Grupos cuánticos torcidos en raíces de la unidad y sus subgrupos cuánticos

por Javier A. Gutiérrez Ch.

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación como parte de los requerimientos para la obtención del grado de Doctor en Matemática de la

Universidad Nacional de Córdoba

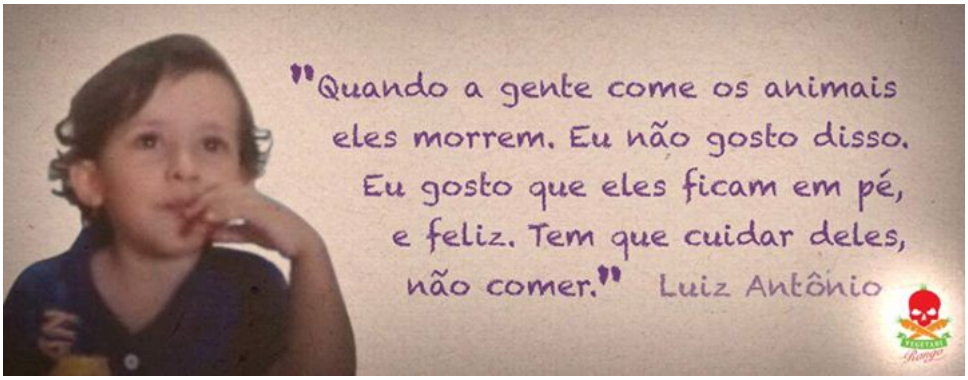
Marzo de 2016

©FaMAF-UNC 2016

Director: Dr. Gastón Andrés García

Co-Director: Dr. Fernando Fantino

Grupos cuánticos torcidos en raíces de la unidad y sus subgrupos cuánticos. Por *Javier Alberto Gutiérrez Chaparro.* Se distribuye bajo una Licencia Creative Commons Atribución - No Comercial - Compartir Igual 2.5 Argentina.



esta tesis está dedicada a mi hijo Diego

Índice general

Agradecimientos I

Resumen III

Abstract V

Introducción VII

1. Preliminares 1

1.1. Álgebras de Lie 1

1.2. Álgebras de Hopf 3

1.2.1. Extensiones de álgebras de Hopf 9

1.2.2. Grupos cuánticos 14

1.3. Twist, 2-cociclos, bi-graduaciones y apareamientos 18

1.3.1. Twist y 2-cociclos 18

1.3.2. Apareamientos de Hopf 20

1.3.3. Bi-graduaciones 21

2. Álgebra Envolvente Cuántica Torcida 25

2.1. La aplicación de torcimiento φ 25

2.2. Apareamientos entre subálgebras de Borel 33

2.3. Álgebra de potencias divididas 37

3. Álgebra de Funciones Cuantizada Torcida 41

3.1. $\mathcal{O}_q^{\varphi}(G)$ como deformación por 2-cociclo de $\mathcal{O}_q(G)$ 41
3.2. Especializaciones en una raíz de la unidad 47
3.2.1. Morfismo de Frobenius cuántico 49
3.3. Núcleos de Frobenius-Luzstig torcidos 51
3.3.1. Subálgebras de los $\mathbf{u}_{\epsilon}^{\varphi}(\mathfrak{g})$ 54

4. Núcleos de Frobenius-Lusztig Torcidos **57**
4.1. Subgrupos cuánticos regulares torcidos 57
4.2. Cocientes de $\mathbf{u}_{\epsilon}^{\varphi}(\mathfrak{g})^*$ 62

5. Subgrupos Cuánticos **69**
5.1. Subgrupos cuánticos obtenidos por pushout 69
5.2. Subgrupos cuánticos obtenidos desde $\mathbf{u}_{\epsilon}^{\varphi}(\mathfrak{p})$ 71
5.3. Parametrización de subgrupos cuánticos 73
5.3.1. Clases de isomorfismo de subgrupos cuánticos 77

Agradecimientos

Hay una relación directamente proporcional entre lo valioso de un logro personal y la cantidad de personas que te ayudan a conseguir dicho logro. Un cúmulo de esfuerzos se confabulan en una sincronía extraña, la cual me gusta llamar amor, amistad, solidaridad y perseverancia. Cada persona te aporta incondicionalmente diversas cosas, agradezco a cada una de las personas que estuvieron conmigo, familiares, profesor@s, amig@s y los demás que me acompañaron en estos últimos cinco años. Tod@s importantes en esta étapa doctoral.

Cuando llegué a Argentina no alcanzaba a imaginar la cantidad de matemáticas que iba ha aprender, superé mis expectativas. La exigencia académica de FaMAF posibilita que la formación en matemáticas sea del más alto nivel. El programa de becas latinoamericanas del CONICET nos brinda la oportunidad de estudiar un excelente doctorado y también nos permite conocer la Argentina, un país maravilloso y del que no me gustaría partir. En su momento, no encontré en mi país de origen una oportunidad como esta, me voy seguro de haberme esforzado por dejar el nombre de Colombia en alto.

Como manera especial dedico esta tesis a mi hijo del alma Diego Alejandro, que soportó mi ausencia con fortaleza. También, agradezco a mi mamá y papá por estar apoyándome todo el tiempo, a mis hermanos y sobrino por ayudar en cada cosa que podían, a mi tía Mariela que de estar aquí sería la primera en felicitarme, ¡como te extraño! a Marcela y su familia por cuidar a mi hijo. También a mi gran amiga de infancia Carol y a Alexander que siempre está dispuesto a hablar de matemáticas. A Jackeline y Camilo por haber estado ahí siempre que me sentía solo en la distancia. A todos mis amigos de facultad, en especial al parche santiagueño Sonia, Ceci, Joha y Eli amigas incondicionales que se bancaron al molesto de Javier, especialmente Eli hasta en año nuevo, a María de los Ángeles una Cordobesa incondicional, Chaves compa de juerga y a Lili por haber llegado al final de esta étapa a acompañarme.

Un agradecimiento muy especial para Gastón, la palabra director le queda pequeña, es un maestro, amigo y excelente persona. Tuve una suerte inmensa al poder ser dirigido por Gastón, admiro su alta compresión humana y de las matemáticas. Me llevo el más profundo respeto personal y académico. A Fernando Fantino por estar siempre, dispuesto a dar una mano y por supuesto a Nicolás Andruskiewitsch, sin el no habría podido venir a la Argentina. A todos aquellos que me respondieron inquietudes sobre

cada cosa que no entendía, Julien Bichon, Nicolai Reshetikhin y Fabio Gavarini.

También doy gracias a mi director de tesis de maestría Fernando Zalamea y a los profesores Juan Pablo Rossetti, Sonia Natale y Carlos Olmos.

Finalmente, a Dios por permitir que cada cosa pasara justo como quería.

Resumen

En la presente tesis presentamos aportes al problema de clasificación de álgebras de Hopf sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero. El resultado principal es la determinación de todos los subgrupos cuánticos de un grupo cuántico simple torcido.

Varios autores, [AG, BB, BY, G2, Mu, P], han hecho importantes aportes en el problema de clasificación de subgrupos cuánticos de distintos grupos cuánticos. Entre ellos, $GL_q(n)$, $SU_q(2)$ para $q \in [-1,1] \setminus 0$, $SU_{-1}(3)$, $SO_{-1}(3)$, $GL_{\alpha,\beta}(n)$ y $\mathcal{O}_q(G)$.

En [AG] se clasificaron los subgrupos cuánticos finitos de $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ donde G es grupo algebraico afín simple, conexo y simplememte conexo y ϵ es una ℓ-raíz primitiva de la unidad cumpliendo que ℓ es impar y coprimo con tres si G es de tipo G_2. En [CV2] se introduce una deformación multiparámetro de $\mathcal{O}_\epsilon(G)$, que denotamos $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$. El trabajo principal de esta tesis es encontrar los subgrupos cuánticos de esta deformación, escogiendo ϵ, G y $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ como en [AG], establecer nuevos ejemplos de álgebras de Hopf y ver semejanzas con el caso uniparamétrico $\mathcal{O}_\epsilon(G)$.

El teorema principal de la tesis caracteriza los sugbrupos cuánticos de $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$, mediante lo que entendemos por *dato de subgrupo torcido*. El cual está dado por una 6-upla $\mathcal{D}^\varphi = (I_+, I_-, N^\varphi, \Gamma, \gamma, \delta)$, tal que: I_+, I_- son subconjuntos del conjunto de raíces simples de $\mathfrak{g}$ y ellos se relacionan con un subgrupo conexo P de G, N^φ es grupo abeliano finito, Γ es un grupo algebraico, $\gamma : \Gamma \to P$ es un homomorfismo injectivo de grupos y $\delta : N^\varphi \to \widehat{\Gamma}$ es un homomorfismo de grupos. Entonces tenemos que,

Teorema 1 *Hay una biyección entre morfismos sobreyectivos de álgebras de Hopf $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G) \to A$ y datos de subgrupos torcidos salvo equivalencia.*

La tesis consta de cinco capítulos, en el primero introducimos notaciones básicas y preliminares, tales como deformaciones por 2-cociclo, deformaciones por twist y extensiones de álgebras de Hopf. En el segundo capítulo describimos, siguiendo [BG, CV2], el álgebra envolvente cuántica torcida y un endomorfismo del $\mathbb{Q}$-espacio vectorial $\mathbb{Q}P$ donde P es el retículo de pesos asociado a una sugálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, que denominamos el morfismo de torcimiento φ. En estos primeros dos capítulos no se incluye ningún resultado original.

Para el tercer capítulo definimos el grupo cuántico $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$ y probamos que coincide con una deformación por 2-cociclo de $\mathcal{O}_\epsilon(G)$, mostrando el primer resultado original de

esta tesis. Definimos el morfismo cuántico de Frobenius Fr y los núcleos de Frobenius-Lusztig torcidos $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$, de estos últimos caracterizaremos sus subálgebras de Hopf por ternas $(I_+, I_-, \Sigma^\varphi)$, donde Σ^φ es un subgrupo de $G(\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g}))$ el grupo de elementos de tipo grupo de $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$.

En el capítulo 4, definimos el subgrupo cuántico regular torcido $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(P)$ de $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$, donde P es un subgrupo algebraico de G con $\mathrm{Lie}(P) = \mathfrak{p}$. Establecemos que los cocientes $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^*$ de $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})^*$ parametrizados por la terna $(\mathbb{T}^\varphi, I_+, I_-)$, donde $\mathbb{T}^\varphi \simeq G(\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g}))$, son deformación por 2-cociclo de $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{p})^*$. Por otra parte, obtenemos cocientes de $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})^*$ que dependen de un grupo abeliano finito N^φ y ellos no son necesariamente deformación por 2-cociclo de aquellos obtenidos cuando $\varphi = 0$. En los dos casos anteriormente mencionados obtenemos nuevos ejemplos de álgebras de Hopf que son cocientes de $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$.

En el capítulo 5 construimos subgrupos cuánticos $A_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma}^\varphi$ de $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(P)$ que dependen de un morfismo inyectivo de grupos $\gamma : \Gamma \to P$, con Γ un grupo algebraico. Ellos son obtenidos mediante la construcción pushout descrita en [AG, Proposición 2.10] y resultan ser deformación por 2-cociclo del subgrupo cuántico de $\mathcal{O}_\epsilon(P)$, $A_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma}$. También, usando un morfismo de grupos $\delta : N^\varphi \to \widehat{\Gamma}$, podemos definir un cociente A de $A_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma}^\varphi$. Note que juntando lo hecho en el Capítulo 4 y 5 hasta ahora, A se parametriza por un dato de subgrupo torcido $\mathcal{D}^\varphi$, por eso será denotado $A_{\mathcal{D}^\varphi}$. Recíprocamente, probamos que dado un cociente A de $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$, entonces para algún dato de subgrupo $\mathcal{D}^\varphi$, A es isomorfo como álgebra de Hopf a $A_{\mathcal{D}^\varphi}$. Finalmente, establecemos el Teorema 1 y analizamos clases de isomorfismo de subgrupos cuánticos al definir una relación de orden parcial sobre el conjunto de datos de subgrupo torcidos y relacionarla con los cocientes $A_{\mathcal{D}^\varphi}$.

Como producto de la tesis se escribió el artículo *Quantum subgroups of simple twisted quantum groups at roots of one* en co-autoría con mi director de tesis Gastón Andrés García, puede ser descargado en `arxiv.org/abs/1601.00897`.

Abstract

In this thesis we present contributions to the problem of classifying Hopf algebras over an algebraically closed field of characteristic zero. The main result is the determination of all quantum subgroups of a simple twisted quantum group.

Several authors, including [AG, BB, BY, G2, Mu, P], have made significant contributions to the classification problem of quantum subgroups of a fixed quantum group. Among them, $GL_q(n)$, $SU_q(2)$ for $q \in [-1,1] \setminus 0$, $SU_{-1}(3)$, $SO_{-1}(3)$, $GL_{\alpha,\beta}(n)$ and $\mathcal{O}_q(G)$.

In [AG], all quantum subgroups of $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$ were classified where G is a simple, connected, simply connected complex algebraic affine group and ϵ is a primitive ℓ-th root of unity with ℓ odd and coprime with 3 if G is of type G_2. In [CV2], introduced a multiparameter deformation of $\mathcal{O}_\epsilon(G)$, which we denote this one by $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$. The main purpose of this thesis is to find all quantum subgroups of this deformation, fixing ϵ, G and $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ as in [AG], to establish new Hopf algebra examples and to show analoguies with the uniparameter case $\mathcal{O}_\epsilon(G)$.

The main theorem of this thesis is the characterization all quantum subgroups of $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$. For this, we introduce the concept of *twisted subgroup data*. It is given by a 6-tuple $\mathcal{D}^\varphi = (I_+, I_-, N^\varphi, \Gamma, \gamma, \delta)$ such that: I_+, I_- are subsets of the set of simple roots of $\mathfrak{g}$ and are related with a connected subgroup P of G, N^φ is an abelian finite group, Γ is an algebraic group, $\gamma : \Gamma \to P$ is an injective group homomorphism and $\delta : \mathbb{N}^\varphi \to \widehat{\Gamma}$ is a group homomorphism. Then we have

Theorem 1 *There exist a bijection between surjective Hopf algebra morphism $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G) \to A$ and twisted subgroup data up to equivalence.*

The thesis have 5 chapters, in the first we introduce basic notations and preliminaries, such that 2-cocycle deformations, twist deformations and Hopf algebras extensions. In the second chapter, following [BG, CV2] we define the twisted quantum enveloping algebra and an endomorphism of the $\mathbb{Q}$-space vector $\mathbb{Q}P$, where P is the weight lattice associated with a Cartan subalgebra $\mathfrak{h}$ of $\mathfrak{g}$. We call this one the twisted morphism φ. In the first two chapters, we do not include any original result.

In the third chapter, we define the quantum group $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$ and we prove that it is a 2-cocycle deformation of $\mathcal{O}_\epsilon(G)$, showing the first original result of this thesis. We define the quantum Frobenius morphism and the twisted Frobenius-Lusztig kernel

$\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$. We characterize the Hopf subalgebras of the latter with a triples $(I_+, I_-, \Sigma^\varphi)$, where Σ^φ is a subgroup of $G(\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g}))$, the group of group-like elements of $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$.

In Chapter 4, we define the twisted quantum regular subgroup $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(P)$ of $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$, where P is an algebraic subgroup of G with $\mathrm{Lie}(P) = \mathfrak{p}$. We establish that the quotients $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^*$ of $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})^*$ parameterized with the triple $(\mathbb{T}^\varphi, I_+, I_-)$ where $\mathbb{T}^\varphi \simeq G(\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g}))$, are 2-cocycle deformations of $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{p})^*$. On the other hand, we obtain quotients of $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})^*$ that depend on an abelian finite group N^φ and they are not 2-cocycle deformation of those obtained when $\varphi = 0$, necessarily. In both cases we obtain new Hopf algebras examples as quotients of $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$.

In the Chapter 5, we construct quantum subgroups $A_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma}^\varphi$ of $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(P)$ which depend of an injective group morphism $\gamma : \Gamma \to P$, with Γ an algebraic group. They are obtained using the pushout construction cf. [AG, Proposition 2.10] and are 2-cocycle deformations of the quantum subgroup $A_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma}$ of $\mathcal{O}_\epsilon(G)$. Also, using a group morphism $\delta : N^\varphi \to \widehat{\Gamma}$, we are able to define a quotient A of $A_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma}^\varphi$. Note that putting together the results of the Chapters 4 and 5, A is parametrized by a twisted subgroup data $\mathcal{D}^\varphi$, and we denote this one by $A_{\mathcal{D}^\varphi}$. Conversely, we prove that given a quotient A of $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$, then exist some twisted subgroup data D^φ such that $A \simeq A_{\mathcal{D}^\varphi}$. Finally, we establish Theorem 1 and we analyse isomorphism classes of quantum subgroups, through a partial order relation over twisted subgroup data.

The thesis originated *Quantum subgroups of simple twisted quantum groups at roots of one* article coauthored with my PhD advisor, Gastón Andrés García. Is available at `arxiv.org/abs/1601.00897`.

Introducción

En el siglo pasado Grothendieck mostró las ventajas de estudiar objetos matemáticos por medio de las funciones sobre ellos. Por ejemplo, cuando tenemos un grupo algebraico G, resulta que su anillo de funciones regulares $\mathcal{O}(G)$ es un álgebra de Hopf conmutativa. Recíprocamente, si tenemos un álgebra de Hopf H finitamente generada, conmutativa, compleja y sin elementos nilpotentes, entonces ella es isomorfa al anillo de funciones $\mathcal{O}(G)$ de algún grupo algebraico afín G. Mas aún, hay ciertas relaciones entre propiedades de estos objetos. Por ejemplo, si $\mathcal{O}(G)$ es un dominio integro entonces G es conexo o $\iota : P \to G$ es una aplicación inyectiva si y sólo si ${}^t\iota : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(P)$ es sobreyectiva.

Es natural preguntarse si es posible extender esta relación cuando se consideran álgebras de Hopf **no conmutativas**. En este sentido aparece la noción de grupo cuántico. Los grupos cuánticos a *per se* no existen, ellos serían los objetos de una categoría dual a las álgebras de Hopf no conmutativas y no coconmutativas. Es decir, si H es una de tales álgebras de Hopf, ella debería ser isomorfa a $\mathcal{O}(G_q)$, donde G_q es un grupo cuántico. En esta tesis, el grupo cuántico no existe, de manera que llamaremos grupo cuántico al álgebra de Hopf que se le asocia. Por supuesto, en este sentido un subgrupo cuántico corresponde a un cociente de álgebras de Hopf.

Los grupos cuánticos aparecen inicialmente en los contextos de la geometría, probabilidad y simetría cuántica y auto dualidad ([M], pág. xvi). Luego de trabajos como *Quantum Groups* de Drinfeld [D] empiezan a tener un interés más amplio en las matemáticas. Actualmente existe una importante cantidad de investigadores alrededor del mundo que investigan en grupos cuánticos. Desde luego, uno de los principales problemas es clasificarlos. Actualmente se han logrado clasificaciones de algunas familias de álgebras de Hopf, como por ejemplo las punteadas sobre grupos abelianos o álgebras de Hopf de una dimensión fija o de dimensión potencias de primo. Existe una basta bibliografía al respecto, por ejemplo tenemos los trabajos de [AS, EG, G1, N].

Al interior del problema de clasificación encontramos el de clasificar los subgrupos cuánticos de un grupo cuántico dado. Esto se fundamenta en quizás dos aspectos, el primero es generalizar el problema clásico de conocer los subgrupos de un grupo algebraico dado y el segundo es encontrar nuevos ejemplos de álgebras de Hopf. En aras de poder clasificar los grupos cuánticos, es importante encontrar propiedades generales de ellos, es aquí donde emerge el problema de determinar la estructura de todos los

subgrupos cuánticos de un grupo cuántico dado. Varios autores han realizado aportes frente a esta situación, al determinar todos los cocientes de grupos cuánticos conocidos, es decir subgrupos cuánticos. Se distinguen dos casos para abordar este problema, el *algebraico* y el *compacto*. A saber para el caso compacto encontramos en la literatura el siguiente marco de referencia,

[P] la descripción de los subgrupos cuánticos compactos de los grupos cuánticos de Woronowicz $SU_q(2)$ y $SO_{-1}(3)$ para $q \in [-1, 1] \setminus 0$,

[BB] la determinación de todos los subgrupos cuánticos de $SU_{-1}(3)$,

[BN] el estudio de los subgrupos cuánticos de $SU_q(2)$ para $q = -1$,

[FST] el estudio de los subgrupos cuánticos de $SU_q(2)$ para $q \neq -1$,

[BD] la descripción de los subgrupos cuánticos del grupo ortogonal cuántico *half-liberated* O_n^*,

[BY] la clasificación de los subgrupos cuánticos de $SU_{-1}(3)$.

Y para el marco algebraico,

[Mu] la descripción de los subgrupos cuánticos finitos de $GL_q(n)$ y $SL_q(n)$ para q una raíz impar de la unidad,

[AG] la clasificación de los subgrupos cuánticos de $\mathcal{O}_\epsilon(G)$, para un conexo, simplemente conexo, complejo grupo algebraico simple G, con ϵ una ℓ-ésima raíz primitiva de la unidad con ℓ impar y coprimo con 3 si G es de tipo G_2,

[G2] la descripción de los subgrupos cuánticos de la deformación 2-paramétrica $GL_{\alpha,\beta}(n)$ para $\alpha^{-1}\beta$ una raíz primitiva de la unidad de orden impar.

El presente trabajo determina todos los subgrupos cuánticos del álgebra de funciones cuantizada multiparamétrica $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$, para un conexo, simplemente conexo, complejo grupo algebraico simple G, con ϵ una ℓ-ésima raíz primitiva de la unidad con ℓ impar y coprimo con 3 si G es de tipo G_2. Si $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g}$ y P es el retículo de pesos asociado a una subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, φ es un endomorfismo del $\mathbb{Q}$ espacio vectorial $\mathbb{Q}P$. Lo interesante es que cuando $\varphi = 0$ podemos recuperar los resultados obtenidos en [AG], es por esto que la tesis se enmarca al interior del marco algebraico. De los resultados de tesis se produjo el artículo *Quantum subgroups of simple twisted quantum groups at roots of one* en co-autoría de Gastón Andrés García, este puede ser descargado en `arxiv.org/abs/1601.00897`.

En el Capítulo 1 de preliminares, introduciremos las notaciones y definiciones básicas de la tesis. A saber, presentaremos elementos básicos de álgebras de Lie semisimples, álgebras de Hopf y sus extensiones, apareamientos, teoría de categorías, deformaciones

por 2-cociclo, twist y bigraduaciones. Usaremos la palabra *torcido/a* para aquellas álgebras de Hopf que se puedan ver como deformación por twist o 2-cociclo de otra. Y cuando exista un apareamiento perfecto entre dos álgebras de Hopf, diremos que una es dual a la otra o que están en dualidad.

Sea q una indeterminada, G un grupo algebraico como en [AG] y $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g}$. En [CV1, R] definieron una versión multiparamétrica $U_q^\varphi(\mathfrak{g})$ del grupo cuántico $U_q(\mathfrak{g})$, donde $U_q^\varphi(\mathfrak{g})$ se asemeja a una deformación por twist de $U_q(\mathfrak{g})$ cf. [CV2, R]. De Concini y Lyubanskesko en [DL] presentan formas integrales $R_q[G]$ y $\Gamma(\mathfrak{g})$ de las álgebras $U_q(\mathfrak{g})$ y $\mathcal{O}_q(G)$ respectivamente, con ellas es posible definir el caso raíz de la unidad $U_\epsilon(\mathfrak{g})$ y $\mathcal{O}_\epsilon(G)$. Luego en [CV2] generalizan esto al caso multiparamétrico presentando una deformación del coproducto y del producto de las álgebras $U_q(\mathfrak{g})$ y $\mathcal{O}_q(G)$, que denotaremos $U_q^\varphi(\mathfrak{g})$ y $\mathcal{O}_q^\varphi(G)$, respectivamente, y formas integrales $R_q^\varphi[G]$ y $\Gamma^\varphi(\mathfrak{g})$ que permiten definir el caso $q = \epsilon$. Veremos en el capítulo tres que $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$ corresponde a una deformación por 2-cociclo en el sentido definido en [Do] de $\mathcal{O}_\epsilon(G)$, lo que constituye el primer resultado original de la tesis.

Definiremos en el Capítulo 2 el *álgebra envolvente cuántica torcida* $U_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g}; M)$, en donde $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie compleja, semisimple y de dimensión finita y M es un subretículo del retículo de pesos P de $\mathfrak{g}$ que contiene a Q el retículo de raíces. Las reglas de conmutación en esta álgebra dependen de las entradas de la matriz de Cartan asociada a $\mathfrak{g}$. Cuando $M = Q$ denotaremos $U_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g}; M) = U_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$, en este caso coincide como álgebra con el grupo cuántico de Drinfeld-Jimbo y $U_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g}; P) = \check{U}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$ cuando $M = P$. Presentaremos algunas propiedades de estas álgebras, algunas de las más importantes son las siguientes,

- $U_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g}; M)$ es lo mismo que $U_q^\varphi(\mathfrak{g}; M)$ pero especializando q en ϵ [CKP].
- $U_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$ contiene una subálgebra central Z_0^φ la cual tiene la propiedad de ser invariante bajo la acción sobre el grupo de trenzas $B_{\mathcal{W}}$ definida por Lusztig en [L2]. Mas aún $U_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$ es un Z_0^φ módulo libre de rango $\ell^{\dim \mathfrak{g}}$ [BG].
- si el rango de $\mathfrak{g}$ es n, la cantidad de parámetros enteros que definen a φ es $n(n-1)/2$.
- $U_q^\varphi(\mathfrak{g})$ posee una forma integral $\Gamma^\varphi(\mathfrak{g})$ que llamaremos el *álgebra de potencias divididas* [CV2].
- Definimos $\Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$ como el producto tensorial $\Gamma^\varphi(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{Q}[q,q^{-1}]} \mathbb{Q}(\epsilon)$, donde $\mathbb{Q}(\epsilon) = \mathbb{Q}[q, q^{-1}]/(\chi_\ell(q))$.

Dualmente, en el Capítulo 3 definimos el *álgebra de funciones cuantizada torcida* $\mathcal{O}_q^\varphi(G)$. Ella corresponde al álgebra generada por coeficientes matriciales de $U_q^\varphi(\mathfrak{g})$-módulos finito dimensionales en los cuales las K_i actúan diagonalmente para todo $i \in \{1, \dots, n = \mathrm{rg}\,\mathfrak{g}\}$ y exhibimos algunas propiedades (las cuatro primeras aparecen en [CV2]) tales como,

↬ $\mathcal{O}_q^{\varphi}(G)$ contiene una forma integral $R_q^{\varphi}[G]$ dual a $\Gamma^{\varphi}(\mathfrak{g})$, la cual es generada por coeficientes matriciales de $\Gamma^{\varphi}(\mathfrak{g})$-módulos libres de rango finito en los cuales K_i y $\begin{pmatrix} K_i;0 \\ t \end{pmatrix}$ actúan diagonalmente.

↬ Definimos $\mathcal{O}_{\epsilon}^{\varphi}(G)$ como el producto tensorial $R_q[G] \otimes_{\mathbb{Q}[q,q^{-1}]} \mathbb{Q}(\epsilon)$, luego probamos que $\mathcal{O}_q^{\varphi}(G)$ y $\Gamma^{\varphi}(\mathfrak{g})$ son duales.

↬ $\mathcal{O}_{\epsilon}^{\varphi}(G)$ contiene una subálgebra de Hopf central isomorfa a $\mathcal{O}(G)$.

↬ $\mathcal{O}_{\epsilon}^{\varphi}(G)$ es un $\mathcal{O}(G)$-módulo proyectivo de rango $l^{\dim G}$.

↬ $\mathcal{O}_{\epsilon}^{\varphi}(G)$ es una deformación por 2-cociclo de $\mathcal{O}_{\epsilon}(G)$.

↬ la siguiente sucesión es exacta corta de álgebras de Hopf.

$$1 \longrightarrow \mathcal{O}(G) \longrightarrow \mathcal{O}_{\epsilon}^{\varphi}(G) \longrightarrow \mathcal{O}_{\epsilon}^{\varphi}(G)/\mathcal{O}(G)^{+}\mathcal{O}_{\epsilon}^{\varphi}(G) \longrightarrow 1,$$

Introducimos el *núcleo de Frobenius-Lusztig torcido* $\mathbf{u}_{\epsilon}^{\varphi}(\mathfrak{g})$ de dimensión $\ell^{\dim \mathfrak{g}}$. Este objeto ha sido introducido en varios trabajos para el caso $\varphi = 0$, ver por ejemplo [AG, BG, L1]. Probaremos que $\mathbf{u}_{\epsilon}^{\varphi}(\mathfrak{g})$ se puede definir como el cociente $U_{\epsilon}^{\varphi}(\mathfrak{g})/\langle K_i^{\varphi} - 1, E_i^l, F_i^l, \forall i\rangle$ o equivalentemente, como la subálgebra de $\Gamma_{\epsilon}^{\varphi}(\mathfrak{g})$ generada por K_i, E_i, F_i para $i = 1, \ldots, n$. $\mathbf{u}_{\epsilon}^{\varphi}(\mathfrak{g})$ resulta ser punteada, no semisimple y una deformación por twist de $\mathbf{u}_{\epsilon}(\mathfrak{g})$, el *núcleo de Frobenius-Lusztig* cf. [AG].

Usando el mapeo cuántico de Frobenius [CV2, DL] sabemos que la sucesión,

$$1 \longrightarrow \mathbf{u}_{\epsilon}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{g}) \longrightarrow U(\mathfrak{g})_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \longrightarrow 1,$$

es exacta de álgebras de Hopf, cf. [A1]. La sucesión $1 \to \mathbf{u}_{\epsilon}^{\varphi}(\mathfrak{g}) \to \Gamma^{\varphi}(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \to 1$ también es exacta de álgebras de Hopf. Mas aún, es posible dar una caracterización de $\mathbf{u}_{\epsilon}^{\varphi}(\mathfrak{g})^*$ como un cociente de $\mathcal{O}_{\epsilon}^{\varphi}(G)$ al establecer el siguiente isomorfismo,

$$\mathcal{O}_{\epsilon}^{\varphi}(G)/\mathcal{O}(G)^{+}\mathcal{O}_{\epsilon}^{\varphi}(G) \simeq \mathbf{u}_{\epsilon}^{\varphi}(\mathfrak{g})^*,$$

concluimos que la siguiente sucesión de álgebras de Hopf es exacta,

$$1 \longrightarrow \mathcal{O}(G) \longrightarrow \mathcal{O}_{\epsilon}^{\varphi}(G) \longrightarrow \mathbf{u}_{\epsilon}^{\varphi}(\mathfrak{g})^* \longrightarrow 1.$$

Finalizamos el capítulo 3, probando el siquiente lema,

Lema (Subálgebras de $\mathbf{u}_{\epsilon}^{\varphi}(\mathfrak{g})$) *Las subálgebras de Hopf de $\mathbf{u}_{\epsilon}^{\varphi}(\mathfrak{g})$ están paramétrizadas por ternas $(I_+, I_-, \Sigma^{\varphi})$ donde $I_{\pm} \subset \pm\Pi$ y Σ^{φ} es un subgrupo de $G(\mathbf{u}_{\epsilon}^{\varphi}(\mathfrak{g}))$ sujeto a que $K_{(1\mp\varphi)(\alpha_i)} \in \Sigma^{\varphi}$ si $\alpha_i \in I_{\pm}$. Denotemos por $\widetilde{E}_i := E_i K_{-\tau_i}$ y $\widetilde{F}_j := K_{(\alpha_j+\tau_j)} F_j$. Entonces la subálgebra de $\mathbf{u}_{\epsilon}^{\varphi}(\mathfrak{g})$ correspondiente a la terna $(I_+, I_-, \Sigma^{\varphi})$ es la subálgebra generada por el conjunto $\{g, \widetilde{E}_i, \widetilde{F}_j |\ g \in \Sigma^{\varphi}, \alpha_i \in I_+ \text{ and } \alpha_j \in I_-\}$.*

Uno de los objetivos principales de la siguiente tesis es caracterizar todos los subgrupos cuánticos del grupo cuántico $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$, para esto nos apoyaremos en el procedimiento presentado en [AG].

En lo que resta de la presente introducción, todos los diagramas estarán compuestos de álgebras y morfismos de Hopf. El Capítulo 4 inicia estableciendo la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathcal{O}(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)} & \longrightarrow & \mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)} & \longrightarrow & \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})^* & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathcal{O}(P)_{\mathbb{Q}(\epsilon)} & \longrightarrow & \mathcal{O}_\epsilon^\varphi(P)_{\mathbb{Q}(\epsilon)} & \longrightarrow & \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^* & \longrightarrow & 1. \end{array}$$

donde $\mathfrak{p}$ es una subálgebra de Lie regular de $\mathfrak{g}$ que depende de los parámetros I_+ e I_-, P un subgrupo conexo de G tal que $\mathfrak{p} = \mathrm{Lie}(P)$ y $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})$ es la subálgebra de $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$ de parámetros $(I_+, I_-, \mathbb{T}^\varphi)$ con $\mathbb{T}^\varphi \simeq G(\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})) \simeq (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^n$.

En la segunda parte del Capítulo 4 caracterizamos todos los cocientes de $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})^*$, al considerar un subgrupo abeliano finito N^φ relacionado con Σ^φ. Mas aún, podemos agruparlos en dos grandes grupos, los $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^*$ donde N^φ es trivial y los H donde N^φ no es trivial. Los primeros resultan ser deformación por 2-cociclo de $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{p})^*$ y los segundos no necesariamente son deformación por 2-cociclo de su análogo al considerar $\varphi = 0$. Esto constituye otro de los resultados importantes de la tesis, dado que presentamos dos maneras distintas de obtener nuevos ejemplos de álgebras de Hopf.

En el Capítulo 5 se establece el teorema principal, al considerar la definición siguiente,

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie semisimple de rango n, $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Cartán y Π la base del sistema de raíces Φ de $\mathfrak{g}$ con respecto a $\mathfrak{h}$. Entonces, un **dato de subgrupo torcido** es una colección de seis objetos $\mathcal{D}^\varphi := (I_+, I_-, N^\varphi, \Gamma, \gamma, \delta)$ donde

(*i*) $I_\pm \subset \pm\prod$. Sea $\Psi_\pm = \{\alpha \in \Pi : \operatorname{Supp}\alpha \in I_\pm\}$, $\mathfrak{p} = \sum_{\alpha\in\Psi_\pm} \mathfrak{g}_\alpha$ y $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}_-$, P un grupo de Lie conexo G con $\mathrm{Lie}(P) = \mathfrak{p}$,

(*ii*) N^φ un subgrupo abeliano finito,

(*iii*) Γ un grupo algebraico,

(*iv*) $\gamma : \Gamma \to P$ es un morfismo inyectivo de grupos algebraicos,

(*v*) $\delta : N^\varphi \to \widehat{\Gamma}$ un morfismo de grupos.

Teorema 1 *Hay una biyección entre morfismos sobreyectivos de álgebras de Hopf $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G) \to A$ y datos de subgrupos torcidos salvo equivalencia.*

En la primera sección del Capítulo 5, aplicando la construcción *pushout* descrita en [AG, Proposición 2.10], obtenemos al considerar la inclusión de un grupo algebraico Γ

en G, el subgrupo cuántico $A^{\varphi}_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma}$. Si ${}^t\gamma : \mathcal{O}(P) \to \mathcal{O}(\Gamma)$ es el morfismo sobreyectivo de álgebras de Hopf inducido por la inclusión, tenemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \mathcal{O}(G) & \longrightarrow & \mathcal{O}^{\varphi}_{\epsilon}(G) & \longrightarrow & \mathbf{u}^{\varphi}_{\epsilon}(\mathfrak{g})^* & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & \mathcal{O}(P) & \longrightarrow & \mathcal{O}^{\varphi}_{\epsilon}(P) & \longrightarrow & \mathbf{u}^{\varphi}_{\epsilon}(\mathfrak{p})^* & \longrightarrow & 1 \\
 & & {\scriptstyle {}^t\gamma}\downarrow & & \downarrow & & {\scriptstyle id}\downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\Gamma} & \longrightarrow & A^{\varphi}_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma} & \longrightarrow & \mathbf{u}^{\varphi}_{\epsilon}(\mathfrak{p})^* & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

y todas sus filas son sucesiones exactas de álgebras de Hopf. Si adicionalmente Γ es finito, entonces $A^{\varphi}_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma}$ tiene dimensión $|\Gamma|\dim \mathbf{u}^{\varphi}_{\epsilon}(\mathfrak{p})$.

En la siguiente sección del Capítulo 5, obtenemos un subgrupo cuántico $A_{\mathcal{D}^{\varphi}}$ de $\mathcal{O}^{\varphi}_{\epsilon}(G)$, a partir de un morfismo sobreyectivo $r : \mathbf{u}^{\varphi}_{\epsilon}(\mathfrak{p})^* \to H$. Más aún, probamos que dado un dato de subgrupo $\mathcal{D}^{\varphi}$, existe un álgebra de Hopf $A_{\mathcal{D}^{\varphi}}$ que encaja en el siguiente diagrama conmutativo, cuyas filas son todas exactas,

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \mathcal{O}(G) & \longrightarrow & \mathcal{O}^{\varphi}_{\epsilon}(G) & \longrightarrow & \mathbf{u}^{\varphi}_{\epsilon}(\mathfrak{g})^* & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & \mathcal{O}(P) & \longrightarrow & \mathcal{O}^{\varphi}_{\epsilon}(P) & \longrightarrow & \mathbf{u}^{\varphi}_{\epsilon}(\mathfrak{p})^* & \longrightarrow & 1 \\
 & & {\scriptstyle {}^t\gamma}\downarrow & & \downarrow & & {\scriptstyle id}\downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & \mathcal{O}(\Gamma) & \longrightarrow & A^{\varphi}_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma} & \longrightarrow & \mathbf{u}^{\varphi}_{\epsilon}(\mathfrak{p})^* & \longrightarrow & 1 \\
 & & {\scriptstyle id}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r} & & \\
1 & \longrightarrow & \mathcal{O}(\Gamma) & \longrightarrow & A_{\mathcal{D}^{\varphi}} & \longrightarrow & H & \longrightarrow & 1,
\end{array}$$

donde $A^{\varphi}_{\mathcal{D}} := A^{\varphi}_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma}/J_{\delta}$ es un álgebra de Hopf cociente tal que el ideal de Hopf J_{δ} depende del morfismo δ. Hemos utilizado la notación $A^{\varphi}_{\mathcal{D}^{\varphi}}$ para $A^{\varphi}_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma}/J_{\delta}$, debido a que en su construcción se han utilizado los seis parámetros del dato de subgrupo $\mathcal{D}^{\varphi} = (I_+, I_-, N^{\varphi}, \Gamma, \gamma, \delta)$.

Luego, mostraremos que si A es un álgebra de Hopf tal que $\mathcal{O}^{\varphi}_{\epsilon}(G) \to A$ es un morfismo sobreyectivo de álgebras de Hopf, entonces A encaja en el siguiente diagrama conmutativo,

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \mathcal{O}(G) & \longrightarrow & \mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G) & \longrightarrow & \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})^* & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & \mathcal{O}(P') & \longrightarrow & \mathcal{O}_\epsilon^\varphi(P') & \longrightarrow & \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p}')^* & \longrightarrow & 1 \\
 & & {\scriptstyle {}^t\sigma'}\downarrow & & \downarrow & & {\scriptstyle id}\downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & \mathcal{O}(\Gamma') & \longrightarrow & A^\varphi_{\epsilon,\mathfrak{p}',\gamma'} & \longrightarrow & \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p}')^* & \longrightarrow & 1 \\
 & & {\scriptstyle id}\downarrow & & \downarrow & & {\scriptstyle r'}\downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & \mathcal{O}(\Gamma') & \longrightarrow & A & \longrightarrow & H' & \longrightarrow & 1,
\end{array}$$

y es isomorfa a $A_{\mathcal{D}^{\varphi'}}$ para algún dato $\mathcal{D}^{\varphi'} = (I'_+, I'_-, N^{\varphi'}, \Gamma', \gamma', \delta')$.

Finalizamos el Capítulo 5, definiendo una relación de orden parcial sobre el conjunto de clases de isomorfismo de cocientes de $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$. A saber, si $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G) \xrightarrow{\kappa} A$ y $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G) \xrightarrow{\kappa'} A'$ son dos morfismos sobreyectivos de álgebras de Hopf, Denotemos con $[\kappa]$ a la clase de isomorfismo de cocientes con representante κ, definida naturalmente. Entonces $[\kappa] \leq [\kappa']$ si existe un morfismo de álgebras de Hopf $A \xrightarrow{\alpha} A'$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo,

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G) & \xrightarrow{\kappa} & A \\
 & {\scriptstyle \kappa'}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\
 & & A'.
\end{array}$$

Por otra parte, podemos definir una relación de orden sobre el conjunto de datos de subgrupo torcido. Sean $\mathcal{D}^\varphi = (I_+, I_-, N^\varphi, \Gamma, \gamma, \delta)$ y $\mathcal{D}^{\varphi'} = (I'_+, I'_-, N^{\varphi'}, \Gamma', \gamma', \delta')$ dos datos de subgrupo torcido. Entonces $\mathcal{D}^\varphi \leq \mathcal{D}^{\varphi'}$, si $I'_+ \subseteq I_+$ e $I'_- \subseteq I_-$, existe un morfismo de grupos inyectivo $N^\varphi \xrightarrow{\eta} N^{\varphi'}$ y un morfismo de grupos $\Gamma' \xrightarrow{\tau} \Gamma'$, tal que los siguientes diagramas son conmutativos

$$\begin{array}{ccc}
N^\varphi & \xrightarrow{\delta} & \widehat{\Gamma} \\
{\scriptstyle \eta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle {}^t\tau} \\
N^{\varphi'} & \xrightarrow{\delta'} & \widehat{\Gamma'}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
\Gamma' & \xrightarrow{\tau} & \Gamma \\
 & {\scriptstyle \gamma'}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \gamma} \\
 & & P.
\end{array}$$

Probamos que $[\kappa] \leq [\kappa']$ si y sólo si $\mathcal{D}^\varphi \leq \mathcal{D}^{\varphi'}$. Dos datos de subgrupo torcido son equivalentes si $\mathcal{D}^\varphi \leq \mathcal{D}^{\varphi'}$ y $\mathcal{D}^{\varphi'} \leq \mathcal{D}^\varphi$.

Juntando todos los resultados del capítulo cinco, se construye una prueba para el Teorema 1 mencionado anteriormente.

Capítulo 1

Preliminares

En el presente capítulo estableceremos definiciones básicas, notaciones y acuerdos que se usarán en el resto de la tesis. También describiremos algunos resultados sobre álgebras de Hopf y sus extensiones. Al final, introduciremos los conceptos de deformación por twist, 2-cociclo y bi-graduaciones.

Trabajaremos sobre un cuerpo $\mathbf{k}$ algebraicamente cerrado de característica cero, salvo se diga lo contrario las álgebras serán asumidas sobre el cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$. Se entenderán los productos tensoriales sobre $\mathbb{C}$ o $\mathbf{k}$ a menos de que se especifique el anillo sobre el que se están realizando. Omitiremos las pruebas de los teoremas, proposiciones o lemas, remitiremos para el lector interesado a las referencias adecuadas. Para la primera sección usaremos [H, Se], para la segunda [A1, AG, EGNO, G, Ka, Ma, Mo, Sw, Sc, T, W] y para la última sección [BG, Do, HLT, M, Ra].

1.1. Álgebras de Lie

En la presente sección estableceremos definiciones y notaciones básicas acerca de álgebras de Lie. Estas se usarán a lo largo de la tesis. Asumiremos siempre a $\mathfrak{g}$ como un álgebra de Lie semisimple compleja de dimensión finita. Resumiremos toda la informacción recolectada para $\mathfrak{g}$ en esta sección con lo que denominamos *datum cartan*, usando la notación establecida en [Se].

Es sabido que $\mathfrak{g}$ posee, salvo conjungación, una subálgebra máximal abeliana que consiste de elementos semisimples. Denotaremos $\mathfrak{h}$ para esta subálgebra, que se denomina *subálgebra de Cartan*. Sea $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, entonces definimos el subespacio $\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} : \mathrm{ad}_h(x) = \alpha(h)x, \text{ para todo } h \in \mathfrak{h}\}$. Si $\alpha \neq 0$ y $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$, entonces llamamos a α raíz de $\mathfrak{g}$, a $\mathfrak{g}_\alpha$ espacio raíz y denotamos por Φ al conjunto de raíces de $\mathfrak{g}$ que se llamará *sistema de raíces*, es conocido que Φ genera a $\mathfrak{h}^*$ cf. [H, Proposición 8.3]. De las propiedades de Φ se puede escoger una base Π de $\mathfrak{h}^*$, cuyos elementos llamamos *raíces simples*, tal que $\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$, donde Φ^+ denota el conjunto de combinaciones lineales enteras

positivas de Π, respectivamente con las negativas Φ^-. Tenemos una descomposición de $\mathfrak{g}$ en espacio de raíces y $\mathfrak{h}$, descrita por $\bigoplus_{\alpha\in\Phi}\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{h}$, $\dim\mathfrak{h} = n$ es el rango de $\mathfrak{g}$, denotado por rg $\mathfrak{g}$.

Tambíen tenemos a las subálgebras de Lie de $\mathfrak{g}$ nilpotentes $\mathfrak{n}^\pm = \sum_{\alpha\in\Phi^\pm}\mathfrak{g}_\alpha$ y la descomposión triangular de $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^-$.

La forma bilineal $(-,-) : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ definida por $(x,y) \mapsto \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y)$, es no degenerada al restringirse a $\mathfrak{h}$. Razón por la cual tenemos un isomorfismo entre $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{h}^*$ inducido por $(-,-)$. Esta forma es denominada *forma de Killing*. Definimos para $\alpha \in \Pi$ el conjunto Supp $\alpha = \{\beta \in \Phi : (\alpha,\beta) \neq 0\}$.

El grupo de *Weyl* $\mathcal{W}$ asociado a $\mathfrak{g}$, es generado por todas las reflexiones s_α con $s_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$ en los hiperplanos ortogonales a $\alpha \in \Pi$, denotamos s_i para s_{α_i}. Sea $w_0 \in \mathcal{W}$ el único elemento de longitud máxima $\ell(w_0) = N$. Si $w_0 = s_{i_1}\dots s_{i_N}$, entonces podemos ordenar Φ al definir los elementos $\beta_j = s_{i_1}\cdots s_{i_{j-1}}(\alpha_{i_j})$.

Es sabido que si $\mathfrak{g}$ es simple, existe una correspondencia biyectiva entre $\mathfrak{g}$ y matrices indescomponibles $\left(\frac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_i,\alpha_i)}\right)_{ij} = (a_{ij}) = A$. A la matriz A se le llama matriz de Cartan, la cual tiene entradas enteras. Se puede chequear que la matriz diagonal $D = \mathrm{diag}(d_i)$, con $d_i = \frac{(\alpha_i,\alpha_i)}{2}$ simetriza a A, es decir, DA es simétrica y definida positiva.

También definimos el *retículo de raíces* $Q = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{Z}\alpha_i$. Al identificar $\mathfrak{h}$ con $\mathfrak{h}^*$, definimos los *pesos fundamentales* como los únicos elementos $\omega_i \in \mathfrak{h}^*$ que satisfacen la ecuación $(\omega_i,\alpha_j) = d_i\delta_{ij}$ para todo i,j y el *retículo de pesos* $P = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{Z}\omega_i$.

Es válida la relación $\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\omega_i$, por tanto $Q \subset P$. El conjunto $\{\omega_i\}$ es una base de $\mathfrak{h}^*$ y A corresponde a la matriz cambio de base entre raíces y pesos fundamentales. Denotaremos con $\widehat{a_{ij}}$ a las entradas de A^{-1}. Finalmente, los *pesos enteros dominantes* son elementos del conjunto $P_+ = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{Z}_{\geq 0}\omega_i$. Es conocido que existe una biyección entre módulos irreducibles finito dimensionales de $\mathfrak{g}$ y pesos dominantes enteros. Resumiendo,

Definición 1.1.1. Para un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ simple definimos el datum Cartan como la siguiente colección de datos:

(*i*) Φ el sistema de raíces asociado a $\mathfrak{h}$, con raíces simples $\Pi = \{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ y raíces positivas Φ_+.

(*ii*) $\mathcal{W}$ el grupo de Weyl asociado.

(*iii*) pesos fundamentales $\omega_1,\dots,\omega_n$.

(*iv*) P el retículo de pesos, P_+ los pesos positivos o *pesos dominates* y Q el subretículo de raíces.

(v) $A = (a_{ij})$ la matriz de Cartan asociada y $D = diag(d_1, \ldots, d_n)$.

(vi) rg $\mathfrak{g} := \dim(\mathfrak{h}) = n$.

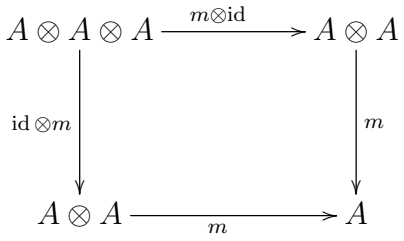
Acuerdo. A lo largo de toda tesis, siempre que hablemos de un álgebra de Lie semisimple $\mathfrak{g}$ asumiremos todas las definiciones y notaciones definidas en esta sección.

r

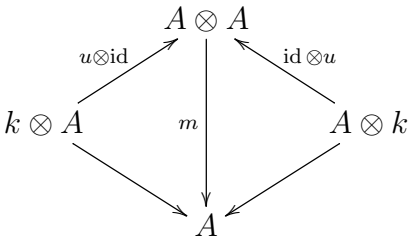
1.2. Álgebras de Hopf

Definición 1.2.1. Una $\mathbf{k}$-*álgebra* con unidad es un $\mathbf{k}$-espacio vectorial A junto con dos aplicaciones $\mathbf{k}$-lineales $m : A \otimes A \to A$, llamada la multiplicación, y $u : \mathbf{k} \to A$ la unidad, de manera que los siguientes diagramas son conmutativos:

ASOCIATIVIDAD



UNIDAD



Notar que la unidad en A está dada por $1_A = u(1_{\mathbf{k}})$.

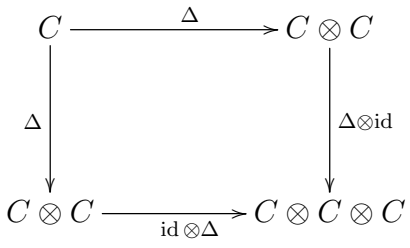
Definición 1.2.2. Sean V y W dos $\mathbf{k}$-espacios vectoriales. Se define la aplicación *flip* τ como la aplicación lineal $\tau : V \otimes W \to W \otimes V$ dada por $\tau(v \otimes w) = w \otimes v$ para todo $v \in V,\ w \in W$.

A es conmutativa si y sólo si $m \circ \tau = m$. Asumiremos que el lector esta familiarizado con las otras definiciones básicas de álgebras.

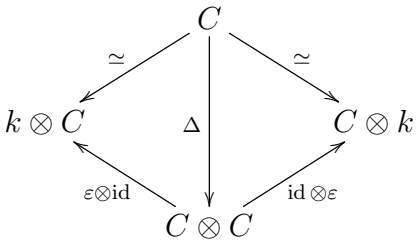
Dualizando la noción de álgebra obtenemos la de coálgebra:

Definición 1.2.3. Una $\mathbf{k}$-*coálgebra* con counidad es un $\mathbf{k}$-espacio vectorial no nulo C junto con dos aplicaciones $\mathbf{k}$ lineales, la *comultiplicación* o *coproducto* $\Delta : C \to C \otimes C$ y la *counidad* $\varepsilon : C \to \mathbf{k}$ de manera que los siguientes diagramas son conmutativos:

COASOCIATIVIDAD



COUNIDAD



Dualizando la noción de conmutatividad obtenenos que C es *coconmutativa* si y sólo si $\tau \circ \Delta = \Delta$ en C.

Definición 1.2.4. Sea C una coálgebra, entonces la *coálgebra coopuesta* C^{cop} es la coálgebra tal que $C^{cop} = C$ como espacios vectoriales y coproducto $\Delta^{cop} = \tau \circ \Delta$.

Definición 1.2.5. Sean C y D dos coálgebras con comultiplicación Δ_C y Δ_D y counidad ε_C y ε_D respectivamente.

(*i*) Una aplicación lineal $f : C \to D$ es un *morfismo de coálgebras* si $\Delta_D \circ f = (f \otimes f)\Delta_C$ y $\varepsilon_C = \varepsilon_D \circ f$.

(*ii*) Un subespacio $I \subseteq C$ es un *coideal* si $\Delta(I) \subseteq I \otimes C + C \otimes I$ y $\varepsilon_C(I) = 0$.

Con esta definición podemos chequear que I es un coideal de C si y sólo si el $\mathbf{k}$-espacio vectorial C/I es una coálgebra con la comultiplicación $\Delta_{C/I} = (\pi \otimes \pi)\Delta_C$, donde $\pi : C \to C/I$ es la proyección canónica. El subespacio $C^+ = \operatorname{Ker} \varepsilon \subseteq C$ de C es un coideal.

Para trabajar con coálgebras usaremos la *notación sigma* de Sweedler: si c es un elemento de una coálgebra C notaremos al elemento $\Delta(c) = \sum_i a_i \otimes b_i \in C \otimes C$ de la siguiente forma

$$\Delta(c) = c_{(1)} \otimes c_{(2)}.$$

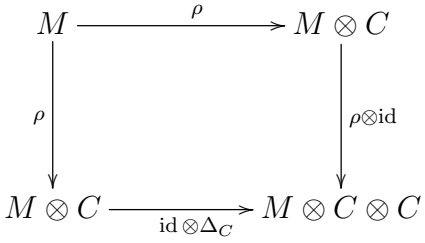
Por ejemplo, el axioma de coasociatividad de C dado por $(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta$, se puede expresar como

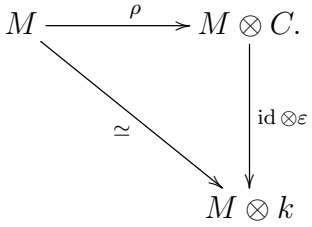
$$(c_{(1)})_{(1)} \otimes (c_{(1)})_{(2)} \otimes c_{(2)} = c_{(1)} \otimes (c_{(2)})_{(1)} \otimes (c_{(2)})_{(2)} = c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)},$$

para todo $c \in C$.

Definición 1.2.6. Sea C una $\mathbf{k}$-coálgebra. Un *C-comódulo a derecha* es un $\mathbf{k}$-espacio vectorial M junto con un aplicación lineal $\rho : M \to M \otimes C$ tal que los siguientes

diagramas conmutan





Análogamente se define un C-comódulo a izquierda.

Usaremos la notación de Sweedler para los comódulos: si M es un C-comódulo a derecha, entonces escribimos

$$\rho(m) = m_{(0)} \otimes m_{(1)} \in M \otimes C \qquad \text{para todo } m \in M.$$

Si M es un C-comódulo a izquierda con morfismo de estructura $\lambda : M \to C \otimes M$ entonces escribimos

$$\lambda(m) = m_{(-1)} \otimes m_{(0)} \in C \otimes M \qquad \text{para todo } m \in M.$$

Sean M y N dos C-comódulos a derecha con morfismos de estructura ρ_M y ρ_N, respectivamente. Una aplicación lineal $f : M \to N$ es un *morfismo de C-comódulos* a derecha si $\rho_N \circ f = (f \otimes \mathrm{id}) \circ \rho_M$.

Ejemplo 1.2.7. Sea $f : C \to D$ un morfismo de coálgebras. Entonces C es un D-comódulo a derecha y a izquierda vía los morfismos

$$\rho = (\mathrm{id} \otimes f)\Delta : C \to C \otimes D \qquad \text{y} \qquad \lambda = (f \otimes \mathrm{id})\Delta : C \to D \otimes C.$$

Definición 1.2.8. Sea C una coálgebra.

(*i*) Un elemento $c \in C$ se dice de *tipo grupo* si $\Delta(c) = c \otimes c$ y $\varepsilon(c) = 1$. El conjunto de elementos de tipo grupo de C es un grupo y se denota por $G(C)$.

(*ii*) Sean $a,\ b \in G(C)$, el conjunto de *elementos (a,b)-primitivos* de C se define como

$$P_{a,b} = \{c \in C |\ \Delta(c) = a \otimes c + c \otimes b\}.$$

En particular a los elementos de $P_{1,1}$ se les denomina *elementos primitivos*, es conocido que $P_{1,1}$ es un álgebra de Lie.

Diremos que una coálgebra C es *simple* si no posee subcoálgebras propias y diremos que es *cosemisimple* si es suma directa de subcoálgebras simples. En particular, se define el *corradical* de C como la suma de todas las subcolgebras simples de C y se denota por C_0. Si todas las subcolgebras simples de C tienen dimensión uno, entonces C se dice *punteada* y se tiene que $C_0 = \mathbf{k}[G(C)]$ c.f. 1.2.13. De hecho, el corradical C_0 de una coálgebra C es el menor elemento de una filtración de C. Diremos que una familia de subespacios $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de C es una *filtración de coálgebras* si

(*i*) $C_n \subseteq C_{n+1}$ y $C = \cup_{n\in\mathbb{N}} C_n$,

(*ii*) $\Delta(C_n) \subseteq \sum_{i=0}^{n} C_i \otimes C_{n-i}$.

Si C_0 es el corradical de C, entonces se define recursivamente C_n para $n \geq 1$ como:

$$C_n = \Delta^{-1}(C \otimes C_{n-1} + C_0 \otimes C).$$

Luego, $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de subcoálgebras de C que da una filtración de coálgebras, ver [Mo, Cap. 5], [Sw, Cap. IX]. Dicha filtración recibe el nombre de *filtración corradical* de C.

Definición 1.2.9. Una $\mathbf{k}$-álgebra B con multiplicación m y unidad u, que también es una coálgebra con coproducto Δ y counidad ε. Es una *biálgebra,* si satisface alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

(*i*) Δ y ε son morfismos de álgebras.

(*ii*) m y u son morfismos de coálgebras.

Un subespacio $I \subseteq B$ es un *bi-ideal* si es un ideal bilátero y un coideal. También tenemos que I es un bi-ideal de una biálgebra B si y sólo si el $\mathbf{k}$-espacio vectorial B/I es una biálgebra con las operaciones inducidas del cociente.

Ejemplo 1.2.10. Sea $\mathcal{O}(M_n(\mathbf{k})) = \mathbf{k}[X_{ij} | \ 1 \leq i, j \leq n]$ el álgebra de funciones polinomiales en la matrices de $n \times n$. Como álgebra, $\mathcal{O}(M_n(\mathbf{k}))$ es simplemente el anillo conmutativo de polinomios en n^2 variables. $\mathcal{O}(M_n(\mathbf{k}))$ admite una estructura de coálgebra con la comultiplicación y la counidad determinada por sus valores en los generadores del álgebra $\{X_{ij}\}_{1\leq i,j\leq n}$:

$$\Delta(X_{ij}) = \sum_{\ell=1}^{n} X_{i\ell} \otimes X_{\ell j}, \qquad \text{y} \qquad \varepsilon(X_{ij}) = \delta_{ij}, \qquad \text{para todo } 1 \leq i, j \leq n.$$

Definición 1.2.11. Sean C una coálgebra y A un álgebra. El conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(C, A)$ tiene una estructura de álgebra con el *producto de convolución* dado por

$$(f * g)(c) = f(c_{(1)})g(c_{(2)}) \qquad \text{para todo } f,\ g \in \mathrm{Hom}_k(C, A),\ c \in C.$$

Definición 1.2.12. Una biálgebra H es una *álgebra de Hopf,* si existe un elemento $\mathcal{S} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(H, H)$, que es un elemento inverso a la identidad id_H con respecto al producto de convolución. A tal elemento los llamamos antípoda. Dicho de otra manera, $\mathcal{S}$ debe satisfacer las igualdades

$$\mathcal{S}(h_{(1)})h_{(2)} = \varepsilon(h)1_H = h_{(1)}\mathcal{S}(h_{(2)}) \qquad \text{para todo } h \in H.$$

Una aplicación $f : H \to K$ es un morfismo de biálgebras si f es un morfismo de álgebras y coálgebras. Si H y K son álgebras de Hopf, se cumple que $f(\mathcal{S}_H(h)) = \mathcal{S}_K(f(h))$ para todo $h \in H$ y en este caso decimos que f es un *morfismo de álgebras de Hopf*. Si este morfismo posee un inverso que es también de álgebras de Hopf, entonces decimos que H y K son isomorfas. Un subespacio I de H es un *ideal de Hopf* si I es un bi-ideal y $\mathcal{S}(I) \subseteq I$. Claramente, $I \subseteq H$ es un ideal de Hopf si y sólo si el espacio vectorial cociente H/I es un álgebra de Hopf. Por ejemplo, el coideal $H^+ = \operatorname{Ker} \varepsilon$ es un ideal de Hopf de H y se denomina el *ideal de augmentación* de H. También sucede que si $\pi : H \to \bar{H}$ es un morfismo sobreyectivo de álgebras de Hopf entonces existe un ideal de Hopf I tal que $\bar{H}$ es isomorfo a H/I como álgebras de Hopf.

Ejemplo 1.2.13. Sea G un grupo. Entonces el álgebra de grupo $\mathbf{k}[G]$ es un álgebra de Hopf con coproducto Δ, counidad ε y antípoda $\mathcal{S}$ determinadas por

$$\Delta(e_g) = e_g \otimes e_g \qquad \varepsilon(e_g) = 1 \qquad \mathcal{S}(e_g) = e_{g^{-1}} \qquad \text{para todo } g \in G. \tag{1.1}$$

Ejemplo 1.2.14. Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y $U(\mathfrak{g})$ su álgebra envolvente universal. Entonces $U(\mathfrak{g})$ es un álgebra de Hopf con la estructura determinada por

$$\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1, \qquad \varepsilon(x) = 0, \qquad \mathcal{S}(x) = -x \qquad \text{para todo } x \in \mathfrak{g}.$$

Ejemplo 1.2.15. El anillo de polinomios $\mathbb{C}[x]$ es un álgebra de Hopf conmutativa y coconmutativa, con Δ, ε y $\mathcal{S}$ determinadas respectivamente por

$$\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1, \qquad \varepsilon(x) = 0, \qquad \mathcal{S}(x) = -x.$$

Ejemplo 1.2.16. Sea $\mathfrak{g}$ como en la sección anterior junto a su Datum Cartan definido en 1.1.1. La *Drinfeld-Jimbo* álgebra de $\mathfrak{g}$ o *álgebra envolvente cuantizada* $U_q(\mathfrak{g})$ es la $\mathbf{k}$-álgebra generada por el conjunto $\{E_i, F_i, K_i^{\pm 1}\}_{i=1}^n$, $q \in \mathbf{k}^\times$ y $q^{d_i} = q_i \neq \pm 1$ para $i = 1, \dots, n$ satisfaciendo las siguientes relaciones para todo i, j:

$$K_0 = 1 \text{ y } K_i K_j = K_j K_i \qquad K_i E_j K_i^{-1} = q^{a_{ij}} E_j$$

$$K_i F_j K_i^{-1} = q^{-a_{ij}} F_j \qquad E_i F_j - F_j E_i = \delta_{ij} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}}$$

$$\sum_{l=0}^{1-a_{ij}} (-1)^l \begin{bmatrix} 1 - a_{ij} \\ l \end{bmatrix}_{q_i} E_i^{1-a_{ij}-l} E_j E_i^l = 0 \quad (i \neq j)$$

$$\sum_{l=0}^{1-a_{ij}} (-1)^l \begin{bmatrix} 1 - a_{ij} \\ l \end{bmatrix}_{q_i} F_i^{1-a_{ij}-l} F_j F_i^l = 0 \quad (i \neq j)$$

Mas aún las siguientes aplicaciones dotan de una estructura de álgebra de Hopf a $U_q(\mathfrak{g})$. El coproducto, la counidad y la antípoda se determinan sobre los generadores por:

$$\begin{cases} \Delta(E_i) = E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i, \\ \Delta(F_i) = F_i \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes F_i, \\ \Delta(K_i) = K_i \otimes K_i, \end{cases} \quad \begin{cases} \varepsilon(E_i) = 0, \\ \varepsilon(F_i) = 0, \\ \varepsilon(K_i) = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{S}(E_i) = -K_i^{-1} E_i, \\ \mathcal{S}(F_i) = -F_i K_i, \\ \mathcal{S}(K_i) = K_i^{-1}. \end{cases}$$

Ejemplo 1.2.17. Sea A una $\mathbf{k}$-álgebra. El *dual finito* o *dual de Sweedler* de A está dado por

$$A^\circ = \{f \in A^* |\ f(I) = 0, \text{ para algún ideal bilátero } I \text{ de } A \text{ tal que } \dim A/I < \infty\}.$$

Si A es un álgebra de Hopf, entonces A° es un álgebra de Hopf con los morfismos de estructura dados por

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl} m_{A^\circ} = & \Delta^* : A^\circ \otimes A^\circ \to A^\circ & & \langle \Delta^*(f,g), a\rangle & = & \langle f \otimes g, \Delta(a)\rangle, \\ u_{A^\circ} = & \varepsilon^* : k \to A^\circ & & \langle \varepsilon^*(\lambda), a\rangle & = & \lambda\langle \varepsilon, a\rangle, \\ \Delta_{A^\circ} = & m^* : A^\circ \to A^\circ \otimes A^\circ & & \langle m^*(f), a\otimes b\rangle & = & \langle f, ab\rangle, \\ \varepsilon_{A^\circ} = & u^* : A^\circ \to k & & u^*(f) & = & \langle f, 1\rangle, \\ \mathcal{S}_{A^\circ} = & \mathcal{S}^* : A^\circ \to A^\circ & & \langle \mathcal{S}^*(f), a\rangle & = & \langle f, \mathcal{S}(a)\rangle, \end{array}$$

para todo $a,\ b \in A,\ f,\ g \in A^\circ$. En particular, si A es de dimensión finita, $A^\circ = A^*$ y por lo tanto A^* resulta ser un álgebra de Hopf. Note que $f \in G(A^\circ)$ si y sólo si $f(ab) = f(a)f(b)$ para todo $a, b \in A$.

Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita. Entonces H actúa en H^* a derecha y a izquierda por

$$\begin{array}{ll} H \otimes H^* \xrightarrow{\rightharpoonup} H^* & H^* \otimes H \xrightarrow{\leftharpoonup} H^* \\ \langle h \rightharpoonup \alpha, x\rangle = \langle \alpha, xh\rangle & \langle \alpha \leftharpoonup h, x\rangle = \langle \alpha, hx\rangle, \end{array}$$

para todo $h,\ x \in H,\ \alpha \in H^*$. Análogamente, H^* actúa en H a izquierda y a derecha por

$$\begin{array}{ll} H^* \otimes H \xrightarrow{\rightharpoonup} H & H \otimes H^* \xrightarrow{\leftharpoonup} H \\ \beta \rightharpoonup h = h_{(1)}\beta(h_{(2)}) & h \leftharpoonup \beta = \beta(h_{(1)})h_{(2)}, \end{array}$$

para todo $\beta \in H^*$ y $h \in H$.

Observación 1.2.18. Si $\alpha \in H^\circ$ entonces $\alpha(I) = 0$ para algún ideal I de codimensión finita. Sea $h \in H$ y $u \in I$ entonces $\langle h \rightharpoonup \alpha, u\rangle = \langle \alpha, uh\rangle = 0$, así $I \subseteq \mathrm{Ker}(h \rightharpoonup \alpha) := K$. Por otra parte, $\dim(H/K) \leq \dim(H/I)$. Así que $h \rightharpoonup \alpha \in H^\circ$. Si $h, l \in H$ entonces se chequea directamente que $(h \rightharpoonup u) \leftharpoonup l = h \rightharpoonup (u \leftharpoonup l)$. Análogamente podemos ver que si $\alpha \in H^\circ$ entonces $\alpha \leftharpoonup h \in H^\circ$, con lo que podemos concluir que H° es un H-bimódulo.

Un álgebra de Hopf H posee dos acciones distinguidas sobre si misma. Se definen para todo $h, k \in H$ la *acción adjunta a izquierda* por $(\mathrm{ad}_l h)(k) = h_{(1)}k\mathcal{S}(h_{(2)})$ y *acción adjunta a derecha* $(\mathrm{ad}_r h)(k) = \mathcal{S}(h_{(1)})kh_{(2)}$.

Definición 1.2.19. [Mo, 3.4.1] Sea H un álgebra de Hopf y K una subálgebra de Hopf de H. Decimos que K es normal en H si

$$h_{(1)}b\mathcal{S}(h_{(2)}) \in K \qquad \text{y} \qquad \mathcal{S}(h_{(1)})bh_{(2)} \in K \qquad \text{para todo } h \in H,\ b \in K.$$

Un álgebra de Hopf H se dice *simple* si no contiene ninguna subálgebra de Hopf normal propia no trivial. H es dice *semisimple*, respectivamente *cosemisimple*, si es semisimple como álgebra, respectivamente si es cosemisimple como coálgebra.

El siguiente teorema hace parte de uno más general, para ver el enunciado completo y una demostración ver [Sc].

Teorema 1.2.20. *Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita sobre* $\mathbf{k}$*, entonces son equivalentes:*

(a) H es semisimple,

(b) H es cosemisimple,

(c) $\mathcal{S}^2 = \mathrm{id}$.

□

Definición 1.2.21. Sean H un álgebra de Hopf y M un H-comódulo a derecha. Se define el conjunto de coinvariantes de H en M por

$$M^{\mathrm{co}\,H} = \{m \in M |\ \rho(m) = m \otimes 1\}.$$

De la misma manera, si M es un H-comódulo a izquierda, se define el conjunto de coinvariantes de H en M por

$${}^{\mathrm{co}\,H}M = \{m \in M |\ \lambda(m) = 1 \otimes m\}.$$

Sean A y H álgebras de Hopf y sea $A \xrightarrow{\pi} H$ un morfismo de álgebras de Hopf. Entonces por el Ejemplo 1.2.7, A admite una estructura de H-comódulo a derecha y a izquierda. Los espacios coinvariantes se denotan $A^{\mathrm{co}\,H} = A^{\mathrm{co}\,\pi}$ y ${}^{\mathrm{co}\,H}A = {}^{\mathrm{co}\,\pi}A$ según el caso, ellos están dados por

$$A^{\mathrm{co}\,\pi} = \{a \in A |\ (\mathrm{id} \otimes \pi)\Delta(a) = a \otimes 1\} \qquad \text{y} \qquad {}^{\mathrm{co}\,\pi}A = \{a \in A |\ (\pi \otimes \mathrm{id})\Delta(a) = 1 \otimes a\}.$$

Más aún, estos espacios resultan ser subálgebras de A y se denominan las subálgebras de *coinvariantes*.

1.2.1. Extensiones de álgebras de Hopf

Presentaremos en esta subsección resultados referentes a extensiones de álgebras de Hopf. Estos se usarán específicamente en la construcción de todos los subgrupos cuánticos finitos de $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$, interés principal de la tesis. En todos los diagramas conmutativos usaremos 1 para representar el álgebra de Hopf $\mathbf{k}$.

Definición 1.2.22. Diremos que el siguiente diagrama es una sucesión *exacta* corta de álgebras de Hopf

$$1 \longrightarrow B \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} H \longrightarrow 1,$$

en donde cada flecha representa un morfismo de álgebras de Hopf, si ι es inyectiva, π sobreyectiva, $\operatorname{Ker}\pi = AB^+$ y $B = {}^{\operatorname{co}\pi}A$. Se acostumbra identificar a B con su imagen al interior de A.

En este caso A se denomina una *extensión* de B por H o simplemente que A es una H-extensión de B. Si B es central en A decimos que A es una extensión *central* de B.

Ejemplo 1.2.23.

(*i*) Sean N y G dos grupos con $N \triangleleft G$, entonces $\mathbf{k}[N]$ es normal en $\mathbf{k}[G]$ y la sucesión siguiente es exacta de álgebras de Hopf.

$$1 \longrightarrow \mathbf{k}[N] \xrightarrow{\iota} \mathbf{k}[G] \xrightarrow{\pi} \mathbf{k}[G/N] \longrightarrow 1.$$

En particular, si $N = Z(G)$, tenemos que $\mathbf{k}[G]$ es una extensión central de $\mathbf{k}[N]$ por $\mathbf{k}[G/N]$.

(*ii*) Sea $\mathfrak{i}$ es un ideal de Lie del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, entonces $U(\mathfrak{i})$ es normal en $U(\mathfrak{g})$ y la sucesión siguiente es exacta de álgebras de Hopf.

$$1 \longrightarrow U(\mathfrak{i}) \xrightarrow{\iota} U(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\pi} U(\mathfrak{g}/\mathfrak{i}) \longrightarrow 1.$$

Definición 1.2.24. [Mo] Sea $B \subseteq A$ una extensión de anillos, decimos que A es *fielmente playa a izquierda* sobre B. Si para todo morfismo de B-módulos a derecha $f : M \to N$, f es inyectivo si y sólo si el morfismo de B-módulos $f \otimes \mathrm{id}_A : M \otimes_B A \to N \otimes_B A$ es inyectivo. Similarmente definimos fielmente playa a derecha.

Omitiremos la palabras izquierda o derecha cuando A sea fielmente playa sobre B a izquierda o a derecha.

Proposición 1.2.25. *[Mo, § 3.4] Sea B una subálgebra de Hopf de A y $\pi : A \to A/AB^+$ la proyección canónica.*

(a) Si A es fielmente playa a izquierda o derecha sobre B y $AB^+ = B^+A$ entonces $B = A^{\operatorname{co}\pi} = {}^{\operatorname{co}\pi}A$ y B es normal en A.

(b) Si B es normal en A entonces AB^+ es un ideal de Hopf de A, $AB^+ = B^+A$ y π es un morfismo de álgebras de Hopf.

□

La siguiente proposición nos permitirá construir nuevas álgebras de Hopf al considerar cierta sucesión exacta corta y un morfismo sobreyectivo. En particular muestra la importancia de la Definición 1.2.24. Dado que el álgebra de Hopf obtenida es un *pushout,* denominaremos a la siguiente proposición, construcción pushout.

Proposición 1.2.26. *[AG, Proposición 2.10] Sean A y K álgebras de Hopf, B una subálgebra de Hopf central de A con A fielmente playa sobre B y $p : B \to K$ un morfismo sobreyectivo de álgebras de Hopf. Entonces $H = A/AB^+$ es un álgebra de Hopf y A encaja en una sucesión exacta de álgebras de Hopf*

$$1 \longrightarrow B \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} H \longrightarrow 1.$$

Si tomamos $\mathcal{J} = \operatorname{Ker} p \subseteq B$, entonces $(\mathcal{J}) = A\mathcal{J}$ es un ideal de Hopf de A y $A/(\mathcal{J})$ es un pushout dado por el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\iota} & A \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ K & \xrightarrow[j]{} & A/(\mathcal{J}), \end{array}$$

donde j es inyectiva. De manera que K se puede identificar con una subálgebra de Hopf central de $A/(\mathcal{J})$. Más aún, $A/(\mathcal{J})$ es parte de la siguiente sucesión exacta de álgebras de Hopf

$$1 \longrightarrow K \xrightarrow{j} A/(\mathcal{J}) \xrightarrow{r} H \longrightarrow 1,$$

donde r es la proyección canónica $A/(\mathcal{J}) \to (A/\mathcal{J})/[K^+/(A/\mathcal{J})]$ compuesta con un isomormisfo entre $(A/\mathcal{J})/[K^+/(A/\mathcal{J})]$ y H. □

La siguiente proposición nos permite enunciar la Propoposición anterior sin mencionar la hipótesis de fielmentente playa.

Proposición 1.2.27. *[ArGa, Proposición 3.12] Si $\iota : B \to A$ es un morfismo inyectivo de álgebras de Hopf, tal que B es conmutativa. Entonces A es fielmente playa sobre B.* □

Podemos concluir de la anterior Proposición y la 1.2.25 que si B es una subálgebra de Hopf central en H, entonces la sucesión $1 \longrightarrow B \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} H \longrightarrow 1$ es exacta de álgebras de Hopf, donde $H = A/AB^+$. El siguiente resultado será útil en la construción de cocientes, al cosiderar ideales de Hopf de codimensión finita.

Proposición 1.2.28. *[Mu, Proposición 3.4] Sea $1 \longrightarrow B \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} H \longrightarrow 1$ una sucesión exacta de álgebras de Hopf, J un ideal de Hopf de A con codimesión finita y $\mathcal{J} = B \cap J$. Entonces la sucesión*

$$1 \longrightarrow B/\mathcal{J} \longrightarrow A/J \longrightarrow H/\pi(J) \longrightarrow 1,$$

es exacta de álgebras de Hopf. □

Extensiones centrales y dimensión finita

En esta subsección obtenemos cocientes a partir de los hallados en la Proposición 1.2.26. Esto es posible al considerar un morfismo sobreyectivo de álgebras de Hopf $r : H \to L$ y suponer que K y H son de dimensión finita. En síntesis, se muestra un procedimiento para construir cocientes de A que encajan en sucesiones exactas cortas centrales de álgebras de Hopf. Las pruebas se pueden encontrar en [AG, G].

Lema 1.2.29. *[G, Lema 2.3.3] Consideremos la sucesión exacta álgebras de Hopf*

$$1 \longrightarrow K \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow H \longrightarrow 1,$$

donde K es central en $\mathcal{A}$ y tanto K como H son de dimensión finita, entonces $\mathcal{A}$ también lo es. □

Sean A y B álgebras de Hopf, $\mathrm{Reg}(B, A)$ denota el grupo de morfismos lineales inversibles con respecto al producto por convolución. Se chequea directamente que los conjuntos $\mathrm{Reg}_1(B, A) = \{\alpha \in \mathrm{Reg}(B, A) : \alpha(1) = 1\}$ y $\mathrm{Reg}_\varepsilon(B, A) = \{\alpha \in \mathrm{Reg}(B, A) : \varepsilon\alpha = \varepsilon\}$ son subgrupos de $\mathrm{Reg}(B, A)$.

Un álgebra C que es A-comódulo y cuyo morfismo de estructura $\rho : C \to C \otimes A$ es un morfismo de álgebras, se llama A-comódulo álgebra. Decimos en este caso que C es una A-extensión de $C^{\mathrm{co}\, A}$. La extensión es *hendida* si existe $\gamma \in \mathrm{Reg}_1(B, A)$ tal que $\rho\gamma = (\gamma \otimes \mathrm{Id})\Delta$, denominado *sección*.

Dualmente tenemos la siguiente noción. Una coálgebra C que es A-módulo y cuyo morfismo de estructura $\mu : A \otimes C \to C$ es un morfismo de coálgebras se llama A-módulo coálgebra. Decimos es este caso que C es una A-extensión de C/A^+C. La extensión es *hendida* si existe $\xi \in \mathrm{Reg}_\varepsilon(B, A)$ tal que $\xi(ac) = a\xi(c)$ para todo $a \in A$ y $c \in C$, denominado *retracción*.

Usamos los conceptos de sección y retracción para dar la siguiente definición.

Definición 1.2.30. Sea la sucesión exacta de álgebras de Hopf $1 \longrightarrow B \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} H \longrightarrow 1$. Si existe una sección $\gamma \in \mathrm{Reg}_1(H, A)$ de una extensión de álgebras y una retracción $\xi \in \mathrm{Reg}_\varepsilon(A, B)$ de una extensión de coálgebras que satisfacen $\xi\gamma = \varepsilon_H 1_B$, entonces decimos que A es una *extensión hendida* de B por H.

Para observar algunas definiciones equivalentes remitirse a [A1].

Teorema 1.2.31. *[A1, Teorema 3.1.17] Una extensión de álgebras de Hopf de dimensión finita es siempre hendida.* □

Sea $p : B \to K$ un morfismo sobreyectivo de álgebras de Hopf y $1 \longrightarrow B \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} H \longrightarrow 1$ una extensión central de álgebras de Hopf. Denotemos con A_p al cociente de A

obtenido en la construcción pushout 1.2.26, así que tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\iota} & A & \xrightarrow{\pi} & H & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \\ 1 & \longrightarrow & K & \xrightarrow[j]{} & A_p & \xrightarrow[\pi_p]{} & H & \longrightarrow & 1 \end{array} \tag{1.2}$$

con K central en A_p.

Si suponemos que K y H son de dimensión finita, sabemos por el Lema 1.2.29 que A_p es de dimensión finita. Asumiremos esto de ahora en adelante. Gracias al Teorema 1.2.31 la sucesión en la segunda fila del diagrama (1.2) es hendida, sean ξ y γ la retracción y sección correspondientes a esta H extensión A_p de K. Para un morfismo sobreyectivo $r : H \to L$ de álgebras de Hopf, es posible completar el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\iota} & A & \xrightarrow{\pi} & H & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle q} & \overset{\gamma}{\curvearrowleft} & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \\ 1 & \longrightarrow & K & \underset{\xi}{\overset{j}{\longrightarrow}} & A_p & \xrightarrow[\pi_p]{} & H & \longrightarrow & 1 \\ & & & & & & \downarrow{\scriptstyle r} & & \\ & & & & & & L & & \end{array}$$

mediante la proposición 1.2.32, que presentaremos en breve.

Denotemos por M_r a $q(\operatorname{Ker} r\pi) = \operatorname{Ker} r\pi_p$ y por $I_{r,\xi}$ al menor ideal de Hopf de A_p que contiene al conjunto $(\mathrm{id} - j\xi)(M_r)$, notar que sucede que $I_{r,\xi} \subseteq M_r$ y $\pi_p(I_{r,\xi}) = \pi_p(M_r)$.

La siguiente proposición es la que nos permite generar un cociente de dimensión finita de A vía un cociente de A_p.

Proposición 1.2.32. *[AG, Proposición 2.3.5] $\mathcal{I}_{r,\xi} := I_{r,\xi} \cap K$ es un ideal de Hopf de K y $A_{p,r,\xi} := A_p/I_{r,\xi}$ encaja en una sucesión exacta de álgebras de Hopf de dimensión finita*

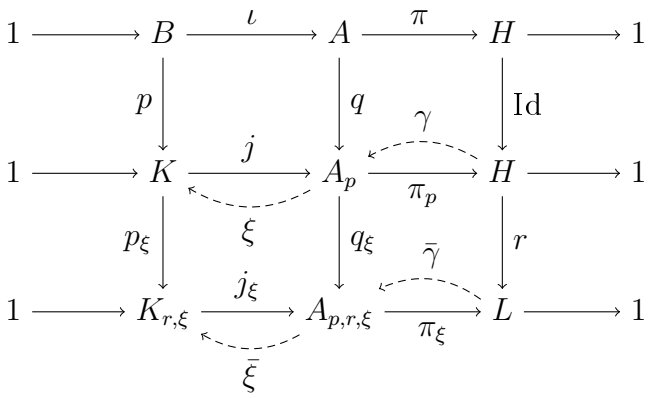
$$1 \longrightarrow K_{r,\xi} \xrightarrow{j_\xi} A_{p,r,\xi} \xrightarrow{\pi_\xi} L \longrightarrow 1, \tag{1.3}$$

$K_{r,\xi} = K/\mathcal{I}_{r,\xi}$ es central en $A_{p,r,\xi}$. □

Por el teorema 1.2.31 la sucesión (1.3) es hendida. Más aún, es posible elegir una sección y retracción relacionadas con γ y ξ. La próxima proposición nos dice efectivamente quienes son estas dos aplicaciones. Denotaremos p_ξ y q_ξ a las proyecciones canónicas $K \to K_{r,\xi}$ y $A_p \to A_{p,r,\xi}$ respectivamente.

Proposición 1.2.33. *[AG, Proposición 2.3.6] Si la extención A_p en (1.2) es hendida vía la sección γ y la retracción ξ entonces las extensión $A_{p,r,\xi}$ en (1.3) es hendida vía la sección $\bar{\gamma}$ tal que $\bar{\gamma}(r(h)) = q_\xi\gamma(h)$ y la retracción $\bar{\xi}$ donde $\bar{\xi}(a) = a_{(1)}\bar{\gamma}^{-1}(\pi_\xi(a_{(2)}))$.* □

Resumiendo, todas las sucesiones exactas de álgebras de Hopf que hemos presentado en esta subsección, encajan en el siguiente diagrama conmutativo.



Ellas corresponden en cada caso a extensiones centrales hendidas. Las dos filas inferiores están compuestas por álgebras de Hopf de dimensión finita. Finalmente, note que el diagrama pudo ser construido al considerar los morfismos sobreyectivos p y r.

Finalizamos esta subsección mencionando el siguiente Lema, el cual será útil en el Capítulo 5, en donde se presenta una relación de orden para subgrupos cuánticos.

Lema 1.2.34. *[AD, Lema 3.2.19] Considere el siguiente diagrama conmutativo, donde la fila superior es un sucesión exacta de álgebras de Hopf hendida y θ es un morfismo de álgebras de Hopf,*

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\iota} & A & \xrightarrow{\pi} & H & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow{\scriptstyle \theta} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \\ 1 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\iota'} & A' & \xrightarrow{\pi'} & H & \longrightarrow & 1, \end{array}$$

entonces la fila inferior del diagrama es hendida y θ es un isomorfismo de álgebras de Hopf. □

El siguiente Corolario al *five-lemma* para álgebras de Hopf [AG, Lema 1.14], nos será útil en la clasificación de subgrupos cuánticos que daremos al finalizar la tesis.

Corolario 1.2.35. *[AG, Corolario 1.15] Asuma en el diagrama del Lema 1.2.34, que dim H es finita, A' es noetheriana y B es central en A'. Entonces θ es un isomorfismo de álgebras de Hopf.* □

1.2.2. Grupos cuánticos

En esta sección describiremos la noción de *grupo cuántico*, para esto primero introduciremos algunos preliminares y notaciones de teoría de categorías. Para la cons-

trucción de este capítulo hemos tenido en cuenta principalmente las referencias [BG, EGNO, Ma, T, W].

Dualidad categórica

Definición 1.2.36. Una categoría $\mathcal{C}$ consiste de una colección de objetos denotada $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, junto con colecciónes $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ de elementos llamados morfismos para cada par de objetos X, Y. Tales que satisfacen:

(*i*) existe una operación $\circ$ que es asociativa en el siguiente sentido. Para morfismos h, f, g que pertenecen a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W,X)$ respectivamente, $h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g$. A $\circ$ se le llama composición.

(*ii*) para cada objeto X hay un morfismo privilegiado $1_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$. Tal que si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ y $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$, sucede que $1_X \circ g = g$ y $f \circ 1_X = f$.

Será común denotar fg para $f \circ g$ y para un morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, $f : X \to Y$ o $X \xrightarrow{f} Y$. Un morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ es un *isomorfismo* si existe g tal que $fg = 1_Y$ y $gf = 1_X$.

Definición 1.2.37. Una *subcategoría* $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$, es una categoría tal que $\mathrm{Ob}(\mathcal{D}) \subseteq \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ y para cada par de objetos $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ sucede que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$. Una subcategoría $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ es *plena* si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ para cada par de objetos $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$.

Ejemplo 1.2.38.

(*i*) Si C es un coálgebra, entonces $\mathcal{M}^C$ denota la categoría cuyos objetos son C-comódulos a derecha y los morfismos son aplicaciones lineales que son morfismos de C-comódulos a derecha, ver Definición 1.2.6. Similarmente definimos ${}^C\mathcal{M}$ para C-comódulos a izquierda.

(*ii*) Análogamente al ejemplo anterior, definimos para un álgebra A la categoría ${}_A\mathcal{M}$ de A-módulos a izquierda, respectivamente $\mathcal{M}_A$ para A-módulos a derecha.

(*iii*) Cada una de las categorías definidas anteriormente en (*i*) y (*ii*) contiene sendas subcategorías plenas, al considerar únicamente los objetos de dimensión finita.

(*iii*) Si $\mathcal{C}$ es una categoría, $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ denota la *categoría opuesta* a $\mathcal{C}$ cuyos objetos son los mismos que $\mathcal{C}$ pero $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$ para cada par de objetos de $\mathcal{C}$.

Definición 1.2.39. Un *funtor* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ es una asignación F entre los objetos y morfismos de $\mathcal{C}$ con los de $\mathcal{D}$, donde para cada objeto X de $\mathcal{C}$ hay uno y sólo un objeto $F(X)$ de $\mathcal{D}$ y para cada morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ hay uno y sólo un morfismo $F(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(X),F(Y))$. Además F satisface las dos siguientes propiedades para todo $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ y todo par de morfismos f, g de $\mathcal{C}$, $F(1_X) = 1_{F(X)}$ y $F(fg) = F(f)F(g)$.

Denotemos con $\mathbf{Alg_k}$ a la categoría de $\mathbf{k}$-álgebras cuyos morfismos son transformaciones $\mathbf{k}$-lineales que respetan el producto y envían la unidad en unidad y con $\mathbf{Vec_k}$ la categoría de $\mathbf{k}$-espacios vectoriales cuyos morfismos son las transformaciones $\mathbf{k}$-lineales. Definimos la asignación $\mathrm{Fo} : \mathbf{Alg_k} \to \mathbf{Vec_k}$ que consiste en *olvidar* la estructura de álgebra de un objeto $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Alg_k})$, al cosiderarla únicamente como $\mathbf{k}$-espacio vectorial. La asignación Fo resulta ser funtorial y usualmente se llama funtor de *olvido*.

Definición 1.2.40. Una *transformación natural* entre dos funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es una colección de morfismos $\tau_X : F(X) \to G(X)$ indexados por $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ tal que para todo morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ el siguiente diagrama es conmutativo,

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\tau_X} & G(X) \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(Y) & \xrightarrow{\tau_Y} & G(Y) \end{array}$$

Si todos los τ_X son isomorfismos diremos que F es equivalente a G o que los funtores son isomorfos naturalmente.

Definición 1.2.41. Diremos que dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son *equivalentes,* si existen funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tales que $F \circ G$ es equivalente a $1_{\mathcal{D}}$ y $G \circ F$ a $1_{\mathcal{C}}$.

Definición 1.2.42. Dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son *dualmente equivalentes,* si $\mathcal{C}$ es equivalente a $\mathcal{D}^{\mathrm{op}}$.

Note que si tenemos dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dualmente equivalentes, cuyos objetos son conjuntos y sus morfismos funciones. Tener un morfismo inyectivo en $\mathcal{C}$ equivale a tener un morfismo sobreyectivo en $\mathcal{D}$ y viceversa.

Ejemplo 1.2.43.

☯ Si G es un grupo finito y $\mathbf{k}$ es un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero. Entonces $\mathbf{k}[G]$ es un álgebra de Hopf coconmutativa de dimensión finita. Y si K es un álgebra de Hopf coconmutativa de dimensión finita, $G(K)$ es un grupo finito. Más aún, se tiene que $G(\mathbf{k}[G]) \simeq G$ y $\mathbf{k}[G(K)] \simeq K$, por lo que existe una equivalencía entre las categorías de grupos finitos y álgebras de Hopf coconmutativas. Por tanto las categorías de grupo finitos y la de álgebras de Hopf conmutativas de dimensión finita son dualmente equivalentes. Ver [Ab, Mi] para mayores referencias.

Ejemplo 1.2.44.

☯ Si G es un grupo topológico compacto T2 entonces el conjunto de funciones continuas de valor complejo $C(G)$ sobre G, es un álgebra de Hopf conmutativa con una involución $*$. Esta correspondencía también es conocida como el teorema de Gel'fand-Naimark. Usando este teorema es posible establer que la categoría de grupos topológicos compactos T2 y la de C^*-álgebras de Hopf conmutativas son dualmente equivalentes. Para mas detalles ver las referencias [BY, T, W].

Ejemplo 1.2.45.

☯ Sea G un grupo algebraico afín complejo y sea $\mathcal{O}(G)$ la $\mathbb{C}$-álgebra de funciones regulares sobre G. Entonces es conocido que $\mathcal{O}(G)$ es un álgebra de Hopf conmutativa finitamente generada y sin elementos nilpotentes. Recíprocamente si B es un álgebra de Hopf conmutativa y sin elementos nilpotentes, entonces existe un grupo algebraico G afín tal que el espectro máximal $\mathrm{Spec}_{\mathfrak{m}}(B)$ de B, es un grupo algebraico afín. Se sabe que $\mathcal{O}(\mathrm{Spec}_{\mathfrak{m}}(B)) \simeq B$ y $\mathrm{Spec}_{\mathfrak{m}}(\mathcal{O}(G)) \simeq G$. Es conocido que existen sendos funtores $\mathcal{O} : \mathbf{GrA} \to \mathbf{HCF}^{\mathrm{op}}$ y $\mathrm{Spec}_{\mathfrak{m}} : \mathbf{HCF}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{GrA}$ entre la subcategoría plena **GrA** de grupos los cuales son algebraicos afines y **HCF** la subcategoría plena de álgebras de Hopf que son conmutativas, finitamente generadas y sin elementos nilpotentes, que establecen una equivalencia dual entre ellas. Para ver un argumento más general de este ejemplo consultar [Ha, Mi, T].

Grupos cuánticos y sus subgrupos

No existe una definición ampliamente aceptada para definir un grupo cuántico. Sin embargo, se reconocen algunos contextos en donde se acostumbra a usar el término *grupo cuántico*. Por ejemplo, cuando existe una equivalencia dual entre alguna subcategoría plena de la categoría de grupos y otra categoría. En los ejemplos 1.2.43, 1.2.44 y 1.2.45 comentamos equivalencias duales entre subcategorías de la categoría grupos y subcategorías de la categoría de álgebras de Hopf conmutativas.

Definimos la categoría **QG** de *grupos cuánticos* como la categoría dual a la categoría **NCH** de **k**-álgebras de Hopf no conmutativas y no coconmutativas cf. [D]. Denotemos con $\mathcal{O}$ el funtor que va de **QG** a **NCH**. Si $G_q \in \mathbf{QG}$ entonces $\mathcal{O}(G_q)$ debería corresponder a un álgebra de Hopf en **NCH**. Sin embargo, *a per se* G_q es inexistente y por tanto en ocasiones se le dice a $\mathcal{O}(G_q)$ grupo cuántico. También es posible usar la notación $\mathcal{O}_q(G)$. Una forma usual de obtener ejemplos de grupos cuánticos, se logra al deformar el producto de $\mathcal{O}(G)$ donde G es un grupo algebraico afín. En este contexto la dualidad del ejemplo 1.2.45 se generaliza. A los grupos cuánticos obtenidos de esta manera se les acostumbra a llamar *grupos cuánticos algebraicos*.

Similarmente, la dualidad descrita en el ejemplo 1.2.44 puede ser generalizada de varias maneras al caso no commutativo. Por ejemplo, en [W] se presenta el concepto de álgebra de Woronowicz. A los grupos cuánticos obtenidos de esta manera, se les llama *grupos cuánticos compactos*.

Acuerdo. Cualquier afirmación sobre grupos cuánticos deberá ser entendida en términos de álgebras de Hopf, pero realizando una traducción que depende de la dualidad categórica. Por ejemplo, decir que P_q es un subgrupo cuántico (inclusión) de G_q, equivale a decir que tenemos un morfismo sobreyectivo (cociente) de $\mathcal{O}_q(G)$ a $\mathcal{O}_q(P)$.

Problema 1. Dado un grupo cuántico fijo dado, clasificar todos sus subgrupos cuánticos.

En los trabajos [AG, BB, BD, BN, BS, BY, G2, FST, Mu] se ha resulto el Problema

1 para varios grupos cuánticos dados o familias de ellos. La presente tesis clasificará los subgrupos cuánticos del grupo cuántico algebraico $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$. La cual es una generalización de los resultados presentados en [AG].

1.3. Twist, 2-cociclos, bi-graduaciones y apareamientos

1.3.1. Twist y 2-cociclos

Una herramienta usada regularmente para generar nuevas álgebras de Hopf es la deformación por *twist*, o la deformación por *2-cociclo*. Ellas en dimensión finita resultan duales cf. [Ra, § 7.8]. En el primer caso se modifica el coproducto de una biálgebra o álgebra de Hopf y en el segundo el producto. Veremos más adelante, que algunos de los cocientes obtenidos en la tesis se obtienen de esta manera y otros no.

En [M, § 2.3] se define para cualquier álgebra de Hopf el concepto de *n-cocadena*, un elemento inversible en $H^{\otimes n}$ y la *cofrontera*. Si χ es una n-cocadena, la cofrontera $\partial\chi$ es una $n+1$-cocadena. Un n-cociclo normalizado es una n-cocadena tal que $\partial\chi = 1$ y $\varepsilon_i(\chi) = 1$ para todo $1 \leq i \leq n$ donde $\varepsilon_i = id \otimes \cdots \otimes \varepsilon \otimes \cdots \otimes id$. Con estas definiciones es posible recuperar las nociones cohomológicas de un grupo G al considerar $\mathbf{k}[G]$. Sin embargo, no es adecuado dar una interpretación cohomológica en general para toda álgebra de Hopf usando las definiciones citadas. Porque si consideramos un álgebra de Hopf no conmutativa, puede suceder que $\partial^2 \neq 1$. Para los casos $n = 1$ y $n = 2$ si sucede que $\partial^2 = 1$, siendo posible definir los espacios de cohomología H^1 y H^2. Justo H^1 consiste de los elementos de tipo grupo de H y H^2 de los 2-cociclos que definiremos más adelante.

Definición 1.3.1. Sea H un álgebra de Hopf con coproducto Δ y counidad ε. Un elemento inversible $J \in H \otimes H$ es un *twist* de H si:

(i) *-cociclo-* $(\Delta \otimes Id)(J)(J \otimes 1) = (Id \otimes \Delta)(J)(1 \otimes J)$,

(ii) *-unitario o normal-* $(\epsilon \otimes Id)J = 1 = (Id \otimes \epsilon)J$,

Adoptamos la notación $J = J^{(1)} \otimes J^{(2)}$ omitiendo las sumas. Análogamente escribimos $J^{-1} = J^{-(1)} \otimes J^{-(2)}$. Note que en particular, no sucede necesariamente que $J^{(1)}J^{-(1)} = 1$. Definimos el elemento $Q_J := m(\mathcal{S} \otimes Id)J = \mathcal{S}(J^{(1)})J^{(2)}$ cuyo inverso es $Q_J^{-1} := m(Id \otimes \mathcal{S})J^{-1} = J^{-(1)}\mathcal{S}(J^{-(2)})$ (cf. [M, § 2.3]), $J_{12} = J \otimes 1$, $J_{13} = J^{(1)} \otimes 1 \otimes J^{(2)}$ y $J_{23} = 1 \otimes J$.

Proposición 1.3.2. *[M, Teorema 2.3.4] Si J es un twist del álgebra de Hopf H, entonces existe un álgebra de Hopf H^J con igual estructura de álgebra y counidad que H, pero con el coproducto dado por $\Delta^J = J^{-1}\Delta J$ y antípoda $\mathcal{S}^J = Q_J^{-1}\mathcal{S}Q_J$.* □

Se acostumbra a llamar al álgebra de Hopf H^J deformación por twist de H. Similarmente obtemos la noción de 2-cociclo y una proposición análoga a 1.3.2.

Definición 1.3.3. Un *2-cociclo multiplicativo normalizado* sobre un álgebra de Hopf H con multiplicación m, es un elemento inversible σ en $(H \otimes H)^*$ con respecto al producto por convolución $*$ tal que:

(i) $\sigma_{12} * \sigma(m \otimes Id) = \sigma_{23} * \sigma(Id \otimes m)$,

(ii) $\sigma(1 \otimes Id) = \varepsilon = \sigma(Id \otimes 1)$ (1 representa el mapeo constante 1).

Nos referiremos a ellos simplemente diciendo 2-cociclo. Usando la notación de Sweedler la condición (i) en 1.3.3 queda,

$$\sigma(b_{(1)}, c_{(1)})\sigma(a, b_{(2)}c_{(2)}) = \sigma(a_{(1)}, b_{(1)})\sigma(a_{(2)}b_{(2)}, c) \tag{1.4}$$

para todo $a, b, c \in H$. Y para todo $x \in H$ la (ii), como

$$\sigma(1, x) = \varepsilon(x) = \sigma(x, 1). \tag{1.5}$$

La aplicación $\sigma(Id \otimes \mathcal{S})$ de $H \otimes H$ en $\mathbf{k}$ será la noción análoga de Q_J y $\sigma^{-1}(\mathcal{S} \otimes Id)$ de Q_J^{-1}, las cuales denotaremos Q^σ y $Q^{\sigma^{-1}}$. Se chequea directamente que $(Q^\sigma)^{-1} = Q^{\sigma^{-1}}$ considerando el producto por convolución.

Proposición 1.3.4. *[Do, Teorema 1.6] Si σ es un 2-cociclo sobre H, entonces existe un álgebra de Hopf H_σ con igual estructura de coálgebra que H, pero con la multiplicación $m_\sigma = \sigma * m * \sigma^{-1}$ y antípoda $\mathcal{S}_\sigma = Q^\sigma * \mathcal{S} * Q^{\sigma^{-1}}$.* □

Hemos realizado un ligero abuso de notación en la anterior proposición, con el fin de aclararlo, describimos el producto y antípoda de H_σ con las siguientes fórmulas,

$$m_\sigma(a, b) = \sigma(a_{(1)}, b_{(1)})a_{(2)}b_{(2)}\sigma^{-1}(a_{(3)}, b_{(3)}) \qquad \text{for all } a, b \in H \tag{1.6}$$

$$\mathcal{S}_\sigma(a) = \sigma(a_{(1)}, \mathcal{S}(a_{(2)}))\mathcal{S}(a_{(3)})\sigma^{-1}(\mathcal{S}(a_{(4)}), a_{(5)}) \qquad \text{for all } a \in H \tag{1.7}$$

Alternativamente es posible usar la notación $m_\sigma(a, b) = a \cdot_\sigma b$ para la multiplicación de H_σ llamándola deformación del producto de H y a H_σ deformación por 2-cociclo de H.

Observación 1.3.5. *(pullback)* Sea $\pi : A \to H$ un morfismo sobreyectivo de álgebras de Hopf y σ un 2-cociclo sobre H, entonces $\sigma^\pi := \sigma(\pi \otimes \pi)$ es un 2-cociclo sobre A. Es decir, σ se levanta a través de π a un 2-cociclo sobre H.

Observación 1.3.6. Si por el contrario σ es un 2-cociclo sobre A, con $H = A/I$ para un ideal de Hopf I, π la proyección canónica y $\sigma|_{I \otimes A + A \otimes I} = 0$, entonces la aplicación $\sigma_\pi : H \otimes H \to \mathbf{k}$ definida por $\sigma_\pi(\pi(a), \pi(s)) = \sigma(a, s)$ para todo $\pi(a), \pi(s) \in H$ define un 2-cociclo sobre H.

Efectivamente, si denotamos $\pi(a) = \bar{a}$, tenemos que $\bar{a}_{(1)} \otimes \bar{a}_{(2)} = \overline{a_{(1)}} \otimes \overline{a_{(2)}}$ y $\varepsilon_\pi(\bar{a}) = \varepsilon(a)$. Entonces, suponga que $\bar{a} = \bar{c}$ y $\bar{s} = \bar{r}$, por hipótesis $0 = \sigma(a - c, s) + \sigma(c, s - r) = \sigma(a, s) - \sigma(c, s) + \sigma(c, s) - \sigma(c, r) = \sigma(a, s) - \sigma(c, r)$, lo que implica que

$\sigma_\pi(\bar{a},\bar{s}) = \sigma_\pi(\bar{c},\bar{r})$. Es decir, σ_π esta bien definido. Por otro lado, para todo $\bar{a} \in H$ es válido que $\sigma_\pi(\bar{1},\bar{a}) = \sigma(1,a) = \varepsilon(a) = \varepsilon_\pi(\bar{a})$, lo mismo para $\sigma_\pi(\bar{1},\bar{a})$. Resta comprobar la condición (i) de la Definición 1.3.3, sean $\bar{a},\bar{s},\bar{c} \in H$, entonces

$$\begin{aligned}
\sigma_\pi(\overline{s_{(1)}},\overline{c_{(1)}})\sigma_\pi(\bar{a},\overline{s_{(2)}c_{(2)}}) &= \sigma_\pi(\bar{s}_{(1)},\bar{c}_{(1)})\sigma_\pi(\bar{a},\bar{s}_{(2)}\bar{c}_{(c)}) \\
&= \sigma(s_{(1)},c_{(1)})\sigma(a,s_{(2)}c_{(2)}) \\
&= \sigma(a_{(1)},s_{(1)})\sigma(a_{(2)}s_{(2)},c) \\
&= \sigma_\pi(\bar{a}_{(1)},\bar{s}_{(1)})\sigma(\bar{a}_{(2)}\bar{s}_{(2)},\bar{c}) \\
&= \sigma_\pi(\overline{a_{(1)}},\overline{s_{(1)}})\sigma(\overline{a_{(2)}s_{(2)}},\bar{c})
\end{aligned}$$

Adicionalmente, el morfismo sobreyectivo inducido por π, $\pi_\sigma : H_\sigma \to A_{\sigma_\pi}$ es de álgebras de Hopf. En particular note que si B es una subálgebra central de A y $\sigma|_{B\otimes H+H\otimes B} = \varepsilon\otimes\varepsilon$, entonces, sucede que σ define un 2-cociclo sobre A/B^+H. Finalmente, estableciendo las hipótesis necesarias para cada caso es posible determinar que $(\sigma_\pi)^\pi = \sigma$ y $(\sigma^\pi)_\pi = \sigma$.

Observación 1.3.7. Suponga que A es de dimensión finita, si J es un twist en A entonces la aplicación lineal $\sigma : A^*\otimes A^* \to \mathbf{k}$ definida por $\sigma(f,g) := (f\otimes g)J$ es un 2-cociclo sobre A^*. También, si σ es un 2-cociclo sobre A y sea su transpuesta ${}^t\sigma : \mathbf{k}^* \to A^*\otimes A^*$, entonces ${}^t\sigma(1^*)$ es un twist en A^*, reciprocamente todo twist en A^* es un 2-cociclo sobre A. Usando que A es isomorfa a A^{**} como álgebras de Hopf podemos afirmar lo mismo para A^*.

1.3.2. Apareamientos de Hopf

Los apareamientos de Hopf son una herramienta que nos permiten establecer dualidades entre álgebras y coálgebras. Como por ejemplo, relacionar un álgebra con su álgebra de funciones. Los aparemientos de Hopf también son una herramienta para construir una nueva álgebra de Hopf a partir de otras dos. El doble de Drinfeld es un ejemplo muy conocido respecto de esta situación cf. [A2, § 2.6]. También, si $\mathcal{O}$ y $\mathcal{U}$ son las álgebras de Hopf tenidas en cuenta en el apareamiento, entonces tenemos una biyección entre los $\mathcal{U}$-módulos y los $\mathcal{O}$-comódulos.

Definición 1.3.8. Un elemento $\langle -,-\rangle \in (\mathcal{O}\otimes\mathcal{U})^*$ es un *aparemiento de Hopf* entre dos álgebras de Hopf $\mathcal{O}$ y $\mathcal{U}$ si satisface:

$$\begin{aligned}
&(i)\ \langle f,uv\rangle = \langle f_{(1)},u\rangle\langle f_{(2)},v\rangle && (ii)\ \langle fg,u\rangle = \langle f,u_{(1)}\rangle\langle g,u_{(2)}\rangle \\
&(iii)\ \langle 1,u\rangle = \varepsilon_{\mathcal{U}}(u) && (iv)\ \langle f,1\rangle = \varepsilon_{\mathcal{O}}(f)
\end{aligned}$$

para todo $f,g \in \mathcal{O}$ y $u,v \in \mathcal{U}$. Usando estas condiciones podemos establecer la propiedad $\langle f,\mathcal{S}(u)\rangle = \langle \mathcal{S}(f),u\rangle$, que usa la antípoda. A este apareamiento lo denotamos $\langle \mathcal{O},\mathcal{U}\rangle$. Cada apareamiento de Hopf corresponde a una forma bilineal sobre $\mathcal{O}\times\mathcal{U}$, si ella es denotada por π, es común usar la notación alternativa $\langle -,-\rangle = \pi(-,-)$.

Las aplicaciones, $\beta : \mathcal{O} \to \mathcal{U}^*$ definida por $\beta(f) := \beta_f = \langle f, - \rangle$ y $\gamma : \mathcal{U} \to \mathcal{O}^*$ por $\gamma(u) := \gamma_u \langle -, u \rangle$, satisfacen que $\mathrm{Im}(\beta) \subseteq \mathcal{U}^\circ$, $\mathrm{Im}(\gamma) \subseteq \mathcal{O}^\circ$ y son morfismos de álgebras de Hopf al hacer las respectivas restricciones de codominio. Si β y γ son inyectivas, decimos que $\langle \mathcal{O}, \mathcal{U} \rangle$ es *perfecto*. Decimos en este caso que $\mathcal{O}$ y $\mathcal{U}$ son duales.

Supongamos que hay un aparamiento de Hopf perfecto entre $\mathcal{O}$ y $\mathcal{U}$, entonces hay algunas relaciones entre estas álgebras de Hopf. Por ejemplo, $\mathcal{O}$ es conmutativa si y sólo si $\mathcal{U}$ es coconmutativa, si M es un $\mathcal{U}$-módulo entonces M es un $\mathcal{O}$-comódulo y $\mathcal{U}$ es de dimensión finita si y sólo si $\mathcal{O}$ también.

Ejemplo 1.3.9. *(apareamiento evaluación)* Sea H un álgebra de Hopf y H° el dual de Sweedler definido en 1.2.17. Entonces existe un apareamiento de Hopf $\langle H^\circ, H \rangle$ definido para $f \in H^\circ$ y $h \in H$ como $\langle f, h \rangle = f(h)$. Efectivamente, para todo $h, a \in H$ y $f, g \in H^\circ$ tenemos $\langle f, ha \rangle = f(ha) = \Delta(f)(h \otimes a) = (f_{(1)} \otimes f_{(2)})(h \otimes a) = \langle f_{(1)}, h \rangle \langle f_{(2)}, a \rangle$, $\langle f * g, h \rangle = (f * g)(h) = f(h_{(1)}) g(h_{(2)}) = \langle f, h_{(1)} \rangle \langle g, h_{(2)} \rangle$, $\langle \varepsilon, h \rangle = \varepsilon_H(h)$ y $\langle f, 1 \rangle = f(1) = \varepsilon_{H^\circ}(f)$.

Ejemplo 1.3.10. Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de un grupo algebraico complejo, semisimple, conexo y simplemente conexo G. Entonces hay un aparamiento de Hopf perfecto entre el álgebra envolvente universal $U(\mathfrak{g})$ y el anillo de funciones coordenadas $\mathcal{O}(G)$, para más detalles ver [BG, Ho].

Ejemplo 1.3.11. *(Forma de Rosso-Tanisaki [BG, Proposición I.8.12])* Sea $U_q(\mathfrak{g})$ la *Drinfeld-Jimbo* álgebra del Ejemplo 1.2.16, tal que q no es raíz de la unidad. Considere la descomposición triangular $U_q(\mathfrak{n}_+) \otimes U_q(\mathfrak{h}) \otimes U_q(\mathfrak{n}_-)$ de $U_q(\mathfrak{g})$, correspondiente a una subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$. Denote por $U_q(\mathfrak{b}_\pm)$ a las subálgebras de Hopf de $U_q(\mathfrak{g})$, $U_q(\mathfrak{n}_+) \otimes U_q(\mathfrak{h})$ y $U_q(\mathfrak{h}) \otimes U_q(\mathfrak{n}_-)$ respectivamente. Entonces existe un único apareamiento de Hopf perfecto $\langle U_q(\mathfrak{b}_+)^{op}, U_q(\mathfrak{b}_-) \rangle_{RT}$ tal que:

$$\begin{aligned} \langle K_i, K_j \rangle_{RT} &= q^{-a_{ij}} & \langle K_i, F_j \rangle_{RT} &= 0 \\ \langle E_i, F_j \rangle_{RT} &= -\delta_{ij}(q_i - q_i^{-1})^{-1} & \langle E_i, K_j \rangle_{RT} &= 0 \end{aligned}$$

para todo i, j, δ_{ij} es la delta de Kronecker y $q_i = q^{d_i}$ donde $D = diag(d_1, \ldots, d_n)$ es la matriz diagonal que simetriza a la matriz de Cartan $A = (a_{ij})$ asociada a $\mathfrak{g}$.

1.3.3. Bi-graduaciones

Introduciremos el concepto de P-bigraduación para un álgebra de Hopf $\mathcal{O}$ y un grupo abeliano P. Seguiremos lo descrito en [HLT, § 2]. También, veremos como un bicaracter antisimétrico p sobre P induce un nueva multiplicación sobre $\mathcal{O}$. Con esta nueva multiplicación $\mathcal{O}$ continua siendo un álgebra de Hopf que denotaremos $\mathcal{O}_p$. Esto nos permitirá dar otra caracterización del álgebra de funciones cuantizada multiparamétrica $\mathcal{O}_q^\varphi(G)$ que definiremos más adelante.

Definición 1.3.12. Un álgebra de Hopf $\mathcal{O}$ es *P-bigraduada*, si posee una $P \times P$ graduación, es decir $\mathcal{O} = \bigoplus_{\lambda,\mu \in P \times P} \mathcal{O}_{\lambda,\mu}$, $\mathbf{k} \in \mathcal{O}_{0,0}$ y $\mathcal{O}_{\lambda,\mu}\mathcal{O}_{\lambda',\mu'} \subseteq \mathcal{O}_{\lambda+\lambda',\mu+\mu'}$, y

(*i*) $\Delta(\mathcal{O}_{\lambda,v}) \subseteq \sum_{v\in P} \mathcal{O}_{\lambda,v} \bigotimes \mathcal{O}_{-v,\mu}$,

(*ii*) $\lambda \neq -\mu$ implica que $\varepsilon(\mathcal{O}_{\lambda,\mu}) = 0$,

(*iii*) $\mathcal{S}(\mathcal{O}_{\lambda,\mu}) \subseteq \mathcal{O}_{\mu,\lambda}$.

Diremos que los elementos de $\mathcal{O}_{\lambda,\mu}$ tienen bigraduación (λ,μ) y los denotaremos $a_{\lambda,\mu}$, para el producto de ellos usaremos $a_{\lambda_1,\mu_1}a_{\lambda_2,\mu_2} = a_{\lambda_1+\lambda_2,\mu_1+\mu_2}$, para al coproducto $\Delta(a_{\lambda,\mu}) = \sum_{v\in P} a_{\lambda,v} \otimes a_{-v,\mu}$ o $\Delta(a_{\lambda,\mu}) = a_{\lambda,v} \otimes a_{-v,\mu}$ omitiendo el signo de suma.

Definición 1.3.13. Una aplicación $p : P \times P \to \mathbf{k}^\times$ es un bicaracter antisimétrico sobre P, si es multiplcativo en cada entrada y para todo $\lambda, \mu \in P$ se tiene:

$$(i)\ p(\mu,\mu) = 1, \qquad\qquad (ii)\ p(\lambda,\mu) = p(\mu,-\lambda).$$

Cada bicaracter antisimétrico induce un 2-cociclo sobre $P \times P$, con el cual podremos definir nuevas multiplicaciones. La prueba es directa, sin embargo, la presentamos con el fin de recordar la definición de 2-cociclo para grupos.

Proposición 1.3.14. *La aplicación* $\tilde{p} : (P \times P) \times (P \times P) \to \mathbf{k}^\times$ *dada por,*

$$\tilde{p}((\lambda,\mu),(\lambda',\mu')) = p(\lambda,\lambda')p(\mu,\mu')^{-1}$$

para todo $(\lambda,\mu),(\lambda',\mu') \in P \times P$ *es un 2-cociclo sobre* $P \times P$ *tal que* $\tilde{p}(0,0) = 1$.

Prueba. Probamos directamente que se cumple la definición de 2-cociclo sobre el grupo abeliano $P \times P$,

$$\begin{aligned}\tilde{p}((\lambda,\mu),(\lambda',\mu'))\tilde{p}((\lambda+\lambda',\mu+\mu'),(\lambda'',\mu'')) &\\ &= p((\lambda,\lambda')p(\mu,\mu')^{-1}p(\lambda+\lambda',\lambda'')p(\mu+\mu',\mu'')^{-1}\\ &= p(\lambda,\lambda')p(\mu,\mu')^{-1}p(\lambda,\lambda'')p(\lambda',\lambda'')p(\mu,\mu'')^{-1}p(\mu',\mu'')^{-1}\\ &= p(\lambda',\lambda'')p(\mu',\mu'')^{-1}p(\lambda,\lambda'+\lambda'')p(\mu,\mu'+\mu'')^{-1}\\ &= \tilde{p}((\lambda',\mu'),(\lambda'',\mu''))\tilde{p}((\lambda,\mu),(\lambda'+\lambda'',\mu'+\mu'')).\end{aligned}$$

□

Proposición 1.3.15. *[HLT, Teorema 2.1] Si* $\mathcal{O}$ *es un álgebra de Hopf* P*-bigraduada, entonces podemos definir una nueva multiplicación* m_p *sobre* $\mathcal{O}$ *dada por,*

$$m_p(a_{\lambda,\mu}, b_{\lambda',\mu'}) := a_{\lambda,\mu} \cdot_p b_{\lambda',\mu'} = p(\lambda,\lambda')p(\mu,\mu')^{-1}a_{\lambda,\mu}b_{\lambda',\mu'} \tag{1.8}$$

para todo $a_{\lambda,\mu} \in \mathcal{O}_{\lambda,\mu}$ *y* $b_{\lambda',\mu'} \in \mathcal{O}_{\lambda',\mu'}$. *Si consideramos esta multiplicación junto con el coproducto, antípoda y counidad sin cambio,* $\mathcal{O}$ *es de nuevo un álgebra de Hopf* P*-bigraduada. La cual denotaremos por* $\mathcal{O}_p$. □

En la próxima subsección presentaremos el ejemplo más importante de un álgebra de Hopf bigraduada para la tesis.

P bigraduación de $\mathcal{O}_q(G)$

Es conocido que cuando q no es una raíz de la unidad y $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie semi-simple compleja, todas las representaciones finito dimensionales del álgebra envolvente cuantizada $U_q(\mathfrak{g})$ (ver Ejemplo 1.2.16) son completamente reducibles y que es posible clasificar aquellas irreducibles, en términos de pesos máximos similarmente a $U(\mathfrak{g})$, cf. [Ro].

Un $U_q(\mathfrak{g})$-módulo V es de *tipo 1* si es finito dimensional y los elementos K_i actúan como potencias de q diagonalmente. Si V y W son de tipo 1, entonces $V \otimes W$ y V^* también lo son. Basta definir las acciones siguientes para todo $a \in U_q(\mathfrak{g})$, $v \in V$, $w \in W$ y $f \in V^*$ según corresponda

$$a(v \otimes w) = \Delta a(v \otimes w) \qquad (af)v = f(\mathcal{S}(a)v),$$

note que no usamos ningún símbolo para las acciones a menos que el contexto se preste para ambigüeades.

Denotemos por $\mathcal{C}_q(\mathfrak{g})$ la subcategoría plena de ${}_{U_q(\mathfrak{g})}\mathcal{M}$ cuyos objetos son los módulos de tipo 1. Dado un elemento $V \in \mathcal{C}_q(\mathfrak{g})$, $v \in V$ y $f \in V^*$ definimos el *coeficiente matricial* o *función coordenada* $c^V_{f,v} \in U_q(\mathfrak{g})^*$ como $c^V_{f,v}(a) = f(av)$. En ocasiones por simplicidad no escribiremos la V. Se puede ver que $c^V_{f,v} \in U_q(\mathfrak{g})^\circ$, cf. [BG].

Los módulos irreducibles de tipo 1 están en correspondencia biyectiva con los elementos de pesos dominantes $P_+ = \sum_{i=1}^n \mathbb{Z}^+\omega_i$. Si Λ es uno de tales pesos, denotaremos con $V(\Lambda)$ su correspondiente módulo de tipo 1.

Sean $V_i \in \mathcal{C}_q(\mathfrak{g})$, $v_i \in V$ y $f_i \in V_i^*$ para $i = 1, 2$, entonces podemos definir las operaciones suma y producto entre coeficientes matriciales como,

$$c^{V_1}_{f_1,v_1} + c^{V_2}_{f_2,v_2} = c^{V_1 \oplus V_2}_{f_1+f_2,v_1+v_2}, \qquad c^{V_1}_{f_1,v_1} c^{V_2}_{f_2,v_2} = c^{V_1 \otimes V_2}_{f_1 \otimes f_2, v_1 \otimes v_2}$$

las aplicaciones $\varepsilon(c^V_{f,v}) = f(v)$ y $\mathcal{S}(c^V_{f,v}) = c^{V^*}_{v,f}$ definen la counidad y antípoda respectivamente. Si tenemos las bases duales $\{v^i\}$, $\{v_i\}$ para V^* y V, tenemos el coproducto definido por:

$$\Delta(c^V_{f,v}) = c^V_{f,v_i} \otimes c^V_{v^i,v} \tag{1.9}$$

Por simplicidad suprimimos el signo suma. Equivalentemente es posible definir $\Delta(c^V_{f,v})(x \otimes y) = c^V_{f,v}(xy)$ para (1.9).

Definición 1.3.16. A la subálgebra de $U_q(\mathfrak{g})^\circ$ generada por los coeficientes matriciales de módulos de tipo 1, teniendo en cuenta las operaciones antes descritas, la denotamos $\mathcal{O}_q(G)$ y la llamamos *álgebra de funciones cuantizada.*

Extendiendo las aplicaciones ε, $\mathcal{S}$ y Δ definidas anteriormente, $\mathcal{O}_q(G)$ resulta ser un álgebra de Hopf con unidad la counidad de $U_q(\mathfrak{g})$.

Observación 1.3.17. [BG, § I.6.2] Dado $\Lambda \in P^+$, $V(\Lambda) = \bigoplus_{\lambda \in P} V(\Lambda)_\lambda$ donde los $V(\Lambda)_\lambda = \{v \in V(\Lambda) : K_i v = q^{(\lambda,\alpha_i)} v\}$ pueden ser algunos cero y $(-,-)$ es la forma bilineal sobre $P \times P$ definida en 1.1. Si ω_0 es el elemento de longitud máxima en $\mathcal{W}$, entonces $V(\Lambda)^* \simeq V(-\omega_0\Lambda)$ y $V(\Lambda)^*_{-\mu} = (V(\Lambda)_\mu)^*$. Resulta cierto por el teorema de Peter-Weyl que,

$$\mathcal{O}_q(G) = \bigoplus_{\Lambda \in P_+} V(\Lambda) \otimes V(\Lambda)^*.$$

Con el fin de poder establecer que $\mathcal{O}_q(G)$ es un álgebra de Hopf P-bigraduada, describiremos una estructura de $U_q(\mathfrak{g})$-bimódulo sobre ella. Usando la Observación 1.2.18 sabemos que $U_q(\mathfrak{g})^\circ$ es un $U_q(\mathfrak{g})$-bimódulo. Sea $u, x \in U_q(\mathfrak{g})$, $\{v_i\}$ y $\{v^i\}$ bases duales para V y V^*, con $V \in \mathcal{C}_q(\mathfrak{g})$, entonces

$$\langle u \rightharpoonup c^V_{f,v}, x\rangle = c^V_{f,v}(xu) = \Delta(c^V_{f,v})(x \otimes u) = c^V_{f,v_i}(x) c^V_{v^i,v}(u) = v^i(uv) c^V_{f,v_i}(x),$$

análogamente obtenemos $c^V_{f,v_i}(x) \leftharpoonup u = f(uv_i) c^V_{v^i,v}$, con estos dos hechos es posible probar que $\mathcal{O}_q(G)$ es un $U_q(\mathfrak{g})$-bimódulo.

Sean λ, μ elementos en P, definimos los siguientes espacios de peso (λ, μ),

$$\mathcal{O}_q(G)_{\lambda,\mu} = \{y \in \mathcal{O}_q(G) : y \leftharpoonup K_i^{-1} = q^{(\lambda,\alpha_i)} y \text{ y } K_i \rightharpoonup y = q^{(\mu,\alpha_i)} y \ \forall i = 1, \dots, n\}$$

Proposición 1.3.18. *$\mathcal{O}_q(G)$ es una P-bigraduada álgebra de Hopf.*

Prueba. Se sigue de [BG, Lema I.8.7] o ver prueba de [HLT, Teorema 3.4]. Sin embargo, la condición (ii) en 1.3.12 será de utilidad más adelante y por eso la chequeamos. Si $f \in V(\Lambda)^*_\lambda$, $v \in V(\Lambda)_\mu$ y $f(v) \neq 0$, entonces

$$f(v) = f(1v) = f(K_i^{-1} K_i v) = f(\mathcal{S}(K_i) K_i v) = (K_i f)(K_i v) = q^{(\lambda+\mu,\alpha_i)} f(v)$$

para todo $1 \leq i \leq n$, lo cual implica que $\lambda = -\mu$. □

Capítulo 2

Álgebra Envolvente Cuántica Torcida

Presentaremos una versión multiparamétrica de la forma simplemente conexa $\check{U}_q(\mathfrak{g})$. Dada una $\mathbb{Q}$-aplicación lineal φ sobre el espacio vectorial $\mathbb{Q}P$ es posible deformar el coproducto de $U_\hbar(\mathfrak{g})$ al considerar un elemento $e^u \in U_\hbar(\mathfrak{g}) \otimes U_\hbar(\mathfrak{g})$, donde $U_\hbar(\mathfrak{g})$ es la $\hbar$-ádica álgebra de Drinfeld-Jimbo cf. [KS]. Esta deformación se asemeja a una deformación por twist (ver Proposición 1.3.2) y será denotada $\check{U}_q^\varphi(\mathfrak{g})$, definiciones de esta álgebra pueden encontrarse en [CKP, CV1, R]. En el Capítulo 3 definiremos un objeto dual a $\check{U}_q^\varphi(\mathfrak{g})$ denotado $\mathcal{O}_q^\varphi(G)$, que corresponde a una deformación por 2-cociclo del álgebra de funciones cuantizada $\mathcal{O}_q(G)$ (ver Ejemplo 1.3.16).

Análogamente a [DL] en [CV2] se define el álgebra de potencias dividida $\Gamma^\varphi(\mathfrak{g})$ que resulta ser una forma entera de $\check{U}_q^\varphi(\mathfrak{g})$, la cual nos permitirá interpretar q como una raíz de la unidad.

2.1. La aplicación de torcimiento φ

Sea $R = \mathbb{Q}[q, q^{-1}]$ y $\mathbb{Q}(q)$ su cuerpo de fracciones, ϵ una ℓ-raíz de unidad de orden impar. Si $\chi_\ell(q)$ es el ℓ-ésimo polinomio ciclotómico, entonces $R/[\chi_\ell(q)R] = \mathbb{Q}(\epsilon)$.

Para $n > 0$ definimos

$$(n)_q = \frac{q^n - 1}{q - 1} = q^{n-1} + \cdots + q + 1, \quad (n)_q! = (n)_q(n-1)_q \cdots (2)_q(1)_q \text{ and } (0)_q = 1,$$

$$[n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}, \quad [n]_q! = [n]_q[n-1]_q \cdots [1]_q \quad \text{and} \quad [0]_q = 1,$$

$$\binom{n}{k}_q = \frac{(n)_q}{(k)_q(n-k)_q}, \qquad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!}.$$

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, entonces la forma $(-,-)$ puede ser extendida a una forma bilineal simétrica en $\mathbb{Q}P \times \mathbb{Q}P \to \mathbb{Q}$, donde $\mathbb{Q}P = \sum_{i=1}^n \mathbb{Q}\omega_i$.

Consideremos la $\mathbb{Q}$-aplicación lineal $\varphi : \mathbb{Q}P \to \mathbb{Q}P$ definida en [CV2, § 1.2], que llamaremos *aplicación de torcimiento* y tal que cumple con:

$$\begin{cases} (\varphi x, y) = -(x, \varphi y) & \forall x, y \in \mathbb{Q}P \\ \varphi\alpha_i = \delta_i = 2\tau_i & \tau_i \in P, i = 1, ..., n \\ \frac{1}{2}(\phi\lambda, \mu) \in \mathbb{Z} & \forall \lambda, \mu \in P \end{cases} \tag{2.1}$$

Si escribimos $\tau_i = \sum_{j=1}^n y_{ji}\alpha_j = \sum_{j=1}^n x_{ji}\omega_j$, $Y = (y_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ y $X = (x_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. La primera condición en (2.1) se reescribe como $(2\tau_i, \alpha_j) = -(2\tau_j, \alpha_i)$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} (2\tau_i, \alpha_j) &= \left(\sum_{k=1}^n x_{ki}\omega_k, \alpha_j\right) & -(2\tau_j, \alpha_i) &= -\left(\sum_{l=1}^n x_{lj}\omega_l, \alpha_i\right) \\ &= \sum_{k=1}^n x_{ki}(\omega_k, \alpha_j) & &= -\sum_{l=1}^n x_{lj}(\omega_l, \alpha_i) \\ &= \sum_{k=1}^n x_{ki}d_k\delta_{kj} & &= -\sum_{l=1}^n x_{lj}d_l\delta_{li} \\ &= x_{ji}d_j & &= -d_i x_{ij} \end{aligned}$$

de lo que se concluye que $x_{ji}d_j = -d_i x_{ij}$. Así que, $DX = (d_i x_{ij})$ es antisimétrica y los elementos de la diagonal de X son todos cero.

Las dos últimas condiciones en (2.1) son equivalentes a que $Y \in M_n(\mathbb{Z}) \cap D^{-1}A_n(\mathbb{Z})A$ donde $A_n(\mathbb{Z})$ denota el submódulo de $M_n(\mathbb{Z})$ dado por las matrices antisimétricas cf. [CV2]. De manera que, $\varphi(Q) \subseteq Q$ y como $AY = X$ entonces X tiene entradas enteras.

Sean u_{ij} las entradas de la matriz $U = A^{-1}XA^{-1}$, la siguiente cuenta nos muestra que DU es antisimétrica. Recuerde que hemos denotado $A^{-1} = (\widehat{a_{ij}})_{1\leq i,j\leq n}$,

$$\begin{aligned} d_i u_{ij} &= \sum_{l,p} d_i\widehat{a_{il}}x_{lp}\widehat{a_{pj}} \\ &= \sum_{l,p} d_i\widehat{a_{il}}d_l^{-1}d_l x_{lp}\widehat{a_{pj}} \\ &= \sum_{l,p} \widehat{a_{li}}(-d_p x_{pl})\widehat{a_{pj}} \\ &= \sum_{l,p} -d_j\widehat{a_{jp}}x_{pl}\widehat{a_{li}} \qquad = -d_j u_{ji}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Proposición 2.1.1. *Si $\mathfrak{g}$ tiene rango n, entonces φ depende de a lo sumo $\frac{n(n-1)}{2}$ parámetros enteros.*

Prueba. Ninguno de los d_i es cero, como DX es antisimétrica $diag(d_i x_{ii}) = (0 \dots 0)$, esto implica que la diagonal de X es cero. La matriz A^{-1} corresponde a la matriz cambio de coordenadas entre los pesos ω_i y las raíces simples α_i, de manera que $Y = A^{-1}X$ dependerá de X. De la segunda relación en (2.1) y del hecho de que X es de tamaño $n \times n$ obtenemos que φ depende de los $\frac{n(n-1)}{2}$ elementos x_{ij} con $i < j$. □

Note que si el rango de $\mathfrak{g}$ es uno, $X = 0$ y por tanto $\varphi = 0$.

Juntando la definición del *álgebra envolvente cuántica* $U_q(\mathfrak{g}, M)$ para un subretículo M de P conteniendo a Q dada en [BG, § I.6.3] con la definición del *grupo cuántico multiparamétrico simplemente conexo* dada en [CV2, § 1.3] realizamos la siquiente definición.

Definición 2.1.2. El *álgebra envolvente cuántica torcida* $U_q^{\varphi}(\mathfrak{g}, M)$ es la $\mathbf{k}$-álgebra generada por el conjunto $\{E_i, F_i\}_{i=1}^n \cup \{K_\lambda : \lambda \in M\}$, $q \in \mathbf{k}^\times$ y $q^{d_i} = q_i \neq \pm 1$ satisfaciendo las siguientes relaciones,

$$K_0 = 1 \text{ y } K_\lambda K_\mu = K_{\lambda+\mu} = K_\mu K_\lambda \text{ para todo } \lambda, \mu \in M$$

$$K_\lambda E_j K_{-\lambda} = q^{(\lambda, \alpha_j)} E_j$$

$$K_\lambda F_j K_{-\lambda} = q^{-(\lambda, \alpha_j)} F_j$$

$$E_i F_j - F_j E_i = \delta_{ij} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}}$$

$$\sum_{l=0}^{1-a_{ij}} (-1)^l \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ l \end{bmatrix}_{q_i} E_i^{1-a_{ij}-l} E_j E_i^l = 0 \quad (i \neq j)$$

$$\sum_{l=0}^{1-a_{ij}} (-1)^l \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ l \end{bmatrix}_{q_i} F_i^{1-a_{ij}-l} F_j F_i^l = 0 \quad (i \neq j).$$

Más aún, las siguientes aplicaciones dotan de una estructura de álgebra de Hopf a $U_q^{\varphi}(\mathfrak{g}, M)$, ver [CKP, CV2, R]. Donde Δ_φ es el coproducto, ε_φ la counidad y $\mathcal{S}_\varphi$ la antípoda. La propiedad $\varphi(Q) \subseteq Q$ permite probar que el coproducto está bien definido.

$$\begin{cases} \Delta_\varphi(E_i) = E_i \otimes K_{\tau_i} + K_{\alpha_i - \tau_i} \otimes E_i, \\ \Delta_\varphi(F_i) = F_i \otimes K_{-\alpha_i - \tau_i} + K_{\tau_i} \otimes F_i, \\ \Delta_\varphi(K_\lambda) = K_\lambda \otimes K_\lambda, \end{cases} \quad \begin{cases} \varepsilon_\varphi(E_i) = 0, \\ \varepsilon_\varphi(F_i) = 0, \\ \varepsilon_\varphi(K_\alpha) = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{S}_\varphi(E_i) = -K_{-\alpha_i} E_i, \\ \mathcal{S}_\varphi(F_i) = -F_i K_{\alpha_i}, \\ \mathcal{S}_\varphi(K_\lambda) = K_{-\lambda}. \end{cases}$$

Asumimos el siguiente acuerdo notacional, si $\lambda = \sum_{i=1}^{n} m_i\omega_i$ entonces $K_\lambda = \prod_{i=1}^{n} K_{\omega_i}^{m_i}$ y $K_{-\lambda} = K_\lambda^{-1}$. Si $M = P$ diremos la *forma simplemente conexa* y la notaremos $\check{U}_q^\varphi(\mathfrak{g})$. Si $M = Q$ la llamaremos la *forma adjunta* y notaremos $U_q^\varphi(\mathfrak{g})$. En lo sucesivo nuestro cuerpo base será $\mathbb{Q}(q)$. Si escribimos $K_i = K_{\alpha_i}$ para todo i, $\varphi = 0$ y $M = Q$, entonces $U_q^0(\mathfrak{g}) = U_q(\mathfrak{g})$, en la misma situación tenemos $\check{U}_q^0(\mathfrak{g}) = \check{U}_q^\varphi(\mathfrak{g})$ para la forma simplemente conexa definida en [BG, § I.6.3]. Por esto mantendremos el acuerdo a lo largo de toda la tesis de omitir los símbolos cero cuando $\varphi = 0$. Note que para todo M contenido entre Q y P la estructura de álgebra de $U_q^\varphi(\mathfrak{g}, M)$ no depende de φ, así como la antípoda y counidad.

Observación 2.1.3. Note que $K_{\tau_i}E_i = E_iK_{\tau_i}$ y $K_{\tau_i}F_i = F_iK_{\tau_i}$ para todo $1 \leq i \leq n$. Haremos la cuenta de la primera ecuación, la segunda se realiza similarmente, a saber tenemos

$$K_{\tau_i}E_i = \prod_{j=1}^{n} K_{\omega_j}^{x_{ji}} E_i = \left(\prod_{j=1}^{n} q_j^{x_{ji}(\omega_j,\alpha_i)}\right) E_i \left(\prod_{j=1}^{n} K_{\omega_j}^{x_{ji}}\right) = \left(\prod_{j=1}^{n} q_j^{d_j x_{ji}\delta_{ij}}\right) E_iK_{\tau_i} = E_iK_{\tau_i}.$$

Módulos simples sobre $U_q^\varphi(\mathfrak{g})$

Asumamos $\mathfrak{g}$ simple, $\mathbf{k}$ no es de característica 2, si $\mathfrak{g}$ posee una componente irreducible de tipo G_2 la característica de $\mathbf{k}$ no es 3 y que q no es una raíz de la unidad. Los resultados sobre representaciones irreducibles de $U_q(\mathfrak{g})$ coinciden con los de $U_q^\varphi(\mathfrak{g})$ ya que como álgebras son iguales.

Observación 2.1.4. Si V es un U_q^φ-módulo de dimensión 1, debe suceder que $E_iV = F_iV = (K_i^2 - 1)V = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, de manera que K_i actúa sobre V por multiplicación de ± 1. Recíprocamente, cualquier homomorfismo de grupos $Q \to \mathbb{Z}_2$ induce una representación 1-dimensional de $U_q^\varphi(\mathfrak{g})$.

Definición 2.1.5. Un $U_q^\varphi(\mathfrak{g})$-módulo V es llamado de *peso máximo* si existe un vector $v_\lambda \in V$ tal que $K_\alpha v_\lambda = q^{(\lambda,\alpha)}v_\lambda$ para todo $\alpha \in Q$, $E_iv_\lambda = 0$ y $U_q^\varphi(\mathfrak{g})v_\lambda = V$ para todo $i = 1, \ldots, n$. En esta situación a v_λ lo llamamos *vector de peso máximo.*

Los espacios pesos de V se definen como $V_\mu = \{v \in V : K_\alpha v = q^{(\mu,\alpha)}v, \forall \alpha \in Q\}$, entonces podemos establecer que $V = \bigoplus_{\mu\in P} V_\mu$.

Un módulo de peso máximo es de *tipo 1* si es finito dimensional. Para ver una discusión completa acerca de los *tipos* en los $U_q(\mathfrak{g})$-módulos ver [KS, § 6.2.4]. Cada $U_q^\varphi(\mathfrak{g})$-módulo es completamente reducible.

Proposición 2.1.6. *[BG, § I.6.2] Hay una biyección entre elementos $\lambda \in P_+$ y $U_q^\varphi(\mathfrak{g})$-módulos irreducibles de tipo 1.* □

Ejemplos

Ilustraremos la aplicación torcida φ en algunos ejemplos.

(a) Si $\mathfrak{g}$ es de tipo C_3, la matriz de Cartan asociada es $\left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, $D = diag(2,2,1)$, $DA = \left(\begin{smallmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ y $A^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3/2 \end{smallmatrix}\right)$, como $DX = \left(\begin{smallmatrix} 2x_{11} & 2x_{12} & 2x_{13} \\ 2x_{21} & 2x_{22} & 2x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{smallmatrix}\right)$ debe ser antisimétrica, sucede que

$$\begin{aligned} 2x_{11} =& 2x_{22} = x_{33} = 0 \\ 2x_{13} =& x_{31} \\ 2x_{12} =& 2x_{21} \\ 2x_{23} =& x_{32}, \end{aligned}$$

escribiendo $a = x_{21}$, $b = x_{31}$ y $c = x_{32}$, X queda como $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -a & -b/2 \\ a & 0 & -c/2 \\ b & c & 0 \end{smallmatrix}\right)$, con lo cual

$$\begin{aligned} \tau_1 =& a\omega_2 + b\omega_3, \\ \tau_2 =& -a\omega_1 + c\omega_3, \\ \tau_3 =& -\frac{b}{2}\omega_1 - \frac{c}{2}\omega_2, \end{aligned}$$

usando A^{-1} sabemos que

$$\begin{aligned} \omega_1 =& \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \\ \omega_2 =& \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3, \\ \omega_3 =& \frac{\alpha_1}{2} + \alpha_2 + \frac{\alpha_3}{2} \end{aligned}$$

y por tanto podemos expresar los τ_i como

$$\begin{aligned} \tau_1 =& (a + b/2)\alpha_1 + (2a + b)\alpha_2 + (2a + 3b/2)\alpha_3 \\ \tau_2 =& (-a + c/2)\alpha_1 + (-a + c)\alpha_2 + (-a + 3c/2)\alpha_3 \\ \tau_3 =& (-b/2 - c/2)\alpha_1 + (-b/2 - c)\alpha_2 + (-b/2 - c)\alpha_3, \end{aligned}$$

así

$$Y = \begin{pmatrix} a + b/2 & -a + c/2 & -b/2 - c/2 \\ 2a + b & -a + c & -b/2 - c \\ 2a + 3b/2 & -a + 3c/2 & -b/2 - c \end{pmatrix}$$

se comprueba fácilmente que DYA^{-1} es antisimétrica.

(b) Si $\mathfrak{g}$ es de tipo B_3, $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. En este caso $D = diag(1,1,2)$, así $X = \left(\begin{smallmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b/2 & -c/2 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, como $A^{-1}X = Y$ obtenemos

$$Y = \begin{pmatrix} -a - b/2 & a - c/2 & b + c \\ -2a - b & a - c & b + 2c \\ -a - 3b/4 & a/2 - 3c/4 & b/2 + c \end{pmatrix}.$$

(*c*) Si $\mathfrak{g}$ es de tipo A_3, $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Aquí $D = Id$, así que $DX = \left(\begin{smallmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{smallmatrix}\right)$ y

$$A^{-1}X = Y = \begin{pmatrix} -a/2 - b/4 & 3a/4 - c/4 & 3b/4 + c/2 \\ -a - b/2 & a/2 - c/2 & b/2 + c \\ -a/2 - 3b/4 & a/4 - 3c/4 & b/4 + c/2 \end{pmatrix}.$$

(*d*) Si $\mathfrak{g}$ es de tipo D_4, $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Aquí $D = Id$, $DA = A$ y $A^{-1} = \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, $X = \left(\begin{smallmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{smallmatrix}\right)$, y por tanto

$$Y = \begin{pmatrix} -2a - b - c & 2a - d - e & 2b + 2d - f & 2c + 2e + f \\ -2(2a + b + c) & 2(a - d - e) & 2(b + 2d - f) & 2(c + 2e + f) \\ -2a - 2b - c & a - 2d - e & b + 2d - f & c + 2e + 2f \\ -2a - b - 2c & a - d - 2e & -b + 2d - 2f & c + 2e + f \end{pmatrix}.$$

(*e*) Si $\mathfrak{g}$ es de tipo A_2. Para este caso tenemos $X = \left(\begin{smallmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{smallmatrix}\right)$. $A^{-1} = \frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ e $Y = \frac{a}{3}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Dando valores enteros específicos a la matriz X de tal manera que la matriz $2Y$ se conserve de valores enteros obtenemos definiciones adecuadas de φ.

El coproducto Δ_φ

Describiremos en esta subsección como el coproducto Δ_φ se asemeja a una deformación por twist de $\Delta_0 = \Delta$. Iniciamos describiendo el *álgebra ħ-ádica de Drinfeld-Jimbo*, como referencia usaremos [KS].

Definición 2.1.7. Denotemos con $U_\hbar(\mathfrak{g})$ a la $\mathbb{Q}[\![\hbar]\!]$-álgebra generada por los generadores E_i, F_i y H_i para $i = 1, \ldots, n$ y relaciones:

$$[H_i, H_j] = 0 \qquad [H_i, E_j] = a_{ij}E_j \qquad [H_i, F_j] = -a_{ij}F_j$$

$$[E_i, F_j] = \delta_{ij}\frac{\sinh\left(\frac{\hbar}{2}d_iH_i\right)}{\sinh\left(\frac{\hbar}{2}d_i\right)},$$

donde sinh denota el seno hiperbólico y las dos últimas relaciones en la Definición 2.1.2.

Sea $\exp(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^s}{s!}$, entonces $U_\hbar(\mathfrak{g})$ posee una estructura de álgebra de Hopf, con coproducto $\Delta_\hbar$, counidad $\varepsilon_\hbar$ y antípoda $\mathcal{S}_\hbar$ definidas sobre los generadores por:

$$\Delta_\hbar(E_i) = E_i \otimes 1 + \exp\left(-\frac{\hbar}{2} d_i H_i\right) \otimes E_i,$$

$$\Delta_\hbar(F_i) = F_i \otimes \exp\left(\frac{\hbar}{2} d_i H_i\right) + 1 \otimes F_i,$$

$$\Delta_\hbar(H_i) = H_i \otimes 1 + 1 \otimes H_i,$$

$$\varepsilon_\hbar(H_i) = \varepsilon_\hbar(E_i) = \varepsilon_\hbar(F_i) = 0,$$

$$\mathcal{S}_\hbar(E_i) = -\exp\left(\frac{\hbar}{2} d_i H_i\right) E_i,$$

$$\mathcal{S}_\hbar(F_i) = -F_i \exp\left(-\frac{\hbar}{2} d_i H_i\right),$$

$$\mathcal{S}_\hbar(H_i) = -H_i.$$

El álgebra $U_q(\mathfrak{g})$ puede ser derivada formalmente de $U_\hbar(\mathfrak{g})$ al sustituir q por $\exp\left(\frac{\hbar}{2} d_i\right)$ y K_i por $\exp\left(\frac{\hbar}{2} d_i H_i\right)$.

Para la siguiente proposición recordemos la matriz U definida en (2.2) y consideremos el elemento $\hat{u} = \sum_{i,j}^{n} \frac{\hbar}{2} d_j u_{ij} H_i \otimes H_j \in \wedge^2 \mathfrak{h}^*$ definido en [CV2, § 2.2]. También, para $s, r \in \{1, 2, 3\}$ tales que $s < r$ defina los elementos $u_{12} = \hat{u} \otimes 1$, $u_{23} = 1 \otimes \hat{u}$ y $u_{13} = (1 \otimes \tau) u_{12}$.

Proposición 2.1.8. *El elemento $J = \exp(\hat{u})$ satisface las condiciones (i) y (ii) de la Definición 1.3.1. En particular, J es un twist de $U_\hbar(\mathfrak{g})$.*

Prueba. Para $s, r \in \{1, 2, 3\}$ tales que $s < r$, definamos $J_{sr} = \exp(\hat{u}_{sr})$, por $J_{23} = 1 \otimes \exp(\hat{u}) = 1 \otimes \sum_{k=o}^{\infty} \frac{\hat{u}^k}{k!} = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{(1 \otimes \hat{u})^k}{k!} = \exp(1 \otimes \hat{u}) = \exp(\hat{u}_{23})$, análogamente $J_{12} = \exp(\hat{u}) \otimes 1 = \exp(\hat{u} \otimes 1) = \exp(\hat{u}_{12})$ y $J_{13} = (1 \otimes \tau) J_{12} = (1 \otimes \tau) \exp(\hat{u}_{12}) = \exp((1 \otimes \tau) \hat{u}_{12}) = \exp(\hat{u}_{13})$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
(Id \otimes \Delta_\hbar)\exp(\hat{u}) &= \exp((1 \otimes \Delta_\hbar)\hat{u}) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{i,j}^{n} \hbar/2 d_j u_{ij} H_i \otimes \Delta_\hbar(H_j))^k/k! \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{i,j}^{n} \hbar/2 d_j u_{ij} H_i \otimes (H_j \otimes 1 + 1 \otimes H_j))^k/k! \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{i,j}^{n} \hbar/2 d_j u_{ij} (H_i \otimes H_j \otimes 1 + H_i \otimes 1 \otimes H_j))^k/k! \qquad (2.3) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{i,j}^{n} \hbar/2 d_j u_{ij} H_i \otimes H_j \otimes 1 + \sum_{ij}^{n} \hbar/2 d_j u_{i,j} H_i \otimes 1 \otimes H_j)^k/k! \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (\hat{u}_{13} + \hat{u}_{12})^k/k! \\
&= \exp(\hat{u}_{13})\exp(\hat{u}_{23}) = J_{13}J_{23}
\end{aligned}
$$

Análogamente podemos probar

$$(\Delta_\hbar \otimes 1)\exp(\hat{u}) = \exp(\hat{u}_{13})\exp(\hat{u}_{12}) = J_{13}J_{12} \qquad (2.4)$$

y la ecuación de Yang-Baxter.

$$J_{12}J_{13}J_{23} = J_{23}J_{13}J_{12} \qquad (2.5)$$

usando (2.3), (2.4) y el hecho de que $\exp(\hat{u})$ es inversible podemos probar (ii) en la Definición 1.3.1 y con (2.3), (2.4) y (2.5) probamos (i) en la misma definición. □

Más aún, se tiene que $\Delta_\varphi = J^{-1}\Delta_0 J$ cf. [R].

Observación 2.1.9. En lo siguiente usaremos la notación y definiciones dadas en [H, § 8] y las de la Sección 2.1. Recordemos que el isomorfismo entre $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{h}^*$ inducido por la forma de Killing identifica H_i con la coraíz $\alpha_i^\vee$, t_{α_i} con α_i y sucede que $\kappa(H_i, t_{\alpha_j}) = a_{ij}$. Gracias a que $AY = X$ entonces $Y = UA$ y $DU = DYA^{-1}$. Si tomamos $\hat{u}$ como antes, él se identifica con el elemento $\bar{u} = \sum_{i,j=1}^{n} d_j u_{ji} \alpha_i^\vee \otimes \alpha_j^\vee$ en $\mathfrak{h}^* \otimes \mathfrak{h}^*$, el cual al evaluarlo en $t_{\alpha_s} \otimes t_{\alpha_k}$ sucede que

$$\begin{aligned}
\bar{u}(t_{\alpha_k} \otimes t_{\alpha_s}) &= \sum_{i,j} d_j u_{ji} \alpha_i^\vee(t_{\alpha_k}) \otimes \alpha_j^\vee(t_{\alpha_s}) \\
&= \sum_{i,j} d_j u_{ji} a_{ik} a_{js} \\
&= \sum_{i,j,l} d_j y_{jl} \widehat{a_{li}} a_{ik} a_{js} \\
&= \sum_{j,l} d_j y_{jl} \delta_{lk} a_{js} \\
&= \sum_{j} d_j y_{jk} a_{js} \\
&= \sum_{j} y_{jk} (\alpha_j, \alpha_s) \\
&= (\tau_k, \alpha_s)
\end{aligned}$$

Para finalizar esta subsección presentamos la siguiente observación.

Observación 2.1.10. Por [KS, § 7.1.3 Prop. 10 y 11] existe una biyección entre $\mathfrak{g}$-módulos finito dimensionales y $U_\hbar(\mathfrak{g})$-módulos $V[[\hbar]]$ finito dimensionales. Luego, los módulos irreducibles de tipo 1 de $U_q^\varphi(\mathfrak{g})$ están en biyección con los $U_\hbar(\mathfrak{g})$-módulos irreducibles completos en la $\hbar$-ádica topología.

2.2. Apareamientos entre subálgebras de Borel

En la presente sección, definiremos sendos apareamientos perfectos sobre las subálgebras de Borel de $\check{U}_q^\varphi(\mathfrak{g})$. En el Capítulo 3 éstos se relacionarán con las formas enteras $\Gamma^\varphi(\mathfrak{g})$ y $R^\varphi[G]$ de $\check{U}_q^\varphi(\mathfrak{g})$ y $\mathcal{O}_q^\varphi(G)$ respectivamente, probando que una es dual a la otra.

Definición 2.2.1. [CV2, §1.4] Las *formas de Borel positivas* o *subálgebras de Borel positivas* $\check{U}_q^\varphi(\mathfrak{b}_+)$ y $U_q^\varphi(\mathfrak{b}_+)$ son las subálgebras de Hopf de $\check{U}_q^\varphi(\mathfrak{g})$ generadas por los elementos K_λ, E_i con $\lambda \in P$ y $\lambda \in Q$, respectivamente. Similarmente, Las *subálgebras de Borel negativas* $\check{U}_q^\varphi(\mathfrak{b}_-)$ y $U_q^\varphi(\mathfrak{b}_-)$ son las subálgebras de Hopf de $\check{U}_q^\varphi(\mathfrak{g})$ generadas por los elementos K_λ, F_i, con $\lambda \in P$ y $\lambda \in Q$ respectivamente.

Para los monomios $E_{\underline{i}} = E_{i_1} \dots E_{i_r}$ y $F_{\underline{i}} = F_{i_1} \dots F_{i_r}$ definimos los pesos $p(E_{\underline{i}})$ y $p(F_{\underline{i}})$ de la siguiente manera,

$$p(E_r) = p(F_r) = \alpha_r, \qquad p(E_{\underline{i}}) = p(F_{\underline{i}}) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{i_j}.$$

En [CV1, Lema 2.1] prueban que las aplicaciones $r := (1+\varphi)$ y $\overline{r} := (1-\varphi)$ son $\mathbb{Q}$-automorfismos de $\mathbb{Q}P$, más aún $((1+\phi)^{\pm}\lambda, \mu) = (\lambda, (1-\varphi)^{\pm}\mu)$. Por ejemplo, para el caso $+$ tenemos para $\alpha_i, \alpha_j \in P$ que,

$$\begin{aligned}((1+\varphi)(\alpha_i),\alpha_j) &= \left(\sum_{k=1}^{n}(a_{ki}+2x_{ki})\omega_k,\alpha_j\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}(a_{ki}+2x_{ki})(\omega_k,\alpha_j)\\ &\overset{k=j}{=} a_{ji}d_j + 2x_{ji}d_j\\ &= (\alpha_i,\alpha_j)+(\varphi(\alpha_i),\alpha_j)\\ &= (\alpha_i,\alpha_j)-(\alpha_i,\varphi(\alpha_j))\\ &= (\alpha_i,(1-\varphi)\alpha_j)\end{aligned}$$

Si v es un monomio en las E_i o las F_i tal que $p(v)=\lambda$ entonces escribiremos respectivamente $s(v)$, $r(v)$ y $\overline{r}(v)$ para $\frac{1}{2}\varphi(\lambda)$, $\frac{1}{2}r(\varphi(\lambda))$ y $\frac{1}{2}\overline{r}(\varphi(\lambda))$. Note en particular que $s(\alpha_i)=\tau_i$.

Tomemos un elemento u en la clausura algebraica de $\mathbb{Q}(q)$ donde $q=u^{\det(A+D)}$. En [CV2, § 1.4] introducen un apareamiento de Hopf perfecto π_φ entre $\check{U}_q^{\varphi}(\mathfrak{b}_-)_{op}$ y $\check{U}_q^{\varphi}(\mathfrak{b}_+)$ sobre $\mathbb{Q}(u)$, dado por:

$$\begin{cases}\pi_\varphi(K_\lambda,K_\mu) &= q^{(r(\lambda),\mu)},\\ \pi_\varphi(K_\lambda,E_i) &= \pi_\varphi(K_\lambda,F_i)=0,\\ \pi_\varphi(F_i,E_j) &= \dfrac{\delta_{ij}}{q_i-q_i^{-1}}q^{(r(\tau_i),\tau_i)},\end{cases} \tag{2.6}$$

para $\lambda,\mu\in P$, $i,j=1,\dots,n$. Usando el $\mathbb{Q}$-antisomorfismo ς_φ de álgebras de Hopf de $\check{U}_q^{\varphi}(\mathfrak{g})$ en $\check{U}_q^{-\varphi}(\mathfrak{g})$ definido sobre los generadores por $E_i\mapsto F_i$, $F_i\mapsto E_i$, $K_\lambda\mapsto K_{-\lambda}$ y $q\mapsto q^{-1}$, el cual lleva $\check{U}_q^{\varphi}(\mathfrak{b}_+)$ sobre $\check{U}_q^{\varphi}(\mathfrak{b}_-)$. Obtenemos un apareamiento de Hopf perfecto $\overline{\pi}_\phi=\varsigma_\varphi\circ\pi_{-\varphi}\circ(\varsigma_\varphi\otimes\varsigma_\varphi)$ entre $\check{U}_q^{\varphi}(\mathfrak{b}_+)_{op}$ y $\check{U}_q^{\varphi}(\mathfrak{b}_-)$ dado por:

$$\begin{cases}\overline{\pi}_\varphi(K_\lambda,K_\mu) &= q^{-(\overline{r}(\lambda),\mu))},\\ \overline{\pi}_\varphi(E_i,K_\lambda) &= \overline{\pi}_\varphi(F_i,K_\lambda)=0,\\ \overline{\pi}_\varphi(E_i,F_j) &= \dfrac{\delta_{ij}}{q_i-q_i^{-1}}q^{-(\overline{r}(\tau_i),\tau_i)}.\end{cases} \tag{2.7}$$

Si $\varphi=0$ denotamos π_0 o $\overline{\pi}_0$, en estos casos los apareamientos coinciden con los definidos en [DL, § 3.1] como π y $\overline{\pi}$.

Es posible calcular el apareamiento π_ϕ sobre los monomios yK_λ y xK_μ donde x es un polinomio homogéneo en las E_i e y en las F_i y λ, μ en P, cf. [CV1, Lema 3.5]. Relacionando el caso $\varphi=0$ con el caso $\varphi\neq 0$.

Observación 2.2.2. Sea w_0 el elemento de longitud máxima en $\mathcal{W}$. Escojamos una expresión reducida en términos de reflexiones simples para $w_0=s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_N}$. Consideramos

sobre Φ^+ el orden total dado por

$$\beta_1 = \alpha_{i_1}, \qquad \beta_2 = \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}, \qquad \dots \qquad \beta_N = \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_N}.$$

En particular $\Pi \subset \{\beta_1, \dots, \beta_N\}$. Si $G_i = E_i$ o F_i definimos $G_i^{(s)} = \frac{G_i^{(s)}}{[s]_{q_i}!}$.

El *grupo de trenzas* $B_{\mathcal{W}} := \langle T_1, \dots, T_n : T_iT_jT_i\cdots = T_jT_iT_j\cdots \text{para } i \neq j, T_i^2 = 1\rangle$ asociado a $\mathcal{W}$ actúa sobre $\check{U}_q^{\varphi}(\mathfrak{g})$ vía automofismos Lusztig T_{i_j} para $1 \leq j \leq N$ cf. [L3, Ja], los cuales se definen como

$$\begin{aligned}
T_i(E_i) &= -F_iK_i \\
T_i(F_i) &= -K_i^{-1}E_i \\
T_i(E_j) &= \sum_{s=0}^{-a_{ij}} (-1)^{s-a_{ij}} q_i^{-s} E - i^{(-a_{ij}-s)} E_j E_i^{(s)} && (j \neq i) \\
T_i(F_j) &= \sum_{s=0}^{-a_{ij}} (-1)^{s-a_{ij}} q_i^{s} F_i^{(s)} F_j F - i^{(-a_{ij}-s)} && (j \neq i) \\
T_i(K_\alpha) &= K_{s_i(\alpha)} && (\alpha \in Q),
\end{aligned}$$

de esta manera podemos definir los siguientes *vectores raíz*

$$E_{\beta_k} = T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_{k-1}}(E_k) \qquad \text{y} \qquad F_{\beta_k} = T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_{k-1}}(F_k).$$

Para $s \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq k \leq N$ y $G_i = E_i$ o F_i se define $G_{\beta_k}^{(s)} = T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_{k-1}}(G_k^{(s)})$. Si $\alpha \in \Phi_+$, sean

$$\begin{aligned}
q_\alpha &= q^{\frac{(\alpha,\alpha)}{2}}, & \tau_\alpha &= \frac{1}{2}\varphi(\alpha), & e_\alpha^{\varphi} &= (q_\alpha^{-1} - q_\alpha)E_\alpha K_{-\tau_\alpha}, \\
e_i^{\varphi} &= e_{\alpha_i}^{\varphi}, & f_i^{\varphi} &= f_{\alpha_i}^{\varphi}, & f_\alpha^{\varphi} &= (q_\alpha - q_\alpha^{-1})F_\alpha K_{-\tau_\alpha}.
\end{aligned}$$

Definición 2.2.3. Recordemos que hemos denotado $R = \mathbb{Q}[q, q^{-1}]$. Sean $R_q^{\varphi}[B_-]'$ y $R_q^{\varphi}[B_-]''$ las R-subálgebras de $\check{U}_q^{\varphi}(\mathfrak{b}_+)^{op}$ y $\check{U}_q^{\varphi}(\mathfrak{b}_+)^{cop}$ respectivamente, generadas por e_α^{φ} y $K_{(1-\phi)\omega_i}$ para $1 \leq i \leq n$ y $\alpha \in \Phi^+$. De la misma forma definimos $R_q^{\varphi}[B_+]'$ y $R_q^{\varphi}[B_+]''$ las R-subálgebras de $\check{U}_q^{\varphi}(\mathfrak{b}_-)^{op}$ y $\check{U}_q^{\varphi}(\mathfrak{b}_-)^{cop}$, generadas por f_α^{φ} y $K_{(1+\phi)\omega_i}$ para $1 \leq i \leq n$ y $\alpha \in \Phi^+$.

Por restricción de los apareamientos (2.6) y (2.7) obtenemos los siguientes apareamientos

$$\pi'_{\varphi} : \check{U}_q^{\varphi}(\mathfrak{b}_-) \otimes_R R_q^{\varphi}[B_-]' \to \mathbb{Q}(q), \qquad \pi''_{\varphi} : R_q^{\varphi}[B_+]'' \otimes_R \check{U}_q^{\varphi}(\mathfrak{b}_+) \to \mathbb{Q}(q), \tag{2.8}$$

$$\bar{\pi}'_{\varphi} : \check{U}_q^{\varphi}(\mathfrak{b}_+) \otimes_R R_q^{\varphi}[B_+]' \to \mathbb{Q}(q), \qquad \bar{\pi}''_{\varphi} : R_q^{\varphi}[B_-]'' \otimes_R \check{U}_q^{\varphi}(\mathfrak{b}_-) \to \mathbb{Q}(q). \tag{2.9}$$

dados por

$$\begin{aligned}
&\pi'_\varphi(K_\lambda, K_{(1-\varphi)\mu}) = q^{(\lambda,\mu)}, \quad \pi'_\varphi(F_j, e_i^\varphi) = -\delta_{ij}, \quad \pi'_\varphi(K_\lambda, e_i^\varphi) = 0 = \pi'_\varphi(F_j, K_{(1-\varphi)\lambda}),\\
&\pi''_\varphi(K_{(1+\varphi)\mu}, K_\lambda) = q^{(\mu,\lambda)}, \quad \pi''_\varphi(f_i^\varphi, E_j) = \delta_{ij}, \quad \pi''_\varphi(f_i^\varphi, K_\lambda) = 0 = \pi''_\varphi(K_{(1+\varphi)\mu}, E_j),\\
&\overline{\pi}'_\varphi(K_\lambda, K_{(1+\varphi)\mu}) = q^{-(\lambda,\mu)}, \quad \overline{\pi}'_\varphi(E_j, f_i^\varphi) = -\delta_{ij}, \quad \overline{\pi}'_\varphi(K_\lambda, f_i^\varphi) = 0 = \overline{\pi}'_\varphi(E_j, K_{(1+\varphi)\mu}),\\
&\overline{\pi}''_\varphi(K_{(1-\varphi)\mu}, K_\lambda) = q^{-(\mu,\lambda)}, \quad \overline{\pi}''_\varphi(e_i^\varphi, F_j) = \delta_{ij}, \quad \overline{\pi}''_\varphi(e_i^\varphi, K_\lambda) = 0 = \overline{\pi}''_\varphi(K_{(1-\varphi)\mu}, F_j).
\end{aligned}$$

Las álgebras $U_q^\varphi(\mathfrak{b}_+)$ y $U_q^\varphi(\mathfrak{b}_-)$ son linealmente generadas por los elementos[1],

$$\xi_{m,t} = \prod_{j=N}^{1} E_{\beta_j}^{(m_j)} \prod_{i=1}^{n} \binom{K_{\alpha_i}; 0}{t_i} K_{\alpha_i}^{-\left[\frac{t_i}{2}\right]}, \quad \eta_{m,t} = \prod_{j=N}^{1} F_{\beta_j}^{(m_j)} \prod_{i=1}^{n} \binom{K_{\alpha_i}; 0}{t_i} K_{\alpha_i}^{-\left[\frac{t_i}{2}\right]}, \quad (2.10)$$

respectivamente, para $m_j, t_i \geq 0$ cf. [L3].

En términos de estas bases podemos calcular lo siguiente,

Proposición 2.2.4. *[CV2, Proposición 1.9],*

$$\begin{aligned}
q^{-\sum_{i<j}(n_i\tau_i, n_j\beta_j)} \pi'_\varphi\left(\eta_{m,t}, \prod_{j=N}^{1} (e_{\beta_j}^\varphi)^{n_j} K_{(1-\varphi)\lambda}\right) = \\
q^{\sum_{i<j}(n_i\tau_i, n_j\beta_j)} \pi''_\varphi\left(\prod_{j=N}^{1} (f_{\beta_j}^\varphi)^{n_j} K_{(1+\varphi)\lambda}, \xi_{m,t}\right) = \\
\left(\prod_{i=1}^{N} \delta_{n_i,m_i} q_{\beta_i}^{-\frac{n_j(n_j-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} \binom{(\alpha_i,\lambda)}{t_i}_q q^{-(\alpha_i,\lambda)\left[\frac{t_i}{2}\right]}\right) q^{-\sum_{i=1}^{N}(n_i\tau_i,\lambda)}.
\end{aligned}$$

Fórmulas similares se tienen para $\overline{\pi}'_\varphi$ y $\overline{\pi}''_\varphi$.

La prueba de la anterior proposición usa el siguiente hecho,

$$\Delta_\varphi e_\alpha^\varphi = e_\alpha^\varphi \otimes 1 + K_{-(1-\varphi)\alpha} \otimes e_\alpha^\varphi + e \quad \text{y} \quad \Delta_\varphi f_\alpha^\varphi = f_\alpha^\varphi \otimes K_{(1+\varphi)\alpha} + 1 \otimes f_\alpha^\varphi + f,$$

donde e (resp f) son combinaciones lineales y tensores de monomios en las e_β^φ (resp f_β^φ) y K_λ con $ht(\beta) < ht(\alpha)$. Si $\alpha = \alpha_i$ entonces e y f son igual a cero. De manera que,

$$\Delta_\varphi e_{\alpha_i}^\varphi = e_\alpha^\varphi \otimes 1 + K_{-(1-\varphi)\alpha_i} \otimes e_{\alpha_i}^\varphi \quad \text{y} \quad \Delta_\varphi f_{\alpha_i}^\varphi = f_{\alpha_i}^\varphi \otimes K_{(1+\varphi)\alpha_i} + 1 \otimes f_{\alpha_i}^\varphi. \quad (2.11)$$

[1] Aquí los paréntesis [] representan la función parte entera

2.3. Álgebra de potencias divididas

El álgebra de potencias divididas, será la forma entera de $U_q^\varphi(\mathfrak{g})$ que se mencionó en la introducción del presente capítulo.

Definición 2.3.1. Por $\Gamma^\varphi(\mathfrak{b}_+)$ y $\Gamma^\varphi(\mathfrak{b}_-)$ denotamos a los R-submódulos de $U_q^\varphi(\mathfrak{g})$ dados por los siguientes conjuntos

$$\Gamma^\varphi(\mathfrak{b}_+) = \{u \in U_q^\varphi(\mathfrak{b}_+) \mid \pi''_\varphi(R_q^\varphi[B_+]''^{\ \mathrm{cop}} \otimes u) \in R\},$$
$$\Gamma^\varphi(\mathfrak{b}_-) = \{u \in U_q^\varphi(\mathfrak{b}_-) \mid \pi'_\varphi(u \otimes R_q^\varphi[B_-]'^{\ \mathrm{op}}) \in R\}.$$

El conjunto $\{\xi_{m,t}\}$ es una R-base de $\Gamma^\varphi(\mathfrak{b}_+)$ y $\{\eta_{m,t}\}$ de $\Gamma^\varphi(\mathfrak{b}_-)$. Como álgebras son isomorfas a $\Gamma(\mathfrak{b}_+)$ y $\Gamma(\mathfrak{b}_-)$ respectivamente, cf. [DL].

Las fórmulas siguientes son probadas en [CV1, Lema 3.7] y [DL, Lema 3.2], recuerde que los K_λ son elementos de tipo grupo.

$$\begin{cases} \Delta_\varphi E_i^{(p)} = \sum\limits_{r+s=p} q_i^{-rs} E_i^{(r)} K_{s(\alpha_i-\tau_i)} \otimes E_i^{(s)} K_{r\tau_i}, \\ \Delta_\varphi F_i^{(p)} = \sum\limits_{r+s=p} q_i^{-rs} F_i^{(r)} K_{s\tau_i} \otimes F_i^{(s)} K_{-r(\alpha_i+\tau_i)}, \\ \Delta_\varphi \binom{K_i;0}{t} = \sum\limits_{r+s=t} K_i^s q_i^{-rs} \binom{K_i;0}{r} \otimes \binom{K_i;0}{s}. \end{cases} \tag{2.12}$$

Ellas dotan de un coproducto a $\Gamma^\varphi(\mathfrak{b}_+)$ y $\Gamma^\varphi(\mathfrak{b}_-)$ y se observa directamente que resultan ser subálgebras de Hopf de $U_q^\varphi(\mathfrak{g})$.

Los apareamientos definidos anteriormente pueden ser restringidos a los siguientes,

$$\pi'_\varphi : \Gamma^\varphi(\mathfrak{b}_-) \otimes_R R_q^\varphi[B_-]' \to R, \qquad \pi''_\varphi : R_q^\varphi[B_+]'' \otimes_R \Gamma^\varphi(\mathfrak{b}_+) \to R,$$
$$\bar{\pi}'_\varphi : \Gamma^\varphi(\mathfrak{b}_+) \otimes_R R_q^\varphi[B_+]' \to R, \qquad \bar{\pi}''_\varphi : R_q^\varphi[B_-]'' \otimes_R \Gamma^\varphi(\mathfrak{b}_-) \to R.$$

siendo estos apareamientos de Hopf perfectos [CV2, Lema 1.12].

Forma Entera

Clásicamente, es conocido el hecho de que las bases de Chevalley existen para un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ escogida como en la Definición 1.1.1. Así que podemos suponer que los coeficientes de estructura de $\mathfrak{g}$ son enteros, denotemos a esta $\mathbb{Z}$-álgebra de Lie $\mathfrak{g}_\mathbb{Z}$. Si $\mathbf{k}$ es cualquier cuerpo de característica cero tenemos que $\mathfrak{g}_\mathbf{k} = \mathbf{k} \otimes_\mathbb{Z} \mathfrak{g}_\mathbb{Z}$ es un $\mathbf{k}$-álgebra de Lie en donde a los coeficientes se les considera al interior de $\mathbf{k}$. A $g_\mathbb{Z}$ se le suele llamar $\mathbb{Z}$-forma. Análogamente Kostant en [Ko] introdujo una $\mathbb{Z}$-forma para $U(\mathfrak{g})$. La cual resulta ser justo el subanillo con uno $U(\mathfrak{g})_\mathbb{Z}$ de $U(\mathfrak{g})$ generado por los elementos $\frac{x^m}{m!}$, con $\alpha \in \Phi$ y $m \in \mathbb{Z}^+$.

Teorema 2.3.2. *[Ko, Teorema 1] Fijemos algún orden para las raíces $\alpha_i \in \Phi^+$, Sean $f_N = \frac{x_{-\alpha_1}^{n_1}}{n_1!} \dots \frac{x_{-\alpha_r}^{n_r}}{n_r!}$, $e_M = \frac{x_{\alpha_1}^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{x_{\alpha_r}^{m_r}}{m_r!}$ y $h_S = \binom{h_1}{s_1} \dots \binom{h_l}{s_l}$ para N, $M \in \mathbb{Z}_+^r$ y $S \in \mathbb{Z}_+^l$, entonces los elementos $f_N h_S e_M$ forman una $\mathbb{Z}$-base de $U(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}$. Donde $\binom{h}{s} = \frac{h(h-1)\dots(h-s+1)}{s!}$.* □

Definición 2.3.3. El *álgebra de potencias divididas* (PDA), es la R-subálgebra de $U_q^{\varphi}(\mathfrak{g})$ generada por,

$$
\begin{aligned}
K_{\alpha_i}^{-1} & && (1 \le i \le n),\\
\binom{K_{\alpha_i}; 0}{t} &:= \prod_{s=1}^{t} \left(\frac{K_{\alpha_i} q_i^{-s+1} - 1}{q_i^s - 1} \right) && (t \ge 1, 1 \le i \le n),\\
E_i^{(t)} &:= \frac{E_i^t}{[t]_{q_i}!} && (t \ge 1, 1 \le i \le n),\\
F_i^{(t)} &:= \frac{F_i^t}{[t]_{q_i}!} && (t \ge 1, 1 \le i \le n),
\end{aligned}
$$

la denotaremos $\Gamma^{\varphi}(\mathfrak{g})$.

Ella efectivamente es el análogo cuántico de $U(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}}$ en $U_q^{\varphi}(\mathfrak{g})$ cf. [CV2]. Equivalentemente, $\Gamma^{\varphi}(\mathfrak{g})$ es la R-subálgebra de $U_q^{\varphi}(\mathfrak{g})$ genereda por $\Gamma^{\varphi}(\mathfrak{b}_+)$ y $\Gamma^{\varphi}(\mathfrak{b}_-)$.

Lema 2.3.4. *$\Gamma^{\varphi}(\mathfrak{g})$ posee una R-base PBW la cual consiste de monomios $\mathbf{E}_{\alpha}^{N} \mathbf{K}_{\delta,t} \mathbf{F}_{\beta}^{M}$ donde*

$$
\mathbf{E}_{\eta}^{N} \mathbf{K}_{\delta,t} \mathbf{F}_{\alpha}^{M} := \prod_{\alpha \in \Omega^+} E_{\alpha}^{(N_\alpha)} \prod_{l=1}^{n} K_i^{\delta_l} \binom{K_i; 0}{t_i} \prod_{\alpha \in \Omega^+} F_{\beta}^{(M_\beta)}, \tag{2.13}
$$

$N_\alpha, M_\beta, t_i \ge 0$ and $\delta_i \in \{0, 1\}$.

Prueba (Idea). Hay una ligera diferencia entre el álgebra U definida en [L3, § 1.3] y $\Gamma^{\varphi}(\mathfrak{g})$. Reside en el tipo de paréntesis que se usan en la expresión $\binom{K_i; 0}{l}$, una los tiene rectos y la otra curvos. La prueba en [L4, Theorem 4.5] establece que U posee un R-base PBW, mostraremos como adaptar este teorema a nuestro caso y así describir una prueba para $\Gamma^{\varphi}(\mathfrak{g})$. Para esto debemos hacer lo siguiente, la Proposición 2.12 y el Paragrafo 2.13 de [L4] funcionan igual para $\Gamma^{\varphi}(\mathfrak{g})$, en la Proposición 2.14 de [L4] cambiamos las 2 fórmulas que aparecen en ella por las siguientes

$$K_i^{m+1}\binom{K_i;0}{l} = (q-q^{-l})K_i^m\binom{K_i;0}{l+1} + q^{-t}K_i^m\binom{K_i;0}{l}$$

$$K_i^m\binom{K_i;0}{l} = q^l K_i^{m-1}\binom{K_i;0}{l} + q^t(q^{t+1}-1)K^{m-1}\binom{K_i;0}{l+1}$$

para todo i y cambiamos las relaciones (g9) y (g10) en [L4, pág. 270] por las dos últimas en [DL, §3.4 (3.15)]. □

Capítulo 3

Álgebra de Funciones Cuantizada Torcida

En este capítulo obtenemos un objeto dual a $\check{U}_q^{\varphi}(\mathfrak{g})$ denotado $\mathcal{O}_q^{\varphi}(G)$, que corresponde a una deformación por 2-cociclo del álgebra de funciones cuantizada $\mathcal{O}_q(G)$. Por esto, la llamaremos álgebra de funciones cuantizada torcida. Este resultado es el primer resultado importante de la tesis. En [CV2], $\mathcal{O}_q^{\varphi}(G)$ es definida por primera vez y en [HLT] la encontramos como una deformación del producto de $\mathcal{O}_q(G)$ al usar la P-bigraduación que se definió en la Proposición 1.3.18 y un bicaracter antisimétrico sobre P (ver Definición 1.3.13). Principalmente seguiremos definiciones y resultados de [CV2].

También definiremos para una ℓ-raíz primitiva de la unidad ϵ, el álgebra envolvente cuántica torcida $U_{\epsilon}^{\varphi}(\mathfrak{g})$ y el álgebra de funciones cuantizada torcida $\mathcal{O}_{\epsilon}^{\varphi}(G)$. Al especializar en la raíz ϵ en $\Gamma^{\varphi}(\mathfrak{g})$ obtenemos el álgebra $\Gamma_{\epsilon}^{\varphi}(\mathfrak{g})$. La última resulta ser un álgebra de Hopf dual a $\mathcal{O}_{\epsilon}^{\varphi}(G)$. Luego definiremos el núcleo de Frobenius-Luzstig torcido $\mathbf{u}_{\epsilon}^{\varphi}(\mathfrak{g})$ y probamos que corresponde a una deformación por twist de $\mathbf{u}_{\epsilon}(\mathfrak{g})$. Con el fin de establecer la exactitud de la sucesión de álgebras de Hopf $1 \to \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}_{\epsilon}^{\varphi}(G) \to \mathbf{u}_{\epsilon}^{\varphi}(\mathfrak{g})^* \to 1$ introduciremos el morfismo cuántico de Frobenius. Finalmente, caracterizaremos las subálgebras de $\mathbf{u}_{\epsilon}^{\varphi}(\mathfrak{g})$ mediante ternas $(I_+, I_-, \Sigma^{\varphi})$ donde $I_+ \subseteq \Omega$, $I_- \subseteq -\Omega$ y Σ^{φ} es un grupo abeliano finito.

3.1. $\mathcal{O}_q^{\varphi}(G)$ como deformación por 2-cociclo de $\mathcal{O}_q(G)$

Sea $\mathcal{C}_{\varphi}$ la subcategoría plena de la categoría ${}_{U_q^{\varphi}(\mathfrak{g})}\mathcal{M}$ cuyos objetos son módulos finito dimensionales sobre los cuales las K_i actúan como potencias de q. Similarmente al ejemplo 1.3.16, definimos los coeficientes matriciales $c_{f,v}^{V}$ para un objeto $V \in \mathcal{C}_{\varphi}$, $f \in V^*$ y $v \in V$. Análogamente al caso $U_q(\mathfrak{g})$ definimos la suma y producto de coeficientes matriciales. También, para objetos $V, W \in \mathcal{C}_{\varphi}$ definimos acciones sobre V^* y $V \otimes W$, mostrando que $\mathcal{C}_{\varphi}$ es cerrada para duales y productos tensoriales. Para $a \in U_q^{\varphi}(\mathfrak{g})$, $v \in V$, $w \in W$ y $f \in V^*$,

$$(af)v = f((\mathcal{S}_\varphi a)v), \qquad y \qquad a(v \otimes w) = \Delta_\varphi a(v \otimes w).$$

Definición 3.1.1. Sea $\mathcal{O}_q^\varphi(G)$ el $\mathbb{Q}(q)$-submódulo de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}(q)}(U_q^\varphi(\mathfrak{g}), \mathbb{Q}(q))$ generado por los coeficientes matriciales $c_{f,v}^V$, donde $v \in V \in \mathcal{C}_\varphi$ y $f \in V^*$. En ocasiones usaremos la notación $c_{f,v}$ teniendo cuidado de no olvidar los módulos que determinan al coeficiente matricial dado.

Notar que $\mathcal{O}_q^\varphi(G)$ posee una estructura de álgebra de Hopf, descrita en los generadores por las siguientes ecuaciones,

$$\Delta(c_{f,v})(x \otimes y) = c_{f,v}(xy),$$

$$\varepsilon(c_{f,v}) = f(v),$$

$$m_\varphi(c_{f,v} \otimes c_{g,w}) = c_{f\otimes g, v\otimes w},$$

$$\mathcal{S}(c_{f,v}) = c_{v,f}.$$

para $V, W \in \mathcal{C}_\varphi$, $v \in V$, $w \in W$, $f \in V^*$, $g \in W^*$ y $x, y \in U_q^\varphi(\mathfrak{g})$, en la antípoda se tiene en cuenta el isomorfismo entre V y V^{**}.

La fórmula del coproducto es equivalente a $\Delta(c_{f,v}) = \sum_i c_{f,e_i} \otimes c_{e^i,v}$, donde $\{e_i\}$ y $\{e^i\}$ son bases duales para V y V^* respectivamente. Efectivamente,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_i c_{f,e_i} \otimes c_{e^i,v}\right)(x \otimes y) &= \sum_i c_{f,e_i}(x) c_{e^i,v}(y) \\
&= \sum_i f(xe_i)e^i(yv) \\
&= \sum_i f(e^i(yv)xe_i) \\
&= f\left(x\left(\sum_i e^i(yv)e_i\right)\right) \\
&= f(xyv) \\
&= c_{f,v}(xy)
\end{aligned}$$

Ilustremos la validez de una de las propiedades de la antípoda,

$$\begin{aligned}
m_\varphi(id\otimes\mathcal{S})\Delta(c_{f,v})(x) &= m_\varphi(id\otimes\mathcal{S})\left(\sum_i c_{f,e_i}\otimes c_{e^i,v}\right)(x)\\
&= m_\varphi\left(\sum_i c_{f,e_i}\otimes\mathcal{S}(c_{e^i,v})\right)(x)\\
&= \sum_i c_{f\otimes v,e_i\otimes e^i}(x)\\
&= \sum_i f(x_{(1)}e_i)v(x_{(2)}e^i)\\
&= \sum_i f(x_{(1)}e_i)e^i(\mathcal{S}_\varphi(x_{(2)})v)\\
&= f(x_{(1)}\sum_i e^i(\mathcal{S}_\varphi(x_{(2)})v)e_i)\\
&= f(x_{(1)}\mathcal{S}_\varphi(x_{(2)})v)\\
&= f(v)\varepsilon_\varphi(x).
\end{aligned}$$

Note que la unidad en $\mathcal{O}_q^{\varphi}(G)$ es $c_{Id_{\mathbb{Q}(q)},1}$ al considerar a $\mathbb{Q}(q)$ como $U_q^{\varphi}(\mathfrak{g})$-módulo con la acción trivial y también que como coálgebras $\mathcal{O}_\epsilon^{\varphi}(G)$ y $\mathcal{O}_q(G)$ coinciden.

Observación 3.1.2. [CV2, § 2.1] Como álgebras $U_q^{\varphi}(\mathfrak{g})$ y $U_q(\mathfrak{g})$ coinciden, así también sus módulos irreducibles de tipo 1. Por esto, es posible describir propiedades de $\mathcal{O}_\epsilon^{\varphi}(G)$ usando únicamente coeficientes matriciales que dependen de módulos irreducibles de tipo 1. Por esta razón, mantendremos la notación y acuerdos descritos en el ejemplo 1.3.16 para $\mathcal{O}_\epsilon^{\varphi}(G)$. En particular, si $V(\Lambda)$ es el módulo irreducible de peso máximo $\Lambda\in P_+$, tenemos las siguientes propiedades: $V(\Lambda)^*\simeq V(-\omega_0\Lambda)$, $V(\Lambda)^*_{-\mu}=(V(\Lambda)_\mu)^*$ y

$$\mathcal{O}_q^{\varphi}(G)=\bigoplus_{\Lambda\in P_+}V(\Lambda)\otimes V(\Lambda)^*.$$

Definición 3.1.3. Sea $\mathcal{D}_\varphi$ la subcategoría fiel plena de ${}_{\Gamma^\varphi(\mathfrak{g})}\mathcal{M}$ cuyos objetos son R-módulos libres de rango finito en los cuales K_i y $\binom{K_i;0}{t}$ actúan diagonalmente con valores propios q_i^m y $\binom{m}{t}_{q_i}$, respectivamente.

Definición 3.1.4. Sea $R_q^{\varphi}[G]$ el R-submódulo de $\mathrm{Hom}_R(\Gamma^\varphi(\mathfrak{g}),R)$ generado por coeficientes matriciales construidos con objetos de $\mathcal{D}_\varphi$.

Similarmente definimos R-módulos $R_q^{\varphi}[B_\pm]$ al considerar categorías adecuadas. Debido a que las categorías son estrictas y tensoriales $R_q^{\varphi}[G]$ y $R_q^{\varphi}[B_\pm]$ son R-álgebras de Hopf. Mas aún, tenemos los isomorfismos $R_q^{\varphi}[B_\pm]'\simeq R_q^{\varphi}[B_\pm]\simeq R_q^{\varphi}[B_\pm]''$ cf. [CV2, § 2.3].

El siguiente lema generaliza [DL, Lema 4.1].

Lema 3.1.5. *$R_q^\varphi[G]$ esta incluida en $U_q^\varphi(\mathfrak{g})^\circ$ y corresponde al siguiente conjunto,*

$$\left\{\Gamma^\varphi(\mathfrak{g}) \xrightarrow{f} R : \exists \text{ ideal cofinito } I \subset \Gamma^\varphi(\mathfrak{g}),\ N \text{ tal que } \forall i \prod_{p=-N}^{N} (K_i - q_i^p) \in I \text{ y } f(I) = 0\right\}$$

el apareamiento dual entre $R_q^\varphi[G]$ y $\Gamma^\varphi(\mathfrak{g})$ es no-degenerado.

Prueba. Ya que $\mathcal{D}_\varphi$ es una subcategoría plena de $\mathcal{C}_\varphi$ es tensorial y entonces por [EGNO, Teorema 5.4.1], R_q^φ es un álgebra de Hopf. La primera afirmación se sigue de [DL, Lema 4.1], ya que $\Gamma^\varphi(\mathfrak{g})$ y $\Gamma(\mathfrak{g})$ son iguales como álgebras.

Definamos en $\Gamma^\varphi(\mathfrak{g})^\circ$ los siguientes elementos,

$$v_{(\alpha,N,\beta,M,\delta,t)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = \mathbf{E}_\alpha^N \mathbf{K}_{\delta,t} \mathbf{F}_\beta^M \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde los $\mathbf{E}_\alpha^N \mathbf{K}_{\delta,t} \mathbf{F}_\beta^M$ son como en el Lema 2.3.4. Denotemos $(\alpha, N, \beta, M, \delta, t) := \varsigma$. Se chequea directamente que $v_\varsigma \in R_q^\varphi[G]$. Entonces cada $f \in R_q^\varphi[G]$ se escribe como $\sum_\varsigma \xi_\varsigma v_\varsigma$, donde $\xi_\varsigma \in R$.

Denotemos por $\langle R_q^\varphi[G], \Gamma^\varphi(\mathfrak{g})\rangle$ el apareamiento evaluación $\langle f, y\rangle = f(y)$, para $y \in \Gamma^\varphi(\mathfrak{g})$ y $f \in R_q^\varphi[G]$. Si $\langle f, y\rangle = 0$ para todo $y \in \Gamma^\varphi(\mathfrak{g})$, entonces $f = 0$. Si $\langle f, y\rangle = 0$ para todo $f \in R_q^\varphi[G]$, en particular es válido para $f = v_\varsigma$ y como $y = \sum_{\hat\varsigma} \hat\xi_{\hat\varsigma} \mathbf{E}_{\hat\eta}^{\hat M} K_{\hat\delta,\hat t} \mathbf{F}_{\hat\beta}^{\hat N}$ por el Lema 2.3.4, entonces $v_\varsigma(y) = \xi_\varsigma = 0$, lo que permite concluir que $y = 0$. Por tanto las aplicaciones $R_q^\varphi[G] \to \Gamma^\varphi(\mathfrak{g})^\circ$ y $\Gamma^\varphi(\mathfrak{g}) \to R_q^\varphi[G]^\circ$ inducidas por el apareamiento $\langle R_q^\varphi[G], \Gamma^\varphi(\mathfrak{g})\rangle$ son morfismos inyectivos de álgebras de Hopf. □

Notemos que $R_q^\varphi[G] \otimes_R \mathbb{Q}(q) \simeq \mathcal{O}_q^\varphi(G)$ y $\Gamma^\varphi(\mathfrak{g}) \otimes_R \mathbb{Q}(q) \simeq U_q^\varphi(\mathfrak{g})$ cf. [L3, § 8]. Siendo la razón por la que llamamos a $R_q^\varphi[G]$ y $\Gamma^\varphi(\mathfrak{g})$ formas enteras.

Las inclusiones $\Gamma^\varphi(\mathfrak{b}_\pm) \subset \Gamma^\varphi(\mathfrak{g})$ inducen inclusiones $\Gamma^\varphi(\mathfrak{b}_\pm) \otimes_R \Gamma^\varphi(\mathfrak{b}_\mp) \xrightarrow{\iota_\pm} \Gamma^\varphi(\mathfrak{g}) \otimes_R \Gamma^\varphi(\mathfrak{g})$. Denotemos con m_Γ la multiplicación de $\Gamma^\varphi(\mathfrak{g})$. Definamos las aplicaciones μ''_φ y μ'_φ como la composición de los morfismos $r_\pm \circ \Delta_\varphi$ duales a $m_\Gamma \circ \iota_\pm$, con los isomorfismos $R_q^\varphi[B_\pm]' \simeq R_q^\varphi[B_\pm] \simeq R_q^\varphi[B_\pm]''$ mencionados anteriormente, según corresponda. Para mayor claridad, observe los siguientes diagramas

$$\mu''_\varphi : R_q^\varphi[G] \xrightarrow{\Delta_\varphi} R_q^\varphi[G] \otimes_R R_q^\varphi[G] \xrightarrow{r_+} R_q^\varphi[B_+] \otimes_R R_q^\varphi[B_-] \simeq R_q^\varphi[B_+]'' \otimes_R R_q^\varphi[B_-]''$$
$$\mu'_\varphi : R_q^\varphi[G] \xrightarrow{\Delta_\varphi} R_q^\varphi[G] \otimes_R R_q^\varphi[G] \xrightarrow{r_-} R_q^\varphi[B_-] \otimes_R R_q^\varphi[B_+] \simeq R_q^\varphi[B_-]' \otimes_R R_q^\varphi[B_+]'.$$

Lema 3.1.6. *[CV2, Lema 2.5] La imagen de μ''_φ esta contenida en la R-subálgebra $\mathbb{A}''_\varphi$ generada por los elementos $1 \otimes e_\alpha^\varphi$, $f_\alpha^\varphi \otimes 1$ y $K_{-(1+\varphi)\lambda} \otimes K_{(1-\varphi)\lambda}$ para $\lambda \in P$, $\alpha \in \Phi_+$.* □

Sea $\lambda \in P_+$ y $v_{\pm\lambda}$ el vector de peso máximo (resp. mínimo) de $V(\lambda)$ (resp. $V(-\lambda)$). Sea $\phi_{\pm\lambda}$ el único elemento en $V(\pm\lambda)^*$, tal que $\phi_{\pm\lambda}(v_{\pm\lambda}) = 1$ y se anula sobre el único

complemento $\Gamma(\mathfrak{h})$-invariante de $\mathbb{Q}(q)v_{\pm\lambda} \subset V(\pm\lambda)$. Denotemos por $\psi_{\pm\lambda} = c_{\phi_{\pm\lambda}, v_{\pm\lambda}}$ a estos correspondientes coeficientes matriciales.

Definamos como en [DL] los coeficientes matriciales $\psi_{\pm\lambda}^{\pm\alpha}$, para todo $\alpha \in \Phi_+$,

$$\psi_\lambda^\alpha(x) = \phi_\lambda((E_\alpha x)\cdot v_\lambda), \qquad \psi_{-\lambda}^\alpha(x) = \phi_{-\lambda}((xE_\alpha)\cdot v_{-\lambda}),$$
$$\psi_\lambda^{-\alpha}(x) = \phi_\lambda((xF_\alpha)\cdot v_\lambda), \qquad \psi_{-\lambda}^{-\alpha}(x) = \phi_{-\lambda}((F_\alpha x)\cdot v_{-\lambda}).$$

Observación 3.1.7.

(*a*) Si $\lambda \in P_+$, entonces $\mu_\varphi''(\psi_{-\lambda}) = K_{-(1+\varphi)\lambda} \otimes K_{(1-\varphi)\lambda}$.

Para verificar esto, se evalúan ambas expresiones de la igualdad en $EM \otimes FN$ donde $EM = \xi_{m_1,0}\eta_{0,t_2}$ y $FN = \eta_{m_2,0}\xi_{0,t_1}$ para adecuados m_1, t_2, m_2, t_1 de la base de $\Gamma^\varphi(\mathfrak{b}_+)$ y $\Gamma^\varphi(\mathfrak{b}_-)$ respectivamente, cf. Definición 2.3.1. Usando [DL, Lema 4.4 (iv)] tenemos

$$\langle \mu_\varphi''(\psi_{-\lambda}), EM \otimes NF\rangle = \psi_{-\lambda}(EMNF) = \delta_{1,E}\delta_{1,F}MN(-\lambda),$$

donde $M(\lambda) = \pi_0(K_\lambda, M)$ y $N(\lambda) = \bar\pi_0(K_{-\lambda}, N)$. Entonces $MN(-\lambda) = \pi_0(K_{-\lambda}, MN) = \pi_0(K_{-\lambda}, M)\pi_0(K_{-\lambda}, N) = \pi_0(K_{-\lambda}, M)\bar\pi_0(K_\lambda, N) = M(-\lambda)N(-\lambda)$. Mas aún, considerando (2.8) tenemos

$$\langle \mu_\varphi''(\psi_\lambda), EM\otimes NF\rangle = \delta_{1,E}\delta_{1,F}M(-\lambda)N(-\lambda) = \delta_{1,E}\delta_{1,F}\pi_\varphi''(K_{-(1+\varphi)\lambda}, M)\bar\pi_\varphi''(K_{(1-\varphi)\lambda}, N).$$

Por otra parte, si usamos los apareamientos π_φ'' y $\bar\pi_\varphi''$ obtenemos que

$$\langle K_{-(1+\varphi)\lambda} \otimes K_{(1-\varphi)\lambda}, EM \otimes NF\rangle = \delta_{1,E}\delta_{1,F}\pi_\varphi''(K_{-(1+\varphi)\lambda}, M)\bar\pi_\varphi''(K_{(1-\varphi)(\lambda)}, N)$$

probando la veracidad de la afirmación.

(*b*) Por [CV2, Proposiciones 1.9 & 2.7], para todo $1 \le i \le n$ tenemos que

$$\begin{aligned} \mu_\varphi''(\psi_{-\omega_i}^{-\alpha_i}) &= q^{-(\tau_i,\omega_i)} f_{\alpha_i}^\varphi K_{-(1+\varphi)\omega_i} \otimes K_{(1-\varphi)\omega_i}, \\ \mu_\varphi''(\psi_{-\omega_i}^{\alpha_i}) &= q^{-(\tau_i,\omega_i)} K_{-(1+\varphi)\omega_i} \otimes K_{(1-\varphi)\omega_i} e_{\alpha_i}^\varphi. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Chequeamos la primera fórmula, la segunda se deduce similarmente. Ya que $\mu_\varphi''(\psi_{-\omega_i}^{-\alpha_i}) = \mu_0''(\psi_{-\omega_i}^{-\alpha_i})$, y por [DL, Lema 4.5 (vi)], tenemos que $\mu_0''(\psi_{-\omega_i}^{-\alpha_i}) = f_{\alpha_i}K_{-\omega_i} \otimes K_{\omega_i}$, entonces

$$\begin{aligned} \langle \mu_\varphi''(\psi_{-\omega_i}^{-\alpha_i}), EM \otimes NF\rangle &= \langle f_{\alpha_i}K_{-\omega_i} \otimes K_{\omega_i}, EM \otimes NF\rangle = \pi_0''(f_{\alpha_i}K_{-\omega_i}, EM)\bar\pi_0''(K_{\omega_i}, NF) \\ &= \pi_0''(f_{\alpha_i}K_{-\omega_i}, EM)\bar\pi_0''(K_{\omega_i}, N)\bar\pi_0''(K_{\omega_i}, F) \\ &= \pi_0''(f_{\alpha_i}K_{-\omega_i}, EM)N(-\omega_i)\delta_{1,F}. \end{aligned}$$

Además, como $\pi_\varphi''(f_{\alpha_i}^\varphi K_{-(1+\varphi)\omega_i}, EM) = q^{(\tau_i,\omega_i)}\pi_0''(f_{\alpha_i}^0 K_{-\omega_i}, EM)$ y usando [CV2, Proposición 1.9], [DL, (3.3)] y las definiciones en (2.8), podemos decir que

$$\begin{aligned} \langle f_{\alpha_i}^\varphi K_{-(1+\varphi)\omega_i} \otimes K_{(1-\varphi)\omega_i}, EM \otimes NF\rangle &= \pi_\varphi''(f_{\alpha_i}^\varphi K_{-(1+\varphi)\omega_i}, EM)\pi_\varphi''(K_{(1-\varphi)\omega_i}, NF) \\ &= \pi_\varphi''(f_{\alpha_i}^\varphi K_{-(1+\varphi)\omega_i}, EM)N(-\omega_i)\delta_{1,F} \\ &= q^{(\tau_i,\omega_i)}\pi_0''(f_{\alpha_i}^0 K_{-\omega_i}, EM)N(-\omega_i)\delta_{1,F}, \end{aligned}$$

probando la afirmación.

Recordemos que en la Proposición 1.3.18 se estableció una P bigraduación para $\mathcal{O}_q(G)$. Gracias a la Observación 3.1.2, no haremos distinción notacional entre los coeficientes matriciales en $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$ y los de $\mathcal{O}_q(G)$. Tampoco, para los módulos de peso máximo, espacios peso y sus duales.

Tenemos en el siguiente lema una fórmula que relaciona el producto de $\mathcal{O}_q^\varphi(G)$ con el de $\mathcal{O}_q(G)$.

Lema 3.1.8. *[LS, (2.13)] Para $i = 1, 2$ y $\Lambda_i \in P_+$, $v_i \in L(\Lambda_i)_{\mu_i}$, $f_i \in L(\Lambda_i)_{-\lambda_i}$ tenemos*

$$m_\varphi(c_{f_1,v_1} \otimes c_{f_2,v_2}) = q^{\frac{1}{2}((\varphi(\mu_1),\mu_2)-(\varphi(\lambda_1),\lambda_2))} m(c_{f_1,v_1} \otimes c_{f_2,v_2}).$$

□

Definamos $p : P \times P \to \mathbb{Q}(q)$ mediante $(\lambda_1, \lambda_2) \mapsto q^{-\frac{1}{2}(\varphi(\lambda_1),\lambda_2)}$. Entonces p es un bicaracter antisimétrico sobre P. Efectivamente, notar primero que

$$(\varphi(\alpha_i), \alpha_j) = \sum x_{ki}(\omega_k, \alpha_j) = \sum d_k \delta_{kj} x_{ki} = d_j x_{ji}$$

donde DX es antisimétrica, ver Sección 2.1. Si $\lambda = \sum n_l \alpha_l$, entonces

$$(\varphi(\lambda), \lambda) = \sum n_l n_s (\varphi(\alpha_l), \alpha_s) = \sum n_l n_s d_s x_{sl} = 0,$$

ya que $n_l n_s d_s x_{sl} = -n_s n_l d_l x_{ls}$.

También tenemos que para todo $\lambda, \mu \in P$ es válido $(\lambda, \mu) = -(\mu, \lambda)$, así que p satisface (i) y (ii) en la Definición 1.3.13.

Por la Proposición 1.3.14, p induce un 2-cociclo $\tilde{p}$ sobre $P \times P$. El cual se expresa de la siguiente manera,

$$\tilde{p}((\lambda_1, \mu_1), (\lambda_2, \mu_2)) = p(\lambda_1, \lambda_2) p(\mu_1, \mu_2)^{-1} = q^{\frac{1}{2}((\varphi(\mu_1),\mu_2)-(\varphi(\lambda_1),\lambda_2))}.$$

Mas aún, en [HLT, Teorema 2.1] se define un álgebra de Hopf $\mathcal{O}_q(G)_p$ que tan sólo difiere de $\mathcal{O}_q(G)$ en su multiplicación.

Presentamos a continuación el primer resultado original de la tesis.

Teorema 3.1.9. *$\mathcal{O}_q^\varphi(G)$ es una deformación por 2-cociclo de $\mathcal{O}_q(G)$. El 2-cociclo $\sigma : \mathcal{O}_q(G) \otimes \mathcal{O}_q(G) \to \mathbb{Q}(q)$ es dado por la fórmula*

$$\sigma(c_{f_1,v_1}, c_{f_2,v_2}) = \varepsilon(c_{f_1,v_1}) \varepsilon(c_{f_2,v_2}) q^{-\frac{1}{2}(\varphi(\lambda_1),\lambda_2)}$$

para $i = 1, 2$, $\Lambda_i \in P_+$, $v_i \in V(\Lambda_i)_{\mu_i}$ y $f_i \in V(\Lambda_i)_{-\lambda_i}$.

Prueba. Denote $\chi(\lambda_1, \lambda_2) = q^{-\frac{1}{2}(\varphi(\lambda_1),\lambda_2)}$. Claramente, $\sigma(x, 1) = \sigma(1, x) = \varepsilon(x)$ para todo $x \in \mathcal{O}_q(G)$.

Primero probamos la condición (1.4). Usemos por comodidad la notación $\Delta(c_{f,v}) = \sum_\nu c_{f,v}^{-\lambda,\nu} \otimes c_{f,v}^{-\nu,\mu} \in \bigoplus_\nu \mathcal{O}_q(G)_{-\lambda,\nu} \otimes \mathcal{O}_q(G)_{-\nu,\mu}$, donde $v \in V(\Lambda)_\mu$ y $f \in V(\Lambda)_\lambda$. Para $1 \leq i \leq 3$, sea $c_{f_i,v_i} \in \mathcal{O}_q(G)$ con $f_i \in V(\Lambda_i)_{\lambda_i}$ y $v_i \in V(\Lambda_i)_{\mu_i}$. Tenemos entonces,

$$\begin{aligned}
&\sigma((c_{f_2,v_2})_{(1)}, (c_{f_3,v_3})_{(1)})\sigma(c_{f_1,v_1}, (c_{f_2,v_2})_{(2)}(c_{f_3,v_3})_{(2)}) \\
&= \sum_{\nu_1,\nu_2} \sigma(c_{f_2,v_2}^{-\lambda_2,\nu_1}, c_{f_3,v_3}^{-\lambda_3,\nu_2})\sigma(c_{f_1,v_1}, c_{f_2,v_2}^{-\nu_1,\mu_2} c_{f_3,v_3}^{-\nu_2,\mu_3}) \\
&= \sum_{\nu_1,\nu_2} \varepsilon(c_{f_2,v_2}^{-\lambda_2,\nu_1})\varepsilon(c_{f_3,v_3}^{-\lambda_3,\nu_2})\chi(\lambda_2,\lambda_3)\varepsilon(c_{f_1,v_1})\varepsilon(c_{f_2,v_2}^{-\nu_1,\mu_2})\varepsilon(c_{f_3,v_3}^{-\nu_2,\mu_3})\chi(\lambda_1,\nu_2+\nu_3) \\
&= \varepsilon(c_{f_1,v_1})\varepsilon(c_{f_2,v_2})\varepsilon(c_{f_3,v_3})\chi(\lambda_2,\lambda_3)\chi(\lambda_1,\lambda_2+\lambda_3).
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
&\sigma((c_{f_1,v_1})_{(1)}, (c_{f_2,v_2})_{(1)})\sigma((c_{f_1,v_1})_{(2)})(c_{f_2,v_2})_{(2)}, c_{f_3,v_3}) \\
&= \sum_{\nu_1,\nu_2} \sigma(c_{f_1,v_1}^{-\lambda_1,\nu_1}, c_{f_2,v_2}^{-\lambda_2,\nu_2})\sigma(c_{f_1,v_1}^{-\nu_1,\mu_1} c_{f_2,v_2}^{-\nu_2,\mu_2}, c_{f_3,v_3}) \\
&= \sum_{\nu_1,\nu_2} \varepsilon(c_{f_1,v_1}^{-\lambda_1,\nu_1})\varepsilon(c_{f_1,v_1}^{-\lambda_2,\nu_2})\chi(\lambda_1,\lambda_2)\varepsilon(c_{f_1,v_1}^{-\nu_1,\mu_1})\varepsilon(c_{f_2,v_2}^{-\nu_2,\mu_2})\varepsilon(c_{f_3,v_3})\chi(\nu_1+\nu_2,\lambda_3) \\
&= \varepsilon(c_{f_1,v_1})\varepsilon(c_{f_2,v_2})\varepsilon(c_{f_3,v_3})\chi(\lambda_1,\lambda_2)\chi(\lambda_1+\lambda_2,\lambda_3).
\end{aligned}$$

De ahí, σ es un 2-cociclo sobre $\mathcal{O}_q(G)$. Probaremos que los productos, m_σ (definido en 1.3.4), m_φ y m_p coinciden. Que m_φ y m_p coincidan es inmediato, al igual que $\chi(0,0) = 1$, $\chi(\lambda,0) = \chi(0,\lambda) = 1$, $\sigma^{-1}(c_{f_1,v_1}, c_{f_2,v_2}) = \sigma(\mathcal{S}(c_{f_1,v_1}), c_{f_2,v_2}) = \varepsilon(c_{f_1,v_1})\varepsilon(c_{f_2,v_2})\chi(\mu_1,\lambda_2)$ para $\Lambda_i \in P_+$, $v_i \in L(\Lambda_i)_{\mu_i}$, $f_i \in L(\Lambda_i)_{-\lambda_i}$, $i = 1,2$ y $\varepsilon(\mathcal{O}_q(G)_{\lambda,\mu}) = 0$ si $-\lambda \neq \mu$ (ver Proposición 1.3.18):

$$\begin{aligned}
m_\sigma(c_{f_1,v_1}, c_{f_2,v_2}) &= \sum_{\nu_1,\nu_2,\eta_1,\eta_2} \sigma(c_{f_1,v_1}^{-\lambda_1,\nu_1}, c_{f_2,v_2}^{-\lambda_2,\nu_2}) m(c_{f_1,v_1}^{-\nu_1,\eta_1} \otimes c_{f_2,v_2}^{\nu_2,\eta_2}) \sigma^{-1}(c_{f_1,v_1}^{-\eta_1,\mu_1} c_{f_2,v_2}^{-\eta_2,\mu_2}) \\
&= \sum_{\nu_1,\nu_2,\eta_1,\eta_2} \varepsilon(c_{f_1,v_1}^{-\lambda_1,\nu_1})\varepsilon(c_{f_2,v_2}^{-\lambda_2,\nu_2})\chi(\lambda_1,\lambda_2) m(c_{f_1,v_1}^{-\nu_1,\eta_1} \otimes c_{f_2,v_2}^{\nu_2,\eta_2})\varepsilon(c_{f_1,v_1}^{-\eta_1,\mu_1})\varepsilon(c_{f_2,v_2}^{-\eta_2,\mu_2})\chi(\mu_1,\eta_2) \\
&= \chi(\lambda_1,\lambda_2) m(c_{f_1,v_1} \otimes c_{f_2,v_2})\chi(\mu_1,-\mu_2) \\
&= \chi(\lambda_1,\lambda_2)\chi(\mu_1,\mu_2)^{-1} m(c_{f_1,v_1} \otimes c_{f_2,v_2}) = q^{\frac{1}{2}((\varphi(\mu_1),\mu_2)-(\varphi(\lambda_1),\lambda_2))} m(c_{f_1,v_1} \otimes c_{f_2,v_2}).
\end{aligned}$$

□

3.2. Especializaciones en una raíz de la unidad

Establecemos en esta sección las definiciónes del álgebra envolvente cuantizada torcida y del álgebra de funciones torcida en una raíz de la unidad. De aquí en adelante ϵ denotará una ℓ-ésima primitiva raíz de la unidad, con ℓ impar y si G es de tipo G_2 coprima con 3. El ℓ-ésimo polinomio ciclotómico en la indeterminada q lo denotaremos por $\chi_\ell(q)$.

Definición 3.2.1. Se definen:

(*i*) el *álgebra envolvente cuántica torcida en la raíz la unidad* ϵ, como $U_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g}; M) := U_q^\varphi(\mathfrak{g}; M) \otimes_R \mathbb{Q}(\epsilon)$ para cualquier retículo M con $Q \subseteq M \subseteq P$.

(*ii*) el *álgebra de potencias dividida en la raíz de la unidad* ϵ, como $\Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g}) := \Gamma^\varphi(\mathfrak{g}) \otimes_R \mathbb{Q}(\epsilon)$.

(*iii*) el *grupo cuántico torcido en la raíz de la unidad* ϵ, como $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)} := R_q^\varphi[G] \otimes_R \mathbb{Q}(\epsilon)$.

Equivalentamente, podemos obtener las definiciones anteriores usando los isomorfismos $\Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g}) \simeq \Gamma^\varphi(\mathfrak{g})/[\chi_l(q)\Gamma^\varphi(\mathfrak{g})(\mathfrak{g})]$ y $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \simeq R_q^\varphi[G]/[\chi_\ell(q)R_q^\varphi[G]]$, luego de considerar el isomorfismo $R/[\chi_\ell(q)R] \simeq \mathbb{Q}(\epsilon)$. Similarmente, denotamos $U_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g}; P) := \check{U}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$ y $U_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g}; Q) := U_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$ para la forma simplemente conexa y la adjunta. Por facilidad, usamos la notación $\bar{x}$ para la imagen de x en todas las proyecciones canónicas, así que es importante tener precaución al leer algunas demostraciones.

Teorema 3.2.2. *$\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$ es una deformación por 2-cociclo de $\mathcal{O}_\epsilon(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$.*

Prueba. Recordemos el 2-cociclo $\sigma : \mathcal{O}_q(G) \otimes \mathcal{O}_q(G) \to \mathbb{Q}(q)$ del Teorema 3.1.9. Entonces, la aplicación $\bar{\sigma} : \mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \otimes \mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \to \mathbb{Q}(\epsilon)$ dada por

$$\bar{\sigma}(\bar{x}, \bar{y}) = \overline{\sigma(x, y)} \qquad \text{para todo } x, y \in \mathcal{O}_q(G),$$

es un 2-cociclo bien definido para $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$. Note que estamos considerando la proyección canónica $\mathcal{O}_q^\varphi(G) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$ y $R \twoheadrightarrow \mathbb{Q}(\epsilon)$. □

Observación 3.2.3. Las relaciones $E_i^\ell = 0$, $F_i^\ell = 0$, $K_{\alpha_i}^\ell = 1$ son válidas en $\Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$ para todo $1 \leq i \leq n$. Efectivamente, tenemos que $\prod_{s=1}^{\ell}(K_{\alpha_i}q^{(-s+1)} - 1) = \prod_{s=1}^{\ell}(q^s - 1)\binom{K_{\alpha_i}; 0}{\ell}$ en $\Gamma^\varphi(\mathfrak{g})$. Si especializamos q en ϵ, entonces $\prod_{s=1}^{\ell}(K_{\alpha_i}\epsilon^{(-s+1)} - 1) = 0$. Debido a que $K_{\alpha_i}^\ell - 1 = \prod_{s=0}^{\ell-1}(K_{\alpha_i} - \epsilon^s) = \epsilon^{\frac{(\ell-1)\ell}{2}} \prod_{s=0}^{\ell-1}(K_{\alpha_i}\epsilon^{-s+1} - 1)$, se cumple $K_{\alpha_i}^\ell = 1$, como deseábamos. Las otras dos relaciones se siguen del hecho $(\ell)_\epsilon = 0$.

$\Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$ tiene una base PBW con elementos como en el Lema 2.3.4 módulo las relaciones de la Observación 3.2.3 y $\varepsilon^\ell = 1$.

El lema siguiente es el análogo a [DL, Lemma 6.1].

Lema 3.2.4. *Hay un apareamiento de Hopf perfecto* $\bar{\rho} : \mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \otimes_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g}) \to \mathbb{Q}(\epsilon)$.

Prueba. Sea $\rho : R_q^\varphi[G] \otimes_R \Gamma^\varphi(\mathfrak{g}) \to R$ el apareamiento de Hopf perfecto definido en el Lema 3.1.5. Entonces, es posible definir el apareamiento $\bar{\rho} : \mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \otimes_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g}) \to \mathbb{Q}(\epsilon)$ mediante $\bar{\rho}(\bar{x}, \bar{u}) = \overline{\rho(x,u)}$ para todo $x \in R_q^\varphi[G]$ y $u \in \Gamma^\varphi(\mathfrak{g})$. Donde estamos considerando las proyecciones canónicas $R_q^\varphi[G] \to \mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$, $\Gamma^\varphi(\mathfrak{g}) \to \Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$ y $R \twoheadrightarrow \mathbb{Q}(\epsilon)$. La cuenta para probar que esta bien definido y es un aparemiento de Hopf perfecto es directa, por eso la omitiremos. □

3.2.1. Morfismo de Frobenius cuántico

Definiremos en la presente subsección el morfismo de Frobenius cuántico Fr. Será útil para la construcción de cocientes que hacen parte de sucesiones exactas cortas de álgebras de Hopf. Su núcleo nos permitirá definir un álgebra de Hopf de dimensión finita no semi-simple y punteada, llamada núcleo de Frobenius-Luzstig torcido. Esto nos permitirá caracterizar algunos cocientes de $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$ mediante ciertos parámetros, generadores y relaciones. Fr es la versión torcida del morfismo presentado en [DL], basaremos la presentación de resultados refiriéndonos a [CV2].

Lema 3.2.5. *[CV2, § (i)] La aplicación* $\mathrm{Fr} : \Gamma^\varphi(\mathfrak{g}) \longrightarrow U_q(\mathfrak{g})_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$ *relativa a la proyección canónica* $R \longrightarrow \mathbb{Q}(\epsilon)$ *y definida sobre los generadores por:*

$$\mathrm{Fr}(E_i^{(p)}) = e_i^{(p/\ell)} \quad \mathrm{Fr}(F_i^{(p)}) = f_i^{(p/\ell)} \quad \mathrm{Fr}\binom{K_i;0}{p} = \binom{h_i}{p/\ell} \quad \mathrm{Fr}(K_i) = 1 \quad \mathrm{Fr}(q) = \epsilon,$$

si $\ell \mid p$ *ó* 0 *en otro caso, donde* $i = 1, \dots, n$ *y* $p > 0$, $e_i^{(m)} = \dfrac{e_i}{m!}$, $f_i^{(m)} = \dfrac{f_i}{m!}$, $\binom{h_i}{m} = \dfrac{h_i(h_i-1)\cdots(h_i-m+1)}{m!}$ *y* e_i, f_i, h_i *son los generadores de Chevalley para* $\mathfrak{g}$. *Es un morfismo sobreyectivo de álgebras de Hopf.* □

Mostraremos la prueba de que Fr es un morfismo de coálgebras, en aras de ilustrar como funciona Fr. Usaremos la fórmula (2.12) para realizar la cuenta,

$$\begin{aligned}(\mathrm{Fr}\otimes\mathrm{Fr})\Delta_\varphi(E_i^{(p)}) &= (\mathrm{Fr}\otimes\mathrm{Fr})\left(\sum_{x+y=p} q_i^{-xy} E_i^{(x)} K_{y(\alpha_i-\tau_i)} \otimes E_i^{(y)} K_{x\tau_i})\right) \\ &= \sum_{\substack{x+y=p \\ \ell\mid x \text{ y } \ell\mid y}} e_i^{(x/\ell)} \otimes e_i^{(y/\ell)}\end{aligned}$$

si $\ell \nmid p \Rightarrow \ell \nmid x$ y $\ell \nmid y$. Tenemos, que al aplicar Fr a los sumandos no cero, obtenemos aquellos tales que $\ell \mid x$ ó $\ell \mid y$, así $\ell \mid xy$. Por otro lado, podemos hacer el cálculo

$$\begin{aligned}\Delta_U(\mathrm{Fr}(E_i^{(p)})) &= \frac{(e_i\otimes 1+1\otimes e_i)^{p/\ell}}{(p/\ell)!} \text{ (si } \ell \mid p)\\ &= \sum_{r+s=p/\ell}\binom{p/\ell}{r}\frac{e_i^r\otimes e_i^s}{(p/\ell)!}\\ &= \sum_{r+s=p/\ell}\frac{e_i^r\otimes e_i^s}{(r)!(s)!}\\ &= \sum_{x+y=p}\frac{e_i^{x/\ell}}{(x/\ell)!}\otimes\frac{e_i^{y/\ell}}{(y/\ell)!} \text{ si } y=\ell s \text{ y } x=\ell r,\end{aligned}$$

obteniendo que $(\mathrm{Fr}\otimes\mathrm{Fr})\Delta_\varphi(E_i^{(p)}) = \Delta_U(\mathrm{Fr}(E_i^{(p)}))$, tal y como deseabamos. Similarmente calculamos para $F_i^{(p)}$. La prueba de la counidad es directa.

Proposición 3.2.6. *[CV2, §3.2 (i)] Existe un único morfismo sobreyectivo de álgebras de Hopf* $\overline{\mathrm{Fr}}:\Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})\longrightarrow U(\mathfrak{g})_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$ *para el cual* $\overline{\mathrm{Fr}}(E_i^{(\ell)})=e_i$, $\overline{\mathrm{Fr}}(F_i^{(\ell)})=f_i$ *y* $\overline{\mathrm{Fr}}\binom{K_i;0}{\ell}=h_i$ *y cuyo núcleo es el ideal* I *generado por* K_i-1, E_i *y* F_i. □

Realizaremos un abuso de notación al usar Fr como notación de $\overline{\mathrm{Fr}}$, en lo sucesivo.

Por tanto podemos considerar la inyección de álgebras de Hopf ${}^t\mathrm{Fr}:\mathcal{O}(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}\to\Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})^\circ$. Sea $\mathbf{k}$ una extensión de cuerpos de $\mathbb{Q}(\epsilon)$, se llamará a $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}\otimes_{\mathbb{Q}(\epsilon)}\mathbf{k}$ la $\mathbf{k}$-forma de $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$, cuando $\mathbf{k}=\mathbb{C}$ simplemente se notará $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$.

La proposición 3.2.7 es cierta, si consideramos en ella la forma $\mathbb{C}$-forma de $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$. Razón por la que omitiremos el subíndice $\mathbb{Q}(\epsilon)$ en su demostración. En [CV2, (3.3)] citan este hecho sin prueba, ya que se verifica de manera anáaloga al caso $\varphi=0$ cf. [DL] o [BG]. Sin embargo, se mostrarán algunos detalles de la prueba.

Proposición 3.2.7. *[CV2, (3.3)]* $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$ *contiene un álgebra de Hopf central* F_0 *isomorfa a* $\mathcal{O}(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$. *Mas aún, un elemento de* $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$ *esta en* F_0 *si y sólo si se desvanece sobre* I *y* $F_0=\mathbb{Q}(\epsilon)\langle\overline{c}_{f,v}\in\mathcal{O}_q^\varphi(G)|f\in\overline{V}(l\Lambda)^*_{-\ell v},\ v\in\overline{V}(\ell\Lambda)_{\ell v};\ v,\mu\in P_+\rangle$, *donde* $\overline{V}(e\Lambda)$ *es el* $\Gamma^\varphi(\mathfrak{g})$*-módulo* $\Gamma^\varphi(\mathfrak{g})v_{e\Lambda}$ *siendo* $v_{e\Lambda}$ *el vector peso máximo de* $V(e\Lambda)$.

Prueba. Del apareamiento del Lema 3.2.4 tenemos que $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)\subseteq\Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})^\circ$. Si es cierto que Im ${}^t\mathrm{Fr}\subset\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$ e Im ${}^t\mathrm{Fr}\subset Z(\Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})^\circ)$, entonces si Im ${}^t\mathrm{Fr}$ es denotado por F_0, tendremos la prueba terminada.

Notemos que si para todo $x\in\Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$ se satisface que $\Delta_\varphi(x)-\Delta_\varphi^{\mathrm{op}}(x)\in I\otimes I$, donde $I=\mathrm{Ker}\,\mathrm{Fr}$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\mathrm{Fr}\otimes\mathrm{id}(x_{(1)}\otimes x_{(2)}-x_{(2)}\otimes x_{(1)}) &= 0\\ \mathrm{Fr}\otimes\mathrm{id}(x_{(1)}\otimes x_{(2)}) &= \mathrm{Fr}\otimes\mathrm{id}(x_{(2)}\otimes x_{(1)}).\end{aligned}$$

Con esto podemos concluir que $f * g = g * f$ para $f \in \mathrm{Im}^t \mathrm{Fr}$ y g en $\Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})^\circ$, verificando que $\mathrm{Im}^t \mathrm{Fr} \subset Z(\Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})^\circ)$. Como Δ_φ es de álgebras, basta probar lo dicho anteriormente sobre los generadores E_i, $E_i^{(\ell)}$, F_i, $F_i^{(\ell)}$, $K_{\alpha_i}^{\pm 1}$ y $\binom{K_{\alpha_i};0}{\ell}$ de $\Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$. Cada uno de los respectivos chequeos se obtiene por cálculo directo. Por ejemplo, para $E_i^{(\ell)}$ tenemos, al usar la Observación 3.2.3 que

$$\Delta_\varphi(E_i^{(\ell)}) - \Delta_\varphi^{\mathrm{op}}(E_i^{(\ell)}) = E_i^{(\ell)} \otimes 1 + K_{\alpha_i}^{-\ell} \otimes E_i^{(\ell)} - 1 \otimes E_i^{(\ell)} - E_i^{(\ell)} \otimes K_{\alpha_i}^{-\ell} \underset{\text{mód } I}{=} 0.$$

Finalmente, para probar que $F_0 \subset \mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$, debemos ver que toda representación de $\mathfrak{g}$ puede ser obtenida como cociente de una de $\Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$. Sabemos que hay completa irreducibilidad cf. ([BG, H]) para los $U_q^\varphi(\mathfrak{g})$-módulos y los $\mathfrak{g}$-módulos. Entonces, sea $V(\lambda)$ el $\mathfrak{g}$-módulo irreducible de peso máximo λ, v el vector de peso máximo y $V(\ell\lambda)$ el $U_q^\varphi(\mathfrak{g})$-módulo irreducible de peso $\ell\lambda$. Entonces, $V(\lambda)$ se obtiene como cociente del $\Gamma^\varphi(\mathfrak{g})$-módulo $\Gamma^\varphi(\mathfrak{g})v$ al especializar en la raíz de la unidad ϵ. De esta manera los elementos de Im $^t\mathrm{Fr}$ son obtenidos por elementos de $R_q^\varphi[G]$ al especializar q en ϵ, así $\mathrm{Im}^t \mathrm{Fr} \subset \mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$. Las álgebras F_0 de [AG], [CV2] y [DL] coinciden, por lo que es también válido el isomorfismo $F_0 \sim \mathcal{O}(G)$. □

Proposición 3.2.8. *[CV2, Proposición 3.5]* $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$ *es un* $\mathcal{O}(G)$ *módulo proyectivo de rango* $\ell^{dim\, G}$. □

Proposición 3.2.9. $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$ *es un* $\mathcal{O}(G)$*-módulo libre de rango* $\ell^{dim\, G}$.

Prueba. La prueba de este hecho para el caso $\varphi = 0$ esta en [BGS], ella puede rehacerse para el caso $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$ gracias a la Proposición 3.2.8. □

Sea $\overline{\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)} = \mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)/[\mathcal{O}(G)^+\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)]$ y $\pi : \mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G) \longrightarrow \overline{\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G))}$ la proyección canónica. Por las Proposiciones 3.2.7 y 3.2.8, $\overline{\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)}$ es un álgebra de Hopf de dimensión ℓ^{dimG}. Como $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$ es un $\mathcal{O}(G)$-módulo libre, es fielmente playo (ver 1.2.25). Así $\mathcal{O}(G) = \mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)^{co\pi} =^{co\pi} \mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$, lo cual implica que la sucesión de álgebras de Hopf

$$1 \longrightarrow \mathcal{O}(G) \longrightarrow \mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G) \longrightarrow \overline{\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)} \longrightarrow 1, \tag{3.2}$$

es exacta.

3.3. Núcleos de Frobenius-Luzstig torcidos

Por resultados de [CKP, CK] y [BG, Teorema III.6.1], podemos interpretar a $U_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g}; M)$ como $U_q^\varphi(\mathfrak{g}; M)$ pero especializando q en ϵ. Recordemos la acción definida sobre $\check{U}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$ de $B_{\mathcal{W}}$ dada en la Observación 2.2.2.

Definición 3.3.1. Definamos Z_0^{φ} como la subálgebra más pequeña $B_{\mathcal{W}}$ invariante conteniendo a los elementos $K_{\ell\alpha} = K_{\alpha}^{\ell}$, E_i^{ℓ}, F_i^{ℓ} para $\alpha \in Q$ y $1 \leq i \leq n$.

Teorema 3.3.2.

(a) *Z_0^{φ} esta en el centro de $U_{\epsilon}^{\varphi}(\mathfrak{g})$.*

(b) *Z_0^{φ} es un anillo de polinomios en $2N + n = dim\ \mathfrak{g}$ generadores sobre $\mathbb{C}$, con n generadores invertidos.*

(c) *Z_0^{φ} es una sub-álgebra de Hopf de $U_{\epsilon}^{\varphi}(\mathfrak{g})$.*

(d) *$U_{\epsilon}^{\varphi}(\mathfrak{g})$ es un Z_0-módulo libre de rango $\ell^{dim\ \mathfrak{g}}$.*

Prueba. Salvo para el literal (3) la prueba en [BG] funciona igualmente, ya que depende de la estructura de álgebra. En (3) debemos chequear que el coproducto Δ_{φ} sobre los generadores de Z_0^{φ} pertenezca a $Z_0^{\varphi} \otimes Z_0^{\varphi}$, mostraremos la cuenta sólo para E_i^{ℓ}, para F_i^{ℓ} se realiza análogamente y para K_{α} es obvio, débido a que es un elemento de tipo grupo. Tenemos que $\Delta_{\varphi} E_i^{\ell} = (E_i \otimes K_{\tau_i} + K_{\alpha_i - \tau_i} \otimes E_i)^{\ell}$ (ver Definición 2.1.2). Si hacemos que $a = E_i \otimes K_{\tau_i}$ y $b = K_{\alpha_i - \tau_i} \otimes E_i$ obtenemos que $ab = \epsilon^{2d_i} ba$. En efecto, al usar la Observación 2.1.3 y la definición de τ_i luego de (2.1) tenemos que,

$$\begin{aligned} E_i K_{\alpha_i - \tau_i} &= \epsilon^{d_i 2} K_{\alpha_i} E_i K_{-\tau_i} \\ &= \epsilon^{d_i 2} K_{\alpha_i} E_i \prod_j K_{\omega_j}^{-x_{ij}} \\ &= \epsilon^{d_i 2} K_{\alpha_i} \prod_j \epsilon^{-d_j \delta_{ij} - x_{ij}} K_{\omega_j}^{x_{ij}} E_i \\ &= \epsilon^{d_i 2} K_{\alpha_i - \tau_i} E_i \end{aligned} \qquad \begin{aligned} K_{\tau_i} E_i &= \prod_j K_{\omega_j}^{x_{ij}} E_i \\ &= E_i \prod_j \epsilon^{-d_j \delta_{ij} x_{ij}} \prod_j K_{\omega_j}^{x_{ij}} \\ &= E_i K_{\tau_i} \\ &\text{si } i \neq j,\ \epsilon^{d_j \delta_{ij} x_{ij}} = 1 \text{ y si } i = j,\ x_{ii} = 0 \end{aligned}$$

Así $(E_i \otimes K_{\tau_i})(K_{\alpha_i - \tau_i} \otimes E_i) = \epsilon^{2d_i}(K_{\alpha_i - \tau_i} \otimes E_i)(E_i \otimes K_{\tau_i})$, de manera que utilizando la fórmula ϵ-binomial cf. [Ka, (2.3)], tenemos $\Delta_{\varphi} E_i^{\ell} = E_i^{\ell} \otimes K_{\ell\tau_i} + K_{\ell(\alpha_i - \tau_i)} \otimes E_i^{\ell}$. Para finalizar la prueba basta considerar elementos E_{α} y F_{α} donde α no sea una raíz simple, pero los argumentos dados en [BG, § III.6.5] siguen siendo válidos aquí, gracias a que la estructura de álgebra de $U_{\epsilon}^{\varphi}(\mathfrak{g})$ no depende de φ. Por lo tanto podemos usar los argumentos en [BG, § III.6.5], ellos permiten reducir la prueba al caso α raíz simple. □

Definición 3.3.3. Al cociente $\mathbf{u}_{\epsilon}^{\varphi}(\mathfrak{g}) := U_{\epsilon}^{\varphi}(\mathfrak{g}) / [(Z_0^{\varphi})^{+} U_{\epsilon}^{\varphi}(\mathfrak{g})]$ lo llamamos *núcleo de Frobenius-Lusztig torcido* de $\mathfrak{g}$ en ϵ.

Por el Teorema 3.3.2, $\mathbf{u}_{\epsilon}^{\varphi}(\mathfrak{g})$ es un álgebra de Hopf de dimensión $\ell^{\dim \mathfrak{g}}$. Fácilmente podemos ver que $G(\mathbf{u}_{\epsilon}^{\varphi}(\mathfrak{g})) = \langle K_{\alpha_i} | 1 \leq i \leq n \rangle \simeq (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^n$. De ahora en adelante usaremos la notación $G(\mathbf{u}_{\epsilon}^{\varphi}(\mathfrak{g})) = \mathbb{T}^{\varphi}$.

Proposición 3.3.4. *Sea $\widehat{U}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$ la subálgebra de Hopf de $\Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$, generada por los elementos E_i, F_i, K_i con $1 \leq i \leq n$. Entonces, $\widehat{U}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$ y $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$ son isomorfos como álgebras de Hopf.*

Prueba. Por la Observación 3.2.3 y [A1, § 3.4] tenemos que $\dim \widehat{U}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g}) = \dim \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g}) = \ell^{\dim \mathfrak{g}}$. Además, el morfismo sobreyectivo de $\widehat{U}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$ a $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$ definido por $E_i \mapsto E_i$, $F_i \mapsto F_i$ y $K_i \mapsto K_i$, anula a $(Z_0^\varphi)^+$, entonces él resulta ser de Hopf. Y debido a que las dimensiones coinciden realmente es un isomorfismo. □

Teorema 3.3.5. *Las álgebras de Hopf $\overline{\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)}$ y $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})^*$ son isomorfas.*

Prueba. Adaptando la prueba de este hecho dada en [BG, Theorem III.7.10] para el caso $\varphi = 0$ podemos decir lo siguiente. El apareamiento en el Lema 3.2.4 induce un apareamiento perfecto $\overline{\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)} \otimes_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \widehat{U}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathbb{Q}(\epsilon)$. Así tenemos un morfismo de Hopf $\flat : \overline{\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)} \longrightarrow \widehat{U}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})^*$. Por la Proposición 3.2.8, el Teorema 3.3.2 y Proposición 3.3.4, existe el isomorfismo de Hopf deseado $\overline{\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)} \longrightarrow \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})^*$. □

Como consecuencia del teorema anterior, la sucesión exacta de álgebras de Hopf (3.2) se puede expresar como,

$$1 \longrightarrow \mathcal{O}(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \xrightarrow{\iota} \mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \xrightarrow{\pi} \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})^* \longrightarrow 1. \tag{3.3}$$

Proposición 3.3.6. $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g}) \simeq \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^J$ *para un twist* $J \in \mathbb{Q}(\epsilon)[\mathbb{T}^\varphi \times \mathbb{T}^\varphi]$.

Prueba. Por el Lema 3.2.2, $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$ es una deformación por 2-cociclo de $\mathcal{O}_\epsilon(G)$. Denotemos este 2-cociclo por $\bar{\sigma}$. Entonces, se tiene que $\bar{\sigma}|_{\mathcal{O}(G)\otimes\mathcal{O}(G)} = \varepsilon \otimes \varepsilon$ y por la Observación 1.3.6, tenemos que $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})^*$ es una deformación por 2-cociclo de $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^*$, donde el 2-cociclo esta dado por la fórmula $\hat{\sigma}(\pi(x), \pi(y)) = \bar{\sigma}(x, y)$ para todo $x, y \in \mathcal{O}_\epsilon(G)$. Entonces sabemos por la Observación 1.3.6 que al considerar la aplicación ${}^t\hat{\sigma} : \mathbb{Q}(\epsilon) \to \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g}) \otimes \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$, ${}^t\hat{\sigma}(1)$ es un twist en $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$, si escribimos $J = \sum_i u_i \otimes u^i$ para este twist tenemos que,

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}(\pi(c_{f_1,v_1}) \otimes \pi(c_{f_2,v_2})) &= \langle J, \pi(c_{f_1,v_1}) \otimes \pi(c_{f_2,v_2})\rangle = \sum_i f_1(u_i \cdot v_1) f_2(u^i \cdot v_2) \\ &= \varepsilon(c_{f_1,v_1})\varepsilon(c_{f_2,v_2})\epsilon^{\frac{1}{2}(\varphi(\lambda_1),\lambda_2)} = f_1(v_1) f_2(v_2)\epsilon^{\frac{1}{2}(\varphi(\lambda_1),\lambda_2)},\end{aligned}$$

para todo $\Lambda_i \in P_+$, $v_i \in L(\Lambda_i)_{\mu_i}$, $f_i \in L(\Lambda_i)_{-\lambda_i}$, y $i = 1, 2$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el apareamiento dado por la evaluación. De ahí, las componentes de J deben actuar diagonalmente y consecuentemente, $J \in \mathbb{Q}(\epsilon)[\mathbb{T}^\varphi \times \mathbb{T}^\varphi]$. □

3.3.1. Subálgebras de los $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$

Supondremos a partir de aquí, que nuestro cuerpo base es $\mathbb{C}$. En esta subsección presentaremos una parametrización de las subálgebras de Hopf de $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$, que depende de un subgrupo abeliano finito, y dos elementos de $\mathcal{P}(n)$. El resultado presentado generaliza [AG, corolario 1.13] y depende principalmente de que $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$ es punteada por ser generada por elementos casi-primitivos y de tipo grupo. Sucede que toda subálgebra de $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$ es punteada, así que ella debe ser generada por un subgrupo del grupo de elementos de tipo grupo de $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$ y elementos casi-primitivos.

Recordemos para esta subsección las notaciones introducidas luego de la Definición 1.2.8. Sea U un álgebra de Hopf con coradical U_0 que es un álgebra de Hopf y $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la filtración corradical. Si $U_{-1} = 0$, definimos $\operatorname{gr} U(n) = U_n/U_{n-1}$ el espacio homogéneo de grado n y $\operatorname{gr} U = \bigoplus_{n\geq 0} \operatorname{gr} U(n)$ al álgebra de Hopf graduada asociada a la filtración. También, sean $\iota : U_0 \to \operatorname{gr}U$ la inclusión canónica y $\pi : \operatorname{gr}U \to U_0$ la proyección homogénea. Es sabido que el diagrama de U, $R := (\operatorname{gr}U)^{\operatorname{co}\pi}$ es un álgebra de Hopf graduada trenzada. Es decir, es un álgebra de Hopf en la categoría de módulos de Yetter-Drinfeld ${}^{U_0}_{U_0}\mathcal{YD}$. Entonces R es una subálgebra graduada de $\operatorname{gr} U$. Para $r \in R$ y $h \in U_0$ tenemos una U_0-acción a izquierda dada por $h\cdot r = h_{(1)} r \mathcal{S}(h_2)$ y una U_0 coacción a izquierda dada por $\rho(r) = r_{(-1)} \otimes r_{(0)} = \pi(r_{(1)}) \otimes r_{(2)}$ y si $\vartheta_R : \operatorname{gr}U \to R$ definida para $a \in \operatorname{gr} U$ como $\vartheta_R(a) = a_{(1)}\iota\pi(\mathcal{S}a_{(2)})$ entonces el coproducto sobre R es dado por $\Delta_R(r) = r^{(1)} \otimes r^{(2)} = \vartheta_R(r_{(1)}) \otimes r_{(2)}$. Si $R(n) = R \cap \operatorname{gr} U(n)$ entonces $R = \bigoplus_{n\geq 0} R(n)$ donde $R(0) \simeq \mathbb{C}$ y $R(1) = \mathcal{P}(R)$. Para ver mas detalles remitirse a [AG, § 1.5].

Lema 3.3.7. *Las subálgebras de Hopf de $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$ están paramétrizadas por ternas $(I_+, I_-, \Sigma^\varphi)$ donde $I_\pm \subset \pm\Pi$ y Σ^φ es un subgrupo de $G(\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g}))$ sujeto a que $K_{(1\mp\varphi)(\alpha_i)} \in \Sigma^\varphi$ si $\alpha_i \in I_\pm$. Denotemos por $\widetilde{E}_i := E_i K_{-\tau_i}$ y $\widetilde{F}_j := K_{(\alpha_j+\tau_j)} F_j$. Entonces la subálgebra de $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$ correspondiente a la terna $(I_+, I_-, \Sigma^\varphi)$ es la subálgebra generada por el conjunto $\{g, \widetilde{E}_i, \widetilde{F}_j |\ g \in \Sigma^\varphi, \alpha_i \in I_+ \text{ and } \alpha_j \in I_-\}$.*

Prueba. Veremos como el Corolario 1.12 en [AG] se aplica al caso en que $U = \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$, con lo cual obtendremos una prueba del Lema. A saber, analizaremos la noción de ser F-compatible en nuestro caso particular, donde $G(U)$ es un grupo abeliano. Probaremos que $\dim R(1)^g = 1$ para todo $g \in \operatorname{Supp} R(1)$. Aquí $\operatorname{Supp} N := \{g \in G : N^g \neq 0\}$ para un subespacio vectorial N de R y $N^g = \{r \in N : \rho(r) = g \otimes r\}$.

$\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$ tiene una base PBW [AG, pág. 488] cuyos elementos son combinaciones lineales de monomios $\mathbf{E}^m\mathbf{K}_\alpha\mathbf{F}^v$, donde m, v están en $(\mathbb{Z}/(\ell))^N$, $\alpha \in P$ y $N \in \mathbb{N}$. Así, si $\mathbf{E}^m\mathbf{K}_\alpha\mathbf{F}^v \in R(1)^g$, entonces $\Delta(\mathbf{E}^m\mathbf{K}_\alpha\mathbf{F}^v) = \mathbf{E}^m\mathbf{K}_\alpha\mathbf{F}^v \otimes 1 + g \otimes \mathbf{E}^m\mathbf{K}_\alpha\mathbf{F}^v$ y $\rho(\mathbf{E}^m\mathbf{K}_\alpha\mathbf{F}^v) = g \otimes \mathbf{E}^m\mathbf{K}_\alpha\mathbf{F}^v$. Pero $\Delta_\varphi(G_i)$ es un binomio cuando G_i es E_i o F_i. Si suponemos

$$\mathbf{E}^m = \prod_{i=1}^{N_1} E_i^{m_i} \qquad (m = (m_1, \dots, m_{N_1}),\ m_i \in (\mathbb{Z}/(\ell))),$$

$$\mathbf{F}^v = \prod_{i=1}^{N_2} F_i^{v_j} \qquad (v = (v_1, \dots, v_{N_2}),\ v_j \in (\mathbb{Z}/(\ell))),$$

$$\mathbf{K}_\alpha = \prod_{i=1}^{n} K_{\omega_i}^{a_i} \qquad a_i \in (\mathbb{Z}/(\ell)),$$

por independencia lineal y definición del coproducto en $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$, sucede que el elemento $\Delta_\varphi(\mathbf{E}^m\mathbf{K}_\alpha\mathbf{F}^v) = \Delta_\varphi(\mathbf{E})^m\Delta_\varphi(\mathbf{K})_\alpha\Delta_\varphi(\mathbf{F})^v$ tiene $2^{\sum m_i+\sum v_j}$ sumandos. De nuevo, por la definición de coproducto es posible chequear que, si las x_i son linealmente independientes, entonces las $\Delta_\varphi(x_i)$ también lo son. De manera que la cantidad de sumandos en $\Delta_\varphi(\sum x_i)$ es la suma de la cantidad de sumandos de las x_i.

Debe pasar en $\mathbf{E}^m\mathbf{K}_\alpha\mathbf{F}^v$, que el soporte de m y v es m_i ó v_j para algún i ó j. Así $\mathbf{E}^m\mathbf{K}_\alpha\mathbf{F}^v = E_i\mathbf{K}_\alpha$ ó $\mathbf{E}^m\mathbf{K}_\alpha\mathbf{F}^v = \mathbf{K}_\alpha F_i$, pero entonces

$$\begin{aligned}\Delta_\varphi(E_i\mathbf{K}_\alpha) &= \Delta_\varphi(E_i)\Delta_\varphi(\mathbf{K}_\alpha)\\ &= E_i\mathbf{K}_\alpha \otimes K_{\tau_i}\mathbf{K}_\alpha + \mathbf{K}_\alpha K_{\alpha_i-\tau_i} \otimes E_i\mathbf{K}_\alpha.\end{aligned}$$

Pero de nuevo por independencia lineal, $\mathbf{K}_\alpha K_{-\tau_i} = 1$ y así $\mathbf{K}_\alpha = K_{\tau_i}$, de lo que concluimos que $g = K_{(1-\phi)(-\alpha_i)}$ y $\dim R(1)^g = 1$. Análogamente usamos un argumento similar para el caso $\mathbf{K}_\alpha F_i$

Finalmente, $\Delta_\varphi(\widetilde{E}_i) = \widetilde{E}_i \otimes 1 + K_{(1-\varphi)(\alpha_i)} \otimes \widetilde{E}_i$ y $\Delta_\varphi(\widetilde{F}_j) = \widetilde{F}_j \otimes 1 + K_{(1+\phi)(\alpha_j)} \otimes \widetilde{F}_j$. También, $\rho(\widetilde{E}_i) = K_{(1-\varphi)(\alpha_i)} \otimes \widetilde{E}_i$ y $\rho(\widetilde{F}_j) = K_{(1+\varphi)(\alpha_j)} \otimes \widetilde{F}_j$, de ahí $\widetilde{E}_i \in R(1)^{K_{(1-\varphi)(\alpha_i)}}$ y $\widetilde{F}_j \in R(1)^{K_{(1+\varphi)(\alpha_j)}}$. Entonces, usando [AG, Corolario 1.12] obtenemos lo deseado.

□

Capítulo 4

Núcleos de Frobenius-Lusztig Regulares Torcidos

En el capítulo anterior definimos una parametrización por ternas $(I_+, I_-, \Sigma^\varphi)$, de las subálgebras de Hopf de $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$. Veremos como esta terna se relaciona con un subgrupo algebraico de G. Esto nos permitirá construir los *subgrupos cuánticos torcidos* $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(P)$ y los *núcleos de Frobenius-Lusztig torcidos* $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})$. También daremos una caracterización de los cocientes de $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})^*$, la cual podremos agrupar en dos grandes grupos, aquellos que mantienen invariante el toro $\mathbb{T}^\varphi$ y los que no. Lo interesante es que los primeros resultan ser deformaciones por 2-cociclo del caso $\varphi = 0$ y los segundos no necesariamente. En ambos casos obtenemos nuevos ejemplos de álgebras de Hopf, ampliando los encontrados en [AG]. El capítulo generaliza los resultados obtenidos en [AG] para el caso $\varphi = 0$.

4.1. Subgrupos cuánticos regulares torcidos

Definición 4.1.1. Para cada par (I_+, I_-) con $I_\pm \subset \pm\Pi$, definimos $\Gamma^\varphi(\mathfrak{p})$ como la subálgebra de $\Gamma^\varphi(\mathfrak{g})$ generada por los elementos

$$
\begin{aligned}
K_{\alpha_i}^{-1} & && (1 \leq i \leq n),\\
\binom{K_{\alpha_i}; 0}{m} &:= \prod_{s=1}^{m} \left(\frac{K_{\alpha_i} q_i^{-s+1} - 1}{q_i^s - 1} \right) && (m \geq 1, 1 \leq i \leq n),\\
E_j^{(m)} &:= \frac{E_j^m}{[m]_{q_j}!} && (m \geq 1, \alpha_j \in I_+),\\
F_k^{(m)} &:= \frac{F_k^m}{[m]_{q_k}!} && (m \geq 1, \alpha_k \in I_-).
\end{aligned}
$$

Proposición 4.1.2. *[AG, Proposition 2.3 (a)] Sea* $\Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p}) := \Gamma^\varphi(\mathfrak{p})/[\chi_\ell(q)\Gamma^\varphi(\mathfrak{p})] \simeq \Gamma^\varphi(\mathfrak{p}) \otimes_R R/[\chi_\ell(q)R]$, *la* $\mathbb{Q}(\epsilon)$*-álgebra dada al especializar en* ϵ. *Entonces* $\Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})$ *es una subálgebra de Hopf de* $\Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$.

Prueba. Usando (2.12) es posible chequear que el coproducto sobre elementos de $\Gamma^\varphi(\mathfrak{p})$ esta en $\Gamma^\varphi(\mathfrak{p}) \otimes \Gamma^\varphi(\mathfrak{p})$, debido a que E_j es $(K_{\tau_j}, K_{\alpha_j-\tau_j})$-primitivo, F_k es $(K_{-\alpha_k-\tau_k}, K_{\tau_k})$-primitivo y los elementos K_{α_i} son de tipo grupo. La antípoda esta dada por $\mathcal{S}_\varphi(E_j) = -K_{-\alpha_j}E_j$, $\mathcal{S}_\varphi(F_k) = -F_kK_{\alpha_k}$ y $\mathcal{S}_\varphi(K_{\alpha_i}) = K_{-\alpha_i}$ para $1 \leq i \leq n$, $j \in I_+$ y $k \in I_-$. Así que $\Gamma^\varphi(\mathfrak{p})$ es una subálgebra de Hopf de $\Gamma^\varphi(\mathfrak{g})$ y $\Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})$ de $\Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$. □

La siguiente definición es la versión torcida del *núcleo de Frobenius-Lusztig regular* dada en [AG, § 2.1.2].

Definición 4.1.3. Para cada par (I_+, I_-) con $I_\pm \subset \pm\Pi$, definimos el *el núcleo de Frobenius-Lusztig regular torcido* $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})$ como la subálgebra de $\Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})$ generada por los elementos

$$\{K_{\alpha_i}, E_j, F_k : 1 \leq i \leq n, \alpha_j \in I_+, \alpha_k \in I_-\}.$$

Proposición 4.1.4. $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})$ *es una subálgebra de Hopf de* $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$ *dada por* $\Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p}) \cap \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g}) = \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})$. *Esta corresponde a la terna* $(I_+, I_-, \mathbb{T}^\varphi)$.

Prueba. Se sigue de la Proposición 3.3.4 y el Lema 3.3.7. □

Proposición 4.1.5.

(*i*) *Sea* $U(\mathfrak{p})_{\mathbb{Q}(\epsilon)} := \mathrm{Fr}(\Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p}))$ *y denote* $\mathrm{Fr}_{res} = \mathrm{Fr}\,|_{\Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})}$. *Entonces el siguiente diagrama es conmutativo y sus filas son sucesiones exactas de álgebras de Hopf.*

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & \Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\mathrm{Fr}} & U(\mathfrak{g})_{\mathbb{Q}(\epsilon)} & \longrightarrow & 1 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p}) & \longrightarrow & \Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p}) & \xrightarrow{\mathrm{Fr}_{res}} & U(\mathfrak{p})_{\mathbb{Q}(\epsilon)} & \longrightarrow & 1. \end{array} \tag{4.1}$$

(*ii*) *Hay un morfismo sobreyectivo de álgebras* $\theta : \Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p}) \to \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})$ *tal que* $\theta|_{\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})} = \mathrm{id}$.

Prueba. (*i*) Se sigue de [CV2, DL] y Proposición 3.2.6 que $\operatorname{Ker}\mathrm{Fr} = \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})^+\Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$. La prueba de que $\Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})^{\operatorname{co}\mathrm{Fr}} = \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$ se sigue de [A1, Lema 3.4.2], pero usando la fórmula (2.12) por la fórmula [A1, (1.1.3)]. Obtenemos por ejemplo la siguiente ecuación, para un $x \in \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$,

$$\mathrm{Ad}(E_i^{(\ell)})(x) = \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^j \epsilon^{d_i j(\ell-j)} E_i^{(\ell-j)} K^j_{(\alpha_i-\tau_i)} x K_{\tau_i}^{-(\ell-j)} K_{\alpha_i}^{-j} E_i^{(j)}.$$

Gracias a lo probado en la Observación 2.1.3, es posible rehacer los demás argumentos para el caso torcido. Con lo que establecemos que la primera fila del diagrama es exacta. Para probar que la segunda fila es exacta, note que $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p}) = \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g}) \cap \Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p}) = \Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})^{\operatorname{co}\operatorname{Fr}} \cap \Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p}) = \Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^{\operatorname{co}\operatorname{Fr}_{res}}$ y por [AG, Observación 2.5 (b)] $\operatorname{Ker}\operatorname{Fr}_{res}$ es el ideal bilátero

$$\left\{E_j^{(m)},\ F_k^{(m)},\ \binom{K_{\alpha_i};0}{m},\ K_{\alpha_i}-1:\ 1\le i\le n,\ m\ge 0,\ l\nmid m,\ j\in I_+,\ k\in I_-\right\}$$

así $\operatorname{Ker}\operatorname{Fr}_{res} = \operatorname{Ker}\operatorname{Fr}\cap\Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p}) = \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})^+\Gamma^\varphi(\mathfrak{g}) \cap \Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p}) = \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^+\Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})$. Es claro que el diagrama conmuta.

(*ii*) Se sigue de [AG, Lema 1.10 & Proposición 2.6]. □

Observación 4.1.6. Es conocido que el conjunto de elementos primitivos de $U(\mathfrak{p})_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$ es un álgebra de Lie. Como $U(\mathfrak{p})_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \subset U(\mathfrak{g})_{\mathbb{Q}(\epsilon)}$ y $\mathfrak{g} = P(U(\mathfrak{g})_{\mathbb{Q}(\epsilon)})$, entonces $\mathfrak{p} = P(U(\mathfrak{p})_{\mathbb{Q}(\epsilon)})$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$. Por definición de Fr tenemos que $\mathfrak{p}$ debe ser generada por el conjunto $\{h_i, e_j, f_k : 1 \le i \le n, \alpha_j \in I_+, \alpha_k \in I_-\}$, así si $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-$ con $\mathfrak{h}$ la subálgebra de Cartan generada por las h_i y $\mathfrak{n}_\pm$ las subálgebras de Lie nilpotentes asociadas, entonces $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}_-$ donde $\mathfrak{p}_\pm \subset \mathfrak{n}_\pm$. Lo que nos dice que $\mathfrak{p}$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ regular.

Proposición 4.1.7. $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})$ *es una deformación por twist de* $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{p})$.

Prueba. Sabemos que $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g}) \simeq \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^J$ para un twist $J \in \mathbb{Q}(\epsilon)[\mathbb{T}^\varphi \times \mathbb{T}^\varphi]$ cf. Proposición 3.3.6. De ahí, $J \in \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{p}) \otimes \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{p})$ y $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{p})^J$ es la subálgebra $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^J$ que es isomorfa a la subálgebra de Hopf de $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$ que corresponde a la terna $(I_+, I_-, \mathbb{T}^\varphi)$. Por tanto, $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{p})^J \simeq \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})$. □

Para $I_\pm \subseteq \pm\Pi$, sea $\Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})$ el álgebra de Hopf asociada al par (I_+, I_-) dada en la Definición 4.1.1, donde $\mathfrak{p}$ es la subálgebra regular de Lie de $\mathfrak{g}$ descrita en la Observación 4.1.6. Construiremos en esta sección un subgrupo cuántico de $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$ asociado al par (I_+, I_-) y conteniendo como subálgebra central de Hopf, el álgebra de funciones regulares de un subgrupo algebraico P de G, tal que $\operatorname{Lie}(P) = \mathfrak{p}$.

Denotemos por $\operatorname{Res} : \Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})^\circ \to \Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^\circ$ al morfismo sobreyectivo de álgebras de Hopf dual a la inclusión $\Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p}) \hookrightarrow \Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$. Por el apareamiento de álgebras de Hopf 3.2.4, sabemos que $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G) \subseteq \Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})^\circ$.

Definición 4.1.8. El *álgebra cuantizada torcida asociada a la subálgebra* $\mathfrak{p}$ *de* $\mathfrak{g}$ o *subgrupo cuántico regular torcido* se define por

$$\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(P) := \operatorname{Res}(\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)).$$

Notemos que si $\varphi = 0$ entonces $\mathcal{O}_\epsilon^0(P) = \mathcal{O}_\epsilon(P)$ cf. [AG, §2.3.1]. Como $\mathcal{O}(G)$ es una subálgebra central de $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$ (3.2.7), $\operatorname{Res}(\mathcal{O}(G))$ es también una subálgebra de

Hopf central de $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(P)$. Por la dualidad de álgebras de Hopf conmutativas y grupos algebraicos (ver Ejemplo 1.2.45), existe un subgrupo algebraico P de G tal que $\mathrm{Res}(\mathcal{O}(G)) = \mathcal{O}(P)$. Ya que $\mathcal{O}(P)$ es una subálgebra central de $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(P)$, el siguiente cociente es un álgebra de Hopf

$$\overline{\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(P)} := \mathcal{O}_\epsilon^\varphi(P)/[\mathcal{O}(P)^+\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(P)].$$

Proposición 4.1.9.

(*i*) *P es un grupo algebraico conexo tal que* $\mathrm{Lie}(P) = \mathfrak{p}$.

(*ii*) *La siguiente sucesión de álgebras de Hopf es exacta*

$$1 \longrightarrow \mathcal{O}(P) \longrightarrow \mathcal{O}_\epsilon^\varphi(P) \longrightarrow \overline{\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(P)} \longrightarrow 1.$$

(*iii*) *Hay un morfismo sobreyectivo de álgebras de Hopf* $\overline{\mathrm{Res}} : \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})^* \to \overline{\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(P)}$ *para el cual el siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathcal{O}(G) & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G) & \xrightarrow{\pi} & \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})^* & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{res}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\mathrm{Res}}} & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathcal{O}(P) & \xrightarrow{\iota_P} & \mathcal{O}_\epsilon^\varphi(P) & \xrightarrow{\pi_P} & \overline{\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(P)} & \longrightarrow & 1. \end{array} \tag{4.2}$$

(*iv*) *$\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(P)$ y $\overline{\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(P)}$ son deformaciones por 2-cociclo de $\mathcal{O}_\epsilon(P)$ y $\overline{\mathcal{O}_\epsilon(P)}$ respectivamente.*

(*v*) $\overline{\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(P)} \simeq \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^*$ *como álgebras de Hopf.*

Prueba (Idea). (*i*) Seguiremos la prueba de [AG, Proposición 2.7] para establecer la validez de este item. Dualizando el diagrama 4.1 se chequea que $\mathcal{O}(P) \subset U(\mathfrak{p})^\circ$. Por [Ho1, §XVI.3] se sabe que $U(\mathfrak{p})^\circ$ es un dominio íntegro, y por tanto $\mathcal{O}(P)$. De manera que, P es una variedad irreducible y de ahí conexa.

Antes de continuar, recordemos que una subálgebra de Lie $\mathfrak{t}$ de $\mathfrak{g}$ es *algebraica,* si existe un subgrupo algebraico $K \subset G$ tal que $\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(K)$. Y $\mathfrak{t}^+$ es la *cápsula algebraica* de $\mathfrak{t}$ si $\mathfrak{t}^+$ es una subálgebra algebraica de $\mathfrak{g}$ conteniendo a $\mathfrak{t}$, y si $\mathfrak{a}$ es cualquier subálgebra algebraica de $\mathfrak{g}$ conteniendo a $\mathfrak{t}$ entonces $\mathfrak{t}^+ \subset \mathfrak{a}$.

Para continuar con la prueba, se mostrará que $\mathrm{Lie}(P)$ es la cápsula algebraica de $\mathfrak{p}$ y que $\mathfrak{p}$ es un álgebra de Lie algebraica. Como $\operatorname{Ker} \mathrm{Res}\,|_{\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)} = \{f \in \mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G) : f|_{\Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})} = 0\}$ y ${}^t\mathrm{Fr}$ es un morfismo inyectivo que incrusta $\mathcal{O}(G)$ en $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$, se tiene que $\mathcal{O}(P) \simeq \mathcal{O}(G)/J$, donde

$$\begin{aligned} J =& \{f \in \mathcal{O}(G) : f(\mathrm{Fr}(x)) = 0, \text{ para todo } x \in \Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})\} \\ =& \{f \in \mathcal{O}(G) : f(y) = 0, \text{ para todo } y \in \Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})\}. \end{aligned}$$

Sabemos por [FR, Lema 6.9] que $\mathrm{Lie}(P) = \{\tau \in \mathfrak{g} : f(\tau) = 0, \text{ para todo } f \in J\}$, entonces por el teorema PWB se sigue que $\mathfrak{p} \subset \mathrm{Lie}(P)$. Sea $L \subseteq G$ tal que $\mathfrak{p} \subset \mathrm{Lie}(L) =: \mathfrak{l}$ y denotemos por $\mathcal{I}$ al ideal definido de manera análoga a J, pero usando $\mathfrak{l}$ y no $\mathfrak{p}$. Así que $\mathfrak{l} = \{\tau \in \mathfrak{g} : f(\tau) = 0, \forall f \in \mathcal{I}\}$. Pero como $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{l}$, sucede que $\mathcal{I}(\mathfrak{p}) = 0$. El apareamiento dual $\langle \mathcal{O}(G), U(\mathfrak{g})\rangle$ es multiplicativo, por tanto $\mathcal{I} \subseteq J$ y de ahí $P \subseteq L$. Entonces $\mathrm{Lie}(P) \subseteq \mathfrak{l}$ para toda subálgebra de Lie algebraica de $\mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{l}$, lo que implica que $\mathrm{Lie}(P) = \mathfrak{p}^+$. Para ver que es algebraica, basta mirar los dos últimos pasos de la demostración en [AG, Proposición 2.7].

(*ii*) Estableceremos los detalles de esta demostración en la Proposición 5.1.1.

(*iii*) El primer cuadrado del diagrama conmuta por definición. Ya que la sucesión (3.3) es exacta, tenemos que $\operatorname{Ker}\pi = \mathcal{O}(G)^+\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$ y $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})^* \simeq \mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)/[\mathcal{O}(G)^+\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)]$. Tenemos además que $\pi_P \operatorname{Res}(\operatorname{Ker}\pi) = \pi_P(\mathcal{O}(P)^+\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(P)) = 0$ y de ahí existe un morfismo de álgebras de Hopf $\overline{\mathrm{Res}} : \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})^* \to \overline{\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(P)}$, el cual hace que el diagrama (4.2) sea conmutativo.

(*iv*) Por el Lema 3.2.2, sabemos que $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$ es una deformación por 2-cociclo de $\mathcal{O}_\epsilon(G)$, hemos denotado este 2-cociclo por $\bar\sigma$. El núcleo $\mathcal{I}$ del morfismo de álgebras de Hopf $\mathrm{Res} : \mathcal{O}_\epsilon(G) \to \mathcal{O}_\epsilon(P)$, es generado por coeficientes matriciales $c_{f,v}$ que se anulan al ser restringidos a $\Gamma_\epsilon(\mathfrak{p})$. En particular, ya que $1 \in \Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})$, tenemos que $0 = c_{f,v|\Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})}(1) = f(v) = \varepsilon(c_{f,v|\Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})})$. Usando la definición de $\bar\sigma$ donde $\bar\sigma(\bar x, \bar y) = \overline{\sigma(x,y)}$ para todo $x, y \in \mathcal{O}_q(G)$ y $\sigma(c_{f_1,v_1}, c_{f_2,v_2}) = \varepsilon(c_{f_1,v_1})\varepsilon(c_{f_2,v_2})q^{-\frac{1}{2}(\varphi(\lambda_1),\lambda_2)}$ tenemos que $\bar\sigma|_{\mathcal{I}\otimes\mathcal{O}_\epsilon(G)+\mathcal{O}_\epsilon(G)\otimes\mathcal{I}} = 0$. Así, por la Observación 1.3.6, Res induce una deformación por 2-cociclo $\bar\sigma_{\mathrm{Res}}$ sobre $\mathcal{O}_\epsilon(G)/\mathcal{I}$ y sucede que $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(P) = \mathrm{Res}((\mathcal{O}_\epsilon(G))_{\bar\sigma}) = (\mathcal{O}_\epsilon(G)/\mathcal{I})_{\bar\sigma_{\mathrm{Res}}} = (\mathcal{O}_\epsilon(P))_{\bar\sigma_{\mathrm{Res}}}$. Similarmente podemos usar la Observación 1.3.6 para $\overline{\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(P)}$ y $\overline{\mathcal{O}_\epsilon(P)}$, ya que el cociclo $\bar\sigma_{\mathrm{Res}}$ es trivial sobre $\mathcal{O}(P)\otimes\mathcal{O}(P)$. Lo cual se deduce de que $\mathcal{O}(P)$ es una subálgebra central $\mathcal{O}_\epsilon(P)$, a la caracterización de $\mathcal{O}(G)$ dada en la Proposición 3.2.7 y que $\mathcal{O}(P) \subset \mathcal{O}(G)$.

(*v*) Dualizando el diagrama (4.1) tenemos que

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & U(\mathfrak{g})^\circ & \xrightarrow{{}^t\mathrm{Fr}} & \Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})^\circ & \xrightarrow{\alpha} & \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})^* & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}} & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & U(\mathfrak{p})^\circ & \xrightarrow{{}^t\mathrm{Fr}_{res}} & \Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^\circ & \xrightarrow{\beta} & \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^* & \longrightarrow & 1.
\end{array}$$

Debido a que $\mathfrak{g}$ es simple, pasa que $\mathcal{O}(G) \simeq U(\mathfrak{g})^\circ$. De ahí, como $\mathcal{O}(P) = \mathrm{Res}(\mathcal{O}(G))$ y $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(P) = \mathrm{Res}(\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G))$, tenemos que ${}^t\mathrm{Fr}_{res}(\mathcal{O}(P)) \subseteq U(\mathfrak{p})^\circ$ y por tanto $\mathcal{O}(P)^+ \subseteq \operatorname{Ker}\beta$. Más aún, ya que $\alpha(\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)) = \pi(\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)) = \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})^*$, sucede que $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^* = \beta\operatorname{Res}(\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)) = \beta(\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(P))$. Así que, existe un morfismo sobreyectivo de álgebras de Hopf $\gamma : \overline{\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(P)} \to \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^*$. Pero por (*iv*), [AG, Proposición 2.8 (c)] y Proposición 4.1.7, tenemos que $\dim\overline{\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(P)} = \dim\overline{\mathcal{O}_\epsilon(P)} = \dim\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{p}) = \dim\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})$ y entonces el morfismo sobreyectivo es realmente un isomorfismo. □

Observación 4.1.10. Por la proposición anterior, sabemos que el subgrupo cuántico $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(P)$ encaja en la sucesición exacta corta central de álgebras de Hopf $1 \longrightarrow \mathcal{O}(P) \longrightarrow$

$\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(P) \longrightarrow \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^* \longrightarrow 1$ y que $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(P)$ es una deformación por 2-cociclo de $\mathcal{O}_\epsilon(P)$, donde el 2-cociclo $\hat{\sigma}$ es dado por la fórmula $\bar{\sigma}_{\mathrm{Res}}(\mathrm{Res}(x), \mathrm{Res}(y)) = \bar{\sigma}(x, y)$ para todo $x, y \in \mathcal{O}_\epsilon(G)$. Por otro lado, por las Proposiciones 3.3.6 y 4.1.7 sabemos que $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^* = (\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{p})^*)_\tau$ para el 2-cociclo τ dado por $\tau(\overline{\mathrm{Res}}(\pi(x)), \overline{\mathrm{Res}}(\pi(y)) = \bar{\sigma}(x, y)$. Ya que el diagrama (4.2) para $\varphi = 0$ es conmutativo cf. [AG], el pullback del cociclo τ coincide con el cociclo $\bar{\sigma}_{\mathrm{Res}}$.

4.2. Cocientes de $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})^*$

Para la presente subsección, denotaremos la $\mathbb{C}$-forma del núcleo de Frobenius-Lusztig torcido por $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$ nuevamente. Sea H un cociente de álgebras de Hopf de $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})^*$. Entonces, H^* es una subálgebra de Hopf de $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$. Por el Lema 3.3.7, ella esta determinada por una terna $(I_+, I_-, \Sigma^\varphi)$. Sea $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})$ el núcleo de Frobenius-Lusztig regular torcido asociado al par (I_+, I_-). Entonces, tenemos las inclusiones $H^* \hookrightarrow \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p}) \hookrightarrow \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$ como álgebras de Hopf y por tanto la sucesión de morfismos sobreyectivos de álgebras de Hopf siguiente

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})^* & \longrightarrow & \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^* \\ & \searrow & \downarrow \nu \\ & & H \end{array}$$

Sean $I = I_+ \cup I_-$, $I' = I_+ \cap I_-$ y $I^c = (I_+ \cup I_-)^c = I_+^c \cap I_-^c$. Se definen los subgrupos $\mathbb{T}_I^\varphi$ y $\mathbb{T}_{I'}^\varphi$ de Σ^φ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_I^\varphi &= \langle \overline{K}_i := K_{(1-\varphi)(\alpha_i)}, \widetilde{K}_j := K_{(1+\varphi)(\alpha_j)} : \quad \text{si } \alpha_i \in I_+, \alpha_j \in I_- \rangle, \\ \mathbb{T}_{I'}^\varphi &= \langle K_{\alpha_i} : \quad \text{si } \alpha_i \in I_+ \cap I_- \rangle. \end{aligned}$$

Note que si $\alpha_i \in I_+ \cap I_-$, entonces $K_{\alpha_i} \in \mathbb{T}_I^\varphi$. De ahí, es válido $\mathbb{T}_{I'}^\varphi \subseteq \mathbb{T}_I^\varphi \subseteq \Sigma^\varphi \subseteq \mathbb{T}^\varphi$. Denotemos por $\mathbb{T}_{I^c}^\varphi = \mathbb{T}^\varphi / \mathbb{T}_I^\varphi$ y $\Omega^\varphi = \Sigma^\varphi / \mathbb{T}_I^\varphi$, así que $\Omega^\varphi \subseteq \mathbb{T}_{I^c}^\varphi$.

Definición 4.2.1. Para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\alpha_i \in (I_+ \cap I_-)^c$, definimos el morfismo de álgebras $D_i : \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p}) \to \mathbb{C}$, por

$$D_i(E_j) = 0 = D_i(F_k), \qquad D_i(K_{\alpha_t}) = \epsilon^{\delta_{it}}, \quad \text{para todo } \alpha_j \in I_+,\ \alpha_k \in I_-,\ t \in \{1 \dots n\}.$$

Note que si aceptáramos que $\alpha_i \in I_+ \cap I_-$, entonces la relación $E_i F_i - F_i E_i = \frac{K_{\alpha_i} - K_{\alpha_i}^{-1}}{\epsilon - \epsilon^{-1}}$ de la Definición 2.1.2, implicaría un absurdo al considerar el correspondiente D_i. Si $(I_+ \cap I_-)^c = \emptyset$, tenemos que $I_+ = I_- = I$ y así no habría i tal que D_i este bien definido. Esto coincide con el hecho de que $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})^*$ tiene como único elemento de tipo grupo, la counidad.

Observación 4.2.2.

(*a*) Para $1 \leq i \leq n$, sea $\hat{D}_i \in \widehat{\mathbb{T}^\varphi}$ dado por $\hat{D}_i(K_{\alpha_t}) = \epsilon^{\delta_{it}}$ para todo $1 \leq t \leq n$. Entonces $\langle \hat{D}_i : \ 1 \leq i \leq n \rangle = \widehat{\mathbb{T}^\varphi}$ y podemos identificar $(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^n \simeq \widehat{\mathbb{T}^\varphi}$ vía $z \mapsto \hat{D}^z = \hat{D}_1^{z_1} \cdots \hat{D}_n^{z_n}$. En particular, se tiene que $\hat{D}_i = D_i|_{\mathbb{T}^\varphi}$ para todo $i \in (I_+ \cap I_-)^c$.

(*b*) Sea $(I_+ \cap I_-)^c = \{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_m}\}$. Para todo $z \in (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^m$, denotemos

$$D^z = D_{i_1}^{z_1} \cdots D_{i_m}^{z_m} \in G(\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^*).$$

Si $f \in G(\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^*)$ entonces $f = D^z$ para algún $z \in (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^m$. A saber, como f es un morfismo de álgebras, al evaluarlo en los generadores de $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})$ satisface que $f(G_j)^\ell = f(G_j^\ell) = 0$ y $f(K_{\alpha_i})^\ell = f(K_{\alpha_i}^\ell) = 1$ lo que implica $f(G_j) = 0$ y $f(K_{\alpha_{i_k}}) = \epsilon_i$ donde G_j es E_j o F_j con $\alpha_j \in I$, ϵ_i una ℓ-raíz de la unidad y $\alpha_{i_k} \in (I_+ \cap I_-)^c$. Pero como ϵ es una raíz primitiva de la unidad es válido que $\epsilon_i = \epsilon^{z_k}$ para algún número entero z_k. Así el morfismo $D^z = D_{i_1}^{z_1} \cdots D_{i_m}^{z_m}$ es igual a f.

En particular podemos hacer la identificación

$$G(\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^*) \simeq \widehat{\mathbb{T}^\varphi/\mathbb{T}_{I'}^\varphi} \simeq (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^m.$$

(*c*) Como $\mathbb{T}_{I'}^\varphi \subseteq \mathbb{T}_I^\varphi$, hay un morfismo de grupos inyectivo $\widehat{\mathbb{T}_{I^c}^\varphi} \hookrightarrow \widehat{\mathbb{T}^\varphi/\mathbb{T}_{I'}^\varphi} = G(\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^*)$ dado por la composición $\mathbb{T}^\varphi/\mathbb{T}_{I'}^\varphi \twoheadrightarrow \mathbb{T}_{I^c}^\varphi \xrightarrow{f} \mathbb{C}$. para cualquier $f \in \widehat{\mathbb{T}_{I^c}^\varphi}$.

(*d*) Las inclusiones $\mathbb{T}_I^\varphi \overset{\iota}{\hookrightarrow} \Sigma^\varphi \overset{j}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^\varphi$ inducen los morfismos de grupos sobreyectivos $\widehat{\mathbb{T}^\varphi} \overset{{}^tj}{\twoheadrightarrow} \widehat{\Sigma^\varphi}$ con $\operatorname{Ker}\ {}^tj = \{f \in \widehat{\mathbb{T}^\varphi} : \ f(\Sigma^\varphi) = 1\}$ y $\widehat{\mathbb{T}_{I^c}^\varphi} \overset{{}^tj_s}{\twoheadrightarrow} \widehat{\Omega^\varphi}$ con $N^\varphi = \operatorname{Ker}\ {}^tj_s = \{f \in \widehat{\mathbb{T}_{I^c}^\varphi} : \ f(\Omega^\varphi) = 1\}$. En particular tenemos,

$$|\Sigma^\varphi| = |\mathbb{T}_I^\varphi||\Omega^\varphi| = |\mathbb{T}_I^\varphi|\frac{|\mathbb{T}_{I^c}^\varphi|}{|N^\varphi|} = |\mathbb{T}_I^\varphi|\frac{|\mathbb{T}^\varphi|}{|\mathbb{T}_I^\varphi||N^\varphi|} = \frac{\ell^n}{|N^\varphi|}. \tag{4.3}$$

Más aún, $\operatorname{Ker}\ {}^t(j\iota) \simeq \widehat{\mathbb{T}_{I^c}^\varphi}$, ya que existe un morfismo de grupos injectivo $\operatorname{Ker}\ {}^t(j\iota) \to \widehat{\mathbb{T}_{I^c}^\varphi}$ y $|\operatorname{Ker}\ {}^t(j\iota)| = |\mathbb{T}_{I^c}^\varphi|$. Por esto, de ahora en adelante identificaremos los elementos $\widehat{\mathbb{T}_{I^c}^\varphi}$ con los de $\operatorname{Ker}\ {}^t(j\iota)$. Por otro lado, si denotamos con $\hat{D}^z = \hat{D}_1^{z_1} \cdots \hat{D}_n^{z_n}$ para todo $z = (z_1, \dots, z_n) \in (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^n$, entonces

$$\operatorname{Ker}\ {}^t(j\iota) = \{\hat{D}^z |\ \hat{D}^z(\overline{K}_i) = 1 = \hat{D}^z(\widetilde{K}_j),\ i \in I_+,\ j \in I_-,\ z \in (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^n\} \simeq \widehat{\mathbb{T}_{I^c}^\varphi}.$$

Por lo tanto, si $\hat{D}^z \in \operatorname{Ker}\ {}^t(j\iota)$, entonces

$$1 = \hat{D}^z(\overline{K}_i) = \hat{D}^z(K_{(1-\varphi)(\alpha_i)}) = \hat{D}^z(K_{\alpha_i}\prod_{j=1}^n K_{\alpha_j}^{-2y_{ji}}) = \epsilon^{z_i}\prod_{j=1}^n \epsilon^{-2y_{ji}z_j}, \tag{4.4}$$

$$1 = \hat{D}^z(\widetilde{K}_j) = \hat{D}^z(K_{(1+\varphi)(\alpha_j)}) = \hat{D}^z(K_{\alpha_j}\prod_{k=1}^n K_{\alpha_j}^{2y_{kj}}) = \epsilon^{z_j}\prod_{k=1}^n \epsilon^{2y_{kj}z_j}, \tag{4.5}$$

para todo $i \in I_+$ y $j \in I_-$. Para encontrar los generadores de Ker ${}^t(j\iota)$ es suficiente resolver el sistema lineal sobre $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$. A saber, si $I_+ = \{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_s}\}$ e $I_- = \{\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_r}\}$, por (4.4) y (4.5) tenemos un sistema de ecuaciones lineales sobre $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$, cuya matriz S_ℓ^φ esta dada por

$$\begin{pmatrix}
2y_{i_1 1} & \dots & 2y_{i_1 i_s} & \dots & 2y_{i_1 j_1} & \dots & 2y_{i_1 j_l} & \dots & 2y_{i_1 i_1} - 1 & \dots & 2y_{i_1 n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
2y_{i_s 1} & \dots & 2y_{i_s i_s} + 1 & \dots & 2y_{i_s j_1} & \dots & 2y_{i_s j_l} & \dots & 2y_{i_s i_1} & \dots & 2y_{i_s n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
2y_{j_1 1} & \dots & 2y_{j_1 i_s} & \dots & 2y_{j_1 j_1} - 1 & \dots & 2y_{j_1 j_l} & \dots & 2y_{j_1 i_1} & \dots & 2y_{j_1 n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
2y_{j_l 1} & \dots & 2y_{j_l i_s} & \dots & 2y_{j_l j_1} & \dots & 2y_{j_l j_l} + 1 & \dots & 2y_{j_l i_1} & \dots & 2y_{j_l n}
\end{pmatrix}$$

Note que, $|\operatorname{Ker}\ {}^t(j\iota)| = |\widehat{\mathbb{T}_{I^c}^\varphi}| = \ell^{n - \operatorname{rg} S_\ell^\varphi}$. De la misma manera es posible caracterizar el núcleo N^φ. En este caso, debemos considerar el sistema de ecuaciones determinado por las condiciones $\hat{D}^z(\Omega^\varphi) = 1$ para todo $\hat{D}^z \in \widehat{\mathbb{T}_{I^c}^\varphi}$.

Ejemplo 4.2.3. Asuma que $\mathfrak{g}$ es de tipo C_3 y $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ es la matriz de Cartan asociada. Entonces la matriz multiparamétrica Y es la siguiente

$$Y = \begin{pmatrix} a + b/2 & -a + c/2 & -b/2 - c/2 \\ 2a + b & -a + c & -b/2 - c \\ 2a + 3b/2 & -a + 3c/2 & -b/2 - c \end{pmatrix},$$

donde $a \in \mathbb{Z}$, y $b, c \in 2\mathbb{Z}$. Si $a = 1$, $b = 2$, $c = 0$ y $\ell = 11$. Entonces, $\varphi(\alpha_1) = 4\alpha_1 + 8\alpha_2 + 10\alpha_3$, $\varphi(\alpha_2) = -2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\alpha_3$ y $\varphi(\alpha_3) = -2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\alpha_3$.

(*a*) Si escogemos $I_+ = \{\alpha_2\}$ e $I_- = \{\alpha_1\}$, entonces $S_{11}^\varphi = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 8 & 10 \\ 2 & 3 & 2 \end{smallmatrix}\right) \sim \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 10 \end{smallmatrix}\right)$ y $\widehat{\mathbb{T}_{I^c}^\varphi} = \langle \hat{D}_1^3 \hat{D}_2 \hat{D}_3 \rangle \simeq \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$. Si tomamos $\Sigma^\varphi = \langle K_{(1-\varphi)(\alpha_2)}, K_{(1+\varphi)(\alpha_1)}, K_{\tau_3}, K_{\tau_2} \rangle$, tenemos que $\Sigma^\varphi = \mathbb{T}^\varphi \simeq (\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^3$ y N^φ es trivial.

(*b*) Si escogemos $I_+ = \{\alpha_2\}$, $I_- = \emptyset$ y $\Sigma^\varphi = \langle K_{(1+\varphi)(\alpha_1)}, K_{(1-\varphi)(\alpha_2)} \rangle$, entonces tenemos que $\widehat{\mathbb{T}_{I^c}^\varphi} = \langle \hat{D}^{(1,0,10)}, \hat{D}^{(0,1,2)} \rangle \simeq (\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^2$, $\Omega^\varphi \simeq \langle K_{(1+\varphi)(\alpha_1)} \rangle$ y $N^\varphi = \langle \hat{D}^{(1,10,8)} \rangle$.

(*c*) Si $I_+ = \emptyset$, $I_- = \{\alpha_2\}$ y $\Sigma^\varphi = \langle K_{(1+\varphi)(\alpha_1)}, K_{(1-\varphi)(\alpha_2)} \rangle$. Entonces tenemos que $\mathbb{T}_{I^c}^\varphi \simeq \langle \hat{D}^{(1,0,5)}, \hat{D}^{(0,1,8)} \rangle$, $\Sigma^\varphi / \mathbb{T}_I^\varphi \simeq \langle K_{(1-\varphi)(\alpha_2)} \rangle \simeq \Omega^\varphi$ y $N^\varphi = \langle \hat{D}^{(3,1,1)} \rangle \simeq (\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})$.

(*d*) Si $I_- = \alpha_1 = I_+$, $\ell = 11$ y $\Sigma^\varphi = \mathbb{T}_{I^\varphi}$, reduciendo las matriz módulo 11

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 10 \\ 3 & 8 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 8 & 10 \\ 6 & 5 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 6 & 5 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tenemos que $\mathbb{T}_{I^c}^\varphi \sim \langle \hat{D}^{(0,1,8)} \rangle$, Ω^φ es trivial y $N^\varphi = \mathbb{T}_{I^c}^\varphi$. Es importante recordar que $\hat{D}_1$ no es considerado en este caso.

La siguiente proposición establece que los elementos $\widehat{\mathbb{T}_{I_c}^\varphi}$ son centrales en $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^*$. El interés de establecer esto, se debe a que este tipo de elementos son adecuados para construir ideales de Hopf y luego hacer cocientes. En particular, estableceremos que H se puede caracterizar en términos de estos elementos.

Proposición 4.2.4. *El subgrupo $\widehat{\mathbb{T}_{I_c}^\varphi}$ de $G(\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^*)$, consiste de elementos centrales de tipo grupo.*

Prueba. Por [L2, Theorem 6.7] y [AG, Page 288] $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})$ posee la siguiente base

$$\left\{\prod_{\beta\geq 0} F_\beta^{n_\beta}\prod_{i=1}^{n} K_{\alpha_i}^{t_i}\prod_{\alpha\geq 0} E_\alpha^{m_\alpha} : 0\leq n_\beta, t_i, m_\alpha\leq \ell,\ 1\leq i\leq n,\ \beta\in Q_{I_-},\ \alpha\in Q_{I_+}\right\}$$

usemos la notación $\mathbf{K}_\alpha\mathbf{E}^m\mathbf{F}^v$ para elementos de esta base, similar a la usada en el Lema 3.3.7, así si $|I_+| = n_+$ y $|I_-| = n_-$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\Delta_\varphi(\mathbf{K}_\alpha\mathbf{E}^m\mathbf{F}^v) &= (\mathbf{K}_\alpha\otimes\mathbf{K}_\alpha)\prod_{k=1}^{n_+}\Delta_\varphi(E_k)^{m_k}\prod_{j=1}^{n_-}\Delta_\varphi(F_j)^{v_j}\\
&= (\mathbf{K}_\alpha\otimes\mathbf{K}_\alpha)\prod_{k=1}^{n_+}(E_k\otimes K_{-\tau_k}+K_{-\alpha_k+\tau_k}\otimes E_k)^{m_k}\prod_{j=1}^{n_-}(F_j\otimes K_{\alpha_j+\tau_j}+K_{-\tau_j}\otimes F_j)^{v_j}\\
&= (\mathbf{K}_\alpha\otimes\mathbf{K}_\alpha)\prod_{k=1}^{n_+}\left(\sum E_k^{m_k}\otimes K_{-m_k\tau_k}+\sum_{r_k+s_k=m_k}\mathbf{E}_{r_k}\otimes\mathbf{E}_{s_k}+K_{m_k(-\alpha_k+\tau_k)}\otimes E_k^{m_k}\right)\\
&\qquad\prod_{j=1}^{n_-}\left(\sum F_j^{v_j}\otimes K_{m_j(\alpha_j+\tau_j)}+\sum_{r_j+s_j=m_j}\mathbf{F}_{r_j}\otimes\mathbf{F}_{s_j}+K_{-m_j\tau_j}\otimes F_j^{v_j}\right)\\
&= \left(\mathbf{K}_\alpha\prod_{k=1}^{n_+}E_k^{m_k}\prod_{j=1}^{n_-}F_j^{v_j}\otimes\mathbf{K}_\alpha K_{\left(-\sum_{k=1}^{n_+}m_k\tau_k+\sum_{j=1}^{n_-}m_j(\alpha_j+\tau_j)\right)}\right)+\sum\mathbf{K}_\alpha(\mathbf{EF})_r\otimes\mathbf{K}_\alpha(\mathbf{EF})_s\\
&\qquad+\left(\mathbf{K}_\alpha K_{\left(\sum_{k=1}^{n_+}m_k(-\alpha_k+\tau_k)-\sum_{j=1}^{n_-}m_j\tau_j\right)}\otimes\mathbf{K}_\alpha\prod_{k=1}^{n_+}E_k^{m_k}\prod_{j=1}^{n_-}F_j^{v_j}\right)
\end{aligned}$$

donde $\mathbf{E}_{r_k}$, $\mathbf{E}_{s_k}$ son monomios que contienen E_k; $\mathbf{F}_{r_j}$, $\mathbf{F}_{s_j}$ son monomios que contienen F_j y $\mathbf{K}_\alpha(\mathbf{EF})_r$ respectivamente, $\mathbf{K}_\alpha(\mathbf{EF})_s$ son monomios que contienen E_k o F_j. Así $D^z(\mathbf{K}_\alpha(\mathbf{EF})_s) = 0 = D^z(\mathbf{K}_\alpha(\mathbf{EF})_r)$,

$$f * D^z(\mathbf{K}_\alpha \mathbf{E}^m \mathbf{F}^v) = f\left(\mathbf{K}_\alpha \prod_{k=1}^{n_+} E_k^{m_k} \prod_{j=1}^{n_-} F_j^{v_j}\right) D^z\left(\mathbf{K}_\alpha K_{\left(-\sum_{k=1}^{n_+} m_k\tau_k + \sum_{j=1}^{n_-} m_j(\alpha_j+\tau_j)\right)}\right)$$
$$= f\left(\mathbf{K}_\alpha \prod_{k=1}^{n_+} E_k^{m_k} \prod_{j=1}^{n_-} F_j^{v_j}\right) D^z(\mathbf{K}_\alpha) \prod_{k=1}^{n_+} D^z(K_{-\tau_k})^{m_k} \prod_{j=1}^{n_-} D^z(K_{\alpha_j+\tau_j})^{m_j}$$

por otro lado, tenemos que

$$D^z * f(\mathbf{K}_\alpha \mathbf{E}^m \mathbf{F}^v) = D^z\left(\mathbf{K}_\alpha K_{\left(\sum_{k=1}^{n_+} m_k(-\alpha_k+\tau_k) - \sum_{j=1}^{n_-} m_j\tau_j\right)}\right) f\left(\mathbf{K}_\alpha \prod_{k=1}^{n_+} E_k^{m_k} \prod_{j=1}^{n_-} F_j^{v_j}\right)$$
$$= D^z(\mathbf{K}_\alpha) \prod_{k=1}^{n_+} D^z(K_{-\alpha_k+\tau_k})^{m_k} \prod_{j=1}^{n_-} D^z(K_{-\tau_j})^{m_j} f\left(\mathbf{K}_\alpha \prod_{k=1}^{n_+} E_k^{m_k} \prod_{j=1}^{n_-} F_j^{v_j}\right),$$

como $D^z(K_{-\tau_k}) = D^z(K_{-\alpha_k+\tau_k})$ y $D^z(K_{-\tau_j}) = D^z(K_{\alpha_j+\tau_j})$ es cierto para $k \in I_+$ y $j \in I_-$, entonces al comparar las dos últimas expresiones se obtiene que $f * D^z = D^z * f$.

Equivalentemente, es posible demostrar la proposición mediante el siguiente argumento. La hipotésis sobre D^z asegura que $D^z f(E_i) = f D^z(E_i)$ y $D^z f(F_j) = f D^z(F_j)$ para todo $f \in \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^*$, $z \in (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^m$, $i \in I_+$ y $j \in I_-$. De hecho, ya que los elementos $K_{\alpha_t} \in \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})$ son de tipo grupo $1 \leq t \leq n$, $D^z f(K_{\alpha_t}) = f D^z(K_{\alpha_t})$. Como D^z es de tipo grupo en $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^*$. Tenemos $D^z f(MN) = f D^z(MN)$ para $M, N \in \{K_{\alpha_t}, E_i, F_j : i \in I_+, j \in I_-\}$, ya que $D^z f(MN) = (D^z f)_{(1)}(M)(D^z f)_{(2)}(N) = D^z f_{(1)}(M) D^z f_{(2)}(N) = f_{(1)} D^z(M) f_{(2)} D^z(N) = f D^z(MN)$. Similarmente, por indución se puede probar que D^z y f conmutan cuando se evalúa sobre cada elemento de la base. □

La siguiente proposición caracteriza todos los cocientes de $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})^*$.

Proposición 4.2.5. *Sea H un álgebra de Hopf cociente de $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})^*$, donde H^* esta determinada por la terna $(I_+, I_-, \Sigma^\varphi)$ y $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})$ es el núcleo de Frobenius-Lusztig regular torcido asociado a (I_+, I_-). Entonces $H = \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^* / \langle D^z - 1 : \ D^z \in N^\varphi \rangle$.*

Prueba. Si $(I_+ \cap I_-)^c = \{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_m}\}$ escribimos $D^z = D_{i_1}^{z_1} \cdots D_{i_m}^{z_m}$. Por la Observación 4.2.2 (b), $G(\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^*) = \{D^z | \ z \in (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^m\}$. Por la Proposición 4.2.4,sabemos que los elementos de $\widehat{\mathbb{T}_{I^c}^\varphi}$ son centrales en $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^*$. Debido a que $N^\varphi \subseteq \widehat{\mathbb{T}_{I^c}^\varphi}$, el ideal bilátero $\mathcal{I}$ de $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^*$ generado por los elementos $\{D^z - 1 : \ D^z \in N^\varphi\}$ es una ideal de Hopf, y así $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^*/\mathcal{I}$ es un álgebra de Hopf.

Por otro lado, nosotros sabemos que H^* esta determinada por la terna $(I_+, I_-, \Sigma^\varphi)$, de manera que H^* esta incluida en $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})$. Si denotamos por $\nu : \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^* \to H$ al morfismo sobreyectivo dual inducido por esta inclusión, tenemos que $\operatorname{Ker}\nu = \{f \in \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^* : f(h) = 0, \forall h \in H^*\}$. Ya que por la Observación 4.2.2 (c), $D^z(g) = 1$ para todo $g \in \Sigma^\varphi$

y $D^z \in N^\varphi$, sucede que $D^z - 1 \in \operatorname{Ker}\nu$ y de ahí hay un único morfismo sobreyectivo de álgebras de Hopf $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^*/\mathcal{I} \twoheadrightarrow H$. Pero por (4.3) es válido que

$$\dim H = |\Sigma^\varphi|\ell^{|I_+|+|I_-|} = \frac{\ell^n}{|N^\varphi|}\ell^{|I_+|+|I_-|} = \dim \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^*/\mathcal{I},$$

lo que implica que el morfismo inducido es realmente un isomorfismo. □

Ejemplo 4.2.6. Sea φ la aplicación de torcimiento del Ejemplo 4.2.3 sobre $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_6$. Si tomamos $I_+ = \{\alpha_2\}$, $I_- = \{\alpha_1\}$ y $\Sigma^\varphi = \langle K_{(1-\varphi)(\alpha_2)}, K_{(1+\varphi)(\alpha_1)}, K_{\tau_3}, K_{\tau_2}\rangle$, entonces $\Sigma^\varphi = \mathbb{T}^\varphi \simeq (\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^3$ y N^φ es trivial. Por otro lado, si asumimos que $\varphi = 0$, entonces $\Sigma = \langle K_{\alpha_1}, K_{\alpha_2}\rangle$ y N^φ no es trivial. Esto implica que el cociente $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^*/\langle D^z - 1 :\ D^z \in N^\varphi\rangle$ no puede ser una deformación por 2-cociclo de $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{p})^*/\langle D^z - 1 :\ D^z \in N\rangle$, ya que ellas tendrián diferente dimensión.

Capítulo 5

Subgrupos Cuánticos

En este capítulo determinamos todos los subgrupos cuánticos del grupo cuántico torcido $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$. Primero construimos una familia de subgrupos cuánticos usando información de $\mathfrak{g}$ y un subgrupo algebraico Γ de G. Utilizamos entre otras cosas la construcción pushout descrita en los preliminares. Luego probamos el resultado principal de la tesis, que consiste en demostrar que cualquier otro subgrupo cuántico finito de $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$ es isomorfo a alguno construido en el camino anteriormente mencionado. Finalizamos el capítulo dando una descripción de clases de isomorfismo entre los subgrupos cuánticos obtenidos, mostrando una relación de orden parcial entre ellos. Asumiremos todos los grupos cuánticos en su forma compleja.

5.1. Subgrupos cuánticos obtenidos por pushout

En esta sección construiremos subgrupos cuánticos de $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$ asociados a un par (I_+, I_-) y un subgrupo algebraico Γ de G contenido en P. Esto es posible gracias a la construción *pushout* dada en la Proposición 1.2.26, la cual es un método para construir sucesiones exactas centrales de álgebras de Hopf.

La proposición siguiente se sigue de argumentos expuestos en [AG, §2.2] y las Proposiciones 1.2.26, 1.2.28. Si $\gamma : \Gamma \to G$ es un morfismo de grupos algebraicos, entonces ${}^t\gamma : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(\Gamma)$ denota el correspondiente morfismo de álgebras entre las álgebras de coordenadas.

Proposición 5.1.1. *Sea Γ un grupos algebraico y $\gamma : \Gamma \to G$ un morfismo injectivo de grupos algebraicos tales que $\gamma(\Gamma) \subseteq P$. Denotemos con $\mathcal{J}$ al ideal bilátero $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(P)$ generado por $\iota(\mathrm{Ker}\ {}^t\gamma)$. Entonces $A^\varphi_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma} = \mathcal{O}_\epsilon^\varphi(P)/\mathcal{J}$ es un álgebra de Hopf y existe un morfismo inyectivo de álgebras de Hopf $j : \mathcal{O}(\Gamma) \hookrightarrow A^\varphi_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma}$ y un morfismo sobreyectivo de álgebras de Hopf $\bar{\pi} : A^\varphi_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma} \twoheadrightarrow \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^*$, tal que $A^\varphi_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma}$ encaja al interior de la sucesión*

exacta de álgebras de Hopf

$$1 \longrightarrow \mathcal{O}(\Gamma) \xrightarrow{j} A^{\varphi}_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma} \xrightarrow{\overline{\pi}} \mathbf{u}^{\varphi}_{\epsilon}(\mathfrak{p})^* \longrightarrow 1.$$

Si además $|\Gamma|$ *es finito, entonces* $\dim A^{\varphi}_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma} = |\Gamma| \dim \mathbf{u}^{\varphi}_{\epsilon}(\mathfrak{p})$. *Más aún, el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \mathcal{O}(G) & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{O}^{\varphi}_{\epsilon}(G) & \xrightarrow{\pi} & \mathbf{u}^{\varphi}_{\epsilon}(\mathfrak{g})^* & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{res}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\mathrm{Res}}} & & \\
1 & \longrightarrow & \mathcal{O}(P) & \xrightarrow{\iota_P} & \mathcal{O}^{\varphi}_{\epsilon}(P) & \xrightarrow{\pi_P} & \mathbf{u}^{\varphi}_{\epsilon}(\mathfrak{p})^* & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle {}^t\gamma} & & \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \\
1 & \longrightarrow & \mathcal{O}(\Gamma) & \xrightarrow{j} & A^{\varphi}_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma} & \xrightarrow{\overline{\pi}} & \mathbf{u}^{\varphi}_{\epsilon}(\mathfrak{p})^* & \longrightarrow & 1.
\end{array} \tag{5.1}$$

Prueba. Ya establecimos que $\mathcal{O}(P)$ es central en $\mathcal{O}^{\varphi}_{\epsilon}(P)$. Ahora por la Proposición 3.2.9, $\mathcal{O}^{\varphi}_{\epsilon}(G)$ es un $\mathcal{O}(G)$-módulo libre de rango finito. De manera que $\mathcal{O}^{\varphi}_{\epsilon}(G)$ es notheriana, como todo cociente de un álgebra notheriana es notheriana, $\mathcal{O}^{\varphi}_{\epsilon}(P)$ es notheriana. Entonces por [Sc0, Teorema 3.3], $\mathcal{O}^{\varphi}_{\epsilon}(P)$ es fielmente playa sobre $\mathcal{O}(P)$. Entonces la sucesión de álgebras de Hopf $1 \longrightarrow \mathcal{O}(P) \longrightarrow \mathcal{O}^{\varphi}_{\epsilon}(P) \longrightarrow \mathbf{u}^{\varphi}_{\epsilon}(\mathfrak{p})^* \longrightarrow 1$ satisface las condiciones necesarias para aplicar la Proposición 1.2.26 al morfismo sobreyectivo de álgebras Hopf $\mathcal{O}(P) \xrightarrow{{}^t\gamma} \mathcal{O}(\Gamma)$. Así obtenemos el álgebra de Hopf $A^{\varphi}_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma}$, junto con el morfismo sobreyectivo de álgebras de Hopf $\mathcal{O}^{\varphi}_{\epsilon}(P) \xrightarrow{\psi} A^{\varphi}_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma}$ tal que el diagrama 5.1 es conmutativo y sus filas son sucesiones exactas de álgebras de Hopf. □

Proposición 5.1.2. $A^{\varphi}_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma}$ *es una deformación por* 2*-cociclo de* $A_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma}$.

Prueba. Por la Proposición 4.1.9 (iv), sabemos que $\mathcal{O}^{\varphi}_{\epsilon}(P)$ es una deformación por 2-cociclo de $\mathcal{O}_{\epsilon}(P)$, el cual hemos denotado $\bar{\sigma}_{\mathrm{Res}}$, ver la Observación 4.1.10. Entonces, por la Observación 1.3.6 basta chequear que $\bar{\sigma}_{\mathrm{Res}}|_{\mathcal{O}^{\varphi}_{\epsilon}(P)\otimes\mathcal{J}+\mathcal{J}\otimes\mathcal{O}^{\varphi}_{\epsilon}(P)} = 0$. Ya que $\mathcal{J} = \mathcal{O}^{\varphi}_{\epsilon}(P)\iota_P(\mathrm{Ker}\ {}^t\gamma)$ y $\mathrm{Ker}\ {}^t\gamma$ es generada por coeficientes matriciales $c_{f,v}$ en $\mathcal{O}(P)$, de bigraduación $(\ell\lambda, \ell\mu)$ para algún $\lambda, \mu \in P$, tenemos que $\bar{\sigma}_{\mathrm{Res}}|_{\iota_p(\mathrm{Ker}\ {}^t\gamma)\otimes\iota_p(\mathrm{Ker}\ {}^t\gamma)} = \varepsilon \otimes \varepsilon = 0$ y de ahí $\bar{\sigma}_{\mathrm{Res}}|_{\mathcal{O}^{\varphi}_{\epsilon}(P)\otimes\mathcal{J}+\mathcal{J}\otimes\mathcal{O}^{\varphi}_{\epsilon}(P)} = 0$. Así podemos definir un 2-cociclo $\tilde{\sigma} : A_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma} \otimes A_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma} \to \mathbb{C}$ por $\tilde{\sigma}(\psi(x), \psi(y)) = \bar{\sigma}_{\mathrm{Res}}(x, y)$, para todo $x, y \in \mathcal{O}_{\epsilon}(P)$ y $(A_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma})_{\tilde{\sigma}} = A^{\varphi}_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma}$. Note que $\tilde{\sigma}$ coincide con el pullback inducido por $\bar{\pi}$ del 2-cociclo τ sobre $\mathbf{u}_{\epsilon}(\mathfrak{p})^*$. □

Gracias a la Proposición 4.1.5 (ii), sabemos que existe un morfismo inyectivo de coálgebras ${}^t\theta : \mathbf{u}^{\varphi}_{\epsilon}(\mathfrak{p})^* \to \Gamma^{\varphi}_{\epsilon}(\mathfrak{p})^{\circ}$, y ya que $\mathbf{u}^{\varphi}_{\epsilon}(\mathfrak{p})^* \simeq \overline{\mathcal{O}^{\varphi}_{\epsilon}(P)}$ por la Proposición 4.1.9, tenemos que $\mathrm{Im}\ {}^t\theta \subseteq \mathcal{O}^{\varphi}_{\epsilon}(P)$. De ahí, la imagen del subgrupo central $\widehat{\mathbb{T}^{\varphi}_{I^c}}$ de $G(\mathbf{u}^{\varphi}_{\epsilon}(\mathfrak{p})^*)$ es un subgrupo de $G(\mathcal{O}^{\varphi}_{\epsilon}(P))$. Denotemos $d^z = {}^t\theta(D^z)$ para $z \in (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^m$, $D^z \in \widehat{\mathbb{T}^{\varphi}_{I^c}}$.

Lema 5.1.3. *Existe un subgrupo* $\mathcal{A} = \{\partial^z = \psi({}^t\theta(D^z)) : \ D^z \in \widehat{\mathbb{T}^{\varphi}_{I^c}}\}$ *de* $G(A^{\varphi}_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma})$ *isomorfo a* $\widehat{\mathbb{T}^{\varphi}_{I^c}}$ *que consiste de elementos centrales. En particular,* $|\mathcal{A}| = \ell^{n-\mathrm{rg}\, S^{\varphi}_{\ell}}$.

Prueba. Al igual que en la prueba de la Proposición 4.2.4, se ve que los elementos d^z son centrales en $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(P)$. A saber, si $f \in \mathcal{O}_\epsilon^\varphi(P)$, entonces $d^z f(M) = f d^z(M)$ para todo generador M de $\Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})$ de la Definición 4.1.1. Por ejemplo, sea $i \in I_+$ y $p \geq 0$, entonces por (2.12) tenemos que

$$\begin{aligned} d^z f(E_i^{(p)}) &= \sum_{r+s=p} q_i^{-rs} d^z(E_i^{(r)} K_{s(\alpha_i-\tau_i)}) f(E_i^{(s)} K_{r\tau_i}) \\ &= \sum_{r+s=p} q_i^{-rs} d^z(E_i^{(r)}) d^z(K_{s(\alpha_i-\tau_i)}) f(E_i^{(s)} K_{r\tau_i}) = d^z(K_{p(\alpha_i-\tau_i)}) f(E_i^{(p)}), \text{ y} \\ d^z f(E_i^{(p)}) &= \sum_{r+s=p} q_i^{-rs} f(E_i^{(r)} K_{s(\alpha_i-\tau_i)}) d^z(E_i^{(s)} K_{r\tau_i}) \\ &= \sum_{r+s=p} q_i^{-rs} f(E_i^{(r)} K_{s(\alpha_i-\tau_i)}) d^z(E_i^{(s)}) d^z(K_{r\tau_i}) = f(E_i^{(p)}) d^z(K_{p\tau_i}). \end{aligned}$$

Como $d^z(\overline{K_i}) = d^z(K_{\alpha_i - 2\tau_i}) = D^z(\theta(K_{\alpha_i-2\tau_i})) = 1$, tenemos que $d^z(K_{p(\alpha_i-\tau_i)}) = d^z(K_{p\tau_i})$ para todo $p \geq 0$, y entonces $d^z f(E_i^{(p)}) = f d^z(E_i^{(p)})$. Similarmente, usando que $1 = d^z(\widetilde{K_j})$ para todo $j \in I_-$, tenemos que $d^z f(F_j^{(p)}) = f d^z(F_j^{(p)})$ para todo $p \geq 0$. La igualdad sobre los generadores $K_{\alpha_i}^{-1}$ y $\binom{K_{\alpha_i}; 0}{p}$ se sigue fácilmente, debido a que el coproducto es coconmutativo sobre ellos. Aplicando inducción sobre los monomios constituidos por los generadores podemos chequear que d^z es central en $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(P)$. Debido a que $\psi : \mathcal{O}_\epsilon^\varphi(P) \to A_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma}^\varphi$ es sobreyectivo, los elementos de tipo grupo ∂^z son también centrales en $A_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma}^\varphi$.

Finalmente, mostremos que $\mathcal{A} \simeq \widehat{\mathbb{T}_{I^c}^\varphi}$ como grupos. Por construcción, tenemos que $\psi \circ {}^t\theta : \widehat{\mathbb{T}_{I^c}^\varphi} \to \mathcal{A}$ es un morfismo sobreyectivo de grupos. Como el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_\epsilon^\varphi(P) & \xrightarrow{\pi_P} & \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^* \\ {\scriptstyle\psi}\downarrow & \nearrow_{\overline{\pi}} & \\ A_{\epsilon,\mathfrak{p},\sigma}^\varphi & & \end{array}$$

es conmutativo por (5.1), tenemos $\overline{\pi}(\mathcal{A}) = \overline{\pi}(\psi({}^t\theta(\widehat{\mathbb{T}_{I^c}^\varphi})) = \pi_P({}^t\theta(\widehat{\mathbb{T}_{I^c}^\varphi}) = \widehat{\mathbb{T}_{I^c}^\varphi}$, lo cual implica que $\psi \circ {}^t\theta$ es realmente un isomorfismo. □

5.2. Subgrupos cuánticos obtenidos desde $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})$

En esta sección se construirán subgrupos cuánticos obtenidos desde $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$ y un subgrupo algebraico de G. Sea L una subálgebra de Hopf de $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$. Por el Lema 3.3.7, ella esta determinada por una terna $(I_+, I_-, \Sigma^\varphi)$ con Σ^φ un subgrupo de $G(\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g}))$ e $I_\pm \subset \pm\Pi$ son tales que $K_{(1\mp\varphi)(\alpha_i)} \in \Sigma^\varphi$ si $\alpha_i \in I_\pm$. Si $H = L^*$, entonces por la Proposición 4.2.5, $H = \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^*/\langle D^z - 1 : \ D^z \in N^\varphi \rangle$, donde N^φ esta determinado por

Σ^φ como en la Observación 4.2.2 (d). Consideremos P el subgrupo de G determinado por el par (I_+, I_-) con $\mathfrak{p} = \mathrm{Lie}(P)$ y $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(P)$, $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})$ los correspondientes subgrupos cuánticos torcidos.

Proposición 5.2.1. *Asumamos que Γ es un grupo algebraico y $\gamma : \Gamma \to G$ un morfismo inyectivo de grupos algebraicos con $\gamma(\Gamma) \subseteq P$. Para cada morfismo de grupos $\delta : N^\varphi \to \widehat{\Gamma}$, el ideal bilátero J_δ de $A_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma}^\varphi$ generado por los elementos $\delta(D^z) - \partial^z$ para $\partial^z \in \mathcal{A}$ y D^z en N^φ, es un ideal de Hopf y el álgebra de Hopf $A_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma}/J_\delta$ encaja al interior de la sucesión exacta corta central*

$$1 \longrightarrow \mathcal{O}(\Gamma) \xrightarrow{\hat{\iota}} A_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma}^\varphi/J_\delta \xrightarrow{\hat{\pi}} H \longrightarrow 1.$$

Más aún, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \mathcal{O}(G) & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G) & \xrightarrow{\pi} & \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})^* & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{res}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\mathrm{Res}}} & & \\
1 & \longrightarrow & \mathcal{O}(P) & \xrightarrow{\iota_P} & \mathcal{O}_\epsilon^\varphi(P) & \xrightarrow{\pi_P} & \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^* & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle {}^t\gamma} & & \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \\
1 & \longrightarrow & \mathcal{O}(\Gamma) & \xrightarrow{j} & A_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma}^\varphi & \xrightarrow{\overline{\pi}} & \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^* & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \nu} & & \\
1 & \longrightarrow & \mathcal{O}(\Gamma) & \xrightarrow{\hat{\iota}} & A_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma}^\varphi/J_\delta & \xrightarrow{\hat{\pi}} & H & \longrightarrow & 1.
\end{array} \tag{5.2}$$

Si suponemos adicionalmente que $|\Gamma|$ es finito, entonces $\dim A_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma}^\varphi/J_\delta = |\Gamma| \dim H$.

Prueba. Se seguirá la prueba de [AG, Teorema 2.17]. Sabemos que dado N^φ se tiene un subgrupo Σ^φ de $\mathbb{T}^\varphi$ tal que la terna $(I_+, I_-, \Sigma^\varphi)$ corresponde a un morfismo sobreyectivo de álgebras de Hopf $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^* \to H$. Las tres primeras filas del diagrama (5.2) conmutan, gracias a que por la Proposición 1.2.26 es posible construir el álgebra de Hopf $A_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma}^\varphi$.

Por otra parte, la Proposición 4.2.5 afirma que $H \simeq \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^*/\langle D^z - 1 : D^z \in N^\varphi\rangle$ y por el Lema 5.1.3, sabemos que los elementos de tipo grupo $\partial^z \in \mathcal{A}$ son centrales en $A_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma}^\varphi$. Entonces, ya que $\delta(D^z) \in \mathcal{O}(\Gamma)$ para todo $D^z \in N^\varphi$, el ideal J_δ en $A_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma}^\varphi$ generado por los elementos $\delta(D^z) - \partial^z$ es un ideal de Hopf. Y de ahí podemos concluir que $A_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma}^\varphi/J_\delta$ es un álgebra de Hopf.

Si escribimos $\mathcal{J}_\delta = J_\delta \cap \mathcal{O}(\Gamma)$, entonces $A_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma}^\varphi/J_\delta$ encaja al interior de la sucesión exacta de álgebras de Hopf

$$1 \longrightarrow \mathcal{O}(\Gamma)/\mathcal{J}_\delta \longrightarrow A_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma}^\varphi/J_\delta \longrightarrow \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^*/\overline{\pi}(J_\delta) \longrightarrow 1.$$

Como $\overline{\pi}(\delta(D^z)) = 1$ y $\overline{\pi}(\partial^z) = D^z$ por la prueba del Lema 5.1.3, se sigue que $\overline{\pi}(J_\delta) = \langle D^z - 1 : \ D^z \in N^\varphi\rangle$. De ahí, usando la Proposición 4.2.5 (ii), tenemos que $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^*/\overline{\pi}(J_\delta) = H$.

La prueba de que $\mathcal{J}_\delta = 0$ y que $A_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma}^\varphi/J_\delta$ encaja al interior del diagrama conmutativo se sigue de [AG, Teorema 2.17]. □

5.3. Parametrización de subgrupos cuánticos

En esta sección se parametrizan los subgrupos cuánticos de $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$ por una 6-upla llamada *dato de subgrupo torcido*. Mostraremos que hay una correspondencia biunívoca entre subgrupos cuánticos torcidos y datos de subgrupo torcidos. Con lo que obtenemos una clasifición de los subgrupos cuánticos salvo isomorfismo.

Definición 5.3.1. Un *dato de subgrupo torcido* es una colección de seis objetos $\mathcal{D}^\varphi := (I_+, I_-, N^\varphi, \Gamma, \gamma, \delta)$ donde

(*i*) $I_\pm \subset \pm\prod$. Sea $\Psi_\pm = \{\alpha \in \Pi : \operatorname{Supp}\alpha \in I_\pm\}$, $\mathfrak{p} = \sum_{\alpha\in\Psi_\pm} \mathfrak{g}_\alpha$ y $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}_-$, P un grupo de Lie conexo G con $\operatorname{Lie}(P) = \mathfrak{p}$.

(*ii*) N^φ un subgrupo de $\widehat{\mathbb{T}_{I^c}^\varphi}$, ver Observación 4.2.2 (*d*).

(*iii*) Γ un grupo algebraico.

(*iv*) $\gamma : \Gamma \to P$ es un morfismo inyectivo de grupos algebraicos.

(*v*) $\delta : N^\varphi \to \widehat{\Gamma}$ un morfismo de grupos.

Si Γ es finito, llamamos a $\mathcal{D}^\varphi$ un *dato de subgrupo finito torcido.*

Resumiendo los resultados previos, obtenemos el primer teorema principal de la tesis, luego estableceremos su recíproco.

Teorema 5.3.2. *Sea $\mathcal{D}^\varphi = (I_+, I_-, N^\varphi, \Gamma, \gamma, \delta)$ un dato de subgrupo torcido. Entonces existe un subgrupo cuántico $A_{\mathcal{D}^\varphi} = A^\varphi_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma}/J_\delta$ de $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$ que encaja en la siguiente sucesión exacta de álgebras de Hopf*

$$1 \longrightarrow \mathcal{O}(\Gamma) \xrightarrow{\hat{\imath}} A_{\mathcal{D}^\varphi} \xrightarrow{\hat{\pi}} H \longrightarrow 1.$$

Si adicionalmente $|\Gamma|$ es finito, entonces $\dim A_{\mathcal{D}^\varphi} = |\Gamma| \dim H$.

Prueba. Por el Lema 3.3.7 y la observación 4.2.2 (*d*), la terna (I_+, I_-, N^φ) determina un cociente H de $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})^*$. Además, por la Proposición 4.1.9, el par (I_+, I_-) determina un subgrupo P de G, una subálgebra de Lie $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ y los subgrupos cuánticos torcidos $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(P)$ y $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})$. Todo esto junto a que la parte superior del diagrama (5.2) es conmutativo. Por otra parte, usando la Proposición 5.1.1, el morfismo $\gamma : \Gamma \to P \subset G$ permite obtener el subgrupo cuántico $A^\varphi_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma}$ el cual es un pushout. Finalmente, por la Proposición 5.2.1 el morfismo de grupos $\delta : N^\varphi \to \widehat{\Gamma}$ define el ideal de Hopf J_δ de $A^\varphi_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma}$ y el álgebra de Hopf $A_{D^\varphi} = A^\varphi_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma}/J_\delta$ encaja al interior del diagrama conmutativo (5.2). □

Usando los siguientes tres lemas podremos establecer un recíproco al Teorema 5.3.2. De ahora en adelante $\kappa : \mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G) \to \mathcal{A}$ denotará un morfismo sobreyectivo de álgebras de Hopf.

Lema 5.3.3. *Existe un grupo algebraico* Γ *y un morfismo inyectivo de grupos algebraicos* $\gamma : \Gamma \to G$, *tal que* $\mathcal{O}(\Gamma)$ *es una subálgebra central de* A *y* A *encaja al interior de la sucesión exacta de álgebras de Hopf* $1 \longrightarrow \mathcal{O}(\Gamma) \xrightarrow{\hat{\imath}} A \xrightarrow{\hat{\pi}} H \longrightarrow 1$, *donde* $H = A/\mathcal{O}(\Gamma)^+A$. *Más aún, el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathcal{O}(G) & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G) & \xrightarrow{\pi} & \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})^* & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle {}^t\gamma} & & \downarrow{\scriptstyle \kappa} & & \downarrow{\scriptstyle r} & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathcal{O}(\Gamma) & \xrightarrow{\hat{\imath}} & A & \xrightarrow{\hat{\pi}} & H & \longrightarrow & 1. \end{array} \tag{5.3}$$

Prueba. Denotemos $K = \kappa(\iota(\mathcal{O}(G)))$. Ya que $\mathcal{O}(G)$ es central en $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$, K es central en A. Entonces, existe un grupo algebraico Γ y un morfismo de grupos algebraicos $\gamma : \Gamma \to G$, tal que $K = \mathcal{O}(\Gamma)$ y ${}^t\gamma : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(\Gamma)$ es un morfismo sobreyectivo de álgebras de Hopf satisfaciendo $\hat{\imath} \circ {}^t\gamma = \kappa \circ \iota|_{\mathcal{O}(G)}$. Más aún, si $H = A/K^+A$ entonces la sucesión $1 \longrightarrow \mathcal{O}(\Gamma) \xrightarrow{\hat{\imath}} A \xrightarrow{\hat{\pi}} H \longrightarrow 1$ es exacta y el diagrama (5.3) conmuta. □

Por el Lema anterior, H^* es una subálgebra de Hopf de $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$. De ahí, por el Lema 3.3.7 esta determinada por una terna $(I_+, I_-, \Sigma^\varphi)$. Sea P el subgrupo de G determinado por el par (I_+, I_-), $\mathfrak{p} = \mathrm{Lie}(P)$ y $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(P)$, $\mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})$ los grupos cuánticos dados por la Proposición 4.1.9. En particular, tenemos que $H^* \subseteq \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p}) \subseteq \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})$ y por la Proposición 4.2.5, $H \simeq \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^*/\langle D^z - 1 : \ D^z \in N^\varphi \rangle$, donde N^φ es determinada por Σ^φ como en la Observación 4.2.2 (d). Denotemos por $\nu : \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p}) \to H$ el correspondiente morfismo sobreyectivo.

El próximo lema se sigue de [AG, Lema 3.1], se adaptará al caso torcido.

Lema 5.3.4. *El diagrama* (5.3) *se factoriza a través de la sucesión exacta central*

$$1 \longrightarrow \mathcal{O}(P) \xrightarrow{\iota_P} \mathcal{O}_\epsilon^\varphi(P) \xrightarrow{\pi_P} \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^* \longrightarrow 1.$$

Prueba. Queremos mostrar que A encaja al interior del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathcal{O}(G) & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G) & \xrightarrow{\pi} & \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})^* & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{res}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\mathrm{Res}}} & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathcal{O}(P) & \xrightarrow{\iota_P} & \mathcal{O}_\epsilon^\varphi(P) & \xrightarrow{\pi_P} & \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^* & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle {}^t\zeta} & & \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \downarrow{\scriptstyle \nu} & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathcal{O}(\Gamma) & \xrightarrow{\hat{\imath}} & A & \xrightarrow{\hat{\pi}} & H & \longrightarrow & 1. \end{array} \tag{5.4}$$

Para probar esto, es suficiente mostrar que $\operatorname{Ker}\mathrm{Res} \subseteq \operatorname{Ker}\kappa$. Con el fin de realizar esto, vemos a $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$ como una subálgebra de $\mathbb{A}_\epsilon^\varphi = \mathbb{A}_\varphi'' \otimes_R \mathbb{Q}(\epsilon)$, ver [CV2, §3.6], Lema 3.1.6.

Sea $\mu_\epsilon^\varphi : \mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G) \to \check{U}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{b}_-)^{\mathrm{cop}} \otimes \check{U}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{b}_+)^{\mathrm{cop}}$ la complejización del morfismo inyectivo de álgebras μ_φ'' dado antes del Lema 3.1.6. Entonces por el Lema 3.1.6, $\mu_\epsilon^\varphi(\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)) \subseteq \mathbb{A}_\epsilon^\varphi$, la cual es generada por $f_\alpha^\varphi \otimes 1$, $1 \otimes e_\alpha^\varphi$ y $K_{-(1+\varphi)\lambda} \otimes K_{(1-\varphi)\lambda}$ para $\lambda \in P$ y $\alpha \in \Phi_+$.

La prueba se sigue al mostrar que $\mu_\epsilon^\varphi(\operatorname{Ker}\operatorname{Res}) \subseteq \mu_\epsilon^\varphi(\operatorname{Ker}\kappa)$. Primero note que $\mu_\epsilon^\varphi(\operatorname{Ker}\operatorname{Res})$ es el ideal bilátero $\mathcal{I}$ generado por $\{1\otimes e_k^\varphi, f_i^\varphi\otimes 1 |\ \alpha_k\notin I_-,\ \alpha_j\notin I_+\}$. De hecho, por [CV2, Proposición 2.7], la Observación 3.1.7 (a) y (3.1) tenemos

$$\begin{aligned}\mu_\epsilon^\varphi(\psi_{-\omega_i}^{-\alpha_i}\psi_{\omega_i}) &= \left(\left(\epsilon^{-(\tau_i,\omega_i)}f_{\alpha_i}^\varphi\right)K_{-(1+\varphi)(\omega_i)}\otimes K_{(1-\varphi)(\omega_i)}\right)\left(K_{(1+\varphi)(\omega_i)}\otimes K_{-(1-\varphi)(\omega_i)}\right)\\ &= \epsilon^{-(\tau_i,\omega_i)}f_{\alpha_i}^\varphi\otimes 1.\end{aligned}$$

Similarmente, sucede que $\mu_\epsilon^\varphi(\psi_{\omega_i}\psi_{-\omega_i}^{\alpha_k}) = \epsilon^{-(\tau_i,\omega_i)}1\otimes e_\alpha^\varphi$. Como por definición $\psi_{-\omega_i}^{\alpha_k}$, $\psi_{-\omega_i}^{-\alpha_k}\in\operatorname{Ker}\operatorname{Res}$ cuando $\alpha_k\notin I_-$, $\alpha_j\notin I_+$, obtenemos que $1\otimes e_k^\varphi$, $f_i^\varphi\otimes 1\in\mu_\epsilon^\varphi(\operatorname{Ker}\operatorname{Res})$ para $\alpha_k\notin I_-$ y $\alpha_j\notin I_+$. Reciprocamente, asuma que $f\in\operatorname{Ker}\operatorname{Res}$. Entonces $f_{|\Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})}=0$ y $\langle\mu_\epsilon^\varphi(f), FM\otimes NE\rangle = f(FMNE)=0$ para todos los elementos $FMNE$ en una base de $\Gamma_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})$. Usando el apareamiento perfecto (2.8) sobre ϵ, se sigue que $\mu_\epsilon^\varphi(f)\subseteq\mathcal{I}$. Sea $h\in\operatorname{Ker}\operatorname{Res}$, entonces por la conmutatividad del diagrama (5.3) $0=\nu\pi_P\operatorname{Res}(h) = r\pi(h)=\hat\pi\kappa(h)$ y así debe suceder que $\kappa(h)\in\operatorname{Ker}\hat\pi = \mathcal{O}(\Gamma)^+A = \kappa(\mathcal{O}(G)^+\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G))$. Entonces existe $a\in\mathcal{O}(G)^+\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$ y $c\in\operatorname{Ker}\kappa$ tal que $h=a+c$. En particular, para los generadores de $x\in\mathcal{I}$ se tiene $x=\mu_\epsilon^\varphi(a)+\mu_\epsilon^\varphi(c)$ donde $\mu_\epsilon^\varphi(a)\in\mathbb{A}_0^\varphi$ es la subálgebra de $\mathbb{A}_\epsilon^\varphi$ generada por

$$(f_\alpha^\varphi)^\ell\otimes 1, \qquad 1\otimes(e_\alpha^\varphi)^\ell, \qquad K_{-\ell(1+\varphi)\lambda}\otimes K_{\ell(1-\varphi)\lambda}$$

para todo $\alpha\in\Phi_+$ y $\lambda\in P$. De aquí obtenemos al comparar grados, que $\mu_\epsilon(a)=0$, así que $\mathcal{I}\subseteq\mu_\epsilon(\operatorname{Ker}\kappa)$. □

Resumiendo todo lo anterior, tenemos que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \mathcal{O}(G) & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G) & \xrightarrow{\pi} & \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})^* & \longrightarrow & 1\\
 & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{res}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\mathrm{Res}}} & & \\
1 & \xrightarrow[{}^t\gamma]{} & \mathcal{O}(P) & \xrightarrow[\kappa]{j} & \mathcal{O}_\epsilon^\varphi(P) & \xrightarrow{\pi_P} & \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^* & \xrightarrow[r]{} & 1\\
 & & \downarrow{\scriptstyle {}^t\zeta} & & \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \downarrow{\scriptstyle \nu} & & \\
1 & \longrightarrow & \mathcal{O}(\Gamma) & \xrightarrow{\hat\iota} & A & \xrightarrow{\hat\pi} & H & \longrightarrow & 1
\end{array} \tag{5.5}$$

Note que el mapeo ${}^t\zeta:\mathcal{O}(P)\to\mathcal{O}(\Gamma)$ esta dado por restricción $\psi|_{\mathcal{O}(P)}$. De ahí, ${}^t\zeta\,\mathrm{res} = {}^t\gamma$ e $\operatorname{Im}\gamma\subseteq P$.

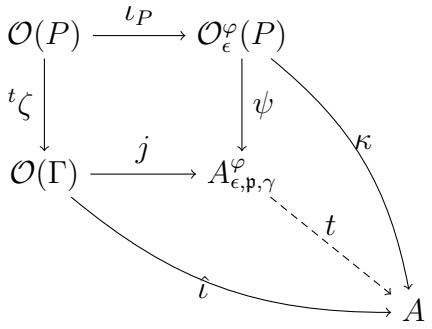
La prueba del siguiente lema es análoga al caso $\varphi=0$ y será dada fuera de detalles.

Lema 5.3.5. *[AG, Lemas 3.2 & 3.3] Hay un morfismo de grupos $\delta: N^\varphi\to\widehat{\Gamma}$, tal que el ideal bilátero J_δ de $A_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma}^\varphi$ generado por los elementos $\delta(D^z)-\partial^z$ para D^z en N^φ es un ideal de Hopf, $A\simeq A_{\mathcal{D}^\varphi}=A_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma}^\varphi/J_\delta$ como álgebras de Hopf y A encaja al interior*

del siguiente diagrama conmutativo

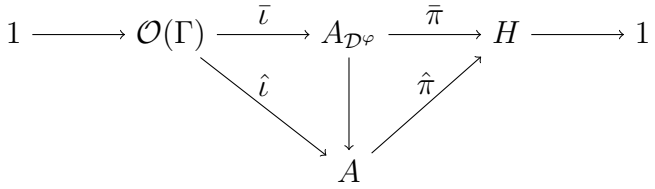
$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \mathcal{O}(G) & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G) & \xrightarrow{\pi} & \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{g})^* & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{res}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\mathrm{Res}}} & & \\
1 & \longrightarrow & \mathcal{O}(P) & \xrightarrow{\iota_P} & \mathcal{O}_\epsilon^\varphi(P) & \xrightarrow{\pi_P} & \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^* & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle {}^t\gamma} & & \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \\
1 & \longrightarrow & \mathcal{O}(\Gamma) & \xrightarrow{j} & A^\varphi_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma} & \xrightarrow{\overline{\pi}} & \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^* & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle t} & & \downarrow{\scriptstyle \nu} & & \\
1 & \longrightarrow & \mathcal{O}(\Gamma) & \xrightarrow{\hat{\iota}} & A & \xrightarrow{\hat{\pi}} & H & \longrightarrow & 1.
\end{array} \tag{5.6}$$

Prueba. Como $A^\varphi_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma}$ esta dada por un pushout, entonces usando el diagrama (5.5) tenemos un único morfismo sobreyectivo de álgebras de Hopf t, tal que el siguiente diagrama es conmutativo.



Si denotamos por $\bar{\iota}$ y $\bar{\pi}$ los mapeos $\hat{\iota}$ y $\hat{\pi}$ del Teorema 5.3.2, respectivamente. Entonces, podemos concluir que $\operatorname{Ker}\bar{\pi} = j(\mathcal{O}(\Gamma))^+ A^\varphi_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma} \subseteq \operatorname{Ker}\hat{\pi}t$ y por tanto la fila inferior del diagrama (5.6) conmuta con el resto del diagrama.

Sea $\partial^z \in \mathcal{A}$ como el Lema 5.1.3, entonces $\hat{\pi}t(\partial^z) = \mu\bar{\pi}(\partial^z) = 1$ por la Proposición 4.2.5. Esto nos permite decir que $t(\partial^z) \in A^{\operatorname{co}\hat{\pi}} = \mathcal{O}(\Gamma)) = \widehat{\Gamma}$, sabemos que $G(\mathcal{O}(\Gamma)) = \widehat{\Gamma}$ y que $t(\partial^z)$ son elementos de tipo grupo. Por tanto, existe un morfismo de grupos $\delta : N^\varphi \to \hat{\Gamma}$ dado por $z \mapsto \partial^z$. Así, J_δ es un ideal de Hopf tal que $t(J_\delta) = 0$ y tenemos un mapeo sobreyectivo de álgebras de Hopf $A_{\mathcal{D}} \to A$, tal que el siguiente diagrama conmuta.



Entonces, usando 1.2.34 tenemos que $A_{\mathcal{D}^\varphi} \simeq A$. Concluyendo a demostración.

□

Usando los últimos tres lemas podemos establecer el siguiente teorema.

Teorema 5.3.6. *Si $\kappa : \mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G) \to A$ es un morfismo sobreyectivo de álgebras de Hopf, entonces existe un dato de subgrupo torcido $\mathcal{D}^\varphi$ tal que $A \simeq A_{\mathcal{D}^\varphi}$ como álgebras de Hopf.* □

5.3.1. Clases de isomorfismo de subgrupos cuánticos

En esta subsección se parametrizan los subgrupos cuánticos $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$ salvo isomorfismo. Para esto, definimos un orden parcial sobre las clases de isomorfismo de cocientes de $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$ y sobre el conjunto de datos de subgrupos torcidos.

Sea $\mathcal{Q}(\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G))$ la categoría cuyos objetos son morfismos sobreyectivos de álgebras de Hopf $\kappa : \mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G) \to A$. Si $\kappa : \mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G) \to A$ y $\kappa' : \mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G) \to A'$ son dos de tales morfismos, entonces una flecha $\kappa \xrightarrow{\alpha} \kappa'$ en $\mathcal{Q}(\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G))$ es un morfismo de álgebras de Hopf $\alpha : A \to A'$, tal que $\alpha\kappa = \kappa'$. En este lenguaje, un *cociente* de $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$ es justo una clase de isomorfismo de objetos en $\mathcal{Q}(\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G))$; $[\kappa]$ denota la clase del morfismo κ. Hay entonces un orden parcial entre el conjunto de cocientes de $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$, dado por $[\kappa] \leq [\kappa']$ si y sólo si existe una flecha $\kappa \xrightarrow{\alpha} \kappa'$ en $\mathcal{Q}(\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G))$. Note que $[\kappa] \leq [\kappa']$ y $[\kappa'] \leq [\kappa]$ implica $[\kappa] = [\kappa']$. Nuestro objetivo es describir el orden parcial en $\mathcal{Q}(\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G))$ en términos de datos de subgrupo torcido.

Considere $I_\pm, I'_\pm \subseteq \pm\Pi$. Si $I'_+ \subseteq I_+$ e $I'_- \subseteq I_-$, entonces $I' \subseteq I$ y $\mathbb{T}_{I'}^\varphi \subseteq \mathbb{T}_I^\varphi$. Por el tercer teorema de isomorfismo de grupos, existe un morfismo sobreyectivo de grupos $\mathbb{T}_{I'^c}^\varphi \twoheadrightarrow \mathbb{T}_{I^c}^\varphi$ con núcleo $\mathbb{T}_I^\varphi/\mathbb{T}_{I'}^\varphi$, el cual induce un morfismo inyectivo de grupos $\eta : \widehat{\mathbb{T}_{I^c}^\varphi} \hookrightarrow \widehat{\mathbb{T}_{I'^c}^\varphi}$. Note que si $g \in N^\varphi$ y $x \in \Sigma^{\varphi'} \subset \Sigma^\varphi$ entonces $\eta(g)(x + \mathbb{T}_{I'}^\varphi) = g(x + \mathbb{T}_I^\varphi) = 0$, por tanto $\eta(N^\varphi) \subset N^{\varphi'}$.

Definición 5.3.7. Sea $\mathcal{D}^\varphi = (I_+, I_-, N^\varphi, \Gamma, \gamma, \delta)$ y $\mathcal{D}^{\varphi\prime} = (I'_+, I'_-, N^{\varphi\prime}, \Gamma', \gamma', \delta')$ dos datos de subgrupo torcido $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$. Decimos que $\mathcal{D}^\varphi \leq \mathcal{D}^{\varphi\prime}$ si y sólo si:

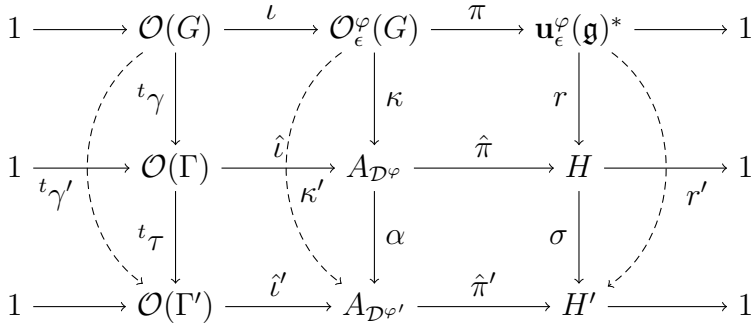
- ▷ $I'_+ \subseteq I_+$, $I'_- \subseteq I_-$.
- ▷ $\eta(N^\varphi) \subseteq N^{\varphi\prime}$.
- ▷ existe un morfismo de grupos algebraicos $\tau : \Gamma' \to \Gamma$ tal que $\gamma\tau = \gamma'$.
- ▷ $\delta'\eta = \tau^t\delta$.

De hecho, decimos que $\mathcal{D}^\varphi \sim \mathcal{D}^{\varphi\prime}$ son equivalentes si y sólo si $\mathcal{D}^\varphi \leq \mathcal{D}^{\varphi\prime}$ y $\mathcal{D}^\varphi \leq \mathcal{D}^{\varphi\prime}$. En particular, esto implica que $I'_+ = I_+$, $I'_- = I_-$, $N^\varphi = N^{\varphi\prime}$, τ es un isomorfismo y $\delta' = \tau^t\delta$.

El último teorema genera la parametrización de cocientes de $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G)$ salvo isomorfismo. La prueba es análoga al caso $\varphi = 0$, ya que esta se realiza sobre la conmutatividad del diagrama (5.1) y las construcciones generales de los diferentes cocientes.

Teorema 5.3.8. *Sean $\mathcal{D}^{\varphi}$ y $\mathcal{D}^{\varphi'}$ datos de subgrupos torcidos $\kappa : \mathcal{O}_{\epsilon}^{\varphi}(G) \to A_{\mathcal{D}^{\varphi}}$, $\kappa' : \mathcal{O}_{\epsilon}^{\varphi}(G) \to A_{\mathcal{D}^{\varphi'}}$ los correspondientes cocientes. Entonces $[\kappa] \leq [\kappa']$ si y sólo si $\mathcal{D}^{\varphi} \leq \mathcal{D}^{\varphi'}$.*

Prueba (Idea). La prueba es básicamente la misma de [AG, Teorema 2.20], pero cambiando la aplicación η definida en [AG, Definición 2.19] por la η definida antes de la Definición 5.3.7. Comentaremos los detalles más importantes de dicha demostración. Usando el Teorema 5.3.2, podemos establecer que el siguiente diagrama es conmutativo, para un morfismo sobreyectivo de álgebras de Hopf $\sigma : H \to H'$.

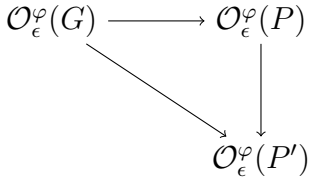


De donde es posible probar que $\Sigma^{\varphi'} \subseteq \Sigma^{\varphi}$, $I'_{\pm} \subseteq I_{\pm}$ y por tanto $\eta(N^{\varphi}) \subset N^{\varphi'}$. Recordemos los mapeos ψ y θ que definen los elementos ∂^z del Lema 5.1.3. Denotemos con superíndices $'$ a las aplicaciones relacionadas con la construción de $A_{\mathcal{D}^{\varphi'}}$, dada por el Teorema 5.3.2. Entonces, para todo elemento $D^z \in N^{\varphi}$ y $D^{z'} \in N^{\varphi'}$ sucede que

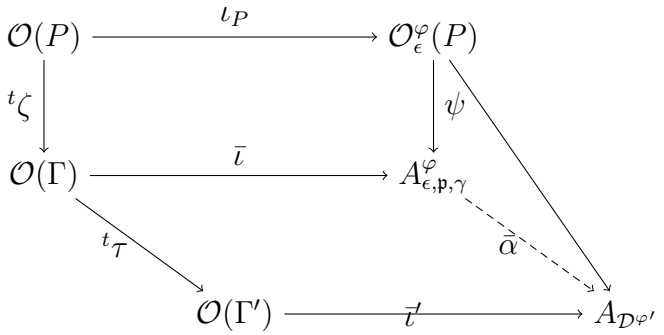
$$ {}^t\tau\delta(z) = \alpha\delta(z) = \alpha t(\partial^z) = \alpha t(\psi(t^{\theta}(D^z))) = t'\phi'(t^{(}\theta')(D^z)) = \delta'(\eta(D^z)), $$

y como $\alpha\kappa = \kappa'$, entonces podemos deducir que $\mathcal{D}^{\varphi} \leq \mathcal{D}^{\varphi'}$.

Reciprocamente, $\mathcal{D}^{\varphi} \leq \mathcal{D}^{\varphi'}$, sucede que $\mathbf{u}_{\epsilon}^{\varphi}(\mathfrak{p}') \subset \mathbf{u}_{\epsilon}^{\varphi}(\mathfrak{p})$, también existe un morfismo de álgebras de Hopf $\mathcal{O}_{\epsilon}^{\varphi}(P) \to \mathcal{O}_{\epsilon}^{\varphi}(P')$ tal que el diagrama siguiente conmuta,



Como ${}^t\tau{}^t\zeta =^t \zeta'$ y $A^{\varphi}_{\epsilon,\mathfrak{p},\gamma}$ es un pushout tenemos que el siguiente diagrama es conmutativo, para un único $\bar{\alpha}$,



se chequea directamente que $\bar{\alpha}(J_\delta) = 0$ y por tanto tenemos un morfismo $\kappa : A_{\mathcal{D}^\varphi} \to A_{\mathcal{D}^{\varphi'}}$ tal que $\alpha\kappa = \kappa'$. □

Como conclusión de los últimos tres teoremas presentados, podemos establecer una prueba para el teorema principal de la tesis

Teorema 5.3.9 (Principal)**.** *Hay una biyección entre morfismos sobreyectivos de álgebras de Hopf $\mathcal{O}_\epsilon^\varphi(G) \to A$ y datos de subgrupos torcidos salvo equivalencia.* □

Propiedades de los cocientes

Finalizamos con una lista de algunas propiedades de los cocientes. Salvo el item (v), la prueba es similar a [AG2, Proposition 3.8].

Proposición 5.3.10. *Sea $D^\varphi = (I_+, I_-, N^\varphi, \Gamma, \gamma, \delta)$ un dato de subgrupo torcido. Entonces,*

- (i) *Si A_{D^φ} es punteada, entonces $I_+ \cap I_- = \emptyset$ y Γ es un subgrupo del grupo de matrices triangulares superiores de algún tamaño. En particular, si Γ es finito, entonces éste es abeliano.*
- (ii) *A_{D^φ} es semisimple si y sólo si $I_+ \cup I_- = \emptyset$ y Γ es finito.*
- (iii) *Si $\dim A_{D^\varphi} < \infty$ y $A^*_{D^\varphi}$ es punteada, entonces $\gamma(\Gamma)$ esta incluida en un toro fijo de G.*
- (iv) *Si A_{D^φ} es co-Frobenius entonces Γ es reductivo.*
- (v) *Si φ y $(I_+, I_-, \Sigma^\varphi)$ son tales que $\Sigma^\varphi = \mathbb{T}^\varphi$ pero $\Sigma \neq \mathbb{T}$, entonces $A_{\mathcal{D}^\varphi}$ no es una deformación por 2-cociclo de $A_{\mathcal{D}}$.*

Demostración. Probamos sólo (v). Si φ y $(I_+, I_-, \Sigma^\varphi)$ son tales que $\Sigma^\varphi = \mathbb{T}^\varphi$ pero $\Sigma \neq \mathbb{T}$, entonces $N^\varphi = 1$ y $N \neq 1$. Entonces, el cociente $H^\varphi = \mathbf{u}_\epsilon^\varphi(\mathfrak{p})^*/\langle D^z - 1 : \ D^z \in N^\varphi\rangle$ no puede ser una deformación por 2-cociclo de $H = \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{p})^*/\langle D^z - 1 : \ D^z \in N\rangle$ ya que tienen dimensión diferente. Si A_{D^φ} fuera una deformación por 2-cociclo de A_D,

entonces por argumentos en los diagramas conmutativos mostrados a lo largo de la tesis, podríamos tener que H^{φ} es una deformación por 2-cociclo de H, pero esto llevaría a una contradicción, ver Ejemplo 4.2.6. □

Bibliografía

[Ab] E. Abe, Hopf algebras, Cambridge University Press, Cambridge, 1977.

[A1] N. Andruskiewitsch. 'Notes on extensions of Hopf algebras'. *Can. J. Math* **48** (1996), no. 1, 3–42.

[AD] N. Andruskiewitsch & J. Devoto. 'Extensions of Hopf algebras'. *Algebra i Analiz* **7** (1995), no. 1, 22–61.

[A2] N. Andruskiewitsch. 'Quantum symmetries in theoretical Physics and Mathematics'. *Contemp. Math* **294** (2002), 1–57.

[AG] N. Andruskiewitsch & G. García. 'Quantum subgroups of a simple quantum group at roots of one'. *Compositio Math* **145** (2009), 476–500.

[AG2] N. Andruskiewitsch & G. García. 'Extensions of finite quantum groups by finite groups'. *Transform. Groups* **14**(1)(2009), 1–27.

[AS] N. Andruskiewitsch & H-J Schneider. 'On the classification of finite-dimensional pointed Hopf algebras'. *Annals of Math.* **171** (2010), 375–417.

[ArGa] S. Arkhipov & D. Gaitsgory. 'Another realization of the category of modules over the small quantum group'. *Adv. in Math.* **173** (2003), 114–143.

[BG] K. Brown & K. Goodearl, Lectures on algebraic quantum groups, Birkhäuser Verlag, Basel, 2002.

[BGS] K. Brown, I. Gordon & J. Stafford. '$\mathcal{O}_\epsilon(G)$ is a free module over $\mathcal{O}(G)$'. *arXiv:math/0007179v1* (2000).

[BB] T. Banica & J. Bichon, 'Quantum groups acting on 4 points', *J. Reine Angew. Math.* **626** (2009), 75-114.

[BS] T. Banica & R. Speicher, Liberation of orthogonal Lie groups. *Adv. Math.* **222** (2009) 1461–1501.

[BD] J. Bichon & M. Dubois-Violette, Half-commutative orthogonal Hopf algebras. *Pacific J. Math.* **263** (2013), 13–28.

[BN] J. Bichon & S. Natale, Hopf algebra deformations of binary polyhedral groups. *Transform. Groups* **16** (2011), 339–374.

[BY] J. Bichon & R. Yuncken, 'Quantum subgroups of the compact quantum group $SU_{-1}(3)$', *Bull. London Math. Soc* **46** (2014), 315–328.

[CK] C. de Concini & V. Kac. Representations of quantum groups at Roots of 1, in Operator Algebras Unitary Representations, Enveloping Algebras, and Invariant Theory, Birkhäuser, Boston, 1990 471–506.

[CKP] C. de Concini, V. Kac & C. Procesi. Quantum coadjoint action. *Journal AMS* **5** (1992), no. 1 151–189.

[CV1] M. Costantini & M. Varagnolo. Quantum double and multiparameter quantum groups. *Comm. Algebra* **5** (1994), no. 5, 6305–63213.

[CV2] M. Costantini & M. Varagnolo. Multiparameter quantum function algebra at roots of 1. *Math. Ann.* **306** (1996), no. 4, 759–780.

[DL] C. De Concini & V. Lyubashenko. Quantum function algebra at root of 1. *Advances in Math.* **108** (1994), 205–262.

[Do] Y. Doi. 'Braided bialgebras and quadratic bialgebras'. *Communications in Algebra* **21:5** (1993), 1731–1749.

[D] V. G. Drinfeld, 'Quantum groups', *Proc. ICM, Berkeley 1986*, 798–820.

[EG] P. Etingof & S. Gelaki. 'The classification of triangular semisimple and cosemisimple Hopf algebras over an algebraically closed field'. *Int Math Res Notices* . **5** (2000), 223–234.

[EGNO] P. Etingof, S. Gelaki, D. Nikshych & V. Ostrik, Tensor categories, Math. Surveys and Mono, Rhode Island, (AMS**205**)2012.

[FR] W. Ferrer Santos & A. Rittatore. 'Actions and invariants of algebraic groups'. *Pure and Applied Math.* **269** (2005), 223–234.

[FST] U. Franz, A. Skalski and R. Tomatsu, Idempotent states on compact quantum groups and their classification on $U_q(2)$, $SU_q(2)$, and $SO_q(3)$. *J. Noncommut. Geom.* **7** (2013) 221–254.

[G] G. García, Álgebras de Hopf y Grupos Cuánticos, Tesis de doctorado en matemáticas, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina (1997), `http://www.mate.unlp.edu.ar/~ggarcia/articulos/tesisdoc/tesisdocesq.pdf`.

[G1] G. García, 'On Hopf algebras of dimension p^3', *Tsukuba J. Math.* **29**, no. 1, 259–284.

[G2] G. García, 'Quantum subgroups of $GL_{\alpha,\beta}(n)$' *J. Algebra* **324** (2010), 1392-1428.

[Ha] R. Hartshorne, Algebraic geometry, Graduate Texts in Mathematics. 52(1977) New York, Springer-Verlag.

[HLT] T.J. Hodges, T. Levasseur & M. Toro, 'Algebraic strcuture of multiparameter quantum groups', *Advances in Math.* **126**(1997), 52–92.

[H] J. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer-Verlag, New York, 1980 3ed.

[Ho] G. Hochschild 'Algebraic groups and Hopf algebras', *Illinois Journal of Math.* **14:1**(1970), 52–65.

[Ho1] G. Hochschild, Basic theory of algebraic groups and Lie algebras, Graduate Texts in Mathematics. vol. 75 New York, Springer-Verlag, 1981.

[Ka] C. Kassel, Quantum groups, Graduate Texts in Mathematics. 155(1995) New York, Springer-Verlag, 2002.

[Ko] B. Kostant, Groups over $\mathbb{Z}$, *Proc. Symposia in Pure Math.* **9** 483–491.

[KS] A. Klimyk & K. Schmüdgen, Quantum groups and their representations, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, Berlin (1997).

[LS] S. Levendorskiĭ & Y. Soibelman, 'Algebras of functions on compact quantum groups', *Communications in Mathemaical Physics* **139**(1991), 139–141.

[L1] G. Lusztig, 'Quantum deformations of certain simple modules over enveloping algebras', *Advances in Mathemathics* **70** (1988), 237–249.

[L2] G. Lusztig, 'Modular representations and quantum groups', *Contemporary Mathemathics* **82** (1989), 59–77.

[L3] G. Lusztig, 'Quantum groups at root 1', *Geometriae Dedicata* **35** (1990), 89–114.

[L4] G. Lusztig, 'Finite dimensional Hopf algebras arising from quantized universal enveloping algebras', *Journal of the Mathematical* **3** (1990), no. 1, 257–296.

[Ja] J. C. Jantzen, Lectures on quantum qroups, American Mathematical Society, Providence, 1996.

[M] S. Majid, Foundations of quantum group theory, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[Ma] M. Mombelli, Introducción a las categorías tensoriales y sus representaciones, Notas de Clase, FaMAF II-2013, disponinles en `www.famaf.unc.edu.ar/~mombelli/categorias-tensoriales3.pdf`.

[Mi] J. S. Milne, Algebraic groups, Lie groups, and their arithmetic subgroups, Available at `www.jmilne.org/math/`, 2011

[Mo] S. Montgomery, Hopf algebras and their actions on rings, AMS-NSF, CBMS-No. 82 Chicago, 1992.

[Mu] E. Müller, Finite subgroups of the quantum general linear group. *Proc. London Math. Soc.* **81** (2000), no. 1, 190–210 .

[N] S. Natale. 'On semisimple Hopf algebras of dimension pq^2'. *Journal of Algebra* **221** (1999), 242–278.

[P] P. Podles. 'Symmetries of quantum spaces. Subgroups and quotient spaces of quantum SU(2) and SO(3) groups'. *Comm. Math. Phys.* **170** (1995), 1-20.

[Ra] D. Radford, Hopf algebras, World Scientific, London, 2012.

[Ro] M. Rosso, 'Finite dimensional representations of the quantum analog of the enveloping algebra of a complex simple Lie algebra', *Comm. Math. Phys.* **117** (1988), 581–593.

[R] N. Reshetikhin, 'Multiparameter quantum groups and twisted quasitriangular Hopf algebras', *Lett. Math. Phys.* **20** (1990), no. 4, 331–335.

[Sc0] H-J Schneider, 'Some remarks on exact sequences of quantum groups', *Commun. Algebra* **21** (1993), 3337–3357.

[Sc] H-J Schneider, Lectures on Hopf algebras, Trabajos de Mateática, 31/95 (FaMAF, 1995).

[Se] J-P. Serre, Complex aemisimple Lie algebras, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[Sw] M. Sweedler, Hopf algebras, Benjamin, New York, 1969.

[T] T. Timmerman, An invitation to quantum groups and duality, European Mathematical Society, Zürich, 2008.

[W] S.L. Woronowicz, 'Compact quantum groups', *Symétries Quantiques*, North Holland, Amsterdan (1998), 845–884.

Índice alfabético

álgebra, 3
  $\hbar$-ádica de Drinfeld-Jimbo, 30
  cuantizada torcida
    asociada a $\mathfrak{p}$, 59
  de potencias divididas
    en raíz de la unidad, 48
  Drinfeld-Jimbo, 7, 21
  envolvente cuántica torcida, 27
    raíz de la unidad, 48
  envolvente cuantizada, 27
  funciones cuantizada, 23
  Hopf P-bigraduada, 21
álgebra de Hopf, 6
  cosemisimple, 9
  extensión, 10
  extensión central, 10
  semisimple, 9
  simple, 9
álgebra envolvente cuantizada
  un parámetro, 7
2-cociclo, 19

antípoda, 6
aparamiento de Hopf, 20
  perfecto, 21
apareamiento
  evaluación, 21
aplicación
  torcimiento, 26

bi-ideal, 6
biálgebra, 6

cápsula algebraica, 60
categoría opuesta, 15
coálgebra, 3
  coopuesta, 4
  cosemisimple, 5
  punteada, 5
  simple, 5
coconmutatividad, 4
coideal, 4
comódulo, 4
comultiplicación, 3
construcción pushout, 11
coproducto, 3
corradical, 5
counidad, 3

dato de subgrupo
  torcido, 73
deformación
  2-cociclo, 19
  twist, 18

elemento
  coinvariante, 9
  primitivo, 5
  tipo grupo, 5
extensión
  hendida, 12

fielmente playo, 10
filtración
  corradical, 6
  de coálgebras, 5
flip, 3
forma
  adjunta, 28
  simplemente conexa, 28

grupo
de trenzas, 35
grupo cuántico, 14
torcido
en raíz de la unidad, 48
grupos cuánticos, 17
algebraicos, 17

ideal
de augmentación, 7
de Hopf, 7

Lie álgebra
algebraica, 60

módulo
de peso máximo, 28
de tipo 1, 23, 28
morfismo
de álgebras de Hopf, 7
de coálgebras, 4
de comódulos, 5

núcleo de Frobenius-Lusztig
torcido, 52
regular torcido, 58

peso
dominante, 2
producto
de convolución, 6
pushout, 13

retracción, 12

sección, 12
subálgebra
de Borel negativa, 33
de Borel positiva, 33
de coinvariantes, 9
subálgebra de Hopf
normal, 8
subcategoría plena, 15
subgrupo cuántico
regular torcido, 59
Sweedler
dual de, 8
notación sigma de, 4

twist, 18

vector
peso máximo, 28