

UNIVERSITE PARIS DIDEROT (Paris 7) SORBONNE PARIS CITE

Laboratorio o unidad de investigación: Institut de Mathématiques de Jussieu

DOCTORADO

Disciplina: Matemática

Autor: MOYA GIUSTI, Matias Victor

Sobre la existencia de clases fantasma en la cohomología de ciertas variedades de Shimura

Directores: HARRIS Michael/MIATELLO Roberto

Defendida el 10 de octubre de 2014

JURADO

M. HARRIS, MICHAEL, Directeur de thèse
M. MIATELLO, ROBERTO, Directeur de thèse
M. CARAYOL, HENRI, pré rapporteur
M. GRBAC, NEVEN, pré rapporteur
M. VARGAS, JORGE
M. WILDESHAUS, JÖRG
M. MINGUEZ, ALBERTO
M. TIRAO, JUAN

Agradecimientos

Me gustaría expresar mi gratitud a todas aquellas personas que me han ayudado de alguna manera para llevar a cabo este trabajo. Doy las gracias a Michael Harris que me dio la oportunidad de estudiar estos temas y me ha dado su apoyo a lo largo de estos dos años no sólo en la comprensión de los conceptos matemáticos, sino también en los obstáculos personales que surgieron durante el desarrollo de esta tesis. Doy las gracias a Roberto Miatello que me ayudó en mis estudios cuando estaba en Córdoba y siempre me ha dado palabras de apoyo cuando lo necesitaba. Quiero agradecer a Nicolás Andruskiewitsch, que me ha ayudado en mis estudios en Córdoba y ha mejorado enormemente mi forma de hacer matemática. Agradezco a Diego Sulca, un colega con quien he compartido muchas conversaciones matemáticas y con quien he compartido mucho entusiasmo por ciertos temas de las matemáticas. Agradezco a Lucio Guerberoﬀ, que siempre ha estado dispuesto a darme su apoyo cuando lo he necesitado.

Por otra parte, doy las gracias a mis padres, Marta Giusti y Victor Moya, que siempre han estado presentes y siempre han trabajado duro para ayudarme a alcanzar mis objetivos. Agradezco a Carlos Pizzorno, un gran amigo que me ha apoyado en la decisión de continuar con el estudio de las matemáticas y con quien he compartido grandes conversaciones. Por último, doy las gracias a la persona maravillosa que tengo a mi lado cuyo nombre es Pamela Deghi, mi esposa, que siempre me acompaña y siempre me ha apoyado en mis objetivos, es ella la que me ha apoyado en los momentos difíciles.

Resumen

En este trabajo, estudiamos la existencia de clases fantasma en la cohomología de las variedades de Shimura asociadas a los grupos algebraicos GSp_4 y $GU(2, n - 2)$, para $n \geq 4$. Utilizamos ciertos argumentos sobre los pesos de las estructuras de Hodge mixtas asociadas a los espacios de cohomología involucrados en la definición del espacio de clases fantasma.

Códigos

14 G35 *Modular and Shimura varieties*

14 D07 *Variation of Hodge structures*

14 M27 *Compactifications; symmetric and spherical varieties*

Palabras clave

Variedad de Shimura, estructura de Hodge mixta, clase fantasma.

Contenidos

1	Introducción	5
2	Preliminares	8
2.1	Teoría de Hodge	8
2.2	Variedades de Shimura	11
2.3	$\mathbb{Q}$ -estructura y compactificación de Borel-Serre	14
2.4	Clases fantasma y teoría de Hodge mixta en cohomología	16
2.5	Breve resumen sobre algunos resultados de [Ha]	19
3	El caso GSp_4	22
3.1	La variedad de Shimura involucrada	22
3.2	Toro maximal y sistema de raíces	22
3.3	$\mathbb{Q}$ -subgrupos parabólicos estándares	23
3.4	La representación irreducible	23
3.5	El grupo de Weyl y la correspondiente descomposición para cada $H^q(\partial_i, \tilde{V}_\lambda)$.	24
3.6	Pesos	25
3.7	La imagen procedente de la cohomología en ∂_1 y ∂_2 y conclusiones	28
4	El caso $(GU(n-2, 2), X)$	32
4.1	La variedad de Shimura involucrada	32
4.2	Toro maximal, sistema de raíces y subgrupos parabólicos	33
4.3	El grupo de Weyl, W^{P_1} y W^{P_2}	34
4.4	Pesos en $W_{w_*(\lambda)}$	35
4.5	Descomposiciones $W = W_1^0 W^{P_1}$ y $W = W_2^0 W^{P_2}$	39
4.6	Imagen desde ∂_1	39
4.7	Caso $GU(2, 2)$	40
4.7.1	Caso $a_1 > a_2$ y $a_3 > a_4$	41
4.7.2	Caso $a_1 > a_2$ y $a_3 = a_4$	42
4.7.3	Caso $a_1 = a_2$ y $a_3 > a_4$	44
4.7.4	Caso $a_1 = a_2$ y $a_3 = a_4$	45
4.7.5	Conclusiones para el caso $n = 4$	46
4.8	El caso general $GU(2, n-2)$	47
4.8.1	El caso $a_i > a_{i+1} \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\}$	47
4.8.2	El caso no genérico	49
4.8.3	Conclusiones sobre la propiedad débil del peso medio para los casos $n = 5$ y $n = 6$	54

1 Introducci3n

Sea (G, X) un par de Shimura y (ρ, V) una representaci3n algebraica irreducible de G , entonces para cada subgrupo compacto abierto $K \subset G(\mathbb{A}^f)$ y bajo ciertas condiciones en V y G , V induce un sistema local en la variedad de nivel correspondiente $S_K = Sh_K(G, X)$ que ser3 denotado por $\tilde{V}$. Denotamos por $\bar{S}_K$ la compactificaci3n de Borel-Serre de S_K y por $\partial\bar{S}_K$ su borde, entonces tomando el l3mite proyectivo sobre el conjunto de subgrupos compactos abiertos $K \subset G(\mathbb{A}^f)$ obtenemos la variedad de Shimura S , su compactificaci3n de Borel-Serre $\bar{S}$ y su borde $\partial\bar{S}$. Las variedades S_K son llamadas variedades de nivel finito mientras que S se la llama la variedad en nivel infinito. Supongamos que ya hemos elegido un toro maximal T en G , un $\mathbb{Q}$ -toro desplegado maximal en G contenido en T y un sistema de ra3ces positivas en los respectivos sistemas de ra3ces asociados tales que son compatibles. Por estas elecciones en el $\mathbb{Q}$ -sistema de ra3ces tenemos un conjunto inducido $\mathcal{P}(G)$ de $\mathbb{Q}$ -subgrupos parab3licos de G , el conjunto de $\mathbb{Q}$ -subgrupos parab3licos est3ndares. Para cada subgrupo compacto abierto $K \subset G(\mathbb{A}^f)$, $\partial\bar{S}_K$ puede ser escrito como la uni3n de caras indexadas por los $\mathbb{Q}$ -subgrupos parab3licos est3ndares de G , y para cada $P \in \mathcal{P}(G)$ denotaremos por $\partial_{P,K}$ su correspondiente cara en $\partial\bar{S}_K$. Tenemos las nociones an3logas para el nivel infinito y tambi3n se cumple que $\partial\bar{S}$ est3 cubierto por caras ∂_P indexadas por los elementos de $\mathcal{P}(G)$.

Una propiedad de la compactificaci3n de Borel-Serre es que la inclusi3n $S_K \hookrightarrow \bar{S}_K$ es una equivalencia homot3pica, entonces se puede extender $\tilde{V}$ a un sistema local en $\bar{S}$ denotado tambi3n por $\tilde{V}$, obteniendo un isomorfismo $H^q(S_K, \tilde{V}) \cong H^q(\bar{S}_K, \tilde{V})$ para cada q , y considerando su correspondiente restricci3n al borde de la compactificaci3n de Borel-Serre obtenemos la siguiente sucesi3n exacta larga en cohomolog3a

$$\dots \rightarrow H_c^q(S_K, \tilde{V}) \rightarrow H^q(S_K, \tilde{V}) \rightarrow H^q(\partial\bar{S}_K, \tilde{V}) \rightarrow \dots$$

donde $H_c^\bullet(S_K, \tilde{V})$ denota la cohomolog3a a soporte compacto.

Por otro lado, el cubrimiento de $\partial\bar{S}_K$ dado por las caras asociadas a los $\mathbb{Q}$ -subgrupos parab3licos est3ndares induce una sucesi3n espectral que converge a la cohomolog3a del borde $H^\bullet(\partial\bar{S}_K, \tilde{V})$.

Si G tiene $\mathbb{Q}$ -rango semisimple 2 entonces $\mathcal{P}(G)$ consiste de tres elementos, un $\mathbb{Q}$ -subgrupo parab3lico est3ndar minimal denotado por P_0 y dos maximales denotados por P_1 y P_2 , esto reduce la sucesi3n espectral mencionada a una sucesi3n exacta larga en cohomolog3a dada por

$$\dots \rightarrow H^q(\partial\bar{S}_K, \tilde{V}) \rightarrow H^q(\partial_{1,K}, \tilde{V}) \oplus H^q(\partial_{2,K}, \tilde{V}) \rightarrow H^q(\partial_{0,K}, \tilde{V}) \rightarrow \dots$$

Todas las variedades de Shimura consideradas en este trabajo tendr3n $\mathbb{Q}$ -rango semisimple 2 y entonces tendremos siempre la segunda sucesi3n exacta larga en cohomolog3a.

Los resultados de este trabajo envuelven las variedades de nivel infinito, por lo que trabajaremos principalmente en el marco del nivel infinito. Como consecuencia necesitaremos enunciar las sucesiones exactas largas ya mencionadas, en la forma mas conveniente:

$$\dots \rightarrow H_c^q(S, \tilde{V}) \rightarrow H^q(S, \tilde{V}) \rightarrow H^q(\partial\bar{S}, \tilde{V}) \rightarrow \dots$$

y

$$\dots \rightarrow H^q(\partial\bar{S}, \tilde{V}) \rightarrow H^q(\partial_1, \tilde{V}) \oplus H^q(\partial_2, \tilde{V}) \rightarrow H^q(\partial_0, \tilde{V}) \rightarrow \dots$$

Ahora podemos definir el objeto central de este trabajo, los espacios de clases fantasma. El espacio de q -clases fantasma $Gh^q(V)$ est3 definido como el subespacio de $H^q(\partial\bar{S}, \tilde{V})$ dado

por la intersección de la imagen del morfismo

$$H^q(S, \tilde{V}) \rightarrow H^q(\partial \bar{S}, \tilde{V})$$

con el núcleo de cada morfismo

$$H^q(\partial \bar{S}, \tilde{V}) \rightarrow H^q(\partial_P, \tilde{V})$$

correspondiente a cada $\mathbb{Q}$ -subgrupo parabólico estándar P de G . En los casos presentados en este trabajo, el espacio $Gh^q(V)$ de q -clases fantasma puede ser descrito como la intersección de la imagen del morfismo

$$H^q(S, \tilde{V}) \rightarrow H^q(\partial \bar{S}, \tilde{V})$$

con el núcleo de

$$H^q(\partial \bar{S}, \tilde{V}) \rightarrow H^q(\partial_1, \tilde{V}) \oplus H^q(\partial_2, \tilde{V})$$

El objetivo de esta investigación es el de estudiar la existencia, o no, de clases fantasma para ciertas variedades de Shimura y la principal estrategia para llevarlo a cabo proviene de la teoría de las estructuras de Hodge mixtas.

Por la teoría de Saito de módulos de Hodge mixtos y por los resultados en [H-Z II], cada término en las últimas dos sucesiones exactas largas está dotado de una estructura de Hodge mixta y los correspondientes morfismos son morfismos de estructuras de Hodge mixtas, por lo que el espacio de clases fantasma está dotado de una estructura de Hodge mixta. Utilizando información sobre los espacios de cohomología en dichas sucesiones exactas largas, podemos obtener información sobre los posibles tipos de la estructura de Hodge mixta del espacio de clases fantasma.

La información sobre los espacios $Gh^q(V)$ será obtenida por el estudio de los morfismos $H^q(S, \tilde{V}) \rightarrow H^q(\partial \bar{S}, \tilde{V})$, $H^{q-1}(\partial_1, \tilde{V}) \rightarrow H^{q-1}(\partial_0, \tilde{V})$ y $H^{q-1}(\partial_2, \tilde{V}) \rightarrow H^{q-1}(\partial_0, \tilde{V})$ como también por consideraciones en las estructuras de Hodge mixtas asociadas a los correspondientes espacios de cohomología. Mientras que los argumentos para el estudio de los primeros dos morfismos provienen de consideraciones en los pesos, el estudio del morfismo $H^{q-1}(\partial_2, \tilde{V}) \rightarrow H^{q-1}(\partial_0, \tilde{V})$ será basado en resultados de [Ha].

Sabemos que los pesos en la estructura de Hodge mixta asociada a $H^q(S_K, \tilde{V})$ son $\geq q + wt(V)$, donde $wt(V)$ es el peso de la variación (compleja) de estructuras de Hodge en S_K definida por $\tilde{V}$, mientras que los pesos en $H_c^{q+1}(S_K, \tilde{V})$ son $\leq (q + 1) + wt(V)$, por lo tanto lo mismo ocurre en el nivel infinito y llamamos a $q + wt(V)$ el peso medio. Una pregunta interesante en el estudio de los pesos posibles en el espacio de q -clases fantasma es si su estructura de Hodge mixta tiene pesos iguales al peso medio y/o al peso medio mas uno, y en el caso que $Gh^q(V)$ satisfaga esta propiedad para todo número natural q diremos que la representación V satisface la propiedad débil del peso medio.

Para un espacio localmente simétrico conexo $\Gamma \backslash X$, asociado a un grupo algebraico semisimple $\tilde{G}$ definido sobre $\mathbb{Q}$ y un subgrupo aritmético $\Gamma \subset \tilde{G}(\mathbb{Q})$, y un sistema local $\tilde{V}$ asociado a una representación irreducible V de $\tilde{G}$ tenemos una descomposición del espacio de cohomología $H^q(e'(\tilde{P}), \tilde{V})$ asociado a la cara $e'(\tilde{P})$ de la compactificación de Borel-Serre correspondiente a un subgrupo parabólico $\tilde{P}$ del grupo algebraico semisimple dado. Esta descomposición puede encontrarse, por ejemplo, en la sección 5 de [S II]. Para los objetivos de este trabajo necesitamos la versión adélica de dicha descomposición, como puede encontrarse en [Ha] para el grupo GL_2 .

Escribimos, sin mas explicación, la descomposición

$$H^q(\partial_P, \tilde{V}) = \bigoplus_{w \in W^P} \text{Ind}_{P(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^{q-l(w)}(S^{M_P}, \tilde{W}_{w_*(\lambda)})$$

que puede encontrarse en [Ha] y [S] y puede obtenerse utilizando, entre otras cosas, el teorema de Kostant ([K]). En la última expresión W^P denota cierto subconjunto del grupo de Weyl asociado al sistema de raíces $\Phi(G, T)$, $l(w)$ denota la longitud del elemento w , λ denota el peso maximal de la representación irreducible V , $W_{w_*(\lambda)}$ es la representación irreducible del subgrupo de Levi M_P de P de peso maximal $w_*(\lambda)$ asociado a w y $\pi_0(G(\mathbb{R}))$ es el grupo de componentes conexas de $G(\mathbb{R})$. Esta descomposición es muy útil para un mejor entendimiento de las estructuras de Hodge mixtas asociadas a los espacios de cohomología $H^q(\partial_P, \tilde{V})$, como podemos ver en (5.5.6) de [H-Z II].

Para cada $\mathbb{Q}$ -subgrupo parabólico estándar maximal P tenemos una descomposición de su subgrupo de Levi M_P en su parte hermitiana $G_{h,P}$ y su parte lineal $G_{l,P}$ y $G_{h,P}$ forma parte de un par de Shimura $(G_{h,P}, h_P)$.

Entonces los pesos en la estructura de Hodge mixta en cada sumando directo $H^{q-l(w)}(S^{M_P}, \tilde{W}_{w_*(\lambda)})$ están determinados por el morfismo de peso asociado al par de Shimura $(G_{h,P}, h_P)$ y la representación irreducible $\tilde{W}_{w_*(\lambda)}$ de M_P . Para un $\mathbb{Q}$ -subgrupo parabólico estándar no maximal Q tenemos un $\mathbb{Q}$ -subgrupo parabólico estándar maximal de G asociado P (con la notación de [H-Z III] se dice que Q está subordinado a P y se denota $\Pi(Q) = P$) y los pesos en la estructura de Hodge mixta en $H^{q-l(w)}(S^{M_Q}, \tilde{W}_{w_*(\lambda)})$ serán determinados por $(G_{h,P}, h_P)$ y la representación irreducible $\tilde{W}_{w_*(\lambda)}$ de M_Q .

Para determinar los pares de Shimura $(G_{h,P}, h_P)$ utilizamos las primeras páginas de [H II] donde primero necesitamos determinar el morfismo de Cayley admisible $w_P : \mathbb{G}_m \rightarrow A_P$ con A_P un subgrupo de M_P .

Daremos a continuación un pequeño resumen de los contenidos y resultados presentados en este trabajo.

En primer lugar, utilizamos algunas estrategias relativas a los pesos en las estructuras de Hodge mixtas tratadas en este trabajo, para ello una de las principales herramientas es una sucesión exacta larga en cohomología, que es también una sucesión exacta de estructuras de Hodge mixtas, que involucra la cohomología a soporte compacto y la cohomología del borde. Como podremos observar, hay dos pesos para los cuales es difícil obtener información por medio del uso de esta sucesión, el peso medio y el peso medio mas uno, para ser mas preciso, para una clase en la cohomología del borde $\partial \overline{S}$ cuyo peso en la estructura de Hodge mixta correspondiente no es ni el peso medio ni el peso medio mas uno, podemos determinar exactamente cuando dicha clase se encuentra en la imagen del morfismo $H^q(S, \tilde{V}) \rightarrow H^q(\partial \overline{S}, \tilde{V})$, y esta imagen es uno de los ingredientes principales en la definición de las clases fantasma.

En este trabajo estudiamos la existencia de clases fantasma en la cohomología del borde de la compactificación de Borel-Serre de la variedad de Shimura correspondiente y en los casos donde no podemos determinar exactamente si existen o no clases fantasma, determinamos los posibles pesos en la estructura de Hodge mixta asociada al espacio de clases fantasma. Una pregunta interesante es cuando estos pesos posibles pertenecen siempre al conjunto formado por el peso medio y el peso medio mas uno. Como ya hemos dicho, diremos que el sistema local $\tilde{V}$ satisface la propiedad débil del peso medio si esto ocurre y mas aún diremos que satisface la propiedad del peso medio si el único peso posible en dicha estructura de Hodge mixta es el peso medio.

En la sección 3 trabajamos en la variedad de Shimura asociada al grupo simpléctico de

similitudes GSp_4 (dicho grupo tiene $\mathbb{Q}$ -rango semisimple 2), este caso ha sido parcialmente estudiado en algunos trabajos y en esta sección daremos no solo un tratamiento completo de este caso sino que también estaremos aplicando estrategias que involucran los pesos en las estructuras de Hodge mixtas asociadas a los espacios que aparecen en la definición del espacio de clases fantasma. Dichas estrategias, cuando son aplicadas en las variedades de Shimura tratadas en la sección 4 dan nuevos resultados sobre la existencia de clases fantasma y sobre los pesos posibles en los espacios de clases fantasma.

En la sección 3, las representaciones algebraicas irreducibles de GSp_4 son parametrizadas por pesos maximales que están dados por una expresión de la forma $\lambda = m_1\lambda'_1 + m_2\lambda'_2 + c\kappa$. En este marco probaremos que, salvo cuando $m_1 = m_2 = 0$, no hay clases fantasma mientras que en los casos en los cuales $m_1 = m_2 = 0$ se prueba que las únicas clases fantasma pertenecen al espacio de cohomología de grado 2 y una construcción de tales clases en la imagen del morfismo de Borel puede encontrarse en [KR], mas aún tenemos que para este caso las clases fantasma tienen peso igual al peso medio, en otras palabras probaremos que en los casos $m_1 = m_2 = 0$ el sistema local correspondiente satisface la propiedad del peso medio.

En la sección 4 utilizamos dichas estrategias para tratar el espacio de cohomología del borde de la compactificación de Borel-Serre de la variedad de Shimura asociada al grupo unitario de similitudes $GU(2, n-2)$ para $n \geq 4$. Dividiremos este estudio en los casos $n = 4$ y $n > 4$. Las representaciones algebraicas irreducibles de $GU(2, n-2)$ están parametrizadas por $(n+1)$ -uplas $(a_1, \dots, a_n, c)$ donde $a_1 \geq \dots \geq a_n$ y c es congruente a $\sum_{i=1}^n a_i$ módulo 2. Con esta notación y para $n = 4$ probaremos que en los casos en los cuales $a_1 \neq a_2$ o $a_3 \neq a_4$, esto incluye los pesos regulares, no hay clases fantasma y para los casos $a_1 = a_2$ y $a_3 = a_4$ determinamos los pesos y el grado en cohomología de las posibles clases fantasma, obteniendo que para los casos $a_1 = a_2$ y $a_3 = a_4$ el sistema local correspondiente satisface al menos la propiedad débil del peso medio.

Finalmente trabajaremos en el caso $n > 4$ obteniendo que para los sistemas locales definidos por pesos maximales regulares no hay clases fantasma. En los casos no regulares obtenemos algunas descripciones de los pesos posibles en los espacios de clases fantasma y con dichas descripciones podemos probar que la propiedad débil del peso medio se cumple para $n = 5$ y en el caso $n = 6$ daremos algunas condiciones específicas para los únicos casos en los cuales la propiedad débil del peso medio podría no ser satisfecha.

2 Preliminares

En esta sección vamos a presentar las definiciones y los resultados utilizados en este trabajo.

2.1 Teoría de Hodge

Primero presentaremos algunos aspectos de la teoría de las estructuras de Hodge y luego continuaremos en la siguiente sección presentando la definición de un par de Shimura y la construcción de la correspondiente variedad de Shimura.

Definición 1. *Una estructura de Hodge real es un espacio vectorial real V junto con una descomposición*

$$V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} V^{p,q}$$

de tal manera que $V^{p,q} = \overline{V^{q,p}}$ $\forall p, q \in \mathbb{Z}$.

Los pares (p, q) tales que $V^{p,q} \neq 0$ se los llama los tipos de la estructura de Hodge real.

Consideremos una estructura de Hodge real en un espacio vectorial real V , entonces los subespacios

$$\bigoplus_{p+q=n} V^{p,q} \subset V_{\mathbb{C}}$$

para $n \in \mathbb{Z}$, están claramente definidos sobre $\mathbb{R}$ e inducen una descomposición, llamada la descomposición por los pesos, denotada por

$$V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n.$$

Si $R \subset \mathbb{R}$ es un subanillo y V_R es un R -submódulo tal que $V = V_R \otimes_R \mathbb{R}$ y todos los subespacios $V_n \subset V$ están definidos sobre R entonces decimos que V_R junto con la descomposición de Hodge de $V_{\mathbb{C}}$ es una R -estructura de Hodge.

Por la caracterización de las representaciones de un toro algebraico podemos ver que definir una estructura de Hodge real en un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial V es lo mismo que dar un homomorfismo algebraico definido sobre $\mathbb{R}$ desde el grupo algebraico real $\mathbb{S} = \text{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} \mathbb{G}_m$ a $GL(V)$, donde $\text{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}$ denota la restricción de escalares de Weil. Mas precisamente, si identificamos $\mathbb{S}(\mathbb{C})$ con $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ de tal manera que la inclusión $\mathbb{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{S}(\mathbb{C})$ está dada por

$$\mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times, z \mapsto (z, \bar{z})$$

entonces para una estructura de Hodge real en V dada por $V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p,q} V^{p,q}$ definimos la representación algebraica $\mathbb{S}_{\mathbb{C}} \rightarrow GL(V_{\mathbb{C}})$ por

$$(z_1, z_2).v = z_1^{-p} z_2^{-q} v \quad \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{S}_{\mathbb{C}}$$

y esta representación está definida sobre $\mathbb{R}$, luego podemos asociar a la estructura de Hodge real dada una representación algebraica $\mathbb{S} \rightarrow GL(V)$. Por otro lado, dada una representación algebraica $\mathbb{S} \rightarrow GL(V)$ podemos considerar la correspondiente representación $\mathbb{S}_{\mathbb{C}} \rightarrow GL(V_{\mathbb{C}})$, luego definimos por $V^{p,q} \subset V_{\mathbb{C}}$ el subespacio vectorial complejo que consiste de los elementos $v \in V_{\mathbb{C}}$ tales que $(z_1, z_2)v = z_1^{-p} z_2^{-q} v \quad \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{S}_{\mathbb{C}}$ y de esta manera obtenemos una estructura de Hodge en V .

Si la estructura de Hodge real V satisface $V = V_n$ para algún $n \in \mathbb{Z}$ entonces decimos que V es una estructura de Hodge de peso n .

Dadas V_R, W_R dos R -estructuras de Hodge de peso k , ($R \subset \mathbb{R}$ subanillo) un morfismo de R -estructuras de Hodge de V_R a W_R es un morfismo de R -módulos $f : V_R \rightarrow W_R$ tal que su extensión $f_{\mathbb{C}} : V_R \otimes_R \mathbb{C} \rightarrow W_R \otimes_R \mathbb{C}$ satisface $f_{\mathbb{C}}(V^{p,q}) \subset W^{p,q}$.

La descomposición de Hodge de una R -estructura de Hodge de peso k está determinada por su filtración de Hodge, que es la filtración decreciente $F^\bullet V$ definida por

$$F^r V = \bigoplus_{p \geq r} V^{p,q}$$

donde $V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k} V^{p,q}$ es la correspondiente descomposición de Hodge. Describir una estructura de Hodge por medio de su filtración de Hodge es mas conveniente dado que es la descripción utilizada en la definición de una variación de estructuras de Hodge, una noción importante que veremos en lo que sigue. En este marco observamos que podemos utilizar la definición equivalente de un morfismo de R -estructuras de Hodge V_R, W_R de peso k como un morfismo de R -módulos $f : V_R \rightarrow W_R$ cuya extensión a $V_R \otimes_R \mathbb{C} \rightarrow W_R \otimes_R \mathbb{C}$ preserva las

respectivas filtraciones de Hodge.

Como ya hemos mencionado, otra noción importante es la de una variación de estructuras de Hodge (VHS), que consiste de una estructura de Hodge para cada punto de una variedad compleja tal que ciertas propiedades son satisfechas. Para ser mas precisos daremos una definición de dicho objeto.

Definición 2. *Dada una variedad compleja X con haz de funciones holomorfas $\mathcal{O}_X$, una variación de estructuras de Hodge de peso k en X consiste de un sistema local $V_{\mathbb{Z}}$ de grupos abelianos finitamente generados en X junto con una filtración decreciente finita del fibrado vectorial holomorfo $\mathcal{V} = V_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_X$ por subfibrados vectoriales holomorfos $\mathcal{F}^i$ tales que ellos inducen, en cada fibra, una estructura de Hodge de peso k y la conexión natural $\nabla : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1$ satisface la condición de transversalidad de Griffiths (en otras palabras, si denotamos por ∇ la conexión plana asociada al sistema local V entonces $\nabla \mathcal{F}^i \subset \mathcal{F}^{i-1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1$, donde Ω_X^1 denota el fibrado vectorial de 1-formas holomorfas).*

Los principales espacios que vamos a estudiar en este trabajo están dotados de una estructura de Hodge mixta, esta es una estructura mas general y continuamos con la definición de dicho objeto.

Definición 3. *Sea $H_{\mathbb{Z}}$ un grupo abeliano finitamente generado, una estructura de Hodge mixta en $H_{\mathbb{Z}}$ consiste de una filtración decreciente finita $F^{\bullet}H$ de $H_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$, llamada la filtración de Hodge, y una filtración creciente finita $W^{\bullet}H$ de $H_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, llamada la filtración por los pesos, tal que para cada $k \in \mathbb{Z}$ la filtración de Hodge induce una estructura de Hodge de peso k en el espacio cociente*

$$Gr_k^W = W^k H / W^{k-1} H.$$

Dadas $(H_{\mathbb{Z}}, W^{\bullet}H, F^{\bullet}H)$ y $(\tilde{H}_{\mathbb{Z}}, \tilde{W}^{\bullet}\tilde{H}, \tilde{F}^{\bullet}\tilde{H})$ estructuras de Hodge mixtas, un morfismo de estructuras de Hodge mixtas de $H_{\mathbb{Z}}$ a $\tilde{H}_{\mathbb{Z}}$ es un morfismo de grupos abelianos de $H_{\mathbb{Z}}$ a $\tilde{H}_{\mathbb{Z}}$ tal que sus extensiones a $H_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ y $H_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ son compatibles con las filtraciones por los pesos y la de Hodge respectivamente.

Podemos también definir estructuras de Hodge mixtas racionales solo remplazando $\mathbb{Z}$ por $\mathbb{Q}$ en la definición anterior.

Otra importante generalización de las nociones de estructura de Hodge real y variación de estructuras de Hodge, que también es utilizada en este trabajo es la de una estructura de Hodge compleja y variación compleja de estructuras de Hodge y a continuación daremos las definiciones correspondientes.

Definición 4. *Una estructura de Hodge compleja es un $\mathbb{C}$ -espacio vectorial de dimensión finita E junto con una descomposición*

$$E = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} E^{p,q}$$

en suma directa de $\mathbb{C}$ -subespacios vectoriales y decimos que es una estructura de Hodge compleja de peso n si $E^{p,q} = 0$ siempre que $p + q \neq n$.

Podemos ver que dar una estructura de Hodge compleja es equivalente a dar una representación algebraica del grupo algebraico $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}$.

Esta definición es mas adecuada para los propósitos de este trabajo dado que consideraremos familias de estructuras de Hodge definidas por la composición de ciertos homomorfismos $h : \mathbb{S} \rightarrow G$ provenientes de la definición de un par de Shimura, y una representación

algebraica de G que será considerada absolutamente irreducible y entonces no necesariamente definida sobre $\mathbb{R}$. Es por ello que en lugar de una variación de estructuras de Hodge en la variedad de Shimura considerada, obtendremos una variación compleja de estructuras de Hodge. A continuación daremos la definición de dicho objeto, como puede encontrarse por ejemplo en [Z].

Definición 5. *Dada una variedad compleja X , una variación compleja de estructuras de Hodge de peso k en X es un sistema local V en X de $\mathbb{C}$ -espacios vectoriales de dimensión finita tal que para cada punto $x \in X$ hay una estructura de Hodge compleja de peso k en la fibra*

$$V_x = \bigoplus_{p+q=k} H_x^{p,q}$$

de tal manera que se satisfacen las siguientes propiedades:

- (i) *Dados $p, q \in \mathbb{Z}$ tales que $p + q = n$ y denotando por $\mathcal{V}$ el fibrado vectorial holomorfo asociado al sistema local V , los espacios vectoriales $H_x^{p,q}$ definen un subfibrado vectorial C^∞ , $\mathcal{H}^{p,q}$ de $\mathcal{V}$.*
- (ii) *Para cada $s \in \mathbb{Z}$ el fibrado vectorial $\mathcal{F}^s = \bigoplus_{p \geq s} \mathcal{H}^{p,q}$ es holomorfo y el fibrado vectorial $\overline{\mathcal{F}}^s = \bigoplus_{q \geq s} \mathcal{H}^{p,q}$ es antiholomorfo.*
- (iii) *Para cada $i \in \mathbb{Z}$ tenemos que $\nabla \mathcal{F}^i \subset \mathcal{F}^{i-1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1$ y $\nabla \overline{\mathcal{F}}^i \subset \overline{\mathcal{F}}^{i-1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \overline{\Omega_X^1}$ donde ∇ es la conexión plana asociada al sistema local V .*

2.2 Variedades de Shimura

Definición 6. *Un par de Shimura es un par (G, X) que consiste de un grupo algebraico reductivo conexo G definido sobre $\mathbb{Q}$ y una $G(\mathbb{R})$ -clase de conjugación X de homomorfismos de $\mathbb{R}$ -grupos algebraicos $h : \mathbb{S} \rightarrow G_{\mathbb{R}}$ tal que:*

SV1 Para todo $h \in X$, la estructura de Hodge en $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G_{\mathbb{R}})$ dada por el homomorfismo $\text{Ad}_G \circ h$ es de tipo $(-1, 1) + (0, 0) + (1, -1)$. Para $h \in X$ denotamos la estructura de Hodge correspondiente por

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_h^{(0,0)} \oplus \mathfrak{g}_h^{(-1,1)} \oplus \mathfrak{g}_h^{(1,-1)}.$$

SV2 Para todo $h \in X$, $\text{ad}_G(h(i))$ induce una involución de Cartan en G^{ad} (donde G^{ad} denota el grupo adjunto de G).

Como consecuencia de esta definición tenemos la siguiente observación:

Observación 7. *Si (G, X) es un par de Shimura y $h \in X$, consideramos el homomorfismo canónico de grupos algebraicos reales $i : \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{S}$, entonces la imagen del morfismo $h \circ i : \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}} \rightarrow G_{\mathbb{R}}$ es central (dado que su composición con la representación adjunta es trivial). Entonces dicho homomorfismo de grupos algebraicos reales $\mathbb{G}_{m,\mathbb{R}} \rightarrow G_{\mathbb{R}}$ no depende del elemento $h \in X$ elegido. Lo llamaremos el homomorfismo de peso de la variedad de Shimura y lo denotaremos por w_X .*

Por simplicidad asumiremos que G^{ad} es $\mathbb{Q}$ -simple, sin embargo todos los resultados importantes son también válidos sin esta suposición.

Dado un par de Shimura (G, X) y $h \in X$, denotamos $K_h = \text{Stab}_{G(\mathbb{R})}(h)$ y entonces escribimos $X = G(\mathbb{R})/K_h$. Denotamos por $G^{\text{ad}}(\mathbb{R})^+$ la componente conexa de la identidad

del grupo de Lie $G^{ad}(\mathbb{R})$, entonces se puede demostrar que el espacio homogéneo X es una unión finita disjunta de espacios simétricos isomorfos, cada uno de ellos, al espacio simétrico dado por el cociente de $G^{ad}(\mathbb{R})^+$ sobre su subgrupo compacto maximal. Podemos también ver que cada componente conexa D de X tiene una estructura natural de dominio hermitiano simétrico definiendo variaciones de estructuras de Hodge. Para ser mas preciso, daremos el enunciado de la siguiente proposición que puede encontrarse en [M],

Proposición 8. *Sea (G, X) un par de Shimura y sea $\rho : G_{\mathbb{R}} \rightarrow GL(V)$ una representación algebraica de G definida sobre $\mathbb{R}$, entonces para cada $h \in X$ sabemos que $\rho \circ h$ define una estructura de Hodge en V . Entonces X tiene una única estructura compleja tal que para toda representación algebraica $\rho : G_{\mathbb{R}} \rightarrow GL(V)$ definida sobre $\mathbb{R}$, la asignación $h \in X \mapsto \rho \circ h$ define una variación de estructuras de Hodge.*

Mas aún si tenemos una representación algebraica $\rho : G \rightarrow GL(V)$ sobre un espacio vectorial complejo V , no necesariamente definida sobre $\mathbb{R}$, entonces asumiendo que el carácter central de V restringido al $\mathbb{Q}$ -toro desplegado maximal del centro de G está definido sobre $\mathbb{Q}$, obtenemos mediante el mismo procedimiento una variación compleja de estructuras de Hodge, donde el punto $h \in X$ se corresponde con la estructura de Hodge compleja definida por $\rho \circ h$.

Continuamos con la definición de los espacios localmente simétricos correspondientes, que en este caso son hermitianos. Para ello necesitamos presentar los subgrupos aritméticos. Sea G un grupo algebraico definido sobre $\mathbb{Q}$, un subgrupo $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ se dice un subgrupo aritmético de $G(\mathbb{Q})$ si para una representación algebraica fiel $\rho : G \rightarrow GL_n$ (y luego para toda representación algebraica fiel) el subgrupo $\rho(\Gamma) \subset \rho(G(\mathbb{Q}))$ es conmensurable con $\rho(G)(\mathbb{Q}) \cap GL_n(\mathbb{Z})$. Si H es un grupo de Lie real conexo, un subgrupo $\Gamma \subset H$ se dice un subgrupo aritmético de H si existe un grupo algebraico G definido sobre $\mathbb{Q}$, un subgrupo aritmético Γ_0 de $G(\mathbb{Q})$ y un homomorfismo suryectivo $\rho : G(\mathbb{R})^+ \rightarrow H$ con núcleo compacto tal que $\rho(\Gamma_0 \cap G(\mathbb{R})^+) = \Gamma$ (aquí estamos denotando la componente conexa de la identidad de un grupo de Lie por el superíndice +).

Sea D un dominio hermitiano simétrico y sea $\Gamma \subset Hol(D)^+$ un subgrupo discreto sin torsión, el cociente $\Gamma \backslash D$ tiene una estructura compleja única tal que la proyección canónica $\pi : D \rightarrow \Gamma \backslash D$ es un isomorfismo local de variedades complejas. Denotamos por $D(\Gamma)$ al espacio $\Gamma \backslash D$ dotado de esta estructura compleja.

Un teorema muy importante para la definición de la variedad de Shimura asociada al par de Shimura (G, X) es el siguiente:

Teorema 9 (Baily y Borel). *Sea D un dominio hermitiano simétrico y sea $\Gamma \subset Hol(D)^+$ un subgrupo aritmético sin torsión, entonces $D(\Gamma)$ tiene una estructura canónica de variedad quasi-proyectiva compleja.*

Finalmente, dado un par de Shimura definimos la variedad de Shimura asociada de la manera siguiente.

Definición 10. *Sea (G, X) un par de Shimura y sea $K \subset G(\mathbb{A}^f)$ un subgrupo compacto abierto, definimos la variedad de nivel asociada a K por*

$$Sh_K(G, X) = G(\mathbb{Q}) \backslash (X \times (G(\mathbb{A}^f)/K)) .$$

Para K suficientemente pequeño, el espacio $Sh_K(G, X)$ es homeomorfo a una unión disjunta finita de espacios localmente simétricos. Para ser mas precisos, dado el par de Shimura

(G, X) y $K \subset G(\mathbb{A}^f)$ un subgrupo compacto abierto, denotamos por $G(\mathbb{R})_+$ el grupo de elementos en $G(\mathbb{R})$ cuya proyección a $G^{ad}(\mathbb{R})$ está en la componente conexa de la identidad con respecto a la topología dada por la estructura de grupo de Lie. Denotamos por $G(\mathbb{Q})_+$ al grupo $G(\mathbb{Q}) \cap G(\mathbb{R})_+$. Podemos probar que el conjunto $\mathcal{C} = G(\mathbb{Q})_+ \backslash G(\mathbb{A}^f)/K$ es finito y

$$Sh_K(G, X) = \bigsqcup_{g \in \mathcal{C}} \Gamma_g \backslash D$$

donde $\Gamma_g = gKg^{-1} \cap G(\mathbb{Q})_+$ y D es la componente conexa de X conteniendo la proyección del elemento identidad y la igualdad significa un homeomorfismo considerando la topología natural en X , la topología adélica en $G(\mathbb{A}^f)$ y la topología cociente en $Sh_K(G, X)$.

Dicho homeomorfismo está definido como sigue: para cada $g \in \mathcal{C}$, la aplicación $\Gamma_g \backslash D \rightarrow Sh_K(G, X)$ está dada por $[x] \mapsto [x, g]$.

Tenemos que verificar que para cada $g \in \mathcal{C}$ el subgrupo Γ_g es un subgrupo aritmético de $Hol(D)^+$. $gKg^{-1} \cap G(\mathbb{Q})$ es un subgrupo aritmético de $G(\mathbb{Q})$. Necesitamos el siguiente resultado cuya prueba puede encontrarse en la página 204 de [P-R].

Lema 11. *Sea $\phi : G \rightarrow G'$ un homomorfismo suryectivo de grupos algebraicos definidos sobre $\mathbb{Q}$ y sea Γ un subgrupo aritmético de $G(\mathbb{Q})$, entonces $\phi(\Gamma)$ es un subgrupo aritmético de $G'(\mathbb{Q})$.*

Tenemos entonces que la imagen de $gKg^{-1} \cap G(\mathbb{Q})$ por la proyección canónica $G \rightarrow G^{ad}$ es un subgrupo aritmético de $G^{ad}(\mathbb{Q})$. El morfismo canónico $G^{ad}(\mathbb{R})^+ \rightarrow Hol(D)^+$ es suryectivo con núcleo compacto, podemos entonces concluir que Γ_g es un subgrupo aritmético de $Hol(D)^+$.

Como conclusión, cada variedad de nivel $Sh_K(G, X)$ admite una estructura de variedad quasi-proyectiva compleja.

Si $K' \subset K$ entonces tenemos un morfismo canónico $Sh_{K'}(G, X) \rightarrow Sh_K(G, X)$, y mas aún dicho morfismo es regular.

Definición 12. *Sea (G, X) un par de Shimura, definimos la variedad de Shimura asociada a dicho par por el límite*

$$Sh(G, X) = \varprojlim_K Sh_K(G, X).$$

En algunos artículos se pueden encontrar otros axiomas adicionales en la definición de un par de Shimura, como por ejemplo:

SV3 G^{ad} no tiene $\mathbb{Q}$ -factor directo H tal que $H(\mathbb{R})$ es un grupo de Lie compacto.

SV4 El homomorfismo de peso w_X está definido sobre $\mathbb{Q}$.

SV5 $Z_G(\mathbb{Q})$ es discreto en $Z_G(\mathbb{A}^f)$.

SV6 El toro Z_G° es desplegado sobre un cuerpo CM .

Finalmente, daremos una descripción del límite inverso que define la variedad de Shimura asociada al par de Shimura (G, X) .

Teorema 13. *Para un par de Shimura (G, X) tenemos que*

$$\varprojlim_K Sh_K(G, X) = (G(\mathbb{Q})/Z_G(\mathbb{Q})) \backslash \left(X \times \left(G(\mathbb{A}^f)/\overline{Z_G(\mathbb{Q})} \right) \right)$$

donde $\overline{Z_G(\mathbb{Q})}$ denota la clausura de $Z_G(\mathbb{Q})$ en $Z_G(\mathbb{A}^f)$. Mas aún, si (G, X) satisface SV5 entonces tenemos

$$\lim_{\overleftarrow{K}} Sh_K(G, X) = G(\mathbb{Q}) \backslash X \times G(\mathbb{A}^f).$$

Dado un subgrupo compacto abierto $K \subset G(\mathbb{A}^f)$ y $g \in G(\mathbb{A}^f)$ podemos definir un isomorfismo de variedades $Sh_K(G, X) \rightarrow Sh_{g^{-1}Kg}(G, X)$ por $[x, a] \mapsto [x, ag]$. Estos isomorfismos definen una acción de $G(\mathbb{A}^f)$ en el sistema inverso $(Sh_K(G, X))_K$ que da una acción de $G(\mathbb{A}^f)$ en la variedad de Shimura asociada al par de Shimura (G, X) .

Si (ρ, V) es una representación algebraica irreducible de G entonces podemos definir sistemas locales en los espacios $Sh_K(G, X)$ y también en la variedad de Shimura $Sh(G, X)$ como sigue. Para $K \subset G(\mathbb{A}^f)$ sea $\tilde{V}$ el sistema local en $Sh_K(G, X)$ definido por

$$G(\mathbb{Q}) \backslash X \times V \times G(\mathbb{A}^f) / K$$

mientras que el sistema local en $Sh(G, X)$ está definido por

$$\lim_{\overleftarrow{K}} G(\mathbb{Q}) \backslash X \times V \times G(\mathbb{A}^f) / K$$

y será también denotado por $\tilde{V}$.

Denotamos por S_K la variedad de nivel asociada a K y por S la variedad de Shimura $Sh(G, X)$.

Entonces, dada una representación algebraica irreducible de G obtenemos sistemas locales $\tilde{V}$ en S y en cada variedad de nivel S_K , y podemos considerar los espacios de cohomología $H^\bullet(S, \tilde{V})$ y $H^\bullet(S_K, \tilde{V})$.

2.3 $\mathbb{Q}$ -estructura y compactificación de Borel-Serre

Cuando el $\mathbb{Q}$ -rango semisimple de G no es cero (en los casos presentados en estas notas el $\mathbb{Q}$ -rango semisimple de los grupos algebraicos involucrados será 2) la variedad de nivel S_K no será compacta y consideramos su compactificación de Borel-Serre denotada por $\overline{S}_K$, cuya definición está dada en [B]. La inclusión $S_K \hookrightarrow \overline{S}_K$ es una equivalencia homotópica, el sistema local $\tilde{V}$ puede ser extendido naturalmente a un sistema local $\tilde{V}$ en $\overline{S}_K$ y tenemos un isomorfismo

$$H^\bullet(S_K, \tilde{V}) \cong H^\bullet(\overline{S}_K, \tilde{V})$$

como podemos encontrar por ejemplo en [Ha] y [S]. Denotamos el borde de la compactificación de Borel-Serre por $\partial \overline{S}_K$. Podemos entonces considerar la sucesión exacta larga en cohomología

$$\cdots \rightarrow H_c^q(S_K, \tilde{V}) \rightarrow H^q(S_K, \tilde{V}) \rightarrow H^q(\partial \overline{S}_K, \tilde{V}) \rightarrow \cdots$$

donde $H_c^q(S_K, \tilde{V})$ denota la cohomología a soporte compacto. Todos estos espacios están dotados de una estructura de Hodge mixta canónica por la teoría de Saito de módulos de Hodge mixtos, y además la sucesión exacta es una sucesión exacta de estructuras de Hodge mixtas.

Para la descripción de la compactificación de Borel-Serre necesitamos entender la $\mathbb{Q}$ -estructura de G . Fijamos un toro maximal T en G definiendo un sistema de raíces $\Phi(G, T)$ y fijamos un conjunto de raíces positivas en este sistema de raíces, denotamos por Δ el conjunto correspondiente de raíces simples. Fijamos un $\mathbb{Q}$ -toro desplegado maximal $\tilde{T}$ en G y todo esto tal que $\tilde{T} \subset T$. Fijamos un sistema de raíces positivas en el sistema de raíces $\Phi(G, \tilde{T})$ de

tal manera que sea compatible con el sistema de raíces positivas para $\Phi(G, T)$, y denotamos por $\Delta_{\mathbb{Q}}$ su correspondiente conjunto de raíces simples.

Asociado a estas elecciones tenemos un conjunto de representantes $\mathcal{P}(G)$ para el conjunto de $G(\mathbb{Q})$ -clases de conjugación de $\mathbb{Q}$ -subgrupos parabólicos de G , el conjunto de $\mathbb{Q}$ -subgrupos parabólicos estándares de G . $\mathcal{P}(G)$ puede ser identificado con el conjunto de subconjuntos de $\Delta_{\mathbb{Q}}$ donde cada $\mathbb{Q}$ -subgrupo parabólico estándar maximal se corresponde con un subconjunto de 1 elemento de $\Delta_{\mathbb{Q}}$. El borde $\partial\bar{S}_K$ de la compactificación de Borel-Serre de S_K puede escribirse como una unión de caras indexadas por los $\mathbb{Q}$ -subgrupos parabólicos estándares de G , luego dado $I \subset \Delta_{\mathbb{Q}}$ denotamos por $\partial_{I,K}$ la correspondiente cara en $\partial\bar{S}_K$. Este cubrimiento induce una sucesión espectral en cohomología

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{|I|=p+1} H^q(\partial_{I,K}, \tilde{V}) \Rightarrow H^{p+q}(\partial\bar{S}_K, \tilde{V})$$

que converge a la cohomología del borde.

Supondremos en adelante que G tiene $\mathbb{Q}$ -rango semisimple 2 (este será el caso para las variedades de Shimura tratadas en este trabajo). Entonces $\Delta_{\mathbb{Q}}$ tiene solo dos elementos y tendremos dos $\mathbb{Q}$ -subgrupos parabólicos estándares maximales, que serán denotados por P_1, P_2 , y uno minimal, denotado por P_0 (también denotaremos sus caras correspondientes en el borde de la compactificación de Borel-Serre de S_K por $\partial_{1,K}, \partial_{2,K}$ y $\partial_{0,K}$ respectivamente). En este caso especial la sucesión espectral que hemos mencionado es equivalente a una sucesión exacta larga en cohomología, dada por

$$\dots \rightarrow H^q(\partial\bar{S}_K, \tilde{V}) \rightarrow H^q(\partial_{1,K}, \tilde{V}) \oplus H^q(\partial_{2,K}, \tilde{V}) \rightarrow H^q(\partial_{0,K}, \tilde{V}) \rightarrow \dots$$

Por [H-Z II], cada término en dicha sucesión exacta larga admite una estructura de Hodge mixta natural (el lector debe observar [H-Z II'] para la correcta descripción de la estructura de Hodge mixta) y la sucesión exacta larga es una sucesión exacta larga de estructuras de Hodge mixtas. Esta será una de las herramientas principales utilizadas para el estudio de los espacios de clases fantasma. En el marco mas general de $\mathbb{Q}$ -rango semisimple > 2 , los resultados de [H-Z II] muestran que dicha sucesión espectral es una sucesión espectral de estructuras de Hodge mixtas.

Si trabajamos en el nivel infinito, podemos escribir

$$H^q(S, \tilde{V}) = \varinjlim_K H^q(S_K, \tilde{V}), \quad H^q(\partial\bar{S}, \tilde{V}) = \varinjlim_K H^q(\partial\bar{S}_K, \tilde{V}) \text{ y } H_c^q(S, \tilde{V}) = \varinjlim_K H_c^q(S_K, \tilde{V}),$$

y tenemos la primera sucesión exacta larga en este marco. De la misma manera tenemos la segunda sucesión exacta larga en cohomología en el nivel infinito (para G de $\mathbb{Q}$ -rango semisimple 2). Los objetos análogos en el nivel infinito correspondientes a las caras del borde de la compactificación de Borel-Serre $\partial_{i,K}$ serán denotados por ∂_i . En otras palabras, para el nivel infinito se verifica que las siguientes sucesiones son exactas:

$$\dots \rightarrow H_c^q(S, \tilde{V}) \rightarrow H^q(S, \tilde{V}) \xrightarrow{r_q} H^q(\partial\bar{S}, \tilde{V}) \rightarrow \dots$$

y

$$\dots \rightarrow H^q(\partial\bar{S}, \tilde{V}) \xrightarrow{p_q} H^q(\partial_1, \tilde{V}) \oplus H^q(\partial_2, \tilde{V}) \rightarrow H^q(\partial_0, \tilde{V}) \rightarrow \dots$$

Observamos que en ambas sucesiones exactas largas hemos nombrado dos morfismos p_q y r_q , estos serán utilizados en la siguiente subsección para dar la definición de clases fantasma.

2.4 Clases fantasma y teoría de Hodge mixta en cohomología

En esta subsección definiremos el objeto de interés en este trabajo y explicaremos las estrategias utilizadas para llegar a los resultados obtenidos.

Recordamos que estamos asumiendo que el $\mathbb{Q}$ -rango semisimple de G es 2, luego con la notación de la subsección anterior definimos el espacio de q -clases fantasma del par de Shimura (G, X) a coeficientes en el sistema local definido por la representación irreducible V , por

$$Gh^q(\tilde{V}) = \text{Im}(r_q) \cap \text{Ker}(p_q),$$

en otras palabras, es el espacio de clases en la cohomología del borde de la compactificación de Borel-Serre que están en la imagen de $H^q(S, \tilde{V})$ por la proyección canónica y en el núcleo de cada proyección a la cohomología de cada cara del borde de la compactificación de Borel-Serre $H^q(\partial_i, \tilde{V})$ correspondiente a un $\mathbb{Q}$ -subgrupo parabólico estándar.

Las estrategias utilizadas en estas notas están basadas en el hecho de que todos los espacios de cohomología considerados están dotados de una estructura de Hodge mixta por la teoría de Saito de módulos de Hodge mixtos y por [H-Z II], y las ya mencionadas sucesiones exactas largas en cohomología son sucesiones exactas largas de estructuras de Hodge mixtas, esto induce una estructura de Hodge mixta en el espacio de clases fantasma.

Como hemos ya observado luego de la definición de un par de Shimura, el homomorfismo de peso no depende del elemento $h \in X$ elegido. El homomorfismo de peso ω_X define el peso en la variación de estructuras de Hodge definida por $\tilde{V}$ y todo esto sigue siendo válido para una representación algebraica no necesariamente definida sobre $\mathbb{R}$ induciendo una variación compleja de estructuras de Hodge, denotaremos por $wt(V)$ este peso. Por la teoría de Saito, sabemos que los pesos en la estructura de Hodge mixta asociada a $H^q(S, \tilde{V})$ son $\geq wt(V) + q$ y los pesos en la estructura de Hodge mixta asociada a $H_c^q(S, \tilde{V})$ son $\leq wt(V) + q$. Esto da la primera implicación en la estructura de Hodge mixta del espacio de clases fantasma dado que implica que los pesos en la estructura de Hodge mixta asociada a $Gh^q(\tilde{V})$ son $\geq wt(V) + q$.

Una pregunta a ser estudiada en este trabajo es cuando los posibles pesos en el espacio de clases fantasma $Gh^q(\tilde{V})$ pertenecen al conjunto $\{q + wt(V), q + 1 + wt(V)\}$, en el caso en el que esto se satisfaga para la representación V diremos que V satisface la propiedad débil del peso medio. Por otro lado, si V satisface que el espacio de clases fantasma $Gh^q(\tilde{V})$ tiene peso $q + wt(V)$ diremos que V satisface la propiedad del peso medio.

Mas información puede ser determinada por el estudio de la estructura de Hodge mixta en los espacios $H^q(\partial_0, \tilde{V})$ y el núcleo de $H^q(\partial_0, \tilde{V}) \rightarrow H^{q+1}(\partial \bar{S}, \tilde{V})$, pero dicho núcleo es la imagen del morfismo

$$H^q(\partial_1, \tilde{V}) \oplus H^q(\partial_2, \tilde{V}) \rightarrow H^q(\partial_0, \tilde{V}).$$

Para estudiar dicha imagen restringimos el morfismo a cada término y estudiamos cada $H^q(\partial_i, \tilde{V}) \rightarrow H^q(\partial_0, \tilde{V})$ por separado.

Para ello usamos la descomposición dada para cada $\mathbb{Q}$ -subgrupo parabólico estándar P de G

$$H^q(\partial_P, \tilde{V}) = \bigoplus_{i+j=q} \text{Ind}_{P(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^i(S^{M_P}, \widetilde{H^j(\mathfrak{u}_P, V)})$$

donde $\mathfrak{u}_P$ denota el álgebra de Lie del radical unipotent de P , M_P es un subgrupo de Levi de P , S^{M_P} es un espacio localmente simétrico asociado a M_P y $\pi_0(P(\mathbb{R}))$, $\pi_0(G(\mathbb{R}))$ denota el grupo de componentes conexas de $P(\mathbb{R})$ y $G(\mathbb{R})$ respectivamente (podemos encontrar dicha descomposición por ejemplo en [Ha] y [S]).

Observación 14. *Esta descomposición puede ilustrarse con el caso de un espacio localmente*

simétrico $X_\Gamma = \Gamma \backslash X$ donde X es el espacio simétrico asociado a un grupo algebraico semisimple conexo $\tilde{G}$ definido sobre $\mathbb{Q}$, $\Gamma \subset \tilde{G}(\mathbb{Q})$ es un subgrupo aritmético y V es una representación algebraica de $\tilde{G}$ definiendo un sistema local $\tilde{V}$ en X_Γ . El borde de la compactificación de Borel-Serre de X_Γ es la unión de caras indexada por el conjunto de Γ -clases de conjugación de $\mathbb{Q}$ -subgrupos parabólicos propios de $\tilde{G}$. Dado $\tilde{P} \subset \tilde{G}$ un $\mathbb{Q}$ -subgrupo parabólico propio, denotamos por $e'(\tilde{P})$ la cara correspondiente en el borde de la compactificación de Borel-Serre de X_Γ y tenemos una fibración de la forma

$$\Gamma_{\tilde{N}} \backslash \tilde{N}(\mathbb{R}) \rightarrow e'(\tilde{P}) \rightarrow \hat{e}'(\tilde{P})$$

donde $\tilde{N}$ es el radical unipotente de $\tilde{P}$, $\Gamma_{\tilde{N}} = \Gamma \cap \tilde{N}(\mathbb{R})$ y $\hat{e}'(\tilde{P})$ es un espacio simétrico asociado al subgrupo de Levi de $\tilde{P}$ y al subgrupo aritmético Γ . Finalmente, tenemos que la sucesión espectral asociada a esta fibración degenera en E_2 y así obtenemos la descomposición

$$H^q(e'(\tilde{P}), \tilde{V}) = \bigoplus_{i+j=q} H^i(\hat{e}'(\tilde{P}), \widetilde{H^j(\mathfrak{u}_{\tilde{P}}, V)}).$$

El lector puede encontrar mas detalles en [S II], especialmente en la sección 4.

Aplicaremos el teorema de Kostant ([K]) con el fin de obtener una descomposición de $H^j(\mathfrak{u}_P, V)$ como suma directa de representaciones irreducibles de M_P indexadas por ciertos elementos del grupo de Weyl.

Hemos elegido un sistema de raíces $\Phi(G, T)$ y un sistema de raíces simples Δ , denotamos por Φ^+ el correspondiente conjunto de raíces positivas. Asumiendo que la representación algebraica V de G es irreducible con peso maximal λ , obtenemos una descomposición como representaciones de M_P

$$H^q(u_P, V) = \bigoplus_{w \in W^P(q)} W_{w_*(\lambda)}.$$

En la última descomposición, W^P es un subconjunto del grupo de Weyl W para G , $W^P(q) \subset W^P$ es el subconjunto que consiste de los elementos de longitud q , y $w_*(\lambda) = w(\lambda + \delta) - \delta$ donde $\delta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha$.

W^P puede ser descrito como sigue. Dada una raíz $\alpha \in \Phi$ denotamos por $E_\alpha \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ su espacio de raíces correspondiente. Hemos denotado por Φ^+ al conjunto de raíces positivas. Denotemos por Φ^- el conjunto de raíces negativas, entonces para cada $w \in W$ definimos

$$\Phi_w = w(\Phi^-) \cap \Phi^+$$

Sea $\mathfrak{p} = \text{Lie}(P)_{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, entonces tenemos la descomposición $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{u}$ correspondiente a la descomposición de Levi de P y definimos $\Delta(\mathfrak{u}) = \{\alpha \in \Phi \mid E_\alpha \subset \mathfrak{u}\}$. Finalmente tenemos la caracterización

$$W^P = \{w \in W \mid \Phi_w \subset \Delta(\mathfrak{u})\}$$

Entonces obtenemos la descomposición

$$H^q(\partial_P, \tilde{V}_\lambda) = \bigoplus_{\substack{w \in W^P \\ l(w) \leq q}} \text{Ind}_{P(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^{q-l(w)}(S^{M_P}, \widetilde{W}_{w_*(\lambda)})$$

donde V_λ denota la representación algebraica irreducible de G con peso maximal λ .

Hay subconjuntos únicamente determinados W_i^0 del grupo de Weyl W (para $i = 1$ o 2)

tal que $W^{P_0} = W_i^0 W^{P_i}$ y para cada $w \in W^{P_i}$ la correspondiente restricci3n del morfismo $H^q(\partial_i, \tilde{V}) \rightarrow H^q(\partial_0, \tilde{V})$ a

$$Ind_{P_i(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_i(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^{q-l(w)}(S^{M_{P_i}}, \widetilde{W}_{w_*(\lambda)})$$

tiene imagen en

$$\bigoplus_{\tilde{w} \in W_i^0} Ind_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^{q-l(w)-l(\tilde{w})}(S^{M_{P_0}}, \widetilde{W}_{\tilde{w}_*(w_*(\lambda))}).$$

Adem3s, para $w \in W^{P_0}$, $\tilde{w} \in W_i^0$ y $w_i \in W^{P_i}$ (para $i = 1$ or 2) tales que $w = \tilde{w}w_i$ tenemos $l(w) = l(\tilde{w}) + l(w_i)$.

Para la informaci3n que necesitamos de estos morfismos y como la inducci3n parab3lica es exacta, todo esto se reduce al estudio del morfismo, para cada $i \in \{1, 2\}$ y cada $w \in W^{P_i}$,

$$H^{q-l(w)}(S^{M_{P_i}}, \widetilde{W}_{w_*(\lambda)}) \rightarrow \bigoplus_{\tilde{w} \in W_i^0} Ind_{P_0^i(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0^i(\mathbb{R}))}^{M_{P_i}(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(M_{P_i}(\mathbb{R}))} H^{q-l(w)-l(\tilde{w})}(S^{M_{P_0}}, \widetilde{W}_{\tilde{w}_*(w_*(\lambda))})$$

donde P_0^i denota el $\mathbb{Q}$ -subgrupo parab3lico $(P_0 \cap M_{P_i})$ de M_{P_i} . Con el fin de aplicar estrategias similares a aquellas utilizadas para el caso de una variedad de Shimura, tenemos que calcular los pesos en los espacios de cohomolog3a $H^q(S^{M_{P_i}}, \widetilde{W}_{w_*(\lambda)})$ y esto se llevar3 a cabo siguiendo la secci3n 5 de [H-Z II].

Observaci3n 15. *Tenemos que observar que cuando tomamos como referencia [H-Z II] tenemos que observar tambi3n la p3gina [H-Z II] para la correcta estructura de Hodge mixta en la cohomolog3a de las caras del borde de la compactificaci3n de Borel-Serre.*

Para $i = 1$ o 2 (esto es para P_i un $\mathbb{Q}$ -subgrupo parab3lico est3ndar maximal), tenemos una descomposici3n del subgrupo de Levi de P_i de la forma $M_{P_i} = G_{P_i,h} G_{P_i,l}$ que es el producto de sus partes hermitiana y lineal, cuya intersecci3n es el subgrupo A_{P_i} de M_{P_i} dado por el producto del $\mathbb{Q}$ -toro desplegado maximal en el centro de M_{P_i} y el centro de G . $G_{P_i,h}$ forma parte de un par de Shimura y denotamos por $h_{P_i} : \mathbb{S} \rightarrow G_{P_i,h}$ el morfismo correspondiente, que est3 determinado salvo conjugaci3n por un elemento de $G_{P_i,h}(\mathbb{R})$. La representaci3n $W_{w_*(\lambda)}$ puede descomponerse como producto tensorial de una representaci3n de la parte hermitiana $G_{P_i,h}$ y una representaci3n de un subgrupo de la parte lineal $G_{P_i,l}$ isomorfo al cociente de este grupo por A_{P_i} , denotamos estas representaciones por $(W_{w_*(\lambda)})_h$ y $(W_{w_*(\lambda)})_l$ respectivamente. $(W_{w_*(\lambda)})_h$ define una variaci3n compleja de estructuras de Hodge en la variedad de Shimura S_{P_i} asociada a (G_{h,P_i}, h_{P_i}) y esto da una estructura de Hodge mixta en los espacios de cohomolog3a $H^q(S_{P_i}, (W_{w_*(\lambda)})_h)$. Los tipos de la estructura de Hodge mixta asociada a $H^\bullet(S^{M_{P_i}}, \widetilde{W}_{w_*(\lambda)})$ pueden ser determinados por los tipos de la estructura de Hodge mixta asociada a $H^\bullet(S_{P_i}, (W_{w_*(\lambda)})_h)$, como podemos ver en (5.6.10) de [H-Z II] y [H-Z II'].

Para el parab3lico minimal P_0 vamos a tomar su parte hermitiana como la parte hermitiana de P_2 , en el caso mas general se tiene una asociaci3n de un $\mathbb{Q}$ -subgrupo parab3lico est3ndar maximal para cada $\mathbb{Q}$ -subgrupo parab3lico est3ndar de G (dicha correspondencia es explicada en [H-Z II], donde se enuncia diciendo que todo $\mathbb{Q}$ -subgrupo parab3lico est3ndar Q est3 subordinado a un $\mathbb{Q}$ -subgrupo parab3lico est3ndar maximal P y se denota por $\Pi(Q) = P$) y la parte hermitiana de un $\mathbb{Q}$ -subgrupo parab3lico est3ndar de G es aquella del est3ndar maximal asociado. Por otro lado, para $w \in W^{P_0}$ tenemos, como ya se ha explicado, elementos 3nicos $w_2 \in W^{P_2}$ y $\tilde{w} \in W_2^0$ tales que $w = \tilde{w}w_2$. Finalmente, con

estas correspondencias, los tipos de la estructura de Hodge mixta asociada al espacio de cohomología $H^q(S^{M_{P_0}}, \widetilde{W}_{w_*(\lambda)})$ pueden determinarse por los tipos de la estructura de Hodge mixta asociada a $H^q(S_{P_2}, (\widetilde{W}_{(w_2)_*(\lambda)})_h)$, como podemos ver en (5.6.10) de [H-Z II] y [H-Z II'].

Por el último párrafo, obtenemos que un paso hacia el cálculo de la estructura de Hodge mixta en la cohomología de las caras del borde de la compactificación de Borel-Serre es la descripción del morfismo h_P definiendo la variedad de Shimura para la parte hermitiana $G_{P,h}$ del subgrupo de Levi de P , para P recorriendo el conjunto de $\mathbb{Q}$ -subgrupos parabólicos estándares maximales de G . Para ello seguiremos la sección 5 de [H II]. El primer paso es el cálculo del único morfismo de Cayley admisible w_P asociado a P ([D], sección 3) y luego la descripción de h_P viene de (5.1.9) en [H II] .

2.5 Breve resumen sobre algunos resultados de [Ha]

Esta subsección tiene como objetivo dar un pequeño resumen sobre algunos resultados en [Ha] necesarios para este trabajo, utilizando la notación encontrada en dicho artículo, en particular se presentarán los enunciado del teorema 1 y 2 de [Ha].

Para comenzar, sea F una extensión finita de $\mathbb{Q}$, $\mathbb{A}_F$ denota el anillo de adeles asociado a F e I_F denota el grupo de ideles. Denotamos por $|| : I_F/F^\times \rightarrow \mathbb{C}$ el carácter de Tate, definido por el producto del valor absoluto normalizado en cada componente.

G_0 denotará el grupo algebraico GL_2 definido sobre F , B_0 denota su subgrupo de Borel de matrices triangulares superiores, T_0 su subgrupo de matrices diagonales y $T_0^{(1)}$ el subgrupo de matrices diagonales de determinante 1. Denotamos por G, B, T y $T^{(1)}$ los grupos algebraicos definidos sobre $\mathbb{Q}$ dados por $Res_{F/\mathbb{Q}}G_0, Res_{F/\mathbb{Q}}B_0, Res_{F/\mathbb{Q}}T_0$ y $Res_{F/\mathbb{Q}}T_0^{(1)}$ respectivamente.

Denotamos por $\alpha_0 : B_0 \rightarrow \mathbb{G}_m$ el homomorfismo dado por la raíz positiva, este induce un homomorfismo $\alpha : B \rightarrow Res_{F/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m$ y evaluado en el anillo de adeles da un homomorfismo

$$\alpha_{\mathbb{A}} : B(\mathbb{A}) \rightarrow I_F.$$

Finalmente, denotamos por $|\alpha|$ la composición $|| \circ \alpha_{\mathbb{A}}$.

Denotaremos por G_∞ a $G(\mathbb{R})$ y sea $K_\infty \subset G_\infty$ definido de la manera usual. Denotamos por $X = G_\infty/K_\infty$ su espacio simétrico correspondiente y para un subgrupo abierto compacto $K^f \subset G(\mathbb{A}^f)$ (donde $\mathbb{A}^f$ denota el anillo de adeles finitos) esbribiremos $K = K_\infty K^f$ y

$$S_K = G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}) / K.$$

Dada una representación algebraica (ρ, M) de G , denotamos por $\tilde{M}$ su sistema local correspondiente en S_K y denotamos por $H^\bullet(\tilde{S}, \tilde{M})$ el $\pi_0(G_\infty) \times G(\mathbb{A}^f)$ -módulo

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ K^f}} H^\bullet(S_K, \tilde{M})$$

donde $\pi_0(G_\infty)$ denota el grupo de componentes conexas de G_∞ y puede ser identificado con un subgrupo de G_∞ .

Extendiendo escalares obtenemos

$$G \times_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}} = \prod_{\tau: F \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}} GL_2/\overline{\mathbb{Q}}.$$

Por lo tanto, si (ρ, M) es una representación irreducible de $G \times_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}$ entonces es el pro-

ducto tensorial $M = \otimes_{\tau:F \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}} M_\tau$ donde cada M_τ es una representación irreducible de $GL_2/\overline{\mathbb{Q}}$. Denotamos $M_\tau = M(d(\tau), \nu(\tau))$ con $d(\tau) \in \mathbb{N}$ y $\nu(\tau) \in \mathbb{Z}$, el peso maximal de M_τ es $(d(\tau) + \nu(\tau), \nu(\tau))$ y será denotado por λ_τ . M está entonces determinado por

$$\lambda(M) = (\dots, \lambda_\tau, \dots)_{\tau:F \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}} \in X(T \times_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}).$$

$\partial \overline{S}_K$ denota el borde de la compactificación de Borel-Serre de S_K y el límite directo

$$H^\bullet(\partial \tilde{S}, \tilde{M}) = \varinjlim_{K_f} H^\bullet(\partial \overline{S}_K, \tilde{M})$$

es también un $\pi_0(G_\infty) \times G(\mathbb{A}^f)$ -módulo, mas aún el morfismo

$$r : H^\bullet(\tilde{S}, \tilde{M}) \rightarrow H^\bullet(\partial \tilde{S}, \tilde{M})$$

es un morfismo de $\pi_0(G_\infty) \times G(\mathbb{A}^f)$ -módulos.

Como la inclusión $S_K \hookrightarrow \overline{S}_K$ es una equivalencia homotópica, el haz $\tilde{M}$ puede extenderse a $\overline{S}_K$ y tenemos que

$$H^\bullet(S_K, \tilde{M}) \cong H^\bullet(\overline{S}_K, \tilde{M})$$

y

$$H^\bullet(\partial \overline{S}_K, \tilde{M}) \cong H^\bullet(B(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}) / K_\infty K_f, \tilde{M}).$$

La descomposición en suma directa dada en el Teorema 1 del artículo de G. Harder, está indexada por un conjunto denotado por $Coh(M)$ y a continuación lo definiremos. $Coh_\tau(M_\tau) \subset X(T_0)$ denota el conjunto dado por los caracteres $(d(\tau) + \nu(\tau), \nu(\tau))$ y $(\nu(\tau) - 1, d(\tau) + \nu(\tau) + 1)$ (ellos son $w_*(M_\tau)$ para w uno de los dos elementos en el grupo de Weyl de GL_2 con respecto al sistema de raíces usual) y definimos $deg((d(\tau) + \nu(\tau), \nu(\tau))) = 0$ y $deg((\nu(\tau) - 1, d(\tau) + \nu(\tau) + 1)) = 1$.

Entonces se define

$$Coh(M) = \prod_{\tau:F \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}} Coh_\tau(M_\tau) \subset X^*(T \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}})$$

y tenemos la igualdad como $T \times_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}$ -módulos

$$H^\bullet(\mathfrak{u}, M) = \bigoplus_{\gamma \in Coh(M)} H^\bullet(\mathfrak{u}, M)(\gamma)$$

donde $\mathfrak{u}$ es el álgebra de Lie del grupo algebraico dado por las matrices triangulares con 1 en la diagonal y $H^\bullet(\mathfrak{u}, M)(\gamma)$ denota $\overline{\mathbb{Q}}$ junto con la acción de $T \times_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}$ dada por γ .

Dado $\gamma \in X^*(T \times_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}})$, sea γ_∞ la composición $T(\mathbb{R}) \hookrightarrow T(\mathbb{C}) \xrightarrow{\gamma} \mathbb{C}^*$. Entonces, un homomorfismo continuo $\phi : T(\mathbb{Q}) \backslash T(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}^*$ es llamado un carácter de Hecke de tipo γ si su componente infinita satisface

$$\phi_\infty|_{T(\mathbb{R})^\circ} = \gamma_\infty^{-1}|_{T(\mathbb{R})^\circ}$$

donde $T(\mathbb{R})^\circ$ denota la componente conexa del grupo de Lie de puntos reales de T .

Continuaremos con el enunciado del Teorema 1 en [Ha].

[**Teorema 1**, [Ha]] Como $\pi_0(G_\infty) \times G(\mathbb{A}_f)$ -módulo tenemos

$$H^\bullet(\partial\tilde{S}, \tilde{M}) = \bigoplus_{\gamma \in Coh(M)} \bigoplus_{\substack{\phi: type(\phi)=\gamma \\ \phi_f|_Z=1}} Ind_{\pi_0(B_\infty) \times B(\mathbb{A}_f)}^{\pi_0(G_\infty) \times G(\mathbb{A}_f)} \overline{\mathbb{Q}} e_\phi \otimes \wedge^\bullet(\mathcal{H}(T/Z))$$

donde no definiremos $\wedge^\bullet(\mathcal{H}(T/Z))$ pero diremos al menos que su estructura de $\pi_0(B_\infty) \times B(\mathbb{A}_f)$ -módulo es trivial.

$\gamma \in X^*(T \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}})$ está dado por sus componentes $\gamma = \{\dots, \gamma_\tau, \dots\}$. Denotamos entonces $\gamma^{(1)} = \gamma|_{T^{(1)} \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}}$ que está dado por la familia de enteros $\{\dots, n_\tau, \dots\}$.

Hay una acción natural del elemento no trivial s_0 del grupo de Weyl en los caracteres $X(T \times_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}})$ y en los caracteres algebraicos de Hecke en $T(\mathbb{Q}) \backslash T(\mathbb{A})$ y estas acciones conmutan con la formación de tipos.

Sea n el grado de la extensión $[F : \mathbb{Q}]$, para $\gamma \in Coh(M)$ definimos $deg(\gamma) = \sum_{\tau: F \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}} deg(\gamma_\tau)$, entonces $deg(\gamma) = n - deg(s_0\gamma)$, y en el caso en el que $n = 2d$ y $deg(\gamma) = d$ diremos que γ es equilibrado.

Tenemos, por el Teorema 1 en [Ha], una descomposición de la forma

$$H^\bullet(\partial\tilde{S}, \tilde{M}) = \bigoplus_{\gamma \in Coh(M)} \bigoplus_{\substack{\phi: type(\phi)=\gamma \\ \tilde{\phi}_f|_{\tilde{Z}}=1}} V_{\tilde{\phi}_f} \otimes \wedge^\bullet(\mathcal{H}(T/Z))$$

y considerando los pares $\phi, s_0\phi$ podemos escribir

$$H^\bullet(\partial\tilde{S}, \tilde{M}) = \bigoplus_{\{\phi, s_0\phi\}} (V_{\phi_f} \oplus V_{s_0\phi_f}) \otimes \wedge^\bullet(\mathcal{H}(T/Z))$$

denotamos $[\phi] = \{\phi, s_0\phi\}$ y considerando $r : H^\bullet(\tilde{S}, \tilde{M}) \rightarrow H^\bullet(\partial\tilde{S}, \tilde{M})$ se define

$$Im(r)_{[\phi]} = Im(r) \cap ((V_{\phi_f} \oplus V_{s_0\phi_f}) \otimes \wedge^\bullet(\mathcal{H}(T/Z))).$$

Dado ϕ de tipo γ , denotamos por $w(\phi^{(1)})$ al entero definiendo el carácter dado por la restricción de γ al toro de dimensión 1, $T^{(1)}$ y sabemos que $w(\phi^{(1)}) + w(s_0\phi^{(1)}) = -4$, en el caso en el que $w(\phi^{(1)}) \leq -2$ diremos que ϕ está en la cámara fundamental.

Tomando ϕ en la cámara fundamental, hay operadores $T_{\phi_f}^{loc} : V_{\phi_f} \rightarrow V_{s_0\phi_f}$, donde $T_{\phi_f}^{loc}$ es un producto tensorial $\otimes_{\mathfrak{p}} T_{\phi_{\mathfrak{p}}}$ de operadores locales, si $\phi_{\mathfrak{p}}^{(1)} \neq |\alpha|_{\mathfrak{p}}^2$ entonces $T_{\phi_{\mathfrak{p}}}$ es un isomorfismo.

El último teorema enunciado en esta subsección es parte del Teorema 2 de [Ha].

[**Teorema 2**, [Ha]] Sea $M = M(\lambda)$ y $\phi \in Coh(M)$, $[\phi] = \{\phi, s_0\phi\}$ y se asume que ϕ está en la cámara fundamental. Entonces tenemos tres casos

1. Si ϕ no es equilibrado y $\phi^{(1)} \neq |\alpha|^2$ y luego $deg(\phi) > deg(s_0\phi)$, entonces

$$Im(r)_{[\phi]} = V_{\phi_f} \otimes \wedge^\bullet \mathcal{H}(T/Z)$$

2. Si $\phi = |\alpha|^2$, entonces $dim M(\lambda) = 1$ y podemos encontrar una descripción de $Im(r)_{[\phi]}$ en la página 77 del artículo mencionado.

3. Si ϕ es equilibrado entonces fija un CM-tipo $\mathcal{T}(\gamma)$ y

$$Im(r)_{[\phi]} = X_\phi \otimes \wedge^\bullet(\mathcal{H}(T/Z))$$

donde

$$X_\phi = \left\{ (v, |d_F|^{-1/2} \prod_{\tau \in T(\gamma)} \left(\frac{2\pi}{d(\tau) + 1} (-1)^{d(\bar{\tau})+1} \right) \frac{L(\phi^{(1)}, -1)}{L(\phi^{(1)}, 0)} T_\phi^{loc}(v)) \mid v \in V_{\phi_f} \right\}.$$

Mas aún $Im(r) = \oplus_{[\phi]} Im(r)_{[\phi]}$.

3 El caso $GS p_4$

3.1 La variedad de Shimura involucrada

Vamos a presentar la variedad de Shimura involucrada en esta sección.

El par de Shimura está dado por $(GS p_4, X)$, donde $GS p_4$ es el grupo simpléctico de similitudes, en otras palabras

$$GS p_4(A) = \{g \in GL_4(A) \mid g^t J_2 g = \nu(g) J_2, \nu(g) \in A^\times\}$$

para cada $\mathbb{Q}$ -álgebra A , donde

$$J_2 = \begin{bmatrix} 0 & S \\ -S & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para X tomamos la $GS p_4(\mathbb{R})$ -clase de conjugación de homomorfismos conteniendo $h : \mathbb{S}(\mathbb{R}) \rightarrow GS p_4(\mathbb{R})$ dado por

$$h(x + iy) = \begin{bmatrix} xI_2 & yS \\ -yS & xI_2 \end{bmatrix} \quad \forall (x + iy) \in \mathbb{S}(\mathbb{R})$$

donde I_2 denota la matriz identidad 2×2 . Entonces el morfismo de peso $\omega_X : \mathbb{G}_m \rightarrow GS p_4$ está dado por $\omega_X(t) = tI_4$ donde I_4 denota la identidad 4×4 .

Sea $K_f \subset GS p_4(\mathbb{A}_f)$ un subgrupo abierto compacto, entonces denotamos por

$$S_K = GS p_4(\mathbb{Q}) \backslash X \times GS p_4(\mathbb{A}_f) / K_f.$$

su variedad de nivel correspondiente, y siguiendo la misma notación que en la sección anterior, denotamos por

$$S = \varprojlim_K S_K$$

la variedad de Shimura correspondiente, donde el límite inverso se toma sobre los subgrupos abiertos compactos $K_f \subset GS p_4(\mathbb{A}_f)$.

3.2 Toro maximal y sistema de raíces

Para comenzar, fijaremos un toro maximal H en $GS p_4(\mathbb{C})$.

Tomamos para H el subgrupo $\{diag(hh_1, hh_2, h_2^{-1}, h_1^{-1}) \mid h_1, h_2, h \in \mathbb{C}^*\} \subset GS p_4(\mathbb{C})$.

Sea $\mathfrak{h} = \text{Lie}(H)$ el álgebra de Lie compleja correspondiente a este toro maximal. El sistema de raíces $\Phi(\mathfrak{gsp}_{4,\mathbb{C}}, \mathfrak{h})$ es de tipo C_2 .

Como H es un $\mathbb{Q}$ -toro desplegado, este sistema de raíces es también un $\mathbb{Q}$ -sistema de raíces para GSp_4 .

Sean $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon \in \mathfrak{h}^*$ definidas por $\epsilon_1(X) = h_1$, $\epsilon_2(X) = h_2$ y $\epsilon(X) = h$ para $X = \text{diag}(h + h_1, h + h_2, -h_2, -h_1) \in \mathfrak{h}$.

Entonces el sistema de raíces $\Phi(\mathfrak{gsp}_{4,\mathbb{C}}, \mathfrak{h})$ está dado por

$$\{\epsilon + \epsilon_1 + \epsilon_2, \epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon + 2\epsilon_1, \epsilon + 2\epsilon_2, -\epsilon - \epsilon_1 - \epsilon_2, -\epsilon_1 + \epsilon_2, -\epsilon - 2\epsilon_1, -\epsilon - 2\epsilon_2\}.$$

Podemos tomar como raíces positivas $\{\epsilon + \epsilon_1 + \epsilon_2, \epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon + 2\epsilon_1, \epsilon + 2\epsilon_2\}$ y entonces el sistema de raíces simples es $\Delta = \{\alpha_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2, \alpha_2 = \epsilon + 2\epsilon_2\}$.

Nuevamente, como H es $\mathbb{Q}$ -desplegado, este es también un $\mathbb{Q}$ -sistema de raíces positivas de GSp_4 y un $\mathbb{Q}$ -sistema de raíces simples.

3.3 $\mathbb{Q}$ -subgrupos parabólicos estándares

El próximo paso consiste en describir los $\mathbb{Q}$ -subgrupos parabólicos de GSp_4 . Para ello solo basta con describir los estándares, con respecto al $\mathbb{Q}$ -sistema de raíces considerado, y sabemos que todo $\mathbb{Q}$ -subgrupo parabólico es $GSp_4(\mathbb{Q})$ -conjugado a un estándar.

Como Δ tiene solo dos elementos, tenemos tres $\mathbb{Q}$ -subgrupos parabólicos estándares propios, uno minimal y dos maximales. El minimal esta dado por

$$P_0 = N_4 \cap GSp_4(\mathbb{C})$$

donde N_4 denota el subgrupo de matrices triangulares superiores en $GL(4, \mathbb{C})$.

Por otro lado, con respecto a los maximales tenemos que

$$P_1 = \left\{ \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix} \in GL(4, \mathbb{C}) \right\} \cap GSp_4(\mathbb{C})$$

y

$$P_2 = \left\{ \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix} \in GL(4, \mathbb{C}) \right\} \cap GSp_4(\mathbb{C}).$$

Denotamos por $\overline{S}_K$ la compactificación de Borel-Serre de S_K y por $\partial\overline{S}_K$ su borde. Sabemos que $\partial\overline{S}_K$ es la unión de caras, una por cada $\mathbb{Q}$ -subgrupo parabólico estándar, luego denotamos cada una de estas caras por $\partial_{K,0}, \partial_{K,1}$ y $\partial_{K,2}$ respectivamente. Utilizamos la notación $\overline{S}, \partial\overline{S}, \partial_0, \partial_1$ y ∂_2 para los objetos análogos en el nivel infinito.

3.4 La representación irreducible

Con el fin de determinar una notación para las representaciones irreducibles de dimensión finita de $GSp_{4,\mathbb{C}}$ consideraremos primero aquellas representaciones de $Sp_{4,\mathbb{C}}$.

$H' = H \cap Sp_4(\mathbb{C})$ es un subgrupo de Cartan de $Sp_4(\mathbb{C})$ y puede ser descrito por

$$H' = \{diag(x_1, x_2, x_2^{-1}, x_1^{-1}) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{C}^\times\} \subset Sp_4(\mathbb{C}).$$

Sabemos que las representaciones irreducibles de dimensión finita de $Sp_{4,\mathbb{C}}$ están determinadas por sus pesos maximales. Mas precisamente, el toro maximal elegido H' tiene álgebra de Lie

$$\mathfrak{h}' = \{diag(h_1, h_2, -h_2, -h_1) \mid h_1, h_2 \in \mathbb{C}\} \subset \mathfrak{sp}_4(\mathbb{C}).$$

Definimos las funcionales lineales $\varepsilon_1, \varepsilon_2 : \mathfrak{h}' \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$\varepsilon_1(diag(h_1, h_2, -h_2, -h_1)) = h_1$$

y

$$\varepsilon_2(diag(h_1, h_2, -h_2, -h_1)) = h_2.$$

El sistema de raíces asociado $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}')$ tiene pesos fundamentales $\lambda_1, \lambda_2 : \mathfrak{h}' \rightarrow \mathbb{C}$ dados por $\lambda_1 = \varepsilon_1$ y $\lambda_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, y entonces las representaciones irreducibles de dimensión finita de $Sp_{4,\mathbb{C}}$ están determinadas por sus pesos maximales, que en este caso están dadas por las funcionales lineales de la forma $m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2$ con m_1, m_2 enteros no negativos.

Antes de considerar el caso GSp_4 fijaremos algunas notaciones. El centro de $\mathfrak{gsp}_{4,\mathbb{C}}$ está dado por

$$\mathfrak{z} = \{hId_4 \mid h \in \mathbb{C}\} \subset \mathfrak{gsp}_{4,\mathbb{C}}$$

y el álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ de H puede escribirse como la suma directa $\mathfrak{h} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{h}'$. Extendemos $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda_1$ y λ_2 por cero en la descomposición anterior obteniendo funcionales lineales de $\mathfrak{h}$ denotadas por $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \lambda'_1$ y λ'_2 respectivamente. Denotamos por κ la funcional lineal en $\mathfrak{h}$ dada por la proyección a la primera componente de la descomposición mencionada.

Ahora trataremos el caso $GSp_{4,\mathbb{C}}$. El centro de este grupo esta dado por el toro

$$Z = \{xId_4 \mid x \in \mathbb{C}^*\} \subset GSp_{4,\mathbb{C}}.$$

Por lo tanto, dada una representación irreducible de dimensión finita de este grupo, su restricción a Z está dada por un caracter (por lo tanto determinada por un número entero), la restricción a $Sp_{4,\mathbb{C}}$ es irreducible y el carácter central debe ser compatible con esta representación de $Sp_{4,\mathbb{C}}$ en el sentido de que deben coincidir en la intersección, que en este caso es $\{Id_4, -Id_4\}$. Finalmente, una representación irreducible de dimensión finita de $GSp_{4,\mathbb{C}}$ está entonces determinada por su peso maximal, una funcional lineal de la forma $m_1\lambda'_1 + m_2\lambda'_2 + c\kappa$ donde c es congruente a $(m_1 + 2m_2)$ módulo 2.

Fijamos una representación algebraica irreducible (ρ, V_λ) de GSp_4 con peso maximal $\lambda = m_1\lambda'_1 + m_2\lambda'_2 + c\kappa$. El sistema local asociado en la variedad de Shimura S_K será entonces denotado por $\tilde{V}_\lambda$.

3.5 El grupo de Weyl y la correspondiente descomposición para cada $H^q(\partial_i, \tilde{V}_\lambda)$

En lo que sigue, es conveniente utilizar la notación presentada en la sección precedente. Las nociones de la sección 3.1 pueden ser traducidas facilmente a la nueva notación, por ejemplo las raíces simples α_1 y α_2 están dadas por $\alpha_1 = \varepsilon'_1 - \varepsilon'_2$ y $\alpha_2 = 2\varepsilon'_2$.

El grupo de Weyl para este sistema de raíces es isomorfo al producto semidirecto $\mathbb{Z}_2^2 \rtimes \mathbb{Z}_2$

que puede verse como un subgrupo de S_4 .

Nuestro primer objetivo es el de entender los pesos en la estructura de Hodge mixta en

$$H^{q-1}(\partial_0, \tilde{V}_\lambda)/i(H^{q-1}(\partial_1, \tilde{V}_\lambda) \oplus H^{q-1}(\partial_2, \tilde{V}_\lambda))$$

donde

$$i : H^{q-1}(\partial_1, \tilde{V}_\lambda) \oplus H^{q-1}(\partial_2, \tilde{V}_\lambda) \rightarrow H^{q-1}(\partial_0, \tilde{V}_\lambda)$$

es el morfismo en la sucesión exacta larga presentada en la sección 2.3.

Para aplicar las descomposiciones

$$H^{q-1}(\partial_i, \tilde{V}_\lambda) = \bigoplus_{\substack{w \in W^{P_i} \\ l(w) \leq q-1}} \text{Ind}_{P_i(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_i(\mathbb{R}))}^{GSp_4(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(GSp_4(\mathbb{R}))} H^{q-1-l(w)}(S^{M_{P_i}}, \widetilde{W}_{w_*(\lambda)})$$

necesitamos entender el grupo de Weyl W .

Sean $w_1, w_2 \in W$ las reflexiones simples asociadas a α_1 y α_2 respectivamente. La siguiente tabla da una descripción de cada elemento de W .

w	$w(\varepsilon'_1)$	$w(\varepsilon'_2)$	$w^{-1}(\alpha_1)$	$w^{-1}(\alpha_2)$	$l(w)$	$w_*(\lambda) = w(\lambda + \delta) - \delta$
1	ε'_1	ε'_2	$\varepsilon'_1 - \varepsilon'_2$	$2\varepsilon'_2$	0	$(m_1 + m_2, m_2)$
w_1	ε'_2	ε'_1	$-\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2$	$2\varepsilon'_1$	1	$(m_2 - 1, m_1 + m_2 + 1)$
w_2	ε'_1	$-\varepsilon'_2$	$\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2$	$-2\varepsilon'_2$	1	$(m_1 + m_2, -m_2 - 2)$
$w_1 \circ w_2$	ε'_2	$-\varepsilon'_1$	$-\varepsilon'_1 - \varepsilon'_2$	$2\varepsilon'_1$	2	$(-m_2 - 3, m_1 + m_2 + 1)$
$w_2 \circ w_1$	$-\varepsilon'_2$	ε'_1	$\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2$	$-2\varepsilon'_1$	2	$(m_2 - 1, -m_1 - m_2 - 3)$
$w_1 \circ w_2 \circ w_1$	$-\varepsilon'_1$	ε'_2	$-\varepsilon'_1 - \varepsilon'_2$	$2\varepsilon'_2$	3	$(-m_1 - m_2 - 4, m_2)$
$w_2 \circ w_1 \circ w_2$	$-\varepsilon'_2$	$-\varepsilon'_1$	$\varepsilon'_1 - \varepsilon'_2$	$-2\varepsilon'_1$	3	$(-m_2 - 3, -m_1 - m_2 - 3)$
$w_1 \circ w_2 \circ w_1 \circ w_2$	$-\varepsilon'_1$	$-\varepsilon'_2$	$-\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2$	$-2\varepsilon'_2$	4	$(-m_1 - m_2 - 4, -m_2 - 2)$

Donde en la última columna, cada par (a, b) denota el elemento $a\varepsilon'_1 + b\varepsilon'_2 + c\kappa$ y $\delta = 2\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2$ (y estamos omitiendo el tercer término que es igual a c en todos los casos).

Utilizando la tabla, podemos ver que:

$$W^{P_1} = \{1, w_1, w_1 \circ w_2, w_1 \circ w_2 \circ w_1\}, W^{P_2} = \{1, w_2, w_2 \circ w_1, w_2 \circ w_1 \circ w_2\}$$

y claramente $W^{P_0} = W$.

Como $S_K^{M_{P_0}}$ tiene dimensión cero para cada $K \subset GSp_4(\mathbb{A}_f)$ subgrupo compacto abierto, tenemos que $H^k(S_K^{M_{P_0}}, \widetilde{W}_{w_*(\lambda)}) = 0$ para $k > 0$ y luego

$$H^{q-1}(\partial_0, \tilde{V}_\lambda) = \bigoplus_{\substack{w \in W^{P_0} \\ l(w)=q-1}} \text{Ind}_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{GSp_4(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(GSp_4(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \widetilde{W}_{w_*(\lambda)})$$

3.6 Pesos

En esta subsección determinaremos, para cada $\mathbb{Q}$ -subgrupo parabólico estándar maximal P de G el homomorfismo $h_P : \mathbb{S} \rightarrow G_{P,h}$, donde $G_{P,h}$ es la parte hermitiana del subgrupo de Levi M_P de P y $(G_{P,h}, h_P)$ define un par de Shimura. Con estos cálculos podremos obtener información sobre la estructura de Hodge mixta en los espacios de cohomología en las caras del borde de la compactificación de Borel-Serre.

Para el caso P_1 trabajaremos en el siguiente orden: primero calcularemos el subgrupo A_{P_1} del subgrupo de Levi M_{P_1} (con la definición que se encuentra en [H-Z]), luego calcularemos el morfismo de Cayley admisible $w_1 : \mathbb{G}_m \rightarrow A_{P_1}$, y finalmente calcularemos el morfismo $h_{P_1} : \mathbb{S} \rightarrow G_{P_1,h}$ que define el par de Shimura en la parte hermitiana de M_{P_1} .

Podemos ver que A_{P_1} , que está definido como el $\mathbb{Q}$ -toro desplegado maximal en el centro de M_{P_1} por el centro de G , está dado por

$$A_{P_1} = \left\{ \begin{bmatrix} h_1 h_2 & & & \\ & h_1 & & \\ & & h_1 & \\ & & & h_1(h_2)^{-1} \end{bmatrix} \mid h_1, h_2 \in \mathbb{C}^* \right\}$$

Por las propiedades del morfismo de Cayley admisible descritas en [H II] podemos determinar $w_1 : \mathbb{G}_m \rightarrow A_{P_1}$. Para ser mas precisos, sea W_1 el radical unipotente de P_1 y U_1 su centro, sean $\mathfrak{w}_1$ y $\mathfrak{u}_1$ las álgebras de Lie correspondientes, entonces denotando por $\mathfrak{g}_i$ al subespacio de $\mathfrak{g}$ en el cual la acción (por conjugación) de $w_1(t)$ está dada por la multiplicación por t^i , tenemos que $\mathfrak{g}_{-2} = \mathfrak{u}_1$ y $\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_{-2} = \mathfrak{w}_1$.

Entonces podemos ver que

$$w_1(t) = \begin{bmatrix} t^{k-2} & & & \\ & t^{k-1} & & \\ & & t^{k-1} & \\ & & & t^k \end{bmatrix}$$

para $k \in \mathbb{Z}$.

Finalmente, calcularemos el morfismo h_{P_1} . Para ello aplicamos la descripción de la página 330 de [H II] tomando $V = \mathbb{R}^4$ y $\rho : GSp_4 \rightarrow GL_4$ la inclusión natural. Consideramos la base canónica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de $\mathbb{R}^4$ y verificamos que la filtración definida por el morfismo de Cayley admisible w_1 está dada por $W_{k-2} = \mathbb{R}e_1, W_{k-1} = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}e_3$ y $W_k = \mathbb{R}^4$. Entonces la representación correspondiente de M_{P_1} en el graduado Gr^W está dada por la inclusión natural $M_{P_1} \hookrightarrow GL_1 \times GL_2 \times GL_1$. Tomamos h el morfismo dado en la sección 3.1 para definir el par de Shimura para GSp_4 , entonces sabemos (por otra propiedad del morfismo de Cayley admisible, véase [H II], página 327) que la filtración decreciente definida por $\rho \circ h$ junto con la filtración creciente W define una estructura de Hodge mixta en V . La filtración de Hodge definida por $\rho \circ h$ está dada por

$$F_h^{-1}V_{\mathbb{C}} = V_{\mathbb{C}}, \quad F_h^0V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}(e_1 - ie_4) \oplus \mathbb{C}(e_2 - ie_3) \text{ y } F_h^1V_{\mathbb{C}} = 0.$$

El único valor posible de k para obtener una tal estructura de Hodge mixta es 0, entonces

$$w_1(t) = \begin{bmatrix} t^{-2} & & & \\ & t^{-1} & & \\ & & t^{-1} & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

y la estructura de Hodge mixta en V tiene tipos $(-1, -1), (-1, 0), (0, -1)$ y $(0, 0)$, mas aún

el morfismo h_{P_1} está dado por

$$h_{P_1}(z) = \begin{bmatrix} |z|^2 & & & \\ & \operatorname{Re}(z) & \operatorname{Im}(z) & \\ & -\operatorname{Im}(z) & \operatorname{Re}(z) & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad \forall z \in \mathbb{S}(\mathbb{R}).$$

en particular el morfismo de peso del par de Shimura $(G_{P_1,h}, h_{P_1})$ es

$$w_{P_1}(t) = \begin{bmatrix} t^2 & & & \\ & t & & \\ & & t & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

que es entonces

$$w_{P_1}(t) = \begin{bmatrix} t & & & \\ & t & & \\ & & t & \\ & & & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & t^{-1} \end{bmatrix}$$

entonces, si $w_*(\lambda) = d_1\varepsilon'_1 + d_2\varepsilon'_2 + c\kappa$ para $w \in W^{P_1}$, tenemos que el peso del sistema local $(\widetilde{W_{w_*(\lambda)}})_h$ en la variedad de Shimura asociada a la parte hermitiana $G_{P_1,h}$ de M_{P_1} es $-c - d_1$.

Llevando a cabo los mismos cálculos para el caso P_2 , obtenemos lo siguiente, A_{P_2} está definido por

$$A_{P_2} = \left\{ \begin{bmatrix} h_1 & & & \\ & h_1 & & \\ & & h_2 & \\ & & & h_2 \end{bmatrix} \mid h_1, h_2 \in \mathbb{C}^* \right\}$$

El morfismo de Cayley admisible w_2 está determinado, utilizando el mismo procedimiento que en el caso P_1 , por

$$w_2(t) = \begin{bmatrix} t^{-2} & & & \\ & t^{-2} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

y finalmente podemos determinar el homomorfismo h_{P_2} siguiendo [H II]. En este caso dicho morfismo está dado por

$$h_{P_2}(z) = \begin{bmatrix} |z|^2 & & & \\ & |z|^2 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

En particular, el morfismo de peso del correspondiente par de Shimura es

$$w_{P_2}(t) = \begin{bmatrix} t^2 & & & \\ & t^2 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

y podemos reescribir esto de la siguiente manera

$$w_{P_2}(t) = \begin{bmatrix} t & & & \\ & t & & \\ & & t & \\ & & & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t & & & \\ & t & & \\ & & t^{-1} & \\ & & & t^{-1} \end{bmatrix}$$

por lo tanto si $w_*(\lambda) = d_1\varepsilon'_1 + d_2\varepsilon'_2 + c\kappa$ para $w \in W^{P_2}$, tenemos que el peso del sistema local $(\widetilde{W_{w_*(\lambda)}})_h$ en la variedad de Shimura asociada a la parte hermitiana $G_{P_2,h}$ de M_{P_2} es $-c - d_1 - d_2$.

Dado que la parte hermitiana de M_{P_0} es aquella de M_{P_2} , tenemos que si $w_*(\lambda) = d_1\varepsilon'_1 + d_2\varepsilon'_2 + c\kappa$ para $w \in W^{P_0}$, entonces el peso del sistema local $(\widetilde{W_{w_*(\lambda)}})_h$ en la variedad de Shimura asociada a la parte hermitiana $G_{P_2,h}$ de M_{P_2} es $-c - d_1 - d_2$.

3.7 La imagen procedente de la cohomología en ∂_1 y ∂_2 y conclusiones

Estudiaremos el subespacio

$$i(H^{q-1}(\partial_1, \tilde{V}_\lambda) \oplus H^{q-1}(\partial_2, \tilde{V}_\lambda)) \subset H^{q-1}(\partial_0, \tilde{V}_\lambda)$$

Considerando que

$$\begin{aligned} H^0(\partial_0, \tilde{V}_\lambda) &= \text{Ind}_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{GSp_4(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(GSp_4(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \widetilde{W}_\lambda) \\ H^1(\partial_0, \tilde{V}_\lambda) &= \text{Ind}_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{GSp_4(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(GSp_4(\mathbb{R}))} (H^0(S^{M_{P_0}}, \widetilde{W}_{(w_1)_*(\lambda)}) \oplus H^0(S^{M_{P_0}}, \widetilde{W}_{(w_2)_*(\lambda)})) \\ H^2(\partial_0, \tilde{V}_\lambda) &= \text{Ind}_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{GSp_4(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(GSp_4(\mathbb{R}))} (H^0(S^{M_{P_0}}, \widetilde{W}_{(w_1 \circ w_2)_*(\lambda)}) \oplus H^0(S^{M_{P_0}}, \widetilde{W}_{(w_2 \circ w_1)_*(\lambda)})) \\ H^3(\partial_0, \tilde{V}_\lambda) &= \text{Ind}_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{GSp_4(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(GSp_4(\mathbb{R}))} (H^0(S^{M_{P_0}}, \widetilde{W}_{(w_1 \circ w_2 \circ w_1)_*(\lambda)}) \oplus H^0(S^{M_{P_0}}, \widetilde{W}_{(w_2 \circ w_1 \circ w_2)_*(\lambda)})) \\ H^4(\partial_0, \tilde{V}_\lambda) &= \text{Ind}_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{GSp_4(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(GSp_4(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \widetilde{W}_{(w_1 \circ w_2 \circ w_1 \circ w_2)_*(\lambda)}) \end{aligned}$$

analizaremos estos 10 espacios para estudiar en que casos ellos pueden contribuir a clases fantasma y llegaremos al siguiente resultado.

Teorema 16. *Para la variedad de Shimura asociada a GSp_4 y el sistema local definido por la representación irreducible de dimensión finita de peso maximal $\lambda = m_1\lambda'_1 + m_2\lambda'_2 + c\kappa$, tenemos los siguientes resultados:*

- . Si $m_1 > 0$ o $m_2 > 0$ entonces no existen clases fantasma en la cohomología del borde de la compactificación de Borel-Serre.
- . Si $m_1 = m_2 = 0$, entonces las posibles clases fantasma en la cohomología del borde provienen de los espacios $H^0(S^{M_{P_0}}, \widetilde{W}_{(w_1 \circ w_2 \circ w_1 \circ w_2)_*(\lambda)})$ y $H^0(S^{M_{P_0}}, \widetilde{W}_{(w_2)_*(\lambda)})$.

Demostración. Recorriendo los elementos $w \in W$ analizamos cuando los espacios $H^0(S^{M_{P_0}}, \widetilde{W}_{w_*(\lambda)})$ pueden contribuir al espacio de clases fantasma.

$w = 1$ En este caso $\text{Ind}_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{GSp_4(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(GSp_4(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \widetilde{W}_\lambda) \subset H^0(\partial_0, \tilde{V}_\lambda)$ y para contribuir a una clase fantasma la imagen de este espacio por el morfismo

$$H^0(\partial_0, \tilde{V}_\lambda) \rightarrow H^1(\partial \bar{S}, \tilde{V}_\lambda)$$

debe tener intersección no nula con la imagen del morfismo $H^1(S, \tilde{V}_\lambda) \rightarrow H^1(\partial\bar{S}, \tilde{V}_\lambda)$, y en particular su peso debe ser $\geq 1 - c$ (dado que los pesos en la estructura de Hodge mixta en $H^1(S, \tilde{V})$ son $\geq 1 - c$) pero podemos verificar que el peso de $H^0(S^{M_{P_0}}, \widetilde{W}_\lambda)$ es $-c - m_1 - 2m_2$, por lo tanto concluimos que $H^0(S^{M_{P_0}}, \widetilde{W}_\lambda)$ no contribuye a una clase fantasma.

$w = w_1$ Tenemos que $Ind_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{GSp_4(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(GSp_4(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \widetilde{W}_{(w_1)_*(\lambda)}) \subset H^1(\partial_0, \tilde{V}_\lambda)$ y para contribuir a una clase fantasma su peso debe ser $\geq 2 - c$ pero podemos verificar que el peso de $H^0(S^{M_{P_0}}, \widetilde{W}_{(w_1)_*(\lambda)})$ es $-c - m_1 - 2m_2$, y en conclusión este espacio no contribuye a una clase fantasma.

$w = w_2$ Para este caso utilizaremos el hecho que M_{P_1} coincide con su parte hermitiana. La restricción del morfismo $H^1(\partial_1, \tilde{V}_\lambda) \rightarrow H^1(\partial_0, \tilde{V}_\lambda)$ al subespacio $Ind_{P_1(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_1(\mathbb{R}))}^{GSp_4(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(GSp_4(\mathbb{R}))} H^1(S^{M_{P_1}}, \widetilde{W}_\lambda)$ tiene imagen en el espacio $Ind_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{GSp_4(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(GSp_4(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \widetilde{W}_{(w_2)_*(\lambda)})$, y dado que la inducción parabólica es exacta, podemos estudiar este morfismo a través del morfismo $H^1(S^{M_{P_1}}, \widetilde{W}_\lambda) \rightarrow Ind_{P_0^1(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0^1(\mathbb{R}))}^{M_{P_1}(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(M_{P_1}(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \widetilde{W}_{(w_2)_*(\lambda)})$, donde P_0^1 denota el $\mathbb{Q}$ -subgrupo parabólico $P_0 \cap M_{P_1}$ de M_{P_1} . Luego, consideramos la sucesión exacta larga

$$\dots \rightarrow H^1(S^{M_{P_1}}, \widetilde{W}_\lambda) \rightarrow Ind_{P_0^1(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0^1(\mathbb{R}))}^{M_{P_1}(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(M_{P_1}(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \widetilde{W}_{(w_2)_*(\lambda)}) \rightarrow H_c^2(S^{M_{P_1}}, \widetilde{W}_\lambda) \rightarrow \dots$$

proviniente del marco de una variedad de Shimura.

En dicha sucesión exacta los pesos en $H_c^2(S^{M_{P_1}}, \widetilde{W}_\lambda)$ son menores o iguales que $2 - c - m_1 - m_2$ mientras que el peso en $Ind_{P_0^1(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0^1(\mathbb{R}))}^{M_{P_1}(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(M_{P_1}(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \widetilde{W}_{(w_2)_*(\lambda)})$ es $2 - c - m_1$, por lo tanto salvo en el caso $m_2 = 0$ podemos concluir que el espacio

$$Ind_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{GSp_4(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(GSp_4(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \widetilde{W}_{(w_2)_*(\lambda)})$$

está incluido en la imagen de $H^1(\partial_1, \tilde{V}_\lambda)$ y no contribuye a una clase fantasma.

Para el caso $m_2 = 0$, utilizamos el hecho que para contribuir a una clase fantasma, el espacio $Ind_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{GSp_4(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(GSp_4(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \widetilde{W}_{(w_2)_*(\lambda)})$ debe tener peso $\geq 2 - c$ pues esto es satisfecho por los pesos de $H^2(S, \tilde{V}_\lambda)$, y esto solo puede ocurrir si $m_1 = 0$.

Como conclusión, el único caso en el cual $Ind_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{GSp_4(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(GSp_4(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \widetilde{W}_{(w_2)_*(\lambda)})$ puede contribuir a una clase fantasma es cuando $m_1 = m_2 = 0$, en cuyo caso su peso es igual al peso medio.

$w = w_1 \circ w_2$ En este caso deberemos analizar el morfismo

$$H^2(\partial_2, \tilde{V}_\lambda) \rightarrow H^2(\partial_0, \tilde{V}_\lambda)$$

utilizando los resultados en [Ha] y la restricción de dicho morfismo a

$$Ind_{P_2(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_2(\mathbb{R}))}^{GSp_4(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(GSp_4(\mathbb{R}))} H^1(S^{M_{P_2}}, \widetilde{W}_{(w_2)_*(\lambda)})$$

y como en el caso anterior solo debemos considerar el morfismo

$$H^1(S^{M_{P_2}}, \widetilde{W}_{(w_2)_*(\lambda)}) \rightarrow Ind_{P_0^2(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0^2(\mathbb{R}))}^{M_{P_2}(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(M_{P_2}(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \widetilde{W}_{(w_1 \circ w_2)_*(\lambda)})$$

donde P_0^2 denota el $\mathbb{Q}$ -subgrupo parabólico $P_0 \cap M_{P_2}$ de M_{P_2} . En este caso estaremos siempre en el caso equilibrado, por lo tanto podemos describir precisamente la imagen de dicho morfismo utilizando los resultados de [Ha] salvo que la representación $\widetilde{W}_{(w_2)_*(\lambda)}$ tenga dimensión uno, pero como $(w_2)_*(\lambda) = (m_1 + m_2)\varepsilon'_1 + (-m_2 - 2)\varepsilon'_2 + c\kappa$, esta representación nunca tendrá dimensión uno. Como conclusión, el espacio $Ind_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{GSp_4(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(GSp_4(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \widetilde{W}_{(w_1 \circ w_2)_*(\lambda)})$ está incluido en la imagen de $H^2(\partial_2, \tilde{V}_\lambda)$ y no contribuye a una clase fantasma.

$w = w_2 \circ w_1$ Como M_{P_1} coincide con su parte hermitiana, consideramos la restricción del morfismo $H^2(\partial_1, \tilde{V}_\lambda) \rightarrow H^2(\partial_0, \tilde{V}_\lambda)$ al subespacio

$$Ind_{P_1(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_1(\mathbb{R}))}^{GSp_4(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(GSp_4(\mathbb{R}))} H^1(S^{M_{P_1}}, \widetilde{W}_{(w_1)_*(\lambda)})$$

y por el mismo argumento que en el caso $w = w_2$, todo esto se reduce al estudio de la sucesión exacta larga

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^1(S^{M_{P_1}}, \widetilde{W}_{(w_1)_*(\lambda)}) &\rightarrow Ind_{P_0^1(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0^1(\mathbb{R}))}^{M_{P_1}(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(M_{P_1}(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \widetilde{W}_{(w_2 \circ w_1)_*(\lambda)}) \\ &\rightarrow H_c^2(S^{M_{P_1}}, \widetilde{W}_{(w_1)_*(\lambda)}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Los pesos en $H_c^2(S^{M_{P_1}}, \widetilde{W}_{(w_1)_*(\lambda)})$ son $\leq 3 - c - m_2$ mientras que el peso en

$$Ind_{P_0^1(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0^1(\mathbb{R}))}^{M_{P_1}(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(M_{P_1}(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \widetilde{W}_{(w_2 \circ w_1)_*(\lambda)})$$

es $4 - c + m_1$, así concluimos que $Ind_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{GSp_4(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(GSp_4(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \widetilde{W}_{(w_2 \circ w_1)_*(\lambda)})$ está contenido en la imagen de $H^2(\partial_1, \tilde{V}_\lambda)$ y no contribuye a una clase fantasma.

$w = w_1 \circ w_2 \circ w_1$ Utilizando la misma estrategia que en el caso $w = w_1 \circ w_2$, podemos concluir que el espacio $Ind_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{GSp_4(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(GSp_4(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \widetilde{W}_{(w_1 \circ w_2 \circ w_1)_*(\lambda)})$ está incluido en la imagen de $H^3(\partial_2, \tilde{V}_\lambda)$ y luego no contribuye a una clase fantasma pues la representación $\widetilde{W}_{(w_2 \circ w_1)_*(\lambda)}$ no puede tener dimensión 1.

$w = w_2 \circ w_1 \circ w_2$ Utilizamos la misma estrategia que en el caso $w = w_2 \circ w_1$, entonces llegamos a una sucesión exacta larga

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^1(S^{M_{P_1}}, \widetilde{W}_{(w_1 \circ w_2)_*(\lambda)}) &\rightarrow Ind_{P_0^1(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0^1(\mathbb{R}))}^{M_{P_1}(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(M_{P_1}(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \widetilde{W}_{(w_2 \circ w_1 \circ w_2)_*(\lambda)}) \\ &\rightarrow H_c^2(S^{M_{P_1}}, \widetilde{W}_{(w_1 \circ w_2)_*(\lambda)}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

y los pesos en el espacio $H_c^2(S^{M_{P_1}}, \widetilde{W}_{(w_1 \circ w_2)_*(\lambda)})$ son $\leq 5 - c + m_2$ mientras que el peso en $Ind_{P_0^1(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0^1(\mathbb{R}))}^{M_{P_1}(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(M_{P_1}(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \widetilde{W}_{(w_2 \circ w_1 \circ w_2)_*(\lambda)})$ es $6 - c + m_1 + 2m_2$, luego concluimos que el espacio

$$Ind_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{GSp_4(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(GSp_4(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \widetilde{W}_{(w_2 \circ w_1 \circ w_2)_*(\lambda)})$$

no contribuye a una clase fantasma.

$w = w_1 \circ w_2 \circ w_1 \circ w_2$ En este caso, utilizando los mismos argumentos que en el caso $w = w_1 \circ w_2$ concluimos

que a menos que $m_1 = 0$, el espacio

$$Ind_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{GSp_4(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(GSp_4(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \widetilde{W}_{(w_1 \circ w_2 \circ w_1 \circ w_2)_*(\lambda)})$$

está incluido en la imagen de $H^4(\partial_2, \tilde{V}_\lambda)$ y no contribuye a una clase fantasma.

Por el otro lado, utilizando los mismos argumentos que en el caso $w = w_2 \circ w_1$ podemos concluir que a menos que $m_2 = 0$, dicho espacio está incluido en la imagen de $H^4(\partial_1, \tilde{V}_\lambda)$ y no contribuye a una clase fantasma.

En conclusión el único caso en el que el espacio

$$Ind_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{GSp_4(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(GSp_4(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \widetilde{W}_{(w_1 \circ w_2 \circ w_1 \circ w_2)_*(\lambda)})$$

podría contribuir a una clase fantasma es cuando $m_1 = m_2 = 0$.

Y luego de este tratamiento caso por caso, hemos obtenido el resultado enunciado en este teorema. $\square$

Para un análisis completo debemos estudiar, para los casos $m_1 = m_2 = 0$, cuando $H^0(S^{M_{P_0}}, \widetilde{W}_{(w_1 \circ w_2 \circ w_1 \circ w_2)_*(\lambda)})$ y $H^0(S^{M_{P_0}}, \widetilde{W}_{(w_2)_*(\lambda)})$ contribuyen a clases fantasma.

Para el caso $H^0(S^{M_{P_0}}, \widetilde{W}_{(w_2)_*(\lambda)})$ utilizaremos los resultados de [KR]. En dicho trabajo podemos encontrar una prueba de la existencia de clases fantasma de grado 2, que entonces deben provenir de la contribución del espacio $H^0(S^{M_{P_0}}, \widetilde{W}_{(w_2)_*(\lambda)})$.

Podemos resumir brevemente los resultados en [KR] involucrando la existencia de clases fantasma para el grupo simpléctico Sp_4 (siguiendo la notación de dicho trabajo) como sigue. Elegimos un subgrupo compacto maximal $K_\infty \subset Sp_4(\mathbb{R})$ y denotamos por $X = Sp_4(\mathbb{R})/K$ su correspondiente espacio simétrico, podemos definir para cada subgrupo abierto compacto $K_f \subset Sp_4(\mathbb{A}_f)$ una variedad de nivel

$$S_K = Sp_4(\mathbb{Q}) \backslash X \times Sp_4(\mathbb{A}_f)/K_f,$$

y tomando el límite proyectivo sobre el conjunto de subgrupos abiertos compactos de $Sp_4(\mathbb{A}_f)$ obtenemos un espacio denotado por S . La cohomología de este espacio con respecto al sistema de coeficientes trivial es denotado por $H^\bullet(Sp_4, \mathbb{C})$. El mapa de Borel es definido, y puede ser interpretado como un morfismo desde la cohomología del compacto dual del espacio simétrico X (que será denotado por $X^{(c)}$), denotamos este mapa por $\mathcal{B} : H^\bullet(X^{(c)}, \mathbb{C}) \rightarrow H^\bullet(Sp_4, \mathbb{C})$. Entonces el núcleo de dicho mapa está denotado por $H^\bullet(X^{(c)})_{ker}$. Por el otro lado, se define otro subespacio $H^\bullet(X^{(c)})_{im} \subset H^\bullet(X^{(c)}, \mathbb{C})$ que satisface que

$$H^\bullet(X^{(c)})_{ker} \oplus H^\bullet(X^{(c)})_{im}$$

es la preimagen, bajo el mapa de Borel, de la cohomología interior en $H^\bullet(Sp_4, \mathbb{C})$. Finalmente, se denota por $H^\bullet(X^{(c)})_{gh}$ al espacio de clases en $H^\bullet(X^{(c)}, \mathbb{C})$ anuladas por la composición con el mapa de Borel junto con la restricción a la cohomología de cada cara del borde de la compactificación de Borel-Serre. Entonces tenemos que el espacio de clases fantasma en la imagen del mapa de Borel es isomorfo al cociente

$$H^\bullet(X^{(c)})_{gh} / (H^\bullet(X^{(c)})_{ker} + H^\bullet(X^{(c)})_{im}).$$

Finalmente, en la sección 14.1 de [KR] se concluye que la imagen del mapa de Borel, para el caso Sp_4 sobre $\mathbb{Q}$, contiene un espacio unidimensional de clases fantasma. Además este espacio pertenece al espacio de cohomología de grado 2. Este resultado contradice aquellos del apéndice A en [Z II], dicha contradicción proviene del hecho que a pesar de que en el caso $m_1 = m_2 = 0$ los espacios de cohomología de grado 0, 1 y 4 de la cara de Borel-Serre correspondiente al subgrupo parabólico estándar minimal no están incluidos en el núcleo del morfismo al espacio de cohomología del borde de Borel-Serre de la variedad de Shimura, el autor de dicho artículo parece olvidarse de verificar si el espacio de cohomología de grado 1 contribuye a clases fantasma (de donde las clases fantasma de grado 2 provienen).

Para el espacio $H^0(S_K^{M_{P_0}}, \widetilde{W}_{(w_1 \circ w_2 \circ w_1 \circ w_2)_*(\lambda)})$, probaremos que no contribuye a clases fantasma. Primero, este espacio tiene imagen en el espacio de cohomología de grado 5 del borde de la variedad de Shimura, luego para contribuir a clases fantasmas necesita tener intersección no nula con la imagen del espacio de cohomología de grado 5 de la variedad de Shimura. Consideramos el caso de una variedad de nivel finito, definida por un subgrupo abierto compacto $K \subset GSp_4(\mathbb{A}_f)$. Tenemos la sucesión exacta larga en cohomología

$$\dots \rightarrow H^5(S_K, \tilde{V}_\lambda) \rightarrow H^5(\partial \bar{S}_K, \tilde{V}_\lambda) \rightarrow H_c^6(S_K, \tilde{V}_\lambda) \rightarrow \dots$$

(estamos considerando el caso en el que el peso maximal λ satisface $m_1 = m_2 = 0$) y por la dualidad de Poincaré, consideramos la sucesión exacta

$$\dots \rightarrow H^0(S_K, \tilde{V}_\lambda^\vee) \rightarrow H^0(\partial \bar{S}_K, \tilde{V}_\lambda^\vee) \rightarrow H_c^1(S_K, \tilde{V}_\lambda^\vee) \rightarrow \dots$$

(donde $\tilde{V}_\lambda^\vee$ también será de dimensión uno) y, como $H^0(S_K, \tilde{V}_\lambda^\vee) \rightarrow H^0(\partial \bar{S}_K, \tilde{V}_\lambda^\vee)$ es un isomorfismo (esto viene del hecho de que el borde de la compactificación de Borel-Serre de cada componente conexa de S_K es conexo) podemos concluir que $H^5(\partial \bar{S}_K, \tilde{V}_\lambda) \rightarrow H_c^6(S_K, \tilde{V}_\lambda)$ es también un isomorfismo. como conclusión $H^5(S_K, \tilde{V}_\lambda) \rightarrow H^5(\partial \bar{S}_K, \tilde{V}_\lambda)$ es el morfismo nulo. Este es entonces también el caso para la variedad de nivel infinito y es entonces imposible obtener clases fantasmas en la cohomología de grado 5, por lo tanto $H^0(S_K^{M_{P_0}}, \widetilde{W}_{(w_1 \circ w_2 \circ w_1 \circ w_2)_*(\lambda)})$ no contribuye a clases fantasmas.

Para concluir, podemos agregar estos resultados al teorema anterior obteniendo el enunciado mas preciso:

Teorema 17. *Sea V_λ la representación algebraica irreducible de GSp_4 con peso maximal $\lambda = m_1\lambda'_1 + m_2\lambda'_2 + c\kappa$, entonces si $m_1 = m_2 = 0$ existen clases fantasma solo en la cohomología de grado 2 cuyo peso, en la estructura de Hodge mixta correspondiente, es el peso medio. En el caso en el cual $m_1 \neq 0$ o $m_2 \neq 0$ no existen clases fantasma en la cohomología del borde de la compactificación de Borel-Serre.*

En particular podemos ver que en todos los casos la propiedad del peso medio es satisfecha.

4 El caso $(GU(n-2, 2), X)$

4.1 La variedad de Shimura involucrada

Vamos a presentar la variedad de Shimura involucrada en esta sección. Sea $\mathcal{K}$ una extensión cuadrática imaginaria, sea ι el único elemento no trivial de $Gal(\mathcal{K}/\mathbb{Q})$, $n \in \mathbb{N}$, $I_{(n-2,2)} = I_{n-2} \times (-I_2) \in GL_n(\mathbb{Q})$ y sea $GU(I_{(n-2,2)})$ el grupo algebraico reductivo conexo definido

sobre $\mathbb{Q}$ dado por

$$GU(I_{(n-2,2)})(A) = \{g \in GL_n(A \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{K}) \mid g^* I_{(n-2,2)} g = \nu(g) I_{(n-2,2)}, \nu(g) \in A^\times\}$$

para cada $\mathbb{Q}$ -álgebra A , donde $\bar{g}$ denota $\iota(g)$ y g^* denota ${}^t(\bar{g})$ (la transpuesta de $\bar{g}$).

Sea $h : \mathbb{S} = \text{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} G_{m,\mathbb{C}} \rightarrow GU(I_{(n-2,2)})_{\mathbb{R}}$ el homomorfismo algebraico dado por

$$h(z) = zI_{n-2} \times (\bar{z}I_2) \quad \forall z \in \mathbb{S}(\mathbb{R})$$

entonces el par $(GU(I_{(n-2,2)}), X)$, donde X es la $GU(I_{(n-2,2)})(\mathbb{R})$ -clase de conjugación de h , es un par de Shimura.

Dado que necesitaremos la $\mathbb{Q}$ -estructura del grupo algebraico considerado, trabajaremos en $GU(I_{(n-2,2)})$ en su descripción isomorfa, dada por

$$GU(A_{(n-2,2)})(A) = \{g \in GL_n(A \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{K}) \mid g^* A_{(n-2,2)} g = \nu(g) A_{(n-2,2)}, \nu(g) \in A^\times\}$$

para cada $\mathbb{Q}$ -álgebra A , donde

$$A_{(n-2,2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & S \\ 0 & I_{n-4} & 0 \\ S & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

y

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

En esta sección denotaremos por G al grupo $GU(A_{(n-2,2)})$.

Entonces los puntos complejos de G es el grupo $G(\mathbb{C}) = GL_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times$ donde el mapa $G(\mathbb{R}) \rightarrow G(\mathbb{C})$ está dado por $g \mapsto (g, \nu(g))$.

4.2 Toro maximal, sistema de raíces y subgrupos parabólicos

Sea $H \subset G(\mathbb{C})$ el toro complejo de dimensión $(n+1)$ constituido por las matrices diagonales, este es claramente un toro maximal para G y determina un sistema de raíces de tipo A_{n-1} .

Sea $\mathfrak{h} = \text{Lie}(H)$ el álgebra de Lie compleja correspondiente a H , entonces $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de Lie compleja de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$. Definimos para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ el elemento $\epsilon_i \in \mathfrak{h}^*$ dado por $\epsilon_i(h) = h_i$ para $h = (h_1, \dots, h_n, x) \in \mathfrak{h}$.

Entonces el sistema de raíces está dado por

$$\Phi(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}) = \{\epsilon_i - \epsilon_j \mid i \neq j\}$$

y tomando como conjunto de raíces positivas $\Phi^+ = \{\epsilon_i - \epsilon_j \mid i < j\}$, tenemos que el sistema de raíces simples está dado por

$$\Delta = \{\epsilon_i - \epsilon_{i+1} \mid i \in \{1, \dots, (n-1)\}\}$$

Dar una representación algebraica irreducible de G equivale a dar una $(n+1)$ -upla $(a_1, \dots, a_n, c)$ con $a_1 \geq \dots \geq a_n$ y $c \equiv \sum_{i=1}^n a_i \pmod{2}$. Fijamos una representación algebraica irreducible $(\rho_\lambda, V_\lambda)$ con peso maximal dado por $\lambda = (a_1, \dots, a_n, c)$. Esta representación define un sistema local en la variedad de Shimura, como en las notas preliminares, y denotaremos dicho sistema local por $\tilde{V}_\lambda$.

El toro maximal elegido en G define un $\mathbb{Q}$ -subtoro desplegado maximal que consiste del subgrupo de matrices de la forma

$$\left\{ \begin{bmatrix} aa_1 & & & \\ & aa_2 & & \\ & & a_2^{-1} & \\ & & & a_1^{-1} \end{bmatrix} \mid a, a_1, a_2 \in \mathbb{G}_m \right\} \subset G$$

si $n = 4$ y de la forma

$$\left\{ \begin{bmatrix} aa_1 & & & & \\ & aa_2 & & & \\ & & aI_{n-4} & & \\ & & & aa_2^{-1} & \\ & & & & aa_1^{-1} \end{bmatrix} \mid a, a_1, a_2 \in \mathbb{G}_m \right\} \subset G$$

si $n > 4$.

Este $\mathbb{Q}$ -toro desplegado tiene rango 3 e induce un $\mathbb{Q}$ -sistema de raíces de rango 2, de tipo BC_2 en el caso $n > 4$ y de tipo C_2 en el caso $n = 4$.

A partir de este $\mathbb{Q}$ -toro desplegado maximal y del sistema de $\mathbb{Q}$ -raíces positivas Φ^+ tenemos definidos los $\mathbb{Q}$ -subgrupos parabólicos estandar, que en este caso están dados por

$$P_1 = \begin{bmatrix} Res_{K/\mathbb{Q}}GL_1 & * & * \\ 0 & GU(A_{(n-3,1)}) & * \\ 0 & 0 & Res_{K/\mathbb{Q}}GL_1 \end{bmatrix} \cap GU(A_{(n-2,2)}),$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} Res_{K/\mathbb{Q}}GL_2 & * & * \\ 0 & GU(n-4) & * \\ 0 & 0 & Res_{K/\mathbb{Q}}GL_2 \end{bmatrix} \cap GU(A_{(n-2,2)}),$$

y

$$P_0 = \begin{bmatrix} Res_{K/\mathbb{Q}}GL_1 & * & * & * & * \\ 0 & Res_{K/\mathbb{Q}}GL_1 & * & * & * \\ 0 & 0 & GU(n-4) & * & * \\ 0 & 0 & 0 & Res_{K/\mathbb{Q}}GL_1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Res_{K/\mathbb{Q}}GL_1 \end{bmatrix} \cap GU(A_{(n-2,2)})$$

4.3 El grupo de Weyl, W^{P_1} y W^{P_2}

El grupo de Weyl puede ser identificado con el grupo de permutaciones S_n , donde $\sigma \in S_n$ se corresponde con el elemento w_σ que satisface

$$w_\sigma(\epsilon_i) = \epsilon_{\sigma^{-1}(i)} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Utilizamos la descripción en [K] para los conjuntos W^{P_1} y W^{P_2} .

Dada una raíz $\alpha \in \Phi = \Phi(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h})$ denotamos por $E_\alpha \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ su espacio correspondiente. Tenemos la caracterización del conjunto W^{P_i} dada en la sección 2 por

$$W^{P_i} = \{w \in W \mid \Phi_w \subset \Delta(\mathfrak{u}_i)\}$$

donde $\mathfrak{u}_i \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ es el álgebra de Lie del radical unipotente del subgrupo parabólico P_i .

Daremos una descripción de los conjuntos W^{P_i} , $i = 0, 1, 2$, en la siguiente proposición.

Proposición 18. *Con la notación utilizada en esta sección tenemos que*

$$W^{P_0} = \{w_\sigma \in W \mid \sigma(3) < \dots < \sigma(n-2)\}$$

$$W^{P_1} = \{w_\sigma \in W \mid \sigma(2) < \dots < \sigma(n-1)\}$$

$$W^{P_2} = \{w_\sigma \in W \mid \sigma(1) < \sigma(2), \sigma(3) < \dots < \sigma(n-2) \text{ and } \sigma(n-1) < \sigma(n)\}$$

Demostración. Dado $w_\sigma \in W$ tenemos que $w_\sigma(\epsilon_i - \epsilon_j) = \epsilon_{\sigma^{-1}(i)} - \epsilon_{\sigma^{-1}(j)}$, entonces $\epsilon_{\sigma^{-1}(i)} - \epsilon_{\sigma^{-1}(j)} \in \Phi_w$ si y solo si $i > j$ y $\sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j)$, y dado que σ es biyectiva, podemos reescribir esto de la siguiente manera:

$$\epsilon_i - \epsilon_j \in \Phi_w \Leftrightarrow i < j \text{ y } \sigma(i) > \sigma(j)$$

Finalmente $w \in W^{P_1}$ si y solo si $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ tales que $i < j$ y $\sigma(i) > \sigma(j)$ tenemos que $i = 1$ o $j = n$ (Porque en este caso $\mathfrak{u}_1$ es la suma directa de los espacios de peso E_α donde α es de la forma $\epsilon_1 - \epsilon_j$ o de la forma $\epsilon_i - \epsilon_n$). En otras palabras, hemos demostrado que

$$W^{P_1} = \{w_\sigma \in W \mid \sigma(2) < \dots < \sigma(n-1)\}$$

Por los mismo argumentos obtenemos las correspondientes descripciones de W^{P_2} y W^{P_0} . □

Debemos recordar que con esta notación $w_\sigma w_\tau = w_{\tau\sigma} \quad \forall \sigma, \tau \in S_n$.

4.4 Pesos en $W_{w_*(\lambda)}$

Hasta el momento hemos definido el par de Shimura y hemos dado una descripción de su $\mathbb{Q}$ -sistema de raíces y de sus $\mathbb{Q}$ -subgrupos parabólicos, esto será utilizado para obtener información sobre los espacios de cohomología del borde de la compactificación de Borel-Serre de la variedad de Shimura considerada. Como sabemos a partir de las notas preliminares, este borde tiene una estratificación cuyas caras están indexadas por los $\mathbb{Q}$ -subgrupos parabólicos estandar. Si restringimos el sistema local en la variedad de Shimura definido por una representación irreducible del grupo algebraico G a la cara asociada al $\mathbb{Q}$ -subgrupo parabólico estandar P y tomamos su espacio de cohomología entonces podemos descomponer dicho espacio como suma directa, indexada por el conjunto de representantes de Weyl W^P para P , de espacios de cohomología del espacio simétrico asociado a la componente de Levi de M_P del subgrupo parabólico con coeficientes en el fibrado vectorial definido por una representación irreducible, descrita en las notas preliminares y denotada por $W_{w_*(\lambda)}$.

El objetivo de esta sección es dar una descripción del sistema local $\tilde{W}_{w_*(\lambda)}$ en el espacio simétrico asociado a M_P .

Necesitamos entonces mas información sobre la estructura del grupo algebraico G . Hemos descrito los $\mathbb{Q}$ -subgrupos parabólicos estandar de G , denotados por P_0, P_1 y P_2 . Ellos admiten una decomposición de Levi en la cual el factor de Levi, denotado por M_{P_i} , tiene la forma de

bloques diagonales, mas aún tenemos los isomorfismos ϕ_1, ϕ_2 y ϕ_0 dados por

$$M_{P_1} \xrightarrow{\phi_1} \text{Res}_{K/\mathbb{Q}} GL_1 \times GU(A_{(n-3,1)})$$

$$\begin{bmatrix} h_1 & & \\ & g & \\ & & h'_1 \end{bmatrix} \mapsto (\nu(g)^{-1}h_1, g)$$

y similarmente, para P_2 y P_0 tenemos que

$$M_{P_2} \xrightarrow{\phi_2} \text{Res}_{K/\mathbb{Q}} GL_2 \times GU(n-4)$$

$$\begin{bmatrix} h_1 & & \\ & g & \\ & & h'_1 \end{bmatrix} \mapsto (\nu(g)^{-1}h_1, g)$$

y

$$M_{P_0} \xrightarrow{\phi_0} \text{Res}_{K/\mathbb{Q}} GL_1 \times \text{Res}_{K/\mathbb{Q}} GL_1 \times GU(n-4)$$

$$\begin{bmatrix} h_1 & & & \\ & h_2 & & \\ & & g & \\ & & & h'_2 \\ & & & & h'_1 \end{bmatrix} \mapsto (\nu(g)^{-1}h_1, \nu(g)^{-1}h_2, g)$$

Para calcular los pesos de la estructura de Hodge mixta asociada a los espacios de la forma $H^q(S_K^{M_P}, \tilde{W}_{w_*(\lambda)})$ (donde P denota uno de los $\mathbb{Q}$ -subgrupos parabólicos estandar) necesitamos considerar la descomposición del factor de Levi M_P como producto de la parte lineal y hermitiana denotadas por $G_{P,l}, G_{P,h}$ (la última forma parte de un par de Shimura $(G_{P,h}, h_P)$).

Necesitamos calcular el subgrupo A_{P_1} del subgrupo de Levi M_{P_1} de P_1 , que es el $\mathbb{Q}$ -toro desplegado maximal en el centro de M_{P_1} por el centro de G , en este caso está dado por

$$\left\{ a \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 I_{n-2} & \\ & & a_2^2 a_1^{-1} \end{bmatrix} \mid a \in \text{Res}_{K/\mathbb{Q}} \mathbb{G}_m, a_1, a_2 \in \mathbb{G}_m \right\} \subset M_{P_1}$$

que es lo mismo que

$$\left\{ a \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & I_{n-2} & \\ & & a_1^{-1} \end{bmatrix} \mid a \in \text{Res}_{K/\mathbb{Q}} \mathbb{G}_m, a_1 \in \mathbb{G}_m \right\}$$

Para el caso P_2 tenemos que el subgrupo A_{P_2} de M_{P_2} , que es el $\mathbb{Q}$ -toro desplegado maximal en el centro de M_{P_2} por el centro de G , en nuestro caso está dado por

$$\left\{ a \begin{bmatrix} a_1 I_2 & & \\ & I_{n-4} & \\ & & a_1^{-1} I_2 \end{bmatrix} \mid a \in \text{Res}_{K/\mathbb{Q}} \mathbb{G}_m, a_1 \in \mathbb{G}_m \right\} \subset M_{P_2}$$

Continuamos con el cálculo del homomorfismo $h_P : \mathbb{S} \rightarrow G_{P,h}$ (para P uno de los dos $\mathbb{Q}$ -subgrupos parabólicos estándares maximales de G) definiendo el par de Shimura asociado a la parte hermitiana $G_{P,h}$.

Para el cálculo del homomorfismo mencionado seguiremos la sección 5 de [H II].

En el caso P_1 calculamos, para comenzar, el único morfismo de Cayley admisible que denotaremos por ω_1 . $\omega_1 : \mathbb{G}_m \rightarrow A_{P_1}$ puede determinarse por las propiedades enunciadas en el trabajo ya mencionado, especialmente considerando la filtración que induce en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ a través de su composición con la representación adjunta junto con el hecho de que para cada representación racional (σ, W) de G y para cada $h \in X$, la filtración de Hodge asociada a la estructura de Hodge definida por la composición $\sigma \circ h$ junto con la filtración inducida por la graduación de W dada por la composición $\sigma \circ \omega_1$ define una estructura de Hodge mixta en W .

Por el primer argumento podemos ver que ω_1 está dado por

$$\omega_1(z) = \left\{ \begin{bmatrix} z^k & & \\ & z^{k+1} Id_{n-2} & \\ & & z^{k+2} \end{bmatrix} \mid z \in \mathbb{G}_m \right\}$$

para algún entero $k \in \mathbb{Z}$. Por el segundo argumento, tomamos la inclusión $G \subset Res_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}} GL_n \subset GL_{2n}$ como una representación racional de dimensión $2n$ de G , y finalmente podemos ver que

$$\omega_1(z) = \begin{bmatrix} z^{-2} & & \\ & z^{-1} Id_{n-2} & \\ & & 1 \end{bmatrix} \forall z \in \mathbb{G}_m$$

y $h_1 : Res_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} \mathbb{G}_m \rightarrow (G_{P_1, h})_{\mathbb{R}}$ está dado por

$$h_1(z) = \begin{bmatrix} z\bar{z} & & \\ & h_{(n-3,1)}(z) & \\ & & 1 \end{bmatrix} \in (G_{P_1, h})_{\mathbb{R}} \quad \forall z \in \mathbb{C}^{\times}.$$

donde $h_{(1, n-1)} : \mathbb{S} \rightarrow GU(n-3, 1)_{\mathbb{R}}$ es el morfismo definido de manera similar a h definiendo la variedad de Shimura para $GU(n-3, 1)$.

Aplicando el mismo procedimiento podemos obtener el morfismo $h_2 : Res_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} \mathbb{G}_m \rightarrow (G_{P_2, h})_{\mathbb{R}}$ calculando primero $\omega_2 : \mathbb{G}_m \rightarrow A_{P_2}$ que está dado por

$$\omega_2(z) = \left\{ \begin{bmatrix} z^{-2} I_2 & & \\ & z Id_{n-4} & \\ & & I_2 \end{bmatrix} \mid z \in \mathbb{G}_m \right\}$$

obteniendo entonces la descripción de h_2 como

$$h_2(z) = \begin{bmatrix} z\bar{z} Id_2 & & \\ & z Id_{n-4} & \\ & & 1 \end{bmatrix} \in (G_{P_2, h})_{\mathbb{R}} \quad \forall z \in \mathbb{C}^{\times}.$$

Para finalizar esta sección, calculamos los pesos de las representaciones V_{λ} de G y $(W_{w_*(\lambda)})_h$ de $G_{P, h}$ para $w \in W^P$ (donde P denota uno de los $\mathbb{Q}$ -subgrupos parabólicos estándar de G).

Sea $i \in \{0, 1, 2\}$. Para cada $w \in W^{P_i}$, tenemos por definición

$$w_*(\lambda) = w(\lambda + \delta) - \delta$$

donde $\delta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha$.

En este caso tenemos $\delta = \frac{1}{2}((n-1)\epsilon_1 + (n-3)\epsilon_2 + \dots + (1-n)\epsilon_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (n+1-2i)\epsilon_i$, entonces podemos escribir esto como una n -upla y obtenemos

$$\delta = (n-1, \dots, \frac{(n+1)-2i}{2}, \dots, 1-n).$$

Entonces

$$w_\sigma(\lambda + \delta) = (a_{\sigma(1)} + \frac{(n+1)-2\sigma(1)}{2}, \dots, a_{\sigma(i)} + \frac{(n+1)-2\sigma(i)}{2}, \dots, a_{\sigma(n)} + \frac{(n+1)-2\sigma(n)}{2})$$

y finalmente

$$(w_\sigma)_*(\lambda) = (a_{\sigma(1)} + 1 - \sigma(1), \dots, a_{\sigma(i)} + i - \sigma(i), \dots, a_{\sigma(n)} + n - \sigma(n)).$$

A partir de la descripción de h tenemos que el morfismo de pesos de la variedad de Shimura definida por (G, h) está dado por

$$\mathbb{R}^\times \rightarrow G(\mathbb{R}), t \mapsto \begin{bmatrix} t & & \\ & \ddots & \\ & & t \end{bmatrix}$$

entonces por la descripción de λ el peso de la representación V_λ es

$$wt(V_\lambda) = -c$$

Por otro lado, por la definición de h_1 tenemos que el morfismo de pesos de la variedad de Shimura definida por $G_{P_1, h}$ y h_1 está dado por

$$t \mapsto \begin{bmatrix} t^2 & & \\ & tId_{n-2} & \\ & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & & \\ & tId_{n-2} & \\ & & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t & & \\ & Id_{n-2} & \\ & & t^{-1} \end{bmatrix} \in G_{P_1, h}$$

y denotando $w_*(\lambda) = (d_1, \dots, d_n, c)$ tenemos que el peso de la representación de $G_{P_1, h}$ determinada por $W_{w_*(\lambda)}$ es

$$wt(w, P_1) = -c + (d_n - d_1)$$

pero hemos ya calculado los coeficientes d_i , por lo tanto podemos verificar

$$wt(w_\sigma, P_1) = -c + ((a_{\sigma(n)} + n - \sigma(n)) - (a_{\sigma(1)} + 1 - \sigma(1)))$$

Aplicando el mismo procedimiento podemos verificar que para $w_\sigma \in W^{P_2}$ el peso de la representación de $G_{P_2, h}$ determinada por $W_{(w_\sigma)_*(\lambda)}$ está dado por la fórmula

$$wt(w_\sigma, P_2) = -c + (a_{\sigma(n)} + n - \sigma(n)) + (a_{\sigma(n-1)} + n - 1 - \sigma(n-1)) - (a_{\sigma(1)} + 1 - \sigma(1)) - (a_{\sigma(2)} + 2 - \sigma(2))$$

Por el trabajo [H-Z II] tenemos que el peso de la representación de la parte hermitiana de P_0 definida por la representación $W_{(w_\sigma)_*(\lambda)}$ de M_{P_0} está dado por

$$wt(w_\sigma, P_0) = -c + (a_{\sigma(n)} + n - \sigma(n)) + (a_{\sigma(n-1)} + n - 1 - \sigma(n-1)) - (a_{\sigma(1)} + 1 - \sigma(1)) - (a_{\sigma(2)} + 2 - \sigma(2))$$

4.5 Descomposiciones $W = W_1^0 W^{P_1}$ y $W = W_2^0 W^{P_2}$

Tenemos las descomposiciones $W = W_1^0 W^{P_1}$ y $W = W_2^0 W^{P_2}$, donde W_1^0 es el conjunto de representantes de Weyl para el único $\mathbb{Q}$ -subgrupo parabólico estándar de M_{P_1} definido por el sistema de raíces inducido por el sistema considerado para G y W_2^0 es el conjunto análogo para M_{P_2} . Utilizando el hecho de que $w_\sigma w_{\tilde{\sigma}} = w_{\tilde{\sigma}\sigma}$ podemos obtener una descripción de los conjuntos W_1^0 y W_2^0 como

$$W_1^0 = \{w_\sigma \in W \mid \sigma(1) = 1, \sigma(3) \leq \dots \leq \sigma(n-2) \text{ y } \sigma(n) = n\}$$

y

$$W_2^0 = \{w_\sigma \in W \mid \sigma \in \{1, s_1, s_2, s_1 \circ s_2\}\}$$

donde s_1 es la transposición (12) y s_2 es la transposición $((n-1)n)$.

4.6 Imagen desde ∂_1

Queremos describir la imagen del morfismo

$$H^q(\partial_1, \tilde{V}_\lambda) \rightarrow H^q(\partial_0, \tilde{V}_\lambda)$$

y como está explicado en las preliminares, estos morfismos respetan la descomposición en suma directa indexada por el conjunto de representantes de Weyl W^{P_1} y W^{P_0} , en otras palabras, podemos estudiar dicha imagen restringiendo a cada factor correspondiente a cada $w \in W^{P_1}$ obteniendo el morfismo desde el espacio

$$Ind_{P_1(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_1(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^{q-l(w)}(S^{M_{P_1}}, \tilde{W}_{w_*(\lambda)})$$

al espacio

$$\bigoplus_{\substack{w' \in W_1^0 \\ l(w') \leq q-l(w)}} Ind_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^{q-l(w)-l(w')}(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w'w)_*(\lambda)}).$$

Una observación aquí es que las variedades de nivel finito $S_K^{M_0}$ tienen dimensión cero, con lo cual solo debemos considerar en dicha igualdad los elementos $w' \in W_1^0$ que satisfacen $q-l(w)-l(w') = 0$.

En este caso tenemos que M_{P_1} coincide con su parte hermitiana $G_{P_1,h}$, por lo que estamos nuevamente en el caso de una variedad de Shimura y consideraremos la correspondiente sucesión exacta larga en cohomología.

Sea $w \in W^{P_1}$, entonces tenemos que la sucesión exacta larga en cohomología está dada por

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^{q-l(w)}(S^{M_{P_1}}, \tilde{W}_{w_*(\lambda)}) &\rightarrow \bigoplus_{\substack{w' \in W_1^0 \\ l(w')=q-l(w)}} Ind_{P_0^1(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0^1(\mathbb{R}))}^{M_{P_1}(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(M_{P_1}(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w'w)_*(\lambda)}) \\ &\rightarrow H_c^{q-l(w)+1}(S^{M_{P_1}}, \tilde{W}_{w_*(\lambda)}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

donde P_0^1 denota el $\mathbb{Q}$ -subgrupo parabólico $P_0 \cap M_{P_1}$ de M_{P_1} y el término involucrando la suma directa corresponde a la cohomología del borde de la variedad de Shimura asociada al subgrupo de Levi M_{P_1} del $\mathbb{Q}$ -subgrupo parabólico P_1 .

Tenemos la siguiente lista de hechos que serán útiles para la descripción de la imagen de $H^q(\partial_1, \tilde{V}_\lambda) \rightarrow H^q(\partial_0, \tilde{V}_\lambda)$,

- Los pesos en la estructura de Hodge mixta de $H^{q-l(w)}(S^{M_{P_1}}, \tilde{W}_{w_*(\lambda)})$ son $\geq q - l(w) + wt(w, P_1)$.
- Los pesos en la estructura de Hodge mixta de $H_c^{q-l(w)+1}(S^{M_{P_1}}, \tilde{W}_{w_*(\lambda)})$ son $\leq q - l(w) + 1 + wt(w, P_1)$.
- El peso en $Ind_{P_0^1(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0^1(\mathbb{R}))}^{M_{P_1}(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(M_{P_1}(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w'w)_*(\lambda)})$ es $wt(w'w, P_0)$.

En particular, si el peso en $Ind_{P_0^1(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0^1(\mathbb{R}))}^{M_{P_1}(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(M_{P_1}(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w'w)_*(\lambda)})$ no es ni $q - l(w) + wt(w, P_1)$ ni $q - l(w) + wt(w, P_1) + 1$, podremos determinar exactamente si dicho espacio está incluido en la imagen de dicho morfismo. Mas precisamente, si el peso de dicho espacio es $> q - l(w) + 1 + wt(w, P_1)$ entonces dicho espacio está incluido en la imagen del morfismo $H^q(\partial_1, \tilde{V}_\lambda) \rightarrow H^q(\partial_0, \tilde{V}_\lambda)$.

Para los cálculos, fijamos $w \in W^{P_1}$ y $w' \in W_1^0$, sean σ, σ' los elementos en S_n tales que $w = w_\sigma$ y $w' = w_{\sigma'}$, entonces sabemos que

$$wt(w_\sigma, P_1) = -c + (a_{\sigma(n)} + n - \sigma(n)) - (a_{\sigma(1)} + 1 - \sigma(1))$$

mientras que

$$\begin{aligned} wt(w'w, P_0) &= wt(w_{\sigma\sigma'}, P_0) \\ &= -c + (a_{\sigma\sigma'(n)} + n - \sigma\sigma'(n)) + (a_{\sigma\sigma'(n-1)} + n - 1 - \sigma\sigma'(n-1)) \\ &\quad - (a_{\sigma\sigma'(1)} + 1 - \sigma\sigma'(1)) - (a_{\sigma\sigma'(2)} + 2 - \sigma\sigma'(2)) \end{aligned}$$

pero como $w_{\sigma'} \in W_1^0$, tenemos que $\sigma'(1) = 1$ y $\sigma'(n) = n$ y en particular $\sigma\sigma'(n) = \sigma(n)$ y $\sigma\sigma'(1) = \sigma(1)$, luego obtenemos que

$$wt(w'w, P_0) = wt(w, P_1) + (a_{\sigma\sigma'(n-1)} + n - 1 - \sigma\sigma'(n-1)) - (a_{\sigma\sigma'(2)} + 2 - \sigma\sigma'(2)).$$

Como conclusión tenemos que el peso en $H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w'w)_*(\lambda)})$ es $> q - l(w) + 1 + wt(w, P_1)$ si y solo si

$$q - l(w) - l(w') + wt(w'w, P_0) > q - l(w) + 1 + wt(w, P_1)$$

si y solo si $wt(w'w, P_0) - wt(w, P_1) > l(w') + 1$, y de esto obtenemos el resultado

Lema 19. Si $w_\sigma \in W^{P_1}$ y $w_{\sigma'} \in W_1^0$ y

$$(a_{\sigma\sigma'(n-1)} + n - 1 - \sigma\sigma'(n-1)) - (a_{\sigma\sigma'(2)} + 2 - \sigma\sigma'(2)) > l(w_{\sigma'}) + 1$$

entonces $Int_{P_0^1(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0^1(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{\sigma\sigma'})_*(\lambda)})$ está incluido en la imagen del morfismo $H^q(\partial_1, \tilde{V}_\lambda) \rightarrow H^q(\partial_0, \tilde{V}_\lambda)$ (donde $q = l(w_\sigma) + l(w_{\sigma'})$).

4.7 Caso $GU(2, 2)$

Trabajaremos en distintas subsecciones los diferentes subcasos para el peso maximal $\lambda = (a_1, a_2, a_3, a_4, c)$. La primera observación es que en este caso W^{P_0} es todo el grupo de Weyl W .

Una notación que utilizaremos durante esta sección es la siguiente, una permutación $\sigma \in S_4$ será denotada por la 4-upla $(\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \sigma(4))$.

El primer paso en esta subsección será el de enunciar el siguiente lema, cuya demostración es una aplicación directa del lema anterior.

Proposición 20. *Sea $w_\sigma \in W$ tal que $\sigma(2) > \sigma(3)$. Si*

$$(a_{\sigma(3)} - a_{\sigma(2)}) + (\sigma(2) - \sigma(3)) > 1$$

entonces $\text{Ind}_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_(\lambda)})$ está incluido en la imagen de $H^\bullet(\partial_1, \tilde{V}_\lambda)$.*

Demostración. Si $\sigma(2) > \sigma(3)$ y w satisface la hipótesis de la proposición, entonces escribimos $w_\sigma = w_{\tilde{\sigma}} w_{\sigma_1}$ con respecto a la descomposición $W = W_1^0 W^{P_1}$. En este caso podemos ver que $l(w_{\tilde{\sigma}}) = 1$ y $(a_{\sigma(3)} - a_{\sigma(2)}) + (\sigma(2) - \sigma(3)) > 1$, por lo tanto

$$(a_{\sigma(3)} + 3 - \sigma(3)) - (a_{\sigma(2)} + 2 - \sigma(2)) > 1 + l(w_{\tilde{\sigma}}).$$

Finalmente por el Lemma 19 obtenemos el resultado enunciado. $\square$

4.7.1 Caso $a_1 > a_2$ y $a_3 > a_4$

Luego de un tratamiento caso por caso llegaremos al siguiente resultado.

Teorema 21. *En el caso en el que el peso maximal λ de la representación irreducible de G satisface $a_1 > a_2$ y $a_3 > a_4$, no existen clases fantasma con respecto al sistema local dado por $\tilde{V}_\lambda$.*

Demostración. Un uso directo de la proposición anterior y el hecho que $a_1 > a_2$ y $a_3 > a_4$ implica que para σ en el conjunto

$$\{(1, 4, 2, 3), (1, 4, 3, 2), (2, 3, 1, 4), (2, 4, 1, 3), (2, 4, 3, 1), (3, 2, 1, 4)$$

$$(3, 4, 1, 2), (3, 4, 2, 1), (4, 2, 1, 3), (4, 3, 1, 2)\}$$

tenemos que $\text{Ind}_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$ no contribuye a una clase fantasma pues todos estos subespacios están incluidos en la imagen de $H^\bullet(\partial_1, \tilde{V}_\lambda) \rightarrow H^\bullet(\partial_0, \tilde{V}_\lambda)$.

Por otro lado, si $\sigma = (1, 2, 3, 4)$ entonces el peso de $H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$ es $-c + (a_4 + a_3) - (a_1 + a_2)$. Mientras que $\text{Ind}_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$ es un sumando directo de $H^0(\partial_0, \tilde{V}_\lambda)$ y entonces para contribuir a una clase fantasma su imagen por el morfismo $H^{l(w_\sigma)}(\partial_0, \tilde{V}_\lambda) \rightarrow H^{l(w_\sigma)+1}(\partial \tilde{S}, \tilde{V}_\lambda)$ debe estar incluida en la imagen de $H^{l(w_\sigma)+1}(S, \tilde{V}_\lambda) \rightarrow H^{l(w_\sigma)+1}(\partial \tilde{S}, \tilde{V}_\lambda)$, pero como los pesos en el espacio $H^{l(w_\sigma)+1}(S, \tilde{V}_\lambda)$ son $\geq -c + l(w_\sigma) + 1$, concluimos que el peso de $H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$ debe ser $\geq -c + l(w_\sigma) + 1$ que en este caso es $-c + 1$. Pero como $-c + (a_4 + a_3) - (a_1 + a_2) \leq -c < -c + 1$ tenemos que $H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$ no contribuye a una clase fantasma. Por el mismo argumento podemos mostrar que $H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$ no contribuye a una clase fantasma para

$$\sigma \in \{(1, 2, 4, 3), (2, 1, 3, 4), (2, 1, 4, 3)\}.$$

Para $\sigma = (1, 3, 2, 4)$ tenemos que, por el mismo argumento, el peso de $H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$ es $-c + (a_2 + a_4) - (a_1 + a_3) + 2$ mientras que, para contribuir a una clase fantasma debe

ser $\geq -c + 2$. En conclusión tenemos que dicho espacio no contribuye a clases fantasma y obtenemos el mismo resultado para

$$\sigma \in \{(1, 3, 4, 2), (3, 1, 2, 4), (3, 1, 4, 2)\}.$$

Con el fin de analizar la imagen de ∂_2 utilizaremos los resultados en [Ha].

Para el caso $\sigma = (3, 2, 4, 1)$, consideramos la expresión $w_\sigma = w_{\tilde{\sigma}}w_{\sigma_2}$ dada por la descomposición $W^{P_0} = W_2^0 W^{P_2}$, entonces con la notación de la subsección 4.5 tenemos que $\tilde{\sigma} = s_1 \circ s_2$ y $\sigma_2 = (2, 3, 1, 4)$. Sabemos por [Ha] que $Ind_{P_0^2(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0^2(\mathbb{R}))}^{M_{P_2}(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(M_{P_2}(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$ está incluido en la imagen de $H^2(S^{M_{P_2}}, \tilde{W}_{(w_{\sigma_2})_*(\lambda)})$ salvo cuando $(w_{\sigma_2})_*(\lambda)$ tiene dimensión 1. Pero

$$\begin{aligned} (w_{\sigma_2})_*(\lambda) &= (a_{\sigma_2(1)} + 1 - \sigma_2(1), a_{\sigma_2(2)} + 2 - \sigma_2(2), a_{\sigma_2(3)} + 3 - \sigma_2(3), a_{\sigma_2(4)} + 4 - \sigma_2(4)) \\ &= (a_2 - 1, a_3 - 1, a_1 + 2, a_4) \end{aligned}$$

y dado que $a_1 + 2 > a_4$ tenemos que $(w_{\sigma_2})_*(\lambda)$ no puede tener dimensión 1. Como resultado obtenemos que $H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$ no contribuye a una clase fantasma.

Con el mismo procedimiento obtenemos el mismo resultado para

$$\sigma \in \{(4, 1, 3, 2), (4, 2, 3, 1), (4, 3, 2, 1)\}.$$

Aplicando el caso equilibrado del Teorema 2 en [Ha] podemos ver que los espacios correspondientes a los elementos $(2, 3, 4, 1)$ y $(4, 1, 2, 3)$ no contribuyen a clases fantasma. Esto se obtiene, en el caso $\sigma = (2, 3, 4, 1)$ por ejemplo, considerando $\sigma' = (3, 2, 1, 4)$. En la descripción de la imagen del espacio de cohomología de ∂_2 dada en el artículo mencionado tenemos que la intersección de dicha imagen con el espacio

$$Ind_{P_0^2(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0^2(\mathbb{R}))}^{M_{P_2}(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(M_{P_2}(\mathbb{R}))} (H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)}) \oplus H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{\sigma'})_*(\lambda)}))$$

mas $Ind_{P_0^2(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0^2(\mathbb{R}))}^{M_{P_2}(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(M_{P_2}(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{\sigma'})_*(\lambda)})$ es todo el espacio

$$Ind_{P_0^2(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0^2(\mathbb{R}))}^{M_{P_2}(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(M_{P_2}(\mathbb{R}))} (H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)}) \oplus H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{\sigma'})_*(\lambda)}))$$

pues σ está en la cámara fundamental (con respecto a [Ha]). Luego el resultado sigue del hecho que $Ind_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{\sigma'})_*(\lambda)})$ está incluido en la imagen del espacio de cohomología de ∂_1 .

Hemos entonces demostrado el resultado enunciado. $\square$

4.7.2 Caso $a_1 > a_2$ y $a_3 = a_4$

Teorema 22. *Si el peso maximal $\lambda = (a_1, a_2, a_3, a_4, c)$ de la representación irreducible $\tilde{V}_\lambda$ de G satisface $a_1 > a_2$ y $a_3 = a_4$, entonces no hay clases fantasma en el espacio de cohomología del sistema local definido por V_λ .*

Demostración. El mismo procedimiento que en la subsección anterior muestra que, dado $w_\sigma \in W$ tal que $\sigma(2) > \sigma(3)$, si $(a_{\sigma(3)} - a_{\sigma(2)}) + (\sigma(2) - \sigma(3)) > 1$ entonces $Ind_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$ está incluido en la imagen de $H^{l(w_\sigma)}(\partial_1, \tilde{V}_\lambda)$.

Por lo tanto, para σ en el conjunto

$$\{(2, 3, 1, 4), (2, 4, 1, 3), (3, 2, 1, 4), (3, 4, 1, 2), (4, 2, 1, 3), (4, 3, 1, 2)\}$$

tenemos que $H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$ no contribuye a una clase fantasma.

Por el mismo argumento, $H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$ no contribuye a una clase fantasma para $\sigma \in \{(1, 4, 2, 3), (3, 4, 2, 1)\}$, pues $\sigma(2) - \sigma(3) > 1$ en dichos casos.

Por otro lado, si $\sigma = (1, 2, 3, 4)$ entonces el peso de $H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$ es $-c + (a_4 + a_3) - (a_1 + a_2)$. Mientras que $\text{Ind}_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$ es un sumando directo de $H^{l(w_\sigma)}(\partial_0, \tilde{V}_\lambda)$ y entonces para contribuir a una clase fantasma su peso debe ser $\geq -c+1$. Pero, como $-c + (a_4 + a_3) - (a_1 + a_2) \leq -c < -c+1$ tenemos que $H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$ no contribuye a una clase fantasma. Por el mismo argumento podemos ver que $H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$ no contribuye a una clase fantasma para

$$\sigma \in \{(1, 2, 4, 3), (2, 1, 3, 4), (2, 1, 4, 3)\}.$$

Para $\sigma = (1, 3, 2, 4)$ tenemos que el peso de $H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$ es $-c + 2 + a_2 - a_1$ mientras que para contribuir a una clase fantasma dicho peso debe ser $\geq -c+2$. En conclusión tenemos que este espacio no contribuye a una clase fantasma y obtenemos la misma conclusión para

$$\sigma \in \{(1, 3, 4, 2), (3, 1, 2, 4), (3, 1, 4, 2)\}.$$

Para $\sigma = (1, 4, 3, 2)$ tenemos que el peso de $H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$ es $-c + (a_2 + a_3) - (a_1 + a_4) + 4 = -c + 4 + a_2 - a_1$ mientras que para contribuir a una clase fantasma dicho peso debe ser $\geq -c + 4$. En conclusión tenemos que este espacio no contribuye a una clase fantasma y obtenemos la misma conclusión para

$$\sigma \in \{(4, 1, 2, 3), (4, 1, 3, 2)\}.$$

Nuevamente, utilizamos el Teorema 2 de [Ha] para el caso no equilibrado. Sea σ la permutación dada por $(3, 2, 4, 1)$, entonces tenemos la expresión $w_{\tilde{\sigma}} w_{\sigma_2}$ con respecto a la descomposición $W^{P_0} = W_2^0 W^{P_2}$ donde $\tilde{\sigma} = s_1 \circ s_2$ con respecto a la notación en la subsección 4.5 y $\sigma_2 = (2, 3, 1, 4)$. Finalmente, tenemos que $\text{Ind}_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$ no contribuye a una clase fantasma, dado que está incluido en la imagen de $H^4(\partial_2, \tilde{V}_\lambda)$, salvo que $W_{(w_{\sigma_2})_*(\lambda)}$ tenga dimensión uno y podemos probar que esta representación no puede tener dimensión 1 en este caso, por lo tanto $H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$ no contribuye a una clase fantasma.

El mismo resultado puede obtenerse aplicando este procedimiento a las permutaciones dadas por $(4, 2, 3, 1)$ y $(4, 3, 2, 1)$, por lo que sus espacios correspondientes están incluidos en la imagen de $H^\bullet(\partial_2, \tilde{V}_\lambda)$ y no contribuyen a clases fantasma.

Finalmente, para $\sigma = (2, 3, 4, 1)$ tenemos que, utilizando los resultados del Teorema 2 de [Ha] y el hecho que $\text{Ind}_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{\sigma'})_*(\lambda)})$ está incluido en la imagen de $H^{l(w_{\sigma'})}(\partial_1, \tilde{V}_\lambda)$ para $\sigma' = (3, 2, 1, 4)$, que

$$\text{Ind}_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$$

está incluido en la imagen del morfismo

$$H^{l(w_\sigma)}(\partial_1, \tilde{V}_\lambda) \oplus H^{l(w_\sigma)}(\partial_2, \tilde{V}_\lambda) \rightarrow H^{l(w_\sigma)}(\partial_0, \tilde{V}_\lambda)$$

y entonces dicho espacio no contribuye a una clase fantasma. Por el mismo argumento podemos mostrar que para $\sigma = (2, 4, 3, 1)$, $H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$ no contribuye a una clase fantasma.

De esta manera hemos demostrado el resultado enunciado. $\square$

4.7.3 Caso $a_1 = a_2$ y $a_3 > a_4$

Teorema 23. *Si el peso maximal $\lambda = (a_1, a_2, a_3, a_4, c)$ de la representación irreducible $\tilde{V}_\lambda$ de G satisface $a_1 = a_2$ y $a_3 > a_4$, entonces no hay clases fantasma en el espacio de cohomología del sistema local definido por V_λ .*

Demostración. Como ya sabemos, dado $w_\sigma \in W$ tal que $\sigma(2) > \sigma(3)$, si $(a_{\sigma(3)} - a_{\sigma(2)}) + (\sigma(2) - \sigma(3)) > 1$ entonces $\text{Ind}_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$ está incluido en la imagen de $H^{l(w_\sigma)}(\partial_1, \tilde{V}_\lambda)$.

Luego, para σ en el conjunto

$$\{(1, 4, 2, 3), (1, 4, 3, 2), (2, 4, 1, 3), (2, 4, 3, 1), (3, 4, 1, 2), (3, 4, 2, 1), (2, 3, 1, 4), (4, 3, 1, 2)\}$$

tenemos que $H^0(S^{M_0}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$ no contribuye a una clase fantasma.

Si $\sigma = (1, 2, 3, 4)$ entonces el peso de $H^0(S^{M_0}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$ es $-c + (a_4 + a_3) - (a_1 + a_2)$. Mientras que $\text{Ind}_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$ es un sumando directo de $H^{l(w_\sigma)}(\partial_0, \tilde{V}_\lambda)$ y para contribuir a una clase fantasma su peso debe ser $\geq -c + 1$. Por lo tanto tenemos que $H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$ no contribuye a una clase fantasma. Por el mismo argumento podemos ver que $H^0(S^{M_0}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$ no contribuye a una clase fantasma para

$$\sigma \in \{(1, 2, 4, 3), (2, 1, 3, 4), (2, 1, 4, 3)\}.$$

Para $\sigma = (1, 3, 2, 4)$ tenemos que el peso de $H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$ es $-c + 2 + a_4 - a_3$ mientras que para contribuir a una clase fantasma su peso debe ser $\geq -c + 2$. En conclusión tenemos que este espacio no contribuye a una clase fantasma y tenemos la misma conclusión para

$$\sigma \in \{(1, 3, 4, 2), (3, 1, 2, 4), (3, 1, 4, 2)\}.$$

Para $\sigma = (2, 3, 4, 1)$, el peso de $H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$ es $-c + 4 + a_4 - a_3$ mientras que para contribuir a una clase fantasma debe ser $\geq -c + 4$. En conclusión tenemos que este espacio no contribuye a una clase fantasma y obtenemos la misma conclusión para

$$\sigma \in \{(3, 2, 1, 4), (3, 2, 4, 1)\}.$$

Utilizando el Teorema 2 de [Ha] para el caso no equilibrado tenemos que el espacio $\text{Ind}_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$ no contribuye a una clase fantasma para $\sigma = (4, 1, 3, 2)$ pues dicho espacio está incluido en la imagen de $H^{l(w_\sigma)}(\partial_2, \tilde{V}_\lambda)$ a menos que $W_{(w_2)_*(\lambda)}$ tenga dimensión 1 donde $w_2 = (1, 4, 2, 3)$. Como $W_{(w_2)_*(\lambda)}$ no tiene dimensión 1 obtenemos el

resultado buscado. Obtenemos el mismo resultado para cada σ en el conjunto

$$\{(4, 2, 3, 1), (4, 3, 2, 1)\}.$$

Finalmente, para $\sigma = (4, 1, 2, 3)$ tenemos, utilizando los resultados del Teorema 2 de [Ha] y el hecho de que $Ind_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^0(S^{MP_0}, \tilde{W}_{(w_{\sigma'})_*(\lambda)})$ está incluido en la imagen de $H^{l(w_{\sigma'})}(\partial_1, \tilde{V}_\lambda)$ para $\sigma' = (1, 4, 3, 2)$, que

$$Ind_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^0(S^{MP_0}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$$

está incluido en la imagen de $H^{l(w_\sigma)}(\partial_1, \tilde{V}_\lambda) \oplus H^{l(w_\sigma)}(\partial_2, \tilde{V}_\lambda) \rightarrow H^{l(w_\sigma)}(\partial_0, \tilde{V}_\lambda)$ (dado que σ está en la cámara fundamental, con la notación de [Ha]) y entonces este espacio no contribuye a una clase fantasma. Por el mismo argumento podemos ver que para $\sigma = (4, 2, 1, 3)$, $H^0(S^{MP_0}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$ no contribuye a una clase fantasma.

Por lo tanto, hemos obtenido el resultado enunciado. $\square$

4.7.4 Caso $a_1 = a_2$ y $a_3 = a_4$

Teorema 24. *Si el peso maximal $\lambda = (a_1, a_2, a_3, a_4, c)$ de la representación irreducible $\tilde{V}_\lambda$ satisface $a_1 = a_2$ y $a_3 = a_4$, las únicas posibles clases fantasma en la cohomología del sistema local definido por V_λ están en $H^2(S, \tilde{V}_\lambda)$ con peso $-c+2$, $H^4(S, \tilde{V}_\lambda)$ con peso $-c+4$ y $H^5(S, \tilde{V}_\lambda)$ con peso $-c+6$.*

Demostración. Sea $w_\sigma \in W$ tal que $\sigma(2) > \sigma(3)$, si $(a_{\sigma(3)} - a_{\sigma(2)}) + (\sigma(2) - \sigma(3)) > 1$ entonces $Ind_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^0(S^{MP_0}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$ está incluido en la imagen de $H^q(\partial_{1,K}, \tilde{V}_\lambda)$. Por lo tanto, para σ en el conjunto

$$\{(1, 4, 2, 3), (2, 3, 1, 4), (2, 4, 1, 3), (3, 4, 1, 2), (3, 4, 2, 1), (4, 3, 1, 2)\}$$

tenemos que $H^0(S^{MP_0}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$ no contribuye a una clase fantasma.

Por otro lado, si $\sigma = (1, 2, 3, 4)$ entonces el peso de $H^0(S^{MP_0}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$ es $-c + (a_4 + a_3) - (a_1 + a_2)$, mientras que $Ind_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^0(S^{MP_0}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$ es un sumando directo de $H^{l(w_\sigma)}(\partial_0, \tilde{V}_\lambda)$ y para contribuir a una clase fantasma su peso debe ser $\geq -c + 1$. Como conclusión $H^0(S^{MP_0}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$ no contribuye a una clase fantasma. Por el mismo argumento podemos ver que $H^0(S^{MP_0}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$ no contribuye a una clase fantasma para

$$\sigma \in \{(1, 2, 4, 3), (2, 1, 3, 4), (2, 1, 4, 3)\}.$$

Para $\sigma = (1, 3, 4, 2)$ tenemos que el peso de $H^0(S^{MP_0}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$ es $-c + 2$ mientras que para contribuir a una clase fantasma su peso debe ser $\geq -c + 3$. En conclusión tenemos que este espacio no contribuye a una clase fantasma y tenemos el mismo resultado para

$$\sigma \in \{(3, 1, 2, 4), (3, 1, 4, 2)\}.$$

Por el Teorema 2 de [Ha] para el caso no equilibrado tenemos que

$$Ind_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^0(S^{MP_0}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$$

no contribuye a una clase fantasma para σ en el conjunto

$$\{(3, 2, 4, 1), (4, 1, 3, 2), (4, 2, 3, 1)\}$$

pues estos espacios están incluidos en la imagen de $H^{l(w_\sigma)}(\partial_2, \tilde{V}_\lambda)$. Obtenemos la misma conclusión si aplicamos el mismo procedimiento a $(4, 3, 2, 1)$ a menos que $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$.

Por otro lado, si $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$, sea σ la permutación definida por $(4, 3, 2, 1)$, entonces w_σ tiene longitud 6 y entonces el espacio

$$Ind_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$$

es un sumando directo de $H^7(\partial \bar{S}, \tilde{V}_\lambda)$. Aplicando la dualidad de Poincaré y por las estrategias utilizadas en la parte final de la sección 3 (cuando probamos que el espacio correspondiente al elemento de Weyl $w_1 \circ w_2 \circ w_1 \circ w_2$ no contribuye a una clase fantasma) podemos mostrar que el morfismo $H^7(S, \tilde{V}_\lambda) \rightarrow H^7(\partial \bar{S}, \tilde{V}_\lambda)$ es cero y entonces el espacio $H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$ no contribuye a una clase fantasma.

Restan 7 elementos en el grupo de Weyl, que son:

1. w_σ y $w_{\sigma'}$ para $\sigma = (1, 4, 3, 2)$ y $\sigma' = (4, 1, 2, 3)$. Ambos tienen longitud 3 y entonces los espacios $Ind_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$ y $Ind_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{\sigma'})_*(\lambda)})$ son sumandos directos del espacio $H^3(\partial_0, \tilde{V}_\lambda)$ y ambos tienen peso $-c + 4$ que es el peso medio de $H^4(S_K, \tilde{V}_\lambda)$.
2. w_σ y $w_{\sigma'}$ para $\sigma = (2, 3, 4, 1)$ y $\sigma' = (3, 2, 1, 4)$. Ambos tienen longitud 3 y entonces los espacios $Ind_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$ y $Ind_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{\sigma'})_*(\lambda)})$ son sumandos directos de $H^3(\partial_0, \tilde{V}_\lambda)$ y ambos tienen peso $-c + 4$ que es el peso medio de $H^4(S, \tilde{V}_\lambda)$.
3. w_σ y $w_{\sigma'}$ para $\sigma = (2, 4, 3, 1)$ y $\sigma' = (4, 2, 1, 3)$. Ambos tienen longitud 4 y entonces los espacios $Ind_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$ y $Ind_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{\sigma'})_*(\lambda)})$ son sumandos directos de $H^4(\partial_0, \tilde{V}_\lambda)$ y ambos tienen peso $-c + 6$ que es el peso medio de $H^5(S, \tilde{V}_\lambda)$ mas 1.
4. w_σ para $\sigma = (1, 3, 2, 4)$. Su longitud es 1 y entonces el espacio

$$Ind_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_0}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$$

es un sumando directo del espacio $H^1(\partial_0, \tilde{V}_\lambda)$ y su peso es $-c + 2$ que es el peso medio de $H^2(S, \tilde{V}_\lambda)$.

□

4.7.5 Conclusiones para el caso $n = 4$

Lo que sigue es un pequeño resumen de los resultados obtenidos en este caso.

Si el peso maximal $\lambda = (a_1, a_2, a_3, a_4, c)$ de la representación irreducible V_λ satisface $a_1 = a_2$ y $a_3 = a_4$ entonces hay posibles clases fantasma en grado 2 y 4, en ambos casos el peso en la correspondiente estructura de Hodge mixta es el peso medio, y hay también posibles clases fantasma en grado 5, en cuyo caso el peso en la estructura de Hodge mixta

asociada es el peso medio mas uno. Por otro lado, si $a_1 \neq a_2$ o $a_3 \neq a_4$, entonces no existen clases fantasma.

En particular podemos ver que para $n = 4$, la propiedad débil del peso medio está siempre satisfecha.

4.8 El caso general $GU(2, n - 2)$

Para $w_\sigma \in W^{P_0}$ sea $w_\sigma = w_{\tilde{\sigma}}w_{\sigma_1}$ su expresión correspondiente con respecto a la descomposición $W^{P_0} = W_1^0 W^{P_1}$, entonces por el Lema 19 sabemos que si

$$(a_{\sigma(n-1)} + n - 1 - \sigma(n - 1)) - (a_{\sigma(2)} + 2 - \sigma(2)) > 1 + l(w_{\tilde{\sigma}})$$

entonces $Ind_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{w_\sigma(\lambda)})$ está incluido en la imagen de $H^{l(w)}(\partial_1, \tilde{V}_\lambda)$.

4.8.1 El caso $a_i > a_{i+1} \quad \forall i \in \{1, \dots, n - 1\}$

Teorema 25. *Si el peso maximal $\lambda = (a_1, \dots, a_n, c)$ satisface $a_i > a_{i+1}$ para todo i , entonces no hay clases fantasma en los espacios de cohomología $H^q(\partial \bar{S}, \tilde{V}_\lambda)$.*

Demostración. El primer paso consiste de probar que para $w_\sigma \in W^{P_0}$, si $\sigma(2) > \sigma(n - 1)$ entonces $Ind_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$ está incluido en la imagen de $H^{l(w_\sigma)}(\partial_1, \tilde{V}_\lambda)$.

Sea $w_\sigma \in W^{P_0}$ con $\sigma(2) > \sigma(n - 1)$, escribimos $w_\sigma = w_{\tilde{\sigma}}w_{\sigma_1}$ donde $w_{\tilde{\sigma}} \in W_1^0$ y $w_{\sigma_1} \in W^{P_1}$. Podemos ver, por la descripción de los conjuntos W_1^0 y W^{P_1} , que

$$l(w_{\tilde{\sigma}}) < (\sigma(2) - 1) + (n - \sigma(n - 1)) - 2,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} (a_{\sigma(n-1)} + n - 1 - \sigma(n - 1)) - (a_{\sigma(2)} + 2 - \sigma(2)) &= \\ &= (\sigma(2) - 1 + n - \sigma(n - 1) - 2) + (a_{\sigma(n-1)} - a_{\sigma(2)}) \\ &> l(w_{\tilde{\sigma}}) + (a_{\sigma(n-1)} - a_{\sigma(2)}) \\ &\geq l(w_{\tilde{\sigma}}) + 1 \end{aligned}$$

y obtenemos entonces el resultado deseado.

Como conclusión, los únicos posibles pesos en el espacio de clases fantasma provienen de los elementos $w_\sigma \in W^{P_0}$ con $\sigma(2) < \sigma(n - 1)$.

Continuamos verificando los casos de las permutaciones σ satisfaciendo $\sigma(2) < \sigma(n - 1)$.

Sea w_σ un elemento de W^{P_0} con $\sigma(1) < \sigma(2) < \sigma(n - 1) < \sigma(n)$. El peso del espacio $H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$ es

$$\begin{aligned} wt(w_\sigma, P_0) &= -c + (a_{\sigma(n)} + n - \sigma(n)) + (a_{\sigma(n-1)} + n - 1 - \sigma(n - 1)) \\ &\quad - (a_{\sigma(1)} + 1 - \sigma(1)) - (a_{\sigma(2)} + 2 - \sigma(2)) \end{aligned}$$

mientras que $Ind_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$ es un subespacio de $H^{l(w_\sigma)}(\partial_0, \tilde{V}_\lambda)$. Luego a fin de contribuir a una clase fantasma, w_σ debe satisfacer

$$wt(w_\sigma, P_0) \geq -c + l(w_\sigma) + 1.$$

Pero, como $a_{\sigma(n)} < a_{\sigma(n-1)} < a_{\sigma(2)} < a_{\sigma(1)}$ y $l(w_\sigma) = (\sigma(1) - 1) + (\sigma(2) - 2) + (n - \sigma(n)) + ((n - 1) - \sigma(n - 1))$

$$\begin{aligned} wt(w_\sigma, P_0) &= -c + l(w_\sigma) + (a_{\sigma(n)} + a_{\sigma(n-1)} - a_{\sigma(1)} - a_{\sigma(2)}) \\ &< -c + l(w_\sigma). \end{aligned}$$

Entonces podemos concluir que $H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$ no contribuye a una clase fantasma.

De la misma manera podemos mostrar que $H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$ no contribuye a una clase fantasma para los casos

$$\begin{aligned} \sigma(1) &< \sigma(2) < \sigma(n) < \sigma(n-1) \\ \sigma(1) &< \sigma(n) < \sigma(2) < \sigma(n-1) \\ \sigma(2) &< \sigma(1) < \sigma(n-1) < \sigma(n) \\ \sigma(2) &< \sigma(1) < \sigma(n) < \sigma(n-1) \\ \sigma(2) &< \sigma(n-1) < \sigma(1) < \sigma(n) \\ \sigma(2) &< \sigma(n) < \sigma(1) < \sigma(n-1) \end{aligned}$$

Utilizando los resultados de [Ha] como en el caso $GU(2, 2)$ podemos demostrar que los elementos $w_\sigma \in W^{P_0}$ satisfaciendo $\sigma(2) < \sigma(1)$ y $\sigma(n) < \sigma(n-1)$ no contribuyen a clases fantasma. Para ello, sea $w_\sigma \in W^{P_0}$ un tal elemento y sea $w_\sigma = w_{\tilde{\sigma}} w_{\sigma_2}$ la expresión de w_σ con respecto a la descomposición $W^{P_0} = W_2^0 W^{P_2}$, entonces $\sigma_2(1) = \sigma(2)$, $\sigma_2(2) = \sigma(1)$, $\sigma_2(n-1) = \sigma(n)$ y $\sigma_2(n) = \sigma(n-1)$. Los primeros dos términos de $(w_{\sigma_2})_*(\lambda)$ son $a_{\sigma_2(1)} + 1 - \sigma_2(1)$ y $a_{\sigma_2(2)} + 2 - \sigma_2(2)$, y son claramente diferentes (el primero es estrictamente mas grande que el segundo) y esto muestra que $(w_{\sigma_2})_*(\lambda)$ no tiene dimensión 1. Este hecho junto con los resultados del Teorema 2 de [Ha] para el caso no equilibrado concluye con el resultado mencionado.

Por la conclusión anterior eliminamos la posibilidad de contribución a clases fantasma para los casos

$$\begin{aligned} \sigma(n) &< \sigma(2) < \sigma(1) < \sigma(n-1) \\ \sigma(n) &< \sigma(2) < \sigma(n-1) < \sigma(1) \\ \sigma(2) &< \sigma(n) < \sigma(n-1) < \sigma(1). \end{aligned}$$

Luego a fin de contribuir a una clase fantasma, $w_\sigma \in W^{P_0}$ debe satisfacer una de las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} \sigma(n) &< \sigma(1) < \sigma(2) < \sigma(n-1) \\ \sigma(2) &< \sigma(n-1) < \sigma(n) < \sigma(1) \end{aligned}$$

Finalmente, usando nuevamente los resultados del Teorema 2 de [Ha] para el caso equilibrado, podemos mostrar (como los espacios $H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_\sigma)_*(\lambda)})$ con $w_\sigma \in W^{P_0}$ satisfaciendo $\sigma(n-1) < \sigma(2) < \sigma(1) < \sigma(n)$ o $\sigma(1) < \sigma(n) < \sigma(n-1) < \sigma(2)$ están incluidos en la imagen de $H^\bullet(\partial_{P_1}, \tilde{V}_\lambda)$ y en ambos casos w_σ está en la cámara fundamental) que ninguno de estos dos casos contribuyen a clases fantasma.

□

4.8.2 El caso no genérico

En esta subsección trabajaremos en los casos en los cuales λ es no regular. Como sabemos, un elemento $w_\sigma \in W^{P_0}$ está determinado por los cuatro números $\sigma(1), \sigma(2), \sigma(n-1), \sigma(n)$ y dados i, j, k, l cuatro números distintos en el conjunto $\{1, \dots, n\}$ denotamos por $w_{ijkl} \in W^{P_0}$ su correspondiente representante de Weyl.

Podemos dividir este conjunto W^{P_0} en 24 subconjuntos correspondientes a los órdenes posibles de los elementos i, j, k, l y entonces estudiaremos cada uno de dichos subconjuntos por separado como ya hemos hecho en la subsección anterior.

Para el caso $i < j < k < l$ obtenemos lo siguiente. El peso de la estructura de Hodge mixta en $H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{ijkl})_*}(\lambda))$ es

$$-c + (a_l + n - l) + (a_k + (n - 1) - k) - (a_i + 1 - i) - (a_j + 2 - j).$$

Por otro lado, podemos ver que $l(w_{ijkl}) = (i - 1) + (j - 2) + (n - l) + ((n - 1) - k)$ y el espacio de cohomología ya mencionado es un sumando directo de $H^{l(w_{ijkl})}(\partial_0, \tilde{V}_\lambda)$, luego a fin de contribuir a una clase fantasma en el espacio $H^{l(w_{ijkl})+1}(\partial\bar{S}, \tilde{V}_\lambda)$ su peso debe ser $\geq l(w_{ijkl}) + 1 - c$ que en este caso es

$$-c + 1 + (i - 1) + (j - 2) + (n - l) + ((n - 1) - k).$$

En conclusión, a fin de contribuir a una clase fantasma una condición necesaria para el espacio $H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{ijkl})_*}(\lambda))$ es que $a_l + a_k - a_i - a_j \geq 1$ lo cual es imposible, por lo tanto hemos mostrado que en el caso $i < j < k < l$ el espacio $H^0(S^{M_0}, \tilde{W}_{(w_{ijkl})_*}(\lambda))$ no contribuye a una clase fantasma.

Para los casos $i < j < l < k$, $j < i < k < l$ y $j < i < l < k$ el mismo argumento muestra que los correspondientes espacios $H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{ijkl})_*}(\lambda))$ no contribuyen a clases fantasma (la única cosa que cambia en los cálculos es $l(w_{ijkl})$ que en estos casos es mayor que el calculado en el caso previo)

Consideremos el caso $i < k < j < l$. Sabemos que el peso en $H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{ijkl})_*}(\lambda))$ es

$$-c + (a_l + n - l) + (a_k + (n - 1) - k) - (a_i + 1 - i) - (a_j + 2 - j).$$

Por otro lado, podemos ver que $l(w_{ijkl}) = (i - 1) + (j - 2) + (n - l) + ((n - 1) - k) - 1$, y a fin de contribuir a una clase fantasma en el espacio $H^{l(w_{ijkl})+1}(\partial\bar{S}, \tilde{V}_\lambda)$ el peso de $H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{ijkl})_*}(\lambda))$ debe ser $\geq l(w_{ijkl}) + 1 - c$ que en este caso es equivalente a decir que

$$a_l + a_k - a_i - a_j \geq 0$$

En conclusión, a fin de contribuir a una clase fantasma una condición necesaria para el espacio $H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{ijkl})_*}(\lambda))$ es que $a_l + a_k - a_i - a_j \geq 0$, esto será posible solo en el caso $a_i = a_k$ y $a_j = a_l$, y en dicho caso el peso del espacio $H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{ijkl})_*}(\lambda))$ es el peso medio de $H^{l(w_{ijkl})+1}(\partial\bar{S}, \tilde{V}_\lambda)$ que es $-c + l(w_{ijkl}) + 1$.

Para los casos $i < l < j < k$, $j < k < i < l$ y $j < l < i < k$, lo único que cambia en el cálculo anterior es $l(w_{ijkl})$ que en este caso es mayor, como resultado podemos ver que los espacios correspondientes $H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{ijkl})_*}(\lambda))$ no contribuyen a clases fantasma.

Consideramos ahora el caso $i < k < l < j$. Para dicho caso sea $w_{ijkl} = \tilde{w}w_1$ la expresión de w_{ijkl} con respecto a la descomposición $W^{P_0} = W_1^0 W^{P_1}$. Estudiaremos en que casos el espacio $Ind_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{ijkl})_*}(\lambda))$ está incluido en la imagen de

$H^{l(w_{ijkl})}(\partial_1, \tilde{V}_\lambda) \rightarrow H^{l(w_{ijkl})}(\partial_0, \tilde{V}_\lambda)$. Para ello necesitamos utilizar la sucesión exacta larga en cohomología

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^{l(\tilde{w})}(S^{MP_1}, \tilde{W}_{(w_1)_*(\lambda)}) &\rightarrow \bigoplus_{\hat{w} \in W_1^0, l(\hat{w})=l(\tilde{w})} Ind_{P_0^1(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0^1(\mathbb{R}))}^{M_{P_1}(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(M_{P_1}(\mathbb{R}))} H^0(S^{MP_0}, \tilde{W}_{(\hat{w})_*(w_1)_*(\lambda)}) \rightarrow \\ &H_c^{l(\tilde{w})+1}(S^{MP_1}, \tilde{W}_{(w_1)_*(\lambda)}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Como sabemos los pesos en $H_c^{l(\tilde{w})+1}(S^{MP_1}, \tilde{W}_{(w_1)_*(\lambda)})$ son $\leq l(\tilde{w}) + 1 + wt(w_1, P_1)$ mientras que el peso en el espacio $H^0(S^{MP_0}, \tilde{W}_{(w_{ijkl})_*(\lambda)})$ es $wt(w_{ijkl}, P_0)$, en particular si $wt(w_{ijkl}, P_0)$ es mayor que $l(\tilde{w}) + 1 + wt(w_1, P_1)$ entonces el espacio $Ind_{P_0^1(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0^1(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^0(S^{MP_0}, \tilde{W}_{(w_{ijkl})_*(\lambda)})$ está incluido en la imagen del morfismo desde $H^{l(\tilde{w})}(S^{MP_1}, \tilde{W}_{(w_1)_*(\lambda)})$. Sabemos, por la subsección 4.6, que

$$wt(w_{ijkl}, P_0) = wt(w_1, P_1) + (a_k + n - 1 - k) - (a_j + 2 - j)$$

luego $wt(w_{ijkl}, P_0) > l(\tilde{w}) + 1 + wt(w_1, P_1)$ si y solo si

$$(a_k + n - 1 - k) - (a_j + 2 - j) > l(\tilde{w}) + 1$$

pero en este caso podemos ver que $l(\tilde{w}) = (n - 1) - k + (j - 2) - 2$ luego la última desigualdad es simplemente $a_k - a_j > -1$ que es siempre verdadera, y como conclusión el espacio $Ind_{P_0^1(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0^1(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^0(S^{MP_0}, \tilde{W}_{(w_{ijkl})_*(\lambda)})$ no contribuye a una clase fantasma dado que está incluido en la imagen del morfismo $H^{l(w_{ijkl})}(\partial_1, \tilde{V}_\lambda) \rightarrow H^{l(w_{ijkl})}(\partial_0, \tilde{V}_\lambda)$.

Los mismos argumentos se aplican a los casos $k < i < j < l$, $k < i < l < j$, $k < l < i < j$, $k < l < j < i$, $l < k < i < j$.

Estudiamos el caso $i < l < k < j$ combinando ambas estrategias. Suponemos que $H^0(S^{MP_0}, \tilde{W}_{(w_{ijkl})_*(\lambda)})$ contribuye a una clase fantasma. Entonces por los argumentos ya utilizados tenemos que

$$wt(w_{ijkl}, P_0) \geq -c + l(w_{ijkl}) + 1$$

mientras que por otro lado, tomando $w_{ijkl} = \tilde{w}w_1$ la expresión con respecto a $W^{P_0} = W_1^0 W^{P_1}$, como este espacio no está incluido en la imagen de $H^{l(w_{ijkl})}(\partial_1, \tilde{V}_\lambda) \rightarrow H^{l(w_{ijkl})}(\partial_0, \tilde{V}_\lambda)$ tenemos que

$$wt(w_{ijkl}, P_0) \leq l(\tilde{w}) + 1 + wt(w_1, P_1).$$

En este caso $l(w_{ijkl}) = (i - 1) + (j - 2) + (n - k) - 1 + (n - l) - 1$, $l(\tilde{w}) = (j - 3) + (n - k) - 1$ y $wt(w_1, P_1) = -c + (a_l + n - l) - (a_i + 1 - i)$, luego por la segunda desigualdad tenemos

$$a_k - a_j \leq 0$$

que en este caso solo es posible si $a_k = a_j$.

Por otro lado, como $wt(w_{ijkl}, P_0) \geq -c + l(w_{ijkl}) + 1$ concluimos, por los cálculos previos que $a_l - a_i \geq 0$ y esto implica finalmente que $a_i = a_l$.

En conclusión, el espacio $H^0(S^{MP_0}, \tilde{W}_{(w_{ijkl})_*(\lambda)})$ solo puede contribuir a una clase fantasma si $a_i = a_l$ y $a_k = a_j$ y en dicho caso su peso es $-c + l(w_{ijkl}) + 1$ que es el peso medio.

Continuamos con el caso $k < j < i < l$. Podemos aplicar los mismos argumentos, luego suponiendo que el espacio $H^0(S^{MP_0}, \tilde{W}_{(w_{ijkl})_*(\lambda)})$ contribuye a una clase fantasma, tenemos

las desigualdades

$$wt(w_{ijkl}, P_0) \geq -c + l(w_{ijkl}) + 1$$

y

$$wt(w_{ijkl}, P_0) \leq l(\tilde{w}) + 1 + wt(w_1, P_1).$$

donde $w_{ijkl} = \tilde{w}w_1$ con respecto a la descomposición $W^{P_0} = W_1^0 W^{P_1}$.

En este caso podemos demostrar que $l(w_{ijkl}) = (i-1) + (j-1) + (n-1-k) - 2 + (n-l)$, $l(\tilde{w}) = (j-1) + (n-1-k) - 2$ y $wt(w_1, P_1) = -c + (a_l + n - l) - (a_i + 1 - i)$, luego por la segunda desigualdad obtenemos $a_k - a_j \leq 0$ y como $a_k \geq a_j$ tenemos que $a_k = a_j$. Por el otro lado, por la primera desigualdad obtenemos

$$a_l + a_k - a_i - a_j \geq 0$$

que en este caso es equivalente a $a_l = a_i$. Entonces el peso del espacio $H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{ijkl})_*}(\lambda))$ es $-c + l(w_{ijkl}) + 1$ que es el peso medio.

Para el caso $j < l < k < i$ utilizaremos los resultados de [Ha]. Sea $w_{ijkl} = \hat{w}w_2$ la expresión con respecto a $W^0 = W_2^0 W^{P_2}$, entonces $\hat{w} = s_1 \circ s_2$, con la notación de la subsección 4.5, y $w_2 = w_{jilk}$. Luego, en particular estamos en el caso no equilibrado con respecto a [Ha]. Esto significa que si consideramos el morfismo

$$H^2(S^{M_{P_2}}, \tilde{W}_{(w_2)_*}(\lambda)) \rightarrow \text{Ind}_{P_0^2(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0^2(\mathbb{R}))}^{M_{P_2}(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(M_{P_2}(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{ijkl})_*}(\lambda))$$

(donde los primeros dos términos en $(w_2)_*(\lambda)$ son $(a_j + 1 - j)$ y $(a_i + 2 - i)$ mientras que los últimos dos términos son $(a_l + (n-1) - l)$ y $(a_k + n - k)$) entonces su imagen contiene al espacio $\text{Ind}_{P_0^2(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0^2(\mathbb{R}))}^{M_{P_2}(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(M_{P_2}(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{ijkl})_*}(\lambda))$ a menos que $(a_j + 1 - j) = (a_i + 2 - i)$ y $(a_l + (n-1) - l) = (a_k + n - k)$. Pero $(a_j + 1 - j) = (a_i + 2 - i)$ implica $(a_j - a_i) = (j - i) + 1$ lo cual no es posible en nuestro caso pues $(j - i) + 1 < 0$ mientras $(a_j - a_i) \geq 0$. Como conclusión, el espacio $\text{Ind}_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{ijkl})_*}(\lambda))$ no contribuye a una clase fantasma pues está incluido en la imagen del morfismo $H^{l(w_{ijkl})}(\partial_2, \tilde{V}_\lambda) \rightarrow H^{l(w_{ijkl})}(\partial_0, \tilde{V}_\lambda)$.

Por los mismos argumentos podemos ver que en los casos $l < j < i < k$ y $l < j < k < i$, el espacio $H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{ijkl})_*}(\lambda))$ no contribuye a una clase fantasma.

En el caso $l < k < j < i$, suponiendo que el espacio $H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{ijkl})_*}(\lambda))$ contribuye a una clase fantasma, por los mismos argumentos utilizados en el caso anterior podemos ver que $(a_j + 1 - j) = (a_i + 2 - i)$ y $(a_l + (n-1) - l) = (a_k + n - k)$, pero esto solo puede ser posible si $i = j + 1$, $a_i = a_j$, $k = l + 1$ y $a_k = a_l$. Pero entonces el peso de dicho espacio será

$$-c + (a_l + n - l) + (a_k + (n-1) - k) - (a_i + 1 - i) - (a_j + 2 - j).$$

Por otro lado, como $\text{Ind}_{P_0^2(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0^2(\mathbb{R}))}^{M_{P_2}(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(M_{P_2}(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_0}, \tilde{W}_{(w_{ijkl})_*}(\lambda))$ no está incluido en la imagen de $H^{l(w_{ijkl})}(\partial_1, \tilde{V}_\lambda) \rightarrow H^{l(w_{ijkl})}(\partial_0, \tilde{V}_\lambda)$ debemos tener

$$wt(w_{ijkl}, P_0) \leq l(\tilde{w}) + 1 + wt(w_1, P_1).$$

(donde $w_{ijkl} = \tilde{w}w_1$ con respecto a $W^{P_0} = W_1^0 W^{P_1}$) pero $l(w_{ijkl}) = (i-1) + (j-1) + (n-k) - 2 + (n-l) - 2$, $l(\tilde{w}) = (j-2) + ((n-1)-k) - 1$ y $wt(w_1, P_1) = -c + (a_l + n - l) - (a_i + 1 - i)$, luego la desigualdad previa implica $a_k - a_j \leq 0$ lo cual implica, en este caso, $a_i = a_j = a_k = a_l$.

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} wt(w_{ijkl}, P_0) &= -c + (n - l) + ((n - 1) - k) - (1 - i) - (2 - j) \\ &= -c + l(w_{ijkl}) + 2 \end{aligned}$$

que es el peso medio mas 1.

Nuevamente consideramos los resultados de [Ha], pero esta vez para estudiar el caso $j < k < l < i$. Consideramos la expresión $w_{ijkl} = \hat{w}w_2$ con respecto a $W^{P_0} = W_2^0 W^{P_2}$, entonces $\hat{w} = s_1$ con respecto a la notación de la subsección 4.5 y $w_2 = w_{jilk}$. Si $H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{ijkl})_*}(\lambda))$ contribuye a una clase fantasma entonces sabemos que

$$wt(w_{ijkl}, P_0) \geq -c + l(w_{ijkl}) + 1$$

y entonces obtenemos $a_l + a_k \geq a_i + a_j$.

Debemos considerar el morfismo

$$H^1(S^{M_{P_2}}, \tilde{W}_{(w_2)_*}(\lambda)) \rightarrow \text{Ind}_{P_0^2(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0^2(\mathbb{R}))}^{M_{P_2}(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(M_{P_2}(\mathbb{R}))} (H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{ijkl})_*}(\lambda)) \oplus H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{jilk})_*}(\lambda))).$$

A fin de aplicar los resultados del Teorema 2 de [Ha] necesitamos demostrar que $\{w_{ijkl}, w_{jilk}\}$ está en la cámara fundamental (ver 2.5), pero esto es

$$(a_i + 1 - i) - (a_j + 2 - j) + (a_k + (n - 1) - k) - (a_l + n - l) \leq -2$$

y la dicha desigualdad está claramente satisfecha debido al orden de i, j, k y l . Luego utilizando el teorema mencionado tenemos que $\text{Ind}_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{ijkl})_*}(\lambda))$ está incluido en la imagen del morfismo

$$H^{l(w_{ijkl})}(\partial_1, \tilde{V}_\lambda) \oplus H^{l(w_{ijkl})}(\partial_2, \tilde{V}_\lambda) \rightarrow H^{l(w_{ijkl})}(\partial_0, \tilde{V}_\lambda)$$

siempre que $\text{Ind}_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{jilk})_*}(\lambda))$ esté incluido en la imagen de

$$H^{l(w_{ijkl})}(\partial_1, \tilde{V}_\lambda) \rightarrow H^{l(w_{ijkl})}(\partial_0, \tilde{V}_\lambda)$$

luego, en el caso en el que $H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{ijkl})_*}(\lambda))$ contribuye a una clase fantasma, el espacio $\text{Ind}_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_0}, \tilde{W}_{(w_{jilk})_*}(\lambda))$ no está incluido en dicha imagen y por el tratamiento del caso $i < l < k < j$ podemos mostrar que esto implica $a_l = a_i$. Utilizando las desigualdades hasta aquí obtenidas podemos mostrar que si el espacio $H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{ijkl})_*}(\lambda))$ contribuye a una clase fantasma entonces $a_i = a_l$, $a_j = a_k$ y su peso es el peso medio $-c + l(w_{ijkl}) + 1$.

Siguiendo el mismo análisis que en el caso anterior obtenemos el mismo resultado para el caso $l < i < j < k$.

Consideremos el caso $k < j < l < i$ y supongamos que el espacio

$$\text{Ind}_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{ijkl})_*}(\lambda))$$

contribuye a una clase fantasma. Entonces, como este espacio no está incluido en la imagen de $H^{l(w_{ijkl})}(\partial_1, \tilde{V}_\lambda) \rightarrow H^{l(w_{ijkl})}(\partial_0, \tilde{V}_\lambda)$ obtenemos la desigualdad

$$wt(w_{ijkl}, P_0) \leq 1 + l(\tilde{w}) + wt(w_1, P_1)$$

donde $w_{ijkl} = \tilde{w}w_1$ es la expresión de w_{ijkl} con respecto a $W^{P_0} = W_1^0 W^{P_1}$. De dicha desigualdad obtenemos que $a_k = a_j$.

Podemos aplicar el Teorema 2 de [Ha] para el caso equilibrado, y para ello necesitamos entender si $Ind_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{ijkl})_*(\lambda)})$ está incluido en la imagen de $H(\partial_1, \tilde{V}_\lambda) \rightarrow H(\partial_0, \tilde{V}_\lambda)$ y si $\{w_{ijkl}, w_{jilk}\}$ está en la cámara fundamental (con respecto a la notación de la subsección 2.5).

Con los mismos argumentos que en el caso anterior podemos concluir que si $a_l > a_i$ entonces $Ind_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{jilk})_*(\lambda)})$ está incluido en la imagen de $H(\partial_1, \tilde{V}_\lambda) \rightarrow H(\partial_0, \tilde{V}_\lambda)$. Luego tenemos los casos:

- 1) $a_i = a_l$, en cuyo caso, si $H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{ijkl})_*(\lambda)})$ contribuye a una clase fantasma entonces su peso es $-c + l(w_{ijkl}) + 2$ que es el peso medio mas 1.
- 2) $a_l > a_i$. En este caso tenemos que $\{w_{ijkl}, w_{jilk}\}$ está en la cámara fundamental si y solo si $(a_i - a_l) \leq (i+k) - (j+l)$. Sabemos que si $\{w_{ijkl}, w_{jilk}\}$ está en la cámara fundamental, el espacio $Ind_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_0}, \tilde{W}_{(w_{ijkl})_*(\lambda)})$ está incluido en la imagen de

$$H(\partial_1, \tilde{V}_\lambda) \oplus H(\partial_2, \tilde{V}_\lambda) \rightarrow H(\partial_0, \tilde{V}_\lambda).$$

Luego, a fin de contribuir a una clase fantasma necesitamos $(a_i - a_l) > (i+k) - (j+l)$, en cuyo caso si el espacio $H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{ijkl})_*(\lambda)})$ contribuye a una clase fantasma entonces su peso es $-c + l(w_{ijkl}) + 2 + (a_l - a_i)$ que es el peso medio mas $1 + (a_l - a_i)$.

Los mismos resultados pueden obtenerse para el caso $l < i < k < j$.

Para concluir, daremos una lista de los resultados de los cálculos precedentes en el siguiente teorema.

Teorema 26. *Utilizando la notación de esta sección hemos demostrado que los casos:*

$$\begin{array}{lll} i < j < k < l, & i < j < l < k, & j < i < k < l, & j < i < l < k \\ i < l < j < k, & j < k < i < l, & j < l < i < k, & i < k < l < j \\ k < i < j < l, & k < i < l < j, & k < l < i < j, & k < l < j < i \\ l < k < i < j, & j < l < k < i, & l < j < i < k, & l < j < k < i \end{array}$$

no contribuyen a clases fantasma. Los casos $i < k < j < l$ y $l < k < j < i$ podrían contribuir a clases fantasma solo cuando $a_i = a_j = a_k = a_l$. Para el caso $i < k < j < l$ esta posible clase fantasma tendría peso igual al peso medio mientras que en el caso $l < k < j < i$ la posible clase fantasma tendría peso igual al peso medio mas 1.

Para los casos $i < l < k < j, k < j < i < l, l < i < j < k$ y $j < k < l < i$, tenemos posibles clases fantasma solo en los casos $a_i = a_l$ y $a_k = a_j$, en cuyo caso el peso de la posible clase fantasma sería igual al peso medio.

Los casos $k < j < l < i$ y $l < i < k < j$ podrían contribuir a clases fantasma solo en el caso $a_k = a_j$. En este caso, si $a_i = a_l$ entonces la posible clase fantasma tendría peso igual al peso medio mas 1. Por otro lado si $a_i < a_l$ entonces la existencia de una clase fantasma es posible cuando $(a_i - a_l) > (i+k) - (j+l)$ en cuyo caso la posible clase fantasma tendría peso igual al peso medio mas $1 + (a_l - a_i)$.

4.8.3 Conclusiones sobre la propiedad débil del peso medio para los casos $n = 5$ y $n = 6$

Por el análisis dado en la subsección precedente, tenemos que para n fijo, los únicos posibles pesos contradiciendo la propiedad débil del peso medio provienen de los espacios de cohomología $H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{ijkl})_*(\lambda)})$ con $k < j < l < i$ y $\lambda = (a_1, \dots, a_n, c)$ satisfaciendo $a_k = a_j$, $a_l > a_i$ y $(a_i - a_l) > (i + k) - (j + l)$ o con $l < i < k < j$ y $\lambda = (a_1, \dots, a_n, c)$ satisfaciendo $a_k = a_j$, $a_l > a_i$ y $(a_i - a_l) > (i + k) - (j + l)$.

Para $n = 5$ tenemos que, si $k < j < l < i$ entonces $(i + k) - (j + l) \geq -1$, luego no es posible obtener $a_l > a_i$ y $(a_i - a_l) > (i + k) - (j + l)$. Lo mismo es válido para el caso $l < i < k < j$. Luego como resultado obtenemos:

Teorema 27. *Para $n = 5$, la propiedad débil del peso medio está satisfecha. En otras palabras, si existe una clase fantasma en el espacio de cohomología del borde entonces su peso es el peso medio o el peso medio mas 1.*

Para el caso $n = 6$ hay dos casos en los cuales pueden existir clases fantasma no satisfaciendo la propiedad débil del peso medio.

Estos dos casos estan dados por los elementos de Weyl $w = w_{6415}$, cuando el peso maximal es de la forma $\lambda = (a, a, a, a, b + 1, b)$ y w_{2631} , cuando el peso maximal es de la forma $\lambda = (b + 1, b, a, a, a, a)$, donde en el primer caso $a > b$ mientras que en el segundo caso $b \geq a$.

Teorema 28. *Para $n = 6$, los únicos posibles casos en los cuales la propiedad débil del peso medio podría no ser satisfecha son (con la notación de la subsección precedente)*

- 1) *Peso maximal $\lambda = (a, a, a, a, b + 1, b)$, $a > b$, y la imagen del morfismo desde*

$$H^2(S^{M_{P_2}}, \tilde{W}_{(w_{6415})_*(\lambda)})$$

a

$$\text{Ind}_{P_0^2(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0^2(\mathbb{R}))}^{M_{P_2}(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(M_{P_2}(\mathbb{R}))} (H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{6415})_*(\lambda)}) \oplus H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{6415})_*(\lambda)}))$$

compuesto con la proyección al segundo factor no suryectiva (esta condición es analizada en [Ha] y está relacionada con ciertos operadores locales de entrelazamiento) en cuyo caso las posibles clases fantasma provienen de la contribución del espacio de cohomología asociado al representante de Weyl w_{6415} .

- 2) *Peso maximal $\lambda = (b + 1, b, a, a, a, a)$, $b \geq a$, y la imagen del morfismo desde*

$$H^2(S^{M_{P_2}}, \tilde{W}_{(w_{2613})_*(\lambda)})$$

a

$$\text{Ind}_{P_0^2(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0^2(\mathbb{R}))}^{M_{P_2}(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(M_{P_2}(\mathbb{R}))} (H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{2613})_*(\lambda)}) \oplus H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{2613})_*(\lambda)}))$$

compuesto con la proyección al segundo factor no suryectiva, en cuyo caso las posibles clases fantasma provienen de la contribución del espacio de cohomología asociado al representante de Weyl w_{2631} .

Demostración. Podemos ver que estas dos clases son las únicas posibilidades para i, j, k, l y λ para las cuales estamos en los casos $k < j < l < i$ o $l < i < k < j$ y $a_k = a_j$, $a_i < a_l$ y $(a_i - a_l) > (i + k) - (j + l)$.

Estudiamos, primero el caso $w = w_{6415}$, $\lambda = (a, a, a, a, b + 1, b)$.

La longitud de w_{6415} es

$$l(w_{6415}) = 10$$

luego en este caso el peso medio es $-c + 11$, como $Ind_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{6415})_*(\lambda)})$ es sumando directo de $H^{l(w_{6415})}(\partial_0, \tilde{V}_\lambda)$. Entonces para este caso particular obtenemos que el peso medio es $-c + 11$ y el peso del espacio $H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{6415})_*(\lambda)})$ es $-c + 13$

Ahora analizamos la imagen desde $H(\partial_1, \tilde{V}_\lambda)$. Sea $w_{6415} = \tilde{w}w_1$ la expresión de w_{6415} con respecto a la descomposición $W^{P_0} = W_1^0 W^{P_1}$, entonces $l(\tilde{w}) = 5$. Si consideramos

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^{l(\tilde{w})}(S^{M_{P_1}}, \tilde{W}_{(w_1)_*(\lambda)}) &\rightarrow \bigoplus_{\tilde{w} \in W_1^0, l(\tilde{w})=l(\tilde{w})} Ind_{P_0^1(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0^1(\mathbb{R}))}^{M_{P_1}(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(M_{P_1}(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_0}, \tilde{W}_{(\tilde{w})_*(w_1)_*(\lambda)}) \rightarrow \\ &H_c^{l(\tilde{w})+1}(S^{M_{P_1}}, \tilde{W}_{(w_1)_*(\lambda)}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

obtenemos que los pesos de esta sucesión exacta son:

- .) Los pesos en $H^{l(\tilde{w})}(S^{M_{P_1}}, \tilde{W}_{(w_1)_*(\lambda)})$ son $\geq l(\tilde{w}) + wt(P_1, w_1)$, y para ser mas explícitos, ellos son $\geq -c + 12$.
- .) El peso de $H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{6415})_*(\lambda)})$ es $-c + 13$
- .) Los pesos en $H_c^{l(\tilde{w})+1}(S^{M_{P_1}}, \tilde{W}_{(w_1)_*(\lambda)})$ son $\leq l(\tilde{w}) + 1 + wt(P_1, w_1)$, en otras palabras ellos son $\leq -c + 13$

Luego por argumentos de pesos no podemos concluir si el espacio

$$Ind_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_0}, \tilde{W}_{(w_{6415})_*(\lambda)})$$

está incluido en la imagen desde $H^\bullet(\partial_1, \tilde{V}_\lambda)$.

De esto concluimos que una condición necesaria para el espacio

$$Ind_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{6415})_*(\lambda)})$$

para contribuir a una clase fantasma es que no esté incluido en la imagen de $H^{10}(\partial_1, \tilde{V}_\lambda)$ y el morfismo

$$H^1(S^{M_{P_2}}, \tilde{W}_{(w_{4615})_*(\lambda)}) \rightarrow Ind_{P_0^2(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0^2(\mathbb{R}))}^{M_{P_2}(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(M_{P_2}(\mathbb{R}))} (H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{4651})_*(\lambda)}) \oplus H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{6415})_*(\lambda)}))$$

descrito en el Teorema 2 de [Ha] compuesto con la proyección al segundo factor no sea suryectivo.

Estudiamos ahora el caso $w = w_{2631}$, $\lambda = (b+1, b, a, a, a, a)$. Para este caso, los cálculos son similares y obtenemos lo siguiente.

La longitud de w_{2631} es

$$l(w_{2631}) = 10.$$

luego el peso medio es $-c + 11$ y el peso del espacio $H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{2631})_*(\lambda)})$ es $-c + 13$

Consideramos $w_{2631} = \tilde{w}w_1$ la expresión de w_{2631} con respecto a la descomposición $W^{P_0} = W_1^0 W^{P_1}$, entonces $l(\tilde{w}) = 5$.

Como en el caso previo tenemos que no podemos concluir si el espacio

$$Ind_{P_0(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0(\mathbb{R}))}^{G(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(G(\mathbb{R}))} H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{2631})_*(\lambda)})$$

está incluido en la imagen desde $H^\bullet(\partial_1, \tilde{V}_\lambda)$, y como conclusión tenemos que una condición necesaria para que este espacio contribuya a una clase fantasma es que no esté incluido en la imagen de $H^\bullet(\partial_1, \tilde{V}_\lambda)$ y la imagen del morfismo

$$H^1(S^{M_{P_2}}, \tilde{W}_{(w_{2613})_*(\lambda)}) \rightarrow \text{Ind}_{P_0^2(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(P_0^2(\mathbb{R}))}^{M_{P_2}(\mathbb{A}_f) \times \pi_0(M_{P_2}(\mathbb{R}))} (H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{6213})_*(\lambda)}) \oplus H^0(S^{M_{P_0}}, \tilde{W}_{(w_{2631})_*(\lambda)}))$$

descrito en [Ha] compuesto con la proyección al segundo factor no sea suryectivo. □

Bibliografía

- [B] A. Borel and J. P. Serre, Corners and arithmetic groups, Comm. Math. Helv., 1973.
- [D] P. Deligne, Espaces Hermitiens Symetriques, Notes from a course at I.H.E.S..
- [Ha] G. Harder, Eisenstein cohomology of arithmetic groups, The case GL_2 , Inventiones mathematicae, 1987.
- [H I] M. Harris, Arithmetic Vector Bundles and Automorphic Forms on Shimura Varieties I, Inventiones mathematicae, 1985.
- [H II] M. Harris, Arithmetic Vector Bundles and Automorphic Forms on Shimura Varieties II, Compositio Mathematica, 1986.
- [H-Z] M. Harris and S. Zucker, Boundary Cohomology of Shimura Varieties I, Coherent cohomology on toroidal compactifications, Annales scientifiques de l'E.N.S., 1994.
- [H-Z II] M. Harris and S. Zucker, Boundary Cohomology of Shimura Varieties II, Hodge theory at the boundary, Inventiones mathematicae, 1994.
- [H-Z II'] M. Harris and S. Zucker, Erratum, Boundary cohomology of Shimura varieties II, Hodge theory at the boundary, Inventiones mathematicae, 1995.
- [H-Z III] M. Harris and S. Zucker, Boundary Cohomology of Shimura Varieties II, Coherent cohomology on higher-rank boundary strata and applications to Hodge theory, Memoires de la SMF, 2001.
- [K] B. Kostant, Lie Algebra Cohomology and the Generalized Borel-Weil Theorem, Annals of Mathematics, 1961.
- [KR] A. Kewenig, T. Rieband, Geisterklassen im Bild der Borelabbildung für symplektische und orthogonale Gruppen, Bonn, 1997.
- [M] J. Milne, Introduction to Shimura Varieties, Harmonic Analysis, the Trace Formula and Shimura Varieties, 2003.
- [Mo] S. Morel, On the cohomology of certain non-compact Shimura varieties, Annals of Mathematics Studies 173, Princeton University Press, 2010.

- [P-R] V. Platonov and A. Rapinchuk, Algebraic groups and number theory, Vol. 139 of Pure and Applied Mathematics, Academic Press Inc., 1994.
- [S] J. Schwermer, Cohomology of arithmetic groups, automorphic forms and L-functions, Lecture Notes in Mathematics Volume 1447, 1990.
- [S II] J. Schwermer, Eisenstein series and cohomology of arithmetic groups, *Inventiones mathematicae*, 1994.
- [Z] S. Zucker, Locally Homogeneous Variations of Hodge Structures, *L'enseignement mathématique*, 1981.
- [Z II] S. Zucker, On the Boundary Cohomology of Locally Symmetric Varieties, *Vietnam Journal of Mathematics*, 1997.