El problema de equivalencia y la prolongación de Tanaka para distribuciones totalmente no integrables

por Mauro Subils

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía y Física como parte de los requerimientos para la obtención del grado de Doctor en Matemática de la

Universidad Nacional de Córdoba

Marzo de 2015

Director: Dr. Eduardo Hulett

Co-director: Dr. Aroldo Kaplan

Resumen

Esta Tesis trata de el Problema de Equivalencia para distribuciones y estructuras geométricas asociadas, o sub-estructuras.

En primer lugar, repasamos el método de equivalencia de Cartan haciendo hincapié en el proceso de prolongación de G-estructuras. Luego lo comparamos con el Método de Prolongación de Tanaka, que refina ese para estructuras asociadas a distribuciones. Clave dentro de este proceso es la prolongación de álgebras de Lie graduadas nilpotentes, de interés independiente.

Luego damos una breve introducción a las conexiones de Cartan, que es lo se aspira obtener al resolver un Problema de Equivalencia, y obtenemos algunos resultados sobre su existencia y unicidad.

Finalmente, aplicamos la prolongación de Tanaka geométrica a ejemplos distinguidos de distribuciones con métricas subriemannianas y subconformes, obteniendo sus conexiones de Cartan explícitamente. En las de dimensión y codimensión [2,1] [3,2] y [4,2], calculamos la curvatura armónica de la conexión de Cartan y obtenemos sus invariantes (curvaturas) fundamentales.

Palabras claves: problema de equivalencia, prolongación de Tanaka, conexiones de Cartan, métrica subriemanniana, métrica conforme

2010 Mathematics subject Classification: 53A55 Invariantes diferenciales (teoría local), objetos geométricos, 53C15 Estructuras geométricas generales en variedades, 58A30 Distribuciones vectoriales, 53B15 Otras conexiones, 53C17 Geometría subriemanniana , 53D10 Variedades de contacto, general.

Abstract

This thesis deals with the Equivalence Problem for distributions and associated geometric structures, or sub-structures.

First, we review Cartan's equivalence method focusing on the prolongation procedure of G-structures. Then we compare it with Tanaka's prolongation Method, that refines it for structures associated to distributions. Key within this process is the prolongation of nilpotent graded Lie algebras, that has its own relevance.

After that, we give a brief introduction to Cartan connections, that are what one aspires to reach by solving the Equivalence Problem and we obtain some results about its existence and uniqueness.

Finally, we apply Tanaka's geometric prolongation to some distinguished distributions with subriemannian and subconformal metrics, obtaining explicitly corresponding Cartan connections. In the dimension and codimension [2,1] [3,2] y [4,2], we calculate the harmonic curvature of the connection and obtain its fundamental invariants (curvatures).

Key words: Equivalence problem, Tanaka's prolongation, Cartan connections, subriemannian metric, conformal metric.

2010 Mathematics subject Classification: 53A55 Differential invariants (local theory), geometric objects, 53C15 General geometric structures on manifolds, 58A30 Vector distributions, 53B15 Other connections, 53C17 Sub-Riemannian geometry, 53D10 Contact manifolds, general.

Agradecimientos

A Roni Kaplan y Eduardo Hulett por su guía, sus consejos, su buena predisposición y por hacerme sentir siempre a gusto.

A FaMAF, CIEM, CONICET y SECyT por brindarme el ambiente y el apoyo económico para desarrollar esta tesis doctoral.

A Gabriela Ovando que me introdujo en la geometría y sin su "empujón" nada de esto hubiera sido posible.

Al jurado, Adrián Andrada, Isabel Dotti y Marco Farinati, por sus comentarios y correcciones.

A Igor Zelenko, Andreas Cap y Fulvio Ricci por charlas y comentarios que fueron de gran ayuda.

A mis compañeros de oficina durante estos años, especialmente a Monique, Raul, Nacho, Augusto y fundamentalmente a Ramiro que me acompañó y ayudó desde el primer día.

Al resto de mis compañeros-amigos de doctorado de FaMaf: Marcos, Diego, Edwin, Angel, Denis, Oscar M., Oscar P., Gabriel, Iván A., Javier, Guille, Felipe, Aureliano, Iván G., Romina, Yamile, Silvina, Sonia, Ceci, Euge, Lucía, Andru, Meli y todos los que hicieron que estos años en Córdoba sean inolvidables.

Al equipo de fútbol los Borbotones que en las buenas y en las malas siempre confió en mi.

A mis amigos de FCEIA que siempre me alentaron: Viviana que además su ayuda con Maple fue indispensable para esta tesis, Francisco, Nahuel, Isolda, Silvio, Soledad, Jorgelina, Sabrina, Paola, Lelu, Justina, Eva, ...

A Alejandro, Jorge, Erica y Susana Hinrichsen, y a la Olimpíada Matemática Argentina por despertar mi pasión por la matemática.

Por último a mis hermanos y a mis padres por su apoyo y cariño incondicional.

Notación

En general, denotaremos por

$\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}, \ldots$ a las álgebras de Lie,

G, H, N, a los grupos de Lie,

$x, y, z, u, v, w, \ldots$ a elementos de un álgebra de Lie,

$g, h, n, m, \ldots$ a elementos de un grupo de Lie.

$a, b, c, d, r, \ldots$ a derivaciones de un álgebra de Lie,

$X, Y, Z, \ldots$ a campos vectoriales,

p, $q, \ldots$ a puntos en una variedad,

$\lambda, \varphi, \ldots$ a elementos de un fibrado principal.

$\Omega^k(M, \mathfrak{g})$ denotará el espacio de k-formas en una variedad M con valores en $\mathfrak{g}$,

Índice general

Introducción

Un problema central de la Geometría es determinar condiciones necesarias y suficientes para que dos estructuras geométricas sean equivalentes. Este problema fue abordado desde los inicios de la Geometría y ha cumplido un papel preponderante en el desarrollo de ésta. Podemos mencionar, por ejemplo, los criterios de congruencia de triángulos; el teorema fundamental de las curvas en el espacio y el teorema de Darboux en la geometría simpléctica. En el siglo XIX, Sophus Lie, inspirado en el Programa de Erlangen de F. Klein, intentó desarrollar un método general para obtener los invariantes de una geometría. Sin embargo, su enfoque se basaba en la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales, con las dificultades que esto presenta, y sólo era aplicable en casos particulares. En 1908, E. Cartan a partir de un enfoque innovador resuelve este problema. En el revolucionario paper [Ca1] establece un procedimiento para determinar los invariantes de un objeto geométrico bajo un pseudogrupo de transformaciones definidas por ecuaciones diferenciales de primer orden, el cual se conoce como el Método de Equivalencia de Cartan.[1]

En la década de 1960, Singer, Sternberg, Guillemin, Kuranishi, Kodaira, Spencer entre otros profundizaron el estudio del Método, en particular de la prolongación de G-estructuras [SS]. Resulta que cuando el grupo G tiene prolongación finita (es de tipo finito) se puede asegurar que el Problema de Equivalencia se resuelve con un número finito de prolongaciones de la G-estructura correspondiente. A finales de 1960, Noburo Tanaka observó que en varios problemas importantes, principalmente aquellos donde la estructura geométrica está asociada a una distribución, el grupo G no era de tipo finito, lo que complicaba la aplicación del método. Por ello, en [T1] desarrolló un nuevo esquema de prolongación para variedades con distribuciones, que aplicó para resolver el Problema de Equivalencia de variedades CR de codimensión 1 [T3]. Aunque algunos autores como Yamaguchi y Morimoto siguieron esta línea de investigación [Y] [Mor1], la teoría de Tanaka no tuvo amplia difusión. Recién en los últimos años se empezó a apreciar su verdadero potencial [Z] [OW] [Ku]. Esta tesis pretende dar un paso en esta dirección.

Cuando hablamos de una estructura geométrica nos referimos a una G-estructura, que es una reducción del fibrado de marcos de una variedad M, donde G es un subgrupo de $GL(V)$ y V es un espacio vectorial que modela al espacio tangente de M en cada punto. Entonces el Problema de Equivalencia (local) puede plantearse de la siguiente manera:

> Sean B_1 y B_2 dos G-estructuras sobre las variedades M_1 y M_2 respectivamente y sean $p \in M_1$ e $q \in M_2$. ¿Existen entornos U de p, V de q y un difeomorfismo $f : U \to V$ que

[1] De acuerdo a Dieudonné, la idea de Cartan constituyó "... the most unexpected extension of Klein's ideas in Differential Geometry. He had envisaged groups of isometries of Riemannian spaces as possible fields of study of his program, but a generic Riemannian manifold does not have any isometries except for the identity transformation. By an extremely original generalization, Cartan was able to show that the idea of "operation" still plays a fundamental role, but it is necessary to replace the group with a more complex object, called the "principal fiber space" ... and it is in "pulling up to the principal fiber" that Cartan inaugurated a new era ..."

induce un difeomorfismo $\widetilde{f} : B_1|_U \to B_2|_V$?

El método de equivalencia tiene como objetivo transformar un Problema de Equivalencia en otro entre $\{e\}$-estructuras, i.e. variedades con un marco distinguido, problema ya resuelto por Cartan. El método consta principalmente de dos procesos: la reducción y la prolongación de G-estructuras. El primero consiste, como su nombre lo indica, en reducir el grupo estructural de una manera compatible con isomorfismos. Esto quiere decir que si partimos de dos G-estructuras B_1 y B_2, luego de aplicar el proceso de reducción se obtienen dos G'-estructuras B_1' y B_2' con G' subgrupo de G de manera que B_1 y B_2 son equivalentes si y sólo si B_1' y B_2' lo son. Por otro lado, dada $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ su prolongación es el álgebra graduada maximal de la forma $V \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^{(1)} \oplus \mathfrak{g}^{(2)} \oplus \dots$ donde V se considera abeliano y los $\mathfrak{g}^{(i)}$ actúan de forma libre en V. Si consideramos una G-estructura B_1 donde $Lie(G) = \mathfrak{g}$, el proceso de prolongación construye una sucesión de fibrados $B_1 \leftarrow B_1^1 \leftarrow B_1^2 \leftarrow \dots$ donde B_1^{i+1} es una $G^{(i+1)}$-estructura sobre B_1^i cuyo grupo estructural $G^{(i+1)}$ es abeliano y tiene la misma dimensión que $\mathfrak{g}^{(i+1)}$. Esta construcción también se realiza de manera compatible con los isomorfismos.

En general, al aplicar el método es necesario alternar entre la prolongación y la reducción (aunque este proceso puede no terminar o estancarse) pero en el caso en que $\mathfrak{g}^{(i)} = \{0\}$ para algún $i > 0$, en cuyo caso se dice que $\mathfrak{g}$ o G es de tipo finito, basta aplicar el proceso de prolongación a lo sumo i veces para obtener una $\{e\}$-estructura lo cual resuelve el problema de equivalencia. Los casos en que $G = O(n)$ y $G = CO(n)$ son los más conocidos dentro de los de tipo finito y se corresponden a la geometrías Riemanniana y conforme respectivamente. Sin embargo, en general el grupo G no es de tipo finito, como sucede genéricamente para estructuras definidas en distribuciones. El método de Tanaka permite resolver el Problema de Equivalencia para ciertos grupos que no son de tipo finito en el sentido clásico.

Mas precisamente, sea $\mathcal{D}$ una distribución de rango d en una variedad M de dimensión n. El método de Cartan considera el fibrado principal $P \to M$ de marcos (o comarcos) $\mathcal{D}$-adaptados:

$$P = \{(p, \varphi) : \varphi : \mathbb{R}^n \to T_p(M) \text{ es un isomorfismo lineal y } \varphi(\mathbb{R}^d) = \mathcal{D}(p)\}.$$

Esta es una G-estructura, donde G es el estabilizador de $\mathbb{R}^d \subset \mathbb{R}^n$ que no es un grupo de tipo finito. Dos distribuciones son (localmente) equivalentes si y sólo si las correspondientes G-estructuras son equivalentes. Estructuras adicionales en $(M, \mathcal{D})$ se corresponden con reducciones de P.

Uno puede interpretar a las φ's en P como una comparación, en cada punto, de $\mathcal{D}$ con la distribución integrable estandar (plana) de la misma dimensión y codimensión, es decir $\mathbb{R}^d \subset \mathbb{R}^n$. La *torsión invariante* de P mide cuánto difiere $\mathcal{D}$ de esta distribución. Tanaka observó que para distribuciones no integrables esta comparación no es apropiada. Una distribución de contacto, por ejemplo, debería ser comparada con la distribución no integrable estándar en el grupo de Heisenberg. En efecto, toda distribución que satisface ciertas condiciones de regularidad define un fibrado de álgebras de Lie nilpotentes graduadas mutuamente isomorfas que corresponden al "modelo plano" con el que debe ser comparada, es decir la correspondiente distribución invariante a izquierda en el correspondiente grupo simplemente conexo. Esta álgebra de Lie se denomina el *símbolo* o *nilpotentización* de la distribución y se define de la siguiente manera. Sea

$$\mathcal{D}^{-1}(p) = \mathcal{D}(p) \qquad \mathcal{D}^{-j}(p) = \mathcal{D}^{-j+1}(p) + [\mathcal{D}, \mathcal{D}^{-j+1}](p)$$

donde $\mathcal{D}$ también denota las secciones de $\mathcal{D}$. Definimos

$$\mathfrak{m}^i_{\mathcal{D}}(p) = \mathcal{D}^i(p)/\mathcal{D}^{i+1}(p)$$

y sea el símbolo de $\mathcal{D}$ en p:

$$\mathfrak{m}_{\mathcal{D}}(p) := \mathfrak{m}_{\mathcal{D}}^{-k}(p) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{m}_{\mathcal{D}}^{-1}(p).$$

Es fácil ver que el corchete de Lie de campos en M induce una estructura de álgebra de Lie graduada en $\mathfrak{m}_{\mathcal{D}}(p)$ y que distribuciones equivalentes tienen símbolos isomorfos.

Asumimos que $\mathcal{D}$ es totalmente no integrable, i.e. $\mathcal{D}^k(p) = T_p(M)$ para algún k y todo p, y que sus símbolos $\mathfrak{m}_{\mathcal{D}}(p)$ son todos isomorfos a un álgebra de Lie graduada nilpotente fija

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^{-k} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{m}^{-1}$$

generada por $\mathfrak{m}^{-1}$. Sea

$$P^0 = \{(p, \varphi) :\ \varphi : \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}_{\mathcal{D}}(p) \text{ es un isomorfismo de algebras de Lie graduadas}\}.$$

Este es un fibrado principal sobre M, con grupo estructural $G^0 = \mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(\mathfrak{m})$, los automorfismos graduados de $\mathfrak{m}$. P^0 no es en general una G-estructura, ya que está asociada a $\mathfrak{n}_{\mathcal{D}}$ en lugar de a $T(M)$; es un ejemplo de *pseudo-G^0-estructura*. Como antes, estructuras adicionales en $(M, \mathcal{D})$ se corresponden con reducciones de P^0.

Fijando $\mathfrak{m}$ y una subálgebra

$$\mathfrak{g}^0 \subset \mathrm{Der}_{\mathrm{gr}}(\mathfrak{m})$$

(correspondiente a una reducción de P^0), consideremos la suma directa

$$\mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{m} \ \cong\ \mathfrak{m}^{-k} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{m}^{-1} \oplus \mathfrak{g}^0.$$

De manera similar a la prolongación clásica esta tiene una única extensión maximal

$$\mathfrak{m}^{-k} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{m}^{-1} \oplus \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^1 \oplus \mathfrak{g}^2 \oplus \cdots$$

como álgebra de Lie graduada con la propiedad que todo $p \in \mathfrak{g}^1 \oplus \mathfrak{g}^2 \oplus \cdots$ no nulo satisface

$$\ker(\mathrm{ad}(p)) \cap \mathfrak{m}^{-1} = 0.$$

Asociado a $\mathcal{D}, \mathfrak{m}, \mathfrak{g}_0$, se puede definir una torre

$$\cdots \to P^2 \to P^1 \to P^0 \to M$$

tal que:

1. Para todo $i \geq 1$, P^i es un fibrado principal sobre P^{i-1} con grupo estructural abeliano G^i de dimensión $\dim \mathfrak{g}^i$. Además, tienen una estructura adicional con la cuál forman una categoría y se denominan *pseudo-G^i-estructuras*.

2. Dos distribuciones son equivalentes si y sólo si las correspondientes pseudo-G^i-estructuras P^i son isomorfas.

Si $\mathfrak{g}^i = 0$ para algún i se prueba que P^j con $j \geq i$, que tiene grupo estructural trivial, es realmente una $\{e\}$-estructura.

Por otro lado, hay casos donde la $\{e\}$-estructura obtenida es muy particular. Esta se puede considerar como una 1-forma con valores en un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre un fibrado principal $\mathcal{P} \to M$ con grupo estructural H que generaliza la 1-forma de Maurer-Cartan del fibrado canónico $G \to$

G/H. Es decir, permiten ver la geometría de M como la de un espacio homogéneo deformado por curvaturas, y se denominan conexiones de Cartan.

En cuanto al contenido de esta Tesis, en los cuatro primeros capítulos damos un resumen de la teoría general focalizado en las estructuras geométricas asociadas a distribuciones. A pesar de que la mayor parte de los resultados allí descriptos se encuentran en la bibliografía, la recopilación es novedosa e incluye algunos resultados originales.

Más específicamente, en el capítulo 1 repasamos el Método de Equivalencia clásico para G-estructuras de tipo finito. En particular, describimos los procesos de reducción y prolongación, presentamos el teorema de Cartan sobre equivalencia de $\{e\}$-estructuras.

En el capítulo 2 introducimos la prolongación de Tanaka de álgebras graduadas, que generaliza el proceso de prolongación clásico. Esta está relacionada con el cálculo de ciertos grupos de cohomología de Spencer generalizados que describimos en la sección 2.4.

En el capítulo 3 precisamos la noción de estructura geométrica asociada a una distribución, de forma extrínseca (estructuras de tipo constante) e intrínseca (pseudo-G^0-estructuras regulares), demostrando que estos conceptos son equivalentes. Luego, en las secciones 3.2 y 3.3 describimos el proceso de prolongación de Tanaka para estas estructuras y concluimos con su teorema principal 3.4.3.

En el capítulo 4 definimos geometría de Cartan y geometría de Cartan graduada. Vemos que el problema de asociar una geometría de Cartan graduada canónica a una pseudo-G^0-estructura refina el Problema de Equivalencia. En ciertos casos se puede garantizar la unicidad de la geometría de Cartan graduada, imponiendo cierta condición de normalización en su curvatura. En ese caso la parte armónica de la curvatura resulta un sistema de invariantes fundamentales de la geometría. Por último probamos que si partimos de una estructura de tipo constante $(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)$ (i.e. pseudo-G^0-estructura regular) tal que la prolongación de Tanaka de $(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)$ sea trivial, podemos utilizar el proceso de prolongación de Tanaka definido en el capítulo 3 para obtener una conexión de Cartan normal. Como consecuencia se tiene que en estos casos las distribuciones poseen un complemento en TM y una conexión principal canónicos, i.e. invariantes bajo los automorfismos de la estructura.

En el capítulo 5 estudiamos las álgebras de tipo Heisenberg (o tipo H) que son una familia infinita y distinguida de álgebras graduadas dos pasos nilpotentes. Esta son maximalmente simétricas en cierto sentido [KT] y serán símbolo de distribuciones con estructura conforme satisfaciendo una condición de compatibilidad. Calculamos la prolongación de Tanaka de estas y del par $(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}^0_{sc})$ donde $\mathfrak{g}^0_{sc}$ es el álgebra de derivaciones que preservan la métrica conforme en $\mathfrak{h}$.

En el capítulo 6 deducimos las consecuencias geométricas de nuestros resultados. En la sección 6.1 introducimos la noción de estructura conforme compatible en distribuciones fat y damos resultados sobre su unicidad y sobre la existencia de conexiones de Cartan asociadas.

En la sección 6.2 aplicamos el método de prolongación de Tanaka a las distribuciones subriemannianas de contacto en variedades de dimensión 3. De esta manera construimos explícitamente la conexión de Cartan normal asociada, calculamos su curvatura y su curvatura armónica, y a partir de esta obtenemos un sistema de (dos) invariantes fundamentales. Luego, describimos todas las posibles conexiones de Cartan asociadas a distribuciones subriemannianas de contacto en variedades de dimensión 3, observando que si bien el complemento canónico siempre está generado por el vector de Reeb, existe una familia uniparamétrica de conexiones lineales canónicas inequivalentes entre si. Por último, describimos todas las estructuras subriemannianas de este tipo invariantes a izquierda en un grupo de Lie donde se anula uno de los dos invariantes. Aunque varios de los resultados de esta sección se superponen con los de [Hu] en donde se aplica el Método de equivalencia Clásico, nuestro enfoque permite comparar ambos métodos y complementa ese trabajo.

En la sección 6.3 consideramos estructuras subriemannianas y subconformes en distribuciones de dimensión 3 en variedades de dimensión 5, de tipo constante. Al igual que en la anterior sección, aplicamos el proceso de prolongación de Tanaka en ambos casos, encontrando complementos canónicos para la distribución y construyendo explícitamente la conexión de Cartan normal asociada. De esta forma arribamos a un sistema de invariantes fundamentales a partir de la curvatura armónica (nueve para subconformes y diez para subriemannianas) y describimos todas las estructuras invariantes a izquierda sobre grupos de Lie de dimension 5.

En la sección 6.4 consideramos estructuras conformes compatibles de rango 4 en variedades de dimensión 6. Calculamos la componente de grado 1 de la curvatura armónica, obteniendo los correspondientes invariantes (cuatro) que resultan ser invariantes de la distribución misma sin estructura adicional. Luego completamos la primera prolongación obteniendo un complemento canónico para estas estructuras.

En la sección 7.2 calculamos los grupos de cohomología de Spencer generalizados de orden 2 para los pares $(\mathfrak{h}_{2,1}, \mathfrak{g}^0_{sr})$, $(\mathfrak{h}_{3,2}, \mathfrak{g}^0_{sr})$, $(\mathfrak{h}_{3,2}, \mathfrak{g}^0_{sc})$, $(\mathfrak{h}_{4,2}, \mathfrak{g}^0_{sr})$ y $(\mathfrak{h}_{4,2}, \mathfrak{g}^0_{sc})$ necesarios para los ejemplos del capítulo 6.

Cabe comentar sobre la complejidad de algunos cálculos. Parte de la misma es común a la mayoría de las aplicaciones del Método de Equivalencia, comenzando con las originales de Lie y Cartan, y es inevitable. Otra parte es probablemente evitable, por ejemplo trabajando sobre $\mathbb{C}$ en vez de $\mathbb{R}$ en las secciones 6.3 y 6.4, y usando notación y técnicas homológicas especialmente en el capítulo 7, y esperamos corregirlo en una próxima versión.

Resultados obtenidos

Las contribuciones de esta tesis son las siguientes:

1. En las secciones 3.2 y 3.3 presentamos una variante del método de prolongación de Tanaka descripto en [T1] y [Z].

2. Probamos la Proposición 4.2.8. También debemos mencionar como un aporte la Proposición 4.2.9 que a pesar de ser elemental tiene consecuencias importantes.

3. Proposición 5.1.6 y el Teorema 5.2.1, publicado en parte en [KS].

4. Resultados de los capítulos 6 y 7 descriptos anteriormente incluida la noción de estructura conforme compatible [KS].

Capítulo 1

El Método de Equivalencia

En este capítulo damos un repaso general del Método de Equivalencia de Cartan para G-estructuras, formalizado por Chern, Guillemin, Sternberg, Gardner, Kuranishi, Spencer, entre otros. Presentamos los procesos de reducción y prolongación clásicos, y enunciamos el teorema de equivalencia de $\{e\}$-estructuras.

1.1. G-estructuras

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n, y sean $\mathfrak{F}(M)$ y $\mathfrak{F}^*(M)$ sus fibrados de marcos y comarcos, respectivamente. $\mathfrak{F}(M)$ y $\mathfrak{F}^*(M)$ son $GL(n)$-fibrados principales equivalentes. En efecto, cada punto de $\mathfrak{F}(M)$ es un isomorfismo $\lambda : \mathbb{R}^n \to T_pM$ y la acción (a derecha) de un $g \in GL(n)$ es $R_g(\lambda) = \lambda \circ g$, mientras que un punto de $\mathfrak{F}^*(M)$ es un isomorfismo $\theta : T_pM \to \mathbb{R}^n$ y la acción es $R_g(\theta) = g^{-1} \circ \theta$. Es claro que $\lambda \mapsto \lambda^{-1}$ es un isomorfismo de fibrados principales. Si bien el Problema de Equivalencia se trata usualmente en término de $\mathfrak{F}^*(M)$ de manera de poder utilizar el cálculo diferencial exterior de manera directa, en nuestro caso y por motivos que veremos más adelante, trabajaremos con $\mathfrak{F}(M)$.

Definición 1.1.1. Sea G un subgrupo de $GL(n)$. Una *G-estructura* en una variedad n-dimensional M es una reducción de $\mathfrak{F}(M)$ al grupo G, es decir, una subvariedad $B_G \subset \mathfrak{F}(M)$ tal que para todo $\lambda \in B_G$ y todo $g \in GL(n)$ se verifica que $R_g\lambda \in B_G$ si y sólo si $g \in G$.

En toda G-estructura B_G hay una 1-forma diferencial $\mathbb{R}^n$-valuada canónica $\omega : TB_G \to \mathbb{R}^n$, denominada *1-forma tautológica*, definida por:

$$\omega_\lambda(X) = \lambda^{-1}(d\pi(X))$$

para todo $\lambda \in B_G$ y $X \in T_\lambda(B_G)$, y donde $\pi : B_G \to M$ es la proyección canónica. Esta forma verifica las siguientes propiedades:

1. $R_g^*\omega = g^{-1}\omega$ para todo $g \in GL(n)$
2. $\omega(X) = 0 \Leftrightarrow X$ es vertical, i.e., $d\pi(X) = 0$.

Las G-estructuras establecen un marco común para una gran variedad de estructuras geométricas. Por ejemplo: una $O(n)$-estructura equivale a una estructura riemanniana en M; una $O(p,q)$-estructura con $p+q=n$, a una pseudoriemanniana; una $CO(n)$-estructura, a una conforme; una

$Sp(n)$-estructura a una simpléctica; si $\dim M$ es par, una $GL(n/2,\mathbb{C})$-estructura equivale a una estructura casi compleja en M.

En lo que sigue estos ejemplos juegan un rol fundamental, en combinación con el siguiente, donde G no es semisimple. Sea $G(V) \subset GL(n)$ el subgrupo de elementos que preservan un subespacio V de dimensión k en $\mathbb{R}^n$. Una $G(V)$-estructura equivale a una distribución de rango k en M.

Un difeomorfismo $\varphi : M_1 \to M_2$ induce un difeomorfismo $D\varphi : \mathfrak{F}(M_1) \to \mathfrak{F}(M_2)$

$$D\varphi(\lambda) = d\varphi \circ \lambda$$

que conmuta con las acciones de G. Fijemos G y sean $B_G^1 \to M_1$ y $B_G^2 \to M_2$ dos G-estructuras. Un difeomorfismo $\varphi : M_1 \to M_2$ se denomina un *isomorfismo* de B_G^1 en B_G^2 si $D\varphi(B_G^1) = B_G^2$. Al mapa $\Phi = D\varphi : B_G^1 \to B_G^2$ también se lo denomina isomorfismo de B_G^1 en B_G^2.

Dados $p \in M_1$ e $q \in M_2$, se dice que B_G^1 y B_G^2 son *localmente isomorfas o equivalentes* en (p,q), si existen entornos U de p, V de q, y un isomorfismo φ de $B_G^1\big|_U$ en $B_G^2\big|_V$ tal que $\varphi(p) = q$.

La siguiente proposición caracteriza la equivalencia de G-estructuras a partir de sus formas tautológicas.

Proposición 1.1.2. *Un difeomorfismo de variedades $\Phi : B_G^1 \to B_G^2$ es un isomorfismo de G-estructuras si y sólo si $\Phi^*\omega_2 = \omega_1$.*

La *G-estructura playa estándar* de un subgrupo $G \subset GL(n)$ es el fibrado $\mathfrak{F}_G(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ con fibra típica $R_G(\mathfrak{e})$ donde $\mathfrak{e}$ es el marco de campos estandar en $\mathbb{R}^n$. Una G-estructura se dice *localmente playa* si es localmente equivalente a la G-estructura playa.

Sea $B_G \to M$ una G-estructura y sea $\lambda \in B_G$. Denotamos por $V(\lambda)$ al espacio tangente a la fibra sobre $p = \pi(\lambda)$, o sea, $V(\lambda) = \ker(d\pi|_\lambda)$. Este espacio se denomina el espacio vertical en λ y se identifica canónicamente con $\mathfrak{g}$, el álgebra de Lie de G, mediante:

$$\begin{array}{rcl} I_\lambda : \mathfrak{g} & \to & V(\lambda) \\ x & \mapsto & I_\lambda(x) = \dfrac{d}{dt}(\lambda \cdot e^{tx})|_{t=0} \end{array}$$

Fijado un elemento $x \in \mathfrak{g}$, esta identificación genera un campo vertical en B_G, denominado campo fundamental generado por x, que denotamos $X^\dagger$.

Un subespacio $H \subset T_\lambda B_G$ tal que

$$T_\lambda B_G = V(\lambda) \oplus H$$

se dice *horizontal*. La forma ω identifica a H con $\mathbb{R}^n$ y el correspondiente monomorfismo $\varphi^H = (\omega|_H)^{-1} : \mathbb{R}^n \to T_\lambda B_G$ caracteriza a H.

Para cualquier otro subespacio horizontal $\tilde{H} \subset T_\lambda B_G$ se tiene

$$\varphi^{\tilde{H}} = \varphi^H + I_\lambda \circ f \tag{1.1}$$

para algún $f = f_{H\tilde{H}} \in Hom(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g})$. En efecto, si $v \in \mathbb{R}^n$, $\omega(\varphi^H(v) - \varphi^{\tilde{H}}(v)) = v - v = 0$, por lo que $\varphi^H(v) - \varphi^{\tilde{H}}(v) \in V(\lambda)$, y $f(v) = I_\lambda^{-1}(\varphi^H(v) - \varphi^{\tilde{H}}(v))$. Recíprocamente, dada $f \in Hom(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g})$ y H existe un único espacio $\tilde{H}$ tal que $f = f_{H\tilde{H}}$.

La *torsión* del subespacio H es el elemento $C_H \in Hom(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ dado por

$$C_H(u,v) := d\omega_\lambda(\varphi^H(u), \varphi^H(v)) = -\omega_\lambda([\varphi^H(u), \varphi^H(v)]).$$

Para comparar $C_{\tilde{H}}$ y C_H nos valdremos de la siguiente definición. Sean V y W espacios vectoriales y $\mathfrak{g} \subset Hom(V, W)$ un subespacio. El homomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \partial : Hom(V, \mathfrak{g}) & \to & Hom(V \wedge V, W) \\ f & \mapsto & \partial f(v_1, v_2) = f(v_1)v_2 - f(v_2)v_1 \end{array}$$

se denomina *operador de Spencer*, que denotamos $\partial_{(V,W,\mathfrak{g})}$ cuando sea necesario. El espacio $\mathfrak{g}^{(1)} = \ker(\partial)$ se denomina la *primera prolongación de* $\mathfrak{g}$. La *i-ésima prolongación de* $\mathfrak{g}$ se define inductivamente por

$$\mathfrak{g}^{(i+1)} = \ker \partial_{(V, \mathfrak{g}^{(i-1)}, \mathfrak{g}^{(i)})}$$

donde $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}$. A veces nos referiremos a $\mathfrak{g}^{(i)}$ como la i-ésima prolongación *clásica* de $\mathfrak{g}$ para diferenciarla de la prolongación de Tanaka que definiremos en el siguiente capítulo.

Un subespacio $\mathfrak{g} \subset Hom(V, W)$ tal que $\mathfrak{g}^{(k)} = \{0\}$ para algún entero k se denomina *de tipo finito*. Un subgrupo $G \subset GL(n)$ es *de tipo finito* si $Lie(G)$ lo es. Veamos algunos ejemplos y contraejemplos.

Ejemplo 1.1.3. Si $\mathfrak{g} = Lie(G)$ contiene una matriz de rango 1 (G no es elíptico), entonces no es de tipo finito. En efecto, sea $A \in \mathfrak{g}$ de rango 1. Existe un funcional $\lambda : V \to \mathbb{R}$ tal que $A(v) = \lambda(v)v_0$ para cierto $v_0 \in V$. Entonces la función $A_1 : V \to \mathfrak{g}$ definida por $A_1(v) = \lambda(v)A$ pertenece a $\mathfrak{g}^{(1)}$, primera prolongación de $\mathfrak{g}$. Inductivamente definimos $A_{i+1} : V \to \mathfrak{g}^i$ por $A_{i+1}(v) = \lambda(v)A_i$ y se comprueba de forma directa que $A_{i+1} \in \mathfrak{g}^{(i+1)}$.

Por otra parte,

Lema 1.1.4 ($o(n)$-lema). $\mathfrak{so}(n)^{(1)} = \{0\}$

Si $f \in \mathfrak{so}(n)^{(1)}$, definiendo $\varphi(v, u, w) = \langle f(v)(u), w \rangle$ este lema es equivalente al bien conocido

Lema 1.1.5. *Sean V y W espacios vectoriales y $\varphi : V \times V \times V \to W$ una aplicación trilineal tal que $\varphi(v_1, v_2, v_3) = \varphi(v_2, v_1, v_3) = -\varphi(v_1, v_3, v_2)$ para todo $v_i \in V$. Entonces $\varphi \equiv 0$.*

Demostración. Elemental.

□

Proposición 1.1.6. $\mathfrak{co}(n)^{(1)} \cong (\mathbb{R}^n)^*$.

Demostración. Cada elemento $u \in \mathfrak{co}(n)^{(1)}$ tiene la forma:

$$u(v) = p(v)Id + D_v^u \in \mathfrak{co}(n) \tag{1.2}$$

con $D_v^u \in \mathfrak{so}(n)$, $v \in \mathbb{R}^n$ y $p \in (\mathbb{R}^n)^*$. Definimos entonces la aplicación lineal $\Psi : \mathfrak{co}(n)^{(1)} \to (\mathbb{R}^n)^*$, $\Psi(u) = p$. Es inmediato del $o(n)$-lema que Ψ es inyectiva.

Veamos que Ψ es sobreyectiva. Sea $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ y $\{e^i\}_{i=1}^n$ su base dual. Para cada $i = 1, \ldots, n$ definimos:

$$\begin{aligned} u_i(e_i) &= Id \\ u_i(e_j) &= D_j^i \text{ si } j \neq i \end{aligned}$$

donde $D_j^i(e_i) = e_j$, $D_j^i(e_j) = -e_i$ y $D_j^i(e_k) = 0$ si $k \neq i$, j. Se verifica que $u_i \in \mathfrak{co}(n)^{(1)}$ y $\Psi(u_i) = e^i$ para cada i. □

Continuemos ahora analizando la torsión, para lo cual nos interesa el operador de Spencer para $V = W = \mathbb{R}^n$ y $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n)$ una subálgebra de Lie.

Proposición 1.1.7. *Dados subespacios horizontales H y $\tilde{H}$ se verifica que*

$$C_{\tilde{H}} = C_H + \partial f_{H\tilde{H}}$$

Demostración. Ver páginas 316 y 317 de [St]. □

Si $\rho : Hom(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \to Hom(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)/\operatorname{Im} \partial$ es la proyección al cociente, por la proposición anterior $\rho(C_H)$ no depende del subespacio horizontal H.

Definición 1.1.8. Sea B_G una G-estructura. Denominamos *función de estructura* o *torsión intrínseca* de B_G a la función

$$\begin{array}{rcl} C : B_G & \to & Hom(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)/\operatorname{Im} \partial \\ \lambda & \mapsto & \rho(C_{H(\lambda)}) \end{array}$$

para cualquier distribución $\lambda \mapsto H(\lambda)$ de subespacios horizontales de $T_\lambda B_G$ (que se denomina *pseudoconexión*).

La función C generaliza las constantes de estructura de un grupo de Lie. Cuando $G = \{e\}$ y $B_{\{e\}}$ es un grupo de Lie, C es constante e igual al corchete de Lie a partir de la identificación de $\mathbb{R}^n$ con el álgebra de Lie de $B_{\{e\}}$.

G actúa naturalmente a derecha en $Hom(V, \mathfrak{g})$ y en $Hom(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ por

$$\begin{aligned} R_g(f)(u) =& Ad(g^{-1}) f(gu) \\ R_g(f)(u, v) =& g^{-1} f(gu, gv). \end{aligned}$$

Es inmediato comprobar que ∂ es equivariante con respecto a estas acciones, i.e.

$$\partial R_g(f) = R_g \partial f.$$

De aquí resulta que $\operatorname{Im} \partial$ es invariante por la acción de G y por lo tanto obtenemos una representación de G en $Hom(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)/\operatorname{Im} \partial$. La torsión intríseca C es equivariante por esta acción, es decir,

$$C(R_g(\lambda)) = R_g C(\lambda)$$

para todo $\lambda \in B_G$ y $g \in G$.

Teorema 1.1.9. *Sean B_G^1 y B_G^2 dos G-estructuras en M_1 y M_2. Si Φ es un isomorfismo de B_G^1 en B_G^2 entonces*

$$C^2 \circ \Phi = C^1$$

donde C^i es la torsión de B_G^i para $i = 1, 2$. Es decir, la torsión intrínseca es un invariante de la G-estructura.

Teorema 1.1.10. *Si una G-estructura es localmente playa entonces su torsión es idénticamente nula.*

El recíproco de este último teorema no es válido en general. Es más, para algunos grupos G, la torsión es nula cualquiera sea B_G y por lo tanto no aporta ninguna información sobre la estructura – por ejemplo si ∂ es sobreyectiva. Sin embargo, para algunos grupos el recíproco sí vale. Por ejemplo, si G es el grupo de todas las transformaciones que dejan invariante un subespacio $V \subset \mathbb{R}^n$, cuyas G-estructuras están asociadas a distribuciones, entonces el recíproco no es más que el teorema de Frobenius. En efecto, sea M una variedad de dimensión n con una distribución D de rango d. A esta estructura le asociamos canónicamente el siguiente fibrado sobre M:

$$B = \left\{ (p, \varphi) : \, p \in M, \, \varphi : \mathbb{R}^n \to T_pM \text{ con } \varphi(\mathbb{R}^d \times \{0\}) = D(p) \right\}.$$

B es una G-estructura con grupo estructural

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} : A \in GL(d), B \in M(d, n-d), C \in GL(n-d) \right\}.$$

Para cada pseudoconexión H en B tenemos el correspondiente levantamiento $D' \subset H$ de D. Por otro lado, observamos que la imagen de ∂ son las funciones de $f \in Hom(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tales que $f(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \subset \mathbb{R}^d$ y si $C \equiv 0$ entonces $C_H \in \operatorname{Im} \partial$ lo que implica que D' es involutiva y por lo tanto D es involutiva.

1.2. Reducción de G-estructuras

Suponemos que la imagen de la función de estructura C (en un abierto de B_G) está contenida en una órbita $W \subset Hom(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)/\operatorname{Im} \partial$ de la acción de G . Fijamos $\tau \in W$ y sea $G_1 \subset G$ el subgrupo de isotropía de τ. La subvariedad de B_G definida por:

$$B_{G_1} := \{\lambda \in B_G : C(\lambda) = \tau\}$$

es una G_1-estructura. En efecto, dado $\lambda \in B_{G_1}$ y $g \in GL(n)$

$$R_g\lambda \in B_{G_1} \Leftrightarrow C(R_g\lambda) = \tau \Leftrightarrow R_gC(\lambda) = \tau \Leftrightarrow R_g\tau = \tau \Leftrightarrow g \in G_1.$$

El proceso de reducción se basa en el siguiente resultado.

Teorema 1.2.1. *Dos G-estructuras B_1 y B_2 son localmente equivalentes si y sólo si sus reducciones B_1' y B_2' (a partir de un τ fijo) son localmente equivalentes.*

Demostración. Por 1.1.9, una equivalencia entre B_1 y B_2 se restringe a una equivalencia entre B_1' y B_2'. Si $\Phi' : B_1' \to B_2'$ es un isomorfismo entonces existe un isomorfismo $\varphi : M_1 \to M_2$ tal que $D\varphi|_{B_1'} = \Phi'$. Veamos que $D\varphi|_{B_1}$ es un isomorfismo entre B_1 y B_2. Si $\lambda \in B_1$, por hipótesis $C(\lambda)$ está en la órbita de τ bajo la acción de G, es decir, existe $g \in G$ tal que $R_gC(\lambda) = \tau$ y por lo tanto $R_g\lambda \in B_1'$. Luego, $D\varphi(R_g\lambda) = R_gD\varphi(\lambda) \in B_2'$. Como $g \in G$, resulta $D\varphi(\lambda) \in B_2$. $\square$

Mencionamos que en el caso que no se cumpla que la imagen de C está contenida en una órbita es necesario tomar, en lugar de τ, una sección del espacio de órbitas y al reducir no obtendremos G-estructuras sino una generalización de estas, donde el grupo varía punto a punto [Ga].

1.3. Prolongación de G-estructuras

Sea $B = B_G$ una G-estructura, $\mathfrak{g}^{(i)}$ la i-ésima prolongación de $\mathfrak{g} = Lie(G)$. Un complemento $\mathcal{N}$ de $\mathrm{Im}\,\partial$ en $Hom(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ se denomina *condición de normalización* para la prolongación. La *primera prolongación de* B es el fibrado principal $B^{(1)} \to B$ definido por:

$$B^{(1)} = \left\{(\lambda, \varphi^H) : \lambda \in B,\ H \text{ es un subespacio horizontal de } T_\lambda B \text{ con } C_H \in \mathcal{N}\right\}.$$

Si identificamos φ^H con el isomorfismo $\varphi^H \oplus I_\lambda : \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g} \to T_\lambda B$, resulta que

$$B^{(1)} \subset \mathfrak{F}(B),$$

el fibrado de marcos de B.

Dado un subespacio horizontal cualquiera H_0, se tiene que $C_{H_0} + \partial f \in \mathcal{N}$ para cierta $f \in Hom(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g})$. Por lo visto anteriormente, $f = f_{H_0 H}$ para algún espacio horizontal H, y $C_H \in \mathcal{N}$ por la proposición 1.1.7. Entonces, $B^{(1)}$ es no vacío. Además, $C_{\tilde{H}} \in \mathcal{N}$ si y sólo sí $\partial f_{H\tilde{H}} = 0$, o sea $f_{H\tilde{H}} \in \mathfrak{g}^{(1)}$, y $\varphi^{\tilde{H}} = \varphi^H \circ A$ donde $A \in GL(\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g})$ verifica $A|_{\mathbb{R}^n} = Id_{\mathbb{R}^n} - f_{H\tilde{H}}$ y $A|_{\mathfrak{g}} = Id_{\mathfrak{g}}$ por (1.1).

Concluimos que $B^{(1)} \to B$ es una $G^{(1)}$-estructura, donde $G^{(1)} \subset GL(\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g})$ es el subgrupo de g's de la forma

$$g|_{\mathbb{R}^n} = Id_{\mathbb{R}^n} + T,$$
$$g|_{\mathfrak{g}} = Id_{\mathfrak{g}}$$

con $T \in \mathfrak{g}^{(1)} \subset Hom(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g})$. Observemos que $G^{(1)}$ es abeliano y que su álgebra de Lie se identifica con $\mathfrak{g}^{(1)}$.

Podemos considerar a su vez la prolongación $B^{(2)} = (B^{(1)})^{(1)}$ y sucesivamente se construyen fibrados $B^{(i)} = (B^{(i-1)})^{(1)} \to B^{(i-1)}$ cuyo grupo estructural $G^{(i)}$ es abeliano y su álgebra de Lie se identifica con $\mathfrak{g}^{(i)}$.

Teorema 1.3.1. *Dos G-estructuras B_1 y B_2 son localmente equivalentes si y sólo si sus prolongaciones $B_1^{(1)}$ y $B_2^{(1)}$ son localmente equivalentes.*

Para la demostración ver la página 336 de [St].

Observación 1.3.2. En una G-estructura, una distribución $\lambda \mapsto H(\lambda)$ que asigna a cada punto un subespacio horizontal se denomina *pseudoconexión*. Si además H es invariante por la acción de G entonces es una *conexión principal*. Si prolongamos con respecto a una condición de normalización G-invariante y arribamos a una única pseudoconexión, esta será una conexión, pero eso no pasa siempre. Más adelante, precisaremos esto en el proceso de prolongación de Tanaka.

Ejemplo 1.3.3. Sea M una variedad riemanniana y B su fibrado de marcos ortonormales, que es una $O(n)$-estructura. Vimos que $\mathfrak{so}(n)^{(1)} = \{0\}$, por lo tanto el operador de Spencer ∂ es inyectivo. Pero como las dimensiones del dominio y del codomino de ∂ coinciden (ambas son iguales a $\frac{n^2(n-1)}{2}$), ∂ es biyectivo. Entonces $\mathcal{N} = \{0\}$ es la única condición de normalización admisible y existe una única pseudo-conexión H tal que $C_H = 0$, que no es otra que la conexión de Levi Civita de la métrica.

1.4. Equivalencia de e-estructuras (marcos)

El objetivo del método expuesto anteriormente es reducir un problema de equivalencia de G-estructuras a un problema de equivalencia de e-estructuras, i.e. G-estructuras con grupo estructural discreto. Daremos una breve reseña de cómo se resuelve este problema. Por comodidad vamos a suponer que el grupo estructural es trivial, en cuyo caso una e-estructura $B_e \to M$ sobre una variedad M de dimensión n no es más que la elección suave de una base de T_pM para cada $p \in M$, o equivalentemente, n campos vectoriales $X_1, \ldots, X_n$ linealmente independientes en cada punto, que denominamos marco.

Sea $\Phi = \{X_1, \ldots, X_n\}$ un marco sobre M. Las funciones de estructura c_{ij}^k se definen por

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k X_k.$$

Si estas funciones son constantes, el marco es localmente equivalente a un marco invariante a izquierda en un grupo de Lie. En general, hay que tener en cuenta las derivadas de las funciones de estructura. El resultado preciso es algo complicado de formular, pero lo haremos por completitud.

Definimos inductivamente los conjuntos

$$\mathfrak{G}_0(\Phi) = \{c_{ij}^k : i, j, k = 1, \ldots, n\}$$
$$\mathfrak{G}_{i+1}(\Phi) = \{X_j f : f \in \mathfrak{G}_i,\ j = 1, \ldots, n\} \quad \text{para } i \geq 0.$$

Cada función en $\mathfrak{G}_i$ tiene un índice correspondiente de $i+3$ números entre 1 y n tal que el índice de c_{ij}^k es (i, j, k) y el índice de $X_i f$ es el índice de f al que se le concatena i. Para cada $i \in \mathbb{N}$ sea

$$\mathfrak{F}_i(\Phi) = \bigcup_{j=0}^{i} \mathfrak{G}_j(\Phi)$$

Definición 1.4.1. k funciones $\{f_i\}_{i=1}^k$ en $C^\infty(M)$ se dicen *independientes* en p si el conjunto $\{df_i|_p\}_{i=1}^k$ es linealmente independiente en T_p^*M. Se define entonces el *rango* de una familia de funciones $\mathfrak{F} \subset C^\infty(M)$ en p como el número máximo de funciones independientes en $\mathfrak{F}$ y lo denotamos por $r_p(\mathfrak{F})$. Decimos que la familia $\mathfrak{F}$ es *regular* en p si su rango es constante en un entorno de p.

Si $\mathfrak{F}$ es una familia regular de rango k, se pueden encontrar k funciones en $\mathfrak{F}$ independientes en p que son componentes de un sistema de coordenadas alrededor de p.

En el marco Φ definimos, para cada $i \geq 0$ y $p \in M$, $k_i(p) = r_p(\mathfrak{F}_i(\Phi))$. Entonces es claro que $0 \leq k_i(p) \leq k_{i+1}(p) \leq n$ y por lo tanto existe $i_0 \geq 0$ tal que $k_{i_0-1}(p) < k_{i_0}(p) = k_j(p)$ para todo $j > i_0$. Este número se denomina el *orden del marco* en p y se denota por $r(p)$ y al correspondiente rango $k_{r(p)}(p)$ se lo denomina el *rango del marco*. Además, diremos que el marco es *regular* en p si $\mathfrak{F}_{r(p)}$ es regular. En dicho caso se prueba que $r(p)$ es el menor entero i_0 tal que $k_{i_0}(p) = k_{i_0+1}(p)$ [St].

Teorema 1.4.2. *Sea Φ un marco en una variedad M que es regular de orden r y rango k en un punto $p \in M$ y sea Ψ un marco regular en un punto $p' \in M'$. Existe un difeomorfismo $F : U \to U'$ de un entorno de p en un entorno de p' tal que $F(p) = p'$ y $dF(\Phi) = \Psi$ si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:*

1. *Ψ tiene orden r y rango k en el punto p'*

2. *Existen k funciones independientes en $\mathfrak{F}_r(\Phi)$ tales que las correspondientes k funciones de $\mathfrak{F}_r(\Psi)$ con los mismos índices son también independientes. En dicho caso, sean $\phi : V \to \mathbb{R}^n$ y $\psi : V' \to \mathbb{R}^n$ sistemas de coordenadas alrededor de p y p' respectivamente que tienen a dichas funciones como componentes.*

3. *Si $\sigma = \psi^{-1} \circ \phi$ entonces*
$$f' \circ \sigma = f \tag{1.3}$$
para todas $f \in \mathfrak{F}_{r+1}(\Phi)$ y $f' \in \mathfrak{F}_{r+1}(\Psi)$ con los mismos índices.

.

Demostraciones de este teorema se pueden hallar en [St] y [Ga]. Vale aclarar que la función σ no es necesariamente el isomorfismo F.

Ejemplo 1.4.3. Si los campos de Φ y Ψ conmutan dos a dos, $\mathfrak{F}_{r+1}(\Phi)$ y $\mathfrak{F}_{r+1}(\Psi)$ solo poseen la función nula y cualquier cambio de coordenadas σ verifica (1.3).

El teorema 1.4.2 completa el Método de Equivalencia para G-estructuras de tipo finito. Motivados por este definimos:

Definición 1.4.4. 1. Sea $\Phi = \{X_1, \ldots, X_n\}$ un marco en M, $\mathcal{H}$ una familia de funciones en $C^\infty(M)$ y $\mathfrak{F}(\mathcal{H})$ el subespacio de $C^\infty(M)$ generado por las funciones de la forma $X_{i_1} \ldots X_{i_l} f$ para todo $l \geq 0$, $1 \leq i_1, \ldots, i_l \leq n$ y $f \in \mathcal{H}$. Decimos que $\mathcal{H}$ es un *sistema de invariantes fundamentales* de Φ si:
$$\overline{\mathfrak{F}(\mathcal{H})} = \overline{\mathfrak{F}_{r+1}(\Phi)},$$
donde r es el orden de Φ y $\overline{\mathfrak{F}}$ denota el álgebra generada por las funciones de la familia $\mathfrak{F}$.

2. Un *sistema de invariantes fundamentales* de una G-estructura B de tipo finito es el conjunto de funciones en B que pertenecen a un sistema de invariantes fundamentales de una $\{e\}$-estructura asociada a B por el proceso de prolongación.

Por otro lado, del propio proceso de prolongación se desprende que los automorfismos de una G-estructura de tipo finito se corresponden con los automorfismos de la $\{e\}$-estructuras asociada, i.e. difeomorfismos de M en M que preservan el marco.

Corolario 1.4.5. [Ko, Teorema 3.1] *El grupo de automorfismos de una $\{e\}$-estructura sobre una variedad M n-dimensional es un grupo de Lie de dimensión a lo sumo n.*

Más generalmente,

Corolario 1.4.6. *El grupo de automorfismos de una G-estructura de tipo finito sobre una variedad M es un grupo de Lie de dimensión a lo sumo $\sum_{i=0}^{k} dim\, \mathfrak{g}^{(i)}$, donde $\mathfrak{g}^{(i)}$ es la i-ésima prolongación del álgebra $\mathfrak{g} = Lie(G)$.*

Para continuar el estudio del problema de equivalencia para G-estructuras ver [St], [Ga], [BGG].

Capítulo 2

Álgebras de Lie graduadas

En la geometría clásica el espacio tangente de una variedad se modela como un espacio vectorial V o simplemente $\mathbb{R}^n$ y los modelos playos son aquellos equivalentes a un determinado modelo en $\mathbb{R}^n$. Sin embargo, cuando consideramos geometrías asociadas a distribuciones no-involutivas, es mas conveniente tomar como modelo un álgebra de Lie graduada nilpotente $\mathfrak{m} = \sum_{i=-\mu}^{-1} \mathfrak{m}^i$ y su correspondiente grupo de Lie simplemente conexo, como se verá en el capítulo 3.

En este capítulo introduciremos las álgebras de Lie graduadas $\mathfrak{m}$ y las estructuras de Tanaka $(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)$. Definiremos la prolongación de Tanaka de $\mathfrak{m}$ y de $(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)$ y daremos propiedades de estas, considerando especialmente el caso en que $(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)$ está asociado a productos internos subriemannianos o subconformes. Por último, definiremos los operadores y la cohomología de Spencer y su realización mediante clases armónicas, cruciales en los ejemplos por venir.

2.1. Álgebras de Lie graduadas

En esta tesis un *álgebra de Lie graduada* es un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ real o compleja junto con una descomposición en subespacios de dimensión finita

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^i$$

que satisfacen

$$[\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^j] \subset \mathfrak{g}^{i+j}$$

para todo i, j. Escribiremos a veces $\mathfrak{g} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^i$.

Toda álgebra de Lie graduada $\mathfrak{g} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^i$ tiene una filtración asociada dada por $\mathfrak{f}_{\mathfrak{g}}^i = \sum_{j \geq i} \mathfrak{g}^j$. Observemos que $\mathfrak{g}^0$ y $\mathfrak{f}_{\mathfrak{g}}^i$ con $i \geq 0$ son subálgebras de $\mathfrak{g}$, y $[\mathfrak{f}_{\mathfrak{g}}^i, \mathfrak{f}_{\mathfrak{g}}^j] \subset \mathfrak{f}_{\mathfrak{g}}^{i+j}$ para todo i, j.

Un isomorfismo (resp. derivación) entre dos álgebras de Lie graduadas $\mathfrak{g} = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^i$ y $\mathfrak{h} = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{h}^i$ es un isomorfismo (resp. derivación) de álgebras de Lie $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ que verifica $\varphi(\mathfrak{g}^i) \subset \mathfrak{h}^i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. El grupo de automorfismos y el álgebra de derivaciones de un álgebra de Lie graduada $\mathfrak{g}$ se denotan por $\mathrm{Aut}_{gr}(\mathfrak{g})$ y $\mathrm{Der}_{gr}(\mathfrak{g})$, respectivamente.

Toda álgebra de Lie graduada tiene una derivación definida por $a|_{\mathfrak{g}^k} = -kId$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, a la que denominamos *dilatación infinitesimal* (o simplemente dilatación) y su correspondiente grupo 1-paramétrico de automorfismos $e^{ta}|_{\mathfrak{g}^k} = t^{-k}Id$, que denominamos dilataciones.

De ahora en adelante trabajaremos con álgebras de Lie graduadas sobre $\mathbb{R}$ o sobre $\mathbb{C}$ de dimensión finita, salvo que se diga lo contrario. En particular si $\mathfrak{g}^i = \{0\}$ para todo $i \leq 0$, o para todo $i \geq 0$, entonces $\mathfrak{g}$ es nilpotente.

Definición 2.1.1. 1. Un álgebra de Lie graduada de la forma $\mathfrak{m} = \sum_{i=-\mu}^{-1} \mathfrak{m}^i$ se denomina *fundamental*, si está generada por $\mathfrak{m}^{-1}$, i.e. $[\mathfrak{m}^{-1}, \mathfrak{m}^i] = \mathfrak{m}^{i-1}$ para todo i, y se dice *no degenerada* si su centro es $\mathfrak{m}^{-\mu}$.

2. Denominaremos *estructura de Tanaka* a un par $(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)$ donde $\mathfrak{m}$ es un álgebra de Lie graduada fundamental y $\mathfrak{g}^0$ es una subálgebra de $\mathrm{Der}_{gr}(\mathfrak{m})$.

La razón por la que consideramos graduaciones con enteros negativos se verá más adelante. Por ahora observamos que con esta graduación $\mathfrak{f}_{\mathfrak{m}}^{-1} = \mathfrak{m}^{-1}$ y $\mathfrak{f}_{\mathfrak{m}}^{-i}/\mathfrak{f}_{\mathfrak{m}}^{-i+1} \cong \mathfrak{m}^{-i}$ para todo $i > 1$.

A continuación consideramos productos internos en un álgebra de Lie graduada.

Definición 2.1.2. Sea $\mathfrak{g} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^i$ un álgebra de Lie graduada.

1. Un producto interno $\langle\ ,\ \rangle$ definido en $\mathfrak{g}$ se dice *adaptado* si $\mathfrak{g}^i \perp \mathfrak{g}^j$ cuando $i \neq j$.

2. En la familia de productos internos adaptados de $\mathfrak{g}$ definimos la relación de equivalencia

$$\langle\ ,\ \rangle_1 \sim \langle\ ,\ \rangle_2 \Leftrightarrow \exists\, r > 0 \ t.q.\ r^i \langle\ ,\ \rangle_1 = \langle\ ,\ \rangle_2 \text{ en } \mathfrak{g}^{-i} \text{ para todo } i$$

y llamamos *producto interno gr-conforme* en $\mathfrak{g}$ a una clase de equivalencia de esta relación.

Un producto interno gr-conforme en $\mathfrak{g}$ no es un producto interno conforme (clase de equivalencia conforme de productos internos), pero su restricción a $\mathfrak{g}^{-1}$ sí lo es.

Definición 2.1.3. Sea $\mathfrak{m} = \sum_{i=-\mu}^{-1} \mathfrak{m}^i$ un álgebra de Lie graduada fundamental y $\langle\ ,\ \rangle$ un producto interno definido en $\mathfrak{m}^{-1}$. El par $(\mathfrak{m}, \langle\ ,\ \rangle)$ se denomina *álgebra de Lie graduada subriemanniana*. Si, en cambio, consideramos en $\mathfrak{m}^{-1}$ un producto interno conforme $\langle\ ,\ \rangle^c$, el par $(\mathfrak{m}, \langle\ ,\ \rangle^c)$ se denomina *álgebra de Lie graduada subconforme*.

Un isomorfismo entre dos álgebras de Lie graduadas subriemannianas (resp. subconformes) $(\mathfrak{m}, \langle\ ,\ \rangle_1)$ y $(\mathfrak{n}, \langle\ ,\ \rangle_2)$, es un isomorfismo de álgebras de Lie graduadas $\varphi : \mathfrak{m} \to \mathfrak{n}$ que verifica que $\varphi|_{\mathfrak{m}^{-1}}$ es una isometría (resp. isometría conforme). De manera análoga se define una derivación.

El grupo de automorfismos y el álgebra de derivaciones de un álgebra de Lie graduada subriemanniana $(\mathfrak{m}, \langle\ ,\ \rangle)$ se denotan por $\mathrm{Aut}_{gr}(\mathfrak{m}, \langle\ ,\ \rangle)$ y $\mathrm{Der}_{gr}(\mathfrak{m}, \langle\ ,\ \rangle)$ o, en el caso que este claro que producto interno estamos considerando, por $G^0_{sr}(\mathfrak{m})$ y $\mathfrak{g}^0_{sr}(\mathfrak{m})$, respectivamente. Para las álgebras de Lie graduadas subconformes usaremos la notación $\mathrm{Aut}_{gr}(\mathfrak{m}, \langle\ ,\ \rangle^c)$, $\mathrm{Der}_{gr}(\mathfrak{m}, \langle\ ,\ \rangle^c)$, $G^0_{sc}(\mathfrak{m})$ y $\mathfrak{g}^0_{sc}(\mathfrak{m})$. Entonces $(\mathfrak{m}, \langle\ ,\ \rangle)$ (resp. $(\mathfrak{m}, \langle\ ,\ \rangle^c)$) tiene asociada naturalmente la estructura de Tanaka $(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0_{sr}(\mathfrak{m}))$ (resp. $(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0_{sc}(\mathfrak{m}))$). Además, si $\langle\ ,\ \rangle$ pertenece a la clase $\langle\ ,\ \rangle^c$ claramente se verifica:

$$\mathrm{Aut}_{gr}(\mathfrak{m}, \langle\ ,\ \rangle) \subset \mathrm{Aut}_{gr}(\mathfrak{m}, \langle\ ,\ \rangle^c) \subset \mathrm{Aut}_{gr}(\mathfrak{m})$$

y las relaciones análogas para las correspondientes álgebras de derivaciones.

Lema 2.1.4. *1. Dada un álgebra de Lie graduada subriemanniana $(\mathfrak{m}, \langle\ ,\ \rangle)$ existe una extensión natural de $\langle\ ,\ \rangle$ a un producto interno adaptado en $\mathfrak{m}$ que es invariante por $\mathrm{Aut}_{gr}(\mathfrak{m}, \langle\ ,\ \rangle)$.*

2. *Dada un álgebra de Lie graduada subconforme* $(\mathfrak{m}, \langle\ ,\ \rangle^c)$ *existe una extensión natural de* $\langle\ ,\ \rangle^c$ *a un producto interno gr-conforme en* $\mathfrak{m}$ *que es invariante por* $\mathrm{Aut}_{gr}(\mathfrak{m}, \langle\ ,\ \rangle^c)$.

Demostración. Construimos el producto interno adaptado en $\mathfrak{m}$ inductivamente. En $\mathfrak{m}^{-1}$ es $\langle\ ,\ \rangle$. Supongamos que tenemos definido un producto interno en $\mathfrak{m}^{-i+1}$. Junto con $\langle\ ,\ \rangle$, induce uno en $\mathfrak{m}^{-1} \wedge \mathfrak{m}^{-i+1}$. Por otro lado el corchete de Lie en $\mathfrak{m}$ define una aplicación lineal

$$\begin{aligned} \alpha : \mathfrak{m}^{-1} \wedge \mathfrak{m}^{-i+1} &\to \mathfrak{m}^{-i} \\ v_1 \wedge v_{-i+1} &\mapsto [v_1, v_{-i+1}] \end{aligned}$$

Como $\mathfrak{m}$ es fundamental, α es sobreyectiva y se restringe a una biyección entre $(\ker \alpha)^{\perp}$ y $\mathfrak{m}^{-i}$. Consideramos en $\mathfrak{m}^{-i}$ el producto interno inducido por esta biyección. Por construcción, este producto interno es invariante por $\mathrm{Aut}_{gr}(\mathfrak{m}, \langle\ ,\ \rangle)$.

En el caso de un álgebra de Lie graduada subconforme fundamental $(\mathfrak{m}, \langle\ ,\ \rangle^c)$ cada producto interno en la clase de $\langle\ ,\ \rangle^c$ tiene una extensión natural a $\mathfrak{m}$ por la parte 1. Vemos que si $\langle\ ,\ \rangle_1$ está en $\langle\ ,\ \rangle^c$ entonces $\langle\ ,\ \rangle_1 = r\langle\ ,\ \rangle$ en $\mathfrak{m}^{-1}$ para cierto $r > 0$ y sus extensiones verifican:

$$\langle\ ,\ \rangle_1 = r^i \langle\ ,\ \rangle \text{ en } \mathfrak{m}^{-i} \text{ para todo } i > 0. \tag{2.1}$$

Por lo tanto, la extensiones naturales de los productos internos en $\langle\ ,\ \rangle^c$ forman un producto interno gr-conforme en $\mathfrak{m}$. □

Cuando trabajemos con un álgebra de Lie graduada fundamental $(\mathfrak{m}, \langle\ ,\ \rangle)$, $\langle\ ,\ \rangle$ denotará tanto el producto interno en $\mathfrak{m}^{-1}$ como su extensión natural a $\mathfrak{m}$ y ambos se denominarán productos internos subriemannianos en $\mathfrak{m}$. Análogamente para el caso subconforme.

2.2. Prolongación de Tanaka algebraica

Sea $\mathfrak{m} = \bigoplus_{i<0} \mathfrak{m}^i$ un álgebra de Lie graduada fundamental. La *prolongación de Tanaka* de $\mathfrak{m}$ es el álgebra de Lie graduada $\mathfrak{g}(\mathfrak{m}) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}^i(\mathfrak{m})$, que verifica:

1. $\mathfrak{g}^i(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}^i$ para todo $i < 0$;
2. si $v \in \mathfrak{g}^i(\mathfrak{m})$ con $i \geq 0$ verifica $[v, \mathfrak{g}^{-1}] = 0$, entonces $v = 0$;
3. $\mathfrak{g}(\mathfrak{m})$ es maximal entre las álgebras de Lie graduadas que satisfacen 1 y 2.

Para $i \geq 0$ se tiene inductivamente

$$\mathfrak{g}^k(\mathfrak{m}) = \{u \in \bigoplus_{p<0} Hom(\mathfrak{g}^p, \mathfrak{g}^{p+k}) : u([x, y]) = [u(x), y] + [x, u(y)]\} \tag{2.2}$$

y el corchete en $\mathfrak{g}$ viene dado por:

- Si $x, y \in \mathfrak{m}$, $[x, y]$ ya está definido;
- si $u \in \mathfrak{g}^i(\mathfrak{m})$ con $i \geq 0$ y $x \in \mathfrak{m}$, $[u, x] = u(x)$;
- si $u \in \mathfrak{g}^i(\mathfrak{m})$ y $v \in \mathfrak{g}^j(\mathfrak{m})$ con $i, j \geq 0$, $[u, v](x) = [[u, x], v] + [u, [v, x]]$ para todo $x \in \mathfrak{m}$;

Observemos que $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{m}) = \mathrm{Der}_{gr}(\mathfrak{m})$.

La *prolongación* de una estructura de Tanaka $(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)$ es la subálgebra graduada:

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^i(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0) \subset \mathfrak{g}(\mathfrak{m})$$

donde $\mathfrak{g}^i(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0) = \mathfrak{m}^i$ si $i < 0$, $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0) = \mathfrak{g}^0$, y para $i \geq 1$ se define $\mathfrak{g}^i(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)$ inductivamente como el subespacio maximal de $\mathfrak{g}^i(\mathfrak{m})$ que verifica $[\mathfrak{g}^i(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0), \mathfrak{m}^{-1}] \subseteq \mathfrak{g}^{i-1}(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)$.

La prolongación de $(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)$ es igual a la prolongación de $\mathfrak{m}$ en el caso que $\mathfrak{g}^0 = \mathrm{Der}_{gr}(\mathfrak{m})$ y si $\mathfrak{g}^0 \subset \mathfrak{h}^0$, entonces $\mathfrak{g}(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0) \subset \mathfrak{g}(\mathfrak{m}, \mathfrak{h}^0)$. Además, si $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^{-1}$ es abeliana, el espacio $\mathfrak{g}^i(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)$ para cada i coincide con i-ésima prolongación clásica de $\mathfrak{g}^0$ (ver Pág. 3).

El álgebra graduada $\mathfrak{m}$ (resp. el par $(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)$) se dirá de *tipo finito* si su prolongación es un álgebra de dimensión finita, o sea existe $k > 0$ tal que $\mathfrak{g}^i(\mathfrak{m}) = \{0\}$ (resp. $\mathfrak{g}^i(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0) = \{0\}$) para todo $i \geq k$. En caso contrario, se dice que es de tipo infinito.

Para determinar el tipo de $(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)$, consideremos la subálgebra

$$\mathfrak{h} = \bigoplus_{i \geq -1} \mathfrak{h}^i \subset \mathfrak{g}(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)$$

donde

$$\mathfrak{h}^i = \big\{u \in \mathfrak{g}^i(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0) : [u, \bigoplus_{i \leq -2} \mathfrak{m}^i] = \{0\}\big\}. \tag{2.3}$$

$\mathfrak{h}^0$ se identifica con una subálgebra de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{m}^{-1})$ y $\mathfrak{h}^i$ con la i-ésima prolongación clásica de $\mathfrak{h}^0$.

Proposición 2.2.1. $(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)$ *es de tipo finito si y sólo si existe* $i \geq -1$ *tal que* $\mathfrak{h}^i = \{0\}$*, es decir que* $\mathfrak{h}^0$ *es de tipo finito en el sentido clásico.*

Para la demostración, ver [T1], Teorema 11.1.

Veamos una interpretación geométrica de la prolongación de Tanaka. Sea $M(\mathfrak{m})$ el grupo de Lie simplemente conexo con álgebra de Lie $\mathfrak{m}$ y $\mathcal{D}$ la distribución invariante a izquierda en $M(\mathfrak{m})$ tal que $\mathcal{D}_e = \mathfrak{m}^{-1}$, denominada distribución estándar de tipo $\mathfrak{m}$. Un campo vectorial $X \in \Gamma(TM)$ se dice un *automorfismo infinitesimal de* $\mathcal{D}$ si

$$[X, Y] \in \Gamma(\mathcal{D}) \text{ para todo } Y \in \Gamma(\mathcal{D}).$$

Es decir, son los campos generados por los difeomorfismos que preservan la distribución. Sea $\mathcal{A}$ el álgebra de Lie de los gérmenes de automorfismos infinitesimales de $\mathcal{D}$ en la identidad e. $\mathcal{A}$ tiene una filtración natural definida por:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 =& \{\underline{X} \in \mathcal{A} :\ X_e = 0\}, \\ \mathcal{A}_{-1} =& \{\underline{X} \in \mathcal{A} :\ X_e \in \mathcal{D}_e\}, \\ \mathcal{A}_{-i-1} =& [\mathcal{A}_{-i}, \mathcal{A}_{-1}] \text{ para todo } i \geq 1, \\ \mathcal{A}_{i+1} =& \{\underline{X} \in \mathcal{A}_i :\ [X, \mathcal{A}_{-1}] \subset \mathcal{A}_i\} \text{ para todo } i \geq 0, \end{aligned}$$

donde $\underline{X}$ denota el germen del campo X. Si definimos $A_i := \mathcal{A}_i / \mathcal{A}_{i+1}$ entonces el corchete de campos induce en $A := \oplus_{i \in \mathbb{Z}} A_i$ una estructura de álgebra de Lie graduada.

Teorema 2.2.2. *El álgebra de Lie graduada A asociada a $(M(\mathfrak{m}), \mathcal{D})$ es naturalmente isomorfa a la prolongación $\mathfrak{g}(\mathfrak{m})$*

Demostración. Referimos al teorema 6.1 de [T1]. □

Definición 2.2.3. Dada la prolongación $\mathfrak{g} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}^i$ del par $(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)$ podemos considerar una familia de grupos de Lie $\{G^k(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)\}_{k\geq 0}$ (o simplemente $\{G^k\}_{k\geq 0}$) donde $G^0(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)$ es el subgrupo de Lie conexo de $\mathrm{Aut}_{gr}(\mathfrak{m})$ con álgebra de Lie $\mathfrak{g}^0$ y para $k \geq 1$, $G^k(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)$ es el grupo abeliano de todos los mapas $A \in \bigoplus_{i<k} Hom(\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^i \oplus \mathfrak{g}^{i+k})$ tales que:

$$\begin{aligned} A|_{\mathfrak{g}^i} &= Id_{\mathfrak{g}^i} + T_i, \qquad \text{si } i < 0 \\ A|_{\mathfrak{g}^0} &= Id_{\mathfrak{g}^0} \end{aligned}$$

con $T_i \in Hom(\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^{i+k})$ y $T_{-\mu} \oplus \ldots \oplus T_{-1} \in \mathfrak{g}^k$.

Observemos que la dimensión de G^k es igual a la de $\mathfrak{g}^k$.

En [Y] se estudia el caso en que la prolongación $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie simple, comenzando con describir las posibles graduaciones de un álgebra simple, como sigue.

Proposición 2.2.4. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra simple sobre $\mathbb{C}$, $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$, $\triangle$ el correspondiente sistema de raíces, $\triangle^+$ un sistema de raíces positivas y $\triangle^0 = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ el conjunto de raíces simples. Para cada $\alpha \in \triangle$ denotamos por $\mathfrak{g}^\alpha$ el espacio raíz correspondiente a α.*

Todo subconjunto $\Sigma \subset \triangle^0$ determina una graduación $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{-k} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}^k$ donde

$$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha\in\Sigma_0} \mathfrak{g}^\alpha, \qquad \mathfrak{g}^k = \sum_{\alpha\in\Sigma_k} \mathfrak{g}^\alpha, \qquad \mathfrak{g}^{-k} = \sum_{\alpha\in\Sigma_k} \mathfrak{g}^{-\alpha}$$

para $k > 0$, con

$$\Sigma_k = \{\alpha = \sum_{k=1}^{l} n_i\alpha_i \in \triangle^+ : \sum_{\alpha_i\in\Sigma} n_i = k\}$$

Esta álgebra graduada se denota por $(\mathfrak{g}, \Sigma)$.

Además, toda graduación de $\mathfrak{g}$ se obtiene de esta forma para alguna elección de subálgebra de Cartan y raíces positivas.

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra simple sobre $\mathbb{R}$ existe una correspondencia similar entre las graduaciones de $\mathfrak{g}$ y subconjuntos particulares del conjunto de raíces restringidas simples (Ver pág. 446 de [Y]).

Teorema 2.2.5. *Sea $\mathfrak{g} = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}^i$ un álgebra de Lie simple graduada sobre $\mathbb{C}$ tal que $\mathfrak{m} = \oplus_{i<0}\mathfrak{g}^i$ es fundamental. Luego $\mathfrak{g}$ es la prolongación de $\mathfrak{m}$ excepto en los siguientes casos:*

1. $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{-1} \oplus \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^1$.
2. $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{-2} \oplus \mathfrak{g}^{-1} \oplus \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^1 \oplus \mathfrak{g}^2$ *con* $dim\, \mathfrak{g}^{-2} = 1$ *y tal que* $[\ ,\ ] : \mathfrak{g}^{-1} \times \mathfrak{g}^{-1} \to \mathfrak{g}^{-2}$ *es no degenerado.*
3. $\mathfrak{g} = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}^i$ *es isomorfa a* $(A_l, \{\alpha_1, \alpha_i\})$*, para algún* $1 < i < l$*, o a* $(C_l, \{\alpha_1, \alpha_l\})$.

Además, $\mathfrak{g}$ es la prolongación de $(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)$ excepto cuando $\mathfrak{g} = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}^i$ es isomorfa a $(A_l, \{\alpha_1\})$ o a $(C_l, \{\alpha_1\})$.

Teorema 2.2.6. *Sea* $\mathfrak{g} = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}^i$ *un álgebra de Lie simple graduada sobre* $\mathbb{R}$ *tal que* $\mathfrak{m} = \oplus_{i<0}\mathfrak{g}^i$ *es fundamental. Luego* $\mathfrak{g}$ *es la prolongación de* $\mathfrak{m}$ *excepto en los siguientes casos:*

1. $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{-1} \oplus \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^1$.
2. $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{-2} \oplus \mathfrak{g}^{-1} \oplus \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^1 \oplus \mathfrak{g}^2$ *con* $dim\, \mathfrak{g}^{-2} = 1$ *y* $[\ ,\ ] : \mathfrak{g}^{-1} \times \mathfrak{g}^{-1} \to \mathfrak{g}^{-2}$ *es no degenerado o es la complexificación de una álgebra de esta forma.*
3. $\mathfrak{g} = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}^i$ *es isomorfa a* $(A_l, \{\alpha_1, \alpha_i\})$ *para algún* $1 < i < l$*, a* $(C_l, \{\alpha_1, \alpha_l\})$ *o a sus formas reales split* $(AI, \{\alpha_1, \alpha_i\})$ *con* $1 < i < l$*,* $(CI, \{\alpha_1, \alpha_l\})$*.*

Además, $\mathfrak{g}$ *es la prolongación de* $(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)$ *excepto cuando* $\mathfrak{g} = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}^i$ *es isomorfa a* $(A_l, \{\alpha_1\})$ *con* $1 < i < l$*, a* $(C_l, \{\alpha_1\})$ *o a sus formas reales split* $(AI, \{\alpha_1\})$ *con* $1 < i < l$*,* $(CI, \{\alpha_1\})$

2.3. Prolongación de álgebras de Lie subriemannianas y subconformes

Si $\mathfrak{m}$ posee un producto interno subriemanniano y $G^0 \subset G^0_{sr}(\mathfrak{m})$ con $Lie(G^0) = \mathfrak{g}^0 \subset \mathfrak{g}^0_{sr}(\mathfrak{m})$ entonces el producto interno se puede extender a un producto interno G^0-invariante en la prolongación de $(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)$. Basta observar inductivamente que para $k \geq 0$, cada $\mathfrak{g}^k$ es un subespacio G^0-invariante de $\oplus_{i<0}\mathfrak{g}^{i+k} \otimes (\mathfrak{g}^i)^*$. El producto interno de este espacio coincide con $\langle A, B\rangle = tr(A^\top B)$ en cada espacio $\mathfrak{g}^{i+k} \otimes (\mathfrak{g}^i)^* \simeq Hom(\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^{i+k})$. De manera análoga se procede si partimos de un producto interno subconforme en $\mathfrak{m}$ y $G^0 \subset G^0_{sc}(\mathfrak{m})$.

Sin embargo, para el caso que $\mathfrak{g}^0 \subset \mathfrak{g}^0_{sr}(\mathfrak{m})$ la siguiente proposición nos determina exactamente la prolongación.

Proposición 2.3.1. *Si* $(\mathfrak{m}, \langle\ ,\ \rangle)$ *es un álgebra de Lie graduada subriemanniana, la prolongación de* $(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0_{sr}(\mathfrak{m}))$ *es trivial, i.e.* $\mathfrak{g}^i(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0_{sr}(\mathfrak{m})) = \{0\}$ *para todo* $i > 0$*.*

Demostración. Ver [Mor2]. □

Proposición 2.3.2. *Si* $(\mathfrak{m}, \langle\ ,\ \rangle^c)$ *es un álgebra de Lie graduada subconforme, la prolongación de* $(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0_{sc}(\mathfrak{m}))$ *es finita.*

Demostración. Sea $u \in \mathfrak{h}^1(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0_{sc}(\mathfrak{m}))$ (ver (2.3)). Luego $u(\mathfrak{g}^{-1}) \subset \mathfrak{g}^0_{sr}(\mathfrak{m})$, derivaciones que preservan un producto interno en la clase conforme $\langle\ ,\ \rangle^c$. Por 2.3.1, $u = 0$ y la proposición se deduce de 2.2.1. □

2.4. Cohomología de Spencer y formas armónicas

Sea $\mathfrak{g} = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}^i$ un álgebra de Lie graduada y sea $\mathfrak{m} = \oplus_{i<0}\mathfrak{g}^i$. La graduación en $\mathfrak{g}$ induce una graduación del espacio $C^n(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}) = C^n = Hom(\wedge^n\mathfrak{m}, \mathfrak{g}) = \wedge^n\mathfrak{m}^* \otimes \mathfrak{g}$ dada por:

$$C^{k,n} = \bigoplus_{i_1,\ldots,i_n<0} Hom(\mathfrak{g}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{g}^{i_n}, \mathfrak{g}^{i_1+\ldots+i_n+k}) \tag{2.4}$$

Por ejemplo, $C^{k,0} = \mathfrak{g}^k$, $C^{k,1} = \oplus_{i<0}Hom(\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^{i+k})$ y $C^{k,2} = \oplus_{i,j<0}Hom(\mathfrak{g}^i \wedge \mathfrak{g}^j, \mathfrak{g}^{i+j+k})$. Llamaremos a los elementos de $C^{k,n}$ como *n-formas de grado k*.

El operador de coborde $\partial : C^n \to C^{n+1}$ es

$$\begin{aligned}(\partial f)(v_1, \dots, v_{n+1}) &= \sum_i (-1)^{i+1}[v_i, f(v_1, \dots, \hat{v_i}, \dots, v_{n+1})] \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} f([v_i, v_j], v_1, \dots, \hat{v_i}, \dots, \hat{v_j}, \dots, v_{n+1})\end{aligned} \tag{2.5}$$

con $f \in C^n$ y $v_1, \dots, v_{n+1} \in \mathfrak{m}$, y donde $\hat{v}$ denota la omisión de v. Es conocido el hecho que $\partial^2 = 0$, por lo tanto $(\partial : C^n \to C^{n+1})$ es un complejo. Denotamos por $H^n(\mathfrak{m}, \mathfrak{g})$ los correspondientes grupos de cohomología. Además, $\partial(C^{k,n}) \subset C^{k,n+1}$ (∂ preserva el grado) e induce una familia de complejos $(\partial_k : C^{k,n} \to C^{k,n+1})$ y una graduación:

$$H^n(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}) = \bigoplus_k H^{k,n}(\mathfrak{m}, \mathfrak{g})$$

Este espacio graduado se denomina el *grupo de cohomología de Spencer generalizado* del álgebra graduada $\mathfrak{g}$, y ∂_k *el operador de Spencer generalizado de grado k.*

Un $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ actúa en $C^n(\mathfrak{m}, \mathfrak{g})$ por la acción estándar

$$(\varphi \cdot f)(v_1, \dots, v_n) = \varphi^{-1} f(\varphi v_1, \dots, \varphi v_n)$$

De manera directa obtenemos:

Lema 2.4.1. *El operador ∂ es equivariante con respecto a la acción de* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$*, es decir*

$$(\varphi \cdot \partial f) = \partial(\varphi \cdot f)$$

para todo $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ y $f \in C^n(\mathfrak{m}, \mathfrak{g})$. Por lo tanto, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ *actúa naturalmente en $H^n(\mathfrak{m}, \mathfrak{g})$. Además, si $\varphi \in \mathrm{Aut}_{gr}(\mathfrak{g})$, la acción de φ en $C^n(\mathfrak{m}, \mathfrak{g})$ preserva la graduación y* $\mathrm{Aut}_{gr}(\mathfrak{g})$ *actúa en cada $H^{k,n}(\mathfrak{m}, \mathfrak{g})$.*

Lema 2.4.2. *Sea $\mathfrak{g} = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^i$ un álgebra de Lie graduada tal que $\mathfrak{m} = \oplus_{i<0} \mathfrak{g}^i$ es fundamental. Luego $\mathfrak{g}$ es la prolongación de $\mathfrak{m}$ (resp. $(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)$) si y sólo si se verifican las siguientes dos condiciones:*

1. *Para $k \geq 0$, si $u \in \mathfrak{g}^k$ y $[u, \mathfrak{m}] = \{0\}$, luego $u = 0$.*
2. *$H^{k,1}(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}) = \{0\}$ para $k \geq 0$ (resp. $k \geq 1$).*

Demostración. Es inmediata recordando la construcción (2.2). □

Yamaguchi utilizó este resultado y la teoría de Kostant para calcular grupos de cohomología, en particular obtener los Teoremas 2.2.5 y 2.2.6 [Y]. Supongamos que $\mathfrak{g} = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^i$ posee un producto interno adaptado $\langle\ ,\ \rangle$. Este induce un producto interno en el espacio $\oplus_n C^n(\mathfrak{m}, \mathfrak{g})$ tal que $C^{k,n}(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}) \perp C^{l,m}(\mathfrak{m}, \mathfrak{g})$ si (k, n) es distinto de (l, m). Denotamos por $\partial^* : C^{n+1} \to C^n$ al operador adjunto de ∂ con respecto a este producto interno, i.e. para cada $f \in C^{n+1}$ y $g \in C^n$:

$$\langle \partial^* f, g \rangle = \langle f, \partial g \rangle$$

Como ∂ preserva el grado y el producto interno es adaptado resulta que ∂^* también preserva el grado y tenemos la familia de complejos $(\partial_k^* : C^{k,n+1} \to C^{k,n})$.

Dado $r > 0$, si multiplicamos el producto interno en $\mathfrak{g}^i$ por r^i entonces el producto interno inducido en $C^{k,n}$ se multiplica por r^k y el operador ∂^* no se modifica. Es decir, ∂^* está bien definido si partimos de un producto interno subconforme en $\mathfrak{g}$.

Lema 2.4.3. *Si $G^0_{sr} \subset G^0_{sr}(\mathfrak{g})$ entonces ∂^* es equivariante con respecto a la acción de G^0_{sr}.*

Demostración. Sea $\varphi \in G^0_{sr}$, $f \in C^{n+1}$ y $g \in C^n$ entonces:

$$\langle \partial^*(\varphi \cdot f), g\rangle = \langle \varphi \cdot f, \partial g\rangle = \langle f, \varphi^{-1} \cdot \partial g\rangle = \langle f, \partial\varphi^{-1} \cdot g\rangle = \langle \partial^* f, \varphi^{-1} \cdot g\rangle = \langle \varphi \cdot \partial^* f, g\rangle$$

□

En general los subgrupos $G \subset \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ que se presentan no preservan ningún producto interno subconforme, pero sin embargo existen productos internos subconformes que satisfacen la siguiente propiedad.

Definición 2.4.4. Sea $K \subset \mathrm{Aut}_{gr}(\mathfrak{g})$. Un producto interno subconforme en $\mathfrak{g}$ se dirá *admisible con respecto a K* si ∂^* es equivariante por la acción de K.

Ejemplo 2.4.5. Sea $\mathfrak{g} = \oplus_{i=-\mu}^{\mu} \mathfrak{g}^i$ un álgebra de Lie semisimple real graduada con $G = \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{p} = \oplus_{i \geq 0} \mathfrak{g}^i$ la correspondiente subálgebra parabólica, P y G^0 los subgrupos de Lie de G con $Lie(G^0) = \mathfrak{g}^0$ y $Lie(P) = \mathfrak{p}^0$. Estos grupos de Lie son, en general, no compactos y no preservan ningún producto interno subconforme en $\mathfrak{g}$ (por ejemplo, si suponemos rango real > 1). Sin embargo, si consideramos una involución de Cartan $\theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ tal que $\theta(\mathfrak{g}^i) = \mathfrak{g}^{-i}$ para todo i, el producto interno B_θ definido por

$$B_\theta(x, y) = B(\theta(x), y) \quad x, y \in \mathfrak{g}$$

donde B es la forma de Killing de $\mathfrak{g}$, resulta ser admisible con respecto a P. Esto es fundamental en la teoría armónica de Kostant.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos el laplaciano

$$\Delta = \partial\partial^* + \partial^*\partial : C^n(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}) \to C^n(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}).$$

Decimos que una $f \in C^n$ es *armónica* si $\Delta f = 0$. El espacio de todas las formas armónicas en C^n (resp. $C^{k,n}$) se denota por $\mathcal{H}^n(\mathfrak{m}, \mathfrak{g})$ (resp. $\mathcal{H}^{k,n}(\mathfrak{m}, \mathfrak{g})$) o simplemente $\mathcal{H}^n$ (resp. $\mathcal{H}^{k,n}$).

Proposición 2.4.6. *1. $f \in C^n$ es armónica si y sólo si $\partial f = \partial^* f = 0$.*

2. Vale la descomposición de Hodge

$$C^n = \partial(C^{n-1}) \oplus \mathcal{H}^n \oplus \partial^*(C^{n+1}) \tag{2.6}$$

En efecto,

$$C^{k,n} = \partial(C^{k,n-1}) \oplus \mathcal{H}^{k,n} \oplus \partial^*(C^{k,n+1}) \tag{2.7}$$

para todo k.

Demostración. Dada $f \in C^n$:

$$\langle \Delta f, f\rangle = \langle \partial\partial^* f, f\rangle + \langle \partial^*\partial f, f\rangle = \langle \partial^* f, \partial^* f\rangle + \langle \partial f, \partial f\rangle \geq 0$$

De donde se deduce 1. Por otro lado,

$$f \in (\mathrm{Im}\, \partial^*)^\perp \Leftrightarrow \langle f, \partial^* g\rangle = 0 \;\forall g \in C^{n+1} \Leftrightarrow \langle \partial f, g\rangle = 0 \;\forall g \in C^{n+1} \Leftrightarrow f \in \ker \partial$$

Por lo tanto, $C^n = \mathrm{Im}\, \partial^* \oplus \ker \partial$ es una descomposición ortogonal. De manera análoga se deduce la descomposición ortogonal $C^n = \mathrm{Im}\, \partial \oplus \ker \partial^*$. Como $\partial^2 = 0$, tenemos que $\mathrm{Im}\, \partial \subset \ker \partial$, es decir, $\mathrm{Im}\, \partial$ e $\mathrm{Im}\, \partial^*$ son ortogonales. Además por la parte 1, $\mathcal{H}^n = \ker \partial \cap \ker \partial^*$ de lo que se concluye (2.6). (2.7) se deduce inmediatamente del hecho que ∂, ∂^*, y por lo tanto también Δ, preservan el grado. □

Capítulo 3

Equivalencia de distribuciones y subestructuras asociadas

3.1. Distribuciones

Definición 3.1.1. Una *distribución* $\mathcal{D}$ en una variedad suave M es un subconjunto $\mathcal{D} \subset TM$ tal que para cada $p \in M$, $\mathcal{D}_p := \mathcal{D} \cap T_pM$ es un subespacio vectorial de T_pM. D se dice de *rango constante* k si $\dim \mathcal{D}_p = k$ es constante, y $\mathcal{D}$ se dice *suave* si esta generada por campos vectoriales suaves en un entorno de cada punto. Un campo vectorial suave X definido en un abierto U de M es una *sección* de $\mathcal{D}$ si $X_p \in \mathcal{D}_p$ para todo $p \in U$. Denotamos al haz de secciones de $\mathcal{D}$ por $\Gamma(\mathcal{D})$.

Supondremos, salvo que se indique lo contrario, que una distribución tiene rango constante y es suave.

Dos distribuciones $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$, en M_1 y M_2 respectivamente, se dicen *equivalentes* si existe un difeomorfismo $F : M_1 \to M_2$ tal que $dF(\mathcal{D}_1(p)) = \mathcal{D}_2(F(p))$ para cada $p \in M_1$. Se dice que F es una *equivalencia* o *isomorfismo* entre las distribuciones. Dados $p \in M_1$ e $q \in M_2$, se dice que $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ son localmente equivalentes en (p, q) si existen entornos U de p y V de q, y una equivalencia φ de $\mathcal{D}_1|_U$ en $\mathcal{D}_2|_V$ tal que $\varphi(p) = q$.

Recordemos que para tratar el problema de equivalencia de distribuciones como un problema de equivalencia de G-estructuras debemos considerar el grupo:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} : A \in GL(d), B \in M(d, n-d), C \in GL(n-d) \right\}$$

Este grupo no es elíptico ($Lie(G)$ contiene elementos de rango 1) y por lo tanto es de tipo infinito (cf. Ejemplo 1.1.3). N. Tanaka en [T1] estableció un método de prolongación para estructuras asociadas a distribuciones que generaliza el método clásico y permite resolver el problema de equivalencia utilizando únicamente la prolongación, aún en casos donde el grupo no es de tipo finito y ni siquiera elíptico.

Para cada punto $p \in M$, la distribución $\mathcal{D}$ define una filtración

$$\mathcal{D}^{-1}(p) \subset \mathcal{D}^{-2}(p) \subset \cdots \subset T_pM,$$

con $\mathcal{D}^{-1}(p) = \mathcal{D}(p)$ y $\mathcal{D}^{-j}(p) = \mathcal{D}^{-j+1}(p) + [\mathcal{D}, \mathcal{D}^{-j+1}](p)$. $\mathcal{D}$ se dice *regular* si para todo $j < 0$, las dimensiones de los espacios $\mathcal{D}^j(p)$ son independientes del punto p y $\mathcal{D}$ se dice *completamente no* *integrable* si $\forall p \in M$ existe $k > 0$ tal que $\mathcal{D}^{-k} = T_pM$. El mínimo k es el grado de no-holonomía $\mu(p)$ de $\mathcal{D}$ en p. De ahora en adelante asumimos $\mathcal{D}$ completamente no integrable y regular, con grado de no-holonomía μ constante. Sea $\mathfrak{m}^{-1}(p) = \mathcal{D}^{-1}(p)$ y $\mathfrak{m}^j(p) = \frac{\mathcal{D}^j(p)}{\mathcal{D}^{j+1}(p)}$ para $j < -1$, y consideremos el espacio vectorial graduado

$$\mathfrak{m}(p) = \bigoplus_{j=-\mu}^{-1} \mathfrak{m}^j(p)$$

Proposición 3.1.2. *El corchete de Lie de campos induce en* $\mathfrak{m}(p)$ *una estructura de álgebra de Lie graduada nilpotente fundamental.*

Demostración. Si X es una sección de $\mathcal{D}^i$ e Y es una sección de $\mathcal{D}^j$, entonces $[X, Y]$ es una sección de $\mathcal{D}^{i+j}$. Sea $\pi_i : \mathcal{D}^i(p) \to \frac{\mathcal{D}^i(p)}{\mathcal{D}^{i+1}(p)}$ la proyección canónica. Para cada par i, j definimos el corchete:

$$\begin{aligned} [\ ,\ ] : \mathfrak{m}^i(p) \times \mathfrak{m}^j(p) &\to \mathfrak{m}^{i+j}(p) \\ (\pi_i(X_p), \pi_i(Y_p)) &\mapsto \pi_{i+j}([X, Y]_p) \end{aligned}$$

donde $X \in \Gamma(\mathcal{D}^i)$ e $Y \in \Gamma(\mathcal{D}^j)$. Está bien definido, porque si $X' \in \Gamma(\mathcal{D}^{i+1})$ e $Y' \in \Gamma(\mathcal{D}^{j+1})$, entonces

$$[X + X', Y + Y'] = [X, Y] + [X, Y'] + [X', Y] + [X', Y']$$

donde los tres últimos términos son secciones de $\mathcal{D}^{i+j+1}$. Por linealidad, estos definen un corchete $[\ ,\ ](p)$ en $\mathfrak{m}(p)$. La antisimetría y la identidad de Jacobi se comprueban inmediatamente de las propiedades análogas que verifican los campos vectoriales. Por lo tanto $\mathfrak{m}(p)$ es un álgebra de Lie graduada y de la propia definición se desprende que es nilpotente y está generada por $\mathfrak{m}^{-1}(p)$. $\square$

Definición 3.1.3. $\mathfrak{m}(p)$ se denomina el *símbolo* o la *nilpotentización* de $\mathcal{D}$ en p.

Si dos distribuciones $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}'$ son equivalentes en (p, q) entonces el símbolo de $\mathcal{D}$ en p es isomorfo al símbolo de $\mathcal{D}'$ en q y la diferencial de toda equivalencia F induce naturalmente un isomorfismo de álgebras de Lie graduadas. Fijada un álgebra de Lie graduada fundamental $\mathfrak{m}$, una distribución $\mathcal{D}$ se dice de *símbolo (o tipo) constante* $\mathfrak{m}$ si para todo p la nilpotentización $\mathfrak{m}(p)$ es isomorfa a $\mathfrak{m}$ como álgebras de Lie graduadas.

Entre las distribuciones de tipo constante $\mathfrak{m} = \bigoplus_{j=-\mu}^{-1} \mathfrak{m}^j$ existe una *estándar*, o *playa*. Sobre el grupo de Lie simplemente conexo con álgebra de Lie $\mathfrak{m}$, es la distribución invariante a izquierda definida por $\mathfrak{m}^{-1}$.

Sea $G^0(\mathfrak{m}) := Aut_{gr}(\mathfrak{m})$ el grupo de automorfismos del álgebra de Lie que preservan la graduación, y sea $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{m}) := Der_{gr}(\mathfrak{m})$ su álgebra de Lie, i.e. el álgebra de derivaciones de $\mathfrak{m}$ que preservan la graduación. Toda distribución de tipo constante $\mathfrak{m}$ tiene asociado un $G^0(\mathfrak{m})$-fibrado principal dado por

$$P^0(\mathfrak{m}) = \{(p, \varphi) : p \in M, \varphi : \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}(p) \text{ isomorfismo de álgebras de Lie graduadas}\}$$

donde la acción es $(p, \varphi) \cdot A = (p, \varphi \circ A)$ para $A \in G^0(\mathfrak{m})$. Decimos que P^0 es una *estructura de tipo constante* $\mathfrak{m}$.

De manera análoga a las G-estructuras, los isomorfismos entre estructuras de tipo constante $\mathfrak{m}$ son aquellos inducidos por difeomorfismos de las bases que preservan la distribución. En el caso que $\mathcal{D}$ posee estructuras adicionales (métricas subriemannianas, subconformes, estructuras casi complejas, etc.) deberemos considerar una reducción P^0 del fibrado $P^0(\mathfrak{m})$.

Definición 3.1.4. Una reducción P^0 del fibrado principal $P^0(\mathfrak{m})$ con grupo estructural $G^0 \subseteq G^0(\mathfrak{m})$ tal que $Lie(G^0) = \mathfrak{g}^0$ se denomina *estructura de tipo constante* $(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)$.

Ejemplo 3.1.5. Si $\mathcal{D}$ posee una métrica subriemanniana g, i.e. una métrica definida en cada subespacio $\mathcal{D}_p$ de T_pM de manera suave, entonces el *símbolo subriemanniano* de $(\mathcal{D}, g)$ en el punto p se define como el álgebra de Lie graduada subriemanniana $(\mathfrak{m}(p), g_p)$ donde $\mathfrak{m}(p)$ es el símbolo de $\mathcal{D}$ y g_p es el producto interno en $\mathfrak{m}^{-1}(p)$ inducido por la métrica subriemanniana. Fijada un álgebra de Lie graduada subriemanniana $(\mathfrak{m}, \langle\ ,\ \rangle)$ entonces $(\mathcal{D}, g)$ se dice de tipo constante $(\mathfrak{m}, \langle\ ,\ \rangle)$ si $(\mathfrak{m}, \langle\ ,\ \rangle)$ es isomorfa a $(\mathfrak{m}(p), g_p)$ para todo p. Luego el conjunto de las aplicaciones $\varphi : \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}(p)$ en $P^0(\mathfrak{m})$ tales que $\varphi|_{\mathfrak{m}^{-1}}$ es una isometría, es una reducción de $P^0(\mathfrak{m})$ con grupo estructural $Aut_{gr}(\mathfrak{m}, \langle\ ,\ \rangle)$, i.e. los isomorfismos de $\mathfrak{m}$ que preservan el producto interno en $\mathfrak{m}^{-1}$.

De manera análoga si $\mathcal{D}$ posee una métrica subconforme g^c, i.e. una clase de equivalencia conforme de métricas definidas en cada subespacio $\mathcal{D}_p$, se define el *símbolo subconforme* como un álgebra de Lie graduada subconforme y para las distribuciones de símbolo subconforme constante se obtiene una reducción de $P^0(\mathfrak{m})$ con grupo $Aut_{gr}(\mathfrak{m}, \langle\ ,\ \rangle^c)$.

Veamos una caracterización intrínseca de las estructuras de tipo constante $(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)$.

Definición 3.1.6.

1. Sea $(\mathfrak{m} = \sum_{i=-\mu}^{-1} \mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^0)$ una estructura de Tanaka, G^0 un subgrupo de Lie de $Aut_{gr}(\mathfrak{m})$ con álgebra de Lie $\mathfrak{g}^0$ y M una variedad de dimensión $m = \dim \mathfrak{m}$. Una *estructura de bandera infinitesimal* o *pseudo-G^0-estructuras* en M es una terna $(P^0, \mathfrak{D}, \omega_0)$ (o simplemente (P^0, ω_0)) donde:

   a) $\pi_0 : P^0 \to M$ es un fibrado principal con grupo estructural G^0

   b) $\mathfrak{D} = \{\mathcal{D}^i\}_{i<0}$ es una familia de distribuciones en M que definen una filtración $TM = \mathcal{D}^{-\mu} \supset \ldots \supset \mathcal{D}^{-1}$ con $\dim \mathcal{D}^i = \dim \sum_{j=i}^{-1} \mathfrak{g}^i$. A su vez estas definen una filtración en P^0 dada por $\mathcal{D}_0^i = (d\pi_0)^{-1}(\mathcal{D}^i)$ si $i < 0$ y $\mathcal{D}_0^0$ es el espacio vertical.

   c) $\omega_0 = (\omega_0^{-\mu}, \ldots, \omega_0^{-1})$ donde cada $\omega_0^i : \mathcal{D}_0^i \longrightarrow \mathfrak{g}^i$ es una 1-forma $\mathfrak{g}^i$-valuada definida en $\mathcal{D}_0^i$ que es G^0-equivariante en el sentido que $R_A^* \omega_0^i = A^{-1}\omega_0^i$ para todo $A \in G^0$ e $i < 0$, y el núcleo de ω_0^i es $\mathcal{D}_0^{i+1}$. Estas formas se denominan *formas tautológicas parciales.*

2. Un *isomorfismo* entre dos pseudo-G^0-estructuras (P^0, ω_0^i) y $(\widetilde{P}^0, \widetilde{\omega}_0^i)$ sobre variedades M y $\widetilde{M}$, respectivamente, es un isomorfismo de fibrados principales $\Phi : P^0 \to \widetilde{P}^0$ que cubre un difeomorfismo $\varphi : M \to \widetilde{M}$ tal que $d\varphi$ preserva las filtración y $\Phi^* \widetilde{\omega}_0^i = \omega_0^i$ para todo $i = -\mu, \ldots, -1$.

Tanaka introdujo estas estructuras y las denominó pseudo-G^0-estructuras. Sin embargo, en la actualidad, especialmente en el contexto de las geometrías parabólicas, se usa el nombre estructura de bandera infinitesimal [CSl]. Ahora podemos enunciar el resultado principal de esta sección.

Proposición 3.1.7. *Toda estructura de tipo constante* $(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)$ *es una pseudo-G^0-estructura de tipo* $\mathfrak{m}$. *Mas aún, en cualquier pseudo-G^0-estructura* $(P^0, \mathcal{D}, \omega_0)$ *de tipo* $\mathfrak{m}$ *la distribución* $\mathcal{D}^{-1}$ *de la filtración es de tipo constante* $\mathfrak{m}$ *y* $(P^0, \mathcal{D}, \omega_0)$ *es isomorfa a una estructura de tipo constante* $(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)$ *sobre* $\mathcal{D}^{-1}$.

Demostración. Una *variedad filtrada* es una variedad diferenciable M junto con una filtración $TM = \mathcal{D}^{-\mu} \supset \cdots \supset \mathcal{D}^{-1}$ de su fibrado tangente por distribuciones que verifica:

$$[X_i, X_j] \in \Gamma(\mathcal{D}^{i+j}) \text{ si } X_i \in \Gamma(\mathcal{D}^i),\ X_j \in \Gamma(\mathcal{D}^j) \text{ para } i, j < 0.$$

Una pseudo-G^0-estructura $(P^0, \mathfrak{D}, \omega_0)$ en M se dice *de tipo* $\mathfrak{m}$ *o regular* si $(M, \mathfrak{D})$ es una variedad filtrada y para todos i, $j < 0$ tales que $i + j \geq -\mu$ y $X \in \Gamma(\mathcal{D}_0^i)$, $Y \in \Gamma(\mathcal{D}_0^j)$ se verifica:

$$\omega_0^{i+j}([X, Y]) = [\omega_0^i(X), \omega_0^j(Y)] \tag{3.1}$$

Observemos que la propiedad 3.1 es tensorial, por lo tanto basta verificarla en cada punto $\lambda \in P^0$ y para vectores tangentes $X \in \mathcal{D}_0^i(\lambda)$, $Y \in \mathcal{D}_0^j(\lambda)$.

Sea P^0 una estructura de tipo constante $(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)$ asociada a una distibución $\mathcal{D}^{-1}$ de tipo constante $\mathfrak{m}$ en M. Veamos que P^0 es naturalmente una pseudo-G^0-estructura regular.

Sea $\pi_0 : P^0 \to M$ la proyección canónica, $\{\mathcal{D}^i\}_{i<0}$ la filtración de TM generada por $\mathcal{D}^{-1}$ que se levanta a una filtración $\{\mathcal{D}_0^i\}_{i\leq 0}$ de TP^0. Definimos en P^0 las 1-formas tautológicas parciales $\{\omega_0^i\}_{i<0}$ por,

$$\begin{aligned} \omega_0^i|_\lambda : \mathcal{D}_0^i(\lambda) &\to \mathfrak{g}^i \\ X &\mapsto \omega_0^i(p) = \varphi^{-1}(d\pi_0(p) + \mathcal{D}^{i+1}(p)) \end{aligned}$$

para cada $\lambda = (p, \varphi) \in P^0$ y $X \in \mathcal{D}_0^i(\lambda)$. Recordar que $\varphi : \mathfrak{g}^i \to \mathcal{D}^i(p)/\mathcal{D}^{i+1}(p)$.

Es claro de la definición que $\mathcal{D}_0^{i+1} = \ker(\omega_0^i)$. Veamos que además las formas ω_0^i son equivariantes. Sea $\lambda = (p, \varphi) \in P^0$, $g \in G^0$ y $X \in \mathcal{D}_0^i(\lambda)$ entonces:

$$\omega_0^i|_{\lambda\cdot g}(dR_g(X)) = (\varphi \circ g)^{-1}(d\pi_0(dR_g(X)) + \mathcal{D}^{i+1}(p)) = g^{-1}\varphi^{-1}(d\pi_0(X) + \mathcal{D}^{i+1}(p)) = g^{-1}\omega_0^i|_\lambda(X)$$

Por lo tanto, toda estructura de tipo constante $(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)$ es naturalmente una pseudo-G^0-estructura. Mas aún, es regular ya que, por construcción, M con la filtración generada por $\mathcal{D}$ es una variedad filtrada y las 1-formas ω_0^i verifican la condición 3.1 ya que las funciones φ son isomorfismos de álgebras graduadas.

Por otro lado, sea $(P^0, \mathcal{D}, \omega_0)$ una pseudo-G^0-estructura regular de tipo $\mathfrak{m}$ y sea $\lambda \in P^0$ con $p = \pi_0(\lambda)$. De manera similar al símbolo definimos $\mathfrak{m}(p) = \bigoplus_{j=-\mu}^{-1} \mathfrak{g}^j(p)$ para la filtración $\mathcal{D}$ donde $\mathfrak{g}^{-1}(p) = \mathcal{D}^{-1}(p)$ y $\mathfrak{g}^j(p) = \frac{\mathcal{D}^j(p)}{\mathcal{D}^{j+1}(p)}$ para $j < -1$. $\mathfrak{m}(p)$ posee estructura de álgebra de Lie graduada porque $(M, \mathcal{D})$ es una variedad filtrada. Podemos definir entonces la función $\varphi_\lambda : \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}(p)$,

$$\varphi_\lambda(X) = d\pi_0((\omega_0^i)^{-1}(X)) + \mathcal{D}^{i+1}(p) \in \mathfrak{g}^i(p)$$

para todo $x \in \mathfrak{g}^i$ e $i \leq -1$.

φ_λ está bien definida y es biyectiva ya que $\mathcal{D}_0^{i+1} = \ker(\omega_0^i)$ y dim $\mathcal{D}^i$ = dim $\sum_{j=i}^{-1} \mathfrak{g}^i$. Además, es un isomorfismo de álgebras de Lie graduadas por la condición de regularidad (3.1). Por lo que $\mathcal{D}^{-1}$ es de tipo constante $\mathfrak{m}$. Como las 1-formas ω_0^i son G^0-equivariantes, el mapa $\lambda \mapsto \varphi_\lambda$ es un isomorfismo de pseudo-G^0-estructuras entre $(P^0, \mathcal{D}, \omega_0)$ y la estructura de tipo constante $(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)$ asociada a $\mathcal{D}^{-1}$.

□

3.2. Primera prolongación de Tanaka

Sea P^0 una estructura de tipo constante $(\mathfrak{m} = \sum_{i=-\mu}^{-1} \mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^0)$ en M con $\pi_0 : P^0 \to M$ la proyección canónica. Las formas tautológicas parciales ω_0^i inducen un isomorfismo lineal de $\mathcal{D}_0^i/\mathcal{D}_0^{i+1}$

en $\mathfrak{g}^i$ al que denotaremos $\bar{\omega}_0^i$ y, como antes, denotamos por $I_\lambda : \mathfrak{g}^0 \to \mathcal{D}_0^0(\lambda)$ a la identificación canónica de $\mathfrak{g}^0$ con el espacio vertical.

Fijemos $\lambda = (p, \varphi) \in P^0$. Para cada $i < 0$, consideramos la proyección canónica

$$\rho_0^i : \mathcal{D}_0^i(\lambda)/\mathcal{D}_0^{i+2}(\lambda) \to \mathcal{D}_0^i(\lambda)/\mathcal{D}_0^{i+1}(\lambda)$$

y el isomorfismo

$$d\pi_0^i : \mathcal{D}_0^i(\lambda)/\mathcal{D}_0^{i+1}(\lambda) \to \mathcal{D}^i(p)/\mathcal{D}^{i+1}(p)$$

inducido por $d\pi_0$.

Para cada $i < 0$, elegimos un subespacio $H^i \subset \mathcal{D}_0^i(\lambda)/\mathcal{D}_0^{i+2}(\lambda)$ tal que:

$$\mathcal{D}_0^i(\lambda)/\mathcal{D}_0^{i+2}(\lambda) = \mathcal{D}_0^{i+1}(\lambda)/\mathcal{D}_0^{i+2}(\lambda) \oplus H^i \tag{3.2}$$

Denominamos al conjunto $\mathcal{H} = \{H^i\}_{i<0}$ estructura horizontal en λ. La composición $d\pi_0^i \circ \rho_0^i$ identifica H^i con $\mathcal{D}^i(p)/\mathcal{D}^{i+1}(p)$ que a su vez se identifica con $\mathfrak{g}^i$ mediante φ. A partir de esta identificación podemos definir el monomorfismo:

$$\varphi^{\mathcal{H}} \in \bigoplus_{i \leq 0} Hom(\mathfrak{g}^i, \mathcal{D}_0^i(\lambda)/\mathcal{D}_0^{i+2}(\lambda)) \tag{3.3}$$

como

$$\varphi^{\mathcal{H}}\big|_{\mathfrak{g}^i} = \begin{cases} (d\pi_0^i \circ \rho_0^i|_{H^i})^{-1} \circ \varphi\big|_{\mathfrak{g}^i}, & \text{si } i < 0; \\ I_\lambda, & \text{si } i = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

De manera similar al caso de la prolongación clásica, esta función caracteriza a la estructura horizontal. Es decir, dada $\widehat{\varphi}$ como en (3.3) tal que

$$d\pi_0^i \circ \rho_0^i \circ \widehat{\varphi}|_{\mathfrak{g}^i} = \varphi|_{\mathfrak{g}^i}$$

para $i < 0$ entonces $\{\widehat{\varphi}(\mathfrak{g}^i)\}_{i<0}$ es una estructura horizontal. Denominamos $pr_i^{\mathcal{H}}$ la proyección de $\mathcal{D}_0^i(\lambda)/\mathcal{D}_0^{i+2}(\lambda)$ en $\mathcal{D}_0^{i+1}(\lambda)/\mathcal{D}_0^{i+2}(\lambda)$ paralela a H^i.

A cada estructura horizontal $\mathcal{H}$ le asociamos una función de estructura o torsión asociada:

$$C_{\mathcal{H}} \in \mathcal{C}^{1,2} := \bigoplus_{i,j<0} Hom(\mathfrak{g}^i \otimes \mathfrak{g}^j, \mathfrak{g}^{i+j+1})$$

Dados $v_1 \in \mathfrak{g}^i$ y $v_2 \in \mathfrak{g}^j$ con i, $j < 0$, consideramos dos campos Y_1 y Y_2 en un entorno de λ en P^0 tal que Y_1 es sección de $\mathcal{D}_0^i$, Y_2 es sección de $\mathcal{D}_0^j$, y

$$\begin{array}{ll} \omega_0^i(Y_1) \equiv v_1, & \omega_0^j(Y_2) \equiv v_2, \\ Y_1(\lambda) + \mathcal{D}_0^{i+2} = \varphi^{\mathcal{H}}(v_1). & Y_2(\lambda) + \mathcal{D}_0^{j+2} = \varphi^{\mathcal{H}}(v_2). \end{array} \tag{3.5}$$

Es decir, $Y_1(\lambda) + \mathcal{D}_0^{i+2}$ es la única clase en H^i que se identifica con v_1 a través de $\varphi^{\mathcal{H}}$ e Y_1 es una extensión ω_0^i-constante, lo mismo para Y_2.

Como $Y_1 \in \Gamma(\mathcal{D}_0^i)$ e $Y_2 \in \Gamma(\mathcal{D}_0^j)$ entonces $[Y_1, Y_2] \in \Gamma(\mathcal{D}_0^{i+j})$ y la forma tautológica ω_0^{i+j} le asocia a $[Y_1, Y_2](\lambda)$ un elemento de $\mathfrak{g}^{i+j}$. Utilizando la estructura horizontal $\mathcal{H}$ le podemos asignar también un elemento de $\mathfrak{g}^{i+j+1}$. En efecto, si tomamos la clase de $[Y_1, Y_2](\lambda)$ en $\mathcal{D}_0^{i+j}(\lambda)/\mathcal{D}_0^{i+j+2}(\lambda)$ y proyectamos en $\mathcal{D}_0^{i+j+1}(\lambda)/\mathcal{D}_0^{i+j+2}(\lambda)$ según la descomposición (3.2), tenemos que este espacio se identifica con $\mathfrak{g}^{i+j+1}$ a partir de $\bar{\omega}_0^{i+j+1}$. Resumiendo, definimos

$$C_{\mathcal{H}}(v_1, v_2) = \bar{\omega}_0^{i+j+1}(pr_{i+j}^{\mathcal{H}}([Y_1, Y_2](\lambda) + \mathcal{D}_0^{i+j+2}))$$

$C_{\mathcal{H}}(v_1, v_2)$ no depende de la elección de los campos Y_1 e Y_2, ya que si escogemos otros campos $\widetilde{Y}_1$ y $\widetilde{Y}_2$ como 3.5 entonces

$$\widetilde{Y}_1 = Y_1 + Z_1 \quad \widetilde{Y}_2 = Y_2 + Z_2$$

con $Z_1 \in \mathcal{D}_0^{i+1}$ tal que $Z_1(\lambda) \in \mathcal{D}_0^{i+2}$ y $Z_1 \in \mathcal{D}_0^{j+1}$ tal que $Z_1(\lambda) \in \mathcal{D}_0^{j+2}$. Luego, $[Y_1, Z_2](\lambda)$, $[Y_2, Z_1](\lambda) \in \mathcal{D}_0^{i+j+2}(\lambda)$ y, como en la prueba de 3.1.2, resulta:

$$[\widetilde{Y}_1, \widetilde{Y}_2](\lambda) \equiv [Y_1, Y_2](\lambda) \qquad \text{mód } \mathcal{D}_0^{i+j+2}$$

Sea $\tilde{\mathcal{H}} = \{\tilde{H}^i\}_{i<0}$ otra estructura horizontal, comparemos sus funciones de estructura. Dado $v \in \mathfrak{g}^i$, $\varphi^{\mathcal{H}}(v) - \varphi^{\tilde{\mathcal{H}}}(v) \in \mathcal{D}_0^{i+1}(\lambda)/\mathcal{D}_0^{i+2}(\lambda)$ que se identifica con $\mathfrak{g}^{i+1}$ mediante $\bar{\omega}_0^{i+1}$ cuando $i < -1$. Entonces podemos definir una función $f_{\mathcal{H}\tilde{\mathcal{H}}} \in \bigoplus_{i<0} Hom(\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^{i+1})$ dada por

$$f_{\mathcal{H}\tilde{\mathcal{H}}}(v) = \begin{cases} \bar{\omega}_0^{i+1}(\varphi^{\mathcal{H}}(v) - \varphi^{\tilde{\mathcal{H}}}(v)), & \text{si } v \in \mathfrak{g}^i \text{ con } i < -1; \\ I_\lambda^{-1}(\varphi^{\mathcal{H}(v)} - \varphi^{\tilde{\mathcal{H}}}(v)), & \text{si } v \in \mathfrak{g}^{-1}. \end{cases}$$

Recíprocamente, para cada $f \in \bigoplus_{i<0} Hom(\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^{i+1})$ existe una estructura horizontal $\tilde{\mathcal{H}} = \{\tilde{H}^i\}_{i<0}$ tal que $f = f_{\mathcal{H}\tilde{\mathcal{H}}}$. Basta tomar $\tilde{H}^{-1} = H^{-1} + I_\lambda(f(\mathfrak{g}^{-1}))$ y $\tilde{H}^i = H^i + (\bar{\omega}_0^{i+1})^{-1}(f(\mathfrak{g}^i))$ para $i < -1$.

Para el par $(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)$ recordemos que el *operador de Spencer generalizado de grado 1* viene dado por:

$$\begin{aligned} \partial_1 : \bigoplus_{i<0} Hom(\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^{i+1}) &\to \mathcal{C}^{1,2} \\ f &\mapsto \partial_1 f(v, w) = [f(v), w] + [v, f(w)] - f([v, w]) \end{aligned}$$

donde $\mathfrak{g}^1 = \ker(\partial_1)$ coincide con $\mathfrak{g}^1(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)$, la primera prolongación de Tanaka de $(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)$.

Proposición 3.2.1. *Dados dos estructuras horizontales H y $\tilde{H}$ se cumple que*

$$C_{\tilde{\mathcal{H}}} = C_{\mathcal{H}} + \partial_1 f_{\mathcal{H}\tilde{\mathcal{H}}}$$

Sea $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{C}^{1,2}$ un subespacio complementario de $\operatorname{Im} \partial_1$ denominado *condición de normalización*. La primera prolongación de P^0 es el fibrado:

$$P^1 = \left\{(\lambda, \varphi^{\mathcal{H}}) : \lambda \in P^0, C_{\mathcal{H}} \in \mathcal{N}_1\right\}$$

De manera similar al caso de G-estructuras, se prueba que P^1 es un fibrado principal con grupo estructural abeliano $G^1(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)$ (ver definición 2.2.3).

Observación 3.2.2. Este proceso se puede realizar de la misma forma considerando, en lugar del espacio total $\mathcal{C}^{1,2}$ de dos formas lineales de grado 1, el subespacio:

$$\mathcal{C}_r^{1,2} := (\bigoplus_{i=-\mu}^{-2} Hom(\mathfrak{g}^{-1} \otimes \mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^i)) \oplus Hom(\mathfrak{g}^{-1} \wedge \mathfrak{g}^{-1}, \mathfrak{g}^{-1})$$

y, si $\rho : \mathcal{C}^{1,2} \to \mathcal{C}_r^{1,2}$ es la proyección, las respectivas funciones $\rho \circ \partial_1$ y $\rho(C_{\tilde{\mathcal{H}}})$. Esto se debe a que el núcleo de $\rho \circ \partial_1$ también es $\mathfrak{g}^1$ y por lo tanto $\ker \rho \cap \operatorname{Im} \partial_1 = \{0\}$, entonces toda condición de normalización $\mathcal{N}_1$ en $\mathcal{C}_r^{1,2}$ se puede extender a una condición de normalización $\widetilde{\mathcal{N}}_1 = \mathcal{N}_1 \oplus \ker \rho$ en $\mathcal{C}^{1,2}$ de manera que con ambas condiciones obtenemos el mismo fibrado P^1. Sin embargo, esto restringe la elección de la condición de normalización. Para llegar a un marco con ciertas propiedades (como el caso de las conexiones de Cartan normales que trataremos más adelante) debemos considerar el espacio total $\mathcal{C}^{1,2}$.

3.3. Prolongación de Tanaka de mayor orden

A diferencia del caso de G-estructuras, el fibrado P^1 no es una estructura de tipo constante $(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)$ y el proceso de prolongación no es recursivo, es decir no se verifica que $P^{i+1} = (P^i)^1$.

Construiremos las prolongaciones de mayor orden de P^0 por inducción. Denotamos $P^{-1} = M$ y suponemos que la l-ésima prolongación P^l está construida para $0 \leq l \leq k$ con las siguientes propiedades:

1. $\pi_l : P^l \to P^{l-1}$ es un fibrado principal con grupo estructural $G^l(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)$.
2. El fibrado tangente TP^l tiene una filtración $\left\{\mathcal{D}^i_l\right\}_{i\leq l}$ invariante por la acción del grupo G^l donde $\mathcal{D}^i_{-1} = \mathcal{D}^i$ y para $l \geq 0$:
$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D}^l_l & = & \ker(d\pi_l) \\ \mathcal{D}^i_l & = & \left\{v \in TP^l : d\pi_l \in \mathcal{D}^i_{l-1}\right\} \quad \forall i < l \\ \mathcal{D}^i_l & = & \{0\} \quad \forall i > l \end{array}$$
Dado $\lambda_l \in \pi_l$, $I_{\lambda_l} : \mathfrak{g}^l \to \mathcal{D}^l_l(\lambda_l)$ es la identificación canónica del tangente a la fibra.
3. Los elementos de P^l son pares $(\lambda_{l-1}, \varphi_l)$ con $\lambda_{l-1} \in P^{l-1}$ y
$$\varphi_l \in \bigoplus_{i<l} Hom(\mathfrak{g}^i, \mathcal{D}^i_{l-1}(\lambda_{l-1})/\mathcal{D}^{i+l+1}_{l-1}(\lambda_{l-1}))$$
un monomorfismo tal que $\varphi_l|_{\mathfrak{g}^{l-1}} = I_{\lambda_{l-1}}$ y para $i < l$ define la siguiente graduación:
$$\mathcal{D}^i_{l-1}(\lambda_{l-1})/\mathcal{D}^{i+l+1}_{l-1}(\lambda_{l-1}) = \varphi_l(\mathfrak{g}^{i+l}) \oplus \varphi_l(\mathfrak{g}^{i+l-1}) \oplus \ldots \oplus \varphi_l(\mathfrak{g}^{i+1}) \oplus \varphi_l(\mathfrak{g}^i). \tag{3.6}$$
donde cada $\varphi_l(\mathfrak{g}^k)$ representa su proyección en el cociente correspondiente y se identifica con $\mathfrak{g}^k$. Además, si $i \geq 0$ entonces $\varphi_l|_{\mathfrak{g}^i}$ depende sólo de λ_{l-1}. La acción de G^l viene dada por $\varphi_l \cdot A = \varphi_l \circ A$ para todo $A \in G^l$.
4. Sea $0 < l \leq k$, $\lambda_{l-1} = (\lambda_{l-2}, \varphi_{l-1}) \in P^{l-1}$ y $\lambda_l = (\lambda_{l-1}, \varphi_l) \in P^l$. Denotamos por:
$$\rho^i_l : \mathcal{D}^i_l(\lambda_l)/\mathcal{D}^{i+l+2}_l(\lambda_l) \to \mathcal{D}^i_l(\lambda_l)/\mathcal{D}^{i+l+1}_l(\lambda_l)$$
a la proyección canónica y por
$$d\pi^i_l : \mathcal{D}^i_l(\lambda_l)/\mathcal{D}^{i+l+1}_l(\lambda_l) \to \mathcal{D}^i_{l-1}(\lambda_{l-1})/\mathcal{D}^{i+l+1}_{l-1}(\lambda_{l-1})$$
al mapa inducido por $d\pi_0$. Luego, se verifica que
$$\varphi_{l-1}|_{\mathfrak{g}^i} = d\pi^i_{l-1} \circ \rho^i_{l-1} \circ \varphi_l|_{\mathfrak{g}^i}$$
Observemos que si $i < 0$, $d\pi^i_l$ es un isomorfismo y si $i \geq 0$, ρ^i_l es la identidad.

En P^l existen *formas tautológicas parciales* $\left\{\omega^i_l\right\}_{i<l}$, que generalizan las correspondientes en P^0, definidas por:
$$\begin{array}{rcl} \omega^i_l : \mathcal{D}^i_l(\lambda_l) & \to & \mathfrak{g}^{i+l} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}^{i+1} \oplus \mathfrak{g}^i \\ Y & \mapsto & \omega^i_l(Y) = \varphi_l^{-1}(d\pi_l(Y) + \mathcal{D}^{i+l+1}_{l-1}(\lambda_{l-1})) \end{array}$$

donde φ_l^{-1} representa la identificación dada por la descomposición (3.6). Estas formas son compatibles entre sí, es decir, $\omega_l^i - \omega_l^{i+1} \in \mathfrak{g}^{i+l+1}$ en $\mathcal{D}_l^{i+1}$. En este caso resulta que $\ker(\omega_l^i) = \mathcal{D}_l^{i+l+1}(\lambda_l)$, ω_l^i induce un isomorfismos $\widetilde{\omega}_l^i$ entre $\mathcal{D}_l^i(\lambda_l)/\mathcal{D}_l^{i+l+1}(\lambda_l)$ y $\mathfrak{g}^{i+l}\oplus\ldots\oplus\mathfrak{g}^{i+1}\oplus\mathfrak{g}^i$, y $\bar{\omega}_l^i$ entre $\mathcal{D}_l^i(\lambda_l)/\mathcal{D}_l^{i+1}(\lambda_l)$ y $\mathfrak{g}^i$.

La terna $(P^l, \{\mathcal{D}_l^i\}_{i\leq l}, \omega^l)$ se denomina una *pseudo-G^k-estructura de orden k y tipo* $\mathfrak{m}$ (Ver Definición 3.4.1).

Construimos a continuación la prolongación P^{k+1}. Fijemos $\lambda_k = (\lambda_{k-1}, \varphi_k) \in P^k$, con

$$\varphi_k \in \bigoplus_{i<k} Hom(\mathfrak{g}^i, \mathcal{D}_{k-1}^i(\lambda_{k-1})/\mathcal{D}_{k-1}^{i+k+1}(\lambda_{k-1}))$$

Los elementos de P^{k+1} serán pares $(\lambda_k, \hat{\varphi}_{k+1})$ donde

$$\hat{\varphi}_{k+1} \in \bigoplus_{i\leq k} Hom(\mathfrak{g}^i, \mathcal{D}_k^i(\lambda_k)/\mathcal{D}_k^{i+k+2}(\lambda_k))$$

tal que $\varphi_k|_{\mathfrak{g}^i} = d\pi_k^i \circ \rho_k^i \circ \hat{\varphi}_{k+1}|_{\mathfrak{g}^i}$ para todo $i < k$ y $\hat{\varphi}_{k+1}|_{\mathfrak{g}^k} = I_{\lambda_k}$.

Por otro lado, sea $\mathcal{H}_k = \{H_k^i\}_{i<k}$ donde $H_k^i = \varphi_k(\mathfrak{g}^i)$. Definimos una *estructura horizontal en* λ_k como un conjunto de subespacios $\mathcal{H}_{k+1} = \{H_{k+1}^i\}_{i<k}$, con $H_{k+1}^i \subset \mathcal{D}_k^i(\lambda_k)/\mathcal{D}_k^{i+k+2}(\lambda_k)$ que verifica:

1. para $i < 0$,
$$\mathcal{D}_k^i(\lambda_k)/\mathcal{D}_k^{i+k+2}(\lambda_k) = \mathcal{D}_k^{i+1}(\lambda_k)/\mathcal{D}_k^{i+k+2}(\lambda_k) \oplus H_{k+1}^i \tag{3.7}$$
con $(d\pi_k^i \circ \rho_k^i)(H_{k+1}^i) = H_k^i$;

2. para $0 \leq i < k$, $(d\pi_k^i)^{-1}(H_k^i) = \mathcal{D}_k^k(\lambda_k) \oplus H_{k+1}^i$.

La función $d\pi_k^i \circ \rho_k^i$ define un isomorfismo entre H_{k+1}^i y H_k^i para todo $i < k$.

Hay una correspondencia entre las funciones $\hat{\varphi}_{k+1}$ y las estructuras horizontales. En efecto, dada $\mathcal{H}_{k+1} = \{H_{k+1}^i\}_{i<k}$ estructura horizontal en λ_k podemos definir el mapa

$$\varphi^{\mathcal{H}_{k+1}} \in \bigoplus_{i\leq k} Hom(\mathfrak{g}^i, \mathcal{D}_k^i(\lambda_k)/\mathcal{D}_k^{i+k+2}(\lambda_k))$$

como

$$\varphi^{\mathcal{H}_{k+1}}\Big|_{\mathfrak{g}^i} = \begin{cases} (d\pi_k^i \circ \rho_k^i|_{H_{k+1}^i})^{-1} \circ \varphi_k\Big|_{\mathfrak{g}^i}, & \text{si } i < 0; \\ (d\pi_k^i|_{H_{k+1}^i})^{-1} \circ \varphi_k\Big|_{\mathfrak{g}^i}, & \text{si } 0 \leq i < k; \\ I_{\lambda_k}, & \text{si } i = k. \end{cases}$$

Recíprocamente, las imágenes $H_{k+1}^i = \varphi^{\mathcal{H}_{k+1}}(\mathfrak{g}^i)$ forman una estructura horizontal en λ_k.

La función de estructura o torsión de la estructura horizontal $\mathcal{H}_{k+1}$ es una función $C_{\mathcal{H}_{k+1}}^k$ en el espacio de 2-formas de grado $k+1$ extendido:

$$\mathcal{C}_e^{k+1,2} = \bigoplus_{i,j<0} Hom(\mathfrak{g}^i \otimes \mathfrak{g}^j, \mathfrak{g}^{i+j+k+1}) \oplus \bigoplus_{i=0}^{k-1} Hom(\mathfrak{g}^{-1} \otimes \mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^{k-1})$$

que se define de la siguiente manera: Dados $v_1 \in \mathfrak{g}^i$ y $v_2 \in \mathfrak{g}^j$ con $i, j < 0$ consideramos dos campos vectoriales Y_1 e Y_2 en un entorno de λ_k tales que $Y_1 \in \Gamma(\mathcal{D}^i_k)$, $Y_2 \in \Gamma(\mathcal{D}^j_k)$ y

$$\begin{aligned} \omega^i_k(Y_1) &\equiv v_1, & \omega^j_k(Y_2) &\equiv v_2 \\ Y_1(\lambda_k) + \mathcal{D}^{i+k+2}_k &= \varphi^{\mathcal{H}_{k+1}}(v_1), & Y_2(\lambda_k) + \mathcal{D}^{j+k+2}_k &= \varphi^{\mathcal{H}_{k+1}}(v_2). \end{aligned}$$

Entonces tenemos que $[Y_1, Y_2](\lambda_k) \in \mathcal{D}^{i+j}_k$, tomamos su clase en el cociente $\mathcal{D}^{i+j}_k / \mathcal{D}^{i+j+k+2}_k$ y usamos la estructura horizontal para proyectarla en $\mathcal{D}^{i+j+1}_k / \mathcal{D}^{i+j+k+2}_k$ a partir de (3.7). La forma $\widetilde{\omega}^{i+j+k+1}_k$ identifica este espacio con $\mathfrak{g}^{i+j+k+1} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}^{i+j+1} \oplus \mathfrak{g}^i$. El valor de la torsión será la correspondiente componente en $\mathfrak{g}^{i+j+k+1}$. Resumiendo,

$$C^k_{\mathcal{H}_{k+1}}(v_1, v_2) = \bar{\omega}^{i+j+k+1}_k (pr^{\mathcal{H}_{k+1}}_{i+j}([Y_1, Y_2]))_{i+j+k+1} \tag{3.8}$$

donde $pr^{\mathcal{H}_{k+1}}_{i+j}$ es la proyección paralela a H^i_{k+1} según la descomposición (3.7).

Por otro lado, si $v_1 \in \mathfrak{g}^{-1}$ y $v_2 \in \mathfrak{g}^j$ con $j \geq 0$ consideramos campos Y_1 e Y_2 de la misma manera y definimos la torsión en (v_1, v_2) como la componente en $\mathfrak{g}^{k-1}$ de $\omega^{i+j+k+1}_k([Y_1, Y_2])$.

De manera similar a la sección anterior, se prueba que $C^k_{\mathcal{H}_{k+1}}(v, w)$ no depende de la elección de los campos Y_1 e Y_2.

Sea $\widetilde{\mathcal{H}}_{k+1}$ otra estructura horizontal en λ_k, veamos como están relacionadas las funciones $C^k_{\mathcal{H}_{k+1}}$ y $C^k_{\widetilde{\mathcal{H}}_{k+1}}$. Para cada $v \in \mathfrak{g}^i$, $\varphi^{\widetilde{\mathcal{H}}_{k+1}}(v) - \varphi^{\mathcal{H}_{k+1}}(v)$ pertenece a $\mathcal{D}^{i+k+1}_k(\lambda_k)/\mathcal{D}^{i+k+2}_k(\lambda_k)$ si $i < 0$, este espacio se identifica con $\mathfrak{g}^{i+k+1}$ mediante $\bar{\omega}^{i+k+1}_k$; y si $0 \leq i < k$, $\varphi^{\widetilde{\mathcal{H}}_{k+1}}(v) - \varphi^{\mathcal{H}_{k+1}} \in \mathcal{D}^k_k(\lambda_k)$ que se identifica con $\mathfrak{g}^k$ mediante $I^{-1}_{\lambda_k}$. Entonces definimos

$$f_{\mathcal{H}_{k+1}\widetilde{\mathcal{H}}_{k+1}} \in \bigoplus_{i<0} Hom(\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^{i+k+1}) \oplus \bigoplus_{i=0}^{k-1} Hom(\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^k)$$

por

$$f_{\mathcal{H}_{k+1}\widetilde{\mathcal{H}}_{k+1}}(v) = \begin{cases} \bar{\omega}^{i+k+1}_k(\varphi^{\widetilde{\mathcal{H}}_{k+1}}(v) - \varphi^{\mathcal{H}_{k+1}}(v)) & \text{si } v \in \mathfrak{g}^i \text{ con } i < -1, \\ I^{-1}_{\lambda_k}(\varphi^{\widetilde{\mathcal{H}}_{k+1}}(v) - \varphi^{\mathcal{H}_{k+1}}(v)) & \text{si } v \in \mathfrak{g}^i \text{ con } -1 \leq i < k. \end{cases}$$

Recíprocamente, dada $f \in \bigoplus_{i<0} Hom(\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^{i+k+1}) \oplus \bigoplus_{i=0}^{k-1} Hom(\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^k)$ existe una única estructura horizontal $\widetilde{\mathcal{H}}_{k+1}$ tal que $f = f_{\mathcal{H}_{k+1}\widetilde{\mathcal{H}}_{k+1}}$.

Consideramos la siguiente extensión de operador de Spencer generalizado de grado $k+1$:

$$\partial_{k+1} : \bigoplus_{i<0} Hom(\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^{i+k+1}) \oplus \bigoplus_{i=0}^{k-1} Hom(\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^k) \to \mathcal{C}^{k+1,2}_e$$

$$\partial_{k+1} f(v, w) = \begin{cases} [f(v), w] + [v, f(w)] - f([v, w]) & \text{si } v \in \mathfrak{g}^{-1},\ w \in \mathfrak{g}^i,\ i < 0, \\ [v, f(w)] & \text{si } v \in \mathfrak{g}^{-1},\ w \in \mathfrak{g}^i,\ 0 \leq i < k. \end{cases}$$

Si $f \in \ker(\partial_{k+1})$ entonces $[v, f(w)] = 0$ para todo $v \in \mathfrak{g}^{-1}$ y $w \in \mathfrak{g}^i$ con $0 \leq i < k$. Por la propiedad que caracteriza la prolongación se tiene que $f|_{\mathfrak{g}^i} = 0$ para todo $0 \leq i \leq k-1$. Luego, su núcleo $\ker(\partial_{k+1}) = \mathfrak{g}^{k+1} = \mathfrak{g}^i(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)$ es la k-ésima prolongación del álgebra $\mathfrak{g}$.

La extensión del operador de Spencer se considera para poder extender la proposición 3.2.1

Proposición 3.3.1. *Dadas dos estructuras horizontales* $\mathcal{H}_{k+1}$ *y* $\widetilde{\mathcal{H}}_{k+1}$ *en* λ_k *se verifica que*

$$C_{\widetilde{\mathcal{H}}_{k+1}} = C_{\mathcal{H}_{k+1}} + \partial_{k+1} f_{\mathcal{H}_{k+1}\widetilde{\mathcal{H}}_{k+1}}$$

Procedemos como en la sección anterior. Consideramos $\mathcal{N}_{k+1} \subset \mathcal{C}_e^{k+1,2}$ subespacio complementario a Im ∂_{k+1},

$$\mathcal{C}_e^{k+1,2} = \operatorname{Im} \partial_{k+1} \oplus \mathcal{N}_{k+1}$$

También se denomina condición de normalización y puede elegirse independiente del fibrado P^0 del que partimos. La $(k+1)$-ésima prolongación geométrica de P^0 es el fibrado P^{k+1} sobre P^k dado por:

$$P^{k+1} = \{(\lambda_k, \varphi^{\mathcal{H}_{k+1}}) : \lambda_k \in P^k, C_{\mathcal{H}_{k+1}} \in \mathcal{N}_{k+1}\}$$

P^{k+1} es un fibrado principal con grupo estructural $G^{k+1}(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)$. Además, para aplicar la inducción, se comprueba de manera directa que P^{k+1} verifica las condiciones 1 a 4 expuestas anteriormente.

En particular, debemos notar lo siguiente. Por construcción los espacios horizontales verifican:

$$D_k^i / D_k^{i+k+2} = H_{k+1}^{i+k+1} \oplus \ldots \oplus H_{k+1}^i, \tag{3.9}$$

salvo proyección al cociente, que es justamente la descomposición (3.6). Las funciones $\varphi_{k+1} = \varphi^{\mathcal{H}_{k+1}}$ identifican cada H_{k+1}^i con $\mathfrak{g}^i$. La forma tautológica parcial ω_{k+1}^i de P^{k+1} en el punto $\lambda_{k+1} = (\lambda_k, \varphi_{k+1})$ se calcula proyectando a TP^k y aplicando la identificación dada por φ_{k+1}. Mas precisamente:

$$\begin{array}{rcl} \omega_{k+1}^i : \mathcal{D}_{k+1}^i(\lambda_{k+1}) & \rightarrow & \mathfrak{g}^i \oplus \mathfrak{g}^{i+1} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}^{i+k+1} \\ Y & \mapsto & \omega_{k+1}^i(Y) = \varphi_{k+1}^{-1}(d\pi_{k+1}(Y) + \mathcal{D}_k^{i+k+2}(\lambda_k)) \end{array}$$

Además, verifican:

$$\omega_{k+1}^i(Y) = \omega_k^i(d\pi_{k+1}(Y)) \qquad \text{mód } \mathfrak{g}^{i+k+1} \tag{3.10}$$

$$\omega_{k+1}^i(Y) = \omega_k^{i+1}(pr^{H_{k+1}^i}(d\pi_{k+1}(Y))) \qquad \text{mód } \mathfrak{g}^i \tag{3.11}$$

donde $pr^{H_{k+1}^i}$ es la proyección paralela a H_{k+1}^i en (3.7) (o bien la dada en (3.9)).

Observación 3.3.2. Si $(\mathfrak{m} = \sum_{i=-\mu}^{-1} \mathfrak{m}^i, \mathfrak{g}^0)$ es de tipo finito con prolongación $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^\eta \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}^{-\mu}$. Entonces, $\mathfrak{g}^l = \{0\}$ para todo $l > \eta$, o sea, que P^l tiene grupo estructural trivial, es difeomorfo a P^{l-1} y tiene dimensión $dim\, \mathfrak{g}$. Además, si $l \geq \mu + \eta$, la forma tautológica parcial $\omega_l^{-\mu} : TP^l \rightarrow \mathfrak{g}^{-\mu+l} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}^{-\mu+1} \oplus \mathfrak{g}^{-\mu}$ define un paralelismo o marco en TP^l. Como P^l se identifica con P^η, en realidad tenemos un marco en η.

3.4. Teorema fundamental

Definición 3.4.1. 1. Sea $(\mathfrak{m} = \sum_{i=-\mu}^{-1} \mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^0)$ una estructura de Tanaka, G^k el grupo de Lie asociado definido en 2.2.3 y M una variedad de dimensión $m = \dim(\sum_{i<k} \mathfrak{g}^i)$. Una *pseudo-$G^k$-estructuras* en M es una terna $(P^k, \mathfrak{D}, \omega_k)$ donde:

a) $\pi_k : P^k \rightarrow M$ es un fibrado principal con grupo estructural G^k

b) $\mathfrak{D} = \{\mathcal{D}^i\}_{i<0}$ es una familia de distribuciones en M que definen una filtración $TM = \mathcal{D}^{-\mu} \supset \ldots \supset \mathcal{D}^{-1}$ con $\dim \mathcal{D}^i = \dim \sum_{j=i}^{k-1} \mathfrak{g}^i$. A su vez estas definen una filtración en P^0 dada por $\mathcal{D}^i_k = (d\pi_k)^{-1}(\mathcal{D}^i)$ si $i < 0$ y $\mathcal{D}^0_k$ es el espacio vertical.

c) $\omega_k = (\omega_k^{-\mu}, \ldots, \omega_k^{-1})$ donde

$$\omega_k^i : \mathcal{D}_k^i \longrightarrow \mathfrak{g}^i \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}^{i+k}$$

es una 1-forma con núcleo $\mathcal{D}_k^{i+k+1}$ que es G^k-equivariante en el sentido que si $g \in G^k$ tal que $g = Id + v$ con $v \in \mathfrak{g}^k$ entonces:

$$R_A^* \omega_k^i = \omega_k^i - ad(v)(\omega_k^{i-k})|_{\mathcal{D}_k^i}$$

Estas formas se denominan *formas tautológicas parciales.*

2. Un *isomorfismo* entre dos pseudo-G^k-estructuras $(P^k, \mathcal{D}^k, \omega^k)$ y $(\widetilde{P}^k, \widetilde{\mathcal{D}}^k, \widetilde{\omega}^k)$ sobre variedades M y $\widetilde{M}$, respectivamente, es un isomorfismo de fibrados principales $\Phi_k : P^k \to \widetilde{P}^k$ que cubre un difeomorfismo $\varphi : M \to \widetilde{M}$ tal que $d\varphi$ preserva las filtración y $\Phi_k^* \widetilde{\omega}_k^i = \omega_k^i$ para todo $i = -\mu, \ldots, -1$.

Observación 3.4.2. Esta definición no es exactamente igual a la definición de pseudo-G^k-estructura dada por Tanaka en [T1] pero es equivalente. Tanaka considera la misma filtración pero a las formas tautológicas parciales con valores en $\mathfrak{g}^{i+k}$ y estas se corresponden con la componente $\mathfrak{g}^{i+k}$ de las formas tautológicas en nuestra definición.

Teorema 3.4.3 (Tanaka)**.** *Supongamos que G^0 es conexo y para cada $k \geq 1$ fijemos una condición de normalización H_k. Entonces toda pseudo-G^0-estructura $(P^0, \mathfrak{D}^0, \omega^0)$ de tipo $\mathfrak{m}$ en una variedad M, tiene asociada una secuencia*

$$(P^0, \mathcal{D}^0, \omega^0) \leftarrow \cdots \leftarrow (P^{k-1}, \mathcal{D}^{k-1}, \omega^{k-1}) \leftarrow (P^k, \mathcal{D}^k, \omega^k) \leftarrow \cdots$$

tal que:

- *Para cada $k \geq 1$, $(P^k, \mathcal{D}^k, \omega^k)$ es una pseudo-G^k-estructura de tipo $\mathfrak{m}$ en P^{k-1}.*
- *La correspondencia $(P^0, \mathcal{D}^0, \omega^0) \mapsto (P^k, \mathcal{D}^k, \omega^k)$ es compatible con los isomorfismos para todo $k > 0$.*

Demostración. La demostración se basa en la construcción dada en las secciones 3.2 y 3.3. Para mayor detalle sobre la compatibilidad con isomorfismos ver [T1]. □

De la observación 3.3.2 se desprende que

Corolario 3.4.4. *Sea $\mathcal{D}$ una distribución sobre una variedad M que da lugar a una estructura de tipo constante $(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)$. Si $(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)$ es de tipo finito con prolongación $\mathfrak{g}$ entonces existe un fibrado P sobre M de dimensión $\mathfrak{g}$ con un marco canónico.*

Al igual que en el caso de G-estructuras la prolongación depende en cada paso de la elección del subespacio complementario H_k de la imagen de ∂_k, por lo que el marco canónico que obtenemos en P^l no es necesariamente único.

Corolario 3.4.5. *Supongamos que el par $(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)$ es de tipo finito, y sea P^0 una pseudo-G^0-estructura de tipo $\mathfrak{m}$ en una variedad conexa M. Entonces el álgebra de Lie de automorfismos infinitesimales de P^0 es de dimensión finita, acotada por la dimensión de $\mathfrak{g}$, la prolongación del par $(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)$.*

Demostración. Consecuencia de 3.4.3 y 1.4.5. □

Capítulo 4

Conexiones de Cartan

Como vimos en el capítulo 1 el objetivo principal del Método de Equivalencia es obtener un marco canónico sobre algún fibrado $B \to M$ asociado a una estructura geométrica en M, cuyas funciones de estructura generen los invariantes de esta última. Este marco no es más que una paralelización de un fibrado principal. Las conexiones de Cartan son un ejemplo especial y muy importante de paralelización que describe los invariantes y las propiedades de la geometría de una manera clara e intuitiva. El hecho mismo que una estructura geométrica tenga asociada una conexión de Cartan ya dice mucho sobre sus propiedades.

En este capítulo daremos las definiciones y propiedades básicas de las geometrías de Cartan. Veremos que toda geometría de Cartan graduada induce una pseudo-G^0-estructura en su base y mostraremos que bajo ciertas condiciones podemos aplicar el método de prolongación de Tanaka dado en el capítulo anterior para realizar el proceso inverso, es decir, asociar a una pseudo-G^0-estructura (distribución con o sin estructura adicional) una conexión de Cartan canónica.

4.1. Definición y propiedades

Definición 4.1.1. Sea $H \subset G$ un subgrupo de Lie de un grupo de Lie G, y sean $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{g}$ sus respectivas álgebras de Lie. Una *geometría de Cartan de tipo* (G, H) en una variedad M es un fibrado principal $p : \mathcal{P} \to M$ con grupo estructural H junto con una 1-forma $\mathfrak{g}$-valuada $\omega \in \Omega^1(\mathcal{P}, \mathfrak{g})$, denominada *conexión de Cartan*, que verifica las siguientes propiedades:

1. $(R_h)^*\omega = h^{-1} \cdot \omega$ para todo $h \in H$,

2. $\omega(X^\dagger(\lambda)) = x$ para todo $x \in \mathfrak{h}$, $\lambda \in \mathcal{P}$,

3. $\omega(\lambda) : T_\lambda\mathcal{P} \to \mathfrak{g}$ es un isomorfismo para cada $\lambda \in \mathcal{P}$.

(1) indica que $\mathfrak{g} : T\mathcal{P} \to \mathfrak{g}$ es H-equivariante, con h actuando en $\mathfrak{g}$ por $Ad(h^{-1})$ y en $T\mathcal{P}$ por la diferencial de la traslación a derecha $R_{h^{-1}}$. La segunda propiedad nos dice que ω reproduce los generadores de los campos fundamentales, lo cual determina a ω sobre el espacio vertical de $\mathcal{P}$, ya que todo vector en dicho espacio se puede extender a un campo fundamental. Por último, (3) nos dice que ω es un paralelismo, i.e. una $\{e\}$-estructura sobre $\mathcal{P}$. En particular, si fijamos una base $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de $\mathfrak{g}$ que extiende una base de $\mathfrak{h}$, entonces $\{\omega^{-1}(x_1), \ldots, \omega^{-1}(x_n)\}$ es un marco de

campos ω-constantes en $\mathcal{P}$ que extiende un marco de campos fundamentales. Como consecuencia, $\dim M = \dim G - \dim H$.

En la definición 4.1.1 el grupo de Lie G puede ser reemplazado por un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ que tenga a $\mathfrak{h}$ como subálgebra y una representación $Ad : H \to Aut(\mathfrak{g})$ que extienda la representación adjunta $Ad : H \to Aut(\mathfrak{h})$. Decimos entonces que la geometría es de tipo $(\mathfrak{g}, H)$.

El *modelo homogéneo* (o *playo*) para las geometrías de Cartan de tipo (G, H) es el fibrado canónico $p : G \to G/H$ junto con la *forma de Maurer-Cartan* $\omega \in \Omega^1(G, \mathfrak{g})$

$$\begin{aligned} \omega(g) : T_gG &\to \mathfrak{g} \\ X_g &\mapsto dL_{g^{-1}}(X_g) \end{aligned}$$

para cada $g \in G$ y $X_g \in T_gG$, donde $L_{g^{-1}}$ es la traslación a izquierda en G e identificamos naturalmente T_eG con $\mathfrak{g}$. No es difícil comprobar que ω es una conexión de Cartan, que además verifica la *ecuación de Maurer-Cartan*

$$d\omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)] = 0$$

para todo par de campos X e Y en G.

Definición 4.1.2. La *forma de curvatura* $K \in \Omega^2(\mathcal{P}, \mathfrak{g})$ de una geometría de Cartan $(p : \mathcal{P} \to M, \omega)$ es la 2-forma con valores en $\mathfrak{g}$

$$K(X, Y) := d\omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)].$$

Si $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ es la proyección al cociente, la 2-forma $\rho(K)$ se denomina *torsión* de la geometría, y si $\rho(K) = 0$, es decir que K toma valores en $\mathfrak{h}$, se dice que la geometría es *libre de torsión*.

Como ω es un paralelismo la forma de curvatura K puede codificarse en la *función de curvatura* $\kappa : \mathcal{P} \to \bigwedge^2 \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$ definida por:

$$\kappa(\lambda)(x, y) := K(\omega^{-1}(x)(\lambda), \omega^{-1}(y)(\lambda))$$

para todo $\lambda \in \mathcal{P}$ y x, $y \in \mathfrak{g}$. Aplicando la definición de K es fácil ver que:

$$\kappa(\lambda)(x, y) := [x, y] - \omega_\lambda([\omega^{-1}(x), \omega^{-1}(y)](\lambda)) \tag{4.1}$$

Vemos que la función de curvatura mide la diferencia entre el corchete en el álgebra de Lie y el corchete de los campos ω-constantes correspondientes en $\mathcal{P}$. En general, simplemente diremos que κ es la curvatura de la conexión ω.

Lema 4.1.3. *La forma de curvatura K es horizontal, es decir, $K_\lambda(X, Y) = 0$ si X o Y es tangente a la fibra en λ. Por lo tanto, la función de curvatura puede considerarse como mapa $\kappa : \mathcal{P} \to \bigwedge^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^* \otimes \mathfrak{g}$. Además, K y κ son H-equivariantes, es decir,*

$$\begin{gathered} (R_h)^*K = h^{-1} \cdot K \\ \kappa(R_h\lambda)(x, y) = Ad(h^{-1}) \cdot \kappa(\lambda)(Ad(h)x, Ad(h)y). \end{gathered}$$

para todo $h \in H$, $\lambda \in \mathcal{P}$ y x, $y \in \mathfrak{g}$.

Demostración. Ver Página 72 de [CSl]. $\square$

Definición 4.1.4. Un *isomorfismo* entre dos geometrías de Cartan $(\mathcal{P} \to M, \omega)$ y $(\mathcal{P}' \to M', \omega')$ de tipo (G, H) es un isomorfismo de fibrados principales $\phi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ tal que $\phi^*\omega' = \omega$.

Debido a la ecuación de Maurer-Cartan, el modelo homogéneo tiene curvatura cero. El siguiente teorema es un recíproco local de esta afirmación.

Teorema 4.1.5. *La curvatura de una geometría de Cartan $(\mathcal{P} \to M, \omega)$ es idénticamente nula si y sólo si cada $p \in M$ tiene un entorno abierto U tal que la restricción $(p^{-1}(U) \to U, \omega)$ es isomorfa a la restricción del modelo homogéneo $(G \to G/H, \omega_G)$ a un abierto.*

La demostración de este hecho es consecuencia del teorema 1.4.2 y la ecuación (4.1). Además, basándonos en la definición 1.4.4 decimos que κ es un sistema de invariantes fundamentales de $(\mathcal{P} \to M, \omega)$.

4.2. Geometrías de Cartan graduadas

Definición 4.2.1. Sea $\mathfrak{g} = \sum_{i=-\mu}^{k} \mathfrak{g}^i$ un álgebra de Lie graduada tal que $ad : \mathfrak{h} := \mathfrak{g}^0 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}^k \to Der(\mathfrak{g})$ es inyectiva, y sea H el subgrupo de Lie conexo de $Aut(\mathfrak{g})$ con álgebra de Lie $\mathfrak{h}$. Denominamos *geometría de Cartan graduada* a una geometría de Cartan $(\mathcal{P} \to M, \omega)$ de tipo $(\mathfrak{g}, H)$.

Observamos que $ad|_{\mathfrak{h}}$ es inyectiva, en particular, cuando $\mathfrak{g}$ es la prolongación de su parte negativa. En lo que sigue H^+ y G^0 denotarán los subgrupos de Lie conexos de H con álgebras de Lie $\mathfrak{h}^+ = \mathfrak{g}^1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}^k$ y $\mathfrak{g}^0$, respectivamente.

Proposición 4.2.2. *Una geometría de Cartan graduada $(\mathcal{P} \to M, \omega)$ de tipo $(\mathfrak{g}, H)$ induce una pseudo-G^0-estructura $(\mathcal{P}^0, \mathfrak{D}, \omega_0)$ en M, de manera que todo isomorfismo entre geometrías de Cartan de tipo $(\mathfrak{g}, H)$ induce un isomorfismo entre las pseudo-G^0-estructuras correspondientes.*

Demostración. Recordemos que si $\mathcal{P} \to M$ es un fibrado principal con grupo estructural G y G' es un subgrupo de Lie normal de G entonces $\mathcal{P}/G'$ denota el espacio de órbitas de la acción de G' en $\mathcal{P}$ y resulta ser un fibrado principal sobre M con grupo estructural G/G'. En nuestro caso, es claro que $H/H^+ \cong G^0$ y $\pi_0 : \mathcal{P}^0 := \mathcal{P}/H^+ \to M$ es un G^0-fibrado principal.

Consideramos la filtración

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{f}^{-\mu} \supset \mathfrak{f}^{-\mu+1} \supset \cdots \supset \mathfrak{f}^k$$

dada por $\mathfrak{f}^i = \oplus_{j \geq i} \mathfrak{g}^j$. La conexión de Cartan ω induce una filtración

$$T\mathcal{P} = \mathcal{D}^{-\mu}\mathcal{P} \supset \cdots \supset \mathcal{D}^k\mathcal{P}$$

con $\mathcal{D}^i\mathcal{P} := \omega^{-1}(\mathfrak{f}^i)$. Como los $\mathfrak{f}^i$ y ω son H-invariantes, las distribuciones $\mathcal{D}^i\mathcal{P}$ son invariantes por la acción principal, i.e. $dR_h(\mathcal{D}^i\mathcal{P}) \subset \mathcal{D}^i\mathcal{P}$ para todo $h \in H$ e $i = -\mu, \cdots, k$. Entonces estas filtraciones desciende a filtraciones

$$T\mathcal{P}^0 = \mathcal{D}_0^{-\mu} \supset \cdots \supset \mathcal{D}_0^0$$

$$TM = \mathcal{D}^{-\mu} \supset \cdots \supset \mathcal{D}^{-1}.$$

Por construcción $\dim \mathcal{D}^i = \dim \sum_{j=i}^{-1} \mathfrak{g}^j$, $\mathcal{D}_0^i = (d\pi_0)^{-1}(\mathcal{D}^i)$ si $i < 0$ y $\mathcal{D}_0^0$ es el espacio vertical.

La conexión de Cartan induce formas tautológicas parciales en $T\mathcal{P}^0$. Sea $\pi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}^0$ la proyección canónica. Fijados $\lambda_0 \in \mathcal{P}^0$, $i \in \{-\mu, \ldots, -1\}$ y un vector tangente $X \in \mathcal{D}_0^i(\lambda_0)$, escogemos

$\lambda \in \mathcal{P}$ tal que $\pi(\lambda) = \lambda_0$ y $\widetilde{X} \in \mathcal{D}^i\mathcal{P}(\lambda)$ tal que $d\pi(\widetilde{X}) = X$. Por construcción de la filtración, $\omega(\widetilde{X}) \in \mathfrak{f}^i = \mathfrak{g}^i \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}^k$ y definimos $\omega_0^i(X)$ como la componente en $\mathfrak{g}^i$ de $\omega(\widetilde{X})$.

Veamos que ω_0^i está bien definida. Fijado λ, si elegimos otro $\widetilde{X}'$ tal que $d\pi(\widetilde{X}') = X$ entonces $\widetilde{X}' - \widetilde{X}$ pertenece a $\ker(d\pi) = D^1\mathcal{P}$ por lo que $\omega(\widetilde{X}) - \omega(\widetilde{X}') \in \mathfrak{f}^1$ y por lo tanto tienen la misma componente en $\mathfrak{g}^i$. A su vez, otra elección del punto en $\mathcal{P}$ es de la forma $\lambda \cdot h$ con $h \in H^+$ y existe $u \in \mathfrak{h}^+$ tal que $exp(u) = h$. Dado $\widetilde{X} \in \mathcal{D}^i\mathcal{P}(\lambda)$ levantamiento de X entonces $dR_h(\widetilde{X})$ también es un levantamiento de X. De la equivariancia de ω resulta $\omega(\lambda \cdot h)(dR_h(\widetilde{X})) = e^{ad(-u)}(\omega(\lambda)(X))$. Como $u \in \mathfrak{h}^+$, la componente en $\mathfrak{g}^i$ no cambia.

Por construcción, $\omega_0^i(X) = 0$ si y sólo si $\omega(\widetilde{X}) \in \mathfrak{f}^{i+1}$ pero entonces $\widetilde{X} \in D^{i+1}\mathcal{P}(\lambda)$ y $d\pi(\widetilde{X}) = X \in D_0^{i+1}(\lambda)$. Como H^+ es un subgrupo normal de H, la proyección π es G^0-invariante. Luego, dado $X \in \mathcal{D}_0^i(\lambda_0)$, un levantamiento $\widetilde{X} \in \mathcal{D}^i\mathcal{P}(\lambda)$ y $g \in G^0$, resulta que $dR_g(\widetilde{X})$ es un levantamiento de $dR_g(X)$. Luego, la equivariancia de ω implica la de ω_0^i.

Por la construcción, es claro que todo isomorfismo de entre dos geometrías de Cartan desciende a un isomorfismo entre las respectivas pseudo-G^0-estructuras. □

Veamos ahora cuando la pseudo-G^0-estructura inducida es regular. Observemos que la curvatura $\kappa : \mathcal{P} \to \mathcal{C}^2(\mathfrak{m}, \mathfrak{g})$ de una geometría de Cartan graduada se descompone según la graduación de $\mathcal{C}^2(\mathfrak{m}, \mathfrak{g})$ como $\kappa = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \kappa^i$ donde $\kappa^i : \mathcal{P} \to \mathcal{C}^{i,2}(\mathfrak{m}, \mathfrak{g})$.

Proposición 4.2.3. *Sea $(\mathcal{P} \to M, \omega)$ una geometría de Cartan graduada de tipo $(\mathfrak{g}, H)$ en M con curvatura κ y $(\mathcal{P}^0, \mathfrak{D}, \omega_0)$ la pseudo-G^0-estructura inducida en M. Entonces:*

1. *$(M, \mathfrak{D})$ es una variedad filtrada si y sólo si $\sum_{i<0} \kappa^i = 0$ i.e. $\kappa(\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^j) \subset \mathfrak{f}_{\mathfrak{g}}^{i+j}$ para todo i, $j < 0$.*
2. *$(\mathcal{P}^0, \mathfrak{D}, \omega_0)$ es regular si y sólo si $\sum_{i\leq 0} \kappa^i = 0$ i.e. $\kappa(\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^j) \subset \mathfrak{f}_{\mathfrak{g}}^{i+j+1}$ para todo i, $j < 0$.*

Demostración. Sea κ la curvatura de la conexión de Cartan $\omega : TP \to \mathfrak{g}$, $\kappa = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \kappa^k$ su descomposición según la graduación de C^2. Supongamos que $(\mathcal{P}^0, \mathfrak{D}, \omega_0)$ es la pseudo-G^0-estructura inducida por $(\mathcal{P} \to M, \omega)$ tal que $(M, \mathfrak{D})$ es una variedad filtrada. Por la prueba de 4.2.2 resulta que $(\mathcal{P}, \mathcal{D}\mathcal{P})$ es una variedad filtrada.

Fijemos $v \in \mathfrak{g}^i$ y $w \in \mathfrak{g}^i$ con $i, j < 0$. Entonces

$$\kappa^k(v, w) = [v, w]_{i+j+k} - \omega([\omega^{-1}(v), \omega^{-1}(w)])_{i+j+k} \tag{4.2}$$

donde el subíndice indica la componente en $\mathfrak{g}^{i+j+k}$. Observamos que $[v, w] \in \mathfrak{g}^{i+j}$ y, como $\omega^{-1}(v) \in \mathcal{D}^i$ y $\omega^{-1}(v) \in \mathcal{D}^i$, resulta que $[\omega^{-1}(v), \omega^{-1}(w)] \in \mathcal{D}^{i+j}$ ya que $(\mathcal{P}, \mathcal{D}\mathcal{P})$ es una variedad filtrada. Como

$$\omega(\mathcal{D}^{i+j}) \subset \mathfrak{f}^{i+j} = \mathfrak{g}^{i+j} \oplus \mathfrak{g}^{i+j+1} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}^0,$$

el miembro derecho de 4.2 es de grado mayor o igual a $i + j$. Concluimos que $\kappa^k = 0$ si $k < 0$.

Si suponemos que la pseudo-G^0-estructura es regular

$$\begin{aligned} \omega([\omega^{-1}(v), \omega^{-1}(v)])_{i+j} &= \omega_0^{i+j}([(\omega_0^i)^{-1}(v), (\omega_0^j)(w)]) \\ &= [\omega_0^i(\omega_0^i)^{-1}(v), (\omega_0^i)^{-1}(w)] \\ &= [v, w] \end{aligned}$$

donde en la primera igualdad usamos que la pseudo-G^0-estructura está inducida por ω y en la segunda la condición de regularidad 3.1. Entonces, $\kappa^0 = 0$

Para las recíprocas ver página 256 de [CSl]. □

Un problema fundamental es determinar cuando se puede realizar el proceso inverso. Es decir, construir a partir de una pseudo-G^0-estructura $\mathcal{P}^0$ en M una geometría de Cartan $(\mathcal{P}, \omega)$ graduada en M de manera que $\mathcal{P}^0$ sea la pseudo-G^0-estructura inducida por $\mathcal{P}$ y que la construcción sea compatible con isomorfismos. Como $(\mathcal{P}, \omega)$ es un fibrado con un paralelismo resolveríamos de esta manera el problema de equivalencia para estas pseudo-G^0-estructuras y la curvatura de la conexión de Cartan contendría los invariantes de estas. Además, esto permite estudiar las estructuras de partida (distribuciones, distribuciones subriemannianas, distribuciones subconformes, etc.) en el marco de las geometrías de Cartan como espacios homogéneos deformados por curvaturas. [Sh].

La conexión de Cartan obtenida como resultado del proceso de arriba, no es en general única. Para asegurar unicidad es necesario normalizar la curvatura, por ejemplo, como sigue.

Definición 4.2.4. Supongamos que $\mathfrak{g} = \sum_{i=-\mu}^{k} \mathfrak{g}^i$ posee un producto interno subconforme admisible con respecto a H (cf. Definición 2.4.4).

1. Una geometría de Cartan graduada $(\mathcal{P} \to M, \omega)$ de tipo $(\mathfrak{g}, H)$ regular se dice *normal* si su curvatura κ satisface
$$\partial^* \kappa = 0.$$

2. Si $(\mathcal{P} \to M, \omega)$ es una geometría de Cartan normal con curvatura κ, la *curvatura armónica* $\kappa_H : \mathcal{P} \to \mathcal{H}^n(\mathfrak{m}, \mathfrak{g})$ es la componente armónica de κ respecto a la descomposición de Hodge (2.6).

La condición de normalidad además de garantizar unicidad de la conexión, asegura que la curvatura armónica κ_H, más simple que κ como se verá, determina un sistema fundamental de invariantes de $(\mathcal{P}, \omega)$ en el sentido de la definición 1.4.4. Más precisamente, sea $C^\infty(\mathcal{P})$ el espacio de funciones diferenciables en $\mathcal{P}$. Dado un espacio vectorial V de dimensión finita y una función diferenciable $\varphi : \mathcal{P} \to V$, definimos:

$$\mathfrak{F}_0(\varphi) = \{f \in C^\infty(\mathcal{P}) : \, f = v^* \circ \varphi \text{ para algún } v^* \in V^*\}$$

$\mathfrak{F}(\varphi)$ es el subespacio de $C^\infty(\mathcal{P})$ generado por las funciones de la forma $\omega^{-1}(X_1) \dots \omega^{-1}(X_l) f$ para todo $l \geq 0$, $X_1, \dots, X_l \in \mathfrak{m}$ y $f \in \mathfrak{F}_0(\varphi)$; y $\overline{\mathfrak{F}(\varphi)}$ es la subálgebra de $C^\infty(\mathcal{P})$ generada por $\mathfrak{F}(\varphi)$.

Proposición 4.2.5. *Si $(\mathcal{P}, \omega)$ es una geometría de Cartan graduada normal entonces:*

1. $\overline{\mathfrak{F}(\kappa)} = \overline{\mathfrak{F}(\kappa_H)}$

2. $\mathfrak{F}(\kappa) = \mathfrak{F}(\kappa_H)$ *si ω es libre de torsión.*

En particular, $\kappa = 0$ si y sólo si $\kappa_H = 0$.

La demostración dada en [T2] para el caso que $\mathfrak{g}$ es simple se extiende para otras geometrías de Cartan normales.

Muchos han tratado el problema de construir conexiones de Cartan, partiendo de E. Cartan mismo quien lo hizo para distribuciones de tipo $(2, 3, 5)$ [Ca1]. En [T1] se prueba el siguiente resultado:

Teorema 4.2.6. *Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{-k} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}^k$ un álgebra de Lie simple graduada tal que $\mathfrak{g}$ es la prolongación de $(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)$ donde $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}^{-k} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}^{-1}$. Sea P el subgrupo de $Aut(\mathfrak{g})$ que preserva la filtración $\{\mathfrak{f}^i_{\mathfrak{g}}\}_{i=-k}^{k}$ Entonces:*

- *Si $(\mathcal{P}^0, \mathfrak{D}, \omega_0)$ es una pseudo-G^0-estructura de tipo $\mathfrak{m}$ en M, existe una geometría de Cartan graduada normal $(\mathcal{P}, \omega)$ de tipo $(\mathfrak{g}, P)$ en M que induce la pseudo-G^0-estructura dada.*

- *Sean $(\mathcal{P}, \omega)$ y $(\widetilde{\mathcal{P}}, \widetilde{\omega})$ son geometrías de Cartan graduadas normales de tipo $(\mathfrak{g}, P)$ en variedades M y $\widetilde{M}$ respectivamente, y sean $(\mathcal{P}^0, \mathfrak{D}, \omega_0)$ y $(\widetilde{\mathcal{P}}^0, \widetilde{\mathfrak{D}}, \widetilde{\omega}_0)$ las respectivas pseudo-G^0-estructuras inducidas. Si $\varphi : \mathcal{P}^0 \to \widetilde{\mathcal{P}}^0$ es un isomorfismo, existe un único isomorfismo $\Phi : \mathcal{P} \to \widetilde{\mathcal{P}}$ que induce φ.*

En [CS] se prueba este resultado de manera independiente, extendiéndolo para álgebras semisimples. Recientemente, [AD] generaliza estos resultados probando que:

Teorema 4.2.7. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra graduada que admite un producto interno admisible respecto a H y tal que $H(\mathfrak{m}, \mathfrak{g})^{i,1} = 0$ para $l > 0$. Entonces para toda pseudo-G^0-estructura existe una única geometría de Cartan graduada normal que induce la pseudo-G^0-estructura dada.*

La condición para los grupos de cohomología se verifica especialmente cuando $\mathfrak{g}$ es la prolongación de su parte negativa (Ver Lema 2.4.2). Aunque esta condición no es muy restrictiva para $\mathfrak{g}$ semisimple [CS], lo es en general.

Señalamos que no es sencillo construir explícitamente las conexiones de Cartan y calcular su curvatura. En ciertos casos la prolongación de Tanaka facilita el problema. En particular, probamos el siguiente resultado.

Proposición 4.2.8. *Sea $\mathcal{P}^0$ una pseudo-G^0-estructura de tipo $\mathfrak{m}$ tal que la prolongación de Tanaka de $(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)$ es trivial. Si en cada paso del proceso de prolongación de Tanaka tomamos una condición de normalización G^0-invariante, entonces al finalizar arribamos a una conexión de Cartan en P^0 de tipo $(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{g}^0, G^0)$ que induce la pseudo-G^0-estructura dada.*

En el caso que $\mathfrak{m}$ posea un producto interno subconforme admisible con respecto a G^0, si tomamos como condición de normalización en cada paso el complemento ortogonal de la imagen del operador ∂ obtendremos una conexión de Cartan normal.

Demostración. En el caso en que la prolongación de $(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)$ es trivial P^k es isomorfo a P^0 para todo k. Al identificarlos entre sí, D^i_k se identifica con D^i_0 para cada $i \leq 0$ y dado $\lambda_0 \in P^0$ existe un único elemento en P^k de la forma:

$$\varphi_k(\lambda_0) \in \bigoplus_{-\mu \leq i \leq 0} Hom(\mathfrak{g}^i, D^i_0(\lambda_0)/D^{i+k+1}_0(\lambda_0))$$

de manera que

$$\lambda_0|_{\mathfrak{g}^i} = d\pi \circ \rho^i_1 \circ \varphi_1(\lambda_0)|_{\mathfrak{g}^i} \text{ para todo } i < 0$$

y φ_k es una extensión de φ_{k-1} para $k > 1$, es decir,

$$\varphi_{k-1}(\lambda_0)|_{\mathfrak{g}^i} = \rho^i_k \circ \varphi_k(\lambda_0)|_{\mathfrak{g}^i} \text{ para todo } i \leq 0$$

donde $\rho^i_k : D^i_0(\lambda_0)/D^{i+k+1}_0(\lambda_0) \to D^i_0(\lambda_0)/D^{i+k}_0(\lambda_0)$ es la proyección al cociente y $\pi : P^0 \to M$ la proyección canónica. Observemos que $D^{i+\mu+1}_0 = \{0\}$ para todo $-\mu \leq i \leq 0$ entonces, por construcción, $\varphi_\mu : \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g} \to D^{-\mu}_0 = TP^0$ define un paralelismo sobre M. Veamos que la forma tautológica $\omega^{-\mu}_\mu = (\varphi_\mu)^{-1} : TP^0 \to \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}$ es una conexión de Cartan.

Por construcción $\omega_\mu^{-\mu}$ es un paralelismo y reproduce los generadores de los campos fundamentales. Solo nos queda probar que es equivariante. Para probar esto veamos que φ_k es equivariante para todo $k \geq 1$, es decir,

$$\varphi_k(\lambda_0)(Ad(g^{-1})X_i) = dR_g(\varphi_k(\lambda_0 \circ g^{-1})(X_i)) \text{ para todo } i \leq 0,\ X_i \in \mathfrak{g}^i,\ g \in G^0 \tag{4.3}$$

Primero debemos observar que, para $g \in G^0$, dR_G preserva las distribuciones D_0^i y por lo tanto actúa de forma bien definida en los cocientes de estas.

La ecuación 4.3 se verifica inmediatamente para el caso $i = 0$ porque $\varphi_k|_{\mathfrak{g}^0}$ es la identificación canónica con el espacio vertical para cada k.

Recordemos que $\mathcal{H}_k = \{H_k^i\}_{i<0}$ con $H_k^i = \varphi_k(\mathfrak{g}^i)$ se denomina una estructura horizontal y verifica

$$D_0^i(\lambda_0)/D_0^{i+2}(\lambda_0) = D_0^{i+1}(\lambda_0)/D_0^{i+2}(\lambda_0) \oplus H_1^i \tag{4.4}$$

para $k = 1$, y

$$D_0^i(\lambda_0)/D_0^{i+k+1}(\lambda_0) = D_0^{i+1}(\lambda_0)/D_0^{i+k+1}(\lambda_0) \oplus H_k^i \text{ con } \rho_k^i(H_k^i) = H_{k-1}^i \tag{4.5}$$

para $k \geq 2$.

Veamos por inducción en k que $\mathcal{H}_k$ es invariante por la acción de G^0, i.e $dR_g(H_k^i) = H_k^i$ para todo $g \in G^0$ y todo $i < 0$.

De (4.4) vemos que $\widetilde{\mathcal{H}}_1 = \{\widetilde{H}_1^i\}$ con $\widetilde{H}_1^i := dR_g(H_1^i)$ es una estructura horizontal para la primera prolongación. La aplicación $\widetilde{\varphi}_1$ correspondiente a este espacio es

$$\widetilde{\varphi}_1(\lambda_0) = dR_g \circ \varphi_1(\lambda_0 \circ g^{-1}) \circ g, \tag{4.6}$$

ya que satisface (3.4).

Si $\widetilde{Y}_1$ e $\widetilde{Y}_2$ son campos que verifican las condiciones (3.5) para $v_1 \in \mathfrak{g}^i$ y $v_2 \in \mathfrak{g}^j$ con respecto a $\widetilde{\mathcal{H}}_1$, entonces $Y_1 = dR_{g^{-1}}(\widetilde{Y}_1)$ e $Y_2 = dR_{g^{-1}}(\widetilde{Y}_2)$ son campos que verifican las condiciones (3.5) para $gv_1 \in \mathfrak{g}^i$ y $gv_2 \in \mathfrak{g}^j$ con respecto a $\mathcal{H}_1$. Usando que las formas $\bar{\omega}_0^i$ son equivariantes y el hecho que dR_g transforma la descomposición 4.4 de H_1^l en la de $\widetilde{H}_1^l$ se deduce que

$$\bar{\omega}_0^i(pr_{i-1}^{\widetilde{\mathcal{H}}}([\widetilde{Y}_1, \widetilde{Y}_2](\lambda) + D_0^{i+1})) = g^{-1}\bar{\omega}_0^i(pr_{i-1}^{\mathcal{H}}([Y_1, Y_2](\lambda) + D_0^{i+1}))$$

por lo tanto:

$$C_{\widetilde{\mathcal{H}}}(v_1, v_2) = g^{-1}C_{\mathcal{H}}(gv_1, gv_2) \tag{4.7}$$

es decir, $C_{\widetilde{\mathcal{H}}} = g \cdot C_{\mathcal{H}}$ por la acción natural de G^0 en el codominio de ∂.

Por hipótesis la condición de normalización $\mathcal{N}_1$ es G^0-invariante y $C_{\mathcal{H}_1} \in \mathcal{N}_1$. Luego $C_{\widetilde{\mathcal{H}}_1}$ pertenece a $\mathcal{N}_1$ y $\partial f_{\widetilde{\mathcal{H}}_1\mathcal{H}_1} = 0$. Pero como la prolongación de $(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)$ es trivial, resulta que $\widetilde{\mathcal{H}}_1 = \mathcal{H}_1$.

El paso inductivo es análogo al caso $k = 1$. Por la hipótesis inductiva y (4.5) se tiene que $\widetilde{\mathcal{H}}_k = \{dR_g(H_k^i)\}$ es una estructura horizontal para la k-ésima prolongación con:

$$\widetilde{\varphi}_k(\lambda_0) = dR_g \circ \varphi_k(\lambda_0 \circ g^{-1}) \circ g \tag{4.8}$$

y además que las formas $\widetilde{\omega}_l^i$ son equivariantes, de donde se deduce que $C_{\widetilde{\mathcal{H}}} = g \cdot C_{\mathcal{H}}$. Por la G^0-invariancia de la condición de normalización se concluye que $\widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}$ y $\widetilde{\varphi}_k = \varphi_k$.

De (4.6) y (4.8) se obtiene (4.3) para $i \leq -1$. Concluimos que $\omega_\mu^{-\mu}$ es una conexión de Cartan de tipo $(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{g}^0, G^0)$.

Para ver que $\omega_\mu^{-\mu}$ induce la pseudo-G^0-estructura de partida basta observar que las formas

$$\bar{\omega}_\mu^i : \mathcal{D}_\mu^i/\mathcal{D}_\mu^{i+1} \to \mathfrak{g}^i,$$

que resultan de restringir $\omega_\mu^{-\mu}$ y proyectar a $\mathfrak{g}^i$, se identifican por construcción con las formas tautológicas parciales ω_0^i de la pseudo-G^0-estructura.

Para probar la segunda afirmación consideremos κ la curvatura de la conexión de Cartan $\omega_\mu^{-\mu} = \varphi_\mu^{-1} : TP^0 \to \mathfrak{g}^{-1} \oplus \mathfrak{g}^0$ y $\kappa = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \kappa^k$ su descomposición según la graduación de $\mathcal{C}^2$. Por la Proposición 4.2.3, $\kappa^k = 0$ si $k \leq 0$. Sea $k > 0$ y fijemos $v \in \mathfrak{g}^i$ y $w \in \mathfrak{g}^i$ con $i, j < 0$. Entonces,

$$\kappa^k(v,w) = [v,w]_{i+j+k} - \omega_\mu^{-\mu}([\varphi_\mu(v), \varphi_\mu(w)])_{i+j+k} \tag{4.9}$$

donde el subíndice indica la componente en $\mathfrak{g}^{i+j+k}$. Como $[v,w] \in \mathfrak{g}^{i+j}$ el primer término de la derecha es nulo. Por otro lado, $[\varphi_\mu(v), \varphi_\mu(w)] \in \mathcal{D}_\mu^{i+j}$. Por la compatibilidad de las formas,

$$\omega_\mu^{-\mu}|_{\mathcal{D}_\mu^{i+j}} = \omega_\mu^{i+j}.$$

De (3.10) y (3.11) se obtiene que,

$$\omega_\mu^{i+j}([\varphi_\mu(v), \varphi_\mu(w)])_{i+j+k} = \omega_k^{i+j}([\varphi_\mu(v), \varphi_\mu(w)])_{i+j+k} = \omega_{k-1}^{i+j+1}(pr^{H_k^{i+j+1}}([\varphi_\mu(v), \varphi_\mu(w)]))_{i+j+k}$$

Esta última coincide con la definición de $C_{\mathcal{H}_k}^{k-1}(v,w)$ en (3.8). Concluimos que:

$$\kappa^k = -C_{\mathcal{H}_k}^{k-1} \tag{4.10}$$

Como $(Im\,\partial)^\perp = \ker(\partial^*)$, por la elección de la condición de normalización $\partial^*(\kappa^k) = \partial^*(C_{\mathcal{H}_k}^{k-1}) = 0$ para todo $k > 0$. □

En el capítulo 6 aplicaremos esta proposición en algunos ejemplos.

Proposición 4.2.9. *Una geometría de Cartan graduada regular ($\mathcal{P} \to M, \omega$) de tipo ($\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{g}^0, G^0$) en M induce una graduación de TM, cuya filtración asociada es la correspondiente a la pseudo-G^0-estructura inducida, y una conexión principal en P.*

Demostración. Sea $\omega : TP \to \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{g}^0$ y $p : \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{g}^0 \to \mathfrak{g}^0$ la proyección canónica, entonces por la definición de una conexión de Cartan resulta que $p \circ \omega : TP \to \mathfrak{g}^0$ es G^0-invariante y reproduce los generadores de los campos fundamentales por lo tanto es una conexión principal en P. (pág. 64 de [KoNo]).

Como vimos en la prueba de 4.2.2, la graduación de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-\mu} \oplus \mathfrak{g}_{-\mu+1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0$ induce una graduación

$$T\mathcal{P} = D^{-\mu}\mathcal{P} \oplus \cdots \oplus D^{-1}\mathcal{P} \oplus D^0\mathcal{P}$$

donde $D^i\mathcal{P} := \omega^{-1}(\mathfrak{g}^i)$ y en particular, $D^0\mathcal{P}$ es el espacio vertical. Como G^0 preserva la graduación de $\mathfrak{g}$, por la equivariancia de ω también preserva la graduación de $T\mathcal{P}$. Luego esta graduación desciende a una graduación

$$TM = D^{-\mu} \oplus \cdots \oplus D^{-1}$$

tal que $D^i = d\pi(D^i\mathcal{P})$. □

En particular por 2.3.1 se tiene que:

Corolario 4.2.10. *Toda distribución con una métrica subriemanniana de tipo constante tiene una conexión principal y un complemento canónicos, i.e. invariantes por los automorfismos de la estructura.*

Capítulo 5

Prolongación de álgebras tipo H

En este capítulo calculamos tanto la prolongación de Tanaka total como la subconforme de las álgebras tipo Heisenberg (o tipo H). Cuando decimos prolongación subconforme nos referimos a la prolongación del par $(\mathfrak{n}, \mathfrak{g}^0_{sc})$ donde $\mathfrak{n}$ es un álgebra de tipo H y $\mathfrak{g}^0_{sc}$ es la subálgebra de derivaciones de $\mathfrak{n}$ generada por las derivaciones ortogonales y la dilatación, i.e. derivaciones que preservan la estructura conforme de $\mathfrak{n}$.

5.1. Álgebras de tipo Heisenberg: clasificación y derivaciones

En esta sección presentaremos resultados generales sobre las álgebras de tipo H. Aunque la mayoría se encuentran en la bibliografía, daremos algunas pruebas alternativas enfocándonos en aquellos resultados que necesitaremos en la próximas secciones.

Sea $\mathfrak{n}$ un álgebra de Lie 2-pasos nilpotente real con un producto interno $\langle\ ,\ \rangle$. Luego $\mathfrak{n} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{v}$ donde $\mathfrak{z}$ es el centro de $\mathfrak{n}$ y $\mathfrak{v}$ su complemento ortogonal. Sea $J : \mathfrak{z} \to End(\mathfrak{v})$ la transformación lineal definida por

$$\langle J_z x, y\rangle = \langle z, [x, y]\rangle \quad z \in \mathfrak{z},\ x, y \in \mathfrak{v}. \tag{5.1}$$

Se dice que $\mathfrak{n}$ es de *tipo Heisenberg* (o de *tipo H*) si existe un producto interno $\langle\, .\, , .\, \rangle$ en $\mathfrak{n}$ tal que

$$J_z^2 = -\left|z\right|^2 Id \quad z \in \mathfrak{z}. \tag{5.2}$$

Observación 5.1.1. El producto interno es auxiliar en la definición de tipo H, puede existir más de uno en $\mathfrak{n}$ para los que se verifica la condición 5.2. De ahora en adelante, cuando trabajamos con un álgebra tipo H fijamos un producto interno con su respectiva acción J.

De (5.1) obtenemos que

$$J_z^t = -J_z \tag{5.3}$$

Por lo tanto, (5.2) es equivalente a que J_z sea ortogonal para todo $z \in \mathfrak{z}$ de módulo 1.

De la polarización de (5.2) surge que

$$J_z J_w + J_w J_z = -2\langle z, w\rangle Id$$

En particular, cuando z y w son ortogonales,

$$J_z J_w = -J_w J_z \tag{5.4}$$

Otras propiedades que se derivan de las anteriores son [CDKR2]:

$$\langle J_z x, J_z y\rangle = \langle z, z\rangle\langle x, y\rangle \tag{5.5}$$
$$\langle J_z x, J_w x\rangle = \langle z, w\rangle\langle x, x\rangle \tag{5.6}$$
$$[x, J_z x] = \langle x, x\rangle z \tag{5.7}$$
$$[x, J_z y] + [y, J_z x] = 2\langle x, y\rangle z \tag{5.8}$$
$$[J_z x, J_z y] = -\langle z, z\rangle r_z([x, y]) \tag{5.9}$$

donde r_z es la reflexión con respecto al hiperplano $z^{\perp}$.

Proposición 5.1.2. *Si z y z' son ortonormales entonces*

$$[J_z J_{z'} x, y] + [x, J_z J_{z'} y] = -2\langle [x, y], z'\rangle z + 2\langle [x, y], z\rangle z' = 2d_{z,z'}([x, y]) \tag{5.10}$$

donde $d_{z,z'}$ es la transformación lineal antisimétrica que verifica $d_{z,z'}(z) = z'$, $d_{z,z'}(z') = -z$ y $d_{z,z'}(\langle\{z, z'\}\rangle^{\perp}) = 0$.

Demostración. Reemplazando en (5.8) x por $J_{z'}x$ obtenemos:

$$[J_{z'}x, J_z y] + [y, J_z J_{z'} x] = 2\langle [x, y], z'\rangle z \tag{5.11}$$

Si en cambio reemplazamos z por z' e y por $J_z y$:

$$[x, J_{z'} J_z y] + [J_z y, J_{z'} x] = -2\langle [x, y], z\rangle z' \tag{5.12}$$

Sumando miembro a miembro (5.11) con (5.12) y aplicando (5.4) resulta (5.10). □

Sea $m = \dim \mathfrak{z}$ y $C(m)$ el álgebra de Clifford $C(\mathfrak{z}, -\langle\, . \, , . \,\rangle)$. La acción J en $\mathfrak{v}$ se extiende a una representación unitaria de $C(m)$ en $\mathfrak{v}$, es decir, $\mathfrak{v}$ es un $C(m)$-módulo. Recíprocamente, a partir de un $C(m)$-módulo podemos construir un álgebra de tipo H con centro de dimensión m. Se dirá que el álgebra es irreducible o isotípica si la representación de $C(m)$ es irreducible o isotípica, respectivamente.

Se sabe que si $m \equiv 0, 1, 2 \,(mod\, 4)$ entonces $C(m)$ es un álgebra simple y hay una única representación irreducible de $C(m)$ [Sa], entonces todo $C(m)$-módulo es suma directa de una cantidad finita de estas representaciones. Entonces toda álgebra de tipo H cuyo centro tiene dimensión $m \equiv 0, 1, 2 \,(mod\, 4)$ es isotípica y queda unívocamente determinada por m y el número de representaciones irreducibles que componen a $\mathfrak{v}$. Por lo tanto el álgebra será denotada por $\mathfrak{h}_{(dn,m)}$ donde $d = d(m)$ es la dimensión del $C(m)$-módulo irreducible y n es el número de representaciones irreducibles que componen a $\mathfrak{v}$. En el caso $m \equiv 3 \,(mod\, 4)$, $C(m)$ es suma directa de dos álgebras simples y tiene dos representaciones irreducibles no equivalentes de la misma dimensión real. Si $\{z_1, \ldots, z_m\}$ es una base ortonormal de $\mathfrak{z}$ entonces en una representación $J_{z_1} J_{z_2} \ldots J_{z_m}$ actúa como Id y en la otra como $-Id$. Sin embargo, estas representaciones dan lugar a álgebras tipo H irreducibles isomorfas (por un isomorfismo que actúa con determinante -1 en $\mathfrak{z}$). Pero cuando $\mathfrak{h}$ no es isotípica, su clase de isomorfismo no solo depende de la cantidad de representaciones irreducibles que componen a $\mathfrak{v}$ sino cuantas hay de cada tipo. En este caso al álgebra de tipo H la notamos por $\mathfrak{h}_{(d(n^+ + n^-), m)}$ donde n^+ y n^- son las multiplicidades de las representaciones irreducibles de cada tipo que componen a $\mathfrak{v}$. Vale la pena observar que $\mathfrak{h}_{(d(n^+ + n^-), m)}$ es isomorfa a $\mathfrak{h}_{(d(n^- + n^+), m)}$ por lo que al álgebra isotípica la denotamos $\mathfrak{h}_{(dn,m)}$. Reescribimos la tabla I de [Sa] donde se tienen explícitamente las álgebras $C(m)$ y las dimensiones de sus representaciones irreducibles.

m	$8k$	$8k+1$	$8k+2$	$8k+3$
$C(m)$	$M(2^{4k},\mathbb{R})$	$M(2^{4k},\mathbb{C})$	$M(2^{4k},\mathbb{H})$	$M(2^{4k},\mathbb{H})\oplus M(2^{4k},\mathbb{H})$
dim rep. irred.	2^{4k}	2^{4k+1}	2^{4k+2}	2^{4k+2}

m	$8k+4$	$8k+5$	$8k+6$	$8k+7$
$C(m)$	$M(2^{4k+1},\mathbb{H})$	$M(2^{4k+2},\mathbb{C})$	$M(2^{4k+3},\mathbb{R})$	$M(2^{4k+3},\mathbb{R})\oplus M(2^{4k+3},\mathbb{R})$
dim rep. irred.	2^{4k+3}	2^{4k+3}	2^{4k+3}	2^{4k+3}

El álgebra nilpotente que se obtiene de la descomposición de Iwasawa de un álgebra semisimple real de rango split uno es de tipo H y se denomima de tipo *1-Iwasawa*. Estas álgebras fueron clasificadas, son las álgebras de Heisenberg reales, $\mathfrak{h}_{(2n,1)}$, las álgebras de Heisenberg cuaterniónicas $\mathfrak{h}_{(4n,3)}$ y el álgebra tipo H irreducible con centro de dimensión 7, $\mathfrak{h}_{(8,7)}$ [CDKR].

Veamos que estructura tiene esta álgebra $\mathfrak{g}^0 = Der_{gr}(\mathfrak{n})$.

En primer lugar observamos que toda álgebra tipo H (como toda álgebra graduada) tiene una derivación definida por $A|_{\mathfrak{v}} = Id$ y $A|_{\mathfrak{z}} = 2Id$ a la que denominamos dilatación. Además, por (5.10), las transformaciones:

$$\begin{pmatrix} J_z J_{z'} & \\ & 2d_{z,z'} \end{pmatrix}$$

son derivaciones antisimétricas, para z y z' ortonormales en $\mathfrak{z}$. Es fácil ver que el espacio vectorial generado por estas derivaciones es una subálgebra de $\mathfrak{g}^0$, y la restricción a $\mathfrak{z}$ determina un isomorfismo de esta con $\mathfrak{so}(m)$.

Por otro lado, las derivaciones que actúan trivialmente en el centro forman un ideal de $\mathfrak{g}^0$ que denotaremos por $Der_0(\mathfrak{n})$.

Lema 5.1.3. *Toda $d \in \mathfrak{g}^0$ actúa en $\mathfrak{z}$ como un múltiplo de la identidad más una transformación antisimétrica.*

Demostración. Sean $z \in \mathfrak{z}$ y $x \in \mathfrak{v}$, ambos de norma 1,

$$\begin{aligned} \langle dz, z\rangle &= \langle d[x, J_z x], z\rangle \\ &= \langle [dx, J_z x], z\rangle + \langle [x, dJ_z x], z\rangle \\ &= \langle J_z dx, J_z x\rangle + \langle J_z x, dJ_z x\rangle \\ &= \langle dx, x\rangle + \langle J_z x, dJ_z x\rangle \end{aligned}$$

Si $\{x_i\}_{i=1}^n$ es una base ortonormal de $\mathfrak{v}$, $\{J_z x_i\}_{i=1}^n$ también lo es. Evaluando la anterior expresión en cada x_i y sumando obtenemos que:

$$\sum_{i=1}^n \langle dz, z\rangle = \sum_{i=1}^n \langle dx_i, x_i\rangle + \sum_{i=1}^n \langle J_z x_i, dJ_z x_i\rangle = 2Tr(d|_{\mathfrak{v}})$$

Si $\lambda = \frac{2}{n} Tr(d|_{\mathfrak{v}})$ (que es independiente de z) tenemos que $\langle (d - \lambda Id)z, z\rangle = 0$. $\square$

De este lema se concluye que:

Proposición 5.1.4. $\mathfrak{g}^0$ *es isomorfa al producto semidirecto* $(\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{so}(m)) \ltimes Der_0(\mathfrak{n})$ *donde* $\mathfrak{a}$ *es el álgebra abeliana unidimensional generada por A.*

Esta proposición también es consecuencia de [Sa] donde se determina explícitamente el grupo de automorfismos de un álgebra de tipo H. En particular, a partir de la proposición 2.1 de [Sa] podemos determinar exactamente que álgebra de Lie es $Der_0(\mathfrak{n})$ en cada caso.

A continuación, presentaremos algunos resultados sobre derivaciones y automorfismos que serán de utilidad en la próxima sección.

Proposición 5.1.5. *La parte simétrica y la parte antisimétrica de todo elemento de $\mathfrak{g}^0$ son también elementos de $\mathfrak{g}^0$.*

Demostración. Basta ver que si d es una derivación entonces d^T también lo es.

d es derivación si y sólo si:

$$J_{d^T z} = J_z d + d^T J_z \tag{5.13}$$

para cada $z \in \mathfrak{z}$. Si multiplicamos esta ecuación a derecha y a izquierda por J_z:

$$J_z J_{d^T z} J_z = -\langle z, z\rangle (dJ_z + J_z d^T) \tag{5.14}$$

De 5.1.3 y (5.4) obtenemos que $J_{d^T z} J_z = J_z J_{dz}$ y por lo tanto:

$$J_{dz} = dJ_z + J_z d^T \tag{5.15}$$

es decir, d^T es derivación. $\square$

El siguiente resultado no se halla en la bibliografía y es fundamental en la siguiente sección.

Proposición 5.1.6. *Los automorfismos ortogonales de un álgebra tipo H actúan de manera irreducible en $\mathfrak{v}$.*

Demostración. Por (5.9), toda álgebra de tipo H tiene como automorfismo a:

$$\begin{pmatrix} J_z & \\ & -r_z \end{pmatrix}$$

para cada $z \in \mathfrak{z}$. Estos generan un subgrupo de automorfismos ortogonales denominado $Cliff(m)$ y su acción en $\mathfrak{v}$ coincide con la de acción de $C(m)$. Luego, si el álgebra es irreducible, la acción de los automorfismos en $\mathfrak{v}$ es irreducible.

Si el álgebra no es irreducible, consideremos $\mathfrak{v}_1$ y $\mathfrak{v}_2$ dos subrepresentaciones irreducibles de $\mathfrak{v}$, luego $\mathfrak{v}_1 \oplus \mathfrak{z}$ y $\mathfrak{v}_2 \oplus \mathfrak{z}$ son subálgebras tipo H irreducibles y por lo tanto isomorfas. Entonces existe un isomorfismo $\theta : \mathfrak{v}_1 \oplus \mathfrak{z} \to \mathfrak{v}_2 \oplus \mathfrak{z}$ compatible con los productos internos de ambos espacios. Definimos el automorfismo ortogonal $\Theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ por $\Theta|_{\mathfrak{z}} = \theta$, $\Theta|_{\mathfrak{v}_1} = \theta$, $\Theta|_{\mathfrak{v}_2} = \theta^{-1}$ y $\Theta|_{\mathfrak{c}} = Id$ donde $\mathfrak{c}$ es el complemento ortogonal de $\mathfrak{v}_1 \oplus \mathfrak{v}_2 \oplus \mathfrak{z}$. Como $\mathfrak{v}_1$ y $\mathfrak{v}_2$ son arbitrarias queda probada la proposición. $\square$

Proposición 5.1.7. *Si $\mathfrak{n}$ es irreducible y $\dim \mathfrak{g}^{-2} \equiv 3, 5, 6, 7\,(mod\, 8)$ entonces toda derivación de $\mathfrak{n}$ es un múltiplo de la dilatación más una derivación antisimétrica. Es decir, el producto interno tipo H en $\mathfrak{n}$ es único salvo múltiplo por constante.*

Demostración. Suponemos por el absurdo, usando 5.1.4 y 5.1.5, que $\mathfrak{n}$ tiene una derivación simétrica S que actúa trivialmente en el centro y anticonmuta con los operadores J_z. Si λ es un autovalor no nulo de S con autoespacio $\mathfrak{g}_\lambda \subseteq \mathfrak{g}^{-1}$ entonces $J_z(\mathfrak{g}_\lambda) = \mathfrak{g}_{-\lambda}$ es el autoespacio de S de autovalor $-\lambda$. Por la irreducibilidad de $\mathfrak{n}$, tenemos que $\mathfrak{g}^{-1} = \mathfrak{g}_\lambda \oplus \mathfrak{g}_{-\lambda}$ y ambos autoespacios son invariantes por los operadores $J_z J_{z'}$ para z, $z' \in \mathfrak{g}^{-2}$. Entonces $\mathfrak{g}_\lambda$ (al igual que $\mathfrak{g}_{-\lambda}$) admite una representación del álgebra de Clifford par $C^+(m) \cong C(m-1)$. Esto quiere decir que las representaciones irreducibles de $C(m-1)$ tienen dimensión menor que las de $C(m)$ y esto ocurre si $\dim \mathfrak{g}^{-2} \equiv 0, 1, 2, 4\,(mod\, 8)$. □

5.2. Prolongación de las álgebras tipo H

Teorema 5.2.1. *La prolongación total, subconforme y subriemanniana de un álgebra de tipo H es trivial salvo en los casos descriptos en el cuadro 5.1*

Cuadro 5.1: Prolongación de álgebras de tipo H

Álgebra de Lie	Subconforme	Total
$\mathfrak{h}_{(2n,1)}$	$\mathfrak{su}(n+1,1)$	Infinita
$\mathfrak{h}_{(4n,2)}$	trivial	Infinita
$\mathfrak{h}_{(4n,3)}$	$\mathfrak{sp}(n+1,1)$	$\mathfrak{sp}(n+1,1)$
$\mathfrak{h}_{(4n^+ + 4n^-,3)}$	trivial	$\mathfrak{sp}(n^+ + 1, n^- + 1)$
$\mathfrak{h}_{(8n,4)}$	trivial	$\mathfrak{sl}(n+2,\mathbb{H})$
$\mathfrak{h}_{(8,7)}$	FII	FII
$\mathfrak{h}_{(16,8)}$	trivial	EIV

donde n, n^+, $n^- \in \mathbb{N}$.

Como corolario se obtiene la lista de las algebras de tipo H que son subálgebras de Iwasawa de grupos semisimples de cualquier rango real (una observación de Fulvio Ricci sobre esta cuestión fue muy útil en la demostración del teorema 5.2.1). Las mismas son:

Subálgebra de Iwasawa	Álgebra semisimple	Rango
$\mathfrak{h}_{(2n,1)}$	$\mathfrak{su}(n+1,1)$	1
$\mathfrak{h}_{(4n,3)}$	$\mathfrak{sp}(n+1,1)$	1
$\mathfrak{h}_{(8,4)}$	$\mathfrak{sl}(3,\mathbb{H})$	2
$\mathfrak{h}_{(8,7)}$	FII	1
$\mathfrak{h}_{(16,8)}$	EIV	2

La demostración del teorema 5.2.1 estará compuesta de una serie de lemas y proposiciones.

Proposición 5.2.2. *Si $\mathfrak{n}$ es un álgebra de tipo H con centro de dimensión mayor que 2 entonces $\mathfrak{h}^1(\mathfrak{n}) = 0$ i.e. si $w \in \mathfrak{g}^1$ verifica $[w, z] = 0$ para todo $z \in \mathfrak{g}^{-2}$ entonces $w = 0$. Por lo tanto, $\mathfrak{n}$ es de tipo finito.*

Ver Teorema 3 en [OW] y 2.2.1.

Proposición 5.2.3. *Dados m, $n \in \mathbb{N}$, si la prolongación de $\mathfrak{h}_{(dn,m)}$ ($\mathfrak{h}_{(d(r+(n-r)),m)}$ para todo $1 \leq r \leq n$) es trivial, entonces la prolongación de $\mathfrak{h}_{(dn',m)}$ ($\mathfrak{h}_{(d(r+(n'-r)),m)}$ para todo $1 \leq r \leq n'$) con $n' \geq n$ es trivial.*

Demostración. Sea $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}^{-2} \oplus \mathfrak{g}^{-1}$ un álgebra de tipo H con $\dim \mathfrak{g}^{-2} = m$ y $\dim \mathfrak{g}^{-1} = d.n'$ tal que $n' \geq n$ y sea $w \in \mathfrak{g}^1(\mathfrak{n})$. Veamos que $w = 0$.

Sea $z \in \mathfrak{g}^{-2}$, consideremos $\mathfrak{h}^{-1} \subseteq \mathfrak{g}^{-1}$ una subrepresentación de dimensión $d.n$, i.e. suma directa de n subrepresentaciones irreducibles de $\mathfrak{g}^{-1}$. Luego $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^{-2} \oplus \mathfrak{h}^{-1}$ es una subálgebra de tipo H de $\mathfrak{n}$ con centro de dimensión m y $\dim \mathfrak{h}^{-1} = d.n$. Por hipótesis, $\mathfrak{g}^1(\mathfrak{h}) = \{0\}$. Además observemos que $\mathfrak{g}^{-1} = \mathfrak{h}^{-1} \oplus \mathfrak{c}$ tal que $[\mathfrak{h}^{-1}, \mathfrak{c}] = 0$

A partir de w, podemos definir $\widetilde{w} \in \mathfrak{g}^1(\mathfrak{h})$ por:

$$\begin{aligned} \widetilde{w}(z) &= pr_{\mathfrak{h}^{-1}}(w(z)) \text{ si } z \in \mathfrak{g}^{-2} \\ \widetilde{w}(x) &= pr_{\mathfrak{h}^{0}}(w(x)) \text{ si } x \in \mathfrak{h}^{-1} \end{aligned}$$

donde $pr_{\mathfrak{h}^{-1}}$ es la proyección de $\mathfrak{g}^{-1}$ en $\mathfrak{h}^{-1}$ paralela a $\mathfrak{c}$ y $pr_{\mathfrak{h}^0}$ es una proyección de $\mathfrak{g}^0$ en $\mathfrak{h}^0$, definida por:

$$\begin{aligned} pr_{\mathfrak{h}^0}(d)(z) &= d(z) \text{ si } z \in \mathfrak{g}^{-2} \\ pr_{\mathfrak{h}^0}(d)(x) &= pr_{\mathfrak{h}^{-1}}(d(x)) \text{ si } x \in \mathfrak{h}^{-1} \end{aligned}$$

para todo $d \in \mathfrak{g}^0$.

Es fácil ver que $pr_{\mathfrak{h}^0}(d) \in \mathfrak{h}^0$ y que $\widetilde{w} \in \mathfrak{g}^1(\mathfrak{h})$. Luego, $\widetilde{w} = 0$ y por lo tanto $\widetilde{w}(z) = pr_{\mathfrak{h}^{-1}}(w(z)) = 0$. Como $\mathfrak{h}^{-1}$ es suma de n subrepresentaciones irreducibles arbitrarias de $\mathfrak{g}^{-1}$, tenemos que $w(z) = 0$. De 5.2.2 concluimos que $w = 0$. □

Veamos que forma tienen los elementos de $\mathfrak{g}^1$ para un álgebra de tipo H.

Sea $w \in \mathfrak{g}^1$ y $y \in \mathfrak{g}^{-1}$. Por 5.1.3,

$$w(y) = p(y)a + d_y^w \in \mathfrak{g}^0 \tag{5.16}$$

con a la dilatación, $d_y^w \in \mathfrak{g}^0$ antisimétrica en $\mathfrak{g}^{-2}$ y $p \in (\mathfrak{g}^{-1})^*$. Esta funcional se puede representar como $p(y) = \langle x_w, y \rangle$ para algún $x_w \in \mathfrak{g}^{-1}$. Entonces

$$\langle J_z w(z), y \rangle = \langle [w(z), y], z \rangle = \langle w(y)(z), z \rangle = 2p(y)\,|z|^2 = \left\langle 2\,|z|^2\, x_w, y \right\rangle.$$

Donde en la segunda igualdad usamos el hecho que $w \in \mathfrak{g}^1$ y z está en el centro, y en la tercera igualdad usamos (5.16).

Luego

$$w(z) = -2J_z x_w \qquad\qquad z \in \mathfrak{g}^{-2} \tag{5.17}$$

y

$$w(y) = \langle x_w, y \rangle\, a + d_y^w \qquad\qquad y \in \mathfrak{g}^{-1}. \tag{5.18}$$

Proposición 5.2.4. *Si* $\dim \mathfrak{g}^{-2} \geq 3$ *y la dimensión de $Der_0(\mathfrak{n})$ es menor que* $\dim \mathfrak{g}^{-2}$ *entonces la prolongación de $\mathfrak{n}$ es un álgebra simple o es trivial.*

Demostración. Supongamos que $\mathfrak{g}^1 \neq \{0\}$.

Consideremos

$$\Psi_1 : \mathfrak{g}^1 \to \mathfrak{g}^{-1},$$

definida por

$$\Psi_1(w) = x_w$$

con x_w dado en 5.18. Ψ_1 es lineal, veamos que es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Si $\Psi_1(w) = 0$ entonces $w(z) = -2J_z\Psi_1(w) = 0$ para todo $z \in \mathfrak{g}^{-2}$ y por 5.2.2 se concluye que $w = 0$.

El grupo $G^0 = \mathrm{Aut}_{gr}(\mathfrak{n})$ actúa en $\mathfrak{g}^1$ por conjugación. Mas precisamente si $A \in G^0$ y $w \in \mathfrak{g}^1$, definimos $A \cdot w \in \mathfrak{g}^1$ por:

$$\begin{aligned} A \cdot w(z) &= A(w(A^{-1}z)) \text{ si } z \in \mathfrak{g}^{-2} \\ A \cdot w(x) &= Aw(A^{-1}x)A^{-1} \text{ si } x \in \mathfrak{g}^{-1} \end{aligned}$$

En particular, si A es ortogonal tenemos que:

$$A \cdot w(z) = A(w(A^{-1}z)) = -2A(J_{A^{-1}z}x_w) = -2J_zAX_w$$

donde la última igualdad se verifica porque A es automorfismo ortogonal. Es decir:

$$\Psi_1(A \cdot w) = A\Psi_1(w)$$

o sea, Ψ_1 es equivariante con respecto a la acción de los automorfismos ortogonales. Por 5.1.6 concluimos que la imagen de Ψ_1 es $\{0\}$ o $\mathfrak{g}^{-1}$, pero como es inyectiva debe ser sobre.

Sea $v \in \mathfrak{g}^2$, de manera análoga a lo anterior tenemos que:

$$v(z) = \langle z_v, z\rangle\, a + e_z^v \qquad z \in \mathfrak{g}^{-2} \tag{5.19}$$

y, como Ψ_1 es biyectiva,

$$v(y) = \Psi_1^{-1}(\varphi(y)) \qquad y \in \mathfrak{g}^{-1}. \tag{5.20}$$

donde $E_z^v \in \mathfrak{g}^0$ es antisimétrica en $\mathfrak{g}^{-2}$ y $\varphi : \mathfrak{g}^{-1} \to \mathfrak{g}^{-1}$ es una transformación lineal. Definimos ahora el mapa lineal

$$\Psi_2 : \mathfrak{g}^2 \to \mathfrak{g}^{-2}$$

por $\Psi_2(v) = \frac{1}{4}z_v$. A continuación probamos que este mapa también es biyectivo.

Fijamos $x \in \mathfrak{g}^{-1}$ con $|x| = 1$, definimos $\Psi_{-2} : \mathfrak{g}^{-2} \to \mathfrak{g}^2$ por:

$$\Psi_{-2}(z) = \left[\Psi_1^{-1}(x), \Psi_1^{-1}(J_zx)\right]$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} \left[\Psi_1^{-1}(x), \Psi_1^{-1}(J_zx)\right](z') =& \Psi_1^{-1}(x)\Psi_1^{-1}(J_zx)(z') - \Psi_1^{-1}(J_zx)\Psi_1^{-1}(x)(z') \\ =& \Psi_1^{-1}(x)(-2J_{z'}J_zx) - \Psi_1^{-1}(J_zx)(-2J_{z'}x) \\ =& -2\langle x, J_{z'}J_zx\rangle\, a + d_{-2J_{z'}J_zx}^{\Psi_1^{-1}(x)} + 2\langle J_zx, J_{z'}x\rangle\, a - d_{-2J_{z'}x}^{\Psi_1^{-1}(J_zx))} \\ =& \left\langle 4z, z'\right\rangle a + d_*^* \end{aligned}$$

Es decir que $\Psi_2(\Psi_{-2}(z)) = z$.

Por otro lado, si $\Psi_2(v) = 0$ se tiene que $v(z)$ es antisimétrica en $\mathfrak{g}^{-2}$ para cada $z \in \mathfrak{g}^{-2}$. Entonces $\langle v(z)(z'), z''\rangle$ verifica el lema 1.1.5 y $v(z)$ actúa trivialmente en en el centro i.e. $v(z) \in Der_0(\mathfrak{n})$ para todo $z \in \mathfrak{g}^{-2}$. Por hipótesis existe $0 \neq z \in \mathfrak{g}^{-2}$ tal que $v(z) = 0 \Rightarrow v(z)(x) = 0\ \forall x \in \mathfrak{g}^{-1} \Rightarrow v(x)(z) = 0 \Rightarrow \Psi_1^{-1}(\varphi(x))(z) = 0 \Rightarrow -2J_z\varphi(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = 0\ \forall x \in \mathfrak{g}^{-1}$. Entonces, $v \equiv 0$ en $\mathfrak{g}^{-1}$ y como $\mathfrak{g}^{-1}$ genera $\mathfrak{n}$, $v = 0$.

Consideremos ahora $u \in \mathfrak{g}^3$. Si $z \in \mathfrak{g}^{-2}$, $u(z) = \Psi_1^{-1}(\alpha(z))$ para cierta transformación lineal $\alpha : \mathfrak{g}^{-2} \to \mathfrak{g}^{-1}$ y si $x \in \mathfrak{g}^{-1}$, $u(x) = \Psi_2^{-1}(\beta(x))$ con $\beta : \mathfrak{g}^{-1} \to \mathfrak{g}^{-2}$ lineal.

Observamos que para z, $z' \in \mathfrak{g}^{-2}$,

$$-2J_z\alpha(z') = \Psi_1^{-1}(\alpha(z'))(z) = u(z')(z) = u(z)(z') = \Psi_1^{-1}(\alpha(z))(z') = -2J_{z'}\alpha(z)$$

. En el caso que z y z' sean ortonormales obtenemos, por (5.4):

$$J_z\alpha(z) = -J_{z'}\alpha(z')$$

Pero, como dim $\mathfrak{g}^{-2} \geq 3$, podemos encontrar z, z' y z'' ortonormales:

$$J_z\alpha(z) = -J_{z'}\alpha(z') = J_{z''}\alpha(z'') = -J_z\alpha(z)$$

Concluyendo que $\alpha \equiv 0$. Pero entonces $u(z) = 0$ cualquiera sea $z \in \mathfrak{g}^{-2}$, y

$$0 = u(z)(x) = u(x)(z) = \langle\beta(x), z\rangle a + d_z^{R(x)}$$

Luego $\beta(x) \equiv 0$. Es decir, $u = 0$.

Llegamos entonces a que

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{g}^{-2} \oplus \mathfrak{g}^{-1} \oplus \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^1 \oplus \mathfrak{g}^2$$

con la dimensión de $\mathfrak{g}^1$ (resp. $\mathfrak{g}^2$) igual a la de $\mathfrak{g}^{-1}$ (resp. $\mathfrak{g}^{-2}$).

Para probar que $\mathfrak{g}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{g}$ es simple, veamos primero que es semisimple. Suponemos que tiene un ideal abeliano $\mathfrak{a}$ que contiene un elemento no nulo $L \in \mathfrak{a}$. Obtenemos una contradicción considerando los siguiente cuatro casos.

1. $L = z + x$ con $0 \neq x \in \mathfrak{g}^{-1}$ y $z \in \mathfrak{g}^{-2}$. Luego

$$[\Psi_{-1}(x), [z + x, J_{z'}x]] = |x|^2\, \Psi_{-1}(x)(z') = -2\,|x|^2\, J_{z'}x \in \mathfrak{a}$$

para $0 \neq z' \in \mathfrak{g}^{-2}$. Luego $J_{z'}x \in \mathfrak{a}$ y, como $\mathfrak{a}$ es abeliano, $0 = [x, J_{z'}x] = |x|^2\, z'$, absurdo. Similarmente, si $L = z \neq 0$,

$$0 \neq [\Psi_{-1}(x), z] = \Psi_{-1}(x)(z) = -2J_zx \in \mathfrak{a},$$

también una contradicción por lo ya visto.

2. $L = z + x + d$ con $0 \neq d \in \mathfrak{g}^0$, $x \in \mathfrak{g}^{-1}$ y $z \in \mathfrak{g}^{-2}$. Como $d \neq 0$, existe $y \in \mathfrak{g}^{-1}$ tal que $d(y) \neq 0$. Luego,

$$[z + x + d, y] = [x, y] + d(y) \in \mathfrak{a}.$$

Del caso 1, también obtenemos una contradicción.

3. $L = z + x + d + w$ con $0 \neq w \in \mathfrak{g}^1$, $d \in \mathfrak{g}^0$, $x \in \mathfrak{g}^{-1}$ y $z \in \mathfrak{g}^{-2}$. Existe $0 \neq y \in \mathfrak{g}^{-1}$ tal que $w(y) \neq 0$.

$$[z + x + d + w, y] = [x, y] + d(y) + w(y) \in \mathfrak{a}$$

como en el caso 2.

4. $L = z + x + d + w + v$ con $0 \neq v \in \mathfrak{g}^2$, $w \in \mathfrak{g}^1$, $d \in \mathfrak{g}^0$, $x \in \mathfrak{g}^{-1}$ y $z \in \mathfrak{g}^{-2}$. Sea $0 \neq z' = \Psi_2(v) \in \mathfrak{g}^{-2}$, luego $v(z') \neq 0$.

$$\left[z + x + d + w + v, z'\right] = d(z') + w(z') + v(z') \in \mathfrak{b},$$

reduciendo al caso 2.

Ahora consideramos un ideal simple $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ que contiene un elemento no nulo $L = z+x+d+w+v \in \mathfrak{b}$ (donde la suma indica las componentes de L con respecto a la graduación como antes). A partir de L podemos encontrar un elemento $0 \neq z' \in \mathfrak{b} \cap \mathfrak{g}^{-2}$. En efecto, si $0 \neq v \in \mathfrak{g}^2$,

$$\left[\left[L, z_v\right], z_v\right] = [[v, z_v], z_v] \in \mathfrak{b} \cap \mathfrak{g}^{-2} \setminus \{0\}$$

De manera similar se procede si $w \neq 0$, $d \neq 0$ o $x \neq 0$. Ahora bien, si $0 \neq z' \in \mathfrak{b} \cap \mathfrak{g}^{-2}$ con $|z| = 1$ entonces $[z', \Psi_{-2}(z')] = a + d \in \mathfrak{b}$ para alguna derivación d antisimétrica en $\mathfrak{g}^{-2}$, luego $2z + d(z) \in \mathfrak{b}$ para cada $z \in \mathfrak{g}^{-2}$, Como $d(z)$ es ortogonal a z, se obtiene que $\mathfrak{g}^{-2} \subset \mathfrak{b}$. Ahora bien, para todo $x \in \mathfrak{g}^{-1}$, $\Psi_1^{-1}(x)(z) = -2J_z x \in \mathfrak{b}$, o sea $\mathfrak{g}^{-1} \subset \mathfrak{b}$. De manera similar, si $v \in \mathfrak{g}^2$, $v(\varphi^{-1}(x)) = \Psi_1^{-1}(x) \in \mathfrak{b}$ y $[\Psi_1^{-1}(x), \Psi_1^{-1}(J_z x)] = \Psi_{-2}(z) \in \mathfrak{b}$, con lo que concluimos que $\mathfrak{g}^{-2} \oplus \mathfrak{g}^{-1} \oplus \mathfrak{g}^1 \oplus \mathfrak{g}^2 \subset \mathfrak{b}$. Si suponemos que $\mathfrak{g}$ tiene otro ideal simple $\mathfrak{c}$ y $C \in \mathfrak{c}$, entonces $[C, \mathfrak{g}^{-2} \oplus \mathfrak{g}^{-1}] = 0$ y de esto se concluye inmediatamente que $C = 0$. Esto finaliza la prueba del teorema.

□

Proposición 5.2.5. *Si la prolongación de un álgebra $\mathfrak{n}$ de tipo H es simple, entonces es un álgebra simple no compacta de rango real menor o igual a $1 + r$ donde r es la dimensión de una subálgebra abeliana máxima en $Der_0(\mathfrak{n})$. En particular, si $\mathfrak{n}$ es irreducible su prolongación tiene rango real menor o igual a 3.*

Demostración. El álgebra es no compacta ya que la dilatación A verifica que $B(A, A) > 0$ donde B es la forma de Killing. De la demostración del teorema 3.2.9 de [CSl], existirá una involución de Cartan θ de $\mathfrak{g}$ tal que $\theta(A) = -A$, o sea existe una descomposición de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ tal que $A \in \mathfrak{p}$. Si consideramos $\mathfrak{a}$ una subálgebra abeliana maximal en $\mathfrak{p}$ que contiene a A, $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}^0$. Los elementos de $\mathfrak{a}$ actúan en $\mathfrak{g}^{-2}$ de manera diagonalizable con autovalores reales, por 5.1.5 concluimos que $\mathfrak{a} \subseteq \langle\{A\}\rangle \oplus Der_0(\mathfrak{g})$. Lo que concluye la demostración de la primera parte de la proposición.

En la proposición 2.1 de [Sa] se calculan los grupos de automorfismos de las álgebras tipo H que actúan trivialmente en el centro, estos tienen álgebra de Lie $Der_0(\mathfrak{g})$. Vemos que en el caso irreducible $Der_0(\mathfrak{n})$ es $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, $\mathfrak{sl}_{\mathbb{R}}(2, \mathbb{C})$, $\mathfrak{su}(2)$, $\mathfrak{u}(2)$, un álgebra abeliana de dimensión 1 o es nula, y sus subálgebras abelianas tienen dimensión a lo sumo 2. □

Observación 5.2.6. De la demostración anterior se desprende que $\mathfrak{m} = C_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) \subsetneq \mathfrak{g}^0$.

Corolario 5.2.7. *Si* $\dim\, \mathfrak{g}^{-2} \equiv 5, 6\, (mod\, 8)$ *entonces la prolongación de $\mathfrak{n}$ es trivial.*

Demostración. Por la proposición anterior, la prolongación de $\mathfrak{n}$ en el caso irreducible coincide con su prolongación subconforme que veremos que es trivial cuando $\dim\, \mathfrak{g}^{-2} \equiv 5, 6\, (mod\, 8)$ en la siguiente sección. Por 5.2.3 es trivial en el caso no irreducible también. □

A partir de los resultados obtenidos podemos calcular la prolongación de toda álgebra de tipo H.

- Caso $m = 1$ o 2.

  Es bastante conocido en la literatura que la prolongación de las álgebras de Heisenberg reales $\mathfrak{h}_{(2n,2n+1)}$ y complejas $\mathfrak{h}_{(4n,4n+2)}$ tiene dimensión infinita. Daremos una prueba elemental de este hecho.

  Basta ver que existe $0 \neq d_i \in \mathfrak{g}^i(\mathfrak{h}_{(2n,1)})$ y $0 \neq E_i \in \mathfrak{g}^i(\mathfrak{h}_{(4n,2)})$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

  Para el caso de $\mathfrak{h}_{(2n,1)}$, consideramos una base del álgebra $\{x_i, y_i, z : i := 1, \ldots, n\}$ tal que $[x_i, y_i] = z$ para $i := 1, \ldots, n$ y el resto de los corchetes es 0. Consideramos la derivación $d \in \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}_{(2n,1)})$:

$$d(x_i) = d(y_i) = \sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n} y_k \qquad d(z) = 0$$

  Definimos $d_1 \in \mathfrak{g}^1(\mathfrak{h}_{(2n,1)})$ tal que:

$$d_1(x_i) = d_1(y_i) = d \qquad d_1(z) = 0$$

  Si suponemos definido $0 \neq d_i \in \mathfrak{g}^i(\mathfrak{h}_{(2n,1)})$, es fácil comprobar que d_{i+1} dado por

$$d_{i+1}(x_i) = d_{i+1}(y_i) = d_i \qquad d_{i+1}(z) = 0$$

  verifica $0 \neq d_{i+1} \in \mathfrak{g}^{i+1}(\mathfrak{h}_{(2n,1)})$.

  Para $\mathfrak{h}_{(4n,2)}$, existe una base del álgebra $\{x_i, Jx_i, y_i, Jy_i, z_1, z_2 : i := 1, \ldots, n\}$ tal que $[x_i, y_i] = [Jy_i, Jx_i] = z_1$ y $[x_i, Jy_i] = [Jx_i, y_i] = z_2$ para $i := 1, \ldots, n$ y el resto de los corchetes es 0. En este caso tenemos las derivaciones E, $F \in \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}_{(4n,2)})$:

$$\begin{aligned} &E(x_i) = E(y_i) = \sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n} y_k \qquad E(Jx_i) = E(Jy_i) = \sum_{k=1}^{n} Jx_k - \sum_{k=1}^{n} Jy_k \\ &E(z_1) = E(z_2) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &F(x_i) = F(y_i) = \sum_{k=1}^{n} Jx_k - \sum_{k=1}^{n} Jy_k \qquad F(Jx_i) = F(Jy_i) = -\sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} y_k \\ &F(z_1) = F(z_2) = 0 \end{aligned}$$

  Como antes construimos E_1, $F_1 \in \mathfrak{g}^1(\mathfrak{h}_{(4n,2)})$ tal que:

$$\begin{array}{lll} E_1(x_i) = E_1(y_i) = E & E_1(Jx_i) = E_1(Jy_i) = F & E_1(z_1) = E_1(z_2) = 0 \\ F_1(x_i) = F_1(y_i) = F & F_1(Jx_i) = F_1(Jy_i) = -E & F_1(z_1) = F_1(z_2) = 0 \end{array}$$

  e inductivamente E_{i+1}, $F_{i+1} \in \mathfrak{g}^{i+1}(\mathfrak{h}_{(4n,2)})$ como:

$$\begin{array}{lll} E_{i+1}(x_i) = E_{i+1}(y_i) = E_i & E_{i+1}(Jx_i) = F_i(Jy_i) = E_i & E_{i+1}(z_1) = E_{i+1}(z_2) = 0 \\ F_{i+1}(x_i) = F_{i+1}(y_i) = F_i & F_{i+1}(Jx_i) = F_i(Jy_i) = -E_i & F_{i+1}(z_1) = F_{i+1}(z_2) = 0 \end{array}$$

  Para una descripción precisa de estas álgebras infinitas ver [Ku].

- Caso $m = 3$.

  Sea $k \in \mathbb{N}$, consideremos el álgebra

$$\mathfrak{sp}(k+1, n+1-k) = \{x \in M_{n+2}(\mathbb{H}) : x^*\mathbb{I} = -\mathbb{I}x\}$$

  donde x^* denota la transpuesta conjugada de x e $\mathbb{I}$ es la matriz diagonal con las primeras $k+1$ entradas iguales a 1 y las restantes $n+1-k$ iguales a -1.

  Denotamos por E_{ij} la matriz con la entrada (i,j) igual a 1 y el resto igual a 0. Sea $H := E_{1\,k+2} + E_{k+2\,1} \in \mathfrak{sp}(k+1, n+1-k)$. Luego $ad\,H$ tiene autovalores 2, 1, 0, -1 y -2 y sus autoespacios determinan una graduación de $\mathfrak{g}$ dada por:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}^{-2} &= \langle\{a(E_{1\,1} - E_{k+2\,k+2} + E_{1\,k+2} - E_{k+2\,1}) :\ a = \mathfrak{i},\, \mathfrak{j},\, \mathfrak{k}\}\rangle \\
\mathfrak{g}^{2} &= \langle\{a(E_{1\,1} - E_{k+2\,k+2} - E_{1\,k+2} + E_{k+2\,1}) : a = \mathfrak{i},\, \mathfrak{j},\, \mathfrak{k}\}\rangle \\
\mathfrak{g}^{-1} &= \langle\{aE_{1\,j} - \overline{a}E_{j\,1} - aE_{k+2\,j} - \overline{a}E_{j\,k+2} : a = 1,\, \mathfrak{i},\, \mathfrak{j},\, \mathfrak{k},\, 2 \le j \le k+1\}\rangle \\
&\quad \oplus \langle\{-aE_{1\,j} - \overline{a}E_{j\,1} + aE_{k+2\,j} - \overline{a}E_{j\,k+2} :\ a = 1,\, \mathfrak{i},\, \mathfrak{j},\, \mathfrak{k},\, k+3 \le j \le n+2\}\rangle \\
\mathfrak{g}^{1} &= \langle\{aE_{1\,j} - \overline{a}E_{j\,1} + aE_{k+2\,j} + \overline{a}E_{j\,k+2} :\ a = 1,\, \mathfrak{i},\, \mathfrak{j},\, \mathfrak{k},\, 2 \le j \le k+1\}\rangle \\
&\quad \oplus \langle\{aE_{1\,j} + \overline{a}E_{j\,1} + aE_{k+2\,j} - \overline{a}E_{j\,k+2} :\ a = 1,\, \mathfrak{i},\, \mathfrak{j},\, \mathfrak{k},\, k+3 \le j \le n+2\}\rangle \\
\mathfrak{g}^{0} &= \langle\{H\}\rangle \oplus \langle\{aE_{i\,j} - \overline{a}E_{j\,i} :\ a = 1,\, \mathfrak{i},\, \mathfrak{j},\, \mathfrak{k},\, 2 \le i < j \le k+1 \vee k+3 \le i < j \le n+2\}\rangle \\
&\quad \oplus \langle\{aE_{i\,j} + \overline{a}E_{j\,i} :\ a = 1,\, \mathfrak{i},\, \mathfrak{j},\, \mathfrak{k},\, k+3 \le i \le n+2,\, 2 \le j \le k+1\}\rangle \\
&\quad \oplus \langle\{aE_{i\,i} :\ a = \mathfrak{i},\, \mathfrak{j},\, \mathfrak{k},\, 2 \le i \le k+1 \vee k+3 \le i \le n+2\}\rangle
\end{aligned}$$

  Resulta que $\mathfrak{g}^{-2} \oplus \mathfrak{g}^{-1}$ es un álgebra de tipo H de tipo $\mathfrak{h}_{(4k+4(n-k),3)}$. Por el Teorema 5.3 de [Y] concluimos que la prolongación de $\mathfrak{h}_{(4k+4(n-k),3)}$ es $\mathfrak{sp}(k+1, n+1-k)$.

- Caso $m = 4$.

  Sea $n \in \mathbb{N}$, consideremos el álgebra

$$\mathfrak{sl}(n+2, \mathbb{H}) = \{x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{H}) : re(tr(x)) = 0\}$$

  En este caso, sea $H := E_{11} - E_{n+2n+2} \in \mathfrak{sl}(n+2, \mathbb{H})$. Luego $ad\,H$ tiene autovalores 2, 1, 0, -1 y -2, con autoespacios:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}^{-2} &= \langle\{aE_{n+21} :\ a = 1,\, \mathfrak{i},\, \mathfrak{j},\, \mathfrak{k}\}\rangle \\
\mathfrak{g}^{2} &= \langle\{aE_{1n+2} :\ a = 1,\, \mathfrak{i},\, \mathfrak{j},\, \mathfrak{k}\}\rangle \\
\mathfrak{g}^{-1} &= \langle\{aE_{j1} :\ a = 1,\, \mathfrak{i},\, \mathfrak{j},\, \mathfrak{k};\ j = 2, \ldots, n+1\}\rangle \\
&\quad \oplus \langle\{aE_{n+2j} :\ a = 1,\, \mathfrak{i},\, \mathfrak{j},\, \mathfrak{k};\ j = 2, \ldots, n+1\}\rangle \\
\mathfrak{g}^{1} &= \langle\{aE_{1j} :\ a = 1,\, \mathfrak{i},\, \mathfrak{j},\, \mathfrak{k};\ j = 2, \ldots, n+1\}\rangle \\
&\quad \oplus \langle\{aE_{jn+2} :\ a = 1,\, \mathfrak{i},\, \mathfrak{j},\, \mathfrak{k};\ j = 2, \ldots, n+1\}\rangle \\
\mathfrak{g}^{0} &= \langle\{H\}\rangle \oplus \langle\{E_{jj} - E_{j+1j+1} :\ j = 1, \ldots, n\}\rangle \\
&\quad \oplus \langle\{aE_{jj} :\ a = \mathfrak{i},\, \mathfrak{j},\, \mathfrak{k};\ j = 1, \ldots, n+2\}\rangle \\
&\quad \oplus \langle\{aE_{ij} :\ a = 1,\, \mathfrak{i},\, \mathfrak{j},\, \mathfrak{k};\ i,\, j = 2, \ldots, n+1,\ i \neq j\}\rangle
\end{aligned}$$

  Como en el caso anterior resulta que $\mathfrak{g}^{-2} \oplus \mathfrak{g}^{-1}$ es isomorfa $\mathfrak{h}_{(8n,4)}$ y por lo tanto su prolongación es $\mathfrak{sl}(n+2, \mathbb{H})$.

- Caso $m = 7$.

  Ya hemos probado que el álgebra irreducible $\mathfrak{h}_{(8,7)}$ no posee derivaciones simétricas que no sean múltiplos de la dilatación, y su prolongación coincide con su prolongación subconforme. Este caso será tratado en la siguiente sección donde veremos que es un álgebra simple de rango real 1, más precisamente es la forma real no compacta de $F4$ denominada FII o también conocida como $\mathfrak{f}4(-20)$(Ver página 717 de [Kn]).

  Ahora debemos analizar las álgebras que provienen de considerar la suma de dos representaciones de $C(7)$. Estas son $\mathfrak{h}_{(16,7)}$ y $\mathfrak{h}_{(8+8,7)}$. En ambos casos la dimensión de las derivaciones que actúan trivialmente en el centro es 1 [Sa] y por lo tanto podemos aplicar la proposición 5.2.4. Si la prolongación es simple podemos calcular su dimensión. En efecto, el álgebra de derivaciones graduadas tiene dimensión 23 (en ambos casos) y por lo tanto su prolongación debería tener dimensión $7+16+23+16+7 = 69$ pero no existe ningún álgebra de Lie simple con esta dimensión. Por lo tanto la prolongación en ambos casos es trivial.

  Apelando a la proposición 5.2.3 concluimos que la prolongación de las demás álgebras de tipo H con centro de dimensión 7 es trivial.

- Caso $m = 8$.

  Para el álgebra irreducible $\mathfrak{h}_{(16,8)}$, la dimensión de las derivaciones que actúan trivialmente en el centro es 1. Se puede comprobar (calculando o computacionalmente) que la prolongación de esta álgebra es no trivial y por lo tanto tiene que ser simple. Además la dimensión de la prolongación es $8+16+30+16+8 = 78$ y resulta la forma real no compacta de $E6$ denominada EIV o $\mathfrak{e}6(-26)$.

  Para el álgebra $\mathfrak{h}_{(32,8)}$ también se puede aplicar 5.2.4 (la dimensión de las derivaciones que actuan trivialmente en el centro es 4). Si su prolongación fuera simple, su dimensión será $8+32+33+32+8 = 113$ y tampoco existe un álgebra simple con esa dimensión. Nuevamente a partir de la proposición 5.2.3 se puede concluir que la prolongación de todas las álgebras de tipo H con centro de dimensión 8 no irreducibles tienen prolongación trivial.

- Caso $m \geq 9$.

  Veamos que en este caso la prolongación siempre es trivial. Por 5.2.3 basta probarlo para las álgebras irreducibles. Los casos $m = 9, 10, 11, 15$ se resuelven por absurdo, calculando la dimensión de una hipotética prolongación simple (112, 200, 209 y 392 respectivamente). Si intentamos proceder de la misma forma en el caso $m = 12$ obtenemos $12+128+66+128+12 = 351$ que es la dimensión de cualquier forma real de B_{13} y de C_{13}. El siguiente par de lemas resuelven todos los casos. Recordar que para $m = 13, 14$ ya fue probado en 5.2.7.

  Lema 5.2.8. *Si $m = 12$ o $m \geq 16$ entonces* $2(\dim \mathfrak{g}^0 - 1) \leq \dim(\mathfrak{g}^{-2} \oplus \mathfrak{g}^{-1})$.

  Demostración. Si $m = 12$, entonces $2(\dim \mathfrak{g}^0 - 1) = 140$ y $\dim(\mathfrak{g}^{-2} \oplus \mathfrak{g}^{-1}) = 12 + 128 = 140$. Como $\mathfrak{g}^0$ está generado por $\mathfrak{so}(m)$ (álgebra de Lie de $Pin(m)$), la dilatación y las derivaciones que actúan trivialmente en el centro, tenemos que:

  $$\dim \mathfrak{g}^0 - 1 \leq \frac{m(m-1)}{2} + 6$$

  Ya que vimos en la demostración de 5.2.5 que en el caso irreducible la dimensión de $Der_0(\mathfrak{g})$ es a lo sumo 6.

Por otro lado, $2^{\lceil \frac{m-1}{2} \rceil}$ es una cota inferior para la dimensión de las representaciones irreducibles de $C(m)$, entonces:

$$\dim(\mathfrak{g}^{-2} \oplus \mathfrak{g}^{-1}) \geq 2^{\lceil \frac{m-1}{2} \rceil} + m$$

Por inducción (separando en m par y m impar) se prueba que para $m \geq 16$:

$$\frac{m(m-1)}{2} + 6 \leq 2^{\lceil \frac{m-1}{2} \rceil} + m$$

□

Lema 5.2.9. *Si* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{-2} \oplus \mathfrak{g}^{-1} \oplus \mathfrak{g}^{0} \oplus \mathfrak{g}^{1} \oplus \mathfrak{g}^{2}$ *es un álgebra simple graduada no compacta de dimensión mayor o igual a* 351 *y rango real a lo sumo* 3 *entonces* $5(\dim \mathfrak{g}^0 - 1) \geq \dim \mathfrak{g}$.

Demostración. Como $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{g}^0$, basta probar que $5(\dim \mathfrak{m}) \geq \dim \mathfrak{g}$ y para ello recurriremos a la clasificación de las álgebras simples reales y el cálculo de sus respectivas subálgebras $\mathfrak{m}$. Primero observamos que, por la hipótesis del rango y la dimensión, el álgebra debe ser no compleja. Entonces debe ser una forma real no compacta [Kn].

Consideramos dos casos, $\mathfrak{g}$ es una forma real de A_m con $m \geq 18$ o es una forma real de B_n, C_n o d_n con $n \geq 13$.

En el primer caso, $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(p,q)$ con $1 \leq p \leq 3$ y $p+q \geq 19$. Como $\mathfrak{m} = \mathbb{R}^p \oplus \mathfrak{su}(q-p)$, tenemos que:

$$\begin{aligned} 5(\dim \mathfrak{m}) - \dim \mathfrak{g} > 5((q-p)^2 - 1) - ((p+q)^2 - 1) &= 4p^2 + 4q^2 - 12pq - 4 \\ &= 4(p^2 - 1) + 4q(q - 3p) \end{aligned}$$

Solo basta observar que $q > 3p$, por las condiciones que estos verifican.

Si $\mathfrak{g}$ es una forma real de B_n, C_n o d_n con $n \geq 14$ entonces $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(p,q)$ con $1 \leq p \leq 3$ y $\frac{p+q}{2} \geq 13$, o $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(p,q)$ con $1 \leq p \leq 3$ y $p+q \geq 13$. Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(p,q)$ entonces $\mathfrak{m} = \mathfrak{so}(q-p)$ y:

$$\begin{aligned} 5(\dim \mathfrak{m}) - \dim \mathfrak{g} > \frac{5}{2}(q-p)(q-p-1) - \frac{1}{2}(q+p)(q+p-1) &\geq 2q^2 - 6qp - 2q \\ &= 2q(q - 3p - 1) > 0 \end{aligned}$$

Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(p,q)$ entonces $\mathfrak{su}(2)^p \oplus \mathfrak{sp}(q-p)$ y:

$$\begin{aligned} 5(\dim \mathfrak{m}) - \dim \mathfrak{g} > \frac{5}{2}(q-p)(2(q-p)-1) - (q+p)(2(q+p)-1) &\geq 2q^2 - 6qp - 2q \\ &= 2q(4q - 12p - 3) > 0 \end{aligned}$$

□

5.3. Prolongación subconforme y subriemanniana de las álgebras tipo H

Fijado un producto interno tipo H en un álgebra $\mathfrak{n}$ podemos considerar los pares subriemannianos y subconformes $(\mathfrak{n}, \mathfrak{g}^0_{sr})$ y $(\mathfrak{n}, \mathfrak{g}^0_{sc})$. De 5.1.3 tenemos que $\mathfrak{g}^0_{sr}$ es la subálgebra de derivaciones antisimétricas de $\mathfrak{n}$ que preservan la graduación y

$$\mathfrak{g}^0_{sc} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}^0_{sr} \tag{5.21}$$

donde $\mathfrak{a}$ es el álgebra unidimensional generada por la dilatación A.

Ya vimos que la prolongación del par $(\mathfrak{n}, \mathfrak{g}^0_{sr})$ es trivial y el par $(\mathfrak{n}, \mathfrak{g}^0_{sc})$ es de tipo finito.

Teorema 5.3.1. *Sea $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}^{-2} \oplus \mathfrak{g}^{-1}$ un álgebra de tipo H y sea $\mathfrak{g}^0_{sc}$ como en (5.21).*

(i) Si $\mathfrak{n}$ es de tipo 1-Iwasawa con álgebra semisimple asociada $\mathfrak{g}$, entonces $Prol(\mathfrak{n}, \mathfrak{g}^0_{sc}) = \mathfrak{g}$;

(ii) Si $\mathfrak{n}$ no es de tipo 1-Iwasawa, entonces $Prol(\mathfrak{n}, \mathfrak{g}^0_{sc}) = \mathfrak{g}^{-2} \oplus \mathfrak{g}^{-1} \oplus \mathfrak{g}^0_{sc}$.

Demostración. (i) es inmediato del teorema 2.2.6.

Para (ii), la prueba es similar a la de la proposición 5.2.4 con algunas modificaciones.

Primero observamos que $\mathfrak{n}$ es de tipo 1-Iwasawa cuando $\dim \mathfrak{g}^{-2} = 1$ o 2 (álgebras de Heisenberg reales y complejas), por lo que suponemos que $\dim \mathfrak{g}^{-2} \geq 3$.

Cuando se prueba que Ψ_1 es sobre hay que observar que la acción del grupo de automorfismos graduados ortogonales de $\mathfrak{n}$ en $\mathfrak{g}^0$ deja invariante a $\mathfrak{g}^0_{sr}$.

Como ya no se verifica la hipótesis que la dimensión de $\mathfrak{g}^{-2}$ es mayor que la dimensión de $Der_0(\mathfrak{n})$ debemos modificar la prueba de que Ψ_2 es inyectiva. Si $\Psi_2(v) = \frac{1}{4} z_v = 0$, se tiene que $v(z) \in \mathfrak{g}^0_{sr}$ para todo $z \in \mathfrak{g}^{-2}$. Como $v(x) \in \mathfrak{g}^1$ para $x \in \mathfrak{g}^{-1}$, $v(x) = \Psi_1^{-1}(\varphi(x))$ para algún endomorfismo lineal $\varphi : \mathfrak{g}^{-1} \to \mathfrak{g}^{-1}$.

$$\begin{aligned} v([x,y]) &= v(x)(y) - v(y)(x) \\ &= \langle \varphi(x), y \rangle .a + d_y^{v(x)} - \langle \varphi(y), x \rangle .a + d_x^{v(y)} \end{aligned}$$

Como $v([x,y]) \in \mathfrak{g}^0_{sr}$ tenemos que $\langle \varphi(x), y \rangle = \langle \varphi(y), x \rangle$ i.e. φ es simétrico.

Por otro lado

$$\langle v(x)(z), y \rangle = \langle v(z)(x), y \rangle = - \langle v(z)(y), x \rangle = - \langle v(y)(z), x \rangle .$$

y de la definición de φ sigue que

$$\langle J_z \varphi(x), y \rangle = - \langle J_z \varphi(y), x \rangle ,$$

Como J_z es antisimétrico y φ is simétrico, esto implica que

$$J_z \varphi = \varphi J_z$$

Como en la prueba de 5.2.4 se tiene que $v(z)(z') = 0 \ \forall \ z,\ z' \in \mathfrak{g}^{-2}$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} [v(z)(x), y] = [v(z)(y), x] + v(z)([x,y]) &\iff [v(x)(z), y] = [v(y)(z), x] \\ &\iff [J_z \varphi x, y] = [J_z \varphi y, x] \\ &\iff \langle J_{z'} J_z \varphi x, y \rangle = \langle J_{z'} J_z \varphi y, x \rangle \\ &\iff \langle x, \varphi J_z J_{z'} y \rangle = \langle J_{z'} J_z \varphi y, x \rangle \\ &\iff \langle J_z J_{z'} \varphi y, x \rangle = \langle J_{z'} J_z \varphi y, x \rangle \\ &\iff J_z J_{z'} \varphi = J_{z'} J_z \varphi \end{aligned}$$

para todo $x,\ y \in \mathfrak{g}^{-1}$ y $z,\ z' \in \mathfrak{g}^{-2}$.

Podemos considerar z y z' elemento no nulos ortogonales de $\mathfrak{g}^{-2}$ y de (5.4) obtenemos

$$J_z J_{z'} \varphi = J_{z'} J_z \varphi = -J_z J_{z'} \varphi$$

Como J_z y $J_{z'}$ son inversibles, $\varphi \equiv 0$. Luego $v(x) = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}^{-1}$, y $v \equiv 0$.

El resto de la prueba sigue de manera idéntica, concluimos que

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{n}, \mathfrak{g}^0_{sc}) = \mathfrak{g}^{-2} \oplus \mathfrak{g}^{-1} \oplus \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^1 \oplus \mathfrak{g}^2$$

es un álgebra simple. De la demostración de 5.2.5 se tiene que $\mathfrak{g}(\mathfrak{n}, \mathfrak{g}^0_{sc})$ tiene rango real 1 por lo que $\mathfrak{g}^{-2} \oplus \mathfrak{g}^{-1}$ es una subálgebra de Iwasawa de $\mathfrak{g}$, i.e. de tipo 1-Iwasawa. $\square$

Observación 5.3.2. Debemos mencionar que pruebas alternativas de 5.3.1 y la Proposición 5.2.4 se pueden obtener a partir de [Y, Lema 5.8].

Capítulo 6

Aplicaciones geométricas

En primer lugar presentaremos una familia de estructuras subconformes a las que denominamos estructuras *compatibles*. Estas tienen símbolo de tipo H y por resultados de las secciones anteriores tienen asociadas conexiones de Cartan normales.

Por otro lado analizaremos en detalle ejemplos de distribuciones con estructuras subriemannianas y subconformes. Construiremos explícitamente conexiones de Cartan para distribuciones subriemannianas de contacto en variedades de dimensión 3. Compararemos los resultados con los de Hughen [Hu] aplicando el método de Cartan, y mostraremos que existe una familia a un párametro de conexiones de Cartan y conexiones lineales asociadas naturalmente a estas distribuciones.

Analizaremos luego distribuciones de dimensión 3 con métricas subconformes y subriemannianas en variedades de dimensión 5, obteniendo explícitamente el complemento canónico de la distribución y la conexión de Cartan normal. Calculamos su curvatura y su curvatura armónica, obteniendo los invariantes fundamentales de estas estructuras.

Por último estudiaremos las distribuciones de dimensión 4 en variedades de dimensión 6 con métricas subconformes compatibles donde obtenemos también explícitamente los complementos canónicos de la distribución.

6.1. Estructuras subconformes compatibles

Definición 6.1.1. Un álgebra de Lie graduada $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{-1} \oplus \mathfrak{g}^{-2}$ se dice *no singular* si para todo $0 \neq x \in \mathfrak{g}^{-1}$, $ad(x) : \mathfrak{g}^{-1} \longrightarrow \mathfrak{g}^{-2}$ es sobreyectiva.

Proposición 6.1.2. *Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{-1} \oplus \mathfrak{g}^{-2}$ un álgebra de Lie graduada. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\mathfrak{g}$ es no singular.*

2. *Para todo $0 \neq \lambda \in (\mathfrak{g}^{-2})^*$, la forma bilineal $(x, y) \to \lambda([x, y])$ es no degenerada.*

3. *Fijado un producto interno en $\mathfrak{g}^{-1}$, para cada $z \in \mathfrak{g}^{-2}$, el operador $J_z : \mathfrak{g}^{-1} \to \mathfrak{g}^{-1}$ definido por:*
$$\langle J_z x, y\rangle = \langle z, [x, y]\rangle \quad \forall\, x, y \in \mathfrak{g}^{-1}$$
es no singular.

Observación 6.1.3. De la parte (3), resulta que las álgebras de tipo H son no singulares. Además, dada un álgebra no singular $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{-1} \oplus \mathfrak{g}^{-2}$ existe $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^{-1} \oplus \mathfrak{h}^{-2}$ álgebra de tipo H con $\dim \mathfrak{h}^{-1} = \dim \mathfrak{g}^{-1}$ y $\dim \mathfrak{h}^{-2} = \dim \mathfrak{g}^{-2}$. En dicho caso, se conjeturó que $\dim Aut_{gr}(\mathfrak{h}) \geq \dim Aut_{gr}(\mathfrak{g})$ donde la igualdad se da si y sólo si $\mathfrak{g}$ es de tipo H. Esta conjetura fue probada para $\dim \mathfrak{g}^{-2} = 2$ en [KT].

Definición 6.1.4. Una distribución $\mathcal{D}$ se denominará *fat* o de *policontacto* si su símbolo es un álgebra no singular en cada punto p.

Ejemplo 6.1.5. Recordemos que una distribución de contacto $\mathcal{D}$ en una variedad M es aquella que se puede representar como el núcleo de una 1-forma α de rango máximo, es decir, $\alpha \wedge (d\alpha)^k \neq 0$ donde $2k+1$ es la dimensión de M. Esto es equivalente a que $d\alpha|_p : \mathcal{D}_p \times \mathcal{D}_p \to \mathbb{R}$ es no degenerada en cada $p \in M$. Como $T_pM/\mathcal{D}_p$ tiene dimensión 1, por (2) de la Proposición 6.1.2, concluimos que $\mathcal{D}$ es de policontacto. Es más, las únicas álgebras no singulares, salvo isomorfismo, con centro de dimensión 1 son las álgebras de Heisenberg reales $\mathfrak{h}_{2k,1}$. Concluimos que una distribución $\mathcal{D}$ en una variedad de dimensión $2k+1$ es de contacto si y sólo si es de símbolo constante $\mathfrak{h}_{2k,1}$.

Sea $\mathcal{D}$ una distribución de policontacto. Para todo $\lambda \in (T(M)/\mathcal{D})^*$ no nulo definimos la 2-forma no degenerada en $\mathcal{D}$,

$$\omega_\lambda : \bigwedge^2 \mathcal{D}_p \to \mathbb{R},$$
$$\omega_\lambda(X,Y) = \lambda([\tilde{X},\tilde{Y}]_p + \mathcal{D}(p))$$

donde $\tilde{X}, \tilde{Y}$ son extensiones locales de X, Y. Una estructura subconforme g^c en $\mathcal{D}$ se denomina *compatible* si existe una métrica g en la clase de la estructura conforme que es compatible con las ω_λ's para toda $\lambda \in (T(M)/\mathcal{D})^*$, en el sentido que los endomorfismos J_λ de $\mathcal{D}$ definidos por

$$g(J_\lambda x, y) = \omega_\lambda(X,Y)$$

satisfacen $J_\lambda^2 = -I$. En particular, $\mathcal{D}$ es una distribución de policontacto.

Se deduce que

Proposición 6.1.6. *Una distribución posee una estructura subconforme compatible si y sólo si su símbolo es de tipo Heisenberg.*

Como la cantidad de álgebras de tipo H con un dimensión fija es finita toda distribución con una estructura subconforme compatible es genéricamente de tipo constante.

De la proposición 5.1.7 obtenemos el siguiente:

Corolario 6.1.7. *Toda distribución de símbolo constante* $\mathfrak{n}$ *donde* $\mathfrak{n}$ *es un álgebra de tipo H irreducible con centro de dimensión* $\dim \mathfrak{g}^{-2} \equiv 3,5,6,7\,(mod\,8)$ *tiene una única estructura subconforme compatible canónica*

Una distribución fat que posee una estructura subconforme compatible (de tipo constante) tiene asociada naturalmente una estructura P^0 de tipo constante $(\mathfrak{n}, \mathfrak{g}^0_{sc}(\mathfrak{n}))$ donde $\mathfrak{n}$ es el álgebra de tipo H isomorfa al símbolo de la distribución y $\mathfrak{g}^0_{sc}$ es la subálgebra de derivaciones de $\mathfrak{n}$ que preservan la graduación y el producto interno salvo múltiplo. Si $\mathfrak{n}$ es de tipo 1-Iwasawa decimos que la estructura es parabólica y si no decimos que es no parabólica.

Sea G^0_{sc} el grupo de automorfismos de $\mathfrak{n}$ que preservan la métrica subconforme cuya álgebra de Lie es $\mathfrak{g}^0_{sc}$ y $G = G^0_{sc} \rtimes N$ donde N es el grupo de tipo H simplemente conexo con álgebra de Lie $\mathfrak{n}$.

Proposición 6.1.8. *Toda estructura subconforme compatible no parabólica de tipo constante tiene asociada canónicamente una conexión de Cartan normal de tipo* (G, G^0_{sc})

Demostración. Es consecuencia de 4.2.8 y 5.2.1. □

6.2. Distribuciones subriemannianas de contacto de tipo (2,3)

Sea $\mathfrak{h}_{2,1} = \mathfrak{g}^{-2} \oplus \mathfrak{g}^{-1}$ el álgebra de Heisenberg de dimensión 3. Como los automorfismos de $\mathfrak{h}$ actúan como $GL(2,\mathbb{R})$ en $\mathfrak{g}^{-1}$ todas las álgebra subriemannianas $(\mathfrak{h}, \langle\ ,\ \rangle)$ son isomorfas. Sea $\{x, y\}$ una base ortonormal de $\mathfrak{g}^{-1}$, luego $\{x, y, z = [x, y]\}$ es una base ortonormal de $\mathfrak{h}$.

Sea G^0 la componente conexa de la identidad de G^0_{sr}, es decir, el grupo de automorfismos del álgebra graduada $\mathfrak{h}$ cuya restricción a $\mathfrak{g}^{-1}$ es una isometría y preservan la orientación. En la base $\{x, y, z\}$ los elementos de G^0_{sr} se representan por

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & \\ \sin\theta & \cos\theta & \\ & & 1 \end{pmatrix},\ \theta \in \mathbb{R}$$

y su correspondiente algebra de Lie $\mathfrak{g}^0_{sr}$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha & \\ \alpha & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix},\ \alpha \in \mathbb{R}$$

G^0_{sr} actúa en $\mathfrak{h}$ de manera estándar y en $\mathfrak{g}^0_{sr}$ por la adjunta. Por la proposición 2.3.1 la prolongación de Tanaka de $(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}^0_{sr})$ es $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^0_{sr}$. En $\mathfrak{g}$ consideramos un producto interno que extiende el producto interno en $\mathfrak{h}$ y tal que $\mathfrak{g}^0_{sr}$ es ortogonal a $\mathfrak{h}$ (cf. Sección 2.3). G^0_{sr} preserva este producto interno.

Sea $\mathcal{D}$ una distribución subriemanniana de contacto en una variedad M de dimensión 3 orientada. En este caso, $\mathcal{D}$ es automáticamente de tipo constante subriemanniano $(\mathfrak{h}, \langle\ ,\ \rangle)$. Sean X e Y campos que, en cada punto p de un abierto U, definen una base ortonormal positiva de $\mathcal{D}_p$. Sea $\tilde{\theta}$ una 1-forma que define a $\mathcal{D}$ en U, i.e. $\ker(\tilde{\theta}) = \mathcal{D}$ y definimos

$$f_{\tilde{\theta}} = d\tilde{\theta}(X, Y)$$

Es fácil ver que $f_{\tilde{\theta}}$ es diferenciable y no depende de los campos X e Y seleccionados. Definimos la 1-forma

$$\theta = -\frac{1}{f_{\tilde{\theta}}}\tilde{\theta}$$

Veamos que θ no depende de la elección de $\tilde{\theta}$. Si $\tilde{\theta}'$ es otra 1-forma que define a $\mathcal{D}$ en U entonces existe una función g tal que $\tilde{\theta}' = g\tilde{\theta}$. Luego, $d\tilde{\theta}' = dg \wedge \tilde{\theta} + gd\tilde{\theta}$. Como $\tilde{\theta}$ se anula en $\mathcal{D}$, $f_{\tilde{\theta}'} = gf_{\tilde{\theta}}$. Concluimos que θ solo depende de $\mathcal{D}$ y de la métrica subriemanniana. Podemos considerar entonces el campo de Reeb Z asociado a θ. Es decir, el único campo que verifica

$$d\theta(Z, \cdot) = 0 \qquad \theta(Z) = 1$$

La distribución generada por Z es un complemento canónico de la distribución subriemanniana $\mathcal{D}$. Fijamos el marco $\{X, Y, Z\}$ en U.

Sean $r_1^1, r_1^2, r_2^1, r_2^2, e$ y f funciones en M definidas por

$$\begin{aligned}[X,Z] &= r_1^1 X + r_1^2 Y\\ [Y,Z] &= r_2^1 X + r_2^2 Y\\ [X,Y] &= Z + eX + fY\end{aligned} \tag{6.1}$$

Podemos encontrar relaciones entre las funciones r_1^1, r_1^2, r_2^1, r_2^2, e y f usando la identidad de Jacobi. De

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$$

obtenemos que:

$$\begin{aligned}& r_1^1 + r_2^2 = 0\\ & Ze + Xr_2^1 - Yr_1^1 - er_1^1 - fr_2^1 = 0\\ & Zf + Xr_2^2 - Yr_1^2 - er_1^2 - fr_2^2 = 0\end{aligned} \tag{6.2}$$

Para todo $p \in U$, $m(p) = \mathcal{D}(p) \oplus T_pM/\mathcal{D}(p)$ es el símbolo de la distribución en p. Por hipótesis, $m(p)$ es isomorfa a $\mathfrak{h}$ como álgebras graduadas, mas aún, $(m(p), \langle\ ,\ \rangle_p)$ y $(\mathfrak{h}, \langle\ ,\ \rangle)$ son álgebras subriemannianas isomorfas. Luego, el fibrado P^0 es el conjunto de pares (p, φ) con $p \in M$ y $\varphi : \mathfrak{h} \to m(p)$ un isomorfismo de álgebras graduadas tal que $\varphi|_{\mathfrak{g}^{-1}} : \mathfrak{g}^{-1} \to \mathcal{D}(p)$ es una isometría. P^0 es una estructura de tipo constante $(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}^0)$.

Para cada $\lambda \in P^0$, sea $\frac{\partial}{\partial\theta}|_\lambda = I_\lambda(r)$ donde $r = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, base de $\mathfrak{g}^0_{sr}$. $\frac{\partial}{\partial\theta}$ es un campo vertical en P^0

Podemos definir la siguiente sección de P^0:

$$\begin{array}{rcl}\Phi : U & \to & P^0\\ p & \mapsto & \Phi(p) = (p, \varphi_p)\end{array}$$

donde

$$\begin{aligned}\varphi_p(x) &= X(p)\\ \varphi_p(y) &= Y(p)\\ \varphi_p(z) &= Z(p) + \mathcal{D}(p)\end{aligned}$$

Esta sección nos define una trivialización de P^0 dada por:

$$\begin{array}{rcl}\tilde{\Phi} : U \times G^0_{sr} & \to & P^0\\ (p, R) & \mapsto & \tilde{\Phi}(p,R) = (p, \varphi_p \cdot R)\end{array}$$

mediante la cual definimos coordenadas (p, θ) en P^0.

Si $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & \\ \sin\theta & \cos\theta & \\ & & 1\end{pmatrix}$, entonces

$$\begin{aligned}(\varphi_p \cdot R_\theta)(x) &= \cos\theta \tilde{X}(p) + \sin\theta \tilde{Y}(p)\\ (\varphi_p \cdot R_\theta)(y) &= -\sin\theta \tilde{X}(p) + \cos\theta \tilde{Y}(p)\\ (\varphi_p \cdot R_\theta)(z) &= \tilde{Z}(p) + \mathcal{D}(p)\end{aligned}$$

A partir de la trivialización $\tilde{\Phi}$, los campos X, Y y Z se levantan a campos en P^0 que denominaremos $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ y $\tilde{Z}$ que junto con $\frac{\partial}{\partial\theta}$ definen un marco de P^0. Los corchetes entre estos campos verifican las mismas relaciones (6.1) que los campos en M y $[\tilde{X}, \frac{\partial}{\partial\theta}] = [\tilde{Y}, \frac{\partial}{\partial\theta}] = [\tilde{Z}, \frac{\partial}{\partial\theta}] = 0$. Además, si f es una función en M considerada en P^0 entonces $\tilde{X}f = Xf$, y análogamente para $\tilde{Y}$ y $\tilde{Z}$. Luego, tenemos en P^0 la filtración

$$\mathcal{D}_0^0 = \langle\{\frac{\partial}{\partial\theta}\}\rangle \quad \subset \quad \mathcal{D}_0^{-1} = \langle\{\tilde{X}, \tilde{Y}, \frac{\partial}{\partial\theta}\}\rangle \quad \subset \quad \mathcal{D}_0^{-2} = TP^0$$

Fijamos $\lambda = (p, \theta) \in P^0$, o sea $\lambda = \varphi_p \cdot R_\theta$. Las formas tautológicas parciales son:

$$\begin{array}{ll}
\omega_0^{-1} : \mathcal{D}_0^{-1}(\lambda) \to \mathfrak{g}^{-1} & \omega_0^{-2} : T_\lambda P^0 \to \mathfrak{g}^{-2} \\
\omega_0^{-1}(\tilde{X}(\lambda)) = \cos\theta x - \sin\theta y & \omega_0^{-2}(\tilde{Z}(\lambda)) = z \\
\omega_0^{-1}(\tilde{Y}(\lambda)) = \sin\theta x + \cos\theta y & \omega_0^{-2}(\mathcal{D}_0^{-1}(\lambda)) = 0 \\
\omega_0^{-1}(\frac{\partial}{\partial\theta}|_\lambda) = 0 &
\end{array}$$

Todo par de subespacios horizontales es de la forma:

$$\begin{aligned}
H^{-1}(\lambda) &= \langle\{\tilde{X}(\lambda) + a_1(\lambda)\frac{\partial}{\partial\theta}|_\lambda,\ \tilde{Y}(\lambda) + b_1(\lambda)\frac{\partial}{\partial\theta}|_\lambda\}\rangle \\
H^{-2}(\lambda) &= \langle\{\tilde{Z}(\lambda) + a_2(\lambda)\tilde{X}(\lambda) + b_2(\lambda)\tilde{Y}(\lambda) + \mathcal{D}_0^0(\lambda)\}\rangle
\end{aligned}$$

para ciertas funciones a_1, a_2, b_1, b_2 en P^0. A este par de subespacios le corresponde la función

$$\varphi^{\mathcal{H}_1} \in Hom(\mathfrak{g}^0, \mathcal{D}_0^0(\lambda)) \oplus Hom(\mathfrak{g}^{-1}, \mathcal{D}_0^{-1}(\lambda)) \oplus Hom(\mathfrak{g}^{-2}, T_\lambda P^0/\mathcal{D}_0^0(\lambda))$$

$$\begin{aligned}
\varphi^{\mathcal{H}_1}(x) &= \cos\theta\tilde{X}(\lambda) + \sin\theta\tilde{Y}(\lambda) + (\cos\theta a_1(\lambda) + \sin\theta b_1(\lambda))\frac{\partial}{\partial\theta}|_\lambda \\
\varphi^{\mathcal{H}_1}(y) &= -\sin\theta\tilde{X}(\lambda) + \cos\theta\tilde{Y}(\lambda) + (-\sin\theta a_1(\lambda) + \cos\theta b_1(\lambda))\frac{\partial}{\partial\theta}|_\lambda \\
\varphi^{\mathcal{H}_1}(z) &= \tilde{Z}(\lambda) + a_2(\lambda)\tilde{X}(\lambda) + b_2(\lambda)\tilde{Y}(\lambda) + \mathcal{D}_0^0(\lambda) \\
\varphi^{\mathcal{H}_1}(r) &= \frac{\partial}{\partial\theta}|_\lambda
\end{aligned}$$

Calculemos la torsión del par $H = \{H^{-1}, H^{-2}\}$. Para $x \in \mathfrak{g}^{-1}$ y $z \in \mathfrak{g}^{-2}$, los campos $\hat{X} = \cos\theta\tilde{X} + \sin\theta\tilde{Y} + (\cos\theta a_1 + \sin\theta b_1)\frac{\partial}{\partial\theta}$ y $\hat{Z} = \tilde{Z} + a_2\tilde{X} + b_2\tilde{Y}$ verifican las condiciones en 3.5 y además:

$$[\hat{X}, \hat{Z}] \equiv \cos\theta[\tilde{X}, \tilde{Z}] + \sin\theta[\tilde{Y}, \tilde{Z}] - \sin\theta a_2\tilde{Z} + \cos\theta b_2\tilde{Z} \equiv -\sin\theta a_2\tilde{Z} + \cos\theta b_2\tilde{Z} \quad (mod\,\mathcal{D}_0^{-1})$$

Por definición,

$$\begin{aligned}
C_H(x, z) &= \bar{\omega}_0^{-2}([\hat{X}, \hat{Z}](\lambda) + \mathcal{D}_0^{-1}(\lambda)) \\
&= (-\sin\theta a_2 + \cos\theta b_2)z
\end{aligned}$$

Análogamente, considerando el campo $\hat{Y} = -\sin\theta\tilde{X} + \cos\theta\tilde{Y} + (-\sin\theta a_1 + \cos\theta b_1)\frac{\partial}{\partial\theta}$ obtenemos

$$C_H(y, z) = (-\cos\theta a_2 - \sin\theta b_2)z$$

Por otro lado,

$$[\hat{X},\hat{Y}] \equiv \tilde{Z} + (e-a_1)\tilde{X} + (f-b_1)\tilde{Y} \quad (mod\, \mathcal{D}_0^0)$$

$$\begin{aligned} C_H(x,y) &= \bar{\omega}_0^{-1}(pr_{-2}^{H}([\hat{X},\hat{Y}](\lambda)+\mathcal{D}_0^0(\lambda))) \\ &= [(e-a_1-a_2)\cos\theta + (f-b_1-b_2)\sin\theta]x \\ &+ \ [-(e-a_1-a_2)\sin\theta + (f-b_1-b_2)\cos\theta]y \end{aligned}$$

El operador de Spencer generalizado para la primera prolongación es de la forma

$$\partial_0 : Hom(\mathfrak{g}^{-2},\mathfrak{g}^{-1}) \oplus Hom(\mathfrak{g}^{-1},\mathfrak{g}^{0}) \quad \to \quad Hom(\mathfrak{g}^{-1}\otimes\mathfrak{g}^{-2},\mathfrak{g}^{-2}) \oplus Hom(\mathfrak{g}^{-1}\wedge\mathfrak{g}^{-1},\mathfrak{g}^{-1})$$

Es inyectivo (ver 2.3.1) y la dimensión del dominio coincide con la del codominio. Luego ∂_0 es un isomorfismo y el único subespacio complementario de su imagen es $\mathcal{N} = \{0\}$. Entonces

$$C_H \in \mathcal{N} \Leftrightarrow C_H \equiv 0 \Leftrightarrow a_1 = e, \quad b_1 = f, \quad a_2 = b_2 = 0$$

Sea

$$\begin{aligned} \varphi^{\mathcal{H}_1}(x) &= \cos\theta\tilde{X}(\lambda) + \sin\theta\tilde{Y}(\lambda) + (\cos\theta e + \sin\theta f)\frac{\partial}{\partial\theta}|_\lambda \\ \varphi^{\mathcal{H}_1}(y) &= -\sin\theta\tilde{X}(\lambda) + \cos\theta\tilde{Y}(\lambda) + (-\sin\theta e + \cos\theta f)\frac{\partial}{\partial\theta}|_\lambda \\ \varphi^{\mathcal{H}_1}(z) &= \tilde{Z}(\lambda) + \mathcal{D}_0^0(\lambda) \\ \varphi^{\mathcal{H}_1}(r) &= \frac{\partial}{\partial\theta}|_\lambda \end{aligned}$$

En este caso, el fibrado P^1 es isomorfo a P^0 y está formado por las funciones $\varphi^{\mathcal{H}_1}$ que se proyectan al correspondiente $\lambda \in P^0$. Esto concluye la primera prolongación. Podemos pensar que $\varphi^{\mathcal{H}_1}$ es un "marco" que "mejora" el dado por λ. Para llegar a un marco real y obtener la conexión de Cartan asociada a nuestra estructura debemos prolongar una vez más (para eliminar la ambiguedad en $\varphi^{\mathcal{H}_1}(z)$).

El operador de Spencer generalizado de grado 2 en este caso es

$$\partial_1 : Hom(\mathfrak{g}^{-2},\mathfrak{g}^{0}) \quad \to \quad Hom(\mathfrak{g}^{-1}\oplus\mathfrak{g}^{-2},\mathfrak{g}^{-1}) \oplus Hom(\mathfrak{g}^{-1}\wedge\mathfrak{g}^{-1},\mathfrak{g}^{0})$$

que tiene dominio e imagen de dimensión 1. A partir de cada complemento de la imagen de ∂_1 que sea invariante por la acción del grupo $G^0_{sr} = SO(2)$ podemos construir una conexión de Cartan asociada a nuestra estructura. En particular, el complemento ortogonal, al que llamamos $\mathcal{H}$, se corresponde con la conexión de Cartan normal.

Como $f(z) = r$ genera el dominio de ∂_1, entonces la función:

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x,z) &= -y \\ \partial_1 f(y,z) &= x \\ \partial_1 f(x,y) &= -r \end{aligned}$$

genera la imagen de ∂_1. Luego obtenemos que:

$$g \in \mathcal{H} \Longleftrightarrow -\langle g(x,z),y\rangle + \langle g(y,z),x\rangle - \langle g(x,y),r\rangle = 0$$

Como P^1 es difeomorfo a P^0 podemos identificarlos.

Las estructuras horizontales en en este caso tienen la forma:

$$\begin{aligned}\hat{H}_2^{-1}(\lambda) &= \langle\{\tilde{X}(\lambda)+e\frac{\partial}{\partial\theta}|_\lambda,\ \tilde{Y}(\lambda)+f\frac{\partial}{\partial\theta}|_\lambda\}\rangle\\ \hat{H}_2^{-2}(\lambda) &= \langle\{\tilde{Z}(\lambda)+c(\lambda)\frac{\partial}{\partial\theta}|_\lambda\}\rangle\end{aligned}$$

donde c es una función en P^0 a determinar.

A partir de la condición $-\langle C_{\mathcal{H}}(x,z),y\rangle+\langle C_{\mathcal{H}}(y,z),x\rangle-\langle C_{\mathcal{H}}(x,y),A\rangle=0$ y del cálculo de la función de torsión obtenemos que

$$c=\frac{r_1^2-r_2^1+Xf-Ye-e^2-f^2}{3}$$

Arribamos de esta manera a un marco canónico en P^0 que a su vez es invariante por la acción del grupo estructural G_{sr}^0:

$$\begin{aligned}\varphi^{\mathcal{H}_2}(z) &= \tilde{Z}(\lambda)+\frac{r_1^2-r_2^1+Xf-Ye-e^2-f^2}{3}\frac{\partial}{\partial\theta}|_\lambda\\ \varphi^{\mathcal{H}_2}(x) &= \cos\theta\tilde{X}(\lambda)+\sin\theta\tilde{Y}(\lambda)+(\cos\theta e+\sin\theta f)\frac{\partial}{\partial\theta}|_\lambda\\ \varphi^{\mathcal{H}_2}(y) &= -\sin\theta\tilde{X}(\lambda)+\cos\theta\tilde{Y}(\lambda)+(-\sin\theta e+\cos\theta f)\frac{\partial}{\partial\theta}|_\lambda\\ \varphi^{\mathcal{H}_2}(r) &= \frac{\partial}{\partial\theta}|_\lambda\end{aligned}$$

La conexión de Cartan normal viene dada por la "inversa" de $\varphi^{\mathcal{H}_2}$,

$$\begin{aligned}\omega(\tilde{Z}) &= z-\frac{r_1^2-r_2^1+Xf-Ye-e^2-f^2}{3}r\\ \omega(\tilde{X}) &= \cos\theta x-\sin\theta y-er\\ \omega(\tilde{Y}) &= \sin\theta x+\cos\theta y-fr\\ \omega(\frac{\partial}{\partial\theta}|_\lambda) &= r\end{aligned}\tag{6.3}$$

Su curvatura se descompone, según (2.4), en una parte de grado 2:

$$\begin{aligned}\kappa^2(x,y) &= \frac{r_1^2-r_2^1-2Xf+2Ye+2e^2+2f^2}{3}r\\ \kappa^2(x,z) &= \{-\cos^2\theta r_1^1-\cos\theta\sin\theta(r_1^2+r_2^1)-\sin^2\theta r_2^2\}\,x\\ &\quad+\{-\cos^2\theta r_1^2+\cos\theta\sin\theta(r_1^1-r_2^2)+\sin^2\theta r_2^1+c\}\,y\\ \kappa^2(y,z) &= \{-\cos^2\theta r_2^1+\cos\theta\sin\theta(r_1^1-r_2^2)+\sin^2\theta r_1^2-c\}\,x\\ &\quad+\{-\cos^2\theta r_2^2+\cos\theta\sin\theta(r_2^1+r_1^2)-\sin^2\theta r_1^1\}\,y\end{aligned}$$

y una de grado 3:

$$\begin{aligned}
\kappa^3(x,y) &= 0\\
\kappa^3(x,z) &= \{(\cos\theta r_1^1 + \sin\theta r_2^1)e + (\cos\theta r_1^2 + \sin\theta r_2^2)f\\
&\quad - \cos\theta \tilde{X}c - \sin\theta \tilde{Y}c + \cos\theta \tilde{Z}e + \sin\theta \tilde{Z}f\}\, r\\
\kappa^3(y,z) &= \{(-\sin\theta r_1^1 + \cos\theta r_2^1)e + (-\sin\theta r_1^2 + \cos\theta r_2^2 f\\
&\quad + \sin\theta \tilde{X}c - \cos\theta \tilde{Y}c - \sin\theta \tilde{Z}e + \cos\theta \tilde{Z}f\}\, r
\end{aligned}$$

Recordemos que la curvatura armónica es la parte armónica de la curvatura que sigue siendo un sistema de invariantes fundamentales de nuestra estructura. En el siguiente capítulo, calculamos los grupos de cohomología de $\mathfrak{h}_{2,1}$ y sus formas armónicas (cf. 7.2). En particular, se ve que solo $H^{2,2} \neq 0$ por lo que la curvatura armónica tiene grado 2 y κ_3 puede descartarse. Más precisamente,

$$\begin{aligned}
\kappa_H(x,y) &= \frac{r_1^2 - r_2^1 - 2Xf + 2Ye + 2e^2 + 2f^2}{3} r\\
\kappa_H(x,z) &= (-\cos^2\theta r_1^1 - \cos\theta\sin\theta(r_1^2 + r_2^1) - \sin^2\theta r_2^2)x\\
&\quad + (-\cos^2\theta r_1^2 + \cos\theta\sin\theta(r_1^1 - r_2^2) + \sin^2\theta r_2^1 + c)y\\
\kappa_H(y,z) &= (-\cos^2\theta r_2^1 + \cos\theta\sin\theta(r_1^1 - r_2^2) + \sin^2\theta r_1^2 - c)x\\
&\quad + (-\cos^2\theta r_2^2 + \cos\theta\sin\theta(r_2^1 + r_1^2) - \sin^2\theta r_1^1)y
\end{aligned}$$

Los coeficientes de la P^1 forman un sistema de invariantes fundamentales de la estructura P^0 y a partir de ellos podemos construir un sistema de invariantes fundamentales en M. En efecto, las funciones

$$\phi_1 = \langle \kappa_H(x,y), r\rangle = \frac{r_1^2 - r_2^1 - 2Xf + 2Ye + 2e^2 + 2f^2}{3} \tag{6.4}$$

$$\begin{aligned}
\phi_2 &= \sqrt{(\langle\kappa_H(x,z),x\rangle - \langle\kappa_H(y,z),y\rangle)^2 + (\langle\kappa_H(x,z),y\rangle + \langle\kappa_H(y,z),x\rangle)^2}\\
&= \sqrt{(r_1^1 - r_2^2)^2 + (r_1^2 + r_2^1)^2}
\end{aligned} \tag{6.5}$$

están definidas en M y además a partir de ellas podemos reconstruir la curvatura armónica. En efecto, tomando una sección adecuada de P^0 resulta,

$$\begin{aligned}
\kappa_H(x,y) &= \phi_1 r\\
\kappa_H(x,z) &= \frac{1}{2}\cos\theta'\,\phi_2 x + \frac{1}{2}(\sin\theta'\,\phi_2 - \phi_1)y\\
\kappa_H(y,z) &= \frac{1}{2}(\sin\theta'\,\phi_2 + \phi_1)\,x - \frac{1}{2}\cos\theta'\,\phi_2 y
\end{aligned}$$

Teorema 6.2.1. *Sea $\mathcal{D}$ una distribución subriemanniana de contacto en una variedad M de dimensión 3 orientada. Consideramos un marco X, Y, Z como en 6.1*

1. *La conexión de Cartan normal asociada viene dada por (6.3).*

2. *Un sistema de invariantes fundamentales de* $\mathcal{D}$ *es*

$$\phi_1 = \frac{r_1^2 - r_2^1 - 2Xf + 2Ye + 2e^2 + 2f^2}{3} \tag{6.6}$$

$$\phi_2 = \sqrt{(r_1^1 - r_2^2)^2 + (r_1^2 + r_2^1)^2} \tag{6.7}$$

3. $\mathcal{D}$ *es localmente equivalente (alrededor de un punto* p*) a la distribución invariante a izquierda estandar del grupo de Heisenberg con la métrica subriemanniana invariante sí y sólo si:*

$$r_1^1 = r_2^2 = 0$$
$$-r_2^1 = r_1^2 = Xf - Ye - e^2 - f^2$$

en un entorno del punto p*.*

Observación 6.2.2. La elección del campo de Reeb al principio del proceso de prolongación se hizo únicamente para simplificar los cálculos, si partíamos de un campo $\widetilde{Z}$ arbitrario en la clase de $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]$ módulo $\mathcal{D}$ el proceso se aplicaba de la misma forma arribando a la misma conexión de Cartan. El campo de Reeb se obtiene naturalmente como la proyección de $\omega^{-1}(z)$ a TM, que junto con $\mathcal{D}$ determinan la graduación canónica de M dada por 4.2.9. Es más, el campo de Reeb ya se obtiene luego de la primera prolongación como la proyección de $\varphi^{\mathcal{H}_1}(z)$.

Veamos qué otras conexiones de Cartan podemos obtener si consideramos otros complementos invariantes de la imagen de ∂_1. Descomponiendo la representación $Hom(\mathfrak{g}^{-1} \oplus \mathfrak{g}^{-2}, \mathfrak{g}^{-1}) \oplus Hom(\mathfrak{g}^{-1} \wedge \mathfrak{g}^{-1}, \mathfrak{g}^0)$ de $G_{sr}^0 = SO(2)$ en irreducibles vemos que $Hom(\mathfrak{g}^{-1} \oplus \mathfrak{g}^{-2}, \mathfrak{g}^{-1}) \oplus Hom(\mathfrak{g}^{-1} \wedge \mathfrak{g}^{-1}, \mathfrak{g}^0) = A_2 \oplus 3A_0$ donde A_2 es la representación de dimensión real 2 que se obtiene de la representación compleja que resulta de multiplicar por $e^{2\theta i}$ y A_0 es la representación trivial de dimensión 1. La imagen de ∂_1 es una representación trivial A_0 y todo complemento invariante será una representación de la forma $A_2 \oplus 2A_0$ con $2A_0 \subset 3A_0$ complementario a la imagen de ∂_1. Por lo tanto, cada complemento invariante se corresponde con un subespacio complementario a la imagen de ∂_1 en la componente isotípica $3A_0$. Calculando vemos que estos complementos $\mathcal{H}_{a,b}$ están parametrizados por a, $b \in \mathbb{R}$ de manera que $g \in \mathcal{H}_{a,b}$ si y sólo si:

$$b\langle g(x,z), x\rangle - (a-1)\langle g(x,z), y\rangle + (a-1)\langle g(y,z), x\rangle + b\langle g(y,z), y\rangle + 2a\langle g(x,y), r\rangle = 0$$

En cuyo caso:

$$c_a = (1-a)\frac{r_1^2 - r_2^1}{2} + a(Xf - Ye - e^2 - f^2) \tag{6.8}$$

En todo caso la conexión de Cartan que obtenemos depende sólo del parámetro $a \in \mathbb{R}$ y viene dada por:

$$\omega_a(\tilde{X}) = \cos\theta x - \sin\theta y - er$$
$$\omega_a(\tilde{Y}) = \sin\theta x + \cos\theta y - fr$$
$$\omega_a(\tilde{Z}) = z - c_a r$$
$$\omega_a(\frac{\partial}{\partial\theta}) = r$$

Recordando la Proposición 4.2.9, vemos que todas estas conexiones definen el mismo complemento canónico, i.e. el definido por el campo de Reeb. Sin embargo, determinan una familia uniparamétrica de conexiones principales en P^0 canónicamente asociadas a nuestra estructura que a su vez inducen conexiones lineales canónicas en TM dadas por:

$$\nabla_X X = -eY \quad \nabla_X Y = eX \quad \nabla_Y X = -fY \quad \nabla_Y Y = fX$$
$$\nabla_Z X = -c_a Y \quad \nabla_Z Y = c_a X \quad \nabla Z = 0$$

Su torsión es:

$$T(X,Y) = -Z \quad T(X,Z) = -r_1^1 X + (c_a - r_1^2)Y \quad T(Y,Z) = (-c_a - r_2^1)X - r_2^2 Y$$

En la literatura de geometría subriemanniana aparece regularmente la conexión lineal que verifica:

$$\langle T(X,Z), Y\rangle = \langle T(Y,Z), Z\rangle$$

que se corresponde con la dada por $a = 1$ [BFG] [Hl]. No hemos encontrado referencias de esta familia de conexiones en la bibliografía.

Supongamos ahora que M es un grupo de Lie de dimensión 3 y que $\mathcal{D}$ y la métrica subriemanniana son invariantes a izquierda. Podemos encontrar una base como en (6.1) invariante a izquierda y por lo tanto, los coeficientes de estructura y los invariantes fundamentales serán constantes. Sin embargo, si estos invariantes no son nulos la estructura no es playa, i.e. equivalente a la distribución invariante a izquierda estándar del grupo de Heisenberg con la métrica subriemanniana invariante. Además, dos de dichas estructuras son equivalentes si y sólo si sus invariantes coinciden (todas sus derivadas son cero). Vamos a ver cuáles son dichas estructuras en los casos que un único invariante sea no cero.

1. $\phi_1 = 0$, o sea $r_1^2 - r_2^1 + 2e^2 + 2f^2 = 0$. De las condiciones (6.2) resulta que

$$fr_2^1 = -er_1^1$$
$$er_1^2 = fr_1^1$$

   Supongamos que $(e,f) \neq (0,0)$. Multiplicando ϕ_1 por ef y reemplazando por estas identidades obtenemos que $r_1^1 = -2ef$, $r_2^1 = 2e^2$ y $r_1^2 = -2f^2$. Entonces,

$$[X,Z] = -2efX - 2f^2Y$$
$$[Y,Z] = 2e^2X + 2efY$$
$$[X,Y] = Z + eX + fY$$

   con $\phi_2 = 2\sqrt{e^2+f^2}$. Son álgebras de Lie solubles de la forma $\langle A\rangle \rtimes \mathbb{R}^2$ con $A \in \mathfrak{gl}(2)$.

   Supongamos ahora que $(e,f) = (0,0)$. Entonces, $r_1^2 = r_2^1$ y

$$[X,Z] = r_1^1 X + r_1^2 Y$$
$$[Y,Z] = r_1^2 X - r_1^1 Y$$
$$[X,Y] = Z$$

   con $\phi_2 = 2\sqrt{(r_1^1)^2 + (r_1^2)^2}$. El álgebra es isomorfa a $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$.

2. $\phi_2 = 0$, luego $r_1^1 = 0$ y $r_1^2 = -r_2^1$.

$$[X,Z] = r_1^2 Y$$
$$[Y,Z] = -r_1^2 X$$
$$[X,Y] = Z + eX + fY$$

con $\phi_1 = 2(r_1^2 + e^2 + f^2)$.

Si $r_1^2 = 0$, el álgebra es soluble,

$$\begin{aligned}
&[X, Z] = 0 \\
&[Y, Z] = 0 \\
&[X, Y] = Z + eX + fY
\end{aligned}$$

con $\phi_1 = 2(e^2 + f^2) > 0$.

Si $r_1^2 \neq 0$, por (6.2), $e = f = 0$ y $\phi_1 = 2r_1^2$. Entonces, el álgebra es semisimple. Más precisamente, es isomorfa a $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ si $r_1^2 > 0$ y a $\mathfrak{su}(2)$ si $r_1^2 < 0$

6.3. Distribuciones subriemannianas y subconformes de tipo (3,5)

Consideremos ahora el álgebra 2-graduada fundamental no degenerada $\mathfrak{m}_{3,2} = \mathfrak{g}^{-2} \oplus \mathfrak{g}^{-1}$ con $\mathfrak{g}^{-2} = span\{z_1, z_2\}$, $\mathfrak{g}^{-1} = span\{x_1, x_2, x_3\}$ y definida por

$$[x_1, x_3] = z_1 \qquad [x_2, x_3] = z_2$$

Esta es el álgebra dos pasos nilpotente fundamental no degenerada de menor dimensión que no es de tipo H.

Sea G^0 el grupo de automorfismos del álgebra graduada $\mathfrak{m}_{3,2}$. En la base $\{z_1, z_2, x_1, x_2, x_3\}$ los elementos de G^0 se representan por

$$\begin{pmatrix} ag & bg & & & \\ cg & dg & & & \\ & & a & b & e \\ & & c & d & f \\ & & & & g \end{pmatrix} \; a,\, b,\, c,\, d,\, e,\, f,\, g \in \mathbb{R} - \{0\}$$

y su correspondiente algebra de Lie $\mathfrak{g}^0$,

$$\begin{pmatrix} a+g & b & & & \\ c & d+g & & & \\ & & a & b & e \\ & & c & d & f \\ & & & & g \end{pmatrix},\; a,\, b,\, c,\, d,\, e,\, f,\, g \in \mathbb{R}.$$

La prolongación de $\mathfrak{m}_{3,2}$ es de dimensión infinita y está calculada explícitamente en [Ku].

Podemos considerar ciertos subgrupos del grupo G^0:

- G_p^0, el subgrupo de los automorfismos de $\mathfrak{m}_{3,2}$ que preservan el subespacio generado por x_3.

$$G_p^0 = \{ \begin{pmatrix} ag & bg & & & \\ cg & dg & & & \\ & & a & b & \\ & & c & d & \\ & & & & g \end{pmatrix} \; : \; a,\, b,\, c,\, d,\, g \in \mathbb{R} - \{0\}\}$$

y su correspondiente álgebra de Lie

$$\mathfrak{g}_p^0 = \{ \begin{pmatrix} a+g & b & & & \\ c & d+g & & & \\ & & a & b & \\ & & c & d & \\ & & & & g \end{pmatrix}, a, b, c, d, g \in \mathbb{R}\}$$

La prolongación del par $(\mathfrak{m}_{3,2}, \mathfrak{g}_p^0)$ es $sl(4, \mathbb{R})$.

Definimos en $\mathfrak{m}_{3,2}$ el producto interno $\langle\ ,\ \rangle$ que resulta de considerar $\{z_1, z_2, x_1, x_2, x_3\}$ ortonormal y el producto interno subconforme correspondiente.

- G_{sc}^0, el subgrupo de los automorfismos de $\mathfrak{m}_{3,2}$ que preservan conformemente el producto interno en $\mathfrak{g}^{-1}$ y su orientación.

$$G_{sc}^0 = \{ \begin{pmatrix} \rho^2\cos\theta & -\rho^2\sin\theta & & & \\ \rho^2\sin\theta & \rho^2\cos\theta & & & \\ & & \rho\cos\theta & -\rho\sin\theta & \\ & & \rho\sin\theta & \rho\cos\theta & \\ & & & & \rho \end{pmatrix}, \theta, \rho \in \mathbb{R}^+\}$$

y su correspondiente álgebra de Lie

$$\mathfrak{g}_{sc}^0 = \{ \begin{pmatrix} 2\beta & -\alpha & & & \\ \alpha & 2\beta & & & \\ & & \beta & -\alpha & \\ & & \alpha & \beta & \\ & & & & \beta \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

- G_{sr}^0, el subgrupo de los automorfismos de $\mathfrak{m}_{3,2}$ que preservan el producto interno y la orientación de $\mathfrak{g}^{-1}$

$$G_{sr}^0 = \{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & & & \\ \sin\theta & cos\theta & & & \\ & & \cos\theta & -\sin\theta & \\ & & -\sin\theta & \cos\theta & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} - \{0\}\}$$

y su correspondiente álgebra de Lie

$$\mathfrak{g}_{sr}^0 = \{ \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & & & \\ \alpha & 0 & & & \\ & & 0 & -\alpha & \\ & & \alpha & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Las prolongaciones de $(\mathfrak{m}_{3,2}, \mathfrak{g}_{sc}^0)$ y $(\mathfrak{m}_{3,2}, \mathfrak{g}_{sr}^0)$ son ambas triviales, o sea, $\mathfrak{g}^1(\mathfrak{m}_{3,2}, \mathfrak{g}_{sc}^0) = \{0\}$ y $\mathfrak{g}^1(\mathfrak{m}_{3,2}, \mathfrak{g}_{sr}^0) = \{0\}$ (cf. Proposición 2.3.1).

Sea $\mathcal{D}$ una distribución subconforme (o subriemanniano) de tipo constante subconforme (o subriemanniano) $(\mathfrak{m}_{3,2}, \langle\ ,\ \rangle)$ en una variedad orientada M de dimensión 5. Luego existe una base local de la distribución $\{X_1, X_2, X_3\}$ compuesta por campos conformemente ortonormales en cada punto (para toda métrica de la clase conforme son ortogonales y de la misma longitud) tales que

$$\{X_1, X_2, X_3, [X_1, X_3], [X_2, X_3]\}$$

es un marco positivo y:

$$[X_1, X_2] = q_1 X_1 + q_2 X_2 + q_3 X_3 \tag{6.9}$$
$$[X_1, X_3] = Z_1 + s_1 X_1 + s_2 X_2 + s_3 X_3 \notin \mathcal{D} \tag{6.10}$$
$$[X_2, X_3] = Z_2 + t_1 X_1 + t_2 X_2 + t_3 X_3 \notin \mathcal{D} \tag{6.11}$$

Existen funciones r_{ij}^k, u_{ij}^l, w_i y v_j con $i, l = 1, 2$ y $j, k = 1, 2, 3$ tales que

$$[Z_i, X_j] = u_{ij}^1 Z_1 + u_{ij}^2 Z_2 + r_{ij}^1 X_1 + r_{ij}^2 X_2 + r_{ij}^3 X_3 \tag{6.12}$$
$$[Z_1, Z_2] = w_1 Z_1 + w_2 Z_2 + v_1 X_1 + v_2 X_2 + v_3 X_3 \tag{6.13}$$

Observamos que la elección de los campos Z_1 y Z_2 es arbitraria entre los campos conguentes con $[X_1, X_3]$ y $[X_2, X_3]$ módulo $\mathcal{D}$. Luego de la primera prolongación veremos qué elección es la más conveniente (como el campo de Reeb en la sección anterior).

Desarrollaremos aquí el caso subconforme haciendo algunas acotaciones sobre el caso subriemanniano, que es análogo.

Como en el caso anterior construimos el fibrado P^0 que es una estructura de tipo constante $(\mathfrak{m}_{3,2}, \mathfrak{g}_c^0)$, y definimos una sección de P^0:

$$\begin{array}{rcl} \Phi : M & \to & P^0 \\ p & \mapsto & \Phi(p) = (p, \varphi_p) \end{array}$$

donde

$$\varphi_p(x_i) = X_i(p) \qquad \varphi_p(z_j) = Z_j(p) + \mathcal{D}(p)$$

para $i = 1, 2, 3$ y $j = 1, 2$.

Si $R_\theta = \begin{pmatrix} \rho^2\cos\theta & -\rho^2\sin\theta & & & \\ \rho^2\sin\theta & \rho^2\cos\theta & & & \\ & & \rho\cos\theta & -\rho\sin\theta & \\ & & -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & \\ & & & & \rho \end{pmatrix}$, la acción en el fibrado P^0 viene dada por:

$$\begin{aligned}
(\varphi_p \cdot R_\theta)(z_1) &= \rho^2 \cos\theta Z_1(p) + \rho^2 \sin\theta Z_2(p) + \mathcal{D}(p) \\
(\varphi_p \cdot R_\theta)(z_2) &= -\rho^2 \sin\theta Z_1(p) + \rho^2 \cos\theta Z_2(p) + \mathcal{D}(p) \\
(\varphi_p \cdot R_\theta)(x_1) &= \rho\cos\theta X_1(p) + \rho\sin\theta X_2(p) \\
(\varphi_p \cdot R_\theta)(x_2) &= -\rho\sin\theta X_1(p) + \rho\cos\theta X_2(p) \\
(\varphi_p \cdot R_\theta)(x_3) &= \rho X_3(p)
\end{aligned}$$

Como antes, la sección Φ define coordenadas (p, ρ, θ) en P^0 y consideramos los levantamientos $\tilde{X}_i$, $\tilde{Z}_j$ a P^0 de los campos $\tilde{X}_i$, $\tilde{Z}_j$ en M para $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2$. Entonces, la filtración inducida en P^0 es:

$$\mathcal{D}_0^0 = \langle\{\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\rho}\}\rangle \quad \subset \quad \mathcal{D}_0^{-1} = \langle\{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3, \frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\rho}\}\rangle \quad \subset \quad \mathcal{D}_0^{-2} = TP^0$$

y las formas tautológicas parciales

$$\begin{aligned}
&\omega_0^{-1}: \mathcal{D}_0^{-1} \to \mathfrak{g}^{-1} \\
&\omega_0^{-1}(\tilde{X}_1) = \frac{\cos\theta}{\rho}x_1 - \frac{\sin\theta}{\rho}x_2 \\
&\omega_0^{-1}(\tilde{X}_2) = \frac{\sin\theta}{\rho}x_1 + \frac{\cos\theta}{\rho}x_2 \\
&\omega_0^{-1}(\tilde{X}_3) = \frac{1}{\rho}x_3 \\
&\omega_0^{-1}(\mathcal{D}_0^0) = 0
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&\omega_0^{-2}: T_\rho P^0 \to \mathfrak{g}^{-2} \\
&\omega_0^{-2}(\tilde{Z}_1) = \frac{\cos\theta}{\rho^2}z_1 - \frac{\sin\theta}{\rho^2}z_2 \\
&\omega_0^{-2}(\tilde{Z}_2) = \frac{\sin\theta}{\rho^2}z_1 + \frac{\cos\theta}{\rho^2}z_2 \\
&\omega_0^{-2}(\mathcal{D}_0^{-1}) = 0
\end{aligned}$$

Fijamos $\varphi = (p, \rho, \theta) \in P^0$. En lo que sigue las funciones y los campos estarán evaluadas en φ pero lo obviaremos para simplificar la notación.

Cada par de subespacios horizontales en φ es de la forma:

$$\begin{aligned}
H^{-1} =& \langle \{\tilde{X}_1 + a_1\frac{\partial}{\partial\theta} + a_2\rho\frac{\partial}{\partial\rho},\ \tilde{X}_2 + b_1\frac{\partial}{\partial\theta} + b_2\rho\frac{\partial}{\partial\rho}, \\
& \tilde{X}_3 + c_1\frac{\partial}{\partial\theta} + c_2\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\}\rangle \\
H^{-2} =& \langle \{\tilde{Z}_1 + d_1\tilde{X}_1 + d_2\tilde{X}_2 + d_3\tilde{X}_3 + \mathcal{D}_0^0, \\
& \tilde{Z}_2 + e_1\tilde{X}_1 + e_2\tilde{X}_2 + e_3\tilde{X}_3 + \mathcal{D}_0^0\}\rangle
\end{aligned}$$

Los cuales son representados por la función:

$$\begin{aligned}
\varphi^{\mathcal{H}_1} &\in Hom(\mathfrak{g}^0, \mathcal{D}_0^0) \oplus Hom(\mathfrak{g}^{-1}, \mathcal{D}_0^{-1}) \oplus Hom(\mathfrak{g}^{-2}, TP^0/\mathcal{D}_0^0) \\
\varphi^{\mathcal{H}_1}(x_1) =& \rho\cos\theta\tilde{X}_1 + \rho\sin\theta\tilde{X}_2 + (\rho\cos\theta a_1 + \rho\sin\theta b_1)\frac{\partial}{\partial\theta} + (\rho^2\cos\theta a_2 + \rho^2\sin\theta b_2)\frac{\partial}{\partial\rho} \\
\varphi^{\mathcal{H}_1}(x_2) =& -\rho\sin\theta\tilde{X}_1 + \rho\cos\theta\tilde{X}_2 + (-\rho\sin\theta a_1 + \rho\cos\theta b_1)\frac{\partial}{\partial\theta} + \\
& (-\rho^2\sin\theta a_2 + \rho^2\cos\theta b_2)\frac{\partial}{\partial\rho} \\
\varphi^{\mathcal{H}_1}(x_3) =& \rho\tilde{X}_3 + \rho c_1\frac{\partial}{\partial\theta} + \rho^2 c_2\frac{\partial}{\partial\rho} \\
\varphi^{\mathcal{H}_1}(z_1) =& \rho^2\cos\theta\tilde{Z}_1 + \rho^2\sin\theta\tilde{Z}_2 + (\rho^2\cos\theta d_1 + \rho^2\sin\theta e_1)\tilde{X}_1 + \\
& (\rho^2\cos\theta d_2 + \rho^2\sin\theta e_2)\tilde{X}_2 + (\rho^2\cos\theta d_3 + \rho^2\sin\theta e_3)\tilde{X}_3 + \mathcal{D}_0^0 \\
\varphi^{\mathcal{H}_1}(z_2) =& -\rho^2\sin\theta\tilde{Z}_1 + \rho^2\cos\theta\tilde{Z}_2 + (-\rho^2\sin\theta d_1 + \rho^2\cos\theta e_1)\tilde{X}_1 + \\
& (-\rho^2\sin\theta d_2 + \rho^2\cos\theta e_2)\tilde{X}_2 + (-\rho^2\sin\theta d_3 + \rho^2\cos\theta e_3)\tilde{X}_3 + \mathcal{D}_0^0
\end{aligned}$$

Calculamos la función de estructura de este par de subespacios horizontales.

$$\begin{aligned}
C_H(z_1, x_1) =& \rho(\cos^3\theta\, u_{11}^1 + \cos^2\theta\sin\theta(u_{12}^1 + u_{21}^1 + u_{11}^2) + \cos\theta\sin^2\theta(u_{22}^1 + u_{12}^2 + u_{21}^2) \\
& + \sin^3\theta\, u_{22}^2 - 2\cos\theta\, a_2 - 2\sin\theta\, b_2 - \cos\theta\, d_3 - \sin\theta\, e_3)\, z_1 \\
& + \rho(\cos^3\theta\, u_{11}^2 + \cos^2\theta\sin\theta(-u_{11}^1 + u_{12}^2 + u_{21}^2) + \cos\theta\sin^2\theta(u_{22}^2 - u_{12}^1 - u_{21}^1) \\
& - \sin^3\theta\, u_{22}^1 - \cos\theta\, a_1 - \sin\theta\, b_1)\, z_2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
C_H(z_2,x_1) =& \rho(\cos^3\theta\, u^1_{21} + \cos^2\theta\sin\theta(-u^1_{11}+u^1_{22}+u^2_{21}) + \cos\theta\sin^2\theta(-u^1_{12}-u^2_{11}+u^2_{22}) \\
&- \sin^3\theta\, u^2_{12} + \cos\theta\, a_1 + \sin\theta\, b_1 + \sin\theta\, d_3 - \cos\theta\, e_3)\, z_1 \\
&+ \rho(\cos^3\theta\, u^2_{21} + \cos^2\theta\sin\theta(-u^1_{21}-u^2_{11}+u^2_{22}) + \cos\theta\sin^2\theta(u^1_{11}-u^1_{22}-u^2_{12}) \\
&+ \sin^3\theta\, u^1_{12} - 2\cos\theta\, a_2 - 2\sin\theta\, b_2)\, z_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_H(z_1,x_2) =& \rho(\cos^3\theta\, u^1_{12} + \cos^2\theta\sin\theta(-u^1_{11}+u^1_{22}+u^2_{12}) + \cos\theta\sin^2\theta(-u^1_{21}-u^2_{11}+u^2_{22}) \\
&- \sin^3\theta\, u^2_{21} + 2\sin\theta\, a_2 - 2\cos\theta\, b_2)\, z_1 \\
&+ \rho(\cos^3\theta\, u^2_{12} + \cos^2\theta\sin\theta(-u^1_{12}-u^2_{11}+u^2_{22}) + \cos\theta\sin^2\theta(u^1_{11}-u^1_{22}-u^2_{21}) \\
&+ \sin^3\theta\, u^1_{21} + \sin\theta\, a_1 - \cos\theta\, b_1 - \cos\theta\, d_3 - \sin\theta\, e_3)\, z_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_H(z_2,x_2) =& \rho(\cos^3\theta\, u^1_{22} + \cos^2\theta\sin\theta(-u^1_{12}-u^1_{21}+u^2_{22}) + \cos\theta\sin^2\theta(u^1_{11}-u^2_{12}-u^2_{21}) \\
&+ \sin^3\theta\, u^2_{11} - \sin\theta\, a_1 + \cos\theta\, b_1)\, z_1 \\
&+ \rho(\cos^3\theta\, u^2_{22} + \cos^2\theta\sin\theta(-u^1_{22}-u^2_{12}-u^2_{21}) + \cos\theta\sin^2\theta(u^1_{12}+u^1_{21}+u^2_{11}) \\
&- \sin^3\theta\, u^1_{11} + 2\sin\theta\, a_2 - 2\cos\theta\, b_2 + \sin\theta\, d_3 - \cos\theta\, e_3)\, z_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_H(z_1,x_3) =& \rho(\cos^2\theta(u^1_{13}+d_1) + \cos\theta\sin\theta(u^1_{23}+u^2_{13}+d_2+e_1) + \sin^2\theta(u^2_{23}+e_2) - 2c_2)\, z_1 \\
&+ \rho(\cos^2\theta(u^2_{13}+d_2) + \cos\theta\sin\theta(-u^1_{13}+u^2_{23}-d_1+e_2) - \sin^2\theta(u^1_{23}+e_1) - c_1)\, z_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_H(z_2,x_3) =& \rho(\cos^2\theta(u^1_{23}+e_1) + \cos\theta\sin\theta(-u^1_{13}+u^2_{23}-d_1+e_2) - \sin^2\theta(u^2_{13}+d_2) + c_1)\, z_1 \\
&+ \rho(\cos^2\theta(u^2_{23}+e_2) - \cos\theta\sin\theta(u^1_{23}+u^2_{13}+d_2+e_1) + \sin^2\theta(u^1_{13}+d_1) - 2c_2)\, z_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_H(x_1,x_2) =& \rho(\cos\theta(q_1-a_1-b_2) + \sin\theta(q_2-b_1+a_2))\, x_1 \\
&+ \rho(-\sin\theta(q_1-a_1-b_2) + \cos\theta(q_2-b_1+a_2))\, x_2 \\
&+ \rho q_3\, x_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_H(x_1,x_3) =& \rho(-c_2 + \cos^2\theta(s_1-d_1) + \cos\theta\sin\theta(s_2+t_1-d_2-e_1) + \sin^2\theta(t_2-e_2))\, x_1 \\
&+ \rho(-c_1 + \cos^2\theta(s_2-d_2) + \cos\theta\sin\theta(-s_1+t_2+d_1-e_2) - \sin^2\theta(t_1-e_1))\, x_2 \\
&+ \rho(\cos\theta(s_3+a_2-d_3) + \sin\theta(t_3+b_2-e_3))\, x_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_H(x_2,x_3) =& \rho(c_1 + \cos^2\theta(t_1-e_1) + \cos\theta\sin\theta(-s_1+t_2+d_1-e_2) - \sin^2\theta(s_2-d_2))\, x_1 \\
&+ \rho(-c_2 + \cos^2\theta(t_2-e_2) + \cos\theta\sin\theta(-s_2-t_1+d_2+e_1) + \sin^2\theta(s_1-d_1))\, x_2 \\
&+ \rho(-\sin\theta(s_3+a_2-d_3) + \cos\theta(t_3+b_2-e_3))\, x_3
\end{aligned}
$$

Como $\mathfrak{g}^1(\mathfrak{m}_{3,2},\mathfrak{g}^0_c)=\{0\}$, ∂_1 es inyectiva por lo que su imagen tiene dimensión 12. Para obtener la conexión de Cartan normal debemos considerar como condición de normalización el espacio ortogonal de dicha imagen. Obtenemos entonces un sistema lineal no singular de 12 ecuaciones con 12 incógnitas (que es exactamente el dado por las 9 ecuaciones (7.4) a (7.7) y las tres dadas en

(7.10)) cuya solución es

$$
\begin{aligned}
a_1 =& \frac{25}{72}q_1 + \frac{5}{24}t_3 - \frac{1}{9}u_{12}^1 - \frac{1}{4}u_{21}^1 + \frac{29}{72}u_{11}^2 + \frac{1}{24}u_{22}^2 \\
a_2 =& -\frac{1}{18}q_2 - \frac{1}{6}s_3 + \frac{1}{6}u_{11}^1 - \frac{1}{18}u_{22}^1 + \frac{2}{9}u_{21}^2 \\
b_1 =& \frac{25}{72}q_2 - \frac{5}{24}s_3 + \frac{1}{9}u_{21}^2 + \frac{1}{4}u_{12}^2 - \frac{29}{72}u_{22}^1 - \frac{1}{24}u_{11}^1 \\
b_2 =& \frac{1}{18}q_1 - \frac{1}{6}t_3 + \frac{1}{6}u_{22}^2 - \frac{1}{18}u_{11}^2 + \frac{2}{9}u_{12}^1 \\
c_1 =& \frac{s_2 - t_1 - u_{23}^1 + u_{13}^2}{4} \\
c_2 =& \frac{s_1 + t_2 + u_{13}^1 + u_{23}^2}{6} \\
d_1 =& \frac{7s_1 + t_2 - 5u_{13}^1 + u_{23}^2}{12} \\
d_2 =& \frac{s_2 - u_{13}^2}{2} \\
d_3 =& -\frac{7}{72}q_2 + \frac{11}{24}s_3 - \frac{1}{9}u_{21}^2 + \frac{1}{4}u_{12}^2 + \frac{11}{72}u_{22}^1 + \frac{7}{24}u_{11}^1 \\
e_1 =& \frac{t_1 - u_{23}^1}{2} \\
e_2 =& \frac{s_1 + 7t_2 + u_{13}^1 - 5u_{23}^2}{12} \\
e_3 =& \frac{7}{72}q_1 + \frac{11}{24}t_3 - \frac{1}{9}u_{12}^1 + \frac{1}{4}u_{21}^1 + \frac{11}{72}u_{11}^2 + \frac{7}{24}u_{22}^2
\end{aligned}
\tag{6.14}
$$

De esta manera finalizamos la primera prolongación. Si proyectamos $\varphi^{\mathcal{H}_1}(\mathfrak{g}^{-2})$ a M obtenemos un complemento canónico de $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{D}^{-2} = \langle\{Z_1 + d_1X_1 + d_2X_2 + d_3X_3,\ Z_2 + e_1X_1 + e_2X_2 + e_3X_3\}\rangle$$

Este complemento generaliza el campo de Reeb para estructuras de distribuciones métricas subconformes.

Pero entonces podemos elegir, en un principio, los campos $\tilde{Z}_1$ y $\tilde{Z}_2$ en este complemento, en cuyo caso, $d_1 = d_2 = d_3 = e_1 = e_2 = e_3 = 0$. Es decir, consideramos que los coeficientes de estructura en 6.9 y 6.12 verifican las condiciones:

$$
\begin{aligned}
&u_{13}^1 = \frac{3}{2}s_1 + \frac{1}{2}t_2 \\
&u_{13}^2 = s_2 \\
&u_{23}^1 = t_1 \\
&u_{23}^2 = \frac{1}{2}s_1 + \frac{3}{2}t_2 \\
&7q_1 + 33t_3 - 8u_{12}^1 + 18u_{21}^1 + 11u_{11}^2 + 21u_{22}^2 = 0 \\
&7q_2 - 33s_3 + 8u_{21}^2 - 18u_{12}^2 - 11u_{22}^1 - 21u_{11}^1 = 0
\end{aligned}
\tag{6.15}
$$

En el caso subriemanniano, se obtienen las condiciones:

$$\begin{aligned}
&u^1_{13} = s_1\\
&u^2_{13} = s_2\\
&u^1_{23} = t_1\\
&u^2_{23} = t_2\\
&q_1 + 3t_3 + 2u^1_{21} + u^2_{11} + 3u^2_{22} = 0\\
&q_2 - 3s_3 - 2u^2_{12} - u^1_{22} - 3u^1_{11} = 0
\end{aligned} \tag{6.16}$$

Proposición 6.3.1. *Sea $\mathcal{D}$ una distribución de dimensión 3 en una variedad de dimensión 5 con una estructura subconforme de tipo constante $(\mathfrak{m}_{3,2}, \langle\ ,\ \rangle^c)$ y sean X_1, X_2 y X_3 campos en $\mathcal{D}$ que forman una base conformemente ortonormal en cada punto de de un entorno U. Entonces existen únicos campos Z_1 y Z_2 congruentes con $[X_1, X_3]$ y $[X_2, X_3]$ módulo $\mathcal{D}$ respectivamente tales que:*

$$\begin{aligned}
\langle [Z_1, X_3], Z_1\rangle =& \frac{3}{2}\langle [X_1, X_3], X_1\rangle + \frac{1}{2}\langle [X_2, X_3], X_2\rangle\\
\langle [Z_1, X_3], Z_2\rangle =& \langle [X_1, X_3], X_2\rangle\\
\langle [Z_2, X_3], Z_1\rangle =& \langle [X_2, X_3], X_1\rangle\\
\langle [Z_2, X_3], Z_2\rangle =& \frac{1}{2}\langle [X_1, X_3], X_1\rangle + \frac{3}{2}\langle [X_2, X_3], X_2\rangle\\
\langle [X_1, X_2], X_1\rangle =& -\frac{33}{7}\langle [X_2, X_3], X_3\rangle + \frac{8}{7}\langle [Z_1, X_2], Z_1\rangle + \frac{18}{7}\langle [Z_2, X_1], Z_1\rangle - \frac{11}{7}\langle [Z_1, X_1], Z_2\rangle\\
& - 3\langle [Z_2, X_2], Z_2\rangle\\
\langle [X_1, X_2], X_2\rangle =& \frac{33}{7}\langle [X_1, X_3], X_3\rangle - \frac{8}{7}\langle [Z_2, X_1], Z_2\rangle + \frac{18}{7}\langle [Z_1, X_2], Z_2\rangle + \frac{11}{7}\langle [Z_2, X_2], Z_1\rangle\\
& + 3\langle [Z_1, X_1], Z_1\rangle
\end{aligned}$$

donde $\langle\ ,\ \rangle$ es la métrica en U en la cual $\{X_1, X_2, X_3, Z_1, Z_2\}$ son ortonormales. En este caso, la distribución generada por Z_1 y Z_2 es invariante por los difeomorfismos que preservan la estructura subconforme.

Proposición 6.3.2. *Sea $\mathcal{D}$ una distribución de dimensión 3 en una variedad de dimensión 5 con una estructura subriemanniana de tipo constante $(\mathfrak{m}_{3,2}, \langle\ ,\ \rangle)$ y sean X_1, X_2 y X_3 campos en $\mathcal{D}$ que forman una base ortonormal en cada punto de de un entorno U. Entonces existen únicos campos Z_1 y Z_2 congruentes con $[X_1, X_3]$ y $[X_2, X_3]$ módulo $\mathcal{D}$ respectivamente tales que:*

$$\begin{aligned}
\langle [Z_1, X_3], Z_1\rangle =& \langle [X_1, X_3], X_1\rangle\\
\langle [Z_1, X_3], Z_2\rangle =& \langle [X_1, X_3], X_2\rangle\\
\langle [Z_2, X_3], Z_1\rangle =& \langle [X_2, X_3], X_1\rangle\\
\langle [Z_2, X_3], Z_2\rangle =& \langle [X_2, X_3], X_2\rangle\\
\langle [X_1, X_2], X_1\rangle =& -3\langle [X_2, X_3], X_3\rangle - 2\langle [Z_2, X_1], Z_1\rangle - \langle [Z_1, X_1], Z_2\rangle - 3\langle [Z_2, X_2], Z_2\rangle\\
\langle [X_1, X_2], X_2\rangle =& 3\langle [X_1, X_3], X_3\rangle + 2\langle [Z_1, X_2], Z_2\rangle + \langle [Z_2, X_2], Z_1\rangle + 3\langle [Z_1, X_1], Z_1\rangle
\end{aligned}$$

donde $\langle\ ,\ \rangle$ es la métrica en U en la cual $\{X_1, X_2, X_3, Z_1, Z_2\}$ son ortonormales. En este caso, la distribución generada por Z_1 y Z_2 es invariante por los difeomorfismos que preservan la estructura subriemanniana.

El complemento subconforme es trivialmente invariante por las transformaciones que preservan la estructura subriemanniana por lo tanto es canónico. Sin embargo, el complemento subriemanniano obtenido no coincide con este en general, lo que indica que en este caso hay más de un complemento canónico. En cierto sentido, podemos decir que la prolongación normal nos da uno más "simple".

Como en la sección anterior identificamos P^0 y P^1. Los espacios horizontales en P^1 son de la forma:

$$H^{-1} = \langle\{\tilde{X}_1 + a_1\frac{\partial}{\partial\theta} + a_2\rho\frac{\partial}{\partial\rho},\ \tilde{X}_2 + b_1\frac{\partial}{\partial\theta} + b_2\rho\frac{\partial}{\partial\rho},\ \tilde{X}_3 + c_1\frac{\partial}{\partial\theta} + c_2\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\}\rangle$$
$$H^{-2} = \langle\{\tilde{Z}_1 + f_1\frac{\partial}{\partial\theta} + f_2\rho\frac{\partial}{\partial\rho},\ \tilde{Z}_2 + g_1\frac{\partial}{\partial\theta} + g_2\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\}\rangle$$

donde las funciones a_i, b_i y c_i fueron determinadas en la primera prolongación.

El fibrado P^2 estará compuesto por funciones de la forma:

$$\varphi^{\mathcal{H}_1} \in Hom(\mathfrak{g}^0, \mathcal{D}_0^0) \oplus Hom(\mathfrak{g}^{-1}, \mathcal{D}_0^{-1}) \oplus Hom(\mathfrak{g}^{-2}, TP^0)$$

$$\begin{aligned}
\varphi^{\mathcal{H}_2}(x_1) &= \rho\cos\theta\tilde{X}_1 + \rho\sin\theta\tilde{X}_2 + (\rho\cos\theta a_1 + \rho\sin\theta b_1)\frac{\partial}{\partial\theta}\\
&\quad + (\rho^2\cos\theta a_2 + \rho^2\sin\theta b_2)\frac{\partial}{\partial\rho}\\
\varphi^{\mathcal{H}_2}(x_2) &= -\rho\sin\theta\tilde{X}_1 + \rho\cos\theta\tilde{X}_2 + (-\rho\sin\theta a_1 + \rho\cos\theta b_1)\frac{\partial}{\partial\theta}\\
&\quad + (-\rho^2\sin\theta a_2 + \rho^2\cos\theta b_2)\frac{\partial}{\partial\rho}\\
\varphi^{\mathcal{H}_2}(x_3) &= \rho\tilde{X}_3 + \rho c_1\frac{\partial}{\partial\theta} + \rho^2 c_2\frac{\partial}{\partial\rho}\\
\varphi^{\mathcal{H}_2}(z_1) &= \rho^2\cos\theta\tilde{Z}_1 + \rho^2\sin\theta\tilde{Z}_2 + (\rho^2\cos\theta f_1 + \rho^2\sin\theta g_1)\frac{\partial}{\partial\theta}\\
&\quad + (\rho^3\cos\theta f_2 + \rho^3\sin\theta g_2)\frac{\partial}{\partial\rho}\\
\varphi^{\mathcal{H}_2}(z_2) &= -\rho^2\sin\theta\tilde{Z}_1 + \rho^2\cos\theta\tilde{Z}_2 + (-\rho^2\sin\theta f_1 + \rho^2\cos\theta g_1)\frac{\partial}{\partial\theta}\\
&\quad + (-\rho^3\sin\theta f_2 + \rho^3\cos\theta g_2)\frac{\partial}{\partial\rho}
\end{aligned}$$

con f_i y g_i a determinar.

En este caso el dominio y la imagen de ∂_2 tienen dimensión 4 y al considerar su complemento ortogonal obtenemos un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas (dado por (7.12) y (7.13) y sus correspondientes). Resolviendo obtenemos:

$$\begin{aligned}
f_1 &= \frac{-4r_{11}^2 + 4r_{12}^1 + r_{21}^1 + r_{22}^2 + r_{23}^3 + 2w_1 - 4A_1 + B_2}{14}\\
g_1 &= \frac{4r_{22}^1 - 4r_{21}^2 - r_{12}^2 - r_{11}^1 - r_{13}^3 + 2w_2 - 4B_1 - A_2}{14}\\
f_2 &= \frac{-r_{21}^2 - 2r_{12}^2 + r_{22}^1 - 2r_{11}^1 - 2r_{13}^3 - 3w_2 - B_1 - 2A_2}{14}\\
g_2 &= \frac{-r_{12}^1 - 2r_{21}^1 + r_{11}^2 - 2r_{22}^2 - 2r_{23}^3 + 3w_1 + A_1 - 2B_2}{14}
\end{aligned} \tag{6.17}$$

donde

$$
\begin{aligned}
A_1 &= -X_1c_1 + X_3a_1 + a_1s_1 + b_1s_2 + c_1s_3 \\
B_1 &= -X_2c_1 + X_3b_1 + a_1t_1 + b_1t_2 + c_1t_3 \\
A_2 &= -X_1c_2 + X_3a_2 + a_2s_1 + b_2s_2 + c_2s_3 \\
B_2 &= -X_2c_2 + X_3b_2 + a_2t_1 + b_2t_2 + c_2t_3
\end{aligned} \tag{6.18}
$$

Esto completa la segunda prolongación y el proceso de prolongación. Como resultado obtenemos la conexión de Cartan:

$$
\begin{aligned}
\omega(\tilde{X}_1) &= \frac{\cos\theta}{\rho}x_1 - \frac{\sin\theta}{\rho}x_2 - a_1r - a_2a \\
\omega(\tilde{X}_2) &= \frac{\sin\theta}{\rho}x_1 + \frac{\cos\theta}{\rho}x_2 - b_1r - b_2a \\
\omega(\tilde{X}_3) &= \frac{1}{\rho}x_3 - c_1r - c_2a \\
\omega(\tilde{Z}_1) &= \frac{\cos\theta}{\rho^2}z_1 - \frac{\sin\theta}{\rho^2}z_2 - f_1r - f_2a \\
\omega(\tilde{Z}_2) &= \frac{\sin\theta}{\rho^2}z_1 + \frac{\cos\theta}{\rho^2}z_2 - g_1r - g_2a \\
\omega(\frac{\partial}{\partial\theta}) &= r \\
\omega(\frac{\partial}{\partial\rho}) &= \frac{1}{\rho}\,a
\end{aligned} \tag{6.19}
$$

donde los a_i, b_i y c_i están dados en (6.14) y los f_i, g_i en (6.18) para $i = 1, 2$.

Su curvatura se descompone en componentes de grado 1, 2 y 3, y viene dada explícitamente por:

$$
\begin{aligned}
\kappa(x_1, x_2) = &\,\rho(-\cos\theta(q_1 - a_1 - b_2) - \sin\theta(q_2 + a_2 - b_1))\,x_1 \\
&+ \rho(\sin\theta(q_1 - a_1 - b_2) - \cos\theta(q_2 + a_2 - b_1))\,x_2 - \rho q_3\,x_3 \\
&+ \rho^2(-x_1b_1 + x_2a_1 + q_1a_1 + q_2b_1 + q_3c_1)\,r \\
&+ \rho^2(-x_1b_2 + x_2a_2 + q_1a_2 + q_2b_2 + q_3c_2)\,a \\
\kappa(x_1, x_3) = &\,\rho(-\cos^2\theta\,s_1 - \cos\theta\sin\theta(s_2 + t_1) - \sin^2\theta\,t_2 + c_2)\,x_1 \\
&+ \rho(-\cos^2\theta\,s_2 + \cos\theta\sin\theta(s_1 - t_2) + \sin^2\theta\,t_1 + c_1)\,x_2 \\
&+ \rho(-\cos\theta(s_3 + a_2) - \sin\theta(t_3 + b_2))\,x_3 \\
&+ \rho^2(\cos\theta(A_1 + f_1) + \sin\theta(B_1 + g_1))\,r \\
&+ \rho^2(\cos\theta(A_2 + f_2) + \sin\theta(B_2 + g_2))\,a \\
\kappa(x_2, x_3) = &\,\rho(\sin^2\theta\,s_2 + \cos\theta\sin\theta(s_1 - t_2) - \cos^2\theta\,t_1 - c_1)x_1 \\
&+ \rho(-\sin^2\theta\,s_1 + \cos\theta\sin\theta(s_2 + t_1) - \cos^2\theta\,t_2 + c_2)\,x_2 \\
&+ \rho(\sin\theta(s_3 + a_2) - \cos\theta(t_3 + b_2))\,x_3 \\
&+ \rho^2(-\sin\theta(A_1 + f_1) + \cos\theta(B_1 + g_1))\,r \\
&+ \rho^2(-\sin\theta(A_2 + f_2) + \cos\theta(B_2 + g_2))\,a \\
\kappa(z_1, x_1) = &-\rho(-2\cos\theta\,a_2 - 2\sin\theta\,b_2 + \cos^3\theta\,u^1_{11} + \cos^2\theta\sin\theta(u^1_{12} + u^1_{21} + u^2_{11})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\cos\theta\sin^2\theta(u^1_{22}+u^2_{12}+u^2_{21})+\sin^3\theta\,u^2_{22})\,z_1\\
&-\rho(-\cos\theta\,a_1-\sin\theta\,b_1+\cos^3\theta\,u^2_{11}+\cos^2\theta\sin\theta(-u^1_{11}+u^2_{12}+u^2_{21})\\
&+\cos\theta\sin^2\theta(-u^1_{12}-u^1_{21}+u^2_{22})-\sin^3\theta\,u^1_{22})\,z_2\\
&-\rho^2(\cos\theta\,f_2+\sin\theta\,g_2+\cos^3\theta\,r^1_{11}+\cos^2\theta\sin\theta(r^1_{12}+r^1_{21}+r^2_{11})\\
&+\cos\theta\sin^2\theta(r^1_{22}+r^2_{12}+r^2_{21})+\sin^3\theta\,r^2_{22})\,x_1\\
&-\rho^2(\cos\theta\,f_1+\sin\theta\,g_1+\cos^3\theta\,r^2_{11}+\cos^2\theta\sin\theta(-r^1_{11}+r^2_{12}+r^2_{21})\\
&+\cos\theta\sin^2\theta(-r^1_{12}-r^1_{21}+r^2_{22})-\sin^3\theta\,r^1_{22})\,x_2\\
&-\rho^2(\cos^2\theta\,r^3_{11}+\cos\theta\sin\theta(r^3_{12}+r^3_{21})+\sin^2\theta\,r^3_{22})\,x_3\\
&+\rho^3(\cos^2\theta\,C^1_{11}+\cos\theta\sin\theta(C^1_{12}+C^1_{21})+\sin^2\theta\,C^1_{22})\,r\\
&+\rho^3(\cos^2\theta\,C^2_{11}+\cos\theta\sin\theta(C^2_{12}+C^2_{21})+\sin^2\theta\,C^2_{22})\,a\\
\kappa(z_1,x_2)=&-\rho(2\sin\theta\,a_2-2\sin\theta\,b_2+\cos^3\theta\,u^1_{12}+\cos^2\theta\sin\theta(-u^1_{11}+u^1_{22}+u^2_{12})\\
&+\cos\theta\sin^2\theta(-u^1_{21}-u^2_{11}+u^2_{22})-\sin^3\theta\,u^2_{21})\,z_1\\
&-\rho(\sin\theta\,a_1-\cos\theta\,b_1+\cos^3\theta\,u^2_{12}+\cos^2\theta\sin\theta(-u^1_{12}-u^2_{11}+u^2_{22})\\
&+\cos\theta\sin^2\theta(u^1_{11}-u^1_{22}-u^2_{21})+\sin^3\theta\,u^1_{21})\,z_2\\
&-\rho^2(-\cos\theta\,f_1-\sin\theta\,g_1+\cos^3\theta\,r^1_{12}+\cos^2\theta\sin\theta(-r^1_{11}+r^1_{22}+r^2_{12})\\
&+\cos\theta\sin^2\theta(-r^1_{21}-r^2_{11}+r^2_{22})-\sin^3\theta\,r^2_{21})\,x_1\\
&-\rho^2(\cos\theta\,f_2+\sin\theta\,g_2+\cos^3\theta\,r^2_{12}+\cos^2\theta\sin\theta(-r^1_{12}-r^2_{11}+r^2_{22})\\
&+\cos\theta\sin^2\theta(r^1_{11}-r^1_{22}-r^2_{21})+\sin^3\theta\,r^1_{21})\,x_2\\
&-\rho^2(\cos^2\theta\,r^3_{12}+\cos\theta\sin\theta(-r^3_{11}+r^3_{22})-\sin^2\theta\,r^3_{21})\,x_3\\
&+\rho^3(\cos^2\theta\,C^1_{12}+\cos\theta\sin\theta(-C^1_{11}+C^1_{22})-\sin^2\theta\,C^1_{21})\,r\\
&+\rho^3(\cos^2\theta\,C^2_{12}+\cos\theta\sin\theta(-C^2_{11}+C^2_{22})-\sin^2\theta\,C^2_{21})\,a\\
\kappa(z_1,x_3)=&-\rho(\cos^2\theta\,u^1_{13}+\cos\theta\sin\theta(u^1_{23}+u^2_{13})+\sin^2\theta\,u^2_{23}-2c_2)\,z_1\\
&-\rho(\cos^2\theta\,u^2_{13}+\cos\theta\sin\theta(-u^1_{13}+u^2_{23})-\sin^2\theta\,u^1_{23}-c_1)\,z_2\\
&-\rho^2(\cos^2\theta\,r^1_{13}+\cos\theta\sin\theta(r^1_{23}+r^2_{13})+\sin^2\theta\,r^2_{23})\,x_1\\
&-\rho^2(\cos^2\theta\,r^2_{13}+\cos\theta\sin\theta(-r^1_{13}+r^2_{23})-\sin^2\theta\,r^1_{23})\,x_2\\
&-\rho^2(\cos\theta(r^3_{13}+f_2)+\sin\theta(r^3_{23}+g_2))\,x_3\\
&+\rho^3(\cos\theta\,C^1_{13}+\sin\theta\,C^1_{23})\,r\\
&+\rho^3(\cos\theta\,C^2_{13}+\sin\theta\,C^2_{23})\,a\\
\kappa(z_2,x_1)=&-\rho(\cos\theta\,a_1+\sin\theta\,b_1+\cos^3\theta\,u^1_{21}+\cos^2\theta\sin\theta(-u^1_{11}+u^1_{22}+u^2_{21})\\
&+\cos\theta\sin^2\theta(-u^1_{12}-u^2_{11}+u^2_{22})-\sin^3\theta\,u^2_{12})\,z_1\\
&-\rho(-2\cos\theta\,a_2-2\sin\theta\,b_2+\cos^3\theta\,u^2_{21}+\cos^2\theta\sin\theta(-u^1_{21}-u^2_{11}+u^2_{22})\\
&+\cos\theta\sin^2\theta(u^1_{11}-u^1_{22}-u^2_{12})+\sin^3\theta\,u^1_{12})\,z_2\\
&-\rho^2(-\sin\theta\,f_2+\cos\theta\,g_2+\cos^3\theta\,r^1_{21}+\cos^2\theta\sin\theta(-r^1_{11}+r^1_{22}+r^2_{21})\\
&+\cos\theta\sin^2\theta(-r^1_{12}-r^2_{11}+r^2_{22})-\sin^3\theta\,r^2_{12})\,x_1\\
&-\rho^2(-\sin\theta\,f_1+\cos\theta\,g_1+\cos^3\theta\,r^2_{21}+\cos^2\theta\sin\theta(-r^1_{21}-r^2_{11}+r^2_{22})\\
&+\cos\theta\sin^2\theta(r^1_{11}-r^1_{22}-r^2_{12})+\sin^3\theta\,r^1_{12})\,x_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \rho^2(\cos^2\theta\, r^3_{21} + \cos\theta\sin\theta(-r^3_{11} + r^3_{22}) - \sin^2\theta\, r^3_{12})\, x_3\\
&- \rho^3(\cos^2\theta\, C^1_{21} + \cos\theta\sin\theta(-C^1_{11} + C^1_{22}) - \sin^2\theta\, C^1_{12})\, r\\
&- \rho^3(\cos^2\theta\, C^2_{21} + \cos\theta\sin\theta(-C^2_{11} + C^2_{22}) - \sin^2\theta\, C^2_{12})\, a\\
\kappa(z_2, x_2) = &- \rho(-\sin\theta\, a_1 + \cos\theta\, b_1 + \cos^3\theta\, u^1_{22} + \cos^2\theta\sin\theta(-u^1_{12} - u^1_{21} + u^2_{22})\\
&+ \cos\theta\sin^2\theta(u^1_{11} - u^2_{12} - u^2_{21}) + \sin^3\theta\, u^2_{11})\, z_1\\
&- \rho(2\sin\theta\, a_2 - 2\cos\theta\, b_2 + \cos^3\theta\, u^2_{22} + \cos^2\theta\sin\theta(-u^1_{22} - u^2_{12} - u^2_{21})\\
&+ \cos\theta\sin^2\theta(u^1_{12} + u^1_{21} + u^2_{11}) - \sin^3\theta\, u^1_{11})\, z_2\\
&- \rho^2(\sin\theta\, f_1 - \cos\theta\, g_1 + \cos^3\theta\, r^1_{22} + \cos^2\theta\sin\theta(-r^1_{12} - r^1_{21} + r^2_{22})\\
&+ \cos\theta\sin^2\theta(r^1_{11} - r^2_{12} - r^2_{21}) + \sin^3\theta\, r^2_{11})\, x_1\\
&- \rho^2(-\sin\theta\, f_2 + \cos\theta\, g_2 + \cos^3\theta\, r^2_{22} + \cos^2\theta\sin\theta(-r^1_{22} - r^2_{12} - r^2_{21})\\
&+ \cos\theta\sin^2\theta(r^1_{12} + r^1_{21} + r^2_{11}) - \sin^3\theta\, r^1_{11})\, x_2\\
&- \rho^2(\cos^2\theta\, r^3_{22} - \cos\theta\sin\theta(r^3_{12} + r^3_{21}) + \sin^2\theta\, r^3_{11})\, x_3\\
&- \rho^3(\cos^2\theta\, C^1_{22} - \cos\theta\sin\theta(C^1_{12} + C^1_{21}) + \sin^2\theta\, C^1_{11})\, r\\
&- \rho^3(\cos^2\theta\, C^2_{22} - \cos\theta\sin\theta(C^2_{12} + C^2_{21}) + \sin^2\theta\, C^2_{11})\, a\\
\kappa(z_2, x_3) = &- \rho(\cos^2\theta\, u^1_{23} + \cos\theta\sin\theta(-u^1_{13} + u^2_{23}) - \sin^2\theta\, u^2_{13} + c_1)\, z_1\\
&- \rho(\cos^2\theta\, u^2_{23} - \cos\theta\sin\theta(u^1_{23} + u^2_{13}) + \sin^2\theta\, u^1_{13} - 2c_2)\, z_2\\
&- \rho^2(\cos^2\theta\, r^1_{23} + \cos\theta\sin\theta(-r^1_{13} + r^2_{23}) - \sin^2\theta\, r^2_{13})\, x_1\\
&- \rho^2(\cos^2\theta\, r^2_{23} - \cos\theta\sin\theta(r^1_{23} + r^2_{13}) + \sin^2\theta\, r^1_{13})\, x_2\\
&- \rho^2(-\sin\theta(r^3_{13} + f_2) + \cos\theta(r^3_{23} + g_2))\, x_3\\
&- \rho^3(-\sin\theta\, C^1_{13} + \cos\theta\, C^1_{23})\, r\\
&- \rho^3(-\sin\theta\, C^2_{13} + \cos\theta\, C^2_{23})\, a\\
\kappa(z_1, z_2) = &- \rho^2(\cos\theta\,(w_1 - f_1 - 2g_2) + \sin\theta\,(w_2 - g_1 + 2f_2))\, z_1\\
&- \rho^2(-\sin\theta\,(w_1 - f_1 - 2g_2) + \cos\theta\,(w_2 - g_1 + 2f_2))\, z_2\\
&- \rho^3(\cos\theta\, v_1 + \sin\theta\, v_2)\, x_1\\
&- \rho^3(-\sin\theta\, v_1 + \cos\theta\, v_2)\, x_2\\
&- \rho^3\, v_3\, x_3\\
&+ \rho^4(f_1 w_1 + g_1 w_2 + a_1 v_1 + b_1 v_2 + c_1 v_3 - \tilde{Z}_1 g_1 + \tilde{Z}_2 f_1)\, r\\
&+ \rho^4(f_2 w_1 + g_2 w_2 + a_2 v_1 + b_2 v_2 + c_2 v_3 - \tilde{Z}_1 g_2 + \tilde{Z}_2 f_2)\, a
\end{aligned}
$$

donde

$$C^k_{ij} = u^1_{ij} f_k + u^2_{ij} g_k + r^1_{ij} a_k + r^2_{ij} b_k + r^3_{ij} c_k - \tilde{Z}_i d_{jk} + \tilde{X}_j h_{ik}$$

con $d_{1k} = a_k$, $d_{2k} = b_k$, $d_{3k} = c_k$, $h_{1k} = f_k$ y $h_{2k} = g_k$.

Pero del cálculo de las cohomología y las formas armónicas en 7.2 deducimos que la curvatura armónica tiene sólo componentes de grado 1 y 2 dadas por:

$$
\begin{aligned}
\kappa^1_H(x_1, x_2) = &\,\rho(-\cos\theta(q_1 - a_1 - b_2) - \sin\theta(q_2 + a_2 - b_1))\, x_1\\
&+ \rho(\sin\theta(q_1 - a_1 - b_2) - \cos\theta(q_2 + a_2 - b_1))\, x_2 - \rho q_3\, x_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\kappa^1_H(x_1,x_3) =&\, \rho(-\cos^2\theta\, s_1 - \cos\theta\sin\theta(s_2+t_1) - \sin^2\theta\, t_2 + c_2)\, x_1\\
&+ \rho(-\cos^2\theta\, s_2 + \cos\theta\sin\theta(s_1-t_2) + \sin^2\theta\, t_1 + c_1)\, x_2\\
&+ \rho(-\cos\theta(s_3+a_2) - \sin\theta(t_3+b_2))\, x_3\\
\kappa^1_H(x_2,x_3) =&\, \rho(\sin^2\theta\, s_2 + \cos\theta\sin\theta(s_1-t_2) - \cos^2\theta\, t_1 - c_1) x_1\\
&+ \rho(-\sin^2\theta\, s_1 + \cos\theta\sin\theta(s_2+t_1) - \cos^2\theta\, t_2 + c_2)\, x_2\\
&+ \rho(\sin\theta(s_3+a_2) - \cos\theta(t_3+b_2))\, x_3\\
\kappa^1_H(z_1,x_1) =& -\rho(-2\cos\theta\, a_2 - 2\sin\theta\, b_2 + \cos^3\theta\, u^1_{11} + \cos^2\theta\sin\theta(u^1_{12}+u^1_{21}+u^2_{11})\\
&+ \cos\theta\sin^2\theta(u^1_{22}+u^2_{12}+u^2_{21}) + \sin^3\theta\, u^2_{22})\, z_1\\
&- \rho(-\cos\theta\, a_1 - \sin\theta\, b_1 + \cos^3\theta\, u^2_{11} + \cos^2\theta\sin\theta(-u^1_{11}+u^2_{12}+u^2_{21})\\
&+ \cos\theta\sin^2\theta(-u^1_{12}-u^1_{21}+u^2_{22}) - \sin^3\theta\, u^1_{22})\, z_2\\
\kappa^1_H(z_1,x_2) =& -\rho(2\sin\theta\, a_2 - 2\sin\theta\, b_2 + \cos^3\theta\, u^1_{12} + \cos^2\theta\sin\theta(-u^1_{11}+u^1_{22}+u^2_{12})\\
&+ \cos\theta\sin^2\theta(-u^1_{21}-u^2_{11}+u^2_{22}) - \sin^3\theta\, u^2_{21})\, z_1\\
&- \rho(\sin\theta\, a_1 - \cos\theta\, b_1 + \cos^3\theta\, u^2_{12} + \cos^2\theta\sin\theta(-u^1_{12}-u^2_{11}+u^2_{22})\\
&+ \cos\theta\sin^2\theta(u^1_{11}-u^1_{22}-u^2_{21}) + \sin^3\theta\, u^1_{21})\, z_2\\
\kappa^1_H(z_1,x_3) =& -\rho(\cos^2\theta\, u^1_{13} + \cos\theta\sin\theta(u^1_{23}+u^2_{13}) + \sin^2\theta\, u^2_{23} - 2c_2)\, z_1\\
&- \rho(\cos^2\theta\, u^2_{13} + \cos\theta\sin\theta(-u^1_{13}+u^2_{23}) - \sin^2\theta\, u^1_{23} - c_1)\, z_2\\
\kappa^1_H(z_2,x_1) =& -\rho(\cos\theta\, a_1 + \sin\theta\, b_1 + \cos^3\theta\, u^1_{21} + \cos^2\theta\sin\theta(-u^1_{11}+u^1_{22}+u^2_{21})\\
&+ \cos\theta\sin^2\theta(-u^1_{12}-u^2_{11}+u^2_{22}) - \sin^3\theta\, u^2_{12})\, z_1\\
&- \rho(-2\cos\theta\, a_2 - 2\sin\theta\, b_2 + \cos^3\theta\, u^2_{21} + \cos^2\theta\sin\theta(-u^1_{21}-u^2_{11}+u^2_{22})\\
&+ \cos\theta\sin^2\theta(u^1_{11}-u^1_{22}-u^2_{12}) + \sin^3\theta\, u^1_{12})\, z_2\\
\kappa^1_H(z_2,x_2) =& -\rho(-\sin\theta\, a_1 + \cos\theta\, b_1 + \cos^3\theta\, u^1_{22} + \cos^2\theta\sin\theta(-u^1_{12}-u^1_{21}+u^2_{22})\\
&+ \cos\theta\sin^2\theta(u^1_{11}-u^2_{12}-u^2_{21}) + \sin^3\theta\, u^2_{11})\, z_1\\
&- \rho(2\sin\theta\, a_2 - 2\cos\theta\, b_2 + \cos^3\theta\, u^2_{22} + \cos^2\theta\sin\theta(-u^1_{22}-u^2_{12}-u^2_{21})\\
&+ \cos\theta\sin^2\theta(u^1_{12}+u^1_{21}+u^2_{11}) - \sin^3\theta\, u^1_{11})\, z_2\\
\kappa^1_H(z_2,x_3) =& -\rho(\cos^2\theta\, u^1_{23} + \cos\theta\sin\theta(-u^1_{13}+u^2_{23}) - \sin^2\theta\, u^2_{13} + c_1)\, z_1\\
&- \rho(\cos^2\theta\, u^2_{23} - \cos\theta\sin\theta(u^1_{23}+u^2_{13}) + \sin^2\theta\, u^1_{13} - 2c_2)\, z_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\kappa^2_H(x_1,x_2) &= \frac{\rho^2}{3}\, C\, r\\
\kappa^2_H(x_1,x_3) &= \frac{\rho^2}{40}(\cos\theta\, A + \sin\theta\, B)\, r\\
\kappa^2_H(x_2,x_3) &= \frac{\rho^2}{40}(-\sin\theta\, A + \cos\theta\, B)\, r\\
\kappa^2_H(z_1,x_1) &= \frac{\rho^2}{10}(-\sin\theta\, A + \cos\theta\, B)\, x_1 + \frac{\rho^2}{40}(-\cos\theta\, A - \sin\theta\, B)\, x_2 + \frac{\rho^2}{3}\, C\, x_3\\
\kappa^2_H(z_1,x_2) &= \frac{\rho^2}{40}(-\cos\theta\, A - \sin\theta\, B)\, x_1 + \frac{\rho^2}{20}(-\sin\theta\, A + \sin\theta\, B)\, x_2
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\kappa_H^2(z_1,x_3) =& -\rho^2(\cos^2\theta\, r_{13}^1 + \cos\theta\sin\theta(r_{23}^1 + r_{13}^2) + \sin^2\theta\, r_{23}^2)\, x_1 \\
& - \rho^2(\cos^2\theta\, r_{13}^2 + \cos\theta\sin\theta(-r_{13}^1 + r_{23}^2) - \sin^2\theta\, r_{23}^1)\, x_2 \\
& + \frac{\rho^2}{10}(\sin\theta\, A - \cos\theta\, B)\, x_3 \\
\kappa_H^2(z_2,x_1) =& \frac{\rho^2}{20}(-\cos\theta\, A - \sin\theta\, B)\, x_1 + \frac{\rho^2}{40}(-\sin\theta\, A + \cos\theta\, B)\, x_2 \\
\kappa_H^2(z_2,x_2) =& \frac{\rho^2}{40}(-\sin\theta\, A + \cos\theta\, B)\, x_1 + \frac{\rho^2}{10}(-\cos\theta\, A - \sin\theta\, B)\, x_2 + \frac{\rho^2}{3}\, C\, x_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_H^2(z_2,x_3) =& -\rho^2(\cos^2\theta\, r_{23}^1 + \cos\theta\sin\theta(-r_{13}^1 + r_{23}^2) - \sin^2\theta\, r_{13}^2)\, x_1 \\
& - \rho^2(\cos^2\theta\, r_{23}^2 - \cos\theta\sin\theta(r_{23}^1 + r_{13}^2) + \sin^2\theta\, r_{13}^1)\, x_2 \\
& + \frac{\rho^2}{10}(\cos\theta A + \sin\theta B)\, x_3 \\
\kappa_H^2(z_1,z_2) =& \frac{\rho^2}{40}(-\cos\theta A - \sin\theta B)\, z_1 + \frac{\rho^2}{40}(\sin\theta A - \cos\theta B)\, z_2
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
A =& r_{11}^2 + r_{12}^1 + 2r_{21}^1 + 4r_{22}^2 - 4r_{23}^3 + w_1 + A_1 \\
B =& -r_{22}^1 - r_{21}^2 - 2r_{12}^2 - 4r_{11}^1 + 4r_{13}^3 + w_2 + B_1 \\
C =& -X_1 b_1 + X_2 a_1 + q_1 a_1 + q_2 b_1 + q_3 c_1 - r_{11}^3 - r_{22}^3
\end{aligned}$$

Como en la sección anterior obtenemos los siguientes invariantes fundamentales en M:

$$\begin{aligned}
\psi_1^1 =& q_3^2 \\
\psi_2^1 =& (u_{11}^1 + u_{12}^2 - u_{21}^2 + u_{22}^1)^2 + (u_{22}^2 + u_{21}^1 - u_{12}^1 + u_{11}^2)^2 \\
\psi_3^1 =& (u_{11}^1 - u_{12}^2 - u_{21}^2 - u_{22}^1)^2 + (-u_{22}^2 + u_{21}^1 + u_{12}^1 + u_{11}^2)^2 \\
\psi_4^1 =& (s_1 - t_2)^2 + (s_2 + t_1)^2 \\
\psi_1^2 =& (-X_1 b_1 + X_2 a_1 + q_1 a_1 + q_2 b_1 + q_3 c_1 - r_{11}^3 - r_{22}^3) \\
\psi_2^2 =& (A^2 + B^2) \\
\psi_3^2 =& (\sqrt{(r_{13}^1 - r_{23}^2)^2 + (r_{23}^1 + r_{13}^2)^2}) \\
\psi_4^2 =& (-r_{23}^1 + r_{13}^2) \\
\psi_5^2 =& (r_{13}^1 + r_{23}^2)
\end{aligned} \tag{6.20}$$

definidos salvo multiplicación por una misma constante positiva.

En el caso subriemanniano, la curvatura armónica coincide con la curvatura armónica subconforme considerando $\rho = 1$, $a_2 = b_2 = c_2 = 0$. Por lo tanto, los invariantes fundamentales en este caso resultan:

$$\begin{aligned}
\phi_1^1 =& q_3\\
\phi_2^1 =& (u_{11}^1+u_{12}^2-u_{21}^2+u_{22}^1)^2+(u_{22}^2+u_{21}^1-u_{12}^1+u_{11}^2)^2\\
\phi_3^1 =& (u_{11}^1-u_{12}^2-u_{21}^2-u_{22}^1)^2+(-u_{22}^2+u_{21}^1+u_{12}^1+u_{11}^2)^2\\
\phi_4^1 =& (s_1-t_2)^2+(s_2+t_1)^2\\
\phi_5^1 =& s_1+t_2\\
\phi_1^2 =& -X_1b_1+X_2a_1+q_1a_1+q_2b_1+q_3c_1-r_{11}^3-r_{22}^3\\
\phi_2^2 =& A^2+B^2\\
\phi_3^2 =& (r_{13}^1-r_{23}^2)^2+(r_{23}^1+r_{13}^2)^2\\
\phi_4^2 =& -r_{23}^1+r_{13}^2\\
\phi_5^2 =& r_{13}^1+r_{23}^2
\end{aligned} \tag{6.21}$$

Teorema 6.3.3. *Sea $\mathcal{D}$ una distribución subconforme de dimensión 3 en una variedad M de dimensión 5 orientada de tipo constante subconforme $(\mathfrak{m}_{3,2},\langle\ ,\ \rangle^c)$. Sea X_1,X_2,X_3,Z_1,Z_2 un marco como en 6.9 y 6.12 que verifica 6.15.*

1. *La conexión de Cartan normal asociada viene dada por 6.19.*
2. *Los invariantes fundamentales de $\mathcal{D}$ son las funciones en 6.20 definidas salvo multiplicación por una función positiva.*
3. *$\mathcal{D}$ es localmente equivalente a la distribución invariante a izquierda estándar del grupo de Lie N simplemente conexo con álgebra de Lie $\mathfrak{m}_{3,2}$ y con la métrica subconforme invariante si y sólo si las funciones de estructura de los campos X_1,X_2,X_3,Z_1,Z_2 satisfacen:*

$$\begin{aligned}
&q_3=r_{13}^1=r_{13}^2=r_{23}^1=r_{23}^2=0\\
&s_1=t_2 \qquad s_2=-t_1\\
&u_{11}^1=u_{21}^2 \qquad u_{22}^1=-u_{12}^2\\
&u_{11}^2=-u_{21}^1 \qquad u_{22}^2=u_{12}^1\\
&X_1u_{22}^1+X_2u_{11}^2+(\frac{1}{2}u_{22}^2+u_{11}^2)u_{11}^2+(\frac{1}{2}u_{11}^1+u_{22}^1)u_{22}^1-r_{11}^3-r_{22}^3=0\\
&r_{11}^2+r_{12}^1+r_{21}^1+4r_{22}^2-5r_{23}^3=0\\
&-r_{22}^1-r_{21}^2-r_{12}^2-4r_{11}^1+5r_{13}^3=0
\end{aligned}$$

Teorema 6.3.4. *Sea $\mathcal{D}$ una distribución subriemanniana de dimensión 3 en una variedad M de dimensión 5 orientada de tipo constante subriemanniano $(\mathfrak{m}_{3,2},\langle\ ,\ \rangle)$. Consideramos un marco X_1,X_2,X_3,Z_1,Z_2 como en 6.9 y 6.12 que verifica 6.16.*

1. *La conexión de Cartan normal asociada viene dada por:*

$$\begin{gathered}
\omega(\tilde{X}_1)=\frac{\cos\theta}{\rho}x_1-\frac{\sin\theta}{\rho}x_2-a_1r \qquad \omega(\tilde{X}_2)=\frac{\sin\theta}{\rho}x_1+\frac{\cos\theta}{\rho}x_2-b_1r \qquad \omega(\tilde{X}_3)=\frac{1}{\rho}x_3-c_1r\\
\omega(\tilde{Z}_1)=\frac{\cos\theta}{\rho^2}z_1-\frac{\sin\theta}{\rho^2}z_2-f_1r \qquad \omega(\tilde{Z}_2)=\frac{\sin\theta}{\rho^2}z_1+\frac{\cos\theta}{\rho^2}z_2-g_1r\\
\omega(\frac{\partial}{\partial\theta})=r \qquad \omega(\frac{\partial}{\partial\rho})=\frac{1}{\rho}a
\end{gathered} \tag{6.22}$$

donde:

$$
\begin{aligned}
a_1 =& \frac{1}{2}(q_1 + t_3 + u^2_{22} + u^1_{21}) \\
b_1 =& \frac{1}{2}(q_2 - s_3 - u^1_{11} + u^2_{12}) \\
c_1 =& \frac{1}{2}(s_2 - t_1) \\
f_1 =& \frac{-r^2_{11} + r^1_{12} + w_1 - A_1}{4} \\
g_1 =& \frac{r^1_{22} - r^2_{21} + w_2 - B_1}{4}
\end{aligned}
$$

con A_1 y B_1 definidos en (6.18).

2. *Los invariantes fundamentales de $\mathcal{D}$ son las funciones en (6.21).*

3. *$\mathcal{D}$ es localmente equivalente a la distribución invariante a izquierda estándar del grupo de Lie N simplemente conexo con álgebra de Lie $\mathfrak{m}_{3,2}$ con la métrica subriemanniana invariante si y sólo si las funciones de estructura de los campos X_1, X_2, X_3, Z_1, Z_2 satisfacen:*

$$
\begin{aligned}
& q_3 = s_1 = t_2 = r^1_{13} = r^2_{13} = r^1_{23} = r^2_{23} = 0 \\
& s_2 = -t_1 \\
& u^1_{11} = u^2_{21} \quad u^1_{22} = -u^2_{12} \\
& u^2_{11} = -u^1_{21} \quad u^2_{22} = u^1_{12} \\
& r^3_{11} + r^3_{22} = 0 \\
& r^2_{11} + r^1_{12} + r^1_{21} + 4r^2_{22} - 5r^3_{23} = 0 \\
& r^1_{22} + r^2_{21} + r^2_{12} + 4r^1_{11} - 5r^3_{13} = 0
\end{aligned}
$$

Ahora procedemos a realizar un estudio de estas estructuras en grupos de Lie similar al de la sección anterior. Mostraremos para que álgebras de Lie la estructura subriemanniana asociada tiene sólo un invariante no nulo.

1. $\phi^1_1 = q_3 \neq 0$. El álgebra de Lie es de la forma:

$$
\begin{aligned}
& [X_1, X_2] = q_3 X_3 \quad [X_1, X_3] = Z_1 + s_3 X_3 \quad [X_2, X_3] = Z_2 + t_3 X_3 \\
& [Z_i, X_1] = -s_3 Z_i \quad [Z_i, X_2] = -t_3 Z_i
\end{aligned}
$$

   con $s_3, t_3 \in \mathbb{R}$. Resulta un álgebra de Lie soluble, y es nilpotente si y sólo si $(s_3, t_3) = (0, 0)$.

2. En el caso que todos los invariantes sean cero salvo ϕ^1_2 y ϕ^1_3, se tiene que

$$\phi^1_2 = 0 \Leftrightarrow \phi^1_3 = 0$$

   Si queremos explicitar todas las álgebras con estos coeficientes no nulos las relaciones dadas por Jacobi se vuelven muy complicadas (polinomios cúbicos). Sin embargo, mostramos ejemplos donde el resto de los invariantes son nulos y $\phi^1_2 = \phi^3_2$.

$$
\begin{aligned}
& [X_1, X_3] = Z_1 \quad [X_2, X_3] = Z_2 \\
& [Z_1, X_1] = -5\alpha Z_2 \quad [Z_1, X_2] = [Z_2, X_1] = \alpha Z_1 \\
& [Z_2, X_2] = \alpha Z_2
\end{aligned}
$$

   donde $\phi^1_2 = \phi^1_3 = 16\alpha^2$.

3. Si todos los invariantes son cero salvo ϕ_4^1 y ϕ_5^1, el álgebra de Lie correspondiente es de la forma:

$$[X_1, X_3] = Z_1 + s_1X_1 + s_2X_2 \quad [X_2, X_3] = Z_2 + t_1X_1 + t_2X_2$$
$$[Z_1, X_3] = s_1Z_1 + s_2Z_2 \quad [Z_2, X_3] = t_1Z_1 + t_2Z_2$$

Son álgebras de Lie solubles de la forma $\langle X_3 \rangle \rtimes \mathbb{R}^4$ con $X_3 \in \mathfrak{gl}(4)$.

4. $\phi_1^2 \neq 0$ No existen ejemplos. La anulación de los demás invariantes implica que $\phi_1^2 = 0$

5. $\phi_2^2 \neq 0$

$$[X_1, X_3] = Z_1 \quad [X_2, X_3] = Z_2$$
$$[Z_1, X_1] = 2\alpha X_1 \quad [Z_1, X_2] = \beta X_1 + \alpha X_2 \quad [Z_1, X_3] = 2\alpha X_3$$
$$[Z_2, X_1] = \alpha X_1 + \beta X_2 \quad [Z_1, X_2] = 2\beta X_2 \quad [Z_2, X_3] = -2\beta X_3$$

6. $\phi_3^2 \neq 0$, $\psi_4^2 \neq 0$ y $\psi_5^2 \neq 0$.

$$[X_1, X_3] = Z_1 + s_2X_2 \quad [X_2, X_3] = Z_2 - s_2X_1$$
$$[Z_1, X_3] = r_{13}^1X_1 + r_{13}^2X_2 + s_2Z_2 \quad [Z_2, X_3] = r_{23}^1X_1 + r_{23}^2X_2 - s_2Z_1$$

Para el caso subconforme las relaciones 6.15 son más complicadas y las álgebras de Lie correspondientes resultan más difíciles de calcular y/o escribir. Sin embargo, para cada invariante solo hay dos estructuras salvo equivalencia con todos los demás invariantes nulos ya que estos están definidos salvo múltiplo positivo. Daremos familias de ejemplos en cada caso.

1. $\psi_1^1 = q_3 \neq 0$.

$$[X_1, X_2] = q_3X_3 \quad [X_1, X_3] = Z_1 \quad [X_2, X_3] = Z_2$$

2. $\psi_2^1 = \psi_3^1 \neq 0$.

$$[X_1, X_3] = Z_1 \quad [X_2, X_3] = Z_2$$
$$[Z_1, X_1] = -\frac{31}{11}\alpha Z_2 \quad [Z_1, X_2] = [Z_2, X_1] = \alpha Z_1$$
$$[Z_2, X_2] = \alpha Z_2$$

La constante $-\frac{31}{11}$ proviene del hecho que el marco debe verificar 6.15.

3. $\psi_4^1 \neq 0$.

$$[X_1, X_3] = Z_1 + 2s_1X_1 + 2s_2X_2 \quad [X_2, X_3] = Z_2 + 2t_1X_1 + 2s_2X_2$$
$$[Z_1, X_3] = (3s_1 + t_2)Z_1 + s_2Z_2 \quad [Z_2, X_3] = t_1Z_1 + (s_1 + 3t_2)Z_2$$

4. $\psi_1^2 \neq 0$ No existen ejemplo. La anulación de los demás invariantes implica que $\psi_1^2 = 0$.

5. $\psi_2^2 \neq 0$

$$[X_1, X_2] = -t_3X_1 + s_3X_2 \quad [X_1, X_3] = Z_1 + s_1X_1 + s_3X_3 \quad [X_2, X_3] = Z_2 + s_1X_2 + t_3X_3$$
$$[Z_1, X_1] = -2s_3Z_1 \quad [Z_1, X_2] = -2t_3Z_1 \quad [Z_1, X_3] = 2s_1Z_1$$
$$[Z_2, X_1] = -2s_3Z_1 \quad [Z_2, X_2] = -2t_3Z_2 \quad [Z_2, X_3] = 2s_1Z_2$$

con $\psi_2^2 = 4s_1^2t_3^2$.

6. $\psi_3^2 \neq 0$, $\psi_4^2 \neq 0$, $\psi_5^2 \neq 0$. En el siguiente ejemplo los tres invariantes pueden tomar cualqier valor posible mientras que los demás invariantes son nulos.

$$\begin{aligned} &[X_1, X_3] = Z_1 + s_1 X_1 + s_2 X_2 \qquad [X_2, X_3] = Z_2 - s_2 X_1 + s_1 X_2 \\ &[Z_1, X_3] = 2s_1 Z_1 + s_2 Z_2 + r_{13}^1 X_1 + r_{13}^2 X_2 \\ &[Z_2, X_3] = -s_2 Z_1 + 2s_1 Z_2 + r_{23}^1 X_1 + r_{23}^2 X_2 \end{aligned}$$

6.4. Distribuciones subconformes de tipo (4,6)

Consideramos en este caso distribuciones fat de dimensión 4 en variedades orientadas de dimensión 6 con una estructura conforme compatible. Por la proposición 6.1.8 su símbolo es el álgebra de Heisenberg compleja $\mathfrak{h}_{(4,2)}$ con su estructura conforme correspondiente. $\mathfrak{h}_{(4,2)}$ tiene una estructura compleja graduada (ver Definición 7.1.2) que induce una estructura casi compleja en la distribución $\mathcal{D}$.

En [CE], estas distribuciones (sin considerar la estructura conforme) son denominadas elípticas y se prueba el siguiente teorema:

Teorema 6.4.1 (Cap, Eastwood). *Si una distribución $\mathcal{D}$ de dimensión 4 en una variedad M de dimensión 6 es elíptica, entonces M admite una única estructura casi compleja $J : TM \to TM$ caracterizada por las siguientes propiedades:*

- *J preserva $\mathcal{D}$;*
- *la orientación en M inducida por J es la dada;*
- *$L : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \to TM/\mathcal{D}$ es bilineal compleja para las estructuras inducidas, o equivalentemente $[X, Y] + J[JX, Y] \in \Gamma(\mathcal{D})$ para $X, Y \in \Gamma(\mathcal{D})$;*
- *$[X, Y] + J[JX, Y] - J[X, JY] + [JX, JY] \in \Gamma(\mathcal{D})$ para $X \in \Gamma(TM)$, $Y \in \Gamma(\mathcal{D})$;*

La primera y segunda condición para J nos dice que esta es una extensión de la estructura casi compleja en $\mathcal{D}$ ya considerada. Además, se prueba también que J es integrable sí y sólo sí se anula el tensor:

$$S : TM/\mathcal{D} \otimes \mathcal{D} \to TM/\mathcal{D} \tag{6.23}$$

$$S(Z, X) = [Z, X] + J[JZ, X] \quad mod\, \mathcal{D} \tag{6.24}$$

para $Z \in \Gamma(TM)$ y $X \in \Gamma(\mathcal{D})$. En dicho caso, $\mathcal{D}$ es una distribución de contacto compleja y por el teorema de Darboux es localmente isomorfa a la distribución flat, i.e., el grupo de Heisenberg complejo con la distribución invariante a izquierda canónica. Es decir, S es la obstrucción para que la distribución sea localmente equivalente al modelo playo. Además, J se caracteriza como la única estructura casi compleja en M que extiende la dada en $\mathcal{D}$ y tal que el tensor S resulte de tipo $(0, 2)$, es decir,

$$S(JZ, X) = S(Z, X) = -JS(Z, X)$$

Para prolongar construiremos una base de campos adaptados a nuestra estructura. Si fijamos una métrica subriemanniana en la clase de la métrica subconforme, como la estructura es compatible podemos encontrar campos ortonormales en $\mathcal{D}$ de la forma X, JX, Y y JY. Luego podemos considerar las 1-formas θ_1 y θ_2 que se anulan en $\mathcal{D}$ y verifican:

$$\begin{array}{rr} \theta_1([X,Y]) = -\theta_1([JX,JY]) = 1 & \theta_1([JX,Y]) = \theta_1([X,JY]) = 0 \\ \theta_2([X,Y]) = \theta_2([JX,JY]) = 0 & \theta_2([JX,Y]) = \theta_2([X,JY]) = 1 \end{array}$$

Entonces existe un único campo Z que verifica:

$$d\theta_1(Z,W) + d\theta_2(JZ,W) = 0 \tag{6.25}$$

para todo $W \in \Gamma(\mathcal{D})$. Observamos que $\{Z, JZ\}$ es un complemento canónico para la estructura subriemanniana escogida pero no para la estructura subconforme (si tomamos otra métrica en la clase conforme este complemento varía). Sin embargo, consideramos este complemento para inicializar el proceso de prolongación en un intento de simplificar las cálculos.

Entonces $\{X, JX, Y, JY, Z, JZ\}$ es un marco adaptado a la estructura y sus ecuaciones de estructuras tienen la forma:

$$\begin{aligned}
&[X,JX] = f_9X + f_9'JX + g_9Y + g_9'JY \\
&[X,Y] = Z + f_{10}X + f_{10}'JX + g_{10}Y + g_{10}'JY \\
&[X,JY] = JZ + f_{11}X + f_{11}'JX + g_{11}Y + g_{11}'JY \\
&[JX,Y] = JZ + f_{12}X + f_{12}'JX + g_{12}Y + g_{12}'JY \\
&[JX,JY] = -Z + f_{13}X + f_{13}'JX + g_{13}Y + g_{13}'JY \\
&[Y,JY] = f_{14}X + f_{14}'JX + g_{14}Y + g_{14}'JY \\
&[Z,X] = -\frac{s_1^1 + s_1^2}{2}Z + s_2^1JZ + f_1X + f_1'JX + g_1Y + g_1'JY \\
&[Z,JX] = \frac{s_2^1 + s_2^2}{2}Z + s_1^1JZ + f_2X + f_2'JX + g_2Y + g_2'JY \\
&[JZ,X] = s_2^2Z + \frac{s_1^1 + s_1^2}{2}JZ + f_3X + f_3'JX + g_3Y + g_3'JY \\
&[JZ,JX] = s_1^2Z - \frac{s_2^1 + s_2^2}{2}JZ + f_4X + f_4'JX + g_4Y + g_4'JY \\
&[Z,Y] = -\frac{s_3^1 + s_3^2}{2}Z + s_4^1JZ + f_5X + f_5'JX + g_5Y + g_5'JY \\
&[Z,JY] = \frac{s_4^1 + s_4^2}{2}Z + s_3^1JZ + f_6X + f_6'JX + g_6Y + g_6'JY \\
&[JZ,Y] = s_4^2Z + \frac{s_3^1 + s_3^2}{2}JZ + f_7X + f_7'JX + g_7Y + g_7'JY \\
&[JZ,JY] = s_3^2Z - \frac{s_4^1 + s_4^2}{2}JZ + f_8X + f_8'JX + g_8Y + g_8'JY
\end{aligned}$$

El grupo de automorfismos conformes del álgebra de Heisenberg esta dado por

$$G^0 = \left\{ \begin{pmatrix} A\cdot B & \\ & C \end{pmatrix} : \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1 \right\}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & -\gamma & -\delta \\ \beta & \alpha & \delta & -\gamma \\ \gamma & -\delta & \alpha & \beta \\ \delta & \gamma & -\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \rho\, cos(\theta) & -\rho\, sin(\theta) & 0 & 0 \\ \rho\, sin(\theta) & \rho\, cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho\, cos(\theta) & -\rho\, sin(\theta) \\ 0 & 0 & \rho\, sin(\theta) & \rho\, cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \rho^2 cos(2\theta) & -\rho^2 sin(2\theta) \\ \rho^2 sin(2\theta) & \rho^2 cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

Los elementos del G^0-fibrado principal P^0 son:

$$\begin{aligned}
(\varphi_p \cdot A)(x) &= \rho(\cos\theta\alpha - \sin\theta\beta)X + \rho(\sin\theta\alpha + \cos\theta\beta)JX + \rho(\cos\theta\gamma - \sin\theta\delta)Y \\
&\quad + \rho(\sin\theta\gamma + \cos\theta\delta)JY \\
(\varphi_p \cdot A)(Jx) &= \rho(-\sin\theta\alpha - \cos\theta\beta)X + \rho(\cos\theta\alpha - \sin\theta\beta)JX + \rho(-\sin\theta\gamma - \cos\theta\delta)Y \\
&\quad + \rho(\cos\theta\gamma - \sin\theta\delta)JY \\
(\varphi_p \cdot A)(y) &= \rho(-\cos\theta\gamma - \sin\theta\delta)X + \rho(-\sin\theta\gamma + \cos\theta\delta)JX + \rho(\cos\theta\alpha + \sin\theta\beta)Y \\
&\quad + \rho(\sin\theta\alpha - \cos\theta\beta)JY \\
(\varphi_p \cdot A)(Jy) &= \rho(\sin\theta\gamma - \cos\theta\delta)X + \rho(-\cos\theta\gamma - \sin\theta\delta)JX + \rho(-\sin\theta\alpha + \cos\theta\beta)Y \\
&\quad + \rho(\cos\theta\alpha + \sin\theta\beta)JY \\
(\varphi_p \cdot A)(z) &= \rho^2\cos(2\theta)Z + \rho^2\sin(2\theta)JZ \\
(\varphi_p \cdot A)(Jz) &= -\rho^2\sin(2\theta)Z + \rho^2\cos(2\theta)JZ
\end{aligned}$$

donde φ_p es la sección de P^0 definida por los campos $\{X, JX, Y, JY, Z, JZ\}$.

Como en los casos anteriores consideramos los campos $\{\widetilde{X}, \widetilde{JX}, \widetilde{Y}, \widetilde{JY}, \widetilde{Z}, \widetilde{JZ}\}$ en P^0 que levantan los campos $\{X, JX, Y, JY, Z, JZ\}$ según la trivialización determinada por φ_p.

Consideramos en el álgebra $\mathfrak{g}^0$ de derivaciones conformes la base dada por:

$$a = \begin{pmatrix} 1 &&&&& \\ & 1 &&&& \\ && 1 &&& \\ &&& 1 && \\ &&&& 2 & \\ &&&&& 2 \end{pmatrix} \quad r = \begin{pmatrix} 0 & -1 &&&& \\ 1 & 0 &&&& \\ && 0 & -1 && \\ && 1 & 0 && \\ &&&& 0 & -2 \\ &&&& 2 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 &&&& \\ -1 & 0 &&&& \\ && 0 & -1 && \\ && 1 & 0 && \\ &&&& 0 & 0 \\ &&&& 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.26}$$

$$c = \begin{pmatrix} && 1 & 0 && \\ && 0 & 1 && \\ -1 & 0 &&&& \\ 0 & -1 &&&& \\ &&&& 0 & 0 \\ &&&& 0 & 0 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} &&& 1 && \\ && -1 &&& \\ & 1 &&&& \\ -1 &&&&& \\ &&&& 0 & 0 \\ &&&& 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Estos elementos generan una base de campos fundamentales de $\mathcal{D}_0^0$ en el fibrado P^0 dada por: $A^\dagger := \rho\frac{\partial}{\partial\rho}$, $R^\dagger := \frac{\partial}{\partial\theta}$, $B^\dagger := \alpha\frac{\partial}{\partial\beta} + \delta\frac{\partial}{\partial\gamma} - \gamma\frac{\partial}{\partial\delta}$, $C^\dagger := -\gamma\frac{\partial}{\partial\beta} + \alpha\frac{\partial}{\partial\gamma} + \beta\frac{\partial}{\partial\delta}$ y $D^\dagger := \gamma\frac{\partial}{\partial\beta} - \beta\frac{\partial}{\partial\gamma} + \alpha\frac{\partial}{\partial\delta}$.

Todo par de espacios complementarios es de la forma:

$$\begin{aligned}
H^{-1} &= \langle\{\widetilde{X} + f_\rho A^\dagger + f_t R^\dagger + f_b B^\dagger + f_c C^\dagger + f_d D^\dagger,\ \ \widetilde{JX} + f'_\rho A^\dagger + f'_t R^\dagger + f'_b B^\dagger + f'_c C^\dagger + f'_d D^\dagger, \\
&\quad \widetilde{Y} + g_\rho A^\dagger + g_t R^\dagger + g_b B^\dagger + g_c C^\dagger + g_d D^\dagger,\ \ \widetilde{JY} + g'_\rho A^\dagger + g'_t R^\dagger + g'_b B^\dagger + g'_c C^\dagger + g'_d D^\dagger\}\rangle \\
H^{-2} &= \langle\{\widetilde{Z} + h_x\widetilde{X} + h_{Jx}\widetilde{JX} + h_y\widetilde{Y} + h_{Jy}\widetilde{JY} + \mathcal{D}_0^0, \\
&\quad \widetilde{JZ} + h'_x\widetilde{X} + h'_{Jx}\widetilde{JX} + h'_y\widetilde{Y} + h'_{Jy}\widetilde{JY} + \mathcal{D}_0^0\}\rangle
\end{aligned}$$

Calculando la función de torsión en $\mathfrak{g}^{-2} \otimes \mathfrak{g}^{-1}$ obtenemos que:

$$
\begin{aligned}
\langle C^0_{\mathcal{H}}(z,x), z\rangle =& -\frac{s_1^1+s_1^2}{2}Re(e^{i5\theta}v)+\frac{s_2^1+s_2^2}{2}Im(e^{i5\theta}v)-\frac{s_3^1+s_3^2}{2}Re(e^{i5\theta}w)+\frac{s_4^1+s_4^2}{2}Im(e^{i5\theta}w)\\
&-2(f_\rho Re(e^{i\theta}v)+f'_\rho Im(e^{i\theta}v)+g_\rho Re(e^{i\theta}w)+g'_\rho Im(e^{i\theta}w))\\
&+(\cos(2\theta)h_x+\sin(2\theta)h'_x)Re(e^{-i\theta}w)-(\cos(2\theta)h_{Jx}+\sin(2\theta)h'_{Jx})Im(e^{-i\theta}w)\\
&-(\cos(2\theta)h_y+\sin(2\theta)h'_y)Re(e^{-i\theta}v)+(\cos(2\theta)h_{Jy}+\sin(2\theta)h'_{Jy})Im(e^{-i\theta}v)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle C^0_{\mathcal{H}}(Jz,Jx), z\rangle =& \frac{s_1^1+s_1^2}{2}Re(e^{i5\theta}v)-\frac{s_2^1+s_2^2}{2}Im(e^{i5\theta}v)+\frac{s_3^1+s_3^2}{2}Re(e^{i5\theta}w)-\frac{s_4^1+s_4^2}{2}Im(e^{i5\theta}w)\\
&-\frac{s_1^1-s_1^2}{2}Re(e^{i\theta}v)+\frac{s_2^1-s_2^2}{2}Im(e^{i\theta}v)-\frac{s_3^1-s_3^2}{2}Re(e^{i\theta}w)+\frac{s_4^1-s_4^2}{2}Im(e^{i\theta}w)\\
&+2(-f_\theta Im(e^{i\theta}v)+f'_\theta Re(e^{i\theta}v)-g_\theta Im(e^{i\theta}w)+g'_\theta Re(e^{i\theta}w))\\
&-(-\sin(2\theta)h_x+\cos(2\theta)h'_x)Im(e^{-i\theta}w)-(-\sin(2\theta)h_{Jx}+\cos(2\theta)h'_{Jx})Re(e^{-i\theta}w)\\
&+(-\sin(2\theta)h_y+\cos(2\theta)h'_y)Im(e^{-i\theta}v)+(-\sin(2\theta)h_{Jy}+\cos(2\theta)h'_{Jy})Re(e^{-i\theta}v)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle C^0_{\mathcal{H}}(Jz,x), Jz\rangle =& \frac{s_1^1+s_1^2}{2}Re(e^{i5\theta}v)-\frac{s_2^1+s_2^2}{2}Im(e^{i5\theta}v)+\frac{s_3^1+s_3^2}{2}Re(e^{i5\theta}w)-\frac{s_4^1+s_4^2}{2}Im(e^{i5\theta}w)\\
&-2(f_\rho Re(e^{i\theta}v)+f'_\rho Im(e^{i\theta}v)+g_\rho Re(e^{i\theta}w)+g'_\rho Im(e^{i\theta}w))\\
&+(-\sin(2\theta)h_x+\cos(2\theta)h'_x)Im(e^{-i\theta}w)+(-\sin(2\theta)h_{Jx}+\cos(2\theta)h'_{Jx})Re(e^{-i\theta}w)\\
&-(-\sin(2\theta)h_y+\cos(2\theta)h'_y)Im(e^{-i\theta}v)-(-\sin(2\theta)h_{Jy}+\cos(2\theta)h'_{Jy})Re(e^{-i\theta}v)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle C^0_{\mathcal{H}}(z,Jx), Jz\rangle =& \frac{s_1^1+s_1^2}{2}Re(e^{i5\theta}v)-\frac{s_2^1+s_2^2}{2}Im(e^{i5\theta}v)+\frac{s_3^1+s_3^2}{2}Re(e^{i5\theta}w)-\frac{s_4^1+s_4^2}{2}Im(e^{i5\theta}w)\\
&+\frac{s_1^1-s_1^2}{2}Re(e^{i\theta}v)-\frac{s_2^1-s_2^2}{2}Im(e^{i\theta}v)+\frac{s_3^1-s_3^2}{2}Re(e^{i\theta}w)-\frac{s_4^1-s_4^2}{2}Im(e^{i\theta}w)\\
&-2(-f_\theta Im(e^{i\theta}v)+f'_\theta Re(e^{i\theta}v)-g_\theta Im(e^{i\theta}w)+g'_\theta Re(e^{i\theta}w))\\
&+(\cos(2\theta)h_x+\sin(2\theta)h'_x)Re(e^{-i\theta}w)-(\cos(2\theta)h_{Jx}+\sin(2\theta)h'_{Jx})Im(e^{-i\theta}w)\\
&-(\cos(2\theta)h_y+\sin(2\theta)h'_y)Re(e^{-i\theta}v)+(\cos(2\theta)h_{Jy}+\sin(2\theta)h'_{Jy})Im(e^{-i\theta}v)
\end{aligned}
$$

donde $v=\alpha+i\beta$, $w=\gamma+i\delta$. Los otros coeficientes tienen fórmulas similares.

Por la ecuación (4.10) la torsión de la estructura horizontal correspondiente a la primera prolongación coincide con la componente de grado 1 de la curvatura y a partir de esta podemos calcular la componente de grado 1 de la curvatura armónica. Por 7.2.1 y el hecho que las formas de tipo $(2,0)$, $(1,1)$ y $(0,2)$ son ortogonales, la curvatura armónica es la parte de tipo $(0,2)$ de la curvatura en $Hom(\mathfrak{g}^{-2}\otimes\mathfrak{g}^{-1},\mathfrak{g}^{-2})$. Entonces,

$$\kappa^1_H(z,x) = -\frac{1}{4}(C^0_{\mathcal{H}_1}(z,x)-C^0_{\mathcal{H}_1}(Jz,Jx)+J(C^0_{\mathcal{H}_1}(z,Jx)+C^0_{\mathcal{H}_1}(Jz,x))$$

para todo $z\in\mathfrak{g}^{-2}$ y $x\in\mathfrak{g}^{-1}$. Concluimos que:

$$\langle \kappa^1_H(z,x), z\rangle = -\frac{s_1^1+s_1^2}{2}Re(e^{i5\theta}v)+\frac{s_2^1+s_2^2}{2}Im(e^{i5\theta}v)-\frac{s_3^1+s_3^2}{2}Re(e^{i5\theta}w)+\frac{s_4^1+s_4^2}{2}Im(e^{i5\theta}w)$$

De manera análoga:

$$\begin{aligned}
\langle\kappa_H^1(z,x),Jz\rangle =&\frac{s_1^1+s_1^2}{2}Im(e^{i5\theta}v)+\frac{s_2^1+s_2^2}{2}Re(e^{i5\theta}v)+\frac{s_3^1+s_3^2}{2}Im(e^{i5\theta}w)+\frac{s_4^1+s_4^2}{2}Re(e^{i5\theta}w)\\
\langle\kappa_H^1(z,y),z\rangle =&\frac{s_1^1+s_1^2}{2}Re(e^{-i5\theta}w)+\frac{s_2^1+s_2^2}{2}Im(e^{-i5\theta}w)-\frac{s_3^1+s_3^2}{2}Re(e^{-i5\theta}v)-\frac{s_4^1+s_4^2}{2}Im(e^{-i5\theta}v)\\
\langle\kappa_H^1(z,y),Jz\rangle =&\frac{s_1^1+s_1^2}{2}Im(e^{-i5\theta}w)-\frac{s_2^1+s_2^2}{2}Re(e^{-i5\theta}w)-\frac{s_3^1+s_3^2}{2}Im(e^{-i5\theta}v)+\frac{s_4^1+s_4^2}{2}Re(e^{-i5\theta}v)
\end{aligned}$$

Como κ_H^1 es de tipo $(0,2)$, los demás coeficientes se obtienen de estos.

Hemos logrado calcular la componente de grado 1 de la curvatura armónica sin siquiera prolongar. Vemos además que los invariantes de la estructura en M que se obtienen a partir de κ_H^1 son:

$$\phi_i^1=s_i^1+s_i^2 \quad i=1,2,3,4$$

Pero si calculamos el tensor S dado en (6.23), en la base que estamos trabajando,

$$\begin{aligned}
S(Z,X)=[Z,X]+J[JZ,X]=-(s_1^1+s_1^2)Z+(s_2^1+s_2^2)JZ \quad mod\,\mathcal{D}\\
S(Z,Y)=[Z,Y]+J[JZ,Y]=-(s_3^1+s_3^2)Z+(s_4^1+s_4^2)JZ \quad mod\,\mathcal{D}
\end{aligned}$$

Es decir, hemos probado de manera alternativa que el tensor S es un invariante de nuestra estructura y además que todos los invariantes asociados a la estructura subconforme (si es que hay) deben obtenerse a partir de la componente de grado 2 de la curvatura armónica (ver Proposición 7.2.2 y Lema 7.1.10)

Ahora pasamos a calcular la primera prolongación. Tomando como condición de normalización el complemento ortogonal de la imagen de ∂_1 obtenemos un sistema de 28 ecuaciones con 28 incógnitas cuya solución es:

$$\begin{aligned}
h_x =&\frac{g_9'+f_{10}+f_{12}'}{3},\quad h_{Jx}=\frac{g_9-f_{13}'-f_{11}}{3},\quad h_y=\frac{-f_{14}'+g_{10}+g_{11}'}{3},\quad h_{Jy}=\frac{-f_{14}-g_{13}'-g_{12}}{3},\\
h_x' =&\frac{-g_9+f_{13}'+f_{11}}{3},\quad h_{Jx}'=\frac{g_9'+f_{10}+f_{12}'}{3},\quad h_y'=\frac{f_{14}+g_{13}'+g_{12}}{3},\quad h_{Jy}'=\frac{-f_{14}'+g_{10}+g_{11}'}{3},\\
f_\rho =&\frac{f_{14}'-g_{10}-g_{11}'}{6}\quad f_\rho'=-\frac{f_{14}+g_{12}+g_{13}'}{6},\quad g_\rho=\frac{f_{10}+f_{12}'+g_9'}{6},\quad g_\rho'=\frac{f_{11}+f_{13}'-g_9}{6},\\
f_t =&\frac{3f_9+f_{14}-2g_{10}'+g_{11}-g_{12}}{6},\quad f_t'=\frac{3f_9'+f_{14}'+2g_{10}-g_{11}'-3g_{12}'}{6},\\
g_t =&\frac{g_9+3g_{14}+2f_{10}'+f_{11}-f_{12}}{6},\quad g_t'=\frac{g_9'+3g_{14}'-2f_{10}+3f_{11}'+f_{12}'}{6},\\
f_b =&(\alpha\delta-\beta\gamma)(-g_9'+f_{10}-f_{12}')+(\alpha\gamma+\beta\delta)(-g_9+f_{10}'+f_{12})\\
&+(\frac{1}{2}-\gamma^2-\delta^2)(-f_9-g_{10}'-g_{12}),\\
f_b' =&(\alpha\delta-\beta\gamma)(g_9+f_{10}'+f_{12})+(\alpha\gamma+\beta\delta)(-g_9'-f_{10}+f_{12}')\\
&+(\frac{1}{2}-\gamma^2-\delta^2)(-f_9'+g_{10}-g_{12}'),\\
g_b =&(\alpha\delta-\beta\gamma)(f_{14}'+g_{10}-g_{11}')+(\alpha\gamma+\beta\delta)(-f_{14}-g_{10}'-g_{11})\\
&+(\frac{1}{2}-\gamma^2-\delta^2)(g_{14}-f_{10}'-f_{11}),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
g'_b =&(\alpha\delta-\beta\gamma)(-f_{14}+g'_{10}+g_{11})+(\alpha\gamma+\beta\delta)(-f'_{14}+g_{10}-g'_{11})\\
&+(\frac{1}{2}-\gamma^2-\delta^2)(g'_{14}+f_{10}-f'_{11}),\\
f_c =&(\alpha\beta-\gamma\delta)(g_9-f'_{10}-f_{12})+(\alpha\delta+\beta\gamma)(-f_9-g'_{10}-g_{12})\\
&+(\frac{1}{2}-\beta^2-\delta^2)(g'_9-f_{10}+f'_{12}),\\
f'_c =&(\alpha\beta-\gamma\delta)(g'_9+f_{10}-f'_{12})+(\alpha\delta+\beta\gamma)(-f'_9+g_{10}-g'_{12})\\
&+(\frac{1}{2}-\beta^2-\delta^2)(-g_9-f'_{10}-f_{12}),\\
g_c =&(\alpha\beta-\gamma\delta)(f_{14}+g'_{10}+g_{11})+(\alpha\delta+\beta\gamma)(g_{14}-f'_{10}-f_{11})\\
&+(\frac{1}{2}-\beta^2-\delta^2)(-f'_{14}-g_{10}+g'_{11}),\\
g'_c =&(\alpha\beta-\gamma\delta)(f'_{14}-g_{10}+g'_{11})+(\alpha\delta+\beta\gamma)(g'_{14}+f_{10}-f'_{11})\\
&+(\frac{1}{2}-\beta^2-\delta^2)(f_{14}-g'_{10}-g_{11}),\\
f_d =&(\alpha\gamma-\beta\delta)(f_9+g'_{10}+g_{12})+(\alpha\beta+\gamma\delta)(g'_9-f_{10}+f'_{12})\\
&+(\frac{1}{2}-\beta^2-\gamma^2)(-g_9+f'_{10}+f_{12}),\\
f'_d =&(\alpha\gamma-\beta\delta)(f'_9-g_{10}+g'_{12})+(\alpha\beta+\gamma\delta)(-g_9-f'_{10}-f_{12})\\
&+(\frac{1}{2}-\beta^2-\gamma^2)(-g'_9-f_{10}+f'_{12}),\\
g_d =&(\alpha\gamma-\beta\delta)(-g_{14}+f'_{10}+f_{11})+(\alpha\beta+\gamma\delta)(-f'_{14}-g_{10}+g'_{11})\\
&+(\frac{1}{2}-\beta^2-\gamma^2)(-f_{14}-g'_{10}-g_{11}),\\
g'_d =&(\alpha\gamma-\beta\delta)(-g'_{14}-f_{10}+f'_{11})+(\alpha\beta+\gamma\delta)(f_{14}-g'_{10}-g_{11})\\
&+(\frac{1}{2}-\beta^2-\gamma^2)(-f'_{14}+g_{10}-g'_{11}).
\end{aligned}
$$

Obtenemos por lo tanto el siguiente complemento canónico de la distribución

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}^{-2}=\langle\{Z+\frac{g'_9+f_{10}+f'_{12}}{3}X+\frac{g_9-f'_{13}-f_{11}}{3}JX+\frac{-f'_{14}+g_{10}+g'_{11}}{3}Y+\frac{-f_{14}-g'_{13}-g_{12}}{3}JY,\\
JZ+\frac{-g_9+f'_{13}+f_{11}}{3}X+\frac{g'_9+f_{10}+f'_{12}}{3}JX+\frac{f_{14}+g'_{13}+g_{12}}{3}Y+\frac{-f'_{14}+g_{10}+g'_{11}}{3}JY\}\rangle
\end{aligned}
\tag{6.27}
$$

Observemos que $\mathcal{D}^{-2}$ es J-invariante.

La elección del complemento de partida (6.25) simplificó los cálculos en la primera prolongación. Sin embargo, como este en general no coincide con el complemento canónico obtenido $\mathcal{D}^{-2}$, no podemos suponer que partimos del complemento canónico como lo hicimos en la sección 6.3 de manera de suponer que los coeficientes h y h' son cero para simplificar la segunda prolongación. Además, la expresión dada en 6.27 no permite caracterizar de manera directa a $\mathcal{D}^{-2}$.

Si en cambio, partimos de un complemento J-invariante arbitrario con:

$$
\begin{aligned}
&[X, JX] = f_9 X + f_9' JX + g_9 Y + g_9' JY \\
&[X, Y] = Z + f_{10} X + f_{10}' JX + g_{10} Y + g_{10}' JY \\
&[X, JY] = JZ + f_{11} X + f_{11}' JX + g_{11} Y + g_{11}' JY \\
&[JX, Y] = JZ + f_{12} X + f_{12}' JX + g_{12} Y + g_{12}' JY \\
&[JX, JY] = -Z + f_{13} X + f_{13}' JX + g_{13} Y + g_{13}' JY \\
&[Y, JY] = f_{14} X + f_{14}' JX + g_{14} Y + g_{14}' JY \\
&[Z, X] = u_{11}^1 Z + u_{11}^2 JZ + f_1 X + f_1' JX + g_1 Y + g_1' JY \\
&[Z, JX] = u_{12}^1 Z + u_{12}^2 JZ + f_2 X + f_2' JX + g_2 Y + g_2' JY \\
&[JZ, X] = u_{21}^1 Z + u_{21}^2 JZ + f_3 X + f_3' JX + g_3 Y + g_3' JY \\
&[JZ, JX] = u_{22}^1 Z + u_{22}^2 JZ + f_4 X + f_4' JX + g_4 Y + g_4' JY \\
&[Z, Y] = u_{13}^1 Z + u_{13}^2 JZ + f_5 X + f_5' JX + g_5 Y + g_5' JY \\
&[Z, JY] = u_{14}^1 Z + u_{14}^2 JZ + f_6 X + f_6' JX + g_6 Y + g_6' JY \\
&[JZ, Y] = u_{23}^1 Z + u_{23}^2 JZ + f_7 X + f_7' JX + g_7 Y + g_7' JY \\
&[JZ, JY] = u_{24}^1 Z + u_{24}^2 JZ + f_8 X + f_8' JX + g_8 Y + g_8' JY
\end{aligned}
$$

Entonces resulta que el complemento canónico es:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}^{-2} = \langle \{ & Z + c_1 X + c_2 JX + c_3 Y + c_4 JY, \\
& JZ - c_2 X + c_1 JX - c_4 Y + c_3 JY \} \rangle
\end{aligned}
$$

con

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{2g_9' + f_{10} + f_{11}' + 2f_{12}' + g_{14}' - u_{13}^1 - u_{14}^2}{6} \\
c_2 &= \frac{2g_9 - 2f_{11} - f_{12} - f_{13}' + g_{14} - u_{13}^2 + u_{14}^1}{6} \\
c_3 &= \frac{-f_9' + g_{10} + 2g_{11}' + g_{12}' - 2f_{14}' + u_{11}^1 + u_{12}^2}{6} \\
c_4 &= \frac{-f_9 - g_{11} - 2g_{12} - g_{13}' - 2f_{14} + u_{11}^2 - u_{12}^1}{6}
\end{aligned}
$$

Proposición 6.4.2. *Sea $\mathcal{D}$ una distribución de rango 4 en una variedad de dimensión 6 con una estructura subconforme compatible de tipo constante y sea X e Y campos en $\mathcal{D}$ tales que $\{X,\ JX,\ Y,\ JY\}$ formen una base conformemente ortogonal en cada punto de un entorno U. Entonces existe un único campo Z congruente con $[X, Y]$ módulo $\mathcal{D}$ tal que:*

$$
\begin{aligned}
&\langle [Z, X], Z\rangle + \langle [Z, JX], JZ\rangle = \\
&\langle [X, JX], JX\rangle - \langle [X, Y], Y\rangle - 2\langle [X, JY], JY\rangle - \langle [JX, Y], JY\rangle + 2\langle [Y, JY], JX\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\langle [Z, X], JZ\rangle - \langle [Z, JX], Z\rangle = \\
&\langle [X, JX], X\rangle + 2\langle [X, JY], Y\rangle + 2\langle [JX, Y], Y\rangle + \langle [JX, JY], JY\rangle + 2\langle [Y, JY], X\rangle
\end{aligned}
$$

$$\langle [Z,Y],Z\rangle + \langle [Z,JY],JZ\rangle =$$
$$2\langle [X,JX],JY\rangle + \langle [X,Y],X\rangle + \langle [X,JY],JX\rangle + 2\langle [JX,Y],JX\rangle + \langle [Y,JY],JY\rangle$$

$$\langle [Z,Y],JZ\rangle - \langle [Z,JY],Z\rangle =$$
$$2\langle [X,JX],Y\rangle - 2\langle [X,JY],X\rangle - \langle [JX,Y],X\rangle - 2\langle [JX,JY],JX\rangle + \langle [Y,JY],Y\rangle$$

donde $\langle\ ,\ \rangle$ *es la métrica en* U *en la cuál* $\{X,\ JX,\ Y,\ JY,\ Z,\ JZ\}$ *son ortonormales. En este caso, la distribución generada por* Z *y* JZ *es invariante por los difeomorfismos que preservan la estructura subconforme.*

Para realizar la segunda prolongación calculamos la función torsión $C^1_{\mathcal{H}}$ y resolvemos el sistema correspondiente a $\partial^* C^1_{\mathcal{H}}$, pero las soluciones explícitas son demasiado largas para describir en este trabajo.

Ejemplo 6.4.3. Consideramos en $\mathbb{R}^6$, con coordenadas $(x_1, x_2, x_3, x_4, z_1, z_2)$, los siguientes campos

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} - (x_3 - z_1)\frac{\partial}{\partial z_1} - x_4\frac{\partial}{\partial z_2} \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + x_4\frac{\partial}{\partial x_3} + x_4\frac{\partial}{\partial z_1} - x_3\frac{\partial}{\partial z_2}$$
$$X_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} \qquad X_4 = \frac{\partial}{\partial x_4}$$

y además la clase conforme de la métrica subriemanniana en la que son ortonormales, obtenemos un ejemplo de distribución fat de tipo $(4,6)$ con una estructura conforme compatible.

La estructura casi compleja asociada a esta distribución viene dada por:

$$JX_1 = X_2 \qquad JX_3 = X_4 \qquad J\frac{\partial}{\partial z_1} = \frac{\partial}{\partial z_2} - \frac{1}{2}X_4 \qquad J\frac{\partial}{\partial z_2} = -\frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{1}{2}X_3$$

Observamos que en este caso el tensor S del teorema 6.4.1 es no nulo,

$$S(\frac{\partial}{\partial z_1}, X_1) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z_1} \quad mod\, \mathcal{D}$$

por lo tanto la distribución no es localmente equivalente al modelo flat.

Considero $Z_2 = J\frac{\partial}{\partial z_1}$, entonces:

$$[X_1, X_3] = Z_1$$
$$[X_1, X_4] = Z_2 + \frac{1}{2}X_4$$
$$[X_2, X_3] = Z_2 + \frac{1}{2}X_4$$
$$[X_2, X_4] = -Z_1 - X_3$$
$$[Z_1, X_1] = \frac{\partial}{\partial z_1}$$
$$[Z_2, X_1] = \frac{1}{2}Z_2 + \frac{1}{4}X_3$$
$$[Z_2, X_2] = -\frac{1}{2}Z_1 - \frac{1}{2}X_3$$

o sea, $g'_{11} = \frac{1}{2}$, $g'_{12} = \frac{1}{2}$, $u^1_{11} = 1$,$g_{13} = -1$, $u^2_{21} = \frac{1}{2}$ y $u^1_{22} = -\frac{1}{2}$.

Por lo tanto el complemento canónico de la distribución está generado por:

$$Z' = \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{5}{12}X_3 \qquad JZ' = \frac{\partial}{\partial z_2} - \frac{1}{12}X_4$$

Capítulo 7

Cálculo de cohomologías y formas armónicas

7.1. Cohomología de estructuras de Tanaka de paso 2.

Sea $(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)$ una estructura de Tanaka con $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}^{-2} \oplus \mathfrak{g}^{-1}$ y $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)$. Denotamos por $n_i = \dim \mathfrak{g}^{-i}$ para cada $i = 0, 1, 2$.

Analizamos a continuación el grupo de cohomología $H^1(\mathfrak{m}, \mathfrak{g})$. Como $\mathfrak{m}$ es dos pasos nilpotente $H^{k,1}(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}) = \{0\}$ si $k \leq -2$ y, por el lema 2.4.2, $H^{k,1}(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}) = \{0\}$ para $k \geq 1$.

Si $k = -1$,

$$H^{-1,1}(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}) = Hom(\mathfrak{g}^{-1}, \mathfrak{g}^{-2})/ad(\mathfrak{g}^{-1})$$

Se deduce inmediatamente el siguiente

Lema 7.1.1. *1. $H^{-1,1}(\mathfrak{m}, \mathfrak{g})$ depende únicamente del álgebra $\mathfrak{m}$.*

2. $\dim H^{-1,1} \geq n_1 n_2 - n_1$.

3. $\dim H^{-1,1} = n_1 n_2 - n_1$ *si y sólo si $\mathfrak{m}$ es no degenerada, i.e. el centro de $\mathfrak{m}$ es $\mathfrak{g}^{-2}$.*

4. $H^{-1,1} = \{0\}$ *si y sólo si* $\mathfrak{m} = \mathfrak{h}_{(2n,1)}$.

5. En el caso que $\mathfrak{m}$ posee un producto interno, las formas armónicas resultan ser los elementos de $Hom(\mathfrak{g}^{-1}, \mathfrak{g}^{-2})$ ortogonales al subespacio $ad(\mathfrak{g}^{-1})$, es decir:

$$\mathcal{H}^{-1,1} = \{f \in Hom(\mathfrak{g}^{-1}, \mathfrak{g}^{-2}) : tr((ad\, x)^{\top} \circ f) = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{g}^{-1}\}$$

Definición 7.1.2. Una estructura compleja en un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un endomorfismo $J : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ tal que:

$$J^2 = -Id \qquad J[x, y] = [Jx, y]$$

Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se denomina *compleja graduada* si es graduada y posee una estructura compleja J tal que $J(\mathfrak{g}^i) \subset \mathfrak{g}^i$ para todo i.

Lema 7.1.3. *Si $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}^{-2} \oplus \mathfrak{g}^{-1}$ es un álgebra de Lie compleja graduada no degenerada con un producto interno J-invariante.*

$$\{f \in Hom(\mathfrak{g}^{-1}, \mathfrak{g}^{-2}) : f(Jx) = -Jf(x) \ \ \forall x \in \mathfrak{g}^{-1}\} \subset \mathcal{H}^{-1,1}(\mathfrak{m})$$

y la igualdad se da si y sólo si $\mathfrak{m} = \mathfrak{h}_{(4k,2)}$.

Demostración. Sea $\{x_i, Jx_i\}_{i=1}^{n}$ una base adaptada de $\mathfrak{g}^{-1}$. Entonces, para cada f

$$\langle f(x_i), [y, x_i]\rangle + \langle f(Jx_i), [y, Jx_i]\rangle = \langle f(x_i), [y, x_i]\rangle - \langle Jf(x_i), J[y, x_i]\rangle = 0$$

Sumando sobre todos los i se obtiene que $f \in \mathcal{H}^{-1,1}(\mathfrak{m})$. La dimensión del espacio de la izquierda es $\frac{1}{2}n_1n_2$ y la de $\mathcal{H}^{-1,1}(\mathfrak{m})$ es $n_1n_2 - n_1$, entonces la igualdad se da si y sólo si $n_2 = 2$. Considerando a $\mathfrak{m}$ como un álgebra sobre $\mathbb{C}$ se deduce que $\mathfrak{m} = \mathfrak{h}_{(4k,2)}$. □

Ejemplo 7.1.4. Si $\mathfrak{m}_{(3,2)}$ es el álgebra de Lie graduada definida en la sección 6.3,

$$\mathcal{H}^{-1,1}(\mathfrak{m}_{(3,2)}) = \{f \in Hom(\mathfrak{g}^{-1}, \mathfrak{g}^{-2}) : f(x_3) = 0,\ \langle f(x_1), z_1\rangle + \langle f(x_2), z_2\rangle = 0\}$$

Por otro lado:

$$H^{0,1} = Der_{gr}(\mathfrak{m})/\mathfrak{g}^0$$

Es decir $H^{0,1}$ nos da una medida de cuanto se diferencia $\mathfrak{g}^0$ del álgebra de derivaciones graduadas de $\mathfrak{m}$ y, trivialmente, $H^{-1,0} = \{0\}$ si y sólo si $\mathfrak{g}^0 = Der_{gr}(\mathfrak{m})$. Además el espacio de formas armónicas es el complemento ortogonal de $\mathfrak{g}^0$ en $Der_{gr}(\mathfrak{m})$,

$$\mathcal{H}^{0,1} = \{D \in Der_{gr}(\mathfrak{m}) : tr(T^{\top} \circ D) = 0 \quad \forall T \in \mathfrak{g}^0\}$$

Ejemplo 7.1.5. Si $\mathfrak{m}$ es un álgebra tipo H y $\mathfrak{g}^0 = Der_{sr}(\mathfrak{m})$ (respectivamente $\mathfrak{g}^0 = Der_{sc}(\mathfrak{m})$) entonces, por 5.1.5 y 5.1.3, $\mathcal{H}^{0,1}$ son las derivaciones simétricas de $\mathfrak{m}$ (resp. derivaciones simétricas de traza cero).

Ejemplo 7.1.6. Si $(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0) = (\mathfrak{m}_{(3,2)}, Der_{sr}(\mathfrak{m}))$ entonces,

$$\mathcal{H}^{-1,1} = \{D \in Der_{gr}(\mathfrak{m}_{(3,2)}) : \langle D(x_1), x_1\rangle = \langle D(x_2), x_2\rangle\}$$

y si $\mathfrak{g}^0 = Der_{sc}(\mathfrak{m})$,

$$\mathcal{H}^{-1,1} = \{D \in Der_{gr}(\mathfrak{m}_{(3,2)}) : \langle D(x_1), x_1\rangle = \langle D(x_2), x_2\rangle \text{ y } 2tr(D|_{\mathfrak{g}^{-2}}) + tr(D|_{\mathfrak{g}^{-1}}) = 0\}$$

Pasemos ahora a analizar $H^2(\mathfrak{m}, \mathfrak{g})$ en el caso que la prolongación de $(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}^0)$ es trivial, es decir, $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{g}^0$. Inmediatamente se desprende que $H^{k,2}(\mathfrak{m}, \mathfrak{g}) = \{0\}$ para $k \geq 5$ y $k < 0$.

$$H^{0,2} = Hom(\mathfrak{g}^{-1} \wedge \mathfrak{g}^{-1}, \mathfrak{g}^{-2})/Im\,\partial \quad \text{donde} \quad Im\,\partial = Hom_{gr}(\mathfrak{m})/Der_{gr}(\mathfrak{m})$$

Lema 7.1.7. *1.* $H^{0,2}(\mathfrak{m}, \mathfrak{g})$ *depende únicamente del álgebra de Lie* $\mathfrak{m}$.

2. dim $H^{0,2} = \binom{n_1}{2}n_2 - n_1^2 - n_2^2 + \dim Der_{gr}(\mathfrak{m})$.

3. dim $H^{0,2} \leq \binom{n_1}{2}n_2 - n_2^2$. *En particular,* $H^{0,2} = \{0\}$ *si* $\mathfrak{m}$ *es un álgebra libre dos pasos nilpotente.*

Demostración. 1 y 2 son inmediatos. Para 3, observamos que como $\mathfrak{m}$ es fundamental toda derivación graduada de $\mathfrak{m}$ queda determinada por como actúa en $\mathfrak{g}^{-1}$. Luego, dim $Der_{gr}(\mathfrak{m}) \leq n_1^2$. En las álgebras libres dos pasos nilpotente se verifica que $n_2 = \binom{n_1}{2}$.

□

Observación 7.1.8. La igualdad dada en la parte 2 de la proposición anterior se verifica para cualquier álgebra dos pasos nilpotente y, fijadas las dimensiones n_1 y n_2 con $n_1^2+n_2^2-\binom{n_1}{2}n_2>0$, me da una cota inferior para la dimensión de $Der_{gr}(\mathfrak{m})$.

Ejemplo 7.1.9. Como $\dim Der_{gr}(\mathfrak{h}_{(2,1)})=4$, $\dim Der_{gr}(\mathfrak{h}_{(4,2)})=8$ y $\dim Der_{gr}(\mathfrak{m}_{(3,2)})=7$ resulta que

$$H^{0,2}(\mathfrak{h}_{(2,1)})=\{0\},\quad H^{0,2}(\mathfrak{h}_{(2,1)})=\{0\},\quad H^{0,2}(\mathfrak{m}_{(3,2)})=\{0\}.$$

El grupo de cohomología $H^{4,2}(\mathfrak{m},\mathfrak{g})$ es el núcleo de

$$\partial: Hom(\mathfrak{g}^{-2}\wedge\mathfrak{g}^{-2},\mathfrak{g}^0)\to Hom(\bigwedge^3\mathfrak{m},\mathfrak{g})$$

Sea $f\in H^{4,2}(\mathfrak{m},\mathfrak{g})$, $z\in\mathfrak{g}^{-2}$, $x,\ y\in\mathfrak{g}^{-1}$ entonces:

$$0=\partial f(z,x,y)=-f([x,y],z)$$

Como $\mathfrak{g}$ es fundamental, resulta que $f=0$.

Lema 7.1.10. *Si $\mathfrak{m}$ es fundamental, $H^{4,2}=\{0\}$*

Definición 7.1.11. Sea $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}^{-2}\oplus\mathfrak{m}^{-1}$ un álgebra de Lie 2-pasos nipotente graduada. Decimos que $\mathfrak{m}$ es *reducible* si existe una descomposición $\mathfrak{m}^{-1}=\mathfrak{n}^{-1}\oplus\mathfrak{p}^{-1}$ tal que $[\mathfrak{n}^{-1},\mathfrak{p}^{-1}]=\{0\}$ en cuyo caso denominamos *componentes* de $\mathfrak{m}$ a las subálgebras $\mathfrak{m}^{-2}\oplus\mathfrak{n}^{-1}$ y $\mathfrak{m}^{-2}\oplus\mathfrak{p}^{-1}$.

Por ejemplo, las álgebras de tipo H no irreducibles son un ejemplo de álgebras reducibles donde cada componente es fundamental.

Proposición 7.1.12.

1. *Si la prolongación de los pares $(\mathfrak{m},\mathfrak{g}^0)$ y $(\mathfrak{m},\mathfrak{h}^0)$ es trivial con $\mathfrak{g}^0\le\mathfrak{h}^0$ entonces*

$$\dim H^{1,2}(\mathfrak{m},\mathfrak{g}^0)=\dim H^{1,2}(\mathfrak{m},\mathfrak{h}^0)+(\dim\mathfrak{h}^0-\dim\mathfrak{g}^0)n_1 \tag{7.1}$$

En particular, si $H^{1,2}(\mathfrak{m},\mathfrak{g}^0)=\{0\}$ entonces $\mathfrak{g}^0$ es maximal entre las subálgebras de $Der_{gr}(\mathfrak{m})$ para las cuáles la prolongación es trivial. Además, en este caso, $H^{1,2}(\mathfrak{m},Der_{gr}(\mathfrak{m}))=\{0\}$.

2. *Si $\mathfrak{g}^0\le\mathfrak{h}^0$ entonces $H^{3,2}(\mathfrak{m},\mathfrak{g}^0)\subset H^{3,2}(\mathfrak{m},\mathfrak{h}^0)$.*

3. *Si $\mathfrak{m}$ es reducible en dos componentes fundamentales entonces $H^{3,2}=\{0\}$.*

Demostración.

1. Observamos que $\partial_{1,2}:C^{1,2}(\mathfrak{m},\mathfrak{g}^0)\to C^{1,3}(\mathfrak{m},\mathfrak{g}^0)$ no depende de $\mathfrak{g}^0$ y por lo tanto, fijada $\mathfrak{m}$, $H^{1,2}(\mathfrak{m},\mathfrak{g}^0)$ depende sólo de la imagen de $\partial_{1,1}:C^{1,1}(\mathfrak{m},\mathfrak{g}^0)\to C^{1,2}(\mathfrak{m},\mathfrak{g}^0)$. Cuando la prolongación del par $(\mathfrak{m},\mathfrak{g}^0)$ es trivial esta función es inyectiva y $\dim Im\,\partial_{1,1}=n_2n_1+n_1n_0$ de donde se concluye (7.1). Las demás afirmaciones son inmediatas.

2. Es trivial ya que $H^{3,2}(\mathfrak{m},\mathfrak{g}^0)$ es el núcleo de ∂_3 en $C^{3,2}$.

3. Sean $\mathfrak{m}^{-1}=\mathfrak{n}^{-1}\oplus\mathfrak{p}^{-1}$ una descomposición de $\mathfrak{m}$ con $\mathfrak{n}=\mathfrak{m}^{-2}\oplus\mathfrak{n}^{-1}$ y $\mathfrak{p}=\mathfrak{m}^{-2}\oplus\mathfrak{p}^{-1}$ subálgebras fundamentales. Consideremos $f\in\ker\partial_{2,3}$, $u,v\in\mathfrak{n}^{-1}$ y $w\in\mathfrak{p}^{-1}$ entonces:

$$0=\partial f(u,v,w)=-f([u,v],w)+f([u,w],v)-f([v,w],u)=-f([u,v],w)$$

Como $\mathfrak{n}$ es fundamental, $f(\mathfrak{m}^{-2},\mathfrak{p}^{-1})=0$ y análogamente se prueba que $f(\mathfrak{m}^{-2},\mathfrak{n}^{-1})=0$. Por lo tanto, $f(\mathfrak{m}^{-2},\mathfrak{m}^{-1})=0$. Si ahora consideramos $u,v\in\mathfrak{m}^{-1}$ y $z\in\mathfrak{m}^{-2}$ entonces:

$$0=\partial f(u,v,z)=-f([u,v],z)+f(u,z)(v)-f(v,z)(u)=-f([u,v],z)$$

Con lo que concluimos que $f(\mathfrak{m}^{-2},\mathfrak{m}^{-2})=0$. Por lo tanto, $f=0$.

□

7.2. Cohomología subriemanniana y subconforme de $\mathfrak{h}_{2,1}$, $\mathfrak{m}_{3,2}$ y $\mathfrak{h}_{4,2}$

De la anterior sección sabemos que $H^{k,2}(\mathfrak{m}.\mathfrak{g}^0) = \{0\}$ si $k \leq 0$ o $k \geq 4$ para $\mathfrak{m} = \mathfrak{h}_{2,1}$, $\mathfrak{m}_{3,2}$, $\mathfrak{h}_{4,2}$ cualquiera sea el álgebra $\mathfrak{g}^0$.

Mediante sencillos cálculos y observando las dimensiones de los espacios involucrados vemos que:

$$\begin{aligned} H^{1,2}(\mathfrak{h}_{2,1}, \mathfrak{g}^0_{sr}) &= \{0\} \\ \dim\, H^{2,2}(\mathfrak{h}_{2,1}, \mathfrak{g}^0_{sr}) &= 3 \\ H^{2,3}(\mathfrak{h}_{2,1}, \mathfrak{g}^0_{sr}) &= \{0\} \end{aligned}$$

Además, el espacio de funciones armónicas $\mathcal{H}^{2,2}$ está compuesto por las formas $f \in C^{2,2}$ que verifican:

$$\langle f(x,y), r\rangle = \langle f(z,x), y\rangle - \langle f(z,y), x\rangle \tag{7.2}$$

$$\langle f(z,x), x\rangle = -\langle f(z,y), y\rangle \tag{7.3}$$

Estas ecuaciones provienen de la condiciones $f \in (\mathrm{Im}\partial)^{\perp}$ y $f \in (\mathrm{Im}\partial^*)^{\perp}$, respectivamente (recordar la descomposición de Hodge 2.7).

Como $\mathfrak{h}_{2,1}$ es de tipo 1-Iwasawa, la prolongación del par $(\mathfrak{h}_{2,1}, \mathfrak{g}^0_{sr})$ es el álgebra semisimple $\mathfrak{su}(2,1)$ (cf. Proposición 5.3.1). Los grupos de cohomología $H^{i,2}$ en el caso que la prolongación es simple son calculados en [Y].

Para el álgebra de Lie $\mathfrak{m}_{3,2}$ se verifica que $\dim\, \mathfrak{g}^0_{sr} = 1$, $\dim\, \mathfrak{g}^0_{sc} = 2$ y $\dim\, Der_{gr}(\mathfrak{m}) = 7$. Calculando obtenemos que:

$$\begin{aligned} \dim\, H^{1,2}(\mathfrak{m}_{3,2}, \mathfrak{g}^0_{sc}) &= 7 \\ \dim\, H^{2,2}(\mathfrak{m}_{3,2}, \mathfrak{g}^0_{sc}) &= 7 \\ H^{3,2}(\mathfrak{m}_{3,2}, \mathfrak{g}^0_{sc}) &= \{0\} \end{aligned}$$

y a partir de 1 y 2 de la Proposición 7.1.12, y cálculos auxiliares tenemos que:

$$\begin{aligned} \dim\, H^{1,2}(\mathfrak{m}_{3,2}, \mathfrak{g}^0_{sr}) &= 10 \\ \dim\, H^{2,2}(\mathfrak{m}_{3,2}, \mathfrak{g}^0_{sr}) &= 7 \\ H^{3,2}(\mathfrak{m}_{3,2}, \mathfrak{g}^0_{sr}) &= \{0\} \end{aligned}$$

Las formas armónicas en $\mathcal{H}^{1,2}(\mathfrak{m}_{3,2}, \mathfrak{g}^0_{sr})$ verifican las siguientes ecuaciones:

$$\langle f(z_i, x_3), z_j\rangle = \langle f(x_i, x_3), x_j\rangle \quad \text{para } i,j = 1,2 \tag{7.4}$$

$$\langle f(z_i, x_1), z_1\rangle + \langle f(z_i, x_2), z_2\rangle + \langle f(x_i, x_3), x_3\rangle = 0 \quad \text{para } i = 1,2 \tag{7.5}$$

$$\langle f(z_2, x_i), z_1\rangle - \langle f(z_1, x_i), z_2\rangle - \langle f(x_1, x_2), x_i\rangle = 0 \quad \text{para } i = 1,2 \tag{7.6}$$

$$\langle f(z_2, x_3), z_1\rangle - \langle f(z_1, x_3), z_2\rangle - \langle f(x_1, x_3), x_2\rangle + \langle f(x_2, x_3), x_1\rangle = 0 \tag{7.7}$$

$$\langle f(z_1, x_2), z_1\rangle - \langle f(z_2, x_1), z_1\rangle - \langle f(x_1, x_2), x_1\rangle - \langle f(x_2, x_3), x_3\rangle = 0 \tag{7.8}$$

$$\langle f(z_1, x_2), z_2\rangle - \langle f(z_2, x_1), z_2\rangle - \langle f(x_1, x_2), x_2\rangle - \langle f(x_1, x_3), x_3\rangle = 0 \tag{7.9}$$

donde las primeras 9 ecuaciones provienen de la condición de ortogonalidad con $Im\,\partial$ y las últimas dos de la ortogonalidad con $Im\,\partial^*$. Es claro que las formas armónicas en $\mathcal{H}^{1,2}(\mathfrak{m}_{3,2},\mathfrak{g}^0_{sc})$ deben verificar las ecuaciones 7.4 a 7.9 porque el espacio $C^{1,2}$ y la imagen de ∂_1^* no dependen de $\mathfrak{g}^0$ y la imagen de ∂ con respecto a $\mathfrak{g}^0_{sc}$ contiene a la imagen ∂ con respecto de $\mathfrak{g}^0_{sr}$, es más, la diferencia de sus dimensiones es 3 (por 1 de la Proposición 7.1.12). Entonces, las formas armónicas subconformes deben verifican 3 ecuaciones adicionales:

$$\sum_{j=1}^{2} 2\langle f(x_i,z_j),z_j\rangle + \sum_{j=1}^{3}\langle f(x_i,x_j),x_j\rangle = 0 \quad \text{para } i=1,2,3 \tag{7.10}$$

En el caso de grado 2 subriemanniano, f es una forma armónica en $\mathcal{H}^{2,2}(\mathfrak{m}_{3,2},\mathfrak{g}^0_{sr})$ si y sólo si verifica las siguientes 16 ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\langle f(x_1,x_3),r\rangle - \langle f(z_1,x_1),x_2\rangle + \langle f(z_1,x_2),x_1\rangle &= 0 \qquad (7.11)\\
\langle f(x_1,x_3),r\rangle - \langle f(z_1,x_1),x_2\rangle - \langle f(z_1,x_2),x_1\rangle + 2\langle f(z_2,x_1),x_1\rangle &\\
-\langle f(z_1,z_2),z_1\rangle &= 0\\
\langle f(x_1,x_2),r\rangle - \langle f(z_1,x_1),x_3\rangle &= 0\\
\langle f(x_1,x_3),r\rangle + \langle f(z_1,x_1),x_2\rangle &= 0\\
\langle f(z_1,x_1),x_1\rangle - 4\langle f(z_1,x_2),x_2\rangle - \langle f(z_1,x_3),x_3\rangle &= 0\\
\langle f(z_1,x_1),x_1\rangle + \langle f(z_1,x_3),x_3\rangle &= 0\\
\langle f(z_1,x_2),x_1\rangle - \langle f(z_1,z_2),z_1\rangle &= 0\\
\langle f(z_1,x_2),x_3\rangle &= 0
\end{aligned}$$

donde las otras 8 ecuaciones se obtienen de hacer la sustitución $z_1\to z_2$, $z_2\to -z_1$, $x_1\to x_2$ y $x_2\to -x_1$. Esto se debe a que $Im\,\partial$, $Im\,\partial^*$ y $\mathcal{H}^{1,2}$ son invariantes por la acción de G^0_{sr}. La primera ecuación y su correspondiente son las que provienen de la ortogonalidad con $Im\,\partial$.

En el caso subconforme, el espacio $C^{1,2}$ depende de $\mathfrak{g}^0$ por lo que las formas armónicas en este caso pueden no verificar las ecuaciones anteriores. Mas precisamente, $f\in\mathcal{H}^{2,2}(\mathfrak{m}_{3,2},\mathfrak{g}^0_{sc})$ si y sólo si:

$$\begin{aligned}
\langle f(x_1,x_3),r\rangle - \langle f(z_1,x_1),x_2\rangle + \langle f(z_1,x_2),x_1\rangle &= 0 \qquad (7.12)\\
\langle f(x_1,x_3),D\rangle - \langle f(z_1,x_1),x_1\rangle - \langle f(z_1,x_2),x_2\rangle - \langle f(z_1,x_3),x_3\rangle &= 0 \qquad (7.13)\\
\langle f(x_1,x_3),r\rangle - \langle f(z_1,x_1),x_2\rangle - \langle f(z_1,x_2),x_1\rangle + 2\langle f(z_2,x_1),x_1\rangle &\\
-\langle f(z_1,z_2),z_1\rangle + 5\langle f(x_2,x_3),a\rangle &= 0\\
\langle f(x_1,x_2),r\rangle - \langle f(z_1,x_1),x_3\rangle &= 0\\
\langle f(x_1,x_3),r\rangle + \langle f(z_1,x_1),x_2\rangle &= 0\\
\langle f(z_1,x_1),x_1\rangle - 4\langle f(z_1,x_2),x_2\rangle - \langle f(z_1,x_3),x_3\rangle - 5\langle f(x_1,x_3),a\rangle &= 0\\
\langle f(z_1,x_1),x_1\rangle + \langle f(z_1,x_3),x_3\rangle + 2\langle f(x_1,x_3),a\rangle &= 0\\
\langle f(z_1,x_2),x_1\rangle - \langle f(z_1,z_2),z_1 + 4\langle f(x_2,x_3),a\rangle\rangle &= 0\\
\langle f(z_1,x_2),x_3\rangle &= 0\\
\langle f(x_1,x_2),a\rangle &= 0
\end{aligned}$$

Las demás ecuaciones se obtienen de la sustitución mencionada anteriormente. En este caso las primeras dos ecuaciones y sus correspondientes provienen de la ortogonalidad con $Im\,\partial$.

Ahora consideremos el álgebra de Heisenberg compleja $\mathfrak{h}_{4,2}$.

Proposición 7.2.1. dim $H^{1,2}(\mathfrak{h}_{4,2}, \mathfrak{g}^0_{sc}) = 4$ *y además,*

$$\mathcal{H}^{1,2}(\mathfrak{h}_{4,2}, \mathfrak{g}^0_{sc}) = \{f \in Hom(\mathfrak{g}^{-2} \otimes \mathfrak{g}^{-1}, \mathfrak{g}^{-2}) : f(z, Jx) = f(Jz, x) = -Jf(z, x) \quad \forall x \in \mathfrak{g}^{-1},\ z \in \mathfrak{g}^{-2}\} \tag{7.14}$$

Demostración. Primero veamos que $\partial_{1,2} : C^{1,2} \longrightarrow C^{1,3}$ es sobreyectiva. Consideramos el conjunto:

$$\mathcal{A}_{(1,1)} = \{f \in Hom(\mathfrak{g}^{-2} \otimes \mathfrak{g}^{-1}, \mathfrak{g}^{-2}) : f(Jz, Jx) = f(z, x) \quad \forall x \in \mathfrak{g}^{-1},\ z \in \mathfrak{g}^{-2}\}$$

que se denominan formas de tipo $(1, 1)$ con respecto a J. Restringimos $\partial_{1,2}$ a este conjunto y consideramos $f \in \mathcal{A}_{(1,1)}$ tal que $\partial f = 0$. Entonces, para $x, y \in \mathfrak{g}^{-1}$,

$$0 = \partial f(x, Jx, y) = f([x, y], Jx) - f([Jx, y], x) = f([x, y], Jx) - f(J[x, y], x) = 2f([x, y], Jx)$$

lo que implica que $f = 0$. Entonces, como $\mathcal{A}_{(1,1)}$ y $C^{2,3}$ tienen ambos dimensión 8 se concluye que $\partial_{1,2}$ es sobre y a partir de un simple cálculo con las dimensiones obtenemos que dim $H^{1,2}(\mathfrak{h}_{4,2}, \mathfrak{g}^0_{sc}) = 4$.

Ahora bien, denominamos $\mathcal{A}_{(0,2)}$ al espacio definido en (7.14) cuyos elementos se denominan formas de tipo $(0, 2)$. Observamos que $\mathcal{A}_{(0,2)}$ tiene dimensión 4, luego solo basta ver que toda $f \in \mathcal{A}_{(0,2)}$ es armónica, i.e. $\partial f = 0$ y $\partial^* f = 0$. Como $f \in Hom(\mathfrak{g}^{-2} \otimes \mathfrak{g}^{-1}, \mathfrak{g}^{-2})$, de la definición de ∂ y la compatibilidad de J con el corchete se deduce que ∂f debe ser de tipo $(0, 2)$, es decir, verificar la propiedad:

$$\partial f(Jx, y, w) = -J\partial f(x, y, w)$$

para $x, y, w \in \mathfrak{g}^{-1}$. Pero en $C^{2,3} = Hom(\mathfrak{g}_{-1} \wedge \mathfrak{g}_{-1} \wedge \mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_{-2})$ el espacio de funciones con esta propiedad es nulo.

Por otro lado, consideremos una base de $\mathfrak{h}_{4,2}$ de la forma $\{x_1, Jx_1, x_2, Jx_2, z, Jz\}$ con $x_1, x_2 \in \mathfrak{g}^{-1}$ y $z \in \mathfrak{g}^{-2}$. Entonces, para $g \in C^{2,1}$

$$\begin{aligned}
&\langle \partial g(z, x_i), f(z, x_i)\rangle + \langle \partial g(Jz, x_i), f(Jz, x_i)\rangle \\
&+\langle \partial g(z, Jx_i), (z, Jx_i)\rangle + \langle \partial g(Jz, Jx_i), f(Jz, Jx_i)\rangle = \\
&\langle [g(z), x_i] - g(x_i)(z), f(z, x_i)\rangle + \langle [g(Jz), x_i] - g(x_i)(Jz), f(Jz, x_i)\rangle \\
&+\langle [g(z), Jx_i] - g(Jx_i)(z), f(z, Jx_i)\rangle + \langle [g(Jz), Jx_i] - g(Jx_i)(Jz), f(Jz, Jx_i)\rangle = \\
&\langle [g(z), x_i], f(z, x_i)\rangle - \langle g(x_i)(z), f(z, x_i)\rangle \\
&-\langle [g(Jz), x_i], Jf(z, x_i)\rangle + \langle Jg(x_i)(z), Jf(z, x_i)\rangle \\
&-\langle J[g(z), x_i], Jf(z, x_i)\rangle + \langle g(Jx_i)(z), Jf(z, x_i)\rangle \\
&-\langle J[g(Jz), x_i], f(z, x_i)\rangle + \langle Jg(Jx_i)(z), f(z, x_i)\rangle = 0
\end{aligned} \tag{7.15}$$

donde usamos que los elementos de $\mathfrak{g}^0_{sc}$ conmutan con J y el producto interno es J-invariante. Sumando para $i = 1, 2$, concluimos que $\langle \partial g, f\rangle =$ y por lo tanto, $\partial^* f = 0$ □

Proposición 7.2.2. $H^{3,2}(\mathfrak{h}_{4,2}, \mathfrak{g}^0_{sc}) = \{0\}$ *y* $H^{3,2}(\mathfrak{h}_{4,2}, \mathfrak{g}^0_{sr}) = \{0\}$.

Demostración. Por 2 de la Proposición 7.1.12, basta ver que $\partial_{3,2}$ es inyectiva en $C^{3,2}$ en el caso subconforme. Sea $f \in C^{3,2}$ tal que $\partial f = 0$. Entonces, para $x, y \in \mathfrak{g}^{-1}$,

$$0 = \partial f(x, Jx, y) = f([x, y], Jx) - f([Jx, y], x) = f([x, y], Jx) - f(J[x, y], x)$$

y como $\mathfrak{h}_{4,2}$ es no singular podemos concluir que

$$f(Jz, x) = f(z, Jx) \tag{7.16}$$

para todo $x \in \mathfrak{g}^{-1}$ y $z \in \mathfrak{g}^{-2}$.

Sea $z = [x, y]$ no nulo,

$$0 = \partial f(z, x, y) = f(z, x)(y) - f(z, y)(x) \tag{7.17}$$

y por otro lado,

$$\begin{aligned} 0 = \partial f(Jz, Jx, Jy) &= -f(Jz, Jx)(Jy) + f(Jz, Jy)(Jx) + f(z, Jz) \\ &= f(z, x)(Jy) - f(z, y)(Jx) + f(z, Jz) \\ &= J(f(z, x)(y) - f(z, y)(Jx)) + f(z, Jz) \\ &= f(z, Jz) \end{aligned}$$

donde en la tercera igualdad usamos (7.16), en la cuarta que toda derivación de $\mathfrak{h}_{4,2}$ conmuta con J y en la quinta (7.17). Concluimos que, $f(\mathfrak{g}^{-2}, \mathfrak{g}^{-2}) = 0$.

Entonces, (7.17) se verifica para todos $x, y \in \mathfrak{g}^{-1}$ y $z \in \mathfrak{g}^{-2}$ y además,

$$\begin{aligned} (f(z, Jx) - Jf(z, x))(y) &= f(z, Jx)(y) - Jf(z, x)(y) \\ &= f(z, y)(Jx) - Jf(z, y)(x) \\ &= f(z, y)(Jx) - f(z, y)(Jx) = 0 \end{aligned}$$

Concluimos que $f(z, Jx) = Jf(z, x)$ en $\mathfrak{g}^{-1}$ (se puede probar de forma análoga que son iguales en todo $\mathfrak{h}_{4,2}$) pero como $f(z, x), f(z, Jx) \in \mathfrak{g}^0_{sc}$ se debe cumplir que, para todo $z \in \mathfrak{g}^{-2}$ y $x \in \mathfrak{g}^{-1}$, $f(z, x)$ pertenece al espacio generado por a y r (ver (6.26), a y r generan el subespacio de $\mathfrak{g}^0_{sc}$ invariante por J). Fijado $x \in \mathfrak{g}^{-1}$ existe $y \in \mathfrak{g}^{-1}$ tal que $\{x, Jx, y, Jy\}$ es base de $\mathfrak{g}^{-1}$. Si $f(z, x) = \alpha a + \beta r$ y $f(z, y) = \gamma a + \delta r$,

$$\alpha y + \beta Jy = f(z, x)(y) = f(z, y)(x) = \gamma x + \delta Jx$$

por (7.17). Concluimos que $f(\mathfrak{g}^{-2}, \mathfrak{g}^{-1}) = 0$, o sea $f = 0$. $\square$

Proposición 7.2.3. $\dim H^{2,2}(\mathfrak{h}_{4,2}, \mathfrak{g}^0_{sc}) \geq 16$, $\dim H^{2,2}(\mathfrak{h}_{4,2}, \mathfrak{g}^0_{sr}) \geq 12$.

Demostración. $\dim C^{1,2}(\mathfrak{h}_{4,2}, \mathfrak{g}^0_{sc}) = 10$, $\dim C^{2,2}(\mathfrak{h}_{4,2}, \mathfrak{g}^0_{sc}) = 64$ y $\dim C^{3,2}(\mathfrak{h}_{4,2}, \mathfrak{g}^0_{sc}) = 40$. Además, si consideramos en $Hom(\mathfrak{g}^{-2} \wedge \mathfrak{g}^{-1} \wedge \mathfrak{g}^{-1}) \subset C^{3,2}$ el espacio de dimensión 2 de las formas de tipo $(0, 3)$, i.e. tales que $f(Jz, x, y) = f(z, Jx, y) = f(z, x, Jy) = -Jf(z, x, y)$, este resulta estar en $\ker \partial^*$ por un cálculo similar a (7.15). Luego, $\dim(Im\, \partial) \leq 38$ y concluimos que $\dim H^{2,2}(\mathfrak{h}_{4,2}, \mathfrak{g}^0_{sc}) \geq 16$. De la misma forma se prueba que $\dim H^{2,2}(\mathfrak{h}_{4,2}, \mathfrak{g}^0_{sr}) \geq 12$.

$\square$

Es razonable conjeturar que en esta proposición vale la igualdad.

Bibliografía

[AD] D. Alekseevsky, L. David, *Tanaka structures (non holonomic G-structures) and Cartan connections*, arXiv:1409.8405v2 [math.DG] (2015).

[BFG] P. Bieliavsky, E. Falbel and C. Gorodski, *The classification of simply-connected contact sub-riemannian symmetric spaces* Pacific Journal of Mathematics, vol 188, No. 1 (1999) 65-82.

[BGG] R. Bryant, P. Griffiths and D. Grossman, *Exterior Differential Systems and Euler-Lagrange Partial Differential Equations*, Chicago Lectures in Mathematics, 2003-Chicago Univ. Press.

[Ca1] E. Cartan, *Les sous-groupes des groupes continus de transformations*,Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **25** (1908), 57-194.

[Ca2] E. Cartan, *Les systémes de Pfaff á cinq variables et les équations aux dérivées partielles du second ordre*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) **27** (1910), 109-192.

[CE] A. Cap and Michael Eastwood, *Some Special Geometry in Dimension Six*, arXiv:math/0003059 [math.DG] (2000).

[CS] A. Cap and H. Schichl, *Parabolic Geometries and Canonical Cartan Connections*, Hokkaido Math. J. **29** no.3 (2000), 453-505.

[CSl] A. Cap and J. Slovák, *Parabolic Geometries I: Background and General Theory*, Mathematical Survey and Monographs, vol. 154, 2009.

[CGG] J. Carlson, M. Green and P. Griffiths, *Variations of Hodge Structure Considered as an Exterior Differential System: Old and New Results*, SIGMA **5** (2009), 087, 40 pp.

[CDKR] M. Cowling, A.H. Dooley, A. Koranyi and F. Ricci, *H-type groups and Iwasawa decompositions*, Adv. Math., 87, 1-41, (1991).

[CDKR2] M. Cowling, A.H. Dooley, A. Koranyi and F. Ricci, *An approach to symmetric space of rank one via groups of Heisenberg type*, J. Geom. Anal. **8** (1998), 199-237.

[E] P. Eberlein, *Geometry of 2-step nilpotent groups with a left invariant metric*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4, **27** (1994), 611-660.

[Gr1] P. Griffiths, *Deformations of G-structures II: Deformation of Geometric G-structures*, Math. Ann. **158** (1965), 326-335.

[Gr2] P. Griffiths, *Exterior differential systems and variations of Hodge structures*, publications.ias.edu/sites/default/files/eds.pdf.

[Ga] R. B. Gardner, *The method of equivalence and its applications*, CBMS-NSF Regional Conferencce Series in Applied Mathematics, vol 58, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1989.

[Hl] R. Hladky, *Connetions and curvature in subriemannian geometry*, 0912.3535v2 [math.DG] (2011).

[Hu] K. Hughen, *The geometry of subriemannian three-manifolds*, .dvi available in the web (1995)

[KS] A. Kaplan, M. Subils, *On the equivalence problem for bracket-generating distribu- tions*, Hodge Theory, Complex Geometry, and Representation Theory, Contemporary Mathematics, vol. 608, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2014), 157-171.

[KT] A. Kaplan and A. Tiraboschi, *Automorphisms of non-singular nilpotent Lie algebras*, arXiv:1111.5965 (2011)

[Kn] A.W. Knapp, *Lie groups beyond an introduction*, Progress in Mathematics 140 Birkhiiuser, 1996.

[Ko] S. Kobayashi, *Transformation groups in Differential Geometry*,Springer-Verlag, 1995.

[KoNo] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, vol. 1, Interscience (Wiley), New York, 1963.

[Ku] O. Kuzmich, *Graded nilpotent Lie algebras in low dimensions*, Lobachevskii Journal of Mathematics, **3** (1999), 147-184

[OW] A. Ottazzi and B. Warhurst, *Algebraic prolongation and rigidity of Carnot groups*, Monatsh. Math., 2009, DOI 10.1007/s00605-009-0170-7.

[M] R. Montgomery, *A tour of Subriemannian Geometries, their geodesics and applicactions*, Math. Surveys and Monographs, Vol. 91, 2002 AMS.

[Mor1] T. Morimoto, *Geometric structures on filtered manifolds*, Hokkaido Math. J. **22** (1993), 263-347.

[Mor2] T. Morimoto, *Cartan connection associated with a subriemannian structure*, Differential Geometry and its Applications, **26**, Issue 1 (2008), 75-78.

[R] C. Robles, *Schubert Varieties as Variations of Hodge Structures*, ArXiv:1208.5453v3 (2012)

[Sa] L. Saal, *The automorphism group of a Lie algebra of Heisenberg type*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, **54(2)** (1996), 101-113.

[Sh] R. W. Sharpe, *Differential Geometry: Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Program*, Springer-Verlag, 1997.

[St] S. Sternberg, *Lectures on differential geometry*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1964.

[SS] I. M. Singer and S. Sternberg, *The infinite groups of Lie and Cartan Part I, (The transitive groups)*, Journal d'Analyse Mathématique, **15(1)** (1965), 1-114.

[T1] N. Tanaka, *On differential systems, graded Lie algebras and pseudogroups*, J. Math. Kyoto Univ., **10** (1970), 1-82.

[T2] N. Tanaka, *On the equivalence problem associated with simple graded Lie algebras*, Hokkaido Math. J., **8** (1979), 23-84.

[T3] N. Tanaka, *On non-degenerate real hypersurfaces, graded Lie algebras and Cartan connections*, Japan. J. Math., **2(1)** (1976), 131-190.

[VE] E. Van Erp, *Contact structures of arbitrary codimension and idempotents in the Heisenberg algebra*, arXiv:1001.5426v2 (2011).

[Y] K. Yamaguchi, *Differential systems associated with simple graded Lie algebras*, Advanced Studies in Pure Math. **22** (1993) 413-494.

[Z] I. Zelenko, *On Tanaka's prolongation procedure for filtered structures of constant type*, SIGMA **5** (2009) 094, 21 pp.

Índice alfabético