Sobre Operadores Maximales $U(n)$ Invariantes en el Grupo de Heisenberg $\mathbb{H}_n$.

Autor: Gianotti, Gustavo

Director: Tomás Godoy

Septiembre de 2014

Resumen

A lo largo de esta tesis doctoral se estudirán diversos operadores maximales radiales en $\mathbb{H}^n$. A continuación se describen muy brevemente estos.

1. La maximal sobre anillos en le grupo de Heisenberg: Se define una maximal M con soporte en anillos contenidos en $\mathbb{H}^n$ y se prueba que M se extiende a un operador acotado en $L^p(\mathbb{H}^1)$ para $2 < p < \infty$.

2. Se prueba la acotación de operadores maximales diádicos en $L^p(\mathbb{H}^n)$, para

   $1 < p < \infty$.

3. Se considera un operador maximal asociado a una integral fuertemente singular en el grupo de Heisenberg y se presenta condiciones para acotar dicho operador maximal en determinados espacios $L^p(\mathbb{H}^n)$.

4. Se considera un operador maximal asociado a hipersuperficies de revolucin en el grupo de Heisenberg y se presenta condiciones para acotar dicho operador maximal en determinados espacios $L^p(\mathbb{H}^n)$.

Códigos

43A80 Analisis on other specific Lie groups.
42B20 Singular and oscillatory integrals (Calderón-Zygmund, etc.)
42B25 Maximal functions, Littlewood-Paley theory

Palabras Clave

Análisis armónico no conmutativo

Grupo de Heisenberg

Operadores Maximales

Teoría de Littlewood - Paley

Integrales oscilantes

Agradecimientos

- A mis padres.
- A Tomás Godoy.
- Al grupo de Análisis Arómonico y Ecuaciones Diferencias.
- A mi familia y seres queridos.
- A FaMAF.

Índice general

1 Introducción

El grupo de Heisenberg, $\mathbb{H}_n$, introducido por H. Weyl en [**Wey31**] para describir sistemas de la mecánica cuántica, ha resultado también de importancia en varias otras áreas tales como álgebra homológica, teoría de representaciones y análisis armónico. En lo que respecta al análisis armónico constituye un puente entre el análisis armónico en $\mathbb{R}^n$ y el análisis armónico no conmutativo, siendo $\mathbb{H}_n$ un grupo de Lie nilpotentes. Más aún, muchas de las nociones y resultados más importantes del análisis real tienen su contra parte análoga en $\mathbb{H}_n$ tales como la teoría de Calderón Zygmund para operadores integrales singulares, la existencia de una transformada de Fourier con sus correspondientes fórmulas de Plancherel y de inversión, la existencia de descomposiciones de Littlewood Paley entre otros.

Los operadores maximales son una herramienta poderosa en el análisis armónico sobre $\mathbb{R}^n$, de sus propiedades de acotación (fuerte y/o tipo débil) en espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$ y su capacidad para mayorar una amplia clase de operadores lineales se obtienen resultados muy importantes, siendo el operador maximal de Hardy Littlewood y su empleo en la prueba del teorema de diferenciación de capacidad para mayorar una amplia clase de operadores lineales se obtienen resultados muy importantes, siendo el operador maximal de Hardy Littlewood y su empleo en la prueba del teorema de diferenciación de Lebesgue el caso más clásico. Sea $B_r(x)$ la bola de radio r centrada en $x \in \mathbb{R}^n$ y $|B_r(x)|$ su volumen, definimos el operador maximal de Hardy Littlewood en $\mathbb{R}^n$ como $Mf(x) = \sup\limits_{r>0} \left(\frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} f \right)$, siendo este acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$ $1 < p < \infty$ y también de tipo débil $1-1$. Dicho operador maximiza una gran cantidad de operadores integrales, con lo que nos permite probar estimaciones L^p para los mismos (siendo la transformada de Hilbert uno de ellos). Otro operador maximal es el maximal fuerte de Hardy Littlewood, donde las bolas centradas en x se reemplazan por rectángulos de lados paralelos a los ejes centrados en x, este se conoce que es acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 < p < \infty$ (cf. [**Ste93**]).

Otro operador maximal de interés en $\mathbb{R}^n$ es el operador maximal esférico $f \to Mf$ donde $Mf(x)$ es el supremo (respecto al radio de las esferas) de los promedios de la función f (f en $S(\mathbb{R}^n)$) sobre esferas centradas en x. Las estimaciones en norma

$L^p(\mathbb{R}^n)$ para la maximal esférica fueron obtenidas por E. Stein (cf. [**Ste76**]) para $n \geq 3$ y por J. Bourgain (cf. [**Bou86**]) para $n = 2$ (el enunciado preciso de estos resultados y las referencias correspondientes ver el Teorema 3.4 del Capítulo 3). Estos resultados, análogo al caso de la Maximal de Hardy Littlewood, implican un teorema de diferenciación de Lebesgue con promedios sobre esferas.

En el contexto del grupo de Heisenberg la acotación en $L^p(\mathbb{H}_n)$ de la versión apropiada del operador maximal fuerte de Hardy Littlewood fue probada por M. Christ (cf. [**Ch92**]) y M. Cowling (cf. [**Cow80**]) adaptó la prueba de Stein a las esferas de la norma de Koranyi en $\mathbb{H}_n = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$, obteniendo la acotación del correspondiente operador maximal esférico para $p > (2n+1)/(2n)$. Por otra parte, S. Thangavelu y A. Nevo (cf. [**Th98**], Parágrafo 3.6) consideraron el operador maximal correspondiente a reemplazar las esferas de Koranyi por las esferas $S_r = \{(z,0) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R} : |z| = r\}$ y probaron que el operador maximal esférico asociado $Mf(z,t) = \frac{1}{|S_r|}\int_{(z.t)S_r} f$ es acotado en $L^p(\mathbb{H}_n)$ para $p > (2n-1)/(2n-1)$, resultado que fue mejorado al rango óptimo $(p > (2n)/(2n-1))$ por E. K. Narayanam y S. Thangavelu en [**NaTh04**]. Por su parte D. Muller y A. Seeger (cf. [**MuSe04**]) obtuvieron resultados similares reemplazando la esfera $\mathbb{C}^n$ por hipersuperficies de $\mathbb{C}^n$ con curvatura alejada de 0.

El objeto de esta tesis es el estudio de la acotación en espacios $L^p(\mathbb{H}_n)$ de diversos operadores maximales invariantes por rotaciones sobre $\mathbb{H}_n$. En orden a describir precisamente los mismos introduciremos algunas notaciones y definiciones básicas. notaciones y definiciones básicas.

Para $n \in \mathbb{N}$, definimos el grupo de Heisenberg $2n+1$ dimensional, $\mathbb{H}_n$, como el grupo conformado por el conjunto $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ con la siguiente operación producto: Para (z,t) y $(z',t') \in \mathbb{H}_n$,

$$(z,t).(z',t') = \left(z + z', t + t' - \frac{1}{2} imB(z,z')\right)$$

con $B(z,z') = \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{z'_j}$ para $z = (z_1, ..., z_n), z' = (z'_1, ..., z'_n) \in \mathbb{C}^n$.

Podemos identificar $\mathbb{H}_n$ con $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$ vía la aplicación $\psi : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ dada por $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = (\mathbf{x} + i\mathbf{y}, t)$, donde $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ y $t \in \mathbb{R}$.

Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}', \mathbf{y}' \in \mathbb{R}^n$; y sean $t, t' \in \mathbb{R}$, el producto de $\mathbb{H}_n$, (visto éste como $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$)

resulta entonces ser

$$(\mathbf{x},\mathbf{y},t)\left(\mathbf{x}',\mathbf{y}',t'\right)=\left(\mathbf{x}+\mathbf{x}',\mathbf{y}+\mathbf{y}',t+t+\frac{1}{2}\left(\langle\mathbf{x},\mathbf{y}'\rangle-\langle\mathbf{y},\mathbf{x}'\rangle\right)\right)$$

donde $\langle,\rangle$ denota el producto interno estándard de $\mathbb{R}^n$. Dado que $\mathbb{H}_n$ se identifica con $\mathbb{R}^{2n+1}$ resulta natural identificar también, para $1\leq p\leq\infty$, los espacios de funciones $L^p(\mathbb{H}_n)$ con $L^p\left(\mathbb{R}^{2n+1}\right)$.

La identidad de $\mathbb{H}_n$ es $(\mathbf{0},0)$, con $\mathbf{0}$ el elemento nulo de $\mathbb{C}^n$ y si $(z,t)\in\mathbb{H}_n$ tenemos que $(z,t)^{-1}=(-z,-t)$. El centro $\mathcal{Z}$ de $\mathbb{H}_n$ es el subgrupo de los elementos de la forma $(\mathbf{0},t)$, con $t\in\mathbb{R}$.

Para $r>0$ definimos la dilatación $\delta_r:\mathbb{H}_n\to\mathbb{H}_n$ como $\delta_r(z,t)=\left(rz,r^2t\right)$. Notemos que $\delta_r\circ\delta_\tau=\delta_{r\tau}$ y que $\delta_r\left((z,t)\left(z',t'\right)\right)=\delta_r(z,t)\,\delta_r\left(z',t'\right)$ (esto es, δ_r es un automorfismo de $\mathbb{H}_n$) .

Si f es una función a valores reales o complejos sobre $\mathbb{H}_n$, definimos para $r>0$, su dilatación f_r mediante $f_r(z,t)=r^{-(2n+2)}f\left(r^{-1}z,r^{-2}t\right)$. Denotaremos, como es usual, con $S(\mathbb{H}_n)$ al espacio de Frechet de las funciones de la clase de Schwartz sobre $\mathbb{H}_n$, i.e., el espacio de funciones $f\in C^\infty(\mathbb{H}_n)$ tales que f y todas sus derivadas son rápidamente decrecientes en el infinito. $S'(\mathbb{H}_n)$ denotará asimismo el espacio de las distribuciones temperadas sobre $\mathbb{H}_n$. Si $r>0$ y si $u\in S'(\mathbb{H}_n)$ definimos su dilatación u_r mediante $u_r(f)=u(f\circ\delta_r)$.

Si f,h son funciones medibles definidas sobre $\mathbb{H}_n$ definimos $f*h$, el producto de convolución de f con h, como

$$(f*h)(z,t):=\int_{\mathbb{H}_n}f\left((z,t)(w,s)^{-1}\right)h(w,s)\,dwds.$$

cada vez que la integral exista (donde dw y ds denotan las medidas de Lebesgue en $\mathbb{C}^n$ y $\mathbb{R}$ respectivamente). Si $1\leq p,q,r\leq\infty$ con $1+\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ y si $f\in L^p(\mathbb{H}_n)$ y $h\in L^q(\mathbb{H}_n)$ entonces $(f*h)(z,t)$ esta definida *p.p.* (z,t) en $\mathbb{H}_n$ y $\|f*h\|_r\leq\|f\|_p\|h\|_q$ (desigualdad de Young). Además se tiene que con el producto de convolución así definido, $L^1(\mathbb{H}_n)$ es un álgebra no conmutativa. Para $g:\mathbb{H}_n\to\mathbb{C}$ pondremos $g^\vee(z,t):=g\left((z,t)^{-1}\right)$. Cabe observar también el siguiente comportamiento de la convolución con respecto a las dilataciones de $\mathbb{H}_n$: Para $s,t>0$, se tiene que $(f*g)_t=f_t*g_t$ y $(f_t)_s=f_{ts}$.

Si μ es una medida de Borel sobre $\mathbb{H}_n$ y $f : \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}$ es una función medible, se definen $f * \mu$ y $\mu * f$ como las funciones definidas sobre $\mathbb{H}_n$ por $(f * \mu)(z,t) := \int_{\mathbb{H}_n} f\left((z,t)(w,s)^{-1}\right) d\mu(w,s)$ y por $(\mu * f)(z,t) := \int_{\mathbb{H}_n} f\left((w,s)^{-1}(z,t)\right) d\mu(w,s)$ respectivamente, toda vez que las integrales existan, y esto ocurre en particular si μ es a valores en $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$, de variación total finita sobre cada compacto y $f \in C_c(\mathbb{H}_n)$ o si μ es de soporte compacto, de variación total finita y $f \in C(\mathbb{H}_n)$.

Si $\mu \in S'(\mathbb{H}_n)$ y $f \in S(\mathbb{H}_n)$ se definen también

$$
\begin{aligned}
(f * \mu)(z,t) \ &: = \left\langle \mu, (w,s) \to f\left((z,t)(w,s)^{-1}\right)\right\rangle, \\
(\mu * f)(z,t) \ &: = \left\langle \mu, (w,s) \to f\left((w,s)^{-1}(z,t)\right)\right\rangle
\end{aligned}
$$

donde $\langle \mu, h\rangle$ denota la valuación de μ en h. Nótese que, bajo las asunciones hechas sobre μ y f, se tiene que $f * \mu$ y $\mu * f$ pertenecen ambas a $S(\mathbb{H}_n)$.
Un par de comentarios más: Como es usual, si $(X, \|\|_X)$ $(Y, \|\|_Y)$ son espacios de Banach y si $T : X \to Y$ diremos que T es acotado si existe una constante c tal que $\|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X$ para todo $x \in X$, con lo que un operador lineal acotado es necesariamente contínuo. Si D es un subespacio vectorial denso de X, $T : D \to Y$ es lineal y existe una constante c satisfaciendo $\|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X$ para todo $x \in D$ entonces T admite una única extensión lineal y acotada $\widetilde{T} : X \to Y$, extensión que por lo general siempre seguiremos denotando por T.

Sean (X, μ) e (Y, ν) espacios de medida, sea D es un subespacio vectorial de $L^p(X, \mu)$ con $1 \leq p \leq \infty$ y sea T es una aplicación definida sobre D cuyos valores son funciones a valores en $\mathbb{C}$ definidas (*a.e.*) sobre Y. Diremos que T es sublineal si $|T(f+g)| \leq |T(f)| + |T(g)|$ *a.e.* en Y, $|T(\gamma f)| = |\gamma| |T(f)|$ *a.e.* en Y, para $f, g \in D$ y $\gamma \in \mathbb{C}$. También diremos que T es no negativo si $T(f) \geq 0$ para toda $f \in D$. Si T es sublineal y acotado y no negativo entonces $|T(f) - T(g)| \leq T(f-g)$ para $f, g \in D$. Luego si $1 \leq p, q \leq \infty$ y si $T : L^p(X, \mu) \to L^q(Y, \nu)$ es sublineal, acotado y no negativo entonces es necesariamente contínuo. Si D es un subespacio vectorial denso de $L^p(X, \mu)$, si $T : D \to L^q(Y, \nu)$ es sublineal y no negativo, y si existe una constante c tal que $\|T(f)\|_{L^q(Y,\nu)} \leq c\|f\|_{L^p(X,\mu)}$ para toda $f \in D$, entonces T admite una (única) extensión sublineal y acotada $\widetilde{T} : L^p(X, \mu) \to L^q(Y, \nu)$ definida por $\widetilde{T}(f) = \lim_{j\to\infty} T(f_j)$ donde $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en D que converge a f en $L^p(X,\mu)$ (notar que como $|T(f_j) - T(f_l)| \leq T(f_j - f_l)$ y T es acotado, la sucesión $\{T(f_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $L^q(Y,\nu)$ y por tanto convergente. También hay que destacar que si $\{g_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es otra sucesión en D convergente a f en $L^p(X,\mu)$, se encuentra que $\lim_{j\to\infty} T(f_j) = \lim_{j\to\infty} T(g_j)$ y entonces T está bien definido). Por lo general, al igual que en en el caso lineal, seguiremos denotando por T a esta extensión $\widetilde{T}$. Todos los operadores maximales que aparecerán a lo largo de este trabajo serán operadores sublineales no negativos por lo que, dado el caso, estas consideraciones serán aplicables a los mismos.

Con estos preliminares podemos describir los resultados principales de los cuatro capítulos más importantes de este trabajo.

Un operador maximal cilíndrico en el grupo de Heisenberg

En este capítulo consideraremos, para $n \geq 1$, el operador maximal M_{cil} definido para $f \in S(\mathbb{H}_n)$ por

$$M_{cil}f = \sup_{1\leq r\leq 2} \left(|f| * (\sigma \otimes \chi_I)_r\right).$$

donde σ denota la medida dada por el elemento de área euclídeo de $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ normalizada por $\sigma\left(S^{2n-1}\right) = 1$ y χ_I es la función característica del intervalo $I = [-1,1]$. Probaremos que si $p > \dfrac{2n}{2n-1}$ entonces existe una constante positiva c tal que $\|M_{cil}f\|_p \leq c\,\|f\|_p$ para toda $f \in S(\mathbb{H}_n)$. La condición $p > \dfrac{2n}{2n-1}$ es óptima,en efecto, veremos que M_{cil} no es acotado en $L^p(\mathbb{H}_n)$ si $p \leq \dfrac{2n}{2n-1}$.

Consideraremos también el operador maximal $\widetilde{M}_{cil}$ definido para $f \in S(\mathbb{H}_n)$ por $\widetilde{M}_{cil}f = \sup_{r>0} \left(|f| * (\sigma \otimes \chi_I)_r\right)$ .y probaremos que existe una aproximación de la identidad $\{F_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ en $\mathbb{H}_n$ tal que $\left\|\sup_{r>0}\left(|f| * ((\sigma \otimes \chi_I) * F_\varepsilon)_r\right)\right\|_2 \leq c\left(|log(\varepsilon)| + 1\right)\|f\|_2$. De este resultado obtendremos como consecuencia la acotación en $L^2(\mathbb{H}_\mathbf{n})$ de una familia de operadores maximales de la forma $\sup_{r>0}\left(|f| * (h \otimes \chi_I)_r\right)$ donde las funciones $h = h(z)$, si bien radiales en z e integrables, son tales que $\lim_{|z|\to 1^+} h(z) = \infty$ y entonces el correspondiente operador maximal no es, a priori, controlado por la maximal de Hardy Littlewood. .

Un operador maximal fuertemente singular sobre $L^2(\mathbb{H}_\mathbf{n})$.

Sea $\chi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ tal que $\chi \geq 0$ y $\chi = 1$ en un entorno del origen y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\beta > 0$. Sea $K_{\alpha,\beta} : \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}$ el núcleo (fuertemente singular si $\alpha > 0$), definido por:

$$K_{\alpha,\beta}(z,t) = \rho(z,t)^{-(2n+2+\alpha)} e^{i\rho(z,t)^{-\beta}} \chi(\rho(z,t)),$$

donde $\rho(z,t) = \left(|z|^4 + |t|^2\right)^{\frac{1}{4}}$. Sea $(\mu_{(\alpha,\beta)})_0$ la funcional definida sobre las funciones $f \in S(\mathbb{H}_n)$ tales que $0 \notin Sop(f)$ por $\mu_0(f) = \int_{\mathbb{H}_n} K_{\alpha,\beta} f$. Se puede ver integrando por partes que μ_0 admite una extensión $\mu \in S'(\mathbb{H}_n)$ (cf. Proposición 5.2 y Corolario 5.3). Probaremos que si $n \geq 1$ y si $\alpha < (n-1)\beta - 4$ entonces existe una constante positiva c tal que para toda $f \in S(\mathbb{H}_n)$,

$$\left\| \sup_{r>0} \left| f * (\mu_{(\alpha,\beta)})_r \right| \right\|_2 \leq c \|f\|_2.$$

El operador maximal esférico diádico sobre el grupo de Heisenberg

En este capítulo probaremos que si σ denota la medida dada por el elemento de área de $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, normalizada por $\sigma\left(S^{2n-1}\right) = 1$, y si $\delta \in S'(\mathbb{R})$ es la distribución delta de Dirac concentrada en el origen, entonces para $p > 1$ existe una constante $c > 0$ tal que para toda $f \in S(\mathbb{H}_n)$,

$$\left\| \sup_{j \in \mathbb{Z}} \left(|f| * (\sigma \otimes \delta)_{2^j} \right) \right\|_p \leq c \|f\|_p.$$

Este resultado es válido en $\mathbb{H}_n$ para todo n, inclusive para $n = 1$. Obsérvese además que, al tomar el supremo de las funciones $|f| * (\sigma \otimes \delta)_r$ sobre $r \in \left\{2^j : j \in \mathbb{Z}\right\}$, se mejora (con respecto a lo que se obtiene tomando el supremo sobre $r > 0$, cf. Teorema 3.4) el rango de los p para los cuales se tiene la acotación de $L^p(\mathbb{H}_n)$ en $L^p(\mathbb{H}_n)$, permitiendo $p > 1$.

Operadores maximales asociados a hipersuperficies de revolución en $\mathbb{H}_n$

El objetivo de este capítulo es estudiar operadores maximales correspondientes a medidas soportadas en hipersuperficies de revolución. Sea $\Gamma : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ una función medible y radial y sea M_Γ el operador maximal sobre $\mathbb{H}_n$ definido, para $f \in S(\mathbb{H}_n)$, mediante:

$$M_\Gamma f(z,t) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r(0)|} \int_{B_r(0)} \left| f\left((z,t)(w,\Gamma(w))^{-1}\right) \right| dw,$$

donde $B_r(0) \subset \mathbb{C}^n$ es la bola de radio r centrada en el origen y dw es la medida de Lebesgue en $\mathbb{C}^n$.

Para $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *medible sea*

$$M_0 g(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r(0)|} \int_{B_r(0)} |g(x - \Gamma(w))| \, dw,$$

Probaremos que si M_0 es un operador acotado en norma $L^p(\mathbb{R})$ para $1 < p < \infty$ entonces M_Γ es un operador acotado respecto de la norma $L^p(\mathbb{H}_n)$ para $n \geq 1$ y $1 < p < \infty$.

Este teorema provee un análogo para $\mathbb{H}_n$ de un resultado obtenido por Hung Viet Le en [Hu00] para el caso euclídeo. Además Hung Viet Le establece condiciones suficientes sobre Γ para que M_0 sea un operador acotado en $L^p(\mathbb{R})$ para $1 < p < \infty$, que, por el Teorema 7.1, son también suficientes para que M_Γ sea acotado en $L^p(\mathbb{H}_n)$ para $1 < p < \infty$.

2 Preliminares sobre el grupo de Heisenberg

Definición 2.1. *Para $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ sea π_λ la representación de Schrödinger de $\mathbb{H}_n$ (con $\mathbb{H}_n$ considerado como $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$) en $L^2(\mathbb{R}^n)$ dada por*

$$\pi_\lambda (x, y, t) (\phi) (w) = e^{i\lambda t} e^{i\lambda \langle x,w\rangle + \frac{1}{2}\langle x,y\rangle} \phi (w + y)$$

donde $\langle , \rangle$ denota el producto interno standard en $\mathbb{R}^n$.

Definición 2.2. *Para $f \in L^1(\mathbb{H}_n) \cap L^2(\mathbb{H}_n)$ y $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sea $\pi_\lambda(f) : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ el operador definido por :*

$$(\pi_\lambda (f) \phi) (w) = \int_{\mathbb{H}_n} f(z, t) (\pi_\lambda(z, t)\phi) (w) d(z, t).$$

Observación 2.3. *Si $f, g \in L^1(\mathbb{H}_n) \cap L^2(\mathbb{H}_n)$, entonces $\pi_\lambda (f * g) = \pi_\lambda (f) \circ \pi_\lambda (g)$.*

■

Definición 2.4. *Sea S_2 el espacio de Hilbert conformado por los operadores de clase Hilbert-Schmidt sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$ con producto interno $(T, S) = tr\,(TS^*)$ (traza de TS^*) y para $T \in S_2$ sea $\|T\|_{HS} = (tr\,(TT^*))^{\frac{1}{2}}$. Sea $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ provisto con la medida $d\mu(\lambda) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1} |\lambda|^n d\lambda$ donde $d\lambda$ denota la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Definimos $L^2(\mathbb{R}^*, S_2; d\mu)$ como el espacio de las funciones medibles $f : \mathbb{R}^* \to S_2$ tales que $\int \left\|\widehat{f}(\lambda)\right\|_{HS}^2 d\lambda < \infty$.*

Teorema 2.5. *(cf. teorema 1.3.1 de **[Th98]**) La transformada de Fourier de $\mathbb{H}_n$ definida para $f \in L^1(\mathbb{H}_n) \cap L^2(\mathbb{H}_n)$ por $\widehat{f}(\lambda) := \pi_\lambda(f)$ se extiende a un isomorfismo isométrico de $L^2(\mathbb{H}_n)$ sobre $L^2(\mathbb{R} \setminus \{0\}, S_2; d\mu)$.*

Además para $f \in L^1(\mathbb{H}_n) \cap L^2(\mathbb{H}_n)$ se tiene la fórmula de Plancherel:

$$\|f\|_2^2 = \int \|\widehat{f}(\lambda)\|_{HS}^2 d\lambda$$

Además tenemos la siguiente fórmula de inversión:

Teorema 2.6. *(cf. teorema 1.3.2 de **[Th98]**) Para toda función $f \in S(\mathbb{H}_n)$, tenemos que*

$$f(z, t) = \int_{\infty}^{\infty} tr(\pi_\lambda(z, t)\pi_\lambda(f))d\lambda.$$

Definición 2.7. *Sea G un grupo topológico, una medida de Haar invariante a izquierda sobre G es una medida de Borel μ sobre G tal que*

1) Para toda $f : G \to \mathbb{C}$ continua y no negativa con soporte compacto, se tiene que

$$0 \leq \int_G f(g)\, d\mu(g) < \infty.$$

2) μ es regular y $\mu(K)$ es finita para cada compacto $K \subset G$.

3) Para toda función continua con soporte compacto $f : G \to \mathbb{C}$, se tiene que

$$\int_G f(g)\, d\mu(g) = \int_G f(g'g)\, d\mu(g)$$

para todo $g' \in G$.

Proposición 2.8. *(cf. Capítulo 8 de [**Bou65**]) Si G un grupo topológico localmente compacto y T_2 entonces la medida de Haar invariante a izquierda existe y es única salvo multiplicación por una constante positiva.*

Definición 2.9. *G se dice unimodular si la medida de Haar invariante a izquierda μ satisface que para toda $f \in C_c(G)$, $\int_G f(g^{-1})\, d\mu(g) = \int_G f(g)\, d\mu(g)$*

Notemos que la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^{2n+1}$ resulta ser la medida de Haar invariante a izquierda de $\mathbb{H}_n$ y que $\mathbb{H}_n$ es un grupo unimodular (luego la medida de Haar invariante a izquierda es también invariante a derecha).

Sea ρ la norma de Koranyi definida sobre $\mathbb{H}_n$ por

$$\rho(z,t) = \left(|z|^4 + |t|^2\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Entonces ρ es homogénea de grado 1 respecto de las dilataciones $\{\delta_r\}_{r>0}$, i.e., $\rho(\delta_r(z,t)) = r\rho(z,t)$.

Observación 2.10. *Existe una constante positiva A tal que*

$$\rho((z,t)(w,s)) \leq A(\rho(z,t) + \rho(w,s))$$

para todo par de elementos (z,t), (w,s) en $\mathbb{H}_n$.

En efecto,

$$\begin{aligned}
\rho\left(\left(z,t\right)\left(w,s\right)\right) &= \rho\left(z+w,t+s-\frac{1}{2}Im\left(B\left(z,w\right)\right)\right)\\
&= \left(\left|z+w\right|^{4}+\left(t+s-\frac{1}{2}Im\left(B\left(z,w\right)\right)\right)^{2}\right)^{\frac{1}{4}}\\
&\leq \left(\left(\left|z\right|+\left|w\right|\right)^{4}+\left(\left|t\right|+\left|s\right|+\frac{1}{2}\left|B\left(z,w\right)\right|\right)^{2}\right)^{\frac{1}{4}}\\
&\leq \left(\left(\left|z\right|+\left|w\right|\right)^{4}+2\left(\left|t\right|+\left|s\right|\right)^{2}+2\left(\frac{1}{2}\left|B\left(z,w\right)\right|\right)^{2}\right)^{\frac{1}{4}}\\
&\leq \left(\left(\left|z\right|+\left|w\right|\right)^{4}+4\left(\left|t\right|^{2}+\left|s\right|^{2}\right)+\frac{1}{2}\left|z\right|^{2}\left|w\right|^{2}\right)^{\frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\left(\left|z\right|+\left|w\right|\right)^{4}+\frac{1}{2}\left|z\right|^{2}\left|w\right|^{2} &= \left(4\left(\frac{1}{2}\left|z\right|+\frac{1}{2}\left|w\right|\right)^{2}\right)^{2}+\frac{1}{2}\left|z\right|^{2}\left|w\right|^{2}\\
&\leq \left(4\left(\frac{1}{2}\left|z\right|^{2}+\frac{1}{2}\left|w\right|^{2}\right)\right)^{2}+\frac{1}{2}\left|z\right|^{2}\left|w\right|^{2}\\
&= 16\left(\frac{1}{4}\left|z\right|^{4}+\frac{1}{4}\left|w\right|^{4}+\frac{1}{2}\left|z\right|^{2}\left|w\right|^{2}\right)+\frac{1}{2}\left|z\right|^{2}\left|w\right|^{2}\\
&\leq 8\left|z\right|^{4}+8\left|w\right|^{4}+16\left|z\right|^{2}\left|w\right|^{2}
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
&\rho\left(\left(z,t\right)\left(w,s\right)\right)\\
\leq\ & \left(8\left|z\right|^{4}+8\left|w\right|^{4}+16\left|z\right|^{2}\left|w\right|^{2}+4\left|t\right|^{2}+4\left|s\right|^{2}\right)^{\frac{1}{4}}\\
\leq\ & \left(16\left|z\right|^{4}+16\left|w\right|^{4}+4\left|t\right|^{2}+4\left|s\right|^{2}\right)^{\frac{1}{4}}\\
\leq\ & \left(\left(16\left|z\right|^{4}+4\left|t\right|^{2}\right)^{\frac{1}{4}}+\left(16\left|w\right|^{4}+4\left|s\right|^{2}\right)^{\frac{1}{4}}\right)\leq 2\rho\left(z,t\right)+2\rho\left(w,s\right).
\end{aligned}$$

■

Observación 2.11. *Existe una constante positiva A tal que para todo par de puntos $\left(z,t\right),\ \left(w,s\right)\in\mathbb{H}_n$ se tiene que*

$$\rho\left(z,t\right)-A\rho\left(w,s\right)\leq A\rho\left(\left(z,t\right)\left(w,s\right)^{-1}\right).$$

En efecto, sabemos que $\rho\left(\left(z',t'\right)(w,s)\right) \leq A\left(\rho\left(z',t'\right)+\rho\left(w,s\right)\right)$ luego

$$\rho((z',t')(w,s)) - A\rho(w,s) \leq A\rho(z',t').$$

Eligiendo $(z',t') = (z,t)(w,s)^{-1}$ obtenemos que

$$\rho(z,t) - A\rho(w,s) \leq A\rho\left((z,t)(w,s)^{-1}\right).$$

■

Observación 2.12. *La familia de dilataciones $\{\phi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ de funciónes apropiadas $\phi : \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}$ constituyen aproximaciones de la identidad en $\mathbb{H}_n$,*

en efecto, se tiene (cf. [Ric01], Capítulo II, Pag. 40, Proposición 5.1 y Corolario 5.2):

Sea $\phi \in L^1(\mathbb{H}_n)$ con soporte compacto y tal que $\displaystyle\int_{\mathbb{H}_n} \phi = 1$. Entonces $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} f * \phi_\varepsilon = f$ para toda $f \in L^p(\mathbb{H}_n)$, $1 \leq p < \infty$, con convergencia en la norma de $L^p(\mathbb{H}_n)$.

■

De ahora en más toda medida que aparezca sin especificar sobre un grupo topológico localmente compacto y T_2 sera una medida de Haar invariante a izquierda en dicho grupo.

Definición 2.13. *Sea G un grupo. si $g \in G$, sea $L_g : G \to G$ (respectivamente $R_g : G \to G$) la traslación a izquierda (resp. a derecha) dada por $L_g(g') = gg'$ (resp. $R_g(g') = g'g$). Si $f : G \to \mathbb{C}$ definimos $L_g f : G \to \mathbb{C}$ (respectivamente $R_g f : G \to \mathbb{C}$) como $L_g f = f \circ L_g$ (resp. $R_g f = f \circ R_{g^{-1}}$)*

Definición 2.14. *Sea G un grupo, sea K un subgrupo de G y sea $f : G \to \mathbb{C}$ una función definida sobre G. Diremos que f es invariante a izquierda (respectivamente a derecha) si $L_g f = f$ (resp. $R_g f = f$) para todo $g \in K$. Diremos que f es K biinvariante si f es K invariante a izquierda y a derecha.*

Sea G un grupo topológico, localmente compacto, T_2, sea K un subgrupo compacto de G y sea μ la medida de Haar sobre G tal que $\mu(K) = 1$. Denotaremos por $L^{1^\sharp}(G,\mu)$ al subespacio de las funciones K biinvariantes pertenecientes a $L^1(G,\mu)$.

Definición 2.15. *Sea G un grupo topológico, localmente compacto, T_2, sea K un subgrupo compacto de G y sea μ la medida de Haar de G tal que $\mu(K) = 1$. Se dice que (G, K) es un par de Gelfand si $L^{1\sharp}(G, \mu)$ es un álgebra conmutativa respecto al producto de convolución en $L^1(G, \mu)$.*

Introduciremos ahora el par de Gelfand sobre el cual nos interesa trabajar. Notemos que $U(n)$ actúa por automorfismos sobre $\mathbb{H}_n$ de la siguiente manera: Si $g \in U(n)$ y si $(z,t) \in \mathbb{H}_n$ sea $g \cdot (z,t) = (g(z), t)$. Es inmediato verificar que la aplicación $(z,t) \to g \cdot (z,t)$ es un automorfismo de $\mathbb{H}_n$, y que la alicacion $(g, (z,t)) \to g \cdot (z,t)$ define una accion de $U(n)$ sobre $\mathbb{H}_n$, esto es que $Id \cdot (z,t) = (z,t)$ y que si $g, g' \in U(n)$ entonces $g \cdot (g' \cdot (z,t)) = (gg') \cdot (z,t)$.

Definición 2.16. *Definimos el grupo de movimientos G_n de $\mathbb{H}_n$ como el producto semidirecto $G_n = U(n) \ltimes \mathbb{H}_n$, asociado a la acción arriba descripta de $U(n)$ sobre $\mathbb{H}_n$, i.e., G_n es el producto cartesiano $U(n) \times \mathbb{H}_n$ con la operación producto definida por*

$$(u_1, (z,t)) \cdot (u_2, (w,s)) = (u_1 u_2, (z,t)(u_1(w), s)).$$

para $(u_1, (z,t))$ y $(u_2, (w,s)) \in G_n$.

Diremos que una función f definida sobre $\mathbb{H}_n$ es invariante por rotaciones o radial si $f(u(z), t) = f(z,t)$ para toda $u \in U(n)$. Además denotaremos con $L^1(\mathbb{H}_n)^{U(n)}$ al subespacio de las funciones de $L^1(\mathbb{H}_n)$ invariantes por rotaciones.

Observación 2.17. *(1) $U(n)$ puede ser visto como subgrupo de G_n, vía la inclusión $u \mapsto (u, 0)$, podemos entonces considerar el espacio de las coclases a izquierda de $U(n)$ dado por $U(n) \setminus G_n = \{U(n) g : g \in G_n\}$. Es inmediato verificar que la aplicación $(z,t) \to U(n)(Id, (z,t))$ es una biyección de $\mathbb{H}_n$ sobre $U(n) \setminus G_n$. Identificaremos entonces de esta manera en lo sucesivo $U(n) \setminus G_n$ con $\mathbb{H}_n$.*
(2) Las funciones $U(n)$ biinvariantes sobre G_n se identifican, vía la biyección descripta en (1) con las funciones $U(n)$ invariantes de $\mathbb{H}_n$, es decir, con las funciones radiales en $\mathbb{H}_n$. Más aún, como álgebra de convolución $L^{1\sharp}(G_n)$ es isomorfo a $L^1(\mathbb{H}_n)^{U(n)}$.
*(3) $(G_n, U(n))$ es un par de Gelfand, i.e., $L^1(\mathbb{H}_n)^{U(n)}$ es un álgebra conmutativa (cf. Capítulo 3 de [**Th98**]).*

■

Definición 2.18. *Sea (G, K) un par de Gelfand, sea μ la medida de Haar de G tal que $\mu(K) = 1$ y sea $\phi : G \to \mathbb{C}$ una función continua K biinvariante sobre G. Diremos que ϕ es una función esférica acotada del par (G, K) si ϕ es acotada, no idénticamente nula, y si para todo par $a, b \in G$ se tiene que :*

$$\int_K \phi(akb)\, d\mu(k) = \phi(a)\,\phi(b)\,.$$

Observación 2.19. *Si ϕ es una función esférica acotada de un par de Gelfand (G, K) entonces $\phi(e) = 1$ donde e es la identidad de G.*

En efecto, $\mu(K) = 1$ y ϕ es K biinvariante, entonces

$$\phi(e)\,\phi(e) = \int_K \phi(eke)\, d\mu(k)$$

$$= \int_K \phi(ke)\, d\mu(k) = \phi(e)\,\mu(K) = \phi(e)\,.$$

Luego $\phi(e) = 1$.

De aquí en más, si (G, K) es un par de Gelfand consideraremos a G provisto con la medida de Haar μ tal que $\mu(K) = 1$ y $L^p(G)$ significará $L^p(G, \mu)$

■

Definición 2.20. *Sea (G, K) un par de Gelfand, sea f en $L^{1\sharp}(G)$ y sea ϕ una función esférica acotada del par (G, K). Definimos la transformada esférica de f en ϕ como*

$$\widehat{f}(\phi) = \int_G f(g)\,\phi\left(g^{-1}\right) d\mu(g)$$

Dado que las funciones $U(n)$ biinvariantes sobre G_n se identifican con las funciones radiales de $\mathbb{H}_n$ podremos identificar las funciones esféricas acotadas del par $(G^n, U(n))$ como funciones radiales en $\mathbb{H}_n$ y las llamaremos funciones esféricas acotadas de $\mathbb{H}_n$.

Si $f \in L^1(\mathbb{H}_n)^{U(n)}$ y si ϕ es una función esférica acotada de $\mathbb{H}_n$ entoces, vía esta identificación, $\widehat{f}(\phi)$ está dada por

$$\widehat{f}(\phi) = \int_{\mathbb{H}_n} f(z,t)\,\phi\left((z,t)^{-1}\right) dzdt,$$

Necesitaremos conocer expresiones explícitas de las funciones esféricas acotadas de $\mathbb{H}_n$. Estas expresiones serán dadas en términos de ciertas funciones $\mathbf{e}_{\lambda,k}$ y de la función de Bessel J_{n-1}. A su vez, las $\mathbf{e}_{\lambda,k}$ estarán en función de los polinomios de Laguerre L_α^k.

Para $\alpha, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, el polinomio de Laguerre L_k^α de grado k y orden α se define por

$$L_k^\alpha(s) := \sum_{m=0}^{k} \frac{(\alpha+k)!}{(k-m)!\,(\alpha+m)!} \frac{(-s)^m}{m!}. \tag{2.1}$$

Para λ real y distinto de 0 y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definimos la función $\mathbf{e}_{\lambda,k} : \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}$ como

$$\mathbf{e}_{\lambda,k}(z,t) := e^{i\lambda t} e^{-\frac{1}{4}|\lambda||z|^2} L_k^{n-1}\left(\frac{1}{2}|\lambda|\,|z|^2\right) \tag{2.2}$$

y J_{n-1} denotará la función de Bessel definida por

$$J_{n-1}(r) := \left(\frac{r}{2}\right)^{n-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,(m+n-1)!} \left(\frac{r}{2}\right)^m. \tag{2.3}$$

Observación 2.21. *Para $k \geq 1$ se tiene $\frac{dL_k^\alpha}{dx}(x) = -L_{k-1}^{\alpha+1}(x)$ (cf. e.g., fórmula (4.18.6) en [**Leb65**]).*

■

Podemos describir ahora las funciones esféricas acotadas de $\mathbb{H}_n$ que son de nuestro interés (cf. Capítulo 3 de [**Th98**]): Son las siguientes

$E_{\lambda,k}(z,t) = \frac{k!\,(n-1)!}{(k+n-1)!}\mathbf{e}_{\lambda,k}(z,t)$, para $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$\nu_\theta(z,t) = \frac{2^{n-1}(n-1)!}{(\theta|z|)^{n-1}} J_{n-1}(\theta|z|)$, para $\theta > 0$.

$\nu_0(z,t) = 1$.

Definimos las funciones de Hermite sobre $\mathbb{R}$ como

$$\mathfrak{h}_k(t) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{k!}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k e^{\frac{t^2}{2}} \frac{d^k}{dt^k}\left(e^{-t^2}\right)$$

y para $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ definimos las funciones de Hermite sobre $\mathbb{R}^n$ con parámetros λ y α, como

$$\Phi_\alpha^\lambda(x) = |\lambda|^{\frac{n}{4}} \prod_{j=1}^{n} \mathfrak{h}_{\alpha_j}(|\lambda|^{\frac{1}{2}} x_j).$$

Observación 2.22. *(cf. [**Th98**], Proposición 1.4.1) Para cada* $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *la familia* $\left\{\Phi_\alpha^\lambda\right\}_{\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n}$ *es una base ortonormal completa sobre* $L^2(\mathbb{R}^n)$.

$\blacksquare$

Observación 2.23. *(cf. [**Th98**], Página 52)*

$$\mathbf{e}_{\lambda,k}\left(z,t\right) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \sum_{|\alpha|=k} \left\langle \pi_\lambda(z,t)\Phi_\alpha^\lambda, \Phi_\alpha^\lambda \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} .$$

donde $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$ *para* $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$.

$\blacksquare$

Definimos también, para $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$\widehat{f}\left(\lambda, k\right) = \widehat{f}\left(\overline{E_{\lambda,k}}\right).$$

Teorema 2.24. *(cf. [**Th98**], teorema* 1.4.3*) Sea* $f \in S(\mathbb{H}_n)$ *una función radial. Entonces*

$$\pi_\lambda(f) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}(\lambda, k) P_k(\lambda),$$

donde $P_k(\lambda)$ *es la proyección ortogonal en* $L^2(\mathbb{H}_n)$ *sobre el subespacio generado por* $\{\Phi_\alpha^\lambda : |\alpha| \ = k\}$.

Observación 2.25. *Si* $f \in L^1\left(\mathbb{H}_n\right)^{U(n)}$ *y si* $r > 0$, *de un cambio de variable se obtiene inmediatamente que* $\widehat{f_r}\left(\lambda, k\right) = \widehat{f}\left(r^2\lambda, k\right)$, *para la dilatación* f_r *definida como la introducción.*

$\blacksquare$

Observación 2.26. *(cf. [**Dij09**], Proposición 6.1.6) Si* $f \in L^1\left(\mathbb{H}_n\right)^{U(n)}$ *y si* ϕ *es una función esférica acotada de* $\mathbb{H}_n$ *entonces* $\widehat{f * \phi} = \widehat{f}\left(\phi\right)\phi$.

$\blacksquare$

Es conveniente introducir las siguientes funciones de Laguerre normalizadas φ_k^α

$$\varphi_k^\alpha(r) = \frac{k!\alpha!}{(k+\alpha)!} L_k^\alpha\left(\frac{1}{2}r^2\right) e^{-\frac{1}{4}r^2} \tag{2.4}$$

Necesitaremos las siguientes estimaciones conocidas de las funciones de Laguerre φ_k^α :

Proposición 2.27. *(cf. [**NaTha04**], pag. 218 y [**Tha93**], Lema 1.5.3)*

$\left|\varphi_k^\alpha\left(\sqrt{s}\right)\right| \leq c\,(sk)^{-\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2}}$, *si* $\dfrac{1}{k} \leq s \leq \dfrac{k}{2}$,

$\left|\varphi_k^\alpha\left(\sqrt{s}\right)\right| \leq c\,(sk)^{-\frac{\alpha}{2}} k^{-\frac{1}{4}} \left(k^{\frac{1}{3}} + |k-s|\right)^{-\frac{1}{4}}$, *si* $\dfrac{k}{2} < s \leq \dfrac{3k}{2}$,

$\left|\varphi_k^\alpha\left(\sqrt{s}\right)\right| \leq ce^{-\gamma s}\,(sk)^{-\frac{\alpha}{2}}$, *si* $\dfrac{3k}{2} < s$ *y donde* γ *es una constante positiva independiente de* s, k *y* α.

Observación 2.28. $E_{\lambda,k}(z,t) = \varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{|\lambda|\,|z|^2}\right) e^{i\lambda t}$ *para* $(z,t) \in \mathbb{H}_n$.

■

Definición 2.29. *Se define el abanico de Heisenberg* $A_{\mathbb{H}_n}$ *(Heisenberg fan) como*

$$\begin{aligned} A_{\mathbb{H}_n} &= B \cup D \text{ donde} \\ B &= \{(\lambda, (2k+n)|\lambda|) : \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}, \\ D &= \{(0,\theta) : \theta > 0\}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Un resultado de importancia probado por Astengo, Di Blasio y Ricci en [**AsDiRi07**] es el siguiente:

Teorema 2.30. *(Astengo, Di Blasio y Ricci) Sea* f *una función* $U(n)$ *invariante en* $S(\mathbb{H}_n)$ *y sea* $F : A_{\mathbb{H}_n} \mapsto \mathbb{C}$ *definida por*

$$F(\lambda, (2k+n)|\lambda|) = \widehat{f}(E_{\lambda,k}) \text{ para } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ y } k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$
$$F(0,\theta) = \widehat{f}(\nu_\theta) \text{ para } \theta \geq 0$$

Entonces F *es la restricción a* $A_{\mathbb{H}_n}$ *de una función* $g_F \in S\left(\mathbb{R}^2\right)$. *Recíprocamente, la restricción al Heisenberg fan* $A_{\mathbb{H}_n}$ *de una función* $g \in S\left(\mathbb{R}^2\right)$ *es la transformada esférica de una función* $U(n)$ *invariante* $f \in S(\mathbb{H}_n)$.

Un hecho importante es la existencia de una medida de Plancherel con su correspondiente fórmula de inversión que permite recuperar f a partir de las funciones $f * \mathbf{e}_{\lambda,k}$, otro punto de relevancia es la validez de la identidad de Plancherel.

Teorema 2.31. *(Identidad de Plancherel, cf. [**Th98**], Teorema 2.1.2): Para $f \in S(\mathbb{H}_n)$, se tiene que:*

$$\|f\|_2^2 = (1/2\pi)^{2(n+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{C}^n} |f * \mathbf{e}_{\lambda,k}(z,0)|^2 |\lambda|^{2n} \, dz d\lambda$$

Observación 2.32. *Si $f \in L^2(\mathbb{H}_n)$ es $U(n)$ invariante tenemos*

$$f * e_{\lambda,k}(z,0) = \widehat{f}(\lambda,k)\, e_{\lambda,k}(z,0)$$

y entonces la identidad de Plancherel se reescribe como

$$\|f\|_2^2 = (1/2\pi)^{2(n+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{C}^n} \left|\widehat{f}(\lambda,k)\, \mathbf{e}_{\lambda,k}(z,0)\right|^2 |\lambda|^{2n} \, dz d\lambda.$$

■

Teorema 2.33. *(Fórmula de inversión, cf. [**Th98**], Teorema 2.1.1) Para $f \in S(\mathbb{H}_n)$, se tiene la siguiente fórmula de inversión:*

$$f(z,t) = (1/2\pi)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} (f * \mathbf{e}_{\lambda,k})(z,t)\, |\lambda|^n \, d\lambda$$

Observación 2.34. *Si $f \in L^2(\mathbb{H}_n)$ es $U(n)$ invariante, la fórmula de inversión se reescribe como*

$$f(z,t) = (1/2\pi)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\lambda,k)\, \mathbf{e}_{\lambda,k}(z,t)\, |\lambda|^n \, d\lambda.$$

■

Observación 2.35. *Si $f \in S(\mathbb{H}_n)$ y si K es una distribución de soporte compacto entonces para cada $r > 0$, $f * K_r \in S(\mathbb{H}_n)$, y*

$$(f * K_r)(z,t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} (f * K_r * \mathbf{e}_{\lambda,k})(z,t) |\lambda|^n d\lambda.$$

Más aún, si K es en adición radial entonces

$$\begin{aligned}(f * K_r)(z,t) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} (f * K_r * \mathbf{e}_{\lambda,k})(z,t)|\lambda|^n d\lambda \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \widehat{K}(r^2\lambda,k)(f * \mathbf{e}_{\lambda,k})(z,t)|\lambda|^n d\lambda.\end{aligned}$$

■

Necesitaremos algunos resultados conocidos de la teoría de Littlewood-Paley en $\mathbb{H}_n$ que pueden ser hallados en [**MuRiSt96**] y, en una versión levemente modificada, en [**Mu04**]. A continuación haremos un breve resumen de las herramientas que necesitamos de dicha teoría.

Sea $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ con soporte en $(\frac{1}{2}, 2)$, no negativa tal que $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \varphi(2^{2j}|x|)^2 = 1$ para todo $x \neq 0$. Definimos para $j \in \mathbb{Z}$

$$K_{2^j}(z,t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1} \sum_{k\geq 0} \int_{\mathbb{R}} \varphi(2^{2j}(2k+n)|\lambda|)\mathbf{e}_{\lambda,k}(z,t)|\lambda|^n d\lambda. \tag{2.6}$$

Observación 2.36. *$K_{2^j} \in S(\mathbb{H}_n)$ para cada $j \in \mathbb{Z}$, esto se debe al resultado de Astengo, Di Blasio y Ricci [**AsDiRi07**] (Teorema 2.30). En efecto, dado que φ tiene soporte compacto, es claro que si definimos φ_j en el Heisenberg fan como*

$$\varphi_j(\lambda, |\lambda|(2k+n)) = \varphi(2^{2j}(2k+n)|\lambda|),$$

φ_j se extiende a una función en $S(\mathbb{R}^2)$. Luego $K_{2^j} \in S(\mathbb{H}_n)$.

■

El siguiente resultado es la proposición 4.1 de [**Mu04**].

Teorema 2.37. *(cf. [**Mu04**], Proposición 4.1) Para $f \in L^p(\mathbb{H}_n)$ con $1 < p < \infty$, sea*

$$g(f)(z,t) = (\sum_{j\in\mathbb{Z}} |f * K_{2^j}|^2(z,t))^{\frac{1}{2}}.$$

Existen constantes $c_{1,p}$ y $c_{2,p}$ independientes de f tales que

$$c_{1,p}\|f\|_p \leq \|g(f)\|_p \leq c_{2,p}\|f\|_p.$$

Observación 2.38. *(cf. fórmula* (3.3) *en [**Mu04**]) Para* $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *y* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$\widehat{K_{2^j}}(\lambda, k) = \varphi(2^{2j}(2k+n)|\lambda|).$$

$\blacksquare$

3 Algunos resultados conocidos sobre operadores maximales en $\mathbb{H}_n$

En este capítulo enunciaremos resultados conocidos sobre varios operadores maximales, tanto en el grupo de Heisenberg, como en el caso clásico del espacio euclídeo que necesitaremos luego.

Sea M el operador maximal de Hardy Littlewood en $\mathbb{H}_n$ definido, para $f \in L^p_{loc}(\mathbb{H}_n)$ y $(z,t) \in \mathbb{H}_n$, por

$$Mf(z,t) = \sup_{r>0} \int_{|(w,s)|<1} |f|((z,t)(\delta_r(w,s))^{-1})d(w,s) \tag{3.1}$$

Teorema 3.1. *(M. Christ, [**Ch92**]) M es un operador acotado en $L^p(\mathbb{H}_n)$ para $p > 1$.*

Christ considera también los siguientes dos operadores: sean M_3 y M_{sing} los operadores definidos, para $f \in S(\mathbb{H}_n)$ y $(z,t) \in \mathbb{H}_n$, por

$$M_3 f(z,t) = \sup_{r>0} \int_{s\in\mathbb{R},\ |s|<1} |f|((z,t)(\mathbf{0}, -rs))ds \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} &M_{sing} f(z,t) \\ &= \sup_{r_1>0,\dots,r_n>0} \int_{w_1,\dots,w_n\in\mathbb{C}^n; |(w_1,\dots,w_n)|<1} |f((z,t)(-r_1w_1,\dots,-r_nw_n,0))|dw_1\dots dw_n \end{aligned} \tag{3.3}$$

Para estos operadores se tiene

Lema 3.2. *(M. Christ, [**Ch92**]) Los operadores M_3 y M_{sing} son acotadas en $L^p(\mathbb{H}_n)$ para $p > 1$.*

Asimismo, operadores maximales esféricos en $\mathbb{H}_n$ fueron estudiados en [**NaTh04**] por Naranayan y Thangavelu y en [**MuSe04**] por Müller y Seeger quienes probaron independientemente el siguiente teorema:

Teorema 3.3. *Sea $n > 1$, sea S^{2n-1} la esfera unidad en $\mathbb{C}^n$, y σ la medida dada por el elemento de área de S^{2n-1}, normalizada de modo que $\sigma(S^{2n-1}) = 1$. Para $f \in S(\mathbb{H}_n)$*

y $(z,t) \in \mathbb{H}_n$ *sea* $M_{sph}f(z,t)$ *definido por*

$$M_{sph}f(z,t) = \sup_{r>0} \int\limits_{S^{2n-1}} |f((z,t)(\delta_r(y,0)^{-1})|d\sigma(y).$$

Entonces M_{sph} *es un operador acotado en* L^p *para* $\dfrac{2n}{2n-1} < p < \infty$.

Es interesante notar que al día de la fecha no se conoce una prueba de este resultado para $\mathbb{H}_1$. Esto no es tan sorprendente si se observa que en el caso euclídeo la prueba dada del resultado análogo de Stein en $\mathbb{R}^n$ para $n > 2$ en [**Ste76**] no es aplicable al caso $n = 2$, y que el resultado en dimensión 2, obtenido por Bourgain en [**Bou86**], sigue de argumentos completamente diferentes a los usados por Stein. El teorema, en el caso euclídeo, es el siguiente

Teorema 3.4. *(E. M. Stein para* $n > 2$*, J. Bourgain para* $n = 2$*) Sea* S^{n-1} *la esfera unidad en* $\mathbb{R}^n$*, y sea* σ *la medida dada por el elemento de área de* S^{n-1}*, normalizada de modo que* $\sigma(S^{n-1}) = 1$*. Para* $f \in S(\mathbb{R}^n)$ *y* $x \in \mathbb{R}^n$ *sea*

$$M_{Euc}f(x) = \sup_{r>0} \int\limits_{S^{n-1}} |f(x - ry)|d\sigma(y).$$

Entonces M_{Euc} *es un acotado en* L^p *si y solo si* $p > \dfrac{n}{n-1}$.

4 Un operador maximal cilíndrico en $\mathbb{H}_n$

El primer objetivo de este capítulo es probar el siguiente teorema.

Teorema 4.1. *Sean σ la medida dada por el elemento de área euclídeo en $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ normalizada por $\sigma\left(S^{2n-1}\right) = 1$ y sea χ_I la función característica del intervalo $I = [-1, 1]$. Sea M_{cil} el operador maximal definido para $f \in S(\mathbb{H}_n)$ por*

$$M_{cil} f = \sup_{1 \le r \le 2} \left(|f| * (\sigma \otimes \chi_I)_r \right).$$

Entonces para $p > \dfrac{2n}{2n-1}$ existe una constante positiva c tal que $\|M_{cil}(f)\|_p \le c \|f\|_p$ para toda $f \in S(\mathbb{H}_n)$.

Para probar este teorema necesitaremos considerar un operador maximal auxiliar. Para $k \in \mathbb{N}$ sea

$$S_k = \left\{ z \in \mathbb{C}^n : 1 < |z| < 1 + 2^{-k} \right\}$$

y sea

$$\sigma_k(z) = 2^k \chi_{S_k}(z), \qquad z \in \mathbb{C}^n. \tag{4.1}$$

Permitiéndonos un abuso de notación denotaremos también con σ_k a la medida en $\mathbb{C}^n$ dada por $\sigma_k(E) = \displaystyle\int_E 2^k \chi_{S_k}(z)\, dz$ para cada conjunto de Borel $E \subset \mathbb{C}^n$. Para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{C}^n)$ sea

$$M_k^B f = \sup_{1 \le r \le 2} \left(|f| *_{\mathbb{C}^n} (\sigma_k)_r \right)$$

donde $*_{\mathbb{C}^n}$ denota el producto de convolución es el de $\mathbb{C}^n$.

Observación 4.2. *Si $p > \dfrac{2n}{2n-1}$ entonces existe una constante positiva c independiente de k tal que $\left\|M_k^B f\right\|_{L^p(\mathbb{C}^n)} \le c \|f\|_{L^p(\mathbb{C}^n)}$ para toda $f \in S(\mathbb{C}^n)$. En efecto*

$$\begin{aligned} M_k^B f(z) &= \sup_{1 \le r \le 2} \left(\left(|f| *_{\mathbb{C}^n} (\sigma_k)_r \right)(z) \right) = 2^k \sup_{1 \le r \le 2} \int_{\mathbb{C}^n} |f(z - rz')|\, \chi_{S_k}(z')\, dz' \\ &\le 2^k \left|S^{2n-1}\right| \sup_{1 \le r \le 2} \int_{S^{2n-1}} \int_1^{1+2^{-k}} |f(z - r\rho w)|\, \rho^{2n-1} d\rho d\sigma(w) \\ &\le c_n \sup_{r > 0} \int_{S^{2n-1}} |f(z - rw)|\, d\sigma(w) = M^B(f)(z) \end{aligned}$$

y la observación sigue del teorema 3.4.

$\blacksquare$

Para $k \in \mathbb{N}$ y $f \in S(\mathbb{H}_n)$ definimos ahora $M_k f : \mathbb{H}_n \mapsto \mathbb{R}$ mediante

$$M_k f(z,t) = \sup_{1 \le r \le 2} \int_{-1}^{1} \int_{S_k} \left| f\left((z,t)\,\delta_r(y,s)^{-1}\right)\right| \sigma_k(y)\, dyds.$$

donde tanto la dilatación δ_r como el producto $(z,t)\,\delta_r(y,s)^{-1}$ son los de $\mathbb{H}_n$.

Lema 4.3. *Sean $k \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$ y supóngase que existe una constante positiva c independiente de k tal que $\|M_k f\|_p \le c\|f\|_p$ para toda $f \in L^p(\mathbb{H}_n)$ con soporte contenido en $Q_0 = \left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] + i\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right)^n \times \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$. Entonces existe una constante positiva c' también independiente de k tal que $\|M_k(f)\|_p \le c\|f\|_p$ para toda $f \in L^p(\mathbb{H}_n)$.*

Prueba.

Sea $Q_0 = \left(\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] + i\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right)^n \times \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ y sea H el subgrupo discreto de $\mathbb{H}_n$ dado por $H = \mathbb{Z}^{2n} \times \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Sea $\mathcal{B}_0$ la familia de los "cubos" diádicos que son traslaciones a izquierda (en $\mathbb{H}_n$) de Q_0 por elementos de H, i.e., $B_0 = \{gQ_0 : g \in H\}$. Notemos que $\mathbb{H}_n = \cup_{Q \in B_0} Q$. En efecto, si $(z,t) \in \mathbb{H}_n$ existe $h \in (\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})^n$ unívocamente determinado tal que $z - h \in \left(\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] + i\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right)^n$. Entonces $z = h + \theta$ con $\theta \in \left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] + i\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right)^n$. Ahora, para $\tau \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
(z,t)\left(h, \frac{1}{2}\tau\right)^{-1} &= \left(z - h, t - \frac{1}{2}\tau + \frac{1}{2} imB(z,h)\right) \\
&= \left(z - h, t - \frac{1}{2}\tau + \frac{1}{2} imB(h+\theta,h)\right) \\
&= \left(z - h, t - \frac{1}{2}\tau + \frac{1}{2} imB(\theta,h)\right)
\end{aligned}$$

donde $B(z,z') = \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{z_j'}$ para $z = (z_1, ..., z_n)\,, z' = (z_1', ..., z_n') \in \mathbb{C}^n$ .Eligiendo $\tau \in \mathbb{Z}$ tal que $2t - \tau + imB(\theta,h) \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ obtenemos $(z,t)\left(h, \frac{1}{2}\tau\right)^{-1} \in Q_0$ y luego $(z,t) \in \cup_{Q \in B_0} Q$. Entonces $\mathcal{B}_0$ es un cubrimiento de $\mathbb{H}_n$. Observemos también que

$gQ_0 \cap Q_0 = \varnothing$ si $g \in H$ y $g \neq (\mathbf{0}, 0)$ y que por lo tanto $\mathcal{B}_0$ es una familia de subconjuntos de $\mathbb{H}_n$ mutuamente disjuntos.

Sea $f \in S(\mathbb{H}_n)$, descomponemos a f como

$$f = \sum_{Q \in B_0} f_Q,$$

donde $f_Q(z,t) = f(z,t)\chi_Q(z,t)$. Entonces, para $r > 0$,

$$(f * (\sigma_k \otimes \chi_I)_r)(z,t) = \sum_{Q \in B_0} (f_Q * (\sigma_k \otimes \chi_I)_r)(z,t).$$

Para $Q \in \mathcal{B}_0$,

$$(f_Q * (\sigma_k \otimes \chi_I)_r)(z,t) = \int_{\mathbb{H}_n} f_Q\left((z,t)(w,s)^{-1}\right)(\sigma_k \otimes \chi_I)_r(w,s)\, dwds.$$

Supongamos que $(z,t) \in \mathit{Sop}(f_Q * (\sigma_k \otimes \chi_I)_r)$. Si (w,s) pertenece al soporte del integrando de la última integral tenemos $(z,t)(w,s)^{-1} \in Q$ y $(w,s) \in rS_k \times r^2 I \subset Q^{\#}$ con $Q^{\#} := ([-2,2] + i[-2,2])^n \times [-2,2]$, luego $(z,t) \in QQ^{\#}$. Entonces

$$\mathit{Sop}(f_Q * (\sigma_k \otimes \chi_I)_r) \subset QQ^{\#},$$

esto para cada $r \in [1,2]$. Entonces $\sup\limits_{1 \leq r \leq 2} (f_Q * (\sigma_k \otimes \chi_I)_r)$ tiene soporte contenido en $QQ^{\#}$ para cada $Q \in \mathcal{B}_0$.

Sea N la cantidad de elementos de H en el conjunto $Q_0Q^{\#}\left(Q_0Q^{\#}\right)^{-1}$. Entonces para cada $(z,t) \in \mathbb{H}_n$, (z,t) pertenece a lo sumo a N de los soportes de las funciones $\sup\limits_{1 \leq r \leq 2} (f_Q * (\sigma_k \otimes \chi_I)_r)$ con $Q \in \mathcal{B}_0$. En efecto, tenemos que $(z,t) \in QQ^{\#}$ para algún $Q = hQ_0 \in \mathcal{B}_0$ con $h \in H$, y si $(z,t) \in Q'Q^{\#}$ con $Q' = h'Q_0 \in \mathcal{B}_0$ con $h' \in H$ entonces $h^{-1}h' \in Q_0Q^{\#}\left(Q_0Q^{\#}\right)^{-1}$ y entonces hay a lo sumo N de tales Q'. Ahora,

$$\begin{aligned}
\left(\sup_{1 \leq r \leq 2} (|f| * (\sigma_k \otimes \chi_I)_r)(z,t)\right)^p &\leq \left(\sum_{Q \in \mathcal{B}_0} \sup_{1 \leq r \leq 2} (|f_Q| * (\sigma_k \otimes \chi_I)_r)(z,t))\right)^p \\
&= N^p \left(\frac{1}{N} \sum_{Q \in \mathcal{B}_0} \sup_{1 \leq r \leq 2} (|f_Q| * (\sigma_k \otimes \chi_I)_r)(z,t))\right)^p \\
&\leq N^{p-1} \sum_{Q \in \mathcal{B}_0} \sup_{1 \leq r \leq 2} ((|f_Q| * (\sigma_k \otimes \chi_I)_r)(z,t))^p,
\end{aligned}$$

la última desigualdad por la convexidad de la función $s \to s^p$. Entonces

$$\left\| \sup_{1 \le r \le 2} \left(|f| * (\sigma_k \otimes \chi_I)_r \right) \right\|_p^p \le N^{p-1} \sum_{Q \in B_0} \left\| \sup_{1 \le r \le 2} \left(|f_Q| * (\sigma_k \otimes \chi_I)_r \right) \right\|_p^p .$$

Para cada Q en $\mathcal{B}_0$ sea $g_Q \in H$ tal que $Q = g_Q Q_0$. Sea L_{g_Q} la traslación a izquierda por g_Q. Notemos que $f_Q \circ L_{g_Q}$ tiene soporte contenido en Q_0 y que un cambio de variable da, para $1 \le r \le 2$ y para cada $(z,t) \in \mathbb{H}_n$,

$$\begin{aligned}
\left(|f_Q| * (\sigma_k \otimes \chi_I)_r \right) \left(L_{g_Q}(z,t) \right) &= \int_{\mathbb{H}_n} \left| f_Q \left(L_{g_Q}(z,t)(w,s)^{-1} \right) \right| (\sigma_k \otimes \chi_I)_r (w,s) \, dwds \\
&= \int_{\mathbb{H}_n} \left| f_Q \circ L_{g_Q} \left((z,t)(w,s)^{-1} \right) \right| (\sigma_k \otimes \chi_I)_r (w,s) \, dwds \\
&= \left| f_Q \circ L_{g_Q} \right| * (\sigma_k \otimes \chi_I)_r (z,t)
\end{aligned}$$

entonces

$$\sup_{1 \le r \le 2} \left(|f_Q| * (\sigma_k \otimes \chi_I)_r \right) \left(L_{g_Q}(z,t) \right) = \sup_{1 \le r \le 2} \left(\left| f_Q \circ L_{g_Q} \right| * (\sigma_k \otimes \chi_I)_r \right) (z,t) .$$

Luego

$$\begin{aligned}
\left\| \sup_{1 \le r \le 2} \left(|f_Q| * (\sigma_k \otimes \chi_I)_r \right) \right\|_p^p &= \left\| \sup_{1 \le r \le 2} \left(\left(|f_Q| * (\sigma_k \otimes \chi_I)_r \right) \circ L_{g_Q} \right) \right\|_p^p \\
&= \left\| \sup_{1 \le r \le 2} \left(\left| f_Q \circ L_{g_Q} \right| * (\sigma_k \otimes \chi_I)_r \right) \right\|_p^p \\
&\le c^p \left\| f_Q \circ L_{g_Q} \right\|_p^p = c^p \left\| f_Q \right\|_p^p
\end{aligned}$$

la última desigualdad por la hipótesis del lema. Entonces

$$\begin{aligned}
\left\| \sup_{1 < r < 2} \left(|f| * (\sigma_k \otimes \chi_I)_r \right) \right\|_p^p &\le N^{p-1} \sum_{Q \in \mathcal{B}_0} \left\| \sup_{1 \le r \le 2} \left(|f_Q| * (\sigma_k \otimes \chi_I))_r \right) \right\|_p^p \\
&\le N^{p-1} c^p \sum_{Q \in \mathcal{B}_0} \| f_Q \|_p^p = N^{p-1} c^p \| f \|_p^p .
\end{aligned}$$

■

Recordemos la desigualdad de Jensen: Si (X,μ) es un espacio de medida con μ medida positiva sobre X tal que $\mu(X) = 1$, si $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función convexa y si $f \in L^1(X,\mu)$ entonces $\Phi \left(\int_X f d\mu \right) \le \int_X \Phi \circ f d\mu$.

Si (X,μ) es un espacio de medida con μ medida positiva tal que $\mu(X)<\infty$ y si $p\geq 1$, aplicando la desigualdad de Jensen con la medida $\dfrac{1}{\mu(X)}\mu$ y con la función $\Phi(s)=|s|^p$ se obtiene inmediatamente la siguiente desigualdad (también llamada desigualdad de Jensen): $\left|\int_X fd\mu\right|^p\leq(\mu(X))^{p-1}\int_X|f|^p\,d\mu.$

Lema 4.4. *Para cada $k\in\mathbb{N}$, y $\dfrac{2n}{2n-1}<p<\infty$ existe una constante positiva c independiente de k tal que $\|M_k(f)\|_p\leq c\|f\|_p$ para toda $f\in L^p(\mathbb{H}_n)$ con soporte contenido en $Q_0=\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]+i\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right)^n\times\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$.*

Prueba. Sea $f\in L^p(\mathbb{H}_n)$ una función con soporte contenido en Q_0. Entonces $sopM_k(f)\subset([-10,10]+i[-10,10])\times[-10,10]$ para todo $k\in\mathbb{N}$. Observemos también que para $(z,t)\in\mathbb{H}_n$ existe $r(z,t)$, con $1\leq r(z,t)\leq 2$ tal que

$$M_kf(z,t)\leq 2\int_{-1}^{1}\int_{S_k}\left|f\left((z,t)\left(\delta_{r(z,t)}(y,s)\right)^{-1}\right)\right|\sigma_k(y)\,dyds.$$

Sea $\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R})$ una función par, no negativa, con $sop(\psi)\subset(-2,2)$, $\psi'\leq 0$ en $(0,\infty)$ y tal que $\psi\equiv 1$ en $[-1,1]$, definimos $(\sigma_k)_{r(z,t)}(y):=\dfrac{1}{(r(z,t))^2}\sigma_k\left(\dfrac{y}{r(z,t)}\right)$. Un cambio de variable nos da

$$\begin{aligned}
M_kf(z,t) &\leq 2\frac{1}{(r(z,t))^{2n+2}}\int_{\mathbb{H}_n}\left|f\left((z,t)(y,s)^{-1}\right)\right|\sigma_k\left(\frac{y}{r(z,t)}\right)\psi\left(\frac{s}{(r(z,t))^2}\right)dyds\\
&\leq 2\int_{\mathbb{C}^n}\left(\int_{\mathbb{R}}\left|f\left(z-y,t-s+\frac{1}{2}imB(z,y)\right)\right|\psi\left(\frac{s}{4}\right)ds\right)(\sigma_k)_{r(z,t)}(y)\,dy\\
&= 2\int_{\mathbb{C}^n}\left(|f(z-y,.)|*_{\mathbb{R}}\tilde{\psi}\right)\left(t+\frac{1}{2}imB(z,y)\right)(\sigma_k)_{r(z,t)}(y)\,dy\\
&= 2\int_{\mathbb{C}^n}\left(|f(z-y,.)|*_{\mathbb{R}}\tilde{\psi}\right)\left(t+\frac{1}{2}reB(z-y,z)\right)(\sigma_k)_{r(z,t)}(y)\,dy,
\end{aligned}$$

donde $*_{\mathbb{R}}$ denota el producto de convolución en $\mathbb{R}$ y $\tilde{\psi}(s):=\psi\left(\dfrac{s}{4}\right)$. Sea, para $z,w\in\mathbb{C}^n$ y $t\in\mathbb{R}$,

$$F(w,z,t):=\left(|f|(z,.)*\tilde{\psi}\right)\left(t+\frac{1}{2}imB(z,w)\right).$$

Entonces, para $(z,t) \in ([-10,10] + i\,[-10,10])^n \times [-10,10]$

$$\begin{aligned} M_k f\,(z,t) &\leq 2\int_{\mathbb{C}^{n2}} F\,(z, z-y, t)\,(\sigma_k)_{r(z,t)}\,(y)\,dy \\ &\leq 2 \sup_{1\leq r\leq 2} \left(F\,(z,.,t) *_{\mathbb{C}^n} (\sigma_k)_r\right)(z) \\ &= 2M_k^B\,(F\,(z,.,t))\,(z)\,. \end{aligned}$$

con M_k^B como en la observación anterior. Como f y ψ tienen soporte compacto entonces $F\,(w,.,.)$ tiene soporte compacto para cada $w \in \mathbb{C}^n$. Sea

$$G\,(z,t) = \sup_{|w|\leq 10} F\,(w,z,t)\,.$$

Entonces $sop\,(G) \subset K := ([-100,100] + i\,[-100,100])^n \times [-100,100]$ y

$$M_k f\,(z,t) \leq 2M_k^B\,(F\,(z,.,t))\,(z) \leq 2M_k^B\,(G\,(.,t))\,(z)\,.$$

Si probamos que $\|G\|_p \leq c\,\|f\|_p$ con c independiente de f, entonces

$$\begin{aligned} \|M_k f\|_p &\leq 2\left\| \left\|M_k^B\,(G\,(.,t))\,(z)\right\|_{L^p(\mathbb{C}^n,dz)}\right\|_{L^p(\mathbb{R},dt)} \leq c' \left\|\|G(.,t)\|_{L^p(\mathbb{C}^n,dz)}\right\|_{L^p(\mathbb{R},dt)} \\ &= c'\,\|G\|_p \leq cc'\,\|f\|_p \end{aligned}$$

Luego para concluir la prueba solo nos queda ver que $\|G\|_p \leq c\,\|f\|_p$. Para $\varepsilon > 0$ y $(z,t) \in \mathbb{H}_n$ existe una función no negativa $h_{z,t} \in L^1\,(\mathbb{R})$ con $\|h_{z,t}\|_{L^1(\mathbb{R})} = 1$ tal que $G\,(z,t) \leq \varepsilon + \int_{\mathbb{C}^n} F\,(w,s,t)\,h_{z,t}\,(w)\,dw$. Luego, por la convexidad de la función $s \to s^p$ y por la desigualdad de Jensen

$$\begin{aligned} |G\,(z,t)|^p &\leq 2^{p-1}\varepsilon^p + 2^{p-1}\left(\int_{\mathbb{C}^n} F\,(w,z,t)\,h_{z,t}\,(w)\,dw\right)^p \\ &\leq 2^{p-1}\varepsilon^p + 2^{p-1}\int_{\mathbb{C}^n} (F\,(w,z,t))^p\,h_{z,t}\,(w)\,dw \\ &= 2^{p-1}\varepsilon^p + 2^{p-1}\int_{\mathbb{C}^n} \left(|f|\,(z,.) *_{\mathbb{R}} \tilde{\psi}\right)^p \left(t + \frac{1}{2}imB\,(z,w)\right) h_{z,t}\,(w)\,dw \end{aligned}$$

y nuevamente por la desigualdad de Jensen,

$$\begin{aligned}
& \left(|f|(z,.) *_{\mathbb{R}} \tilde{\psi}\right)^p \left(t + \frac{1}{2} imB(z,w)\right) \\
= & \left(\int_{\mathbb{R}} \left| f\left(z, t + \frac{1}{2} imB(z,w) - s\right)\right| \tilde{\psi}(s)\, ds\right)^p \\
\leq & \left\|\tilde{\psi}\right\|_{L^1(\mathbb{R})}^{p-1} \int_{\mathbb{R}} \left| f\left(z, t + \frac{1}{2} imB(z,w) - s\right)\right|^p \tilde{\psi}(s)\, ds \\
= & \left\|\tilde{\psi}\right\|_{L^1(\mathbb{R})}^{p-1} \left(|f|^p (z,.) *_{\mathbb{R}} \tilde{\psi}\right) \left(t + \frac{1}{2} imB(z,w)\right) \\
\leq & \left\|\tilde{\psi}\right\|_{L^1(\mathbb{R})}^{p-1} \left\| |f|^p (z,.) *_{\mathbb{R}} \tilde{\psi}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\
\leq & \left\|\tilde{\psi}\right\|_{L^1(\mathbb{R})}^{p-1} \left\|\tilde{\psi}\right\|_{L^{p'}(\mathbb{R})} \left\| |f|(z,.)\right\|_{L^p(\mathbb{R})}^p
\end{aligned}$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Entonces,

$$\begin{aligned}
|G(z,t)|^p & \leq 2^{p-1}\varepsilon^p + 2^{p-1} \int_{n} \left(|f|(z,.) *_{\mathbb{R}} \tilde{\psi}\right)^p \left(t + \frac{1}{2} imB(z,w)\right) h_{z,t}(w)\, dw \\
& \leq 2^{p-1}\varepsilon^p + 2^{p-1} \left\|\tilde{\psi}\right\|_{L^1(\mathbb{R})}^{p-1} \left\|\tilde{\psi}\right\|_{L^{p'}(\mathbb{R})} \|f(z,.)\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \\
& = 2^{p-1}\epsilon^p + c \|f(z,.)\|_{L^p(\mathbb{R})}^p .
\end{aligned}$$

Luego, dado que $sop(G) \subset ([-100.100] + i[-100.100])^n \times [-100.100]$, se tiene que:

$$\|G\|_p^p = \left\| \|G(.,t)\|_{L^p(\mathbb{C}^n)}^p \right\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \leq c \int_{-100}^{100} \left(\int_{\mathbb{C}^n} |f^p(z,.)|\, dz\right) dt + c'\varepsilon^p = c'\varepsilon^p + c'' \|f\|_p^p$$

con c', c'' constantes positivas independientes de ϵ y f. Tomando $\varepsilon = \|f\|_p$ concluímos la prueba del lema.

■

Prueba del Teorema 4.1

Para $\varphi \in C(\mathbb{H}_1)$ tenemos que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{vol(S_k)} \int_{S_k} \varphi(z,t)\, dz = \int_{S^1} \varphi(z,t)\, d\sigma(z) \tag{4.2}$$

con convergencia uniforme en t sobre cada compacto $K \subset \mathbb{R}$. En efecto denotando con ω_{2n-1} el área de S^{2n-1} y con dA al elemento de área de S^{2n-1}, (4.2) sigue de la igualdad

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{vol\left(S_k\right)}\int_{S_k}\varphi\left(z,t\right)dz-\int_{S^{2n-1}}\varphi\left(z,t\right)d\sigma\left(z\right)\\
=\;&\frac{1}{\omega_{2n-1}}\frac{2n}{\left(1+2^{-k}\right)^{2n}-1}\int_{s^{2n-1}}\int_{1}^{1+2^{-k}}\varphi\left(\rho y,t\right)\rho^{2n-1}d\rho dA\left(y\right)\\
&-\frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{s^{2n-1}}\varphi\left(y,t\right)dA\left(y\right)\\
&=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\frac{2n}{\left(1+2^{-k}\right)^{2n}-1}\int_{s^{2n-1}}\int_{1}^{1+2^{-k}}\left(\varphi\left(\rho y,t\right)-\varphi\left(y,t\right)\right)\rho^{2n-1}d\rho dA\left(y\right)
\end{aligned}$$

y de la continuidad uniforme de φ sobre $\{z\in\mathbb{C}^n : |z|\leq 2\}\times K$.

Luego $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\sigma_k\otimes\chi_I\right)=\omega_{2n-1}\sigma\otimes\chi_I$ con convergencia en $S'\left(\mathbb{H}_1\right)$. Entonces, para $f\in S\left(\mathbb{H}_1\right)$ y $1\leq r\leq 2$ tenemos

$$\lim_{k\to\infty}|f|*\left(\sigma_k\otimes\chi_I\right)_r=\lim_{k\to\infty}|f|*\left(\sigma\otimes\chi_I\right)_r$$

con convergencia puntual. Luego

$$\begin{aligned}
|f|*\left(\sigma\otimes\chi_I\right)_r &= \liminf_{k\to\infty}|f|*\left(\sigma_k\otimes\chi_I\right)_r\\
&\leq \liminf_{k\to\infty}\sup_{1\leq r\leq 2}|f|*\left(\sigma_k\otimes\chi_I\right)_r=\liminf_{k\to\infty}M_k\left(f\right)
\end{aligned}$$

Luego

$$\left(M_{cil}f\right)^p\leq\liminf_{k\to\infty}\left(M_kf\right)^p$$

Por lo que, por el Lema de Fatou y el lema anterior,

$$\|M_{cil}f\|_p^p\leq\int\liminf_{k\to\infty}\left(M_kf\right)^p(z,t)\,dzdt$$

$$\leq\liminf_{k\to\infty}\int\left(M_kf\right)^p(z,t)\,dzdt\leq c\,\|f\|_p^p.$$

■

Observación 4.5. *Sea σ la medida dada por el elemento de área euclídeo en $S^{2n-1}\subset\mathbb{C}^n$ normalizada por $\sigma\left(S^{2n-1}\right)=1$, y sea χ_I la función carácterística del intervalo $I=[-1,1]$. Sea $A>0$ y sea $p>\dfrac{2n}{2n-2}$. Entonces existe c independiente de A tal que para toda $f\in S(\mathbb{H}_n)$*

$$\left\|\sup_{A\leq r\leq 2A}\left(|f|*\left(\sigma\otimes\chi_I\right)_r\right)\right\|_p\leq c\,\|f\|_p$$

Pues.

$$\begin{aligned}
\sup_{A\le r\le 2A}\left(|f|*(\sigma\otimes\chi_I)_r\right)(z,t) &= \sup_{A\le r\le 2A}\int_{S^{2n-1}}\int_{-1}^{1}|f|\left((z,t)\,\delta_r\left(-w,-s\right)\right)dsd\sigma\\
&= \sup_{1\le r\le 2}\int_{S^{2n-1}}\int_{-1}^{1}|f|\left((z,t)\,\delta_{Ar}\left(-w,-s\right)\right)dsd\sigma\\
&= \sup_{1\le r\le 2}\int_{S^{2n-1}}\int_{-1}^{1}|f|(\delta_A[\delta_{A^{-1}}\left(z,t\right)\delta_r\left(-w,-s\right)])dsd\sigma\\
&= \sup_{1\le r\le 2}\left(\left|f^A\right|*(\sigma\otimes\chi_I)_r\right)(A^{-1}z,A^{-2}t),
\end{aligned}$$

donde $f^A(z,t)=f(Az,A^2t)$. Luego

$$\left\|\sup_{A\le r\le 2A}\left(|f|*(\sigma\otimes\chi_I)_r\right)(z,t)\right\|_p=\left\|\sup_{1\le r\le 2}\left(\left|f^A\right|*(\sigma\otimes\chi_I)_r\right)(A^{-1}z,A^{-2}t)\right\|_{p,(z,t)}$$

$$=A^{\frac{2n+2}{p}}\left\|\sup_{1\le r\le 2}\left(\left|f^A\right|*(\sigma\otimes\chi_I)_r\right)(z,t)\right\|_{p,(z,t)}\le A^{\frac{2n+2}{p}}c\left\|f^A\right\|_p\le c\left\|f\right\|_p$$

■

Observación 4.6. *El operador M_{cil} se extiende a un operador acotado sobre todo $L^p(\mathbb{H}_n)$, para $p>\dfrac{2n}{2n-1}$ (cf. los comentarios hechos en la introducción antes de la descripción del contenido de los capítulos de este trabajo) .*

■

Corolario 4.7. *Para $p>\dfrac{2n}{2n-1}$ se tiene que*

$$\lim_{r\to 0}\left\|\left(f*(\sigma\otimes\chi_I)_r\right)-f\right\|_p=0$$

Prueba. Dados $f\in L^p(\mathbb{H}_n)$ y $\epsilon>0$ tomamos F una función en $S(\mathbb{H}_n)$ tal que

$$\left\|f-F\right\|_p<\frac{\epsilon}{3\max(c,1)},$$

donde c es la cota del operador M_{cil} sobre $L^p(\mathbb{H}_n)$. Sea δ tal que para todo $0<r<\delta$,

$$\left\|\left(F*(\sigma\otimes\chi_I)_r\right)-F\right\|_p<\frac{\epsilon}{3}.$$

Entonces si $0<r<\delta$, tomamos $A>0$ tal que $A<r<2A$ y resulta que

$$\left\|\left(f*(\sigma\otimes\chi_I)_r\right)-f\right\|_p\le\left\|(f-F)*(\sigma\otimes\chi_I)_r\right\|_p+\left\|\left(F*(\sigma\otimes\chi_I)_r\right)-F\right\|_p+\left\|f-F\right\|_p$$

$$\le\left\|\sup_{A\le r\le 2A}\left(|f-F)|*(\sigma\otimes\chi_I)_r\right.\right\|_p+\frac{2\epsilon}{3}\le c\left\|f-F\right\|_p+\frac{2\epsilon}{3}<\epsilon$$

$\blacksquare$

El rango de valores de p dado por el Teorema 4.1 es óptimo, en efecto, M_{cil} no es un operador acotado en $L^p(\mathbb{H}_n)$ para $1 \leq p \leq \dfrac{2n}{2n-1}$. Esto sigue del teorema de interpolación de Marcinkiewicz (cf. capítulo 6, Teorema 6.10), de la acotación obtenida para $p > \dfrac{2n}{2n-1}$, y del hecho de que M_{cil} no es acotado en $L^{\frac{2n}{2n-1}}(\mathbb{H}_1)$. Para ver que M_{cil} no es acotado en $L^{\frac{2n}{2n-1}}(\mathbb{H}_n)$ se procede de modo similar al caso eulídeo: Sea $f : \mathbb{H}_n \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(z,t) = \frac{1}{|z|^{2n-1} |\log(|z|)|} \chi_B(z) \chi_{\widetilde{B}}(t)$$

con $B = \left\{ z : |z| < \dfrac{1}{2} \right\}$ y $\widetilde{B} = \{t : |t| < 20\}$, y donde $|z|$ y $|t|$ denotan las normas euclídeas de z y t en $\mathbb{C}^n$ y $\mathbb{R}$ respectivamente. Entonces, pasando a coordenadas polares,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{H}_n} |f(z,t)|^{\frac{2n}{2n-1}} dzdt &= 40 \left| S^{2n-1} \right| \int_0^{\frac{1}{2}} \left| \frac{1}{\log(r)} \right|^{\frac{2n}{2n-1}} \frac{1}{r} dr \\
&= 40 \left| S^{2n-1} \right| \int_{-\log\left(\frac{1}{2}\right)}^{\infty} s^{-\frac{2n}{2n-1}} ds < \infty.
\end{aligned}$$

donde $\left|S^{2n-1}\right|$ denota el area de S^{2n-1}. Luego $f \in L^{\frac{2n}{2n-1}}(\mathbb{H}_n)$.

Sea $D = \{z : 1 < |z| < 2\}$ y sea $f^{\#} : \mathbb{H}_n \to \mathbb{R}$ dada por

$$\begin{aligned}
f^{\#}(z,t) \quad &: = \chi_D(z) \left(f * (\sigma \otimes \chi_I)_{|z|} \right)(z,t) \\
&= \chi_D(z) \int_I \int_{S^{2n-1}} \left| f\left((z,t)\, \delta_{|z|}(y,s)^{-1} \right) \right| d\sigma(y)\, ds,
\end{aligned}$$

(donde $I = [-1,1]$). Entonces para $(z,t) \in D \times I$,

$$\begin{aligned}
f^{\#}(z,t) &= \int_I \int_{S^{2n-1}} f\left((z,t)\, \delta_{|z|}(y,s)^{-1} \right) d\sigma(y)\, ds \\
&= \int_I \int_{S^{2n-1}} f\left(z - |z|\, y, t - |z|^2 s - \frac{1}{2} |z|\, ImB(z,y) \right) d\sigma(y)\, ds \\
&= \int_I \int_{S^{2n-1}} \frac{1}{|z - |z|\, y|^{2n-1} |\log(|z - |z|\, y|)|} \chi_B(z - |z|\, y) \\
&\quad \times \chi_{\widetilde{B}}\left(t - |z|^2 s - \frac{1}{2} |z|\, ImB(z,y) \right) d\sigma(y)\, ds
\end{aligned}$$

donde $B(z,y)=\sum_{j=1}^{n} z_j\overline{y_j}$. Ahora, como $|B(z,y)|\leq |z|\,|y|$, entonces para $t\in I$, $s\in I, z\in D$, $y\in S^{2n-1}$ tenemos $\left|t-|z|^2 s-\frac{1}{2}|z|\,ImB(z,y)\right|\leq 7$ y por lo tanto $\chi_{\widetilde{B}}\left(t-|z|^2 s-\frac{1}{2}|z|\,ImB(z,y)\right)=1$. Luego, para $(z,t)\in D\times I$,

$$f^{\#}(z,t)=2\int_{S^{2n-1}}\frac{1}{|z-|z|\,y|^{2n-1}\,|\log(|z-|z|\,y|)|}\chi_B(z-|z|\,y)\,d\sigma(y).$$

Sea $A\in U(n)$ tal que $z=|z|\,A(e_1)$ donde $e_1=(1,0,0,...,0)\in\mathbb{C}^n$. Entonces

$$\begin{aligned}
& f^{\#}(z,t)\\
=\ & \frac{2}{|z|^{2n-1}}\int_{S^{2n-1}}\frac{1}{|A(e_1)-y|^{2n-1}\,|\log(|z|\,|A(e_1)-y|)|}\chi_B(|z|\,(A(e_1)-y))\,d\sigma(y)\\
=\ & \frac{2}{|z|^{2n-1}}\int_{S^{2n-1}}\frac{1}{|e_1-y|^{2n-1}\,|\log(|z|\,|e_1-y|)|}\chi_B(|z|\,(e_1-y))\,d\sigma(y),
\end{aligned}$$

la última igualdad por ser σ una medida invariante por rotaciones. Escribiendo $y=(y_1,y_2,...,y_{2n})$ y poniendo $\widetilde{y}=(y_2,...,y_{2n})$ tenemos $|e_1-y|=(2(1-y_1))^{\frac{1}{2}}$. Si $|\widetilde{y}|<\varepsilon$ con ε suficientemente pequeño y si $(y_1,\widetilde{y})\in S^{2n-1}$ entonces $|e_1-y|<\frac{1}{4}$, luego si $z\in D$ tenemos $\chi_B(|z|\,(e_1-y))=1$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}
& \int_{S^{2n-1}}\frac{1}{|e_1-y|^{2n-1}\,|\log(|z|\,|e_1-y|)|}\chi_B(|z|\,(e_1-y))\,d\sigma(y)\\
\geq\ & \int_{\{\{y_1,\widetilde{y}\}\in S^{2n-1}:|\widetilde{y}|<\varepsilon\}}\frac{1}{(2(1-y_1))^{\frac{2n-1}{3}}\left|\log\left(|z|\,(2(1-y_1))^{\frac{1}{2}}\right)\right|}d\sigma(y).
\end{aligned}$$

Sea $\psi(\widetilde{y}):=\sqrt{1-|\widetilde{y}|^2}$, entonces, sobre el casquete de S^{2n-1} donde $y_1>0$ tenemos $d\sigma(y)=\sqrt{1+|\nabla\psi(\widetilde{y})|^2}d\widetilde{y}$. Disminuyendo ε si hace falta también tenemos $\left|\log\left(|z|\,(2(1-y_1))^{\frac{1}{2}}\right)\right|\leq 2\left|\log\left((2(1-y_1))^{\frac{1}{2}}\right)\right|$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}
& \int_{\{\{y_1,\widetilde{y}\}\in S^{2n-1}:|\widetilde{y}|<\varepsilon\}}\frac{1}{(2(1-y_1))^{\frac{2n-1}{3}}\left|\log\left(|z|\,(2(1-y_1))^{\frac{1}{2}}\right)\right|}d\sigma(y).\\
\geq\ & \frac{1}{2}\int_{|\widetilde{y}|<\varepsilon}\left(2\left(1-\sqrt{1-|\widetilde{y}|^2}\right)\right)^{-\frac{2n-1}{3}}\left|\log\left(\left(2\left(1-\sqrt{1-|\widetilde{y}|^2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right|^{-1}\\
& \times\sqrt{1+|\nabla\psi(\widetilde{y})|^2}d\widetilde{y}\\
\geq\ & \frac{1}{2}\int_{|\widetilde{y}|<\varepsilon}\left(2\left(1-\sqrt{1-|\widetilde{y}|^2}\right)\right)^{-\frac{2n-1}{3}}\left|\log\left(\left(2\left(1-\sqrt{1-|\widetilde{y}|^2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right|^{-1}d\widetilde{y}.
\end{aligned}$$

Pasando a coordenadas polares tenemos que

$$\begin{aligned}
&\int_{|\widetilde{y}|<\varepsilon}\left(2\left(1-\sqrt{1-|\widetilde{y}|^2}\right)\right)^{-\frac{2n-1}{3}}\left|\log\left(\left(2\left(1-\sqrt{1-|\widetilde{y}|^2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right|^{-1}d\widetilde{y} \\
= &\left|S^{2n-2}\right|\int_0^{\varepsilon}\left(2\left(1-\sqrt{1-r^2}\right)\right)^{-\frac{2n-1}{3}}\left|\log\left(\left(2\left(1-\sqrt{1-r^2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right|^{-1}r^{2n-2}dr
\end{aligned}$$

y como para r pequeño tenemos $r^2 \leq 2\left(1-\sqrt{1-r^2}\right) \leq 4r^2$, disminuyendo ε si hace falta tenemos

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\varepsilon}\left(2\left(1-\sqrt{1-r^2}\right)\right)^{-\frac{2n-1}{3}}\left|\log\left(\left(2\left(1-\sqrt{1-r^2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right|^{-1}r^{2n-2}dr \\
\geq &\int_0^{\varepsilon}\left(4r^2\right)^{-\frac{2n-1}{3}}\left|\log\left(\left(r^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right|^{-1}r^{2n-2}dr = \int_0^{\varepsilon}\frac{1}{r\left|\log\left(r\right)\right|}dr = \infty.
\end{aligned}$$

Luego $f^{\#}(z,t) = \infty$ para $(z,t) \in D \times I$. Como $T(f) \leq M_{cil}(f)$, concluímos que $M_{cil}(f)$ no es acotado en $L^2(\mathbb{H}_n)$.

El siguiente Lema 4.8 así como el Teorema 4.18 adaptan al contexto del grupo de Heisenberg algunas ideas de J. Bourgain utilizadas en ([**Bou86**]) para su celebrada prueba del caso $n = 2$ del Teorema 3.4.

Lema 4.8. *Sea K una función radial en $L^1(\mathbb{H}_n) \cap L^2(\mathbb{H}_n)$ tal que exista $\frac{\partial \widehat{K}}{\partial \lambda}(\lambda, k)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Sean, para $j \in \mathbb{Z}$,*

$$\alpha_j = \sup\left\{\left|\widehat{K}(\lambda,k)\right| : 2^j \leq \left|(\lambda, |\lambda|(2k+n))\right| \leq 2^{j+2}\right\}, \tag{4.3}$$

$$\beta_j = \sup\left\{\left|\lambda\frac{\partial \widehat{K}}{\partial \lambda}(\lambda,k)\right| : 2^j \leq \left|(\lambda, |\lambda|(2k+n))\right| \leq 2^{j+2}\right\}. \tag{4.4}$$

Entonces existe una constante positiva c independiente de K tal que para toda $f \in L^2(\mathbb{H}_n)$,

$$\left\|\sup_{r>0}|f * K_r|\right\|_2 \leq c\sum_{j\in\mathbb{Z}}\alpha_j^{\frac{1}{2}}\left(\alpha_j+\beta_j\right)^{\frac{1}{2}})\left\|f\right\|_2$$

Prueba. Sea $\{\nu_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ una sucesión en $C_c^{\infty}((0,\infty))$ tal que, para cada $j \in \mathbb{Z}$, $sop(\nu_j) \subset \left(2^j, 2^{j+2}\right)$, $0 \leq \nu_j \leq 1$, $\left|\nu_j'\right| \leq c2^{-j}$ y $\sum_{j\in\mathbb{Z}} v_j(x) = 1$ para todo $x > 0$.

Por el Teorems (2.30), para $j \in \mathbb{Z}$ existe una función radial $\Lambda_j \in S(\mathbb{H}_n)$ tal que $\widehat{\Lambda_j}(\lambda, k) = \nu_j(|(|\lambda|, |\lambda|(2k+n))|)$ y por la fórmula de inversión

$$\Lambda_j(z,t) = (1/2\pi)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \nu_j(|(|\lambda|, |\lambda|(2k+n))|) \mathbf{e}_{\lambda,k}(z,t) |\lambda|^n d\lambda.$$

Por el teorema 2.24 se tiene que:

$$\left(\pi_\lambda(\Lambda_j)\Phi_\alpha^\lambda\right)(w) = \nu_j\left(|\lambda|\sqrt{1+(2|\alpha|+n)^2}\right)\Phi_\alpha^\lambda(w).$$

Si tomamos $f \in S(\mathbb{H}_n)$ entonces $f * K$ pertenece a $S(\mathbb{H}_n)$, por lo que, usando el lema(9.1) del apédnice, tenemos que $f*K = \sum_{j\in\mathbb{Z}} f*K*\Lambda_j$ con convergencia de la serie en $L^2(\mathbb{H}_n)$. Existe entonces una sucesión $\{j_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{N\to\infty} \sum_{-j_N \le j \le j_N} f*K*\Lambda_j = f$ con convergencia *a.e.* en $\mathbb{H}_n$. Entonces

$$|f*K| \le \sum_j |f*K_j|,$$

por lo que para $r > 0$ se tiene que

$$\left\|\sup_{r>0}|f*K_r|\right\|_2 \tag{4.5}$$

$$\le \left\|\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sup_{r>0}\left|f*(K_j)_r\right|\right\|_2 \le \left\|\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(\sup_{l\in\mathbb{Z}}\sup_{2^l\le r\le 2^{l+1}}\left|f*(K_j)_r\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_2 \tag{4.6}$$

$$\le \left\|\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sup_{2^l\le r\le 2^{l+1}}\left|f*(K_j)_r\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_2 \le \sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}}\left\|\sup_{2^l\le r\le 2^{l+1}}|f*(K_j)_r|\right\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

El propósito es ahora estimar

$$\left\|\sup_{2^l\le r\le 2^{l+1}}\left|f*(K_j)_r\right|\right\|_2 \tag{4.7}$$

Fijamos ahora $l, j \in \mathbb{Z}$. Para cada $(z,t) \in \mathbb{H}_n$ definimos $g_{z,t}(r) = \left|\left(f*(K_j)_r\right)(z,t)\right|$. Sea $A_j \in \mathbb{N}$ (a ser elegido más adelante) y sea $2^l = r_0 < r_1 < .... < r_{A_j} = 2^{l+1}$ una partición del intervalo $\left[2^l, 2^{l+1}\right]$ en A_j intervalos de longitudes iguales. Luego, para cada q, si $r_q \le r \le r_{q+1}$ entonces

$$\begin{aligned}\left|\left(f*(K_j)_r\right)(z,t)\right| &= g_{z,t}(r) \le |g_{z,t}(r_q)| + |g_{z,t}(r) - g_{z,t}(r_q)| \\ &= |g_{z,t}(r_q)| + \left|\int_{r_q}^{r} g'_{z,t}(\rho)\,d\rho\right| \le |g_{z,t}(r_q)| + \left|\int_{r_q}^{r_{q+1}} g'_{z,t}(\rho)\,d\rho\right|\end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
\sup_{2^l \leq r \leq 2^{l+1}} g_{z,t}(r) &\leq \left(\sum_{0 \leq q \leq A_j - 1} \left(|g_{z,t}(r_q)| + \left| \int_{r_q}^{r_{q+1}} g'_{z,t}(\rho)\, d\rho \right| \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{0 \leq q \leq A_j - 1} \left(2\, |g_{z,t}(r_q)|^2 + 2 \left| \int_{r_q}^{r_{q+1}} g'_{z,t}(\rho)\, d\rho \right|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 2^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{0 \leq q \leq A_j - 1} \left(|g_{z,t}(r_q)|^2 + \left| \int_{r_q}^{r_{q+1}} g'_{z,t}(\rho)\, d\rho \right|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
&\left\| \sup_{2^l \leq r \leq 2^{l+1}} \left| f * (K_j)_r \right| \right\|_{L^2(\mathbb{H}_n)} \\
&= \left\| \sup_{2^l \leq r \leq 2^{l+1}} g_{z,t}(r) \right\|_{L^2(\mathbb{H}_n,\ dzdt)} \\
&\leq c \left(\sum_{0 \leq q \leq A_j - 1} \left(\|g_{z,t}(r_q)\|^2_{L^2(\mathbb{H}_n,\ dzdt)} + \left\| \int_{r_q}^{r_{q+1}} \left| g'_{z,t}(\rho) \right| d\rho \right\|^2_{L^2(\mathbb{H}_n,\ dzdt)} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= c \left(\sum_{0 \leq q \leq A_j - 1} (I_q + II_q) \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
I_q &:= \|g_{z,t}(r_q)\|^2_{L^2(\mathbb{H}_n,\ dzdt)}, \\
II_q &:= \left\| \int_{r_q}^{r_{q+1}} \left| g'_{z,t}(\rho) \right| d\rho \right\|^2_{L^2(\mathbb{H}_n,\ dzdt)}
\end{aligned}$$

Ahora acotaremos I_q y II_q. Por la identidad de Plancherel, y teniendo en cuenta que K_j es radial,

$$\begin{aligned}
I_q &= \|g_{z,t}(r_q)\|^2_{L^2(\mathbb{H}_n,\ dzdt)} \\
&= (1/2\pi)^{2(n+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{C}^n} \left| f * (K_j)_{r_q} * \mathbf{e}_{\lambda,k}(z,0) \right|^2 |\lambda|^{2n}\, dz d\lambda \\
&= (1/2\pi)^{2(n+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{C}^n} \left| f * \mathbf{e}_{\lambda,k}(z,0)\, \widehat{K_j}\left(r_q^2 \lambda, k\right) \right|^2 |\lambda|^{2n}\, dz d\lambda.
\end{aligned}$$

Además, $\widehat{K}_j(\lambda,k)=\widehat{K}(\lambda,k)\,\nu_j\left(|\lambda|\sqrt{1+(2k+n)^2}\right)$. Notemos también que

$$sop\left(\widehat{K}_j\right)\subset\left\{(\lambda,k):2^j\leq|\lambda|\sqrt{1+(2k+n)^2}\leq 2^{j+2}\right\},$$

y en consecuencia

$$sop\left(\widehat{K_j}(.,k)\right)\subset\left(2^j\left(1+(2k+n)^2\right)^{-\frac{1}{2}},2^{j+2}\left(1+(2k+n)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right),$$

por lo que si $\widehat{K_j}\left(r_q^2\lambda,k\right)\neq 0$ debemos tener

$$\frac{2^j}{r_q^2\sqrt{1+(2k+n)^2}}\leq|\lambda|\leq\frac{2^{j+2}}{r_q^2\sqrt{1+(2k+n)^2}}$$

y por lo tanto, como $2^l\leq r_q\leq 2^{l+1}$,

$$\frac{2^{j-2l-2}}{\sqrt{1+(2k+n)^2}}\leq|\lambda|\leq\frac{2^{j-2l+2}}{\sqrt{1+(2k+n)^2}}$$

Sean $a_{j,k,l}=2^{j-2l-2}\left(1+(2k+n)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$, $b_{j,k,l}=2^{j-2l+2}\left(1+(2k+n)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$. Entonces,

$$\begin{aligned}I_q &= \|g_{z,t}(r_q)\|^2_{L^2(\mathbb{H}_n,\,dzdt)}\\ &= c\sum_{k=0}^{\infty}\int_{a_{j,k,l}}^{b_{j,k,l}}\int_{\mathbb{C}^n}\left|f*\mathbf{e}_{\lambda,k}(z,0)\,\widehat{K_j}\left(r_q^2\lambda,k\right)\right|^2|\lambda|^{2n}\,dzd\lambda\\ &\leq c\sup_{\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\left|\widehat{K_j}(\lambda,k)\right|\sum_{k=0}^{\infty}\int_{a_{j,k,l}}^{b_{j,k,l}}\int_{\mathbb{C}^n}|f*\mathbf{e}_{\lambda,k}(z,0)|^2|\lambda|^{2n}\,dzd\lambda.\end{aligned}$$

donde, de aquí en más, c denotará una constante, no necesariamente la misma en cada aparición.

Por otra parte,

$$\begin{aligned}&II_q\\ =\ &\left\|\int_{r_q}^{r_{q+1}}\left|g'_{z,t}(\rho)\right|d\rho\right\|^2_{L^2(\mathbb{H}_n,\,dzdt)}\leq\left(\int_{r_q}^{r_{q+q}}\left\|g'_{z,t}(\rho)\right\|_{L^2(\mathbb{H}_n,\,dzdt)}d\rho\right)^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\int_{r_q}^{r_{q+1}} \left(2\pi^{-2(n+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{C}^n} \left| \frac{\partial}{\partial\rho} \left(f * (K_j)_\rho * \mathbf{e}_{\lambda,k}(z,0)\right)\right|^2 |\lambda|^{2n} dz d\lambda\right)^{\frac{1}{2}} d\rho\right)^2 \\
&= c\left(\int_{r_q}^{r_{q+1}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{C}^n} \left| \frac{\partial}{\partial\rho} \left(f * \mathbf{e}_{\lambda,k}(z,0)\, \widehat{K_j}\left(\rho^2\lambda,k\right)\right)\right|^2 |\lambda|^{2n} dz d\lambda\right)^{\frac{1}{2}} d\rho\right)^2 \\
&= c\left(\int_{r_q}^{r_{q+1}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{C}^n} \left| f * \mathbf{e}_{\lambda,k}(z,0) \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\widehat{K_j}\left(\rho^2\lambda,k\right)\right)\right|^2 |\lambda|^{2n} dz d\lambda\right)^{\frac{1}{2}} d\rho\right)^2 \\
&= c\left(\int_{r_q}^{r_{q+1}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \int_{a_{j,k,l}}^{b_{j,k,l}} \int_{\mathbb{C}^n} \left| f * \mathbf{e}_{\lambda,k}(z,0) \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\widehat{K_j}(\rho^2\lambda,k)\right)\right|^2 |\lambda|^{2n} dz d\lambda\right)^{\frac{1}{2}} d\rho\right)^2
\end{aligned}
$$

La última igualdad porque si $\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\widehat{K_j}\left(\rho^2\lambda,k\right)\right) \neq 0$ con $\rho \in (r_q.r_{q+1})$ entonces

$$
\lambda \in \left(2^{j-2q}\left(1+(2k+n)^2\right)^{-\frac{1}{2}}, 2^{j-2q+2}\left(1+(2k+n)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right).
$$

Notemos que para $2^l \leq \rho \leq 2^{l+1}$,

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\widehat{K_j}\left(\rho^2\lambda,k\right)\right)\right| &\leq \left|2\lambda\rho\left(D_1\widehat{K_j}\right)\left(\rho^2\lambda,k\right)\right| \\
&\leq \frac{2}{2^l}\left|\lambda\rho^2\left(D_1\widehat{K_j}\right)\left(\rho^2\lambda,k\right)\right| \leq \frac{2}{2^l} \sup_{\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}. k\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \left|\lambda\frac{\partial\widehat{K_j}}{\partial\lambda}(\lambda,k)\right|
\end{aligned}
$$

donde $\left(D_1\widehat{K_j}\right)(\mu,k)$ denota la derivada de $\widehat{K_j}(\mu,k)$ respecto de su primera variable μ. Introduzcamos ahora la siguiente notación:

$$
\begin{aligned}
\left\|\lambda\frac{\partial\widehat{K_j}}{\partial\lambda}\right\|_\infty &= \sup_{\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}. k\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \left|\lambda\frac{\partial\widehat{K_j}}{\partial\lambda}(\lambda,k)\right|, \\
\left\|\widehat{K_j}\right\|_\infty &= \sup_{\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}. k\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \left|\widehat{K_j}(\lambda,k)\right|
\end{aligned}
$$

Luego

$$
\begin{aligned}
& II_q \\
\leq\ & c'\frac{1}{2^{2l}}\left\|\lambda\frac{\partial\widehat{K_j}}{\partial\lambda}\right\|_\infty^2 \left(\int_{r_q}^{r_{q+1}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\int_{a_{j,k,l}}^{b_{j,k,l}}\int_{\mathbb{C}^n}\left|f*\mathbf{e}_{\lambda,k}(z,0)\right|^2|\lambda|^{2n}dzd\lambda\right)^{\frac{1}{2}}d\rho\right)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= c' \frac{\left(r_{q+1}-r_q\right)^2}{2^{2l}} \left\| \lambda \frac{\partial \widehat{K_j}}{\partial \lambda} \right\|_\infty^2 \sum_{k=0}^{\infty} \int_{a_{j,k,l}}^{b_{j,k,l}} \int_{\mathbb{C}^n} \left| f * \mathbf{e}_{\lambda,k}\left(z,0\right)\right|^2 \left|\lambda\right|^{2n} dz d\lambda \\
&= \frac{c'}{A_j^2} \left\| \lambda \frac{\partial \widehat{K_j}}{\partial \lambda} \right\|_\infty^2 \sum_{k=0}^{\infty} \int_{a_{j,k,l}}^{b_{j,k,l}} \int_{\mathbb{C}^n} \left| f * \mathbf{e}_{\lambda,k}\left(z,0\right)\right|^2 \left|\lambda\right|^{2n} dz d\lambda
\end{aligned}
$$

la última igualdad porque $\dfrac{2^l}{A_j} = r_{q+1} - r_q$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
&\left\| \sup_{2^l \le r \le 2^{l+1}} \left| f * \left(K_j\right)_r \right| \right\|_{L^2(\mathbb{H}_n)} \\
&\le c \left(\sum_{0 \le q \le A_j - 1} \left(I_q + II_q\right) \right)^{\frac{1}{2}} \le c \left(\sum_{0 \le q \le A_j - 1} \widetilde{I}_q + \sum_{0 \le q \le A_j - 1} \widetilde{II}_q \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

con

$$
\begin{aligned}
\widetilde{I}_q &= \left\| \widehat{K_j} \right\|_\infty^2 \sum_{k=0}^{\infty} \int_{a_{j,k,l}}^{b_{j,k,l}} \int_{\mathbb{C}^n} \left| f * \mathbf{e}_{\lambda,k}\left(z,0\right)\right|^2 \left|\lambda\right|^{2n} dz d\lambda, \\
\widetilde{II}_q &= \frac{1}{{A_j}^2} \left\| \lambda \frac{\partial \widehat{K_j}}{\partial \lambda} \right\|_\infty^2 \sum_{k=0}^{\infty} \int_{a_{j,k,l}}^{b_{j,k,l}} \int_{\mathbb{C}^n} |f * \mathbf{e}_{\lambda,k}(z,0)|^2 |\lambda|^{2n} dz d\lambda
\end{aligned}
$$

pero $\widetilde{I}_q$ e $\widetilde{II}_q$ en realidad no dependen de q, entonces,

$$
\begin{aligned}
\sum_{0 \le q \le A_j - 1} \widetilde{I}_q &\le c A_j \left\| \widehat{K_j} \right\|_\infty^2 \sum_{k=0}^{\infty} \int_{a_{j,k,l}}^{b_{j,k,l}} \int_{\mathbb{C}^n} \left| f * \mathbf{e}_{\lambda,k}\left(z,0\right)\right|^2 \left|\lambda\right|^{2n} dz d\lambda, \\
\sum_{0 \le q \le A_j - 1} \widetilde{II}_q &\le c \frac{1}{A_j} \left\| \lambda \frac{\partial \widehat{K_j}}{\partial \lambda} \right\|_\infty^2 \sum_{k=0}^{\infty} \int_{a_{j,k,l}}^{b_{j,k,l}} \int_{\mathbb{C}^n} |f * \mathbf{e}_{\lambda,k}(z,0)|^2 |\lambda|^{2n} dz d\lambda
\end{aligned}
$$

luego

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum_{0 \le q \le A_j - 1} \widetilde{I}_q + \sum_{0 \le q \le A_j - 1} \widetilde{II}_q \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le c \left(A_j \left\| \widehat{K_j} \right\|_\infty^2 + \frac{1}{A_j} \left\| \lambda \frac{\partial \widehat{K_j}}{\partial \lambda} \right\|_\infty^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \int_{a_{j,k,l}}^{b_{j,k,l}} \int_{\mathbb{C}^n} |f * \mathbf{e}_{\lambda,k}(z,0)|^2 |\lambda|^{2n} dz d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= c \gamma_j \left(A_j\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \int_{a_{j,k,l}}^{b_{j,k,l}} \int_{\mathbb{C}^n} |f * \mathbf{e}_{\lambda,k}(z,0)|^2 |\lambda|^{2n} dz d\lambda \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

con

$$\gamma_j\left(A_j\right)=\left(A_j\left\|\widehat{K_j}\right\|_\infty^2+\frac{1}{A_j}\left\|\lambda\frac{\partial\widehat{K_j}}{\partial\lambda}\right\|_\infty^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Luego

$$\begin{aligned}
&\left\|\sup_{r>0}\left|f*K_r\right|\right\|_{L^2(\mathbb{H}_n)}\\
\leq\ & \sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}}\left\|\sup_{2^l\leq r\leq 2^{l+1}}\left|f*\left(K_j\right)_r\right|\right\|_{L^2(\mathbb{H}_n)}^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
\leq\ & c\sum_{j\in\mathbb{Z}}\gamma_j\left(A_j\right)\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{a_{j,k,l}}^{b_{j,k,l}}\int_{\mathbb{C}^n}\left|f*\mathbf{e}_{\lambda,k}\left(z,0\right)\right|^2\left|\lambda\right|^{2n}dzd\lambda\right)^{\frac{1}{2}}\\
=\ & c\sum_{j\in\mathbb{Z}}\gamma_j\left(A_j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{C}^n}\left|f*\mathbf{e}_{\lambda,k}\left(z,0\right)\right|^2\left|\lambda\right|^{2n}dzd\lambda\right)^{\frac{1}{2}}\\
=\ & c\sum_{j\in\mathbb{Z}}\gamma_j\left(A_j\right)\left\|f\right\|_{L^2(\mathbb{H}_n)}\\
=\ & c\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(A_j\left\|\widehat{K}_j\right\|_\infty^2+\frac{1}{A_j}\left\|\lambda\frac{\partial\widehat{K_j}}{\partial\lambda}\right\|_\infty^2\right)^{\frac{1}{2}}\left\|f\right\|_{L^2(\mathbb{H}_n)}\\
\leq\ & c\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(A_j^{\frac{1}{2}}\left\|\widehat{K}_j\right\|_\infty+\frac{1}{A_j^{\frac{1}{2}}}\left\|\lambda\frac{\partial\widehat{K_j}}{\partial\lambda}\right\|_\infty\right)\left\|f\right\|_{L^2(\mathbb{H}_n)}
\end{aligned}$$

la última desigualdad porque para $a,b\geq 0$ se tiene $(a+b)^{\frac{1}{2}}\leq a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$. Entonces

$$\left\|\sup_{r>0}\left|f*K_r\right|\right\|_{L^2(\mathbb{H}_n)}\leq c\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(A_j^{\frac{1}{2}}\left\|\widehat{K}_j\right\|_\infty+\frac{1}{A_j^{\frac{1}{2}}}\left\|\lambda\frac{\partial\widehat{K_j}}{\partial\lambda}\right\|_\infty\right)\left\|f\right\|_{L^2(\mathbb{H}_n)}\tag{4.8}$$

Observemos que si $|\lambda|\notin\left[\frac{2^j}{\sqrt{1+(2k+n)^2}},\frac{2^{j+2}}{\sqrt{1+(2k+n)^2}}\right]$ entonces

$$\lambda\frac{\partial\widehat{K_j}}{\partial\lambda}(\lambda,k)=0$$

y que si $|\lambda|\in\left[\frac{2^j}{\sqrt{1+(2k+n)^2}},\frac{2^{j+2}}{\sqrt{1+(2k+n)^2}}\right]$ entonces,

$$
\begin{aligned}
\left|\lambda\frac{\partial\widehat{K_j}}{\partial\lambda}(\lambda,k)\right| &= \left|\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\widehat{K}(\lambda,k)\nu_j\left(|\lambda|\sqrt{1+(2k+n)^2}\right)\right)\right| \\
&\leq \left|\lambda\frac{\partial\widehat{K}}{\partial\lambda}(\lambda,k)\right|\nu_j\left(|\lambda|\sqrt{1+(2k+n)^2}\right) \\
&\quad +|\lambda|\sqrt{1+(2k+n)^2}\left|\widehat{K}(\lambda,k)\nu_j'\left(|\lambda|\sqrt{1+(2k+n)^2}\right)\right| \\
&\leq c\left|\lambda\frac{\partial\widehat{K}}{\partial\lambda}(\lambda,k)\right|+c2^{j+2}\left|\widehat{K}(\lambda,k)\,2^{-j}\right|
\end{aligned}
$$

la última desigualdad porque $|\lambda|\sqrt{1+(2k+n)^2}\leq 2^{j+2}$ y porque $\left|v_j'\right|\leq const.2^{-j}$. Entonces, por (4.8),

$$
\left\|\sup_{r>0}|f*K_r|\right\|_{L^2(\mathbb{H}_n)}\leq c\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(A_j^{\frac{1}{2}}\alpha_j+A_j^{-\frac{1}{2}}(\alpha_j+\beta_j)\right)\right)\|f\|_{L^2(\mathbb{H}_n)}
$$

Para finalizar la prueba del lema solo nos queda elegir de forma conveniente los A_j.

Notemos que como $\alpha_j\geq 0$ y $\beta_j\geq 0$, tenemos que $1\leq\alpha_j^{-1}(\alpha_j+\beta_j)$. Elegimos $A_j\in\mathbb{N}$ tal que $A_j\leq\alpha_j^{-1}(\alpha_j+\beta_j)\leq A_j+1$. Entonces

$$
(A_j+1)^{-1}\leq\alpha_j(\alpha_j+\beta_j)^{-1}\leq A_j^{-1}
$$

y como $A_j+1\leq 2A_j$ tenemos también

$$
A_j^{-1}\leq 2(A_j+1)^{-1}\leq 2\alpha_j(\alpha_j+\beta_j)^{-1}.
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
A_j^{\frac{1}{2}}\alpha_j+A_j^{-\frac{1}{2}}(\alpha_j+\beta_j) &\leq \alpha_j^{-\frac{1}{2}}(\alpha_j+\beta_j)^{\frac{1}{2}}\alpha_j+2^{\frac{1}{2}}\alpha_j^{\frac{1}{2}}(\alpha_j+\beta_j)^{-\frac{1}{2}}(\alpha_j+\beta_j) \\
&= c\alpha_j^{\frac{1}{2}}(\alpha_j+\beta_j)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

y por lo tanto

$$
\left\|\sup_{r>0}|f*K_r|\right\|_{L^2(\mathbb{H}_n)}\leq c\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\alpha_j^{\frac{1}{2}}(\alpha_j+\beta_j)^{\frac{1}{2}}\right)\|f\|_{L^2(\mathbb{H}_n)}.
$$

■

Lema 4.9. *Si $f \in S(\mathbb{R}^2)$ entonces*

$$\sum_{j>0} \sup_{2^j<|(x,y)|\leq 2^{j+1}} |f(x,y)|^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Prueba. En efecto, existe $c > 0$ tal que $|f(x,y)|^{\frac{1}{2}} \leq c\left(|(x,y)|^2+1\right)^{-1}$.para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Luego

$$\sum_{j>0} | \sup_{2^j<|(x,y)|\leq 2^{j+1}} |f(x,y)|^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{j>0} \frac{c}{2^{2j}} < \infty.$$

∎

Lema 4.10. *Si $f \in S(\mathbb{R}^2)$ y si $\theta > 0$ entonces*

$$\sum_{j>0} 2^{j\theta} | \sup_{2^j<|(x,y)|\leq 2^{j+1}} |f(x,y)|^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Prueba. Para cada $N \in \mathbb{N}$ existe una constante c tal que

$$|f(x,y)|^{\frac{1}{2}} \leq c\left(|(x,y)|^2+1\right)^{-N}.$$

Si elegimos $N > \theta + 2$ tenemos

$$\sum_{j>0} 2^{j\theta} \sup_{2^j<|(x,y)|\leq 2^{j+1}} |f(x,y)|^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{j>0} 2^{j\theta} \frac{c}{2^{2jN}} < \infty.$$

∎

Lema 4.11. *Sea $G \in S\left(\mathbb{R}^2\right)$ y sea $\theta > 0$. Entonces existe una constante positiva c tal que para todo $\varepsilon > 0$*

$$\sum_{j\geq 0} 2^{-j\theta} \sup_{2^j\leq|(x,y)|\leq 2^{j+1}} |G(\varepsilon x,\varepsilon y)| \leq c\left(1+|\log(\varepsilon)|\right).$$

Prueba.

$$\begin{aligned} &\sum_{j\geq 0} 2^{-j\theta} \sup_{2^j\leq|(x,y)|\leq 2^{j+1}} |G(\varepsilon x,\varepsilon y)| \\ = &\sum_{j\geq 0:2^j\leq\frac{1}{\varepsilon}} 2^{-j\theta} \sup_{2^j\leq|(x,y)|\leq 2^{j+1}} |G(\varepsilon x,\varepsilon y)| + \sum_{j\geq 0:2^j>\frac{1}{\varepsilon}} 2^{-j\theta} \sup_{2^j\leq|(x,y)|\leq 2^{j+1}} |G(\varepsilon x,\varepsilon y)|. \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\geq 0:2^j\leq \frac{1}{\varepsilon}} 2^{-j\theta} \sup_{2^j\leq |(x,y)|\leq 2^{j+1}} |G(\varepsilon x,\varepsilon y)| \\
\leq\ & \#\left\{ j\geq 0: 2^j \leq \frac{1}{\varepsilon}\right\} \|G\|_\infty \\
=\ & \#\left\{ j\geq 0: j \leq \log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right\} \|G\|_\infty \leq c\,|\log(\varepsilon)|\,\|G\|_\infty .
\end{aligned}$$

También, $G\in S(\mathbb{R}^2)$, luego existe una constante c tal que

$$|G(x,y)| \leq c\left(1+|(x,y)|^2\right)^{-1}$$

para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{j\geq 0:2^j> \frac{1}{\varepsilon}} 2^{-j\theta} \sup_{2^j\leq |(x,y)|\leq 2^{j+1}} |G(\varepsilon x,\varepsilon y)| &\leq c \sum_{j\geq 0:2^j> \frac{1}{\varepsilon}} 2^{-j\theta} \sup_{2^j\leq |(x,y)|\leq 2^{j+1}} \left(1+|\varepsilon(x,y)|\right)^{-2} \\
&\leq c \sum_{j\geq 0:2^j> \frac{1}{\varepsilon}} 2^{-j\theta}\left(1+\varepsilon 2^j\right)^{-2} \\
&= c\sum_{l\geq 0} 2^{-j\theta}\left(1+\varepsilon 2^{j_0}2^l\right)^{-2}
\end{aligned}$$

con $j_0 = \left[\log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right]$ donde $\left[\log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right]$ denota la parte entera de $\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$.

Entonces $\varepsilon 2^{j_0} \leq \varepsilon 2^{\log_2 \frac{1}{\varepsilon}+1} = 2$ y luego

$$\sum_{l\geq 0} 2^{-j\theta}\left(1+\varepsilon 2^{j_0}2^l\right)^{-2} \leq \sum_{l\geq 0}\left(1+2^{l+1}\right)^{-2} < \infty.$$

■

Nuestro propósito será ahora considerar el operador maximal dado por $\widetilde{M}_{cil}f = \sup_{r>0}\left(|f| * (\sigma\otimes\chi_I)_r\right)$ para $f\in S(\mathbb{H}_n)$, y probar que existe una aproximación de la identidad $\{F_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ en $\mathbb{H}_n$ tal que $\left\|\sup_{r>0}\left(|f| * ((\sigma\otimes\chi_I) * F_\varepsilon)_r\right)\right\|_2 \leq c\left(|log(\varepsilon)|+1\right)\|f\|_2$. De este resultado obtendremos como consecuencia la acotación en $L^2(\mathbb{H}_\mathbf{n})$ de una familia de operadores maximales de la forma $\sup_{r>0}\left(|f| * (h\otimes\chi_I)_r\right)$ donde las funciones $h=h(z)$, si bien radiales en z e integrables, son tales que $\lim_{|z|\to 1^+} h(z)=\infty$ y entonces el correspondiente operador maximal no es, a priori, controlado por la maximal de Hardy Littlewood.

Para $h \in L^1(\mathbb{R})$ denotaremos con $\mathcal{F}(h)$ a su transformada de Fourier definida por $\mathcal{F}(h)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} h(x) e^{-ix\xi} dx$. Recordemos que σ es la medida dada por el elemento de área de $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ normalizada por $\sigma\left(S^{2n-1}\right) = 1$.

Observación 4.12. *Sea $G \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ una función par no negativa y no idénticamente nula, con $sop(G) \subset \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. Entonces $\mathcal{F}(G)$ es real. Sea $\widetilde{g} := \mathcal{F}(G * G)$. Entonces $\widetilde{g} \in S(\mathbb{R})$ y $\widetilde{g} := |\mathcal{F}(G)|^2$. Luego $\widetilde{g} \geq 0$. También $\widetilde{g}(0) = |\mathcal{F}(G)(0)|^2 = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\mathbb{R}} G\right|^2 > 0$. Además $\mathcal{F}(\widetilde{g}) = (G * G)^\vee$ luego $sop(\mathcal{F}(\widetilde{g})) \subset \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Entomces existen $\eta_0, \theta \in (0,1)$ tales que $\widetilde{g}(s) \geq \eta_0$ si $|s| \leq \theta$. Sea $g(s) := \widetilde{g}(\theta s)$, $s \in \mathbb{R}$. Entonces $g \geq 0, .g(s) \geq \eta_0$ si $-1 \leq s \leq 1$, y $\mathcal{F}(g)(\zeta) = \frac{1}{\theta}\mathcal{F}(\widetilde{g})\left(\frac{\zeta}{\theta}\right) = \frac{1}{\theta}(G * G)^\vee\left(\frac{\zeta}{\theta}\right)$ luego $sop(\mathcal{F}(g)) \subset \left(-\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2}\right) \subset \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y $\mathcal{F}(g)(0) > 0$. Multiplicando g por una constante adecuada tenemos entonces que*

$$\begin{aligned} g &\in S(\mathbb{R}),\ g(s) > \eta \text{ si } -1 \leq s \leq 1, \\ Sop(\mathcal{F}(g)) &\subset \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ y } \mathcal{F}(g)(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned} \tag{4.9}$$

con η y θ constantes positivas. Fijamos de aquí en más, por lo que queda del capítulo una tal función g y las correspondientes constantes η, θ. Sea $F \in C_c^\infty(\mathbb{H}_n)$ una función radial, no negativa con $F(\mathbf{0}, 0) > 0$, $\int_{\mathbb{H}_n} F = 1$. Entonces, por el teorema 2.30 existe una función $F^\sharp \in S\left(\mathbb{R}^2\right)$ tal que para $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\widehat{F}(\lambda, k) = F^\#(\lambda, |\lambda|(2k + b)). \tag{4.10}$$

Fijamos, de aquí en más, por el resto del capítulo también las funciones F y $F^\sharp$.

■

Para $0 < \varepsilon < 1$ sea

$$(\sigma \otimes g)^\varepsilon := (\sigma \otimes g) * F_\epsilon. \tag{4.11}$$

Notemos que $\sigma \otimes g \in S'(\mathbb{H}_n)$ y $F_\epsilon \in S'(\mathbb{H}_n)$ y que por lo tanto $(\sigma \otimes g)^\varepsilon \in S(\mathbb{H}_n)$. También,

$$\begin{aligned} (\sigma \otimes g)\widehat{\ }(\lambda, k) &= \int_{S^1} \varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{\lambda}\,|z|\right) d\sigma(z) \int_{\mathbb{R}} g(t)\, e^{-i\lambda t} dt \\ &= 2\pi \varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{|\lambda|}\right) \mathcal{F}(g)(\lambda). \end{aligned} \tag{4.12}$$

donde φ_k^{n-1} es la función de Laguerre normalizada dada por (2.4), y utilizando que $\left(L_k^{n-1}\right)' = -L_{k-1}^n$ obtenemos que

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\lambda}\left(\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{|\lambda|}\right)\right) = \frac{k!\,(n-1)!}{(k+n-1)!}\frac{d}{d\lambda}\left(L_k^{n-1}\left(\frac{|\lambda|}{2}\right)e^{-\frac{|\lambda|}{4}}\right) \qquad (4.13) \\ &= \frac{k!(n-1)!}{(n-1+k)!}\left(-\frac{1}{2} sign(\lambda)\, L_{k-1}^n\left(\frac{|\lambda|}{2}\right)e^{-\frac{|\lambda|}{4}} - \frac{1}{4} sign(\lambda)\, L_k^{n-1}\left(\frac{|\lambda|}{2}\right)e^{-\frac{|\lambda|}{4}}\right) \\ &= -\frac{k}{2n} sign(\lambda)\, \varphi_{k-1}^n\left(\sqrt{|\lambda|}\right) - \frac{1}{4} sign(\lambda)\, \varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{|\lambda|}\right) \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} &\lambda \frac{\partial}{\partial\lambda}\left((\sigma \otimes g)\widehat{\ }(\lambda, k)\right) & (4.14) \\ =\ & \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(g)(\lambda)\left(-\frac{k}{2n}|\lambda|\,\varphi_{k-1}^n\left(\sqrt{|\lambda|}\right) - \frac{|\lambda|}{4}\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{|\lambda|}\right)\right) \\ & +\lambda\sqrt{2\pi}\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{|\lambda|}\right)\left(\mathcal{F}(g)\right)'(\lambda). & (4.15) \end{aligned}$$

También, como $(\sigma \otimes g)^\varepsilon = (\sigma \otimes g) * F_\varepsilon$ tenemos

$$\begin{aligned} \left((\sigma \otimes g)^\epsilon\right)\widehat{\ }(\lambda, k) &= (\sigma \otimes g)\widehat{\ }(\lambda, k)\, \widehat{F_\varepsilon}(\lambda, k) & (4.16) \\ &= \sqrt{2\pi}\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{|\lambda|}\right)\mathcal{F}(g)(\lambda)\,\widehat{F}\left(\varepsilon^2\lambda, k\right) & (4.17) \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} &\lambda\frac{d}{d\lambda}\left(\left((\sigma \otimes g)^\epsilon\right)\widehat{\ }(\lambda, k)\right) & (4.18) \\ =\ & \frac{d}{d\lambda}\left((\sigma \otimes g)\widehat{\ }(\lambda, k)\right)\widehat{F_\varepsilon}(\lambda, k) + (\sigma \otimes g)\widehat{\ }(\lambda, k)\frac{d}{d\lambda}\left(\widehat{F_\varepsilon}(\lambda, k)\right) \\ =\ & \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(g)(\lambda)\left(-\frac{k}{2n}|\lambda|\,\varphi_{k-1}^n\left(\sqrt{|\lambda|}\right) - \frac{|\lambda|}{4}\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{|\lambda|}\right)\right)\widehat{F}\left(\varepsilon^2\lambda, k\right) \\ & +\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{|\lambda|}\right)\sqrt{2\pi}\frac{d}{d\lambda}\left(\mathcal{F}(g)(\lambda)\right)\widehat{F}\left(\varepsilon^2\lambda, k\right) \\ & +\sqrt{2\pi}\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{|\lambda|}\right)\mathcal{F}(g)(\lambda)\frac{d}{d\lambda}\left(\widehat{F}\left(\varepsilon^2\lambda, k\right)\right). & (4.19) \end{aligned}$$

Para $j \in \mathbb{Z}$ sea

$$\Omega_j := \left\{(\lambda, k) : 2^j \leq |(\lambda, |\lambda| (2k+n))| \leq 2^{j+1}\right\} \tag{4.20}$$

y sean α_j, β_j definidos por (4.3) y (4.4) respectivamente, tomando allí $K = (\sigma \otimes g)^{\varepsilon} - F$, i.e.,

$$\begin{aligned}
\alpha_j &= \sup \left\{ \left| ((\sigma \otimes g)^{\varepsilon} - F)\widehat{\ }(\lambda, k) \right| : (\lambda, k) \in \Omega_j \right\}, && (4.21)\\
\beta_j &= \sup \left\{ \left| \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(((\sigma \otimes g)^{\varepsilon} - F)\widehat{\ }(\lambda, k) \right) \right| : (\lambda, k) \in \Omega_j \right\}. && (4.22)
\end{aligned}$$

Tenemos el siguiente

Lema 4.13. *Sea α_j dado por (4.21). Entonces existe una constante c independiente de ε tal que $\alpha_j \leq c2^j$ para todo $j < 0$.*

Prueba. A lo largo de la prueba c denotará una constante positiva independiente de ε, λ y k, no necesariamente la misma en cada aparición, inclusive en una misma cadena de desigualdades. Sea $(\lambda, k) \in \Omega_j$ con $j \leq 0$. Por (4.16) tenemos

$$\begin{aligned}
& ((\sigma \otimes g)^{\varepsilon} - F)\widehat{\ }(\lambda, k) \\
= \; & \left(\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{|\lambda|}\right) - 1\right) \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(g)(\lambda) \widehat{F}\left(\varepsilon^2 \lambda, k\right) \\
& + \left(\sqrt{2\pi}\mathcal{F}(g)(\lambda) - 1\right) \widehat{F}\left(\varepsilon^2\lambda, k\right) + \widehat{F}\left(\varepsilon^2\lambda, k\right) - \widehat{F}(\lambda, k),
\end{aligned}$$

luego

$$\left| ((\sigma \otimes g)^{\varepsilon} - F)\widehat{\ }(\lambda, k) \right| \leq I + II + III$$

con

$$\begin{aligned}
I &= \left| \left(\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{|\lambda|}\right) - 1\right) \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(g)(\lambda) \widehat{F}\left(\varepsilon^2\lambda, k\right) \right|, \\
II &= \left| \left(\sqrt{2\pi}\mathcal{F}(g)(\lambda) - 1\right) \widehat{F}\left(\varepsilon^2\lambda, k\right) \right|, \\
III &= \left| \widehat{F}\left(\varepsilon^2\lambda, k\right) - \widehat{F}(\lambda, k) \right|.
\end{aligned}$$

Para estimar I, recordamos que

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{|\lambda|}\right)\right) = -\frac{k\lambda}{2n|\lambda|}\varphi_{k-1}^{n}\left(\sqrt{|\lambda|}\right) - \frac{\lambda}{4|\lambda|}\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{|\lambda|}\right)$$

(conviniendo en que $\varphi_{k-1}^n = 0$ para $k = 0$) y entonces

$$
\begin{aligned}
I &\leq \left\|\sqrt{2\pi}\mathcal{F}(g)\right\|_{\infty}\left\|F^{\sharp}\right\|_{\infty}\left|\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{|\lambda|}\right)-1\right| \leq c\left|\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{|\lambda|}\right)-\varphi_k^{n-1}(0)\right| \\
&\leq c\left|\int_0^1 \frac{d}{ds}\left(\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{s\,|\lambda|}\right)\right)ds\right| \\
&\leq c\int_0^1\left(|\lambda|\,k\left|\varphi_{k-1}^{n}\left(\sqrt{|\lambda|\,s}\right)\right|ds+|\lambda|\left|\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{|\lambda|\,s}\right)\right|\right)ds \\
&\leq c\,|\lambda|\,k \leq c2^j
\end{aligned}
$$

la última desigualdad porque $|(\lambda, |\lambda|\,(2k+n))| \leq 2^{j+1}$. Luego $I \leq c2^j$. Por otra parte,

$$
II \leq \left|\left(\sqrt{2\pi}\mathcal{F}(g)(\lambda)-1\right)\right|\left\|F^{\sharp}\right\|_{\infty} \leq |\lambda|\left\|\left(\sqrt{2\pi}\mathcal{F}(g)\right)'\right\|_{\infty}\left\|F^{\sharp}\right\|_{\infty} \leq c2^j.
$$

Para acotar III observamos que, si definimos $G(s) := F^{\sharp}(s\lambda, s\,|\lambda|\,(2k+n))$ para $s \in \mathbb{R}$ (con $F^{\#}$ dada por (4.10)), entonces

$$
\begin{aligned}
III &= \left|\widehat{F}\left(\varepsilon^2\lambda, k\right)-\widehat{F}(\lambda, k)\right| \\
&= \left|F^{\sharp}\left(\varepsilon^2\lambda, \varepsilon^2\,|\lambda|\,(2k+n)\right)-F^{\sharp}(\lambda, |\lambda|\,(2k+n))\right| \\
&= \left|G\left(\varepsilon^2\right)-G(1)\right| = \left|\varepsilon^2-1\right|\left|G'(\theta)\right|
\end{aligned}
$$

para algún $\theta \in \left(\varepsilon^2, 1\right)$. Pero

$$
G'(\theta) = \lambda D_1F^{\sharp}(\theta\lambda, \theta\,|\lambda|\,(2k+n)) + |\lambda|\,(2k+n)\,D_2F^{\sharp}(\theta\lambda, \theta\,|\lambda|\,(2k+n))
$$

donde $D_1F^{\sharp}$ y $D_2F^{\sharp}$ denotan las derivadas parciales de $F^{\sharp}$ respecto a su primera y segunda variable respectivamente. Entonces

$$
III \leq c\,|G'(\theta)| \leq c\,|\lambda|\,k\left\|\left|\nabla F^{\sharp}\right|\right\|_{\infty} \leq c2^j
$$

Luego $\alpha_j = \sup\left\{\left|\left((\sigma\otimes g)^{\varepsilon}-F\right)\widehat{\ }(\lambda, k)\right| : (\lambda, k) \in \Omega_j\right\} \leq c2^j$.

■

Lema 4.14. *Sea β_j dado por (4.22). Entonces existe una constante c independiente de ε tal que $\beta_j \leq c$ para todo $j < 0$.*

Prueba. Nuevamente, a lo largo de la prueba c, c'... denotarán constantes positivas independientes de ε, λ y k, no necesariamente la misma en cada aparición, inclusive en una misma cadena de desigualdades. Sea $(\lambda, k) \in \Omega_j$ con $j \leq 0$. Tenemos

$$\begin{aligned}
& \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(((\sigma \otimes g)^{\varepsilon} - F)\widehat{\ }(\lambda, k) \right) \\
= \; & \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(((\sigma \otimes g) * F_{\epsilon} - F)\widehat{\ }(\lambda, k) \right) \\
= \; & \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\left((\sigma \otimes g)\widehat{\ }(\lambda, k) \, \widehat{F}_{\epsilon}(\lambda, k) - \widehat{F}(\lambda, k) \right) \right) \\
= \; & \lambda \widehat{F}_{\epsilon}(\lambda, k) \frac{\partial}{\partial \lambda} \left((\sigma \otimes g)\widehat{\ }(\lambda, k) \right) + (\sigma \otimes g)\widehat{\ }(\lambda, k) \, \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\widehat{F}_{\epsilon}(\lambda, k) \right) - \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\widehat{F}(\lambda, k) \right) \\
= \; & \lambda \widehat{F}\left(\varepsilon^2 \lambda, k\right) \frac{\partial}{\partial \lambda} \left((\sigma \otimes g)\widehat{\ }(\lambda, k) \right) + (\sigma \otimes g)\widehat{\ }(\lambda, k) \, \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\widehat{F}\left(\varepsilon^2 \lambda, k\right) \right) \\
& - \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\widehat{F}(\lambda, k) \right) \\
: \; & = I * II + III.
\end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
& \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \left((\sigma \otimes g)\widehat{\ }(\lambda, k) \right) \\
= \; & \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(g)(\lambda) \left(-\frac{k}{2n} |\lambda| \varphi_{k-1}^{n} \left(\sqrt{|\lambda|} \right) - \frac{|\lambda|}{4} \varphi_{k}^{n-1} \left(\sqrt{|\lambda|} \right) \right) \\
& + \lambda \sqrt{2\pi} \varphi_{k}^{n-1} \left(\sqrt{|\lambda|} \right) (\mathcal{F}(g))'(\lambda).
\end{aligned}$$

con la convención de que, para $k = 0$, $\varphi_{k-1}^{n} = 0$. Y como $sop\,(\mathcal{F}(g)) \subset \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ tenemos $I = 0$ si $|\lambda| > \frac{1}{2}$. Por otra parte, para $|\lambda| \leq \frac{1}{2}$, como $|\lambda| k \leq c 2^{j} \leq c$ y teniendo en cuenta que $\|\mathcal{F}(g)\|_{\infty} < \infty$, $\left\| (\mathcal{F}(g))' \right\|_{\infty} < \infty$, $\left\| \varphi_{k-1}^{n} \right\|_{\infty} = \left\| \varphi_{k}^{n-1} \right\|_{\infty} = 1$ tenemos

$$\left| \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \left((\sigma \otimes g)\widehat{\ }(\lambda, k) \right) \right| \leq c \tag{4.23}$$

y como $\left| \widehat{F}\left(\varepsilon^2 \lambda, k\right) \right| \leq \|F\|_1$ concluímos que $|I| \leq c$. Para estimar II notemos que

$$\begin{aligned}
& \left| \lambda \frac{d}{d\lambda} \left(\widehat{F}\left(\varepsilon^2 \lambda, k\right) \right) \right| \qquad\qquad (4.24) \\
= \; & \left| \lambda \frac{d}{d\lambda} \left(F^{\#}\left(\varepsilon^2 \lambda, \varepsilon^2 |\lambda| (2k+n)\right) \right) \right| \\
\leq \; & \varepsilon^2 |\lambda| \left| \left(D_1 F^{\#}\right) \left(\varepsilon^2 \lambda, \varepsilon^2 |\lambda| (2k+n)\right) \right| \\
& + \varepsilon^2 |\lambda| (2k+n) \left| \left(D_2 F^{\#}\right) \left(\varepsilon^2 \lambda, \varepsilon^2 |\lambda| (2k+n)\right) \right|
\end{aligned}$$

y luego para $|\lambda| \leq \frac{1}{2}$, por (4.23) tenemos

$$\begin{aligned}
|II| &= \left|(\sigma \otimes g)\widehat{\ }(\lambda, k)\, \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\widehat{F}\left(\varepsilon^2 \lambda, k\right)\right)\right| \\
&\leq c\varepsilon^2 |\lambda| \left|\left(D_1 F^{\#}\right)\left(\varepsilon^2 \lambda, \varepsilon^2 |\lambda| (2k+n)\right)\right| \\
&\quad + c\varepsilon^2 |\lambda| (2k+n) \left|\left(D_2 F^{\#}\right)\left(\varepsilon^2 \lambda, \varepsilon^2 |\lambda| (2k+n)\right)\right| \\
&\leq c',
\end{aligned}$$

la última desigualdad porque las funciones $(x, y) \to x\left(D_1 F^{\#}\right)(x, y)$ y $(x, y) \to y\left(D_2 F^{\#}\right)(x, y)$, estando en $S\left(\mathbb{R}^2\right)$, son acotadas. Finalmente, y por esta misma razón, utilizando (4.24) con $\varepsilon = 1$, vemos que $|III| = \left|\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\widehat{F}(\lambda, k)\right)\right| \leq c$. Entonces concluímos que $\beta_j = \sup\limits_{(\lambda,k)\in\Omega_j} \left|\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\left((\sigma \otimes g)^{\varepsilon} - F\right)\widehat{\ }(\lambda, k)\right)\right| \leq c$.

■

Corolario 4.15. *Sean α_j, β_j dados por (4.21) y (4.22) respectivamente. Entonces $\sum\limits_{j<0} \alpha_j^{\frac{1}{2}} \left(\alpha_j + \beta_j\right)^{\frac{1}{2}} \leq c$ con c independiente de ε.*

Lema 4.16. *Sean Ω_j, α_j dados por (4.20) y (4.21) respectivamente. Entonces existe una constante c independiente de ε tal que*

$$\alpha_j \leq c 2^{-j\left(\frac{1}{4}+\frac{n-1}{2}\right)} \sup_{(\lambda,k)\in\Omega_j} \left(\left|\widehat{F}\left(\varepsilon^2 \lambda, k\right)\right|\right) + \sup_{(\lambda,k)\in\Omega_j} \left|\widehat{F}(\lambda, k)\right|$$

para todo $j > 0$.

Prueba. A lo largo de la prueba c denotará una constante positiva independiente de ε, λ y k, no necesariamente la misma en cada aparición, inclusive en una misma cadena de desigualdades. Sea $(\lambda, k) \in \Omega_j$ con $j > 0$. Tenemos

$$\begin{aligned}
&\left((\sigma \otimes g)^{\varepsilon} - F\right)\widehat{\ }(\lambda, k) \\
= \;& \varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{|\lambda|}\right) \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(g)(\lambda)\, \widehat{F}\left(\varepsilon^2 \lambda, k\right) - \widehat{F}(\lambda, k),
\end{aligned}$$

luego

$$
\begin{aligned}
& \left|\left((\sigma\otimes g)^{\varepsilon}-F\right)^{\frown}(\lambda,k)\right| \\
\leq\ & \left|\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{|\lambda|}\right)\sqrt{2\pi}\mathcal{F}(g)(\lambda)\right|\left|\widehat{F}\left(\varepsilon^2\lambda,k\right)\right|+\left|\widehat{F}(\lambda,k)\right| \\
=\ & \left|\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{|\lambda|}\right)\sqrt{2\pi}\mathcal{F}(g)(\lambda)\right|\left|F^{\#}\left(\varepsilon^2\lambda,\varepsilon^2|\lambda|(2k+n)\right)\right|+\left|F^{\#}(\lambda,|\lambda|(2k+n))\right| \\
\leq\ & c\left|\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{|\lambda|}\right)\sqrt{2\pi}\mathcal{F}(g)(\lambda)\right|\left|F^{\#}\left(\varepsilon^2\lambda,\varepsilon^2|\lambda|(2k+n)\right)\right|+\left|F^{\#}(\lambda,|\lambda|(2k+n))\right|.
\end{aligned}
$$

Ahora, $sop(\mathcal{F}(g))\subset\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ y, para $|\lambda|\leq\frac{1}{2}$, por la Proposición 2.27 tenemos $\left|\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{|\lambda|}\right)\right|\leq c\left(|\lambda|k\right)^{-\frac{1}{4}-\frac{n-1}{2}}$. Entonces

$$
\begin{aligned}
& \left|\left((\sigma\otimes g)^{\varepsilon}-F\right)^{\frown}(\lambda,k)\right| \\
& \leq c\left(|\lambda|k\right)^{-\frac{1}{4}-\frac{n-1}{2}}\left|F^{\#}\left(\varepsilon^2\lambda,\varepsilon^2|\lambda|(2k+n)\right)\right|+\left|F^{\#}(\lambda,|\lambda|(2k+n))\right|.
\end{aligned}
$$

Luego

$$
\begin{aligned}
\alpha_j &= \sup_{(\lambda,k)\in\Omega_j}\left|\left((\sigma\otimes g)^{\varepsilon}-F\right)^{\frown}(\lambda,k)\right| \\
&\leq c2^{-j\left(\frac{1}{4}+\frac{n-1}{2}\right)}\sup_{(\lambda,k)\in\Omega_j}\left(\left|\widehat{F}\left(\varepsilon^2\lambda,k\right)\right|\right)+c\sup_{(\lambda,k)\in\Omega_j}\left|\widehat{F}(\lambda,k)\right|.
\end{aligned}
$$

■

Lema 4.17. *Sea β_j dado por (4.22). Entonces existe una constante c independiente de ε tal que $\beta_j\leq c2^{j\left(1-\frac{1}{4}-\frac{n}{2}\right)}$ para todo $j>0$.*

Prueba. A lo largo de la prueba c,c'... denotarán constante positiva independiente de ε, λ y k, no necesariamente la misma en cada aparición, inclusive en una misma cadena de desigualdades. Sea $(\lambda,k)\in\Omega_j$ con $j>0$. De (4.18) y (4.14) tenemos

$$
\begin{aligned}
& \left|\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\left((\sigma\otimes g)^{\varepsilon}-F\right)^{\frown}(\lambda,k)\right| \\
=\ & \left|\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\left((\sigma\otimes g)^{\frown}(\lambda,k)\right)\widehat{F_{\varepsilon}}(\lambda,k)+(\sigma\otimes g)^{\frown}(\lambda,k)\,\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\widehat{F_{\varepsilon}}(\lambda,k)-\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\widehat{F}(\lambda,k)\right| \\
\leq\ & c\left|\lambda k\varphi_{k-1}^{n}\left(\sqrt{|\lambda|}\right)\sqrt{2\pi}\mathcal{F}(g)(\lambda)\,\widehat{F}\left(\varepsilon^2\lambda,k\right)\right| \\
& +c\left|\lambda\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{|\lambda|}\right)\sqrt{2\pi}\mathcal{F}(g)\,\widehat{F}\left(\varepsilon^2\lambda,k\right)\right| \\
& +c\left|\lambda\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{|\lambda|}\right)\sqrt{2\pi}\left(\mathcal{F}(g)\right)'(\lambda)\,\widehat{F}\left(\varepsilon^2\lambda,k\right)\right| \\
& +c\left|\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{|\lambda|}\right)\sqrt{2\pi}\mathcal{F}(g)(\lambda)\,\lambda\frac{d}{d\lambda}\left(\widehat{F}\left(\varepsilon^2\lambda,k\right)\right)\right|+\left|\lambda\frac{d}{d\lambda}\widehat{F}(\lambda,k)\right| \\
:\ & = I_{\beta}+II_{\beta}+III_{\beta}+IV_{\beta}+V_{\beta}
\end{aligned}
$$

(conviniendo en que $\varphi_{k-1}^{n}=0$ para $k=0$). En orden a estimar I_β, II_β, III_β y IV_β para $(\lambda,k)\in\Omega_j$, nuevamente basta hacerlo para $|\lambda|<\frac{1}{2}$ pues $sop\left(\mathcal{F}\left(g\right)\right)\subset\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Estimemos I_β. Si $k=0$ entonces $I_\beta=0$ y no hay nada que hacer. Si $k\geq 1$ y $|\lambda|<\frac{1}{2}$, por la Proposición 2.27 tenemos que $\left|\varphi_{k-1}^{n}\left(\sqrt{|\lambda|}\right)\right|\leq c\left(|\lambda|\,k\right)^{-\frac{1}{4}-\frac{n}{2}}\leq c'\left(|\lambda|\left(2k+n\right)\right)^{-\frac{1}{4}-\frac{n}{2}}$ y luego

$$\begin{aligned}
I_\beta &= c\left|\lambda k\varphi_{k-1}^{n}\left(\sqrt{|\lambda|}\right)\sqrt{2\pi}\mathcal{F}\left(g\right)\left(\lambda\right)\widehat{F}\left(\varepsilon^2\lambda,k\right)\right|\\
&\leq c'\left(|\lambda|\left(2k+n\right)\right)^{1-\frac{1}{4}-\frac{n}{2}}\left|\widehat{F}\left(\varepsilon^2\lambda,k\right)\right|\\
&\leq c''\left(|\lambda|\left(2k+n\right)\right)^{1-\frac{1}{4}-\frac{n}{2}}
\end{aligned}$$

Para estimar II_β observemos que si $k=0$,

$$II_\beta=c\left|\lambda e^{-\frac{|\lambda|}{5}}\sqrt{2\pi}\mathcal{F}\left(g\right)\left(\lambda\right)\widehat{F}\left(\varepsilon^2\lambda,0\right)\right|\leq c'\,|\lambda|\,e^{-\frac{|\lambda|}{5}}\leq c''\left(|\lambda|\left(2\times 0+n\right)\right)^{\left(1-\frac{1}{4}-\frac{n}{2}\right)},$$

i.e., tenemos $II_\beta\leq c''\left(|\lambda|\left(2k+n\right)\right)^{1-\frac{1}{4}-\frac{n}{2}}$ para $k=0$. Y si $k\geq 1$ recordamos que $L_k^{n-1}\left(s\right)=L_k^{n}\left(s\right)-L_{k-1}^{n}\left(s\right)$ (cf. [**AbSe65**], fórmula 22.7.30, pag. 783) y entonces

$$\begin{aligned}
\varphi_k^{n-1}\left(r\right) &= \frac{k!\left(n-1\right)!}{\left(k+n-1\right)!}L_k^{n-1}\left(\frac{1}{2}r^2\right)e^{-\frac{1}{4}r^2} \qquad (4.25)\\
&= \frac{k!\left(n-1\right)!}{\left(k+n-1\right)!}L_k^{n}\left(\frac{1}{2}r^2\right)e^{-\frac{1}{4}r^2}-\frac{k!\left(n-1\right)!}{\left(k+n-1\right)!}L_{k-1}^{n}\left(\frac{1}{2}r^2\right)e^{-\frac{1}{4}r^2}\\
&= \frac{k+n}{n}\frac{k!n!}{\left(k+n\right)!}L_k^{n}\left(\frac{1}{2}r^2\right)e^{-\frac{1}{4}r^2}-\frac{k}{n}\frac{\left(k-1\right)!n!}{\left(k+n-1\right)!}L_k^{n}\left(\frac{1}{2}r^2\right)e^{-\frac{1}{4}r^2}\\
&= \frac{k+n}{n}\varphi_k^{n}\left(r\right)-\frac{k}{n}\varphi_{k-1}^{n}\left(r\right).
\end{aligned}$$

Ahora bien, como $|\lambda|\leq\frac{1}{2}$ tenemos por la Proposición 2.27 que $\left|\varphi_k^{n}\left(\sqrt{|\lambda|}\right)\right|\leq c\left(|\lambda|\,k\right)^{-\frac{1}{4}-\frac{n}{2}}\leq c'\left(|\lambda|\left(2k+n\right)\right)^{1-\frac{1}{4}-\frac{n}{2}}$ y también, si $k\geq 2$, la misma proposición 2.27 nos da $\left|\varphi_{k-1}^{n}\left(\sqrt{|\lambda|}\right)\right|\leq c\left(|\lambda|\,k\right)^{-\frac{1}{4}-\frac{n}{2}}\leq c'\left(|\lambda|\left(2k+n\right)\right)^{1-\frac{1}{4}-\frac{n}{2}}$ mientras que si $k=1$ tenemos $\left|\varphi_{k-1}^{n}\left(\sqrt{|\lambda|}\right)\right|=e^{-\frac{|\lambda|}{5}}\leq c\left(|\lambda|\left(2\times 1+n\right)\right)^{1-\frac{1}{4}-\frac{n}{2}}$ (ya que $(\lambda,1)\in\Omega_j$ con $j>0$ implica $|\lambda|\geq\left(1+\left(2+n\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$).

Entonces, como $|\lambda|\leq\frac{1}{2}$, de (4.25) obtenemos que toda vez que $(\lambda,k)\in\Omega_j$ con $j>0$,

$$\left|\lambda\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{|\lambda|}\right)\right|\leq c\left(|\lambda|\left(2k+n\right)\right)^{1-\frac{1}{4}-\frac{n}{2}} \qquad (4.26)$$

y luego

$$
\begin{aligned}
II_\beta &= c\left|\lambda\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{|\lambda|}\right)\sqrt{2\pi}\mathcal{F}(g)(\lambda)\widehat{F}\left(\varepsilon^2\lambda,k\right)\right| \\
&\leq c\left(|\lambda|\,k\right)^{1-\frac{1}{4}-\frac{n}{2}}\left|\widehat{F}\left(\varepsilon^2\lambda,k\right)\right| \leq c'\left(|\lambda|\,(2k+n)\right)^{1-\frac{1}{4}-\frac{n}{2}},
\end{aligned}
$$

También de (4.26),

$$
\begin{aligned}
III_\beta &= c\left|\lambda\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{|\lambda|}\right)\sqrt{2\pi}\left(\mathcal{F}(g)\right)'(\lambda)\widehat{F}\left(\varepsilon^2\lambda,k\right)\right| \\
&\leq c\left(|\lambda|\,(2k+n)\right)^{1-\frac{1}{4}-\frac{n}{2}}\left|\widehat{F}\left(\varepsilon^2\lambda,k\right)\right| \leq c'\left(|\lambda|\,(2k+n)\right)^{1-\frac{1}{4}-\frac{n}{2}}.
\end{aligned}
$$

También

$$
\begin{aligned}
\left|\lambda\frac{d}{d\lambda}\left(\widehat{F}\left(\varepsilon^2\lambda,k\right)\right)\right| &= \left|\lambda\frac{d}{d\lambda}\left(F^{\#}\left(\varepsilon^2\lambda,\varepsilon^2|\lambda|\,(2k+n)\right)\right)\right| \\
&\leq \varepsilon^2|\lambda|\left|D_1F^{\#}\left(\varepsilon^2\lambda,\varepsilon^2|\lambda|\,(2k+n)\right)\right| \\
&\quad +\varepsilon^2|\lambda|\,(2k+n)\left|D_2F^{\#}\left(\varepsilon^2\lambda,\varepsilon^2|\lambda|\,(2k+n)\right)\right| \\
&\leq c.
\end{aligned}
$$

Luego como $\|\mathcal{F}(g)\|_\infty < \infty$ y $\left|\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{|\lambda|}\right)\right| \leq 1$,

$$
\begin{aligned}
IV_\beta &= c\left|\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{|\lambda|}\right)\sqrt{2\pi}\mathcal{F}(g)(\lambda)\,\lambda\frac{d}{d\lambda}\left(\widehat{F}\left(\varepsilon^2\lambda,k\right)\right)\right| \\
&\leq c' \leq c''\left(|\lambda|\,(2k+n)\right)^{1-\frac{1}{4}-\frac{n}{2}},
\end{aligned}
$$

la última desigualdad porque $(\lambda,k)\in\Omega_j$ con $j>0$.

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
V_\beta &= \left|\lambda\frac{d}{d\lambda}\widehat{F}(\lambda,k)\right| \\
&\leq c|\lambda|\left|D_1F^{\#}\left(\lambda,|\lambda|\,(2k+n)\right)\right| + c|\lambda|\,(2k+n)\left|D_2F^{\#}\left(\lambda,|\lambda|\,(2k+n)\right)\right| \\
&\leq c' \leq c''\left(|\lambda|\,(2k+n)\right)^{1-\frac{1}{4}-\frac{n}{2}}.
\end{aligned}
$$

Entonces $\left|\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\left((\sigma\otimes g)^{\varepsilon}-F\right)^{\widehat{}}(\lambda,k)\right| \leq c\left(|\lambda|\,(2k+n)\right)^{1-\frac{1}{4}-\frac{n}{2}} \leq c'2^{j\left(1-\frac{1}{4}-\frac{n}{2}\right)}$ toda vez que $(\lambda,k)\in\Omega_j$ con $j>0$, lo que nos da el lema.

$\blacksquare$

Teorema 4.18. *Sean σ la medida dada por el elemento de área euclídeo en $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ normalizada por $\sigma\left(S^{2n-1}\right) = 1$ y sea χ_I la función característica del intervalo $I = [-1, 1]$. Sea F como en la Observación 4.12. Entonces para $\varepsilon > 0$ existe una constante positiva c independiente de ε tal que para toda $f \in L^2(\mathbb{H}_n)$,*

$$\left\| \sup_{r>0} \left(|f| * ((\sigma \otimes \chi_I) * F_\varepsilon)_r\right) \right\|_{L^2(\mathbb{H}_n)} \leq c\left(|\log(\varepsilon)|\right) + 1) \|f\|_{L^2(\mathbb{H}_n)}.$$

Prueba. Sea g como en la Observación 4.12. Como F y g son no negativas y como $g(s) \geq \eta\chi_I(s)$ para $-1 \leq s \leq 1$ con η constante positiva, basta con ver que

$$\left\| \sup_{r>0} \left(|f| * ((\sigma \otimes g) * F_\varepsilon)_r\right) \right\|_{L^2(\mathbb{H}_n)} \leq c\left(|\log(\varepsilon)|\right) + 1) \|f\|_{L^2(\mathbb{H}_n)}.$$

con c independiente de ε y de $f \in L^2(\mathbb{H}_n)$.

Sea M el operador maximal de Hardy Littlewood en $\mathbb{H}_n$ definido por (3.1). Como $F \geq 0$ y F tiene soporte compacto tenemos $F \leq c\chi_{\delta_R(B)}$ donde B denota la bola de centro $(\mathbf{0}, 0)$ y radio 1 en $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ y c es una constante positiva. Entonces para $r > 0$ y $(z, t) \in \mathbb{H}_1$,

$$\begin{aligned} (|f| * F_r)(z,t) &= \int_{\mathbb{H}_n} \left| f\left((z,t)\,\delta_r(w,s)^{-1}\right)\right| F(w,s)\,dwds \\ &\leq c \int_{|(w,s)|<1} \left| f\left((z,t)\,\delta_{rR}(w,s)^{-1}\right)\right| dwds \leq c' M(f)(z,t) \end{aligned}$$

Luego $\left\| \sup_{r>0} (|f| * F_r) \right\|_{L^2(\mathbb{H}_1)} \leq c\|f\|_{L^2(\mathbb{H}_1)}$. Entonces para probar el teorema es suficiente ver que

$$\left\| \sup_{r>0} \left(\left||f| * ((\sigma \otimes g)^\varepsilon - F)_r\right|\right) \right\|_{L^2(\mathbb{H}_n)} \leq c(|\log(\varepsilon)| + 1)\|f\|_{L^2(\mathbb{H}_n)}.$$

y esto será hecho utilizando el lema 4.8. Por el corolario 4.15 tenemos

$$\sum_{j\leq 0} \alpha_j^{\frac{1}{2}} (\alpha_j + \beta_j)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

con α_j, β_j dados por (4.21) y (4.22) respectivamente. Por otra parte, como $(\alpha_j+\beta_j)^{\frac{1}{2}} \leq {\alpha_j}^{\frac{1}{2}} + {\beta_j}^{\frac{1}{2}}$ también tenemos

$$\sum_{j>0} \alpha_j^{\frac{1}{2}} (\alpha_j + \beta_j)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{j>0} \alpha_j + \sum_{j>0} \beta_j^{\frac{1}{2}} \alpha_j^{\frac{1}{2}},$$

y por el Lema 4.16,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j>0} \alpha_j \\
\leq\ & c \sum_{j>0} \left(2^{-j\left(\frac{1}{4}+\frac{n-1}{2}\right)} \sup_{(\lambda,k)\in\Omega_j} \left(\left| \widehat{F}\left(\varepsilon^2 \lambda, k\right) \right| \right) + \left| \widehat{F}\left(\lambda, k\right) \right| \right) \\
\leq\ & c \sum_{j>0} 2^{-j\left(\frac{1}{4}+\frac{n-1}{2}\right)} \left\| F^{\#} \right\|_{\infty} + c' \sum_{j>0} 2^{-j} \left\| F^{\#} \right\|_{\infty} = c'' < \infty
\end{aligned}
$$

Además, por los lemas 4.16 y 4.17

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j>0} \beta_j^{\frac{1}{2}} \alpha_j^{\frac{1}{2}} \\
\leq\ & c \sum_{j>0} 2^{\frac{j}{2}\left(1-\frac{1}{4}-\frac{n}{2}\right)} \left(2^{-j\left(\frac{1}{4}+\frac{n-1}{2}\right)} \sup_{(\lambda,k)\in\Omega_j} \left(\left| \widehat{F}\left(\varepsilon^2 \lambda, k\right) \right| \right) + \left| \widehat{F}\left(\lambda, k\right) \right| \right)^{\frac{1}{2}} \\
\leq\ & c \sum_{j>0} \left(\frac{1}{2^{j(n-1)}} \sup_{(\lambda,k)\in\Omega_j} \left(\left| \widehat{F}\left(\varepsilon^2 \lambda, k\right) \right| \right) + 2^{j\left(1-\frac{1}{4}-\frac{n}{2}\right)} \left| \widehat{F}\left(\lambda, k\right) \right| \right)^{\frac{1}{2}} \\
\leq\ & c \sum_{j>0} \left(2^{-j(n-1)} \sup_{(\lambda,k)\in\Omega_j} \left(\left| \widehat{F}\left(\varepsilon^2 \lambda, k\right) \right| \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\
& + c \sum_{j>0} \left(2^{j\left(1-\frac{1}{4}-\frac{n}{2}\right)} \left| \widehat{F}\left(\lambda, k\right) \right| \right)^{\frac{1}{2}} \\
\leq\ & c \sum_{j>0} \left(\sup_{(\lambda,k)\in\Omega_j} \left(\left| \widehat{F}\left(\varepsilon^2 \lambda, k\right) \right| \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\
& + c \sum_{j>0} \left(2^{j\left(1-\frac{1}{4}-\frac{n}{2}\right)} \sup_{(\lambda,k)\in\Omega_j} \left| \widehat{F}\left(\lambda, k\right) \right| \right)^{\frac{1}{2}} \\
\leq\ & c \left(\left| \log\left(\varepsilon\right) \right| + 1 \right),
\end{aligned}
$$

la última desigualdad por el lema 4.10.

Entonces $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha_j^{\frac{1}{2}} \left(\alpha_j + \beta_j\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$ y el lema 4.8 nos da el teorema.

■

Como consecuencia del Teorema 4.18 el siguiente teorema nos dará la acotación en $L^2\left(\mathbb{H}_n\right)$ de algunos operadores maximales de la forma $M\left(f\right) = \sup_{r>0} \left| f * G_r \right|$ para ciertas funciones $G : \mathbb{H}_n \to \mathbb{R}$ radiales e integrables pero que son singulares $|z| = 1$ en el sentido de que $\lim\limits_{|z|\to 1^{+}} |G(z)| = \infty$ lo que no nos permite mayorar directamente M por un múltiplo de la función maximal de Hardy Littlewood.

Teorema 4.19. *Sea $n \geq 1$, sea $\psi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ medible con sop $(\psi) \subset \{z \in \mathbb{C}^n : 1 < |z| < 2\}$ tal que $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \sup\limits_{1+2^{k-1} \leq |y| \leq 1+2^k} |\psi(z)| < \infty$ y sea $h : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ definida por*

$$h(z,t) := \frac{1}{|\ln(|z|-1)|}\frac{1}{|z|-1}\psi(z)$$

y para $f \in L^p(\mathbb{H}_n)$, $(z,t) \in \mathbb{H}_n$ sea

$$\left(\widetilde{M}_{cil} f\right)(z,t) := \sup_{r>0} \left|\left(f * \left(h \otimes \chi_{(-1,1)}\right)_r\right)(z,t)\right|.$$

Entonces $\widetilde{M}_{cil}$ es acotado en $L^2(\mathbb{H}_n)$.

Prueba. $h = \sum\limits_{k=0}^{\infty} h\chi_{A_k}$ donde $A_k := \left\{z \in \mathbb{C}^n : 1 + 2^{-k-1} \leq |z| < 1 + 2^{-k}\right\}$. Ahora, para $(z,t) \in A_k \times (-1,1)$,

$$\begin{aligned}
\left|\left(h\chi_{A_k} \otimes \chi_{(-1,1)}\right)(z,t)\right| &= \frac{1}{|\ln(|z|-1)|}\frac{1}{|z|-1}\psi(z) \\
&\leq c\frac{1}{k}2^k \sup_{z\in A_k}|\psi(z)| \leq c'\frac{1}{k}2^k \sup_{z\in A_k}|\psi(z)| \\
&= c'\frac{1}{k}\sup_{z\in A_k}|\psi(z)| \left|\left(\sigma_k \otimes \chi_{(-1,1)}\right)(z,t)\right|
\end{aligned}$$

con σ_k definida como al principio del capítulo y con las constantes c, c' independientes de f, k y (z,t). Entonces

$$\begin{aligned}
\widetilde{M}_{cil} f &= \sup_{r>0}\left|f * \left(h \otimes \chi_{(-1,1)}\right)_r\right| = \sup_{r>0}\left|f * \left(h\sum_{k=0}^{\infty}\chi_{A_k} \otimes \chi_{(-1,1)}\right)_r\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty}\sup_{r>0}\left|f * \left(h\chi_{A_k} \otimes \chi_{(-1,1)}\right)_r\right| \\
&\leq c'\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k}\sup_{z\in A_k}|\psi(z)| \sup_{r>0}\left|f * \left(\sigma_k \otimes \chi_{(-1,1)}\right)_r\right|.
\end{aligned}$$

Como

$$\left|f * \left(\sigma_k \otimes \chi_{(-1,1)}\right)_r\right| \approx \left|f * \left(\sigma \otimes \chi_{(-1,1)}\right)_r * F_{2^{-k}}\right|,$$

por el Teorema 4.18 (utilizado con $\varepsilon = 2^{-k}$),

$$\left\| \widetilde{M}_{cil} f \right\|_2 \leq c'' \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} \sup_{z \in A_k} |\psi(z)| \, c'' k \, \|f\|_2 = c \, \|f\|_2$$

■

Ejemplo. Para $\gamma > 0$ la función $\psi(z) := \left(\frac{1}{|\ln(|z| - 1)|} \right)^{1+\gamma} \chi_{\{z \in \mathbb{C}^n : 1 < |z| < 2\}}$ satisface las hipótesis del Teorema 4.19 y la correspondiente función h tiende a ∞ si $|z|$ tiende a 1.

5 Un operador maximal fuertemente singular sobre $L^2(\mathbb{H}_n)$

Para $(z,t) \in \mathbb{H}_n$ sea $\rho(z,t) = \left(|z|^4 + t^2\right)^{\frac{1}{4}}$. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\beta > 0$ y sea $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ una función no negativa tal que $sop(\chi) \subset (-1,1)$ y $\chi = 1$ en un entorno del origen, y sea $K_{\alpha,\beta} : \mathbb{H}_n \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ la función definida por

$$K_{\alpha,\beta}(z,t) = \rho(z,t)^{-(2n+2+\alpha)} e^{i\rho(z,t)^{-\beta}} \chi(\rho(z,t)),$$

y para $f \in S(\mathbb{H}_n)$ tal que $0 \notin sop(f)$ sea $(\mu_{(\alpha,\beta)})_o(f) = \int_{\mathbb{H}_n} K_{\alpha,\beta} f$. Entonces $(\mu_{(\alpha,\beta)})_0$ se extiende a una distribución $\mu_{(\alpha,\beta)} \in S'(\mathbb{H}_n)$ y el operador de convolución $T(f) = f * \mu_{(\alpha,\beta)})$ es acotado en $L^2(\mathbb{H}_n)$ (cf. [**Ly07**]). Es natural entonces preguntarse sobre la acotación del operador maximal correspondiente. El propósito de este capítulo es probar el siguiente

Teorema 5.1. *Si $\alpha < (n-1)\beta - 4$ entonces existe una constante positiva c tal que, para $f \in S(\mathbb{H}_n)$,*

$$\left\| \sup_{r>0} \left| |f| * (\mu_{(\alpha,\beta)})_r \right| \right\|_2 \leq c \, \|f\|_2 .$$

Para $\varepsilon > 0$ y $(z,t) \in \mathbb{H}_n$, sea

$$\mu^{\epsilon}_{(\alpha,\beta)}(z,t) = \rho(z,t)^{-(2n+2+\alpha)} e^{-\varepsilon\rho(z,t)^{-\beta}} e^{i\rho(z,t)^{-\beta}} \chi(\rho(z,t)). \tag{5.1}$$

Entonces $\mu^{\epsilon}_{(\alpha,\beta)} \in C_c^\infty(\mathbb{H}_n)$ y $\mu^{\epsilon}_{(\alpha,\beta)}$ es radial. Ahora, como hemos mencionado arriba, la funcional $(\mu_{(\alpha,\beta)})_0$ se extiende a una distribución $\mu_{(\alpha,\beta)} \in S'(\mathbb{H}_n)$ y $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \mu^{\varepsilon}_{(\alpha,\beta)} = \mu_{(\alpha,\beta)}$ con convergencia en $S'(\mathbb{H}_n)$. Para $\alpha \leq 0$ es claramente verdadero, mientras que para $\alpha > 0$ se obtienen por prolongación analítica respecto de α mediante un proceso de integración por partes. Aunque este procedimiento, indicado en [**Ly07**], es estándar, dado que más adelante necesitaremos usar similares procedimientos de integración por partes, daremos en la siguiente proposición 5.2 y en los corolarios 5.3 y 5.4 la prueba de estos hechos.

Proposición 5.2. *Sean* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *con* $\beta > 0$, *sea* $\chi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ *una función no negativa tal que* $\chi = 1$ *en un entorno del origen, y sea para* $\varepsilon > 0$

$$\mu_{\alpha,\beta,\chi}^{\varepsilon} = \rho(z,t)^{-(2n+2+\alpha)} e^{-\varepsilon\rho(z,t)^{-\beta}} e^{i\rho(z,t)^{-\beta}} \chi(\rho(z,t)).$$

Asúmase que una de las siguientes dos hipótesis vale:
H1) $\varepsilon = 0$, $f \in S(\mathbb{H}_n)$ *y* $(\mathbf{0}, 0) \notin sop(f)$
H2) $\varepsilon > 0$ *y* $f \in S(\mathbb{H}_n)$
Entonces para $N \in \mathbb{N}$

$$\mu_{\alpha,\beta,\chi}^{\varepsilon}(f) = \frac{1}{(-\varepsilon + i)^N} \sum_{j=1}^{N} \mu_{\alpha - N\beta,\beta,\chi_j}^{\varepsilon}(L_{\alpha,\beta,j} f) \tag{5.2}$$

con $\chi_j \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$, χ_j *independiente de* ε *y* f, *y tal que* $sop(\chi_j) \subset sop(\chi)$ *y donde cada* $L_{\alpha,\beta,j}$ *es un operador diferencial de orden a lo sumo* N *y de la forma*

$$(L_{\alpha,\beta,j} f)(x + iy, t) = \sum_{|\gamma| \leq N} P_{\alpha,\beta,\gamma}(x, y, t, \varepsilon) D^{\gamma}(f(x + iy, t))$$

donde $\gamma \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^{2n+1}$ *denotan un multiíndice y* D^{γ} *su derivada parcial correspondiente*

$$D^{\gamma} = (\partial_{x_1})^{\gamma_1} \ldots (\partial_{x_n})^{\gamma_n} (\partial_{y_1})^{\gamma_{n+1}} \ldots (\partial_{y_n})^{\gamma_{2n}} (\partial_t)^{\gamma_{2n+1}}.$$

Además cada $P_{\alpha,\beta,\gamma}(x, y, t)$ *es un polinomio en* x, y, t *de grado a lo sumo* N *con coeficientes dependientes de* α, β, γ *pero independientes de* ε *y* f.

Prueba. Tenemos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{H}_n} \mu_{(\alpha,\beta)}^{\epsilon}(z,t) f(z,t)\, dzdt \\
&= \int_{\mathbb{H}_n} \rho(z,t)^{-(2n+2+\alpha)} e^{(-\varepsilon+i)\rho(z,t)^{-\beta}} \chi(\rho(z,t)) f(z,t)\, dzdt \\
&= \int_{\mathbb{H}_n} \left(|z|^4 + t^2\right)^{-\frac{1}{4}(2n+2+\alpha)} e^{(-\varepsilon+i)\left(|z|^4+t^2\right)^{-\frac{\beta}{4}}} \chi\left(\left(|z|^4 + t^2\right)^{\frac{1}{4}}\right) f(z,t)\, dzdt
\end{aligned} \tag{5.3}$$

y pasando a coordenadas polares (en la variable z) la última integral (5.3) se convierte en

$$\int_0^\infty \left(r^4+t^2\right)^{-\frac{1}{4}(2n+2+\alpha)} e^{(-\varepsilon+i)\left(r^4+t^2\right)^{-\frac{\beta}{4}}} \chi\left(\left(r^4+t^2\right)^{\frac{1}{4}}\right) \int_{S^{2n-1}} f\left(r\omega,t\right) d\omega \; r^{2n-1} dr dt \tag{5.4}$$

donde $d\omega$ denota el elemento de área de $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$.

Introduciendo el siguiente cambio de coordenadas

$$r = \widetilde{r}\sin^{\frac{1}{2}}(\theta),\ t = \widetilde{r}^2\cos(\theta), \qquad 0<\widetilde{r}<\infty, \quad 0<\theta<\pi$$

y teniendo en cuenta que el jacobiano de este cambio de variables está dado por

$$\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial \widetilde{r}} & \dfrac{\partial r}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial t}{\partial \widetilde{r}} & \dfrac{\partial t}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \sin^{\frac{1}{2}}(\theta) & \dfrac{1}{2} r\sin^{-\frac{1}{2}}(\theta)\cos(\theta) \\ 2\widetilde{r}\cos(\theta) & -\widetilde{r}^2\sin(\theta) \end{pmatrix} = -\widetilde{r}^2\sin^{-\frac{1}{2}}(\theta)$$

la integral (5.4) se reescribe como

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi\int_0^\infty \widetilde{r}^{-(2n+2+\alpha)} e^{(-\varepsilon+i)\widetilde{r}^{-\beta}} \chi(\widetilde{r}) \\
&\times \int_{S^{2n-1}} f\left(\widetilde{r}\sin^{\frac{1}{2}}(\theta)\,\omega, \widetilde{r}^2\cos(\theta)\right) d\omega \widetilde{r}^{2n-1} \sin^{\frac{2n-1}{2}}(\theta)\, \widetilde{r}^2 \sin^{-\frac{1}{2}}(\theta)\, d\widetilde{r} d\theta \\
&= \int_0^\pi\int_0^\infty \widetilde{r}^{-(2n+2+\alpha)} e^{(-\varepsilon+i)\widetilde{r}^{-\beta}} \chi(\widetilde{r}) \\
&\times \int_{S^{2n-1}} f\left(\widetilde{r}\sin^{\frac{1}{2}}(\theta)\,\omega, \widetilde{r}^2\cos(\theta)\right) d\omega \widetilde{r}^{2n+1} \sin^{n-1}(\theta)\, d\widetilde{r} d\theta \\
&= \int_0^\pi\int_0^\infty e^{(-\varepsilon+i)\widetilde{r}^{-\beta}} \widetilde{r}^{-(1+\alpha)} \chi(\widetilde{r})\, F(\widetilde{r},\theta) \sin^{n-1}(\theta)\, d\widetilde{r} d\theta
\end{aligned}$$

donde

$$F(\widetilde{r},\theta) = \int_{S^{2n-1}} f\left(\widetilde{r}\sin^{\frac{1}{2}}(\theta)\,\omega, \widetilde{r}^2\cos(\theta)\right) d\omega.$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
e^{(-\varepsilon+i)\widetilde{r}^{-\beta}} &= \frac{1}{(-\varepsilon+i)(-\beta)\,\widetilde{r}^{-\beta-1}} \frac{d}{d\widetilde{r}}\left(e^{(-\varepsilon+i)\widetilde{r}^{-\beta}}\right) \\
&= -\frac{1}{(-\varepsilon+i)\,\beta} \widetilde{r}^{\beta+1} \frac{d}{d\widetilde{r}}\left(e^{(-\varepsilon+i)\widetilde{r}^{-\beta}}\right)
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi\int_0^\infty \widetilde{r}^{-(2n+2+\alpha)} e^{(-\varepsilon+i)\widetilde{r}^{-\beta}} \chi(\widetilde{r})\, \widetilde{r}^{2n+1} F(\widetilde{r},\theta) \sin^{n-1}(\theta)\, d\widetilde{r} d\theta \qquad (5.5) \\
&= -\frac{1}{(-\varepsilon+i)\,\beta} \int_0^\pi\int_0^\infty \frac{d}{d\widetilde{r}}\left(e^{(-\varepsilon+i)\widetilde{r}^{-\beta}}\right) \widetilde{r}^{-\alpha+\beta} \chi(\widetilde{r})\, F(\widetilde{r},\theta)\, d\widetilde{r} \sin^{n-1}(\theta)\, d\theta
\end{aligned}$$

integrando por partes respecto a r y teniendo en cuenta que los términos de frontera se anulan, (5.5) se convierte en

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(-\varepsilon+i)\,\beta}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} e^{(-\varepsilon+i)\widetilde{r}^{-\beta}}\frac{d}{d\widetilde{r}}\left(\widetilde{r}^{-\alpha+\beta}\chi\left(\widetilde{r}\right)F\left(\widetilde{r},\theta\right)\right)d\widetilde{r}\sin^{n-1}\left(\theta\right)d\theta \\
&= I+II+III
\end{aligned}
$$

con

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{-\alpha+\beta}{(-\varepsilon+i)\,\beta}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} e^{(-\varepsilon+i)\widetilde{r}^{-\beta}}\widetilde{r}^{-\alpha+\beta-1}\chi\left(\widetilde{r}\right)F\left(\widetilde{r},\theta\right)d\widetilde{r}\sin^{n-1}\left(\theta\right)d\theta, \\
II &= \frac{1}{(-\varepsilon+i)\,\beta}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} e^{(-\varepsilon+i)\widetilde{r}^{-\beta}}\widetilde{r}^{-\alpha+\beta}\chi'\left(\widetilde{r}\right)F\left(\widetilde{r},\theta\right)d\widetilde{r}\sin^{n-1}\left(\theta\right)d\theta, \\
III &= \frac{1}{(-\varepsilon+i)\,\beta}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} e^{(-\varepsilon+i)\widetilde{r}^{-\beta}}\widetilde{r}^{-\alpha+\beta}\chi\left(\widetilde{r}\right)\frac{\partial}{\partial\widetilde{r}}\left(F\left(\widetilde{r},\theta\right)\right)d\widetilde{r}\sin^{n-1}\left(\theta\right)d\theta.
\end{aligned}
$$

Ahora,

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{-\alpha+\beta}{(-\varepsilon+i)\,\beta}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} e^{(-\varepsilon+i)\widetilde{r}^{-\beta}}\widetilde{r}^{-\alpha+\beta-1}\chi\left(\widetilde{r}\right)F\left(\widetilde{r},\theta\right)d\widetilde{r}\sin^{n-1}\left(\theta\right)d\theta \\
&= \frac{-\alpha+\beta}{(-\varepsilon+i)\,\beta}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} e^{(-\varepsilon+i)\widetilde{r}^{-\beta}}\widetilde{r}^{-\alpha+\beta-1}\chi\left(\widetilde{r}\right) \\
&\times\int_{S^{2n-1}} f\left(\widetilde{r}\sin^{\frac{1}{2}}\left(\theta\right)\omega,\widetilde{r}^{2}\cos\left(\theta\right)\right)d\omega\sin^{n-1}\left(\theta\right)d\widetilde{r}d\theta \\
&= \frac{-\alpha+\beta}{(-\varepsilon+i)\,\beta}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} e^{(-\varepsilon+i)\widetilde{r}^{-\beta}}\widetilde{r}^{-\alpha+\beta-2n-2}\chi\left(\widetilde{r}\right) \\
&\times\int_{S^{2n-1}} f\left(\widetilde{r}\sin^{\frac{1}{2}}\left(\theta\right)\omega,\widetilde{r}^{2}\cos\left(\theta\right)\right)d\omega\widetilde{r}^{2n-1}\sin^{\frac{2n-1}{2}}\left(\theta\right)\widetilde{r}^{2}\sin^{-\frac{1}{2}}\left(\theta\right)d\widetilde{r}d\theta \\
&= \frac{-\alpha+\beta}{(-\varepsilon+i)\,\beta}\int_{\mathbb{R}}\int_0^{\infty} e^{(-\varepsilon+i)\left(r^4+t^2\right)^{-\frac{\beta}{4}}}\left(r^4+t^2\right)^{\frac{1}{4}(-\alpha+\beta-2n-2)}\chi\left(\left(r^4+t^2\right)^{\frac{1}{4}}\right) \\
&\times\int_{S^{2n-1}} f\left(r\omega,t\right)d\omega r^{2n-1}drdt
\end{aligned}
$$

esto es,

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{-\alpha+\beta}{(-\varepsilon+i)\,\beta}\int_{H_n} e^{(-\varepsilon+i)\rho(z,t)^{-\beta}}\rho\left(z,t\right)^{-(\alpha.-\beta+2n+2)}\chi\left(\rho\left(z,t\right)\right)f\left(z,t\right)dzdt, \\
&= \frac{-\alpha+\beta}{(-\varepsilon+i)\,\beta}\mu^{\varepsilon}_{\alpha-\beta,\beta,\chi}\left(f\right)
\end{aligned}
$$

Por otra parte

$$
\begin{aligned}
II &= \frac{1}{(-\varepsilon+i)\,\beta}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} e^{(-\varepsilon+i)\widetilde{r}^{-\beta}}\widetilde{r}^{-\alpha+\beta}\chi'\left(\widetilde{r}\right)F\left(\widetilde{r},\theta\right)d\widetilde{r}\sin^{n-1}(\theta)\,d\theta\\
&= \frac{1}{(-\varepsilon+i)\,\beta}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} e^{(-\varepsilon+i)\widetilde{r}^{-\beta}}\widetilde{r}^{-\alpha+\beta}\chi'\left(\widetilde{r}\right)\\
&\times\int_{S^{2n-1}} f\left(\widetilde{r}\sin^{\frac{1}{2}}(\theta)\,\omega,\widetilde{r}^{2}\cos(\theta)\right)d\omega d\widetilde{r}\sin^{n-1}(\theta)\,d\theta\\
&= \frac{1}{(-\varepsilon+i)\,\beta}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} e^{(-\varepsilon+i)\widetilde{r}^{-\beta}}\widetilde{r}^{-\alpha+\beta-2-2n+1}\chi'\left(\widetilde{r}\right)\\
&\times\int_{S^{2n-1}} f\left(\widetilde{r}\sin^{\frac{1}{2}}(\theta)\,\omega,\widetilde{r}^{2}\cos(\theta)\right)d\omega\widetilde{r}^{2n-1}\sin^{\frac{2n-1}{2}}(\theta)\,\widetilde{r}^{2}\sin^{-\frac{1}{2}}(\theta)\,d\widetilde{r}d\theta\\
&= \frac{1}{(-\varepsilon+i)\,\beta}\int_{\mathbb{R}}\int_0^{\infty} e^{(-\varepsilon+i)\left(r^4+t^2\right)^{-\frac{\beta}{4}}}\left(r^4+t^2\right)^{\frac{-\alpha+\beta-2n-1}{4}}\chi'\left(\left(r^4+t^2\right)^{\frac{1}{4}}\right)\\
&\times\int_{S^{2n-1}} f(r\omega,t)\,d\omega r^{2n-1}drdt\\
&= \frac{1}{(-\varepsilon+i)\,\beta}\int_{\mathbb{H}_n} e^{(-\varepsilon+i)\left(|z|^4+t^2\right)^{-\frac{\beta}{4}}}\left(|z|^4+t^2\right)^{-\frac{\alpha-\beta+2n+2}{4}}\\
&\times\left(|z|^4+t^2\right)^{\frac{1}{4}}\chi'\left(\left(|z|^4+t^2\right)^{\frac{1}{4}}\right)f(z,t)\,dzdt
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
II &= \frac{1}{(-\varepsilon+i)\,\beta}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} e^{(-\varepsilon+i)\left(|z|^4+t^2\right)^{-\frac{\beta}{4}}}\left(|z|^4+t^2\right)^{-\frac{\alpha-\beta+2n+2}{4}}\\
&\times\left(|z|^4+t^2\right)^{\frac{1}{4}}\chi'\left(\left(|z|^4+t^2\right)^{\frac{1}{4}}\right)f(z,t)\,dzdt\\
&= \frac{1}{(-\varepsilon+i)\,\beta}\mu^{\varepsilon}_{\alpha-\beta,\beta,\psi}(f)
\end{aligned}
$$

donde $\psi\in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ es la función definida por $\psi(r)=r\chi'(r)$.

En orden a encontrar una expresión conveniente para III notemos que un cálculo directo muestra que

$$
\begin{aligned}
\widetilde{r}\frac{\partial}{\partial\widetilde{r}}\left(F\left(\widetilde{r},\theta\right)\right) &= \widetilde{r}\frac{\partial}{\partial\widetilde{r}}\left(\int_{S^{2n-1}} f\left(\widetilde{r}\sin^{\frac{1}{2}}(\theta)\,\omega,\widetilde{r}^{2}\cos(\theta)\right)d\omega\right)\\
&= \int_{S^{2n-1}}\left(L^{\#}f\right)\left(\widetilde{r}\sin^{\frac{1}{2}}(\theta)\,\omega,\widetilde{r}^{2}\cos(\theta)\right)d\omega.
\end{aligned}
$$

donde $L^{\#}$ es el operador diferencial sobre $\mathbb{H}_n$ dado por

$$
\left(L^{\#}f\right)(x+iy,t)=2t\frac{\partial}{\partial t}\left(f(x+iy,t)\right)+\sum_{j=1}^{n}\left(x_j\frac{\partial}{\partial x_j}+y_j\frac{\partial}{\partial y_j}\right)\left(f(x+iy,t)\right).
$$

Luego

$$
\begin{aligned}
III &= \frac{1}{(-\varepsilon+i)\,\beta}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} e^{(-\varepsilon+i)\widetilde{r}^{-\beta}}\widetilde{r}^{-\alpha+\beta}\chi(\widetilde{r})\,\frac{\partial}{\partial\widetilde{r}}\left(F(\widetilde{r},\theta)\right)d\widetilde{r}\sin^{n-1}(\theta)\,d\theta \\
&= \frac{1}{(-\varepsilon+i)\,\beta}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} e^{(-\varepsilon+i)\widetilde{r}^{-\beta}}\widetilde{r}^{-\alpha+\beta-1}\chi(\widetilde{r})\,\widetilde{r}\frac{\partial}{\partial\widetilde{r}}\left(F(\widetilde{r},\theta)\right)d\widetilde{r}\sin^{n-1}(\theta)\,d\theta \\
&= \frac{1}{(-\varepsilon+i)\,\beta}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} e^{(-\varepsilon+i)\widetilde{r}^{-\beta}}\widetilde{r}^{-\alpha+\beta-1}\chi(\widetilde{r}) \\
&\times\int_{S^{2n-1}}\left(L^{\#}f\right)\left(\widetilde{r}\sin^{\frac{1}{2}}(\theta)\,\omega,\widetilde{r}^{2}\cos(\theta)\right)d\omega d\widetilde{r}\sin^{n-1}(\theta)\,d\theta \\
&= \frac{1}{(-\varepsilon+i)\,\beta}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} e^{(-\varepsilon+i)\widetilde{r}^{-\beta}}\widetilde{r}^{-\alpha+\beta-3-2n+1}\chi(\widetilde{r}) \\
&\times\int_{S^{2n-1}}\left(L^{\#}f\right)\left(\widetilde{r}\sin^{\frac{1}{2}}(\theta)\,\omega,\widetilde{r}^{2}\cos(\theta)\right)\widetilde{r}^{2n-1}\sin^{\frac{2n-1}{2}}(\theta)\,d\omega\widetilde{r}^{2}\sin^{-\frac{1}{2}}(\theta)\,d\widetilde{r}d\theta,
\end{aligned}
$$

esto es,

$$
\begin{aligned}
III &= \frac{1}{(-\varepsilon+i)\,\beta}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} e^{(-\varepsilon+i)\left(r^4+t^2\right)^{-\frac{\beta}{4}}}\left(r^4+t^2\right)^{-\frac{1}{4}(\alpha+2n+2-\beta)}\chi\left(\left(r^4+t^2\right)^{\frac{1}{4}}\right) \\
&\times\int_{S^{2n-1}}\left(L^{\#}f\right)(r\omega,t)\,r^{2n-1}(\theta)\,d\omega drdt \\
&= \frac{1}{(-\varepsilon+i)\,\beta}\int_{\mathbb{H}_n} e^{(-\varepsilon+i)\rho(z,t)^{-\beta}}\rho(z,t)^{-(\alpha-\beta+2n+2)}\chi(\rho(z,t))\left(L^{\#}f\right)(z,t)\,dzdt \\
&= \frac{1}{(-\varepsilon+i)\,\beta}\mu^{\varepsilon}_{\alpha-\beta,\beta,\chi}\left(L^{\#}f\right)
\end{aligned}
$$

Entonces hemos probado que

$$
\mu^{\varepsilon}_{\alpha,\beta,\chi}(f)=\frac{-\alpha+\beta}{(-\varepsilon+i)\,\beta}\mu^{\varepsilon}_{\alpha-\beta,\beta,\chi}(f)+\frac{1}{(-\varepsilon+i)\,\beta}\mu^{\varepsilon}_{\alpha-\beta,\beta,\psi}(f)+\frac{1}{(-\varepsilon+i)\,\beta}\mu^{\varepsilon}_{\alpha-\beta,\beta,\chi}\left(L^{\#}f\right)
$$

con $\psi(r)=r\chi'(r)$.

Iterando N veces este procedimiento obtenemos

$$
\mu^{\varepsilon}_{\alpha,\beta,\chi}(f)=\frac{1}{(-\varepsilon+i)^{N}}\sum_{j=1}^{N}\mu^{\varepsilon}_{\alpha-N\beta,\beta,\chi_j}\left(L_{\alpha,\beta,j}f\right)
$$

con cada $\chi_j\in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ independiente de ε y f, donde cada $L_{\alpha,\beta,j}$ es un operador diferencial de orden a lo sumo N y de la forma requerida por el enunciado de la proposición.

■

Corolario 5.3. $(\mu_{(\alpha,\beta)})_0$ *se extiende a un elemento* $\mu_{(\alpha,\beta)} \in S'(\mathbb{H}_n)$ *.*

Prueba. La prueba sigue inmediatamente de la proposición . Tomando $\varepsilon = 0$ y N tal que $\alpha < N\beta$ el miembro derecho de (5.2) da la extensión deseada.

∎

Corolario 5.4. $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \mu^{\varepsilon}_{(\alpha,\beta)} = \mu_{(\alpha,\beta)}$ *con convergencia en* $S'(\mathbb{H}_n)$ *.*

Prueba. Tomando $\varepsilon > 0$ y N tal que $\alpha < N\beta$ en la proposición es inmediato que, para $f \in S(\mathbb{H}_n)$, $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \mu^{\varepsilon}_{(\alpha,\beta)}(f)$ coincide con la extensión $\mu_{(\alpha,\beta)}(f)$ que acabamos de definir.

∎

Si $\mu_{(\alpha,\beta)}$ es una distribución temperada de soporte compacto, entonces se extiende del modo usual a una funcional lineal contínua $\widetilde{\mu_{(\alpha,\beta)}}$ sobre $C^{\infty}(\mathbb{H}_n)$: Se toma $\Psi \in C^{\infty}_c(\mathbb{H}_n)$ tal que $\Psi \equiv 1$ en un entorno del soporte de μ y para $\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{H}_n)$ se define $\widetilde{\mu_{(\alpha,\beta)}}(\varphi) := \mu_{(\alpha,\beta)}(\Psi\varphi)$.

De aquí en más seguiremos llamando μ a esta extensión $\widetilde{\mu_{(\alpha,\beta)}}$, dejando además implícito que depende de α y β. Como $sop(\mu^{\epsilon}) \subset sop(\mu)$ podemos extender también μ^{ϵ} a una funcional lineal contínua sobre $C^{\infty}(\mathbb{H}_n)$ usando la misma Ψ anterior y utilizando el Corolario 5.4 es inmediato verificar que $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \mu^{\epsilon} = \mu$ con convergencia en $(C^{\infty}(\mathbb{H}_n))'$. Por lo tanto

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} (\varphi * \mu^{\epsilon})(z,t) = (\varphi * \mu)(z,t) \tag{5.6}$$

para $\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{H}_n)$ y $(z,t) \in \mathbb{H}_n$.

Para $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definimos asimismo

$$\widehat{\mu}(\lambda,k) := \mu(\mathbf{E}_{\lambda,k}) \tag{5.7}$$

con $\mathbf{E}_{\lambda,k}(z,t)$ como en la Observación 2.21 ($\widehat{\mu}(\lambda,k)$ esta bien definida pues $\mathbf{E}_{\lambda,k} \in C^{\infty}(\mathbb{H}_n)$).

Recordemos también que

$$\mathbf{E}_{\lambda,k}(z,t)=\frac{k!\,(n-1!)}{(k+n-1!)}L_k^{n-1}\left(\frac{|\lambda|\,|z|^2}{2}\right)e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{4}}e^{i\lambda t},\qquad (z,t)\in\mathbb{H}_n.$$

Nuestro primer paso hacia la prueba del Teorema 5.1 será descomponer diádicamente la distribución μ. Diremos que una distribución $\sigma\in S(\mathbb{H}_n)$ es radial si $\sigma(f)=\sigma(g\cdot f)$ para $f\in S(\mathbb{H}_n)$, $g\in U(n)$ donde $g\cdot f$ esta definida por $(g\cdot f)(z,t)=f(gz,t)$.

Necesitaremos los siguientes lemas.

Lema 5.5. *Sea $\eta\in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ una función no negativa con $sop(\eta)\subset(1,8)$ tal que $\sum_{j\in\mathbb{Z}}\eta(2^j s)=1$ para $s\neq 0$, y para $j\in\mathbb{Z}$ sea $\theta_j\in C_c^{\infty}(\mathbb{H}_n)$ definida por $\theta_j(z,t)=\eta(2^j\rho(z,t))$. Si $\sigma\in S'(\mathbb{H}_n)$ es una distribución radial con*

$$sop(\sigma)\subset\{(z,t)\in\mathbb{H}_n:\rho(z,t)<1\}$$

entonces $\sigma=\sum_{j\geq 0}\theta_j\sigma$ con convergencia de la serie en $S'(\mathbb{H}_n)$.

Prueba. Como $S'(\mathbb{H}_n)=S'(\mathbb{R}^{2n+1})$ podemos considerar las distribuciones σ y $\theta_j\sigma$ como elementos de $S'(\mathbb{R}^{2n+1})$ y basta probar que $\sigma=\sum_{j\geq 0}\theta_j\sigma$ con convergencia de la serie en $S'(\mathbb{R}^{2n+1})$. Tenemos que $\sum_{j\in\mathbb{Z}}\theta_j=1$ en $S'(\mathbb{R}^{2n+1})$ (con convergencia de la serie en $S'(\mathbb{R}^{2n+1})$) entonces $\sum_{j\in\mathbb{Z}}\widehat{\theta}_j=\delta$ con convergencia en $S'(\mathbb{R}^{2n+1})$ donde "$\widehat{\ }$" denota aquí (y a lo largo de la prueba del lema) la transformada de Fourier euclídea en $\mathbb{R}^{2n+1}$. Luego para $f\in S(\mathbb{R}^{2n+1})$,

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}f*\widehat{\sigma}*\widehat{\theta}_j=f*\widehat{\sigma}$$

con convergencia puntual (donde aquí y en el resto de la prueba " $*$ "denotará el producto de convolución euclídeo en $\mathbb{R}^{2n+1}$). Además

$$\begin{aligned}\sum_{j\geq 0}\left\|f*\widehat{\sigma}*\widehat{\theta}_j\right\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n+1})} &\leq \sum_{j\geq 0}\|f*\widehat{\sigma}\|_{L^1(\mathbb{R}^{2n+1})}\left\|\widehat{\theta}_j\right\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n+1})}\\ &= \sum_{j\geq 0}\|f*\widehat{\sigma}\|_{L^1(\mathbb{R}^{2n+1})}\|\theta_j\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n+1})}\\ &= \sum_{j\geq 0}2^{-j/2}\|\theta\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n+1})}\|f*\widehat{\sigma}\|_{L^1(\mathbb{R}^{2n+1})}<\infty\end{aligned}$$

donde $\theta(z,t) := \eta(\rho(z,t))$. Y como $sop(\sigma) \subset \{(z,t) \in \mathbb{H}_n : \rho(z,t) < 1\}$ tenemos también $\widehat{\sigma} * \widehat{\theta_j} = \widehat{\theta_j \sigma} = 0$ si $j < 0$. luego $\sum_{j \in \mathbb{Z}} f * \widehat{\sigma} * \widehat{\theta_j} = f * \widehat{\sigma}$ con convergencia en $L^2\left(\mathbb{R}^{2n+1}\right)$. Por lo tanto $\sum_{j \in \mathbb{Z}} f * \widehat{\sigma} * \widehat{\theta_j} = f * \widehat{\sigma}$ con convergencia en $S'\left(\mathbb{R}^{2n+1}\right)$. Esto implica $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\widehat{f}\right)^{\vee} \theta_j \sigma = \left(\widehat{f}\right)^{\vee} \sigma$ con convergencia en $S'\left(\mathbb{R}^{2n+1}\right)$ (donde para una función g, hemos puesto $g^{\vee}(z,t) := g(-z.-t)$). Tomando f tal que $\left(\widehat{f}\right)^{\vee} = 1$ en un entorno del soporte de σ concluímos que $\sum_{j \geq 0} \theta_j \mu = \mu$ con convergencia en $S'\left(\mathbb{R}^{2n+1}\right)$.

■

Lema 5.6. *Si $\sigma \in S'(\mathbb{H}_n)$ es una distribución radial con soporte compacto entonces para $\lambda \neq 0$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,*

$$\sigma * \mathbf{e}_{\lambda,k} = \widehat{\sigma}(\lambda,k)\, \mathbf{e}_{\lambda,k}$$

Prueba. Para $(z,t) \in \mathbb{H}_n$,

$$\begin{aligned}
(\sigma * e_{\lambda,k})(z,t) &= \int_{U(n)} (\sigma * e_{\lambda,k})(gz,t)\, dg \\
&= \int_{U(n)} \sigma\left((w,s) \to e_{\lambda,k}\left((w,s)^{-1}(gz,t)\right)\right) dg \\
&= \sigma\left((w,s) \to \int_{U(n)} e_{\lambda,k}\left((w,s)^{-1}(gz,t)\right) dg\right) \\
&= e_{\lambda,k}(\mathbf{0},0)\, \sigma\left((w,s) \to \int_{U(n)} E_{\lambda,k}\left((w,s)^{-1}(gz,t)\right) dg\right) \\
&= e_{\lambda,k}(\mathbf{0},0)\, \sigma\left((w,s) \to E_{\lambda,k}\left((w,s)^{-1}\right) E_{\lambda,k}(z,t)\right) \\
&= e_{\lambda,k}(z,t)\, \sigma\left((w,s) \to E_{\lambda,k}\left((w,s)^{-1}\right)\right) \\
&= \widehat{\sigma}(\lambda,k)\, e_{\lambda,k}(z,t),
\end{aligned}$$

la primera igualdad es por ser $\sigma * e_{\lambda,k}$ radial (combolución de núcleos radiales), la tercera porque las sumas de Riemann de la integral $\int_{U(n)} e_{\lambda,k}\left((gw,s)^{-1}(z,t)\right) dg$ convergen (como funciones de (z,t)) en $S(\mathbb{H}_n)$ a la susodicha integral. La cuarta porque $e_{\lambda,k} = e_{\lambda,k}(\mathbf{0},0)\, E_{\lambda,k}$ y la quinta porque, por ser $E_{\lambda,k}$ una función esférica, $\int_{U(n)} E_{\lambda,k}\left((w,s)^{-1}(gz,t)\right) dg = E_{\lambda,k}\left((w,s)^{-1}\right) E_{\lambda,k}(z,t)$.

■

Lema 5.7. *Sea* $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ *y sea* $\sigma \in S'(\mathbb{H}_n)$ *radial y con soporte compacto. Entonces existe una única función radial* $\sigma_\psi \in S(\mathbb{H}_n)$ *tal que para* $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ *y* $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$

$$\widehat{\sigma_\psi}(\lambda,k) = \widehat{\sigma}(\lambda,k)\,\psi(|\lambda|(2k+n)).$$

Más aún, σ_ψ *está dada por*

$$\sigma_\psi(z,t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}(\sigma * \mathbf{e}_{\lambda,k})(z,t)\,\psi(|\lambda|(2k+n))\,|\lambda|^n\,d\lambda \tag{5.8}$$

con convergencia puntual de la serie. Si además

$\sup\{|\widehat{\sigma}(\lambda,k)| : \lambda \neq 0, k \in \mathbb{N}\cup\{0\}\} < \infty$ *entonces la serie converge a* σ_ψ *también en* $S'(\mathbb{H}_n)$.

Prueba. Existe una función $G^\# \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que $\widehat{\sigma}(\lambda,k) = G^\#(\lambda,|\lambda|(2k+n))$ (cf. Proposition 5.2 en [**AsDiRi14**]). Para $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ sea $G(x,y) := G^\#(x,y)\,\psi(y)$. Sea $R>0$ tal que $sop(\psi)\subset(-R,R)$ y sea $Q\subset\mathbb{R}^2$ el rectángulo

$Q := \left(-\frac{2R}{n},\frac{2R}{n}\right)\times(-2R.2R)$. Sea $H \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que $H=1$ en Q. Entonces $G = GH$ sobre el Heisenberg fan $A_{\mathbb{H}_n}$. Ahora bien, $GH \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)\subset S(\mathbb{R}^2)$ y entonces, por el Teorema 2.30, existe una función radial $\sigma_\psi \in S(\mathbb{H}_n)$ tal que

$\widehat{\sigma_\psi}(\lambda,k) = (GH)(\lambda,|\lambda|(2k+n))$, i.e,

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma_\psi}(\lambda,k) &= G(\lambda,|\lambda|(2k+n))\\ &= G^\#(\lambda,|\lambda|(2k+n))\,\psi(|\lambda|(2k+n))\\ &= \widehat{\sigma}(\lambda,k)\,\psi(|\lambda|(2k+n))\end{aligned}$$

y la fórmula de inversión para funciones radiales dada en la observación 2.34 nos da (5.8) con convergencia puntual de la serie. Supongamos ahora que en adición $M := \sup\{|\widehat{\sigma}(\lambda,k)| : \lambda\neq 0, k\in\mathbb{N}\cup\{0\}\} < \infty$ y sea $\varphi \in S(\mathbb{H}_n)$.

Como $|\mathbf{e}_{\lambda,k}(z,t)| \leq |\mathbf{e}_{\lambda,k}(\mathbf{0},0)| = \binom{k+n-1}{k}$ y, por el Lema 5.6,

$\sigma * \mathbf{e}_{\lambda,k} = \widehat{\sigma}(\lambda,k)\,\mathbf{e}_{\lambda,k}$, entonces tenemos

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{H}_n}\int_{\mathbb{R}} \left|\left(\sigma * \mathbf{e}_{\lambda,k}\right)(z,t)\,\psi\left(|\lambda|\,(2k+n)\right)|\lambda|^n\,\varphi(z,t)\right| d\lambda dz dt \\
= & \int_{\mathbb{H}_n}\int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{\sigma}(\lambda,k)\,\mathbf{e}_{\lambda,k}(z,t)\right| \left|\psi\left(|\lambda|\,(2k+n)\right)\right| \left|\varphi(z,t)\right| |\lambda|^n\, dz dt d\lambda \\
\leq & \; M\binom{k+n-1}{k}\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{H}_n)} \int_{\mathbb{R}} \left|\psi\left(|\lambda|\,(2k+n)\right)\right| |\lambda|^n\, d\lambda \\
\leq & \; cMk^{n-1}\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{H}_n)} \int_{\mathbb{R}} \left|\psi\left(|\lambda|\,(2k+n)\right)\right| |\lambda|^n\, d\lambda.
\end{aligned}$$

Un cambio de variable nos da que $\int_{\mathbb{R}} \left|\psi\left(|\lambda|\,(2k+n)\right)\right| |\lambda|^n\, d\lambda \leq \frac{1}{k^{n+1}}\int_{\mathbb{R}} \left|\psi(|s|)\right| |s|^n\, ds$ y entonces

$$\sum_{k\geq 0}\int_{\mathbb{H}_n}\int_{\mathbb{R}} \left|\left(\sigma * \mathbf{e}_{\lambda,k}\right)(z,t)\,\psi\left(|\lambda|\,(2k+n)\right)|\lambda|^n\,\varphi(z,t)\right| d\lambda dz dt \leq c\,\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{H}_n)} \qquad (5.9)$$

lo que nos da que la serie converge en $S'(\mathbb{H}_n)$. Nos queda ver que la serie converge en el sentido de $S'(\mathbb{H}_n)$ a σ_ψ. Para ver esto observamos que, para $(z,t)\in\mathbb{H}_n$

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}\int_{\mathbb{R}} \left(\sigma * \mathbf{e}_{\lambda,k}\right)(z,t)\,\psi\left(|\lambda|\,(2k+n)\right)|\lambda|^n\,\varphi(z,t)\, d\lambda = \sigma_\psi(z,t)\,\varphi(z,t),$$

y también, para cada $N\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
& \left|\sum_{k=0}^{N}\int_{\mathbb{R}} \left(\sigma * \mathbf{e}_{\lambda,k}\right)(z,t)\,\psi\left(|\lambda|\,(2k+n)\right)|\lambda|^n\,\varphi(z,t)\, d\lambda\right| \\
\leq & \sum_{k=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}} \left|\left(\sigma * \mathbf{e}_{\lambda,k}\right)(z,t)\,\psi\left(|\lambda|\,(2k+n)\right)|\lambda|^n\,\varphi(z,t)\right| d\lambda \in L^1\left(\mathbb{H}_n, dzdt\right)
\end{aligned}$$

(la pertenencia a $L^1(\mathbb{H}_n)$ por (5.9)). Entonces el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue nos da que

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{H}_n} \sigma_\psi(z,t)\,\varphi(z,t)\, dz dt \\
= & \sum_{k\geq 0}\int_{\mathbb{H}_n}\int_{\mathbb{R}} \left(\sigma * \mathbf{e}_{\lambda,k}\right)(z,t)\,\psi\left(|\lambda|\,(2k+n)\right)|\lambda|^n\,\varphi(z,t)\, d\lambda dz dt
\end{aligned}$$

esto es, $\sigma_\psi = \sum_{k\geq 0}\int_{\mathbb{R}} \left(\sigma * \mathbf{e}_{\lambda,k}\right)(z,t)\,\psi\left(|\lambda|\,(2k+n)\right)|\lambda|^n\, d\lambda$ con igualdad en $S'(\mathbb{H}_n)$.

■

Sea $\phi_0 \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ una función par, con soporte contenido en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y tal que $0 \leq \phi \leq 1$ y $\phi_0 = 1$ en $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$. Definimos, para $\zeta \in \mathbb{R}$,

$$\phi(\xi) = \phi_0(\xi) - \phi_0\left(2^2\xi\right).$$

Entonces

$$\phi_0(\xi) + \sum_{j=1}^{\infty} \phi\left(2^{-2j}\xi\right) = 1, \qquad \xi \in \mathbb{R}. \tag{5.10}$$

Notemos que para $j \geq 1$,

$$sop\left(\xi \to \phi\left(2^{-2j}\xi\right)\right) \subset \left\{\xi : 2^{2j-4} < |\xi| < 2^{2j-1}\right\} \tag{5.11}$$

pues si $2^{-2j}|\xi| \geq \frac{1}{2}$ entonces $\phi_0\left(2^{-2j}\xi\right) = 0$ y $\phi_0\left(2^2 2^{-2j}\xi\right) = 0$, y si $2^{-2j}|\xi| \leq \frac{1}{2^4}$ entonces $\phi_0\left(2^2 2^{-2j}\xi\right) = \phi_0\left(2^{-2j}\xi\right) = 1$.

Como bien se indica en [**Ly07**], se tiene que

$$\sup\left\{\left|\widehat{\mu}(\lambda, k)\right| : \lambda \neq 0, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\} < \infty. \tag{5.12}$$

Para $r > 0$ y $\varepsilon > 0$, μ_r es una distribución radial en $S'(\mathbb{H}_n)$ con soporte compacto. Además $\widehat{\mu_r}(\lambda, k) = \mu_r(E_{\lambda,k}) = \binom{k+n-1}{n-1}^{-1} \mu_r(e_{\lambda,k})$. Entonces el Lema 5.7, aplicado con $\sigma = \mu_r$ y con $\psi = \psi(s) = \phi\left(2^{-2j}r^2 s\right)$, nos da una función radial $\mu^{r,j} \in S(\mathbb{H}_n)$ tal que

$$\widehat{\mu^{r,j}}(\lambda, k) = \widehat{\mu_r}(\lambda, k)\, \phi\left(2^{-2j}r^2 |\lambda| (2k+n)\right) \tag{5.13}$$

con

$$\mu^{r,j}(z,t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(\mu_r * \mathbf{e}_{\lambda,m}\right)(z,t)\, \phi\left(2^{-2j}r^2 |\lambda| (2m+n)\right) |\lambda|^n \, d\lambda, \tag{5.14}$$

siendo que esta última serie converge en sentido puntual y también en $S'(\mathbb{H}_n)$ para $j \in \mathbb{Z}$.

El mismo Lema 5.7 aplicado con $\sigma = \mu_r$ y con $\psi(s) = \phi_0\left(r^2 s\right)$ nos da una función también radial $\mu^{r,0} \in S(\mathbb{H}_n)$ satisfaciendo

$$\widehat{\mu^{r,0}}(\lambda, k) = \widehat{\mu_r}(\lambda, k)\, \phi_0\left(r^2 |\lambda| (2k+n)\right) \tag{5.15}$$

dada por

$$\mu^{r,0}(z,t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} (\mu_r * \mathbf{e}_{\lambda,m})(z,t)\, \phi_0\left(r^2 |\lambda| (2m+n)\right) |\lambda|^n \, d\lambda. \tag{5.16}$$

con convergencia de la serie en sentido puntual y en $S'(\mathbb{H}_n)$.

Similarmente, el Lema 5.7 aplicado con $\sigma = \delta$ (la delta de Dirac) y con las funciones ψ dadas por $\psi(s) = \phi\left(2^{-2j} r^2 s\right)$ y $\psi(s) = \phi_0\left(r^2 s\right)$ respectivamente, nos da funciones radiales $F^{[j]}$ y $F^{[0]}$ en $S(\mathbb{H}_n)$ respectivamente tales que

$$F^{[j]}(z,t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{e}_{\lambda,m}(z,t)\, \phi\left(2^{-2j} |\lambda| (2m+n)\right) |\lambda|^n \, d\lambda, \tag{5.17}$$

$$F^{[0]}(z,t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{e}_{\lambda,m}(z,t)\, \phi_0\left(|\lambda| (2m+n)\right) |\lambda|^n \, d\lambda. \tag{5.18}$$

donde las series convergen en sentido puntual y en $S'(\mathbb{H}_n)$ y estas funciones satisfacen

$$\begin{aligned} \widehat{F^{[j]}}(\lambda,k) &= \phi\left(2^{-2j} |\lambda| (2m+n)\right), \\ \widehat{F^{[0]}}(\lambda,k) &= \phi_0\left(|\lambda| (2m+n)\right). \end{aligned}$$

Lema 5.8.

(i) $F^{[j]} = \left(F^{[0]}\right)_{2^j}$ *.y* $\left\|F^{[j]}\right\|_1 = \left\|F^{[0]}\right\|_1$

(ii) $f * \mu^{r,j} = f * (\mu * F^{[j]})_r$ *para* $f \in S(\mathbb{H}_n)$, $r > 0$ *y* $j \in \mathbb{N}$.

(iii) $f * \mu^{r,0} = f * (\mu * F)_r$ *para* $f \in S(\mathbb{H}_n)$ *y* $r > 0$

Prueba. Para probar (i) observamos que un cambio de variable nos da

$$
\begin{aligned}
F^{[j]}(z,t) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi\left(2^{-2j}|\lambda|(2m+n)\right) \mathbf{e}_{\lambda,m}(z,t)\,|\lambda|^n\,d\lambda \\
&= 2^{2j(n+1)} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi\left(|\lambda|(2m+n)\right) \mathbf{e}_{2^{2j}\lambda,m}(z,t)\,|\lambda|^n\,d\lambda \\
&= 2^{2j(n+1)} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi(|\lambda|(2m+n)) \mathbf{e}_{\lambda,m}\left(2^j z, 2^{2j}t\right)|\lambda|^n\,d\lambda \\
&= 2^{2j(n+1)} F^{[0]}\left(2^j\cdot(z,t)\right) = \left(F^{[0]}\right)_{2^j}.
\end{aligned}
$$

donde $2^j\cdot(z,t) = \left(2^j z, 2^{2j}t\right)$. Luego $F^{[j]}(z,t) = \left(F^{[0]}\right)_{2^{-j}}$ y de esta igualdad tenemos inmediatamente que $\left\|F^{[j]}\right\|_1 = \left\|F^{[0]}\right\|_1$.

Para ver (ii) notemos que $\mu * F^{[j]} \in S(\mathbb{H}_n)$ pues μ es una distribución en $S'(\mathbb{H}_n)$ con soporte compacto y $F^{[j]} \in S(\mathbb{H}_n)$. Luego $f * \left(\mu * F^{[j]}\right)_r \in S(\mathbb{H}_n)$ y entonces, por la fórmula de inversión, y teniendo en cuenta que, por (i), $F^{[j]} = \left(F^{[0]}\right)_{2^{-j}}$ tenemos

$$
\begin{aligned}
&f * \left(\mu * F^{[j]}\right)_r (z,t) \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(f * \left(\mu * F^{[j]}\right)_r * \mathbf{e}_{\lambda,k}\right)(z,t)\,|\lambda|^n\,d\lambda \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(f * \mu_r * (F^{[j]})_r * \mathbf{e}_{\lambda,k}\right)(z,t)|\lambda|^n d\lambda \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(f * \mu_r * \left(F^{[0]}\right)_{r2^{-j}} * \mathbf{e}_{\lambda,k}\right)(z,t)|\lambda|^n d\lambda \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(\left(f * \mu_r * \mathbf{e}_{\lambda,k}\right)(z,t)\,\phi\left(2^{-2j}r^2|\lambda|(2k+n)\right)\right)|\lambda|^n\,d\lambda,
\end{aligned}
$$

la última igualdad pues, por ser $\left(F^{[0]}\right)_{r2^{-j}}$ radial,

$$
\left(F^{[0]}\right)_{r2^{-j}} * \mathbf{e}_{\lambda,k} = \left(\left(F^{[0]}\right)_{r2^{-j}}\right)^{\frown}(\lambda,k)\,\mathbf{e}_{\lambda,k}.
$$

Ahora, $\mu_r * \mathbf{e}_{\lambda,k} = \widehat{\mu_r}\,(\lambda,k)\,\mathbf{e}_{\lambda,k} = \widehat{\mu}\left(r^2\lambda,k\right)\mathbf{e}_{\lambda,k}$. Entonces

$$\begin{aligned} & f*\left(\mu*F^{[j]}\right)_r \\ = & \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}\widehat{\mu}\left(r^2\lambda,k\right)\left(f*\mathbf{e}_{\lambda,k}\right)\phi\left(2^{-2j}r^2\left|\lambda\right|\left(2k+n\right)\right)\left|\lambda\right|^n d\lambda \\ = & f*\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}\widehat{\mu}\left(r^2\lambda,k\right)\phi\left(2^{-2j}r^2\left|\lambda\right|\left(2k+n\right)\right)\mathbf{e}_{\lambda,k}\left|\lambda\right|^n d\lambda \\ = & f*\mu^{r,j}. \end{aligned}$$

La prueba de (iii) es similar: La fórmula de inversión nos da que

$$\begin{aligned} & f*\left(\mu*F^{[0]}\right)_r(z,t) \\ & =\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}\left(f*\left(\mu*F^{[0]}\right)_r*\mathbf{e}_{\lambda,k}\right)(z,t)\left|\lambda\right|^n d\lambda \\ & =\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}\left(f*\mu_r*F_r^{[0]}*\mathbf{e}_{\lambda,k}\right)(z,t)|\lambda|^n d\lambda \\ & =\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}\left(\left(f*\mu_r*\mathbf{e}_{\lambda,k}\right)(z,t)\,\phi_0\left(r^2\left|\lambda\right|\left(2k+n\right)\right)\left|\lambda\right|^n d\lambda, \end{aligned}$$

la última igualdad pues

$$F_r^{[0]}*\mathbf{e}_{\lambda,k} = \widehat{F_r^{[0]}}\,(\lambda,k)\,\mathbf{e}_{\lambda,k}.$$

y como antes, $\mu_r * \mathbf{e}_{\lambda,k} = \widehat{\mu_r}\,(\lambda,k)\,\mathbf{e}_{\lambda,k} = \widehat{\mu}\left(r^2\lambda,k\right)\mathbf{e}_{\lambda,k}$. Entonces

$$\begin{aligned} & f*\left(\mu*F^{[0]}\right)_r \\ = & \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}\widehat{\mu}\left(r^2\lambda,k\right)\left(f*\mathbf{e}_{\lambda,k}\right)\phi_0\left(r^2\left|\lambda\right|\left(2k+n\right)\right)\left|\lambda\right|^n d\lambda \\ = & f*\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}\widehat{\mu}\left(r^2\lambda,k\right)\phi_0\left(r^2\left|\lambda\right|\left(2k+n\right)\right)\mathbf{e}_{\lambda,k}\left|\lambda\right|^n d\lambda \\ = & f*\mu^{r,0}. \end{aligned}$$

■

Ahora, por la observación 9.3, tenemos que

$$f*\mu_r = f*\mu_r*F^{[0]} + \sum_j f*\mu_r*F^{[j]} = f*\mu^{r,0} + \sum_j f*\mu^{r,j}$$

en $L^2(\mathbb{H}_n)$ para $f \in S(\mathbb{H}_n)$. Luego existe una subserie de $f * \mu^{r,0} + \sum_j f * \mu^{r,j}$ que converge puntualmente a f, por lo que

$$\left\| \sup_{r>0} |f * \mu_r| \right\|_2 \leq \left\| \sup_{r>0} \left| f * \mu^{r,0} \right| \right\|_2 + \sum_{j=1}^{\infty} \left\| \sup_{r>0} \left| f * \mu^{r,j} \right| \right\|_2 .$$

Luego nuestro siguiente paso será estudiar la acotación en $L^2(\mathbb{H}_n)$ de los siguientes operadores

$$\begin{aligned} M^0 f(x,t) &:= \sup_{r>0} \left| f * \mu^{r,0} \right| (z,t), \\ M^j f(z,t) &:= \sup_{r>0} \left| f * \mu^{r,j} \right| (z,t), \qquad j \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Para ello necesitaremos algunos lemas.

Lema 5.9. *Sea M_3 definido por la fórmula (3.2) y sea $h \in L^1(\mathbb{R})$ una función contínua, con $h = h(t)$ par en t, y decreciente en $|t|$.*

Para $r > 0$ sea $h_r(t) = r^{-1} h\left(r^{-1} t\right)$. Entonces existe una constante c tal que para $f \in S(\mathbb{H}_n)$ y $r > 0$

$$\int_{\mathbb{R}} |f(z,t-s)\, h_r(s)|\, ds \leq \|h\|_{L^1(\mathbb{R})} (M_3 f)(z,t). \tag{5.19}$$

Prueba. Consideremos primero el caso cuando h tiene soporte compacto. Notemos que

$$h(s) = h(|s|) = -\int_{|s|}^{\infty} d(h(\rho)) = -\int_0^{\infty} \chi_{(-\rho,\rho)}(s)\, d(h(\rho))$$

donde $\int_{|t|}^{\infty} \chi_{(-\rho,\rho)}(s)\, d(h(\rho))$ denota la integral de Riemann Stieltjes. Entonces

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} |f(z,t-s)\, h_r(s)|\, ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(z,t-s)| \frac{1}{r} h\left(\frac{s}{r}\right) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(z,t-rs)|\, h(s)\, ds \\ &= -\int_{\mathbb{R}} |f(z,t-rs)| \int_0^{\infty} \chi_{(-\rho,\rho)}(s)\, d(h(\rho))\, ds \\ &= -\int_0^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} |f((z,t)(\mathbf{0},-rs))|\, \chi_{(-\rho,\rho)}(s)\, ds \right) d(h(\rho)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_0^\infty \left(\int_{-\rho}^{\rho} |f((z,t)(\mathbf{0},-rs))|\,ds\right) d(h(\rho)) \\
&= \int_0^\infty \left(\rho\int_{-1}^{1} |f((z,t)(\mathbf{0},-r\rho s))|\,ds\right) d(-h(\rho)) \\
&\leq \int_0^\infty (M_3 f)(z,t)\,\rho d(-h(\rho)) \\
&= (M_3 f)(z,t)\left([-\rho h(\rho)]_0^\infty + \int_0^\infty h(\rho d\rho)\right) = \|h\|_1 (M_3 f)(z,t)
\end{aligned}
$$

entonces el lema vale si $sop\,(h)$ es compacto. El caso general sigue de éste tomando una sucesión creciente $\{h_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de funciones integrables, pares, contínuas con soporte compacto tal que $\lim_{j\to\infty} h_j = h$.

$\blacksquare$

Lema 5.10. *Sea $g \in L^1(\mathbb{H}_n)$ con $g = g(z,t)$ no negativa y contínua, radial en z, par en t, y decreciente tanto en $|z|$ como en $|t|$ y sean M_3 y M_{sing} los operadores maximales definidos por las fórmulas (3.2) y (3.3) respectivamente. Entonces existe una constante c_n dependiendo sólo de n tal que para f en $S(\mathbb{H}_n)$*

$$
\sup_{r>0} (|f| * g_r) \leq c_n \|g\|_{L^1(\mathbb{H}_n)} (M_3 \circ M_{sing}) f
$$

Prueba. Consideremos primero el caso en que g tiene soporte compacto. Sea $R > 0$ tal que $sop\,(g) \subset \{(z,t) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R} : |(z,t)| < R\}$. Tenemos

$$
\begin{aligned}
&(|f| * g_r)(z,t) \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{C}^n} \left| f\left(z-w, t-s+\frac{1}{2} imB(z,w)\right)\right| g_r(w,s)dwds \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{C}^n} \left| f\left(z+w, t+s-\frac{1}{2} imB(z,w)\right)\right| g_r(-w,-s)dwds
\end{aligned}
$$

y pasando a coordenadas polares en la integral respecto a w,

$$
\begin{aligned}
&(|f| * g_r)(z,t) \qquad (5.20)\\
=\ & \int_{\mathbb{R}}\int_{S^{2n-1}}\int_0^\infty \left| f\left(z+\rho\omega, t+s-\frac{\rho}{2} imB(z,\omega)\right)\right| g_r(-\rho\omega,-s)\rho^{2n-1}d\rho d\omega ds \\
=\ & \int_{\mathbb{R}}\int_{S^{2n-1}}\int_0^\infty \left| f\left(z+\rho\omega, t+s-\frac{\rho}{2} imB(z,\omega)\right)\right| g_r(-\rho\omega,-s)\rho^{2n-1}d\rho d\omega ds
\end{aligned}
$$

donde $d\omega$ denota el elemento de área usual sobre S^{2n-1}. Sean, para $\rho > 0$, $s \in \mathbb{R}$ y $(z,t) \in \mathbb{H}_n$,

$$\begin{aligned}
F_{z,t}(\rho,s) &:= \int_{S^{2n-1}} \left| f\left(z+\rho\omega, t+s-\frac{\rho}{2} imB(z,\omega)\right)\right| d\omega, \\
G_{z,t}(\rho,s) &:= \int_0^\rho F_{z,t}(\widetilde{\rho},s)\widetilde{\rho}^{2n-1} d\widetilde{\rho}, \\
\gamma^{r,s}(\rho) &:= g_r(\rho e_1, -s)
\end{aligned}$$

donde e_1 es el primer vector de la base canónica de $\mathbb{C}^n$, i.e., $e_1 = (1,0,...,0)$. Notemos que $\gamma^{r,s}$ es contínua y monótona decreciente en ρ. Como g es radial, (5.20) nos da

$$\begin{aligned}
(|f| * g_r)(z,t) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^\infty F_{z,t}(\rho,s)\, g_r(\rho e_1, -s)\rho^{2n-1} d\rho \right) ds \qquad (5.21)\\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^\infty \gamma^{r,s}(\rho) \frac{d}{d\rho}(G_{z,t}(\rho,s))\, d\rho \right) ds
\end{aligned}$$

e integrando por partes

$$(|f| * g_r)(z,t) = \int_{\mathbb{R}} \left([G_{z,t}(\rho,s)\,\gamma^{r,s}(\rho)]_0^\infty + \int_0^\infty G_{z,t}(\rho,s)\, d(-\gamma^{r,s})(\rho) \right) ds,$$

donde $\int_0^\infty G_{z,t}(\rho,s)\, d(\gamma^{r,s}(\rho))$ denota la integral de Riemann Stieltjes y donde

$$[G_{z,t}(\rho,s)\,\gamma^{r,s}(\rho)]_0^\infty := \lim_{\rho\to\infty} G_{z,t}(\rho,s)\,\gamma^{r,s}(\rho) - G_{z,t}(0,s)\,\gamma^{r,s}(0) = 0$$

(la última igualdad porque $\gamma^{r,s}$ tiene soporte compacto y $G_{z,t}(0,s) = 0$). Luego

$$(|f| * g_r)(z,t) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^\infty G_{z,t}(\rho,s)\, d(-\gamma^{r,s})(\rho) \right) ds$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
G_{z,t}(\rho,s) &= \int_0^\rho F_{z,t}(\widetilde{\rho},s)\widetilde{\rho}^{2n-1} d\widetilde{\rho} \\
&= \int_0^\rho \left(\int_{S^{2n-1}} \left| f\left(z+\widetilde{\rho}\omega, t+s-\frac{\widetilde{\rho}}{2} imB(z,\omega)\right)\right| d\omega \right) \widetilde{\rho}^{2n-1} d\widetilde{\rho} \\
&= \int_{w\in\mathbb{C}^n : |w|<\rho} |f\left(z+w, t+s-\frac{1}{2} imB(z,w)\right)| dw \\
&= \int_{w\in\mathbb{C}^n : |w|<\rho} |f((z,t+s)(-w,0)^{-1})| dw \\
&= \rho^{2n} \int_{w\in\mathbb{C}^n : |w|<1} |f((z,t+s)(-\rho w,0)^{-1})| dw \\
&\le \rho^{2n} M_{sing} f(z,s+t))
\end{aligned}$$

con M_{sing} definido por (3.3). Entonces, como $-\gamma^{r,s}(\rho)$ es monótona creciente en ρ,

$$\begin{aligned}(|f| * g_r)(z,t) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^\infty G_{z,t}(\rho,s)\, d\left(-\gamma^{r,s}\right)(\rho) \right) ds \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} M_{sing} f(z, s+t) \left(\int_0^\infty \rho^{2n} d\left(-\gamma^{r,s}\right)(\rho) \right) ds\end{aligned}$$

pero g es radial y con soporte compacto, entonces, integrando por partes,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \rho^{2n} d\left(-\gamma^{r,s}\right)(\rho) &= \left[-\rho^{2n}\gamma^{r,s}(\rho)\right]_0^\infty + 2n \int_0^\infty \rho^{2n-1}\gamma^{r,s}(\rho)\, d\rho \\ &= \left[-\rho^{2n} g_r(\rho e_1, -s)\right]_0^\infty + 2n \int_0^\infty \rho^{2n-1} g_r(\rho e_1, -s) d\rho \\ &= 2n \int_0^\infty \rho^{2n-1} g_r(\rho e_1, -s) d\rho \\ &= \frac{2n}{|S^{2n-1}|} \int_0^\infty \int_{S^{2n-1}} g_r(\rho\omega, -s)\rho^{2n-1} d\omega d\rho \\ &= \frac{2n}{|S^{2n-1}|} \left\| g_r(., -s) \right\|_{L^1(\mathbb{C}^n)}\end{aligned}$$

luego

$$(|f| * g_r)(z,t) \leq c \int_{\mathbb{R}} M_{sing} f(z, s+t) \left\| g_r(., -s) \right\|_{L^1(\mathbb{C}^n)} ds.$$

Ahora bien, $s \to \|g_r(., -s)\|_{L^1(\mathbb{C}^n)}$ es par, contínua y, para $s > 0$, decreciente en s. Entonces

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}} M_{sing} f(z, s+t) \left\| g_r(., -s) \right\|_{L^1(\mathbb{C}^n)} ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} M_{sing} f(z, t-s) \left\| g_r(., s) \right\|_{L^1(\mathbb{C}^n)} ds \\ &= \left(M_{sing} f(z, .) *_{\mathbb{R}} \left\| g_r(., .) \right\|_{L^1(\mathbb{C}^n)} \right)(t) \\ &\leq \left\| \left\| g_r(., s) \right\|_{L^1(\mathbb{C}^n)} \right\|_{L^1(\mathbb{R}, ds)} M_3 (M_{sing} f)(z,t) = \|g\|_{L^1(\mathbb{H}_n)} (M_3 \circ M_{sing}) f(z,t),\end{aligned}$$

donde $*_{\mathbb{R}}$ denota el producto de convolución en $\mathbb{R}$ y donde en la última desigualdad hemos utilizado el Lema 5.9. Entonces, para $r > 0$,

$$(|f| * g_r)(z,t) \leq c \|g\|_{L^1(\mathbb{H}_n)} (M_3 \circ M_{sing}) f(z,t)$$

y por lo tanto $\sup_{r>0} ((|f| * g_r)(z,t)) \leq c \|g\|_{L^1(\mathbb{H}_n)} (M_3 \circ M_{sing}) f(z,t)$ con la constante c dependiendo solo de n. Entonces el lema vale para g de soporte compacto.

Si g no tiene soprte compacto tomamos una sucesión $\{g_j\}$ creciente de funciones no negativas y contínuas, radiales en z, pares en t, y decrecientes tanto en $|z|$ como en $|t|$ tales que $g = \lim_{j\to\infty} g_j$. Usando el lema de Fatou tenemos para $r > 0$

$$\begin{aligned}(|f| * g_r)(z,t) &\leq \lim_{j\to\infty} \left(|f| * (g_j)_r\right)(z,t) \\ &\leq \limsup_{j\to\infty} \sup_{r>0} \left(\left(|f| * (g_j)_r\right)(z,t)\right) \\ &\leq c \limsup_{j\to\infty} \|g_j\|_{L^1(\mathbb{H}_n)} (M_3 \circ M_{sing}) f(z,t) \\ &= c \|g\|_{L^1(\mathbb{H}_n)} (M_3 \circ M_{sing}) f(z,t).\end{aligned}$$

y entonces $\sup_{r>0} (|f| * g_r) \leq c \|g\|_{L^1(\mathbb{H}_n)} (M_3 \circ M_{sing}) f$.

■

Corolario 5.11. *Si g satisface las hipótesis del lema 5.10 entonces para $1 < p < \infty$,*

$$\left\| \sup_{r>0} (|f| * g_r)(z,t) \right\|_p \leq c \|g\|_1 \|f\|_p .$$

Lema 5.12. *Si $1 < p < \infty$ entonces existe una constante positiva c_p tal que para $f \in S(\mathbb{H}_n)$,*

$$\left\| \sup_{r>0} \left| f * \mu^{r,0} \right| \right\|_p \leq c \|f\|_p .$$

Prueba. Por el Lema 5.8 sabemos que $f * \mu^{r,0} = f * (\mu * F)_r$, por lo que si encontramos una función g que satisfaga las hipótesis del lema 5.11 y tal que $|\mu * F| \leq g$ habremos probado el lema ya que entonces

$$\sup_{r>0} \left| f * \mu^{r,0} \right| \leq \sup_{r>0} \left(|f| * \left|\mu * F^{[0]}\right|_r\right) \leq \sup_{r>0} (|f| * g_r).$$

La prueba se reduce entonces a mostrar la existencia de una tal g.

Sea $R > 0$ tal que $sop(\chi) \subset \{(z,t) \in \mathbb{H}_n : \rho(z,t) < R\}$. μ tiene soporte compacto y $F^{[0]} \in S'(\mathbb{H}_n)$ entonces $\mu * F^{[0]} \in S(\mathbb{H}_n)$, luego para cada $l \in \mathbb{N}$ existe una constante positiva c tal que $\left|\left(\mu * F^{[0]}\right)(z,t)\right| \leq c(1+\rho(z,t))^{-l}$ para $(z,t) \in \mathbb{H}_n$, tomando $l > 2n+2$ la función $g(z,t) := c(1+\rho(z,t))^{-l}$ tiene las condiciones deseadas.

$\blacksquare$

Notemos que si $F:(0,\infty)\to\mathbb{C}$ es una función contínuamente diferenciable tal que $\lim\limits_{t\to 0^+} F(t)$ existe y es finito entonces para $0<\delta<t$,

$$F^2(t)=F^2(\delta)+\int_\delta^t 2F(s)\,sF'(s)\,\frac{ds}{s}$$

luego

$$|F(t)|^2\leq |F(\delta)|^2+\int_\delta^t 2\,|F(s)|\,|sF'(s)|\,\frac{ds}{s}$$

y por lo tanto, por la desigualdad de Hölder

$$|F(t)|^2\leq \left|\lim_{\delta\to 0^+} F(\delta)\right|^2+2\left(\int_0^\infty F^2(s)\,\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^\infty s^2\left(F'(s)\right)^2\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.22}$$

Lema 5.13. *Sea σ una distribución radial, con soporte compacto. Entonces*

$$\lim_{r\to 0^+}\left(\sigma * F^{[j]}\right)_r=0 \tag{5.23}$$

para $j\in N\cup\{0\}$, con convergencia en $S'(\mathbb{H}_n)$.

Prueba. Para $\varphi\in S(\mathbb{H}_n)$ y $r>0$,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{H}_n}\left(\sigma * F^{[j]}\right)_r(z,t)\,\varphi(z,t)\,dzdt-\varphi(0)\int_{\mathbb{H}_n}\left(\sigma * F^{[j]}\right)(z,t)\,dzdt\right|\\
&=\left|\int_{\mathbb{H}_n}\left(\sigma * F^{[j]}\right)(z,t)\,\varphi\left(rz,r^2t\right)dzdt-\varphi(0)\int_{\mathbb{H}_n}\left(\sigma * F^{[j]}\right)(z,t)\,dzdt\right|\\
&\leq\int_{\mathbb{H}_n}\left|\left(\sigma * F^{[j]}\right)(z,t)\right|\left|\left(\varphi\left(rz,r^2t\right)-\varphi(0)\right)\right|dzdt
\end{aligned}$$

y como $\left|\left(\sigma * F^{[j]}\right)(z,t)\right|\left|\left(\varphi\left(rz,r^2t\right)-\varphi(0)\right)\right|\leq 2\,\|\varphi\|_\infty\left|\left(\sigma * F^{[j]}\right)(z,t)\right|$ y

$\sigma * F^{[j]}\in L^1(\mathbb{H}_n)$, el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue nos da que

$$\lim_{r\to 0^+}\left(\sigma * F^{[j]}\right)_r=b_j\delta$$

con convergencia en $S'(\mathbb{H}_n)$ donde $b_j:=\displaystyle\int_{\mathbb{H}_n}\left(\sigma * F^{[j]}\right)(z,t)\,dzdt.$

Entonces $\lim\limits_{r\to 0^+} f * \left(\sigma * F^{[j]}\right)_r = b_j f$ para toda $f \in S(\mathbb{H}_n)$. Por otra parte, para $\lambda \neq 0$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{H}_n} \left(\sigma * F^{[j]}\right)(z,t)\, e^{-\frac{1}{4}|\lambda||z|^2} dzdt &= \int_{\mathbb{H}_n} \left(\sigma * F^{[j]}\right)(z,t)\, \mathbf{e}_{\lambda,0}(z,t)\, dzdt \\ &= \widehat{\sigma * F^{[j]}}(\lambda,0) = \widehat{\sigma}(\lambda,0)\, \widehat{F^{[j]}}(\lambda,0) \\ &= \widehat{\sigma}(\lambda,0)\, \phi\left(2^{-2j}|\lambda|\, n\right)\end{aligned}$$

y como $\left|\left(\sigma * F^{[j]}\right)(z,t)\, e^{-\frac{1}{4}|\lambda||z|^2}\right| \leq \left|\left(\sigma * F^{[j]}\right)(z,t)\right|$ y $\left(\sigma * F^{[j]}\right) \in L^1(\mathbb{H}_n)$, el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue nos da que

$$\begin{aligned}b_j &= \int_{\mathbb{H}_n} \left(\sigma * F^{[j]}\right)(z,t)\, dzdt = \int_{\mathbb{H}_n} \lim_{\lambda\to 0} \left(\sigma * F^{[j]}\right)(z,t)\, e^{-\frac{1}{4}|\lambda||z|^2} dzdt \\ &= \lim_{\lambda\to 0} \int_{\mathbb{H}_n} \left(\sigma * F^{[j]}\right)(z,t)\, e^{-\frac{1}{4}|\lambda||z|^2} dzdt = \lim_{\lambda\to 0} \widehat{\sigma}(\lambda,0)\, \phi\left(2^{-2j}|\lambda|\, n\right) = 0,\end{aligned}$$

la última igualdad porque ϕ tiene soporte compacto que no contiene a 0. Luego $b_j = 0$.

$\blacksquare$

Lema 5.14. *Sea σ una distribución radial, con soporte compacto tal que exista (en el sentido clásico) $\frac{d}{d\lambda}(\widehat{\sigma}(\lambda,k))$ para $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ y $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Supongamos además que para algún $\alpha > 1/2$ y alguna constante positiva c*

$$|\widehat{\sigma}(\lambda,k)| \leq c\left(|\lambda|(2k+n)\right)^{-\alpha}.$$

$$\left|\lambda \frac{d}{d\lambda}(\widehat{\sigma}(\lambda,k))\right| \leq c\left(1+|\lambda|(2k+n)\right)^{1-\alpha}$$

toda vez que $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ y $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Entonces para todo $j \geq 1$,

$$\left\|\sup_{r>0}\left(\left|f * \left(\sigma * F^{[j]}\right)_r\right|\right)\right\|_2 \leq c\left(2^{-j\alpha} + 2^{-2j\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}\right)\|f\|_2$$

Prueba. Sea $f \in S(\mathbb{H}_n)$. Usando (5.22) con $F(s) := \left(f * \left(\sigma * F^{[j]}\right)_{\sqrt{s}}\right)(z,t)$ y teniendo en cuenta que, por el Lema 5.13, $\lim_{r\to 0^+} f*\left(\sigma * F^{[j]}\right)_r = 0$ tenemos

$$
\begin{aligned}
&\sup_{r>0}\left|\left(f*\left(\sigma*F^{[j]}\right)_r\right)(z,t)\right|^2\\
&=\sup_{r>0}\left|\left(f*\left(\sigma*F^{[j]}\right)_{\sqrt{r}}\right)(z,t)\right|^2\\
&\leq 2\left(\int_0^\infty \left|\left(f*\left(\sigma*F^{[j]}\right)_{\sqrt{s}}\right)(z,t)\right|^2\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\times\left(\int_0^\infty \left|s\frac{d}{ds}\left(\left(f*(\sigma*F^{[j]})_{\sqrt{s}}\right)(z,t)\right)\right|^2\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

Luego

$$
\begin{aligned}
&\left\|\sup_{r>0}\left|f*\left(\sigma*F^{[j]}\right)_r\right|\right\|_2^2\\
&\leq 2\int_{\mathbb{H}_n}\left(\int_0^\infty \left|\left(f*\left(\sigma*F^{[j]}\right)_{\sqrt{s}}\right)(z,t)\right|^2\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\times\left(\int_0^\infty \left|s\frac{d}{ds}\left(\left(f*(\sigma*F^{[j]})_{\sqrt{s}}\right)(z,t)\right)\right|^2\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{2}}dzdt\\
&\leq 2\left(\int_{\mathbb{H}_n}\int_0^\infty \left|\left(f*\left(\sigma*F^{[j]}\right)_{\sqrt{s}}\right)(z,t)\right|^2\frac{ds}{s}dzdt\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\times\left(\int_{\mathbb{H}_n}\int_0^\infty \left|s\frac{d}{ds}\left(\left(f*(\sigma*F^{[j]})_{\sqrt{s}}\right)(z,t)\right)\right|^2\frac{ds}{s}dzdt\right)^{\frac{1}{2}}\\
&=2A(\lambda,k)\,B(\lambda,k)\,,
\end{aligned}
$$

(la última desigualdad está dada por Hölder) donde

$$
\begin{aligned}
A(\lambda,k)&=\left(\int_{\mathbb{H}_n}\int_0^\infty \left|\left(f*\left(\sigma*F^{[j]}\right)_{\sqrt{s}}\right)(z,t)\right|^2\frac{ds}{s}dzdt\right)^{\frac{1}{2}},\\
B(\lambda,k)&=\left(\int_{\mathbb{H}_n}\int_0^\infty \left|s\frac{d}{ds}\left(\left(f*(\sigma*F^{[j]})_{\sqrt{s}}\right)(z,t)\right)\right|^2\frac{ds}{s}dzdt\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

y, por la identidad de Plancherel, y como $\left(\sigma*F^{[j]}\right)_{\sqrt{s}}*\mathbf{e}_{\lambda,k}=\widehat{\sigma}\,(s\lambda,k)\,\widehat{F^{[j]}}\,(s\lambda,k)\,\mathbf{e}_{\lambda,k}$, tenemos

$$A(\lambda,k)=\left(\int_0^\infty\int_{\mathbb{H}_n}\left|\left(f*\left(\sigma*F^{[j]}\right)_{\sqrt{s}}\right)(z,t)\right|^2dzdt\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$=c\left(\int_0^\infty\sum_{k\geq0}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{C}^n}\left|\left(f*\mathbf{e}_{\lambda,k}\right)(z,0)\,\widehat{\sigma}\left(s\lambda,k\right)\phi\left(s2^{-2j}\left|\lambda\right|\left(2k+n\right)\right)\right|^2\left|\lambda\right|^{2n}dzd\lambda\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$=c\left(\sum_{k\geq0}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{C}^n}\left|f*\mathbf{e}_{\lambda,k}\left(z,0\right)\right|^2\widetilde{A}\left(\lambda,k\right)\left|\lambda\right|^{2n}dzd\lambda\right)^{\frac{1}{2}}$$

con

$$\widetilde{A}\left(\lambda,k\right)=\int_0^\infty\left|\widehat{\sigma}\left(s\lambda,k\right)\phi\left(s2^{-2j}\left|\lambda\right|\left(2k+n\right)\right)\right|^2\frac{ds}{s}$$

De igual forma se obtiene, también por la identidad de Plancherel,

$$B\left(\lambda,k\right)$$
$$=\left(\int_0^\infty\int_{\mathbb{H}_n}\left|s\frac{d}{ds}\left(\left(f*\left(\sigma*F^{[j]}\right)_{\sqrt{s}}\right)(z,t)\right)\right|^2dzdt\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$=c\left(\sum_{k\geq0}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{C}^n}\left|f*\mathbf{e}_{\lambda,k}\left(z,0\right)\right|^2\int_0^\infty\left|s\frac{d}{ds}\left(\widehat{\sigma}\left(s\lambda,k\right)\phi\left(s2^{-2j}\left|\lambda\right|\left(2k+n\right)\right)\right)\right|^2\frac{ds}{s}\left|\lambda\right|^{2n}dzd\lambda\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$=c\left(\sum_{k\geq0}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{C}^n}\left|f*\mathbf{e}_{\lambda,k}\left(z,0\right)\right|^2\widetilde{B}\left(\lambda,k\right)\left|\lambda\right|^{2n}dzd\lambda\right)^{\frac{1}{2}}$$

con

$$\widetilde{B}\left(\lambda,k\right)=\int_0^\infty\left|s\frac{d}{ds}\left(\widehat{\sigma}\left(s\lambda,k\right)\phi\left(s2^{-2j}\left|\lambda\right|\left(2k+n\right)\right)\right)\right|^2\frac{ds}{s}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}\widetilde{A}_{\lambda,k}&=\int_0^\infty\left|\widehat{\sigma}\left(s\lambda,k\right)\phi\left(s2^{-2j}\left|\lambda\right|\left(2k+n\right)\right)\right|^2\frac{ds}{s}\\&\leq\int_0^\infty\frac{\left|\phi\left(s2^{-2j}\left|\lambda\right|\left(2k+n\right)\right)\right|^2}{\left(s\left|\lambda\right|\left(2k+n\right)\right|\right)^{2\alpha}}\frac{ds}{s}=2^{-4j\alpha}\int_0^\infty\left|\frac{\phi\left(s\right)}{s^\alpha}\right|^2\frac{ds}{s}\\&\leq c2^{-4j\alpha}\end{aligned}\tag{5.24}$$

pues $\int_0^\infty\left|\phi\left(s\right)s^{-\alpha}\right|^2\frac{ds}{s}<\infty$ ya que ϕ tiene soporte compacto que no contiene a 0.

De forma similar,

$$\widetilde{B}(\lambda,k)=\int_0^\infty\left|s\frac{d}{ds}\left(\widehat{\sigma}(s\lambda,k)\,\phi\left(s2^{-2j}|\lambda|(2k+n)\right)\right)\right|^2\frac{ds}{s} \tag{5.25}$$

$$\begin{aligned}
&\leq c\int_0^\infty\left|s\lambda\frac{d(\widehat{\sigma}(\tau,k))}{d\tau}_{|\tau=s\lambda}\phi\left(s2^{-2j}|\lambda|(2k+n)\right)\right|^2\frac{ds}{s}\\
&+c\int_0^\infty\left|s\widehat{\sigma}(s\lambda,k)\,2^{-2j}|\lambda|(2k+n)\,\phi'\left(s2^{-2j}|\lambda|(2k+n)\right)\right|^2\frac{ds}{s}\\
&\leq c\int_0^\infty\left|(1+s|\lambda|(2k+n))^{1-a}\,\phi\left(s2^{-2j}|\lambda|(2k+n)\right)\right|^2\frac{ds}{s}\\
&+c\int_0^\infty\left|(s|\lambda|(2k+n))^{-\alpha}\,s2^{-2j}|\lambda|(2k+n)\,\phi'\left(s2^{-2j}|\lambda|(2k+n)\right)\right|^2\frac{ds}{s}
\end{aligned}$$

y un cambio de variable nos da que la última suma es igual a

$$\begin{aligned}
&c\int_0^\infty\left|\left(1+2^{2j}s\right)^{1-a}\phi(s)\right|^2\frac{ds}{s}+c\int_0^\infty\left|\left(2^{2j}s\right)^{-\alpha}s\phi'(s)\right|^2\frac{ds}{s}\\
&\leq c\int_0^\infty\left|\left(1+2^{2j(1-a)}s^{1-a}\right)\phi(s)\right|^2\frac{ds}{s}+c2^{-4ja}\int_0^\infty\left|s^{1-\alpha}\phi'(s)\right|^2\frac{ds}{s}\\
&\leq c'\int_0^\infty\left(1+2^{4j(1-a)}s^{2(1-a)}\right)|\phi(s)|^2\frac{ds}{s}+c2^{-4j\alpha}\int_0^\infty\left|s^{1-a}\phi'(s)\right|^2\frac{ds}{s}\\
&\leq c\left(1+2^{4j(1-a)}\right)+c2^{-4ja}\leq c'\left(1+2^{4j(1-\alpha)}\right)
\end{aligned}$$

donde en las últimas desigualdades hemos utilizado que $(\gamma+\eta)^{1-a}\leq\gamma^{1-\alpha}+\eta^{1-\alpha}$ para $\gamma>0,\eta>0$ y también la convexidad de la función $s\to s^2$.

Luego tenemos que

$$\begin{aligned}
&\left\|\sup_{r>0}\left|f*\left(\sigma*F^{[j]}\right)_r\right|\right\|_2^2\\
&\leq 2A(\lambda,k)\,B(\lambda,k)\leq c\left(\widetilde{A}(\lambda,k)\,\widetilde{B}(\lambda,k)\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{k\geq 0}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{C}^n}|f*\mathbf{e}_{\lambda,k}(z,0)|^2|\lambda|^{2n}dzd\lambda\\
&\leq c\left(1+2^{4j(1-\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}}2^{-2j\alpha}\sum_k\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{C}^n}|f*\mathbf{e}_{\lambda,k}(z,0)|^2|\lambda|^{2n}dzd\lambda\\
&\leq c'\left(1+2^{2j(1-\alpha)}\right)2^{-2j\alpha}\|f\|_2^2=c'\left(2^{-2j\alpha}+2^{-4j\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}\right)\|f\|_2^2\\
&\leq c'\left(2^{-j\alpha}+2^{-2j\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}\right)^2\|f\|_2^2.
\end{aligned}$$

■

Necesitaremos la siguiente proposición, cuya prueba puede hallarse en [**Ly07**] (cf. [**Ly07**], Teoremas 2.1, 2.2, Remark 2.3 así como los comentarios allí al principio de la prueba del teorema 1.1).

Proposición 5.15. *(Lyall) Si $\alpha < n\beta$ entonces existen $k_0 > 0$, $\lambda_0 > 0$ y una constante positiva c tales que*

$$|\widehat{\mu}(\lambda, k)| \leq \begin{cases} c & \text{si } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \lambda \neq 0 \\ c\,(|\lambda|\,k)^{\frac{\alpha - \left(n+\frac{1}{2}\right)\beta}{\beta+2}}, & \text{si } k < k_0,\ \ |\lambda| > \lambda_0 \\ c \log\left(1 + |\lambda|\,k\right)\left(1 + |\lambda|\,k\right)^{\frac{\alpha - n\beta}{2(\beta+1)}} & \text{si } k \geq k_0,\ \ \lambda \neq 0. \end{cases} \tag{5.26}$$

Como consecuencia inmediata de la precedente proposición tenemos el siguiente

Corolario 5.16. *Si $\alpha < (n-1)\,\beta - 1$ entonces existe $a > \dfrac{1}{2}$ y una constante positiva c tales que*

$$|\widehat{\mu}(\lambda, k)| \leq c \frac{1}{\left(1 + |\lambda|\,(2k+n)\right)^a}$$

para $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Prueba. Vemos primero que existe $a > \dfrac{1}{2}$ y una constante positiva c tales que

$$|\widehat{\mu}(\lambda, k)| \leq c \frac{1}{(|\lambda|\,k)^a}. \tag{5.27}$$

Como $(n-1)\,\beta > \alpha + 1$ tenemos $\min\left(\dfrac{n\beta - \alpha}{2(\beta+1)}, \dfrac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\beta - \alpha}{\beta + 2}\right) > \dfrac{1}{2}$. Sea a tal que $\dfrac{1}{2} < a < \min\left(\dfrac{n\beta - \alpha}{2(\beta+1)}, \dfrac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\beta - \alpha}{\beta + 2}\right)$ y sean $\theta = \dfrac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\beta - \alpha}{\beta + 2} - a$,

$\eta = \dfrac{n\beta - \alpha}{2(\beta+1)} - a$. Entonces θ y η son positivos.

Sean k_0, λ_0 como en la proposición 5.15. Si $k < k_0$ y $|\lambda| \leq \lambda_0$ entonces (ya que por nuestra hipótesis $\alpha < n\beta$), la primera de las desigualdades de (5.26) nos da

$$|\widehat{\mu}(\lambda, k)| \leq c \leq c\,(k_0\lambda_0)^a\,(k\,|\lambda|)^{-a} = c'\,(k\,|\lambda|)^{-a}.$$

con c' constante independiente de λ y k.

Si $k < k_0$ y $|\lambda| > \lambda_0$, por la segunda desigualdad de (5.26) tenemos

$$\begin{aligned}
|\widehat{\mu}(\lambda,k)| &\leq c\left(|\lambda|\,k\right)^{-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta-\alpha}{\beta+2}} = c\left(|\lambda|\,k\right)^{-a}\left(|\lambda|\,k\right)^{-\theta} \\
&\leq c\left(|\lambda|\,k\right)^{-a}\left(|\lambda|\right)^{-\theta} \leq c\left(|\lambda|\,k\right)^{-a}\lambda_0^{-\theta} = c''\left(|\lambda|\,k\right)^{-a} \\
&\leq c'''\left(|\lambda|\left(2k+n\right)\right)^{-a}.
\end{aligned}$$

con c, c', c'' y c''' independientes de λ y k.

Supongamos ahora $k \geq k_0$. Como $s \to \log(s)\, s^{-\eta}$ es contínua en $(0,\infty)$ y $\lim_{s\to\infty} \log(s)\, s^{-\eta} = 0$ existe una constante γ tal que $\log(s)\, s^{-\eta} \leq \gamma$ para $s \geq 1$. Luego por la tercera desigualdad de (5.26) tenemos

$$\begin{aligned}
|\widehat{\mu}(\lambda,k)| &\leq c\log\left(1+|\lambda|\,k\right)\left(1+|\lambda|\,k\right)^{-\frac{n\beta-\alpha}{2(\beta+1)}} \\
&= c\left(1+|\lambda|\,k\right)^{-a}\log\left(1+|\lambda|\,k\right)\left(1+|\lambda|\,k\right)^{-\eta} \\
&\leq c\gamma\left(1+|\lambda|\,k\right)^{-\alpha} \leq c\gamma\left(|\lambda|\,k\right)^{-\alpha} \\
&\leq c'\left(|\lambda|\left(2k+n\right)\right)^{-\alpha}.
\end{aligned}$$

con constantes c, c' independientes de λ y k. Luego (5.27) vale.

Entonces $|\widehat{\mu}(\lambda,k)|^{\frac{1}{a}}\left(|\lambda|\left(2k+n\right)\right) \leq c$ con c constante independiente de λ y k y, por otra parte, agrandando c si hace falta, también (por la primera desigualdad de (5.26)) $|\widehat{\mu}(\lambda,k)|^{\frac{1}{\alpha}} \leq c$ lo que nos da $|\widehat{\mu}(\lambda,k)|^{\frac{1}{\alpha}}\left(1+|\lambda|\left(2k+n\right)\right) \leq 2c$.

■

Necesitaremos la siguiente proposición para usar el lema 5.14 con $\sigma = \mu$. La prueba de la misma, de carácter algo técnico, será dada en el apéndice a este capítulo.

Proposición 5.17. *Si* $\alpha < (n-1)\,\beta - 4$ *entonces existen una constante positiva* c *y un número* $a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ *tales que para* $\lambda \neq 0$ *y* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$\left|\lambda \frac{d}{d\lambda}\widehat{\mu}\left(\lambda,k\right)\right| \leq c\left(1+|\lambda|\left(2k+n\right)\right)^{1-a}$$

Corolario 5.18. *Si* $\alpha < (n-1)\beta - 4$ *entonces existe* $a > \dfrac{1}{2}$ *y una constante positiva* c *tales que*

$$\begin{aligned} |\widehat{\mu}(\lambda,k)| &\leq c\frac{1}{(1+|\lambda|(2k+n))^{a}}, \\ \left|\lambda\frac{d}{d\lambda}\widehat{\mu}(\lambda,k)\right| &\leq c(1+|\lambda|(2k+n))^{1-a} \end{aligned}$$

para $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

Prueba. El corolario es inmediato, tomando como a la menor de las dos constantes a dadas por los corolarios 5.16 y 5.17.

■

Probaremos ahora el teorema principal del capítulo, el cuál será enunciado nuevamente continuación.

Teorema 5.1. *Si* $\alpha < (n-1)\beta - 4$ *entonces existe una constante positiva* c *tal que, para* $f \in S(\mathbb{H}_n)$,

$$\left\|\sup_{r>0}||f|*\mu_r|\right\|_2 \leq c\,\|f\|_2.$$

Prueba. Por la observación 9.3 del apéndice II tenemos, para $f \in S(\mathbb{H}_n)$,

$$\begin{aligned} \left\|\sup_{r>0}|f*\mu_r|\right\|_2 &\leq \left\|\sup_{r>0}\left|f*\mu^{r,0}\right|\right\|_2 + \sum_{j=1}^{\infty}\left\|\sup_{r>0}\left|f*\mu^{r,j}\right|\right\|_2 \\ &= \left\|\sup_{r>0}\left|f*\mu^{r,0}\right|\right\|_2 + \sum_{j=1}^{\infty}\left\|\sup_{r>0}\left|f*\left(\mu*F^{[j]}\right)_r\right|\right\|_2 \end{aligned}$$

Sea a como en el corolario 5.18. Por el Lema 5.14 tenemos para $j \geq 1$,

$$\left\|\sup_{r>0}\left(\left|f*\left(\mu*F^{[j]}\right)_r\right|\right)\right\|_2 \leq c\left(2^{-j\alpha}+2^{-2j\left(a-\frac{1}{2}\right)}\right)\|f\|_2$$

y por el Lema 5.12

$$\left\|\sup_{r>0}\left|f*\mu^{r,0}\right|\right\|_2 \leq c\,\|f\|_2.$$

Como $a > \dfrac{1}{2}$ tenemos $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\left(2^{-j\alpha}+2^{-2j\left(a-\frac{1}{2}\right)}\right) < \infty$ lo que nos da

$$\left\|\sup_{r>0}|f*\mu_r|\right\|_2 \leq c'\,\|f\|_2.$$

■

6 El operador maximal esférico diádico sobre el grupo de Heisenberg.

Para $n \geq 1$ sea σ la medida sobre $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ dada por el elemento de área euclídeo y normalizada de modo que $\sigma\left(S^{2n-1}\right) = 1$, sea $\delta \in S'(\mathbb{R})$ la distribución delta de Dirac concentrada en el origen, y para $f \in S(\mathbb{H}_n)$ sea $M_{dia}f : \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}$ definido por

$$M_{dia}f = \sup_{j \in \mathbb{Z}} \left(\left|f * (\sigma \otimes \delta)_{2^j}\right|\right) \tag{6.1}$$

En este capítulo probaremos el siguiente

Teorema 6.1. *Sea $n \geq 1$ y sea M_{dia} el operador (maximal diádico) definido por (6.1). Entonces para $p > 1$ existe una constante positiva c tal que, para $f \in S(\mathbb{H}_n)$,*

$$\|M_{dia}f\|_p \leq c\|f\|_p,$$

Usaremos técnicas basadas en las propiedades de decaimiento de la transformada esférica de σ y en el uso de apropiadas desigualdades de Littlewood Paley en $\mathbb{H}_n$. Técnicas similares (que motivan nuestro enfoque) fueron utilizadas en [**Ru86**] en el estudio del problema análogo en $\mathbb{R}^n$ vía estimaciones de la transformada de Fourier (euclídea) de las medida correspondiente y desigualdades de Littlewood Paley en $\mathbb{R}^n$.

Observación 6.2. *A diferencia del Teorema 3.3 este resultado, es válido inclusive para $\mathbb{H}_1$. Además, al tomar el supremo sobre $\left\{2^j : j \in \mathbb{Z}\right\}$, se mejora, también, con respecto al teorema 3.3, el rango de los valores de p para los cuales el operador es acotado en $L^p(\mathbb{H}_n)$.*

$\blacksquare$

El Teorema 6.1 será una consecuencia inmediata del siguiente teorema algo más general

Teorema 6.3. *Sea ν una medida de Borel sobre $\mathbb{H}_n$, radial, con soporte compacto, positiva y finita (i.e., $\nu(E) \geq 0$ para todo medible Borel $H \subset \mathbb{H}_n$ y $\nu(\mathbb{H}_n) < \infty$). Asúmase también que existen $\beta > 0$ y una constante positiva c tales que*

$$|\widehat{\nu}(\lambda, k)| \leq c(|\lambda|(2k+n))^{-\beta}. \tag{6.2}$$

para $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y sea M_{dia}^{ν} el operador maximal definido,

para $f \in S(\mathbb{H}_n)$, por

$$M_{dia}^{\nu} f = \sup_{j \in \mathbb{Z}} \left(|f * \nu_{2^j}| \right). \tag{6.3}$$

Entonces para $1 < p < \infty$ existe una constante positiva c tal que $\|M_{dia}^{\nu} f\|_p \leq c\|f\|_p$ para toda $f \in S(\mathbb{H}_n)$.

La prueba del Teorema 6.3 será dada hacia el final del capítulo luego de algunos lemas preliminares. El Teorema 6.1 será una consecuencia directa del Teorema 6.3 y del siguiente lema

Lema 6.4. *Sean σ, δ como en el Teorema 6.1. Entonces existe una constante c tal que $\left|\widehat{\sigma \otimes \delta}(\lambda, k)\right| \leq c\left(|\lambda|(2k+n)\right)^{-\frac{1}{6}-\frac{n-1}{2}}$.*

A su vez, el Lema 6.4 es inmediato de la siguiente estimación para las funciones de Laguerre normalizadas.

Lema 6.5. *Para $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sea φ_k^{n-1} la función de Laguerre normalizada definida por (2.4). Entonces existe una constante c independiente de λ y k tal que para $s > 0$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,*

$$\left|\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{s}\right)\right| \leq c\left(s(2k+n)\right)^{-\frac{1}{6}-\frac{n-1}{2}}.$$

Prueba. Consideremos el caso $k \geq 1$. La Proposición (2.27) nos da una constante positiva c tal que, para $s > 0$ y $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\left|\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{s}\right)\right| &\leq c\,(sk)^{-\frac{1}{4}-\frac{n-1}{2}} \text{ si } \frac{1}{k} \leq s \leq \frac{k}{2}, &(6.4)\\
\left|\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{s}\right)\right| &\leq c\,(sk)^{-\frac{n-1}{2}}\,k^{-\frac{1}{4}}\left(k^{\frac{1}{3}}+|k-s|\right)^{-\frac{1}{4}} \text{ si } \frac{k}{2} < s \leq \frac{3k}{2}, &(6.5)\\
\left|\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{s}\right)\right| &\leq ce^{-\gamma s}\,(sk)^{-\frac{n-1}{2}}, \text{ si } \frac{3k}{2} < s\,. &(6.6)
\end{aligned}$$

donde en (6.6) γ es una constante positiva independiente de λ y k.

También

$$\left|\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{s}\right)\right| \leq 1 \tag{6.7}$$

(esta última desigualdad pues $\left|\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{s}\right)\right| = \left|E_{\lambda,k}\left(z.\mathbf{0}\right)\right|$ para cualquier $z \in S^{2n-1}$ y $\left|E_{\lambda,k}\left(z,t\right)\right| \leq 1$ para todo $(z,t) \in \mathbb{H}_n$).

Si $0 < s \leq \dfrac{1}{k}$ tenemos, para alguna constante c' independiente de λ y k (pues $k \geq 1$) que $s\,(2k+n) \leq c'sk \leq c'$. Luego $(s\,(2k+n))^{\frac{1}{6}+\frac{n-1}{2}} \leq (c')^{\frac{1}{6}+\frac{n-1}{2}} := c''$ y por (6.7), $\left|\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{s}\right)\right| \leq 1 \leq c''\dfrac{1}{c''} \leq c''\dfrac{1}{(s\,(2k+n))^{\frac{1}{6}+\frac{n-1}{2}}}$.

Si $\dfrac{1}{k} \leq s \leq \dfrac{k}{2}$ observamos que, por (6.4),

$$\left|\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{s}\right)\right| \leq c\,(sk)^{-\frac{1}{4}-\frac{n-1}{2}} \leq c'\left(s\,(2k+n)\right)^{-\frac{1}{4}-\frac{n-1}{2}}$$

con c' otra constante independiente de λ y k. Y esta desigualdad conjuntamente con (6.7) nos da que $\left|\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{s}\right)\right| \leq c''\left(s\,(2k+n)\right)^{-\frac{1}{6}-\frac{n-1}{2}}$ (para otra constante c'' también independiente de λ y k). En efecto sea $\theta = \dfrac{\frac{1}{6}+\frac{n-1}{2}}{\frac{1}{4}-\frac{n-1}{2}}$, entonces $\theta \in (0,1)$ y

$$\begin{aligned}
\left|\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{s}\right)\right| &= \left|\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{s}\right)\right|^{\theta}\left|\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{s}\right)\right|^{1-\theta}\\
&\leq \left|\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{s}\right)\right|^{\theta} \leq \left(c'\left(s\,(2k+n)\right)^{-\frac{1}{4}-\frac{n-1}{2}}\right)^{\theta}\\
&= c''\left(s\,(2k+n)\right)^{-\frac{1}{6}-\frac{n-1}{2}}
\end{aligned}$$

con c'' constante independiente de λ y k.

Si $\dfrac{k}{2} < s \leq \dfrac{3k}{2}$ observamos que $k^{-\frac{1}{4}}\left(k^{\frac{1}{3}}+|k-s|\right)^{-\frac{1}{4}} \leq k^{-\frac{1}{4}}k^{-\frac{1}{12}} = k^{-\frac{1}{3}}$ y que también $k^{-\frac{1}{4}}\left(k^{\frac{1}{3}}+|k-s|\right)^{-\frac{1}{4}} \leq s^{-\frac{1}{4}}\left(\dfrac{2}{3}s\right)^{-\frac{1}{12}} = c''s^{-\frac{1}{3}}$ (con $c'' = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{12}}$). Luego, multiplicando estas dos desigualdades y tomando raíz cuadrada hallamos que

$k^{-\frac{1}{4}}\left(k^{\frac{1}{3}}+|k-s|\right)^{-\frac{1}{4}} \leq c_3\,(sk)^{-\frac{1}{6}} \leq c_4\,(s\,(2k+n))^{-\frac{1}{6}}$ con c_3, c_4 independientes de λ y k. Y esta desigualdad juntamente con (6.5) nos da una estimación del tipo deseado.

Si $\dfrac{3k}{2} < s$ observamos que

$$\begin{aligned} e^{-\gamma s} &= e^{-\frac{1}{2}\gamma s}e^{-\frac{1}{2}\gamma s} \leq e^{-\frac{1}{2}\gamma s}e^{-\frac{3}{4}\gamma k} \leq e^{-\frac{1}{2}\gamma s}e^{-\frac{3}{4}\gamma k} = e^{-\frac{1}{2}(s+k)} \\ &\leq e^{-(sk)^{\frac{1}{2}}} \leq c\,(sk)^{-\frac{1}{6}} \leq c'\,(s\,(2k+n))^{-\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

con c' independiente de λ y k (donde se ha utilizado que $\dfrac{1}{2}(s+k) \geq (sk)^{\frac{1}{2}}$ y que la función $\tau \to \tau e^{-\tau^3}$ es acotada en $[0,\infty)$)

Finalmente, queda solo considerar el caso $k=0$.

Aquí tenemos $\left|\varphi_0^{n-1}\left(\sqrt{s}\right)\right| = e^{-\frac{s}{4}} \leq c\,(s\,(2\times 0+n))^{-\left(\frac{1}{6}+\frac{n-1}{2}\right)}$ con c independiente de λ.

Por lo tanto hemos encontrado en cada una de las regiones consideradas una estimación del tipo requerido por el lema. Tomamos ahora la mayor de las constantes c obtenidas en cada región y la prueba esta completa.

$\blacksquare$

Prueba del Lema 6.4.

Recordemos que

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma\otimes\delta}\,(\lambda,k) &= \frac{k!\,(n-1)!}{(k+n-1)!}\int_{S^{2n-1}} L_k^{n-1}\left(\frac{|\lambda|\,|z|^2}{2}\right)e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{4}}d\sigma\,(z) \\ &= \frac{k!\,(n-1)!}{(k+n-1)!}L_k^{n-1}\left(\frac{|\lambda|}{2}\right)e^{-\frac{|\lambda|}{4}} = \varphi_k^{n-1}\left(|\lambda|^{\frac{1}{2}}\right). \end{aligned}$$

con lo que el lema sigue inmediatamente del Lema 6.5.

$\blacksquare$

Prueba del Teorema 6.1. Sigue inmediatamente del Teorema (6.3) y del Lema (6.4).

$\blacksquare$

El resto del capítulo concentraremos nuestras fuerzas en probar el teorema (6.3).

Sea ν una medida de Borel sobre $\mathbb{H}_n$, radial, con soporte compacto, a valores reales (no necesariamente positiva) y de variación total finita. Para $r > 0$ y $f \in C_c(\mathbb{H}_n)$ sean

$$T_r f := f * \nu_r, \tag{6.8}$$

y $\nu = \nu^+ - \nu^-$ la descomposición de Hanh de ν en su partes positiva y negativa. De la definición de dilatación de una medida es inmediato ver que

$\left(\nu^+\right)_r(\mathbb{H}_n) = \nu^+(\mathbb{H}_n) < \infty$ y $\left(\nu^-\right)_r(\mathbb{H}_n) = \nu^-(\mathbb{H}_n) < \infty$. También,

$$\begin{aligned}
& (f * \nu_r)(z,t) \\
= & \int_{\mathbb{H}_n} f\left((z,t)\left(rw, r^2 s\right)^{-1}\right) d\nu(w,s) \\
= & \int_{\mathbb{H}_n} f\left((z,t)\left(rw, r^2 s\right)^{-1}\right) d\nu^+(w,s) - \int_{\mathbb{H}_n} f\left((z,t)\left(rw, r^2 s\right)^{-1}\right) d\nu^-(w,s) \\
= & \left(f * \left(\nu^+\right)_r\right)(z,t) - \left(f * \left(\nu^-\right)_r\right)(z,t)
\end{aligned}$$

Ahora bien, para $1 \leq p < \infty$, por la desigualdad de Jensen,

$$\begin{aligned}
\|f * \left(\nu^+\right)_r\|_p^p &= \int_{\mathbb{H}_n} \left| \int_{\mathbb{H}_n} f\left((z,t)\left(rw, r^2 s\right)^{-1}\right) d\nu^+(w,s) \right|^p dzdt \\
&\leq \left(\nu^+(\mathbb{H}_n)\right)^{p-1} \int_{\mathbb{H}_n}\int_{\mathbb{H}_n} \left| f\left((z,t)\left(rw, r^2 s\right)^{-1}\right)\right|^p d\nu^+(w,s)\, dzdt \\
&= \left(\nu^+(\mathbb{H}_n)\right)^{p-1} \int_{\mathbb{H}_n}\int_{\mathbb{H}_n} \left| f\left((z,t)\left(rw, r^2 s\right)^{-1}\right)\right|^p dzdt d\nu^+(w,s) \\
&= \left(\nu^+(\mathbb{H}_n)\right)^p \|f\|_p^p
\end{aligned}$$

luego $\|f * \left(\nu^+\right)_r\|_p \leq \nu^+(\mathbb{H}_n)\|f\|_p$ y similarmente $\|f * \left(\nu^-\right)_r\|_p \leq \nu^-(\mathbb{H}_n)\|f\|_p$. Estas desigualdades valen también, trivialmente, para $p = \infty$. Entonces

$$\|T_r f\|_p \leq |\nu|(\mathbb{H}_n)\|f\|_p \tag{6.9}$$

para $r > 0$, $1 \leq p \leq \infty$ y $f \in C_c(\mathbb{H}_n)$, donde, como es usual, $|\nu| := \nu^+ + \nu^-$. Más aún, si S_r es el operador definido por

$$S_r f := f * |\nu|_r \tag{6.10}$$

entonces también

$$\|S_r f\|_p \leq |\nu|(\mathbb{H}_n)\, \|f\|_p \tag{6.11}$$

para $r>0$, $1\leq p\leq\infty$ y $f\in C_c(\mathbb{H}_n)$. De las desigualdades (6.9) y (6.11) y de la densidad de $C_c(\mathbb{H}_n)$ en $L^p(\mathbb{H}_n)$ para $1\leq p<\infty$, es inmediato ver que T_r y S_r se extienden de una única manera a operadores acotados sobre $L^p(\mathbb{H}_n)$, $1\leq p<\infty$ (que seguiremos denotando con T_r y S_r) y que satisfacen las mismas estimaciones.

Sean ϕ_0 y ϕ como en el capítulo 5, esto es, $\phi_0\in C_c^\infty(\mathbb{R})$ una función par, con soporte contenido en $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ y tal que $0\leq\phi\leq 1$ y $\phi_0=1$ en $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$. Además ϕ definida por

$$\phi(\xi)=\phi_0(\xi)-\phi_0\left(2^2\xi\right).$$

También, para $j\in\mathbb{N}$ y $r>0$ sean $\nu^{r,0}$, $\nu^{r,j}\in S(\mathbb{H}_n)$ las funciones radiales dadas por las fórmulas (5.16) y (5.14) tomando allí ν en lugar de μ, i.e.,

$$\begin{aligned}
\nu^{r,0}(z,t) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1}\sum_{m=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}(\nu_r*\mathbf{e}_{\lambda,m})(z,t)\,\phi_0\left(r^2|\lambda|(2m+n)\right)|\lambda|^n\,d\lambda,\\
\nu^{r,j}(z,t) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1}\sum_{m=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}(\nu_r*\mathbf{e}_{\lambda,m})(z,t)\,\phi\left(2^{-2j}r^2|\lambda|(2m+n)\right)|\lambda|^n\,d\lambda
\end{aligned}$$

Una inspección de los argumentos dados en el capítulo 5 muestra que la funciones $\nu^{r,0}$, $\nu^{r,j}$ están bien definidas y que pertenecen efectivamente a $S(\mathbb{H}_n)$ ya que la prueba de estas afirmaciones solo utilizó que μ era una distribución radial, de soporte compacto y que $\sup\{|\widehat{\mu}(\lambda,m)|:\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}, m\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}<\infty$, condiciones que cumple ν ($|\widehat{\nu}(\lambda,m)|\leq|\nu|(\mathbb{H}_n)$ para $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$). También por el mismo motivo, las fórmulas (5.15), (5.13) permanecen válidas.

Más aún, una inspección de las pruebas de los Lemas (5.8) y (5.12) muestra que estos resultados continúan siendo validos si se reemplaza en los enunciados μ por ν.

Por la observación (9.3) para $f\in S(\mathbb{H}_n)$ se tiene que

$$f*\nu_{2^k}=f*\nu_{2^k}*F^{[0]}+\sum_j f*\nu_{2^k}*F^{[j]}=f*\nu^{2^k,0}+\sum_j f*\nu^{2^k,j}$$

en $L^2(\mathbb{H}_n)$ y por lo tanto que, para cada punto,

$$M_{dia}^{\nu}f=\sup_{k\in\mathbb{Z}}\left(|f*\nu_{2^k}|\right)\leq .\sup_{k\in\mathbb{Z}}\left(\left|f*\nu^{2^k,0}\right|\right)+\sum_{j=1}^{\infty}\sup_{k\in\mathbb{Z}}\left(\left|f*\nu^{2^k,j}\right|\right) \tag{6.12}$$

y para $1 < p < \infty$, el lema (5.12) nos da una constante positiva c tal que, para $f \in S(\mathbb{H}_n)$,

$$\left\| \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left| f * \nu^{2^k,0} \right| \right) \right\|_p \leq \left\| \sup_{r>0} \left(\left| f * \nu^{r,0} \right| \right) \right\|_p \leq c \, \|f\|_p . \tag{6.13}$$

Para $k \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{N}$ y $f \in S(\mathbb{H}_n)$ sea

$$T_{j,k} f := f * \nu^{2^k,j} \tag{6.14}$$

Entonces, teniendo en cuenta la expresión de $\nu^{2^k,j}$,

$$\left(T_{j,k} f\right)(z,t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(f * \nu_{2^k} * \mathbf{e}_{\lambda,m}\right)(z,t) \, \phi\left(2^{2(k-j)} |\lambda| (2m+n)\right) |\lambda|^n \, d\lambda$$

Sea $\varphi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ tal que $sop(\phi) \subset sop(\varphi) \subset \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, $\varphi \equiv 1$ en el soporte de ϕ, y $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \varphi\left(2^{2j}\xi\right)^2 = 1$ para $\xi > 0$. Como $\varphi \equiv 1$ en el soporte de ϕ tenemos, para $f \in S(\mathbb{H}_n)$,

$$\begin{aligned} & \left(T_{j,k} f\right)(z,t) \\ = & \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(f * \nu_{2^k} * \mathbf{e}_{\lambda,m}\right)(z,t) \, \phi\left(2^{2(k-j)} |\lambda| (2m+n)\right) \\ & \times \varphi(2^{2(k-j)}|\lambda|(2m+n) \, |\lambda|^n \, d\lambda \\ = & \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(f * \mathbf{e}_{\lambda,m}\right)(z,t) \, \widehat{\nu_{2^k}}(\lambda, m) \, \phi\left(2^{2(k-j)} |\lambda| (2m+n)\right) \\ & \times \varphi(2^{2(k-j)}|\lambda|(2m+n) \, |\lambda|^n \, d\lambda \\ = & \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1} \sum_{m} \int \left(f * \mathbf{e}_{\lambda,m}\right)(z,t) \varphi(2^{2(k-j)}|\lambda|(2m+n)) \widehat{\nu}(2^{2k}\lambda, m) \\ & \times \phi(2^{2(k-j)}|\lambda|(2m+n))|\lambda|^n d\lambda. \end{aligned}$$

Para $j \in \mathbb{Z}$ sea K_{2^j} la función radial definida por (2.6), i.e.,

$$K_{2^j}(z,t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1} \sum_{m \geq 0} \int_{\mathbb{R}} \varphi(2^{2j}(2m+n)|\lambda|) \mathbf{e}_{\lambda,m}(z,t) |\lambda|^n d\lambda.$$

Entonces $K_{2^j} \in S(\mathbb{H}_n)$ (cf. Observación 2.36). Notemos que

$$\begin{aligned} K_{2^j}(z,t) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1} \sum_{m\geq 0} \int_{\mathbb{R}} \varphi(2^{2j}(2m+n)|\lambda|)\mathbf{e}_{\lambda,m}(z,t)|\lambda|^n d\lambda \\ &= 2^{-2j(n+1)} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1} \sum_{m\geq 0} \int_{\mathbb{R}} \varphi((2m+n)|s|)\mathbf{e}_{2^{-2j}\lambda,m}(z,t)|s|^n ds \\ &= 2^{-2j(n+1)} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1} \sum_{m\geq 0} \int_{\mathbb{R}} \varphi((2m+n)|s|)\mathbf{e}_{\lambda,m}(2^{-j}z, 2^{-2j}t)|s|^n ds \\ &= 2^{-2j(n+1)} K_{2^0}(2^{-j}z, 2^{-2j}t) = (K_{2^0})_{2^j}(z,t), \end{aligned}$$

esto es,

$$K_{2^j}(z,t) = (K_{2^0})_{2^j}(z,t),$$

Ahora,

$$\begin{aligned} & (T_{j,k}f)(z,t) \\ = & \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1} \sum_m \int (f * \mathbf{e}_{\lambda,m})(z,t)\varphi(2^{2(k-j)}|\lambda|(2m+n))\widehat{\nu}(2^{2k}\lambda, m) \\ & \times\phi(2^{2(k-j)}|\lambda|(2m+n))|\lambda|^n d\lambda \\ = & \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1} \sum_m \int (f * \mathbf{e}_{\lambda,m})(z,t)\widehat{K_{2^{k-j}}}(\lambda,m)\,\widehat{\nu}(2^{2k}\lambda, m)\phi(2^{2(k-j)}|\lambda|(2m+n))|\lambda|^n d\lambda \\ = & \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1} \sum_m \int (f * K_{2^{k-j}} * \mathbf{e}_{\lambda,m})(z,t)\,\widehat{\nu_{2^k}}(\lambda,m)\,\phi\left(2^{2(k-j)}|\lambda|(2m+n)\right)|\lambda|^n d\lambda \\ = & \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1} \sum_m \int (f * K_{2^{k-j}} * \nu_{2^k} * \mathbf{e}_{\lambda,m})(z,t)\,\phi\left(2^{2(k-j)}|\lambda|(2m+n)\right)|\lambda|^n d\lambda \\ = & \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1} \sum_m \int (T_{2^k}(f * K_{2^{k-j}})) * \mathbf{e}_{\lambda,m})(z,t)\phi(2^{2(k-j)}|\lambda|(2m+n))|\lambda|^n d\lambda \\ = & (T_{j,k}(f * K_{2^{k-j}}))(z,t), \end{aligned}$$

por lo que

$$T_{j,k}f = T_{j,k}(f * K_{2^{k-j}}). \tag{6.15}$$

Lema 6.6. *Sea ν una medida de Borel sobre $\mathbb{H}_n$, radial, con soporte compacto, a valores reales (no necesariamente positiva) y de variación total finita. Para $j \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{Z}$ sean $T_{j,k}$ y S_k los operadores definidos por (6.14) y (6.10) respectivamente*

y sean M_3 y M_{sing} los operadores maximales definidos por las fórmulas (3.2) y (3.3) respectivamente. Entonces para $f \in S(\mathbb{H}_n)$
(i) $\|T_{j,k}f\|_p \leq c\|f\|_p$ para $1 \leq p \leq \infty$
(ii)$|T_{j,k}f| \leq c' S_{2^k}((M_3 o M_{sing})(|f|))$
con c y c' constantes positivas independientes de j, k y f (y $c = c(p)$ dependiendo eventualmente de p).

Prueba. Tomamos $l \in \mathbb{N}$ tal que $l > 2n+2$. Como $K_{2^0} \in S(\mathbb{H}_n)$, existe una constante c tal que $|K_{2^0}(z,t)| \leq c\left(1 + \left(\left|z^2\right| + t^4\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{-l}$ para $(z,t) \in \mathbb{H}_n$.

Sea $g : \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}$ definida por $g(z,t) = c\left(1 + \left(\left|z^2\right| + t^4\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{-l}$. Entonces $g \in L^1(\mathbb{H}_n)$, g es no negativa y contínua, radial en z, par en t, y decreciente tanto en $|z|$ como en $|t|$ y satisface $|K_{2^0}(z,t)|| \leq g(z,t)$. Entonces, por (6.15)

$$\begin{aligned} |(T_{j,k}f)(z,t)| &= |(T_{2^k}(f * K_{2^{k-j}}))(z,t)| = |(f * K_{2^{k-j}} * \nu_{2^k})(z,t)| \\ &\leq (|f| * |K_{2^{k-j}}| * |\nu|_{2^k})(z,t) = S_{2^k}(|f| * g_{2^{k-j}})(z,t) \end{aligned} \tag{6.16}$$

Para $1 \leq p \leq \infty$ S_{2^k} es un operador acotado en $L^p(\mathbb{H}_n)$ con $\|S_k\|_{L^p(\mathbb{H}_n),L^p(\mathbb{H}_n)} \leq |\nu|(\mathbb{H}_n)$ (cf. (6.11)) tenemos

$$\|T_{j,k}f\|_p \leq |\nu|(\mathbb{H}_n)\,\||f| * g_{2^{k-j}}\|_p \leq |\nu|(\mathbb{H}_n)\,\|g_{2^{k-j}}\|_1\,\|f\|_p = |\nu|(\mathbb{H}_n)\,\|g\|_1\,\|f\|_p$$

lo que nos da (i).

También, por el lema (5.10)

$$S_{2^k}(|f| * g_{2^{k-j}})(z,t) \leq c\,\|g\|_1\, S_{2^k}(M_3 o M_{sing}|f|)(z,t)$$

donde c es una constante dependiente solo de n y entonces de (6.16) obtenemos

$$|(T_{j,k}f)(z,t)| \leq c\,\|g\|_1\, S_{2^k}(M_3 o M_{sing}|f|)(z,t).$$

■

Notemos que por (i) del Lema (6.6) y por la densidad de $S(\mathbb{H}_n)$ en $L^p(\mathbb{H}_n)$ para $1 \leq p < \infty$, los operadores $T_{j,k}$ se extienden (unívocamente) a operadores acotados, (que seguiremos denotando por $T_{j,k}$) sobre $L^p(\mathbb{H}_n)$, $1 \leq p < \infty$ para los cuales las estimaciones del Lema (6.6) siguen siendo válidas. Para $j \geq 1$ y $f \in S(\mathbb{H}_n)$ sea

$$T_j^* f := \sup_{k\in\mathbb{Z}} T_{j,k} f = \sup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left| f * \nu^{2^k,j} \right| \right). \tag{6.17}$$

Lema 6.7. *Sea ν una medida de Borel sobre $\mathbb{H}_n$, radial, con soporte compacto, a valores reales (no necesariamente positiva) y de variación total finita, y para $j \geq 1$ sea T_j^* definido por (6.17). Entonces existe una constante c independiente de j tal que, para $f \in S(\mathbb{H}_n)$,*

$$\left\| T_j^* f \right\|_2 \leq c 2^{-j\beta} \|f\|_2$$

Prueba. Para $f \in S(\mathbb{H}_n)$,

$$\left\| T_j^* f \right\|_2^2 \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|T_{j,k} f\|_2^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|T_{j,k}(f * K_{2^{k-j}})\|_2^2$$

y por la identidad de Plancherel,

$$\begin{aligned} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|T_{j,k}(f * K_{2^{k-j}})\|_2^2 &= c \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{m\geq 0} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{C}^n} |(f * K_{2^{k-j}} * \mathbf{e}_{\lambda,m})(z,0)|^2 |\lambda|^{2n} dz \\ &\quad \times \left| \widehat{\nu}\left(2^{2k}\lambda, m\right) \phi\left(2^{2(k-j)}|\lambda|(2m+n)\right|)|^2 d\lambda \end{aligned}$$

donde c es una constante dependiente solo de n. Por (6.2), el segundo miembro de esta igualdad está mayorado por

$$\begin{aligned} & c' \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{m\geq 0} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{C}^n} |(f * K_{2^{k-j}} * \mathbf{e}_{\lambda,m})(z,0)|^2 |\lambda|^{2n} dz \left| \frac{\phi(2^{2(k-j)}|\lambda|(2m+n))}{(2^{2k}|\lambda|(2m+n))^\beta} \right|^2 d\lambda \\ = \; & c' 2^{-2j\beta} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{m\geq 0} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{C}^n} |(f * K_{2^{k-j}} * \mathbf{e}_{\lambda,m})(z,0)|^2 |\lambda|^{2n} dz \left| \frac{\phi(2^{2(k-j)}|\lambda|(2m+n))}{(2^{2(k-j)}|\lambda|(2m+n))^\beta} \right|^2 d\lambda \\ \leq \; & c' 2^{-2j\beta} \left\| |x|^{-\beta} \phi(|x|) \right\|_\infty \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{m\geq 0} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{C}^n} |(f * K_{2^{k-j}} * \mathbf{e}_{\lambda,m})(z,0)|^2 |\lambda|^{2n} dz d\lambda \\ = \; & c' 2^{-2j\beta} \left\| |x|^{-\beta} \phi(|x|) \right\|_\infty \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|f * K_{2^{k-j}}\|_2^2, \end{aligned}$$

con c' una constante independiente de j y de f y donde en la última igualdad hemos utilizado la identidad de Plancherel. Recordando las desigualdades de Litlewood Paley dadas por el Teorema (2.37) y observando que $\left\| |x|^{-\beta} \phi(|x|) \right\|_\infty < \infty$, la última expresión está mayorada por

$$c'' 2^{-2j\beta} \|f\|_2^2.$$

donde c'' es una constante independiente de j y f. Entonces hemos probado que $\left\|T_j^* f\right\|_2^2 \leq c'' 2^{-2j\beta} \|f\|_2^2$

■

Ahora estamos listos para probar un primer resultado.

Teorema 6.8. *Sea ν una medida de Borel sobre $\mathbb{H}_n$, radial, con soporte compacto, a valores reales (no necesariamente positiva) y de variación total finita . Entonces M_{dia}^{ν} es un operador acotado en $L^2(\mathbb{H}_n)$.*

Prueba. Para probar el teorema observamos que, teniendo en cuenta (6.12) y (6.13), solo debemos mostrar la acotación en $L^2(\mathbb{H}_n)$ del operador $\widetilde{M}_{dia}^{\nu}$ dado por

$$\widetilde{M}_{dia}^{\nu} f := \sum_{j=1}^{\infty} T_j^*(f), \qquad f \in S(\mathbb{H}_n)$$

Pero, por el Lema (6.7),

$$\left\|\widetilde{M}_{dia}^{\nu} f\right\|_2 \leq c \sum_{J=1}^{\infty} 2^{-j\beta} \|f\|_2 = c' \|f\|_2 .$$

■

Necesitaremos los siguientes teoremas de interpolación.

Teorema 6.9. *(Teorema de interpolación de Riesz Thorin, cf. [**Gra08**], Theorem 1.3.4). Sean (X,μ) e (Y,ν) dos espacios de medida. Sean $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ y sea T un operador lineal definido sobre $L^{p_0}(X,\mu) + L^{p_1}(X,\mu)$ tal que $T(L^{p_0}(X,\mu)) \subset L^{q_0}(Y,\nu)$, $T\left(L^{p1}(X,\mu)\right) \subset L^{q_1}(Y,\nu)$. Asúmase que existen dos constantes positivas A_0, A_1 tales que*

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{L^{q_0}(Y,\nu)} &\leq A_0 \|f\|_{L^{p_0}(X,\mu)} \text{ para } f \in L^{p_0}(X,\mu), \\ \|Tf\|_{L^{q_1}(Y,\nu)} &\leq A_1 \|f\|_{L^{p_1}(X,\mu)} \text{ para } f \in L^{p_1}(X,\mu). \end{aligned}$$

Para $0<\theta<1$ sea $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) = \theta\left(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{q_0}\right) + (1-\theta)\left(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q_1}\right)$. Entonces

$$\|Tf\|_{L^q(Y,\nu)} \leq A_0^{\theta} A_1^{1-\theta} \|f\|_{L^p(X,\mu)} \text{ para } f \in L^p(X,\mu).$$

Teorema 6.10. *(Caso particular del Teorema de interpolación de Marcinkiewicz, cf. [**Gra08**], Theorem 1.3.2). Sean* (X,μ) *e* (Y,ν) *dos espacios de medida. Sean* $1 \le p_0 < p_1 \le \infty$ *y sea* T *un operador definido sobre* $L^{p_0}(X,\mu) + L^{p_1}(X,\mu)$ *tal que* $T(L^{p_0}(X,\mu)) \subset L^{q_0}(Y,\nu)$, $T\left(L^{p1}(X,\mu)\right) \subset L^{q_1}(Y,\nu)$. *Asúmase que* T *es sublineal (i.e.,* $|T(f+g)| \le |T(f)| + |T(g)|$, $|T(cf)| = c|T(f)|$ *para* $f,g \in Dom(T)$, *y* $c \in \mathbb{C}$*). Asúmase también que existen dos constantes positivas* A_0, A_1 *tales que*

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{L^{q_0}(Y,\nu)} &\le A_0 \|f\|_{L^{p_0}(X,\mu)} \text{ para } f \in L^{p_0}(X,\mu), \\ \|Tf\|_{L^{q_1}(Y,\nu)} &\le A_1 \|f\|_{L^{p_1}(X,\mu)} \text{ para } f \in L^{p_1}(X,\mu). \end{aligned}$$

Para $0 < \theta < 1$ *sea* $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) = \theta\left(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{q_0}\right) + (1-\theta)\left(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q_1}\right)$. *Entonces existe una constante* $c(\theta, p_0, p_1)$ *dependiente solo de* $\theta, p_0 y p_1$ *tal que*

$$\|Tf\|_{L^q(Y,\nu)} \le A_0^\theta A_1^{1-\theta} \|f\|_{L^p(X,\mu)} \text{ para } f \in L^p(X,\mu).$$

Sea $N \in \mathbb{N}$. Para $1 \le r < \times$ (respectivamente $r = \infty$) sea $l^r_{-N,N}$ (resp. $l^\infty_{-N,N}$) el espacio de Banach de las sucesiones de números complejos con $2N+1$ términos $\{a_k\}_{-N \le k \le N}$ provisto con la norma $\left\|\{a_k\}_{-N\le k\le N}\right\|_{l^r_{-N,N}} := \left(\sum_{-N\le k\le N} |a_k|^r\right)^r$ (resp. $\left\|\{a_k\}_{-N\le k\le N}\right\|_{l^\infty_{-N,N}} := \sup_{-N\le k\le N} |a_k|$). Denotaremos con $\mathcal{M}\left(\mathbb{H}_n, \mathbb{C}^{2N+1}\right)$ al espacio de las funciones medibles definidas $\mathbb{H}_n$ con valores en $\mathbb{C}^{2N+1}$. Para $1 \le r \le \infty$ denotaremos con $L^p\left(\mathbb{H}_n, l^r_{-N,N}\right)$ al espacio de Banach de las funciones medibles $g : \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}^{2N+1}$ provisto con la norma $\|g\|_{L^p\left(\mathbb{H}_n, l^r_{-N,N}\right)} = \left\| \|g(z,t)\|_{l^r_{-N,N}} \right\|_{L^p\left(\mathbb{H}_{n,dzdt}\right)}$.

El siguiente teorema es un análogo vectorial del teorema de convexidad de Riesz y es un caso particular del Lema 2.2 de [**KeRu80**].

Teorema 6.11. *Sean* $1 < r_0, r_1 < \infty$ *y sean* $1 \le p < \infty$ *y supóngase que* T *es un operador sublineal* $T : L^p\left(\mathbb{H}_n, \mathbb{C}^{2N+1}\right) \to \mathcal{M}\left(\mathbb{H}_n, \mathbb{C}^{2N+1}\right)$. *Asúmase que existen dos constantes positivas* A_0, A_1 *tales que*

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{L^p\left(\mathbb{H}_n, l^{r_0}_{-N,N}\right)} &\le A_0 \|f\|_{L^p\left(\mathbb{H}_n, l^{r_0}_{-N,N}\right)} \text{ para } f \in L^p\left(\mathbb{H}_n, l^{r_0}_{-N,N}\right), \\ \|Tf\|_{L^p\left(\mathbb{H}_n, l^{r_1}_{-N,N}\right)} &\le A_1 \|f\|_{L^p\left(\mathbb{H}_n, l^{r_1}_{-N,N}\right)} \text{ para } f \in L^p\left(\mathbb{H}_n, l^{r_1}_{-N,N}\right). \end{aligned}$$

Para $0<\theta<1$ *sea* r *dado por* $\dfrac{1}{r}=\theta\dfrac{1}{r_0}+(1-\theta)\dfrac{1}{r_1}$. *Entonces*

$$\|Tf\|_{L^p\left(\mathbb{H}_n,l^r_{-N,N}\right)}\leq A_0^{\theta}A_1^{1-\theta}\|f\|_{L^p\left(\mathbb{H}_n,l^r_{-N,N}\right)} \text{ para } f\in L^p\left(\mathbb{H}_n,l^r_{-N,N}\right).$$

Sea $j\in\mathbb{N}$. y sea T_j^* definido por (6.17).

T_j^* es sublineal y no negativo, lo que implica $\left|T_j^*f-T_j^*g\right|\leq T_j^*(f-g)$ para $f,g\in S(\mathbb{H}_n)$. Utilizando esta propiedad, y la estimación dada por el Lema 6.7 y la densidad de $S(\mathbb{H}_n)$ en $L^p(\mathbb{H}_n)$ para $1\leq p<\infty$, es inmediato ver que T_j^* se extiende, de una única manera, a un operador sublineal (que seguiremos denotando con T_j^*) definido y continuo en $L^p(\mathbb{H}_n)$ para $1\leq p<\infty$ para el que contínua válida la estimación dada por el Lema 6.7,

Probaremos ahora el Teorema 6.3, que enunciamos nuevamente a continuación:

Teorema *Sea* ν *una medida de Borel sobre* $\mathbb{H}_n$*, radial, con soporte compacto, positiva y finita. Asúmase también que existen* $\beta>0$ *y una constante positiva* c *tales que para* $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$ *y* $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$,

$$|\widehat{\nu}(\lambda,k)|\leq c(|\lambda|(2k+n))^{-\beta}.$$

y sea M^{ν}_{dia} *el operador maximal definido, para* $f\in S(\mathbb{H}_n)$, *por*

$$M^{\nu}_{dia}f=\sup_{j\in\mathbb{Z}}\left(|f*\nu_{2^j}|\right).$$

Entonces para $1<p<\infty$ *existe una constante positiva* c *tal que* $\|M^{\nu}_{dia}f\|_p\leq c\|f\|_p$ *para toda* $f\in S(\mathbb{H}_n)$.

Prueba. Sea p tal que $1<p<\infty$. Para $N\in\mathbb{N}$ y $f\in S(\mathbb{H}_n)$ sea $V_N(f):=\sup\limits_{-N\leq k\leq N}|T_{2^k}f|$. Entonces $\{V_N(f)\}_{N\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona no decreciente de funciones medibles y no negativas y $M^{\nu}_{dia}(f)=\lim\limits_{N\to\infty}V_N(f)$. Luego $\|M^{\nu}_{dia}(f)\|_p=\lim\limits_{N\to\infty}\|V_N(f)\|_p$. Entonces para probar el teorema basta con ver que para cada $N\in\mathbb{N}$ existe una constante positiva $c=c(p)$ independiente de N tal que para toda $f\in S(\mathbb{H}_n)$

$$\left\|\sup_{-N\leq k\leq N}|T_{2^k}f|\right\|_p\leq c(p)\|f\|_p.$$

Para $k \in \mathbb{Z}$, T_{2^k} es acotado en $L^p(\mathbb{H}_n)$ (cf. (6.9)) entonces para $N \in \mathbb{N}$ existe una constante positiva $c(N,p)$ (eventualmente dependiente de N y p) con la propiedad de que para toda $f \in S(\mathbb{H}_n)$

$$\left\| \sup_{-N \le k \le N} |T_{2^k} f| \right\|_p \le c(N,p) \|f\|_p .$$

y como el ínfimo de una familia de constantes con esta propiedad también la tiene, es claro que hay una menor constante $A(N,p)$ con esta propiedad. La prueba del teorema se reduce entonces a mostrar que $A(N,p) \le C$ con C independiente de N.

Por (6.12)

$$\sup_{-N \le k \le N} |T_{2^k} f| \le \sup_{-N \le k \le N} \left(\left| f * \nu^{2^k,0} \right| \right) + \sum_{j=1}^{\infty} \sup_{-N \le k \le N} T_{j,k} f$$

y por (6.13)

$$\left\| \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left| f * \nu^{2^k,0} \right| \right) \right\|_p \le c' \|f\|_p .$$

con c' una constante independiente de f (y de j, k y N). Entonces

$$\begin{aligned} \left\| \sup_{-N \le k \le N} |T_{2^k} f| \right\|_p &\le c' \|f\|_p + \sum_{j \ge 0} \left\| \sup_{-N \le k \le N} |T_{j,k} f| \right\|_p \\ &= c' \|f\|_p + \sum_{j \ge 0} \left\| \sup_{-N \le k \le N} |T_{j,k}(f * K_{2^{k-j}})| \right\|_p \\ &\le c' \|f\|_p + \sum_{j \ge 0} \left\| \left(\sum_{-N \le k \le N} |T_{j,k}(f * K_{2^{k-j}})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \end{aligned} \tag{6.18}$$

donde en la última igualdad hemos utilizado (6.15).

Si $\{g_k\}_{-N \le k \le N}$ es una sucesión de funciones con $2N+1$ términos con cada $g_k \in L^p(\mathbb{H}_n)$ definimos $T\left(\{g_k\}_{-N \le k \le N}\right) := \{T_{j,k} g_k\}_{-N \le k \le N}$.

Consideremos el caso $1 < p < 2$. Por (ii) del Lema 6.6 existe una constante c'' independiente de j, k, N y de la sucesión $\{g_k\}_{-N \le k \le N}$ tal que

$$\begin{aligned} \left\| \sup_{-N \le k \le N} |T_{j,k}(g_k)| \right\|_p &\le c'' \left\| \sup_{-N \le k \le N} S_{2^k}((M_3 o M_{sing})|g_k|) \right\|_p \\ &= c'' \left\| \sup_{-N \le k \le N} T_{2^k}((M_3 o M_{sing})|g_k|) \right\|_p \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos utilizado que, por ser ν positiva, $S_k = T_k$.Entonces

$$\begin{aligned}\left\|\sup_{-N\leq k\leq N}\left|T_{j,k}\left(g_k\right)\right|\right\|_p &\leq c''\left\|\sup_{-N\leq k\leq N}T_{2^k}\left(\sup_{-N\leq l\leq N}\left(\left(M_3 o M_{sing}\right)\left|g_l\right|\right)\right)\right\|_p \\ &\leq c''A\left(N,p\right)\left\|\sup_{-N\leq l\leq N}\left(\left(M_3 o M_{sing}\right)\left|g_l\right|\right)\right\|_p \\ &\leq c''A\left(N,p\right)\left\|\left(M_3 o M_{sing}\right)\left(\sup_{-N\leq l\leq N}\left|g_l\right|\right)\right\|_p\end{aligned}$$

la última desigualdad porque $M_3 o M_{sing}$ es un operador con la propiedad de que si $0\leq h\leq\widetilde{h}$ entonces $0\leq M_3 o M_{sing}\left(h\right)\leq M_3 o M_{sing}\left(\widetilde{h}\right)$. Como $M_3 o M_{sing}$ es acotado en $L^p\left(\mathbb{H}_n\right)$ tenemos entonces que

$$\left\|\sup_{-N\leq k\leq N}\left|T_{j,k}\left(g_k\right)\right|\right\|_p\leq c''c'''A\left(N,p\right)\left\|\sup_{-N\leq l\leq N}\left|g_l\right|\right\|_p \tag{6.19}$$

con c'', c''' independientes de j, k, N y de la sucesión $\left\{g_k\right\}_{-N\leq k\leq N}\cdot\cdot$

También, por el lema (6.7), $T_{j,k}$ es acotado en $L^2(\mathbb{H}_n)$ con

$$\left\|T_{j,k}\right\|_{L^2(\mathbb{H}_n),L^2(\mathbb{H}_n)}\leq c2^{-j\beta},$$

siendo c independiente de j y k. Y, por (i) del Lema 6.6,

$$\left\|T_{j,k}\right\|_{L^1(\mathbb{H}_n),L^1(\mathbb{H}_n)}\leq c$$

con c independiente de j, k. Recordando que $1<p<2$ el Teorema de interpolación de Riesz Thorin nos da que $\left\|T_{j,k}\right\|_{L^p(\mathbb{H}_n),L^p(\mathbb{H}_n)}\leq c_4 2^{-\frac{2j\beta}{p'}}$ con c_4 constante independiente de j y k y con $\dfrac{1}{p'}=1-\dfrac{1}{p}$. Luego

$$\begin{aligned}\left\|\left(\sum_{-N\leq k\leq N}\left|T_{j,k}\left(g_k\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\|_p &= \left(\int\sum_{-N\leq k\leq N}\left|T_{j,k}\left(g_k\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{-N\leq k\leq N}\left\|T_{j,k}\left(g_k\right)\right\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq c_4 2^{-\frac{2j\beta}{p'}}\left(\sum_{-N\leq k\leq N}\left\|g_k\right\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned} \tag{6.20}$$

Ahora $\frac{1}{2} = \theta\frac{1}{p} + (1-\theta)\,\frac{1}{\infty}$ con $\theta = \frac{p}{2}$, y por (6.19) y (6.20),

$$\begin{aligned}
\left\|T\left(\{g_k\}_{-N\leq k\leq N}\right)\right\|_{L^p\left(\mathbb{H}_n, l^\infty_{-N,N}\right)} &\leq c''c'''A\,(N,p)\left\|\{g_k\}_{-N\leq k\leq N}\right\|_{L^p\left(\mathbb{H}_n, l^\infty_{-N,N}\right)}, \\
\left\|T\left(\{g_k\}_{-N\leq k\leq N}\right)\right\|_{L^p\left(\mathbb{H}_n, l^p_{-N,N}\right)} &\leq c''''c_5 2^{-\frac{2j\beta}{p'}}\left\|\{g_k\}_{-N\leq k\leq N}\right\|_{L^p\left(\mathbb{H}_n, l^p_{-N,N}\right)},
\end{aligned}$$

Entonces, por el teorema 6.11,

$$\begin{aligned}
&\left\|T\left(\{g_k\}_{-N\leq k\leq N}\right)\right\|_{L^p\left(\mathbb{H}_n, l^2_{-N,N}\right)} \\
\leq\;& c''c'''2^{-\frac{j\beta p}{p'}}\left(A\,(N,p)\right)^{1-\frac{p}{2}}\left\|\{g_k\}_{-N\leq k\leq N}\right\|_{L^p\left(\mathbb{H}_n, l^2_{-N,N}\right)}
\end{aligned}$$

Tomando $\{g_k\}_{-N\leq k\leq N} = \{f * K_{2^{k-j}}\}_{-N\leq k\leq N}$ encontramos que

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(\sum_{-N\leq k\leq N}\left|T_{j,k}\left(f * K_{2^{k-j}}\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p \qquad (6.21)\\
\leq\;& c2^{-j\beta(p-1)-\frac{j\beta p}{p'}}\left(A\,(N,p)\right)^{1-\frac{p}{2}}\left\|\left(\sum_{-N\leq k\leq N}\left|f * K_{2^{k-j}}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p
\end{aligned}$$

la última desigualdad por las desigualdades de Litlewood Paley del Teorema 2.37. Combinando (6.18) con (6.21) obtenemos

$$\left\|\sup_{-N\leq k\leq N}\left|T_{2^k}f\right|\right\|_p \leq c\left(1 + \left(A\,(N,p)\right)^{1-\frac{p}{2}}\right)\|f\|_p$$

con c independiente de N y f. Por la propiedad minimal de la constante $A\,(N,p)$ concluímos que $A\,(N,p) \leq c\left(1 + \left(A\,(N,p)\right)^{1-\frac{p}{2}}\right)$. Si $A\,(N,p) \leq 1$ no hay nada que probar. Si $A\,(N,p) > 1$ entonces tenemos $A\,(N,p) \leq c\left(1 + \left(A\,(N,p)\right)^{1-\frac{p}{2}}\right) \leq 2cA\,(N,p)^{1-\frac{p}{2}}$ lo que nos da $A\,(N,p) \leq (2c)^{\frac{2}{p}}$, i.e., $A\,(N,p) \leq C$ con C independiente de N. Entonces el teorema es valido en el caso $1 < p \leq 2$.

Como $\left\|\sup_{-N\leq k\leq N}\left|T_{2^k}f\right|\right\|_\infty \leq \nu\left(\mathbb{H}_n\right)\|f\|_\infty$ y teniendo en cuenta el resultado para $1 < p \leq 2$, el teorema de interpolación de Marcinkiewicz nos da que $\left\|\sup_{-N\leq k\leq N}\left|T_{2^k}f\right|\right\|_q \leq c\,\|f\|_q$ para todo $q \geq 2$ lo que termina la prueba del Teorema.

■

Corolario 6.12. *Del teorema 6.1 se obtiene que* $\lim_{j\to-\infty}(f*(\sigma\otimes\delta)_{2^j})(z,t) = f(z,t)$ $pp(z,t)$ *para toda* $f\in L^p(\mathbb{H}_n)$ *con* $p>1$.

Pues. Es claro que si $\|g\|_p = 0$ entonces $g(z,t) = (0,0)$ $pp(z,t)$, por lo que la prueba será mostrar que

$$\|\limsup_{j\to-\infty}(f*(\sigma\otimes\delta)_{2^j})(z,t) - f(z,t)\|_p = 0.$$

Sea primero $F\in S(\mathbb{H}_n)$ tal que

$$\|f-F\|_p < \epsilon,$$

Entonces

$$\begin{aligned} &\|\limsup_{j\to-\infty}(f*(\sigma\otimes\delta)_{2^j})(z,t) - f(z,t)\|_p \\ &\leq \|\limsup_{j\to-\infty}(f-F)*(\sigma\otimes\delta)_{2^j}\|_p + \|\limsup_{j\to-\infty}(F*(\sigma\otimes\delta)_{2^j}) - F\|_p + \|F-f\|_p \\ &\leq \|\sup_{j\in\mathbb{Z}}(|f-F|*(\sigma\otimes\delta)_{2^j})\|_p + 0 + \epsilon \leq \epsilon + c\|f-F\|_p \leq \epsilon(1+c). \end{aligned}$$

Luego

$$\|\limsup_{j\to-\infty}(f*(\sigma\otimes\delta)_{2^j})(z,t) - f(z,t)\|_p = 0,$$

entonces $\lim_{j\to-\infty}(f*(\sigma\otimes\delta)_{2^j})(z,t) = f(z,t)$ $pp(z,t)$

■

7 Operadores maximales asociados a hipersuperficies de revolución en el grupo de Heisenberg $\mathbb{H}_n$.

En esta capítulo nuestro propópsito es probar la acotación en $L^p(\mathbb{H}_n)$ de operadores maximales asociados a algunas hipersuperficies de revolución Σ en $\mathbb{H}_n$ de la forma $\Sigma = \{(z,t) \in \mathbb{H}_n : t = \Gamma(z)\}$ donde $\Gamma : D \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ es una función medible y radial con dominio $D = \mathbb{C}^n$ o D una bola centrada en el origen. Resultados análogo en $\mathbb{R}^n$ fué obtenido por Hung Viet Le en [**Hu00**] (ver también [**Hu00(1)**], el cuál sigue ideas de Duoandikoetxea y Rucio de Francia en [**DuoRu86**]. Parte de cuyos argumentos adaptaremos a nuestra situación).

Para $r > 0$ sea $B_r(0) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < r\}$ y sea Γ una función del tipo descripto arriba. Sea $\Gamma_0 : D_0 \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $\Gamma(z) = \Gamma_0(|z|)$ para $z \in D$, donde el dominio $D_0 = [0,\infty)$ si $D = \mathbb{C}^n$ o $D_0 = [0,R)$ si $D = B_R(0)$. Para $g \in L^p(\mathbb{R})$, sea M_0 el operador maximal unidimensional

$$M_0 g(x) \; : \; = \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r(0)|} \int_{B_r(0)} |g(x - \Gamma_0(|z|))| \, dz \text{ si } D = \mathbb{C}^n, \tag{7.1}$$

$$M_0 g(x) \; : \; = \sup_{0<r<R} \frac{1}{|B_r(0)|} \int_{B_r(0)} |g(x - \Gamma_0(s))| \, ds \text{ si } D = B_R(0), \tag{7.2}$$

y para $f \in S(\mathbb{H}_n)$, $(z,t) \in \mathbb{H}_n$, sea

$$M_\Gamma f(z,t) \; : \; = \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r(0)|} \int_{B_r(0)} \left| f\left((z,t)(w,\Gamma(w))^{-1}\right) \right| dw \text{ si } D = \mathbb{C}^n, \tag{7.3}$$

$$M_\Gamma f(z,t) \; : \; = \sup_{0<r<R} \frac{1}{|B_r(0)|} \int_{B_r(0)} \left| f\left((z,t)(w,\Gamma(w))^{-1}\right) \right| dw \text{ si } D = B_R(0) \tag{7.4}$$

En este capítulo probaremos el siguiente

Teorema 7.1. *Sea $\Gamma : D \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ una función medible y radial con dominio D todo $\mathbb{C}^n$ o una bola centrada en el origen y sea $\Gamma_0 : D_0 \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $\Gamma(z) = \Gamma_0(|z|)$ para $z \in D$, con $D_0 = [0,\infty)$ si $D = \mathbb{C}^n$ o $D_0 = [0,R)$ si $D = B_R(0)$.*

Sea M_0 el operador definido por (7.1) o por (7.2) según cual sea el dominio de Γ. Si M_0 es acotado en $L^p(\mathbb{R})$ para $1 < p < \infty$ entonces para $1 < p < \infty$ existe una constante positiva c tal que $\|M_\Gamma(f)\|_p \leq c\|f\|_p$ para toda $f \in S(\mathbb{H}_n)$.

La prueba del Teorema 7.1 será dada al final del capítulo, luego de algunos resultados preliminares.

Observación 7.2. *Como en el corolario 6.12 el teorema 7.1 implica que si M_0 es acotado en $L^p(\mathbb{R})$ para todo $p > 1$ y si $f \in L^q(\mathbb{H}_n)$ para algún $q > 1$ entonces*

$$f(z,t) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{|B_r(0)|} \int\limits_{B_r(0)} \left| f\left((z,t)(w,\Gamma(w))^{-1}\right)\right| dw \qquad p.p.(z,t) \in \mathbb{H}_n.$$

■

El teorema 7.1 adquiere utilidad gracias a los siguientes resultados, probados en [Hu00] (cf. la prueba de los Corolarios 1 y 2 del capítulo 2 en [Hu00], p. 13-14)

Lema 7.3. *(i) Sea $\widetilde{\Gamma}_0 : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ y sea $\widetilde{M_0}$ el operador definido por*

$$\widetilde{M_0} g(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{r} \int_0^r \left| g\left(x - \widetilde{\Gamma}_0(t)\right)\right| dt. \tag{7.5}$$

Si $\widetilde{\Gamma}_0 \in C^1[0,\infty)$ es estrictamente creciente o estrictamente decreciente en $[0,\infty)$ y $\widetilde{\Gamma}_0'$ es creciente en $(0,\infty)$ entonces $\widetilde{M_0}$ es acotado en $L^p(\mathbb{R})$ para todo $p > 1$.
(ii) La misma conclusión vale si $\widetilde{M_0}$ es definido por

$$\widetilde{M_0} g(x) := \sup_{0<r<R} \frac{1}{r} \int_0^r \left| g\left(x - \widetilde{\Gamma}_0(t)\right)\right| dt$$

y $\widetilde{\Gamma}_0 : [0,R) \to \mathbb{R}$ satisface que $\widetilde{\Gamma}_0 \in C^1[0,R)$ es una función estrictamente creciente en $[0,R)$ y que su derivada $\widetilde{\Gamma}_0'$ es creciente en $(0,R)$.

Lema 7.4. *Sea $\widetilde{\Gamma_0} : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ y sea $\widetilde{M_0}$ el operador definido por (7.5). Supóngase que $\widetilde{\Gamma}_0$ satisface: $\widetilde{\Gamma}_0 \in C^1[0,\infty)$, $\widetilde{\Gamma}_0(0) = 0$, $\widetilde{\Gamma}_0$ es estrictamente creciente en $[0,\infty)$, $\widetilde{\Gamma}'$ es decreciente en $(0,\infty)$ y que la función $s \to s^{-\alpha}\widetilde{\Gamma}_0(s)$ es creciente en $(0,\infty)$ para algún $\alpha > 0$. Entonces $\widetilde{M_0}$ es acotado en $L^p(\mathbb{R})$ para todo $p > 1$.*

Observación 7.5. *Sean Sea $\widetilde{\Gamma_0}$ y $\widetilde{M_0}$ como en alguno de los dos lemas anteriores y supongamos que $D = \mathbb{C}^n$. Entonces si tomamos $\Gamma(w) = \widetilde{\Gamma_0}(|w|)$ tenemos que M_Γ es acotado en $L^p(\mathbb{H}_n)$ para $p > 1$.*

Prueba. Sean Γ_0, M_0 como en la introducción del capítulo y supongamos que $D = \mathbb{C}^n$. Entonces, pasando a coordenadas polares,

$$\begin{aligned}
M_0 g(x) &= \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r(0)|} \int_{B_r(0)} |g(x - \Gamma_0(|z|))| \, dz \\
&= \sup_{r>0} \frac{|S^{2n-1}|}{\omega_{2n} r^{2n}} \int_0^r |g(x - \Gamma_0(s))| \, s^{2n-1} ds \\
&= \sup_{r>0} \frac{|S^{2n-1}|}{2n\omega_{2n} r^{2n}} \int_0^{r^{2n}} \left| g\left(x - \Gamma_0\left(\tau^{\frac{1}{2n}}\right)\right)\right| d\tau \\
&= c_n \sup_{r>0} \frac{1}{r} \int_0^r \left| g\left(x - \Gamma_0\left(\tau^{\frac{1}{2n}}\right)\right)\right| d\tau \\
&= c_n \sup_{r>0} \frac{1}{r} \int_0^r \left| g\left(x - \widetilde{\Gamma}_0(\tau)\right)\right| d\tau
\end{aligned}$$

con $\widetilde{\Gamma}_0(\tau) := \Gamma_0\left(\tau^{\frac{1}{2n}}\right)$ y donde c_n es una constante dependiente solo de n. Luego si la función $\widetilde{\Gamma}_0$ así definida satisface las hipótesis del lema 7.3 o del lema 7.4 entonces, por el Teorema 7.1, M_Γ es acotado en $L^p(\mathbb{H}_n)$ para $p > 1$.

■

Ejemplo. Si $\Gamma : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ es la función dada por

$$\Gamma(z) = |z|^q$$

con $q \geq 2n$ entonces el correspondiente operador maximal M_0 es acotado en $L^p(\mathbb{R})$ para todo $p > 1$ y por lo tanto, por el Teorema 7.1, M_Γ es acotado en $L^p(\mathbb{H}_n)$ para todo $p > 1$.

Si σ es una medida de Borel regular sobre $\mathbb{H}_n$ (en particular si σ es una medida de Borel a valores reales y de variación total finita) entonces $f * \sigma$ esta bien definida para $f \in C_c(\mathbb{H}_n)$ por la expresión $(f * \mu)(z,t) = \int_{\mathbb{H}_n} f\left((z,t)(w,s)^{-1}\right) d\sigma(z,t)$. Si σ es de variación total finita (en particular si σ es positiva y finita) entonces $\|f * \sigma\|_p \leq |\sigma|(\mathbb{H}_n)\|f\|_p$ para $f \in C_c(\mathbb{H}_n)$, $1 \leq p \leq \infty$. Como $C_c(\mathbb{H}_n)$ es denso en $L^p(\mathbb{H}_n)$ para $1 \leq p < \infty$, se sigue que, para $1 \leq p < \infty$, el operador $f \to f * \sigma$ admite una única extensión contínua a $L^p(\mathbb{H}_n)$. Definimos entonces $f * \sigma$ para f arbitraria en $L^p(\mathbb{H}_n)$ como el valor en f de esta extensión. De igual modo $\sigma * f$ puede definirse para toda $f \in L^p(\mathbb{H}_n)$ (con $\sigma * f$ dada inicialmente para $f \in C_c(\mathbb{H}_n)$ por $(\sigma * f)(z,t) = \int_{\mathbb{H}_n} f\left((w,s)^{-1}(z,t)\right) d\sigma(z,t)$). Por supuesto, si σ fuese absolutamente contínua respecto de la medida de Lebesgue, la definición de $f * \sigma$ (y de $\sigma * f$) para $f \in L^p(\mathbb{H}_n)$ a través de las extensiones mencionadas es innecesaria.

Recordemos el hecho bien conocido de que si μ es una medida de Borel positiva y si f, g son medibles y no negativas entonces

$$\int_{\mathbb{H}_n} (g * \mu) f = \int_{\mathbb{H}_n} g^{\vee}(\mu * f^{\vee}), \tag{7.6}$$

$$\int_{\mathbb{H}_n} (\mu * g) f = \int_{\mathbb{H}_n} g^{\vee}(f^{\vee} * \mu). \tag{7.7}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{H}_n} (g*\mu) f &= \int_{\mathbb{H}_n} (g*\mu)(z,t) f(z,t)\, dzdt \\
&= \int_{\mathbb{H}_n} \left(\int_{\mathbb{H}_n} g\left((z,t)(w,s)^{-1}\right) d\mu(w,s) \right) f(z,t)\, dzdt \\
&= \int_{\mathbb{H}_n} \left(\int_{\mathbb{H}_n} g\left((z,t)(w,s)^{-1}\right) f(z,t)\, dzdt \right) d\mu(w,s) \\
&= \int_{\mathbb{H}_n} \left(\int_{\mathbb{H}_n} g\left((\widetilde{z},\widetilde{t})\right) f\left((\widetilde{z},\widetilde{t})(w,s)\right) d\widetilde{z}d\widetilde{t} \right) d\mu(w,s) \\
&= \int_{\mathbb{H}_n} \left(\int_{\mathbb{H}_n} g\left((\widetilde{z},\widetilde{t})\right) f^{\vee}\left((w,s)^{-1}(\widetilde{z},\widetilde{t})^{-1}\right) d\widetilde{z}d\widetilde{t} \right) d\mu(w,s) \\
&= \int_{\mathbb{H}_n} g\left((\widetilde{z},\widetilde{t})\right) \left(\int_{\mathbb{H}_n} f^{\vee}\left((w,s)^{-1}(\widetilde{z},\widetilde{t})^{-1}\right) d\mu(w,s) \right) d\widetilde{z}d\widetilde{t} \\
&= \int_{\mathbb{H}_n} g\left((\widetilde{z},\widetilde{t})\right) (\mu * f^{\vee})\left((\widetilde{z},\widetilde{t})^{-1}\right) d\widetilde{z}d\widetilde{t} \\
&= \int_{\mathbb{H}_n} g^{\vee}(\mu * f^{\vee})
\end{aligned}$$

lo que nos da (7.6). La prueba de (7.7) es similar.

Lema 7.6. *Sea $\{\sigma_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ una sucesión de medidas de Borel a valores reales (no necesariamente positivas) sobre $\mathbb{H}_n$ y con variación total $|\sigma_j|(\mathbb{H}_n) \leq 1$. Sea $1 < q < \infty$.*
(i) Si existe una constante positiva A tal que $\left\| \sup_{j\in\mathbb{Z}} |\sigma_j| * f \right\|_q \leq A \|f\|_q$ para toda $f \in L^q(\mathbb{H}_n)$ entonces para p tal que $\left| \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right| \leq \frac{1}{2q}$ se tiene que existe una constante positiva c tal que para toda sucesión de funciones $\{g_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ en $L^p(\mathbb{H}_n)$,

$$\left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |g_j * \sigma_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq c \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |g_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p . \tag{7.8}$$

(ii) Si existe una constante positiva A tal que $\left\| \sup_{j\in\mathbb{Z}} f * |\sigma_j| \right\|_q \leq A \|f\|_q$ para toda

$f \in L^q(\mathbb{H}_n)$ entonces para p tal que $\left| \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right| \leq \frac{1}{2q}$ se tiene que existe una constante positiva c tal que para toda sucesión de funciones $\{g_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ en $L^p(\mathbb{H}_n)$,

$$\left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\sigma_j * g_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq c \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |g_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p . \tag{7.9}$$

Prueba. Para probar (i) consideremos primero el caso en que $\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right| = \frac{1}{2q}$ y $p > 2$. Tenemos $\frac{1}{2q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$ y entonces $q = \left(\frac{p}{2}\right)'$. Sea $N \in \mathbb{N}$, entonces $\left(\sum_{-N\leq j\leq N} |g_j * \sigma_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{-N\leq j\leq N} |g_j * \sigma_j| \in L^p(\mathbb{H}_n)$. Luego existe $f \in L^{p'}(\mathbb{H}_n)$, con $f \geq 0$ y $\|f\|_{p'} = 1$ tal que

$$\left\|\left(\sum_{-N\leq j\leq N} |g_j * \sigma_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p = \int_{\mathbb{H}_n}\left(\sum_{-N\leq j\leq N} |g_j * \sigma_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} f.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\left\|\left(\sum_j |g_j * \sigma_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p^2 &= \left(\int_{\mathbb{H}_n}\left(\sum_{-N\leq j\leq N} |g_j * \sigma_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} f^{1-p'} f^{p'}\right)^2 \\
&\leq \int_{\mathbb{H}_n}\left(\sum_{-N\leq j\leq N} |g_j * \sigma_j|^2\right) f^{2(1-p')} f^{p'} \\
&= \int_{\mathbb{H}_n}\left(\sum_{-N\leq j\leq N} |g_j * \sigma_j|^2\right) f^{2-p'},
\end{aligned}$$

la última desigualdad viene dada por Jensen utilizada con la medida $f^{p'}(z,t)\, dzdt$ y la función convexa $\Phi(s) = s^2$. Ahora, $(2-p')\,q = (2-p')\left(\frac{p}{2}\right)' = p'$ entonces $f^{2-p'} \in L^q(\mathbb{H}_n)$. Ahora bien,

$$\begin{aligned}
& |(g_j * \sigma_j)(z,t)|^2 \\
= & \left|\int_{\mathbb{H}_n} g_j\left((z,t)(w,s)^{-1}\right) d\sigma_j(w,s)\right|^2 \leq \left(\int_{\mathbb{H}_n} \left|g_j\left((z,t)(w,s)^{-1}\right)\right| d|\sigma_j|(w,s)\right)^2 \\
= & \left(|\sigma_j(\mathbb{H}_n)|\right)^2 \left(\int_{\mathbb{H}_n} \left|g_j\left((z,t)(w,s)^{-1}\right)\right| \frac{1}{|\sigma_j(\mathbb{H}_n)|} d|\sigma_j|(w,s)\right)^2 \\
\leq & \left(|\sigma_j(\mathbb{H}_n)|\right)^2 \int_{\mathbb{H}_n} \left|g_j\left((z,t)(w,s)^{-1}\right)\right|^2 \frac{1}{|\sigma_j(\mathbb{H}_n)|} d|\sigma_j|(w,s) \\
\leq & \left(|g_j|^2 * |\sigma_j|\right)(z,t)
\end{aligned}$$

donde hemos usado que $|\sigma_j(\mathbb{H}_n)| \leq 1$ y la desigualdad de Jensen con la medida

$\dfrac{1}{|\sigma_j(\mathbb{H}_n)|} d|\sigma_j|$ y con la función convexa $\Phi(s) = s^2$. Entonces, por (7.6),

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{H}_n} \left(\sum_{-N \le j \le N} |g_j * \sigma_j|^2 \right) f^{2-p'} &\le \sum_{-N \le j \le N} \int_{\mathbb{H}_n} \left(|g_j|^2 * |\sigma_j| \right) f^{2-p'} \\
&= \sum_{-N \le j \le N} \int_{\mathbb{H}_n} \left|(g_j)^{\vee}\right|^2 \left(|\sigma_j| * (f^{\vee})^{2-p'} \right) \\
&\le \int_{\mathbb{H}_n} \sum_{-N \le j \le N} \left|(g_j)^{\vee}\right|^2 \sup_{l \in \mathbb{Z}} \left(|\sigma_l| * (f^{\vee})^{2-p'} \right) \\
&\le \left\| \sum_{-N \le j \le N} \left|(g_j)^{\vee}\right|^2 \right\|_{\frac{p}{2}} \left\| \sup_{l \in \mathbb{Z}} \left(|\sigma_l| * (f^{\vee})^{2-p'} \right) \right\|_q \\
&= \left\| \left(\sum_{-N \le j \le N} g_j^{\vee 2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p^2 \left\| \sup_{l \in \mathbb{Z}} \left(|\sigma_l| * (f^{\vee})^{2-p'} \right) \right\|_q,
\end{aligned}$$

la última desigualdad por Hölder (y porque $q = \left(\frac{p}{2}\right)'$). Ahora bien, por la hipótesis del teorema, $\left\| \sup_{l \in \mathbb{Z}} \left(|\sigma_l| * (f^{\vee})^{2-p'} \right) \right\|_q \le A \left\| (f^{\vee})^{2-p'} \right\|_q = A \|f\|_{p'}^{2-p'} = A$. Entonces

$$\left\| \left(\sum_{-N \le j \le N} |g_j * \sigma_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p^2 \le A \left\| \left(\sum_{-N \le j \le N} |g_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p^2,$$

y haciendo tender N a ∞ obtenemos (7.8) para el caso en que $\left| \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right| = \frac{1}{2q}$ y $p > 2$.

Probemos ahora (i) para el caso en que $\left| \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right| = \frac{1}{2q}$ y $p < 2$.

Sea $T : L^p(l^2) \to L^p(l^2)$ el operador definido por $T\left(\{g_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \right) = \{g_j * \sigma_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$. Notemos que $\left(L^p(l^2) \right)' = L^{p'}(l^2)$. Para $\{g_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \in L^p(l^2)$ y $\{f_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \in L^{p'}(l^2)$ tenemos

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{H}_n} (g_j * \sigma_j) \overline{f_j} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{H}_n} g_j^{\vee} \left(\sigma_j * \overline{f_j}^{\vee} \right) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{H}_n} g_j^{\vee} \overline{\sigma_j * f_j^{\vee}} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{H}_n} g_j \overline{\left(\sigma_j * f_j^{\vee} \right)^{\vee}}$$

y entonces el adjunto de T está dado por

$$T^* \left(\{f_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \right) = \left\{ \left(\sigma_j * f_j^{\vee} \right)^{\vee} \right\}_{j \in \mathbb{Z}}$$

y T es acotado en $L^p(l^2)$ si y solo si T^* es acotado en $L^{p'}(l^2)$.

Pero $\frac{1}{2q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{p'} = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{p'} \right|$ y $p' > 2$ entonces por el caso anterior $\left\| T^* \left(\{f_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \right) \right\|_{L^{p'}(l^2)} \le c \left\| \{f_j^{\vee}\}_{j \in \mathbb{Z}} \right\|_{L^{p'}(l^2)} = c \left\| \{f_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \right\|_{L^{p'}(l^2)}$. Entonces T es acotado en $L^p\left(l^2\right)$, i.e., (7.8) vale para el caso en que $\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right| = \frac{1}{2q}$. Ahora, el Teorema de interpolación de Marcinkiewicz para operadores entre espacios de funciones a valores vectoriales 6.11 nos da la estimación (7.8) para todos los p tales que $\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2q}$.

La prueba de (ii) es completamente similar.

■

Teorema 7.7. *Sea $\{\sigma_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ una sucesión de medidas de Borel a valores reales sobre $\mathbb{H}_n$ y con cada σ_j de variación total finita. Asúmase que existe $\alpha > 0$ tal que, para $j \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ y $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$,*

$$|\widehat{\sigma_j}(\lambda,k)| \leq c\min\left(\left(2^{2j}|\lambda|(2k+n)\right)^{\alpha}, \left(2^{2j}|\lambda|(2k+n)\right)^{-\alpha}\right).$$

y que $|\sigma_j|(\mathbb{H}_n) \leq 1$ (con $|\sigma_j| := \sigma_j^+ + \sigma_j^-$). Para $f \in \bigcup_{1<s<\infty} L^s(\mathbb{H}_n)$ sean

$$g_1(f) := \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |f*\sigma_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad g_2(f) := \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\sigma_j * f|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{7.10}$$

Entonces

(i) Los operadores g_1 y g_2 son acotados de $L^2(\mathbb{H}_n)$ en $L^2(\mathbb{H}_n)$.

(ii) Si $1<q<\infty$ y el operador $f \to \sup_{j\in\mathbb{Z}}(f*|\sigma_j|)$ es acotado en $L^q(\mathbb{H}_n)$ entonces el operador $g_2(f)$ es acotado en $L^p(\mathbb{H}_n)$ para $\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right| < \frac{1}{2q}$.

(iii) Si $1<q<\infty$ y el operador $f \to \sup_{j\in\mathbb{Z}}(|\sigma_j|*f)$ es acotado en $L^q(\mathbb{H}_n)$ entonces el operador $g_1(f)$ es acotado en $L^p(\mathbb{H}_n)$ para $\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right| < \frac{1}{2q}$

Prueba. Sea $\phi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ una función no negativa, con $sop(\phi) \subset \left(\frac{1}{2},2\right)$ y tal que $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \phi\left(2^{2j}\tau^2\right) = 1$ para todo $\tau \neq 0$, y sea p tal que $\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right| = \frac{1}{2q}$. Para $l \in \mathbb{Z}$ sea K_{2^l} definido por (2.6), i.e.,

$$K_{2^j}(z,t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1} \sum_{k\geq 0} \int_{\mathbb{R}} \varphi(2^{2j}(2k+n)|\lambda|)\mathbf{e}_{\lambda,k}(z,t)|\lambda|^n d\lambda.$$

. Entonces para $s \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\|g_2(f)\|_s &= \left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\sigma_j * f|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_s = \left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left|\sigma_j * \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} K_{2^{l+j}}\right) * f\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_s \qquad (7.11)\\
&= \left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left|\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} \sigma_j * K_{2^{l+j}} * f\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_s \\
&= \left\|\left\{\sum_{l\in\mathbb{Z}} \sigma_j * K_{2^{l+j}} * f\right\}_{j\in\mathbb{Z}}\right\|_{L^s(l^2)} \leq \sum_{l\in\mathbb{Z}} \left\|\{\sigma_j * K_{2^{l+j}} * f\}_{j\in\mathbb{Z}}\right\|_{L^s(l^2)} \\
&= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \left\|\left(\left|\sum_{j\in\mathbb{Z}} \sigma_j * K_{2^{l+j}} * f\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_s = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \|T_l(f)\|_s
\end{aligned}$$

donde, para $l \in \mathbb{Z}$,

$$T_l(f) := \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\sigma_j * K_{2^{l+j}} * f|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Probemos (i) para el operador g_2. Por la identidad de Plancherel y teniendo en cuenta la definición de $K_{2^{l+j}}$ tenemos, para cada l,

$$\begin{aligned}
&\|T_l(f)\|_2^2 \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{N}\cup(0)} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{C}^n} |(f * \mathbf{e}_{\lambda,k})(z,0)|^2 \left(\phi\left(2^{2(l+j)} |\lambda| (2k+n)\right)\right)^2 |\widehat{\sigma_j}(\lambda.k)|^2 |\lambda|^{2n} \, dzd\lambda
\end{aligned}$$

$$\leq \sum_j \sum_k \int_{sop(\phi_{i+j})} \int_{\mathbb{C}^n} |f * \mathbf{e}_{\lambda,k}(z,0)|^2 |\widehat{\sigma_j}(\lambda.k)|^2 |\lambda|^{2n} dzd\lambda$$

Ahora, $0 \leq \phi \leq 1$ y si $\phi\left(2^{2(l+j)} |\lambda| (2k+n)\right) \neq 0$ entonces
$2^{-2(l+j+1)} \leq |\lambda| (2k+n) \leq 2^{-2(l+j)}$.

Consideremos el caso $l < 0$. Por nuestra hipótesis sobre $\widehat{\sigma_j}$,
la desigualdad $2^{2j}|\lambda|(2k+n) \geq 2^{-2(l+1)}$ implica que
$|\widehat{\sigma_j}(\lambda,k)| \leq c\left(2^{2j} |\lambda| (2k+n)\right)^{-\alpha} \leq c2^{2(l+1)\alpha}$, y entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
&\|T_l(f)\|_2^2 \\
&\leq c2^{4(l+1)\alpha} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{N}\cup(0)} \int_{I_{l+j}} \int_{\mathbb{C}^n} |(f * \mathbf{e}_{\lambda,k})(z,0)|^2 |\lambda|^{2n} \, dzd\lambda
\end{aligned}$$

donde $I_{l+j}=\left\{\lambda\in\mathbb{R}:2^{-2(l+j+1)}\leq|\lambda|(2k+n)\leq 2^{-2(l+j)}\right\}$. Como cada I_{l+j} interseca a lo sumo a cuatro conjuntos de la forma $I_{l+j'}$ obtenemos finalmente que

$$\begin{aligned}\|T_l(f)\|_2^2 &\leq c'2^{4(l+1)\alpha}\sum_{k\in\mathbb{N}\cup(0)}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{C}^n}|(f*\mathbf{e}_{\lambda,k})(z,0)|^2|\lambda|^{2n}\,dzd\lambda \qquad (7.12)\\ &= c''2^{4l\alpha}\|f\|_2^2,\end{aligned}$$

la última igualdad por la identidad de Plancherel.

Si $l>0$, procedemos de un modo similar, solo que ahora observando que si $2^{-2(i+j+1)}\leq|\lambda|(2k+n)\leq 2^{-2(i+j)}$ entonces $|\lambda|(2k+n)\leq 2^{-2(i+j)}$ y por lo tanto, como $|\widehat{\sigma_j}(\lambda,k)|\leq c\left(2^{2j}|\lambda|(2k+n)\right)^{\alpha}$ entonces $|\widehat{\sigma_j}(\lambda,k)|\leq c2^{-2l\alpha}$ lo que ahora nos da que

$$\begin{aligned}\|T_l(f)\|_2^2 &\leq c2^{-4\alpha l}\sum_{k\in\mathbb{N}\cup(0)}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{C}^n}|(f*\mathbf{e}_{\lambda,k})(z,0)|^2|\lambda|^{2n}\,dzd\lambda \qquad (7.13)\\ & c'2^{-4\alpha l}\|f\|_2^2\end{aligned}$$

Las estimaciones (7.12) y (7.13) nos dan que

$$\begin{aligned}\|g_2(f)\|_2 &\leq \sum_{l\in\mathbb{Z}}\|T_l(f)\|_2\leq c\sum_{l\leq 0}2^{-2\theta\alpha|i|}\|f\|_2+\sum_{l>0}c2^{-2\theta\alpha|i|}\|f\|_2\\ &= c\|f\|_2.\end{aligned}$$

lo que prueba la parte (i) del teorema para el operador g_2..

Para probar (i) para el operador g_1 observemos que $\widehat{\sigma_j^{\vee}}(\lambda,k)=\overline{\widehat{\sigma_j}(\lambda,k)}$ y que por lo tanto $\sigma_j^{\vee}$ satisface las mismas hipótesis que σ_j. También $f*\sigma_j=\left(\sigma_j^{\vee}*f^{\vee}\right)^{\vee}$. Entonces

$$\|g_1(f)\|_s=\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|f*\sigma_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_s=\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left|\left(\sigma_j^{\vee}*f^{\vee}\right)^{\vee}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_s=\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left|\sigma_j^{\vee}*f^{\vee}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_s$$

luego la afirmación (i) del teorema para el operador g_2 sigue de lo obtenido para g_1 (utilizado con las medidas $\sigma_j^{\vee}$ en lugar de σ_j) y del hecho de que $\|f^{\vee}\|_2=\|f\|_2$. Entonces la prueba de (i) está completa.

Para probar (ii) para el operador g_2, notemos que, si $1 < q < \infty$ y si $\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right| = \frac{1}{2q}$, por el Lema 7.6 y las desigualdades de Littlewood Paley del Teorema 2.37,

$$\left\|T_l(f)\right\|_p = \left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\sigma_j * K_{2^{i+j}} * f|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p \leq \left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |K_{2^{i+j}} * f|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p \leq c\left\|f\right\|_p \quad (7.14)$$

Si $p > 2$ (i.e., si $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2q}$) y si $s \in (2,p)$ sea $\theta \in (0,1)$ tal que $\frac{1}{s} = \theta\frac{1}{2} + (1-\theta)\frac{1}{p}$. Si $l < 0$, de (7.14) y (7.12) el Teorema de interpolación de Riesz Thorin nos da que

$$\left\|T_i(f)\right\|_s \leq c2^{-2\theta\alpha|i|}\|f\|_s$$

y si $l > 0$ de (7.14) y (7.13) obtenemos de la misma manera que

$$\left\|T_i(f)\right\|_s \leq c2^{-2\theta\alpha|i|}\|f\|_s.$$

Entonces, por (7.11),

$$\begin{aligned}\left\|g_2(f)\right\|_s &\leq \sum_{l\in\mathbb{Z}} \left\|T_l(f)\right\|_s \leq c\sum_{l\leq 0} 2^{-2\theta\alpha|i|}\left\|f\right\|_s + \sum_{l>0} c2^{-2\theta\alpha|i|}\|f\|_s \\ &= c\|f\|_s.\end{aligned}$$

Si $p < 2$ (i.e., si $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2q}$) y $s \in (p,2)$ el mismo argumento muestra que

$\left\|g_2(f)\right\|_s \leq c\|f\|_s$. Entonces una nueva aplicación del Teorema de Riesz Thorin nos da que g_2 es acotado en $L^s(\mathbb{H}_n)$ para $\frac{1}{2} - \frac{1}{2q} < s < \frac{1}{2} + \frac{1}{2q}$, i.e. cuando $\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{s}\right| < \frac{1}{2q}$. Entonces (ii) vale.

Para probar (iii), notemos que $\widehat{\sigma_j^\vee}(\lambda,k) = \overline{\widehat{\sigma_j}(\lambda,k)}$ y que por lo tanto $\sigma_j^\vee$ satisface las mismas hipótesis que σ_j. También $f * \sigma_j = \left(\sigma_j^\vee * f^\vee\right)^\vee$. Entonces

$$\left\|g_1(f)\right\|_s = \left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |f * \sigma_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_s = \left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left|\left(\sigma_j^\vee * f^\vee\right)^\vee\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_s = \left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left|\sigma_j^\vee * f^\vee\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_s$$

luego el resultado para el operador g_2 sigue del obtenido para g_1 (utilizado con las medidas $\sigma_j^\vee$ en lugar de σ_j y del hecho de que $\|f^\vee\|_2 = \|f\|_2$).

■

Si ν es una medida positiva y finita sobre $\mathbb{H}_n$, denotaremos con ν^0 a la medida (también finita) sobre $\mathbb{R}$ definida por

$$\nu^0(E) := \int_{\mathbb{H}_n} \chi_E(t) d\nu(z,t). \tag{7.15}$$

para cada conjunto de Borel $E \subset \mathbb{R}$. Denotaremos también con $\mathcal{F}(\nu^0)$ a la transformada de Fourier de ν_0 en $S'(\mathbb{R})$ dada por $\mathcal{F}(\nu^0)(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda t} d\nu^0(t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. (y usaremos la misma notación de aquí en más para la transformada de Fourier de distribuciones en $S'(\mathbb{R})$.

Lema 7.8. *Para $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sea φ_k^{n-1} definida por (2.4). Las siguientes afirmaciones valen.*

(i) Existe una constante positiva c tal que si $j \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y si $2^{2j}|\lambda|(2k+n) < 1$ entonces $\int\limits_{B_1(0)} \left|\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{2^{2j}|\lambda||z|^2}\right) - 1\right| dz \le c2^{2j}|\lambda|(2k+n)$.

(ii) Existe una constante positiva c tal que si $j \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y si $2^{2j}|\lambda|(2k+n) \ge 1$ entonces $\int\limits_{B_1(0)} \left|\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{2^{2j}|\lambda||z|^2}\right)\right| dz \le c\left(2^{2j}|\lambda|(2k+n)\right)^{-\frac{1}{6}}$.

Prueba. Veamos (i). Tenemos

$$\begin{aligned}
&\int_{B_1(0)} \left|\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{2^{2j}|\lambda||z|^2}\right) - 1\right| dz \\
= &\int_{B_1(0)} \sqrt{2^{2j}|\lambda||z|^2} \frac{\left|\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{2^{2j}|\lambda||z|^2}\right) - \varphi_k^{n-1}(0)\right|}{\sqrt{2^{2j}|\lambda||z|^2}} dz \\
\le &\int_{B_1(0)} \sqrt{2^{2j}|\lambda||z|^2} \sup_{0<r<\sqrt{2^{2j}|\lambda||z|^2}} \left|\left(\varphi_k^{n-1}\right)'(r)\right| dz
\end{aligned}$$

Recordando que $\varphi_k^l(r) = \frac{k!l!}{(k+l)!} L_k^l\left(\frac{1}{2}r^2\right) e^{-\frac{1}{4}r^2}$ y que $\left(L_k^l\right)' = -L_{k-1}^{l+1}$ tenemos que $\left(\varphi_k^l\right)'(r) = -\frac{k}{l+1} r\varphi_{k-1}^{l+1}(r) - \frac{r}{2}\varphi_k^l(r)$. También $\left|\varphi_k^l(r)\right| \le 1$ para todo $r > 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
\sup_{0<r<2^{2j}|\lambda||z|^2} \left|\left(\varphi_k^{n-1}\right)'(r)\right| &\le \frac{k}{n} \sup_{0<r<2^{2j}|\lambda||z|^2} \left|r\varphi_{k-1}^n(r)\right| + \frac{1}{2} \sup_{0<r<2^{2j}|\lambda||z|^2} \left|r\varphi_k^{n-1}(r)\right| \\
&\le ck2^{2j}|\lambda||z|^2 + \frac{1}{2}c2^{2j}|\lambda||z|^2 \\
&\le c'2^{2j}|\lambda|(2k+n)|z|^2,
\end{aligned}$$

y como sobre el dominio de integración de la última integral $|z|<1$ y $2^{2j}|\lambda|(2k+n)<1$, se sigue que

$$\begin{aligned}
&\int_{B_1(0)}\left|\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{2^{2j}|\lambda||z|^2}\right)-1\right|dz\\
\leq\ &\int_{B_1(0)}\sqrt{2^{2j}|\lambda||z|^2}\sup_{0<r<\sqrt{2^{2j}|\lambda||z|^2}}\left|\left(\varphi_k^{n-1}\right)'(r)\right|dz\\
\leq\ & c\sqrt{2^{2j}|\lambda|}2^{2j}|\lambda|(2k+n)\leq c(2k+n)^{-\frac{1}{2}}2^{2j}|\lambda|(2k+n)\leq c'2^{2j}|\lambda|(2k+n)
\end{aligned}$$

y luego (i) vale.

Para probar (ii) observamos que

$$\begin{aligned}
&\int_{B_1(0)}\left|\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{2^{2j}|\lambda||z|^2}\right)\right|dz \qquad (7.16)\\
=\ &\int_{\left\{z\in B_1(0):2^{2j}|\lambda|(2k+n)|z|^2<1\right\}}\left|\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{2^{2j}|\lambda||z|^2}\right)\right|dz\\
&+\int_{\left\{z\in B_1(0):2^{2j}|\lambda|(2k+n)|z|^2>1\right\}}\left|\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{2^{2j}|\lambda||z|^2}\right)\right|dz\\
=\ & I^*+II^*.
\end{aligned}$$

Y como $\left|\varphi_k^{n-1}\right|\leq 1$,

$$\begin{aligned}
I^*\ &\leq\ \left|\left\{z\in\mathbb{C}^n:2^{2j}|\lambda|(2k+n)|z|^2<1\right\}\right|=c\left(2^{2j}|\lambda|(2k+n)\right)^{-n} \qquad (7.17)\\
&\leq\ c'\left(2^{2j}|\lambda|(2k+n)\right)^{-\frac{1}{6}},
\end{aligned}$$

la última desigualdad porque $2^{2j}|\lambda|(2k+n)\geq 1$. Estimemos ahora II^*. Pasando a coordenadas polares,

$$\begin{aligned}
II^*\ &=\ \left|S^{2n-1}\right|\int_{\left(2^{2j}|\lambda|(2k+n)\right)^{-\frac{1}{2}}}^{1}|\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{2^{2j}|\lambda|s^2}\right)|s^{2n-1}ds\\
&\leq\ c\int_{\left(2^{2j}|\lambda|(2k+n)\right)^{-\frac{1}{2}}}^{1}\left|\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{2^{2j}|\lambda|s^2}\right)\right|s^{2n-1}ds.
\end{aligned}$$

y entonces, por el Lema 6.5,

$$\begin{aligned}
II^*\ &\leq\ c\left(2^{2j}|\lambda|k\right)^{-\frac{n-1}{2}-\frac{1}{6}}\int_{\left(2^{2j}|\lambda|(2k+n)\right)^{-\frac{1}{2}}}^{1}s^{2n-1}\left(s^2\right)^{-\frac{n-1}{2}-\frac{1}{6}}ds \qquad (7.18)\\
&\leq\ c\left(2^{2j}|\lambda|k\right)^{-\frac{n-1}{2}-\frac{1}{6}}\int_0^1 s^{n-\frac{1}{3}}ds=c'\left(2^{2j}|\lambda|k\right)^{-\frac{n-1}{2}-\frac{1}{6}}\\
&\leq\ c''\left(2^{2j}|\lambda|(2k+n)\right)^{-\frac{1}{6}}
\end{aligned}$$

y luego (ii) también vale.

■

Lema 7.9. *Sea* $\{\nu_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *una sucesión de medidas positivas y radiales sobre* $\mathbb{H}_n$*, tales que* $\nu_j(\mathbb{H}_n) \leq 1$ *y sean* ν_j^0 *las medidas sobre* $\mathbb{R}$ *dadas por (7.15) para* $\nu = \nu_j$*. Supóngase que existe* $\alpha \in (0,1]$ *tal que para* $j \in \mathbb{Z}$*,*

$$\begin{aligned} & \left|\widehat{\nu_j}(\lambda,k) - \mathcal{F}\left(\nu_j^0\right)(\lambda)\right| \qquad (7.19) \\ \leq\ & c\left(2^{2j}|\lambda|(2k+n)\right)^{\alpha} \ \textit{si } \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ k \in \mathbb{N}\cup\{0\} \ \textit{y si } 2^{2j}|\lambda|(2k+n) < 1, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} & |\widehat{\nu_j}(\lambda,k)| \\ \leq\ & c\left(2^{2j}|\lambda|(2k+n)\right)^{-\alpha} \ \textit{si } \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ k \in \mathbb{N}\cup\{0\} \ \textit{y si} 2^{2j}|\lambda|(2k+n) \geq 1. \end{aligned}$$

Sea $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{C}^n)$ *una función no negativa satisfaciendo que* $sop(\psi) \subset B_1(0)$ *(la bola unidad de* $\mathbb{C}^n$*) y* $\int_{\mathbb{C}^n} \psi = 1$*.*

Sea $\sigma_j := \nu_j - \psi_{2^j} \otimes \nu_j^0$ *donde* $\psi_{2^j}(z) := 2^{-2jn}\psi\left(2^{-j}z\right)$*,* $z \in \mathbb{C}^n$*. Entonces existe* $\beta > 0$ *tal que para* $j \in \mathbb{Z}$*,* $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ *y* $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$*,*

$$|\widehat{\sigma_j}(\lambda,k)| \leq c\min\left(\left(2^{2j}|\lambda|(2k+n)\right)^{\beta}, \left(2^{2j}|\lambda|(2k+n)\right)^{-\beta}\right). \qquad (7.20)$$

Prueba. Veremos que el Lema vale con $\beta = \min\left(\alpha, \frac{1}{6}\right)$. Consideremos primero el caso cuando $2^{2j}|\lambda|(2k+n) < 1$. Tenemos

$$\begin{aligned} |\widehat{\sigma_j}(\lambda,k)| &= \left|\widehat{\nu_j}(\lambda,k) - \left(\psi_{2^j} \otimes \nu_j^0\right)^\frown(\lambda,k)\right| \qquad (7.21) \\ &\leq \left|\widehat{\nu_j}(\lambda,k) - \left(\delta_{\mathbb{C}^n} \otimes \nu_j^0\right)^\frown(\lambda,k)\right| + \left|\left(\delta_{\mathbb{C}^n} \otimes \nu_j^0\right)^\frown(\lambda,k) - \left(\psi_{2^j} \otimes \nu_j^0\right)^\frown(\lambda,k)\right| \\ &=: I + II \end{aligned}$$

donde $\delta_{\mathbb{C}^n}$ es la distribución δ de Dirac en $\mathbb{C}^n$ concentrada en el origen.

Ahora,

$$\begin{aligned} \left(\delta_{\mathbb{C}^n} \otimes \nu_j^0\right)^\frown(\lambda,k) &= \int_{\mathbb{H}_n} \varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{|\lambda|\,|z|^2}\right) e^{-i\lambda t} d\delta_{\mathbb{C}^n}(z)\, d\nu_j^0(t) \\ &= \varphi_k^{n-1}(0) \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda t} d\nu_j^0(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda t} d\nu_j^0(t) \\ &= \mathcal{F}\left(\nu_j^0\right)(\lambda). \end{aligned}$$

con las funciones φ_k^{n-1} definidas por (2.4). Entonces

$$\begin{aligned} I &= \left|\widehat{\nu_j}(\lambda,k) - \left(\delta_{\mathbb{C}^n}\otimes\nu_j^0\right)^{\widehat{}}(\lambda,k)\right| = \left|\widehat{\nu_j}(\lambda,k) - \mathcal{F}\left(\nu_j^0\right)(\lambda)\right| \\ &\leq c\left(2^{2j}|\lambda|(2k+n)\right)^{\alpha}, \end{aligned}$$

la última desigualdad por (7.19). Y como $\beta \leq \alpha$ y $2^{2j}|\lambda|(2k+n) < 1$ entonces también

$$I \leq c\left(2^{2j}|\lambda|(2k+n)\right)^{\beta}. \tag{7.22}$$

Además, $2^{2j}|\lambda|(2k+n) < 1$ y entonces $\left(2^{2j}|\lambda|(2k+n)\right)^{\beta} < \left(2^{2j}|\lambda|(2k+n)\right)^{-\beta}$ luego también tenemos

$$I \leq c\left(2^{2j}|\lambda|(2k+n)\right)^{-\beta}. \tag{7.23}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} &\left(\psi_{2^j}\otimes\nu_j^0\right)^{\widehat{}}(\lambda,k) \qquad\qquad (7.24)\\ &= \int_{\mathbb{H}_n}\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{|\lambda|\,|z|^2}\right)e^{-i\lambda t}d\left(\psi_{2^j}\otimes\nu_j^0\right)(z,t) \\ &= \mathcal{F}\left(\nu_j^0\right)(\lambda)\int_{\mathbb{C}^n}\psi_{2^j}(z)\,\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{|\lambda|\,|z|^2}\right)dz. \end{aligned}$$

Y entonces

$$\begin{aligned} II &= \left|\left(\delta_{\mathbb{C}^n}\otimes\nu_j^0\right)^{\widehat{}}(\lambda,k) - \left(\psi_{2^j}\otimes\nu_j^0\right)^{\widehat{}}(\lambda,k)\right| \\ &\leq \left|\mathcal{F}\left(\nu_j^0\right)(\lambda)\right|\left|1 - \int_{\mathbb{C}^n}\psi_{2^j}(z)\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{|\lambda|\,|z|^2}\right)dz\right|. \end{aligned}$$

Y por lo tanto, como $\left|\mathcal{F}\left(\nu_j^0\right)(\lambda)\right| \leq 1$ y $\int_{\mathbb{C}^n}\psi_{2^j}(z)\,dz = \int_{\mathbb{C}^n}\psi(z)\,dz = 1$,

$$\begin{aligned} II &\leq \left|\int_{\mathbb{C}^n}\psi_{2^j}(z)\left(\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{|\lambda|\,|z|^2}\right)-1\right)dz\right| \\ &\leq \int_{\mathbb{C}^n}\left|\psi_{2^j}(z)\right|\left|\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{|\lambda|\,|z|^2}\right)-1\right|dz \\ &= \int_{\mathbb{C}^n}|\psi(z)|\left|\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{2^{2j}|\lambda|\,|z|^2}\right)-1\right|dz \\ &\leq \|\psi\|_\infty\int_{B_1(0)}\left|\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{2^{2j}|\lambda|\,|z|^2}\right)-1\right|dz. \end{aligned}$$

Ahora, por el Teorema del Valor Medio y por (i) del Lema 7.8,

$$\begin{aligned}
&\int_{B_1(0)} \left|\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{2^{2j}\left|\lambda\right|\left|z\right|^2}\right)-1\right| dz \qquad (7.25)\\
\leq\ & \int_{B_1(0)} \sqrt{2^{2j}\left|\lambda\right|\left|z\right|^2} \sup_{0<r<\sqrt{2^{2j}|\lambda||z|^2}} \left|\left(\varphi_k^{n-1}\right)'(r)\right| dz\\
\leq\ & c2^{2j}\left|\lambda\right|(2k+n) \leq c\left(2^{2j}\left|\lambda\right|(2k+n)\right)^{\beta}
\end{aligned}$$

las última desigualdad porque $2^{2j}\left|\lambda\right|(2k+n)<1$ y $0<\beta<1$.

Y también $\left(2^{2j}\left|\lambda\right|(2k+n)\right)^{\beta} \leq \left(2^{2j}\left|\lambda\right|(2k+n)\right)^{-\beta}$ y entonces

$$\int_{B_1(0)} \left|\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{2^{2j}\left|\lambda\right|\left|z\right|^2}\right)-1\right| dz \leq c\left(2^{2j}\left|\lambda\right|(2k+n)\right)^{-\beta}. \qquad (7.26)$$

Combinando (7.21), (7.22), (7.23), (7.25) y (7.26) obtenemos la afirmación del lema para el caso en que $2^{2j}\left|\lambda\right|(2k+n)<1$.

Supongamos ahora que $2^{2j}\left|\lambda\right|(2k+n)\geq 1$. Tenemos

$$\left|\widehat{\nu_j}(\lambda,k)-\left(\psi_{2^j}\otimes\nu_j^0\right)^{\wedge}(\lambda,k)\right| \leq \left|\widehat{\nu_j}(\lambda,k)\right| + \left|\left(\psi_{2^j}\otimes\nu_j^0\right)^{\wedge}(\lambda,k)\right|. \qquad (7.27)$$

y, por las hipótesis del lema,

$$\left|\widehat{\nu_j}(\lambda,k)\right| \leq c\left(2^{2j}\left|\lambda\right|(2k+n)\right)^{-\alpha} \leq c\left(2^{2j}\left|\lambda\right|(2k+n)\right)^{-\beta}$$

la última desigualdad porque $2^{2j}\left|\lambda\right|(2k+n)\geq 1$ y $\beta\leq\alpha$.

Y como (ya que $2^{2j}\left|\lambda\right|(2k+n)\geq 1$) $\left|2^{2j}\lambda(2k+n)\right|^{-\beta} \leq \left|2^{2j}\lambda(2k+n)\right|^{\beta}$ también tenemos

$$\left|\widehat{\nu_j}(\lambda,k)\right| \leq c\left|2^{2j}\lambda(2k+n)\right|^{\beta}.$$

Entonces

$$\left|\widehat{\nu_j}(\lambda,k)\right| \leq c\min\left(\left(2^{2j}\left|\lambda\right|(2k+n)\right)^{-\beta}, \left(2^{2j}\left|\lambda\right|(2k+n)\right)^{\beta}\right). \qquad (7.28)$$

Por otra parte, por (7.24),

$$\begin{aligned}
\left|\left(\psi_{2^j}\otimes\nu_j^0\right)^{\wedge}(\lambda,k)\right| &= \left|\mathcal{F}\left(\nu_j^0\right)(\lambda)\right| \left|\int_{\mathbb{C}^n}\psi_{2^j}(z)\,\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{\left|\lambda\right|\left|z\right|^2}\right)dz\right|\\
&\leq \left|\int_{\mathbb{C}^n}\psi_{2^j}(z)\,\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{\left|\lambda\right|\left|z\right|^2}\right)dz\right|\\
&\leq \int_{B_1(0)}\psi(z)\left|\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{2^{2j}\left|\lambda\right|\left|z\right|^2}\right)\right|dz\\
&\leq \left\|\psi\right\|_{\infty}\int_{B_1(0)}\left|\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{2^{2j}\left|\lambda\right|\left|z\right|^2}\right)\right|dz
\end{aligned}$$

y entonces por (ii) del Lema 7.8,

$$\left|\left(\psi_{_{2^j}} \otimes \nu_j^0\right)^\wedge (\lambda, k)\right| \leq c \left(2^{2j} |\lambda| (2k+n)\right)^{-\frac{1}{6}} \leq c \left(2^{2j} |\lambda| (2k+n)\right)^{-\beta},$$

la última desigualdad porque $2^{2j} |\lambda| (2k+n) \geq 1$ y $\beta \leq \dfrac{1}{6}$.

Y como $\left(2^{2j} |\lambda| (2k+n)\right)^{-\beta} \leq \left(2^{2j} |\lambda| (2k+n)\right)^{\beta}$ concluímos que

$$\left|\left(\psi_{_{2^j}} \otimes \nu_j^0\right)^\wedge (\lambda, k)\right| \leq c \min\left(\left(2^{2j} |\lambda| (2k+n)\right)^{-\beta}, \left(2^{2j} |\lambda| (2k+n)\right)^{\beta}\right). \qquad (7.29)$$

Y de (7.27), (7.28) y (7.29) obtenemos la afirmación del lema para el caso

$2^{2j} |\lambda| (2k+n) \geq 1$.

■

Lema 7.10. *Sea* $\{\nu_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *una sucesión de medidas positivas, radiales y finitas sobre* $\mathbb{H}_n$, *y para cada* j *sea* ν_j^0 *la medida sobre* $\mathbb{R}$ *dada por (7.15) con* ν_j *en lugar de* ν. *Sea* $p \in (1, \infty)$ *y supóngase que existe una constante positiva* A *tal que*

$$\left\|\sup_{j\in\mathbb{Z}} \left|\nu_j^0 *_{\mathbb{R}} g\right|\right\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq A \|g\|_{L^p(\mathbb{R})} \qquad (7.30)$$

para toda $g \in L^p(\mathbb{R})$ *(donde* $*_{\mathbb{R}}$ *denota el producto de convolución en* $\mathbb{R}$*). Sea* $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{C}^n)$ *una función no negativa tal que* $sop(\psi) \subset B_1(0)$ *(la bola unidad de* $\mathbb{C}^n$*) y* $\int_{\mathbb{C}^n} \psi = 1$ *y, para* $j \in \mathbb{Z}$, *sea* $\psi_{_{2^j}}(z) := 2^{-2jn}\psi\left(2^{-j}z\right)$. *Sea* $\psi_{_{2^j}} \otimes \nu_j^0$ *la medida (finita) sobre* $\mathbb{H}_n$ *definida por*

$$\left(\psi_{_{2^j}} \otimes \nu_j^0\right)(E) := \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{C}^n} \chi_E(z,t)\, \psi_{_{2^j}}(z) dz d\nu_j^0(t)$$

para E *medible Borel* $\subset \mathbb{H}_n$.

Entonces los operadores $f \to \sup_{j\in\mathbb{Z}} \left|f * \left(\psi_{_{2^j}} \otimes \nu_j^0\right)\right|$ *y* $f \to \sup_{j\in\mathbb{Z}} \left|\left(\psi_{_{2^j}} \otimes \nu_j^0\right) * f\right|$ *son acotados en* $L^p(\mathbb{H}_n)$.

Prueba. Sea M_{sing} definido por (3.3), i.e.,

$$M_{sing}f(z,t)$$
$$= \sup_{r_1>0,\dots,r_n>0} \int_{w_1,\dots,w_n\in\mathbb{C}^n;|(w_1,\dots,w_n)|<1} |f((z,t)(-r_1w_1,\dots,-r_nw_n,0))| dw_1\dots dw_n$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\left|f*\left(\psi_{_{2^j}}\otimes\nu_j^0\right)(z,t)\right| &= \left|\int_{\mathbb{H}_n} f\left((z,t)(w,s)^{-1}\right)d\left(\psi_{_{2^j}}\otimes\nu_j^0\right)(w,s)\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{C}^n}\int_{\mathbb{H}_n} f\left((z,t)(-w,-s)\right)\psi_{_{2^j}}(w)\,d\nu_j(\zeta,s)\,dw\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{C}^n}\int_{\mathbb{H}_n} f\left((z,t-s)(-w,0)\right)\psi_{_{2^j}}(w)\,d\nu_j(\zeta,s)\,dw\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{C}^n}\int_{\mathbb{H}_n} f\left((z,t-s)\left(-2^jw,0\right)\right)\psi(w)\,d\nu_j(\zeta,s)\,dw\right| \\
&\leq \|\psi\|_\infty\int_{|w|<1}\int_{\mathbb{H}_n}\left|f\left((z,t-s)\left(-2^jw,0\right)\right)\right|d\nu_j(\zeta,s)\,dw \\
&\leq \|\psi\|_\infty\int\left(M_{sing}f\right)(z,t-s)d\nu_j^0(s)\,ds \\
&= \|\psi\|_\infty\left(\left(M_{sing}f\right)(z,.)*_{\mathbb{R}}\nu_j^0\right)(t),
\end{aligned}$$

esto es,

$$\left|\left(f*\left(\psi_{_{2^j}}\otimes\nu_j^0\right)\right)(z,t)\right|\leq\|\psi\|_\infty\left(\left(M_{sing}f\right)(z,.)*_{\mathbb{R}}\nu_j^0\right)(t) \tag{7.31}$$

y entonces

$$\begin{aligned}
&\left\|\sup_{j\in\mathbb{Z}}\left|f*\left(\psi_{_{2^j}}\otimes\nu_j^0\right)\right|\right\|_{L^p(\mathbb{H}_n)} \\
=\;&\left\|\left\|\sup_{j\in\mathbb{Z}}\left|\left(f*\left(\psi_{_{2^j}}\otimes\nu_j^0\right)\right)(z,t)\right|\right\|_{L^p(\mathbb{R},dt)}\right\|_{L^p(\mathbb{C}^ndz)} \\
\leq\;&\left\|\left\|\sup_{j\in\mathbb{Z}}\left|\left(\left(M_{sing}f\right)(z,.)*_{\mathbb{R}}\nu_j^0\right)(t)\right|\right\|_{L^p(\mathbb{R},dt)}\right\|_{L^p(\mathbb{C}^ndz)} \\
\leq\;& c\left\|\left\|\left(M_{sing}f\right)(z,.)\right\|_{L^p(\mathbb{R})}\right\|_{L^p(\mathbb{C}^ndz)} \\
=\;& c\left\|M_{sing}f\right\|_{L^p(\mathbb{H}_n)}\leq c\left\|f\right\|_{L^p(\mathbb{H}_n)}
\end{aligned}$$

donde en las dos últimas desigualdades hemos usado, en la primera (7.30). y en la segunda el Lema 3.2. Luego el operador $f\to\sup_{j\in\mathbb{Z}}\left|f*\left(\psi_{_{2^j}}\otimes\nu_j^0\right)\right|$ es acotado en $L^p\left(\mathbb{H}_n\right)$.

Por otra parte, un cálculo similar al realizado para la convolución con f a la izquierda, nos da que

$$\left|\left(\left(\psi_{_{2^j}}\otimes\nu_j^0\right)*f\right)(z,t)\right|\leq\|\psi\|_\infty\left(\left(M_{sing}\left(f^\vee\right)\right)^\vee(z,.)*_{\mathbb{R}}\nu_j^0\right)(t) \tag{7.32}$$

y a partir de esto, obtenemos como arriba que

$$\left\| \sup_{j\in\mathbb{Z}} \left| f * \left(\psi_{2^j} \otimes \nu_j^0 \right) \right| \right\|_{L^p(\mathbb{H}_n)} \leq c \left\| f \right\|_{L^p(\mathbb{H}_n)}$$

■

Teorema 7.11. *Sea* $\{\nu_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *una sucesión de medidas positivas y radiales sobre* $\mathbb{H}_n$*, tales que* $\nu_j(\mathbb{H}_n) \leq 1$*. Supóngase que para cada* $p \in (1,\infty)$ *existe una constante positiva* A_p *tal que, para* $g \in L^p(\mathbb{R})$*,*

$$\left\| \sup_{j\in\mathbb{Z}} \left(\left| \nu_j^0 *_{\mathbb{R}} g \right| \right) \right\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq A_p \left\| g \right\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

Supóngase además que existe $\alpha > 0$ *tal que para* $j \in \mathbb{Z}$*,* $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *y* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*,*

$$\begin{aligned} \left| \widehat{\nu_j}(\lambda,k) - \mathcal{F}\left(\nu_j^0\right)(\lambda) \right| &\leq c\left(2^{2j}|\lambda|(2k+n)\right)^{\alpha} \text{ si } 2^{2j}|\lambda|(2k+n) < 1, \quad (7.33) \\ \left| \widehat{\nu_j}(\lambda,k) \right| &\leq c\left(2^{2j}|\lambda|(2k+n)\right)^{-\alpha} \text{ si } 2^{2j}|\lambda|(2k+n) \geq 1 \quad (7.34) \end{aligned}$$

Entonces los operadores $M_1(f) := \sup_{j\in\mathbb{Z}} (|f * \nu_j|)$, $M_2(f) := \sup_{j\in\mathbb{Z}} (|\nu_j * f|)$*son acotados en* $L^p(\mathbb{H}_n)$ *para* $1 < p < \infty$*.*

Prueba. Sea $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{C}^n)$ una función no negativa tal que $sop(\psi) \subset B_1(0)$ (la bola unidad de $\mathbb{C}^n$) y $\int_{\mathbb{C}^n} \psi = 1$. Sea $\sigma_j := \nu_j - \psi_{2^j} \otimes \nu_j^0$ con $\psi_{2^j}(z) := 2^{-2jn}\psi\left(2^{-j}z\right)$. Sean g_1, g_2 los operadores definidos por (7.10) asociados a la sucesión de medidas $\{\sigma_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, i.e.,

$$g_1(f) := \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |f * \sigma_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \qquad g_1(f) := \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |f * \sigma_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

entonces, para cada p

$$\begin{aligned} \|M_1 f\|_p &= \left\| \sup_{j\in\mathbb{Z}} (|f * \nu_j|) \right\|_p = \left\| \sup_{j\in\mathbb{Z}} \left| f * \left(\sigma_j + \psi_{2^j} \otimes \nu_j^0 \right) \right| \right\|_p \qquad (7.35) \\ &\leq \left\| \sup_{j\in\mathbb{Z}} (|f * \sigma_j|) \right\|_p + \left\| \sup_{j\in\mathbb{Z}} \left| f * \left(\psi_{2^j} \otimes \nu_j^0 \right) \right| \right\|_p \\ &\leq \|g_1(f)\|_p + c\|f\|_p, \end{aligned}$$

la última desigualdad por el Lema 7.10. Y similarmente,

$$\|M_2 f\|_p \leq \|g_2(f)\|_p + c\|f\|_p. \qquad (7.36)$$

También,

$$\left\|\sup_{j\in\mathbb{Z}}\left(|f*\sigma_j|\right)\right\|_p = \left\|\sup_{j\in\mathbb{Z}}\left|f*\left(\nu_j-\psi_{_{2^j}}\otimes\nu_j^0\right)\right|\right\|_p \tag{7.37}$$
$$\leq \left\|\sup_{j\in\mathbb{Z}}\left(|f*\nu_j|\right)\right\|_p + \left\|\sup_{j\in\mathbb{Z}}\left|f*\left(\psi_{_{2^j}}\otimes\nu_j^0\right)\right|\right\|_p$$
$$\leq \|M_1 f\|_p + c\,\|f\|_p\,,$$

la última desigualdad nuevamente por el Lema 7.10. Y del mismo modo tenemos también que

$$\left\|\sup_{j\in\mathbb{Z}}\left(|\sigma_j*f|\right)\right\|_p \leq \|M_2 f\|_p + c\,\|f\|_p \tag{7.38}$$

Teniendo en cuenta nuestras hipótesis (7.33) y (7.34), el Lema 7.9 nos da un $\beta\in(0,1)$ tal que para $j\in\mathbb{Z}$, $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ y $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$,

$$|\widehat{\sigma_j}(\lambda,k)| \leq c\min\left(\left(2^{2j}|\lambda|(2k+n)\right)^{\beta},\left(2^{2j}|\lambda|(2k+n)\right)^{-\beta}\right). \tag{7.39}$$

y entonces por la parte (i) del Teorema 7.7, los operadores g_1 y g_2 son acotados en $L^2(\mathbb{H}_n)$. Entonces por (7.35) y (7.36) tenemos que M_1 y M_2 son operadores acotados en $L^2(\mathbb{H}_n)$. Luego como $\sigma_j = \nu_j - \psi_{_{2^j}}\otimes\nu_j^0$, el Lema 7.10 nos da que existe una constante positiva c tal que para $f\in L^2(\mathbb{H}_n)$,

$$\left\|\sup_{j\in\mathbb{Z}}\left(|f*\sigma_j|\right)\right\|_2 \leq c\|f\|_2, \qquad \left\|\sup_{j\in\mathbb{Z}}\left(|\sigma_j*f|\right)\right\|_2 \leq c\|f\|_2. \tag{7.40}$$

Entonces teniendo en cuenta (7.39) y (7.40), (ii) y (iii) del Teorema 7.7 nos da que los operadores g_1 y g_2 son acotados en $L^p(\mathbb{H}_n)$ para p tal que $\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right|<\frac{1}{2}$, i.e.,

para $\frac{4}{3}<p<4$. Entonces, por (7.35) y (7.36), los operadores M_1 y M_2 son acotados en $L^p(\mathbb{H}_n)$ para $\frac{4}{3}<p<4$. Probemos inductivamente que M_1 y M_2 son acotados en $L^p(\mathbb{H}_n)$ para $p\in\left(\frac{2^l}{1+2^{l-1}},2^l\right)$ para cada l natural mayor o igual a 2.

Para $l=2$ es lo que acabamos de ver. Supuesto que la afirmación vale para l, tenemos que M_1 y M_2 son acotados en $L^q(\mathbb{H}_n)$ con $q=\frac{2^l}{2^l-1}+\varepsilon$ donde ε es un numero positivo y suficientemente pequeño. Lo que, por (7.37) y (7.38), implica que los operadores $f\to\sup_{j\in\mathbb{Z}}\left(|f*\sigma_j|\right)$ y $f\to\sup_{j\in\mathbb{Z}}\left(|\sigma_j*f|\right)$ son acotados en $L^q(\mathbb{H}_n)$. Entonces, teniendo en cuenta (7.39), el Teorema 7.7 nos da que los operadores g_1 y g_2

son acotados en $L^p(\mathbb{H}_n)$ para $\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right| < \frac{1}{2q}$ y entonces, por (7.35) y (7.36), M_1 y M_2 son acotados en $L^p(\mathbb{H}_n)$ para tales p. Un cálculo directo muestra que las soluciones p de la ecuación $\frac{1}{2q} = \left|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right|$ son de la forma $p^* = \frac{2^{l+1}}{2^l+1} + \varepsilon'$ o $p^{**} = 2^{l+1} - \varepsilon''$ con ε' y ε'' positivos, que tienden a 0 cuando ε tiende a 0. Esto nos da que M_1 y M_2 son acotados en $L^p(\mathbb{H}_n)$ para $p \in \left(\frac{2^{l+1}}{1+2^l}, 2^{l+1}\right)$ lo que completa nuestra prueba inductiva. Entonces M_1 y M_2 son acotados en $L^p(\mathbb{H}_n)$ para $p \in \left(\frac{2^l}{1+2^{l-1}}, 2^l\right)$ para cada l natural ≥ 2. Como la unión de estos intervalos es $(1,\infty)$ la prueba del teorema está completa.

■

El teorema 7.1 saldrá como consecuencia de su versión diádica.

Sea $\Gamma : D \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ una función medible y radial con dominio D todo $\mathbb{C}^n$ o una bola centrada en el origen y sea $\Gamma_0 : D_0 \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $\Gamma(z) = \Gamma_0(|z|)$ para $z \in D$, con $D_0 = [0,\infty)$ si $D = \mathbb{C}^n$ o $D_0 = [0,R)$ si $D = B_R(0) \subset \mathbb{C}^n$. Para $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ medible definimos $M_{0,diad}(g)$ mediante

$$M_{0,diad}g(x) = \sup_{j\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|B_{2^j}(0)|} \int\limits_{B_{2^j}(0)} |g(x-\Gamma(w))|dw, \text{ si } D = \mathbb{C}^n, \tag{7.41}$$

$$M_{0,diad}(g(x) = \sup_{j\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|B_{2^j}(0)|} \int\limits_{B_{2^j}(0)\cap D} |g(x-\Gamma(w))|dw, \text{ si } D = B_R(0).$$

y , para $f : \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}$ medible, sea $M_{\Gamma,diad}(f)$ definido por

$$M_{\Gamma,diad}f(z,t) = \sup_{j\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|B_{2^j}(0)|} \int\limits_{B_{2^j}(0)} |f((z,t)(w,\Gamma(w))^{-1})|dw, \text{ si } D = \mathbb{C}^n, \tag{7.42}$$

$$M_{\Gamma,diad}f(z,t) = \sup_{j\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|B_{2^j}(0)|} \int\limits_{B_{2^j}(0)\cap D} |f((z,t)(w,\Gamma(w))^{-1})|dw, \text{ si } D = B_R(0).$$

Teorema 7.12. *Sea $\Gamma : D \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ una función medible y radial con dominio D todo $\mathbb{C}^n$ o una bola centrada en el origen y sea $\Gamma_0 : D_0 \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$ tal que*

$\Gamma(z) = \Gamma_0(|z|)$ para $z \in D$, con $D_0 = [0,\infty)$ si $D = \mathbb{C}^n$ o

$D_0 = [0,R)$ si $D = B_R(0) \subset \mathbb{C}^n$. Sean $M_{0,diad}$ y $M_{\Gamma,diad}$ definidos por (7.41) o (7.42) respectivamente. Si $M_{0,diad}$ es un operador acotado en $L^p(\mathbb{R})$ para $1 < p < \infty$ entonces $M_{\Gamma,diad}$ es un operador acotado en $L^p(\mathbb{H}_n)$ para $1 < p < \infty$.

Prueba. Consideremos el caso cuando $D = \mathbb{C}^n$. Para $j \in \mathbb{Z}$ sea $\nu_{\Gamma,j}$ la medida positiva sobre $\mathbb{H}_n$ dada por:

$$\nu_{\Gamma,j}(E) = \frac{1}{|B_{2^j}(0)|} \int\limits_{B_{2^j}(0)} \chi_E(w, \Gamma(w))dw$$

para E conjunto de Borel $\subset \mathbb{H}_n$. Para probar el teorema basta ver que las medidas $\nu_{\Gamma,j}$ satisfacen las hipótesis del Teorema 7.11. Claramente $\nu_{\Gamma,j}(\mathbb{H}_n) \leq 1$. Además, para $g \in L^p(\mathbb{R})$ y $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\left(\nu^0_{\Gamma,j} *_{\mathbb{R}} g\right)(t) &= \int_{\mathbb{R}} g(t-s)\, d\nu^0_{\Gamma,j}(s) \\
&= \int_{\mathbb{H}_n} g(t-s)\, d\nu_{\Gamma,j}(z,s) = \frac{1}{|B_{2^j}(0)|} \int\limits_{B_{2^j}(0)} g(t-\Gamma(w))dw
\end{aligned}$$

entonces $\sup\limits_{j\in\mathbb{Z}} \left(\nu^0_{\Gamma,j} *_{\mathbb{R}} g\right) = M_{0,diad}(g)$ y por lo tanto, por nuestra hipótesis de que $M_{0,diad}$ es un operador acotado en $L^p(\mathbb{R})$ para $1 < p < \infty$, tenemos que para $p \in (1,\infty)$ existe una constante positiva A_p tal que

$$\left\| \sup_{j\in\mathbb{Z}} \left(\left| \nu^0_j *_{\mathbb{R}} g \right| \right) \right\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq A_p \|g\|_{L^p(\mathbb{R})} \text{ para } g \in L^p(\mathbb{R}).$$

Por otra parta, para $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $2^{2j}|\lambda|(2k+n) < 1$ tenemos

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{\nu_{\Gamma,j}}(\lambda,k) - \mathcal{F}\left(\nu^0_{\Gamma,j}\right)(\lambda)\right| &= \left| \frac{1}{|B_{2^j}(0)|} \int\limits_{B_{2^j}(0)} \left(\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{|\lambda|\,|z|^2}\right) - 1 \right) e^{-i\lambda\Gamma(z)} dz \right| \\
&= \left| \frac{2^{2jn}}{|B_{2^j}(0)|} \int\limits_{B_1(0)} \left(\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{2^{2j}|\lambda|\,|z|^2}\right) - 1 \right) e^{-i\lambda\Gamma(2^{2j}z)} dz \right| \\
&\leq \frac{1}{|B_1(0)|} \int\limits_{B_1(0)} \left| \varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{2^{2j}|\lambda|\,|z|^2}\right) - 1 \right| dz
\end{aligned}$$

y entonces por (i) del Lema 7.8,

$$\left|\widehat{\nu_{\Gamma,j}}(\lambda,k) - \mathcal{F}\left(\nu^0_{\Gamma,j}\right)(\lambda)\right| \leq c 2^{2j}|\lambda|(2k+n) \leq c\left(2^{2j}|\lambda|(2k+n)\right)^{\frac{1}{6}},$$

la última desigualdad porque $2^{2j}|\lambda|(2k+n)<1$.

Consideremos ahora el caso en que $2^{2j}|\lambda|(2k+n)\geq 1$. Tenemos

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{\nu_{\Gamma,j}}(\lambda,k)\right| &= \left|\frac{1}{|B_{2^j}(0)|}\int\limits_{B_{2^j}(0)} \varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{|\lambda|\,|z|^2}\right)e^{-i\lambda\Gamma(z)}dz\right| \\
&= \left|\frac{1}{|B_1(0)|}\int\limits_{B_{2^j}(0)} \varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{2^{2j}|\lambda|\,|z|^2}\right)e^{-i\lambda\Gamma(2^jz)}dz\right| \\
&\leq \frac{1}{|B_1(0)|}\int\limits_{B_{2^j}(0)} \left|\varphi_k^{n-1}\left(\sqrt{2^{2j}|\lambda|\,|z|^2}\right)\right|dz
\end{aligned}$$

y entonces por (ii) del Lema 7.8

$$\left|\widehat{\nu_{\Gamma,j}}(\lambda,k)\right|\leq c\left(2^{2j}|\lambda|(2k+n)\right)^{-\frac{1}{6}}.$$

Luego la sucesión de medidas $\{\nu_{\Gamma,j}\}_{j\in\mathbb{Z}}$ satisface las hipótesis del Teorema 7.11 lo que concluye la demostración del teorema para el caso en que $D=\mathbb{C}^n$. La prueba para el caso $D=B_R(0)$ es completamente similar. Se definen la medidas $\nu_{\Gamma,j}$ por

$$\nu_{\Gamma,j}(E)=\frac{1}{|B_{2^j}(0)|}\int\limits_{B_{2^j}(0)\cap D}\chi_E(w,\Gamma(w))dw$$

y se procede como en el caso $D=\mathbb{C}^n$.

■

Prueba del Teorema 7.1. Es simple consecuancia del teorema 7.12. Para $r>0$ sea $j_r\in\mathbb{Z}$ tal que $2^{j_r-1}\leq r<2^{j_r}$. Entonces $B_r(0)\subset B_{2^{j_r}}(0)$ y también $|B_r(0)|\geq|B_{2^{j_r-1}}(0)|=2^{-2n}|B_{2^{j_r}}(0)|$. luego

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|B_r(0)|}\int\limits_{B_r(0)}\left|f\left((z,t)(w,\Gamma(w))^{-1}\right)\right|dw \\
\leq\;& 2^{2n}\frac{1}{|B_{2^{j_r}}(0)|}\int\limits_{B_{2^{j_r}}(0)}\left|f\left((z,t)(w,\Gamma(w))^{-1}\right)\right|dw
\end{aligned}$$

y por lo tanto $M_\Gamma f\leq 2^{2n}M_{\Gamma,diad}f$.

■

8 Apéndice I

El propósito de este apéndice es probar la proposición 5.17 que enunciaremos nuevamente para beneficio del lector.

Proposición 5.17. *Si* $\alpha < (n-1)\beta - 4$ *entonces existen una constante positiva* c *y un número* $a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ *tales que para* $\lambda \neq 0$ *y* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$\left|\lambda \frac{d}{d\lambda} \widehat{\mu}(\lambda, k)\right| \leq c\left(1 + |\lambda|(2k+n)\right)^{1-a}$$

La prueba de esta proposición seguirá de varios lemas que probaremos a lo largo del apéndice. Comenzamos con la siguiente observación de carácter general.

Lema 8.1. *Sea* $f \in C^{\infty}((\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^m)$. *Entonces, para* $\lambda \neq 0$ *y* $w \in \mathbb{R}^m$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\lambda + h, w) - f(\lambda, w)}{h} = \frac{\partial}{\partial \lambda} f(\lambda, w)$$

con convergencia en $C^{\infty}(\mathbb{R}^m)$.

Prueba. Sea $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y para $\delta > 0$ sea $B_\delta(\lambda) = (\lambda - \delta, \lambda + \delta)$. Sea K compacto en $\mathbb{R}^m$ y sea $R > 0$ tal que $K \subset B_R(\mathbf{0})$ donde $B_R(\mathbf{0}) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| < R\}$.

Sea $\Theta \in C_c^{\infty}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ tal que $\Theta(\eta, w) = 1$ en $B_{\frac{1}{2}|\lambda|}(\lambda) \times B_R(\mathbf{0})$ y $sop(\Theta) \subset B_{\frac{3}{4}|\lambda|}(\lambda) \times B_{2R}(\mathbf{0})$. Entonces

$$\lim_{h \to 0} \frac{(\Theta f)(\lambda + h, w) - (\Theta f)(\lambda, w)}{h} = \frac{\partial}{\partial \lambda}(\Theta f)(\lambda, w)$$

con convergencia en $S(\mathbb{R}^m)$ (cf. [**Ru91**] Lema 7.17, pag. 178), luego también con convergencia en $C^{\infty}(\mathbb{R}^m)$.

Si $|h| < \frac{1}{2}|\lambda|$ y $w \in B_R(\mathbf{0})$ entonces,

$$\frac{f(\lambda + h, w) - f(\lambda, w)}{h} = \frac{(\Theta f)(\lambda + h, w) - (\Theta f)(\lambda, w)}{h}$$

y por lo tanto $\dfrac{\partial}{\partial\lambda}f(\lambda,w)=\dfrac{\partial}{\partial\lambda}(\Theta f)(\lambda,w)$ para $w\in B_R(\mathbf{0})$. También, para cada multiíndice $\gamma\in(N\cup\{0\})^m$ y $w\in B_R(\mathbf{0})$

$$\begin{aligned} D_w^\gamma\left(\frac{f(\lambda+h,w)-f(\lambda,w)}{h}\right) &= D_w^\gamma\left(\frac{(\Theta f)(\lambda+h,w)-(\Theta f)(\lambda,w)}{h}\right) \\ D_w^\gamma\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}f(\lambda,w)\right) &= D_w^\gamma\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}(\Theta f)(\lambda,w)\right), \end{aligned}$$

donde $D_w^\gamma=\left(\dfrac{\partial}{\partial w_1}\right)^{\gamma_1}\ldots\left(\dfrac{\partial}{\partial w_m}\right)^{\gamma_m}$ y entonces

$$\lim_{h\to0}D_w^\gamma\frac{f(\lambda+h,w)-f(\lambda,w)}{h}=D_w^\gamma\frac{\partial}{\partial\lambda}f(\lambda,w)$$

con convergencia uniforme en K.

∎

Corolario 8.2. *Sea $f\in C^\infty((\mathbb{R}\setminus\{0\})\times\mathbb{R}^m)$ y sea $\sigma\in S'(\mathbb{R}^m)$ una distribución con soporte compacto. Entonces, para $\lambda\neq0$,*

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\sigma(f(\lambda,.))=\sigma\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}f(\lambda,.)\right)$$

Prueba. Sigue inmediatamente del Lema 8.1.

∎

Recordemos que

$$\begin{aligned} \widehat{\mu^\varepsilon}(\lambda,k) &= \frac{k!\,(n-1)!}{(k+n-1)!}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{C}^n}\mu^\varepsilon(z,t)\,L_k^{n-1}\left(\frac{|\lambda|\,|z|^2}{2}\right)e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{4}}e^{-i\lambda t}dzdt \\ &= \mu^\varepsilon\left(\overline{E_{\lambda,k}}\right). \end{aligned}$$

Como $\dfrac{d}{ds}L_k^{n-1}(s)=-L_{k-1}^n(s)$ (conviniendo que $L_j^l(s)=0$ si $j<0$), tenemos (por el

Corolario 8.2) para $k \geq 0$ y $\lambda \neq 0$,

$$\begin{aligned}
& \lambda \frac{d}{d\lambda} \widehat{\mu^{\varepsilon}}(\lambda, k) \qquad (8.1) \\
= \; & -\frac{1}{2} \frac{k!\,(n-1)!}{(k+n-1)!} |\lambda| \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{C}^n} \mu^{\varepsilon}(z,t) |z|^2 L_{k-1}^{n} \left(\frac{|\lambda|\,|z|^2}{2} \right) e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{4}} e^{-i\lambda t} dz dt \\
& -\frac{1}{4} \frac{k!\,(n-1)!}{(k+n-1)!} |\lambda| \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{C}^n} \mu^{\varepsilon}(z,t) |z|^2 L_{k}^{n-1} \left(\frac{|\lambda|\,|z|^2}{2} \right) e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{4}} e^{-i\lambda t} dz dt \\
& -i \frac{k!\,(n-1)!}{(k+n-1)!} \lambda \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{C}^n} t \mu^{\varepsilon}(z,t) L_{k}^{n-1} \left(\frac{|\lambda|\,|z|^2}{2} \right) e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{4}} e^{-i\lambda t} dz dt \\
= \; & I + II + III
\end{aligned}$$

donde I, II y III son, respectivamente, el primer, el segundo y el tercer sumando de (8.1).

Similarmente, del Corolario 8.2 obtenemos también que

$$\begin{aligned}
& \lambda \frac{d}{d\lambda} \widehat{\mu}(\lambda, k) \qquad (8.2) \\
= \; & -\frac{1}{2} \frac{k!\,(n-1)!}{(k+n-1)!} |\lambda| \mu \left((z,t) \to |z|^2 L_{k-1}^{n} \left(\frac{|\lambda|\,|z|^2}{2} \right) e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{4}} e^{-i\lambda t} \right) \\
& -\frac{1}{4} \frac{k!\,(n-1)!}{(k+n-1)!} |\lambda| \mu \left((z,t) \to |z|^2 L_{k}^{n-1} \left(\frac{|\lambda|\,|z|^2}{2} \right) e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{4}} e^{-i\lambda t} \right) \\
& -i \frac{k!\,(n-1)!}{(k+n-1)!} \lambda \mu \left((z,t) \to L_{k}^{n-1} \left(\frac{|\lambda|\,|z|^2}{2} \right) e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{4}} t e^{-i\lambda t} \right) \\
= \; & I^* + II^* + III^*
\end{aligned}$$

donde I^*, II^* y III^* son, respectivamente, el primer, el segundo y el tercer sumando de (8.2).

Lema 8.3. *Sean $\lambda_0 > 0$, $k_0 > 0$. Entonces existe una constante positiva c independiente de ε tal que para $0 < |\lambda| < \lambda_0$ y $0 \leq k < k_0$ y $a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$,*

$$\left| \lambda \frac{d}{d\lambda} \widehat{\mu^{\varepsilon}}(\lambda, k) \right| \leq c \left(1 + |\lambda| (2k+n)\right)^{1-a}.$$

Prueba. Basta probar que existe una constante positiva c independiente de ε tal que para $0 < |\lambda| < \lambda_0$ y $0 \leq k < k_0$,

$$\left| \lambda \frac{d}{d\lambda} \widehat{\mu^{\varepsilon}}(\lambda, k) \right| \leq c.$$

Para ver esto estimaremos I, II y III. Para estimar I notemos que

$$I = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{C}^n} \mu^{\varepsilon}(z,t)\, G_{\lambda,k}(z,t)\, dzdt$$

con

$$G_{\lambda,k}(z,t) := -\frac{1}{2} \frac{k!\,(n-1)!}{(k+n-1)!} |\lambda|\, |z|^2\, L_{k-1}^n \left(|\lambda|\, |z|^2\right) e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{4}} e^{-i\lambda t}.$$

Integrando por partes N veces, con $N = N(\alpha, \beta)$ tal que $\alpha < N\beta$, la Proposición 5.2 nos da que

$$I = \frac{1}{(-\varepsilon + i)^N} \sum_{j=1}^{N} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{C}^n} \nu_{j,\varepsilon}(z,t)\, (L_j G_{\lambda,k})(z,t)\, dzdt$$

con cada $\nu_{j,\varepsilon} \in L^1(\mathbb{H}_n)$, independiente de λ, k y satisfaciendo que $sop(\nu_{j,\varepsilon}) \subset sop(\mu)$, y que $\|\nu_{j,\varepsilon}\|_{L^1(\mathbb{H}_n)} \leq M$ donde M es una constante independiente de ε (y de λ, k), y con cada L_j un operador diferencial de orden (eventualmente 0) a lo sumo N y de la forma

$$(L_j f)(x+iy,t) = \sum_{|\gamma| \leq N} P_{\gamma}(x,y,t)\, D^{\gamma}(f(x+iy,t))$$

donde la suma se hace sobre los multiíndices $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_{2n+1}) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^{2n+1}$ de longitud $|\gamma| := \sum_{j=1}^{2n+1} \gamma_j \leq N$ y donde cada $P_{\gamma}(x,y,t)$ es un polinomio en x, y, t de grado a lo sumo N con coeficientes independientes de ε, λ y k. Y, como es usual, D^{γ} denota la derivada parcial

$$D^{\gamma} = (\partial_{x_1})^{\gamma_1} ... (\partial_{x_n})^{\gamma_n} (\partial_{y_1})^{\gamma_{n+1}} ... (\partial_{y_n})^{\gamma_{2n}} (\partial_t)^{\gamma_{2n+1}}.$$

Para $r > 0$ y $X \subset \mathbb{H}_n$ sea $r \cdot X := \left\{ \left(rw, r^2 \tau\right) : (w,\tau) \in X \right\}$. Sea, para $(w,\tau) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$,

$$H_k(w,\tau) := -\frac{1}{2} \frac{k!\,(n-1)!}{(k+n-1)!} |w|^2\, L_{k-1}^n \left(\frac{1}{2} |w|^2\right) e^{-\frac{1}{4}|w|^2} e^{-i\tau}.$$

Entonces $G_{\lambda,k}(z,t) = H_k\left(|\lambda|^{\frac{1}{2}} z, \lambda t\right)$. Luego para $\gamma \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^{2n+1}$,

$$(D^{\gamma} G_{\lambda,k})(z,t) = (sign(\lambda))^{\gamma_{2n+1}} |\lambda|^{\frac{1}{2}\left(2\gamma_{2n+1} + \sum_{l=1}^{2n} \gamma_l\right)} (D^{\gamma} H_k)\left(|\lambda|^{\frac{1}{2}} z, \lambda t\right)$$

y en consecuencia, para $(z,t) \in sop(\mu)$ y $|\lambda| \leq \lambda_0$, $k \leq k_0$,

$$|(D^{\gamma} G_{\lambda,k})(z,t)| \leq \lambda_0^{\frac{1}{2}\left(2\gamma_{2n+1} + \sum_{l=1}^{2n} \gamma_l\right)} M$$

donde $M = \max\left\{ \left| \left(D^{\gamma} H_k\right)(w,\tau)\right| : 0 \leq k \leq k_0 \text{ y } (w,\tau) \in |\lambda_0|^{\frac{1}{2}} \cdot sop\,(\mu) \right\}$. Entonces, para $j = 1, 2, ..., N$,

$$\max\left\{ \left| \left(L_j G_{\lambda,k}\right)(z,t)\right| : 0 \leq k \leq k_0,\ \ |\lambda| \leq \lambda_0 \text{ y } (z,t) \in sop\,(\mu) \right\} \leq c$$

para alguna constante positiva c (dependiente de N, λ_0 y k_0) lo que nos da una constante c' tal que $|I| \leq c'$ para $0 \leq k \leq k_0$ y $|\lambda| \leq \lambda_0$.

Para estimar II observemos que $II = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{C}^n} \mu^{\varepsilon}(z,t)\, G^{*}_{\lambda,k}(z,t)\, dzdt$ con

$$G^{*}_{\lambda,k}(z,t) = -\frac{1}{4} \frac{k!\,(n-1)!}{(k+n-1)!} |\lambda|\, |z|^2\, L^{n-1}_k \left(\frac{|\lambda|\,|z|^2}{2} \right) e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{4}} e^{-i\lambda t}$$

y procedemos exactamente como en la estimación de I reemplazando allí $G_{\lambda,k}$ y H_k por $G^{*}_{\lambda,k}$ y

$$H^{*}_k(w,\tau) := -\frac{1}{4} \frac{k!\,(n-1)!}{(k+n-1)!} |w|^2\, L^{n-1}_k \left(\frac{1}{2} |w|^2 \right) e^{-\frac{1}{4}|w|^2} e^{-i\tau}.$$

respectivamente, obteniendo una constante c'' tal que $|II\,(\lambda,k)| \leq c''$ para $0 \leq k \leq k_0$ y $|\lambda| \leq \lambda_0$.

Finalmente, la estimación de III es idéntica a las anteriores. Escribiendo

$$III = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{C}^n} \mu^{\varepsilon}(z,t)\, G^{**}_{\lambda,k}(z,t)\, dzdt$$

con

$$G^{**}_{\lambda,k}(z,t) = i \frac{k!\,(n-1)!}{(k+n-1)!} L^{n-1}_k \left(\frac{|\lambda|\,|z|^2}{2} \right) e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{4}} \lambda t e^{-i\lambda t}$$

y procediendo como con I reemplazando en el argumento $G_{\lambda,k}$ y H_k por $G^{**}_{\lambda,k}$ y

$$H^{**}_k(w,\tau) := i \frac{k!\,(n-1)!}{(k+n-1)!} L^{n-1}_k \left(\frac{1}{2} |w|^2 \right) e^{-\frac{1}{4}|w|^2} \tau e^{-i\tau}$$

respectivamente, obtenemos una constante c''' tal que $|III| \leq c'''$ para $0 \leq k \leq k_0$ y $|\lambda| \leq \lambda_0$ lo que completa la prueba del lema.

$\blacksquare$

Corolario 8.4. *Sean $\lambda_0 > 0$, $k_0 > 0$. Entonces existe una constante positiva c tal que para $0 < |\lambda| < \lambda_0$ y $0 \leq k < k_0$ y $a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$,*

$$\left|\lambda \frac{d}{d\lambda} \widehat{\mu}(\lambda, k)\right| \leq c\left(1 + |\lambda|(2k+n)\right)^{1-a}$$

Prueba. Tenemos $\lambda \frac{d}{d\lambda} \widehat{\mu}(\lambda, k) = \lambda \frac{d}{d\lambda}\left(\mu\left(E_{\lambda,k}\right)\right) = \lambda \mu\left(\frac{d}{d\lambda} E_{\lambda,k}\right)$, la última igualdad por el Corolario 8.2, y como $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \mu^{\varepsilon} = \mu$ con convergencia en $\left(C^{\infty}\left(\mathbb{H}_n\right)\right)'$ tenemos también que $\lambda \mu\left(\frac{d}{d\lambda} E_{\lambda,k}\right) = \lambda \lim_{\varepsilon \to 0^+} \mu^{\varepsilon}\left(\frac{d}{d\lambda} E_{\lambda,k}\right) = \lambda \frac{d}{d\lambda} \widehat{\mu^{\varepsilon}}(\lambda, k)$ y el lema sigue inmediatamente del Lema 8.3.

■

Necesitaremos el siguiente resultado de [**Ly07**].

Proposición 8.5. *(i) (cf. [**Ly07**] Theorem 2.1) Sea $k_0 > 0$. Existen constantes positivas c, c_1 y c_2 independientes de ε tales que para $0 \leq k < k_0$*

$$\widehat{\mu^{\varepsilon}}(\lambda, k) = c_1 |\lambda|^{\frac{\alpha - \left(n + \frac{1}{2}\right)\beta}{\beta + 2}} e^{ic_2 |\lambda|^{\frac{\beta}{\beta+2}}} + \psi(\lambda, k)$$

con $\psi(\lambda, k) = O\left(|\lambda|^{\frac{\alpha - (n+1-\varepsilon)\beta}{\beta+2}}\right)$ para $|\lambda| \to \infty$ y $0 \leq k < k_0$.
(ii) Si $\alpha < n\beta$ entonces existen $k_0 > 0$, $\lambda_0 > 0$ y una constante positiva c independiente de ε tales que

$$|\widehat{\mu^{\epsilon}}(\lambda, k)| \leq \begin{cases} c & \text{si } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \lambda \neq 0 \text{ y } \varepsilon > 0 \\ c\left(|\lambda| k\right)^{\frac{\alpha - \left(n + \frac{1}{2}\right)\beta}{\beta+2}}, & \text{si } k < k_0,\ |\lambda| > \lambda_0 \text{ y } \varepsilon > 0 \\ c \log\left(1 + |\lambda| k\right)\left(1 + |\lambda| k\right)^{\frac{\alpha - n\beta}{2(\beta+1)}} & \text{si } k \geq k_0,\ \lambda \neq 0 \text{ y } \varepsilon > 0 \end{cases} \tag{8.3}$$

Corolario 8.6. *Si $\alpha < (n-1)\beta - 1$ entonces existe $a > \frac{1}{2}$ y una constante positiva c independiente de ε tales que*

$$|\widehat{\mu^{\varepsilon}}(\lambda, k)| \leq c \frac{1}{\left(1 + |\lambda|(2k+n)\right)^{a}}$$

para $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Prueba. La prueba es la misma que la del Corolario 5.16.

■

Observación 8.7. *Dados $k_0 > 0$ y $\lambda_0 > 0$ la Proposición 8.5 nos da una constante c (independiente de ε) tal que para $0 \leq k \leq k_0$, $|\lambda| \geq \lambda_0$ y $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{4}$,*

$$\left|\widehat{\mu^{\varepsilon}}(\lambda, k)\right| \leq c\,|\lambda|^{\frac{\alpha-\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta}{\beta+2}} \tag{8.4}$$

En efecto, para $0 \leq k \leq k_0$ sea $A_k := \sup\limits_{|\lambda| \geq \lambda_0} \left(|\lambda|^{-\frac{\alpha-(n+1-\varepsilon)\beta}{\beta+2}} |\psi(\lambda, k)|\right)$. entonces la Proposición 8.5 implica que cada A_k es finito. Ahora, para $0 \leq k \leq k_0$, $|\lambda| \geq \lambda_0$ y $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{4}$,

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{\mu^{\varepsilon}}(\lambda, k)\right| &\leq |\lambda|^{\frac{\alpha-\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta}{\beta+2}} \left(c_1 + A_k\,|\lambda|^{\frac{\left(-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\beta}{\beta+2}}\right) \\
&\leq \left(c_1 + \max_{k \leq k_0} A_k\,|\lambda_0|^{\frac{\left(-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\beta}{\beta+2}}\right) |\lambda|^{\frac{\alpha-\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta}{\beta+2}} \\
&\leq \left(c_1 + \max_{k \leq k_0} A_k\,|\lambda_0|^{\frac{\beta}{4(\beta+2)}}\right) |\lambda|^{\frac{\alpha-\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta}{\beta+2}} \\
&= c\,|\lambda|^{\frac{\alpha-\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta}{\beta+2}}.
\end{aligned}$$

donde c es una constante positiva independiente de λ, k y ε.

Lema 8.8. *Supóngase que $\alpha < n\beta$. Sean $\lambda_0 > 0$, $k_0 > 0$ y sea $a \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$. Entonces existe una constante positiva c independiente de ε tal que para $|\lambda| \geq \lambda_0$ y $0 \leq k < k_0$,*

$$\left|\lambda \frac{d}{d\lambda} \widehat{\mu^{\varepsilon}}(\lambda, k)\right| \leq c\,(1 + |\lambda|\,(2k+n))^{1-a}$$

Prueba. Sean I, II y III dados por (8.1). Basta ver que para alguna constante c independiente de ε vale que

$$|I| + |II| + |III| \leq c \text{ para } |\lambda| \geq \lambda_0 \text{ y } 0 \leq k < k_0$$

En orden a estimar I notemos que si $k=0$ tenemos $I=0$ y no hay nada que probar. Si $1\leq k<k_0$ y $|\lambda|\geq\lambda_0$, utilizando que (cf. [**AbSe65**], fórmula 22.7.31, p. 783)

$$sL_{k-1}^{n}(s)=(k+n-1)\,L_{k-1}^{n-1}(s)-kL_{k}^{n-1}(s)$$

tenemos que $I=I_1+I_2$ donde

$$\begin{aligned}
I_1 &= -\frac{k!\,(n-1)!}{(k+n-2)!}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{C}^n}\mu^{\varepsilon}(z,t)\,L_{k-1}^{n-1}\left(\frac{|\lambda|\,|z|^2}{2}\right)e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{4}}e^{-i\lambda t}dzdt,\\
I_2 &= \frac{k!\,(n-1)!}{(k+n-1)!}k\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{C}^n}\mu^{\varepsilon}(z,t)\,L_{k}^{n-1}\left(\frac{|\lambda|\,|z|^2}{2}\right)e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{4}}e^{-i\lambda t}dzdt.
\end{aligned}$$

Ahora bien, recordando (8.4),

$$\begin{aligned}
|I_1| &= \left|k\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{C}^n}\mu^{\varepsilon}(z,t)\,\frac{(k-1)!\,(n-1)!}{(k+n-2)!}L_{k-1}^{n-1}\left(\frac{|\lambda|\,|z|^2}{2}\right)e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{4}}e^{-i\lambda t}dzdt\right|\\
&= k\left|\widehat{\mu^{\varepsilon}}(\lambda,k-1)\right|\leq ck_0\,|\lambda|^{\frac{\alpha-\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta}{\beta+2}}
\end{aligned}$$

con c constante independiente de λ,k y ε.Y como $|\lambda|\geq\lambda_0$ y $\alpha-\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\beta<0$ obtenemos $|I_1|\leq k_0c\,|\lambda_0|^{\frac{\alpha-\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta}{\beta+2}}$.

Similarmente $|I_2|=k\left|\widehat{\mu^{\varepsilon}}(\lambda,k)\right|\leq c'k_0\,|\lambda|^{\frac{\alpha-\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta}{\beta+2}}\leq c'k_0\,|\lambda_0|^{\frac{\alpha-\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta}{\beta+2}}$ con c' una constante también independiente de λ,k y ε. Entonces, para $k\geq 1$ y $|\lambda|\geq\lambda_0$ tenemos $|I|\leq c''$ con c'' una constante del mismo tipo. Para estimar II observamos que (cf. [**AbSe65**], fórmula 22.7.12, p. 782)

$$sL_{k}^{n-1}(s)=-(k+1)\,L_{k+1}^{n-1}(s)+(2k+n)\,L_{k}^{n-1}(s)-(k+n-1)\,L_{k-1}^{n-1}(s)$$

(con la convención, para $k=0$, de que $L_{-1}^{n-1}=0$) y entonces

$$\begin{aligned}
&II\\
&= -\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{C}^n}\mu^{\varepsilon}(z,t)\,\frac{k!\,(n-1)!}{(k+n-1)!}\,|\lambda|\,|z|^2\,L_{k}^{n-1}\left(\frac{|\lambda|\,|z|^2}{2}\right)e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{4}}e^{-i\lambda t}dzdt\\
&= II_1+II_2+II_3
\end{aligned}$$

con $II_1=\dfrac{k+n}{4}\widehat{\mu^{\varepsilon}}(\lambda,k+1)$, $II_2=-\dfrac{2k+n}{4}\widehat{\mu^{\varepsilon}}(\lambda,k)$ y $II_3=\dfrac{k}{4}\widehat{\mu^{\varepsilon}}(\lambda,k-1)$ (y donde $II_3=0$ si $k=0$). y nuevamente por (8.4) obtenemos una constante c independiente de λ,k y ε tal que $|II_1|+|II_2|+|II_3|\leq c$ para $|\lambda|\geq\lambda_0$ y $k\leq k_0$.

Queda entonces estimar III. Tenemos que

$$\begin{aligned}
III &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{C}^n} t\mu^{\varepsilon}(z,t)\,\frac{k!\,(n-1)!}{(k+n-1)!}L_k^{n-1}\left(\frac{|\lambda|\,|z|^2}{2}\right)e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{4}}\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-i\lambda t}\right)dzdt \quad (8.5)\\
&= -\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{C}^n}\frac{\partial}{\partial t}\left(t\mu^{\varepsilon}(z,t)\right)\frac{k!\,(n-1)!}{(k+n-1)!}L_k^{n-1}\left(\frac{|\lambda|\,|z|^2}{2}\right)e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{4}}e^{-i\lambda t}dzdt\\
&= -\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{C}^n} t\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu^{\varepsilon}(z,t)\right)\frac{k!\,(n-1)!}{(k+n-1)!}L_k^{n-1}\left(\frac{|\lambda|\,|z|^2}{2}\right)e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{4}}e^{-i\lambda t}dzdt\\
&\quad -\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{C}^n}\mu^{\varepsilon}(z,t)\,\frac{k!\,(n-1)!}{(k+n-1)!}L_k^{n-1}\left(\frac{|\lambda|\,|z|^2}{2}\right)e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{4}}e^{-i\lambda t}dzdt\\
&= III_1 + III_2
\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
III_1 &= -\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{C}^n} t\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu^{\varepsilon}(z,t)\right)\frac{k!\,(n-1)!}{(k+n-1)!}L_k^{n-1}\left(\frac{|\lambda|\,|z|^2}{2}\right)e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{4}}e^{-i\lambda t}dzdt \quad (8.6)\\
III_2 &= -\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{C}^n}\mu^{\varepsilon}(z,t)\,\frac{k!\,(n-1)!}{(k+n-1)!}L_k^{n-1}\left(\frac{|\lambda|\,|z|^2}{2}\right)e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{4}}e^{-i\lambda t}dzdt.
\end{aligned}$$

Como $III_2 = -\widehat{\mu^{\varepsilon}}(\lambda,k)$ y $\alpha < n\beta$, (8.3) nos da $|III_2| \leq c$ para todo $\lambda \neq 0$ y $k \geq 0$ con c independiente de λ, k y ε. Queda entonces acotar $|III_1|$. En orden de poner de manifiesto la dependencia de μ^{ε} respecto de α, β y de la función χ pondremos

$$\mu^{\varepsilon}_{\alpha,\beta,\chi}(z,t) := \rho(z,t)^{-(2n+2+\alpha)}\,e^{(i-\varepsilon)\rho(z,t)^{-\beta}}\chi(\rho(z,t)).$$

Utilizando que

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho(z,t)) = \frac{1}{2}t\rho(z,t)^{-3}, \quad (8.7)$$

un cálculo directo nos muestra que

$$\begin{aligned}
& t\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu^{\varepsilon}_{\alpha,\beta,\chi}(z,t)\right) \quad (8.8)\\
&= -\frac{2n+2+\alpha}{2}t^2\rho(z,t)^{-(2n+2+\alpha+4)}\,e^{(i-\varepsilon)\rho(z,t)^{-\beta}}\chi(\rho(z,t))\\
&\quad -\frac{(i-\varepsilon)\beta}{2}t^2\rho(z,t)^{-(2n+2+\alpha+\beta+4)}\,e^{(i-\varepsilon)\rho(z,t)^{-\beta}}\chi(\rho(z,t))\\
&\quad +\frac{1}{2}t^2\rho(z,t)^{-(2n+2+\alpha+3)}\,e^{(i-\varepsilon)\rho(z,t)^{-\beta}}\chi'(\rho(z,t))\\
&= -\frac{2n+2+\alpha}{2}t^2\mu^{\varepsilon}_{\alpha+4,\beta,\chi}(z,t) - \frac{\beta(i-\varepsilon)}{2}t^2\mu^{\varepsilon}_{\alpha+\beta+4,\beta,\chi}(z,t)\\
&\quad +\frac{1}{2}t^2\mu^{\varepsilon}_{\alpha+3,\beta,\chi'}(z,t)
\end{aligned}$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
& III_1 \\
&= -\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{C}^n} t\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu^{\varepsilon}\left(z,t\right)\right)\frac{k!\left(n-1\right)!}{\left(k+n-1\right)!}L_k^{n-1}\left(\frac{\left|\lambda\right|\left|z\right|^2}{2}\right)e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{4}}e^{-i\lambda t}dzdt \\
&= c_1\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{C}^n} t^2\mu^{\varepsilon}_{\alpha+4,\beta,\chi}\left(z,t\right)\frac{k!\left(n-1\right)!}{\left(k+n-1\right)!}L_k^{n-1}\left(\frac{\left|\lambda\right|\left|z\right|^2}{2}\right)e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{4}}e^{-i\lambda t}dzdt \\
&+ c_2\left(i-\varepsilon\right)\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{C}^n} t^2\mu^{\varepsilon}_{\alpha+\beta+4,\beta,\chi}\left(z,t\right)\frac{k!\left(n-1\right)!}{\left(k+n-1\right)!}L_k^{n-1}\left(\frac{\left|\lambda\right|\left|z\right|^2}{2}\right)e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{4}} \\
&\times e^{-i\lambda t}dzdt \\
&+ c_3\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{C}^n} t^2\mu^{\varepsilon}_{\alpha+3,\beta,\chi'}\left(z,t\right)\frac{k!\left(n-1\right)!}{\left(k+n-1\right)!}L_k^{n-1}\left(\frac{\left|\lambda\right|\left|z\right|^2}{2}\right)e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{4}}e^{-i\lambda t}dzdt \\
&= J+JJ+JJJ
\end{aligned}
$$

con c_1, c_2 y c_3 constantes independientes de λ, k y ε y donde J, JJ y JJJ son respectivamente el primer, segundo y tercer sumando de la suma que expresa a III_1. Ahora,

$$
\begin{aligned}
J &= c_1\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{C}^n} t^2\rho\left(z,t\right)^{-(2n+2+\alpha+4)}e^{(i-\varepsilon)\rho(z,t)^{-\beta}}\chi\left(\rho\left(z,t\right)\right) \\
&\quad\times\frac{k!\left(n-1\right)!}{\left(k+n-1\right)!}L_k^{n-1}\left(\frac{\left|\lambda\right|\left|z\right|^2}{2}\right)e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{4}}e^{-i\lambda t}dzdt,
\end{aligned}
$$

pasando a coordenadas polares en la variable z y observando que todas las funciones involucradas son radiales en z, tenemos

$$
\begin{aligned}
J &= c_1\left|S^{2n-1}\right|\int_{\mathbb{R}}\int_0^{\infty} t^2\left(s^4+t^2\right)^{-\frac{1}{4}(2n+2+\alpha+4)}e^{(i-\varepsilon)\left(s^4+t^2\right)^{-\frac{1}{4}\beta}} \\
&\quad\times\chi\left(\left(s^4+t^2\right)^{\frac{1}{4}}\right)\frac{k!\left(n-1\right)!}{\left(k+n-1\right)!}L_k^{n-1}\left(\frac{1}{2}\left|\lambda\right|s^2\right)e^{-\frac{1}{4}|\lambda|s^2}e^{-i\lambda t}s^{2n-1}dsdt,
\end{aligned}
$$

y utilizando el cambio de variables $(s,t)=\left(r\sin^{\frac{1}{2}}\left(\theta\right), r^2\cos\left(\theta\right)\right)$ con $0<r<\infty$,

$0 \leq \theta \leq \pi$, encontramos que $J = J_1 - J_2$ donde

$$
\begin{aligned}
J_1 &= c_1 \left|S^{2n-1}\right| \int_0^\pi \int_0^\infty r^{-1-\alpha} e^{(i-\varepsilon)r^{-\beta}} \chi(r) \frac{k!\,(n-1)!}{(k+n-1)!} \\
&\quad \times L_k^{n-1}\left(\frac{1}{2}|\lambda| r^2 \sin(\theta)\right) e^{-\frac{1}{4}|\lambda| r^2 \sin(\theta)} e^{-i\lambda r^2 \cos(\theta)} (\sin(\theta))^{n-1} \, dr d\theta, \\
J_2 &= c_1 \left|S^{2n-1}\right| \int_0^\pi \int_0^\infty r^{-1-\alpha} e^{(i-\varepsilon)r^{-\beta}} \chi(r) \frac{k!\,(n-1)!}{(k+n-1)!} \\
&\quad \times L_k^{n-1}\left(\frac{1}{2}|\lambda| r^2 \sin(\theta)\right) e^{-\frac{1}{4}|\lambda| r^2 \sin(\theta)} e^{-i\lambda r^2 \cos(\theta)} (\sin(\theta))^{n+1} \, dr d\theta.
\end{aligned}
$$

Los mismos cambios de variable recién utilizados, pero aplicados ahora en sentido inverso, nos muestran que $J_1 = c_1 \widehat{\mu^\varepsilon}(\lambda, k)$ y entonces, como $\alpha < n\beta$, por (8.3), existe una constante c independiente de λ, k y ε tal que $|J_1| \leq c$ para $k \leq k_0$ y $|\lambda| \geq \lambda_0$.

Estimemos ahora J_2. Para $s \in \mathbb{R}$, (conviniendo en que $L_j^m(s) = 0$ si $j < 0$) las siguientes fórmulas recursivas valen para los polinomios de Laguerre (cf. [**AbSe65**], fórmula 22.7.30, p. 783),

$$
\begin{aligned}
L_k^{n-1}(s) &= L_k^n(s) - L_{k-1}^n(s) = L_k^{n+1}(s) - L_{k-1}^{n+1}(s) - \left(L_{k-1}^{n+1}(s) - L_{k-2}^{n+1}(s)\right) \\
&= L_k^{n+1}(s) - 2L_{k-1}^{n+1}(s) + L_{k-2}^{n+1}(s)
\end{aligned}
$$

y entonces $J_2 = J_{2,1} + J_{2,2} + J_{2,3}$ donde

$$
\begin{aligned}
J_{2,1} &= c_1'(k+n)(k+n+1) \int_0^\pi \int_0^\infty r^{-1-\alpha} e^{(i-\varepsilon)r^{-\beta}} \chi(r) \frac{k!\,(n+1)!}{(k+n+1)!} \\
&\quad \times L_k^{n+1}\left(\frac{1}{2}|\lambda| r^2 \sin(\theta)\right) e^{-\frac{1}{4}|\lambda| r^2 \sin(\theta)} e^{-i\lambda r^2 \cos(\theta)} (\sin(\theta))^{n+1} \, dr d\theta, \\
J_{2,2} &= c_2'(k+n)\,k \int_0^\pi \int_0^\infty r^{-1-\alpha} e^{(i-\varepsilon)r^{-\beta}} \chi(r) \frac{(k-1)!\,(n+1)!}{(k+n)!} \\
&\quad \times L_{k-1}^{n+1}\left(\frac{1}{2}|\lambda| r^2 \sin(\theta)\right) e^{-\frac{1}{4}|\lambda| r^2 \sin(\theta)} e^{-i\lambda r^2 \cos(\theta)} (\sin(\theta))^{n+1} \, dr d\theta, \\
J_{2,3} &= c_3' k(k-1) \int_0^\pi \int_0^\infty r^{-1-\alpha} e^{(i-\varepsilon)r^{-\beta}} \chi(r) \frac{(k-2)!\,(n+1)!}{(k+n-1)!} \\
&\quad \times L_{k-2}^{n+1}\left(\frac{1}{2}|\lambda| r^2 \sin(\theta)\right) e^{-\frac{1}{4}|\lambda| r^2 \sin(\theta)} e^{-i\lambda r^2 \cos(\theta)} (\sin(\theta))^{n+1} \, dr d\theta,
\end{aligned}
$$

donde c_1', c_2' y c_3' son constantes independientes de λ, k y ε. Nuevamente aplicando los cambios de coordenadas en sentido inverso, pero ahora tomando las coordenadas polares en $\mathbb{C}^{n+2}$ obtenemos

$$\begin{aligned} J_{2,1} &= \frac{c_1'}{|S^{2(n+2)-1}|}(k+n)(k+n+1)\left(\mu^{\varepsilon}_{\mathbb{H}^{n+2},\alpha,\beta}\right)^{\widehat{}}(\lambda,k), \\ J_{2,2} &= \frac{c_2'}{|S^{2(n+2)-1}|}(k+n)\,k\left(\mu^{\varepsilon}_{\mathbb{H}^{n+2},\alpha,\beta}\right)^{\widehat{}}(\lambda,k-1), \\ J_{2,3} &= \frac{c_3'}{|S^{2(n+2)-1}|}k(k-1)\left(\mu^{\varepsilon}_{\mathbb{H}^{n+2},\alpha,\beta}\right)^{\widehat{}}(\lambda,k-2) \end{aligned}$$

donde $\mu^{\varepsilon}_{\mathbb{H}^{n+2},\alpha,\beta}$ es la función sobre $\mathbb{H}_{n+2}$ dada por

$$\mu^{\epsilon}(z,t)=\rho(z,t)^{-(2(n+2)+2+\alpha)}e^{-\varepsilon\rho(z,t)^{-\beta}}e^{i\rho(z,t)^{-\beta}}\chi(\rho(z,t)), \qquad (z,t)\in\mathbb{H}_{n+2}$$

Entonces, como $\alpha<(n+2)\beta$, nuevamente por (8.3) utilizada ahora en $\mathbb{H}^{n+2}$, encontramos que $|J_2|\leq|J_{2,1}|+|J_{2,1}|+|J_{2,1}|\leq c$ para $k\leq k_0$ y $|\lambda|\geq\lambda_0$ con c constante independiente de λ,k y ε..

La estimación de JJ es completamente similar a la de J, solo que cambiando α por $\alpha+\beta$ y observando que $\alpha+\beta<(n+2)\beta$.

JJJ podría ser también estimado de la misma manera pero es mas sencillo observar que, como $\chi=1$ en un entorno del origen, tenemos $\chi'=0$ allí y luego $\mu^{\varepsilon}_{\alpha+3,\beta,\chi'}$ no tiene singularidad en el origen. Como además

$$\left|\frac{k!\,(n-1)!}{(k+n-1)!}L_k^{n-1}\left(\frac{|\lambda|\,|z|^2}{2}\right)e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{4}}e^{i\lambda t}\right|=|E_{\lambda,k}(z,t)|\leq 1$$

obtenemos que

$$|JJJ|\leq\left\|t^2\rho(z,t)^{-(2n+2+\alpha+3)}\chi'(\rho(z,t))\right\|_{L^1(\mathbb{H}_n)}$$

esto es, JJJ esta acotada por una constante independiente de λ,k.

■

Corolario 8.9. *Supóngase que $\alpha<n\beta$. Sean $\lambda_0>0$, $k_0>0$ y sea $a\in\left(\frac{1}{2},1\right)$. Entonces existe una constante positiva c tal que para $|\lambda|\geq\lambda_0$ y $0\leq k<k_0$,*

$$\left|\lambda\frac{d}{d\lambda}\widehat{\mu}(\lambda,k)\right|\leq c\left(1+|\lambda|(2k+n)\right)^{1-a}$$

Prueba. La prueba es la misma que la del Corolario 8.4.

■

Lema 8.10. *Supongamos $\alpha < n\beta$ y sean I y II dados por (8.1). Entonces existen $k_0 > 0$, $a_1, a_2 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ y una constante positiva c independiente de ε tal que para $k \geq k_0$ y $\lambda \neq 0$,*

$$\begin{aligned} |I| &\leq c\left(1+|\lambda|\left(2k+n\right)\right)^{1-a_1}, \\ |II| &\leq c\left(1+|\lambda|\left(2k+n\right)\right)^{1-a_2} \end{aligned}$$

Prueba. Recordemos que

$$\begin{aligned} I &= -\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{C}^n} \mu^{\varepsilon}(z,t)\,\frac{k!\,(n-1)!}{(k+n-1)!}\frac{|\lambda|\,|z|^2}{2}L_{k-1}^{n}\left(\frac{|\lambda|\,|z|^2}{2}\right)e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{4}}e^{-i\lambda t}dzdt, \\ II &= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{C}^n} \mu^{\varepsilon}(z,t)\,\frac{k!\,(n-1)!}{(k+n-1)!}\frac{|\lambda|\,|z|^2}{2}L_{k}^{n-1}\left(\frac{|\lambda|\,|z|^2}{2}\right)e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{4}}e^{-i\lambda t}dzdt \end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned} I &= -\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{C}^n} \mu^{\varepsilon}_{\alpha,\beta,\chi}(z,t)\,\frac{k!\,(n-1)!}{(k+n-1)!}\frac{|\lambda|\,|z|^2}{2}L_{k-1}^{n}\left(\frac{|\lambda|\,|z|^2}{2}\right)e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{4}}e^{-i\lambda t}dzdt \\ &= -\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{C}^n} \rho(z,t)^{-(2n+2+\alpha)}\,e^{(i-\varepsilon)\rho(z,t)^{-\beta}}\chi\left(\rho(z,t)\right) \\ &\quad\times\frac{k!\,(n-1)!}{(k+n-1)!}\frac{|\lambda|\,|z|^2}{2}L_{k-1}^{n}\left(\frac{|\lambda|\,|z|^2}{2}\right)e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{4}}e^{-i\lambda t}dzdt. \end{aligned}$$

Los mismos cambios de variable utilizados en el Lema 8.8 (i. e., primero tomando coordenadas polares en la variable z , $z = s\omega$ con $s > 0$, $\omega \in S^{2n-1}$ y luego realizando el cambio de variable $(s,t) = \left(r\sin^{\frac{1}{2}}(\theta), r^2\cos(\theta)\right)$ para $0 < r < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$) nos da que

$$
\begin{aligned}
I &= c_0 |\lambda| \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} r^{1-\alpha} e^{(i-\varepsilon) r^{-\beta}} \chi(r) \frac{k!\,(n-1)!}{(k+n-1)!} \\
&\quad \times L_{k-1}^{n} \left(\frac{1}{2} |\lambda| r^2 \sin(\theta) \right) e^{-\frac{1}{4}|\lambda| r^2 \sin(\theta)} e^{-i\lambda r^2 \cos(\theta)} (\sin(\theta))^n \, dr d\theta \\
&= c_0' |\lambda| k \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} r^{-1-(\alpha-2)} e^{(i-\varepsilon) r^{-\beta}} \chi(r) \frac{(k-1)! n!}{(k+n-1)!} \\
&\quad \times L_{k-1}^{n} \left(\frac{1}{2} |\lambda| r^2 \sin(\theta) \right) e^{-\frac{1}{4}|\lambda| r^2 \sin(\theta)} e^{-i\lambda r^2 \cos(\theta)} (\sin(\theta))^n \, dr d\theta \\
&= c_0'' |\lambda| k \left(\mu^{\varepsilon}_{\alpha-2.\beta,\chi,\mathbb{H}^{n+1}} \right)^{\widehat{}} (\lambda, k-1),
\end{aligned}
$$

con c_0, c_0' y c_0'' constantes independientes de λ, k y ε y donde la última igualdad resulta de utilizar los mismos cambios de variable, pero en sentido inverso y tomando las coordenadas polares en $\mathbb{C}^{n+1}$ en lugar de en $\mathbb{C}^n$. Entonces, como $\alpha - 2 < (n+1)\beta$, el corolario 8.6, usado en $\mathbb{H}_n$, nos da un numero $a_1 \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right)$ y una constante positiva c independiente de λ, k y ε tales que para $k \geq k_0$ y $\lambda \neq 0$,

$$
\begin{aligned}
|I| &\leq c \left| |\lambda| k \left(\mu^{\varepsilon}_{\alpha-2.\beta,\chi,\mathbb{H}^{n+1}} \right)^{\widehat{}} (\lambda, k-1) \right| \leq c |\lambda| k \left(1 + |\lambda| (2k+n)\right)^{-a_1} \\
&\leq c \left(1 + |\lambda| (2k+n)\right)^{1-a_1}.
\end{aligned}
$$

Por otra parte, utilizando los cambios de variable anteriores y que $L_k^{n-1} = L_k^n - L_{k-1}^n$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
& II \\
&= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{C}^n} \mu^{\varepsilon}(z,t) \frac{k!\,(n-1)!}{(k+n-1)!} \frac{|\lambda| |z|^2}{2} L_k^{n-1} \left(\frac{|\lambda| |z|^2}{2} \right) e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{4}} e^{-i\lambda t} dz dt \\
&= -\frac{1}{2} |\lambda| \left| S^{2n-1} \right| \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} r^{1-\alpha} e^{(i-\varepsilon) r^{-\beta}} \chi(r) \frac{k!\,(n-1)!}{(k+n-1)!} \\
&\quad \times L_k^{n-1} \left(\frac{1}{2} |\lambda| r^2 \sin(\theta) \right) e^{-\frac{1}{4}|\lambda| r^2 \sin(\theta)} e^{-i\lambda r^2 \cos(\theta)} (\sin(\theta))^n \, dr d\theta,
\end{aligned}
$$

esto es,

$$
\begin{aligned}
II &= c_1'' \frac{k+n}{n} |\lambda| \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} r^{1-\alpha} e^{(i-\varepsilon) r^{-\beta}} \chi(r) \frac{k! n!}{(k+n)!} \\
&\quad \times L_k^{n} \left(\frac{1}{2} |\lambda| r^2 \sin(\theta) \right) e^{-\frac{1}{4}|\lambda| r^2 \sin(\theta)} e^{-i\lambda r^2 \cos(\theta)} (\sin(\theta))^n \, dr d\theta \\
&\quad + c_2'' \frac{k}{n} |\lambda| \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} r^{-1-(\alpha-2)} e^{(i-\varepsilon) r^{-\beta}} \chi(r) \frac{(k-1)! n 1}{(k+n-1)!} \\
&\quad \times L_{k-1}^{n} \left(\frac{1}{2} |\lambda| r^2 \sin(\theta) \right) e^{-\frac{1}{4}|\lambda| r^2 \sin(\theta)} e^{-i\lambda r^2 \cos(\theta)} (\sin(\theta))^n \, dr d\theta
\end{aligned}
$$

con c_1'' y c_2'' constantes independientes de λ, k y ε. Y los mismos cambios de variable aplicados en sentido inverso pero tomando las coordenadas polares en $\mathbb{C}^{n+1}$ nos dan que

$$II = c_1''' \frac{k+n}{n} |\lambda| \left(\mu^{\varepsilon}_{\alpha-2,\beta,\chi,\mathbb{H}_{n+1}}\right)\widehat{}(\lambda, k) + c_2''' \frac{k}{n} |\lambda| \left(\mu^{\varepsilon}_{\alpha-2,\beta,\chi,\mathbb{H}_{n+1}}\right)\widehat{}(\lambda, k-1)$$

con las nuevas constantes también independientes de λ, k y ε.

Entonces (pues $\alpha - 2 < (n+1)\beta$), por el corolario 8.6, (usado en $\mathbb{H}_n$) existen $a_2 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ y una constante positiva c independiente de λ, k y ε tales que, para $k \geq k_0$ y $\lambda \neq 0$,

$$\begin{aligned} |II| &\leq c \left| |\lambda| \, k \left(\mu^{\varepsilon}_{\alpha-2.\beta,\chi,\mathbb{H}^{n+1}}\right)\widehat{}(\lambda, k)\right| + c \left| |\lambda| \, k \left(\mu^{\varepsilon}_{\alpha-2.\beta,\chi,\mathbb{H}^{n+1}}\right)\widehat{}(\lambda, k-1)\right| \\ &\leq c \, |\lambda| \, k \left(1 + |\lambda| \, (2k+n)\right)^{-a_2} \\ &\leq c \left(1 + |\lambda| \, (2k+n)\right)^{1-a_2} \end{aligned}$$

lo que termina la prueba del lema.

■

Corolario 8.11. *Supongamos $\alpha < n\beta$ y sean I^* y II^* dados por (8.2). Entonces existen $k_0 > 0$, $a_1, a_2 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ y una constante positiva c tal que para $k \geq k_0$ y $\lambda \neq 0$,*

$$\begin{aligned} |I^*| &\leq c \left(1 + |\lambda| \, (2k+n)\right)^{1-a_1}, \\ |II^*| &\leq c \left(1 + |\lambda| \, (2k+n)\right)^{1-a_2} \end{aligned}$$

Prueba.

$$\begin{aligned} & I^* \\ &= -\frac{1}{2} \frac{k! \, (n-1)!}{(k+n-1)!} |\lambda| \, \mu \left((z,t) \to |z|^2 \, L^n_{k-1} \left(\frac{|\lambda| \, |z|^2}{2} \right) e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{4}} e^{-i\lambda t} \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(-\frac{1}{2} \frac{k! \, (n-1)!}{(k+n-1)!} |\lambda| \, \mu_\varepsilon \left((z,t) \to |z|^2 \, L^n_{k-1} \left(\frac{|\lambda| \, |z|^2}{2} \right) e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{4}} e^{-i\lambda t} \right) \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} I \end{aligned}$$

y similarmente $II^* = \lim_{\varepsilon \to 0^+} II$. Entonces el corolario sigue del Lema 8.10.

$\blacksquare$

Lema 8.12. *Supongamos que* $\alpha < (n-1)\beta - 4$ *y sea* III^* *dado por (8.2). Entonces existen* $k_0 > 0$, $a_3 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ *y una constante positiva* c *tal que para* $k \geq k_0$ *y* $\lambda \neq 0$,

$$|III^*| \leq c\,(1 + |\lambda|\,(2k+n))^{1-a_3}.$$

Prueba. Tenemos que

$$\begin{aligned} III^* &= \frac{k!\,(n-1)!}{(k+n-1)!}\left\langle \mu, (z,t) \to L_k^{n-1}\left(\frac{|\lambda|\,|z|^2}{2}\right)e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{4}} t\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-i\lambda t}\right)\right\rangle \qquad (8.9)\\ &= -\frac{k!\,(n-1)!}{(k+n-1)!}\left\langle \frac{\partial}{\partial t}(t\mu), (z,t) \to L_k^{n-1}\left(\frac{|\lambda|\,|z|^2}{2}\right)e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{4}} e^{-i\lambda t}\right\rangle \\ &= -\frac{k!\,(n-1)!}{(k+n-1)!}\left\langle t\frac{\partial \mu}{\partial t}, (z,t) \to L_k^{n-1}\left(\frac{|\lambda|\,|z|^2}{2}\right)e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{4}} e^{-i\lambda t}\right\rangle \\ &\quad -\frac{k!\,(n-1)!}{(k+n-1)!}\left\langle \mu, (z,t) \to L_k^{n-1}\left(\frac{|\lambda|\,|z|^2}{2}\right)e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{4}} e^{-i\lambda t}\right\rangle \\ &= III_1^* + III_2^* \end{aligned}$$

donde las derivadas son entendidas en el sentido de las distribuciones y con

$$\begin{aligned} III_1^* &= -\frac{k!\,(n-1)!}{(k+n-1)!}\left\langle t\frac{\partial \mu}{\partial t}, (z,t) \to L_k^{n-1}\left(\frac{|\lambda|\,|z|^2}{2}\right)e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{4}} e^{-i\lambda t}\right\rangle, \qquad (8.10)\\ III_2^* &= -\frac{k!\,(n-1)!}{(k+n-1)!}\left\langle \mu, (z,t) \to L_k^{n-1}\left(\frac{|\lambda|\,|z|^2}{2}\right)e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{4}} e^{-i\lambda t}\right\rangle. \end{aligned}$$

Como $III_2^* = -\widehat{\mu}(\lambda, k)$ y $\alpha < (n-1)\beta - 4$, el Corolario 5.16 nos da $a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ y una constante positiva c tales que $|III_2^*| \leq c\frac{1}{(1+|\lambda|\,(2k+n))^a}$ para todo $\lambda \neq 0$ y $k \geq 0$. Queda entonces acotar $|III_1^*|$.

Ahora bien (cf. (8.8)),

$$\begin{aligned} & t\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu^{\varepsilon}_{\alpha,\beta,\chi}(z,t)\right) \\ &= -\frac{2n+2+\alpha}{2}t^2\mu^{\varepsilon}_{\alpha+4,\beta,\chi}(z,t) - \frac{\beta\,(i-\varepsilon)}{2}t^2\mu^{\varepsilon}_{\alpha+\beta+4,\beta,\chi}(z,t) \\ &+ \frac{1}{2}t^2\mu^{\varepsilon}_{\alpha+3,\beta,\chi'}(z,t) \end{aligned}$$

y entonces, tomando limite para $\varepsilon \to 0^+$ y recordando una vez más que $\mu^\varepsilon \to \mu$ en $\left(C^\infty\left(\mathbb{H}_n\right)\right)'$,

$$t\frac{\partial}{\partial t}\mu_{\alpha,\beta,\chi} = -\frac{2n+2+\alpha}{2}t^2\mu_{\alpha+4,\beta,\chi} - \frac{i\beta}{2}t^2\mu_{\alpha+\beta+4,\beta,\chi} + \frac{1}{2}t^2\mu_{\alpha+3,\beta,\chi'}.$$

(donde si σ es una distribución de soporte compacto y si $f = f(z,t)$ es una función C^∞ escribimos, permitiéndonos un abuso de notación, $f(z,t)\,\sigma$ para la distribución $f\sigma$). Luego

$$\begin{aligned}
& t\frac{\partial}{\partial t}\mu_{\alpha,\beta,\chi} \\
= \; & -\frac{2n+2+\alpha}{2}\rho^4\mu_{\alpha+4,\beta,\chi} - \frac{i\beta}{2}\rho^4\mu_{\alpha+\beta+4,\beta,\chi} + \frac{1}{2}\rho^4\mu_{\alpha+3,\beta,\chi'} \\
& +\frac{2n+2+\alpha}{2}\left|z\right|^4\mu_{\alpha+4,\beta,\chi} + \frac{i\beta}{2}\left|z\right|^4\mu_{\alpha+\beta+4,\beta,\chi} - \frac{1}{2}\left|z\right|^4\mu_{\alpha+3,\beta,\chi'} \\
= \; & -\frac{2n+2+\alpha}{2}\rho^4\mu_{\alpha+4,\beta,\chi} - \frac{i\beta}{2}\rho^4\mu^\varepsilon_{\alpha+\beta+4,\beta,\chi} \\
& +\frac{1}{2}\rho^4\mu_{\alpha+3,\beta,\chi'} \\
& +\frac{2n+2+\alpha}{2}\left|z\right|^4\mu_{\alpha+4,\beta,\chi} + \frac{\beta i}{2}\left|z\right|^4\mu_{\alpha+\beta+4,\beta,\chi} \\
& -\frac{1}{2}\left|z\right|^4\mu_{\alpha+3,\beta,\chi'},
\end{aligned}$$

esto es,

$$\begin{aligned}
& t\frac{\partial}{\partial t}\mu_{\alpha,\beta,\chi} \\
& = -\frac{2n+2+\alpha}{2}\mu_{\alpha,\beta,\chi} - \frac{i\beta}{2}\mu_{\alpha+\beta,\beta,\chi} + \frac{1}{2}\mu_{\alpha-1,\beta,\chi'} \\
& + \frac{2n+2+\alpha}{2}\left|z\right|^4\mu_{\alpha+4,\beta,\chi} + \frac{i\beta}{2}\left|z\right|^4\mu_{\alpha+\beta+4,\beta,\chi} - \frac{1}{2}\left|z\right|^4\mu_{\alpha+3,\beta,\chi'}
\end{aligned} \tag{8.11}$$

Ahora bien (conviniendo en que $L^j_m = 0$ si $m < 0$),

$$sL^{n-1}_k(s) = -(k+1)\,L^{n-1}_{k+1}(s) + (2k+n)\,L^{n-1}_k(s) - (k+n)\,L^{n-1}_{k-1}(s)$$

y reiterando el uso de esta fórmula tenemos

$$s^2L^{n-1}_k(s) = \sum_{J=-2}^{2} p_j(k)\,L^{n-1}_{k-j}(s)$$

donde cada $p_j(k)$ es un polinomio de grado 2 en k. Entonces, por (8.11),

$$III^*_1 = -\left(t\frac{\partial}{\partial t}\mu_{\alpha,\beta,\chi}\right)\widehat{\ }(\lambda,k) = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$$

con

$$F_1 = -\frac{2n+2+\alpha}{2}\widehat{\mu_{\alpha,\beta,\chi}}(\lambda,k) - \frac{\beta(i-\varepsilon)}{2}\widehat{\mu_{\alpha+\beta,\beta,\chi}}(\lambda,k) + \frac{1}{2}\widehat{\mu_{\alpha-1,\beta,\chi'}}(\lambda,k)$$
$$F_2 = \frac{2n+2+\alpha}{2}\frac{k!(n-1)!}{(k+n-1)!}\left\langle \mu_{\alpha+4,\beta,\chi},(z,t) \to |z|^4 L_k^{n-1}\left(\frac{|\lambda||z|^2}{2}\right)e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{2}}e^{-i\lambda t}\right\rangle$$
$$F_3 = \frac{i\beta}{2}\frac{k!(n-1)!}{(k+n-1)!}\left\langle \mu_{\alpha+\beta+4,\beta,\chi},(z,t) \to |z|^4 L_k^{n-1}\left(\frac{|\lambda||z|^2}{2}\right)e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{2}}e^{-i\lambda t}\right\rangle$$
$$F_4 = -\frac{1}{2}\frac{k!(n-1)!}{(k+n-1)!}\left\langle \mu_{\alpha+3,\beta,\chi'},(z,t) \to |z|^4 L_k^{n-1}\left(\frac{|\lambda||z|^2}{2}\right)e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{2}}e^{-i\lambda t}\right\rangle$$

y el corolario 5.16 nos da $a \in \left(\frac{1}{2},1\right)$ y una constante c independiente de λ y k tal que

$$\begin{aligned} &|F_1| \\ &= \left|-\frac{(2n+2+\alpha)}{2}\widehat{\mu_{\alpha,\beta,\chi}}(\lambda,k) - \frac{i\beta}{2}\widehat{\mu_{\alpha+\beta,\beta,\chi}}(\lambda,k) + \frac{1}{2}\widehat{\mu_{\alpha-1,\beta,\chi'}}(\lambda,k)\right| \\ &\le c\frac{1}{(1+|\lambda|(2k+n))^a} \end{aligned} \tag{8.12}$$

También $s^2 L_k^{n-1}(s) = \sum_{J=-2}^{2} p_j(k) L_{k-j}^{n-1}(s)$, luego

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{2n+2+\alpha}{2}\frac{k!(n-1)!}{(k+n-1)!}\left\langle \mu_{\alpha+4,\beta,\chi},(z,t) \to |z|^4 L_k^{n-1}\left(\frac{|\lambda||z|^2}{2}\right)e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{2}}e^{-i\lambda t}\right\rangle \\ &= 4\frac{2n+2+\alpha}{2|\lambda|^2}\frac{k!(n-1)!}{(k+n-1)!}\left\langle \mu_{\alpha+4,\beta,\chi},(z,t) \to \left(\frac{|\lambda||z|^2}{2}\right)^2 L_k^{n-1}\left(\frac{|\lambda||z|^2}{2}\right)e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{2}}e^{-i\lambda t}\right\rangle \\ &= 4\frac{2n+2+\alpha}{2|\lambda|^2}\frac{k!(n-1)!}{(k+n-1)!}\left\langle \mu_{\alpha+4,\beta,\chi},(z,t) \to \sum_{j=-2}^{2} p_j(k) L_{k-j}^{n-1}\left(\frac{|\lambda||z|^2}{2}\right)e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{2}}e^{-i\lambda t}\right\rangle \\ &= 2\frac{2n+2+\alpha}{|\lambda|^2}\sum_{j=-2}^{2} p_j(k)\frac{k!(k+n-1-j)!}{(k-j)!(k+n-1)!}\widehat{\mu_{\alpha+4,\beta,\chi}}(\lambda,k-j). \end{aligned}$$

Notemos también que $c_1 k^2 \le p_j(k)\dfrac{k!(k+n-1-j)!}{(k-j)!(k+n-1)!} \le c_2 k^2$ con c_1, c_2 independientes de k. Entonces nuevamente por el Corolario 5.16 tenemos (pues $\alpha + 4 < n\beta$) $a \in \left(\frac{1}{2},1\right)$ y una constante c independiente de λ y k tal que

$$|F_2| \le c\frac{k^2}{|\lambda|^2}\frac{1}{(1+|\lambda|(2k+n))^a} \tag{8.13}$$

Similarmente se ve que también

$$|F_3| \leq c\frac{k^2}{|\lambda|^2}\frac{1}{(1+|\lambda|(2k+n))^a}, \qquad |F_4| \leq c\frac{k^2}{|\lambda|^2}\frac{1}{(1+|\lambda|(2k+n))^a} \tag{8.14}$$

con c independiente de λ y k. Luego, de las estimaciones (8.12),(8.13),(8.14) obtenemos, para algún $a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ (de hecho para el menor de los a obtenidos) y alguna constante c independiente de λ y k,

$$|III^*| \leq \left(c + c\frac{k^2}{|\lambda|^2}\right)\frac{1}{(1+|\lambda|(2k+n))^a} \tag{8.15}$$

Caso $|\lambda| \geq k$: De (8.15) obtenemos, para cualquier $a < 1$,

$$|III^*| \leq 2c \leq 2c\,(1+|\lambda\,(2k+n)|)^{1-a}.$$

Caso $|\lambda| < k$: En este caso (8.15) nos da

$$|III^*| \leq 2c\frac{k^2}{|\lambda|^2}\frac{1}{(1+|\lambda|(2k+n))^a}. \tag{8.16}$$

En orden a explicitar la dependencia de μ, μ^ε y de III^* respecto de α, β, χ y ε escribiremos $\mu = \mu_{\alpha,\beta,\chi}$, $\mu^e = \mu^\varepsilon_{\alpha,\beta,\chi}$ y $III^* = III^*_{\alpha,\beta,\chi}$. Tenemos

$$III^*_{\alpha,\beta,\chi} = -i\lambda\frac{k!\,(n-1)!}{(k+n-1)!}\left\langle \mu_{\alpha,\beta,\chi}, (z,t) \to tL_k^{n-1}\left(\frac{|\lambda|\,|z|^2}{2}\right)e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{4}}e^{-i\lambda t}\right\rangle$$

Sea $III = III_{\alpha,\beta,\chi,\varepsilon}$ dada por (8.1) y sea $\Phi^0_{\lambda,k}(z) := \dfrac{k!\,(n-1)!}{(k+n-1)!}L_k^{n-1}\left(\dfrac{|\lambda|\,|z|^2}{2}\right)e^{-\frac{|\lambda||z|^2}{4}}$.

Por (8.7) tenemos

$$t = 2\rho^3(z,t)\frac{\partial}{\partial t}\rho(z,t),$$

también,

$$\frac{\partial}{\partial t}e^{(i-\varepsilon)\rho(z,t)^{-\beta}} = (i-\varepsilon)(-\beta)(\rho(z,t))^{-\beta-1}\frac{\partial}{\partial t}(\rho(z,t))\,e^{(i-\varepsilon)\rho(z,t)^{-\beta}}$$

y entonces

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho(z,t))\,e^{(i-\varepsilon)\rho(z,t)^{-\beta}} = \frac{(\rho(z,t))^{\beta+1}}{(i-\varepsilon)(-\beta)}\frac{\partial}{\partial t}e^{(i-\varepsilon)\rho(z,t)^{-\beta}}$$

luego

$$\begin{aligned}
&III^{\alpha,\beta,\chi,\varepsilon}\\
= \; & -2i\lambda\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{C}^n}\rho^3(z,t)\frac{\partial}{\partial t}(\rho(z,t))\,\mu^\varepsilon_{\alpha,\beta,\chi}(z,t)\,\Phi^0_{\lambda,k}(z)\,e^{-i\lambda t}dzdt\\
= \; & -2i\lambda\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{C}^n}\rho^3(z,t)\frac{\partial}{\partial t}(\rho(z,t))\,\rho(z,t)^{-(2n+2+\alpha)}\,e^{(i-\varepsilon)\rho(z,t)^{-\beta}}\chi(\rho(z,t))\,\Phi^0_{\lambda,k}(z)\,e^{-i\lambda t}dzdt\\
= \; & -\frac{2i\lambda}{(i-\varepsilon)(-\beta)}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{C}^n}\rho(z,t)^{-(2n+2+\alpha-\beta-4)}\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{(i-\varepsilon)\rho(z,t)^{-\beta}}\right)\chi(\rho(z,t))\,\Phi^0_{\lambda,k}(z)\,e^{-i\lambda t}dzdt
\end{aligned}$$

e integrando por partes respecto de t obtenemos

$$III^{\alpha,\beta,\chi,\varepsilon} = G_1^\varepsilon + G_2^\varepsilon + G_3^\varepsilon$$

donde ,

$$\begin{aligned}
G_1^\varepsilon &:= \frac{2i\left(2n+2+\alpha-\beta-4\right)\lambda}{\left(i-\varepsilon\right)\left(-\beta\right)}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{C}^n}\rho\left(z,t\right)^{-(2n+2+\alpha-\beta-3)}\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\left(z,t\right)\right)e^{(i-\varepsilon)\rho(z,t)^{-\beta}} \\
&\quad\times\chi\left(\rho\left(z,t\right)\right)\Phi_{\lambda,k}^0\left(z\right)e^{-i\lambda t}dzdt \\
G_2^\varepsilon &:= \frac{2i\lambda}{\left(i-\varepsilon\right)\left(-\beta\right)}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{C}^n}\rho\left(z,t\right)^{-(2n+2+\alpha-\beta-4)}e^{(i-\varepsilon)\rho(z,t)^{-\beta}}\chi'\left(\rho\left(z,t\right)\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\left(z,t\right)\right) \\
&\quad\times\Phi_{\lambda,k}^0\left(z\right)e^{-i\lambda t}dzdt \\
G_3^\varepsilon &:= \frac{2\lambda^2}{\left(i-\varepsilon\right)\left(-\beta\right)}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{C}^n}\rho\left(z,t\right)^{-(2n+2+\alpha-\beta-4)}e^{(i-\varepsilon)\rho(z,t)^{-\beta}}\chi\left(\rho\left(z,t\right)\right) \\
&\quad\times\Phi_{\lambda,k}^0\left(z\right)e^{-i\lambda t}dzdt.
\end{aligned}$$

Consideremos G_2^ε. Como $\chi = 1$ en un entorno de $(\mathbf{0},0)$ tenemos $\chi' = 0$ allí, y recordando que χ tiene soporte compacto concluímos que la función radial

$$H\left(z,t\right) := \rho\left(z,t\right)^{-(2n+2+\alpha-\beta-4)}e^{i\rho(z,t)^{-\beta}}\chi'\left(\rho\left(z,t\right)\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\left(z,t\right)\right)$$

pertenece a $C_c^\infty\left(\mathbb{H}_n\right)$. Además $\left|\Phi_{\lambda,k}^0\left(z\right)e^{-i\lambda t}\right| = \left|E_{\lambda,k}\left(z,t\right)\right| \leq 1$ y entonces el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue nos da que

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to0^+}G_2^\varepsilon &= -\frac{2\lambda}{\beta}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{C}^n}\rho\left(z,t\right)^{-(2n+2+\alpha-\beta-4)}e^{i\rho(z,t)^{-\beta}}\chi'\left(\rho\left(z,t\right)\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\left(z,t\right)\right)\Phi_{\lambda,k}^0\left(z\right)e^{-i\lambda t}dzdt \\
&= -\frac{2\lambda}{\beta}\widehat{H}\left(\lambda,k\right)
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\left|\lim_{\varepsilon\to0^+}G_2^\varepsilon\right| \leq c\left|\lambda\right| \tag{8.17}$$

con c constante independiente de λ y k. También

$$\begin{aligned}
G_3^\varepsilon &= \frac{2\lambda^2}{\left(i-\varepsilon\right)\left(-\beta\right)}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{C}^n}\rho\left(z,t\right)^{-(2n+2+\alpha-\beta-4)}e^{(i-\varepsilon)\rho(z,t)^{-\beta}}\chi\left(\rho\left(z,t\right)\right)\Phi_{\lambda,k}^0\left(z\right)e^{-i\lambda t}dzdt \\
&= \frac{2\lambda^2}{\left(i-\varepsilon\right)\left(-\beta\right)}\widehat{\mu_{\alpha-\beta-3,\beta,\chi}^{\varepsilon}}\left(\lambda,k\right)
\end{aligned}$$

y entonces,

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}G_3^\varepsilon = \frac{2\lambda^2}{i\left(-\beta\right)}\widehat{\mu_{\alpha-\beta-3,\beta,\chi}}\left(\lambda,k\right)$$

lo que nos da

$$\left|\lim_{\varepsilon\to 0^+} G_3^\varepsilon\right| \leq c\lambda^2 \tag{8.18}$$

con c constante independiente de λ y k. Por otra parte, por (8.7),

$$\begin{aligned}
G_1^\varepsilon &= \frac{2i\left(2n+2+\alpha-\beta-4\right)\lambda}{\left(i-\varepsilon\right)\left(-\beta\right)}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{C}^n}\rho\left(z,t\right)^{-(2n+2+\alpha-\beta-3)}\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\left(z,t\right)\right)e^{(i-\varepsilon)\rho(z,t)^{-\beta}} \\
&\quad\times\chi\left(\rho\left(z,t\right)\right)\Phi_{\lambda,k}^0\left(z\right)e^{-i\lambda t}dzdt \\
&= \frac{2i\left(2n+2+\alpha-\beta-4\right)\lambda}{\left(i-\varepsilon\right)\left(-\beta\right)}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{C}^n}\rho\left(z,t\right)^{-(2n+2+\alpha-\beta-3)}\frac{1}{2}t\left(\rho\left(z,t\right)\right)^{-3}e^{(i-\varepsilon)\rho(z,t)^{-\beta}} \\
&\quad\times V\Phi_{\lambda,k}^0\left(z\right)e^{-i\lambda t}dzdt \\
&= \frac{i\left(2n+2+\alpha-\beta-4\right)\lambda}{\left(i-\varepsilon\right)\left(-\beta\right)}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{C}^n}\rho\left(z,t\right)^{-(2n+2+\alpha-\beta)}e^{(i-\varepsilon)\rho(z,t)^{-\beta}}\chi\left(\rho\left(z,t\right)\right) \\
&\quad\times\Phi_{\lambda,k}^0\left(z\right)te^{-i\lambda t}dzdt \\
&= -\frac{i\left(2n+2+\alpha-\beta-4\right)\lambda}{\left(i-\varepsilon\right)\left(-\beta\right)}III_{\alpha-\beta,\beta,\chi}^\varepsilon
\end{aligned}$$

y entonces

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} G_1^\varepsilon = -III_{\alpha-\beta,\beta,\chi}^*$$

Luego

$$\left|III_{\alpha,\beta,\chi}^*\right| \leq c\left(|\lambda|+|\lambda|^2\right)+\left|III_{\alpha-\beta,\beta,\chi}^*\right|$$

con c independiente de λ, k. Reiterando N veces este procedimiento con N tal que $\alpha < N\beta$ encontramos que, para otra constante c' también independiente de λ y k,

$$\left|III_{\alpha,\beta,\chi}^*\right| \leq c'\left(|\lambda|+|\lambda|^2\right)+\left|III_{\alpha-N\beta,\beta,\chi}^*\right|,$$

ahora bien, $(z,t)\to\left(\rho\left(z,t\right)\right)^{-(2\alpha+2n+\alpha-N\beta)}e^{i\rho(z,t)^{-\beta}}\chi\left(\rho\left(z,t\right)\right)$ es integrable, y entonces

$$\begin{aligned}
III_{\alpha-N\beta,\beta,\chi}^* &= \left\langle\mu_{\alpha-N\beta,\beta,\chi},(z,t)\to\Phi_{\lambda,k}^0\left(z\right)t\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-i\lambda t}\right)\right\rangle \\
&= \int_{\mathbb{H}_n}\left(\rho\left(z,t\right)\right)^{-(2\alpha+2n+\alpha-N\beta)}e^{i\rho(z,t)^{-\beta}}\chi\left(\rho\left(z,t\right)\right)\Phi_{\lambda,k}^0\left(z\right)t\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-i\lambda t}\right)dzdt \\
&= -i\lambda\int_{\mathbb{H}_n}\left(\rho\left(z,t\right)\right)^{-(2\alpha+2n+\alpha-N\beta)}e^{i\rho(z,t)^{-\beta}}\chi\left(\rho\left(z,t\right)\right)\Phi_{\lambda,k}^0\left(z\right)te^{-i\lambda t}dzdt
\end{aligned}$$

y, teniendo en cuenta que $\left|\Phi_{\lambda,k}^0\left(z\right)te^{-i\lambda t}\right| = \left|E_{\lambda,k}\left(z,t\right)\right| \leq 1$, concluímos que $\left|III_{\alpha-N\beta,\beta,\chi}^*\right| \leq c''\left(|\lambda|+|\lambda|^2\right)$ con c'' constante independiente de λ y k.

Luego si $|\lambda| \leq 1$, tenemos

$$\left|III_{\alpha,\beta,\chi}^*\right| \leq 2c'' \leq 2c''\left(1+|\lambda|\left(2k+n\right)\right)^{1-a}.$$

Y si $|\lambda| > 1$ entonces $\left|III^*_{\alpha,\beta,\chi}\right| \leq 2c'' \left|\lambda\right|^2$.

También, por (8.16), $\left|III^*_{\alpha,\beta,\chi}\right| \leq c\frac{k^2}{|\lambda|^2}\frac{1}{\left(1+|\lambda|\left(2k+n\right)\right)^a}$ con $\frac{1}{2} < a < 1$.

Sea $\theta = \frac{1}{3}$. Notemos que $\frac{2}{3} - \frac{1}{3}a > 0$ pues $a < 2$ Entonces

$$\begin{aligned}
\left|III^*_{\alpha,\beta,\chi}\right| &= \left|III^*_{\alpha,\beta,\chi}\right|^{\theta}\left|III^*_{\alpha,\beta,\chi}\right|^{1-\theta} \\
&\leq \left(c\frac{k^2}{|\lambda|^2}\frac{1}{\left(1+|\lambda|\left(2k+n\right)\right)^a}\right)^{\theta}\left(2c''\left|\lambda\right|^2\right)^{1-\theta} \\
&= c'''\left(|\lambda|\,k\right)^{\frac{2}{3}}\frac{1}{\left(1+|\lambda|\left(2k+n\right)\right)^{\frac{1}{3}a}} \\
&\leq c'''\left(|\lambda|\,k\right)^{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}a} \leq c'''\left(1+|\lambda|\left(2k+n\right)\right)^{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}a} \\
&= c'''\left(1+|\lambda|\left(2k+n\right)\right)^{1-\gamma}
\end{aligned}$$

donde $\gamma = 1 - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}a\right) = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3} > \frac{1}{3}\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ y con las constantes c, c'', c''' independientes de λ y k.

$\blacksquare$

Prueba de la Proposición 5.17**:** Sigue de los Corolarios 8.2, 8.4, 8.9, 8.11 y del Lema 8.12.

9 Apéndice II

El objetivo de esta sección será probar el siguiente lema por una cuestión de completitud.

Lema 9.1. *Sea* $\{\nu_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *una sucesión en* $C_c^{\infty}((0,\infty))$ *tal que, para cada* $j \in \mathbb{Z}$, *sop* $(\nu_j) \subset \left(2^j, 2^{j+2}\right)$, $0 \leq \nu_j \leq 1$ *y* $\sum_{j\in\mathbb{Z}} v_j(x) = 1$ *para todo* $x > 0$. *Entonces para* $j \in \mathbb{Z}$ *existe una función radial* $\Lambda_j \in S(\mathbb{H}_n)$ *tal que* $\widehat{\Lambda_j}(\lambda, k) = \nu_j(|(|\lambda|, |\lambda|(2k+n))|)$ *y, para* $f \in S(\mathbb{H}_n)$, *se tiene que* $\sum_j f * \Lambda_j$ *converge a* f *en* $L^2(\mathbb{H}_n)$.

Prueba.

Recordemos, que por el Teorema (2.30), para $j \in \mathbb{Z}$ existe una función radial $\Lambda_j \in S(\mathbb{H}_n)$ tal que $\widehat{\Lambda_j}(\lambda, k) = \nu_j(|(|\lambda|, |\lambda|(2k+n))|)$ y por la fórmula de inversión

$$\Lambda_j(z,t) = (1/2\pi)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \nu_j(|(|\lambda|, |\lambda|(2k+n))|)\, \mathbf{e}_{\lambda,k}(z,t)\, |\lambda|^n \, d\lambda.$$

Remarquemos que por el teorema de Plancherel (2.31) tenemos:

$$\sum_j \|f * \Lambda_j\|_2^2 = \sum_j (1/2\pi)^{2(n+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{C}^n} |f * \Lambda_j * \mathbf{e}_{\lambda,k}(z,0)|^2 \, |\lambda|^{2n} \, dz d\lambda.$$

Como remarcamos en la observación 2.32 tenemos que

$\Lambda_j * \mathbf{e}_{\lambda,k}(z,t) = \nu_j(|(|\lambda|, |\lambda|(2k+n))|)\, \mathbf{e}_{\lambda,k}(z,t)$. Además

$$\sum_j |\widehat{\Lambda_j}(\lambda,k)|^2 = \sum_j |\nu_j(|(|\lambda|, |\lambda|(2k+n))|)|^2 \leq \sum_j |\nu_j(|(|\lambda|, |\lambda|(2k+n))|)| = 1.$$

Entonces

$$\sum_j \|f * \Lambda_j\|_2^2 = (1/2\pi)^{2(n+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{C}^n} \sum_j (|\widehat{\Lambda_j}(\lambda,k)|^2)\, |f * \mathbf{e}_{\lambda,k}(z,0)|^2 \, |\lambda|^{2n} \, dz d\lambda.$$

$$\leq (1/2\pi)^{2(n+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{C}^n} |f * \mathbf{e}_{\lambda,k}(z,0)|^2 \, |\lambda|^{2n} \, dz d\lambda = \|f\|_2^2.$$

Entonces la serie $\sum_j \|f * \Lambda_j\|_2^2$ es absolutamente convergente y, por ende, es una sucesión de Cauchy.

Ahora veremos que $\sum_j f * \Lambda_j$ converge en $L^2(\mathbb{H}_n)$.

Para $N < M$ en $\mathbb{Z}$ definimos $I = [-M, -N] \cup [N, M]$, y por el teorema de Plancherel (2.5), tenemos que

$$\|\sum_{j\in I} f * \Lambda_j\|_2^2 = \int \|\pi_\lambda(\sum_{j\in I} f * \Lambda_j)\|_{HS}|\lambda|^n d\lambda$$

$$= \int Tr(\pi_\lambda(\sum_{j\in I} f * \Lambda_j)\pi_\lambda(\sum_{j\in I} f * \Lambda_j)^*)|\lambda|^n d\lambda$$

$$= \int Tr(\sum_{j\in I}\sum_{i\in I} \pi_\lambda(f)\pi_\lambda(\Lambda_j)\pi_\lambda(\Lambda_i)^*\pi_\lambda(f)^*)|\lambda|^n d\lambda.$$

Ahora, como Λ_j es $U(n)$ invariante, usando el teorema (2.24) $\pi_\lambda(\Lambda_j)$ diagonaliza con la base de hermite, i.e

$$\pi_\lambda(\Lambda_j) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\Lambda_j}(\lambda, k) P_k(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu_j\left(\left|\left(\left|\lambda\right|, \left|\lambda\right|(2k+n)\right)\right|\right) P_k(\lambda),$$

donde $P_k(\lambda)$ es la proyección ortogonal en $L^2(\mathbb{H}_n)$ sobre el subespacio generado por $\{\Phi_\alpha^\lambda : |\alpha| \ = k\}$. Entonces, como $P_k(\lambda)P_i(\lambda) = \delta_{i,k}$ y $P_k(\lambda)^* = P_k(\lambda)$, tenemos que

$$\pi_\lambda(\Lambda_j)\pi_\lambda(\Lambda_i)^* = \nu_j\left(\left|\left(\left|\lambda\right|, \left|\lambda\right|(2k+n)\right)\right|\right) \overline{\nu_i\left(\left|\left(\left|\lambda\right|, \left|\lambda\right|(2k+n)\right)\right|\right)} P_k(\lambda).$$

Ahora $\nu_j\left(\left|\left(\left|\lambda\right|, \left|\lambda\right|(2k+n)\right)\right|\right) \nu_i\left(\left|\left(\left|\lambda\right|, \left|\lambda\right|(2k+n)\right)\right|\right) = 0$ si $i \neq j-1, j, j+1, j+2$. Luego

$$\sum_{j\in I}\sum_{i\in I} \pi_\lambda(f)\pi_\lambda(\Lambda_j)\pi_\lambda(\Lambda_i)^*\pi_\lambda(f)^* = \sum_{j\in I}\sum_{i\in J_j} \pi_\lambda(f)\pi_\lambda(\Lambda_j)\pi_\lambda(\Lambda_i)^*\pi_\lambda(f)^*,$$

con $J_j \subset [j-1, j+2]$ .Entonces

$$\|\sum_{j\in I} f * \Lambda_j\|_2^2 = \int Tr(\sum_{j\in I}\sum_{i\in J_j} \pi_\lambda(f)\pi_\lambda(\Lambda_j)\pi_\lambda(\Lambda_i)^*\pi_\lambda(f)^*)|\lambda|^n d\lambda.$$

$$\leq \sum_{j\in I} |\langle f * \Lambda_j, f * \Lambda_{j-1}\rangle| + |\langle f * \Lambda_j, f * \Lambda_j\rangle| + |\langle f * \Lambda_j, f * \Lambda_{j+1}\rangle| + |\langle f * \Lambda_j, f * \Lambda_{j+2}\rangle|,$$

Ahora, como $|a+b|^2 \leq 2|a|^2+2|b|^2$ y $\langle x,\ y\rangle = \dfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right)$, tenemos que

$$\sum_{j\in I} |\langle f * \Lambda_j, f * \Lambda_{j-1}\rangle| + |\langle f * \Lambda_j, f * \Lambda_j\rangle| + |\langle f * \Lambda_j, f * \Lambda_{j+1}\rangle| + |\langle f * \Lambda_j, f * \Lambda_{j+2}\rangle|$$

$$\leq 8 \sum_{j \in \widetilde{I}} \|f * \Lambda_j\|_2^2,$$

con $\widetilde{I} = [-M-2, -N+2] \cup [N-2, M+2]$.

Entonces $\sum_{j \in \mathbb{Z}} f * \Lambda_j$ es una sucesión de Cauchy, por lo que converge a una función F en $L^2(\mathbb{H}_n)$. Además, por ser π isometría y la serie converger $L^2(\mathbb{H}_n)$, tenemos que $\pi(\sum_j f * \Lambda_j) = \sum_j \pi(f * \Lambda_j)$.

Para terminar veremos que $F = f$. Por teorema (2.5) basta ver que $\pi(F) = \pi(f)$. Sea Φ_α^λ una función de hermite, por el teorema (2.24) tenemos lo siguiente:

$$\pi_\lambda(F)\Phi_\alpha^\lambda = \pi_\lambda(\sum_j f * \Lambda_j)\Phi_\alpha^\lambda = \sum_j \pi_\lambda(f * \Lambda_j)\Phi_\alpha^\lambda = \sum_j \pi_\lambda(f)\pi_\lambda(\Lambda_j)\Phi_\alpha^\lambda$$

$$= \sum_j \pi_\lambda(f)\nu_j\left(|(|\lambda|, |\lambda|(2k+n))|\right)\Phi_\alpha^\lambda = \sum_j(\nu_j\left(|(|\lambda|, |\lambda|(2k+n))|\right))\pi_\lambda(f)\Phi_\alpha^\lambda = \pi_\lambda(f)\Phi_\alpha^\lambda.$$

Luego $F = f$, por lo que el lema es verdadero.

■

Observación 9.2. *Si $f \in S(\mathbb{H}_n)$, del lema (9.1) se obtiene que existe una subsucesión de la serie $\sum_j f * \Lambda_j$ que converge puntualmente a f. Además para $1 \leq p \leq \infty$ se tiene que*

$$\|f\|_p \leq \sum_j \|f * \Lambda_j\|_p.$$

■

Observación 9.3. *Sea $\phi_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ una función par, con soporte contenido en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y tal que $0 \leq \phi \leq 1$ y $\phi_0 = 1$ en $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$. Si tomamos*

$$\phi(\xi) = \phi_0(\xi) - \phi_0\left(2^2\xi\right)$$

tenemos que

$$\phi_0(\xi) + \sum_{j=1}^{\infty} \phi\left(2^{-2j}\xi\right) = 1, \qquad \xi \in \mathbb{R}, \tag{9.1}$$

donde los soportes de cada función intersecta a lo sumo a 4 de los soportes de las otras. Entonces de forma análoga al lema (9.1) existen $F^{[j]}$ y $F^{[0]}$ en $S(\mathbb{H}_n)$ tal que

$$\begin{aligned}
\widehat{F^{[j]}}(\lambda, k) &= \phi\left(2^{-2j}|\lambda|(2m+n)\right), \\
\widehat{F^{[0]}}(\lambda, k) &= \phi_0(|\lambda|(2m+n))
\end{aligned}$$

$$y\ f * F^{[0]} + \sum_j f * F^{[j]} \ \textit{converge a } f \ \textit{en } L^2(\mathbb{H}_n) \ \textit{para todo } f \in S(\mathbb{H}_n)$$

■

10 Bibliografía

[**AbSe65**] M.Abramowitz and I. Setgun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.* Dover Piblications, New York, 1965.

[**AsDiRi07**] F. Astengo, B. Di Blasio y F. Ricci, *Gelfand transforms of polyradial Schwartz functions on the Heisenberg group.* Journal of Functional Analysis, Vol. 251 (2007), No. 2, 772-791.

[**AsDiRi14**] F. Astengo, B. Di Blasio y F. Ricci, *Paley-Wiener theorems for the $U(n)$ spherical transform on the Heisenberg group.* PREPRINT, http:// arxiv.org /abs /1303.0997.

[**Bou65**] N. Bourbaki, *Elements de Mathématique, Intégration.* Hermann (1965).

[**Bou86**] J. Bourgain, *Averages in the plane over convex curves and maximal operators.* Journal d Analyse Mathematique, Vol. 47 (1986), No. 1, 69-85.

[**Ch92**] M. Christ, *The Strong maximal function on a nilpotent group.* Transactions of the american mathematical society, Vol. 331 (1992), No. 1.

[**Cow80**] M. G. Cowling, *On Littlewood-Paley-Stein theory,* Proceedings of the Seminar on Harmonic Analysis (Pisa, 1980), number suppl. 1, pp. 21–55, 1981.

[**Dij09**] G. Van Dijk, *Introduction to Harmonic Analysis and Generalized Gelfand Pairs.* De Gruyter Studies in Mathematics, Vol. 36 (2009).

[**DuoRu86**] J. Duoandikoetxea, and J.L. Rubio de Francia, *Maximal and singular integral operators vía Fourier transform estimates*, Invent. Math. 84 (1986), 541-561.

[**Gra08**] L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis.* Springer (2008).

[**Hu00**] Hung Viet Le, *Maximal Operators Along Surfaces of Revolution.* PhD Thesis, Oregon State University (2000),
http://ir.library.oregonstate.edu/xmlui/bitstream/handle/1957/16961
/LeHungViet2000.pdf?sequence=1

[**Hu00(1)**] Hung Viet Le, *On maximal operators along surfaces,* Integral Equations and Operator Theory Vol 37, Issue 1, pp. 64-71, (2000).

[**KeRu80**] F. A. Kennet, T. J. Russel, *Weigthed inequalities for vector valued maximal functions and singular integrals,* Studia Mathematica, T. LXIX, p. 19 - 31, (1980).

[**Leb65**] N. N. Lebedev, *Special functions and their applications.* Dover Publications (1965).

[**Ly07**] N. Lyall, *Strongly singular convolution operator on the Heisenberg group.* Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 359 (2007), No. 9, 4467-4488.

[**Mu04**] D. Müller, *Marcinkiewicz multipliers and multi-parameter structure on Heisenberg groups.* Lecture notes, Padova (2004)
(http://www.math.uni-kiel.de/analysis/mueller/inhalte/padova-lectures04.pdf).

[**MuSe04**] D. Müller, A. Seeger, *Singular spherical maximal operators on a class of two step nilpotent lie groups.* Israel Journal of Mathematics, Vol. 141 (2004), No. 1, 315-340.

[**MuRiSt96**] D. Müller, F. Ricci, E. Stein, *Marcinkiewicz multipliers and multi-*

parameter structure on Heisenberg (-type) groups, II. Mathematatische Zeitschrift. Vol. 221 (1996), No. 2, 267-291.

[**NaTh04**] E. K. Narayanan, S. Thangavelu , *An optimal theorem for the spherical maximal operator on the Heisenberg group.* Israel Journal of Mathematics, Vol. 144 (2004), No. 2, 211-219.

[**Ric01**] F. Ricci, *Analisis armonica non commutativa*, (2001).

[**Ru86**] J. L. Rubio de Francia, *Maximal functions and Fourier transforms.* Duke Math. J., Vol. 53 (1986), No. 2, 395-404.

[**Ru91**] W. Rudin, *Functional Analysis.* McGraw-Hill, (1991).

[**Ste76**] E. Stein, *Maximal functions: Spherical means.* Proc. Natl. Acad. Sci., Vol. 73(1976), No. 7, 2174-2175.

[**Ste93**] E. Stein, *Harmonic Analysis: Real-variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*, Princeton University Press, 1993.

[**Tha93**] S. Thangavelu, *Lectures on Hermite and Laguerre Expansions.* Mathematical Notes, Princeton University Press, Vol. 42 (1998).

[**Th98**] S. Thangavelu, *Harmonic analysis on the Heisenberg group.* Prog. in Math. Birkhäuser, Vol. 159 (1998).

[**Wey31**] H. Weyl, *The theory of groups and quantum mechanics.* Methuen. London, (1931).