfacen:*

(i) $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{h}$. *En particular, $\mathfrak{u} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{h}$ es una subálgebra de Lie de \mathfrak{g} reductiva (i.e. \mathfrak{u} es suma directa de un ideal semisimple y su centro) y $\mathfrak{g} = \mathfrak{u} \ltimes \mathfrak{n}$ (Si G es simplemente conexo entonces $G \simeq U \ltimes N$, y si G/K es simplemente conexo entonces $G/K = U/K \times N$ como variedad diferenciable).*

(ii) $\text{Ric}_{\mathfrak{u}} = cI + C_{\mathfrak{h}}$, donde $\text{Ric}_{\mathfrak{u}}$ es el operador de Ricci de la descomposición métrica reductiva $(\mathfrak{u} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{h}, \langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{u} \times \mathfrak{u}})$ (es decir, $\text{Ric}_{\mathfrak{u}} = \text{Ric}_{U/K}$ es el operador de Ricci de la métrica restringida a U/K) y $C_{\mathfrak{h}}$ es el mapa simétrico definido por

$$\langle C_{\mathfrak{h}}Y, Y \rangle = \text{tr}(S(\text{ad } Y|_{\mathfrak{n}})^2), \quad \forall Y \in \mathfrak{h}.$$

(iii) $\text{Ric}_{\mathfrak{n}} = cI + D_1$, para algún $D_1 \in \text{Der}(\mathfrak{n})$, donde $\text{Ric}_{\mathfrak{n}}$ denota el operador de Ricci del álgebra de Lie métrica nilpotente $(\mathfrak{n}, \langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{n} \times \mathfrak{n}})$ (i.e. $(\mathfrak{n}, \langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{n} \times \mathfrak{n}})$ es un nilsolitón).

(iv) $\sum [\text{ad } Y_i|_{\mathfrak{n}}, (\text{ad } Y_i|_{\mathfrak{n}})^t] = 0$, donde $\{Y_i\}$ es cualquier base ortonormal de \mathfrak{h} (en particular, $(\text{ad } Y|_{\mathfrak{n}})^t \in \text{Der}(\mathfrak{n})$ para todo $Y \in \mathfrak{h}$).

(v) El operador de Ricci de $(G/K, g)$ está dado por $\text{Ric} = cI + S(D_{\mathfrak{p}})$, donde

$$D := -\text{ad } H + \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & D_1 \end{pmatrix} \in \text{Der}(\mathfrak{g}),$$

y $H \in \mathfrak{g}$ es el único elemento que satisface $\langle H, X \rangle = \text{tr ad } X$, para todo $X \in \mathfrak{g}$.

Recíprocamente, si las condiciones (i)-(iv) se satisfacen y G/K es simplemente conexo, entonces $(G/K, g)$ es un solitón semi-algebraico con constante cosmológica c y derivación D como arriba.

Corolario 4.0.5. [LL2, Corolario 4.11] *Sea $(G/K, g)$ un solitón semi-algebraico con constante cosmológica $c < 0$ y con una descomposición métrica reductiva $(\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ tal que $B(\mathfrak{k}, \mathfrak{p}) = 0$. Consideremos en \mathfrak{g} la descomposición (4.1). Si $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0$, entonces $(G/K, g)$ es isométrico a una solvariedad. Esto en particular se da cuando \mathfrak{g} es soluble.*

Observación 4.0.6. El enunciado del corolario original es más largo que el que acabamos de dar.

Estudiaremos los solitones semi-algebraicos caso por caso de la siguiente manera: dada la dimensión del espacio homogéneo, analizaremos los posibles valores para $\dim \mathfrak{g}$. Para hacer esto utilizaremos un resultado de Wang, probado en [Wan], el cual asegura que si (M, g) es una variedad Riemanniana n -dimensional con $n \neq 4$, entonces el grupo de isometrías, $I(M, g)$, no contiene subgrupos cerrados de dimensión d con

$$\frac{n(n-1)}{2} + 1 < d < \frac{n(n+1)}{2}. \quad (4.3)$$

También usaremos un resultado clásico de geometría Riemanniana que afirma que si $\dim I(M, g) = \frac{n(n+1)}{2}$, entonces M tiene curvatura seccional constante. Una vez fijada la dimensión de \mathfrak{g} , estudiaremos qué sucede para los posibles valores de $\dim \mathfrak{n}$, con lo que queda determinada la dimensión de \mathfrak{h} .

Antes de enunciar el siguiente lema, el cual va a ser muy útil, definamos la representación $\theta : \mathfrak{u} \rightarrow \text{Der}(\mathfrak{n})$, como sigue

$$\theta(X) = \text{ad}(X)|_{\mathfrak{n}}, \quad X \in \mathfrak{u}. \quad (4.4)$$

Lema 4.0.7. *Sea $(G/K, g)$ un espacio Riemanniano homogéneo con una descomposición métrica reductiva $(\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ tal que $B(\mathfrak{k}, \mathfrak{p}) = 0$. Consideremos en \mathfrak{g} la descomposición (4.1). Si $(G/K, g)$ es un solitón semi-algebraico con constante cosmológica $c < 0$, entonces:*

- (i) Si $\mathfrak{n} = 0$ (i.e. \mathfrak{g} semisimple) entonces $(G/K, g)$ es Einstein con $\text{Ric} = cI$.
- (ii) Si $\dim \mathfrak{n} = n$ o $n - 1$, entonces $(G/K, g)$ es isométrico a un solsolitón.
- (iii) Si $\dim \mathfrak{n} = 1$ y \mathfrak{u} es semisimple, entonces la representación $\theta : \mathfrak{u} \rightarrow \text{Der}(\mathfrak{n})$, definida en (4.4), es trivial.
- (iv) Si $\dim \mathfrak{n} = 1$, entonces $\mathfrak{z}(\mathfrak{u}) \subset \mathfrak{h}$, donde $\mathfrak{z}(\mathfrak{u})$ es el centro del álgebra de Lie \mathfrak{u} .

Demostración. (i) Si $\mathfrak{n} = 0$, entonces por (ii) de Teorema 4.0.4 tenemos que $C_{\mathfrak{h}} = 0$ y $\text{Ric}_{\mathfrak{u}} = cI$. De lo que se sigue que $(G/K, g)$ es Einstein con $\text{Ric} = cI$.

(ii) Si $\dim \mathfrak{n} = n$ o $n - 1$, entonces $\dim \mathfrak{h} = 0$ o 1 , y por lo tanto $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0$. Luego usando el Corolario 4.0.5, obtenemos que $(G/K, g)$ es isométrico a una solvariedad. Además, en [J, Teorema 1.1], M. Jablonski probó que toda solvariedad solitón de Ricci es isométrica a un solsolitón, lo que concluye con la prueba del ítem (ii).

(iii) Como \mathfrak{u} es semisimple, $\mathfrak{u} = [\mathfrak{u}, \mathfrak{u}]$. Luego $\theta \mathfrak{u} = \theta[\mathfrak{u}, \mathfrak{u}] = [\theta \mathfrak{u}, \theta \mathfrak{u}]$, de lo que se sigue que $\text{tr} \theta(X) = 0$, para todo $X \in \mathfrak{u}$, y por lo tanto, $\theta(X) = 0$, pues $\dim \mathfrak{n} = 1$.

(iv) Sea $K \in \mathfrak{k}$ y $Z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{u})$. Como $(\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es una descomposición métrica reductiva, entonces \mathfrak{k} actúa de manera antisimétrica en \mathfrak{n} . Por lo tanto, $\theta(K) = 0$, pues $\dim \mathfrak{n} = 1$. Se sigue entonces, considerando la descomposición (4.1) y las relaciones de (4.2), que

$$B(K, Z) = \text{tr}(\text{ad}(K) \text{ad}(Z)) = \text{tr} \left(\begin{pmatrix} \star & \star & 0 \\ \star & \star & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \star \end{pmatrix} \right) = 0.$$

Luego, $Z \in \mathfrak{p}$, pues $B(\mathfrak{k}, \mathfrak{p}) = 0$, y por lo tanto, $Z \in \mathfrak{p} \cap \mathfrak{u} = \mathfrak{h}$.

□

4.1. $\dim(G/K) = 3$

En esta sección estudiaremos los solitones semi-algebraicos de expansión de dimensión 3, salvo isometría equivariante. Para hacer esto, usaremos el Teorema 4.0.4. Por (4.3), sabemos que no existe G con $\dim(G) = 5$. Por lo tanto, los distintos valores para $\dim \mathfrak{g}$ son 3, 4 y 6, y es 6 si y sólo si $(G/K, g)$ es $\mathbb{H}^3 = \text{SO}_0(3, 1)/\text{SO}(3)$, el cual es Einstein. Por otro lado, por (i) del Lema 4.0.7 sabemos que si $\dim \mathfrak{n} = 0$, entonces $(G/K, g)$ es Einstein.

4.1.1. $\dim \mathfrak{g} = 3$

- Si $\dim \mathfrak{n} = 1$, entonces $\dim \mathfrak{h} = 2$ y \mathfrak{h} abeliana. En efecto, como $\mathfrak{k} = 0$, entonces $\mathfrak{h} = \mathfrak{u}$ y por lo tanto, reductiva de dimensión 2. De Teorema 4.0.4 (i) se sigue que \mathfrak{g} es soluble.
- Si $\dim \mathfrak{n} = 2$, entonces $\dim \mathfrak{h} = 1$, y \mathfrak{h} abeliana. Por lo tanto \mathfrak{g} es soluble de manera análoga al item anterior.
- Si $\dim \mathfrak{n} = 3$, entonces $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}$ y \mathfrak{g} es nilpotente (ver Teorema 4.0.4 (i)).

En los tres casos, obtenemos que \mathfrak{h} es abeliano y \mathfrak{g} es soluble. Por lo tanto, G es una solvariedad. Más aún, $(G, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un solsolitón. En efecto, como \mathfrak{h} es abeliano y $\mathfrak{u} = \mathfrak{h}$, entonces $\text{Ric}_{\mathfrak{u}} = 0$. Se sigue del Teorema 4.0.4 (ii) que $C_{\mathfrak{h}} = -cI$ y por lo tanto, se satisfacen (i)-(iv) de [L1, Teorema 4.8].

4.1.2. $\dim \mathfrak{g} = 4$

- Si $\dim \mathfrak{n} = 1$, entonces $\dim \mathfrak{h} = 2$. Como $\dim \mathfrak{k} = 1$, se sigue que $\dim \mathfrak{u} = 3$. Luego, usando (i) de Teorema 4.0.4, tenemos que \mathfrak{u} es un álgebra de Lie reductiva de dimensión 3 y por lo tanto debe ser isomorfa a alguna de las siguientes:

$$\mathbb{R}^3, \quad \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}), \quad \mathfrak{su}(2).$$

- Si $\mathfrak{u} \simeq \mathbb{R}^3$, entonces \mathfrak{u} es abeliana. Como \mathfrak{k} actúa antisimétricamente en \mathfrak{n} y $\dim \mathfrak{n} = 1$, entonces $\theta(\mathfrak{k}) = 0$ y $\text{ad}(\mathfrak{k}) = 0$. Por lo tanto, \mathfrak{n} tiene dimensión mayor que 1, lo cual es una contradicción.
 - Si $\mathfrak{u} \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ entonces \mathfrak{u} es semisimple, y usando (iii) del Lema 4.0.7 obtenemos que $\theta = 0$, de lo que se sigue que $G/K = U/K \times N$, producto Riemanniano. Además, $\text{Ric}_{U/K} = \text{Ric}_{\mathfrak{u}} = cI$ por (ii) del Teorema 4.0.4, y por lo tanto U/K es isométrico a \mathbb{H}^2 , el espacio hiperbólico de dimensión 2. Es decir, $(G/K, g)$ es isométrico a $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, producto Riemanniano de dos variedades, una Einstein y la otra plana.
 - Si $\mathfrak{u} \simeq \mathfrak{su}(2)$, entonces \mathfrak{u} es semisimple, y usando (iii) del Lema 4.0.7 obtenemos que $\theta = 0$, de lo que se sigue que $\text{Ric}_{U/K} = \text{Ric}_{\mathfrak{u}} = cI$ por (ii) del Teorema 4.0.4. Por otro lado, U/K es compacto pues $U = \text{SU}(2)$, de lo que se sigue que el grupo de isometrías tiene que ser finito (ver [Boc]), lo cual es una contradicción.
- Si $\dim \mathfrak{n} = 2$, entonces $\dim \mathfrak{h} = 1$. Luego \mathfrak{u} es un álgebra de Lie reductiva de dimensión 2 por Teorema 4.0.4, de lo que se sigue que es abeliana. Por lo tanto \mathfrak{g} es soluble. Además, $\text{Ric}_{\mathfrak{u}} = 0$. De Teorema 4.0.4 (ii) tenemos que $C_{\mathfrak{h}} = -cI$ y por lo tanto, $(\mathfrak{s} = \mathfrak{h} \ltimes \mathfrak{n}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ satisface (i)-(iv) de [L1, Teorema 4.8]. Por lo tanto, \mathfrak{s} es un solsolitón. Luego, $G/K = (\text{SO}(2) \ltimes S)/\text{SO}(2)$,

$\dim G$	G	K	Métrica
3	S grupo de Lie soluble	e	Ver la clasificación de solsolitones en [L1, Tabla 1] y de nilsolitones en [Will, Tabla 1].
4	$\mathrm{SO}(2) \times S$	$\mathrm{SO}(2)$	Determinada por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en $T_{eK}(G/K) \simeq \mathfrak{s}$, \mathfrak{s} el álgebra de Lie de S tal que $(\mathfrak{s}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sea un solsolitón.
	$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$	$\mathrm{SO}(2)$	Producto de una métrica Einstein en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$ y de una métrica en \mathbb{R} .

Cuadro 4.1: Solitones semi-algebraicos de expansión no Einstein en dimensión 3, salvo isometría equivariante.

donde S es el subgrupo de Lie conexo de G con álgebra de Lie \mathfrak{s} , y la métrica está determinada por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en $T_{eK}(G/K) \simeq \mathfrak{s}$.

- Si $\dim \mathfrak{n} = 3$, entonces \mathfrak{g} es soluble por (i) del Teorema 4.0.4. De manera análoga al ítem anterior, obtenemos que $G/K = (\mathrm{SO}(2) \times N)/\mathrm{SO}(2)$, donde N es el subgrupo de Lie conexo de G con álgebra de Lie \mathfrak{n} , y la métrica está determinada por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en $T_{eK}(G/K) \simeq \mathfrak{n}$, el cual es un nilsolitón.

Para concluir con esta sección, presentamos el Cuadro 4.1, en el cual exhibimos la clasificación de los solitones semi-algebraicos de expansión no Einstein en dimensión 3, salvo isometría equivariante, y como corolario del mismo, enunciamos el Teorema 4.1.1.

Teorema 4.1.1. *Todo solitón semi-algebraico simplemente conexo de expansión de dimensión 3 es isométrico a un solsolitón.*

Demostración. Sabemos que todo solitón semi-algebraico de expansión de dimensión 3 es isométrico a $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, es Einstein o es isométrico a una solvariedad (ver Cuadro 4.1). Además, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ es isométrica a una solvariedad y toda variedad Einstein simplemente conexa de dimensión 3 con constante cosmológica $c < 0$, es isométrica a \mathbb{H}^3 (ver [B, Proposición 1.120]), la cual es isométrica a una solvariedad. Luego, todo solitón semi-algebraico simplemente conexo de expansión de dimensión 3 es isométrico a una solvariedad, y por lo tanto, a un solsolitón usando [J, Teorema 1.1]. \square

4.2. $\dim(G/K) = 4$

En esta sección clasificaremos los solitones semi-algebraicos de expansión de dimensión 4 salvo isometría equivariante. Para esto utilizaremos el Teorema 3.1.1, enunciado en el Capítulo 3, el cual clasifica a los espacios Riemannianos homogéneos de dimensión 4. Del teorema observamos que los distintos valores para $\dim \mathfrak{g}$ que debemos analizar son 4, 5, 6, 7, 8 y 10. También notemos que si $\dim \mathfrak{g} = 8$ o 10, entonces las métricas son Einstein, y si $\dim \mathfrak{g} = 7$, son Einstein o producto de una métrica Einstein por una métrica plana. Si $\dim \mathfrak{g} = 6$, entonces o bien las métricas son Einstein, o producto de Einstein por plana o producto de métricas de curvatura constante. Para analizar este último caso, demostremos el siguiente lema:

Lema 4.2.1. *Sean (M_1, g_1) y (M_2, g_2) dos variedades Riemannianas no planas, Einstein, con constantes cosmológicas c_1 y c_2 respectivamente. Entonces $(M_1 \times M_2, g_1 \times g_2)$ es solitón de Ricci si y sólo si $c_1 = c_2$, si y sólo si $(M_1 \times M_2, g_1 \times g_2)$ es Einstein.*

Demostración. Como (M_1, g_1) y (M_2, g_2) son Einstein, entonces sus operadores de Ricci son $\text{Ric}_{g_1} = c_1 I$ y $\text{Ric}_{g_2} = c_2 I$, respectivamente. Luego, si $g = g_1 \times g_2$, entonces

$$\text{Ric}_g = \begin{pmatrix} c_1 I & 0 \\ 0 & c_2 I \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

y por lo tanto, el flujo de Ricci que empieza en la métrica g es de la siguiente forma, $g(t) = g_1(t) \times g_2(t)$, donde $g_i(t)$ es el flujo de Ricci en M_i empezando en g_i , para $i = 1, 2$. Pero como M_i es Einstein, sabemos que $g_i(t) = (-2c_i t + 1)g_i$, $i = 1, 2$. Por lo tanto,

$$\text{Ric}_{g(t)} = \begin{pmatrix} (-2c_1 t + 1) & 0 \\ 0 & (-2c_2 t + 1) \end{pmatrix}.$$

Luego, si g es solitón de Ricci, entonces $g(t)$ es homotética a g_0 , de lo que se sigue que

$$\frac{(-2c_1 t + 1)}{(-2c_2 t + 1)} = \alpha, \quad \alpha \text{ constante.}$$

Luego $c_1 = c_2$. Recíprocamente, si $c_1 = c_2$, de (4.5) obtenemos que $(M_1 \times M_2, g_1 \times g_2)$ es Einstein. \square

Por lo tanto, sólo nos falta analizar $\dim \mathfrak{g} = 4$ y 5 . En ambos casos, si $\dim \mathfrak{n} = 0$, Lema 4.0.7 inciso (i) implica que $(G/K, g)$ es Einstein.

4.2.1. $\dim \mathfrak{g} = 4$

- Si $\dim \mathfrak{n} = 1$, entonces $\dim \mathfrak{h} = 3$, y como $\mathfrak{k} = 0$, tenemos que $\mathfrak{h} = \mathfrak{u}$ y por lo tanto \mathfrak{h} es reductiva (ver Teorema 4.0.4 (i)). Se sigue que \mathfrak{h} debe ser isomorfa a alguna de las siguientes:

$$\mathbb{R}^3, \quad \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}), \quad \mathfrak{su}(2).$$

- Si $\mathfrak{h} \simeq \mathbb{R}^3$, entonces \mathfrak{g} es soluble. Además, $\text{Ric}_{\mathfrak{u}} = 0$. De Teorema 4.0.4 (ii) tenemos que $C_{\mathfrak{h}} = -cI$ y por lo tanto, se satisfacen (i)-(iv) de [L1, Teorema 4.8] y $(G, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un solsolitón.
 - Si $\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ entonces \mathfrak{h} es semisimple, y usando (iii) del Lema 4.0.7 tenemos que $\theta = 0$, de lo que se sigue que $\text{Ric}_H = \text{Ric}_{\mathfrak{h}} = cI$ por (ii) del Teorema 4.0.4, lo cual es una contradicción pues $\widehat{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ no admite una métrica Riemanniana invariante izquierda Einstein (ver [Mil]).
 - Si $\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{su}(2)$, entonces \mathfrak{h} es semisimple, y usando (iii) del Lema 4.0.7, $\theta = 0$. Luego, $\text{Ric}_H = \text{Ric}_{\mathfrak{h}} = cI$ por (ii) del Teorema 4.0.4, lo cual es absurdo, pues toda métrica Einstein en $SU(2)$ tiene constante cosmológica positiva (ver [B]).
- Si $\dim \mathfrak{n} = 2$, entonces $\dim \mathfrak{h} = 2$. Luego, \mathfrak{h} es abeliana, pues $\mathfrak{k} = 0$ y por lo tanto $\mathfrak{h} = \mathfrak{u}$ es reductiva de dimensión 2. Luego \mathfrak{g} es soluble. Además, $\text{Ric}_{\mathfrak{u}} = 0$. De Teorema 4.0.4 (ii) tenemos que $C_{\mathfrak{h}} = -cI$ y por lo tanto, se satisfacen (i)-(iv) de [L1, Teorema 4.8] y $(G, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un solsolitón.
 - Si $\dim \mathfrak{n} = 3$, entonces $\dim \mathfrak{h} = 1$. Luego \mathfrak{h} es abeliana y de manera análoga al item anterior obtenemos que $(G, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un solsolitón.
 - Si $\dim \mathfrak{n} = 4$, entonces $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}$, el cual es un nilsolitón.

4.2.2. $\dim \mathfrak{g} = 5$

- Si $\dim \mathfrak{n} = 1$, entonces $\dim \mathfrak{h} = 3$ y por lo tanto, $\dim \mathfrak{u} = 4$, pues $\dim \mathfrak{k} = 1$. Como \mathfrak{u} es reductiva, entonces es isomorfa a una de las siguientes álgebras de Lie:

$$\mathbb{R}^4, \quad \mathbb{R} \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}), \quad \mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(2).$$

- Si $\mathfrak{u} \simeq \mathbb{R}^4$, como \mathfrak{k} actúa antisimétricamente en \mathfrak{n} y $\dim \mathfrak{n} = 1$, entonces $\theta(\mathfrak{k}) = 0$ y $\text{ad}(\mathfrak{k}) = 0$. Por lo tanto, \mathfrak{n} tiene dimensión mayor que 1, lo cual es una contradicción.
- Si $\mathfrak{u} \simeq \mathbb{R} \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ o $\mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(2)$, entonces \mathfrak{u} tiene centro de dimensión 1. Por Lema 4.0.7 (iv), sabemos que $\mathfrak{z}(\mathfrak{u}) \subset \mathfrak{h}$. Sea $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base ortonormal de \mathfrak{u} tal que $e_1 \in \mathfrak{k}$, $\{e_2, e_3, e_4\} \in \mathfrak{h}$ y $e_4 \in \mathfrak{z}(\mathfrak{u})$. Como \mathfrak{k} actúa antisimétricamente en \mathfrak{u} y $e_4 \in \mathfrak{z}(\mathfrak{u})$, tenemos que el corchete de Lie en esta base es como sigue:

$$[e_1, e_2] = -ae_3, \quad [e_1, e_3] = ae_2, \quad [e_2, e_3] = be_1 + de_4, \quad a, b, d \in \mathbb{R}, \quad a, b \neq 0.$$

Luego, el operador de Ricci de U/K en $\{e_2, e_3, e_4\}$ tiene la siguiente forma:

$$\text{Ric}_{\mathfrak{u}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}d^2 - ba & & \\ & -\frac{1}{2}d^2 - ba & \\ & & \frac{1}{2}d^2 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Por otro lado, como $[e_1, e_2] = -ae_3$, entonces $-a\theta(e_3) = [\theta(e_1), \theta(e_2)] = 0$, y por lo tanto $\theta(e_3) = 0$. Análogamente, podemos probar que $\theta(e_2) = 0$. Como e_1 actúa antisimétricamente en \mathfrak{n} , también tenemos que $\theta(e_1) = 0$. Entonces $0 = [\theta(e_2), \theta(e_3)] = b\theta(e_1) + d\theta(e_4) = d\theta(e_4)$. De lo que se sigue que, $\theta(e_4) = 0$ o $d = 0$.

Si $\theta(e_4) = 0$, entonces $\dim \mathfrak{n} = 2$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $d = 0$. En este caso, del operador de Ricci (4.6) y del Teorema 4.0.4 (ii), obtenemos que $c = -ab$, y como $c < 0$ por hipótesis, obtenemos que $ab > 0$. De lo que se sigue que \mathfrak{u} es isomorfa $\mathbb{R} \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, y por Teorema 4.0.4 (i), $\mathfrak{g} \simeq (\mathbb{R} \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})) \ltimes \mathbb{R}$. Por lo tanto, usando la clasificación de los espacios Riemannianos homogéneos dada en el Capítulo 3, obtenemos que G es el cuarto grupo del Cuadro 3.1 y por lo tanto, $(G/K, g)$ es una variedad Einstein.

- Si $\dim \mathfrak{n} = 2$, entonces $\dim \mathfrak{h} = 2$ y por lo tanto $\dim \mathfrak{u} = 3$. Luego, por ser \mathfrak{u} reductiva de dimensión 3, tenemos que es isomorfa a una de las siguientes álgebras de Lie:

$$\mathbb{R}^3, \quad \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}), \quad \mathfrak{su}(2).$$

Si \mathfrak{u} es isomorfa a \mathbb{R}^3 , entonces $\text{Ric}_{\mathfrak{u}} = 0$. De Teorema 4.0.4 (ii) tenemos que $C_{\mathfrak{h}} = -cI$. Luego, $(\mathfrak{s} = \mathfrak{h} \ltimes \mathfrak{n}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ satisface (i)-(iv) de [L1, Teorema 4.8] y \mathfrak{s} es un solsolitón. Entonces, $G/K = (\text{SO}(2) \ltimes S)/\text{SO}(2)$, donde S es el subgrupo de Lie conexo de G con álgebra de Lie \mathfrak{s} , y la métrica está determinada por un $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en $T_{eK}(G/K) \simeq \mathfrak{s}$.

Si \mathfrak{u} es isomorfa a $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ o $\mathfrak{su}(2)$, entonces \mathfrak{u} es simple. Consideremos la representación $\theta : \mathfrak{u} \rightarrow \text{Der}(\mathfrak{n})$. Como θ es homomorfismo de álgebras de Lie, entonces el núcleo de θ es un ideal de \mathfrak{u} , denotemos $\text{Nu}(\theta)$ a este ideal. Luego, como \mathfrak{u} es simple, tenemos dos posibilidades, $\text{Nu}(\theta) = \mathfrak{u}$ o $\text{Nu}(\theta) = 0$.

Si $\text{Nu}(\theta) = \mathfrak{u}$, entonces $\theta = 0$ y por lo tanto, $G/K = U/K \times N$ como variedad Riemanniana. Por otro lado, por Teorema 4.0.4 (ii), $\text{Ric}_{\mathfrak{u}} = cI$, y entonces U/K es Einstein, por lo tanto

U no puede ser $SU(2)$. En efecto, si $U = SU(2)$, U/K es compacto y el grupo de isometrías de U/K tiene que ser finito (ver [Boc]), lo cual es una contradicción. Luego, $U = SL_2(\mathbb{R})$ y $(G/K, g)$ es el producto de las variedades Riemannianas, $SL_2(\mathbb{R})/SO(2)$ y \mathbb{R}^2 , una Einstein y la otra plana.

Si $\text{Nu}(\theta) = 0$, entonces como \mathfrak{u} es simple tenemos que $\mathfrak{u} = [\mathfrak{u}, \mathfrak{u}]$, y por lo tanto, $\text{tr}(\theta(X)) = 0$, para todo $X \in \mathfrak{u}$. Luego, fijando una base en \mathfrak{n} , tenemos que $\theta : \mathfrak{u} \rightarrow \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ es fiel. Por lo tanto, \mathfrak{u} es isomorfa a $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. Luego, por Teorema 4.0.4 (i), G es isomorfo a $SL_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$, es decir, el séptimo grupo del Cuadro 3.1. Aquí sabemos que la representación de $SL_2(\mathbb{R})$ en \mathbb{R}^2 es la usual.

Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de $\mathfrak{u} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ tal que $e_1 \in \mathfrak{k}$, $\{e_2, e_3\} \in \mathfrak{h}$ y el corchete de Lie es como sigue:

$$[e_1, e_2] = 2e_3, \quad [e_1, e_3] = -2e_2, \quad [e_2, e_3] = 2e_1.$$

Sea $\{X_1, X_2\}$ una base de \mathfrak{n} y θ la representación de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ en \mathbb{R}^2 definida de la siguiente manera:

$$\theta(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \theta(e_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \theta(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Considero $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interno en \mathfrak{p} tal que $\{e_2, e_3, X_1, X_2\}$ es una base ortonormal. Entonces, la matriz de $\text{ad}(e_1)|_{\mathfrak{p}}$ respecto de esta base es

$$\text{ad}(e_1)|_{\mathfrak{p}} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & & \\ 2 & 0 & & \\ & & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, la representación de isotropía de \mathfrak{k} en \mathfrak{p} tiene dos componentes irreducibles no equivalentes, de lo que se sigue que las métricas G -invariantes dependen de dos parámetros (ver Capítulo 1, Sección 1.2).

Sea $h_{a,b} = \begin{pmatrix} aI_{2 \times 2} & \\ & bI_{2 \times 2} \end{pmatrix}$, con $a > 0, b > 0$. Considero los productos internos

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{a,b} := \langle h_{a,b} \cdot, h_{a,b} \cdot \rangle. \quad (4.7)$$

Luego,

$$\begin{aligned} \langle e_i, e_j \rangle_{a,b} &= a^2 \delta_{ij}, \quad i, j = 2, 3, \\ \langle X_k, X_l \rangle_{a,b} &= b^2 \delta_{kl}, \quad k, l = 1, 2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, una base ortonormal de \mathfrak{p} respecto de $\langle \cdot, \cdot \rangle_{a,b}$ es $\{\frac{e_2}{a}, \frac{e_3}{a}, \frac{X_1}{b}, \frac{X_2}{b}\}$.

Observemos primero que con estas métricas, $(SL_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2)/SO(2)$ no es isométrico a $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}^2$. En efecto, el plano $\pi = \langle \frac{X_1}{b}, \frac{X_2}{b} \rangle$ tiene curvatura seccional (ver (1.11))

$$\begin{aligned} K\left(\frac{X_1}{b}, \frac{X_2}{b}\right) &= -\frac{3}{4} \left\| \left[\frac{X_1}{b}, \frac{X_2}{b} \right]_{\mathfrak{p}} \right\|^2 - \frac{1}{2} \left\langle \left[\frac{X_1}{b}, \left[\frac{X_1}{b}, \frac{X_2}{b} \right]_{\mathfrak{g}} \right]_{\mathfrak{p}}, \frac{X_2}{b} \right\rangle \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\langle \left[\frac{X_2}{b}, \left[\frac{X_2}{b}, \frac{X_1}{b} \right]_{\mathfrak{g}} \right]_{\mathfrak{p}}, \frac{X_1}{b} \right\rangle + \left\| U\left(\frac{X_1}{b}, \frac{X_2}{b}\right) \right\|^2 \\ &\quad - \left\langle U\left(\frac{X_1}{b}, \frac{X_1}{b}\right), U\left(\frac{X_2}{b}, \frac{X_2}{b}\right) \right\rangle = \frac{1}{a^2} > 0. \end{aligned}$$

Luego π tiene curvatura seccional positiva y $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}^2$ tiene todas sus curvaturas seccionales menores o iguales que cero.

Sabemos que $\text{Ric}_u = cI + C_{\mathfrak{h}}$ por Teorema 4.0.4 (ii). Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a^2} \end{pmatrix} = \text{Ric}_u = cI + C_{\mathfrak{h}} = cI + \begin{pmatrix} \frac{2}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{b^2} \end{pmatrix}.$$

De lo que se sigue que $a = b$.

Por último, consideremos \mathfrak{s} la subálgebra de Lie de \mathfrak{g} generada por $\left\{ \frac{e_2}{a}, \frac{e_1+e_3}{a}, \frac{X_1}{a}, \frac{X_2}{a} \right\}$. El corchete de Lie es el siguiente:

$$\left[\frac{e_2}{a}, \frac{e_1+e_3}{a} \right] = -\frac{2}{a} \left(\frac{e_1+e_3}{a} \right), \quad \left[\frac{e_2}{a}, \frac{X_1}{a} \right] = \frac{1}{a} \left(\frac{X_1}{a} \right), \quad \left[\frac{e_2}{a}, \frac{X_2}{a} \right] = -\frac{1}{a} \left(\frac{X_2}{a} \right), \quad \left[\frac{e_1+e_3}{a}, \frac{X_1}{a} \right] = \frac{2}{a} \left(\frac{X_2}{a} \right). \quad (4.8)$$

Claramente \mathfrak{s} es una subálgebra de Lie soluble de \mathfrak{g} , la cual es un producto semidirecto $\mathbb{R} \left(\frac{e_2}{a} \right) \ltimes \mathfrak{h}_3$, donde \mathfrak{h}_3 es el álgebra de Heisenberg de dimensión 3.

Veamos ahora que S , el subgrupo de Lie conexo de G con álgebra de Lie \mathfrak{s} , actúa transitivamente en $(\text{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2)/\text{SO}(2)$. Sabemos que $G = \text{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$ y que la descomposición de Iwasawa de u es $u = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \tilde{\mathfrak{n}} = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle \oplus \langle e_1 + e_3 \rangle$ (ver descomposición de Iwasawa en [K, Capítulo 6, Sección 4]). Luego $G = KAN \times \mathbb{R}^2$, donde A y \tilde{N} son los subgrupos de Lie conexos de U con álgebras de Lie \mathfrak{a} y $\tilde{\mathfrak{n}}$ respectivamente. Observar que en este caso, el \mathfrak{k} de la descomposición de Iwasawa coincide con \mathfrak{k} de nuestra descomposición reductiva. Entonces $G = KS$ y tomando inversos, tenemos que $G = SK$. De lo que se sigue que S actúa transitivamente en G/K pues S no interseca a K . En efecto, si K es el subgrupo de isotropía en p , como G actúa transitivamente en G/K , tenemos que para todo $q \in G/K$, existe un $g \in G$ tal que $g.p = q$, luego, como $G = KS$, existen $s \in S$ y $k \in K$ tal que $s.k.p = q$, pero $k.p = p$ pues K es el subgrupo de isotropía. De lo que se sigue que $s.p = q$. Luego, $(G/K, g)$ es isométrico a una solvariedad y por lo tanto es isométrico a un solsolitón. En efecto, vía la identificación de \mathfrak{p} y \mathfrak{s} con el espacio tangente a la variedad en algún punto, obtenemos que la métrica en S es la determinada por el producto interno en \mathfrak{s} tal que la base $\left\{ \frac{e_2}{a}, \frac{e_1+e_3}{a}, \frac{X_1}{a}, \frac{X_2}{a} \right\}$ es ortogonal. Luego, el operador de Ricci es como sigue:

$$\text{Ric} = -\frac{6}{a^2}I + \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \frac{6}{a^2} & \\ & & & \frac{6}{a^2} \end{pmatrix} = -\frac{6}{a^2}I + D,$$

y $D \in \text{Der}(\mathfrak{s})$, lo que prueba que es un solsolitón.

- Si $\dim \mathfrak{n} = 3$, entonces $\dim \mathfrak{h} = 1$. Luego u es un álgebra de Lie reductiva de dimensión 2 y por lo tanto es abeliana. Entonces $\text{Ric}_u = 0$. De Teorema 4.0.4 (ii) tenemos que $C_{\mathfrak{h}} = -cI$. Entonces $(\mathfrak{s} = \mathfrak{h} \ltimes \mathfrak{n}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ satisface (i)-(iv) de [L1, Teorema 4.8] y \mathfrak{s} es un solsolitón. Entonces, $G/K = (\text{SO}(2) \times S)/\text{SO}(2)$, donde S es el subgrupo de Lie de G con álgebra de Lie \mathfrak{s} , y la métrica está determinada por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en $T_{eK}(G/K) \simeq \mathfrak{s}$.
- Si $\dim \mathfrak{n} = 4$, entonces de manera análoga al ítem anterior obtenemos que $G/K = (\text{SO}(2) \times N)/\text{SO}(2)$, donde N es el subgrupo de Lie de G con álgebra de Lie \mathfrak{n} , y la métrica está determinada por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en $T_{eK}(G/K) \simeq \mathfrak{n}$.

Para concluir con esta sección, presentamos el Cuadro 4.2, en el cual exhibimos la clasificación de los solitones semi-algebraicos de expansión no Einstein en dimensión 4, salvo isometría equivariante, y como corolario del mismo, enunciamos el Teorema 4.2.2, en el cual los resultados son salvo isometría.

$\dim G$	G	K	Métrica
4	S grupo de Lie soluble	e	Ver la clasificación de solsolitones en [L1, Tabla 2] y de nilsolitones en [Will, Tabla 2].
5	$SO(2) \ltimes S$	$SO(2)$	Determinada por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en $T_{eK}(G/K) \simeq \mathfrak{s}$, \mathfrak{s} el álgebra de Lie de S tal que $(\mathfrak{s}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sea un solsolitón (o nilsolitón).
	$SL_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$	$SO(2)$	Producto de una métrica Einstein en $SL_2(\mathbb{R})/SO(2)$ y una métrica plana en \mathbb{R}^2 .
	$SL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$	$SO(2)$	Determinada por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{a,a}$ en $T_{eK}(G/K)$ (ver (4.7)) isométrica a un solsolitón (\mathfrak{s}, g) donde \mathfrak{s} está definida en (4.8).
6	$SO(3) \times (SO(2) \ltimes \mathbb{R}^2)$	$SO(2) \times SO(2)$	Producto de una métrica Einstein en $SO(3)/SO(2)$ y una métrica plana en $(SO(2) \ltimes \mathbb{R}^2)/SO(2)$.
	$SO_0(2,1) \times (SO(2) \ltimes \mathbb{R}^2)$	$SO(2) \times SO(2)$	Producto de una métrica Einstein en $SO_0(2,1)/SO(2)$ y una métrica plana en $(SO(2) \ltimes \mathbb{R}^2)/SO(2)$.
7	$\mathbb{R} \times SO(4)$	$SO(3)$	Producto de \mathbb{R} y una métrica de curvatura constante.
	$\mathbb{R} \times SO_0(3,1)$	$SO(3)$	

Cuadro 4.2: Solitones semi-algebraicos de expansión no Einstein en dimensión 4, salvo isometría equivariante.

Teorema 4.2.2. *Todo solitón semi-algebraico simplemente conexo de expansión de dimensión 4 es isométrico a un solsolitón.*

Demostración. Todo solitón semi-algebraico de expansión de dimensión 4 es isométrico a una variedad producto en donde una de las variedades es plana y la otra Einstein, es Einstein o es isométrico a una solvariedad (ver Cuadro 4.2). Observar que si es isométrico a una variedad producto en donde una de las variedades es plana y la otra Einstein, entonces es isométrico a una solvariedad, pues cada variedad del producto lo es. Si es Einstein, entonces también es isométrico a una solvariedad (ver [Jn, Introducción]). Luego, todo solitón semi-algebraico simplemente conexo de expansión de dimensión 4 es isométrico a una solvariedad, y por lo tanto, a un solsolitón usando [J, Teorema 1.1]. \square

4.3. $\dim(G/K) = 5$

En esta sección vamos a estudiar los solitones semi-algebraicos de expansión de dimensión 5, salvo isometría. Para hacer esto, usaremos nuevamente el Teorema 4.0.4. Por (4.3), sabemos que no existe G con $11 < \dim(G) < 15$. Por lo tanto, los distintos valores para $\dim \mathfrak{g}$ son 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 15, y es 15 si y sólo si $(G/K, g)$ es Einstein. Por otro lado, por (i) del Lema 4.0.7 sabemos que si $\dim \mathfrak{n} = 0$, entonces $(G/K, g)$ es Einstein y por (ii) del mismo lema sabemos que si $\dim \mathfrak{n} = 4$ o 5 entonces $(G/K, g)$ es isométrico a un solsolitón. Luego, sólo hace falta analizar $\dim \mathfrak{n} = 1, 2$ y 3.

4.3.1. $\dim \mathfrak{g} = 5$

- Si $\dim \mathfrak{n} = 1$, entonces $\dim \mathfrak{h} = 4$. Por lo tanto, \mathfrak{h} es reductiva de dimensión 4, pues $\mathfrak{k} = 0$, e isomorfa a alguna de las siguientes álgebras de Lie:

$$\mathbb{R}^4, \quad \mathbb{R} \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}), \quad \mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(2).$$

Si $\mathfrak{h} \simeq \mathbb{R}^4$, entonces $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0$, y por lo tanto, $(G, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es isométrico a un solsolitón. En efecto, es isométrico a una solvariedad usando el Corolario 4.0.5 y a un solsolitón usando [J, Teorema 1.1].

Si $\mathfrak{h} \simeq \mathbb{R} \oplus \mathfrak{v}$, con $\mathfrak{v} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ o $\mathfrak{v} = \mathfrak{su}(2)$, entonces tomo $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base ortonormal de $\mathfrak{u} = \mathfrak{h}$ tal que $\{e_1, e_2, e_3\} \in \mathfrak{v}$ y el corchete de Lie de \mathfrak{v} en \mathfrak{u} sea de la siguiente manera (ver [Mil]):

$$[e_1, e_2] = de_3, \quad [e_2, e_3] = ae_1, \quad [e_3, e_1] = be_2 \quad a, b, d \in \mathbb{R}, \quad a, b, d \neq 0. \quad (4.9)$$

Por la condición de Jacobi, $\text{ad}_{\mathfrak{u}}(e_4)$ es una derivación de \mathfrak{v} , entonces tenemos que $\text{ad}_{\mathfrak{u}}(e_4) = e \text{ad}_{\mathfrak{u}}(e_1) + f \text{ad}_{\mathfrak{u}}(e_2) + g \text{ad}_{\mathfrak{u}}(e_3)$. Y por lo tanto, podemos calcular el operador de Ricci, $\text{Ric}_{\mathfrak{u}}$, respecto de $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ con (1.10).

Por otro lado, por (4.9), tenemos que $\theta(e_1) = 0$, $\theta(e_2) = 0$ y $\theta(e_3) = 0$. De lo que se sigue que el mapa simétrico $C_{\mathfrak{h}}$ respecto de $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ tiene la siguiente forma:

$$C_{\mathfrak{h}} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & * \end{pmatrix}.$$

Luego, por (ii) del Teorema 4.0.4, obtenemos que

$$\text{Ric}_{\mathfrak{u}} = \begin{pmatrix} c & & & \\ & c & & \\ & & c & \\ & & & c + * \end{pmatrix}.$$

Usando Maple, obtenemos que si $(\text{Ric}_{\mathfrak{u}})_{ij}$ es la matriz de $\text{Ric}_{\mathfrak{u}}$ respecto de la base ortonormal mencionada arriba, entonces la única solución que satisface $(\text{Ric}_{\mathfrak{u}})_{11} = (\text{Ric}_{\mathfrak{u}})_{22} = (\text{Ric}_{\mathfrak{u}})_{33}$ y $(\text{Ric}_{\mathfrak{u}})_{ij} = 0$, para todo $i \neq j$, es $a = b = d$, en cuyo caso \mathfrak{v} resulta isomorfa a $\mathfrak{su}(2)$ por [Mil]. Además, se obtiene que

$$\text{Ric}_{\mathfrak{u}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a^2 & & & \\ & \frac{1}{2}a^2 & & \\ & & \frac{1}{2}a^2 & \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$

lo cual es absurdo, pues $c = \frac{1}{2}a^2 > 0$.

- Si $\dim \mathfrak{n} = 2$, entonces $\dim \mathfrak{h} = 3$. Por lo tanto, $\mathfrak{h} = \mathfrak{u}$ es reductiva de dimensión 3 y entonces isomorfa a alguna de las siguientes álgebras de Lie:

$$\mathbb{R}^3, \quad \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}), \quad \mathfrak{su}(2).$$

Si $\mathfrak{h} \simeq \mathbb{R}^3$, entonces $(G, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es isométrico un solsolitón, pues es isométrico a una solvariedad usando el Corolario 4.0.5 y a un solsolitón usando [J, Teorema 1.1].

Si $\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{v}$, con $\mathfrak{v} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ o $\mathfrak{v} = \mathfrak{su}(2)$, consideremos la representación $\theta : \mathfrak{u} \rightarrow \text{Der}(\mathfrak{n})$. Luego $\text{Nu } \theta$ es un ideal de \mathfrak{v} , y como \mathfrak{v} es simple, tenemos que $\text{Nu } \theta = \mathfrak{v}$ o $\text{Nu } \theta = 0$.

Si $\text{Nu } \theta = \mathfrak{v}$, entonces $\theta = 0$, y por lo tanto, $G = U \times N$ como variedad Riemanniana. Por otro lado, por Teorema 4.0.4 (ii), $\text{Ric}_{\mathfrak{u}} = cI$, y entonces U es Einstein, lo cual es una contradicción (ver en la Subsección 4.2.1 el caso $\dim \mathfrak{n} = 1$).

Entonces $\text{Nu } \theta = 0$ y θ es fiel. Además, como \mathfrak{v} es simple, tenemos que $\text{tr } \theta(X) = 0$, para todo $X \in \mathfrak{v}$. En efecto, $\mathfrak{v} = [\mathfrak{v}, \mathfrak{v}]$, y por lo tanto, $\theta \mathfrak{v} = [\theta \mathfrak{v}, \theta \mathfrak{v}]$. Entonces, fijando una base en \mathfrak{n} , obtenemos que $\theta : \mathfrak{u} \rightarrow \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ es un isomorfismo. Luego, \mathfrak{u} no puede ser isomorfa a $\mathfrak{su}(2)$.

Entonces $\mathfrak{u} \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ y consideremos $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base ortonormal de \mathfrak{u} tal que el corchete en \mathfrak{u} es como sigue (ver [Mil]):

$$[e_1, e_2] = de_3, \quad [e_2, e_3] = ae_1, \quad [e_3, e_1] = be_2, \quad a, b, d \in \mathbb{R}, \quad a, b, d \neq 0. \quad (4.10)$$

Además, fijo $\{e_4, e_5\}$ una base ortonormal de \mathfrak{n} . Luego, en $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) = \text{Im } \theta \subset \text{Der}(\mathfrak{n})$ tengo la siguiente base

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y los corchetes satisfacen lo siguiente:

$$[H, X] = -2Y, \quad [H, Y] = -2X, \quad [X, Y] = -2H.$$

Como θ es un isomorfismo, existen únicos $\tilde{H}, \tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{u}$ tales que $\theta(\tilde{H}) = H$, $\theta(\tilde{X}) = X$ y $\theta(\tilde{Y}) = Y$ y forman una base de \mathfrak{u} . Por lo tanto,

$$e_1 = a_{11}\tilde{X} + a_{12}\tilde{Y} + a_{13}\tilde{H}, \quad e_2 = a_{21}\tilde{X} + a_{22}\tilde{Y} + a_{23}\tilde{H}, \quad e_3 = a_{31}\tilde{X} + a_{32}\tilde{Y} + a_{33}\tilde{H},$$

y

$$\theta(e_1) = a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}H, \quad \theta(e_2) = a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}H, \quad \theta(e_3) = a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}H.$$

Usando los corchetes de (4.10) y calculando $\text{Ric}_{\mathfrak{u}}$ con (1.10), obtenemos que $\text{Ric}_{\mathfrak{u}}$ es diagonal. De lo que se sigue que $C_{\mathfrak{h}}$ es diagonal, pues $\text{Ric}_{\mathfrak{u}} = cI + C_{\mathfrak{h}}$ por (ii) del Teorema 4.0.4. Luego, $\text{tr}(S(\theta(e_i))S(\theta(e_j))) = 0$, para $i \neq j$ y

$$S(\theta(e_1)) = a_{12}Y + a_{13}H = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{12} & -a_{13} \end{pmatrix},$$

$$S(\theta(e_2)) = a_{22}Y + a_{23}H = \begin{pmatrix} a_{23} & a_{22} \\ a_{22} & -a_{23} \end{pmatrix},$$

$$S(\theta(e_3)) = a_{32}Y + a_{33}H = \begin{pmatrix} a_{33} & a_{32} \\ a_{32} & -a_{33} \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$2a_{13}a_{23} + 2a_{12}a_{22} = 0, \quad 2a_{13}a_{33} + 2a_{12}a_{32} = 0, \quad 2a_{23}a_{33} + 2a_{22}a_{32} = 0. \quad (4.11)$$

De (iv) del Teorema 4.0.4, se sigue que θ tiene que satisfacer que $\sum_{i=1}^3 [\theta(e_i), \theta(e_i)^t] = 0$, por lo tanto,

$$a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} = 0, \quad a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} + a_{31}a_{32} = 0. \quad (4.12)$$

Además, como θ es representación, también tiene que satisfacer que

$$d\theta(e_3) = [\theta(e_1), \theta(e_2)], \quad a\theta(e_1) = [\theta(e_2), \theta(e_3)], \quad b\theta(e_2) = [\theta(e_3), \theta(e_1)]. \quad (4.13)$$

Usando Maple, resolvemos el sistema compuesto por las ecuaciones (4.11), (4.12), (4.13) y $\text{Ric}_{\mathfrak{u}} = cI + C_{\mathfrak{h}}$, respecto de las variables a_{ij} , obteniendo que el sistema no tiene solución.

- Si $\dim \mathfrak{n} = 3$, entonces $\dim \mathfrak{h} = 2$. Se sigue que \mathfrak{h} es abeliana, pues por (i) del Teorema 4.0.4, \mathfrak{h} es un álgebra reductiva de dimensión 2. Luego, $(G, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es isométrico a un solsolitón. En efecto, es isométrico a una solvariedad usando el Corolario 4.0.5 y a solsolitón usando [J, Teorema 1.1].

4.3.2. $\dim \mathfrak{g} = 6$

- Si $\dim \mathfrak{n} = 1$, entonces $\dim \mathfrak{h} = 4$. Como $\dim \mathfrak{k} = 1$, tenemos que $\dim \mathfrak{u} = 5$, y como \mathfrak{u} es reductiva, entonces es isomorfa a una de las siguientes álgebras de Lie:

$$\mathbb{R}^5, \quad \mathbb{R}^2 \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}), \quad \mathbb{R}^2 \oplus \mathfrak{su}(2).$$

Si $\mathfrak{u} \simeq \mathbb{R}^5$, entonces como \mathfrak{k} actúa antisimétricamente en \mathfrak{n} , y $\dim \mathfrak{n} = 1$, entonces $\theta(\mathfrak{k}) = 0$ y $\text{ad}(\mathfrak{k}) = 0$. Por lo tanto, \mathfrak{n} tiene dimensión mayor que 1, lo cual es una contradicción.

Si $\mathfrak{u} \simeq \mathbb{R}^2 \oplus \mathfrak{v}$, con $\mathfrak{v} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ o $\mathfrak{v} = \mathfrak{su}(2)$, entonces $\mathfrak{z}(\mathfrak{u})$ tiene dimensión 2 y por Lema 4.0.7 (iv), tenemos que $\mathfrak{z}(\mathfrak{u}) \subset \mathfrak{h}$. Tomo $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ una base ortonormal de \mathfrak{u} tal que $e_1 \in \mathfrak{k}$, $\{e_2, e_3, e_4, e_5\} \subset \mathfrak{h}$ y $\{e_4, e_5\} \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{u})$. Entonces el corchete de Lie en \mathfrak{u} es como sigue:

$$[e_1, e_2] = -ae_3, \quad [e_1, e_3] = ae_2, \quad [e_2, e_3] = be_1 + de_4 + ee_5, \quad a, b, d, e \in \mathbb{R}, \quad a, b \neq 0.$$

Por lo tanto, $\theta(e_2) = 0$ y $\theta(e_3) = 0$. Por otro lado, como tenemos el corchete de \mathfrak{u} en una base ortonormal, podemos calcular $\text{Ric}_{\mathfrak{u}}$ utilizando (1.10). De lo que se sigue que

$$\text{Ric}_{\mathfrak{u}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}d^2 + -\frac{1}{2}e^2 - ba & & & & \\ & -\frac{1}{2}d^2 + -\frac{1}{2}e^2 - ba & & & \\ & & \frac{1}{2}d^2 & \frac{1}{2}de & \\ & & \frac{1}{2}de & \frac{1}{2}e^2 & \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Fijo $e_6 \in \mathfrak{n}$, $e_6 \neq 0$. Entonces tenemos que

$$\theta(e_4)e_6 = \alpha e_6, \quad \theta(e_5)e_6 = \beta e_6, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (4.15)$$

Por (ii) del Teorema 4.0.4 sabemos que $\text{Ric}_{\mathfrak{u}} = cI + C_{\mathfrak{h}}$, entonces, en particular, tenemos que

$$\frac{1}{2}d^2 = c + \alpha^2 \quad \text{y} \quad \frac{1}{2}e^2 = c + \beta^2.$$

Por lo tanto, tanto α como β deben ser distintos de cero, pues sino $c \geq 0$, lo cual es una contradicción. Pero como $\{e_4, e_5\} \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{u})$ son arbitrarios, podría cambiar la base ortonormal por $\{\tilde{e}_4, \tilde{e}_5\} \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{u})$ tal que \tilde{e}_4 sea $\frac{\beta e_4 - \alpha e_5}{\|\beta e_4 - \alpha e_5\|}$, y por lo tanto $\theta(\tilde{e}_4) = 0$, lo cual es absurdo.

- Si $\dim \mathfrak{n} = 2$, entonces $\dim \mathfrak{h} = 3$, y por lo tanto, $\dim \mathfrak{u} = 4$. De lo que se sigue que \mathfrak{u} debe ser isomorfa a alguna de las siguientes álgebras de Lie:

$$\mathbb{R}^4, \quad \mathbb{R} \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}), \quad \mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(2).$$

Si $\mathfrak{u} \simeq \mathbb{R}^4$, entonces \mathfrak{h} es abeliana, y por lo tanto $(G/K, g)$ es isométrico a un solsolitón, usando Corolario 4.0.5 y [J, Teorema 1.1].

Si $\mathfrak{u} \simeq \mathbb{R} \oplus \mathfrak{v}$, con $\mathfrak{v} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ o $\mathfrak{v} = \mathfrak{su}(2)$, entonces $\mathfrak{z}(\mathfrak{u})$ tiene dimensión 1. Por lo tanto, tenemos tres posibilidades:

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{u}) \subset \mathfrak{k}, \quad \mathfrak{z}(\mathfrak{u}) \subset \mathfrak{h}, \quad \text{ó} \quad \mathfrak{z}(\mathfrak{u}) = \langle X + Y \rangle, \quad X, Y \neq 0, \quad X \in \mathfrak{k}, \quad Y \in \mathfrak{h}.$$

- Supongamos primero que $\mathfrak{z}(\mathfrak{u}) \subset \mathfrak{k}$. Como $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{u}) = \dim \mathfrak{k}$, entonces $\mathfrak{z}(\mathfrak{u}) = \mathfrak{k}$. Luego, las condiciones $\text{Ric}_{\mathfrak{u}} = cI + C_{\mathfrak{h}}$ y $\sum [\text{ad } Y_i|_{\mathfrak{n}}, (\text{ad } Y_i|_{\mathfrak{n}})^t] = 0$, para toda $\{Y_i\}$ base ortonormal de \mathfrak{h} , son exactamente las mismas que en el caso en que $\dim \mathfrak{g} = 5$, $\dim \mathfrak{n} = 2$ y $\mathfrak{u} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, en el cual no existía ninguna θ que satisfaga las condiciones.
- Si $\mathfrak{z}(\mathfrak{u}) \subset \mathfrak{h}$, entonces sea $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base ortonormal de \mathfrak{u} tal que $e_1 \in \mathfrak{k}$, $\{e_2, e_3, e_4\} \subset \mathfrak{h}$ y $e_4 \in \mathfrak{z}(\mathfrak{u})$. Entonces el corchete del Lie es de la siguiente manera:

$$[e_1, e_2] = -ae_3, \quad [e_1, e_3] = ae_2, \quad [e_2, e_3] = be_1 + de_4, \quad a, b, d \in \mathbb{R}, \quad a, b \neq 0. \quad (4.16)$$

Por lo tanto, usando (1.10), podemos calcular el operador $\text{Ric}_{\mathfrak{u}}$:

$$\text{Ric}_{\mathfrak{u}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}d^2 - ba & & & \\ & -\frac{1}{2}d^2 - ba & & \\ & & \frac{1}{2}d^2 & \\ & & & \frac{1}{2}d^2 \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Como $\text{Ric}_u = cI + C_{\mathfrak{h}}$ por (ii) del Teorema 4.0.4, y Ric_u es diagonal con $(\text{Ric}_u)_{11} = (\text{Ric}_u)_{22}$, entonces tenemos que el mapa $C_{\mathfrak{h}}$ satisface:

$$\langle C_{\mathfrak{h}}e_2, e_2 \rangle = \langle C_{\mathfrak{h}}e_3, e_3 \rangle, \quad \langle C_{\mathfrak{h}}e_2, e_3 \rangle = \langle C_{\mathfrak{h}}e_2, e_4 \rangle = \langle C_{\mathfrak{h}}e_3, e_4 \rangle = 0.$$

De (4.16) podemos observar que $d \text{tr}(\theta(e_4)) = 0$. En efecto, tenemos que $d \text{tr} \theta(e_4) = \text{tr}[\theta(e_2), \theta(e_3)] - b \text{tr} \theta(e_1) = 0$.

- o Si $d \neq 0$, entonces $\text{tr} \theta(e_4) = 0$. Nuevamente separemos en dos casos, $\theta(e_1) \neq 0$ y $\theta(e_1) = 0$.

Si $\theta(e_1) \neq 0$, entonces como $[e_1, e_4] = 0$, entonces $[\theta(e_1), \theta(e_4)] = 0$, por lo tanto, si fijamos una base en \mathfrak{n} , $\theta(e_1)$ es una matriz que conmuta con la matriz $\theta(e_4)$. Luego $\theta(e_4)$ es un múltiplo de la identidad, y por lo tanto $\theta(e_4) = 0$, pues $\text{tr} \theta(e_4) = 0$. Luego $\langle C_{\mathfrak{h}}e_4, e_4 \rangle = 0$ y usando (4.17), obtenemos que $\frac{1}{2}d^2 = c$, y por lo tanto $c \geq 0$, lo cual es una contradicción.

Si $\theta(e_1) = 0$, entonces se sigue de (4.16) que $\theta(e_2) = 0$, $\theta(e_3) = 0$, y como $d \neq 0$, entonces $\theta(e_4) = 0$. Luego, $\frac{1}{2}d^2 = c$, lo cual es una contradicción.

- o Si $d = 0$, entonces $\mathfrak{u} = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{v}$, suma ortogonal. Luego \mathfrak{v} debe ser isomorfa a $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, pues si consideramos $\tilde{\theta} := \theta|_{[\mathfrak{u}, \mathfrak{u}]} : \mathfrak{v} \rightarrow \text{Der}(\mathfrak{n})$, entonces $\text{Nu}(\tilde{\theta}) = 0$ o $\text{Nu}(\tilde{\theta}) = \mathfrak{v}$, pues \mathfrak{v} es simple.

Si $\text{Nu}(\tilde{\theta}) = \mathfrak{v}$, entonces, $\theta(\mathfrak{v}) = 0$. Luego, de (4.17) obtenemos que $-ab = c$, y por lo tanto $ab > 0$. De lo que se sigue que $\mathfrak{v} \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$.

Si $\text{Nu}(\tilde{\theta}) = 0$, entonces $\tilde{\theta}$ es un isomorfismo y por lo tanto $\mathfrak{v} \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$.

De lo de arriba, tenemos que $\theta(e_4) \neq 0$ y $d = 0$. Luego, de $\text{Ric}_u = cI + C_{\mathfrak{h}}$, se sigue que $c = -\text{tr}(S(\theta(e_4))^2)$ (ver (4.17) en el caso $d = 0$) y las condiciones $\text{Ric}_u = cI + C_{\mathfrak{h}}$ y $\sum[\text{ad } Y_i|_{\mathfrak{n}}, (\text{ad } Y_i|_{\mathfrak{n}})^t] = 0$, para toda $\{Y_i\}$ base ortonormal de \mathfrak{h} , son exactamente las mismas que en el caso en que $\dim \mathfrak{k} = 1$, $\dim \mathfrak{n} = 2$, $\dim \mathfrak{h} = 2$ y $\mathfrak{u} \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. Por lo tanto, $(G/K, g)$ es isométrico a un solsolitón.

- Si $\mathfrak{z}(\mathfrak{u}) = \langle X + Y \rangle$, $X, Y \neq 0$, $X \in \mathfrak{k}$, $Y \in \mathfrak{h}$, entonces sea $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base ortonormal de \mathfrak{u} tal que $e_1 \in \mathfrak{k}$, $\{e_2, e_3, e_4\} \subset \mathfrak{h}$, $e_1 = \frac{X}{\|X\|}$ y $e_2 = \frac{Y}{\|Y\|}$.

Como $X + Y \in \mathfrak{z}(\mathfrak{u})$ entonces $[X + Y, e_i] = 0$, para todo $i = 1, \dots, 4$. Luego,

$$[\|X\|e_1 + \|Y\|e_2, e_i] = 0, \quad \text{para todo } i = 1, \dots, 4.$$

De lo que se sigue que

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_2, e_3] = -\frac{\|X\|}{\|Y\|}[e_1, e_3], \quad [e_2, e_4] = -\frac{\|X\|}{\|Y\|}[e_1, e_4].$$

Por otro lado, como \mathfrak{k} actúa de manera antisimétrica en \mathfrak{h} y $[e_1, e_2] = 0$ tenemos que

$$[e_1, e_3] = -ae_4, \quad [e_1, e_4] = ae_3, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Entonces, como $e_1 \in \mathfrak{k}$, $e_2 \in \mathfrak{h}$, y $B(\mathfrak{k}, \mathfrak{h}) = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= B(e_1, e_2) = \text{tr} \left(\left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & -a & 0 \end{array} \right) \theta(e_1) \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a \frac{\|X\|}{\|Y\|} \\ 0 & 0 & a \frac{\|X\|}{\|Y\|} & 0 \end{array} \right) \theta(e_2) \right) \\ &= 2a^2 \frac{\|X\|}{\|Y\|} + \text{tr}(\theta(e_1)\theta(e_2)). \end{aligned}$$

Como \mathfrak{k} actúa antisimétricamente en \mathfrak{n} , entonces fijando una base de \mathfrak{n} , obtenemos que $\theta(e_1)$ es una matriz antisimétrica. Por lo tanto, tenemos dos posibilidades, o bien $\theta(e_1) = 0$ o $\theta(e_1) \neq 0$.

Si $\theta(e_1) = 0$, entonces $\text{tr}(\theta(e_1)\theta(e_2)) = 0$, de lo que se sigue que $2a^2 \frac{\|X\|}{\|Y\|} = 0$, y por lo tanto $a = 0$. Luego $\text{ad}(e_1) = 0$. Por lo tanto, X e Y están en el centro de \mathfrak{u} , lo cual es una contradicción, pues $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{u}) = 1$.

Si $\theta(e_1) \neq 0$, entonces como θ es representación y $[e_1, e_2] = 0$, se tiene que $[\theta(e_1), \theta(e_2)] = 0$, de lo que se sigue que $\theta(e_2)$ tiene que ser un múltiplo de la identidad. Por lo tanto, $\text{tr}(\theta(e_1)\theta(e_2)) = 0$, $2a^2 \frac{\|X\|}{\|Y\|} = 0$, y $a = 0$. Entonces $\text{ad}_{\mathfrak{u}}(e_1) = 0$. Luego, tanto X como Y están en el centro de \mathfrak{u} , lo cual es una contradicción, pues $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{u}) = 1$.

- Si $\dim \mathfrak{n} = 3$, entonces $\dim \mathfrak{h} = 2$ y $\dim \mathfrak{u} = 3$. Por lo tanto, por ser \mathfrak{u} reductiva, es isomorfa a una de las siguientes álgebras de Lie:

$$\mathbb{R}^3, \quad \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}), \quad \mathfrak{su}(2).$$

Si $\mathfrak{u} \simeq \mathbb{R}^3$, entonces \mathfrak{h} es abeliana. De lo que se sigue que $(G/K, g)$ es isométrico un solsolitón. En efecto, es isométrico a una solvariedad usando el Corolario 4.0.5 y a un solsolitón usando [J, Teorema 1.1].

Si $\mathfrak{u} \simeq \mathfrak{v}$, con $\mathfrak{v} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ o $\mathfrak{v} = \mathfrak{su}(2)$, entonces consideremos $\{e_1, e_2, e_3\}$ base ortonormal de \mathfrak{u} tal que $e_1 \in \mathfrak{k}$ y $\{e_2, e_3\} \subset \mathfrak{h}$. Luego el corchete de Lie de \mathfrak{u} es como sigue:

$$[e_1, e_2] = -ae_3, \quad [e_1, e_3] = ae_2, \quad [e_2, e_3] = be_1, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a, b \neq 0. \quad (4.18)$$

Por lo tanto, usando (1.10), podemos calcular el operador $\text{Ric}_{\mathfrak{u}}$

$$\text{Ric}_{\mathfrak{u}} = \begin{pmatrix} -ab & 0 \\ 0 & -ab \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Por otro lado, consideremos $\theta : \mathfrak{u} \rightarrow \text{Der}(\mathfrak{n})$ y $\{e_4, e_5, e_6\}$ una base ortonormal de \mathfrak{n} tal que

$$\theta(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e \\ 0 & -e & 0 \end{pmatrix}, \quad e \in \mathbb{R}.$$

Como θ es una representación, entonces de (4.18), θ tiene que satisfacer lo siguiente

$$[\theta(e_1), \theta(e_2)] = -a\theta(e_3), \quad [\theta(e_1), \theta(e_3)] = a\theta(e_2), \quad [\theta(e_2), \theta(e_3)] = b\theta(e_1). \quad (4.20)$$

Además, por (iv) de Teorema 4.0.4, tenemos que

$$[\theta(e_2), \theta(e_2)^t] + [\theta(e_3), \theta(e_3)^t] = 0. \quad (4.21)$$

De (4.19) y $\text{Ric}_{\mathfrak{u}} = cI + C_{\mathfrak{h}}$, también sabemos que

$$-ab = c + \text{tr}(S(\theta(e_2))^2), \quad \text{tr}(S(\theta(e_2))^2) = \text{tr}(S(\theta(e_3))^2) \quad \text{y} \quad \text{tr}(S(\theta(e_2))S(\theta(e_3))) = 0. \quad (4.22)$$

Usando Maple, obtenemos que salvo cambio de base en \mathfrak{u} , hay dos representaciones que satisfacen (4.20), (4.21) y (4.22). En ambos casos $ab > 0$ y por lo tanto, $\mathfrak{v} \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$:

- Primer caso: Sean $e, l, v \in \mathbb{R}$,

$$a = 2e, \quad b = \frac{2(l^2 + v^2)}{e},$$

$$\theta(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e \\ 0 & -e & 0 \end{pmatrix}, \quad \theta(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & l \\ 0 & l & -v \end{pmatrix}, \quad \theta(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -l & v \\ 0 & v & l \end{pmatrix}.$$

Consideremos la siguiente subálgebra de Lie de \mathfrak{g} , $\mathfrak{s} = \{e_2, e_1 + \sqrt{\frac{a}{b}}e_3, e_4, e_5, e_6\}$. \mathfrak{s} es un álgebra de Lie soluble de \mathfrak{g} que no interseca a la isotropía, y su corchete de Lie es como sigue:

$$[e_2, e_1 + \sqrt{\frac{a}{b}}e_3] = b\sqrt{\frac{a}{b}}(e_1 + \sqrt{\frac{a}{b}}e_3), \quad [e_2, e_5] = ve_4 + le_5, \quad [e_2, e_6] = le_4 - ve_5, \\ [e_1 + \sqrt{\frac{a}{b}}e_3, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n}.$$

Luego, el subgrupo de Lie de G , S , con álgebra de Lie \mathfrak{s} , actúa transitivamente en G/K . En efecto, la descomposición de Iwasawa de \mathfrak{u} es $\mathfrak{u} = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle \oplus \langle e_1 + \sqrt{\frac{a}{b}}e_3 \rangle$. Luego $G = KS$. De lo que se sigue que S actúa transitivamente en G/K pues S no interseca a K (ver en Subsección 4.2.2 $\dim \mathfrak{n} = 2$). Luego, $(G/K, g)$ es isométrico a una solvariedad y por lo tanto es isométrico a un solsolitón (ver [J, Teorema 1.1]).

- Segundo caso: Sean $e, r, u \in \mathbb{R}$,

$$a = e, \quad b = \frac{u^2 + r^2}{e},$$

$$\theta(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e \\ 0 & -e & 0 \end{pmatrix}, \quad \theta(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & u & -r \\ u & 0 & 0 \\ -r & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \theta(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & r & u \\ r & 0 & 0 \\ u & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Consideremos la siguiente subálgebra de Lie de \mathfrak{g} , $\mathfrak{s} = \{e_2, e_1 + \sqrt{\frac{a}{b}}e_3, e_4, e_5, e_6\}$. \mathfrak{s} es un álgebra de Lie soluble de \mathfrak{g} que no interseca a la isotropía, y su corchete de Lie es como sigue:

$$[e_2, e_1 + \sqrt{\frac{a}{b}}e_3] = b\sqrt{\frac{a}{b}}(e_1 + \sqrt{\frac{a}{b}}e_3), \quad [e_2, e_4] = ue_5 - re_6, \\ [e_2, e_5] = ue_4, \quad [e_2, e_6] = -re_4, \quad [e_1 + \sqrt{\frac{a}{b}}e_3, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n}.$$

Luego, de manera análoga al caso anterior tenemos que el subgrupo de Lie de G , S , con álgebra de Lie \mathfrak{s} , actúa transitivamente en G/K . Por lo tanto, $(G/K, g)$ es isométrica a una solvariedad y usando [J, Teorema 1.1] es isométrica a un solsolitón.

4.3.3. $\dim \mathfrak{g} = 7$

- Si $\dim \mathfrak{n} = 1$, entonces $\dim \mathfrak{h} = 4$. Como $\dim \mathfrak{k} = 2$, se sigue que $\dim \mathfrak{u} = 6$. Por lo tanto, como \mathfrak{u} es reductiva, \mathfrak{u} tiene que ser isomorfa a alguna de las siguientes álgebras de Lie:

$$\mathbb{R}^6, \quad \mathbb{R}^3 \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}), \quad \mathbb{R}^3 \oplus \mathfrak{su}(2), \quad \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}), \quad \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{su}(2), \quad \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2), \quad \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}).$$

- Si $\mathfrak{u} \simeq \mathbb{R}^6$, como \mathfrak{k} actúa antisimétricamente en \mathfrak{n} , y $\dim \mathfrak{n} = 1$, entonces $\theta(\mathfrak{k}) = 0$ y $\text{ad}(\mathfrak{k}) = 0$. Por lo tanto, \mathfrak{n} tiene dimensión mayor que 1, lo cual es una contradicción.

- Si $\mathfrak{u} \simeq \mathbb{R}^3 \oplus \mathfrak{v}$, con $\mathfrak{v} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ ó $\mathfrak{v} = \mathfrak{su}(2)$, entonces $\mathfrak{z}(\mathfrak{u})$ tiene dimensión 3. Luego, como $\mathfrak{z}(\mathfrak{u}) \subset \mathfrak{h}$, por Lema 4.0.7 (iv), y $\dim \mathfrak{h} = 4$, resulta que \mathfrak{h} es abeliano y por lo tanto, $(G/K, g)$ es isométrico a un solsolitón usando el Corolario 4.0.5 y [J, Teorema 1.1].
 - Si $\mathfrak{u} \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{su}(2)$, $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ ó $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, entonces $\theta(\mathfrak{u}) = 0$, usando (iii) del Lema 4.0.7. Luego, U/K es Einstein por (ii) del Teorema 4.0.4. De lo que se sigue que $(G/K, g)$ es isométrico al producto Riemanniano $U/K \times N$, el cual es producto de una variedad Einstein por una plana.
- Si $\dim \mathfrak{n} = 2$, entonces $\dim \mathfrak{h} = 3$ y $\dim \mathfrak{u} = 5$. Luego, como \mathfrak{u} es reductiva, \mathfrak{u} debe ser isomorfa a alguna de las siguientes álgebras de Lie:

$$\mathbb{R}^5, \quad \mathbb{R}^2 \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}), \quad \mathbb{R}^2 \oplus \mathfrak{su}(2).$$

Si $\mathfrak{u} \simeq \mathbb{R}^5$, entonces como \mathfrak{h} es abeliano, tenemos que $(G/K, g)$ es isométrico a un solsolitón usando Corolario 4.0.5 y [J, Teorema 1.1].

Si $\mathfrak{u} \simeq \mathbb{R}^2 \oplus \mathfrak{v}$, con $\mathfrak{v} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ ó $\mathfrak{v} = \mathfrak{su}(2)$, entonces $\mathfrak{z}(\mathfrak{u})$ tiene dimensión 2.

Supongamos que $X + Y \in \mathfrak{z}(\mathfrak{u})$, con $X, Y \neq 0$, $X \in \mathfrak{k}$, $Y \in \mathfrak{h}$. Consideremos $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ una base ortonormal de \mathfrak{u} tal que $e_1 = \frac{X}{\|X\|}$ y $e_3 = \frac{Y}{\|Y\|}$.

Como $X + Y \in \mathfrak{z}(\mathfrak{u})$, entonces

$$0 = [X + Y, e_i] = [\|X\|e_1 + \|Y\|e_3, e_i] = \|X\| [e_1, e_i] + \|Y\| [e_3, e_i], \quad i = 1, \dots, 5.$$

De lo que se sigue que

$$[e_1, e_3] = 0, [e_2, e_3] = 0, [e_1, e_4] = -ae_5, [e_1, e_5] = ae_4, [e_3, e_4] = a \frac{\|X\|}{\|Y\|} e_5, [e_3, e_5] = -a \frac{\|X\|}{\|Y\|} e_4.$$

Entonces, como $e_1 \in \mathfrak{k}$, $e_3 \in \mathfrak{h}$, y $B(\mathfrak{k}, \mathfrak{h}) = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= B(e_1, e_3) = \text{tr} \left(\left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & -a & 0 \end{array} \right) \theta(e_1) \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a \frac{\|X\|}{\|Y\|} \\ 0 & 0 & 0 & a \frac{\|X\|}{\|Y\|} & 0 \end{array} \right) \theta(e_3) \right) \\ &= 2a^2 \frac{\|X\|}{\|Y\|} + \text{tr}(\theta(e_1)\theta(e_3)). \end{aligned}$$

Como \mathfrak{k} actúa antisimétricamente en \mathfrak{n} , entonces fijando una base de \mathfrak{n} , obtenemos que $\theta(e_1)$ es una matriz antisimétrica. Por lo tanto, tenemos dos posibilidades, $\theta(e_1) = 0$ o $\theta(e_1) \neq 0$.

Si $\theta(e_1) = 0$, entonces $\text{tr}(\theta(e_1)\theta(e_3)) = 0$, de lo que se sigue que $2a^2 \frac{\|X\|}{\|Y\|} = 0$, y por lo tanto $a = 0$. Luego $\text{ad}(e_1) = 0$. Por lo tanto, X e Y están en el centro de \mathfrak{u} .

Si $\theta(e_1) \neq 0$, entonces como θ es representación y $[e_1, e_3] = 0$, se tiene que $[\theta(e_1), \theta(e_3)] = 0$, de lo que se sigue que $\theta(e_3)$ tiene que ser un múltiplo de la identidad. Por lo tanto, $\text{tr}(\theta(e_1)\theta(e_3)) = 0$, $2a^2 \frac{\|X\|}{\|Y\|} = 0$, y $a = 0$. Entonces $\text{ad}_{\mathfrak{u}}(e_1) = 0$. Luego, tanto X como Y están en el centro de \mathfrak{u} .

Por lo tanto, tenemos tres posibilidades:

- Si $X \in \mathfrak{k} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{u})$ e $Y \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{u})$, entonces considero $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ una base ortonormal de \mathfrak{u} tal que $e_1 = \frac{X}{\|X\|}$ y $e_3 = \frac{Y}{\|Y\|}$. Entonces los corchetes son como sigue:

$$[e_2, e_4] = -be_5, \quad [e_2, e_5] = be_4, \quad [e_4, e_5] = de_1 + ee_2 + fe_3, \quad b, d, e, f \in \mathbb{R}, \quad b, d \neq 0.$$

Luego, podemos calcular $\text{Ric}_{\mathfrak{u}}$:

$$\text{Ric}_{\mathfrak{u}} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -bd & \\ & & -bd \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, las condiciones que siguen de $\text{Ric}_{\mathfrak{u}} = cI + C_{\mathfrak{h}}$ y $\sum[\text{ad } Y_i|_{\mathfrak{n}}, (\text{ad } Y_i|_{\mathfrak{n}})^t] = 0$, para toda $\{Y_i\}$ base ortonormal de \mathfrak{h} , son exactamente las mismas que en el caso en que $\dim \mathfrak{g} = 6$, $\dim \mathfrak{n} = 2$ y $\mathfrak{z}(\mathfrak{u}) \subset \mathfrak{h}$. Por lo tanto, $(G/K, g)$ es isométrico a un solsolitón.

- Si $\mathfrak{z}(\mathfrak{u}) \subset \mathfrak{k}$, como $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{u}) = \dim \mathfrak{k}$, entonces $\mathfrak{z}(\mathfrak{u}) = \mathfrak{k}$. Luego, las condiciones $\text{Ric}_{\mathfrak{u}} = cI + C_{\mathfrak{h}}$ y $\sum[\text{ad } Y_i|_{\mathfrak{n}}, (\text{ad } Y_i|_{\mathfrak{n}})^t] = 0$, para toda $\{Y_i\}$ base ortonormal de \mathfrak{h} , son exactamente las mismas que en el caso en que $\dim \mathfrak{g} = 5$, $\dim \mathfrak{n} = 2$ y $\mathfrak{u} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, en el cual no existía ninguna θ que satisfaga las condiciones.
 - Si $\mathfrak{z}(\mathfrak{u}) \subset \mathfrak{h}$, entonces \mathfrak{h} es abeliano, pues $\dim \mathfrak{h} = 3$ y contiene dos elementos del centro de \mathfrak{u} . Por lo tanto, $(G/K, g)$ es isométrico a un solsolitón usando Corolario 4.0.5 y [J, Teorema 1.1].
- Si $\dim \mathfrak{n} = 3$, entonces $\dim \mathfrak{h} = 2$. Como \mathfrak{u} es un álgebra de Lie reductiva de dimensión 4, entonces es isomorfa a alguna de las siguientes:

$$\mathbb{R}^4, \quad \mathbb{R} \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}), \quad \mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(2).$$

Si $\mathfrak{u} \simeq \mathbb{R}^4$, entonces \mathfrak{h} es abeliano y por lo tanto $(G/K, g)$ es isométrico a un solsolitón, usando Corolario 4.0.5 y [J, Teorema 1.1]. Si $\mathfrak{u} \simeq \mathbb{R} \oplus \mathfrak{v}$, con $\mathfrak{v} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ ó $\mathfrak{v} = \mathfrak{su}(2)$, entonces $\mathfrak{z}(\mathfrak{u})$ tiene dimensión 1. Por lo tanto, tenemos tres posibles casos:

- Si $\mathfrak{z}(\mathfrak{u}) \subset \mathfrak{k}$, considero $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base ortonormal de \mathfrak{u} tal que $\{e_1, e_2\} \in \mathfrak{k}$, $\{e_3, e_4\} \in \mathfrak{h}$ y $e_1 \in \mathfrak{z}(\mathfrak{u})$. Luego, el corchete es como sigue:

$$[e_2, e_3] = -ae_4, \quad [e_2, e_4] = ae_3, \quad [e_3, e_4] = be_1 + de_3, \quad a, b, d \in \mathbb{R}, \quad a, d \neq 0.$$

Entonces, podemos calcular $\text{Ric}_{\mathfrak{u}}$:

$$\text{Ric}_{\mathfrak{u}} = \begin{pmatrix} -ad & 0 \\ 0 & -ad \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, las condiciones que siguen de $\text{Ric}_{\mathfrak{u}} = cI + C_{\mathfrak{h}}$ y $\sum[\text{ad } Y_i|_{\mathfrak{n}}, (\text{ad } Y_i|_{\mathfrak{n}})^t] = 0$, para toda $\{Y_i\}$ base ortonormal de \mathfrak{h} , son exactamente las mismas que en el caso en que $\dim \mathfrak{g} = 6$ y $\dim \mathfrak{n} = 3$. Por lo tanto, $(G/K, g)$ es isométrico a un solsolitón.

- Si $\mathfrak{z}(\mathfrak{u}) \subset \mathfrak{h}$, entonces \mathfrak{h} resulta abeliana, y por lo tanto por Corolario 4.0.5 y [J, Teorema 1.1], $(G/K, g)$ es isométrico a un solsolitón.
- Si $\mathfrak{z}(\mathfrak{u}) = \langle X + Y \rangle$, con $X \in \mathfrak{k}$ e $Y \in \mathfrak{h}$, $X, Y \neq 0$, consideremos $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base ortonormal de \mathfrak{u} tal que $\{e_1, e_2\} \in \mathfrak{k}$, $\{e_3, e_4\} \in \mathfrak{h}$, $e_1 = \frac{X}{\|X\|}$ y $e_3 = \frac{Y}{\|Y\|}$. Como $X + Y \in \mathfrak{z}(\mathfrak{u})$, entonces se tiene que

$$0 = [X + Y, e_i] = \|X\|[e_1, e_i] + \|Y\|[e_3, e_i], \quad i = 1, \dots, 4,$$

y por lo tanto,

$$[e_1, e_3] = 0, \quad [e_1, e_4] = 0, \quad [e_1, e_2] = 0.$$

Luego, $\text{ad}_{\mathfrak{u}}(e_1) = 0$ y por lo tanto, X e Y están en el centro de \mathfrak{u} , lo cual es una contradicción pues $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{u}) = 1$.

Para concluir con esta sección vamos a enunciar el siguiente teorema en donde resumimos los resultados obtenidos.

Teorema 4.3.1. *Sea $(G/K, g)$ un solitón semi-algebraico simplemente conexo de expansión de dimensión 5. Si $\dim G = 5, 6, 7$ o 15 , entonces es isométrico a un solsolitón.*

Demostración. Todo $(G/K, g)$ solitón semi-algebraico de expansión de dimensión 5 con $\dim G = 5, 6, 7$ o 15 es o bien isométrico a una variedad producto en donde una de las variedades es plana y la otra Einstein, o isométrico a una variedad Einstein o isométrico a una solvariedad (ver todos los resultados obtenidos en todos los casos de la Sección 4.3). Observar que si es isométrico a una variedad producto en donde una de las variedades es plana y la otra Einstein, entonces es isométrico a una solvariedad, pues cada variedad del producto lo es. Si $(G/K, g)$ es isométrico a una variedad Einstein, entonces también es isométrico a una solvariedad (ver [Nk, Teorema 1]). Luego, todo $(G/K, g)$ solitón semi-algebraico simplemente conexo de expansión de dimensión 5 con $\dim G = 5, 6, 7$ o 15 , es isométrico a una solvariedad, y por lo tanto, a un solsolitón usando [J, Teorema 1.1]. \square

Para completar el análisis de los solitones semi-algebraicos simplemente conexos de expansión de dimensión 5 (salvo isometría) resta estudiar los casos $\dim G = 8, 9, 10$ y 11 . Vale la pena destacar que analizamos los cuatro casos por separado y en cada uno de ellos obtuvimos resultados parciales que nos motivan a pensar que el Teorema 4.3.1 vale en general para todo solitón semi-algebraico simplemente conexo de expansión de dimensión 5. Nuestro objetivo de aquí en adelante será completar dicho análisis.

Bibliografía

- [AK] D. ALEKSEEVSKII, B. KIMEL'FEL'D, Structure of homogeneous Riemannian spaces with zero Ricci curvature, *Funktional Anal. i Prilozen* **9** (1975), 5-11 (English translation: *Functional Anal. Appl.* **9** (1975), 97-102).
- [A] R. M. ARROYO, The Ricci flow in a class of solvmanifolds, preprint 2012 (arXiv:1211.3605).
- [ABDO] A. ANDRADA, M. L. BARBERIS, I. G. DOTTI, G. P. OVANDO, Product structures on four dimensional solvable Lie algebras, *Homol. Homot. Appl.* **7** (1) (2005), 9-37.
- [BB] L. BÈRARD-BERGERY, Les espaces homogènes Riemanniens de dimension 4, *Textes Math.* **3** (1981), 40-60.
- [B] A. BESSE, Einstein manifolds, *Ergeb. Math.* **10** (1987), Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.
- [Boc] S. BOCHNER, Vectors fields and Ricci curvature, *Bull. Amer. Math. Soc.* **52** (1946), 776-797.
- [Ch] B-L CHEN, Strong uniqueness of the Ricci flow, *J. Diff. Geom.* **82** (2009), 336-382.
- [ChZ] B-L CHEN, X-P ZHU, Uniqueness of the Ricci flow on complete noncompact Riemannian manifolds, *J. Diff. Geom.* **74** (2006), 119-154.
- [C] B. CHOW, S.-C. CHU, D. GLICKENSTEIN, C. GUENTHER, J. ISENBERG, T. IVEY, D. KNOPF, P. LU, F. LUO, L. NI, The Ricci flow: Techniques and Applications, Part I: Geometric Aspects, *AMS Math. Surv. Mon.* **135** (2007), Amer. Math. Soc., Providence.
- [F] C. FERNANDEZ PÉREZ, F. VÁZQUEZ HERNANDEZ, J. VEGAS MONTANER, Ecuaciones diferenciales y en diferencias, *Sistemas dinámicos*, *Paraninfo* (2003), Madrid.
- [GP] D. GLICKENSTEIN, T. PAYNE, Ricci flow on three-dimensional, unimodular metric Lie algebras, *Comm. Anal. Geom.* **18** (5) (2010), 927-962.
- [GW] C. GORDON, E. WILSON, Isometry groups of Riemannian solvmanifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.* **307** (1), (1988), 245-269.
- [Hm] R. HAMILTON, Three-manifolds with positive Ricci curvature, *J. Diff. Geom.* **17** (2) (1982), 255-306.
- [H] E. HEINTZE, On homogeneous manifolds of negative curvature, *Math. Ann.* **211**, (1974), 23-34.

- [HK] K. HOFFMAN, R. KUNZE, Álgebra Lineal, *Prentice Hall* (1973).
- [IJL] J. ISENBERG, M. JACKSON, P. LU, Ricci flow on locally homogeneous closed 4-manifolds, *Comm. Anal. Geom.* **14** (2006), 345-386.
- [J] M. JABLONSKI, Homogeneous Ricci solitons, preprint 2011 (arXiv:1109.6556).
- [Jn] G. JENSEN, Homogeneous Einstein spaces of dimension four, *J. Diff. Geom.* **3** (1969), 309-349.
- [K] A. KNAPP, Lie groups beyond an introduction, *Birkhauser* (2002), Boston.
- [KMP] K. KURDYKA, T. MOSTOWSKI, A. PARUSINSKI, Proof of the gradient conjecture of R. Thom., *Ann. of Math.* **152**, (2000), 763-792.
- [LL1] R. LAFUENTE, J. LAURET, On homogeneous Ricci solitons, preprint 2012 (arXiv:1210.3656).
- [LL2] R. LAFUENTE, J. LAURET, Structure of homogeneous Ricci solitons and the Alekseevskii conjecture, preprint 2012 (arXiv:1212.6511).
- [L1] J. LAURET, Ricci soliton solvmanifolds, *J. reine angew. Math.* **650** (2011), 1-21.
- [L2] J. LAURET, The Ricci flow for simply connected nilmanifolds, *Comm. Anal. Geom.* **19** (5) (2011), 831-854.
- [L3] J. LAURET, Convergence of homogeneous manifolds, *J. London Math. Soc.* **86** (3) (2012), 701-727.
- [L4] J. LAURET, Ricci flow of homogeneous manifolds, *Math. Z.*, en prensa (2012) (arXiv:1112.5900).
- [Mil] J. MILNOR, Curvatures of Left-Invariant Metrics on Lie Groups, *Adv. Math.* **21** (1976), 293-329.
- [MS] B. MYERS, E. STENROOD, The group of isometries of a Riemannian manifold, *Ann. of Math.*, **40** (1939), 400-416.
- [N] A. NABER, Noncompact shrinking four solitons with nonnegative curvature, *J. reine angew. Math.* **645** (2010), 125-153.
- [Nk] Y. NIKONOROV, Noncompact Homogeneous Einstein 5-Manifolds, *Geom. Dedicata* **113** (2005), 107-143.
- [P1] G. PERELMAN, The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, preprint 2002 (arXiv: 0211159).
- [P2] G. PERELMAN, Ricci flow with surgery on three-manifolds, preprint 2003 (arXiv: 0303109).
- [P3] G. PERELMAN, Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds., preprint 2003 (arXiv: 0307245).
- [PW] P. PETERSEN, W. WYLIE, On gradient Ricci solitons with symmetry, *Proc. Amer. Math. Soc.* **137** (2009), 2085-2092.

-
- [S] W. X. SHI, Deforming the metric on complete Riemannian manifolds, *J. Diff. Geom.* **30** (1989), 223-301.
- [T] P. TOPPING, Lectures on the Ricci flow, *Lect. Notes London Math. Soc.* **325** (2006), Cambridge University Press.
- [Wan] H. C. WANG, Finsler spaces with completely integrable equations of Killing, *J. London Math. Soc.* **22** (1947), 5-9.
- [War] F. WARNER, Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, Springer-Verlag (1983).
- [Will] C. WILL, The space of solvsolitons in low dimensions, *Ann. Global Anal. Geom.* **40** (2011), 291-309.

Índice alfabético

- álgebra de Lie
 - completamente soluble, 20
 - reductiva, 58
- álgebra de Lie métrica, 13
- acción casi efectiva, 3
- constante cosmológica, 2
- convergencia, 9
 - Cheeger-Gromov, 9, 10, 19, 25, 41, 43, 47
 - suave, 9, 19, 20, 43
- curvatura
 - de Ricci, 5
 - escalar, 50
 - negativa, 27, 28
 - seccional, 6
 - de un álgebra de Lie, 26
 - de un espacio Riemanniano homogéneo, 6
- descomposición
 - métrica reductiva, 3
 - reductiva, 3
- diagrama de fases, 11
- difeomorfismo equivariante, 4
- equivariantemente
 - difeomorfo, 4
 - isométrico, 4, 61, 66
- espacio
 - homogéneo, 2
 - Riemanniano homogéneo, 2
 - de dimensión 4, 32
- espectro de una matriz, 18
- flujo
 - de corchetes, 7
 - r -normalizado, 9, 23, 48, 52–54
 - en una clase de solvariedades, 13, 14, 41–43, 45
 - en variedades homogéneas de dimensión 4, 41
 - de Ricci, 1
 - r -normalizado, 8, 48
 - en una clase de solvariedades, 13
 - en variedades homogéneas de dimensión 4, 31, 41
 - homogéneo, 6
- intervalo maximal de definición, 11, 14, 17, 43, 46
- métrica
 - G -invariante, 2
 - de Einstein, 1, 61
 - solitón de Ricci, 2, 57
 - de contracción, 2, 57
 - de expansión, 2, 57–61, 66, 67, 76
 - estable, 2, 57
- nilradical, 15, 57
- nilsolitón, 8, 58, 61, 62, 66
- omega-límite, 11, 21, 23, 26, 43
- operador de Ricci, 5
- radio de inyectividad, 10
- representación
 - adjunta, 3
 - de isotropía, 5
- sistema de ecuaciones diferenciales no lineales y autónomos, 10
- solitón
 - algebraico, 8, 14
 - semi-algebraico, 8, 57–61, 66, 67, 76
- solsolitón, 8, 61, 67, 76
- solución
 - antigua, 37, 41
 - de Tipo-III, 2, 20, 43

inmortal, 18, 41
solvariedad, 13
topología punteada, 9, 10, 19, 25, 41, 43, 47
variedad
 homogénea, 2
 Riemanniana punteada, 9

