

# Función de Pertenencia a través del uso de funciones de verosimilitud, estimadores robustos y métodos análogos al de clasificación ICM

por Aureliano A. Guerrero

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía y Física como parte de los requerimientos para la obtención del grado de Doctor en Matemática de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Febrero de 2014

©FAMAF-UNC 2014

Director: Dr. Oscar H. Bustos  
CoDirector: Dr. Jorge G. Adrover



*A mis sobrinos Apolos, Hipólito y Paloma  
y la memoria de  
Cecilia Signorini y de mi abuelo Juan*



# Resumen

El píxel es una unidad espacial cuyas propiedades básicas, forma y localización, son dependientes del sensor y no del escenario. Comúnmente, el área representada por un píxel contiene más de una clase temática. El hecho de que un píxel posea varias clases hace que los datos no sean aptos para el uso de algunas técnicas de análisis convencional de la imagen. En consecuencia, el uso de enfoques tradicionales “un píxel, una clase” para clasificar imágenes de teledetección contendrá errores en el resultado final si hay presentes píxeles mixtos. Lamentablemente, el problema de píxeles mixtos no se puede eliminar mediante el uso de la fina resolución espacial ya que a menudo es conveniente dejar la mezcla de los elementos constructivos de una clase y por otra parte, en grandes áreas el uso de resolución espacial fina no es práctico. Todo esto hace que surja la necesidad de obtener técnicas adecuadas para analizar el grado de pertenencia de un píxel a una clase determinada.

En particular en imágenes SAR se ha demostrado que la distribución  $\mathcal{G}_I^0$  puede ser considerada como el Modelo Universal para el retorno de la intensidad. Esta distribución tiene dos parámetros por lo general desconocidos relacionados a la textura y escala (brillo) de la señal. En base a estimaciones del parámetro de textura (bajo el supuesto de escala conocida) se hacen conclusiones y se toman decisiones respecto a si un píxel determinado pertenece a una clase temática u a otra, por lo cual es importante que esta estimación sea confiable para luego poder establecer el grado de pertenencia del píxel a alguna de las clases involucradas. En el presente trabajo estudiaremos las ventajas y desventajas de un método basado en robustez sobre alguno de los métodos clásicos en cuanto a la estimación de estos parámetros y comportamiento de dichos estimadores en una función que definiremos y llamaremos grado de pertenencia.

**Palabras claves:** inferencia, M-estimadores, método de Monte Carlos, modelos difusos, radar de apertura sintética, ruido speckle, robustez, verosimilitud.

**Mathematics Subject Classification (2010):** 62M86, 62M40, 62F35, 62M30, 62F12.



# Abstract

A píxel is a spatial unity whose basic properties, shape and localization are dependant on the sensor and not on the scenario. Commonly the area represented by a píxel contains more than one thematic class. The fact that a píxel possesses varied classes makes the data inappropriate to use some image conventional analysis techniques. Consequently, the use of traditional "a píxel, a class" to classify teledetection images will contain errors in the final result if mixed píxels are present. Unfortunately mixed píxel problem can not be eliminated by using a smaller spatial resolution since it is often convenient to leave the mixture of the constructive elements of one class and on the other hand, in many areas of study, the use of fine spatial resolution is not practical. All these reasons make it necessary to obtain adequate techniques to analyse the degree of belonging of a píxel to a determined class.

In particular in SAR images it has been proved that the distribution  $\mathcal{G}_I^0$  can be considered as the universal model for intensity return. This distribution has two unknown parameters related to the texture and scale (brightness) of the signal. Based on texture parameter estimates (under the assumption of the known scale) we can take decisions and reach conclusions about whether a given píxel belongs to a class topic or to another, so it is important that this estimate is reliable to later establish the degree of membership of the píxel to one of the classes involved. In the present work we will study the advantages and disadvantages of a method based on robustness of some of the classical methods as regards the estimation of these parameters and behavior of such estimators in a function that we will define and name degree of belonging.

**Keywords:** inference, M-estimators, Monte-Carlo method, fuzzy model, synthetic aperture radar, speckle, robustness, likelihood.

**Mathematics Subject Classification (2010):** 62M86, 62M40, 62F35, 62M30, 62F12.





# Agradecimientos

Quiero agradecerle a mi director y a mi codirector, el Dr. Oscar H. Bustos y el Dr. Jorge G. Adrover, por su apoyo incondicional, su calidez humana, por compartir su tiempo y conocimientos conmigo, por aconsejarme y tener una palabra de aliento cuando las cosas no salían tan bien.

Gracias a mis amigos de Pigüé, Mar del Plata y Córdoba, a los cuales considero como parte fundamental en la obtención de este trabajo, ya que con las charlas, mates, o juntadas que hemos compartido estuvieron siempre y han sabido aconsejarme en momentos de incertidumbre o simplemente me han acompañado y me han hecho sentir parte de su familia.

Gracias a mi familia, otra parte fundamental en este trabajo, por haberme apoyado siempre en todas las decisiones de mi vida, por alegrarse por mis logros, por apoyarme y ayudarme a encontrarle la vuelta cuando se me hacía muy difícil lograr algunas metas. Gracias por repetirme una y mil veces: "Si querés..., podés..."

Gracias a la FaMAF, al CIEM al CONICET y a la SeCyT por el apoyo económico y por haberme brindado el lugar de trabajo. A mi comisión asesora de doctorado, al tribunal de esta tesis, a mis compañeros de doctorado y a Nancy Moyano, quienes siempre tuvieron la mejor predisposición para conmigo.

Mis logros son también los logros de las personas que me ayudaron a cumplirlos.

*A TODOS LOS QUE DE UNA U OTRA FORMA  
ESTUVIERON PRESENTE EN ESTE TRABAJO, GRACIAS!!!!*



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>Abstract</b>	<b>V</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>VII</b>
<b>Índice general</b>	<b>IX</b>
<b>Introducción: El ojo humano vs dispositivos mecánicos</b>	<b>XI</b>
<b>1. Teledetección: historia, principios y definiciones</b>	<b>1</b>
1.1. TELEDETECCIÓN: HISTORIA Y DEFINICIONES . . . . .	1
1.1.1. Un poco de historia . . . . .	3
1.1.2. Argentina en el espacio . . . . .	5
1.2. PRINCIPIOS FÍSICOS DE LA TELEDETECCIÓN . . . . .	8
1.2.1. El espectro electromagnético . . . . .	9
1.2.2. Principios y leyes de la radiación electromagnética . . . . .	10
1.2.3. Características de la radiación solar: interacción con la cubierta terrestre . . . . .	10
1.2.4. Comportamiento espectral para los tres elementos fundamentales de la cobertura terrestre en los diferentes dominios . . . . .	13
<b>2. Imágenes SAR</b>	<b>15</b>
2.1. TECNOLOGÍA RADAR . . . . .	16
2.1.1. Las microondas . . . . .	16
2.1.2. El radar como instrumento de teledetección . . . . .	17
2.1.3. La ecuación de radar . . . . .	21
2.1.4. Elementos del SAR . . . . .	23

<b>3. Clasificación en imágenes ópticas</b>	<b>27</b>
3.1. ANÁLISIS DIGITAL DE IMÁGENES:TÉCNICAS DE CLASIFICACIÓN SUPERVISADA . . . . .	27
3.1.1. Técnica de análisis espectral de imágenes ópticas . . . . .	28
<b>4. Técnica de análisis en imágenes SAR</b>	<b>37</b>
4.1. MODELO MULTIPLICATIVO Y RUIDO SPECKEL . . . . .	38
4.1.1. Backscatter de amplitud . . . . .	39
4.1.2. Retorno de amplitud . . . . .	41
4.1.3. Backscatter de intensidad . . . . .	43
4.1.4. Retorno de intensidad . . . . .	45
<b>5. Modelo y estimación paramétrica</b>	<b>47</b>
5.1. FUNCIÓN DE PERTENENCIA . . . . .	47
5.2. MODELO $\mathcal{G}_I^0(\alpha, 1, 1)$ Y ESTIMACIÓN PARAMÉTRICA . . . . .	49
5.2.1. $\mathcal{G}_I^0(\alpha, \gamma, 1)$ y sus propiedades . . . . .	49
5.2.2. Estimadores de Máxima Verosimilitud y de los Momentos . . . . .	51
5.2.3. M-estimadores . . . . .	52
<b>6. Comportamiento Asintótico de los Estimadores de Máxima Verosimilitud y los M-estimadores</b>	<b>57</b>
6.1. DEFINICIONES GENERALES . . . . .	57
6.2. COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DEL ESTIMADOR DE MÁXIMA VEROSIMILITUD $\hat{\alpha}_{ML,N}$ DE UNA DISTRIBUCIÓN $\mathcal{G}_I^0(\alpha)$ . . . . .	58
6.2.1. Consistencia . . . . .	58
6.2.2. Normalidad Asintótica y Eficiencia . . . . .	59
6.3. COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DEL M-ESTIMADOR $\hat{\alpha}_{M,N}$ DE UNA DISTRIBUCIÓN $\mathcal{G}_I^0(\alpha)$ . . . . .	60
6.3.1. Consistencia . . . . .	61
6.3.2. Normalidad Asintótica y Eficiencia . . . . .	65
<b>7. Proceso de Monte Carlo</b>	<b>69</b>
7.1. MODELO Y SIMULACIÓN . . . . .	69
7.1.1. Simulaciones . . . . .	71
7.1.2. Formato de presentación de los resultados . . . . .	71
7.1.3. Imágenes generadas con $\mathcal{G}_I^0(-7)$ y $\mathcal{G}_I^0(-3)$ . . . . .	73

7.1.4. Imágenes generadas con $\mathcal{G}_I^0(-15)$ y $\mathcal{G}_I^0(-7)$ . . . . .	81
7.1.5. Imágenes generadas con $\mathcal{G}_I^0(-15)$ y $\mathcal{G}_I^0(-3)$ . . . . .	89
<b>8. Resultados y Conclusiones</b>	<b>97</b>
8.1. RESULTADO DE LAS SIMULACIONES . . . . .	97
8.2. CONCLUSIONES GENERALES . . . . .	99
8.3. FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN . . . . .	99
<b>A. Resultados de las simulaciones con contaminación con píxeles de mezcla</b>	<b>101</b>
A.1. Imágenes generadas con $\mathcal{G}_I^0(-7)$ y $\mathcal{G}_I^0(-3)$ . . . . .	101
A.1.1. Estimación de Parámetros . . . . .	101
A.1.2. Funciones de Pertenencia Contaminadas con Píxeles de Mezcla . . . . .	103
A.1.3. Ajuste en Imágenes . . . . .	105
A.2. Imágenes generadas con $\mathcal{G}_I^0(-15)$ y $\mathcal{G}_I^0(-7)$ . . . . .	109
A.2.1. Estimación de Parámetros . . . . .	109
A.2.2. Funciones de Pertenencia Contaminadas con Píxeles de Mezcla . . . . .	111
A.2.3. Ajuste en Imágenes . . . . .	113
A.3. Imágenes generadas con $\mathcal{G}_I^0(-15)$ y $\mathcal{G}_I^0(-3)$ . . . . .	117
A.3.1. Estimación de Parámetros . . . . .	117
A.3.2. Funciones de Pertenencia Contaminadas con Píxeles de Mezcla . . . . .	119
A.3.3. Ajuste en Imágenes . . . . .	121
<b>B. Algoritmo de estimación del M-estimador y elección del b</b>	<b>125</b>
<b>Lista de figuras</b>	<b>127</b>
<b>Lista de tablas</b>	<b>129</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>129</b>

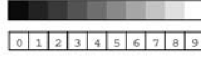


# Introducción: El ojo humano vs dispositivos mecánicos

Podemos definir la visión como el proceso de adquirir conocimiento sobre eventos y objetos del medio ambiente mediante la extracción de información de la luz que los objetos emiten o reflejan. Lo primero que tendremos que tener en cuenta es en qué forma esta información es, en principio, disponible. La luz emitida y la reflejada por los objetos tiene que ser recogida y medida antes de extraer cualquier tipo información.

Aunque hay, por supuesto, incontables diferencias entre el ojo humano y cualquier cámara, el proceso de formación de la imagen es esencialmente el mismo, todos comparten la idea fundamental de convertir la luz en una imagen de dos dimensiones y luego transformarla en algún tipo de señal que representa la intensidad de la luz en cada punto de la imagen. Por lo tanto, la intensidad de la luz se mide entonces en un gran número de localizaciones espaciales (o muestras) para luego representar estos valores en una imagen. En el ojo humano, este proceso es realizado por los fotorreceptores, mientras que los sistemas artificiales tienen que emplear una variedad de tecnologías. Sin embargo, todos los sistemas comparten la idea fundamental de convertir la luz en una primera imagen bidimensional y luego en algún tipo de señal que representa la intensidad de la luz en cada punto de la imagen. Por lo tanto una imagen puede definirse como una función escalar en dos dimensiones,  $I(x, y)$ , que mide la intensidad (luminosidad) en todos los puntos  $(x, y)$  de la imagen. Aunque en el caso general de ambas cantidades (la posición de la  $(x, y)$  y la intensidad  $I(x, y)$ ) toman valores continuos, nos centraremos en el caso típico donde se han tomado muestras en puntos discretos de la imagen.

En conclusión, La visión es una tarea computacional extremadamente difícil. Por ejemplo ver figuras [1](#) y [2](#).



1	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	3	3	3	3	2	2	1	1	1	1	0	2	4	5	3	3	3	3	3	4	4	2	2	3	4	2					
2	4	5	5	5	5	4	3	3	3	4	3	2	3	3	3	2	3	4	6	5	5	3	4	5	5	5	5	3	4	3	3	4	4	4	4	4	5	6	5	4	4	5	3			
2	3	4	4	4	4	3	3	4	4	4	2	2	3	3	2	3	4	4	5	4	5	4	5	4	3	2	2	2	3	5	5	5	4	4	4	5	6	6	4	4	4	3				
3	4	4	3	3	4	4	4	3	2	3	4	3	2	2	3	4	5	3	3	4	4	4	3	4	3	2	2	2	3	3	4	3	4	5	4	3	4	5	4	5	3					
3	5	5	3	2	3	3	2	2	2	2	2	3	3	3	3	4	5	5	4	3	3	3	2	2	3	4	6	5	4	4	5	5	4	4	4	4	5	5	5	6	5	5	3			
3	5	4	2	2	2	1	1	3	1	2	3	3	4	4	4	3	5	4	3	4	3	2	2	3	3	2	3	4	3	3	4	5	5	4	3	3	4	5	5	5	5	3				
3	5	4	2	1	1	1	2	2	2	3	3	4	3	3	4	3	3	4	4	3	3	3	4	5	4	4	4	4	3	2	3	3	5	3	3	3	5	6	5	4	3					
4	5	4	3	2	1	0	1	2	1	2	3	2	3	3	2	4	3	3	5	4	3	2	1	2	4	5	4	3	4	3	2	3	4	4	5	5	3	3	3	4	4	3	1			
4	5	3	3	2	1	1	2	3	3	3	2	2	3	4	4	3	4	5	4	3	2	2	2	3	3	4	5	4	4	4	4	4	4	5	4	3	4	4	4	3	1					
3	5	4	3	2	2	2	3	4	5	4	3	2	3	3	3	4	4	5	4	3	4	4	4	3	3	3	4	5	4	3	3	3	4	5	4	4	4	4	4	4	4	1				
3	6	4	4	3	4	5	6	6	6	5	4	3	4	4	3	4	5	5	4	5	5	5	4	3	3	3	3	4	4	4	3	2	2	3	4	4	4	4	3	4	4	1				
3	6	6	5	4	5	6	6	7	7	6	5	5	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	4	3	4	4	4	3	3	2	2	2	3	3	3	4	4	4	4	3	4	2				
3	5	6	5	4	6	7	7	7	7	7	6	6	5	6	6	6	6	6	6	6	6	5	5	5	4	3	3	3	4	2	3	2	3	3	3	5	5	5	4	4	3	2				
2	5	6	5	4	6	7	7	7	7	7	7	8	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	6	6	6	5	4	4	3	3	4	3	3	3	3	3	3	3	3	4	5	4				
3	5	6	4	5	7	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8	7	7	6	6	5	5	4	4	4	4	3	3	3	3	3	2	2	3	3	4	4	4	5	3						
2	5	5	6	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8	8	8	7	7	6	6	6	5	4	4	4	4	3	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	3					
3	5	5	5	7	7	7	8	8	8	8	8	8	8	8	7	7	6	6	6	5	5	4	3	3	2	1	2	2	2	3	4	5	4	4	4	4	5	4	4	4	5	4	5	3		
3	4	4	6	8	7	7	8	8	9	8	8	8	8	8	8	8	7	7	6	6	5	5	4	4	4	3	2	2	2	3	3	5	5	5	4	4	5	4	5	4	5	4				
3	5	4	6	8	7	7	8	8	9	9	8	8	8	8	8	7	7	6	6	6	5	5	4	4	4	3	3	4	4	3	3	4	4	4	5	6	4	4	5	6	4	5	3			
3	6	5	6	7	7	7	8	8	8	9	8	8	8	8	8	7	7	6	6	6	6	6	6	6	5	5	4	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	3	4	3	3				
2	5	5	7	7	8	8	8	8	8	8	8	7	7	8	7	7	7	7	7	7	6	6	6	6	6	5	5	4	3	3	4	4	5	4	5	5	5	4	4	3	3					
2	3	5	7	7	7	7	8	8	8	8	8	7	7	8	7	7	7	7	7	6	6	6	6	6	5	5	5	4	4	3	3	4	4	5	5	6	6	4	4	5	6	6	4			
3	4	6	7	7	7	8	8	8	8	8	8	8	7	8	7	7	7	7	7	6	6	6	6	6	5	5	4	4	4	3	3	4	4	5	4	4	4	3	3	5	4	4	5	6	4	
4	4	6	7	7	7	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	7	6	6	6	6	5	5	4	4	4	4	4	4	4	3	3	3	5	4	4	4	4	4	4	6	6	3				
3	4	6	7	7	6	7	8	8	8	8	9	8	8	8	8	7	6	5	5	5	5	5	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	3	4	4	4	4	3	4	4	3	4	4	2		
2	4	6	6	6	6	7	7	6	6	7	7	8	8	8	8	8	7	6	5	5	5	5	5	5	5	4	4	4	4	4	4	4	4	3	4	4	4	4	4	3	3	1				
2	4	6	6	5	6	6	6	6	7	7	8	7	7	8	7	7	7	6	6	6	6	6	6	5	5	5	5	5	5	5	4	4	5	5	5	4	5	5	4	3	2	1				
1	4	6	6	5	6	7	8	8	8	8	7	7	8	7	7	7	6	5	4	4	4	4	4	4	3	3	3	3	3	3	3	2	2	1	1	1	1	1	2	2	2	1				
2	5	6	6	7	7	8	7	7	8	7	7	8	7	7	6	4	3	7	6	4	4	4	4	2	2	3	4	4	4	4	5	5	4	4	4	4	4	5	2	1	2	2	1			
3	5	6	6	7	6	5	4	3	2	2	4	6	7	7	8	7	5	1	2	5	5	8	6	2	2	2	1	2	4	4	5	4	4	4	4	3	4	3	0	1	2	2				
3	5	6	7	6	4	2	5	3	3	4	4	6	7	7	4	1	3	5	5	7	6	5	4	4	3	2	3	4	4	4	4	3	4	4	4	4	4	4	1	0	2	2				
1	4	6	7	6	5	5	7	6	5	4	6	7	6	6	4	2	2	5	6	6	6	7	7	6	5	4	4	4	5	6	5	4	4	3	4	4	4	4	4	2	0	3	2			
0	2	6	7	7	6	7	8	6	5	6	6	6	6	6	4	2	2	2	6	7	7	7	6	5	4	4	4	5	6	6	6	5	4	4	3	3	4	3	2	3	4	3				
0	2	6	7	7	7	7	7	7	7	7	6	6	6	6	4	3	3	2	4	7	7	7	6	5	5	5	6	6	6	6	5	4	3	3	3	4	3	2	5	3						
1	3	6	7	7	7	7	7	7	6	6	6	7	6	5	3	3	3	3	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6	5	4	4	3	4	4	3	4	4	3	4	5	5	2				
1	4	5	6	7	7	7	7	7	6	6	7	6	6	6	6	5	3	3	3	4	5	5	6	6	6	6	6	6	5	4	4	3	3	4	2	3	4	4	1							
0	2	5	6	7	7	7	7	7	6	6	7	7	6	6	6	5	4	3	3	3	4	5	6	6	6	6	6	6	5	4	4	3	3	4	4	3	3	4	2	2						
0	1	3	6	6	7	7	7	7	7	7	6	6	6	5	4	3	2	3	5	6	7	7	6	6	5	5	6	6	5	4	3	4	4	4	4	4	3	3	1	1						
0	1	2	6	6	6	6	7	7	8	8	7	6	6	7	6	5	4	3	2	4	6	7	7	7	6	5	5	5	4	3	3	4	4	3	2	2	0	1	2							
0	0	1	6	6	6	7	8	8	8	7	7	6	8	7	5	4	4	3	2	5	7	7	7	6	6	5	5	4	4	4	3	3	3	4	3	0	2	1	1							
0	1	1	5	6	6	7	8	8	8	7	7	6	8	8	7	5	4	3	3	2	5	7	7	7	6	6	5	4	4	4	4	3	3	3	3	4	2	3	1	2						
0	1	1	5	6	6	7	7	8	7	8	6	5	6	6	6	5	3	2	1	2	2	4	6	7	7	6	6	5	4	4	4	3	3	3	4	4	3	0	2							
0	1	0	4	6	6	7	7	7	8	7	6	5	5	5	4	1	1	2	3	3	4	5	7	7	6	6	5	5	4	4	3	3	3	3	4	4	3	1	2	3						
0	1	1	3	6	6	7	7	7	8	7	6	6	6	6	5	4	3	3	4	4	5	6	6	6	6	6	5	4	3	3	3	3	4	4	3	1	2	3								
0	2	4	5	6	7	7	7	7	7	6	6	6	8	7	7	6	4	5	4	4	5	7	6	6	6	6	6	5	4	3	3	3	3	4	3	3	1	2	3							
1	5	8	7	6	7	7	7	7	7	6	6	6	7	8	7	5	4	4	4	4	7	6	5	6	6	6	5	4	3	3	3	3	4	1	1	1	2									





Figura 2: Imagen Original

Nuestro sistema visual realiza la tarea de reconocimiento de la imagen totalmente sin esfuerzo. A pesar de que la imagen en el nivel de nuestros foto-receptores es representada fundamentalmente en el formato de la primer figura, nuestro sistema visual de alguna manera se las arregla para dar sentido a todos estos datos y determinar el objeto del mundo real que causó la imagen, mientras que en los dispositivos utilizados para obtener las imágenes esto no es tan sencillo, inclusive cuando el fin es detectar un cierto objeto donde el dispositivo cuenta con cierta información previa (ver figura 3).

A pesar de estas ventajas, la visión humana por su parte cuenta con ciertas limitaciones. Por un lado, se restringe por la sensibilidad espectral de nuestras células sensoriales, que solo nos permite apreciar un determinado tipo de energía, denominado espectro visible. Otras formas energéticas, como el calor, no son observables visualmente, por lo que parece conveniente contar con unos “ojos artificiales” que amplíen nuestras posibilidades. Por otro lado, el campo de visión humana está limitado a nuestra propia estatura, por lo que abarca un cierto radio. Para paliar estas limitaciones, se ha acudido a sensores artificiales, montados sobre plataformas situadas a una cierta altitud y con ellos no sólo se tiene acceso a tipos de energía no visible (ultravioleta, infrarrojo, microondas) sino que además dan una nueva perspectiva. Esta nueva información, expande notablemente nuestro conocimiento sobre el medio que nos rodea, facilitando la interpretación de múltiples procesos.

El problema entonces es como emular y en parte mejorar los procesos que realiza el ojo humano para:

- Detección de bordes
- Detección de texturas
- Detección de formas u objetos

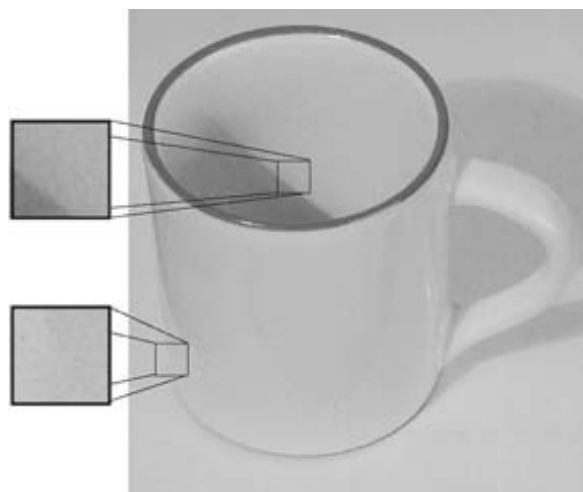


Figura 3: Distintos aspectos visibles de una imagen.

Este último aspecto es en el que está centrado este trabajo. Por lo general los píxeles de imágenes de teledección ocupan un área importante, lo cual lleva a que en un mismo píxel se encuentren varias clases temáticas mezcladas, y esto conlleva errores a la hora de etiquetar ese píxel con alguna de las clases temáticas tenidas en cuentas. Por lo tanto, al igual que el ojo humano necesita muchos

instrumentos (lupa, microscopio, etc) para analizar la composición de un objeto que a simple vista no se podría analizar, en los procesos de clasificación necesitan definirse técnicas adecuadas (o modelos) con el objetivo de identificar cual es la proporción de cada clase que hay en un píxel determinado. Los modelos paramétricos dan una descripción aproximada de la realidad por medio de alguna información cualitativa y unos pocos parámetros, y a este modelo se le aplican métodos probabilísticos para completar la descripción del conjunto de datos.

El problema de los estimadores clásicos en modelos paramétricos es que muchas veces éstos son excesivamente sensibles a pequeños apartamiento de los supuestos. Aunque este problema data desde los comienzos de la estadística, es recién a fines de los 50 en que se comienza a pensar en la idea de que nunca se tiene un conocimiento muy preciso de la verdadera distribución en estudio, y que la ejecución de test o estimadores clásicos es muchas veces inestable bajo pequeños cambios en la distribución subyacente. Es entonces en estos años donde se empieza a pensar en la idea de robustecer algunos métodos.

En general, un procedimiento se dice robusto si es razonablemente bueno o cercano a lo óptimo cuando se cumplen de forma correcta todas las hipótesis del modelo, y además es poco sensible a apartamiento de estas hipótesis. Es decir, estos procedimientos complementan la estadística clásica en el sentido que se tiene en cuenta que los modelos paramétricos son sólo una aproximación de la realidad.

En imágenes SAR en las últimas décadas han habido grandes avances con aplicaciones de estadística robusta, pero no han sido propuesto hasta el momento, o no se tiene conocimiento de ello, métodos robustos basados en M-estimadores para analizar el problema de clasificación de píxeles cuando hay presencia de píxeles de mezcla. Este problema es interesante de tratar debido a que como mencionamos anteriormente, un píxel de teledetección por lo general (según la resolución del instrumento) ocupan un área importante y a menudo ese píxel se lo puede asociar a varias clases temáticas.

La propuesta de este trabajo entonces es presentar modelos, procedimientos y estadísticos que ayuden a identificar la composición de una imagen SAR (Synthetic Aperture Radar) adquirida de un sensor remoto, estudiar el comportamiento de una función que informe el grado de pertenencia de un determinado píxel a las diferentes clases temáticas tenidas en cuenta y analizar las ventajas y desventajas de métodos basado en robustez sobre los métodos tradicionales de estimación aplicados sobre dichos procedimientos o rutinas.

Por lo tanto esta tesis está organizada de la siguiente manera: en el Capítulo 1 se hará una breve reseña histórica de la teledetección, destacando los componentes que la componen y sus principales definiciones, así como también el avance que ha tenido esta disciplina a nivel mundial y nacional. En el Capítulo 2 se describirá la tecnología SAR cuyas imágenes serán nuestro objeto de estudio. En el Capítulo 3 se expondrá a forma de introducción distintos métodos de clasificación en imágenes ópticas, los cuales han servido como parte motivado en este trabajo en cuanto a la aplicación de estas nociones en imágenes SAR. En el Capítulo 4 se detallará los modelos elegidos junto con sus distribuciones utilizados para describir la componente de intensidad. En el Capítulo 5 se expondrá en forma detallada nuestro aporte al problema de clasificación cuando hay presencia de píxeles de mezcla. Al final de este capítulo y el Capítulo 6 se hará un estudio del parámetro rugosidad ( $\alpha$ ) de la distribución que describe la intensidad de una imagen SAR  $\mathcal{G}_I^0(\alpha, \gamma, 1)$  semejante al realizado en el mismo parámetro para la variable amplitud como puede verse en Frery et al., 1996, 1997, 2002 [12] [10] [20] y Mejail et al 2000 [22]. En el Capítulo 7 se describirá los procesos de Monte Carlos utilizados para la comparación de los métodos clásicos, como son el de Maxima Verosimilitud y de los

Momentos, versus al método robusto M-estimador planteado por nosotros. Estos procesos servirán para comparar a los distintos métodos en cuanto a la estimación del parámetro de rugosidad de una  $\mathcal{G}_I^0(\alpha, 1, 1)$ , a la estimación de la función grado de pertenencia definida y descrita en el Capítulo 5 y en el ajuste de las imágenes simuladas. Y por último, en el Capítulo 8 se expondrá los resultados obtenidos de las simulaciones, las conclusiones generales y las futuras líneas de investigación.

# Capítulo 1

## Teledetección: historia, principios y definiciones

### 1.1. TELEDETECCIÓN: HISTORIA Y DEFINICIONES

Desde épocas remotas, uno de los sueños más anhelados por el hombre ha sido volar. Pese a los persistentes intentos, sólo desde hace no más de un siglo se ha dispuesto de los medios técnicos necesarios para hacer realidad este deseo. Una de las grandes innovaciones que trajo este avance fue la mejora de perspectiva de la visión humana sobre los paisajes terrestres.

Esa observación remota de la superficie terrestre constituye el marco de estudio de la teledetección. Este vocablo es una traducción del término inglés *remote sensing*, ideado a principios de los 60' para designar cualquier medio de observación remota, y si bien al principio se aplicó fundamentalmente a la fotografía aérea, nosotros nos centraremos a su aplicación en la investigación espacial. La teledetección no engloba sólo los procesos que permiten obtener una imagen, sino también su posterior tratamiento e interpretación. Al hablar de procesos remotos, estamos asumiendo que existe una interacción energética entre el suelo y el sensor, ya sea por reflexión de la energía solar o de un haz energético artificial. A su vez, es preciso que ese haz de energía recibido por el sensor sea almacenado convenientemente, ya sea en el satélite o bien en la estación receptora, de cara a que pueda ser interpretado para una determinada aplicación.

En consecuencia el sistema de teledetección espacial, así definido consta de los siguientes elementos (ver figura 1.1):

1. Fuente de energía, que supone el origen de la radiación electromagnética que detecta el sensor. La fuente de energía más importante, obviamente es el sol, pero también puede realizarse teledetección a partir de la energía emitida por los mismos objetos observados, o desde fuentes artificiales.
2. Cubierta terrestre, formada por distintas masas de vegetación, suelos, agua o construcciones humanas, que reciben la señal energética y la reflejan o emiten de acuerdo a sus características físicas.
3. Plataforma, compuesta por el sensor, propiamente dicho, y la plataforma que lo alberga. Tiene

como misión captar la energía procedente de las cubiertas terrestres, codificarla y grabarla o enviarla directamente al sistema de recepción.

4. Sistema de recepción-comercialización, en donde se recibe la información transmitida por la plataforma, se graba en formato apropiado, y tras las correcciones necesarias, se distribuye a los interesados.
5. Intérprete, que convierte esos datos en información temática de interés, ya sea visual o digitalmente, de cara a facilitar la evaluación del problema en estudio.
6. Usuario final, encargado de analizar el documento fruto de la interpretación, así como dictaminar sobre las consecuencias que de él deriven.

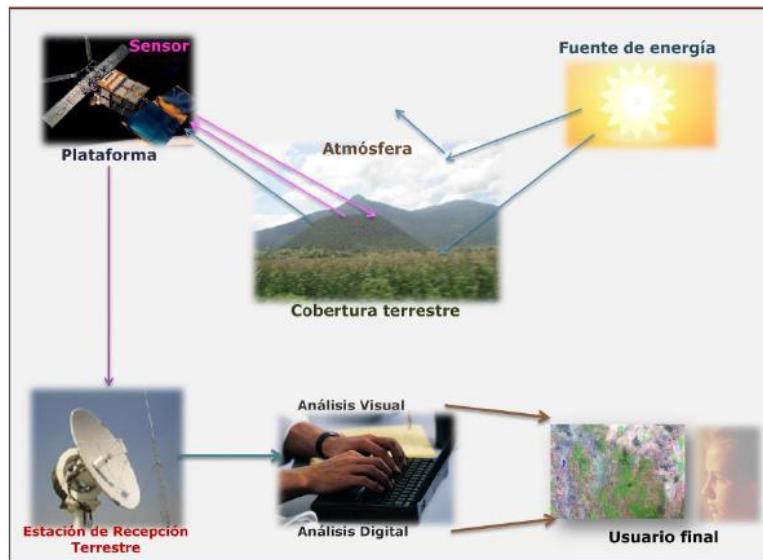


Figura 1.1: Componentes de un sistema de teledetección.

La gran similitud de este proceso con la visión humana nos puede ayudar a entender el significado de estos componentes. El ojo humano (3) recibe un haz energético procedente de los objetos exteriores (2) por reflejo de la luz solar (1). Esa señal se transmite al cerebro (4), que es capaz de formar una serie de imágenes sobre el mundo real que le circunda. El individuo que observa es a la vez intérprete (5) y usuario final (6) de la imagen detectada, lo que le permite tomar decisiones sobre su propio comportamiento. En otras palabras, la visión humana forma un sistema de teledetección, que como se describió en la sección anterior resulta ser muy sofisticado.

En conclusión, la teledetección, junto a las técnicas de almacenamiento y proceso de información geográfica, permite disponer de una masa de datos sobre el territorio, además alguno de ellos accesibles en tiempo real. Para aprovechar con fruto estas técnicas, el recurrir a las computadoras resulta casi inevitable. Estos equipos amplían notablemente nuestra capacidad de análisis: ayudan a elaborar una interpretación rápida y económica del problema en estudio, y a la vez permiten abordar análisis difícilmente viables con otros medios tradicionales.

### 1.1.1. Un poco de historia

Las formas de teledetección han variado notablemente en las últimas décadas, tanto en cantidad, como en variedad y calidad de la información disponible para campos científicos muy variados.

Las primeras experiencias de teledetección se remontan a 1859, cuando Gaspar Félix de Tournachon obtuvo las primeras fotografías aéreas desde un globo. Al año siguiente, James Wallace repitió la experiencia sobre la ciudad de Boston, poniéndose en evidencia el interés de la nueva perspectiva aérea para un conocimiento más detallado de la organización urbana (ver figura 1.2).



Figura 1.2: Primeros pasos de la Teledetección

Hacia 1871 la tecnología de la fotografía había avanzado lo suficiente para que no fuera necesario el inmediato revelado del negativo después de la exposición lo cual permitió el desarrollo de cámaras más livianas como la patentada por Julius Neubronner en 1903 que podía ser transportada mediante un arnés especial adosada al pecho de palomas. En 1906 G. Lawrence desarrolló en Estados Unidos un conjunto de dispositivos que permitían transportar cámaras de hasta 1000 libras y tomó fotos aéreas de los daños ocasionados por el terremoto de San Francisco desde una altitud de 600 metros (ver figura 1.3). Las primeras fotos tomadas desde un avión las obtuvo Wilbur Wright en 1909 sobre Centocelli, Italia. La primera cámara aérea propiamente dicha se desarrolló durante la Primera Guerra Mundial, concretamente en 1915, por J. T. C. Moore Brabazon. La importancia estratégica de este escrutinio quedó pronto en evidencia, desarrollándose notablemente las técnicas de adquisición y procesado fotográfico. (Brookes, 1975) (ver figura 1.3).

El segundo conflicto bélico dió un gran impulso al desarrollo de nuevas cámaras, lentes, montajes y técnicas de reconocimiento. Hacia el final de esa guerra no se iniciaba ningún movimiento militar de importancia sin primero obtener e interpretar fotografías aéreas del terreno. En esta época se comenzó a reconocer el potencial valor de aplicar estas técnicas en usos civiles como por ejemplo en la prospección de minerales y petróleo. Las técnicas sistemáticas para análisis del terreno y producción de cartografía fueron desarrolladas en los 40's y en los 50's mientras diferentes profesiones reconocían las contribuciones de la interpretación de fotografías aéreas.

Hacia 1955 el marco internacional era fuertemente bipolar y marcado por la desconfianza entre bloques; en ese escenario la administración del presidente estadounidense Eisenhower veía la necesidad de contar con satélites de reconocimiento militar debido al desarrollo de misiles inter-



Figura 1.3: Primeros pasos de la Teledetección

continentales (ICBMs) tanto en la Unión Soviética como en Estados Unidos. Resultaba obvia la vulnerabilidad de los aviones de reconocimiento convencionales ante las nuevas defensas aéreas y que el monitoreo del vasto interior de la URSS llevaba a la necesidad de contar con satélites de reconocimiento.

El 4 de octubre de 1957, usando un cohete SS-6, la URSS lanzó el Sputnik (Viajero) I, el primer satélite artificial del mundo. El satélite pesaba 83,6 kg. y orbitaría la Tierra en algo más de 96 minutos, transportaba un beeper de radio que transmitió durante 21 días hasta que sus baterías se agotaron. No mucho después el Sputnik II haría su vuelo llevando a bordo el primer ser vivo en el espacio: la perrita Laika.

En ese momento no existía ningún acuerdo internacional que reglamentara el derecho de paso de un satélite sobre el territorio de otra nación y el despliegue de un satélite militar podía desestabilizar la tensa paz de la guerra fría. Estados Unidos no objetó el derecho soviético a transitar el espacio por encima del territorio estadounidense (ninguna otra potencia lo hizo) dando origen a una pauta de conducta internacional que diferenciaba claramente el derecho de los estados sobre sus propios espacios aéreos y los derechos sobre el espacio exterior. Se constituía entonces un nuevo dominio diferente a todos los existentes (jurídicamente hablando) hasta ese momento.

En el terreno civil, conviene destacar el lanzamiento del primer satélite de observación de la Tierra en 1960, el TIROS-1, pionero de múltiples misiones de observación meteorológica, que han permitido un conocimiento y control más ajustados de las condiciones atmosféricas, evitando, o paliando al menos, graves catástrofes naturales. Junto a ellos, en los años sesenta también se impulsaron misiones tripuladas que permitieron adquirir las primeras fotografías espaciales de uso civil.

Todas estas experiencias, hicieron concebir a la NASA proyectos dedicados exclusivamente a la cartografía y evaluación de los recursos naturales. El 23 de julio de 1972 supuso la culminación de esta tendencia, con el feliz lanzamiento de la serie ERTS (Earth Resources Technology Satellite). Este proyecto, bautizado Landsat con la puesta en órbita del segundo satélite en 1975, resulta el más fructífero hasta el momento para aplicaciones civiles de teledetección. A partir de la serie Landsat, el interés de la comunidad científica internacional por esta técnica ha crecido exponencialmente.

A la serie Landsat siguieron otros proyectos específicamente diseñados por la NASA para la observación del medio ambiente (Chuvieco y Justice, 2008). Los más conocidos son el laboratorio



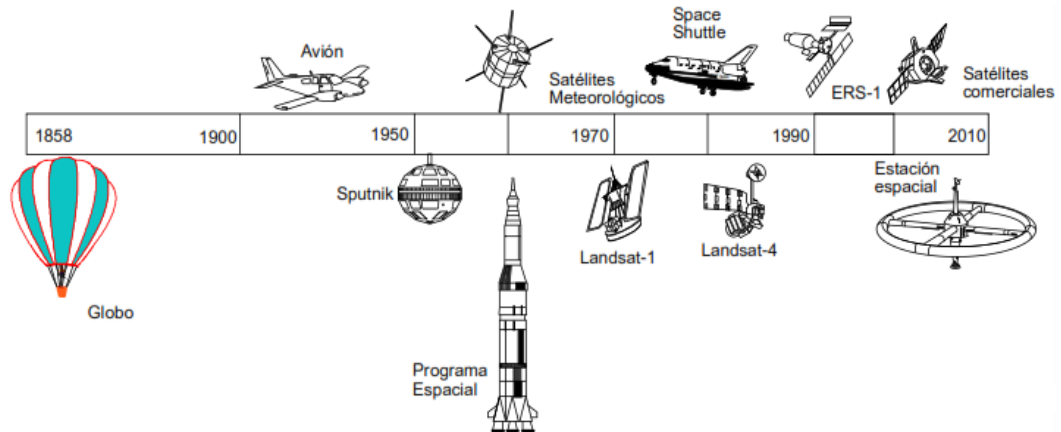


Figura 1.4: Línea del tiempo de la evolución de la teledetección.

espacial tripulado Skylab (1973: NASA, 1977), el satélite oceanográfico Seasat (1978: Ford, 1980), o el de investigación térmica HCMM (1978: Short Stuart, 1982). A estos proyectos de la NASA, siguieron los diseñados por otras agencias espaciales, como el satélite franco-belga SPOT, lanzado en 1986, el japonés MOS-1 (1987), el indio IRS-1 (1988), el satélite europeo ERS-1 (1991) y los rusos Soyuz y Salut.

En las últimas décadas las misiones de teledetección se han incrementado (ver figura 1.4). A las agencias espaciales con mayor experiencia en observación de la Tierra, se han unido otras, que han aprovechado su desarrollo tecnológico y la reducción de los costos en el diseño de sensores y vehículos de lanzamiento. Esto ha permitido a Canadá, Brasil, China, Corea del Sur, Israel o Argentina, por citar algunos, poner en órbita sensores de teledetección, lo que ha incrementado la disponibilidad de datos y permitido reducir costos para el usuario final.

### 1.1.2. Argentina en el espacio

La Comisión Nacional de Actividades Espaciales (CONAE) es una agencia especializada que tiene a su cargo proponer y ejecutar el Plan Espacial Nacional, cuyas actividades y proyectos se organizan en cinco Cursos de Acción:

- Infraestructura Terrestre.
- Sistemas Satelitales.
- Sistemas de Información.
- Acceso al Espacio.
- Desarrollo Institucional y Tareas de Base.

Su objetivo primario es la generación de Ciclos de Información Espacial Completos (CIEs), esto es, conjuntos de información referida a nuestro territorio nacional, tanto continental como marítimo, censada desde el espacio, que convenientemente combinada con información de otros orígenes, contribuye a la optimización de ciertas áreas de la actividad socio-económica del país.

A su vez los CIEs, son completados con Programas de Acciones Concertadas (PAC), que impli-

can asociaciones estratégicas con determinados entes, para encarar aplicaciones particulares. Los CIEs y los PAC que están actualmente en ejecución son:

- Ciclo I: Actividades agropecuarias, pesqueras y forestales.
- Ciclo II: Hidrología, el clima, el mar y las costas.
- Ciclo III: Gestión de emergencias naturales.
- Ciclo IV: Vigilancia del medio ambiente y recursos naturales.
- Ciclo V: Cartografía, Geología y producción minera.
- PAC para el Instituto de Altos Estudios Espaciales “Mario Gulich”, con la Universidad de Córdoba y la Agencia Espacial Italiana, para la formación de recursos humanos.
- PAC para Provincias Espaciales.
- PAC para el apoyo a la Administración Pública Nacional y al ordenamiento fiscal.

El Plan Espacial Nacional se desarrolla en base a la cooperación internacional asociativa, por la cual nuestro país consigue socios para ejecutar las distintas misiones satelitales y proyectos. De este modo se ha logrado que los aportes extra-presupuestarios provenientes de los socios sean del orden de más del 50 % del costo de la actividad espacial para nuestro país.

Los principales socios de la CONAE son las agencias y entes espaciales de Estados Unidos, Europa, Italia, Francia, Alemania, Canadá, Brasil, Bélgica, Dinamarca y Ucrania.

Con la Agencia Espacial Italiana la CONAE está desarrollando el Sistema Italo Argentino de Satélites para la Gestión de Emergencias (SIASGE), que comprende dos satélites Radar argentinos (denominados SAOCOM), cuatro satélites Radar italianos y dos satélites Ópticos. Los satélites Radar argentinos están específicamente diseñados para la problemática de nuestras inundaciones.

La agencia espacial italiana ASI y la CONAE integran la constelación llamada SIASGE “Sistema Italo Argentino de Satélites para la Gestión de Emergencias” con la nueva generación de satélites argentinos: los SAOCOM, basados en la tecnología de observación de la Tierra por radar.

Es destacable la cooperación asociativa con la NASA de los Estados Unidos, socio principal en las cuatro misiones satelitales SAC-A, SAC-B, SAC-C y SAC-D argentinas, ya puestas en órbita. En todos los casos la CONAE proveyó la plataforma satelital e instrumentos propios y la NASA proveyó instrumentos y lanzamiento. El satélite argentino de tele observación SAC-C, con instrumentos principales en el rango óptico, y que contó además con socios como Italia, Francia, Brasil y Dinamarca, conforma actualmente –junto con los tres satélites de NASA: Landsat 7, Terra y EO 1 la primera constelación satelital para la observación de la Tierra en la historia de la tecnología espacial denominada “**Constelación Matutina**”.

Por último, en el 2011 se lanzó la misión satelital conjunta NASA-CONAE que lleva como nombre SAC-D/Aquarius, y tiene como objetivo principal la determinación de la salinidad marina. Se trata de un parámetro de extrema importancia para el Ciclo Espacial Nro. II del Plan Espacial Nacional. El SAC-D lleva además otros instrumentos argentinos que complementarán a su vez el Sistema SIASGE.

Además de la CONAE, otras universidades, entes, organismos y empresas nacionales participan en los proyectos y actividades del Plan Espacial Nacional. En particular la CNEA, el CONICET, CITEFA, INIFTA, SAGyPA, la UNLP, UNC y la UBA. Así mismo numerosos profesionales y técni-

cos están trabajando en los 200 proyectos que utilizan imágenes del SAC-C para sus investigaciones.

Las imágenes del SAC-C también llegan a los colegios secundarios, donde las usan en lugar de los mapas tradicionales, para tener una mirada actualizada y novedosa, que sólo pueden brindar los satélites desde el espacio.

En la CONAE también se reciben imágenes de doce satélites extranjeros, entre ellos Landsat 5 y 7, Radarsat, Spot, la serie NOAA, EROS, Seastar, Terra y ERS.

Todas estas imágenes están catalogadas en la única base de datos satelitales existente en el país. Se accede al catálogo en forma simple, mediante el sitio en Internet [www.conae.gov.ar](http://www.conae.gov.ar) - El Centro Espacial además alberga al “Instituto de Altos Estudios Espaciales Mario Gulich”, inaugurado en julio de 2001, dedicado a capacitar a nuevos usuarios de la información espacial, con el respaldo académico de la Universidad Nacional de Córdoba y la participación de expertos de agencias de otros países asociados a la CONAE.

## 1.2. PRINCIPIOS FÍSICOS DE LA TELEDETECCIÓN

Nuestros sentidos perciben un objeto sólo cuando pueden descifrar la información que éste les envía. Por ejemplo, somos capaces de ver un árbol porque nuestros ojos reciben y traducen convenientemente una energía luminosa proveniente del mismo. Además esa señal no es originada por el árbol, sino por un foco energético exterior que lo ilumina. De ahí que no somos capaces de percibir ese árbol en la oscuridad. En este ejemplo, el flujo energético, que nos permite detectar el objeto es a causa de la reflexión de la luz solar, pero podría tratarse de un tipo de energía emitida por el propio objeto (en caso que fuéramos capaces de detectar el calor que emite), o incluso por el sensor (por ejemplo si tuviéramos una cámara equipada con flash).

Luego se podría decir que las tres formas de adquirir información a partir de un sensor remoto serán: por reflexión, por emisión y por emisión-reflexión. Y en cualquiera de estos casos, el flujo energético entre la cubierta terrestre y el sensor constituye una forma de radiación electromagnética.

Históricamente las propiedades de la radiación electromagnética se han explicado por dos teorías: aquélla que la concibe como un haz ondulatorio y aquélla otra que la considera como una sucesión de unidades discretas de energía, fotones, con masa igual a cero.

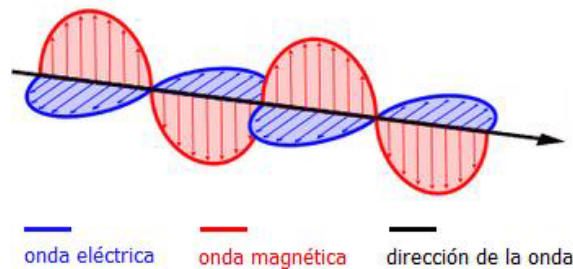


Figura 1.5: Radiación electromagnética.

Según la teoría ondulatoria, la energía electromagnética se transmite de un lugar a otro siguiendo un modelo armónico y continuo, a la velocidad de la luz y conteniendo dos campos de fuerzas ortogonales entre sí: eléctrico y magnético (ver figura 1.5). Las características de este flujo energético pueden describirse por dos elementos: longitud de onda ( $\lambda$ ) y frecuencia ( $\nu$ ). Ambos elementos están inversamente relacionados:

$$c = \lambda\nu, \quad (1.1)$$

donde  $c$  indica la velocidad de la luz ( $3 \times 10^8 \text{ms}^{-1}$ ),  $\lambda$  (en unidades de longitud, habitualmente micrómetros,  $1\mu\text{m} = 10^{-6}\text{m}$  o nanómetros,  $1\text{nm} = 10^{-9}\text{m}$ ) y  $\nu$  la frecuencia (en Hertz,  $1\text{Hz} = 1$  ciclo por segundo).

Gracias a la teoría cuántica, podemos calcular la cantidad de energía transportada por un fotón, siempre que se conozca su frecuencia:

$$Q = h\nu, \quad (1.2)$$

donde  $Q$  es la energía radiante de un fotón (en julios) y  $h$  es la constante de Planck ( $6,626 \times 10^{-34} \text{Js}$ ). Con lo cual podemos relacionar a la longitud de onda con la energía radiante:

$$Q = h(c/\nu), \quad (1.3)$$

lo que significa, que a mayor longitud de onda, el contenido energético será menor y viceversa. Esto nos indica que la radiación en longitudes de onda largas es más difícil de detectar que aquéllas provenientes de longitudes cortas, de ahí que las primeras requieren medios de detección más refinados.

### 1.2.1. El espectro electromagnético

De las fórmulas anteriores se deduce que podemos definir cualquier tipo de energía radiante en función de su longitud de onda o frecuencia. Aunque la longitud de onda toma valores continuos, en la teledetección se suelen establecer una serie de bandas en donde la radiación electromagnética manifiesta un comportamiento similar. La organización de estas bandas de longitudes de onda se denomina espectro electro-magnético. Éstas comprenden desde las longitudes de onda más cortas (rayos gamma, rayos X), hasta las kilométricas (telecomunicaciones) (ver figura 1.6).

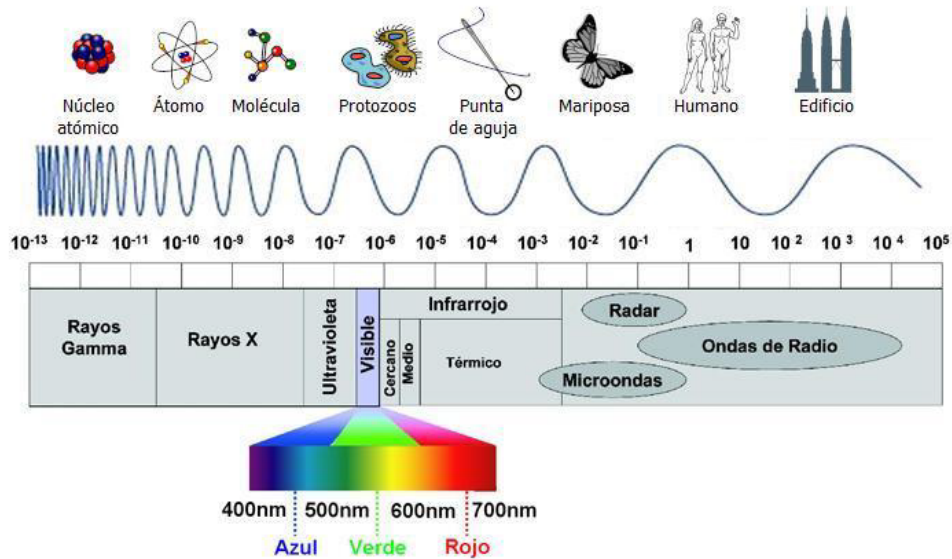


Figura 1.6: Espectro electromagnético

Desde el punto de vista de la teledetección, conviene destacar una serie de bandas espectrales, que son las más frecuentemente usadas con la tecnología actual:

- *Espectro visible* ( $0.4$  a  $0.7 \mu m$ ). Se denomina así por tratarse de la única radiación electromagnética que pueden percibir nuestros ojos, coincidiendo con las longitudes de onda en donde es máxima la radiación solar. Dentro de esta región, suelen distinguirse tres bandas elementales, que se denominan azul ( $0.4$ - $0.5 \mu m$ ), verde ( $0.5$ - $0.6 \mu m$ ) y rojo ( $0.6$ - $0.7 \mu m$ ), en razón de los colores primarios que nuestros ojos perciben de esas longitudes de onda.

- *Infrarrojo cercano (IRC)*:  $0.7$  a  $1.2 \mu m$ . Esta parte del espectro resulta de especial importancia por su capacidad para discriminar masas vegetales y concentración de humedad.

- *Infrarrojo medio*. En esta región se entremezclan los procesos de reflexión de la luz solar y de emisión de la superficie terrestre. En el primer caso, hablamos del infrarrojo de onda corta (Short Wave Infrared, SWIR) que se sitúa entre  $1.2$  y  $2.5 \mu m$  y resulta una región idónea para

estimar el contenido de humedad en la vegetación o los suelos. La segunda banda de interés está comprendida entre 2.5 y 8  $\mu m$ , y suele denominarse más propiamente como infrarrojo medio (IRM), siendo determinante para la detección de focos de alta temperatura (incendios o volcanes activos), y estimación de algunos gases atmosféricos.

- *Infrarrojo lejano o térmico (IRT: 8 a 14  $\mu m$ )*, que incluye la porción emisiva del espectro terrestre, en donde se detecta el calor proveniente de la mayor parte de la cubiertas terrestres.

- *Microondas (M, por encima de 1 mm)*, con gran interés por ser un tipo de energía bastante transparente a la cubierta nubosa.

### 1.2.2. Principios y leyes de la radiación electromagnética

De la fórmula (1.3) se puede observar que la cantidad de energía que contiene un flujo radiante es inversamente proporcional a su longitud de onda. Esta relación entre flujo de energía y longitud de onda puede establecerse con mayor rigor gracias a la ley de Planck

$$M_{n,\lambda} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 \left\{ \exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1 \right\}},$$

donde  $M_{n,\lambda}$  indica la emitancia radiativa espectral de un cuerpo negro a una determinada longitud de onda (en  $Wm^{-2}\mu m^{-1}$ );  $h$  es la constante de Planck ( $6,626 \times 10^{-34}Ws^2$ );  $k$  es la constante de Boltzmann ( $1,38 \times 10^{-23}WsK^{-1}$ );  $c$  es la velocidad de la luz;  $\lambda$  es la longitud de onda (en  $m$ ) y  $T$  es la temperatura absoluta de un cuerpo negro (en Kelvin,  $K$ ).

En pocas palabras, la fórmula de Planck nos señala que cualquier objeto por encima del cero absoluto ( $-273^\circ C$ ) radia energía, y que ésta aumenta con la temperatura. A la vez, a mayor temperatura, ese cuerpo radiará con mayor intensidad en longitudes de onda más corta.

A partir de la fórmula de Planck puede calcularse la longitud de onda a la que se produce la emitancia (total de energía radiada en todas las direcciones desde una unidad de área y por unidad de tiempo) de un cuerpo negro conociendo su temperatura.

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{2,898}{T} \mu m K,$$

conocida como la ley de desplazamiento de Wien.

### 1.2.3. Características de la radiación solar: interacción con la cubierta terrestre

Denominamos espectro solar al rango de longitudes de onda directamente dependientes de la radiación, comprendidas entre el espectro visible y el SWIR (0,4 a 2,5  $\mu m$ ). El Sol se encuentra a una temperatura radiante próxima a los 6000  $K$ . Esto implica, según la ley de Wien, que su máxima emitancia espectral se produce en torno a las 0,48  $\mu m$ , coincidente con el color verde apreciado por nuestros ojos.

Gran parte de la radiación solar que llega al techo de la atmósfera se filtra por los gases que la forman, con lo que la radiación directa que llega al suelo es bastante menor. La cantidad global que se recibe en la Tierra debe contemplar también que sólo una parte es iluminada en cada momento, con lo que la radiación solar promedio se calcula en 342  $Wm^{-2}$ . Lógicamente la cantidad que se

recibe en cada lugar y momento va a depender de las condiciones de transmisibilidad de la atmósfera y del ángulo cenital solar ( $\theta$ ). El primer factor es difícil de predecir, pues las condiciones de la atmósfera varían mucho en el espacio y en el tiempo. El segundo es más fácilmente modelable, ya que la inclinación de los rayos solares puede calcularse a partir de la latitud, hora del día y día del año. A partir del ángulo cenital solar, puede calcularse el área efectiva que se ilumina, corrigiendo la irradiancia solar para cada punto. Conviene entonces considerar que el flujo incidente ( $\phi_i$ ) puede descomponerse en tres términos (ver figura 1.7): flujo reflejado ( $\phi_r$ ), flujo absorbido ( $\phi_a$ ) y flujo transmitido ( $\phi_t$ ):

$$\phi_i = \phi_r + \phi_a + \phi_t,$$

o en unidades relativas

$$\frac{\phi_i}{\phi_i} = \frac{\phi_r}{\phi_i} + \frac{\phi_a}{\phi_i} + \frac{\phi_t}{\phi_i},$$

o lo que es lo mismo:

$$1 = \rho + \alpha + \tau.$$

Esto significa que la suma de la reflectividad, absorción y transmisibilidad debe ser igual a 1. La relación entre las tres magnitudes no es constante, sino que varía con la longitud de onda ( $\lambda$ ); por lo tanto:

$$1 = \rho_\lambda + \alpha_\lambda + \tau_\lambda.$$

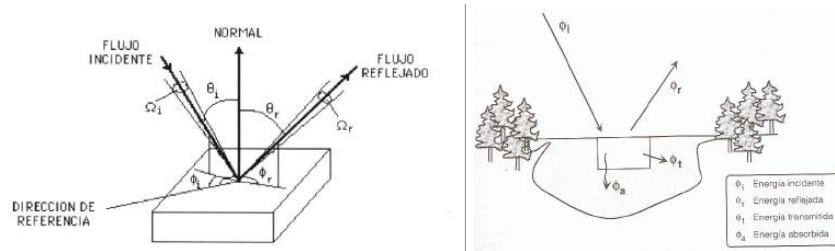


Figura 1.7: Flujo Incidente y Flujo Reflejado

Para poder caracterizar una determinada cubierta nos resulta muy interesante conocer su comportamiento reflectivo en diversas longitudes de onda, ya que esto facilitará la posibilidad de poder discriminarlo frente a cubiertas espectralmente similares.

En el caso del espectro visible, ese comportamiento diferente de los objetos a distintas longitudes de onda se manifiesta en lo que llamamos color, por ejemplo, un objeto es azul si refleja intensamente la energía en esa banda del espectro y poco en el resto.

A partir de medidas de laboratorio, pueden obtenerse unas curvas de reflectividad espectral para las principales cubiertas terrestre, que suelen denominarse firmas o firmas espectrales.

Es importante notar que el flujo de energía recibida por el sensor no sólo depende de la reflectividad de la cubierta, sino también de las condiciones atmosféricas, el emplazamiento ambiental de la cubierta y la geometría de la observación. Esta última está estrechamente ligada a la rugosidad que presenta la superficie. Con lo cual, pueden distinguirse dos tipos de superficies (ver figura 1.8):

1. Aquéllas que reflejan la energía con el mismo ángulo del flujo de incidencia (especulares).
2. Aquéllas que lo reflejan uniformemente en todas las direcciones (lambertinas).

En el primer caso el sensor sólo recibe energía reflejada del suelo si está en dirección del ángulo de reflexión, siendo nula en cualquier otro caso. Si la superficie es lambertina, la radiancia reflejada es constante en cualquier ángulo de reflexión. Si la longitud de onda es pequeña, las rugosidades del terreno tenderán a difundir mucho más la energía incidente que si se trata de longitudes de onda mayores, donde esos rasgos pueden no impedir un comportamiento especular. En general, los modelos para el cálculo de reflectividad tienden a asumir que las cubiertas presentan un comportamiento lambertino, ya que esto simplifica mucho los cálculos al ser independientes de los ángulos de observación. En la práctica, la mayor parte de las superficies presentan una reflexión más intensa en ciertas direcciones, he incluso en superficies vegetales pueden presentarse dntintos grados de cobertura a lo largo del año, por lo que podríamos hablar de una signatura espectro-temporal, que permitiría mejorar la discriminación de una determinada cubierta siguiendo su dinamismo estacional.

Además, el comportamiento espectral de una cubierta muchas veces se ve modificado por factores externos:

- Ángulos de iluminación y observación.
- Modificaciones que el relieve introduce en el ángulo de iluminación: orientación de las laderas o pendientes.
- Influencia de la atmósfera.
- Variaciones medioambientales en la cubierta.
- Sustrato edafológico o litológico.

A esto habría que añadir que la radiación incidente en una determinada superficie no sólo es la directa solar, sino también la proveniente de superficies vecinas o de la propia atmósfera, ya que las reflexiones se producen en múltiples direcciones.

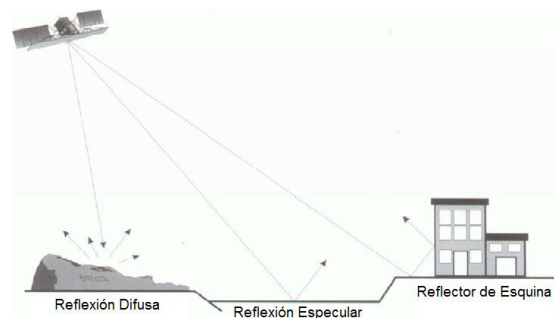


Figura 1.8: Tipos de superficies

Estos factores no sólo expresan la complejidad que puede entrañar la caracterización de un tipo de cubierta a partir de sensores remotos, sino que también muestra que las curvas espectrales deben tomarse sólo como reflectividad de referencia para reconocer cubiertas de interés, o parámetros dentro de esas cubiertas. Estas pueden obtenerse a partir de varias fuentes:

- i) medirla con un radiómetro,



- ii) extraerla de una biblioteca espectral puesta a punto por alguna institución,
- iii) simularla mediante modelos físicos, o
- iv) extraerla de una imagen con la debida resolución espectral.

#### 1.2.4. Comportamiento espectral para los tres elementos fundamentales de la cobertura terrestre en los diferentes dominios

Como ya comentamos antes, uno de los objetivos de la teledetección es identificar objetos o clases temáticas dentro de una imagen. En esta sección analizaremos el comportamiento espectral de las tres principales clases de cobertura terrestre tanto en el espectro óptico (ver figura 1.9) como en el infrarrojo térmico:

##### Espectro óptico

**Vegetación** Es especialmente variable, dependiendo de múltiples factores: estado fenológico, forma y contenido en humedad. De manera general se puede decir que presenta una reducida reflectividad en las bandas visibles, con un máximo relativo en la región del verde ( $0.55 \mu m$ ). Esto es debido al efecto absorbente de los pigmentos fotosintéticos de las hojas. Entre estos, la clorofila absorbe en la zona del rojo. Por eso, en vegetación no vigorosa la clorofila no absorbe tanto y la hoja amarillea (verde + rojo).

La estructura celular interna da la elevada reflectividad en el infrarrojo cercano que luego va reduciéndose paulatinamente hacia el infrarrojo medio. Por lo tanto, el contraste más nítido se presenta entre las bandas visibles (especialmente rojo) y el infrarrojo cercano. Cuanto mayor sea ese contraste, mayor será el vigor de la vegetación.

Estos tres parámetros: cantidad de pigmentos, estructura celular y contenido en agua, manifestados por la respuesta espectral de esa masa de vegetación de la que forman parte, pueden servir para discernir entre unas especies y otras, su nivel de desarrollo, e incluso entre su estado sanitario.

**Suelo** Muchas veces es invisible, debido a la vegetación. Para suelos desnudos, el comportamiento espectral es mucho más uniforme que el de la vegetación. La curva espectral que presentan es bastante plana y de carácter ligeramente ascendente.

Los principales factores que intervienen en este caso son la composición química del suelo, su textura y estructura, y el contenido en humedad. Por ejemplo, un suelo de origen calcáreo tiende al color blanco, indicando alta reflectividad en todas las bandas visibles, mientras que los arcillosos ofrecen una mayor reflectividad en el rojo, como consecuencia de su contenido en óxido de hierro. La reflectividad espectral presenta mayores valores en suelos de textura gruesa, apelmazados, secos y sin materia orgánica. Como ya se ha dicho para la vegetación, el contenido en humedad es uno de los elementos destacados en la reflectividad en longitudes de onda largas (infrarrojo medio) y así suelos con alto contenido en humedad darán una reflectividad baja en esa banda. Cuanto más seco y apelmazado sea un suelo, mayor será su reflectividad.

**Agua** Absorbe o transmite la mayor parte de la radiación visible que recibe. Por tanto presentará una curva espectral plana, baja y de sentido descendente. De todas formas, en aguas poco profundas, la reflectividad aumenta. Los factores que afectan a este comportamiento son: profundidad, contenido en materias en suspensión (clorofila, arcillas y nutrientes) y rugosidad de la superficie (esta última extremadamente importante).

Por su parte, la nieve ofrece un comportamiento completamente diferente al del agua, con una reflectividad elevada en las bandas visibles, reduciéndose drásticamente en el infrarrojo cercano.

**Infrarrojo térmico**

Como la temperatura de la superficie terrestre es de unos 300 °K, su emitancia espectral es máxima en la banda entre 8 y 14  $\mu m$  (infrarrojo térmico). Esto nos permitirá detectar el calor que procede de las distintas superficies, pero para ello no se mide la energía reflejada, sino la emitida, en función de la temperatura.

**Vegetación** Presenta unas propiedades en general bastante complejas. Como absorbe energía solar durante el día, y la devuelve durante la noche, está más caliente que el aire que la rodea durante la noche, y más fría que su entorno durante el día.

**Suelo y agua** El factor más destacado es su contenido de humedad. A mayor humedad, más frío estará durante el día y más cálido durante la noche, con respecto a los suelos secos. El agua posee la mayor inercia térmica debido a su alta conductividad y es más difícil que cambie su temperatura.

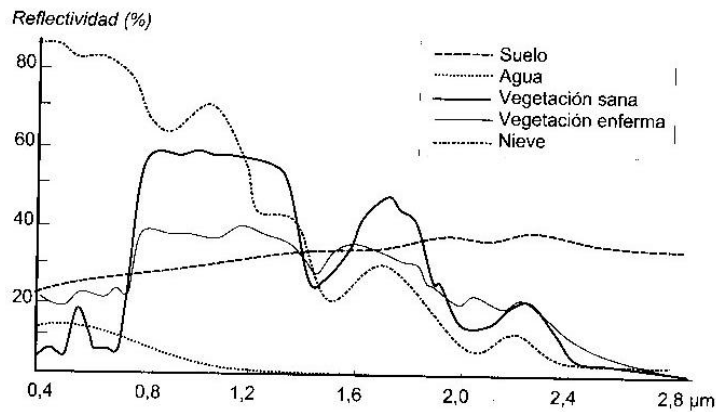


Figura 1.9: Comportamiento espectral de diferentes materiales.

## Capítulo 2

# Imágenes SAR

El Radar de Apertura Sintética (SAR) es un dispositivo de microondas activo. El mismo emite señales de microondas a intervalos regulares sobre una región de interés, recibe la parte de esta energía que es retrodispersada desde dicha región y detecta la intensidad y la distancia, es decir el retardo en el tiempo, de las señales de retorno.

El radar posee su propia fuente de energía y, por lo tanto, es independiente de la luz del sol para la iluminación. Este tipo de sistema se conoce como sistema de teledetección activo. La gran ventaja del radar sobre los

sensores ópticos es la posibilidad de funcionar tanto de día como de noche y la de atravesar las capas de nubes, lo que implica una gran disponibilidad de información.

Estos hechos, junto con la sensibilidad a la rugosidad de la superficie y al contenido de humedad del suelo, (debido a las longitudes de onda en que emite el radar), significan que el SAR es una herramienta muy poderosa en sensoramiento remoto. Dadas sus características puede distinguir diferentes tipos de cobertura de la Tierra, así como también puede detectar cambios temporales, de gran utilidad, por ejemplo, en agricultura.

Además, este sistema opera en diferentes frecuencias y polarizaciones, lo que permite obtener distintas clases de información de un mismo objeto sensorado.

En los últimos años se ha generado un gran número de imágenes SAR (provenientes de diferentes sensores transportados en satélites, (ver figura 2.2 extraída de Moreira et. al. 2013 [25] ), razón por la cual es de suma importancia generar herramientas que ayuden a identificar la composición de una imagen SAR.

banda	límites (GHz)		límites (cm)	
P	-	0.39	30.00	100.00
L	0.39	1.55	15.00	30.00
S	1.55	3.90	7.50	15.00
C	3.90	5.75	3.75	7.50
X	5.75	10.9	2.40	3.75
Ku			1.67	2.40
K	10.90	36.0	1.10	1.67
Ka			0.75	1.10

Figura 2.1: Bandas electromagnéticas de un radar

SENSOR	OPERATION	FREQUENCY BAND (POLARIZATION)	COMMENTS	INSTITUTION, COUNTRY
Seasat	1978	L (HH)	First civilian SAR satellite, operation for only ca. three months	NASA/JPL, USA
ERS-1/2	1991–2000/ 1995–2011	C (VV)	European Remote Sensing Satellites (first European SAR satellites)	ESA, Europe
J-ERS-1	1992–1998	L (HH)	Japanese Earth Resource Satellite (first Japanese SAR satellite)	JAXA, Japan
SIR-C/X-SAR	April and October 1994	L & C (quad) X (VV)	Shuttle imaging radar mission, first demonstration of spaceborne multi-frequency SAR	NASA/JPL, USA DLR, Germany ASI, Italy
Radarsat-1	1995–today	C (HH)	First Canadian SAR satellite, swath width of up to 500 km with ScansAR imaging mode	CSA, Canada
SRTM	Feb. 2000	C (HH+VV) and X (VV)	Shuttle Radar Topography Mission, first spaceborne interferometric SAR	NASA/JPL, USA DLR, Germany ASI, Italy
ENVISAT/ ASAR	2002–2012	C (dual)	First SAR satellite with Transmit/Receive module technology, swath width up to 400 km	ESA, Europe
ALOS/PalsAR	2006–2011	L (quad)	Advanced Land Observing Satellite (Daichi), swath width up to 360 km	JAXA, Japan
TerraSAR-X/ TanDEM-X	2007–today 2010–today	X (quad)	First bi-static radar in space, resolution up to 1 m, global topography available by end of 2014	DLR/Astrium, Germany
Radarsat-2	2007–today	C (quad)	Resolution up to: 1 m × 3 m (azimuth × range), swath width up to 500 km	CSA, Canada
COSMO-SkyMed-1/4	2007 ... 2010–today	X (dual)	Constellation of four satellites, up to 1 m resolution	ASI/MiD, Italy
RISAT-1	2012–today	C (quad)	Follow-on satellite (RISAT-1a) to be launched in 2016, RISAT-3 (L-band) in development	ISRO, India
HJ-1C	2012–today	S (VV)	Constellation of four satellites, first satellite launched in 2012	CRESDA/CAST/ NRSCC, China
Kompsat-5	Launch scheduled in 2013	X (dual)	Korea Multi-Purpose Satellite 5, resolution up to 1 m	KARI, Korea
PAZ	Launch scheduled in 2013	X (quad)	Constellation with TerraSAR-X and TanDEM-X planned	CDTI, Spain
ALOS-2	Launch scheduled in 2013	L (quad)	Resolution up to: 1 m × 3 m (azimuth × range), swath width up to 490 km	JAXA, Japan
Sentinel-1a/1b	Launch scheduled in 2013/2015	C (dual)	Constellation of two satellites, swath width up to 400 km	ESA, Europe
Radarsat Constellation-1/2/3	Launch scheduled in 2017	C (quad)	Constellation of three satellites, swath width up to 500 km	CSA, Canada
SAOCOM-1/2	Launch scheduled in 2014/2015	L (quad)	Constellation of two satellites, fully polarimetric	CONAE, Argentina

Figura 2.2: Resumen de sensores espaciales SAR y sus características

## 2.1. TECNOLOGÍA RADAR

El objetivo de este trabajo es estudiar diferentes métodos de clasificación de imágenes de radar, con lo cual es muy importante conocer el proceso de formación de las mismas. En este sentido, trataremos de hacer una breve descripción de los elementos y conceptos que permiten entender el origen de los datos que constituyen las imágenes de radar y facilitar su posterior interpretación y la explotación de la información obtenida.

Las técnicas de teledetección espacial aplicadas a imágenes de radar suelen resultar más complicadas que las aplicadas a imágenes ópticas. Tales complicaciones residen en las características de la tecnología aplicada a cada caso y la mayor variabilidad de los datos que forman una imagen de radar.

### 2.1.1. Las microondas

Las microondas es el tipo de radiación utilizada por las tecnologías que generan las imágenes de radar. Si bien esta banda del espectro corresponde a las longitudes de onda que van desde  $1\text{mm}$  a  $1\text{m}$ , la mayoría de los radares operan con longitudes de onda que se ubican entre  $0,5\text{cm}$  y  $50\text{cm}$ . (ver

figura 2.1)

Este tipo de radiación es una de las razones que vuelve a las imágenes de radar sumamente interesantes frente a las imágenes ópticas, ya que las microondas poseen una longitud de onda lo suficientemente grande como para atravesar algunos medios como las nubes o precipitaciones suaves, así como también introducirse en algunas capas de la superficie tales como cubiertas de vegetales o suelos secos.

Las longitudes de onda relativamente altas utilizadas por el radar permiten que las superficies parezcan mucho más suaves que al ser “observadas” por las longitudes de onda correspondientes al espectro visible y el infrarrojo.

Por último, con el radar tenemos cierto control sobre las propiedades de la energía incidente lo que permite una gran variedad de tipos de datos y genera nuevas y diversas aplicaciones.

### 2.1.2. El radar como instrumento de teledetección

Cuando el flujo electromagnético corresponde a las longitudes de onda de las microondas, la superficie terrestre resulta “oscura”, de la misma manera que lo es visualmente durante la noche. Luego, así como es necesario utilizar una fuente artificial de energía para iluminar la superficie terrestre en ausencia de la luz solar, los instrumentos utilizados en el sistema de teledetección por medio de radares emiten energía en la longitud de onda de interés para poder observar la superficie. Para formar la imagen, estos instrumentos generalmente transportados en plataformas sobre aeronaves o naves espaciales, reciben la energía reflejada por la superficie terrestre. Por lo tanto, se trata de un sistema activo.

Los sistemas de Radar (Radio Detection And Ranging) son capaces de producir imágenes de la Tierra de alta resolución. En general, la mayoría de los radares aerotransportados que producen imágenes son de vista

lateral (SLAR: Side Looking Airbone Radar), dentro de estos se encuentran dos tipos: radar de apertura real (RAR: Real Aperture Radar) y radar de apertura sintética (SAR: Synthetic Aperture Radar).

El mayor problema de los sensores RAR radica en su baja resolución espacial como consecuencia del escaso diámetro de la antena, donde el tamaño mínimo del objeto identificable en la imagen está en relación directa con la longitud de onda y la altura de observación y es inversamente proporcional al diámetro de la apertura. En una plataforma espacial, será imposible lograr una buena resolución con este sistema, dado que sería preciso contar con antenas de enormes proporciones.

Se ha desarrollado una técnica muy avanzada que permite simular una antena mediante la sucesión de señales recibidas por una antena real situada a bordo de una aeronave. Esta antena se denomina apertura sintética, y se basa en el efecto Doppler que afecta a la observación cuando hay un movimiento relativo entre el objeto y el sensor.

El transmisor y receptor en un sistema radar pueden estar ubicados en lugares diferentes (sistema biestático) o bien en un mismo lugar, a menudo compartiendo la misma antena (sistema monoestático). En el presente trabajo vamos a considerar la configuración de un sistema radar activo y monoestático.

El radar es transportado por un satélite describiendo órbitas alrededor de la tierra o por una

aeronave a una altura  $h$ , con velocidad constante  $v$ , irradiando energía a lo largo de su trayectoria sobre una franja de la superficie denominada *trazo* o *swath*, cuyo ancho es bastante amplio. El ángulo  $\theta$  comprendido entre la dirección de propagación de la onda electromagnética y la normal a la superficie se denomina *ángulo de incidencia*.

El lugar geométrico que describa el punto sobre la superficie terrestre debajo del radar, definido a lo largo de su línea de vuelo, se denomina *nadir*.

El ángulo  $\alpha$  determinado por la dirección de propagación de la onda y la vertical sobre el nadir se denomina ángulo de observación y es un parámetro de diseño de sistema. El ángulo de observación y el ángulo de incidencia deben ser iguales si la superficie es horizontal y la curvatura terrestre puede ignorarse, lo que ocurre normalmente en las alturas descritas por aeronaves; sin embargo, en el caso de plataformas espaciales, ambos ángulos difieren en unos pocos grados.

La dirección paralela a la línea de vuelo marcada sobre el trazo se define como *azimuth*, mientras que la perpendicular marcada también sobre el trazo se denomina *rango*. Los bordes del trazo se denominan *rango cercano* y *rango lejano* según su ubicación respecto al nadir (ver figura 2.3).

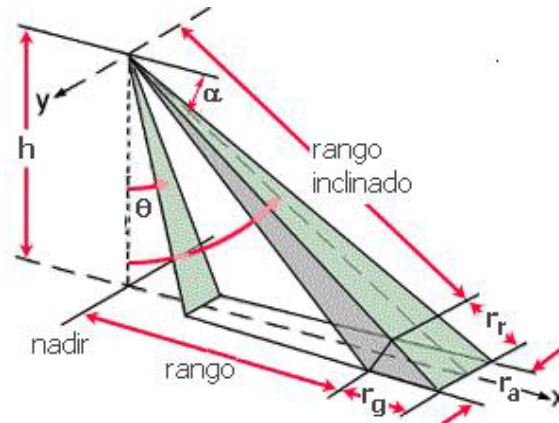


Figura 2.3: Geometría de un radar de apertura sintética

El flujo energético emitido por la antena del radar interactúa con el terreno y regresa al sensor, modificado de acuerdo a las características de la escena. Dado que la antena se encuentra fija sobre la plataforma y la longitud transversal del trazo es amplia, no se obtiene una diferenciación espacial en esta dirección. Por lo tanto, para lograr una mejor resolución en la dirección del rango, se transmite la energía en forma de pulsos en lugar de un flujo continuo. El sensor registra no sólo la intensidad de retorno del pulso energético sino el tiempo que tarda en completar el recorrido. El registro de estas diferencias de tiempo entre el envío de la señal y su retorno se realiza para poder determinar la distancia a la que se encuentra la escena de la que se obtuvo la información. La relación utilizada para determinar tal distancia resulta

$$d_0 = ct,$$

donde  $d_0$  es la distancia entre el objeto y la antena,  $c$  es la velocidad de radiación de la luz a través de la atmósfera, es decir la velocidad a la que se transmite la onda, y  $t$  es el tiempo que demora en volver la onda reflejada a la antena.

Los pulsos transmitidos son repetidos a una cierta tasa denominada *frecuencia de repetición del pulso* (*prf* por sus siglas en inglés *pulse repetition frequency*). Esta es sincronizada con la velocidad de avance de la plataforma de manera que las porciones contiguas del terreno sean irradiadas pulso

por pulso.

### Resolución en rango

Consideremos dos puntos cercanos sobre la superficie terrestre que reflejan las ondas emitidas por el radar. La habilidad de separar estos dos objetos en la señal está determinada por la posibilidad de distinguir ambos pulsos.

Supongamos que ambos objetivos están separados por una cantidad  $\Delta r$  en el rango inclinado, entonces la diferencia en el tiempo de recepción de sendas señales será  $\Delta t = \frac{2\Delta r}{c}$ . Si  $\tau$  es el límite inferior para  $\Delta t$  entonces el límite correspondiente para la resolución espacial en la dirección del rango inclinado, denominada precisamente *resolución en el rango inclinado* es

$$r_r = \frac{c\tau}{2}m. \quad (2.1)$$

Sin embargo, resulta de mayor interés estudiar cómo se resuelve la resolución de los objetivos sobre la superficie. Si consideramos el ángulo de incidencia  $\theta$ , entonces la *resolución en el rango terrestre* resulta

$$r_g = \frac{c\tau}{2\sin\theta}m. \quad (2.2)$$

Considerando las expresiones (2.1) y (2.2) podemos deducir algunas cuestiones importantes:

1. No hay resolución espacial si  $\theta = 0$ , lo que explica por qué el sistema es de mirada lateral.
2. Las resoluciones en el rango inclinado y sobre la superficie son independientes de la altura de la plataforma.
3. La resolución en el rango terrestre es una función del ángulo de incidencia, por lo tanto varía a lo largo del rango. Así, la resolución es mejor en el rango lejano donde  $\theta$  es mayor y peor en el rango cercano donde  $\theta$  es menor.

### Resolución en azimuth

La *resolución en azimuth* está determinada por la longitud de la antena en dirección de vuelo. La radiación de una antena de largo  $l_a$  ilumina sobre un ángulo

$$\Theta_a = \frac{\lambda}{l_a}rad. \quad (2.3)$$

De esta manera, denotando  $R_0$  a la distancia inclinada desde la plataforma hasta el punto en la superficie terrestre donde es considerada la resolución en azimuth, resulta

$$r_a = \frac{\lambda}{l_a}R_0m. \quad (2.4)$$

Dado que la expresión (2.4) depende de  $R_0$ , la resolución en azimuth depende de la altura a la que se encuentre la plataforma en cada instante durante el vuelo. Además, el ancho de la sombra es

inversamente proporcional al ancho de la antena, de manera que para obtener una buena resolución en azimuth necesitamos una antena muy grande, lo que es poco operativo.

Esta desventaja ha sido superada a través de la *sintetización*. Ésta permite, manteniendo la longitud de la antena, mejorar la resolución en azimuth. De la denominación de este proceso surge el nombre de *radar de abertura sintética* (SAR). A medida que el radar se mueve va tomando información solapada que sintetiza basándose en el *efecto Doppler*, simulando una antena de mayor tamaño. Independientemente de las particularidades de este proceso, se obtiene una resolución en azimuth dada por

$$r_a = \frac{l_a}{2}m. \quad (2.5)$$

Luego, la sintetización permite independizar la resolución en azimuth de la altura de la plataforma y de las longitudes de onda utilizadas. En consecuencia, un SAR puede operar a cualquier altitud sin variar la resolución.

### Cotas para la frecuencia de repetición del pulso

Como hemos visto, la *prf* necesita sincronizarse con la velocidad de la plataforma de manera que las líneas adyacentes sobre el rango sean contiguas o, al menos, que no existan espacios libres entre ellas.

En primer lugar, notemos que la longitud en rango de la imagen almacenada en un sistema radar está determinada principalmente por la longitud vertical de la antena. Las antenas generalmente se construyen relativamente pequeñas en el sentido de esta dimensión, con el objetivo de que la longitud de rango sea grande. De esta manera, así como hemos utilizado (2.3) para calcular la longitud del haz en la dirección del azimuth, podemos obtener la longitud del haz en la dirección del rango, si consideramos la longitud vertical de la antena, esto es

$$\Theta_v = \frac{\lambda}{l_v}rad. \quad (2.6)$$

Luego, la longitud del rango puede obtenerse en forma aproximada como

$$S = \frac{\Theta_v R_0}{\cos \theta} = \frac{\lambda R_0}{l_v \cos \theta}m. \quad (2.7)$$

El ancho de una línea en el rango es la resolución en azimuth  $r_a$  del sistema. La velocidad  $v$  de la plataforma necesita entonces transmitir un pulso cada  $\frac{r_a}{v}$  segundos para no dejar huecos en la cobertura de la superficie.

Por lo tanto, de (2.5), tenemos un mínimo para *prf*

$$prf_{\min} = \frac{v}{r_a} = \frac{2v}{l_a}. \quad (2.8)$$

La cota superior para *prf* es fijada con el fin de garantizar que el retorno del pulso sobre el rango lejano no se solape con el retorno del siguiente pulso del rango cercano. Si  $S$  es la longitud del rango, la distancia adicional del recorrido completo al rango lejano relativo al rango cercano es aproximadamente  $2S \sin \theta$ . La cota superior para *prf* es

$$prf_{\max} = \frac{c}{2S \sin \theta} = \frac{c}{2S_{\perp} \tan \theta} = \frac{c}{2\Theta_v R_0 \tan \theta} = \frac{l_v c}{2R_0 \lambda \tan \theta}. \quad (2.9)$$



Luego, de (2.8) y (2.9) tenemos

$$\frac{v}{r_a} \leq prf \leq \frac{c}{2S \sin \theta}, \quad (2.10)$$

o lo que es equivalente

$$\frac{2v}{l_a} \leq prf \leq \frac{l_v c}{2R_0 \lambda \tan \theta}. \quad (2.11)$$

### 2.1.3. La ecuación de radar

Supongamos, en principio, que el radar es un radiador isotrópico, esto es, un cuerpo que irradia energía uniformemente en todas las direcciones del espacio (ver figura 2.4). Definimos a la potencia como la tasa en la que el objeto radiante genera energía por unidad de tiempo, la cual es medida en watts (joules por segundo). Si observamos el radiador a una distancia  $R$  y pretendemos recolectar toda la energía radiada necesitamos encerrar el objeto radiante en una esfera. Sin embargo, en general, este no es nuestro objetivo, sino que nuestro objetivo es cuantificar la cantidad de energía irradiada en una determinada dirección de interés, lo que nos lleva a definir la *densidad de potencia*. Si la potencia radiada por el radiador es  $P_t$  entonces la densidad de potencia a una distancia  $R$  se obtiene por

$$p_i = \frac{P_t}{4\pi R^2} Wm^{-2}, \quad (2.12)$$

donde el subíndice  $i$  significa que la energía es incidente.

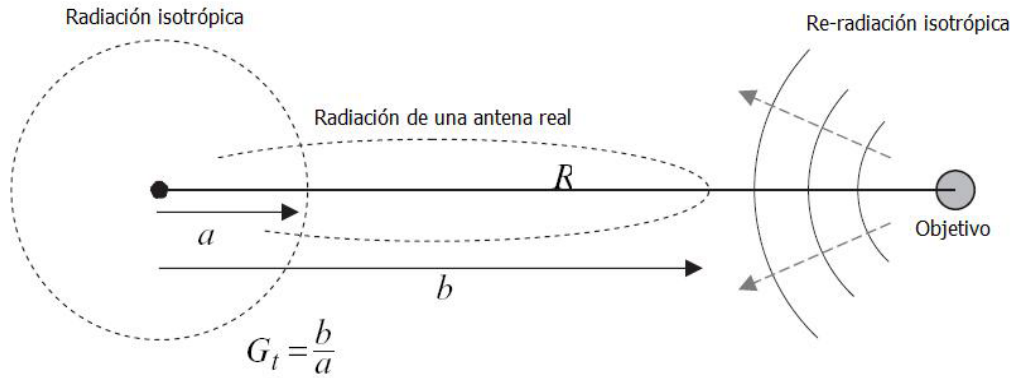


Figura 2.4: Radiación del objetivo

Luego, si pensamos el radar como un radiador isotrópico, la ecuación (2.12) permite describir la densidad de potencia en un cierto objetivo a una distancia de  $R$  metros. Ahora, si en lugar de pensar al radar isotrópico, consideramos que se utiliza una antena que concentra la potencia en una cierta dirección, la densidad de potencia sobre el objetivo será

$$p_i = \frac{P_t G_t}{4\pi R^2} Wm^{-2}, \quad (2.13)$$

donde  $G_t$  es la ganancia de la antena, definida como el cociente de densidad de potencia que ella produce en una cierta dirección y la que puede producir una fuente de energía isotrópica.

La sección transversal radar del objetivo (RCS por sus siglas en inglés) tiene dimensiones de área ( $\sigma m^2$ ) ortogonal a la energía incidente, y describe la cantidad de potencia que el objetivo recibe de la onda incidente. Gran parte de esta potencia es reflejada y supondremos que se refleja isotrópicamente. La potencia recibida por el objetivo y disponible para ser re-radiada es

$$P_\sigma = p_i \sigma = \frac{P_t G_t \sigma}{4\pi R^2} W m^{-2}, \quad (2.14)$$

de manera que la densidad de potencia que regresa a la plataforma es

$$p_r = \frac{P_t G_t \sigma}{(4\pi)^2 R^4} W m^{-2}. \quad (2.15)$$

La potencia recibida por la antena se obtiene multiplicando la densidad de potencia de retorno por la apertura  $A_r$  de la antena. De esta manera, obtenemos

$$P_r = \frac{P_t G_t \sigma A_r}{(4\pi)^2 R^4} W. \quad (2.16)$$

La apertura de la antena entonces, puede ser escrita en términos de la ganancia como

$$G_r = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_r, \quad (2.17)$$

de manera que la potencia recibida por el sistema radar luego de la re-radiación puede reescribirse como

$$P_r = \frac{P_t G_t G_r \lambda^2 \sigma}{(4\pi)^3 R^4} W, \quad (2.18)$$

denominada *ecuación de rango del radar*.

Hasta aquí hemos considerado objetivos como entidades discretas, lo que raramente ocurre en la naturaleza. En su lugar, se observan regiones de la superficie terrestre con algún tipo de cobertura o textura (suelo, nieve, cultivos, etc.). Por lo tanto, es necesario modificar la ecuación de radar (2.18) comenzando por modificar la definición de la sección transversal radar.

Para dar una definición adecuada de *RCS* consideremos una región compuesta de un conjunto infinito de elementos infinitesimales de área  $ds$ . Supongamos que cada uno de estos elementos de área tiene una *RCS* de  $d\sigma$ . Luego, en media, la región tiene una *RCS* por unidad de área de  $\frac{d\sigma}{ds}$ , que denotaremos  $\sigma^0$  y denominaremos *coeficiente de backscatter* (coeficiente de retrodispersión) o también llamado Radar Cross Section (ver figura 2.5).

De (2.18), la potencia devuelta por una de estas regiones incrementales a la plataforma y recibida por la antena es

$$dP_r = \frac{P_t G_t G_r \lambda^2 d\sigma}{(4\pi)^3 R^4} W,$$

o, equivalentemente

$$dP_r = \frac{P_t G_t G_r \lambda^2 \sigma^0 ds}{(4\pi)^3 R^4} W.$$

Luego la potencia total que retorna a la plataforma de un cierto píxel es

$$P_t = \int \int \frac{P_t G_t G_r \lambda^2 \sigma^0 ds}{(4\pi)^3 R^4} W.$$

Si todas las cantidades en el integrando pueden considerarse constantes sobre un píxel, entonces la potencia recibida es

$$P_r = \frac{P_t G_t G_r \lambda^2 \sigma^0 r_a r_g}{(4\pi)^3 R^4} W, \quad (2.19)$$

donde  $r_a$  y  $r_g$  son las resoluciones en azimuth y en rango terrestre. La ecuación (2.19) es la forma de la ecuación de radar más usada dado que nuestro interés está centrado en las propiedades de retorno de la radiación de regiones y no de objetivos discretos.

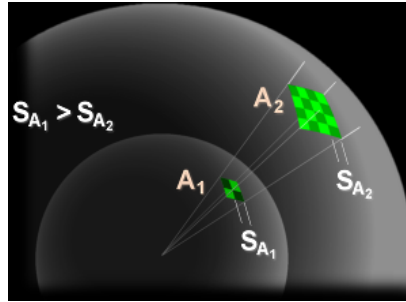


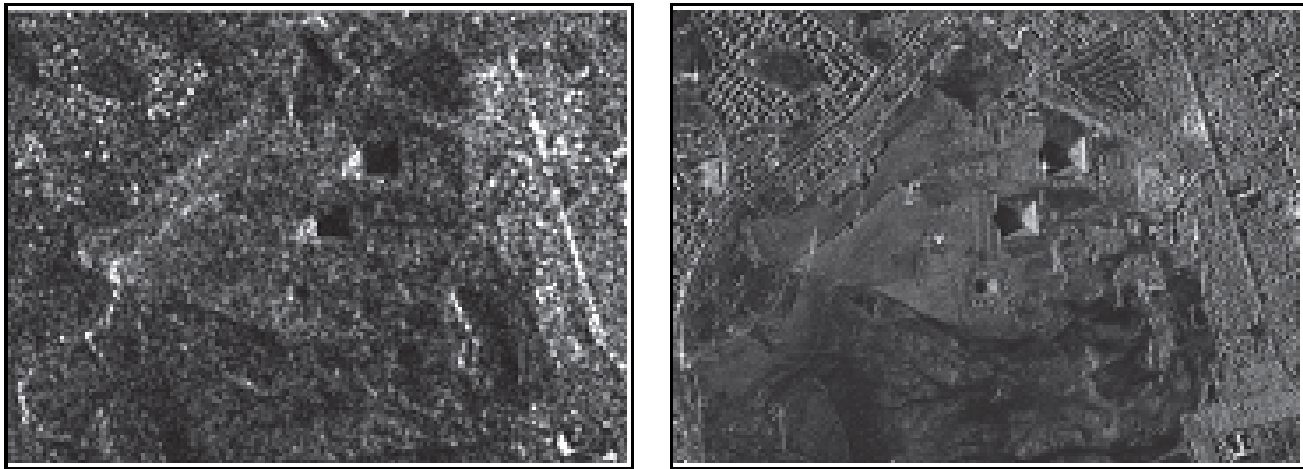
Figura 2.5: Radiador isotrópico y densidad de potencia a distintas distancias R

Si los demás parámetros son conocidos, puede determinarse  $\sigma^0$  midiendo la potencia  $P_r$ . La cantidad  $\sigma^0$  describe el “tono” en la imagen de radar. Por lo tanto, el coeficiente de backscatter  $\sigma^0$  está relacionado con las propiedades físicas de la región objetivo, esto es, su composición, el contenido de agua, etc.

#### 2.1.4. Elementos del SAR

##### Ruido Speckle

El sistema SAR genera imágenes que son de difícil visualización. Esto se debe a que una imagen generada por un sistema de iluminación tal como las SAR, es afectada por la interferencia coherente de las señales incidente y reflejada por los dispersores. Sobre diferentes tipos de regiones extensas, como por ejemplo campos cultivados y grandes extensiones de bosque, esta interferencia causa una fluctuación en la intensidad detectada, que variaría de celda de resolución a celda de resolución. Este efecto se denomina *speckle* y da a la imagen una apariencia granulada (ver figura 2.1.4).



(a)

(b)

Pirámides de Giza, Egipto. (a) Imagen SAR satelital decada del 90, resolución: 20 m, banda: C, iluminación: izquierda. (b) Imagen SAR satelital de 2007 resolución: 1 m, banda: X, iluminación: derecha.

En imágenes ópticas, ha sido comúnmente utilizada la distribución Gaussiana para modelar este tipo de datos desarrollándose técnicas junto con su implementación computacional para este modelo. El tratamiento del ruido, para estos datos, se hace bajo un modelo aditivo. Sin embargo el ruido *speckle*, no es gaussiano y se utilizan otros tipos de distribuciones para ajustar mejor estos datos, ni tampoco es aditivo sino que es multiplicativo. A raíz de lo recién mencionado, no es posible aplicar a estas imágenes el tratamiento clásico de procesamiento que se utiliza en sensores ópticos.

### Polarización, coeficiente de backscatter y número de look

Otro factor importante a tener en cuenta es la polarización, es decir la orientación del campo eléctrico de la radiación transmitida y recibida. La radiación emitida por el radar es polarizada, esto significa que el vector campo eléctrico tiene una dirección determinada, que puede ser vertical, horizontal (respecto del plano de la tierra) o tener ambas componentes. Al ser reflejada, la radiación experimenta, en general, una rotación del vector campo eléctrico. Por lo tanto existen 4 posibilidades: HH, HV, VH y VV, donde la primera letra se refiere a la señal emitida y la segunda a la recibida.

El  $\sigma$  depende de la polarización de la onda incidente y de la componente de polarización detectada por el sensor. Una superficie entonces queda caracterizada (para una frecuencia y un ángulo de incidencia dados) por una matriz de cuatro coeficientes de backscatter:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{HH} & \sigma_{HV} \\ \sigma_{VH} & \sigma_{VV} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Entonces, una misma zona puede dar cuatro imágenes distintas, correspondientes a los modos HH, HV, VH y VV.

Una cubierta vegetal con elementos verticales interactuar a fuertemente con un campo incidente con polarización vertical, mientras que lo hará débilmente con un campo de polarización horizontal. Por lo tanto, la penetración será mayor en el segundo caso que en el primero.

Durante el procesamiento de los pulsos captados por el radar, pueden sintetizarse varias pasadas sobre la misma región con un solo juego de datos. Las imágenes generadas por dichas pasadas corresponden a observaciones de la región desde ángulos ligeramente diferentes entre sí. A cada una de estas imágenes se la denomina un look. Al promediarlas entre sí se genera una sola imagen multilook la cual es de mejor interpretación visual ya que de esta forma se logra una reducción del fenómeno speckle respecto de una imagen ordinaria (de un solo look). Para más detalle y observar otras metodologías de filtros de este ruido ver Argenti et. al. 2013 [2].

**Observación 2.1.1.** Cabe destacar que en esta tesis nos interesaremos en el tratamiento de imágenes SAR de un solo look.



## Capítulo 3

# Clasificación en imágenes ópticas

Si bien en este trabajo estaremos enfocados en el problema de clasificación en imágenes SAR cuando hay presencia de píxeles mixtos. Es importante destacar los métodos de clasificación en imágenes ópticas, los cuales han resultado ser también una de las motivaciones de este trabajo. El siguiente capítulo se expondrá en forma breve las diferentes técnicas de clasificación en imágenes ópticas.

### 3.1. ANÁLISIS DIGITAL DE IMÁGENES: TÉCNICAS DE CLASIFICACIÓN SUPERVISADA

Es claro que el interés de la teledetección viene dado por su capacidad de proporcionar información temática, que cubra vacíos en nuestro conocimiento del territorio o, al menos, actualice lo que ya se había inventariado previamente.

Potencialmente las variables que pueden deducirse a partir de la teledetección son muy numerosas, y cuyo rasgo común, es que están de un modo u otro, relacionadas con la radiancia que reflejan o emiten los objetos, con respecto a su distancia al sensor o con su posición.

Podemos entonces establecer una primera distinción, entre unas variables que son medibles de modo directo y otras que se derivan a partir de aquéllas. Las primeras son una función de los datos adquiridos por el sensor, por lo que pueden extraerse directamente de ellos si conocemos los parámetros de adquisición. Las más importantes son: la reflectividad en el espectro solar, la temperatura en el infrarrojo térmico, el coeficiente de retro-dispersión en microondas, la altitud, a partir de la visión estereoscópica en el óptico, etc.

En cuanto a las variables indirectas, se trata de factores que se pueden derivar de las anteriormente mencionadas. Por ejemplo el contenido de clorofila, que modifica la reflectividad de las plantas puede estimarse indirectamente observando en qué bandas su efecto es más evidente y aislándola de otros factores que también pueden influir en tales bandas.

Uno de los procesos de clasificación más utilizados en teledetección son los modelos supervisados. Hay numerosos algoritmos para este tipo de clasificación, que van desde aquéllos basados en la función de distribución de probabilidades de las clases de interés, a aquéllos en los que suponen que el espacio multispectral se divide en clases específicas perfectamente ubicadas. Pero todos

esencialmente cumplen los siguientes pasos:

1. Decidir el conjunto de tipos de cobertura del suelo en el que la imagen va a ser segmentada. Éstas son las clases de información.
2. Elegir representante o píxeles prototipo de cada una de las clases. Se dice que estos píxeles forman la clase de entrenamiento. Estos conjuntos se pueden determinar mediante visitas de campo, mapas, fotografías aéreas e incluso fotointerpretación formada a partir de los datos de la imagen.
3. Utilizar los datos de entrenamiento para estimar los parámetros del algoritmo clasificador particular; estos parámetros serán utilizados para ajustar el modelo de probabilidad utilizado o serán utilizados para ajustar las ecuaciones que definen las particiones en el espacio multispectral.
4. Utilizar estos ajustes para clasificar todos los píxeles de la imagen. Cabe destacar que algunas veces, antes de hacer este paso, así como se definieron las clases de entrenamiento, muchas veces se suelen definir clases de validación, que son utilizadas para ver qué tan bien funcionan los modelos o ecuaciones propuestas.
5. Producir un mapa de clase temáticas que resuman los resultados de la clasificación.

### 3.1.1. Técnica de análisis espectral de imágenes ópticas

#### Análisis de espectro

La primera característica que define una imagen óptica o una imagen hiperespectral es la cantidad de bandas que contiene. En consecuencia, la forma más elemental de analizar una imagen de este tipo sería comparar los espectros que de ella se derivan con los que podemos obtener a partir de un equipo de laboratorio, o de las bibliotecas espectrales disponibles al público. A partir de ahí, puede identificarse a qué cubierta pertenece un píxel comparando su espectro con otros de referencia, aplicando algunas técnicas que permitan ver el grado de similitud.

#### Clasificación angular

El clasificador angular (*Spectral Angle Mapper, SAM*) calcula la similitud entre dos espectros a partir de su distancia angular, asumiendo que forman dos vectores en un espacio n-dimensional (siendo n el número de bandas disponibles). En síntesis, se trata de un método para comparar espectros desconocidos con otros de referencia, ya sea tomados de la propia imagen o de bibliotecas espectrales.

El algoritmo determina la similitud entre dos espectros calculando el ángulo espectral que los separa ( $\theta$ ):

$$\theta = \arccos \left( \frac{\sum_{k=1}^n \rho_{i,k} \rho_{j,k}}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \rho_{i,k}^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n \rho_{j,k}^2}} \right),$$



siendo  $\rho_{i,k}$  la reflectividad del píxel  $i$  en una determinada banda  $k$  de la imagen, y  $n$  es el número de bandas. El criterio puede utilizarse para comparar pares de espectros, o para asignar un píxel desconocido a una clase de referencia en una clasificación temática.

**Observación 3.1.1.** Así como usamos el arc cos para comparar dos espectros, también podemos usar la función arcsin.

### Análisis lineal de mezclas espectrales

El análisis lineal de mezcla espectral (*ALME*, *Spectral Mixture Analysis SMA*) parte de asumir que la señal captada para un determinado píxel puede ser una mezcla de las reflectividades procedentes de varias cubiertas, en función de la superficie que ocupan en ese píxel, y se pretende obtener precisamente esas proporciones.

Tradicionalmente la clasificación de imágenes satelitales ha asignado a cada píxel a una, y sólo una, de las categorías previamente definidas. La necesidad de categorizar cada píxel de la imagen con un código exclusivo implica asumir que ese píxel es homogéneo. Pero esa clasificación no considera que un píxel es, la mayoría de las ocasiones de las ocasiones, una mezcla de distintas cubiertas y que al clasificarlo simplemente optamos por asignarlo a la clase predominante. Una alternativa es tratar de obtener imágenes que nos indiquen la proporción de cada categoría de interés, asumiendo que la respuesta recibida por el sensor es, de alguna forma, una combinación de asignaturas espectrales puras.

Más concretamente, el ALME supone que un píxel puede ser escrito como

$$x_k = E f_k + \varepsilon_k \quad (3.1)$$

donde

- $E$  es una matriz  $q \times n$ , donde  $q$  es el número de bandas multispectrales de la imagen y  $n$  el número de clases temáticas, con

$$E(i, k) = ND \text{ característico de la respuesta espectral en la banda } k \text{ de la clase } i$$

- $f$  es un vector de longitud  $n$  tal que  $f(i) =$  proporción de la clase  $i$  en el píxel  $x_k$ .
- $\varepsilon$  es un término de error asociado a la estimación de las proporciones en cada píxel  $x_k$ .

Esta fórmula está sujeta a dos restricciones. Por un lado, la proporción de cada componente puro ( $f_k$ ) debe estar entre 0 y 1, y cuya suma debe ser igual a 1. O sea:

$$0 \leq f_k \leq 1 \quad (3.2)$$

y

$$\sum_{k=1}^n f_k = 1. \quad (3.3)$$

Para obtener la respuesta espectral característica de los miembros puros pueden abordarse diversos procedimientos que podemos dividir en dos grupos, según se utilicen datos de la propia imagen o información externa.

En el primer caso, podemos seleccionar los píxeles representativos de cada componente pura a partir de varios criterios:

1. El más sencillo es seleccionarlo a partir del conocimiento del área de estudio que posea el intérprete, lo que permite extraer de la imagen algún píxel considerado completamente homogéneo de cada componente puro. Como es lógico, esta selección es arriesgada, ya que si seleccionamos un píxel con mezcla, los resultados del ALME producirían ruido.
2. Otros autores recomiendan extraer los datos con un procedimiento más objetivo. Entre las técnicas propuestas, tal vez la más utilizada es la denominada *Píxel Purity Index* (PPI Boardman et al., 1995 [3]). El método parte de representar la nube de puntos de una determinada imagen en un espacio n-dimensional, que se va retroproyectando aleatoriamente. En cada iteración se anotan los píxeles extremos de esa nube, señalándose los más puros como aquéllos que alcancen con mayor frecuencia la condición de extremos.

La segunda alternativa para extraer las componentes puras sería utilizar espectros extraídos de fuentes externas. Puede tratarse de firmas espectrales medidas con radiómetro o extraídas de alguna biblioteca espectral, o incluso simuladas mediante algún modelo de simulación. Esta opción permite controlar mejor la pureza de los valores de entrada, evitando efectos anómalos a la cubierta.

Una vez obtenidas las reflectividades o ND, pueden generarse las imágenes de las proporciones ( $f$ ) solucionando para cada píxel la ecuación (3.1). Normalmente las proporciones se obtienen de tal forma que se minimice el error residual ( $\varepsilon_k$ ). Por ello, puede reescribirse esa fórmula en términos del error:

$$\varepsilon_k = x_k - E f_k, \quad (3.4)$$

de tal forma que los valores a estimar permitan minimizar el error.

Una de las ventajas del ALME frente a otras técnicas de interpretación es que nos ofrece una imagen de errores del modelo en cada píxel, o dicho de otra forma, nos permite conocer el grado de ajuste de nuestro modelo a la realidad de las cubiertas presentes en cada píxel de la imagen.

Entre los diversos criterios para dar una solución al sistema de ecuaciones planteadas, el más utilizado es el ajuste por mínimos cuadrados con restricciones, pero como veremos más adelante, en clasificación difusa, podemos asignarle al error ( $\varepsilon_k$ ) una función de distribución de probabilidad y estimar las proporciones ( $f_k$ ) mediante el método de máxima verosimilitud, o métodos robustos como son los M-estimadores.

Cabe destacar que sobre imágenes ópticas con un modelo de dos clases hemos hecho un estudio basado en simulación para los estimadores obtenidos por mínimos cuadrados y estimadores robustos de las  $f_k$  cuando se perturbaba la matriz  $E$  o frente a cambios en la distribución de errores. De los resultados obtenidos, pudimos observar que el método basado en robustez no presentó mejoras en cuanto al método basado en mínimos cuadrados cuando se perturbó una de las componentes de la matriz de clases  $E$ , sin embargo se notó una mejoría de este estimador sobre el de mínimos cuadrados cuando la imagen se ve contaminada. Este trabajo motivó el actual estudio del comportamiento de diferentes estimadores en la implementación de la función grado de pertenencia en imágenes SAR.

### Clasificación por máxima verosimilitud

El Método de Máxima Verosimilitud es el método de clasificación supervisada mayormente utilizado en imágenes de teledetección. En las secciones siguientes se desarrollarán los métodos estadísticos más utilizados.

**Clasificación Bayesiana** Sean las clases espectrales de una imagen representadas por

$$\omega_i, \quad i = 1, \dots, c$$

donde  $c$  es el número de clases. Al tratar de determinar la clase o categoría a la que pertenece un píxel  $\mathbf{x}$ , en realidad estamos interesados en la probabilidad condicional

$$P(\omega_i | \mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, c$$

La probabilidad  $P(\omega_i | \mathbf{x})$  nos da una idea de la posibilidad de que la clase correcta para un píxel  $\mathbf{x}$  sea  $\omega_i$ . Por lo tanto un buen método de clasificación sería:

$$\mathbf{x} \in \omega_i, \quad \text{si} \quad P(\omega_i | \mathbf{x}) > P(\omega_j | \mathbf{x}) \text{ para todo } i \neq j. \quad (3.5)$$

**Regla de decisión para la máxima verosimilitud** A pesar de su simplicidad,  $P(\omega_i | \mathbf{x})$  es desconocido. Sin embargo, supongamos que contamos con un volumen considerable de datos de entrenamiento para cada tipo de cobertura. Estos pueden ser utilizados para estimar la distribución de probabilidades que describe la probabilidad de que el píxel observado esté descrito por la clase  $\omega_i$ , en símbolos,  $P(\mathbf{x} | \omega_i)$ .

La probabilidad deseada  $P(\omega_i | \mathbf{x})$  en (3.5) y  $P(\mathbf{x} | \omega_i)$  - estimada a partir de datos de entrenamiento - están relacionados por el teorema de Bayes de la siguiente manera:

$$P(\omega_i | \mathbf{x}) = P(\mathbf{x} | \omega_i)P(\omega_i)/P(\mathbf{x}), \quad (3.6)$$

donde  $P(\omega_i)$  es la probabilidad de ocurrencia de la clase  $\omega_i$  en la imagen, y  $P(\mathbf{x})$  es la probabilidad de encontrar el píxel  $\mathbf{x}$  cualquiera sea la clase. Por lo tanto:

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^c P(\mathbf{x} | \omega_i)P(\omega_i). \quad (3.7)$$

La probabilidad  $P(\omega_i)$  se llama probabilidad a priori de la clase  $\omega_i$ . En la comparación (3.5) la  $P(\omega_i | \mathbf{x})$  es conocida como la probabilidad a posteriori. Usando (3.6) entonces podemos establecer una nueva regla de clasificación como en (3.5):

$$\mathbf{x} \in \omega_i, \quad \text{si} \quad P(\mathbf{x} | \omega_i)P(\omega_i) > P(\mathbf{x} | \omega_j)P(\omega_j) \text{ para todo } i \neq j. \quad (3.8)$$

La regla (3.8) resulta ser más aceptable que (3.5), ya que tanto  $P(\omega_i)$  como  $P(\mathbf{x} | \omega_i)$  son conocidas (estimadas) por las clases de entrenamiento.

Generalmente, en los estimadores de máxima verosimilitud es conveniente usar el logaritmo de  $P(\mathbf{x} | \omega_i)P(\omega_i)$  sobre la ecuación (3.8), de esta manera definimos

$$\begin{aligned} g_i(\mathbf{x}) &= \ln(P(\mathbf{x} | \omega_i)P(\omega_i)) \\ &= \ln(P(\mathbf{x} | \omega_i)) + \ln(P(\omega_i)), \end{aligned} \quad (3.9)$$

con lo cual (3.8) queda expresada como

$$\mathbf{x} \in \omega_i, \quad \text{si} \quad g_i(\mathbf{x}) > g_j(\mathbf{x}) \text{ para todo } i \neq j. \quad (3.10)$$

**Modelo normal multivariada** En esta etapa supondremos que las distribuciones de probabilidad para las clases son de la forma de normal multivariada. Luego, suponiendo que tenemos  $N$  bandas espectrales,

$$P(\mathbf{x} | \omega_i) = (2\pi)^{-N/2} |\mathbb{Y}_i|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{m}_i)^t \mathbb{Y}_i^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_i) \right\}. \quad (3.11)$$

donde  $\mathbf{m}_i$  y  $\mathbb{Y}_i$  son el vector de medias y la matriz de covarianza de la clase  $\omega_i$ . El término  $(-N/2) \ln(2\pi)$  es común en todas las  $g_i(\mathbf{x})$ , con lo cual puede obviarse. Por lo tanto la ecuación (3.9) puede reescribirse como

$$g_i(\mathbf{x}) = \ln(P(\omega_i)) - \frac{1}{2} \ln(|\mathbb{Y}_i|) - \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{m}_i)^t \mathbb{Y}_i^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_i). \quad (3.12)$$

A menudo, no se suele tener en cuenta  $P(\omega_i)$ , y se asume que todas las probabilidades a priori son iguales, lo cual hace que se pueda despreciar el  $\ln(P(\omega_i))$  de la última ecuación, obteniéndose:

$$g_i(\mathbf{x}) = -\ln(|\mathbb{Y}_i|) - (\mathbf{x} - \mathbf{m}_i)^t \mathbb{Y}_i^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_i). \quad (3.13)$$

**Superficies de decisión** Las clases espectrales están definidas por regiones en el espacio multi-espectral en base a sus funciones discriminantes. Normalmente estas regiones están separadas por superficies en las que las funciones discriminantes de las clases espectrales adyacentes son iguales. Así, las clases  $i$ -ésima y  $j$ -ésima están separadas por lo tanto por una superficie dada por

$$g_i(\mathbf{x}) - g_j(\mathbf{x}) = 0.$$

En situaciones como ésta es razonable aplicar umbrales para el proceso de toma de decisión. Los píxeles que tienen probabilidades menor que el umbral para todas las clases no se clasifican.

Con la incorporación de estos umbrales, la regla de decisión de (3.10) se convierte

$$\mathbf{x} \in \omega_i, \quad \text{si} \quad g_i(\mathbf{x}) > g_j(\mathbf{x}) \text{ para todo } i \neq j, \quad (3.14a)$$

$$y \quad g_i(\mathbf{x}) > T_i, \quad (3.14b)$$

donde  $T_i$  es el umbral significativo para la clase espectral  $\omega_i$ .

### Clasificación de mínimos cuadrados

La eficacia de clasificación de máxima probabilidad depende de una buena estimación del vector de medias  $\mathbf{m}$  y la matriz de covarianza  $\mathbb{Y}$  para cada clase espectral. A su vez esto depende de tener un número suficiente de píxeles de entrenamiento para cada una de esas clases. En los casos en que esto no es así, las estimaciones inexactas de los elementos  $\mathbb{Y}_i$ , pueden llevar a una mala clasificación. Por lo tanto cuando el número de muestras de entrenamiento por clase es limitada o presentan distorsión puede ser más eficaz recurrir a un clasificador que no hace uso de la información covarianza sino que

depende solamente de las posiciones medias de las clases espectrales. El clasificador denominado mínimos cuadrados, o más precisamente, la distancia mínima al valor medio de la clase, es uno de los clasificadores de este estilo.

La función discriminante para este tipo de clasificador se desarrolla como sigue.

Sean  $\mathbf{m}_i$ ,  $i = 1, \dots, c$  las medias de las  $c$  clases espectrales determinadas por la clase de entrenamiento. Definimos la distancia Euclídea en el espacio  $N$  dimensional como:

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}, \mathbf{m}_i)^2 &= (\mathbf{x} - \mathbf{m}_i)^t (\mathbf{x} - \mathbf{m}_i) \\ &= \mathbf{x}^t \mathbf{x} - 2\mathbf{m}_i^t \mathbf{x} + \mathbf{m}_i^t \mathbf{m}_i. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Por lo tanto la clasificación se hace en base a

$$\mathbf{x} \in \omega_i, \quad \text{si} \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{m}_i)^2 < d(\mathbf{x}, \mathbf{m}_j)^2 \quad \text{para todo } i \neq j. \quad (3.16)$$

Ahora como vemos  $\mathbf{x}^t \mathbf{x}$  en  $d(\mathbf{x}, \mathbf{m}_i)^2$  es común para cada una de las clases, con lo cual puede ser removido de la ecuación (3.15). Luego la función discriminante puede ser tomada como sigue:

$$\mathbf{x} \in \omega_i, \quad \text{si} \quad g_i(\mathbf{x}) > g_j(\mathbf{x}) \quad \text{para todo } i \neq j. \quad (3.17)$$

donde

$$g_i(\mathbf{x}) = 2\mathbf{m}_i^t \mathbf{x} - \mathbf{m}_i^t \mathbf{m}_i. \quad (3.18)$$

**De Máxima Verosimilitud a Mínimos Cuadrados** Mientras que la clasificación de mínimos cuadrados etiqueta un píxel como perteneciente a una clase particular a partir de su distancia de la media correspondiente, el método de máxima verosimilitud pondera esa decisión, en base a la información obtenida de la matriz de covarianza.

Consideremos ahora la matriz de covarianza de todas las clases como una matriz común, esto es

$$\mathbb{Y}_i = \mathbb{Y} \quad \forall i.$$

Bajo estas circunstancias la función discriminante para el estimador de máxima verosimilitud dado en (3.13) queda expresado como:

$$g_i(\mathbf{x}) = -\ln(|\mathbb{Y}|) - (\mathbf{x} - \mathbf{m}_i)^t \mathbb{Y}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_i).$$

Luego como el término  $\ln(|\mathbb{Y}|)$  es común en todas las clases, puede entonces ser ignorado, así como también  $\mathbf{x}^t \mathbb{Y}^{-1} \mathbf{x}$  que resulta un producto escalar común para cada clase. Entonces

$$g_i(\mathbf{x}) = 2\mathbf{m}_i^t \mathbb{Y}^{-1} \mathbf{x} + \mathbf{m}_i^t \mathbb{Y}^{-1} \mathbf{m}_i.$$

**Observación 3.1.2.** Notar que si la matriz de covarianza de todas las clases es una matriz diagonal y con igual varianza en cada una de sus componentes, esto es

$$\mathbb{Y} = \sigma^2 Id \quad \forall i.$$

entonces  $g_i(\mathbf{x})$  se lo puede reescribir de la siguiente forma

$$g_i(\mathbf{x}) = 2\mathbf{m}_i^t \mathbf{x} + \mathbf{m}_i^t \mathbf{m}_i.$$

que es justamente la función discriminante de mínimos cuadrados. Por lo tanto, en estas circunstancias, el método de máxima verosimilitud y el de cuadrados mínimos coinciden cuando tenemos clases independientes e idénticamente distribuídas.

### Clasificación del paralelepípedo

La clasificación del paralelepípedo es una clasificación supervisada muy sencilla. En principio, las clases de entrenamiento son utilizadas para calcular el histograma de cada una de las componentes espectrales de la clase. Luego se identifican los umbrales significativos sobre el histograma que luego son usados para describir los límites inferior y superior respectivamente de los valores extremos de cada una de las bandas de esa clase. Todos estos rangos describen un cuadro multidimensional o paralelepípedo en cada una de las bandas. Y un píxel será etiquetado entonces según al paralelepípedo de la clase a la que pertenezca.

Si bien el método del paralelepípedo es, en principio, un clasificador particularmente simple para formar y usar, tiene varios inconvenientes. Uno de ellos es el diseño de áreas de dominio, ya que por un lado puede implicar que haya píxeles en zonas comunes a dos o más clases y, por el otro, es que haya diferencias considerables entre los paralelepípedos, ya que de ser así quedarían muchos píxeles sin clasificar. Una desventaja de este modelo con los métodos de cuadrados mínimos y máxima verosimilitud, es que estos últimos clasifican todos los píxeles de una imagen, a menos que estos utilicen un umbral.

### Clasificación en árbol

Uno de los métodos más sencillos, pero a la vez más eficientes de clasificación alternativa es el denominado clasificación en árbol (*decision tree classifier*). La idea consiste en discriminar secuencialmente cada una de las categorías, basándose en valores espectrales de la imagen, ya sea en variables de textura, temporales o algún tipo de información auxiliar (suelos, MDE, etc.). Para cada clase se establecen unas reglas dicotómicas de interpretación, que permiten concentrar a cada una de las clases a partir de las variables en que mejor se discrimina, en vez de usar todas indistintamente.

Como dijimos antes en esta clasificación pueden introducirse variables no obtenidas por teledetección, como cartografía de suelos, límites administrativos o MDE. El establecimiento de estos criterios de decisión se realiza por un experto en el reconocimiento de cada categoría de interés, que conozca las condiciones ambientales para la zona en la que se trabaja.

Los clasificadores en árbol se han utilizado en los últimos años con cierto éxito, tanto en la cartografía de especies forestales (Saura y San Miguel, 2001 [30]), como para asignar tipos de vegetación y cobertura del suelo, con especial énfasis en aplicaciones de ámbito global (Friedl et al. 1999 [13]; Stroppiana et al. 2003 [31]).

### Redes Neuronales Artificiales (RNA)

Las RNA se utilizan para predecir un cierto comportamiento complejo, habitualmente a partir de una muestra de entrada y salida observadas. Con los datos de esa muestra, la red “aprende” a reconocer el resultado a partir de los valores de entrada, clasificando el resto de las observaciones de acuerdo a esas reglas: intentan simular el comportamiento del cerebro humano (de ahí su nombre), mediante la interconexión múltiple entre unidades de activación (llamadas neuronas).

Una RNA está formada por un conjunto de elementos simples (neuronas, unidades de proceso) distribuidas en capas. Las unidades que forman una capa están conectadas con la capa o capas

inmediatas a través de unas funciones de activación. Esas funciones se definen a partir de una serie de pesos  $(w_{i,j})$ , que se calculan de modo iterativo en el proceso de aprendizaje de la red. El objetivo de este aprendizaje es estimar unos resultados conocidos a partir de unos datos de entrada (muestra de control) para posteriormente calcular resultados desconocidos a partir del resto de datos de entrada. Cada unidad de red proporciona un valor de salida a partir de los valores de entrada, del modelo siguiente:

$$o = f(wx + \theta)$$

donde  $o$  indica el resultado,  $\theta$  es un umbral (en muchas ocasiones se deja con valor nulo),  $w$  es un vector con los pesos que unen las distintas unidades de red, y  $x$  es el vector de entradas. Este valor de salida puede ser a su vez la entrada de una unidades situadas en la capa siguiente o en la anterior, dependiendo el tipo de red.

El número de unidades y de capas depende de las condiciones del problema en estudio. En clasificación de imágenes es frecuente que las RNA estén formadas por tres capas, denominadas de entrada, oculta y de salida. El objetivo de la capa oculta es lograr funciones de discriminación más flexibles. El número de unidades de salida coincide con el de clases que se pretenda clasificar, mientras que el número en la capa oculta puede variar, aunque se recomienda que sea al menos igual al de la capa de entrada.

Un punto importante de las RNA es el denominado “aprendizaje” de la red, esto es, tomar una adecuada configuración de las conexiones y pesos entre las unidades de red para lograr un resultado óptimo. Entre los diversos criterios de aprendizaje, el más conocido es el denominado de retro-propagación. Este tiene por objetivo encontrar un conjunto de pesos que asegure que cada vector de entrada producido por la red sea el mismo, o muy similar, al de la salida conocido. Su formulación puede sintetizarse de la siguiente forma:

1. Asignar unos pesos arbitrarios a la red para obtener unos resultados a partir de los valores de entrada (en nuestro caso, los ND de las áreas de entrenamiento en las distintas bandas). Esos resultados se contrastan con la categoría a la que pertenece cada píxel de entrenamiento (introducida por el usuario). Esto permite obtener una tasa de error inicial. La medida habitual del error es la desviación entre el resultado esperado ( $t_k$ ) y el producido por la red ( $o_k$ ):

$$E = \sqrt{\sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^c (t_{k,m} - o_{k,m})^2} \quad (3.19)$$

donde  $n$  es el número de bandas y  $c$  es el número de clases.

2. A partir de ahí, se van modificando iterativamente los pesos en las distintas etapas, desde la salida hasta la entrada, con el objetivo de reducir el error global (se propaga el error hacia atrás, de ahí el nombre del ajuste, hasta que éste sea muy pequeño o nulo, o bien se hayan cumplido el número de iteraciones.

En el contexto de la clasificación de imágenes se ha comprobado la potencialidad de las RNA como alternativa a los clasificadores estadísticos tradicionales, especialmente cuando no pueden asumirse distribuciones normales de las categorías, ya que las RNA son independientes del tipo de distribución.

Entre los problemas de las RNA cabe citar la falta de criterios generales para diseñar la estructura de la red (número de capas, unidades en cada capa), reduciéndose su empleo a una cuestión de

prueba y error; su lento y muchas veces tedioso entrenamiento; la posibilidad de que se encuentren mínimos locales y de que se produzca un sobre-entrenamiento de la red. Para evitar esto, se suele dividir la muestra de aprendizaje en dos grupos, uno para calcular los pesos y otro para verificar el ajuste. También pueden plantearse las redes para la clasificación no supervisada, ya que existen algunos criterios de aprendizaje que no requieren una definición previa de las clases deseadas.



## Capítulo 4

# Técnica de análisis en imágenes SAR

Una primera impresión al ver una imagen de radar, es que esta nos brinda información a través de su estructura, de inmediato pueden observarse formas, objetos, líneas o a veces regiones que pueden ser reconocidas por su brillo o textura. Ahora si miramos los píxeles de una región en forma individual observamos que contiene una variabilidad considerable. Por lo tanto, es lógico preguntarse, cuál es la fuente de esa variabilidad y cuál es el porcentaje de información que acarrea dicho píxel.

Ya hemos visto que cuando se emiten ondas electromagnéticas sobre una posición  $(x, y)$  sobre la superficie de la tierra, esta es devuelta al sensor modificada tanto en la fase  $\psi(x, y)$  como en su amplitud de onda  $A(x, y)$ . En SAR, esto implica medir el par  $(A \cos(\psi), A \sin(\psi))$ . Esta reflexividad local puede ser representada como el número complejo  $Ae^{i\psi}$ , de esta forma, las imágenes quedan expresadas en forma compleja.

De este tipo de imágenes se derivan entonces otras que pueden ser formadas (ver figura 4.1), por ejemplo, por la parte real  $A \cos(\psi)$  o la parte compleja  $A \sin(\psi)$ , la amplitud  $A$ , la fase  $\psi$  o la intensidad  $I = A^2$ .

Por lo general, la imagen de la parte real o la parte compleja muestran cierta estructuras pero resultan ser muy ruidosas, la imagen de fase tiene un comportamiento muy ruidoso y no presentan estructuras, mientras que la amplitud y la intensidad, aunque son ruidosas son claramente más fáciles de interpretar.

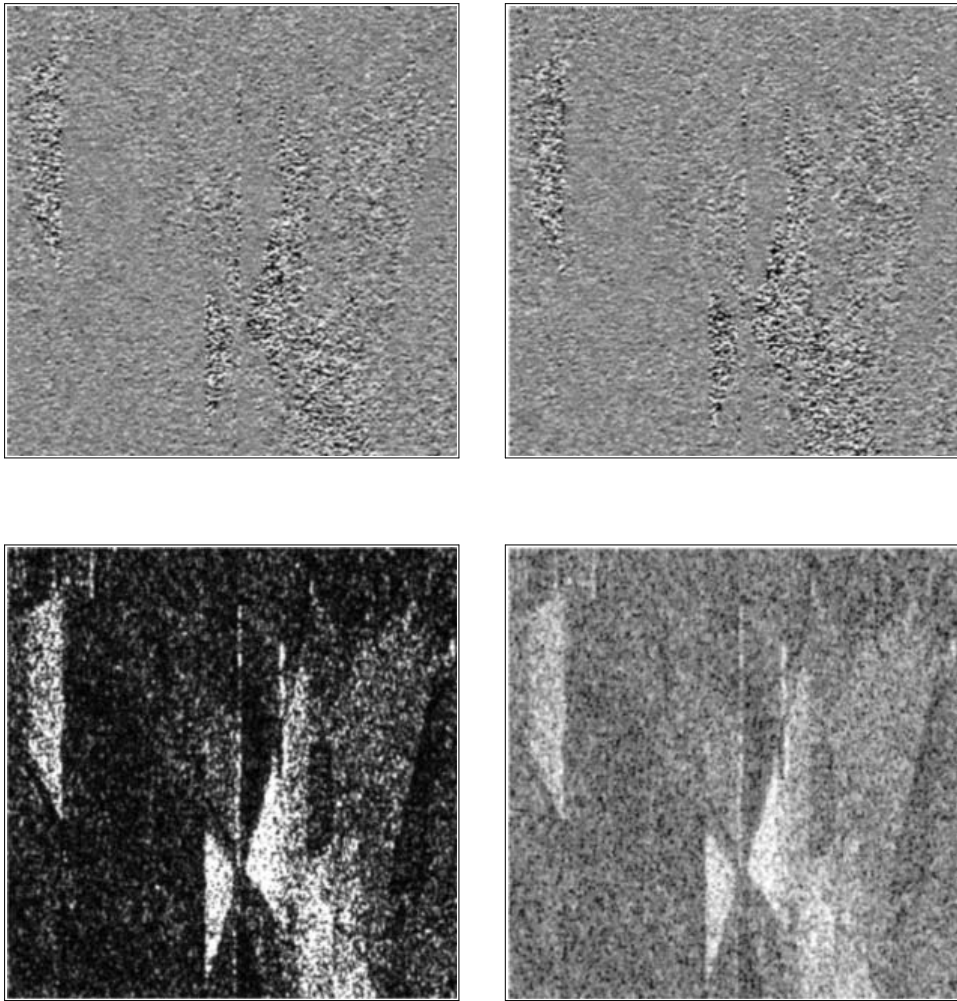


Figura 4.1: Tres formatos para una misma escena: compleja (real e imaginaria, arriba), amplitud (abajo izquierda) e intensidad (abajo derecha).

Las características cualitativas del ruido en este tipo de imágenes se lo conoce como ruido *speckle*, que puede ser interpretado como un fenómeno de interferencia de las fases.

A pesar que este trabajo se centrará en el modelado de la intensidad de las imágenes SAR, y como hemos afirmado que la intensidad puede ser vista en función de la amplitud, haremos un breve desarrollo del backscatter y retorno de la amplitud, ampliamente desarrollado en la literatura, para luego hacer su paralelo con nuestra variable de interés, que en nuestro caso es la intensidad.

## 4.1. MODELO MULTIPLICATIVO Y RUIDO SPECKEL

El modelo multiplicativo es una de las herramientas más frecuentemente utilizadas en el modelado estadístico de imágenes SAR. Este modelo supone que el valor observado en cada coordenada de la imagen es el resultado de observar la variable aleatoria  $Z$  que, a su vez, es el producto de otras

dos variables aleatorias independientes,  $X$  e  $Y$ , donde  $X$  modela el *backscatter* del terreno (cantidad vinculada a la constante dieléctrica del mismo), mientras que la variable aleatoria  $Y$  modela el ruido *speckle*. Luego, el retorno es dado por observaciones de la variable aleatoria  $Z = X \cdot Y$ . De este modelo devienen, entre otras, las distribuciones Rayleigh, Raíz de Gamma, Exponencial, Gamma y la clase de las distribuciones  $\mathcal{K}$ . El desarrollo de estas distribuciones en imágenes SAR ha sido expuesto en varios trabajos, como por ejemplo Lee et al. 1994 [19]; Oliver 1998[26] y más recientemente, Frery et al., 1996, 1997, 2002[12] [10] [20] y Mejail et al 2000 [22], se ha propuesto una extensión para el modelo multiplicativo, que lleva a la clase de distribuciones  $\mathcal{G}$  a la subclase de distribuciones  $\mathcal{G}^0$ .

Pueden hacerse varias hipótesis sobre las distribuciones de  $X$  e  $Y$ . También puede suponerse una estructura de correlación espacial para el proceso  $(X_s)_{s \in S}$ , donde  $S$  denota el soporte de la imagen. A pesar de ser ésta un área de investigación importante, nosotros no tendremos en cuenta el modelado de la correlación espacial de los datos en este trabajo.

La literatura ofrece una gran variedad de trabajos sobre las propiedades estadísticas del ruido *speckle* (Frery et al. 1996; Frery et al. 1995a; Frery et al. 1995b; Goodman 1982). Se suele suponer que este ruido, en formato complejo tiene una distribución normal bivariada de componentes independientes e idénticamente distribuidas de varianzas  $\mathbf{1}/2$  y media  $\mathbf{0}$ . La cual denotaremos como  $\mathbf{Y}_C = (Y_{\Re}, Y_{\Im}) \sim \mathcal{N}_2(\mathbf{0}, \mathbf{1}/2)$ , y utilizaremos los subíndices “ $C$ ”, “ $I$ ” y “ $A$ ” para los formatos complejo, de intensidad y de amplitud respectivamente.

El *speckle* multilook de intensidad aparece tomando la media de  $n$  observaciones independientes del módulo cuadrado del *speckle* complejo  $\mathbf{Y}_C$ . Así, la variable aleatoria resultante  $Y_I = n^{-1} \sum_{i=1}^n \|\mathbf{Y}_C(i)\|^2$  tendrá una distribución Gamma con densidad

$$f_{Y_I}(y) = \frac{n^n}{\Gamma(n)} y^{n-1} \exp(-ny), \quad y, n > 0$$

denotada como  $Y_I \sim \Gamma(n, n)$ .

El *speckle* multilook de la amplitud aparece tomando la raíz cuadrada del respectivo *speckle* multilook de intensidad, esto es  $Y_A = Y_I^{1/2}$ . La distribución resultante, denotada  $Y_A \sim \Gamma^{1/2}(n, n)$ , se conoce como “raíz cuadrada de Gamma con parámetro  $n$ ” y se caracteriza por la densidad

$$f_{Y_A}(y) = \frac{2n^n}{\Gamma(n)} y^{2n-1} \exp(-ny^2), \quad y, n > 0. \quad (4.1)$$

#### 4.1.1. Backscatter de amplitud

En décadas pasadas, como se puede observar en Frery et al. en 1996([12]), en la literatura se tenía en cuenta sólo dos modelos para el backscatter de amplitud:

1. una constante, asociada a áreas homogéneas, la cual hace que la información retornada al sensor tenga una distribución raíz cuadrada de Gamma.
2. Y una distribución raíz cuadrada de Gamma, asociada a áreas heterogéneas y que lleva a un modelo  $\mathcal{K}_A$  para el retorno de la información al sensor.

En varios trabajos (Lopez et al. 1990; Ulaby et al. 1986) se demostró que la heterogeneidad expresable por este último modelo no es suficiente para algunas áreas y sensores, llevando a la necesidad de extenderlo.

En la actualidad el modelo multiplicativo más general que los autores conocen es el que se obtiene al utilizar la distribución raíz de una Gaussiana inversa generalizada (propuestas en Frery et al. 1996), el cual también contempla el modelado de zonas extremadamente heterogéneas tales como zonas urbanas.

Se dice que una variable aleatoria  $X_A$  tiene una distribución raíz de Gaussiana inversa generalizada con parámetros  $\alpha, \gamma$  y  $\lambda$  (denotaremos  $X_A \sim \mathcal{N}^{-1/2}(\alpha, \gamma, \lambda)$ ) si su densidad está dada por

$$f_{X_A}(x) = \frac{(\lambda/\gamma)^{\alpha/2}}{K_\alpha(2\sqrt{\lambda\gamma})} x^{2\alpha-1} \exp\left(-\frac{\gamma}{x^2} - \lambda x^2\right), \quad x > 0 \quad (4.2)$$

donde  $K_\alpha$  denota la función de Bessel modificada de tercer tipo y orden  $\alpha$ . El espacio de variación de los parámetros es el conjunto definido por

$$\begin{cases} \gamma > 0, & \lambda \geq 0 & \text{si } \alpha < 0 \\ \gamma > 0, & \lambda > 0 & \text{si } \alpha = 0 \\ \gamma \geq 0, & \lambda > 0 & \text{si } \alpha > 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

y donde la función de Bessel tiene las siguientes propiedades que para este trabajo es importante destacar:

1. Para todo  $x > 0$ ,  $K_{-v}(x) = K_v(x)$  y;
2.  $K_v(x)$  puede ser aproximado por  $\Gamma(v) 2^{v-1} x^{-v}$  cuando  $x \downarrow 0$  y  $v > 0$ .

Los momentos de orden  $r$  de esta variable aleatoria están dados por

$$E(X_A^r) = \left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)^{r/4} \frac{K_{\alpha+r/2}(2\sqrt{\gamma\lambda})}{K_\alpha(2\sqrt{\gamma\lambda})}.$$

Algunas de las ventajas de usar esta distribución para  $X_A$  son las siguientes:

- La densidad que caracteriza la distribución resultante de multiplicar  $X_A$  por una variable con distribución  $\Gamma^{1/2}(n, n)$  (que como vimos, es un modelo para el ruido *speckle*) puede obtenerse analíticamente;
- La distribución raíz cuadrada de Gaussiana inversa generalizada bajo ciertas hipótesis, puede ser reducida a los siguientes casos particulares (ver figura 4.2):
  - A una distribución raíz cuadrada de Gamma con parámetros  $\alpha, \lambda > 0$ , cuando  $\gamma \downarrow 0$ , la cual denotaremos  $\Gamma^{1/2}(\alpha, \lambda)$  que es el modelo para el backscatter de amplitud para zonas heterogéneas y cuya función de densidad viene dada por

$$f_{X_A}(y) = \frac{2 \cdot \lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{2\alpha-1} \exp(-\lambda x^2), \quad x, \alpha, \lambda > 0, \quad (4.4)$$

que al multiplicarla por una distribución  $\Gamma^{1/2}(n, n)$ , se logra obtener una distribución  $\mathcal{K}_A$  para el retorno de la amplitud;

- Si además  $\alpha, \lambda \rightarrow \infty$ , y  $\alpha/\lambda \rightarrow \beta_1^{1/2}$ , entonces  $\Gamma^{1/2}(\alpha, \lambda) \xrightarrow{\mathcal{P}r} \beta_1^{1/2}$  que es el modelo para el backscatter de amplitud de zonas homogéneas ( $\mathcal{P}r$  denota convergencia en probabilidad).

- A la distribución de la recíproca de una variable aleatoria distribuída como una raíz cuadrada de Gamma con parámetros  $-\alpha, \lambda > 0$ , cuando  $\lambda \downarrow 0$ , la cual denotaremos  $\Gamma^{-1/2}(\alpha, \lambda)$ , que es el modelo para el backscatter de amplitud para zonas extremadamente heterogéneas y cuya función de densidad viene dada por

$$f_{X_A}(y) = \frac{2 \cdot \lambda^\alpha}{\Gamma(-\alpha)} x^{2\alpha-1} \exp(-\lambda x^2), \quad x, -\alpha, \lambda > 0. \quad (4.5)$$

Y, al multiplicarla por una distribución  $\Gamma^{1/2}(n, n)$ , se logra obtener una distribución  $\mathcal{G}_A^0$  para el retorno de la amplitud y cuya definición e importancia serán dadas en la próxima sección;

- Si además  $-\alpha, \lambda \rightarrow \infty$ , y  $-\alpha/\lambda \rightarrow \beta_1^{-1/2}$ , entonces  $\Gamma^{-1/2}(\alpha, \lambda) \xrightarrow{\mathcal{Pr}} \beta_1^{-1/2}$  que es el modelo para el backscatter de amplitud de zonas homogéneas ( $\mathcal{Pr}$  denota convergencia en probabilidad).

La distribución  $\Gamma^{-1/2}$  está asociada al backscatter de áreas extremadamente heterogéneas, dado que las modelan muy exitosamente, (Frery et al. 1996). De hecho, fue la búsqueda de modelos para áreas urbanas, que llevó a proponer el uso de la distribución  $\mathcal{N}^{-1/2}$ , y como caso particular de la  $\Gamma^{-1/2}$ , para el backscatter de este tipo de áreas.

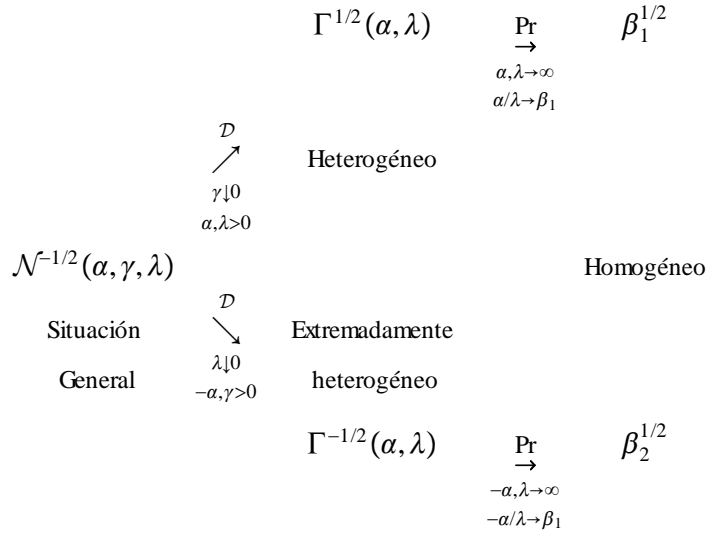


Figura 4.2: Resumen de las relaciones entre las distribuciones para el basckscatter de la amplitud.

### 4.1.2. Retorno de amplitud

Si  $X_A \sim \mathcal{N}^{-1/2}(\alpha, \gamma, \lambda)$  y si  $Y_A \sim \Gamma^{1/2}(n, n)$  son independientes, entonces  $Z_A = X_A \cdot Y_A$  obedece una distribución denominada G-Amplitud con parámetros  $\alpha, \lambda, \gamma, n$  denotada por  $\mathcal{G}_A(\alpha, \gamma, \lambda, n)$ , cuya densidad es dada por:

$$f_{Z_A}(x) = \frac{2n^n (\lambda/\gamma)^{\alpha/2}}{\Gamma(n) K_\alpha(2\sqrt{\lambda\gamma})} x^{2n-1} \left( \frac{\gamma + nx^2}{\lambda} \right)^{\frac{\alpha-n}{2}} K_{\alpha-n} \left( 2\sqrt{\lambda(\gamma + nx^2)} \right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.6)$$

y con espacio de parámetros dado por (4.3).

Sus momentos de orden  $r$  son dados por:

$$E(Z_A^r) = \left(\frac{\gamma}{n^2\lambda}\right)^{r/4} \frac{K_{\alpha+r/2}(2\sqrt{\gamma\lambda}) \Gamma(n+r/2)}{K_\alpha(2\sqrt{\gamma\lambda}) \Gamma(n)}.$$

Tal como vimos anteriormente, la distribución  $\mathcal{G}_A$  posee como casos especiales las siguientes distribuciones (ver figura 4.3):

1. la distribución  $\mathcal{K}_A(\alpha, \lambda, n)$ , cuando  $\gamma \downarrow 0$  con  $\alpha, \lambda > 0$ , cuya densidad es dada por:

$$f_{Z_A}(x) = \frac{4\lambda nx}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n)} (\lambda nx^2)^{(\alpha+n)/2-1} K_{\alpha-n}(2x\sqrt{\lambda n}), \quad \alpha, \lambda, n, x > 0; \quad (4.7)$$

con momento de orden  $r$  igual a

$$E(Z_A^r) = (n\lambda)^{-r/2} \frac{\Gamma(n+r/2)\Gamma(\alpha+r/2)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n)}$$

2. la distribución  $\mathcal{G}_A^0(\alpha, \gamma, n)$ , cuando  $\lambda \downarrow 0$  con  $-\alpha, \gamma > 0$ , cuya densidad es dada por:

$$f_{Z_A}(x) = \frac{2n^n \Gamma(n-\alpha) \gamma^{-\alpha} x^{2n-1}}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(n)(\gamma+nx^2)^{n-\alpha}}, \quad -\alpha, \gamma, n, x > 0; \quad (4.8)$$

con momento de orden  $r$  igual a

$$E(Z_A^r) = (\gamma/n)^{r/2} \frac{\Gamma(n+r/2)\Gamma(-\alpha-r/2)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(n)}.$$

3. la distribución  $\Gamma^{1/2}$ , que puede venir tanto de (4.7), cuando  $\alpha, \lambda \rightarrow \infty$ , con  $\alpha/\lambda \rightarrow \beta_1$ ; como de (4.7), cuando  $-\alpha, \gamma \rightarrow \infty$ , con  $-\alpha/\gamma \rightarrow \beta_2$ , donde  $\beta_1$  y  $\beta_2$  son dos constantes.

Mejail (1999 [23]) mostró la posibilidad de sustituir las distribuciones  $\mathcal{K}_A$  por las distribuciones  $\mathcal{G}_A^0$  en el modelado de imágenes SAR. En dicho trabajo se propone el modelo  $\mathcal{G}_A^0$  como el modelo apropiado para imágenes SAR argumentando que este último modelo puede ser visto como una aproximación a las distribuciones  $\mathcal{K}_A$ . Dichas aproximaciones están hechas del enfoque de distancia  $L_2$  y en un enfoque numérico la calidad de la aproximación se mide con un test estadístico (Pearson- $\chi^2$ ), el cual arrojó con un nivel del 1% para suponer que ambas distribuciones son distintas.

Es por todas estas razones que se puede aceptar al modelo  $\mathcal{G}_A^0$  como modelo universal para imágenes SAR (en forma de amplitud), y de allí la importancia de estudiar este modelo.

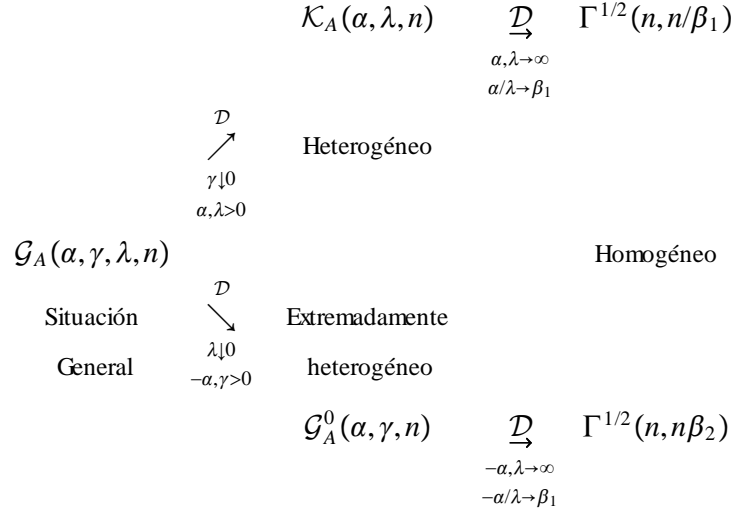


Figura 4.3: Resumen de las relaciones entre las distribuciones para el retorno de la amplitud.

### 4.1.3. Backscatter de intensidad

Como hemos comentado al comienzo de esta sección, en este trabajo nos interesaremos en el tratamiento y modelado de la componente intensidad de imágenes SAR, por lo cual resulta de suma importancia hacer un análisis semejante al que se hizo con el modelado de la amplitud.

Al igual que la amplitud, existen diversas alternativas para modelar la retrodispersión, es decir, existen diferentes distribuciones estadísticas para la variable aleatoria. A partir de los resultados presentados en Frery et al. 1996 y Mejail et al 2000 [22], es posible considerar como modelo general para el backscatter una variable aleatoria con distribución Gaussiana Inversa Generalizada. Esta distribución es lo suficientemente general como para describir una gran cantidad de blancos, pero tiene como desventaja el llevar a distribuciones para el retorno para las cuales la estimación de parámetros es analíticamente compleja y numéricamente inestable. Dentro de los casos particulares de esta distribución tiene interés particular para este trabajo la distribución Recíproca de Gamma. Esta distribución fue propuesta, al igual que la amplitud, como un modelo universal para datos de intensidad correspondientes a imágenes SAR, lo que nos lleva a la distribución  $\mathcal{G}_I^0$  para el retorno.

Haciendo  $X_I = X_A^2$  se pueden obtener las distribuciones para los distintos grados de homogeneidad de la variable aleatoria  $X_I$  que representa el basckatter en forma de Intensidad (ver figura 4.5). Luego

- Áreas Homogéneas:  $X_I$  con masa 1 en  $\beta$ , es decir,  $X_I$  es una constante y toma el valor  $\beta$ .
- Áreas Heterogéneas:  $X_I \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ .
- Áreas Extremadamente Heterogéneas: Modelada por una distribución Recíproca de Gamma (ver figura 4.4) cuya función de densidad de  $X_I$  está dada por:

$$f_{X_I}(y) = \frac{1}{\gamma^\alpha \cdot \Gamma(-\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\gamma/x), \quad x, -\alpha, \lambda > 0. \quad (4.9)$$

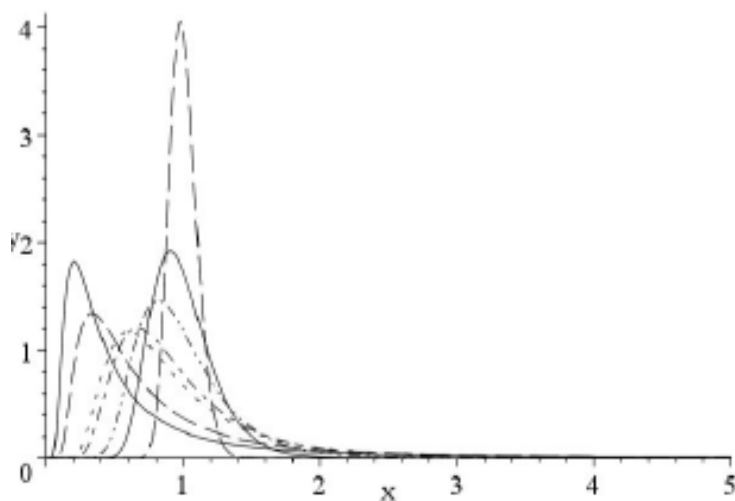


Figura 4.4: Curvas de la distribución  $\Gamma^{-1}$  para  $\gamma$  que hace la media unitaria y  $\alpha$  igual a: -1;5(sólida), -2(trazos), -4(puntos), -5(punto-trazo), -10(punto-punto-trazo), -20(sólida) y -100(trazos).

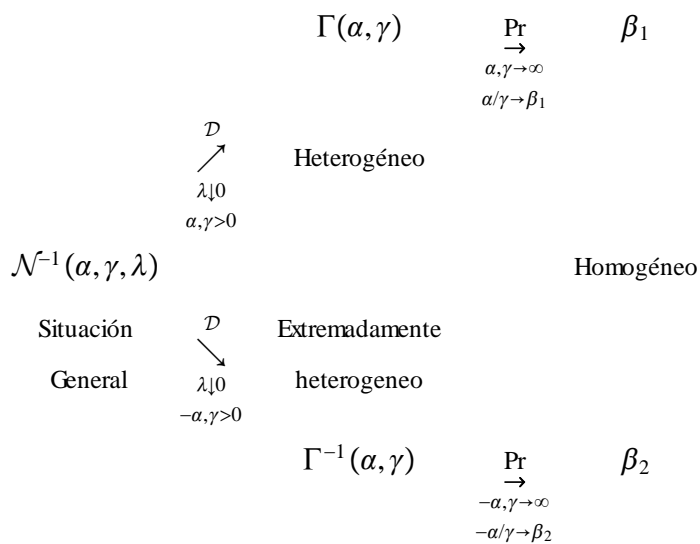


Figura 4.5: Resumen de las relaciones entre las distribuciones para el backscatter de la intensidad.



#### 4.1.4. Retorno de intensidad

La distribución correspondiente al retorno  $Z_I$ , queda fijada por la distribución del backscatter  $X_I$  y por la distribución del *speckle*  $Y_I$ . Dado que  $Z_I = X_I Y_I$ , y que estas variables aleatorias son independientes, puede calcularse como:

$$\int_{\mathbb{R}^+} f_{Z_I|Y_I=y}(z) \cdot f_{Y_I}(y) dy,$$

donde  $f_{Z_I|Y_I=y}$  es la densidad del retorno  $Z_I$  considerando  $Y_I = y$  constante. Para la variable retorno, en formato intensidad se tiene que  $Z_I \sim \mathcal{G}_I^0(\alpha, \gamma, n)$  y cuya función de densidad viene dada por:

$$f_{Z_I}(x) = \frac{n^n \Gamma(n - \alpha) \cdot x^{n-1}}{\Gamma(-\alpha) \Gamma(n)} \cdot \left(\frac{\gamma}{2} + n \cdot x\right)^{\alpha-n}, \quad -\alpha, \gamma, n, x > 0; \quad (4.10)$$

con momento de orden  $r$  igual a

$$E(Z_I^r) = \left(\frac{\gamma}{2 \cdot n}\right)^r \frac{\Gamma(n+r) \Gamma(-\alpha-r)}{\Gamma(-\alpha) \Gamma(n)}.$$



## Capítulo 5

# Modelo y estimación paramétrica

El objetivo principal del estudio de imágenes obtenidas por sensores remotos, es extraer de ellas toda la mayor cantidad de información posible. Los modelos estadísticos para estas imágenes representan algunas características de interés por medio de un cierto número de parámetros.

Con respecto a las componentes de una imagen, cabe destacar que un píxel es una unidad espacial cuyas propiedades básicas, forma y localización, son fuertemente dependientes del sensor más que del escenario. Comúnmente, el área representada por un píxel contiene más de una clase temática. El hecho de que un píxel posea varias clases hace que los datos no sean aptos para el uso de algunas técnicas de análisis convencional de la imagen.

En consecuencia, el uso de enfoques tradicionales “un píxel, una clase” para clasificar imágenes de teledetección contendrá errores en el resultado final si hay presentes píxeles mixtos.

Lamentablemente, el problema de píxeles mixtos no se puede eliminar mediante el uso de la fina resolución espacial ya que a menudo es conveniente reflejar la mezcla de los elementos constructivos de una clase y por otra parte, en grandes áreas el uso de resolución espacial fina no es práctico.

Todo esto hace que surja la necesidad de obtener técnicas adecuadas para extraer información sobre cuál es la conformación de un determinado píxel con respecto a las clases temáticas tenidas en cuenta. En el presente capítulo estudiaremos las ventajas y desventajas de métodos basados en robustez sobre los métodos tradicionales de estimación sobre una función que definiremos y desarrollaremos en la próxima sección y a la cual llamaremos función de pertenencia.

### 5.1. FUNCIÓN DE PERTENENCIA

Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espacio de probabilidad.

Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^2$  tal que junto con la operación suma habitual en  $\mathbb{R}^2$  forma un grupo.

Una imagen radiométrica de  $K$  bandas espectrales con soporte en  $S$  es una función  $x : S \mapsto \mathbb{R}^K$ .

Sea

$$C = \{c_1, \dots, c_L\}$$

un conjunto finito con  $L \geq 2$  elementos (que llamaremos clases).

Una imagen de clases con soporte en  $S$  y rango  $C$  es una función  $\mathbf{c} : S \mapsto C$ .

Un proceso estocástico de imágenes radiométricas de  $K$  bandas espectrales definido sobre  $\Omega$  con soporte  $S$  es un conjunto

$$X := \{X_s : s \in S \text{ y } X_s : \Omega \mapsto \mathbb{R}^K \text{ es medible}\}.$$

Dado un proceso de imágenes radiométricas que consideramos como el proceso de las observaciones, el problema de la clasificación consiste en estimar  $\mathbf{c}(s)$  para cada  $s$  en  $S$  basándose en los valores observados de  $X_s$ .

Veamos un modelo que ha mostrado ser exitoso en varios de tales problemas de clasificación.

Para cada  $c \in C$  sea  $f_c : \mathbb{R}^K \rightarrow [0, +\infty)$  una densidad de probabilidad sobre  $\mathbb{R}^K$ .

Suponemos que: si  $\mathbf{c}(s) = c$ , entonces  $P_{X_s}$  tiene densidad  $f_c$ .

La regla de clasificación de máxima verosimilitud dada una imagen  $x : S \mapsto \mathbb{R}^K$  consiste en:

$$\text{asignar el píxel } s \text{ a la clase } c \text{ si } f_c(x(s)) > f_{c'}(x(s)) \text{ para todo } c' \in C, c' \neq c. \quad (5.1)$$

De allí, resultó natural definir como *función grado de pertenencia a la clase*  $c \in C$  con respecto a  $C$ , a la función  $g_c : \mathbb{R}^K \rightarrow [0, 1]$  dada por

$$g_c(x) := \frac{f_c(x)}{\sum_{j=1}^L f_{c_j}(x)}, \quad x \in \mathbb{R}^K. \quad (5.2)$$

Llamamos *grado de pertenencia de*  $s \in S$  a la clase  $c$  según el proceso  $X$  a la variable aleatoria

$$G_{X,s,c} := g_c(X_s).$$

El presente trabajo consiste en estimar propiedades de esta variable aleatoria para diversos  $s \in S$  y  $c \in C$  bajo ciertos supuestos relativos a  $X$  y las densidades  $f_{c_j}$  para  $j = 1, \dots, L$ . Por ejemplo, será relevante conocer percentiles de  $g_c(X_s)$  cuando  $\mathbf{c}(s) = c$  y cuando  $\mathbf{c}(s) \neq c$ .

Esta situación es de especial interés para el procesamiento de imágenes y en particular en imágenes SAR dado la creciente necesidad de desarrollar técnicas para el procesamiento de imágenes SAR.

Dado  $K = 1$ , para cada  $c \in C$  existen  $\alpha_c < 0$  y  $\gamma_c > 0$ , tales que  $f_c$  es una densidad de la familia  $\mathcal{G}_I^0$  con parámetros  $(\alpha_c, \gamma_c, n)$  con  $n$  entero positivo que se considera fijo y conocido (número de looks de la imagen). Esto es

$$f_c(z) = \frac{n^n \Gamma(n - \alpha) \cdot x^{n-1}}{\Gamma(-\alpha) \Gamma(n)} \cdot (\gamma + n \cdot x)^{\alpha-n}, \quad -\alpha, \gamma, n, x > 0.$$

Se sabe que el parámetro  $\alpha_c$  tiene que ver con la “rugosidad” de la escena enfocada por la imagen (por ejemplo:  $\alpha_c$  alrededor de  $-15$  para terrenos con poca “rugosidad” como pasturas, alrededor de  $-7$  para “bosques” y más de  $-3$  para zonas urbanas).

Sea ahora  $\Lambda \subset S$  finito. Supongamos que  $x_\Lambda := \{x_s / s \in \Lambda\}$  es una realización del subconjunto  $X_\Lambda := \{X_s / s \in \Lambda\}$  del proceso  $X$ . Estudiaremos el comportamiento estimadores de

$P(g_c(X_s) > p)$  cuando  $\mathbf{c}(s) = c$ , basados en subconjuntos adecuados de  $x_\Lambda$  y suponiendo conocidos los parámetros  $(\alpha_c, \gamma_c, n)$  para todo  $c \in C$ .

Ahora bien, en el trabajo con imágenes reales claro está que no conocemos a priori los valores de los parámetros. Existen diversas técnicas de estimación de los mismos: máxima verosimilitud, basados en momentos, etc. e incluso hay propuestas robustas como las estudiadas en Bustos et al (2002 [8]). Para su aplicación es necesario identificar regiones de la imagen con soporte  $\Lambda$  donde se “conoce” (o se supone conocida) la clase a la que pertenece un píxel de esa región. Tales regiones se conocen como “regiones de entrenamiento”. Para cada  $c \in C$  denotemos con  $\Lambda_c$  la región de entrenamiento correspondiente a la clase  $c$ . Sean  $\hat{\alpha}(\Lambda_c)$  y  $\hat{\gamma}(\Lambda_c)$  estimadores de  $\alpha_c$  y  $\gamma_c$  respectivamente basados en  $\Lambda_c$ . Estudiaremos las propiedades de los estimadores de  $P(g_c(X_s) > p)$  bajo estos valores estimados de los parámetros.

Este estudio se realizará primeramente por medio de un trabajo de simulación e investigando al mismo tiempo la posibilidad de obtener resultados teóricos.

Una posterior etapa importante será estudiar el comportamiento asintótico de los estimadores que se trabajan en la etapa anterior. Esto es, consideraremos una sucesión creciente  $(\Lambda_m)_{m \geq 1}$  de subconjuntos finitos de  $S$  tales que  $\Lambda_m \rightarrow S$  cuando  $m \rightarrow \infty$ , en ellos también supondremos crecientes las regiones de entrenamiento para el cálculo de los estimadores de los parámetros. Se tratarán de probar resultados sobre el comportamiento de los estimadores de  $P(g_c(X_s) > p)$  basados en  $\Lambda_m$  cuando  $m \rightarrow \infty$ , especialmente cuando se usen los M-estimadores de los parámetros  $\alpha$ 's y  $\gamma$ 's.

## 5.2. MODELO $\mathcal{G}_I^0(\alpha, 1, 1)$ Y ESTIMACIÓN PARAMÉTRICA

En este trabajo se plantea, desarrolla e implementa una serie de clase de estimadores clásicos utilizados para la determinación del parámetro  $\alpha_c$  en la distribución  $\mathcal{G}_I^0(\alpha_c, 1, 1)$ , los cuales serán comparados con un estimador robusto, el cual definiremos y desarrollaremos más adelante,

En esta sección se presentan entonces algunas propiedades de la  $\mathcal{G}_I^0(\alpha_c, \gamma_c, 1)$  con el fin de justificar la elección del modelo  $\mathcal{G}_I^0(\alpha_c, 1, 1)$  así como también algunos estimadores clásicos de rugosidad ( $\alpha$ ) suponiendo  $\gamma = 1$  y  $n = 1$ .

### 5.2.1. $\mathcal{G}_I^0(\alpha, \gamma, 1)$ y sus propiedades

**Definición 5.2.1.** Diremos que  $X$  v.a. tiene una distribución  $\mathcal{G}_I^0(\alpha, \gamma, 1)$  con  $\alpha < 0$  y  $\gamma > 0$  si su función de densidad y distribución acumulada son:

$$f_I(x) = \frac{(-\alpha)}{\gamma \cdot \left(1 + \frac{x}{\gamma}\right)^{1-\alpha}} \cdot \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x), \quad (5.3)$$

$$F_I(x) = 1 - \left(1 + \frac{x}{\gamma}\right)^\alpha \cdot \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x) \quad (5.4)$$

**Observación 5.2.2.**  $F_I$  es una función de distribución ya que:

- $\lim_{z \rightarrow -\infty} F_I(x) = 0$  por definición.

- Es monótona creciente.

*Demostración.* Sean  $x_1$  y  $x_2$  dos reales positivos tal que  $x_1 \leq x_2$ , entonces

$$\begin{aligned} 1 + \frac{x_1}{\gamma} &\leq 1 + \frac{x_2}{\gamma} \\ \left(1 + \frac{x_1}{\gamma}\right)^\alpha &\geq \left(1 + \frac{x_2}{\gamma}\right)^\alpha \text{ aquí se invierte la desigualdad por ser } \alpha < 0 \\ 1 - \left(1 + \frac{x_1}{\gamma}\right)^\alpha &\leq 1 - \left(1 + \frac{x_2}{\gamma}\right)^\alpha. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $F_I$  es monótona creciente. □

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_I(x) = 1$  ya que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{\gamma}\right) = \infty$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{\gamma}\right)^\alpha = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{\gamma}\right)^{|\alpha|}} = 0,$$

Por ser  $\alpha < 0$

Luego

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_I(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{\gamma}\right)^{|\alpha|}} = 1.$$

Si denotamos por  $s(x; (\alpha, \gamma))$  la función *score* del modelo, tenemos que

$$\mathbf{s}(x; (\alpha, \gamma)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln f_I(x; (\alpha, \gamma)) \\ \frac{\partial}{\partial \gamma} \ln f_I(x; (\alpha, \gamma)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} + \ln\left(1 + \frac{x}{\gamma}\right) \\ -\frac{1}{\gamma} - (1 - \alpha) \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{\gamma}} \cdot \frac{(-x)}{\gamma^2} \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Los momentos de orden  $k$  de esta distribución es

$$E\left(X^k\right) = \begin{cases} \frac{\gamma^k \cdot k \cdot \Gamma(k) \cdot \Gamma(-\alpha - k)}{\Gamma(-\alpha)} & \text{si } -\alpha > k \\ \infty & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (5.6)$$

**Proposición 5.2.3.** Sean  $X \sim \mathcal{G}_I^0(\alpha, \gamma)$  (por abuso de notación reemplazamos  $\mathcal{G}_I^0(\alpha, \gamma, 1)$  por  $\mathcal{G}_I^0(\alpha, \gamma)$ ). Sea  $c \geq 0$ , entonces  $c \cdot X \sim \mathcal{G}_I^0(\alpha, c\gamma)$ .

*Demostración.*

$$\begin{aligned} F_{c \cdot X}(t) &= P(c \cdot X \leq t) = P\left(X \leq \frac{t}{c}\right) = F_X\left(\frac{t}{c}\right) = \int_0^{t/c} \frac{(-\alpha)}{\gamma \cdot \left(1 + \frac{x}{\gamma}\right)^{1-\alpha}} dx \stackrel{u:=c \cdot x, du=c \cdot dx}{=} \\ &= \int_0^t \frac{(-\alpha)}{\gamma \cdot \left(1 + \frac{u}{c \cdot \gamma}\right)^{1-\alpha}} \frac{du}{c} = \int_0^t \frac{(-\alpha)}{\gamma \cdot c \cdot \left(1 + \frac{u}{c \cdot \gamma}\right)^{1-\alpha}} du. \end{aligned}$$

Luego  $c \cdot X \sim \mathcal{G}_I^0(\alpha, c\gamma)$ . □

**Proposición 5.2.4.** Sean  $Z_1 \sim \mathcal{G}_I^0(\alpha, \gamma_1)$  y  $\gamma_2 > 0$ . Entonces  $Z_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} Z_1$ . se distribuye  $\mathcal{G}_I^0(\alpha, \gamma_2)$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} F_{Z_2}(t) &= P(Z_2 \leq t) = \int_0^t \frac{(-\alpha)}{\gamma_2 \cdot \left(1 + \frac{z}{\gamma_2}\right)^{1-\alpha}} dz \stackrel{u:=\frac{\gamma_1}{\gamma_2}z, du=\frac{\gamma_1}{\gamma_2}dz}{=} \int_0^{\frac{\gamma_1 \cdot t}{\gamma_2}} \frac{(-\alpha) \cdot \frac{\gamma_2}{\gamma_1} du}{\gamma_2 \cdot \left(1 + \frac{\gamma_2 \cdot u}{\gamma_1 \cdot \gamma_2}\right)^{1-\alpha}} \\ &= \int_0^{\frac{\gamma_1 \cdot t}{\gamma_2}} \frac{(-\alpha) \cdot \frac{\gamma_2}{\gamma_1} du}{\gamma_2 \cdot \left(1 + \frac{\gamma_2 \cdot u}{\gamma_1 \cdot \gamma_2}\right)^{1-\alpha}} = \int_0^{\frac{\gamma_1 \cdot t}{\gamma_2}} \frac{(-\alpha) \cdot du}{\gamma_1 \cdot \left(1 + \frac{z}{\gamma_1}\right)^{1-\alpha}} = P(Z_1 \leq \frac{\gamma_1 \cdot t}{\gamma_2}) = F_{Z_1}\left(\frac{\gamma_1 \cdot t}{\gamma_2}\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto  $Z_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} Z_1$ . □

**Corolario 5.2.5.** Sean  $Z' \sim \mathcal{G}_I^0(\alpha, 1)$  y  $\gamma > 0$ . Entonces  $Z = \gamma \cdot Z'$  se distribuye  $\mathcal{G}_I^0(\alpha, \gamma)$ .

**Corolario 5.2.6.** Sean  $Z \sim \mathcal{G}_I^0(\alpha, \gamma)$  y  $Z' \sim \mathcal{G}_I^0(\alpha, \gamma')$ , donde  $\gamma'$  es tal que  $E(Z') = 1$  (por (5.6)  $\gamma' = -\alpha - 1$ ). Entonces  $Z = \frac{\gamma}{\gamma'} \cdot Z'$  y además  $E(Z) \cdot \gamma' = \gamma$

Los últimos resultados expuestos hacen ver que el parámetro  $\gamma$  juega un papel de escala en este tipo de distribuciones (escala en el sentido de la Proposición 5.2.3). Esto motivó el estudio de estimadores para parámetro de rugosidad ( $\alpha_c$ ) para la descripción de diferentes clases temáticas.

**Observación 5.2.7.** debido al interés sobre el comportamiento del parámetro rugosidad ( $\alpha$ ) de una  $\mathcal{G}_I^0(\alpha, \gamma, 1)$ , por abuso de notación de aquí en adelante denotaremos a está ultima distribución como  $\mathcal{G}_I^0(\alpha_c)$

### 5.2.2. Estimadores de Máxima Verosimilitud y de los Momentos

Dada una distribución  $\mathcal{G}_I^0(\alpha)$  con  $\alpha$  desconocida; y una muestra  $X_i$  con  $i = 1, \dots, N$ , el estimador de máxima verosimilitud de  $\alpha$  será el valor  $\hat{\alpha}_{ML,N}$  que minimice

$$\prod_{i=1}^N f_I(x_i; \alpha) = \prod_{i=1}^N \frac{(-\alpha)}{(1+x_i)^{1-\alpha}} \cdot \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x_i),$$

o equivalentemente, minimizar

$$\ln \left( \prod_{i=1}^N f_I(x_i; \alpha) \right) = \sum_{i=1}^N [\ln(-\alpha) - (1-\alpha) \cdot \ln(1+x_i)] \cdot \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x_i)$$

no es difícil ver que es suficiente encontrar para esto el valor  $\hat{\alpha}_{ML,N}$  que haga 0 la siguiente ecuación

$$s_1(x_1, \dots, x_N; (\alpha, 1)) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{\alpha} + \ln(1+x_i) \right) \quad (5.7)$$

donde  $x_i$  con  $i = 1, \dots, N$  es una muestra aleatoria de  $\mathcal{G}_I^0(\alpha)$ .

### Estimador de Máxima Verosimilitud

Igualando a 0 la ecuación  $s_1(x_1, \dots, x_N; \alpha)$  obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{\alpha} + \ln(1 + x_i) \right) &= 0 \\ \frac{N}{\alpha} &= - \sum_{i=1}^N \ln(1 + x_i) \\ \hat{\alpha}_{ML,N} &= - \left( \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \ln(1 + x_i) \right)^{-1} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Por lo tanto un estimador de  $\alpha$  será

$$\hat{\alpha}_{ML,N} = - \left( \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \ln(1 + x_i) \right)^{-1} \quad (5.9)$$

### Estimador de los Momentos

**Primer estimador** Tomando las ecuaciones (5.6) con  $\gamma = 1$  tenemos que:

$$E(X) = \frac{1}{-\alpha - 1}$$

por lo tanto

$$\alpha = - \frac{E(X) + 1}{E(X)}.$$

Luego tenemos

$$\hat{\alpha}_{Mon,N} = - \frac{\bar{X} + 1}{\bar{X}}. \quad (5.10)$$

### 5.2.3. M-estimadores

La mayor parte de los fundamentos de la teoría de robustez moderna se deben al trabajo de Huber en 1964, ([15]). Para ello, consideró el modelo de errores groseros, o entornos de  $\varepsilon$ -contaminación que es una especie de entorno de la verdadera distribución subyacente.

Esto es: sean  $\mathcal{X}$  el espacio muestral,  $\Theta \subseteq \mathbb{R}^p$  el espacio paramétrico  $p$ -dimensional y sean  $X_1, \dots, X_N$   $N$  muestras aleatorias de  $X$ . Sea  $F$  la función desconocida de  $X$ ,  $F_\theta$  la distribución del modelo ( $\theta \in \Theta$ );  $f$  y  $f_\theta$  sus respectivas densidades. Además sean  $F_N$  la distribución empírica y  $\delta_z$  la distribución que pone probabilidad 1 en el punto  $z$ . Como  $F_\theta$  es solo una aproximación idealizada de  $F$ , en un modelo de  $\varepsilon$ -contaminación es útil suponer que  $F$  pertenece a un entorno  $\mathcal{P}_\varepsilon$  de alguna de las  $F_\theta$ , (supongase  $F_{\theta_0}$ ).

$$F \in \mathcal{P}_\varepsilon = \{G : G = (1 - \varepsilon) F_{\theta_0} + \varepsilon H, H \text{ arbitraria}\} \quad (5.11)$$

Huber supuso que la densidad  $f_\theta$  era simétrica alrededor del cero. Fueron Hampel et al.([14]) y Marazzi and Ruffieux([21]) quienes se dedicaron al estudio y aplicación de estimadores robustos de



los parámetros de distribuciones con densidades no simétricas. Estos desarrollos han sido tomados como guías para este trabajo. Así con una proporción  $1 - \varepsilon$  el píxel obedecerá una distribución  $\mathcal{G}_I^0(\alpha)$ , mientras que con una proporción  $\varepsilon$  tomará valores provenientes de:

- a)  $\mathcal{G}_I^0(\alpha')$  con  $\alpha' \neq \alpha$ , o
- b) una combinación convexa de  $\mathcal{G}_I^0(\alpha)$  y  $\mathcal{G}_I^0(\alpha')$  con  $\alpha' \neq \alpha$ .

La definición de ; estimador M-estimador que se usará, es la dada por Hampel et al.([14]), para un modelo cuya densidad no es necesariamente simétrica.

**Definición 5.2.8.** Sean  $\Theta = (-\infty, -1)$ ,  $\theta = \alpha \in \Theta$ ,  $b$  un número real positivo. Se llamará M-estimador del parámetro  $\alpha$  basado en  $X_1, \dots, X_N$  al estadístico  $\hat{\alpha}_{M,N}$  tal que

$$\sum_{i=1}^N \Psi_b(X_i; \hat{\alpha}_{M,N}) = 0 \quad (5.12)$$

donde

$$\Psi_b(x; \alpha) = \psi_b(s_1(x; \alpha) - c(\alpha, b)) \quad (5.13a)$$

con  $\psi_b : \mathbb{R} \times \Theta \rightarrow [-b, b]$  definidas como

$$\psi_b(x) = \begin{cases} -b & \text{si } x \leq -b \\ x & \text{si } -b \leq x \leq b \\ b & \text{si } x \geq b \end{cases} ; \quad (5.14)$$

$s_1x;(\alpha)$  es la primer función coordenada de la función score definida en (5.5) con  $\gamma = 1$ , y la función  $c : \Theta \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  está definida de modo tal que,  $\hat{\alpha}_{M,N}$  sea una sucesión de estimadores de  $\alpha$  asintóticamente insesgados y Fisher consistentes.

**Observación 5.2.9.** Supongamos que se tiene una familia de densidades  $p(x; \theta)$  discreta o continua, donde  $\theta \in \Theta$ . Tomemos la función  $\Psi_b(x, \theta) : \mathbb{R} \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}$  y llamemos  $\eta(\theta, \theta^*) = E_\theta(\Psi_b(x, \theta^*))$ . Diremos que un M-estimador es **Fisher consistente** si cumple

$$\eta(\theta, \theta) = 0 \quad \text{para todo } \theta \in \Theta$$

Entonces, el sistema (5.12) queda expresado de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^N \psi_b(s_1(X_i; \hat{\alpha}_{M,N}) - c(\hat{\alpha}_{M,N}, b)) = 0. \quad (5.15)$$

Luego como la función  $c$  es definida de forma tal que,  $\hat{\alpha}_{M,N}$  sea una sucesión de estimadores de  $\alpha$  asintóticamente insesgados y Fisher consistentes, se debe cumplir que:

$$\int \psi_b(s_1(x; \alpha) - c(\alpha, b)) \cdot f(x; (\alpha, 1)) dx = 0, \quad (5.16)$$

cualquiera sean  $\alpha \in \Theta$ ,  $b > 0$ .

La constante  $b$  se la llama tuning parameter o parámetro de ajuste o calibración de los M-estimadores.

**Notación 5.2.10.** De aquí en adelante denotaremos como  $c = c(\alpha, b)$  y por

$$I(\alpha, c, b) = \int_0^{+\infty} \psi_b\left(\frac{1}{\alpha} + \ln(1+x) - c\right) \cdot \frac{(-\alpha)}{(1+x)^{1-\alpha}} dx$$

**Elección del parámetro  $c$** 

Sea  $u = \frac{1}{\alpha} + \ln(1+x) - c$ ,  $x_1 = e^{-b+c-\frac{1}{\alpha}} - 1$  y  $x_2 = e^{b+c-\frac{1}{\alpha}} - 1$ , luego

$$\psi_b(u) = \begin{cases} -b & \text{si } u \leq -b \\ u & \text{si } -b \leq u \leq b \\ b & \text{si } u \geq b \end{cases} = \begin{cases} -b & \text{si } x \leq x_1 \\ x & \text{si } x_1 \leq x \leq x_2 \\ b & \text{si } x \geq x_2 \end{cases}$$

y ahora analicemos la integral

- Si  $x_2 < 0$ , entonces  $I(\alpha, c, b) = b$
- Si  $x_1 < 0 < x_2$ , entonces

$$\begin{aligned} I(\alpha, c, b) &= \int_0^{x_2} \left( \frac{1}{\alpha} + \ln(1+x) - c \right) \cdot \frac{(-\alpha)}{(1+x)^{1-\alpha}} dx + \int_{x_2}^{+\infty} b \cdot \frac{(-\alpha)}{(1+x)^{1-\alpha}} dx \\ &= \left( \frac{1}{\alpha} - c \right) \cdot F_I(x_2) + (1 - F_I(x_2)) \cdot b + \int_0^{x_2} \ln(1+x) \cdot \frac{(-\alpha)}{(1+x)^{1-\alpha}} dx \\ &= \left( \frac{1}{\alpha} - c - b \right) \cdot F_I(x_2) + b + \int_0^{x_2} \ln(1+x) \cdot \frac{(-\alpha)}{(1+x)^{1-\alpha}} dx \\ &= \frac{\exp(\alpha \cdot b + \alpha \cdot c - 1)}{\alpha} - c \end{aligned} \quad (5.17)$$

- Si  $0 < x_1$ , entonces procediendo de igual manera obtenemos que

$$I(\alpha, c, b) = \frac{1}{\alpha} \cdot [\exp(\alpha \cdot b + \alpha \cdot c - 1) - \exp(-\alpha \cdot b + \alpha \cdot c - 1)] - 1 \quad (5.18)$$

Luego tenemos

$$I(\alpha, c, b) = \begin{cases} b & \text{si } c \leq -b + \frac{1}{\alpha} \\ \frac{(x_2+1)^\alpha}{\alpha} - c & \text{si } -b + \frac{1}{\alpha} \leq c \leq b + \frac{1}{\alpha} \\ \frac{(x_2+1)^\alpha - (x_1+1)^\alpha}{\alpha} - b & \text{si } c \geq b + \frac{1}{\alpha} \end{cases} \quad (5.19)$$

Ahora viendo la derivada con respecto a  $c$  tenemos

$$\frac{\partial I}{\partial c}(\alpha, c, b) = \begin{cases} 0 & \text{si } c \leq -b + \frac{1}{\alpha} \\ (x_2+1)^\alpha - 1 & \text{si } -b + \frac{1}{\alpha} \leq c \leq b + \frac{1}{\alpha} \\ (x_2+1)^\alpha - (x_1+1)^\alpha & \text{si } c \geq b + \frac{1}{\alpha} \end{cases} \quad (5.20)$$

No es difícil ver que cada término de  $\frac{\partial I}{\partial c}(\alpha, c, b) \leq 0$ , con lo cual se concluye que  $I(\alpha, c, b)$  es decreciente con respecto a  $c$

Luego como nuestro objetivo es encontrar valores de  $c$  que hagan 0 a  $I(\alpha, c, b)$ , podemos observar que esto se logrará en el intervalo  $(-b + \frac{1}{\alpha}, +\infty)$ .

Analicemos la existencia de un  $c$  que haga  $I(\alpha, c, b) = 0$  en el intervalo  $(-b + \frac{1}{\alpha}, b + \frac{1}{\alpha})$ :

Si  $c = b + \frac{1}{\alpha}$ , entonces  $I(\alpha, b + \frac{1}{\alpha}, b) = 0$  implica que  $\exp(2 \cdot b \cdot \alpha) = \alpha \cdot b + 1$ .

Luego como  $I(\alpha, c, b)$  es decreciente con respecto a  $c$  podemos concluir que si  $\exp(2 \cdot b \cdot \alpha) \geq \alpha \cdot b + 1$  entonces existe un  $c \in (-b + \frac{1}{\alpha}, b + \frac{1}{\alpha})$  tal que  $I(\alpha, c, b) = 0$  y está dado por la solución de

$$\alpha \cdot c = \exp(b \cdot \alpha + c \cdot \alpha - 1), \quad (5.21)$$

y si  $\exp(2 \cdot b \cdot \alpha) < \alpha \cdot b + 1$  existe una solución de  $I(\alpha, c, b) = 0$  con  $c \geq b + \frac{1}{\alpha}$  dado por:

$$c = \alpha^{-1} \left( \ln(-\alpha) + \ln(b) - \ln(e^{-\alpha b} - e^{\alpha b}) + 1 \right)$$

Todos estos resultados fueron expresados en forma de lema como sigue:

**Lema 5.2.11.**  $\alpha < 0$  y  $b > 0$

1. Si  $\exp(2 \cdot \alpha \cdot b) > b \cdot \alpha + 1$  entonces existe  $c$ , con  $-b + \alpha^{-1} < c < b + \alpha^{-1}$  que satisface  $I(\alpha, c, b) = 0$ . En tal caso,  $c$  está definida implícitamente como solución de  $\alpha \cdot c = \exp(\alpha \cdot b + \alpha \cdot c - 1)$ .
2. Si  $\exp(2 \cdot \alpha \cdot b) < b \cdot \alpha + 1$  entonces existe  $c$ , con  $c > b + \alpha^{-1}$  que satisface  $I(\alpha, c, b) = 0$ . y está dada por  $c = \alpha^{-1} \left( \ln(-\alpha) + \ln(b) - \ln(e^{-\alpha b} - e^{\alpha b}) + 1 \right)$ .

### Eficiencia de los M-estimadores

Como es sabido, cuando se trata de estimar parámetros con procedimientos robustos, lo que se quiere es que en los casos que no haya contaminación o apartamiento de los supuestos, los estimadores robustos sean tan buenos como los estimadores tradicionales, como por ejemplo los de Máxima Verosimilitud o el de los Momentos. Y en el caso donde haya desvíos de estos supuestos, deben ser más resistentes y más confiables. Esto se logra gracias a los parámetros de ajuste.

De allí que los parámetros son elegidos de modo tal que la eficiencia de los M-estimador con respecto a los de Máxima Verosimilitud no sea demasiado baja. Esto es, se elige  $b$  de modo tal que:

$$\frac{V(\hat{\alpha}_{ML,N})}{V(\hat{\alpha}_{M,N})} \approx e \quad (5.22)$$

con  $0,9 \leq e \leq 0,975$  y  $V(\cdot)$ , es la varianza asintótica de los estimadores.

Estos cálculos no se pueden resolver analíticamente, pues involucran el cómputo de las funciones  $c$  y sus derivadas. Es por ese motivo que se los calcula numéricamente. Para ver más detalles sobre la forma de elegir  $b$  y el algoritmo de estimación ver Apéndice B.



## Capítulo 6

# Comportamiento Asintótico de los Estimadores de Máxima Verosimilitud y los M-estimadores

La teoría asintótica estudia las propiedades de los procesos de inferencia estadística cuando el tamaño de la muestra  $N$  tiende a infinito.

Una propiedad deseable para un estimador, es que cuando  $N$  es grande la sucesión de estimadores  $T_N(X_1, \dots, X_N)$ , donde  $X_1, \dots, X_N$  denota a una muestra aleatoria de una distribución dada, se aproxime en algún sentido al valor que queremos estimar. Para precisar estas ideas, debemos introducir los conceptos de consistencia y eficiencia asintótica.

### 6.1. DEFINICIONES GENERALES

Sea  $\mathcal{F} = \{F(x, \theta) \text{ con } \theta \in \Theta\}$  una familia de distribuciones y supongamos que para cada  $N$  tenemos un estimador  $T_N(X_1, \dots, X_N)$  de  $\theta$  basados en una muestra de tamaño  $N$ .

**Definición 6.1.1.** Se dice que  $T_N(X_1, \dots, X_N)$  es un estimador fuertemente consistente para  $q(\theta)$  (donde  $q$  es una función de  $\theta$ ) si

$$\lim_{N \rightarrow \infty} T_N(X_1, \dots, X_N) = q(\theta) \quad \text{c.t.p.,}$$

o sea si

$$P_\theta(T_N(X_1, \dots, X_N) - q(\theta)) = 1 \quad \forall \theta \in \Theta.$$

**Definición 6.1.2.** Se dice que  $T_N(X_1, \dots, X_N)$  es un estimador débilmente consistente para  $q(\theta)$  si

$$\lim_{N \rightarrow \infty} T_N(X_1, \dots, X_N) = q(\theta) \quad \text{en probabilidad,}$$

o sea si  $\forall \epsilon > 0$  y  $\theta \in \Theta$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_\theta(|T_N(X_1, \dots, X_N) - q(\theta)| > \epsilon) = 0.$$

**Observación 6.1.3.** Como la convergencia en c.t.p. implica la convergencia en probabilidad, entonces todo estimador fuertemente consistente también es débilmente consistente.

Por otro lado, es importante observar el comportamiento en distribución de estos estimadores. En este sentido diremos que un estimador  $T_N(X_1, \dots, X_N)$  es más eficiente que otro  $T'_N(X_1, \dots, X_N)$  si

$$Var_\theta(T_N(X_1, \dots, X_N)) \leq Var_\theta(T'_N(X_1, \dots, X_N)) \quad \forall \theta \in \Theta.$$

La eficiencia de los estimadores está limitada por las características de la distribución de probabilidad de la muestra de donde proceden. El Teorema de Cramer-Rao determina que la varianza de un estimador insesgado es como mínimo

$$Var_\theta(T_N(X_1, \dots, X_N)) \geq \frac{(q'(\theta))^2}{N \cdot IF(\theta)}$$

donde  $IF(\theta)$  es la información de Fisher.

Además, como el estimador es insesgado

$$E_\theta(T_N(X_1, \dots, X_N)) = q(\theta).$$

Estas dos últimas expresiones equivalen a decir:

$$E_\theta \left[ \sqrt{N} \cdot (T_N(X_1, \dots, X_N) - q(\theta)) \right] = 0 \quad y \tag{6.1}$$

$$Var_\theta \left[ \sqrt{N} \cdot (T_N(X_1, \dots, X_N) - q(\theta)) \right] \geq \frac{(q'(\theta))^2}{IF(\theta)}. \tag{6.2}$$

Sin embargo bajo ciertas condiciones muy generales, existen estimadores que para  $N$  grande satisfacen aproximadamente la igualdad en la ecuación (6.2).

**Definición 6.1.4.** Se dice que un estimador  $T_N(X_1, \dots, X_N)$  es un estimador asintóticamente normal y eficiente (A.N.E.) para  $q(\theta)$  si

$$\sqrt{N} \cdot (T_N(X_1, \dots, X_N) - q(\theta)) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N} \left( 0, \frac{(q'(\theta))^2}{IF(\theta)} \right),$$

donde denotamos con  $\xrightarrow{\mathcal{D}}$  a la convergencia en distribución.

Si  $\sqrt{N} \cdot (T_N(X_1, \dots, X_N) - q(\theta))$  es A.N.E., entonces para  $N$  grande el estimador se comporta como si fuera insesgado con varianza  $\frac{(q'(\theta))^2}{IF(\theta)}$  que es la menor varianza posible que se puede obtener en un estimador según el Teorema de Cramer-Rao.

## 6.2. COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DEL ESTIMADOR DE MÁXIMA VEROSIMILITUD $\hat{\alpha}_{ML,N}$ DE UNA DISTRIBUCIÓN $\mathcal{G}_I^0(\alpha)$

### 6.2.1. Consistencia

**Teorema 6.2.1.** Sea  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)$  una muestra aleatoria de una v.a. con función de densidad perteneciente a la familia  $f(x, \theta)$  con  $\theta \in \Theta$  donde  $\Theta$  es un intervalo abierto en  $\mathbb{R}$ . Supongamos que

$f(x, \theta)$  es derivable con respecto  $\theta$  y que su soporte ( $\text{supp}(f) = \{x : f(x, \theta) \neq 0\}$ ) es independiente de  $\theta \forall \theta \in \Theta$ . Sea  $\hat{\theta}_{ML,N}$  el estimador de máxima verosimilitud de  $\theta$  basado en una muestra de tamaño  $N$ , que satisface

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial \ln}{\partial \theta} \left( f \left( X_i, \hat{\theta}_N \right) \right) = 0.$$

Supongamos además que esta ecuación tiene a lo sumo una solución y que si  $\theta \neq \theta'$  implica que  $f(x, \theta) \neq f(x, \theta')$ . Entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\theta}_{ML,N} = \theta \quad \text{c.t.p.,}$$

es decir  $\hat{\theta}_{ML,N}$  es un estimador fuertemente consistente.

Por lo tanto tomando  $\Theta = (-\infty, -1)$ , observando que  $f_I(x, \alpha) = \frac{(-\alpha)}{(1+x)^{1-\alpha}} \cdot \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x)$  es continuamente diferenciable con respecto a  $\alpha$  en  $\Theta$  y que  $\text{supp}(f) = \mathbb{R}^+$  es independiente del  $\alpha$ , observamos que estamos en las condiciones del teorema, luego  $\hat{\alpha}_{ML,N}$  definido en (5.9) es un estimador consistente para  $\alpha$ .

### 6.2.2. Normalidad Asintótica y Eficiencia

**Teorema 6.2.2.** Sea  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)$  una muestra aleatoria de una v.a. con función de densidad perteneciente a la familia  $f(x, \theta)$  con  $\theta \in \Theta$  donde  $\Theta$  es un intervalo abierto en  $\mathbb{R}$ . Supongamos que se satisfacen las siguientes condiciones

- a) su soporte es independiente de  $\theta \forall \theta \in \Theta$ .
- b)  $f(x, \theta)$  es por lo menos tres veces diferenciable con respecto a  $\theta$  y con tercer derivada continua respecto  $\theta$ .
- c)  $\int f(x, \theta) dx$  es diferenciable con respecto a  $\theta$  bajo el signo de integral.
- d)  $0 < IF(\theta) = E_{\theta} \left[ \frac{\partial \ln^2}{\partial \theta} (f(X, \theta)) \right] < \infty$
- e) Sea  $\gamma(x, \theta) = \frac{\partial \ln}{\partial \theta} (f(x, \theta))$  y supongamos además que

$$\left| \frac{\partial^3 \ln}{\partial \theta^3} (f(x, \theta)) \right| = \left| \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \theta^2} (x, \theta) \right| \leq k \quad \forall x \in \text{supp}(f) \text{ y } \theta \in \Theta.$$

Sea  $\hat{\theta}_{ML,N}$  un estimador de máxima verosimilitud de  $\theta$  consistente, entonces  $\hat{\theta}_{ML,N}$  es A.N.E. para estimar  $\theta$ .

En nuestro caso resultó fácil ver que  $f_I(x, \alpha) = \frac{(-\alpha)}{(1+x)^{1-\alpha}} \cdot \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x)$  es continua y diferenciable en  $\mathbb{R}^+ \times (-\infty, -1)$  y que la derivada con respecto a  $\alpha$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} f_I(x; \alpha) = \frac{-1 - \alpha \cdot \ln(1+x)}{(1+x)^{1-\alpha}} \cdot \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x)$$

existe y es continua en  $\mathbb{R}^+ \times (-\infty, -1)$ , con lo cual se estarían cumpliendo las tres primeras condiciones del teorema.

A su vez

$$\begin{aligned} IF(\alpha) &= E_\alpha \left[ \left( \frac{\partial \ln}{\partial \alpha} (f(X, \alpha)) \right)^2 \right] = E_\alpha \left[ \left( \frac{1}{\alpha} + \ln \left( 1 + \frac{x}{\gamma} \right) \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha} \cdot E_\alpha[\ln(1+x)] + E_\alpha[\ln^2(1+x)] \\ &= \frac{1}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha} \cdot \left( -\frac{1}{\alpha} \right) + \frac{2}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2} < \infty \end{aligned}$$

y

$$\left| \frac{\partial^3 \ln}{\partial \alpha^3} (f(x, \alpha)) \right| = \left| \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \alpha^2} (x, \alpha) \right| = \left| \frac{2}{\alpha^3} \right| \leq 2 \quad \forall x \in \text{supp}(f) \text{ y } \alpha \in \Theta.$$

Luego  $\hat{\alpha}_{ML,N}$  es un estimador A.N.E. para estimar  $\alpha$ , o sea

$$\sqrt{N} \cdot (\hat{\alpha}_{ML,N} - \alpha) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \alpha^2).$$

### 6.3. COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DEL M-ESTIMADOR $\hat{\alpha}_{M,N}$ DE UNA DISTRIBUCIÓN $\mathcal{G}_I^0(\alpha)$

Sea  $\Psi_b(x; (\alpha, 1))$  definida en  $\mathbb{R}^+ \times (-\infty, -1)$  como

$$\begin{aligned} \Psi_b(x; \alpha) &= \psi_b(s_1(x; \alpha) - c(\alpha, b)) = \psi_b \left( \frac{1}{\alpha} + \ln(1+x) - c(\alpha, b) \right) \\ &= \begin{cases} -b & \text{si } \frac{1}{\alpha} \leq -b + c(\alpha, b) - \ln(1+x) \\ \frac{1}{\alpha} + \ln \left( 1 + \frac{x}{\gamma} \right) - c(\alpha, b) & \text{si } -b + c(\alpha, b) - \ln(1+x) \leq \frac{1}{\alpha} \\ b & \text{si } \frac{1}{\alpha} \geq b + c(\alpha, b) - \ln(1+x) \end{cases} \quad (6.3a) \end{aligned}$$

Sea también  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)$  una muestra aleatoria de una v.a.  $\mathcal{G}_I^0(\alpha)$  y definamos  $\alpha_N^* = \sup\{t : \sum_{i=1}^N \psi_b(s_1(X_i; (t, 1)) - c(t, b)) > 0\}$ ;  $\alpha_N^{**} = \inf\{t : \sum_{i=1}^N \psi_b(s_1(X_i; (t, 1)) - c(t, b)) < 0\}$  y definimos una función  $\lambda$  de  $\alpha$  como sigue  $\lambda(\alpha) = \lambda(\alpha, \alpha_0) = E_{\alpha_0}[\Psi_b(X; \alpha)]$

**Observación 6.3.1.** Observar que  $\alpha_N^* \leq \hat{\alpha}_{M,N} \leq \alpha_N^{**}$ .

Para demostrar la consistencia y la normalidad asintótica de  $\hat{\alpha}_{M,N}$  se usarán los siguientes teoremas cuya demostración se puede ver en Huber ([16])

**Teorema 6.3.2.** *Asumiendo que existe un  $\alpha_0$  tal que  $\lambda(\alpha) > 0 \forall \alpha < \alpha_0$  y  $\lambda(\alpha) < 0 \forall \alpha > \alpha_0$ . Entonces  $\alpha_N^*$  y  $\alpha_N^{**}$  convergen en probabilidad y casi seguramente a  $\alpha_0$ .*

**Corolario 6.3.3.** *Si  $\Psi_b(x; \alpha)$  es monótona en  $\alpha$  y  $\alpha$  está unívocamente definida por (5.16), entonces  $\hat{\alpha}_{M,N}$  es fuertemente consistente para  $\alpha$ .*



**Teorema 6.3.4.** *Bajo las siguientes hipótesis:*

1.  $\Psi_b(x; \alpha)$  es medible en  $x$  y es monótona decreciente en  $\alpha$ .
2. Existe por lo menos un  $\alpha_0$  tal que  $\lambda(\alpha_0) = 0$ .
3.  $\lambda$  es continua en un entorno de  $\Gamma_0$ , donde  $\Gamma_0$  es el conjunto de  $\alpha$ -valores tales que  $\lambda(\alpha) = 0$
4. Sea  $\sigma^2 : \Theta \rightarrow \mathbb{R}^+$  definida como  $\sigma^2(\alpha) = E_{\alpha_0}[\Psi_b^2(X; \alpha)] - \lambda^2(\alpha)$  es finita, distinta de cero y continua en  $\Gamma_0$ . (Denotando por  $\sigma_0 = \sigma(\alpha_0)$ ).

Entonces  $\sqrt{n} \cdot \lambda(\hat{\alpha}_{M,N})$  es asintóticamente normal a  $\mathcal{N}(0, \sigma_0^2)$ .

**Corolario 6.3.5.** *Si  $\lambda$  tiene derivada  $\lambda'(\alpha_0) < 0$ , luego  $\sqrt{N} \cdot (\hat{\alpha}_{M,N} - \alpha_0)$  es asintóticamente normal con media 0 y varianza  $\sigma_0^2 / (\lambda'(\alpha_0))^2$ . O sea*

$$\sqrt{N} \cdot (\hat{\alpha}_{M,N} - \alpha_0) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_0^2}{(\lambda'(\alpha_0))^2}\right).$$

### 6.3.1. Consistencia

Veamos entonces que  $\Psi_b(x; \alpha)$  es monótona decreciente. Para ello veamos entonces que  $\frac{1}{\alpha} + \ln(1+x) - c(\alpha, b)$  es decreciente.

Dado  $x$  y  $b$  fijos, sea  $h(\alpha) = \frac{1}{\alpha} + \ln(1+x) - c(\alpha, b)$  como función de  $\alpha$ . Luego

$$\frac{\partial h}{\partial \alpha}(\alpha) = -\frac{1}{\alpha^2} - \frac{\partial c}{\partial \alpha}(\alpha, b) \tag{6.4}$$

#### Cálculo de $\frac{\partial c}{\partial \alpha}(\alpha, b)$

De acuerdo al Lema 5.2.11 dado  $b > 0$  fijo, sea  $c(\alpha) = c(\alpha, b)$  entonces

- Si  $\exp(2 \cdot \alpha \cdot b) > b \cdot \alpha + 1$ , entonces existe un  $c \in (-b + \frac{1}{\alpha}; b + \frac{1}{\alpha})$  dado por la solución de la ecuación  $\alpha \cdot c(\alpha) = \exp(\alpha \cdot b + \alpha \cdot c(\alpha) - 1)$  que hace  $I(\alpha, c(\alpha), b) = 0$ .
- Si  $\exp(2 \cdot \alpha \cdot b) \leq b \cdot \alpha + 1$ , entonces existe un  $c \in [b + \frac{1}{\alpha}; +\infty)$  dado por  $c(\alpha) = \alpha^{-1}(\ln(-\alpha) + \ln(b) - \ln(e^{-\alpha \cdot b} - e^{\alpha \cdot b}) + 1)$  que hace  $I(\alpha, c(\alpha), b) = 0$ .

Luego usando el Teorema de la Función Implícita tenemos que

$$c(\alpha) + \alpha \cdot c'(\alpha) = \exp(\alpha \cdot b + \alpha \cdot c(\alpha) - 1) \cdot (b + c(\alpha) + \alpha \cdot c'(\alpha))$$

entonces

$$\begin{aligned} \alpha \cdot c'(\alpha) \cdot [1 - \exp(\alpha \cdot b + \alpha \cdot c(\alpha) - 1)] &= \exp(\alpha \cdot b + \alpha \cdot c(\alpha) - 1) \cdot (b + c(\alpha)) - c(\alpha) \\ \alpha \cdot c'(\alpha) \cdot [1 - \exp(\alpha \cdot b + \alpha \cdot c(\alpha) - 1)] &= [\exp(\alpha \cdot b + \alpha \cdot c(\alpha) - 1) - 1] \cdot (b + c(\alpha)) + b \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} c'(\alpha) &= \frac{[\exp(\alpha \cdot b + \alpha \cdot c(\alpha) - 1) - 1] \cdot (b + c(\alpha)) + b}{\alpha \cdot [1 - \exp(\alpha \cdot b + \alpha \cdot c(\alpha) - 1)]} \\ &= -\frac{(b + c(\alpha))}{\alpha} + \frac{b}{\alpha \cdot [1 - \exp(\alpha \cdot b + \alpha \cdot c(\alpha) - 1)]}. \end{aligned}$$

Por lo tanto si  $\exp(2 \cdot \alpha \cdot b) > b \cdot \alpha + 1$ , entonces

$$\begin{aligned} c'(\alpha) &= -\frac{(b + c(\alpha))}{\alpha} + \frac{b}{\alpha \cdot [1 - \alpha \cdot c(\alpha)]} \\ &= \frac{b \cdot \alpha \cdot c(\alpha) + \alpha \cdot c^2(\alpha) - c(\alpha)}{\alpha \cdot [1 - \alpha \cdot c(\alpha)]}. \end{aligned}$$

Con lo cual

$$c'(\alpha) = \begin{cases} \frac{b \cdot \alpha \cdot c(\alpha) + \alpha \cdot c^2(\alpha) - c(\alpha)}{\alpha \cdot [1 - \alpha \cdot c(\alpha)]} & \text{si } \exp(2 \cdot \alpha \cdot b) > b \cdot \alpha + 1 \\ \frac{1}{\alpha} \cdot \left[ \frac{1}{\alpha} + b \cdot \left( \frac{e^{-\alpha \cdot b} + e^{\alpha \cdot b}}{e^{-\alpha \cdot b} - e^{\alpha \cdot b}} \right) - c(\alpha) \right] & \text{si } \exp(2 \cdot \alpha \cdot b) \leq b \cdot \alpha + 1 \end{cases}$$

Volviendo a (6.4) tenemos que

$$\frac{\partial h}{\partial \alpha}(\alpha) = \begin{cases} \frac{-b \cdot \alpha^2 \cdot c(\alpha) - (\alpha \cdot c(\alpha) - 1)^2}{\alpha^2 \cdot [1 - \alpha \cdot c(\alpha)]} & \text{si } \exp(2 \cdot \alpha \cdot b) > b \cdot \alpha + 1 \\ \frac{b \cdot \alpha \cdot \coth(-\alpha \cdot b) + c(\alpha) \cdot \alpha - 2}{\alpha^2} & \text{si } \exp(2 \cdot \alpha \cdot b) \leq b \cdot \alpha + 1 \end{cases}.$$

Observemos que  $\exp(2 \cdot \alpha \cdot b) - b \cdot \alpha - 1 > 0$  cuando  $\alpha \cdot b \in (-\infty, -0,79681)$  y que  $\exp(2 \cdot \alpha \cdot b) - b \cdot \alpha - 1 \leq 0$  cuando  $\alpha \cdot b \in [-0,79681, 0)$ , con lo cual podemos reescribir a  $\frac{\partial h}{\partial \alpha}(\alpha)$  como sigue:

$$\frac{\partial h}{\partial \alpha}(\alpha) = \begin{cases} \frac{-b \cdot \alpha^2 \cdot c(\alpha) - (\alpha \cdot c(\alpha) - 1)^2}{\alpha^2 \cdot [1 - \alpha \cdot c(\alpha)]} & \text{si } \alpha \cdot b \in (-\infty, -0,79681) \\ \frac{-b \cdot \alpha \cdot \coth(-\alpha \cdot b) + c(\alpha) \cdot \alpha - 2}{\alpha^2} & \text{si } \alpha \cdot b \in [-0,79681, 0) \end{cases}.$$

Analicemos entonces  $\frac{\partial h}{\partial \alpha}(\alpha)$  cuando  $\alpha \cdot b \in (-\infty, -0,79681)$ . En este caso se tiene que por construcción  $\alpha \cdot c(\alpha) = (x_2 + 1)^\alpha > 0$  donde  $x_2 = \exp(b + c - \frac{1}{\alpha}) - 1 > 0 \Rightarrow (x_2 + 1)^\alpha < 1 \Rightarrow 0 < \alpha \cdot c(\alpha) < 1 \Rightarrow 1 - \alpha \cdot c(\alpha) > 0$ . Por otro lado se puede ver que  $-b \cdot \alpha^2 \cdot c(\alpha)$  es creciente cuando  $\alpha \cdot b \in (-\infty, -0,79681)$  tomando valor máximo 0,161903, mientras que  $(\alpha \cdot c(\alpha) - 1)^2$  cuando  $\alpha \cdot b = -0,79681$  es 0,63491. Luego  $\frac{\partial h}{\partial \alpha}(\alpha) < 0$  cuando  $\alpha \cdot b \in (-\infty, -0,79681)$ .

Por otro lado analizando la función  $f(\alpha \cdot b) = -\alpha \cdot b \cdot \coth(-\alpha \cdot b) + \alpha \cdot b - 1$  cuando  $\alpha \cdot b \in [-0,79681, 0)$ , podemos ver que esta función es creciente y que  $\lim_{\alpha \cdot b \rightarrow 0} f(\alpha \cdot b) = 0 \Rightarrow -\alpha \cdot b \cdot \coth(-\alpha \cdot b) + \alpha \cdot b - 1 < 0$ .

Además como  $b + \frac{1}{\alpha} - c(\alpha) < 0$  (por construcción de  $c(\alpha)$ )  $\Rightarrow$  multiplicando por  $(-\alpha) > 0$  tenemos  $-\alpha \cdot b - 1 + \alpha \cdot c(\alpha) < 0 \Rightarrow \alpha \cdot c(\alpha) < \alpha \cdot b + 1 \Rightarrow \alpha \cdot c(\alpha) - 2 < \alpha \cdot b - 1$ .

Con lo cual  $-b \cdot \alpha \cdot \coth(-\alpha \cdot b) + c(\alpha) \cdot \alpha - 2 < -\alpha \cdot b \cdot \coth(-\alpha \cdot b) + \alpha \cdot b - 1 < 0$ .

Por lo tanto  $\frac{-b \cdot \alpha \cdot \coth(-\alpha \cdot b) + c(\alpha) \cdot \alpha - 2}{\alpha^2} < 0$  si  $\alpha \cdot b \in [-0,79681, 0)$ .

Luego tenemos que

$$\frac{\partial h}{\partial \alpha}(\alpha) < 0 \quad \forall \alpha < -1,$$

y  $h(\alpha)$  es decreciente. Con lo cual probamos que  $\Psi_b(x; (\alpha, 1))$  es monótona decreciente para  $x$  y  $b$  fijos.

Veamos a continuación que existe un único  $\alpha$  tal que  $\lambda(\alpha) = 0$

Sea nuevamente  $b_0 > 0$  arbitrario pero fijo y sean  $c(\alpha) = c(\alpha, b_0)$ ,  $x_1^0 = e^{-b_0+c(\alpha)-\frac{1}{\alpha}} - 1$  y  $x_2^0 = e^{b_0+c(\alpha)-\frac{1}{\alpha}} - 1$ . Sabemos que por el Lema 5.2.11, la existencia de  $c$  implica que por lo menos  $x_2^0 > 0$ .

Luego,

- Si  $x_1^0 < 0 < x_2^0$ , entonces

$$\begin{aligned} E_{\alpha_0}(\Psi_{b_0}(x; \alpha)) &= \int_0^{x_2^0} \left( \frac{1}{\alpha} + \ln(1+x) - c(\alpha) \right) \cdot \frac{(-\alpha_0)}{(1+x)^{1-\alpha_0}} dx + \int_{x_2^0}^{+\infty} b_0 \cdot \frac{(-\alpha_0)}{(1+x)^{1-\alpha_0}} dx \\ &= \left( \frac{1}{\alpha} - c(\alpha) \right) \cdot F_I(x_2^0) + (1 - F_I(x_2^0)) \cdot b_0 + \int_0^{x_2^0} \frac{\ln(1+x) \cdot (-\alpha_0)}{(1+x)^{1-\alpha_0}} dx \\ &= \left( \frac{1}{\alpha} - c(\alpha) \right) \cdot \left( 1 - \exp\left(\alpha_0 \cdot b_0 - \frac{\alpha_0}{\alpha} + \alpha_0 \cdot c(\alpha)\right) \right) + \\ &\quad + \exp\left(\alpha_0 \cdot b_0 - \frac{\alpha_0}{\alpha} + \alpha_0 \cdot c(\alpha)\right) \cdot b_0 + \\ &\quad + \exp\left(\alpha_0 \cdot b_0 - \frac{\alpha_0}{\alpha} + \alpha_0 \cdot c(\alpha)\right) \cdot \left( \frac{1}{\alpha_0} - b_0 + \frac{1}{\alpha} - c(\alpha) \right) - \frac{1}{\alpha_0} \\ &= \exp\left(\alpha_0 \cdot b_0 - \frac{\alpha_0}{\alpha} + \alpha_0 \cdot c(\alpha)\right) \cdot \frac{1}{\alpha_0} + \frac{1}{\alpha} - c(\alpha) - \frac{1}{\alpha_0} \end{aligned}$$

y en este caso  $E_{\alpha_0}(\Psi_{b_0}(x; \alpha)) = 0$  si y solo si  $\alpha = \alpha_0$ .

- Si  $0 < x_1^0$  entonces

$$\begin{aligned}
 E_{\alpha_0}(\Psi_{b_0}(x; \alpha)) &= \int_0^{x_1^0} (-b_0) \cdot \frac{(-\alpha_0)}{(1+x)^{1-\alpha_0}} dx + \\
 &+ \int_{x_1^0}^{x_2^0} \left( \frac{1}{\alpha} + \ln(1+x) - c(\alpha) \right) \cdot \frac{(-\alpha_0)}{(1+x)^{1-\alpha_0}} dx \\
 &+ \int_{x_2^0}^{+\infty} b_0 \cdot \frac{(-\alpha_0)}{(1+x)^{1-\alpha_0}} dx \\
 &= (-b_0) \cdot F_I(x_1^0) + \left( \frac{1}{\alpha} - c(\alpha) \right) \cdot (F_I(x_2^0) - F_I(x_1^0)) \\
 &+ (1 - F_I(x_2^0)) \cdot b_0 + \int_{x_1^0}^{x_2^0} \frac{\ln(1+x) \cdot (-\alpha_0)}{(1+x)^{1-\alpha_0}} dx \\
 &= (-b_0) \cdot \left( 1 - \exp\left(-\alpha_0 \cdot b_0 - \frac{\alpha_0}{\alpha} + \alpha_0 \cdot c(\alpha)\right) \right) + \\
 &+ \left( \frac{1}{\alpha} - c(\alpha) \right) \cdot \exp\left(-\frac{\alpha_0}{\alpha} + \alpha_0 \cdot c(\alpha)\right) \cdot (\exp(-b_0 \cdot \alpha_0) \\
 &- \exp(b_0 \cdot \alpha_0)) + \exp\left(\alpha_0 \cdot b_0 - \frac{\alpha_0}{\alpha} + \alpha_0 \cdot c(\alpha)\right) \cdot b_0 + \\
 &+ \exp\left(-\frac{\alpha_0}{\alpha} + \alpha_0 \cdot c(\alpha)\right) \cdot \left[ \exp(b_0 \cdot \alpha_0) \cdot \left( \frac{1}{\alpha_0} - b_0 + \frac{1}{\alpha} - c(\alpha) \right) \right. \\
 &\left. - \exp(-b_0 \cdot \alpha_0) \cdot \left( \frac{1}{\alpha_0} + b_0 + \frac{1}{\alpha} - c(\alpha) \right) \right] \\
 &= \frac{1}{\alpha_0} \cdot \exp\left(-\frac{\alpha_0}{\alpha} + \alpha_0 \cdot c(\alpha)\right) \cdot (\exp(b_0 \cdot \alpha_0) - \exp(-b_0 \cdot \alpha_0)) - b_0.
 \end{aligned}$$

Se puede ver usando el Lema 5.2.11 que  $E_{\alpha_0}(\Psi_{b_0}(x; \alpha)) = 0$  si y sólo si  $\alpha = \alpha_0$ .

Luego  $\alpha$  está unívocamente determinada por  $E_{\alpha_0}(\Psi_{b_0}(x; \alpha)) = 0$ . Y por lo tanto hemos demostrado la consistencia de  $\hat{\alpha}_{M,N}$  para  $\alpha$ .

### 6.3.2. Normalidad Asintótica y Eficiencia

Para ver la normalidad asintótica solo resta ver que  $\sigma^2(\alpha) = E_{\alpha_0}[\Psi_b^2(X; \alpha)] - \lambda^2(\alpha)$  es finita, distinta de cero y continua en  $\Gamma_0$ . y que  $\lambda$  tiene derivada  $\lambda'(\alpha_0) < 0$

Calculemos entonces  $E_{\alpha_0}[\Psi_b^2(X; \alpha)]$ . Nuevamente:

- Si  $x_1^0 < 0 < x_2^0$ , entonces

$$\begin{aligned}
 E_{\alpha_0}(\Psi_{b_0}^2(x; \alpha)) &= \int_0^{x_2^0} \left( \frac{1}{\alpha} + \ln(1+x) - c(\alpha) \right)^2 \cdot \frac{(-\alpha_0)}{(1+x)^{1-\alpha_0}} dx + \int_{x_2^0}^{+\infty} b_0^2 \cdot \frac{(-\alpha_0)}{(1+x)^{1-\alpha_0}} dx \\
 &= \left( \frac{1}{\alpha} - c(\alpha) \right)^2 \cdot F_I(x_2^0) + \left( \frac{2}{\alpha} - 2 \cdot c(\alpha) \right) \cdot \int_0^{x_2^0} \ln(1+x) \cdot \frac{(-\alpha_0)}{(1+x)^{1-\alpha_0}} dx \\
 &\quad + \int_0^{x_2^0} \ln^2(1+x) \cdot \frac{(-\alpha_0)}{(1+x)^{1-\alpha_0}} dx + (1 - F_I(x_2^0)) \cdot b_0^2 \\
 &= \left[ \left( \frac{1}{\alpha} - c(\alpha) \right)^2 - b_0^2 \right] \cdot F_I(x_2^0) + b_0^2 \\
 &\quad + \left( \frac{2}{\alpha} - 2 \cdot c(\alpha) \right) \cdot \left[ \exp\left(\alpha_0 \cdot b_0 - \frac{\alpha_0}{\alpha} + \alpha_0 \cdot c(\alpha)\right) \cdot \left( \frac{1}{\alpha_0} - b_0 + \frac{1}{\alpha} - c(\alpha) \right) - \frac{1}{\alpha_0} \right] \\
 &\quad + \exp\left(\alpha_0 \cdot b_0 - \frac{\alpha_0}{\alpha} + \alpha_0 \cdot c(\alpha)\right) \cdot \left[ - \left( \frac{1}{\alpha_0} - b_0 + \frac{1}{\alpha} - c(\alpha) \right)^2 - \frac{1}{\alpha_0^2} \right] + \frac{2}{\alpha_0^2} \\
 &= \left[ \left( \frac{1}{\alpha} - c(\alpha) \right)^2 - b_0^2 \right] \cdot \left( 1 - \exp\left(\alpha_0 \cdot b_0 - \frac{\alpha_0}{\alpha} + \alpha_0 \cdot c(\alpha)\right) \right) + b_0^2 + \frac{2}{\alpha_0^2} + \\
 &\quad + \left( \frac{2}{\alpha} - 2 \cdot c(\alpha) \right) \cdot \left[ \exp\left(\alpha_0 \cdot b_0 - \frac{\alpha_0}{\alpha} + \alpha_0 \cdot c(\alpha)\right) \cdot \left( \frac{1}{\alpha_0} - b_0 + \frac{1}{\alpha} - c(\alpha) \right) - \frac{1}{\alpha_0} \right] \\
 &\quad + \exp\left(\alpha_0 \cdot b_0 - \frac{\alpha_0}{\alpha} + \alpha_0 \cdot c(\alpha)\right) \cdot \left[ - \left( \frac{1}{\alpha_0} - b_0 + \frac{1}{\alpha} - c(\alpha) \right)^2 - \frac{1}{\alpha_0^2} \right] \\
 &= \exp\left(\alpha_0 \cdot b_0 - \frac{\alpha_0}{\alpha} + \alpha_0 \cdot c(\alpha)\right) \cdot \frac{2}{\alpha_0} \left[ b_0 - \frac{1}{\alpha_0} \right] + \left( -\frac{1}{\alpha_0} + \frac{1}{\alpha} - c(\alpha) \right)^2 + \frac{1}{\alpha_0^2}
 \end{aligned}$$

- De igual manera se prueba que si  $x_1^0 > 0$ , entonces

$$\begin{aligned}
 E_{\alpha_0}(\Psi_{b_0}^2(x; (\alpha, 1))) &= b_0^2 + \frac{2 \cdot \exp\left(-\frac{\alpha_0}{\alpha} + c(\alpha) \cdot \alpha_0\right)}{\alpha_0} \cdot \left[ \frac{(\exp(-b_0 \cdot \alpha_0) - \exp(b_0 \cdot \alpha_0))}{\alpha_0} \right. \\
 &\quad \left. + b_0 \cdot (\exp(b_0 \cdot \alpha_0) + \exp(-b_0 \cdot \alpha_0)) \right].
 \end{aligned}$$

Luego

$$\sigma^2(\alpha) = \begin{cases} \frac{2 \cdot \exp(\alpha \cdot b_0 - \frac{\alpha_0}{\alpha} + \alpha_0 \cdot c(\alpha)) \cdot [b_0 - \frac{1}{\alpha} + c(\alpha)]}{\left(1 - \exp\left(2 \cdot \alpha_0 \cdot b_0 - \frac{2 \cdot \alpha_0}{\alpha} + 2 \cdot \alpha_0 \cdot c(\alpha)\right)\right)} \cdot \frac{\alpha_0}{\alpha_0^2} & \text{si } \exp(2 \cdot \alpha \cdot b_0) > b_0 \cdot \alpha + 1 \\ \frac{2 \cdot \exp(-\frac{\alpha_0}{\alpha} + c(\alpha) \cdot \alpha) \cdot (\exp(b_0 \cdot \alpha_0) - \exp(-b_0 \cdot \alpha_0))}{\alpha_0^2} & \text{si } \exp(2 \cdot \alpha \cdot b_0) \leq b_0 \cdot \alpha + 1 \\ - \frac{\exp\left(-\frac{2 \cdot \alpha_0}{\alpha} + 2 \cdot \alpha_0 \cdot c(\alpha)\right) \cdot (\exp(b_0 \cdot \alpha_0) - \exp(-b_0 \cdot \alpha_0))}{\alpha_0^2} & \end{cases},$$

que es finita, distinta de cero y continua. Con lo cual queda probado que  $\sqrt{n} \cdot \lambda(\hat{\alpha}_{M,N})$  es asintóticamente normal a  $\mathcal{N}(0, \sigma_0^2)$  donde

$$\sigma_0^2 = \begin{cases} 2 \cdot b_0 \cdot c(\alpha_0) + \left(c(\alpha_0) - \frac{1}{\alpha_0}\right)^2 & \text{si } \exp(2 \cdot \alpha_0 \cdot b) > b_0 \cdot \alpha_0 + 1 \\ b_0^2 + \frac{2 \cdot \exp(-1 + c(\alpha_0) \cdot \alpha_0) \cdot (\exp(-b_0 \cdot \alpha_0) - \exp(b_0 \cdot \alpha_0))}{\alpha_0^2} & \text{si } \exp(2 \cdot \alpha_0 \cdot b_0) \leq b_0 \cdot \alpha_0 + 1 \\ + \frac{2 \cdot b_0 \cdot \exp(-1 + c(\alpha_0) \cdot \alpha_0) \cdot (\exp(b_0 \cdot \alpha_0) + \exp(-b_0 \cdot \alpha_0))}{\alpha_0} & \end{cases}$$

Nos falta ver entonces que  $\lambda$  tiene derivada  $\lambda'(\alpha_0) < 0$ . Para ello veamos cual es la derivada de  $c(\alpha) - \frac{1}{\alpha}$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left( c(\alpha) - \frac{1}{\alpha} \right) = \begin{cases} \frac{b \cdot \alpha^2 \cdot c(\alpha) + (\alpha \cdot c(\alpha) - 1)^2}{\alpha^2 \cdot [1 - \alpha \cdot c(\alpha)]} & \text{si } \exp(2 \cdot \alpha \cdot b) > b \cdot \alpha + 1 \\ \frac{1}{\alpha} \cdot \left[ \frac{2}{\alpha} + b \cdot \left( \frac{e^{-\alpha \cdot b} + e^{\alpha \cdot b}}{e^{-\alpha \cdot b} - e^{\alpha \cdot b}} \right) - c(\alpha) \right] & \text{si } \exp(2 \cdot \alpha \cdot b) \leq b \cdot \alpha + 1 \end{cases}.$$

Luego

$$\frac{\partial \lambda'}{\partial \alpha}(\alpha) = \begin{cases} \left[ \exp\left(\alpha \cdot b_0 - \frac{\alpha_0}{\alpha} + \alpha_0 \cdot c(\alpha)\right) - 1 \right] \cdot \frac{b_0 \cdot \alpha^2 \cdot c(\alpha) + (\alpha \cdot c(\alpha) - 1)^2}{\alpha^2 \cdot [1 - \alpha \cdot c(\alpha)]} & \text{si } \exp(2 \cdot \alpha \cdot b_0) > b_0 \cdot \alpha + 1 \\ \frac{1}{\alpha} \cdot \left[ \frac{2}{\alpha} + b_0 \cdot \left( \frac{e^{-\alpha \cdot b_0} + e^{\alpha \cdot b_0}}{e^{-\alpha \cdot b_0} - e^{\alpha \cdot b_0}} \right) - c(\alpha) \right] & \text{si } \exp(2 \cdot \alpha \cdot b_0) \leq b_0 \cdot \alpha + 1 \end{cases},$$

y

$$\frac{\partial \lambda'}{\partial \alpha}(\alpha_0) = \begin{cases} [\alpha_0 \cdot c(\alpha_0) - 1] \cdot \frac{b_0 \cdot \alpha_0^2 \cdot c(\alpha_0) + (\alpha_0 \cdot c(\alpha_0) - 1)^2}{\alpha_0^2 \cdot [1 - \alpha_0 \cdot c(\alpha_0)]} & \text{si } \exp(2 \cdot \alpha_0 \cdot b_0) > b_0 \cdot \alpha_0 + 1 \\ \exp\left(\ln\left(\frac{-\alpha_0 \cdot b_0}{e^{-\alpha_0 \cdot b_0} - e^{\alpha_0 \cdot b_0}}\right)\right) \cdot (\exp(b_0 \cdot \alpha_0) - \exp(-b_0 \cdot \alpha_0)) \cdot \frac{1}{\alpha_0} \cdot \left[ \frac{2}{\alpha_0} + b_0 \cdot \left( \frac{e^{-\alpha \cdot b_0} + e^{\alpha \cdot b_0}}{e^{-\alpha \cdot b_0} - e^{\alpha \cdot b_0}} \right) - c(\alpha_0) \right] & \text{si } \exp(2 \cdot \alpha_0 \cdot b_0) \leq b_0 \cdot \alpha_0 + 1 \end{cases},$$

$$\frac{\partial \lambda'}{\partial \alpha}(\alpha_0) = \begin{cases} - \frac{b_0 \cdot \alpha_0^2 \cdot c(\alpha_0) + (\alpha_0 \cdot c(\alpha_0) - 1)^2}{\alpha_0^2} & \text{si } \exp(2 \cdot \alpha_0 \cdot b_0) > b_0 \cdot \alpha_0 + 1 \\ b_0 \cdot \left[ \frac{2}{\alpha_0} + b_0 \cdot \left( \frac{e^{-\alpha \cdot b_0} + e^{\alpha \cdot b_0}}{e^{-\alpha \cdot b_0} - e^{\alpha \cdot b_0}} \right) - c(\alpha_0) \right] & \text{si } \exp(2 \cdot \alpha_0 \cdot b_0) \leq b_0 \cdot \alpha_0 + 1 \end{cases},$$

como  $-b \cdot \alpha_0^2 \cdot c(\alpha_0)$  es creciente cuando  $\alpha_0 \cdot b \in (-\infty, -0,79681)$  tomando valor máximo igual a 0,161903, mientras que  $(\alpha_0 \cdot c(\alpha_0) - 1)^2$  cuando  $\alpha_0 \cdot b = -0,79681$  es 0,63491. Luego cuando

$\exp(2 \cdot \alpha_0 \cdot b_0) > b_0 \cdot \alpha_0 + 1$  es claramente  $\frac{\partial \lambda'}{\partial \alpha}(\alpha_0) < 0$ . Y cuando  $\exp(2 \cdot \alpha_0 \cdot b_0) \leq b_0 \cdot \alpha_0 + 1$  se puede probar que  $\left[ \frac{2}{\alpha_0} + b_0 \cdot \left( \frac{e^{-\alpha \cdot b_0} + e^{\alpha \cdot b_0}}{e^{-\alpha \cdot b_0} - e^{\alpha \cdot b_0}} \right) - c(\alpha_0) \right] < 0$  (ver demostración de  $h(\alpha)$  decreciente en la consistencia del estimador), por lo tanto  $\frac{\partial \lambda'}{\partial \alpha}(\alpha_0) < 0$ .

Por lo tanto

$$\sqrt{N} \cdot (\hat{\alpha}_{M,N} - \alpha_0) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N} \left( 0, \frac{\sigma_0^2}{(\lambda'(\alpha_0))^2} \right).$$





## Capítulo 7

# Proceso de Monte Carlo

En este capítulo se compararán las performances de los estimadores de Máxima Verosimilitud, de los Momentos y los M-estimadores del parámetro  $\alpha$  de la distribución  $\mathcal{G}_I^0(\alpha, 1, 1)$  por simulaciones de Monte Carlo, en diferentes situaciones.

El método de Monte Carlo es un método no determinístico o estadístico numérico, usado para aproximar expresiones matemáticas complejas y costosas de evaluar con exactitud. El método se llamó así en referencia al Casino de Monte Carlo (Principado de Mónaco) por ser “la capital del juego de azar”, al ser la ruleta un generador simple de números aleatorios. El nombre y el desarrollo sistemático de los métodos de Monte Carlo datan aproximadamente de 1944 y se mejoraron enormemente con el desarrollo de la computadora.

En un problema de estimación paramétrica se querrá saber  $E(\hat{\mu}_n)$ , donde  $\hat{\mu}_n$  es un estimador de un cierto parámetro  $\mu$  obtenido de una muestra de tamaño  $n$ . El problema es que pocas veces es posible obtener una solución analítica de este valor, pero gracias a la ley de los grandes números y procesos de Monte Carlo podemos llegar a un valor aproximado de  $E(\hat{\mu}_n)$ , y así también conocer cual es el sesgo del estimador o su error cuadrático medio, etc.

### 7.1. MODELO Y SIMULACIÓN

El modelo utilizado es un modelo  $\varepsilon$ -contaminado. En el presente capítulo se presentarán los resultados obtenidos por los diferentes estimadores de  $\alpha$  mediante la simulación de imágenes cuyos píxeles están generados por la mezcla de dos clases de las cuales una se encuentra en estado puro en un sector de la parte superior izquierda y la otra en un sector de la parte inferior derecha y el resto de los píxeles es una combinación convexa de un píxel de cada una de las dos clases, o sea

$$X_{ij} = \lambda_{1,ij} \cdot X_{1,ij} + (1 - \lambda_{1,ij}) \cdot X_{2,ij} \quad \text{donde } X_{k,ij} \text{ pertenece a la clase } k, \quad (7.1)$$

y

$$\lambda_{1,ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } X_{ij} \text{ pertenece al conjunto Clase I} \\ 1 - \frac{|i-a_1|+|j-a_2|}{|i-a_1|+|j-a_2|+|i-b_1|+|j-b_2|} & \text{si } X_{ij} \text{ pertenece al conjunto Mezcla de Clases} \\ 0 & \text{si } X_{ij} \text{ pertenece al conjunto Clase II} \end{cases} \quad (7.2)$$

donde  $(a_1, a_2)$  y  $(b_1, b_2)$  son los centroides de los respectivos conjuntos de píxeles con las clases puras (ver figura 7.1).

Estudiaremos el comportamiento de los diferentes estimadores de  $\alpha$  y el comportamiento de la función grado de pertenencia  $g_c(x)$  definida en (5.2) cuando dichas imágenes están expuestas a los siguientes situaciones:

1. Modelo puro.
2. Contaminación con píxeles puros de la otra clase.
  - a) Contaminación de sólo la clase 1 en un 5 %, 10 % y 20 %.
  - b) Contaminación de sólo la clase 2 en un 5 %, 10 % y 20 %.
  - c) Contaminación de las clases 1 y 2 en conjunto en un 5 %, 10 % y 20 %.
3. Contaminación con píxeles de mezcla.
  - a) Contaminación de sólo la clase 1 en un 5 %, 10 % y 20 %.
  - b) Contaminación de sólo la clase 2 en un 5 %, 10 % y 20 %.
  - c) Contaminación de las clases 1 y 2 en conjunto en un 5 %, 10 % y 20 %.

De esta manera se examinaron 3 tipos de modelos: modelo puro, modelo de contaminación con píxeles puros de la otra clase y modelo de contaminación con píxeles de mezcla. Para cada uno de estos modelos se analizaron el comportamiento de imágenes con las siguientes clases:

1. Clase I descrita por  $\mathcal{G}_I^0(-7)$  y la clase II descrita por  $\mathcal{G}_I^0(-3)$ .
2. Clase I descrita por  $\mathcal{G}_I^0(-15)$  y la clase II descrita por  $\mathcal{G}_I^0(-3)$ .
3. Clase I descrita por  $\mathcal{G}_I^0(-7)$  y la clase II descrita por  $\mathcal{G}_I^0(-15)$ .

Estos valores de  $\alpha$  fueron elegidos ya que representan tres tipos de coberturas: homogéneas, heterogéneas y extremadamente heterogéneas.

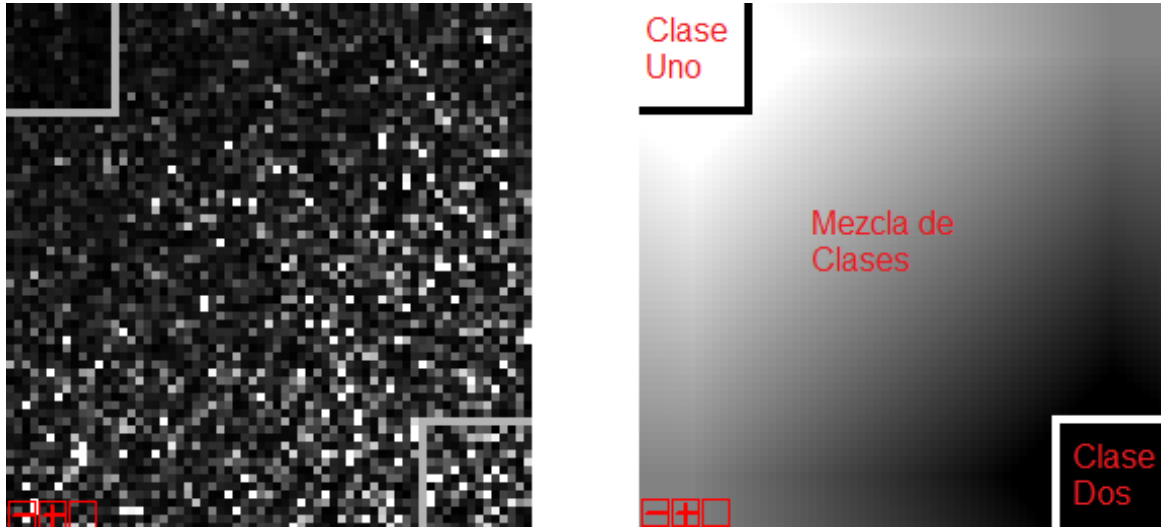


Figura 7.1: Figura de la izquierda: Imagen generada con las clases  $\mathcal{G}_I^0(-15)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-3)$ . Figura de la derecha: modelo de simulación de la función de pertenencia.

### 7.1.1. Simulaciones

Para cada una de las situaciones descritas anteriormente se simularon 1000 imágenes de  $64 \times 64$  píxeles que están generadas por la mezcla de dos clases de las cuales una se encuentra en estado puro en un sector de la parte superior izquierda y la otra en un sector de la parte inferior derecha (cada uno de estos es de un tamaño de  $13 \times 13$  píxeles) y el resto de los píxeles es una combinación convexa de un píxel de cada una de las dos clase (ver ecuaciones (7.1) y (7.2))

**Observación 7.1.1.** Para generar una imagen de esa forma se siguieron los siguientes pasos

- Usando el método de la transformación inversa para cada ubicación  $ij$  de la imagen se generan dos variables aleatorias  $X_{k,ij}$  con distribución  $\mathcal{G}_I^0(\alpha_i)$  con  $k = 1, 2$ :
  - Se generan dos números aleatorios  $U_k \sim \mathcal{U}(0, 1)$  con  $k = 1, 2$ .
  - Se hace  $X_{k,ij} = U_k^{1/\alpha_k} - 1$ .
- se genera el píxel  $X_{ij}$  como se indica en las ecuaciones (7.1) y (7.2).

### 7.1.2. Formato de presentación de los resultados

**Análisis de los parámetros  $\alpha$  estimados en cada clase.**

Si denotamos por  $\zeta$  al estimador utilizado ( $\zeta \in \{\hat{\alpha}_{ML}, \hat{\alpha}_{Mom}, \hat{\alpha}_M\}$ ), por  $\zeta(r)$  al estimador muestral calculado en la repetición  $r$ , entonces para cada situación se calculan para cada estimador  $\zeta$  :

1. La media muestral:  $\hat{E}(\zeta) = \frac{\sum_{r=1}^{1000} \zeta(r)}{1000}$  y su intervalo de confianza asintótico de un 95 % .

2. El error cuadrático medio:  $ECM(\zeta) = \hat{E}(\zeta - \alpha)^2 = \hat{V}(\zeta) + (\hat{E}(\zeta) - \alpha)^2$  y su intervalo de confianza asintótico de un 95 % .
3. El error relativo absoluto:  $Err(\zeta) = \frac{|\alpha|}{|\hat{E}(\zeta)|}$ .

En cada una de las situaciones planteadas se consideró mejor estimador al de menor sesgo.

### **Función grado de pertenencia y performance en las imágenes simuladas**

La forma de presentar estos resultados será la siguiente:

- Graficos de la función de pertenencia original versus las estimadas por los diferentes métodos
- Segunda etapa, analizaremos el ajuste de las imágenes generadas de la siguiente manera:
  - Con el objetivo de estudiar qué tan bien clasifica la función grado de pertenencia estimada a los píxeles de las clases de entrenamiento, dado  $k \in (0, 1)$ , definimos a los siguientes conjuntos

$$A_{1-k} = \{x \in \text{clase I} : \hat{g}_{c,\zeta}(x) > 1 - k\}$$

$$B_k = \{x \in \text{clase II} : \hat{g}_{c,\zeta}(x) \leq k\},$$

luego estudiaremos los cardinales de  $A_{1-k}$  y  $B_k$  ( $\#A_{1-k}$ ,  $\#B_k$ ) para  $k = 0,3, 0,35, 0,4, 0,45, 0,5$  y los tres tipos de estimadores de  $g_{c,\zeta}$  (denotados por  $\hat{g}_{c,\zeta}$ ).

- El ajuste de la función grado de pertenencia en cada una de las clases, la mediremos con

$$\frac{1}{1000} \sum_{r=1}^{1000} \sum_{\substack{x_{ij}^r \in \\ \text{clase I}}} (\hat{g}_{c,\zeta}(x_{ij}^r) - 1)^2$$

$$\frac{1}{1000} \sum_{r=1}^{1000} \sum_{\substack{x_{ij}^r \in \\ \text{clase II}}} (\hat{g}_{c,\zeta}(x_{ij}^r))^2$$

- El ajuste global se medirá con

$$\frac{1}{1000} \sum_{r=1}^{1000} \sum_{\substack{(i,j) \in \\ Cp_{0,7}^+}} (\hat{g}_{c,\zeta}(x_{ij}^r) - \alpha_{ij})^2$$

$$\frac{1}{1000} \sum_{r=1}^{1000} \sum_{\substack{(i,j) \in \\ Cp_{0,3}^-}} (\hat{g}_{c,\zeta}(x_{ij}^r) - \alpha_{ij})^2$$

donde  $Cp_{0,7}^+ = \{(i, j) : \alpha_{ij} \geq 0,7\}$  y  $Cp_{0,3}^- = \{(i, j) : \alpha_{ij} \leq 0,3\}$ .

A continuación se muestran los resultados obtenidos cuando se contaminaron las clases con píxeles puros de la otra clase, quedando en el Apéndice A los resultados obtenidos cuando se contaminaron las clases de entrenamiento con píxeles de mezcla de ambas clases.

La exposición de los resultados de las simulaciones estarán entonces divididas en las diferentes formas de combinar en pares las clases en estudio. Dentro de cada una de estas situaciones se expondrá entonces un cuadro con los valores obtenidos de la estimación del parámetro  $\alpha$  en los diferentes grados de contaminación (intervalos de confianza para  $E(\alpha)$  y el Error Cuadrático Medio y el Error Relativo Absoluto), acompañado de gráficos de los intervalos de confianza para  $E(\alpha)$  y el error absoluto relativo. En cuanto a la función grado de pertenencia, se presentan las diferentes gráficas de las curvas estimadas. Y por último se presenta un cuadro que expresa el nivel de ajuste dentro de las imágenes acompañado por gráficos que describen como van creciendo y decreciendo los valores proporcionales de  $\#A_i/169$  y  $\#B_j/169$  respectivamente a medida que  $i$  y  $j$  disminuyen (en el gráfico se exponen los valores de  $i = 0,7, 0,65, 0,6, 0,55, 0,5$  y  $j = 0,5, 0,45, 0,4, 0,35, 0,3$ ) en función del grado y tipo de contaminación.

### 7.1.3. Imágenes generadas con $\mathcal{G}_I^0(-7)$ y $\mathcal{G}_I^0(-3)$

#### Estimación de Parámetros

	Estimador	Clase $\mathcal{G}_I^0(7,1,1)$			Clase $\mathcal{G}_I^0(3,1,1)$		
		Max. Verosimilitud	Momentos	M-estimador	Max. Verosimilitud	Momentos	M-estimador
Puro	I.C. Estimación	(-7.05186;-6.98329)	(-7.06142;-6.99186)	(-7.05882;-6.98779)	(-3.02222;-2.99284)	(-3.04007;-3.00797)	(-3.02467;-2.99467)
	I.C. ECM	(0.278690;0.333165)	(0.286962;0.343644)	(0.298926;0.358236)	(0.0511879;0.0611936)	(0.0612016;0.0739174)	(0.0533315;0.0639173)
	Error Rel. Abs.	0.997496	0.996209	0.998551	0.997496	0.992057	0.996787
Contami nación 5%	I.C. Estimación	(-6.58934;-6.52354)	(-6.50409;-6.43220)	(-6.72117;-6.65246)	(-3.12010;-3.08946)	(-3.11781;-3.08422)	(-3.13176;-3.10024)
	I.C. ECM	(0.443746;0.512727)	(0.569610;0.668118)	(0.373530;0.436359)	(0.0653188;0.0787217)	(0.0758297;0.0913360)	(0.0706482;0.0854501)
	Error Rel. Abs.	1.06765	1.08223	1.04684	0.966252	0.967426	0.962772
Contami nación 10%	I.C. Estimación	(-6.21266;-6.14963)	(-6.07322;-6.00059)	(-6.41684;-6.35134)	(-3.20800;-3.17626)	(-3.18894;-3.15391)	(-3.22941;-3.19656)
	I.C. ECM	(0.876719;0.980887)	(1.19123;1.34985)	(0.614303;0.702272)	(0.0931271;0.111701)	(0.0991714;0.119187)	(0.105199;0.125789)
	Error Rel. Abs.	1.13248	1.15953	1.09648	0.93981	0.945947	0.933712
Contami nación 20%	I.C. Estimación	(-5.56291;-5.50300)	(-5.36695;-5.29731)	(-5.83404;-5.77135)	(-3.41687;-3.38252)	(-3.36044;-3.32197)	(-3.46615;-3.43009)
	I.C. ECM	(2.30014;2.47097)	(2.97777;3.21649)	(1.61704;1.76096)	(0.219700;0.253237)	(0.195994;0.229309)	(0.265918;0.304782)
	Error Rel. Abs.	1.26515	1.3128	1.20634	0.882433	0.89788	0.87004

Cuadro 7.1: Estimación paramétrica de  $\alpha$  en imágenes generadas con  $\mathcal{G}_I^0(-7)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-3)$  contaminación con píxeles puros.

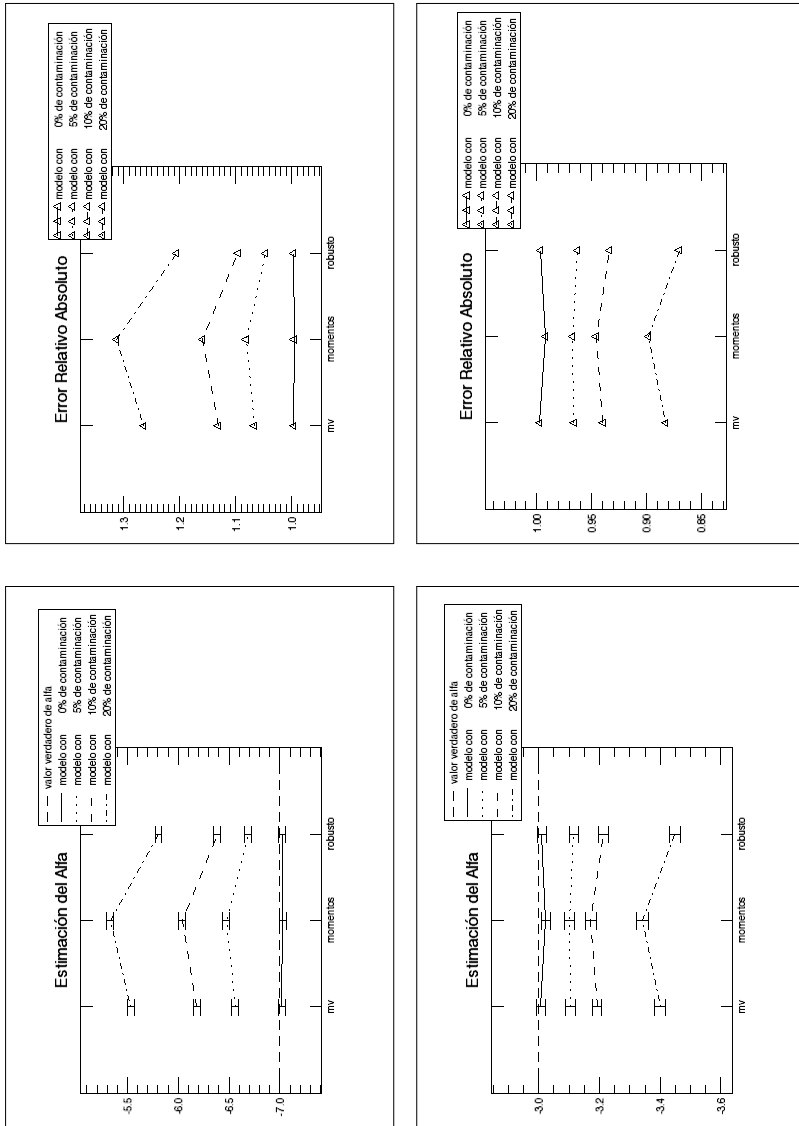


Figura 7.2: Estimación del parámetro de  $\alpha$  igual a -7 y -3 con contaminación de  $\mathcal{G}_1^0(-3)$  y  $\mathcal{G}_1^0(-7)$  respectivamente.

**Funciones de Pertenencia Contaminadas con Píxeles Puros**

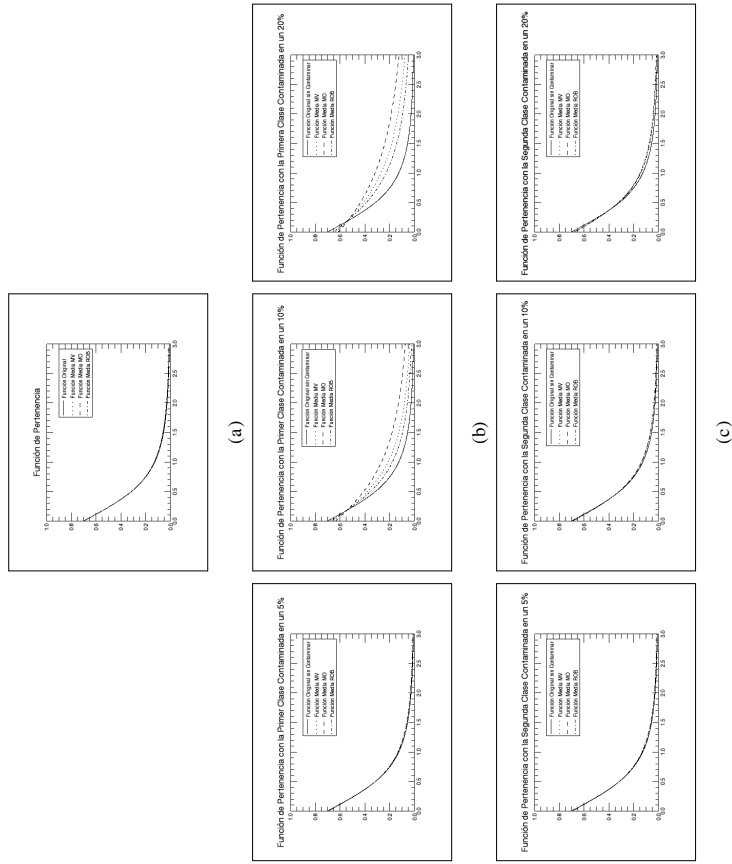
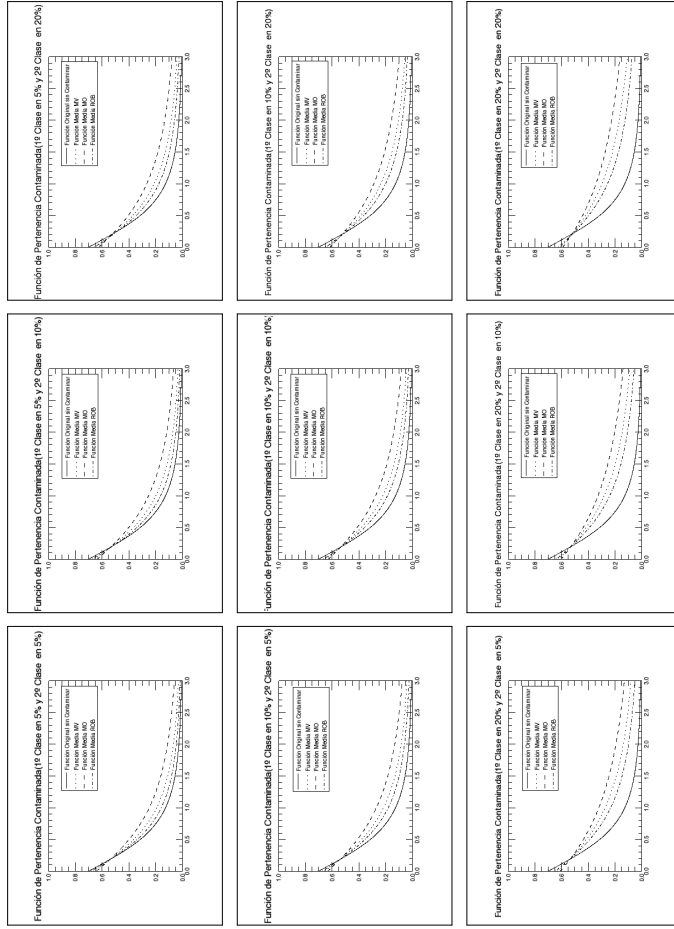


Figura 7.3: Función grado de pertenencia en imágenes generadas con  $\mathcal{G}_I^0(-7)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-3)$ . Modelo: (a) puro. (b) contaminación de la primer clase con píxeles puros. (c) contaminación de la segunda clase con píxeles puros.



(d)

Figura 7.4: Función grado de pertenencia en imágenes generadas con  $\mathcal{G}_1^0(-7)$  y  $\mathcal{G}_1^0(-3)$ . Modelo: (d) Contaminación de ambas clases con píxeles puros.



Estimador \ Promed	Aciertos en Clase 1					Ajustete Clase 1	Aciertos en Clase 2						Ajustete Clase 2	Ajustete en Cp 0.3	Ajustete en Cp 0.7	Ajustete Total
	#A <sub>0</sub> 50	#A <sub>0</sub> 55	#A <sub>0</sub> 60	#A <sub>0</sub> 65	#A <sub>0</sub> 70		#B <sub>0</sub> 50	#B <sub>0</sub> 45	#B <sub>0</sub> 40	#B <sub>0</sub> 35	#B <sub>0</sub> 30					
Puro	MV	130.3050	<b>113.6720</b>	<b>88.9310</b>	<b>51.9480</b>	10.0340	89.6640	76.6980	65.7580	55.9160	47.0710	38.5987	<b>107.2590</b>	110.8670	<b>218.1260</b>	
	MO	130.1530	113.3270	88.2480	50.9380	9.9840	<b>89.7980</b>	<b>76.8220</b>	<b>65.7930</b>	55.9470	47.0200	<b>38.5409</b>	107.5440	<b>110.6000</b>	218.1440	
	ROB	<b>130.3200</b>	113.5810	88.7750	51.8330	<b>10.2920</b>	89.6950	76.7160	65.7620	<b>55.9820</b>	<b>47.1010</b>	38.5721	107.3680	110.8040	218.1720	
Contaminación de la 1ª Clase	MV	131.3740	<b>111.2210</b>	79.3080	30.0100	1.2910	85.4360	70.1010	57.5660	46.8980	37.4920	39.4370	111.3690	101.4110	212.7800	
	MO	<b>134.2980</b>	109.5050	65.1130	11.1440	0.1420	82.0690	64.1490	49.9350	38.4620	29.3590	40.0397	111.4240	<b>97.4825</b>	<b>208.9065</b>	
	ROB	129.2390	110.9790	<b>84.0780</b>	<b>42.0950</b>	<b>5.0470</b>	35.8203	<b>87.8460</b>	<b>73.7880</b>	<b>62.1730</b>	<b>52.0400</b>	<b>38.9578</b>	<b>111.0580</b>	105.5200	216.5780	
Contaminación de la 1ª Clase	MV	129.4230	108.6830	73.3170	20.6520	0.4480	36.3204	83.9100	67.6120	54.4220	43.3050	39.7162	111.4960	100.2990	211.7950	
	MO	<b>131.9750</b>	106.0710	56.4560	6.2640	0.0710	<b>36.2660</b>	80.6790	61.5670	46.8500	35.1860	40.2662	111.5070	<b>97.2264</b>	<b>208.7334</b>	
	ROB	127.4350	<b>108.7820</b>	<b>79.4400</b>	<b>33.6270</b>	<b>2.2810</b>	36.6629	<b>86.3280</b>	<b>71.4700</b>	<b>59.2130</b>	<b>48.6620</b>	<b>39.4270</b>	<b>111.2310</b>	103.8960	215.1270	
Contaminación de la 2ª Clase	MV	126.3950	101.4480	52.2630	4.5170	0.0000	38.1500	80.1610	60.8980	46.1590	34.5550	25.8110	40.3394	111.7050	98.7484	210.4534
	MO	<b>128.7330</b>	95.4890	29.7630	0.8060	0.0170	<b>38.0735</b>	77.4380	54.5400	38.1920	26.8130	18.3230	40.7973	111.6670	<b>97.3421</b>	<b>209.0091</b>
	ROB	124.4360	<b>103.1270</b>	<b>64.9860</b>	<b>14.6940</b>	<b>0.2840</b>	38.5474	<b>82.8670</b>	<b>65.7910</b>	<b>52.1860</b>	<b>40.8790</b>	<b>31.7520</b>	<b>39.8695</b>	<b>111.5080</b>	101.5530	213.0610
Contaminación de la 2ª Clase	MV	<b>129.8800</b>	<b>112.7450</b>	<b>87.1370</b>	<b>48.8820</b>	8.1050	<b>34.4335</b>	88.2860	74.9110	64.2870	54.6590	45.5960	38.9987	110.3420	<b>108.0030</b>	<b>218.3450</b>
	MO	129.7870	112.5800	86.8500	48.5310	<b>8.4640</b>	34.4632	88.2990	<b>74.9850</b>	<b>64.3360</b>	54.6790	45.5920	39.0104	110.3370	108.1250	218.4620
	ROB	129.8610	112.6340	86.8500	48.6340	8.2870	34.4608	<b>88.3500</b>	74.9260	64.2890	<b>54.6870</b>	<b>45.6270</b>	<b>38.9593</b>	<b>110.2270</b>	108.1440	218.3710
Contaminación de la 2ª Clase	MV	129.0980	111.1690	83.8560	43.2860	5.5770	34.9020	86.5320	72.5210	62.0600	51.9980	43.0050	39.4144	109.2760	109.1890	218.4650
	MO	<b>129.2120</b>	<b>111.3060</b>	<b>84.2350</b>	<b>43.9970</b>	<b>6.5300</b>	<b>34.8387</b>	86.4060	72.5340	<b>62.0990</b>	<b>52.0780</b>	<b>43.0390</b>	39.5218	109.6630	<b>109.0700</b>	218.7330
	ROB	129.0140	110.8660	83.2450	42.5670	5.6780	34.9709	<b>86.6660</b>	<b>72.5600</b>	62.0480	52.0150	42.9960	<b>39.3317</b>	<b>108.9910</b>	109.4320	<b>218.4230</b>
Contaminación de la 2ª Clase	MV	127.5430	107.3940	76.3420	31.4810	2.0610	<b>35.8570</b>	83.6230	69.2970	57.3540	46.8200	38.1020	40.1090	107.0310	111.5090	218.5400
	MO	<b>127.8310</b>	<b>108.1970</b>	<b>77.9810</b>	<b>34.2880</b>	<b>3.3390</b>	35.6388	83.3350	69.2010	<b>57.4440</b>	<b>46.9630</b>	<b>38.3090</b>	40.3842	108.0510	<b>111.0200</b>	219.0710
	ROB	127.2670	106.6670	74.7700	29.5830	1.8980	36.0200	<b>83.8570</b>	<b>69.3830</b>	57.3340	46.7270	37.9940	<b>39.9247</b>	<b>106.3760</b>	111.9600	<b>218.3360</b>

Cuadro 7.2: Valores promedios obtenidos de 1000 imágenes generadas con las clases  $\mathcal{G}_I^0(-7)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-3)$ . Contaminación: una clase.

Ajuste en Imágenes

Estimador √Promed	Aciertos en Clase 1				Aciertos en Clase 2				Ajustete Clase 1	Aciertos en Clase 2				Ajustete Clase 2	Ajustete en Cp 0,3	Ajustete en Cp 0,7	Ajustete Total
	#A <sub>0,55</sub>	#A <sub>0,60</sub>	#A <sub>0,65</sub>	#A <sub>0,70</sub>	#B <sub>0,50</sub>	#B <sub>0,45</sub>	#B <sub>0,40</sub>	#B <sub>0,35</sub>		#B <sub>0,30</sub>	#B <sub>0,50</sub>	#B <sub>0,45</sub>	#B <sub>0,40</sub>				
Puro	MV	130.3050	113.6720	88.9310	51.9480	10.0340	34.1460	89.6640	76.6980	65.7580	55.9160	47.0710	38.5987	107.2590	110.8670	218.1260	
	MO	130.1530	113.3270	88.2480	50.9380	9.9840	34.2379	89.7980	76.8220	65.7930	55.9470	47.0200	38.5499	107.5440	110.6000	218.1440	
	ROB	130.3200	113.5810	88.7750	51.8330	10.2920	34.1606	89.6950	76.7160	65.7620	55.9820	47.1010	38.5721	107.3680	110.8040	218.1720	
Contaminación de la 1ª y la 2ª Clase	MV	130.9570	110.1240	76.6220	26.1010	0.9370	35.7645	84.2070	68.4760	56.3330	45.3260	36.1890	39.7517	110.7930	102.1660	212.9590	
	MO	134.0120	108.3300	62.0080	9.1240	0.1080	35.6698	80.6200	62.7380	48.4950	37.1080	28.4030	40.3399	11.0710	98.1004	109.1714	
	ROB	128.8200	109.9640	81.8930	38.4440	3.7810	36.1116	86.5990	72.0530	60.8230	50.6690	41.4400	39.3069	110.4550	106.2910	216.7460	
	MV	130.2650	108.1560	71.7340	20.1920	0.5630	36.2281	82.3330	66.2420	53.6600	42.6210	33.8040	40.1003	109.7290	103.3700	213.0990	
	MO	133.4000	105.9260	56.0870	6.8120	0.0850	36.0555	78.4120	60.4930	45.6620	34.6310	26.3410	40.7133	110.3990	99.1086	209.5076	
	ROB	127.9930	108.1300	77.6130	32.1470	2.2960	36.6047	84.8520	69.7630	58.4330	47.8810	38.8850	39.6510	109.2190	107.5690	216.7880	
	MV	128.7730	103.3230	60.1170	10.0880	0.0720	37.1680	80.0570	62.6250	48.1570	37.4200	28.9080	40.6750	107.5470	105.7240	213.2710	
	MO	132.1660	100.1690	42.5700	3.1990	0.0700	36.8734	76.2090	55.2250	40.4200	29.5320	22.0720	41.3277	108.8950	101.1960	210.0910	
	ROB	126.3100	103.6650	67.2650	19.4890	0.6510	37.6125	82.3460	66.4580	53.1210	42.5630	33.7890	40.1950	106.6350	110.0710	216.7060	
	MV	129.0170	107.4880	70.1790	17.0960	0.2700	36.5961	82.6960	66.0700	53.1180	41.7690	32.8960	40.0010	110.9100	101.0530	211.9630	
MO	131.6640	104.7220	52.9490	4.9400	0.0630	36.4896	79.1210	60.2300	45.2450	33.9260	25.5410	40.5406	111.1490	97.8450	208.9940		
ROB	127.0070	107.7430	76.8570	29.8650	1.6430	36.9441	85.0840	69.8060	57.9250	47.1820	38.0280	39.5753	110.6120	104.6620	215.2740		
MV	128.3300	105.2320	64.5320	12.4140	0.1230	37.0409	80.7190	63.8740	50.2750	39.1100	30.5420	40.3247	109.8590	102.2540	212.1130		
MO	131.1470	101.9600	46.3220	3.5030	0.0630	36.8579	77.0100	57.8760	42.4240	31.5630	23.5760	40.8888	110.4930	98.8539	209.3469		
ROB	126.2490	105.7290	71.9070	23.6970	0.9370	37.4175	83.3040	67.5440	55.3260	44.4210	35.5220	39.8960	109.3830	105.9320	215.3150		
MV	126.9330	99.8870	50.9530	4.8870	0.0000	37.9366	78.6810	59.5850	44.7880	33.8370	25.7280	40.8569	107.7310	104.5990	212.3300		
MO	129.9430	95.3290	32.2700	1.4610	0.0610	37.6347	74.7240	52.1930	37.0600	26.5540	19.3590	41.4599	109.0460	100.9410	209.9870		
ROB	124.6960	100.8630	60.1110	12.3340	0.1880	38.3779	81.0290	63.9930	49.8080	39.1720	30.4450	40.4011	106.8420	108.4100	215.2520		
MV	126.0230	99.7300	47.7840	3.2040	0.0000	38.3949	78.6900	59.5810	44.4530	33.2510	24.9220	40.5583	111.1190	99.5040	210.6230		
MO	128.3860	93.3330	25.6590	0.6530	0.0170	38.2698	75.7300	53.1980	36.6920	25.8730	17.7410	41.0122	111.3160	97.9650	209.2810		
ROB	124.0570	101.7180	61.2810	11.8350	0.1830	38.7980	81.6200	64.2900	50.7700	39.3940	30.6280	40.1245	110.8730	102.3110	213.1840		
MV	125.4060	96.5760	39.7560	1.7900	0.0000	38.7845	76.6740	57.1060	41.5080	30.7540	22.7340	40.8222	110.1330	100.7050	210.8380		
MO	127.7660	89.0660	20.1320	0.4240	0.0160	38.5886	73.6530	50.1020	33.9890	23.6840	15.9720	41.2969	110.7210	98.9793	209.7003		
ROB	123.3940	99.0660	54.4450	7.9260	0.0530	39.2137	79.7660	62.0550	47.8700	36.7050	28.2820	40.3941	109.6900	103.5620	213.2520		
MV	124.1260	88.4810	23.4320	0.3490	0.0000	39.5505	74.7250	51.2410	35.8810	25.4070	18.2610	41.2532	108.2150	103.0430	211.2580		
MO	126.5660	77.6300	10.4800	0.1620	0.0110	39.2479	71.1800	44.1540	28.2620	18.9200	12.2060	41.7571	109.4770	101.0740	210.5510		
ROB	122.0100	92.4910	38.6340	2.7410	0.0000	40.0355	77.9360	57.2200	42.1770	31.1950	23.4540	40.8157	107.3180	105.9920	213.3100		

Cuadro 7.3: Valores promedios obtenidos de 1000 imágenes generadas con las clases  $\mathcal{G}_I^0(-7)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-3)$ . Contaminación: ambas clases.

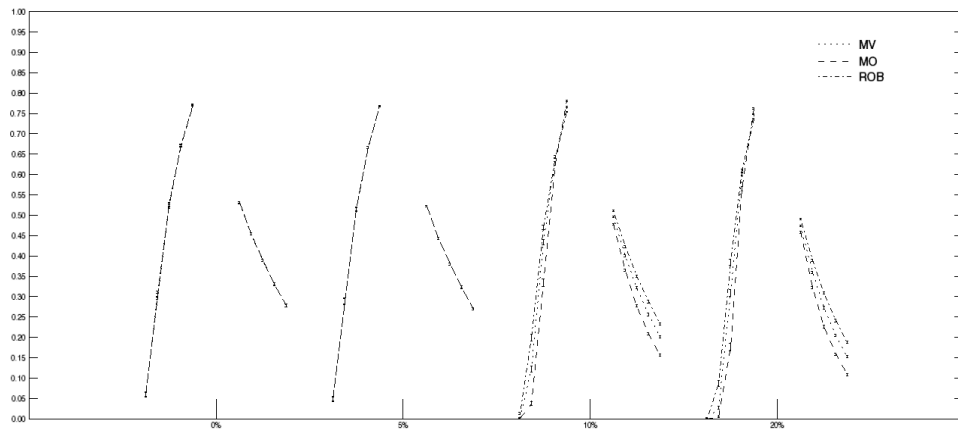


Figura 7.5: Proporción de Aciertos Promedio en  $A_{0,7}$ ,  $A_{0,65}$ ,  $A_{0,6}$ ,  $A_{0,55}$ ,  $A_{0,5}$  y  $B_{0,5}$ ,  $B_{0,45}$ ,  $B_{0,4}$ ,  $B_{0,35}$ ,  $B_{0,3}$  cuando se contamina la 1ª Clase con píxeles de  $\mathcal{G}_I^0(-3)$  en 0%, 5%, 10% y 20%

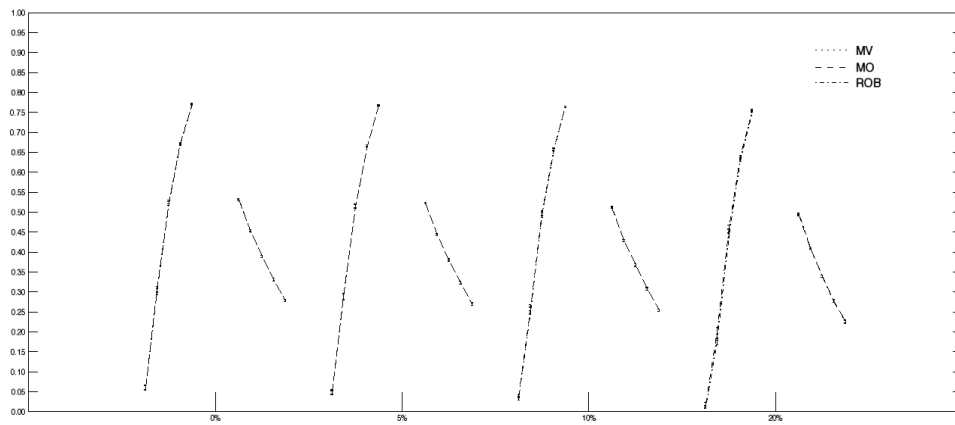


Figura 7.6: Proporción de Aciertos Promedio en  $A_{0,7}$ ,  $A_{0,65}$ ,  $A_{0,6}$ ,  $A_{0,55}$ ,  $A_{0,5}$  y  $B_{0,5}$ ,  $B_{0,45}$ ,  $B_{0,4}$ ,  $B_{0,35}$ ,  $B_{0,3}$  cuando se contamina la 2ª Clase con píxeles de  $\mathcal{G}_I^0(-7)$  en 0%, 5%, 10% y 20%

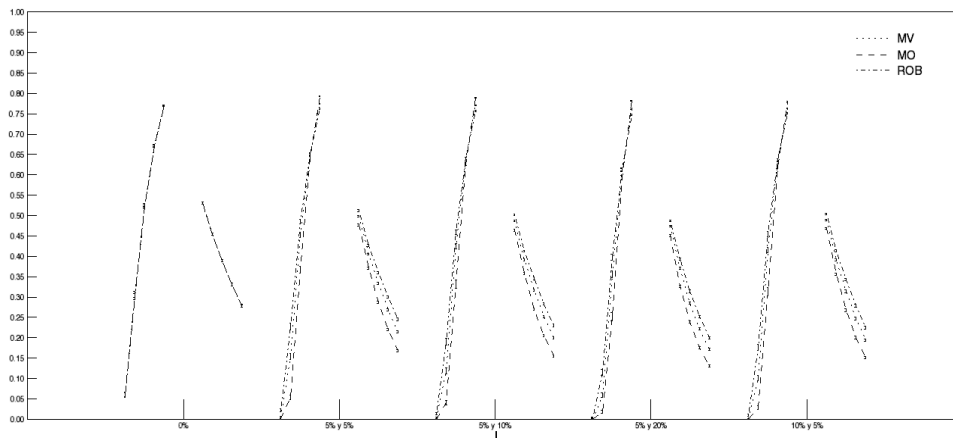


Figura 7.7: Proporción de Aciertos Promedio en  $A_{0,7}$ ,  $A_{0,65}$ ,  $A_{0,6}$ ,  $A_{0,55}$ ,  $A_{0,5}$  y  $B_{0,5}$ ,  $B_{0,45}$ ,  $B_{0,4}$ ,  $B_{0,35}$ ,  $B_{0,3}$  cuando se contaminan la 1ª Clase y la 2ª Clase con píxeles de  $\mathcal{G}_I^0(-3)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-7)$  respectivamente

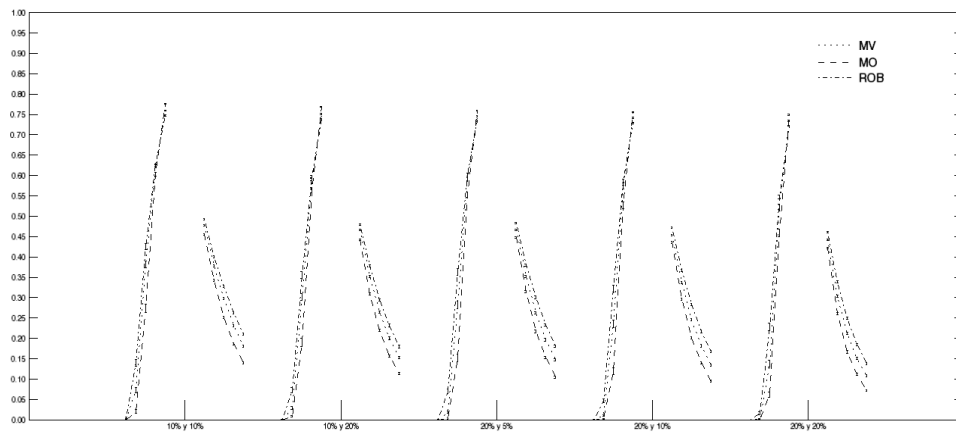


Figura 7.8: Proporción de Aciertos Promedio en  $A_{0,7}$ ,  $A_{0,65}$ ,  $A_{0,6}$ ,  $A_{0,55}$ ,  $A_{0,5}$  y  $B_{0,5}$ ,  $B_{0,45}$ ,  $B_{0,4}$ ,  $B_{0,35}$ ,  $B_{0,3}$  cuando se contaminan la 1ª Clase y la 2ª Clase con píxeles de  $\mathcal{G}_I^0(-3)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-7)$  respectivamente

7.1.4. Imágenes generadas con  $\mathcal{G}_I^0(-15)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-7)$ 

## Estimación de Parámetros

	Estimador	Clase $\mathcal{G}_I^0(15,1,1)$			Clase $\mathcal{G}_I^0(7,1,1)$		
		Max. Verosimilitud	Momentos	M-estimador	Max. Verosimilitud	Momentos	M-estimador
Puro	I.C. Estimación	(-15.1111;-14.9642)	(-15.1189;-14.9715)	(-15.1271;-14.9741)	(-7.05186;-6.98329)	(-7.06142;-6.99186)	(-7.05882;-6.98779)
	I.C. ECM	(1.27970;1.52984)	(1.28908;1.54213)	(1.38728;1.66263)	(0.278690;0.333165)	(0.286962;0.343644)	(0.298926;0.358236)
	Error Rel. Abs.	0.997496	0.996994	0.996638	0.997496	0.996209	0.996682
Contami nación 5%	Intervalo	(-14.2588;-14.1185)	(-14.2162;-14.0733)	(-14.4388;-14.2932)	(-7.26485;-7.19359)	(-7.25808;-7.18569)	(-7.30055;-7.22634)
	ECM	(1.79175;2.08385)	(1.90413;2.21551)	(1.64103;1.91970)	(0.347092;0.418218)	(0.353609;0.426222)	(0.387208;0.467772)
	Error Rel. Abs.	1.05718	1.06047	1.04413	0.968292	0.969276	0.96373
Contami nación 10%	I.C. Estimación	(-13.1912;-13.0613)	(-13.1111-12.9774)	(-13.4944;-13.3598)	(-7.45448;-7.38089)	(-7.43459;-7.35968)	(-7.51614;-7.43910)
	I.C. ECM	(4.35931;4.85472)	(4.71764;5.25874)	(3.43350;3.87005)	(0.478230;0.574873)	(0.473893;0.571178)	(0.558757;0.669066)
	Error Rel. Abs.	1.14275	1.14993	1.11714	0.943691	0.946312	0.936127
Contami nación 20%	I.C. Estimación	(-11.6102;-11.4986)	(-11.5143;-11.3981)	(-11.9422;-11.8269)	(-7.90340;-7.82427)	(-7.85434;-7.77342)	(-8.03491-7.95129)
	I.C. ECM	(12.3050;13.0591)	(13.0296;13.8447)	(10.2197;10.9218)	(1.06856;1.23812)	(1.00475;1.17155)	(1.34004;1.54180)
	Error Rel. Abs.	1.2982	1.30934	1.26215	0.890151	0.895841	0.875755

Cuadro 7.4: Estimación paramétrica de  $\alpha$  en imágenes generadas con  $\mathcal{G}_I^0(-15)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-7)$  contaminación con píxeles puros.

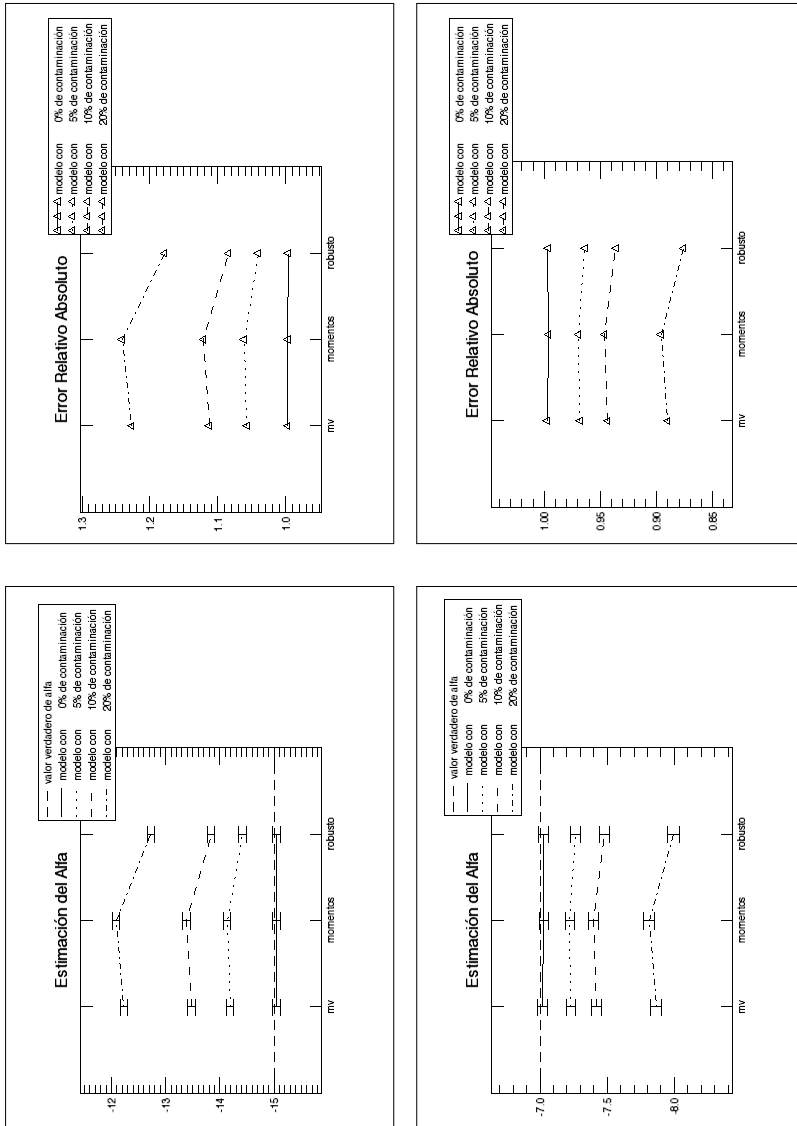


Figura 7.9: Estimación del parámetro de  $\alpha$  igual a -15 y -7 con contaminación de  $\mathcal{G}_1^0(-7)$  y  $\mathcal{G}_1^0(-15)$  respectivamente.

### Funciones de Pertenencia Contaminadas con Píxeles Puros

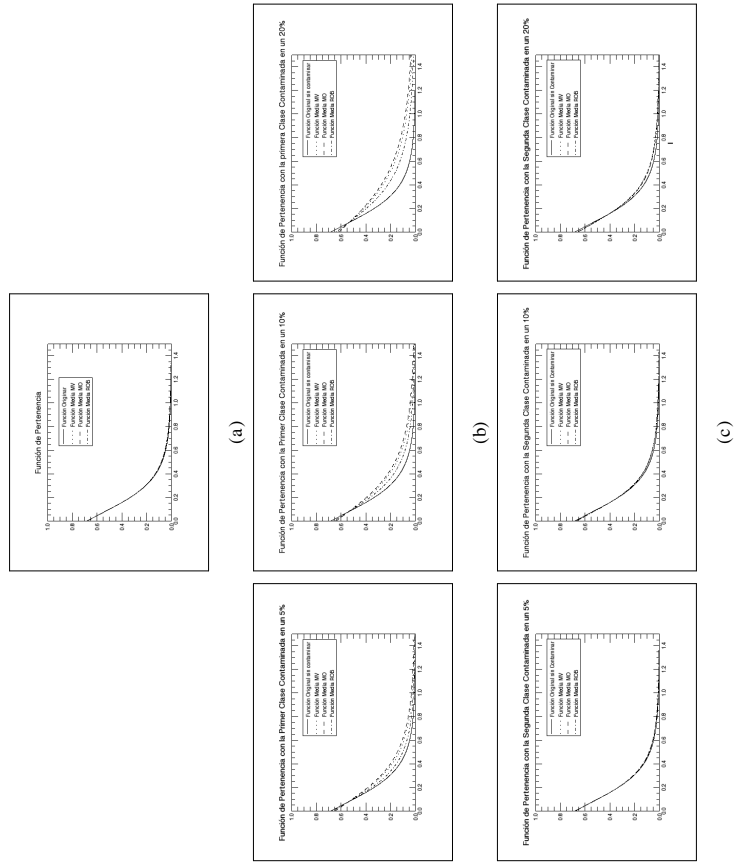
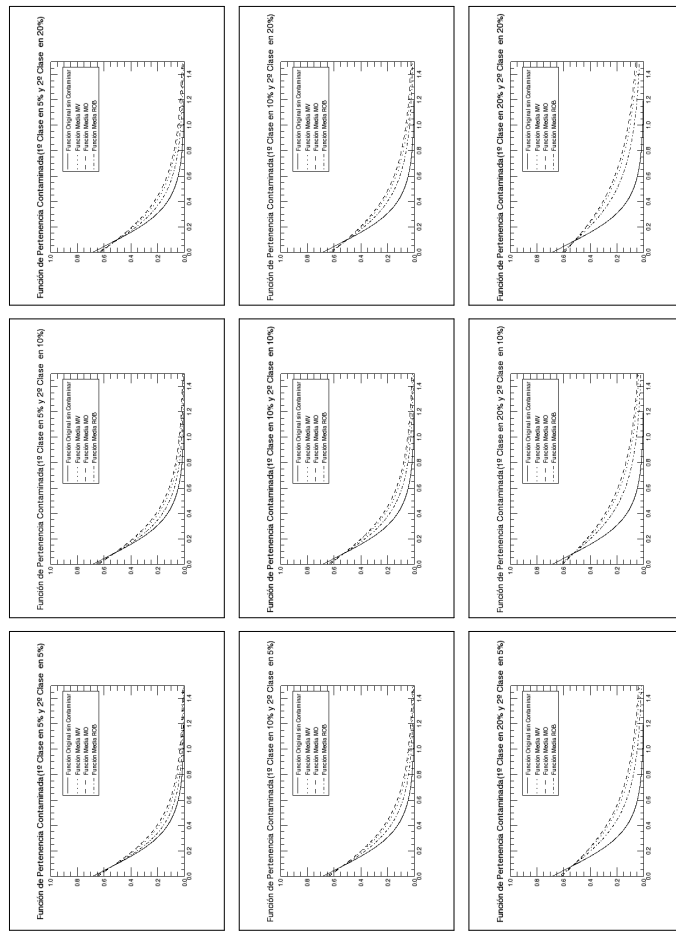


Figura 7.10: Función grado de pertenencia en imágenes generadas con  $\mathcal{G}_I^0(-15)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-7)$ . Modelo: (a) puro, (b) contaminación de la primer clase con píxeles puros, (c) contaminación de la segunda clase con píxeles puros.



(d)

Figura 7.11: Función grado de pertenencia en imágenes generadas con  $\mathcal{G}_I^0(-15)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-7)$ . Modelo: (d) Contaminación de ambas clases con píxeles puros.



Ajuste en Imágenes

Estimador Promed	Aciertos en Clase 1					Ajustete Clase 1	Aciertos en Clase 2					Ajustete Clase 2	Ajustete en Cp 0.3	Ajustete en Cp 0.7	Ajustete Total	
	#A0.50	#A0.55	#A0.60	#A0.65	#A0.70		#B0.50	#B0.45	#B0.40	#B0.35	#B0.30					
Puro	MV	128.1980	108.9280	79.5370	36.2900	3.2530	35.4708	86.9510	72.4340	60.4800	50.0320	40.8420	39.1564	110.8460	103.9860	214.8320
	MO	128.1400	108.8440	79.3420	36.0790	3.1900	35.4959	86.9850	72.4620	60.5080	50.0230	40.8130	39.1455	110.7750	104.0700	214.8450
	ROB	128.1910	108.8740	79.2750	36.4460	3.5950	35.4772	86.9490	72.4530	60.4620	50.0740	40.8440	39.1359	110.8260	104.0630	214.8890
Contaminación de la 1ª Clase	MV	128.9710	105.5840	67.2050	15.8760	0.3490	36.6808	83.0480	66.1960	52.5930	41.3880	32.1960	39.8592	111.3090	100.0080	211.3170
	MO	129.8150	104.9110	62.7710	11.5140	0.1340	36.6255	82.1110	64.4530	50.3830	39.0120	29.8940	40.0234	111.3450	98.9872	210.3322
	ROB	126.9890	106.0510	73.5960	27.0780	1.5220	36.9693	85.2240	69.6910	57.0390	46.3190	36.9880	39.4591	111.0530	102.9930	214.0460
Contaminación de la 2ª Clase	MV	126.9930	102.7680	60.2940	9.9320	0.0810	37.3547	81.7180	63.8010	49.6760	38.2090	29.2210	40.0857	111.4350	99.3654	210.8004
	MO	127.7270	101.8270	55.2150	6.6510	0.0200	37.2991	80.7990	62.0650	47.5180	35.8830	27.0600	40.2371	111.4600	98.5570	210.0170
	ROB	125.1660	103.6550	68.2360	19.7650	0.6840	37.6418	83.8210	67.4240	54.2250	43.1660	33.8750	39.7061	111.2130	101.9180	213.1310
Contaminación de la 2ª Clase	MV	124.2020	94.6840	38.2770	1.6210	0.0000	38.8558	78.4880	57.3480	41.7460	30.2430	21.7030	40.6079	111.6820	98.6387	210.3207
	MO	124.9610	92.8640	31.8440	0.8200	0.0000	38.7979	77.6700	55.4770	39.4040	28.0130	19.4960	40.7393	111.6900	98.2490	209.9390
	ROB	122.2800	97.3110	51.7910	6.9720	0.0470	39.1954	80.8020	61.9690	47.4810	35.9750	27.2050	40.2187	111.4990	100.5480	212.0470
Contaminación de la 2ª Clase	MV	127.8150	108.0410	77.6770	33.4610	2.5110	35.6985	85.6770	70.8280	59.2110	48.9830	39.6290	39.4729	299.2670	104.5940	403.8610
	MO	127.7940	108.0120	77.7220	33.4680	2.5740	35.7001	85.6760	70.8450	59.2610	48.9910	39.6360	39.4852	299.4210	104.6150	404.0360
	ROB	127.7950	107.9100	77.2240	33.4270	2.7570	35.7201	85.6450	70.8770	59.1800	49.0210	39.6260	39.4374	299.2540	104.7100	403.9640
Contaminación de la 2ª Clase	MV	127.1020	106.2230	73.8660	28.0210	1.5920	36.1186	84.1200	68.5670	57.1020	46.4550	37.1900	39.8006	109.4050	105.6990	215.1040
	MO	127.1440	106.2970	74.0960	28.5000	1.7230	36.0905	84.0810	68.6030	57.1440	46.4850	37.2360	39.8433	109.5590	105.6410	215.2000
	ROB	126.9600	105.8070	72.8010	27.4730	1.6910	36.1972	84.1950	68.6680	57.0010	46.4150	37.0980	39.7066	109.0890	105.9600	215.0490
Contaminación de la 2ª Clase	MV	125.5670	102.2710	65.1630	17.5640	0.5320	36.9591	81.3140	65.6610	52.5880	41.5620	32.5900	40.3440	107.3310	107.8340	215.1650
	MO	125.6710	102.6000	65.9880	18.5500	0.6430	36.8852	81.2310	65.6540	52.6600	41.6980	32.7370	40.4355	107.6710	107.6640	215.3350
	ROB	125.2420	101.0510	62.6910	16.2860	0.4440	37.1474	81.6090	65.7280	52.3940	41.3690	32.3760	40.1337	106.5830	108.3540	214.9370

Cuadro 7.5: Valores promedios obtenidos de 1000 imágenes generadas con las clases  $\mathcal{G}_I^0(-15)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-7)$ . Contaminación: una clase.

Estimador √Promed	Aciertos en Clase 1				Ajustete Clase 1	Aciertos en Clase 2				Ajustete Clase 2	Ajustete en Cp 0.3	Ajustete en Cp 0.7	Ajustete Total		
	#A <sub>0.50</sub>	#A <sub>0.55</sub>	#A <sub>0.60</sub>	#A <sub>0.65</sub>		#A <sub>0.70</sub>	#B <sub>0.50</sub>	#B <sub>0.55</sub>	#B <sub>0.60</sub>					#B <sub>0.65</sub>	#B <sub>0.70</sub>
Puro	MV	128.1980	108.9280	79.5370	36.2900	3.2530	86.9510	72.4340	60.4800	50.0320	40.8420	39.1564	110.8460	103.9860	214.8320
	MO	128.1400	108.8440	79.3420	36.0790	3.1900	86.9850	72.4620	60.5080	50.0230	40.8130	39.1455	110.7750	104.0700	214.8450
	ROB	128.1910	108.8740	79.2750	36.4460	3.5950	86.9490	72.4530	60.4620	50.0740	40.8440	39.1359	110.8260	104.0630	214.8890
Contaminación de la 1ª y la 2ª Clase	MV	128.6450	104.4430	64.4270	13.3950	0.2080	81.9650	64.6900	51.5270	40.0950	31.1280	40.1069	110.8540	100.6310	211.4850
	MO	129.5150	103.8430	60.0430	9.5980	0.0770	81.0250	63.0530	49.3460	37.7420	28.9670	40.2747	110.9780	99.5538	210.5318
	ROB	126.6080	105.0110	71.1880	24.0410	1.1360	84.0470	68.1120	55.8510	45.1370	35.7880	39.7301	110.5530	103.6380	214.1910
	MV	127.8900	102.0560	58.8100	9.8320	0.0980	80.4860	62.5550	48.9760	37.5060	28.9150	40.3840	109.8720	101.7630	211.6350
	MO	128.8510	101.3270	54.2070	6.8050	0.0300	79.4080	60.9320	46.6810	35.2180	26.8750	40.5656	110.1280	100.6210	210.7490
	ROB	125.8160	102.7300	66.0360	18.5790	0.6760	82.6410	65.9250	53.5710	42.4600	33.3510	39.9790	109.3210	104.8850	214.2060
	MV	126.4120	96.7940	46.1410	3.9870	0.0000	78.3600	59.1480	43.7610	32.5940	24.4220	40.8396	107.9210	103.9550	211.8760
	MO	127.4910	95.8410	41.3590	2.7450	0.0060	77.3690	57.2090	41.5070	30.3740	22.6240	41.0406	108.3850	102.7320	211.1170
	ROB	124.1970	97.5530	54.0480	9.4600	0.1190	80.2500	62.8240	48.4800	37.3630	28.6120	40.3729	106.8820	107.2670	214.1490
	MV	126.6330	101.5890	57.3210	7.9570	0.0480	80.7230	62.4140	48.6130	36.8960	28.2680	40.3104	110.9750	99.9892	210.9642
MO	127.4300	100.7130	52.2570	5.2650	0.0090	79.7500	60.7390	46.4110	34.6350	26.2960	40.4660	111.0880	99.1246	210.2126	
ROB	124.7700	102.5510	65.5740	17.0860	0.4660	82.7510	65.8790	53.1010	41.9220	32.7550	39.9531	110.7040	102.5620	213.2660	
MV	125.9630	98.9040	50.8350	5.2760	0.0040	79.9624	60.2780	45.8460	34.3610	26.1660	40.5695	110.0160	101.1210	211.1370	
MO	126.8230	97.9190	45.9170	3.4440	0.0030	78.0420	58.5990	43.5990	32.2340	24.2450	40.7384	110.2580	100.1920	210.4500	
ROB	124.0580	100.0560	59.6120	12.4210	0.2400	81.3770	63.6910	50.6180	39.2180	30.4380	40.1859	109.4940	103.8050	213.2990	
MV	124.6000	92.9900	36.9510	1.7900	0.0000	77.1850	56.3760	40.5500	29.4520	21.7790	40.9953	108.1310	103.3110	211.4420	
MO	125.4980	91.6070	31.9820	1.1700	0.0000	76.1900	54.2500	38.3930	27.3900	20.0170	41.1825	108.5790	102.3030	210.8820	
ROB	122.4980	94.3970	46.1800	5.1780	0.0050	79.2380	60.3890	45.2300	34.1050	25.7280	40.5542	107.1230	106.1750	213.2980	
MV	123.8600	92.9960	34.3370	1.1180	0.0000	77.4660	56.1280	40.3480	29.1380	21.0430	40.7808	111.2280	99.2653	210.4933	
MO	124.6040	91.1000	28.1490	0.6050	0.0000	76.5900	54.2950	37.9940	27.0860	18.9710	40.9165	111.3220	98.8200	210.1420	
ROB	121.9310	95.7960	48.3680	5.5360	0.0190	79.7970	60.6290	46.2830	34.7110	26.3130	40.4163	110.9890	101.1870	212.1760	
MV	123.1470	89.2380	27.0630	0.6330	0.0000	75.6810	53.7790	37.4700	26.7630	19.0400	40.9959	110.3470	100.4010	210.7480	
MO	123.9150	87.0150	21.6770	0.3520	0.0000	74.6870	51.8140	35.1860	24.8300	17.1020	41.1424	110.5670	99.8931	210.4601	
ROB	121.2040	92.5790	40.8800	3.4470	0.0010	78.2490	58.4280	43.3910	32.1070	24.1230	40.6141	109.8510	102.4190	212.2700	
MV	121.8270	79.6570	14.0340	0.1030	0.0000	40.0368	74.1440	48.1280	31.9410	21.9370	41.3478	68.0030	102.5930	170.5960	
MO	122.6270	76.5280	10.8110	0.0400	0.0000	39.9089	73.0720	46.0110	29.7690	13.2680	41.5078	59.2780	102.0100	161.2880	
ROB	119.7810	84.4720	26.0190	0.9890	0.0000	40.4896	76.6800	53.8190	37.7900	26.8810	40.9277	93.3670	104.7600	198.1270	

Cuadro 7.6: Valores promedios obtenidos de 1000 imágenes generadas con las clases  $\mathcal{G}_f^0(-15)$  y  $\mathcal{G}_f^0(-7)$ . Contaminación: ambas clases.

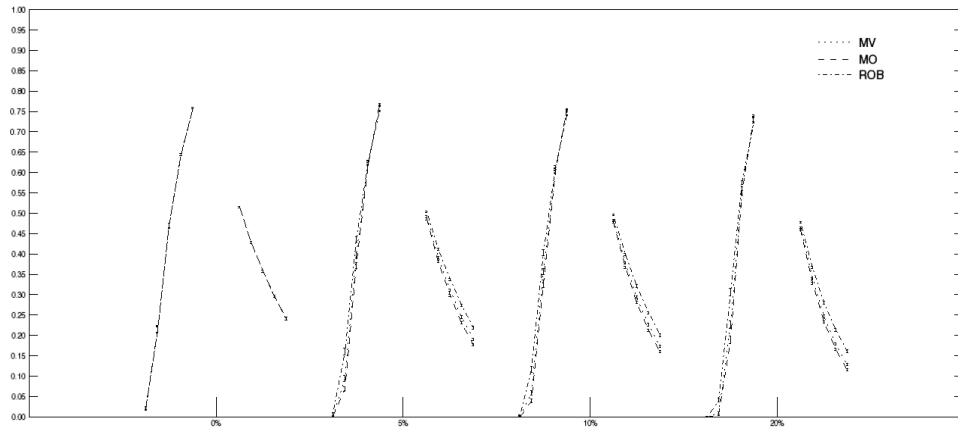


Figura 7.12: Proporción de Aciertos Promedio en  $A_{0,7}$ ,  $A_{0,65}$ ,  $A_{0,6}$ ,  $A_{0,55}$ ,  $A_{0,5}$  y  $B_{0,5}$ ,  $B_{0,45}$ ,  $B_{0,4}$ ,  $B_{0,35}$ ,  $B_{0,3}$  cuando se contamina la 1ª Clase con píxeles de  $\mathcal{G}_I^0(-7)$  en 0%, 5%, 10% y 20%

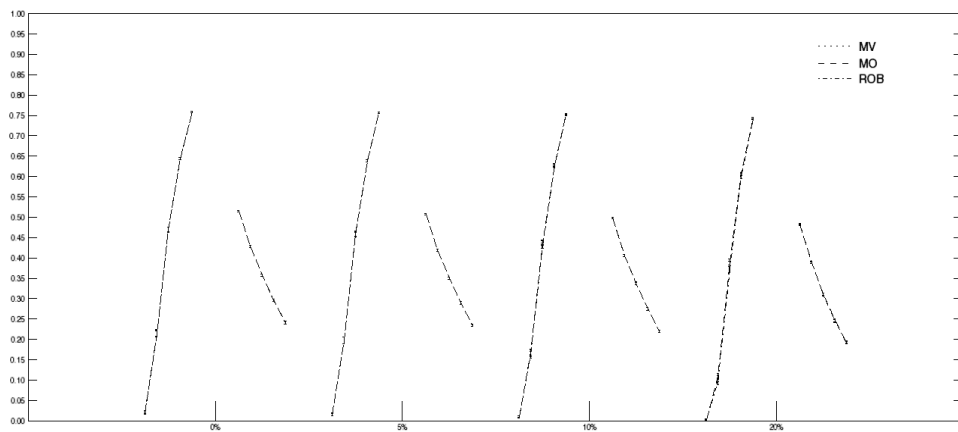


Figura 7.13: Proporción de Aciertos Promedio en  $A_{0,7}$ ,  $A_{0,65}$ ,  $A_{0,6}$ ,  $A_{0,55}$ ,  $A_{0,5}$  y  $B_{0,5}$ ,  $B_{0,45}$ ,  $B_{0,4}$ ,  $B_{0,35}$ ,  $B_{0,3}$  cuando se contamina la 2ª Clase con píxeles de  $\mathcal{G}_I^0(-15)$  en 0%, 5%, 10% y 20%

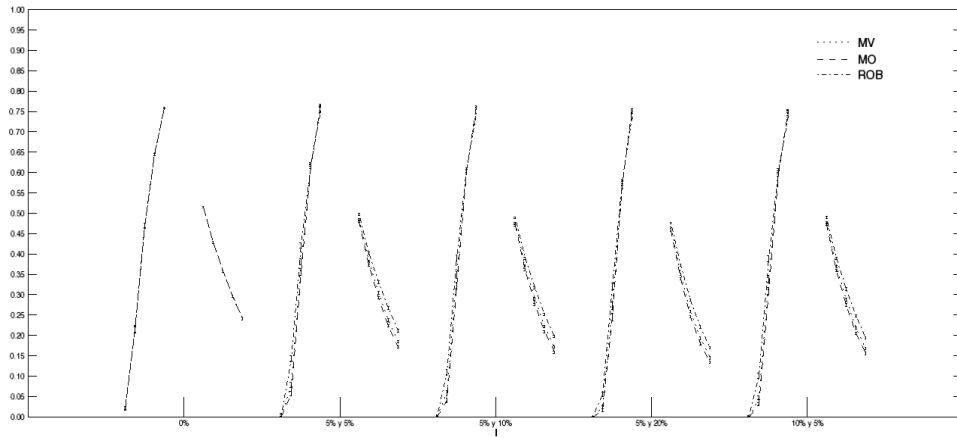


Figura 7.14: Proporción de Aciertos Promedio en  $A_{0,7}$ ,  $A_{0,65}$ ,  $A_{0,6}$ ,  $A_{0,55}$ ,  $A_{0,5}$  y  $B_{0,5}$ ,  $B_{0,45}$ ,  $B_{0,4}$ ,  $B_{0,35}$ ,  $B_{0,3}$  cuando se contaminan la 1<sup>o</sup> Clase y la 2<sup>o</sup> Clase con píxeles de  $\mathcal{G}_I^0(-7)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-15)$  respectivamente

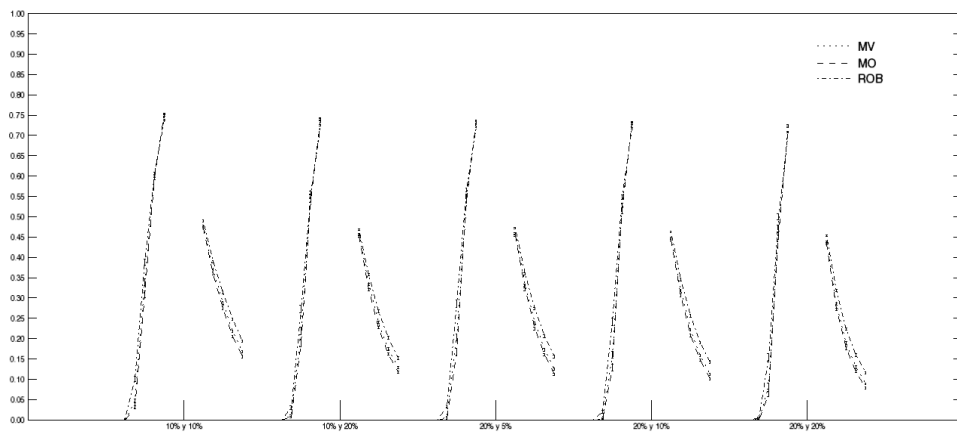


Figura 7.15: Proporción de Aciertos Promedio en  $A_{0,7}$ ,  $A_{0,65}$ ,  $A_{0,6}$ ,  $A_{0,55}$ ,  $A_{0,5}$  y  $B_{0,5}$ ,  $B_{0,45}$ ,  $B_{0,4}$ ,  $B_{0,35}$ ,  $B_{0,3}$  cuando se contaminan la 1<sup>o</sup> Clase y la 2<sup>o</sup> Clase con píxeles de  $\mathcal{G}_I^0(-7)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-15)$  respectivamente

7.1.5. Imágenes generadas con  $\mathcal{G}_I^0(-15)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-3)$ 

## Estimación de Parámetros

	Estimador	Clase $\mathcal{G}_I^0(15,1,1)$			Clase $\mathcal{G}_I^0(3,1,1)$		
		Max. Verosimilitud	Momentos	M-estimador	Max. Verosimilitud	Momentos	M-estimador
Puro	I.C. Estimación	(-15.1111;-14.9642)	(-15.1189;-14.9715)	(-15.1271;-14.9741)	(-3.02222;-2.99284)	(-3.04007;-3.00797)	(-3.02467;-2.99467)
	I.C. ECM	(1.27970;1.52984)	(1.28908;1.54213)	(1.38728;1.66263)	(0.0511879;0.0611936)	(0.0612016;0.0739174)	(0.0533315;0.0639173)
	Error Rel. Abs.	0.997496	0.996994	0.996638	0.997496	0.992057	0.996787
Contami nación 5%	I.C. Estimación	(-12.8678;-12.7145)	(-12.3176;-12.1182)	(-14.0225;-13.8781)	(-3.16034;-3.12902)	(-3.14120;-3.10690)	(-3.18005;-3.14755)
	I.C. ECM	(6.05537;6.75725)	(9.68122;10.9677)	(2.28248;2.63299)	(0.0768636;0.0925645)	(0.0833611;0.100428)	(0.0865959;0.104396)
	Error Rel. Abs.	1.17269	1.2277	1.07525	0.953992	0.960291	0.948227
Contami nación 10%	I.C. Estimación	(-10.5782;-10.4469)	(-9.73658;-9.56662)	(-12.6174;-12.4863)	(-3.28993;-3.25682)	(-3.23701;-3.20058)	(-3.33238;-3.29743)
	I.C. ECM	(20.6715;21.8429)	(29.5414;31.4252)	(6.79073;7.42987)	(0.133879;0.158104)	(0.122321;0.146026)	(0.164241;0.192899)
	Error Rel. Abs.	1.42686	1.55415	1.19505	0.916486	0.932026	0.905004
Contami nación 20%	I.C. Estimación	(-7.97971;-7.88190)	(-7.15401;-7.03137)	(-10.2337;-10.1243)	(-3.60711;-3.56962)	(-3.47459;-3.43264)	(-3.73620;-3.69483)
	I.C. ECM	(49.9127;51.2781)	(62.5274;64.4795)	(23.5060;24.5360)	(0.412108;0.463034)	(0.297158;0.343246)	(0.589732;0.656670)
	Error Rel. Abs.	1.89136	2.11485	1.47362	0.836035	0.868655	0.807425

Cuadro 7.7: Estimación paramétrica de  $\alpha$  en imágenes generadas con  $\mathcal{G}_I^0(-15)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-3)$  contaminación con píxeles puros.

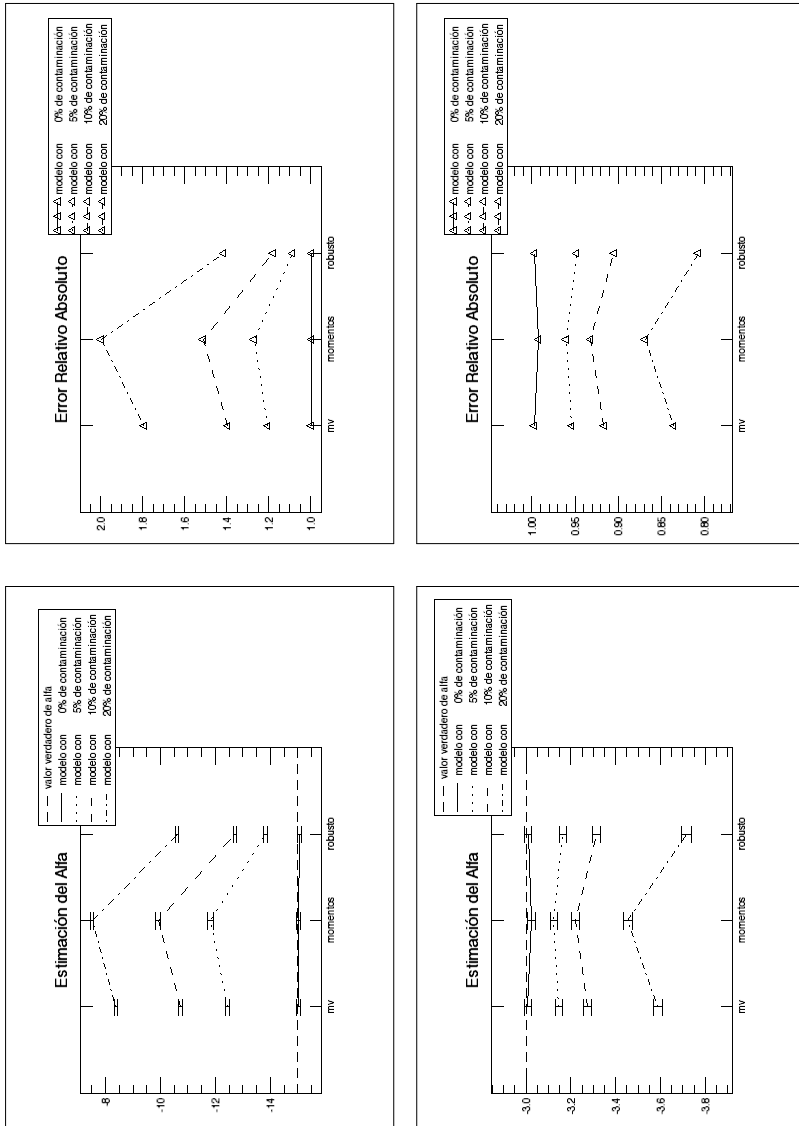


Figura 7.16: Estimación del paramétrica de  $\alpha$  igual a -15 y -3 con contaminación de  $\mathcal{G}_T^0(-3)$  y  $\mathcal{G}_T^0(-15)$  respectivamente.

**Funciones de Pertenencia Contaminadas con Píxeles Puros**

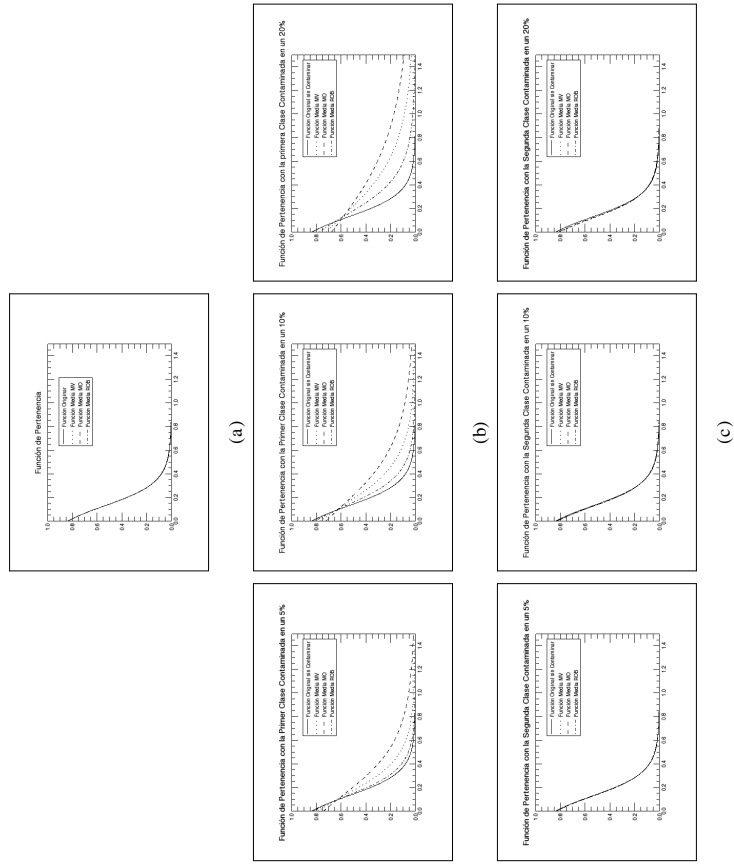
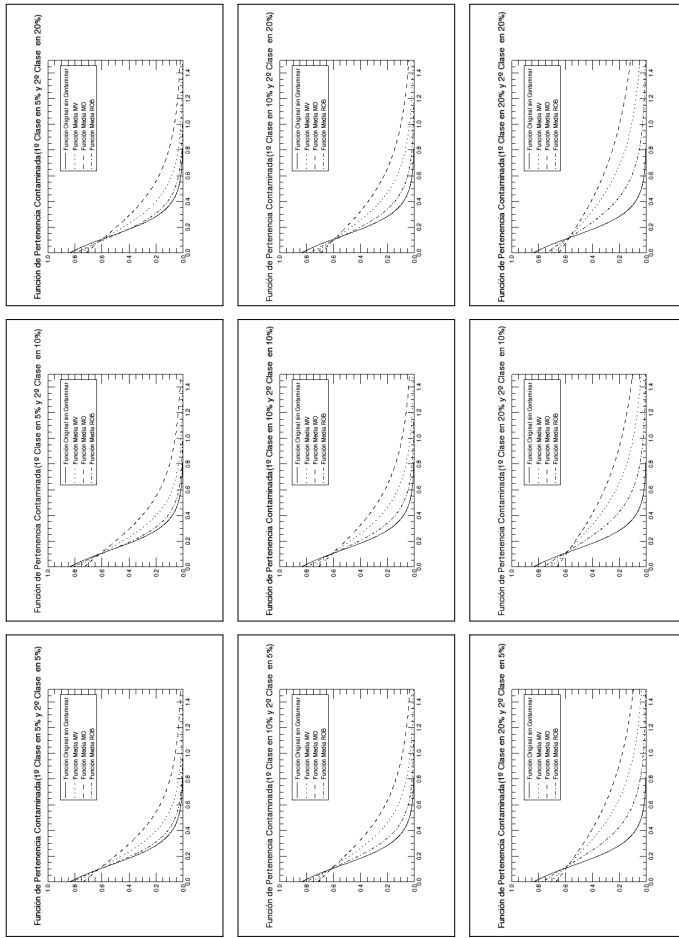


Figura 7.17: Función grado de pertenencia en imágenes generadas con  $\mathcal{G}_I^0(-15)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-3)$ . Modelo: (a) puro. (b) contaminación de la primer clase con píxeles puros. (c) contaminación de la segunda clase con píxeles puros.



(d)

Figura 7.18: Función grado de pertenencia en imágenes generadas con  $\mathcal{G}_I^0(-15)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-3)$ . Modelo: (d) Contaminación de ambas clases con píxeles puros.



Ajuste en Imágenes

	Estimador	Acieritos en Clase 1					Ajustete Clase 1	Acieritos en Clase 2					Ajustete Clase 2	Ajustete en Cp-0.3 en Cp+0.7	Ajustete Total	
		#A0.50	#A0.55	#A0.60	#A0.65	#A0.70		#B0.50	#B0.45	#B0.40	#B0.35	#B0.30				
Puro	MV	146.3040	139.7980	131.0370	119.2420	102.7510	21.8232	113.0340	107.4640	102.1370	96.7570	91.3220	31.9940	111.1340	117.5380	228.6720
	MO	146.1810	139.6350	130.8130	119.0340	102.3240	21.9090	113.1000	107.5810	102.2290	96.8670	91.3850	31.9379	110.8520	117.8540	228.7060
	ROB	146.3790	139.7910	131.0210	119.2350	102.6650	21.8393	113.0650	107.4960	102.1750	96.8090	91.4040	31.9704	111.0640	117.6750	228.7390
Contaminación de la 1ª Clase	MV	148.9730	142.3450	132.5450	116.3650	90.9150	23.8429	103.9980	96.5090	89.3750	82.3510	75.4790	34.9759	114.8740	91.7064	206.5804
	MO	153.8100	146.2470	133.7000	109.5380	64.2000	24.0975	96.5880	86.7350	77.4490	69.1290	61.2250	37.0030	115.8670	78.1065	193.9735
	ROB	143.9660	137.5860	128.9300	115.8710	97.5970	25.1078	110.5010	104.4170	98.6550	92.7850	87.0230	32.8812	112.3870	111.6160	224.0030
Contaminación de la 2ª Clase	MV	146.8350	140.4730	129.8200	111.2130	79.5850	26.4428	100.4410	91.8190	83.7360	76.0910	68.8540	36.0243	115.6920	86.5943	202.2863
	MO	151.0780	143.2770	129.0130	99.0650	40.2560	26.7586	93.4710	82.1520	72.1080	63.1690	54.8200	37.7708	115.9950	77.0643	193.0593
	ROB	141.8410	135.7050	126.3770	112.7920	92.8530	27.7965	108.0860	101.5340	95.2040	89.0300	82.7600	33.6834	113.4220	106.7010	220.1230
Contaminación de la 3ª Clase	MV	143.0120	134.4640	121.1680	90.1120	34.3250	31.4951	92.8700	81.4850	71.3740	62.3290	53.9680	37.9183	116.2950	81.2238	197.5188
	MO	145.1430	135.3740	112.9180	54.6160	2.4430	31.8429	86.6470	71.9380	59.7620	49.2620	39.9620	39.2096	115.6400	78.0637	193.7037
	ROB	136.9170	130.5470	121.2790	102.6790	76.1280	32.7503	102.2960	94.1720	86.6300	79.1600	72.1760	35.4856	115.2300	96.7409	211.9709
Contaminación de la 4ª Clase	MV	145.6470	138.8950	129.7130	117.4930	100.1620	22.3915	109.5590	104.2600	99.1120	93.5120	87.8060	33.6630	111.0230	119.4360	230.4590
	MO	145.6750	138.9830	129.8430	117.6350	100.4010	22.3346	109.5070	104.1920	99.0470	93.4890	87.7800	33.7509	111.3380	119.2730	230.6110
	ROB	145.6350	138.7950	129.5670	117.2340	99.7730	22.4669	109.6650	104.3100	99.1650	93.5740	87.9220	33.5771	110.7100	119.7670	230.4770
Contaminación de la 5ª Clase	MV	144.9080	137.8540	128.2260	115.4070	97.0430	23.0284	105.7470	100.5930	95.0250	89.3610	83.7770	35.3930	110.8190	121.5260	232.3450
	MO	145.1260	138.1940	128.7510	116.1230	98.1050	22.8073	105.5190	100.3630	94.8300	89.2170	83.6630	35.6594	111.8080	120.8250	232.6330
	ROB	144.7790	137.5890	127.8310	114.8190	96.1920	23.1987	105.9230	100.7510	95.1400	89.4480	83.8900	35.2028	110.1280	122.1600	232.2880
Contaminación de la 6ª Clase	MV	143.2490	135.3520	124.7310	110.4330	89.6590	24.4691	99.3830	93.1320	86.6750	81.2910	75.8540	38.5017	109.7560	126.1250	235.8810
	MO	143.8820	136.3170	126.0750	112.4180	92.5350	23.9081	98.8510	92.5360	86.2690	80.9800	75.6190	39.1747	112.0900	124.3690	236.4590
	ROB	142.7170	134.5660	123.5430	108.6000	86.9420	24.9559	99.9240	93.6540	87.0610	81.5740	76.0380	37.9452	107.8590	127.7110	235.5700

Cuadro 7.8: Valores promedios obtenidos de 1000 imágenes generadas con las clases  $\mathcal{G}_I^0(-15)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-3)$ . Contaminación: una clase.

Estimador	Aciertos en Clase 1					Ajustete Clase 1	Aciertos en Clase 2					Ajustete Clase 2	Ajustete en Cp-0,3 en Cp+0,7	Ajustete Total		
	#A0,50	#A0,55	#A0,60	#A0,65	#A0,70		#B0,50	#B0,45	#B0,40	#B0,35	#B0,30					
Puro	MV	146.3040	139.7980	131.0370	119.2420	102.7510	21.8232	113.0340	107.4640	102.1370	96.7570	91.3220	31.9940	111.1340	117.5380	228.6720
	MO	146.1810	139.6350	130.8130	119.0340	102.3240	21.9090	113.1000	107.5810	102.2290	96.8670	91.3850	31.9379	110.8520	117.8540	228.7060
	ROB	146.3790	139.7910	131.0210	119.2350	102.6650	21.8393	113.0650	107.4960	102.1750	96.8090	91.4040	31.9704	111.0640	117.6750	228.7390
Clase I en Clase II en 5%	MV	148.4290	141.4490	131.0690	113.8410	86.5450	24.4499	101.1790	93.4700	85.9950	79.2230	72.6220	36.2952	114.1870	93.5484	207.7354
	MO	153.3570	145.5610	132.1230	106.1770	57.4090	24.6054	93.6000	83.4680	74.5300	66.5240	58.8980	38.1708	115.4650	79.5452	195.0102
	ROB	143.3000	136.6820	127.4490	113.7910	94.3180	25.7324	107.3040	101.3940	95.6150	89.3740	83.6790	34.3914	111.8570	113.6660	225.5230
Clase I en Clase II en 10%	MV	147.8280	140.4320	129.2190	110.8200	81.2340	25.1306	97.7140	89.4820	82.1240	75.5680	69.1700	37.6899	113.4120	95.5791	208.9911
	MO	152.8890	144.6800	130.2080	101.9670	49.4270	25.1695	89.6970	79.6840	71.0350	63.2570	55.8960	39.4304	115.0420	81.1225	196.1645
	ROB	142.5410	135.5410	125.5480	111.2270	90.2340	26.4603	103.7280	97.7430	91.5210	85.3990	79.8140	35.9274	111.0970	116.0100	227.1070
Clase I en Clase II en 20%	MV	146.4030	137.9970	102.8750	102.8750	67.3580	26.6716	90.0360	81.9210	74.4460	67.6660	61.6830	40.1462	111.2230	100.0480	211.2710
	MO	151.7750	142.5980	90.8830	90.8830	31.1240	26.4849	82.2240	71.9170	63.4590	56.2530	49.4080	41.6795	113.5570	84.7313	198.2883
	ROB	140.6190	132.6510	104.3830	104.3830	79.7380	28.2050	97.7030	90.0640	83.6380	77.6740	71.8480	38.4912	108.4620	121.4400	229.9020
Contaminación de la 1ª y la 2ª Clase en Clase II en 5%	MV	146.3810	139.6090	128.0550	108.1550	73.6060	27.0586	97.7960	88.4850	80.6490	73.2450	66.2620	37.1934	114.7930	88.4386	203.2316
	MO	150.7770	142.5040	127.0200	94.4070	32.4540	27.2698	90.1870	79.1030	69.4230	60.7560	52.7140	38.8099	115.4600	78.5327	193.9927
	ROB	141.2670	134.8140	124.8240	110.5280	89.1110	28.4173	105.0350	98.6810	91.9570	85.6320	79.6000	35.1001	112.7290	108.7170	221.4460
Clase I en Clase II en 10%	MV	145.8670	138.6170	125.8880	104.3380	66.2700	27.7471	93.9480	84.6900	77.0300	69.7800	63.0020	38.4333	113.8040	90.4711	204.2751
	MO	150.3780	141.6360	124.6020	88.7230	24.6060	27.8356	86.3970	75.5090	66.0890	57.6760	49.9030	39.9262	114.8960	80.1413	195.0373
	ROB	140.5570	133.7320	122.9260	107.8290	84.4360	29.1393	101.6280	94.8480	87.9590	81.7680	75.9340	36.5462	111.8060	111.0210	222.8270
Clase I en Clase II en 20%	MV	144.6960	136.1160	120.4630	94.0190	47.1720	29.2985	86.4940	77.3800	69.1290	62.2780	55.9570	40.5935	111.2140	94.9384	206.1524
	MO	149.3750	139.4140	118.0910	72.8880	11.2610	29.1480	79.3750	67.8010	58.8700	51.0150	43.7510	41.8982	113.1610	83.8174	196.9784
	ROB	138.8530	130.6420	117.9030	100.2880	72.2570	30.8641	95.3840	87.0150	80.3970	74.0050	68.0190	38.9350	108.8420	116.3500	225.1920
Clase I en Clase II en 5%	MV	142.5300	133.4680	118.5760	84.1470	24.6040	32.1175	89.7790	78.5810	68.7730	59.9520	51.8070	38.7832	115.0470	83.1345	198.1815
	MO	144.9550	134.4060	108.7140	45.3750	1.5950	32.3414	83.6930	69.3320	57.4330	47.0010	37.3310	39.9849	114.9030	79.6211	194.5241
	ROB	136.3270	129.6960	119.5340	99.5280	70.6780	33.3751	99.5820	90.9960	83.4360	76.2060	69.4630	36.6625	114.1640	98.7223	212.8863
Clase I en Clase II en 10%	MV	141.9120	132.2370	115.0660	76.4770	15.4120	32.8058	86.2890	75.1330	65.4780	56.8650	48.9110	39.6923	113.7010	85.2358	198.9368
	MO	144.6880	133.1530	103.3850	35.4810	0.9660	32.8866	80.2260	66.0420	54.4120	44.1160	34.8760	40.7997	114.1260	81.3225	195.4485
	ROB	135.6630	128.6610	117.1980	95.7090	63.9250	34.0968	96.0380	87.1890	79.6890	72.6530	66.0850	37.8683	112.8610	100.9830	213.8440
Clase I en Clase II en 20%	MV	140.3330	129.4920	105.1640	55.2190	3.4810	34.3277	79.8100	67.5940	58.2710	50.0800	42.5560	41.2249	110.5100	89.8332	200.3432
	MO	144.1000	129.7800	88.2230	17.1300	0.2820	34.1291	73.3320	58.8870	47.7030	37.8330	29.4720	42.1915	112.0870	85.1947	197.2817
	ROB	133.9820	125.9580	110.2500	84.9930	45.0960	35.7989	88.8970	80.0150	71.9900	64.9690	58.7690	39.7993	109.1690	106.1880	215.3570

Cuadro 7.9: Valores promedios obtenidos de 1000 imágenes generadas con las clases  $\mathcal{G}_I^0(-15)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-3)$ . Contaminación: ambas clases.

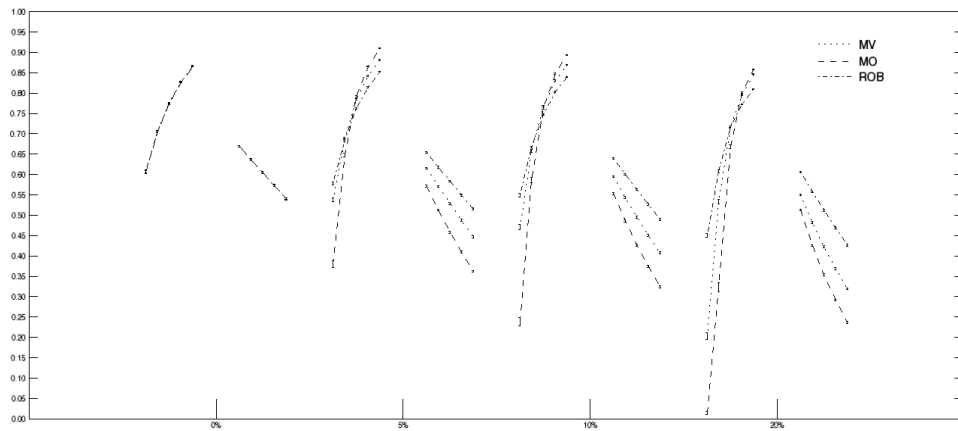


Figura 7.19: Proporción de Aciertos Promedio en  $A_{0,7}$ ,  $A_{0,65}$ ,  $A_{0,6}$ ,  $A_{0,55}$ ,  $A_{0,5}$  y  $B_{0,5}$ ,  $B_{0,45}$ ,  $B_{0,4}$ ,  $B_{0,35}$ ,  $B_{0,3}$  cuando se contamina la 1ª Clase con píxeles de  $\mathcal{G}_I^0(-3)$  en 0%, 5%, 10% y 20%

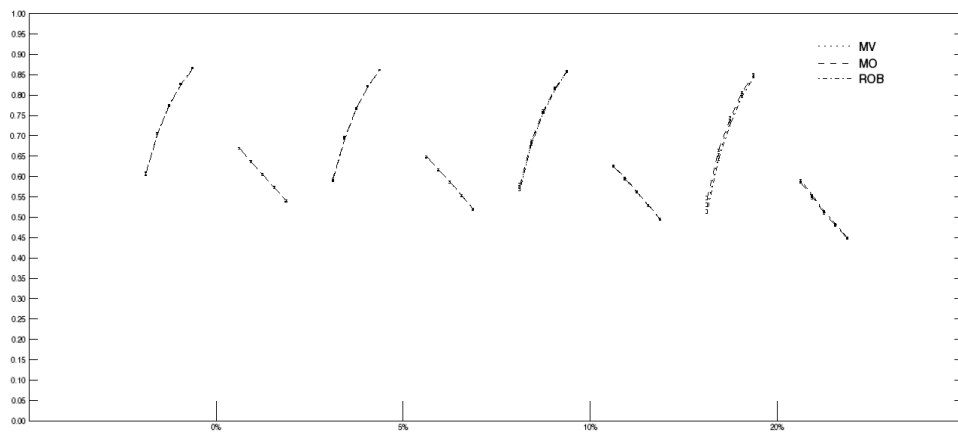


Figura 7.20: Proporción de Aciertos Promedio en  $A_{0,7}$ ,  $A_{0,65}$ ,  $A_{0,6}$ ,  $A_{0,55}$ ,  $A_{0,5}$  y  $B_{0,5}$ ,  $B_{0,45}$ ,  $B_{0,4}$ ,  $B_{0,35}$ ,  $B_{0,3}$  cuando se contamina la 2ª Clase con píxeles de  $\mathcal{G}_I^0(-15)$  en 0%, 5%, 10% y 20%

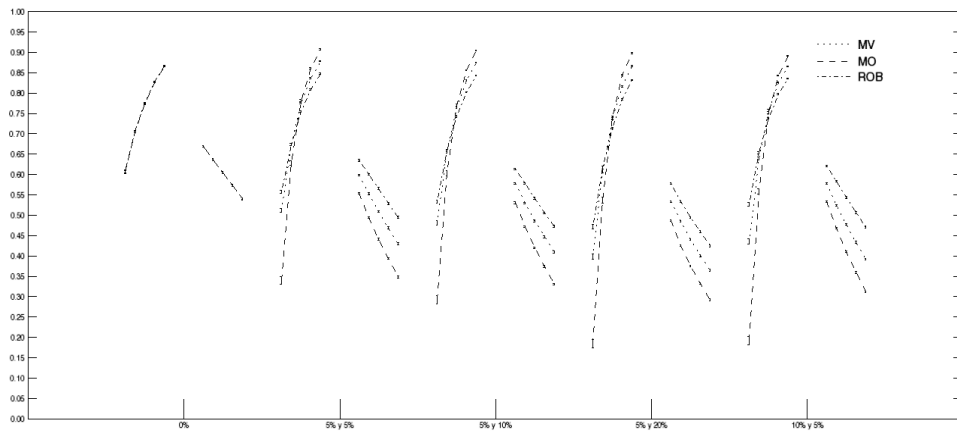


Figura 7.21: Proporción de Aciertos Promedio en  $A_{0,7}$ ,  $A_{0,65}$ ,  $A_{0,6}$ ,  $A_{0,55}$ ,  $A_{0,5}$  y  $B_{0,5}$ ,  $B_{0,45}$ ,  $B_{0,4}$ ,  $B_{0,35}$ ,  $B_{0,3}$  cuando se contaminan la 1º Clase y la 2º Clase con píxeles de  $\mathcal{G}_I^0(-3)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-15)$  respectivamente

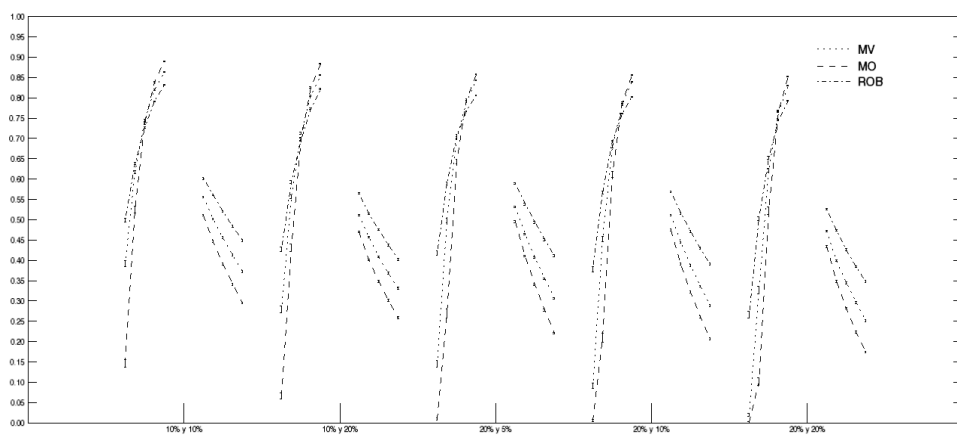


Figura 7.22: Proporción de Aciertos Promedio en  $A_{0,7}$ ,  $A_{0,65}$ ,  $A_{0,6}$ ,  $A_{0,55}$ ,  $A_{0,5}$  y  $B_{0,5}$ ,  $B_{0,45}$ ,  $B_{0,4}$ ,  $B_{0,35}$ ,  $B_{0,3}$  cuando se contaminan la 1º Clase y la 2º Clase con píxeles de  $\mathcal{G}_I^0(-3)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-15)$  respectivamente

## Capítulo 8

# Resultados y Conclusiones

### 8.1. RESULTADO DE LAS SIMULACIONES

En esta tesis estudiamos y comparamos algunos de los estimadores tradicionales como fueron el de Máxima Verosimilitud y el de los Momentos versus el estimador robusto M-estimador para la función grado de pertenencia definida en (5.2) para la intensidad de imágenes SAR que contienen píxeles de dos clases temáticas descritas por distribuciones  $\mathcal{G}_I^0(\alpha, 1, 1)$ , o por píxeles de mezcla de ambas dos. Se decidió tomar  $\gamma = 1$  por ser este un parámetro de escala. Dentro de las imágenes se consideraron muestras de entrenamiento de ambas clases y se estudiaron en cada una los estimadores de  $\alpha$  el cual describe la rugosidad de la clase, los cuales proporcionaron los ejes centrales de estudio, que son los diferentes estimadores de la función grado de pertenencia.

Mediante un estudio de Monte Carlo y aplicaciones numéricas se estudiaron imágenes generadas por las diferentes  $\mathcal{G}_I^0(\alpha)$  con  $\alpha \in \{-3, -7, -15\}$  y se llegó a las siguientes conclusiones:

1. **En cuanto a los parámetros estimados en cada clase:** se pudo observar
  - a) un marcado mejor comportamiento (en cuanto estimación, ECM y Err) del estimador robusto cuando se contamina a una clase descrita por un valor de  $\alpha$  mayor en valor absoluto que el  $\alpha$  que describe a la clase contaminante en el caso puro, o contaminación de píxeles de mezcla de ambas clases (ver figuras 7.2, 7.9, 7.16, A.1, A.8 y A.15) (ver tablas 7.1, 7.4, 7.7, A.1, A.4 y A.7).
  - b) Un mejor comportamiento del estimador de los momentos cuando se contamina a una clase descrita por un valor de  $\alpha$  menor en valor absoluto que el  $\alpha$  que describe a la clase contaminante en el caso puro (ver figuras 7.2, 7.9 y 7.16) (ver tablas 7.1, 7.4 y 7.7).
  - c) Un mejor comportamiento de los estimadores de máxima verosimilitud y robustos sobre el estimador de los momentos cuando se contamina con píxeles de mezcla a una clase descrita por un  $\alpha$  menor en valor absoluto que el  $\alpha$  que describe a la clase contaminante (ver figuras A.1, A.8 y A.15) (ver tablas A.1, A.4 y A.7).
2. **En cuanto a la función de grado de pertenencia:** el valor máximo de la función de pertenencia en estudio depende de los parámetros  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  que describen a las dos clases involucradas, siendo por ejemplo,  $0,8\hat{3}(\frac{15}{3+15})$  el valor máximo de la función de pertenencia

dada por  $\alpha_1 = -15$  y  $\alpha_1 = -3$ . En las mil simulaciones de cada una de las circunstancias de contaminación planteadas el estimador robusto ha mostrado ser en promedio mucho mejor que el estimador de máxima verosimilitud y el de los momentos (ver figuras 7.3, 7.4, 7.10, 7.11, 7.17, 7.18, A.2, A.3, A.9, A.10, A.16 y A.17).

3. **En cuanto al ajuste en las imágenes simuladas:** se han simulado 1000 imágenes donde siempre la clase 1 es descripta con un  $\alpha$  mayor en valor absoluto al  $\alpha$  que describe la clase 2.

- a) Cuando se contamina la primer clase con píxeles puros de la segunda clase o píxeles de mezcla: en promedio hay un mejor acierto por parte del estimador robusto en cuanto a pertenencia a sus respectivas clases de los píxeles de entrenamiento. Esta diferencia se comienza a ver a medida que se va haciendo más estricto el criterio de pertenencia a la primera clase y es mucho más notable en la clase 2 a medida que se aumenta el grado de contaminación. En cuanto al ajuste, en la primera clase y en el global en promedio el estimador de los momentos funcionó en general mejor que el resto y en el ajuste en la segunda clase resultó mejor el robusto (ver tablas 7.2, 7.5, 7.8, A.2,A.5 y A.8) (ver figuras 7.5, 7.12, 7.19, A.4,A.11 y A.18).
- b) Cuando se contamina la segunda clase con píxeles puros de la primera o píxeles de mezcla clase: en cuanto al acierto de clase, *siendo que los valores de cada uno de los estimadores son muy parecidos entre ellos*, es muy difícil dar una conclusión sobre cual estimador se comportó mejor, por lo general el estimador de momentos ha prevalecido sobre los demás en la clase 1 y el estimador robusto en la clase 2. Pero como hemos mencionado anteriormente los valores entre los estimadores son muy parecidos. En cuanto al ajuste, en la primera clase y en el global en promedio el estimador de los momentos funcionó en general mejor que el resto y en el ajuste en la segunda clase resultó mejor el robusto (ver tablas 7.2, 7.5, 7.8, A.2,A.5 y A.8) (ver figuras 7.6, 7.13, 7.20, A.5,A.12 y A.19).
- c) Cuando se contamina la primera y la segunda clase con píxeles puros o píxeles de mezcla: al igual que en el inciso a) en promedio el estimador robusto ha tenido mayores aciertos en cuanto a pertenencia a sus respectivas clases de los píxeles de entrenamiento. Aunque a diferencia del inciso a) la diferencia por lo general se comienza a ver más rápidamente en la clase uno, en el sentido de menos restricción, y al igual que el inciso a) esta diferencia es más notable en la clase 2 a medida que se aumenta el grado de contaminación. En cuanto al ajuste, en la primera clase y en el global en promedio el estimador de los momentos funcionó en general mejor que el resto y en el ajuste en la segunda clase resultó mejor el robusto (ver tablas 7.3, 7.6, 7.9, A.3,A.6 y A.9) (ver figuras 7.7, 7.8, 7.14, 7.15, 7.21, 7.22, A.6, A.7,A.13, A.14, A.20 y A.21).

Como conclusión general, el estimador robusto ha funcionado mejor que el resto en cuanto a estimación de parámetros, ya sea en sesgo, error cuadrático medio o relativo cuando se contaminaba a la clase con  $|\alpha|$  mayor, ya sea con contaminación de píxeles puros de la otra clase involucrada o contaminación con píxeles de mezcla. En cuanto al ajuste de la función grado de pertenencia, en el mismo sentido que el caso anterior, también el ajuste de los M-estimadores resultó significativamente mejor que el resto cuando se consideraron las clases en estado puro o cuando se contaminó la clase con  $|\alpha|$  mayor ya sea con píxeles de mezcla o píxeles puros de la otra clase involucrada, o se contaminó ambas clases de la misma forma En cuanto al ajuste en las imágenes, los aciertos en la clase 1, donde  $g_c(x)$  debería ser igual a 1, a medida que  $x$  se restringía la regla de decisión del estimador  $\hat{g}_{c,\zeta}(x)$  para definir si un píxel pertenecía o no a esa clase, por lo general en estos

casos, funcionó mejor los M-estimadores (el M-estimador por lo general lograba mayores aciertos que los demás cuando por ejemplo la regla de decisión fue  $\hat{g}_{c,\zeta}(x) \geq 0,65$  o  $\geq 0,7$ ). En cambio, en la clase 2 M-estimadores en todos los casos han resultado ser mejores en cuanto a la cantidad de aciertos y ajuste en la clase. Cabe destacar cuando esto no sucedía, el comportamiento del estimador de los momentos ha resultado ser relativamente mejor. Asimismo, la diferencia entre los distintos estimadores en esta última situación no fueron tan notables como en la situación anterior, en cuanto al ajuste de los parámetros, función grado de pertenencia y ajuste de las imágenes.

## 8.2. CONCLUSIONES GENERALES

Como hemos dicho comúnmente, el área representada por un píxel contiene más de una clase temática. En consecuencia, el uso de enfoques tradicionales “un píxel, una clase” para clasificar imágenes de teledetección contendrá errores en el resultado final si hay presentes píxeles mixtos. Hasta el momento, en imágenes SAR no han sido propuesto, o no se tiene conocimiento de ello, métodos robustos basados en M-estimadores para analizar el problema clasificación de píxeles cuando hay presencia de píxeles de mezcla. Todo esto nos motivó a desarrollar técnicas adecuadas para extraer información sobre cuál es la conformación de un determinado píxel con respecto a las clases temáticas tenidas en cuenta. En este trabajo entonces nos hemos interesaremos en el tratamiento y modelado de la componente rugosidad en la intensidad de imágenes SAR. Por lo cual hemos realizado un análisis semejante al que se hizo con el modelado de la amplitud en anteriores trabajos como por ejemplo en Frery et al., 1996 , 1997, 2002[12] [10] [20] y Mejail et al 2000 [22], estudiando no solo la forma de los estimadores sino que también su comportamiento asintótico. En segundo lugar, y motivados en la problemática de suponer que las imágenes contienen píxeles mixtos, se definió una función que describiera el grado de pertenencia de un píxel a una clase determinada, a la cual llamamos función grado de pertenencia. Y mediante un proceso de Monte Carlos, estudiamos las ventajas y desventajas de métodos basado en robustez sobre los métodos tradicionales en la estimación de esta función cuando estamos en presencia de píxeles (puros o de mezcla) que contaminan las clases de entrenamiento. Logrando en líneas generales, una buena performance del M-estimador sobre el estimador Máxima Verosimilitud y el de los Momentos en cuanto a la estimación del parámetro  $\alpha$  de rugosidad de una distribuciones  $\mathcal{G}_I^0(\alpha, 1, 1)$ , a la estimación de la función grado de pertenencia y al ajuste en las imágenes generadas. Esta diferencia fué más notable cuando se contamina a una clase descripta por un valor de  $\alpha$  mayor en valor absoluto que el  $\alpha$  que describe a la clase contaminante en el caso puro, o contaminación de píxeles de mezcla de ambas clases

## 8.3. FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

- Es aceptado en la comunidad que un modelo acertado para la variable intensidad que se representa a través de una imagen SAR, es asumir que la misma tiene una distribución  $\mathcal{G}_I^0(\alpha, \gamma, n)$ , donde  $\gamma$  es similar a un parámetro de escala y  $n$  se refiere a un parámetro propio de la imagenaría SAR (el "número de looks"). Como se dijo anteriormente, en este trabajo se asumió  $\gamma = 1$  y  $n = 1$ . Seguiremos ahora considerando  $\gamma$  y  $n$  desconocidos y a ser estimados previamente, antes de estimar las correspondientes funciones grado de pertenencia. Se tratará de extender M-estimadores y eventualmente, otra clase de estimadores robustos a la estimación simultánea de  $\alpha, \gamma$  y  $n$ .

- Realizar estudios similares para modelos con mayor número de clases
- Las formas más simples de clasificación digital de imágenes consideran a cada píxel individualmente, asignándolo a una clase en base a sus valores medidos en cada una de las bandas espectrales; es decir, clasifican un píxel sobre la base de sus propiedades espectrales, sin importar como son clasificados los píxeles vecinos.

Sin embargo, en cualquier imagen real, los píxeles adyacentes están relacionados o correlacionados, por dos razones: los sensores adquieren una porción significativa de energía de los píxeles adyacentes y los tipos de cobertura del terreno generalmente ocurren sobre una región que es grande comparada con el tamaño del píxel. En un área agrícola, por ejemplo, si un píxel representa trigo es altamente probable que sus píxeles vecinos también. Este conocimiento de las relaciones con el entorno es una rica fuente de información que no explotan los clasificadores simples tradicionales. No solamente la inclusión del contexto es importante porque explota la información espacial sino que también puede mejorar los mapas temáticos ayudando a eliminar píxeles que fueron clasificados erróneamente. Un proceso de clasificación más complejo, la clasificación espacial, considera grupos de píxeles en la imagen y utiliza la información espectral de cada píxel junto con la de sus píxeles vecinos adyacentes. Un ejemplo de esta clase lo constituye el método Modas Condicionadas Iteradas (ICM). Este método ha sido aplicado exitosamente en imágenes ópticas y recientemente en SAR.

Dentro de este proyecto se propone extender ICM al problema de clasificación subpíxel tanto en imágenes ópticas como en las SAR.

Cada uno de estos posibles aportes acarreará mayor número de cálculos tanto analíticos como computacionales, lo que demandará seguramente el uso de métodos computacionales poderosos. En cuanto a exactitud y tiempo de ejecución se refiere, pero aportará mayor información al modelo y podrá ser aplicado en imágenes SAR en casos más generales. En particular, si se quiere trabajar con imágenes reales de gran tamaño, cosa habitual en las aplicaciones, seguramente se deberá recurrir a los llamados "procesamientos en paralelo".



## Apéndice A

# Resultados de las simulaciones con contaminación con píxeles de mezcla

A continuación se exponen tablas y gráficos de las estimaciones de los parámetros y la función grado de pertenencia obtenidos de las simulaciones bajo un modelo de contaminación de las clases de entrenamiento con píxeles de mezcla de ambas clases

### A.1. Imágenes generadas con $\mathcal{G}_I^0(-7)$ y $\mathcal{G}_I^0(-3)$

#### A.1.1. Estimación de Parámetros

		Clase $\mathcal{G}_I^0(7,1,1)$			Clase $\mathcal{G}_I^0(3,1,1)$			
		Estimador	Max. Verosimilitud	Momentos	M-estimador	Max. Verosimilitud	Momentos	M-estimador
Puro	I.C. Estimación	(-7.05186;-6.98329)	(-7.06142;-6.99186)	(-7.05882;-6.98779)	(-3.02222;-2.99284)	(-3.04007;-3.00797)	(-3.02467;-2.99467)	
	I.C. ECM	(0.278690;0.333165)	(0.286962;0.343644)	(0.298926;0.358236)	(0.0511879;0.0611936)	(0.0612016;0.0739174)	(0.0533315;0.0639173)	
	Error Rel. Abs.	0.997496	0.996209	0.996682	0.997496	0.992057	0.996787	
Contami nación 5%	I.C. Estimación	(-6.59981;-6.53430)	(-6.52670;-6.45457)	(-6.70680;-6.63924)	(-3.04611;-3.01662)	(-3.06797;-3.03565)	(-3.04779;-3.01777)	
	I.C. ECM	(0.432069;0.500845)	(0.550774;0.644580)	(0.372616;0.434660)	(0.0522434;0.0627605)	(0.0639168;0.0772337)	(0.0541227;0.0652101)	
	Error Rel. Abs.	1.06593	1.07848	1.049	0.989653	0.983023	0.98919	
Contami nación 10%	I.C. Estimación	(-6.03864;-5.97841)	(-5.90239;-5.83346)	(-6.22595;-6.16367)	(-3.08229;-3.05246)	(-3.10728;-3.07430)	(-3.08421;-3.05396)	
	I.C. ECM	(1.15858;1.27924)	(1.50411;1.67686)	(0.849665;0.951424)	(0.0564806;0.0682754)	(0.0714602;0.0864619)	(0.0581715;0.0703481)	
	Error Rel. Abs.	1.16501	1.19293	1.12998	0.978035	0.970625	0.97749	
Contami nación 20%	I.C. Estimación	(-5.22871;-5.17751)	(-5.06649;-5.00558)	(-5.43660-5.38354)	(-3.15024;-3.12038)	(-3.18324;-3.14951)	(-3.15180;-3.12175)	
	I.C. ECM	(3.30899;3.48957)	(3.97450;4.22225)	(2.62852;2.79328)	(0.0691088;0.0833849)	(0.0924507;0.110850)	(0.0701905;0.0846678)	
	Error Rel. Abs.	1.34535	1.38998	1.29388	0.956844	0.947456	0.956395	

Cuadro A.1: Estimación paramétrica de  $\alpha$  en imágenes generadas con  $\mathcal{G}_I^0(-7)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-3)$  contaminación con píxeles de mezcla.

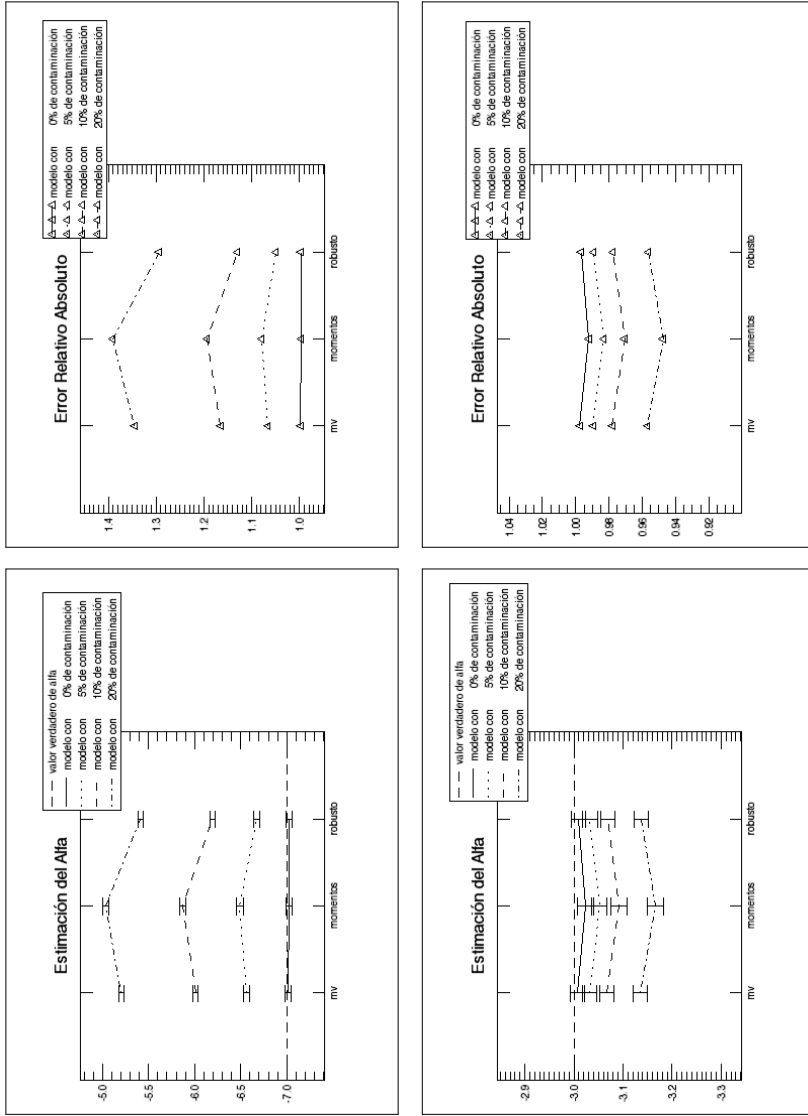


Figura A.1: Estimación del paramétrica de  $\alpha$  igual a -7 y -3 con contaminación de mezcla de  $\mathcal{G}_I^0(-7)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-3)$ .

A.1.2. Funciones de Pertenencia Contaminadas con Píxeles de Mezcla

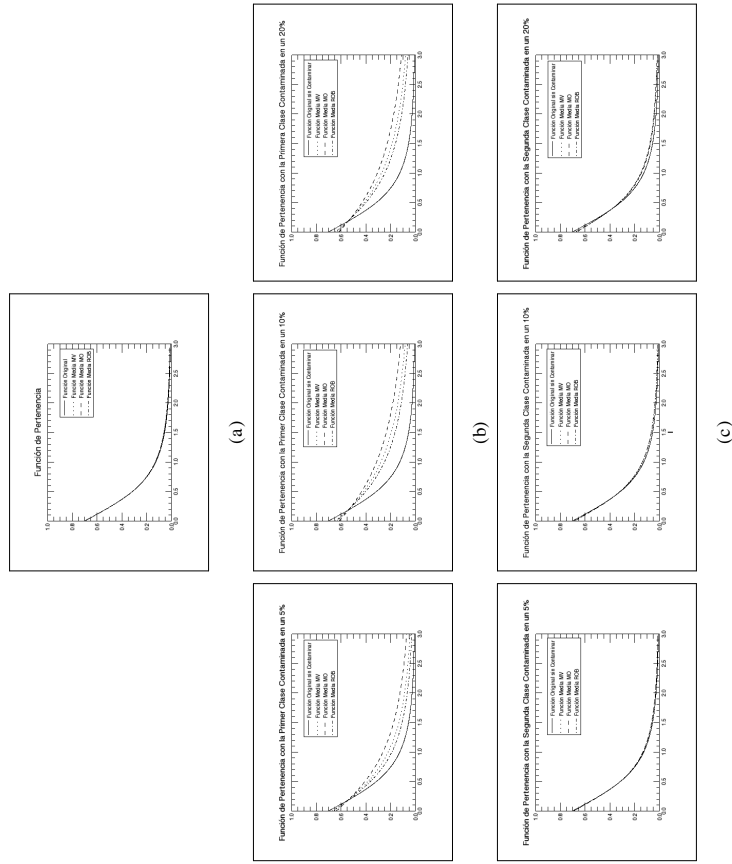
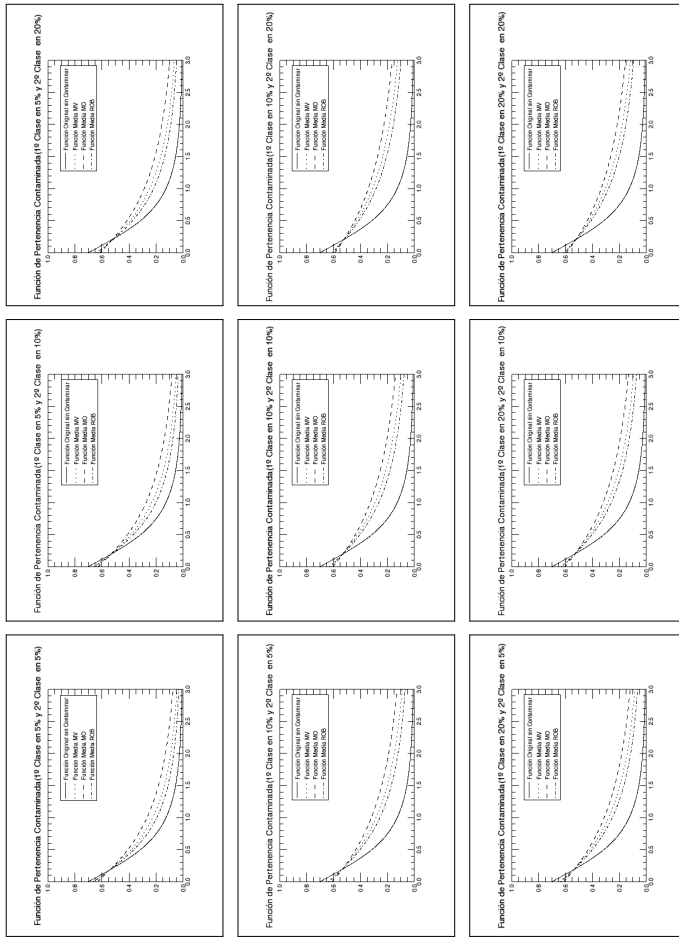


Figura A.2: Función grado de pertenencia en imágenes generadas con  $\mathcal{G}_I^0(-7)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-3)$ . Modelo: (a) puro. (b) contaminación de la primer clase con píxeles de mezcla. (c) contaminación de la segunda clase con píxeles de mezcla.



(d)

Figura A.3: Función grado de pertenencia en imágenes generadas con  $\mathcal{G}_f^0(-7)$  y  $\mathcal{G}_f^0(-3)$ . Modelo: (d) Contaminación de ambas clases con píxeles de mezcla.

A.1.3. Ajuste en Imágenes

	Estimador Promed	Acieritos en Clase 1				Acieritos en Clase 2				Ajustete Clase 1	Acieritos en Clase 2				Ajustete Clase 2	Ajustete en Cp 0,3	Ajustete en Cp 0,7	Ajustete Total
		#A <sub>0,50</sub>	#A <sub>0,55</sub>	#A <sub>0,60</sub>	#A <sub>0,65</sub>	#A <sub>0,70</sub>	#B <sub>0,50</sub>	#B <sub>0,55</sub>	#B <sub>0,60</sub>		#B <sub>0,65</sub>	#B <sub>0,70</sub>	#B <sub>0,75</sub>	#B <sub>0,80</sub>				
Puro	MV	130.3050	113.6720	<b>88.9310</b>	<b>51.9480</b>	10.0340	89.6640	76.6980	65.7580	55.9160	47.0710	38.5987	<b>107.2590</b>	107.5440	110.8670	<b>218.1260</b>		
	MO	130.1530	113.3270	88.2480	50.9380	9.9840	<b>89.7980</b>	<b>76.8220</b>	<b>65.7930</b>	55.9470	47.0200	<b>38.5499</b>	107.5440	110.6000	218.1440			
	ROB	<b>130.3200</b>	<b>113.5810</b>	88.7750	51.8330	<b>10.2920</b>	89.6950	76.7160	65.7620	<b>55.9820</b>	<b>47.1010</b>	38.5721	107.3680	110.8040	218.1720			
5% (9 píxeles)	MV	129.4470	107.5270	70.1810	18.1800	0.3570	83.4220	83.4220	53.4510	42.2210	33.0160	39.7969	111.5280	100.6830	212.2110			
	MO	<b>131.7210</b>	105.1280	56.7320	7.0730	0.0750	80.9430	80.9430	47.4530	35.7750	26.8690	40.2253	111.4940	<b>98.1685</b>	<b>209.6630</b>			
	ROB	127.4660	<b>107.7570</b>	<b>75.7470</b>	<b>28.9890</b>	<b>1.5880</b>	<b>85.5100</b>	<b>85.5100</b>	<b>57.5410</b>	<b>46.8110</b>	<b>37.4650</b>	<b>39.4146</b>	<b>111.3100</b>	103.6350	214.9450			
10% (17 píxeles)	MV	126.7800	99.3990	48.0890	3.5850	0.0000	79.6480	79.6480	44.8640	33.2520	24.5150	40.4224	111.7260	101.5140	213.2400			
	MO	<b>128.3160</b>	94.4800	31.5120	1.0510	<b>0.0290</b>	77.6950	77.6950	38.8700	27.4790	18.9790	40.7563	111.6560	<b>100.0010</b>	<b>211.6570</b>			
	ROB	125.2830	<b>100.8500</b>	<b>57.3870</b>	<b>9.6060</b>	<b>0.1160</b>	<b>81.5100</b>	<b>81.5100</b>	<b>49.1150</b>	<b>37.5970</b>	<b>28.7320</b>	<b>40.1018</b>	<b>111.5880</b>	103.6990	215.2870			
20% (34 píxeles)	MV	128.6350	97.1310	46.4080	3.8220	0.0000	79.9590	79.9590	45.6540	34.0760	25.2900	40.3714	111.7100	103.3170	215.0270			
	MO	<b>130.4940</b>	92.6380	31.6580	1.2040	0.0280	78.0680	78.0680	39.9990	28.5200	19.9540	40.6948	111.6360	<b>101.4870</b>	<b>213.1230</b>			
	ROB	126.6250	<b>98.4620</b>	<b>54.7670</b>	<b>8.9090</b>	<b>0.0950</b>	<b>81.6910</b>	<b>81.6910</b>	<b>49.5950</b>	<b>38.0810</b>	<b>29.1410</b>	<b>40.0724</b>	<b>111.5770</b>	105.5920	217.1690			
5% (9 píxeles)	MV	129.7350	112.4680	<b>86.5810</b>	<b>47.8680</b>	7.5980	87.8220	87.8220	63.1170	53.2160	44.5220	38.7917	109.8610	<b>108.2220</b>	<b>218.0830</b>			
	MO	129.6250	112.2220	86.0880	47.1200	<b>7.8780</b>	87.8640	87.8640	<b>63.1720</b>	53.2510	44.4800	38.7763	<b>109.7460</b>	108.4090	218.1550			
	ROB	<b>129.7180</b>	<b>112.3490</b>	86.3140	47.6380	7.7840	<b>87.9010</b>	<b>87.9010</b>	63.1430	<b>53.2740</b>	<b>44.5420</b>	<b>38.7550</b>	109.7490	108.3620	218.1110			
10% (17 píxeles)	MV	<b>128.9130</b>	<b>110.7170</b>	<b>82.9850</b>	<b>41.8220</b>	4.9030	87.0980	87.0980	60.5980	49.2790	40.7690	38.9435	108.3900	<b>109.5200</b>	217.9090			
	MO	128.8830	110.5650	82.7640	41.6410	<b>5.5350</b>	87.1160	87.1160	<b>60.6490</b>	49.3200	<b>40.7290</b>	38.9763	108.4810	109.5760	218.0570			
	ROB	128.8290	110.4590	82.4780	41.3020	4.9020	<b>87.2620</b>	<b>87.2620</b>	60.6140	<b>49.3600</b>	40.7590	<b>38.8756</b>	<b>108.1600</b>	109.7310	<b>217.8910</b>			
20% (34 píxeles)	MV	127.1990	106.5290	74.4880	28.7360	1.7120	80.8840	80.8840	55.1800	45.2190	36.8720	40.1823	106.4850	111.9770	218.4620			
	MO	<b>127.5390</b>	<b>107.3880</b>	<b>76.3240</b>	<b>31.9290</b>	<b>2.9250</b>	80.5780	80.5780	<b>55.2870</b>	<b>45.4010</b>	<b>37.1070</b>	40.4821	107.5890	<b>111.4430</b>	219.0320			
	ROB	126.8740	105.6710	72.4060	26.5020	1.5570	<b>81.1500</b>	<b>81.1500</b>	55.1240	45.1030	36.7310	<b>39.9565</b>	<b>105.6780</b>	112.5100	<b>218.1880</b>			

Cuadro A.2: Valores promedios obtenidos de 1000 imágenes generadas con las clases  $\mathcal{G}_I^0(-7)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-3)$ . Contaminación: una clase.

Estimador Promed	Aciertos en Clase 1				Aciertos en Clase 2				Ajustete Clase 1	Ajustete Clase 2	Ajustete en Cp 0.3	Ajustete en Cp 0.7	Ajustete Total		
	#A <sub>0.50</sub>	#A <sub>0.55</sub>	#A <sub>0.60</sub>	#A <sub>0.65</sub>	#A <sub>0.70</sub>	#B <sub>0.50</sub>	#B <sub>0.55</sub>	#B <sub>0.60</sub>						#B <sub>0.65</sub>	#B <sub>0.70</sub>
Puro	MV	130.3050	113.6720	<b>88.9310</b>	<b>51.9480</b>	10.0340	89.6640	76.6980	65.7580	55.9160	47.0710	38.5987	<b>107.2590</b>	<b>110.8670</b>	<b>218.1260</b>
	MO	130.1530	113.3270	88.2480	50.9380	9.9840	<b>89.7980</b>	<b>76.8220</b>	<b>65.7930</b>	55.9470	47.0200	<b>38.5499</b>	107.5440	110.6000	218.1440
	ROB	<b>130.3200</b>	<b>113.5810</b>	88.7750	51.8330	<b>10.2920</b>	34.1606	89.6950	76.7160	<b>65.7620</b>	<b>55.9820</b>	<b>47.1010</b>	38.5721	107.3680	110.8040
Clase I en 20% y Clase II en 10% y 5%	MV	128.8210	105.7460	65.9320	14.0290	0.1740	37.0163	82.0640	50.6210	39.8230	31.1620	39.9728	110.5870	101.6410	212.2280
	MO	<b>131.2440</b>	102.9120	51.4450	5.1220	0.0690	<b>36.8941</b>	79.5870	44.6400	33.6850	25.3460	40.4175	110.7440	<b>99.0642</b>	<b>209.8080</b>
	ROB	126.8530	<b>106.1840</b>	<b>72.2030</b>	<b>24.1540</b>	<b>0.9640</b>	37.3275	<b>83.9320</b>	<b>54.8380</b>	<b>44.2110</b>	<b>35.3490</b>	<b>39.5873</b>	<b>110.2950</b>	104.6010	214.8970
Clase I en 5% y Clase II en 10% y 5%	MV	127.9540	103.0530	59.3880	9.3560	0.0250	37.4912	81.4000	46.4170	36.1540	28.0660	40.1534	109.2770	102.9290	212.2060
	MO	<b>130.4510</b>	99.4170	43.6230	3.2270	0.0640	<b>37.3354</b>	78.8550	40.5820	30.3000	22.5390	40.6393	109.7190	<b>100.2730</b>	<b>209.9920</b>
	ROB	125.9490	<b>103.7040</b>	<b>66.6820</b>	<b>17.8400</b>	<b>0.4600</b>	37.8192	<b>83.3690</b>	<b>50.9360</b>	<b>40.3330</b>	<b>31.9980</b>	<b>39.7364</b>	<b>108.8170</b>	105.9260	214.7430
Clase I en 10% y Clase II en 5%	MV	126.1580	96.2490	43.9480	3.3620	0.0000	38.4161	75.8420	42.1400	31.7420	24.0600	40.9777	107.3470	105.3550	212.7020
	MO	129.0550	92.6140	30.5790	1.4570	<b>0.0610</b>	<b>38.0562</b>	73.1560	36.3010	26.3040	19.0870	41.5172	108.6920	<b>102.2070</b>	<b>210.8990</b>
	ROB	<b>123.9370</b>	<b>97.1110</b>	<b>51.6950</b>	<b>7.6120</b>	0.0520	38.8518	<b>77.7890</b>	<b>46.2730</b>	<b>35.8810</b>	<b>27.7570</b>	<b>40.5435</b>	<b>106.3470</b>	108.5890	214.9360
Clase I en 20% y Clase II en 10% y 5%	MV	126.2330	96.8900	42.0390	2.2530	0.0000	38.7680	78.3870	42.1220	31.2550	23.0250	40.5783	110.8590	102.3980	213.2580
	MO	<b>127.8730</b>	91.0720	25.7510	0.7800	0.0290	38.6298	76.2560	36.4080	25.7160	17.5910	40.9254	110.9840	<b>100.8290</b>	<b>211.8140</b>
	ROB	124.7040	<b>98.6920</b>	<b>52.1490</b>	<b>6.9450</b>	<b>0.0400</b>	<b>39.0695</b>	<b>80.1660</b>	<b>46.3340</b>	<b>35.3180</b>	<b>27.0290</b>	<b>40.2577</b>	<b>110.6400</b>	104.5830	215.2230
Clase I en 20% y Clase II en 10% y 5%	MV	125.4880	92.8260	33.4410	1.0020	0.0000	39.1748	77.6510	38.0830	27.8730	20.2060	40.7552	109.6940	103.5760	213.2690
	MO	<b>127.2270</b>	85.8920	18.8940	0.4060	<b>0.0270</b>	<b>39.0046</b>	75.6610	32.5860	22.6390	15.1240	41.1316	110.0990	<b>101.9390</b>	<b>212.0380</b>
	ROB	123.8250	<b>95.2660</b>	<b>44.2660</b>	<b>3.9550</b>	0.0000	39.4909	<b>79.5360</b>	<b>42.1620</b>	<b>31.7600</b>	<b>24.0940</b>	<b>40.4137</b>	<b>109.3040</b>	105.7810	215.0850
Clase I en 20% y Clase II en 10% y 5%	MV	123.7790	82.1070	17.1900	0.1950	0.0000	39.9409	72.4700	33.0540	23.3020	16.2320	41.3658	107.9380	105.7480	213.6860
	MO	<b>125.9710</b>	74.2090	10.1580	0.1830	<b>0.0210</b>	<b>39.6013</b>	70.2660	27.9350	18.7010	11.9570	41.8024	109.1820	<b>103.6900</b>	<b>212.8720</b>
	ROB	121.7800	<b>85.0270</b>	<b>26.2870</b>	<b>1.0410</b>	0.0000	40.3413	<b>74.4980</b>	<b>37.1990</b>	<b>27.0030</b>	<b>19.7140</b>	<b>41.0064</b>	<b>107.0290</b>	108.1250	215.1540
Clase I en 20% y Clase II en 10% y 5%	MV	127.9090	94.5490	40.9170	2.4300	0.0000	38.5074	78.7220	42.9420	32.0220	23.7400	40.5291	110.8340	104.1560	214.9910
	MO	<b>129.9600</b>	89.3210	26.2580	0.8880	0.0270	<b>38.4086</b>	76.6800	37.5120	26.7030	18.5600	40.8670	110.9520	<b>102.2700</b>	<b>213.2230</b>
	ROB	125.7890	<b>96.2390</b>	<b>49.6500</b>	<b>6.4450</b>	<b>0.0300</b>	38.7477	<b>80.4090</b>	<b>46.7610</b>	<b>35.8430</b>	<b>27.4360</b>	<b>40.2290</b>	<b>110.6220</b>	106.4330	217.0560
Clase I en 20% y Clase II en 10% y 5%	MV	126.8300	90.5710	32.7520	1.0830	0.0000	38.9335	78.0070	38.8820	28.6920	20.9600	40.7068	109.6530	105.2680	214.9210
	MO	<b>129.1060</b>	84.3270	19.5130	0.4620	<b>0.0240</b>	<b>38.7990</b>	76.0420	33.6240	23.5640	16.0620	41.0756	110.0470	<b>103.3140</b>	<b>213.3610</b>
	ROB	124.4730	<b>92.7690</b>	<b>42.1210</b>	<b>3.6520</b>	0.0000	39.1913	<b>79.7530</b>	<b>42.6170</b>	<b>32.2340</b>	<b>24.4770</b>	<b>40.3853</b>	<b>109.2750</b>	107.5660	216.8420
Clase I en 20% y Clase II en 10% y 5%	MV	124.3160	80.2120	17.2410	0.2020	0.0000	39.7392	72.7610	33.9660	24.0980	16.9910	41.3346	107.8730	107.2850	215.1580
	MO	<b>127.4420</b>	73.3150	10.8160	0.2050	<b>0.0210</b>	<b>39.4220</b>	70.6450	29.0340	19.6650	12.7700	41.7707	109.1100	<b>104.9410</b>	<b>214.0510</b>
	ROB	121.3620	<b>82.6190</b>	<b>24.7710</b>	<b>0.8180</b>	0.0000	40.0918	<b>74.6840</b>	<b>37.7050</b>	<b>27.4880</b>	<b>20.2000</b>	<b>40.9863</b>	<b>106.9770</b>	109.7390	216.7170

Cuadro A.3: Valores promedios obtenidos de 1000 imágenes generadas con las clases  $\mathcal{G}_I^0(-7)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-3)$ . Contaminación: ambas clases.

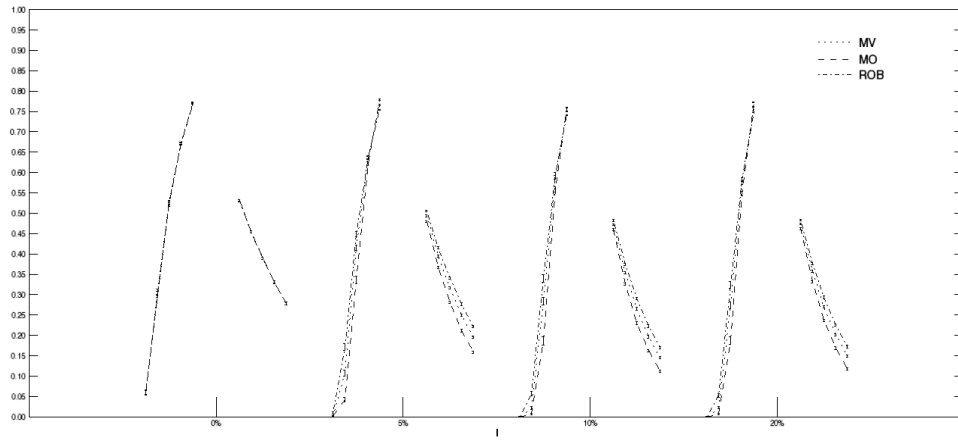


Figura A.4: Proporción de Aciertos Promedio en  $A_{0,7}$ ,  $A_{0,65}$ ,  $A_{0,6}$ ,  $A_{0,55}$ ,  $A_{0,5}$  y  $B_{0,5}$ ,  $B_{0,45}$ ,  $B_{0,4}$ ,  $B_{0,35}$ ,  $B_{0,3}$  cuando se contamina la 1<sup>o</sup> Clase con píxeles de mezcla de clases  $\mathcal{G}_I^0(-3)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-7)$  en 0%, 5%, 10% y 20%

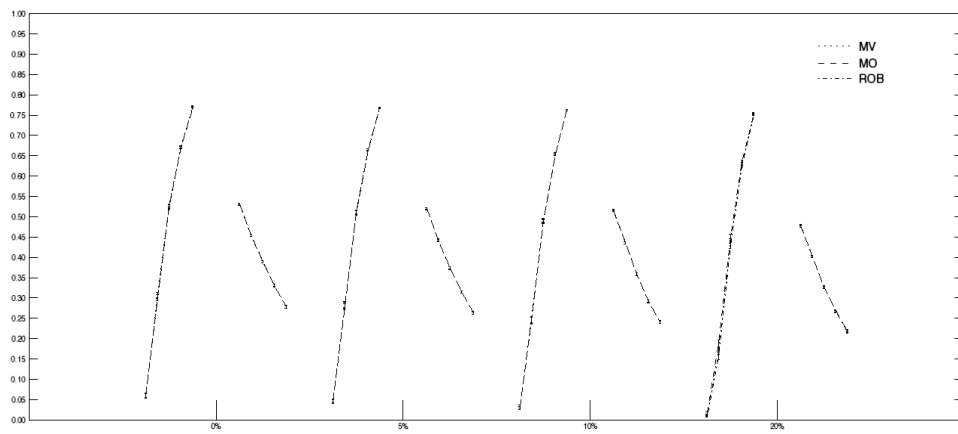


Figura A.5: Proporción de Aciertos Promedio en  $A_{0,7}$ ,  $A_{0,65}$ ,  $A_{0,6}$ ,  $A_{0,55}$ ,  $A_{0,5}$  y  $B_{0,5}$ ,  $B_{0,45}$ ,  $B_{0,4}$ ,  $B_{0,35}$ ,  $B_{0,3}$  cuando se contamina la 2<sup>o</sup> Clase con píxeles de mezcla de clases  $\mathcal{G}_I^0(-3)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-7)$  en 0%, 5%, 10% y 20%

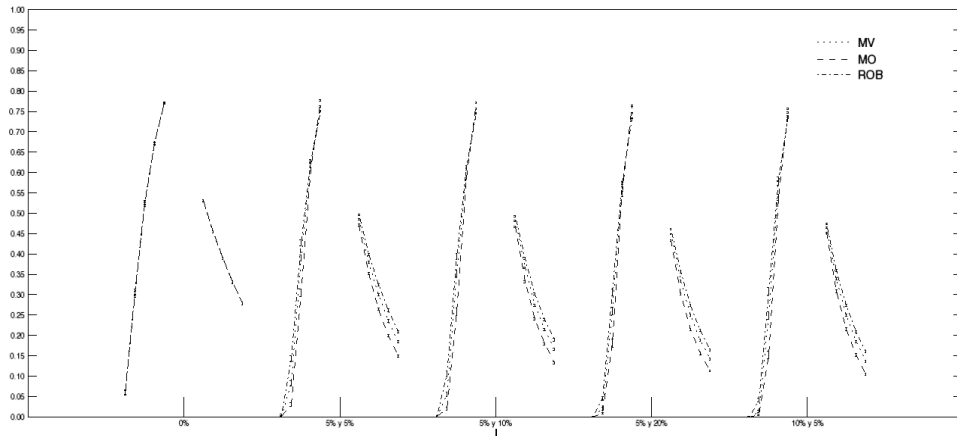


Figura A.6: Proporción de Aciertos Promedio en  $A_{0,7}$ ,  $A_{0,65}$ ,  $A_{0,6}$ ,  $A_{0,55}$ ,  $A_{0,5}$  y  $B_{0,5}$ ,  $B_{0,45}$ ,  $B_{0,4}$ ,  $B_{0,35}$ ,  $B_{0,3}$  cuando se contaminan la 1<sup>o</sup> Clase y la 2<sup>o</sup> Clase con píxeles de mezcla de clases  $\mathcal{G}_I^0(-3)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-7)$

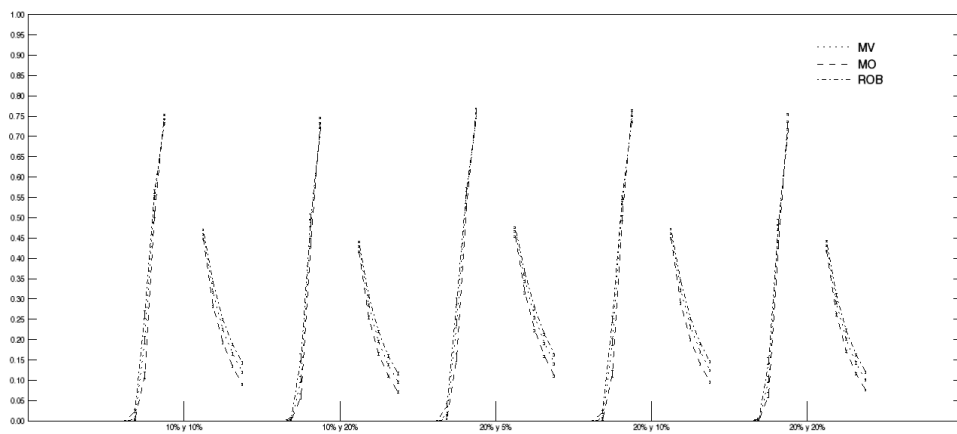


Figura A.7: Proporción de Aciertos Promedio en  $A_{0,7}$ ,  $A_{0,65}$ ,  $A_{0,6}$ ,  $A_{0,55}$ ,  $A_{0,5}$  y  $B_{0,5}$ ,  $B_{0,45}$ ,  $B_{0,4}$ ,  $B_{0,35}$ ,  $B_{0,3}$  cuando se contaminan la 1<sup>o</sup> Clase y la 2<sup>o</sup> Clase con píxeles de mezcla de clases  $\mathcal{G}_I^0(-3)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-7)$



## A.2. Imágenes generadas con $\mathcal{G}_I^0(-15)$ y $\mathcal{G}_I^0(-7)$

### A.2.1. Estimación de Parámetros

	Estimador	Clase $\mathcal{G}_I^0(15,1,1)$			Clase $\mathcal{G}_I^0(7,1,1)$		
		Max. Verosimilitud	Momentos	M-estimador	Max. Verosimilitud	Momentos	M-estimador
Puro	I.C. Estimación	(-15.1111;-14.9642)	(-15.1189;-14.9715)	(-15.1271;-14.9741)	(-3.02222;-2.99284)	(-3.04007;-3.00797)	(-3.02467;-2.99467)
	I.C. ECM	(1.27970;1.52984)	(1.28908;1.54213)	(1.38728;1.66263)	(0.0511879;0.0611936)	(0.0612016;0.0739174)	(0.0533315;0.0639173)
	Error Rel. Abs.	0.997496	0.996994	0.996638	0.997496	0.992057	0.996787
Contami nación 5%	I.C. Estimación	(-14.2588;-14.1185)	(-14.2162;-14.0733)	(-14.4388;-14.2932)	(-3.07398;-3.04397)	(-3.08545;-3.05259)	(-3.07969;-3.04896)
	I.C. ECM	(1.79175;2.08385)	(1.90413;2.21551)	(1.64103;1.91970)	(0.0561790;0.0678314)	(0.0678429;0.0820692)	(0.0592662;0.0717974)
	Error Rel. Abs.	1.05718	1.06047	1.04413	0.98072	0.977511	0.97901
Contami nación 10%	I.C. Estimación	(-13.1912;-13.0613)	(-13.1111-12.9774)	(-13.4944;-13.3598)	(-3.15323;-3.12216)	(-3.15147;-3.11721)	(-3.16711;-3.13512)
	I.C. ECM	(4.35931;4.85472)	(4.71764;5.25874)	(3.43350;3.87005)	(0.0740568;0.0894342)	(0.0855944;0.103205)	(0.0810243;0.0977261)
	Error Rel. Abs.	1.14275	1.14993	1.11714	0.956116	0.957139	0.952043
Contami nación 20%	I.C. Estimación	(-11.6102;-11.4986)	(-11.5143;-11.3981)	(-11.9422;-11.8269)	(-3.30834;-3.27566)	(-3.28355;-3.24679)	(-3.33958;-3.30580)
	I.C. ECM	(12.3050;13.0591)	(13.0296;13.8447)	(10.2197;10.9218)	(0.142218;0.167146)	(0.144798;0.171528)	(0.164531;0.192150)
	Error Rel. Abs.	1.2982	1.30934	1.26215	0.9113	0.918789	0.902883

Cuadro A.4: Estimación paramétrica de  $\alpha$  en imágenes generadas con  $\mathcal{G}_I^0(-15)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-7)$  contaminación con píxeles de mezcla.

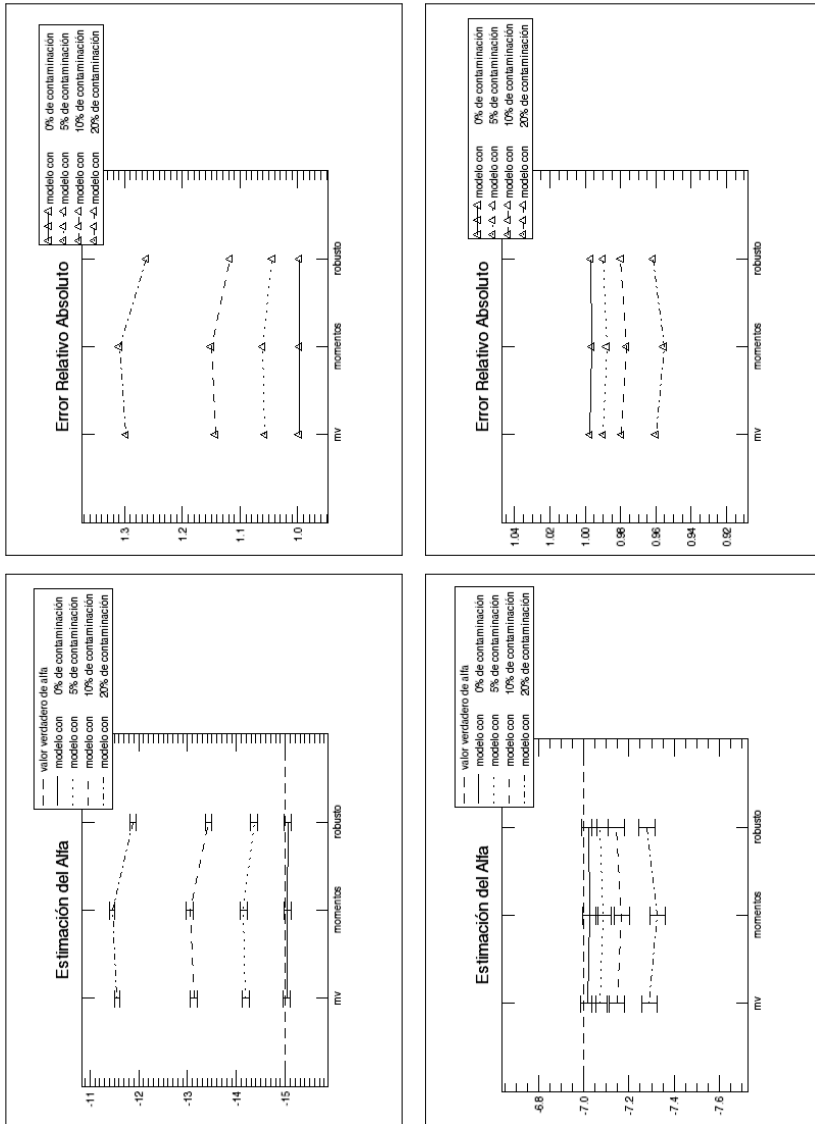


Figura A.8: Estimación del paramétrica de  $\alpha$  igual a -15 y -7 con contaminación de mezcla de  $\mathcal{G}_T^0(-15)$  y  $\mathcal{G}_T^0(-7)$ .

A.2.2. Funciones de Pertenencia Contaminadas con Píxeles de Mezcla

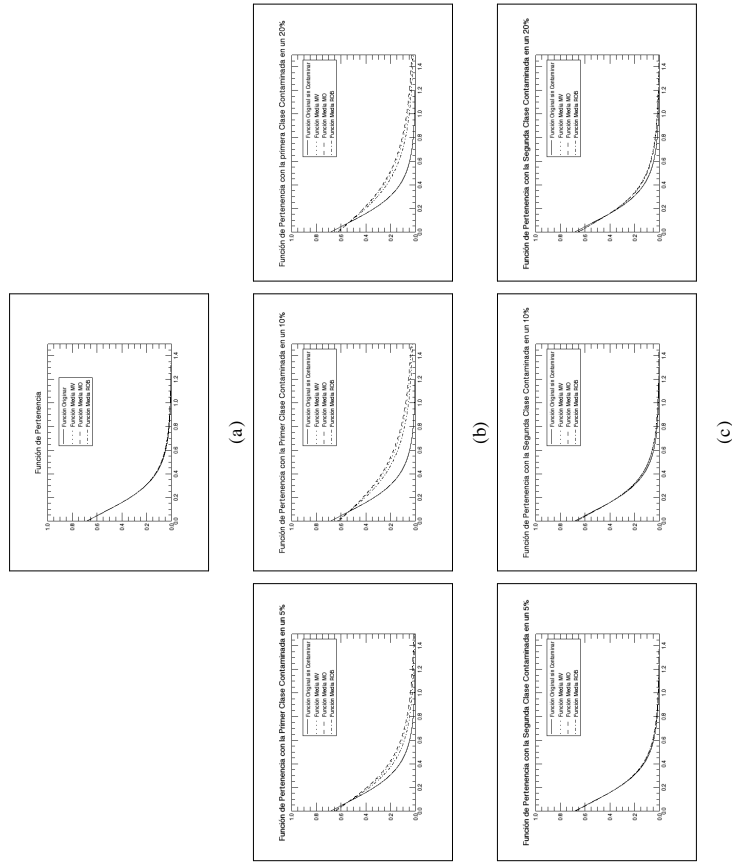
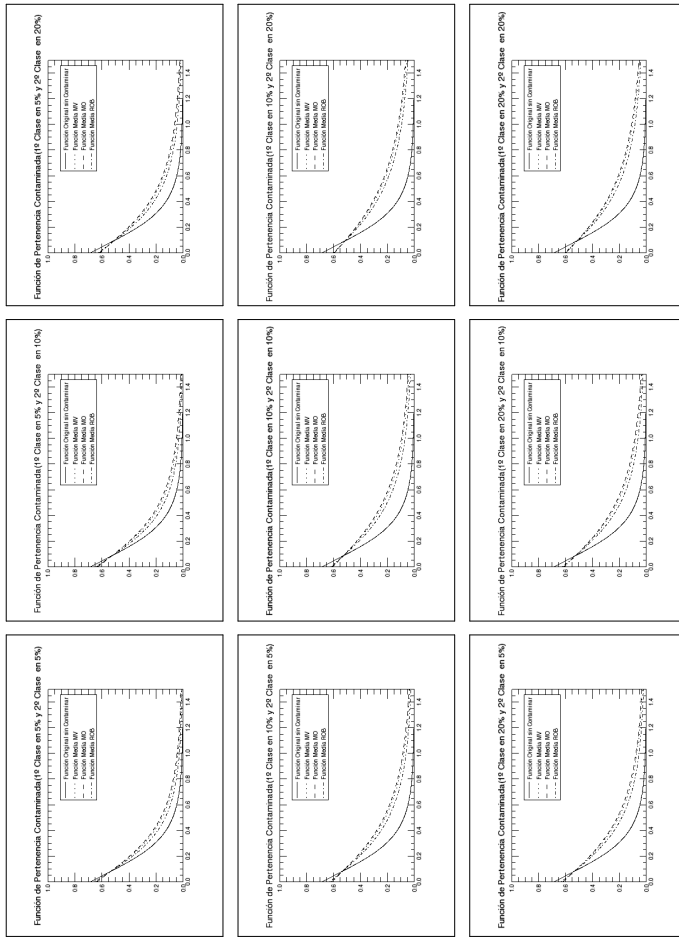


Figura A-9: Función grado de pertenencia en imágenes generadas con  $\mathcal{G}_I^0(-15)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-7)$ . Modelo: (a) puro. (b) contaminación de la primer clase con píxeles de mezcla. (c) contaminación de la segunda clase con píxeles de mezcla.



(d)

Figura A.10: Función grado de pertenencia en imágenes generadas con  $\mathcal{G}_I^0(-15)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-7)$ . Modelo: (d) Contaminación de ambas clases con píxeles de mezcla.

A.2.3. Ajuste en Imágenes

	Estimador Promed	Aciertos en Clase 1					Ajuste Clase 1	Aciertos en Clase 2					Ajuste Clase 2	Ajuste en Cp 0.3	Ajuste en Cp 0.7	Ajuste Total
		#A <sub>0.50</sub>	#A <sub>0.55</sub>	#A <sub>0.60</sub>	#A <sub>0.65</sub>	#A <sub>0.70</sub>		#B <sub>0.45</sub>	#B <sub>0.40</sub>	#B <sub>0.35</sub>	#B <sub>0.30</sub>					
Puro	MV	128.1980	108.9280	79.5370	36.2900	3.2530	35.4708	86.9510	72.4340	60.4800	50.0320	40.8420	39.1564	110.8460	103.9860	214.8320
	MO	128.1400	108.8440	79.3420	36.0790	3.1900	35.4959	86.9850	72.4620	60.5080	50.0230	40.8130	39.1455	110.7750	104.0700	214.8450
	ROB	128.1910	108.8740	79.2750	36.4460	3.5950	35.4772	86.9490	72.4530	60.4620	50.0740	40.8440	39.1359	110.8260	104.0630	214.8890
	MV	126.7860	101.9120	59.3290	10.3810	0.1060	37.3916	81.8240	81.8240	49.8670	38.4210	29.3870	40.0693	111.4270	99.8807	211.3070
	MO	127.2960	101.2330	55.8520	7.8870	0.0410	37.3447	81.1900	81.1900	48.3610	36.6960	27.8230	40.1771	111.4290	99.2636	210.6930
	ROB	125.3880	102.6020	65.1070	17.3160	0.5260	37.6080	83.2790	83.2790	53.1860	42.0250	32.8350	39.7908	111.2640	101.7580	213.0220
	MV	124.0150	92.9230	36.6770	1.6150	0.0000	38.9669	78.3470	78.3470	41.3290	29.8740	21.3360	40.6284	111.6910	101.1210	212.8120
	MO	124.4180	91.6660	32.5010	1.0210	0.0000	38.9214	77.8470	77.8470	39.7930	28.3860	19.9320	40.7138	111.6790	100.7460	212.4260
	ROB	122.7850	94.6540	44.8640	4.5480	0.0160	39.1787	79.7320	79.7320	44.8350	33.3330	24.7490	40.3921	111.5840	102.4990	214.0830
Contaminación de la 1ª Clase	MV	126.4790	91.7820	37.0310	1.8860	0.0000	38.6614	78.8700	78.8700	42.7030	31.2180	22.5690	40.5512	111.6540	102.7520	214.4060
	MO	126.8940	90.6820	33.4300	1.2770	0.0000	38.6283	78.3470	78.3470	41.2770	29.7850	21.2170	40.6319	111.6410	102.3010	213.9420
	ROB	125.0400	93.4230	44.4590	4.9200	0.0130	38.8427	80.2330	80.2330	46.1120	34.5640	25.8540	40.3163	111.5430	104.3430	215.8860
	MV	127.6740	107.6250	76.8520	32.2470	2.2670	35.7886	85.2510	85.2510	58.0910	47.5710	38.6420	39.3111	109.9690	104.8320	214.8020
	MO	127.6120	107.5530	76.7210	32.1000	2.2950	35.8060	85.2890	85.2890	58.1120	47.5820	38.6260	39.3072	109.9320	104.8940	214.8260
	ROB	127.6550	107.5510	76.6010	32.4130	2.5450	35.8018	85.2240	85.2240	58.0570	47.6630	38.6660	39.2842	109.9220	104.9280	214.8490
	MV	126.9120	105.7810	72.9600	26.5400	1.3210	36.2247	84.7390	84.7390	55.7020	43.9650	35.2350	39.3927	108.6580	105.9750	214.6330
	MO	126.8830	105.6980	72.8580	26.5100	1.3660	36.2378	84.7920	84.7920	55.7070	43.9570	35.2240	39.3928	108.6400	106.0240	214.6640
	ROB	126.8420	105.6350	72.4940	26.5330	1.3970	36.2608	84.7880	84.7880	55.6580	44.0180	35.2200	39.3429	108.5150	106.1300	214.6450
Contaminación de la 2ª Clase	MV	125.1770	101.0470	62.5960	15.1300	0.3720	37.1768	78.5850	50.3270	39.9270	31.3840	40.4313	106.7440	108.3690	215.1130	
	MO	125.2790	101.4620	63.4860	16.2340	0.4980	37.0971	78.4790	50.3980	40.0540	31.5400	40.5294	107.1050	108.1870	215.2920	
	ROB	124.7840	99.6040	59.5450	13.6480	0.2760	37.3982	78.9400	50.0990	39.6550	31.1460	40.1856	105.8680	108.9620	214.8290	

Cuadro A.5: Valores promedios obtenidos de 1000 imágenes generadas con las clases  $\mathcal{G}_I^0(-15)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-7)$ . Contaminación: una clase.

Estimador	Aciertos en Clase 1					Aciertos en Clase 2					Ajustete Clase 2	Ajustete en Cp 0,3	Ajustete en Cp 0,7	Ajustete Total	
	#A <sub>0,50</sub>	#A <sub>0,55</sub>	#A <sub>0,60</sub>	#A <sub>0,65</sub>	#A <sub>0,70</sub>	#B <sub>0,50</sub>	#B <sub>0,45</sub>	#B <sub>0,40</sub>	#B <sub>0,35</sub>	#B <sub>0,30</sub>					
Puro	MV	128.1980	108.9280	79.5370	36.2900	3.2530	86.9510	72.4340	60.4800	50.0320	40.8420	39.1564	110.8460	103.9860	214.8320
	MO	128.1400	108.8440	79.3420	36.0790	3.1900	86.9850	72.4620	60.5080	50.0230	40.8130	39.1455	110.7750	104.0700	214.8450
	ROB	128.1910	108.8740	79.2750	36.4460	3.5950	86.9490	72.4530	60.4620	50.0740	40.8440	39.1359	110.8260	104.0630	214.8890
Clase I en 20% y Clase II en 5%	MV	126.2660	100.1270	55.0450	7.8180	0.0320	37.6884	80.4420	47.3500	36.2130	27.7730	40.2112	110.6180	100.7360	211.3540
	MO	126.8360	99.3860	51.3440	5.8270	0.0160	37.6960	79.8410	45.7700	34.6230	26.3390	40.3227	110.6650	100.1060	210.7700
	ROB	124.8510	101.0460	61.3580	13.9430	0.3220	37.9066	81.8840	50.7120	39.6860	31.0220	39.9319	110.4040	102.6130	213.0170
Clase I en 5% y Clase II en 10%	MV	125.5490	97.4850	48.7330	4.9280	0.0000	38.0923	80.0900	43.4910	32.7930	24.9550	40.3298	109.4690	101.8890	211.3580
	MO	126.1230	96.4470	44.7100	3.4910	0.0060	38.0384	79.5350	41.8330	31.2640	23.5970	40.4481	109.5620	101.2580	210.8200
	ROB	124.0350	98.5040	55.5860	9.8120	0.1030	38.3256	81.5530	47.2020	36.0380	28.0270	40.0213	109.1130	103.7980	212.9110
Clase I en 5% y Clase II en 20%	MV	123.7450	89.7950	33.1820	1.5700	0.0000	38.9545	74.7480	39.0760	28.5080	21.1610	41.0620	107.6360	104.3010	211.9360
	MO	124.5520	88.9820	30.1260	1.1970	0.0000	38.8221	74.0380	37.5380	27.1710	19.9550	41.2238	108.0760	103.4660	211.5410
	ROB	121.8140	90.3480	38.6380	3.2870	0.0000	39.3358	76.2260	42.1840	31.5200	23.7950	40.6667	106.5860	106.5720	213.1590
Clase I en 10% y Clase II en 5%	MV	123.5460	90.2900	31.2990	1.0360	0.0000	39.2215	77.2360	38.8470	28.0620	20.0570	40.7547	110.9560	101.9120	212.8690
	MO	123.9430	88.7770	27.2090	0.7040	0.0000	39.1707	76.7140	37.3410	26.6850	18.6590	40.8430	110.9900	101.5260	212.5160
	ROB	122.3240	92.4570	39.9230	3.2290	0.0000	39.4351	78.5460	42.2800	31.3660	23.2840	40.5197	110.7940	103.2860	214.0790
Clase I en 10% y Clase II en 20%	MV	122.8350	86.2040	23.9780	0.4770	0.0000	39.5634	76.7430	35.0310	25.0250	17.6110	40.8815	109.9530	102.9720	212.9250
	MO	123.2720	84.3220	20.2050	0.3150	0.0000	39.5105	76.2040	33.5890	23.7050	16.2370	40.9740	110.0340	102.5860	212.6200
	ROB	121.5990	88.7580	32.8430	1.7130	0.0000	39.7899	78.1440	38.3750	28.0940	20.6050	40.6256	109.6500	104.3680	214.0180
Clase I en 20% y Clase II en 10%	MV	121.1790	73.5790	10.9510	0.0850	0.0000	40.2679	71.6970	30.0920	20.5780	13.7310	41.4290	108.3240	105.1460	213.4700
	MO	121.7910	71.9000	9.4600	0.0690	0.0000	40.1515	71.0100	28.8040	19.4050	12.6640	41.5607	108.7150	104.5820	213.2970
	ROB	119.4470	75.5960	16.4650	0.3250	0.0000	40.6083	73.2670	33.1680	23.2960	16.2180	41.1020	107.4070	106.8370	214.2440
Clase I en 20% y Clase II en 5%	MV	125.9220	89.2180	32.0310	1.1830	0.0000	38.9294	77.7040	40.1370	29.3170	21.2470	40.6799	110.9060	103.5030	214.4090
	MO	126.3720	87.9370	28.3280	0.8430	0.0000	38.8905	77.2380	38.7930	27.9890	19.9260	40.7639	110.9370	103.0400	213.9760
	ROB	124.4380	91.1690	39.8210	3.3410	0.0000	39.1136	79.0160	43.5130	32.5520	24.3650	40.4458	110.7410	105.0900	215.8310
Clase I en 20% y Clase II en 10%	MV	125.1080	85.3470	25.0510	0.5520	0.0000	39.2903	77.2540	36.2880	26.1660	18.6780	40.8063	109.8780	104.5040	214.3830
	MO	125.6090	83.7450	21.6570	0.3990	0.0000	39.2486	76.7730	34.9590	24.9020	17.4620	40.8947	109.9540	104.0400	213.9940
	ROB	123.4820	87.6300	33.0460	1.8330	0.0000	39.4893	78.6390	39.5870	29.2910	21.6870	40.5505	109.5730	106.1130	215.6860
Clase I en 20% y Clase II en 20%	MV	122.9840	73.4980	12.0860	0.0980	0.0000	40.0387	72.1520	31.4670	21.7990	14.8390	41.3790	108.2090	106.5290	214.7380
	MO	123.7580	72.1200	10.7960	0.0910	0.0000	39.9280	71.5370	30.2520	20.7250	13.8680	41.5103	108.5990	105.8980	214.4970
	ROB	120.7040	75.2500	17.0950	0.3440	0.0000	40.3639	73.7120	34.4540	24.4120	17.2910	41.0466	107.2740	108.4040	215.6780

Cuadro A.6: Valores promedios obtenidos de 1000 imágenes generadas con las clases  $\mathcal{G}_I^0(-15)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-7)$ . Contaminación: ambas clases.

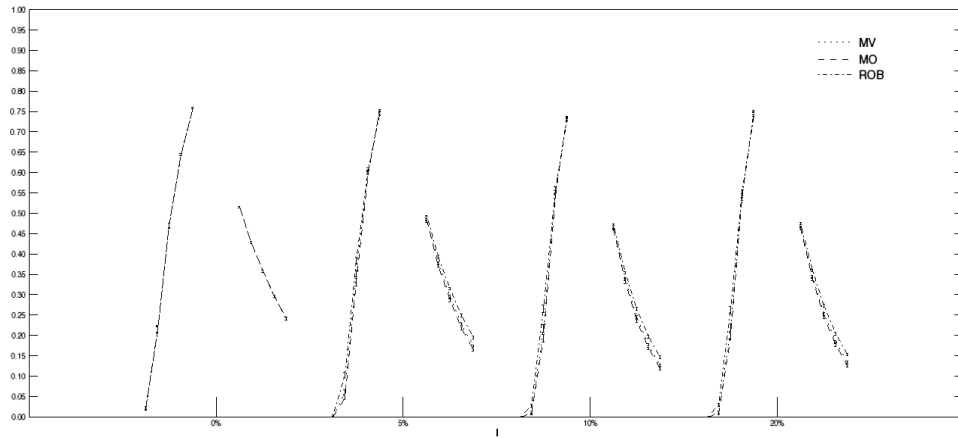


Figura A.11: Proporción de Aciertos Promedio en  $A_{0,7}, A_{0,65}, A_{0,6}, A_{0,55}, A_{0,5}$  y  $B_{0,5}, B_{0,45}, B_{0,4}, B_{0,35}, B_{0,3}$  cuando se contamina la 1<sup>o</sup> Clase con píxeles de mezcla de clases  $\mathcal{G}_I^0(-15)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-7)$  en 0%, 5%, 10% y 20%

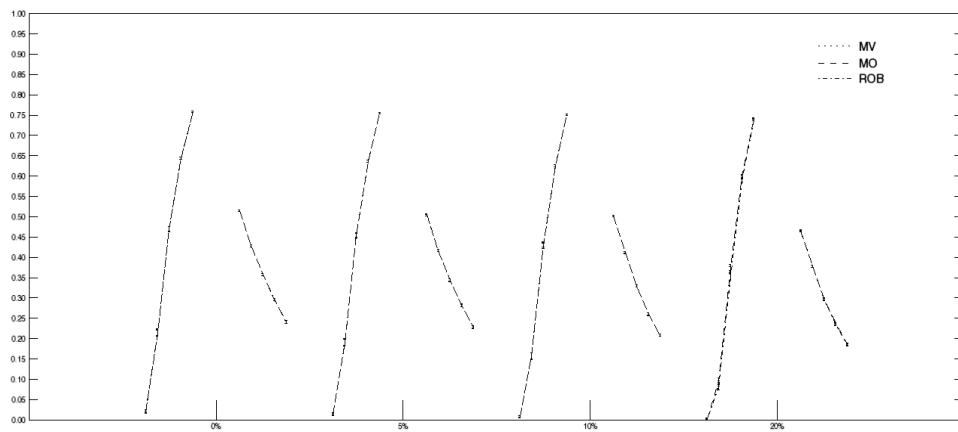


Figura A.12: Proporción de Aciertos Promedio en  $A_{0,7}, A_{0,65}, A_{0,6}, A_{0,55}, A_{0,5}$  y  $B_{0,5}, B_{0,45}, B_{0,4}, B_{0,35}, B_{0,3}$  cuando se contamina la 2<sup>o</sup> Clase con píxeles de mezcla de clases  $\mathcal{G}_I^0(-15)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-7)$  en 0%, 5%, 10% y 20%

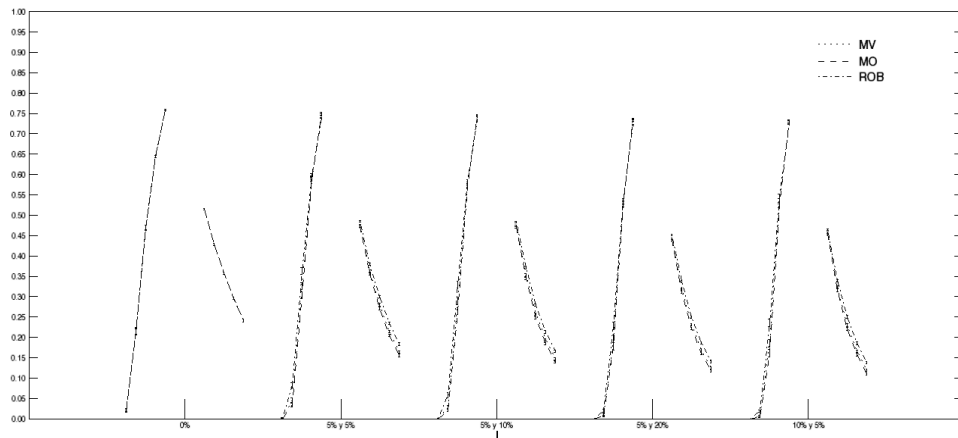


Figura A.13: Proporción de Aciertos Promedio en  $A_{0,7}$ ,  $A_{0,65}$ ,  $A_{0,6}$ ,  $A_{0,55}$ ,  $A_{0,5}$  y  $B_{0,5}$ ,  $B_{0,45}$ ,  $B_{0,4}$ ,  $B_{0,35}$ ,  $B_{0,3}$  cuando se contaminan la 1<sup>o</sup> Clase y la 2<sup>o</sup> Clase con píxeles de mezcla de clases  $\mathcal{G}_I^0(-15)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-7)$

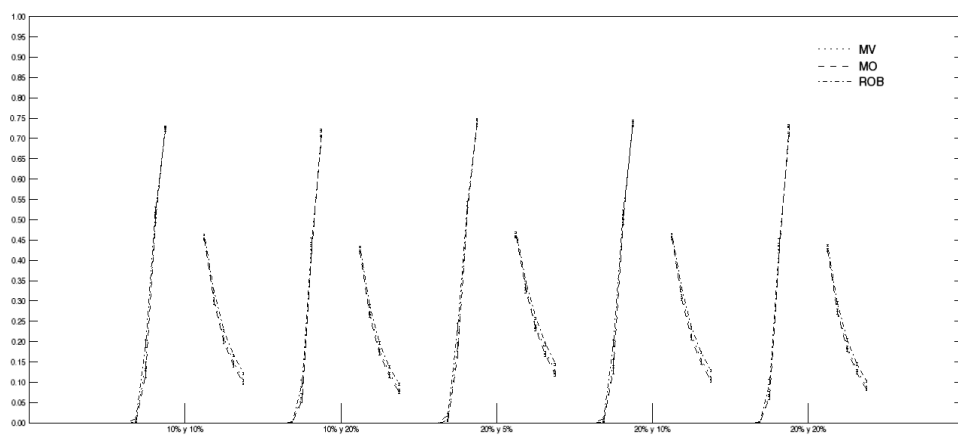


Figura A.14: Proporción de Aciertos Promedio en  $A_{0,7}$ ,  $A_{0,65}$ ,  $A_{0,6}$ ,  $A_{0,55}$ ,  $A_{0,5}$  y  $B_{0,5}$ ,  $B_{0,45}$ ,  $B_{0,4}$ ,  $B_{0,35}$ ,  $B_{0,3}$  cuando se contaminan la 1<sup>o</sup> Clase y la 2<sup>o</sup> Clase con píxeles de mezcla de clases  $\mathcal{G}_I^0(-15)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-7)$



### A.3. Imágenes generadas con $\mathcal{G}_I^0(-15)$ y $\mathcal{G}_I^0(-3)$

#### A.3.1. Estimación de Parámetros

	Estimador	Clase $\mathcal{G}_I^0(15,1,1)$			Clase $\mathcal{G}_I^0(3,1,1)$		
		Max. Verosimilitud	Momentos	M-estimador	Max. Verosimilitud	Momentos	M-estimador
Puro	I.C. Estimación	(-15.1111;-14.9642)	(-15.1189;-14.9715)	(-15.1271;-14.9741)	(-3.02222;-2.99284)	(-3.04007;-3.00797)	(-3.02467;-2.99467)
	I.C. ECM	(1.27970;1.52984)	(1.28908;1.54213)	(1.38728;1.66263)	(0.0511879;0.0611936)	(0.0612016;0.0739174)	(0.0533315;0.0639173)
	Error Rel. Abs.	0.997496	0.996994	0.996638	0.997496	0.992057	0.996787
Contami nación 5%	I.C. Estimación	(-12.8678;-12.7145)	(-12.3176;-12.1182)	(-14.0225;-13.8781)	(-3.07398;-3.04397)	(-3.08545;-3.05259)	(-3.07969;-3.04896)
	I.C. ECM	(6.05537;6.75725)	(9.68122;10.9677)	(2.28248;2.63299)	(0.0561790;0.0678314)	(0.0678429;0.0820692)	(0.0592662;0.0717974)
	Error Rel. Abs.	1.17269	1.2277	1.07525	0.98072	0.977511	0.97901
Contami nación 10%	I.C. Estimación	(-10.5782;-10.4469)	(-9.73658;-9.56662)	(-12.6174;-12.4863)	(-3.15323;-3.12216)	(-3.15147;-3.11721)	(-3.16711;-3.13512)
	I.C. ECM	(20.6715;21.8429)	(29.5414;31.4252)	(6.79073;7.42987)	(0.0740568;0.0894342)	(0.0855944;0.103205)	(0.0810243;0.097261)
	Error Rel. Abs.	1.42686	1.55415	1.19505	0.956116	0.957139	0.952043
Contami nación 20%	I.C. Estimación	(-7.97971;-7.88190)	(-7.15401;-7.03137)	(-10.2337;-10.1243)	(-3.30834;-3.27566)	(-3.28355;-3.24679)	(-3.33958;-3.30580)
	I.C. ECM	(49.9127;51.2781)	(62.5274;64.4795)	(23.5060;24.5360)	(0.142218;0.167146)	(0.144798;0.171528)	(0.164531;0.192150)
	Error Rel. Abs.	1.89136	2.11485	1.47362	0.9113	0.918789	0.902883

Cuadro A.7: Estimación paramétrica de  $\alpha$  en imágenes generadas con  $\mathcal{G}_I^0(-15)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-3)$  contaminación con píxeles de mezcla.

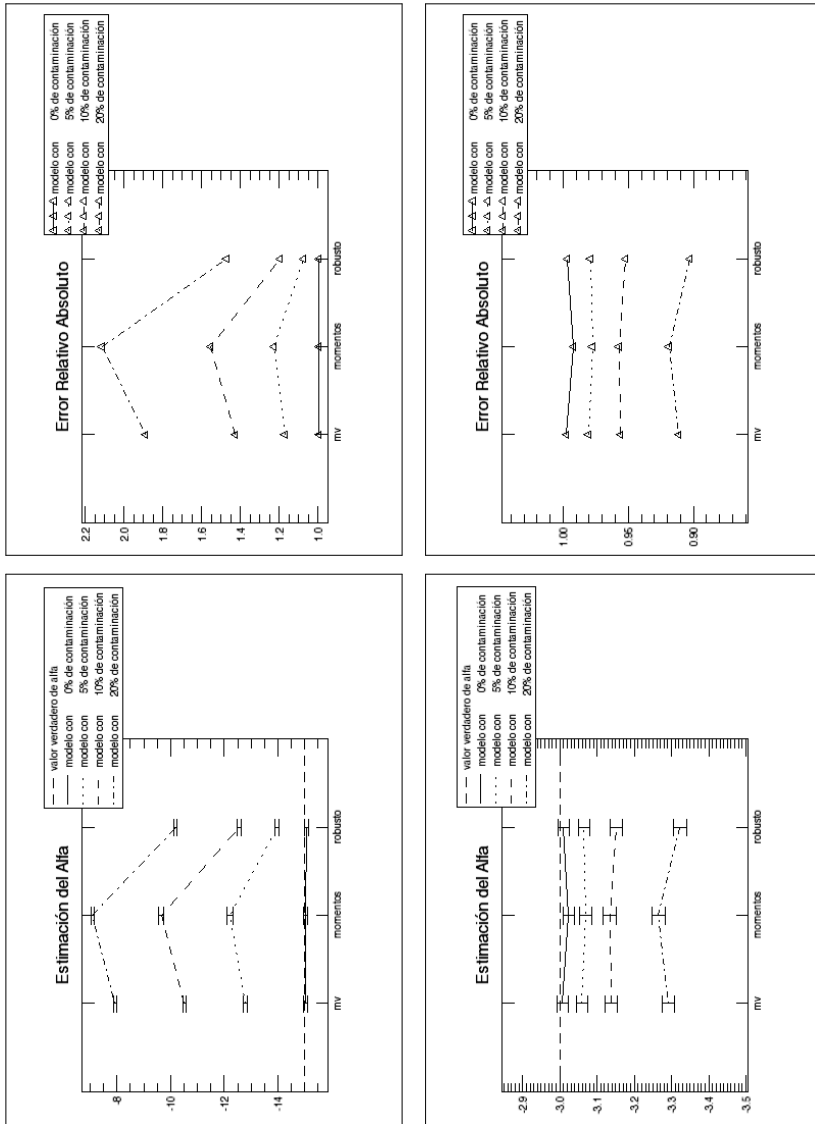


Figura A.15: Estimación del paramétrica de  $\alpha$  igual a -15 y -3 con contaminación de mezcla de  $\mathcal{G}_I^0(-15)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-3)$ .

A.3.2. Funciones de Pertenencia Contaminadas con Píxeles de Mezcla

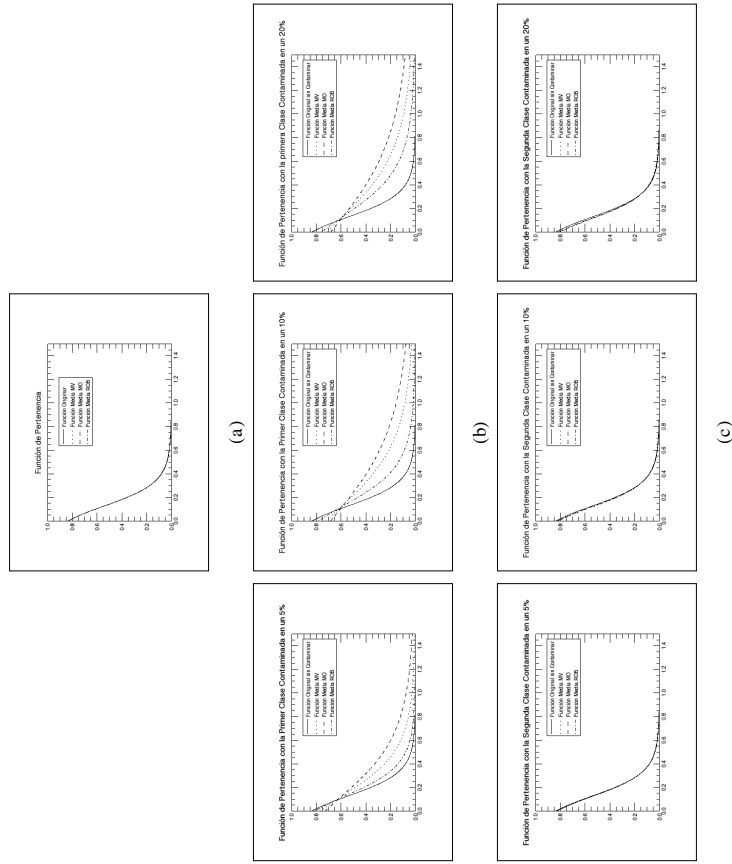
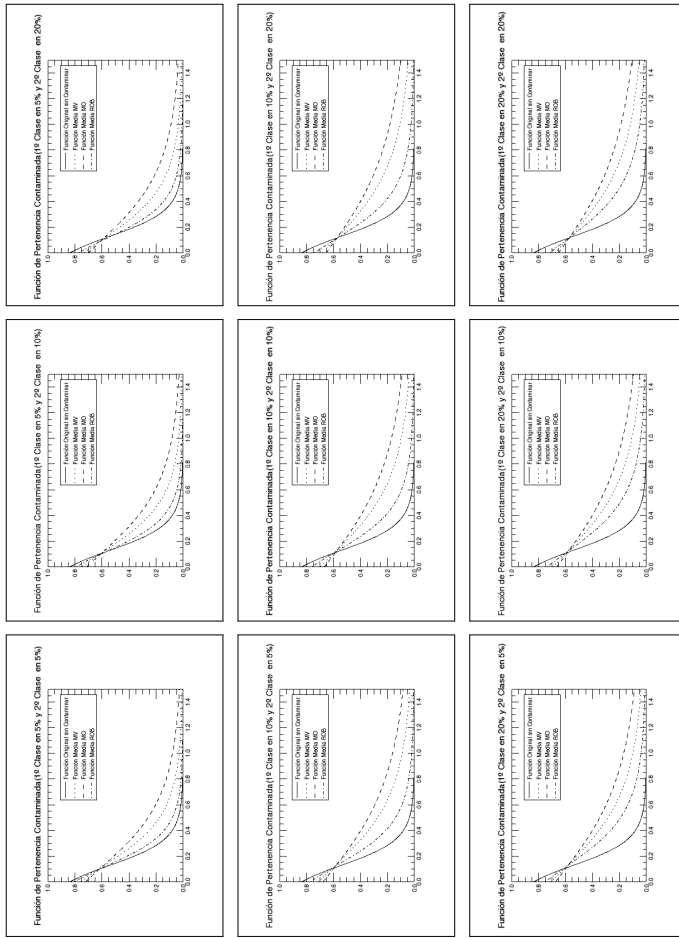


Figura A.16: Función grado de pertenencia en imágenes generadas con  $\mathcal{G}_I^0(-15)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-3)$ . Modelo: (a) puro. (b) contaminación de la primer clase con píxeles de mezcla. (c) contaminación de la segunda clase con píxeles de mezcla.



(d)

Figura A.17: Función grado de pertenencia en imágenes generadas con  $\mathcal{G}_I^0(-15)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-3)$ . Modelo: (d) Contaminación de ambas clases con píxeles de mezcla.

A.3.3. Ajuste en Imágenes

	Estimador $\backslash$ Promed	Aciertos en Clase 1					Ajustete Clase 1	Aciertos en Clase 2					Ajustete Clase 2	Ajustete en Cp 0.3	Ajustete en Cp 0.7	Ajustete Total
		#A <sub>0,50</sub>	#A <sub>0,55</sub>	#A <sub>0,60</sub>	#A <sub>0,65</sub>	#A <sub>0,70</sub>		#B <sub>0,50</sub>	#B <sub>0,55</sub>	#B <sub>0,60</sub>	#B <sub>0,65</sub>	#B <sub>0,70</sub>				
Puro	MV	146.3040	<b>139.7980</b>	<b>131.0370</b>	<b>119.2420</b>	<b>102.7510</b>	<b>21.8232</b>	113.0340	107.4640	102.1370	96.7570	91.3220	31.9940	111.1340	<b>117.5380</b>	<b>228.6720</b>
	MO	146.1810	139.6350	130.8130	119.0340	102.3240	21.9090	<b>113.1000</b>	<b>107.5810</b>	<b>102.2290</b>	<b>96.8670</b>	91.3850	<b>31.9379</b>	<b>110.8520</b>	117.8540	228.7060
	ROB	<b>146.3790</b>	139.7910	131.0210	119.2350	102.6650	21.8893	113.0650	107.4960	102.1750	96.8090	<b>91.4040</b>	31.9704	111.0640	117.6750	228.7390
5% (9 píxeles)	MV	147.4050	140.0310	<b>129.3430</b>	111.0180	79.8730	<b>26.8227</b>	100.4100	100.4100	83.7080	76.0040	68.7770	36.0336	115.6970	88.3937	204.0900
	MO	<b>150.4680</b>	<b>143.0590</b>	128.9400	101.3980	48.1280	26.9879	94.4260	94.4260	73.7290	65.0740	56.7410	37.5477	115.9800	<b>79.4762</b>	<b>195.4560</b>
	ROB	141.6080	134.9410	126.1050	<b>112.6740</b>	<b>93.0080</b>	28.1230	<b>108.1890</b>	<b>108.1890</b>	<b>95.3210</b>	<b>89.1530</b>	<b>82.9190</b>	<b>33.6533</b>	<b>113.3840</b>	109.0520	222.4350
10% (17 píxeles)	MV	142.5750	135.7450	<b>121.1400</b>	92.5550	38.4380	<b>31.8492</b>	93.2110	93.2110	71.9540	62.9730	54.6450	37.8404	116.2940	89.3741	205.6680
	MO	<b>144.9640</b>	<b>136.6410</b>	115.8420	65.8060	5.3050	31.9014	87.8580	87.8580	62.1440	51.9470	42.8140	38.9666	115.7550	<b>84.0935</b>	<b>199.8490</b>
	ROB	137.7880	130.7310	120.7440	<b>105.2710</b>	<b>79.0500</b>	33.3672	<b>103.0300</b>	<b>103.0300</b>	<b>87.7950</b>	<b>80.4410</b>	<b>73.5690</b>	<b>35.2562</b>	<b>115.0360</b>	109.6880	224.7240
20% (34 píxeles)	MV	138.2000	130.1490	113.9500	82.2830	29.0300	<b>31.9722</b>	92.3610	92.3610	70.5510	61.3550	52.8580	38.0348	116.2880	94.1322	210.4210
	MO	<b>141.9980</b>	<b>131.0590</b>	107.8090	57.2100	3.7740	32.0526	87.4720	87.4720	61.3990	51.0540	41.8660	39.0476	<b>115.7190</b>	<b>88.2591</b>	<b>203.9780</b>
	ROB	135.0720	126.5540	<b>114.9090</b>	<b>94.5380</b>	<b>62.9770</b>	33.0078	<b>99.2080</b>	<b>99.2080</b>	<b>81.7920</b>	<b>73.8540</b>	<b>66.4480</b>	<b>36.3368</b>	115.7990	108.2590	224.0580
5% (9 píxeles)	MV	145.4280	138.6080	129.2400	116.8210	99.1770	22.5920	107.9160	107.9160	97.0030	91.4420	86.2120	33.7775	110.5230	120.0980	230.6210
	MO	<b>145.4730</b>	<b>138.7150</b>	<b>129.4630</b>	<b>117.0880</b>	<b>99.6000</b>	<b>22.4989</b>	107.8160	107.8160	96.9120	91.3910	86.1400	33.9044	110.9880	<b>119.8140</b>	230.8020
	ROB	145.3440	138.4170	129.0450	116.4780	98.7320	22.6916	<b>108.0570</b>	<b>108.0570</b>	<b>97.0730</b>	<b>91.4920</b>	<b>86.3070</b>	<b>33.6642</b>	<b>110.1120</b>	120.5080	<b>230.6200</b>
10% (17 píxeles)	MV	144.3980	137.1390	127.2120	113.8780	94.8020	23.4780	104.4840	104.4840	90.9980	85.0430	80.0120	35.3084	109.4000	122.9860	232.3860
	MO	<b>144.7150</b>	<b>137.5710</b>	<b>127.8770</b>	<b>114.8650</b>	<b>96.2370</b>	<b>23.1863</b>	104.1050	104.1050	90.7180	84.8780	79.8650	35.6554	110.6710	<b>122.0600</b>	232.7310
	ROB	144.1290	136.7100	126.6040	113.0240	93.5300	23.7501	<b>104.8830</b>	<b>104.8830</b>	<b>91.2380</b>	<b>85.2280</b>	<b>80.1320</b>	<b>35.0267</b>	<b>108.3910</b>	123.8760	<b>232.2660</b>
20% (34 píxeles)	MV	145.4280	138.6080	129.2400	116.8210	99.1770	22.5920	107.9160	107.9160	97.0030	91.4420	86.2120	33.7775	110.5230	120.0980	230.6210
	MO	<b>145.4730</b>	<b>138.7150</b>	<b>129.4630</b>	<b>117.0880</b>	<b>99.6000</b>	<b>22.4989</b>	107.8160	107.8160	96.9120	91.3910	86.1400	33.9044	110.9880	<b>119.8140</b>	230.8020
	ROB	145.3440	138.4170	129.0450	116.4780	98.7320	22.6916	<b>108.0570</b>	<b>108.0570</b>	<b>97.0730</b>	<b>91.4920</b>	<b>86.3070</b>	<b>33.6642</b>	<b>110.1120</b>	120.5080	<b>230.6200</b>

Cuadro A.8: Valores promedios obtenidos de 1000 imágenes generadas con las clases  $\mathcal{G}_I^0(-15)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-3)$ . Contaminación: una clase.

Estimador √Promed	Aciertos en Clase 1					Aciertos en Clase 2					Ajustete Clase 1	Ajustete Clase 2	Ajustete en Cp 0,3	Ajustete en Cp 0,7	Ajustete Total
	#A <sub>0,50</sub>	#A <sub>0,55</sub>	#A <sub>0,60</sub>	#A <sub>0,65</sub>	#A <sub>0,70</sub>	#B <sub>0,50</sub>	#B <sub>0,45</sub>	#B <sub>0,40</sub>	#B <sub>0,35</sub>	#B <sub>0,30</sub>					
Puro	MV	146.3040	<b>139.7980</b>	<b>131.0370</b>	<b>119.2420</b>	<b>102.7510</b>	113.0340	107.4640	102.1370	96.7570	91.3220	31.9940	111.1340	<b>117.5380</b>	<b>228.6720</b>
	MO	146.1810	139.6350	130.8130	119.0340	102.3240	21.9090	<b>107.5810</b>	<b>102.2290</b>	<b>96.8670</b>	91.3850	<b>31.9379</b>	<b>110.8520</b>	117.8540	228.7060
	ROB	<b>146.3790</b>	139.7910	131.0210	119.2350	102.6650	21.8993	113.0650	107.4960	102.1750	96.8090	31.9704	111.0640	117.6750	228.7390
	MV	<b>146.7920</b>	138.7530	<b>127.0600</b>	106.6010	71.7170	<b>27.6482</b>	95.5680	79.2640	71.8900	64.9760	37.9999	114.2850	90.8577	205.1420
	MO	150.0870	<b>141.8190</b>	126.4370	95.6460	37.3750	27.6766	89.4740	69.6990	61.4300	53.3560	38.8552	115.1230	<b>81.4541</b>	<b>196.5770</b>
	ROB	140.6400	133.6820	124.1370	<b>109.3390</b>	<b>88.1410</b>	28.9618	<b>103.4320</b>	<b>90.2080</b>	<b>84.2750</b>	<b>78.3650</b>	<b>35.2136</b>	<b>112.1020</b>	111.7670	223.8690
	MV	146.0630	137.2670	<b>124.1440</b>	100.9500	61.0930	28.5973	89.8850	73.6250	66.6260	60.0100	38.6750	112.5090	93.6364	206.1450
	MO	<b>149.5570</b>	<b>140.3670</b>	123.1360	88.0580	25.9280	<b>28.4767</b>	83.4980	64.5260	56.6540	48.9060	40.1270	113.9820	<b>83.7224</b>	<b>197.7050</b>
	ROB	139.5170	132.0910	121.4910	<b>105.2210</b>	<b>81.6530</b>	29.9809	<b>99.4410</b>	<b>84.0190</b>	<b>78.3270</b>	<b>72.7830</b>	<b>36.5180</b>	<b>110.1050</b>	114.9880	225.0930
	MV	144.9300	134.9850	<b>119.5040</b>	92.1290	44.3640	29.9009	84.8180	68.2740	61.3480	55.0290	40.9143	110.9060	97.3401	208.2460
	MO	<b>148.8920</b>	<b>138.3670</b>	118.0980	75.9440	14.3750	<b>29.5185</b>	78.6310	59.4010	51.8420	44.3780	42.1367	113.1220	<b>86.6211</b>	<b>199.7430</b>
	ROB	137.8460	129.4900	117.0590	<b>98.4710</b>	<b>70.3300</b>	31.4922	<b>92.8180</b>	<b>78.8720</b>	<b>72.8840</b>	<b>67.2650</b>	<b>39.2367</b>	<b>108.2920</b>	119.5770	227.8690
	MV	142.0980	134.1920	117.9310	84.4760	25.1330	32.6632	88.6600	68.0960	59.4510	50.9750	38.9028	114.5210	91.7435	206.2650
	MO	<b>144.4770</b>	<b>135.2640</b>	111.2500	53.9960	2.9110	<b>32.5627</b>	83.5000	58.6490	47.9150	39.1550	39.9842	114.6740	<b>86.0281</b>	<b>200.7020</b>
	ROB	137.0400	129.2450	<b>118.5730</b>	<b>100.9530</b>	<b>72.3020</b>	34.1919	<b>98.4960</b>	<b>83.0850</b>	<b>76.0910</b>	<b>69.5280</b>	<b>36.6308</b>	<b>113.4070</b>	112.2200	225.6270
	MV	141.5520	132.2720	113.4670	73.7010	12.7420	33.5854	83.0430	63.0300	54.7000	46.5140	39.9025	112.4440	94.3850	206.8290
	MO	<b>143.9280</b>	<b>133.3220</b>	104.6300	39.8000	1.4430	<b>33.3208</b>	78.0820	53.9080	43.6020	35.2840	40.9645	113.3470	<b>88.2267</b>	<b>201.5740</b>
	ROB	136.0620	127.3920	<b>115.6710</b>	<b>95.0820</b>	<b>63.0730</b>	35.1860	<b>93.5650</b>	<b>77.2720</b>	<b>70.6590</b>	<b>64.3600</b>	<b>37.8109</b>	<b>111.1140</b>	115.2000	226.3140
	MV	140.7250	129.1990	105.6410	55.2090	3.5780	34.8235	78.5860	57.8870	49.7910	41.7570	41.4200	110.1630	97.8415	208.0040
	MO	<b>143.3210</b>	<b>130.3210</b>	93.3590	23.5680	0.5490	<b>34.2887</b>	73.2070	49.0580	39.0530	31.2070	42.3564	112.0550	<b>90.9983</b>	<b>203.0530</b>
	ROB	134.4260	124.6400	<b>110.4740</b>	<b>85.3480</b>	<b>46.7800</b>	36.6401	<b>87.8010</b>	<b>71.9530</b>	<b>65.2940</b>	<b>59.1100</b>	<b>39.9446</b>	<b>108.5360</b>	119.3810	227.9170
	MV	137.6710	128.2220	110.0690	74.0050	17.2840	32.8113	87.8580	66.7170	57.8990	48.9790	39.0603	114.4830	96.4137	210.8960
	MO	<b>140.9420</b>	<b>129.3630</b>	102.6780	46.0060	2.1200	<b>32.7290</b>	83.1520	57.9200	47.0430	38.2890	40.0471	114.6280	<b>90.1023</b>	<b>204.7300</b>
	ROB	134.4040	125.0230	<b>111.9530</b>	<b>88.9580</b>	<b>54.3290</b>	33.8809	<b>94.5580</b>	<b>77.4360</b>	<b>69.8540</b>	<b>62.7400</b>	<b>37.5569</b>	<b>113.9320</b>	110.7220	224.6540
	MV	137.1300	126.0230	104.8670	62.9960	7.7510	33.7578	82.3400	61.7010	53.1980	44.6010	40.0242	112.3800	98.9296	211.3100
	MO	<b>139.9910</b>	<b>127.1140</b>	95.5920	32.9200	1.0130	<b>33.5024</b>	77.7550	53.2320	42.7700	34.4270	41.0086	113.2950	<b>92.1805</b>	<b>205.4750</b>
	ROB	133.3920	123.2500	<b>108.0450</b>	<b>81.7640</b>	<b>42.4480</b>	34.9226	<b>89.0290</b>	<b>72.0220</b>	<b>64.7030</b>	<b>57.8660</b>	<b>38.6134</b>	<b>111.4360</b>	113.5830	225.0190
	MV	136.3050	122.8940	95.7670	44.6060	1.8350	35.0205	77.8830	56.6230	48.2690	39.8870	41.4623	110.0450	102.1660	212.2120
	MO	<b>138.9990</b>	<b>123.8200</b>	84.0210	18.9090	0.3850	<b>34.4867</b>	72.8810	48.3940	38.2360	30.3870	42.3647	111.9860	<b>94.7706</b>	<b>206.7570</b>
	ROB	131.6700	120.0100	<b>101.0700</b>	<b>69.5330</b>	<b>23.7040</b>	36.4229	<b>84.3940</b>	<b>66.7540</b>	<b>59.4400</b>	<b>52.8320</b>	<b>40.3392</b>	<b>108.3920</b>	117.5030	225.8950

Contaminación de la 1ª y la 2ª Clase

Cuadro A.9: Valores promedios obtenidos de 1000 imágenes generadas con las clases  $\mathcal{G}_I^0(-15)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-3)$ . Contaminación: ambas clases.

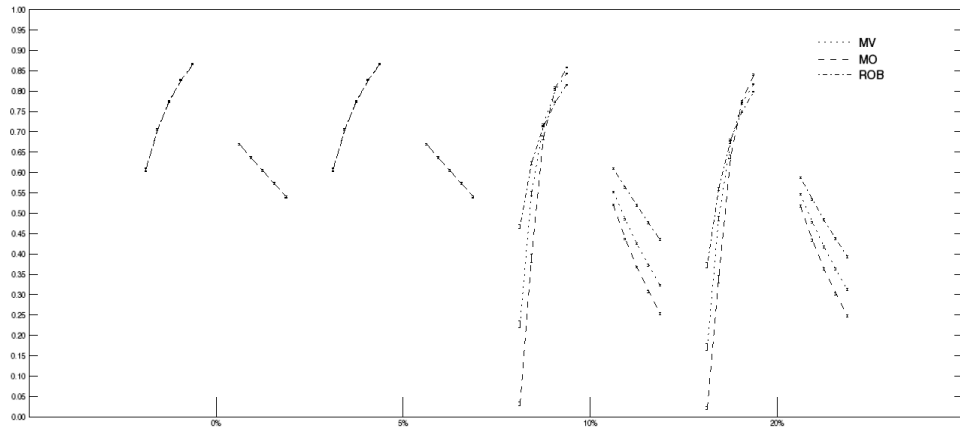


Figura A.18: Proporción de Aciertos Promedio en  $A_{0,7}$ ,  $A_{0,65}$ ,  $A_{0,6}$ ,  $A_{0,55}$ ,  $A_{0,5}$  y  $B_{0,5}$ ,  $B_{0,45}$ ,  $B_{0,4}$ ,  $B_{0,35}$ ,  $B_{0,3}$  cuando se contamina la 1º Clase con píxeles de mezcla de clases  $\mathcal{G}_I^0(-3)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-153)$  en 0%, 5%, 10% y 20%

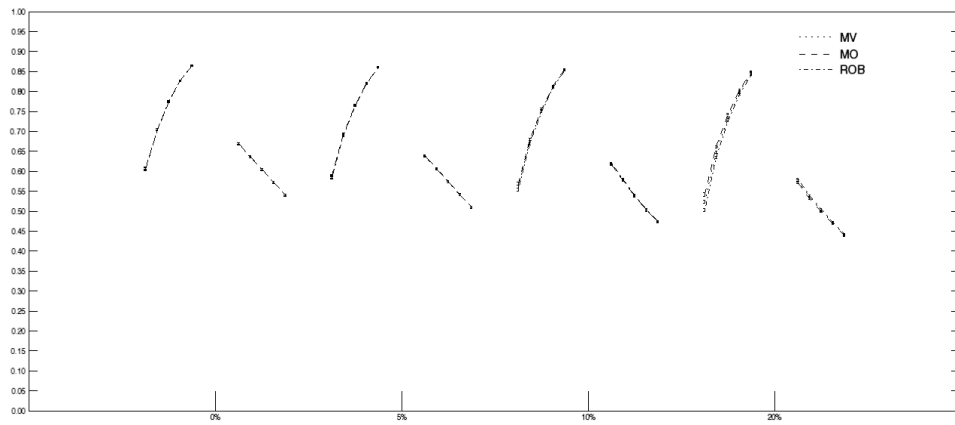


Figura A.19: Proporción de Aciertos Promedio en  $A_{0,7}$ ,  $A_{0,65}$ ,  $A_{0,6}$ ,  $A_{0,55}$ ,  $A_{0,5}$  y  $B_{0,5}$ ,  $B_{0,45}$ ,  $B_{0,4}$ ,  $B_{0,35}$ ,  $B_{0,3}$  cuando se contamina la 2º Clase con píxeles de mezcla de clases  $\mathcal{G}_I^0(-3)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-15)$  en 0%, 5%, 10% y 20%

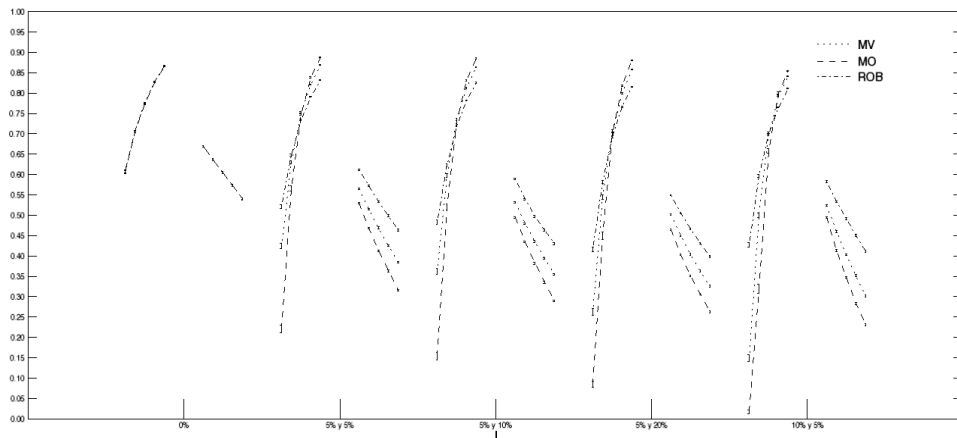


Figura A.20: Proporción de Aciertos Promedio en  $A_{0,7}$ ,  $A_{0,65}$ ,  $A_{0,6}$ ,  $A_{0,55}$ ,  $A_{0,5}$  y  $B_{0,5}$ ,  $B_{0,45}$ ,  $B_{0,4}$ ,  $B_{0,35}$ ,  $B_{0,3}$  cuando se contaminan la 1º Clase y la 2º Clase con píxeles de mezcla de clases  $\mathcal{G}_I^0(-3)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-15)$

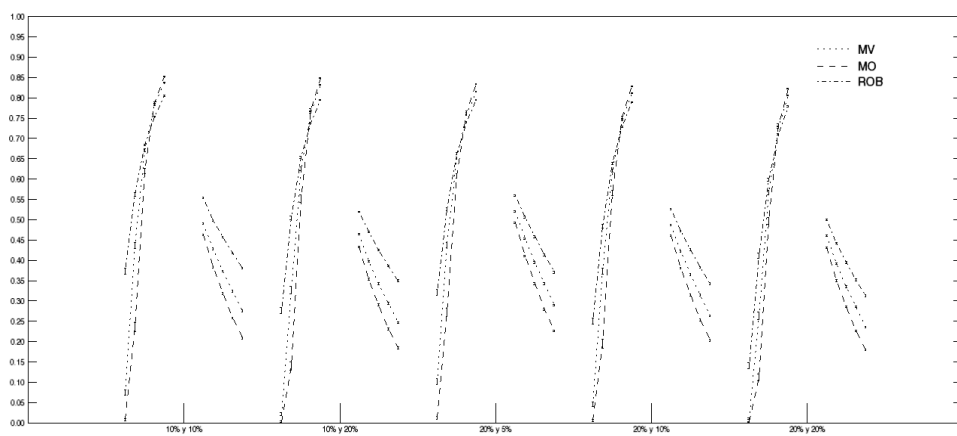


Figura A.21: Proporción de Aciertos Promedio en  $A_{0,7}$ ,  $A_{0,65}$ ,  $A_{0,6}$ ,  $A_{0,55}$ ,  $A_{0,5}$  y  $B_{0,5}$ ,  $B_{0,45}$ ,  $B_{0,4}$ ,  $B_{0,35}$ ,  $B_{0,3}$  cuando se contaminan la 1º Clase y la 2º Clase con píxeles de mezcla de clases  $\mathcal{G}_I^0(-3)$  y  $\mathcal{G}_I^0(-15)$



## Apéndice B

# Algoritmo de estimación del M-estimador y elección del b

Recordemos que el  $b$  de  $\Psi$  de Huber es elegido de modo tal que:

$$\frac{V(\hat{\alpha}_{ML,N})}{V(\hat{\alpha}_{M,N})} \approx e$$

con  $0,9 \leq e \leq 0,975$  y  $V(\cdot)$ , es la varianza asintótica de los estimadores.

Estos cálculos no se pueden resolver analíticamente, pues involucran el cómputo de las funciones  $c$  y sus derivadas. Es por este motivo se decidió calculos numéricamente de la siguiente forma:

Primero se realizó un gráfico de dos curvas de nivel de  $\frac{V(\hat{\alpha}_{ML,N})}{V(\hat{\alpha}_{M,N})}$  en función de  $\alpha$  y  $b$ :

Las cuales se lograron con el método de bisección y en cada imagen se decidió optar por el valor de  $b$  que hace el cociente  $\frac{V(\hat{\alpha}_{ML,N})}{V(\hat{\alpha}_{M,N})}$  sea igual a 0,9 tomando como verdadero valor de  $\alpha$  a  $\hat{\alpha}_{ML,N} + 1$ . Se eligió este  $b$  porque se consideró que en el caso en que  $|\alpha|$  fuera pequeño (cerca del 5) era de esperar que  $\hat{\alpha}_{ML,N}$  podría ser menor que el verdadero valor de  $\alpha$  en a lo sumo una unidad, y si esto no sucediera, o sea, si el verdadero valor de  $\alpha$  es más chico que  $\hat{\alpha}_{ML,N} + 1$ , con ese valor de  $b$  resultaría que  $\frac{V(\hat{\alpha}_{ML,N})}{V(\hat{\alpha}_{M,N})} > 0,9$ .

Basándose en el libro Robust Statistics: Theory and Methods de R. Marona y V. Yohai, encontrar  $\hat{\alpha}_{M,N}$  tal que

$$\sum_{i=1}^N \Psi_b(X_i; \hat{\alpha}_{M,N}) = 0 \quad (\text{B.1})$$

es equivalente a encontrar  $\hat{\alpha}_{M,N}$  tal que

$$\sum_{i=1}^N \frac{\psi_b(s_1(X_i; \hat{\alpha}_{M,N}) - c(\hat{\alpha}_{M,N}, b))}{s_1(X_i; \hat{\alpha}_{M,N}) - c(\hat{\alpha}_{M,N}, b)} \cdot (s_1(X_i; \hat{\alpha}_{M,N}) - c(\hat{\alpha}_{M,N}, b)) = 0. \quad (\text{B.2})$$

Ahora

$$W(s_1(X_i; \hat{\alpha}_{M,N}) - c(\hat{\alpha}_{M,N}, b)) = \frac{\psi_b(s_1(X_i; \hat{\alpha}_{M,N}) - c(\hat{\alpha}_{M,N}, b))}{s_1(X_i; \hat{\alpha}_{M,N}) - c(\hat{\alpha}_{M,N}, b)}.$$

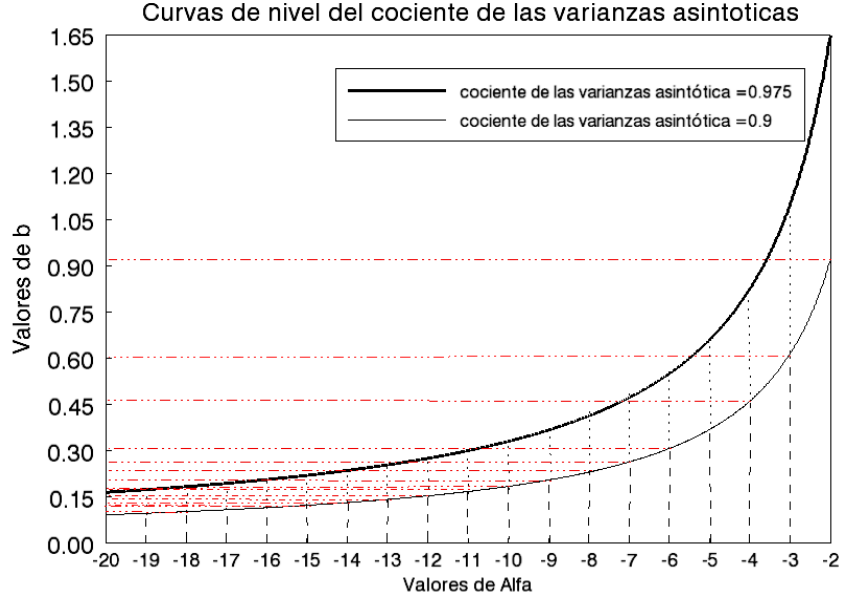


Figura B.1: Curvas de nivel del cociente de la varianza asimptótica

Por lo tanto

$$W(s_1(X_i; \hat{\alpha}_{M,N}) - c(\hat{\alpha}_{M,N}, b)) = \begin{cases} \frac{-b}{s_1(X_i; \hat{\alpha}_{M,N}) - c(\hat{\alpha}_{M,N}, b)} & \text{si } s_1(X_i; \hat{\alpha}_{M,N}) - c(\hat{\alpha}_{M,N}, b) \leq -b \\ 1 & \text{si } -b \leq s_1(X_i; \hat{\alpha}_{M,N}) - c(\hat{\alpha}_{M,N}, b) \leq b \\ \frac{b}{s_1(X_i; \hat{\alpha}_{M,N}) - c(\hat{\alpha}_{M,N}, b)} & \text{si } s_1(X_i; \alpha) - c(\alpha, b) \geq b \end{cases} .$$

Luego  $\hat{\alpha}_{M,N}, b$  es tal que

$$\hat{\alpha}_{M,N} = - \frac{\sum_{i=1}^N W(s_1(X_i; \hat{\alpha}_{M,N}))}{\left( \sum_{i=1}^N W(s_1(X_i; \hat{\alpha}_{M,N}) - c(\hat{\alpha}_{M,N}, b)) \cdot (\ln(1+x) - c(\hat{\alpha}_{M,N}, b)) \right)} .$$

Con lo cual esto sugirió la utilización de un algoritmo de punto fijo para su estimación, donde el valor inicial utilizado será el obtenido por máxima verosimilitud.

# Índice de figuras

1.	Usted podría identificar que hay en la imagen???	XII
2.	Imagen Original	XIII
3.	Distintos aspectos visibles de una imagen.	XIV
1.1.	Componentes de un sistema de teledetección.	2
1.2.	Primeros pasos de la Teledetección	3
1.3.	Primeros pasos de la Teledetección	4
1.4.	Linea del tiempo de la evolución de la teledetección.	5
1.5.	Radiación electromagnética.	8
1.6.	Espectro electromagnético	9
1.7.	Flujo Incidente y Flujo Reflejado	11
1.8.	Tipos de superficies	12
1.9.	Comportamiento espectral de diferentes materiales.	14
2.1.	Bandas electromagnéticas de un radar	15
2.2.	Resumen de sensores espaciales SAR y sus características	16
2.3.	Geometría de un radar de apertura sintética	18
2.4.	Radiación del objetivo	21
2.5.	Radiador isotrópico y densidad de potencia a distintas distancias R	23
4.1.	Tres formatos para una misma escena: compleja (real e imaginaria, arriba), amplitud (abajo izquierda) e intensidad (abajo derecha).	38
4.2.	Resumen de las relaciones entre las distribuciones para el basckscatter de la amplitud.	41
4.3.	Resumen de las relaciones entre las distribuciones para el retorno de la amplitud.	43
4.4.	Curvas de la distribución $\Gamma^{-1}$ para $\gamma$ que hace la media unitaria y $\alpha$ igual a: -1;5(solida), -2(trazos), -4(puntos), -5(punto-trazo), -10(punto-punto-trazo), -20(solida) y -100(trazos).	44

4.5. Resumen de las relaciones entre las distribuciones para el basckscatter de la intensidad.	44
7.1. Figura de la izquierda: Imagen generada con las clases $\mathcal{G}_I^0(-15)$ y $\mathcal{G}_I^0(-3)$ . Figura de la derecha: modelo de simulación de la función de pertenencia.	71
7.2. Estimación del paramétrica de $\alpha$ igual a -7 y -3 con contaminación de $\mathcal{G}_I^0(-3)$ y $\mathcal{G}_I^0(-7)$ respectivamente.	74
7.3. Función grado de pertenencia en imágenes generadas con $\mathcal{G}_I^0(-7)$ y $\mathcal{G}_I^0(-3)$ . Modelo: (a) puro. (b) contaminación de la primer clase con píxeles puros. (c) contaminación de la segunda clase con píxeles puros.	75
7.4. Función grado de pertenencia en imágenes generadas con $\mathcal{G}_I^0(-7)$ y $\mathcal{G}_I^0(-3)$ . Modelo: (d) Contaminación de ambas clases con píxeles puros.	76
7.5. Proporción de Aciertos Promedio en $A_{0,7}$ , $A_{0,65}$ , $A_{0,6}$ , $A_{0,55}$ , $A_{0,5}$ y $B_{0,5}$ , $B_{0,45}$ , $B_{0,4}$ , $B_{0,35}$ , $B_{0,3}$ cuando se contamina la 1º Clase con píxeles de $\mathcal{G}_I^0(-3)$ en 0 %, 5 %, 10 % y 20 %	79
7.6. Proporción de Aciertos Promedio en $A_{0,7}$ , $A_{0,65}$ , $A_{0,6}$ , $A_{0,55}$ , $A_{0,5}$ y $B_{0,5}$ , $B_{0,45}$ , $B_{0,4}$ , $B_{0,35}$ , $B_{0,3}$ cuando se contamina la 2º Clase con píxeles de $\mathcal{G}_I^0(-7)$ en 0 %, 5 %, 10 % y 20 %	79
7.7. Proporción de Aciertos Promedio en $A_{0,7}$ , $A_{0,65}$ , $A_{0,6}$ , $A_{0,55}$ , $A_{0,5}$ y $B_{0,5}$ , $B_{0,45}$ , $B_{0,4}$ , $B_{0,35}$ , $B_{0,3}$ cuando se contaminan la 1º Clase y la 2º Clase con píxeles de $\mathcal{G}_I^0(-3)$ y $\mathcal{G}_I^0(-7)$ respectivamente	80
7.8. Proporción de Aciertos Promedio en $A_{0,7}$ , $A_{0,65}$ , $A_{0,6}$ , $A_{0,55}$ , $A_{0,5}$ y $B_{0,5}$ , $B_{0,45}$ , $B_{0,4}$ , $B_{0,35}$ , $B_{0,3}$ cuando se contaminan la 1º Clase y la 2º Clase con píxeles de $\mathcal{G}_I^0(-3)$ y $\mathcal{G}_I^0(-7)$ respectivamente	80
7.9. Estimación del paramétrica de $\alpha$ igual a -15 y -7 con contaminación de $\mathcal{G}_I^0(-7)$ y $\mathcal{G}_I^0(-15)$ respectivamente.	82
7.10. Función grado de pertenencia en imágenes generadas con $\mathcal{G}_I^0(-15)$ y $\mathcal{G}_I^0(-7)$ . Modelo: (a) puro. (b) contaminación de la primer clase con píxeles puros. (c) contaminación de la segunda clase con píxeles puros.	83
7.11. Función grado de pertenencia en imágenes generadas con $\mathcal{G}_I^0(-15)$ y $\mathcal{G}_I^0(-7)$ . Modelo: (d) Contaminación de ambas clases con píxeles puros.	84
7.12. Proporción de Aciertos Promedio en $A_{0,7}$ , $A_{0,65}$ , $A_{0,6}$ , $A_{0,55}$ , $A_{0,5}$ y $B_{0,5}$ , $B_{0,45}$ , $B_{0,4}$ , $B_{0,35}$ , $B_{0,3}$ cuando se contamina la 1º Clase con píxeles de $\mathcal{G}_I^0(-7)$ en 0 %, 5 %, 10 % y 20 %	87
7.13. Proporción de Aciertos Promedio en $A_{0,7}$ , $A_{0,65}$ , $A_{0,6}$ , $A_{0,55}$ , $A_{0,5}$ y $B_{0,5}$ , $B_{0,45}$ , $B_{0,4}$ , $B_{0,35}$ , $B_{0,3}$ cuando se contamina la 2º Clase con píxeles de $\mathcal{G}_I^0(-15)$ en 0 %, 5 %, 10 % y 20 %	87
7.14. Proporción de Aciertos Promedio en $A_{0,7}$ , $A_{0,65}$ , $A_{0,6}$ , $A_{0,55}$ , $A_{0,5}$ y $B_{0,5}$ , $B_{0,45}$ , $B_{0,4}$ , $B_{0,35}$ , $B_{0,3}$ cuando se contaminan la 1º Clase y la 2º Clase con píxeles de $\mathcal{G}_I^0(-7)$ y $\mathcal{G}_I^0(-15)$ respectivamente	88

7.15. Proporción de Aciertos Promedio en $A_{0,7}$ , $A_{0,65}$ , $A_{0,6}$ , $A_{0,55}$ , $A_{0,5}$ y $B_{0,5}$ , $B_{0,45}$ , $B_{0,4}$ , $B_{0,35}$ , $B_{0,3}$ cuando se contaminan la 1º Clase y la 2º Clase con píxeles de $\mathcal{G}_I^0(-7)$ y $\mathcal{G}_I^0(-15)$ respectivamente . . . . .	88
7.16. Estimación del paramétrica de $\alpha$ igual a -15 y -3 con contaminación de $\mathcal{G}_I^0(-3)$ y $\mathcal{G}_I^0(-15)$ respectivamente. . . . .	90
7.17. Función grado de pertenencia en imágenes generadas con $\mathcal{G}_I^0(-15)$ y $\mathcal{G}_I^0(-3)$ . Modelo: (a) puro. (b) contaminación de la primer clase con píxeles puros. (c) contaminación de la segunda clase con píxeles puros. . . . .	91
7.18. Función grado de pertenencia en imágenes generadas con $\mathcal{G}_I^0(-15)$ y $\mathcal{G}_I^0(-3)$ . Modelo: (d) Contaminación de ambas clases con píxeles puros. . . . .	92
7.19. Proporción de Aciertos Promedio en $A_{0,7}$ , $A_{0,65}$ , $A_{0,6}$ , $A_{0,55}$ , $A_{0,5}$ y $B_{0,5}$ , $B_{0,45}$ , $B_{0,4}$ , $B_{0,35}$ , $B_{0,3}$ cuando se contamina la 1º Clase con píxeles de $\mathcal{G}_I^0(-3)$ en 0 %, 5 %, 10 % y 20 % . . . . .	95
7.20. Proporción de Aciertos Promedio en $A_{0,7}$ , $A_{0,65}$ , $A_{0,6}$ , $A_{0,55}$ , $A_{0,5}$ y $B_{0,5}$ , $B_{0,45}$ , $B_{0,4}$ , $B_{0,35}$ , $B_{0,3}$ cuando se contamina la 2º Clase con píxeles de $\mathcal{G}_I^0(-15)$ en 0 %, 5 %, 10 % y 20 % . . . . .	95
7.21. Proporción de Aciertos Promedio en $A_{0,7}$ , $A_{0,65}$ , $A_{0,6}$ , $A_{0,55}$ , $A_{0,5}$ y $B_{0,5}$ , $B_{0,45}$ , $B_{0,4}$ , $B_{0,35}$ , $B_{0,3}$ cuando se contaminan la 1º Clase y la 2º Clase con píxeles de $\mathcal{G}_I^0(-3)$ y $\mathcal{G}_I^0(-15)$ respectivamente . . . . .	96
7.22. Proporción de Aciertos Promedio en $A_{0,7}$ , $A_{0,65}$ , $A_{0,6}$ , $A_{0,55}$ , $A_{0,5}$ y $B_{0,5}$ , $B_{0,45}$ , $B_{0,4}$ , $B_{0,35}$ , $B_{0,3}$ cuando se contaminan la 1º Clase y la 2º Clase con píxeles de $\mathcal{G}_I^0(-3)$ y $\mathcal{G}_I^0(-15)$ respectivamente . . . . .	96
A.1. Estimación del paramétrica de $\alpha$ igual a -7 y -3 con contaminación de mezcla de $\mathcal{G}_I^0(-7)$ y $\mathcal{G}_I^0(-3)$ . . . . .	102
A.2. Función grado de pertenencia en imágenes generadas con $\mathcal{G}_I^0(-7)$ y $\mathcal{G}_I^0(-3)$ . Modelo: (a) puro. (b) contaminación de la primer clase con píxeles de mezcla. (c) contaminación de la segunda clase con píxeles de mezcla. . . . .	103
A.3. Función grado de pertenencia en imágenes generadas con $\mathcal{G}_I^0(-7)$ y $\mathcal{G}_I^0(-3)$ . Modelo: (d) Contaminación de ambas clases con píxeles de mezcla. . . . .	104
A.4. Proporción de Aciertos Promedio en $A_{0,7}$ , $A_{0,65}$ , $A_{0,6}$ , $A_{0,55}$ , $A_{0,5}$ y $B_{0,5}$ , $B_{0,45}$ , $B_{0,4}$ , $B_{0,35}$ , $B_{0,3}$ cuando se contamina la 1º Clase con píxeles de mezcla de clases $\mathcal{G}_I^0(-3)$ y $\mathcal{G}_I^0(-7)$ en 0 %, 5 %, 10 % y 20 % . . . . .	107
A.5. Proporción de Aciertos Promedio en $A_{0,7}$ , $A_{0,65}$ , $A_{0,6}$ , $A_{0,55}$ , $A_{0,5}$ y $B_{0,5}$ , $B_{0,45}$ , $B_{0,4}$ , $B_{0,35}$ , $B_{0,3}$ cuando se contamina la 2º Clase con píxeles de mezcla de clases $\mathcal{G}_I^0(-3)$ y $\mathcal{G}_I^0(-7)$ en 0 %, 5 %, 10 % y 20 % . . . . .	107
A.6. Proporción de Aciertos Promedio en $A_{0,7}$ , $A_{0,65}$ , $A_{0,6}$ , $A_{0,55}$ , $A_{0,5}$ y $B_{0,5}$ , $B_{0,45}$ , $B_{0,4}$ , $B_{0,35}$ , $B_{0,3}$ cuando se contaminan la 1º Clase y la 2º Clase con píxeles de mezcla de clases $\mathcal{G}_I^0(-3)$ y $\mathcal{G}_I^0(-7)$ . . . . .	108

A.7. Proporción de Aciertos Promedio en $A_{0,7}$ , $A_{0,65}$ , $A_{0,6}$ , $A_{0,55}$ , $A_{0,5}$ y $B_{0,5}$ , $B_{0,45}$ , $B_{0,4}$ , $B_{0,35}$ , $B_{0,3}$ cuando se contaminan la 1° Clase y la 2° Clase con píxeles de mezcla de clases $\mathcal{G}_I^0(-3)$ y $\mathcal{G}_I^0(-7)$ . . . . .	108
A.8. Estimación del paramétrica de $\alpha$ igual a -15 y -7 con contaminación de mezcla de $\mathcal{G}_I^0(-15)$ y $\mathcal{G}_I^0(-7)$ . . . . .	110
A.9. Función grado de pertenencia en imágenes generadas con $\mathcal{G}_I^0(-15)$ y $\mathcal{G}_I^0(-7)$ . Modelo: (a) puro. (b) contaminación de la primer clase con píxeles de mezcla. (c) contaminación de la segunda clase con píxeles de mezcla. . . . .	111
A.10. Función grado de pertenencia en imágenes generadas con $\mathcal{G}_I^0(-15)$ y $\mathcal{G}_I^0(-7)$ . Modelo: (d) Contaminación de ambas clases con píxeles de mezcla. . . . .	112
A.11. Proporción de Aciertos Promedio en $A_{0,7}$ , $A_{0,65}$ , $A_{0,6}$ , $A_{0,55}$ , $A_{0,5}$ y $B_{0,5}$ , $B_{0,45}$ , $B_{0,4}$ , $B_{0,35}$ , $B_{0,3}$ cuando se contamina la 1° Clase con píxeles de mezcla de clases $\mathcal{G}_I^0(-15)$ y $\mathcal{G}_I^0(-7)$ en 0 %, 5 %, 10 % y 20 % . . . . .	115
A.12. Proporción de Aciertos Promedio en $A_{0,7}$ , $A_{0,65}$ , $A_{0,6}$ , $A_{0,55}$ , $A_{0,5}$ y $B_{0,5}$ , $B_{0,45}$ , $B_{0,4}$ , $B_{0,35}$ , $B_{0,3}$ cuando se contamina la 2° Clase con píxeles de mezcla de clases $\mathcal{G}_I^0(-15)$ y $\mathcal{G}_I^0(-7)$ en 0 %, 5 %, 10 % y 20 % . . . . .	115
A.13. Proporción de Aciertos Promedio en $A_{0,7}$ , $A_{0,65}$ , $A_{0,6}$ , $A_{0,55}$ , $A_{0,5}$ y $B_{0,5}$ , $B_{0,45}$ , $B_{0,4}$ , $B_{0,35}$ , $B_{0,3}$ cuando se contaminan la 1° Clase y la 2° Clase con píxeles de mezcla de clases $\mathcal{G}_I^0(-15)$ y $\mathcal{G}_I^0(-7)$ . . . . .	116
A.14. Proporción de Aciertos Promedio en $A_{0,7}$ , $A_{0,65}$ , $A_{0,6}$ , $A_{0,55}$ , $A_{0,5}$ y $B_{0,5}$ , $B_{0,45}$ , $B_{0,4}$ , $B_{0,35}$ , $B_{0,3}$ cuando se contaminan la 1° Clase y la 2° Clase con píxeles de mezcla de clases $\mathcal{G}_I^0(-15)$ y $\mathcal{G}_I^0(-7)$ . . . . .	116
A.15. Estimación del paramétrica de $\alpha$ igual a -15 y -3 con contaminación de mezcla de $\mathcal{G}_I^0(-15)$ y $\mathcal{G}_I^0(-3)$ . . . . .	118
A.16. Función grado de pertenencia en imágenes generadas con $\mathcal{G}_I^0(-15)$ y $\mathcal{G}_I^0(-3)$ . Modelo: (a) puro. (b) contaminación de la primer clase con píxeles de mezcla. (c) contaminación de la segunda clase con píxeles de mezcla. . . . .	119
A.17. Función grado de pertenencia en imágenes generadas con $\mathcal{G}_I^0(-15)$ y $\mathcal{G}_I^0(-3)$ . Modelo: (d) Contaminación de ambas clases con píxeles de mezcla. . . . .	120
A.18. Proporción de Aciertos Promedio en $A_{0,7}$ , $A_{0,65}$ , $A_{0,6}$ , $A_{0,55}$ , $A_{0,5}$ y $B_{0,5}$ , $B_{0,45}$ , $B_{0,4}$ , $B_{0,35}$ , $B_{0,3}$ cuando se contamina la 1° Clase con píxeles de mezcla de clases $\mathcal{G}_I^0(-3)$ y $\mathcal{G}_I^0(-15)$ en 0 %, 5 %, 10 % y 20 % . . . . .	123
A.19. Proporción de Aciertos Promedio en $A_{0,7}$ , $A_{0,65}$ , $A_{0,6}$ , $A_{0,55}$ , $A_{0,5}$ y $B_{0,5}$ , $B_{0,45}$ , $B_{0,4}$ , $B_{0,35}$ , $B_{0,3}$ cuando se contamina la 2° Clase con píxeles de mezcla de clases $\mathcal{G}_I^0(-3)$ y $\mathcal{G}_I^0(-15)$ en 0 %, 5 %, 10 % y 20 % . . . . .	123
A.20. Proporción de Aciertos Promedio en $A_{0,7}$ , $A_{0,65}$ , $A_{0,6}$ , $A_{0,55}$ , $A_{0,5}$ y $B_{0,5}$ , $B_{0,45}$ , $B_{0,4}$ , $B_{0,35}$ , $B_{0,3}$ cuando se contaminan la 1° Clase y la 2° Clase con píxeles de mezcla de clases $\mathcal{G}_I^0(-3)$ y $\mathcal{G}_I^0(-15)$ . . . . .	124
A.21. Proporción de Aciertos Promedio en $A_{0,7}$ , $A_{0,65}$ , $A_{0,6}$ , $A_{0,55}$ , $A_{0,5}$ y $B_{0,5}$ , $B_{0,45}$ , $B_{0,4}$ , $B_{0,35}$ , $B_{0,3}$ cuando se contaminan la 1° Clase y la 2° Clase con píxeles de mezcla de clases $\mathcal{G}_I^0(-3)$ y $\mathcal{G}_I^0(-15)$ . . . . .	124

---

B.1. Curvas de nivel del cociente de la varianza asintótica . . . . .	126
---	-----





# Índice de cuadros

7.1. Estimación paramétrica de $\alpha$ en imágenes generadas con $\mathcal{G}_I^0(-7)$ y $\mathcal{G}_I^0(-3)$ contaminación con píxeles puros. . . . .	73
7.2. Valores promedios obtenidos de 1000 imágenes generadas con las clases $\mathcal{G}_I^0(-7)$ y $\mathcal{G}_I^0(-3)$ . Contaminación: una clase. . . . .	77
7.3. Valores promedios obtenidos de 1000 imágenes generadas con las clases $\mathcal{G}_I^0(-7)$ y $\mathcal{G}_I^0(-3)$ . Contaminación: ambas clases. . . . .	78
7.4. Estimación paramétrica de $\alpha$ en imágenes generadas con $\mathcal{G}_I^0(-15)$ y $\mathcal{G}_I^0(-7)$ contaminación con píxeles puros. . . . .	81
7.5. Valores promedios obtenidos de 1000 imágenes generadas con las clases $\mathcal{G}_I^0(-15)$ y $\mathcal{G}_I^0(-7)$ . Contaminación: una clase. . . . .	85
7.6. Valores promedios obtenidos de 1000 imágenes generadas con las clases $\mathcal{G}_I^0(-15)$ y $\mathcal{G}_I^0(-7)$ . Contaminación: ambas clases. . . . .	86
7.7. Estimación paramétrica de $\alpha$ en imágenes generadas con $\mathcal{G}_I^0(-15)$ y $\mathcal{G}_I^0(-3)$ contaminación con píxeles puros. . . . .	89
7.8. Valores promedios obtenidos de 1000 imágenes generadas con las clases $\mathcal{G}_I^0(-15)$ y $\mathcal{G}_I^0(-3)$ . Contaminación: una clase. . . . .	93
7.9. Valores promedios obtenidos de 1000 imágenes generadas con las clases $\mathcal{G}_I^0(-15)$ y $\mathcal{G}_I^0(-3)$ . Contaminación: ambas clases. . . . .	94
A.1. Estimación paramétrica de $\alpha$ en imágenes generadas con $\mathcal{G}_I^0(-7)$ y $\mathcal{G}_I^0(-3)$ contaminación con píxeles de mezcla. . . . .	101
A.2. Valores promedios obtenidos de 1000 imágenes generadas con las clases $\mathcal{G}_I^0(-7)$ y $\mathcal{G}_I^0(-3)$ . Contaminación: una clase. . . . .	105
A.3. Valores promedios obtenidos de 1000 imágenes generadas con las clases $\mathcal{G}_I^0(-7)$ y $\mathcal{G}_I^0(-3)$ . Contaminación: ambas clases. . . . .	106
A.4. Estimación paramétrica de $\alpha$ en imágenes generadas con $\mathcal{G}_I^0(-15)$ y $\mathcal{G}_I^0(-7)$ contaminación con píxeles de mezcla. . . . .	109
A.5. Valores promedios obtenidos de 1000 imágenes generadas con las clases $\mathcal{G}_I^0(-15)$ y $\mathcal{G}_I^0(-7)$ . Contaminación: una clase. . . . .	113

---

A.6. Valores promedios obtenidos de 1000 imágenes generadas con las clases $\mathcal{G}_I^0(-15)$ y $\mathcal{G}_I^0(-7)$ . Contaminación: ambas clases. . . . .	114
A.7. Estimación paramétrica de $\alpha$ en imágenes generadas con $\mathcal{G}_I^0(-15)$ y $\mathcal{G}_I^0(-3)$ contaminación con píxeles de mezcla. . . . .	117
A.8. Valores promedios obtenidos de 1000 imágenes generadas con las clases $\mathcal{G}_I^0(-15)$ y $\mathcal{G}_I^0(-3)$ . Contaminación: una clase. . . . .	121
A.9. Valores promedios obtenidos de 1000 imágenes generadas con las clases $\mathcal{G}_I^0(-15)$ y $\mathcal{G}_I^0(-3)$ . Contaminación: ambas clases. . . . .	122

# Bibliografía

- [1] Aapo Hyvärinen, Jarmo Hurri, and Patrik O. Hoyer, *Natural Image Statistics, A probabilistic approach to early computational vision*, Springer-Verlag, 2009.
- [2] Fabrizio Argenti, Alessandro Lapini, Luciano Alparone y Tiziano Bianchi, *A Tutorial on Speckle Reduction in Synthetic Aperture Radar Images*, IEEE Geoscience and remote sensing magazine, septiembre 2013.
- [3] Boardman J. W., Kruse F. A., y Green R. O., *Mapping target signatures via partial unmixing of AVIRISdata: in Summaries*, Fifth JPL Airborne Earth Science Workshop, JPL Publication 95-1, v. 1, p. 23-26, 1995.
- [4] María Elena Buemi, *Tratamiento de imágenes de radar de apertura sintética mediante filtros stack*, Tesis Doctoral de la Universidad de Buenos Aires en el area Ciencias de la Computación, 2012.
- [5] Bustos O. H. Frery, A. C., *Reporting montecarlo results in statistics sugestions and an example*, Revista de la Sociedad Chilena de Estadística, Vol 9, N° 2, p. 46-95, 1992.
- [6] Bustos O. H. Frery, A. C., *Simulação estocastica: teoria e algoritmos*. Monografías de Matemática, 49. CNPq/IMPA, Rio de Janeiro, Brasil, 1992.
- [7] Bustos O. H. , *Robust statistics in SAR image processing*, Proceedings of the First Latino-American Seminar on Radar Remote Sensing: Image Processing Techniques, pp. 81–89, ESA, Paris, 1996.
- [8] Bustos Oscar H. Lucini, María Magdalena and Frery Alejandro C., *M-Estimators of Roughness and Scale for  $\mathcal{G}_A^0$ -Modelled SAR Imagery*, EURASIP Journal on Applied Signal Processing, 2002.
- [9] Chuvieco Emilio, *Teledetección Ambiental. La observación de la Tierra desde el Espacio*, Editorial Planeta, 2010.
- [10] Frery Alejandro C. Müller, H. J., Yanasse C. C. F. and Sant’Anna S. J. S., *A Model for Extremely Heterogeneous Clutter*, IEEE Transaction on Geoscience and Remote Sensing, Vol. 35, N° 3, p. 648-659 1997.
- [11] Frery A. C., Sant’Anna S. J.S., Mascarenhas N. D. A. y Bustos O. H., *Robust inference techniques for speckle noise reduction in 1-look amplitude SAR images*, Applied Signal Processing, 4, p. 61-76, 1997.

- [12] Frery Alejandro C., Yanasse C. C. F. and Sant'Anna S. J. S., *El Modelo Multiplicativo para el Análisis de Imágenes SAR*, Proceeding of the First. Latino-American Seminar on Radar Remote Sensing - Image Processing Techniques, 1996.
- [13] Friedl M. A. Brodley, C. E. y Strahler A. H., *Maximizing land cover classification accuracies produced by decision trees at continental to global scale*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, Vol 37, p.969-977, 1999.
- [14] Hampel F. R., E. Ronchetti, P. R. and Stahel, W., *Robust Statistics - The Approach Based on Inference Functions*. John Wiley & Sons, New York, 1986.
- [15] Huber, P. J., *Robust estimation of a location parameter*. Annals of Mathematical Statistics, 35, p 73-101, 1964.
- [16] Huber P.J and Ronchetti, E.M., *Robust Statistics*, Editorial Wiley,2009.
- [17] Jacobo-Berles J. Mejail, M., and Frery A. C., *The  $GA0$  distribution as the true model for SAR images*, Simpósio Brasileiro de Computação Gráfica e Processamento de Imagens, SBC, IEEE, Campinas, SP, Brazil, 1999.
- [18] Joughin Ian R. , . Percival Donald and Winebrenner Dale P., *Maximum Likelihood Estimation of  $K$  Distribution Parameters for SAR Data*, IEEE Transaction on Geoscience and Remote Sensing, Vol. 31, N° 5, 1993.
- [19] Lee J. S. and others, *Speckle filtering of synthetic aperture radar images: A review*. Remote Sensing Reviews, 8, p. 313-340, 1994.
- [20] Lucini María Magdalena , *M-estimadores en Imágenes de Radar de Apertura Sintética*, tesis Doctoral en Matemática, (FaMAF - UNC), 2002.
- [21] Marazzi A. and Ruffieux C., *Implementing M-estimators of the gamma distribution*, Robust Statistics, Data Analysis and Computer Intensive Methods, R. Helmut, Ed., vol. 109 of Lecture Notes in Statistics, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [22] Mejail M. , Jacobo-Berles J., Frery A. C. and Bustos O. H., *Parametric Roughness Estimation in Amplitude SAR Images under Multiplicative Model*, Revista de Teledetección, Vol. 13, 2000.
- [23] Mejail M. , *La distribución  $\mathcal{G}_A^0$  en el Modelado y Análisis de Imágenes de Radar de Apertura Sintética*, Tesis de Doctorado, Departamento de Computación, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Buenos Aires.
- [24] Mejail M. Frery, A. C., Jacobo-Berles J., and Bustos O. H., *Approximation of distributions for SAR images: Proposal, evaluation and practical consequences*, Latin American Applied Research, vol. 31, pp. 83-92, 2001.
- [25] Alberto Moreira, Pau Prats-Iraola, Marwan Younis, Gerhard Krieger, Irena Hajnsek y Konstantinos P. Papathanassiou, *A Tutorial on Synthetic Aperture Radar*, IEEE Geoscience and remote sensing magazine, marzo 2013.
- [26] Oliver C. and Quegan S., *Understanding Synthetic Aperture Radar Images*, Artch House, Boston, 1998.

- [27] Papetti Luis E. , *TELEDETECCIÓN, FOTOINTERPRETACIÓN Y ARQUEOLOGÍA*, Editorial Científica Universitaria, Universidad de Catamarca, 2006.  
(<http://www.editorial.unca.edu.ar/Publicacione%20on%20line/CUADERNOS%20DE%20CATEDRA/PAPETTI/historia.pdf> y <http://www.editorial.unca.edu.ar/Publicacione%20on%20line/CUADERNOS%20DE%20CATEDRA/PAPETTI/argsatelital.pdf>).
- [28] Richards John A. , Xiuping Jia, *Remote Sensing Digital Image Analysis. An Introduction*, Springer-Verlag, 2006.
- [29] Rulloni Valeria, *Segmentación en Imágenes de Radar de Abertura Sintética*, trabajo final de Licenciatura en Matemática, (FaMAF - UNC), 2003.
- [30] Saura S. y San Miguel J., *Cartografía de zonas forestales en España mediante imágenes IRS-WIFS y árboles de clasificación*, en Teledetección. Medioambiente y Cambio Global (editado por J.I. Rosell J. A. Marínez-Casasnovas). Lleida, Universitat de Lleida y Editorial Milenio P. 151-154, 2001.
- [31] Stroppiano D., Pereira G. J., *The use of SPOT VEGETATION data in a classification tree approach for burnt area mapping in Australian savanna*, International Journal of Remote Sensing, Vol 24, p. 2131-2151, 2003.
- [32] Ulaby F., Brisco B., Kouyate F. y T. Lee Willians, *Texture information in SAR images*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, Vol 24, N°2, p.235-245, 1986.