Ejemplos de álgebras de Hopf semisimples y de álgebras de Hopf con la propiedad de Chevalley dual

por Monique Müller Lopes Rocha

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía y Física como parte de los requerimientos para la obtención del grado de Doctor en Matemática de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Febrero de 2016

Director: Dr. Nicolás Andruskiewitsch

A Telma y Ondina.

"Que nada nos limite.
Que nada nos defina.
Que nada nos sujete.
Que la libertad sea nuestra propia sustancia."
Simone de Beauvoir.

Resumen

En la primera parte de esta tesis, damos ejemplos, y planteamos algunas preguntas, sobre extensiones de álgebras de Hopf semisimples. Para esto, definimos la noción de longitud de un álgebra de Hopf, por ejemplo, que un álgebra de Hopf H sea de longitud 1 significa que H es simple; de longitud 2, que H es una extensión de T por K, donde K y T son álgebras de Hopf simples. Presentamos ejemplos de álgebras de Hopf de longitud 2 que no son extensiones abelianas.

En la segunda parte, presentamos ejemplos de álgebras de Hopf con la propiedad de Chevalley dual, o sea, álgebras de Hopf cuyo corradical es una subálgebra de Hopf. Para esto, determinamos todas las álgebras de Hopf semisimples Morita-equivalentes a un álgebra de grupo de un grupo finito, para una lista de grupos que soportan álgebras de Nichols no-triviales de dimensión finita.

Palabras claves: álgebra de Hopf semisimple, propiedad de Chevalley dual.

2010 Mathematics subject Classification: 16W30, 16T05.

Abstract

In the first part of this thesis, we give some examples of, and raise some questions on, extensions of semisimple Hopf algebras. For this, we define the notion of length of a Hopf algebra, for example, a Hopf algebra H has length 1 means that H is simple; of length 2, that H is an extension of T by K, where T and K are simple Hopf algebras. We present examples of Hopf algebras of length 2 that are not abelian extensions.

In the second part, we present examples of Hopf algebras with the dual Chevalley property, that is, an Hopf algebra whose coradical is a Hopf subalgebra. For this, we determine all semisimple Hopf algebras Morita-equivalent to a group algebra over a finite group, for a list of groups supporting a non-trivial finite-dimensional Nichols algebra.

Palabras claves: semisimple Hopf algebras, dual Chevalley property.

2010 Mathematics subject Classification: 16W30, 16T05.

Agradecimientos

A mi director, Nicolás Andruskiewitsch, por toda la Matemática que me ha enseñado y por todos los aportes para mi formación.

A CONICET y SECyT por el apoyo económico sin el cual no podría haber hecho el doctorado, también a FaMAF y CIEM, por el ambiente para desarrollar mis estudios.

A los jurados, Laura Barberis, Martín Mombelli y Leandro Vendramin, por sus sugerencias y correcciones.

A Nancy Moyano y Claudia Aguirre por la buena predisposición.

A la gente del grupo de Hopf, que me hicieron sentir contenida y que siempre están dispuestos a discusión, a contestar preguntas y por hacer del grupo un ambiente amigable.

A los profesores con quienes he aprendido mucho en los cursos de posgrado y también a los que han contestado dudas para la calificación, Iván Angiono, Carina Boyallian, Leandro Cagliero, Roberto Miatello, Martín Mombelli, Sonia Natale y Jorge Vargas.

A César Galindo, por todo lo que me ha enseñado y por hacer que mi investigación tuviera un nuevo brillo en este último año.

A mis compañeros de la oficina 233, Ramiro, Mauro, José Ignacio y Federico, por contribuir con un ambiente propicio para estudiar, por animarme y alegrar mi rutina. También a los chicos de la oficina 234 y a los nuevos chicos de la 233, que siguieron recibiéndome con mucha onda y haciéndome lugar en sus escritorios cuando yo ya no tenía lugar allí.

A los chicos de la oficina 249, que me recibieron cuando yo todavía no tenía lugar, en especial a Aureliano Guerrero, siempre muy generoso con todos a su alrededor.

A los compañeros de doctorado, por la compañía para comer, por las charlas, por la buena onda en los pasillos. Por esta misma buena onda en los pasillos están incluidos los profesores Roberto Miatello, Cristina Turner y Oscar Bustos que no sólo me saludaban con mucha alegría, sino que además me hablaban en portugués, y también a Juan Pablo Rossetti por su cariño.

A Silvia Etchegaray por valorar a mi trabajo y apoyarme. A mis alumnos, por el despejar de mente que me proporcionan y por su frescura para mirar el álgebra que me renueva la pasión por este área.

A Beth y Dirceu, que formaron parte de uno de los años de mi doctorado, apoyándome, invitándome a comer comida brasileña, hablándome en portugués y trayéndome café; gracias por el cariño y el cuidado.

A Virginia, con quien siempre pude contar en todo lo que necesitaba y con quien compartí un año en Córdoba, con muchas cenas, vinos y charlas en portugués. Muchas gracias por creer en mí y por todo el apoyo.

A mi amiga Fiorela, por siempre estar, en las buenas y en las malas, por su compañía constante en la facultad para comer, para charlar, para estudiar, para aconsejarme... Por siempre tener una palabra de conforto, y por lamentar o conmemorar conmigo cada momento, por los innumerables favores que me ha hecho, por recibirme en su hogar. También a Emilio, que además de recibirme en este mismo hogar, me ha dado valiosos consejos para la calificación. Y por hacerme reír.

A mis amigos Cinthia y Marcos, que aún en la distancia se hacen presentes en cada momento de mi vida, por el cariño, por el apoyo y por creer en mí.

A mi amiga Julia, por su cariño, por sus abrazos, por sus palabras, por hacer de mí una persona mejor, por creer en mí, por recibirme en su casa cuando ni me conocía; junto a su familia, Mario, Silvia, Franco, me dieron tamaña libertad y al mismo tiempo, tamaña sensación de pertenencia y cariño, que al poco tiempo me sentí como si fuera de la familia. Gracias mi familia argentina, por todo lo que han hecho por mí, siento inmensa gratitud y cariño por ustedes. También a Marito, que me ha recibido en su hogar con Julia, donde me sentía tal cual como en lo de los Plavnik, por todo lo que hemos compartido y por todo el apoyo.

A mi amiga-hermana, Andreza, que siempre me escucha, que me apoya, que cree en mí. Que aún con la distancia y los muchos años que no nos vemos, me hace sentir como si nos hubiéramos hablado ayer, que con todas las fotos de familia que me envía y sus anécdotas me hace sentir feliz y acompañada.

A mis tíos y primas, Tanea, Valmirio, Giovana y Kamila, que siempre me reciben en enero con todo su cariño y que siempre creyeron mucho en mí.

A mi abuela, Ondina, una mujer adelante de su tiempo, por enseñarme a ser independiente, por todo su aporte financiero y psicológico, por siempre incentivarme a estudiar, por su amor, por su cuidado... Mientras yo viva, ella vivirá en mi memoria y en mi corazón.

A mi mamá, Telma, por el apoyo incondicional, por la libertad que siempre me ha dado, por su amor, por comprender mi ausencia en los momentos difíciles en estos últimos años, por creer en mí desde siempre y decir que yo era su diploma.

A mi amor y compañero de la vida, Marcos, por apoyarme aún cuando no estaba de acuerdo con mi decisión, por ser mi sostén en los momentos difíciles, por su amor, por hacerme reír...Ha llegado al fin esta larga jornada, mi amor, gracias por caminar a mi lado, te amo!

Índice general

Introducción

La primera definición formal de álgebra de Hopf fue dada por Pierre Cartier en 1956, bajo el nombre de hiperálgebra de Lie, fue inspirada en los trabajos de Dieudonné en grupos algebraicos en característica positiva. Independientemente, Armand Borel estudió una estructura análoga en el contexto de su estudio de la cohomología de grupos de Lie, estructuras a las que dio el nombre de álgebra de Hopf en 1953, en honor a los trabajos de Heinz Hopf. O sea, por un lado tenemos la teoría de grupos algebraicos y por otro lado la topología algebraica, ambas ramas interactúan a partir de los principios de los 60. Con el libro de Sweedler de 1969, esta noción llega a su madurez [Sw]. Para más detalles, referimos a [AF]. Además de su interés intrínsecamente algebraico, las álgebras de Hopf tienen aplicaciones en muchas áreas de la matemática y de la física, tales como teoría conforme de campos, topología, y álgebra de operadores. En [Mon2] se pueden encontrar referencias específicas sobre estos temas.

Un punto de quiebre en el estudio de las álgebras de Hopf es el famoso artículo [Dr] donde se discuten las aplicaciones de los grupos cuánticos, introducidos previamente por Drinfeld y Jimbo inspirados en trabajos de Kulish, Reshetikhin y Sklyanin sobre $U_q(\mathfrak{sl}_2)$, particularmente a la ecuación cuántica de Yang-Baxter, que aparece en mecánica estadística y en modelos completamente integrables. En [Dr] se pone de manifiesto por otra parte la relación de los grupos cuánticos con la teoría de deformaciones formales (también llamada cuantización por deformación) de las variedades de Poisson, en particular de los grupos de Lie-Poisson. Las soluciones de la ecuación cuántica de Yang-Baxter que se construyen a partir de los grupos cuánticos están profundamente relacionadas con el polinomio de Jones y su generalización el polinomio HOMFLY que sirve para clasificar distintas clases de espacios topológicos de baja dimensión.

En otra dirección, los grupos cuánticos pequeños en raíces de la unidad están relacionados con grupos algebraicos en característica positiva (Lusztig); más generalmente, se ha observado una relación entre (ciertas) álgebras de Nichols de dimensión finita (complejas) y álgebras de Lie en característica positiva. En una línea directamente involucrada con el tema de esta tesis, ciertas álgebras de operadores de vértice, relacionadas con la teoría conforme de campos, admiten como invariante una categoría de fusión, esto es una categoría tensorial semisimple finita (Zhu, Huang). Una formulación análoga en álgebras de operadores es a través de subfactores. Dado que las categorías de módulos sobre álgebras de Hopf semisimples de dimensión finita son de fusión, la clasificación de las álgebras de Hopf semisimples ha suscitado interés entre especialistas en álgebras de operadores de vértice y subfactores.

El problema principal en el cual se encuadra esta tesis es la clasificación de las álgebras de Hopf de dimensión finita sobre un cuerpo $\Bbbk$ algebraicamente cerrado de característica cero. Se consideran diferentes clases de álgebras de Hopf, las semisimples y las no semisimples. Cuándo se quiere clasificar, los ejemplos son extremadamente importantes. Los primeros ejemplos de álgebras de Hopf semisimples son el álgebra de grupo $\Bbbk G$ de un grupo finito G y su dual, el álgebra de funciones en G. De hecho, el dual de un álgebra de Hopf de dimensión finita es nuevamente un álgebra de Hopf. Análogamente a los grupos, una extensión de álgebras de Hopf de dimensión finita $\Bbbk \to A \to C \to B \to \Bbbk$ puede ser descrita por el espacio vectorial subyacente $A \otimes B$, con acciones, coacciones y cociclos. Además, C es semisimple si y sólo si A y B son semisimples. Un caso particular son las extensiones abelianas $\Bbbk \to \Bbbk^G \to C \to \Bbbk F \to \Bbbk$ que están totalmente determinadas por (F, G) con acciones mutuas y cociclos compatibles. Otra forma de construir álgebras de Hopf a partir de ejemplos conocidos es vía deformaciones de la multiplicación o de la comultiplicación. Exploramos todas estas construcciones en el Capítulo 3. Por lo que conocemos, todos los ejemplos de álgebras de Hopf semisimples surgen de las álgebras de grupos por las construcciones anteriores. Esto fue probado en [N6, N7] para dimensiones pequeñas y en [ENO1] para $p^a q^b$, pqr, donde p, q y r son primos. En el caso de las álgebras de Hopf no semisimples, uno puede mirar aquéllas cuyo corradical es una subálgebra de Hopf y por lo tanto, semisimple. Entre éstas, la clase mejor entendida es la de las álgebras de Hopf punteadas, o sea, cuyo corradical es un álgebra de grupo. La clasificación de las álgebras de Hopf punteadas con G abeliano está cerca de ser completada y hay progresos en el caso no abeliano. Otra clase son las copunteadas, cuyo corradical es $\Bbbk^G$.

El trabajo [A2] presenta lo que se conoce hasta la fecha sobre la clasificación de las álgebras de Hopf sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero. Sobre la clasificación de las álgebras de Hopf de dimensión pequeña, en [BG] hay una tabla con el estado de la clasificación hasta dimensión 100, por ejemplo la clasificación de las álgebras de Hopf semisimples de dimensión 24 es un problema en abierto.

El Capítulo 4 contiene los resultados del trabajo [AM]. La categoría de representaciones de un álgebra de Hopf semisimple tiene una estructura muy rica – es una categoría de fusión. Uno de los enfoques más fructíferos para abordar los problemas de clasificación de las álgebras de Hopf semisimples es a través de categorías de fusión. Pero la noción básica de extensión no es categórica, al menos de una manera directa. Aquí exploramos la noción de extensión. Primero, proponemos una definición de series de composición de álgebras de Hopf.

Definición 1. Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita. Una *serie de composición* $\mathfrak{H}$ de H es una sucesión de álgebras de Hopf simples $\mathfrak{H}_1, \dots, \mathfrak{H}_n$ obtenidas recursivamente como sigue.

- Si H es simple, entonces tenemos $n = 1$ y $\mathfrak{H}_1 = H$.
- Si H no es simple, entonces existen $A \lhd H$, $A \neq \Bbbk, H$, y series de composición $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_m$, $\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_l$, de A y $B = H /\!/ A$ respectivamente, tales que $n = m + l$ y

$$\mathfrak{H}_i = \mathfrak{A}_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m; \qquad \mathfrak{H}_i = \mathfrak{B}_{i-m}, \qquad m+1 \leqslant i \leqslant m+l.$$

Las álgebras de Hopf simples $\mathfrak{H}_1$, $\dots$, $\mathfrak{H}_n$ son los *factores* de la serie $\mathfrak{H}$ y n es su *longitud.* Después de compartir esta definición con S. Natale, ella la utilizó para demostrar el Teorema de Jordan-Hölder para álgebras de Hopf de dimensión finita.

Teorema 2 ([N2, Theorem 1.2])**.** *(Teorema de Jordan-Hölder para álgebras de Hopf de dimensión finita). Sean* $\mathfrak{H}_1, \dots, \mathfrak{H}_n$ *y* $\mathfrak{H}'_1, \dots, \mathfrak{H}'_m$ *dos series de composición de un álgebra de Hopf de dimensión finita* H*. Entonces existe una biyección* $\nu : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, m\}$ *tal que* $\mathfrak{H}_i \simeq \mathfrak{H}'_{\nu(i)}$ *como álgebras de Hopf.*

El Teorema 2 muestra que el estudio de las álgebras de Hopf simples semisimples constituye un paso fundamental en la clasificación de las álgebras de Hopf semisimples. Usamos los ejemplos de álgebras de Hopf simples semisimples conocidos (twists de álgebras de grupo o sus duales) para construir ejemplos explícitos de álgebras de Hopf de longitud 2, que no son extensiones abelianas.

Proposición 3. *Supongamos que*

i) G *es un grupo simple no abeliano;*

ii) $(\Bbbk N)^J$ *es un álgebra de Hopf simple;*

iii) si $C \lhd N$ *es abeliano, entonces* $C = \{e\}$ *(en particular* N *no es abeliano),*

iv) J *es un twist no trivial.*

Entonces $H = (\Bbbk N)^J \rtimes \Bbbk^G$ *tiene longitud 2 y no es una extensión abeliana.*

Después listamos familias de ejemplos que satisfacen las hipótesis, ver la Sección 4.6.

El Capítulo 5 contiene los resultados del trabajo [AGM], donde damos ejemplos explícitos de álgebras de Hopf con la propiedad de Chevalley dual. Un álgebra de Hopf tiene la propiedad de Chevalley dual si el producto tensorial de dos comódulos simples es semisimple, o equivalentemente si su corradical es una subálgebra de Hopf. Este tipo de álgebra de Hopf es interesante por muchas razones, entre ellas la estrategia para su clasificación alude al Método de Levante de Andruskiewitsch-Schneider [AS]. Pocos ejemplos fuera de la clases de las álgebras de Hopf punteadas y copunteadas son discutidos en la literatura [CDMM, Mo].

Dos categorías de fusión $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ se dicen *Morita-equivalentes* si $\mathcal{D}$ es equivalente como categoría tensorial a la categoría de endofuntores de una categoría $\mathcal{C}$-módulo indescomponible. Dos álgebras de Hopf semisimples K y H se dicen *Morita-equivalentes* si $\operatorname{Rep} K$ y $\operatorname{Rep} H$ lo son. Se sabe que $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son Morita-equivalentes si y sólo si sus centros de Drinfeld son equivalentes como categorías tensoriales trenzadas [ENO1, Theorem 3.1]. En particular, si K y H son Morita-equivalentes, entonces sus categorías de módulos de Yetter-Drinfeld son equivalentes como categorías tensoriales trenzadas y por ende las álgebras de Nichols sobre una de ellas se corresponden biyectivamente con las álgebras de Nichols sobre la otra.

Para construir ejemplos de álgebras de Hopf con la propiedad de Chevalley dual, se construyen álgebras de Hopf H Morita-equivalentes a álgebras de grupo $\Bbbk G$, donde G es un grupo finito tal que conocemos módulos de Yetter-Drinfeld V cuya álgebra de Nichols $\mathfrak{B}(V)$ tiene dimensión finita. Hay ejemplos de tales grupos en la literatura, ver Tabla 1.

Sea G un grupo finito. La caracterización de todas las álgebras de Hopf semisimples Morita-equivalentes a $\Bbbk G$ sigue de [O]. Sean $F, \Gamma < G$ tales que $G = F\Gamma$–pero $F \cap \Gamma$ no es necesariamente trivial. Dado un par adecuado $(\alpha, \beta) \in H^2(F, \Bbbk^\times) \times H^2(\Gamma, \Bbbk^\times)$, cf. Definición 5.1.1, correspondientemente existe un álgebra $H^G_{\alpha\,\beta}(F, \Gamma)$ tal que $H^G_{\alpha\,\beta}(F, \Gamma) \sim_{\mathrm{Mor}} \Bbbk G$. La colección $(F, \alpha, \Gamma, \beta)$ es llamada *dato grupo-teorético* para G. Estas son todas las álgebras de Hopf que provienen de los funtores de fibra de todas las categorías de fusión Morita-equivalentes a vec_G [O], por lo tanto todo $H \sim_{\mathrm{Mor}} \Bbbk G$ es de esta forma. Ver §5.1 para más detalles. Notamos que sin embargo decidir cuándo dos de estas álgebras de Hopf son isomorfas no es evidente.

Las álgebras de Nichols $\mathfrak{B}(V)$ dependen esencialmente sólo del espacio vectorial trenzado subyacente al módulo Yetter-Drinfeld V. No consideramos espacios vectoriales trenzados de tipo diagonal–excepto para módulos Yetter-Drinfeld sobre algunos grupos diedrales, ver Tabla 5.7 en la Sección 5.8. Nos centramos en espacios vectoriales trenzados de tipo pecio (en inglés rack), ver [AG] o [AFGV]. Para más ejemplos con espacios vectoriales trenzados de tipo diagonal referimos a [CDMM, Mo]. Sea $(X, \mathbf{q})$ un par donde X es un pecio y $\mathbf{q}$ un 2-cociclo, sea V el espacio vectorial trenzado asociado y supongamos que $\mathfrak{B}(V)$ es de dimensión finita, cf. [HLV]. Consideramos un grupo G tal que V es realizado en ${}^{\Bbbk G}_{\Bbbk G}\mathcal{YD}$. Entonces calculamos todos los datos grupo-teoréticos $(F, \alpha, \Gamma, \beta)$ para G. Consecuentemente, $H = H^G_{\alpha\,\beta}(F, \Gamma) \sim_{\mathrm{Mor}} \Bbbk G$ y existe $V' \in {}^H_H\mathcal{YD}$ tal que $\mathfrak{B}(V') \simeq \mathfrak{B}(V)$, como álgebras y coálgebras. Resumimos nuestros cálculos en la Tabla 1.

Teorema 4. *Los nuevos ejemplos de álgebras de Hopf con la propiedad de Chevalley dual están dados en las Proposiciones 5.2.2, 5.3.2, 5.4.3, 5.5.2, 5.6.2, 5.7.2 y 5.8.5.*

Tabla 1

$(X, \mathbf{q})$	$\dim \mathfrak{B}(V)$	**Referencia**	G	$H \sim_{\mathrm{Mor}} \Bbbk G$
$(\mathcal{D}_3, -1)$	12	[MS]	$C_3 \rtimes C_6$	Prop. 5.2.1
$(\mathsf{Q}_{5,2}, -1)$, $(\mathsf{Q}_{5,3}, -1)$	1280	[AG]	$C_5 \rtimes_2 C_{20}$	Tabla 5.3
$(\mathcal{O}_2^4, -1)$, $(\mathcal{O}_2^4, \chi)$ $(\mathcal{O}_4^4, -1)$	576	[FK, MS]	$\mathbb{S}_4$	Tabla 5.4
$(\mathcal{O}_2^5, -1)$, $(\mathcal{O}_2^5, \chi)$	8294400	[FK, G1, GG]	$\mathbb{S}_5$	Tabla 5.5
$(\mathcal{T}, -1)$	72	[G]	$\mathbb{A}_4 \times C_2$	Tabla 5.6
$(\mathsf{Q}_{7,3}, -1)$, $(\mathsf{Q}_{7,5}, -1)$	326592	[G1]	$C_7 \rtimes_3 C_6$	Prop. 5.7.1

Existen grupos G que admiten un álgebra de Nichols de dimensión finita pero no existe H no trivial tal que $H \sim_{\mathrm{Mor}} \Bbbk G$. Por ejemplo $(\mathcal{D}_3, -1)$ corresponde a algún $V \in {}^{\Bbbk \mathbb{S}_3}_{\Bbbk \mathbb{S}_3}\mathcal{YD}$ pero $H \sim_{\mathrm{Mor}} \Bbbk \mathbb{S}_3$ implica $H \simeq \Bbbk \mathbb{S}_3$ o $\Bbbk^{\mathbb{S}_3}$, §5.2. Además, $(\mathsf{Q}_{5,2}, -1)$ corresponde a algún $V \in {}^{\Bbbk G}_{\Bbbk G}\mathcal{YD}$, donde $G = \Bbbk(C_5 \rtimes_2 C_4)$; pero $H \sim_{\mathrm{Mor}} \Bbbk G$ implica $H \simeq \Bbbk G$ o $\Bbbk^G$, §5.3.

En los Capítulos 1, 2 y 3, damos las principales definiciones, ejemplos y resultados necesarios para los Capítulos 4 y 5. En el Apéndice listamos los programas en GAP utilizados para hacer algunas cuentas en el Capítulo 5.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo daremos definiciones y resultados básicos sobre la teoría de álgebras de Hopf y también sobre cohomología de grupos, que utilizaremos en los capítulos siguientes. Las referencias principales para álgebras de Hopf son [DNR, Ka, Mon, R1, Sc1, Sw] y para cohomología de grupos [Br], [Y2, Appendix A] y [EGNO, 1.7].

A lo largo del trabajo consideramos un cuerpo $\Bbbk$ algebraicamente cerrado de característica cero. Todos los productos tensoriales y espacios vectoriales son sobre el cuerpo $\Bbbk$, a menos que se diga lo contrario. Denotamos por 1 el elemento identidad de un grupo. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces C_n es un grupo cíclico de orden n escrito multiplicativamente. Denotamos por D_n el grupo diedral de orden $2n$. Si G es un grupo finito, entonces $\widehat{G} := \mathrm{Hom}_{\text{grupos}}(G, \Bbbk^\times)$. La notación $F < G$ significa que F es un subgrupo de G, y $F \lhd G$ significa que F es un subgrupo normal. Denotamos el centro del grupo G por $Z(G)$. Si $F, F' < G$, denotamos el conmutador de F y F' por $[F, F']$. Si $\triangleright$ es una acción de un grupo G en un conjunto F, entonces denotamos por F^G el subconjunto de F de los puntos fijos por $\triangleright$. Denotamos multiplicativamente los grupos de cohomología $H^n(G, \Bbbk^\times)$. Ocasionalmente, denotamos por la misma letra un elemento en $H^n(G, \Bbbk^\times)$ y cualquiera de sus representantes. Si $a, b \in \mathbb{Z}$, el mínimo común múltiplo de a y b es denotado por $[a, b]$ y el máximo común divisor de a y b es denotado por (a, b). Denotamos por $\mathbb{G}_n = \{z \in \Bbbk^\times : z^n = 1\}$, $n \in \mathbb{N}$, y por $\mathbb{G}'_n$ las raíces n-ésimas primitivas de la unidad.

1.1. Álgebras de Hopf

Definición 1.1.1. Una $\Bbbk$-*álgebra* es un triple (A, m, u), donde A es un $\Bbbk$-espacio vectorial no nulo, $m : A \otimes A \to A$ y $u : \Bbbk \to A$ son morfismos de $\Bbbk$-espacios vectoriales tales que los diagramas

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\mathrm{id}_A \otimes m"] \arrow[d, "m \otimes \mathrm{id}_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\
A \otimes A \arrow[r, "m"] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& A \otimes A \arrow[dd, "m"] & \\
\Bbbk \otimes A \arrow[ur, "u \otimes \mathrm{id}_A"] & & A \otimes \Bbbk \arrow[ul, "\mathrm{id}_A \otimes u"'] \\
& A \arrow[ul, "\simeq"] \arrow[ur, "\simeq"'] &
\end{tikzcd}$$

conmutan, donde id_A es la identidad en A.

Mediante la definición de un álgebra por diagramas, es posible obtener la definición dual de la misma cambiando el sentido de las flechas de los diagramas anteriores.

Definición 1.1.2. Una $\Bbbk$-*coálgebra* es un triple (C, Δ, ε), donde C es un $\Bbbk$-espacio vectorial no nulo, $\Delta : C \to C \otimes C$ y $\varepsilon : C \to \Bbbk$ son morfismos de $\Bbbk$-espacios vectoriales tales que los diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \Delta"] \\
C \otimes C \arrow[r, "\Delta \otimes \mathrm{id}"'] & C \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dd, "\Delta"] & \\
\Bbbk \otimes C \arrow[ur, "\simeq"] & & C \otimes \Bbbk \arrow[ul, "\simeq"'] \\
 & C \otimes C. \arrow[ul, "\varepsilon \otimes \mathrm{id}"] \arrow[ur, "\mathrm{id} \otimes \varepsilon"'] &
\end{tikzcd}$$

Las aplicaciones Δ y ε son llamadas *comultiplicación* y *counidad* de la coálgebra C, respectivamente. La conmutatividad del diagrama del lado izquierdo es llamada *coasociatividad*.

Ahora, presentamos la notación de Heynemann-Sweedler para Δ. La definición recursiva de la sucesión de aplicaciones $(\Delta_n)_{n \geqslant 1}$ es definida como $\Delta_1 = \Delta$ y, para $n \geqslant 2$, $\Delta_n : C \to C \otimes \cdots \otimes C$ ($n+1$ veces), tenemos que $\Delta_n = (\Delta \otimes \mathrm{id}^{n-1})\Delta_{n-1}$. La notación de Heynemann-Sweedler para Δ se escribe como $\Delta(c) = c_1 \otimes c_2$, para todo $c \in C$, evitando así la escritura $\Delta(c) = \sum\limits_{i,j} c_i \otimes c_j$. Inductivamente, $\Delta_n(c) = c_1 \otimes \cdots \otimes c_{n+1}$, $\forall n \geqslant 2$. La conmutatividad de los diagramas de la definición de coálgebra se escribe como

$$\Delta_2(c) = c_{1_1} \otimes c_{1_2} \otimes c_2 = c_1 \otimes c_{2_1} \otimes c_{2_2} = c_1 \otimes c_2 \otimes c_3 \quad \text{y}$$
$$c = \varepsilon(c_1)c_2 = c_1\varepsilon(c_2).$$

Ejemplo 1.1.3. Sea G un grupo y $\Bbbk G$ el álgebra de grupo con base $\{g\}_{g \in G}$. Entonces $\Bbbk G$ es una coálgebra con $\Delta(g) = g \otimes g$ y $\varepsilon(g) = 1$, para todo $g \in G$.

Ejemplo 1.1.4. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. El álgebra envolvente $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ es una coálgebra, donde $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ y $\varepsilon(x) = 0$, para todo $x \in \mathfrak{g}$.

Definición 1.1.5. Un álgebra (A, m, u) es *conmutativa* si el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "m"'] & & A \otimes A \arrow[dl, "m"] \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, donde $\tau : A \otimes A \to A \otimes A$ es la función dada por $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$.

El *álgebra opuesta* de A, A^{op}, es el álgebra (A, m^{op}, u), donde $m^{\mathrm{op}} = m \circ \tau$. Dualmente, se tiene la definición de coálgebra coconmutativa.

Definición 1.1.6. Una coálgebra (C, Δ, ε) es *coconmutativa* si el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "\Delta"'] \arrow[dr, "\Delta"] & \\
C \otimes C \arrow[rr, "\tau"'] & & C \otimes C
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Esto significa que, para todo $c \in C$, $\Delta(c) = c_1 \otimes c_2 = \tau\Delta(c) = c_2 \otimes c_1$.

Las coálgebras de los Ejemplos 1.1.3 y 1.1.4 son coconmutativas.

La *coálgebra coopuesta* C^{cop} es la coálgebra $(C, \Delta^{\mathrm{cop}}, \varepsilon)$, donde $\Delta^{\mathrm{cop}} = \tau \circ \Delta$. Dual a la noción de morfismo de álgebras que también se puede presentar con diagramas, tenemos la noción de morfismo de coálgebras.

Definición 1.1.7. Sean $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ y $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ $\Bbbk$-coálgebras. Una función $\Bbbk$-lineal $f : C \to D$ es un *morfismo de coálgebras* si los siguientes diagramas son conmutativos

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "f \otimes f"'] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varepsilon_C"'] & & D \arrow[dl, "\varepsilon_D"] \\ & \Bbbk. & \end{tikzcd}$$

La conmutatividad del primer diagrama puede ser expresada como

$$\Delta_D(f(c)) = f(c)_1 \otimes f(c)_2 = f(c_1) \otimes f(c_2) = (f \otimes f)(\Delta(c)), \forall c \in C.$$

Definición 1.1.8. Sea (C, Δ, ε) una coálgebra. Un $\Bbbk$-subespacio D de C es una *subcoálgebra* si $\Delta(D) \subseteq D \otimes D$.

Definición 1.1.9. Sea C una coálgebra.

i) Una coálgebra es *simple* si no tiene subcoálgebras propias y es *cosemisimple* si es una suma directa de subcoálgebras simples.

ii) Un *elemento de tipo grupo de* C es un $c \in C$ tal que $\Delta(c) = c \otimes c$ y $\varepsilon(c) = 1$. El conjunto de los elementos de tipo grupo de C es denotado por $G(C)$.

iii) El *corradical* C_0 de C es la suma de todas las subcoálgebras simples de C.

iv) Una coálgebra se dice *punteada* si las subcoálgebras simples de C tienen dimensión 1.

No es difícil probar que en cualquier coálgebra, los elementos de tipo grupo son linealmente independientes. Luego si $C = \Bbbk G$ entonces $G(C) = G$. Necesariamente una subcoálgebra de dimensión 1 es de la forma $\Bbbk g$, $g \in G(C)$. Entonces, C es punteada si y sólo si $C_0 = \Bbbk G(C)$.

Ejemplo 1.1.10. Sea G un grupo. Claramente $C = \Bbbk G$ es punteada y $C_0 = \Bbbk G$.

Ejemplo 1.1.11. Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y $C = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Entonces $C_0 = \Bbbk 1$.

Definición 1.1.12. Una *filtración de una coálgebra* C es una familia de subespacios $\{V_n\}_{n \geqslant 0}$ de C que satisface $V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \cdots \subseteq \bigcup\limits_{n \geqslant 0} V_n = C$ y $\Delta(V_n) \subseteq \sum_{l=0}^{n} V_{n-l} \otimes V_l$ para todo $n \geqslant 0$.

Sea C una coálgebra. Definimos $C_n = \Delta^{-1}(C_{n-1} \otimes C + C \otimes C_0)$, $n \geqslant 1$. Entonces $\{C_n\}_{n \geqslant 0}$ es una filtración de C, llamada *filtración corradical*. Ver por ejemplo [R1, Proposition 4.1.5].

Definición 1.1.13. Una *filtración de un álgebra* A es una familia de subespacios $\{V_n\}_{n \geqslant 0}$ de A que satisface $V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \cdots \subseteq \bigcup\limits_{n \geqslant 0} V_n = A$ y $V_m V_n \subseteq V_{m+n}$ para todo $m, n \geqslant 0$.

Definición 1.1.14. Sean (C, Δ, ε) una coálgebra e I un $\Bbbk$-subespacio de C. Entonces I es

i) un coideal a izquierda (a derecha) si $\Delta(I) \subseteq C \otimes I$ ($\Delta(I) \subseteq I \otimes C$);

ii) un coideal si $\Delta(I) \subseteq I \otimes C + C \otimes I$ y $\varepsilon(I) = 0$.

Sea (C, Δ, ε) una coálgebra. Entonces (C^*, m, u) es un álgebra. Definimos

$$m = \Delta^* \rho : C^* \otimes C^* \xrightarrow{\rho} (C \otimes C)^* \xrightarrow{\Delta^*} C^* \ \text{ y } \ u = \varepsilon^* \psi : \Bbbk \xrightarrow{\psi} \Bbbk^* \xrightarrow{\varepsilon^*} C^*$$

donde $\rho : C^* \otimes C^* \to (C \otimes C)^*$ es la función dada por $\rho(f \otimes g)(c \otimes d) = f(c)g(d)$, para todo $f, g \in C^*$, $c, d \in C$, y $\psi : \Bbbk \to \Bbbk^*$ es el isomorfismo dado por $\psi(\alpha)(\beta) = \alpha\beta$, para todo $\alpha, \beta \in \Bbbk$. Dada un álgebra (A, m, u), si A es de dimensión finita entonces A^* es una coálgebra con $\Delta : A^* \to A^* \otimes A^*$ y $\varepsilon : A^* \to \Bbbk$ definidas, respectivamente, por

$$\Delta = \rho^{-1} m^* : A^* \xrightarrow{m^*} (A \otimes A)^* \xrightarrow{\rho^{-1}} A^* \otimes A^* \ \text{ y } \ \varepsilon = \varphi u^* : A^* \xrightarrow{u^*} \Bbbk^* \xrightarrow{\varphi} \Bbbk$$

donde $\varphi : \Bbbk^* \to \Bbbk$ es el isomorfismo lineal dado por $\varphi(f) = f(1)$, para todo $f \in \Bbbk^*$.

Más generalmente, sea C una coálgebra y A un álgebra. Entonces $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(C, A)$ es un álgebra con el *producto de convolución*

$$(f * g)(c) = f(c_1)g(c_2),$$

para todo $f, g \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(C, A)$, $c \in C$. El elemento unidad es $u\varepsilon$. Notemos que $C^* = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(C, \Bbbk)$ como álgebra.

Definición 1.1.15. Una *biálgebra* es una colección $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ donde (H, m, u) es un álgebra, (H, Δ, ε) es una coálgebra y m, u son morfismos de coálgebras (equivalentemente, si Δ, ε son morfismos de álgebras). Si además la aplicación id tiene inversa $\mathcal{S}$ respecto al producto de convolución en el álgebra $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(H, H)$, esto es, $\mathcal{S}(h_1)h_2 = \varepsilon(h)1 = h_1\mathcal{S}(h_2)$, H es llamada un *álgebra de Hopf* y $\mathcal{S}$ es llamada *antípoda* de H.

Ejemplo 1.1.16. Sea G un grupo. Entonces el álgebra de grupo $\Bbbk G$ es un álgebra de Hopf con la estructura de coálgebra dada en el Ejemplo 1.1.3 y $\mathcal{S}(g) = g^{-1}$, para todo $g \in G$.

Ejemplo 1.1.17. El álgebra de funciones en un grupo finito G, $\Bbbk^G$, es un álgebra de Hopf con base $\{\delta_g\}_{g \in G}$, donde $\delta_g(h) = \delta_{g,h}$, para todo $g, h \in G$, $\delta_g\delta_g = \delta_g$, $\delta_g\delta_h = 0$ si $h \neq g$, $1 = \sum_{g \in G} \delta_g$, $\Delta(\delta_g) = \sum_{x \in G} \delta_x \otimes \delta_{x^{-1}g}$, $\varepsilon(\delta_g) = \delta_{g,1}$ y $\mathcal{S}(\delta_g) = \delta_{g^{-1}}$.

Las álgebras de Hopf $\Bbbk G$ y $\Bbbk^G$ son llamadas *triviales*.

Ejemplo 1.1.18. Si H es un álgebra de Hopf de dimensión finita entonces H^* es un álgebra de Hopf.

Ejemplo 1.1.19. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. El álgebra envolvente $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ es un álgebra de Hopf, donde la estructura de coálgebra es la del Ejemplo 1.1.4 y $\mathcal{S}(x) = -x$, para todo $x \in \mathfrak{g}$.

Definición 1.1.20. Sean K, H álgebras de Hopf. Una aplicación $\Bbbk$-lineal $f : H \to K$ es un *morfismo de álgebras de Hopf* si es un morfismo de álgebras y de coálgebras.

Si $f : H \to K$ es un morfismo de álgebras de Hopf, entonces $f \circ \mathcal{S} = \mathcal{S} \circ f$. Es fácil ver que si G es un grupo finito, entonces $\Bbbk^G \simeq (\Bbbk G)^*$. Toda álgebra de Hopf conmutativa es isomorfa a $\Bbbk^G$ para algún grupo finito G, ver por ejemplo [Sc1]. Luego, toda álgebra de Hopf coconmutativa es isomorfa a $\Bbbk G$ para algún grupo finito G.

Observación 1.1.21. Si dos álgebras de Hopf H y K son isomorfas, entonces $G(H) \simeq G(K)$ y si son de dimensión finita $G(H^*) \simeq G(K^*)$.

Definición 1.1.22. Sea B una biálgebra. Un elemento $b \in B$ es llamado *primitivo* si $\Delta(b) = b \otimes 1 + 1 \otimes b$. El conjunto de todos los elementos primitivos de B es denotado $P(B)$.

Definición 1.1.23. Una *subálgebra de Hopf* K de un álgebra de Hopf H es una subálgebra y una subcoálgebra, tal que $\mathcal{S}(K) \subseteq K$. Denotamos $K \leq H$.

Definición 1.1.24. Un subespacio I de un álgebra de Hopf H es un *ideal de Hopf* si es un ideal, un coideal y $\mathcal{S}(I) \subseteq I$.

Si H es un álgebra de Hopf, entonces $H^+ = \ker \varepsilon$ es un ideal de Hopf. Si I es un ideal de Hopf de H, entonces el espacio vectorial H/I tiene una estructura de álgebra de Hopf inducida de H.

Definición 1.1.25. Un álgebra de Hopf es *semisimple* si es semisimple como álgebra; y es *cosemisimple* si es cosemisimple como coálgebra.

Si H es un álgebra de Hopf semisimple, entonces H es de dimensión finita [Sw, p. 107].

Teorema 1.1.26 (Larson-Radford)**.** *Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita. Son equivalentes:*

i) *H es semisimple.*

ii) *H es cosemisimple.*

iii) $\mathcal{S}^2 = \mathrm{id}$.

Demostración. Ver [Sc1, Theorem 3.14]. □

Ejemplo 1.1.27. Sea G un grupo finito. El álgebra de grupo $\Bbbk G$ y el dual $\Bbbk^G$ son semisimples.

Definición 1.1.28. Sea (C, Δ, ε) una $\Bbbk$-coálgebra. Un *C-comódulo a derecha* es un par (M, ρ), donde M es un $\Bbbk$-espacio vectorial y $\rho : M \to M \otimes C$ es un morfismo de $\Bbbk$-espacios vectoriales tal que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & M \otimes C \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \Delta"] \\ M \otimes C \arrow[r, "\rho \otimes \mathrm{id}"'] & M \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[dr, "\simeq"] \arrow[dd, "\rho"'] & \\ & M \otimes \Bbbk \\ M \otimes C. \arrow[ur, "\mathrm{id} \otimes \varepsilon"'] & \end{tikzcd}$$

Dado $m \in M$, escribimos $\rho(m) = m_{(0)} \otimes m_{(1)}$. Análogamente, definimos un C-comódulo a izquierda con $\lambda : M \to C \otimes M$ denotada por $\lambda(m) = m_{(-1)} \otimes m_{(0)}$.

Ejemplo 1.1.29. Toda coálgebra es un comódulo sobre sí misma (a derecha y a izquierda) con $\rho = \Delta$.

Ejemplo 1.1.30. Sea G un grupo. M es un $\Bbbk G$-comódulo si y sólo si M es un módulo G-graduado.

Observación 1.1.31. M es un C-comódulo a derecha si y sólo si es un C^*-módulo a izquierda. Tenemos que $\rho(m) = m_{(0)} \otimes m_{(1)}$ si y sólo si $f \cdot m = f(m_{(1)})m_{(0)}$, para todo $m \in M$, $f \in C^*$.

Definición 1.1.32. Sean H un álgebra de Hopf y (M, ρ) un H-comódulo a derecha (respectivamente, a izquierda), definimos el conjunto de los *coinvariantes* de H en M por

$$M^{\mathrm{co}H} = \{m \in M : \rho(m) = m \otimes 1\} \quad (\text{respectivamente,} \quad {}^{\mathrm{co}H}M = \{m \in M : \rho(m) = 1 \otimes m\}).$$

Dado un morfismo de álgebras de Hopf $\pi : H \to K$, entonces H es un K-comódulo a derecha (respectivamente, a izquierda) con $\rho = (\mathrm{id} \otimes \pi)\Delta$ (respectivamente, $\rho = (\pi \otimes \mathrm{id})\Delta$). En este caso, al conjunto $H^{\mathrm{co}K}$ también lo denotamos $H^{\mathrm{co}\pi}$.

Definición 1.1.33. Sean C una $\Bbbk$-coálgebra, (M, ρ) y (N, ϕ) dos C-comódulos a derecha. Una función $\Bbbk$-lineal $g : M \to N$ es un *morfismo de C-comódulos* si es conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\rho"'] & N \arrow[d, "\phi"] \\ M \otimes C \arrow[r, "g\otimes\mathrm{id}"'] & N \otimes C. \end{tikzcd}$$

1.2. Cohomología de grupos

Recordamos las definiciones básicas de cohomología de grupos que serán utilizadas en lo que sigue, sobre todo para fijar notación. Sea R un anillo. Un *complejo de cadenas* sobre R es un par $(C_\bullet, d)$ donde $C_\bullet = (C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ es una familia de R-módulos y $d = (d_n : C_n \to C_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$ es una familia de homomorfismos de R-módulos tal que $d_n \circ d_{n+1} = 0$. El mapa d es llamado *operador borde* de $C_\bullet$. Definimos los *n-ciclos* $Z_n(C_\bullet)$, los *n-bordes* $B_n(C_\bullet)$ y la homología $H_n(C_\bullet)$ por $Z_n(C_\bullet) = \ker d_n$, $B_n(C_\bullet) = \operatorname{Im} d_{n+1}$ y $H_n(C_\bullet) = Z_n(C_\bullet)/B_n(C_\bullet)$.

Una *cocadena compleja* sobre R es un par $(C^\bullet, d)$ donde $C^\bullet = (C^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ es una familia de R-módulos y $d = (d^n : C_n \to C_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ es una familia de homomorfismos de R-módulos tal que $d^{n+1} \circ d^n = 0$. El mapa d es llamado *operador coborde* de $C^\bullet$. Definimos los *n-cociclos* $Z^n(C^\bullet)$, los *n-cobordes* $B^n(C^\bullet)$ y la cohomología $H^n(C^\bullet)$ por $Z^n(C^\bullet) = \ker d^{n+1}$, $B^n(C^\bullet) = \operatorname{Im} d^n$ y $H^n(C^\bullet) = Z^n(C^\bullet)/B^n(C^\bullet)$.

Sea

$$\cdots \longrightarrow C_2 \xrightarrow{\partial} C_1 \xrightarrow{\partial} C_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \tag{1.1}$$

una *resolución proyectiva* del G-módulo trivial $\mathbb{Z}$, i. e., una sucesión exacta en que cada módulo es proyectivo. O sea, $(C_\bullet, \partial)$ es una cadena compleja de $\mathbb{Z}G$-módulos. Sea A un grupo abeliano con una G-acción. Entonces $(\operatorname{Hom}_G(C_\bullet, A), d = \operatorname{Hom}_G(\partial, A))$ es una cocadena compleja

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_G(\mathbb{Z}, A) \longrightarrow \operatorname{Hom}_G(C_0, A) \xrightarrow{d} \operatorname{Hom}_G(C_1, A) \xrightarrow{d} \operatorname{Hom}_G(C_2, A) \longrightarrow \cdots. \tag{1.2}$$

Para cada $n \geqslant 0$ los grupos de cohomología son definidos por

$$H^n(G, A) = H^n(\mathrm{Hom}_G(C_\bullet, A)).$$

En general, usamos la resolución libre estándar (o Bar), donde

$$C_n = \bigoplus_{g_0, g_1, \cdots, g_n \in G} \mathbb{Z}(g_0, \cdots, g_n)$$

es un $\mathbb{Z}$-módulo libre con G-acción definida por

$$g(g_0, \cdots, g_n) = (gg_0, \cdots, gg_n).$$

El operador de borde ∂ es definido por

$$\begin{aligned}\partial_n(g_0, g_1, \cdots, g_n) =& (g_0g_1, g_2, \cdots, g_n) - (g_0, g_1g_2, \cdots, g_n) + \\ & \cdots + (-1)^{n-1}(g_0, \cdots, g_{n-1}g_n) + (-1)^n(g_0, \cdots, g_{n-1}).\end{aligned}$$

Tenemos un isomorfismo $\gamma_n : \mathrm{Hom}_G(C_n, A) \to Fun(G^n, A)$ dado por $\gamma_n(h)(g_1, \cdots, g_n) = h(1, g_1, \cdots, g_n)$, y los mapas $d^n = \mathrm{Hom}_G(\partial, A) : \mathrm{Hom}_g(C_{n-1}, A) \to \mathrm{Hom}_G(C_n, A)$ a menos de esta identificación son

$$\begin{aligned}d^n(f)(g_1, \cdots, g_n) =& g_1 f(g_2, \cdots, g_n) - f(g_1g_2, \cdots, g_n) + \\ & \cdots + (-1)^{n-1} f(g_1, \cdots, g_{n-1}g_n) + (-1)^n(g_1, \cdots, g_{n-1}).\end{aligned}$$

Denotamos el complejo por $C^n = C^n(G, A) := Fun(G^n, A)$. Notemos que $H^0(G, A) = A^G$, los G-invariantes en A. El siguiente teorema será útil para probar el lema que sigue.

Teorema 1.2.1 (Teorema de los Coeficientes Universales)**.** *Consideramos una resolución libre* (1.1)*. La sucesión*

$$0 \longrightarrow Ext^1_G(H_{n-1}(F_\bullet), A) \longrightarrow H^n(G, A) \xrightarrow{h} Hom_{Ab}(H_n(F_\bullet), A) \longrightarrow 0\ ,$$

donde $h([\omega])([\sigma]) = \omega(\sigma)$*, es exacta.* □

Si $0 \to L \to M \to N \to 0$ es una sucesión exacta de $\mathbb{Z}G$-módulos, entonces la sucesión

$$0 \to L^G \to M^G \to N^G \xrightarrow{\delta_0} H^1(G, L) \to H^1(G, M) \to H^1(G, N) \xrightarrow{\delta_1} H^2(G, L) \to \cdots$$

es exacta. Los mapas δ_n son llamados los *homomorfismos de conexión* y pueden ser obtenidos del lema de la serpiente. Sean $\mathbb{G}_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{G}_n$ y $\mathfrak{Gr}_f$, respectivamente $\mathfrak{Ab}_f$, la categoría de grupos finitos, respectivamente grupos abelianos finitos.

Para hacer cálculos de cohomología con determinados grupos, hemos usado el paquete HAP del GAP, ver el Programa 3 del Apéndice. Pero este paquete calcula cohomología con coeficientes en $\mathbb{Z}$ y como a nosotros nos interesan coeficientes en $\Bbbk^\times$, tenemos el siguiente lema.

Lema 1.2.2. *Existe un isomorfismo natural entre los funtores*

$$H^n(\_, \Bbbk^\times),\ H^{n+1}(\_, \mathbb{Z}) : \mathfrak{Gr}_f \to \mathfrak{Ab}_f,\ n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Sea G un grupo finito. Por el Teorema 1.2.1, $H^n(G,\mathbb{G}_\infty) = H^n(G,\Bbbk^\times)$, i. e. para todo $n > 0$ todo n-cociclo con coeficientes en $\Bbbk^\times$ es equivalente a algún n-cociclo con coeficientes en $\mathbb{G}_\infty$. Esto define un isomorfismo natural $H^n(\_,\mathbb{G}_\infty) \simeq H^n(\_,\Bbbk^\times)$. Como $H^n(G,\mathbb{Q}) = 0$ para todo n, y usando la sucesión exacta $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{G}_\infty \to 1$, el homomorfismo de conexión $\delta_n : H^n(G,\mathbb{G}_\infty) \to H^{n+1}(G,\mathbb{Z})$ define un isomorfismo natural entre $H^n(\_,\mathbb{G}_\infty) \simeq H^{n+1}(\_,\mathbb{Z})$. Por lo tanto $H^n(\_,\Bbbk^\times) \simeq H^n(\_,\mathbb{G}_\infty) \simeq H^{n+1}(\_,\mathbb{Z})$. $\square$

Capítulo 2

Categorías tensoriales

En este capítulo vemos definiciones, ejemplos y resultados de categorías tensoriales necesarios para lo que sigue. También introduciremos las nociones de categorías trenzadas y módulos Yetter-Drinfeld. Después estudiamos las categorías módulo sobre una categoría tensorial. Las referencias básicas para categorías tensoriales y categorías módulo son [EGNO, ENO, M1, Mo2] y también resultados o definiciones específicos de [AG, AG2, GIV] y [ENO2, GP, Na, O].

2.1. Categorías abelianas

Definición 2.1.1. Una categoría $\mathcal{C}$ se dice *aditiva* si $\mathcal{C}$ posee un objeto cero $0 \in \mathcal{C}$ tal que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(0,0) = 0$, para todo $X, Y \in \mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ es un grupo abeliano, la composición de morfismos es bilineal, es decir, para cada $f, f' : X \to Y$, $g, g' : Y \to Z$,

$$g \circ (f + f') = g \circ f + g \circ f' \qquad (g + g') \circ f = g \circ f + g' \circ f,$$

y todo par de objetos posee suma directa.

Definición 2.1.2. Una categoría $\mathcal{C}$ se dice *abeliana* si

i) $\mathcal{C}$ es aditiva;

ii) todo morfismo en $\mathcal{C}$ posee núcleos y conúcleos;

iii) todo monomorfismo es el núcleo de su conúcleo y todo epimorfismo es el conúcleo de su núcleo;

iv) todo morfismo f en $\mathcal{C}$ se factoriza como $f = \alpha\pi$ donde α es un monomorfismo y π es un epimorfismo.

Definición 2.1.3. Sea $\mathcal{C}$ una categoría aditiva. Un objeto distinto a cero S de $\mathcal{C}$ se dice *simple* si todo subobjeto de S es isomorfo a 0 o a S.

Definición 2.1.4. Un morfismo $f : M \to N$ en una categoría $\mathcal{C}$ se dice *esencial* si es un epimorfismo y para todo morfismo $g : L \to M$ tal que $f \circ g$ es epimorfismo entonces g es epimorfismo. Un *cubrimiento proyectivo* de un objeto M de $\mathcal{C}$ es un par (P, f) donde $f : P \to M$ es esencial y P es un objeto proyectivo.

Definición 2.1.5. Una categoría abeliana $\mathcal{C}$ se dice $\Bbbk$-*lineal* si $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ es un $\Bbbk$-espacio vectorial para todo par de objetos X,Y y la composición es $\Bbbk$-bilineal. Una categoría abeliana $\Bbbk$-lineal $\mathcal{C}$ se dice *finita* si todo objeto de $\mathcal{C}$ posee longitud finita, $\dim(Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)) < \infty$ para todo $X,Y \in \mathcal{C}$, todo objeto simple de $\mathcal{C}$ posee cubrimiento proyectivo y la cantidad de clases de isomorfismos de objetos simples es finita.

Para la definición de *longitud* de un objeto en una categoría abeliana, ver [Mo2, 2.8.2].

Ejemplo 2.1.6. Sea A una $\Bbbk$-álgebra. La categoría A-Mod de los A-módulos a izquierda es abeliana $\Bbbk$-lineal.

Sean $\mathcal{C},\mathcal{D}$ dos categorías aditivas ($\Bbbk$-lineales). Un funtor $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ se dice *aditivo* ($\Bbbk$-*lineal*) si, para todo $X,Y\in\mathcal{C}$, la función $F_{X,Y}:\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y))$ dada por $f\mapsto F(f)$ es un homomorfismo de grupos (es $\Bbbk$-lineal).

2.2. Categorías monoidales

Definición 2.2.1. Una categoría *monoidal* es una colección $(\mathcal{C},\otimes,a,\mathbf{1},l,r)$ donde $\mathcal{C}$ es una categoría, $\otimes:\mathcal{C}\times\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ es un funtor, $\mathbf{1}$ es un objeto de $\mathcal{C}$, para todo X,Y,Z objetos de $\mathcal{C}$, $a_{X,Y,Z}:(X\otimes Y)\otimes Z\to X\otimes(Y\otimes Z)$, $l_X:\mathbf{1}\otimes X\to X$ y $r_X:X\otimes\mathbf{1}\to X$ son isomorfismos naturales, sujetos a los siguientes axiomas:

i) Axioma del Pentágono: el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & ((X\otimes Y)\otimes Z)\otimes T \arrow[dl, "a_{X,Y,Z}\otimes \mathrm{id}"'] \arrow[dr, "a_{X\otimes Y,Z,T}"] & \\
(X\otimes(Y\otimes Z))\otimes T \arrow[d, "a_{X,Y\otimes Z,T}"'] & & (X\otimes Y)\otimes(Z\otimes T) \arrow[d, "a_{X,Y,Z\otimes T}"] \\
X\otimes((Y\otimes Z)\otimes T) \arrow[rr, "\mathrm{id}\otimes a_{Y,Z,T}"] & & X\otimes(Y\otimes(Z\otimes T))
\end{tikzcd}$$

conmuta,

ii) Axioma del Triángulo: el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(X\otimes\mathbf{1})\otimes Y \arrow[rr, "a_{X,\mathbf{1},Y}"] \arrow[dr, "r_X\otimes\mathrm{id}"'] & & X\otimes(\mathbf{1}\otimes Y) \arrow[dl, "\mathrm{id}\otimes l_Y"] \\
 & X\otimes Y &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Ejemplo 2.2.2. Sea $(\mathcal{C},\otimes,a,\mathbf{1},l,r)$ una categoría monoidal. La categoría $\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}=(\mathcal{C},\otimes^{\mathrm{rev}},a^{\mathrm{rev}},\mathbf{1},l,r)$ es una categoría monoidal, donde $X\otimes^{\mathrm{rev}}Y=Y\otimes X$ y la asociatividad es $a^{\mathrm{rev}}_{X,Y,Z}=a^{-1}_{Z,Y,X}$. Algunas referencias llaman a esta categoría la opuesta de $\mathcal{C}$, pero usamos “opuesta” en otro contexto.

Ejemplo 2.2.3. La categoría de $\Bbbk$-espacios vectoriales Vec es monoidal con el producto tensorial sobre $\Bbbk$, $a_{X,Y,Z}((x \otimes y) \otimes z) = x \otimes (y \otimes z)$, $\mathbf{1} = \Bbbk$, $l_X : \Bbbk \otimes X \to X$, $r_X : X \otimes \Bbbk \to X$ los isomorfismos canónicos, para todo X, Y, Z espacios vectoriales y $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$. Denotamos la categoría de los $\Bbbk$-espacios vectoriales de dimensión finita por vec.

Ejemplo 2.2.4. Sea H una biálgebra sobre $\Bbbk$. La categoría de los H-módulos a izquierda es monoidal con el producto tensorial de espacios vectoriales y $V \otimes W$ es un H-módulo con acción dada por $h \cdot (v \otimes w) = h_1 \cdot v \otimes h_2 \cdot w$, para todo V, W H-módulos, $h \in H$, $v \in V$, $w \in W$; los morfismos a, l, r son los mismos de Vec, $\mathbf{1} = \Bbbk$ con acción trivial. Denotamos la categoría de los H-módulos de dimensión finita por $\operatorname{Rep} H$. Análogamente, la categoría de los H-comódulos a izquierda es monoidal y denotamos la categoría de los H-comódulos de dimensión finita por $\operatorname{Corep} H$.

Ejemplo 2.2.5. Sea G un grupo finito y sea $\omega \in Z^3(G, \Bbbk^\times)$. Denotamos por vec_G^ω la categoría de espacios vectoriales de dimensión finita G-graduados, es decir que los objetos son los $\Bbbk$-espacios vectoriales V de dimensión finita con una G-graduación $V = \bigoplus_{g \in G} V_g$ y los morfismos son transformaciones lineales que preservan la graduación. vec_G^ω es monoidal con el producto tensorial de espacios vectoriales y

$$(V \otimes W)_g = \bigoplus_{xy=g} V_x \otimes W_y, \qquad \Bbbk_g = \delta_{g,1}\Bbbk,$$
$$r_V(v \otimes 1) = \omega(g, 1, 1)v, \qquad l_V(1 \otimes v) = \omega(1, g, g^{-1})v$$

$$a_{U,V,W}((u \otimes v) \otimes w) = \omega(f, g, h) u \otimes (v \otimes w),$$

para todo $U, V, W \in \mathrm{vec}_G^\omega$, $f, g, h \in G$, $u \in U_f$, $v \in V_g$, $w \in W_h$.

Ejemplo 2.2.6. Si $\mathcal{C}$ es una categoría, la categoría de endofuntores $\operatorname{End}(\mathcal{C})$ es monoidal con producto tensorial dado por la composición de funtores. Esta categoría monoidal es estricta. El objeto unidad es el funtor identidad, los morfismos de asociatividad son las igualdades. La composición de transformaciones naturales es la vertical: sean $F, G, H \in \operatorname{End}(\mathcal{C})$, $\mu : F \to G$, $\nu : G \to H$ transformaciones naturales, entonces $\nu \circ \mu : F \to H$ está dada por $(\nu \circ \mu)_X = \nu_X \circ \mu_X$ para todo $X \in \mathcal{C}$. El producto tensorial de dos transformaciones naturales es la horizontal: sean $F, G, J, H \in \operatorname{End}(\mathcal{C})$, $\eta : F \to G$, $\nu : J \to H$ transformaciones naturales, $\nu \circ \eta : J \circ F \to H \circ G$ es la transformación natural determinada por $(\nu \circ \eta)_X = \nu_{G(X)} \circ J(\eta_X)$, para todo X objeto de $\mathcal{C}$.

Definición 2.2.7. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías monoidales. Un *funtor monoidal* es una terna (F, η, u) donde $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un funtor, $\eta = \eta_{X,Y}$ es una familia de isomorfismos naturales $\eta_{X,Y} : F(X \otimes Y) \to F(X) \otimes F(Y)$ y $u : F(\mathbf{1}) \to \mathbf{1}$ es un isomorfismo natural tales que los diagramas

$$\begin{tikzcd}
& F(X \otimes Y) \otimes F(Z) \arrow[dr, "\eta_{X,Y} \otimes \mathrm{id}"] & \\
F((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[ur, "\eta_{X \otimes Y, Z}"] \arrow[d, "F(a_{X,Y,Z})"] & & (F(X) \otimes F(Y)) \otimes F(Z) \arrow[d, "a_{F(X),F(Y),F(Z)}"] \\
F(X \otimes (Y \otimes Z)) \arrow[dr, "\eta_{X, Y \otimes Z}"'] & & F(X) \otimes (F(Y) \otimes F(Z)) \\
& F(X) \otimes F(Y \otimes Z) \arrow[ur, "\mathrm{id} \otimes \eta_{Y,Z}"'] &
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd} F(\mathbf{1}\otimes X) \arrow[r, "\eta_{\mathbf{1},X}"] \arrow[d, "F(l_X)"] & F(\mathbf{1})\otimes F(X) \arrow[d, "u\otimes \mathrm{id}"] \\ F(X) & \mathbf{1}\otimes F(X) \arrow[l, "l_{F(X)}"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(X\otimes \mathbf{1}) \arrow[r, "\eta_{X,\mathbf{1}}"] \arrow[d, "F(r_X)"] & F(X)\otimes F(\mathbf{1}) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes u"] \\ F(X) & F(X)\otimes \mathbf{1} \arrow[l, "r_{F(X)}"] \end{tikzcd}$$

son conmutativos.

Si (F, η, u), (F', η', u') son funtores monoidales entre las categoías monoidales $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, una *transformación natural monoidal* $\theta : (F, \eta, u) \to (F', \eta', u')$ es una transformación natural $\theta : F \to F'$ tal que para todo $X, Y \in \mathcal{C}$,

$$u'\theta_{\mathbf{1}} = u, \qquad (\theta_X \otimes \theta_Y)\eta_{X,Y} = \eta'_{X,Y}\theta_{X\otimes Y}.$$

Una *equivalencia monoidal* entre dos categorías monoidales $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ es un funtor monoidal $(F, \eta, u) : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tal que existe otro funtor monoidal $(F', \eta', u') : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ e isomorfismos naturales monoidales $\theta : F \circ F' \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$, $\theta' : F' \circ F \to \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$.

Por el Teorema de coherencia de Maclane toda categoría monoidal es monoidalmente equivalente a una categoría monoidal estricta, o sea, podemos suponer que los isomorfismos naturales de asociatividad, unidad a izquierda y a derecha son identidades.

Definición 2.2.8. Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal estricta y X un objeto en $\mathcal{C}$. Un *dual a derecha* de X es un objeto Y de $\mathcal{C}$ munido de morfismos $e_X : Y \otimes X \to \mathbf{1}$ y $c_X : \mathbf{1} \to X \otimes Y$ tales que

$$(\mathrm{id}_X \otimes e_X)(c_X \otimes \mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_X, \qquad (e_X \otimes \mathrm{id}_Y)(\mathrm{id}_Y \otimes c_X) = \mathrm{id}_Y .$$

Si Y es un dual a derecha de X se dice que X es un *dual a izquierda* de Y. $\mathcal{C}$ se dice *rígida* si todo objeto de $\mathcal{C}$ tiene dual a derecha y a izquierda.

Un dual a derecha (izquierda) es único salvo un isomorfismo canónico, luego denotamos $Y = X^*$ y $X =^* Y$.

Ejemplo 2.2.9. La categoría de los $\Bbbk$-espacios vectoriales de dimensión finita vec es rígida.

Ejemplo 2.2.10. Sea H un álgebra de Hopf con antípoda biyectiva. La categoría $\mathrm{Rep}\, H$ de los H-módulos de dimensión finita es monoidal rígida. Si $V \in \mathrm{Rep}\, H$, entonces $V^* = \mathrm{Hom}(V, \Bbbk) \in \mathrm{Rep}\, H$ con acción dada por $(h \cdot \alpha)(v) = \alpha(\mathcal{S}(h)v)$ y ${}^*V = \mathrm{Hom}(V, \Bbbk) \in \mathrm{Rep}\, H$ con acción dada por $(h \cdot \alpha)(v) = \alpha(\mathcal{S}^{-1}(h)v)$, para todo $h \in H$, $\alpha \in \mathrm{Hom}(V, \Bbbk)$, $v \in V$.

Ejemplo 2.2.11. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Sabemos que la categoría de endofuntores $\mathrm{End}(\mathcal{C})$ es monoidal. Si $\mathcal{C}$ es una categoría abeliana ($\Bbbk$-lineal), la categoría de endofuntores exactos ($\Bbbk$-lineales) es rígida. Este resultado sigue de que todo funtor exacto posee adjuntos a izquierda y a derecha.

Definición 2.2.12. Una categoría abeliana se dice *semisimple* si todo objeto es isomorfo a una suma directa de objetos simples. El *rango* de una categoría abeliana $\Bbbk$-lineal finita semisimple es el número de clases de isomorfismos de objetos simples.

Definición 2.2.13. Una *categoría tensorial finita sobre* $\Bbbk$ es una categoría abeliana $\Bbbk$-lineal finita, monoidal rígida tal que $\otimes$, a, l, r son aditivos k-lineales y el objeto unidad es simple. Una *categoría de fusión* es una categoría tensorial finita sobre $\Bbbk$ semisimple.

Ejemplo 2.2.14. Sea H un álgebra de Hopf semisimple. Entonces $\operatorname{Rep} H$ es una categoría de fusión.

Consideramos ahora la categoría vec_G^ω. Una categoría es *esquelética* si no posee objetos distintos isomorfos. Toda categoría es equivalente a una categoría esquelética. Es conveniente trabajar con la categoría esquelética equivalente a vec_G^ω, que seguimos denotando de la misma forma. Los objetos simples de vec_G^ω los denotamos por g, $g \in G$. El producto tensorial es definido por $g_1 \otimes g_2 = g_1 g_2$ y los isomorfismos de asociatividad $\omega(g_1, g_2, g_3) \operatorname{id}_{g_1 g_2 g_3}$. El objeto unidad es 1_G. Los isomorfismos unidad a izquierda y a derecha son $\omega(1_G, 1_G, g) \operatorname{id}_g$ y $\omega(g, 1_G, 1_G) \operatorname{id}_g$, respectivamente. Como podemos suponer que los cociclos son normalizados, los isomorfismos unidades a izquierda y a derecha son los morfismos identidad. Los objetos duales a derecha y a izquierda de g son $g^* = {}^*g = g^{-1}$. Si G' es otro grupo y $\omega' \in Z^3(G', \Bbbk^\times)$, entonces $\mathrm{vec}_G^\omega \simeq \mathrm{vec}_{G'}^{\omega'}$ si y sólo si exite un isomorfismo $a : G \to G'$ tal que ω' y $\omega^a := \omega \circ a^{\times n}$ son cohomólogos.

Ejemplo 2.2.15. La categoría vec_G^ω es una categoría de fusión.

Definición 2.2.16. Si $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ son categorías tensoriales finitas sobre $\Bbbk$, un *funtor tensorial* es un funtor monoidal $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ aditivo $\Bbbk$-lineal.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial finita sobre $\Bbbk$. Un *funtor de fibra* F para $\mathcal{C}$ es un funtor monoidal, fiel y exacto $F : \mathcal{C} \to \mathrm{vec}$ tal que $F(\mathbf{1}) = \Bbbk$. Existe una biyección entre categorías tensoriales sobre $\Bbbk$ munidas de un funtor de fibra (salvo equivalencia monoidal de categorías e isomorfismos de funtores monoidales) y álgebras de Hopf de dimensión finita sobre $\Bbbk$ (salvo isomorfismo de álgebras de Hopf). Dado F un funtor de fibra obtenemos un álgebra de Hopf semisimple $H := \operatorname{End} F$ tal que $\mathcal{C}$ es equivalente a la categoría $\operatorname{Rep} H$.

Definición 2.2.17. Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal rígida. Un objeto X en $\mathcal{C}$ es *invertible* si $e_X : X^* \otimes X \to \mathbf{1}$ y $c_X : \mathbf{1} \to X \otimes X^*$ son isomorfismos. Una categoría de fusión es *punteada* si todos los objetos simples son invertibles.

Ejemplo 2.2.18. Sea H un álgebra de Hopf semisimple. La categoría de H-comódulos de dimensión finita $\operatorname{Corep} H$ es punteada si y sólo si H es coconmutativa. De hecho, $\operatorname{Corep} H$ es punteada $\Leftrightarrow$ $\dim V = 1$ para todo V un H-comódulo simple $\Leftrightarrow$ $\dim H = |G(H)|$ $\Leftrightarrow$ H es isomorfa a un álgebra de grupo. Luego, $\operatorname{Rep} H$ es punteada si y sólo si H es conmutativa.

Ejemplo 2.2.19. La categoría vec_G^ω (Ejemplo 2.2.5) es punteada. Toda categoría de fusión punteada es equivalente a una categoría vec_G^ω.

Proposición 2.2.20. *El conjunto de las clases de isomorfismo de objetos invertibles en una categoría de fusión $\mathcal{C}$ forma un grupo con multiplicación inducida por el producto tensorial.*

Demostración. Por [EGNO, Proposition 2.11.3], si X, Y son invertibles de $\mathcal{C}$ entonces $X \otimes Y$, X^* son invertibles de $\mathcal{C}$. $\square$

Ejemplo 2.2.21. Sea H un álgebra de Hopf semisimple. Los objetos invertibles en $\operatorname{Corep}(H)$ son precisamente los comódulos de dimensión 1 y el grupo es isomorfo a $G(H)$.

2.3. La categoría monoidal de bimódulos

Definición 2.3.1. Un *álgebra* en una categoría monoidal $\mathcal{C}$ es un objeto A de $\mathcal{C}$ con un morfismo multiplicación $m : A \otimes A \to A$ y un morfismo unidad $u : \mathbf{1} \to A$ tales que los diagramas

$$\begin{tikzcd}
& (A \otimes A) \otimes A \arrow[dl, "a_{A,A,A}"'] \arrow[dr, "m\otimes \mathrm{id}"] & \\
A \otimes (A \otimes A) \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes m"'] & & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\
A \otimes A \arrow[rr, "m"] & & A
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{1} \otimes A \arrow[dl, "l_A"'] \arrow[dr, "u\otimes \mathrm{id}"] & \\
A & & A \otimes A \arrow[ll, "m"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& A \otimes \mathbf{1} \arrow[dl, "r_A"'] \arrow[dr, "\mathrm{id} \otimes u"] & \\
A & & A \otimes A \arrow[ll, "m"]
\end{tikzcd}$$

conmutan.

Una *coálgebra* en una categoría monoidal $\mathcal{C}$ es un objeto C de $\mathcal{C}$ con un morfismo comultiplicación $\Delta : C \to C \otimes C$ y un morfismo counidad $\varepsilon : C \to \mathbf{1}$ tales que

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta = a_{C,C,C}(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta,$$
$$l_C(\varepsilon \otimes \mathrm{id})\Delta = \mathrm{id}_C = r_C(\mathrm{id} \otimes \varepsilon)\Delta.$$

Definición 2.3.2. Sea B un álgebra en una categoría monoidal $\mathcal{C}$. Un *B-módulo a derecha* es un objeto M de $\mathcal{C}$ con un morfismo $\rho : M \otimes B \to M$ tal que

$$\rho(\rho \otimes \mathrm{id}_B) = \rho(\mathrm{id} \otimes m)a_{M,B,B}, \qquad \rho(\mathrm{id}_B \otimes u) = r_M.$$

Sea A un álgebra en $\mathcal{C}$. Un *A-módulo a izquierda* es un objeto N de $\mathcal{C}$ con un morfismo $\lambda : A \otimes N \to N$ tal que

$$\lambda(m \otimes \mathrm{id}_N) = \lambda(\mathrm{id}_A \otimes \lambda)a_{A,A,N}, \qquad \lambda(e \otimes \mathrm{id}_N) = l_N.$$

Un *(A, B)-bimódulo* M en $\mathcal{C}$ es un B-módulo a derecha con una acción ρ, un A-módulo a izquierda con una acción λ tal que

$$\lambda(\mathrm{id}_A \otimes \rho)a_{A,M,B} = \rho(\lambda \otimes \mathrm{id}_B).$$

Un *morfismo de módulos* $\alpha : M_1 \to M_2$ es un morfismo en $\mathcal{C}$ tal que $\lambda(\alpha \otimes \mathrm{id}) = \alpha\lambda$. Denotamos por $\mathcal{C}_B$, ${}_A\mathcal{C}$, ${}_A\mathcal{C}_B$ a la categoría de B-módulos a derecha en $\mathcal{C}$, A-módulos a izquierda en $\mathcal{C}$ y (A, B)-bimódulos en $\mathcal{C}$, respectivamente.

Ejemplo 2.3.3. Sea G un grupo finito y $\omega \in Z^3(G, \Bbbk^\times)$. Dados $F < G$ y $\alpha \in C^2(F, \Bbbk^\times)$ un 2-coborde tal que $d\alpha = \omega_{F\times F\times F}$. El álgebra de grupo torcida $\Bbbk_\alpha F$ es el espacio vectorial subyacente $\Bbbk F$ con multiplicación $x \cdot y = \alpha(x, y)xy$, para todo x, $y \in F$. Entonces $\Bbbk_\alpha F$ es un álgebra en la categoría monoidal vec_G^ω. Denotamos la categoría ${}_{\Bbbk_\alpha F}(\mathrm{vec}_G^\omega)_{\Bbbk_\alpha F}$ por $\mathcal{C}(G, \omega, F, \alpha)$, esta categoría es una categoría de fusión.

Sean $\mathcal{C}$ una categoría monoidal estricta y (A, m, u) un álgebra en $\mathcal{C}$. La categoría ${}_A\mathcal{C}_A$ posee una estructura monoidal con el producto tensorial $\otimes_A$, que es el coecualizador de los morfismos $\rho_M \otimes \mathrm{id}_N, (\mathrm{id}_M \otimes \lambda_N) : (M \otimes A) \otimes N \to M \otimes N$, denotado por $\pi_{M,N} : M \otimes N \to M \otimes_A N$. Si $f : M \to N$, $g : M' \to N'$ son dos morfismos de A-bimódulos en $\mathcal{C}$ entonces $f \otimes_A g : M \otimes_A M' \to N \otimes_A N'$ es el morfismo definido como sigue. El morfismo $\pi_{M,M'}(f \otimes g) : M \otimes M' \to N \otimes_A N'$ satisface

$$\pi_{M,M'}(f \otimes g)(\rho_M \otimes \mathrm{id}_{M'}) = \pi_{M,M'}(f \otimes g)(\mathrm{id}_M \otimes \lambda_{M'}) a_{A,M,A'}.$$

Por lo tanto existe un morfismo tal que $(f \otimes_A g)\pi_{M,M'} = \pi_{N,N'}(f \otimes g)$. La estructura de A-bimódulo de $M \otimes_A N$ está dada como sigue. Sea $\phi : M \otimes N \otimes A \to M \otimes_A N$, $\phi = \pi_{M,N}(\mathrm{id}_M \otimes \rho_N)$. Entonces $\phi(\rho_M \otimes \mathrm{id}_N \otimes \mathrm{id}_A) = \phi(\mathrm{id}_M \otimes \lambda_N \otimes \mathrm{id}_A)$. Luego existe un morfismo $\rho_{M \otimes_A N} : M \otimes_A N \otimes A \to M \otimes_A N$ tal que $\pi_{M,N}(\mathrm{id}_M \otimes \rho_N) = \rho_{M \otimes_A N}(\pi_{M,N}\, \mathrm{id}_A)$. Análogamente, se define una acción a izquierda.

2.4. Categoría monoidal trenzada y la construcción del centro

Sean $(\mathcal{C}, \otimes, a, l, r, \mathbf{1})$ una categoría monoidal y $\tau : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ el funtor $\tau(X, Y) = (Y, X)$.

Definición 2.4.1. Una *trenza* para $\mathcal{C}$ es un isomorfismo natural $c : \otimes \to \otimes \circ \tau$ que satisface

$$a_{Y,Z,X} c_{X,Y \otimes Z} a_{X,Y,Z} = \mathrm{id}_Y \otimes c_{X,Z} a_{Y,X,Z} (c_{X,Y} \otimes \mathrm{id}_Z)$$
$$a^{-1}_{Z,X,Y} c_{X \otimes Y,Z} a^{-1}_{X,Y,Z} = (c_{X,Z} \otimes \mathrm{id}_Y) a^{-1}_{X,Z,Y} (\mathrm{id}_X \otimes c_{Y,Z})$$

para todo $X, Y, Z \in \mathcal{C}$. Una *categoría monoidal trenzada* es un par $(\mathcal{C}, c)$ donde $\mathcal{C}$ es una categoría monoidal y c es una trenza para $\mathcal{C}$.

Definición 2.4.2. Sean $(\mathcal{C}, c)$, $(\mathcal{D}, d)$ dos categorías monoidales trenzadas. Un funtor monoidal $(F, \eta, u) : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ se dice *trenzado* si para todo $X, Y \in \mathcal{C}$ el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
F(X) \otimes F(Y) \arrow[r, "\eta_{X,Y}"] \arrow[d, "d_{F(X),F(Y)}"'] & F(X \otimes Y) \arrow[d, "F(c_{X,Y})"] \\
F(Y) \otimes F(X) \arrow[r, "\eta_{Y,X}"] & F(Y \otimes X).
\end{tikzcd}$$

Dos categorías monoidales trenzadas se dicen *trenzadamente equivalentes* si existe un funtor monoidal trenzado que es una equivalencia de categorías monoidales.

Dada $\mathcal{C}$ una categoría monoidal, asignamos una categoría monoidal trenzada $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$, llamada el centro de $\mathcal{C}$. Un objeto de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ es un par $(V, c_{-,V})$, donde $V \in \mathcal{C}$ y $c_{X,V} : X \otimes V \to V \otimes X$ son isomorfismos naturales en X que satisfacen $(c_{X,V} \otimes \mathrm{id}_Y) a_{X,V,Y} (\mathrm{id}_X \otimes c_{Y,V}) = a_{V,X,Y} c_{X \otimes Y,V} a_{X,Y,V}$ y $c_{\mathbf{1},Y} = r_Y^{-1}\, \mathrm{id}_Y\, l_Y$, para todo $X, Y, Z \in \mathcal{C}$. Un morfismo $f : (V, c_{-,V}) \to (W, c_{-,W})$ es un morfismo $f : V \to W$ en $\mathcal{C}$ tal que $(f \otimes \mathrm{id}_X) c_{X,Y} = c_{X,W}(\mathrm{id}_X \otimes f)$. El producto tensorial es $(V, c_{,V}) \otimes (W, c_{,W}) = (V \otimes W, c_{-,V \otimes W})$, donde para todo $X, Y \in \mathcal{C}$

$$c_{X,V \otimes W} : X \otimes (V \otimes W) \to (V \otimes W) \otimes X$$

$$c_{X,V \otimes W} = a_{V,W,X}(\mathrm{id}_V \otimes c_{X,W}) a^{-1}_{V,X,W} (c_{X,V} \otimes \mathrm{id}_W) a_{X,V,W},$$

la unidad es $(\mathbf{1}, c_{-,\mathbf{1}})$, $c_{Y,\mathbf{1}} = l_Y^{-1}\, \mathrm{id}_Y\, r_Y$ y la trenza es $c_{V,W}$.

Observación 2.4.3. Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal trenzada. Si A y B son álgebras en $\mathcal{C}$, entonces $A \otimes B$ es un álgebra en $\mathcal{C}$ con multiplicación

$$m_{A\otimes B} = (m_A \otimes m_B)(\mathrm{id}_A \otimes c_{A,B} \otimes \mathrm{id}_B).$$

Si C y D son coálgebras en $\mathcal{C}$, entonces $C \otimes D$ es una coálgebra en $\mathcal{C}$ con comultiplicación

$$\Delta_{C\otimes D} = (\mathrm{id}_C \otimes c_{C,D} \otimes \mathrm{id}_D)(\Delta_C \otimes \Delta_D).$$

Definición 2.4.4. Una *biálgebra* en $\mathcal{C}$ es una colección $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ tal que (H, m, u) es un álgebra en $\mathcal{C}$, (H, Δ, ε) es una coálgebra en $\mathcal{C}$ y Δ, ε son morfismos de álgebras, con la estructura anterior en $H \otimes H$. Además si existe un morfismo $\mathcal{S} : H \to H$ tal que $m(\mathcal{S} \otimes \mathrm{id})\Delta = m(\mathrm{id} \otimes \mathcal{S})\Delta = u\varepsilon$, H se dice un *álgebra de Hopf* en $\mathcal{C}$ y $\mathcal{S}$ su antípoda.

2.4.1. Módulos de Yetter-Drinfeld

Definición 2.4.5. Sean V un espacio vectorial y $c : V \otimes V \to V \otimes V$ un isomorfismo lineal. Entonces (V, c) es llamdo un *espacio vectorial trenzado* si c satisface la ecuación de trenzas

$$(c \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes c)(c \otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \otimes c)(c \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes c).$$

(V, c) es de *tipo diagonal* si existe una base $x_1, \cdots, x_n$ de V y escalares $q_{ij} \in \Bbbk^\times$ tales que $c(x_i \otimes x_j) = q_{ij} x_j \otimes x_i$.

Ejemplos de espacios vectoriales trenzados vienen de categorías trenzadas, como la categoría de los módulos de Yetter-Drinfeld.

Definición 2.4.6. Sea H un álgebra de Hopf. Un *módulo de Yetter-Drinfeld* a izquierda sobre H es un espacio vectorial M con una estructura de H-módulo a izquierda $\cdot : H \otimes M \to M$ y de H-comódulo a izquierda $\rho : M \to H \otimes M$ tal que vale la condición de compatibilidad:

$$(h \cdot m)_{(-1)} \otimes (h \cdot m)_{(0)} = h_1 m_{(-1)} \mathcal{S}(h_3) \otimes h_2 \cdot m_{(0)}, \forall m \in M, h \in H. \tag{2.1}$$

Denotamos por ${}^H_H\mathcal{YD}$ a la categoría de módulos de Yetter-Drinfeld sobre H; los morfismos de módulos de Yetter-Drinfeld son los homomorfismos de H-módulos y de H-comódulos.

${}^H_H\mathcal{YD}$ es una categoría monoidal con el producto tensorial usual sobre $\Bbbk$, donde $\mathbf{1} = \Bbbk$ y los isomorfismos naturales de la asociatividad y unidad son los usuales para espacios vectoriales y, para $M, N \in {}^H_H\mathcal{YD}$, $M \otimes N$ tiene la estructura diagonal de módulo y comódulo dadas por

$$h \cdot (m \otimes n) = h_1 \cdot m \otimes h_2 \cdot n, \;\; (m \otimes n)_{(-1)} \otimes (m \otimes n)_{(0)} = m_{(-1)} n_{(-1)} \otimes m_{(0)} \otimes n_{(0)}.$$

Es también una categoría trenzada con trenza dada por

$$c_{M,N} : M \otimes N \to N \otimes M, \;\; c(m \otimes n) = m_{(-1)} \cdot n \otimes m_{(0)}.$$

Sea H un álgebra de Hopf con antípoda biyectiva. La categoría ${}^H_H\mathcal{YD}$ es trenzadamente equivalente a la categoría $\mathcal{Z}(H{-}\mathrm{Mod})$. Un módulo de Yetter-Drinfeld V es un objeto en $\mathcal{Z}(H{-}\mathrm{Mod})$ con

$$c_{X,V}(x \otimes v) = h^i(\mathcal{S}^{-1}(x_{(-1)}))x_{(0)} \otimes h_i \cdot v,$$

donde $\{h_i\}_i$ es la base de H y $\{h^i\}_i$ es la base dual.

Consideramos las acciones $\rightharpoonup$, $\leftharpoonup$ de H en H^* dadas por

$$(h \rightharpoonup f)(x) = f(xh), \qquad (f \leftharpoonup h)(x) = f(hx), \qquad \forall x, h \in H, f \in H^*.$$

Proposición 2.4.7. *Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita. El doble de Drinfeld $D(H) = H^{*\mathrm{cop}} \otimes H$ es un álgebra de Hopf con estructura de coálgebra dada por el producto tensorial y estructura de álgebra y antípoda dadas por (aquí $\alpha\#h = \alpha \otimes h$)*

$$\begin{aligned}(\alpha\#h)(\beta\#g) &= \alpha(h_1 \rightharpoonup \beta \leftharpoonup \mathcal{S}^{-1}(h_3))\#h_2 g,\\ 1 &= \varepsilon\#1,\\ \mathcal{S}(\alpha\#h) &= [\mathcal{S}(h_3) \rightharpoonup \mathcal{S}(\alpha) \leftharpoonup h_1]\#\mathcal{S}(h_2).\end{aligned}$$

Además, hay una equivalencia de categorías monoidales trenzadas entre $\operatorname{Rep} D(H)$ *y* ${}^H_H\mathcal{YD}$.

Demostración. Ver [M1, Theorem 7.1.1] y [Ka, Theorem XIII 5.1]. □

2.4.2. Pecios

La teoría básica sobre pecios puede ser encontrada en [AG]. Acá recordamos brevemente las deficiones y ejemplos básicos y vemos una forma de construir módulos de Yetter-Drinfeld sobre un álgebra de grupo.

Definición 2.4.8. Un *pecio* es un conjunto no vacío X con una operación $\triangleright : X \times X \to X$ tal que $\phi_i : X \to X$, dada por $\phi_i(j) = i \triangleright j$, es una función biyectiva y $\phi_i(j \triangleright k) = \phi_i(j) \triangleright \phi_i(k)$, para todo $i, j, k \in X$. Una función $q : X \times X \to \Bbbk^\times$, $(i, j) \mapsto q_{ij}$, es un *2-cociclo en* X si $q_{i,j\triangleright k} q_{j,k} = q_{i\triangleright j, i\triangleright k} q_{i,k}$, para todo $i, j, k \in X$.

Ejemplo 2.4.9. Sea A un grupo abeliano y $T \in \operatorname{Aut} A$. El pecio afín $Afin(A, T)$ es el conjunto A con operación $a \triangleright b = T(b) + (\mathrm{id} - T)(a)$, $\forall a, b \in A$. Otra notación es $\mathsf{Q}_{A,T}$; o $\mathsf{Q}_{q,b}$ cuando A es isomorfo a un cuerpo finito $\mathbb{F}_q$, donde q es una potencia de un primo, y $T \in \operatorname{Aut} \mathbb{F}_q$, $T(x) = bx$, $x \in \mathbb{F}$, $b \in \mathbb{F}^\times \simeq C_{q-1}$. También $\mathcal{T} = \mathsf{Q}_{4,b}$, $b \in \mathbb{F}_4$ irreducible, es llamado el pecio tetraedral .

Ejemplo 2.4.10. Sea G un grupo, $g \in G$ y $\mathcal{O}_g$ la clase de conjugación de g. Si $x \triangleright y = xyx^{-1}$, entonces $(\mathcal{O}_g, \triangleright)$ es un pecio. Sea $G = \mathbb{S}_n$, τ un j-ciclo, $\mathcal{O}_j^n$ denota el pecio inducido por su clase de conjugación.

Definición 2.4.11 ([AG2, MS])**.** Sea X un pecio y q un 2-cociclo en X. Una *YD-realización principal* de (X, q) sobre un grupo finito G es una colección $(\cdot, g, \{\chi_i\}_{i\in X})$ donde

- $\cdot$ es una acción de G en X;
- $g : X \to G$, $i \mapsto g_i$, es una función tal que $g_{h\cdot i} = h g_i h^{-1}$ y $g_i \cdot j = i \triangleright j$, para todo $i, j \in X$, $h \in G$;
- $\{\chi_i\}_{i\in X}$ es un 1-cociclo – esto es, una familia de funciones $\chi_i : X \to \Bbbk^\times$ tales que $\chi_i(ht) = \chi_{t\cdot i}(h)\chi_i(t)$ para todo $i, j \in X$, $h, t \in G$ – satisfaciendo $\chi_i(g_j) = q_{ji}$, para todo $i, j \in X$.

Este dato define un objeto $V(X,q) \in {}^{\Bbbk G}_{\Bbbk G}\mathcal{YD}$ [AG2]. Decimos que (X,q) puede ser realizado en G. Como espacio vectorial $V(X,q) = \Bbbk\{x_i\}_{i\in X}$, con acción y coacción dados por

$$t \cdot x_i = \chi_i(t)x_{t\cdot i}, \qquad \rho(x_i) = g_i \otimes x_i, \qquad t \in G, i \in X.$$

Ahora veamos cómo se define una familia de YD-realizaciones principales del pecio $Afin(A,T)$ con un 2-cociclo constante. Sean A un grupo abeliano, $C_n = \langle t\rangle$, $T \in \operatorname{Aut} A$ tal que $|T|$ divide n. Sea $A \rtimes_T C_n$ el producto semidirecto de A y C_n con respecto a T donde $t \cdot a = T(a)$, para todo $a \in A$. Sea ξ una raíz primitiva de la unidad y $l = [|T|, |\xi|]$.

Proposición 2.4.12 ([GIV])**.** *Sean $k,m \in \mathbb{N}$ con $0 \leqslant k < m$. Consideramos el pecio afín $X = Afin(A,T)$ con 2-cociclo constante ξ. Sean*

- *$g : A \to A \rtimes_T C_{ml}$ la función $a \mapsto (a, t^{kl+1})$;*
- *$\cdot : A \rtimes_T C_{ml} \times A \to A$ dada por $h \cdot a = b$, si $hg_ah^{-1} = g_b$;*
- *$\chi_a : A \rtimes_T C_{ml} \to \Bbbk^\times$ definida por $\chi_a(b,t^s) = \xi^s$, $s \in \mathbb{N}$.*

Entonces $(g, \cdot, \{\chi_a\}_{a\in A})$ es una YD-realización fiel (i. e. g es inyectiva) de (X,ξ) sobre $A \rtimes_T C_{ml}$.

Ejemplo 2.4.13. Consideramos el pecio $\mathsf{Q}_{5,2}$ con cociclo -1. Tenemos que $l = [|2|, |-1|] = [4,2] = 4$ y entonces $(\mathsf{Q}_{5,2}, -1)$ puede ser realizado en $G_m = C_5 \rtimes_2 C_{4m}$, $m \in \mathbb{N}$.

Análogamente, $(\mathsf{Q}_{3,2}, -1)$ puede ser realizado en $G_m = C_3 \rtimes_2 C_{2m}$, $m \in \mathbb{N}$; $(\mathsf{Q}_{7,3}, -1)$ puede ser realizado en $G_m = C_7 \rtimes_3 C_{6m}$, $m \in \mathbb{N}$.

2.5. Categorías módulo

Definición 2.5.1. Una *categoría módulo a izquierda sobre una categoría tensorial $\mathcal{C}$* es una categoría abeliana $\Bbbk$-lineal finita semisimple $\mathcal{M}$ con un funtor exacto en cada variable $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ e isomorfismos naturales de asociatividad y unidad $m_{X,Y,M} : (X \otimes Y) \otimes M \to X \otimes (Y \otimes M)$, $l_M : \mathbf{1} \otimes M \to M$ para todo $X, Y \in \mathcal{C}$, $M \in \mathcal{M}$, tales que los diagramas

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& ((X\otimes Y)\otimes Z)\otimes M \arrow[dl, "a_{X,Y,Z}\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "m_{X\otimes Y,Z,M}"] & \\
(X\otimes(Y\otimes Z))\otimes M \arrow[d, "m_{X,Y\otimes Z,M}"'] & & (X\otimes Y)\otimes(Z\otimes M) \arrow[d, "m_{X,Y,Z\otimes M}"] \\
X\otimes((Y\otimes Z)\otimes M) \arrow[rr, "\mathrm{id}\otimes m_{Y,Z,M}"] & & X\otimes(Y\otimes(Z\otimes M))
\end{tikzcd} \tag{2.2}$$

y

$$\begin{tikzcd}
(X\otimes \mathbf{1})\otimes M \arrow[rr, "m_{X,\mathbf{1},M}"] \arrow[dr, "r_X\otimes\mathrm{id}"'] & & X\otimes(\mathbf{1}\otimes M) \arrow[dl, "\mathrm{id}\otimes l_M"] \\
& X\otimes M &
\end{tikzcd} \tag{2.3}$$

conmutan.

Definición 2.5.2. Sean $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ categorías módulo sobre $\mathcal{C}$. Un *funtor módulo* de $\mathcal{M}_1$ en $\mathcal{M}_2$ es un funtor $F : \mathcal{M}_1 \to M_2$ con isomorfismos naturales $c_{X,M} : F(X \otimes M) \to X \otimes F(M)$ para todo $X \in \mathcal{C}$, $M \in M_1$ tales que los dos diagramas siguientes conmutan.

$$\begin{tikzcd}
 & F((X \otimes Y) \otimes M) \arrow[dl, "F(m_{X,Y,M})"'] \arrow[dr, "c_{X\otimes Y,M}"] & \\
F(X \otimes (Y \otimes M)) \arrow[d, "c_{X,Y\otimes M}"'] & & (X \otimes Y) \otimes F(M) \arrow[d, "m_{X,Y,F(M)}"] \\
X \otimes F(Y \otimes M) \arrow[rr, "\mathrm{id} \otimes c_{Y,M}"] & & X \otimes (Y \otimes F(M))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
F(\mathbf{1} \otimes M) \arrow[rr, "F(l_M)"] \arrow[dr, "c_{\mathbf{1},M}"'] & & F(M) \\
 & \mathbf{1} \otimes F(M). \arrow[ur, "l_{F(M)}"'] &
\end{tikzcd}$$

Dos categorías módulo $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ sobre $\mathcal{C}$ son *equivalentes* si existe un funtor módulo de $\mathcal{M}_1$ en $\mathcal{M}_2$ que es una equivalencia de categorías. Para dos categorías módulo $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ sobre un categoría tensorial $\mathcal{C}$, la *suma directa* es la categoría $\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$ con la estructura obvia de categoría módulo. Una categoría módulo se dice *indescomponible* si no es equivalente a la suma directa de dos categorías módulo no triviales.

Definición 2.5.3. Sean (F, c), $(G, d) : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ dos funtores de $\mathcal{C}$-módulos. Una *transformación natural de $\mathcal{C}$-módulos* es una transformación natural $\theta : F \to G$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
F(X \otimes M) \arrow[r, "\theta_{X\otimes M}"] \arrow[d, "c_{X,M}"'] & G(X \otimes M) \arrow[d, "d_{X,M}"] \\
X \otimes F(M) \arrow[r, "\mathrm{id}_X \otimes \theta_M"] & X \otimes G(M)
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, para todo $X \in \mathcal{C}$, $M \in \mathcal{M}$.

Una forma de construir categorías módulos sobre $\mathcal{C}$ es la siguiente.

Ejemplo 2.5.4. Sea A un álgebra en $\mathcal{C}$. La categoría $\mathcal{C}_A$ de los A-módulos a derecha en $\mathcal{C}$ es una categoría $\mathcal{C}$-módulo a izquierda con $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C}_A \to \mathcal{C}_A$, $(X, (M, \lambda)) \to (X \otimes M, \mathrm{id}_X \otimes \lambda)$.

Ejemplo 2.5.5. Sea $(F, \eta) : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor tensorial. Cualquier categoría $\mathcal{D}$-módulo $(\mathcal{M}, \otimes, \alpha)$ también tiene una estructura de $\mathcal{C}$-módulos inducida por el funtor tensorial F, que denotamos $(\mathcal{M}^F, \otimes^F, \alpha^F)$, donde $\mathcal{M}^F = \mathcal{M}$ como categoría abeliana, la acción a izquierda es $V \otimes^F M := F(V) \otimes M$ y la asociatividad está dada por $m^F_{V,W,M} := m_{F(V),F(W),M} \circ (\eta_{V,W} \otimes \mathrm{id}_M) : (V \otimes W) \otimes^F M \to V \otimes^F (W \otimes^F M)$, para todo $V, W \in \mathcal{C}$, $M \in \mathcal{M}^F$.

Veamos cómo son las categorías módulos indescomponibles sobre vec^ω_G, además vemos cuál es el rango de tal categoría módulo.

Ejemplo 2.5.6 ([O, Example 2.1], [Na, Example 2.8])**.** Sea $\mathcal{M}$ una categoría módulo indescomponible sobre vec_G^ω con estructura de módulo μ. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\mathcal{M}$ es esquelética. El grupo G actúa a derecha en el conjunto de los objetos simples de $\mathcal{M}$ y por lo tanto puede ser identificado con el cociente $K = H\backslash G$, para algún H subgrupo de G, con acción de G dada por la multiplicación a derecha. Entonces el conjunto de todos los objetos simples de $\mathcal{M}$ es K. Todos los isomorfismos μ_{x,g_1,g_2}, $x \in K$, $g_1, g_2 \in G$ son dados por escalares. Entonces podemos mirar a μ como un elemento de $C^2(G, Fun(K, \Bbbk^\times))$,

$$\begin{aligned}\mu :&G \times G \to Fun(K, \Bbbk^\times)\\ &(g_1, g_2) \mapsto \mu(g_1, g_2) : K \to \Bbbk^\times, \mu(x) = \mu_{x,g_1,g_2}, \forall x \in K.\end{aligned}$$

Podemos suponer que la 2-cocadena μ es normalizada. Así, como los isomorfismos naturales unidades de vec_G^ω son triviales, entonces por el diagrama (2.3) la unidad en $\mathcal{M}$ es trivial. Podemos pensar a ω como un elemento de $Z^3(G, Fun(K, \Bbbk^\times)) \subseteq C^3(G, Fun(K, \Bbbk^\times))$ tratando a ω como una función constante en K,

$$\begin{aligned}\omega :&G \times G \times G \to Fun(K, \Bbbk^\times)\\ &(g_1, g_2, g_3) \mapsto \omega(g_1, g_2, g_3) : K \to \Bbbk^\times, \quad \omega(g_1, g_2, g_3)(x) = \omega(g_1, g_2, g_3), \forall x \in K.\end{aligned}$$

Veamos que $d^2\mu = \omega$. De hecho, para todo $g_1, g_2, g_3 \in G$, $x \in K$,

$$\begin{aligned}(d^2\mu)(g_1, g_2, g_3)(x) &= ((g_1 \triangleright \mu(g_2, g_3))\mu^{-1}(g_1g_2, g_3)\mu(g_1, g_2g_3)\mu^{-1}(g_1, g_2))(x)\\ &= \mu(g_2, g_3)(xg_1)\mu^{-1}(g_1g_2, g_3)(x)\mu(g_1, g_2g_3)(x)\mu^{-1}(g_1, g_2)(x)\\ &= \mu_{xg_1,g_2,g_3}\mu^{-1}_{x,g_1g_2,g_3}\mu_{x,g_1,g_2g_3}\mu^{-1}_{x,g_1,g_2}\\ &=^{(*)} \omega(g_1, g_2, g_3) = \omega(g_1, g_2, g_3)(x),\end{aligned}$$

donde la igualdad $(*)$ sigue del diagrama (2.2). En particular, esto significa que ω restringido a $H\times H\times H$ representa la clase trivial en $H^3(H, \Bbbk^\times)$. Sea $L_{H,\omega} = \{\mu \in C^2(G, Fun(K, \Bbbk^\times)) : d^2\mu = \omega\}$. Dos elementos en $L_{H,\omega}$ dan lugar a categorías módulo equivalentes si y sólo si ellos difieren por un elemento en $B^2(G, Fun(K, \Bbbk^\times))$. Así tenemos una relación de equivalencia en $L_{H,\omega}$, dos elementos de $L_{H,\omega}$ son equivalentes si y sólo si ellos difieren por un elemento en $B^2(G, Fun(K, \Bbbk^\times))$. El conjunto de las clases de equivalencia de $L_{H,\omega}$ está en biyección con $H^2(H, \Bbbk^\times)$.

Por lo tanto, las categorías módulo indescomponibles sobre vec_G^ω están clasificadas por pares (H, μ) donde $H < G$ tal que $\omega|_H = 1$ y $\mu \in C^2(G, Fun(K, \Bbbk^\times))$ es una 2-cocadena tal que $d^2\mu = \omega$. Denotamos por $\mathcal{M}(H, \mu)$ la categoría correspondiente a un par (H, μ). Si $\omega = 1$, entonces $d^2\mu = 1$ y por lo tanto $\mu \in \ker d^2 = Z^2(H, \Bbbk^\times)$. Además el rango de $\mathcal{M}(F, \alpha)$ es $[G : F]$.

La categoría de funtores de $\mathcal{C}$-módulos entre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ es denotada por $\mathrm{Fun}_\mathcal{C}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$. En particular, si $\mathcal{M} = \mathcal{N}$ denotamos $\mathrm{Fun}_\mathcal{C}(\mathcal{M}, \mathcal{M}) = \mathrm{End}_\mathcal{C}(\mathcal{M})$. Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión y $\mathcal{M}$ una categoría módulo sobre $\mathcal{C}$ indescomponible, la categoría $\mathrm{End}_\mathcal{C}(\mathcal{M})$ es una categoría de fusión, ver [ENO, Theorem 2.18].

Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión.

Ejemplo 2.5.7. Sean A, B álgebras en $\mathcal{C}$. Las categorías $\mathrm{Fun}_\mathcal{C}(\mathcal{C}_A, \mathcal{C}_B)$ y ${}_A\mathcal{C}_B$ son equivalentes, donde la equivalencia está dada por $F \mapsto F(A)$.

Ejemplo 2.5.8. Sea $\mathcal{M}$ una categoría $\mathcal{C}$-módulo. Entonces $\mathcal{M}$ es una categoría $\mathrm{End}_\mathcal{C}(\mathcal{M})$-módulo a izquierda con acción dada por $F \odot M = F(M)$, $F \in \mathrm{End}_\mathcal{C}(\mathcal{M})$, $X \in \mathcal{C}$, $M \in \mathcal{M}$.

Ejemplo 2.5.9. Sea $F : \mathcal{C} \to \mathrm{vec}$ un funtor de fibra. Entonces vec es una categoría módulo sobre $\mathcal{C}$ con $X \otimes V := F(X) \otimes V$, $X \in \mathcal{C}$, $V \in \mathrm{vec}$. Recíprocamente, una estructura de categoría módulo sobre $\mathcal{C}$ en vec determina un funtor de fibra en $\mathcal{C}$.

Ejemplo 2.5.10. Sea $\mathcal{C} = \mathrm{vec}_G$ y $\mathcal{M} = \mathrm{vec}$ la categoría módulo correspondiente al funtor de olvido usual $\mathrm{vec}_G \to \mathrm{vec}$. Por [O, Example 2.2], $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}) \simeq \mathrm{Rep}\, G$. Ver Ejemplo 3.6.3.

Más generalmente, sea $\mathcal{M}$ la categoría módulo asociada al par $(F, 1)$ en el Ejemplo 2.5.6. Entonces la categoría $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ es equivalente a la categoría de haces F-equivariantes en G/F con producto tensorial dado por el producto de convolución de haces. En particular, si $F = G$ entonces ${}_{\Bbbk G}(\mathrm{vec}_G)_{\Bbbk G} \simeq \mathrm{Rep}\, G$.

Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías abelianas $\Bbbk$-lineales. El *producto tensorial de Deligne* $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ es una categoría abeliana $\Bbbk$-lineal que es universal para el funtor que asigna a cada categoría abeliana $\Bbbk$-lineal $\mathcal{A}$ la categoría de bifuntores bilineales exactos en cada variable $\mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{A}$. Esto es, existe un bifuntor

$$\boxtimes : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}, (X, Y) \mapsto X \boxtimes Y$$

que es exacto a derecha en ambas variables tal que para cualquier bifuntor exacto a derecha en ambas variables $F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ existe un único funtor exacto a derecha $\bar{F} : \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ satisfaciendo $\bar{F} \circ \boxtimes = F$. El producto tensorial de Deligne $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ existe y es único a menos de equivalencia.

Ejemplo 2.5.11. La categoría de fusión $\mathcal{C}$ es una categoría módulo sobre $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{C}^{\mathrm{rev}}$ vía $(X \boxtimes Y) \otimes Z = X \otimes Z \otimes Y$. La asociatividad y unidad son definidas usando la asociatividad y la unidad de $\mathcal{C}$.

2.6. Categorías bimódulos

Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías de fusión.

Definición 2.6.1. Una *categoría* $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$*-bimódulo* es una categoría módulo sobre $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}^{\mathrm{rev}}$.

Equivalentemente, una categoría $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$-bimódulo es una categoría abeliana $\mathcal{M}$ que es una categoría $\mathcal{C}$-módulo a izquierda, $\mathcal{D}$-módulo a derecha y estas acciones deben ser compatibles, [Gr].

Ejemplo 2.6.2. Sea $\mathcal{X}$ una categoría. Denotamos por $\mathcal{X}^{\mathrm{op}}$ a la categoría opuesta de $\mathcal{X}$, cuyos objetos son los mismos de $\mathcal{X}$ y las flechas están dadas por $\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}^{\mathrm{op}}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(Y, X)$, para todo $X, Y \in \mathcal{X}$. Si $\mathcal{M}$ es una categoría $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$-bimódulo, entonces su categoría opuesta $\mathcal{M}^{\mathrm{op}}$ es un $(\mathcal{D}, \mathcal{C})$-bimódulo con acciones $\odot$ dadas por $X \odot M = M \otimes X^*$ y $M \odot X = X^* \otimes M$, $X \in \mathcal{C}$, $M \in \mathcal{M}$. Ver [ENO2, §6.9].

Sean $\mathcal{M} = (\mathcal{M}, m)$ una categoría $\mathcal{C}$-módulo a derecha y sea $\mathcal{N} = (\mathcal{N}, n)$ una categoría $\mathcal{C}$-módulo a izquierda, donde m y n son las asociatividades: $\forall\ Y \in \mathcal{C}$, $M \in \mathcal{M}$, $N \in \mathcal{N}$,

$$m_{M,X,Y} : M \otimes (X \otimes Y) \to (M \otimes X) \otimes Y, \qquad n_{X,Y,N} : (X \otimes Y) \otimes N \to X \otimes (Y \otimes N).$$

Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana semisimple.

Definición 2.6.3. Sea $F : \mathcal{M} \times \mathcal{N} \to \mathcal{A}$ un bifuntor aditivo en cada argumento. Decimos que F es $\mathcal{C}$-*balanceada* si existe una familia de isomorfismos naturales $b_{M,X,N} : F(M \otimes X, N) \to F(M, X \otimes N)$, satisfaciendo el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
F(M \otimes (X \otimes Y), N) \arrow[rr, "m_{M,X,Y}"] \arrow[d, "b_{M,X\otimes Y,N}"] & & F((M \otimes X) \otimes Y, N) \arrow[d, "b_{M\otimes X,Y,N}"] \\
F(M, (X \otimes Y) \otimes N) & & F(M \otimes X, Y \otimes N) \arrow[dl, "b_{M,X,Y\otimes N}"] \\
& F(M, X \otimes (Y \otimes N)) \arrow[ul, "n^{-1}_{X,Y,N}"] &
\end{tikzcd}$$

para todo $M \in \mathcal{M},\ N \in \mathcal{N},\ X, Y \in \mathcal{C}$.

Definición 2.6.4. Un *producto tensorial* de una categoría $\mathcal{C}$-módulo a derecha $\mathcal{M}$ y una categoría $\mathcal{C}$-módulo a izquierda $\mathcal{N}$ es una categoría abeliana $\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N}$ con un funtor $\mathcal{C}$-balanceado

$$B_{\mathcal{M},\mathcal{N}} : \mathcal{M} \times \mathcal{N} \to \mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N} \tag{2.4}$$

induciendo, para cualquier categoría abeliana $\mathcal{A}$, una equivalencia entre la categoría de funtores $\mathcal{C}$-balanceados de $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ en $\mathcal{A}$ y la categoría de funtores de $\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N}$ en $\mathcal{A}$:

$$\mathrm{Fun}_{bal}(\mathcal{M} \times \mathcal{N}, \mathcal{A}) \simeq \mathrm{Fun}(\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N}, \mathcal{A}).$$

Esta definición aparece en [ENO2, §3], es la categorificación de la noción de producto tensorial de módulos sobre un anillo y es la generalización del producto tensorial de Deligne (que es un producto tensorial de módulos sobre la categoría vec).

Observación 2.6.5. Equivalentemente, el bifuntor (2.4) es universal para todos los bifuntores $\mathcal{C}$-balanceados de $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ en categorías abelianas. Más precisamente, para todo funtor $\mathcal{C}$-balanceado $F : \mathcal{M} \times \mathcal{N} \to \mathcal{A}$ existe un único funtor aditivo $F' : \mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N} \to \mathcal{A}$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M} \times \mathcal{N} \arrow[d, "B_{\mathcal{M},\mathcal{N}}"'] \arrow[dr, "F"] & \\
\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N} \arrow[r, dashed, "F'"] & \mathcal{A}.
\end{tikzcd}$$

Si $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ son $\mathcal{C}$-bimódulos, entonces $\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N}$ es un $\mathcal{C}$-bimódulo.

Definición 2.6.6. Una categoría $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$-bimódulo $\mathcal{M}$ es *invertible* si existen equivalencias de bimódulos $\mathcal{M}^{\mathrm{op}} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M} \simeq \mathcal{D}$ y $\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{D}} \mathcal{M}^{\mathrm{op}} \simeq \mathcal{C}$.

El *grupo de Brauer-Picard* $\mathrm{BrPic}(\mathcal{C})$ de una categoría de fusión $\mathcal{C}$ es el conjunto de clases de equivalencia de categorías $\mathcal{C}$-bimódulos invertibles con producto dado por $\boxtimes_{\mathcal{C}}$, [ENO2].

Ahora introducimos el resultado de [GP] que dice cuándo $\mathrm{End}_{\mathcal{D}}(\mathcal{N})$ y $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ son equivalentes. Más adelante usamos este resultado para categorías grupo-teoréticas.

Sea $\mathcal{S} \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$. Entonces $\mathrm{Fun}_{\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})}(\mathcal{M}, \mathcal{S})$ es una categoría $\mathcal{C}$-módulo a derecha pues las acciones a izquierda de $\mathcal{C}$ y $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ conmutan, y la acción a derecha es dada por $(F \odot X)(M) = F(X \otimes M)$, para todo $F \in \mathrm{Fun}_{\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})}(\mathcal{M}, \mathcal{S})$, $X \in \mathcal{C}$ y $M \in \mathcal{M}$.

Teorema 2.6.7 ([GP, Theorem 3.1]). *Sean $\mathcal{M}$ una categoría $\mathcal{C}$-módulo a izquierda y $\mathcal{S}$ una categoría $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$-módulo a izquierda. Existe una equivalencia de categorías $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$-módulos a izquierda dada por*

$$\begin{aligned} \varepsilon : \mathrm{Fun}_{\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})}(\mathcal{M}, \mathcal{S}) \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M} &\to \mathcal{S} \\ F \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M} &\mapsto F(M), \end{aligned}$$

para todo $M \in \mathcal{M}$, $F \in \mathrm{Fun}_{\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})}(\mathcal{M}, \mathcal{S})$. □

Sean $\mathcal{M}$ una categoría $\mathcal{C}$-módulo a izquierda semisimple indescomponible, $\mathcal{N}$ una categoría $\mathcal{D}$-módulo a izquierda semisimple indescomponible y $F : \mathrm{End}_{\mathcal{D}}(\mathcal{N}) \to \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ un funtor tensorial. Supongamos sin perdida de generalidad que las categorías de fusión y las categorías módulo son estrictas. La categoría

$$\mathcal{S}_F := \mathrm{Fun}_{\mathrm{End}_{\mathcal{D}}(\mathcal{N})}(\mathcal{N}, \mathcal{M}^F),$$

es un $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$-bimódulo con $\mathcal{C}$-acción a izquierda y $\mathcal{D}$-acción a derecha dadas por

$$(X \odot G)(N) = X \otimes G(N), \quad (G \odot Y)(N) = G(Y \otimes N), \quad X \in \mathcal{C}, Y \in \mathcal{D}, G \in \mathcal{S}^F, N \in \mathcal{N}.$$

Observación 2.6.8. Por el Teorema 2.6.7, $\mathcal{S}_F \boxtimes_{\mathcal{D}} \mathcal{N} \simeq \mathcal{M}$ es una equivalencia de categorías $\mathcal{C}$-módulos a izquierda. Más aún, dadas $\mathcal{S}$ una categoría $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$-bimódulo y $\alpha : \mathcal{S} \boxtimes_{\mathcal{D}} \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ una equivalencia de categorías $\mathcal{C}$-módulos a izquierda, $\mathcal{M}$ es una categoría $\mathcal{C}$-módulo a izquierda indescomponible semisimple y $\mathcal{N}$ es una categoría $\mathcal{D}$-módulo a izquierda, indescomponible semisimple, entonces existe una equivalencia tensorial $F : \mathrm{End}_{\mathcal{D}}(\mathcal{N}) \to \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$.

Más precisamente, sea $\mathfrak{Funct}$ la categoría cuyos objetos son pares $(\mathcal{C}, \mathcal{M})$, donde $\mathcal{C}$ es una categoría de fusión y $\mathcal{M}$ es una categoría $\mathcal{C}$-módulo a izquierda indescomponible semisimple, los morfismos de $(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ en $(\mathcal{D}, \mathcal{N})$ son clases de equivalencia de funtores monoidales de $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ en $\mathrm{End}_{\mathcal{D}}(\mathcal{N})$. La composición de morfismos es la composición usual de clases de equivalencia de funtores monoidales.

Sea $\mathfrak{Cor}$ la categoría cuyos objetos son pares $(\mathcal{C}, \mathcal{M})$, donde $\mathcal{C}$ es una categoría de fusión y $\mathcal{M}$ es una categoría $\mathcal{C}$-módulo a izquierda indescomponible semisimple. Un morfismo de $(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ a $(\mathcal{D}, \mathcal{N})$ es una clase de equivalencia de pares $(\mathcal{S}, \alpha)$, donde $\mathcal{S}$ es una categoría $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$-bimódulo y $\alpha : \mathcal{S} \boxtimes_{\mathcal{D}} \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ es una equivalencia de categorías $\mathcal{C}$-módulos a izquierda. Dos pares $(\mathcal{S}, \alpha)$ y $(\mathcal{S}', \alpha')$ representan el mismo morfismo de $(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ en $(\mathcal{D}, \mathcal{N})$ si existe un par (ϕ, a), donde $\phi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ es una equivalencia de $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$-bimódulos y a es un isomorfismo natural de funtores de $\mathcal{C}$-módulos a izquierda de α a $\alpha' \circ (\phi \boxtimes_{\mathcal{D}} \mathrm{id}_{\mathcal{N}})$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \boxtimes_{\mathcal{D}} \mathcal{N} \arrow[d, "\phi \boxtimes_{\mathcal{D}} \mathrm{id}_{\mathcal{N}}"'] \arrow[dr, "\alpha"] & \\ \mathcal{S}' \boxtimes_{\mathcal{D}} \mathcal{N} \arrow[r, "\alpha'"] & \mathcal{M}. \end{tikzcd}$$

Si $(\mathcal{S}, \alpha) \in \mathfrak{Cor}((\mathcal{C}, \mathcal{M}), (\mathcal{D}, \mathcal{N}))$ y $(\mathcal{P}, \beta) \in \mathfrak{Cor}((\mathcal{D}, \mathcal{N}), (\mathcal{K}, \mathcal{T}))$ son morfismos, la composición es

$$(\mathcal{S}, \alpha) \odot (\mathcal{P}, \beta) = (\mathcal{S} \boxtimes_{\mathcal{D}} \mathcal{P}, \alpha \odot \beta) \in \mathfrak{Cor}((\mathcal{C}, \mathcal{M}), (\mathcal{K}, \mathcal{T})),$$

donde $\alpha \odot \beta$ está dado por el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{S} \boxtimes_{\mathcal{D}} \mathcal{P}) \boxtimes_{\mathcal{K}} \mathcal{T} \arrow[r, "\alpha\odot\beta"] \arrow[d, "a_{\mathcal{S},\mathcal{P},\mathcal{T}}"'] & \mathcal{M} \\
\mathcal{S} \boxtimes_{\mathcal{D}} (\mathcal{P} \boxtimes_{\mathcal{K}} \mathcal{T}) \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathcal{S}} \boxtimes_{\mathcal{D}} \beta"] & \mathcal{S} \boxtimes_{\mathcal{D}} \mathcal{N}. \arrow[u, "\alpha"']
\end{tikzcd}$$

Las categorías $\mathfrak{Funct}$ y $\mathfrak{Cor}$ son equivalentes, ver [GP, Theorem 1].

Proposición 2.6.9 ([GP, Proposition 5.1])**.** *Un funtor tensorial* $F : \mathrm{End}_{\mathcal{D}}(\mathcal{N}) \to \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ *es una equivalencia si y sólo si* $\mathcal{S}_F = \mathrm{Fun}_{\mathrm{End}_{\mathcal{D}}(\mathcal{N})}(\mathcal{N}, \mathcal{M}^F)$ *es una categoría* $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$*-bimódulo invertible.* $\square$

Recordamos algunos resultados relacionados con bimódulos invertibles sobre categorías de fusión punteadas y el producto tensorial de sus categorías módulo contenidos en [GP]. En el trabajo [NiR], ellos calculan el grupo de Brauer-Picard de algunos grupos finitos, en particular nos interesa el resultado que tienen para $\mathbb{S}_4$ que utilizamos en el Capítulo 5.

Observación 2.6.10.

i) Si $\mathcal{X}$ es una categoría vec_G-bimódulo invertible entonces como categorías vec_G-módulo a derecha $\mathcal{X} \simeq \mathcal{M}(A, \alpha)$, donde $A \triangleleft G$ es abeliano y $\alpha \in H^2(A, \Bbbk^\times)^{\mathrm{ad}\, G}$, cf [GP, Corollary 7.11]. En el caso de $G = \mathbb{S}_4$, existen categorías bimódulo invertibles $\mathcal{X}$ tales que como categorías $\mathrm{vec}_{\mathbb{S}_4}$-módulo a derecha $\mathcal{X} = \mathcal{M}(N, \alpha)$, donde $N \simeq C_2 \times C_2$ es el subgrupo de Klein normal de $\mathbb{S}_4$ (es el único subgrupo abeliano normal de $\mathbb{S}_4$), $\alpha \in H^2(N, \Bbbk^\times)$, cf [NiR, Subsection 8.2].

ii) El rango de $\mathcal{M}(F, \alpha) \boxtimes_{\mathrm{vec}_{\mathbb{S}_4}} \mathcal{M}(\Gamma, \beta)$ puede ser calculado de la siguiente forma. Sea $X := F\backslash G$ y $Y := G/\Gamma$, el grupo G actúa en $X \times Y$ como $g \cdot (x, y) = (xg^{-1}, gy)$. Dados $x \in X$, $y \in Y$, sea $\mathrm{Stab}_G(x, y) = \{g \in G / g \cdot (x, y) = (x, y)\}$. Sea $\{(x_i, y_i)\}_{i \in F\backslash G/\Gamma}$ un conjunto de representantes de las órbitas de la acción de G en $X \times Y$ (el conjunto de G-órbitas está en correspondencia con los (F, Γ)-cosets dobles), entonces existe una correspondencia biyectiva entre objetos simples en $\mathcal{M}(F, \alpha) \boxtimes_{\mathrm{vec}_{\mathbb{S}_4}} \mathcal{M}(\Gamma, \beta)$ y representaciones irreducibles de $\Bbbk_{\alpha_i} \mathrm{Stab}_G(x_i, y_i)$, donde α_i son ciertos 2-cociclos asociados con α y β, cf [GP, Theorem 7.14, Corollary 7.15].

Capítulo 3

Álgebras de Hopf semisimples

En este capítulo vemos las principales formas de construir ejemplos de álgebras de Hopf semisimples, que son twist de la comultiplicación y de la multiplicación y extensiones. También presentamos la definición y resultados que utilizamos de álgebra de Nichols. Finalmente, estudiamos las álgebras de Hopf grupo-teoréticas.

Las referencias básicas para twists y extensiones de álgebras de Hopf son [A1, AD, R1, K, Mon, M, T] y resultados de [BM, EG, EG2, EG1, GN, Ma, MO, Mov, Ni1, N, Sc, S, S2]. La principal referencia álgebras de Nichols es [AS]. Las referencias para álgebras de Hopf grupo-teoréticas son [ENO1, EGNO, GeN, O, O1, S1, Na, N, Ni].

3.1. Torcimientos

Hay maneras de obtener nuevas álgebras de Hopf cambiando la comultiplicación o la multiplicación. La primera aparece en [Dr] en el contexto de cuasi-álgebras de Hopf; la segunda, dual a la primera, fue estudiada por primera vez en [DT].

3.1.1. Torcimiento de la comultiplicación

Definición 3.1.1. Un *twist* en un álgebra de Hopf H es un elemento $J \in (H \otimes H)^{\times}$ tal que

$$(\Delta \otimes \mathrm{id})(J)(J \otimes 1) = (\mathrm{id} \otimes \Delta)(J)(1 \otimes J), \qquad (\varepsilon \otimes \mathrm{id})(J) = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(J) = 1.$$

Si $J \in H \otimes H$ es un twist, entonces $(H^J, m, \Delta^J, \mathcal{S}^J)$ es un álgebra de Hopf con

$$H^J = H, \qquad \Delta^J(h) = J^{-1}\Delta(h)J, \qquad \mathcal{S}^J(h) = u^{-1}\mathcal{S}(h)u, \qquad h \in H, u = m(\mathcal{S} \otimes \mathrm{id})(J).$$

Decimos que H y H^J son twist equivalentes. Notemos que si H es semisimple, entonces H^J es semisimple, pues el twist no afecta la estructura de álgebra.

Teorema 3.1.2 ([EG3, S]). *Dos álgebras de Hopf de dimensión finita H y H' son twist equivalentes si y sólo si las categorías $\operatorname{Rep} H$ y $\operatorname{Rep} H'$ son monoidalmente equivalentes.* □

Si J es un twist y $\gamma \in H$ es invertible, entonces $J_\gamma := (\gamma \otimes \gamma) J \Delta(\gamma^{-1})$ es nuevamente un twist y $H^{J_\gamma} \longmapsto H^J$, $h \mapsto \gamma^{-1} h \gamma$ es un isomorfismo de álgebras de Hopf. Decimos que J y J' son *gauge-equivalentes*. Existe una equivalencia de categorías trenzadas $\mathcal{T}^J : {}^H_H\mathcal{YD} \to {}^{H^J}_{H^J}\mathcal{YD}$, $V \mapsto V^J$, que es la identidad en el espacio vectorial subyacente, morfismos y acciones, y transforma la coacción de H en V en $\rho^J : V^J \to H^J \otimes V^J$,

$$\rho^J(v) = J_i({J^{-1}}_k \cdot v)_{(-1)} {J^{-1}}^k \otimes J^i({J^{-1}}_k \cdot v)_{(0)}, \quad v \in V^J. \tag{3.1}$$

La transformación natural $b_{V,W} : V^J \otimes W^J \to (V \otimes W)^J$,

$$b_{V,W}(v \otimes w) = {J^{-1}}_k \cdot v \otimes {J^{-1}}^k \cdot w, \quad v \in V, \quad w \in W, \tag{3.2}$$

da una estructura monoidal en $\mathcal{T}^J$. Ver [MO, 2.8].

Sea S un grupo finito y $\omega \in Z^2(S, \Bbbk^\times)$ un 2-cociclo. Un elemento $s \in S$ es llamado *ω-regular* si $\omega(s,t) = \omega(t,s)$, para todo $t \in C_S(s)$ (el centralizador de s en S). El 2-cociclo ω es *no degenerado* si y sólo si $\{1\}$ es la única clase ω-regular en S. Equivalentemente, si el álgebra $\Bbbk_\omega S$ es simple. Los twists en un álgebra de grupo $H = \Bbbk N$, donde N es un grupo finito, están clasificados, a menos de gauge-equivalencia, por clases de pares (S,ω) donde $S < N$ y $\omega \in H^2(S,\Bbbk^\times)$ es un 2-cociclo no degenerado en S. Entonces S es soluble y $|S|$ es un cuadrado. A saber, si J es un twist en H, entonces $S < N$ es un subgrupo minimal para J, i. e., las componentes de $J_{21}^{-1}J$ generan $\Bbbk S$; y J determina ω. Si S es abeliano, entonces el twist correspondiente a (S,ω) está dado por $J = \sum_{\chi,\eta \in \widehat{S}} \omega(\chi,\eta) e_\chi \otimes e_\eta$, donde $e_\chi = \dfrac{1}{|S|} \sum_{h \in S} \chi(h^{-1}) h$. Ver [Mov, EG]. Sean N un grupo y $S \lhd N$. Decimos que ω es *ad N-invariante* en $H^2(S,\Bbbk^\times)$ si $[\omega] = [\omega^g]$ en $H^2(S,\Bbbk^\times)$ para algún $g \in N$, donde $\omega^g(s,t) = \omega(gsg^{-1}, gtg^{-1})$, $\forall s,\ t \in S$. Claramente, el cociclo trivial es ad N-invariante. El mapa

$$H^2(S,\Bbbk^\times) \to H^2(S,\Bbbk^\times), [\omega] \to [\omega^g]$$

es un automorfismo de grupos para cada $g \in N$. Por ejemplo si $H^2(S,\Bbbk^\times) \simeq C_2$, como $\mathrm{Aut}(C_2) = \{\mathrm{id}\}$, entonces $\omega \in H^2(S,\Bbbk^\times)$ es ad N-invariante.

Lema 3.1.3 ([GN, 2.6])**.** *Sea $J \in \Bbbk N \otimes \Bbbk N$ el twist asociado al par (S,ω), donde S es el subgrupo minimal de J. Entonces $(\Bbbk N)^J$ es coconmutativo si, y sólo si, $S \lhd N$, S es abeliano y ω es ad N-invariante en $H^2(S,\Bbbk^\times)$.* $\square$

3.1.2. Torcimiento de la multiplicación

Definición 3.1.4. Sea H un álgebra de Hopf. Un 2-*cociclo* para H es una forma bilineal $\sigma : H \times H \to \Bbbk$ invertible respecto al producto de convolución tal que, para todo $h,\ l,\ m \in H$,

$$\sigma(l_1, m_1)\sigma(h, l_2 m_2) = \sigma(h_1, l_1)\sigma(h_2 l_2, m), \qquad \sigma(h,1) = \varepsilon(h) = \sigma(1,h).$$

Si σ es un 2-cociclo para H, entonces $(H_\sigma, \cdot_\sigma, \Delta, \mathcal{S}_\sigma)$ es un álgebra de Hopf, llamada *torcida por cociclo* de H, con

$$H_\sigma = H, \qquad g \cdot_\sigma h = \sigma(g_1, h_1) g_2 h_2 \sigma^{-1}(g_3, h_3),$$

$$\mathcal{S}_\sigma(h) = \sigma(h_1, \mathcal{S}(h_2))\mathcal{S}(h_3)\sigma^{-1}(\mathcal{S}(h_4), h_5), \qquad g, h \in H.$$

Si H es de dimensión finita, entonces $(H^J)^* = (H^*)_\sigma$ con $\sigma(f,f') = (f \otimes f')(J)$, $f, f' \in H^*$.

Teorema 3.1.5 ([S, Corollary 5.9])**.** *Dos álgebras de Hopf de dimensión finita H y H' son deformaciones por cociclo una de la otra si y sólo si las categorías* $\operatorname{Corep} H$ *y* $\operatorname{Corep} H'$ *son monoidalmente equivalentes.* □

Si $\alpha \in \operatorname{Hom}(H, \Bbbk)$ es invertible respecto al producto de convolución , definimos

$$\sigma^{\alpha}(x,y) = \alpha(x_1)\alpha(y_1)\sigma(x_2,y_2)\alpha^{-1}(x_3y_3), \quad \forall x,y \in H.$$

Entonces σ^{α} es un 2-cociclo y $\alpha^{-1} * \operatorname{id} * \alpha : H_{\sigma^{\alpha}} \longmapsto H_{\sigma}$ es un isomorfismo de álgebras de Hopf. El grupo de funcionales lineales invertibles respecto a la convolución de H actúa en el conjunto $Z^2(H, \Bbbk)$ de 2-cociclos. El cociente de $Z^2(H, \Bbbk)$ bajo esta acción es denotado por $H^2(H, \Bbbk)$.

Existe una equivalencia de categorías trenzadas $\mathcal{T}_{\sigma} : {}^{H}_{H}\mathcal{YD} \to {}^{H_{\sigma}}_{H_{\sigma}}\mathcal{YD}$, $V \mapsto V_{\sigma}$, que es la identidad en el espacio vectorial subyacente, morfimos y coacciones, y transforma la acción de H en V en $\cdot_{\sigma} : H_{\sigma} \otimes V_{\sigma} \to V_{\sigma}$,

$$h \cdot_{\sigma} v = \sigma(h_1, v_{(-1)})(h_2 \cdot v_{(0)})_{(0)}\, \sigma^{-1}((h_2 \cdot v_{(0)})_{(-1)}, h_3), \tag{3.3}$$

$h \in H_{\sigma}$, $v \in V_{\sigma}$. La transformación natural $b_{V,W} : V_{\sigma} \otimes W_{\sigma} \to (V \otimes W)_{\sigma}$,

$$b_{V,W}(v \otimes w) = \sigma(v_{(-1)}, w_{(-1)})v_{(0)} \otimes w_{(0)}, \quad v \in V, \quad w \in W, \tag{3.4}$$

da una estructura monoidal natural a $\mathcal{T}_{\sigma}$. Ver [MO, 2.7].

3.2. Álgebra de Hopf triangular

Definición 3.2.1. Un álgebra de Hopf H es *cuasitriangular* si existe un elemento invertible $R = R_i \otimes R^i \in H \otimes H$, llamado *R-matriz*, que satisface

QT1) $(\Delta \otimes \operatorname{id})(R) = R_i \otimes R_j \otimes R^i R^j$.

QT2) $(\varepsilon \otimes \operatorname{id})(R) = 1$.

QT3) $(\operatorname{id} \otimes \Delta)(R) = R_i R_j \otimes R^j \otimes R^i$.

QT4) $(\operatorname{id} \otimes \varepsilon)(R) = 1$.

QT5) $\Delta^{\mathrm{cop}}(h) = R\Delta(h)R^{-1}$, para todo $h \in H$.

(H, R) es *triangular* si además $R^{-1} = R^i \otimes R_i$. Un álgebra de Hopf de dimensión finita H es *cocuasitriangular* si H^* es cuasitriangular.

Si H es coconmutativa, entonces $(H, 1 \otimes 1)$ es triangular. Si (H, R) is triangular y J es un twist en H, entonces H^J es triangular con R-matriz $((J^{-1})^i \otimes (J^{-1})_i)RJ$.

Teorema 3.2.2 ([EG2, Theorem 2.1])**.** *Si H es un álgebra de Hopf semisimple triangular, entonces es isomorfa al twist de un álgebra de grupo.* □

De este teorema se sigue que si H es un álgebra de Hopf semisimple cotriangular, entonces es isomorfa al twist-cociclo del dual de un álgebra de grupo.

Observación 3.2.3. Si (H, R) es un álgebra de Hopf cuasitriangular y $\pi : H \to K$ es un epimorfismo de álgebras de Hopf, entonces $(K, (\pi \otimes \pi)(R))$ es cuasitriangular. Dualmente, si (H, R) es un álgebra de Hopf cocuasitriangular y $\iota : K \to H$ es un monomorfismo de álgebras de Hopf, entonces $(K, R|_{K \otimes K})$ es cocuasitriangular.

3.3. Extensiones de álgebras de Hopf

Definición 3.3.1 ([AD]). Una sucesión de morfismos de álgebras de Hopf

$$\Bbbk \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} C \xrightarrow{\pi} B \longrightarrow \Bbbk \tag{3.5}$$

es *exacta* o C *es una extensión de* B *por* A si

i) ι es inyectiva (identificamos A con su imagen),

ii) π is suryectiva,

iii) $\ker \pi = CA^+$, y

iv) $A = C^{\operatorname{co}\pi}$.

En este caso, C es semisimple si y sólo si A y B son semisimples, ver [BM] . Por [Ma, 3.1], si (3.5) es una sucesión de morfismos de álgebras de Hopf de dimensión finita que satisfacen i) y ii), entonces iii) y iv) son equivalentes; además, la sucesión dual $B^* \hookrightarrow C^* \twoheadrightarrow A^*$ es exacta.

Observación 3.3.2. Si la sucesión $K \overset{\iota}{\hookrightarrow} H \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} T$ es exacta y $H' \leq H$, entonces H' es una extensión de $T' = \pi(H')$ por $K' = K \cap H'$. De hecho, $K \cap H' \hookrightarrow H' \twoheadrightarrow T'$ es una sucesión de morfismos de álgebras de Hopf, $\iota|_{K\cap H'}$ es inyectiva y $\pi|_{H'}$ es suryectiva. Además $H'^{\operatorname{co}\pi} = H' \cap H^{\operatorname{co}\pi} = H' \cap K$, luego la sucesión es exacta.

Definición 3.3.3. La *acción adjunta* a izquierda (respectivamente, a derecha) de H es $\operatorname{ad}_l : H \to \operatorname{End} H$ (resp., $\operatorname{ad}_r : H \to \operatorname{End} H$), $\operatorname{ad}_l(h)(k) = h_1 k \mathcal{S}(h_2)$ (respectivamente, $\operatorname{ad}_r(h)(k) = \mathcal{S}(h_1) k h_2$), $h \in H, k \in K$.

Definición 3.3.4. Una subálgebra de Hopf $K \subseteq H$ es *normal* si $\operatorname{ad}_l(h)(K) \subseteq K$ y $\operatorname{ad}_r(h)(K) \subseteq K$, para todo $h \in H$; denotamos $K \lhd H$. H es *simple* si no contiene subálgebras de Hopf normales propias.

Si H un álgebra de Hopf de dimensión finita, entonces $\mathcal{S}$ es biyectiva y por lo tanto, $\operatorname{ad}_l(h)(K) \subseteq K$ si, y sólo si, $\operatorname{ad}_r(h)(K) \subseteq K$, para todo $h \in H$. Así, denotamos ad_l por ad.

Lema 3.3.5. *Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita.*

i) Si K es una subálgebra de Hopf normal de H, entonces la sucesión $K \overset{\iota}{\hookrightarrow} H \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} H/\!/K$ es exacta, donde $H/\!/K := H/HK^+$, ι es la inclusión y π la proyección canónica.

ii) Recíprocamente, dada una sucesión exacta $K \overset{\iota}{\hookrightarrow} H \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} T$, entonces $K \lhd H$.

Demostración. Para probar i), basta ver que $I = HK^+$ es un ideal de Hopf de H, i. e., I es un ideal de H, $\Delta(I) \subseteq H \otimes I + I \otimes H$, $\varepsilon(I) = 0$ y $\mathcal{S}(I) \subseteq I$. Tenemos

$$ha = h_1 a \varepsilon(h_2) = h_1 a \mathcal{S}(h_2) h_3 = \operatorname{ad}(h_1)(a) h_2.$$

Si $K \lhd H$ y $a \in K$, entonces $ha \in KH$, para todo $h \in H$. Además, si $\varepsilon(a) = 0$ entonces $\varepsilon(\operatorname{ad}(h)(a)) = 0$, luego $HK^+ \subseteq K^+H$. Análogamente, $K^+H \subseteq HK^+$. Por lo tanto, I es un ideal de H y $\mathcal{S}(I) \subseteq I$.

Claramente, $\varepsilon(I) = 0$. Sea $b \in K^+$, entonces $\Delta(b) \in \ker(\varepsilon \otimes \varepsilon) = K \otimes K^+ + K^+ \otimes K$. Luego, $\Delta(I) \subseteq H \otimes I + I \otimes H$

Para ii), como $K = H^{\mathrm{co}\,\pi}$, para todo $a \in K$, $(\mathrm{id} \otimes \pi)(a) = a \otimes 1$. Entonces

$$\begin{aligned}(\mathrm{id} \otimes \pi)\Delta(\mathrm{ad}(h)(a)) &= (\mathrm{id} \otimes \pi)\Delta(h_1 a \mathcal{S}(h_2)) = h_1 a_1 \mathcal{S}(h_4) \otimes \pi(h_2 a_2 \mathcal{S}(h_3)) \\ &= h_1 a \mathcal{S}(h_4) \otimes \pi(h_2 \mathcal{S}(h_3)) = h_1 \varepsilon(h_2) a \mathcal{S}(h_3) \otimes \pi(1) \\ &= \mathrm{ad}(h)(a) \otimes 1,\end{aligned}$$

para todo $h \in H$, $a \in K$; luego $\mathrm{ad}(h)(K) \subseteq K$ para todo $h \in$ y $K \lhd H$. □

Así tenemos que el dual de un álgebra de Hopf simple (de dimensión finita) es simple.

Ejemplo 3.3.6. Si G es un grupo finito simple, entonces $\Bbbk G$ y $\Bbbk^G$ son álgebras de Hopf simples.

Ejemplo 3.3.7 ([Ni1])**.** Si G un grupo finito simple y J es un twist de $\Bbbk G$, entonces $(\Bbbk G)^J$ es simple.

Ejemplo 3.3.8 ([GN, Theorem 3.5])**.** Sea $n \geqslant 5$. Consideramos el subgrupo abeliano $H = \langle (12), (34) \rangle \simeq C_2 \times C_2$ del grupo simétrico $\mathbb{S}_n$. Sea $\omega \in H^2(\widehat{H}, \Bbbk^\times)$ el único 2-cociclo no trivial y $J \in \Bbbk H \otimes \Bbbk H$ el twist correspondiente. Tenemos que $(\Bbbk \mathbb{S}_n)^J$ es simple.

Definición 3.3.9 ([A1, 3.1.14])**.** La extensión (3.5) se dice *escindida* si existe una aplicación $\chi : B \to C$, invertible para el producto de convolución, tal que $\chi(1) = 1$, $\varepsilon\chi = \varepsilon$ y $(\mathrm{id} \otimes \pi)\Delta\chi = (\chi \otimes \mathrm{id})\Delta$.

Por [Sc, Theorem 2.4], toda sucesión exacta de álgebras de Hopf de dimensión finita es escindida.

Definición 3.3.10 ([A1, 2.1])**.** Sean A un álgebra y B un álgebra de Hopf. Una *acción débil* de B en A es una aplicación lineal $\rightharpoonup: B \otimes A \to A$, $b \otimes a \mapsto b \rightharpoonup a$ tal que

A1) $b \rightharpoonup aa' = (b_1 \rightharpoonup a)(b_2 \rightharpoonup a')$,

A2) $b \rightharpoonup 1 = \varepsilon(b)1$,

A3) $1 \rightharpoonup a = a$.

Definición 3.3.11 ([A1, 2.3])**.** Sean A un álgebra de Hopf y B una coálgebra. Una *coacción débil* de B en A es una aplicación lineal $\rho : B \to B \otimes A$ tal que

C1) $(\Delta \otimes \mathrm{id})\rho = m^{24}(\rho \otimes \rho)\Delta$, donde $m^{24} : B \otimes A \otimes B \otimes A \to B \otimes B \otimes A$ está dada por $m^{24}(c \otimes h \otimes d \otimes k) = c \otimes d \otimes hk$,

C2) $(\varepsilon \otimes \mathrm{id})\rho = \varepsilon \otimes 1$,

C3) $(\mathrm{id} \otimes \varepsilon)\rho = \mathrm{id}$.

Tenemos la siguiente caracterización de extensiones de álgebras de Hopf.

Teorema 3.3.12 ([A1, AD]). *Sean A y B álgebras de Hopf, $\rightharpoonup: B\otimes A\to A$ una acción débil, $\rho: B\to B\otimes A$ una coacción débil, $\sigma: B\times B\to A$ y $\tau: B\to A\otimes A$ aplicaciones lineales; supongamos que*

$$\sigma(h,1)=\sigma(1,h)=\varepsilon(h)1, \tag{3.6}$$

$$[h_1\rightharpoonup\sigma(l_1 1,m_1)]\sigma(h_2,l_2m_2)=\sigma(h_1,l_1)\sigma(h_2l_2,m), \tag{3.7}$$

$$(h_1\rightharpoonup(l_1\rightharpoonup a))\sigma(h_2,l_2)=\sigma(h_1,l_1,(h_2l_2\rightharpoonup a), \tag{3.8}$$

$$\varepsilon(b)1=(\varepsilon\otimes\mathrm{id})\tau(b)=(\mathrm{id}\otimes\varepsilon)\tau(b), \tag{3.9}$$

$$m_{A^{\otimes 3}}(\Delta\otimes\mathrm{id}\otimes\tau\otimes\mathrm{id})(\tau\otimes\rho)\Delta=(\mathrm{id}\otimes m_{A^{\otimes 2}})(\mathrm{id}\otimes\Delta\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})(\tau\otimes\tau)\Delta, \tag{3.10}$$

$$(\mathrm{id}\otimes m_{A^{\otimes 2}})(\mathrm{id}\otimes\Delta\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})(\rho\otimes\tau)\Delta=m^{13}_{A^{\otimes 2}}(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\rho\otimes\mathrm{id})(\tau\otimes\rho)\Delta, \tag{3.11}$$

donde $m^{13}_{A^{\otimes 2}}: A\otimes A\otimes B\otimes A\otimes A\to B\otimes A\otimes A$, $m^{13}_{A^{\otimes 2}}(h\otimes k\otimes c\otimes h'\otimes k')=c\otimes hh'\otimes kk'$,

$$\rho(1)=\tau(1)=1\otimes 1,\quad \varepsilon\sigma=\varepsilon\otimes\varepsilon,\quad \varepsilon(b\rightharpoonup a)=\varepsilon(a)\varepsilon(b), \tag{3.12}$$

$$\Delta(b_1\rightharpoonup a)\tau(b_2)=\tau(b_1)((\rho(b_2)_i\rightharpoonup a_1)\otimes\rho(b_2)^i(b_3\rightharpoonup a_2)), \tag{3.13}$$

$$(1\otimes\sigma(b_1),b_1')\rho(b_2b_2')=\rho(b_1)(\rho(b_1')_k\otimes(b_2\rightharpoonup\rho(b_1')^k))(1\otimes\sigma(b_3,b_2')), \tag{3.14}$$

$$(1\otimes b_1\rightharpoonup a)\rho(b_2)=\rho(b_1)(1\otimes b_2\rightharpoonup a) \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}\Delta(\sigma(b_1,b_1'))\tau(b_2b_2')=\tau(b_1)(\rho(b_2)_i\rightharpoonup\tau(b_1')_p\otimes\rho(b_2)^i(b_3\rightharpoonup\tau(b_1')^p))\\ (\sigma(\rho(b_4)_j\otimes\rho(b_2')_q)\otimes\rho(b_4)^j(b_5\rightharpoonup\rho(b_2')^q))(1\otimes\sigma(b_6,b_3')).\end{aligned} \tag{3.16}$$

Sea $C=A^\tau\#_\sigma B$ el espacio vectorial $A\otimes B$ con multiplicación y comultiplicación

$$(a\otimes b)(a'\otimes b')=a(b_1\rightharpoonup a')\sigma(b_2,b_1')\otimes b_3b_2'$$

$$\Delta(a\otimes b)=a_1\tau(b_1)_j\otimes\rho(b_2)_i\otimes a_2\tau(b_1)^j\rho(b_2)^i\otimes b_3.$$

Tenemos que C es una biálgebra. Más aún, si σ y τ son invertibles con respecto al producto de convolución, entonces C es un álgebra de Hopf y la antípoda está dada por

$$\mathcal{S}(a\otimes b)=[\sigma^{-1}(\mathcal{S}\rho(b_2)_h\otimes\rho(b_3)_j)\otimes\mathcal{S}\rho(b_1)_i][\tau^{-1}(b_4)_k\mathcal{S}(a\rho(b_1)^i\rho(b_2)^h\rho(b_3)^j\tau^{-1}(b_4)^k)\otimes 1].$$

En este caso, tenemos una sucesión exacta de álgebras de Hopf

$$\Bbbk\longrightarrow A\xrightarrow{\iota} C\xrightarrow{\pi} B\longrightarrow\Bbbk \tag{3.17}$$

donde $\iota(a)=a\otimes 1$ y $\pi(a\otimes b)=\varepsilon(a)b$. Recíprocamente, sea (3.17) una sucesión exacta de álgebras de Hopf y supongamos además que (3.17) es escindida. Entonces existe un dato compatible $(\rho,\rightharpoonup,\sigma,\tau)$, o sea, $\rho,\rightharpoonup,\sigma,\tau$ satisfacen las condiciones anteriores, tal que $C\simeq A^\tau\#_\sigma B$.

El lema siguiente nos va a ser útil más adelante.

Lema 3.3.13 ([S2, 6.3.1]). *Sea $A\overset{\iota}{\hookrightarrow} C\overset{\pi}{\twoheadrightarrow} B$ una sucesión exacta de álgebras de Hopf.*

i) Sea $J\in A\otimes A$ un twist. Entonces $A^J\overset{\iota}{\hookrightarrow} C^J\overset{\pi}{\twoheadrightarrow} B$ es una sucesión exacta.

ii) Sea $\sigma: B\otimes B\to\Bbbk^\times$ un 2-cociclo. Entonces $A\overset{\iota}{\hookrightarrow} C_\sigma\overset{\pi}{\twoheadrightarrow} B_\sigma$ es una sucesión exacta.

3.4. Extensiones Abelianas

El primer ejemplo no trivial de álgebras de Hopf que apareció fue el de las extensiones abelianas, que son un caso particular de extensiones de álgebras de Hopf, ver [K, T, M]. Para su definición necesitamos

i) un *par de grupos apareados* $(F, G, \triangleleft, \triangleright)$;

ii) un par de *cociclos normalizados compatibles* $(\sigma, \tau) \in Z^2(F, (\Bbbk^G)^\times) \times Z^2(G, (\Bbbk^F)^\times)$.

Aquí i) significa que F y G son grupos finitos, $G \xleftarrow{\triangleleft} G \times F \xrightarrow{\triangleright} F$ son acciones (respectivamente, a derecha y a izquierda) tales que $s \triangleright xy = (s \triangleright x)((s \triangleleft x) \triangleright y)$, $st \triangleleft x = (s \triangleleft (t \triangleright x))(t \triangleleft x)$, para todo $s, t \in G$, $x, y \in F$. Si denotamos $\sigma : F \times F \to (\Bbbk^G)^\times$ y $\tau : G \times G \to (\Bbbk^F)^\times$ por

$$\sigma(x, y) = \sum_{s \in G} \sigma_s(x, y)\delta_s, \qquad x, y \in F, \qquad \tau(s, t) = \sum_{x \in F} \tau_x(s, t)\delta_x, \qquad s, t \in G,$$

entonces que σ y τ son 2-cociclos normalizados significa que para todo $s, t, p \in G$, $x, y, z \in F$,

$$\sigma_{s \triangleleft x}(y, z)\sigma_s(x, yz) = \sigma_s(xy, z)\sigma_s(x, y), \qquad \sigma_s(1, x) = 1 = \sigma_s(x, 1), \tag{3.18}$$

$$\tau_x(st, p)\tau_{p \triangleright x}(s, t) = \tau_x(t, p)\tau_x(s, tp), \qquad \tau_x(1, s) = 1 = \tau_x(s, 1). \tag{3.19}$$

Más aún, la compatibilidad es expresada por las siguientes condiciones:

$$\sigma_1(x, y) = 1 = \tau_1(s, t) \tag{3.20}$$

$$\sigma_{st}(x, y)\tau_{xy}(s, t) = \sigma_s(t \triangleright x, (t \triangleleft x) \triangleright y)\sigma_t(x, y)\tau_x(s, t)\tau_y(s \triangleleft (t \triangleright x), t \triangleleft x), \tag{3.21}$$

para todo $s, t \in G$, $x, y \in F$. Con estos datos, se construye un álgebra de Hopf $H = \Bbbk^G {}^\tau\!\bowtie_\sigma \Bbbk F$ que es el espacio vectorial $\Bbbk^G \otimes \Bbbk F$ con multiplicación y comultiplicación

$$(\delta_s \# x)(\delta_t \# y) = \delta_{s \triangleleft x, t}\sigma_s(x, y)\delta_s \# xy,$$

$$\Delta(\delta_s \# x) = \sum_{s = ab} \tau_x(a, b)\delta_a \#(b \triangleright x) \otimes \delta_b \# x.$$

Un elemento $f \otimes x$ en H es denotado por $f \# x$. Tenemos que la sucesión $\Bbbk^G \hookrightarrow H \twoheadrightarrow \Bbbk F$ es exacta y toda extensión de $\Bbbk F$ por $\Bbbk^G$ es de esta forma. Decimos que $\Bbbk^G {}^\tau\!\bowtie_\sigma \Bbbk F$ es una *extensión abeliana.*

Observación 3.4.1. Una extensión abeliana es cocommutativa si y sólo si G es abeliano, $\triangleright$ es trivial y τ es un 2-cociclo simétrico.

Este es un caso particular del Teorema 3.3.12 con $\rightharpoonup : \Bbbk F \otimes \Bbbk^G \to \Bbbk^G$, $x \rightharpoonup \delta_g = \delta_{g \triangleleft x}$; $\rho : \Bbbk F \to \Bbbk F \otimes \Bbbk^G$, $\rho(x) = \sum_{g \in G} g \triangleright x \otimes \delta_g$; $\widetilde{\sigma} : \Bbbk F \otimes \Bbbk F \to \Bbbk^G$, $\widetilde{\sigma}(x \otimes y) = \sigma(x, y)$ y $\widetilde{\tau} : \Bbbk F \to \Bbbk^G \otimes \Bbbk^G$, $\widetilde{\tau}(x)(g, h) = \tau_x(g, h)$, $\forall g, h \in G$, $x, y \in F$.

Dados grupos finitos F y G, encontrar acciones $G \xleftarrow{\triangleleft} G \times F \xrightarrow{\triangleright} F$ tales que $(F, G, \triangleleft, \triangleright)$ sea un par de grupos apareados equivale a encontrar un grupo Σ con una factorización exacta (F, G), o sea, F y G son subgrupos de Σ tales que $\Sigma = FG$ y $F \cap G = 1$; en otras palabras, todo $a \in \Sigma$ admite una única factorización $a = xg$ con $x \in F$ y $g \in G$. Más precisamente, una factorización exacta da lugar a un par de grupos apareados $(F, G, \triangleleft, \triangleright)$ donde $gx = (g \triangleright x)(g \triangleleft x)$, para $g \in G$ y $x \in F$. Recíprocamente, dado un par de grupos apareados $(F, G, \triangleleft, \triangleright)$, el conjunto $\Sigma = F \times G$ tiene un estructura de grupo tal que $F \times 1$ y $1 \times G$ forman una factorización exacta que recupera las acciones originales. Hay muchos resultados en la literatura sobre factorizaciones exactas de grupos. Por ejemplo, en [WW] ellos determinan todas las factorizaciones exactas de los grupos simétrico y alternante y [Gi] para los grupos esporádicos simples.

Dado un par de grupos apareados $(F, G, \triangleleft, \triangleright)$. La clase de equivalencias de extensiones abelianas de $\Bbbk F$ por $\Bbbk^G$ da lugar a un grupo abeliano denotado por $\operatorname{Opext}(\Bbbk^G, \Bbbk F)$, es un grupo finito con el producto de Baer de extensiones. La clase de un elemento de $\operatorname{Opext}(\Bbbk^G, \Bbbk F)$ puede ser representada por un par (σ, τ), donde $\sigma : G \times F^2 \to \Bbbk^\times$ y $\tau : G^2 \times F \to \Bbbk^\times$ satisfacen (3.18), (3.19), (3.20) y (3.21).Esto da lugar a un isomorfismo entre $\operatorname{Opext}(\Bbbk^G, \Bbbk F)$ y un primer grupo de cohomología de un cierto complejo doble. Ver [Ma]. Por un resultado de Kac [Ma, Th 7.4], tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$\begin{aligned}
&0 \longrightarrow H^1(\Sigma, \Bbbk^\times) \xrightarrow{res^1} H^1(F, \Bbbk^\times) \oplus H^1(G, \Bbbk^\times) \\
&\longrightarrow \operatorname{Aut}(\Bbbk^G {}^\tau\bowtie_\sigma \Bbbk F) \longrightarrow H^2(\Sigma, \Bbbk^\times) \xrightarrow{res^2} H^2(F, \Bbbk^\times) \oplus H^2(G, \Bbbk^\times) \\
&\longrightarrow \operatorname{Opext}(\Bbbk^G, \Bbbk F) \xrightarrow{\bar\omega} H^3(\Sigma, \Bbbk^\times) \xrightarrow{res^3} H^3(F, \Bbbk^\times) \oplus H^3(G, \Bbbk^\times) \longrightarrow \cdots,
\end{aligned}$$

donde res^i, $i = 1, 2, 3$, son las funciones inducidas del mapa restricción de cohomología de grupos para $F \subseteq \Sigma \supseteq G$. [N, 3.2] Sean $F \xleftarrow{\pi} \Sigma \xrightarrow{p} G$, donde $p(xg) = g$ y $\pi(xg) = x$, $x \in F$, $g \in G$. La imagen de $[(\sigma, \tau)] \in \operatorname{Opext}(\Bbbk F, \Bbbk^G)$ por $\bar\omega$ es la clase del 3-cociclo $\omega(\sigma, \tau) \in Z^3(\Sigma, \Bbbk^\times)$, definido por

$$\omega(\sigma, \tau)(a, b, c) = \tau_{\pi(c)}(p(a) \triangleleft \pi(b), p(b))\sigma_{p(a)}(\pi(b), p(b) \triangleright \pi(c)), \qquad a, b, c \in \Sigma. \tag{3.22}$$

Lema 3.4.2 ([AM])**.** *Subálgebras de Hopf de extensiones abelianas son extensiones abelianas.*

Demostración. Sean A una extensión abeliana, o sea, existe una sucesión exacta $\Bbbk^G \xhookrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} \Bbbk F$ y $B \leq A$. Como $\pi(B)$ es una subálgebra de Hopf de $\Bbbk F$, $\pi(B) = \Bbbk F'$, para algún $F' < F$. Por otro lado, $B^{\operatorname{co}\pi|_B} = B \cap A^{\operatorname{co}\pi} = B \cap \Bbbk^G$ es una subálgebra de Hopf de $\Bbbk^G$; entonces existe un grupo cociente $G \to G'$ tal que $B^{\operatorname{co}\pi|_B} = \Bbbk^{G'}$. Por lo tanto, la sucesión $\Bbbk^{G'} \hookrightarrow B \twoheadrightarrow \Bbbk F'$ es exacta por la Observación 3.3.2. $\square$

3.5. Bosonización y Álgebras de Nichols

Sea H un álgebra de Hopf y B un álgebra de Hopf en ${}^H_H\mathcal{YD}$. El *biproducto* o *bosonización* de B y H es el álgebra de Hopf $B\#H$, que es el espacio vectorial $B \otimes H$, con multiplicación, unidad, comultiplicación, counidad y antípoda dados por

$$\begin{aligned}
(b\#h)(b'\#h') &= b(h_1 \cdot b')\#h_2h' & 1_{B\#H} &= 1_B\#1_H \\
\Delta(b\#h) &= b_1\#b_{2(-1)}h_1 \otimes b_{2(0)}\#h_2 & \varepsilon(b\#h) &= \varepsilon_B(b)\varepsilon_H(h) \\
\mathcal{S}(b\#h') &= (1\#\mathcal{S}_H(b_{(-1)}h))(\mathcal{S}_B(b_{(0)})\#1), & \forall b, b' &\in B, h, h' \in H.
\end{aligned}$$

Además, las aplicaciones $B\#H \underset{\pi}{\overset{j}{\rightleftarrows}} H$ definidas por $\pi(b\#h) = \varepsilon(b)h$ y $j(h) = 1\#h$, para todo $b \in B$, $h \in H$ son morfismos de álgebras de Hopf tales que $\pi j = \mathrm{id}_H$; y tenemos que $B = (B\#H)^{\operatorname{co}\pi}$.

Recíprocamente, si A y H son álgebras de Hopf y $\pi : A \to H$, $j : H \to A$ son morfismos de álgebras de Hopf tales que $\pi j = \mathrm{id}_H$, entonces $B = A^{\mathrm{co}\,\pi}$ es un álgebra de Hopf en ${}^H_H\mathcal{YD}$ y $A \simeq B\#H$ como álgebras de Hopf. Ver [AS].

Un álgebra de Hopf graduada R es un álgebra de Hopf con una graduación $R = \oplus_{n\geqslant 0} R(n)$ tal que R es un álgebra graduada y una coálgebra graduada.

Definición 3.5.1. Sean H un álgebra de Hopf y $V \in {}^H_H\mathcal{YD}$. Un álgebra de Hopf trenzada graduada $R = \oplus_{n\geqslant 0} R(n)$ en ${}^H_H\mathcal{YD}$ es un *álgebra de Nichols* de V si $\Bbbk \simeq R(0)$, $V \simeq R(1)$ en ${}^H_H\mathcal{YD}$, $P(R) = R(1)$ y R está generada como álgebra por $R(1)$.

Para $V \in {}^H_H\mathcal{YD}$ denotamos por $\mathfrak{B}(V)$ al álgebra de Nichols de V, que existe y es única. Para la existencia, dado $V \in {}^H_H\mathcal{YD}$, el álgebra tensorial $T(V)$ admite una única estructura de álgebra de Hopf trenzada graduada en ${}^H_H\mathcal{YD}$ tal que $V \subseteq P(T(V))$. Se considera la familia $\mathfrak{F}$ de todos los ideales homogéneos biláteros $I \subseteq T(V)$ tales que I está generado por elementos homogéneos de grado $\geqslant 2$, I es submódulo de Yetter-Drinfeld de $T(V)$, I es un ideal de Hopf: $\Delta(I) \subset I \otimes T(V) + T(V) \otimes I$. El cociente de $T(V)$ por el mayor ideal $I(V)$ de $\mathfrak{F}$ es el álgebra de Nichols.

Definición 3.5.2. Una *filtración de un álgebra de Hopf* H es una filtración de álgebras y de coálgebras $\{V_n\}_{n\geqslant 0}$ tal que $\mathcal{S}(V_n) \subseteq V_n$ para todo $n \geqslant 0$.

El espacio vectorial graduado asociado $\mathrm{gr}H = \oplus_{n\in\mathbb{N}} V_n/V_{n-1}$ es un álgebra de Hopf graduada. Ver [R1, Proposition 7.9.2]. La filtración corradical de un álgebra de Hopf H es una filtración de álgebra de Hopf para H si y sólo si H_0 es una subálgebra de Hopf de H. Ver [R1, Lemma 7.9.3].

Supongamos que A es un álgebra de Hopf cuyo corradical $H = A_0$ es una subálgebra de Hopf. Tenemos morfismos de álgebras de Hopf $\mathrm{gr}A \underset{\pi}{\overset{j}{\rightleftarrows}} H$, donde j es la inclusión y π la proyección, tales que $\pi j = \mathrm{id}_H$. Sea $B = (\mathrm{gr}A)^{\mathrm{co}\,\pi}$, B es un álgebra de Hopf en ${}^H_H\mathcal{YD}$ y $\mathrm{gr}A$ puede ser construido a partir de B y H como $\mathrm{gr}A \simeq B\#H$. El álgebra de Hopf trenzada B es graduada, $B = \oplus_{n\geqslant 0} B(n)$, y $B(0) = \Bbbk 1$, $B(1) = P(B)$. O sea, B es el álgebra de Nichols de $V = B(1)$.

Observación 3.5.3. Si $F : {}^H_H\mathcal{YD} \to {}^K_K\mathcal{YD}$ es una equivalencia tensorial trenzada, entonces $F(\mathfrak{B}(V)) \simeq \mathfrak{B}(F(V))$. Ver por ejemplo [GIV, §3.1]

Si $\mathrm{gr}\,A = \mathfrak{B}(V)\#H$, entonces A es llamado un *levantamiento* o *deformación* de $\mathfrak{B}(V)$ sobre H. Sea J un twist en H y $F : {}^H_H\mathcal{YD} \to {}^{H^J}_{H^J}\mathcal{YD}$ equivalencia tensorial trenzada. Si tenemos levantamientos de $\mathfrak{B}(V)$ sobre H entonces tenemos levantamientos de $\mathfrak{B}(F(V))$ sobre H^J. Pues si A es un álgebra de Hopf tal que $A_0 = H$, entonces $(A^J)_0 = H^J$ y por lo tanto tenemos una biyección entre los conjuntos de álgebras de Hopf $\{A : A_0 = H\}$ y $\{B : B_0 = H^J\}$.

3.6. Álgebras de Hopf grupo-teoréticas

Las álgebras de Hopf semisimples pueden ser estudiadas a través de sus representaciones; la categoría $\mathrm{Rep}\,H$ es una categoría de fusión.

Definición 3.6.1. Dos categorías tensoriales $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son *Morita-equivalentes* si existe una categoría $\mathcal{C}$-módulo indescomponible exacta $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{D}$ es equivalente a la categoría de funtores módulo $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$.

Dos categorías tensoriales $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son Morita-equivalentes si y sólo si sus centros son equivalentes como categorías tensoriales trenzadas [ENO1, Theorem 3.1]. En este caso, denotamos $\mathcal{C} \sim_{\mathrm{Mor}} \mathcal{D}$. Morita-equivalencia de categorías es una relación de equivalencia, [EGNO, Proposition 7.12.15]. Esta relación establece una reducción básica en el programa de clasificación de categorías de fusión y tiene la siguiente contrapartida: dos álgebras de Hopf semisimples H y K son *Morita-equivalentes* si $\operatorname{Rep} H$ y $\operatorname{Rep} K$ son Morita-equivalentes [1], equivalentemente, si ${}^K_K\mathcal{YD}$ y ${}^H_H\mathcal{YD}$ son equivalentes como categorías tensoriales trenzadas.

Observación 3.6.2. Sean G y G' grupos finitos. Si $\Bbbk G \sim_{\mathrm{Mor}} \Bbbk G'$ entonces la cantidad de objetos simples en ${}^{\Bbbk G}_{\Bbbk G}\mathcal{YD}$ y ${}^{\Bbbk G'}_{\Bbbk G'}\mathcal{YD}$ es la misma. Ahora, G es abeliano si y sólo si la cantidad de simples en ${}^{\Bbbk G}_{\Bbbk G}\mathcal{YD} \simeq \operatorname{Rep} D(\Bbbk G)$ es $|G|^2$. Luego un grupo abeliano no puede ser Morita-equivalente a un grupo no abeliano.

Ejemplo 3.6.3 ([O1, Theorem 5])**.** Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita. El funtor de fibra $\operatorname{Rep} H \to \mathrm{vec}$ da una estructura de categoría módulo sobre $\operatorname{Rep} H$ a vec y $\operatorname{End}_{\operatorname{Rep}(H)}(\mathrm{vec}, \mathrm{vec}) \cong \operatorname{Rep}(H^*)$. Entonces $\operatorname{Rep} H$ y $\operatorname{Rep}(H^*)$ son Morita equivalentes y por lo tanto, H y H^* son Morita-equivalentes. En particular $\mathrm{vec}_G \sim_{\mathrm{Mor}} \operatorname{Rep} \Bbbk G$.

Ejemplo 3.6.4. La categoría $\mathcal{C}(G, \omega, F, \alpha)$ de $\Bbbk_\alpha F$-bimódulos en vec_G^ω es una categoría de fusión, Morita equivalente a vec_G^ω.

Definición 3.6.5. Categorías tensoriales equivalentes a $\mathcal{C}(G, \omega, F, \alpha)$ son llamadas categorías de fusión *grupo-teoréticas.*

Sea A un álgebra en una categoría tensorial $\mathcal{C}$. Por el Ejemplo 2.5.7, las categorías $\operatorname{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}_A)$ y ${}_A\mathcal{C}_A$ son equivalentes. Tenemos que $\mathcal{C}(G, \omega, F, \alpha) = {}_{\Bbbk_\alpha F}(\mathrm{vec}_G^\omega)_{\Bbbk_\alpha F} \simeq \operatorname{End}_{\mathrm{vec}_G^\omega}(\mathrm{vec}^\omega_{G \Bbbk_\alpha F})$ es equivalente a decir que $\mathcal{C}(G, \omega, F, \alpha) \sim_{\mathrm{Mor}} \mathrm{vec}_G^\omega$. Entonces, una categoría tensorial es grupo-teorética si y sólo si es Morita equivalente a una categoría de fusión punteada. Por [S1], el centro de $\mathcal{C}(G, \omega, F, \alpha)$ es equivalente, como categorías monoidales trenzadas, al centro de vec_G^ω.

Teorema 3.6.6 ([Na, Theorem 3.4])**.** *$\mathcal{C}(G, 1; F, \alpha)$ es punteada si y sólo si F es abeliano, F es normal en G y $\alpha \in H^2(F, \Bbbk^\times)^{\operatorname{ad} G}$.* □

Teorema 3.6.7 ([O, Theorem 3.1])**.** *Las categorías $\mathcal{C}(G, \omega, F, \alpha)$-módulo indescomponibles son parametrizadas por clases de conjugación de pares (Γ, β) donde $\Gamma < G$ tal que $\omega|_\Gamma = 1$ y $\beta \in H^2(\Gamma, \Bbbk^\times)$. Más aún, la categoría módulo correspondiente al par (Γ, β) es exactamente la categoría $\mathcal{M}$ de $(\Bbbk_\alpha F, \Bbbk_\beta \Gamma)$-bimódulos con producto tensorial sobre $\Bbbk_\alpha F$ como un bifuntor $\mathcal{C}(G, \omega, F, \alpha) \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$.* □

O sea, si $A = \Bbbk_\alpha F$, $B = \Bbbk_\beta \Gamma$, $\mathcal{C} = vec_G^\omega$, entonces $\mathcal{M} = {}_A\mathcal{C}_B$. En particular, la categoría $\mathcal{M}(\Gamma, \beta)$ del Ejemplo 2.3.3 es $(\mathrm{vec}_G^\omega)_{\Bbbk_\beta \Gamma}$.

Teorema 3.6.8 ([O, Corollary 3.1])**.** *Los funtores de fibra de la categoría $\mathcal{C}(G, \omega; F, \alpha)$ están clasificados por pares (Γ, β) tales que*

i) La clase $\omega\mid_\Gamma$ es trivial.

ii) El numero de clases laterales dobles $F \backslash G / \Gamma$ es 1.

[1] No es lo mismo que ser Morita-equivalentes como álgebras.

iii) La clase $\alpha\mid_{F\cap\Gamma}\beta^{-1}\mid_{F\cap\Gamma}$ *es no degenerada.*

□

Por la dualidad de Tannaka, describir los funtores de fibra de $\mathcal{C}(G,\omega;F,\alpha)$ equivale a describir las álgebras de Hopf H tales que $\operatorname{Corep} H \simeq \mathcal{C}(G,\omega;F,\alpha)$. Entonces denotamos por $H^G_{\alpha\,\beta}(\omega,F,\Gamma)$ estas álgebras de Hopf y si $\omega=1$, las denotamos por $H^G_{\alpha\,\beta}(F,\Gamma)$.

Definición 3.6.9. Un álgebra de Hopf semisimple H es *grupo-teorética* si $\operatorname{Corep} H$ es grupo-teorética.

Notamos que en [N] se dice que un álgebra de Hopf es grupo-teorética si $\operatorname{Rep} H$ es grupo-teorética. Estas definiciones son equivalentes. De hecho, si $\operatorname{Corep} H$ es tensorialmente equivalente a $\mathcal{C}(G,\omega;F,\alpha)$, entonces $H \simeq H^G_{\alpha\,\beta}(\omega,F,\Gamma)$ para Γ,β como en el Teorema 3.6.8. Se puede probar que $H^* \simeq H^G_{\beta\,\alpha}(\omega,\Gamma,F)$. Luego $\operatorname{Rep} H \simeq \operatorname{Corep} H^* \simeq \mathcal{C}(G,\omega;\Gamma,\beta)$. La recíproca es análoga.

Observación 3.6.10 ([N, Remark 4.6]). Sea (σ,τ) un representante de una clase en $\operatorname{Opext}(\Bbbk^G,\Bbbk F)$, y ω el 3-cociclo dado por 3.22. Sea $A=\Bbbk^G\,{}^{\tau}\!\bowtie_{\sigma}\Bbbk F$. Sea $\alpha\in Z^2(F,\Bbbk^\times)$ y $\beta\in Z^2(G,\Bbbk^\times)$. Entonces por el Lema 3.3.13, $\Bbbk^G\hookrightarrow A^{J(\beta)}\twoheadrightarrow \Bbbk F$ es exacta y $\Bbbk^G\hookrightarrow (A^{J(\beta)})_\alpha\twoheadrightarrow\Bbbk F$ es exacta. Esto define una acción de $H^2(F,\Bbbk^\times)\oplus H^2(G,\Bbbk^\times)$ en $\operatorname{Opext}(\Bbbk^G,\Bbbk F)$, que viene del mapa $H^2(F,\Bbbk^\times)\oplus H^2(G,\Bbbk^\times)\to \operatorname{Opext}(\Bbbk^G,\Bbbk F)$ en la sucesión exacta de Kac; en particular se tiene el mismo 3-cociclo ω. El álgebra de Hopf $H^\Sigma_{\beta,\alpha}(\omega,G,F)$ es precisamente $(A^{J(\beta)})_\alpha$.

La clase de álgebras de Hopf grupo-teoréticas es estable por twist; pues si H es grupo-teorética y J es un twist en H, entonces por el Teorema 3.1.2 H^J es grupo-teorética. Además, por [ENO1, 8.8] duales, opuestas, subálgebras de Hopf, álgebras de Hopf cociente, y producto tensorial de álgebras de Hopf grupo-teoréticas son grupo-teoréticas; por [N] extensiones abelianas son grupo-teoréticas. Fue conjeturado que toda álgebra de Hopf semisimple es grupo-teorética [ENO], pero contraejemplos fueron presentados en [Ni]: existe un álgebra de Hopf no grupo-teorética H_p de dimensión $4p^2$ para cada primo impar p. De hecho, H_p es una extensión de la forma $\Bbbk^{C_2}\hookrightarrow H_p\twoheadrightarrow(\Bbbk G)^J$, donde $G=(C_p\times C_p)\rtimes C_2$ y J es un twist no trivial en $\Bbbk G$. Entonces la clase de álgebras de Hopf grupo-teoréticas no es estable bajo extensiones. Ejemplos más generales de álgebras de Hopf no grupo-teoréticas fueron descritos en [GNN].

En el siguiente resultado, $D^\omega(G)$ es una variación del doble de Drinfeld $D(G)=D(\Bbbk^G)$ de un grupo finito G, dependiendo de un 3-cociclo del grupo G con coeficientes en $\Bbbk^\times$. $D^\omega(G)$ no es un álgebra de Hopf, sino que es un álgebra cuasi-Hopf, pues la comultiplicación no es coasociativa pero tiene una cuasi-coasociatividad cambiada por el 3-cociclo ω. Para la definición precisa, ver [DPR].

Teorema 3.6.11 ([N, Theorem 1.2])**.** *Sea A un álgebra de Hopf semisimple. Son equivalentes:*

i) A es grupo-teorética.

ii) Existe un grupo finito G y $\omega\in Z^3(G,\Bbbk^\times)$ tal que $D(A)$ es twist equivalente a $D^\omega(G)$.

□

Observación 3.6.12. Tenemos que si A es grupo-teorética tal que $\omega=1$, entonces $A\sim_{\mathrm{Mor}}\Bbbk G$; y si $A\sim_{\mathrm{Mor}}\Bbbk G$ entonces A es grupo-teorética. De hecho, un álgebra de Hopf A es grupo-teorética si y sólo si existe un grupo finito G y $\omega\in Z^3(G,\Bbbk^\times)$ tal que $D(A)\simeq(D^\omega(G))^J$ si y sólo si $\operatorname{Rep} D(A)\simeq$

$\operatorname{Rep} D^{\omega}(G)$. En particular, si A es grupo-teorética y $\omega = 1$, entonces $\operatorname{Rep} D(A) \simeq \operatorname{Rep} D(G)$; luego por la Proposición 2.4.7, ${}^{A}_{A}\mathcal{YD} \simeq {}^{\Bbbk^G}_{\Bbbk^G}\mathcal{YD}$. Por lo tanto $A \sim_{\mathrm{Mor}} \Bbbk^G \sim_{\mathrm{Mor}} \Bbbk G$. Recíprocamente, si $A \sim_{\mathrm{Mor}} \Bbbk G$ entonces ${}^{A}_{A}\mathcal{YD} \simeq {}^{\Bbbk^G}_{\Bbbk^G}\mathcal{YD}$; y por lo tanto $\operatorname{Rep} D(A) \simeq \operatorname{Rep} D(G)$. Luego, $D(A)$ es twist equivalente a $D(G)$ y por el teorema anterior A es grupo-teorética.

La noción de categorías de fusión y álgebras de Hopf débilmente grupo-teorética fueron introducidas en [ENO1]; [ENO1, Question 2] preguntó cuándo cualquier álgebra de Hopf semisimple es débilmente grupo-teorética.

Pregunta 1. *[N4] ¿Una extensión de álgebras de Hopf débilmente grupo-teorética, es nuevamente débilmente grupo-teorética?*

Respuestas afirmativas son conocidas bajo ciertas hipótesis [ENO1].

3.6.1. El grupo de objetos invertibles en una categoría grupo-teorética

Acá explicitamos el resultado de [GeN], que utilizamos en el Capítulo 5, donde calculan el grupo de los objetos invertibles en una categoría grupo-teorética $\mathcal{C} = \mathcal{C}(G, \omega; F, \alpha)$.

Sea $R = \{u(x) : x \in F \setminus G/F\}$ el conjunto de representantes del cociente doble de F en G. Dado $g \in G$, $F^g = F \cap gFg^{-1}$ es un grupo y definimos el 2-cociclo α^g en F^g por

$$\alpha^g(h_1, h_2) = \alpha(h_1, h_2)\alpha(g^{-1}h_2^{-1}g, g^{-1}h_1^{-1}g)\frac{\omega(h_1, h_2, g)\omega(h_1, h_2 g, g^{-1}h_2^{-1}g)}{\omega(h_1h_2g, g^{-1}h_2^{-1}g, g^{-1}h_1^{-1}g)}$$

Para cualquier $g \in N_G(F)$, $f \in C^n(F, \Bbbk^\times)$, definimos ${}^{g}f(h_1, \cdots, h_n) = (g^{-1}h_1g, \cdots, g^{-1}h_ng)$. Elegimos $g_1, g_2 \in N_G(F)$ y sea $g_3 = g_1g_2k$, $k \in F$. Definimos $\beta(g_1, g_2) : F \to \Bbbk^\times$ dada por

$$\begin{aligned}\beta(g_1, g_2)(h) = &\frac{\alpha(g_2^{-1}g_1^{-1}hg_1g_2k, g_3^{-1}h^{-1}g_3)}{\alpha(g_1^{-1}h^{-1}g_1, g_1^{-1}hg_1)\alpha(g_2^{-1}g_1^{-1}h^{-1}g_1g_2, g_2^{-1}g_1^{-1}hg_1g_2k)}\\ &\times \frac{\omega(g_1^{-1}hg_1, g_1^{-1}h^{-1}g_1, g_1^{-1}hg_1)\omega(g_1, g_1^{-1}hg_1, g_1^{-1}h^{-1}g_1)\omega(g_1^{-1}hg_1, g_2, k)}{\omega(g_2, g_2^{-1}g_1^{-1}hg_1g_2, k)}\\ &\times \frac{\omega(g_2^{-1}g_1^{-1}hg_1g_2, g_2^{-1}g_1^{-1}h^{-1}g_1g_2, g_2^{-1}g_1^{-1}hg_1g_2k)\omega(g_2, g_2^{-1}g_1^{-1}hg_1g_2, g_2^{-1}g_1^{-1}h^{-1}g_1g_2)}{\omega(g_2, g_2^{-1}g_1^{-1}hg_1g_2k, g_3^{-1}h^{-1}g_3)}.\end{aligned}$$

Se puede ver que

$$\alpha^{g_3} = d(\beta(g_1, g_2))\alpha^{g_1}({}^{g_1}(\alpha^{g_2})). \tag{3.23}$$

Sea $K = \{g \in R : g \in N_G(F) \text{ y } \alpha^g \text{ es cohomológicamente trivial}\}$. Para todo $g_1, g_2 \in K$, definimos $g_1 \cdot g_2 = u(g_1g_2)$. Sigue por (3.23) que K es un grupo con este producto y es isomorfo a un subgrupo de $N_G(F)/F$.

Para cada $g \in K$, fijamos $\eta_g : F \to \Bbbk^\times$ tal que $d\eta_g = \alpha^g$. Tomamos $\eta_1 = \beta(1, 1)^{-1}$. Para cualquier $g_1, g_2 \in K$, definimos $\nu : K \times K \to \widehat{F}$,

$$\nu(g_1, g_2) = \frac{\eta_{g_1}({}^{g_1}\eta_{g_2})}{\eta_{g_1 \cdot g_2}}\beta(g_1, g_2).$$

Consideramos el grupo $K \rtimes \widehat{F} = K \times \widehat{F}$ con producto

$$(g_1, \rho_1)(g_2, \rho_2) = (g_1 \cdot g_2, \nu(g_1, g_2)\rho_1({}^{g_1}\rho_2)).$$

Teorema 3.6.13 ([GeN, Theorem 5.2])**.** *El grupo $G(\mathcal{C})$ de las clases de isomorfismo de los objetos invertibles de $\mathcal{C}$ es isomorfo al grupo $K \rtimes \widehat{F}$.* □

Capítulo 4

Ejemplos de extensiones

Discutimos algunos casos particulares de extensiones, ver por ejemplo [AN, 1.1, 1.2], y damos fuentes de ejemplos [AM]. En este Capítulo, K, R y T son álgebras de Hopf, mientras F, G, Γ, L y N son grupos finitos. Pero primero establecemos algunas definiciones que nos van a servir de guía en la búsqueda de ejemplos.

4.1. Series de Composición y Longitud

Toda álgebra de Hopf de dimensión finita puede ser construida a partir de las simples por extensiones sucesivas. Más precisamente, proponemos la siguiente definición.

Definición 4.1.1. Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita. Una *serie de composición* $\mathfrak{H}$ de H es una sucesión de álgebras de Hopf simples $\mathfrak{H}_1, \dots, \mathfrak{H}_n$ obtenidas recursivamente de la siguiente forma:

- Si H es simple, entonces tenemos $n = 1$ y $\mathfrak{H}_1 = H$.
- Si H no es simple, entonces existen $A \lhd H$, $A \neq \Bbbk, H$, y series de composición $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_m$, $\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_l$, de A y $B = H/\!/A$ respectivamente tales que $n = m + l$ y
$$\mathfrak{H}_i = \mathfrak{A}_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m; \qquad \mathfrak{H}_i = \mathfrak{B}_{i-m}, \qquad m+1 \leqslant i \leqslant m+l.$$

Las álgebras de Hopf simples $\mathfrak{H}_1$, $\dots$, $\mathfrak{H}_n$ son los *factores* de la serie $\mathfrak{H}$ y n es su *longitud*.

Lema 4.1.2 ([N2, Lemma 4.1])**.** *Toda álgebra de Hopf de dimensión finita admite una serie de composición.*

Demostración. Si H es simple, entonces $\mathfrak{H}_1 = H$ es una serie de composición de H. Caso contrario, H contiene una subálgebra de Hopf normal $\Bbbk \subsetneqq K \subsetneqq H$. Tenemos que $\dim K$, $\dim H/\!/K < \dim H$, pues $\dim H = \dim K \dim H/\!/K$. El lema sigue por inducción. □

Teorema 4.1.3 ([N2, Theorem 1.2])**.** *(Teorema de Jordan-Hölder para álgebras de Hopf de dimensión finita). Sean $\mathfrak{H}_1, \dots, \mathfrak{H}_n$ y $\mathfrak{H}'_1, \dots, \mathfrak{H}'_m$ dos series de composición de un álgebra de Hopf de dimensión finita H. Entonces existe una biyección $\nu : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, m\}$ tal que $\mathfrak{H}_i \simeq \mathfrak{H}'_{\nu(i)}$ como álgebras de Hopf.* □

Entonces, definimos la *longitud* y los *factores* de H como la longitud y los factores (a menos de permutación) de cualquier serie de composición. Por ejemplo, que H sea de longitud 1 significa que H es simple; de longitud 2, que H es una extensión de T por K, donde K y T son simples. Además, H es de longitud 3 si existe una sucesión exacta $K \hookrightarrow H \twoheadrightarrow T$ donde K es simple y T es de longitud 2, o T es simple y K es de longitud 2; pero estas dos situaciones no necesariamente valen simultáneamente, ver [N2]. Ver [N2, Section 5] para la comparación de la noción de serie de composición con serie superior e inferior en [MW].

El Teorema de Jordan-Hölder para álgebras de Hopf es una generalización de este resultado para grupos, en [A, 2.1] Andruskiewitsch preguntó si esto era cierto.

4.1.1. Longitud 1

El Teorema 4.1.3 muestra que álgebras de Hopf simples semisimples son pilares fundamentales en la clasificación de álgebras de Hopf semisimples. Vimos en los Ejemplos 3.3.6, 3.3.7 y 3.3.8 que álgebras de grupo de grupos simples, sus torcimientos y duales son todos simples, pero existen twists de álgebras de grupo de grupos solubles que son simples como álgebras de Hopf. Sin embargo, un twist de un álgebra de grupo de un grupo nilpotente nunca es simple. A nuestro entender, todos los ejemplos conocidos de álgebras de Hopf simples semisimples son twists de álgebras de grupo o sus duales. Sería decisivo probar que éstas son todas, o encontrar esencialmente nuevos ejemplos. Proponemos una definición para trabajar en esta dirección.

Definición 4.1.4. Sean H, K álgebras de Hopf de dimensión finita. Decimos que H es *alcanzable* por K si H puede ser obtenida a partir de K por un número finito de operaciones que son dualidad o twist.

Por ejemplo, un twist-cociclo K_σ es alcanzable por K: $K \rightsquigarrow K^* \rightsquigarrow (K^*)^J \rightsquigarrow ((K^*)^J)^* = K_\sigma$, donde J es σ a menos de identificación. Entonces H es alcanzable por K si y sólo si H o H^* es obtenida de K aplicando sucesivamente torcimientos por twists y cociclos. Claramente, ser alcanzable es una relación de equivalencia.

Pregunta 2. *¿Toda álgebra de Hopf simple semisimple es alcanzable por un álgebra de grupo?*

En particular, ignoramos la respuesta a:

Pregunta 3. *¿Un twist-cociclo de un álgebra de Hopf triangular es nuevamente triangular? ¿Existe un álgebra de Hopf simple de la forma $(\Bbbk G^J)_\sigma$ que no es triangular?*

Por [GN], existen álgebras de Hopf simples alcanzables por un álgebra de grupo de un grupo super-soluble. Además, preguntamos:

Pregunta 4. *Clasificar todas las álgebras de Hopf simples alcanzables por un álgebra de grupo.*

Si H es alcanzable por K, entonces H y K son Morita-equivalentes, pero es improbable que la recíproca sea verdadera. Sin embargo, preguntamos:

Pregunta 5. *Sean H y K álgebras de Hopf simples semisimples. Si H y K son Morita-equivalentes, ¿entonces H es alcanzable por K?*

Quizás la pregunta más natural y ambiciosa es la siguiente:

Pregunta 6. *¿Es toda álgebra de Hopf simple semisimple Morita-equivalente a un álgebra de grupo?*

La respuesta a la Pregunta 6 es negativa sin la hipótesis de simplicidad; de hecho álgebras de Hopf Morita-equivalentes a un álgebra de grupo son grupo-teoréticas. Y vimos en la Sección 3.6 que existen álgebras de Hopf semisimples que no son grupo-teoréticas. La Pregunta 6 puede ser reformulada como sigue – ver también Pregunta 1:

Pregunta 7. *¿Puede toda álgebra de Hopf semisimple ser obtenida como una extensión de álgebras de Hopf grupo-teoréticas?*

Finalmente, consideramos un álgebra de Hopf H con un twist J y un cociclo σ, y sea H_σ^J el espacio vectorial H con multiplicación m_σ y comultiplicación Δ^J. (No es lo mismo que $(H^J)_\sigma$ porque un cociclo respecto a Δ no es lo mismo que un cociclo respecto a Δ^J). Una cuenta directa nos da las condiciones necesarias para que H_σ^J sea un álgebra de Hopf; lo llamamos twist simultáneo.

Pregunta 8. *Encontrar ejemplos no triviales de twists simultáneos.*

4.1.2. Longitud 2

Extensiones abelianas $\Bbbk^G\,{}^\tau\!\bowtie_\sigma \Bbbk F$ tienen longitud 2 si G y F son simples, pero la determinación de todas las álgebras de Hopf semisimples de longitud 2 (con factores conocidos) no es clara.

Pregunta 9. *Sean G y F grupos finitos simples no abelianos. Encontrar extensiones de las formas*

$$\text{(I)} \quad \Bbbk^G \hookrightarrow A \twoheadrightarrow \Bbbk^F, \qquad \text{(II)} \quad \Bbbk G \hookrightarrow A \twoheadrightarrow \Bbbk^F, \qquad \text{(III)} \quad \Bbbk G \hookrightarrow A \twoheadrightarrow \Bbbk F,$$

que no pueden ser presentadas como extensiones abelianas (en particular, son no triviales). Por dualidad, soluciones a (I) dan soluciones a (III).

Ejemplo 4.1.5. [N3, Proposition 4.10] Sea G un grupo finito y A un álgebra de Hopf tal que la sucesión $\Bbbk G \hookrightarrow A \twoheadrightarrow \Bbbk C_2$ es exacta. Entonces A es una extensión abeliana.

Discutimos más sobre longitud 2 en lo que sigue.

4.2. Coproducto semidirecto

Consideramos el coproducto semidirecto $R \rtimes K$; dada una coacción a izquierda $\rho : R \to K \otimes R$ tal que

(1) $\Delta_R : R \to R \otimes R$, $\varepsilon : R \to \Bbbk$, son morfismos de K-comódulos;

(2) $m_R : R \otimes R \to R$, $u_R : \Bbbk \to R$, son morfismos de K-comódulos;

(3) $r_{(-1)}k \otimes r_{(0)} = kr_{(-1)} \otimes r_{(0)}$, para todo $r \in R$, $k \in K$.

Entonces el álgebra de Hopf coproducto semidirecto $R \rtimes K$ es el álgebra producto tensorial $R \otimes K$, donde $r\#k := r \otimes k$, con comultiplicación y antípoda, para todo $r \in R$, $k \in K$

$$\Delta(r\#k) = r_1\#(r_2)_{(-1)}k_1 \otimes (r_2)_{(0)}\#k_2,$$
$$\mathcal{S}(r\#k) = \mathcal{S}(r_{(0)})\#\mathcal{S}(r_{(-1)}k).$$

El álgebra de Hopf $R \rtimes K$ es una extensión

$$K \xhookrightarrow{\iota} R \rtimes K \xrightarrow{\pi} R, \tag{4.1}$$

donde ι y π son $\iota(k) = 1\#k$ y $\pi(r\#k) = \varepsilon(k)r$, para $r \in R$, $k \in K$.

Demostración. Sigue del Teorema 3.3.12 tomando $A = K^{\mathrm{cop}}$, $B = R^{\mathrm{op}}$, τ, σ y $\rightharpoonup$ triviales. De hecho, la condición (1) equivale a C1) y C2); las condiciones C3) y (3.11) implican que ρ es una coacción; (2) corresponde a (3.14); (3) corresponde a (3.15). $\square$

Observación 4.2.1. [AN, 1.1.5] Las hipótesis (1), (2) y (3) significan que R es un álgebra de Hopf en la categoría ${}^K_K\mathcal{YD}$, con coacción ρ y acción trivial. Además, $R \rtimes K$ coincide con la bosonización $R\#K$.

Observación 4.2.2. Supongamos que $\dim R < \infty$. Si R es un comódulo a izquierda que satisface (1), (2) y (3), entonces R^* también las satisface, con coacción $\delta : R^* \to K \otimes R^*$ de la forma $\langle \alpha, \mathcal{S}(r_{(-1)})\rangle\langle f, r_{(0)}\rangle = \langle \alpha, f_{(-1)}\rangle\langle f_{(0)}, r\rangle$, para todo $\alpha \in K^*$, $f \in R^*$, $r \in R$.

Observación 4.2.3 ([AN, 2.1.1]). Una coacción a izquierda $\rho : R \to \Bbbk^\Gamma \otimes R$ tal que (1), (2) y (3) valen, es equivalente a un homomorfismo de grupos $\theta : \Gamma \to \mathrm{Aut}_{Hopf}\, R$. De hecho, si $\rho : R \to \Bbbk^\Gamma$ es una coacción a izquierda, entonces R es un $\Bbbk\Gamma$-módulo a derecha con acción $\leftharpoonup$. Luego $\theta : \Gamma \to \mathrm{Aut}_{Hopf}\, R$ definida por $\theta(\gamma)(r) = r \leftharpoonup \gamma$, para todo $\gamma \in \Gamma$, $r \in R$, es un homomorfismo de grupos. Recíprocamente, si $\theta : \Gamma \to \mathrm{Aut}_{Hopf}\, R$ es un homomorfismo de grupos definimos $\rho(r) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \delta_\gamma \otimes \theta(\gamma^{-1})(r)$. Se puede ver que ρ es una coacción a izquierda que satisface (1), (2) y (3).

Tenemos la sucesión exacta $\Bbbk \longrightarrow R^* \xrightarrow{\pi^*} R^*\#\Bbbk\Gamma \xrightarrow{\iota^*} \Bbbk\Gamma \longrightarrow \Bbbk$, donde $R^*\#\Bbbk\Gamma = (R \rtimes \Bbbk^\Gamma)^*$ tiene producto $(f\#\gamma)(f'\#\gamma') = f(\gamma\cdot f')\#\gamma\gamma'$ y antípoda $\mathcal{S}(f\#\gamma) = \mathcal{S}(\gamma^{-1}\cdot f)\#\gamma^{-1}$ con $\gamma\cdot f = f\circ\theta(\gamma^{-1})$, para todo f, $f' \in R^*$, γ, $\gamma' \in \Gamma$.

Observación 4.2.4. Una coacción a izquierda $\rho : R \to \Bbbk G \otimes R$ que satisface (1), (2) y (3), es equivalente a una G-graduación de álgebras $R = \bigoplus_{g\in G} R_g$, tal que ε y Δ son homogéneos, y $\mathrm{sop}(R) := \{g \in G : R_g \neq 0\} \subseteq Z(G)$. De hecho, si ρ es una coacción a izquierda, entonces $R = \bigoplus_{g\in G} R_g$ donde $R_g = \{r \in R : \rho(r) = g \otimes r\}$; (2) es equivalente a $1 \in R_1$ y $R_gR_{g'} \subseteq R_{gg'}$; (1) es equivalente a $\varepsilon(R_g) = 0$, si $g \neq 1$, y $\Delta(R_g) \subseteq \sum_{h\in G} R_{gh^{-1}} \otimes R_h$, para todo $g \in G$; (3) es equivalente a $\mathrm{sop}(R) \subseteq Z(G)$.

4.2.1. Extensiones de álgebras de grupo

Veamos algunos casos en que intentamos encontrar ejemplos no triviales de (III). Supongamos que R y K son álgebras de grupo. Sean $\varphi : \Bbbk F \to \Bbbk G$ un isomorfismo de álgebras y $\psi : G \to L$ un homomorfismo de grupos. Definimos $a_g = \varphi^{-1}(g)$, $g \in G$. Entonces $\Bbbk F$ tiene una G-graduación de álgebras $\Bbbk F = \oplus_{g\in G}(\Bbbk F)_g$, donde $(\Bbbk F)_g = \Bbbk a_g$, y una L-graduación de álgebras $\Bbbk F = \bigoplus_{l\in L}(\Bbbk F)_l$, donde $(\Bbbk F)_l = \bigoplus_{g\in G:\psi(g)=l} \Bbbk a_g$. Sean ρ_G, ρ_L las coacciones asociadas y $\rightharpoonup$ la acción trivial de $\Bbbk F$ en $\Bbbk G$ o $\Bbbk L$.

• Sea $(\rightharpoonup, \rho_L, \sigma, \tau)$ un dato compatible. Si ψ es suryectiva, entonces $\Bbbk L \overset{\iota}{\hookrightarrow} \Bbbk L\,{}^{\tau}\#_{\sigma}\Bbbk F \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \Bbbk F$ es una extensión abeliana. Por lo tanto, la extensión $\Bbbk G \overset{\iota}{\hookrightarrow} \Bbbk G\,{}^{\tau}\#_{\sigma}\Bbbk F \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \Bbbk F$ es abeliana para cualquier $(\rightharpoonup, \rho_G, \sigma, \tau)$ dato compatible. De hecho, por (3.15), $(1 \otimes l)\rho(a_g) = \rho(a_g)(1 \otimes l)$, $\forall g \in G$, $l \in L$. Entonces $\operatorname{sop}(\Bbbk F) = \operatorname{Im}\psi = L \subseteq Z(L)$, y L es abeliano.

Un isomorfismo de álgebras $\varphi : \Bbbk F \to \Bbbk G$ no necesariamente viene de un isomorfismo de grupos. El siguiente ejemplo lo ilustra.

Ejemplo 4.2.5. Sean $C_4 = \langle x / x^4 = 1\rangle$, $C_2 \times C_2 = \langle g, h / g^2 = h^2 = (gh)^2 = 1\rangle$. Se tiene un isomorfismo de álgebras de grupos $\varphi : \mathbb{C}C_4 \to \mathbb{C}(C_2 \times C_2)$ dado por $\varphi\left(\dfrac{1+i}{2}x + \dfrac{1-i}{2}x^3\right) = g$, $\varphi\left(\dfrac{1-i}{2}x + \dfrac{1+i}{2}x^3\right) = h$.

• Si φ viene de un isomorfismo entre F y G, entonces ρ_L es trivial; por lo tanto $\Bbbk F \rtimes \Bbbk L \simeq \Bbbk F \otimes \Bbbk L$. De hecho, si $g \in G$, entonces $a_g \in F$, luego $\varepsilon(a_g) = 1$ y $a_g \in (\Bbbk F)_1$, por la Observación 4.2.4. Por lo tanto $\Bbbk F = (\Bbbk F)_1$. Entonces tenemos que considerar isomorfismos de álgebras de grupos que no vienen de homomorfismos de grupos. Estos fueron intensivamente estudiados.

• En particular, supongamos que F, G son grupos abelianos de mismo orden n. Sea $e_\chi = \frac{1}{n}\sum_{g \in G} \chi(g^{-1})g$, para $\chi \in \widehat{G}$; estos son los idempotentes primitivos de $\Bbbk G$ y $g = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(g) e_\chi$. Entonces todo isomorfismo de álgebras $\varphi : \Bbbk F \to \Bbbk G$ está determinado por una biyección $\pi : \widehat{G} \to \widehat{F}$; precisamente, $\varphi^{-1} : \Bbbk G \to \Bbbk F$ está dado por

$$\varphi^{-1}(g) = \frac{1}{n} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \sum_{x \in F} \chi(g)\pi(\chi)(x^{-1})\, x.$$

Entonces ρ_L es trivial y $\Bbbk F \rtimes \Bbbk L \simeq \Bbbk F \otimes \Bbbk L$.

Demostración. Para cada $g \in G$,

$$\varepsilon(a_g) = \frac{1}{n} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \sum_{x \in F} \chi(g)\pi(\chi)(x^{-1}) = \frac{1}{n} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(g)\, n\, \delta_{\pi(\chi),\varepsilon} = \pi^{-1}(\varepsilon)(g) \neq 0.$$

Entonces $a_g \in (\Bbbk F)_1$ y ρ es trivial. □

4.3. Producto semidirecto

Consideramos una acción a izquierda de K en T tal que

(4) $\Delta_T : T \to T \otimes T$, $\varepsilon : T \to \Bbbk$, son morfismos de K-módulos;

(5) $m_T : T \otimes T \to T$, $u_T : \Bbbk \to T$, son morfismos de K-módulos;

(6) $k_1 \otimes k_2 \cdot t = k_2 \otimes k_1 \cdot t$, para todo $t \in T$, $k \in K$.

O sea, T es un álgebra de Hopf en ${}^K_K\mathcal{YD}$, con la acción dada y coacción trivial. Entonces el producto semidirecto $T\#K$ es la bosonización, i. e., la coálgebra producto tensorial $T \otimes K$ con multiplicación y antípoda

$$(t\#k)(u\#l) = t(k_1 \cdot u)\#k_2 l, \qquad \mathcal{S}(t\#k) = \mathcal{S}(k_2)\cdot \mathcal{S}(t)\#\mathcal{S}(k_1),$$

para todo $t \in T$, $k \in K$; aquí $t\#k$ denota nuevamente $t \otimes k$. El álgebra de Hopf $T\#K$ es una extensión de la forma (con aplicaciones ι y π obvias)

$$T \overset{\iota}{\hookrightarrow} T\#K \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} K. \tag{4.2}$$

Observación 4.3.1. Supongamos que $\dim K < \infty$. Entonces R es un K-comódulo a izquierda que satisface (1), (2) y (3), si y sólo si R es un K^*-módulo a izquierda que satisface (4), (5) y (6), con acción $\alpha \cdot r = \langle \alpha, \mathcal{S}(r_{(-1)})\rangle r_{(0)}$, $\alpha \in K^*$, $r \in R$. Por lo tanto, asumiendo también que $\dim R < \infty$ y combinando con la Observación 4.2.2, tenemos que

$$(R \rtimes K)^* \simeq R^*\#K^*. \tag{4.3}$$

Claramente, una acción de $\Bbbk F$ en T que satisface (4), (5) y (6), es equivalente a un homomorfismo de grupos $\theta : F \to \operatorname{Aut}_{\mathrm{Hopf}} T$. Consideramos la sucesión exacta

$$T \overset{\iota}{\hookrightarrow} T\#\Bbbk F \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \Bbbk F\ ,$$

en el lema siguiente describimos todas las *secciones* de álgebras de Hopf s de π (i. e., los morfismos de álgebras de Hopf $s : \Bbbk F \to T\#\Bbbk F$ tales que $\pi \circ s = \mathrm{id}_{\Bbbk F}$) con imagen normal.

Lema 4.3.2. *Si* $\varphi \in \operatorname{Hom}(F, G(T))$ *satisface*

$$g \cdot t = \varphi(g)t\varphi(g^{-1}), \qquad g \in F, t \in T, \tag{4.4}$$

entonces $s_\varphi : \Bbbk F \to T\#\Bbbk F$, $s_\varphi(g) = \varphi(g^{-1})\#g$, $g \in F$ *es una sección de álgebras de Hopf de* π *y* $K_\varphi := \operatorname{Im} s_\varphi \lhd T\#\Bbbk F$. *Más aún, cualquier sección de álgebras de Hopf* s *tal que* $\operatorname{Im} s \lhd T\#\Bbbk F$ *es de esta forma. Si* π *admite una sección de álgebras de Hopf con imagen normal, entonces* $T\#\Bbbk F \simeq T \otimes \Bbbk F$ *como álgebras de Hopf.*

Demostración. Si $\varphi : F \to G(T)$ es un homomorfismo de grupos que satisface (4.4), entonces para todo $g, h \in G$

$$\begin{aligned}
\pi(s_\varphi(g)) &= \varepsilon(\varphi(g^{-1}))g = g, \\[1em]
s_\varphi(g)s_\varphi(h) &= (\varphi(g^{-1})\#g)(\varphi(h^{-1})\#h) = \varphi(g^{-1})(g \cdot \varphi(h^{-1}))\#gh \\
&= \varphi(g^{-1})\varphi(g)\varphi(h^{-1})\varphi(g^{-1})\#gh = \varphi((gh)^{-1})\#gh \\
&= s_\varphi(gh), \\[1em]
s_\varphi(1) &= \varphi(1)\#1 = 1\#1,
\end{aligned}$$

y claramente s_φ es un morfismo de coálgebras. Por lo tanto, s_φ es una sección de álgebras de Hopf de π. Dados $t \in T$, $g, h \in F$,

$$\begin{aligned}
(t\#h)_1(\varphi(g^{-1})\#g)\mathcal{S}((t\#h)_2) &= (t_1\#h)(\varphi(g^{-1})\#g)((h^{-1}\cdot\mathcal{S}(t_2))\#h^{-1})\\
&= (t_1(h\cdot\varphi(g^{-1}))\#hg)((h^{-1}\cdot\mathcal{S}(t_2))\#h^{-1})\\
&= (t_1\varphi(h)\varphi(g^{-1})\varphi(h^{-1})\#hg)((h^{-1}\cdot\mathcal{S}(t_2))\#h^{-1})\\
&= t_1\varphi(h)\varphi(g^{-1})\varphi(h^{-1})(hg\cdot\varphi(h^{-1})\mathcal{S}(t_2)\varphi(h))\#hgh^{-1}\\
&= t_1\varphi(h)\varphi(g^{-1})\varphi(h^{-1})\varphi(hg)\varphi(h^{-1})\mathcal{S}(t_2)\varphi(h)\varphi((hg)^{-1})\#hgh^{-1}\\
&= \varepsilon(t)\varphi(hg^{-1}h^{-1})\#hg^{-1}h^{-1}\in\operatorname{Im}s_\varphi.
\end{aligned}$$

Luego $K_\varphi = \operatorname{Im} s_\varphi$ es normal en $T\#\Bbbk F$.

Recíprocamente, sea s una sección de álgebras de Hopf de π tal que $K = \operatorname{Im} s$ es normal en $T\#\Bbbk F$. Dado $g \in F$, escribimos $s(g) = \sum_{\gamma\in F} d_\gamma(g)\#\gamma$. Como s es una sección de π, entonces

$$g = \pi(s(g)) = \pi\left(\sum_{\gamma\in F} d_\gamma(g)\#\gamma\right) = \sum_{\gamma\in F}\varepsilon(d_\gamma(g))\gamma,$$

y por lo tanto, $\varepsilon(d_\gamma(g)) = \delta_{g,\gamma}$. Como s es un morfismo de coálgebras, entonces por un lado

$$(s\otimes s)\Delta(g) = s(g)\otimes s(g) = \sum_{\gamma,\gamma'\in F} d_\gamma(g)\#\gamma\otimes d_{\gamma'}(g)\#\gamma'$$

y por otro lado,

$$\Delta(s(g)) = \sum_{\gamma\in F} d_\gamma(g)_1\#\gamma\otimes d_\gamma(g)_2\#\gamma.$$

Aplicando $\operatorname{id}\otimes\delta_h\otimes\operatorname{id}\otimes\delta_h$, para todo $h \in F$, a la igualdad tenemos que

$$d_g(h)\otimes d_g(h) = d_g(h)_1\otimes d_g(h)_2.$$

Sean $\gamma, h \in F$ tales que $\gamma \neq h$. Entonces

$$d_\gamma(h) = (\operatorname{id}\otimes\varepsilon)\Delta(d_\gamma(h)) = (\operatorname{id}\otimes\varepsilon)(d_\gamma(h)\otimes d_\gamma(h)) = d_\gamma(h)\varepsilon(d_\gamma(h)) = d_\gamma(h)\delta_{\gamma,h} = 0.$$

Por lo tanto, $s(g) = d_g(g)\#g$. Escribimos simplemente $d(g) = d_g(g) \in G(T)$, para $g \in F$. Como s es un morfismo de álgebras,

$$d(gh)\#gh = s(gh) = s(g)s(h) = (d(g)\#g)(d(h)\#h) = d(g)(g\cdot d(h))\#gh$$

y

$$1\#1 = s(1) = d(1)\#1,$$

luego $d(gh) = d(g)(g\cdot d(h))$ y $d(1) = 1$, para todo g, $h \in F$.

Como $K \lhd T\#\Bbbk F$, $(1\#\gamma)s(g)(1\#\gamma^{-1}) \in K$, para todo g, $\gamma \in F$, $t \in T$. Así tenemos que

$$(1\#\gamma)s(g)(1\#\gamma^{-1}) = ((\gamma\cdot d(g))\#\gamma g)(1\#\gamma^{-1}) = (\gamma\cdot d(g))\#\gamma g\gamma^{-1} = d(h)\#h$$

para algún $h \in F$. Aplicando $\varepsilon\otimes\operatorname{id}$ a la última igualdad y como ε es morfismo de $\Bbbk F$-módulos por (4), sigue que $h = \gamma g\gamma^{-1}$. Ahora, aplicando $\operatorname{id}\otimes\varepsilon$ a la igualdad $(\gamma\cdot d(g))\#\gamma g\gamma^{-1} = d(\gamma g\gamma^{-1})\#\gamma g\gamma^{-1}$, sigue que

$$\gamma\cdot d(g) = d(\gamma g\gamma^{-1}),\ \forall g,\gamma\in F.$$

Análogamente, como $t_1 s(g)\mathcal{S}(t_2) \in K$ tenemos que

$$\varepsilon(t)d(g) = t_1 d(g)(g \cdot \mathcal{S}(t_2)), \ \forall t \in T, g \in F.$$

Ahora si $g \in F$ y $t \in T$, entonces

$$\begin{aligned} d(g)^{-1}\mathcal{S}(t)d(g) &= d(g)^{-1}\mathcal{S}(t_1)\varepsilon(t_2)d(g) \\ &= d(g)^{-1}\mathcal{S}(t_1)t_2 d(g)(g \cdot \mathcal{S}(t_3)) \\ &= g \cdot \mathcal{S}(t); \end{aligned}$$

luego $g \cdot f = d(g)^{-1} f d(g)$. Sea $\varphi : F \to G(T)$, $\varphi(g) = d(g)^{-1}$ para $g \in F$. Como

$$d(gh) = d(g)(g \cdot d(h)) = d(g)d(g)^{-1}d(h)d(g) = d(h)d(g), \qquad \forall g, h \in F,$$

φ es un homomorfismo de grupos y claramente (4.4) vale. Finalmente, observamos que

$$s(g)(t\#1) = \varphi(g)^{-1}(g \cdot t)\#g = t\varphi(g)^{-1}\#g = (t\#1)s(g), \qquad g \in F, t \in T.$$

Sea $\psi : T\#\Bbbk F \to T \otimes K$ definida por $\psi(t\#g) = t\varphi(g) \otimes s(g)$, $t \in T$, $g \in F$. Entonces ψ es un isomorfismo de álgebras de Hopf con inversa $\psi^{-1} : T \otimes K \to T\#\Bbbk F$, $\psi^{-1}(t \otimes s(g)) = t\varphi(g)^{-1}\#g$, $t \in T$, $g \in F$, y la última afirmación sigue. $\square$

4.3.1. Contexto

Consideramos el siguiente contexto:

- Γ es un grupo finito simple,
- R es un álgebra de Hopf simple semisimple y
- $\theta : \Gamma \to \operatorname{Aut}_{\mathrm{Hopf}} R$ es un homomorfismo de grupos.

Entonces las álgebras de Hopf $R \rtimes \Bbbk^\Gamma$, $R\#\Bbbk\Gamma$, $R^* \rtimes \Bbbk^\Gamma$, $R^* \rtimes \Bbbk\Gamma$ son de longitud 2.

Lema 4.3.3. *Si $B \lhd R \rtimes \Bbbk^\Gamma$ y $B \neq \Bbbk, R \rtimes \Bbbk^\Gamma$, entonces $B = \Bbbk^\Gamma$ o existe $\varphi : \Gamma \to G(R^*)$ tal que* (4.4) *vale y $B \simeq R$.*

Demostración. Sea $\Bbbk^\Gamma \overset{\iota}{\hookrightarrow} R \rtimes \Bbbk^\Gamma \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} R$. Como R es simple y $\pi(B) \lhd R$, $\pi(B) = \Bbbk$ o $\pi(B) = R$. Como Γ es simple y $B^{\operatorname{co}\pi|_B} = B \cap (R \rtimes \Bbbk^\Gamma)^{\operatorname{co}\pi} = B \cap \Bbbk^\Gamma \lhd \Bbbk^\Gamma$, $B^{\operatorname{co}\pi|_B} = \Bbbk$ o $\Bbbk^\Gamma$. Pero $B^{\operatorname{co}\pi|_B} \hookrightarrow B \twoheadrightarrow \pi(B)$, es exacta, luego $B = \Bbbk^\Gamma$ o $\pi|_B : B \to R$ es un isomorfismo de álgebras de Hopf. En el último caso, sea $j : B \to R \rtimes \Bbbk^\Gamma$ la inclusión, $p : R^*\#\Bbbk\Gamma \to B^*$, $p = j^*$, y $K := (R^*\#\Bbbk\Gamma)^{\operatorname{co}p} \lhd R^*\#\Bbbk\Gamma$. Entonces $\iota^*|_K : K \to \Bbbk\Gamma$ es un isomorfismo de álgebras de Hopf y el Lema 4.3.2 se aplica a $s = (\iota^*|_K)^{-1}$. $\square$

4.4. Ejemplos donde R es un twist de un grupo finito

Sean N un grupo finito y J un twist en $\Bbbk N$ correspondiente al par (S, ω). Sea $\theta : G \to \operatorname{Aut}_{\mathrm{Hopf}}(\Bbbk N)^J$ un homomorfismo de grupos y $H := (\Bbbk N)^J \rtimes \Bbbk^G$. Notemos que $\wp : H \to \Bbbk^G$, $\wp(r\#k) = \varepsilon(r)k$, es una *retracción* de álgebras de Hopf de $\iota : \Bbbk^G \to H$, i. e., un morfismo de álgebras de Hopf tal que $\wp \circ \iota = \mathrm{id}_{\Bbbk^G}$.

Lema 4.4.1. *Supongamos que*

i) G no es abeliano,

ii) existe $M < N^G$ no abeliano tal que $[M, S] = 1$.

Entonces H no es triangular ni cotriangular.

Demostración. Por *i)*, $\Bbbk^G$, y a posteriori H, no es cuasitriangular (usamos $\wp$ y la Observación 3.2.3). Por *ii)*, $\Bbbk M \leq H$; como M no es abeliano, $\Bbbk M$ no es cocuasitriangular, luego H no es cocuasitriangular. □

Veamos qué hipótesis tenemos que agregar para que H no sea trivial.

Lema 4.4.2. *i) H es conmutativa si y sólo si N es abeliano.*

ii) H es coconmutativa si y sólo si $(\Bbbk N)^J$ es coconmutativa, G es abeliano y ρ es trivial.

Ver Lema 3.1.3 para la cocommutatvidad de $(\Bbbk N)^J$.

Demostración. Por la Observación 4.2.1 y [R, Proposition 1]. □

Ahora vemos que bajo algunas hipótesis, H no es una extensión abeliana.

Proposición 4.4.3. *Supongamos que*

i) G es un grupo simple no abeliano;

ii) $(\Bbbk N)^J$ es un álgebra de Hopf simple;

iii) si $C \lhd N$ es abeliano, entonces $C = \{1\}$ (en particular N no es abeliano),

iv) J es un twist no trivial.

Entonces $H = (\Bbbk N)^J \rtimes \Bbbk^G$ tiene longitud 2 y no es una extensión abeliana.

Demostración. H no es conmutativa ni coconmutativa por el Lema 4.4.2. Sea $B \lhd H$. Si $B = \Bbbk^G$, entonces $H /\!/ B \simeq (\Bbbk N)^J$ no es coconmutativa por el Lema 3.1.3 y las hipótesis *iii)* y *iv)*. Si $B \simeq (\Bbbk N)^J$, entonces no es conmutativa (o alternativamente $H /\!/ B \simeq \Bbbk^G$ no es coconmutativa). Por el Lema 4.3.3, estas son las posibles subálgebras de Hopf normales no triviales de H. Por lo tanto $(\Bbbk N)^J \rtimes \Bbbk^G$ no es una extensión abeliana. □

4.5. La construcción básica [AN, 2.1.5]

Consideramos la siguiente data

- homomorfismos de grupos $\Gamma \xrightarrow{\theta} \mathrm{Aut}_{\mathrm{Hopf}} R \xleftarrow{\mu} G$ tales que $[\mu(G), \theta(\Gamma)] = 1$,
- un 2-cociclo $\overline{\sigma} \in H^2(G, \widehat{\Gamma})$.

Sea $A := R \rtimes \Bbbk^\Gamma \#_\sigma \Bbbk G$ un álgebra de Hopf que es el espacio vectorial $R \otimes \Bbbk^\Gamma \otimes \Bbbk G$ con producto, coproducto y antípoda dados por

$$\begin{aligned}
(r\#f\#g)(s\#f'\#g') &= r\mu(g)(s)\#ff'\sigma(g,g')\#gg', \\
\Delta(r\#\delta_\gamma\#g) &= \sum_{uv=\gamma} r_{(1)}\#\delta_u\#g \otimes \theta(u^{-1})(r_{(2)})\#\delta_v\#g, \\
\mathcal{S}(r\#\delta_\gamma\#g) &= \mu(g^{-1}) \circ \theta(\gamma^{-1})(\mathcal{S}(r))\#\sigma(g^{-1},g)^{-1}\delta_{\gamma^{-1}}\#g^{-1},
\end{aligned}$$

donde $r\#f\#g := r \otimes f \otimes g$, para todo $r, s \in R$, $f, f' \in \Bbbk^\Gamma$, $\gamma, u, v \in \Gamma$, $g, g' \in G$. Tenemos una sucesión exacta

$$R \rtimes \Bbbk^\Gamma \xhookrightarrow{\iota} R \rtimes \Bbbk^\Gamma \#_\sigma \Bbbk G \xrightarrow{\pi} \Bbbk G. \tag{4.5}$$

Observación 4.5.1. Si $\overline{\sigma} = \overline{\sigma'}$ en $H^2(G, \widehat{\Gamma})$ entonces $R \rtimes \Bbbk^\Gamma \#_\sigma \Bbbk G \simeq R \rtimes \Bbbk^\Gamma \#_{\sigma'} \Bbbk G$. De hecho, consideramos la acción trivial de G en $\widehat{\Gamma}$, como $\overline{\sigma} = \overline{\sigma'}$ existe una función $f : G \to \widehat{\Gamma}$ tal que $\sigma = \sigma'\delta f$, donde $\delta f : G \times G \to \widehat{\Gamma}$ es tal que $\delta f(x, y) = f(y)f(x)f(xy)^{-1}$. Entonces las álgebras de Hopf $R \rtimes \Bbbk^\Gamma \#_\sigma \Bbbk G$ y $R \rtimes \Bbbk^\Gamma \#_{\sigma'} \Bbbk G$ son isomorfas y un isomorfismo explícito está dado por $r\#f\#g \mapsto r\#kf(f)\#g$.

Observación 4.5.2. Si Γ, G son grupos finitos simples (podemos suponer que σ es trivial) y R es un álgebra de Hopf simple semisimple, entonces el álgebra de Hopf $R \rtimes \Bbbk^\Gamma \# \Bbbk G$ es de longitud 3.

4.5.1. Ejemplos donde R es un twist de un grupo finito

Consideramos la construcción básica $A = (\Bbbk N)^J \rtimes \Bbbk^\Gamma \# \Bbbk G$, donde J es un twist en $\Bbbk N$ correspondiente al par (S, ω), y $\theta : \Gamma \to \mathrm{Aut}_{\mathrm{Hopf}}(\Bbbk N)^J$ y $\mu : G \to \mathrm{Aut}_{\mathrm{Hopf}}(\Bbbk N)^J$ son homomorfismos de grupos tales que $[\mu(G), \theta(\Gamma)] = 1$.

Proposición 4.5.3. *Supongamos que:*

i) Γ *es simple no abeliano;*

ii) $(\Bbbk N)^J$ *es un álgebra de Hopf simple;*

iii) si $C \lhd N$ *es abeliano, entonces* $C = \{1\}$ *(en particular* N *no es abeliano);*

iv) J *es un twist no trivial.*

Entonces A *no es una extensión abeliana.*

Demostración. Por el Lema 3.4.2, pues $(\Bbbk N)^J \rtimes \Bbbk^\Gamma$ no es abeliana por la Proposición 4.4.3. □

Lema 4.5.4. *Supongamos que*

i) Γ *es simple no abeliano,*

ii) G *es simple,*

iii) R *es un álgebra de Hopf simple semisimple,*

iv) *existe* $M < N^\Gamma$ *no abeliano tal que* $[M, S] = 1$,

v) $\mu(g) \in \operatorname{Aut}(N)$ *y* $(\mu(g) \otimes \mu(g))(J) = J$.

Entonces A *no es triangular ni cotriangular, pero la sucesión* $\Bbbk^\Gamma \xhookrightarrow{j} A \xrightarrow{p} (\Bbbk N)^J \# \Bbbk G$ *es exacta, donde* $(\Bbbk N)^J \# \Bbbk G$ *es triangular.*

Demostración. Por el Lema 4.4.1, $R \rtimes \Bbbk^\Gamma \leq A$ no es cocuasitriangular; entonces A tampoco. Notemos que $\eta : A \to \Bbbk^\Gamma$, $\eta(r\#f\#g) = \varepsilon(r)f$, es un epimorfismo de álgebras de Hopf. Como Γ no es abeliano, A no es cuasitriangular. No es difícil ver que la sucesión es exacta. Por (4.5.4), $(\Bbbk N)^J \# \Bbbk G \simeq (\Bbbk N \# \Bbbk G)^{\widetilde{J}} = (\Bbbk(N \rtimes G))^{\widetilde{J}}$, donde $\widetilde{J} = J_i \otimes 1 \otimes J^i \otimes 1$. □

4.6. Ejemplos concretos

En los ejemplos que siguen, consideramos un grupo finito N y un twist J en $\Bbbk N$ correspondiente al par (S, ω). Entonces

$$C(N, S) := \{\phi \in \operatorname{Aut} N : \phi|_S = \mathrm{id}_S\} \hookrightarrow \operatorname{Aut}_{\mathrm{Hopf}}(\Bbbk N)^J. \tag{4.6}$$

Si $Z(N) = 1$, entonces $\mathrm{ad} : N \to \operatorname{Aut} N$ induce un monomorfismo del centralizador $C_N(S)$ en $C(N, S)$, y es un isomorfismo si $\mathrm{ad} : N \to \operatorname{Aut} N$ es un isomorfismo. En todo caso, si $\Gamma, G < C_N(S)$ y $\Gamma \cap Z(N) = 1 = G \cap Z(N)$, entonces denotamos por $\theta : \Gamma \to \operatorname{Aut}_{\mathrm{Hopf}}(\Bbbk N)^J$, $\mu : G \to \operatorname{Aut}_{\mathrm{Hopf}}(\Bbbk N)^J$ las composiciones de los correspondientes monomorfismos.

Ejemplo 4.6.1. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $n \geqslant m \geqslant 9$. Sea $N = \mathbb{A}_n$, $C_2 \times C_2 \simeq S = \langle (12)(34), (13)(24) \rangle < N$, $1 \neq \omega \in H^2(\widehat{S}, \Bbbk^\times) \simeq C_2$ y $J \in \Bbbk S \otimes \Bbbk S$ el twist correspondiente. Por el Ejemplo 3.3.7, $(\Bbbk \mathbb{A}_n)^J$ es simple. Sea $\Gamma = \mathbb{A}_{m-4}$ (actuando en $\{5, 6, \cdots, m\}$); por hipótesis, Γ es simple no abeliano. Ahora supongamos que $n - m \geqslant 4$; entonces $M = \mathbb{A}_{n-m}$ (actuando en $\{m+1, m+2, \cdots, n\}$) no es abeliano y conmuta con Γ y S. Por el Lema 4.4.1, $(\Bbbk \mathbb{A}_n)^J \rtimes \Bbbk^{\mathbb{A}_{m-4}}$ no es triangular ni cotriangular. Por la Proposición 4.4.3, no es una extensión abeliana; y es de longitud 2. Ahora supongamos que $n - m \geqslant 5$; entonces $G = \mathbb{A}_{n-m}$ (actuando en $\{m+1, m+2, \cdots, n\}$) es simple, no abeliano y conmuta con Γ. Por lo tanto, $(\Bbbk \mathbb{A}_n)^J \rtimes \Bbbk^{\mathbb{A}_{m-4}} \# \Bbbk \mathbb{A}_{n-m}$ no es una extensión abeliana pero es una extensión de un álgebra de Hopf triangular por una cotriangular.

Ejemplo 4.6.2. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $n \geqslant m \geqslant 9$. Sea $N = \mathbb{S}_n$, $C_2 \times C_2 \simeq S = \langle (12), (34) \rangle < N$, $1 \neq \omega \in H^2(\widehat{S}, \Bbbk^\times) \simeq C_2$ y $J \in \Bbbk S \otimes \Bbbk S$ el correspondiente twist. Por el Ejemplo 3.3.8, $(\Bbbk \mathbb{S}_n)^J$ es simple. Sea $\Gamma = \mathbb{A}_{m-4}$ (actuando en $\{5, 6, \cdots, m\}$); por hipótesis, Γ es simple no abeliano. Ahora supongamos que $n - m \geqslant 3$; entonces $M = \mathbb{S}_{n-m}$ (actuando en $\{m+1, m+2, \cdots, n\}$) es no abeliano y conmuta con Γ y S. Por el Lema 4.4.1, $(\Bbbk \mathbb{S}_n)^J \rtimes \Bbbk^{\mathbb{A}_{m-4}}$ no es triangular ni cotriangular; por la Proposición 4.4.3, no es una extensión abeliana; y es de longitud 2. Ahora supongamos que $n - m \geqslant 5$; entonces $G = \mathbb{A}_{n-m}$ (actuando en $\{m+1, m+2, \cdots, n\}$) es simple, no abeliano y conmuta con Γ. Por lo tanto, $(\Bbbk \mathbb{S}_n)^J \rtimes \Bbbk^{\mathbb{A}_{m-4}} \# \Bbbk \mathbb{A}_{n-m}$ no es una extensión abeliana pero es una extensión de un álgebra de Hopf triangular por una cotriangular.

Ejemplo 4.6.3. Sea $\mathbb{F}_q$ un cuerpo finito con q elementos. Sean $n, r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $n = 3 + r + s$, $r \geqslant 2$, $(r, q-1) = 1$ y $(r, q) \neq (2, 2)$. Sea

$$N = PSL_n(\mathbb{F}_q) = SL_n(\mathbb{F}_q)/\{\lambda I_n : \lambda \in \mathbb{F}_q, \lambda^n = 1\}.$$

Sea ${\mathbb{F}_q}^\times \times {\mathbb{F}_q}^\times \simeq S = \left\{ \begin{pmatrix} I_r & & & & \\ & x & 0 & 0 & \\ & 0 & y & 0 & \\ & 0 & 0 & (xy)^{-1} & \\ & & & & I_s \end{pmatrix} : x, y \in {\mathbb{F}_q}^\times \right\} < N$, $1 \neq \omega \in H^2(\widehat{S}, \Bbbk^\times)$ y $J \in \Bbbk S \otimes \Bbbk S$ el correspondiente twist. Como $r \geqslant 2$, $(r, q-1) = 1$ y $(r, q) \neq (2, 2)$,

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} A & & \\ & I_3 & \\ & & I_s \end{pmatrix} : A \in SL_r(\mathbb{F}_q) \right\} \simeq PSL_r(\mathbb{F}_q) < N$$

es simple y no abeliano. Ahora supongamos que $s \geqslant 2$; entonces

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} I_r & & \\ & I_3 & \\ & & B \end{pmatrix} : B \in SL_s(\mathbb{F}_q) \right\} \simeq PSL_s(\mathbb{F}_q) < N$$

es no abeliano y conmuta con Γ y S. Por el Lema 4.4.1, $(\Bbbk PSL_n(\mathbb{F}_q))^J \rtimes \Bbbk^{SL_r(\mathbb{F}_q)}$ no es triangular ni cotriangular; por la Proposición 4.4.3, no es una extensión abeliana; y es de longitud 2. Supongamos que $s \geqslant 2$, $(s, q-1) = 1$ y $(s, q) \neq (2, 2)$. Entonces $SL_s(\mathbb{F}_q) \simeq G = \left\{ \begin{pmatrix} I_r & & \\ & I_3 & \\ & & B \end{pmatrix} : B \in SL_s(\mathbb{F}_q) \right\}$ es simple, no abeliano y conmuta con Γ. Por lo tanto, $(\Bbbk PSL_n(\mathbb{F}_q))^J \rtimes \Bbbk^{SL_r(\mathbb{F}_q)} \# \Bbbk SL_s(\mathbb{F}_q)$ no es una extensión abeliana pero es una extensión de un álgebra de Hopf triangular por una cotriangular.

Observación 4.6.4. (C. Galindo). Sea $S < N$ abeliano, $\omega \in H^2(\hat{S}, \Bbbk^\times)$ y J el correspondiente twist. Sean $G, \Gamma < C_N(S)$ tales que $\Gamma \cap Z(N) = 1 = G \cap Z(N)$ y $\theta : \Gamma \to \mathrm{Aut}_{\mathrm{Hopf}}(\Bbbk N)^J$ y $\mu : G \to \mathrm{Aut}_{\mathrm{Hopf}}(\Bbbk N)^J$ como antes. Entonces $(\Bbbk N)^J \rtimes \Bbbk^\Gamma \simeq (\Bbbk N \rtimes \Bbbk^\Gamma)^{\widetilde{J}}$ como álgebras de Hopf, donde $\widetilde{J} = J_i \otimes 1 \otimes J^i \otimes 1$. Como $(\Bbbk N \rtimes \Bbbk^\Gamma)^{\widetilde{J}}$ es grupo-teorética, las extensiones de longitud 2 en los Ejemplos 4.6.1, 4.6.2 y 4.6.3 son grupo-teoréticas. Los ejemplos de longitud 3 también son grupo-teoréticas. De hecho, $(\Bbbk N)^J \rtimes \Bbbk^\Gamma \# \Bbbk G \simeq \Bbbk(N \rtimes G)^{\widetilde{J}} \rtimes \Bbbk^\Gamma$ como álgebras de Hopf, donde $\Bbbk(N \rtimes G)^{\widetilde{J}} \rtimes \Bbbk^\Gamma$ es el coproducto semidirecto definido por $\widetilde{\theta} : \Gamma \to \mathrm{Aut}_{\mathrm{Hopf}}(\Bbbk(N \rtimes G))^{\widetilde{J}}$, $\widetilde{\theta}(\gamma)(n, g) = (\theta(\gamma)(n), g)$, para todo $\gamma \in \Gamma, n \in N, g \in G$, ver Observación 4.2.3. Como antes, $\Bbbk(N \rtimes G)^{\widetilde{J}} \rtimes \Bbbk^\Gamma \simeq (\Bbbk(N \rtimes G) \rtimes \Bbbk^\Gamma)^{\widetilde{\widetilde{J}}}$, donde $\widetilde{\widetilde{J}} = J_i \otimes 1 \otimes 1 \otimes J^i \otimes 1 \otimes 1$, y por lo tanto es grupo-teorética.

Observación 4.6.5. (A. Davydov). Sean J un twist en $\Bbbk N$, $K \in \Bbbk N \otimes \Bbbk N$ ad N-invariante e invertible y $\phi \in \mathrm{Aut}\, N$ tales que $(\phi \otimes \phi)(J) = JK$. Entonces $\phi \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{Hopf}}(\Bbbk N)^J$. De hecho, notemos que $1 = (\phi \otimes \phi)(JJ^{-1}) = JK(\phi \otimes \phi)(J^{-1})$, y como K y J son invertibles $(\phi \otimes \phi)(J^{-1}) = K^{-1}J^{-1}$. Entonces

$$\begin{aligned}(\phi \otimes \phi)\Delta^J(n) &= (\phi \otimes \phi)(J^{-1}(n \otimes n)J) = (\phi \otimes \phi)(J^{-1})(\phi(n) \otimes \phi(n))JK \\ &= K^{-1}J^{-1}(\phi(n) \otimes \phi(n))JK = J^{-1}(\phi(n) \otimes \phi(n))J = \Delta^J(\phi(n)),\end{aligned}$$

donde en la penúltima igualdad usamos que K es $\operatorname{ad} N$-invariante.

En nuestros casos, N es simple y no abeliano o $N = \mathbb{S}_n$ con $n > 2$, luego $K \subseteq Z(N) = 1$. La existencia de otros elementos en $\operatorname{Aut}_{\mathrm{Hopf}}(\Bbbk N)^J$ podría proveer nuevos ejemplos de extensiones de longitud 2.

Pregunta 10. *¿Qué es* $\operatorname{Aut}_{\mathrm{Hopf}}(\Bbbk N)^J$*?*

Capítulo 5

Ejemplos de álgebras de Hopf con la propiedad de Chevalley dual

En este capítulo presentamos ejemplos de álgebras de Hopf de dimensión finita con la propiedad de Chevalley dual, [AGM].

Definición 5.0.1. Un álgebra de Hopf H tiene la *propiedad de Chevalley dual* si el producto tensorial de dos H-comódulos simples es semisimple.

El dual de esta noción fue introducido por Andruskiewitsch, Etingof, y Gelaki en [AEG], y es motivada por un teorema de Chevalley que dice que el producto tensorial de dos $\Bbbk G$-módulos simples es semisimple (G es un grupo no necesariamente finito). Veamos una formulación equivalente de la propiedad de Chevalley dual.

Proposición 5.0.2. *Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita. Son equivalentes:*

i) H tiene la propiedad de Chevalley dual.

ii) H_0 es una subálgebra de Hopf de H.

Demostración. [AEG, Proposition 4.2]. □

Clases particulares son las álgebras de Hopf punteadas (el corradical es un álgebra de grupo) y las copunteadas (el corradical es el álgebra de funciones en un grupo finito o reductivo). Hay ejemplos de álgebras de Hopf que no cumplen esta propiedad, como los duales de los núcleos de Frobenius-Lusztig.

Queremos dar ejemplos de álgebras de Hopf con la propiedad de Chevalley dual que no sean puntedas ni copunteadas. Si conocemos ejemplos de:

1. G un grupo finito y $V \in {}^{\Bbbk G}_{\Bbbk G}\mathcal{YD}$ tal que $\dim \mathfrak{B}(V) < \infty$,

2. H un álgebra de Hopf semisimple tal que ${}^{H}_{H}\mathcal{YD} \simeq_{\otimes} {}^{\Bbbk G}_{\Bbbk G}\mathcal{YD}$,

entonces el funtor $\mathcal{F} : {}^{\Bbbk G}_{\Bbbk G}\mathcal{YD} \to {}^{H}_{H}\mathcal{YD}$ preserva álgebras de Nichols, i. e., $\mathcal{F}(\mathfrak{B}(V)) \simeq \mathfrak{B}(\mathcal{F}(V))$ y si $V' = \mathcal{F}(V)$, entonces $\dim \mathfrak{B}(V') < \infty$. Además $\mathcal{A}(V') = \mathfrak{B}(V')\#H$ es un álgebra de Hopf de dimensión finita con $\mathcal{A}(V')_0 \simeq H$.

Ejemplos de G y V como en 1. son conocidos en la literatura. En la Tabla 5.1 hay ejemplos de tales grupos y el álgebra de Nichols de dimensión finita viene de un pecio. La Tabla 5.2 es separada de la primera tabla, pues se conocen familias de ejemplos de álgebras de Nichols de dimension finita cuyos módulos Yetter-Drinfeld se realizan sobre grupos diedrales, pero este módulo no viene de un pecio sino que es de tipo diagonal. Más ejemplos de álgebras de Hopf con la propiedad de Chevalley dual con espacios vectoriales trenzados de tipo diagonal se pueden encontrar en [CDMM, Mo].

Tabla 5.1

$(X, \mathbf{q})$	$\dim \mathfrak{B}(V)$	**Referencia**	G
$(\mathcal{D}_3, -1)$	12	[MS]	$\mathbb{S}_3$
$(\mathsf{Q}_{5,2}, -1)$, $(\mathsf{Q}_{5,3}, -1)$	1280	[AG]	$C_5 \rtimes_2 C_4$
$(\mathcal{O}_2^4, -1)$, $(\mathcal{O}_2^4, \chi)$ $(\mathcal{O}_4^4, -1)$	576	[FK, MS]	$\mathbb{S}_4$
$(\mathcal{O}_2^5, -1)$, $(\mathcal{O}_2^5, \chi)$	8294400	[FK, G1, GG]	$\mathbb{S}_5$
$(\mathcal{T}, -1)$	72	[G]	$\mathbb{A}_4 \times C_2$
$(\mathsf{Q}_{7,3}, -1)$, $(\mathsf{Q}_{7,5}, -1)$	326592	[G1]	$C_7 \rtimes_3 C_6$

Tabla 5.2

$\dim \mathfrak{B}(V)$	**Referencia**	G
$< \infty$	[FG]	$D_{4t}, t \geqslant 3$

Para encontrar ejemplos como en 2., dada un álgebra de Hopf semisimple H y un grupo finito G, sabemos que las categorías ${}^{H}_{H}\mathcal{YD}$ y ${}^{\Bbbk G}_{\Bbbk G}\mathcal{YD}$ son equivalentes como categorías tensoriales trenzadas si y sólo si $H \sim_{\mathrm{Mor}} \Bbbk G$. Ahora, por la Observación 3.6.12, si H es un álgebra de Hopf tal que $H \sim_{\mathrm{Mor}} \Bbbk G$ entonces H es grupo-teorética; recíprocamente, si H es grupo-teorética con $\omega = 1$, entonces $H \sim_{\mathrm{Mor}} \Bbbk G$.

5.1. Álgebras de Hopf cuyo coradical es una subálgebra de Hopf

Sea G un grupo finito. Estamos interesados en álgebras de Hopf grupo-teoréticas H con $\omega = 1$ tales que $H \sim_{\mathrm{Mor}} \Bbbk G$. Más precisamente, consideramos el Teorema 3.6.8 con $\omega = 1$ e introducimos la siguiente definición.

Definición 5.1.1. Un *dato grupo-teorético* para G es una colección $(F, \alpha, \Gamma, \beta)$ donde $F, \Gamma < G$, $\alpha \in H^2(F, \Bbbk^\times)$ y $\beta \in H^2(\Gamma, \Bbbk^\times)$, satisfacen

- $G = F\Gamma$;
- $\alpha_{|F\cap\Gamma} \cdot {\beta_{|F\cap\Gamma}}^{-1}$ es no-degenerado en $F \cap \Gamma$.

Sea $(F, \alpha, \Gamma, \beta)$ un dato grupo-teorético para G y elegimos representantes $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$. Por el Teorema 3.6.8, podemos describir un funtor de fibra de $\mathcal{C}(G, \omega; F, \alpha)$ y por dualidad Tannakiana, existe un álgebra de Hopf $H = H^G_{\underline{\alpha\,\beta}}(F,\Gamma)$ con $\operatorname{Corep} H$ tensorialmente equivalente a $\mathcal{C}(G,1;F,\alpha)$, y por lo tanto $H \sim_{\mathrm{Mor}} \Bbbk G$; decimos que H es un álgebra de Hopf grupo-teorética sobre G. A menos de isomorfismo, H sólo depende de las clases α y β; entonces denotamos $H = H^G_{\alpha\,\beta}(F,\Gamma)$. Recíprocamente, sea H tal que $H \sim_{\mathrm{Mor}} \Bbbk G$. Entonces $\operatorname{Rep} H \sim_{\mathrm{Mor}} \operatorname{Rep} G \sim_{\mathrm{Mor}} \operatorname{vec}_G$. O sea, $\operatorname{Rep} H$ es tensorialmente equivalente a $\operatorname{End}_{\operatorname{vec}_G}(\operatorname{vec}_{\Bbbk_\beta \Gamma}) \simeq_\otimes {}_{\Bbbk_\beta\Gamma}(\operatorname{vec}_G)_{\Bbbk_\beta\Gamma} = \mathcal{C}(G,1;\Gamma,\beta)$. Por lo tanto $H \simeq H^G_{\beta\,\alpha}(\Gamma,F)$, para algún dato grupo teorético (Γ,β,F,α).

Ahora definimos una relación de equivalencia de datos grupo-teoréticos.

Sea $\theta \in \operatorname{Aut} G$ y $\gamma \in H^2(G,\Bbbk^\times)$. Si (F,α,Γ,β) es un dato grupo-teorético para G, entonces $(\theta(F), \theta_*(\alpha\gamma_{|F}), \theta(\Gamma), \theta_*(\beta\gamma_{|\Gamma}))$ también lo es. Aquí $\theta_*(\alpha\gamma_{|F})$ es el cociclo *pushforward* , i. e. $\theta_*(\alpha\gamma_{|F})(\theta(a),\theta(b)) = \alpha(a,b)\gamma(a,b)$, para $a,b \in F$ y análogamente para $\theta_*(\beta\gamma_{|\Gamma})$. Sean DGT_G el conjunto de los datos grupo-teoréticos para G y $\operatorname{Aut} G \ltimes H^2(G,\Bbbk^\times)$ el producto semidirecto de grupos asociado al homomorfismo $\varphi : \operatorname{Aut} G \to \operatorname{Aut} H^2(G,\Bbbk^\times)$, dado por $\varphi(\theta) = \gamma \circ (\theta,\theta)$, para todo $\theta \in \operatorname{Aut} G$. O sea $\operatorname{Aut} G \ltimes H^2(G,\Bbbk^\times) = \operatorname{Aut} G \times H^2(G,\Bbbk^\times)$ con producto dado por $(\theta,\gamma)(\theta',\gamma') = (\theta\circ\theta', \varphi(\theta')(\gamma)\gamma')$, para todo $\theta,\theta' \in \operatorname{Aut} G$, $\gamma,\gamma' \in H^2(G,\Bbbk^\times)$. Entonces

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \operatorname{Aut} G \ltimes H^2(G,\Bbbk^\times) \times DGT_G & \to & DGT_G \\ & ((\theta,\gamma),(F,\alpha,\Gamma,\beta)) & \mapsto & (\theta(F), \theta_*(\alpha\gamma_{|F}), \theta(\Gamma), \theta_*(\beta\gamma_{|\Gamma})) \end{array}$$

es una acción a izquierda del grupo $\operatorname{Aut} G \ltimes H^2(G,\Bbbk^\times)$ en el conjunto de los datos grupo-teoréticos para G. De hecho,

$$(\mathrm{id},1)\cdot(F,\alpha,\Gamma,\beta) = (F,\mathrm{id}_*(\alpha),\Gamma,\mathrm{id}_*(\beta)) = (F,\alpha,\Gamma,\beta),$$

y para todo $\gamma,\gamma' \in H^2(G,\Bbbk^\times)$, $\theta,\theta' \in \operatorname{Aut} G$, tenemos por un lado

$$\begin{aligned} (\theta,\gamma)\cdot((\theta',\gamma')\cdot(F,\alpha,\Gamma,\beta)) &= (\theta,\gamma)\cdot(\theta'(F), \theta'_*(\alpha\gamma'_{|F}), \theta'(\Gamma), \theta'_*(\beta\gamma'|_\Gamma)) \\ &= (\theta(\theta'(F)), \theta_*(\theta'_*(\alpha\gamma'_{|F})\gamma|_{\theta'(F)}), \theta(\theta'(\Gamma)), \theta_*(\theta'_*(\beta\gamma'|_\Gamma)\gamma|_{\theta'(\Gamma)})); \end{aligned}$$

y por otro lado,

$$\begin{aligned} (\theta,\gamma)(\theta',\gamma')\cdot(F,\alpha,\Gamma,\beta) &= (\theta\circ\theta', \varphi(\theta')(\gamma)\gamma')\cdot(F,\alpha,\Gamma,\beta) \\ &= ((\theta\circ\theta')(F), (\theta\circ\theta')_*(\alpha(\varphi(\theta')(\gamma)\gamma')_{|F}), (\theta\circ\theta')(\Gamma), (\theta\circ\theta')_*(\beta(\varphi(\theta')(\gamma)\gamma')_{|\Gamma})). \end{aligned}$$

Para todo $a,b \in G$,

$$\begin{aligned} (\theta\circ\theta')_*(\alpha(\varphi(\theta')(\gamma)\gamma')_{|F})((\theta\circ\theta')(a),(\theta\circ\theta')(b)) &= \alpha(a,b)(\varphi(\theta')(\gamma)\gamma')(a,b) \\ &= \alpha(a,b)\gamma(\theta'(a),\theta'(b))\gamma'(a,b) \\ &= \theta'_*(\alpha\gamma'_{|F})(\theta'(a),\theta'(b))\gamma(\theta'(a),(\theta'(b)) \\ &= \theta_*(\theta'_*(\alpha\gamma'_{|F})\gamma|_{\theta'(F)})((\theta\circ\theta')(a),(\theta\circ\theta')(b)). \end{aligned}$$

Luego, la afirmación sigue. Decimos que dos datos grupo-teoréticos son *equivalentes* si ellos pertenecen a la misma órbita por esta acción.

Lema 5.1.2. *Sea (F,α,Γ,β) un dato grupo-teorético para G.*

i) Si $\theta \in \operatorname{Aut} G$ y $\gamma \in H^2(G,\Bbbk^\times)$, entonces como álgebras de Hopf

$$H^G_{\alpha\,\beta}(F,\Gamma) \simeq H^G_{\theta_*(\alpha\gamma_{|F})\,\theta_*(\beta\gamma_{|\Gamma})}(\theta(F),\theta(\Gamma)).$$

O sea, datos grupo-teoréticos equivalentes producen álgebras de Hopf isomorfas.

ii) $H^G_{\alpha\,\beta}(F,\Gamma)^* \simeq H^G_{\beta\,\alpha}(\Gamma, F)$.

iii) $H^G_{\alpha\,\beta}(F,\Gamma)$ *es coconmutativa (respectivamente, conmutativa) si y sólo si* $F \lhd G$ *es abeliano y* $\alpha \in H^2(F,\Bbbk^\times)^{\operatorname{ad} G}$ *(respectivamente,* $\Gamma \lhd G$ *es abeliano y* $\beta \in H^2(\Gamma,\Bbbk^\times)^{\operatorname{ad} G}$*). Si* $H = H^G_{\alpha\,\beta}(F,\Gamma)$ *es coconmutativa entonces* $\Bbbk G(H) \sim_{Mor} \Bbbk G$ *y todo* G' *tal que* $\Bbbk G' \sim_{Mor} \Bbbk G$ *es de esta forma.*

iv) $H^G_{\alpha\,1}(F,G)$ *es un twist de* $\Bbbk G$ *y todo twist es de esta forma.*

v) Si $F \cap \Gamma = 1$*, entonces* $H^G_{\alpha\,\beta}(F,\Gamma)$ *es una extensión abeliana de* $\Bbbk^F$ *por* $\Bbbk\Gamma$*:*

$$\Bbbk^F \hookrightarrow H^G_{\alpha\,\beta}(F,\Gamma) \twoheadrightarrow \Bbbk\Gamma.$$

Demostración. i) Sea $H = H^G_{\alpha\,\beta}(F,\Gamma)$, $\mathcal{C} = \operatorname{vec}_G$, $A = \Bbbk_\alpha F$ y $B = \Bbbk_\beta\Gamma$. Como (F,α,Γ,β) es un dato grupo-teorético, por el Teorema 3.6.8, el rango de ${}_A\mathcal{C}_B$ es uno. Entonces ${}_A\mathcal{C}_B \simeq \operatorname{vec}$ como categorías abelianas. Luego $\operatorname{End}({}_A\mathcal{C}_B) \simeq \operatorname{End}(\operatorname{vec}) \simeq_\otimes \operatorname{vec}$. De esto se sigue que la acción de ${}_A\mathcal{C}_A$ sobre ${}_A\mathcal{C}_B$ induce un funtor tensorial de ${}_A\mathcal{C}_A$ a vec, que es el funtor de fibra asociado a H. Tenemos que H es la reconstrucción Tannakiana del funtor de fibra

$$\mathcal{C}(G,1;F,\alpha) = {}_A\mathcal{C}_A \to \operatorname{End}({}_A\mathcal{C}_B).$$

Si $(\theta,\gamma) \in \operatorname{Aut} G \ltimes Z^2(G,\Bbbk^\times)$, entonces inducimos un automorfismo tensorial $(\theta_*,\gamma) : \operatorname{vec}_G \to \operatorname{vec}_G$ dado por

$$\Bbbk_g \mapsto \Bbbk_{\theta(g)}, \qquad\qquad \gamma_{\Bbbk_g,\Bbbk_h} := \gamma(g,h)\operatorname{id}_{\Bbbk_{\theta(gh)}} : \Bbbk_{\theta(g)} \otimes \Bbbk_{\theta(h)} \to \Bbbk_{\theta(gh)}.$$

Como A es un álgebra en $\mathcal{C}$, entonces $\theta_*(A) = \bigoplus_{g\in F} \Bbbk_{\theta(g)}$ es un álgebra en $\mathcal{C}$ con multiplicación $u_{\theta(g)}u_{\theta(h)} = \gamma(g,h)\alpha(g,h)u_{\theta(gh)}$. El automorfismo tensorial (θ_*,γ) induce una equivalencia tensorial $(\theta_*,\gamma) : {}_A\mathcal{C}_A \to {}_{\theta_*(A)}\mathcal{C}_{\theta_*(A)}$ tal que el siguiente diagrama de funtores tensoriales conmuta:

$$\begin{tikzcd}
{}_A\mathcal{C}_A \arrow[r] \arrow[d, "\theta_*"] & \operatorname{End}({}_A\mathcal{C}_B) \arrow[d, "\operatorname{Id}"'] \\
{}_{\theta_*(A)}\mathcal{C}_{\theta_*(A)} \arrow[r] & \operatorname{End}({}_{\theta_*(A)}\mathcal{C}_{\theta(B)}).
\end{tikzcd} \tag{5.1}$$

La reconstrucción Tannakiana de ${}_{\theta(A)}\mathcal{C}_{\theta(A)} \to \operatorname{End}({}_{\theta(A)}\mathcal{C}_{\theta(B)})$ es $H^G_{\theta_*(\alpha\gamma_{|F})\,\theta_*(\beta\gamma_{|\Gamma})}(\theta(F),\theta(\Gamma))$, entonces por formalismo Tannakiano y la conmutatividad del diagrama (5.1), las álgebras de Hopf $H^G_{\alpha\,\beta}(F,\Gamma)$ y $H^G_{\theta_*(\alpha\gamma_{|F})\,\theta_*(\beta\gamma_{|\Gamma})}(\theta(F),\theta(\Gamma))$ son isomorfas.

ii) Sea (F,α,Γ,β) un dato grupo-teorético para G. Tenemos dos categorías de fusión asociadas ${}_{\Bbbk_\alpha F}(\operatorname{vec}_G)_{\Bbbk_\alpha F}$, ${}_{\Bbbk_\beta \Gamma}(\operatorname{vec}_G)_{\Bbbk_\beta\Gamma}$ y la categoría bimódulo de rango uno ${}_{\Bbbk_\alpha F}(\operatorname{vec}_G)_{\Bbbk_\beta\Gamma}$. El álgebra de Hopf $H^G_{\alpha\,\beta}(F,\Gamma)$ (resp. $H^G_{\beta\,\alpha}(\Gamma,F)$) es por definición la reconstrucción Tannakiana de ${}_{\Bbbk_\alpha F}(\operatorname{vec}_G)_{\Bbbk_\alpha F}$ (resp. ${}_{\Bbbk_\beta \Gamma}(\operatorname{vec}_G)_{\Bbbk_\beta\Gamma}$) respecto al funtor de fibra definido por la categoría módulo a izquierda (resp. a derecha) ${}_{\Bbbk_\alpha F}(\operatorname{vec}_G)_{\Bbbk_\beta\Gamma}$. Ahora, sigue de [Y, Appendix C] que $H^G_{\alpha\,\beta}(F,\Gamma)^* \simeq H^G_{\beta\,\alpha}(\Gamma,F)$.

iii) Un álgebra de Hopf semisimple H es coconmutativa, respectivamente conmutativa, si y sólo si $\operatorname{Corep} H$, respectivamente $\operatorname{Rep} H$, es punteada, ver el Ejemplo 2.2.18. Por el Teorema 3.6.6, $\mathcal{C}(G,1;F,\alpha)$ es punteada si y sólo si F es un subgrupo abeliano normal de G y α es $\operatorname{ad} G$-invariante, lo que implica la primera afirmación. Si $H = H^G_{\alpha\,\beta}(F,\Gamma)$ es coconmutativa, entonces $H \simeq \Bbbk G(H)$ y por construcción $H \sim_{\mathrm{Mor}} \Bbbk G$, luego $\Bbbk G(H) \sim_{\mathrm{Mor}} \Bbbk G$. Recíprocamente, si G' es tal que $\Bbbk G' \sim_{\mathrm{Mor}} \Bbbk G$, entonces $\operatorname{Rep} \Bbbk G' \sim_{\mathrm{Mor}} \operatorname{vec}_G$. Luego, existen $\Gamma < G$ y $\beta \in H^2(\Gamma, \Bbbk^\times)$ tales que $\operatorname{Corep} \Bbbk^{G'} \simeq \operatorname{Rep} \Bbbk G' \simeq {}_{\Bbbk_\beta \Gamma}(\operatorname{vec}_G)_{\Bbbk_\beta \Gamma} = \mathcal{C}(G, 1; \Gamma, \beta)$. Por tanto $H^G_{\beta\, \alpha}(\Gamma, F) \simeq \Bbbk^{G'}$ y por ende, $H^G_{\alpha\, \beta}(F, \Gamma) \simeq \Bbbk G'$.

iv) La categoría de fusión

$$\operatorname{Rep} H^G_{\alpha\, 1}(F, G) \simeq \operatorname{Corep} H^G_{1\, \alpha}(G, F) \simeq \mathcal{C}(G, 1; G, 1) = {}_{\Bbbk G}(\operatorname{vec}_G)_{\Bbbk G}$$

es tensorialmente equivalente a $\operatorname{Rep} \Bbbk G$. Entonces, por el Teorema 3.1.2 $H^G_{\alpha\, 1}(F, G)$ es twist equivalente a $\Bbbk G$. Recíprocamente, si $H \simeq (\Bbbk G)^J$, entonces $\operatorname{Rep} H \simeq \operatorname{Rep} G \simeq \mathcal{C}(G, 1; G, 1)$. Luego $H \simeq H^G_{\alpha\, 1}(F, G)$ para algún $F < G$ y $\alpha \in H^2(F, \Bbbk^\times)$ no-degenerado.

v) Sea A una extensión de $\Bbbk^F$ por $\Bbbk\Gamma$ con 3-cociclo ω. Por la Observación 3.6.10, $H = H^G_{\alpha\, \beta}(\omega, F, \Gamma) \simeq (A^{J(\beta)})_\alpha$ y H es una extensión de $\Bbbk^F$ por $\Bbbk\Gamma$ con 3-cociclo ω. Dado que la extensión $\Bbbk^F \bowtie \Bbbk\Gamma$ tiene 3-cociclo 1, $H^G_{\alpha\, \beta}(F, \Gamma)$ resulta una extensión abeliana. □

Debemos calcular todos los datos grupo-teoréticos de algunos grupos específicos y entonces determinar las clases de isomorfismos de las correspondientes álgebras de Hopf grupo-teoréticas. Presentamos ahora algunos resultados auxiliares para este fin.

Observación 5.1.3. Sea $(F, \alpha, \Gamma, \beta)$ un dato grupo-teorético para G. Si $\gamma \in H^2(G, \Bbbk^\times)$, tal que $\gamma|_F = \alpha^{-1}$ entonces $(F, \alpha, \Gamma, \beta)$ y $(F, 1, \Gamma, \beta\gamma|_\Gamma)$ son equivalentes, así $H^G_{\alpha\, \beta}(F, \Gamma) \simeq H^G_{1\, \beta\gamma|_\Gamma}(F, \Gamma)$. De hecho, $(\mathrm{id}, \gamma) \cdot (F, \alpha, \Gamma, \beta) = (F, 1, \Gamma, \beta\gamma|_\Gamma)$. Lo mismo resulta con Γ en lugar de F.

Lema 5.1.4. *Sean $(F, \alpha, \Gamma, \beta)$ un dato grupo-teorético, $H = H^G_{\alpha\, \beta}(F, \Gamma)$ y $K = \{\overline{g} \in N_G(F)/F : [\alpha] = [\alpha^g]\}$. Entonces la siguiente sucesión es exacta*

$$\widehat{F} \hookrightarrow G(H) \twoheadrightarrow K\ . \tag{5.2}$$

Demostración. Dado que $G(H)$ es isomorfo al grupo de objetos invertibles en la categoría tensorial $\operatorname{Corep} H \simeq \mathcal{C}(G, 1; F, \alpha)$, la afirmación sigue del Teorema 3.6.13. □

En particular, por la definición de la acción y del cociclo dados en la Sección 3.6.1, si $\alpha = 1$, entonces $G(H) \simeq \widehat{F} \rtimes N_G(F)/F$.

Lema 5.1.5. *Sea G' un grupo finito. Sean $(F, \alpha, \Gamma, \beta)$ y $(F', \alpha', \Gamma', \beta')$ dos datos grupo-teoréticos para G y G' respectivamente. Entonces $\operatorname{Rep} H^G_{\alpha\, \beta}(F, \Gamma)$ y $\operatorname{Rep} H^{G'}_{\alpha'\, \beta'}(F', \Gamma')$ son equivalentes como categorías tensoriales si y sólo si existe una categoría $(\operatorname{vec}_G, \operatorname{vec}_{G'})$-bimódulo invertible $\mathcal{X}$ tal que*

$$\mathcal{X} \boxtimes_{\operatorname{vec}_{G'}} \mathcal{M}(\Gamma', \beta') \simeq \mathcal{M}(\Gamma, \beta) \tag{5.3}$$

como categorías vec_G-módulos a izquierda.

Demostración. Recordemos que $\operatorname{Rep} H^G_{\alpha\, \beta}(F, \Gamma) \simeq \mathcal{C}(G, 1; \Gamma, \beta)$ y $\operatorname{Rep} H^{G'}_{\alpha'\, \beta'}(F', \Gamma') \simeq \mathcal{C}(G', 1; \Gamma', \beta')$ son equivalencias tensoriales. Sabemos que $\mathcal{C}(G, 1; \Gamma, \beta) = \operatorname{End}_{\operatorname{vec}_G}(\mathcal{M}(\Gamma, \beta))$ y $\mathcal{C}(G', 1; \Gamma', \beta') = \operatorname{End}_{\operatorname{vec}'_G}(\mathcal{M}(\Gamma', \beta'))$, ver Ejemplo 2.5.6. Si $T : \operatorname{End}_{\operatorname{vec}_G}(\mathcal{M}(\Gamma, \beta)) \to \operatorname{End}_{\operatorname{vec}'_G}(\mathcal{M}(\Gamma', \beta'))$ es una equivalencia tensorial, entonces por la Proposición 2.6.9, $\mathcal{X} = \operatorname{Fun}_{\operatorname{End}_{\operatorname{vec}_{G'}}(\mathcal{M}(\Gamma', \beta'))}(\mathcal{M}(\Gamma', \beta'), \mathcal{M}(\Gamma, \beta)^T)$ es una categoría $(\operatorname{vec}_G, \operatorname{vec}_{G'})$-bimódulo invertible. Por la Observación 2.6.8, vale (5.3). Recíprocamente, si $\mathcal{X}$ es una categoría $(\operatorname{vec}_G, \operatorname{vec}_{G'})$-bimódulo invertible tal que (5.3) es una equivalencia de categorías vec_G-módulos a izquierda, entonces por la Observación 2.6.8, existe una equivalencia tensorial entre $\operatorname{End}_{\operatorname{vec}_G}(\mathcal{M}(\Gamma, \beta))$ y $\operatorname{End}_{\operatorname{vec}_{G'}}(\mathcal{M}(\Gamma', \beta'))$. □

5.2. Álgebras de Hopf grupo-teoréticas sobre $C_3 \rtimes C_6$

El grupo $\mathbb{S}_3$ tiene un módulo de Yetter-Drinfeld V con $\dim \mathfrak{B}(V) = 12$ [MS], pero no hay álgebras de Hopf grupo-teoréticas sobre $\mathbb{S}_3$ no triviales. En efecto, la clasificación de las álgebras de Hopf de dimensión $6 = |\mathbb{S}_3|$ es conocida: $\Bbbk C_6$, $\Bbbk\mathbb{S}_3$ y $\Bbbk^{\mathbb{S}_3}$. Por la Observación 3.6.2, $\Bbbk\mathbb{S}_3$ no es Morita-equivalente a $\Bbbk C_6$. Por el Ejemplo 3.6.3, $\Bbbk^{\mathbb{S}_3} \sim_{\text{Mor}} \Bbbk\mathbb{S}_3$. Por lo tanto las únicas álgebras de Hopf grupo-teoréticas sobre $\mathbb{S}_3$ son $\Bbbk\mathbb{S}_3$ y $\Bbbk^{\mathbb{S}_3}$.

Sin embargo el espacio vectorial trenzado V puede ser realizado como un módulo de Yetter-Drinfeld sobre $G_m = C_3 \rtimes C_{2m}$, $m \in \mathbb{N}$, ver Proposición 2.4.12. El menor grupo donde hay ejemplos no triviales es $G = C_3 \rtimes C_6$. Recordamos que la clasificación de las álgebras de Hopf semisimples de dimensión 18 es conocida [Ma2].

Sea $\xi \in \mathbb{G}_3$, $L = C_2 = \langle x \rangle$, $N = C_3 \times C_3 = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$. El álgebra de Hopf $A_{18,\xi}$, definida en [Ma2, 1.2], es la extensión abeliana asociada al par de grupos apareados $(L, N, \triangleright, \triangleleft)$ donde $\triangleright : N \times L \to L$ es trivial, $\triangleleft : N \times L \to N$ es dada por $a^i b^j \triangleleft x = a^i b^{-j}$ y cociclos $\sigma : L \times L \to (\Bbbk^N)^\times$ trivial y $\tau : N \times N \to (\Bbbk^L)^\times$ dado por $\tau(a^i b^j, a^r b^s) = \delta_1 + \xi^{jr} \delta_x$. En consecuencia, $G = C_3 \rtimes C_6 = \langle x, a, b \rangle$. Además, $A_{18,\xi} \simeq A_{18,\eta} \iff |\xi| = |\eta|$ [Ma2, 1.5].

Proposición 5.2.1. *Las álgebras de Hopf grupo-teoréticas sobre G no triviales son $A_{18,\xi}$ y $(A_{18,\xi})^*$, $\xi \in \mathbb{G}_3'$.*

Demostración. Dado que $|G| = 2 \times 3^2$, el único subgrupo no trivial con un 2-cociclo no-degenerado es $N \simeq C_3 \times C_3$. Sea $M = \langle x, b \rangle \simeq \mathbb{S}_3$. Sea $(F, \alpha, \Gamma, \beta)$ un dato grupo-teorético para G; entonces $F \cap \Gamma$ es 1 o N.

Caso 1. $F \cap \Gamma = 1$. A menos de conjugación, (F, Γ) o (Γ, F) es uno de los siguientes pares

$$(L, N) \quad (5.4) \qquad (\langle a \rangle, M) \quad (5.6) \qquad (\langle ab \rangle, \langle x, a \rangle) \quad (5.8)$$
$$(\langle b \rangle, \langle x, a \rangle) \quad (5.5) \qquad (\langle ab \rangle, M) \quad (5.7)$$

Si (F, Γ) es como en (5.5), (5.6), $F \triangleleft G$ entonces $H^G_{\alpha\beta}(F, \Gamma)$ es coconmutativa, cf. Lema 5.1.2 iii). Si (F, Γ) es como en (5.7), $F \ntriangleleft G$ y Γ no es abeliano, por tanto $H = H^G_{\alpha\beta}(F, \Gamma)$ es no trivial. Además como $H^2(C_3, \Bbbk^\times) = 1 = H^2(\mathbb{S}_3, \Bbbk^\times)$, por el Lema 5.1.4, $G(H) \simeq C_3 \rtimes (C_3 \times C_3)/C_3 \simeq C_3 \rtimes C_3$; y una vez que $[F, N_G(F)] = 1$, $G(H) \simeq C_3 \times C_3$. Ahora, $G(H^*) \simeq \widehat{\mathbb{S}_3} \rtimes G/\mathbb{S}_3 \simeq C_2 \rtimes C_3 = C_2 \times C_3 = C_6$.

Si (F, Γ) es como en (5.8), $F, \Gamma \ntriangleleft G$, por tanto $H = H^G_{\alpha\beta}(F, \Gamma)$ es no trivial. Análogamente al caso anterior, $G(H) \simeq C_3 \times C_3$. Además $G(H^*) \simeq C_6 \rtimes C_6/C_6 \simeq C_6$.

Si (F, Γ) es como en (5.4), $F \ntriangleleft G$, $H^2(N, \Bbbk^\times) \simeq C_3$ y $H^2(N, \Bbbk^\times)^{\operatorname{ad} G} = 1$, entonces $H = H^G_{1\beta}(G, N)$, $\beta \neq 1$, es no trivial. Además, estos cociclos dan lugar a álgebras de Hopf isomorfas. Tenemos que $G(H) \simeq C_2 \rtimes C_6/C_2 \simeq C_2 \times C_3 = C_6$. Para calcular $G(H^*)$, vemos que $K = \{\bar{g} \in N_G(N)/N : [\gamma] = [\gamma^g], \forall \gamma \in H^2(N, \Bbbk^\times)\} = 1$. Luego $G(H^*) \simeq C_3 \times C_3$.

Caso 2. $F \cap \Gamma = N$, por lo que (F, Γ) es (N, G) –denotado por (5.9)– o (G, N). Dado que $H^2(N, \Bbbk^\times) \simeq C_3$ y $H^2(N, \Bbbk^\times)^{\operatorname{ad} G} = 1$, $H = H^G_{\beta 1}(N, G)$, $\beta \neq 1$, es no-trivial. Además, estos cociclos dan lugar a álgebras de Hopf isomorfas. Tenemos que $G(H^*) \simeq \widehat{G} \simeq C_6$. De hecho, la abelianización de G, $G^{\text{ab}} \simeq (C_3^{\text{ab}})_{C_6} \times C_6^{\text{ab}} \simeq C_3/\{(h \cdot n)n^{-1} : n \in C_3, h \in C_6\} \times C_6 \simeq C/C_3 \times C_6 \simeq C_6$, una vez que la acción de C_6 en C_3 no es trivial. Para el cálculo de $G(H)$, análogamente al caso anterior $K = 1$, luego $G(H) \simeq C_3 \times C_3$.

Luego tenemos las siguientes posibilidades:

$\#$	F	α	Γ	β	$G(H)$	$G(H^*)$
(5.4)	$L \simeq C_2$	1	$N \simeq C_3 \times C_3$	$\neq 1$	C_6	$C_3 \times C_3$
(5.7)	$\langle ab \rangle \simeq C_3$	1	$M \simeq \mathbb{S}_3$	1	$C_3 \times C_3$	C_6
(5.8)	$\langle ab \rangle$	1	$\langle x, a \rangle \simeq C_6$	1	$C_3 \times C_3$	C_6
(5.9)	N	$\neq 1$	G	1	$C_3 \times C_3$	C_6

Por [Ma2, 2.3, 2.5], dado que $|G(H)| = 9$, $(5.4)^* \simeq (5.7) \simeq (5.8) \simeq (5.9) \simeq A_{18,\xi}$; dado que $|G(H)| = 6$, $(5.4) \simeq (5.7)^* \simeq (5.8)^* \simeq (5.9)^* \simeq (A_{18,\xi})^*$. $\square$

Por lo tanto $A_{18,\xi} \simeq (5.9)$ es un twist de $\Bbbk G$. Recordamos que levantamientos de $\mathfrak{B}(V)\#\Bbbk G$, donde V es como antes, son clasificados (y hay no triviales) [GIV].

Proposición 5.2.2. *Las álgebras de Hopf $A_{18,\xi}$ y $(A_{18,\xi})^*$ tienen un módulo de Yetter-Drinfeld no nulo V con $\dim \mathfrak{B}(V) < \infty$. Bosonizando, obtenemos nuevas álgebras de Hopf con la propiedad de Chevalley dual de dimensión 216.*

La clasificación de todos los levantamientos de $\mathfrak{B}(V)\#A_{18,\xi}$ sigue de [GIV] (y hay no triviales). $\square$

Observación 5.2.3. Vimos en la prueba de la Proposición 5.2.1 que si (F, Γ) es como en (5.5) o (5.6), entonces H es coconmutativa. Calculando $G(H)$, tenemos que $G(H) \simeq G$. Luego por el Lema 5.1.2 iii), no existe un grupo $G' \not\simeq G$ con $\Bbbk G' \sim_{\mathrm{Mor}} \Bbbk G$.

5.3. Álgebras de Hopf grupo-teoréticas sobre $C_5 \rtimes_2 C_{20}$

El grupo $G = C_5 \rtimes_2 C_4$ tiene dos módulos Yetter-Drinfeld V_j, $j = 2, 3$, con $\dim \mathfrak{B}(V_j) = 1280$ [AG]; V_j es un espacio vectorial trenzado con pecio $\mathsf{Q}_{5,j}$ y cociclo -1, y $V_2 \simeq V_3^*$ en ${}^{\Bbbk G}_{\Bbbk G}\mathcal{YD}$. Pero un álgebra de Hopf grupo-teorética sobre $C_5 \rtimes_2 C_4 \simeq C_5 \rtimes_3 C_4$ es trivial. En efecto, un subgrupo no trivial de $C_5 \rtimes_2 C_4$ no admite un 2-cociclo no-degenerado, (alternativamente, no existen álgebras de Hopf triangulares no triviales de dimensión 20 [Ge, N5]). Por lo tanto tales álgebras de Hopf grupo-teoréticas deben ser extensiones abelianas, y éstas son triviales.

Sin embargo, el espacio vectorial trenzado V_j, $j = 2$ o 3, puede ser realizado como módulo de Yetter-Drinfeld sobre $C_5 \rtimes_2 C_{4m} \simeq C_5 \rtimes_3 C_{4m}$, $m \in \mathbb{N}$, ver Proposición 2.4.12. El menor grupo donde hay ejemplos no triviales es $G = C_5 \rtimes_2 C_{20}$.

Proposición 5.3.1. *Las álgebras de Hopf grupo-teoréticas sobre $G = C_5 \rtimes_2 C_{20}$ no triviales están dadas por los datos grupo-teoréticos en la Tabla 5.3.*

Pregunta 11. *¿Es cierto que 5.3.a $\simeq$ 5.3.d $\simeq$ 5.3.f $\simeq$ 5.3.h?*

Demostración. Sea $G = \langle a, b, x \rangle$, donde $|a| = |b| = 5$, $|x| = 4$, a es central y $xbx^{-1} = b^2$. Entonces $N = \langle a, b \rangle \simeq C_5 \times C_5$ es un 5-subgrupo de Sylow normal. Dado que G no tiene ningún subgrupo isomorfo a $C_2 \times C_2$, el único subgrupo no trivial con un 2-cociclo no-degenerado es N. Sea $(F, \alpha, \Gamma, \beta)$ un dato grupo-teorético para G; entonces $F \cap \Gamma$ es 1 o N.

Tabla 5.3: Datos grupo-teoréticos para $C_5 \rtimes_2 C_{20}$

#	F	α	Γ	β	$G(H)$
5.3.a	$\langle x\rangle \simeq C_4$	1	$N \simeq C_5 \times C_5$	$\neq 1$	C_{20}
5.3.b	N	$\neq 1$	$\langle x\rangle$	1	$C_5 \times C_5$
5.3.c	$\langle ab\rangle \simeq C_5$	1	$\langle b, x\rangle \simeq C_5 \rtimes C_4$	1	$C_5 \times C_5$
5.3.d	$\langle b, x\rangle$	1	$\langle ab\rangle$	1	C_{20}
5.3.e	$\langle ab\rangle \simeq C_5$	1	$\langle x^3a^2\rangle \simeq C_{20}$	1	$C_5 \times C_5$
5.3.f	$\langle x^3a^2\rangle$	1	$\langle ab\rangle$	1	C_{20}
5.3.g	$N \simeq C_5 \times C_5$	$\neq 1$	G	1	$C_5 \times C_5$
5.3.h	G	1	N	$\neq 1$	C_{20}

Caso 1. $F \cap \Gamma = 1$. A menos de conjugación, (F, Γ) o (Γ, F) es uno de los siguientes pares

$$(\langle x\rangle, N) \quad (5.10) \qquad (\langle a\rangle, \langle b, x\rangle) \quad (5.12) \qquad (\langle ab\rangle, \langle x^3a^2\rangle). \quad (5.14)$$
$$(\langle b\rangle, \langle x^3a^2\rangle) \quad (5.11) \qquad (\langle ab\rangle, \langle b, x\rangle) \quad (5.13)$$

Si (F, Γ) es como en (5.10), $F \ntriangleleft G$, $H^2(F, \Bbbk^\times) = 1$, $H^2(\Gamma, \Bbbk^\times)^{\operatorname{ad} G} = 1$ y $H^2(\Gamma, \Bbbk^\times) \simeq C_5$, entonces $H = H^G_{1\beta}(F, \Gamma)$, $\beta \neq 1$, es no trivial. Más aún, estos cociclos dan lugar a álgebras de Hopf isomorfas, denotada 5.3.a. Por el Lema 5.1.4, $G(H) \simeq C_4 \rtimes C_{20}/C_4 \simeq C_4 \times C_5 = C_{20}$ pues $C_5 \to \operatorname{Aut} C_4 \simeq C_2$ debe ser el homomorfismo trivial. Para calcular $G(H^*)$, notemos que $K = 1$, luego $G(H^*) \simeq C_5 \times C_5$.

Si (F, Γ) es como en (5.11), (5.12), $F \triangleleft G$ por lo tanto $H^G_{\alpha\,\beta}(F, \Gamma)$ es coconmutativa, cf. Lema 5.1.2 iii). Si (F, Γ) es como en (5.13), $F \ntriangleleft G$, $H^2(F, \Bbbk^\times) = 1 = H^2(\Gamma, \Bbbk^\times)$ y Γ es no abeliano, entonces $H = H^G_{1\,1}(F, \Gamma)$ es no trivial, dando 5.3.c. Por el Lema 5.1.4, $G(H) \simeq C_5 \rtimes (C_5 \times C_5)/C_5 \simeq C_5 \times C_5$ pues $\varphi : C_5 \to \operatorname{Aut} C_5 \simeq C_4$ debe ser el homomorfismo trivial.

Si (F, Γ) es como en (5.14), $F, \Gamma \ntriangleleft G$, $H^2(F, \Bbbk^\times) = 1 = H^2(\Gamma, \Bbbk^\times)$, entonces $H = H^G_{1\,1}(F, \Gamma)$ es no trivial, por tanto 5.3.e. Como F es el mismo que el caso anterior, $G(H) \simeq C_5 \times C_5$. Por el Lema 5.1.4, $G(H^*) \simeq C_{20} \rtimes C_{20}/C_{20} \simeq C_{20}$.

Caso 2. $F \cap \Gamma = N$. A menos de conjugación, (F, Γ) es (N, G) o (G, N). Dado que $H^2(N, \Bbbk^\times)^{\operatorname{ad} G} = 1$ y $H^2(N, \Bbbk^\times) \simeq C_5$, $H = H^G_{\beta\,1}(N, G)$, $\beta \neq 1$, es no trivial. Más aún, estos cociclos dan lugar a álgebras de Hopf isomorfas, i. e. 5.3.g. Por el Lema 5.1.4, tenemos que $K = 1$ y $G(H) \simeq C_5 \times C_5$; $G(H^*) \simeq \widehat{G} \simeq C_{20}$. □

Observamos que 5.3.g es un twist de $\Bbbk G$. Recordamos que levantamientos de $\mathfrak{B}(V)\#\Bbbk G$, donde V es como antes, están clasificados (y hay no triviales) [GIV].

Proposición 5.3.2. *Las álgebras de Hopf de la Tabla 5.3 tienen dos módulos de Yetter-Drinfeld no nulos duales V con* $\dim \mathfrak{B}(V) = 1280$. *Bosonizando, obtenemos nuevas álgebras de Hopf con la propiedad de Chevalley dual de dimensión 128000.*

Sea H el álgebra de Hopf correspondiente a 5.3.g. La clasificación de todos los levantamientos de $\mathfrak{B}(V)\#H$ sigue de [GIV] (y hay no triviales). □

Observación 5.3.3. Vimos en la prueba de la Proposición 5.3.1 que si (F, Γ) es como en (5.11) o (5.12), entonces H es coconmutativa. Calculando $G(H)$, tenemos que $G(H) \simeq G$. Luego por el

Lema 5.1.2 iii), no existe un grupo $G' \not\simeq G$ con $\Bbbk G' \sim_{\text{Mor}} \Bbbk G$.

5.4. Álgebras de Hopf grupo-teoréticas sobre $\mathbb{S}_4$

La clasificación de las álgebras de Hopf punteadas de dimensión finita sobre $\mathbb{S}_4$ se completó en [GG]; hay exactamente tres módulos de Yetter-Drinfeld no nulos sobre $\Bbbk\mathbb{S}_4$ cuya álgebra de Nichols es de dimensión finita y todos admiten deformaciones no triviales. El pecio subyacente y el cociclo son $(\mathcal{O}_2^4, -1)$, $(\mathcal{O}_2^4, \chi)$ o $(\mathcal{O}_4^4, -1)$. Aquí nos ocupamos de las álgebras de Hopf grupo-teoréticas sobre $G = \mathbb{S}_4$; dado que $\operatorname{Out}\mathbb{S}_4 = 1$, necesitamos describir todos los datos grupo-teoréticos para G a menos de conjugación, cf. Lema 5.1.2 i).

Proposición 5.4.1. *La clasificación de las álgebras de Hopf grupo-teoréticas sobre $\mathbb{S}_4$ no triviales está dada por los datos grupo-teoréticos en la Tabla 5.4.*

Tabla 5.4: Datos grupo-teoréticos para $\mathbb{S}_4$

#	F	α	Γ	β	$G(H)$
5.4.a	$\langle(34),(13)(24)\rangle \simeq D_4$	1	$\langle(243)\rangle \simeq C_3$	1	$C_2 \times C_2$
5.4.b	$\langle(243)\rangle \simeq C_3$	1	$\langle(34),(13)(24)\rangle \simeq D_4$	1	$\mathbb{S}_3$
5.4.c	$\langle(12),(34)\rangle \simeq C_2 \times C_2$	$\neq 1$	$\mathbb{S}_4$	1	D_4
5.4.d	$\mathbb{S}_4$	1	$\langle(12),(34)\rangle$	$\neq 1$	C_2

Demostración. Dado que $|\mathbb{S}_4| = 2^3 \times 3$, todo subgrupo no trivial que admite un 2-cociclo no degenerado es isomorfo a $C_2 \times C_2$. Sea $(F, \alpha, \Gamma, \beta)$ un dato grupo-teorético para $\mathbb{S}_4$; entonces $F \cap \Gamma$ es trivial o isomorfo a $C_2 \times C_2$.

Caso 1. $F \cap \Gamma = 1$, i. e. (F, Γ) es una factorización exacta. A menos de conjugación, (F, Γ) o (Γ, F) es uno de los pares

$$(\langle(34)\rangle, \langle(13)(24), (243)\rangle) \simeq (C_2, \mathbb{A}_4) \tag{5.15}$$

$$(\langle(243)\rangle, \langle(34), (13)(24)\rangle) \simeq (C_3, D_4), \tag{5.16}$$

$$(\langle(1324)\rangle, \langle(34), (243)\rangle) \simeq (C_4, \mathbb{S}_3), \tag{5.17}$$

$$(\langle(14)(23), (13)(24)\rangle, \langle(34), (243)\rangle) \simeq (C_2 \times C_2, \mathbb{S}_3). \tag{5.18}$$

Si (F, Γ) es como en (5.18), $\langle(14)(23), (13)(24)\rangle \lhd \mathbb{S}_4$ entonces $H_{\alpha\,\beta}^{\mathbb{S}_4}(F, \Gamma)$ es coconmutativa. Si (F, Γ) es cualquiera de los otros casos, F no es normal en $\mathbb{S}_4$, $\mathbb{A}_4$ no es abeliano y los otros Γ no son normales, por lo tanto $H_{\alpha\,\beta}^{\mathbb{S}_4}(F, \Gamma)$ es no trivial, cf. Lema 5.1.2 iii). Además, si (F, Γ) es como en (5.15) o (5.16), $H^2(F, \Bbbk^\times) = 1$ y la función restricción $\operatorname{Res} : H^2(\mathbb{S}_4, \Bbbk^\times) \to H^2(\Gamma, \Bbbk^\times)$ es suryectiva, entonces por la Observación 5.1.3 $H_{\alpha\,\beta}^{\mathbb{S}_4}(F, \Gamma) \simeq H_{1\,1}^{\mathbb{S}_4}(F, \Gamma)$. Si (F, Γ) es como en (5.17), $H^2(F, \Bbbk^\times) = 1 = H^2(\Gamma, \Bbbk^\times)$, entonces el álgebra de Hopf asociada es $H_{1\,1}^{\mathbb{S}_4}(F, \Gamma)$.

Caso 2. $F \cap \Gamma \simeq C_2 \times C_2$. A menos de conjugación, (F, Γ) o (Γ, F) es uno de los pares

$$(\langle(12), (34)\rangle, G) \simeq (C_2 \times C_2, \mathbb{S}_4) \tag{5.19}$$

$$(\langle(14)(23), (13)(24)\rangle, G) \simeq (C_2 \times C_2, \mathbb{S}_4) \tag{5.20}$$

$$(\langle(14)(23), (34)\rangle, \langle(13)(24), (243)\rangle) \simeq (D_4, \mathbb{A}_4). \tag{5.21}$$

Si (F,Γ) es como en (5.20), $H = H^{\mathbb{S}_4}_{\alpha\,1}(F,\mathbb{S}_4)$ es coconmutativa por el Lema 5.1.2 iii); pero si es como en (5.19), entonces H (un twist de $\Bbbk\mathbb{S}_4$) es no trivial dado que $F \ntrianglelefteq \mathbb{S}_4$. Ahora supongamos que (F,Γ) es como en (5.21). Si $\alpha \in H^2(D_4,\Bbbk^\times) \simeq C_2 \simeq H^2(\mathbb{A}_4,\Bbbk^\times) \ni \beta$, entonces $\alpha_{|F\cap\Gamma} \cdot \beta_{|F\cap\Gamma}{}^{-1} \neq 1$ sii $\alpha \neq 1$ y $\beta = 1$, o viceversa. Por el Lema 5.1.2 iii), $H^{\mathbb{S}_4}_{\alpha\,1}(F,\Gamma)$ y $H^{\mathbb{S}_4}_{1\,\beta}(F,\Gamma)$ son no triviales, dado que F y $\mathbb{A}_4$ no son abelianos. Por la Observación 5.1.3, $H^{\mathbb{S}_4}_{\alpha\,1}(F,\Gamma) \simeq H^{\mathbb{S}_4}_{1\,\beta}(F,\Gamma)$.

Si (Γ,F) es cualquiera de lo casos (5.15), ..., (5.21) arriba, entonces $H^{\mathbb{S}_4}_{\beta\,\alpha}(\Gamma,F)$ es dual a $H = H^{\mathbb{S}_4}_{\alpha\,\beta}(F,\Gamma)$ por el Lema 5.1.2 ii). En conclusión, tenemos las siguientes álgebras de Hopf no triviales (por abuso de notación):

$$
\begin{aligned}
&(5.15): H^{\mathbb{S}_4}_{1\,1}(C_2,\mathbb{A}_4), && (5.15)^*: H^{\mathbb{S}_4}_{1\,1}(\mathbb{A}_4,C_2);\\
&(5.16): H^{\mathbb{S}_4}_{1\,1}(C_3,D_4), && (5.16)^*: H^{\mathbb{S}_4}_{1\,1}(D_4,C_3);\\
&(5.17): H^{\mathbb{S}_4}_{1\,1}(C_4,\mathbb{S}_3), && (5.17)^*: H^{\mathbb{S}_4}_{1\,1}(\mathbb{S}_3,C_4);\\
&(5.19): H^{\mathbb{S}_4}_{\alpha\,1}(C_2\times C_2,\mathbb{S}_4), && (5.19)^*: H^{\mathbb{S}_4}_{1\,\beta}(\mathbb{S}_4,C_2\times C_2);\\
&(5.21): H^{\mathbb{S}_4}_{1\,\beta}(D_4,\mathbb{A}_4), && (5.21)^*: H^{\mathbb{S}_4}_{\alpha\,1}(\mathbb{A}_4,D_4).
\end{aligned}
$$

Por el Lema 5.4.2 ii), $\operatorname{Rep} H^{\mathbb{S}_4}_{1\,1}(C_2,\mathbb{A}_4) = \mathcal{C}(\mathbb{S}_4,1;\mathbb{A}_4,1) \simeq \operatorname{Rep} H^{\mathbb{S}_4}_{1\,1}(D_4,C_3) = \mathcal{C}(\mathbb{S}_4,1;C_3,1)$ $\simeq \operatorname{Rep} H^{\mathbb{S}_4}_{1\,\beta}(D_4,\mathbb{A}_4) = \mathcal{C}(\mathbb{S}_4,1;\mathbb{A}_4,\beta)$. Por el Teorema 3.1.2, las álgebras de Hopf (5.15), (5.16)* y (5.21) son twist-equivalentes. Por el Teorema 3.6.8, los funtores de fibra de $\mathcal{C}(\mathbb{S}_4,1;\langle(234)\rangle,1)$ están clasificados por pares (Γ_1,β_1) tales que $G = \langle(234)\rangle\Gamma_1$ y $\beta_1^{-1}|_{C_3\cap\Gamma_1}$ es no degenerado. Vimos que hay una única factorización donde aparece el subgrupo $\langle(234)\rangle$, que es (5.16), o sea, $\mathcal{C}(\mathbb{S}_4,1;\langle(234)\rangle,1)$ admite un único funtor de fibra. Entonces las álgebras de Hopf (5.15), (5.16)* y (5.21) son isomorfas–esto nos da 5.4.a, con dual 5.4.b. Por el Lema 5.1.4, $G(H) \simeq C_2 \rtimes (C_2\times C_2)/C_2 \simeq C_2\times C_2$ y $G(H^*) \simeq \widehat{\mathbb{A}_4} \rtimes \mathbb{S}_4/\mathbb{A}_4 \simeq C_3 \rtimes C_2 \simeq \mathbb{S}_3$; aquí sabemos que la acción es no trivial usando el GAP(ver Apéndice, Programa 6).

Por el Lema 5.4.2 i), $\operatorname{Rep} H^{\mathbb{S}_4}_{1\,1}(C_4,\langle(34),(243)\rangle) = \mathcal{C}(\mathbb{S}_4,1;\langle(34),(243)\rangle,1) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{S}_4,1;\mathbb{S}_4,1)$ $= \operatorname{Rep} H^{\mathbb{S}_4}_{\alpha\,1}(C_2\times C_2,\mathbb{S}_4)$. Por el Teorema 3.1.2, las álgebras de Hopf (5.17) y (5.19) son twist-equivalentes. Pero vimos anteriormente que $\Bbbk\mathbb{S}_4$ admite un único twist no trivial, por lo tanto las álgebras de Hopf (5.17) y (5.19) son isomorfas–esto nos da 5.4.c, con dual 5.4.d. Por el Lema 5.1.4, $G(H) \simeq C_4 \rtimes D_4/C_4 \simeq C_4 \rtimes C_2 \simeq D_4$; sabemos que la acción es no trivial usando el GAP (ver Apéndice, Programa 6). Además $G(H^*) \simeq \widehat{\mathbb{S}_3} \rtimes \mathbb{S}_3/\mathbb{S}_3 \simeq C_2$. Observando los varios $G(H)$, podemos concluir que las álgebras de Hopf en la Tabla 5.4 no son isomorfas. □

Lema 5.4.2. *i)* $\mathcal{C}(\mathbb{S}_4,1;\langle(34),(243)\rangle,1) \simeq_\otimes \mathcal{C}(\mathbb{S}_4,1;\mathbb{S}_4,\alpha) \simeq_\otimes \operatorname{Rep}\mathbb{S}_4$*,* $\alpha \in H^2(\mathbb{S}_4,\Bbbk^\times)$*.*

ii) $\mathcal{C}(\mathbb{S}_4,1;\langle(234)\rangle,1) \simeq_\otimes \mathcal{C}(\mathbb{S}_4,1;\mathbb{A}_4,\beta)$*, donde* $\beta \in H^2(\mathbb{A}_4,\Bbbk^\times)$*.*

Demostración. i) Por el Lema 5.1.5, basta ver que existe una categoría $\operatorname{vec}_{\mathbb{S}_4}$-bimódulo invertible $\mathcal{X}$ tal que

$$\mathcal{X} \boxtimes_{\operatorname{vec}_{\mathbb{S}_4}} \mathcal{M}(\langle(34),(243)\rangle,1) \simeq \mathcal{M}(\mathbb{S}_4,\alpha),$$

dado que $\mathcal{C}(\mathbb{S}_4,1;\mathbb{S}_4,\alpha) \simeq_\otimes \operatorname{Rep}\mathbb{S}_4$ para todo $\alpha \in H^2(\mathbb{S}_4,\Bbbk^\times)$. Por la Observación 2.6.10 i), sea $\mathcal{X}$ una categoría bimódulo invertible tal que como categoría $\operatorname{vec}_{\mathbb{S}_4}$-módulo a derecha $\mathcal{X} = \mathcal{M}(N,\tau)$, donde N es el subgrupo de Klein normal de $\mathbb{S}_4$, $\tau \in H^2(N,\Bbbk^\times)$. Como $(F,\Gamma) = (N,\langle(34),(243)\rangle)$ es una factorización exacta de $\mathbb{S}_4$, hay solamente un elemento en $F\backslash G/\Gamma$. El elemento (F,Γ) es un representante, $g \in \operatorname{Stab}_G(F,\Gamma) \Leftrightarrow (F,\Gamma) = g\cdot(F,\Gamma) = (Fg^{-1},g\Gamma) \Leftrightarrow g \in F\cap\Gamma = 1$. Luego, el estabilizador es trivial y por la Observación 2.6.10 ii), el rango de $\mathcal{M}(N,\tau)\boxtimes_{\mathrm{vec}_{\mathbb{S}_4}}\mathcal{M}(\langle(34),(243)\rangle,1)$ es uno (luego es indescomponible).

Las categorías $\mathrm{vec}_{\mathbb{S}_4}$-módulo indescomponibles $\mathcal{M}(\mathbb{S}_4,\alpha)$ tienen rango $[\mathbb{S}_4 : \mathbb{S}_4] = 1$, por el Ejemplo 2.5.6. Además vimos en este mismo ejemplo que si $\mathcal{M}$ es una categoría $\mathrm{vec}_{\mathbb{S}_4}$-módulo indescomponible, entonces $\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}(F,\eta)$, $\eta \in H^2(\mathbb{S}_4,\Bbbk^\times)$, $F < \mathbb{S}_4$. Y si $\mathcal{M}$ tiene rango 1, debemos tener que $[\mathbb{S}_4 : F] = 1$. Luego $\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}(\mathbb{S}_4,\eta)$, $\eta \in H^2(\mathbb{S}_4,\Bbbk^\times)$. O sea, las categorías $\mathrm{vec}_{\mathbb{S}_4}$-módulo indescomponibles de rango 1 son caracterizadas por $\mathcal{M}(\mathbb{S}_4,\alpha)$, $\alpha \in H^2(\mathbb{S}_4,\Bbbk^\times)$. Por lo tanto, $\mathcal{X} \boxtimes_{\mathrm{vec}_{\mathbb{S}_4}} \mathcal{M}(\langle(34),(243)\rangle,1) \simeq \mathcal{M}(\mathbb{S}_4,\alpha)$.

ii) Nuevamente, por el Lema 5.1.5, basta ver que existe una categoría $\mathrm{vec}_{\mathbb{S}_4}$-bimódulo invertible $\mathcal{X}$ tal que $\mathcal{X} \boxtimes_{\mathrm{vec}_{\mathbb{S}_4}} \mathcal{M}(\langle(234)\rangle,\alpha) \simeq \mathcal{M}(\mathbb{A}_4,\beta)$. Por la Observación 2.6.10 i), sea $\mathcal{X}$ una categoría bimódulo invertible tal que como categoría $\mathrm{vec}_{\mathbb{S}_4}$-módulo a derecha $\mathcal{X} = \mathcal{M}(N,\alpha)$, donde N es el subgrupo de Klein normal de $\mathbb{S}_4$. Como $\langle(234)\rangle\backslash G/N = \{\langle(234)\rangle N, \langle(234)\rangle(14)N\}$ y el estabilizador de cada elemento es trivial, por la Observación 2.6.10 ii) el rango de $\mathcal{M}(N,\alpha)\boxtimes_{\mathrm{vec}_{\mathbb{S}_4}}\mathcal{M}(\langle(234)\rangle,1)$ es dos. Como $\mathcal{M}(N,\alpha)$ es invertible y $\mathcal{M}(\langle(234)\rangle,1)$ es indescomponible, entonces la categoría $\mathcal{M}(N,\alpha)\boxtimes_{\mathrm{vec}_{\mathbb{S}_4}}\mathcal{M}(\langle(234)\rangle,1)$ es indescomponible.

Por el Ejemplo 2.5.6, las categorías módulo $\mathcal{M}(\mathbb{A}_4,\beta)$ tienen rango $[\mathbb{S}_4 : \mathbb{A}_4] = 2$, y todas las categorías $\mathrm{vec}_{\mathbb{S}_4}$-módulo de rango dos son de la forma $\mathcal{M}(\mathbb{A}_4,\beta)$, pues $\mathbb{A}_4$ es el único subgrupo de índice 2. Luego, $\mathcal{X} \boxtimes_{\mathrm{vec}_{\mathbb{S}_4}} \mathcal{M}(\langle(234)\rangle,\alpha) \simeq \mathcal{M}(\mathbb{A}_4,\beta)$. □

Proposición 5.4.3. (1) *Las álgebras de Hopf grupo-teoréticas en la Tabla 5.4 tienen exactamente tres módulos de Yetter-Drinfeld no nulos cuyas álgebras de Nichols son de dimensión finita. Bosonizando, obtenemos nuevas álgebras de Hopf con la propiedad de Chevalley dual de dimensión 13824.*

(2) *Las álgebras de Hopf de dimensión finita con corradical isomorfo al álgebra de Hopf grupo-teorética 5.4.c están clasificadas como las álgebras de Hopf punteadas sobre $\mathbb{S}_4$, ver [GG].* □

Observación 5.4.4. Vimos en la prueba de la Proposición 5.4.1 que si (F,Γ) es como en (5.18) o (5.20), entonces H es coconmutativa. Calculando $G(H)$, tenemos que $G(H) \simeq G$. Luego por el Lema 5.1.2 iii), no existe un grupo $G' \not\simeq G$ con $\Bbbk G' \sim_{\mathrm{Mor}} \Bbbk G$.

5.5. Álgebras de Hopf grupo-teoréticas sobre $\mathbb{S}_5$

La clasificación de las álgebras de Nichols de dimensión finita sobre $\mathbb{S}_5$ no es conocida; hay dos módulos de Yetter-Drinfeld no nulos sobre $\Bbbk\mathbb{S}_5$ con álgebra de Nichols de dimensión finita [FK, G1, GG] y un caso abierto [AFGV]. El pecio subyacente y cociclos son $(\mathcal{O}_2^5, -1)$ o $(\mathcal{O}_2^5, \chi)$. Aquí nos ocupamos de las álgebras de Hopf grupo-teoréticas sobre $G = \mathbb{S}_5$, a menos de conjugación porque $\operatorname{Out} G = 1$, cf. Lema 5.1.2 i).

Proposición 5.5.1. *La clasificación de las álgebras de Hopf grupo-teoréticas sobre $\mathbb{S}_5$ es dada por los datos grupo-teoréticos en la Tabla 5.5.*

Demostración. Como $|\mathbb{S}_5| = 2^3 \times 3 \times 5$, todo subgrupo no trivial que admite un 2-cociclo no degenerado es isomorfo a $C_2 \times C_2$. Sea (F,α,Γ,β) un dato grupo-teorético para $\mathbb{S}_5$; entonces $F \cap \Gamma$ es trivial o $\simeq C_2 \times C_2$.

Tabla 5.5: Datos grupo-teoréticos para $\mathbb{S}_5$

#	F	α	Γ	β	$G(H)$
5.5.a	$\langle(45)\rangle \simeq C_2$	1	$\langle(12345),(345)\rangle \simeq \mathbb{A}_5$	1	$C_2 \times \mathbb{S}_3$
5.5.b	$\langle(12345),(345)\rangle$	1	$\langle(45)\rangle$	1	C_2
5.5.c	$\langle(12345)\rangle \simeq C_5$	1	$\langle(345),(2435)\rangle \simeq \mathbb{S}_4$	1	$C_5 \rtimes C_4$
5.5.d	$\langle(345),(2435)\rangle$	1	$\langle(12345)\rangle$	1	C_2
5.5.e	$\langle(345),(45)\rangle \simeq \mathbb{S}_3$	1	$\langle(12345),(2354)\rangle \simeq C_5 \rtimes C_4$	1	$C_2 \times C_2$
5.5.f	$\langle(12345),(2354)\rangle$	1	$\langle(345),(45)\rangle$	1	C_4
5.5.g	$\langle(12)(345)\rangle \simeq C_6$	1	$\langle(12345),(2354)\rangle \simeq C_5 \rtimes C_4$	1	D_6
5.5.h	$\langle(12345),(2354)\rangle$	1	$\langle(12)(345)\rangle$	1	C_4
5.5.i	$\langle(23)(45),(24)(35)\rangle$ $\simeq C_2 \times C_2$	$\neq 1$	$\mathbb{S}_5$	1	$(C_2 \times C_2) \rtimes_\nu \mathbb{S}_3$
5.5.j	$\mathbb{S}_5$	1	$\langle(23)(45),(24)(35)\rangle$	$\neq 1$	C_2
5.5.k	$\langle(45),(23)\rangle$ $\simeq C_2 \times C_2$	$\neq 1$	$\mathbb{S}_5$	1	D_4
5.5.l	$\mathbb{S}_5$	1	$\langle(45),(23)\rangle$	$\neq 1$	C_2
5.5.m	$\langle(45),(24)(35)\rangle$ $\simeq D_4$	$\neq 1$	$\mathbb{A}_5$	1	$C_2 \times C_2$
5.5.n	$\mathbb{A}_5$	1	$\langle(45),(24)(35)\rangle$	$\neq 1$	C_2

Caso 1. $F \cap \Gamma = 1$. A menos de conjugación, (F,Γ) es 5.5.a, 5.5.c, 5.5.e o 5.5.g, o sus transposiciones 5.5.b, 5.5.d, 5.5.f o 5.5.h. Dado que $\mathbb{A}_5$ no es abeliano y los otros subgrupos en esta lista no son normales, entonces $H^{\mathbb{S}_5}_{\alpha\,\beta}(F,\Gamma)$ es no trivial por el Lema 5.1.2 iii). Además $H^{\mathbb{S}_5}_{\alpha\,\beta}(F,\Gamma) \simeq H^{\mathbb{S}_5}_{1\,1}(F,\Gamma)$ por la Observación 5.1.3. Por el Lema 5.1.4, para (F,Γ) como en 5.5.a, $G(H) \simeq C_2 \rtimes D_6/C_2 \simeq C_2 \times D_3$ y $G(H^*) \simeq \widehat{\mathbb{A}_5} \rtimes \mathbb{S}_5/\mathbb{A}_5 \simeq C_2$. Para (F,Γ) como en 5.5.c, $G(H) \simeq C_5 \rtimes (C_5 \rtimes C_4)/C_5 \simeq C_5 \rtimes C_4$ y $G(H^*) \simeq \widehat{\mathbb{S}_4} \rtimes \mathbb{S}_4/\mathbb{S}_4 \simeq C_2$. Para (F,Γ) como en 5.5.e, $G(H) \simeq \widehat{\mathbb{S}_3} \rtimes C_2 \simeq C_2 \times C_2$ y $G(H^*) \simeq \widehat{C_5 \rtimes C_4} \rtimes (C_5 \rtimes C_4)/C_5 \rtimes C_4 \simeq C_4$. Para (F,Γ) como en 5.5.g, $G(H) \simeq C_6 \rtimes D_6/C_6 \simeq C_6 \rtimes C_2 \simeq D_6$ y $G(H^*) \simeq C_4$.

Caso 2. $F \cap \Gamma \simeq C_2 \times C_2$. A menos de conjugación, (F,Γ) o (Γ,F) es 5.5.i, 5.5.k o 5.5.m. Por el Lema 5.1.2 iii), como en los primeros dos casos $F \ntrianglelefteq \mathbb{S}_5$, entonces $H^{\mathbb{S}_5}_{\alpha\,1}(F,\mathbb{S}_5)$ es no trivial. Si (F,Γ) es como en 5.5.i, por el Lema 5.1.4, $K = \{\bar{g} \in \mathbb{S}_4/(C_2 \times C_2) : [\alpha] = [\alpha^g]\} \simeq \mathbb{S}_3$ pues todo elemento de $H^2(C_2 \times C_2, \Bbbk^\times)$ es ad G-invariante; luego $G(H) \simeq (C_2 \times C_2) \rtimes_\nu \mathbb{S}_3$, $\nu \in H^2(\mathbb{S}_3, C_2 \times C_2)$. Además $G(H^*) \simeq \widehat{\mathbb{S}_5} \rtimes \mathbb{S}_5/\mathbb{S}_5 \simeq C_2$. Si (F,Γ) es como en 5.5.k, $K = \{\bar{g} \in D_4/(C_2 \times C_2) : [\alpha] = [\alpha^g]\} \simeq C_2$; luego $G(H) \simeq (C_2 \times C_2) \rtimes_\nu C_2$, y sabemos por GAP que este producto semidirecto no es directo. O sea, tenemos un grupo no abeliano de orden 8 con un subgrupo de Klein normal, por lo tanto $G(H) \simeq D_4$. Además $G(H^*) \simeq C_2$.

Ahora consideramos (F,Γ) como en 5.5.m. Si $\alpha \in H^2(D_4, \Bbbk^\times) \simeq C_2 \simeq H^2(\mathbb{A}_5, \Bbbk^\times) \ni \beta$, entonces $\alpha_{|F\cap\Gamma} \cdot {\beta_{|F\cap\Gamma}}^{-1} \neq 1$ sii $\alpha \neq 1$ y $\beta = 1$, o viceversa. Por el Lema 5.1.2 iii), $H^{\mathbb{S}_5}_{\alpha\,1}(F,\mathbb{A}_5)$ y $H^{\mathbb{S}_5}_{1\,\beta}(F,\mathbb{A}_5)$ son no triviales, pues F y $\mathbb{A}_5$ son no abelianos. Por la Observación 5.1.3, $H^{\mathbb{S}_5}_{\alpha\,1}(F,\mathbb{A}_5) \simeq H^{\mathbb{S}_5}_{1\,\beta}(F,\mathbb{A}_5)$. Tenemos que $G(H) \simeq \widehat{D_4} \rtimes D_4/D_4 \simeq C_2 \times C_2$ y $G(H^*) \simeq \widehat{\mathbb{A}_5} \rtimes \mathbb{S}_5/\mathbb{A}_5 \simeq C_2$.

Si (Γ,F) es como en cualquiera de los casos 5.5.a, 5.5.c, 5.5.e, 5.5.g, 5.5.i, 5.5.k o 5.5.m, entonces $H^{\mathbb{S}_5}_{\beta\,\alpha}(\Gamma,F)$ es dual a $H = H^{\mathbb{S}_5}_{\alpha\,\beta}(F,\Gamma)$ por el Lema 5.1.2 ii). Observando a los $G(H)$ concluimos que las álgebras de Hopf en la Tabla 5.5 no son isomorfas. $\square$

Proposición 5.5.2. *Las álgebras de Hopf de la Tabla 5.5 tienen dos módulos Yetter-Drinfeld no nulos V con $\dim \mathfrak{B}(V) < \infty$. Bosonizando, obtenemos nuevas álgebras de Hopf con la propiedad de Chevalley dual de dimensión 995328000.* □

5.6. Álgebras de Hopf grupo-teoréticas sobre $\mathbb{A}_4 \times C_2$

La clasificación de las álgebras de Nichols de dimensión finita sobre $G = \mathbb{A}_4 \times C_2$ no es conocida, pero existe $V \in {}^{\Bbbk G}_{\Bbbk G}\mathcal{YD}$ con $\dim \mathfrak{B}(V) = 72$ [G]; el pecio subyacente es $\mathcal{T}$ y el cociclo es -1. El grupo $\operatorname{Aut} G$ es isomorfo a $\mathbb{S}_4$, vía $\varphi : \mathbb{S}_4 \to \operatorname{Aut} G$ dado por $\varphi(a)(b,i) = (aba^{-1}, i)$, para todo $a \in \mathbb{S}_4$, $b \in \mathbb{A}_4$, $i \in C_2 = \{1, x\}$. Sea $M < G$,

$$M := \langle ((13)(24), 1), ((12)(34), 1), (1, x)\rangle \simeq C_2 \times C_2 \times C_2.$$

Proposición 5.6.1. *La clasificación de las álgebras de Hopf grupo-teoréticas sobre $G = \mathbb{A}_4 \times C_2$ corresponde a los datos grupo-teoréticos en la Tabla 5.6.*

Pregunta 12. *¿Es cierto que 5.6.a $\simeq$ 5.6.d $\simeq$ 5.6.e $\simeq$ 5.6.g $\simeq$ 5.6.i $\simeq$ 5.6.k?*

Tabla 5.6: Datos grupo-teoréticos para $G = \mathbb{A}_4 \times C_2$.

#	F	α	Γ	β	$G(H)$
5.6.a	$\langle((12)(34), x)\rangle \simeq C_2$	1	$\mathbb{A}_4 \times 1$	1	$C_2 \times C_2 \times C_2$
5.6.b	$\mathbb{A}_4 \times 1$	1	$\langle((12)(34), x)\rangle$	1	C_6
5.6.c	$\langle((123), 1)\rangle \simeq C_3$	1	M	$\notin H^2(F, \Bbbk^\times)^{\operatorname{ad} G}$	C_6
5.6.d	M	$\notin H^2(F, \Bbbk^\times)^{\operatorname{ad} G}$	$\langle((123), 1)\rangle$	1	$C_2 \times C_2 \times C_2$
5.6.e	$\langle((14)(23), 1),$ $((12)(34), x)\rangle$ $\simeq C_2 \times C_2$	1	$\langle((123), x)\rangle$ $\simeq C_6$	1	$C_2 \times C_2 \times C_2$
5.6.f	$\langle((123), x)\rangle$	1	$\langle((14)(23), 1),$ $((12)(34), x)\rangle$	1	C_6
5.6.g	$\langle((13)(24), 1),$ $((12)(34), 1)\rangle$ $\simeq C_2 \times C_2$	$\neq 1$	G	1	$C_2 \times C_2 \times C_2$
5.6.h	G	1	$\langle((13)(24), 1),$ $((12)(34), 1)\rangle$	$\neq 1$	C_6
5.6.i	$\langle((13)(24), x),$ $((12)(34), 1)\rangle$ $\simeq C_2 \times C_2$	$\neq 1$	G	1	$C_2 \times C_2 \times C_2$
5.6.j	G	1	$\langle((13)(24), x),$ $((12)(34), 1)\rangle$	$\neq 1$	C_6
5.6.k	M	$\notin H^2(F, \Bbbk^\times)^{\operatorname{ad} G}$ $\alpha\vert_{F\cap\Gamma} \neq 1$	$\mathbb{A}_4 \times 1$	1	$C_2 \times C_2 \times C_2$
5.6.l	$\mathbb{A}_4 \times 1$	1	M	$\notin H^2(\Gamma, \Bbbk^\times)^{\operatorname{ad} G}$ $\beta\vert_{F\cap\Gamma} \neq 1$	C_6

Demostración. Como $|G| = 2^3 \times 3$, todo subgrupo no trivial que admite un 2-cociclo no degenerado es isomorfo a $C_2 \times C_2$. Sea $(F, \alpha, \Gamma, \beta)$ un dato grupo-teorético para $\mathbb{S}_5$; entonces $F \cap \Gamma$ es trivial o isomorfo a $C_2 \times C_2$.

Caso 1. $F \cap \Gamma = 1$. A menos de automorfismo, las factorizaciones exactas (F, Γ) de $\mathbb{A}_4 \times C_2$ son

$$(1 \times C_2, \mathbb{A}_4 \times 1) \simeq (C_2, \mathbb{A}_4) \tag{5.22}$$
$$(\langle((12)(34), x)\rangle, \mathbb{A}_4 \times 1) \simeq (C_2, \mathbb{A}_4), \tag{5.23}$$
$$(\langle((123), 1)\rangle, M) \simeq (C_3, C_2 \times C_2 \times C_2), \tag{5.24}$$
$$(\langle((14)(23), 1), ((12)(34), 1)\rangle, \langle((123), x)\rangle) \simeq (C_2 \times C_2, C_6), \tag{5.25}$$
$$(\langle((14)(23), 1), ((12)(34), x)\rangle, \langle((123), x)\rangle) \simeq (C_2 \times C_2, C_6), \tag{5.26}$$

o sus transposiciones. Si (F, Γ) es como en (5.22) o (5.25), entonces $H^G_{\alpha\,\beta}(F, \Gamma)$ es coconmutativa. Si (F, Γ) es como en (5.23), $F \ntriangleleft G$ y Γ no es abeliano, entonces $H = H^G_{\alpha\,\beta}(F, \Gamma)$ es no trivial. Por el Lema 5.1.4, $G(H) \simeq C_2 \rtimes (C_2 \times C_2 \times C_2)/C_2 \simeq C_2 \times C_2 \times C_2$ y $G(H^*) \simeq \widehat{\mathbb{A}_4} \rtimes (\mathbb{A}_4 \times C_2)/\mathbb{A}_4 \simeq C_3 \rtimes C_2 \simeq C_6$, pues por GAP sabemos que este producto es directo.

Si (F, Γ) es como en (5.26), entonces $H^G_{\alpha\,\beta}(F, \Gamma)$ es no trivial, dado que $F, \Gamma \ntriangleleft G$. Por el Lema 5.1.4, $G(H) \simeq (C_2 \times C_2) \rtimes (C_2 \times C_2 \times C_2)/(C_2 \times C_2) \simeq C_2 \times C_2 \times C_2$, dado que $[F, N_G(F)] = 1$. Además $G(H^*) \simeq C_6 \rtimes C_6/C_6 \simeq C_6$.

Supongamos que (F, Γ) es como en (5.24). Hay seis elementos en $H^2(M, \Bbbk^\times) - H^2(M, \Bbbk^\times)^{\operatorname{ad} G}$ y todos están en la misma órbita por la acción del subgrupo $\langle \operatorname{ad}_a \rangle < \operatorname{Aut} G$, donde $a \in G - M$, luego tenemos álgebras de Hopf isomorfas. Luego, para tal β, $H^G_{1\,\beta}(F, \Gamma)$ es no trivial, pues $F \ntriangleleft G$. Por el Lema 5.1.4, $G(H) \simeq C_3 \rtimes C_6/C_3 \simeq C_6$, pues $[F, N_G(F)] = 1$. Además, como $K = 1$, $G(H^*) \simeq C_2 \times C_2 \times C_2$.

Caso 2. $F \cap \Gamma \simeq C_2 \times C_2$. A menos de automorfismo, (F, Γ) o (Γ, F) es uno de los pares

$$(\langle((13)(24), 1), ((12)(34), 1)\rangle, G) \simeq (C_2 \times C_2, G), \tag{5.27}$$
$$(\langle(1, x), ((12)(34), 1)\rangle, G) \simeq (C_2 \times C_2, G), \tag{5.28}$$
$$(\langle((13)(24), x), ((12)(34), 1)\rangle, G) \simeq (C_2 \times C_2, G), \tag{5.29}$$
$$(M, \mathbb{A}_4 \times 1) \simeq (C_2 \times C_2 \times C_2, \mathbb{A}_4). \tag{5.30}$$

Si (F, Γ) es como en (5.27) entonces $H^G_{\alpha\,1}(F, G)$ es coconmutativa. Si (F, Γ) es como en (5.28) o (5.29), $F \ntriangleleft G$, entonces $H^G_{\alpha\,1}(F, G)$ es no trivial. En ambos casos, $G(H) \simeq (C_2 \times C_2) \rtimes (C_2 \times C_2 \times C_2)/(C_2 \times C_2) \simeq C_2 \times C_2 \times C_2$, pues $[F, N_G(F)] = 1$, y $G(H^*) \simeq \widehat{G} \simeq C_6$.

Ahora supongamos que (F, Γ) es como en (5.30). Hay tres elementos en

$$X = \{\alpha \in H^2(M, \Bbbk^\times) - H^2(M, \Bbbk^\times)^{\operatorname{ad} G} : \alpha|_{F \cap \Gamma} \neq 1\}$$

y $\langle \operatorname{ad}_a \rangle < \operatorname{Aut} G$, donde $a \in G - M$, actúa transitivamente en X, entonces tenemos álgebras de Hopf isomorfas. Para $\alpha \in X$, $H^G_{\alpha\,1}(M, \mathbb{A}_4 \times 1)$ es no trivial, dado que $\mathbb{A}_4 \times 1$ es no abeliano. Por el Lema 5.1.4, $G(H) \simeq C_2 \times C_2 \times C_2$ y $G(H^*) \simeq C_6$.

En conclusión, tenemos las álgebras de Hopf no triviales descritas por los datos grupo-teoréticos en la Tabla 5.6. $\square$

Aquí 5.6.g y 5.6.i son twists de $\Bbbk G$. Recordamos que levantamientos de $\mathfrak{B}(V)\#\Bbbk G$, donde V es como antes, están clasificados (y hay no triviales) [GIV].

Proposición 5.6.2. *Las álgebras de Hopf de la Tabla 5.6 tienen un módulo de Yetter-Drinfeld no nulo V con $\dim \mathfrak{B}(V) = 72$. Bosonizando, obtenemos nuevas álgebras de Hopf con la propiedad de Chevalley dual de dimension 1728.*

Sea H el álgebra de Hopf correspondiente a 5.6.g o a 5.6.i. La clasificación de todos los levantamientos de $\mathfrak{B}(V)\#H$ sigue de [GIV] (y hay no triviales). $\square$

Observación 5.6.3. Vimos en la prueba de la Proposición 5.6.1 que si (F, Γ) es como en (5.22), (5.25) o (5.27), entonces H es coconmutativa. Calculando $G(H)$, tenemos que $G(H) \simeq G$. Luego por el Lema 5.1.2 iii), no existe un grupo $G' \not\simeq G$ con $\Bbbk G' \sim_{\mathrm{Mor}} \Bbbk G$.

Observación 5.6.4. Hagamos un comentario sobre la Pregunta 12. Por [N6, 1.1.1], dada un álgebra de Hopf semisimple H, como álgebras

$$H \simeq \Bbbk^n \oplus \bigoplus_{d_i > 1} M_{d_i}(\Bbbk)^{n_i}, \tag{5.31}$$

donde $n = |G(H^*)|$. Vimos que si H es como en 5.6.a, 5.6.d, 5.6.e, 5.6.g, 5.6.i o 5.6.k entonces $G(H^*) \simeq C_6$ y $G(H) \simeq C_2 \times C_2 \times C_2$. Luego, por (5.31) y argumentos de conteo, $H \simeq \Bbbk^6 \oplus M_2(\Bbbk)^2$ como álgebras y $H \simeq \Bbbk^8 \oplus M_4(\Bbbk)^*$ o $H \simeq \Bbbk^8 \oplus (M_3(\Bbbk)^*)^2$ como coálgebras. O sea, seguramente algunas de éstas son isomorfas entre sí y hay a lo sumo dos no isomorfas. Ver también [N6, 6.1.1].

5.7. Álgebras de Hopf grupo-teoréticas sobre $C_7 \rtimes_3 C_6$

La clasificación de las álgebras de Nichols de dimensión finita sobre $G = C_7 \rtimes_3 C_6$ no es conocida, pero existen $V_3, V_5 \in {}^{\Bbbk G}_{\Bbbk G}\mathcal{YD}$ con $\dim \mathfrak{B}(V_j) = 326592$, $j = 3, 5$, ver [G]. Los pecios subyacentes son $\mathsf{Q}_{7,j}$, $j = 3, 5$; en ambos casos, el cociclo es -1. Notemos que $C_7 \rtimes_3 C_6 \simeq C_7 \rtimes_5 C_6$.

Existen dos álgebras de Hopf semisimples no triviales de dimensión 42, $\mathcal{A}_7(2,3)$ y $\mathcal{A}_7(3,2) \simeq \mathcal{A}_7(2,3)^*$; $G(\mathcal{A}_7(3,2)) \simeq G(\mathcal{A}_7(2,3)) \simeq C_6$ y como coálgebras, $\mathcal{A}_7(2,3) \simeq \Bbbk C_6 \oplus (M_3(\Bbbk)^*)^4$, mientras $\mathcal{A}_7(3,2) \simeq \Bbbk C_6 \oplus (M_2(\Bbbk)^*)^9$, [N6, Chapter 10].

Proposición 5.7.1. *Las álgebras de Hopf grupo-teoréticas sobre G no triviales son $\mathcal{A}_7(2,3)$ y $\mathcal{A}_7(3,2)$.*

Demostración. Sea $(F, \alpha, \Gamma, \beta)$ un dato grupo-teorético para G; entonces $F \cap \Gamma$ es trivial. A menos de conjugación, (F, Γ) o (Γ, F) son isomorfas a $(C_2, C_7 \rtimes C_3)$, (C_3, D_7), o (C_6, C_7). Por el Lema 5.1.2 iii), $H^G_{11}(C_6, C_7)$ es trivial, mientras $H := H^G_{11}(C_2, C_7 \rtimes C_3)$ y $H' := H^G_{11}(C_3, D_7)$ son no triviales.

Por el Lema 5.1.2 v), $\Bbbk^{C_7 \rtimes C_3} \hookrightarrow H^* \twoheadrightarrow \Bbbk C_2$. Dado que $\Bbbk(C_7 \rtimes C_3) \simeq \Bbbk^3 \oplus (M_3(\Bbbk))^2$ como álgebras, entonces $\Bbbk^{C_7 \rtimes C_3} \simeq \Bbbk C_3 \oplus (M_3(\Bbbk)^*)^2$ como coálgebras. Así $H^* \simeq \mathcal{A}_7(2,3)$ y por lo tanto, $H \simeq \mathcal{A}_7(3,2)$. Además, $\Bbbk^{D_7} \hookrightarrow H'^* \twoheadrightarrow \Bbbk C_3$. Dado que $\Bbbk D_7 \simeq \Bbbk^2 \oplus (M_2(\Bbbk))^3$ como álgebras, entonces $\Bbbk^{D_7} \simeq \Bbbk C_2 \oplus (M_2(\Bbbk)^*)^3$ como coálgebras. Por lo tanto $H'^* \simeq \mathcal{A}_7(3,2)$ y luego $H' \simeq \mathcal{A}_7(2,3)$. $\square$

Proposición 5.7.2. *Cada una de las álgebras de Hopf $\mathcal{A}_7(2,3)$ y $\mathcal{A}_7(3,2)$ tiene dos módulos de Yetter-Drinfeld no nulos V con* $\dim \mathfrak{B}(V) = 326592$. *Entonces obtenemos nuevas álgebras de Hopf con la propiedad de Chevalley dual de dimensión 13716864.* □

Observación 5.7.3. Vimos en la prueba de la Proposición 5.7.1 que si $(F,\Gamma) = (C_6, C_7)$, entonces H^* es coconmutativa. Calculando $G(H^*)$, tenemos que $G(H^*) \simeq G$. Luego por el Lema 5.1.2 iii), no existe un grupo $G' \not\simeq G$ con $\Bbbk G' \sim_{\text{Mor}} \Bbbk G$.

5.8. Álgebras de Hopf grupo-teoréticas sobre D_n

Sea $D_n = \langle r, s : r^n = s^2 = 1, srs = r^{-1}\rangle$ el grupo diedral de orden $2n$, $n \geqslant 3$. La clasificación de las álgebras de Hopf punteadas de dimensión finita sobre D_n es conocida solamente cuando $n = 4t \geqslant 12$, $t \in \mathbb{N}$ [FG]. Aquí nos ocupamos de las álgebras de Hopf grupo-teoréticas sobre $G = D_n$ para todo $n \geqslant 3$. Resumimos abajo algunos hechos bien conocidos sobre D_n:

	n impar	n par
$Z(D_n)$	1	$\langle r^{n/2}\rangle$
$\operatorname{Aut} D_n$	$\{\phi_{k,l} : (k,n) = 1, 0 \leqslant l < n\}$;	$\phi_{k,l}(r) = r^k$, $\phi_{k,l}(s) = sr^l$
Subgrupos	$\langle r^d\rangle$, $d\|n$;	$\langle r^d, r^k s\rangle$, $d\|n$, $0 \leqslant k < d$
Subgrupos a menos de $\operatorname{Aut} D_n$	$\langle r^d\rangle$, $d\|n$;	$\langle r^d, s\rangle$, $d\|n$
Subgrupos normales	$\langle r^d\rangle$, $d\|n$	$\langle r^d\rangle$, $d\|n$; $\langle r^2, s\rangle$; $\langle r^2, sr\rangle$
$[D_n, D_n]$	$\langle r\rangle$	$\langle r^2\rangle$
$\widehat{D_n}$	C_2	$C_2 \times C_2$
$H^2(D_n, \mathbb{C}^\times)$	1	C_2 (#)

(#) Un representante de la clase no trivial es $f_\chi \in Z^2(D_n, \Bbbk^\times)$, $f_\chi(r^i s^j, r^k s^l) = \chi(r^k)^j$, $j \in \{0,1\}$, donde $\chi : \langle r\rangle \to \Bbbk^\times$ es un carácter de orden n.

5.8.1. Álgebras de Hopf grupo-teoréticas sobre D_n, n impar

Proposición 5.8.1. *Toda álgebra de Hopf grupo-teorética sobre $G = D_n$, n impar, es trivial.*

Demostración. Sabemos que $H^2(\langle r^d\rangle, \Bbbk^\times) = 1$ y dado que n es impar, $H^2(D_{n/d}, \Bbbk^\times) = 1$. Sea $(F, \alpha, \Gamma, \beta)$ un dato grupo-teorético para D_n; entonces $F \cap \Gamma = 1$.

Consideramos el caso $F = \langle r^d\rangle$, $d|n$, y $\Gamma = \langle r^e, r^k s\rangle$, $e|n$, $0 \leqslant k < e$. Afirmamos que $F \cap \Gamma = 1$ si y sólo si $(d,e) = 1$ y $de = n$. Si $F \cap \Gamma = 1$, entonces $2n = |D_n| = |F| \cdot |\Gamma| = \frac{n}{d} \cdot \frac{2n}{e}$, o sea, $n = de$. Además, como $1 = F \cap \Gamma = \langle r^{[d,e]}\rangle$, entonces $[d,e] = n\lambda$ para algún $\lambda \in \mathbb{N}$. Dado que $(d,e) = \frac{de}{[d,e]} = \frac{n}{n\lambda} = \frac{1}{\lambda}$; entonces $(d,e) = 1$. Recíprocamente, si $(d,e) = 1$ y $de = n$, entonces $[d,e] = n$; luego $F \cap \Gamma = \langle r^{[d,e]}\rangle = 1$. Por el Lema 5.1.2 iii), $H_{1\,1}^{D_n}(F,\Gamma)$ es coconmutativa pues $F \lhd D_n$, abeliano y $H^2(\langle r^t\rangle, \Bbbk^\times) = 1$.

Ahora consideramos el caso $F = \langle r^d, r^k s\rangle$, $d|n$, $0 \leqslant k < d$, y $\Gamma = \langle r^e, r^l s\rangle$, $e|n$, $0 \leqslant l < e$. Si $F \cap \Gamma = 1$, entonces $2n = |D_n| = |F| \cdot |\Gamma| = \frac{2n}{d} \cdot \frac{2n}{e}$, o sea $de = 2n$. Luego d es par o e es par; esto es una contradicción pues n es impar. Por lo tanto no hay álgebras de Hopf grupo-teoréticas sobre D_n no triviales. □

5.8.2. Álgebras de Hopf grupo-teoréticas sobre D_n, n par

Proposición 5.8.2. *La clasificación de las álgebras de Hopf grupo-teoréticas sobre $G = D_n$, n par, no triviales está dada por los datos grupo-teoréticos en la Tabla 5.7.*

Pregunta 13. *¿Es cierto que 5.8.a $\simeq$ 5.8.c $\simeq$ 5.8.e?*

Tabla 5.7: Datos grupo-teoréticos para D_n, n par

#	F	α	Γ	β	Condición	$G(H)$
5.8.a	$\langle r^d, r^k s\rangle$, $d\|n$, $0 \leqslant k < d$ $\{d \neq 2$ o $(d \neq n$ and $d \neq \frac{n}{2})\}$	1	$\langle r^e, s\rangle$, $e\|n$, $\{e \neq 2$ or $(e \neq n$ and $e \neq \frac{n}{2})\}$	1	$(d, e) = 2$, $[d, e] = n$, $r^k \notin \langle r^2\rangle$	Para $d = 2$, $(C_2 \times C_2) \rtimes C_2$, si $\frac{n}{2}$ es par, $C_2 \times C_2$, si $\frac{n}{2}$ es impar. Para $d \neq 2$, $C_2 \times C_2$, si $\frac{n}{d}$ es par, C_2, si $\frac{n}{d}$ es impar.
5.8.b	$\langle r^e, s\rangle$, $e\|n$, $\{e \neq 2$ o $(e \neq n$ and $e \neq \frac{n}{2})\}$	1	$\langle r^d, r^k s\rangle$, $d\|n$, $0 \leqslant k < d$ $\{d \neq 2$ or $(d \neq n$ and $d \neq \frac{n}{2})\}$	1	$(d, e) = 2$, $[d, e] = n$, $r^k \notin \langle r^2\rangle$	la misma que antes para e
5.8.c	$\langle r^{n/2}, s\rangle$	$\neq 1$	D_n	1	$n \neq 4$	$C_2 \times C_2$, si $\frac{n}{2}$ es par C_2, si $\frac{n}{2}$ es impar
5.8.d	D_n	1	$\langle r^{n/2}, s\rangle$	$\neq 1$	$n \neq 4$	$C_2 \times C_2$
5.8.e	$\langle r^d, r^k s\rangle$, $d\|n$, $d \neq 1$ $0 \leqslant k < d$ $\{d \neq 2$ o $(d \neq n$ and $d \neq \frac{n}{2})\}$	$\neq 1$	$\langle r^e, s\rangle$, $e\|n$, $e \neq 1$ $\{e \neq 2$ or $(e \neq n$ y $e \neq \frac{n}{2})\}$	1	$(d, e) = 1$, $[d, e] = \frac{n}{2}$, $r^k \in \langle r^d\rangle$	Para $d = 2$, $(C_2 \times C_2) \rtimes_\nu C_2$, si $\frac{n}{2}$ es par, $C_2 \times C_2$, si $\frac{n}{2}$ es impar. Para $d \neq 2$, $C_2 \times C_2$, si $\frac{n}{d}$ es par, C_2, si $\frac{n}{d}$ es impar.
5.8.f	$\langle r^e, s\rangle$, $e\|n$, $e \neq 1$ $\{e \neq 2$ o $(e \neq n$ y $e \neq \frac{n}{2})\}$	1	$\langle r^d, r^k s\rangle$, $d\|n$, $d \neq 1$ $0 \leqslant k < d$ $\{d \neq 2$ o $(d \neq n$ y $d \neq \frac{n}{2})\}$	$\neq 1$	$(d, e) = 1$, $[d, e] = \frac{n}{2}$, $r^k \in \langle r^d\rangle$	la misma que 5.8.a para e

Demostración. Sea $(F, \alpha, \Gamma, \beta)$ una data grupo-teorética para G. Entonces $F \cap \Gamma$ es 1 o $M = \langle r^{n/2}, s\rangle \simeq C_2 \times C_2$, a menos de equivalencia de datos grupos teoréticos.

Caso 1. $F \cap \Gamma = 1$. Si $F = \langle r^d \rangle$ y $\Gamma = \langle r^e, r^k s\rangle$, entonces $(d,e) = 1$, luego $de = n$, y $H_{1\,1}^{D_n}(F,\Gamma)$ es coconmutativa. Si $F = \langle r^d, r^k s\rangle$ y $\Gamma = \langle r^e, r^l s\rangle$, entonces vía el automorfismo $\phi_{1,n-l}$ tenemos que $F \simeq \langle r^d, r^{k'} s\rangle$ y $\Gamma \simeq \langle r^e, s\rangle$. Por lo tanto, podemos suponer que $F = \langle r^d, r^k s\rangle$ y $\Gamma = \langle r^e, s\rangle$, a menos de equivalencia de datos grupo-teoréticos. Afirmamos que (F,Γ) es una factorización exacta sii

$$(d,e) = 2, \qquad [d,e] = n, \qquad r^k \notin \langle r^2 \rangle. \tag{5.32}$$

Primero, $F\cap\Gamma = \big(\langle r^d\rangle \cup \langle r^d\rangle r^k s\big) \cap \big(\langle r^e\rangle \cup \langle r^e\rangle s\big) = \langle r^{[d,e]}\rangle \cup \big(\langle r^d\rangle r^k s \cap \langle r^e\rangle s\big)$. Así $F\cap\Gamma = 1$ sii $n|[d,e]$ y $r^k \notin \langle r^d\rangle\langle r^e\rangle = \langle r^{(d,e)}\rangle$. Si (F,Γ) es una factorización exacta, entonces $2n = |F||\Gamma| = \frac{2n}{d}\cdot\frac{2n}{e}$, i. e. $2n = de$, y $[d,e] = 2n$ o n. Pero $[d,e] = 2n$ implica $(d,e) = 1$ y $r^k \in \langle r\rangle$, una contradicción. Por lo tanto (5.32) vale. Recíprocamente, si (5.32) vale, entonces $F\cap\Gamma = 1$ y

$$\begin{aligned} F\Gamma &= \langle r^d\rangle\langle r^e\rangle \cup \langle r^d\rangle\langle r^e\rangle s \cup \langle r^d\rangle r^k s\langle r^e\rangle \cup \langle r^d\rangle r^k s \langle r^e\rangle s \\ &= \langle r^2\rangle \cup \langle r^2\rangle s \cup \langle r^2\rangle r^k s \cup \langle r^2\rangle r^k = D_n, \text{ pues } k \text{ es impar.} \end{aligned}$$

Finalmente, $F \lhd D_n$ sii $d = 2$; F es abeliano sii $d = n$ o $d = \frac{n}{2}$; lo mismo para Γ. Así, debemos suponer que $d \neq 2$ o ($d \neq n$ y $d \neq \frac{n}{2}$) y $e \neq 2$ o ($e \neq n$ y $e \neq \frac{n}{2}$). Luego, $H_{\alpha\,\beta}^{D_n}(F,\Gamma)$ es no trivial. Ahora, si n/d y n/e son impares, $H^2(F,\Bbbk^\times) = 1 = H^2(\Gamma,\Bbbk^\times)$, entonces el álgebra de Hopf asociada es $H_{1\,1}^{D_n}(F,\Gamma)$. Si n/d o n/e es par, usando el Lema 5.8.3 abajo y la Observación 5.1.3, $H_{\alpha\,\beta}^{D_n}(F,\Gamma) \simeq H_{1\,1}^{D_n}(F,\Gamma)$; en cualquier caso tenemos 5.8.a.

Caso 2. $F\cap\Gamma = M$. Si $(F,\Gamma) = (\langle r^{n/2}, s\rangle, D_n)$, entonces $F \lhd D_n$ sii $n = 4$. Por el Lema 5.1.2 iii), $H_{\alpha\,1}^{D_n}(F,\Gamma)$, $n \neq 4$, es no trivial, esto nos da 5.8.c.

Ahora, debemos suponer que $F = \langle r^d, r^k s\rangle$ y $\Gamma = \langle r^e, s\rangle$. Afirmamos que esta factorización es tal que $F\cap\Gamma = M$ si y sólo si

$$(d,e) = 1, \qquad [d,e] = \frac{n}{2}, \qquad r^k \in \langle r^d\rangle. \tag{5.33}$$

Tenemos que $F\cap\Gamma = \langle r^{n/2}, s\rangle$ sii $[d,e] \equiv \frac{n}{2} \mod n$ y $r^k \in \langle r^{(\frac{n}{2},d)}\rangle$. Si (F,Γ) es una factorización tal que $F\cap\Gamma = M$, entonces $2n = \frac{|F|\cdot|\Gamma|}{|F\cap\Gamma|} = \frac{1}{4}\frac{2n}{d}\frac{2n}{e}$, i. e. $de = \frac{n}{2}$, y $[d,e] = \frac{n}{2}$, $(d,e) = 1$. Por lo tanto (5.33) vale. Recíprocamente, si (5.33) vale, entonces $F\cap\Gamma = M$ y

$$\begin{aligned} F\Gamma &= \langle r^{(d,e)}\rangle \cup \langle r^{(d,e)}\rangle s \cup \langle r^{(d,e)}\rangle r^k s \cup \langle r^{(d,e)}\rangle r^k \\ &= \langle r\rangle \cup \langle r\rangle s \cup \langle r\rangle r^k s \cup \langle r\rangle r^k = D_n. \end{aligned}$$

Como $(d,e) = 1$, d es impar o e es impar, luego n/d es par o n/e es par. Si n/d y n/e son pares, $\alpha \in H^2(D_{n/d},\Bbbk^\times) \simeq C_2 \simeq H^2(D_{n/e},\Bbbk^\times) \ni \beta$, entonces $\alpha_{|F\cap\Gamma}\cdot{\beta_{|F\cap\Gamma}}^{-1} \neq 1$ sii $\alpha \neq 1$ y $\beta = 1$, o viceversa. Por la Observación 5.1.3, $H_{\alpha\,1}^{G}(F,\Gamma) \simeq H_{1\,\beta}^{\mathbb{S}_4}(F,\Gamma)$. Si n/d es par y n/e es impar, entonces $H^2(D_{n/e},\Bbbk^\times) = 1$ y $1 \neq \alpha \in H^2(D_{n/d},\Bbbk^\times) \simeq C_2$, entonces $\alpha|_{F\cap\Gamma} \neq 1$ por el Lema 5.8.3 abajo. Además, $H_{\alpha\,1}^{D_n}(F,\Gamma)$, $d \neq 2$ o ($d \neq n$ y $d \neq \frac{n}{2}$) y $e \neq 2$ o ($e \neq n$ y $e \neq \frac{n}{2}$), es no trivial. En ambos casos esto nos da 5.8.e. El caso n/d impar y n/e es par aparece en el dual 5.8.f.

Finalmente, veamos los $G(H)$. Si $F = \langle r^2, r^k s\rangle$, entonces $N_G(F) = G$, dado que $F \lhd G$. Por el Lema 5.1.4, si $\alpha = 1$, entonces

$$G(H) \simeq \widehat{F} \rtimes G/F \simeq \widehat{D_{n/2}} \rtimes C_2 = \begin{cases} (C_2\times C_2)\rtimes C_2 & \text{si } \frac{n}{2} \text{ es par} \\ C_2\times C_2 & \text{si } \frac{n}{2} \text{ es impar.} \end{cases}$$

Si $\alpha \neq 1$, entonces $K = C_2$ (es el mismo si $n/2$ es par o impar). Luego

$$G(H) \simeq \widehat{F} \rtimes G/F \simeq \widehat{D_{n/2}} \rtimes C_2 = \begin{cases} (C_2 \times C_2) \rtimes_\nu C_2 & \text{si } \frac{n}{2} \text{ es par} \\ C_2 \rtimes_\nu C_2 & \text{si } \frac{n}{2} \text{ es impar} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (C_2 \times C_2) \rtimes_\nu C_2 & \text{si } \frac{n}{2} \text{ es par} \\ C_2 \times C_2 & \text{si } \frac{n}{2} \text{ es impar.} \end{cases}$$

Si $F = \langle r^d, r^k s\rangle$, $d \neq 2$, entonces $N_G(F) = \langle r^e, r^l s\rangle \simeq D_{n/e}$. Dado que $F \lhd N_G(F)$, entonces $d = e$ o $d = 2$. Luego $d = e$ y $N_G(F) = F$. Por el Lema 5.1.4, $K = 1$ y

$$G(H) \simeq \widehat{F} \simeq \widehat{D_{n/d}} = \begin{cases} C_2 \times C_2 & \text{si } \frac{n}{d} \text{ es par} \\ C_2 & \text{si } \frac{n}{d} \text{ es impar.} \end{cases}$$

□

Lema 5.8.3. *Sea n par. Si $F = \langle r^d, r^k s\rangle$, $d|n$, $0 \leqslant k < d$ y n/d es par, entonces la función restricción* $\mathrm{Res} : H^2(D_n, \Bbbk^\times) \to H^2(F, \Bbbk^\times)$ *es no trivial.*

Demostración. Notemos que $F = \langle r^d, r^k s\rangle \simeq \langle r^d, s\rangle = S$, llamemos ϕ a este isomorfismo. Entonces $\mathrm{Res}\,|_F = \mathrm{Res}\,|_S \circ \phi$ y por ende $\mathrm{Res}\,|_F$ es trivial si y sólo si $\mathrm{Res}\,|_S$ es trivial. Tenemos que $f_\chi|_S = f_{\chi^d} \in Z^2(D_{n/d}, \Bbbk^\times)$ ó $Z^2(C_2 \times C_2, \Bbbk^\times)$ y f_{χ^d} tiene clase de cohomología no trivial.

□

Observación 5.8.4. Vimos en la prueba de la Proposición 5.8.2 que si $(F, \Gamma) = (\langle r^d\rangle, \langle r^e, r^k s\rangle)$, entonces $(d, e) = 1$ y H es coconmutativa. Calculando $G(H)$, tenemos que $G(H) \simeq G$. Luego por el Lema 5.1.2 iii), no existe un grupo $G' \not\simeq G$ con $\Bbbk G' \sim_{\mathrm{Mor}} \Bbbk G$.

Proposición 5.8.5. *Las álgebras de Hopf de la Tabla 5.7 admiten familias de módulos de Yetter-Drinfeld de dimensión finita V con $\mathfrak{B}(V) = \Lambda(V)$. Por lo tanto obtenemos nuevas álgebras de Hopf de dimensión finita con la propiedad de Chevalley dual.*

Sea H el álgebra de Hopf correspondiente a 5.8.c. La clasificación de todas las álgebras de Hopf de dimensión finita cuyo corradical es isomorfo a H sigue de [FG]. □

Apéndice A

Usamos GAP [GAP] para hacer algunos cálculos y en especial el paquete HAP [HAP] para las cuentas con cohomología de grupos. Listamos los programas utilizados. El Id de un grupo finito en GAP es un par ordenado $[n, m]$, donde n es el orden del grupo y m es la posición que este grupo ocupa en la biblioteca del GAP entre los grupos de orden n. La siguiente función $GT(G, [n, m])$ tiene como input un grupo finito G y el Id $[n, m]$ de un grupo y calcula un conjunto de representantes, a menos de conjugación, de todos los posibles $F, \Gamma < G$ tales que $G = F\Gamma$ y el Id de $F \cap \Gamma$ is $[n, m]$.

Programa 1. $GT(G, [n, m])$

```
LoadPackage("sonata");
GT := function(G, IdGr)
local Pares, int, g, i, j;
Pares := [ ];
g:=List(ConjugacyClassesSubgroups(G),Representative);
for i in [1..Length(g )-1] do
        for j in [i+1..Length( g )] do
        int := Intersection(g[i],g[j]);
                if IdGr=IdGroup(int) and
                Order(g[i])>1 and Order(g[j])>1 and
                Order(G)>Order(g[i]) and Order(G)>Order(g[j]) and
                1= Size(DoubleCosets( G, g[i],g[j]))
                then Add( Pares, [g[i],g[j]] );
                fi;
        od;
od;
return( Pares );
end;
```

Por ejemplo el Id del grupo trivial es $[1, 1]$, entonces $GT(G, [1, 1])$ calcula las factorizaciones exactas de G a menos de conjugación. La siguiente función $SubIsoTo(G, [n, m])$ tiene como input un grupo finito G y el Id $[n, m]$ de un grupo H y calcula un conjunto de representantes a menos de conjugación de todos los posibles $F < G$, tales que $F \simeq H$.

Programa 2. $SubIsoTo(G, [n, m])$

```
LoadPackage("sonata");
SubIsoTo := function( G, IdGr )
local Subgrupos, g, i;
Subgrupos := [];
g:=List(ConjugacyClassesSubgroups(G),Representative);
for i in [1..Length(g)] do
        if IdGr=IdGroup(g[i])
        then Add(Subgrupos, g[i]);
        fi;
od;
return(Subgrupos);
end;
```

La siguiente función $Res(G, F)$ tiene como input un grupo finito G y un subgrupo $F < G$ y calcula la función restricción $\text{Res} : H^3(G, \mathbb{Z}) \to H^3(F, \mathbb{Z})$ (o equivalentemente por el Lema 1.2.2, $\text{Res} : H^2(G, \Bbbk^\times) \to H^2(F, \Bbbk^\times)$).

Programa 3. $Res(G, F)$

```
LoadPackage("hap");
Res:=function(G,F)
local RG,RF,phi,chnmap,C;
RG:=ResolutionFiniteGroup(G,4);;
RF:=ResolutionFiniteGroup(F,4);;
phi:=GroupHomomorphismByFunction(F,G,x->x);;
chnmap:=EquivariantChainMap(RF,RG,phi);;
C:=HomToIntegers(chnmap);;
return(Cohomology(C,3));;
end;
```

La siguiente función $Afin(p, s, m)$ tiene como input un número primo p, un entero s módulo $p-1$ de orden $p-1$ y $m \in \mathbb{N}$, y construye el producto semidirecto $C_p \rtimes_s C_m$ con acción dada por el automorfismo $g : C_p \to C_p$, $g(x) = sx$, para todo $x \in C_p$.

Programa 4. $Afin(p, s, m)$

```
Afin:=function(p,s,m)
local C,D,aut,g,h,hom,T,G;
C:=CyclicGroup(p);
D:=CyclicGroup(m);
g:=MinimalGeneratingSet(C)[1];
h:=MinimalGeneratingSet(D)[1];
T := GroupHomomorphismByImages( C, C, [g], [g^s] );
aut:=Group([T]);
hom := GroupHomomorphismByImages( D, aut, [h], [T] );
G:=SemidirectProduct( D, hom, C );
```

```
return(G);
end;
```

En los casos que necesitamos, $C_3 \rtimes C_6 = Afin(3,2,6)$, $C_5 \rtimes_2 C_4 = Afin(5,2,4)$, $C_5 \rtimes_2 C_{20} = Afin(5,2,20)$ y $C_7 \rtimes_3 C_6 = Afin(7,3,6)$.

Los programas 1 y 2 nos van a dar resultados a menos de conjugación, pero los automorfismos de $\mathbb{A}_4 \times C_2$ no son solamente conjugaciones. Entonces, después de aplicar cualquiera de los dos, todavía tenemos que ver cuáles son no isomorfos. Para esto usamos el siguiente programa, cuyo input son pares ordenados S, T de subgrupos de $\mathbb{A}_4 \times C_2$ y resulta 0 si $S \not\simeq T$ y 1 si $S \simeq T$. Para usar el Programa 5 debemos definir en GAP el grupo $H = \mathbb{S}_4 \times C_2$ y el grupo $G = \mathbb{A}_4 \times C_2$, pero como un subgrupo de H:

```
H:=DirectProduct(SymmetricGroup(4),CyclicGroup(2));;
E:=Elements(H);;
G:=Subgroup( H, [E[2],E[15],E[17]] );;
```

Programa 5. $ConjPair(S,T,G,H)$

```
ConjPair:=function (S,T,A4xz2,S4xz2)
local ElemG, L,j,i;
ElemG:=Elements(S4xz2);
L:=[];
for i in [1..Length(ElemG )] do
 L[i]:=ConjugatorAutomorphismNC(A4xz2, ElemG[i] );
od;
j:=0;
for i in [1..Length(L)] do
        if [Image( L[i], S[1]),Image( L[i], S[2])]= T then j:=1;
        fi;
od;
return(j);
end;
```

Para decidir cuáles cociclos son ad G-invariante usamos el paquete HAP como en el siguiente ejemplo. Recordemos que $H^3(F,\mathbb{Z}) \simeq H^2(F,\Bbbk^\times)$, Lema 1.2.2. Sea $G = C_3 \rtimes C_6$ y $F \simeq C_3 \times C_3$.

```
gap> LoadPackage("hap");
gap> eG:=Elements(G);
[ <identity> of ..., f1, f2, f3, f1*f2, f1*f3, f2^2, f2*f3, f3^2, f1*f2^2,
  f1*f2*f3, f1*f3^2, f2^2*f3, f2*f3^2, f1*f2^2*f3, f1*f2*f3^2, f2^2*f3^2,
  f1*f2^2*f3^2 ]
gap> eF:=Elements(F);
[ <identity> of ..., f2, f3, f2^2, f2*f3, f3^2, f2^2*f3, f2*f3^2, f2^2*f3^2 ]
```

Elegimos un elemento y de G que no está en F.

```
gap> y:=eG[2];
f1
```

Definimos el isormorfismo $\phi : F \to F$ conjugación por y y entonces definimos la función $c : H^2(F, \Bbbk^\times) \to H^2(F, \Bbbk^\times)$, $c([\alpha]) = [\alpha^y]$.

```
gap> phi:=ConjugatorIsomorphism(F, y);;
gap> RF:=ResolutionFiniteGroup(F,4);;
gap> chnmap:=EquivariantChainMap(RF,RF,phi);;
gap> C:=HomToIntegers(chnmap);;
gap> c:=Cohomology(C,3);
[ f1 ] -> [ f1^2 ]
gap> S:=Source(c);
<fp group on the generators [ f1 ]>
gap> eS:=Elements(S);
[ <identity ...>, f1, f1^2 ]
```

Podemos observar que el único elemento de $H^2(F, \Bbbk^\times)$ que es $\operatorname{ad} y$-invariante es 1. Además, $G/F \simeq C_2 = \langle y \rangle$. Luego los elementos no triviales de $H^2(F, \Bbbk^\times)$ no son $\operatorname{ad} G$-invariantes. Notemos que $\varphi : G \to G$ dada por $\varphi(g) = x^{-1}gx$, es un automorfismo de G y $\varphi|_F = \phi \in \operatorname{Aut} F$, pues $F \lhd G$. Vimos que los cociclos no triviales pertenecen a la misma órbita por la acción de $\langle \varphi \rangle < \operatorname{Aut} G$.

Para ayudar en los cálculos de los $G(H)$, tenemos el siguiente programa que nos dice si el producto semidirecto que aparece en la definición de $G(H)$ va a ser directo o no. El input es un grupo G y un subgrupo $F < G$. Estamos usando que $H_1(F, Z) = F/[F, F] \simeq \widehat{F}$.

Programa 6. $IsDirect(G, F)$

```
IsDirect:=function(G, F)
local N, Gen_N, RF, g, eg, tg, hg, R, i, M, id, P;
LoadPackage("hap");
N:=Normalizer( G, F );
Gen_N:=SmallGeneratingSet(N);
RF:=ResolutionFiniteGroup(F,2);
g:=[]; eg:=[]; tg:=[]; hg:=[]; R:=[];
for i in [1..Length(Gen_N)] do
g[i]:=ConjugatorAutomorphism( F, Gen_N[i] );
eg[i]:=EquivariantChainMap(RF,RF,g[i]);
tg[i]:=TensorWithIntegers(eg[i]);
hg[i]:=Homology(tg[i],1);
M:=Source(hg[1]);
id:=GroupHomomorphismByFunction(M,M,x->x);
        if hg[i]=id then R[i]:=1;
        else R[i]:=0;
        fi;
od;
P:=Product(R);
return(P);
end;
```

Bibliografía

[A] N. Andruskiewitsch, *About finite dimensional Hopf algebras*, Notes of a course given at the CIMPA School Quantum symmetries in theoretical physics and mathematics Bariloche 2000. Contemp. Math. **294**, 1–57 (2002).

[A1] ______, *Notes on extensions of Hopf algebras.* Canad. J. Math. **48** (1996), 3–42.

[A2] ______, *On finite-dimensional Hopf algebras.* Proceedings of the ICM Seoul (2014), Vol. II, 117–141. (2014).

[AD] N. Andruskiewitsch, J. Devoto, *Extensions of Hopf algebras.* Algebra i Analiz. **7** (1995), 22–61.

[AEG] N. Andruskiewitsch, P. Etingof, S. Gelaki, *Triangular Hopf Algebras With The Chevalley Property.* Michigan Math. J. **49** (2001), 277–298.

[AFGV] Andruskiewitsch, N., Fantino, F., Graña, M., Vendramin, L. *Finite-dimensional pointed Hopf algebras with alternating groups are trivial*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **190** (2011), 225–245.

[AF] N. Andruskiewitsch, W. Ferrer, *The beginnings of the theory of Hopf algebras*, Acta Appl. Math. **108** (2009), 3–17.

[AG] N. Andruskiewitsch, M. Graña. *From racks to pointed Hopf algebras*, Adv. Math. **178** (2003), 177–243.

[AG2] N. Andruskiewitsch, M. Graña. *Examples of liftings of Nichols algebras over racks*, AMA Algebra Montp. Announc. **1** (2003) (`http://www.mate.uncor.edu/andrus/papers/ama-nicomat.ps`).

[AGM] A. Andruskiewitsch, C. Galindo, M. Müller, *Examples of finite-dimensional Hopf algebras with the dual Chevalley property.* `arXiv:1509.01548`.

[AM] N. Andruskiewitsch, M. Müller, *Examples of extensions of Hopf algebras.* Rev. Colomb. Mat. (1) **49** (2015), 193–211.

[AN] N. Andruskiewitsch, S. Natale, *Examples of self-dual Hopf algebras.* J. Math. Sci. Univ. Tokyo **6** (1999), 181–215.

[AS] N. Andruskiewitsch, H.J. Schneider. *Pointed Hopf algebras*, *Recent developments in Hopf algebra Theory*, MSRI Publ. **43** (2002), 1–68, Cambridge Univ. Press.

[BG] Beattie, M., García, G. A., *Classifying Hopf algebras of a given dimension*, Contemp. Math. **585** (2013), 125–152.

[BM] R.J. Blattner, S. Montgomery, *Crossed products and Galois extensions of Hopf algebras*, Pacific J. Math. **137** (1989), 37–54.

[Br] K. S. Brown, *Cohomology of Groups, Graduate Texts in Mathematics*, **87** (1982). New York - Heidelberg - Berlin: Springer-Verlag.

[CDMM] C. Calinescu, S. Dăscălescu, A. Masuoka, C. Menini. *Quantum lines over non-cocommutative cosemisimple Hopf algebra*, J. Algebra **273** (2004), 753–779.

[DNR] S. Dăscălescu, C. Năstăsescu, S. Raianu. *Hopf Algebras: An Introduction* (2001). New York: Marcel Dekke.

[DPR] R. Dijkgraaf, V. Pasquier, P. Roche, *Quasi-quantum groups related to orbifold models*, Proc. Modern Quantum Field Theory, Tata Institute, Bombay, (1990) 375–383.

[DT] Doi, Y., Takeuchi, M., *Multiplication alteration by two-cocycles. The quantum version*, Comm. Algebra **22** (1994), 5715–5732.

[Dr] V.G. Drinfeld, *Quantum groups*. Proc. Int. Congr. Math., Berkeley (1987), 798–820.

[EG] P. Etingof, S. Gelaki, *The classification of finite dimensional triangular Hopf algebras over an algebraically closed field of char 0*. Mosc. Math. J. **3** (2003), 37–43.

[EG1] P. Etingof, S. Gelaki. *The Classification of Triangular Semisimple and Cosemisimple Hopf Algebras Over an Algebraically Closed Field*, Int. Math. Res. Not. **5** (2000), 223–234.

[EG2] ______, *Some properties of finite-dimensional semisimple Hopf algebras*. Math. Res. Lett. **5** (1998), 191–197.

[EG3] ______, *On families of triangular Hopf algebras*, Int. Math. Res. Not. IMRN **14** (2002), 757–768.

[ENO] P. Etingof, D. Nikshych, V. Ostrik, *On fusion categories*, Ann. Math. (2) **162**, 581-642 (2005).

[ENO1] ______, *Weakly group-theoretical and solvable fusion categories*, Adv. Math. **226** (2011), 176–205.

[ENO2] ______, *Fusion categories and homotopy theory. With an appendix by Ehud Meir*, Quantum Topol. (1) **3**, 209–273 (2010).

[EGNO] P. Etingof, S. Gelaki, D. Nikshych, V. Ostrik, *Tensor Categories*, Math. Surveys Monogr. **205** (2015).

[FG] F. Fantino, G. A. García, *On pointed Hopf algebras over dihedral groups*, Pacific J. Math. **252** no. 1 (2011), 69–91.

[FK] S. Fomin, K. N. Kirillov, *Quadratic algebras, Dunkl elements, and Schubert calculus*, Progr. Math. **172**, Birkhauser, (1999), 146–182.

[GAP] The GAP Group, *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.7.7*; 2015, (http://www.gap-system.org).

[GG] G. A. García, A. García Iglesias, *Pointed Hopf algebras over* $\mathbb{S}_4$. Israel J. Math. **183** (2011), 417–444.

[GP] C. Galindo, J. Plavnik. *Tensor functors between Morita duals of fusion categories*, Preprint, arXiv:1407.2783.v1.

[G] M. Graña, *On Nichols algebras of low dimension*, New Trends in Hopf Algebra Theory, Contemp. Math. **267** (2000), 111–136.

[G1] ———, Finite dimensional Nichols algebras of non-diagonal group type, zoo of examples available at http://mate.dm.uba.ar/~matiasg/zoo.html.

[GN] C. Galindo, S. Natale, *Simple Hopf algebras and deformations of finite groups*. Math. Res. Lett. **14** (2007), 943–954.

[GIV] A. García Iglesias, C. Vay. *Finite-dimensional pointed or copointed Hopf algebras over affine racks*, J. Algebra **397**(2014), 379–406.

[Ge] S. Gelaki. *Quantum groups of dimension* pq^2, Israel J. Math. **102** (1997), 227–267.

[GeN] S. Gelaki, D. Naidu. *Some properties of group-theoretical categories*, J. Algebra **322** (2009) 2631–2641.

[GNN] S. Gelaki, Deepak Naidu, D. Nikshych, *Centers of graded fusion categories*. Algebra and Number Theory **3 (8)** (2009), 959–990.

[Gi] M. Giudici, *Factorizations of sporadic simple groups*. J. Algebra **304** (2006), 311–323.

[Gr] J. Greenough, *Monoidal 2-structure of Bimodule Categories*. J. Algebra **324** (2010), 1818–1859.

[HAP] G. Ellis, *Homological Algebra Programming* - a GAP package, 1.10.15 , (07/12/2013), http://hamilton.nuigalway.ie/Hap/www/.

[HLV] I. Heckenberger, A. Lochmann, L. Vendramin. *Braided racks, Hurwitz actions and Nichols algebras with many cubic relations*, Transform. Groups 17 (2012), no. 1, 157-194

[K] G.I. Kac, *Extensions of groups to ring groups*. Math. USSR Sbornik **5** (1968), 451–474.

[Ka] C. Kassel, *Quantum Groups*. Graduate Texts in Mathematics, **155**, Springer-Verlag, New York (1995).

[M] S. Majid, *Physics for algebraists: non-commutative and non-cocommutative Hopf algebras by a bicrossproduct construction*. J. Algebra **130** (1990), 17–64.

[M1] ———, *Foundations of Quantum Group Theory*, Cambr.Univ. Press, (1995).

[MO] S. Majid, R. Oeckl, R, *Twisting of Quantum Differentials and the Planck Scale Hopf Algebra*, Comm. Math. Phys. **205**(1999), 617–655.

[Ma] A. Masuoka, *Extensions of Hopf algebras* (lecture notes taken by Matías Graña). Mat. 41/99, FaMAF Uni. Nacional de Córdoba, 1999.

[Ma2] A. Masuoka. *Some further classification results on semisimple Hopf algebras*, Commun. Algebra **24** (1996), 307–329.

[MS] A. Milinski, H.-J. Schneider, *Pointed Indecomposable Hopf Algebras over Coxeter Groups*, Contemp. Math. **267** (2000), 215–236.

[Mo] M. Mombelli. *Families of finite-dimensional Hopf algebras with the Chevalley property*, Algeb. Represent. Theory **16** (2013), 421–435.

[Mo2] ———, *Una introducción a las categorías tensoriales y sus representaciones.* Notas de curso FaMAF-UNC.`http://www.famaf.unc.edu.ar/~mombelli/categorias-tensoriales3.pdf`

[Mon] S. Montgomery, *Hopf algebras and their action on rings*, CBMS Regional Conference Series **82** (1993).

[Mon2] ———, *Classifying finite dimensional semisimple Hopf algebras.* Contemp. Math. **229** (1998), 265–279.

[Mov] M. Movshev, *Twisting in group algebras of finite groups.* Func. Anal. Appl. **27** (1994), 240–244.

[MW] Montgomery, S., Whiterspoon, S., *Irreducible representations of crossed products*, J. Pure Appl. Algebra **129** (1998), 315–326.

[Na] D. Naidu, *Categorical Morita equivalence for group-theoretical categories*, Comm. Algebra **35** (2007), no. 11, 3544–3565.

[N] S. Natale, *On group theoretical Hopf algebras and exact factorizations of finite groups.* J. Algebra **270** (2003), 199–211.

[N1] ———, *On Quasitriangular Structures in Hopf Algebras Arising from Exact Group Factorizations.* Commun. Algebra **39 (12)** (2011), 4763–4775.

[N2] S. Natale, *Jordan-Hölder theorem for finite dimensional Hopf algebras*, Proc. Am. Math. Soc. **143**, no. 12 (2015), 5195–5211.

[N3] ———, *Hopf Algebra Extensions of Group Algebras and Tambara-Yamagami Categories.* Algebr. Represent. Th. **13** (2010), 673–691.

[N4] ———, *Semisimple Hopf algebras and their representations*, Publ. Mat. Uruguay **12**, 123–167 (2011).

[N5] ———, *On Semisimple Hopf Algebras of Dimension pq^2*, J. Algebra **221** (1999), 242–278.

[N6] ———, *Semisolvability of semisimple Hopf algebras of low dimension*, Memoirs Amer. Math. Soc. **186** (2007).

[N7] ———, *Semisimple Hopf algebras of dimension 60*, J. Algebra **324** (2010), 3017–3034.

[Ni] D. Nikshych, *Non-group-theoretical semisimple Hopf algebras from group actions on fusion categories.* Sel. math., New ser. **14** (2008), 145–161.

[Ni1] ______, *K_0-Rings and twisting of finite dimensional semisimple Hopf algebras.* Commun. Algebra **26(1)** (1998), 321–342.

[NiR] D. Nikshych and B. Riepel. *Categorical Lagrangian Grassmannians and Brauer-Picard groups of pointed fusion categories*, J. Algebra **411** (2014),191–214.

[O] V. Ostrik, *Module categories over the Drinfeld double of a Finite Group*, Int. Math. Res. Not. **27** (2003), 1507–1520.

[O1] ______, *Module categories, weak Hopf algebras and modular invariants*, Transform. Groups **8 (2)**(2003), 177–206.

[R] D. E. Radford, *The structure of Hopf algebras with a projection.* J. Algebra **92** (1985), 322–347.

[R1] ______, *Hopf algebras.* Series on Knots and Everything **49**. Hackensack, NJ: World Scientific. xxii, 559 p. (2012).

[S] P. Schauenburg, *Hopf bigalois extensions.* Commun. Algebra **24** (1996), 3797–3825.

[S1] P. Schauenburg, *The monoidal center construction and bimodules*, J. Pure Appl. Algebra **158** (2001), 325–346.

[S2] ______, *Hopf bimodules, coquasibialgebras, and an exact sequence of Kac*, Adv. Math. **165** (2002) 194–263.

[Sc] H.-J. Schneider, *Normal basis and transitivity of crossed products for Hopf algebras.* J. Algebra **152** (1992), no. 2, 289–312.

[Sc1] ______, *Lectures on Hopf algebras.* Trabajos de Matemática 31/95 - FaMAF (1995).

[SONATA] E. Aichinger, F. Binder, J. Ecker, P. Mayr, C. Nöbauer, *System of nearrings and their applications* - a GAP package, 2.6, (07/11/2012), `http://www.algebra.uni-linz.ac.at/Sonata/`.

[Sw] M. E. Sweedler, *Hopf Algebras.* Benjamin, New York, 1969.

[T] M. Takeuchi, *Matched pairs of groups and bismash products of Hopf algebras.* Commun. Algebra **9** (1981), 841–882.

[WW] J. Wiegold, A. Williamson, *The factorizations of the alternating and symmetric groups.* Math. Z. **175** (1980), 171–179.

[Y] S. Yamagami. *Group symmetry in tensor categories and duality for orbifolds*, J. Pure Appl. Algebra, **167** (2002), 83–128.

[Y2] S. Yamagami. *Polygonal presentations of semisimple tensor categories*, J. Math. Soc. Japan, **54** (2002), 61–88.