Solitones y regularidad del flujo de Ricci homogéneo

por Ramiro Augusto Lafuente

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía y Física como parte de los requerimientos para la obtención del grado de Doctor en Matemática de la

Universidad Nacional de Córdoba

Junio de 2013

Director: Dr. Jorge Lauret

A Neda

Resumen

Esta tesis trata sobre la clasificación y estructura de los solitones de Ricci homogéneos, su relación con la conjetura de Alekseevskii, y sobre resultados de regularidad para el flujo de Ricci homogéneo.

En primer lugar, estudiaremos los solitones de Ricci homogéneos desde un punto de vista dinámico, haciendo particular hincapié en las nociones de solitón algebraico y semi-algebraico. Luego de ver su evolución a lo largo del flujo de corchetes introducido por J. Lauret, mostraremos que los solitones algebraicos son precisamente aquéllos cuya evolución no es caótica, y los caracterizaremos geométricamente probando que un solitón de Ricci homogéneo es isométrico a un solitón algebraico si y sólo si su evolución a través del flujo de Ricci es de manera diagonal.

Luego se presentará un resultado sobre la estructura de solitones de Ricci homogéneos, aplicando para su prueba una estratificación de la variedad de álgebras de Lie dada por la teoría geométrica de invariantes. Éste generaliza a los resultados estructurales conocidos para solvariedades Einstein y solsolitones, y apunta al estudio de la conjetura de Alekseevskii, la cual lleva más de 30 años sin resolverse. Además de caracterizar estructuralmente a los solitones algebraicos (probando en particular que todo solitón de Ricci homogéneo unimodular es algebraico), se generaliza un conocido vínculo entre solvariedades Einstein no compactas y nilsolitones, para variedades homogéneas de Einstein no compactas y solitones algebraicos unimodulares de expansión. Se obtiene por último la equivalencia entre la conjetura de Alekseevskii y su correspondiente generalización, a priori mucho más fuerte, para solitones algebraicos.

Finalmente, probaremos un resultado de regularidad sobre el flujo de Ricci homogéneo, mostrando que en una singularidad en tiempo finito la curvatura escalar debe explotar. Esto confirma, en el caso particular de variedades homogéneas, una conjetura para el flujo de Ricci muy estudiada actualmente. Como aplicación, se prueba que toda solución al flujo de Ricci homogéneo en solvariedades es inmortal.

Palabras claves: variedades riemannianas homogéneas, flujo de Ricci, solitones de Ricci, conjetura de Alekseevskii.

2010 Mathematics subject Classification: 53C25, 53C30, 53C44.

Abstract

This thesis deals with the classification and structure of homogeneous Ricci solitons, its interplay with the Alekseevskii conjecture, and also with regularity results about homogeneous Ricci flows.

Firstly, we study homogeneous Ricci solitons from a dynamical point of view, focusing in particular on the notions of algebraic and semi-algebraic soliton. After giving its evolution along the bracket flow introduced by J. Lauret, we show that algebraic solitons are precisely those whose evolution is not chaotic, and we characterize them geometrically by proving that a homogeneous Ricci soliton is isometric to an algebraic soliton if and only if it evolves diagonally along the Ricci flow.

After that, we present a structural result concerning homogeneous Ricci solitons, obtained from a stratification of the variety of Lie algebras given by geometric invariant theory. This generalizes most previous structural results on Einstein solvmanifolds and solvsolitons, and aims to study the long-standing Alekseevskii conjecture. Besides characterizing algebraic solitons in terms of its algebraic structure (showing in particular that a unimodular homogeneous Ricci soliton is isometric to an algebraic soliton), we generalize a previously known link between non-compact Einstein solvmanifolds and nilsolitons, to the general case of a non-compact, homogeneous Einstein manifold and unimodular, expanding algebraic solitons. We also show that the Alekseevskii conjecture is equivalent to its natural and a priori much stronger generalization for algebraic solitons.

Finally, we prove a regularity result for homogeneous Ricci flows, which implies that the scalar curvature of a solution must blow up in presence of a finite-time singularity. This confirms, in the particular case of homogeneous manifolds, the expected behavior for the scalar curvature of Ricci flow solutions, which still remains an open problem in the general case. As an application, we show that homogeneous Ricci flow solutions on solvmanifolds are always immortal.

Key words: homogeneous Riemannian manifolds, Ricci flow, Ricci solitons, Alekseevskii's conjecture.

2010 Mathematics subject Classification: 53C25, 53C30, 53C44.

Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar a Jorge, mi director, por su constante apoyo y dedicación, por ser una fuente de inspiración para mí, y sobre todas las cosas por enseñarme a hacer matemática.

A Romina, porque mas allá de haber aprendido tantas cosas juntos durante estos años, se ha convertido en una amiga invalorable, con quien compartimos mucho más que charlas sobre matemática.

A Julia, por ser una gran amiga también, por el tiempo y las charlas compartidas, y porque junto con Romina hicieron que disfrute tanto este tiempo en Córdoba.

A mis amigos de acá, especialmente a Eric, Iván y Vanesa, y a mis amigos de allá, de La Plata, que siempre estuvieron acompañándome a pesar de la distancia.

A la Olimpíada Matemática Argentina, por ayudarme a descubrir la pasión por la matemática.

Al CONICET, por el soporte económico.

A mi familia, especialmente a mis padres, por su apoyo incondicional en todo sentido, y por haberme hecho la vida tan fácil.

Y finalmente a Neda, mi compañera de vida, a quien está dedicada esta tesis, porque soy quien soy gracias a ella.

Índice general

Introducción

Una pregunta muy importante en geometría diferencial es la siguiente:

> Dada una variedad diferenciable M, ¿cuál es la métrica riemanniana más *linda* que se puede definir en M?

El concepto de "linda" es subjetivo, claro está, y dependerá del contexto en el cual se considere la pregunta. Sin embargo, una manera razonable de considerar a una métrica como *distinguida* es por medio de la curvatura. En el caso de superficies, la respuesta a esta pregunta es bien conocida, y viene dada por las métricas con curvatura de Gauss constante.

En dimensiones más altas podríamos considerar las métricas riemannianas de *curvatura seccional constante*. Pero no es esperable encontrar una métrica con esas características en una variedad M cualquiera; de hecho, un resultado básico en geometría riemanniana nos dice que una variedad que admita una métrica riemanniana completa de curvatura constante tiene cubrimiento universal que, salvo un múltiplo escalar, es isométrico a $\mathbb{H}^n$, $\mathbb{R}^n$ o S^n, dependiendo de si la curvatura constante es negativa, nula o positiva, respectivamente.

Si relajamos la condición requerida y nos concentramos en la clase de métricas riemannianas de *curvatura escalar constante*, vemos que el resultado es el opuesto: existen demasiadas métricas con esa propiedad en una variedad diferenciable dada. Por ejemplo, todas las métricas homogéneas son de curvatura escalar constante. Y más aún, en el caso compacto, la solución al problema de Yamabe (ver [Sch84]) nos asegura que toda métrica riemanniana en una variedad compacta se puede deformar de manera conforme a una métrica de curvatura escalar constante.

Surge entonces la idea de considerar métricas con *curvatura de Ricci constante*; recordar que la curvatura de Ricci es una noción intermedia de curvatura, obtenida como cierto promedio del tensor de curvatura total de Riemann, y de la cual se obtiene promediando nuevamente la ya mencionada curvatura escalar. Estas son las llamadas *métricas de Einstein*, y han sido objeto de estudio muy activo en las últimas cuatro décadas; una referencia clásica para este tema es el libro [Bes87]. La mayoría de los problemas relacionados con la existencia de métricas de Einstein continúan abiertos a la fecha. Sin embargo, en lo que respecta a la unicidad, vemos que en dimensiones mayores a 4, la condición de Einstein parece no ser tan restrictiva en algunos casos, como por ejemplo en las esferas de dimensión impar, en donde existen familias de métricas de Einstein dependientes de muchos parámetros continuos (ver [BGK05]). Para tener métricas que sean realmente distinguidas una opción es considerar condiciones de *simetría* para las mismas.

Una condición de simetría muy natural para una variedad riemanniana es la de ser *homogénea*, esto es, que el grupo de Lie de isometrías de la métrica riemanniana actúe transitivamente en la variedad. Las métricas de Einstein homogéneas tienen propiedades remarcables, que las hacen perfectos candidatos a ser las métricas más lindas (al menos dentro de la clase de métricas homogéneas), y han sido muy estudiadas últimamente. En el caso compacto, se sabe por ejemplo que todo grupo de Lie compacto admite al menos una métrica de Einstein (la métrica *bi-invariante*), y para un espacio homogéneo G/K está conjeturado que sólo puede haber finitas métricas de Einstein G-invariantes, salvo isometría; referimos al artículo [BWZ04] para más información en lo que respecta al caso compacto.

En el caso no compacto, todas métrica de Einstein homogénea debe tener curvatura escalar no positiva, gracias al teorema de Bonnet-Myers. Y si la curvatura escalar es nula, entonces la variedad tiene tensor de Ricci nulo, lo cual en el caso de variedades homogéneas implica que es plana (ver [AK75]). El estudio queda reducido entonces al caso de curvatura escalar negativa. Hasta ahora, todos los ejemplos conocidos de variedades homogéneas de Einstein con curvatura escalar negativa son isométricos a una solvariedad simplemente conexa, esto es, una métrica riemanniana invariante a izquierda en un grupo de Lie soluble y simplemente conexo. En esa dirección, se ha propuesto la siguiente conjetura, atribuida a D. V. Alekseevskii (ver [Bes87, 7.57]):

> **Conjetura de Alekseevskii**. Toda variedad riemanniana homogénea de Einstein con curvatura escalar negativa es difeomorfa a un espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$.

Ver la Sección 3.1 para más información sobre esta conjetura. Vale la pena remarcar aquí que éste sigue siendo un problema abierto a la fecha.

La estructura y clasificación de las solvariedades Einstein ha sido un tema de estudio muy explotado, con importantes resultados obtenidos por J. Heber y J. Lauret, entre otros. Una de las herramientas mas importantes utilizadas para probar los principales resultados de estructura sobre solvariedades Einstein ha sido el enfoque de “mover corchetes de Lie en lugar de productos internos”, el cual ha sido ampliamente usado para el estudio de otros problemas sobre métricas invariantes a izquierda en grupos de Lie, y será central en el desarrollo de esta tesis. Este enfoque permite además aplicar la teoría geométrica de invariantes a estos problemas, como se hace en [Lau10], en donde se aplica a este contexto un procedimiento de estratificación que provee información sobre la variedad de álgebras de Lie (ver Sección 1.5). Referimos al artículo expositivo [Lau09] para más información sobre solvariedades Einstein.

Un punto interesante es la íntima conexión que existe entre las solvariedades Einstein y los *nilsolitones*, descubierta en [Lau01]. Esta conexión consiste en el hecho de que para una solvariedad Einstein (S, g), la correspondiente métrica riemanniana invariante a izquierda que queda definida en el nilradical N es una métrica *solitón de Ricci*. A continuación hablaremos sobre esta nueva clase de métricas distinguidas.

Pero antes de hablar de solitones, tenemos que definir el *flujo de Ricci*, el cual es la siguiente ecuación de evolución para una curva suave $g(t)$ de métricas riemannianas en una variedad diferenciable M:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2\,\mathrm{Rc}(g), \qquad g(0) = g_0. \tag{1}$$

Esta ecuación en derivadas parciales fue introducida por R. Hamilton en [Ham82], y ha tenido numerosas aplicaciones para la resolución de famosos problemas en geometría y topología de variedades diferenciables, razón por la cual se ha vuelto un tema de investigación en sí mismo. Introduciremos al flujo de Ricci con más detalle en la Sección 1.1.

Una primera relación de este flujo con las métricas de Einstein es que la propia ecuación que lo define proviene de una leve modificación a la ecuación obtenida al considerar el flujo gradiente del *funcional curvatura escalar total* $g \mapsto \int_M R\,dV$; recordar que en una variedad compacta, las métricas de Einstein son precisamente los puntos críticos de dicho funcional restringido al conjunto de métricas de volumen 1.

Pero otra conexión muy importante es en lo que respecta a sus soluciones autosimilares. Se ve fácilmente que las métricas de Einstein son "casi" puntos fijos del flujo de Ricci: comenzando en una métrica de Einstein, el flujo evoluciona únicamente por la acción de múltiplos escalares. En esta dirección, se tiene un importante aporte conceptual de la teoría del flujo de Ricci que generaliza a las métricas de Einstein: los *solitones de Ricci*. Son las métricas cuya evolución a lo largo del flujo está dada por la acción de múltiplos escalares y pullback por difeomorfismos, es decir, su geometría no cambia a lo largo del flujo. Más precisamente, una variedad riemanniana (M, g_0) es un solitón de Ricci si se cumple que

$$\mathrm{Rc}(g_0) = cg_0 + \mathcal{L}_X g_0, \qquad c \in \mathbb{R}, \quad X \in \mathfrak{X}(M) \text{ completo},$$

donde $\mathcal{L}$ denota la derivada de Lie. Se ve que si g_0 es un solitón de Ricci, entonces la curva de métricas

$$g(t) = (1 - 2ct)\varphi_t^*(g_0),$$

es una solución al flujo de Ricci, para cierta familia monoparamétrica φ_t de difeomorfismos de M. Observar que $g(t)$ es *homotética* (i.e. isométrica salvo múltiplo escalar) a g_0 para todo t, o sea que efectivamente la estructura riemanniana de la variedad no cambia a lo largo del flujo.

En el caso de variedades homogéneas, el flujo de Ricci es un tema de estudio actual, y es uno de los puntos a tratar en este trabajo. Fue probado por J. Lauret en [Lau13] que el flujo de Ricci de variedades homogéneas es equivalente, en un sentido muy preciso, a la siguiente ecuación de evolución para una curva de corchetes $\mu(t)$ en el *espacio de las variedades homogéneas* $\mathcal{H}_{q,n}$ (introducido en [Lau12]):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu = -\pi\left(\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Ric}_\mu \end{smallmatrix}\right]\right)\mu, \qquad \mu(0) = \mu_0. \tag{2}$$

Esta ecuación es llamada el *flujo de corchetes*, y será una de las herramientas principales para el estudio del flujo de Ricci en variedades homogéneas llevado a cabo en esta tesis; ver las secciones 1.3 y 1.4 para más detalles sobre el espacio de las variedades homogéneas y el flujo de corchetes.

En cuanto a los solitones de Ricci homogéneos, éstos son uno de los temas centrales de este trabajo. Como primer punto importante, podemos mencionar que los únicos *no triviales* (es decir, no Einstein, ni producto de Einstein por un espacio euclídeo) son de *expansión* ($c < 0$), y se pueden dar únicamente en variedades no compactas. Además, al igual que en el caso de las métricas de Einstein, todos los ejemplos conocidos son isométricos a una solvariedad simplemente conexa; más precisamente, son todos isométricos a un *solsolitón*, esto es, una métrica riemanniana invariante a izquierda g en un grupo de Lie soluble simplemente conexo S, cuyo operador de Ricci verifica

$$\mathrm{Ric}(g) = cI + D, \qquad \text{para algún} \quad c \in \mathbb{R}, \quad D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{s}), \tag{3}$$

donde $\mathfrak{s} = \mathrm{Lie}(S)$ (en el caso en que el grupo en cuestión es nilpotente, estos son llamados *nilsolitones*). La estructura algebraica de los solsolitones ha sido estudiada en [Lau11b], en donde se muestra cómo todos ellos pueden ser construidos mediante un simple procedimiento a partir de un nilsolitón, y se prueba además que un grupo de Lie dado admite a lo sumo una única métrica solsolitón salvo isometría.

Los nilsolitones y solsolitones son un caso particular de la noción de *solitón algebraico*, que es el concepto análogo definido para espacios homogéneos en general (i.e. no sólo en grupos de Lie solubles). Dado un espacio homogéneo riemanniano $(G/K, g)$, con descomposición reductiva $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, decimos que es un solitón algebraico si existen $c \in \mathbb{R}$ y $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ tales que $D\mathfrak{k} \subset \mathfrak{k}$ y el operador de Ricci está dado por

$$\mathrm{Ric}(g) = cI + D_{\mathfrak{p}},$$

donde $D_{\mathfrak{p}} = \mathrm{pr}_{\mathfrak{p}} \circ D|_{\mathfrak{p}}$ y $\mathrm{pr}_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p} \to \mathfrak{p}$ es la proyección lineal. No se sabe aún si todo solitón de Ricci homogéneo es isométrico a un solitón algebraico, sin embargo, se probó en [Jab13] que para todo solitón de Ricci homogéneo existe una presentación del mismo como *solitón semi-algebraico*. Es decir, una presentación como espacio homogéneo de modo que la evolución del flujo de Ricci sea por difeomorfismos equivariantes (ver Definición 2.1.6).

Resultados obtenidos

En este trabajo estudiaremos los solitones de Ricci homogéneos desde un punto de vista dinámico, vía el flujo de corchetes, y desde un punto de vista estructural y más algebraico, aplicando resultados dados por la teoría geométrica de invariantes. También estudiaremos las singularidades en tiempo finito del flujo de Ricci homogéneo, concentrándonos en resultados de regularidad para la curvatura escalar. Para esto, en el Capítulo 1 veremos algunos preliminares sobre varios temas ya mencionados brevemente en esta introducción, a saber: el flujo de Ricci y sus solitones; variedades riemannianas homogéneas; el espacio de las variedades homogéneas y el flujo de corchetes allí definido, con su equivalencia al flujo de Ricci homogéneo; la estratificación de la variedad de álgebras de Lie y algunas de sus propiedades.

El **Capítulo 2** corresponde al siguiente trabajo:

- R. Lafuente and J. Lauret, *On homogeneous Ricci solitons*, The Quarterly Journal of Mathematics, in press (2013).

Luego de hacer una breve reseña sobre los conocimientos que se tienen a la fecha sobre solitones de Ricci homogéneos (ver Figura 2.1), se prueba aquí que los puntos fijos y únicos límites posibles del flujo de corchetes son solitones algebraicos. Además, si para un solitón algebraico $(G/K, g)$ se considera la descomposición reductiva *canónica* (i.e. tal que $\mathfrak{k}$ y $\mathfrak{p}$ son ortogonales con respecto a la forma de Killing de $\mathfrak{g}$, ver Lema 1.2.2), entonces un solitón algebraico es efectivamente un punto fijo del flujo de corchetes. Luego, se estudia la evolución de un solitón semi-algebraico a través del flujo de corchetes, y se observa que ésta sería caótica si el solitón no fuera de tipo algebraico. Resumimos estos resultados en el siguiente teorema.

Teorema A. *Sea $(G/K, g_0) = (G_{\mu_0}/K_{\mu_0}, g_{\mu_0})$ un espacio homogéneo riemanniano, representado en el espacio de las variedades homogéneas por $\mu_0 \in \mathcal{H}_{q,n}$.*

(i) $(G_{\mu_0}/K_{\mu_0}, g_{\mu_0})$ es un solitón semi-algebraico, con constante cosmológica c, si y sólo si la evolución de μ_0 a lo largo del flujo de corchetes está dada por

$$\mu(t) = (-2ct+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(e^{s(t)\tilde{A}} \cdot \mu_0\right), \qquad s(t) = -\tfrac{1}{2c}\log(-2ct+1),$$

donde $\tilde{A}$ es un operador antisimétrico que depende de μ_0, y la acción $\cdot$ en los corchetes es la definida en (1.4) y (1.6) (y $s(t) \equiv 0$ si $c = 0$). En particular, si $\tilde{A} \neq 0$ (i.e. si el solitón no es algebraico) entonces todo punto $\mu(t_0)/|\mu(t_0)|$ de la trayectoria del flujo normalizado es el límite de alguna sucesión $\mu(t_k)/|\mu(t_k)|$, con $t_k \to \infty$.

(ii) Si consideramos la descomposición reductiva con $B(\mathfrak{k}, \mathfrak{p}) = 0$, entonces $(G_{\mu_0}/K_{\mu_0}, g_{\mu_0})$ es un solitón algebraico si y sólo si la evolución de μ_0 a lo largo del flujo de corchetes está dada por

$$\mu(t) = (-2ct+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot \mu_0.$$

Además, los solitones algebraicos son los únicos puntos fijos de normalizaciones del flujo de corchetes. Y si $g(t)$ es la solución al flujo de Ricci comenzando en un solitón algebraico, y g_{ij} son las componentes de las métricas en una base ortonormal fija, entonces

$$g_{ij}(t) = (-2ct+1)^{r_i/c}\delta_{ij},$$

donde r_i son los autovalores del operador de Ricci $\operatorname{Ric}_{\mu_0}$.

Posteriormente, veremos cómo se simplifica la evolución al considerar cualquier normalización "razonable" del flujo de corchetes, y presentaremos dos ejemplos: el primero de un solitón de Ricci homogéneo que no está presentado como solitón semi-algebraico, y el segundo sobre un solitón algebraico con una descomposición reductiva que no es la canónica (ambos con su correspondiente evolución a través del flujo de corchetes). Finalmente, en el teorema que se enuncia a continuación caracterizamos de manera geométrica a los solitones algebraicos dentro de los solitones de Ricci homogéneos como aquéllos cuya evolución a través del flujo de Ricci es de manera diagonal, esto es, en algún espacio tangente existe una base ortonormal para g_0 que permanece ortogonal para $g(t)$ para todo t (ver Definición 2.3.1).

Teorema B. *Un solitón de Ricci homogéneo evoluciona de manera diagonal a través del flujo de Ricci si y sólo si es isométrico a un solitón algebraico.*

Se deduce de la última afirmación del ítem (ii) del Teorema A que, en efecto, los solitones algebraicos evolucionan de manera diagonal a través del flujo de Ricci. Este teorema muestra que de existir un solitón semi-algebraico que no sea algebraico, entonces no podría ser isométrico a ninguno de los ejemplos conocidos.

El **Capítulo 3** corresponde al siguiente artículo:

- R. Lafuente and J. Lauret, *Structure of homogeneous Ricci solitons and the Alekseevskii conjecture*, preprint 2012 (arXiv:1212.6511)

El objetivo principal de este capítulo es obtener resultados estructurales sobre solitones de Ricci homogéneos de expansión (i.e. $c < 0$), y discutir posibles aplicaciones de los mismos al problema que plantea la conjetura de Alekseevskii. Para eso, nuestro enfoque consiste en presentar a un solitón de Ricci homogéneo como solitón semi-algebraico $(G/K, g)$, e investigar las propiedades algebraicas que deben cumplirse para una descomposición reductiva $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ del álgebra de Lie de G. Estas propiedades se obtienen a partir de una estratificación de la variedad de álgebras de Lie, la cual proviene de resultados de la teoría geométrica de invariantes. El siguiente teorema es el principal resultado de este capítulo.

Teorema C. *Para cualquier solitón de Ricci homogéneo de expansión simplemente conexo (M, g), con $\operatorname{Ric}(g) = cg + \mathcal{L}_X g$, existe una presentación $(M, g) = G/K$ como espacio homogéneo riemanniano, y una descomposición reductiva $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, de modo que se satisfacen las siguientes condiciones:*

- $\mathfrak{g} = \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{n}$ *es un producto semidirecto de álgebras de Lie, con $\mathfrak{u}$ reductiva y $\mathfrak{n}$ nilpotente, tales que $\mathfrak{h} \perp \mathfrak{n}$, donde*

$$\mathfrak{g} = \overbrace{\mathfrak{k} \oplus \underbrace{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{u}} \oplus \mathfrak{n}}_{\mathfrak{p}}$$

- *$G \simeq U \ltimes N$, y como variedades diferenciables,*
$$M = U/K \times N,$$
donde U y N son respectivamente los subgrupos de Lie conexos de G con álgebras de Lie $\mathfrak{u}$ y $\mathfrak{n}$. En relación a la conjetura de Alekseevskii, notamos que M es difeomorfa a un espacio euclídeo si y sólo si U/K lo es, lo cual equivale a decir que K es un subgrupo compacto maximal del grupo de Lie reductivo U.

- *La métrica restringida a N es un nilsolitón, con operador de Ricci $\operatorname{Ric}_N = cI + D_1$, para algún $D_1 \in \operatorname{Der}(\mathfrak{n})$.*

- *El operador de Ricci de la métrica restringida a U/K, con respecto a la descomposición reductiva $\mathfrak{u} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{h}$, satisface que $\operatorname{Ric}_{U/K} = cI + C_{\mathfrak{h}}$, donde $C_{\mathfrak{h}}$ es el operador semidefinido positivo en $\mathfrak{h}$ dado por*
$$\langle C_{\mathfrak{h}} Y, Y\rangle = \tfrac{1}{4} \operatorname{tr} \left(\operatorname{ad} Y|_{\mathfrak{n}} + (\operatorname{ad} Y|_{\mathfrak{n}})^t\right)^2, \qquad \forall Y \in \mathfrak{h}.$$

- *La acción adjunta de $\mathfrak{u}$ en $\mathfrak{n}$ y la métrica satisfacen la siguiente condición de compatibilidad:*
$$\sum [\operatorname{ad} Y_i|_{\mathfrak{n}}, (\operatorname{ad} Y_i|_{\mathfrak{n}})^t] = 0, \qquad \textit{para cualquier base ortonormal } \{Y_i\} \textit{ de } \mathfrak{h},$$
de lo cual se deduce que $(\operatorname{ad} Y|_{\mathfrak{n}})^t \in \operatorname{Der}(\mathfrak{n})$ para todo $Y \in \mathfrak{u}$.

Recíprocamente, si estas condiciones se satisfacen, entonces G/K es un solitón de Ricci homogéneo de expansión, con operador de Ricci
$$\operatorname{Ric} = cI + \tfrac{1}{2}(D_{\mathfrak{p}} + D_{\mathfrak{p}}^t), \qquad \textit{donde} \quad D = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_{\mathfrak{p}} \end{smallmatrix}\right] = -\operatorname{ad} H + \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & D_1 \end{bmatrix} \in \operatorname{Der}(\mathfrak{g}), \tag{4}$$
y $H \in \mathfrak{p}$ se define mediante $\langle H, X\rangle = \operatorname{tr} \operatorname{ad} X$ para todo $X \in \mathfrak{p}$.

Observar que este teorema se aplica en particular a métricas de Einstein de curvatura escalar negativa, poniendo $\operatorname{Rc}(g) = cg$, y exigiendo que $D = 0$ en la recíproca. Estos resultados de estructura generalizan los resultados sobre solvariedades Einstein obtenidos en [Heb98] y [Lau10], así como también los obtenidos para solsolitones en [Lau11b].

Como primera aplicación del Teorema C obtenemos caracterizaciones desde el punto de vista algebraico (o más precisamente, de teoría de Lie) para los solitones algebraicos, como por ejemplo que el operador $\operatorname{ad} H$ o la derivación D sean normales, o que $\operatorname{Ric}|_{\mathfrak{h}} = cI$.

Además, usando el Teorema C se prueba que dado un solitón algebraico de expansión $(M, g) = (G/K, g)$, con G no unimodular, se puede modificar la métrica g para obtener una nueva métrica homogénea $\tilde{g}$ en M la cual es de Einstein, con $\operatorname{Rc}(\tilde{g}) = c\tilde{g}$. Si G es unimodular, se obtiene una métrica de Einstein en $\mathbb{R} \times M$ que extiende a la métrica g. En cualquier caso, obtenemos que la conjetura de Alekseevskii es equivalente a un resultado análogo, pero a priori mucho más fuerte, sobre solitones algebraicos.

Teorema D. *La conjetura de Alekseevskii es cierta si y sólo si vale la siguiente generalización:*

Todo solitón algebraico de expansión es difeomorfo a un espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$.

Notar que para solitones algebraicos y semi-algebraicos, la hipótesis de ser de expansión es equivalente a tener curvatura escalar negativa. Este resultado fue obtenido también muy recientemente en [HPW13], de manera independiente y utilizando métodos completamente diferentes.

Obtenemos además una generalización del ya mencionado vínculo entre solvariedades Einstein y nilsolitones, para el caso de variedades homogéneas de Einstein G/K con curvatura escalar negativa y solitones algebraicos unimodulares de expansión G_0/K, los cuales como variedades diferenciables satisfacen $G/K = \mathbb{R} \times G_0/K$.

Finalmente, el **Capítulo 4** corresponde al artículo

- R. Lafuente, *Scalar curvature behavior of homogeneous Ricci flows*, preprint 2012 (arXiv: 1212.6558).

En este capítulo dejamos de lado el estudio de solitones de Ricci para pasar a estudiar el flujo de Ricci homogéneo. El objetivo principal es dar resultados de regularidad; más precisamente, nos enfocamos en estudiar cuáles son las cantidades geométricas más simples cuyo control previene la formación de singularidades a lo largo del flujo. Al hablar de singularidad nos referimos a una singularidad en tiempo finito, es decir, un instante de tiempo $\omega < \infty$ para el cual la solución al flujo está definida en $[0, \omega)$, y no existe una solución definida en un intervalo de la forma $[0, \omega + \varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$.

Para el flujo de Ricci en general (i.e. no necesariamente homogéneo) se ha conjeturado que un control apropiado de la curvatura escalar $R(g(t))$ en toda la variedad debería ser suficiente para prevenir singularidades (ver la introducción de [Kno09]), o dicho de manera equivalente, si ω es una singularidad en tiempo finito, $\sup_M R(g(t))$ debería divergir cuando $t \to \omega$. Referimos a la Sección 4.1 para una introducción mas completa al problema. El siguiente es el principal resultado de este capítulo, y confirma el comportamiento esperado de la curvatura escalar en el caso del flujo de Ricci homogéneo.

Teorema E. *Sea $(M, g(t))$ una solución al flujo de Ricci con intervalo maximal de definición (α, ω), $\alpha < 0 < \omega$, y asumamos que $(M, g(t))$ es homogénea para todo $t \in (\alpha, \omega)$. Sea $R(g(t))$ la curvatura escalar (que es constante en M) de la métrica $g(t)$.*

(i) Si $\omega < \infty$, entonces $R(g(t)) \underset{t \to \omega}{\longrightarrow} \infty$.

(ii) Si $\alpha > -\infty$, entonces $R(g(t)) \underset{t \to \alpha}{\longrightarrow} -\infty$.

La principal herramienta utilizada para probar este resultado es el Teorema 1.4.3, que muestra la equivalencia entre el flujo de Ricci homogéneo y el flujo de corchetes, y nos permite reducir el problema a trabajar con el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (2). En efecto, la prueba consiste en ver que la norma del corchete $|\mu(t)|$ de una solución a dicho flujo está acotada mientras lo esté la curvatura escalar.

Como aplicación del Teorema E se prueba que toda solución al flujo de Ricci homogéneo es inmortal si la variedad es difeomorfa a $\mathbb{R}^n$. Esto se aplica en particular al flujo de Ricci en solvariedades, y generaliza así los resultados obtenidos sobre la inmortalidad del flujo de Ricci en nilvariedades en [Lau11a], y en solvariedades casi abelianas en [Arr13].

Al estudiar el flujo de corchetes obtenemos además un resultado sobre la velocidad a la cual diverge la norma del corchete $|\mu(t)|$ en presencia de una singularidad en tiempo finito, el cual puede ser de interés en sí mismo por su aplicación a otros problemas en variedades homogéneas y a otros flujos definidos por polinomios homogéneos (como lo es el flujo de corchetes).

Resumen de resultados originales

Capítulo 1

- Propiedades de una descomposición reductiva *canónica* para espacios homogéneos riemannianos (Lemas 1.2.2, 2.1.12 y 3.2.6).

Capítulo 2

- Solitones algebraicos como únicos puntos fijos y posibles límites del flujo de corchetes (Proposición 2.2.1).

- Evolución de solitones semi-algebraicos y algebraicos a lo largo del flujo de corchetes, y comportamiento asintótico de los solitones algebraicos a lo largo del flujo de Ricci (Proposiciones 2.2.2 y 2.2.4).

- Evolución de solitones semi-algebraicos a lo largo del flujo de corchetes normalizado, y caracterización de solitones algebraicos como aquéllos cuya evolución a lo largo de dicho flujo no es caótica (Proposición 2.2.5 y comentarios subsiguientes).

- Caracterización geométrica de la constante cosmológica de un solitón de Ricci con curvatura escalar constante (Lema 2.2.6).

- Ejemplo de solitón de Ricci homogéneo no presentado como semi-algebraico, y su evolución a través del flujo de corchetes (Ejemplo 2.1.11 y Sección 2.2.3).

- Ejemplo de solitón algebraico con derivación que no preserva la descomposición reductiva, y su evolución a través del flujo de corchetes (Ejemplo 2.1.14 y Sección 2.2.4).

- Caracterización geométrica de solitones algebraicos como aquéllos cuya evolución a través del flujo de Ricci es de manera diagonal (Teorema 2.3.2).

Capítulo 3

- Estructura de solitones semi-algebraicos (Teorema 3.3.6).

- Caracterizaciones de solitones algebraicos en términos de la estructura algebraica (Proposición 3.3.13).

- Procedimiento de construcción de solitones de Ricci homogéneos (Teorema 3.4.1).

- Reducción de la conjetura de Alekseevskii para G/K simplemente conexo al estudio de un problema similar para U/K, donde U es cierto subgrupo de Lie reductivo de G (Proposición 3.4.2).

- Vínculo entre variedades homogéneas de Einstein con curvatura escalar negativa y solitones algebraicos de expansión unimodulares (Proposición 3.5.1).

- Equivalencia de la conjetura de Alekseevskii con su correspondiente generalización para solitones algebraicos (Teorema 3.5.3).

Capítulo 4

- Estimación de la velocidad de crecimiento de la norma del corchete en una singularidad en tiempo finito del flujo de corchetes (Proposición 4.2.2).
- Cotas para el intervalo de definición del flujo de Ricci homogéneo en términos de la curvatura escalar inicial (Proposición 4.3.1).
- La curvatura escalar explota en una singularidad en tiempo finito (hacia adelante o hacia atrás) del flujo de Ricci homogéneo (Teorema 4.3.3).
- La solución al flujo de Ricci homogéneo es inmortal cuando la variedad tiene cubrimiento universal difeomorfo a $\mathbb{R}^n$ (Corolario 4.3.4).

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo introduciremos algunos conceptos que serán necesarios en el desarrollo de esta tesis. Estos comprenden, entre otros, una breve introducción al flujo de Ricci y sus solitones; la teoría más básica de variedades riemannianas homogéneas y espacios homogéneos, teniendo en cuenta aspectos geométricos y algebraicos; un marco teórico desarrollado en [Lau12] sobre el espacio de las variedades homogéneas; el flujo de Ricci en variedades homogénas, y el flujo de corchetes introducido en [Lau13]; algunos resultados sobre teoría geométrica de invariantes y una estratificación de la variedad de álgebras de Lie.

Todas las variedades diferenciables consideradas en este trabajo son conexas, a menos que se especifique lo contrario.

1.1. El flujo de Ricci

Sea M una variedad diferenciable, equipada con una métrica riemanniana g_0. El *flujo de Ricci* es una forma de hacer evolucionar la métrica inicial g_0, bajo la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2\operatorname{Rc}(g), \qquad g(0) = g_0, \tag{1.1}$$

donde $\operatorname{Rc}(g)$ denota el tensor de Ricci de la métrica riemanniana g. Decimos que una curva $g(t)$ de métricas riemannianas en M es una solución al flujo de Ricci si se satisface (1.1). Dicho flujo fue introducido por R. Hamilton en [Ham82], con la idea de que al hacer evolucionar las métricas con esta ecuación diferencial, éstas tendieran a ciertas métricas distinguidas en la variedad (por ejemplo, de curvatura constante, de Einstein, etc), y así poder obtener resultados sobre la variedad M. Justificando esa idea, Hamilton probó en [Ham82] que toda variedad compacta de dimensión 3 que admite una métrica riemanniana con tensor de curvatura de Ricci positivo, admite también una métrica de curvatura constante positiva, demostrando que el flujo de Ricci normalizado de cierta forma lleva cualquier métrica con Ricci positivo hacia una de curvatura constante. Vale la pena aclarar aquí que el objetivo principal al cual apuntaba Hamilton al introducir el flujo de Ricci era resolver la Conjetura de Poincaré, la cual dice que toda 3-variedad cerrada y simplemente conexa es difeomorfa a la esfera S^3.

El flujo de Ricci también se comporta de la manera esperada en el caso de superficies en donde, con una normalización adecuada, deforma cualquier métrica de manera conforme hacia una métrica de curvatura constante, dando así una prueba alternativa del Teorema de Uniformización en dos dimensiones que describe todas las superficies de Riemann compactas.

En el caso de dimensión tres las cosas son más complicadas, pues debido a las restricciones topológicas para poseer métricas de curvatura constante, en muchas variedades el flujo puede desarrollar singularidades en tiempo finito, antes de haber terminado de *mejorar* la métrica inicial. Sin embargo, en los artículos [Per02, Per03b, Per03a] dados a conocer en 2002-2003, G. Perelman estudió dichas singularidades e introdujo el procedimiento de *cirugía* para el flujo de Ricci, el cual permite continuar con el flujo a pesar de las singularidades sin perder demasiada información sobre la topología de la variedad. Esto le permitió completar el programa comenzado por Hamilton y obtener así una prueba de la Conjetura de Geometrización de Thurston, y en particular de la Conjetura de Poincaré.

Posteriormente, el flujo de Ricci fue utilizado en dimensiones más altas, como por ejemplo en el trabajo de C. Böhm y B. Wilking [BW08], en el cual se prueba una conjetura de Hamilton que dice que toda variedad riemanniana compacta con *operador de curvatura positivo* admite una métrica de curvatura seccional constante.

Basándose en el trabajo mencionado en el párrafo anterior, y en un trabajo previo de M. Micallef y J. Moore [MM88], S. Brendle y R. Schoen probaron en [BS09] el Teorema de la Esfera en su versión diferenciable (toda variedad riemanniana compacta, simplemente conexa y con curvaturas seccionales entre $1/4$ y 1 es difeomorfa a la esfera S^n), utilizando también como herramienta principal el flujo de Ricci, y ciertas condiciones de curvatura preservadas a lo largo del mismo.

Las aplicaciones mencionadas en esta (muy) breve reseña, y sobre todo los aportes de Perelman, han hecho que el flujo de Ricci se vuelva un tema de investigación en sí mismo, y uno muy activo a lo largo de la última década. A continuación nos concentraremos en algunas cuestiones más técnicas sobre el flujo de Ricci, así como también en ciertas soluciones especiales.

1.1.1. Existencia y unicidad

Como mencionamos antes, el flujo de Ricci es una ecuación diferencial en derivadas parciales, y es de tipo débilmente parabólica (de hecho, la razón por la cual la ecuación no es parabólica es porque es invariante por difeomorfismos; ver [Bes87, §5.C], donde se discute la no elipticidad del tensor de Ricci como operador diferencial parcial). Como tal, no existe un resultado general de la teoría de ecuaciones diferenciales que garantice la existencia y unicidad de soluciones. Sin embargo, gracias a resultados de R. Hamilton (simplificado notablemente por D. DeTurck en [DeT83]) en el caso compacto, y de W.-X. Shi ([Shi89]), B.-L. Chen y X.-P. Zhu ([CZ06]) en el caso no compacto, para la clase de métricas completas y de curvatura acotada, se tiene la existencia y unicidad de soluciones en tiempo corto. Es decir, dada una variedad riemanniana (M, g_0) con g_0 completa y de curvatura acotada, existe una solución $g(t)$ de (1.1) definida en cierto intervalo de tiempo maximal $[0, \omega)$ y tal que $g(t)$ es completa y de curvatura acotada para todo $t \in [0, \omega)$; dicha solución es la única con esa propiedad.

A partir de ahora, y a lo largo del desarrollo de esta tesis, cuando hablemos de la solución al flujo de Ricci $g(t)$ que comienza en $g(0) = g_0$, nos estaremos refiriendo siempre a la única solución de (1.1) con $g(t)$ completa y de curvatura acotada para todo t.

Una solución $g(t)$ al flujo de Ricci se caracteriza de acuerdo a su intervalo de definición de la siguiente manera:

- *antigua*, si está definida para $t \in (-\infty, \omega)$, con $0 < \omega$;

- *inmortal*, si está definida para $t \in (\alpha, \infty)$, con $\alpha < 0$;
- *eterna*, si está definida para $t \in (-\infty, \infty)$.

1.1.2. Solitones de Ricci

Un ejemplo de solución al flujo de Ricci muy fácil de calcular se da cuando la métrica inicial es de *Einstein*, i.e. $\mathrm{Rc}(g_0) = cg_0$, $c \in \mathbb{R}$. Es evidente que la solución a (1.1) en este caso está dada simplemente por

$$g(t) = (1 - 2ct)g_0, \qquad t \in \begin{cases} (-\infty, \frac{1}{2c}), & \text{si } c > 0; \\ (\frac{1}{2c}, \infty), & \text{si } c < 0; \\ (-\infty, \infty), & \text{si } c = 0. \end{cases}$$

Es decir, la variedad se contrae hasta volverse un punto si $c > 0$, se expande indefinidamente cuando $c < 0$, y no se modifica cuando es Ricci-plana (i.e. $\mathrm{Rc}(g_0) = 0$).

Un aporte conceptual muy importante que ha dado el flujo de Ricci son los *solitones de Ricci*, los cuales generalizan ampliamente la noción de métrica de Einstein. Son las métricas cuya evolución a lo largo del flujo de Ricci se da sólo por la acción de múltiplos escalares y pullback por difeomorfismos (i.e. la geometría de la métrica no cambia a lo largo del flujo). Más precisamente:

Definición 1.1.1. Una métrica riemanniana completa g_0 en una variedad M se dice *solitón de Ricci* si su tensor de Ricci verifica

$$\mathrm{Rc}(g_0) = cg_0 + \mathcal{L}_X g_0, \qquad c \in \mathbb{R}, \quad X \in \mathfrak{X}(M) \text{ completo},$$

donde $\mathcal{L}_X g_0$ denota la derivada de Lie de la métrica g_0 en la dirección del campo X. La constante c se denomina constante cosmológica del solitón de Ricci.

De manera similar que para las métricas de Einstein, la evolución de un solitón de Ricci a lo largo del flujo de Ricci está dada por

$$g(t) = (1 - 2ct)\varphi_t^*(g_0), \qquad t \in \begin{cases} (-\infty, \frac{1}{2c}), & \text{si } c > 0; \\ (\frac{1}{2c}, \infty), & \text{si } c < 0; \\ (-\infty, \infty), & \text{si } c = 0, \end{cases}$$

donde φ_t es una familia monoparamétrica de difeomorfismos de M (φ_t es, salvo múltiplos escalares y reparametrización del tiempo, el flujo asociado al campo completo X). Se observa que efectivamente $g(t)$ es *homotética* a g_0 para todo t (i.e. salvo múltiplo escalar, las $g(t)$ son todas isométricas a g_0). De acuerdo al signo de la constante cosmológica, un solitón de Ricci con $\mathrm{Rc}(g_0) = cg_0 + \mathcal{L}_X g_0$ se denomina

- *de contracción*, si $c > 0$;
- *de expansión*, si $c < 0$;
- *estacionario*, si $c = 0$.

Además de ser las métricas cuya geometría no cambia a lo largo del flujo de Ricci, los solitones de Ricci han sido muy estudiados pues son los principales candidatos para modelar las singularidades que se producen a lo largo del flujo (ver [Cao10, §3.2]).

Si M es compacta, gracias a Hamilton [Ham95], Ivey [Ive93] y Perelman [Per02] sabemos que todo solitón de Ricci estacionario o de expansión debe ser Einstein. Además, debe ser de tipo *gradiente* (es decir, el campo X en la definición es el gradiente de una función suave en M).

Referimos a [Cao10, CCG$^+$07, DHW12] y a los artículos allí citados para más información acerca de solitones de Ricci.

Uno de los principales objetivos de esta tesis es estudiar solitones de Ricci en variedades homogéneas. Veremos que, en contraposición con el caso compacto, los solitones de expansión y no gradientes tendrán un gran protagonismo. Pero antes de hablar de solitones homogéneos, daremos algunos preliminares generales sobre variedades riemannianas homogéneas.

1.2. Variedades riemannianas homogéneas

Una variedad riemanniana (M, g) se dice *homogénea* si su grupo de isometrías $\mathrm{I}(M, g)$ actúa transitivamente en M, es decir, si dados dos puntos p, q en la variedad, existe una isometría que lleva uno en el otro.

Por otro lado, un *espacio homogéneo* es una variedad diferenciable G/K que se obtiene al cocientar un grupo de Lie G por un subgrupo cerrado K, y dotar al cociente de la única estructura diferenciable que hace que la proyección $\pi : G \to G/K$ sea suave y posea secciones locales suaves (ver [War83, Theorem 3.58]). Un *espacio homogéneo riemanniano* es un espacio homogéneo G/K dotado de una métrica riemanniana g que sea G-invariante, es decir, tal que la acción natural de G en G/K (que siempre está dada por difeomorfismos de G/K) sea mediante isometrías de g.

Los conceptos de variedad riemanniana homogénea y de espacio homogéneo riemanniano están íntimamente relacionados entre sí, pero son nociones diferentes. Todo espacio homogéneo riemanniano $(G/K, g)$ es en sí mismo una variedad riemanniana homogénea, pues la acción de G en G/K es siempre transitiva. Recíprocamente, dada una variedad riemanniana homogénea (M, g), cada subgrupo cerrado $G \subset \mathrm{I}(M, g)$ que siga actuando transitivamente en M da lugar a una presentación de (M, g) como espacio homogéneo riemanniano $(G/K, g)$, donde $K = \{f \in G : f(p) = p\}$ es el subgrupo de isotropía en cierto punto $p \in M$. Observamos aquí que puede haber varias formas de *presentar* a (M, g) como espacio homogéneo riemanniano.

Presentando a la variedad homogénea como explicamos en el párrafo anterior, obtenemos que la acción de G en G/K es efectiva, i.e. no hay dos elementos de G que actúen de la misma manera en G/K; equivalentemente, K no contiene subgrupos normales no triviales de G. Pero en realidad, para obtener una presentación de una variedad homogénea (M, g) como espacio homogéneo riemanniano es suficiente con tener una acción *casi-efectiva*, es decir, que G sea un grupo de Lie de modo que exista un morfismo $\tau : G \to \mathrm{I}(M, g)$ cuyo núcleo sea discreto; en el caso anterior dicho núcleo era trivial, y τ era simplemente la inclusión.

Ejemplo 1.2.1. Un ejemplo fundamental para todos estos conceptos es el de un grupo de Lie G munido de una métrica riemanniana invariante a izquierda g. Así (G, g) es claramente una variedad riemanniana homogénea, y además ya está presentada como espacio homogéneo riemanniano (con $K = \{e\}$, el subgrupo trivial).

Al considerar métricas invariantes a izquierda en grupos de Lie suele ser de mucha utilidad la identificación natural que existe entre el álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ y el espacio tangente en la identidad T_eG. Tanto es así que toda métrica riemanniana invariante a izquierda queda determinada por un producto interno en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Se podría decir que una adaptación de estas ideas al contexto más general de espacios homogéneos consiste en considerar una descomposición reductiva de $\mathfrak{g}$. Más precisamente, dado G/K un espacio homogéneo, sean $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, $\mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K) \subset \mathfrak{g}$. Decimos que una descomposición en suma directa $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ es *reductiva* si el subespacio $\mathfrak{p}$ (que no necesariamente es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$) es $\mathrm{Ad}(K)$-invariante; cuando K es conexo, esto es equivalente a que sea $\mathrm{ad}(\mathfrak{k})$-invariante, es decir, $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$. En tal caso, $\mathfrak{p}$ se identifica naturalmente con $T_{eK}(G/K)$, tomando el valor en el origen $o = eK$ de los campos de Killing correspondientes a elementos de $\mathfrak{p}$ (es decir, $X_o = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_0 \exp tX(o)$), y toda métrica G-invariante en G/K queda determinada por un producto interno $\mathrm{Ad}(K)$-invariante $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en $\mathfrak{p}$. Siempre que hayamos fijado una descomposición reductiva para un espacio homogéneo G/K, llamaremos $g_{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ a la métrica G-invariante definida por el producto interno $\mathrm{Ad}(K)$-invariante $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en $\mathfrak{p}$.

Aunque existen espacios homogéneos que no poseen descomposiciones reductivas, la presencia de una métrica G-invariante implica la existencia de tal descomposición. A pesar de que las descomposiciones reductivas en general no son únicas, en muchos casos es posible definirlas de manera canónica. En nuestro estudio de solitones de Ricci homogéneos ha sido de mucha utilidad la siguiente descomposición reductiva especial que uno puede construir en el caso de tener una métrica G-invariante.

Lema 1.2.2. *Sea $(G/K, g)$ un espacio homogéneo riemanniano casi-efectivo. Entonces existe una descomposición reductiva $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ de modo que $B(\mathfrak{k}, \mathfrak{p}) = 0$, donde B es la forma de Killing de $\mathfrak{g}$. Dicha descomposición es única con esa propiedad.*

Demostración. Tomemos $\mathfrak{p}$ como el complemento ortogonal de $\mathfrak{k}$ en $\mathfrak{g}$ con respecto a la forma bilineal B. Recordar que $B|_{\mathfrak{k} \times \mathfrak{k}} < 0$, ya que es sabido que $\overline{\mathrm{Ad}(K)}$ es compacto en $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ (pues g es una métrica G-invariante y el espacio homogéneo es casi-efectivo) y la representación de isotropía $\mathrm{ad} : \mathfrak{k} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathfrak{p})$ es fiel, por la casi-efectividad. Esto implica que $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{p} = 0$, y como $\dim \mathfrak{p} \geq \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{k}$, tenemos finalmente que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$.

La unicidad es evidente, pues la propiedad exigida implica que debe elegirse $\mathfrak{p}$ como lo hemos hecho previamente. Esto concluye la demostración. □

Para finalizar esta sección, veamos otra forma de mirar al tensor de curvatura de Ricci que será muy usada en el desarrollo de esta tesis. Dada una variedad riemanniana (M, g), definimos el *operador de ricci* de g, $\mathrm{Ric}(g)$, como el tensor de tipo $1-1$ obtenido al bajar un índice utilizando g al tensor de Ricci (de tipo $0-2$). Es decir, $\mathrm{Ric}(g)$ se define implícitamente por

$$\mathrm{Rc}(g) = g(\mathrm{Ric}(g)\cdot, \cdot). \tag{1.2}$$

En el caso en que $(M, g) = (G/K, g)$ sea homogénea, si tomamos una descomposición reductiva $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ y la métrica g se identifica con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en $\mathfrak{p}$, entonces el operador de Ricci será interpretado simplemente como el elemento de $\mathrm{End}(\mathfrak{p})$ definido mediante

$$\mathrm{Rc}(g)(eK) = \langle \mathrm{Ric}(g)\cdot, \cdot \rangle, \tag{1.3}$$

y escribiremos $\mathrm{Ric}(\langle \cdot, \cdot \rangle) := \mathrm{Ric}(g) = \mathrm{Ric}(g_{\langle \cdot, \cdot \rangle})$.

1.3. El espacio de las variedades homogéneas

En esta sección describiremos un marco teórico introducido en [Lau12], el cual será central en el desarrollo de esta tesis pues nos permite trabajar en el *espacio de las variedades homogéneas*.

Éste consiste en parametrizar el conjunto de espacios homogéneos riemannianos de dimensión n con isotropía de dimensión q mediante un subconjunto $\mathcal{H}_{q,n}$ de la variedad algebraica de álgebras de Lie de dimensión $q+n$. Se podría pensar a este marco teórico como una generalización de la idea de "mover corchetes de Lie en lugar de productos internos". Esta idea ha sido ya muy utilizada para estudiar métricas invariantes a izquierda en grupos de Lie (ver por ejemplo las numerosas referencias citadas en [Lau12, §1.2]) y consiste básicamente en lo siguiente: en lugar de variar los productos internos en el algebra de Lie (y así obtener las diferentes métricas riemannianas invariantes a izquierda), se fija el producto interno, y lo que se varía es el corchete de Lie. En el caso más general de variedades homogéneas se utiliza la misma idea, pero hay algunas cuestiones técnicas a tener en cuenta.

Fijemos un espacio vectorial real $\mathfrak{g}$ de dimensión $q+n$ junto con una descomposición en suma directa $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, donde $\mathfrak{k}$ y $\mathfrak{p}$ son subespacios de dimensión q y n, respectivamente. Fijemos además un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en $\mathfrak{p}$. Sea V_{q+n} el espacio de todas las estructuras de álgebras antisimétricas (o corchetes) en $\mathfrak{g}$, esto es,

$$V_{q+n} := \{\mu : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} : \mu \text{ bilineal y antisimétrica}\}.$$

A cada corchete $\mu \in V_{q+n}$ se le puede asociar un espacio homogéneo riemanniano casi-efectivo n-dimensional con isotropía de dimensión q, siempre y cuando se satisfagan las siguiente condiciones para μ:

(h1) μ satisface Jacobi (i.e. es un corchete de Lie en $\mathfrak{g}$), $\mu(\mathfrak{k}, \mathfrak{k}) \subset \mathfrak{k}$ (i.e. $\mathfrak{k}$ es una subálgebra de Lie) y $\mu(\mathfrak{k}, \mathfrak{p}) \subset \mathfrak{p}$ (i.e. la descomposición es reductiva a nivel de álgebras de Lie).

(h2) Si G_μ es el grupo de Lie simplemente conexo con álgebra de Lie $(\mathfrak{g}, \mu)$, y K_μ denota al subgrupo de Lie conexo de G_μ con álgebra de Lie $(\mathfrak{k}, \mu|_{\mathfrak{k}\times\mathfrak{k}})$, entonces K_μ es cerrado en G_μ.

(h3) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es $\operatorname{ad}_\mu \mathfrak{k}$-invariante (i.e. $(\operatorname{ad}_\mu Z|_{\mathfrak{p}})^t = -\operatorname{ad}_\mu Z|_{\mathfrak{p}}$, para todo $Z \in \mathfrak{k}$).

(h4) $\{Z \in \mathfrak{k} : \mu(Z, \mathfrak{p}) = 0\} = 0$ (casi-efectividad).

Para más detalles, ver [Lau12]. Se define el subconjunto $\mathcal{H}_{q,n} \subset V_{q+n}$ precisamente como el conjunto de aquellos corchetes μ que satisfacen todas estas condiciones, es decir,

$$\mathcal{H}_{q,n} = \{\mu \in V_{q+n} : \mu \text{ satisface las condiciones (h1)} - \text{(h4)}\}.$$

Podemos entonces asociar a cada $\mu \in \mathcal{H}_{q,n}$ un espacio homogéneo riemanniano $(G_\mu/K_\mu, g_\mu)$, donde G_μ es el grupo de Lie simplemente conexo con álgebra de Lie $(\mathfrak{g}, \mu)$, K_μ es el subgrupo de Lie conexo de G_μ con álgebra de Lie $(\mathfrak{k}, \mu|_{\mathfrak{k}\times\mathfrak{k}})$, el cual es cerrado por (h2), y g_μ es la métrica G_μ-invariante en G_μ/K_μ definida por el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en $\mathfrak{p}$ (i.e. $g_\mu(eK_\mu) = \langle \cdot, \cdot \rangle$; recordar que se identifica naturalmente $T_{eK_\mu}(G_\mu/K_\mu)$ con $\mathfrak{p}$). Siguiendo la notación introducida en la sección anterior, se tiene que g_μ es precisamente $g_{\langle \cdot, \cdot \rangle}$. Así, tenemos

$$\mu \in \mathcal{H}_{q,n} \rightsquigarrow (G_\mu/K_\mu, g_{\langle \cdot, \cdot \rangle}).$$

Un punto muy importante en esta teoría es que modificar el producto interno $\operatorname{Ad}(K)$-invariante $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en $\mathfrak{p}$, dejando el resto de la información fija (es decir, considerar en el espacio homogéneo G_μ/K_μ *otra* métrica G_μ-invariante), equivale a modificar el corchete μ como explicaremos a continuación.

Consideremos la acción natural de $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ en V_{q+n}, dada por

$$(f \cdot \mu)(X,Y) := f\mu(f^{-1}X, f^{-1}Y), \qquad f \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g}), \quad \mu \in V_{q+n}, \quad X,Y \in \mathfrak{g}. \tag{1.4}$$

Esta acción deja invariante la condición de Jacobi, y las $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$-órbitas de un corchete $\mu \in V_{q+n}$ que satisface Jacobi (i.e. de un álgebra de Lie) son precisamente todas las estructuras de álgebra de Lie que se pueden definir en $\mathfrak{g}$ y son isomorfas a la estructura que define μ. Es decir, en la variedad de las álgebras de Lie (el subconjunto de V_{q+n} compuesto por los corchetes que satisfacen Jacobi), las órbitas de esta acción son las clases de isomorfismo de álgebras de Lie. El isomorfismo de álgebras de Lie está dado simplemente por

$$f : (\mathfrak{g}, \mu) \longrightarrow (\mathfrak{g}, f \cdot \mu).$$

Para ciertas f's, esta acción deja invariante al conjunto $\mathcal{H}_{q,n}$, y nos permite parametrizar todas las métricas G-invariantes en un espacio homogéneo G/K dado.

Proposición 1.3.1. [Lau12, Proposition 4.2] *Si $\mu \in \mathcal{H}_{q,n}$, entonces $\tilde{h}\cdot\mu \in \mathcal{H}_{q,n}$ para toda $\tilde{h} \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ de la forma*

$$\tilde{h} = \left[\begin{smallmatrix} I & 0 \\ 0 & h \end{smallmatrix}\right], \qquad h \in \mathrm{GL}(\mathfrak{p}),$$

con h que verifica

$$[h^t h, \mathrm{ad}_\mu(\mathfrak{k})|_\mathfrak{p}] = 0. \tag{1.5}$$

Además, los espacios riemannianos homogéneos $(G_\mu/K_\mu, g_{\langle h\cdot, h\cdot\rangle})$ y $(G_{\tilde{h}\cdot\mu}/K_{\tilde{h}\cdot\mu}, g_{\langle\cdot,\cdot\rangle})$ son equivariantemente isométricos.

Recordar que dos espacios homogéneos riemannianos se dicen *equivariantemente difeomorfos* si existe un difeomorfismo entre ellos que viene dado por un isomorfismo de los grupos de Lie G_μ y $G_{\tilde{h}\cdot\mu}$ que pasa al cociente, y se dicen *equivariantemente isométricos* si son equivariantemente difeomorfos, y el correspondiente difeomorfismo equivariante es una isometría. Este resultado justifica entonces la afirmación de que mover productos internos en $\mathfrak{p}$, dejando toda la estructura algebraica fija, equivale a dejar fijo el producto interno y modificar adecuadamente el corchete de Lie en $\mathfrak{g}$.

Se sigue de la Proposición 1.3.1 que el conjunto

$$\left\{\tilde{h}\cdot\mu : \quad \tilde{h} = \left[\begin{smallmatrix} I & 0 \\ 0 & h \end{smallmatrix}\right], \quad h \in \mathrm{GL}(\mathfrak{p}), \quad h \text{ satisface } (1.5)\right\} \subset \mathcal{H}_{q,n}$$

parametriza a todas las métricas riemannianas G_μ-invariantes en el espacio homogéneo G_μ/K_μ. Además, poniendo $h = \frac{1}{c}I$, $c \neq 0$, se obtiene la métrica G_μ-invariante reescalada $\frac{1}{c^2}g_{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ en G_μ/K_μ, la cual es isométrica (gracias a la Proposición 1.3.1 y (1.4)) al espacio homogéneo riemanniano correspondiente al elemento $c\cdot\mu \in \mathcal{H}_{q,n}$ definido por

$$c\cdot\mu|_{\mathfrak{k}\times\mathfrak{k}} = \mu, \qquad c\cdot\mu|_{\mathfrak{k}\times\mathfrak{p}} = \mu, \qquad c\cdot\mu|_{\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}} = c^2\mu_\mathfrak{k} + c\mu_\mathfrak{p}, \tag{1.6}$$

donde $\mu_\mathfrak{k}$ y $\mu_\mathfrak{p}$ denotan las componentes en $\mathfrak{k}$ y $\mathfrak{p}$ respectivamente del corchete $\mu|_{\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}}$, es decir,

$$\mu(X,Y) = \mu_\mathfrak{k}(X,Y) + \mu_\mathfrak{p}(X,Y), \qquad \mu_\mathfrak{k}(X,Y) \in \mathfrak{k}, \quad \mu_\mathfrak{p}(X,Y) \in \mathfrak{p}, \qquad \forall X,Y \in \mathfrak{p}. \tag{1.7}$$

La acción de $\mathbb{R}^*$ en $\mathcal{H}_{q,n}$ dada por $\mu \mapsto c\cdot\mu$ puede ser interpretada entonces como un reescalamiento del espacio homogéneo riemanniano $(G_\mu/K_\mu, g_\mu)$.

Observación 1.3.2. Si extendemos el producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ en $\mathfrak{p}$ a un producto interno en $\mathfrak{g}$ (el cual por simplicidad también denotaremos $\langle\cdot,\cdot\rangle$), tal que $\langle\mathfrak{k},\mathfrak{p}\rangle = 0$, entonces tenemos un producto interno naturalmente definido en V_{q+n} mediante la fórmula

$$\langle\mu,\lambda\rangle = \sum_{i,j,k} \langle\mu(X_i,X_j),X_k\rangle\langle\lambda(X_i,X_j),X_k\rangle,$$

donde $\{X_i\}$ es cualquier base ortonormal de $(\mathfrak{g},\langle\cdot,\cdot\rangle)$. Además, dado $\mu \in \mathcal{H}_{q,n}$ fijo, es claro que se puede extender $\langle\cdot,\cdot\rangle$ de modo que resulte $\mathrm{Ad}(K_\mu)$-invariante en todo $\mathfrak{g}$ (recordar que $\overline{\mathrm{Ad}(K_\mu)}$ es compacto en $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$). Así, podemos referirnos a la norma de un corchete μ con respecto a este producto interno, la cual denotaremos por $|\mu|$. Esta cantidad será importante a la hora de estudiar solitones de Ricci homogéneos y normalizaciones del flujo de corchetes en el Capítulo 2, y será central para estudiar la evolución de la curvatura escalar en el flujo de Ricci homogéneo en el Capítulo 4.

1.4. El flujo de Ricci en variedades homogéneas

Sea (M,g_0) una variedad homogénea, la cual está presentada como espacio homogéneo riemanniano $(G/K,g_0)$. Si fijamos una descomposición reductiva $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$, la métrica G-invariante g_0 queda determinada entonces por un producto interno $\mathrm{Ad}(K)$-invariante $\langle\cdot,\cdot\rangle$ en $\mathfrak{p}$. Consideremos ahora la única solución $\langle\cdot,\cdot\rangle_t$ a la siguiente ecuación diferencial ordinaria para una curva de productos internos $\mathrm{Ad}(K)$-invariantes en $\mathfrak{p}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\cdot,\cdot\rangle_t = -2\,\mathrm{Rc}(\langle\cdot,\cdot\rangle_t), \qquad \langle\cdot,\cdot\rangle_0 = \langle\cdot,\cdot\rangle, \tag{1.8}$$

donde $\mathrm{Rc}(\langle\cdot,\cdot\rangle_t) = \mathrm{Rc}(g(t))(eK)$ es el valor del tensor de curvatura de Ricci de la métrica $g(t)$ en el punto $eK \in G/K$, con $g(t)$ la curva de métricas G-invariantes definidas por $\langle\cdot,\cdot\rangle_t$ en G/K. Es muy fácil ver entonces que la familia monoparamétrica $g(t)$ es una solución al flujo de Ricci (1.1), con $g(0) = g_0$. Además, por construcción, $(M,g(t))$ es homogénea para todo t (la métrica $g(t)$ sigue siendo G-invariante); en particular, completa y de curvatura acotada.

Recíprocamente, si tuviéramos la solución $g(t)$ al flujo de Ricci con $g(0) = g_0$, entonces $g(t)$ sigue siendo G-invariante para todo t, ya que la unicidad de soluciones y la invariancia por difeomorfismos de la ecuación implican que no se pierden isometrías a lo largo del flujo (i.e. $\mathrm{I}(M,g_0) \subset \mathrm{I}(M,g(t))$), y la acción de G en M nunca se modifica. Es claro que los correspondientes productos internos $\langle\cdot,\cdot\rangle_t$ en $\mathfrak{p}$ satisfacen la ecuación (1.8). Concluimos entonces que:

> si (M,g_0) es homogénea, entonces la única solución $g(t)$ al flujo de Ricci con $g(t)$ completa y de curvatura acotada, es homogénea para todo t, y está determinada por los productos internos $\langle\cdot,\cdot\rangle_t$ en $\mathfrak{p}$, donde $\langle\cdot,\cdot\rangle_t$ es la solución a (1.8). Además, $\mathrm{I}(M,g(t)) = \mathrm{I}(M,g_0)$ para todo t.

Observación 1.4.1. Fue probado recientemente por B. Kotschwar en [Kot10] que el flujo de Ricci siempre preserva el grupo de isometrías, es decir, $\mathrm{I}(M,g(t)) = \mathrm{I}(M,g_0)$ si $g(t)$ es una curva de métricas completas y de curvatura acotada que son solución a (1.1).

En resumen, el flujo de Ricci de variedades homogéneas es equivalente a la ecuación diferencial ordinaria (1.8) para productos internos en $\mathfrak{p}$. Pero vimos en la sección anterior que mover productos internos $\mathrm{Ad}(K)$-invariantes en $\mathfrak{p}$ equivale a dejar un producto interno fijo y mover el corchete de Lie de $\mathfrak{g}$, pues de esta manera obtenemos espacios homogéneos riemannianos que son equivariantemente isométricos. Entonces, naturalmente surge la siguiente pregunta:

> ¿Cómo se ve el flujo de Ricci en $\mathcal{H}_{q,n}$?

O más precisamente,

> ¿Qué ecuación de evolución debe satisfacer una curva $\mu(t)$ en $\mathcal{H}_{q,n}$ para que la familia monoparamétrica $(G_{\mu(t)}/K_{\mu(t)}, g_{\mu(t)})$ sea (salvo pullback por difeomorfismos) una solución al flujo de Ricci?

La respuesta a ambas preguntas es el contenido del Teorema 1.4.3. Decimos que una curva $\mu(t) \in V_{q+n} = \Lambda^2\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$ es una solución al *flujo de corchetes* si satisface la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu = -\pi\left(\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Ric}_\mu \end{smallmatrix}\right]\right)\mu, \qquad \mu(0) = \mu_0, \tag{1.9}$$

donde $\pi : \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{End}(V_{q+n})$ es la representación natural, que es la derivada en la identidad de la acción (1.4), y está dada por

$$\pi(A)\mu = A\mu(\cdot,\cdot) - \mu(A\cdot,\cdot) - \mu(\cdot,A\cdot), \qquad A \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}), \quad \mu \in V_{q+n}, \tag{1.10}$$

$\mathrm{Ric}_\mu \in \mathrm{End}(\mathfrak{p})$ se define por medio de la fórmula (3.10), y los bloques son de acuerdo a la descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$.

Observación 1.4.2. Cuando se tiene que $\mu \in \mathcal{H}_{q,n}$, el operador Ric_μ coincide con el operador de Ricci de la variedad riemanniana homogénea $(G_\mu/K_\mu, g_\mu)$; esto es, $\mathrm{Ric}_\mu = \mathrm{Ric}(g_\mu)$. Sin embargo, por cuestiones técnicas es conveniente poder definir Ric_μ para μ que no necesariamente esté en $\mathcal{H}_{q,n}$, y para eso se utiliza la fórmula (3.10) que se puede aplicar a cualquier $\mu \in V_{q+n}$.

Dada una variedad riemanniana homogénea simplemente conexa $(M, g_0) = (G_{\mu_0}/K_{\mu_0}, g_{\mu_0})$, $\mu_0 \in \mathcal{H}_{q,n}$, tenemos las siguientes familias monoparamétricas de variedades riemannianas:

$$(M, g(t)), \qquad (G_{\mu_0}/K_{\mu_0}, g_{\langle\cdot,\cdot\rangle_t}), \qquad (G_{\mu(t)}/K_{\mu(t)}, g_{\mu(t)}), \tag{1.11}$$

donde $g(t)$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_t$ y $\mu(t)$ son respectivamente las soluciones a (1.1), (1.8) y (1.9), con $\langle\cdot,\cdot\rangle$ el producto interno en $\mathfrak{p}$ definido por la métrica g_0. Estamos usando aquí que si $\mu_0 \in \mathcal{H}_{q,n}$, entonces $\mu(t) \in \mathcal{H}_{q,n}$ para todo t, i.e. el conjunto $\mathcal{H}_{q,n}$ es invariante por el flujo de corchetes (ver [Lau13, Lemma 3.2]). Estas tres familias están íntimamente relacionadas, de acuerdo al siguiente resultado.

Teorema 1.4.3. [Lau13, Theorem 3.3] *Existe una familia monoparamétrica de difeomorfismos $\varphi(t) : M \longrightarrow G_{\mu(t)}/K_{\mu(t)}$ tal que*

$$g(t) = \varphi(t)^* g_{\mu(t)}, \qquad \forall t \in (\alpha, \omega).$$

Más aún, si identificamos $M = G_{\mu_0}/K_{\mu_0}$, entonces $\varphi(t) : G_{\mu_0}/K_{\mu_0} \longrightarrow G_{\mu(t)}/K_{\mu(t)}$ puede ser tomado como el difeomorfismo equivariante determinado por el isomorfismo de grupos de Lie entre G_{μ_0} y $G_{\mu(t)}$ cuya derivada en la identidad es $\tilde{h} := \left[\begin{smallmatrix} I & 0 \\ 0 & h \end{smallmatrix}\right] : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, donde $h(t) := \mathrm{d}\varphi(t)|_{eK_{\mu_0}} : \mathfrak{p} \longrightarrow \mathfrak{p}$ es la solución a cualquiera de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias:

(i) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h = -h\,\mathrm{Ric}(\langle\cdot,\cdot\rangle_t), \qquad h(0) = I;$

(ii) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h = -\mathrm{Ric}_{\mu(t)}\,h, \qquad h(0) = I.$

Se cumplen además las siguientes condiciones:

(iii) $\langle \cdot, \cdot \rangle_t = \langle h\cdot, h\cdot \rangle$;

(iv) $\mu(t) = \tilde{h}\mu_0(\tilde{h}^{-1}\cdot, \tilde{h}^{-1}\cdot)$.

Observación 1.4.4. El teorema anterior tiene como consecuencia directa los siguientes hechos:

(a) Las soluciones al flujo de Ricci $g(t)$ y al flujo de corchetes $g_{\mu(t)}$ difieren únicamente por el pullback por difeomorfismos que dependen de t. En particular, para cada tiempo t, las correspondientes variedades riemannianas en (1.11) son todas isométricas entre sí, con lo cual el comportamiento de la curvatura y de cualquier otro invariante riemanniano a lo largo del flujo de Ricci $g(t)$ puede ser estudiado por medio del flujo de corchetes $g_{\mu(t)}$.

(b) El intervalo de tiempo maximal en el cual están definidas las soluciones es el mismo para los dos flujos (el de Ricci y el de corchetes); este será denotado por (α, ω).

(c) Los flujos son equivalentes en el siguiente sentido: cada uno puede ser obtenido del otro resolviendo la correspondiente ecuación (i) o (ii), y aplicando el ítem (iii) o el (iv), según corresponda.

Se puede ver fácilmente (se deduce de la prueba de [Lau13, Lemma 3.2]) que toda solución $\mu(t)$ al flujo de corchetes verifica que

$$\mu(t)|_{\mathfrak{k}\times\mathfrak{g}} = \mu_0|_{\mathfrak{k}\times\mathfrak{g}}, \qquad \forall t \in (\alpha, \omega),$$

luego la única parte del corchete que realmente está evolucionando es $\mu(t)|_{\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}}$. Entonces, podemos escribir la ecuación del flujo de corchetes (1.9) de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu_{\mathfrak{k}} = \mu_{\mathfrak{k}}(\mathrm{Ric}_\mu \cdot, \cdot) + \mu_{\mathfrak{k}}(\cdot, \mathrm{Ric}_\mu \cdot), \\ \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu_{\mathfrak{p}} = -\pi_n(\mathrm{Ric}_\mu)\mu_{\mathfrak{p}}, \end{cases} \qquad \mu_{\mathfrak{k}}(0) + \mu_{\mathfrak{p}}(0) = \mu_0|_{\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}}, \tag{1.12}$$

donde $\mu_{\mathfrak{k}}$ y $\mu_{\mathfrak{p}}$ se definen como en (1.7), y $\pi_n : \mathfrak{gl}(\mathfrak{p}) \longrightarrow \mathrm{End}(V_n)$ es la representación definida en (1.10) para $q = 0$.

1.4.1. Normalizaciones

Sea (M, g_0) una variedad riemanniana. Si $g(t)$ es la solución al flujo de Ricci que empieza en g_0, podría ser muy útil considerar una normalización de $g(t)$, multiplicando cada métrica por un escalar que dependa de t, y así obtener que ciertas cantidades escalares se mantengan constantes a lo largo del flujo. Si permitimos también una reparametrización de la variable temporal t, se puede transformar entonces el flujo de Ricci (1.1) en un flujo de Ricci *r-normalizado*, cuya ecuación es muy similar a la original:

$$\frac{\partial}{\partial t} g^r(t) = -2\,\mathrm{Rc}(g^r(t)) - 2r(t)g^r(t), \qquad g^r(0) = g_0, \tag{1.13}$$

donde $r(t)$ es alguna función de normalización que podría depender incluso de $g^r(t)$. Es fácil ver que la solución a (1.13) tiene la forma $g^r(t) = a(t)g(b(t))$, donde $g(s)$ es la solución al flujo de Ricci sin normalizar. Las normalizaciones suelen ser útiles a la hora de estudiar la convergencia del flujo de Ricci cuando la variable temporal se acerca a la singularidad (o a ∞ en caso de ser inmortal), pues ayudan a prevenir que los límites sean planos (por ejemplo, normalizando de modo que la curvatura escalar sea constante y no nula).

Cuando M es homogénea, (1.13) es equivalente a la siguiente ecuación diferencial ordinaria para una curva de productos internos:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\cdot,\cdot\rangle_t^r = -2\operatorname{Rc}(\langle\cdot,\cdot\rangle_t^r) - 2r(t)\langle\cdot,\cdot\rangle_t^r, \qquad \langle\cdot,\cdot\rangle_0^r = \langle\cdot,\cdot\rangle. \tag{1.14}$$

Esto motiva entonces la definición del *flujo de corchetes r-normalizado*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu^r = -\pi\left(\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{Ric}_{\mu^r} + rI \end{smallmatrix}\right]\right)\mu^r, \qquad \mu^r(0) = \mu_0, \tag{1.15}$$

donde $\mu^r = \mu^r(t)$ y $r = r(t)$. O de manera equivalente, y análoga a (1.12),

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu_{\mathfrak{k}}^r = \mu_{\mathfrak{k}}^r(\operatorname{Ric}_{\mu^r}\cdot,\cdot) + \mu_{\mathfrak{k}}^r(\cdot,\operatorname{Ric}_{\mu^r}\cdot) + 2r\mu_{\mathfrak{k}}^r(\cdot,\cdot), \\ \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu_{\mathfrak{p}}^r = -\pi_n(\operatorname{Ric}_{\mu^r} + rI)\mu_{\mathfrak{p}}^r = -\pi_n(\operatorname{Ric}_{\mu^r})\mu_{\mathfrak{p}}^r + r\mu_{\mathfrak{p}}^r. \end{cases} \quad \mu_{\mathfrak{k}}^r(0) + \mu_{\mathfrak{p}}^r(0) = \mu_0^r|_{\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}}, \tag{1.16}$$

Dada una función de normalización $r(t)$ continua (o sólo integrable), consideremos las soluciones $c(t)$ y $\tau(t)$ al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c(t) = r(t)c(t), \qquad c(0) = 1; \\ \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tau(t) = c(t)^2, \qquad \tau(0) = 0, \end{cases} \tag{1.17}$$

o sea,

$$c(t) = e^{\int_0^t r(s)\mathrm{d}s}, \qquad \tau(t) = \int_0^t c(s)^2\mathrm{d}s.$$

Observar que $c(t) > 0$ para todo t, y que $\tau(t)$ es estrictamente creciente. Si denotamos por $g(t)$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_t$ y $\mu(t)$ a los flujos de Ricci y de corchetes sin normalizar (i.e. las soluciones a (1.1), (1.8) y (1.9), respectivamente), entonces es fácil verificar que las soluciones a (1.13), (1.14) y (1.15) están dadas por

$$g^r(t) = \frac{1}{c(t)^2}g(\tau(t)), \qquad \langle\cdot,\cdot\rangle_t^r = \frac{1}{c(t)^2}\langle\cdot,\cdot\rangle_{\tau(t)}, \qquad \mu^r(t) = c(t)\cdot\mu(\tau(t)),$$

donde el escalar $c(t)$ actúa en μ según la acción definida en (1.6). Tenemos entonces, al igual que en (1.11), tres familias monoparamétricas de variedades riemannianas homogéneas

$$(M, g^r(t)), \qquad (G_{\mu_0}/K_{\mu_0}, g_{\langle\cdot,\cdot\rangle_t^r}), \qquad (G_{\mu^r(t)}/K_{\mu^r(t)}, g_{\mu^r(t)}), \tag{1.18}$$

y se tiene el siguiente resultado análogo al Teorema 1.4.3 que las relaciona.

Teorema 1.4.5. [Lau13, Theorem 3.10] *Existe una familia monoparamétrica de difeomorfismos* $\varphi^r(t) : M \longrightarrow G_{\mu^r(t)}/K_{\mu^r(t)}$ *tal que*

$$g^r(t) = \varphi^r(t)^* g_{\mu^r(t)}, \qquad \forall t \in (\alpha^r, \omega^r).$$

Más aún, si identificamos $M = G_{\mu_0}/K_{\mu_0}$, *entonces* $\varphi^r(t) : G_{\mu_0}/K_{\mu_0} \longrightarrow G_{\mu^r(t)}/K_{\mu(t)}$ *puede ser tomado como el difeomorfismo equivariante determinado por el isomorfismo de grupos de Lie entre* G_{μ_0} *y* $G_{\mu^r(t)}$ *cuya derivada en la identidad es* $\widetilde{h^r} := \left[\begin{smallmatrix} I & 0 \\ 0 & h^r \end{smallmatrix}\right] : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, *donde* $h^r(t) := \mathrm{d}\varphi^r(t)|_{eK_{\mu_0}} : \mathfrak{p} \longrightarrow \mathfrak{p}$ *es la solución a cualquiera de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias:*

(i) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h^r = -h^r \operatorname{Ric}(\langle\cdot,\cdot\rangle_t^r), \qquad h^r(0) = I;$

(ii) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h^r = -\operatorname{Ric}_{\mu^r(t)} h^r, \qquad h^r(0) = I.$

Se cumplen además las siguientes condiciones:

(iii) $\langle\cdot,\cdot\rangle_t^r = \langle h^r\cdot, h^r\cdot\rangle;$

(iv) $\mu^r(t) = \tilde{h^r}\mu_0(\tilde{h^r}^{-1}\cdot, \tilde{h^r}^{-1}\cdot).$

En el Capítulo 2 estudiaremos la evolución de solitones semi-algebraicos a lo largo del flujo de corchete normalizado por diferentes cantidades. En la Sección 2.2.1 veremos una normalización que garantiza la existencia de subsucesiones convergentes, las cuales podrían converger tal vez a puntos que no estén en $\mathcal{H}_{q,n}$. Y por último, en la Sección 2.2.2 estudiaremos la normalización por curvatura escalar (no nula), la cual tiene la siguiente propiedad: si existen subsucesiones convergentes, entonces los límites son automáticamente no planos.

1.5. Una estratificación de la variedad de álgebras de Lie

En esta sección presentamos resultados de la teoría geométrica de invariantes aplicada a la acción natural del grupo $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ en la variedad de álgebras de Lie n-dimensionales. Estos serán de crucial importancia en el Capítulo 3 para estudiar la estructura algebraica de solitones de Ricci homogéneos. Referimos a [Lau09, Sections 3 and 7] para una exposición más detallada de estos temas.

Consideremos el espacio de todas las álgebras antisimétricas de dimensión n, el cual está parametrizado por el espacio vectorial

$$V := \Lambda^2(\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^n = \{\mu : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n : \mu \text{ bilineal y antisimétrica}\}.$$

Entonces,

$$\mathcal{N} = \{\mu \in V : \mu \text{ satisface Jacobi y es nilpotente}\} \tag{1.19}$$

es un subconjunto algebraico de V, ya que la identidad de Jacobi y la condición de nilpotencia pueden ser ambas escritas como ceros de funciones polinomiales. El conjunto algebraico $\mathcal{N}$ es usualmente llamado la *variedad de álgebras de Lie nilpotentes* (de dimensión n).

El grupo $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ actúa linealmente de manera natural en V, mediante

$$h \cdot \mu(X,Y) = h\mu(h^{-1}X, h^{-1}Y), \qquad X, Y \in \mathbb{R}^n, \quad h \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \quad \mu \in V. \tag{1.20}$$

Observar que $\mathcal{N}$ es $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$-invariante y las clases de isomorfismo de álgebras de Lie son precisamente las $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$-órbitas. La representación de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ en V obtenida al derivar (1.20) está dada por

$$\pi(\alpha)\mu = \alpha\mu(\cdot,\cdot) - \mu(\alpha\cdot,\cdot) - \mu(\cdot,\alpha\cdot), \qquad \alpha \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}), \quad \mu \in V. \tag{1.21}$$

Notamos que $\pi(\alpha)\mu = 0$ si y sólo si $\alpha \in \mathrm{Der}(\mu)$, el álgebra de Lie de derivaciones del álgebra μ. El producto interno canónico $\langle\cdot,\cdot\rangle$ en $\mathbb{R}^n$ determina un producto interno $\mathrm{O}(n)$-invariante en V, también denotado por $\langle\cdot,\cdot\rangle$, de la siguiente manera:

$$\langle\mu,\lambda\rangle = \sum \langle\mu(e_i,e_j), \lambda(e_i,e_j)\rangle, \tag{1.22}$$

y también el producto interno estándar $\mathrm{Ad}(\mathrm{O}(n))$-invariante en $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ dado por

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \operatorname{tr} \alpha\beta^{\mathrm{t}} = \sum \langle \alpha e_i, \beta e_i \rangle, \qquad \alpha, \beta \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}), \tag{1.23}$$

donde $\{e_1, ..., e_n\}$ denota la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Notemos que $\pi(\alpha)^t = \pi(\alpha^t)$ y $(\operatorname{ad}\alpha)^t = \operatorname{ad}\alpha^t$ para todo $\alpha \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$, ya que hemos tomado los productos internos definidos canónicamente.

Podemos usar $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) = \mathfrak{so}(n) \oplus \mathrm{sym}(n)$ como una descomposición de Cartan, donde $\mathfrak{so}(n)$ y $\mathrm{sym}(n)$ denotan los subespacios de matrices antisimétricas y simétricas, respectivamente. Se prueba en [Lau06, Proposition 3.5] que la aplicación momento $m : V \setminus \{0\} \longrightarrow \mathrm{sym}(n)$ para la acción (1.20), la cual se define mediante $\langle m(\mu), \alpha \rangle = \frac{1}{||\mu||^2} \langle \pi(\alpha)\mu, \mu \rangle$, para todo $\alpha \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$, $\mu \in V$, está dada por

$$\langle m(\mu)X, X \rangle = \frac{1}{||\mu||^2} \left(-2 \sum \langle \mu(X, e_i), e_j \rangle^2 + \sum \langle \mu(e_i, e_j), X \rangle^2 \right), \tag{1.24}$$

para todo $X \in \mathbb{R}^n$.

Sea $\mathfrak{t}$ el conjunto de matrices $n \times n$ diagonales. Si $\{e'_1, ..., e'_n\}$ es la base de $(\mathbb{R}^n)^*$ dual a la base canónica $\{e_1, ..., e_n\}$, entonces

$$\{v_{ijk} = (e'_i \wedge e'_j) \otimes e_k : 1 \leq i < j \leq n,\ 1 \leq k \leq n\}$$

es una base de vectores peso de V para la acción (1.20), donde v_{ijk} es en realidad la forma bilineal en $\mathbb{R}^n$ definida por $v_{ijk}(e_i, e_j) = -v_{ijk}(e_j, e_i) = e_k$ y cero en cualquier otro caso. Los correspondientes pesos $\alpha_{ij}^k \in \mathfrak{t}$, $i < j$, están dados por

$$\pi(\alpha)v_{ijk} = (a_k - a_i - a_j)v_{ijk} = \langle \alpha, \alpha_{ij}^k \rangle v_{ijk}, \quad \forall \alpha = \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix} \in \mathfrak{t}, \tag{1.25}$$

donde $\alpha_{ij}^k = E_{kk} - E_{ii} - E_{jj}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno definido en (1.23). Como es usual, E_{rs} denota la matriz cuyo único coeficiente no nulo es un 1 en el lugar rs. Sean μ_{ij}^k las constantes de estructura de un vector $\mu \in V$ con respecto a la base $\{v_{ijk}\}$:

$$\mu = \sum \mu_{ij}^k v_{ijk}, \qquad \mu_{ij}^k \in \mathbb{R}, \qquad \text{i.e.} \quad \mu(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^n \mu_{ij}^k e_k, \quad i < j.$$

Cada $\mu \in V$ no nulo determina un único elemento $\beta_\mu \in \mathfrak{t}$ dado por

$$\beta_\mu := \mathrm{mcc} \left\{ \alpha_{ij}^k : \mu_{ij}^k \neq 0 \right\},$$

donde $\mathrm{mcc}(X)$ denota el único elemento de norma mínima en la cápsula convexa $\mathrm{CH}(X)$ de un subconjunto $X \subset \mathfrak{t}$. Observar que β_μ es siempre no nulo, pues $\operatorname{tr} \alpha_{ij}^k = -1$ para todo $i < j$ y en consecuencia $\operatorname{tr} \beta_\mu = -1$.

Sea $\mathfrak{t}^+$ la cámara de Weyl de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ dada por

$$\mathfrak{t}^+ = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix} \in \mathfrak{t} : a_1 \leq ... \leq a_n \right\}. \tag{1.26}$$

En [Lau10] se definió una estratificación $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$-invariante para $V = \Lambda^2(\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^n$, adaptando a este contexto la construcción dada en [Kir84, Section 12] para representaciones de grupos reductivos sobre un cuerpo algebraicamente cerrado. Resumimos en el siguiente teorema las principales propiedades de la estratificación, la cual ha sido una de las principales herramientas en nuestro estudio de la estructura de solitones de Ricci homogéneos en el Capítulo 3.

Teorema 1.5.1. [Lau10, LW11] *Existe un subconjunto finito $\mathcal{B} \subset \mathfrak{t}^+$, y para cada $\beta \in \mathcal{B}$ un subconjunto $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$-invariante $\mathcal{S}_\beta \subset V$ (un estrato), de modo que*

$$V \smallsetminus \{0\} = \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}} \mathcal{S}_\beta \qquad \textit{(unión disjunta)},$$

y $\operatorname{tr}\beta = -1$ para todo $\beta \in \mathcal{B}$. Para $\mu \in \mathcal{S}_\beta$ se tiene que:

$$\langle [\beta, D], D\rangle \geq 0 \qquad \forall\, D \in \mathrm{Der}(\mu) \qquad (\textit{con igualdad} \Leftrightarrow [\beta, D] = 0), \tag{1.27}$$

$$\beta + ||\beta||^2 I \quad \textit{es definida positiva para todo } \beta \in \mathcal{B} \textit{ tal que } \mathcal{S}_\beta \cap \mathcal{N} \neq \emptyset, \ y \tag{1.28}$$

$$||\beta|| \leq ||m(\mu)|| \qquad (\textit{con igualdad} \Leftrightarrow m(\mu) \textit{ es conjugado a } \beta). \tag{1.29}$$

Si además $\mu \in \mathcal{S}_\beta$ satisface $\beta_\mu = \beta$ (o equivalentemente, $\min\left\{\langle \beta, \alpha_{ij}^k\rangle : \mu_{ij}^k \neq 0\right\} = ||\beta||^2$), lo cual siempre se cumple para algún $g.\mu$, $g \in \mathrm{O}(n)$, entonces

$$\operatorname{tr}\beta D = 0 \quad \forall\, D \in \mathrm{Der}(\mu), \ y \tag{1.30}$$

$$\left\langle \pi\left(\beta + ||\beta||^2 I\right)\mu, \mu\right\rangle \geq 0 \qquad (\textit{con igualdad} \Leftrightarrow \beta + ||\beta||^2 I \in \mathrm{Der}(\mu)). \tag{1.31}$$

Esta estratificación se basa en resultados de inestabilidad, y está fuertemente relacionada con la aplicación momento en muchas otras formas además de (1.29) (ver [Lau09]).

Capítulo 2

Solitones de Ricci homogéneos

En este capítulo se dará una visión general sobre el estudio de solitones de Ricci homogéneos a la fecha. En la primera sección, presentaremos los resultados conocidos y algunos problemas abiertos en lo que respecta a su clasificación, resumiendo estas cuestiones en la Figura 2.1. En la segunda sección, estudiaremos la evolución de un solitón semi-algebraico a lo largo del flujo de corchetes (ver 1.9), caracterizando a los solitones algebraicos como aquellos cuya evolución no es caótica (ver comentarios después de la Proposición 2.2.5). También veremos algunos ejemplos, y mostraremos cómo se simplifica la evolución de los solitones semi-algebraicos a lo largo del flujo de corchetes cuando uno considera una normalización *razonable*. Finalmente, en la tercera sección obtenemos una caracterización geométrica de los solitones algebraicos, presentada en el Teorema 2.3.2.

Lo expuesto en este capítulo se basa en el contenido del artículo [LL13a], el cual es un trabajo en conjunto con Jorge Lauret.

2.1. Solitones algebraicos y semi-algebraicos

Recordemos que una variedad riemanniana completa (M, g) se dice un *solitón de Ricci* si

$$\mathrm{Rc}(g) = cg + \mathcal{L}_X g, \qquad \text{para algún } c \in \mathbb{R}, \quad X \in \mathfrak{X}(M). \tag{2.1}$$

Esto ocurre si y solamente si la familia monoparamétrica de métricas riemannianas

$$g(t) = (-2ct + 1)\varphi_t^* g, \tag{2.2}$$

es una solución al flujo de Ricci, para algún grupo monoparamétrico φ_t de difeomorfismos de M.

Llamaremos a un solitón de Ricci *homogéneo* si es homogéneo como variedad riemanniana. Como mencionamos en la Sección 1.1, un caso particular de solitón de Ricci son las métricas de Einstein (en este caso, el campo vectorial X es un campo de Killing de (M, g)). Más aún, se puede probar fácilmente que el producto riemanniano de una métrica de Einstein y un espacio euclídeo (i.e. $\mathbb{R}^k$ con la métrica plana) es también un solitón de Ricci. Estos ejemplos son considerados como solitones de Ricci *triviales* en la literatura. Gracias a resultados de Ivey, Naber, Perelman y Petersen-Wylie (ver [Lau11b, Section 2] y las referencias allí citadas), se sabe que todo solitón de Ricci homogéneo no trivial debe ser necesariamente no compacto, de expansión (i.e. $c < 0$), y no gradiente (i.e. X no es el campo gradiente de ninguna función suave en M).

Hasta ahora, todos los ejemplos conocidos de solitones de Ricci homogéneos no triviales son isométricos (pero no necesariamente iguales) a un *solsolitón* simplemente conexo, esto es, una métrica invariante a izquierda g en un grupo de Lie soluble S (se suele llamar a (S,g) *solvariedad*) que satisface

$$\mathrm{Ric}(g) = cI + D, \qquad \text{para algún} \quad c \in \mathbb{R}, \quad D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{s}), \tag{2.3}$$

al identificar la métrica g con un producto interno en el álgebra de Lie $\mathfrak{s}$ de S (ver [Lau11b]), donde $\mathrm{Ric}(g)$ es el operador de Ricci, definido en (1.3). Cuando S es nilpotente, estas métricas se llaman *nilsolitones*, y son precisamente la parte nilpotente de las solvariedades Einstein (ver [Lau09] para más información al respecto). Se prueba en [Lau11b] que, salvo isometría, todo solsolitón puede ser obtenido mediante una simple construcción a partir de un nilsolitón (N, g_1), junto con cualquier álgebra de Lie abeliana de derivaciones simétricas del álgebra de Lie métrica $(\mathfrak{n}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es el producto interno dado por g_1 en $T_eN \equiv \mathfrak{n}$. Se prueba también en dicho artículo que un grupo soluble dado admite a lo sumo una métrica invariante a izquierda que sea solsolitón, salvo isometría, y que todo solitón de Ricci obtenido mediante (2.3) será necesariamente simplemente conexo (ver también [Laf13a, Wil11] en donde se muestran ejemplos y resultados sobre la clasificación de solsolitones).

El siguiente resultado, recientemente probado, completa el estudio de solitones de Ricci invariantes a izquierda en grupos de Lie solubles.

Teorema 2.1.1. [Jab13, Theorem 1.1] *Todo solitón de Ricci (no plano) que admite un grupo de Lie soluble actuando transitivamente por isometrías es isométrico a un solsolitón.*

El concepto de solsolitón puede ser fácilmente generalizado a la clase de todos los espacios homogéneos de la siguiente manera.

Definición 2.1.2. Un espacio homogéneo casi-efectivo $(G/K, g_{\langle\cdot,\cdot\rangle})$ con descomposición reductiva $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ es un *solitón algebraico* si existe $c \in \mathbb{R}$ y $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ tales que $D\mathfrak{k} \subset \mathfrak{k}$ y

$$\mathrm{Ric}(g_{\langle\cdot,\cdot\rangle}) = cI + D_{\mathfrak{p}},$$

donde $D_{\mathfrak{p}} := \mathrm{pr} \circ D|_{\mathfrak{p}}$ y $\mathrm{pr} : \mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p} \longrightarrow \mathfrak{p}$ es la proyección lineal.

Observar que las variedades homogéneas que son de Einstein son también solitones algebraicos, con respecto a cualquier presentación como espacio homogéneo y descomposición reductiva que se elija, tomando simplemente $D = 0$.

El siguiente resultado justifica en cierta manera la definición anterior.

Proposición 2.1.3. *Todo solitón algebraico simplemente conexo $(G/K, g_{\langle\cdot,\cdot\rangle})$ es un solitón de Ricci.*

Observación 2.1.4. La hipótesis de G/K simplemente conexo es necesaria en general, como se ve en el caso de los solsolitones (ver [Lau11b, Remark 4.12]).

Demostración. Podemos asumir que G es simplemente conexo, sin perder la casi-efectividad del espacio homogéneo G/K. Pero G/K es también simplemente conexo por hipótesis, luego tenemos que K debe ser conexo. Como $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ se tiene que $e^{tD} \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ y luego existe $\tilde{\varphi}_t \in \mathrm{Aut}(G)$ tal que $\mathrm{d}\tilde{\varphi}_t|_e = e^{tD}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Usando que K es conexo y que $D\mathfrak{k} \subset \mathfrak{k}$, es fácil ver que $\tilde{\varphi}_t(K) = K$ para todo t. Esto implica que $\tilde{\varphi}_t$ define un difeomorfismo φ_t de $M = G/K$ mediante $\varphi_t(uK) = \tilde{\varphi}_t(u)K$, para cada $u \in G$, cuya derivada en el origen $o = eK$ está dada por $\mathrm{d}\varphi_t|_o = e^{tD_{\mathfrak{p}}}$. Sea X_D el campo vectorial de M definido por el grupo monoparamétrico $\{\varphi_t\} \subset \mathrm{Diff}(M)$, esto es, $X_D(p) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_0 \varphi_t(p)$ para cada $p \in M$. El hecho de que $D_{\mathfrak{p}}$ sea simétrica implica que

$$\mathcal{L}_{X_D} g_{\langle\cdot,\cdot\rangle}(o) = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_0 \varphi_t^* g_{\langle\cdot,\cdot\rangle}(o) = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_0 \langle e^{-tD_{\mathfrak{p}}}\cdot, e^{-tD_{\mathfrak{p}}}\cdot\rangle = -2\langle D_{\mathfrak{p}}\cdot,\cdot\rangle, \tag{2.4}$$

pero como $\operatorname{Ric}(g_{\langle\cdot,\cdot\rangle}) = cI + D_{\mathfrak{p}}$, obtenemos que $\operatorname{Ric}(g_{\langle\cdot,\cdot\rangle})(o) = cg_{\langle\cdot,\cdot\rangle}(o) - \frac{1}{2}\mathcal{L}_{X_D} g_{\langle\cdot,\cdot\rangle}(o)$. Usando que todos los tensores involucrados en la fórmula (2.4) son G-invariantes (recordar que el flujo de X_D está dado por automorfismos de G), vemos que $\operatorname{Ric}(g_{\langle\cdot,\cdot\rangle}) = cg_{\langle\cdot,\cdot\rangle} - \frac{1}{2}\mathcal{L}_{X_D} g_{\langle\cdot,\cdot\rangle}$, con lo cual $g_{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ es un solitón de Ricci (ver (2.1)), como queríamos probar. $\square$

Observación 2.1.5. En la Definición 2.1.2 se tiene necesariamente que $D\mathfrak{k} = 0$. En efecto, vemos que

$$\operatorname{ad} DZ|_{\mathfrak{p}} = [D_{\mathfrak{p}}, \operatorname{ad} Z|_{\mathfrak{p}}] = [\operatorname{Ric}(g_{\langle\cdot,\cdot\rangle}), \operatorname{ad} Z|_{\mathfrak{p}}] = 0, \qquad \forall Z \in \mathfrak{k},$$

y entonces $D\mathfrak{k} = 0$ por casi-efectividad (la última igualdad es gracias al Lema 3.2.5, que será probado mas adelante de manera independiente).

A partir de la prueba de la Proposición 2.1.3, uno puede percibir que podría existir una manera más general de considerar que un solitón de Ricci homogéneo sea 'algebraico', en un sentido en el que la estructura algebraica de alguna de sus presentaciones como espacio homogéneo esté fuertemente involucrada.

Definición 2.1.6. [Jab13, Definition 1.4] Un espacio homogéneo riemanniano $(G/K, g)$ se dice *solitón semi-algebraico* si existe una familia monoparamétrica $\tilde{\varphi}_t \in \operatorname{Aut}(G)$ con $\tilde{\varphi}_t(K) = K$ tal que

$$g(t) = c(t)\varphi_t^* g,$$

es una solución al flujo de Ricci (1.1) empezando en $g(0) = g$, para alguna función de reescalamiento $c(t) > 0$, donde $\varphi_t \in \operatorname{Diff}(G/K)$ es el difeomorfismo determinado por $\tilde{\varphi}_t$.

Como muestra el siguiente ejemplo, un solitón de Ricci homogéneo no siempre es semi-algebraico con respecto a una presentación dada como espacio homogéneo.

Ejemplo 2.1.7. El producto directo $S = S_1 \times S_2$ de un solsolitón no plano y completamente soluble S_1 y una solvariedad plana no abeliana S_2 es un solitón de Ricci que no es semi-algebraico cuando se lo presenta como métrica invariante a izquierda en S (ver [Jab13, Example 1.3]).

Observación 2.1.8. Notar que la noción de solitón semi-algebraico no es un invariante riemanniano; depende fuertemente de la presentación como espacio homogéneo riemanniano que se haya considerado para la variedad homogénea en cuestión. Y más aún, la noción de solitón algebraico no sólo depende de la presentación como espacio homogéneo, sino también a priori de la descomposición reductiva elegida.

El siguiente resultado confirma el protagonismo de los aspectos algebraicos de las variedades homogéneas en relación a la teoría de solitones de Ricci.

Teorema 2.1.9. [Jab13, Proposition 2.2] *Todo solitón de Ricci homogéneo (M, g) es semi-algebraico con respecto a su grupo de isometrías completo $G = \mathrm{I}(M, g)$. Más aún, los $\tilde{\varphi}_t$ pueden ser elegidos de modo que resulten un subgrupo monoparamétrico de* $\operatorname{Aut}(G)$ *y tales que $\tilde{\varphi}_t|_{K_0} = I$, donde K_0 es la componente conexa de la identidad de K.*

Se sigue de (2.4) que si $\big(G/K, g_{\langle\cdot,\cdot\rangle}\big)$ es un solitón semi-algebraico con descomposición reductiva $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, entonces

$$\operatorname{Ric}(g_{\langle\cdot,\cdot\rangle}) = cI + \tfrac{1}{2}\left(D_{\mathfrak{p}} + D_{\mathfrak{p}}^t\right), \qquad \text{para algún} \quad c \in \mathbb{R}, \quad D \in \operatorname{Der}(\mathfrak{g}), \quad D\mathfrak{k} = 0, \tag{2.5}$$

donde, en realidad, $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_0 \tilde{\varphi}_t$ (ver también [Jab13, Proposition 2.3]). Recíprocamente, si se tiene la condición (2.5) para alguna descomposición reductiva, y G/K es simplemente conexo, entonces se puede probar (de la misma manera que en la Proposición 2.1.3) que $\big(G/K, g_{\langle\cdot,\cdot\rangle}\big)$ es en efecto un solitón de Ricci, con $\operatorname{Ric}(g_{\langle\cdot,\cdot\rangle}) = cg_{\langle\cdot,\cdot\rangle} - \frac{1}{2}\mathcal{L}_{X_D} g_{\langle\cdot,\cdot\rangle}$.

Observación 2.1.10. Sea $(G/K, g)$ un solitón semi-algebraico. Si K_0 es la componente conexa de la identidad de K, entonces el cubrimiento $(G/K_0, g)$ es también un solitón semi-algebraico, ya que los automorfismos satisfacen $\tilde{\varphi}_t(K_0) = K_0$ y las métricas son localmente isométricas. De manera similar, $(\widetilde{G}/\widetilde{K}, g)$ es un solitón semi-algebraico, donde $q : \widetilde{G} \longrightarrow G$ es el cubrimiento simplemente conexo y $\widetilde{K} = q^{-1}(K)$, pues cada $\tilde{\varphi}_t$ puede ser levantado a un automorfismo de $\widetilde{G}$ haciendo el correspondiente diagrama conmutativo. El cubrimiento simplemente conexo $(\widetilde{G}/\widetilde{K}_0, g)$ de $(G/K, g)$ es entonces un solitón semi-algebraico también. En todas las variedades recientemente mencionadas, la métrica está canónicamente definida y fue denotada siempre por g.

Ejemplo 2.1.11. El siguiente ejemplo nos fue provisto por M. Jablonski en una comunicación personal, y está dado por la solvariedad de dimensión 6 cuya álgebra de Lie métrica tiene una base ortonormal $\{X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2\}$ con corchete de Lie dado por

$$[X_1, Y_1] = Z_1, \quad [X_1, X_2] = Y_2, \quad [X_1, Y_2] = -X_2, \quad [X_2, Y_2] = Z_2.$$

Es fácil ver que no es un solitón semi-algebraico. En efecto, el operador de Ricci es

$$\mathrm{Ric} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & & & & & \\ & -\frac{1}{2} & & & 0 & \\ & & \frac{1}{2} & & & \\ & & & -\frac{1}{2} & & \\ & 0 & & & -\frac{1}{2} & \\ & & & & & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

y si tuviéramos la condición (2.5), entonces $c = -\frac{1}{2}$ ya que D deja invariante al nilradical

$$\langle Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2 \rangle$$

(pues el nilradical de un álgebra de Lie es un ideal característico, es decir, es preservado por cualquier derivación). Ahora bien, restringida al ideal $\langle X_2, Y_2, Z_2 \rangle$, la parte diagonal de D tiene la forma $\mathrm{diag}(a, b, a + b)$, luego $a = b = 0$ y $-\frac{1}{2} + a + b = \frac{1}{2}$, absurdo. Sin embargo, es fácil ver que esta solvariedad es isométrica al nilsolitón $H_3 \times H_3$, donde H_3 denota el grupo de Heisenberg de dimensión 3. Por lo tanto este es un ejemplo de un solitón de Ricci que no está presentado como solitón semi-algebraico. En la Sección 2.2.3 analizaremos la evolución del flujo de corchetes de esta solvariedad.

Ver [Jab13, §8], en donde se estudian las métricas solitones de Ricci en grupos de Lie solubles. Recordar que tales métricas son isométricas a un solsolitón, pero podrían no ser solsolitones en sí mismas.

La descomposición reductiva especial dada en el Lema 1.2.2 restringe en cierta manera el comportamiento que puede tener una derivación, y esto tiene consecuencias sobre la estructura de los solitones semi-algebraicos (ver también el Lema 3.2.6, en donde se da un resultado más preciso sobre el comportamientos de las derivaciones en este caso).

Lema 2.1.12. *Sea $(G/K, g_{\langle\cdot,\cdot\rangle})$ un espacio homogéneo riemanniano con descomposición reductiva $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, y asumamos que $B(\mathfrak{k}, \mathfrak{p}) = 0$, donde B es la forma de Killing de $\mathfrak{g}$. Si $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ satisface $D\mathfrak{k} \subset \mathfrak{k}$, entonces $D\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}$.*

Demostración. Para $X \in \mathfrak{p}$, $Z = DX$, escribimos $Z = Z_{\mathfrak{k}} + Z_{\mathfrak{p}}$ de acuerdo a la descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. Usando que $D\mathfrak{k} \subset \mathfrak{k}$, $B(\mathfrak{k}, \mathfrak{p}) = 0$ y la invariancia de la forma de Killing por derivaciones $B(D\cdot, \cdot) + B(\cdot, D\cdot) = 0$, obtenemos

$$0 = B(Z, Z_{\mathfrak{k}}) + B(X, DZ_{\mathfrak{k}}) = B(Z_{\mathfrak{k}}, Z_{\mathfrak{k}}),$$

lo cual implica que $Z_{\mathfrak{k}} = 0$ ya que $B|_{\mathfrak{k}\times\mathfrak{k}}$ es definida negativa. $\square$

Corolario 2.1.13. *Sea* $(G/K, g_{\langle\cdot,\cdot\rangle})$ *un solitón semi-algebraico con descomposición reductiva* $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$*, y asumamos además que* $B(\mathfrak{k}, \mathfrak{p}) = 0$*. Entonces,*

$$\operatorname{Ric}(g_{\langle\cdot,\cdot\rangle}) = cI + \tfrac{1}{2}\left(D_{\mathfrak{p}} + D_{\mathfrak{p}}^t\right), \qquad \textit{con} \qquad D = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_{\mathfrak{p}} \end{smallmatrix}\right] \in \operatorname{Der}(\mathfrak{g}).$$

Ejemplo 2.1.14. Podría ocurrir que $\mathfrak{p}$ no sea preservado por la derivación D. Consideremos por ejemplo cualquier nilsolitón $(\mathfrak{n}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, con $\operatorname{Ric}_{\mathfrak{n}} = cI + D_0$, $D_0 \in \operatorname{Der}(\mathfrak{n})$. Asumamos que existe una derivación antisimétrica no nula $B \in \operatorname{Der}(\mathfrak{n}) \cap \mathfrak{so}(\mathfrak{n}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Esto da lugar a una presentación del nilsolitón como espacio homogéneo con isotropía de dimensión uno y descomposición reductiva $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{n}$, donde $\mathfrak{k} = \mathbb{R}B$ y B actúa en $\mathfrak{n}$ de la manera usual.

Ahora supongamos que existe un $X \in \mathfrak{n}$ no nulo, tal que $BX = 0$. Extendamos X a una base ortonormal β de $(\mathfrak{n}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, y sea α el conjunto de vectores obtenido a partir de β, pero cambiando X por $X + B$. Llamemos $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ al subespacio generado por α; vemos que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ es también una descomposición reductiva. Bajo las identificaciones naturales de $\mathfrak{p}$ con $\mathfrak{n}$, las bases α y β resultan ser identificadas, y luego el operador de Ricci $\operatorname{Ric}_{\mathfrak{p}}$ (definido con respecto a la descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$) viene dado por

$$\operatorname{Ric}_{\mathfrak{p}} = cI + D_1, \quad D_1 \in \operatorname{End}(\mathfrak{p}), \quad [D_1]_\alpha = [D_0]_\beta,$$

lo cual implica que sigue siendo un solitón algebraico con respecto a la nueva descomposición reductiva considerada $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. Ahora supongamos que $D_1 = \frac{1}{2}(D_{\mathfrak{p}} + D_{\mathfrak{p}}^t)$, con $D := \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_{\mathfrak{p}} \end{smallmatrix}\right] \in \operatorname{Der}(\mathfrak{g})$. Entonces, usando que $D\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p} \cap \mathfrak{n}$ (de hecho, $D\mathfrak{g} \subset \mathfrak{n}$, pues $\mathfrak{g}$ es soluble y $\mathfrak{n}$ es su nilradical) y que $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{n} \perp (X + B)$, obtenemos

$$\langle D_0 X, X\rangle = \langle D_1(X + B), (X + B)\rangle = \langle D(X + B), (X + B)\rangle = 0,$$

lo cual contradice el hecho de que D_0 es definida positiva (ver [Lau09, Section 2]). De esta manera, la nueva descomposición reductiva no permite presentar a este nilsolitón como solitón semi-algebraico con derivación que deje $\mathfrak{p}$ invariante.

La evolución del flujo de corchetes de este ejemplo, en el caso en que $\mathfrak{n}$ es el álgebra de Lie de Heisenberg de dimensión 3, será estudiada en la Sección 2.2.4.

En el caso de nilvariedades, o más precisamente cuando G es nilpotente, simplemente conexo y K es trivial, la condición (2.5) es equivalente a que $(G, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ sea un nilsolitón, ya que D^t también resulta ser una derivación. En efecto, si $\operatorname{Ric}(\langle\cdot,\cdot\rangle) = cI + \frac{1}{2}(D + D^t)$, entonces usando la fórmula (19) en [Lau13] se obtiene que

$$0 = \operatorname{tr} \operatorname{Ric}(\langle\cdot,\cdot\rangle)[D, \operatorname{Ric}(\langle\cdot,\cdot\rangle)] = \tfrac{1}{2} \operatorname{tr} \operatorname{Ric}(\langle\cdot,\cdot\rangle)[D, D^t] = \tfrac{1}{8}\langle \pi(D^t)[\cdot,\cdot], \pi(D^t)[\cdot,\cdot]\rangle,$$

y entonces $D^t \in \operatorname{Der}(\mathfrak{g})$.

Se prueba en [Jab13, Theorem 1.6] que todo solitón de Ricci homogéneo que admite un grupo transitivo de isometrías semisimple debe ser necesariamente Einstein.

Hasta donde sabemos, se puede resumir el conocimiento actual sobre solitones de Ricci homogéneos (no triviales) mediante el cuadro de la Figura 2.1. Recordar que hasta ahora los únicos ejemplos conocidos son todos isométricos a solsolitones, i.e. solitones algebraicos invariantes a izquierda en grupos de Lie solubles.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{Nilsol.}} & \subsetneq & \boxed{\text{Solsol.}} & \subset & \boxed{\text{S. algebraico}} \arrow[ll, bend left, "?"] & \subset & \boxed{\text{S. semi-alg.}} \arrow[ll, bend left, "?"] & \subset & \boxed{\text{SR homog.}} \arrow[llllll, bend right, "M \text{ solvariedad}"'] \arrow[l, bend left, "G=\mathrm{I}(M,g)"] \arrow[ddllll, bend left, "G \text{ semisimple}"] \\
 & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} & & & & \\
 & & \boxed{\text{Solv. Einstein}} & \subset & \boxed{\text{Einstein homog.}} \arrow[ll, bend left, "\text{Conj. Alekseevskii } (R<0)"] & & & &
\end{tikzcd}$$

Figura 2.1: Solitones de Ricci homogéneos

2.2. El flujo de corchetes de solitones semi-algebraicos

En esta sección estudiaremos cómo evolucionan los solitones semi-algebraicos a lo largo del flujo de corchetes. Veremos que los solitones algebraicos son los únicos posibles límites, hacia adelante y hacia atrás en el tiempo, para cualquier solución al flujo de corchetes normalizado. Este hecho, junto con la equivalencia entre el flujo de corchetes y el flujo de Ricci (ver Teorema 1.4.3), sugieren que los solitones algebraicos podrían llegar a ser los únicos ejemplos posibles de solitones de Ricci homogéneos (salvo isometría).

Proposición 2.2.1. *Sea $\mu^r(t)$ una solución al flujo de corchetes normalizado (ver* (1.15) *o* (1.16)*).*

(i) Si μ_0 es un punto fijo (i.e. $\mu^r(t) \equiv \mu_0$), entonces $(G_{\mu_0}/K_{\mu_0}, g_{\mu_0})$ es un solitón algebraico, con $\mathrm{Ric}_{\mu_0} = cI + D_{\mathfrak{p}}$, para algún $c \in \mathbb{R}$, y tal que $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_{\mathfrak{p}} \end{smallmatrix}\right] \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g}, \mu_0)$.

(ii) Si $\mu^r(t) \to \lambda \in \mathcal{H}_{q,n}$ cuando $t \to \omega^r$ (resp. $t \to \alpha^r$), entonces $\omega^r = \infty$ (resp. $\alpha^r = -\infty$) y $(G_\lambda/K_\lambda, g_\lambda)$ es un solitón algebraico como en el ítem (i).

(iii) Supongamos que $\mu^r(t) \to \lambda \in \mathcal{H}_{q,n}$ cuando $t \to \pm\infty$, con $\lambda|_{\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}} \neq 0$. Entonces el límite $\tilde{\lambda}$ de cualquier otra solución $\tilde{r}$-normalizada del flujo de corchetes necesariamente satisface que $\tilde{\lambda} = c \cdot \lambda$ para algún $c \geq 0$. En particular, $\tilde{\lambda}$ es o bien plana ($c = 0$), u homotética a λ ($c > 0$).

Demostración. Sea λ un punto fijo de algún flujo de corchetes normalizado de la forma (1.15) (i.e. $\mu^r(t) \equiv \mu_0 = \lambda$). Así,

$$-\pi\left(\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Ric}_\lambda + r(0)I \end{smallmatrix}\right]\right)\lambda = 0,$$

de lo cual deducimos que $(G_\lambda/K_\lambda, g_\lambda)$ es un solitón algebraico con $c = -r(0)$ y $D = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Ric}_\lambda + r(0)I \end{smallmatrix}\right]$ (ver Definición 2.1.2). Esto prueba el ítem (i), y también el (ii), puesto que todo límite debe necesariamente ser un punto fijo del sistema.

Probemos entonces (iii). Se tiene por [Lau13, Lemma 3.9] que ambas reparametrizaciones del tiempo $\tau(t)$ y $\tilde{\tau}(t)$ convergen a ω (resp. α) cuando $t \to \infty$ (resp. $-\infty$); ver (1.17). Proyectamos las curvas determinadas por las dos soluciones a los sendos flujos de corchetes normalizados al cociente $V_{q+n}/\mathbb{R}_{>0}$, donde la acción de $\mathbb{R}_{>0}$ está dada por reescalamiento (1.6), y denotamos por $[v]$ la clase de equivalencia de un vector $v \in V_{q+n}$. Por (1.17), obtenemos que $[\mu(s)]$ converge tanto a $[\lambda]$ como a $[\tilde{\lambda}]$ cuando $s \to \omega$ (resp. α), en la topología cociente. Como los pares de puntos que no pueden ser separados por abiertos disjuntos en $V_{q+n}/\mathbb{R}_{>0}$ son todos de la forma $[v]$, $[0 \cdot v]$ para algún $v \in V_{q+n}$, entonces o bien $\tilde{\lambda} = 0 \cdot \lambda$ o $[\tilde{\lambda}] = [\lambda]$, como queríamos demostrar. $\square$

Haciendo una aplicación del Teorema 1.4.3, probaremos a continuación que las soluciones al flujo de corchetes y al flujo de Ricci (sin normalizar) tienen una forma muy simple en el caso de solitones semi-algebraicos y algebraicos.

Proposición 2.2.2. *Sea $(G_{\mu_0}/K_{\mu_0}, g_{\mu_0})$, $\mu_0 \in \mathcal{H}_{q,n}$, un espacio homogéneo riemanniano que es un solitón semi-algebraico, digamos con*

$$\operatorname{Ric}_{\mu_0} = cI + \tfrac{1}{2}(D_{\mathfrak{p}} + D_{\mathfrak{p}}^t), \qquad c \in \mathbb{R}, \qquad D := \left[\begin{smallmatrix} 0 & * \\ 0 & D_{\mathfrak{p}} \end{smallmatrix}\right] \in \operatorname{Der}(\mathfrak{g}, \mu_0).$$

Entonces la solución al flujo de corchetes (1.9) *está dada por*

$$\mu(t) = (-2ct+1)^{-1/2} \cdot \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & e^{s(t)A}e^{-s(t)D_{\mathfrak{p}}} \end{bmatrix} \cdot \mu_0, \qquad t \in \begin{cases} (-\infty, \frac{1}{2c}), & c > 0, \\ (\frac{1}{2c}, \infty), & c < 0, \\ (-\infty, \infty), & c = 0, \end{cases} \tag{2.6}$$

donde $A = \frac{1}{2}(D_{\mathfrak{p}} - D_{\mathfrak{p}}^t)$ es la parte antisimétrica de $D_{\mathfrak{p}}$, y $s(t) = -\frac{1}{2c}\log(-2ct+1)$ (para $c = 0$, $s(t) \equiv 1$).

Recíprocamente, si el flujo de corchetes sin normalizar $\mu(t)$ evoluciona como en (2.6)*, entonces $(G_{\mu_0}/K_{\mu_0}, g_{\mu_0})$ es un solitón semi-algebraico. La derivación correspondiente $\tilde{D}$ verifica que $A = \frac{1}{2}(\tilde{D}_{\mathfrak{p}} - \tilde{D}_{\mathfrak{p}}^t)$, aunque es posible que $\tilde{D}_{\mathfrak{p}} \neq D_{\mathfrak{p}}$.*

Demostración. Usando que $\operatorname{Ric}_{\mu_0} = cI + \frac{1}{2}(D_{\mathfrak{p}} + D_{\mathfrak{p}}^t)$, es fácil verificar que

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_t = (-2ct+1)\langle e^{-s(t)D_{\mathfrak{p}}}\cdot, e^{-s(t)D_{\mathfrak{p}}}\cdot\rangle,$$

es una solución al flujo de Ricci (1.8). El operador de Ricci de $\langle\cdot,\cdot\rangle_t$ estará dado entonces por

$$\operatorname{Ric}(\langle\cdot,\cdot\rangle_t) = (-2ct+1)^{-1}e^{s(t)D_{\mathfrak{p}}}\operatorname{Ric}(\langle\cdot,\cdot\rangle)e^{-s(t)D_{\mathfrak{p}}} = (-2ct+1)^{-1}(cI + D_{\mathfrak{p}} - e^{s(t)D_{\mathfrak{p}}}Ae^{-s(t)D_{\mathfrak{p}}})$$

(recordar que $\operatorname{Ric}(\langle\cdot,\cdot\rangle) = \operatorname{Ric}_{\mu_0} = cI + D_{\mathfrak{p}} - A$). Ahora resolvemos la ecuación diferencial dada en el ítem (i) del Teorema 1.4.3, y obtenemos $h(t) = (-2ct+1)^{1/2}e^{s(t)A}e^{-s(t)D_{\mathfrak{p}}}$. Luego usando el ítem (iv) de ese mismo teorema se obtiene la fórmula buscada para $\mu(t)$.

La recíproca se obtiene calculando $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu(t)\big|_0$, y usando que coincide con $-\pi\left(\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{Ric}_{\mu_0} \end{smallmatrix}\right]\right)\mu_0$ por definición del flujo de corchetes. □

Observación 2.2.3. Si la derivación D tiene la forma especial $D = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_{\mathfrak{p}} \end{smallmatrix}\right]$ (i.e. $D\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}$, o $* = 0$), lo cual se cumple en el caso en que la descomposición reductiva satisface $B_{\mu_0}(\mathfrak{k}, \mathfrak{p}) = 0$ para la forma de Killing B_{μ_0} de $(\mathfrak{g}, \mu_0)$ (ver Corolario 2.1.13), entonces $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & e^{-s(t)D_{\mathfrak{p}}} \end{bmatrix} \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{g}, \mu_0)$, y luego la fórmula para la evolución del flujo de corchetes sin normalizar está dada por

$$\mu(t) = (-2ct+1)^{-1/2} \cdot \left(\left[\begin{smallmatrix} I & 0 \\ 0 & e^{s(t)A} \end{smallmatrix}\right] \cdot \mu_0\right). \tag{2.7}$$

El siguiente resultado caracteriza a los solitones algebraicos con $D\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}$ en términos de su evolución a lo largo del flujo de corchetes.

Proposición 2.2.4. *Dado un espacio homogéneo $(G_{\mu_0}/K_{\mu_0}, g_{\mu_0})$, $\mu_0 \in \mathcal{H}_{q,n}$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $(G_{\mu_0}/K_{\mu_0}, g_{\mu_0})$ es un solitón algebraico, con

$$\operatorname{Ric}_{\mu_0} = cI + D_{\mathfrak{p}}, \qquad c \in \mathbb{R}, \qquad D = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_{\mathfrak{p}} \end{smallmatrix}\right] \in \operatorname{Der}(\mathfrak{g}, \mu_0).$$

(ii) La solución al flujo de corchetes sin normalizar está dada por

$$\mu(t) = (-2ct+1)^{-1/2} \cdot \mu_0,$$

o, equivalentemente,

$$\mu_{\mathfrak{k}}(t) = (-2ct+1)^{-1}\mu_{\mathfrak{k}}(0), \quad \mu_{\mathfrak{p}}(t) = (-2ct+1)^{-1/2}\mu_{\mathfrak{p}}(0), \quad t \in \begin{cases} (-\infty, \frac{1}{2c}), & c>0, \\ (\frac{1}{2c}, \infty), & c<0, \\ (-\infty,\infty), & c=0. \end{cases}$$

(iii) Las soluciones a las ecuaciones del flujo de Ricci sin normalizar (1.1) *y* (1.8) *están dadas mediante*

$$g_{ij}(t) = \langle X_i, X_j\rangle_t = (-2ct+1)^{r_i/c}\delta_{ij},$$

donde $\{X_1,\dots,X_n\}$ *es una base ortonormal de* $(\mathfrak{p}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *compuesta por autovectores (o campos de Killing) para* $\operatorname{Ric}_{\mu_0}$ *con autovalores* $\{r_1,\dots,r_n\}$.

Demostración. La equivalencia entre los ítems (i) y (ii) se sigue inmediatamente de la Proposición 2.2.2, usando la Observación 2.2.3 y el hecho de que en este caso tenemos que $A=0$ por definición de solitón algebraico. Para probar que los ítems (ii) y (iii) son equivalentes, podemos usar el Teorema 1.4.3, ya que en ambos casos resulta que la familia $h(t)$ está dada por

$$h(t) = e^{a(t)\operatorname{Ric}_{\mu_0}}, \qquad a(t) = \tfrac{1}{2c}\log(-2ct+1),$$

y esto concluye la prueba de la proposición. □

El ítem (iii) de la proposición anterior generaliza resultados sobre el comportamiento asintótico de nilsolitones y solitones algebraicos en grupos de Lie, obtenidos respectivamente en [Pay10, Wil13] y [LW13]. Recordemos que $c<0$ para cualquier solitón de Ricci homogéneo no trivial.

Se deduce de la Proposición 2.2.4, (ii) que si $\mu_{\mathfrak{k}}=0$ (por ejemplo, cuando $q=0$) o $\mu_{\mathfrak{p}}=0$, entonces la trayectoria del solitón algebraico $\mu(t)$ está contenida en el segmento de línea recta que une μ_0 con la métrica plana λ dada por $\lambda|_{\mathfrak{k}\times\mathfrak{g}} = \mu_0|_{\mathfrak{k}\times\mathfrak{g}}$, $\lambda|_{\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}}=0$ (ver por ejemplo los solitones algebraicos $S^2\times\mathbb{R}$, $H^2\times\mathbb{R}$ y Nil en [Lau13, Figure 1], y los denotados por G_{bi}, $E2$, $H\times\mathbb{R}^m$ y N en [Lau13, Figure 5]). En cambio, si $\mu_{\mathfrak{k}},\mu_{\mathfrak{p}}\neq 0$, entonces la solución al flujo de corchetes sin normalizar $\mu(t)$ se mueve en la media parábola $\{s^2\mu_{\mathfrak{k}} + s\mu_{\mathfrak{p}} : s>0\}$ que une μ_0 con el corchete plano λ (ver por ejemplo las métricas redondas en S^3, en [Lau13, Figure 1]). En cualquier caso, la dirección para la cual se mueven los corchetes $\mu(t)$ está determinada por el signo de c.

Estudiaremos ahora la evolución de un solitón semi-algebraico a lo largo del flujo de corchetes normalizado. Sea $F:\mathcal{H}_{q,n}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función invariante por isometrías (i.e. $F(\mu)=F(\lambda)$ para todo par $\mu,\lambda\in\mathcal{H}_{q,n}$ de espacios homogéneos isométricos). En particular, F es $\left[\begin{smallmatrix}\mathrm{GL}_q(\mathbb{R}) & 0\\ 0 & \mathrm{O}(n)\end{smallmatrix}\right]$-invariante en relación a la acción definida en (1.20). Supongamos además que F es *homogénea*, en el sentido de que existe $d\neq 0$ tal que $F(c\cdot\mu)=c^dF(\mu)$ para cualquier $c\in\mathbb{R}$, $\mu\in\mathcal{H}_{q,n}$. Algunos ejemplos de funciones invariantes por isometría y homogéneas son la curvatura escalar $R(\mu)$, así como también cualquier otra traza de una potencia del operador de Ricci $\operatorname{tr}\operatorname{Ric}_\mu^k$, y $\|\nabla^k\operatorname{Rm}_\mu\|$, donde ∇_μ denota la conexión de Levi-Civita y Rm_μ el tensor de curvatura de Riemann.

Consideremos el flujo de corchetes normalizado $\mu^r(t)$ como en (1.15), tal que $F(\mu^r(t))\equiv F(\mu_0)$, y expresémoslo en términos del flujo de corchetes sin normalizar mediante $\mu^r(t)=c(t)\mu(\tau(t))$

(ver (1.17)). Si $\mu_0 \in \mathcal{H}_{q,n}$ es un solitón de Ricci con constante cosmológica c_0 (ver (2.1)), entonces gracias al Teorema 1.4.3 y (2.2) tenemos que

$$F(\mu_0) = c(t)^d(-2c_0\tau(t)+1)^{-d/2}F(\mu_0), \qquad \forall t.$$

Si asumimos que $F(\mu_0) \neq 0$, obtenemos $c(t) = (-2c_0\tau(t)+1)^{1/2}$ y luego $c'(t) = -c_0c(t)$, de lo cual se deduce que $r(t) \equiv -c_0$ (recordar que, por (1.17), $c' = rc$). La evolución del flujo de corchetes normalizado de manera que F se mantenga constante, y comenzando en un solitón de Ricci μ_0, está dada entonces por

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu^r = -\pi\left(\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{Ric}_{\mu^r}\end{smallmatrix}\right]\right)\mu^r - c_0\mu^r, \qquad \mu(0) = \mu_0. \tag{2.8}$$

Mas aún, se ve que $c(t) = e^{-c_0t}$ y $\tau(t) = \frac{1-e^{-2c_0t}}{2c_0}$ (o $\tau(t) = t$ si $c_0 = 0$), lo cual junto con la Proposición 2.2.2 implican el siguiente resultado.

Proposición 2.2.5. *Sea $(G_{\mu_0}/K_{\mu_0}, g_{\mu_0})$, $\mu_0 \in \mathcal{H}_{q,n}$, un espacio homogéneo que es un solitón semi-algebraico, digamos con*

$$\operatorname{Ric}_{\mu_0} = cI + \tfrac{1}{2}(D_{\mathfrak{p}} + D_{\mathfrak{p}}^t), \qquad c \in \mathbb{R}, \qquad D := \left[\begin{smallmatrix} 0 & * \\ 0 & D_{\mathfrak{p}}\end{smallmatrix}\right] \in \operatorname{Der}(\mathfrak{g}, \mu_0).$$

Sea $F : \mathcal{H}_{q,n} \longrightarrow \mathbb{R}$ cualquier función diferenciable, invariante por isometrías y homogénea, y tal que $F(\mu_0) \neq 0$. Entonces el flujo de corchetes normalizado de manera que $F(\mu^r(t)) \equiv F(\mu_0)$ y comenzando en μ_0 está dado por

$$\mu^r(t) = \left[\begin{smallmatrix} I & 0 \\ 0 & e^{tA}e^{-tD_{\mathfrak{p}}}\end{smallmatrix}\right] \cdot \mu_0, \qquad t \in (-\infty, \infty), \tag{2.9}$$

donde $A = \frac{1}{2}(D_{\mathfrak{p}} - D_{\mathfrak{p}}^t)$.

Usando lo mencionado en la Observación 2.2.3, si la derivación D satisface $D\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}$, y sólo suponemos que $F : \mathcal{H}_{q,n} \longrightarrow \mathbb{R}$ sea homogénea y $\left[\begin{smallmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathrm{O}(n)\end{smallmatrix}\right]$-invariante, entonces la evolución se simplifica de la siguiente manera:

$$\mu^r(t) = \left[\begin{smallmatrix} I & 0 \\ 0 & e^{tA}\end{smallmatrix}\right] \cdot \mu_0. \tag{2.10}$$

Un ejemplo de F con dichas propiedades, y que no es invariante por isometrías, es $F(\mu) = \|\mu\|$ (ver Sección 2.2.1).

Como la órbita $\left[\begin{smallmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathrm{O}(n)\end{smallmatrix}\right] \cdot \mu_0$ es compacta, la solución $\mu^r(t)$ en (2.10) resulta acotada, y los límites de subsucesiones $\mu^r(t_k)$ deben ser todos isomorfos a μ_0 (comparar con el Ejemplo 2.2.3).

Por otro lado, recordemos que A es antisimétrica, con lo cual sus autovalores son imaginarios puros. Por el Teorema de Kronecker, existe una sucesión t_k, con $t_k \to \infty$, tal que $e^{t_kA} \to I$. Esto implica que $\mu^r(t_0 + t_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mu^r(t_0)$ para todo $t_0 \in \mathbb{R}$, y consecuentemente toda la trayectoria de la solución está contenida en el ω-límite. La ausencia de caos en este sentido para el flujo de corchetes, lo cual es aún una pregunta abierta, implicaría entonces que $\mu^r(t) \equiv \mu_0$, o sea que A sería una derivación de μ_0, y tendríamos que todo solitón semi-algebraico sería algebraico.

2.2.1. Normalizando por la norma del corchete

Recordar que tenemos en V_{q+n} un producto interno, definido en la Observación 1.3.2. Observar que si lo elegimos de modo que sea $\operatorname{Ad}(K_\mu)$-invariante, para cierta $\mu \in V_{q+n}$, entonces seguirá siendo

$\mathrm{Ad}(K_\lambda)$-invariante para cualquier $\lambda \in V_{q+n}$ que coincida con μ en $\mathfrak{k} \times \mathfrak{k}$ (por ejemplo, esa condición se mantiene a lo largo de cualquier solución al flujo de corchetes normalizado).

Normalizar el flujo de corchetes (1.15) de manera que la norma $\|\mu^r(t)\|$ de cualquier solución resulte constante a lo largo del tiempo produce una consecuencia muy interesante: siempre existen subsucesiones convergentes $\mu^r(t_k) \to \lambda$, por compacidad. Como $\mu^r(t)|_{\mathfrak{k}\times\mathfrak{g}} \equiv \mu_0|_{\mathfrak{k}\times\mathfrak{g}}$ para cualquier solución al flujo de corchetes, sólo necesitamos mantener $\|\mu^r(t)|_{\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}}\|^2 = \|\mu^r_\mathfrak{k}\|^2 + \|\mu^r_\mathfrak{p}\|^2$ constante. Usando que

$$\|c \cdot \mu^r|_{\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}}\|^2 = c^4\|\mu^r_\mathfrak{k}\|^2 + c^2\|\mu^r_\mathfrak{p}\|^2,$$

se llega a que $\|c \cdot \mu^r|_{\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}}\|^2 = 1$ si y sólo si

$$c^2(t) := \frac{-\|\mu^r_\mathfrak{p}\|^2 + \sqrt{\|\mu^r_\mathfrak{p}\|^4 + 4\|\mu^r_\mathfrak{k}\|^2}}{2\|\mu^r_\mathfrak{k}\|^2}, \qquad \mu^r_\mathfrak{k} \neq 0, \tag{2.11}$$

y $c(t) = \|\mu^r_\mathfrak{p}\|^{-1}$ para $\mu^r_\mathfrak{k} = 0$. Es fácil ver que la función de normalización correspondiente r (ver la ecuación (1.15)) debe ser

$$r = \frac{4\,\mathrm{tr}(\mathrm{Ric}\,\mathrm{M}) - \langle \mu^r_\mathfrak{k}, \mu^r_\mathfrak{k}(\mathrm{Ric}\,\cdot,\cdot) + \mu^r_\mathfrak{k}(\cdot,\mathrm{Ric}\,\cdot)\rangle}{2\|\mu^r_\mathfrak{k}\|^2 + \|\mu^r_\mathfrak{p}\|^2},$$

donde M es una parte del operador de Ricci relacionada con cierta aplicación momento, ver (3.10) y (3.12). Una manera alternativa de garantizar la existencia de subsucesiones convergentes es tomando

$$c(t) := \frac{1}{\|\mu^r_\mathfrak{k}\|^{1/2} + \|\mu^r_\mathfrak{p}\|}, \tag{2.12}$$

ya que se tiene que $0 < \beta \leq \|c \cdot \mu^r|_{\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}}\|^2 \leq 2$, donde $\beta = (1-\alpha)^2 + \alpha^4 \approx 0{,}289$ y α es la raíz real de $2x^3 + x - 1$.

Una vez que hemos obtenido una subsucesión convergente $\mu^r(t_k) \to \lambda$, tenemos que $\lambda|_{\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}} \neq 0$ siempre y cuando $\mu_0|_{\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}} \neq 0$, sin embargo no sabemos si necesariamente se tiene que $\lambda \in \mathcal{H}_{q,n}$. La única condición en la definición de $\mathcal{H}_{q,n}$ que podría llegar a fallar es (h2), esto es, K_λ podría no ser cerrado en G_λ. Esto daría lugar a un colapso con geometría acotada al espacio homogéneo de dimensión más baja $G_\lambda/\overline{K_\lambda}$ (ver [Lau12, Section 6.5]). También notamos que podría suceder que λ perteneciera a $\mathcal{H}_{q,n}$ y a pesar de eso ser plano (ver los ejemplos en las Secciones 2.2.3 y 2.2.4).

Como $F(\mu) = \|\mu\|$ es homogénea y $\left[\begin{smallmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathrm{O}(n)\end{smallmatrix}\right]$-invariante, la fórmula (2.10) se aplica para la evolución de solitones semi-algebraicos.

2.2.2. Normalizando por la curvatura escalar

Si comenzamos el flujo de Ricci en un solitón de Ricci (M, g), la solución $g(t)$ es homotética (i.e. isométrica salvo reescalamiento) a g para cada t en su intervalo de definición. De esta manera, en el caso homogéneo, normalizar de modo que la curvatura escalar sea constante da lugar a una solución $g(t)$ que es isométrica a g para cada t.

Es sabido que la curvatura escalar $R = R(g(t))$ de cualquier solución al flujo de Ricci $g(t)$ evoluciona mediante la ecuación

$$\tfrac{\partial}{\partial t}R = \Delta(R) + 2\|\,\mathrm{Rc}\,\|^2,$$

donde Δ es el operador de Laplace de la variedad riemanniana $(M, g(t))$ (ver por ejemplo [CK04, Lemma 6.7]). Como en el caso homogéneo la curvatura escalar R es constante en M (es decir, no depende del punto de la variedad en la cual se la calcule), obtenemos la siguiente ecuación diferencial ordinaria para R:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R = 2\|\operatorname{Rc}\|^2. \tag{2.13}$$

Se puede probar este hecho de manera alternativa aplicando el Teorema 1.4.3 (ver [Lau13, Proposition 3.8, (vi)]).

Lema 2.2.6. *Sea (M,g) un solitón de Ricci con curvatura escalar $R(g)$ constante en M (no necesariamente homogéneo), digamos con $\operatorname{Rc}(g) = cg + \mathcal{L}_X g$, y operador de Ricci $\operatorname{Ric}(g)$. Entonces,*

$$cR(g) = \operatorname{tr}\operatorname{Ric}(g)^2.$$

Demostración. Sea $g(t)$ la solución al flujo de Ricci sin normalizar que empieza en g. Se sigue de (2.2) y (2.13) que

$$\begin{aligned}2(-2ct+1)^{-2}\operatorname{tr}\operatorname{Ric}(g)^2 &= 2\operatorname{tr}\operatorname{Ric}(g(t))^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R(g(t))\\ &= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-2ct+1)^{-1}R(g) = 2c(-2ct+1)^{-2}R(g),\end{aligned}$$

con lo cual queda demostrado el lema. □

Usando el hecho de que una variedad homogénea es plana si y sólo si es Ricci-plana (i.e. $\operatorname{Ric}(g) = 0$; ver [AK75]), el lema anterior implica que un solitón de Ricci homogéneo (M,g) es plano cuando $c = 0$, o $R(g) = 0$. Más aún, si (M,g) no es plano, entonces c y $R(g)$ son ambos no nulos y tienen el mismo signo.

Si consideramos el flujo de corchetes normalizado en este caso, tenemos que el límite λ de cualquier subsucesión $\mu^r(t_k) \to \lambda$ con $t_k \to \pm\infty$, es automáticamente no plano (si μ_0 no era plano), ya que $R(\lambda) = R(\mu_0)$. Desafortunadamente, podría ocurrir que la solución diverja sin tener ninguna subsucesión convergente. Existen ejemplos de este comportamiento en el caso $R < 0$ presentes en [Lau13, Secciones 3.4 and 4]; para obtener ejemplos con $R > 0$ podemos considerar un producto riemanniano $E \times S$ de una variedad homogénea compacta y Einstein E con un grupo de Lie soluble no abeliano pero con métrica invariante a izquierda plana S.

Como $F(\mu) = R(\mu)$ es una función invariante por isometría y homogénea, podemos aplicar la Proposición 2.2.5 y (2.10) para estudiar la evolución de solitones semi-algebraicos bajo esta normalización. En este caso, estos resultados se pueden deducir de manera mucho más directa, usando [Lau13, Example 3.13] y el Lema 2.2.6.

2.2.3. Ejemplo de la evolución de un solitón no semi-algebraico

En esta sección nuestro objetivo es estudiar la evolución del flujo de corchetes de un solitón de Ricci homogéneo que no es un solitón semi-algebraico, el cual fue presentado en el Ejemplo 2.1.11. Fijamos entonces una base ortonormal $\{X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2\}$ de $\mathfrak{g}$ y consideramos $\mu = \mu_{a,b,c} \in \mathcal{H}_{0,6} = \mathcal{L}_6$ definidos mediante

$$\mu(X_1,Y_1) = aZ_1, \quad \mu(X_1,X_2) = bY_2, \quad \mu(X_1,Y_2) = -bX_2, \quad \mu(X_2,Y_2) = cZ_2.$$

Es fácil ver que para cualesquiera $a, c \neq 0$, la solvariedad $(G_\mu, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es isométrica al nilsolitón $H_3 \times H_3$, donde H_3 denota el grupo de Heisenberg de dimensión 3. Haciendo los cálculos correspondientes obtenemos que el flujo de corchetes sin normalizar es equivalente al sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$a' = -\tfrac{3}{2}a^3, \qquad b' = -\tfrac{1}{2}a^2 b, \qquad c' = -\tfrac{3}{2}c^3.$$

Resolviendo las ecuaciones para $a(0) = b(0) = c(0) = 1$ obtenemos

$$a = b^3, \qquad b(t) = (3t+1)^{-\frac{1}{6}}, \qquad c = b^3, \qquad t \in (-\tfrac{1}{3}, \infty).$$

Luego, $\mu(t) \longrightarrow 0$ (plano) cuando $t \to \infty$, y $\mu(t) \longrightarrow \infty$ cuando $t \to -\frac{1}{3}$.

Como $\|\mu\|^2 = 2(a^2 + 2b^2 + c^2) = 4b^2(b^4+1)$ vemos que

$$\begin{aligned} \frac{a}{\|\mu\|} &= \frac{b^2}{2(b^4+1)^{1/2}} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \Big(\underset{t\to -\frac{1}{3}}{\longrightarrow} \tfrac{1}{2} \Big), \\ \frac{b}{\|\mu\|} &= \frac{1}{2(b^4+1)^{1/2}} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \tfrac{1}{2}, \qquad \Big(\underset{t\to -\frac{1}{3}}{\longrightarrow} 0 \Big). \end{aligned}$$

Esto nos dice que, normalizando por la norma del corchete, $\frac{\mu}{\|\mu\|} \longrightarrow \mu_{0,\frac{1}{2},0}$ cuando $t \to \infty$, una solvariedad no abeliana plana, y hacia atrás, cuando $t \to -\frac{1}{3}$, tenemos que $\frac{\mu}{\|\mu\|} \longrightarrow \mu_{\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}}$, el nilsolitón $H_3 \times H_3$.

Sobre la normalización por curvatura escalar, usando que $R = R(\mu) = -\frac{1}{2}(a^2 + b^2) = -b^6$ obtenemos

$$\frac{a}{|R|^{1/2}} \equiv 1, \qquad \frac{b}{|R|^{1/2}} = \frac{1}{b^2} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \qquad \Big(\underset{t\to -\frac{1}{3}}{\longrightarrow} 0 \Big),$$

y luego $\mu/|R|^{1/2} \longrightarrow \infty$ cuando $t \to \infty$. Hacia atrás, cuando $t \to -\frac{1}{3}$, se tiene nuevamente que $\frac{\mu}{|R|^{1/2}} \longrightarrow \mu_{1,0,1}$, el nilsolitón $H_3 \times H_3$.

Observamos que todos los límites obtenidos en este ejemplo son no isomorfos al punto de partida $\mu_0 = \mu_{1,1,1}$, y que $\mu(t)$ incluso diverge a infinito en uno de los casos. Esto está en claro contraste con la evolución de solitones semi-algebraicos descrita en (2.10).

2.2.4. Ejemplo de la evolución de un solitón algebraico con $D\mathfrak{p} \not\subseteq \mathfrak{p}$

Gracias al ítem (i) de la Proposición 2.2.1, los puntos fijos del flujo de corchetes normalizado son precisamente los solitones algebraicos con $D\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}$. Es natural entonces preguntarse cómo evoluciona un solitón algebraico con $D\mathfrak{p} \not\subseteq \mathfrak{p}$ a lo largo del flujo, y esta es la pregunta que analizaremos en esta sección. Para eso, estudiaremos la evolución del flujo de corchetes del solitón algebraico presentado en el Ejemplo 2.1.14, en el caso específico en que $\mathfrak{n} = \mathfrak{h}_3$ es el álgebra de Lie de Heisenberg de dimensión 3.

Fijemos una base $\{Z, X_1, X_2, X_3\}$ de $\mathfrak{g}$ y consideremos $\mu = \mu_{a,b,c} \in \mathcal{H}_{1,3}$ definidos por

$$\begin{cases} \mu(Z, X_1) = X_2, & \mu(X_1, X_2) = aX_3 + bZ, \quad \mu(X_3, X_1) = cX_2, \\ \mu(Z, X_2) = -X_1 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \mu(X_2, X_3) = cX_1, \end{cases}$$

donde $\mathfrak{k} = \mathbb{R}Z$ y $\{X_1, X_2, X_3\}$ es una base ortonormal de $(\mathfrak{p}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Para $(a,b,c) = (1,-1,1)$ obtenemos el nilsolitón H_3 presentado con una descomposición reductiva modificada, como en el Ejemplo 2.1.14. El flujo de corchetes sin normalizar para $\mu_{a,b,c}$ es equivalente al siguiente sistema

$$a' = (-\tfrac{3}{2}a^2 + 2b + 2ac)a, \qquad b' = (-a^2 + 2b + 2ac)b, \qquad c' = \tfrac{1}{2}a^2 c.$$

No es difícil ver que si $b \neq 0$ entonces $\frac{ac}{b}$ resulta constante a lo largo del tiempo, con lo cual si empezamos en $a(0) = c(0) = 1, b(0) = -1$, resolvemos las ecuaciones y obtenemos

$$a = c^{-3}, \quad b = -c^{-2}, \qquad c(t) = (3t+1)^{\frac{1}{6}}, \qquad t \in (-\tfrac{1}{3}, \infty).$$

Se tiene que $\mu(t) \longrightarrow \infty$ tanto si $t \to \infty$ como si $t \to -\frac{1}{3}$. Esto muestra un ejemplo explícito de un flujo de corchetes que es inmortal, pero no debido a que la norma del corchete resulta acotada, pues en este caso diverge a infinito.

Al considerar la normalización por la norma del corchete definida en (2.12), vemos que

$$\frac{1}{\|\mu_{\mathfrak{k}}\|^{1/2} + \|\mu_{\mathfrak{p}}\|} \cdot \mu \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \mu_{0,0,\frac{1}{2}},$$

una métrica plana en el grupo de Lie soluble $E(2)$, y hacia atrás,

$$\frac{1}{\|\mu_{\mathfrak{k}}\|^{1/2} + \|\mu_{\mathfrak{p}}\|} \cdot \mu \underset{t\to-\frac{1}{3}}{\longrightarrow} \mu_{\frac{1}{\sqrt{2}},0,0},$$

precisamente el nilsolitón H_3, aunque ahora presentado con una descomposición reductiva que verifica $D\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}$. Esto se obtiene luego de cálculos rutinarios, usando que $\|\mu_{\mathfrak{p}}\|^2 = 2a^2 + 4c^2$, $\|\mu_{\mathfrak{k}}\|^2 = 2b^2$.

Sobre la normalización por curvatura escalar, tenemos que $R = R(\mu) = -\frac{1}{2}a^2 = -\frac{1}{2}c^{-6}$, y luego

$$\frac{a}{|R|^{1/2}} \equiv \sqrt{2}, \qquad \frac{b}{|R|} = -2c^4, \qquad \frac{c}{|R|^{1/2}} = \sqrt{2}c^4.$$

Esto implica que $\frac{1}{|R|^{1/2}} \cdot \mu \longrightarrow \infty$ cuando $t \to \infty$, y hacia atrás, se tiene que $t \to -\frac{1}{3}$, $\frac{1}{|R|^{1/2}} \cdot \mu \longrightarrow \mu_{\sqrt{2},0,0}$, el mismo nilsolitón H_3 obtenido en el límite hacia atrás de la normalización por norma del corchete.

Como en el ejemplo anterior, obtuvimos límites no isomorfos al punto de partida, e incluso divergencia en uno de los casos, en contraposición a la Proposición 2.2.4 y (2.10), lo cual muestra las ventajas de contar con la condición técnica $D\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}$.

2.3. Una caracterización geométrica de los solitones algebraicos

Como mencionamos en la Observación 2.1.8, el concepto de solitón de Ricci es de carácter geométrico, mientras que el concepto de solitón semi-algebraico no lo es, pues depende de la presentación de la variedad homogénea (M, g) como espacio homogéneo riemanniano $(G/K, g)$. Y más aún, ser un solitón algebraico puede depender no sólo de la presentación elegida sino también de la descomposición reductiva $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ que uno elija para el espacio homogéneo (ver Definición 2.1.2).

La siguiente propiedad tiene un rol muy importante en el estudio del flujo de Ricci de variedades homogéneas (ver [LW13]).

Definición 2.3.1. Decimos que una variedad riemanniana homogénea (M, g) evoluciona *de manera diagonal* a lo largo del flujo de Ricci, si en algún punto $p \in M$ existe una base ortonormal β de T_pM tal que la solución al flujo de Ricci $g(t)$ que empieza en g es diagonal con respecto a β para cada $t \in (\alpha, \omega)$ (i.e. $g_{ij}(t)(p) = 0$ para todo $i \neq j$).

La definición es equivalente a que exista una base ortonormal para g que permanezca *ortogonal* para todas las métricas $g(t)$.

Claramente, el punto p no juega ningún papel en esta definición, ya que la condición se cumple o bien para todos los puntos, o bien para ninguno. Es fácil ver que la propiedad de evolucionar de manera diagonal es invariante por isometrías. A partir de dimensión 4 existen ejemplos de métricas invariantes a izquierda en grupos de Lie nilpotentes que no evolucionan de manera diagonal (ver [LW13, Example 5.7]).

Sea (M, g) un solitón de Ricci homogéneo, y consideremos cualquier presentación $(G/K, g_{\langle\cdot,\cdot\rangle})$ de (M, g) con descomposición reductiva $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. Se verifica fácilmente que si la solución a la ecuación del flujo de Ricci (1.8) se escribe como

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_t = \langle P(t)\cdot,\cdot\rangle,$$

donde $P(t)$ es la correspondiente curva de operadores definidos positivos en $\operatorname{End}(\mathfrak{p})$, entonces la ecuación del flujo de Ricci es equivalente a la siguiente ecuación diferencial ordinaria para P

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P = -2P\operatorname{Ric}(\langle\cdot,\cdot\rangle_t), \tag{2.14}$$

donde $\operatorname{Ric}(\langle\cdot,\cdot\rangle_t)$ denota al operador de Ricci en el origen, como en (1.3). De la unicidad de las soluciones para una ecuación diferencial ordinaria se deduce que las siguientes condiciones son equivalentes:

- (M, g) evoluciona de manera diagonal a lo largo del flujo de Ricci.
- Existe una base ortonormal β de $(\mathfrak{p}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ tal que las matrices $[\operatorname{Ric}(\langle\cdot,\cdot\rangle_t)]_\beta$ son diagonales para todo $t \in (\alpha, \omega)$.
- Los operadores simétricos $\{P(t) : t \in (\alpha, \omega)\}$ conmutan dos a dos.

Gracias a la Observación 2.2.3 y a la Proposición 2.2.4, (iii), todo solitón algebraico evoluciona de manera diagonal. Probaremos a continuación que esta condición efectivamente caracteriza dichos solitones entre los solitones de Ricci homogéneos. En particular, si existiese un solitón de Ricci homogéneo que no fuera isométrico a un solitón algebraico, debería ser geométricamente diferente a todos los ejemplos conocidos.

Teorema 2.3.2. *Un solitón de Ricci homogéneo evoluciona de manera diagonal a lo largo del flujo de Ricci si y sólo si es isométrico a un solitón algebraico.*

Demostración. Sea $(M, g_0) = (G/K, g_0)$ un solitón de Ricci homogéneo presentado como solitón semi-algebraico, con operador de Ricci dado por $\operatorname{Ric}(\langle\cdot,\cdot\rangle_0) = cI + D_\mathfrak{p} - A$, $A = \frac{1}{2}(D_\mathfrak{p} - D_\mathfrak{p}^t)$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_0 = g_0(eK)$. Fijemos una descomposición reductiva $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ tal que $D := \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_\mathfrak{p} \end{smallmatrix}\right] \in \operatorname{Der}(\mathfrak{g}, \mu_0)$, y cualquier producto interno en $\mathfrak{g}$ que extienda a $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ y haga que $\mathfrak{k} \perp \mathfrak{p}$. Es claro que D es un operador normal si y sólo si $D_\mathfrak{p}$ lo es.

Supongamos que $(G/K, g_0)$ evoluciona de manera diagonal, luego

$$[\operatorname{Ric}(\langle\cdot,\cdot\rangle_t), \operatorname{Ric}(\langle\cdot,\cdot\rangle_0)] = 0, \qquad \forall t \in (\alpha, \omega),$$

Usando que $\operatorname{Ric}(\langle\cdot,\cdot\rangle_t) = (-2ct+1)^{-1} e^{s(t)D_\mathfrak{p}} \operatorname{Ric}(\langle\cdot,\cdot\rangle_0) e^{-s(t)D_\mathfrak{p}}$ (lo cual se deduce de la prueba de la Proposición 2.2.2), podemos reescribir la fórmula anterior como

$$[e^{sD_\mathfrak{p}} \operatorname{Ric}(\langle\cdot,\cdot\rangle_0) e^{-sD_\mathfrak{p}}, \operatorname{Ric}(\langle\cdot,\cdot\rangle_0)] = 0, \qquad \forall s \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Ahora bien, esto implica que $[[D_{\mathfrak{p}}, \mathrm{Ric}(\langle\cdot,\cdot\rangle_0)], \mathrm{Ric}(\langle\cdot,\cdot\rangle_0)] = 0$, y entonces

$$0 = \operatorname{tr} D_{\mathfrak{p}}[[D_{\mathfrak{p}}, \mathrm{Ric}(\langle\cdot,\cdot\rangle_0)], \mathrm{Ric}(\langle\cdot,\cdot\rangle_0)] = -\operatorname{tr}\,[D_{\mathfrak{p}}, \mathrm{Ric}(\langle\cdot,\cdot\rangle_0)]^2.$$

Se obtiene luego que $[D_{\mathfrak{p}}, \mathrm{Ric}(\langle\cdot,\cdot\rangle_0)] = 0$ pues es antisimétrica, o equivalentemente $[D_{\mathfrak{p}}, A] = 0$, con lo cual $D_{\mathfrak{p}}$ es normal. Entonces D es normal también, y $D^t \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$, pues es un hecho conocido que la traspuesta de una derivación normal de un álgebra de Lie métrica es también una derivación (ver por ejemplo la prueba de [Lau11b, Lemma 4.7], o usar que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ es un grupo algebraico; ver también Observación 3.3.10). Así, $\mathrm{Ric}(\langle\cdot,\cdot\rangle_0) - cI = \frac{1}{2}(D + D^t)_{\mathfrak{p}}$, con $\frac{1}{2}(D + D^t) \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$, y esto prueba que el solitón semi-algebraico es en realidad algebraico, lo cual concluye la demostración del teorema. $\square$

De la prueba del teorema anterior se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 2.3.3. *Un solitón semi-algebraico que es isométrico a un solitón algebraico, es necesariamente un solitón algebraico.*

Demostración. Al ser isométrico a un solitón algebraico, el solitón que estamos considerando también evoluciona de manera diagonal a lo largo del flujo de Ricci, y la prueba del teorema anterior muestra que un solitón semi-algebraico que evoluciona de manera diagonal es necesariamente algebraico. $\square$

Capítulo 3

Estructura de solitones de Ricci homogéneos y la conjetura de Alekseevskii

En este capítulo continuamos con nuestro estudio de los solitones de Ricci homogéneos. A diferencia del capítulo anterior, en donde éstos fueron estudiados desde un punto de vista dinámico (i.e. vía su evolución a través del flujo de corchetes), aquí nos concentraremos en un solitón fijo y estudiaremos su estructura algebraica. Para eso, la idea será en primer lugar utilizar el Teorema 2.1.9 y presentar al solitón de Ricci homogéneo como un solitón semi-algebraico, lo cual nos permitirá concentrarnos en estudiar sólo esa clase de solitones. Luego, veremos las propiedades algebraicas de descomposiciones reductivas métricas, teniendo en cuenta que con respecto a una descomposición adecuada el operador de Ricci de un solitón semi-algebraico se puede escribir como en el Corolario 2.1.13. Finalmente, aplicaremos los resultados sobre la estratificación de la variedad de álgebras de Lie dados en la Sección 1.5 como herramienta principal para obtener el Teorema 3.3.6, que es el resultado principal de este capítulo, y en el cual se dan condiciones necesarias y suficientes que caracterizan a las descomposiciones reductivas métricas que dan lugar a solitones semi-algebraicos. Cabe mencionar aquí que todos estos resultados se aplican en particular a variedades riemannianas homogéneas de Einstein.

Como primera aplicación de los resultados estructurales mencionados en el párrafo anterior, serán caracterizados los solitones algebraicos entre los semi-algebraicos mediante numerosas condiciones equivalentes referentes a su estructura algebraica, en la Proposición 3.3.13. Se obtiene en particular que todo solitón semi-algebraico con G unimodular es necesariamente algebraico.

Nuestro mayor interés recae en la aplicación de estos resultados estructurales al estudio de la conjetura de Alekseevskii, de la cual hablaremos en la primera sección del capítulo. Utilizando una construcción cuyo objetivo es presentar al Teorema 3.3.6 de manera más gentil (ver Teorema 3.4.1), se obtiene la Proposición 3.4.2, con la cual se verá entonces que la conjetura se reduce a un problema similar pero para un espacio homogéneo de la forma U/K, con U un grupo de Lie reductivo, y en donde el operador de Ricci satisface la condición (c3) de la Sección 3.4 (o bien el ítem (ii) del Teorema 3.3.6) con respecto a cierta representación especial (en el sentido de la condición (c2)). Por último, en la Sección 3.5 aplicaremos nuevamente el Teorema 3.3.6, para probar que la conjetura de Alekseevskii sobre métricas de Einstein homogéneas es equivalente a un resultado análogo, y *a priori* mucho más fuerte, para solitones algebraicos.

El contenido de este capítulo se basa en el artículo [LL13b], el cual es un trabajo en conjunto con Jorge Lauret.

3.1. La conjetura de Alekseevskii

Sea M una variedad diferenciable. Una métrica riemanniana g en M se dice de *Einstein* si su tensor de Ricci $\mathrm{Rc}(g)$ satisface

$$\mathrm{Rc}(g) = cg, \qquad \text{para algún } c \in \mathbb{R}.$$

Una referencia clásica para variedades de Einstein es el libro [Bes87]; algunos artículos expositivos en relación a este tema son [And95], [LW99], [Ber00, III,C.] y [Ber03, 11.4].

En el caso homogéneo, la ecuación que debe satisfacer una métrica para ser Einstein se convierte en un sistema de ecuaciones algebraicas muy complejo, y la siguiente pregunta sigue abierta tanto en el caso compacto como en el no compacto:

> ¿Qué espacios homogéneos G/K admiten una métrica riemanniana G-invariante que sea Einstein?

Referimos a los artículos [Wan12, Lau09] y a las referencias allí citadas para una exposición actualizada sobre el problema en los casos compacto y no compacto, respectivamente.

Como ya mencionamos en el Capítulo 2, en el caso homogéneo no compacto, los únicos ejemplos conocidos son de una clase muy particular: grupos de Lie solubles munidos de una métrica riemanniana invariante a izquierda (i.e. solvariedades). Más aún, son todos simplemente conexos y en consecuencia difeomorfos a un espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$. La siguiente conjetura, que lleva ya muchos años planteada, ha sido atribuida a Dmitrii Alekseevskii.

> **Conjetura de Alekseevskii** [Bes87, 7.57]. Sea $(G/K, g)$ un espacio homogéneo riemanniano tal que $G \subset \mathrm{I}(G/K, g)$ es un subgrupo cerrado. Si $(G/K, g)$ es Einstein con curvatura escalar negativa, entonces K es un subgrupo compacto maximal de G.

Cuando el grupo G es lineal, la maximalidad de K implica que $(G/K, g)$ es en realidad isométrico a una solvariedad simplemente conexa (ver [Wol64, Corollary 1,c]). La conjetura es todavía un problema abierto, y únicamente se sabe que es verdad para dim ≤ 5, lo cual se deduce de una clasificación completa para esas dimensiones dada en [Nik00]. En [Nik05] se dan muchos ejemplos de espacios homogéneos no compactos que no admiten una métrica de Einstein invariante. Sin embargo, muchos de ellos sí admiten métricas invariantes con curvatura de Ricci negativa. Ver por ejemplo [DL82] y [DLM84], en donde se dan ejemplos de métricas invariantes a izquierda de curvatura de Ricci negativa en los grupos de Lie $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 3$, y en cualquier grupo de Lie simple complejo, respectivamente.

Proposición 3.1.1. *Sea (M, g) una variedad riemanniana homogénea conexa. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) Existe un subgrupo de Lie cerrado $G \subset \mathrm{I}(M, g)$ que actúa transitivamente en M tal que la isotropía K es un subgrupo compacto maximal de G.

(ii) M es difeomorfa a un espacio euclídeo.

(iii) K es un subgrupo compacto maximal de G para cualquier espacio homogéneo riemanniano $(G/K, g)$ isométrico a (M, g) con G conexo y K compacto.

Demostración. Es sabido que si G es un grupo de Lie conexo y $K \subset G$ es un subgrupo de Lie compacto, entonces G/K es difeomorfa a un espacio euclídeo si y sólo si K es un subgrupo compacto maximal de G (ver por ejemplo [Iwa49], [Hoc65] o el libro más reciente [HN11, §13.1-13.3]). De esta forma, la equivalencia entre el ítem (ii) y cualquiera de los otros dos se sigue inmediatamente. □

Entonces la conjetura puede ser escrita de la siguiente manera, mucho más transparente:

> **Conjetura de Alekseevskii**. Toda variedad riemanniana homogénea de Einstein con curvatura escalar negativa es difeomorfa a un espacio euclídeo.

Se deduce también de la Proposición 3.1.1 que para probar la conjetura para una variedad homogénea dada, tenemos permitido trabajar con cualquiera de sus presentaciones como espacio homogéneo.

3.2. Aspectos algebraicos de las variedades homogéneas

Fijemos ahora y para el resto de esta sección un espacio homogéneo Riemanniano $(G/K, g)$ con una *descomposición reductiva métrica* $(\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Es decir, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, $\mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K) \subset \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ es una descomposición reductiva (en particular, $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$), y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno $\mathrm{Ad}(K)$-invariante en todo $\mathfrak{g}$ obtenido al extender el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $\mathfrak{p}$ definido por g, como en la Observación 1.3.2.

Consideremos

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}, \tag{3.1}$$

la descomposición ortogonal con respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$, donde $\mathfrak{n}$ es el *nilradical* de $\mathfrak{g}$, i.e. el ideal nilpotente maximal. Observar que $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{p}$ en el caso en que hayamos elegido la descomposición reductiva métrica con $B(\mathfrak{k}, \mathfrak{p}) = 0$, ya que $\mathfrak{n}$ está incluido en el radical de la forma de Killing; en caso de tener otra descomposición reductiva, siempre podemos suponer que se satisface la condición $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{p}$, ya que $\mathfrak{n}$ es invariante por la representación de isotropía y entonces se lo puede extender hasta obtener un complemento reductivo. De esta manera, la componente en $\mathfrak{p}$

$$[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{p} \times \mathfrak{p} \longrightarrow \mathfrak{p}$$

del corchete de Lie $[\cdot, \cdot]$ de $\mathfrak{g}$ restringido a $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$ se puede descomponer como suma de aplicaciones bilineales como sigue:

$$[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{p}} = \lambda_0 + \lambda_1 + \eta + \mu,$$

donde

$$\begin{array}{ll} \lambda_0 : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}, & \eta : \mathfrak{h} \times \mathfrak{n} \longrightarrow \mathfrak{n}, \\ \lambda_1 : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{n}, & \mu : \mathfrak{n} \times \mathfrak{n} \longrightarrow \mathfrak{n}. \end{array} \tag{3.2}$$

Estamos usando aquí que $\mathfrak{n}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$. Notar además que λ_0, λ_1 y μ son antisimétricas, $(\mathfrak{n}, \mu)$ es un álgebra de Lie nilpotente, y por convención $[X, Y] = -\eta(Y, X)$ para todo $Y \in \mathfrak{h}$, $X \in \mathfrak{n}$.

Notar que $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{p}}$ no es necesariamente un corchete de Lie en $\mathfrak{p}$, pues puede no cumplirse la identidad de Jacobi. De hecho, $(\mathfrak{p},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{p}})$ es álgebra de Lie si y sólo si $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\ltimes\mathfrak{p}$.

Para poder aplicar los resultados de la Sección 1.5, si $\dim\mathfrak{n}=n$, entonces identificamos $\mathfrak{n}$ con $\mathbb{R}^n$ por medio de una base ortonormal $\{e_1,...,e_n\}$ de $\mathfrak{n}$. Así, μ puede ser pensada como un punto en la variedad de álgebras de Lie nilpotentes $\mathcal{N}\subset V$. Si $\mu\neq 0$, entonces μ pertenece a algún estrato $\mathcal{S}_\beta$ con $\beta\in\mathfrak{t}^+$ (ver Teorema 1.5.1), y podemos definir $E_\beta\in\operatorname{End}(\mathfrak{p})$ mediante

$$E_\beta := \begin{bmatrix} 0 & \\ & \beta+||\beta||^2 I\end{bmatrix}, \qquad \text{i.e.}\quad E_\beta|_{\mathfrak{h}}=0,\quad E_\beta|_{\mathfrak{n}}=\beta+||\beta||^2 I. \tag{3.3}$$

Observación 3.2.1. Sigue siendo poco claro aún cuál es el significado geométrico de la matriz diagonal β asociada a cada descomposición reductiva métrica, y consecuentemente, a cada variedad riemanniana homogénea. Sin embargo, dicha β será fundamental en las pruebas de la mayoría de los resultados estructurales sobre solitones de Ricci homogéneos presentados en este capítulo.

Por otro lado, identificaremos al corchete $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{p}}$ con un elemento de $\Lambda^2\mathfrak{p}^*\otimes\mathfrak{p}$ y usaremos también para éste la notación introducida en la Sección 1.5, reemplazando $\mathbb{R}^n$ por $\mathfrak{p}$.

El siguiente lema técnico será crucial en las pruebas de los principales resultados del capítulo.

Lema 3.2.2. *Si $\mu\in\mathcal{S}_\beta$ satisface $\beta_\mu=\beta$, entonces*

$$\langle\pi(E_\beta)[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{p}},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{p}}\rangle\geq 0.$$

Demostración. Primero notemos que $\pi(E_\beta)$ deja invariantes a los subespacios de $\Lambda^2\mathfrak{p}^*\otimes\mathfrak{p}$ a los que pertenecen los λ_i's, η y μ (por ejemplo, $\lambda_0\in\Lambda^2\mathfrak{h}^*\otimes\mathfrak{h}$, $\lambda_1\in\Lambda^2\mathfrak{h}^*\otimes\mathfrak{n}$, etc). Estos subespacios son mutuamente ortogonales con respecto al producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definido en (1.22), luego

$$\langle\pi(E_\beta)[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{p}},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{p}}\rangle=\langle\pi(E_\beta)\lambda_0,\lambda_0\rangle+\langle\pi(E_\beta)\lambda_1,\lambda_1\rangle+\langle\pi(E_\beta)\eta,\eta\rangle+\langle\pi(E_\beta)\mu,\mu\rangle.$$

Sean $\{Y_i\}$ y $\{X_k\}$ bases ortogonales de $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{n}$, respectivamente. Es fácil ver que

$$\langle\pi(E_\beta)\lambda_0,\lambda_0\rangle=0,$$

y como $E_\beta|_{\mathfrak{n}}$ es definida positiva por (1.28), tenemos que

$$\langle\pi(E_\beta)\lambda_1,\lambda_1\rangle=\sum\langle E_\beta\lambda_1(Y_i,Y_j),\lambda_1(Y_i,Y_j)\rangle\geq 0. \tag{3.4}$$

Si $\operatorname{ad}_\eta Y$ denota la derivación de $(\mathfrak{n},\mu)$ definida por la acción adjunta de $Y\in\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{n}$, entonces

$$\begin{aligned}\langle\pi(E_\beta)\eta,\eta\rangle &=2\sum\langle E_\beta\eta(Y_i,X_j)-\eta(Y_i,E_\beta X_j),\eta(Y_i,X_j)\rangle\\ &=2\sum\langle[\beta,\operatorname{ad}_\eta Y_i](X_j),\operatorname{ad}_\eta Y_i(X_j)\rangle\\ &=2\sum\langle[\beta,\operatorname{ad}_\eta Y_i],\operatorname{ad}_\eta Y_i\rangle.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Se deduce entonces de (1.27) que $\langle\pi(E_\beta)\eta,\eta\rangle\geq 0$. Finalmente, tenemos que

$$\langle\pi(E_\beta)\mu,\mu\rangle=\left\langle\pi\left(\beta+||\beta||^2 I\right)\mu,\mu\right\rangle\geq 0 \tag{3.6}$$

gracias a (1.31), lo cual concluye la prueba del lema. □

Veremos a continuación una fórmula para el operador de Ricci de un espacio homogéneo $(G/K, g)$ con descomposición reductiva $(\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Para eso, necesitamos observar en primer lugar que existe un único elemento $H \in \mathfrak{g}$ que satisface

$$\langle H, X \rangle = \operatorname{tr} \operatorname{ad} X, \qquad \forall X \in \mathfrak{g}. \tag{3.7}$$

Vemos que $H \in \mathfrak{p}$ pues $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es $\operatorname{ad} \mathfrak{k}$-invariante, y que $H = 0$ si y sólo si $\mathfrak{g}$ es unimodular. Llamemos $B_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ al operador simétrico definido por la forma de Killing de $\mathfrak{g}$ con respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$, esto es,

$$\langle B_{\mathfrak{g}} X, Y \rangle = \operatorname{tr} \operatorname{ad} X \operatorname{ad} Y, \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{g}. \tag{3.8}$$

Se ve que, en relación a la descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, el operador $B_{\mathfrak{g}}$ tiene la siguiente forma:

$$B_{\mathfrak{g}} = \begin{bmatrix} B_0 & * \\ * & B_{\mathfrak{p}} \end{bmatrix}, \qquad B_0 < 0, \tag{3.9}$$

con $* = 0$ si asumimos que $B(\mathfrak{k}, \mathfrak{p}) = 0$. Recordemos que $B_0 < 0$ (i.e. es definida negativa) debido a que $\operatorname{ad}(Z)$ es antisimétrica para todo $Z \in \mathfrak{k}$, y no nula si $Z \neq 0$ por casi-efectividad.

El operador de Ricci Ric del espacio homogéneo riemanniano $(G/K, g)$ con descomposición reductiva métrica $(\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ viene dado entonces por (ver [Bes87, 7.38])

$$\operatorname{Ric} = \mathrm{M} - \tfrac{1}{2} B_{\mathfrak{p}} - S(\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H), \tag{3.10}$$

donde $\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H : \mathfrak{p} \longrightarrow \mathfrak{p}$ se define por $\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H(X) = [H, X]_{\mathfrak{p}}$ para todo $X \in \mathfrak{p}$,

$$S(A) := \tfrac{1}{2}(A + A^t), \tag{3.11}$$

es la parte simétrica de un operador, y $\mathrm{M} : \mathfrak{p} \longrightarrow \mathfrak{p}$ es el operador simétrico definido mediante

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{M}\, X, Y \rangle = &- \tfrac{1}{2} \sum \langle [X, X_i]_{\mathfrak{p}}, X_j \rangle \langle [Y, X_i]_{\mathfrak{p}}, X_j \rangle \\ &+ \tfrac{1}{4} \sum \langle [X_i, X_j]_{\mathfrak{p}}, X \rangle \langle [X_i, X_j]_{\mathfrak{p}}, Y \rangle, \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{p}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

con $\{X_i\}$ cualquier base ortonormal de $(\mathfrak{p}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Se sigue de (1.24) que este operador "anónimo" M en la fórmula del operador de Ricci satisface que

$$m([\cdot, \cdot]_{\mathfrak{p}}) = \tfrac{4}{\|[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{p}}\|^2} \mathrm{M}, \tag{3.13}$$

donde $m : \Lambda^2 \mathfrak{p}^* \otimes \mathfrak{p} \longrightarrow \operatorname{sym}(\mathfrak{p})$ es la aplicación momento para la acción natural de $\mathrm{GL}(\mathfrak{p})$ en $\Lambda^2 \mathfrak{p}^* \otimes \mathfrak{p}$. En otras palabras, se podría definir alternativamente M mediante

$$\operatorname{tr} \mathrm{M}\, E = \tfrac{1}{4} \langle \pi(E)[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{p}}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{p}} \rangle, \qquad \forall E \in \operatorname{End}(\mathfrak{p}), \tag{3.14}$$

donde estamos considerando $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{p}}$ como un vector en $\Lambda^2 \mathfrak{p}^* \otimes \mathfrak{p}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno definido en (1.22), y π es la representación dada en (1.21) (ver la notación definida en la Sección 1.5 y reemplazar el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ por $\mathfrak{p}$).

Observación 3.2.3. En particular, M es ortogonal a cualquier derivación del álgebra $(\mathfrak{p}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{p}})$.

Observación 3.2.4. Se tiene que el operador M asociado a la aplicación momento conmuta con cualquier derivación del álgebra $(\mathfrak{p}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{p}})$ cuya traspuesta sea también una derivación. En efecto, si E es una tal derivación, entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} [\mathrm{M}, E] C &= \operatorname{tr} \mathrm{M}[E, C] = \tfrac{1}{4} \langle \pi([E, C])[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{p}}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{p}} \rangle \\ &= \tfrac{1}{4} \langle \pi(C)[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{p}}, \pi(E^t)[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{p}} \rangle - \langle \pi(C)\pi(E)[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{p}}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{p}} \rangle = 0, \end{aligned}$$

para todo $C \in \operatorname{End}(\mathfrak{p})$, lo cual implica que $[M, E] = 0$.

Notar que las dos observaciones anteriores son en realidad válidas para cualquier álgebra y su aplicación momento, consideradas como en la Sección 1.5.

Probaremos ahora algunos resultados técnicos que involucran a H, Ric y la representación adjunta de $\mathfrak{k}$ en $\mathfrak{p}$ (representación de isotropía a nivel de álgebra de Lie), los cuales serán muy útiles en las secciones subsiguientes.

Sea $\mathfrak{p} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$ la descomposición ortogonal definida en (3.1), y consideremos $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{p}} = \lambda_0 + ... + \mu$ como en (3.2). Como $\mathfrak{n}$ es el nilradical de $\mathfrak{g}$ tenemos que $H \perp \mathfrak{n}$, y $\mathfrak{n}$ está en el radical de la forma de Killing. Luego,

$$H \in \mathfrak{h},$$

y $\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H$ y $B_{\mathfrak{p}}$ tienen la siguiente forma:

$$\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H = \left[\begin{smallmatrix} \operatorname{ad}_{\lambda_0} H & 0 \\ \operatorname{ad}_{\lambda_1} H & \operatorname{ad}_{\eta} H \end{smallmatrix}\right], \qquad B_{\mathfrak{p}} = \left[\begin{smallmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right], \tag{3.15}$$

donde $\operatorname{ad}_{\lambda_i} Y(Y') = \lambda_i(Y,Y')$ para todo $Y, Y' \in \mathfrak{h}$, y análogamente para η.

Recordemos que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}, \quad [\mathfrak{k},\mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k},\mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}, \quad [\mathfrak{g},\mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n},$$

con lo cual el corchete de Lie de $\mathfrak{g}$ se descompone como

$$[\cdot,\cdot] = \nu_0 + \nu_1 + \nu_2 + \lambda_2 + [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{p}},$$

donde

$$\begin{array}{ll} \nu_0 : \mathfrak{k} \times \mathfrak{k} \longrightarrow \mathfrak{k}, & \qquad \lambda_2 : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{k}. \\ \nu_1 : \mathfrak{k} \times \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}, & \\ \nu_2 : \mathfrak{k} \times \mathfrak{n} \longrightarrow \mathfrak{n}, & \end{array}$$

En el resto de este capítulo será muy útil tener en mente las siguientes fórmulas para los operadores adjuntos con respecto a la descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$. Para $Z \in \mathfrak{k}$, $Y \in \mathfrak{h}$ y $X \in \mathfrak{n}$ tenemos

$$\operatorname{ad} Z = \left[\begin{smallmatrix} \operatorname{ad}_{\nu_0} Z & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{ad}_{\nu_1} Z & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{ad}_{\nu_2} Z \end{smallmatrix}\right], \quad \operatorname{ad} Y = \left[\begin{smallmatrix} 0 & \operatorname{ad}_{\lambda_2} Y & 0 \\ \operatorname{ad}_{\nu_1} Y & \operatorname{ad}_{\lambda_0} Y & 0 \\ 0 & \operatorname{ad}_{\lambda_1} Y & \operatorname{ad}_{\eta} Y \end{smallmatrix}\right], \quad \operatorname{ad} X = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \operatorname{ad}_{\nu_2} X & \operatorname{ad}_{\eta} X & \operatorname{ad}_{\mu} X \end{smallmatrix}\right].$$

Si $\mathfrak{u} := \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{h}$ entonces es fácil ver que $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{u}} := \nu_0 + \nu_1 + \lambda_2 + \lambda_0$ satisface la condición de Jacobi; más aún, $(\mathfrak{u}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{u}})$ es una subálgebra de Lie *reductiva* (i.e. semisimple más un centro) isomorfa a $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$. Esto implica que $\operatorname{tr} \operatorname{ad}_{\lambda_0} Y = \operatorname{tr} \operatorname{ad}_{\mathfrak{u}} Y = 0$, pues toda álgebra de Lie reductiva es unimodular, y entonces

$$\operatorname{tr} \operatorname{ad} Y = \langle H, Y \rangle = \operatorname{tr} \operatorname{ad}_{\eta} Y, \qquad \forall Y \in \mathfrak{h}. \tag{3.16}$$

Por otro lado, de la identidad de Jacobi para $\mathfrak{g}$ obtenemos que $\operatorname{ad}_{\eta}[Z,Y] = [\operatorname{ad}_{\nu_2} Z, \operatorname{ad}_{\eta} Y]$, de lo cual se deduce que

$$\langle [Z,H], Y \rangle = -\langle H, [Z,Y] \rangle = -\operatorname{tr} \operatorname{ad}_{\eta}[Z,Y] = 0, \qquad \forall Z \in \mathfrak{k}, Y \in \mathfrak{h},$$

y entonces

$$[\mathfrak{k}, H] = 0. \tag{3.17}$$

Lema 3.2.5. $[\operatorname{ad} Z|_{\mathfrak{p}}, \operatorname{Ric}] = 0$ *para todo* $Z \in \mathfrak{k}$.

Demostración. Usando que $e^{t\,\mathrm{ad}\,Z}\cdot[\cdot,\cdot]=[\cdot,\cdot]$ y $e^{t\,\mathrm{ad}\,Z|_{\mathfrak{p}}}\cdot[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{p}}=[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{p}}$ para todo t, obtenemos $e^{t\,\mathrm{ad}\,Z|_{\mathfrak{p}}}B_{\mathfrak{p}}e^{-t\,\mathrm{ad}\,Z|_{\mathfrak{p}}}=B_{\mathfrak{p}}$ y $e^{t\,\mathrm{ad}\,Z|_{\mathfrak{p}}}\,\mathrm{M}\,e^{-t\,\mathrm{ad}\,Z|_{\mathfrak{p}}}=\mathrm{M}$ para todo t, de lo cual se deduce respectivamente que $[\mathrm{ad}\,Z|_{\mathfrak{p}},B_{\mathfrak{p}}]=0$ y $[\mathrm{ad}\,Z|_{\mathfrak{p}},\mathrm{M}]=0$. Por otro lado, de (3.17) sabemos que $[\mathrm{ad}\,Z,\mathrm{ad}\,H]=\mathrm{ad}\,[Z,H]=0$, con lo cual $[\mathrm{ad}\,Z|_{\mathfrak{p}},S(\mathrm{ad}_{\mathfrak{p}}\,H)]=0$ pues $\mathrm{ad}\,Z|_{\mathfrak{p}}$ es antisimétrica. El lema queda demostrado entonces si usamos la definición de Ric (ver (3.10)). □

Terminamos esta sección con un lema técnico sobre las derivaciones de $\mathfrak{g}$ que dejan $\mathfrak{k}$ invariante, el cual es una refinación del Lema 2.1.12 (en particular, damos una prueba alternativa a dicho resultado).

Lema 3.2.6. *Si consideramos la descomposición reductiva métrica con $B(\mathfrak{k},\mathfrak{p})=0$ y $D\in\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ es una derivación tal que $D\mathfrak{k}\subset\mathfrak{k}$, entonces*

$$D\mathfrak{p}\subset\mathfrak{p},\qquad D\mathfrak{n}\subset\mathfrak{n},\qquad \mathrm{tr}\,D|_{\mathfrak{p}}=\mathrm{tr}\,D|_{\mathfrak{n}}.$$

Demostración. Como $D\mathfrak{k}\subset\mathfrak{k}$, tenemos que D tiene la siguiente forma con respecto a la descomposición $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$:

$$D=\begin{bmatrix} D_{\mathfrak{k}} & C\\ 0 & D_{\mathfrak{p}}\end{bmatrix}. \tag{3.18}$$

Por otro lado, $e^{tD}\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ y entonces $e^{-tD^t}B_{\mathfrak{g}}e^{-tD}=B_{\mathfrak{g}}$ para todo t, luego derivando en $t=0$ se obtiene

$$B_{\mathfrak{g}}D+D^tB_{\mathfrak{g}}=0. \tag{3.19}$$

Ahora usamos esta fórmula junto con la información de (3.9) y (3.18) para obtener que $B_0C=0$, y entonces $C=0$ pues B_0 es definida negativa. Así, $D\mathfrak{p}\subset\mathfrak{p}$, y como $\mathfrak{n}$ es el nilradical de $\mathfrak{g}$, se tiene también que $D\mathfrak{n}\subset\mathfrak{n}$.

Para probar la última afirmación, observemos que como $\mathfrak{n}\subset\mathrm{Ker}\,B_{\mathfrak{g}}\subset\mathfrak{p}$, se puede asumir sin pérdida de generalidad que existe una descomposición ortogonal $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_1\oplus\mathfrak{a}$ de modo que $\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{n}=\mathrm{Ker}\,B_{\mathfrak{g}}$. Recordar que $\mathrm{Ker}\,B_{\mathfrak{g}}$ y $\mathfrak{n}$ son ambos ideales característicos de $\mathfrak{g}$, es decir, toda derivación los deja invariantes. Más aún, toda derivación de $\mathfrak{g}$ lleva $\mathrm{Ker}\,B_{\mathfrak{g}}$ en $\mathfrak{n}$, pues $\mathfrak{n}$ es también el nilradical del álgebra de Lie soluble $\mathrm{Ker}\,B_{\mathfrak{g}}$ (ver [GW88, Lemma 2.6]). Entonces, con respecto a la descomposición $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{h}_1\oplus\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{n}$, vemos que $B_{\mathfrak{g}}$ y D tienen la siguiente forma:

$$B_{\mathfrak{g}}=\begin{bmatrix} B_0&0&0&0\\0&B_2&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\qquad D=\begin{bmatrix} D_{\mathfrak{k}}&0&0&0\\0&D_1&0&0\\0&\star&0&0\\0&\star&\star&D_{\mathfrak{n}}\end{bmatrix}. \tag{3.20}$$

Se deduce así de (3.19) que $B_2D_1+D_1^tB_2=0$, pero como B_2 es invertible, obtenemos que

$$D_1^t=-B_2D_1B_2^{-1}.$$

Esto implica que $\mathrm{tr}\,D_1=0$, lo cual concluye la prueba. □

Observación 3.2.7. Se sigue de (3.19) que $\mathrm{tr}\,B_{\mathfrak{p}}D_{\mathfrak{p}}=0$ para cualquier $\left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&D_{\mathfrak{p}}\end{smallmatrix}\right]\in\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Si además se tiene que $B(\mathfrak{k},\mathfrak{p})=0$, entonces esto vale para cualquier $\left[\begin{smallmatrix}0&*\\ *&D_{\mathfrak{p}}\end{smallmatrix}\right]\in\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$.

3.3. Estructura de solitones semi-algebraicos

En esta sección estudiaremos la estructura algebraica de las descomposiciones reductivas métricas de solitones semi-algebraicos. Probaremos que deben satisfacerse muchas propiedades relacionadas con la teoría de Lie. El principal resultado de esta sección (y de este capítulo) es el Teorema 3.3.6, y la principal herramienta utilizada son los resultados dados en la Sección 3.2, la mayoría de los cuales han sido obtenidos usando la estratificación dada por la teoría geométrica de invariantes, descrita en la Sección 1.5.

Recordar que, por lo mencionado al comienzo de la Sección 2.1, todo solitón de Ricci homogéneo no trivial es de expansión, i.e. $c < 0$. Es por eso que a lo largo de este capítulo asumiremos que los solitones semi-algebraicos considerados son todos de expansión.

El lector interesado únicamente en variedades homogéneas Einstein debe asumir simplemente $D = 0$ a lo largo de la sección, sin embargo vale la pena mencionar que el esfuerzo requerido para comprender la prueba del Teorema 3.3.6 para el caso Einstein o para solitones semi-algebraicos en general es prácticamente el mismo.

Sea $(G/K, g)$ un espacio homogéneo riemanniano, y consideremos la descomposición reductiva métrica $(\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de modo que $B(\mathfrak{k}, \mathfrak{p}) = 0$. Se deduce de (2.5), (3.10) y (3.14) que $(G/K, g)$ es un solitón semi-algebraico, digamos con operador de Ricci $\mathrm{Ric} = cI + S(D_\mathfrak{p})$ (ver (2.5)), si y solamente si

$$\operatorname{tr}\left(cI + \tfrac{1}{2}B_\mathfrak{p} + F\right) E = \tfrac{1}{4}\langle \pi(E)[\cdot,\cdot]_\mathfrak{p}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{p}\rangle, \qquad \forall E \in \mathrm{End}(\mathfrak{p}), \tag{3.21}$$

donde

$$F := S(\operatorname{ad}_\mathfrak{p} H + D_\mathfrak{p}).$$

Gracias al Lemma 3.2.6 sabemos que la derivación $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ tiene la siguiente forma con respecto a la descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_\mathfrak{h} & 0 \\ 0 & D_{\mathfrak{h}\mathfrak{n}} & D_\mathfrak{n} \end{bmatrix}, \qquad D_\mathfrak{n} \in \mathrm{Der}(\mathfrak{n}), \qquad \operatorname{tr} D_\mathfrak{h} = 0. \tag{3.22}$$

Podemos proceder ahora con la prueba del primer resultado estructural, el cual empieza a mostrar que la estructura algebraica de $(\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ está bien lejos de ser arbitraria cuando se tiene la condición de solitón semi-algebraico.

Proposición 3.3.1. *Sea $(G/K, g)$ un espacio homogéneo riemanniano, y consideremos la descomposición reductiva métrica $(\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ con $B(\mathfrak{k}, \mathfrak{p}) = 0$. Supongamos que $(G/K, g)$ es un solitón semi-algebraico de expansión, con $\mathrm{Ric} = cI + S(D_\mathfrak{p})$, $c < 0$, y consideremos las descomposiciones $\mathfrak{p} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$ y $[\cdot,\cdot]_\mathfrak{p} = \lambda_0 + ... + \mu$ definidas en* (3.1) *y* (3.2)*, respectivamente. Entonces,*

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]_\mathfrak{p} \subset \mathfrak{h},$$

o equivalentemente, $\lambda_1 = 0$. Más aún, si $\mu \neq 0$ y $\beta_\mu = \beta$ para la $\beta \in \mathfrak{t}^+$ tal que $\mu \in \mathcal{S}_\beta$ (ver Teorema 1.5.1*), entonces*

(i) $\beta + ||\beta||^2 I \in \mathrm{Der}(\mathfrak{n})$;

(ii) $[\beta, \operatorname{ad} \mathfrak{h}|_\mathfrak{n}] = 0$;

(iii) $S(\operatorname{ad}_\mathfrak{p} H + D_\mathfrak{p}) = tE_\beta$ *para* $t = \frac{||H||^2 + \operatorname{tr} D_\mathfrak{n}}{-1 + ||\beta||^2 \dim \mathfrak{n}}$ *(ver* (3.3)*), o equivalentemente, se tienen las siguientes condiciones:*

(a) $S(\operatorname{ad}_{\lambda_0} H + D_{\mathfrak{h}}) = 0$*;*

(b) $\operatorname{ad}_{\lambda_1} H = D_{\mathfrak{h}\mathfrak{n}} = 0$*;*

(c) $S(\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H|_{\mathfrak{n}} + D_{\mathfrak{n}}) = t(\beta + ||\beta||^2 I)$*, para algún* $t \geq 0$*.*

Para $\mu = 0$ *se tiene que* $S(\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H + D_{\mathfrak{p}}) = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & tI \end{smallmatrix}\right]$*, donde* $t = \frac{||H||^2 + \operatorname{tr} D_{\mathfrak{n}}}{\dim \mathfrak{n}}$.

Demostración. Para poder aplicar los resultados de la Sección 1.5, identificamos a $\mathfrak{n}$ con $\mathbb{R}^n$ vía una base ortonormal $\{e_1, ..., e_n\}$ de $\mathfrak{n}$. De esta forma, μ puede ser visto como un elemento de $\mathcal{N} \subset V$ (ver (1.19)). Si $\mu \neq 0$ entonces $\mu \in \mathcal{S}_\beta$ para algún $\beta \in \mathcal{B} \subset \mathfrak{t}^+$ y existe $h \in \mathrm{O}(n)$ tal que $\tilde{\mu} := h \cdot \mu$ cumple $\beta_{\tilde{\mu}} = \beta$; en consecuencia, se cumplen muchas propiedades adicionales para $\tilde{\mu}$ en relación con β. Sea $\tilde{h} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ la aplicación definida por $\tilde{h}|_{\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{h}} = I$, $\tilde{h}|_{\mathfrak{n}} = h$, y denotemos por $\tilde{\mathfrak{g}}$ al álgebra de Lie que consiste del espacio vectorial $\mathfrak{g}$ y corchete de Lie dado por

$$\tilde{h} \cdot [\cdot, \cdot] = \tilde{h}[\tilde{h}^{-1} \cdot, \tilde{h}^{-1} \cdot].$$

Es fácil ver que $(\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es también una descomposición reductiva métrica. Como la condición $\lambda_1 = 0$ se cumple para $(\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ si y sólo si se cumple para $(\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, podemos asumir de ahora en más que $\beta_\mu = \beta$, con lo cual se podrán usar en la prueba todas las propiedades enunciadas en el Teorema 1.5.1 y el Lema 3.2.2.

Lema 3.3.2. *Bajo las mismas hipótesis de la proposición, se tiene que*

$$c \operatorname{tr} F + \operatorname{tr} F^2 = 0, \tag{3.23}$$

donde $F = S(\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H + D_{\mathfrak{p}})$*.*

Observación 3.3.3. Este lema también vale en el caso $c \geq 0$.

Demostración. Poniendo $E = \operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H + D_{\mathfrak{p}}$ en (3.21) obtenemos

$$c \operatorname{tr} F + \tfrac{1}{2} \operatorname{tr} B_{\mathfrak{p}}(\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H + D_{\mathfrak{p}}) + \operatorname{tr} F^2 = \tfrac{1}{4} \langle \pi(\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H + D_{\mathfrak{p}})[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{p}}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{p}} \rangle. \tag{3.24}$$

Gracias a (3.17), el Lema 3.2.6 y (3.22), tenemos que

$$\tilde{E} := \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H + D_{\mathfrak{p}} \end{smallmatrix}\right] = \operatorname{ad} H + D \in \operatorname{Der}(\mathfrak{g}).$$

Entonces, $\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H + D_{\mathfrak{p}}$ es una derivación del álgebra $(\mathfrak{p}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{p}})$, con lo cual el lado derecho de (3.24) se anula. Pero por la Observación 3.2.7 se tiene que $\operatorname{tr} B_{\mathfrak{p}}(\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H + D_{\mathfrak{p}}) = 0$, luego queda demostrado el lema. □

Supongamos en primer lugar que $\mu = 0$, y apliquemos (3.21) a $E \in \operatorname{End}(\mathfrak{g})$ dada por $E|_{\mathfrak{h}} = 0$, $E|_{\mathfrak{n}} = I$. Recordemos que $\operatorname{tr} F|_{\mathfrak{n}} = \operatorname{tr} F$ gracias al Lema 3.2.6. Se obtiene entonces de (3.21) que

$$\tfrac{1}{4} ||\lambda_1||^2 = cn + \operatorname{tr} F,$$

donde $n = \dim \mathfrak{n}$. Si $n = 0$, la afirmación a probar es trivial. En caso contrario, como $c < 0$, se debe cumplir que $\operatorname{tr} F > 0$, y entonces de (3.23) deducimos que

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4} ||\lambda_1||^2 =& cn + \operatorname{tr} F = -\tfrac{\operatorname{tr} F^2}{\operatorname{tr} F} n + \operatorname{tr} F = \tfrac{\operatorname{tr} F^2}{\operatorname{tr} F} \left(\tfrac{(\operatorname{tr} F)^2}{\operatorname{tr} F^2} - n \right) \\ \leq& \tfrac{\operatorname{tr} F^2}{\operatorname{tr} F} \left(\tfrac{(\operatorname{tr} F|_{\mathfrak{n}})^2}{\operatorname{tr} (F|_{\mathfrak{n}})^2} - n \right) \leq \tfrac{\operatorname{tr} F^2}{\operatorname{tr} F} \left(\tfrac{(f_1 + \ldots + f_n)^2}{f_1^2 + \ldots + f_n^2} - n \right) \leq 0, \end{aligned}$$

donde $f_1, \dots, f_n$ son los autovalores de $F|_{\mathfrak{n}}$. Así, $\lambda_1 = 0$, y además se obtiene que $F|_{\mathfrak{h}} = 0$ (pues $\operatorname{tr} F^2 = \operatorname{tr}(F|_{\mathfrak{n}})^2)$ y $F|_{\mathfrak{n}} = tI$ para algún $t \in \mathbb{R}$, el cual satisface $t = \frac{\operatorname{tr} F|_{\mathfrak{n}}}{n} = \frac{||H||^2 + \operatorname{tr} D_{\mathfrak{n}}}{n}$.

Consideremos ahora el caso $\mu \neq 0$. Como vimos antes, podemos asumir que μ satisface $\beta_\mu = \beta$, o sea que el lado derecho de (3.21) aplicado a E_β (ver (3.3)) es no negativo gracias al Lema 3.2.2. De (3.21) se obtiene entonces que

$$c \operatorname{tr} E_\beta + \operatorname{tr} F E_\beta \geq 0. \tag{3.25}$$

En particular, $F \neq 0$ pues $c < 0$ y $\operatorname{tr} E_\beta > 0$ (ver (1.28)), lo cual implica que $\operatorname{tr} F > 0$ y $c = -\frac{\operatorname{tr} F^2}{\operatorname{tr} F}$ por (3.23). Recordemos que $\operatorname{tr} \beta = -1$, luego

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} E_\beta^2 =& \operatorname{tr}(\beta^2 + ||\beta||^4 I + 2||\beta||^2 \beta) = ||\beta||^2 (1 + n||\beta||^2 - 2) \\ =& ||\beta||^2(-1 + n||\beta||^2) = ||\beta||^2 \operatorname{tr} E_\beta. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Por otro lado, usando (1.30) se obtiene

$$\operatorname{tr} F E_\beta = \operatorname{tr} F|_{\mathfrak{n}}(\beta + ||\beta||^2) = ||\beta||^2 \operatorname{tr} F. \tag{3.27}$$

Ahora usamos (3.23), (3.25), (3.26) y (3.27) para obtener, después de una manipulación algebraica estándar, la desigualdad

$$\operatorname{tr} F^2 \operatorname{tr} E_\beta^2 \leq (\operatorname{tr} F E_\beta)^2,$$

la cual es una desigualdad de Cauchy-Schwarz “al revés”. Esto implica que $F = tE_\beta$ para algún $t > 0$, de lo cual se deduce el ítem (iii) (observar que las propiedades (a)-(c) valen, por (3.15) y (3.22)). Pero también se da la igualdad en (3.25), lo cual hace que tengamos igualdad en todas las desigualdades de la prueba del Lema 3.2.2. En particular, $\lambda_1 = 0$ se deduce de (3.4), y el ítem (i) se sigue de (3.6) y (1.31).

Finalmente, usando (3.5) y (1.27) se obtiene el ítem (ii), y esto da por concluida la prueba. □

Utilizando la Proposición 3.3.1, si $(\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es una descomposición reductiva métrica de un solitón semi-algebraico de expansión, vemos que las matrices de las aplicaciones adjuntas y de D se simplifican de la siguiente manera:

$$\operatorname{ad} H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{ad}_{\lambda_0} H & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{ad}_\eta H \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{\mathfrak{h}} & 0 \\ 0 & 0 & D_{\mathfrak{n}} \end{bmatrix}, \tag{3.28}$$

y para todo $Y \in \mathfrak{h}$,

$$\operatorname{ad} Y = \begin{bmatrix} 0 & \operatorname{ad}_{\lambda_2} Y & 0 \\ \operatorname{ad}_{\nu_1} Y & \operatorname{ad}_{\lambda_0} Y & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{ad}_\eta Y \end{bmatrix}. \tag{3.29}$$

Luego de los resultados estructurales obtenidos en la Proposición 3.3.1, podemos ver una fórmula más detallada para el operador M, el término más complicado del operador de Ricci Ric.

Lema 3.3.4. *Sea $(G/K, g_{\langle \cdot, \cdot \rangle})$ un espacio homogéneo riemanniano con cualquier descomposición reductiva métrica $(\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, y consideremos las descomposiciones $\mathfrak{p} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$ y $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{p}} = \lambda_0 + \ldots + \mu$ definidas en (3.1) y (3.2), respectivamente. Supongamos que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{h}$ (i.e. $\lambda_1 = 0$). Entonces, el operador simétrico M definido en (3.12) está dado para todo $Y \in \mathfrak{h}$, $X \in \mathfrak{n}$ por*

$$\langle \mathrm{M}\, Y, Y \rangle = \langle \mathrm{M}_{\lambda_0} Y, Y \rangle - \tfrac{1}{2} \operatorname{tr} \operatorname{ad}_\eta Y (\operatorname{ad}_\eta Y)^t,$$

$$\langle \mathrm{M}\, X, X \rangle = \langle \mathrm{M}_\mu X, X \rangle + \tfrac{1}{2} \sum \langle [\operatorname{ad}_\eta Y_i, (\operatorname{ad}_\eta Y_i)^t] X, X \rangle,$$

$$\langle \mathrm{M}\, Y, X \rangle = -\tfrac{1}{2} \operatorname{tr} \operatorname{ad}_\eta Y (\operatorname{ad}_\mu X)^t,$$

donde M_{λ_0} *y* M_μ *se definen como en* (3.12), *reemplazando* $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{p}}$ *por los corchetes* $\lambda_0 : \mathfrak{h}\times\mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}$ *y* $\mu : \mathfrak{n}\times\mathfrak{n} \longrightarrow \mathfrak{n}$, *respectivamente, e* $\{Y_i\}$ *es cualquier base ortonormal de* $\mathfrak{h}$.

Observación 3.3.5. El Lema vale en realidad para cualquier descomposición en suma directa de subespacios $\mathfrak{p} = \mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}$ que cumplan que $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]_{\mathfrak{p}} \subset \mathfrak{h}$ y $[\mathfrak{p},\mathfrak{n}]_{\mathfrak{p}} \subset \mathfrak{n}$ (es decir, no es necesario que $\mathfrak{n}$ sea precisamente el nilradical de $\mathfrak{g}$).

Demostración. Sea $\{X_i\}$ una base ortonormal de $\mathfrak{n}$. Como $\lambda_1 = 0$, el cálculo de M para $Y \in \mathfrak{h}$, $X \in \mathfrak{n}$ puede ser llevado a cabo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{M}\,Y, Y\rangle &= -\tfrac12 \sum \langle \lambda_0(Y,Y_i),Y_j\rangle^2 - \tfrac12 \sum\langle \eta(Y,X_i),X_j\rangle^2 + \tfrac14\sum\langle\lambda_0(Y_i,Y_j),Y\rangle^2\\ &= \langle \mathrm{M}_{\lambda_0} Y,Y\rangle - \tfrac12\sum\langle \mathrm{ad}_\eta Y(X_i), \mathrm{ad}_\eta Y(X_i)\rangle\\ &= \langle \mathrm{M}_{\lambda_0} Y,Y\rangle - \tfrac12\sum\langle (\mathrm{ad}_\eta)^t Y\,\mathrm{ad}_\eta Y(X_i), X_i\rangle\\ &= \langle \mathrm{M}_{\lambda_0} Y,Y\rangle - \tfrac12\,\mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}_\eta Y)^t\,\mathrm{ad}_\eta Y,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{M}\,X, X\rangle =& -\tfrac12\sum\langle [X,Y_i],X_j\rangle^2 - \tfrac12\sum\langle\mu(X,X_i),X_j\rangle^2\\ &+ \tfrac12\sum\langle\eta(Y_i,X_j),X\rangle^2 + \tfrac14\sum\langle\mu(X_i,X_j),X\rangle^2\\ =&\langle \mathrm{M}_\mu X,X\rangle - \tfrac12\sum\langle\eta(Y_i,X),X_j\rangle^2 + \tfrac12\sum\langle\eta(Y_i,X_j),X\rangle^2\\ =&\langle \mathrm{M}_\mu X,X\rangle - \tfrac12\sum\langle \mathrm{ad}_\eta Y_i(X), \mathrm{ad}_\eta Y_i(X)\rangle\\ &+\tfrac12\sum\langle(\mathrm{ad}_\eta Y_i)^t(X), (\mathrm{ad}_\eta Y_i)^t(X)\rangle\\ =&\langle \mathrm{M}_\mu X,X\rangle + \tfrac12\sum\langle[\mathrm{ad}_\eta Y_i,(\mathrm{ad}_\eta Y_i)^t]X,X\rangle,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{M}\,Y, X\rangle &= -\tfrac12\sum\langle\eta(Y,X_i),X_j\rangle\langle\mu(X,X_i),X_j\rangle\\ &= -\tfrac12\,\mathrm{tr}\,\mathrm{ad}_\eta Y(\mathrm{ad}_\mu X)^t,\end{aligned}$$

y el lema queda demostrado. □

Estamos ahora listos para probar el principal resultado estructural de este capítulo.

Teorema 3.3.6. *Sea* $(G/K,g)$ *un espacio homogéneo riemanniano, y consideremos la descomposición reductiva métrica* $(\mathfrak{g} = \mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *con* $B(\mathfrak{k},\mathfrak{p}) = 0$. *Consideremos también la descomposición ortogonal* $\mathfrak{p} = \mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}$, *donde* $\mathfrak{n}$ *es el nilradical de* $\mathfrak{g}$. *Si* $(G/K,g)$ *es un solitón semi-algebraico de expansión, con constante cosmológica* $c < 0$, *entonces se cumplen las siguientes condiciones:*

(i) $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}] \subset \mathfrak{k}\oplus\mathfrak{h}$. *En particular,* $\mathfrak{u} = \mathfrak{k}\oplus\mathfrak{h}$ *es una subálgebra de Lie reductiva de* $\mathfrak{g}$ *y* $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}\ltimes\mathfrak{n}$ *(producto semidirecto).*

(ii) $\mathrm{Ric}_{\mathfrak{u}} = cI + C_{\mathfrak{h}}$, *donde* $\mathrm{Ric}_{\mathfrak{u}}$ *es el operador de Ricci de la descomposición reductiva métrica* $(\mathfrak{u} = \mathfrak{k}\oplus\mathfrak{h}, \langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathfrak{u}\times\mathfrak{u}})$ *y* $C_{\mathfrak{h}}$ *es el operador simétrico definido por*

$$\langle C_{\mathfrak{h}}Y,Y\rangle = \mathrm{tr}\,S(\mathrm{ad}\,Y|_{\mathfrak{n}})^2, \qquad \forall Y\in\mathfrak{h}.$$

(iii) $\operatorname{Ric}_{\mathfrak{n}} = cI + D_1$, *para alguna* $D_1 \in \operatorname{Der}(\mathfrak{n})$, *donde* $\operatorname{Ric}_{\mathfrak{n}}$ *denota el operador de Ricci del álgebra de Lie métrica nilpotente* $(\mathfrak{n}, \langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathfrak{n}\times\mathfrak{n}})$ *(i.e.* $(\mathfrak{n}, \langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathfrak{n}\times\mathfrak{n}})$ *es un nilsolitón).*

(iv) $\sum[\operatorname{ad} Y_i|_{\mathfrak{n}}, (\operatorname{ad} Y_i|_{\mathfrak{n}})^t] = 0$, *donde* $\{Y_i\}$ *es cualquier base ortonormal de* $\mathfrak{h}$ *(en particular,* $(\operatorname{ad} Y|_{\mathfrak{n}})^t \in \operatorname{Der}(\mathfrak{n})$ *para todo* $Y \in \mathfrak{h}$*).*

(v) El operador de Ricci de $(G/K, g)$ *está dado por* $\operatorname{Ric} = cI + S(D_{\mathfrak{p}})$, *donde*

$$D := -\operatorname{ad} H + \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & D_1 \end{bmatrix} \in \operatorname{Der}(\mathfrak{g}).$$

Recíprocamente, si se cumplen las condiciones (i)-(iv) *y* G/K *es simplemente conexa, entonces* $(G/K, g)$ *es un solitón semi-algebraico con constante cosmológica* c *y derivación* D *como arriba.*

Observación 3.3.7. En particular, estos resultados de estructura se aplican a cualquier espacio homogéneo Einstein de curvatura escalar negativa, ya que todos esos espacios son solitones semi-algebraicos de expansión con respecto a cualquier descomposición reductiva.

Observación 3.3.8. En el ítem (ii), $\operatorname{Ric}_{\mathfrak{u}}$ se define como en (3.10) y es en realidad el operador de Ricci del espacio homogéneo U/K_0 con la métrica U-invariante determinada por $\langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$, donde U es el subgrupo de Lie conexo de G con álgebra de Lie $\mathfrak{u}$ y K_0 es la componente conexa de la identidad de K. Observar que U/K_0 es casi-efectivo si y sólo si el núcleo de la aplicación $\mathfrak{k} \longrightarrow \operatorname{End}(\mathfrak{h})$, $Z \mapsto \operatorname{ad} Z|_{\mathfrak{h}}$, es trivial.

Demostración. Consideremos la descomposición reductiva métrica $(\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ definida en el comienzo de la prueba de la Proposición 3.3.1, para la cual el correspondiente $\widetilde{\mu} = h \cdot \mu$ $(h \in \mathrm{O}(n))$ satisface $\beta_{\widetilde{\mu}} = \beta$. El operador de Ricci de $(\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ está dado por $\widetilde{\operatorname{Ric}} = h \operatorname{Ric} h^{-1}$. Más aún, es fácil ver que

$$\widetilde{\operatorname{Ric}_{\mathfrak{u}}} = \operatorname{Ric}_{\mathfrak{u}}, \quad \widetilde{\operatorname{ad}} Y|_{\mathfrak{n}} = h \operatorname{ad} Y|_{\mathfrak{n}} h^{-1}, \quad \widetilde{C_{\mathfrak{h}}} = C_{\mathfrak{h}}, \quad \widetilde{\operatorname{Ric}_{\mathfrak{n}}} = h \operatorname{Ric}_{\mathfrak{n}} h^{-1},$$

para todo $Y \in \mathfrak{h}$, de lo cual se deduce que los ítems (i)-(v) se cumplen para $(\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ si y sólo si se cumplen para $(\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Esto nos permite asumir de ahora en más que la condición $\beta_\mu = \beta$ se cumple para nuestra μ en el caso de que ésta sea no nula, y consecuentemente podemos hacer uso de todas las propiedades enunciadas en el Teorema 1.5.1 y el Lema 3.2.2.

Supongamos primero que $(G/K, g)$ es un solitón semi-algebraico como en el enunciado del teorema, con $\operatorname{Ric} = cI + S(D_{\mathfrak{p}})$, $c < 0$. Recordemos que ya hemos probado algunas restricciones sobre la forma que puede tener D (ver (3.28)). La notación introducida en la Sección 3.2 será usada constantemente a lo largo de la prueba de este teorema.

El ítem (i) es parte del contenido de la Proposición 3.3.1. Para probar los ítems (iii) y (iv) necesitamos el siguiente resultado.

Lema 3.3.9. *Para cada* $Y \in \mathfrak{h}$ *se tiene que* $(\operatorname{ad} Y|_{\mathfrak{n}})^t$ *es una derivación de* $\mathfrak{n}$*.*

Demostración. Para $\mu = 0$ (i.e. $\mathfrak{n}$ abeliano), la afirmación es trivial. Si $\mu \neq 0$ y $\mu \in \mathcal{S}_\beta$ entonces sabemos por el ítem (iii), (c) de la Proposición 3.3.1, que $F|_{\mathfrak{n}} = t(\beta + ||\beta||^2 I)$, donde $F = S(\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H + D_{\mathfrak{p}})$, y como $F|_{\mathfrak{n}}$ es una derivación de $\mathfrak{n}$ gracias al ítem (i) de dicha proposición, usando también (1.30) obtenemos

$$\operatorname{tr}(F|_{\mathfrak{n}})^2 = t||\beta||^2 \operatorname{tr} F|_{\mathfrak{n}}.$$

Pero del ítem (iii) de la Proposición 3.3.1 sabemos que $\operatorname{tr} F|_{\mathfrak{n}} = \operatorname{tr} F$ y $\operatorname{tr}(F|_{\mathfrak{n}})^2 = \operatorname{tr} F^2$, entonces podemos usar (3.23) y concluir que $t = -\frac{c}{||\beta||^2}$, con lo cual

$$F|_{\mathfrak{n}} = -\tfrac{c}{||\beta||^2}\beta - cI. \tag{3.30}$$

Recordar que $F \neq 0$ por (3.25), luego $\operatorname{tr} F|_{\mathfrak{n}} = \operatorname{tr} F > 0$ por (3.21).

Por otro lado, como $\operatorname{Ric}|_{\mathfrak{n}} = cI + S(D_{\mathfrak{n}})$, deducimos del Lema 3.3.4 (el cual puede usarse ya que hemos probado el ítem (i)) que

$$\mathrm{M}_\mu + \tfrac{1}{2}\sum \left[\operatorname{ad}_\eta Y_i, (\operatorname{ad}_\eta Y_i)^t\right] - F|_{\mathfrak{n}} = cI,$$

y entonces (3.30) implica la siguiente identidad en $\mathfrak{n}$:

$$\mathrm{M}_\mu + \tfrac{1}{2}\sum \left[\operatorname{ad}_\eta Y_i, (\operatorname{ad}_\eta Y_i)^t\right] + \tfrac{c}{||\beta||^2}\beta = 0. \tag{3.31}$$

Tomando traza en esta identidad y usando que $\operatorname{tr} \mathrm{M}_\mu = -\frac{1}{4}||\mu||^2$ y $\operatorname{tr}\beta = -1$, llegamos a que

$$c = -\tfrac{1}{4}||\beta||^2||\mu||^2. \tag{3.32}$$

Se deduce también de (3.31) que

$$0 = \operatorname{tr} \mathrm{M}_\mu^2 + \tfrac{1}{2}\sum \operatorname{tr} \mathrm{M}_\mu \left[\operatorname{ad}_\eta Y_i, (\operatorname{ad}_\eta Y_i)^t\right] + \tfrac{c}{||\beta||^2}\operatorname{tr} \mathrm{M}_\mu\,\beta.$$

De manera análoga que en (3.14), tenemos que

$$\operatorname{tr} \mathrm{M}_\mu E = \tfrac{1}{4}\langle \pi(E)\mu, \mu\rangle, \qquad \forall E \in \operatorname{End}(\mathfrak{n}),$$

o equivalentemente, $m(\mu) = \frac{4}{||\mu||^2}\mathrm{M}_\mu$ para todo $\mu \in V$ (ver (1.24)). Luego, para cada i,

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \mathrm{M}_\mu[\operatorname{ad}_\eta Y_i, (\operatorname{ad}_\eta Y_i)^t] =& \tfrac{1}{4}\langle \pi([\operatorname{ad}_\eta Y_i|_{\mathfrak{n}}, (\operatorname{ad}_\eta Y_i)^t])\mu, \mu\rangle \\ =& \tfrac{1}{4}\langle \pi(\operatorname{ad}_\eta Y_i)\pi((\operatorname{ad}_\eta Y_i)^t)\mu, \mu\rangle \\ =& \tfrac{1}{4}\langle \pi((\operatorname{ad}_\eta Y_i)^t)\mu, \pi((\operatorname{ad}_\eta Y_i)^t)\mu\rangle \\ =& \tfrac{1}{4}||\pi((\operatorname{ad}_\eta Y_i)^t)\mu||^2. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Esto, junto con (3.32), implica que

$$\begin{aligned} 0 =& \operatorname{tr} \mathrm{M}_\mu^2 + \tfrac{1}{8}\sum ||\pi((\operatorname{ad}_\eta Y_i)^t)\mu||^2 - \tfrac{||\mu||^2}{4}\langle \mathrm{M}_\mu, \beta\rangle \\ =& \tfrac{1}{8}\sum ||\pi((\operatorname{ad}_\eta Y_i)^t)\mu||^2 + \tfrac{||\mu||^4}{16}\left(\tfrac{16}{||\mu||^4}\operatorname{tr} \mathrm{M}_\mu^2 - \left\langle \tfrac{4}{||\mu||^2}\mathrm{M}_\mu, \beta\right\rangle\right) \\ =& \tfrac{1}{8}\sum ||\pi((\operatorname{ad}_\eta Y_i)^t)\mu||^2 + \tfrac{||\mu||^4}{16}\left(||m(\mu)||^2 - \langle m(\mu), \beta\rangle\right). \end{aligned}$$

Pero como μ satisface $\beta_\mu = \beta$ obtenemos de (1.29) que

$$\langle m(\mu), \beta\rangle \leq ||m(\mu)||\ ||\beta|| \leq ||m(\mu)||^2,$$

lo cual implica que $\frac{1}{8}\sum ||\pi((\operatorname{ad}_\eta Y_i)^t)\mu||^2 = 0$. Así, $(\operatorname{ad}_\eta Y_i)^t \in \operatorname{Der}(\mathfrak{n})$ para todo i y queda demostrado el lema. $\square$

Observación 3.3.10. Aplicando (3.33) a cualquier álgebra de Lie métrica, se obtiene que la traspuesta de toda derivación normal es también una derivación.

Si $\mu = 0$, entonces los ítems (iii) y (iv) se siguen directamente del hecho de que $F|_{\mathfrak{n}} = tI$ (ver Proposición 3.3.1) y la fórmula para $\operatorname{Ric}|_{\mathfrak{n}}$ y $\operatorname{M}|_{\mathfrak{n}}$ (ver Lema 3.3.4). También se obtiene que $t = -c$.

Para $\mu \neq 0$, aplicando (3.31) y el Lema 3.3.9 obtenemos

$$\operatorname{M}_\mu + \tfrac{c}{\|\beta\|^2}\beta = 0, \qquad \sum \left[\operatorname{ad}_\eta Y_i, (\operatorname{ad}_\eta Y_i)^t\right] = 0,$$

pues son aplicaciones ortogonales entre sí por la Observación 3.2.3 y (1.30). Esto implica que vale el ítem (iv), y el ítem (iii) se deduce de la primera ecuación de arriba, ya que por (3.30),

$$\operatorname{M}_\mu = -\tfrac{c}{\|\beta\|^2}\beta = cI + F|_{\mathfrak{n}}.$$

Con respecto al ítem (ii), sabemos por el Lema 3.3.4 que

$$\langle \operatorname{M}_{\lambda_0} Y, Y\rangle = \langle \operatorname{M} Y, Y\rangle + \tfrac{1}{2}\operatorname{tr}\operatorname{ad}_\eta Y (\operatorname{ad}_\eta Y)^t. \tag{3.34}$$

Por otro lado, como $\mathfrak{u}$ es unimodular (por ser reductiva), tenemos que

$$\langle \operatorname{Ric}_{\mathfrak{u}} Y, Y\rangle = \langle \operatorname{M}_{\lambda_0} Y, Y\rangle - \tfrac{1}{2}\operatorname{tr}(\operatorname{ad} Y|_{\mathfrak{u}})^2, \quad \forall Y \in \mathfrak{h}. \tag{3.35}$$

Luego, usando que $F|_{\mathfrak{h}} = 0$, $\operatorname{Ric}|_{\mathfrak{h}} = cI$ y $\operatorname{tr}(\operatorname{ad} Y)^2 = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} Y|_{\mathfrak{u}})^2 + \operatorname{tr}(\operatorname{ad}_\eta Y)^2$, junto con (3.34) y (3.35), se obtiene la fórmula enunciada para $\operatorname{Ric}_{\mathfrak{u}}$. Esto concluye la prueba de la primera parte del teorema.

Recíprocamente, asumamos ahora que valen los ítems (i)-(iv). En primer lugar observemos que (iv) implica que $(\operatorname{ad}_\eta Y)^t$ es una derivación de $\mathfrak{n}$ para todo $Y \in \mathfrak{h}$, usando (3.33). Además, como sabemos que $\lambda_1 = 0$ gracias al ítem (i), podemos usar el Lema 3.3.4 y calcular Ric, lo cual haremos a continuación.

Usando el ítem (ii) y (3.35) obtenemos la fórmula

$$\begin{aligned}
\langle (\operatorname{M} - \tfrac{1}{2}B_{\mathfrak{p}})Y, Y\rangle =& \langle \operatorname{M}_{\lambda_0} Y, Y\rangle - \tfrac{1}{2}\operatorname{tr}\operatorname{ad}_\eta Y(\operatorname{ad}_\eta Y)^t - \tfrac{1}{2}\operatorname{tr}(\operatorname{ad} Y)^2\\
=& \langle \operatorname{Ric}_{\mathfrak{u}} Y, Y\rangle + \tfrac{1}{2}\operatorname{tr}(\operatorname{ad} Y|_{\mathfrak{u}})^2 - \tfrac{1}{2}\operatorname{tr}(\operatorname{ad} Y)^2 - \tfrac{1}{2}\operatorname{tr}\operatorname{ad}_\eta Y(\operatorname{ad}_\eta Y)^t\\
=& \langle \operatorname{Ric}_{\mathfrak{u}} Y, Y\rangle - \tfrac{1}{2}\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_\eta Y)^2 - \tfrac{1}{2}\operatorname{tr}\operatorname{ad}_\eta Y(\operatorname{ad}_\eta Y)^t\\
=& c\|Y\|^2,
\end{aligned} \tag{3.36}$$

para todo $Y \in \mathfrak{h}$. Más aún, de (3.15) se tiene que

$$\langle (\operatorname{M} - \tfrac{1}{2}B_{\mathfrak{p}})Y, X\rangle = -\tfrac{1}{2}\operatorname{tr}\operatorname{ad}_\eta Y(\operatorname{ad}_\mu X)^t = 0, \quad \forall Y \in \mathfrak{h}, X \in \mathfrak{n}, \tag{3.37}$$

ya que $(\operatorname{ad}_\eta Y)^t$ es derivación de $\mathfrak{n}$ y entonces si $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus ... \oplus \mathfrak{n}_r$ es la descomposición ortogonal definida por $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] = \mathfrak{n}_2 \oplus ... \oplus \mathfrak{n}_r$, $[\mathfrak{n}, [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]] = \mathfrak{n}_3 \oplus ... \oplus \mathfrak{n}_r$, etc, se ve que $\operatorname{ad}_\eta Y$ deja invariantes los subespacios $\mathfrak{n}_i$, pero por otro lado $\operatorname{ad}_\mu X(\mathfrak{n}_i) \subset \mathfrak{n}_{i+1} \oplus ... \oplus \mathfrak{n}_r$ para todo i. De (3.15) y el ítem (iv) se deduce también que

$$\langle (\operatorname{M} - \tfrac{1}{2}B_{\mathfrak{p}})X, X\rangle = \langle \operatorname{M}_\mu X, X\rangle = \langle \operatorname{Ric}_{\mathfrak{n}} X, X\rangle. \tag{3.38}$$

De (3.36), (3.37) y (3.38), y usando el ítem (iii), concluimos que

$$\operatorname{Ric} = cI + S(D_{\mathfrak{p}}), \qquad \text{para} \quad D = -\operatorname{ad} H + \tilde{D}_1,$$

donde $\tilde{D_1}$ se define por $\tilde{D_1}|_{\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{h}} = 0$, $\tilde{D_1}|_{\mathfrak{n}} = D_1$. Solo resta probar ahora que $\tilde{D_1} \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$, ya que luego podemos aplicar (2.5) y el comentario que le sigue a dicha fórmula, y obtener así que $(G/K, g)$ es un solitón semi-algebraico.

Para esto, recordemos que $D_1 \in \mathrm{Der}(\mathfrak{n})$, luego basta con ver que

$$[\mathrm{ad}\,(Y+Z)|_{\mathfrak{n}}, D_1] = 0, \tag{3.39}$$

para todo $Y \in \mathfrak{h}$, $Z \in \mathfrak{k}$. Pero D_1 conmuta con toda derivación E de $\mathfrak{n}$ cuya traspuesta también sea una derivación, pues $M_\mu = cI + D_1$ (ver Observación 3.2.4), con lo cual (3.39) se sigue gracias a que $(\mathrm{ad}(Y)|_{\mathfrak{n}})^t \in \mathrm{Der}(\mathfrak{n})$ y $(\mathrm{ad}\,Z|_{\mathfrak{n}})^t = -\,\mathrm{ad}\,Z|_{\mathfrak{n}}$, para todo $Y \in \mathfrak{h}$, $Z \in \mathfrak{k}$. Esto concluye la prueba del teorema. □

Corolario 3.3.11. *Sea $(G/K, g)$ un solitón semi-algebraico de expansión, como en el Teorema 3.3.6.*

(i) Si $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0$, entonces $(G/K, g)$ es isométrico a un solsolitón. Esto vale en particular cuando el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es soluble.

(ii) Si $\mathfrak{g}$ es semisimple, entonces $(G/K, g)$ es Einstein, con $\mathrm{Ric}(g) = cg$.

Demostración. Probemos primero el ítem (i). Es fácil ver que $(G/K, g)$ es isométrico al subgrupo de Lie conexo y soluble S de G con álgebra de Lie $\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}$ munido de la métrica invariante a izquierda definida por $\langle\cdot,\cdot\rangle$, el cual es claramente un solsolitón gracias a los ítems (ii)-(iv) del Teorema 3.3.6 y [Lau11b, Proposition 4.3]. Como podemos asumir que G es simplemente conexo sin perder la casi-efectividad, S resulta entonces simplemente conexo pues se tiene $G = K \times S$ como variedades diferenciables. Notar además que si $\mathfrak{g}$ es soluble, entonces en realidad $\mathfrak{u}$ debe ser abeliana.

El ítem (ii) se deduce inmediatamente del Teorema 3.3.6, pues en este caso tenemos que $\mathfrak{n} = 0$. □

A lo largo de la prueba del Teorema 3.3.6, se han obtenido adicionalmente las siguientes propiedades estructurales.

Proposición 3.3.12. *Bajo las mismas hipótesis que en el Teorema 3.3.6, si $\mathrm{Ric} = cI + S(D_{\mathfrak{p}})$, y $F = S(\mathrm{ad}_{\mathfrak{p}}\,H + D_{\mathfrak{p}})$, entonces $D_1 = S(\mathrm{ad}\,H|_{\mathfrak{n}} + D|_{\mathfrak{n}})$ y*

$$[\mathrm{ad}\,\mathfrak{u}|_{\mathfrak{n}}, D_1] = 0, \qquad [\mathrm{ad}\,\mathfrak{u}|_{\mathfrak{p}}, F] = 0.$$

Además, el operador M deja $\mathfrak{n}$ invariante, y $M|_{\mathfrak{n}} = M_\mu$. Supongamos ahora que $\mathfrak{n}$ no es abeliano, $\mu := [\cdot,\cdot]|_{\mathfrak{n}\times\mathfrak{n}} \in \mathcal{S}_\beta$ y $\beta_\mu = \beta$, y definamos $E_\beta \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ por

$$E_\beta := \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & \beta+||\beta||^2 I \end{bmatrix}, \qquad i.e. \quad E_\beta|_{\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{h}} = 0, \quad E_\beta|_{\mathfrak{n}} = \beta + ||\beta||^2 I.$$

Entonces se tienen las siguientes condiciones:

- *$E_\beta \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ (o equivalentemente, $[\beta, \mathrm{ad}\,\mathfrak{u}|_{\mathfrak{n}}] = 0$ y $\beta + ||\beta||^2 I \in \mathrm{Der}(\mathfrak{n})$).*
- *$S(\mathrm{ad}\,H + D) = -\frac{c}{||\mu||^2} E_\beta$.*
- *$c = -\frac{1}{4}||\mu||^2||\beta||^2$ y la aplicación momento satisface $m(\mu) = \beta$.*

En el Capítulo 2 hemos caracterizado a los solitones algebraicos entre todos los solitones de Ricci homogéneos como aquellos para los que la solución al flujo de Ricci diagonaliza simultáneamente con respecto a una base ortonormal fija de algún espacio tangente. Como primera aplicación del Teorema 3.3.6, daremos ahora algunas caracterizaciones de los solitones algebraicos con respecto a su estructura algebraica.

Proposición 3.3.13. *Bajo las mismas hipótesis que en el Teorema 3.3.6, asumamos que* $(G/K, g)$ *es un solitón semi-algebraico de expansión, con* $\operatorname{Ric} = cI + S(D_{\mathfrak{p}})$, $c < 0$, $D = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_{\mathfrak{p}} \end{smallmatrix}\right] \in \operatorname{Der}(\mathfrak{g})$. *Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $(G/K, g)$ *es un solitón algebraico (i.e.* $S(D) \in \operatorname{Der}(\mathfrak{g})$*).*

(ii) $S(D_{\mathfrak{p}}) \in \operatorname{Der}([\cdot,\cdot]_{\mathfrak{p}})$.

(iii) $S(\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H) \in \operatorname{Der}([\cdot,\cdot]_{\mathfrak{p}})$ *(o equivalentemente,* $S(\operatorname{ad} H) \in \operatorname{Der}(\mathfrak{g})$*).*

(iv) $\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H$ *es normal (o equivalentemente,* $\operatorname{ad} H$ *es normal).*

(v) $S(D|_{\mathfrak{h}}) = 0$.

(vi) $S(\operatorname{ad} H|_{\mathfrak{h}}) = 0$.

(vii) $\operatorname{Ric}|_{\mathfrak{h}} = cI$.

Demostración. Si asumimos el ítem (i), entonces (ii) vale porque $S(D)\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}$. Recíprocamente, el ítem (ii) junto con el hecho de que $[\operatorname{ad} Z|_{\mathfrak{p}}, S(D_{\mathfrak{p}})] = 0$ para todo $Z \in \mathfrak{k}$ (lo cual se deduce del Lema 3.2.5), implican que $S(D) = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S(D_{\mathfrak{p}}) \end{smallmatrix}\right] \in \operatorname{Der}(\mathfrak{g})$.

La equivalencia entre el ítem (iii) y que $S(\operatorname{ad} H) \in \operatorname{Der}(\mathfrak{g})$ se ve de la misma manera, usando que $S(\operatorname{ad} H)\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}$ (ver (3.28)) y $[\operatorname{ad} \mathfrak{k}|_{\mathfrak{p}}, S(\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H)] = 0$ (ver (3.17)). De la Proposición 3.3.12 tenemos que $S(\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H + D_{\mathfrak{p}}) \in \operatorname{Der}([\cdot,\cdot]_{\mathfrak{p}})$, con lo cual los ítems (ii) y (iii) son equivalentes. Para ver que (iii) implica (iv), observemos en primer lugar que

$$\langle (\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H)^t H, X\rangle = \langle H, [H, X]_{\mathfrak{p}}\rangle = \operatorname{tr} \operatorname{ad}[H, X] = \operatorname{tr}[\operatorname{ad} H, \operatorname{ad} X] = 0, \qquad \forall X \in \mathfrak{p},$$

luego $(\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H)^t H = 0$. Usando esto y que $(\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H)^t$ es una derivación (lo cual es equivalente al ítem (iii), puesto que $\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H \in \operatorname{Der}([\cdot,\cdot]_{\mathfrak{p}})$), obtenemos

$$(\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H)^t ([H, X]_{\mathfrak{p}}) = [H, (\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H)^t X]_{\mathfrak{p}},$$

y entonces $\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H$ es normal ($\operatorname{ad} H$ es por lo tanto también normal por (3.28)). Recíprocamente, si asumimos el ítem (iv), podemos razonar como en (3.33) y obtener

$$0 = \operatorname{tr} M[\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H, (\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H)^t] = \tfrac{1}{4} \left\|\pi\left((\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H)^t\right)[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{p}}\right\|^2.$$

Esto implica que $(\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H)^t \in \operatorname{Der}([\cdot,\cdot]_{\mathfrak{p}})$, y entonces tenemos que (iii) vale.

De la Proposición 3.3.12 tenemos que $S(\operatorname{ad} H|_{\mathfrak{h}} + D|_{\mathfrak{h}}) = 0$, por lo tanto usando que $\operatorname{Ric}|_{\mathfrak{h}} = cI + S(D|_{\mathfrak{h}})$ se deduce fácilmente que los ítems (v), (vi) y (vii) son mútuamente equivalentes.

Ahora bien, si suponemos (vi), entonces podemos usar que $M|_{\mathfrak{n}} = M_\mu$ (ver Proposición 3.3.12) para obtener

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4} \left\|\pi\left((\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H)^t\right)[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{p}}\right\|^2 &= \operatorname{tr} M[\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H, (\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H)^t] \\ &= \operatorname{tr} M_\mu[\operatorname{ad} H|_{\mathfrak{n}}, (\operatorname{ad} H|_{\mathfrak{n}})^t] = \tfrac{1}{4} \left\|\pi\left((\operatorname{ad} H|_{\mathfrak{n}})^t\right)\mu\right\|^2 = 0, \end{aligned}$$

por el ítem (iv) del Teorema 3.3.6, y se tiene entonces (iii).

Recíprocamente, asumamos que $(\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H)^t \in \operatorname{Der}([\cdot,\cdot]_{\mathfrak{p}})$. Esto implica que $[M, \operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H] = 0$ gracias a la Observación 3.2.4. Por otro lado, recordemos que $M - \frac{1}{2}B_{\mathfrak{p}} = cI + F$, y por la Proposición 3.3.12, $cI + F$ también conmuta con $\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H$. Luego, se tiene que

$$[B_{\mathfrak{p}}, \operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H] = 0.$$

Ahora bien, consideremos la descomposición $\mathfrak{p} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ al igual que en la prueba del Lema 3.2.6. Entonces, con respecto a dicha descomposición, los operadores $B_{\mathfrak{p}}$ y $\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H$ tienen la forma:

$$B_{\mathfrak{p}} = \begin{bmatrix} B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H = \begin{bmatrix} \operatorname{ad} H|_{\mathfrak{h}_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{ad} H|_{\mathfrak{n}} \end{bmatrix}.$$

Estamos usando aquí (3.20), y que $(\operatorname{ad} H)^t \in \operatorname{Der}(\mathfrak{g})$. Luego, como en la prueba de ese lema, obtenemos

$$(\operatorname{ad} H|_{\mathfrak{h}_1})^t = -B_2 \,(\operatorname{ad} H|_{\mathfrak{h}_1})\, B_2^{-1}.$$

Pero $[B_2, \operatorname{ad} H|_{\mathfrak{h}_1}] = [B_{\mathfrak{p}}, \operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H]|_{\mathfrak{h}_1} = 0$, entonces $(\operatorname{ad} H|_{\mathfrak{h}_1})^t = -\operatorname{ad} H|_{\mathfrak{h}_1}$ y el ítem (vi) queda demostrado. Esto concluye la prueba de la proposición. □

3.4. Construcción de solitones semi-algebraicos

El objetivo de esta sección es enunciar el Teorema 3.3.6 de manera más transparente, por medio de una construcción.

Consideremos primero el siguiente conjunto de datos y condiciones:

(d1) $(\mathfrak{n}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{n}})$: un álgebra de Lie métrica nilpotente con operador de Ricci $\operatorname{Ric}_{\mathfrak{n}} = cI + D_1$, para algún $c < 0$, $D_1 \in \operatorname{Der}(\mathfrak{n})$ (i.e. $(\mathfrak{n}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{n}})$ es un nilsolitón; recordar que D_1 es siempre definida positiva).

(d2) $(\mathfrak{u} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{h}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{u}})$: una descomposición reductiva métrica, con $\mathfrak{u}$ un álgebra de Lie reductiva.

(d3) $\theta : \mathfrak{u} \longrightarrow \operatorname{Der}(\mathfrak{n})$: un morfismo de álgebras de Lie tal que

- (c1) $\theta(Z)^t = -\theta(Z)$ para todo $Z \in \mathfrak{k}$.
- (c2) $\sum[\theta(Y_i), \theta(Y_i)^t] = 0$ para cualquier base ortonormal $\{Y_i\}$ de $\mathfrak{h}$ (se ve por (3.33) que entonces $\theta(Y)^t \in \operatorname{Der}(\mathfrak{n})$ para todo $Y \in \mathfrak{h}$).
- (c3) El operador de Ricci de $(\mathfrak{u} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{h}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{u}})$ satisface

$$\operatorname{Ric}_{\mathfrak{u}} = cI + C_\theta, \qquad \text{donde} \quad \langle C_\theta Y, Y\rangle = \operatorname{tr} S(\theta(Y))^2, \quad \forall Y \in \mathfrak{h}.$$

Consideremos ahora el correspondiente producto semidirecto de álgebras de Lie,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{n},$$

y la descomposición reductiva métrica $(\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, donde $\mathfrak{p} := \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$ y el producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ está dado por

$$\langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathfrak{u}\times\mathfrak{u}} = \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{u}}, \qquad \langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathfrak{n}\times\mathfrak{n}} = \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{n}},$$

y tal que

$$\mathfrak{g} = \overbrace{\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{h}}^{\mathfrak{u}} \oplus \mathfrak{n}$$
$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \underbrace{\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}}_{\mathfrak{p}}$$

es una descomposición ortogonal. Definamos $D : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ mediante

$$D := -\begin{bmatrix} \operatorname{ad}_{\mathfrak{u}} H & \\ & \theta(H) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \\ & D_1 \end{bmatrix},$$

donde $H \in \mathfrak{h}$ se define por $\langle H, Y \rangle = \operatorname{tr} \theta(Y)$ para todo $Y \in \mathfrak{u}$ (se ve fácilmente que $[\mathfrak{k}, H] = 0$). Tenemos que $D \in \operatorname{Der}(\mathfrak{g})$, pues $D_1 \in \operatorname{Der}(\mathfrak{n})$ (ver (d1)) y $[\theta(\mathfrak{u}), D_1] = 0$ (ver Observación 3.2.4).

De la recíproca del Teorema 3.3.6, el operador de Ricci de la descomposición reductiva métrica $(\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ viene dado por

$$\operatorname{Ric} = cI + S(D_{\mathfrak{p}}) = cI + \begin{bmatrix} -S(\operatorname{ad}_{\mathfrak{u}} H|_{\mathfrak{h}}) & \\ & -S(\theta(H)) + D_1 \end{bmatrix}. \tag{3.40}$$

Notar que $\operatorname{Ric} = cI$ si y sólo si $S(\operatorname{ad}_{\mathfrak{u}} H) = 0$ y $D_1 = \frac{1}{2}(\theta(H) + \theta(H)^t)$. Además, es un solitón algebraico si y sólo si $S(\operatorname{ad}_{\mathfrak{u}} H|_{\mathfrak{h}}) = 0$, lo cual equivale a decir que $\operatorname{ad}_{\mathfrak{u}} H$ y $\theta(H)$ sean ambos operadores normales (ver Proposición 3.3.13).

Podemos reescribir entonces la conclusión principal del Teorema 3.3.6 de una manera más simple.

Teorema 3.4.1. *Todo solitón de Ricci homogéneo de expansión es isométrico a un espacio homogéneo $(G/K, g)$ con descomposición reductiva métrica obtenida como en la construcción llevada a cabo previamente.*

Demostración. Por el Teorema 2.1.9, todo solitón de Ricci homogéneo es isométrico a un solitón semi-algebraico $(G/K, g)$. Consideremos ahora la descomposición reductiva métrica que cumple $B(\mathfrak{k}, \mathfrak{p}) = 0$. Se deduce fácilmente de los ítems (i)-(iv) del Teorema 3.3.6 que dicha descomposición se obtiene mediante la construcción descrita más arriba, con $\theta(Y) := \operatorname{ad} Y|_{\mathfrak{n}}$ para todo $Y \in \mathfrak{u}$. □

Sea $(G/K, g)$ un espacio homogéneo riemanniano conexo con descomposición reductiva métrica $(\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ construida como arriba, con $\mathfrak{g} = \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{n}$. Asumamos que G es conexo, y consideremos $U, N \subset G$ los subgrupos de Lie conexos con álgebras de Lie $\mathfrak{u}$ y $\mathfrak{n}$, respectivamente. Notemos que si K es conexo, entonces $K \subset U$.

Tenemos que UN es un subgrupo de G, pues N es normal, y como contiene a un entorno de la identidad de G (pues la aplicación $\mathfrak{g} = \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{n} \longrightarrow G$, $(Y, X) \mapsto \exp(Y) \exp(X)$ es un difeomorfismo entre algún entorno abierto de $(0, 0)$ y uno de $e \in G$), debe cumplirse que $G = UN$. La función

$$q : U \ltimes N \longrightarrow G, \qquad q(u, n) := un,$$

es un epimorfismo de grupos de Lie, cuya derivada en la identidad es el isomorfismo de álgebras de Lie dado por $dq|_e(Y, X) = Y + X$, para todo $Y \in \mathfrak{u}$, $X \in \mathfrak{n}$. Recordemos que en el producto semi-directo exterior $U \ltimes N$ la multiplicación se define por $(u, n) \cdot (v, m) = (uv, v^{-1} n v m)$. Luego q es un cubrimiento, y su núcleo un subgrupo discreto del centro de $U \ltimes N$, el cual está dado precisamente por la anti-diagonal

$$\operatorname{Ker}(q) = \Delta(U \cap N) := \{(x, x^{-1}) : x \in U \cap N\}.$$

Más aún, tenemos que G es isomorfo a $(U \ltimes N)/\Delta(U \cap N)$. En particular, si G es simplemente conexo, entonces $G \simeq U \ltimes N$, y luego G es difeomorfo al producto de variedades diferenciables $U \times N$, lo cual implica que U y N son también simplemente conexos.

Enunciamos ahora algunas estas de propiedades para su posterior uso.

Proposición 3.4.2. *Sea $(G/K, g)$ un espacio homogéneo riemanniano con descomposición reductiva métrica $(\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ construida como arriba, y asumamos que G es simplemente conexo y K conexo. Entonces, $G \simeq U \ltimes N$, los grupos U y N son simplemente conexos, y G/K es difeomorfo al producto de variedades diferenciables $U/K \times N$.*

Se sigue del Teorema 3.4.1 que un espacio homogéneo de Einstein $(G/K, g)$ que sea simplemente conexo cumplirá la conjetura de Alekseevskii si y sólo si U/K es difeomorfo a un espacio euclídeo, o equivalentemente, K es un subgrupo compacto maximal de U (ver Sección 3.1).

3.5. Solitones algebraicos y la conjetura de Alekseevskii

En esta sección mostraremos otra aplicación de los resultados estructurales obtenidos, la cual está relacionada con un vínculo entre las variedades homogéneas Einstein y los solitones algebraicos. Como consecuencia, obtendremos que si la conjetura de Alekseevskii es cierta, entonces también lo es el siguiente resultado a priori mucho más fuerte:

> Todo solitón algebraico de expansión $(G/K, g)$ es difeomorfo a un espacio euclídeo (o equivalentemente, K es un subgrupo compacto maximal de G).

Asumamos que tenemos una descomposición reductiva métrica $(\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ tal que $\mathfrak{g}$ es no unimodular. O sea que el vector $H \in \mathfrak{p}$ definido en (3.7) es no nulo, y como $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \perp H$, es claro que el subespacio $\mathfrak{g}_0 := \{H\}^\perp$ es en realidad un ideal unimodular de codimensión uno en $\mathfrak{g}$. Esto implica que

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}H \oplus \mathfrak{g}_0,$$

es un producto semidirecto de álgebras de Lie.

El siguiente resultado nos muestra que podemos obtener una descomposición reductiva métrica que sea Einstein a partir de cualquier solitón algebraico, sólo cambiando la acción adjunta de H, o agregándole un H adecuado en el caso unimodular.

Proposición 3.5.1. *Sea $(\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ una descomposición reductiva métrica tal que $B(\mathfrak{k},\mathfrak{p}) = 0$, y asumamos que es un solitón algebraico, con $\operatorname{Ric} = cI + D_{\mathfrak{p}}$, $D = S(D) \in \operatorname{Der}(\mathfrak{g})$, como en (3.40).*

(i) Si $\mathfrak{g}$ no es unimodular, consideremos la nueva álgebra de Lie $\widetilde{\mathfrak{g}}$ cuyo espacio vectorial es el mismo $\mathfrak{g} = \mathbb{R}H \oplus \mathfrak{g}_0$, y cuyo corchete de Lie coincide con el corchete de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}_0$, y se reemplaza la acción adjunta de H en $\mathfrak{g}_0$ por

$$\operatorname{ad}_{\widetilde{\mathfrak{g}}} H := \alpha(S(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} H) + D) = \alpha \begin{bmatrix} 0 & \\ & 0_{\;D_1} \end{bmatrix}, \qquad \alpha = \frac{\|H\|}{(\operatorname{tr} D_1)^{1/2}}.$$

Entonces, la descomposición reductiva métrica $(\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es Einstein, con operador de Ricci $\widetilde{\operatorname{Ric}} = cI$.

(ii) Si $\mathfrak{g}$ no es unimodular, entonces la descomposición reductiva métrica $(\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}_0, \langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0})$, donde $\mathfrak{p}_0 := \mathfrak{p} \cap \{H\}^\perp$, es también un solitón algebraico, con

$$\operatorname{Ric}_{\mathfrak{g}_0} = cI + D'_{\mathfrak{p}_0}, \qquad \textit{donde} \quad D' := D|_{\mathfrak{g}_0} + S(\operatorname{ad} H)|_{\mathfrak{g}_0} \in \operatorname{Der}(\mathfrak{g}_0).$$

Observar que $\mathfrak{g}_0$ es un ideal unimodular de codimensión uno en $\mathfrak{g}$.

(iii) Si $\mathfrak{g}$ es unimodular, consideremos el producto semidirecto $\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathbb{R}A \oplus \mathfrak{g}$, con

$$\operatorname{ad}_{\widetilde{\mathfrak{g}}} A := \alpha D = \alpha \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & D_1 \end{bmatrix}, \qquad \alpha = \frac{1}{(\operatorname{tr} D_1)^{1/2}}.$$

Entonces, la descomposición reductiva métrica $(\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{k} \oplus \widetilde{\mathfrak{p}}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, donde $\widetilde{\mathfrak{p}} := \mathbb{R}A \oplus \mathfrak{p}$ y $\|A\| = 1$, $\langle A, \mathfrak{p}\rangle = 0$, es Einstein, con operador de Ricci $\widetilde{\operatorname{Ric}} = cI$.

Observación 3.5.2. Los ítems (i) y (ii) pueden ser vistos como una generalización del vínculo entre solvariedades Einstein y nilsolitones descubierto en [Lau01].

Demostración. Probaremos primero los ítems (i) y (ii). Sean $\widetilde{\operatorname{Ric}}$, $\widetilde{M}$, $\widetilde{B}_{\mathfrak{p}}$ y $\widetilde{H} \in \mathbb{R}H$ los correspondientes tensores para la descomposición reductiva métrica $(\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, definidos como en (3.7)-(3.12). Además, sea $\mathfrak{p}_0 := \{Y \in \mathfrak{p} : \langle Y, H\rangle = 0\}$, de manera que

$$\mathfrak{p} = \mathbb{R}H \oplus \mathfrak{p}_0$$

es una descomposición ortogonal. Aplicando el Lema 3.3.4 con la descomposición recién mencionada (ver Observación 3.3.5 y usar que $H \perp [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$) a las descomposiciones reductivas métricas $(\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ y $(\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{M}\, X, X\rangle &= \langle \mathrm{M}_0\, X, X\rangle, & \langle \widetilde{\mathrm{M}} X, X\rangle &= \langle \mathrm{M}_0\, X, X\rangle, \\
\langle \mathrm{M}\, X, H\rangle &= -\tfrac{1}{2} \operatorname{tr} \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X (\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} H)^t, & \langle \widetilde{\mathrm{M}} X, H\rangle &= -\tfrac{1}{2} \operatorname{tr} \operatorname{ad}_{\widetilde{\mathfrak{g}}} X \operatorname{ad}_{\widetilde{\mathfrak{g}}} H, \\
\langle \mathrm{M}\, H, H\rangle &= -\tfrac{1}{2} \operatorname{tr} \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} H (\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} H)^t, & \langle \widetilde{\mathrm{M}} H, H\rangle &= -\tfrac{1}{2} \operatorname{tr} \operatorname{ad}_{\widetilde{\mathfrak{g}}} H \operatorname{ad}_{\widetilde{\mathfrak{g}}} H,
\end{aligned}$$

para todo $X \in \mathfrak{p}_0$, donde M_0 es el operador de la aplicación momento correspondiente a la descomposición reductiva métrica $(\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}_0, \langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0})$ (y recordar de la Proposición 3.3.13 que $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} H$ y $\operatorname{ad}_{\widetilde{\mathfrak{g}}} H$ son ambos operadores normales). Esto implica que el operador de Ricci de $(\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}_0, \langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0})$ está dado por $\operatorname{Ric}_{\mathfrak{g}_0} = cI + D|_{\mathfrak{p}_0} + S(\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H|_{\mathfrak{p}_0})$, con lo cual queda demostrado el ítem (ii).

Para $X, X' \in \mathfrak{p}_0$ es claro que,

$$\langle (\widetilde{\mathrm{M}} - \tfrac{1}{2}\widetilde{B}_{\mathfrak{p}})X, X'\rangle = \langle (\mathrm{M} - \tfrac{1}{2}B_{\mathfrak{p}})X, X'\rangle = \langle (cI + D_{\mathfrak{p}} + S(\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H))X, X'\rangle.$$

Sabemos que $\widetilde{H} = \gamma H$, para algún $\gamma > 0$ que está determinado por

$$\alpha\gamma(\|H\|^2 + \operatorname{tr} D) = \operatorname{tr} \operatorname{ad}_{\widetilde{\mathfrak{g}}} \widetilde{H} = \|\widetilde{H}\|^2 = \gamma^2 \|H\|^2, \tag{3.41}$$

así que la fórmula para $\widetilde{\operatorname{Ric}}$ en $\mathfrak{p}_0$ es la siguiente:

$$\begin{aligned}
\langle \widetilde{\operatorname{Ric}} X, X'\rangle =& \langle \big(cI + D_{\mathfrak{p}} + S(\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H) - \widetilde{\operatorname{ad}}_{\mathfrak{p}} \widetilde{H}\big) X, X'\rangle \\
=& \langle \big(cI + D_{\mathfrak{p}} + S(\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H) - \gamma\alpha(S(\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H) + D_p)\big) X, X'\rangle \\
=& \langle \big(cI + (1 - \alpha\gamma)\,(D_{\mathfrak{p}} + S(\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H))\,\big) X, X'\rangle.
\end{aligned}$$

Tomando $\alpha = \gamma^{-1}$, el cual coincide con la fórmula dada para α en el enunciado de la proposición (usando (3.41)) obtenemos que $\widetilde{\mathrm{Ric}} = cI$ en $\mathfrak{p}_0$.

Por otro lado, se deduce de las Observaciones 3.2.3 y 3.2.7, y del hecho de que $\operatorname{tr}\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} X = \operatorname{tr}\operatorname{ad} X = 0$, que

$$\begin{aligned}\langle \widetilde{\mathrm{Ric}} X, H\rangle =& \langle (\widetilde{\mathrm{M}} - \tfrac{1}{2}\widetilde{B}_{\mathfrak{p}})X, H\rangle = -\operatorname{tr}\operatorname{ad}_{\widetilde{\mathfrak{g}}} X S(\operatorname{ad}_{\widetilde{\mathfrak{g}}} H)\\ =& -\alpha \operatorname{tr}\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} X (S(\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H) + D_{\mathfrak{p}}) = -\alpha \operatorname{tr}\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} X(-cI + M - \tfrac{1}{2}B) = 0.\end{aligned}$$

Finalmente, usando (3.23) llegamos a que

$$\begin{aligned}\langle \widetilde{\mathrm{Ric}} H, H\rangle =& \langle (\widetilde{M} - \tfrac{1}{2}\widetilde{B}_{\mathfrak{p}})H, H\rangle = -\operatorname{tr}(\widetilde{\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H})^2\\ =& -\alpha^2 \operatorname{tr}(S(\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H) + D_{\mathfrak{p}})^2 = c\alpha^2 \operatorname{tr} S(\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} H) + D_{\mathfrak{p}} = c\|H\|^2,\end{aligned}$$

lo cual concluye la prueba del ítem (i).

Probaremos ahora el ítem (iii) de manera muy similar. Es fácil ver que $\widetilde{H} = (\operatorname{tr} D_1)^{1/2} A$, y como

$$\operatorname{tr}\operatorname{ad} A \operatorname{ad} X = \alpha \operatorname{tr} D_{\mathfrak{p}} \operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} X = \alpha \operatorname{tr}(M - \tfrac{1}{2}B - cI)\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}} X = 0, \qquad \forall X \in \mathfrak{p},$$

por unimodularidad y las Observaciones 3.2.3 y 3.2.7, tenemos que el operador asociado a la forma de Killing de $\tilde{\mathfrak{g}}$ tiene la siguiente forma en $\tilde{\mathfrak{p}}$:

$$\widetilde{B}_{\widetilde{\mathfrak{p}}} = \begin{bmatrix} (\operatorname{tr} D_1)^{-1}\operatorname{tr} D_1^2 & 0\\ 0 & B_{\mathfrak{p}}\end{bmatrix}.$$

Aplicando el Lema 3.3.4 a la descomposición $\widetilde{\mathfrak{p}} = \mathbb{R}A \oplus \mathfrak{p}$ (ver Observación 3.3.5), se obtiene

$$\langle \widetilde{\mathrm{M}} X, X\rangle = \langle \mathrm{M}\, X, X\rangle, \quad \langle \widetilde{\mathrm{M}} X, A\rangle = 0, \quad \langle \widetilde{\mathrm{M}} A, A\rangle = -\tfrac{1}{2}(\operatorname{tr} D_1)^{-1}\operatorname{tr} D_1^2,$$

para todo $X \in \mathfrak{p}$. Finalmente, usando que $\mathrm{Ric}_{\mathfrak{n}} = cI + D_1$ se obtiene $c = -(\operatorname{tr} D_1)^{-1}\operatorname{tr} D_1^2$ (ver Observación 3.2.3), de lo cual se deduce fácilmente que $\widetilde{\mathrm{Ric}} = \widetilde{M} - \frac{1}{2}\widetilde{B}_{\widetilde{\mathfrak{p}}} - S(\operatorname{ad}_{\widetilde{\mathfrak{p}}} \widetilde{H}) = cI$, y esto concluye la prueba de la Proposición. □

Teorema 3.5.3. *Supongamos que existe un solitón algebraico de expansión el cual no es difeomorfo a un espacio euclídeo. Entonces, existe un contraejemplo a la conjetura de Alekseevskii.*

Observación 3.5.4. Este resultado fue probado en [HPW13] (ver Remark 1.14 en dicho artículo) en el caso de métricas invariantes a izquierda en grupos de Lie, usando métodos completamente diferentes. Ellos estudian estructuras de productos torcidos (*warped products*) en variedades Einstein.

Demostración. Sabemos que un tal solitón es isométrico a un solitón algebraico $(G/K, g)$ con descomposición reductiva métrica $(\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{n}$, construida como en la Sección 3.4, y con operador de Ricci como en (3.40), con $D = S(D)$. Podemos asumir también que G es simplemente conexo y que K es conexo (ver Observación 2.1.10). Consideremos la descomposición reductiva métrica Einstein $(\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{k} \oplus \widetilde{\mathfrak{p}}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ que nos da la Proposición 3.5.1 a partir de $(G/K, g)$, y tomemos el espacio homogéneo correspondiente $(\widetilde{G}/\widetilde{K}, \widetilde{g})$, donde $\widetilde{G}$ es el grupo de Lie simplemente conexo con álgebra de Lie $\widetilde{\mathfrak{g}}$ y $\widetilde{K}$ es el subgrupo de Lie conexo de $\widetilde{G}$ con álgebra de Lie $\mathfrak{k}$. El hecho de que $\widetilde{K}$ es cerrado en $\widetilde{G}$ se deducirá del análisis subsiguiente; notar que $\widetilde{G}/\widetilde{K}$ es casi-efectivo, pues la representación de isotropía de $\mathfrak{k}$ es fiel (por casi-efectividad de G/K).

Supongamos primero que $\mathfrak{g}$ no es unimodular. Tenemos por la Proposición 3.4.2 que G/K y $\widetilde{G}/\widetilde{K}$ son respectivamente difeomorfos a

$$U/K \times N, \qquad \widetilde{U}/\widetilde{K} \times \widetilde{N},$$

donde U es el subgrupo de Lie conexo de G con álgebra de Lie $\mathfrak{u}$ (y análogamente para $\widetilde{U}$). Ahora, si U_0 es el subgrupo de Lie conexo de G con álgebra de Lie $\mathfrak{u}_0 := \mathfrak{k} \oplus (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0)$ (y análogamente para $\widetilde{U}_0$), entonces G/K y $\widetilde{G}/\widetilde{K}$ son respectivamente difeomorfos a

$$\mathbb{R} \times U_0/K \times N, \qquad \mathbb{R} \times \widetilde{U}_0/\widetilde{K} \times \widetilde{N}.$$

Pero $U_0 \simeq \widetilde{U}_0$ y $N \simeq \widetilde{N}$, al ser simplemente conexos y con álgebras de Lie idénticas, y como K y $\widetilde{K}$ son conexos, obtenemos que U_0/K es difeomorfo a $\widetilde{U}_0/\widetilde{K}$. Así, G/K y $\widetilde{G}/\widetilde{K}$ son difeomorfos, pues N y $\widetilde{N}$ son ambos nilpotentes y simplemente conexos, en particular difeomorfos a un espacio euclídeo. Esto implica que $\widetilde{G}/\widetilde{K}$ no es difeomorfo a un espacio euclídeo tampoco, lo cual sería un contraejemplo para la conjetura de Alekseevskii ya que $\widetilde{\mathrm{Ric}} = cI$, $c < 0$, como queríamos probar.

El caso en el que $\mathfrak{g}$ es unimodular se prueba de la misma manera (se tiene que $\widetilde{G}/\widetilde{K}$ es difeomorfo a $\mathbb{R} \times G/K$). Así se concluye la prueba del teorema. $\square$

Capítulo 4

La curvatura escalar a lo largo del flujo de Ricci homogéneo

En este capítulo dejamos de lado los solitones de Ricci para estudiar un problema sobre el flujo de Ricci, en el caso de variedades homogéneas. Más precisamente, la pregunta que abordamos aquí es la siguiente:

> ¿Cuál es la cantidad geométrica *más simple* que permite controlar la formación de singularidades a lo largo del flujo de Ricci?

Se sabe que en presencia de una singularidad en tiempo finito, la curvatura de Riemann y la curvatura de Ricci deben explotar necesariamente. Se ha conjeturado que también debería explotar la curvatura escalar, sin embargo este sigue siendo un problema abierto y de gran actualidad en el caso general.

En la primera sección de este capítulo haremos un repaso de los resultados conocidos a la fecha en relación al problema. En la segunda sección, nos centramos ya en el estudio de regularidad del flujo de Ricci homogéneo, utilizando como herramienta fundamental el flujo de corchetes (ver Sección 1.4), y veremos algunos resultados de regularidad en relación al mismo. Finalmente, en la tercera sección probaremos el Teorema 4.3.3, el cual es el principal resultado de este capítulo y da una respuesta afirmativa a la conjetura mencionada en el párrafo anterior para el caso de variedades homogéneas.

Este capítulo está basado en el artículo [Laf13b].

4.1. Una introducción al problema

Una pregunta importante sobre las soluciones al flujo de Ricci (1.1) es qué cantidades geométricas pueden controlar la formación de singularidades en tiempo finito, en el sentido de que si se mantuvieran acotadas en un intervalo $[0,T)$, entonces se podría extender la solución a un intervalo de tiempo $[0,T+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$ (ver [Kno09]).

En el caso compacto, R. Hamilton probó en [Ham95] que si el flujo desarrolla una singularidad en un instante de tiempo finito ω, entonces la norma del tensor de curvatura de Riemann $|\operatorname{Rm}(g(t))|$ no puede estar acotada en $M\times[0,\omega)$. O sea,

$$\limsup_{t\to\omega}\ \sup_M |\operatorname{Rm}(g(t))| = +\infty.$$

Esto fue mejorado por N. Sesum en [Šeš05], quien probó que tampoco $|\operatorname{Rc}(g(t))|$ puede estar acotado en $M \times [0, \omega)$, es decir,

$$\limsup_{t \to \omega} \sup_M |\operatorname{Rc}(g(t))| = +\infty,$$

donde $\operatorname{Rc}(g(t))$ denota el tensor de curvatura de Ricci de $(M, g(t))$. B. Wang probó en [Wan08] que una cota inferior para la curvatura de Ricci, junto con una cota integral (en lugar de punto a punto) para la curvatura escalar R de la forma $\int_0^T \int_M |R|^\alpha \mathrm{d}\,\mathrm{vol}_{\mathrm{g(t)}}\, \mathrm{dt} \leq \mathrm{C}$, $\alpha \geq \frac{n+2}{2}$, permiten extender la solución al flujo de Ricci más allá del tiempo T.

Es esperado, y ha sido conjeturado por X. Chen, que únicamente con una cota adecuada para la curvatura escalar se debería poder continuar la solución al flujo de Ricci. Es decir, que si tenemos una singularidad en tiempo finito ω, entonces debería ocurrir que

$$\limsup_{t \to \omega} \sup_M |R(g(t))| = +\infty,$$

donde $R(g(t))$ denota la curvatura escalar. Sin embargo, ésta es todavía una pregunta abierta. En esta dirección, J. Enders, R. Müller y P. Topping probaron en [EMT11] que si la singularidad es de Tipo-I (esto es, que la norma del tensor de curvatura de Riemann no crezca más rápido que $\frac{C}{w-t}$ cuando $t \to \omega$), entonces la curvatura escalar tiene que explotar cuando $t \to \omega$. Fue probado por N. Le y N. Sesum en [LS10] que en realidad es suficiente con una cota integral para la curvatura escalar (en el caso compacto) para prevenir singularidades de Tipo-I. Por otro lado, otro resultado parcial fue obtenido por Z. Zhang en [Zha10], en donde se prueba que la curvatura escalar debe explotar en la primera singularidad del flujo de Ricci de variedades Kähler.

Nuestro objetivo en este capítulo es estudiar qué ocurre con la curvatura escalar del flujo de Ricci homogéneo en presencia de una singularidad en tiempo finito.

4.2. La norma del corchete a lo largo del flujo de corchetes

Comenzamos ahora con el estudio del flujo de Ricci homogéneo. Para esto, nuestra principal herramienta será el flujo de corchetes (ver 1.9), y el Teorema 1.4.3, el cual asegura que los intervalos de definición de ambos flujos, así como también cualquier invariante riemanniano, coinciden.

En esta sección estudiaremos el comportamiento de la norma del corchete a lo largo de una solución al flujo de corchetes con la propiedad de tener un tiempo de extinción finito (hacia adelante o hacia atrás). A pesar de que esta cantidad no es un invariante riemanniano, ha probado ser de gran importancia en el estudio cualitativo del flujo de corchetes. El marco teórico en el cual trabajaremos es el desarrollado en las Secciones 1.3 y 1.4.

Comenzamos con un lema simple, pero bastante útil.

Lema 4.2.1. *Si $\mu(t)$ es una solución al flujo de corchetes en V_{q+n}, entonces*

$$\left|\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu\right| \leq C|\operatorname{Ric}_\mu||\mu| \leq \tilde{C}|\mu|^3,$$

donde $C, \tilde{C}$ son constantes que sólo dependen de n.

Demostración. Vemos que $\pi(A)\mu$ es lineal en μ, con lo cual la primera desigualdad se deduce directamente de la definición del flujo de corchetes (ver (1.9)). Por otro lado, usando que cada coordenada de Ric_μ (o, más precisamente, de su correspondiente matriz con respecto a cierta base ortonormal) es un polinomio homogéneo cuadrático en los coeficientes de estructura de μ, obtenemos

$$|\operatorname{Ric}_\mu| \leq C_1|\mu|^2,$$

y así queda probada la segunda desigualdad. $\square$

Por la teoría estándar de ecuaciones diferenciales ordinarias, está claro que si se forma una singularidad en tiempo finito $\omega < \infty$ para el flujo de corchetes, entonces la norma del corchete $|\mu(t)|$ no puede quedarse acotada, ya que sino la solución $\mu(t)$ permanecería en un compacto, lo cual implicaría que esté definida para todo $t \in [0, \infty)$. O sea, debe existir una sucesión de tiempos $t_k \to \omega$ tales que $|\mu(t_k)| \to \infty$. El siguiente resultado mejora esto, mostrando que en realidad se tiene que $|\mu(t)| \underset{t\to\omega}{\longrightarrow} \infty$, y dando una cota para la velocidad con la cual la norma diverge. Un resultado análogo vale también en el caso de singularidades en tiempo finito hacia atrás.

Proposición 4.2.2. *Sea $\mu(t)$ una solución al flujo de corchetes* (1.9)*, con intervalo maximal de definición (α, ω). Entonces, existe una constante $C = C(n) > 0$, tal que:*

(i) Si $\omega < \infty$, entonces

$$|\mu(t)| \geq \frac{C}{(\omega - t)^{1/2}}, \qquad \forall t \in [0, \omega).$$

(ii) Si $\alpha > -\infty$, entonces

$$|\mu(t)| \geq \frac{C}{(t - \alpha)^{1/2}}, \qquad \forall t \in (\alpha, 0].$$

Demostración. Nos concentraremos en probar únicamente el ítem (i), ya que entonces el ítem (ii) se prueba análogamente, cambiando el signo de la variable t.

Sea $t_0 \in [0, \omega)$. Gracias al Lema 4.2.1 tenemos que

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\mu|^2 = 2\langle \mu, \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu \rangle \leq C|\mu|^4, \qquad t \in [t_0, \omega).$$

(podemos tomar en realidad la misma constante C para todo $t_0 \in [0, \omega)$). Luego, por comparación, obtenemos que $|\mu(t)| \leq f(t)$, para todo $t \in [t_0, \omega)$, donde f es la solución a la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$f' = Cf^2, \quad f(t_0) = |\mu(t_0)|^2.$$

Resolviendo la ecuación diferencial obtenemos que

$$|\mu(t)|^2 \leq \frac{1}{-C(t - t_0) + |\mu(t_0)|^{-2}},$$

y entonces $|\mu(t)|$ no puede divergir antes del instante de tiempo $t = t_0 + \frac{1}{C}|\mu(t_0)|^{-2}$, pues es en ese preciso instante que diverge el lado derecho de la ecuación anterior, y no antes. Esto implica que $\omega \geq t_0 + \frac{1}{C}|\mu(t_0)|^{-2}$, de lo cual se deduce la proposición. $\square$

Observación 4.2.3. Si se pudiera obtener también una estimación de la forma $|\mu(t)| \leq \frac{C}{(\omega-t)^{1/2}}$ (como es el caso de todos los ejemplos conocidos) entonces se podría probar que la solución correspondiente al flujo de Ricci tiene una singularidad de Tipo-I. En efecto, en tal caso razonamos como en [Lau11a, Section 6.2] para obtener

$$|\operatorname{Rm}(g(t))| = |\operatorname{Rm}(\mu(t))| \leq C_n|\mu(t)|^2 \leq \frac{C}{\omega - t}.$$

4.3. La curvatura escalar y el intervalo de definición del flujo

El objetivo de esta sección es analizar la relación entre la curvatura escalar y el intervalo maximal de definición de una solución al flujo de Ricci homogéneo. Para eso, nuestro principal resultado es el Teorema 4.3.3. Pero antes de probar dicho teorema, presentamos un resultado que es bien conocido en el contexto general del flujo de Ricci en variedades compactas, pero que sin embargo puede ser extendido (por considerar el flujo hacia atrás), y su prueba simplificada, en el caso de variedades homogéneas.

Proposición 4.3.1. *Sea $(M, g(t))$, $g(0) = g_0$, una solución al flujo de Ricci con intervalo maximal de definición (α, ω), $\alpha < 0 < \omega$, tal que para cada $t \in (\alpha, \omega)$ la curvatura escalar $R(g(t))$ es constante en M (lo cual en particular se cumple si $g(t)$ es homogénea).*

(i) Si $R(g_0) > 0$, entonces $\omega \leq \frac{n}{2}R(g_0)^{-1}$.

(ii) Si $R(g_0) < 0$, entonces $\alpha \geq \frac{n}{2}R(g_0)^{-1}$.

Demostración. La ecuación de evolución de la curvatura escalar a lo largo de una solución del flujo de Ricci implica que

$$\frac{\partial}{\partial t}R \geq \Delta R + \frac{2}{n}R^2$$

(ver, por ejemplo, [Top06, Corollary 2.5.5]). Nuestra hipótesis sobre la curvatura escalar nos dice que $\Delta R \equiv 0$, o sea que R satisface la siguiente desigualdad:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}R \geq \frac{2}{n}R^2. \tag{4.1}$$

Por comparación, obtenemos

$$R(g(t)) \geq (-\tfrac{2}{n}t + R(g_0)^{-1})^{-1}.$$

Ahora asumamos que $R(g_0) > 0$. El denominador $-\frac{2}{n}t + R(g_0)^{-1}$ no puede anularse para $t \in [0, \omega)$, y como es positivo en $t = 0$, tenemos que

$$-\tfrac{2}{n}t + R(g_0)^{-1} > 0, \qquad \forall t \in [0, \omega),$$

lo cual al tomar límite con $t \to \omega$, implica el ítem (i).

La prueba del ítem (ii) es completamente análoga, cambiándole el signo a la variable t. □

Observación 4.3.2. En el caso homogéneo, uno podría obtener la desigualdad (4.1) usando únicamente la ecuación de evolución para la curvatura escalar a lo largo del flujo de corchetes:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}R(\mu(t)) = 2\,\mathrm{tr}\,\mathrm{Ric}^2_{\mu(t)} \tag{4.2}$$

(ver [Lau13, Proposition 3.8, (vi)]).

Este resultado implica que una solución inmortal al flujo de Ricci homogéneo debe satisfacer $R \leq 0$, y que una solución antigua a dicho flujo debe cumplir $R \geq 0$, para todo t. Estas desigualdades son estrictas para todo t, a menos que $R(t) \equiv 0$, en cuyo caso $g(t)$ es una métrica plana para todo t. Se deduce en particular que no hay soluciones homogéneas al flujo de Ricci que sean no planas y eternas.

A continuación presentamos el principal resultado de este capítulo, el cual confirma el comportamiento esperado para la curvatura escalar a lo largo del flujo de Ricci homogéneo en presencia de una singularidad en tiempo finito.

Teorema 4.3.3. *Sea $(M, g(t))$ una solución al flujo de Ricci con intervalo maximal de definición (α, ω), y asumamos que $(M, g(t))$ es homogénea para todo $t \in (\alpha, \omega)$. Sea $R(g(t))$ la curvatura escalar (que es constante en M) de la métrica $g(t)$.*

(i) Si $\omega < \infty$, entonces $R(g(t)) \underset{t\to\omega}{\longrightarrow} \infty$.

(ii) Si $\alpha > -\infty$, entonces $R(g(t)) \underset{t\to\alpha}{\longrightarrow} -\infty$.

Demostración. Probemos el ítem (i). Usando el Teorema 1.4.3, vemos que es suficiente probar que si $\mu(t)$ es una solución al flujo de corchetes con una singularidad en tiempo finito $\omega < \infty$, entonces $R(\mu(t)) \underset{t\to\omega}{\longrightarrow} \infty$. En efecto, ese resultado prueba que el flujo de Ricci homogéneo y el flujo de corchetes son equivalentes, salvo pull-back por difeomorfismos, y que sus intervalos maximales de definición coinciden (ver Observación 1.4.4).

Para probar eso, observemos que por el Lema 4.2.1 tenemos que toda solución al flujo de corchetes satisface

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\mu|^2 = 2\langle \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu, \mu\rangle \leq 2\left|\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu\right| |\mu| \leq C|\mu|^2 |\operatorname{Ric}_\mu|,$$

luego integrando en $[0, t)$, para cualquier $t \in [0, \omega)$, se obtiene

$$\log|\mu(t)|^2 - \log|\mu(0)|^2 = \int_0^t \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\log|\mu(s)|^2 \mathrm{ds} \leq \mathrm{C}\int_0^{\mathrm{t}} |\operatorname{Ric}_{\mu(\mathrm{s})}|\mathrm{ds}.$$

Así, $\int_0^\omega |\operatorname{Ric}_{\mu(s)}|\mathrm{ds} = \infty$, ya que $\mu(t)$ no está acotada cerca de ω. Por otro lado, para $t \in [0, \omega)$, usamos la ecuación de evolución para la curvatura escalar dada en (4.2) y tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^t |\operatorname{Ric}_{\mu(s)}|\mathrm{ds} &\leq \int_0^t \tfrac{1}{2}\left(1 + |\operatorname{Ric}_{\mu(s)}|^2\right)\mathrm{ds} \\
&= \tfrac{t}{2} + \tfrac{1}{4}\int_0^t \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}R(\mu(s))\mathrm{ds} \\
&= \tfrac{t}{2} + \tfrac{1}{4}\left(R(\mu(t)) - R(\mu(0))\right),
\end{aligned}$$

entonces el ítem (i) se sigue si hacemos tender $t \to \omega$.

El ítem (ii) se prueba de manera completamente análoga. □

Como aplicación del Teorema 4.3.3 vemos que toda solución al flujo de Ricci homogéneo en $\mathbb{R}^n$ es inmortal. Esto se aplica en particular para el flujo de Ricci de solvariedades, ya que todas son difeomorfas a un cociente de $\mathbb{R}^n$.

Corolario 4.3.4. *Sea $M = G/K$ un espacio homogéneo. Si el cubrimiento universal de M es difeomorfo a $\mathbb{R}^n$, entonces la solución al flujo de Ricci $g(t)$ comenzando en cualquier métrica G-invariante g_0 en M está definido para todo $t \in [0, \infty)$. Por otro lado, si el cubrimiento universal de M no es difeomorfo a $\mathbb{R}^n$, entonces existe una métrica G-invariante g_0 en M tal que el flujo de Ricci $g(t)$ empezando en g_0 desarrolla una singularidad en tiempo finito.*

Demostración. Por [BB78, Théoreme 2], el cubrimiento universal de M es difeomorfo a $\mathbb{R}^n$ si y sólo si toda métrica G-invariante en M tiene curvatura escalar no positiva. O sea que si eso ocurre, tenemos que $R(g(t)) \leq 0$ para todo t, y el Teorema 4.3.3 implica entonces que no puede haber una singularidad en tiempo finito. La última afirmación del enunciado se sigue del Lema 4.3.1, (i), ya que en un espacio homogéneo como el mencionado, existen métricas G-invariantes con curvatura escalar positiva. □

Observación 4.3.5. Se podría enunciar un resultado análogo al Corolario 4.3.4 pero para el caso de curvatura escalar positiva, y tiempo de definición del flujo hacia atrás. Sin embargo, la conclusión en este caso es trivial, debido a la rigidez que impone la positividad de las curvaturas escalares. En efecto, recordar que un espacio homogéneo G/K en donde toda métrica riemanniana G-invariante tiene curvatura escalar no negativa, tiene la propiedad de que cada métrica G-invariante es (localmente) el producto riemanniano de una métrica plana y métricas invariantes en espacios homogéneos compactos *de tipo normal* (en el sentido que define Bérard-Bergery, ver [BB78]). Más aún, una tal métrica es isométrica al producto riemanniano de una métrica plana y métricas invariantes en espacios homogéneos compactos isotrópicamente irreducibles (ver[Ber95]), los cuáles son necesariamente Einstein y de curvatura escalar positiva (en particular, dan lugar soluciones antiguas al flujo de Ricci). Así, una solución al flujo de Ricci comenzando en cualquiera de dichas métricas estará dada por el producto de las soluciones al flujo de Ricci en cada factor, con lo cual es evidentemente una solución antigua.

Bibliografía

[AK75] D. V. Alekseevskiĭ and B. N. Kimel′fel′d, *Structure of homogeneous Riemannian spaces with zero Ricci curvature*, Funktional. Anal. i Prilov Zen. **9** (1975), no. 2, 5–11.

[And95] Michael T. Anderson, *Einstein metrics and metrics with bounds on Ricci curvature*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994) (Basel), Birkhäuser, 1995, pp. 443–452.

[Arr13] Romina Arroyo, *The Ricci flow in a class of solvmanifolds*, Differential Geom. Appl. **31** (2013), no. 4, 472–485.

[BB78] Lionel Bérard-Bergery, *Sur la courbure des métriques riemanniennes invariantes des groupes de Lie et des espaces homogènes*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **11** (1978), no. 4, 543–576.

[Ber95] V. N. Berestovskiĭ, *Compact homogeneous manifolds with integrable invariant distributions, and scalar curvature*, Mat. Sb. **186** (1995), no. 7, 15–24.

[Ber00] Marcel Berger, *Riemannian geometry during the second half of the twentieth century*, University Lecture Series, vol. 17, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000, Reprint of the 1998 original.

[Ber03] ———, *A panoramic view of Riemannian geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[Bes87] Arthur L. Besse, *Einstein manifolds*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], vol. 10, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[BGK05] Charles P. Boyer, Krzysztof Galicki, and János Kollár, *Einstein metrics on spheres*, Ann. of Math. (2) **162** (2005), no. 1, 557–580.

[BS09] Simon Brendle and Richard Schoen, *Manifolds with* $1/4$*-pinched curvature are space forms*, J. Amer. Math. Soc. **22** (2009), no. 1, 287–307.

[BW08] Christoph Böhm and Burkhard Wilking, *Manifolds with positive curvature operators are space forms*, Ann. of Math. (2) **167** (2008), no. 3, 1079–1097.

[BWZ04] C. Böhm, M. Wang, and W. Ziller, *A variational approach for compact homogeneous Einstein manifolds*, Geom. Funct. Anal. **14** (2004), no. 4, 681–733.

[Cao10] Huai-Dong Cao, *Recent progress on Ricci solitons*, Recent advances in geometric analysis, Adv. Lect. Math. (ALM), vol. 11, Int. Press, Somerville, MA, 2010, pp. 1–38.

[CCG$^+$07] Bennett Chow, Sun-Chin Chu, David Glickenstein, Christine Guenther, James Isenberg, Tom Ivey, Dan Knopf, Peng Lu, Feng Luo, and Lei Ni, *The Ricci flow: techniques and applications. Part I*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 135, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007, Geometric aspects.

[CK04] Bennett Chow and Dan Knopf, *The Ricci flow: an introduction*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 110, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[CZ06] Bing-Long Chen and Xi-Ping Zhu, *Uniqueness of the Ricci flow on complete noncompact manifolds*, J. Differential Geom. **74** (2006), no. 1, 119–154.

[DeT83] Dennis M. DeTurck, *Deforming metrics in the direction of their Ricci tensors*, J. Differential Geom. **18** (1983), no. 1, 157–162.

[DHW12] A. Dancer, S. Hall, and M. Wang, *Cohomogeneity one shrinking Ricci solitons: an analytic and numerical study*, Asian J. Math. (in press).

[DL82] I. Dotti and M. L. Leite, *Metrics of negative Ricci curvature on* $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$, $n \geq 3$, J. Differential Geom. **17** (1982), no. 4, 635–641 (1983).

[DLM84] I. Dotti, M. L. Leite, and R. J. Miatello, *Negative Ricci curvature on complex simple Lie groups*, Geom. Dedicata **17** (1984), no. 2, 207–218.

[EMT11] Joerg Enders, Reto Müller, and Peter M. Topping, *On type-I singularities in Ricci flow*, Comm. Anal. Geom. **19** (2011), no. 5, 905–922.

[GW88] Carolyn S. Gordon and Edward N. Wilson, *Isometry groups of Riemannian solvmanifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **307** (1988), no. 1, 245–269.

[Ham82] Richard S. Hamilton, *Three-manifolds with positive Ricci curvature*, J. Differential Geom. **17** (1982), no. 2, 255–306.

[Ham95] ———, *The formation of singularities in the Ricci flow*, Surveys in differential geometry, Vol. II (Cambridge, MA, 1993), Int. Press, Cambridge, MA, 1995, pp. 7–136.

[Heb98] Jens Heber, *Noncompact homogeneous Einstein spaces*, Invent. Math. **133** (1998), no. 2, 279–352.

[HN11] Joachim Hilgert and Karl-Hermann Neeb, *Structure and geometry of Lie groups*, Springer Monographs in Mathematics, vol. 110, Springer, 2011.

[Hoc65] G. Hochschild, *The structure of Lie groups*, Holden-Day Inc., San Francisco, 1965.

[HPW13] C. He, P. Petersen, and W. Wylie, *Warped product Einstein metrics on homogeneous spaces and homogeneous Ricci solitons*, arXiv:1302.0246, (2013).

[Ive93] Thomas Ivey, *Ricci solitons on compact three-manifolds*, Differential Geom. Appl. **3** (1993), no. 4, 301–307.

[Iwa49] Kenkichi Iwasawa, *On some types of topological groups*, Ann. of Math. (2) **50** (1949), 507–558.

[Jab13] Michael Jablonski, *Homogeneous Ricci solitons*, J. Reine Angew. Math. (in press), arXiv:1109.6556v1.

[Kir84] Frances Clare Kirwan, *Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry*, Mathematical Notes, vol. 31, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1984.

[Kno09] Dan Knopf, *Estimating the trace-free Ricci tensor in Ricci flow*, Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), no. 9, 3099–3103.

[Kot10] Brett L. Kotschwar, *Backwards uniqueness for the Ricci flow*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2010), no. 21, 4064–4097.

[Laf13a] Ramiro Lafuente, *Solvsolitons associated with graphs*, Adv. Geom. **13** (2013), no. 2, 255–275.

[Laf13b] ______, *Scalar curvature behavior of homogeneous Ricci flows*, arXiv:1212.6558, (2013).

[Lau01] Jorge Lauret, *Ricci soliton homogeneous nilmanifolds*, Math. Ann. **319** (2001), no. 4, 715–733.

[Lau06] ______, *A canonical compatible metric for geometric structures on nilmanifolds*, Ann. Global Anal. Geom. **30** (2006), no. 2, 107–138.

[Lau09] ______, *Einstein solvmanifolds and nilsolitons*, New developments in Lie theory and geometry, Contemp. Math., vol. 491, Amer. Math. Soc., 2009, pp. 1–35.

[Lau10] ______, *Einstein solvmanifolds are standard*, Ann. of Math. (2) **172** (2010), no. 3, 1859–1877.

[Lau11a] ______, *The Ricci flow for simply connected nilmanifolds*, Comm. Anal. Geom. **19** (2011), no. 5, 831–854.

[Lau11b] ______, *Ricci soliton solvmanifolds*, J. Reine Angew. Math. **650** (2011), 1–21.

[Lau12] ______, *Convergence of homogeneous manifolds*, J. London Math. Soc. **86** (2012), 701–727.

[Lau13] ______, *Ricci flow of homogeneous manifolds*, Math Z. **274** (2013), 373–403.

[LL13a] Ramiro Lafuente and Jorge Lauret, *On homogeneous Ricci solitons*, Q. J. Math. (in press) (2013).

[LL13b] ______, *Structure of homogeneous Ricci solitons and the Alekseevskii conjecture*, J. Differential Geom. (in press) (2013).

[LS10] N. Q. Le and N. Sesum, *Remarks on curvature behavior at the first singular time of the Ricci flow*, arXiv:1005.1220v2, .

[LW99] Claude LeBrun and McKenzie Wang (eds.), *Surveys in differential geometry: essays on Einstein manifolds*, Surveys in Differential Geometry, VI, International Press, Boston, MA, 1999, Lectures on geometry and topology, sponsored by Lehigh University's Journal of Differential Geometry.

[LW11] Jorge Lauret and Cynthia Will, *Einstein solvmanifolds: existence and non-existence questions*, Math. Ann. **350** (2011), no. 1, 199–225.

[LW13] ______, *On the diagonalization of the Ricci flow on Lie groups*, Proc. Amer. Math. Soc. (in press).

[MM88] Mario J. Micallef and John Douglas Moore, *Minimal two-spheres and the topology of manifolds with positive curvature on totally isotropic two-planes*, Ann. of Math. (2) **127** (1988), no. 1, 199–227.

[Nik00] Yu. G. Nikonorov, *On the Ricci curvature of homogeneous metrics on noncompact homogeneous spaces*, Sibirsk. Mat. Zh. **41** (2000), no. 2, 421–429, iv.

[Nik05] ______, *Noncompact homogeneous Einstein 5-manifolds*, Geom. Dedicata **113** (2005), 107–143.

[Pay10] Tracy L. Payne, *The Ricci flow for nilmanifolds*, J. Mod. Dyn. **4** (2010), no. 1, 65–90.

[Per02] G. Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, arXiv:math/0211159, .

[Per03a] ______, *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*, arXiv:math/0307245, .

[Per03b] ______, *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, arXiv:math/0303109, .

[Sch84] Richard Schoen, *Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature*, J. Differential Geom. **20** (1984), no. 2, 479–495.

[Šeš05] Nataša Šešum, *Curvature tensor under the Ricci flow*, Amer. J. Math. **127** (2005), no. 6, 1315–1324.

[Shi89] Wan-Xiong Shi, *Deforming the metric on complete Riemannian manifolds*, J. Differential Geom. **30** (1989), no. 1, 223–301.

[Top06] Peter Topping, *Lectures on the Ricci flow*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 325, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[Wan08] Bing Wang, *On the conditions to extend Ricci flow*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2008), no. 8, Art. ID rnn012, 30.

[Wan12] McKenzie Y. Wang, *Einstein metrics from symmetry and bundle constructions: a sequel*, Differential Geometry: Under the Influence of S.-S. Chern, Advanced Lectures in Mathematics, vol. 22, Higher Education Press/International Press., Beijing-Boston, 2012, pp. 253–309.

[War83] Frank W. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 94, Springer-Verlag, New York, 1983, Corrected reprint of the 1971 edition.

[Wil11] Cynthia Will, *The space of solvsolitons in low dimensions*, Ann. Global Anal. Geom. **40** (2011), no. 3, 291–309.

[Wil13] Michael Bradford Williams, *Explicit Ricci Solitons on Nilpotent Lie Groups*, J. Geom. Anal. **23** (2013), no. 1, 47–72.

[Wol64] Joseph A. Wolf, *Homogeneity and bounded isometries in manifolds of negative curvature*, Illinois J. Math. **8** (1964), 14–18.

[Zha10] Zhou Zhang, *Scalar curvature behavior for finite-time singularity of Kähler-Ricci flow*, Michigan Math. J. **59** (2010), no. 2, 419–433.

Índice alfabético