

Métricas hermitianas minimales y solitones de Chern-Ricci en grupos de Lie

por Edwin Alejandro Rodríguez Valencia

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía y Física como parte de los requerimientos para la obtención del grado de Doctor en Matemática de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Septiembre de 2013

©FAMAF-UNC 2013

Director: Dr. Jorge Lauret

A Luza

Resumen

En este trabajo estudiaremos los solitones del Flujo de Ricci Complexificado (cxRF) para grupos de Lie nilpotentes de dimensión 6, desde un punto de vista algebraico, aplicando resultados dados por la teoría geométrica de invariantes. También estudiaremos el Flujo de Chern-Ricci (CRF) en grupos de Lie, concentrándonos en resultados sobre soluciones auto-similares y de convergencia.

En la primera parte, siguiendo la parametrización dada en [ABD], estudiamos la existencia de métricas minimales en cada una de las nilvariedades complejas abelianas que figuran en dicha parametrización, y por medio de esto proporcionamos una prueba alternativa de los no isomorfismos dos a dos entre las estructuras, usando invariantes polinomiales a través de las *formas Pfaffianas*. Por otro lado, se exhiben varias familias de estructuras complejas abelianas en álgebras de Lie 2-pasos nilpotentes de dimensión 8, usando el hecho que todas ellas admiten métricas minimales de *tipo* $(1 < 2; 4, 4)$ ó $(1 < 2; 6, 2)$.

Luego, determinamos todas las estructuras complejas (no abelianas) que admiten una métrica compatible minimal en grupos de Lie nilpotentes de dimensión 6, es decir, clasificamos los solitones del cxRF en todas las estructuras complejas en grupos de Lie nilpotentes de dimensión 6.

Y por último, se dan resultados estructurales para los solitones del CRF, se analizan los posibles límites de las soluciones al *Flujo de Corchetes* bajo diversos reescalamientos, y concluimos con el estudio del problema de la existencia de CR-solitones invariantes a izquierda en todas las estructuras complejas en grupos de Lie solubles de dimensión 4.

Palabras claves: nilvariedades, métricas minimales, flujo de Ricci complexificado, flujo de Chern-Ricci, solitones.

2010 Mathematics Subject Classification. Primary: 53C15, 32Q15; Secondary: 53C30, 22E25, 53D20.

Índice general

Resumen	III
Introducción	VII
1. Preliminares	1
1.0.1. Estructuras complejas	1
1.0.2. Una estratificación para la variedad de álgebras de Lie nilpotentes	2
1.0.3. Raíces y pesos	3
2. Invariantes de estructuras complejas en nilvariedades	5
2.1. Invariantes	5
2.1.1. Métricas minimales	5
2.1.2. La Forma Pfaffiana	8
2.2. Métricas minimales en nilvariedades complejas abelianas de dimensión 6	11
2.3. Resultados obtenidos en dimensión ocho	19
2.3.1. Caso (4,4)	19
2.3.2. Caso (6,2)	23
3. Métricas minimales en nilvariedades complejas de dimensión 6	27
3.1. Métricas minimales en nilvariedades complejas	27
3.2. Clasificación de las métricas minimales en grupos de Lie nilpotentes de dimensión 6 .	30
4. Sobre el flujo de Chern-Ricci y sus solitones para grupos de Lie	35
4.1. La forma de Chern-Ricci	35
4.2. El flujo de Chern-Ricci	36
4.3. Solitones de Chern-Ricci	39
4.4. Convergencia	40
4.5. Grupos de Lie de dimensión 4	45
Bibliografía	51

Introducción

Se define una *estructura compleja invariante* en un grupo de Lie G como un tensor obtenido al trasladar por multiplicación a izquierda un mapa $J : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ tal que $J^2 = -I$ y satisface una cierta condición de integrabilidad

$$\text{IC}(J, \mu) = 0,$$

involucrando sólo a J y al corchete de Lie μ de \mathfrak{g} . Al par (G, J) lo llamaremos *grupo de Lie complejo*. En este trabajo nos enfocaremos en las estructuras complejas en grupos de Lie nilpotentes y solubles; ver la sección 1.0.1 para más detalles sobre las estructuras complejas en grupos de Lie.

La primera pregunta natural que surge es la siguiente:

¿Cuáles grupos de Lie admiten una estructura compleja invariante?

La clasificación de las álgebras de Lie reales nilpotentes de dimensión 6 que admiten una estructura compleja fue dada en [S], y el caso (nilpotente) abeliano en [CFU]. Posteriormente, A. Andrada, M.L. Barberis y I.G. Dotti en [ABD] dan una clasificación de todas las álgebras de Lie de dimensión menor o igual a 6, incluyendo las no nilpotentes, que admiten una estructura compleja abeliana. En dimensiones más altas no se conocen clasificaciones.

Ahora, si un grupo de Lie admite una estructura compleja, cabe preguntarse si es única o no. Más en general, se puede formular de la siguiente manera:

Dado un grupo de Lie G , ¿Cómo distinguir dos estructuras complejas invariantes en G ?

En [ABD], se da además una parametrización, en cada álgebra de Lie ($\dim \leq 6$), del espacio de todas las estructuras complejas abelianas salvo *isomorfismo holomórfico*. En particular, existen tres álgebras de Lie nilpotentes munidas con curvas de estructuras no equivalentes. Por otro lado, M. Ceballos, A. Otal, L. Ugarte, y R. Villacampa en [COUV] dan una clasificación completa, salvo *equivalencia*, de todas las estructuras complejas en álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 6, es decir incluyen las estructuras no abelianas. Para las álgebras de Lie solubles, en [O] se da una clasificación completa, salvo equivalencia, de todas las estructuras complejas en álgebras de Lie solubles de dimensión 4.

El principal inconveniente para clasificar estructuras salvo *isomorfismo* es la tremenda escasez de invariantes. A este respecto, la existencia de una única métrica compatible *canónica*, donde determinar el significado de canónica es parte del problema, nos provee de una herramienta muy útil para distinguir dos estructuras complejas; en efecto, si son isomorfas, entonces las correspondientes métricas deben ser necesariamente isométricas. Uno puede entonces distinguir estructuras con geometría riemanniana, la cual, sabemos, nos provee de una gran cantidad de invariantes. Este enfoque fue desarrollado en [L1, L5].

Sean N un grupo de Lie nilpotente real de dimensión $2n$, con álgebra de Lie \mathfrak{n} , y J una estructura compleja invariante en N . Una métrica invariante a izquierda compatible con la *nilvariedad* (N, J) , también llamada una *métrica hermitiana*, es determinada por un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en \mathfrak{n} tal que

$$\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{n}.$$

Consideremos

$$\text{Ric}^c_{\langle \cdot, \cdot \rangle} := \frac{1}{2} (\text{Ric}_{\langle \cdot, \cdot \rangle} - J \text{Ric}_{\langle \cdot, \cdot \rangle} J),$$

la parte J -invariante del operador de Ricci $\text{Ric}_{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ de la variedad hermitiana $(N, J, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, y la correspondiente $(1, 1)$ -componente del tensor de Ricci $\text{ric}^c_{\langle \cdot, \cdot \rangle} := \langle \text{Ric}^c_{\langle \cdot, \cdot \rangle} \cdot, \cdot \rangle$.

Una métrica compatible $\langle \cdot, \cdot \rangle$ con (N, J) es llamada *minimal* if

$$\text{tr} (\text{Ric}^c_{\langle \cdot, \cdot \rangle})^2 = \text{mín} \{ \text{tr} (\text{Ric}^c_{\langle \cdot, \cdot \rangle'})^2 : \text{sc}(\langle \cdot, \cdot \rangle') = \text{sc}(\langle \cdot, \cdot \rangle) \},$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ varía sobre todas las métricas compatibles con (N, J) y $\text{sc}(\langle \cdot, \cdot \rangle) = \text{tr} \text{Ric}_{\langle \cdot, \cdot \rangle} = \text{tr} \text{Ric}^c_{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ es la curvatura escalar.

En [L1], se probó que las siguientes condiciones sobre $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son equivalentes a la condición de minimalidad, mostrando que dichas métricas son los *solitones* del *Flujo de Ricci Complexificado* (cxRF), definido en (1), una razón más que las convierte en un tema de estudio actual:

(i) La solución $\langle \cdot, \cdot \rangle_t$, con valor inicial $\langle \cdot, \cdot \rangle_0 = \langle \cdot, \cdot \rangle$, al cxRF

$$\frac{d}{dt} \langle \cdot, \cdot \rangle_t = -2 \text{ric}^c_{\langle \cdot, \cdot \rangle_t}, \quad (1)$$

es autosimilar, en el sentido de que $\langle \cdot, \cdot \rangle_t = c_t \varphi_t^* \langle \cdot, \cdot \rangle$ para algún $c_t > 0$ y un grupo monoparamétrico de automorfismos φ_t de N .

(ii) Existen un campo vectorial X en N y $c \in \mathbb{R}$ tales que

$$\text{ric}^c_{\langle \cdot, \cdot \rangle} = c \langle \cdot, \cdot \rangle + L_X \langle \cdot, \cdot \rangle,$$

donde $L_X \langle \cdot, \cdot \rangle$ denota la derivada de Lie usual. En analogía con el concepto bien conocido en la teoría del flujo de Ricci, a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se le puede llamar un solitón $(1, 1)$ -Ricci.

(iii) $\text{Ric}^c_{\langle \cdot, \cdot \rangle} = cI + D$ para algún $c \in \mathbb{R}$ y $D \in \text{Der}(\mathfrak{n})$.

La unicidad salvo isometría y multiplicación por escalares de una métrica minimal en una nilvariedad (N, J) dada también fue probada en [L1], y puede ser usada para obtener invariantes de la siguiente manera. Si $(N, J_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ y $(N, J_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ son minimales, y J_1 es equivalente a J_2 (i.e. existe un automorfismo α de \mathfrak{n} tal que $J_2 = \alpha J_1 \alpha^{-1}$), entonces deberían ser conjugados via un automorfismo el cual es una isometría entre $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$.

El problema de existencia de métricas hermitianas minimales para una estructura compleja dada, está lejos de ser entendido, y es uno de los puntos principales a tratar en este trabajo. Una de las herramientas más importantes utilizadas para probar los resultados de métricas hermitianas minimales ha sido el enfoque de “mover corchetes de Lie en lugar de productos internos”, el cual ha sido ampliamente usado para el estudio solvariedades Einstein, y será central en el desarrollo de esta tesis. Este enfoque permite además aplicar la teoría geométrica de invariantes a estos problemas, como se hace en [L3], en donde se aplica a este contexto un procedimiento de estratificación que

proporciona información sobre la variedad de álgebras de Lie (ver Sección 1.0.2 para más detalles de la estratificación); y también en [FC], donde se estudia el problema de determinar si una G -órbita es *distinguida*, con G un grupo de Lie reductivo real.

Además, en el Flujo de Ricci Complexificado sólo se conoce la existencia y unicidad de la solución en el caso homogéneo (ver [L1] para grupos de Lie nilpotentes, y [L9] para homogéneo). Otra forma de evolucionar la métrica es a través del tensor de Chern-Ricci $p(\cdot, J\cdot)$, donde p es la *forma de Chern-Ricci*, obteniendo el Flujo de Chern-Ricci (CRF) (ver [L10],[TW]). En grupos de Lie, el CRF se reduce a un sistema ODE y todos los tensores involucrados son determinados por su valor en la identidad del grupo. Como para el cxRF, es de interés estudiar los solitones para el CRF, lo cual haremos en profundidad en el último capítulo de este trabajo, para grupos de Lie solubles de dimensión 4.

Resultados obtenidos

En este trabajo estudiaremos los solitones del Flujo de Ricci Complexificado para grupos de Lie nilpotentes de dimensión 6, desde un punto de vista algebraico, aplicando resultados dados por la teoría geométrica de invariantes, por medio de la equivalencia (iii) ya mencionada, y del criterio dado en [FC], basado en una representación real reductiva. También estudiaremos el flujo de Chern-Ricci en grupos de Lie, concentrándonos en resultados sobre soluciones auto-similares y de convergencia. Para esto, en el Capítulo 1 veremos algunos preliminares sobre varios temas ya mencionados brevemente en esta introducción, a saber: estructuras complejas en grupos de Lie; variedades hermitianas; la estratificación para la variedad de álgebras de Lie nilpotentes y algunas de sus propiedades; las raíces y pesos de la acción de un grupo de Lie reductivo en el espacio de todas las álgebras antisimétricas de dimensión par.

El **Capítulo 2** corresponde al siguiente trabajo:

- E. Rodríguez-Valencia, *Invariants of complex structures on nilmanifolds*, preprint 2013 (arXiv).

Seguindo la parametrización dada en [ABD], estudiamos la existencia de métricas minimales en cada una de esas nilvariedades complejas abelianas (ver Teorema A), y por medio de esto proporcionamos una prueba alternativa de los no isomorfismos dos a dos entre las estructuras, usando invariantes polinomiales a través de las *formas Pfaffianas* (ver las Secciones 2.1.2 y 2.2). Por último, se exhiben varias familias de estructuras complejas abelianas en álgebras de Lie 2-pasos nilpotentes de dimensión 8, usando el hecho que todas ellas admiten métricas minimales de *tipo* $(1 < 2; 4, 4)$ ó $(1 < 2; 6, 2)$. Esto puede ser visto como un primer paso hacia la clasificación de las estructuras complejas abelianas en nilvariedades de dimensión 8.

Teorema A. Toda nilvariedad compleja abeliana de dimensión 6 admite una métrica minimal, con la única excepción de (N_5, J) .

El **Capítulo 3** corresponde al siguiente artículo:

- E. Rodríguez-Valencia, *Minimal metrics on 6-dimensional complex nilmanifolds*, preprint 2013 (arXiv).

Basados en la clasificación en [COUV], determinamos por medio del criterio dado en [FC], todas las estructuras complejas (no abelianas) que admiten una métrica compatible minimal en grupos de Lie nilpotentes de dimensión 6 (ver Teorema B), es decir, clasificamos los solitones del cxRF en todas las estructuras complejas en grupos de Lie nilpotentes de dimensión 6. En algunos casos se

da explícitamente la métrica minimal, que es cuando se puede aplicar la equivalencia (iii).

Teorema B. Toda nilvariedad compleja no abeliana de dimensión 6 admite una métrica minimal, con las únicas cuatro excepciones de $(N_4^{1/4}, J)$, $(N_5^{0,0}, J)$ y (N_{26}^+, J^\pm) .

Finalmente, el **Capítulo 4** corresponde al artículo:

- J. Lauret and E. Rodríguez-Valencia, *On the Chern-Ricci flow and its solitons for Lie groups*, preprint 2013.

En este capítulo se prueba que toda estructura hermitiana invariante a izquierda en un grupo de Lie nilpotente es un punto fijo para el CRF. A su vez, se dan resultados estructurales para los solitones del CRF, donde uno de los principales es una forma explícita de construir cualquier solitón, usando que cualquier solitón es de la forma $P = cI + D$, para algún $c \in \mathbb{R}$ y $D \in \text{Der}(\mathfrak{g})$.

Por otro lado, se analizan los posibles límites de las soluciones al *Flujo de Corchetes* bajo diversos reescalamientos. Cabe destacar que el flujo de corchetes de Chern-Ricci normalizado, $\mu(t)/|\mu(t)|$, siempre converge a un solitón; y en este caso se determina por completo el límite.

Por último, se estudia el problema de la existencia de CR-solitones invariantes a izquierda en todas las estructuras complejas en grupos de Lie solubles de dimensión 4, obteniendo explícitamente un CR-solitón compatible para toda estructura compleja en todos los grupos de Lie solubles de dimensión 4, con las únicas excepciones de los siguientes seis casos:

$$(\mathfrak{r}'_2, J_1), \quad (\mathfrak{r}_{4,1}, J), \quad (\mathfrak{d}_{4, \frac{1}{2}}, J_2), \quad (\mathfrak{d}'_{4,\delta}, J_1), \quad (\mathfrak{d}'_{4,\delta}, J_2), \quad (\mathfrak{h}_4, J).$$

Capítulo 1

Preliminares

1.0.1. Estructuras complejas

En esta sección, recordaremos las nociones básicas sobre estructuras complejas en grupos de Lie y sus métricas hermitianas.

Sea G un grupo de Lie de dimensión $2n$ simplemente conexo con álgebra de Lie \mathfrak{g} , cuyo corchete de Lie será denotado por $\mu : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$. Una *estructura compleja* invariante sobre G está definida por una aplicación $J : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ que satisface $J^2 = -I$ y tal que

$$\mu(JX, JY) = \mu(X, Y) + J\mu(JX, Y) + J\mu(X, JY), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}. \quad (1.1)$$

Se dice que J es abeliana si la siguiente condición se cumple:

$$\mu(JX, JY) = \mu(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Definición 1.0.1. Dos estructuras complejas J_1 y J_2 en G son *equivalentes* si existe un automorfismo α de \mathfrak{g} que verifica $J_2 = \alpha J_1 \alpha^{-1}$. Dos pares (G_1, J_1) y (G_2, J_2) son *holomórficamente isomorfos* si existe un isomorfismo de álgebras de Lie $\alpha : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ tal que $J_2 = \alpha J_1 \alpha^{-1}$.

Fijamos \mathfrak{g} , un espacio vectorial real de dimensión $2n$, y consideramos como espacio parámetro para el conjunto de todas las álgebras de Lie de una dimensión dada $2n$, al subconjunto algebraico

$$\mathcal{L} := \{\mu \in \Lambda^2 \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g} : \mu \text{ satisface Jacobi}\},$$

donde $\Lambda^2 \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$ es el espacio vectorial de todas las aplicaciones bilineales antisimétricas de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ en \mathfrak{g} .

Para cada $\mu \in \mathcal{L}$, G_μ denota al grupo de Lie simplemente conexo con álgebra de Lie (\mathfrak{g}, μ) . Ahora fijamos una aplicación $J : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ tal que $J^2 = -I$. El correspondiente grupo de Lie

$$GL_n(\mathbb{C}) = \{g \in GL(\mathfrak{g}) : gJ = Jg\}$$

actúa naturalmente sobre $\Lambda^2 \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$ por $g \cdot \mu(\cdot, \cdot) = g\mu(g^{-1}\cdot, g^{-1}\cdot)$, dejando \mathcal{L} invariante, al igual que al subconjunto algebraico $\mathcal{L}_J \subset \mathcal{L}$ dado por

$$\mathcal{L}_J := \{\mu \in \mathcal{L} : \mu \text{ satisface (1.1)}\},$$

esto es, los corchetes de Lie para los cuales J es integrable. Podemos identificar a cada $\mu \in \mathcal{L}_J$ con un *grupo de Lie complejo* de la siguiente manera:

$$\mu \leftrightarrow (G_\mu, J). \quad (1.2)$$

Proposición 1.0.2. *Dos grupos de Lie complejos μ y λ son holomórficamente isomorfos si y sólo si $\lambda \in GL_n(\mathbb{C}) \cdot \mu$.*

Demostración. Si (G_μ, J) y (G_λ, J) son holomórficamente isomorfos, entonces existe un isomorfismo de álgebras de Lie $h^{-1} : (\mathfrak{g}, \lambda) \mapsto (\mathfrak{g}, \mu)$ tal que $J = hJh^{-1}$. Por lo tanto, $\lambda = h \cdot \mu$ y $h \in GL_n(\mathbb{C})$ (tomando sus representaciones matriciales). \square

Una métrica riemanniana en G se dice *compatible* con una estructura compleja J en G si está definida por un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en \mathfrak{g} tal que

$$\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g},$$

esto es, J es ortogonal con respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Denotamos por $\mathcal{C} = \mathcal{C}(G, J)$ al conjunto de todas las métricas invariantes a izquierda en G compatibles con J .

Definición 1.0.3. Dos tripletas $(G_1, J_1, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ y $(G_2, J_2, \langle \cdot, \cdot \rangle')$, con $\langle \cdot, \cdot \rangle \in \mathcal{C}(G_1, J_1)$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle' \in \mathcal{C}(G_2, J_2)$, son *isométricas isomorfas* si existe un isomorfismo de álgebras de Lie $\varphi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ tal que $J_2 = \varphi J_1 \varphi^{-1}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle' = \langle \varphi^{-1} \cdot, \varphi^{-1} \cdot \rangle$.

Ahora identificamos cada $\mu \in \mathcal{L}_J$ con un *grupo de Lie hermitiano* en la siguiente forma:

$$\mu \leftrightarrow (G_\mu, J, \langle \cdot, \cdot \rangle), \quad (1.3)$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno fijo en \mathfrak{g} compatible con J . Así, cada $\mu \in \mathcal{L}_J$ puede ser visto de esta manera como una *métrica hermitiana* compatible con (G_μ, J) , y dos métricas μ, λ son compatibles con la misma estructura compleja si y sólo si ellas pertenecen a la misma $GL_n(\mathbb{C})$ -órbita. En efecto, cada $h \in GL_n(\mathbb{C})$ determina una isometría riemanniana preservando la estructura compleja

$$(G_{h \cdot \mu}, J, \langle \cdot, \cdot \rangle) \leftrightarrow (G_\mu, J, \langle h \cdot, h \cdot \rangle) \quad (1.4)$$

por exponenciación del isomorfismo de álgebras de Lie $h^{-1} : (\mathfrak{g}, h \cdot \mu) \mapsto (\mathfrak{g}, \mu)$. De donde, obtenemos para cualquier $\mu \in \mathcal{L}_J$ la identificación:

$$GL_n(\mathbb{C}) \cdot \mu = \mathcal{C}(G_\mu, J). \quad (1.5)$$

1.0.2. Una estratificación para la variedad de álgebras de Lie nilpotentes

Sean G un grupo reductivo real, K un subgrupo compacto maximal de G , $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la descomposición de Cartan de su álgebra de Lie, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ subálgebra abeliana maximal, y Φ un sistema de raíces restringidas, es decir, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\lambda \in \Phi} \mathfrak{g}_\lambda$. Se define \mathfrak{a}^+ como una componente conexa de $\mathfrak{a} \setminus \bigcup_{\lambda \in \Phi} \ker \lambda$.

Definición 1.0.4. Sean $\tau : G \times V \rightarrow V$ una representación de G en un espacio vectorial real V de dimensión finita, y $\pi := d\tau|_e : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$ representación de \mathfrak{g} en V . Fijamos en V un producto interno tal que \mathfrak{k} y \mathfrak{p} actúen por transformaciones antisimétricas y simétricas, respectivamente. La aplicación *momento*, $\mathfrak{m} : V \rightarrow \mathfrak{p}$, se define como

$$\langle \mathfrak{m}(v), \alpha \rangle := \langle \pi(\alpha)v, v \rangle, \quad \forall \alpha \in \mathfrak{p}, v \in V.$$

Llamamos a $\tilde{\mathfrak{m}} : V \setminus \{0\} \rightarrow \mathfrak{p}$, $\tilde{\mathfrak{m}}(v) := \frac{1}{\|v\|^2} \mathfrak{m}(v)$, la aplicación *momento normalizada*.

En el siguiente teorema se resumen las principales propiedades de la estratificación $GL_n(\mathbb{R})$ -invariante del espacio vectorial $V = \Lambda^2 \mathfrak{n}^* \otimes \mathfrak{n}$, donde \mathfrak{n} es una álgebra de Lie nilpotente (ver [L3] y [L4] para más detalles).

Teorema 1.0.5. *Existe un subconjunto finito $\mathcal{B} \subset \overline{\mathfrak{a}^+}$, y para cada $\beta \in \mathcal{B}$ un subconjunto $GL_n(\mathbb{R})$ -invariante $\mathcal{S}_\beta \subset V$ (un estrato) tal que*

$$V \setminus \{0\} = \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}} \mathcal{S}_\beta \quad (\text{unión disjunta}).$$

Además,

$$(i) \mathcal{S}_0 = \{v \in V : v \text{ es semiestable}\} = \{v \in V \setminus \{0\} : 0 \notin \overline{G \cdot v}\}.$$

(ii) Si $v \in \mathfrak{C}(F) = \{v \in V \setminus \{0\} : dF|_v = 0\}$ entonces $v \in \mathcal{S}_{\tilde{\mathfrak{m}}(v)}$, donde $\tilde{\mathfrak{m}}(v)$ es la aplicación momento normalizada de V y $F(v) := \|\tilde{\mathfrak{m}}(v)\|^2$.

(iii) $F|_{\mathcal{S}_\beta} \geq \|\beta\|^2$ para todo $\beta \in \mathcal{B}$.

(iv) $\mathfrak{C}(F) \cap \mathcal{S}_\beta = \{v \in \mathfrak{C}(F) : \tilde{\mathfrak{m}}(v) \in K \cdot \beta\} = \{v \in \mathcal{S}_\beta : F(v) = \|\beta\|^2\}$.

Sea $\beta \in \overline{\mathfrak{a}^+}$ tal que $\mathcal{S}_\beta \neq \emptyset$. Definimos

$$Z_\beta := \{\mu \in V : \beta + \|\beta\|^2 I \in \text{Der}(\mu)\} \supset \mathfrak{C}_\beta(F) := \{v \in \mathfrak{C}(F) : \tilde{\mathfrak{m}}(v) = \beta\}$$

Por lo tanto, Z_β es G_β -invariante, donde $G_\beta = \{g \in GL_n(\mathbb{R}) : g\beta g^{-1} = \beta\}$. Como $\mathfrak{g}_\beta = \mathbb{R}\beta \oplus^\perp \mathfrak{h}_\beta$, \mathfrak{h}_β es subálgebra de Lie y sea $H_\beta \subset G_\beta$ el subgrupo de Lie conexo con álgebra de Lie \mathfrak{h}_β .

Teorema 1.0.6. (i) $Z_\beta \cap \mathcal{S}_\beta$ es el conjunto de los puntos semiestables para la acción $H_\beta \cdots Z_\beta$.

(ii) $\mathfrak{C}_\beta(F)$ es el conjunto de los puntos minimales para $H_\beta \cdots Z_\beta$.

1.0.3. Raíces y pesos

Sea \mathfrak{n} un espacio vectorial real de dimensión $2n$, y considere el espacio de todas las álgebras antisimétricas de dimensión $2n$, el cual es parametrizado por el espacio vectorial $V = \Lambda^2 \mathfrak{n}^* \otimes \mathfrak{n}$. Fijemos una aplicación $J : \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{n}$ tal que $J^2 = -I$. Recordar la acción lineal natural del grupo de Lie $GL_n(\mathbb{C}) = \{g \in GL_{2n}(\mathbb{R}) : gJ = Jg\}$ sobre V definida por

$$g \cdot \mu(X, Y) = g\mu(g^{-1}X, g^{-1}Y), \quad X, Y \in \mathfrak{n}, \quad g \in GL_n(\mathbb{C}), \quad \mu \in V, \quad (1.6)$$

y la correspondiente representación del álgebra de Lie $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ de $GL_n(\mathbb{C})$ en V dada por

$$\pi(\alpha)\mu = \alpha\mu(\cdot, \cdot) - \mu(\alpha \cdot, \cdot) - \mu(\cdot, \alpha \cdot), \quad \alpha \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}), \quad \mu \in V. \quad (1.7)$$

Cualquier producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en \mathfrak{n} determina productos internos en V y $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, también denotados por $\langle \cdot, \cdot \rangle$, como sigue:

$$\langle \mu, \lambda \rangle = \sum_{i,j,k} \langle \mu(e_i, e_j), e_k \rangle \langle \lambda(e_i, e_j), e_k \rangle, \quad \langle \alpha, \beta \rangle = \text{tr } \alpha\beta^*, \quad (1.8)$$

donde $\{e_i\}$ es una base ortonormal de \mathfrak{n} y β^* es la traspuesta conjugada con respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Usamos $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) = \mathfrak{u}(n) \oplus \mathfrak{h}(n)$ como una descomposición de Cartan de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, donde $\mathfrak{u}(n)$ y $\mathfrak{h}(n)$ denotan los subespacios de todas las matrices antihermitianas y hermitianas, respectivamente. El conjunto \mathfrak{a} de todas las matrices $n \times n$ diagonales reales en $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ es una subálgebra abeliana maximal de $\mathfrak{h}(n)$ y por lo tanto determina un sistema de raíces (restringidas) $\Delta \subset \mathfrak{a}$. Denotamos por Φ al conjunto de todas las raíces. Si $Je_{2i-1} = e_{2i}$, $i = 1, \dots, n$, entonces Φ está dado por

$$\Phi = \{\pm \text{Diag}(1, -1, 0, \dots, 0), \pm \text{Diag}(1, 0, -1, \dots, 0), \pm \text{Diag}(0, 1, -1, \dots, 0), \dots\}. \quad (1.9)$$

Si $\{e^1, \dots, e^{2n}\}$ es la base de \mathfrak{n}^* dual a la base $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$, entonces

$$\{v_{ijk} = (e^i \wedge e^j) \otimes e_k : 1 \leq i < j \leq 2n, 1 \leq k \leq 2n\} \quad (1.10)$$

es una base de los vectores peso de V para la representación (1.7), donde v_{ijk} es la forma bilineal en \mathfrak{n} definida por $v_{ijk}(e_i, e_j) = -v_{ijk}(e_j, e_i) = e_k$ y cero en cualquier otro caso. Los correspondientes pesos $\alpha_{ij}^k \in \mathfrak{a}$, $i < j$, están dados por

$$\pi(\alpha)v_{ijk} = (a_k - a_i - a_j)v_{ijk} = \langle \alpha, \alpha_{ij}^k \rangle v_{ijk}, \quad \forall \alpha = \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix} \in \mathfrak{a}. \quad (1.11)$$

Si $Je_{2i-1} = e_{2i}$, es fácil verificar que

$$\alpha_{ij}^k := \frac{1}{2}(E_{k,k} + E_{k\mp 1, k\mp 1} - E_{i,i} - E_{i\mp 1, i\mp 1} - E_{j,j} - E_{j\mp 1, j\mp 1}),$$

donde $E_{r,s}$ denota la matriz cuyo único coeficiente no nulo es 1 en la entrada rs .

Capítulo 2

Invariantes de estructuras complejas en nilvariedades

2.1. Invariantes

Ahora discutimos el problema de distinguir dos nilvariedades complejas salvo isomorfismo holomórfico, considerando diferentes tipos de invariantes.

2.1.1. Métricas minimales

En [L1], J. Lauret mostró como usar la parte complexificada del operador de Ricci de un grupo de Lie nilpotente dado, para determinar la existencia de métricas *minimales* compatibles con una estructura geométrica invariante en el grupo de Lie. Además, se probó que dichas métricas (si existen) son únicas salvo isometrías y multiplicación por escalares. Esta propiedad permite distinguir dos estructuras geométricas con invariantes provenientes de la geometría Riemanniana. En esta sección, aplicaremos esos resultados al caso complejo y usaremos las identificaciones (1.2) y (1.3) para reescribirlos en términos de datos provenientes del álgebra de Lie; esto será la base del método que proponemos: fijar una estructura compleja y mover el corchete. Este método es explicado en una forma más detallada en la Sección 2.2 en el caso de dimensión 6.

De ahora en más, seguiremos la notación usada en las Secciones 1.0.1 y 1.0.3 para N , un grupo de Lie nilpotente real de dimensión $2n$, donde \mathcal{L} y \mathcal{L}_J son reemplazados por \mathcal{N} y \mathcal{N}_J , respectivamente, donde

$$\mathcal{N} := \{\mu \in \Lambda^2 \mathfrak{n}^* \otimes \mathfrak{n} : \mu \text{ cumple Jacobi y es nilpotente}\}.$$

El siguiente teorema fue obtenido usando fuertes resultados de la Teoría Geométrica de Invariantes, relacionados principalmente con la aplicación momento de una representación real de un grupo de Lie reductivo real.

Teorema 2.1.1. [L1] *Sea $F : \mathcal{N}_J \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(\mu) := \text{tr}(\text{Ric}_\mu^c)^2 / \|\mu\|^4$, donde Ric_μ^c es la proyección ortogonal del operador de Ricci Ric_μ de la variedad Riemanniana $(N_\mu, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sobre el espacio de todas las aplicaciones simétricas de $(\mathfrak{n}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ que conmuten con J . Entonces para $\mu \in \mathcal{N}_J$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (i) μ es un punto crítico de F .

(ii) $F|_{GL_n(\mathbb{C}) \cdot \mu}$ alcanza su valor mínimo en μ .

(iii) $\text{Ric}^c_\mu = cI + D$ para algún $c \in \mathbb{R}$, $D \in \text{Der}(\mathfrak{n})$.

Más aún, cualquier otro punto crítico de F en la órbita $GL_n(\mathbb{C}) \cdot \mu$ pertenece a $\mathbb{R}^*U(n) \cdot \mu$, donde $U(n) := GL_n(\mathbb{C}) \cap O(2n)$.

Recordar que para grupos de Lie nilpotentes el operador de Ricci Ric_μ de la variedad Riemanniana $(N_\mu, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ está dado por

$$\begin{aligned} \langle \text{Ric}_\mu X, Y \rangle &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \langle \mu(X, e_i), e_j \rangle \langle \mu(Y, e_i), e_j \rangle \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{i,j} \langle \mu(e_i, e_j), X \rangle \langle \mu(e_i, e_j), Y \rangle, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{n}, \end{aligned}$$

donde $\{e_i\}$ es una base ortonormal de \mathfrak{n} .

Por medio de la identificación (1.2), obtenemos un muy útil criterio.

Corolario 2.1.2. *Dos nilvariedades complejas μ y λ , que verifiquen cualquiera de las condiciones del teorema anterior, son isomorfas si y sólo si $\lambda \in \mathbb{R}^*U(n) \cdot \mu$.*

Sea $(N, J, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ una nilvariedad hermitiana, esto es, J es una estructura compleja en N y $\langle \cdot, \cdot \rangle \in \mathcal{C}(N, J)$. Si $\text{Ric}_{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ denota al operador de Ricci de $(N, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, entonces el *operador de Ricci hermitiano* está dado por

$$\text{Ric}^c_{\langle \cdot, \cdot \rangle} := \frac{1}{2} (\text{Ric}_{\langle \cdot, \cdot \rangle} - J \text{Ric}_{\langle \cdot, \cdot \rangle} J).$$

Definición 2.1.3. Una métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle \in \mathcal{C}(N, J)$ es llamada *minimal* si minimiza al funcional $\text{tr}(\text{Ric}^c_{\langle \cdot, \cdot \rangle})^2$ sobre el conjunto de todas las métricas compatibles con (N, J) con la misma curvatura escalar.

Ahora reescribimos el Teorema 2.1.1 en términos geométricos, usando la identificación (1.3).

Teorema 2.1.4. [L1] *Para cada $\langle \cdot, \cdot \rangle \in \mathcal{C}(N, J)$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es minimal.

(ii) $\text{Ric}^c_{\langle \cdot, \cdot \rangle} = cI + D$ para algún $c \in \mathbb{R}$, $D \in \text{Der}(\mathfrak{n})$.

Además, existe a lo más una métrica invariante a izquierda compatible con (N, J) salvo isometría (y multiplicación por escalares) que verifica cualquiera de las condiciones anteriores.

Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle \in \mathcal{C}(N, J)$ una métrica minimal con $\text{Ric}^c_{\langle \cdot, \cdot \rangle} = cI + D$ para algún $c \in \mathbb{R}$, $D \in \text{Der}(\mathfrak{n})$. Se dice que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es del tipo $(k_1 < \dots < k_r; d_1, \dots, d_r)$ si $\{k_i\} \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$ son los autovalores de D con multiplicidades $\{d_i\}$, respectivamente, y $\text{gcd}(k_1, \dots, k_r) = 1$ (ver [L6] para más detalles).

Corolario 2.1.5. [L1] *Sean J_1, J_2 dos estructuras complejas en N , y suponga que admiten métricas compatibles minimales $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle'$, respectivamente. Entonces J_1 es equivalente a J_2 si y sólo si existen $\varphi \in \text{Aut}(\mathfrak{n})$ y $c > 0$ tales que $J_2 = \varphi J_1 \varphi^{-1}$ y*

$$\langle \varphi X, \varphi Y \rangle' = c \langle X, Y \rangle, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{n}.$$

En particular, si J_1 y J_2 son equivalentes, entonces sus respectivas métricas compatibles minimales son isométricas salvo multiplicación por escalares.

Por (1.3) y (1.4), es fácil ver que dos nilvariedades hermitianas μ y λ son isométricas (es decir, si $(N_\mu, J, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ y $(N_\lambda, J, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ son isométricas isomorfas) si y sólo si pertenecen a la misma $U(n)$ -órbita. Corolario 2.1.5 y (1.3) implican el siguiente resultado.

Corolario 2.1.6. *Si μ es una métrica hermitiana minimal, entonces $\mathbb{R}^*U(n) \cdot \mu$ parametriza todas las métricas hermitianas minimales en (N_μ, J) .*

Ejemplo 2.1.7. Para $t \in (0, 1]$, considere el álgebra de Lie 2-pasos nilpotente de dimensión 6 con corchete dado por

$$\begin{aligned}\mu_t(e_1, e_2) &= \sqrt{t}e_5, & \mu_t(e_1, e_4) &= \frac{1}{\sqrt{t}}e_6, \\ \mu_t(e_2, e_3) &= -\frac{1}{\sqrt{t}}e_6, & \mu_t(e_3, e_4) &= -\sqrt{t}e_5.\end{aligned}$$

Sea

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & & 0 & -1 & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & & & 0 & -1 \\ & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Una sencilla verificación muestra que J es una estructura compleja abeliana en N_{μ_t} para todo t , que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es compatible con (N_{μ_t}, J) , y que el operador de Ricci está dado por

$$\text{Ric}_{\mu_t} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \left(\frac{t^2+1}{t} \right) I_4 & & & \\ & t & 0 & \\ & & 0 & 1/t \end{bmatrix}.$$

Por definición, tenemos que

$$\text{Ric}_{\mu_t}^c = \begin{bmatrix} -\left(\frac{t^2+1}{2t} \right) I_4 & & & \\ & \left(\frac{t^2+1}{2t} \right) I_2 & & \end{bmatrix} = \frac{t^2+1}{2t} \left(-3I + 2 \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 2 \\ & & & & & 2 \end{bmatrix} \right),$$

y así μ_t es minimal del tipo $(1 < 2; 4, 2)$ por Teorema 2.1.4. Se deduce de

$$\text{Ric}_{\mu_t} |_{n_2} = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1/t \end{bmatrix},$$

que las nilvariedades hermitianas $\{(N_{\mu_t}, J, \langle \cdot, \cdot \rangle) : 0 < t \leq 1\}$ son no isométricas dos a dos. En efecto, si existen $c \in \mathbb{R}^*$ y $\varphi \in U(3) \subset O(6)$ tales que $c\mu_s = \varphi \cdot \mu_t$ (ver Corolario 2.1.6), entonces

$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \\ & \varphi_2 \end{bmatrix} \in U(2) \times U(1)$ (por la estructura del álgebra de Lie y la acción considerada) y

$c^2 \text{Ric}_{\mu_s} |_{n_2} = \varphi_2 \text{Ric}_{\mu_t} |_{n_2} \varphi_2^{-1}$, por lo tanto $c^2 \begin{bmatrix} s & \\ & 1/s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & \\ & 1/t \end{bmatrix}$. Tomando todos los posibles cocientes de sus autovalores se deduce que $s^2 = t^2$ ó $s^2 = 1/t^2$, lo cual da $s = t$ si $s, t \in (0, 1]$. De donde, obtenemos una curva $\{(N_{\mu_t}, J) : 0 < t \leq 1\}$ de nilvariedades complejas abelianas no isomorfas dos a dos, por la unicidad en el Teorema 2.1.4 (ver [L5] para más ejemplos).

De los anteriores resultados, el problema de distinguir dos estructuras complejas puede ser planteado de la siguiente manera: si se fija el grupo de Lie N , entonces los $GL_{2n}(\mathbb{R})$ -invariantes proporcionan todas las posibles estructuras complejas en N (Definición 1.0.1), y los $O(2n)$ -invariantes distinguen sus respectivas métricas minimales (si existen) salvo multiplicación por escalares (Corolario 2.1.5). Ahora, si en vez de lo anterior, se fija un espacio vectorial de dimensión $2n$ y se varía el corchete, los $GL_n(\mathbb{C})$ -invariantes proveen todas las posibles métricas compatibles con una estructura compleja dada (ver las identificaciones (1.3) y (1.5)), y los $U(n)$ -invariantes sus respectivas métricas minimales (si existen) salvo multiplicación por escalares (ver Corolario 2.1.6). En la última situación, el Ejemplo 2.1.7 muestra cómo usar uno de los invariantes riemannianos: los autovalores del operador de Ricci, para probar los no isomorfismos dos a dos entre las estructuras dadas. En general, esto no siempre es posible, así que en la próxima sección introduciremos un nuevo invariante aplicable a las álgebras de Lie 2-pasos nilpotentes.

2.1.2. La Forma Pfaffiana

Con el propósito de distinguir álgebras de Lie salvo isomorfismo, asignamos a cada álgebra un único polinomio homogéneo llamado la forma Pfaffiana, y así la Proposición 2.1.10 permitirá usar los invariantes polinomiales conocidos para obtener curvas o familias de corchetes en un espacio vectorial dado. Seguiremos la notación usada en [L7].

Sean \mathfrak{n} un álgebra de Lie, con corchete de Lie μ , y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interno fijo en \mathfrak{n} . Para cada $Z \in \mathfrak{n}$, considere la transformación \mathbb{R} -lineal antisimétrica $J_Z : \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{n}$ definida por

$$\langle J_Z X, Y \rangle = \langle \mu(X, Y), Z \rangle, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{n}. \quad (2.1)$$

Si \mathfrak{n} y \mathfrak{n}' son dos álgebras de Lie reales y J, J' son las correspondientes transformaciones, relativas a los productos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle'$, respectivamente, entonces es fácil ver que una aplicación lineal $B : \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{n}'$ es un isomorfismo de álgebras de Lie si y sólo si

$$B^t J'_Z B = J_{B^t Z}, \quad \forall Z \in \mathfrak{n}', \quad (2.2)$$

donde $B^t : \mathfrak{n}' \rightarrow \mathfrak{n}$ es dada por $\langle B^t X, Y \rangle = \langle X, B Y \rangle'$ para todo $X \in \mathfrak{n}', Y \in \mathfrak{n}$.

Supongamos que \mathfrak{n} es 2-pasos nilpotente y que la descomposición $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2$ satisface $\mathfrak{n}_2 = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$. Si $\langle \mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2 \rangle = 0$, entonces \mathfrak{n}_1 es J_Z -invariante para cualquier Z , y $J_Z = 0$ si y sólo si $Z \in \mathfrak{n}_1$. Bajo estas condiciones, la *forma Pfaffiana* $f : \mathfrak{n}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ de \mathfrak{n} está definida por

$$f(Z) = \text{Pf}(J_Z|_{\mathfrak{n}_1}), \quad Z \in \mathfrak{n}_2,$$

donde $\text{Pf} : \mathfrak{so}(\mathfrak{n}_1, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ es el *Pfaffian*, esto es, el único funcional que cumple $\text{Pf}(B)^2 = \det B$ para todo $B \in \mathfrak{so}(\mathfrak{n}_1, \mathbb{R})$ y $\text{Pf}(J) = 1$ para

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & & 0 & -1 & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 & -1 \\ & & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

En [ABJK], se da una definición alternativa de Pf y se demuestran algunas de sus propiedades. Notar que se requiere que $\dim \mathfrak{n}_1$ sea par para obtener una f no nula. Además, si $\dim \mathfrak{n}_1 = 2m$ y $\dim \mathfrak{n}_2 = k$ entonces la forma Pfaffiana $f = f(x_1, \dots, x_k)$ de \mathfrak{n} es un polinomio homogéneo de grado m en k variables con coeficientes en \mathbb{R} .

Denotamos por $P_{k,m}(K)$ al conjunto de todos los polinomios homogéneos de grado m en k variables con coeficientes en un cuerpo K .

Definición 2.1.8. Para cada $f, g \in P_{k,m}(K)$, se dice que f es *proyectivamente equivalente* a g , denotado por $f \simeq_K g$, si existen $A \in GL_k(K)$ y $c \in K^*$ tales que

$$f(x_1, \dots, x_k) = cg(A(x_1, \dots, x_k)).$$

Observación 2.1.9. Si $f, g \in P_{k,m}(\mathbb{R})$, entonces

$$f \simeq_{\mathbb{R}} g \Leftrightarrow \begin{cases} f \in GL_k(\mathbb{R}) \cdot g, & \text{si } m \text{ es impar,} \\ \pm f \in GL_k(\mathbb{R}) \cdot g, & \text{si } m \text{ es par.} \end{cases}$$

Recordar que $(A \cdot f)(x_1, \dots, x_k) = f(A^{-1}(x_1, \dots, x_k))$ para todo $A \in GL_k(K)$, $f \in P_{k,m}(K)$.

Proposición 2.1.10. [L7] Sean $\mathfrak{n}, \mathfrak{n}'$ dos álgebras de Lie 2-pasos nilpotentes reales. Si \mathfrak{n} y \mathfrak{n}' son isomorfas entonces $f \simeq_{\mathbb{R}} f'$, donde f y f' son las formas Pfaffianas de \mathfrak{n} y \mathfrak{n}' , respectivamente.

La anterior proposición afirma que la clase de equivalencia proyectiva de $f(x_1, \dots, x_k)$ es un invariante por isomorfismos del álgebra de Lie \mathfrak{n} . Notar que si hacemos la composición $I \circ f(\mu)$ de la forma Pfaffiana $f(\mu)$ con un invariante $I \in P_{k,m}(\mathbb{R})^{SL_k(\mathbb{R})}$ (el anillo de invariantes polinomiales), obtenemos $SL_k(\mathbb{R})$ -invariantes escalares. Más aún, si consideramos cocientes del mismo grado de la forma $\frac{I_1(f(\mu))}{I_2(f(\mu))}$ se obtienen $GL_k(\mathbb{R})$ -invariantes (ver Ejemplo 2.1.11).

A continuación, se darán algunas propiedades básicas de la forma Pfaffiana y algunos invariantes para formas binarias de grado 4.

(i) Si A es una matriz antisimétrica de orden 4×4 , digamos

$$A = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ -b_{12} & 0 & b_{23} & b_{24} \\ -b_{13} & -b_{23} & 0 & b_{34} \\ -b_{14} & -b_{24} & -b_{34} & 0 \end{bmatrix},$$

entonces $\text{Pf}(A) = b_{12}b_{34} - b_{13}b_{24} + b_{14}b_{23}$.

(ii) $\text{Pf} \left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \right) = \text{Pf}(A_1) \text{Pf}(A_2)$.

(iii) Sea $p(x, y) = \sum_{i=0}^4 a_i x^{4-i} y^i \in P_{2,4}(\mathbb{R})$. Defina

$$S(p) := a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2.$$

$$T(p) := a_0 a_2 a_4 - a_0 a_3^2 + 2a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_2^3.$$

Tenemos que S y T son $SL_2(\mathbb{R})$ -invariantes (ver por ejemplo [D]), esto es $S(g \cdot p) = S(p)$ y $T(g \cdot p) = T(p)$ para cualquier $p \in P_{2,4}(\mathbb{R})$, $g \in SL_2(\mathbb{R})$. Además, $S(cp) = c^2 S(p)$ y $T(cp) = c^3 T(p)$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

Demostración. Sean $\mathfrak{h} := (\mathfrak{n}, \mu)$, $\mathfrak{h}' := (\mathfrak{n}, \lambda)$, y J_μ, J_λ las correspondientes transformaciones, relativas al producto interno en \mathfrak{n} (ver (2.1)). Suponga que $g \cdot \mu = \lambda$ con $g \in GL_n(\mathbb{C})$. Por hipótesis, $g = \begin{bmatrix} g_1 & \\ & g_2 \end{bmatrix} \in GL_p(\mathbb{C}) \times GL_q(\mathbb{C})$ y $g : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}'$ es un isomorfismo de álgebras de Lie que cumple $g\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}_1$ y $g\mathfrak{n}_2 = \mathfrak{n}_2$. De (2.2) se deduce que

$$g^t J_\lambda(Z)g = J_\mu(g^t Z), \quad \forall Z \in \mathfrak{n}_1,$$

y dado que los subespacios \mathfrak{n}_1 y \mathfrak{n}_2 son preservados por g y g^t obtenemos que

$$f'(Z) = cf(g_2^t Z),$$

donde $c^{-1} = \det g_1 > 0$ ($GL_p(\mathbb{C})$ es conexo) y $g_2^t : \lambda(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_1) \rightarrow \mu(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_1)$. Es claro que $g_2^t \in GL_{2q}(\mathbb{R})$ y satisface

$$\langle Jg_2^t Z, Y \rangle = \langle g_2^t Z, -JY \rangle = \langle Z, g_2(-JY) \rangle = \langle Z, -Jg_2 Y \rangle = \langle JZ, g_2 Y \rangle = \langle g_2^t JZ, Y \rangle.$$

Así, $g_2^t \in GL_q(\mathbb{C})$, y concluimos que $f(\lambda) \in \mathbb{R}_{>0}GL_q(\mathbb{C}) \cdot f(\mu)$. \square

Finalizamos esta sección con un ejemplo de dos polinomios homogéneos que son proyectivamente equivalentes sobre \mathbb{R} pero no sobre \mathbb{C} , en el sentido de la Proposición 2.1.12.

Ejemplo 2.1.13. En $\mathfrak{h}_5 \times \mathbb{R}$, defina los corchetes de Lie μ^+ y μ^- por

$$\mu^\pm(e_1, e_2) = e_6, \quad \mu^\pm(e_3, e_4) = \pm e_6.$$

Considere el producto interno $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. Si $Z = xe_6$, con $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$J_Z^+|_{\mathfrak{n}_1} = \begin{bmatrix} 0 & -x & & & \\ x & 0 & & & \\ & & 0 & -x & \\ & & x & 0 & \end{bmatrix}, \quad J_Z^-|_{\mathfrak{n}_1} = \begin{bmatrix} 0 & -x & & & \\ x & 0 & & & \\ & & 0 & x & \\ & & -x & 0 & \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto $f(\mu^+) = x^2$ y $f(\mu^-) = -x^2$. De donde $f(\mu^-) \simeq_{\mathbb{R}} f(\mu^+)$ pero

$$f(\mu^-) \notin \mathbb{R}_{>0}U(1) \cdot f(\mu^+).$$

Recordar que $GL_1(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{R}_{>0}U(1)$.

2.2. Métricas minimales en nilvariedades complejas abelianas de dimensión 6

La clasificación de las álgebras de Lie reales nilpotentes de dimensión 6 que admiten una estructura compleja fue dada en [S], y el caso (nilpotente) abeliano en [CFU]. Posteriormente, A. Andrada, M.L. Barberis y I.G. Dotti en [ABD] dan una clasificación de todas las álgebras de Lie, de dimensión menor o igual a 6, que admiten una estructura compleja abeliana; más aún, dan una parametrización, en cada álgebra de Lie, del espacio de todas las estructuras abelianas salvo isomorfismo holomórfico. En particular, existen tres álgebras de Lie nilpotentes munidas con curvas de estructuras no equivalentes. Basados en esta parametrización, estudiamos la existencia de métricas minimales en cada una de esas nilvariedades complejas (ver Teorema 2.2.4), y proporcionamos una prueba alternativa de los no isomorfismos dos a dos entre las estructuras.

La clasificación en [ABD] fija el álgebra de Lie y mueve la estructura compleja. Por ejemplo, el álgebra de Lie $\mathfrak{h}_3 \times \mathfrak{h}_3$ posee la curva J_s de estructuras complejas abelianas definida por $J_s e_1 = e_2$, $J_s e_3 = e_4$, $J_s e_5 = s e_5 + e_6$, $s \in \mathbb{R}$, con corchete $[e_1, e_2] = e_5$, $[e_3, e_4] = e_6$. Ahora fijamos la estructura compleja y movemos el corchete de la siguiente manera.

Para $\mathfrak{n} = \mathfrak{v}_1 \oplus \mathfrak{v}_2$, con $\mathfrak{v}_1 = \mathbb{R}^4$ y $\mathfrak{v}_2 = \mathbb{R}^2$, considere el espacio vectorial $\Lambda^2 \mathfrak{v}_1^* \otimes \mathfrak{v}_2$ de todas las aplicaciones bilineales antisimétricas $\mu : \mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_1 \rightarrow \mathfrak{v}_2$. Cualquier álgebra de Lie 2-pasos nilpotente de dimensión 6 con $\dim \mu(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}) \leq 2$ puede ser modelada en esta forma. Fije una base de \mathfrak{n} , digamos $\{e_1, \dots, e_6\}$, tal que $\mathfrak{v}_1 = \langle e_1, \dots, e_4 \rangle_{\mathbb{R}}$, $\mathfrak{v}_2 = \langle e_5, e_6 \rangle_{\mathbb{R}}$. La estructura compleja y la métrica compatible siempre estarán definidas por

$$J := \begin{bmatrix} 0 & -1 & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & & 0 & -1 & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & & & 0 & -1 \\ & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \langle e_i, e_j \rangle := \delta_{ij}. \quad (2.4)$$

Proposición 2.2.1. *Sea $(N_{\tilde{\mu}}, \tilde{J})$ una nilvariedad compleja, con $\tilde{\mu} \in \Lambda^2 \mathfrak{v}_1^* \otimes \mathfrak{v}_2$. Si existe $g \in GL_6(\mathbb{R})$ tal que $g\tilde{J}g^{-1} = J$, entonces $(N_{\tilde{\mu}}, \tilde{J})$ y $(N_{g\tilde{\mu}}, J)$ son holomórficamente isomorfos.*

Retornando al ejemplo anterior, si se toma

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & & & 1 & -s \\ & & & & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

obtenemos $gJ_s g^{-1} = J$, y por lo tanto $(N_{[\cdot, \cdot]}, J_s)$ y (N_{μ_3}, J) son holomórficamente isomorfos por Proposición 2.2.1, donde ahora el corchete es dado por $\mu_3(e_1, e_2) = e_5$ y $\mu_3(e_3, e_4) = -s e_5 + e_6$ con $s \in \mathbb{R}$. Argumentando de esta manera en cada ítem en [ABD, Teorema 3.4.], obtenemos la Tabla 2.1.

Observación 2.2.2. En la clasificación dada en [ABD], se afirma incorrectamente que las curvas de estructuras J_t^1 y J_t^2 en \mathfrak{n}_4 son no equivalentes. En efecto, la matriz g definida en (2.5) es un automorfismo de \mathfrak{n}_4 y $gJ_t^1 g^{-1} = J_t^2$, por lo tanto J_t^1 y J_t^2 son equivalentes. Notar que en la Tabla 2.1 solo aparece una ‘curva’ (será probado más adelante) de corchetes en \mathfrak{n}_4 , lo cual se deduce de la siguiente proposición y del Teorema 2.2.4. Los corchetes $\mu_4^{1,t}$ y $\mu_4^{2,t}$ son obtenidos de las curvas de estructuras J_t^1 y J_t^2 , respectivamente.

Proposición 2.2.3. $\mu_4^{2,t} \in U(2) \times U(1) \cdot \mu_4^{1,t}$ para todo $t \in (0, 1]$, donde los corchetes $\mu_4^{1,t}, \mu_4^{2,t}$ en \mathfrak{n}_4 están dados por

$$\begin{aligned} \mu_4^{1,t}(e_1, e_2) &= \sqrt{t}e_5, & \mu_4^{1,t}(e_1, e_4) &= \frac{1}{\sqrt{t}}e_6, & \mu_4^{2,t}(e_1, e_3) &= \sqrt{t}e_5, & \mu_4^{2,t}(e_2, e_4) &= \sqrt{t}e_5, \\ \mu_4^{1,t}(e_2, e_3) &= -\frac{1}{\sqrt{t}}e_6, & \mu_4^{1,t}(e_3, e_4) &= -\sqrt{t}e_5, & \mu_4^{2,t}(e_1, e_4) &= -\frac{1}{\sqrt{t}}e_6, & \mu_4^{2,t}(e_2, e_3) &= \frac{1}{\sqrt{t}}e_6. \end{aligned}$$

Demostración. Tenemos que

$$g = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}i & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \text{U}(2) \times \text{U}(1).$$

Usando la identificación $a + bi \mapsto \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, podemos escribir

$$g = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Por definición, se sigue que

- $\mu_4^{2,t}(e_1, e_2) = 0.$
 $g \cdot \mu_4^{1,t}(e_1, e_2) = g\mu_4^{1,t}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}e_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}e_3, \frac{\sqrt{2}}{2}e_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}e_4\right) = g\left\{\frac{1}{2}(\sqrt{t}e_5 - \sqrt{t}e_5)\right\} = 0.$
- $\mu_4^{2,t}(e_1, e_3) = \sqrt{t}e_5.$
 $g \cdot \mu_4^{1,t}(e_1, e_3) = g\mu_4^{1,t}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}e_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}e_3, \frac{\sqrt{2}}{2}e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}e_4\right) = g\left\{\frac{1}{2}(\sqrt{t}e_5 + \sqrt{t}e_5)\right\} = \sqrt{t}e_5.$
- $\mu_4^{2,t}(e_1, e_4) = -\frac{1}{\sqrt{t}}e_6.$
 $g \cdot \mu_4^{1,t}(e_1, e_4) = g\mu_4^{1,t}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}e_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}e_3, \frac{\sqrt{2}}{2}e_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}e_3\right) = g\left\{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{t}}e_6 - \frac{1}{\sqrt{t}}e_6\right)\right\} = -\frac{1}{\sqrt{t}}e_6.$
- $\mu_4^{2,t}(e_2, e_3) = \frac{1}{\sqrt{t}}e_6.$
 $g \cdot \mu_4^{1,t}(e_2, e_3) = g\mu_4^{1,t}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}e_4, \frac{\sqrt{2}}{2}e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}e_4\right) = g\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}e_6 + \frac{1}{\sqrt{t}}e_6\right)\right\} = \frac{1}{\sqrt{t}}e_6.$
- $\mu_4^{2,t}(e_2, e_4) = \sqrt{t}e_5.$
 $g \cdot \mu_4^{1,t}(e_2, e_4) = g\mu_4^{1,t}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}e_4, \frac{\sqrt{2}}{2}e_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}e_3\right) = g\left\{\frac{1}{2}(\sqrt{t}e_5 + \sqrt{t}e_5)\right\} = \sqrt{t}e_5.$
- $\mu_4^{2,t}(e_3, e_4) = 0.$
 $g \cdot \mu_4^{1,t}(e_3, e_4) = g\mu_4^{1,t}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}e_4, \frac{\sqrt{2}}{2}e_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}e_3\right) = g\left\{\frac{1}{2}(\sqrt{t}e_5 - \sqrt{t}e_5)\right\} = 0.$

Así $g \cdot \mu_4^{1,t} = \mu_4^{2,t}$, lo que completa la prueba. □

\mathfrak{n}	Corchete de Lie
$\mathfrak{n}_1 := \mathfrak{h}_3 \times \mathbb{R}^3$	$\mu_1(e_1, e_2) = e_6.$
$\mathfrak{n}_2 := \mathfrak{h}_5 \times \mathbb{R}$	$\mu_2^\pm(e_1, e_2) = e_6, \mu_2^\pm(e_3, e_4) = \pm e_6.$
$\mathfrak{n}_3 := \mathfrak{h}_3 \times \mathfrak{h}_3$	$\mu_3^s(e_1, e_2) = e_5, \mu_3^s(e_3, e_4) = -se_5 + e_6,$ $s \in \mathbb{R}.$
$\mathfrak{n}_4 := \mathfrak{h}_3(\mathbb{C})$	$\mu_4^t(e_1, e_2) = \sqrt{t}e_5, \mu_4^t(e_1, e_4) = \frac{1}{\sqrt{t}}e_6,$ $\mu_4^t(e_2, e_3) = -\frac{1}{\sqrt{t}}e_6, \mu_4^t(e_3, e_4) = -\sqrt{t}e_5,$ $t \in (0, 1].$
\mathfrak{n}_5	$\mu_5(e_1, e_2) = e_5, \mu_5(e_1, e_4) = -e_6,$ $\mu_5(e_2, e_3) = e_6.$
\mathfrak{n}_6	$\mu_6(e_1, e_2) = -e_3, \mu_6(e_1, e_4) = -e_6,$ $\mu_6(e_2, e_3) = e_6.$
\mathfrak{n}_7	$\mu_7^t(e_1, e_2) = -e_4, \mu_7^t(e_1, e_3) = \sqrt{t}e_5,$ $\mu_7^t(e_2, e_4) = \sqrt{t}e_5, \mu_7^t(e_1, e_4) = -\frac{1}{\sqrt{t}}e_6,$ $\mu_7^t(e_2, e_3) = \frac{1}{\sqrt{t}}e_6, t \in (0, 1].$
	$\tilde{\mu}_7^t(e_1, e_2) = -e_4, \tilde{\mu}_7^t(e_1, e_3) = \sqrt{-t}e_5,$ $\tilde{\mu}_7^t(e_2, e_4) = \sqrt{-t}e_5, \tilde{\mu}_7^t(e_1, e_4) = \frac{1}{\sqrt{-t}}e_6,$ $\tilde{\mu}_7^t(e_2, e_3) = -\frac{1}{\sqrt{-t}}e_6, t \in [-1, 0).$

Tabla 2.1. Nilvariedades complejas abelianas de dimensión 6.

Teorema 2.2.4. *Toda nilvariedad compleja abeliana de dimensión 6 admite una métrica minimal, con la única excepción de (N_5, J) .*

Demostración. Aplicando el Teorema 2.1.4 (como fue descrito en el Ejemplo 2.1.7 para \mathfrak{n}_4), es fácil ver que (N_1, J) admite una métrica minimal de tipo $(3 < 5 < 6; 2, 2, 2)$; (N_2, J) , (N_3, J) y (N_4, J) una de tipo $(1 < 2; 4, 2)$; (N_6, J) y (N_7, J) una de tipo $(1 < 2 < 3; 2, 2, 2)$. Más aún, cada μ_i en \mathfrak{n}_i es minimal, si $i \neq 5$ (columna 4, Tabla 2.2). Notar que la Tabla 2.2 difiere de la Tabla 2.1 en \mathfrak{n}_3 y \mathfrak{n}_7 , esto se debe a que para obtener μ_3 y μ_7 minimales se requirió actuar con una matriz $g \in GL_3(\mathbb{C})$ en los corchetes dados en la Tabla 2.1. Por ejemplo, para \mathfrak{n}_7 , tomamos

$$g = \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \frac{1}{\alpha} & \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

donde $\alpha = (t + \frac{1}{t})^{-\frac{1}{6}}$ para μ_7^t , y $\alpha = (-t - \frac{1}{t})^{-\frac{1}{6}}$ para $\tilde{\mu}_7^t$.

Basta con probar que (N_5, J) no admite métricas compatibles minimales. Para hacer esto, usaremos algunas propiedades de la estratificación $GL_n(\mathbb{R})$ -invariante para la representación $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^n$ de $GL_n(\mathbb{R})$ (ver Sección 1.0.2).

Sea $\beta = \text{diag}(-1/2, -1/2, -1/2, -1/2, 1/2, 1/2)$. Por lo tanto

$$G_\beta := \{g \in GL(6) : g\beta g^{-1} = \beta, gJg^{-1} = J\} = GL_2(\mathbb{C}) \times GL_1(\mathbb{C}).$$

Dado que $\mathfrak{g}_\beta = \mathbb{R}\beta \oplus^\perp \mathfrak{h}_\beta$, se sigue que \mathfrak{h}_β es una subálgebra de Lie de \mathfrak{g}_β . Denotamos por $H_\beta \subset G_\beta$ al subgrupo de Lie con álgebra de Lie \mathfrak{h}_β . Así, obtenemos

$$\mathfrak{h}_\beta = \left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} : \text{tr}A = \text{tr}B \right\}, \quad H_\beta = \left\{ \begin{bmatrix} g & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix} : \det(g) = \det(h) \right\}.$$

Pero $\mathfrak{h}_\beta = \left(\mathbb{R} \begin{bmatrix} I & \\ & 2I \end{bmatrix} \right) \oplus \tilde{\mathfrak{h}}_\beta$ donde

$$\tilde{\mathfrak{h}}_\beta = \left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} : \text{tr}A = \text{tr}B = 0 \right\}.$$

Esto claramente fuerza a que $\tilde{H}_\beta = SL_2(\mathbb{C}) \times \{I\}$. De donde, es suficiente probar que $0 \notin \overline{SL_2(\mathbb{C}) \cdot \mu_5}$ y $\mu_2 \in \overline{SL_2(\mathbb{C}) \cdot \mu_5}$, con μ_2 and μ_5 los corchetes de \mathfrak{n}_2 y \mathfrak{n}_5 respectivamente, lo cual es debido al hecho que $G \cdot \mu$ es minimal si y sólo si $H_\beta \cdot \mu$ es cerrada (ver por ejemplo [L4, Teorema 9.1.]). En efecto, una fácil verificación muestra que

$$\begin{bmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & 1/a & \\ & & & 1/a \end{bmatrix} \cdot \mu_5 \longrightarrow \mu_2 \quad \text{cuando } a \rightarrow \infty.$$

De todo lo anterior y el hecho que $SL_2(\mathbb{C}) \cdot \mu_2$ es cerrada (\mathfrak{n}_2 es minimal), concluimos que $0 \notin \overline{SL_2(\mathbb{C}) \cdot \mu_5}$ por la unicidad de las órbitas cerradas en la clausura de una órbita (notar que $\{0\}$ es una órbita cerrada). \square

n	Corchete de Lie	Tipo	Minimal
\mathfrak{n}_1	$\mu_1(e_1, e_2) = e_6.$	$(3 < 5 < 6; 2, 2, 2)$	Sí
\mathfrak{n}_2	$\mu_2^\pm(e_1, e_2) = e_6, \mu_2^\pm(e_3, e_4) = \pm e_6.$	$(1 < 2; 4, 2)$	Sí
\mathfrak{n}_3	$\mu_3^s(e_1, e_2) = e_5, \mu_3^s(e_3, e_4) = \frac{-s}{\sqrt{1+s^2}}e_5 + \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}e_6,$ $s \in \mathbb{R}.$	$(1 < 2; 4, 2)$	Sí
\mathfrak{n}_4	$\mu_4^t(e_1, e_2) = \sqrt{t}e_5, \mu_4^t(e_1, e_4) = \frac{1}{\sqrt{t}}e_6,$ $\mu_4^t(e_2, e_3) = -\frac{1}{\sqrt{t}}e_6, \mu_4^t(e_3, e_4) = -\sqrt{t}e_5,$ $t \in (0, 1].$	$(1 < 2; 4, 2)$	Sí
\mathfrak{n}_5	$\mu_5(e_1, e_2) = e_5, \mu_5(e_1, e_4) = -e_6,$ $\mu_5(e_2, e_3) = e_6.$	—	No
\mathfrak{n}_6	$\mu_6(e_1, e_2) = -e_3, \mu_6(e_1, e_4) = -e_6,$ $\mu_6(e_2, e_3) = e_6.$	$(1 < 2 < 3; 2, 2, 2)$	Sí
\mathfrak{n}_7	$\mu_7^t(e_1, e_2) = -\sqrt{t+1}/te_4, \mu_7^t(e_1, e_3) = \sqrt{t}e_5,$ $\mu_7^t(e_2, e_4) = \sqrt{t}e_5, \mu_7^t(e_1, e_4) = -\frac{1}{\sqrt{t}}e_6,$ $\mu_7^t(e_2, e_3) = \frac{1}{\sqrt{t}}e_6, t \in (0, 1].$	$(1 < 2 < 3; 2, 2, 2)$	Sí
	$\tilde{\mu}_7^t(e_1, e_2) = -\sqrt{-t-1}/te_4, \tilde{\mu}_7^t(e_1, e_3) = \sqrt{-t}e_5,$ $\tilde{\mu}_7^t(e_2, e_4) = \sqrt{-t}e_5, \tilde{\mu}_7^t(e_1, e_4) = \frac{1}{\sqrt{-t}}e_6,$ $\tilde{\mu}_7^t(e_2, e_3) = -\frac{1}{\sqrt{-t}}e_6, t \in [-1, 0).$		

Tabla 2.2. Métricas minimales en nilvariedades complejas abelianas de dimensión 6.

Ahora usaremos las formas Pfaffianas para obtener una prueba alternativa de los no isomorfismos dos a dos de las familias dadas en [ABD, Teorema 3.4.] en el caso de las álgebras de Lie 2-pasos nilpotentes. Como $\dim \mathfrak{v}_1 = 4$ y $\dim \mathfrak{v}_2 = 2$, las formas Pfaffianas de $\mathfrak{n}_1, \dots, \mathfrak{n}_5$ pertenecen al conjunto $P_{2,2}(\mathbb{R})$; así el objetivo es determinar el cociente $P_{2,2}(\mathbb{R})/GL_1(\mathbb{C}) = P_{2,2}(\mathbb{R})/\mathbb{R}_{>0}U(1)$ (ver Proposición 2.1.12).

Usando la identificación $P = ax^2 + bxy + cy^2 \leftrightarrow P_A := \langle A(x, y), (x, y) \rangle$, donde $A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}$, obtenemos (ver Observación 2.1.9)

$$P_{2,2}(\mathbb{R})/\pm GL_2(\mathbb{R}) = \begin{cases} x^2 + y^2, \\ x^2 - y^2, \\ x^2, \\ 0. \end{cases}$$

Proposición 2.1.12 ahora implica que

$$P_{2,2}(\mathbb{R})/\mathbb{R}_{>0}U(1) = \{ax^2 + by^2 : a \leq b, a^2 + b^2 = 1\} \cup \{0\}.$$

Esto permite clasificar las formas Pfaffianas de $\mathfrak{n}_1, \dots, \mathfrak{n}_5$, lo cual es resumido en la Figura 2.1. El álgebra de Lie \mathfrak{n}_4^* está dada por $\mu_t(e_1, e_3) = -tse_6$, $\mu_t(e_1, e_4) = \mu_t(e_2, e_3) = se_5$, $\mu_t(e_2, e_4) = s(2-t)e_6$, con $s = \sqrt{2+t^2+(2-t)^2}$, $1 \leq t < 2$; la cual es minimal, con J como en (2.4), y (N_{μ_t}, J) no es abeliana (ver [L1, Ejemplo 5.3.]).

De la Figura 2.1, es claro que \mathfrak{n}_3 y \mathfrak{n}_4 poseen curvas de métricas hermitianas (minimales); $(\mathfrak{n}_2, \mu_2^+)$ y $(\mathfrak{n}_2, \mu_2^-)$ se distinguen; y \mathfrak{n}_1 posee una única métrica hermitiana (minimal). A pesar de que μ_5 no es minimal, se incluye en la figura para indicar que como μ_5 se degenera en μ_2^- ($\mu_2 \in \overline{SL_2(\mathbb{C})} \cdot \mu_5$) entonces es de esperar que posean la misma forma Pfaffiana, que es en efecto lo que ocurre.

Consideremos ahora las álgebras de Lie que no son 2-pasos nilpotentes. El álgebra de Lie \mathfrak{n}_6 posee una única métrica minimal salvo isometría y multiplicación por escalares, por Teorema 2.1.4. Para \mathfrak{n}_7 , una fácil verificación muestra que para todo $t \in [-1, 0)$, $s \in (0, 1]$

$$\text{Ric}_{\tilde{\mu}_7^t} |_{\mathfrak{z}} = \begin{bmatrix} -t & 0 \\ 0 & -1/t \end{bmatrix}, \quad \text{Ric}_{\mu_7^s} |_{\mathfrak{z}} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 1/s \end{bmatrix},$$

donde $\mathfrak{z} := \langle e_5, e_6 \rangle_{\mathbb{R}}$. De esto se deduce que las nilvariedades hermitianas $\{(N_{\mu_7^t}, J, \langle \cdot, \cdot \rangle) : t \in (0, 1]\}$ son no isométricas dos a dos (como fue descrito en el Ejemplo 2.1.7 para \mathfrak{n}_4). De igual manera para $\{(N_{\tilde{\mu}_7^t}, J, \langle \cdot, \cdot \rangle) : t \in [-1, 0)\}$.

Distinguiremos μ_7^t , $t \in (0, 1]$, de $\tilde{\mu}_7^t$, $t \in [-1, 0)$. Para hacer esto necesitamos lo siguiente (ver (1.8))

$$\begin{aligned} \|\mu_7^t\|^2 &= 2 (\|\mu_7^t(e_1, e_2)\|^2 + \|\mu_7^t(e_1, e_3)\|^2 + \|\mu_7^t(e_1, e_4)\|^2 + \|\mu_7^t(e_2, e_3)\|^2 + \|\mu_7^t(e_2, e_4)\|^2) \\ &= 6 \left(t + \frac{1}{t} \right), \quad t \in (0, 1]. \\ \|\tilde{\mu}_7^t\|^2 &= 2 (\|\tilde{\mu}_7^t(e_1, e_2)\|^2 + \|\tilde{\mu}_7^t(e_1, e_3)\|^2 + \|\tilde{\mu}_7^t(e_1, e_4)\|^2 + \|\tilde{\mu}_7^t(e_2, e_3)\|^2 + \|\tilde{\mu}_7^t(e_2, e_4)\|^2) \\ &= -6 \left(t + \frac{1}{t} \right), \quad t \in [-1, 0). \end{aligned}$$

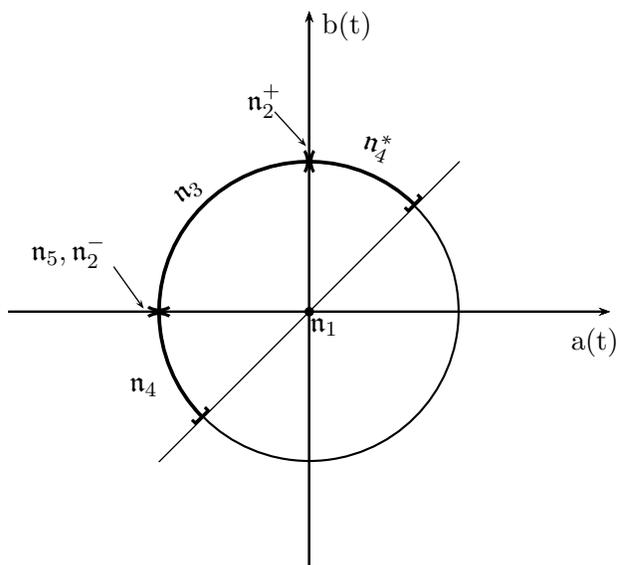


Figura 2.1. Formas Pfaffianas de n_1, \dots, n_5 .

Proposición 2.2.5. $\tilde{\mu}_7^t \notin \mathbb{R}^* U(3) \cdot \mu_7^s$ para todo $t \in [-1, 0), s \in (0, 1]$.

Demostración. Si existen $c \in \mathbb{R}^*$ y $\varphi \in U(3)$ tal que $c\tilde{\mu}_7^t = \varphi \cdot \mu_7^s$, entonces $\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 & & \\ & \varphi_2 & \\ & & \varphi_3 \end{bmatrix}$, con $\varphi_i \in U(1)$, y $c^2 \text{Ric}_{\tilde{\mu}_7^t}|_3 = \varphi_3 \text{Ric}_{\mu_7^s}|_3 \varphi_3^{-1}$. Por lo tanto $c^2 \begin{bmatrix} -t & \\ & -1/t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & \\ & 1/s \end{bmatrix}$; tomando todos los posibles cocientes de sus autovalores se deduce que $s^2 = t^2$ ó $s^2 = 1/t^2$, lo cual implica que $t = -s$ si $t \in [-1, 0), s \in (0, 1]$. De esto basta con probar que para todo $t \in (0, 1], c \in \mathbb{R}^*$,

$$\tilde{\mu}_7^{-t} \notin c U(1) \times U(1) \times U(1) \cdot \mu_7^t. \tag{2.6}$$

Además, si $\tilde{\mu}_7^{-t} \in c U(1) \times U(1) \times U(1) \cdot \mu_7^t$, entonces $\|\tilde{\mu}_7^{-t}\|^2 = c^2 \|\mu_7^t\|^2$, lo cual lleva a tener $c^2 = 1$, y por lo tanto $c = \pm 1$. Así es suficiente tomar $c = 1$ (si $c = -1$ las ecuaciones no cambian).

Razonando por absurdo, suponga que $\tilde{\mu}_7^{-t} = G \cdot \mu_7^t$ donde

$$G = \begin{bmatrix} a & -b & & & & & & & \\ b & a & & & & & & & \\ & & c & -d & & & & & \\ & & d & c & & & & & \\ & & & & k & -h & & & \\ & & & & h & k & & & \end{bmatrix}, \quad G^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & & & & & & & \\ -b & a & & & & & & & \\ & & c & d & & & & & \\ & & -d & c & & & & & \\ & & & & k & h & & & \\ & & & & -h & k & & & \end{bmatrix},$$

con $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = k^2 + h^2 = 1$. De donde obtenemos

- $\tilde{\mu}_7^{-t}(e_1, e_2) = -\sqrt{t+1}/te_4 = G \cdot \mu_7^t(e_1, e_2) = d\sqrt{t+1}/te_3 - c\sqrt{t+1}/te_4.$
- $\tilde{\mu}_7^{-t}(e_1, e_3) = \sqrt{t}e_5 = G \cdot \mu_7^t(e_1, e_3)$
 $= \left\{ (ac + bd)k\sqrt{t} + (bc - ad)\frac{h}{\sqrt{t}} \right\} e_5 + \left\{ (ac + bd)h\sqrt{t} + (ad - bc)\frac{k}{\sqrt{t}} \right\} e_6.$
- $\tilde{\mu}_7^{-t}(e_1, e_4) = \frac{1}{\sqrt{t}}e_6 = G \cdot \mu_7^t(e_1, e_4)$
 $= \left\{ (ad - bc)k\sqrt{t} + (ac + bd)\frac{h}{\sqrt{t}} \right\} e_5 + \left\{ (ad - bc)h\sqrt{t} - (ac + bd)\frac{k}{\sqrt{t}} \right\} e_6.$

Esto es equivalente al siguiente sistema (los otros tres corchetes producen las mismas ecuaciones):

$$\begin{cases} c = 1, & d = 0, \\ a = k, \\ b - ht = 0, \\ a = -k, \\ h + bt = 0, \end{cases}$$

De lo cual se sigue que $a = b = 0$, lo que contradice la condición $a^2 + b^2 = 1$. Dado que G fue arbitraria, (2.6) es verificada. \square

2.3. Resultados obtenidos en dimensión ocho

El objetivo de esta sección es exhibir varias familias dependiendo de uno (ver Ejemplo 2.3.4 y Ejemplo 2.3.8), dos (ver Ejemplo 2.3.3 y Ejemplo 2.3.5) y tres (ver Ejemplo 2.3.2) parámetros de estructuras complejas abelianas en álgebras de Lie 2-pasos nilpotentes de dimensión 8, usando el hecho de que todas estas nilvariedades complejas abelianas admiten métricas minimales de tipo $(1 < 2; 4, 4)$ ó $(1 < 2; 6, 2)$.

Siguiendo la idea desarrollada en dimensión seis, determinaremos los cocientes $P_{4,2}(\mathbb{R})/\mathbb{R}_{>0}U(2)$ y $P_{2,3}(\mathbb{R})/\mathbb{R}_{>0}U(1)$ en los casos $(4, 4)$ y $(6, 2)$, respectivamente. Esto puede ser visto como un primer paso hacia la clasificación de las estructuras complejas abelianas en nilvariedades de dimensión 8. De ahora en adelante, mantenemos la notación usada en [L5].

2.3.1. Caso (4,4)

En este caso $\mathfrak{v}_1 = \mathbb{R}^4$ y $\mathfrak{v}_2 = \mathbb{R}^4$, y consideramos el espacio vectorial $W := \Lambda^2 \mathfrak{v}_1^* \otimes \mathfrak{v}_2$. Si $\{X_1, \dots, X_4, Z_1, \dots, Z_4\}$ es una base de \mathfrak{n} tal que $\mathfrak{v}_1 = \langle X_1, \dots, X_4 \rangle_{\mathbb{R}}$ y $\mathfrak{v}_2 = \langle Z_1, \dots, Z_4 \rangle_{\mathbb{R}}$, entonces cada elemento de W puede ser descrito como

$$\begin{aligned} \mu(X_1, X_2) &= a_1 Z_1 + a_2 Z_2 + a_3 Z_3 + a_4 Z_4, & \mu(X_1, X_3) &= b_1 Z_1 + b_2 Z_2 + b_3 Z_3 + b_4 Z_4, \\ \mu(X_1, X_4) &= c_1 Z_1 + c_2 Z_2 + c_3 Z_3 + c_4 Z_4, & \mu(X_2, X_3) &= d_1 Z_1 + d_2 Z_2 + d_3 Z_3 + d_4 Z_4, \\ \mu(X_2, X_4) &= e_1 Z_1 + e_2 Z_2 + e_3 Z_3 + e_4 Z_4, & \mu(X_3, X_4) &= f_1 Z_1 + f_2 Z_2 + f_3 Z_3 + f_4 Z_4. \end{aligned}$$

La estructura compleja y la métrica compatible siempre serán definidas por

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & & 0 & -1 & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & & & 0 & -1 \\ & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \langle X_i, X_j \rangle = \langle Z_i, Z_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Si $A = (a_1, a_2, a_3, a_4), \dots, F = (f_1, f_2, f_3, f_4)$, y $JA = (-a_2, a_1, -a_4, a_3), \dots, F = (-f_2, f_1, -f_4, f_3)$, entonces J es integrable en N_μ (i.e. J satisface (1.1)), $\mu \in W$, si y sólo si

$$E = B + JC + JD, \quad (2.7)$$

y J es abeliana si y sólo si

$$E = B, \quad D = -C. \quad (2.8)$$

Defina $v_i = (a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Es fácil verificar que para cualquier $\mu \in W$, $\text{Ric}_\mu|_{\mathfrak{v}_2} = \frac{1}{2}[\langle v_i, v_j \rangle]$, $1 \leq i, j \leq 4$, y

$$\text{Ric}_\mu|_{\mathfrak{v}_1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \|A\|^2 + \|B\|^2 + \|C\|^2 & \langle B, D \rangle + \langle C, E \rangle & -\langle A, D \rangle + \langle C, F \rangle & -\langle A, E \rangle - \langle B, F \rangle \\ \langle B, D \rangle + \langle C, E \rangle & \|A\|^2 + \|D\|^2 + \|E\|^2 & \langle A, B \rangle + \langle E, F \rangle & \langle A, C \rangle - \langle D, F \rangle \\ -\langle A, D \rangle + \langle C, F \rangle & \langle A, B \rangle + \langle E, F \rangle & \|B\|^2 + \|D\|^2 + \|F\|^2 & \langle B, C \rangle + \langle D, E \rangle \\ -\langle A, E \rangle - \langle B, F \rangle & \langle A, C \rangle - \langle D, F \rangle & \langle B, C \rangle + \langle D, E \rangle & \|C\|^2 + \|E\|^2 + \|F\|^2 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$\text{Ric}_\mu^c|_{\mathfrak{v}_1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -\alpha & 0 & \langle A + F, D - C \rangle & \langle A + F, B + E \rangle \\ 0 & -\alpha & -\langle A + F, B + E \rangle & \langle A + F, D - C \rangle \\ \langle A + F, D - C \rangle & -\langle A + F, B + E \rangle & -\beta & 0 \\ -\langle A + F, B + E \rangle & \langle A + F, D - C \rangle & 0 & -\beta \end{bmatrix},$$

$$\text{Ric}_\mu^c|_{\mathfrak{v}_2} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 & 0 & \langle v_1, v_3 \rangle + \langle v_2, v_4 \rangle & \langle v_1, v_4 \rangle - \langle v_2, v_3 \rangle \\ 0 & \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 & \langle v_2, v_3 \rangle - \langle v_2, v_4 \rangle & \langle v_2, v_4 \rangle + \langle v_1, v_3 \rangle \\ \langle v_1, v_3 \rangle + \langle v_2, v_4 \rangle & \langle v_2, v_3 \rangle - \langle v_2, v_4 \rangle & \|v_3\|^2 + \|v_4\|^2 & 0 \\ \langle v_1, v_4 \rangle - \langle v_2, v_3 \rangle & \langle v_2, v_4 \rangle + \langle v_1, v_3 \rangle & 0 & \|v_3\|^2 + \|v_4\|^2 \end{bmatrix},$$

donde $\alpha := 2\|A\|^2 + \|B\|^2 + \|C\|^2 + \|D\|^2 + \|E\|^2$ y $\beta := \|B\|^2 + \|C\|^2 + \|D\|^2 + \|E\|^2 + 2\|F\|^2$.

Uno de los tipos de minimalidad que es fácil de caracterizar es $(1 < 2; 4, 4)$. En efecto, si para cualquier $\mu \in W$ tenemos que $\text{Ric}_\mu^c|_{\mathfrak{v}_1} = pI_4$ y $\text{Ric}_\mu^c|_{\mathfrak{v}_2} = qI_4$, entonces

$$\text{Ric}_\mu^c = \begin{bmatrix} pI_4 & \\ & qI_4 \end{bmatrix} = (2p - q)I_8 + (q - p) \begin{bmatrix} I_4 & \\ & 2I_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}I + \text{Der}(\mu).$$

Las siguientes condiciones son suficientes para que cualquier $\mu \in W$ sea minimal del tipo $(1 < 2; 4, 4)$.

(i) Condiciones para que $\text{Ric}^c_\mu|_{\mathfrak{n}_1} \in \mathbb{R}I$:

- $\langle A + F, D - C \rangle = 0$.
- $\langle A + F, B + E \rangle = 0$.
- $\|A\|^2 = \|F\|^2$.

(ii) Condiciones para que $\text{Ric}^c_\mu|_{\mathfrak{n}_2} \in \mathbb{R}I$:

- $\|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 = \|v_3\|^2 + \|v_4\|^2$.
- $\langle v_1, v_3 \rangle = -\langle v_2, v_4 \rangle$.
- $\langle v_1, v_4 \rangle = \langle v_2, v_3 \rangle$.

Así, si μ satisface las condiciones dadas en (i) y (ii), obtenemos $p = -\frac{1}{4}\alpha$ y $q = \frac{1}{4}(\|v_1\|^2 + \|v_2\|^2)$.

En lo que resta de esta sección estudiamos las formas Pfaffianas de cualquier $\mu \in W$. Dado que $\dim \mathfrak{v}_1 = \dim \mathfrak{v}_2 = 4$, se sigue que la forma Pfaffiana de cualquier $\mu \in W$ pertenece al conjunto $P_{4,2}(\mathbb{R})$; así el objetivo es determinar el cociente $P_{4,2}(\mathbb{R})/\mathbb{R}_{>0}U(2)$. Como en el caso (4, 2) existe la identificación $f(\mu) \in P_{4,2}(\mathbb{R}) \leftrightarrow A_f$, donde A_f es una matriz simétrica, y, en consecuencia,

$$P_{4,2}(\mathbb{R})/\pm GL_4(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \dots \right\}. \quad (2.9)$$

Basados en la clasificación de las álgebras de Lie metabelianas complejas (2-pasos nilpotentes) en dimensión menor o igual a 9 dada por L. Yu. Galitski y D. A. Timashev en [GT], y usando las identificaciones de las formas reales de las álgebras de Lie sobre \mathbb{C} , obtenemos

$$P_{4,2}(\mathbb{C})/GL_2(\mathbb{C}) = \begin{cases} x^2 - y^2 - z^2 + w^2 \\ x^2 - y^2 - z^2 \\ x^2 - y^2 \\ x^2 \\ 0 \end{cases} \simeq \begin{cases} + + + + \\ + + + 0 \\ + + 0 0 \\ + 0 0 0 \\ 0 0 0 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

Observación 2.3.1. El polinomio $f = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ no es la forma Pfaffiana de ninguna $\mu \in W$. En general, $f > 0$ ($\Leftrightarrow J_Z$ son invertibles $\forall Z$) no es la forma Pfaffiana de ninguna $\mu \in W$. Las dimensiones permitidas para ello son: $(2k, 1)$, $(4k, 2)$, $(4k, 3)$, $(8k, 4)$, \dots , $(8k, 7)$, $(16k, 8)$, $(32k, 9)$, $(64k, 10)$, $(64k, 11)$ (ver [LO] para más detalles).

La siguiente expresión fue obtenida por cálculo directo y no inferidas de las ecuaciones (2.9) y (2.10).

$$\begin{aligned}
 P_{4,2}(\mathbb{R})/U(2) \simeq \text{sym}(4)/U(2) &= \begin{cases} \left(aI, \begin{bmatrix} b & & & \\ & -b & & \\ & & c & \\ & & & -c \end{bmatrix} \right); & a, b, c \in \mathbb{R}. \\ \\ \left(\begin{bmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & b & \\ & & & b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c & h & & \\ h & -c & & \\ & & d & l \\ & & l & -d \end{bmatrix} \right); & a, b, c, d, h, l \in \mathbb{R} \ (a < b). \end{cases} \\ \\ &= \begin{cases} ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2; & a + b = c + d, \\ & a, b, c, d \in \mathbb{R}. \\ \\ ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2 + hxy + lzw; & a + b < c + d, \\ & a, b, c, d, h, l \in \mathbb{R}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

A continuación, se darán algunas curvas y familias de métricas minimales de tipo $(1 < 2; 4, 4)$, cuyas formas Pfaffianas aparecen en el cociente anterior.

Ejemplo 2.3.2. Sea $\mu_{krst} \in W$ dada por

$$\begin{aligned}
 A &= (s, t, 0, 0), & B &= (0, 0, r, 0), \\
 C &= (0, 0, 0, k), & D &= (0, 0, 0, -k), \\
 E &= (0, 0, r, 0), & F &= (s, -t, 0, 0),
 \end{aligned}$$

con $k, r, s, t \in \mathbb{R}$. Es claro que μ_{krst} satisface (2.7) y (2.8), y por lo tanto $(N_{\mu_{krst}}, J)$ es una nilvariedad compleja abeliana para todo $k, r, s, t \in \mathbb{R}$. Además, si $k^2 + r^2 = s^2 + t^2$ entonces la familia $\{(N_{\mu_{krst}}, J, \langle \cdot, \cdot \rangle) : k^2 + r^2 = s^2 + t^2\}$ de métricas minimales (condiciones (i) y (ii)) es no isométrica dos a dos, salvo multiplicación por escalares. Esto da una familia de 3 parámetros de nilvariedades complejas abelianas no isomorfas dos a dos (ver Teorema 2.1.4). Por otro lado, la forma Pfaffiana de μ_{krst} es

$$f(\mu_{krst}) = s^2x^2 - t^2y^2 - r^2z^2 - k^2w^2.$$

Ejemplo 2.3.3. Sea λ_{rst} definida por:

$$\begin{aligned}
 A &= (0, r, 0, 0), & B &= (0, 0, s, 0), \\
 C &= (0, 0, 0, t), & D &= (0, 0, 0, -t), \\
 E &= (0, 0, s, 0), & F &= (0, -r, 0, 0),
 \end{aligned}$$

donde $r, s, t \in \mathbb{R}$. Tenemos que $(N_{\lambda_{rst}}, J)$ es una nilvariedad compleja abeliana para todo $r, s, t \in \mathbb{R}$. Si $r^2 = s^2 + t^2$ entonces la familia $\{(N_{\lambda_{rst}}, J, \langle \cdot, \cdot \rangle) : r^2 = s^2 + t^2\}$ de métricas minimales es no isométrica dos a dos, salvo multiplicación por escalares. Así queda determinada una familia de 2 parámetros de nilvariedades complejas abelianas no isomorfas dos a dos. Notar que la forma Pfaffiana de λ_{rst} es

$$f(\lambda_{rst}) = -r^2y^2 - s^2z^2 - t^2w^2.$$

Ejemplo 2.3.4. Sea ν_{st} dada por $A = (s, 0, 0, 0) = -F$, $B = E = 0$, $C = (0, 0, t, 0) = -D$, con $s, t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, $(N_{\nu_{st}}, J)$ es una nilvariedad compleja abeliana para todo $s, t \in \mathbb{R}$. Más aún, si $s^2 = t^2$ entonces la curva $\{\nu_{st} : s^2 = t^2\}$ de métricas minimales es no isométrica dos a dos, salvo multiplicación por escalares. Esto da una curva de nilvariedades complejas abelianas no isomorfas dos a dos. Finalmente, la forma Pfaffiana de ν_{st} es

$$f(\nu_{st}) = -s^2x^2 - t^2z^2.$$

Ejemplo 2.3.5. Sea $\mu_{rst} \in W$ definida por:

$$\begin{aligned} A &= (r, 0, 0, 0), & B &= (0, 0, s, 0), \\ C &= (0, 0, 0, t), & D &= (0, 0, 0, -t), \\ E &= (0, 0, s, 0), & F &= (0, r, 0, 0), \end{aligned}$$

donde $r, s, t \in \mathbb{R}$. Así, $(N_{\mu_{rst}}, J)$ es una nilvariedad compleja abeliana para todo $r, s, t \in \mathbb{R}$. Si $r^2 = s^2 + t^2$ entonces la familia $\{\mu_{rst} : r^2 = s^2 + t^2\}$ de métricas minimales es no isométrica dos a dos, salvo multiplicación por escalares. Esto da una familia de 2 parámetros de nilvariedades complejas abelianas no isomorfas dos a dos. Notar que la forma Pfaffiana de μ_{rst} está dada por

$$f(\mu_{rst}) = r^2xy - s^2z^2 - t^2w^2.$$

2.3.2. Caso (6,2)

Para $\mathfrak{v}_1 = \mathbb{R}^6$ y $\mathfrak{v}_2 = \mathbb{R}^2$, considere $\widetilde{W} := \Lambda^2 \mathfrak{v}_1^* \otimes \mathfrak{v}_2$. Fije una base $\{X_1, \dots, X_6\}$ y $\{Z_1, Z_2\}$ de \mathfrak{v}_1 y \mathfrak{v}_2 , respectivamente. Cada elemento $\mu \in \widetilde{W}$ será descrito como

$$\begin{aligned} \mu(X_1, X_2) &= a_1Z_1 + a_2Z_2, & \mu(X_1, X_3) &= b_1Z_1 + b_2Z_2, & \mu(X_1, X_4) &= c_1Z_1 + c_2Z_2, \\ \mu(X_1, X_5) &= d_1Z_1 + d_2Z_2, & \mu(X_1, X_6) &= e_1Z_1 + e_2Z_2, & \mu(X_2, X_3) &= f_1Z_1 + f_2Z_2, \\ \mu(X_2, X_4) &= g_1Z_1 + g_2Z_2, & \mu(X_2, X_5) &= h_1Z_1 + h_2Z_2, & \mu(X_2, X_6) &= i_1Z_1 + i_2Z_2, \\ \mu(X_3, X_4) &= k_1Z_1 + k_2Z_2, & \mu(X_3, X_5) &= l_1Z_1 + l_2Z_2, & \mu(X_3, X_6) &= m_1Z_1 + m_2Z_2, \\ \mu(X_4, X_5) &= n_1Z_1 + n_2Z_2, & \mu(X_4, X_6) &= p_1Z_1 + p_2Z_2, & \mu(X_5, X_6) &= q_1Z_1 + q_2Z_2. \end{aligned}$$

La estructura compleja y la métrica compatible siempre serán definidas por

$$\begin{aligned} JX_1 &= X_2, & JX_3 &= X_4, & \langle X_i, X_j \rangle &= \delta_{ij}, & \langle Z_k, Z_l \rangle &= \delta_{kl}. \\ JX_5 &= X_6, & JZ_1 &= Z_2. \end{aligned}$$

Si $A = (a_1, a_2), \dots, Q = (q_1, q_2)$, y $JA = (-a_2, a_1), \dots, JQ = (-q_2, q_1)$, entonces J satisface (1.1) si y sólo si

$$G = B + JC + JF, \quad I = D + JE + JH, \quad P = L + JM + JN, \quad (2.11)$$

y J es abeliana si y sólo si

$$B = G, \quad C = -F, \quad D = I, \quad E = -H, \quad L = P, \quad M = N. \quad (2.12)$$

Sea $v_i = (a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i)$, $i = 1, 2$. Se sigue que $\text{Ric}_\mu|_{\mathfrak{v}_2} = \frac{1}{2}[\langle v_i, v_j \rangle]$, $1 \leq i, j \leq 2$, y

$$\text{Ric}^c_\mu|_{\mathfrak{v}_2} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 & 0 \\ 0 & \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}I.$$

Por lo complicado de las expresiones, solo se darán las condiciones suficientes para que cualquier $\mu \in \widetilde{W}$ sea minimal de tipo $(1 < 2; 6, 2)$ cuando J es abeliana.

(†) Condiciones para que $\text{Ric}^c_\mu|_{\mathfrak{n}_1} \in \mathbb{R}I$:

- a) $\|A\|^2 = \|K\|^2 = \|Q\|^2, \quad \|B\|^2 + \|C\|^2 = \|D\|^2 + \|E\|^2 = \|L\|^2 + \|M\|^2.$
- b) $\langle A + K, B \rangle = \langle A + K, C \rangle = \langle A + Q, D \rangle = \langle A + Q, E \rangle = \langle K + Q, L \rangle = \langle K + Q, M \rangle = 0.$
- c) $\langle B, L \rangle = -\langle C, N \rangle, \quad \langle B, M \rangle = -\langle C, P \rangle, \quad \langle B, D \rangle = -\langle C, E \rangle.$
- d) $\langle C, D \rangle = -\langle G, H \rangle, \quad \langle D, L \rangle = -\langle E, M \rangle, \quad \langle H, L \rangle = -\langle I, M \rangle.$

Si μ satisface las condiciones dadas en (†) obtenemos $q := \frac{1}{4}(\|v_1\|^2 + \|v_2\|^2)$ y $p := -\frac{1}{2}(\|A\|^2 + \|B\|^2 + \|C\|^2 + \|D\|^2 + \|E\|^2)$.

Dado que $\dim \mathfrak{v}_1 = 6$ y $\dim \mathfrak{v}_2 = 2$, la forma Pfaffiana de cualquier $\mu \in \widetilde{W}$ pertenece al conjunto $P_{2,3}(\mathbb{R})$. A diferencia de los dos casos anteriores, no existe una identificación de $f(\mu) \in P_{2,3}(\mathbb{R})$ con una matriz, pero se conoce que todo polinomio en $P_{2,3}(\mathbb{R})$ es la forma Pfaffiana de algún $\mu \in \widetilde{W}$ (ver [L7]). Nuevamente, de [GT], obtenemos que

$$P_{2,3}(\mathbb{C})/GL_2(\mathbb{C}) = \begin{cases} x^3 \\ x^2y + xy^2 = xy(x+y) \\ x^3 + x^2y = x^2(x+y) \simeq x^2y \end{cases} \quad (2.13)$$

Pero es fácil ver que

$$\begin{aligned} P_{2,3}(\mathbb{R}) \cap GL_2(\mathbb{C}) \cdot x^3 &= GL_2(\mathbb{R}) \cdot x^3, \\ P_{2,3}(\mathbb{R}) \cap GL_2(\mathbb{C}) \cdot (x^2y + xy^2) &= GL_2(\mathbb{R}) \cdot (x^2y + xy^2), \\ P_{2,3}(\mathbb{R}) \cap GL_2(\mathbb{C}) \cdot x^2y &= GL_2(\mathbb{R}) \cdot x^2y, \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$P_{2,3}(\mathbb{R})/GL_2(\mathbb{R}) = \begin{cases} x^3 \\ x^2y + xy^2 = xy(x+y) \\ x^3 + x^2y = x^2(x+y) \simeq x^2y \end{cases}$$

Ejemplo 2.3.6. Sean $\mu_{st}^1, \mu_{st}^2, \mu_{st}^3 \in \widetilde{W}$ definidas por: para todo $s, t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{lll} A^1 = (0, s), & A^2 = (t, 0), & A^3 = (0, s), \\ E^1 = (t, 0), & K^2 = (0, s), & E^3 = (t, 0), \\ H^1 = (-t, 0), & Q^2 = (s, t). & H^3 = (-t, 0), \\ K^1 = (s, 0). & & K^3 = (s, 0), \\ & & Q^3 = (-s, 0). \end{array}$$

Se sigue inmediatamente que $(N_{\mu_{st}^1}, J)$, $(N_{\mu_{st}^2}, J)$ y $(N_{\mu_{st}^3}, J)$ son nilvariedades complejas abelianas para todo $s, t \in \mathbb{R}$, dado que satisfacen (2.11) y (2.12). Además, no son minimales de tipo $(1 < 2; 6, 2)$ (no verifican (†)), y sus formas Pfaffianas están dadas por

$$f(\mu_{st}^1) = st^2x^3, \quad f(\mu_{st}^2) = s^2tx^2y + st^2xy^2, \quad f(\mu_{st}^3) = st^2x^3 + s^3x^2y.$$

De donde $\{(N_{\mu_{st}^2}, J) : s, t \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}\}$ y $\{(N_{\mu_{st}^3}, J) : s, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ son curvas, ya que

$$\begin{aligned} \forall a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}, a \neq b : x^2y + axy^2 &\notin U(1) \cdot (x^2y + bxy^2). \\ \forall a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, a \neq b : x^3 + ax^2y &\notin U(1) \cdot (x^3 + bx^2y). \end{aligned}$$

Observación 2.3.7. Sea $p(x, y) = \sum_{i=0}^3 a_i x^{3-i} y^i \in P_{2,3}(\mathbb{R})$. Defina

$$\begin{aligned} \Delta(p) &:= (3a_0 + a_2)^2 + (a_1 + 3a_3)^2. \\ \|p\|^2 &:= 6a_0^2 + 2a_1^2 + 2a_2^2 + 6a_3^2. \\ D(p) &:= 18a_0a_1a_2a_3 + a_1^2a_2^2 - 4a_0a_2^3 - 4a_1^3a_3 - 27a_0^2a_3^2. \end{aligned}$$

Tenemos que Δ es $SO(2)$ -invariante, $\|\cdot\|^2$ es $O(2)$ -invariante y D es $SL_2(\mathbb{R})$ -invariante. Notar que usando cocientes de los anteriores invariantes también podemos obtener que $\{(N_{\mu_{st}^2}, J) : s, t \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}\}$ y $\{(N_{\mu_{st}^3}, J) : s, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ son curvas de nilvariedades complejas abelianas.

Ejemplo 2.3.8. Sea $\lambda_{st} \in \widetilde{W}$ dada por $A = (t, s)$, $K = (-s, t)$ y $Q = (s, t)$, con $s, t \in \mathbb{R}$. Se tiene que $(N_{\lambda_{st}}, J)$ es una nilvariedad compleja abeliana para todo $s, t \in \mathbb{R}$. Más aún, λ_{st} es minimal de tipo $(1 < 2; 6, 2)$. De otro lado, la forma Pfaffiana de λ_{st} es

$$f(\lambda_{st}) = s^2tx^3 + s^3x^2y - t^3xy^2 - st^2y^3.$$

Defina $a := s^2$, $b := t^2$, y considere

$$h(a, b) := \frac{D(f(\lambda_{st}))}{(\Delta(f(\lambda_{st})))^2} = \frac{4ab(a^2 - b^2)^2}{(a + b)^6}.$$

Si $a + b = 1$ entonces $h(a) = 4a(1 - a)(2a - 1)^2$ es una función inyectiva para todo $a \geq 1$. Por lo tanto, $\{\lambda_{st} : s^2 + t^2 = 1, s \geq 1\}$ es una curva de métricas no isométricas dos a dos.

Capítulo 3

Métricas minimales en nilvariedades complejas de dimensión 6

3.1. Métricas minimales en nilvariedades complejas

Sea $(N, J, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ una nilvariedad hermitiana. En [L1], se probó que las siguientes condiciones sobre $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son equivalentes a la condición de minimalidad, mostrando que dichas métricas son especiales desde muchos otros puntos de vista:

- (i) La solución $\langle \cdot, \cdot \rangle_t$, con valor inicial $\langle \cdot, \cdot \rangle_0 = \langle \cdot, \cdot \rangle$, al cxRF

$$\frac{d}{dt} \langle \cdot, \cdot \rangle_t = -2 \operatorname{ric}^c \langle \cdot, \cdot \rangle_t,$$

es autosimilar, en el sentido de que $\langle \cdot, \cdot \rangle_t = c_t \varphi_t^* \langle \cdot, \cdot \rangle$ para algún $c_t > 0$ y un grupo monoparamétrico de automorfismos φ_t de N . En este caso, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es llamado un *cxRF-solitón*.

- (ii) Existen un campo vectorial X en N y $c \in \mathbb{R}$ tales que

$$\operatorname{ric}^c \langle \cdot, \cdot \rangle = c \langle \cdot, \cdot \rangle + L_X \langle \cdot, \cdot \rangle,$$

donde $L_X \langle \cdot, \cdot \rangle$ denota la derivada de Lie usual.

- (iii) $\operatorname{Ric}^c \langle \cdot, \cdot \rangle = cI + D$ para algún $c \in \mathbb{R}$ y $D \in \operatorname{Der}(\mathfrak{n})$.

En el capítulo anterior, vimos cómo usar la existencia de métricas minimales, donde la condición (iii) es fuertemente aplicada, para dar una prueba alternativa de los no isomorfismos dos a dos entre las estructuras que aparecen en la clasificación de las estructuras complejas abelianas en álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 6 dada en [ABD], por medio de los invariantes que dichas métricas generan.

Ejemplo 3.1.1. Para $t \in \mathbb{R}$, considere el álgebra de Lie 3-pasos nilpotente \mathfrak{h}_{11} cuyo corchete está dado por

$$\begin{aligned} \mu_t(e_1, e_2) &= e_4, & \mu_t(e_1, e_3) &= -e_5, \\ \mu_t(e_1, e_4) &= (t-1)e_6, & \mu_t(e_2, e_3) &= -te_6. \end{aligned}$$

Sean

$$J := \begin{bmatrix} 0 & -1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 0 & -1 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & 0 & -1 \\ & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \langle e_i, e_j \rangle := \delta_{ij}. \quad (3.1)$$

Una verificación sencilla muestra que J es una estructura compleja no abeliana en N_{μ_t} para todo t , y que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es compatible con (N_{μ_t}, J) . Se cumple que $\text{Ric}^c_{\mu_t} = cI + D$ para algún $c \in \mathbb{R}$, $D \in \text{Der}(\mathfrak{n})$ si y sólo si $t = 0$ ó $t = 1$. La condición (iii) ahora muestra que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ no es minimal para $t > 1$.

El problema de encontrar una métrica minimal puede ser muy difícil. En [FC], Fernández-Culma da un criterio para determinar la existencia de métricas minimales compatibles con estructuras geométricas en grupos de Lie nilpotentes. Aplicaremos dichos resultados al caso complejo.

Seguimos la notación de la Sección 1.0.3 para una estructura compleja fija J en N . Defina $A = \exp(\mathfrak{a})$ y considere W un subespacio A -invariante de V . Esto implica que W posee una descomposición en espacios peso

$$W = W_1 \oplus^\perp \dots \oplus^\perp W_r,$$

con pesos $\Psi_W = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$.

Definición 3.1.2. [FC] Se dice que W es J -nice si $\text{Ric}^c_\mu \in \mathfrak{a}$ para todo $\mu \in W$.

Un muy útil corolario es el siguiente

Corolario 3.1.3. [FC] Sea W un subespacio A -invariante de V . Si para todo α_i, α_j en Ψ_W , $\alpha_i - \alpha_j \notin \Phi$, entonces W es J -nice.

Desde un punto de vista algebraico, existe una condición sobre la base de una álgebra de Lie que permite obtener subespacios J -nice, basada en la simplicidad del correspondiente conjunto de las constantes estructurales. Una base $\{X_1, \dots, X_n\}$ de \mathfrak{n} se dice *nice* si $[X_i, X_j]$ es siempre un múltiplo escalar de algún elemento en la base y dos corchetes diferentes $[X_i, X_j], [X_r, X_s]$ pueden ser un múltiplo distinto de cero de algún X_k sólo si $\{i, j\}$ y $\{r, s\}$ son disjuntos (ver [LW] para otra aplicación). Es fácil verificar que si W admite una base nice, entonces W es J -nice.

Denotamos por $\mathfrak{R}(\mu)$ al conjunto ordenado de pesos relacionados con μ con respecto a la acción de $GL_n(\mathbb{C})$ sobre V . Es claro que $\mathfrak{R}(\mu)$ es la proyección ortogonal sobre \mathfrak{a} de los pesos relacionados con μ con respecto a la acción de $GL_{2n}(\mathbb{R})$ sobre V . La *matriz de Gram* de $(\mathfrak{R}(\mu), \langle \cdot, \cdot \rangle)$, denotada por U_μ , se define como

$$U_\mu(p, q) = \langle \mathfrak{R}(\mu)_p, \mathfrak{R}(\mu)_q \rangle$$

con $1 \leq p, q \leq \#\mathfrak{R}(\mu)$.

Teorema 3.1.4. [FC] Sean W un espacio J -nice y (N_μ, J) una nilvariedad compleja con $\mu \in W$. Entonces (N_μ, J) admite una métrica compatible minimal si y sólo si la ecuación

$$U_\mu[x_i] = \lambda[1]$$

posee una solución positiva $[x_i]$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.1.5. Usando la notación del Ejemplo 3.1.1, probaremos que (N_{μ_t}, J) admite una métrica compatible minimal para todo $t > 1$. Sea

$$W = \text{span}_{\mathbb{R}} \{\mu_{12}^4, \mu_{13}^5, \mu_{14}^6, \mu_{23}^6\},$$

donde $\mu_{ij}^k(e_i, e_j) = -\mu_{ij}^k(e_j, e_i) = e_k$ y cero en cualquier otro caso. Primero veamos que W es J -nice por medio del Corolario 3.1.3. El conjunto de raíces Φ de $\mathfrak{gl}_3(\mathbb{C})$ está dado por

$$\Phi = \{\pm \text{Diag}(1, -1, 0), \pm \text{Diag}(1, 0, -1), \pm \text{Diag}(0, 1, -1)\}.$$

Los pesos de W con respecto a la acción de $GL_3(\mathbb{C})$ son

$$\{\alpha_1 := \text{Diag}(-2, 1, 0), \alpha_2 := \text{Diag}(-1, -1, 1), \alpha_3 := \text{Diag}(-1, -1, 1), \alpha_4 := \text{Diag}(-1, -1, 1)\},$$

para todo $t > 1$ (note que los pesos dependen de los corchetes no nulos). Dado que $\alpha_i - \alpha_j \notin \Phi$, se deduce que W es J -nice. De lo anterior, se cumple que:

$$U_{\mu_t} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Como $X = (\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{14}, \frac{1}{14})$ es una solución positiva al problema $U_{\mu_t} X = [1]_4$, se sigue que (N_{μ_t}, J) admite una métrica minimal para todo $t > 1$, por Teorema 3.1.4 (ver Tabla 3.1).

Ejemplo 3.1.6. Considere el álgebra de Lie 2-pasos nilpotente $(\mathfrak{h}_5, \mu_{st})$ dada por

$$\begin{aligned} \mu_{st}(e_1, e_2) &= 2e_6, & \mu_{st}(e_1, e_3) &= -e_5, & \mu_{st}(e_1, e_4) &= -e_6, \\ \mu_{st}(e_2, e_3) &= -e_6, & \mu_{st}(e_2, e_4) &= e_5, & \mu_{st}(e_3, e_4) &= 2se_5 + 2te_6, \end{aligned}$$

con $s \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$, $4s^2 < 1 + 4t$. Tenemos que $(N_{\mu_{st}}, J)$ es una nilvariedad compleja no abeliana para todo s, t , donde J está dada como en (3.1). Sea

$$W = \text{span}_{\mathbb{R}} \{\mu_{12}^6, \mu_{13}^5, \mu_{14}^6, \mu_{23}^6, \mu_{24}^5, \mu_{34}^5, \mu_{34}^6\}.$$

Los pesos de W con respecto a la acción de $GL_3(\mathbb{C})$ son

$$\{\alpha_1 := \text{Diag}(-2, 0, 1), \alpha_2 := \text{Diag}(-1, -1, 1), \alpha_3 := \text{Diag}(-1, -1, 1), \alpha_4 := \text{Diag}(-1, -1, 1), \\ \alpha_5 := \text{Diag}(-1, -1, 1), \alpha_6 := \text{Diag}(0, -2, 1), \alpha_7 := \text{Diag}(0, -2, 1)\},$$

para todo $s \neq 0$, $t \neq 0$. Dado que $\alpha_1 - \alpha_2 \in \Phi$, Φ como en el ejemplo anterior, el Corolario 3.1.3 no es aplicable en este caso. De todas maneras, es fácil comprobar que $\text{Ric}^c(g \cdot \mu_{st}) \in \mathfrak{a}$ para todo $g \in A$, y así W es J -nice. Por lo tanto,

$$U_{\mu_{st}} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ya que $X = (\frac{1}{12}, \frac{1}{120}, \frac{1}{40}, \frac{1}{15}, \frac{1}{15}, \frac{1}{24}, \frac{1}{24})$ es una solución positiva al problema $U_{\mu_{st}}X = [1]_7$, se sigue que $(N_{\mu_{st}}, J)$ admite una métrica minimal para todo $(s, t) \neq (0, 0)$ (análogamente si $s = 0$ ó $t = 0$), por Teorema 3.1.4.

Pero si tomamos $s = t = 0$, entonces

$$W = \text{span}_{\mathbb{R}}\{\mu_{12}^6, \mu_{13}^5, \mu_{14}^6, \mu_{23}^6, \mu_{24}^5\}, \quad U_{\mu} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Cualquier solución a la ecuación $U_{\mu}X = \lambda[1]_5$ es de la forma $(0, \frac{1}{3} - a - b - c, a, b, c)$, y por lo tanto (N_{μ}, J) no admite una métrica minimal por Teorema 3.1.4. En resumen, $(N_{\mu_{st}}, J)$ admite una métrica minimal si y sólo si $s \neq 0$ ó $t \neq 0$ (ver Tabla 3.1).

Ejemplo 3.1.7. Sea $(\mathfrak{h}_{26}^+, \mu)$ el álgebra de Lie 4-pasos nilpotente definida por

$$\begin{aligned} \mu(e_1, e_2) &= e_5, & \mu(e_1, e_3) &= \pm e_6, & \mu(e_1, e_5) &= -e_3, \\ \mu(e_2, e_4) &= \pm e_6, & \mu(e_2, e_5) &= -e_4. \end{aligned}$$

Por lo tanto, (N_{μ}, J) es una nilvariedad compleja. Sea

$$W = \text{span}_{\mathbb{R}}\{\mu_{12}^5, \mu_{13}^6, \mu_{15}^3, \mu_{24}^6, \mu_{25}^4\}.$$

Notar que W es nice, y, en consecuencia, es J -nice. Los pesos de W con respecto a la acción de $GL_3(\mathbb{C})$ son

$$\{\alpha_1 := \text{Diag}(-2, 0, 1), \alpha_2 := \text{Diag}(-1, -1, 1), \alpha_3 := \text{Diag}(-1, 1, -1), \alpha_4 := \text{Diag}(-1, -1, 1), \alpha_5 := \text{Diag}(-1, 1, -1)\}.$$

Así, obtenemos que:

$$U_{\mu} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Cualquier solución a $U_{\mu}X = \lambda[1]_5$ es de la forma $(-2, 3 - a, 2 - b, a, b)$, así (N_{μ}, J) no admite una métrica minimal por Teorema 3.1.4 (ver Tabla 3.2).

3.2. Clasificación de las métricas minimales en grupos de Lie nilpotentes de dimensión 6

En esta sección, usaremos la clasificación de todas las estructuras complejas en grupos de Lie nilpotentes de dimensión 6 dada en [COUV], para determinar todas aquellas estructuras que admiten una métrica hermitiana minimal. Recordar que el caso abeliano fue analizado en el capítulo anterior y por tanto no se incluye en esta clasificación; a pesar de esto note que probar que (N_5, J) , J abeliana, no admite una métrica hermitiana minimal se sigue del Teorema 3.1.4.

A continuación, mostramos cómo reescribir las ecuaciones de las estructuras complejas que aparecen en [COUV] para el álgebra de Lie \mathfrak{h}_2 , de tal forma que la estructura compleja J sea fijada

y se mueva el corchete. Sea $Je^1 = e^2$, $Je^3 = e^4$ y $Je^5 = e^6$ (vista en el dual \mathfrak{h}_2^* , recordar que $(J\alpha)(x) = -\alpha(Jx)$ para todo $\alpha \in \Lambda^2 \mathfrak{n}^*$). Con respecto a la base

$$\{\omega^1 := e^1 - iJe^1, \omega^2 := e^3 - iJe^3, \omega^3 := e^5 - iJe^5\},$$

las ecuaciones de las estructuras complejas son $d\omega^1 = d\omega^2 = 0$, $d\omega^3 = \omega^{12} + \omega^{1\bar{1}} + \omega^{1\bar{2}} + D\omega^{2\bar{2}}$, con $D \in \mathbb{C}$ y $\Im m D > 0$. Aquí ω^{jk} (resp. $\omega^{j\bar{k}}$) indica el producto cuña $\omega^j \wedge \omega^k$ (resp. $\omega^j \wedge \omega^{\bar{k}}$), donde $\omega^{\bar{k}}$ es la conjugación compleja de ω^k . Sea $D = \Re t D + i\Im m D = t + is$, $s > 0$. De donde,

$$\begin{aligned} de^1 &= de^2 = de^3 = de^4 = 0, \\ de^5 - ide^6 &= 2ie^1 \wedge e^2 + 2e^1 \wedge e^3 - 2ie^2 \wedge e^3 + 2(it - s)e^3 \wedge e^4. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} de^1 &= de^2 = de^3 = de^4 = 0, \\ de^5 &= 2e^1 \wedge e^3 - 2se^3 \wedge e^4, \\ de^6 &= -2e^1 \wedge e^2 + 2e^2 \wedge e^3 - 2te^3 \wedge e^4. \end{aligned}$$

Recordar que $de^k = \sum_{i,j} (-c_{ij}^k) e^i \wedge e^j \Leftrightarrow [e_i, e_j] = \sum_k c_{ij}^k e_k$. Así,

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_6, \quad [e_1, e_3] = -e_5, \\ [e_2, e_3] &= -e_6, \quad [e_3, e_4] = se_5 + te_6, \end{aligned}$$

quitando el múltiplo 2 por comodidad. Aplicando el argumento anterior y el Teorema 3.1.4 en cada ítem de [COUV, Table 1, 2], con J como en (3.1), obtenemos el resultado principal de este capítulo. Denotamos por N_4^t , $N_5^{s,t}$ y N_{26}^+ a los grupos de Lie nilpotentes con álgebras de Lie $(\mathfrak{h}_4, [\cdot, \cdot]_t)$, $(\mathfrak{h}_5, [\cdot, \cdot]_{s,t})$ y $(\mathfrak{h}_{26}^+, [\cdot, \cdot]_{\pm})$, respectivamente (ver Tablas 3.1. y 3.2).

Teorema 3.2.1. *Toda nilvariedad compleja no abeliana de dimensión 6 admite una métrica minimal, con las únicas cuatro excepciones de $(N_4^{1/4}, J)$, $(N_5^{0,0}, J)$ y (N_{26}^+, J^{\pm}) .*

Observación 3.2.2. En el teorema anterior, (N_{26}^+, J^{\pm}) solo hace hincapié a que el resultado es para las dos opciones $(\mathfrak{h}_{26}^+, [\cdot, \cdot]_{\pm})$, recordar que J está fija. En la notación usada en [COUV], las cuatro excepciones del teorema corresponden a las siguientes estructuras complejas:

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_4 : \quad d\omega^1 &= d\omega^2 = 0, \quad d\omega^3 = \omega^{12} + \omega^{1\bar{1}} + \omega^{1\bar{2}} + (1/4)\omega^{2\bar{2}}. \\ \mathfrak{h}_5 : \quad d\omega^1 &= d\omega^2 = 0, \quad d\omega^3 = \omega^{12} + \omega^{1\bar{1}}. \\ \mathfrak{h}_{26}^+ : \quad d\omega^1 &= 0, \quad d\omega^2 = \omega^{13} + \omega^{1\bar{3}}, \quad d\omega^3 = i\omega^{1\bar{1}} \pm i(\omega^{1\bar{2}} - \omega^{2\bar{1}}). \end{aligned}$$

En las Tablas 3.1 y 3.2, se dan explícitamente las álgebras de Lie \mathfrak{n} , indicando en la tercera columna las condiciones bajo las cuales (N, J) admite una métrica compatible minimal. En la última columna, se dan las condiciones para que la métrica canónica $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dada como en (3.1), sea minimal, esto es, los casos en que $\text{Ric}^c_{\langle \cdot, \cdot \rangle} = cI + D$ para algún $c \in \mathbb{R}$ y $D \in \text{Der}(\mathfrak{n})$.

n	Corchete	Existencia	$\langle \cdot, \cdot \rangle$ minimal
\mathfrak{h}_2	$[e_1, e_2] = e_6, [e_1, e_3] = -e_5, [e_2, e_3] = -e_6,$ $[e_3, e_4] = se_5 + te_6; s > 0, t \in \mathbb{R}.$	Sí	No
\mathfrak{h}_4	$[e_1, e_2] = e_6, [e_1, e_3] = -e_5, [e_2, e_3] = -e_6,$ $[e_3, e_4] = te_6; t \in \mathbb{R} - \{0\}.$	$t \neq \frac{1}{4}$	$t = -1$
\mathfrak{h}_5	$[e_1, e_3] = -e_5, [e_1, e_4] = -e_6,$ $[e_2, e_3] = -e_6, [e_2, e_4] = e_5.$	Sí	Sí
	$[e_1, e_2] = 2e_6, [e_1, e_3] = -e_5, [e_1, e_4] = -e_6,$ $[e_2, e_3] = -e_6, [e_2, e_4] = e_5, [e_3, e_4] = 2se_5 + 2te_6,$ $s \geq 0, t \in \mathbb{R}, 4s^2 < 1 + 4t.$	$s \neq 0$ or $t \neq 0$	$s^2 + t^2 = 1$
	$[e_1, e_2] = 2e_6, [e_1, e_3] = -(t+1)e_5, [e_1, e_4] = (t-1)e_6,$ $[e_2, e_3] = -(t+1)e_6, [e_2, e_4] = (1-t)e_5, [e_3, e_4] = 2se_5,$ con (s, t) que verifican una condición: <ul style="list-style-type: none"> • $0 < t^2 < \frac{1}{2}, 0 \leq s < \frac{t^2}{2}$ • $\frac{1}{2} \leq t^2 < 1, 0 \leq s < \frac{1-t^2}{2}$ • $t^2 > 1, 0 \leq s < \frac{t^2-1}{2}$ 	Sí	No
\mathfrak{h}_6	$[e_1, e_2] = e_6, [e_1, e_3] = -e_5, [e_2, e_3] = -e_6.$	Sí	No
\mathfrak{h}_7	$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = -e_5, [e_2, e_3] = -e_6.$	Sí	Sí
\mathfrak{h}_{10}	$[e_1, e_2] = e_4, [e_2, e_3] = -e_6, [e_2, e_4] = e_5.$	Sí	Sí
\mathfrak{h}_{11}	$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = -te_5, [e_2, e_3] = -e_6,$ $[e_2, e_4] = (1-t)e_5; t < 1, t \neq 0.$	Sí	No
	$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = -e_5, [e_1, e_4] = (t-1)e_6,$ $[e_2, e_3] = -te_6; t > 1.$	Sí	No
\mathfrak{h}_{12}	$[e_1, e_2] = 2e_4, [e_1, e_3] = -(s+1-\alpha)e_5 + te_6,$ $[e_1, e_4] = te_5 + (s-1+\alpha)e_6, [e_2, e_3] = -te_5 - (s+1+\alpha)e_6,$ $[e_2, e_4] = -(s-1-\alpha)e_5 + te_6; s, t \in \mathbb{R}, t \neq 0,$ con $\alpha := \sqrt{(s-1)^2 + t^2}.$	Sí	$(s - \frac{1}{2})^2 + t^2 = \frac{1}{4}$
\mathfrak{h}_{13}	$[e_1, e_2] = 2e_4, [e_1, e_3] = -(s+1-c)e_5 + te_6,$ $[e_1, e_4] = te_5 + (s-1+c)e_6, [e_2, e_3] = -te_5 - (s+1+c)e_6,$ $[e_2, e_4] = -(s-1-c)e_5 + te_6; s, t \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}^{\geq 0},$ c, β que cumplen: sean $\alpha := \sqrt{(s-1)^2 + t^2}, \beta := \sqrt{s^2 + t^2},$ $c \neq \alpha, (c, \beta) \neq (0, 1), c^4 - 2(\beta^2 + 1)c^2 + (\beta^2 - 1)^2 < 0.$	Sí	$c^2 + s^2 + t^2 = 1$

n	Corchete	Existencia	$\langle \cdot, \cdot \rangle$ minimal
\mathfrak{h}_{14}	$[e_1, e_2] = 2e_4, [e_1, e_3] = -(s+1-c)e_5 + te_6,$ $[e_1, e_4] = te_5 + (s-1+c)e_6, [e_2, e_3] = -te_5 - (s+1+c)e_6,$ $[e_2, e_4] = -(s-1-c)e_5 + te_6; s, t \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}^{\geq 0},$ c, β que cumplen: sean $\alpha := \sqrt{(s-1)^2 + t^2}, \beta := \sqrt{s^2 + t^2},$ $c \neq \alpha, (c, \beta) \neq (0, 1), c^4 - 2(\beta^2 + 1)c^2 + (\beta^2 - 1)^2 = 0.$	Sí	$c^2 + s^2 + t^2 = 1$
\mathfrak{h}_{15}	$[e_1, e_2] = 2e_4, [e_1, e_3] = -(s+1-c)e_5 + te_6,$ $[e_1, e_4] = te_5 + (s-1+c)e_6, [e_2, e_3] = -te_5 - (s+1+c)e_6,$ $[e_2, e_4] = -(s-1-c)e_5 + te_6; s, t \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}^{\geq 0},$ c, β que cumplen: sean $\alpha := \sqrt{(s-1)^2 + t^2}, \beta := \sqrt{s^2 + t^2},$ $c \neq \alpha, (c, \beta) \neq (0, 1), c^4 - 2(\beta^2 + 1)c^2 + (\beta^2 - 1)^2 > 0.$	Sí	$c^2 + s^2 + t^2 = 1$
\mathfrak{h}_{16}	$[e_1, e_2] = 2e_4, [e_1, e_3] = -(s+1)e_5 + te_6,$ $[e_1, e_4] = te_5 + (s-1)e_6, [e_2, e_3] = -te_5 - (s+1)e_6,$ $[e_2, e_4] = (1-s)e_5 + te_6; s, t \in \mathbb{R}, s^2 + t^2 = 1, (s, t) \neq (1, 0).$	Sí	$s^2 + t^2 = 1$

Tabla 3.1. Estructuras complejas nilpotentes no abelianas.

n	Corchete	Existencia	$\langle \cdot, \cdot \rangle$ minimal
\mathfrak{h}_{19}^-	$[e_1, e_3] = \pm e_6, [e_1, e_5] = -e_3,$ $[e_2, e_4] = \pm e_6, [e_2, e_5] = -e_4.$	Sí	Sí
\mathfrak{h}_{26}^+	$[e_1, e_2] = e_5, [e_1, e_3] = \pm e_6, [e_1, e_5] = -e_3,$ $[e_2, e_4] = \pm e_6, [e_2, e_5] = -e_4.$	No	—

Tabla 3.2. Estructuras complejas no nilpotentes.

Capítulo 4

Sobre el flujo de Chern-Ricci y sus solitones para grupos de Lie

4.1. La forma de Chern-Ricci

Sea (M, J, ω, g) una variedad hermitiana de dimensión $2n$, donde $\omega = g(J\cdot, \cdot)$. La *conexión de Chern* es la única conexión ∇ en M que es hermitiana (i.e. $\nabla J = 0$, $\nabla g = 0$) y su torsión T satisface $T^{1,1} = 0$, donde $T^{1,1}$ denota la componente $(1, 1)$ de la torsión. En términos de la conexión de Levi Civita D de g , la conexión de Chern está dada por

$$g(\nabla_X Y, Z) = g(D_X Y, Z) - \frac{1}{2}d\omega(JX, Y, Z).$$

En [V2, (2.1)], [DV, (2.1)] y [TW, Sección 2] se pueden encontrar diferentes descripciones equivalentes. Notar que $\nabla = D$ si y sólo si (M, J, ω, g) es Kähler.

La *forma de Chern-Ricci* $p = p(J, \omega, g)$ está definida por

$$p(X, Y) = \sum_{i=1}^n g(R(X, Y)e_i, Je_i),$$

donde $R(X, Y) = \nabla_{[X, Y]} - [\nabla_X, \nabla_Y]$ es el tensor de curvatura de ∇ y $\{e_i, Je_i\}_{i=1}^n$ es un marco local ortonormal para g . Se sigue que p es cerrada, de tipo $(1, 1)$ (i.e. $p = p(J\cdot, J\cdot)$), localmente exacta y en el caso Kähler coincide con la forma de Ricci $\text{Rc}(J\cdot, \cdot)$ (ver [V2, (3.3)], [TW, Sección 2] y [L10, Apéndice]).

En [V2, Proposición 4.1] (ver también [P]) se probó que la forma de Chern-Ricci de una estructura (casi-) hermitiana invariante a izquierda (J, ω, g) en un grupo de Lie con álgebra de Lie \mathfrak{g} está dada por

$$p(X, Y) = -\frac{1}{2} \text{tr } J \text{ad } [X, Y] + \frac{1}{2} \text{tr } \text{ad } J[X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}. \quad (4.1)$$

Observamos que, sorprendentemente, p sólo depende de J . El *operador de Chern-Ricci* $P \in \text{End}(\mathfrak{g})$, definido por

$$p = \omega(P\cdot, \cdot), \quad (4.2)$$

es una aplicación simétrica y hermitiana con respecto a (J, g) que se anula en el centro de \mathfrak{g} .

Se deduce de [V2, Proposición 4.2] que p se anula si J es bi-invariante (i.e. $[J\cdot, \cdot] = J[\cdot, \cdot]$) ó J es abeliana y \mathfrak{g} es unimodular. Por otro lado, se sigue de [BDV, Lema 2.2] que todas las nilvariedades hermitianas son Chern-Ricci planas. Ahora probamos este hecho a partir de la condición de integrabilidad, basándonos en la prueba de tal lema y dando una prueba alternativa.

Proposición 4.1.1. *La forma de Chern-Ricci se anula para cualquier estructura hermitiana invariante a izquierda en un grupo de Lie nilpotente.*

Demostración. Basta con probar que $\text{tr}(J \text{ad}_X) = 0$ para cualquier $X \in \mathfrak{g}$ (ver (4.1)), o equivalentemente, $\text{tr}(J^c \text{ad}_X) = 0$, para cualquier $X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, donde $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$ es la complejificación de \mathfrak{g} y $J^c : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ esta dada por $J^c(X + iY) = JX + iJY$. Considere la descomposición $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}^{1,0} \oplus \mathfrak{g}^{0,1}$ en $\pm i$ -autoespacios de J^c . Dado que J es integrable y \mathfrak{g} es nilpotente, tenemos que $\mathfrak{g}^{1,0}$ es una subálgebra de Lie nilpotente (compleja) de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Si $\{X_1, \dots, X_n\}$ es una base de $\mathfrak{g}^{1,0}$, entonces $\beta = \{X_1, \dots, X_n, \overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n\}$ es una base de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ y la matriz de ad_{X_k} relativa a β se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} A_k & * \\ 0 & B_k \end{bmatrix}.$$

Dado que $\text{tr} A_k = 0$ y $\text{tr} \text{ad}_{X_k} = 0$ por nilpotencia, obtenemos que $\text{tr} B_k = 0$. Por otro lado, como la matriz de J^c relativa a β está dada por

$$\begin{bmatrix} iId & 0 \\ 0 & -iId \end{bmatrix},$$

se sigue que la matriz de $J^c \text{ad}_{X_k}$ es de la forma

$$\begin{bmatrix} iA_k & * \\ 0 & -iB_k \end{bmatrix},$$

y así tiene traza cero. Un argumento similar implica que $\text{tr}(J^c \text{ad}_{\overline{X}_k}) = 0$, lo cual completa la prueba. \square

4.2. El flujo de Chern-Ricci

Sea (M, J) una variedad compleja. El *flujo de Chern-Ricci* (CRF) es la ecuación de evolución para una familia monoparamétrica $\omega(t)$ de métricas hermitianas definida por

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega = -2p, \quad \text{ó equivalentemente,} \quad \frac{\partial}{\partial t} g = -2p(\cdot, J\cdot), \quad (4.3)$$

donde $p = p(J, \omega(t))$ es la forma de Chern-Ricci y $g = \omega(\cdot, J\cdot)$. En [TW, G] y las referencias dadas en ellos se puede hallar más información sobre este flujo. Si la métrica de partida ω_0 es Kähler, entonces CRF se convierte en el flujo de Kähler-Ricci (KRF).

Sea (G, J) un grupo de Lie munido con una estructura compleja invariante a izquierda. Dada una métrica hermitiana invariante a izquierda ω_0 , por la invarianza por difeomorfismos de la ecuación (4.3) se sigue que la CRF-solución comenzando en ω_0 permanece invariante a izquierda y así puede ser estudiada en el álgebra de Lie. En efecto, el CRF se convierte en el sistema ODE

$$\frac{d}{dt} \omega = -2p, \quad (4.4)$$

donde $\omega(t), p(t) \in \Lambda^2 \mathfrak{g}^*$, y todos los tensores involucrados están determinados por su valor en la identidad del grupo. Así, la existencia en corto tiempo (hacia adelante y hacia atrás) y la unicidad de las soluciones están siempre garantizadas.

Dado que en grupos de Lie la forma de Chern-Ricci p depende solo de J (ver (4.1)), obtenemos que a lo largo de la CRF-solución comenzando en ω_0 , $p(t) \equiv p_0 := p(J, \omega_0)$, y así $\omega(t)$ está simplemente dada por

$$\omega(t) = \omega_0 - 2tp_0, \quad \text{ó equivalentemente,} \quad g(t) = g_0 - 2tp_0(\cdot, J). \quad (4.5)$$

Si P_0 es el operador de Chern-Ricci de ω_0 (ver (4.2)), entonces

$$\omega(t) = \omega_0((I - 2tP_0)\cdot, \cdot),$$

y así la solución existe en cuanto la aplicación hermitiana $I - 2tP_0$ sea positiva. Se deduce que el intervalo máximo de tiempo de existencia (T_-, T_+) de $\omega(t)$ está dado por

$$T_{\pm} = \begin{cases} \infty, & \text{si } P_0 \leq 0, \\ 1/(2p_{\pm}), & \text{e.c.c.,} \end{cases} \quad T_{\pm} = \begin{cases} -\infty, & \text{si } P_0 \geq 0, \\ 1/(2p_{\mp}), & \text{e.c.c.,} \end{cases} \quad (4.6)$$

donde p_+ es el máximo autovalor positivo del operador de Chern-Ricci P_0 y p_- es el mínimo autovalor negativo.

El flujo de corchetes

Dada una métrica hermitiana invariante a izquierda ω_0 en un grupo de Lie complejo simplemente conexo (G, J) , se tiene que la nueva métrica

$$\omega = h^* \omega_0 := \omega_0(h\cdot, h\cdot),$$

es también hermitiana para cualquier $h \in GL(\mathfrak{g}, J) \simeq GL_n(\mathbb{C})$. Además, el correspondiente isomorfismo de grupos de Lie

$$\tilde{h} : (G, J, \omega) \longrightarrow (G_{\mu}, J, \omega_0), \quad \text{donde} \quad \mu = h \cdot [\cdot, \cdot] := h[h^{-1}\cdot, h^{-1}\cdot],$$

es una equivalencia de variedades hermitianas. Aquí $[\cdot, \cdot]$ denota el corchete de Lie del álgebra de Lie \mathfrak{g} y así μ define una nueva álgebra de Lie (isomorfa a $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$) con el mismo espacio vectorial subyacente \mathfrak{g} . Denotamos por G_{μ} al grupo de Lie simplemente conexo con álgebra de Lie (\mathfrak{g}, μ) . Esta equivalencia sugiere la siguiente pregunta natural:

¿Qué pasa si evolucionamos μ en vez de ω ?

Consideremos para una familia $\mu(t) \in \Lambda^2 \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$ de corchetes de Lie la siguiente ecuación de evolución:

$$\frac{d}{dt} \mu = \delta_{\mu}(P_{\mu}), \quad \mu(0) = [\cdot, \cdot], \quad (4.7)$$

donde $P_{\mu} \in \text{End}(\mathfrak{g})$ es el operador de Chern-Ricci de la variedad hermitiana (G_{μ}, J, ω_0) y $\delta_{\mu} : \text{End}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \Lambda^2 \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$ está definida por

$$\delta_{\mu}(A) := \mu(A\cdot, \cdot) + \mu(\cdot, A\cdot) - A\mu(\cdot, \cdot) = -\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} e^{tA} \cdot \mu, \quad \forall A \in \text{End}(\mathfrak{g}).$$

Esta ecuación de evolución es llamada el *flujo de corchetes* y en [L10] se probó que es equivalente al CRF. Notar que como J esta fija, el subconjunto algebraico

$$\{\mu \in \Lambda^2 \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g} : \mu \text{ satisface la identidad de Jacobi y } J \text{ es integrable en } G_\mu\},$$

es invariante bajo el flujo de corchetes; de hecho, $\mu(t) \in GL_n(\mathbb{C}) \cdot [\cdot, \cdot]$ para todo t .

Para un grupo de Lie hermitiano simplemente conexo dado (G, J, ω_0) con álgebra de Lie \mathfrak{g} , considere las siguientes dos familias monoparamétricas de grupos de Lie hermitianos:

$$(G, J, \omega(t)), \quad (G_{\mu(t)}, J, \omega_0), \quad (4.8)$$

donde $\omega(t)$ es el CRF (4.4) comenzando en ω_0 y $\mu(t)$ es el flujo de corchetes (4.7) comenzando en el corchete de Lie $[\cdot, \cdot]$ de \mathfrak{g} .

Teorema 4.2.1. [L10] *Existen isomorfismos de grupos de Lie dependientes del tiempo $h(t) : G \rightarrow G_{\mu(t)}$ tales que*

$$\omega(t) = h(t)^* \omega_0, \quad \forall t,$$

los cuales pueden ser escogidos de tal manera que su derivada en la identidad, también denotada por $h = h(t)$ (notar que por lo tanto $\mu(t) = h(t) \cdot [\cdot, \cdot]$), es la solución a cualquiera de los siguientes sistemas de ODE's:

$$(i) \quad \frac{d}{dt} h = -hP, \quad h(0) = I.$$

$$(ii) \quad \frac{d}{dt} h = -P_\mu h, \quad h(0) = I.$$

En particular, el intervalo máximo de tiempo de existencia (T_-, T_+) es el mismo para ambos flujos, como también es el comportamiento de cualquier tipo de curvatura a lo largo de los flujos.

Es fácil ver que el operador de Chern-Ricci de $(G, J, \omega(t))$ es igual a

$$P(t) = (I - 2tP_0)^{-1} P_0,$$

de lo cual se sigue que la familia $h(t) \in GL(\mathfrak{g})$ está dada por $h(t) = (I - 2tP_0)^{1/2}$. La solución al flujo de corchetes es por lo tanto dada por

$$\mu(t) = (I - 2tP_0)^{1/2} \cdot [\cdot, \cdot],$$

y relativa a cualquier base ortonormal $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$ de autovectores de P_0 , digamos con autovalores $\{p_1, \dots, p_{2n}\}$, los coeficientes de estructura de $\mu(t)$ son

$$\mu_{ij}^k(t) = \left(\frac{1 - 2tp_k}{(1 - 2tp_i)(1 - 2tp_j)} \right)^{1/2} c_{ij}^k, \quad (4.9)$$

donde c_{ij}^k son los coeficientes de estructura del corchete de Lie $[\cdot, \cdot]$ de \mathfrak{g} (i.e. $[e_i, e_j] = \sum c_{ij}^k e_k$).

La curvatura escalar de Chern es por lo tanto dada por

$$\text{tr } P(t) = \sum_{i=1}^{2n} \frac{p_i}{1 - 2tp_i}.$$

Así, $\text{tr } P(t)$ es estrictamente creciente a menos que $P(t) \equiv 0$ (i.e. $\omega(t) \equiv \omega_0$) y la integral de $\text{tr } P(t)$ debería explotar en una singularidad de tiempo finito $T_+ < \infty$. Sin embargo, $\text{tr } P(t) \leq \frac{C}{T_+ - t}$ para alguna constante $C > 0$, lo que coincide con lo planteado en una conjetura general bien conocida para el flujo de Kähler-Ricci (ver por ejemplo [SW, Conjetura 7.7]).

4.3. Solitones de Chern-Ricci

En esta sección, nos ocupamos de las CRF-soluciones auto-similares en grupos de Lie. Se sigue de la Proposición 4.1.1 que $p = 0$ si \mathfrak{g} es nilpotente, y así cualquier estructura hermitiana invariante a izquierda en un grupo de Lie nilpotente (y consecuentemente, en cualquier nilvariedad compacta) es un punto fijo para el CRF. Sin embargo, en la Sección 4.5 mostraremos que muchos grupos de Lie solubles de dimensión 4 admiten *solitones* de Chern-Ricci, que no son puntos fijos (i.e. $p \neq 0$).

Definición 4.3.1. [L10] (G, J, ω) se dice que es un *solitón de Chern-Ricci* (CR-solitón) si su operador de Chern-Ricci satisface

$$P = cI + \frac{1}{2}(D + D^t), \quad \text{para algún } c \in \mathbb{R}, \quad D \in \text{Der}(\mathfrak{g}), \quad DJ = JD.$$

Esto es equivalente a tener

$$p(J, \omega) = c\omega + \frac{1}{2}(\omega(D\cdot, \cdot) + \omega(\cdot, D\cdot)) = c\omega - \frac{1}{2}\mathcal{L}_{X_D}\omega,$$

donde X_D es el campo vectorial en el grupo de Lie definido por el subgrupo monoparamétrico de automorfismos φ_t con derivada $e^{tD} \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$ y \mathcal{L}_{X_D} denota la derivada de Lie. La CRF-solución comenzando en un CR-solitón (G, J, ω) está dada por

$$\omega(t) = (-2ct + 1) \left(e^{s(t)D} \right)^* \omega, \quad (4.10)$$

donde $s(t) := \frac{\log(-2ct+1)}{-2c}$ si $c \neq 0$ y $s(t) = t$ cuando $c = 0$. Un CR-solitón (G, J, ω) con constante c se dice de *expansión* si $c < 0$, *estacionario* si $c = 0$, y de *contracción* si $c > 0$.

El siguiente resultado estructural para solitones de Chern-Ricci, el cual en particular se cumple para solitones de Kähler-Ricci, proporciona un punto de partida para abordar el problema de la clasificación.

Proposición 4.3.2. [L10] *Sea (G, J, ω) un grupo de Lie hermitiano con álgebra de Lie \mathfrak{g} y operador de Chern-Ricci $P \neq 0$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

- (i) ω es un solitón de Chern-Ricci con constante c .
- (ii) $P = cI + D$, para algún $D \in \text{Der}(\mathfrak{g})$.
- (iii) Los autovalores de P son todos iguales a 0 ó c , el núcleo $\mathfrak{k} = \text{Ker } P$ es un ideal abeliano de \mathfrak{g} y su complemento ortogonal \mathfrak{k}^\perp (i.e. el c -autoespacio de P) es una subálgebra de Lie de \mathfrak{g} (en particular, \mathfrak{g} es el producto semidirecto $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}^\perp \ltimes \mathfrak{k}$ y $c = 0$ si y sólo si $P = 0$).

El siguiente corolario se sigue esencialmente de la observación de que J debe dejar a \mathfrak{k} y \mathfrak{k}^\perp invariantes, ya que conmuta con P .

Corolario 4.3.3. *Cualquier solitón de Chern-Ricci puede ser construido como $(\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2, J, \omega)$, con $J = \begin{bmatrix} J_1 & \\ & J_2 \end{bmatrix}$, $\omega = \omega_1 \oplus \omega_2$, de los siguientes datos:*

- una álgebra de Lie hermitiana $(\mathfrak{g}_1, J_1, \omega_1)$;
- una álgebra de Lie hermitiana abeliana $(\mathfrak{g}_2, J_2, \omega_2)$;

- y una representación $\theta : \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \text{End}(\mathfrak{g}_2)$;

tal que las siguientes condiciones se cumplen:

- $[\theta(J_1 X), J_2] = J_2[\theta(X), J_2]$, para todo $X \in \mathfrak{g}_1$;
- el operador de Chern-Ricci P_1 de $(\mathfrak{g}_1, J_1, \omega_1)$ es igual a

$$P_1 = cI - P_\theta,$$

donde $P_\theta \in \text{End}(\mathfrak{g}_1)$ está definido por

$$\omega_1(P_\theta X, Y) = -\frac{1}{2} \text{tr } J_2 \theta([X, Y]) + \frac{1}{2} \text{tr } \theta(J_1[X, Y]), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}_1.$$

El operador de Chern-Ricci de $(\mathfrak{g}, J, \omega)$ está dado por $P|_{\mathfrak{g}_1} = cI$, $P|_{\mathfrak{g}_2} = 0$.

Además, $(\mathfrak{g}, J, \omega)$ es Kähler (y así un solitón de Kähler-Ricci) si y sólo si ω_1 es cerrada (i.e. $(\mathfrak{g}_1, J_1, \omega_1)$ Kähler) y $\theta(\mathfrak{g}_1) \subset \mathfrak{sp}(\mathfrak{g}_2, \omega_2)$ (i.e. $\theta(X)^t = J_2 \theta(X) J_2$ para todo $X \in \mathfrak{g}_1$).

Demostración. Es fácil comprobar que la primera condición que se debe cumplir es equivalente a que J sea integrable (recordar que $[(X_1, X_2), (Y_1, Y_2)] = ([X_1, Y_1], \theta(X_1)(Y_2) - \theta(Y_1)(X_2))$ para todo $X_1, Y_1 \in \mathfrak{g}_1$ y $X_2, Y_2 \in \mathfrak{g}_2$), y la segunda se deduce del hecho de que el operador de Chern-Ricci de $(\mathfrak{g}, J, \omega)$ está dado por $P = \begin{bmatrix} P_1 + P_\theta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. La última afirmación sobre Kähler fácilmente se desprende de la condición de que ω es cerrada. \square

Ejemplo 4.3.4. Por lo tanto obtenemos un solitón de Chern-Ricci de cualquier álgebra de Lie hermitiana $(\mathfrak{g}_1, J_1, \omega_1)$ con $P_1 = cI$ (i.e. $p_1 = c\omega_1$) y una representación $\theta : \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{sl}(\mathfrak{g}_2, J_2)$ (i.e. $\text{tr } \theta(X) = 0$ y $[\theta(X), J_2] = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}_1$); notar que $P_\theta = 0$ bajo tales condiciones. Si además $(\mathfrak{g}_1, J_1, \omega_1)$ es Kähler-Einstein y

$$\theta(\mathfrak{g}_1) \subset \mathfrak{sl}(\mathfrak{g}_2, J_2) \cap \mathfrak{sp}(\mathfrak{g}_2, \omega_2) = \mathfrak{su}(\dim \mathfrak{g}_2/2),$$

entonces obtenemos es un solitón Kähler-Ricci, el cual es isométrico al producto directo $G_1 \times \mathbb{R}^{\dim \mathfrak{g}_2}$.

4.4. Convergencia

En esta sección estudiamos los posibles límites de las soluciones del flujo de corchetes bajo diversos reescalamientos.

Si un reescalamiento $c(t)\mu(t)$, $c(t) \in \mathbb{R}$, de una solución del flujo de corchetes converge a λ , cuando $t \rightarrow T_\pm$, y $\varphi(t) : G \rightarrow G_{c(t)\mu(t)}$ es el isomorfismo con derivada $\frac{1}{c(t)}h(t)$, donde $h(t)$ es como en el Teorema 4.2.1, entonces se deduce de [L2, Corolario 6.20] que (después de pasar posiblemente a una subsucesión) las variedades riemannianas $\left(G, \frac{1}{c(t)^2}g(t)\right)$ convergen en el sentido punteado (ó Cheeger-Gromov) a (G_λ, g_0) , cuando $t \rightarrow T_\pm$. Observamos que G_λ puede ser no isomorfo, y ni siquiera homeomorfo, a G (ver [L10, Sección 5.1]).

Recordemos también que todos los límites obtenidos por cualquiera de tales reescalamientos son automáticamente CR-solitones (ver [L10, Sección 7.1]).

Serán considerados dos reescalamientos, uno dado por la norma del corchete, $\mu(t)/|\mu(t)|$, el cual siempre converge, y $|2t+1|^{1/2}\mu(t)$, que corresponde según la observación anterior al reescalamiento estándar $\omega(t)/(2t+1)$ de la CRF-solución original. Observamos que $\omega(t)/(2t+1)$ es, salvo reparametrización en el tiempo, la solución al *flujo de Chern-Ricci normalizado*

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\omega} = -2p(\tilde{\omega}) - 2\tilde{\omega}, \quad \tilde{\omega}(0) = \omega_0, \quad (4.11)$$

que es el que preserva el volumen en el caso Kähler compacto y también se ha utilizado en el caso hermitiano general (ver por ejemplo [TW, Teorema 1.7] y [G]).

Sea (G, J, ω_0) un grupo de Lie hermitiano con álgebra de Lie \mathfrak{g} y operador de Chern-Ricci P_0 . Un sencillo análisis usando (4.9) muestra que $\mu(t)$ converge cuando $t \rightarrow T_{\pm}$ si y sólo si $T_{\pm} = \pm\infty$ (i.e. $\pm P_0 \leq 0$) y $\text{Ker } P_0$ es una subálgebra de Lie de \mathfrak{g} . Además, las siguientes condiciones son equivalentes en el caso $T_{\pm} = \pm\infty$:

- $\mu(t) \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \pm\infty$.
- $\text{Ker } P_0$ es un ideal abeliano de \mathfrak{g} .
- $|2t+1|^{1/2}\mu(t)$ converge cuando $t \rightarrow \pm\infty$.

Observación 4.4.1. Cualquier afirmación como la anterior, que involucre el signo \pm , siempre debe entenderse como dos afirmaciones separadas, una para el signo $+$ y la otra para el signo $-$.

En el caso $\pm T_{\pm} < \infty$, se cumple que $|T_{\pm} - t|^{1/2}\mu(t)$ converge cuando $t \rightarrow T_{\pm}$ si y sólo si \mathfrak{g}_{\pm} es una subálgebra de Lie de \mathfrak{g} , donde \mathfrak{g}_{\pm} es el autoespacio de P_0 de autovalor p_{\pm} (ver (4.6)).

Lema 4.4.2. *Si $\mu(t) \rightarrow \lambda$, cuando $t \rightarrow \pm\infty$, entonces $(G_{\lambda}, J, \omega_0)$ es Chern-Ricci plana.*

Demostración. Tenemos que

$$\delta_{\lambda}(P_{\lambda}) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \delta_{\mu}(P_{\mu}) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{d}{dt}\mu = 0,$$

lo que implica que $P_{\lambda} \in \text{Der}(\mathfrak{g})$. La solución comenzando en λ es por lo tanto eterna y así $P_{\lambda} = 0$ por (4.6) y Proposición 4.3.2. \square

Ahora exploramos en que forma esta relacionado el límite de la normalización $\mu(t)/|\mu(t)|$ con el punto de partida (G, J, ω_0) . La norma $|\mu|$ de un corchete de Lie estará definida en términos del producto interno canónico en $\Lambda^2\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$ dado por

$$\langle \mu, \lambda \rangle := \sum g_0(\mu(e_i, e_j), \lambda(e_i, e_j)) = \sum \mu_{ij}^k \lambda_{ij}^k, \quad (4.12)$$

donde $\{e_i\}$ es cualquier base ortonormal de (\mathfrak{g}, g_0) y $g_0 = \omega_0(\cdot, J\cdot)$. Un producto interno natural en $\text{End}(\mathfrak{g})$ es también determinado por g_0 por $\langle A, B \rangle := \text{tr } AB^t$.

Proposición 4.4.3. *Sea (G, J, ω_0) un grupo de Lie hermitiano con álgebra de Lie \mathfrak{g} y operador de Chern-Ricci P_0 . Denotemos por \mathfrak{k} , \mathfrak{g}_+ y \mathfrak{g}_- a los autoespacios de P_0 de autovalores 0, p_+ y p_- , respectivamente (ver (4.6)).*

- (i) *El flujo de corchetes de Chern-Ricci normalizado $\mu(t)/|\mu(t)|$ siempre converge, cuando $t \rightarrow T_{\pm}$, a un corchete de Lie no-abeliano λ_{\pm} tal que $(G_{\lambda_{\pm}}, J, \omega_0)$ es un solitón de Chern-Ricci, con operador de Chern-Ricci $P_{\lambda_{\pm}}$.*

- (ii) Si $\pm P_0 \leq 0$ (i.e. $\pm T_{\pm} = \infty$), entonces $P_{\lambda_{\pm}}|_{\mathfrak{k}^{\pm}} = c_{\pm}I$, $P_{\lambda_{\pm}}|_{\mathfrak{k}} = 0$, con $\pm c_{\pm} < 0$ (i.e. $P_{\lambda_{\pm}} \neq 0$) si y sólo si \mathfrak{k} es un ideal abeliano de \mathfrak{g} .
- (iii) En el caso $\pm T_{\pm} < \infty$, $P_{\lambda_{\pm}}|_{\mathfrak{g}_{\pm}} = c_{\pm}I$, $P_{\lambda_{\pm}}|_{(\mathfrak{g}_{\pm})^{\perp}} = 0$, con $\pm c_{\pm} > 0$ (i.e. $P_{\lambda_{\pm}} \neq 0$) si y sólo si \mathfrak{g}_{\pm} es una subálgebra de Lie de \mathfrak{g} .

Observación 4.4.4. En particular, la única forma de obtener en el límite la condición análoga a Einstein $p_{\lambda_{\pm}} = c\omega_0$ con $c \neq 0$, es precisamente cuando $\pm P_0 < 0$, a menos que la estructura de partida satisfaga $P_0 = p_{\pm}I$ y así $\mu(t)/|\mu(t)| \equiv [\cdot, \cdot]/[\cdot, \cdot] = \lambda_{\pm}$.

Observación 4.4.5. Se desprende del último párrafo en [L10, Sección 5.1] que cuando $P_{\lambda_{\pm}} = 0$, se cumple que $P_{\nu} = 0$ para cualquier límite $\nu = \lim_{t \rightarrow T_{\pm}} c(t)\mu(t)$ y cualquier reescalamiento de la forma $c(t)\mu(t)$, con $c(t) \in \mathbb{R}$.

Demostración. Se sigue de (4.12) y (4.9) que

$$\frac{\mu_{rs}^l}{|\mu|} = \frac{c_{rs}^l}{\left(\sum_{i,j,k} \frac{(1-2tp_k)(1-2tp_r)(1-2tp_s)}{(1-2tp_i)(1-2tp_j)(1-2tp_l)} \left(c_{ij}^k \right)^2 \right)^{1/2}} \xrightarrow{t \rightarrow T_{\pm}} (\lambda_{\pm})_{rs}^l. \quad (4.13)$$

Dado que cada uno de los términos en la suma anterior convergen, cuando $t \rightarrow T_{\pm}$, a un número real no negativo ó a ∞ , obtenemos que $\mu(t)/|\mu(t)|$ siempre converge, y así se sigue la parte (i).

Sólo probaremos las afirmaciones con $+$, las pruebas para aquellas con un signo $-$ son completamente análogas. Como $P_{\mu/|\mu|} = \frac{1}{|\mu|^2}P \rightarrow P_{\lambda_+}$, cuando $t \rightarrow T_+$ (recordar que $P_{\mu(t)} = P(t) = (I - 2tP_0)^{-1}P_0$), es fácil comprobar que para cada autovalor p_r de P_0 ,

$$\lim_{t \rightarrow T_+} \frac{p_r}{|\mu|^2(1-2tp_r)} = \lim_{t \rightarrow T_+} \frac{p_r}{\sum_{i,j,k} \frac{(1-2tp_k)(1-2tp_r)}{(1-2tp_i)(1-2tp_j)} (c_{ij}^k)^2}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\sum_{p_i, p_j, p_k < 0} \frac{p_k}{p_i p_j} (c_{ij}^k)^2 + 2 \sum_{p_i < 0, p_j = p_k = 0} \frac{1}{p_i} (c_{ij}^k)^2} < 0, & T_+ = \infty, \quad p_r < 0, \quad \mathfrak{k} \text{ ideal abeliano;} \\ 0, & T_+ = \infty, \quad \text{e.c.c.;} \\ \frac{p_+}{\sum_{i,j,k=+} (c_{ij}^k)^2 + 2 \sum_{i,k \neq +, j=+} \frac{p_+ - p_k}{p_+ - p_i} (c_{ij}^k)^2} > 0, & T_+ < \infty, \quad p_r = p_+, \quad \mathfrak{g}_+ \text{ subálgebra;} \\ 0, & T_+ < \infty, \quad \text{e.c.c..} \end{cases}$$

Esto muestra que el valor de P_{λ_+} es como en las partes (ii) y (iii), concluyendo la prueba de la proposición. \square

Proposición 4.4.6. Sea (G, J, ω_0) un grupo de Lie hermitiano como en la proposición anterior y considere λ_{\pm} , el límite de $\mu(t)/|\mu(t)|$ cuando $t \rightarrow T_{\pm}$.

- (i) Si $\pm P_0 \leq 0$ (i.e. $\pm T_{\pm} = \infty$) y \mathfrak{k} es un ideal abeliano de \mathfrak{g} , entonces $(\mathfrak{g}, \lambda_{\pm}) = \mathfrak{k}^{\perp} \times \mathfrak{k}$ y $\lambda_{\pm}(\mathfrak{k}, \mathfrak{k}) = 0$. De lo contrario, si \mathfrak{k} no es un ideal abeliano de \mathfrak{g} , entonces \mathfrak{k}^{\perp} es un ideal abeliano de $(\mathfrak{g}, \lambda_{\pm})$. Además, si \mathfrak{k} no es incluso una subálgebra de Lie de \mathfrak{g} , entonces λ_{\pm} es 2-pasos nilpotente y \mathfrak{k}^{\perp} está contenida en su centro.

- (ii) Si $\pm T_{\pm} < \infty$ y \mathfrak{g}_{\pm} es una subálgebra de Lie de \mathfrak{g} , entonces $(\mathfrak{g}, \lambda_{\pm}) = \mathfrak{g}_{\pm} \times \mathfrak{g}_{\pm}^{\perp}$ y $\lambda_{\pm}(\mathfrak{g}_{\pm}^{\perp}, \mathfrak{g}_{\pm}^{\perp}) = 0$. Por el contrario, si \mathfrak{g}_{\pm} no es una subálgebra de Lie de \mathfrak{g} , entonces λ_{\pm} es 2-pasos nilpotente y $\mathfrak{g}_{\pm}^{\perp}$ está contenida en su centro.

Demostración. Las primeras afirmaciones en cada ítem son consecuencias directas de la Proposición 4.3.2, (iii). Como antes, solo probaremos las afirmaciones con $+$.

Si \mathfrak{k} no es un ideal abeliano de \mathfrak{g} , entonces existe un $c_{ij}^k \neq 0$ ya sea con $p_i, p_j, p_k = 0$, ó $p_i p_j = 0$ y $p_k < 0$. El correspondiente término en la suma que aparece en la fórmula (4.13) por lo tanto converge a ∞ para cualquier tripleta (r, s, l) tal que $p_r, p_s, p_l < 0$, ó $p_l = 0$, ó $p_l < 0$ y al menos uno de p_r, p_s es negativo. Esto implica que $\lambda_{rs}^l = 0$ para todas esas tripletas y por lo tanto $\lambda_+(\mathfrak{k}^{\perp}, \mathfrak{k}^{\perp}) = 0$ y $\lambda_+(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}^{\perp}) \subset \mathfrak{k}^{\perp}$, respectivamente.

Ahora suponga que \mathfrak{k} no es una subálgebra de \mathfrak{g} . Así existe un $c_{ij}^k \neq 0$ con $p_i, p_j = 0$ y $p_k < 0$. El correspondiente término en (4.13) converge a ∞ para cualquier tripleta (r, s, l) tal que $p_l = 0$, ó $p_l < 0$ y al menos uno de p_r, p_s es negativo. Esto implica que $\lambda_+(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \subset \mathfrak{k}^{\perp}$ y $\lambda_+(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}^{\perp}) = 0$, respectivamente. Por lo tanto se sigue la segunda afirmación en la parte (i).

Solo resta probar la segunda afirmación en la parte (ii). Si \mathfrak{g}_+ no es una subálgebra de \mathfrak{g} , entonces existe un $c_{ij}^k \neq 0$ con $p_i, p_j = p_+$ y $p_l \neq p_+$. Así el correspondiente término en (4.13) no converge a ∞ si y sólo si $p_r = p_s = p_+$ y $p_l \neq p_+$, esto es, la única parte de λ_+ que sobrevive es $\lambda_+ : \mathfrak{g}_+ \times \mathfrak{g}_+ \rightarrow \mathfrak{g}_+^{\perp}$, como se deseaba mostrar. \square

Ahora estudiamos el reescalamiento $|2t + 1|^{1/2} \mu(t)$, ó equivalentemente $\omega(t)/(2t + 1)$, correspondiente al CRF normalizado dado en (4.11). Hay que recordar que siempre se denota por $[\cdot, \cdot]$ al corchete de Lie del álgebra de Lie \mathfrak{g} del grupo de Lie G .

Proposición 4.4.7. Sea (G, J, ω_0) un grupo de Lie hermitiano como en la anterior proposición.

- (i) Si $\pm P_0 \leq 0$ (i.e. $\pm T_{\pm} = \infty$) y \mathfrak{k} es un ideal abeliano de \mathfrak{g} , entonces $|2t + 1|^{1/2} \mu(t)$ converge, cuando $t \rightarrow \pm\infty$, a un solitón de Chern-Ricci ν_{\pm} con operador de Chern-Ricci dado por $P_{\nu_{\pm}}|_{\mathfrak{k}^{\perp}} = \mp I$, $P_{\nu_{\pm}}|_{\mathfrak{k}} = 0$. Además, las siguientes condiciones se cumplen:

- $(\mathfrak{g}, \nu_{\pm}) = \mathfrak{k}^{\perp} \times \mathfrak{k}$ y $\nu_{\pm}(\mathfrak{k}, \mathfrak{k}) = 0$.
- $\nu_{\pm}|_{\mathfrak{k}^{\perp} \times \mathfrak{k}} = [\cdot, \cdot]$.
- $\nu_{\pm}|_{\mathfrak{k}^{\perp} \times \mathfrak{k}^{\perp}} = 2(\mp P_0|_{\mathfrak{k}^{\perp}})^{1/2} \cdot [\cdot, \cdot]$.

- (ii) Si \mathfrak{g}^{\pm} es una subálgebra de Lie distinta de cero de \mathfrak{g} , entonces $\pm T_{\pm} < \infty$ y $|T_{\pm} - t|^{1/2} \mu(t)$ converge, cuando $t \rightarrow T_{\pm}$, a un solitón de Chern-Ricci ν_{\pm} con $P_{\nu_{\pm}}|_{\mathfrak{g}^{\pm}} = \pm \frac{1}{2} I$, $P_{\nu_{\pm}}|_{(\mathfrak{g}^{\pm})^{\perp}} = 0$. Además, las siguientes condiciones se satisfacen:

- $(\mathfrak{g}, \nu_{\pm}) = \mathfrak{g}_{\pm} \times \mathfrak{g}_{\pm}^{\perp}$ y $\nu_{\pm}(\mathfrak{g}_{\pm}^{\perp}, \mathfrak{g}_{\pm}^{\perp}) = 0$.
- $\nu_{\pm}|_{\mathfrak{g}_{\pm} \times \mathfrak{g}} = \begin{bmatrix} (\pm T_{\pm})^{-1/2} I & 0 \\ 0 & (I - 2T_{\pm} P_0|_{\mathfrak{g}_{\pm}^{\perp}})^{1/2} \end{bmatrix} \cdot [\cdot, \cdot]$; en particular, se tiene que $\nu_{\pm}|_{\mathfrak{g}_{\pm} \times \mathfrak{g}_{\pm}} = (\pm T_{\pm})^{1/2} [\cdot, \cdot]$.

Demostración. Se puede probar esta proposición en la misma forma que las Proposiciones 4.4.3 y 4.4.6, usando para la segunda afirmación que

$$\left(|2t+1|^{1/2}\mu(t)\right)_{rs}^l = \left(\frac{|2t+1|(1-2tp_l)}{(1-2tp_r)(1-2tp_s)}\right)^{1/2} c_{rs}^l \xrightarrow{t \rightarrow T_{\pm}} (\nu_{\pm})_{rs}^l,$$

y considerando separadamente los casos $T_+ = \infty$ y $T_+ < \infty$. □

Ejemplo 4.4.8. Sea \mathfrak{r}'_2 el álgebra de Lie soluble con corchete de Lie definido por

$$\begin{aligned} [e_1, e_3] &= e_3, & [e_1, e_4] &= e_4, \\ [e_2, e_3] &= e_4, & [e_2, e_4] &= -e_3. \end{aligned}$$

Considere la estructura hermitiana en $(\mathfrak{r}'_2, [\cdot, \cdot])$ dada por $J_0e_1 = e_3$, $J_0e_2 = e_4$, $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, y $\omega_0(X, Y) = \langle J_0X, Y \rangle$. En este caso,

$$P_0 = \begin{bmatrix} -2 & & & \\ & 2 & & \\ & & -2 & \\ & & & 2 \end{bmatrix}.$$

Esto implica que la CRF-solución comenzando en $(\omega_0, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es $\omega(t)(X, Y) = \langle WX, Y \rangle$, donde

$$W := J(I - 2tP_0) = \begin{bmatrix} & & -(1+4t) & 0 \\ & & 0 & -1+4t \\ 1+4t & 0 & & \\ 0 & 1-4t & & \end{bmatrix},$$

para todo $t \in (T_-, T_+) = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. Por lo tanto, $(\omega_0, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ no es un solitón de Chern-Ricci por Proposición 4.3.2 (ó ver (4.6)). Además, la solución al flujo de corchetes de Chern-Ricci está dada por

$$\begin{aligned} \mu(t)(e_1, e_3) &= \frac{1}{\sqrt{1+4t}}e_3, & \mu(t)(e_1, e_4) &= \frac{1}{\sqrt{1+4t}}e_4, \\ \mu(t)(e_2, e_3) &= \frac{1}{\sqrt{1+4t}}e_4, & \mu(t)(e_2, e_4) &= -\frac{\sqrt{1+4t}}{1-4t}e_3. \end{aligned}$$

Como $\mathfrak{g}_+ = \text{span}_{\mathbb{R}}\{e_2, e_4\}$ no es una subálgebra de Lie de $(\mathfrak{r}'_2, [\cdot, \cdot])$, se deduce que

$$(\mathfrak{r}'_2, \lambda_+) = (\mathfrak{h}_3 \times \mathbb{R}, \lambda_+),$$

con $\lambda_+(e_2, e_4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e_3$ (ver Proposición 4.4.6). Por otro lado, tenemos que $\mathfrak{g}_- = \text{span}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_3\}$ es una subálgebra de Lie de $(\mathfrak{r}'_2, [\cdot, \cdot])$, así (ver de nuevo Proposición 4.4.6) $(\mathfrak{r}'_2, \lambda_-) = (\mathfrak{g}_- \times \mathfrak{g}_+, \lambda_-)$, donde

$$\begin{aligned} \lambda_-(e_1, e_3) &= \frac{\sqrt{6}}{6}e_3, & \lambda_-(e_1, e_4) &= \frac{\sqrt{6}}{6}e_4, \\ \lambda_-(e_2, e_3) &= \frac{\sqrt{6}}{6}e_4. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.4.9. En forma análoga al ejemplo anterior, tenemos que para $\mathfrak{d}_{4, \frac{1}{2}}$ dada por

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_3, & [e_1, e_4] &= -\frac{1}{2}e_1, \\ [e_2, e_4] &= -\frac{1}{2}e_2, & [e_3, e_4] &= -e_3, \end{aligned}$$

la solución al flujo de corchetes de Chern-Ricci, para la estructura hermitiana $J_0 e_2 = e_1$, $J_0 e_4 = e_3$, $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, y $\omega_0(X, Y) = \langle J_0 X, Y \rangle$, es

$$\begin{aligned}\mu(t)(e_1, e_2) &= \frac{\sqrt{1+3t}}{1-3t} e_3, & \mu(t)(e_1, e_4) &= -\frac{\sqrt{1+3t}}{2(1+3t)} e_1, \\ \mu(t)(e_2, e_4) &= -\frac{\sqrt{1+3t}}{2(1+3t)} e_2, & \mu(t)(e_3, e_4) &= -\frac{\sqrt{1+3t}}{1+3t} e_3,\end{aligned}$$

y sus límites están dados por

$$\left(\mathfrak{d}_{4, \frac{1}{2}}, \lambda_+\right) = (\mathfrak{h}_3 \times \mathbb{R}, \lambda_+),$$

con $\lambda_+(e_1, e_2) = \frac{\sqrt{2}}{2} e_3$; y $\left(\mathfrak{d}_{4, \frac{1}{2}}, \lambda_-\right) = (\mathfrak{g}_- \times \mathfrak{g}_+, \lambda_-)$, donde

$$\begin{aligned}\lambda_-(e_1, e_4) &= -\frac{\sqrt{3}}{6} e_1, & \lambda_-(e_2, e_4) &= -\frac{\sqrt{3}}{6} e_2, \\ \lambda_-(e_3, e_4) &= -\frac{\sqrt{3}}{3} e_3.\end{aligned}$$

4.5. Grupos de Lie de dimensión 4

En esta última sección estudiamos el problema de la existencia de solitones de Chern-Ricci en grupos de Lie solubles de dimensión 4. En la Tabla 4.1 se han enumerado todas las álgebras de Lie solubles de dimensión 4 que admiten una estructura compleja, y en la Tabla 4.2 todas las estructuras complejas en cada álgebra salvo equivalencia (ver [O]). Con el fin de obtener expresiones más simples de las matrices de las estructuras complejas y de las métricas solitón de Chern-Ricci, decidimos dar diferentes corchetes de Lie (pero isomorfos) $[\cdot, \cdot]_i$ para cada álgebra de Lie $\mathfrak{d}_{4, \lambda}$ con $\lambda \neq 1$, de tal manera que el par $([\cdot, \cdot]_i, J_i)$ es integrable para cualquier $i = 1, 2, 3$.

En todos los ejemplos consideramos el producto interno canónico g_0 que hace a la base canónica $\{e_i\}$ de \mathbb{R}^4 ortonormal y $\{e^i\}$ denota la base dual.

Ejemplo 4.5.1. Para cualquier $\gamma \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, considere el álgebra de Lie soluble $\mathfrak{t}'_{4, \gamma, \delta}$ con corchete de Lie definido como en la Tabla 4.1, munida con la estructura compleja

$$J_1 = \begin{bmatrix} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \\ -1 & 0 & \end{bmatrix},$$

como en la Tabla 4.2. Usamos la fórmula (4.1) para calcular la forma de Chern-Ricci p_0 de la métrica hermitiana $\omega_0 = -e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3$ como sigue:

$$p_0(e_1, e_4) = \frac{1}{2} (\text{tr } J \text{ ad } e_1 + \text{tr } \text{ad } e_4) = \gamma + 1,$$

$$p_0(e_2, e_4) = \frac{1}{2} (\gamma \text{tr } J \text{ ad } e_2 - \delta \text{tr } J \text{ ad } e_3 - \gamma \text{tr } \text{ad } e_3 - \delta \text{tr } \text{ad } e_2) = 0,$$

$$p_0(e_3, e_4) = \frac{1}{2} (\delta \text{tr } J \text{ ad } e_2 + \gamma \text{tr } J \text{ ad } e_3 - \delta \text{tr } \text{ad } e_3 + \gamma \text{tr } \text{ad } e_2) = 0.$$

Esto implica que $p_0 = (\gamma + 1)e^1 \wedge e^4$, y

$$P_0 = \begin{bmatrix} -(\gamma+1) & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & -(\gamma+1) \end{bmatrix} = -(\gamma + 1)I + (\gamma + 1) \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}I \oplus \text{Der}(\mathfrak{t}'_{4, \gamma, \delta}).$$

\mathfrak{g}	Corchete de Lie
\mathfrak{rh}_3	$[e_1, e_2] = e_3.$
$\mathfrak{rr}_{3,0}$	$[e_1, e_2] = e_2.$
$\mathfrak{rr}_{3,1}$	$[e_1, e_2] = e_2, [e_1, e_3] = e_3.$
$\mathfrak{rr}'_{3,0}$	$[e_1, e_2] = -e_3, [e_1, e_3] = e_2.$
$\mathfrak{rr}'_{3,\gamma}$	$[e_1, e_2] = \gamma e_2 - e_3, [e_1, e_3] = e_2 + \gamma e_3, \quad \gamma > 0.$
$\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_2$	$[e_1, e_2] = e_2, [e_3, e_4] = e_4.$
\mathfrak{r}'_2	$[e_1, e_3] = e_3, [e_1, e_4] = e_4, [e_2, e_3] = e_4, [e_2, e_4] = -e_3.$
$\mathfrak{r}_{4,1}$	$[e_4, e_1] = e_1, [e_4, e_2] = e_2, [e_4, e_3] = e_2 + e_3.$
$\mathfrak{r}_{4,\alpha,1}$	$[e_4, e_1] = e_1, [e_4, e_2] = \alpha e_2, [e_4, e_3] = e_3, \quad -1 < \alpha \leq 1, \alpha \neq 0.$
$\mathfrak{r}_{4,\alpha,\alpha}$	$[e_4, e_1] = e_1, [e_4, e_2] = \alpha e_2, [e_4, e_3] = \alpha e_3, \quad -1 \leq \alpha < 1, \alpha \neq 0.$
$\mathfrak{r}'_{4,\gamma,\delta}$	$[e_4, e_1] = e_1, [e_4, e_2] = \gamma e_2 - \delta e_3, [e_4, e_3] = \delta e_2 + \gamma e_3, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \delta > 0.$
\mathfrak{d}_4	$[e_1, e_2] = e_3, [e_4, e_1] = e_1, [e_4, e_2] = -e_2.$
$\mathfrak{d}_{4,1}$	$[e_1, e_2] = e_3, [e_4, e_1] = e_1, [e_4, e_3] = e_3.$
$\mathfrak{d}_{4,\frac{1}{2}}$	$[e_1, e_2]_1 = e_3, [e_4, e_1]_1 = \frac{1}{2}e_1, [e_4, e_2]_1 = \frac{1}{2}e_2, [e_4, e_3]_1 = e_3.$ $[\cdot, \cdot]_2 = [\cdot, \cdot]_1.$ $[e_1, e_2]_3 = e_3, [e_4, e_1]_3 = e_1, [e_4, e_2]_3 = e_2, [e_4, e_3]_3 = 2e_3.$
$\mathfrak{d}_{4,\lambda}$	$[e_1, e_2]_1 = \lambda e_3, [e_4, e_1]_2 = \lambda e_1,$ $[e_4, e_2]_1 = (1 - \lambda)e_2, [e_4, e_3]_1 = e_3, \quad \frac{1}{2} < \lambda \neq 1.$ $[e_1, e_2]_2 = (1 - \lambda)e_3, [e_4, e_1]_2 = \lambda e_1,$ $[e_4, e_2]_2 = (1 - \lambda)e_2, [e_4, e_3]_2 = e_3, \quad \frac{1}{2} < \lambda < 1.$ $[e_1, e_2]_3 = (\lambda - 1)e_3, [e_4, e_1]_3 = \lambda e_1,$ $[e_4, e_2]_3 = (1 - \lambda)e_2, [e_4, e_3]_3 = e_3, \quad 1 < \lambda.$
$\mathfrak{d}'_{4,0}$	$[e_1, e_2] = e_3, [e_4, e_1] = -e_2, [e_4, e_2] = e_1.$
$\mathfrak{d}'_{4,\delta}$	$[e_1, e_2] = e_3, [e_4, e_1] = \frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{\delta}e_2,$ $[e_4, e_2] = \frac{1}{\delta}e_1 + \frac{1}{2}e_2, [e_4, e_3] = e_3, \quad \delta > 0.$
\mathfrak{h}_4	$[e_1, e_2] = e_3, [e_4, e_1] = e_1, [e_4, e_2] = \sqrt{10}e_1 + e_2, [e_4, e_3] = 2e_3.$

Tabla 4.1. Álgebras de Lie solubles de dimensión 4 que admiten una estructura compleja.

Por lo tanto, (J, ω_0) es un CR-solitón (ver Proposición 4.3.2), el cual es de expansión, estacionario, y de contracción para $\gamma > -1$, $\gamma = -1$ y $\gamma < -1$, respectivamente (lo cual no es usual ya que en los diversos flujos de Ricci los solitones son en general de expansión o estacionarios). Además, (J, ω_0) es un solitón de Kähler-Ricci si y sólo si $\gamma = 0$, $\delta > 0$, y para $\gamma = -\frac{1}{2}$, el grupo de Lie correspondiente admite un lattice dando lugar a una métrica hermitiana en una superficie de Inoue de tipo S^0 el cual es un solitón de Chern-Ricci de expansión cuando se hace el pullback sobre su cubrimiento universal (ver [H]).

Siguiendo las pautas del Ejemplo 4.5.1, hemos encontrado un CR-solitón para cada estructura compleja en grupos de Lie solubles de dimensión 4, con las únicas excepciones de los siguientes seis casos:

$$(\mathfrak{r}'_2, J_1), \quad (\mathfrak{r}_{4,1}, J), \quad (\mathfrak{d}_{4, \frac{1}{2}}, J_2), \quad (\mathfrak{d}'_{4,\delta}, J_1), \quad (\mathfrak{d}'_{4,\delta}, J_2), \quad (\mathfrak{h}_4, J).$$

Las métricas CR-solitones $g = \omega(\cdot, J\cdot)$ y sus respectivos operadores de Chern-Ricci P están dados en la Tabla 4.3 como matrices diagonales con respecto a la base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, junto con la constante c y la derivación D tal que $P = cI + D$. Por ejemplo, la métrica para el álgebra de Lie compleja $(\mathfrak{d}_{4, \frac{1}{2}}, [\cdot, \cdot]_3, J_3)$ está dada por $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ para todo $i \neq j$ y

$$g(e_1, e_1) = 2, \quad g(e_2, e_2) = 5, \quad g(e_3, e_3) = 5/4, \quad g(e_4, e_4) = 2,$$

es decir, g se obtiene de g_0 por la acción de la matriz diagonal $h = (2, 5, 5/4, 2)$.

En la última columna mencionamos la condición bajo la cual la métrica es Kähler, esto es, un solitón de Kähler-Ricci.

En el caso de $\mathfrak{d}_{4,\lambda}$, con el fin de simplificar la descripción de las métricas en la Tabla 4.3, introducimos la siguiente notación:

$$a := -\lambda(\lambda + 1), \quad b := (1 - \lambda)(\lambda - 2), \quad d := (\lambda - 1)^2 + 1, \quad e := \lambda^2 + 1.$$

\mathfrak{g}	Estructuras complejas			
\mathfrak{rh}_3	$Je_1 = e_2, Je_3 = e_4$			
$\mathfrak{rr}_{3,0}$	$Je_1 = e_2, Je_3 = e_4$			
$\mathfrak{rr}_{3,1}$	$Je_1 = e_4, Je_3 = e_2$			
$\mathfrak{rr}'_{3,0}$	$Je_1 = e_4, Je_2 = e_3$			
$\mathfrak{rr}'_{3,\gamma}$	$J_1e_1 = e_4, J_1e_3 = e_2 - 2\gamma e_3, \gamma > 0$		$J_2e_1 = e_4, J_2e_3 = 2\gamma e_3 - e_2, \gamma > 0$	
$\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_2$	$Je_1 = e_2, Je_3 = e_4$			
\mathfrak{r}'_2	$J_1e_1 = e_3, J_1e_2 = e_4$		$J_{s,t}e_2 = -\frac{1}{t}e_1 - \frac{s}{t}e_2, J_{s,t}e_3 = e_4, s \in \mathbb{R}, t \neq 0$	
$\mathfrak{r}_{4,1}$	$Je_1 = e_2, Je_4 = e_3$			
$\mathfrak{r}_{4,\alpha,1}$	$Je_1 = e_3, Je_4 = e_2$			
$\mathfrak{r}_{4,\alpha,\alpha}$	$Je_4 = e_1, Je_2 = e_3$			
$\mathfrak{r}'_{4,\gamma,\delta}$	$J_1e_4 = e_1, J_1e_2 = e_3$		$J_2e_4 = e_1, J_2e_3 = e_2$	
\mathfrak{d}_4	$Je_3 = e_1, Je_4 = e_2$			
$\mathfrak{d}_{4,1}$	$Je_1 = e_4, Je_2 = e_3$			
$\mathfrak{d}_{4,\frac{1}{2}}$	$J_1e_1 = e_2, J_1e_4 = e_3$		$J_2e_2 = e_1, J_2e_4 = e_3$	
$\mathfrak{d}_{4,\lambda}$	$J_1e_1 = e_4, J_1e_2 = e_3$		$J_2e_1 = e_3, J_2e_4 = e_2$	
$\mathfrak{d}'_{4,0}$	$J_1e_1 = e_2, J_1e_3 = e_4$		$J_2e_1 = e_2, J_2e_4 = e_3$	
$\mathfrak{d}'_{4,\delta}$	$J_1e_2 = e_1, J_1e_4 = e_3$		$J_2e_1 = e_2, J_2e_3 = e_4$	
	$J_3e_1 = e_2, J_3e_4 = e_3$		$J_4e_2 = e_1, J_4e_3 = e_4$	
\mathfrak{h}_4	$Je_1 = e_3, Je_4 = e_2$			

Tabla 4.2. Estructuras complejas en álgebras de Lie solubles de dimensión 4.

\mathfrak{g}	J	Métrica	P	c	D	K
\mathfrak{rh}_3	J	Cualquiera	$(0, 0, 0, 0)$	0	$(0, 0, 0, 0)$	—
$\mathfrak{rr}_{3,0}$	J	$(1, 1, 1, 1)$	$(-1, -1, 0, 0)$	-1	$(0, 0, 1, 1)$	Sí
$\mathfrak{rr}_{3,1}$	J	Cualquiera	$(0, 0, 0, 0)$	0	$(0, 0, 0, 0)$	—
$\mathfrak{rr}'_{3,0}$	J	Cualquiera	$(0, 0, 0, 0)$	0	$(0, 0, 0, 0)$	Sí
$\mathfrak{rr}'_{3,\gamma}$	J_1	Cualquiera	$(0, 0, 0, 0)$	0	$(0, 0, 0, 0)$	—
	J_2	Cualquiera	$(0, 0, 0, 0)$	0	$(0, 0, 0, 0)$	—
$\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_2$	J	$(1, 1, 1, 1)$	$(-1, -1, -1, -1)$	-1	$(0, 0, 0, 0)$	Sí
\mathfrak{r}'_2	J_1	$(1, 1, 1, 1)$	$(-2, 2, -2, 2)$	—	—	—
	$J_{s,t}$	Cualquiera	$(0, 0, 0, 0)$	0	$(0, 0, 0, 0)$	—
$\mathfrak{r}_{4,1}$	J	$(1, 1, 1, 1)$	$(0, 0, -2, -2)$	—	—	—
$\mathfrak{r}_{4,\alpha,1}$	J	$(1, 1, 1, 1)$	$-\alpha(\alpha + 1)(0, 1, 0, 1)$ $-1 < \alpha \leq 1, \alpha \neq 0$	$-\alpha(\alpha + 1)$	$\alpha(\alpha + 1)(1, 0, 1, 0)$	—
$\mathfrak{r}_{4,\alpha,\alpha}$	J	$(1, 1, 1, 1)$	$-(\alpha + 1)(1, 0, 0, 1)$ $-1 \leq \alpha < 1, \alpha \neq 0$	$-(\alpha + 1)$	$(\alpha + 1)(0, 1, 1, 0)$	—
$\mathfrak{r}'_{4,\gamma,\delta}$	J_1	$(1, 1, 1, 1)$	$-(\gamma + 1)(1, 0, 0, 1)$ $\gamma \in \mathbb{R}, \delta > 0$	$-(\gamma + 1)$	$(\gamma + 1)(0, 1, 1, 0)$	$\gamma = 0$
	J_2	$(1, 1, 1, 1)$	$-(\gamma + 1)(1, 0, 0, 1)$ $\gamma \in \mathbb{R}, \delta > 0$	$-(\gamma + 1)$	$(\gamma + 1)(0, 1, 1, 0)$	$\gamma = 0$
\mathfrak{d}_4	J	$(1, 1, 1, 1)$	$(0, -1, 0, -1)$	-1	$(1, 0, 1, 0)$	—
$\mathfrak{d}_{4,1}$	J	$(1, 1, 1, 1)$	$(-2, 0, 0, -2)$	-2	$(0, 2, 2, 0)$	—
$\mathfrak{d}_{4,\frac{1}{2}}$	J_1	$(1, 1, 1, 1)$	$-\frac{3}{2}(1, 1, 1, 1)$	$-\frac{3}{2}$	$(0, 0, 0, 0)$	Sí
	J_2	$(1, 1, 1, 1)$	$\frac{3}{2}(1, 1, -1, -1)$	—	—	—
	J_3	$(2, 5, \frac{5}{4}, 2)$	$-3(1, 0, 0, 1)$	-3	$3(0, 1, 1, 0)$	—
$\mathfrak{d}_{4,\lambda}$	J_1	$(\frac{e}{\lambda^2}, 2, 2, e)$	$(a, 0, 0, a)$ $\frac{1}{2} < \lambda \neq 1$	a	$(0, -a, -a, 0)$	$\lambda = 2$
	J_2	$(2, \frac{d}{(\lambda-1)^2}, 2, d)$	$(0, b, 0, b)$ $\frac{1}{2} < \lambda < 1$	b	$(-b, 0, -b, 0)$	—
	J_3	$(2, \frac{d}{(\lambda-1)^2}, 2, d)$	$(0, b, 0, b), \quad 1 < \lambda$	b	$(-b, 0, -b, 0)$	—
$\mathfrak{d}'_{4,0}$	J_1	Cualquiera	$(0, 0, 0, 0)$	0	$(0, 0, 0, 0)$	—
	J_2	Cualquiera	$(0, 0, 0, 0)$	0	$(0, 0, 0, 0)$	—
$\mathfrak{d}'_{4,\delta}$	J_1	$(1, 1, 1, 1)$	$\frac{3\delta}{2}(1, 1, -1, -1)$	—	—	—
	J_2	$(1, 1, 1, 1)$	$\frac{3\delta}{2}(1, 1, -1, -1)$	—	—	—
	J_3	$(1, 1, 1, 1)$	$-\frac{3\delta}{2}(1, 1, 1, 1)$	$-\frac{3\delta}{2}$	$(0, 0, 0, 0)$	Sí
	J_4	$(1, 1, 1, 1)$	$-\frac{3\delta}{2}(1, 1, 1, 1)$	$-\frac{3\delta}{2}$	$(0, 0, 0, 0)$	Sí
\mathfrak{h}_4	J	$(5, 2, \frac{5}{4}, 2)$	$-3(0, 1, 0, 1)$	—	—	—

Tabla 4.3. Solitones de Chern-Ricci.

Bibliografía

- [ABD] A. ANDRADA, M.L. BARBERIS, I.G. DOTTI, Classification of abelian complex structures on 6-dimensional Lie algebras, *J. London Math. Soc.*, (2011) **83** (1), 232-255.
- [ABJK] T. AUSTIN, H. BANTILAN, I. JONAS, P. KORY, The Pfaffian transformation, *J. Integer Seq.*, (2009) **12** (1).
- [BDV] M.L. BARBERIS, I. DOTTI, M. VERBITSKY, Canonical bundles of complex nilmanifolds, with applications to hypercomplex geometry. *Math. Res. Lett.* **16** (2009), 331-347.
- [BB] L. BÉRARD-BERGÉRY, Sur la courbure des métriques riemanniennes invariantes des groupes de Lie et des espaces homogènes, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* (4), **11**:4 (1978), 543-576.
- [B] A. BESSE, Einstein manifolds, *Ergeb. Math.* **10** (1987), Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.
- [B] D. BLAIR, Riemannian Geometry of contact and symplectic manifolds, *Progress Math* **203** (2002), Birkhäuser.
- [COUV] M. CEBALLOS, A. OTAL, L. UGARTE, R. VILLACAMPA, Classification of complex structures on 6-dimensional nilpotent Lie algebras, (*arXiv:math.DG/1111.5873*).
- [CFU] L.A. CORDERO, M. FERNÁNDEZ, L. UGARTE, Abelian complex structures on 6-dimensional compact nilmanifolds, *Comment. Math. Univ. Carolin.* (2002) **43** (2), 215-229.
- [DLV] A. DI SCALA, J. LAURET, L. VEZZONI, Quasi-Kähler Chern-flat manifolds and complex 2-step nilpotent Lie algebras, *Ann. Sc. Norm. Sup. di Pisa*, en prensa (arXiv).
- [DV] A. DI SCALA, L. VEZZONI, Chern-flat and Ricci-flat invariant almost Hermitian structures, *Ann. Glob. Anal. Geom.* **40** (2011), 21-45.
- [D] I. DOLGACHEV, Lectures on invariant theory, *London Mathematical Society Lecture Note Series* **296** (2003), 1-220.
- [DF] I.G. DOTTI, A. FINO, Hypercomplex 8-dimensional nilpotent Lie groups, *J. Pure Appl. Alg.* **184** (2003), 41-57.
- [FC] E.A. FERNÁNDEZ-CULMA, On distinguished orbits of reductive representations, *J. Alg.*, in press.

- [FM] M. FERNÁNDEZ, V. MUÑOZ, An 8-dimensional nonformal, simply connected, symplectic manifold, *Ann. of Math.* **167** (2008), 1045 - 1054.
- [GT] L.YU. GALITSKI, D.A. TIMASHEV, On classification of metabelian Lie algebras, *Journal of Lie Theory* **9** (1999), 125-156.
- [G] M. GILL, The Chern-ricci flow on smooth minimal models of general type, preprint 2013 (arXiv).
- [H] HASEGAWA, Complex and Kahler structures on compact solvmanifolds, *J. Symp. Geom.* **3** (2005), 749-767.
- [J] M. JABLONSKI, Distinguished orbits of reductive groups, *Rocky Mount. J. Math.* **42** (2012), 1521-1549.
- [L1] J. LAURET, A canonical compatible metric for geometric structures on nilmanifolds, *Ann. Global Anal. Geom.* **30** (2006), 107-138.
- [L2] J. LAURET, Convergence of homogeneous manifolds, *J. London Math. Soc.* **86** (2012), 701-727.
- [L3] J. LAURET, Einstein solvmanifolds are standard, *Ann. of Math.* **172** (2010), 1859-1877.
- [L4] J. LAURET, Einstein solvmanifolds and nilsolitons, *Contemporary Mathematics*, **491** (2009), 1-35.
- [L5] J. LAURET, Minimal metrics on nilmanifolds, Diff. Geom. and its Appl., proc. Conf. prague September 2004 (2005), 77-94 (arXiv).
- [L6] J. LAURET, On the moment map for the variety of Lie algebras, *J. Func. Anal.* **202** (2003), 392-423.
- [L7] J. LAURET, Rational forms of nilpotent Lie algebras and Anosov diffeomorphisms, *Monatsh Math* **155** (2008), 15-30.
- [L8] J. LAURET, The Ricci flow for simply connected nilmanifolds, *Comm. Anal. Geom.* **19** (2011), 831-854.
- [L9] J. LAURET, Ricci flow of homogeneous manifolds, *Math. Z.* **274** (2013), 373-403.
- [L10] J. LAURET, Curvature flows for almost-hermitian Lie groups, preprint 2013 (arXiv).
- [LO] J. LAURET, D. OSCARI, On nonsingular two-step nilpotent Lie algebras, preprint 2012 (arXiv).
- [LW] J. LAURET, C. WILL, On the diagonalization of the Ricci flow on Lie groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, in press.
- [O] G. OVANDO, Complex, symplectic and Kähler structures on four dimensional Lie groups, *Rev. Un. Mat. Arg.* **45-2** (2004), 55-67.
- [P] J. POOK, Homogeneous and locally homogeneous solutions to symplectic curvature flow, preprint 2012 (arXiv).

-
- [R] S. ROLLENSKE, Geometry of nilmanifolds with left-invariant complex structure and deformations in the large, to appear in *Proc. Lond. Math. Soc.*, arXiv:0901.3120v1
- [RV1] E. RODRÍGUEZ-VALENCIA, Invariants of complex structures on nilmanifolds, preprint 2013 (arXiv).
- [RV2] E. RODRÍGUEZ-VALENCIA, Minimal metrics on 6-dimensional complex nilmanifolds, preprint 2013.
- [S] S.M. SALAMON, Complex structures on nilpotent Lie algebras, *J. Pure Appl. Alg.* **157** (2001), 311-333.
- [SW] J. SONG, B. WEINKOVE, Lecture notes on the Kähler-Ricci flow, preprint 2012 (arXiv).
- [TW] V. TOSATTI, B. WEINKOVE, On the evolution of a hermitian metric by its Chern-Ricci form, preprint 2012 (arXiv).
- [V1] L. VEZZONI, On hermitian curvature flow on almost complex manifolds, *Diff. Geom. Appl.* **29** (2011), 709-722.
- [V2] L. VEZZONI, A note on canonical Ricci forms on 2-step nilmanifolds, *Proc. Amer. Math. Soc.* **141** (2013), 325-333.

