JOAN FELIPE HERRERA GRANADA

DEFORMACIONES Y DEGENERACIONES DE ÁLGEBRAS DE LIE

Universidad Nacional de Córdoba

Facultad de Matemática, Astronomía y Física

Tesis de doctorado:

DEFORMACIONES Y DEGENERACIONES DE ÁLGEBRAS DE LIE

Por:

JOAN FELIPE HERRERA GRANADA

Bajo la dirección de:

DR. PAULO TIRAO

Tesis presentada ante la Facultad de Matemática, Astronomía y Física como parte de los requerimientos para la obtención del grado de Doctor en Matemática de la Universidad Nacional de Córdoba

Joan Felipe Herrera Granada,
Deformaciones y Degeneraciones de Álgebras de Lie.
Title in English: *Deformations and Degenerations of Lie Algebras.*

C I E M
CONICET
U N C
Con el apoyo de CONICET; Beca Interna de Postgrado con Países Latinoamericanos.
(Fully supported by a CONICET fellowship).

ABSTRACT

The object of study of this thesis is the algebraic variety $\mathcal{L}_n$ of all complex Lie algebras of dimension n and the subvariety $\mathcal{N}_n$ of all nilpotent Lie algebras in $\mathcal{L}_n$, with particular interest in the space of orbits associated with the action of the group $GL(n, \mathbb{C})$ on $\mathcal{L}_n$. To understand these varieties, *deformations* and *degenerations* that occur within $\mathcal{L}_n$ and $\mathcal{N}_n$ are studied. As specific objectives, two famous conjectures, known as Vergne's conjecture and Grunewald-O'Halloran, open since 1970 and 1993 respectively, are investigated.

Conjecture(Vergne)
There are no rigid complex nilpotent Lie algebras in the algebraic variety $\mathcal{L}_n$.

Conjecture (Grunewald-O'Halloran)
Every complex nilpotent Lie algebra is the degeneration of another, non isomorphic, Lie algebra.

The second conjecture is stronger than the first and they are not equivalent on the variety $\mathcal{L}_n$.

Throughout the thesis, numerous linear deformations are constructed, leading to a large variety of phenomena and questions to investigate. The Grunewald-O'Halloran conjecture is demonstrated for all nilpotent Lie algebras that admit a semisimple derivation (rank≥ 1) and for some families that do not admit semisimple derivations (rank 0).

For example, in dimensions 5 and 6 for each nilpotent Lie algebra is constructed, by means of linear deformations, a solvable Lie algebra that be degenerates to it.

In dimension 7, the conjecture is proved for nilpotent Lie algebras of rank 0. For this we use the construction of linear deformations introduced by Grunewald and O'Halloran, in which, from a semisimple derivation of an ideal of codimension 1 of the algebra. In this way a non trivial linear deformation is obtained, that corresponds to a degeneration. It is noteworthy that the nilpotent Lie algebras of rank 0 appear from dimension 7 on.

Then we consider filiform Lie algebras, ie, nilpotent Lie algebras with maximal degree of nilpotency. In particular, special emphasis is put on the study of filiform Lie algebras of dimension 8. In this direction, using the classification given by Ancochea-Bermudez and Goze, the conjecture Grunewald-O'Halloran is proved for filiform Lie algebras of rank 0 and dimension 8. Also we show, for the non filiform Lie algebra of rank 0 and dimension 8, given by Dixmier and Lister in 1957, that there is a solvable Lie algebra that degenerates to it. Since degeneracy is transitive and the degree of nilpotency does not increase under degenerations, the filiform Lie algebras appear at the top of the Hasse diagram of degeneration, which gives further evidence of the conjecture for the class of nilpotent Lie algebras of rank 0.

Finally a very special family, given by Burde, of filiform Lie algebras of rank 0 and dimension $n \geq 14$ are studied. These algebras have the particularity that all its ideals of codimension 1 are of rank 0, which does that to construct non trivial deformations is a complicated problem. For such algebras have been able to construct nontrivial deformations from nilpotent derivations of ideals of codimension 1 of these.

[2010] Primary 17B30; Secondary 17B99
Key words and phrases: Nilpotent Lie algebras, filiform Lie algebras, Grunewald-O'Halloran conjecture, Vergne's conjecture, degenerations, deformations.

RESUMEN

El objeto de estudio de esta tesis es la variedad algebraica $\mathcal{L}_n$, de todas las álgebras de Lie complejas de dimensión n y la subvariedad $\mathcal{N}_n$ de todas las álgebras de Lie nilpotentes en $\mathcal{L}_n$, con especial interés en los espacios de órbitas asociadas a la acción del grupo $GL(n, \mathbb{C})$ sobre $\mathcal{L}_n$. Para entender estas variedades se estudian las *deformaciones* y *degeneraciones* que ocurren dentro de $\mathcal{L}_n$ y $\mathcal{N}_n$. Como objetivos particulares se investigan dos conjeturas famosas, conocidas como conjeturas de Vergne y Grunewald-O'Halloran, abiertas desde 1970 y 1993, respectivamente.

Conjectura (Vergne)
No existen álgebras de Lie nilpotentes rígidas en la variedad $\mathcal{L}_n$.

Conjectura (Grunewald-O'Halloran)
Toda álgebra de Lie nilpotente es la degeneración de otra álgebra de Lie no isomorfa.

La segunda conjetura es más fuerte que la primera y no son equivalentes sobre la variedad $\mathcal{L}_n$.

A lo largo de la tesis se construyen numerosas deformaciones lineales dando lugar a una gran diversidad de fenómenos y preguntas para investigar. Se prueba la conjetura de Grunewald-O'Halloran para todas las álgebras nilpotentes que admiten una derivación semisimple (rango ≥ 1) y para varias familias de álgebras que no admiten una derivación semisimple (rango 0).

Por ejemplo, en dimensiones 5 y 6 para cada álgebra de Lie nilpotente se construye, por medio de deformaciones lineales, un álgebra de Lie soluble que se degenera a ella.

En dimensión 7, se prueba la conjetura para las álgebras de Lie nilpotentes de rango 0. Para esto se usa la construcción de deformaciones lineales introducida por Grunewald y O'Halloran, en la cual, a partir de una derivación semisimple de un ideal de codimensión 1 del álgebra en cuestión. De esta manera se obtiene una deformación lineal no trivial que se corresponde con una degeneración. Cabe mencionar que las álgebras de Lie nilpotentes de rango 0 aparecen a partir de dimensión 7.

Luego, se consideran las álgebras de Lie filiformes, es decir, álgebras de Lie nilpotentes de grado de nilpotencia maximal. En particular, se hace énfasis en el estudio de las álgebras de Lie filiformes de dimensión 8. En esta dirección, usando la clasificación de Ancochea-Bermudez y Goze, se prueba la conjetura de Grunewald-O'Halloran para las álgebras de Lie filiformes de rango 0 y dimensión 8. También se muestra, para el álgebra de Lie no filiforme, de rango 0 y dimensión 8 dada por Dixmier y Lister en 1957, que existe un álgebra de Lie soluble que se degenera a esta. Puesto que la degeneración es transitiva y el grado de nilpotencia no crece bajo degeneraciones, las álgebras de Lie filiformes aparecen en la cima del diagrama de Hasse de degeneraciones, lo cual da más evidencia de la conjetura para la clase de álgebras de Lie nilpotentes de rango 0.

Por último se estudia una familia muy especial, propuesta por Burde, de álgebras de Lie filiformes de rango 0 y dimensión $n \geq 14$. Estas álgebras tienen la particularidad que todos sus ideales de codimensión 1 son de rango 0, lo cual hace que construir deformaciones no triviales de éstas, sea un problema complicado. Para este tipo de álgebras se han logrado construir deformaciones no triviales, a partir de derivaciones nilpotentes de ideales de codimensión 1 de éstas.

[2010] Primary
Palabras y frases claves: Álgebras de Lie nilpotentes , álgebras de Lie filiformes, conjetura de Grunewald-O'Halloran, conjetura de Vergne, degeneraciones, deformaciones.

Dedicado a la memoria de mis abuelos:
Graciela Gómez Ossa
Luis Aníbal Granada Ospina

Dedicado a mis padres:
Martha Lucía Granada Gómez
Alejandro Antonio Herrera Ramírez

Gracias por hacer de mí lo que soy.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi director Paulo Tirao, por darme esta gran oportunidad, por guiarme durante este proceso y por enseñarme a hacer matemáticas (Agradecido por siempre Jefe). Al profesor Leandro Cagliero quien fue parte fundamental en mi progreso como matemático y del cual aprendí muchísimo. Al profesor Oscar Brega por su buena disposición para leer, corregir y hacer comentarios en los trabajos que surgieron a partir de ésta tesis.

A mi novia Estefania, por su amor, comprensión, paciencia, compañía y el gran apoyo que me brinda en todo momento (B&N).

A mi padres, a mi hermana Diana, a mi hermano Alejo, a mi tía Gloría, a mi sobrino Juanse, a mis primos Cesar, Juancho, Juanpa, Mateo y Julian, a mis tíos Hernando y Olmedo por su apoyo cuando comencé a estudiar matemáticas. En general, a toda mi familia, la cual hace que cada paso que doy en la vida sea cada vez más grande, por ser mi mayor motivación y por estar siempre a mi lado.

A mis amigos Julian, Ancizar, Oscar, Eduard, Richar, Edison, Jesús, Edwin (El Profe), Miguel, Dirceu (Dirzinho) y Beth, Iván Angiono, Diego, Graciela, Solange, Leonela, Martin, Enrique (Toreto) y Natalia, Dario Gómez, por los buenos deseos y los momentos compartidos durante mi estadía en Córdoba.

Por último doy gracias a Dios, por todas las cosas buenas que pone en mi vida.

TABLA DE CONTENIDOS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

Dada $\mathfrak{g} = (\mathbb{C}^n, \mu)$ un álgebra de Lie compleja de dimensión n, en una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $\mathbb{C}^n$ tenemos que

$$\mu(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^{n} C_{i,j}^k e_k \qquad 1 \le i < j \le n$$

luego, el corchete de Lie μ se identifica con el conjunto de constantes de estructura $\{C_{i,j}^k\}$ en el espacio $\mathbb{C}^{n^3}$ que verifican las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{rl} C_{i,j}^k + C_{j,i}^k = 0 & \qquad 1 \le i < j \le n, 1 \le k \le n; \\ \sum_{k=1}^n \left(C_{i,j}^k C_{k,m}^l + C_{j,m}^k C_{k,i}^l + C_{m,i}^k C_{k,j}^l \right) = 0 & \qquad 1 \le i < j < m \le n, 1 \le l \le n. \end{array}$$

El conjunto de todos los corchetes de Lie μ sobre $\mathbb{C}^n$ es una variedad algebraica la cual denotamos por $\mathcal{L}_n$. Además, el grupo $GL(n, \mathbb{C})$ actúa sobre $\mathcal{L}_n$ por

$$(g \cdot \mu)(x, y) = g(\mu(g^{-1}x, g^{-1}y)) \qquad g \in GL(n, \mathbb{C}),\ \mu \in \mathcal{L}_n.$$

y denotamos por $\mathcal{O}(\mu)$ y $\overline{\mathcal{O}(\mu)}$ la órbita de μ bajo la acción de $GL(n, \mathbb{C})$ y la clausura Zariski de la órbita respectivamente.

Dos álgebras de Lie $\lambda, \mu \in \mathcal{L}_n$ se dicen *isomorfas* si existe $g \in GL(n, \mathbb{C})$ tal que $g \cdot \lambda = \mu$, es decir, $\mathcal{O}(\mu)$ es el conjunto de todas las álgebras de Lie isomorfas a μ.

El objeto de estudio de esta tesis es la variedad algebraica $\mathcal{L}_n$ de todas las álgebras de Lie complejas de dimensión n y la subvariedad $\mathcal{N}_n$ de todas las álgebras de Lie nilpotentes en $\mathcal{L}_n$, para lo cual es necesario introducir los siguientes conceptos:

La noción de degeneración se define de la siguiente manera. Un álgebra de Lie $\lambda \in \mathcal{L}_n$ se *degenera* a un álgebra de Lie $\mu \in \mathcal{L}_n$ si $\mu \in \overline{\mathcal{O}(\lambda)}$, pero en 1988 Grunewald y O'Halloran caracterizan en [GO1] la noción de degeneración por una noción de límite. De donde, un álgebra de Lie $\lambda \in \mathcal{L}_n$ se degenera a un álgebra de Lie $\mu \in \mathcal{L}_n$ si existe una familia $g_t \in GL(n, \mathbb{C})$ tal que $\lim_{t \to 0} g_t \cdot \lambda = \mu$.

Una *deformación* de un álgebra de Lie $\mu \in \mathcal{L}_n$ es una familia μ_t, con $t \in \mathbb{C}^\times$, de álgebras de Lie tal que

$$\mu_t = \mu + t\phi_1 + t^2\phi_2 + \cdots$$

donde cada ϕ_i es una forma bilineal antisimétrica sobre $\mathbb{C}^n$. La noción de deformación fue introducida por Gerstenhaber en el año de 1964 [G], pero fue desarrollada por Ninjenhuis y Richardson, los cuales presentaron un concepto más formal [NR1, NR2, NR3, NR4].

Un álgebra de Lie $\mu \in \mathcal{L}_n$ se dice *rígida* si su órbita $\mathcal{O}(\mu)$ es un abierto Zariski. De manera intuitiva un álgebra de Lie es rígida si cualquier álgebra de Lie cercana a ésta, es isomorfa. Los primeros resultados de álgebras de Lie rígidas se deben a Gerstenhaber [G], pero Ninjenhuis y Richardson [NR1] transformaron los problemas topológicos relacionados con rigidez en problemas cohomológicos.

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y definamos

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^{[1]} &= \mathcal{D}er(\mathfrak{g})(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid x = D(y) \quad \text{para } D \in \mathcal{D}er(\mathfrak{g}), y \in \mathfrak{g}\}; \\ \mathfrak{g}^{[k]} &= \mathcal{D}er(\mathfrak{g})(\mathfrak{g}^{[k-1]}) \quad \text{para } k > 1. \end{aligned}$$

Decimos que $\mathfrak{g}$ es un *álgebra de Lie característicamente nilpotente*, si existe un entero m tal que $\mathfrak{g}^{[m]} = 0$. El estudio de la teoría de álgebras de Lie característicamente nilpotentes tuvo sus inicios con el artículo de Dixmier y Lister [DL], publicado en 1957, donde se da el primer ejemplo de un álgebra de Lie nilpotente con todas sus derivaciones nilpotentes, mostrando así que el recíproco del teorema de Jacobson [J2], el cual establece que *toda álgebra de Lie sobre un cuerpo de característica cero con una derivación no singular es nilpotente*, es falso. Los primeros en trabajar en la estructura de este nuevo tipo de álgebras de Lie nilpotentes fueron Leger y Tôgô, probando en 1959, el siguiente resultado.

Teorema. *[LT]*
Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es característicamente nilpotente si y sólo si $\mathcal{D}er(\mathfrak{g})$ es nilpotente.

Estos conceptos mencionados son fundamentales para encaminar el estudio de la variedad $\mathcal{L}_n$ y en particular dos conjeturas muy famosas, la primera atribuida a Vergne que data más o menos de 1970 y la segunda es la conjetura de Grunewald-O'Halloran dada en 1993.

Conjetura (Grunewald-O'Halloran)**.**
Toda álgebra de Lie nilpotente es la degeneración de otra álgebra de Lie no isomorfa.

Conjetura (Vergne)**.**
No existen álgebras de Lie nilpotentes rígidas en la variedad $\mathcal{L}_n$.

Cabe mencionar que la conjetura de Vergne fue probada por Carles [C] en 1984, para las álgebras de Lie nilpotentes de rango ≥ 1.

Teorema. *[C]*
Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie nilpotente que no es característicamente nilpotente, entonces $\mathfrak{g}$ no es rígida.

En el Capítulo 1 se introducen las definiciones de cocadena, operador coborde y cohomología, además de algunas propiedades y resultados generales. En particular, se introduce la cohomología de álgebras de Lie, la cual será fundamental para realizar construcciones y entender los resultados del Capítulo 2.

En el Capítulo 2 se estudian los conceptos de degeneración, deformación y rigidez de un álgebra de Lie, además se estudian las álgebras de Lie característicamente nilpotentes que van a tener un papel muy importante a lo largo de esta tesis. También se muestra como construir deformaciones no triviales a partir de un ideal de codimensión 1 del álgebra de Lie y se ven algunos resultados generales de la teoría de deformaciones. Por último se comparan la conjetura de Grunewald-O'Halloran y la conjetura de Vergne, y se da un ejemplo que aclara la relación entre éstas.

En [GO1],[Se] las variedades $\mathcal{N}_5$,$\mathcal{N}_6$ han sido clasificadas y sus diagramas de degeneraciones determinados, es decir, se describen todas las degeneraciones entre éstas álgebras de Lie nilpotentes. Como la degeneración es transitiva, para probar la conjetura de Grunewald-O'Halloran solamente se necesita verificar que las álgebras de Lie nilpotentes de $\mathcal{N}_5$ y $\mathcal{N}_6$ que aparecen en la cima del diagrama de Hasse de degeneraciones, sean la degeneración de otra álgebra de Lie soluble. En el Capítulo 3 se prueba ésto, pero además se ve que para toda álgebra de Lie de las variedades $\mathcal{N}_5$ y $\mathcal{N}_6$, se puede encontrar un álgebra de Lie soluble que se degenera a éstas.

El Capítulo 4 consiste en gran parte de los resultados del trabajo:

• [HGT1] Herrera-Granada, J.F. and Tirao, P., *The Grunewald-O'Halloran conjecture for nilpotent Lie algebras of* $\mathrm{rank} \geq 1$. Abstract and file: http://arxiv.org/abs/1306.1541.

Lo primero que se hace es separar las álgebras de Lie nilpotentes en dos clases: las álgebras de Lie de rango ≥ 1 y las álgebras de Lie nilpotentes de rango 0 (característicamente nilpotentes) y se prueba la conjetura de Grunewald-O'Halloran para la primera clase. Ya que la conjetura queda abierta para las álgebras de Lie característicamente nilpotentes, se trabaja en este sentido y se logra probar la conjetura en dimensión 7. Para ello, se hace uso de la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 7 dada por Magnin [M] y para cada álgebra de Lie característicamente nilpotentes de la clasificación, se encuentra un álgebra de Lie soluble que se degenera a ésta. Finalmente, con la idea de avanzar en la conjetura para el caso de las álgebra de Lie característicamente nilpotentes, se estudia un tipo muy especial de estas álgebras. Se trata del álgebra de Lie de Dixmier-Lister, la cual es especial pues fue el primer ejemplo de álgebra de Lie característicamente nilpotente dado en 1957 por Dixmier y Lister en [DL]. Para ésta álgebra de Lie de dimensión 8 se encuentra un álgebra de Lie, no isomorfa, que se degenera a ella, dando así más evidencia de la conjetura para el caso de las álgebras de Lie característicamente nilpotentes.

El capítulo 5 corresponde al siguiente trabajo:

[HGT2] Herrera-Granada, J.F. and Tirao, P., *Filiform Lie algebras of dimensión 8 as degenerations*, J. Algebra Appl. 13 (2014), no.4, 10 pages. Abstract and file: http://arxiv.org/abs/1308.4580.

Se introduce la definición de álgebra de Lie filiforme, las cuales son álgebras de Lie nilpotentes de grado de nilpotencia maximal. Estas álgebras de Lie fueron clasificadas en dimensión 8 por Ancochea-Bermudez y Goze en [ABG2], luego haciendo uso de la clasificación, se prueba que para cada álgebra de Lie filiforme y característicamente nilpotente, existe un álgebra de Lie no isomorfa que se degenera a ésta y con lo cual queda probada la conjetura de Grunewald-O'Halloran para las álgebras de Lie filiformes de dimensión 8. Para hacer esto primero se considera un ideal de codimensión 1 del álgebra, luego se toma una derivación semisimple del ideal, la cual se usa para construir una deformación no trivial y por último se verifica si esta deformación se corresponde con una degeneración. Al final del capítulo, se da un ejemplo de un álgebra, que muestra que el proceso anterior no funciona con cualquier derivación semisimple, pues se exhibe una derivación semisimple de un ideal la cual produce una deformación que no se corresponde con una degeneración.

El Capítulo 6 hace parte del trabajo en curso:

[HGT3] Herrera-Granada, J.F. and Tirao, P., *Non-counterexamples to the Vergne's conjecture*, In progress.

En este trabajo lo que se hace es estudiar una familia de álgebras de Lie nilpotentes, estas fueron introducidas por Burde por primera vez en 1998, pero posteriormente usadas por éste en otros trabajos, por ejemplo [BEG]. Esta familia, la cual consiste de álgebras de Lie nilpotentes de dimensión $n \geq 14$, tiene la particularidad que cada una de éstas álgebras es característicamente nilpotente y todos los ideales de codimensión 1 de éstas son también característicamente nilpotentes. Burde pensaba que estas álgebras podrían ser un contraejemplo para la conjetura de Vergne, pero, en este trabajo se da una familia de ideales de codimensión 1 de las álgebras de Lie tipo Burde y se obtienen derivaciones nilpotentes para cada uno de los ideales, las cuales sirven para construir deformaciones no triviales.

1 PRELIMINARES

1.1 VARIEDADES ALGEBRAICAS

Definición 1.1.1.
Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo algebraicamente cerrado. Definimos el n-***espacio afín*** sobre $\mathbb{K}$, denotado $\mathbb{A}^n$, como el conjunto de todas las n-tuplas de elementos de $\mathbb{K}$

$$\mathbb{A}^n := \{(a_1, \ldots, a_n) : a_i \in \mathbb{K}\}.$$

Los elementos del anillo de polinomios en n variables sobre $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, se pueden ver como funciones del n-espacio afín $\mathbb{A}^n$ en $\mathbb{K}$

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^n &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (a_1, \ldots, a_n) &\longmapsto f(a_1, \ldots, a_n) \quad \text{para } f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]. \end{aligned}$$

Definición 1.1.2.
Si $S \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ definimos el ***conjunto de ceros*** de S por

$$Z(S) := \{P \in \mathbb{A}^n : f(P) = 0 \text{ para } f \in S\}.$$

Definición 1.1.3.
Un subconjunto $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ es un ***conjunto algebraico*** si existe un subconjunto $S \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $Y = Z(S)$.

Ejemplo 1.1.4.
(1) El n-espacio afín es algebraico: $\mathbb{A}^n = Z(0)$.
(2) Cualquier punto en $\mathbb{A}^n$ forma un conjunto algebraico: $(a_1, \ldots, a_n) = Z(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$. (3) El conjunto vacío es algebraico: $\emptyset = Z(1)$.

Lema 1.1.5.
(a) *Si* $S_1 \subseteq S_2 \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *entonces* $Z(S_2) \subseteq Z(S_1) \subseteq \mathbb{A}^n$.
(b) *Si* $\{S_i\}_{i \in I}$ *es una familia de subconjuntos de* $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, *entonces*

$$\bigcap_{i \in I} Z(S_i) = Z\left(\bigcup_{i \in I} S_i\right).$$

(c) *Si* $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *entonces* $Z(S_1) \cup Z(S_2) = Z(S_1 S_2) \subseteq \mathbb{A}^n$.

Demostración
(a) Sea $P \in Z(S_2)$ entonces $f(P) = 0$ para todo $f \in S_2$, luego como $S_1 \subseteq S_2$, $f(P) = 0$ para todo $f \in S_1$ y así $P \in Z(S_1)$.

(b)

$$Z\left(\bigcup_{i\in I} S_i\right) = \{P \in \mathbb{A}^n : f(P) = 0 \quad \forall f \in \bigcup_{i\in I} S_i\} = \bigcap_{i\in I}\{P \in \mathbb{A}^n : f(P) = 0 \quad \forall f \in S_i\} = \bigcap_{i\in I} Z(S_i).$$

(c)

$$\begin{aligned}
\text{Si } P \in Z(S_1) \cup Z(S_2) \;&\Rightarrow\; P \in Z(S_1) \text{ o } P \in Z(S_2)\\
&\Rightarrow\; f_1(P) = 0 \quad \forall f_1 \in S_1 \quad \text{o} \quad f_2(P) = 0 \quad \forall f_2 \in S_2\\
&\Rightarrow\; f_1 f_2(P) = 0 \quad \forall f_1 \in S_1, f_2 \in S_2\\
&\Rightarrow\; f(P) = 0 \quad \forall f \in S_1 S_2\\
&\Rightarrow\; f \in Z(S_1 S_2).
\end{aligned}$$

■

Recordemos que una topología sobre cualquier conjunto X puede ser definida especificando cuales subconjuntos de X son cerrados y probando que las siguientes condiciones se satisfacen:

(i) El conjunto $\varnothing$ y el espacio X son cerrados.

(ii) Intersecciones arbitrarias de conjuntos cerrados son cerrados.

(iii) Uniones finitas de conjuntos cerrados son cerrados.

En el caso de $\mathbb{A}^n$ tenemos que (i) se tiene por el Ejemplo 1.1.4, mientras que $(ii), (iii)$ se siguen del Lema 1.1.5, así podemos introducir la siguiente definición.

Definición 1.1.6.
Se define la ***topología Zariski*** sobre $\mathbb{A}^n$ como la topología cuyos conjuntos cerrados son los conjuntos algebraicos.

Definición 1.1.7.
Un espacio topológico X se dice ***irreducible*** si no se puede escribir como la unión $X = X_1 \cup X_2$, donde X_1, X_2 son subconjuntos cerrados de X.

Definición 1.1.8.
Una ***variedad algebraica afín*** es un subconjunto cerrado e irreducible de $\mathbb{A}^n$.

1.2 COHOMOLOGÍA DE ÁLGEBRAS DE LIE

Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie compleja de dimensión finita y (ρ, V) una representación de $\mathfrak{g}$. Para cada entero n se define el espacio vectorial $C^n(\mathfrak{g}, V)$ de ***n-cocadenas*** por

$$C^n(\mathfrak{g}, V) = \mathrm{Hom}(\wedge^n \mathfrak{g}, V)$$

es decir, el espacio de todas las aplicaciones n-multilineales alternantes

$$\omega : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \cdots \times \mathfrak{g} \longrightarrow V$$

y se define el ***operador coborde*** $\delta_n : C^n(\mathfrak{g}, V) \longrightarrow C^{n+1}(\mathfrak{g}, V)$ por

$$\begin{aligned}
(\delta_n \omega)(x_1, \dots, x_{n+1}) \;=\; & \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} \rho(x_i)(\omega(x_1, \dots, \hat{x_i}, \dots, x_{n+1}))\\
&+ \sum_{1\le i<j\le n+1} (-1)^{i+j} \omega([x_i, x_j], x_1, \dots, \hat{x_i}, \dots, \hat{x_j}, \dots, x_{n+1}).
\end{aligned}$$

Para $x \in \mathfrak{g}$ denotamos $\theta_n(x)$ la acción sobre $C^n(\mathfrak{g}, V)$

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} \times C^n(\mathfrak{g}, V) &\longrightarrow C^n(\mathfrak{g}, V) \\ (x, \omega) &\longmapsto \theta_n(x)\omega \end{aligned}$$

donde

$$(\theta_n(x)\omega)(x_1, \dots, x_n) = \rho(x)(\omega(x_1, \dots, x_n)) - \sum_{i=1}^{n} \omega(x_1, \dots, [x, x_i], \dots, x_n)$$

y llamamos a $\theta_n(x)\omega$ la ***derivada de Lie*** de ω relativa a x. Además, introducimos el operador ***producto interior***

$$\iota_n(x) : C^n(\mathfrak{g}, V) \longrightarrow C^{n-1}(\mathfrak{g}, V)$$

definido por

$$(\iota_n(x)\omega)(x_1, \dots, x_{n-1}) = \omega(x, x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Lema 1.2.1.
Para $x, y \in \mathfrak{g}$ los operadores derivada de Lie y producto interior satisfacen

$$\theta_n(x)\iota_{n+1}(y) - \iota_{n+1}(y)\theta_{n+1}(x) = \iota_{n+1}\left([x, y]\right).$$

Demostración
Si $\omega \in C^{n+1}(\mathfrak{g}, V)$ entonces

$$\begin{aligned} \left(\iota_{n+1}(y)\theta_{n+1}(x)\omega\right)(x_1, \dots, x_n) &= \left(\theta_{n+1}(x)\omega\right)(y, x_1, \dots, x_n) \\ &= \rho(x)\left(\omega(y, x_1, \dots, x_n)\right) - \omega([x, y], x_1, \dots, x_n) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n} \omega(y, x_1, \dots, [x, x_i], \dots, x_n) \\ &= -\left(\iota_{n+1}([x, y]\omega)\right)(x_1, \dots, x_n) + \rho(x)\left((\iota_{n+1}(y)\omega)(x_1, \dots, x_n)\right) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n} \left(\iota_{n+1}(y)\omega\right)(x_1, \dots, [x, x_i], \dots, x_n) \\ &= -\left(\iota_{n+1}([x, y])\omega\right)(x_1, \dots, x_n) + \left(\theta_n(x)\iota_{n+1}(y)\omega\right)(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

de donde,

$$\left(\iota_{n+1}([x, y])\omega\right)(x_1, \dots, x_n) = \left(\theta_n(x)\iota_{n+1}(y)\omega\right)(x_1, \dots, x_n) - \left(\iota_{n+1}(y)\theta_{n+1}(x)\omega\right)(x_1, \dots, x_n)$$

y en consecuencia,

$$\iota_{n+1}([x, y]) = \theta_n(x)\iota_{n+1}(y) - \iota_{n+1}(y)\theta_{n+1}(x).$$

∎

Lema 1.2.2.
Para todo $x \in \mathfrak{g}$, el operador coborde δ satisface

$$\delta_n \iota_{n+1}(x) + \iota_{n+2}(x)\delta_{n+1} = \theta_{n+1}(x).$$

Demostración
Sean $\omega \in C^{n+1}(\mathfrak{g}, V)$, $x \in \mathfrak{g}$ entonces

$$\begin{aligned} \left(\delta_n \iota_{n+1}(x)\omega\right)(x_1, \dots, x_{n+1}) &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} \rho(x_i)\left((\iota_{n+1}(x)\omega)(x_1, \dots, \hat{x_i}, \dots, x_{n+1})\right) \\ &\quad + \sum_{1 \le i < j \le n+1} (-1)^{i+j} \left(\iota_{n+1}(x)\omega\right)([x_i, x_j], x_1, \dots, \hat{x_i}, \dots, \hat{x_j}, \dots, x_{n+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} \rho(x_i)\left(\omega(x, x_1, \dots, \hat{x_i}, \dots, x_{n+1})\right) \\ &\quad + \sum_{1 \le i < j \le n+1} (-1)^{i+j} \omega(x, [x_i, x_j], x_1, \dots, \hat{x_i}, \dots, \hat{x_j}, \dots, x_{n+1}). \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned}
(\iota_{n+2}(x)\delta_{n+1}\omega)(x_1,\dots,x_{n+1}) &= (\delta_{n+1}\omega)(x,x_1,\dots,x_{n+1})\\
&= \rho(x)(\omega(x_1,\dots,x_{n+1}))\\
&\quad-\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}\rho(x_i)(\omega(x,x_1,\dots,\hat{x_i},\dots,x_{n+1}))\\
&\quad-\sum_{j=1}(-1)^{j+1}\omega([x,x_j],x_1,\dots,\hat{x_j},\dots,x_{n+1})\\
&\quad-\sum_{1\le i<j\le n+1}(-1)^{i+j}\omega(x,[x_i,x_j],x_1,\dots,\hat{x_i},\dots,\hat{x_j},\dots,x_{n+1})\\
&= \rho(x)(\omega(x_1,\dots,x_{n+1}))-\sum_{j=1}\omega(x_1,\dots,[x,x_j],\dots,x_{n+1})\\
&\quad-\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}\rho(x_i)(\omega(x,x_1,\dots,\hat{x_i},\dots,x_{n+1}))\\
&\quad-\sum_{1\le i<j\le n+1}(-1)^{i+j}\omega(x,[x_i,x_j],x_1,\dots,\hat{x_i},\dots,\hat{x_j},\dots,x_{n+1})
\end{aligned}$$

de donde,

$$(\delta_n\iota_{n+1}(x)\omega)(x_1,\dots,x_{n+1})+(\iota_{n+2}(x)\delta_{n+1}\omega)(x_1,\dots,x_{n+1})=(\theta_{n+1}(x)\omega)(x_1,\dots,x_{n+1})$$

y en consecuencia,

$$\delta_n\iota_{n+1}(x)+\iota_{n+2}(x)\delta_{n+1}=\theta_{n+1}(x).$$

■

Lema 1.2.3.
Los operadores coborde y derivada de Lie satisfacen

$$\delta_n\theta_n(x)=\theta_{n+1}(x)\delta_n.$$

para todo $x\in\mathfrak{g}$.

Demostración
Consideremos el operador $T_n=\delta_n\theta_n(x)-\theta_{n+1}(x)\delta_n$ y usemos un argumento inductivo para probar que $T_n\omega=0$ para todo $\omega\in C^n(\mathfrak{g},V)$, con lo cual, se sigue que $T_n=0$.
Si $v\in C^0(\mathfrak{g},V)=V$ tenemos

$$\begin{aligned}
(\delta_0\theta_0(x)v)(y) &= \rho(y)(\theta_0(x)v)\\
&= \rho(y)(\rho(x)v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\theta_1(x)\delta_0 v)(y) &= \rho(x)(\delta_0 v(y))-\delta_0 v([x,y])\\
&= \rho(x)(\rho(y)v)-\rho([x,y])v
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
(T_0 v)(y) &= \rho(y)(\rho(x)v)-\rho(x)(\rho(y)v)+\rho([x,y])v\\
&= [\rho(y),\rho(x)]v+\rho([x,y])v\\
&= \rho([y,x])v+\rho([x,y])v \qquad (\rho \text{ es morfismo de álgebras de Lie})\\
&= 0
\end{aligned}$$

para todo $y\in\mathfrak{g}$ y así $T_0v=0$ para $v\in C^0(\mathfrak{g},V)=V$. Ahora,

$$\begin{aligned}
\iota_{n+1}(y)\delta_n\theta_n(x) &= \theta_n(y)\theta_n(x)-\delta_{n-1}\iota_n(y)\theta_n(x) \qquad (\text{ Lema } 1.2.2 \text{ })\\
&= \theta_n(y)\theta_n(x)-\delta_{n-1}\theta_{n-1}(x)\iota_n(y)-\delta_{n-1}\iota_n([x,y]) \qquad (\text{ Lema } 1.2.1 \text{ })
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iota_{n+1}(y)\theta_{n+1}(x)\delta_n &= \theta_n(x)\iota_{n+1}(y)\delta_n - \iota_{n+1}([x,y])\delta_n \qquad (\text{ Lema } 1.2.1\ )\\
&= \theta_n(x)\theta_n(y) - \theta_n(x)\delta_{n-1}\iota_n(y) - \iota_{n+1}([x,y])\delta_n \qquad (\text{ Lema } 1.2.2\ )
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
\iota_{n+1}(y)\left(\delta_n\theta_n(x) - \theta_{n+1}(x)\delta_n\right) &= \left(\delta_{n-1}\theta_{n-1}(x) - \theta_n(x)\delta_{n-1}\right)\\
&\quad +\theta_n(y)\theta_n(x) - \theta_n(x)\theta_n(y)\\
&\quad +\delta_{n-1}\iota_n([x,y]) + \iota_{n+1}([x,y])\delta_n\\
&= -\left(\delta_{n-1}\theta_{n-1}(x) - \theta_n(x)\delta_{n-1}\right)\iota_n(y)\\
&\quad +[\theta_n(y),\theta_n(x)] + \theta_n([x,y]) \qquad (\text{ Lema } 1.2.2\ )\\
&= -\left(\delta_{n-1}\theta_{n-1}(x) - \theta_n(x)\delta_{n-1}\right)\iota_n(y)\\
&\quad +\theta_n[y,x] + \theta_n([x,y]) \qquad (\rho \text{ es morfismo de álgebras de Lie})\\
&= -\left(\delta_{n-1}\theta_{n-1}(x) - \theta_n(x)\delta_{n-1}\right)\iota_n(y)
\end{aligned}$$

es decir, $\iota_{n+1}(y)T_n = -T_{n-1}\iota_n(y)$.
Sea $\omega \in C^1(\mathfrak{g},V)$ entonces $\iota_1(y)\omega \in C^0(\mathfrak{g},V) = V$, de donde

$$\iota_2(y)T_1\omega = -T_0\iota_1(y)\omega = 0$$

luego, se sigue que

$$\left(\iota_2(y)T_1\omega\right)(z) = 0 \qquad \text{para todo } z \in \mathfrak{g} \qquad \Longrightarrow \qquad T_1\omega(y,z) = 0 \qquad \text{para todo } y,z \in \mathfrak{g}$$

y así $T_1\omega = 0$ para $\omega \in C^1(\mathfrak{g},V)$. Continuando con este mismo argumento, obtenemos que $T_n\omega = 0$ para $\omega \in C^n(\mathfrak{g},V)$, con lo cual $T_n = 0$ y por lo tanto

$$\delta_n\theta_n(x) = \theta_{n+1}(x)\delta_n.$$

■

Proposición 1.2.4.
El operador coborde satisface $\delta_n \circ \delta_{n-1} = 0$.

Demostración
Sea $x \in \mathfrak{g}$, entonces por el Lema 1.2.2 tenemos que $\delta_{n-1}\iota_n(x) + \iota_{n+1}(x)\delta_n = \theta_n(x)$, luego

$$\begin{aligned}
\delta_n\delta_{n-1}\iota_n(x) + \delta_n\iota_{n+1}(x)\delta_n &= \delta_n\theta_n(x)\\
&= \theta_{n+1}(x)\delta_n \qquad (\text{Lema } 1.2.3)\\
&= \delta_n\iota_{n+1}(x)\delta_n + \iota_{n+2}(x)\delta_{n+1}\delta_n \qquad (\text{Lema } 1.2.2)
\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\delta_n\delta_{n-1}\iota_n(x) = \iota_{n+2}(x)\delta_{n+1}\delta_n \qquad (*)$$

para todo $x \in \mathfrak{g}$. Si $v \in C^0(\mathfrak{g},V) = V$ entonces

$$\begin{aligned}
(\delta_1\delta_0 v)(x,y) &= \rho(x)\left(\delta_0 v(y)\right) - \rho(y)\left(\delta_0 v(x)\right) - \delta_0 v([x,y])\\
&= \rho(x)\left(\rho(y)v\right) - \rho(y)\left(\rho(x)v\right) - \rho([x,y])v\\
&= [\rho(x),\rho(y)]v - \rho([x,y])v\\
&= \rho([x,y])v - \rho([x,y])v \qquad (\rho \text{ es morfismo de álgebras de Lie})\\
&= 0
\end{aligned}$$

para todo $x,y \in \mathfrak{g}$ y así $\delta_1\delta_0 v = 0$. Haciendo uso $(*)$ y del mismo argumento inductivo que en la prueba del Lema 1.2.3, se sigue que $\delta_n \circ \delta_{n-1} = 0$. ■

Definimos el ***espacio de n-cociclos*** por

$$Z^n(\mathfrak{g}, V) = \mathrm{Ker}\delta_n$$

y el ***espacio de n-cobordes*** por

$$B^n(\mathfrak{g}, V) = \mathrm{Im}\delta_{n-1}$$

Puesto que $\delta_n \circ \delta_{n-1} = 0$ entonces $B^n(\mathfrak{g}, V) \subseteq Z^n(\mathfrak{g}, V)$, lo cual hace que tenga sentido la siguiente definición.

Definición 1.2.5.
El ***n-ésimo espacio de cohomología*** del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, se define como el cociente

$$H^n(\mathfrak{g}, V) = Z^n(\mathfrak{g}, V)/B^n(\mathfrak{g}, V).$$

Ejemplo 1.2.6.
Puesto que $C^0(\mathfrak{g}, V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, V) \simeq V$ como espacios vectoriales y bajo esta identificación tenemos que $(\delta_0 v)(x) = \rho(x)(v)$ para $v \in V, x \in \mathfrak{g}$. Ahora,

$$\begin{aligned} v \in Z^0(\mathfrak{g}, V) = \mathrm{Ker}\delta_0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \rho(x)(v) = 0 \text{ para todo } x \in \mathfrak{g} \\ &\Longleftrightarrow \quad v \in V^{\mathfrak{g}} \end{aligned}$$

donde $V^{\mathfrak{g}}$ denota el espacio de invariantes en V, luego $H^0(\mathfrak{g}, V) = Z^0(\mathfrak{g}, V)$ (pues $B^0(\mathfrak{g}, V) = 0$), y así

$$H^0(\mathfrak{g}, V) = V^{\mathfrak{g}}.$$

Ejemplo 1.2.7.
Sea $\omega \in C^1(\mathfrak{g}, V)$ entonces

$$(\delta_1 \omega)(x, y) = \rho(x)(\omega(y)) - \rho(y)(\omega(x)) - \omega([x, y])$$

por tanto, $\omega \in Z^1(\mathfrak{g}, V)$ si

$$\omega([x, y]) = \rho(x)(\omega(y)) - \rho(y)(\omega(x))$$

Ahora, $\omega \in B^1(\mathfrak{g}, V)$ si

$$\omega(x) = \rho(x)(v_0) \quad \text{para algún } v_0 \in V$$

En efecto, si $\omega \in B^1(\mathfrak{g}, V) = \mathrm{Im}\delta_0$ entonces existe $v_0 \in C^0(\mathfrak{g}, V) = V$ tal que $\omega = \delta_0 v_0$, es decir,

$$\omega(x) = (\delta_0 v_0)(x) = \rho(x)(v_0)$$

Si consideramos el caso en que $V = \mathbb{C}$ con la acción trivial (cero), la condición de coborde se convierte en que $\omega = 0$, mientras que la condición de cociclo es que $\omega([x, y]) = 0$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$. Por tanto un cociclo es una función $\mathbb{C}$-lineal que se anula en $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, luego

$$H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) \simeq (\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])^*.$$

A partir de ahora, consideraremos $V = \mathfrak{g}$ dotado con la representación adjunta, así el espacio de n-cocadenas será denotado por $C^n(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ y el operador coborde $\delta_n : C^n(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \longrightarrow C^{n+1}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ quedará definido por

$$\begin{aligned} (\delta_n \omega)(x_1, \ldots, x_{n+1}) = &\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} [x_i, \omega(x_1, \ldots, \hat{x_i}, \ldots, x_{n+1})] \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (-1)^{i+j} \omega([x_i, x_j], x_1, \ldots, \hat{x_i}, \ldots, \hat{x_j}, \ldots, x_{n+1}). \end{aligned} \tag{1}$$

Como hacíamos anteriormente, definimos el ***espacio de n-cociclos*** por

$$Z^n(\mathfrak{g},\mathfrak{g}) = \mathrm{Ker}\delta_n,$$

el ***espacio de n-cobordes*** por

$$B^n(\mathfrak{g},\mathfrak{g}) = \mathrm{Im}\delta_{n-1},$$

y puesto que $\delta_n \circ \delta_{n-1} = 0$ entonces $B^n(\mathfrak{g},\mathfrak{g}) \subseteq Z^n(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$. En consecuencia, tenemos la siguiente definición.

Definición 1.2.8.
El ***n-ésimo espacio de cohomología adjunta*** del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, se define como el cociente

$$H^n(\mathfrak{g},\mathfrak{g}) = Z^n(\mathfrak{g},\mathfrak{g})/B^n(\mathfrak{g},\mathfrak{g}).$$

2 DEFORMACIONES Y DEGENERACIONES DE ÁLGEBRAS DE LIE

2.1 LA VARIEDAD $\mathcal{L}_n$

Dada $\mathfrak{g} = (\mathbb{C}^n, \mu)$ un álgebra de Lie compleja de dimensión n, en una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $\mathbb{C}^n$ tenemos que

$$\mu(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^{n} C_{i,j}^k e_k \qquad 1 \leq i < j \leq n$$

luego, el corchete de Lie μ se identifica con el conjunto de constantes de estructura $\{C_{i,j}^k\}$ en el espacio $\mathbb{C}^{n^3}$ que verifican las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} C_{i,j}^k + C_{j,i}^k &= 0 & & 1 \leq i < j \leq n, 1 \leq k \leq n; \\ \textstyle\sum_{k=1}^{n} \left(C_{i,j}^k C_{k,m}^l + C_{j,m}^k C_{k,i}^l + C_{m,i}^k C_{k,j}^l \right) &= 0 & & 1 \leq i < j < m \leq n, 1 \leq l \leq n. \end{aligned}$$

El conjunto de todos los corchetes de Lie μ sobre $\mathbb{C}^n$ es una variedad algebraica de la variedad afín $\mathrm{Hom}(\wedge^2 \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$, que denotamos por $\mathcal{L}_n$ y la cual llamaremos ***variedad algebraica de las álgebras de Lie complejas*** de dimensión n.

Nota 2.1.1.
Puesto que $\mathcal{L}_n \subseteq \mathbb{C}^{n^3}$ podemos dotar a $\mathcal{L}_n$ con dos topologías, la topología inducida por $\mathbb{C}^{n^3}$ y la topología Zariski.

A partir de ahora, para un álgebra de Lie $\mathfrak{g} = (\mathbb{C}^n, \mu)$, no se hará distinción entre $\mathfrak{g} = (\mathbb{C}^n, \mu)$, $\mathfrak{g}$ y μ.

El grupo $GL(n, \mathbb{C})$ actúa sobre $\mathcal{L}_n$ por

$$(g \cdot \mu)(x, y) = g(\mu(g^{-1}x, g^{-1}y)) \qquad g \in GL(n, \mathbb{C}),\ \mu \in \mathcal{L}_n. \tag{2}$$

Denotamos por $\mathcal{O}(\mu)$ la órbita de μ bajo la acción de $GL(n, \mathbb{C})$ y por $\overline{\mathcal{O}(\mu)}$ la clausura Zariski de la órbita con respecto a la topología Zariski.

Definición 2.1.2.
Dos álgebras de Lie $\lambda, \mu \in \mathcal{L}_n$ se dicen ***isomorfas*** si existe $g \in GL(n, \mathbb{C})$ tal que $g \cdot \lambda = \mu$.

De (2) y la definición anterior tenemos que la órbita $\mathcal{O}(\mu)$ de μ en $\mathcal{L}_n$ es el conjunto de todas las álgebras de Lie isomorfas a μ.

2.2 DEGENERACIONES

Definición 2.2.1.
Un álgebra de Lie $\lambda \in \mathcal{L}_n$ se ***degenera*** a un álgebra de Lie $\mu \in \mathcal{L}_n$ si $\mu \in \overline{\mathcal{O}(\lambda)}$, lo cual denotaremos por $\lambda \longrightarrow_{deg} \mu$.

Proposición 2.2.2.
La degeneración define una relación de orden sobre el espacio de órbitas de $\mathcal{L}_n$,

$$\mathcal{O}(\mu) \leq \mathcal{O}(\lambda) \iff \mu \in \overline{\mathcal{O}(\lambda)}.$$

Puesto que trabajar con la topología Zariski resulta muy complicado, usaremos un resultado de Mumford [Mum] que nos permite identificar la clausura de las órbitas en ambas topologías de $\mathcal{L}_n$ y nos hace mucho más fácil el trabajo.

Proposición 2.2.3. *[Mum]*
Para toda álgebra de Lie $\mu \in \mathcal{L}_n$ tenemos que

$$\overline{\mathcal{O}(\mu)} = \overline{\mathcal{O}(\mu)}^d \tag{3}$$

donde $\overline{\mathcal{O}(\mu)}^d$ denota la clausura de la órbita en la topología inducida por $\mathbb{C}^{n^3}$.

Nota 2.2.4.
Por (3) tenemos que $\lambda \longrightarrow_{deg} \mu$ si existe una familia $g_t \in GL(n, \mathbb{C})$ tal que $\lim_{t \to 0} g_t \cdot \lambda = \mu$.

Ejemplo 2.2.5.
Consideremos las álgebras de Lie de dimensión 4 definidas por

$$\begin{array}{ll} \mu(e_1, e_2) = e_3 & \qquad \mu'(e_1, e_2) = e_3 \\ \mu(e_1, e_3) = e_4 & \end{array}$$

Sea $g_t \in GL(n, \mathbb{C})$ dada por

$$g_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned} (g_t \cdot \mu)(e_1, e_2) &= g_t(\mu(g_t^{-1} e_1, g_t^{-1} e_2)) \\ &= g_t(\mu(e_1, e_2)) \\ &= g_t e_3 \\ &= e_3 \\ (g_t \cdot \mu)(e_1, e_3) &= g_t(\mu(g_t^{-1} e_1, g_t^{-1} e_3)) \\ &= g_t(\mu(e_1, e_3)) \\ &= g_t e_4 \\ &= t e_4 \end{aligned}$$

de donde $\lim_{t \to 0} g_t \cdot \mu = \mu'$, es decir, $\mu \longrightarrow_{deg} \mu'$.

Definición 2.2.6.
$\lambda \longrightarrow_{deg} \mu$ vía un ***subgrupo 1-paramétrico*** si existe un homomorfismo de grupos algebraicos

$$\begin{aligned} g : \mathbb{C}^\times &\longrightarrow GL(n, \mathbb{C}) \\ t &\longmapsto g_t \end{aligned}$$

tal que $\lim_{t \to 0} g_t \cdot \lambda = \mu$.

Los g_t resultan ser diagonalizables con autovalores $t^{m_1}, \dots, t^{m_n}$ con $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$.

Proposición 2.2.7.
Toda álgebra de Lie $\mu \in \mathcal{L}_n$ se degenera al álgebra de Lie abeliana.

Demostración
Sea μ_{ab} el álgebra de Lie abeliana, es decir, $\mu_{ab}(e_i, e_j) = 0$ para todo e_i, e_j y consideremos

$$g_t = \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned} (g_t \cdot \mu)(e_i, e_j) &= g_t(\mu(g_t^{-1} e_i, g_t^{-1} e_j)) \\ &= g_t(t^2 \mu(e_i, e_j)) \\ &= g_t(\sum_{k=1}^{n} t^2 C_{i,j}^k e_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} t C_{i,j}^k e_k \end{aligned}$$

de donde $\lim_{t \to 0}(g_t \cdot \mu) = \mu_{ab}$. ∎

Ya que se ha introducido el concepto de degeneración, cabe enunciar la conjetura de Grunewald-O'Halloran, la cual aparece en 1993 en [GO2].

Conjetura 1 (Grunewald-O'Halloran)**.**
Toda álgebra de Lie nilpotente es la degeneración de otra álgebra de Lie no isomorfa.

2.3 ÁLGEBRAS DE LIE RÍGIDAS

Definición 2.3.1.
Un álgebra de Lie $\mu \in \mathcal{L}_n$ se dice ***rígida*** si su órbita $\mathcal{O}(\mu)$ es un abierto Zariski. (En la literatura también se conoce como ***geométricamente rígida***).

Ejemplo 2.3.2.
Consideremos el álgebra de Lie soluble de dimensión 2

$$\mu(e_1, e_2) = e_2.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\mu) &= \{\mu' \in \mathcal{L}_2 \mid g \cdot \mu' = \mu \quad \text{para algún } g \in GL(2, \mathbb{C})\} \\ &= \{\mu_{\alpha,\beta} \in \mathcal{L}_2 \mid \mu_{\alpha,\beta}(e_1, e_2) = \alpha e_1 + \beta e_2 \quad \text{con } \beta \neq 0\}. \end{aligned}$$

En efecto, puesto que toda álgebra de Lie de dimensión 2 no abeliana es de la forma

$$\mu_{\alpha,\beta}(e_1, e_2) = \alpha e_1 + \beta e_2$$

con α o β diferente de cero, digamos $\beta \neq 0$, entonces si tomamos

$$g = \begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
(g \cdot \mu_{\alpha,\beta})(e_1, e_2) &= g(\mu_{\alpha,\beta}(g^{-1}e_1, g^{-1}e_2)) \\
&= g(\mu_{\alpha,\beta}(\frac{1}{\beta}e_1, \frac{\alpha}{\beta}e_1 + e_2)) \\
&= g(\frac{1}{\beta}\mu_{\alpha,\beta}(e_1, e_2)) \\
&= \frac{1}{\beta}g(\alpha e_1 + \beta e_2) \\
&= \frac{1}{\beta}(\alpha\beta e_1 - \alpha\beta e_1 + \beta e_2) \\
&= e_2 \\
&= \mu(e_1, e_2).
\end{aligned}$$

Además, $\mathcal{O}(\mu)$ es abierta y por tanto μ es rígida.

Intuitivamente, un álgebra de Lie μ es rígida si cualquier álgebra de Lie cercana a ésta, es isomorfa. Los primeros resultados sobre álgebras de Lie rígidas se deben a Gerstenhaber [G], Nijenhuis y Richardson [NR1], estos dos últimos autores transformaron los problemas topológicos relacionados con rigidez en problemas cohomológicos.

Teorema 2.3.3. *[NR1]*
Sea $\mu \in \mathcal{L}_n$. Si $H^2(\mu, \mu) = 0$, entonces μ es rígida.

Nota 2.3.4.
El recíproco del teorema anterior es falso, pues existen álgebras de Lie $\mu \in \mathcal{L}_n$ rígidas tales que $H^2(\mu, \mu) \neq 0$, ver por ejemplo [R].

Ejemplo 2.3.5.
Si $\mu \in \mathcal{L}_n$ es un álgebra de Lie semisimple entonces $H^2(\mu, \mu) = 0$, con lo cual toda álgebra de Lie semisimple es rígida.

En el Ejemplo 2.3.2 tenemos que el álgebra de Lie no abeliana de dimensión 2, no es la degeneración de otra álgebra de Lie y en el Ejemplo 2.3.5 tenemos lo mismo para las álgebras de Lie semisimples. En vista del teorema anterior, la conjetura de Grunewald-O'Halloran tiene su soporte en el hecho que toda álgebra de Lie nilpotente tiene 2-cohomología no nula [D].

Teniendo ya en mente el concepto de rigidez, podemos enunciar la siguiente conjetura, la cual aparece en los años 70 y se conoce como la conjetura de Vergne. Es importante mencionarla ya que está relacionada con la conjetura de Grunewald-O'Halloran.

Conjetura 2 (Vergne)**.**
No existen álgebras de Lie nilpotentes rígidas en la variedad $\mathcal{L}_n$.

2.4 ÁLGEBRAS DE LIE CARACTERÍSTICAMENTE NILPOTENTES

Definición 2.4.1.
Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y definamos

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}^{[1]} &= \mathcal{D}er(\mathfrak{g})(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid x = D(y) \quad \text{para } D \in \mathcal{D}er(\mathfrak{g}), y \in \mathfrak{g}\}; \\
\mathfrak{g}^{[k]} &= \mathcal{D}er(\mathfrak{g})(\mathfrak{g}^{[k-1]}) \quad \text{para } k > 1.
\end{aligned}$$

Decimos que $\mathfrak{g}$ es un ***álgebra de Lie característicamente nilpotente*** (ALCN), si existe un entero m tal que $\mathfrak{g}^{[m]} = 0$.

El estudio de la teoría de ALCN tuvo sus inicios con el artículo de Dixmier y Lister [DL], publicado en 1957, donde se da el primer ejemplo de un álgebra de Lie nilpotente con todas sus derivaciones nilpotentes, mostrando así que el recíproco del teorema de Jacobson [J2], el cual establece que *toda álgebra de Lie sobre un cuerpo de característica cero con una derivación no singular es nilpotente*, es falso.
Los primeros en trabajar en la estructura de este nuevo tipo de álgebras de Lie nilpotentes fueron Leger y Tôgô, probando en 1959, el siguiente resultado.

Teorema 2.4.2. *[LT]*
Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es característicamente nilpotente si y sólo si $\mathcal{D}er(\mathfrak{g})$ es nilpotente.

Definición 2.4.3.
Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión finita. Un ***toro*** T de $\mathfrak{g}$ es una subálgebra de Lie abeliana de $\mathcal{D}er(\mathfrak{g})$ la cual consiste de derivaciones semisimples. Un toro T se dice ***maximal*** si no está contenido propiamente en cualquier otro toro de $\mathfrak{g}$.

Definición 2.4.4.
Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión finita. La dimensión de cualquier toro maximal es llamado el ***rango*** de $\mathfrak{g}$.

Nota 2.4.5.
Si un álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$ tiene rango 0, entonces tenemos que $\mathfrak{g}$ es característicamente nilpotente.

El resultado más importante obtenido en esta tesis es la prueba de la conjetura Grunewal-O'Halloran para toda álgebra de Lie nilpotente de rango ≥ 1. En 1984, Carles prueba la conjetura de Vergne para este mismo tipo de álgebras de Lie y puesto que la conjetura de Grunewal-O'Halloran implica la conjetura de Vergne, tendremos una prueba alternativa a la dada por Carles en [C].

Teorema 2.4.6. *[C]*
Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie nilpotente que no es característicamente nilpotente, entonces $\mathfrak{g}$ no es rígida.

2.5 DEFORMACIONES

Definición 2.5.1.
Una ***deformación*** de un álgebra de Lie $\mu \in \mathcal{L}_n$ es una familia μ_t, con $t \in \mathbb{C}^\times$, de álgebras de Lie tal que

$$\mu_t = \mu + t\phi_1 + t^2\phi_2 + \cdots$$

donde cada ϕ_i es una forma bilineal antisimétrica sobre $\mathbb{C}^n$.

En particular, trabajaremos solamente con ***deformaciones lineales***, es decir, deformaciones de la forma

$$\mu_t = \mu + t\phi.$$

Definición 2.5.2.
Una deformación μ_t es ***trivial*** si existe una familia $g_t \in GL(n, \mathbb{C})$ tal que $g_t \cdot \mu = \mu_t$. En otro caso, decimos que la deformación es ***no trivial***.

Para $\mu \in \mathcal{L}_n$ usaremos $\sum_{cyc} \mu(\mu(x,y),z)$ para denotar

$$\mu(\mu(x,y),z) + \mu(\mu(y,z),x) + \mu(\mu(z,x),y).$$

De acá hasta el final de la sección, mencionaremos algunos resultados de Grunewald y O'Halloran que aparecen en [GO2], los cuales son fundamentales para nuestro trabajo.

Lema 2.5.3.
Sea $\mu \in \mathcal{L}_n$ un álgebra de Lie. La aplicación $\mu + t\phi$ es una deformación de μ si y sólo si ϕ es un álgebra de Lie y $\phi \in Z^2(\mu,\mu)$.

Demostración
La aplicación $\mu + t\phi$ es un álgebra de Lie si y sólo si

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{cyc} (\mu + t\phi)((\mu + t\phi)(x,y),z) \\ &= \sum_{cyc} \mu(\mu(x,y),z) + t\left[\sum_{cyc} \mu(\phi(x,y),z) + \sum_{cyc} \phi(\mu(x,y),z)\right] + t^2 \sum_{cyc} \phi(\phi(x,y),z). \end{aligned}$$

El primer sumando es 0 pues μ es álgebra de Lie, el segundo sumando es 0 ya que $\phi \in Z^2(\mu,\mu)$ y el tercer sumando es 0 por ser ϕ álgebra de Lie. ■

Nota 2.5.4.
Para $\mu \in \mathcal{L}_n$, $x \in \mathfrak{g}$ definimos el endomorfismo $\mu_x : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, de la siguiente manera

$$\mu_x(y) = \mu(x,y) \qquad \text{para todo } y \in \mathfrak{g}.$$

Lema 2.5.5.
Sea $\mu + t\phi$ una deformación de un álgebra de Lie nilpotente. Si el álgebra de Lie ϕ no es nilpotente, entonces la deformación $\mu + t\phi$ es no trivial.

Demostración
Supongamos que $\mu + t\phi$ es una deformación trivial. Como μ es un álgebra de Lie nilpotente, existe k tal que $\mu_x^k(y) = 0$ y al ser $\mu + t\phi$ trivial, existe $g_t \in GL(n,\mathbb{C})$ tal que $(\mu + t\phi)(x,y) = g_t^{-1}(\mu(g_t x, g_t y))$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$, de donde el álgebra de Lie $\mu + t\phi$ es nilpotente. Puesto que el término de orden superior de $((\mu + t\phi)_x)^k(y)$ es $t^k \phi_x^k(y)$, se sigue que el endomorfismo ϕ_x es nilpotente para todo $x \in \mathfrak{g}$, por lo tanto el álgebra de Lie ϕ es nilpotente, lo cual contradice la hipótesis. ■

Sea $\mathfrak{h}$ un ideal de codimensión 1 de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. En [D], Dixmier muestra como obtener 2-cocadenas en $C^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ a partir de 1-cocadenas en $C^1(\mathfrak{h},\mathfrak{h})$, en particular, para nuestro propósito obtendremos 2-cociclos en $Z^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ a partir de 1-cociclos en $Z^1(\mathfrak{h},\mathfrak{h})$ de la siguiente forma:
Sean $\varphi \in Z^1(\mathfrak{h},\mathfrak{h})$, $x \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$ y se define $\overline{\varphi} \in Z^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ por

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}(x,h) &= \varphi(h) \quad \text{para todo } h \in \mathfrak{h} \\ \overline{\varphi}(\mathfrak{h},\mathfrak{h}) &= 0 \end{aligned}$$

donde $\mathfrak{g} = \langle x \rangle \oplus \mathfrak{h}$.

Nota 2.5.6.
Puesto que toda álgebra de Lie soluble siempre tiene ideales de codimensión 1, siempre podremos hacer uso de la construcción anterior para este tipo de álgebras de Lie y por tanto para las álgebras de Lie nilpotentes en las cuales estamos interesados.

Lema 2.5.7.
Sea $\mathfrak{h}$ un ideal de codimensión 1 de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ con corchete de Lie μ. Si $\varphi \in Z^1(\mathfrak{h},\mathfrak{h})$, entonces $\overline{\varphi}$ es un álgebra de Lie y $\overline{\varphi} \in Z^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$. En consecuencia, $\mu + t\overline{\varphi}$ es una deformación de μ.

Demostración
Puesto que $\mathfrak{g} = \langle x \rangle \oplus \mathfrak{h}$ con $x \in \mathfrak{g}$ y $\overline{\varphi}(\mathfrak{h},\mathfrak{h}) = 0$, es suficiente verificar que

$$\begin{aligned} &\sum_{cyc} \overline{\varphi}(\overline{\varphi}(x,y),z) = 0 \qquad (\overline{\varphi} \text{ es álgebra de Lie}) \\ &\sum_{cyc} \mu(\overline{\varphi}(x,y),z) + \sum_{cyc} \overline{\varphi}(\mu(x,y),z) = 0 \qquad \left(\overline{\varphi} \in Z^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})\right) \end{aligned}$$

sobre $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \times \{x\}$. En efecto,

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} \overline{\varphi}(\overline{\varphi}(h_1,h_2),x) &= \overline{\varphi}(\overline{\varphi}(h_1,h_2),x) + \overline{\varphi}(\overline{\varphi}(h_2,x),h_1) + \overline{\varphi}(\overline{\varphi}(x,h_1),h_2) \\ &= \overline{\varphi}(0,x) - \overline{\varphi}(\varphi(h_2),h_1) + \overline{\varphi}(\varphi(h_1),h_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

de donde $\overline{\varphi}$ es álgebra de Lie.

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\mu(\overline{\varphi}(h_1,h_2),x)+\sum_{cyc}\overline{\varphi}(\mu(h_1,h_2),x) &= \mu(\overline{\varphi}(h_1,h_2),x)+\mu(\overline{\varphi}(h_2,x),h_1)+\mu(\overline{\varphi}(x,h_1),h_2)+\\ &\quad \overline{\varphi}(\mu(h_1,h_2),x)+\overline{\varphi}(\mu(h_2,x),h_1)+\overline{\varphi}(\mu(x,h_1),h_2)\\ &= \mu(0,x)-\mu(\varphi(h_2,h_1)+\mu(\varphi(h_1),h_2)-\varphi(\mu(h_1,h_2))\\ &= \mu(\varphi(h_1),h_2)+\mu(h_1,\varphi(h_2))-\varphi(\mu(h_1,h_2))\\ &= 0 \qquad (\text{pues} \quad \varphi\in Z^1(\mathfrak{h},\mathfrak{h}))\end{aligned}$$

por lo tanto $\overline{\varphi}\in Z^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$. ■

Teorema 2.5.8.
Sea $(\mathfrak{g},\mu)$ un álgebra de Lie nilpotente y sea $\mathfrak{h}$ un ideal de codimensión 1 de $\mathfrak{g}$ tal que algún elemento de $Z^1(\mathfrak{h},\mathfrak{h})=\mathcal{D}er(\mathfrak{h})$ tiene un autovalor distinto de cero, entonces $\mathfrak{g}$ tiene una deformación no trivial.

Demostración
Sea $\mathfrak{g}=\langle x\rangle\oplus\mathfrak{h}$ y sea $D\in Z^1(\mathfrak{h},\mathfrak{h})=\mathcal{D}er(\mathfrak{h})$ tal que D tiene un autovalor distinto de cero. Luego obtenemos $\overline{D}\in Z^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ donde

$$\begin{aligned}\overline{D}(x,h) &= D(h) \quad \text{para todo } h\in\mathfrak{h}\\ \overline{D}(\mathfrak{h},\mathfrak{h}) &= 0\end{aligned}$$

y definamos $\overline{D}_x\in End(\mathfrak{g})$ de la siguiente manera

$$\overline{D}_x(y)=\overline{D}(x,y) \qquad \text{para todo } y\in\mathfrak{g}.$$

Por construcción, vemos que un autovector de D es un autovector de $\overline{D}_x$ con el mismo autovalor. En efecto, si

$$D(h_0)=\alpha h_0 \qquad \text{con } \alpha\in\mathbb{C}$$

entonces

$$\overline{D}_x(h_0)=\overline{D}(x,h_0)=D(h_0)=\alpha h_0$$

Puesto que D tiene un autovalor distinto de cero entonces $\overline{D}_x$ no es nilpotente y por tanto el álgebra de Lie $\overline{D}$ no es nilpotente, luego por el Lema 2.5.5 la deformación $\mu+t\overline{D}$ es no trivial. ■

Proposición 2.5.9.
Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie nilpotente con un ideal $\mathfrak{h}$ de codimensión 1 tal que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})\nsubseteq[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]$, entonces $\mathfrak{g}$ tiene una deformación no trivial.

Demostración
Sea $h\in\mathfrak{z}(\mathfrak{g})\setminus[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]$ con $h\neq 0$ y definamos la transformación lineal $\varphi:\mathfrak{h}\longrightarrow\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ por

$$\begin{aligned}\varphi(h) &= h\\ \varphi([\mathfrak{h},\mathfrak{h}]) &= 0\end{aligned}$$

entonces $\varphi\in Z^1(\mathfrak{h},\mathfrak{h})=\mathcal{D}er(\mathfrak{h})$. En efecto, para $\tilde{h},h_1,h_2\in\mathfrak{h}$ distintos de h

$$\begin{aligned}\varphi([h_1,h_2])-[\varphi(h_1),h_2]-[h_1,\varphi(h_2)] &= 0+[0,h_2]-[h_1,0]\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi\left(\left[h,\tilde{h}\right]\right)-\left[\varphi(h),\tilde{h}\right]-\left[h,\varphi(\tilde{h})\right] &= 0+\left[h,\tilde{h}\right]-\left[h,\varphi(\tilde{h})\right]\\ &= 0 \qquad (\text{pues } h\in\mathfrak{z}(\mathfrak{g}))\end{aligned}$$

luego, como φ tiene un autovalor distinto de cero, se sigue por el teorema anterior que $\mathfrak{g}$ tiene una deformación no trivial. ■

2.6 CONJETURA DE GRUNEWALD-O'HALLORAN VS CONJETURA DE VERGNE

Antes de ver la relación entre las dos conjeturas, primero es necesario dar algunas definiciones más generales de deformación y rigidez , además de algunos resultados asociados a éstas.

Definición 2.6.1.
Si V es un espacio vectorial de dimensión n sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $\mathbb{K}((t))$ es el cuerpo cociente de series de potencias de $\mathbb{K}[[t]]$, sea $V_{\mathbb{K}((t))} = V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}((t))$. Si $\mu \in Hom(\wedge^2 V, V)$ es un álgebra de Lie sobre V, entonces μ define un álgebra de Lie sobre $V_{\mathbb{K}((t))}$ por medio de la extensión natural

$$\mu(v \otimes f, w \otimes g) = \mu(v, w) \otimes fg.$$

Si μ_t es un álgebra de Lie sobre $V_{\mathbb{K}((t))}$ tal que

$$\mu_t = \mu + t\phi_1 + t^2\phi_2 + \cdots$$

con cada $\phi_i \in Hom(\wedge^2 V_{\mathbb{K}((t))}, V_{\mathbb{K}((t))})$, entonces decimos que μ_t es una ***deformación formal*** de μ.

Definición 2.6.2.
Una deformación formal μ_t se dice ***trivial*** si existe un automorfismo de $V_{\mathbb{K}((t))}$ de la forma

$$g_t = Id + tg_1 + t^2 g_2 + \cdots$$

con $g_i \in End(V_{\mathbb{K}((t))})$ tal que $\mu_t(x, y) = g_t(\mu(g_t^{-1}x, g_t^{-1}y))$.

Definición 2.6.3.
Un álgebra de Lie $\mu \in Hom(\wedge^2 V_{\mathbb{K}((t))}, V_{\mathbb{K}((t))})$ para la cual todas sus deformaciones formales son triviales es llamada ***formalmente rígida***.

La rigidez geométrica es equivalente a la rigidez formal sobre cuerpos de característica cero. Una referencia a esto es un trabajo de Gerstenhaber y Schack [GS], en el cual tenemos los siguientes resultados:

Teorema 2.6.4. *[GS]*
Para un álgebra de Lie μ de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, se tiene que rigidez formal implica rigidez geométrica.

Teorema 2.6.5. *[GS]*
Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo de característica cero y sea μ un álgebra de Lie de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$. Supongamos que μ es geométricamente rígida y que $\mu_t = \mu + t\phi_1 + t^2\phi_2 + \cdots$ es una deformación formal de μ. Entonces μ_t es trivial y así μ es formalmente rígida.

La conjetura Grunewald-O'Halloran declara que toda álgebra de Lie nilpotente compleja es la degeneración de otra álgebra de Lie no isomorfa, mientras que la conjetura de Vergne declara que las álgebras de Lie nilpotentes complejas no son geométricamente rígidas. Recordemos que un álgebra de Lie λ se degenera a un álgebra de Lie μ si $\mu \in \overline{\mathcal{O}(\lambda)}$, de donde

$$Conjetura(1) \Rightarrow Conjetura(2)$$

Pero no son equivalentes, la equivalencia rigidez geométrica=rigidez formal no implica la equivalencia Grunewald-O'Halloran=Vergne, ya que si esto fuera así, también implicaría que toda álgebra de Lie no rígida geométricamente es la degeneración de otra álgebra de Lie no isomorfa, lo cual no es cierto y ya falla para álgebras de Lie complejas de dimensión 3 como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.6.6.
La única álgebra de Lie rígida de dimensión 3 es el álgebra de Lie simple $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Por otro lado,

tenemos que el álgebra de Lie soluble $\mathfrak{r}_2 \oplus \mathbb{C}$ donde $\mathfrak{r}_2$ es el álgebra de Lie soluble de dimensión 2, está en la cima del siguiente diagrama de Hasse de degeneraciones

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{sl}_2 \arrow[d] & & \\
\mathfrak{r}_{3,-1} \arrow[dr] & \mathfrak{r}_2 \oplus \mathbb{C} \arrow[d] & \mathfrak{r}_3 \arrow[dl] \arrow[d] \\
\mathfrak{r}_{3,\alpha} \arrow[r] & \mathfrak{n}_3 \arrow[d] & \mathfrak{r}_{3,1} \arrow[dl] \\
& \mathbb{C}^3 &
\end{tikzcd}$$

pero no es la degeneración de ninguna otra álgebra de Lie (ver [CD],[BSt]).

3 DEGENERACIONES EN DIMENSIONES BAJAS

3.1 DEFORMACIONES LINEALES Y DEGENERACIONES

Recordemos que una deformación lineal de un álgebra de Lie μ, es una familia μ_t de álgebras de Lie con $t \in \mathbb{C}^\times$, tal que

$$\mu_t = \mu + t\phi$$

donde ϕ es una forma bilineal antisimétrica sobre $\mathbb{C}^n$. Además μ_t es una deformación lineal de μ si y sólo si ϕ es álgebra de Lie y ϕ es un 2-cociclo de μ (Lema 2.5.3).

Dada una deformación lineal μ_t de μ tal que $\mu_t \in \mathcal{O}(\mu_1)$ para todo $t \in \mathbb{C}^\times$, tenemos que $\mu_1 \to_{deg} \mu$. En efecto, existe una familia $g_t \in GL(n, \mathbb{C})$ tal que $g_t^{-1} \cdot \mu_1 = \mu_t$, de donde

$$\lim_{t \mapsto 0} g_t^{-1} \cdot \mu_1 = \lim_{t \mapsto 0} \mu_t = \mu$$

y en tal caso decimos que la deformación lineal μ_t ***se corresponde con una degeneración***. Luego, para ver que $\mu_1 \to_{deg} \mu$, solamente necesitamos probar que existe una familia $g_t \in GL(n, \mathbb{C})$ tal que

$$\mu_1(g_t(x), g_t(y))) = g_t(\mu_t(x, y)), \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{C}^n. \tag{4}$$

Usaremos ahora la construcción de deformaciones lineales dada en [GO2] y a la cual hicimos mención en el capítulo anterior. Sean $\mathfrak{g} = (\mathbb{C}^n, \mu)$ un álgebra de Lie de dimensión n y $\mathfrak{h}$ un ideal de codimensión 1 de $\mathfrak{g}$ el cual posee una derivación semisimple D, además para cada $x \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$ tenemos que $\mathfrak{g} = \langle x \rangle \oplus \mathfrak{h}$. La forma bilineal μ_D definida por

$$\begin{aligned} \mu_D(x, h) &= D(h) \quad \text{para todo } h \in \mathfrak{h} \\ \mu_D(\mathfrak{h}, \mathfrak{h}) &= 0 \end{aligned}$$

es un álgebra de Lie y $\mu_D \in Z^2(\mu, \mu)$, luego

$$\mu_t = \mu + t\mu_D$$

es una deformación lineal de μ (Lema 2.5.7) y además no trivial por ser D semisimple (Teorema 2.5.8). Si μ es nilpotente entonces μ_t es siempre soluble pero no nilpotente, en particular μ_t es no trivial. La construcción anterior se puede hacer también para cualquier derivación, no necesariamente semisimple, pero tendríamos en algunos casos que μ_t es nilpotente y por tanto no se puede garantizar la no trivialidad.

3.2 CONJETURA DE GRUNEWALD-O'HALLORAN EN DIMENSIONES 5 Y 6

En dimensión $n \leq 4$ la variedad $\mathcal{L}_n$ está clasificada y todas sus degeneraciones han sido determinadas [BSt, St], así que la conjetura de Grunewald-O'Halloran se sigue por inspección. En dimensión $n = 5, 6$ se clasificaron las variedades $\mathcal{N}_5, \mathcal{N}_6$ y se determinaron las degeneraciones entre éstas [GO1, Se], en ambos casos todas las álgebras de Lie son la degeneración de una sola álgebra de Lie de la lista (en dimensión 5 tenemos el álgebra de Lie $\mathfrak{g}_5^6$ como se denota en [GO1], mientras que en dimensión 6 tenemos el álgebra de Lie 12346_E como se denota en [Se]). Puesto que la degeneración es transitiva, la conjetura se sigue en estos casos si las álgebras de Lie mencionadas anteriormente, son la degeneración de otra álgebra de Lie no isomorfa.

En efecto, en dimensión 5 tenemos el siguiente diagrama de degeneraciones

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{g}_5^6 \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\mathfrak{g}_5^3 \arrow[d] \arrow[dr] & \mathfrak{g}_5^4 \arrow[d] & \mathfrak{g}_5^5 \arrow[dl] \\
\mathfrak{g}_5^1 \arrow[ddr] & \mathfrak{g}_5^7 = \mathfrak{g}_4^1 \times \mathbb{C} \arrow[d] & \\
 & \mathfrak{g}_5^2 \arrow[d] & \\
 & \mathfrak{g}_5^8 = \mathfrak{h}_3 \times \mathbb{C}^2 \arrow[d] & \\
 & \mathbb{C}^5 &
\end{tikzcd}$$

Sea $\mathfrak{g}_5^6$ definida por

$$\mu(e_1, e_2) = e_3, \quad \mu(e_1, e_3) = e_4, \quad \mu(e_1, e_4) = e_5, \quad \mu(e_2, e_3) = e_5$$

Sea $\mathfrak{h} = \langle e_2, e_3, e_4, e_5 \rangle$ ideal de codimensión 1 and $D \in \mathcal{D}er(\mathfrak{h})$ dada por

$$D(e_2) = e_2 \quad D(e_5) = e_5$$

con lo cual, podemos construir la deformación no trivial $\mu_t = \mu + t\mu_D$ de μ

$$\begin{aligned}
&\mu_t(e_1, e_2) = e_3 + te_2, && \mu_t(e_1, e_3) = e_4, && \mu_t(e_1, e_4) = e_5, \\
&\mu_t(e_1, e_5) = te_5, && \mu_t(e_2, e_3) = e_5 &&
\end{aligned}$$

Consideremos $g_t \in GL(5, \mathbb{C})$ dada por

$$g_t = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t^5 \end{pmatrix}$$

la cual satisface $g_t^{-1} \cdot \mu_1 = \mu_t$ y así $\mu_1 \longrightarrow_{deg} \mu$.

En dimensión 6 el diagrama de degeneraciones es un poco más complicado, pero en el siguiente bosquejo se observa la parte que nos interesa.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathfrak{g}_6^1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & \mathfrak{g}_6^3 \arrow[dl] & & \mathfrak{g}_6^2 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathfrak{g}_6^4 & & \mathfrak{g}_6^7 & & \mathfrak{g}_6^6 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & \mathfrak{g}_6^{20} \arrow[d] & {} \arrow[d] & \\
 & & \mathfrak{g}_6^{26} \arrow[d] & \mathfrak{g}_6^{25} \arrow[dl] & \\
 & & \mathfrak{g}_6^{29} \arrow[d] & & \\
 & & \mathbb{C}^6 & &
\end{tikzcd}$$

Sea $\mathfrak{g}_6^1$ definida por

$$\begin{array}{lll}
\mu(e_1, e_2) = e_3, & \mu(e_1, e_3) = e_4, & \mu(e_1, e_4) = e_5, \\
\mu(e_2, e_3) = e_5, & \mu(e_2, e_5) = e_6, & \mu(e_3, e_4) = -e_6
\end{array}$$

Sea $\mathfrak{h} = \langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \rangle$ ideal de codimensión 1 and $D \in \mathcal{D}er(\mathfrak{h})$ dada por

$$D(e_2) = e_2 \quad D(e_4) = 2e_4 \quad D(e_5) = e_5 \quad D(e_6) = 2e_6$$

con lo cual, podemos construir la deformación no trivial $\mu_t = \mu + t\mu_D$ de μ

$$\begin{array}{lll}
\mu_t(e_1, e_2) = e_3 + te_2, & \mu_t(e_1, e_3) = e_4, & \mu_t(e_1, e_4) = e_5 + 2te_4, \\
\mu_t(e_1, e_5) = te_5, & \mu_t(e_1, e_6) = 2te_6, & \mu_t(e_2, e_3) = e_5, \\
\mu_t(e_2, e_5) = e_6, & \mu_t(e_3, e_4) = -e_6 &
\end{array}$$

Consideremos $g_t \in GL(6, \mathbb{C})$ dada por

$$g_t = \begin{pmatrix}
t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & t^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & t^3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & t^4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & t^5 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^7
\end{pmatrix}$$

la cual satisface $g_t^{-1} \cdot \mu_1 = \mu_t$ y así $\mu_1 \longrightarrow_{deg} \mu$.

3.3 DEGENERACIONES EN DIMENSIONES 5 Y 6

Como se menciono al inicio de este capítulo, las variedades $\mathcal{N}_5, \mathcal{N}_6$ han sido clasificadas en [GO1, Se] y se determinaron las degeneraciones entre éstas álgebras de Lie. Las álgebras que aparecen en estas clasificaciones se muestran en la siguientes tablas.

$\mathfrak{g}_5^1$	$\mu(e_1,e_2)=e_5, \quad \mu(e_3,e_4)=e_5$
$\mathfrak{g}_5^2$	$\mu(e_1,e_2)=e_4, \quad \mu(e_1,e_3)=e_5$
$\mathfrak{g}_5^3$	$\mu(e_1,e_2)=e_3, \quad \mu(e_1,e_4)=e_5, \quad \mu(e_2,e_3)=e_5$
$\mathfrak{g}_5^4$	$\mu(e_1,e_2)=e_3, \quad \mu(e_1,e_3)=e_4, \quad \mu(e_2,e_3)=e_5$
$\mathfrak{g}_5^5$	$\mu(e_1,e_2)=e_3, \quad \mu(e_1,e_3)=e_4, \quad \mu(e_1,e_4)=e_5$
$\mathfrak{g}_5^6$	$\mu(e_1,e_2)=e_3, \quad \mu(e_1,e_3)=e_4, \quad \mu(e_1,e_4)=e_5, \quad \mu(e_2,e_3)=e_5$
$\mathfrak{g}_5^7$	$\mu(e_1,e_2)=e_3, \quad \mu(e_1,e_3)=e_4$
$\mathfrak{g}_5^8$	$\mu(e_1,e_2)=e_3$

Tabla 1: Álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 5.

$\mathfrak{g}_6^1$	$\mu(e_1,e_2)=e_3, \quad \mu(e_1,e_3)=e_4, \quad \mu(e_1,e_4)=e_5, \quad \mu(e_2,e_3)=e_5, \quad \mu(e_2,e_5)=e_6,$ $\mu(e_3,e_4)=-e_6$
$\mathfrak{g}_6^2$	$\mu(e_1,e_2)=e_3, \quad \mu(e_1,e_3)=e_4, \quad \mu(e_1,e_4)=e_5, \quad \mu(e_1,e_5)=e_6, \quad \mu(e_2,e_3)=e_5,$ $\mu(e_2,e_4)=e_6$
$\mathfrak{g}_6^3$	$\mu(e_1,e_2)=e_3, \quad \mu(e_1,e_3)=e_4, \quad \mu(e_1,e_4)=e_5, \quad \mu(e_2,e_5)=e_6, \quad (e_3,e_4)=-e_6$
$\mathfrak{g}_6^4$	$\mu(e_1,e_2)=e_3, \quad \mu(e_1,e_3)=e_4, \quad \mu(e_1,e_4)=e_5, \quad \mu(e_1,e_5)=e_6, \quad \mu(e_2,e_3)=e_6$
$\mathfrak{g}_6^5$	$\mu(e_1,e_2)=e_3, \quad \mu(e_1,e_3)=e_4, \quad \mu(e_1,e_4)=e_5, \quad \mu(e_1,e_5)=e_6$
$\mathfrak{g}_6^6$	$\mu(e_1,e_2)=e_3, \quad \mu(e_1,e_3)=e_5, \quad \mu(e_1,e_5)=e_6, \quad \mu(e_2,e_4)=e_5, \quad \mu(e_3,e_4)=e_6$
$\mathfrak{g}_6^7$	$\mu(e_1,e_2)=e_3, \quad \mu(e_1,e_3)=e_4, \quad \mu(e_1,e_5)=e_6, \quad \mu(e_2,e_3)=e_5, \quad \mu(e_2,e_4)=e_6$

$\mathfrak{g}_6^8$	$\mu(e_1,e_2)=e_3,\quad \mu(e_1,e_3)=e_4,\quad \mu(e_1,e_4)=e_6,\quad \mu(e_2,e_3)=e_6,\quad \mu(e_2,e_5)=e_6$
$\mathfrak{g}_6^9$	$\mu(e_1,e_2)=e_3,\quad \mu(e_1,e_3)=e_4,\quad \mu(e_1,e_4)=e_6,\quad \mu(e_2,e_5)=e_6$
$\mathfrak{g}_6^{10}$	$\mu(e_1,e_2)=e_4,\quad \mu(e_1,e_3)=e_5,\quad \mu(e_1,e_4)=e_6,\quad \mu(e_3,e_5)=e_6$
$\mathfrak{g}_6^{11}$	$\mu(e_1,e_2)=e_4,\quad \mu(e_1,e_3)=e_5,\quad \mu(e_2,e_5)=e_6,\quad \mu(e_3,e_4)=e_6$
$\mathfrak{g}_6^{12}$	$\mu(e_1,e_2)=e_3,\quad \mu(e_1,e_3)=e_6,\quad \mu(e_4,e_5)=e_6$
$\mathfrak{g}_6^{13}$	$\mu(e_1,e_2)=e_3,\quad \mu(e_1,e_3)=e_4,\quad \mu(e_1,e_4)=e_5,\quad \mu(e_2,e_3)=e_6$
$\mathfrak{g}_6^{14}$	$\mu(e_1,e_2)=e_3,\quad \mu(e_1,e_3)=e_5,\quad \mu(e_1,e_4)=e_5,\quad \mu(e_2,e_3)=e_6$
$\mathfrak{g}_6^{15}$	$\mu(e_1,e_2)=e_3,\quad \mu(e_1,e_3)=e_5,\quad \mu(e_1,e_4)=e_6,\quad \mu(e_2,e_3)=e_6$
$\mathfrak{g}_6^{16}$	$\mu(e_1,e_2)=e_3,\quad \mu(e_1,e_3)=e_5,\quad \mu(e_1,e_4)=e_6,\quad \mu(e_2,e_4)=e_5$
$\mathfrak{g}_6^{17}$	$\mu(e_1,e_2)=e_3,\quad \mu(e_1,e_3)=e_5,\quad \mu(e_2,e_4)=e_6$
$\mathfrak{g}_6^{18}$	$\mu(e_1,e_2)=e_3,\quad \mu(e_1,e_3)=e_5,\quad \mu(e_1,e_4)=e_6$
$\mathfrak{g}_6^{19}$	$\mu(e_1,e_2)=e_5,\quad \mu(e_1,e_3)=e_6,\quad \mu(e_3,e_4)=e_5$
$\mathfrak{g}_6^{20}$	$\mu(e_1,e_2)=e_4,\quad \mu(e_1,e_3)=e_5,\quad \mu(e_2,e_3)=e_6$
$\mathfrak{g}_6^{21}$	$\mu(e_1,e_2)=e_3,\quad \mu(e_1,e_3)=e_4,\quad \mu(e_1,e_4)=e_5,\quad \mu(e_2,e_3)=e_5$
$\mathfrak{g}_6^{22}$	$\mu(e_1,e_2)=e_3,\quad \mu(e_1,e_3)=e_4,\quad \mu(e_1,e_4)=e_5$
$\mathfrak{g}_6^{23}$	$\mu(e_1,e_2)=e_3,\quad \mu(e_1,e_4)=e_5,\quad \mu(e_2,e_3)=e_5$
$\mathfrak{g}_6^{24}$	$\mu(e_1,e_2)=e_5,\quad \mu(e_2,e_4)=e_6$

$\mathfrak{g}_6^{25}$	$\mu(e_1,e_2)=e_5, \quad \mu(e_3,e_4)=e_5$
$\mathfrak{g}_6^{26}$	$\mu(e_1,e_2)=e_3, \quad \mu(e_1,e_3)=e_4, \quad \mu(e_2,e_5)=e_5$
$\mathfrak{g}_6^{27}$	$\mu(e_1,e_2)=e_3, \quad \mu(e_1,e_3)=e_4$
$\mathfrak{g}_6^{28}$	$\mu(e_1,e_2)=e_4, \quad \mu(e_1,e_3)=e_5$
$\mathfrak{g}_6^{29}$	$\mu(e_1,e_2)=e_3$

Tabla 2: Álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 6.

En [GO1, Se] se muestran los diagramas de degeneraciones de las álgebras de Lie nilpotentes en dimensiones 5 y 6, y como se observó en la sección anterior, para $\mathfrak{g}_5^6$ y 12346_E logramos encontrar un álgebra de Lie soluble que se degeneraba a cada una de estas. Lo interesante ahora, es que para las demás álgebras que aparecen en las Tablas 1 y 2, también podemos encontrar un álgebra de Lie soluble que se degenera a estas. En las siguientes tablas mostramos el ideal $\mathfrak{h}$ de codimensión 1, la derivación semisimple $D \in \mathcal{D}er(\mathfrak{h})$ que elegimos para construir la deformación lineal μ_t, y la familia $g_t \in GL(5,\mathbb{C})$ que satisface la ecuación (4).

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$	$D \in \mathcal{D}er(\mathfrak{h})$	g_t
$\mathfrak{g}_5^1$	$\langle e_2,e_3,e_4,e_5\rangle$	$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t&0&0&0&0\\0&t&0&0&0\\0&0&t&0&0\\0&0&0&t&0\\0&0&0&0&t^2 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{g}_5^2$	$\langle e_2,e_3,e_4,e_5\rangle$	$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t&0&0&0&0\\0&t&0&0&0\\0&0&t&0&0\\0&0&0&t^2&0\\0&0&0&0&t^2 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{g}_5^3$	$\langle e_2,e_3,e_4,e_5\rangle$	$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t&0&0&0&0\\0&t&0&0&0\\0&0&t^2&0&0\\0&0&0&t^2&0\\0&0&0&0&t^3 \end{pmatrix}$

$\mathfrak{g}_5^4$	$\langle e_2, e_3, e_4, e_5 \rangle$	$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t^3 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{g}_5^5$	$\langle e_2, e_3, e_4, e_5 \rangle$	$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t^4 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{g}_5^6$	$\langle e_2, e_3, e_4, e_5 \rangle$	$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t^5 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{g}_5^7$	$\langle e_2, e_3, e_4, e_5 \rangle$	$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix}$
$\mathfrak{g}_5^8$	$\langle e_2, e_3, e_4, e_5 \rangle$	$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix}$

Tabla 3: Álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 5 como degeneraciones.

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$	$D \in \mathcal{D}er(\mathfrak{h})$	g_t
$\mathfrak{g}_6^1$	$\langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \rangle$	$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^7 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{g}_6^2$	$\langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \rangle$	$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^6 \end{pmatrix}$

$\mathfrak{g}_6^3$	$\langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \rangle$	$\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^7 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{g}_6^4$	$\langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \rangle$	$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^7 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{g}_6^5$	$\langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \rangle$	$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^5 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{g}_6^6$	$\langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \rangle$	$\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^4 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{g}_6^7$	$\langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \rangle$	$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^4 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{g}_6^8$	$\langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \rangle$	$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^5 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{g}_6^9$	$\langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \rangle$	$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^4 \end{pmatrix}$

$\mathfrak{g}_6^{10}$	$\langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \rangle$	$\begin{pmatrix} 0 &&&& \\ & 1 &&& \\ && 0 && \\ &&& 0 & \\ &&&& 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^3 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{g}_6^{11}$	$\langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \rangle$	$\begin{pmatrix} 0 &&&& \\ & 1 &&& \\ && 0 && \\ &&& 1 & \\ &&&& 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^4 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{g}_6^{12}$	$\langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \rangle$	$\begin{pmatrix} 0 &&&& \\ & 0 &&& \\ && 1 && \\ &&& 0 & \\ &&&& 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^3 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{g}_6^{13}$	$\langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \rangle$	$\begin{pmatrix} 1 &&&& \\ & 0 &&& \\ && 0 && \\ &&& 0 & \\ &&&& 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^3 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{g}_6^{14}$	$\langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \rangle$	$\begin{pmatrix} 1 &&&& \\ & 0 &&& \\ && 0 && \\ &&& 0 & \\ &&&& 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^3 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{g}_6^{15}$	$\langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \rangle$	$\begin{pmatrix} 1 &&&& \\ & 0 &&& \\ && 0 && \\ &&& 0 & \\ &&&& 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^3 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{g}_6^{16}$	$\langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \rangle$	$\begin{pmatrix} 1 &&&& \\ & 0 &&& \\ && 0 && \\ &&& 1 & \\ &&&& 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^3 \end{pmatrix}$

$\mathfrak{g}_6^{17}$	$\langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\rangle$	$\begin{pmatrix} 1 &&&& \\ & 0 &&& \\ && 0 && \\ &&& 0 & \\ &&&& 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t&0&0&0&0&0 \\ 0&t&0&0&0&0 \\ 0&0&t^2&0&0&0 \\ 0&0&0&t&0&0 \\ 0&0&0&0&t^3&0 \\ 0&0&0&0&0&t^2 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{g}_6^{18}$	$\langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\rangle$	$\begin{pmatrix} 1 &&&& \\ & 0 &&& \\ && 0 && \\ &&& 0 & \\ &&&& 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t&0&0&0&0&0 \\ 0&t&0&0&0&0 \\ 0&0&t^2&0&0&0 \\ 0&0&0&t&0&0 \\ 0&0&0&0&t^3&0 \\ 0&0&0&0&0&t^2 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{g}_6^{19}$	$\langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\rangle$	$\begin{pmatrix} 0 &&&& \\ & 0 &&& \\ && 1 && \\ &&& 1 & \\ &&&& 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t&0&0&0&0&0 \\ 0&t&0&0&0&0 \\ 0&0&t&0&0&0 \\ 0&0&0&t&0&0 \\ 0&0&0&0&t^2&0 \\ 0&0&0&0&0&t^2 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{g}_6^{20}$	$\langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\rangle$	$\begin{pmatrix} 1 &&&& \\ & 0 &&& \\ && 0 && \\ &&& 0 & \\ &&&& 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t&0&0&0&0&0 \\ 0&t&0&0&0&0 \\ 0&0&t&0&0&0 \\ 0&0&0&t^2&0&0 \\ 0&0&0&0&t^2&0 \\ 0&0&0&0&0&t^2 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{g}_6^{21}$	$\langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\rangle$	$\begin{pmatrix} 1 &&&& \\ & 0 &&& \\ && 0 && \\ &&& 1 & \\ &&&& 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t&0&0&0&0&0 \\ 0&t^2&0&0&0&0 \\ 0&0&t^3&0&0&0 \\ 0&0&0&t^4&0&0 \\ 0&0&0&0&t^5&0 \\ 0&0&0&0&0&t^6 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{g}_6^{22}$	$\langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\rangle$	$\begin{pmatrix} 1 &&&& \\ & 0 &&& \\ && 0 && \\ &&& 0 & \\ &&&& 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t&0&0&0&0&0 \\ 0&t&0&0&0&0 \\ 0&0&t^2&0&0&0 \\ 0&0&0&t^3&0&0 \\ 0&0&0&0&t^4&0 \\ 0&0&0&0&0&t^5 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{g}_6^{23}$	$\langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\rangle$	$\begin{pmatrix} 0 &&&& \\ & 1 &&& \\ && 0 && \\ &&& 1 & \\ &&&& 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t&0&0&0&0&0 \\ 0&t&0&0&0&0 \\ 0&0&t^2&0&0&0 \\ 0&0&0&t^2&0&0 \\ 0&0&0&0&t^3&0 \\ 0&0&0&0&0&t^4 \end{pmatrix}$

$\mathfrak{g}_6^{24}$	$\langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \rangle$	$\begin{pmatrix} 1 &&&& \\ & 0 &&& \\ && 0 && \\ &&& 0 & \\ &&&& 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^4 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{g}_6^{25}$	$\langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \rangle$	$\begin{pmatrix} 0 &&&& \\ & 0 &&& \\ && 1 && \\ &&& 1 & \\ &&&& 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^3 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{g}_6^{26}$	$\langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \rangle$	$\begin{pmatrix} 1 &&&& \\ & 0 &&& \\ && 0 && \\ &&& 1 & \\ &&&& 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^4 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{g}_6^{27}$	$\langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \rangle$	$\begin{pmatrix} 1 &&&& \\ & 0 &&& \\ && 0 && \\ &&& 0 & \\ &&&& 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^6 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{g}_6^{28}$	$\langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \rangle$	$\begin{pmatrix} 1 &&&& \\ & 0 &&& \\ && 0 && \\ &&& 0 & \\ &&&& 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^3 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{g}_6^{29}$	$\langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \rangle$	$\begin{pmatrix} 1 &&&& \\ & 0 &&& \\ && 0 && \\ &&& 0 & \\ &&&& 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^5 \end{pmatrix}$

Tabla 4: Álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 6 como degeneraciones.

Ya que hemos podido observar que toda álgebra de Lie nilpotente de dimensión 5 y 6 es la degeneración de un álgebra de Lie soluble, vale la pena mencionar otro fenómeno que se presenta en la teoría de deformaciones y degeneraciones de álgebras de Lie. En el siguiente ejemplo mostraremos dos álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 5, no isomorfas las cuales no están relacionadas por medio de degeneraciones (es decir, ninguna de ellas se degenera a la otra), pero en el cual una se obtendrá de la otra a partir de una deformación no trivial.

Ejemplo 3.3.1.
Consideremos las álgebras de Lie nilpotentes $\mathfrak{g}_5^1$, $\mathfrak{g}_5^3$ (ver Tabla 1) y denotemos por simplicidad μ, λ sus respectivos corchetes. Sean $\mathfrak{h} = \langle e_2, e_3, e_4, e_5 \rangle$ un ideal de codimensión 1 de $\mathfrak{g}_5^1$ y

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

una derivación nilpotente de $\mathfrak{h}$. Entonces la deformación $\mu_1 = \mu + \mu_D$ resulta ser no trivial y además es un álgebra de Lie nilpotente isomorfa a λ por medio del isomorfismo

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En consecuencia, $\mathfrak{g}_5^1$ y $\mathfrak{g}_5^3$ son dos álgebras de Lie no isomorfas las cuales no están relacionadas por medio de degeneraciones, pero $\mathfrak{g}_5^3$ se obtiene a partir de una deformación no trivial de $\mathfrak{g}_5^1$.

4 CONJETURA DE GRUNEWALD-O'HALLORAN

4.1 CONJETURA DE GRUNEWALD-O'HALLORAN PARA ÁLGEBRAS DE LIE NILPOTENTES DE RANGO ≥ 1

Grunewald y O'Halloran conjeturaron en [GO2] que toda álgebra de Lie nilpotente compleja es la degeneración de otra álgebra de Lie, no isomorfa. En este capítulo se probará la conjetura para la clase de álgebras de Lie nilpotentes que admiten una derivación semisimple (rango ≥ 1), quedando abierta para la clase de álgebras de Lie característicamente nilpotentes (rango 0).

De nuevo usaremos la construcción de deformaciones lineales dada en [GO2] y a la cual hicimos mención en el Capítulo 2. Sean $\mathfrak{g} = (\mathbb{C}^n, \mu)$ un álgebra de Lie de dimensión n y $\mathfrak{h}$ un ideal de codimensión 1 de $\mathfrak{g}$ el cual posee una derivación semisimple D, además para cada $x \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$ tenemos que $\mathfrak{g} = \langle x \rangle \oplus \mathfrak{h}$. La forma bilineal μ_D definida por

$$\begin{aligned} \mu_D(x, h) &= D(h) \quad \text{para todo } h \in \mathfrak{h} \\ \mu_D(\mathfrak{h}, \mathfrak{h}) &= 0 \end{aligned}$$

es un álgebra de Lie y $\mu_D \in Z^2(\mu, \mu)$, luego

$$\mu_t = \mu + t\mu_D$$

es una deformación lineal de μ (Lema 2.5.7) y además no trivial por ser D semisimple (Teorema 2.5.8).

La siguiente proposición nos muestra que bajo ciertas hipótesis sobre la derivación D de $\mathfrak{h}$, la deformación construida anteriormente se corresponde a una degeneración.

Proposición 4.1.1.
Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie nilpotente con un ideal $\mathfrak{h}$ de codimensión 1 que admite una derivación semisimple y no trivial D. Si D es la restricción de una derivación semisimple $\tilde{D}$ de $\mathfrak{g}$ tal que ésta es no trivial sobre un complemento $\tilde{D}$-invariante de $\mathfrak{h}$, entonces $\mathfrak{g}$ es la degeneración de otra álgebra de Lie no isomorfa. Además la degeneración puede realizarse vía un subgrupo 1-paramétrico.

Demostración
Denotemos por μ el producto de Lie de $\mathfrak{g}$. Sean x un autovector de $\tilde{D}$ complementario a $\mathfrak{h}$ y $\lambda_0 \neq 0$ su autovalor. Podemos asumir que $\lambda_0 = 1$ (considerando $\tilde{D}/\lambda_0$ y D/λ_0 en lugar de $\tilde{D}$ y D). Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ los diferentes autovalores de D y sea $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{h}_{\lambda_k}$ la correspondiente descomposición graduada de $\mathfrak{h}$, es decir, $\mu(\mathfrak{h}_{\lambda_i}, \mathfrak{h}_{\lambda_j}) \subseteq \mathfrak{h}_{\lambda_i+\lambda_j}$. Luego,

$$\mathfrak{g} = (\langle x \rangle \oplus \mathfrak{h}, \mu)$$

donde ambos sumandos de $\mathfrak{g}$ son $\tilde{D}$-invariantes y $\mu(x, \mathfrak{h}_{\lambda_j}) \subseteq \mathfrak{h}_{1+\lambda_j}$.
Sea $\mu_t = \mu + t\mu_D$ la deformación lineal construida como en la sección 3.1, la cual es dada por

$$\begin{aligned} \mu_t(x, y_j) &= \mu(x, y_j) + t\lambda_j y_j \quad \text{si } y_j \in \mathfrak{h}_{\lambda_j}, \text{ para } 1 \le j \le k \\ \mu_t(y_i, y_j) &= \mu(y_i, y_j) \qquad\qquad \text{si } y_i \in \mathfrak{h}_{\lambda_i} \text{ e } y_j \in \mathfrak{h}_{\lambda_j}, \text{ para } 1 \le i, j \le k. \end{aligned}$$

Sea $g_t \in GL(n, \mathbb{C})$, donde $n = \dim \mathfrak{g}$, definida por

$$g_t|_{\langle x \rangle} = tI \qquad \text{y} \qquad g_t|_{\mathfrak{h}_{\lambda_i}} = t^{\lambda_i} I, \quad \text{for } i = 1 \dots k$$

No es difícil verificar que la ecuación (4) se satisface. En efecto, si $y_i \in \mathfrak{h}_{\lambda_i}$ e $y_j \in \mathfrak{h}_{\lambda_j}$ para $1 \le i, j \le k$, entonces

$$\begin{aligned} g_t(\mu_t(x, y_j)) &= g_t\left(\mu(x, y_j) + \lambda_j t y_j\right) = t^{1+\lambda_j} \mu(x, y_j) + \lambda_j t^{\lambda_j + 1} y_j \\ \mu_1(g_t(x), g_t(y_j)) &= \mu_1(tx, t^{\lambda_j} y_j) = t^{1+\lambda_j} \mu(x, y_j) + \lambda_j t^{\lambda_j+1} y_j \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} g_t(\mu_t(y_i, y_j)) &= g_t(\mu(y_i, y_j)) = t^{\lambda_i + \lambda_j} \mu(y_i, y_j) \\ \mu_1(g_t(y_i), g_t(y_j)) &= \mu_1(t^{\lambda_i} y_i, t^{\lambda_j} y_j) = t^{\lambda_i + \lambda_j} \mu(y_i, y_j). \end{aligned}$$

Por lo tanto, al ser μ_1 soluble, μ es la degeneración de otra álgebra de Lie no isomorfa. ∎

Usaremos la proposición anterior para probar el teorema más importante de éste trabajo.

Teorema 4.1.2.
Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie nilpotente compleja con una derivación semisimple y no trivial, entonces $\mathfrak{g}$ es la degeneración de otra álgebra de Lie no isomorfa.

Demostración
Sea D la derivación semisimple de $\mathfrak{g}$. Sean V un complemento D-invariante del ideal $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ y $\{x_1, \dots, x_r\}$ una base de V formada por autovectores de D. Puesto que V genera a $\mathfrak{g}$ como un álgebra de Lie (ver [J1], pag. 29) y D es no trivial sobre $\mathfrak{g}$, entonces D es no trivial sobre V. Así podemos asumir que x_1 es un autovector con autovalor distinto de cero. Sea

$$\mathfrak{h} = \{x_2, \dots, x_r\} \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$$

entonces
• $\mathfrak{h}$ es un ideal de codimensión 1 de $\mathfrak{g}$.
• $D|_{\mathfrak{h}}$ es semisimple.
• D es no trivial sobre $\{x_1\}$.
luego por la proposición anterior, $\mathfrak{g}$ es la degeneración de otra álgebra de Lie no isomorfa. ∎

Nota 4.1.3.
Por el teorema anterior tenemos que la conjetura de Grunewald-O'Halloran es cierta para toda álgebra de Lie nilpotente de rango ≥ 1.

4.2 ÁLGEBRAS DE LIE CARACTERÍSTICAMENTE NILPOTENTES DE DIMENSIÓN 7

Para las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 7 se encuentran varias clasificaciones, de las cuales algunas han sido incompletas o contienen algún tipo de error. En esta tesis se hará uso de la clasificación dada por Magnin [M] en 2010, la cual es la más reciente.

$\mathfrak{g}_{7,0.1}$	$\mu(e_1,e_2)=e_3,\quad \mu(e_1,e_3)=e_4,\quad \mu(e_1,e_4)=e_5,$ $\mu(e_1,e_5)=e_6,\quad \mu(e_1,e_6)=e_7,\quad \mu(e_2,e_3)=e_6,$ $\mu(e_2,e_4)=e_7,\quad \mu(e_2,e_5)=e_7,\quad \mu(e_3,e_4)=-e_7$
$\mathfrak{g}_{7,0.2}$	$\mu(e_1,e_2)=e_3,\quad \mu(e_1,e_3)=e_4,\quad \mu(e_1,e_4)=e_5,$ $\mu(e_1,e_5)=e_6,\quad \mu(e_1,e_6)=e_7,\quad \mu(e_2,e_3)=e_5+e_7,$ $\mu(e_2,e_4)=e_6,\quad \mu(e_2,e_5)=e_7$
$\mathfrak{g}_{7,0.3}$	$\mu(e_1,e_2)=e_3,\quad \mu(e_1,e_3)=e_4,\quad \mu(e_1,e_4)=e_5,$ $\mu(e_1,e_5)=e_6,\quad \mu(e_1,e_6)=e_7,\quad \mu(e_2,e_3)=e_6+e_7,$ $\mu(e_2,e_4)=e_7$
$\mathfrak{g}_{7,0.4(\lambda)}$	$\mu(e_1,e_2)=e_3,\quad \mu(e_1,e_3)=e_4,\quad \mu(e_1,e_4)=e_6+\lambda e_7,$ $\mu(e_1,e_5)=e_7,\quad \mu(e_1,e_6)=e_7,\quad \mu(e_2,e_3)=e_5,$ $\mu(e_2,e_4)=e_7,\quad \mu(e_2,e_5)=e_6,\quad \mu(e_3,e_5)=e_7$
$\mathfrak{g}_{7,0.5}$	$\mu(e_1,e_2)=e_3,\quad \mu(e_1,e_3)=e_4,\quad \mu(e_1,e_4)=e_6+e_7,$ $\mu(e_1,e_6)=e_7,\quad \mu(e_2,e_3)=e_5,\quad \mu(e_2,e_5)=e_6,$ $\mu(e_3,e_5)=e_7$
$\mathfrak{g}_{7,0.6}$	$\mu(e_1,e_2)=e_3,\quad \mu(e_1,e_3)=e_4,\quad \mu(e_1,e_4)=e_7,$ $\mu(e_1,e_5)=e_6,\quad \mu(e_1,e_6)=e_7,\quad \mu(e_2,e_3)=e_5,$ $\mu(e_2,e_4)=e_6,\quad \mu(e_2,e_5)=e_7,\quad \mu(e_3,e_4)=e_7$
$\mathfrak{g}_{7,0.7}$	$\mu(e_1,e_2)=e_3,\quad \mu(e_1,e_3)=e_4,\quad \mu(e_1,e_4)=e_7,$ $\mu(e_1,e_5)=e_7,\quad \mu(e_1,e_6)=e_7,\quad \mu(e_2,e_3)=e_5,$ $\mu(e_2,e_4)=e_7,\quad \mu(e_2,e_5)=e_6,\quad \mu(e_3,e_5)=e_7$
$\mathfrak{g}_{7,0.8}$	$\mu(e_1,e_2)=e_4,\quad \mu(e_1,e_3)=e_7,\quad \mu(e_1,e_4)=e_5,$ $\mu(e_1,e_5)=e_6,\quad \mu(e_2,e_3)=e_6,\quad \mu(e_2,e_4)=e_6,$ $\mu(e_2,e_6)=e_7,\quad \mu(e_4,e_5)=-e_7$

Tabla 5: Álgebras de Lie característicamente nilpotentes de dimensión 7

4.3 CONJETURA DE GRUNEWALD-O'HALLORAN EN DIMENSIÓN ≤ 7

La variedad $\mathcal{N}_7$ de todas las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 7 tiene dos componentes irreducibles, cada una de las cuales es la clausura de las órbitas de dos familias μ^1_α y μ^2_α con $\alpha \in \mathbb{C}$ [ABG1][Main Theorem]. La primer familia consta de álgebras de Lie nilpotentes de rango ≥ 1, mientras que la segunda está constituida de álgebras de Lie característicamente nilpotentes. Por el Teorema 4.1.2 y al ser la degeneración transitiva, para probar la conjetura de Grunewal-O'Halloran en dimensión 7, es suficiente hallar para cada álgebra de Lie de la segunda familia un álgebra de Lie no isomorfa que se degenere a ésta. Haremos esto, pero haciendo uso de la clasificación dada por Magnin [M] y construyendo para cada álgebra de Lie característicamente nilpotente que aparece en dicha clasificación, otra álgebra de Lie no isomorfa que se degenere a ésta.

Teorema 4.3.1.
Toda álgebra de Lie nilpotente compleja de dimensión ≤ 7, es la degeneración de otra álgebra de Lie no isomorfa.

Demostración
Puesto que todas las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión < 7 tienen una derivación semisimple, entonces por el Teorema 4.1.2, el resultado se sigue.

En dimensión 7 dividimos las álgebras de Lie en dos clases, las de rango ≥ 1 y las de rango 0 (característicamente nilpotentes), para la primera clase el resultado se sigue del Teorema 4.1.2. En la segunda clase aparece una familia continua y otras siete álgebras de Lie aisladas:

$$\mathfrak{g}_{7,0.1} \quad \mathfrak{g}_{7,0.2} \quad \mathfrak{g}_{7,0.3} \quad \mathfrak{g}_{7,0.4(\lambda)} \quad \mathfrak{g}_{7,0.5} \quad \mathfrak{g}_{7,0.6} \quad \mathfrak{g}_{7,0.7} \quad \mathfrak{g}_{7,0.8}$$

Empecemos considerando la familia $\mathfrak{g}_{7,0.4(\lambda)}$, la cual es definida por

$$\begin{aligned}
&\mu(e_1,e_2) = e_3, && \mu(e_1,e_3) = e_4, && \mu(e_1,e_4) = e_6 + \lambda e_7,\\
&\mu(e_1,e_5) = e_7, && \mu(e_1,e_6) = e_7, && \mu(e_2,e_3) = e_5,\\
&\mu(e_2,e_4) = e_7, && \mu(e_2,e_5) = e_6, && \mu(e_3,e_5) = e_7.
\end{aligned}$$

Tomemos el ideal $\mathfrak{h} = \langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\rangle$ de codimensión 1 y $D \in \mathcal{D}er(\mathfrak{h})$ definida por

$$D(e_2) = e_2 \quad D(e_5) = e_5 \quad D(e_6) = 2e_6, \quad D(e_7) = e_7$$

El correspondiente 2-cociclo μ_D es dado por

$$\mu_D(e_1,e_2) = e_2, \quad \mu_D(e_1,e_5) = e_5, \quad \mu_D(e_1,e_6) = 2e_6, \quad \mu_D(e_1,e_7) = e_7$$

y la correspondiente deformación $\mu_t = \mu + t\mu_D$ de μ es

$$\begin{aligned}
&\mu_t(e_1,e_2) = e_3 + te_2, && \mu_t(e_1,e_3) = e_4, && \mu_t(e_1,e_4) = e_6 + \lambda e_7,\\
&\mu_t(e_1,e_5) = e_7 + te_5, && \mu_t(e_1,e_6) = e_7 + 2te_6, && \mu_t(e_1,e_7) = te_7,\\
&\mu_t(e_2,e_3) = e_5, && \mu_t(e_2,e_4) = e_7, && \mu_t(e_2,e_5) = e_6,\\
&\mu_t(e_3,e_5) = e_7.
\end{aligned}$$

Consideremos ahora $g_t = g_t(\lambda) \in GL(7,\mathbb{C})$ dada por

$$g_t = \begin{pmatrix}
t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & t^2 & 0 & 0 & 0\\
\frac{1}{4}\left(\frac{t^2-1}{t}\right) & \left(1-\lambda+\frac{\lambda}{t}-\frac{1}{t^2}\right) & 0 & 0 & t & 0 & 0\\
0 & 0 & \frac{1}{4}\left(\frac{1-t^2}{t}\right) & \frac{1}{2}\left(1-t^2\right) & 0 & t & 0\\
0 & 0 & \left(t-\lambda t+\lambda-\frac{1}{t}\right) & \left(\frac{1}{2}t^2-\lambda t^2+\lambda t-\frac{1}{2}\right) & \left(\lambda t-t-\lambda+\frac{1}{t}\right) & 0 & t^2
\end{pmatrix}$$

el siguiente cálculo muestra que $g_t^{-1} \cdot \mu_1 = \mu_t$ y así $\mu_1 \longrightarrow_{deg} \mu$.

- $$\begin{aligned}
g_t\mu_t(e_1,e_2) &= g_t(e_3 + te_2)\\
&= te_3 + \frac{1}{4}\left(\frac{1-t^2}{t}\right)e_6 + \left(t-\lambda t+\lambda-\frac{1}{t}\right)e_7 + te_2 + t\left(1-\lambda+\frac{\lambda}{t}-\frac{1}{t^2}\right)e_5\\
&= te_2 + te_3 + \left(t-\lambda t+\lambda-\frac{1}{t}\right)e_5 + \frac{1}{4}\left(\frac{1-t^2}{t}\right)e_6 + \left(t-\lambda t+\lambda-\frac{1}{t}\right)e_7\\
\mu_1(g_te_1, g_te_2) &= \mu_1\left(te_1 + \frac{1}{4}\left(\frac{t^2-1}{t}\right)e_5, e_2 + \left(1-\lambda+\frac{\lambda}{t}-\frac{1}{t^2}\right)e_5\right)\\
&= t(e_3+e_2) + t\left(1-\lambda+\frac{\lambda}{t}-\frac{1}{t^2}\right)(e_7+e_5) - \frac{1}{4}\left(\frac{t^2-1}{t}\right)e_6\\
&= te_2 + te_3 + \left(t-\lambda t+\lambda-\frac{1}{t}\right)e_5 + \frac{1}{4}\left(\frac{1-t^2}{t}\right)e_6 + \left(t-\lambda t+\lambda-\frac{1}{t}\right)e_7
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} g_t\mu_t(e_1,e_3) &= g_t e_4 \\ &= t^2e_4 + \frac{1}{2}(1-t^2)e_6 + \left(\frac{1}{2}t^2 - \lambda t^2 + \lambda t - \frac{1}{2}\right)e_7 \\ \mu_1(g_te_1,g_te_3) &= \mu_1\left(te_1 + \frac{1}{4}\left(\frac{t^2-1}{t}\right)e_5, te_3 + \frac{1}{4}\left(\frac{1-t^2}{t}\right)e_6 + \left(t - \lambda t + \lambda - \frac{1}{t}\right)e_7\right) \\ &= t^2e_4 + \frac{1}{4}t\left(\frac{1-t^2}{t}\right)(e_7+2e_6) + t\left(t-\lambda t+\lambda - \frac{1}{t}\right)e_7 - \frac{1}{4}(t^2-1)e_7 \\ &= t^2e_4 + \frac{1}{4}(1-t^2)e_6 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}t^2 + t^2 - \lambda t^2 + \lambda t - 1 - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}\right)e_7 \\ &= t^2e_4 + \frac{1}{4}(1-t^2)e_6 + \left(\frac{1}{2}t^2 - \lambda t^2 + \lambda t - \frac{1}{2}\right)e_7 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} g_t\mu_t(e_1,e_4) &= g_t(e_6+\lambda e_7) \\ &= te_6 + \lambda t^2 e_7 \\ \mu_1(g_te_1,g_te_4) &= \mu_1\left(te_1 + \frac{1}{4}\left(\frac{t^2-1}{t}\right)e_5, t^2e_4 + \frac{1}{2}(1-t^2)e_6 + \left(\frac{1}{2}t^2 - \lambda t^2 + \lambda t - \frac{1}{2}\right)e_7\right) \\ &= t^3(e_6+\lambda e_7) + \frac{1}{2}t(1-t^2)(e_7+2e_6) + t\left(\frac{1}{2}t^2 - \lambda t^2 + \lambda t - \frac{1}{2}\right)e_7 \\ &= (t^3 + t - t^3)e_6 + \left(\lambda t^3 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}t^3 - \lambda t^3 + \lambda t^2 - \frac{1}{2}t\right)e_7 \\ &= te_6 + \lambda t^2 e_7 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} g_t\mu_t(e_1,e_5) &= g_t(e_7+te_5) \\ &= t^2e_7 + t^2e_5 + t\left(\lambda t - t - \lambda + \frac{1}{t}\right)e_7 \\ &= t^2e_5 + (\lambda t^2 - \lambda t + 1)e_7 \\ \mu_1(g_te_1,g_te_5) &= \mu_1\left(te_1 + \frac{1}{4}\left(\frac{t^2-1}{t}\right)e_5, te_5 + \left(\lambda t - t - \lambda + \frac{1}{t}\right)e_7\right) \\ &= t^2(e_7+e_5) + t\left(\lambda t - t - \lambda + \frac{1}{t}\right)e_7 \\ &= t^2e_5 + (t^2 + \lambda t^2 - t^2 - \lambda t + 1)e_7 \\ &= t^2e_5 + (\lambda t^2 - \lambda t + 1)e_7 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} g_t\mu_t(e_1,e_6) &= g_t(e_7+2te_6) \\ &= t^2e_7 + 2t^2e_6 \\ \mu_1(g_te_1,g_te_6) &= \mu_1\left(te_1 + \frac{1}{4}\left(\frac{t^2-1}{t}\right)e_5, te_6\right) \\ &= t^2(e_7+2e_6) \\ &= t^2e_7 + 2t^2e_6 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} g_t\mu_t(e_1,e_7) &= g_t(te_7) \\ &= t^3e_7 \\ \mu_1(g_te_1,g_te_7) &= \mu_1\left(te_1 + \frac{1}{4}\left(\frac{t^2-1}{t}\right)e_5, t^2e_7\right) \\ &= t^3e_7 \end{aligned}$$

$$\bullet\ g_t\mu_t(e_2,e_3) = g_te_5$$
$$= te_5 + \left(\lambda t - t - \lambda + \frac{1}{t}\right)e_7$$
$$\mu_1(g_te_2, g_te_3) = \mu_1\left(e_2 + \left(1-\lambda+\frac{\lambda}{t}-\frac{1}{t^2}\right)e_5, te_3 + \frac{1}{4}\left(\frac{1-t^2}{t}\right)e_6 + \left(t-\lambda t+\lambda-\frac{1}{t}\right)e_7\right)$$
$$= te_5 - t\left(1-\lambda+\frac{\lambda}{t}-\frac{1}{t^2}\right)e_7$$
$$= te_5 + \left(\lambda t - t - \lambda + \frac{1}{t}\right)e_7$$

$$\bullet\ g_t\mu_t(e_2,e_4) = g_te_7$$
$$= t^2e_7$$
$$\mu_1(g_te_2, g_te_4) = \mu_1\left(e_2 + \left(1-\lambda+\frac{\lambda}{t}-\frac{1}{t^2}\right)e_5, t^2e_4 + \frac{1}{4}(1-t^2)e_6 + \left(\frac{1}{2}t^2 - t + \lambda + \frac{1}{t}\right)e_7\right)$$
$$= t^2e_7$$

$$\bullet\ g_t\mu_t(e_2,e_5) = g_te_6$$
$$= te_6$$
$$\mu_1(g_te_2, g_te_5) = \mu_1\left(e_2 + \left(1-\lambda+\frac{\lambda}{t}-\frac{1}{t^2}\right)e_5, te_5 + \left(\lambda t - t - \lambda + \frac{1}{t}\right)e_7\right)$$
$$= te_6$$

$$\bullet\ g_t\mu_t(e_3,e_5) = g_te_7$$
$$= t^2e_7$$
$$\mu_1(g_te_3, g_te_5) = \mu_1\left(te_3 + \frac{1}{4}\left(\frac{1-t^2}{t}\right)e_6 + \left(t-\lambda t+\lambda-\frac{1}{t}\right)e_7, te_5 + \left(\lambda t - t - \lambda + \frac{1}{t}\right)e_7\right)$$
$$= t^2e_7$$

Para las otras 7 álgebras de Lie μ, daremos en la siguiente tabla, el ideal $\mathfrak{h}$ de codimensión 1, la derivación semisimple $D \in \mathcal{D}er(\mathfrak{h})$ que elegimos para construir la deformación lineal μ_t, y la familia $g_t \in GL(7,\mathbb{C})$ que satisface $g_t^{-1}\cdot\mu_1 = \mu_t$, lo cual no es difícil de verificar. Por lo tanto $\mu_1 \longrightarrow_{deg} \mu$ y la prueba queda completa.

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$	$D \in \mathcal{D}er(\mathfrak{h})$	g_t
$\mathfrak{g}_{7,0.1}$	$\langle e_1,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7\rangle$	$\begin{pmatrix} 1 &&&&& \\ & 3 &&&& \\ && 4 &&& \\ &&& 5 && \\ &&&& 6 & \\ &&&&& 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{t-1}{t}\right) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6}\left(\frac{3t^2-5t+2}{t}\right) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\left(\frac{1-t}{t}\right) & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\left(\frac{1-t}{t}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{1-t}{t}\right) & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{g}_{7,0.2}$	$\langle e_1,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7\rangle$	$\begin{pmatrix} 1 &&&&& \\ & 0 &&&& \\ && 1 &&& \\ &&& 2 && \\ &&&& 3 & \\ &&&&& 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8}\left(\frac{4t-3t^2-1}{t}\right) & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8}\left(\frac{t^2-1}{t^2}\right) & 0 & \frac{1}{2}(1-t) & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-t) & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8}\left(\frac{1-t^2}{t}\right) & 0 & \frac{1}{2}(1-t) & 0 & t \end{pmatrix}$

$\mathfrak{g}_{7,0.3}$	$\langle e_1, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 \rangle$	$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 3 & \\ & & & & & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4}\left(\frac{t-1}{t}\right) & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(1-t) & 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(1-t) & 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}(1-t) & \frac{1}{3}(1-t) & 0 & 0 & t \end{pmatrix}$
$\mathfrak{g}_{7,0.5}$	$\langle e_1, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 \rangle$	$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 3 & & \\ & & & & 2 & \\ & & & & -1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\left(\frac{t^2-1}{t}\right) & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6}\left(\frac{t^2-1}{t^2}\right) & 0 & \frac{1}{3}\left(\frac{1-t^2}{t}\right) & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}\left(\frac{t^2-1}{t}\right) & 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\left(\frac{t^2-1}{t}\right) & 0 & \frac{5}{6}(t^2-1) & 0 & t \end{pmatrix}$
$\mathfrak{g}_{7,0.6}$	$\langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 \rangle$	$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 3 & \\ & & & & & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{1-t^2}{t^2}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{1-t^2}{t}\right) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{1-t^2}{t}\right) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{1-t^2}{t}\right) & \frac{3}{2}(1-t^2) & \frac{1}{2}\left(\frac{t^2-1}{t}\right) & 0 & t \end{pmatrix}$
$\mathfrak{g}_{7,0.7}$	$\langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 \rangle$	$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 2 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (t-1) & 0 & 0 & t^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & (1-t) & (1-t)t & 0 & 0 & t^2 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{g}_{7,0.8}$	$\langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 \rangle$	$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-t^2) & t^3 & t(t^2-1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}t^2(1-t) & t(1-t^2) & t^2(1-t^2) & 0 & t^3 \end{pmatrix}$

Tabla 6: Álgebras de Lie característicamente nilpotentes de dimensión 7 como degeneraciones.

■

4.4 ÁLGEBRA DE LIE DE DIXMIER-LISTER

Tratando de aportar un poco más de evidencia para la conjetura de Grunewald-O'Halloran en el caso de las álgebras de Lie característicamente nilpotentes, se estudia un álgebra de Lie muy especial, pues es el primer ejemplo de un álgebra de Lie característicamente nilpotente. Esta es un álgebra de Lie nilpotente de dimensión 8 que fue dada en 1957 por Dixmier y Lister en [DL].

Ejemplo 4.4.1.
Consideremos μ el álgebra de Lie de Dixmier-Lister de dimensión 8, definida por

$$\begin{array}{lll} \mu(e_1, e_2) = e_5, & \mu(e_1, e_3) = e_6, & \mu(e_1, e_4) = e_7, \\ \mu(e_1, e_5) = -e_8, & \mu(e_2, e_3) = e_8, & \mu(e_2, e_4) = e_6, \\ \mu(e_2, e_6) = -e_7, & \mu(e_3, e_4) = -e_5, & \mu(e_3, e_5) = -e_7, \\ \mu(e_4, e_6) = -e_8. & & \end{array}$$

Tomemos el ideal $\mathfrak{h} = \langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8 \rangle$ de codimensión 1 y $D \in \mathcal{D}er(\mathfrak{h})$ dada por

$$D = \begin{pmatrix} 2&0&0&0&0&0&0\\ 0&2&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&3&0&0&0\\ 0&0&0&0&3&0&0\\ 0&0&0&0&0&5&0\\ 0&0&0&0&0&0&4 \end{pmatrix}$$

luego, se utiliza esta derivación para construir la deformación no trivial $\mu_t = \mu + t\mu_D$ de μ

$$\begin{aligned} &\mu(e_1,e_2) = e_5 + 2te_2, && \mu(e_1,e_3) = e_6 + 2te_3, && \mu(e_1,e_4) = e_7 + te_4,\\ &\mu(e_1,e_5) = -e_8 + 3te_5, && \mu(e_1,e_7) = 5te_7, && \mu(e_1,e_8) = 4te_8,\\ &\mu(e_2,e_3) = e_8, && \mu(e_2,e_4) = e_6, && \mu(e_2,e_6) = -e_7,\\ &\mu(e_3,e_4) = -e_5, && \mu(e_3,e_5) = -e_7, && \mu(e_4,e_6) = -e_8. \end{aligned}$$

Consideremos ahora $g_t \in GL(8,\mathbb{C})$ dada por

$$g_t = \begin{pmatrix} t&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&-t^2&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&t^2&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&t&0&0&0&0\\ 0&2t^2&0&0&t^3&0&0&0\\ 0&0&-2t^2&0&0&-t^3&0&0\\ 0&0&0&\frac{1}{4}t(t^3-1)&0&0&t^5&0\\ 0&2t^2&0&0&2t^3&0&0&t^4 \end{pmatrix}$$

que satisface $g_t^{-1} \cdot \mu_1 = \mu_t$ y así $\mu_1 \longrightarrow_{deg} \mu$. Por tanto, el álgebra de Lie de Dixmier-Lister es la degeneración de otra álgebra de Lie no isomorfa.

5 ÁLGEBRAS DE LIE FILIFORMES

5.1 ÁLGEBRAS DE LIE FILIFORMES

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie nilpotente compleja de dimensión n y sea $x \in \mathfrak{g} \setminus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ un vector de $\mathfrak{g}$, el cual no pertenece a la subálgebra derivada. Consideremos la sucesión ordenada

$$c(x) = (h_1, h_2, \dots, h_p)$$

con $h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_p$ y donde h_i es la dimensión del i-ésimo bloque de Jordan del operador nilpotente $\mathrm{ad}x$. Además ordenamos éstas sucesiones con el orden lexicográfico e introducimos la siguiente definición.

Definición 5.1.1.
La ***sucesión característica*** de un álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$ se define por

$$c(\mathfrak{g}) = \sup\{c(x) : x \in \mathfrak{g} \setminus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\}.$$

Este es un invariante de $\mathfrak{g}$, el cual fue introducida por Anchochea y Goze en [ABG3].

Definición 5.1.2.
Un álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$ de dimensión n es llamada ***filiforme*** si la sucesión característica es $c(\mathfrak{g}) = (n-1, 1)$.

Ejemplo 5.1.3.
(1) Consideremos el álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$ de dimensión 4 definida por

$$[e_1, e_2] = e_3 \quad [e_1, e_3] = e_4$$

entonces

$$J_{\mathrm{ad}e_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

luego $c(\mathfrak{g}) = (3, 1)$ y así $\mathfrak{g}$ es filiforme.

(2) Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie nilpotente de dimensión 5 definida por

$$[e_1, e_2] = e_3 \quad [e_1, e_3] = e_4 \quad [e_1, e_4] = e_5 \quad [e_2, e_3] = e_5$$

entonces

$$J_{ade_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

luego $c(\mathfrak{g}) = (4, 1)$ y así $\mathfrak{g}$ es filiforme.

5.2 ÁLGEBRAS DE LIE FILIFORMES DE DIMENSIÓN 8

Las álgebras de Lie filiformes de dimensión 8 han sido clasificadas por Ancochea y Goze en [ABG2]. En dicha clasificación se presentan seis familias indexadas por un parámetro $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\mu_8^{6,\alpha}, \quad \mu_8^{7,\alpha}, \quad \mu_8^{9,\alpha}, \quad \mu_8^{10,\alpha}, \quad \mu_8^{13,\alpha}, \quad \mu_8^{14,\alpha}$$

y otras 14 álgebras aisladas

$$\mu_8^1, \quad \mu_8^2, \quad \mu_8^3, \quad \mu_8^4, \quad \mu_8^5, \quad \mu_8^8, \quad \mu_8^{11}, \quad \mu_8^{12}, \quad \mu_8^{15}, \quad \mu_8^{16}, \quad \mu_8^{17}, \quad \mu_8^{18}, \quad \mu_8^{19}, \quad \mu_8^{20}$$

las cuales están definidas por los corchetes que se muestran en la siguiente tabla.

μ	
μ_8^1	$\mu_8^1(x_1, x_i) = x_{i-1}$ para $3 \leq i \leq 8$, $\mu_8^1(x_4, x_7) = x_2$, $\mu_8^1(x_4, x_8) = x_2 + x_3$, $\mu_8^1(x_5, x_6) = -x_2$, $\mu_8^1(x_5, x_7) = -\frac{2}{5}x_2$, $\mu_8^1(x_5, x_8) = x_4 + \frac{3}{5}x_3$, $\mu_8^1(x_6, x_7) = -\frac{2}{5}x_3$, $\mu_8^1(x_6, x_8) = x_5 + \frac{1}{5}x_4$, $\mu_8^1(x_7, x_8) = x_6 + \frac{1}{5}x_5$
μ_8^2	$\mu_8^2(x_1, x_i) = x_{i-1}$ para $3 \leq i \leq 8$, $\mu_8^2(x_4, x_7) = x_2$, $\mu_8^2(x_4, x_8) = x_3$, $\mu_8^2(x_5, x_6) = -x_2$, $\mu_8^2(x_5, x_8) = x_4$, $\mu_8^2(x_6, x_7) = x_2$, $\mu_8^2(x_6, x_8) = x_2 + x_3 + x_5$, $\mu_8^2(x_7, x_8) = x_3 + x_4 + x_6$
μ_8^3	$\mu_8^3(x_1, x_i) = x_{i-1}$ para $3 \leq i \leq 8$, $\mu_8^3(x_4, x_7) = x_2$, $\mu_8^3(x_4, x_8) = x_3$, $\mu_8^3(x_5, x_6) = -x_2$, $\mu_8^3(x_5, x_8) = x_4$, $\mu_8^3(x_6, x_8) = x_2 + x_5$, $\mu_8^3(x_7, x_8) = x_3 + x_6$
μ_8^4	$\mu_8^4(x_1, x_i) = x_{i-1}$ para $3 \leq i \leq 8$, $\mu_8^4(x_4, x_7) = x_2$, $\mu_8^4(x_4, x_8) = x_3$, $\mu_8^4(x_5, x_6) = -x_2$, $\mu_8^4(x_5, x_8) = x_4$, $\mu_8^4(x_6, x_7) = x_2$, $\mu_8^4(x_6, x_8) = x_3 + x_5$, $\mu_8^4(x_7, x_8) = x_4 + x_6$
μ_8^5	$\mu_8^5(x_1, x_i) = x_{i-1}$ para $3 \leq i \leq 8$, $\mu_8^5(x_4, x_7) = x_2$, $\mu_8^5(x_5, x_6) = -x_2$, $\mu_8^5(x_i, x_8) = x_{i-1}$ para $4 \leq i \leq 7$
$\mu_8^{6,\alpha}$	$\mu_8^{6,\alpha}(x_1, x_i) = x_{i-1}$ para $3 \leq i \leq 8$, $\mu_8^{6,\alpha}(x_4, x_8) = \alpha x_2$, $\mu_8^{6,\alpha}(x_5, x_7) = x_2$, $\mu_8^{6,\alpha}(x_5, x_8) = (1 + \alpha)x_3 + x_2$, $\mu_8^{6,\alpha}(x_6, x_7) = x_3$, $\mu_8^{6,\alpha}(x_6, x_8) = (2 + \alpha)x_4 + x_3$, $\mu_8^{6,\alpha}(x_7, x_8) = (2 + \alpha)x_5 + x_4$

$\mu_8^{7,\alpha}$	$\mu_8^{7,\alpha}(x_1,x_i)=x_{i-1}$ para $3\le i\le 8$, $\mu_8^{7,\alpha}(x_4,x_8)=\alpha x_2$, $\mu_8^{7,\alpha}(x_5,x_7)=x_2$, $\mu_8^{7,\alpha}(x_5,x_8)=(1+\alpha)x_3$, $\mu_8^{7,\alpha}(x_6,x_7)=x_3$, $\mu_8^{7,\alpha}(x_6,x_8)=(2+\alpha)x_4$, $\mu_8^{7,\alpha}(x_7,x_8)=(2+\alpha)x_5$
μ_8^{8}	$\mu_8^{8}(x_1,x_i)=x_{i-1}$ para $3\le i\le 8$, $\mu_8^{8}(x_4,x_8)=-x_2$, $\mu_8^{8}(x_5,x_7)=x_2$, $\mu_8^{8}(x_6,x_7)=x_2+x_3$, $\mu_8^{8}(x_6,x_8)=x_3+x_4$, $\mu_8^{8}(x_7,x_8)=x_4+x_5$
$\mu_8^{9,\alpha}$	$\mu_8^{9,\alpha}(x_1,x_i)=x_{i-1}$ para $3\le i\le 8$, $\mu_8^{9,\alpha}(x_4,x_8)=x_2$, $\mu_8^{9,\alpha}(x_5,x_8)=x_3$, $\mu_8^{9,\alpha}(x_6,x_7)=x_2$, $\mu_8^{9,\alpha}(x_6,x_8)=\alpha x_2+x_3+x_4$, $\mu_8^{9,\alpha}(x_7,x_8)=\alpha x_3+x_4+x_5$
$\mu_8^{10,\alpha}$	$\mu_8^{10,\alpha}(x_1,x_i)=x_{i-1}$ para $3\le i\le 8$, $\mu_8^{10,\alpha}(x_4,x_8)=x_2$, $\mu_8^{10,\alpha}(x_5,x_8)=x_3$, $\mu_8^{10,\alpha}(x_6,x_8)=x_2+x_4$, $\mu_8^{10,\alpha}(x_6,x_8)=\alpha x_2+x_3+x_5$
μ_8^{11}	$\mu_8^{11}(x_1,x_i)=x_{i-1}$ para $3\le i\le 8$, $\mu_8^{11}(x_i,x_8)=x_{i-2}$ para $4\le i\le 7$, $\mu_8^{11}(x_7,x_8)=x_2+x_5$
μ_8^{12}	$\mu_8^{12}(x_1,x_i)=x_{i-1}$ para $3\le i\le 8$, $\mu_8^{12}(x_i,x_8)=x_{i-2}$ para $4\le i\le 7$
$\mu_8^{13,\alpha}$	$\mu_8^{13,\alpha}(x_1,x_i)=x_{i-1}$ para $3\le i\le 8$, $\mu_8^{13,\alpha}(x_5,x_8)=\alpha x_2$, $\mu_8^{13,\alpha}(x_6,x_7)=x_2$, $\mu_8^{13,\alpha}(x_6,x_8)=(1+\alpha)x_3+x_2$, $\mu_8^{13,\alpha}(x_7,x_8)=(1+\alpha)x_4+x_3$
$\mu_8^{14,\alpha}$	$\mu_8^{14,\alpha}(x_1,x_i)=x_{i-1}$ para $3\le i\le 8$, $\mu_8^{14,\alpha}(x_5,x_8)=\alpha x_2$, $\mu_8^{14,\alpha}(x_6,x_7)=x_2$, $\mu_8^{14,\alpha}(x_6,x_8)=(1+\alpha)x_3$, $\mu_8^{14,\alpha}(x_7,x_8)=(1+\alpha)x_4$
μ_8^{15}	$\mu_8^{15}(x_1,x_i)=x_{i-1}$ para $3\le i\le 8$, $\mu_8^{15}(x_5,x_8)=x_2$, $\mu_8^{15}(x_6,x_8)=x_2+x_3$, $\mu_8^{15}(x_7,x_8)=x_2+x_3+x_4$
μ_8^{16}	$\mu_8^{16}(x_1,x_i)=x_{i-1}$ para $3\le i\le 8$, $\mu_8^{16}(x_5,x_8)=x_2$, $\mu_8^{16}(x_6,x_8)=x_3$, $\mu_8^{16}(x_7,x_8)=x_2+x_4$
μ_8^{17}	$\mu_8^{17}(x_1,x_i)=x_{i-1}$ para $3\le i\le 8$, $\mu_8^{17}(x_6,x_8)=x_2$, $\mu_8^{17}(x_7,x_8)=x_2+x_3$
μ_8^{18}	$\mu_8^{18}(x_1,x_i)=x_{i-1}$ para $3\le i\le 8$, $\mu_8^{18}(x_6,x_8)=x_2$, $\mu_8^{18}(x_7,x_8)=x_3$
μ_8^{19}	$\mu_8^{19}(x_1,x_i)=x_{i-1}$ para $3\le i\le 8$, $\mu_8^{19}(x_7,x_8)=x_2$
μ_8^{20}	$\mu_8^{20}(x_1,x_i)=x_{i-1}$ para $3\le i\le 8$

Tabla 7: Álgebras de Lie filiformes de dimensión 8.

De la lista anterior mostraremos a continuación las álgebras que Lie que poseen una derivación semisimple y mostraremos explícitamente dicha derivación.

μ	$D \in \mathrm{Der}(\mu)$	μ	$D \in \mathrm{Der}(\mu)$
μ_8^3	$\begin{pmatrix} 4 &&&&&&& \\ & 13 &&&&&& \\ && 9 &&& 3 && \\ &&& 8 &&& 6 & \\ &&&& 7 &&& 6 \\ &&&&& 6 && \\ &&&&&& 5 & \\ 3 &&&&&&& 1 \end{pmatrix}$	$\mu_8^{14,\alpha}$	$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&& \\ & 9 &&&&&& \\ && 8 &&&&& \\ &&& 7 &&&& \\ &&&& 6 &&& \\ &&&&& 5 && \\ &&&&&& 4 & \\ &&&&&&& 3 \end{pmatrix}$
μ_8^4	$\begin{pmatrix} 3 &&&&&&& \\ & 11 && -2 &&&& \\ && 8 && -2 &&& \\ &&& 7 &&&& \\ &&&& 6 && 2 & \\ &&&&& 5 && 2 \\ &&&&&& 4 & \\ 2 &&&&&&& 1 \end{pmatrix}$	μ_8^{16}	$\begin{pmatrix} 3 &&&&&&& \\ & 27 &&&&&& \\ && 24 && 2 && 2 & \\ &&& 21 && 4 && 2 \\ &&&& 18 && 6 & \\ &&&&& 15 && 6 \\ &&&&&& 12 & \\ 2 &&&&&&& 9 \end{pmatrix}$
μ_8^5	$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&& \\ & 7 &&&&&& \\ && 6 &&&&& \\ &&& 5 &&&& \\ &&&& 4 &&& \\ &&&&& 3 && \\ &&&&&& 2 & \\ &&&&&&& 1 \end{pmatrix}$	μ_8^{18}	$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&& \\ & 10 &&&&&& \\ && 9 &&&&& \\ &&& 8 &&&& \\ &&&& 7 &&& \\ &&&&& 6 && \\ &&&&&& 5 & \\ &&&&&&& 4 \end{pmatrix}$
$\mu_8^{7,\alpha}$	$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&& \\ & 8 &&&&&& \\ && 7 &&&&& \\ &&& 6 &&&& \\ &&&& 5 &&& \\ &&&&& 4 && \\ &&&&&& 3 & \\ &&&&&&& 2 \end{pmatrix}$	μ_8^{19}	$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&& \\ & 11 &&&&&& \\ && 10 &&&&& \\ &&& 9 &&&& \\ &&&& 8 &&& \\ &&&&& 7 && \\ &&&&&& 6 & \\ &&&&&&& 5 \end{pmatrix}$
μ_8^{12}	$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&& \\ & 8 &&&&&& \\ && 7 &&&&& \\ &&& 6 &&&& \\ &&&& 5 &&& \\ &&&&& 4 && \\ &&&&&& 3 & \\ &&&&&&& 2 \end{pmatrix}$	μ_8^{20}	$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&& \\ & 0 &&&&&& \\ && -1 &&&&& \\ &&& -2 &&&& \\ &&&& -3 &&& \\ &&&&& -4 && \\ &&&&&& -5 & \\ &&&&&&& -6 \end{pmatrix}$

Tabla 8: Álgebras de Lie filiformes de dimensión 8 y rango ≥ 1.

Las demás álgebras de Lie no tienen derivaciones semisimples, es decir, son característicamente nilpotentes. En éstas encontramos cuatro familias

$$\mu_8^{6,\alpha}, \quad \mu_8^{9,\alpha}, \quad \mu_8^{10,\alpha}, \quad \mu_8^{13,\alpha}$$

y seis álgebras aisladas

$$\mu_8^{1}, \quad \mu_8^{2}, \quad \mu_8^{8}, \quad \mu_8^{11}, \quad \mu_8^{15}, \quad \mu_8^{17}$$

5.3 Álgebras de Lie filiformes de dimensión 8 como degeneraciones

El caso de las álgebras de Lie filiformes es de un interés particular. Dado que la degeneración es transitiva y que bajo degeneraciones el grado de nilpotencia no crece, entonces las álgebras de Lie filiformes que son álgebras de Lie nilpotentes de clase de nilpotencia maximal, están en la cima del diagrama de Hasse de degeneraciones. En otras palabras, las álgebras de Lie filiformes se pueden degenerar a cualquier otra álgebra de Lie nilpotente, pero solamente un álgebra de Lie filiforme se puede degenerar a un álgebra de Lie filiforme dada, dentro de la variedad $\mathcal{N}_n$ de álgebras de Lie nilpotentes.

En ésta sección mostraremos que toda álgebra de Lie filiforme compleja de dimensión 8, es la degeneración de otra álgebra de Lie (soluble y no nilpotente) no isomorfa, es decir, probaremos la conjetura de Grunewald-O'Halloran para ésta clase de álgebras de Lie. Como se hacía en los capítulos anteriores, construiremos el álgebra de Lie soluble como una deformación lineal del álgebra original, además cabe mencionar que no toda deformación lineal construida como en [GO2], se corresponde con una degeneración (lo cual se ilustrará con un ejemplo). Más aún, no se conoce cuales de éstas deformaciones lineales se corresponden con degeneraciones y cuales no.

Teorema 5.3.1.
Toda álgebra de Lie filiforme compleja de dimensión 8 es la degeneración de un álgebra de Lie soluble.

Demostración
Por el Teorema 4.1.2 el resultado se tiene para las álgebras de Lie filiformes de rango ≥ 1 (ver Tabla 8). Así necesitamos solamente considerar las álgebras de Lie característicamente nilpotentes.
La prueba se hará caso por caso. Para cada álgebra característicamente nilpotente μ, tomaremos un ideal $\mathfrak{h}$ de codimensión 1 junto con una derivación semisimple de éste y consideraremos la correspondiente deformación lineal $\mu_t = \mu + t\mu_D$. Luego veremos que ésta se corresponde con una degeneración, encontrando una familia de isomorfismos lineales $g_t \in GL(8, \mathbb{C})$ que satisface la ecuación (4).
En las siguientes tablas, una por cada álgebra o familia considerada, contienen la elección del ideal $\mathfrak{h}$ de codimensión 1, la derivación semisimple de éste y la familia g_t que realiza la degeneración. Para una mejor presentación, en todos los casos se elegirá una nueva base $\{y_1, \ldots, y_8\}$ del álgebra, la cual se presenta en términos de la base $\{x_1, \ldots, x_8\}$ usada en [ABG2] (ver Tabla 7). Denotaremos por μ_i, $\mu_{i,\alpha}$ a las álgebras y familias μ_8^i, $\mu_8^{i,\alpha}$ respectivamente en la nueva base, además, en todos los casos elegimos a $\mathfrak{h} = \langle y_2, \ldots, y_8 \rangle$ como el ideal de codimensión 1.

$\{y_1, \ldots, y_8\}$	μ_1
$y_1 = x_1$ $y_2 = \frac{2}{5}x_6 - x_7 + x_8$ $y_3 = \frac{51}{5000}x_3 + \frac{1}{250}x_4 + \frac{17}{50}x_5 - x_6 + x_7$ $y_4 = -\frac{44}{125}x_3 + \frac{77}{50}x_4 - \frac{44}{5}x_5 + 11x_6$ $y_5 = -\frac{33}{500}x_3 + \frac{33}{50}x_4 - \frac{11}{10}x_5$ $y_6 = -\frac{11}{50}x_4$ $y_7 = \frac{11}{1000}x_3$ $y_8 = x_2$	$\mu_1(y_1, y_2) = y_3 - \frac{3}{55}y_5 - \frac{8}{55}y_6 - \frac{69}{55}y_7$ $\mu_1(y_1, y_3) = \frac{1}{11}y_4 + \frac{2}{11}y_5 - \frac{4}{11}y_6 + \frac{48}{11}y_7 + \frac{51}{5000}y_8$ $\mu_1(y_1, y_4) = -10y_5 + 10y_6 + 80y_7 - \frac{44}{125}y_8$ $\mu_1(y_1, y_5) = 5y_6 + 60y_7 - \frac{33}{500}y_8$ $\mu_1(y_1, y_6) = -20y_7$ $\mu_1(y_1, y_7) = \frac{11}{1000}y_8$ $\mu_1(y_2, y_3) = -\frac{1}{11}y_4$ $\mu_1(y_2, y_4) = 10y_5$ $\mu_1(y_2, y_5) = -5y_6$ $\mu_1(y_2, y_6) = 20y_7$ $\mu_1(y_3, y_4) = 400y_7$ $\mu_1(y_3, y_6) = \frac{11}{50}Y_8$ $\mu_1(y_4, y_5) = -\frac{121}{10}y_8$
$D \in \mathcal{D}er(\mathfrak{h})$	$g_t \in GL(8, \mathbb{C})$
$D = \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & 3 &&&&& \\ && 4 &&&& \\ &&& 5 &&& \\ &&&& 6 && \\ &&&&& 7 & \\ &&&&&& 9 \end{pmatrix}$	$g_t = \begin{pmatrix} t &&&&&&& \\ 0 & t &&&&&& \\ p_1 & p_2 & t^3 &&&&& \\ p_3 & 0 & 0 & t^4 &&&& \\ p_4 & 0 & p_5 & 0 & t^5 &&& \\ p_6 & 0 & p_7 & p_8 & 0 & t^6 && \\ 0 & p_9 & p_{10} & p_{11} & p_{12} & 0 & t^7 & \\ 0 & 0 & p_{13} & p_{14} & p_{15} & 0 & p_{16} & t^9 \end{pmatrix}$
$p_1 = -\frac{1}{2}t(t-1)$ $p_2 = \frac{1}{2}t(t-1)$ $p_3 = \frac{1}{550}t(3t^3 - 5t^2 + 10t - 8)$ $p_4 = -\frac{2}{825}t(12t^4 + 10t^3 - 25t + 3)$ $p_5 = \frac{1}{11}t^3(t-1)$ $p_6 = \frac{1}{1100}t(39t^5 - 45t^4 - 15t^3 - 10t^2 + 65t - 49)$ $p_7 = -\frac{4}{33}t^3(t^2 - 1)$ $p_8 = 5t^4(t-1)$ $p_9 = -\frac{1}{22}t(2t^5 - t^4 + 4t^3 - 16t^2 + 32t - 20)$ $p_{10} = \frac{1}{11}t^3(18t^3 + 5t^2 - 10t - 13)$ $p_{11} = \frac{80}{3}t^4(t^2 - 1)$ $p_{12} = 30t^5(t-1)$ $p_{13} = \frac{1}{2000}t^3(6t^5 + 7t^4 - 17t^3 + t^2 + t + 1)$ $p_{14} = \frac{11}{75}t^4(t^3 - t^2 - t + 1)$ $p_{15} = \frac{11}{200}t^5(t^2 - 2t + 1)$ $p_{16} = \frac{11}{2000}t^7(t-1)$	

$\{y_1, \dots, y_8\}$	μ_2
$y_1 = x_1$ $y_2 = \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{8}x_5 + x_8$ $y_3 = x_2 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{8}x_6$ $y_4 = -\frac{3}{2}x_3 + \frac{3}{4}x_5$ $y_5 = \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{4}x_6$ $y_6 = -\frac{3}{8}x_5$ $y_7 = \frac{1}{8}x_6$ $y_8 = x_7$	$\mu_2(y_1, y_2) = -y_3 - 2y_5 - 4y_7 - \frac{1}{2}y_8$ $\mu_2(y_1, y_3) = \frac{2}{3}y_4 + \frac{8}{3}y_6 - 8y_7$ $\mu_2(y_1, y_4) = 3y_5 + 12y_7 + \frac{3}{2}y_8$ $\mu_2(y_1, y_5) = \frac{4}{3}y_6$ $\mu_2(y_1, y_6) = 3y_7$ $\mu_2(y_2, y_3) = -\frac{2}{3}y_4$ $\mu_2(y_2, y_4) = -3y_5$ $\mu_2(y_2, y_5) = -\frac{4}{3}y_6$ $\mu_2(y_2, y_6) = -3y_7$ $\mu_2(y_2, y_7) = \frac{1}{8}y_8$ $\mu_2(y_3, y_6) = \frac{3}{8}y_8$ $\mu_2(y_4, y_5) = -\frac{3}{4}y_8$
$D \in \mathcal{D}er(\mathfrak{h})$	$g_t \in GL(8, \mathbb{C})$
$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 2 & & & & & \\ & & 3 & & & & \\ & & & 4 & & & \\ & & & & 5 & & \\ & & & & & 6 & \\ & & & & & & 7 \end{pmatrix}$	$g_t = \begin{pmatrix} t & & & & & & & \\ 0 & t & & & & & & \\ 0 & 0 & t^2 & & & & & \\ p_1 & 0 & 0 & t^3 & & & & \\ p_2 & 0 & 0 & 0 & t^4 & & & \\ 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 & t^5 & & \\ p_4 & p_5 & p_6 & p_7 & 0 & 0 & t^6 & \\ 0 & 0 & p_8 & p_9 & p_{10} & 0 & 0 & t^7 \end{pmatrix}$
$p_1 = -\frac{2}{3}t(t^2-1)$ $p_2 = -\frac{2}{3}t(t^2-1)$ $p_3 = \frac{8}{9}t^2(t^2-1)$ $p_4 = \frac{2}{15}t(30t^5 - 20t^4 + 3t^3 + 20t^2 - 33)$ $p_5 = -\frac{2}{5}t(2t^4 - t^3 - 1)$ $p_6 = -2t^2(t^3-1)$ $p_7 = 4t^3(t^2-1)$ $p_8 = \frac{1}{20}t^2(t^3-1)$ $p_9 = \frac{3}{8}t^3(t^3-1)$ $p_{10} = -\frac{1}{6}t^4(t^2-1)$	

$\{y_1, \dots, y_8\}$	$\mu_{6,\alpha}$
$y_1 = x_8$ $y_2 = x_1$ $y_3 = x_7$ $y_4 = x_6$ $y_5 = x_5$ $y_6 = x_4$ $y_7 = x_3$ $y_8 = x_2$	$\mu_{6,\alpha}(y_1, y_2) = -y_3$ $\mu_{6,\alpha}(y_1, y_3) = -(2+\alpha)y_5 - y_6$ $\mu_{6,\alpha}(y_1, y_4) = -(2+\alpha)y_6 - y_7$ $\mu_{6,\alpha}(y_1, y_5) = -(1+\alpha)y_7 - y_8$ $\mu_{6,\alpha}(y_1, y_6) = -\alpha y_8$ $\mu_{6,\alpha}(y_2, y_3) = y_4$ $\mu_{6,\alpha}(y_2, y_4) = y_5$ $\mu_{6,\alpha}(y_2, y_5) = y_6$ $\mu_{6,\alpha}(y_2, y_6) = y_7$ $\mu_{6,\alpha}(y_2, y_7) = y_8$ $\mu_{6,\alpha}(y_3, y_4) = -y_7$ $\mu_{6,\alpha}(y_3, y_5) = -y_8$
$D \in \mathcal{D}er(\mathfrak{h})$	$g_t \in GL(8, \mathbb{C})$
$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 3 & & & & & \\ & & 4 & & & & \\ & & & 5 & & & \\ & & & & 6 & & \\ & & & & & 7 & \\ & & & & & & 8 \end{pmatrix}$	$g_t = \begin{pmatrix} t & & & & & & & \\ 0 & t & & & & & & \\ 0 & p_1 & t^3 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & t^4 & & & & \\ 0 & p_2 & p_3 & 0 & t^5 & & & \\ p_4 & p_5 & p_6 & p_7 & 0 & t^6 & & \\ p_8 & 0 & p_9 & p_{10} & p_{11} & 0 & t^7 & \\ 0 & 0 & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} & 0 & t^8 \end{pmatrix}$
$p_1 = -\frac{1}{2}t(t-1)$ $p_2 = \frac{1}{8}t(2+\alpha)(t^2-2t+1)$ $p_3 = -\frac{1}{2}t^3(2+\alpha)(t-1)$ $p_4 = \frac{1}{8}t(2+\alpha)(1+\alpha)(t^3-3t^2+3t-1)$ $p_5 = \frac{1}{30}t(2t^3-5t+3)$ $p_6 = -\frac{1}{3}t^3(t^2-1)$ $p_7 = -\frac{1}{2}t^4(2+\alpha)(t-1)$ $p_8 = \frac{1}{120}t(t-1)(16t^3+20t^3\alpha+16t^2-8t^2\alpha-54t-43t\alpha+30+27\alpha)$ $p_9 = \frac{1}{8}t^3(2+\alpha)(1+\alpha)(t^2-2t+1)$ $p_{10} = -\frac{1}{3}t^4(t^2-1)$ $p_{11} = -\frac{1}{2}t^5(1+\alpha)(t-1)$ $p_{12} = \frac{1}{30}t^3(t-1)(4t^2+5t^2\alpha+4t-6-5\alpha)$ $p_{13} = \frac{1}{8}t^4\alpha(2+\alpha)(t^2-2t+1)$ $p_{14} = -\frac{1}{3}t^5(t^2-1)$ $p_{15} = -\frac{1}{2}t^6\alpha(t-1)$	

$\{y_1, \dots, y_8\}$	μ_8
$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= -\tfrac{7}{10}x_5 + \tfrac{7}{10}x_6 \\ y_3 &= \tfrac{7}{60}x_4 + \tfrac{7}{4}x_5 - \tfrac{7}{5}x_6 + \tfrac{7}{10}x_7 \\ y_4 &= -\tfrac{1}{3}x_4 - \tfrac{2}{3}x_5 - x_7 + x_8 \\ y_5 &= x_3 \\ y_6 &= \tfrac{7}{30}x_4 \\ y_7 &= -\tfrac{7}{60}x_4 + \tfrac{7}{60}x_5 \\ y_8 &= x_2 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \mu_8(y_1, y_2) &= 6y_7 \\ \mu_8(y_1, y_3) &= y_2 + \tfrac{7}{60}y_5 + \tfrac{9}{2}y_6 - 6y_7 \\ \mu_8(y_1, y_4) &= \tfrac{10}{7}y_2 + \tfrac{10}{7}y_3 - \tfrac{1}{3}y_5 - 10y_6 - \tfrac{90}{7}y_7 \\ \mu_8(y_1, y_5) &= y_8 \\ \mu_8(y_1, y_6) &= \tfrac{7}{30}y_5 \\ \mu_8(y_1, y_7) &= -\tfrac{7}{60}y_5 + \frac{1}{2}y_6 \\ \mu_8(y_2, y_3) &= \tfrac{49}{100}y_5 \\ \mu_8(y_2, y_4) &= 3y_6 \\ \mu_8(y_3, y_4) &= 6y_7 \\ \mu_8(y_3, y_7) &= -\tfrac{49}{600}y_8 \\ \mu_8(y_4, y_6) &= \tfrac{7}{30}y_8 \end{aligned}$
$D \in \mathcal{D}er(\mathfrak{h})$	$g_t \in GL(8, \mathbb{C})$
$D = \begin{pmatrix} 2 &&&&&& \\ & 3 &&&&& \\ && 4 &&&& \\ &&& 5 &&& \\ &&&& 6 && \\ &&&&& 7 & \\ &&&&&& 10 \end{pmatrix}$	$g_t = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} &&&&&&& \\ 0 & t^2 && p_1 &&&& \\ 0 & 0 & t^3 &&&&& \\ 0 & 0 & 0 & t^4 &&&& \\ 0 & p_2 & p_3 & p_4 & t^5 && p_5 & \\ 0 & p_6 & p_7 & p_8 & 0 & t^6 && \\ 0 & p_9 & p_{10} & p_{11} & 0 & 0 & t^7 & \\ 0 & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} & p_{16} & p_{17} & t^{10} \end{pmatrix}$
$\begin{aligned} p_1 &= -\tfrac{5}{7}t^3(t-1) \\ p_2 &= -\tfrac{7}{120}t^2(t^6-2t^5+1) \\ p_3 &= \tfrac{7}{120}t^3(2t^5-6t^4+t^3+3) \\ p_4 &= \tfrac{1}{24}t^3(t^7+t^6-14t^5+12t^4-8t^3+7t+1) \\ p_5 &= -\tfrac{7}{120}t^6(t-1) \\ p_6 &= -\tfrac{3}{20}t^2(t^6-1) \\ p_7 &= -\tfrac{1}{20}t^3(2t^6-5t^5-30t^4+33) \\ p_8 &= -\tfrac{1}{28}t^3(3t^7-3t^6-60t^5+140t^4-83t+3) \\ p_9 &= \tfrac{6}{5}t^2(t^6-1) \\ p_{10} &= \tfrac{3}{10}t^3(t^6-5t^5+4) \\ p_{11} &= \tfrac{1}{7}t^3(t^7-t^6-30t^5+24t+6) \\ p_{12} &= \tfrac{7}{4800}t^2(t^{12}-4t^{11}+14t^6-16t^5+5) \\ p_{13} &= \tfrac{1}{4800}t^3(t^{12}-12t^{11}+68t^{10}+16t^9+14t^6-168t^5+252t^4-56t^3-115) \\ p_{14} &= \tfrac{1}{20160}t^3(t^{13}-5t^{12}-44t^{11}-40t^{10}-224t^9-126t^7-210t^6+1344t^5-840t^4 \\ &\quad +1344t^3-1095t-105) \\ p_{15} &= \tfrac{1}{5}t^5(t^6-1) \\ p_{16} &= \tfrac{7}{600}t^6(t^6-1) \\ p_{17} &= \frac{7}{3600}t^6(t^7-4t^6+9t-6) \end{aligned}$	

$\{y_1,\dots,y_8\}$	$\mu_{9,\alpha}$
$\begin{aligned} y_1 &= x_8\\ y_2 &= x_1\\ y_3 &= x_7\\ y_4 &= x_6\\ y_5 &= x_5\\ y_6 &= x_4\\ y_7 &= x_3\\ y_8 &= x_2 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \mu_{9,\alpha}(y_1,y_2) &= -y_3\\ \mu_{9,\alpha}(y_1,y_3) &= -y_5-y_6-\alpha y_7\\ \mu_{9,\alpha}(y_1,y_4) &= -y_6-y_7-\alpha y_8\\ \mu_{9,\alpha}(y_1,y_5) &= -y_7\\ \mu_{9,\alpha}(y_1,y_6) &= -y_8\\ \mu_{9,\alpha}(y_2,y_3) &= y_4\\ \mu_{9,\alpha}(y_2,y_4) &= y_5\\ \mu_{9,\alpha}(y_2,y_5) &= y_6\\ \mu_{9,\alpha}(y_2,y_6) &= y_7\\ \mu_{9,\alpha}(y_2,y_7) &= y_8\\ \mu_{9,\alpha}(y_3,y_4) &= -y_8 \end{aligned}$
$D \in \mathcal{D}er(\mathfrak{h})$	$g_t \in GL(8,\mathbb{C})$
$D = \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & 4 &&&&& \\ && 5 &&&& \\ &&& 6 &&& \\ &&&& 7 && \\ &&&&& 8 & \\ &&&&&& 9 \end{pmatrix}$	$g_t = \begin{pmatrix} t &&&&&&& \\ 0 & t &&&&&& \\ 0 & p_1 & t^4 &&&&& \\ p_2 & 0 & 0 & t^5 &&&& \\ p_3 & 0 & p_4 & 0 & t^6 &&& \\ p_5 & p_6 & p_7 & p_8 & 0 & t^7 && \\ 0 & 0 & p_9 & p_{10} & p_{11} & 0 & t^8 & \\ 0 & 0 & p_{12} & p_{13} & 0 & p_{14} & 0 & t^9 \end{pmatrix}$
$\begin{aligned} p_1 &= -\tfrac{1}{3}t(t^2-1)\\ p_2 &= -\tfrac{1}{6}t(t-1)(3t^2-2t-2)\\ p_3 &= \tfrac{1}{5}t(t-1)(11t^4-9t^3-14t^2+5t+5)\\ p_4 &= -\tfrac{1}{2}t^4(t-1)\\ p_5 &= -\tfrac{1}{24}t(t-1)(6t^4\alpha-3t^3+6t^3\alpha+3t^2+6t^2\alpha-8t\alpha-8\alpha)\\ p_6 &= \tfrac{1}{90}t(t-1)(33t^4-22t^3-37t^2+10t+10)\\ p_7 &= -\tfrac{1}{3}t^4(t^2-1)\\ p_8 &= -\tfrac{1}{2}t^5(t-1)\\ p_9 &= -\tfrac{1}{8}t^4(t-1)(2t^2\alpha-t+2t\alpha+1+2\alpha)\\ p_{10} &= -\tfrac{1}{3}t^5(t^2-1)\\ p_{11} &= -\tfrac{1}{2}t^6(t-1)\\ p_{12} &= \tfrac{1}{15}t^4(t-1)(3t^2-2t-2)\\ p_{13} &= -\tfrac{1}{8}t^5(t-1)(2t^2\alpha-t+2t\alpha+1+2\alpha)\\ p_{14} &= -\tfrac{1}{2}t^7(t-1) \end{aligned}$	

<table>
<tr><th>$\{y_1, \dots, y_8\}$</th><th>$\mu_{10,\alpha}$</th></tr>
<tr><td>$y_1 = x_8$
$y_2 = x_1$
$y_3 = x_7$
$y_4 = x_6$
$y_5 = x_5$
$y_6 = x_4$
$y_7 = x_3$
$y_8 = x_2$</td><td>$\mu_{10,\alpha}(y_1, y_2) = -y_3$
$\mu_{10,\alpha}(y_1, y_3) = -y_5 - y_7 - \alpha y_8$
$\mu_{10,\alpha}(y_1, y_4) = -y_6 - y_8$
$\mu_{10,\alpha}(y_1, y_5) = -y_7$
$\mu_{10,\alpha}(y_1, y_6) = -y_8$
$\mu_{10,\alpha}(y_2, y_3) = y_4$
$\mu_{10,\alpha}(y_2, y_4) = y_5$
$\mu_{10,\alpha}(y_2, y_5) = y_6$
$\mu_{10,\alpha}(y_2, y_6) = y_7$
$\mu_{10,\alpha}(y_2, y_7) = y_8$</td></tr>
<tr><th>$D \in \mathcal{D}er(\mathfrak{h})$</th><th>$g_t \in GL(8, \mathbb{C})$</th></tr>
<tr><td>$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 2 & & & & & \\ & & 3 & & & & \\ & & & 4 & & & \\ & & & & 5 & & \\ & & & & & 6 & \\ & & & & & & 7 \end{pmatrix}$</td><td>$g_t = \begin{pmatrix} t & & & & & & & \\ 0 & t & & & & & & \\ p_1 & 0 & t^2 & & & & & \\ p_2 & p_3 & 0 & t^3 & & & & \\ p_4 & p5 & p_6 & 0 & t^4 & & & \\ 0 & 0 & 0 & p_7 & 0 & t^5 & & \\ 0 & 0 & p_8 & 0 & p_9 & 0 & t^6 & \\ 0 & 0 & p_{10} & p_{11} & 0 & p_{12} & 0 & t^7 \end{pmatrix}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$p_1 = -\frac{2}{5} t\alpha(t^4 - 1)$
$p_2 = -\frac{1}{8} t(6t^3 - 3t^2 + 10t - 13)$
$p_3 = -\frac{1}{5} t\alpha(t^4 - 1)$
$p_4 = \frac{1}{5} t\alpha(t^4 - 1)$
$p_5 = -\frac{1}{8} t(2t^3 - t^2 + 2t - 3)$
$p_6 = -\frac{1}{2} t^2(t - 1)$
$p_7 = -\frac{1}{2} t^3(t - 1)$
$p_8 = -\frac{1}{8} t^2(2t^3 - t^2 + 2t - 3)$
$p_9 = -\frac{1}{2} t^4(t - 1)$
$p_{10} = -\frac{1}{5} t^2 \alpha(t^4 - 1)$
$p_{11} = -\frac{1}{8} t^3(2t^3 - t^2 + 2t - 3)$
$p_{12} = -\frac{1}{2} t^5(t - 1)$</td></tr>
</table>

$\{y_1, \ldots, y_8\}$	μ_{11}
$y_1 = x_8$ $y_2 = x_1$ $y_3 = x_7$ $y_4 = x_6$ $y_5 = x_5$ $y_6 = x_4$ $y_7 = x_3$ $y_8 = x_2$	$\mu_{11}(y_1, y_2) = -y_3$ $\mu_{11}(y_1, y_3) = -y_5 - y_8$ $\mu_{11}(y_1, y_4) = -y_6$ $\mu_{11}(y_1, y_5) = -y_7$ $\mu_{11}(y_1, y_6) = -y_8$ $\mu_{11}(y_2, y_3) = y_4$ $\mu_{11}(y_2, y_4) = y_5$ $\mu_{11}(y_2, y_5) = y_6$ $\mu_{11}(y_2, y_6) = y_7$ $\mu_{11}(y_2, y_7) = y_8$
$D \in \mathcal{D}er(\mathfrak{h})$	$g_t \in GL(8, \mathbb{C})$
$D = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&& \\ & 2 &&&&&& \\ && 3 &&&&& \\ &&& 4 &&&& \\ &&&& 5 &&& \\ &&&&& 6 && \\ &&&&&& 7 & \end{pmatrix}$	$g_t = \begin{pmatrix} t &&&&&&& \\ 0 & t &&&&&& \\ p_1 & 0 & t^2 &&&&& \\ p_2 & p_3 & 0 & t^3 &&&& \\ 0 & p_4 & p_5 & 0 & t^4 &&& \\ 0 & p_6 & 0 & p_7 & 0 & t^5 && \\ 0 & 0 & p_8 & 0 & p_9 & 0 & t^6 & \\ 0 & 0 & p_{10} & p_{11} & 0 & p_{12} & 0 & t^7 \end{pmatrix}$
$p_1 = -\frac{8}{5}t(t^4-1)$ $p_2 = \frac{1}{8}t(3t^2-10t+7)$ $p_3 = -\frac{4}{5}t(t^4-1)$ $p_4 = \frac{1}{8}t(t^2-2t+1)$ $p_5 = -\frac{1}{2}t^2(t-1)$ $p_6 = -\frac{1}{5}t(t^4-1)$ $p_7 = -\frac{1}{2}t^3(t-1)$ $p_8 = \frac{1}{8}t^2(t^2-2t+1)$ $p_9 = -\frac{1}{2}t^4(t-1)$ $p_{10} = -\frac{1}{5}t^2(t^4-1)$ $p_{11} = \frac{1}{8}t^3(t^2-2t+1)$ $p_{12} = -\frac{1}{2}t^5(t-1)$	

<table>
<tr><td>$\{y_1, \ldots, y_8\}$</td><td>$\mu_{13,\alpha}$</td></tr>
<tr><td>$y_1 = x_8$
$y_2 = x_1$
$y_3 = x_7$
$y_4 = x_6$
$y_5 = x_5$
$y_6 = x_4$
$y_7 = x_3$
$y_8 = x_2$</td><td>$\mu_{13,\alpha}(y_1, y_2) = -y_3$
$\mu_{13,\alpha}(y_1, y_3) = -(1+\alpha)y_6 - y_7$
$\mu_{13,\alpha}(y_1, y_4) = -(1+\alpha)y_7 - y_8$
$\mu_{13,\alpha}(y_1, y_5) = -\alpha y_8$
$\mu_{13,\alpha}(y_2, y_3) = y_4$
$\mu_{13,\alpha}(y_2, y_4) = y_5$
$\mu_{13,\alpha}(y_2, y_5) = y_6$
$\mu_{13,\alpha}(y_2, y_6) = y_7$
$\mu_{13,\alpha}(y_2, y_7) = y_8$
$\mu_{13,\alpha}(y_3, y_4) = -y_8$</td></tr>
<tr><td>$D \in \mathcal{D}er(\mathfrak{h})$</td><td>$g_t \in GL(8, \mathbb{C})$</td></tr>
<tr><td>$D = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&& \\ & 4 &&&&&& \\ && 5 &&&&& \\ &&& 6 &&&& \\ &&&& 7 &&& \\ &&&&& 8 && \\ &&&&&& 9 & \end{pmatrix}$</td><td>$g_t = \begin{pmatrix} t &&&&&&& \\ 0 & t &&&&&& \\ 0 & p_1 & t^4 &&&&& \\ 0 & 0 & 0 & t^5 &&&& \\ p_2 & 0 & 0 & 0 & t^6 &&& \\ p_3 & 0 & p_4 & 0 & 0 & t^7 && \\ 0 & 0 & p_5 & p_6 & 0 & 0 & t^8 & \\ 0 & 0 & 0 & p_7 & p_8 & 0 & 0 & t^9 \end{pmatrix}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$p_1 = -\frac{1}{3}t(t^2-1)$
$p_2 = -\frac{1}{3}t(1+\alpha)(t^4-2t^2+1)$
$p_3 = -\frac{1}{12}t(3t^5-7t^2+4)$
$p_4 = -\frac{1}{3}t^4(1+\alpha)(t^2-1)$
$p_5 = -\frac{1}{4}t^4(t^3-1)$
$p_6 = -\frac{1}{3}t^5(1+\alpha)(t^2-1)$
$p_7 = -\frac{1}{4}t^5(t^3-1)$
$p_8 = -\frac{1}{3}t^6\alpha(t^2-1)$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>$\{y_1, \dots, y_8\}$</th><th>μ_{15}</th></tr>
<tr><td>$y_1 = x_8$
$y_2 = x_1$
$y_3 = x_7$
$y_4 = x_6$
$y_5 = x_5$
$y_6 = x_4$
$y_7 = x_3$
$y_8 = x_2$</td><td>$\mu_{15}(y_1, y_2) = -y_3$
$\mu_{15}(y_1, y_3) = -y_6 - y_7 - y_8$
$\mu_{15}(y_1, y_4) = -y_7 - y_8$
$\mu_{15}(y_1, y_5) = -y_8$
$\mu_{15}(y_2, y_3) = y_4$
$\mu_{15}(y_2, y_4) = y_5$
$\mu_{15}(y_2, y_5) = y_6$
$\mu_{15}(y_2, y_6) = y_7$
$\mu_{15}(y_2, y_7) = y_8$</td></tr>
<tr><th>$D \in \mathcal{D}er(\mathfrak{h})$</th><th>$g_t \in GL(8, \mathbb{C})$</th></tr>
<tr><td>$D = \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & 2 &&&&& \\ && 3 &&&& \\ &&& 4 &&& \\ &&&& 5 && \\ &&&&& 6 & \\ &&&&&& 7 \end{pmatrix}$</td><td>$g_t = \begin{pmatrix} t &&&&&&& \\ 0 & t &&&&&& \\ p_1 & 0 & t^2 &&&&& \\ 0 & p_2 & 0 & t^3 &&&& \\ p_3 & 0 & 0 & 0 & t^4 &&& \\ p_4 & 0 & p_5 & 0 & 0 & t^5 && \\ 0 & 0 & p_6 & p_7 & 0 & 0 & t^6 & \\ 0 & 0 & p_8 & p_9 & p_{10} & 0 & 0 & t^7 \end{pmatrix}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$p_1 = -\frac{2}{5}t(t^4 - 1)$
$p_2 = -\frac{1}{5}t(t^4 - 1)$
$p_3 = -\frac{1}{3}t(t^2 - 1)$
$p_4 = \frac{1}{20}t(4t^4 - 5t^3 + 1)$
$p_5 = -\frac{1}{3}t^2(t^2 - 1)$
$p_6 = -\frac{1}{4}t^2(t^3 - 1)$
$p_7 = -\frac{1}{3}t^3(t^2 - 1)$
$p_8 = -\frac{1}{5}t^2(t^4 - 1)$
$p_9 = -\frac{1}{4}t^3(t^3 - 1)$
$p_{10} = -\frac{1}{3}t^4(t^2 - 1)$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>$\{y_1, \dots, y_8\}$</td><td>μ_{17}</td></tr>
<tr><td>$y_1 = x_8$
$Y_2 = X_1$
$y_3 = x_7$
$y_4 = x_6$
$y_5 = x_5$
$y_6 = x_4$
$y_7 = x_3$
$y_8 = x_2$</td><td>$\mu_{17}(y_1, y_2) = -y_3$
$\mu_{17}(y_1, y_3) = -y_7 - y_8$
$\mu_{17}(y_1, y_4) = -y_8$
$\mu_{17}(y_2, y_3) = y_4$
$\mu_{17}(y_2, y_4) = y_5$
$\mu_{17}(y_2, y_5) = y_6$
$\mu_{17}(y_2, y_6) = y_7$
$\mu_{17}(y_2, y_7) = y_8$</td></tr>
<tr><td>$D \in \mathcal{D}er(\mathfrak{h})$</td><td>$g_t \in GL(8, \mathbb{C})$</td></tr>
<tr><td>$D = \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & 2 &&&&& \\ && 3 &&&& \\ &&& 4 &&& \\ &&&& 5 && \\ &&&&& 6 & \\ &&&&&& 7 \end{pmatrix}$</td><td>$g_t = \begin{pmatrix} t &&&&&&& \\ 0 & t &&&&&& \\ p_1 & 0 & t^2 &&&&& \\ 0 & p_2 & 0 & t^3 &&&& \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t^4 &&& \\ p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^5 && \\ 0 & 0 & p_4 & 0 & 0 & 0 & t^6 & \\ 0 & 0 & p_5 & p_6 & 0 & 0 & 0 & t^7 \end{pmatrix}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$p_1 = -\frac{2}{5}t(t^4 - 1)$
$p_2 = -\frac{1}{5}t(t^4 - 1)$
$p_3 = -\frac{1}{4}t(t^3 - 1)$
$p_4 = -\frac{1}{4}t^2(t^3 - 1)$
$p_5 = -\frac{1}{5}t^2(t^4 - 1)$
$p_6 = -\frac{1}{4}t^3(t^3 - 1)$</td></tr>
</table>

■

Nota 5.3.2.
En todos los casos mencionados, los autovalores de g_t sobre el subespacio $\langle y_2, \dots, y_8 \rangle$ son exactamente $t^{d_2}, \dots, t^{d_8}$, donde $d_2, \dots, d_8$ son los autovalores de la derivación D. Esto se puede apreciar fácilmente en todos los casos en los que g_t es una matriz triangular, solamente faltaría el caso de μ_8, el cual se puede verificar sin mayor dificultad.

Ejemplo 5.3.3.
En los capítulos anteriores hemos estado trabajando con deformaciones lineales de la forma $\mu_t = \mu + t\mu_D$ con D derivación semisimple, pero cabe aclarar que no toda deformación lineal de este tipo, se corresponde con una degeneración. Por ejemplo, si consideramos $\mu = \mu_8^{17}$ (ver Tabla 7), $\mathfrak{h} = \langle x_1, \dots, x_7 \rangle$ y tomamos a

$$D = \begin{pmatrix} 0 &&&&&& \\ & 1 &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& 1 &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& 1 & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix}$$

como derivación semisimple del ideal $\mathfrak{h}$, tenemos que la deformación lineal $\mu_t = \mu + t\mu_D$ no se corresponde con una degeneración, es decir, no existe una familia de isomorfismos lineales g_t que satisfaga la ecuación (4).

6 ÁLGEBRAS DE LIE TIPO BURDE

6.1 SOBRE LA CONJETURA DE VERGNE

Recordemos que la conjetura de Vergne fue probada por Carles para las álgebras de Lie nilpotentes de rango ≥ 1 (Ver Capítulo 2, Teorema 2.4.6). Este teorema tiene una versión más fuerte, la cual mencionamos a continuación.

Teorema 6.1.1. *[C]*
Toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ rígida en $\mathcal{R}_n$ (subvariedad de las álgebras de Lie solubles) es algebraica y verifica una de las siguientes condiciones:
(1) $\mathrm{dim}\mathcal{D}er(\mathfrak{g}) = \mathrm{dim}\mathfrak{g}$.
(2) $\mathfrak{g}$ *es característicamente nilpotente y todos sus ideales de codimensión 1 son característicamente nilpotentes.*

Vale la pena mencionar que si $\mathfrak{g}$ es nilpotente de dimensión > 1, entonces (1) no se tiene pues resulta que $\mathrm{dim}\mathcal{D}er(\mathfrak{g}) > \mathrm{dim}\mathfrak{g}$. Por tanto si queremos ver que ocurre con la conjetura de Vergne para las álgebras de Lie característicamente nilpotentes, el teorema anterior nos indica que camino seguir, así que debemos estudiar las álgebras de Lie característicamente nilpotentes en las que todos sus ideales de codimensión 1 son también característicamente nilpotentes. Lamentablemente en la literatura se conoce muy poco acerca de este tipo de álgebras de Lie, hasta ahora el único ejemplo conocido de este tipo de álgebras se debe a Burde.

6.2 ÁLGEBRAS DE LIE TIPO BURDE

En esta sección mostraremos la construcción de una familia muy interesante de álgebras de Lie las cuales fueron introducidas por Burde en su trabajo [BEG].

Definamos un conjunto de índices I_n por

$$I_n^0 = \left\{(k,s) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : 2 \leq k \leq \left[\frac{n}{2}\right],\ 2k+1 \leq s \leq n\right\},$$

$$I_n = \begin{cases} I_n^0 & \text{si } n \text{ es impar,} \\ I_n^0 \cup \left\{\left(\frac{n}{2}, n\right)\right\} & \text{si } n \text{ es par.}\end{cases}$$

Fijemos $n \geq 14$ y definamos un álgebra de Lie filiforme $\mathfrak{g}_n$ de dimensión n de la siguiente manera. Para $(k,s) \in I_n$ sea $\alpha_{k,s}$ un conjunto de parámetros sujeto a las siguientes condiciones: todos los $\alpha_{k,s}$ son cero excepto los siguientes:

$$\begin{aligned}
\alpha_{l,2l+1} &= \frac{3}{\binom{l}{2}\binom{2l-1}{l-1}} \quad \text{para} \quad l = 2,3,\ldots,\left[\frac{n-1}{2}\right],\\
\alpha_{3,n-4} &= 1,\\
\alpha_{4,n-2} &= \frac{1}{2} + \frac{10(n-3)(n-8)}{21(n-4)(n-5)},\\
\alpha_{5,n} &= \frac{1}{42} + \frac{70(n-8)}{11(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} + \frac{25(n-6)(n-7)(n-8)}{99(n-2)(n-3)(n-4)}\\
&+ \frac{5(n-5)(n-6)}{66(n-2)(n-3)} - \frac{65(n-7)(n-8)}{1386(n-4)(n-5)}.
\end{aligned}$$

Sea $\{e_1,\ldots,e_n\}$ una base de $\mathfrak{g}_n$ y definamos los corchetes de Lie por:

$$\begin{aligned}
[e_1,e_i] &= e_{i+1} \quad \text{para} \quad i = 2,3,\ldots,n-1,\\
[e_i,e_j] &= \sum_{r=1}^{n}\left(\sum_{l=0}^{[\frac{j-i-1}{2}]}(-1)^l\binom{j-i-l-1}{l}\alpha_{i+l,r-j+i+2l+1}\right)e_r \quad \text{para} \quad 2 \le i < j \le n.
\end{aligned}$$

El álgebra de Lie $\mathfrak{g}_n$ resulta ser filiforme y característicamente nilpotente. Ahora, estos corchetes se pueden reescribir de tal forma que nos resulten más útiles para los cálculos. Por definición de los parámetros $\alpha_{k,s}$ tenemos los siguientes casos:

- Si $i+l=3$ y $r-j+i+2l+1=n-4$ entonces $l=3-i$ y $r=n+j+i-11$.

- Si $i+l=4$ y $r-j+i+2l+1=n-2$ entonces $l=4-i$ y $r=n+j+i-11$.

- Si $i+l=5$ y $r-j+i+2l+1=n$ entonces $l=5-i$ y $r=n+j+i-11$.

- Si $2(i+l)+1=r-j+i+2l+1=n-4$ entonces $r=i+j$.

Por lo tanto el álgebra de Lie $\mathfrak{g}_n$ se puede presentar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
[e_1,e_i] &= e_{i+1} \quad \text{para} \quad i = 2,3,\ldots,n-1,\\
[e_i,e_j] &= \left[(-1)^{3-i}\binom{j-4}{3-i} + (-1)^{4-i}\binom{j-5}{4-i} + (-1)^{5-i}\binom{j-6}{5-i}\right]e_{n+j+i-11}\\
&+ \left[\sum_{l=0}^{[\frac{j-i-1}{2}]}(-1)^l\binom{j-i-l-1}{l}\alpha_{i+l,2(i+l)+1}\right]e_{i+j} \quad \text{para} \quad 2 \le i < j \le n.
\end{aligned}$$

Las álgebras de Lie dadas por Burde además de ser filiformes y característicamente nilpotentes, tienen la particularidad adicional de que todos sus ideales de codimensión 1 son también característicamente nilpotentes, lo cual hacía creer a Burde que estas podrían servir de contraejemplo para la conjetura de Vergne para las álgebras de Lie característicamente nilpotentes y dimensión $n \ge 14$.

6.3 DEFORMACIONES NO TRIVIALES

En esta sección mostraremos que dada una familia $\mathfrak{h}_n$ de ideales de codimensión 1 de $\mathfrak{g}_n$ y una familia de derivaciones nilpotentes de estos ideales, se pueden construir deformaciones no triviales de la familia de álgebras de Lie $\mathfrak{g}_n$, descartando así lo que suponía Burde.

Consideremos $\mathfrak{h}_n = \langle e_2, \dots, e_n \rangle$ el ideal de codimensión 1 de $\mathfrak{g}_n$ y sea $D_n \in \mathrm{End}(\mathfrak{h}_n)$ definida por:

$$D_n(e_3) = e_{n-3}$$
$$D_n(e_5) = \beta_n e_{n-1} \quad \text{con} \quad \beta_n = \sum_{l=0}^{[\frac{n-6}{2}]} (-1)^l \frac{3\binom{n-l-6}{l}}{\binom{2+l}{2}\binom{2l+3}{l+1}}$$

Entonces D_n resulta ser una derivación para $\mathfrak{h}_n$.

Proposición 6.3.1.
Para todo $n \geq 14$ tenemos que D_n es una derivación nilpotente de $\mathfrak{h}_n$.

Demostración

$$\begin{aligned}
D_n[e_i, e_j] &= D_n\Bigg(\left[(-1)^{3-i}\binom{j-4}{3-i} + (-1)^{4-i}\binom{j-5}{4-i} + (-1)^{5-i}\binom{j-6}{5-i}\right] e_{n+j+i-11} \\
&\quad + \left[\sum_{l=0}^{[\frac{j-i-1}{2}]} (-1)^l \binom{j-i-l-1}{l} \alpha_{i+l,2(i+l)+1}\right] e_{i+j}\Bigg) \quad \text{para} \quad 2 \leq i < j \leq n. \\
&= \begin{cases} D_n(e_5) & \text{para } i=2,\ j=3, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \beta_n e_{n-1} & \text{para } i=2,\ j=3, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \left[\sum_{l=0}^{[\frac{n-6}{2}]} (-1)^l \frac{3\binom{n-l-6}{l}}{\binom{2+l}{2}\binom{2l+3}{l+1}}\right] e_{n-1} & \text{para } i=2,\ j=3, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Por otro lado tenemos

$$\begin{aligned}
[D_n(e_i), e_j] + [e_i, D_n(e_j)] &= \begin{cases} [e_2, D_n(e_3)] & \text{para } i=2,\ j=3, \\ [D_n(e_3), e_5] + [e_3, D_n(e_5)] & \text{para } i=3,\ j=5, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \\
&= \begin{cases} [e_2, e_{n-3}] & \text{para } i=2,\ j=3, \\ -[e_5, e_{n-3}] + \beta_n [e_3, e_{n-1}] & \text{para } i=3,\ j=5, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \\
&= \begin{cases} [e_2, e_{n-3}] & \text{para } i=2,\ j=3, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \left[\sum_{l=0}^{[\frac{n-6}{2}]} (-1)^l \binom{n-l-6}{l} \alpha_{2+l,2(2+l)+1}\right] e_{n-1} & \text{para } i=2,\ j=3, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \left[\sum_{l=0}^{[\frac{n-6}{2}]} (-1)^l \frac{3\binom{n-l-6}{l}}{\binom{2+l}{2}\binom{2l+3}{l+1}}\right] e_{n-1} & \text{para } i=2,\ j=3, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Luego $D_n \in \mathcal{D}er(\mathfrak{h}_n)$ y además D_n es nilpotente pues $D_n^2 = 0$. ∎

Ahora si consideramos la deformación $\mu_{n,t} = \mu_n + t\mu_{D_n}$ donde μ_n es el corchete de Lie de $\mathfrak{g}_n$ y

$$\begin{aligned} \mu_{D_n}(e_1, h) &= D_n(h) \quad \text{para todo } h \in \mathfrak{h}_n \\ \mu_{D_n}(\mathfrak{h}_n, \mathfrak{h}_n) &= 0 \end{aligned}$$

tenemos el siguiente resultado.

Teorema 6.3.2.
$\mu_{n,t}$ *es una deformación no trivial de* μ_n *para todo* $n \geq 14$.

Demostración
Consideremos el álgebra de Lie tipo Burde μ_n de dimensión n y $\mathfrak{h}_n = \langle e_2, \ldots, e_n \rangle$ un ideal de codimensión 1. Sea $D_n \in \mathcal{D}er(\mathfrak{h}_n)$ la derivación nilpotente de la Proposición 6.3.1 dada por

$$D_n(e_3) = e_{n-3}$$

$$D_n(e_5) = \beta_n e_{n-1} \quad \text{con} \quad \beta_n = \sum_{l=0}^{[\frac{n-6}{2}]} (-1)^l \frac{3\binom{n-l-6}{l}}{\binom{2+l}{2}\binom{2l+3}{l+1}}$$

de donde obtenemos la deformación $\mu_{n,1} = \mu_n + \mu_{D_n}$ de μ_n y queremos probar que esta deformación es no trivial. Supongamos que existe $g \in GL(n, \mathbb{C})$ tal que $g \cdot \mu_{n,1} = \mu_n$, es decir, tal que $\mu_{n,1}$ y μ_n son isomorfas. Puesto que μ_n y $\mu_{n,1}$ tienen como serie central ascendente

$$\begin{aligned} C_1 &= \langle e_n \rangle, \\ C_2 &= \langle e_n, e_{n-1} \rangle, \\ C_3 &= \langle e_n, e_{n-1}, e_{n-2} \rangle, \\ &\vdots \\ C_{n-2} &= \langle e_n, e_{n-1}, e_{n-2}, \ldots, e_7, e_6, e_5, e_4, e_3 \rangle, \\ C_{n-1} &= \langle e_n, e_{n-1}, e_{n-2}, \ldots, e_7, e_6, e_5, e_4, e_3, e_2, e_1 \rangle. \end{aligned}$$

Entonces por ser g isomorfismo debe preservar la serie central, con lo cual g debe tener la siguiente forma

$$g = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & & & & & & \\ m_{2,1} & m_{2,2} & & & & & & \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & & & & & \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \ddots & \\ m_{n,1} & m_{n,2} & m_{n,3} & m_{n,4} & \cdots & \cdots & \cdots & m_{n,n} \end{pmatrix}$$

Luego, por la ecuación 4 se tiene

$$g\mu_{n,1}(e_i, e_j) - \mu_n(ge_i, ge_j) = 0 \quad \text{para} \quad 1 \leq i \leq n-1, i+1 \leq j \leq n.$$

Esto produce un sistema de ecuaciones en las variables $m_{i,j}$ dado por

$$q_{i,j}[k] = \big(g\mu_{n,1}(e_i, e_j) - \mu_n(ge_i, ge_j)\big)[k] = 0 \quad \text{para} \quad 1 \leq k \leq n,$$

donde $g\mu_{n,1}(e_i, e_j) - \mu_n(ge_i, ge_j)$ es un vector de tamaño $n \times 1$. Como las proyecciones de estos vectores son ecuaciones en las variables $m_{i,j}$ entonces consideramos las siguientes:

$$q_{1,i}[i+1] = 0 \quad \text{para} \quad 3 \leq i \leq n-1 \quad , \quad q_{2,i}[i+1] = 0 \quad \text{para} \quad 3 \leq i \leq n-1.$$

De donde

$$\begin{aligned} q_{1,i}[i+1] = 0 \quad \text{para} \quad 3 \leq i \leq n-1 &\Longrightarrow m_{i+1,i+1} = m_{1,1}m_{i,i} \quad \text{para} \quad 3 \leq i \leq n-1 \quad (E1). \\ q_{2,i}[i+1] = 0 \quad \text{para} \quad 3 \leq i \leq n-1 &\Longrightarrow m_{1,2}m_{i,i} = 0 \quad \text{para} \quad 3 \leq i \leq n-1 \\ &\Longrightarrow m_{1,2} = 0 \quad \text{ó} \quad m_{i,i} = 0 \quad \text{para} \quad 3 \leq i \leq n-1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos los siguientes casos:
(i) Si $m_{i,i}=0$ para $3\le i\le n-1$, por (E1) se sigue que $m_{n,n}=0$ y así g no es isomorfismo.
(ii) Si $m_{1,2}=0$ entonces

$$q_{1,2}[3]=0 \implies m_{3,3}=m_{1,1}m_{2,2} \quad (E2),$$
$$q_{2,i}[i+2]=0 \quad \text{para} \quad 3\le i\le n-2 \implies m_{i+2,i+2}=m_{2,2}m_{i,i} \quad \text{para} \quad 3\le i\le n-2 \quad (E3).$$

Ahora, de (E1) se tiene que

$$m_{4,4}=m_{1,1}m_{3,3} \quad (E4),$$

y de las ecuaciones (E1),(E3),(E4) tenemos

$$\begin{aligned} m_{1,1}^2m_{3,3}=m_{1,1}m_{4,4}=m_{5,5}=m_{2,2}m_{3,3} &\implies (m_{1,1}^2-m_{2,2})m_{3,3}=0\\ &\implies m_{3,3}=0 \quad \text{ó} \quad m_{2,2}=m_{1,1}^2.\end{aligned}$$

(ii.1) Si $m_{3,3}=0$ entonces por (E1) se obtiene que $m_{n,n}=0$ y así g no es isomorfismo.
(ii.2) Si $m_{2,2}=m_{1,1}^2$ tenemos por (E1) y (E2) que

$$g=g_{m_{1,1}}=\begin{pmatrix} m_{1,1} & & & & & & \\ m_{2,1} & m_{1,1}^2 & & & & & \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{1,1}^3 & & & & \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{1,1}^4 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \ddots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & m_{n,3} & m_{n,4} & \cdots & \cdots\cdots & m_{1,1}^n \end{pmatrix}$$

luego, como $g_{m_{1,1}}\in Aut(\mathfrak{g}_n)$ entonces $g'_{m_{1,1}}\in \mathcal{D}er(\mathfrak{g}_n)$, donde

$$g'_{m_{1,1}}=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ * & 2m_{1,1} & & & & & \\ * & * & 3m_{1,1}^2 & & & & \\ * & * & * & 4m_{1,1}^3 & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \ddots \\ * & & * & * & \cdots & \cdots\cdots & nm_{1,1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

así $\mathfrak{g}_n$ tiene una derivación semisimple, lo cual es absurdo pues $\mathfrak{g}_n$ es característicamente nilpotente.
En conclusión, $\mu_{n,t}$ es una deformación no trivial de μ_n. ■

Los resultados que se mostraron en la esta sección hacen parte de un trabajo en curso [HGT3].

Probar que la deformación es no trivial fue un problema complicado ya que los invariantes usuales que uno conoce para álgebras de Lie, resultan ser iguales para la familia $\mathfrak{g}_n$ y sus deformaciones. Además de esto, si nos fijamos en otros invariantes de álgebras de Lie introducidos en 2008 por Novotný y Hrivnák en [NH], vemos que el resultado sigue siendo el mismo, es decir, los invariantes de la familia $\mathfrak{g}_n$ y los de sus deformaciones son iguales. En la siguiente sección estudiaremos un poco estos invariantes y los ilustraremos con un ejemplo.

6.4 (α,β,γ)-DERIVACIONES Y FUNCIONES INVARIANTES

En esta sección daremos breve recuento del trabajo de Novotný y Hrivnák [NH] acerca de derivaciones generalizadas de álgebras de Lie complejas y funciones invariantes. Primero se dará una generalización de derivación para álgebras complejas arbitrarias y a partir de esta definición nos enfocaremos en el caso de álgebras de Lie, para el cual se introducirán los invariantes y las funciones invariantes que estos producen.

Definición 6.4.1.
Sea $A = (V, \cdot)$ un álgebra arbitraria compleja. Un operador $D \in \mathrm{End}(A)$ se llama (α, β, γ)-***derivación*** de A si existen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ tales que

$$\alpha D(x \cdot y) = \beta(Dx) \cdot y + \gamma x \cdot (Dy) \tag{5}$$

para todo $x, y \in A$. El conjunto de todas las (α, β, γ)-derivaciones de A se denota por $\mathcal{D}er_{(\alpha,\beta,\gamma)}(A)$.

Teorema 6.4.2.
Sea $f : A \longrightarrow \tilde{A}$ *un isomorfismo de álgebras complejas, entonces la aplicación*

$$\begin{aligned} \rho : \mathrm{End}(A) &\longrightarrow \mathrm{End}(\tilde{A}) \\ D &\longmapsto fDf^{-1} \end{aligned}$$

es un isomorfismo de álgebras asociativas $\mathrm{End}A$ *y* $\mathrm{End}\tilde{A}$*. Además, para todo* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ *tenemos que*

$$\rho(\mathcal{D}er_{(\alpha,\beta,\gamma)}(A)) = \mathcal{D}er_{(\alpha,\beta,\gamma)}(\tilde{A}).$$

Corolario 6.4.3.
Para todo $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ *la dimensión del espacio vectorial* $\mathcal{D}er_{(\alpha,\beta,\gamma)}(A)$ *es un invariante de álgebras.*

Para un álgebra anti-conmutativa o conmutativa compleja A, se sigue de la ecuación (5) que para cualquier $\epsilon \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\mathcal{D}er_{(\alpha,\beta,\gamma)}(A) = \mathcal{D}er_{(\epsilon\alpha,\epsilon\beta,\epsilon\gamma)}(A) = \mathcal{D}er_{(\alpha,\gamma,\beta)}(A). \tag{6}$$

Lema 6.4.4.
Sea A *un álgebra anti-conmutativa o conmutativa compleja, entonces para todo* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ *tenemos que*

$$\mathcal{D}er_{(\alpha,\beta,\gamma)}(A) = \mathcal{D}er_{(0,\beta-\gamma,\gamma-\beta)}(A) \cap \mathcal{D}er_{(2\alpha,\beta+\gamma,\beta+\gamma)}(A).$$

Teorema 6.4.5.
Sea A *un álgebra anti-conmutativa o conmutativa compleja, entonces para todo* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ *existe* $\delta \in \mathbb{C}$ *tal que el subespacio* $\mathcal{D}er_{(\alpha,\beta,\gamma)}(A) \subset \mathrm{End}(A)$ *es igual a alguno de los siguientes subespacios:*
(1) $\mathcal{D}er_{(\delta,0,0)}(A)$.
(2) $\mathcal{D}er_{(\delta,1,-1)}(A)$.
(3) $\mathcal{D}er_{(\delta,1,0)}(A)$.
(4) $\mathcal{D}er_{(\delta,1,1)}(A)$.

Después de los resultados anteriores dados para álgebras anti-conmutativas o conmutativas complejas, nos centraremos en un caso particular de las álgebras anti-conmutativas, como es el caso de las álgebras de Lie para el cual estudiaremos los subespacios invariantes anteriormente definidos.

Teorema 6.4.6.
Sea $\mathfrak{g}$ *un álgebra de Lie compleja y sean* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ *no todos cero. Entonces el espacio* $\mathcal{D}er_{(\alpha,\beta,\gamma)}(\mathfrak{g})$ *es igual a alguno de los siguientes:*
(1) *El álgebra de Lie de derivaciones* $\mathcal{D}er_{(1,1,1)}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.
(2) *El álgebra de Lie* $\mathcal{D}er_{(0,1,1)}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.
(3) *El álgebra asociativa* $\mathcal{D}er_{(1,1,0)}(\mathfrak{g}) = C_{ad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$*, donde*

$$C_{ad}(\mathfrak{g}) = \{D \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) : [D, ad x] = 0 \text{ para todo } x \in \mathfrak{g}\}.$$

(4) *El álgebra asociativa* $\mathcal{D}er_{(1,0,0)}(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{End}\mathfrak{g}$, *donde*

$$\dim \mathcal{D}er_{(1,0,0)}(\mathfrak{g}) = \mathrm{codim}\mathfrak{g}^2 \dim \mathfrak{g}.$$

(5) *El álgebra asociativa* $\mathcal{D}er_{(0,1,0)}(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{End}\mathfrak{g}$, *donde*

$$\dim \mathcal{D}er_{(0,1,0)}(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{g} \dim C(\mathfrak{g}).$$

(6) *El álgebra de Jordan* $\mathcal{D}er_{(1,1,-1)}(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{jor}(\mathfrak{g})$.
(7) *El álgebra de Jordan* $\mathcal{D}er_{(0,1,-1)}(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{jor}(\mathfrak{g})$.
(8) *El subespacio* $\mathcal{D}er_{(\delta,1,0)}(\mathfrak{g})$ *para algún* $\delta \in \mathbb{C}$ *con* $\delta \neq 0, 1$.
(9) *El subespacio* $\mathcal{D}er_{(\delta,1,1)}(\mathfrak{g})$ *para algún* $\delta \in \mathbb{C}$ *con* $\delta \neq 0, 1$.

Nota 6.4.7.
En el teorema anterior $\mathrm{jor}(\mathfrak{g})$ significa que al considerar una nueva multiplicación sobre $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$

$$x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx) \quad \text{para todo } x, y \in \mathrm{End}(\mathfrak{g}).$$

se obtiene un álgebra de Jordan, la cual se denota por $\mathrm{jor}(\mathfrak{g})$.

Ahora pasaremos a estudiar las intersecciones de los espacios de (α,β,γ)-derivaciones de un álgebra compleja y veremos que se obtienen resultados similares a los anteriores. Además nos son de gran utilidad porque producen más espacios invariantes.

Teorema 6.4.8.
Sea $f : A \longrightarrow \tilde{A}$ *un isomorfismo de álgebras complejas, entonces la aplicación*

$$\begin{aligned} \rho : \mathrm{End}A &\longrightarrow \mathrm{End}\tilde{A} \\ D &\longmapsto fDf^{-1} \end{aligned}$$

es un isomorfismo de álgebras asociativas $\mathrm{End}A$ *y* $\mathrm{End}\tilde{A}$. *Además, para todo* $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma' \in \mathbb{C}$ *tenemos*

$$\rho\left(\mathcal{D}er_{(\alpha,\beta,\gamma)}(A) \cap \mathcal{D}er_{(\alpha',\beta',\gamma')}(A)\right) = \mathcal{D}er_{(\alpha,\beta,\gamma)}(\tilde{A}) \cap \mathcal{D}er_{(\alpha',\beta',\gamma')}(\tilde{A}).$$

Corolario 6.4.9.
Para todo $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma' \in \mathbb{C}$ *la dimensión del espacio vectorial* $\mathcal{D}er_{(\alpha,\beta,\gamma)}(A) \cap \mathcal{D}er_{(\alpha',\beta',\gamma')}(A)$ *es un invariante de álgebras.*

Teorema 6.4.10.
Sea $\mathfrak{g}$ *un álgebra de Lie compleja. Supongamos* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ *no todos cero y* $\alpha', \beta', \gamma' \in \mathbb{C}$ *no todos cero. Entonces la intersección*

$$\mathcal{D}er_{(\alpha,\beta,\gamma)}(\mathfrak{g}) \cap \mathcal{D}er_{(\alpha',\beta',\gamma')}(\mathfrak{g})$$

es igual a alguno de los siguientes:
(1) *El álgebra de Lie de derivaciones* $\mathcal{D}er_{(1,1,1)}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.
(2) *El álgebra de Lie* $\mathcal{D}er_{(0,1,1)}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.
(3) *El álgebra asociativa* $\mathcal{D}er_{(1,1,0)}(\mathfrak{g}) = C_{ad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, *donde*

$$C_{ad}(\mathfrak{g}) = \{D \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) : [D, adx] = 0 \text{ para todo } x \in \mathfrak{g}\}.$$

(4) *El álgebra asociativa* $\mathcal{D}er_{(1,0,0)}(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{End}\mathfrak{g}$,*donde*

$$\dim \mathcal{D}er_{(1,0,0)}(\mathfrak{g}) = \mathrm{codim}\mathfrak{g}^2 \dim \mathfrak{g}.$$

(5) *El álgebra asociativa* $\mathcal{D}er_{(0,1,0)}(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{End}\,\mathfrak{g}$, *donde*

$$\dim \mathcal{D}er_{(0,1,0)}(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{g} \dim C(\mathfrak{g}).$$

(6) *El álgebra de Jordan* $\mathcal{D}er_{(1,1,-1)}(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{jor}(\mathfrak{g})$.
(7) *El álgebra de Jordan* $\mathcal{D}er_{(0,1,-1)}(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{jor}(\mathfrak{g})$.
(8) *El subespacio* $\mathcal{D}er_{(\delta,1,0)}(\mathfrak{g})$ *para algún* $\delta \in \mathbb{C}$ *con* $\delta \neq 0, 1$.
(9) *El subespacio* $\mathcal{D}er_{(\delta,1,1)}(\mathfrak{g})$ *para algún* $\delta \in \mathbb{C}$ *con* $\delta \neq 0, 1$.
(10) *El álgebra asociativa* $\mathcal{D}er_{(1,0,0)}(\mathfrak{g}) \cap \mathcal{D}er_{(0,1,0)}(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{End}\,\mathfrak{g}$, *donde*

$$\dim \mathcal{D}er_{(1,0,0)}(\mathfrak{g}) \cap \mathcal{D}er_{(0,1,0)}(\mathfrak{g}) = \mathrm{codim}\,\mathfrak{g}^2 \dim C(\mathfrak{g}).$$

(11) *El álgebra de Lie* $\mathcal{D}er_{(1,1,1)}(\mathfrak{g}) \cap \mathcal{D}er_{(0,1,1)}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.

Consideremos ahora el siguiente conjunto de invariantes de álgebras de Lie:

$$\mathrm{inv}\mathfrak{g} = (d_k)(l_k)(c_k)[d(1,1,1), d(0,1,1), d(1,1,0), d(1,1,1)(0,1,1), d(1,1,-1), d(0,1,1)] \tag{7}$$

donde (d_k), (l_k) y (c_k) son las dimensiones de los elementos de las series derivada, central descendente y central ascendente de $\mathfrak{g}$ respectivamente. Además, denotamos

$$\begin{aligned} d(\alpha,\beta,\gamma) &= \dim \mathcal{D}er(\mathfrak{g}) \\ d(\alpha,\beta,\gamma)(\alpha',\beta',\gamma') &= \dim\left(\mathcal{D}er_{(\alpha,\beta,\gamma)}(\mathfrak{g}) \cap \mathcal{D}er_{(\alpha',\beta',\gamma')}(\mathfrak{g})\right) \end{aligned}$$

A continuación vamos a introducir una serie de ejemplos que muestren la importancia de estos invariantes.

Ejemplo 6.4.11.
Consideremos las siguientes álgebras de Lie de dimensión 8:

$\mathfrak{g}_1$	$[e_1,e_3]=e_5,\quad [e_1,e_4]=e_8,\quad [e_1,e_5]=e_7,\quad [e_1,e_6]=e_4,\quad [e_2,e_3]=e_7,\quad [e_3,e_5]=e_8,\quad [e_4,e_6]=e_7.$
$\mathfrak{g}_2$	$[e_1,e_3]=e_5,\quad [e_1,e_4]=e_8,\quad [e_1,e_6]=e_4,\quad [e_2,e_3]=e_7,\quad [e_2,e_6]=e_8,\quad [e_3,e_5]=e_8,\quad [e_4,e_6]=e_7.$

y calculemos los invariantes definidos en 7.

$\begin{aligned}\mathrm{inv}\mathfrak{g}_1 &= (d_k)(l_k)(c_k)[d(1,1,1), d(0,1,1), d(1,1,0), d(1,1,1)(0,1,1), d(1,1,-1), d(0,1,1)] \\ &= (8,4,0)(8,4,2,0)(2,5,8)[16,19,9,11,8,17]\end{aligned}$
$\begin{aligned}\mathrm{inv}\mathfrak{g}_2 &= (d_k)(l_k)(c_k)[d(1,1,1), d(0,1,1), d(1,1,0), d(1,1,1)(0,1,1), d(1,1,-1), d(0,1,1)] \\ &= (8,4,0)(8,4,2,0)(2,5,8)[16,19,9,11,8,17]\end{aligned}$

$\mathrm{inv}\mathcal{D}er_{(1,1,1)}(\mathfrak{g}_1)$ $= (d_k)(l_k)(c_k)[d(1,1,1), d(0,1,1), d(1,1,0), d(1,1,1)(0,1,1), d(1,1,-1), d(0,1,1)]$ $= (16,15,6,0)(16,15)(0)[16,15,1,6,0,1]$
$\mathrm{inv}\mathcal{D}er_{(1,1,1)}(\mathfrak{g}_2)$ $= (d_k)(l_k)(c_k)[d(1,1,1), d(0,1,1), d(1,1,0), d(1,1,1)(0,1,1), d(1,1,-1), d(0,1,1)]$ $= (16,15,6,0)(16,15)(0)[16,15,1,6,0,1]$

$\mathrm{inv}\mathcal{D}er_{(0,1,1)}(\mathfrak{g}_1)$ $= (d_k)(l_k)(c_k)[d(1,1,1), d(0,1,1), d(1,1,0), d(1,1,1)(0,1,1), d(1,1,-1), d(0,1,1)]$ $= (19,15)(19,15)(0)[32,0,1,0,0,1]$
$\mathrm{inv}\mathcal{D}er_{(0,1,1)}(\mathfrak{g}_2)$ $= (d_k)(l_k)(c_k)[d(1,1,1), d(0,1,1), d(1,1,0), d(1,1,1)(0,1,1), d(1,1,-1), d(0,1,1)]$ $= (19,15)(19,15)(0)[32,0,1,0,0,1]$

$\mathrm{inv}\mathcal{D}er_{(1,1,1)}(\mathfrak{g}_1) \cap \mathcal{D}er_{(0,1,1)}(\mathfrak{g}_1)$ $= (d_k)(l_k)(c_k)[d(1,1,1), d(0,1,1), d(1,1,0), d(1,1,1)(0,1,1), d(1,1,-1), d(0,1,1)]$ $= (11,6,0)(11,6,0)(6,11)[43,\ldots]$
$\mathrm{inv}\mathcal{D}er_{(1,1,1)}(\mathfrak{g}_2) \cap \mathcal{D}er_{(0,1,1)}(\mathfrak{g}_2)$ $= (d_k)(l_k)(c_k)[d(1,1,1), d(0,1,1), d(1,1,0), d(1,1,1)(0,1,1), d(1,1,-1), d(0,1,1)]$ $= (11,4,0)(11,4,0)(7,11)[57,\ldots]$

Por lo tanto, tenemos que $\mathfrak{g}_1 \ncong \mathfrak{g}_2$.

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, usaremos los conjuntos 1-paramétricos de espacios vectoriales

$$\mathcal{D}er_{(\delta,1,0)}(\mathfrak{g}) \quad , \quad \mathcal{D}er_{(\delta,1,1)}(\mathfrak{g})$$

para definir funciones invariantes del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Definición 6.4.12.
Las funciones

$$\psi,\ \phi : \mathbb{C} \longrightarrow \{0,1,2,\ldots,(\dim\mathfrak{g})^2\}$$

definidas por

$$\psi(\alpha) = \dim\mathcal{D}er_{(\alpha,1,1)}(\mathfrak{g}) \quad , \quad \phi(\alpha) = \dim\mathcal{D}er_{(\alpha,1,0)}(\mathfrak{g})$$

son llamadas ***funciones invariantes*** correspondientes a las (α,β,γ)-derivaciones de $\mathfrak{g}$.

Ejemplo 6.4.13.
Consideremos las siguientes álgebras de Lie de dimensión 3:

$\mathfrak{r}_{3,1}$	$[e_1, e_2] = e_2, \quad [e_1, e_3] = e_3.$
$\mathfrak{r}_{3,-1}$	$[e_1, e_2] = e_2, \quad [e_1, e_3] = -e_3.$
$\mathfrak{r}_{3,\lambda}$	$[e_1, e_2] = e_2, \quad [e_1, e_3] = \lambda e_3 \quad \text{con } 0 < \lvert\lambda\rvert < 1.$

$inv\mathfrak{r}_{3,1}$ $= (d_k)(l_k)(c_k)[d(1,1,1), d(0,1,1), d(1,1,0), d(1,1,1)(0,1,1), d(1,1,-1), d(0,1,1)]$ $= (3,2,0)(3,2)(0)[6,3,1,2,0,1]$
$inv\mathfrak{r}_{3,-1}$ $= (d_k)(l_k)(c_k)[d(1,1,1), d(0,1,1), d(1,1,0), d(1,1,1)(0,1,1), d(1,1,-1), d(0,1,1)]$ $= (3,2,0)(3,2)(0)[4,3,1,2,0,1]$
$inv\mathfrak{r}_{3,\lambda}$ $= (d_k)(l_k)(c_k)[d(1,1,1), d(0,1,1), d(1,1,0), d(1,1,1)(0,1,1), d(1,1,-1), d(0,1,1)]$ $= (3,2,0)(3,2)(0)[4,3,1,2,0,1]$

En este caso vemos que solo podemos concluir que $\mathfrak{r}_{3,1} \ncong \mathfrak{r}_{3,-1}$ y $\mathfrak{r}_{3,1} \ncong \mathfrak{r}_{3,\lambda}$. Para ver si $\mathfrak{r}_{3,-1} \ncong \mathfrak{r}_{3,\lambda}$, podríamos pasar a fijarnos en las intersecciones de los espacios de derivaciones como en el ejemplo 6.4.11, pero preferimos hacer uso de las funciones invariantes de las álgebras de Lie.

$\mathfrak{r}_{3,-1}$			
α	-1	1	
$\psi(\alpha)$	5	4	3

$\mathfrak{r}_{3,\lambda}$				
α	λ	1	$\frac{1}{\lambda}$	
$\psi(\alpha)$	4	4	4	3

Como $\psi(-1) = 5$ para $\mathfrak{r}_{3,-1}$y $\psi(-1) = 3$ para $\mathfrak{r}_{3,\lambda}$, tenemos que $\mathfrak{r}_{3,-1} \ncong \mathfrak{r}_{3,\lambda}$.

El siguiente ejemplo ilustra un caso particular de las álgebras de Lie tipo Burde y en el cual se observa la dificultad que se tiene para decidir si las deformaciones de estas álgebras son no triviales, ya que los invariantes usuales y los nuevos invariantes introducidos en esta sección, son iguales tanto para el álgebra de Lie tipo Burde como para su deformación.

Ejemplo 6.4.14.
Consideremos el álgebra de Lie tipo Burde de dimensión 14,

μ_{14}	$\begin{gathered} [e_1,e_2]=e_3, \quad [e_1,e_3]=e_4, \quad [e_1,e_4]=e_5, \quad [e_1,e_5]=e_6, \quad [e_1,e_6]=e_7, \\ [e_1,e_7]=e_8, \quad [e_1,e_8]=e_9, \quad [e_1,e_9]=e_{10}, \quad [e_1,e_{10}]=e_{11}, \quad [e_1,e_{11}]=e_{12}, \\ [e_1,e_{12}]=e_{13}, \quad [e_1,e_{13}]=e_{14}, \quad [e_2,e_3]=e_5, \quad [e_2,e_4]=e_6, \\ [e_2,e_5]=-e_{10}+\tfrac{9}{10}e_7, \quad [e_2,e_6]=-2e_{11}+\tfrac{4}{5}e_8, \quad [e_2,e_7]=-\tfrac{166}{63}e_{12}+\tfrac{5}{7}e_9, \\ [e_2,e_8]=-\tfrac{61}{21}e_{13}+\tfrac{9}{14}e_{10}, \quad [e_2,e_9]=-\tfrac{19039}{6534}e_{14}+\tfrac{7}{12}e_{11}, \quad [e_2,e_{10}]=\tfrac{8}{15}e_{12}, \\ [e_2,e_{11}]=\tfrac{27}{55}e_{13}, \quad [e_2,e_{12}]=\tfrac{5}{11}e_{14}, \quad [e_3,e_4]=e_{10}+\tfrac{1}{10}e_7, \\ [e_3,e_5]=e_{11}+\tfrac{1}{10}e_8, \quad [e_3,e_6]=\tfrac{40}{63}e_{12}+\tfrac{3}{35}e_9, \quad [e_3,e_7]=\tfrac{17}{63}e_{13}+\tfrac{1}{14}e_{10}, \\ [e_3,e_8]=\tfrac{415}{45738}e_{14}+\tfrac{5}{84}e_{11}, \quad [e_3,e_9]=\tfrac{1}{20}e_{12}, \quad [e_3,e_{10}]=\tfrac{7}{165}e_{13}, \\ [e_3,e_{11}]=\tfrac{2}{55}e_{14}, \quad [e_4,e_5]=\tfrac{23}{63}e_{12}+\tfrac{1}{70}e_9, \quad [e_4,e_6]=\tfrac{23}{63}e_{13}+\tfrac{1}{70}e_{10}, \\ [e_4,e_7]=\tfrac{11927}{45738}e_{14}+\tfrac{1}{84}e_{11}, \quad [e_4,e_8]=\tfrac{1}{105}e_{12}, \quad [e_4,e_9]=\tfrac{1}{132}e_{13}, \\ [e_4,e_{10}]=\tfrac{1}{165}e_{14}, \quad [e_5,e_6]=\tfrac{4771}{45738}e_{14}+\tfrac{1}{420}e_{11}, \quad [e_5,e_7]=\tfrac{1}{420}e_{12}, \\ [e_5,e_8]=\tfrac{3}{1540}e_{13}, \quad [e_5,e_9]=\tfrac{1}{660}e_{14}, \quad [e_6,e_7]=\tfrac{1}{2310}e_{13}, \quad [e_6,e_8]=\tfrac{1}{2310}e_{14}. \end{gathered}$

Sea $\mu_{14,1} = \mu_{14} + \mu_{D_{14}}$ la deformación construida como en el Teorema 6.3.2 y donde D_{14} es la derivación nilpotente de la Proposición 6.3.1.

$\mu_{14,1}$	$\begin{gathered} [e_1,e_2]=e_3, \quad [e_1,e_3]=e_4+e_{11}, \quad [e_1,e_4]=e_5, \quad [e_1,e_5]=e_6+\tfrac{27}{55}e_{13}, \\ [e_1,e_6]=e_7, \quad [e_1,e_7]=e_8, \quad [e_1,e_8]=e_9, \quad [e_1,e_9]=e_{10}, \quad [e_1,e_{10}]=e_{11}, \\ [e_1,e_{11}]=e_{12}, \quad [e_1,e_{12}]=e_{13}, \quad [e_1,e_{13}]=e_{14}, \quad [e_2,e_3]=e_5, \quad [e_2,e_4]=e_6, \\ [e_2,e_5]=-e_{10}+\tfrac{9}{10}e_7, \quad [e_2,e_6]=-2e_{11}+\tfrac{4}{5}e_8, \quad [e_2,e_7]=-\tfrac{166}{63}e_{12}+\tfrac{5}{7}e_9, \\ [e_2,e_8]=-\tfrac{61}{21}e_{13}+\tfrac{9}{14}e_{10}, \quad [e_2,e_9]=-\tfrac{19039}{6534}e_{14}+\tfrac{7}{12}e_{11}, \quad [e_2,e_{10}]=\tfrac{8}{15}e_{12}, \\ [e_2,e_{11}]=\tfrac{27}{55}e_{13}, \quad [e_2,e_{12}]=\tfrac{5}{11}e_{14}, \quad [e_3,e_4]=e_{10}+\tfrac{1}{10}e_7, \\ [e_3,e_5]=e_{11}+\tfrac{1}{10}e_8, \quad [e_3,e_6]=\tfrac{40}{63}e_{12}+\tfrac{3}{35}e_9, \quad [e_3,e_7]=\tfrac{17}{63}e_{13}+\tfrac{1}{14}e_{10}, \\ [e_3,e_8]=\tfrac{415}{45738}e_{14}+\tfrac{5}{84}e_{11}, \quad [e_3,e_9]=\tfrac{1}{20}e_{12}, \quad [e_3,e_{10}]=\tfrac{7}{165}e_{13}, \\ [e_3,e_{11}]=\tfrac{2}{55}e_{14}, \quad [e_4,e_5]=\tfrac{23}{63}e_{12}+\tfrac{1}{70}e_9, \quad [e_4,e_6]=\tfrac{23}{63}e_{13}+\tfrac{1}{70}e_{10}, \\ [e_4,e_7]=\tfrac{11927}{45738}e_{14}+\tfrac{1}{84}e_{11}, \quad [e_4,e_8]=\tfrac{1}{105}e_{12}, \quad [e_4,e_9]=\tfrac{1}{132}e_{13}, \\ [e_4,e_{10}]=\tfrac{1}{165}e_{14}, \quad [e_5,e_6]=\tfrac{4771}{45738}e_{14}+\tfrac{1}{420}e_{11}, \quad [e_5,e_7]=\tfrac{1}{420}e_{12}, \\ [e_5,e_8]=\tfrac{3}{1540}e_{13}, \quad [e_5,e_9]=\tfrac{1}{660}e_{14}, \quad [e_6,e_7]=\tfrac{1}{2310}e_{13}, \quad [e_6,e_8]=\tfrac{1}{2310}e_{14}. \end{gathered}$

μ_{14} $= (d_k)(l_k)(c_k)[d(1,1,1), d(0,1,1), d(1,1,0), d(1,1,1)(0,1,1), d(1,1,-1), d(0,1,1)]$ $= (14,12,8,0)(14,12,11,10,9,8,7,6,5,4,3,2,1,0)(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,14)$ $[16,17,3,3,2,15]$
$\mathrm{inv}\mu_{14,1}$ $= (d_k)(l_k)(c_k)[d(1,1,1), d(0,1,1), d(1,1,0), d(1,1,1)(0,1,1), d(1,1,-1), d(0,1,1)]$ $= (14,12,8,0)(14,12,11,10,9,8,7,6,5,4,3,2,1,0)(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,14)$ $[16,17,3,3,2,15]$

$inv\mathcal{D}er_{(1,1,1)}(\mu_{14})$ $= (d_k)(l_k)(c_k)[d(1,1,1), d(0,1,1), d(1,1,0), d(1,1,1)(0,1,1), d(1,1,-1), d(0,1,1)]$ $= (16,11,7,0)(16,11,10,9,8,7,6,5,4,3,2,1,0)(2,4,6,7,8,9,10,11,12,13,14,16)$ $[27,41,13,8,11,35]$
$inv\mathcal{D}er_{(1,1,1)}(\mu_{14,1})$ $= (d_k)(l_k)(c_k)[d(1,1,1), d(0,1,1), d(1,1,0), d(1,1,1)(0,1,1), d(1,1,-1), d(0,1,1)]$ $= (16,11,7,0)(16,11,10,9,8,7,6,5,4,3,2,1,0)(2,4,6,7,8,9,10,11,12,13,14,16)$ $[27,41,13,8,11,35]$

$inv\mathcal{D}er_{(0,1,1)}(\mu_{14})$ $= (d_k)(l_k)(c_k)[d(1,1,1), d(0,1,1), d(1,1,0), d(1,1,1)(0,1,1), d(1,1,-1), d(0,1,1)]$ $= (17,13,0)(17,13)(0)[121,20,4,,0,4]$
$inv\mathcal{D}er_{(0,1,1)}(\mu_{14,1})$ $= (d_k)(l_k)(c_k)[d(1,1,1), d(0,1,1), d(1,1,0), d(1,1,1)(0,1,1), d(1,1,-1), d(0,1,1)]$ $= (17,13,0)(17,13)(0)[121,20,4,,0,4]$

$inv\mathcal{D}er_{(1,1,1)}(\mu_{14}) \cap \mathcal{D}er_{(0,1,1)}(\mu)$ $= (d_k)(l_k)(c_k)[d(1,1,1), d(0,1,1), d(1,1,0), d(1,1,1)(0,1,1), d(1,1,-1), d(0,1,1)]$ $= (3,0)(3,0)(0)[9,9,9,9,9,9]$
$inv\mathcal{D}er_{(1,1,1)}(\mu_{14,1}) \cap \mathcal{D}er_{(0,1,1)}(\mu_1)$ $= (d_k)(l_k)(c_k)[d(1,1,1), d(0,1,1), d(1,1,0), d(1,1,1)(0,1,1), d(1,1,-1), d(0,1,1)]$ $= (3,0)(3,0)(0)[9,9,9,9,9,9]$

En las siguientes tablas el espacio en blanco significa que para cualquier otro α el valor es el mismo.

μ_{14}				
α	0	1	2	
$\psi(\alpha)$	17	16	12	8

μ_{14}			
α	0	1	
$\phi(\alpha)$	14	3	2

$\mu_{14,1}$				
α	0	1	2	
$\psi(\alpha)$	17	16	12	8

$\mu_{14,1}$			
α	0	1	
$\phi(\alpha)$	14	3	2

$\mathcal{D}er_{(1,1,1)}(\mu_{14})$				
α	0	1	2	
$\psi(\alpha)$	41	27	24	20

$\mathcal{D}er_{(1,1,1)}(\mu_{14})$			
α	0	1	
$\phi(\alpha)$	32	13	12

$\mathcal{D}er_{(1,1,1)}(\mu_{14,1})$				
α	0	1	2	
$\psi(\alpha)$	41	27	24	20

$\mathcal{D}er_{(1,1,1)}(\mu_{14,1})$			
α	0	1	
$\phi(\alpha)$	32	13	12

$\mathcal{D}er_{(0,1,1)}(\mu_{14})$			
α	0	1	
$\psi(\alpha)$	20	121	17

$\mathcal{D}er_{(0,1,1)}(\mu_{14})$		
α	1	
$\phi(\alpha)$	4	0

$\mathcal{D}er_{(0,1,1)}(\mu_{14,1})$			
α	0	1	
$\psi(\alpha)$	20	121	17

$\mathcal{D}er_{(0,1,1)}(\mu_{14,1})$		
α	1	
$\phi(\alpha)$	4	0

$\mathcal{D}er_{(1,1,1)}(\mu_{14}) \cap \mathcal{D}er_{(0,1,1)}(\mu_{14})$	
α	
$\psi(\alpha)$	9

$\mathcal{D}er_{(1,1,1)}(\mu_{14}) \cap \mathcal{D}er_{(0,1,1)}(\mu_{14})$	
α	
$\phi(\alpha)$	9

$\mathcal{D}er_{(1,1,1)}(\mu_{14,1}) \cap \mathcal{D}er_{(0,1,1)}(\mu_{14,1})$	
α	
$\psi(\alpha)$	9

$\mathcal{D}er_{(1,1,1)}(\mu_{14,1}) \cap \mathcal{D}er_{(0,1,1)}(\mu_{14,1})$	
α	
$\phi(\alpha)$	9

Como podemos observar los invariantes y las funciones invariantes de las dos álgebras de Lie son iguales, por tanto no podemos concluir que la deformación del álgebra Lie tipo Burde sea no trivial.

BIBLIOGRAFÍA

[ABG1] Ancochea-Bermudez, J.M. and Goze, M., *On the varieties of nilpotent Lie algebras of dimension 7 and 8*, J. Pure Appl. Algebra 77 (1992), 131–140.

[ABG2] Ancochea-Bermudez, J.M. and Goze, M., *Classification des algèbres de Lie filiformes de dimension 8*, Arch. Math. 50 (1988), 511–525 .

[ABG3] Ancochea-Bermudez, J.M. and Goze, M., *Sur la classification des algèbres de Lie nilpotentes de dimension 7*, C. R. Acad. Sci. Paris 302 (1986), 611-?613.

[B] Burde, D., *Degenerations of 7-dimensional nilpotent Lie algebras*, Comm. Algebra 33 (2005), no. 4, 1259–1277.

[BEG] Burde, D., Eick, B. and de Graaf, W. *Computing faithful representations for nilpotent Lie algebras*, J. Algebra 322 (2009), no. 3, 602–612.

[BSt] Burde, D. and Steinhoff C., *Classification of orbit closures of 4-dimensional complex Lie algebras*, J. Algebra 214 (1999), no. 2, 729–739.

[C] Carles, R., *Sur la structure des algèbres de Lie rigides*, Ann. Inst. Fourier 34 (1984), no. 3, 65–82.

[CD] Carles, R., Diakité *Sur les variétés d'algèbres de Lie de dimension* ≤ 7, J. Algebra 91 (1984), no. 1, 53–63.

[D] Dixmier, J., *Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes*, Acta Sci. Math. Szeged 16 (1955), 246–250.

[DL] Dixmier, J. and Lister, W.G *Derivations of nilpotent Lie algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), 155–157.

[G] Gerstenhaber, M., *On the deformations of rings and algebras*, Ann. Math. 74 (1964), no. 1, 59–103.

[GO1] Grunewald, F. and O'Halloran, J., *Varieties of nilpotent Lie algebras of dimension less than six*, J. Algebra 112 (1988), no. 2, 315–325.

[GO2] Grunewald, F. and O'Halloran, J., *Deformations of Lie algebras*, J. Algebra 162 (1993), no. 1, 210–224.

[GS] Gerstenhaber, M. and Schack, S., *Relative Hochschild cohomology, rigid algebras, and the Bockstein*, J. Pure Appl. Algebra 43 (1986), 53–74.

[HGT1] Herrera-Granada, J.F. and Tirao, P., *The Grunewald-O'Halloran conjecture for nilpotent Lie algebras of* $\mathtt{rank} \geq 1$. Abstract and file: http://arxiv.org/abs/1306.1541

[HGT2] Herrera-Granada, J.F. and Tirao, P., *Filiform Lie algebras of dimensión 8 as degenerations*, J. Algebra Appl. 13 (2014), no.4, 10 pages. Abstract and file: http://arxiv.org/abs/1308.4580

[HGT3] Herrera-Granada, J.F. and Tirao, P., *Non-counterexamples to the Vergne's conjecture*, In progress.

[J1] Jacobson, N., *Lie algebras*, Dover Publications, Inc., New York (1979).

[J2] Jacobson, N., *A note on automorphisms and derivations of Lie algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 6 (1955), 281–283.

[LT] Leger, G.F, and Tôgô, S., *Characteristically nilpotent Lie algebras*, Duke Math. J. 26 (1959), 623–628.

[M] Magnin, L., *Determination of 7-dimensional indecomposable nilpotent complex Lie algebras by adjoining a derivation to 6-dimensional Lie algebras*, Algebr. Represent. Theory 13 (2010), no. 6, 723–753.

[Mum] Mumford, D. *The Red Book of Varieties and Schemes.* Lecture Notes in Mathematics Vol. **1358**. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1999). Second Expanded Edition.

[NR1] Nijenhuis, A. and Richardson R.W., *Deformations of Lie algebra structures*, J. Math. Mech. 17 (1967), 89–105.

[NR2] Nijenhuis, A. and Richardson R.W., *Cohomology and deformations of algebraic structures*, Bull. A.M.S. 70 (1964), 406–411.

[NR3] Nijenhuis, A. and Richardson R.W., *Cohomology and deformations in graded Lie algebras*, Bull. A.M.S. 72 (1966), no. 1, 1–29.

[NR4] Nijenhuis, A. and Richardson R.W., *Commutative algebra cohomology and deformations of Lie and associative algebras*, J. Algebra. 9 (1968), no. 1, 42–53.

[NH] Novotný, P. and Hrivnák, J., *On* (α, β, γ)*-derivations of Lie algebras and corresponding invariants functions*, J. Geom. Phys. 58 (2008), 208–217.

[R] Richardson R.W., *On the rigidity of semi-direct products of Lie algebras*, Pacific J. Math. 22 (1967), no. 2, 339–344.

[Se] Seeley, C., *Degenerations of 6-dimensional nilpotent Lie algebras over* $\mathbb{C}$, Comm. Algebra 18 (1990), no. 10, 3493–3505.

[St] Steinhoff C., *Klassifikation und Degeneration von Lie Algebren*, Diplomarbeit, Düsseldorf (1997).

[V] Vergne, M., *Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes*, Bull. Soc. Math. France, 98 (1970) , 81–116.

DECLARACIÓN

Declaro que esta tesis, así como los resultados en ella reportados, son producto de mi trabajo y que hasta donde yo sé, no contiene material previamente publicado o escrito por otra persona, excepto donde se reconoce como tal a través de citas y con propósitos exclusivos de ilustración o comparación. En este sentido, afirmo que cualquier información presentada sin citar a un tercero es de mi propia autoría. Así mismo, declaro que este trabajo no contiene material que haya sido utilizado para obtener algún grado o diploma en alguna otra institución educativa excepto donde se reconoce como tal.

Córdoba, Argentina, 2014

Joan Felipe Herrera Granada

Dr. Marco Farinati
Jurado externo

Dra. Isabel Dotti
Grupo de Geometría

Dr. Alfredo Brega
Grupo Teoría de Lie