Universidad Nacional de Córdoba
Facultad de Matemática, Astronomía y Física

Aportes a la clasificación de las álgebras de Hopf

Autor: Cristian Vay

Director: Nicolás Andruskiewitsch

Marzo 2012

16 W30 *Coalgebras, bialgebras, Hopf algebras; rings, modules, etc. on which these act*
16 Z40 *Modules, representation*

Resumen

Esta tesis es una contribución a la resolución del problema propuesto por I. Kaplansky en 1975: *clasificar las álgebras de Hopf de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica* 0 [37]. Aquí obtenemos la clasificación de dos familias de álgebras de Hopf, a saber:

- Las álgebras de Hopf cuyo corradical es el álgebra de funciones del grupo simétrico en tres letras.
- Las álgebras de Hopf de dimensión 16.

Tan importante como estos resultados concretos, son las técnicas generales que desarrollamos para llegar a ellos. Pues, daremos resultados que pueden ser aplicados a la hora de clasificar álgebras de Hopf cuyo corradical forma una subálgebra de Hopf, o bien a álgebras de Hopf generadas por una coálgebra simple de dimensión 4 estable por la antípoda.

Esta tesis se basa en mis trabajos:

- Finite dimensional Hopf algebras over the dual group algebra of the symmetric group in three letters. Junto a Nicolás Andruskiewitsch. Aparecerá en *Commun. Algebra.* Disponible en: arXiv:1010.5953v2.
- On a family of Hopf algebras of dimension 72. Junto a Nicolás Andruskiewitsch. Aparecerá en *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin.* Disponible en: arXiv:1105.0394v1.
- Hopf algebras of dimension 16. Junto a Gastón García. *Algebr. Rep. Theory* **13** (2010), no. 4, 383–405. Disponible en: arXiv:1105.0394v1.

Palabras claves: HOPF ALGEBRAS, HOPF ALGEBRAS WITH CORADICAL A HOPF SUBALGEBRA, REPRESENTATION THEORY, HOPF ALGEBRAS OF DIMENSION 16.

Gracias *a Nicolás por transmitirme sus saberes con dedicación y paciencia, comportándose como un padre conmigo y con todos los que trabajamos junto a él. A mi Familia y Amigos que de una u otra manera me han ayudado para cumplir con esta etapa de mi vida. En especial, a Euge, mi compañera de vida.*

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Sea $\Bbbk$ un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero. I. Kaplansky [37] propuso en 1975 clasificar las álgebras de Hopf de dimensión finita sobre $\Bbbk$. Se consideran (y se han considerado) diversas familias de álgebras de Hopf para dividir este vasto problema, que de por sí incluye a la clasificación de los grupos finitos. Una de estas aproximaciones es clasificar aquellas álgebras de Hopf que tienen dimensión igual a n, un número natural prefijado. Otra manera, es agrupar las álgebras de Hopf teniendo en cuenta su corradical, la forma de éste y la subálgebra que genera. Esto último se puede explicar con el siguiente esquema.

<u>Álgebras de Hopf</u>

(1) Semisimples.

(2) No Semisimples.

- (2.1) El corradical es una subálgebras de Hopf.
  - (2.1.1) Punteadas.
    - (2.1.1.1) Grupo abeliano.
    - (2.1.1.2) Grupo no abeliano.
  - (2.1.2) El corradical es conmutativo.
  - (2.1.3) Otras.
- (2.2) Otras.
  - (2.2.1) Generadas por el corradical.
  - (2.2.2) Deformaciones de bosonizaciones de generadas por el corradical.

También hay que decir, que al considerar todas las álgebras de Hopf de la misma dimensión, se suele dividir este conjunto de acuerdo al esquema anterior.

Esta tesis es una contribución a la resolución del problema propuesto por Kaplansky. Aquí clasificamos dos clases de álgebras de Hopf, a saber: aquellas con corradical isomorfo al álgebra de funciones sobre el grupo simétrico $\mathbb{S}_3$ y las de dimensión 16[1]. Pero tan importante como estos resultados concretos, son las técnicas generales que desarrollamos para llegar a ellos. Pues daremos resultados que pueden ser aplicados a la hora de clasificar álgebras de Hopf cuyo corradical forma una subálgebra de Hopf, o bien a álgebras de Hopf generadas por coálgebras simples de dimensión 4 estables por la antípoda.

Por otra parte, si lo monumental del problema de clasificar todas las álgebras de Hopf es abrumador, el hecho de conocer resultados generales, aunque sean útiles sólo para algunas familias, animan a, y dan señales de cómo, seguir avanzando en la clasificación y a su vez motivan nuevos interrogantes por responder. Nos explayaremos más en esto mientras explicamos cómo llegamos a las dos clasificaciones antes anunciadas.

Álgebras de Hopf con corradical $\Bbbk^{\mathbb{S}_3}$.

Sea H un álgebra de Hopf cosemisimple y denotemos con $\mathfrak{F}_H$ a la familia de álgebras de Hopf cuyo corradical es una subálgebra de Hopf isomorfa a H. Es bien conocido que si $A \in \mathfrak{F}_H$ entonces el álgebra de Hopf graduada $\operatorname{gr} A$ asociada a A es isomorfa a $R\#H$ donde $R = \oplus_{n\geq 0} R^n$ es un álgebra de Hopf trenzada en la categoría de módulos de Yetter-Drinfeld sobre H, que se denota por ${}^H_H\mathcal{YD}$. Más aún, $R^0 = \Bbbk$ y $R^1 = \mathcal{P}(R)$, los elementos primitivos de R.

Una clase de álgebras de Hopf trenzadas (graduadas, con las propiedades de R) muy importante es la de las álgebras de Nichols $\mathfrak{B}(V)$ con $V \in {}^H_H\mathcal{YD}$. Rápidamente hablando, $\mathfrak{B}(V)$ es el cociente del álgebra tensorial $T(V)$ por el máximo ideal de Hopf entre aquéllos generados por elementos homogéneos de grado ≥ 2. Andruskiewitsch y Scheneider [8] idearon el *Método del Levante* para clasificar las álgebras de Hopf en $\mathfrak{F}_H$. Este consiste en:

1) Determinar los módulos de Yetter-Drinfeld V sobre H tales que $\mathfrak{B}(V)$ es de dimensión finita, como así también las relaciones que definen a $\mathfrak{B}(V)$.

2) *Levante:* Determinar la estructura de todas las álgebras de Hopf $A \in \mathfrak{F}_H$ tales que $\operatorname{gr} A \simeq \mathfrak{B}(V)\#H$.

[1] Hasta diciembre de 2007, cuando terminamos el trabajo [33], 16 era la menor dimensión en donde no se conocía la clasificación. Antes de [33], las últimas publicaciónes que se refieren al problema en esta dimensión son del año 2004 [15, 22].

3) *Generación en grado* 1*:* Decidir cuales álgebras de Hopf $A \in \mathfrak{F}_H$ son generadas por A_1, el primer término de la filtración coradical.

Nosotros nos detendremos en el paso del *Levante*. Mostraremos que si $A \in \mathfrak{F}_H$, entonces $\operatorname{gr} A \simeq \mathfrak{B}(V)\#H$ si y sólo si existe un epimorfismo de álgebras de Hopf $\phi : T(V)\#H \to A$ que satisface ciertas propiedades; para probar la existencia de ϕ es esencial un resultado de [12]. Llamaremos a ϕ *morfismo levantador* y a tal A un *levantamiento*.

Luego, si los generadores M del ideal definiendo a $\mathfrak{B}(V)$ satisfacen cierta compatibilidad con ϕ, seremos capaces de obtener un conjunto de generadores del ideal definiendo a A, describiendo la imagen por ϕ de M. Cuando H es el álgebra de funciones $\Bbbk^G$ sobre un grupo finito G podremos hacer la descripción de $\phi(M)$ de una forma más detallada.

Con esto es que encontramos una nueva familia $\{\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}\}_{\mathbf{a}\in\mathfrak{A}_n}$ de álgebra de Hopf, parametrizadas por el conjunto

$$\mathfrak{A}_n := \Big\{\mathbf{a} = (a_{(ij)})_{(ij)\in\mathcal{O}_2^n} \in \Bbbk^{\mathcal{O}_2^n} : \sum_{(ij)\in\mathcal{O}_2^n} a_{(ij)} = 0\Big\},$$

y conteniendo todos los levantamientos de $\mathfrak{B}(V_n)\#\Bbbk^{\mathbb{S}_n}$ para $n = 3, 4, 5$. Explícitamente, para $n \geq 3$, sean $\mathcal{O}_2^n$ la clase de conjugación de (12) en $\mathbb{S}_n$ y $V_n \in {}^{\Bbbk^{\mathbb{S}_n}}_{\Bbbk^{\mathbb{S}_n}}\mathcal{YD}$ con base $(x_{(ij)})_{(ij)\in\mathcal{O}_2^n}$, acción $\cdot$ y coacción δ dadas por

$$\delta_h \cdot x_{(ij)} = \delta_{h,(ij)}\, x_{(ij)} \qquad \text{y} \qquad \delta(x_{(ij)}) = \sum_{h\in\mathbb{S}_n} \operatorname{sgn}(h)\delta_h \otimes x_{h^{-1}(ij)h}$$

para todo $h \in \mathbb{S}_n$ y $(ij) \in \mathcal{O}_2^n$; sgn denota la representación signo de $\mathbb{S}_n$.

El grupo $\Gamma_n := \Bbbk^\times \times \operatorname{Aut}(\mathbb{S}_n)$ actúa sobre $\mathfrak{A}_n$ vía

$$(\mu, \theta) \triangleright \mathbf{a} = \mu(a_{\theta(ij)}), \qquad \mu \in \Bbbk^\times, \qquad \theta \in \operatorname{Aut}(\mathbb{S}_n), \qquad \mathbf{a} \in \mathfrak{A}_n.$$

Entonces $[\mathbf{a}] \in \Gamma_3\backslash\mathfrak{A}_3$ es la clase de $\mathbf{a}$ definida por esta acción.

Fijado $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}_n$, introducimos

$$f_{ij} = \sum_{g\in\mathbb{S}_n} (a_{(ij)} - a_{g^{-1}(ij)g})\delta_g \in \Bbbk^{\mathbb{S}_n} \quad \text{para todo } (ij) \in \mathcal{O}_2^n \tag{1}$$

y luego, el ideal de Hopf $\mathcal{I}_\mathbf{a}$ de $T(V_n)\#\Bbbk^{\mathbb{S}_n}$ generado por

$$\begin{aligned} &x_{(ij)}^2 - f_{ij}, \\ R_{(ij)(kl)} &:= x_{(ij)}x_{(kl)} + x_{(kl)}x_{(ij)}, \\ R_{(ij)(ik)} &:= x_{(ij)}x_{(ik)} + x_{(ik)}x_{(jk)} + x_{(jk)}x_{(ij)} \end{aligned}$$

para todo $(ij), (kl), (ik) \in \mathcal{O}_2^n$ con $\#\{i, j, k, l\} = 4$. Finalmente,

$$\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \text{ es el álgebra de Hopf cociente } T(V_n)\#\Bbbk^{\mathbb{S}_n}/\mathcal{I}_\mathbf{a}.$$

Por otra parte, las álgebras de Hopf punteadas fueron intensamente estudiadas usando el Método del Levante [10, 3, 5, 32][2]. Además, las categorías ${}^{\Bbbk G}_{\Bbbk G}\mathcal{YD}$ y ${}^{\Bbbk^G}_{\Bbbk^G}\mathcal{YD}$ son equivalente como categorías tensoriales. Entonces la solución de los pasos 1) y 3) del Método del Levante para $H = \Bbbk G$ puede ser trasladada al caso $H = \Bbbk^G$.

Por ejemplo, para $G = \mathbb{S}_3$ sabemos que

- V_3 es el único $V \in {}^{\mathbb{S}_3}_{\mathbb{S}_3}\mathcal{YD}$ tal que $\mathfrak{B}(V)$ es de dimensión finita por [5, Thm. 4.5] y el ideal definiendo a $\mathfrak{B}(V_3)$ es generado por

$$x_{(12)}^2, \quad x_{(13)}^2, \quad x_{(23)}^2, \quad R_{(13)(23)} \quad \text{y} \quad R_{(23)(13)} \quad \text{por [46].}$$

- Sea $R = \oplus_{n\geq 0} R^n \in {}^{\mathbb{S}_3}_{\mathbb{S}_3}\mathcal{YD}$ un álgebra de Hopf trenzada de dimensión finita con $R^0 = \Bbbk$ y $R^1 = \mathcal{P}(R)$. Entonces $R \simeq \mathfrak{B}(V_3)$ [4, Thm. 2.1].

Esto nos ayudará a probar uno de nuestros principales aportes al problema de clasificar álgebras de Hopf.

Clasificación de las álgebras de Hopf con corradical $\Bbbk^{\mathbb{S}_3}$.

El conjunto de clases de isomorfismo de álgebras de Hopf de dimensión finita, no semisimples y cuyo corradical es $\Bbbk^{\mathbb{S}_3}$ están en correspondencia biyectiva con $\Gamma_3\backslash\mathfrak{A}_3$ mediante la asignación $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \leftrightsquigarrow [\mathbf{a}]$.

La mayor dificultad para probar lo anterior, y la razón por la cual no se puede extender a $n = 4$ ó 5, es demostrar que las álgebras $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ tienen la dimensión correcta; podría suceder, en el peor de los casos, que el cociente $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ fuera nulo. Para $n = 3$, eludimos esta dificultad de dos maneras: dando una base de $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$, usando el Lema del Diamante [18], y probando que las álgebras $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ son deformaciones por cociclos unas de otras, usando un resultado de [45][3]. Sin embargo, trabajamos actualmente en la extensión de este último método a los casos $n = 4, 5$, y también para otros grupos.

[2]Una de las familias más amplia de álgebras de Hopf clasificadas es la considerada en [10]: $\mathfrak{F}_{\Bbbk\Gamma}$ con Γ un grupo abeliano finito con $\operatorname{ord}\Gamma$ no divisible por $2, 3, 5$ ó 7.

[3]Kaplansky conjeturó que, salvo isomorfismos, existiría una cantidad finita de álgebras de Hopf de una misma dimensión. Varios contraejemplos fueron dados, sin ir más lejos la familia $\{\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}\}$ es uno de ellos. Masuoka [45] propuso reformular la conjetura de Kaplansky así: salvo deformaciones por cociclo, existe una cantidad finita de álgebras de Hopf de una misma dimensión. Nuestra familia cumple con esta conjetura pero por [28] se sabe que es falsa.

La teoría de representaciones de cualquier álgebra es importante por si sola. En el caso de las álgebras de Hopf con corradical $\Bbbk^G$, el interés por su teoría de representaciones aumenta si tenemos en cuenta el siguiente hecho. Al ser $\Bbbk^G$ un álgebra semisimple y conmutativa podemos tratar de repetir el fructífero método usado en la teoría de representaciones de álgebras de Lie, con $\Bbbk^G$ cumpliendo el rol de subálgebra de Cartan. Además, es tentador creer que esto ayude al estudio de las álgebras de Nichols y, volviendo a nuestra problema, a dilucidar cómo probar que $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ tienen la dimensión correcta para $n = 4$ ó 5.

Con estas motivaciones nos abocamos al estudio de las representaciones de $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$. Llamamos *módulos de Verma* a los $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$-módulos inducidos por los $\Bbbk^{\mathbb{S}_n}$-módulos simples; recordar que de estos últimos hay uno por cada $g \in \mathbb{S}_n$. Probaremos que dos módulos de Verma M_g y M_h son isomorfos si g y h estan en la misma clase con respecto a la siguiente relación de equivalencia.

Sea $n \geq 3$ y fijemos $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}_n$.; recordar las funciones f_{ij} en (1) Diremos que $g, h \in \mathbb{S}_n$ son **a**-*enlazados*, lo cual denotaremos $g \sim_{\mathbf{a}} h$, si $g = h$, o bien existen $(i_m j_m), \dots, (i_1 j_1) \in \mathcal{O}_2^n$ tales que

- $g = (i_m j_m) \cdots (i_1 j_1) h$,
- $f_{i_s j_s}((i_s j_s)(i_{s-1} j_{s-1}) \cdots (i_1 j_1) h) \neq 0$ para todo $1 \leq s \leq m$.

Para $n = 3$, calcularemos el retículo de submódulos de cada módulo de Verma y como consecuencia obtendremos, entre otras cosas, los módulos simples de $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$. Resulta que los módulos simples L_g de $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ también están parametrizados (salvo isomorfismos) por la relación de equivalencia $\sim_{\mathbf{a}}$ y son isomorfos al cociente

$$L_g \simeq M_g / \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot \langle M_g[h] : h \not\sim_{\mathbf{a}} g \rangle$$

para todo $g \in \mathbb{S}_3$, donde $M_g[h]$ denota la componente isotípica de M_g de peso $h \in \mathbb{S}_3$ con respecto a la acción restringida a $\Bbbk^{\mathbb{S}_3}$. El anterior isomorfismo nos invita a intentar probar un resultado análogo para $n \geq 4$, lo cual esta en progreso.

Álgebras de Hopf de dimensión 16.

Hay muchos antecedentes de trabajos que abordan el problema de clasificación de álgebras de Hopf según su dimensión. Por ejemplo – en lo siguiente p y q son números primos y H un álgebra de Hopf –: el teorema de Kac-Zhu [61] establece que si $\dim H = p$ entonces H es isomorfa a un álgebra de grupo. S-H. Ng [49] probó que en dimensión p^2, las únicas álgebras de Hopf son las álgebras de grupo y las álgebras de Taft, usando resultados previos de [7, 44]. Se cree que si $\dim H = pq$ entonces H es semisimple y por lo tanto sería isomorfa a un álgebra de grupo o al dual de un álgebra de grupo por [35, 27, 43]. Esta conjetura fue verificada para $\dim H = 14$ en [15], $\dim H = 15$ en [6] y para algunas familias de valores de p y q en [6, 15, 29, 50, 51, 52]. Para dimensión ≤ 11 el problema fue resuelto por [60]; otra prueba fue dada por [58]. La clasificación en dimensión 12 fue hecha por [30] en el caso semisimple y luego finalizada por [48] en el caso general.

Dimensión 16 fue durante varios años la menor dimensión donde la clasificación aún no estaba completa. Sí se conocía la clasificación de diferentes subfamilias, a saber: [38] clasificó las semisimples, [21] las punteadas y [22] aquellas no punteadas pero con corradical una subálgebra de Hopf.

Aquí probaremos que las álgebras de Hopf listadas en estos trabajos, y sus duales, son todas las de dimensión 16 que existen.

Teorema de Clasificación en dimensión 16.

Si H es un álgebra de Hopf de dimensión 16 entonces H es isomorfa a una y sólo un álgebra de Hopf que aparece en una de las siguientes listas.

1. *Las álgebras de grupo de grupos de orden* 16 *y sus duales.*
2. *Las álgebras de Hopf semisimples listadas en [38, Thm. 1.2].*
3. *Las álgebras de Hopf punteadas listadas en [21, Sec. 2.5].*
4. *Las dos álgebras de Hopf* [4] *no semisimples, no punteadas cuyo corradical es una subálgebra de Hopf listadas en [22, Thm. 5.1].*
5. *Los duales de las álgebras de Hopf punteadas listadas en [14, Sec. 4.2, Table 2].*

El principal ingrediente para demostrar la exhaustividad del Teorema de Clasificación es el siguiente teorema.

Teorema. *Sea H un álgebra de Hopf de dimensión 16. Si el corradical de H no es una subálgebra de Hopf entonces H^* es punteada.*

[4] Estas álgebras son isomorfas a sus propio dual.

Sea H como en el enunciado anterior. Para probar este teorema primero describiremos la posible forma del corradical de H. Luego, finalizaremos la demostración del teorema caso por caso, considerando las subálgebras de Hopf generadas por las subcoálgebras simples del corradical y analizando la acción de la antípoda y de los elementos de tipo grupo de H sobre ellas.

Es de resaltar la importancia en la prueba de las álgebras de Hopf generadas por una coálgebra simple de dimensión 4 estable por la antípoda. Su importancia ya había sido observado en los trabajos [48, 58] en donde estas álgebras empiezan a tomar protagonismo proveyendo de resultados generales que ayudan a la clasificación de álgebras de Hopf. También es de resaltar el trabajo [19] para el caso semisimple.

Aquí, obtendremos más consecuencias de los principales resultados de [48, 58], que son útiles tanto para dimensión 16 como para otras dimensiones. Prueba de esto es que algunos son utilizados en [17].

Sería interesante encontrar resultados análogos considerando álgebras de Hopf generadas por una coálgebra simple de dimensión > 4 estable por la antípoda, o bien generadas por coálgebras simples permutadas por la antipoda. Dicho sea de paso, este último ha sido el caso con mayor dificultad al que nos hemos enfrentado a la hora de resolver el teorema anterior.

Además, este tipo de álgebras resultan relevantes para la reciente propuesta de [1] de extender el Método del Levante a álgebras de Hopf más generales.

La tesis está organizada como sigue. En el Capítulo I introducimos toda la notación y las nociones básicas que se usarán a lo largo del trabajo.

En el Capítulo II estudiamos las álgebras de Hopf con corradical una subálgebra de Hopf. En el Capítulo III damos la Clasificación de las álgebras de Hopf con corradical $\Bbbk^{\mathbb{S}_3}$. También, estudiamos la estructura interna de las álgebras clasificadas (deformaciones por cociclos, subálgebras de Hopf, integrales y estructura cuasi-tringualar) y estudiamos su teoría de representaciones (módulos simples, módulos de Verma y tipo de representación).

El Capítulo IV está dedicado a la demostración del Teorema de Clasificación en dimensión 16. Sin embargo, en la Sección IV.1 obtenemos algunos resultados generales para álgebras de Hopf generadas por coálgebras simples.

CAPÍTULO I

PRELIMINARES

En este capítulo fijaremos convenciones, notaciones y definiciones que utilizaremos a lo largo de toda la tesis. También recordaremos resultados bien conocidos sin dar la demostración, los cuales usaremos en los capítulos posteriores.

I.1 Convenciones y notación.

A lo largo de la tesis $\Bbbk$ denotará un cuerpo algebraicamente cerrado de caracteristíca 0 y $\Bbbk^\times$ será el grupo multiplicativo de elementos no nulos. Todos los espacios vectoriales, álgebras y coálgebras serán sobre $\Bbbk$.

Si V es un espacio vectorial, $T(V)$ denotará el álgebra tensorial de V. Mientras no haya confusión escribiremos $a_1 \cdots a_n$ en lugar de $a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$ para $a_1, ..., a_n \in V$. Si X es un conjunto, $\Bbbk X$ denotará el espacio vectorial con base $(x)_{x\in X}$. Si $X \subset V$, $\langle X\rangle$ denotará el subespacio vectorial generado por X. El espacio vectorial dual a V es $V^* = \mathrm{Hom}(V, \Bbbk)$. Si $v \in V$ y $f \in V^*$, usaremos indistintamente $f(v)$ y $\langle f, v\rangle$ para la evaluación canónica.

Sea A un álgebra, es decir, un álgebra asociativa y con unidad. Denotaremos con m_A a la multiplicación de A y con 1_A a la unidad de A, si no hay lugar a confusión omitiremos el subíndice A. Si S es un subconjunto de A, (S) denotará el ideal bilátero generado por S y $\Bbbk\langle S\rangle$ denotará la subálgebra generada por S. Denotaremos con ${}_A\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_A$ y ${}_A\mathcal{M}_A$ a las categorías de A-módulos a izquierda, a derecha y A-bimódulos, respectivamente. Las representaciones regulares a izquierda y derecha serán denotadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} L : A &\longrightarrow \mathrm{End}\, A \\ a &\longmapsto L_a(b) := ab\ \forall b \in A \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} R : A &\longrightarrow \mathrm{End}\, A \\ a &\longmapsto R_a(b) := ba\ \forall b \in A. \end{aligned}$$

Sea C una coálgebra, es decir, un coálgebra coasociativa y con counidad. Denotaremos con Δ_C a la comultiplicación de C y con ε_C a la counidad de C, si no hay lugar a confusión omitiremos el subíndice C. Denotaremos con ${}^C\mathcal{M}$, $\mathcal{M}^C$ y ${}^C\mathcal{M}^C$ a las categorías de C-comódulos a izquierda, a derecha y C-bicomódulos, respectivamente. Las categorías cuyos objetos son módulos y comódulos a la vez serán denotadas de la manera natural.

Asumamos que $(M,\lambda) \in {}^C\mathcal{M}$ ó $(M,\rho) \in \mathcal{M}^C$, entonces los *coinvariantes* (a izquierda o a derecha) de M son

$$ {}^{\mathrm{co}\,\lambda}M = \{m \in M : \lambda(m) = 1 \otimes m\} \quad \text{ó} \quad M^{\mathrm{co}\,\rho} = \{m \in M : \rho(m) = m \otimes 1\}. $$

Para coálgebras y comódulos usaremos la *notación de Sweedler* pero omitiendo el símbolo de sumatoria, esto es, $\Delta(x) = x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ para todo $x \in C$, $\lambda(m) = m_{(-1)} \otimes m_{(0)}$ y $\rho(m) = m_{(0)} \otimes m_{(1)}$ para todo $m \in M$.

Una *biálgebra* es un álgebra H que además es una coálgebra tal que Δ_H y ε_H son morfismos de álgebras.

Sean A un álgebra y C una coálgebra. Recordamos que $\mathrm{Hom}(C,A)$ es un grupo con el *producto de convolución* $*$, esto es, $f * g(x) = f(x_{(1)})g(x_{(2)})$ para todo $f, g \in \mathrm{Hom}(C,A)$, $x \in C$; el elemento neutro es $\varepsilon_C 1_A$. Entonces, un *álgebra de Hopf* es una bialgebra H provista de una transformación lineal $\mathcal{S}_H$ tal que $\mathcal{S}_H * \mathrm{id}_H = \mathrm{id}_H * \mathcal{S}_H = \varepsilon_H 1_H$; $\mathcal{S}_H$ se llama la antípoda de H, si no hay lugar a confusión omitiremos el subíndice H (resulta que $\mathcal{S}_H$ es un antiendomorfismo de álgebras). Nuestra principal referencia para álgebras de Hopf es [47].

Recordemos dos pares de acciones destacadas en la teoría de álgebras de Hopf. Empecemos por las representaciones adjuntas a izquierda y derecha las cuales son dadas, respectivamente, por

$$ \begin{aligned} \mathrm{ad}_\ell : H &\longrightarrow \mathrm{End}\, H \\ h &\longmapsto \mathrm{ad}_\ell(h)(a) := h_{(1)} a \mathcal{S}(h_{(2)}) \ \forall a \in H \qquad\qquad \text{y} \\ \mathrm{ad}_r : H^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \mathrm{End}\, H \\ a &\longmapsto \mathrm{ad}_r(h)(a) := \mathcal{S}(h_{(1)}) a h_{(2)} \ \forall a \in H. \end{aligned} $$

El otro par que nos interesa son las acciones $\rightharpoonup$ y $\leftharpoonup$, a izquierda y a derecha respectivamente, de H^* sobre H dadas por

$$ \alpha \rightharpoonup h = h_{(1)}\langle \alpha, h_{(2)}\rangle \quad \text{y} \quad h \leftharpoonup \alpha = \langle \alpha, h_{(1)}\rangle h_{(2)} \quad \forall \alpha \in H^*, h \in H. \tag{I.1} $$

Si G es un grupo $\Bbbk G$ denotará el álgebra de grupo de G, e denotará el elemento neutro de G y $\Bbbk^G$ denotará el álgebra de funciones sobre G. Además

$(\delta_h)_{h\in G}$ es la base de $\Bbbk^G$ dual a la base de $\Bbbk G$ formada por los elementos del grupo, es decir, $\delta_h(g) = \delta_{g,h}$ para todo $g, h \in G$ donde la última es la delta de Kronecker. Recordar que $\Bbbk G$ y $\Bbbk^G$ son álgebras de Hopf duales mediante

$$\begin{aligned}
\Delta_{\Bbbk G}(g) &= g \otimes g, & \varepsilon_{\Bbbk G}(g) &= 1 \quad \text{y} \quad \mathcal{S}_{\Bbbk G}(g) = g^{-1},\\
\Delta_{\Bbbk^G}(\delta_g) &= \sum_{h\in G} \delta_h \otimes \delta_{h^{-1}g}, & \varepsilon_{\Bbbk^G}(\delta_g) &= \delta_{e,g} \quad \text{y} \quad \mathcal{S}_{\Bbbk^G}(\delta_g) = \delta_{g^{-1}} \quad \forall g \in G.
\end{aligned}$$

Sean $M \in {}_{\Bbbk^G}\mathcal{M}$ y $g \in G$. Llamaremos *componente isotípica de peso g de M* a $M[g] = \delta_g \cdot M$. Además, escribiremos

$$\operatorname{Supp} M = \{g \in G : M[g] \neq 0\} \quad \text{y} \quad M^{\times} = \oplus_{g\neq e} M[g].$$

Si X es un conjunto entonces $\mathbb{S}_X$ es el grupo de permutaciones sobre X y $\mathbb{S}_n = \mathbb{S}_{\{1,\dots,n\}}$.

I.2 La filtración corradical.

Sea C una coaĺgebra. El corradical C_0 de C es la suma de todas las subcoálgebras simples de C. La filtración corradical de C es la familia de subespacios definida inductivamente por

$$C_n := C_0 \wedge C_{n-1} = \Delta^{-1}(C \otimes C_0 + C_{n-1} \otimes C)$$

para cada $n \geq 1$. Entonces

$$C_n \subseteq C_{n+1}, \quad C = \bigcup_{n\geq 0} C_n \quad \text{y} \quad \Delta(C_n) \subseteq \sum_{i=0}^{n} C_i \otimes C_{n-i}, \tag{I.2}$$

para todo $n \geq 0$ [47, Thm. 5.2.2].

La coálgebra graduada asociada a C es

$$\operatorname{gr} C = \oplus_{n\geq 0} \operatorname{gr}^n C \quad \text{con} \quad \operatorname{gr}^n C := C_n/C_{n-1} \quad \forall n \geq 0 \;\text{ y }\; C_{-1} = 0.$$

Denotaremos con $G(C)$ al grupo de elementos tipo grupo de C. Como es usual, para $g, h \in G(C)$,

$$\mathcal{P}_{g,h}(C) = \{x \in C_1 | \Delta(x) = g \otimes x + x \otimes h\}$$

es el espacio de elementos (g, h)-casi primitivos de C. Si C es una biálgebra y $g = h = 1$, escribiremos simplemente $\mathcal{P}(C)$ en vez de $\mathcal{P}_{1,1}(C)$ y $x \in \mathcal{P}(C)$ se llama elemento primitivo.

Una coálgebra E será llamada *coálgebra de comatrices* de rango n si tiene una base $(e_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, llamada *base de comatrices* tal que la comultiplicación y la counidad son definidas por

$$\Delta(e_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} e_{ik} \otimes e_{kj} \quad \text{y} \quad \varepsilon(e_{ij}) = \delta_{ij}$$

para todo $1 \leq i, j \leq n$. Notar que la coálgebra $\mathcal{M}^*(n, \Bbbk)$ dual al álgebra de matrices de dimensión n^2 es una coálgebra de comatrices.

Es conocido que $\mathcal{P}_{g,h}(C) \cap C_0 = \Bbbk(g-h)$. El siguiente lema es una generalización de esta igualdad (introduciendo definiciones apropiadas). En el Capítulo II, usaremos el lema para encontrar deformaciones de un álgebra de Hopf con corradical una subálgebra de Hopf.

Lema I.1. *Sean $D = \Bbbk g$ y $E = \langle e_{ij} | 1 \leq i, j \leq n\rangle$ coálgebras de comatrices de rangos 1 y n, respectivamente. Si $(x_i)_{i=1}^{n} \subset D \oplus E$ (suma directa de coálgebras) son tales que*

$$\Delta(x_i) = x_i \otimes g + \sum_{j=1}^{n} e_{ij} \otimes x_j,$$

entonces existen $a_1, ..., a_n \in \Bbbk$ tales que $x_i = a_i g - \sum_{j=1}^{n} a_j e_{ij}$, $1 \leq i \leq n$.

Prueba. Podemos escribir $x_i = a_i g + \sum_{s,t=1}^{n} \alpha_{st}^{i} e_{st}$ con $a_i, \alpha_{st}^{i} \in \Bbbk$ para todo $1 \leq i, s, t \leq n$. Ahora calculamos $\Delta(x_i)$ de dos maneras:

$$\Delta(x_i) = \Delta\Big(a_i g + \sum_{s,t=1}^{n} \alpha_{st}^{i} e_{st}\Big) = a_i g \otimes g + \sum_{s,t,l=1}^{n} \alpha_{st}^{i} e_{sl} \otimes e_{lt} \qquad \text{y}$$

$$\begin{aligned}
\Delta(x_i) &= \Big(a_i g + \sum_{s,t=1}^{n} \alpha_{st}^{i} e_{st}\Big) \otimes g + \sum_{j=1}^{n} e_{ij} \otimes \Big(a_j g + \sum_{s,t=1}^{n} \alpha_{st}^{j} e_{st}\Big)\\
&= a_i g \otimes g + \sum_{s,t=1}^{n} \alpha_{st}^{i} e_{st} \otimes g + \sum_{j=1}^{n} a_j e_{ij} \otimes g + \sum_{s,t,j=1}^{n} \alpha_{st}^{j} e_{ij} \otimes e_{st}\\
&= a_i g \otimes g + \sum_{\substack{s,t=1\\ s\neq i}}^{n} \alpha_{st}^{i} e_{st} \otimes g + \sum_{t=1}^{n} (a_t + \alpha_{it}^{i}) e_{it} \otimes g + \sum_{s,t,j=1}^{n} \alpha_{st}^{j} e_{ij} \otimes e_{st}.
\end{aligned}$$

Entonces el segundo y tercer término son cero y por lo tanto $\alpha_{st}^{i} = 0$ y $\alpha_{it}^{i} = -a_t$, para $1 \leq i, s, t \leq n$, $s \neq i$. Luego $x_i = a_i g + \sum_{s,t=1}^{n} \alpha_{st}^{i} e_{st} = a_i g - \sum_{t=1}^{n} a_t e_{it}$. $\square$

I.3 Módulos de Yetter-Drinfeld.

Los módulos de Yetter-Drinfeld, en general, y las álgebras de Hopf trenzadas, en particular, son una importante pieza para la construcción de nuevas álgebras de Hopf y, por lo tanto, para su clasificación. En esta sección repasaremos algunos conocimientos referidos a estas nociones.

Empecemos por recordar brevemente que una *categoría tensorial* es una colección $(\mathcal{C}, \otimes, a, \mathbb{I}, l, r)$ donde:

- $\mathcal{C}$ es una categoría y el *producto tensorial* $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es un bifuntor,
- $\mathbb{I}$ es un objeto de $\mathcal{C}$ y
- $a_{U,V,W} : U \otimes (V \otimes W) \to (U \otimes V) \otimes W$, $l_V : V \to \mathbb{I} \otimes V$ y $r_V : V \to V \otimes \mathbb{I}$, con U, V y W objetos en $\mathcal{C}$, son isomorfismos naturales.

Además, a debe satisfacer el *axioma del "pentágono"*, mientras que l y r deben satisfacer el *axioma del "triángulo"*, ver [39, Ch. XI, (2.6) y (2.9)]. Dicho rápidamente, el axioma del pentágono dice que el producto tensorial es "asociativo" y el axioma del triángulo que $\mathbb{I}$ es una unidad para el producto tensorial.

Ejemplo I.1. Si H un álgebra de Hopf entonces la categoría ${}^H_H\mathcal{M}$ de H-módulos a izquierda y H-comódulos a izquierda es una categoría tensorial. En efecto, si $N, M \in {}^H_H\mathcal{M}$ entonces $N \otimes M$ es el producto tensorial usual de espacios vectoriales con acción y coacción:

$$h \cdot (m \otimes n) = h_{(1)} \cdot m \otimes h_{(2)} \cdot n \quad \text{y}$$
$$(m \otimes n)_{(-1)} \otimes (m \otimes n)_{(0)} = m_{(-1)} n_{(-1)} \otimes m_{(0)} n_{(0)}.$$

para todo $n \in N$, $m \in M$ y $h \in H$.

Las otras posibles categorías de módulos y comódulos también son tensoriales con estructuras análogas a la antes descrita.

Una categoría tensorial $(\mathcal{C}, \otimes, a, \mathbb{I}, l, r)$ se dice *trenzada* si esta provista de un isomorfismo natural

$$c_{V,W} : V \otimes W \to W \otimes V, \quad \text{con } V \text{ y } W \text{ objetos de } \mathcal{C},$$

que satisface el *axioma del "hexágono"*, ver [39, Ch. XIII (1.3) y (1.4)]. Una consecuencia importante de la existencia de una *trenza* en $\mathcal{C}$ es que nos permite definir la noción de álgebras de Hopf trenzadas, ver más adelante.

Ejemplo I.2. Un *espacio vectorial trenzado* es un par (V, c), donde V es un espacio vectorial y $c \in \mathrm{GL}(V \otimes V)$ satisface la *ecuación de trenzas*:

$$(c \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes c)(c \otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \otimes c)(c \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes c).$$

Un *morfismo de espacios vectoriales trenzados* L entre (V, c) y $(U, \tilde{c})$ es un mapa lineal $L : V \to U$ que satisface $(L \otimes L) \circ c = \tilde{c} \circ (L \otimes L)$.

Ahora estamos en condiciones de introducir los objetos que le dan título a esta sección. A partir de ahora, y hasta el final de la sección, H denotará un álgebra de Hopf de dimensión finita.

Definición I.2. La categoría de *módulos de Yetter-Drinfeld* ${}^H_H\mathcal{YD}$ *sobre* H es definida como sigue: M es un objeto de ${}^H_H\mathcal{YD}$ si es un H-módulo a izquierda y un H-comódulo a izquierda tal que, para todo $h \in H$ y $m \in M$:

$$(h \cdot m)_{(-1)} \otimes (h \cdot m)_{(0)} = h_{(1)} m_{(-1)} \mathcal{S}(h_{(3)}) \otimes h_{(2)} \cdot m_{(0)}. \tag{I.3}$$

Los morfismos en ${}^H_H\mathcal{YD}$ son los morfismos de H-módulo y H-comódulo. Ésta es una categoría trenzada con la trenza dada por:

$$c^H_{M,N} : M \otimes N \to N \otimes M, \quad m \otimes n \mapsto m_{(-1)} \cdot n \otimes m_{(0)}, \tag{I.4}$$

para todo $M, N \in {}^H_H\mathcal{YD}$, $m \in M$ y $n \in N$.

Ejemplo I.3. $(H, \mathrm{ad}_\ell, \Delta)$ es un módulo de Yetter-Drinfeld sobre H.

Ejemplo I.4. Si $\delta(1) = 1 \otimes 1$ entonces $(\Bbbk, \varepsilon, \delta)$ es un módulo de Yetter-Drinfeld sobre H.

Observación I.3. Sea $D(H)$ el Doble de Drinfeld de H. Es bien conocido que H es semisimple si y sólo si $D(H)$ lo es, cf. [47]. Por otro lado, ${}^H_H\mathcal{YD}$ es equivalente como categoría trenzada a ${}_{D(H)}\mathcal{M}$. Entonces, H semisimple implica ${}^H_H\mathcal{YD}$ semisimple.

Sea $(A, m, 1)$ un álgebra y $\eta : \Bbbk \to A$ el morfismo lineal dado por $\eta(1) = 1$. Si A es un módulo de Yetter-Drinfeld sobre H y m y η son morfismos en ${}^H_H\mathcal{YD}$, se dice que $(A, m, 1)$ es un *álgebra en* ${}^H_H\mathcal{YD}$. Análogamente, una coálgebra (C, Δ, ε) se dice que es una *coálgebra en* ${}^H_H\mathcal{YD}$ si $C \in {}^H_H\mathcal{YD}$ y Δ y ε son morfismos en ${}^H_H\mathcal{YD}$.

Sean R y S dos álgebras en ${}^H_H\mathcal{YD}$. Entonces $R \underline{\otimes} S := R \otimes S$ es un álgebra en ${}^H_H\mathcal{YD}$ con la multiplicación definida por

$$m_{R \underline{\otimes} S} = (m_R \otimes m_S) \circ (\mathrm{id}_R \otimes c^H_{S,R} \otimes \mathrm{id}_S)$$

y unidad $1 \otimes 1$. Usando esta estructura se introduce la siguiente definición.

Definición I.4. Un *álgebra de Hopf trenzada en* ${}^H_H\mathcal{YD}$ es una 5-upla $(R, m, 1, \Delta, \varepsilon, \mathcal{S})$, comúnmente escribiremos simplemente R, tal que

- $(R, m, 1)$ es un álgebra en ${}^H_H\mathcal{YD}$ y (R, Δ, ε) es una coálgebra en ${}^H_H\mathcal{YD}$.
- $\Delta : R \to R\underline{\otimes}R$ y $\varepsilon : R \to \Bbbk$ son morfismos de álgebras.
- $\mathcal{S}$ es un morfismo en ${}^H_H\mathcal{YD}$ que es una antípoda para R, esto es, el inverso de id_R respecto al producto de convolución.

Si $R = \oplus_{n\geq 0}R^n$ es graduada como biálgebra y además, cada espacio de elementos homogéneos R^n es un submódulo de Yetter-Drinfeld diremos que R un *álgebra de Hopf trenzada y graduada en* ${}^H_H\mathcal{YD}$.

En la siguiente subsección veremos un ejemplo primordial de álgebras de Hopf trenzadas en ${}^H_H\mathcal{YD}$.

I.3.1 Álgebras de Nichols.

Definición I.5. Sean $V \in {}^H_H\mathcal{YD}$ y $R = \oplus_{n\geq 0}R^n$ un álgebra de Hopf trenzada y graduada en ${}^H_H\mathcal{YD}$. Se dice que R es el *álgebra de Nichols de* V si satisface:

- $R^0 = \Bbbk 1$ y $\mathcal{P}(R) = R^1 \simeq V$ en ${}^H_H\mathcal{YD}$.
- R es generada por R^1.

En tal caso, escribiremos $\mathfrak{B}(V) := R$.

El álgebra de Nichols existe para todo $V \in {}^H_H\mathcal{YD}$ y es única salvo isomorfismo [9, Prop. 2.2]. A continuación veremos una manera de construirla, para más detalles ver por ejemplo [9, 9].

El álgebra tensorial $T(V)$ admite una estructura de álgebra de Hopf trenzada y graduada en ${}^H_H\mathcal{YD}$ con comultiplicación, counidad y antípoda definidas, para todo $v \in V$, por:

$$\Delta(v) = v \otimes 1 + 1 \otimes v, \qquad \varepsilon(v) = 0 \qquad \text{y} \qquad \mathcal{S}(v) = -v,$$

y extendidas a todo $T(V)$ de manera que satisfaga la Definición I.4. Por ejemplo, si $x, y \in V$ entonces

$$\Delta(xy) = (m \otimes m) \circ (\mathrm{id} \otimes c^H_{V,V} \otimes \mathrm{id})\big(\Delta(x) \otimes \Delta(y)\big).$$

Denotemos con $\mathcal{J}(V)$ al ideal de Hopf en $T(V)$ máximo entre los generados por elementos homogéneos de grado ≥ 2. Entonces

$$\mathfrak{B}(V) = T(V)/\mathcal{J}(V) \text{ es el álgebra de Nichols de } V.$$

Observación I.6. Sea H' un álgebra de Hopf y supongamos que existe una equivalencia de categorías trenzadas $\Psi : {}^H_H\mathcal{YD} \to {}^{H'}_{H'}\mathcal{YD}$. Entonces las álgebras de Nichols $\mathfrak{B}(V) \in {}^H_H\mathcal{YD}$ y $\mathfrak{B}(\Psi(V)) \in {}^{H'}_{H'}\mathcal{YD}$ son isomorfas como álgebras y coálgebras graduadas.

Este es un caso particular de la siguiente situación. Primero notar que para realizar la construcción anterior lo único que utilizamos es la trenza $c^H_{V,V}$. No necesitamos de la H-acción ni de la H-coacción sobre V, sino simplemente para definir la estructura de módulo y comódulo sobre $\mathfrak{B}(V)$. Entonces podemos considerar el álgebra de Nichols $\mathfrak{B}(W, c_W)$ de un espacio vectorial trenzado (W, c_W). Sean (U, c_U) otro espacio vectorial trenzado y $L : (W, c_W) \to (U, c_U)$ un isomorfismo de espacios vectoriales trenzados. Entonces L se extiende primero a un isomorfismo de álgebras y coálgebras graduadas entre $T(W)$ y $T(U)$ que además respeta la antípoda. Luego, este último da lugar a un isomorfismo de las mismas características entre $\mathfrak{B}(W, c_W)$ y $\mathfrak{B}(U, c_U)$ por [4, Prop. 3.2.12]. Ver [4, Subsection 3.2] para más detalles.

I.3.2 Bosonización por un álgebra de Hopf trenzada.

Las álgebras de Hopf trenzadas aparecen naturalmente en el contexto usual de álgebras de Hopf. Sea A un álgebra de Hopf provista de morfismos de álgebras de Hopf:

$$H \overset{\imath}{\hookrightarrow} A \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} H \quad \text{tales que} \quad \pi \circ \imath = \mathrm{id}_H\,. \tag{I.5}$$

El *álgebra de coinvariantes con respecto a* π es

$$A^{\mathrm{co}\,\pi} := \{a \in A | (\mathrm{id} \otimes \pi)\Delta(a) = a \otimes 1\}.$$

Por [41, 55], $A^{\mathrm{co}\,\pi}$ es un álgebra de Hopf trenzada en ${}^H_H\mathcal{YD}$ con la siguiente estructura:

- La acción de H sobre $A^{\mathrm{co}\,\pi}$ es $\mathrm{ad}_\ell \circ \imath$ (o simplemente ad_ℓ).
- La coacción de H sobre $A^{\mathrm{co}\,\pi}$ es $(\pi \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta$.
- $A^{\mathrm{co}\,\pi}$ es una subálgebra de A.
- La comultiplicación es $\Delta_{A^{\mathrm{co}\,\pi}}(r) = r_{(1)}\iota \circ \pi \circ \mathcal{S}(r_{(2)}) \otimes r_{(3)} \ \ \forall r \in A^{\mathrm{co}\,\pi}$.

- La antípoda es $\mathcal{S}_{A^{\mathrm{co}\,\pi}}(r) = \iota \circ \pi(r_{(1)})\mathcal{S}_A(r_{(2)})\ \ \forall r \in A^{\mathrm{co}\,\pi}$.

Recíprocamente, si R es un álgebra de Hopf trenzada en ${}^H_H\mathcal{YD}$ podemos construir una nueva álgebra de Hopf en el sentido usual. La *bosonización* $R\#H$ *de* R *por* H [41, 55] es el álgebra de Hopf definida sobre $R \otimes H$ como sigue:

$$\begin{aligned}(r\#h)(s\#k) &= r(h_{(1)} \cdot s)\#h_{(2)}k,\\ \Delta_{R\#H}(r\#h) &= r_{(1)}\#(r_{(2)})_{(-1)}h_{(1)} \otimes (r_{(2)})_{(0)}\#h_{(2)} \quad \text{y}\\ \mathcal{S}_{R\#H}(r\#h) &= \mathcal{S}_H(h)\mathcal{S}_H(r_{(-1)})\mathcal{S}_R(r_{(0)})\end{aligned}$$

para todo $r, s \in R$ y $h, k \in H$, donde $r\#s := r \otimes s$. Notar que $\imath : H \to R\#H$, $h \mapsto 1\#h$ y $\pi : R\#H \to H$, $r\#h \mapsto \varepsilon(r)h$ para todo $r \in R$, $h \in H$ son morfismos de álgebras de Hopf que satisfacen (I.5).

Es sabido por [41, 55] que las construcciones anteriores son recíprocas, gracias al siguiente isomorfismo de álgebras de Hopf:

$$A^{\mathrm{co}\,\pi}\#H \longmapsto A,\ r\#h \mapsto rh. \tag{I.6}$$

Nos interesa aplicar lo anterior en el contexto particular del Método del Levante.

I.3.3 Método del levante.

De ahora en adelante suponemos que H es un álgebra de Hopf cosemisimple de dimensión finita, y por ende semisimple. Sea A un álgebra de Hopf tal que su corradical es una subálgebra de Hopf isomorfa a H. Por [47, 5.2.8], la coálgebra graduada $\operatorname{gr} A$ asociada a A resulta ser una álgebra de Hopf graduada. Más aún,

$$\begin{aligned}&\text{la proyección } \ \pi : \operatorname{gr} A \to H \ \text{ con núcleo } \oplus_{n>0} \operatorname{gr}^n A \text{ y}\\ &\text{la inclusión } \ \iota : H \to \operatorname{gr} A \ \text{ (recordar que } \operatorname{gr}^0 A = A_0/A_{-1} = H)\end{aligned}$$

satisfacen que $\pi \circ \iota = \mathrm{id}_H$ como en (I.5).

Por lo tanto, $R = (\operatorname{gr} A)^{\mathrm{co}\,\pi} = \{a \in \operatorname{gr} A | (\mathrm{id} \otimes \pi)\Delta(a) = a \otimes 1\}$ es un álgebra de Hopf trenzada en ${}^H_H\mathcal{YD}$ y $\operatorname{gr} A \simeq R\#H$, como álgebras de Hopf. Más aún, si $R^n := R \cap \operatorname{gr}^n A$ para todo $n \geq 0$ entonces por [8] vale que:

- $R = \oplus_{n\geq 0} R^n$ es un álgebra de Hopf trenzada y graduada en ${}^H_H\mathcal{YD}$.

- $\operatorname{gr}^n A = R^n \# H$.
- $R_0 = R^0 = \Bbbk 1$ y $V := R^1 = P(R)$.

El módulo de Yetter-Drinfeld V se llama la *trenza infinitesimal de A*. La subálgebra de R generada por la trenza infinitesimal es isomorfa al álgebra de Nichols $\mathfrak{B}(V)$. Más aún, en [11] fue demostrado que si $\dim A < \infty$ y H es álgebra de grupo de un grupo abeliano entonces $R = \mathfrak{B}(V)$. Esta afirmación fue conjeturada por Andruskiewitsch y Scheneider [9], lo que los condujo también a idear el *Método del Levante*: una estrategia para clasificar las álgebras de Hopf tales que su corradical es una subálgebra de Hopf isomorfa a un álgebra de Hopf prefijada.

El Método del Levante consiste en:

1) Determinar los módulos de Yetter-Drinfeld V sobre H tales que $\mathfrak{B}(V)$ es de dimensión finita, como así también las relaciones que definen a $\mathfrak{B}(V)$.
2) *Levante:* Determinar la estructura de todas las álgebras de Hopf A con corradical una subálgebra de Hopf isomorfa a H y $\operatorname{gr} A \simeq \mathfrak{B}(V)\#H$.
3) *Genereación en grado* 1*:* Decidir cuales álgebras de Hopf A, cuyo corradical es una subálgebra de Hopf isomorfa a H, son generadas por A_1.

Notar que si A un álgebra de Hopf cuyo corradical es una subálgebra de Hopf isomorfa a H y R es definida como antes entonces A es generada por A_1 si y sólo si R es generada por R^1, lo cual es equivalente a $R = \mathfrak{B}(R^1)$.

Definición I.7. Sean A un álgebra de Hopf con corradical una subálgebra de Hopf isomorfa a H y $V \in {}^H_H\mathcal{YD}$. Diremos que A es un *levantamiento de* $\mathfrak{B}(V)\#H$ si $\operatorname{gr} A \simeq \mathfrak{B}(V)\#H$.

Nosotros utilizaremos este método en los Capítulos II y III en donde supondremos que H es el álgebra de funciones de un grupo no abeliano.

I.3.4 Módulos de Yetter-Drinfeld sobre el álgebra de funciones de un grupo.

Las categorías ${}^{H^*}_{H^*}\mathcal{YD}$ y ${}^H_H\mathcal{YD}$ son equivalentes como categorías tensoriales de la siguiente manera. Sean (h_i) y (f_i) bases duales de H y H^*. Si $V \in {}^H_H\mathcal{YD}$ entonces V es un módulo de Yetter-Drinfeld sobre H^* con acción y coacción definidas por:

$$\text{(I.7)}\quad f\cdot v = \langle \mathcal{S}(f), v_{(-1)}\rangle v_{(0)}, \quad \lambda(v) = \sum_i \mathcal{S}^{-1}(f_i)\otimes h_i\cdot v, \quad f\in H^*, v\in V.$$

Esto da una equivalencia de categorías entre ${}_H^H\mathcal{YD}$ y ${}_{H^*}^{H^*}\mathcal{YD}$ [4, 2.2.1].

Observación I.8. Si los pasos 1) y 3) del Método del Levante son resueltos para H entonces también son resueltos para H^*.

Esto se sigue de la equivalencia de categorias trenzadas entre ${}_H^H\mathcal{YD}$ y ${}_{H^*}^{H^*}\mathcal{YD}$ y el hecho de que el álgebra de Nichols sólo depende de la trenza por la Observación I.6.

Nosotros aplicaremos la equivalencia de categorías dada antes en el caso particular en que H es el álgebra de grupo $\Bbbk G$ de un grupo finito G. Por lo tanto $H^* = \Bbbk^G$, el álgebra de funciones sobre G. En este caso los módulos simples de ${}_{\Bbbk G}^{\Bbbk G}\mathcal{YD}$ son bien conocidos, ver por ejemplo [4, Prop. 3.1.2]. Recordar además que ${}_{\Bbbk G}^{\Bbbk G}\mathcal{YD}$ es una categoría semisimple por la Observación I.3.

Si $g \in G$ denotamos con $\mathcal{O}_g$ a la clase de conjugación de g y con $C_G(g)$ al centralizador de g.

Definición I.9. Fijemos $g \in G$ y (V, ρ) una representación irreducible de $C_G(g)$. Entonces

$$M(g, \rho) := \operatorname{Ind}_{C_G(g)}^G V = \Bbbk G \otimes_{C_G(g)} V = \Bbbk\mathcal{O}_g \otimes V$$

es un objeto de ${}_{\Bbbk G}^{\Bbbk G}\mathcal{YD}$. Explícitamente, la acción es inducida por la multiplicación a izquierda en G; la coacción es dada por la restricción de la comultiplicación Δ_G a $\mathcal{O}_g$, tener en cuenta que $\mathcal{O}_g$ se identifica con $G/C_G(g)$.

Sea $\mathcal{Q}$ un conjunto de representantes de las clases de conjugación de G. Por [4, Prop. 3.1.2], $M(g, \rho)$ es simple y cualquier módulo simple de ${}_{\Bbbk G}^{\Bbbk G}\mathcal{YD}$ es isomorfo a $M(g, \rho)$ para un único $g \in \mathcal{Q}$ y una única clase de isomorfismos $[(V, \rho)]$ de representaciones irreducibles de $C_G(g)$. Entonces, aplicando la equivalencia categórica dada anteriormente, los módulos $M(g, \rho)$ también parametrizan los objetos simples de ${}_{\Bbbk^G}^{\Bbbk^G}\mathcal{YD}$.

Recordar la notación dada al final de la Sección I.1. Entonces

$$\operatorname{Supp} M(g, \rho) = \mathcal{O}_{g^{-1}} \quad \text{por (I.7)}. \tag{I.8}$$

Dado que ${}_{\Bbbk^G}^{\Bbbk^G}\mathcal{YD}$ es una categoría semisimple, si $M \in {}_{\Bbbk^G}^{\Bbbk^G}\mathcal{YD}$ entonces $M[e]$ y $M^\times$ son submódulos de Yetter-Drinfeld de M tales que

$$M = M[e] \oplus M^\times. \tag{I.9}$$

I.4 La representación inducida.

Sea B una subálgebra de un álgebra A. Aquí recordaremos algunas hechos bien conocidos referidos a las representaciones de A inducidas por aquéllas de B, los cuales usaremos en la Sección III.2. El *A-módulo inducido* por el B-módulo a izquierda V es $\operatorname{Ind}_B^A V = A \otimes_B V$. Inducir tiene las siguientes propiedades:

- *Propiedad universal*: si W es un A-módulo y $\varphi : V \to W$ es un morfismo de B-módulos entonces se extiende a un morfismo de A-módulos $\overline{\varphi} : \operatorname{Ind}_B^A V \to W$. Luego, existe un isomorfismo natural (llamado *reciprocidad de Frobenius*): $\operatorname{Hom}_B(V, \operatorname{Res}_B^A W) \simeq \operatorname{Hom}_A(\operatorname{Ind}_B^A V, W)$. En términos categóricos, inducir es adjunto a izquierda de la restricción.

- Cualquier A-módulo simple de dimensión finita es el cociente de un módulo inducido por un B-módulo simple.

En efecto, sean S un A-módulo simple de dimensión finita y T un B-submódulo simple de S. Entoncs el morfismo inducido $\operatorname{Ind}_B^A T \to S$ es un epimorfismo.

- Si B es semisimple entonces cualquier módulo inducido es proyectivo.

El funtor inducción, siendo adjunto a izquierda del funtor restricción, preserva proyectivos, y cualquier módulo sobre un álgebra semisimple es proyectivo.

- Si A es libre como B-módulo a derecha, digamos $A \simeq B^{(I)}$, entonces $\operatorname{Ind}_B^A V = B^{(I)} \otimes_B V = V^{(I)}$ como B-módulos, y a fortiori como espacios vectoriales.

A continuación resumimos estas propiedades básicas en el ámbito de las álgebras de Hopf de dimensión finita, donde la libertad sobre subálgebras de Hopf es sabida por [54]. Además, las álgebras de Hopf de dimensión finita son álgebras de Frobenius, de donde se desprende que los módulos inyectivos son proyectivos y viceversa.

Proposición I.10. *Sean A un álgebra de Hopf de dimensión finita y B una subálgebra de Hopf semisimple. Entonces*

- *Si T es un B-módulo simple entonces* $\dim \operatorname{Ind}_B^A T = \dfrac{\dim T \dim A}{\dim B}$.

- *Cualquier A-módulo simple de dimensión finita es el cociente de un módulo inducido por un B-módulo simple.*

- *El módulo inducido por un B-módulo de dimensión finita es inyectivo y proyectivo.* □

Una situación optima para aplicar la Proposición I.10 es cuando el corradical de A es una subálgebra de Hopf; en este caso $B = A_0$ es la mejor elección. Es adecuado introducir la siguiente definición.

Definición I.11. Un *módulo de Verma de A* es un módulo inducido por un B-módulo simple.

Finalicemos por enumerar algunas generalidades aplicables a cualquier álgebras de Hopf A con corradical $\Bbbk^G$ con G un grupo finito.

• Las representaciones simples de $\Bbbk^G$ son $\{\Bbbk_g = \Bbbk : g \in G\}$ donde $f \cdot 1 = f(g)1$ para todo $f \in \Bbbk^G$. Entonces todo A-módulo simple es el cociente del módulo de Verma $M_g := \operatorname{Ind}_{\Bbbk^G} \Bbbk_g$ para algún $g \in G$.

• El ideal $A\delta_g$ es isomorfo a M_g y $A \simeq \oplus_{g \in G} M_g$.

• Sea $g \in G$ tal que δ_g es un idempotente primitivo de A. Dado que A es Frobenius, $M_g \simeq A\delta_g$ tiene un único submódulo simple S y un único submódulo máximal N. Además M_g es la cápsula inyectiva de S y la cubierta proyectiva de M_g/N. Ver [23, (9.9)].

I.5 Extensiones de álgebras de Hopf.

La exposición en esta sección esta basada en [2] y [47]. Nos interesa recordar dos tipos de extensiones. Empecemos por la siguiente.

Definición I.12. Sean $A \subset C$ una extensión de $\Bbbk$-álgebras y B un álgebra de Hopf. $A \subset C$ es una *B-extensión hendida* si: C es un B-comódulo álgebra (a derecha) vía δ con $C^{\operatorname{co}\delta} = A$ y existe un morfismo $\gamma : B \to C$ de B-comódulos, invertible con respecto al producto de convolución.

Es conocido que cualquier extensión hendida proviene de un *producto cruzado* $A\#_{\rightharpoonup,\sigma}B$, y a la inversa, cualquier producto cruzado es una extensión hendida [47, Thm. 7.2.2]. Aquí, $\rightharpoonup$: $B \otimes A \to A$ es una *acción débil* (ver [2, Def. 2.0], [47, Def. 4.1.1]) y $\sigma : B \otimes B \to A$ es un 2-*cociclo* que satisface ciertas condiciones de compatibilidad. Con esto se puede definir una nueva estructura de álgebra asociativa sobre $A \otimes B$. A esta nueva álgebra se la llama el *producto cruzado de A con B* y se denota $A\#B$. La unidad de $A\#B$ es $1\otimes 1$ y la multiplicación es dada por:

(I.10) $(a\#b)(a'\#b') = a(b_{(1)} \rightharpoonup a')\sigma(b_{(2)}, b'_{(1)})\#b_{(3)}b'_{(2)},\ \forall a, a' \in A,\ b, b' \in B,$

donde $a\#b := a \otimes b$. Ver [2, Section 2] o [47, Section 7] para más detalles.

La otra definición que queremos recordar es

Definición I.13. [2]. Una sucesión de álgebras de Hopf $A \overset{\imath}{\hookrightarrow} C \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} B$ se dice *exacta* si:

(i) $\imath$ es un monomorfismo (en tal caso identificamos A con su imagen);

(ii) π es un epimorfismo;

(iii) $\pi\imath = \varepsilon$;

(iv) $\ker \pi = A^+C$ (donde $A^+ = \ker \varepsilon$);

(v) $A = C^{\operatorname{co}\pi}$.

En tal caso diremos que C es una *extensión de A por B*. Una sucesión exacta se dice *central* si A esté contenida en el centro de C.

El siguiente lema resume varios resultados conocidos y nos será útil para encontrar sucesiones exactas.

Lema I.14. *Sean C y B álgebras de Hopf de dimensión finita y $\pi : C \to B$ un epimorfismo de álgebras de Hopf. Entonces* $\dim C = \dim C^{\operatorname{co}\pi} \dim B$. *Más aún, si $A = C^{\operatorname{co}\pi}$ es una subálgebra de Hopf entonces $A \overset{\imath}{\hookrightarrow} C \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} B$ es una sucesión exacta de álgebras de Hopf.*

Prueba. La igualdad de dimensiones es por [57, Thm. 2.4. (1.b)]. Más aún, si $A = C^{\operatorname{co}\pi}$ entonces $\pi_{|A} = \varepsilon_{|A}$ y por lo tanto $A^+C \subseteq \ker \pi$. Por [57, Thm. 2.4. (2.a)], $\dim B = \dim(C/A^+C)$ y entonces $A^+C = \ker \pi$, lo que termina de demostrar el lema. $\square$

La noción dual al producto cruzado $A\#_{\rightharpoonup,\sigma}B$ fue estudiada en [2]. Sea B una coálgebra y A un álgebra de Hopf. Supongamos que $\rho : B \to B \otimes A$ es una *coacción débil* [2, Def. 2.10] – noción dual a la de acción débil. Si $\tau : B \to$

$A \otimes A$ es un morfismo lineal podemos definir una nueva comultiplicación Δ^{τ} sobre $A^{\rho,\tau}\#B := A \otimes B$ como en [2, (2.15)], a saber

$$\Delta^{\tau}(a\#b) = \sum_{i,j} a_{(1)}\tau(b_{(1)})_j\#\rho(b_{(2)})_i \otimes a_{(2)}\tau(b_{(1)})^j\rho(b_{(2)})^i\#b_{(3)} \tag{I.11}$$

donde $\rho : b \mapsto \sum_i \rho(b)_i \otimes \rho(b)^i$ y $\tau : b \mapsto \sum_j \tau(b)_j \otimes \tau(b)^j$. Por [2, Prop. 2.16], $(A^{\rho,\tau}\#B, \Delta^{\tau}, \varepsilon_A \otimes \varepsilon_B)$ es una coálgebra coasociativa si:

$$(\varepsilon_A \otimes \mathrm{id})\tau(b) = \varepsilon_B(b)1_A = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon_A)\tau(b),$$
$$m_{A^{\otimes 3}}(\Delta_A \otimes \mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id})(\tau \otimes \rho)\Delta_B = (\mathrm{id} \otimes m_{A^{\otimes 2}})(\mathrm{id} \otimes \Delta_A \otimes \mathrm{id}^{\otimes 2})(\tau \otimes \tau)\Delta_B,$$
$$m^{13}_{A^{\otimes 2}}(\mathrm{id}^{\otimes 2} \otimes \rho \otimes \mathrm{id})(\tau \otimes \rho)\Delta_B = (\mathrm{id} \otimes m_{A^{\otimes 2}})(\mathrm{id} \otimes \Delta_A \otimes \mathrm{id}^{\otimes 2})(\rho \otimes \tau)\Delta_B,$$

con $m^{13}_{A^{\otimes 2}} : A^{\otimes 2} \otimes B \otimes A^{\otimes 2} \to B \otimes A^{\otimes 2}$, $(a \otimes x \otimes b \otimes a' \otimes x') \mapsto (b \otimes aa' \otimes xx')$.

Sean A y B álgebras de Hopf con un conjunto de datos $(\rightharpoonup, \sigma, \rho, \tau)$ como antes y que además satisfacen las condiciones (i)-(v) de [2, Thm. 2.20]. Entonces la multiplicación (I.10) y la comultiplicación (I.11) hacen de $A^{\rho,\tau}\#_{\rightharpoonup,\sigma}B$ una biálgebra. Si, en adición, $A^{\rho,\tau}\#_{\rightharpoonup,\sigma}B$ es un álgebra de Hopf, $(\rightharpoonup, \sigma, \rho, \tau)$ se dice un *dato de Hopf* [2, Def. 2.26].

Además, si $\phi \in \mathrm{Hom}(B, A)$ es invertible con respecto al producto de convolución y satisface $\phi(1_B) = 1_A$ y $\varepsilon_A \circ \phi = \varepsilon_B$ entonces podemos definir un nuevo dato de Hopf $({}^{\phi}\rightharpoonup, {}^{\phi}\sigma, \rho^{\phi^{-1}}, \tau^{\phi^{-1}})$ de acuerdo a [2, Lemma 3.1.1].

Sucesiones exactas de álgebras de Hopf de dimensión finita son hendidas por [57, Thm. 2.2]. Luego, por los resultados en [2, Subsection 3.2] tenemos lo siguiente.

Teorema I.15. *Sean A y B álgebras de Hopf de dimensión finita.*

(i) Sea $A \overset{\imath}{\hookrightarrow} C \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} B$ una sucesión exacta de álgebras de Hopf. Entonces existe un dato de Hopf $(\rightharpoonup, \sigma, \rho, \tau)$ tal que $C \simeq A^{\rho,\tau}\#_{\rightharpoonup,\sigma}B$ como álgebras de Hopf.

(ii) Recíprocamente, si $(\rightharpoonup, \sigma, \rho, \tau)$ es un dato de Hopf sobre A y B, entonces $\imath(a) = a\#1$ y $\pi(a\#b) = \varepsilon(a)b$ son morfismos de álgebras de Hopf tales que $A \overset{\imath}{\hookrightarrow} A^{\rho,\tau}\#_{\rightharpoonup,\sigma}B \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} B$ es una sucesión exacta de álgebras de Hopf.

(iii) Sea $\phi : B \to A$ un morfismo lineal invertible con respecto a la convolución tal que $\phi(1_B) = 1_A$ y $\varepsilon_A \circ \phi = \varepsilon_B$. Entonces

$$A^{\rho,\tau}\#_{\rightharpoonup,\sigma}B \simeq A^{\rho^{\phi^{-1}},\tau^{\phi^{-1}}}\#_{{}^{\phi}\rightharpoonup,{}^{\phi}\sigma}B$$

para cualquier dato de Hopf $(\rightharpoonup, \sigma, \rho, \tau)$. $\square$

Notar que la última parte del teorema dice que $A\#_{\phi_{\rightharpoonup},\phi_\sigma}B \simeq A\#_{\rightharpoonup,\sigma}B$ como extensiones hendidas.

I.5.1 Extensiones hendidas del álgebra de Sweedler $T_4(-1)$.

En general, para álgebras de Hopf A y B, no es fácil encontrar pares compatibles $(\rightharpoonup,\sigma)$ que den lugar a productos cruzados $A\#_{\rightharpoonup,\sigma}B$. Sin embargo, la clasificación dada por [26] y [42] nos da una manera de construir todos los pares compatibles $(\rightharpoonup,\sigma)$ cuando B es el álgebra de Sweedler $T_4(-1)$ de dimensión 4, cuya presentación por generadores y relaciones es

$$\begin{aligned} T_4(-1) &= k\langle g,x \mid g^2=1, x^2=0, xg=-gx\rangle, \\ \Delta(g) &= g\otimes g \quad \text{y} \quad \Delta(x)=x\otimes g+1\otimes x. \end{aligned} \tag{I.12}$$

Definición I.16. [26, Def. 2.4], [42, Def. 3.1]. Sean A un álgebra, $F,D\in \operatorname{End}(A)$, $\alpha\in\mathcal{U}(A)$ (las unidades de A) y $\beta,\gamma\in A$. La 5-upla $\mathfrak{D}=(F,D,\alpha,\beta,\gamma)$ se dice un *dato $T_4(-1)$-hendido sobre A* si satisface:

$(\mathfrak{D}1)\ F(aa')=F(a)F(a')$, $(\mathfrak{D}2)\ D(aa')=aD(a')+D(a)F(a')$,
$(\mathfrak{D}3)\ F^2(a)\alpha=\alpha a$, $(\mathfrak{D}4)\ (FD(a)+DF(a))\alpha=\gamma a-F(a)\gamma$,
$(\mathfrak{D}5)\ D(a)\gamma+D^2(a)\alpha=\beta a-a\beta$, $(\mathfrak{D}6)\ F(\alpha)=\alpha$, $(\mathfrak{D}7)\ D(\beta)=0$,
$(\mathfrak{D}8)\ D(\alpha)=\gamma-F(\gamma)$, $(\mathfrak{D}9)\ D(\gamma)=\beta-F(\beta)$,

para todo $a,a'\in A$.

Proposición I.17. *[26, Thm. 2.3, Def. 2.4], [42, Prop. 3.4]. Sea $\mathfrak{D}=(F,D,\alpha,\beta,\gamma)$ un dato $T_4(-1)$-hendido sobre A. Entonces*

(i) El mapa $\rightharpoonup: T_4(-1)\otimes A\to A$ dado por

$$1\rightharpoonup a=a,\ g\rightharpoonup a=F(a),\ x\rightharpoonup a=D(a),\ (gx)\rightharpoonup a=FD(a)\alpha$$

es una acción débil.

(ii) El mapa $\sigma: T_4(-1)\otimes T_4(-1)\to A$ dado por

σ	1	g	x	gx
1	1	1	0	0
g	1	α	0	0
x	0	γ	β	$-F(\beta)$
gx	0	$F(\gamma)$	$F(\beta)$	$-\alpha\beta$

es un 2-cociclo.

(iii) $C_{\mathfrak{D}} := A\#_{\rightharpoonup,\sigma}T_4(-1)$ *es un álgebra asociativa.* $\square$

Los datos $T_4(-1)$-hendidos clasifican las extensiones $T_4(-1)$-hendidas.

Teorema I.18. *[26, Cor. 2.5, Thm. 2.7], [42, Prop. 3.4].*

(i) *Si* $A \subset C$ *es una extensión* $T_4(-1)$*-hendida entonces existe un dato* $T_4(-1)$*-hendido* $\mathfrak{D}$ *sobre* A*, tal que* $C \simeq C_{\mathfrak{D}}$.

(ii) *Si* $\mathfrak{D} = (F, D, \alpha, \beta, \gamma)$ *y* $\mathfrak{D}' = (F', D', \alpha', \beta', \gamma')$ *son datos* $T_4(-1)$*-hendidos sobre* A*, entonces* $C_{\mathfrak{D}} \simeq C_{\mathfrak{D}'}$ *como* $T_4(-1)$*-extensiones si y sólo si existen elementos* $s \in \mathcal{U}(A)$ *y* $t \in A$ *tales que para todo* $a \in A$:

$$(C_{\mathfrak{D}}1)\, F'(a) = sF(a)s^{-1}, \quad (C_{\mathfrak{D}}2)\, D'(a) = (tF(a) + D(a) - at)s^{-1},$$
$$(C_{\mathfrak{D}}3)\, \alpha' = sF(s)\alpha, \qquad (C_{\mathfrak{D}}4)\, \beta' = \beta + t\gamma + (tF(t) + D(t))\alpha,$$
$$(C_{\mathfrak{D}}5)\, \gamma' = s\gamma + (tF(s) + D(s) + sF(t))\alpha.$$

(iii) *Si* $\mathfrak{D} = (F, D, \alpha, \beta, \gamma)$ *es un dato* $T_4(-1)$*-hendido sobre* A*,* $s \in \mathcal{U}(A)$ *y* $t \in A$ *entonces* $\mathfrak{D}' = (F', D', \alpha', \beta', \gamma')$ *definido por* $(C_{\mathfrak{D}}1) - (C_{\mathfrak{D}}5)$ *es un dato* $T_4(-1)$*-hendido sobre* A*.* $\square$

Más aún, existe un mapa lineal $\phi : T_4(-1) \to A$ tal que $({}^{\phi}\!\rightharpoonup, {}^{\phi}\sigma) = (\rightharpoonup', \sigma')$ dando el isomorfismo del item *(ii)*, ver por ejemplo [2, Prop. 3.2.12]. Explícitamente:

$$\phi(1) = 1, \quad \phi(g) = s, \quad \phi(x) = t \quad \text{y} \quad \phi(gx) = sF(t)\alpha. \tag{I.13}$$

Supongamos ahora que A es un álgebra de Hopf y que existen ρ y τ tales que $(\rightharpoonup, \sigma, \rho, \tau)$ es un dato de Hopf, es decir, $C_{\mathfrak{D}} = A^{\rho,\tau}\#_{\rightharpoonup,\sigma}T_4(-1)$ es un álgebras de Hopf. Por lo tanto, si ϕ satisface $\varepsilon_A \circ \phi = \varepsilon_{T_4(-1)}$ entonces $C_{\mathfrak{D}'} = A^{\rho^{\phi^{-1}},\tau^{\phi^{-1}}}\#_{{}^{\phi}\!\rightharpoonup,{}^{\phi}\sigma}T_4(-1)$ es un álgebra de Hopf y el isomorfismo en el item *(ii)* es de álgebras de Hopf por el Teorema I.15 (iii).

Más adelante necesitaremos las siguientes propiedades de $T_4(-1)$.

$(T1)$ $\operatorname{Rad} T_4(-1) = k \cdot x \oplus k \cdot gx$ y $hh' = 0$ para todo $h, h' \in \operatorname{Rad} T_4(-1)$.

$(T2)$ $\mathcal{U}(T_4(-1)) = \{a + bg + h \mid a, b \in k,\ a^2 - b^2 \neq 0,\ h \in \operatorname{Rad} T_4(-1)\}$ (sigue de multiplicar por $a - (bg + h)$ y usar que $h^2 = 0$ y $gh = -hg$).

$(T3)$ $\{t \in T_4(-1) \mid t^2 = 1\} = \{\pm 1, \pm g + h \mid h \in \operatorname{Rad} T_4(-1)\}$.

($T4$) Para todo $h \in \Bbbk[G(T_4(-1))]$ existe $s \in \Bbbk[G(T_4(-1))]$ tal que $s^2 = h$ (sigue de escribir las ecuaciones necesarias para encontrar s, dado que $\Bbbk$ es algebraicamente cerrado de característica cero, podemos resolverlas).

El recuento anterior nos servirá para encontrar todas las posibles extensiones de $T_4(-1)$ por $T_4(-1)$ salvo isomorfismos.

Lema I.19. *Si* $T_4(-1) \overset{\imath}{\hookrightarrow} H \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} T_4(-1)$ *es una sucesión exacta de álgebras de Hopf entonces* $H \simeq T_4(-1) \otimes T_4(-1)$.

Prueba. Por el Teorema I.15, $H \simeq T_4(-1)\,{}^{\rho,\tau}\#_{\rightharpoonup,\sigma} T_4(-1)$ para algún dato $(\rightharpoonup, \sigma, \rho, \tau)$. En particular, $T_4(-1) \subset H$ es una extensión $T_4(-1)$-hendida. Entonces existe un dato $T_4(-1)$-hendido $\mathfrak{D} = (F, D, \alpha, \beta, \gamma)$ tal que, como álgebras, $T_4(-1)\#_{\rightharpoonup,\sigma} T_4(-1) \simeq C_{\mathfrak{D}}$.

Nuestro objetivo es cambiar el dato $T_4(-1)$-hendido $\mathfrak{D}$ inicial por otro equivalente pero más apropiado usando el Teorema I.18 (ii) y (I.13) de tal manera que aún tengamos una sucesión exacta de álgebras de Hopf.

Por ($\mathfrak{D}1$) y ($\mathfrak{D}3$), F es un automorfismo de álgebras de $T_4(-1)$. Entonces $F(g) = \pm g + h$ para algún $h \in \operatorname{Rad} T_4(-1)$ por ($T3$). En realidad, $F(g) = g + h$. En efecto,

$$(1\#g)(g\#1) = (g \rightharpoonup g)\sigma(g, 1) \otimes g = F(g)\#g, \tag{I.14}$$

la última igualdad es por Proposición I.17. Si aplicamos π, el morfismo de álgebras de Hopf definido en Teorema I.15, encontramos que $\varepsilon(F(g)) = \varepsilon(g)$ y entonces $F(g) = g + h$.

Sea $s = g + \frac{h}{2}$, $t = 0$ y $\phi : T_4(-1) \to T_4(-1)$ como en (I.13). Entonces el automorfismo de álgebras F' correspondiente al nuevo dato hendido $\mathfrak{D}'$ equivalente a $\mathfrak{D}$ satisface

$$F'(g) = g \tag{I.15}$$

por ($C_{\mathfrak{D}}1$); y aún tenemos una sucesión exacta de álgebras de Hopf dado que $\varepsilon_{T_4(-1)} \circ \phi = \varepsilon_{T_4(-1)}$. Por simplicidad, llamaremos $\mathfrak{D}$ a $\mathfrak{D}'$.

Ahora hacemos un nuevo cambio de datos hendidos. Por ($\mathfrak{D}3$) con $a = g$, tenemos que $\alpha \in \Bbbk[G(T_4(-1))]$. Más aún, $\varepsilon(\alpha) = 1$; sigue de aplicarle π a

$$(1\#g)(1\#g) = (g \rightharpoonup 1)\sigma(g, g) \otimes 1 = \alpha\#1, \tag{I.16}$$

la última igualdad es por la Proposición I.17. Por ($T4$), podemos elegir $s \in \Bbbk[G(T_4(-1))]$ tal que $s^2 = \alpha^{-1}$; notar que $F(s) = s$. Más aún, podemos asumir que $\varepsilon(s) = 1$ dado que $(-s)^2 = \alpha^{-1}$. Sean $t = 0$ y $\phi : T_4(-1) \to$

$T_4(-1)$ es como en (I.13). El nuevo dato hendido dado por el Teorema I.18 (ii) tiene

$$\alpha' = 1,\ F'(g) = g, \tag{I.17}$$

por ($C_{\mathfrak{D}}1$) y ($C_{\mathfrak{D}}3$); dado que $\varepsilon_{T_4(-1)} \circ \phi = \varepsilon_{T_4(-1)}$, aún tenemos una sucesión exacta de álgebras de Hopf. Nuevamente, llamaremos $\mathfrak{D}$ a $\mathfrak{D}'$.

Ahora hacemos otro cambio de datos hendidos usando $s = 1$, $t = \frac{g}{2}D(g)$ y $\phi : T_4(-1) \to T_4(-1)$ como en (I.13). Por ($\mathfrak{D}2$), $D(1) = 0$ y por lo tanto $0 = gD(g)+D(g)g$ también por ($\mathfrak{D}2$). Entonces $D(g) \in \operatorname{Rad} T_4(-1)$. Usando ($C_{\mathfrak{D}}2$), el nuevo dato hendido definido por I.18 (ii) (al cual aún llameremos $\mathfrak{D}$) tiene

$$D(g) = 0,\ F(g) = g,\ \alpha = 1 \tag{I.18}$$

y aún tenemos una sucesión exacta de álgebras de Hopf; notar que $F(t) \in \operatorname{Rad} T_4(-1)$ dado que $t \in \operatorname{Rad} T_4(-1)$.

Usando $s = 1$ y $t = -\frac{1}{2}\gamma$ realizamos un nuevo cambio de datos. Notar que $0 = \gamma g - g\gamma$ por ($\mathfrak{D}4$) con $a = g$ y (I.18). Entonces $\gamma \in \Bbbk[G(T_4(-1))]$. Más aún, $\varepsilon(\gamma) = 0$; esto sigue de aplicar π a

$$\begin{aligned}(1\#g)(1\#x) = &\ (g \rightharpoonup 1)\sigma(g,x) \otimes 1 + (g \rightharpoonup 1)\sigma(g,1) \otimes gx \\ = &\ \gamma\#1 + 1\#gx;\end{aligned} \tag{I.19}$$

la última igualdad es por I.17. Por lo tanto el nuevo dato hendido tiene

$$\gamma = 0,\ F(g) = g,\ D(g) = 0,\ \alpha = 1 \tag{I.20}$$

por ($C_{\mathfrak{D}}5$); y aún tenemos una sucesión exacta de álgebras de Hopf – notar que $F(\gamma) = \gamma$.

Éste es el último cambio que hacemos, usaremos $s = g$ y $t = 0$. Dado que F es un morfismo de álgebras existen $a, b \in \Bbbk$ tal que

$$F_{|\operatorname{Rad} T_4(-1)} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ con respecto a la base } \{x, gx\}.$$

Como $\alpha = 1$, $F^2 = \mathrm{id}$ por ($\mathfrak{D}3$). Entonces $a = \pm 1$ y $b = 0$ o $a = 0$ y $b = \pm 1$. Por ($C_{\mathfrak{D}}1$), el nuevo dato hendido tiene

$$F = \mathrm{id}, \qquad D(g) = 0, \qquad \alpha = 1 \quad \text{y } \gamma = 0 \quad \text{o} \tag{I.21}$$

$$F(g) = g, \quad F(x) = gx, \quad D(g) = 0, \qquad \alpha = 1 \quad \text{y } \gamma = 0. \tag{I.22}$$

En ambos casos, aún tenemos una sucesión exacta de álgebras de Hopf.

Afirmamos que $D = 0$ y $\beta = 0$. En efecto, en el caso (I.21), $D = 0$ por ($\mathfrak{D}4$) y por ($\mathfrak{D}5$), $\beta \in \Bbbk$ (el centro de $T_4(-1)$). En el caso (I.22), $0 = xD(x)+D(x)gx$ por ($\mathfrak{D}2$), entonces $D(x)xg = xD(x)$. Si escribimos $D(x) = c + dg + h$ con $c, d \in \Bbbk$ y $h \in \operatorname{Rad} T_4(-1)$, entonces

$$(c + dg)xg = x(c + dg) \Rightarrow d = c = -d.$$

Por lo tanto $D(x) = h \in \operatorname{Rad} T_4(-1)$. Más aún, $D(gx) = gD(x)$ porque $D(g) = 0$. Ahora, usando que $\alpha = 1$, $\gamma = 0$ y $F(h) = gh$ para todo $h \in \operatorname{Rad} T_4(-1)$, por ($\mathfrak{D}4$) se sigue que

$$0 = FD(x) + DF(x) = F(h) + D(gx) = gh + gD(x) = gh + gh = 2gh.$$

De donde se desprende que $D = 0$ como queríamos. Además, β debe pertencer a $\Bbbk$ nuevamente por ($\mathfrak{D}5$). En ambos casos, por Proposición I.17 se sigue que $x \rightharpoonup a = D(a) = 0$, $\sigma(x, 1) = \sigma(1, x) = x^2 = 0$ y

$$(1\#x)(1\#x) = \sigma(x, x) \otimes 1 = \beta \otimes 1. \tag{I.23}$$

Aplicando π, se sigue que $\beta = 0$ porque $\beta \in \Bbbk$.

Sea $\overset{\curvearrowright}{F}$ el automorfismo de álgebras dado por $\overset{\curvearrowright}{F}(g) := g$ y $\overset{\curvearrowright}{F}(x) := gx$. Entonces H debe ser isomorfo como álgebra a $C_{\mathfrak{D}}$ donde $\mathfrak{D}$ es uno de los siguientes datos hendidos:

$$\mathfrak{D}_0 := (\mathrm{id}, 0, 1, 0, 0) \qquad \text{o} \qquad \overset{\curvearrowright}{\mathfrak{D}} := (\overset{\curvearrowright}{F}, 0, 1, 0, 0).$$

A continuación probaremos que

$$\operatorname{Rad}(T_4(-1)) \otimes T_4(-1) + T_4(-1) \otimes \operatorname{Rad}(T_4(-1)) \subseteq \operatorname{Rad} H. \tag{I.24}$$

Esto es inmediato cuando $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_0$ dado que $H \simeq T_4(-1) \otimes T_4(-1)$ como álgebras. Si $\mathfrak{D} = \overset{\curvearrowright}{\mathfrak{D}}$, por Proposición I.17, $H \simeq T_4(-1)\#_{\rightharpoonup,\sigma}T_4(-1)$ con

$$1 \rightharpoonup h = h, \quad g \rightharpoonup h = \begin{cases} h & h \in \Bbbk[G(T_4(-1))] \\ gh & h \in \operatorname{Rad} T_4(-1) \end{cases}, \quad x \rightharpoonup h = gx \rightharpoonup h = 0;$$
$$\sigma(h, h') = \varepsilon(h)\varepsilon(h') \quad \forall h, h' \in T_4(-1).$$

Computando explícitamente, vemos que $\operatorname{Rad} T_4(-1) \otimes T_4(-1)$ y $T_4(-1) \otimes \operatorname{Rad} T_4(-1)$ son ideales nilpotentes de H. Es decir, (I.24) vale.

Ahora bien, (I.24) implica que

$$\dim(H^*)_0 \leq \dim(H/(\operatorname{Rad}(T_4(-1)) \otimes T_4(-1) + T_4(-1) \otimes \operatorname{Rad}(T_4(-1)))) = 4.$$

Por lo tanto, cualquier representación simple de H es de dimensión 1, es decir, H^* es punteada. Más aún, dado que $(T_4(-1))^* \simeq T_4(-1)$, H^* también es una extensión de $T_4(-1)$ por $T_4(-1)$. Por lo tanto, $(H^*)^* \simeq H$ también es punteada.

En resumen, H y H^* son punteadas, los grupos $G(H)$ y $G(H^*)$ tienen cardinal ≤ 4 y ambas tienen una subálgebra de Sweedler normal. Inspeccionando en la lista de las álgebras de Hopf punteadas de dimensión 16 clasificadas en [21], vemos que la única que satisface estas propiedades es $T_4(-1) \otimes T_4(-1)$, es decir, H es isomorfa a lo que queríamos. $\square$

CAPÍTULO II

ÁLGEBRAS DE HOPF CON CORRADICAL UNA SUBÁLGEBRA DE HOPF

A lo largo de este capítulo H denotará un álgebra de Hopf de dimensión finita cosemisimple, y por ende semisimple. Aquí nos concentraremos en el paso 2) del Método del Levante, esto es, para $V \in {}^H_H\mathcal{YD}$ tal que $\dim \mathfrak{B}(V) < \infty$:

> *Determinar la estructura de las álgebras de Hopf A con corradical una subálgebra de Hopf isomorfa a H y tal que* $\operatorname{gr} A \simeq \mathfrak{B}(V)\#H$.

Recordar que una tal A se llama un levantamiento de $\mathfrak{B}(V)\#H$, Def. I.7.

Para resolver este problema, primero veremos que los levantamientos de $\mathfrak{B}(V)\#H$ son álgebras de Hopf cocientes de $T(V)\#H$ utilizando un resultado de [12]. Luego, si los generadores del ideal que define al álgebra de Nichols $\mathfrak{B}(V)$ satisfacen cierta compatibilidad, seremos capaces de dar también un conjunto de generadores del ideal en $T(V)\#H$ que define a un levantamiento de $\mathfrak{B}(V)\#H$.

En el caso en que el corradical es el álgebra de funciones sobre un grupo finito es posible ser más explícitos en el lema que nos ayuda a encontrar las relaciones que definen a un levantamiento. Haremos esto en la Sección II.2 y lo aplicaremos al caso particular de los grupos simétricos. Daremos una familia de álgebras de Hopf no semisimples con corradical el álgebra de funciones sobre el grupo simétrico $\mathbb{S}_3$. En el capítulo siguiente, veremos que esta familia da la clasificación de tales álgebras de Hopf.

II.1 Paso del *Levante*.

En esta sección A será un álgebra Hopf con corradical una subálgebra de Hopf H. Vía la multiplicación a izquierda y a derecha $A \in {}_H\mathcal{M}_H$. Por [12, Thm. 5.9.c)], existe una proyección de coálgebras H-bimódulos

$$\Pi : A \to H \text{ tal que } \Pi_{|H} = \mathrm{id}_H .$$

Entonces A es un bimódulo de Hopf sobre H – esto es, $A \in {}^H_H\mathcal{M}^H_H$ – con las coacciones inducidas por Π, a saber:

$$\rho_L := (\Pi \otimes \mathrm{id})\Delta \text{ y } \rho_R := (\mathrm{id} \otimes \Pi)\Delta.$$

Al igual que en [6], introducimos

$$P_1 := \{a \in A | \Delta(a) = \rho_L(a) + \rho_R(a)\}.$$

Entonces $P_1 = A_1 \cap \ker \Pi$ por [6, Lemma 1.1] y por lo tanto, $A_1 = H \oplus P_1$ como bimódulos de Hopf sobre H.

Notar que además $(A_1, \mathrm{ad}_{\ell|H}, \rho_L)$ es un módulo de Yetter-Drinfeld sobre H.

Lema II.1. *Sean A y H álgebras de Hopf y $V \in {}^H_H\mathcal{YD}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(a) H es el corradical de A y V es la trenza infinitesimal de A.

(b) H es el corradical de A y existe un isomorfismo $\gamma : V\#H \to P_1$ de bimódulos de Hopf y de módulos de Yetter-Drinfeld.

(c) Existe un morfismo $\phi : T(V)\#H \to A$ de álgebras de Hopf tal que

$$\phi_{|(\Bbbk\oplus V)\#H} : (\Bbbk \oplus V)\#H \to A_1 \text{ es un isomorfismo y } \phi_{|H} = \mathrm{id}. \tag{II.1}$$

Prueba. [(a)⇒(b)] Por lo visto en la Subsección I.3.3, $A_1/H \simeq V\#H$ como bimódulos de Hopf y módulos de Yetter-Drinfeld. Por otro lado, $A_1 = H \oplus P_1$ entonces existe un isomorfismo $\gamma : V\#H \to P_1$ como queremos.

[(b)⇒(c)] El morfismo $\phi : T(V)\#H \to A$ inducido por $\phi(h) = h$ y $\phi(v) = \gamma(v\#1)$ es un morfismo de álgebras de Hopf que satisface (II.1).

[(c)⇒(a)] La restricción $\phi_{|(\Bbbk\oplus V)\#H} : (\Bbbk \oplus V)\#H \to A_1$ es un epimorfismo de coálgebras entonces $H = A_0$ por [47, Cor. 5.3.5] y $\operatorname{gr} A \simeq R\#H$. Luego, $A_1/A_0 \simeq V\#H$ como bimódulos de Hopf sobre H y por lo tanto $\mathcal{P}(R) = R^1 \simeq V$ en ${}^H_H\mathcal{YD}$ como queríamos. □

Definición II.2. Un morfismo $\phi : T(V)\#H \to A$ de álgebras de Hopf que satisface (II.1) y además es sobreyectivo será llamado *morfismo levantador de A*.

Notación II.3. Siguiendo con la notación del Lema II.1, denotaremos con p_H y $p_{V\#H}$ a las proyecciones de A_1 sobre H y $V\#H$ dadas por el isomorfismo $\phi_{|(\Bbbk\oplus V)\#H}$.

El próximo resultado se puede leer como una correspondencia entre los levantamientos de $\mathfrak{B}(V)\#H$ y cierta clase de ideales de Hopf en $T(V)\#H$. Notar que, tanto en la siguiente proposición como en el Lema II.6 y el Teorema II.7, no es necesario asumir que la dimensión del álgebra de Nichols es finita.

Mantenemos la notación del lema anterior.

Proposición II.4. *Sean A y H álgebras Hopf y $V \in {}^H_H\mathcal{YD}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(a) A es un levantamiento de $\mathfrak{B}(V)\#H$.

(b) Existe un morfismo levantador de A.

Prueba. [(a)⇒(b)] ϕ es dada por Lema II.1. Por [8, Lemma 2.2] A es generada por A_1 y entonces ϕ es un epimorfismo acorde a la Definición II.2.

[(b)⇒(a)] Por Lema II.1, $\operatorname{gr} A \simeq R\#H$ con $\mathcal{P}(R) = R^1 \simeq V$ en ${}^H_H\mathcal{YD}$. Por la definición de álgebra de Nichols resta probar que V genera a R como álgebra pero esto se desprende de que ϕ es un epimorfismo. □

Definición II.5. Sean ϕ un morfismo levantador de A y M un submódulo de Yetter-Drinfeld de $T(V)$. Diremos que M es *compatible con ϕ* si

$$\Delta_A(\phi(m)) = \phi(m) \otimes 1 + m_{-1} \otimes \phi(m_0) \text{ para todo } m \in M.$$

Notar que de la definición se desprende inmediatamente que $\phi(M) \subseteq A_1$.

Sea $M \in {}^H\mathcal{M}$ y $\{m_i\}$ una base de M. Claramente, podemos escribir la coacción en la base $\{m_i\}$ de la siguiente manera:

$$\lambda(m_i) = \sum_j e_{ij} \otimes m_j \quad \text{con } e_{ij} \in H \text{ para todo } i, j.$$

Entonces $\langle e_{ij} \rangle$ es una subcoálgebra de H. Diremos que $\{e_{ij}\}$ son los *elementos comatriciales asociados a M y la base $\{m_i\}$*. Notar que si M es un comódulo simple entonces $\langle e_{ij} \rangle$ resulta ser una coálgebra de comatrices de rango $\dim M$ con base de comatrices $\{e_{ij}\}$, cf. Sección I.2.

Si M es un módulo compatible con ϕ el siguiente lema nos ayuda a describir la imagen $\phi(M)$.

Lema II.6. *Sean ϕ un morfismo levantador de A, $M \subset T(V)$ compatible con ϕ y $\{e_{ij}\}$ los elementos comatriciales asociados a M y $\{m_i\}_{i=1}^r$. Entonces*

(a) $p_{V\#H} \circ \phi_{|M} : M \to V$ es un morfismo en ${}^H_H\mathcal{YD}$.

(b) Si como módulos de Yetter-Drinfeld sobre H, M es simple y $V \simeq M^s \oplus P$ con s máximo entonces existen $\lambda_1, ..., \lambda_s \in \Bbbk$ tales que

$$p_{V\#H} \circ \phi_{|M} = \lambda_1 \operatorname{id}_M \oplus \cdots \oplus \lambda_s \operatorname{id}_M \oplus 0.$$

(c) Existen $a_1, ..., a_r \in \Bbbk$ tales que

$$(p_H \circ \phi)(m_i) = a_i - \sum_{j=1}^{r} a_j e_{ij} \text{ para todo } i = 1, ..., r.$$

(d) Sean ϕ' un morfismo levantador de A' y $\Theta : A \to A'$ un isomorfismo de álgebras de Hopf. Si no existe $v \in V$ tal que $h \cdot v = \varepsilon(h)v$ para todo $h \in H$, entonces $\Theta \circ \phi(V) = \phi'(V)$.

Prueba. Por la Definición II.5, $\phi(M) \subset A_1$. Dado que $p_{V\#H} \circ \phi_{|M}$ es un morfismo de bicomódulos sobre H, $(p_{V\#H} \circ \phi)(M) \subset V$ y entonces (a) queda demostrado.

(b) es un caso particular de (a).

Probaremos (c) en tres pasos. Primero supongamos que M es un H-comódulo simple. Entonces $\langle e_{ij} \rangle$ es una coálgebra de matrices de rango r. Por hipótesis

$$\Delta((p_H \circ \phi)(m_i)) = (p_H \circ \phi)(m_i) \otimes 1 + \sum_j e_{ij} \otimes (p_H \circ \phi)(m_j)$$

por lo tanto (c) sigue del Lema I.1. Ahora supongamos que $M = \oplus_l M_l$ donde cada M_l es un H-comódulo simple con base $\{m_i^l\}$. Entonces repetimos el procedimiento anterior para cada base $\{m_i^l\}$ de M_l, luego (c) sigue para la base particular $\{m_i^l\}_{i,l}$ de M. Finalmente, dado que ${}^H_H\mathcal{YD}$ es una categoría semisimple (c) sigue por un cambio de base.

(d) Consideremos a A_1 como un H-comódulo a derecha vía la coacción inducida por la proyección de coálgebras $(\varepsilon\# \operatorname{id}_H) \circ \Theta$ y a A'_1 como un H-comódulo a derecha vía la coacción inducida por la proyección de coálgebras $\varepsilon\# \operatorname{id}_H$. Entonces $\Theta_{|A_1}$ es un morfismo de cómodulos y tomando coinvariantes vemos que $\Theta \circ \phi(V) \subset \phi'(V) \oplus \Bbbk 1_{A'}$. Ahora, consideremos a A_1 como un H-módulo a izquierda vía ad_ℓ y a A'_1 como un H-módulo a izquierda vía $\operatorname{ad}_\ell \circ\Theta$. Entonces $\Theta_{|A_1}$ es un morfismo de módulos. Dado que H es semisimple y por hipótesis no existe $v \in V$ tal que $h \cdot v = \varepsilon(h)v$ para todo $h \in H$, resulta que $\Theta \circ \phi(V) \subset \phi'(V)$. □

Si M es compatible con ϕ, por (II.1) podemos considerar a $\phi(m)$ como elemento de $(\Bbbk \oplus V)\#H \subset T(V)\#H$ para todo $m \in M$. Usamos esta identificación en el siguiente teorema para describir al ideal que define el levantamiento dado por ϕ.

Teorema II.7. *Sean ϕ un morfismo levantador de A y $M = \oplus_{i=2}^{n} M^i$ un submódulo de Yetter-Drinfeld de $T(V)$ graduado y compatible con ϕ. Asumamos que el ideal definiendo a $\mathfrak{B}(V)$ es $\mathcal{J} = (M)$ con $\oplus_{i=2}^{n-1} M^i \subset \ker\phi$. Entonces*

$$A \simeq T(V)\#H/(m - \phi(m))_{m\in M}.$$

Prueba. Denotemos con $\widetilde{I}$ al ideal bilátero generado por $\oplus_{i=2}^{n-1} M^i$ en $T(V)$ entonces el ideal bilátero generado por $\oplus_{i=2}^{n-1} M^i$ en $T(V)\#H$ es $\widetilde{I}_{\#} = \widetilde{I}\#H$, dado que $\oplus_{i=2}^{n-1} M^i$ es un submódulo de Yetter-Drinfeld. Notar que $\widetilde{I}$ es un coideal en $T(V)$ pues $\mathcal{J} = (M)$ y $T(V)$ es una coálgebra graduada.

Luego, si tomamos $m \in M^n \subset \mathcal{J}$ existe $\tilde{m} = \sum_l x_l \otimes y_l \in \widetilde{I}_{\#} \otimes (T(V)\#H) + (T(V)\#H) \otimes \widetilde{I}_{\#}$ tal que

$$\Delta_{T(V)\#H}(m) = m \otimes 1 + m_{(-1)} \otimes m_{(0)} + \tilde{m}$$

por ser $\mathcal{J}$ graduado. Entonces, por el Lema II.6 (a) y (c) vale que

$$\Delta_{T(V)\#H}(m - \phi(m)) = (m - \phi(m)) \otimes 1 + m_{(-1)} \otimes (m_{(0)} - \phi(m)_{(0)}) + \tilde{m}. \tag{II.2}$$

Afirmamos que el ideal $I = (m-\phi(m))_{m\in M}$ es un ideal de Hopf de $T(V)\#H$. De hecho, acabamos de probar que I es un coideal y claramente esta contenido en $\ker\varepsilon$. Veamos que es invariante por la antípoda. Dado que $\mathcal{S}_{\mathfrak{B}(V)}(\mathcal{J}) = \mathcal{J} = (M)$ y la antípoda respeta la graduación, vemos que $\mathcal{S}_{\mathfrak{B}(V)}(\oplus_{i=2}^{n-1} M^i) \subset \widetilde{I}$. Por lo tanto, $\mathcal{S}_{T(V)\#H}(\widetilde{I}_{\#}) \subset \widetilde{I}_{\#}$. Por otro lado, el axioma de la antípoda dice que $\varepsilon(m) = \mathcal{S}_{T(V)\#H}(m_{(1)})m_{(2)} = 0$ $\forall m \in M^n$. Luego, por (II.2),

$$\begin{aligned} &\mathcal{S}_{T(V)\#H}(m - \phi(m)) = \\ &= -\mathcal{S}_{T(V)\#H}(m_{(-1)})(m_{(0)} - \phi(m)_{(0)}) - \sum_l \mathcal{S}_{T(V)\#H}(x_l)y_l \in \\ &\qquad \in \langle m - \phi(m)\rangle_{m\in M^n}\#H + \widetilde{I}_{\#}(T(V)\#H) + (T(V)\#H)\widetilde{I}_{\#} \end{aligned}$$

dado que M^n es un submódulo de Yetter-Drinfeld. Entonces I es invariante por la antípoda pues es generado por $\langle m - \phi(m)\rangle_{m\in M^n}$ y $\oplus_{i=2}^{n-1} M^i$.

Ahora bien, claramente $I \subset \ker\phi$ y entonces $I \cap (\Bbbk \oplus V)\#H = 0$. Luego, si $A' := T(V)\#H/I$ entonces $A'_0 = H$ por [47, Cor. 5.3.5] y $\operatorname{gr}(A') \simeq R\#H$. Dado que ϕ es un epimorfismo, $R \simeq T(V)/J$ para un ideal $J \subseteq \mathcal{J}$. Más aún, $M \subset J$ por la definición de I y entonces $J = \mathcal{J}$. Entonces $\operatorname{gr}(A') \simeq \mathfrak{B}(V)\#H$ y por lo tanto $\ker\phi = I$ como queremos. □

II.2 Álgebras de Hopf con corradical $\Bbbk^G$.

Sean G un grupo finito y A un álgebra de Hopf con corradical isomorfo al álgebra de funciones sobre G. El hecho de que $\Bbbk^G$ es un álgebra semisimple conmutativa nos permitirá describir la estructura de $\Bbbk^G$-módulo de A y ser más específicos al momento de aplicarle el Lema II.6 a A. Haremos esto en el caso particular $G = \mathbb{S}_n$, obteniendo una nueva familia de álgebras de Hopf.

Recordar que si M es un $\Bbbk^G$-módulo entonces $M[g]$ denota la componente isotípica de peso g y $\operatorname{Supp} M := \{g \in G : M[g] \neq 0\}$, cf. Sección I.1. Esto se aplicará al n-ésimo término A_n de la filtración corradical de A considerándolo un $\Bbbk^G$-módulo vía la acción adjunta a izquierda.

Tener en mente que para todo $g, h \in G$ vale que

$$\operatorname{ad}\delta_g(\delta_h) = \delta_{g,e}\delta_h \quad \text{y} \quad \Delta(\delta_g) = \sum_{t\in G} \delta_t \otimes \delta_{t^{-1}g}.$$

Lema II.8. *Sea A un álgebra de Hopf con corradical $\Bbbk^G$ y trenza infinitesimal $V = \oplus_{i\in I} M(g_i, \rho_i)$. Entonces*

(a) $A_n[g] \cdot A_m[h] \subseteq A_{n+m}[gh]$ *para todo* $n, m \geq 0$ *y* $g, h \in G$. *En particular,* $A_n[g] \in {}_{\Bbbk^G}\mathcal{M}_{\Bbbk^G}$ *vía la multiplicación a izquierda y derecha por* $\Bbbk^G$.

(b) Si $x_g \in A_n[g]$, $g \in G$, *entonces* $\delta_h x_g = x_g \delta_{g^{-1}h}$ *para todo* $h \in G$.

(c) Si $x_g \in A_n[g]$, $g \in G$, *entonces* $\Delta(x_g) = \sum_{t\in G}(y_g^t \otimes \delta_t + \delta_t \otimes z^t_{t^{-1}gt}) + w$ *con* $w \in \bigoplus_{s,t\in G} \bigoplus_{i=1}^{n-1} (A_i[s] \otimes A_{n-i}[t])$ *y* $y_g^t, z_g^t \in A_n[g]$.

(d) Si $g \in G$ *entonces* $\mathcal{S}(A_n[g]) = A_n[g^{-1}]$.

(e) $(\operatorname{Supp} A_1)^{-1} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_{g_i} \cup \{e\}$.

(f) Si $\dim A < \infty$ *entonces* $A_1^e = \Bbbk^G$.

Prueba. Si $x_g \in A_n[g]$ y $x_h \in A_m[h]$ entonces

$$\operatorname{ad}\delta_s(x_g x_h) = \sum_{t\in G} \operatorname{ad}\delta_t(x_g)\operatorname{ad}\delta_{t^{-1}s}(x_h) = \delta_{s,gh} x_g x_h,$$

dado que el único término no nulo ocurre cuando $t = g$ y $t^{-1}s = h$. Esto implica (a); en particular $A_n[g]$ es un $\Bbbk^G$-bimoódulo porque $\Bbbk^G = A_0[e]$.

(b) sigue por cálculo explícito:

$$\delta_h x_g = \sum_{s\in G} \delta_s x_g \varepsilon(\delta_{s^{-1}h}) = \sum_{s\in G} \operatorname{ad}\delta_s(x_g)\delta_{s^{-1}h} = x_g \delta_{g^{-1}h}.$$

(c) Por (I.2), podemos escribir $\Delta(x_g) = \sum_{s,t\in G}(y_s^t \otimes \delta_t + \delta_t \otimes z_s^t) + w$ con $y_s^t, z_s^t \in A_n[s]$ y $w \in \bigoplus_{\substack{s,t\in G\\ 1\le i\le n-1}} (A_i[s]\otimes A_{n-i}[t])$. Si $w = w_1 \otimes w_2$ entonces

$$\tilde{w} = \sum_{f,h,s,t\in G} \delta_f w_1 \mathcal{S}(\delta_{h^{-1}g}) \otimes \operatorname{ad}\delta_{f^{-1}h}(w_2) \in \bigoplus_{\substack{s,t\in G\\ 1\le i\le n-1}} A_i[s]\otimes A_{n-i}[t].$$

Luego (c) sigue de

$$\begin{aligned}
\Delta(x_g) = \Delta(\operatorname{ad}\delta_g(x_g)) &= \sum_{f,h,s,t\in G} \delta_f y_s^t \mathcal{S}(\delta_{h^{-1}g}) \otimes \operatorname{ad}\delta_{f^{-1}h}(\delta_t)\\
&+ \sum_{f,h,s,t\in G} \delta_f \delta_t \mathcal{S}(\delta_{h^{-1}g}) \otimes \operatorname{ad}\delta_{f^{-1}h}(z_s^t) + \tilde{w}\\
&= \sum_{h,s,t\in G} \delta_h y_s^t \mathcal{S}(\delta_{h^{-1}g}) \otimes \delta_t + \sum_{f,s,t\in G} \delta_f\delta_t \mathcal{S}(\delta_{(fs)^{-1}g}) \otimes z_s^t + \tilde{w}\\
&= \sum_{s,t\in G} \operatorname{ad}\delta_g(y_s^t)\otimes\delta_t + \sum_{s,t\in G} \delta_t\delta_{g^{-1}ts}\otimes z_s^t + \tilde{w}\\
&= \sum_{t\in G} y_g^t \otimes \delta_t + \sum_{t\in G}\delta_t \otimes z_{t^{-1}gt}^t + \tilde{w}.
\end{aligned}$$

La prueba de (d) es por computación directa.

(e) Por Lema II.1, vemos que $A_1 = \Bbbk^G \oplus V\#\Bbbk^G$ como bimódulos de Hopf. Entonces $A_1[g] = V[g]\#\Bbbk^G$, $g \neq e$, and $A_1[e] = \Bbbk^G \oplus V[e]\#\Bbbk^G$, lo que implica (e) por (I.8).

Finalmente probemos (f). Sea K la subálgebra generada por $A_1[e]$; por (c) $A_1[e]$ es una subcoálgebra y por (d) es estable por la antípoda, entonces K es una subálgebra de Hopf. Por (b) $\Bbbk^G$ es una subálgebra de Hopf central en K. Más aún, existe una sucesión exacta de álgebras de Hopf $\Bbbk^G \hookrightarrow K \twoheadrightarrow K/(\Bbbk^G)^+K$ dado que $\dim A < \infty$, cf. [2]. Afirmamos que $K/(\Bbbk^G)^+K = \Bbbk$ y por lo tanto $\Bbbk^G = K$ por [2]. En efecto, por lo anterior

$$A_1[e] = \Bbbk\delta_e \oplus (\sum_{t\neq e}\Bbbk\delta_t)\oplus B \quad \text{con} \quad B = V[e]\#\Bbbk^G.$$

Por Lema II.1, $V\#\Bbbk^G \subset \ker\varepsilon$ y entonces $A_1[e]\cap\ker\varepsilon = \sum_{t\neq e}\Bbbk\delta_t \oplus B$. Si $x_e \in B$ entonces $\Delta(x_e) \in A_1^e \otimes \Bbbk^G + \Bbbk^G \otimes A_1^e = (B\otimes\Bbbk^G)\oplus(\Bbbk^G\otimes B)\oplus(\Bbbk^G\otimes\Bbbk^G)$ por (c). Luego, podemos escribir

$$\Delta(x_e) = \sum_{t\in G}(u_t\otimes\delta_t + \delta_t\otimes v_t) + \sum_{s,t\in G} b_{s,t}\delta_s\otimes\delta_t,$$

con $u_t, v_t \in B$ y $b_{s,t} \in \Bbbk$. Si calculamos $(\varepsilon \otimes \mathrm{id})\Delta(x_e)$ y $(\mathrm{id} \otimes \varepsilon)\Delta(x_e)$, obtenemos que $x_e = v_e + \sum_{s\in G} b_{e,s}\delta_s = u_e + \sum_{s\in G} b_{s,e}$ y por lo tanto $v_e = x_e = u_e$ y $b_{e,s} = 0 = b_{s,e}$ para todo $s \in G$. Entonces $\overline{x_e}$ es un elemento primitivo de $K/(\Bbbk^G)^+K$, dado que $\dim A < \infty$, $\overline{x_e} = 0$ y por lo tanto nuestra afirmación sigue. □

Queremos aplicar el Lema II.6 (c) en el siguiente caso. Supongamos que G actúa en un conjunto X. Una familia $\{\chi_i\}_{i\in X}$ con $\chi_i : G \to \Bbbk^\times$ tal que $\chi_i(ht) = \chi_{t\cdot i}(h)\chi_i(t)$ para todo $i \in X$, $h, t \in G$ se llama un *1-cociclo*. Entonces $\Bbbk X$ con base $\{m_i\}_{i\in X}$ es un G-módulo vía

$$g \cdot m_i = \chi_i(g) m_{g\cdot i} \quad \text{para todo} \quad i \in X.$$

Usando (I.7), $\Bbbk X$ es un $\Bbbk^G$-comódulo con elementos comatriciales $\{e_{i,j}\}$ asociados a $\Bbbk X$ y $\{m_i\}_{i\in X}$ dados por

$$e_{i,j} = \sum_{g\in G} \delta_{j,g\cdot i}\, \chi_i(g)\delta_{g^{-1}} \quad \text{para todo } i \in X. \tag{II.3}$$

Luego, en el caso en que el corradical es el álgebra de funciones sobre un grupo finito, podemos reformular el Lema II.6 de la siguiente manera. Recordar (I.9) que afirma que $M = M[e] \oplus M^\times$ en ${}^{\Bbbk^G}_{\Bbbk^G}\mathcal{YD}$.

Lema II.9. *Sean ϕ un morfismo levantador de A y $M \subset T(V)$ compatible con ϕ. Asumamos que $V[e] = 0$. Entonces*

(a) $\phi_{|M^\times} : M^\times \to \phi(V)$ es un morfismo en ${}^{\Bbbk^G}_{\Bbbk^G}\mathcal{YD}$.

(b) Si $\operatorname{Supp} M^\times \cap \operatorname{Supp} V = \emptyset$ entonces $\phi_{|M^\times} = 0$.

(c) Sea $\{m_i\}_{i\in X}$ una base de $M[e]$ tal que los elementos comatriciales $\{e_{ij}\}$ son dados por (II.3). Entonces existe $\{a_i\}_{i\in X} \subset \Bbbk$ tal que

$$\phi(m_i) = \sum_{g\in G} (a_i - \chi_i(g)a_{g\cdot i})\delta_{g^{-1}} \quad \textit{para todo } i \in X.$$

Prueba. Dado que $V[e] = 0$, $p_{V\#H} \circ \phi(M[e]) = 0$ y $p_{V\#H} \circ \phi_{|M^\times} = \phi_{|M^\times}$. Entonces (a) sigue del Lema II.6 (a) y (b) sigue del Lema II.6 (b).

Por otro lado, $p_H \circ \phi_{|M[e]} = \phi_{|M[e]}$ y $p_{V\#H} \circ \phi(M^\times) = 0$. Entonces (c) sigue de Lema II.6 (c). □

II.3 Una nueva familia de álgebras de Hopf.

Sea $\mathcal{O}_2^n$ la clase de conjugación de (12) en $\mathbb{S}_n$ y sea $\operatorname{sgn}: C_{\mathbb{S}_n}(12) \to \Bbbk$ la restricción de la representación signo de $\mathbb{S}_n$. Consideremos el módulo $V_n = M((12), \operatorname{sgn}) \in {}^{\Bbbk\mathbb{S}_n}_{\Bbbk\mathbb{S}_n}\mathcal{YD}$, cf. Definición I.9. Este tiene como base a $(x_{(ij)})_{(ij)\in\mathcal{O}_2^n}$ en donde la acción y coacción son dadas por

$$g \cdot x_{(ij)} = \operatorname{sgn}(g) x_{g(ij)g^{-1}} \quad \text{y} \quad \delta(x_{(ij)}) = (ij) \otimes x_{(ij)}$$

para todo $g \in G$ y $(ij) \in \mathcal{O}_2^n$. Usando (I.7), V_n se convierte un módulo de Yetter-Drinfeld sobre $\Bbbk^{\mathbb{S}_n}$ con la siguiente estructura

$$\delta_g \cdot x_{(ij)} = \delta_{g,(ij)}\, x_{(ij)} \qquad \text{y} \qquad \lambda(x_{(ij)}) = \sum_{h\in\mathbb{S}_n} \operatorname{sgn}(h)\delta_h \otimes x_{h^{-1}(ij)h}$$

para todo $g \in G$ y $(ij) \in \mathcal{O}_2^n$; en el lado derecho de la primera igualdad, $\delta_{g,(ij)}$ denota la delta de Kronecker.

Si $n = 3, 4, 5$, sabemos por [46, 36] que el álgebra de Nichols $\mathfrak{B}(V_n)$ es cuadrática y de dimensión finita. De hecho, el ideal $\mathcal{J}_n$ de $T(V_n)$ que define a $\mathfrak{B}(V_n)$ es generado por

$$x_{(ij)}^2, \tag{II.4}$$

$$R_{(ij)(kl)} := x_{(ij)}x_{(kl)} + x_{(kl)}x_{(ij)}, \tag{II.5}$$

$$R_{(ij)(ik)} := x_{(ij)}x_{(ik)} + x_{(ik)}x_{(jk)} + x_{(jk)}x_{(ij)} \tag{II.6}$$

para $(ij), (kl), (ik) \in \mathcal{O}_2^n$ con $\#\{i, j, k, l\} = 4$.

Para $n \geq 6$, se define la *aproximación cuadrática* $\mathfrak{B}_n$ *del álgebra de Nichols* como el cociente del álgebra tensorial $T(V_n)$ por el ideal generado por (II.4), (II.5) y (II.6) para $(ij), (kl), (ik) \in \mathcal{O}_2^n$ con $\#\{i, j, k, l\} = 4$.

Aún no se sabe si:

- $\mathfrak{B}(V_n)$ es quadrática, es decir, isomorfa a $\mathfrak{B}_n$;
- $\mathfrak{B}(V_n)$ es de dimensión finita;
- $\mathfrak{B}_n$ es de dimensión finita.

Sí se sabe que las únicas álgebras de Nichols que pueden ser de dimensión finita sobre $\mathbb{S}_n$ son $\mathfrak{B}(V_n)$ y otra también asociada a la clase de conjugación de (12), ver [3, Th. 1.1][1]. Además, estas álgebras de Nichols son equivalentes por torcimiento [59].

[1]Si $n = 4$ hay un álgebra de Nichols de dimensión finita asociada a la clase de conjugación de (1234). Si $n = 5$ ó 6 hay dos álgebras de Nichols de las cuales no se sabe si son de dimensión finita.

Habiendo introducido la notación necesaria, ahora calcularemos los levantamientos de $\mathfrak{B}(V_n)\#\Bbbk^{\mathbb{S}_n}$ para $n = 3, 4, 5$ usando lo que hicimos en las secciones anteriores.

Consideremos el conjunto de parámetros

$$\mathfrak{A}_n := \Big\{\mathbf{a} = (a_{(ij)})_{(ij)\in\mathcal{O}_2^n} \in \Bbbk^{\mathcal{O}_2^n} : \sum_{(ij)\in\mathcal{O}_2^n} a_{(ij)} = 0\Big\}.$$

El grupo $\Gamma_n := \Bbbk^\times \times \mathrm{Aut}(\mathbb{S}_n)$ actúa en $\mathfrak{A}_n$ vía

$$(\mu,\theta) \triangleright \mathbf{a} = \mu(a_{\theta(ij)}), \qquad \mu \in \Bbbk^\times, \qquad \theta \in \mathrm{Aut}(\mathbb{S}_n), \qquad \mathbf{a} \in \mathfrak{A}_n. \tag{II.7}$$

Sea $[\mathbf{a}] \in \Gamma_n\backslash\mathfrak{A}_n$ la clase de $\mathbf{a}$ bajo esta acción. Denotemos también con $\triangleright$ a la acción por conjugación de $\mathbb{S}_n$ sobre sí mismo, así[2] $\mathbb{S}_n < \{e\} \times \mathrm{Aut}(\mathbb{S}_n) < \Gamma_n$. Sea $\mathbb{S}_n^{\mathbf{a}} = \{g \in \mathbb{S}_n | g \triangleright \mathbf{a} = \mathbf{a}\}$ el grupo de isotropía de $\mathbf{a}$.

Fijado $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}_n$, introducimos

$$f_{ij} = \sum_{g\in\mathbb{S}_n} (a_{(ij)} - a_{g^{-1}(ij)g})\delta_g \in \Bbbk^{\mathbb{S}_n}, \qquad (ij) \in \mathcal{O}_2^n. \tag{II.8}$$

Definición II.10. Para cada $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}_n$, $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ es el álgebra de Hopf cociente $T(V_n)\#\Bbbk^{\mathbb{S}_n}/\mathcal{I}_{\mathbf{a}}$ donde $\mathcal{I}_{\mathbf{a}}$ el ideal generado por (II.5), (II.6) y

$$x_{(ij)}^2 - f_{ij}, \tag{II.9}$$

para todos $(ij), (kl), (ik) \in \mathcal{O}_2^n$ tales que $\#\{i, j, k, l\} = 4$; $\mathcal{I}_{\mathbf{a}}$ es realmente un ideal de Hopf por la Proposición (a).

Aún no se sabe, para $n = 4$ y 5, si efectivamente $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ es un levantamiento de $\mathfrak{B}(V_n)\#\Bbbk^{\mathbb{S}_n}$, esto es, si tiene la dimensión correcta. Podría suceder que para algún $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}_n$, en el peor de los casos, $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ fuera nula. Sin embargo, si $n = 3$ sabemos que para todo $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}_3$ el álgebra de Hopf $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ es un levantamiento de $\mathfrak{B}(V_3)\#\Bbbk^{\mathbb{S}_3}$, ver el siguiente capítulo.

Proposición II.11. *Asumamos $n = 3, 4, 5$.*

(a) $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ es un álgebra de Hopf para todo $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}_n$.

(b) Si A es un levantamiento de $\mathfrak{B}(V_n)\#\Bbbk^{\mathbb{S}_n}$ entonces existe $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}_n$ tal que $A \simeq \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$.

[2] Es bien conocido que $\mathbb{S}_n$ se identifica con el grupo de automorfismos interiores y que este coincide con $\mathrm{Aut}\,\mathbb{S}_n$ excepto para $n = 6$.

(c) Si $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ es un levantamiento de $\mathfrak{B}(V_n)\#\Bbbk^{\mathbb{S}_n}$ entonces $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \simeq \mathcal{A}_{[\mathbf{b}]}$ si y sólo si $[\mathbf{a}] = [\mathbf{b}]$.

Prueba. (a) No es difícil ver que

$$\Delta(x_{(ij)}^2) = x_{(ij)}^2 \otimes 1 + \sum_{h\in\mathbb{S}_n} \delta_h \otimes x_{h^{-1}(ij)h}^2 \quad \text{y}$$
$$\Delta(f_{ij}) = f_{ij} \otimes 1 + \sum_{h\in\mathbb{S}_n} \delta_h \otimes f_{h^{-1}(i)h^{-1}(j)}.$$

Entonces $J = \langle x_{(ij)}^2 - f_{ij} : (ij) \in \mathcal{O}_2^n \rangle$ es un coideal. Dado que $f_{ij}(e) = 0$, $J \subset \ker \epsilon$ y $\mathcal{S}(J) \subseteq \Bbbk^{\mathbb{S}_n} J$. Tampoco es difícil ver que lo mismo vale para el coideal generado por (II.5) y (II.6) para todos $(ij), (kl), (ik) \in \mathcal{O}_2^n$ tales que $\#\{i, j, k, l\} = 4$. Entonces $\mathcal{I}_{\mathbf{a}}$ es un ideal de Hopf y por lo tanto $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ es un álgebra de Hopf cociente de $T(V_n)\#\Bbbk^{\mathbb{S}_n}$.

(b) Por la Proposición II.4, existe $\phi : T(V_n)\#\Bbbk^{\mathbb{S}_n} \twoheadrightarrow A$, un morfismo levantador. Sea M el submódulo de Yetter-Drinfeld de $T(V_n)$ que genera al ideal $\mathcal{J}_n$ de relaciones de $\mathfrak{B}(V_n)$, dado por (II.4), (II.5) y (II.6). Entonces M es compatible con ϕ.

Por Lema II.9 (b), $\phi(M^\times) = 0$. Por otro lado, $M[e] = \langle x_{(ij)}^2 \rangle_{(ij)\in\mathcal{O}_2^n}$ y los elementos comatriciales asociados a la base $\{x_{(ij)}^2\}_{(ij)\in\mathcal{O}_2^n}$ son

$$e_{(ij),(lk)} = \sum_{g\in\mathbb{S}_n} \delta_{(lk),g(ij)g^{-1}} \delta_{g^{-1}}.$$

Entonces, por Lema II.9 (c) existe $\mathbf{a} \in \Bbbk^{\mathcal{O}_2^n}$ tal que

$$\phi(x_{(ij)}^2) = \sum_{g\in\mathbb{S}_n} (a_{(ij)} - a_{g^{-1}(ij)g})\delta_g \text{ para todo } (ij) \in \mathcal{O}_2^n.$$

Notar que si reemplazamos $\mathbf{a}$ por $\mathbf{a} - \sum_{(ij)\in\mathcal{O}_2^n} a_{(ij)}(1, ..., 1) \in \mathfrak{A}_n$, entonces la anterior igualdad aún vale. Entonces (b) sigue del Teorema II.7.

(c) Fijemos $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}_n$ tal que $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ es un levantamiento de $\mathfrak{B}(V_n)\#\Bbbk^{\mathbb{S}_n}$. Sean $\phi_{\mathbf{a}}$ y $\phi_{\mathbf{b}}$ los morfismos levantadores de $\mathfrak{B}(V_n)$ a $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ y $\mathcal{A}_{[\mathbf{b}]}$, respectivamente, con $\mathbf{b} \in \mathfrak{A}_n$ y sea $\Theta : \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \to \mathcal{A}_{[\mathbf{b}]}$ un isomorfismo de álgebras de Hopf. Sea θ el automorfismo de grupo de $\mathbb{S}_n$ inducido por $(\Theta_{|\Bbbk^{\mathbb{S}_n}})^*$. Entonces $\Theta\phi_{\mathbf{a}}(V_n) = \phi_{\mathbf{b}}(V_n)$ por Lema II.9 (d). Más aún, usando la acción adjunta de $\Bbbk^{\mathbb{S}_n}$ vemos que $\Theta\phi_{\mathbf{a}}(x_{(ij)}) = \mu_{(ij)}\phi_{\mathbf{b}}(x_{\theta(ij)})$ con $\mu_{(ij)} \in \Bbbk^\times$ para todo $(ij) \in \mathcal{O}_2^n$. Dado que Θ es un morfismo de coálgebras tiene que valer que $\mu_{(ij)} = \mu$ para todo $(ij) \in \mathcal{O}_2^n$. Por lo tanto $\mathbf{a} = (\mu^2, \theta) \triangleright \mathbf{b}$. Para la recíproca basta notar que un tal morfismo Θ está bien definido y da un isomorfismo $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ y $\mathcal{A}_{[\mathbf{b}]}$ para todos $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathfrak{A}_n$ con $[\mathbf{a}] = [\mathbf{b}]$. $\square$

CAPÍTULO III

ÁLGEBRAS DE HOPF CON CORRADICAL $\Bbbk^{\mathbb{S}_3}$

En este capítulo daremos la clasificación de las álgebras de Hopf no semisimple de dimensión finita con corradical $\Bbbk^{\mathbb{S}_3}$. La clasificación es dada por la familia $\{\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} : \mathbf{a} \in \mathfrak{A}_3\}$ definida en el capítulo anterior, Definición II.10. De hecho, por la Proposición II.11 sólo resta probar que cada una de las álgebras de Hopf $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ es efectivamente un levantamiento de $\mathfrak{B}(V_3)\#\Bbbk^{\mathbb{S}_3}$. Es más, veremos que resultan ser deformaciones por cociclos unas de otras.

Una vez comprobado lo anterior, nos abocaremos al estudio de la teoría de representaciones de las álgebras $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$. Clasificaremos sus módulos simples usando como herramienta los llamados módulos de Verma (imitando la teoría de representaciones de las álgebras de Lie), estos son, los módulos inducidos por las representaciones simples de $\Bbbk^{\mathbb{S}_3}$.

Además, calcularemos el tipo de representación de $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ y algunas propiedades de su estructura interna.

A lo largo del capítulo conservaremos la notación usada en la Sección II.3. Recordar que $V_3 = \langle x_{(ij)} \rangle_{(ij)\in\mathcal{O}_2^3} \in {}^{\Bbbk^{\mathbb{S}_3}}_{\Bbbk^{\mathbb{S}_3}}\mathcal{YD}$ con acción y coacción

$$\delta_g \cdot x_{(ij)} = \delta_{g,(ij)}\, x_{(ij)} \qquad \text{y} \qquad \lambda(x_{(ij)}) = \sum_{h\in\mathbb{S}_3} \operatorname{sgn}(h)\delta_h \otimes x_{h^{-1}(ij)h}$$

para todo $g \in G$ y $(ij) \in \mathcal{O}_2^3$. Recordar también que para cada

$$\mathbf{a} \in \mathfrak{A}_3 = \Big\{\mathbf{a} = (a_{(12)}, a_{(13)}, a_{(23)}) \in \Bbbk^{\mathcal{O}_2^3} : a_{(12)} + a_{(13)} + a_{(23)} = 0\Big\},$$

introdujimos

$$f_{ij} := \sum_{g\in\mathbb{S}_3} (a_{(ij)} - a_{g^{-1}(ij)g})\delta_g \in \Bbbk^{\mathbb{S}_3}, \qquad (ij) \in \mathcal{O}_2^3. \tag{III.1}$$

Entonces $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ – ver Definición II.10 – es el cociente $T(V_3)\#\Bbbk^{\mathbb{S}_3}/\mathcal{I}_{\mathbf{a}}$ donde $\mathcal{I}_{\mathbf{a}}$ es el ideal generado por

$$x_{(ij)}^2 - f_{ij} \quad \forall (ij) \in \mathcal{O}_2^3, \tag{III.2}$$

$$R_{(13)(23)} := x_{(13)}x_{(23)} + x_{(23)}x_{(12)} + x_{(12)}x_{(13)} \quad \text{y} \tag{III.3}$$

$$R_{(23)(13)} := x_{(23)}x_{(13)} + x_{(12)}x_{(23)} + x_{(13)}x_{(12)}. \tag{III.4}$$

El siguiente teorema da la clasificación deseada y es una consecuencia directa de las Proposiciones II.11 y III.4. Recordar que $\Gamma_3 = \Bbbk^\times \times \mathrm{Aut}(\mathbb{S}_3)$ actúa sobre $\mathfrak{A}_3$ vía (II.7).

Teorema III.1 (Clasificación de las álgebras de Hopf con corradical $\Bbbk^{\mathbb{S}_3}$). *El conjunto de clases de isomorfismos de álgebras de Hopf no semisimples de dimensión finita con corradical* $\Bbbk^{\mathbb{S}_3}$ *están en correspondencia biyectiva con* $\Gamma_3\backslash\mathfrak{A}_3$ *vía la asignación* $[\mathbf{a}] \leftrightsquigarrow \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$. □

III.1 Clasificación de las álgebras de Hopf con corradical $\Bbbk^{\mathbb{S}_3}$.

Para demostrar que las álgebras $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ son deformaciones por cociclos unas de otras usaremos el siguiente teorema debido a Masuoka [45]. Si K es una subálgebra de Hopf de un álgebra de Hopf H y J es un ideal de Hopf de K entonces el ideal bilátero (J) de H es de hecho un ideal de Hopf en H. En lo que sigue ψ^{-1} denota el mapa inverso de ψ con respecto al producto de convolución. Ver (I.1) para la definición de las acciones $\rightharpoonup$ y $\leftharpoonup$.

Teorema III.2. *[45, Thm. 2], [16, Thm. 3.4]. Supongamos que K es una subálgebra de Hopf de un álgebra de Hopf H. Sean I, J ideales de Hopf de K. Si existe $\psi : K \to \Bbbk$ un morfismo de álgebras tal que*

- $J = \psi \rightharpoonup I \leftharpoonup \psi^{-1}$ *y*
- $H/(\psi \rightharpoonup I)$ *es un álgebra no nula,*

entonces $H/(\psi \rightharpoonup I)$ es un objeto $(H/(I), H/(J))$-biGalois y por lo tanto las álgebras de Hopf cociente $H/(I)$, $H/(J)$ son monoidalmente Morita-Takeuchi equivalentes. Si $H/(I)$ y $H/(J)$ son de dimensión finita entonces $H/(I)$ y $H/(J)$ son deformaciones por cociclo una de otra. □

Para aplicar el teorema de Masuoka necesitaremos el siguiente lema.

Lema III.3. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Si W es un espacio vectorial y U es un subespacio vectorial de $W^{\otimes n}$ entonces la subálgebra de $T(W)$ generada por U es isomorfa a $T(U)$.*

Prueba. Es suficiente probar el lema para el caso $U = W^{\otimes n}$. Sea $(x_i)_{i\in I}$ una base de W. Entonces $\mathbf{B} = \{X_{\mathbf{i}} = x_{i_1} \cdots x_{i_n} : \mathbf{i} = (i_1, ..., i_n) \in I^n\}$ forma una base de $W^{\otimes n}$. Dado que los $X_{\mathbf{i}}$ son todos elementos homogéneos del mismo grado en $T(W)$, sólo tenemos que probar que $\{X_{\mathbf{i}_1} \cdots X_{\mathbf{i}_m} : \mathbf{i}_1, ..., \mathbf{i}_m \in I^n\}$ son linealmente independientes en $T(W)$ para todo $m \geq 1$. Ahora bien, esto es cierto porque $\mathbf{B}$ es una base de monomios del mismo grado. $\square$

Ahora estamos en condiciones de terminar la prueba del Teorema de clasificación de las álgebras de Hopf con corradical $\Bbbk^{\mathbb{S}_3}$. Para probar que las álgebras $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ son efectivamente levantamientos usamos el Lema del Diamante [18], sin embargo, el ítem (c) da una demostración alternativa de este hecho. El Lema del Diamante nos permite obtener una base de $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ que utilizaremos para calcular su teoría de representaciones, es por eso que lo usamos aquí.

Proposición III.4. *(a) Si A es un álgebra de Hopf no semisimple de dimensión finita con corradical $\Bbbk^{\mathbb{S}_3}$ entonces A es un levantamiento de $\mathfrak{B}(V_3)\#\Bbbk^{\mathbb{S}_3}$.*

(b) Para todo $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}_3$, $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ es un levantamiento de $\mathfrak{B}(V_3)\#\Bbbk^{\mathbb{S}_3}$.

(c) Para todo $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}_3$, $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ es un álgebra de Hopf monoidalmente Morita-Takeuchi equivalente a $\mathfrak{B}(V_3)\#\Bbbk^{\mathbb{S}_3}$.

Prueba. (a) Por lo desarrollado en la Subsección I.3.3, $\operatorname{gr} A \simeq R\#\Bbbk^{\mathbb{S}_3}$ con $V = R^1 \in {}^{\Bbbk^{\mathbb{S}_3}}_{\Bbbk^{\mathbb{S}_3}}\mathcal{YD}$ y $\mathfrak{B}(V)$ es una subálgebra de Hopf trenzada de R por [9, Prop. 2.2]. Por [5, Thm. 4.5] $\mathfrak{B}(V_3)$ es la única álgebra de Nichols de dimensión finita en ${}^{\Bbbk\mathbb{S}_3}_{\Bbbk\mathbb{S}_3}\mathcal{YD}$ y por lo tanto la única de ${}^{\Bbbk^{\mathbb{S}_3}}_{\Bbbk^{\mathbb{S}_3}}\mathcal{YD}$, ver Observación I.8. Por lo tanto $V \simeq V_3$. Dado que $\mathfrak{B}(V_3)$ sólo depende de la trenza de V – ver Observación I.6 –, podemos deducir de [4, Thm. 2.1] que $R = \mathfrak{B}(V_3)$.

(b) Fijemos $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}_3$. Afirmamos que $\mathcal{B} = \{x\delta_g | x \in \mathbb{B},\, g \in \mathbb{S}_3\}$ es una base de $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ donde

$$\text{(III.5)}\quad \mathbb{B}=\left\{\begin{matrix} 1, & x_{(13)}, & x_{(13)}x_{(12)}, & x_{(13)}x_{(12)}x_{(13)}, & x_{(13)}x_{(12)}x_{(23)}x_{(12)}, \\ & x_{(23)}, & x_{(12)}x_{(13)}, & x_{(12)}x_{(23)}x_{(12)}, & \\ & x_{(12)}, & x_{(23)}x_{(12)}, & x_{(13)}x_{(12)}x_{(23)}, & \\ & & x_{(12)}x_{(23)} & & \end{matrix}\right\}$$

y por lo tanto (b) queda demostrada. A continuación, esbozamos la prueba de nuestra afirmación usando el Lema del Diamante [18].

Para empezar necesitamos introducir más relaciones que se desprenden de (III.2), (III.3) y (III.4). Escribiremos las relaciones de la forma $R = f$ con R un monomio de $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ y $f \in \Bbbk\mathcal{B}$. La nueva lista de relaciones es

$$1 = \sum_{g \in \mathbb{S}_3} \delta_g, \quad \delta_g \delta_h = \delta_{g,h}\delta_g, \quad \delta_g x_{(ij)} = x_{(ij)}\delta_{(ij)g}, \quad x_{(ij)}^2 = f_{ij},$$

$$x_{(13)}x_{(23)} = - x_{(23)}x_{(12)} - x_{(12)}x_{(13)},$$

$$x_{(23)}x_{(13)} = - x_{(12)}x_{(23)} - x_{(13)}x_{(12)},$$

$$x_{(12)}x_{(13)}x_{(12)} = x_{(13)}x_{(12)}x_{(13)} + x_{(23)}(a_{(13)} - a_{(12)}), \tag{III.6}$$

$$x_{(23)}x_{(12)}x_{(23)} = x_{(12)}x_{(23)}x_{(12)} - x_{(13)}(a_{(23)} - a_{(12)}) \text{ y} \tag{III.7}$$

$$x_{(23)}x_{(12)}x_{(13)} = x_{(13)}x_{(12)}x_{(23)} + x_{(12)}\Omega. \tag{III.8}$$

donde $\Omega = f_{13}((12)\_\_) - f_{13} \in \Bbbk^{\mathbb{S}_3}$, es decir,

$$\begin{aligned} \Omega =& (a_{(23)} - a_{(13)})(\delta_{(12)} - \delta_e) \\ &+ (a_{(13)} - a_{(12)})(\delta_{(13)} - \delta_{(132)}) + (a_{(12)} - a_{(23)})(\delta_{(23)} - \delta_{(123)}). \end{aligned} \tag{III.9}$$

(c) Fijado $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}_3$ consideremos el álgebra $\mathcal{K}_{\mathbf{a}} := T(V_3)\#\Bbbk^{\mathbb{S}_3}/\mathcal{J}_{\mathbf{a}}$ donde $\mathcal{J}_{\mathbf{a}}$ es el ideal generado por

$$R_{(13)(23)}, \quad R_{(23)(13)} \quad \text{y} \quad x_{(ij)}^2 + \sum_{g \in \mathbb{S}_3} a_{g^{-1}(ij)g}\, \delta_g, \quad (ij) \in \mathcal{O}_2^3. \tag{III.10}$$

Consideremos el módulo $M_3 = \Bbbk^{\mathbb{S}_3}$ con la acción regular a izquierda. Entonces M_3 es un $\mathcal{K}_{\mathbf{a}}$-módulo con acción dada por

$$x_{(ij)} \cdot m_g = \begin{cases} m_{(ij)g} & \text{si } \operatorname{sgn} g = -1, \\ -a_{g^{-1}(ij)g}\, m_{(ij)g} & \text{si } \operatorname{sgn} g = 1. \end{cases}$$

En efecto, este es un $\mathcal{K}_{\mathbf{a}}$-módulo porque

$$\begin{aligned} \delta_h(x_{(ij)} \cdot m_g) &= \delta_h(\lambda_g m_{(ij)g}) = \lambda_g \delta_h((ij)g) m_{(ij)g} = \lambda_g \delta_{(ij)h}(g) m_{(ij)g} \\ &= x_{(ij)} \cdot (\delta_{(ij)h} \cdot m_g) \end{aligned}$$

para cierto $\lambda_g \in \Bbbk$ dado por la definición de la acción. Además,

$$x_{(ij)} \cdot (x_{(ik)} \cdot m_g) = \begin{cases} -a_{g^{-1}(ik)(ij)(ik)g}\, m_{(ij)(ik)g} & \text{si } \operatorname{sgn} g = -1, \\ -a_{g^{-1}(ik)g}\, m_{(ij)(ik)g} & \text{si } \operatorname{sgn} g = 1 \end{cases}$$

y en cualquier caso tenemos que $x_{(ij)}^2 \cdot m_g = -a_{g^{-1}(ij)g}\, m_g$ y

$$R_{(ij)(ik)} \cdot m_g = -(\sum_{(st)\in\mathcal{O}_2^3} a_{g^{-1}(st)g}) m_{(ij)(ik)g} = 0.$$

Sean ahora $W = \langle R_{(13)(23)}, R_{(23)(13)}, x_{(ij)}^2 : (ij) \in \mathcal{O}_2^3\rangle$ y K la subálgebra de $T(V_3)$ generada por W; K es una subálgebra de Hopf trenzada porque W es un submódulo de Yetter-Drinfeld contenido en $\mathcal{P}(T(V_3))$. Entonces $K\#\Bbbk^{\mathbb{S}_3}$ es una subálgebra de Hopf de $T(V_3)\#\Bbbk^{\mathbb{S}_3}$. Por Lema III.3 podemos definir el morfismo de álgebras $\psi = \psi_K \otimes \epsilon : K\#\Bbbk^{\mathbb{S}_3} \to \Bbbk$ donde

$$\psi_{K|W[g]} = 0 \text{ si } g \neq e \text{ y } \psi_K(x_{(ij)}^2) = -a_{(ij)}\ \forall (ij) \in \mathcal{O}_2^3.$$

Denotemos con J al ideal de $K\#\Bbbk^{\mathbb{S}_3}$ generado por los generadores de K. Entonces $\psi^{-1} \rightharpoonup J \leftharpoonup \psi$ es el ideal generado por los generadores de $\mathcal{I}_{\mathbf{a}}$. Para ver esto notar que $\mathcal{S}(W)[g] \subset (K\#\Bbbk^{\mathbb{S}_3})[g^{-1}]$ y $\mathcal{S}(x_{(ij)}^2) = -\sum_{h\in\mathbb{S}_3} \delta_{h^{-1}} x_{h^{-1}(ij)h}^2$. Entonces, dado que $\psi^{-1} = \psi \circ \mathcal{S}$, nuestra afirmación sigue de aplicar $\psi \otimes \mathrm{id} \otimes \psi^{-1}$ a $(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(x_{(ij)}^2) =$

$$= x_{(ij)}^2 \otimes 1 \otimes 1 + \sum_{h\in\mathbb{S}_3} \delta_h \otimes x_{h^{-1}(ij)h}^2 \otimes 1 + \sum_{h,g\in\mathbb{S}_3} \delta_h \otimes \delta_g \otimes x_{g^{-1}h^{-1}(ij)hg}^2$$

y a $(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(x) = x \otimes 1 \otimes 1 + x_{-1} \otimes x_0 \otimes 1 + x_{-2} \otimes x_{-1} \otimes x_0$ para $g \neq e$ y $x \in W[g]$; notar también que $x_0 \in W[g]$.

Por su parte, el ideal $\psi^{-1} \rightharpoonup J$ es generado por

$$R_{(13)(23)}, \quad R_{(23)(13)} \quad \text{y} \quad x_{(ij)}^2 + \sum_{g\in\mathbb{S}_3} a_{g^{-1}(ij)g}\delta_g \quad \forall (ij) \in \mathcal{O}_2^3,$$

es decir, $\mathcal{K}_{\mathbf{a}} = T(V_3)\#\Bbbk^{\mathbb{S}_3}/\langle \psi^{-1} \rightharpoonup J\rangle$. Finalmente, por la acción antes definida sabemos que $\mathcal{K}_{\mathbf{a}} \neq 0$ y $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ resulta ser monoidalmente Morita-Takeuchi equivalente a $\mathfrak{B}(V_3)\#\Bbbk^{\mathbb{S}_3}$ por Teorema III.2. $\square$

III.2 Teoría de representaciones de los levantamientos de $\mathfrak{B}(V_3)\#\Bbbk^{\mathbb{S}_3}$.

En esta sección clasificaremos las representaciones simples de las álgebras $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$. Con este fin daremos el retículo de submódulos de cada módulo de Verma de $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ – los módulos inducidos por los $\Bbbk^{\mathbb{S}_3}$-módulos simples, Definición I.11. Luego, encontraremos los módulos simples como cocientes de los módulos de Verma. Aquí haremos uso de las generalidades enumeradas en la Sección I.4.

Para describir los módulos simples, dividiremos el trabajo considerando tres diferentes casos que dependen de la forma del parámetro $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}_3$.

Definición III.5. Decimos que el parámetro $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}_3$ es *genérico* cuando una de las siguientes condiciones equivalentes valen.

(a) $a_{(ij)} \neq a_{(kl)}$ para todo $(ij) \neq (kl) \in \mathcal{O}_2^n$.

(b) $a_{(ij)} \neq a_{h \triangleright (ij)}$ para todo $(ij) \in \mathcal{O}_2^n$, $h \in \mathbb{S}_n - C_{\mathbb{S}_n}(ij)$.

(c) $f_{ij}(h) \neq 0$ para todo $(ij) \in \mathcal{O}_2^n$, $h \in \mathbb{S}_n - C_{\mathbb{S}_n}(ij)$.

Prueba. [(a)⇒(b)] es claro dado que $(ij) \neq h \triangleright (ij)$ por la hipótesis sobre h. [(b)⇒(a)] sigue del hecho de que cualquier $(kl) \neq (ij)$ es de la forma $(kl) = h \triangleright (ij)$ para algún $h \notin \mathbb{S}_n^{(ij)}$. [(b)⇔(c)] dado (ij), tenemos que

$$\{h \in \mathbb{S}_n : a_{(ij)} = a_{h \triangleright (ij)}\} = \{h \in \mathbb{S}_n : f_{ij}(h) = 0\};$$

luego, uno de estos conjuntos es $C_{\mathbb{S}_n}(ij)$ si y sólo si el otro lo es. □

Entonces, los tres casos diferentes son:

- $a_{(13)} = a_{(12)} = a_{(23)}$. En este caso, no hay nada que hacer. En efecto, $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ resulta ser la bosonización $\mathfrak{B}(V_3)\#\Bbbk^{\mathbb{S}_3}$ y entonces los módulos simples de $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ se obtienen de los módulos simples de $\Bbbk^{\mathbb{S}_3}$ haciendo actuar al álgebra de Nichols $\mathfrak{B}(V_3)$ trivialmente.
- $a_{(13)} = a_{(12)}$ ó $a_{(23)} = a_{(12)}$ ó $a_{(13)} = a_{(23)}$ pero no todos iguales. Salvo isomorfismo, cf. (II.7), podemos asumir que $a_{(12)} \neq a_{(13)} = a_{(23)}$. Para abreviar, diremos que $\mathbf{a}$ es *sub-genérico.*
- $\mathbf{a}$ genérico.

Sin embargo hay algunos hechos que podemos probar con mayor generalidad, incluso considerando $n \neq 3$. Para dar con ellos introducimos la siguiente definición.

Definición III.6. Sea $n \geq 3$ y fijemos $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}_n$. Diremos que $g, h \in \mathbb{S}_n$ son $\mathbf{a}$-*enlazados*, lo cual denotaremos $g \sim_{\mathbf{a}} h$, si $g = h$, o bien existen $(i_m j_m)$, $\dots$, $(i_1 j_1) \in \mathcal{O}_2^n$ tales que

- $g = (i_m j_m)\cdots(i_1 j_1)h$,
- $f_{i_s j_s}((i_s j_s)(i_{s-1} j_{s-1})\cdots(i_1 j_1)h) \neq 0$ para todo $1 \leq s \leq m$.

Por la definición (II.8) de $f_{ij} \in \Bbbk^{\mathbb{S}_n}$ es claro que

$$f_{ij}(ts) = f_{ij}(s) \qquad \forall t \in C_{\mathbb{S}_n}(\mathrm{ij}), \quad s \in \mathbb{S}_n. \tag{III.11}$$

En particular, $f_{i_1 j_1}(h) \neq 0$. Además, afirmamos que $\sim_{\mathbf{a}}$ es una relación de equivalencia. En efecto, si $g \sim_{\mathbf{a}} h$ entonces $h = (i_1 j_1)\cdots(i_m j_m)g$ y

$$\begin{aligned} f_{i_s j_s}((i_s j_s)(i_{s+1} j_{s+1})\cdots(i_m j_m)g) &= f_{i_s j_s}((i_{s-1} j_{s-1})\cdots(i_1 j_1)h) \\ &\overset{\text{(III.11)}}{=} f_{i_s j_s}((i_s j_s)(i_{s-1} j_{s-1})\cdots(i_1 j_1)h) \neq 0, \end{aligned}$$

i.e., $h \sim_{\mathbf{a}} g$. De manera similar, vemos que si $g \sim_{\mathbf{a}} h$ y $h \sim_{\mathbf{a}} z$ entonces $g \sim_{\mathbf{a}} z$.

En Definición II.10, $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ fue introducida como un cociente de $T(V_n)\#\Bbbk^{\mathbb{S}_n}$ y salvo para $n = 3$, no conocemos la dimensión de $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$. Pero asumiendo que la proyección canónica $T(V_n)\#\Bbbk^{\mathbb{S}_n} \twoheadrightarrow \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ es inyectiva cuando se restringe a $\Bbbk^{\mathbb{S}_n}$ –resumiremos esto, diciendo que $\Bbbk^{\mathbb{S}_n}$ es una subálgebra de $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$– podemos enunciar algunas propiedades de sus módulos; notar que de asumir esto, $\Bbbk^{\mathbb{S}_3}$ resulta ser el corradical de $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ por [47, Cor. 5.3.5].

Observación III.7. Asumir que $\Bbbk^{\mathbb{S}_n}$ es una subálgebra de $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ y sea M un $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$-módulo. Entonces

(a) Si $(ij) \in \mathcal{O}_2^n$ satisface $f_{ij}(h) \neq 0$ entonces $\rho(x_{(ij)}) : M[h] \to M[(\mathrm{ij})h]$ es un isomorfismo

(b) Si $g \sim_{\mathbf{a}} h \in \mathbb{S}_n$ entonces $\rho(x_{(i_m j_m)}) \circ \cdots \circ \rho(x_{(i_1 j_1)}) : M[h] \to M[g]$ es un isomorfismo.

Prueba. $\rho(x_{(ij)}) : M[h] \to M[(\mathrm{ij})h]$ es inyectiva y $\rho(x_{(ij)}) : M[(\mathrm{ij})h] \to M[h]$ es sobreyectiva por (II.9). Intercambiando los roles de h y $(\mathrm{ij})h$ obtenemos (a). Ahora (b) sigue de (a). □

Esta observación es particularmente útil para comparar los módulos de Verma de $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$, recordar que estos son los módulos M_g inducidos por los $\Bbbk^{\mathbb{S}_n}$-módulos unidimensionales $\Bbbk_g = \Bbbk[g]$ para todo $g \in \mathbb{S}_n$.

Proposición III.8. *Asumir que* $\dim \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} < \infty$ *y* $\Bbbk^{\mathbb{S}_n}$ *es una subálgebra de* $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$. *Si* g *y* h *son* $\mathbf{a}$*-enlazados, entonces los módulos de Verma* M_g *y* M_h *son isomorfos.*

Prueba. El módulo de Verma M_h es generado por $m_1 = 1 \otimes_{\Bbbk^{\mathbb{S}_n}} 1 \in M_h[h]$. Por Observación III.7 (b), existe $m \in M_h[g]$ tal que $M_h = \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot m$. Por lo tanto, existe un epimorfismo $M_g \twoheadrightarrow M_h$ e intercambiando los roles de g y h, también existe un epimorfismo $M_h \twoheadrightarrow M_g$. Dado que $\dim \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} < \infty$, $M_g \simeq M_h$. $\square$

Lema III.9. *Si* $\mathbf{a}$ *es genérico entonces* $g \sim_{\mathbf{a}} h$ *para todo* $g, h \in \mathbb{S}_n - \{e\}$. *Si además* $\Bbbk^{\mathbb{S}_n}$ *es una subálgebra de* $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ *entonces*

(a) $\dim \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} < \infty$ *implica que los módulos de Verma* M_g *y* M_h *son isomorfos para todo* $g, h \in \mathbb{S}_n - \{e\}$.

(b) Si M *es un* $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$*-módulo entonces* $\dim M[h] = \dim M[g]$ *para todo* $g, h \in \mathbb{S}_n - \{e\}$. *Luego* $\dim M = (n! - 1) \dim M[(ij)] + \dim M[e]$.

(c) Si M *es simple y* $n = 3$ *entonces* $\dim M[h] \le 1$ *para todo* $h \in \mathbb{S}_3 - \{e\}$.

Prueba. Sea $(ij) \in \mathbb{S}_n$ y $g \in \mathbb{S}_n - \{e\}$.

- Si $g = (ik)$ entonces $g \sim_{\mathbf{a}} (ij)$, dado que $(ik) = (jk)(ij)(jk)$ y $\mathbf{a}$ es génerico.
- Si $g = (kl)$ con $\#\{i, j, l, k\} = 4$ entonces $(ij) \sim_{\mathbf{a}} (ik)$ y $(ik) \sim_{\mathbf{a}} (kl)$, luego $(ij) \sim_{\mathbf{a}} (kl)$.
- Si $g = (i_1 i_2 \cdots i_r)$ es un r-ciclo entonces $g = (i_1 i_r)(i_1 i_2 \cdots i_{r-1})$. Luego $g \sim_{\mathbf{a}} (ij)$ por inducción en r.
- Sea $g = g_1 \cdots g_m$ el producto de ciclos disjuntos $g_1, \dots, g_m$ con $m \ge 2$; digamos $g_1 = (i_1 \cdots i_r)$, $g_2 = (i_{r+1} \cdots i_{r+s})$ y denotemos $z = g_3 \cdots g_m$. Entonces $g = (i_1 i_{r+1})(i_1 \cdots i_{r+s}) z$ y $z \in C_{\mathbb{S}_n}(i_1 i_{r+1})$. Luego g y (ij) son $\mathbf{a}$-enlazados por inducción en m.

Ahora (a) sigue de la Proposición III.8 y (b) de la Observación III.7. Si $n = 3$ y M es simple entonces $\dim \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} = 72 > (\dim M)^2 \ge 25 (\dim M[(12)])^2$ y la última afirmación sigue. $\square$

La caracterización de todas las representaciones de dimensión uno de $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ no es difícil. Sea $\approx$ la relación de equivalencia en $\mathcal{O}_2^n$ dada por $(ij) \approx (kl)$ si y sólo si $a_{(ij)} = a_{(kl)}$. Sea $\mathcal{O}_2^n = \coprod_{s \in \Upsilon} \mathcal{C}_s$ la partición asociada a $\approx$. Si $h \in \mathbb{S}_n$ entonces

$$f_{ij}(h) = 0 \,\forall (ij) \in \mathcal{O}_2^n \quad \Leftrightarrow \quad h^{-1} \mathcal{C}_s h = \mathcal{C}_s \,\forall s \in \Upsilon \quad \Leftrightarrow \quad h \in \mathbb{S}_n^{\mathbf{a}}; \tag{III.12}$$

recordar que $\mathbb{S}_n^{\mathbf{a}} = \{g \in \mathbb{S}_n | g \triangleright \mathbf{a} = \mathbf{a}\}$ donde la acción $\triangleright$ es dada por (II.7).

Lema III.10. *Asumir que $\Bbbk^{\mathbb{S}_n}$ es una subálgebra de $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ y sea $h \in \mathbb{S}_n^{\mathbf{a}}$. Entonces $\Bbbk_h$ es un $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$-módulo con acción dada por el morfismo de álgebras*

$$\zeta_h : \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \longmapsto \Bbbk, \quad x_{(ij)} \mapsto 0, \quad (ij) \in \mathcal{O}_2^n \quad y \quad f \mapsto f(h), \quad f \in \Bbbk^{\mathbb{S}_n}. \tag{III.13}$$

Más aún, todas las representaciones unidimensionales de $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ son de esta forma.

Prueba. Claramente, ζ_h satisface las relaciones de $T(V_n)\#\Bbbk^{\mathbb{S}_n}$, (II.5) y (II.6); (II.9) vale porque h cumple con (III.12). Ahora, sea M un $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$-módulo de dimensión 1. Entonces $M = M[h]$ para algún h; luego $f_{ij}(h) = 0$ para todo $(ij) \in \mathcal{O}_2^n$ por Observación III.7. □

Hasta aquí hemos trabajado con la mayor generalidad posible. Ahora nos concentraremos en el caso $n = 3$ pero para un $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}_3$ arbitrario.

Sea ϕ un morfismo levantador de $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$. En la demostración de la Proposición III.4 dimos una base de $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ de la forma

$$\mathcal{B} = \{x\delta_g | x \in \mathbb{B},\, g \in \mathbb{S}_3\} \quad \text{con} \quad \mathbb{B} = \phi(\{\text{base de } \mathfrak{B}(V_3)\}), \quad \text{ver (III.5)}.$$

Dado que $M_g = \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \otimes_{\Bbbk^{\mathbb{S}_3}} \Bbbk_g \simeq \mathfrak{B}(V_3) \otimes \delta_g$ para todo g, la imagen $\overline{\mathbb{B}}$ de $\mathbb{B}$ en M_g resulta ser una base. También por la demostración de la Proposición III.4, conocemos explícitamente las relaciones de $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ y de los monomios de $\mathbb{B}$. Entonces podemos describir la acción de $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ sobre M_g usando $\overline{\mathbb{B}}$.

Empecemos notando que $\phi(f{\cdot}x) = \operatorname{ad} f(\phi(x))$ para todo $f \in \Bbbk^{\mathbb{S}_3}$ y $x \in T(V_3)$. Entonces, dado que los elementos en $\mathbb{B}$ son homogéneos, para todo $x \in \mathbb{B}$ existe $g_x \in \mathbb{S}_3$ tal que $x \in \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}[g_x] = T(V_3)[g_x]$. Luego en M_g vale que

$$\begin{aligned} f \cdot \overline{x \otimes 1} = \overline{fx \otimes 1} = \overline{f_{(1)} \cdot x f_{(2)} \otimes 1} = \overline{f_{(1)} \cdot x \otimes f_{(2)} \cdot 1} \\ = f(g_x g)\, \overline{x \otimes 1} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{B}. \end{aligned} \tag{III.14}$$

Supongamos ahora que $x = x_{(i_1j_1)} \dots x_{(i_tj_t)} \in \mathbb{B}$ con $(i_1j_1), \dots, (i_tj_t) \in \mathcal{O}_2^3$. Si $y = x_{(i_2j_2)} \dots x_{(i_tj_t)}$ – observar que y no necesariamente pertenece a $\mathbb{B}$ – entonces

$$x_{(i_1j_1)} \cdot \overline{x \otimes 1} = \overline{x_{(i_1j_1)}^2 x_{(i_2j_2)} \dots x_{(i_tj_t)} \otimes 1} = \overline{f_{i_1j_1} y \otimes 1} = f_{i_1j_1}(g_y g)\, \overline{y \otimes 1}.$$

Denotemos con $m_{(ij)\dots(rs)}$ a la clase de $x_{(ij)} \dots x_{(rs)}$ en M_g y por simplificación definimos $m_{\mathsf{top}} := m_{(13)(12)(23)(12)}$. Ayudados por las anteriores igualdades y las relaciones descritas en la Proposición III.4, obtenemos las siguientes fórmulas, las cuales detallan la acción de $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ sobre M_g.

$$f \cdot m_1 = f(g)m_1, \qquad f \in \Bbbk^{\mathbb{S}_3}; \tag{III.15}$$
$$f \cdot m_{(ij)\dots(rs)} = f((\mathrm{ij})\dots(\mathrm{rs})g)\, m_{(ij)\dots(rs)}, \qquad f \in \Bbbk^{\mathbb{S}_3}; \tag{III.16}$$
$$x_{(ij)} \cdot m_1 = m_{(ij)}, \qquad (ij) \in \mathcal{O}_2^3; \tag{III.17}$$
$$x_{(ij)} \cdot m_{(ij)} = f_{ij}(g)m_1, \qquad (ij) \in \mathcal{O}_2^3; \tag{III.18}$$
$$x_{(13)} \cdot m_{(23)} = -m_{(23)(12)} - m_{(12)(13)}, \tag{III.19}$$
$$x_{(13)} \cdot m_{(12)} = m_{(13)(12)}, \tag{III.20}$$
$$x_{(23)} \cdot m_{(13)} = -m_{(12)(23)} - m_{(13)(12)}, \tag{III.21}$$
$$x_{(23)} \cdot m_{(12)} = m_{(23)(12)}, \tag{III.22}$$
$$x_{(12)} \cdot m_{(13)} = m_{(12)(13)}, \tag{III.23}$$
$$x_{(12)} \cdot m_{(23)} = m_{(12)(23)}; \tag{III.24}$$

$$x_{(13)} \cdot m_{(13)(12)} = f_{13}((12)g)\, m_{(12)}, \tag{III.25}$$
$$x_{(13)} \cdot m_{(12)(13)} = m_{(13)(12)(13)}, \tag{III.26}$$
$$x_{(13)} \cdot m_{(23)(12)} = -m_{(13)(12)(13)} - f_{13}((23)g)\, m_{(23)} \tag{III.27}$$
$$x_{(13)} \cdot m_{(12)(23)} = m_{(13)(12)(23)}; \tag{III.28}$$
$$x_{(23)} \cdot m_{(13)(12)} = -m_{(12)(23)(12)} - f_{12}(g)m_{(13)}, \tag{III.29}$$
$$x_{(23)} \cdot m_{(12)(13)} = m_{(13)(12)(23)} + \Omega(g)m_{(12)}, \tag{III.30}$$
$$x_{(23)} \cdot m_{(23)(12)} = f_{23}((12)g)m_{(12)}, \tag{III.31}$$
$$x_{(23)} \cdot m_{(12)(23)} = m_{(12)(23)(12)} - m_{(13)}f_{23}((13)), \tag{III.32}$$
$$x_{(12)} \cdot m_{(13)(12)} = m_{(13)(12)(13)} + m_{(23)}f_{13}((23)), \tag{III.33}$$
$$x_{(12)} \cdot m_{(12)(13)} = f_{12}((13)g)m_{(13)}, \tag{III.34}$$
$$x_{(12)} \cdot m_{(23)(12)} = m_{(12)(23)(12)}, \tag{III.35}$$
$$x_{(12)} \cdot m_{(12)(23)} = f_{12}((23)g)m_{(23)}; \tag{III.36}$$

$$x_{(13)} \cdot m_{(13)(12)(13)} = f_{13}((12)(13)g)\, m_{(12)(13)}, \tag{III.37}$$
$$x_{(13)} \cdot m_{(12)(23)(12)} = m_{\mathsf{top}}, \tag{III.38}$$
$$x_{(13)} \cdot m_{(13)(12)(23)} = f_{13}((12)(23)g)\, m_{(12)(23)}, \tag{III.39}$$
$$x_{(23)} \cdot m_{(13)(12)(13)} = m_{\mathsf{top}} - (f_{12}\Omega + (a_{(13)} - a_{(12)})f_{23})(g)m_1, \tag{III.40}$$
$$x_{(23)} \cdot m_{(12)(23)(12)} = f_{12}(g)m_{(12)(23)} + (a_{(12)} - a_{(23)})m_{(13)(12)}, \tag{III.41}$$
$$x_{(23)} \cdot m_{(13)(12)(23)} = f_{23}((23)(12)g)m_{(12)(13)} - \Omega(g)m_{(23)(12)}, \tag{III.42}$$
$$x_{(12)} \cdot m_{(13)(12)(13)} = (f_{13}(g)+f_{12}((23)))m_{(13)(12)}+f_{12}((23))m_{(12)(23)}, \tag{III.43}$$
$$x_{(12)} \cdot m_{(12)(23)(12)} = f_{12}((23)(12)g)\, m_{(23)(12)}, \tag{III.44}$$
$$x_{(12)} \cdot m_{(13)(12)(23)} = -m_{\mathsf{top}}+(f_{13}((23))f_{23}-f_{12}((13)\_)f_{13})(g)m_1; \tag{III.45}$$

$$x_{(13)}\cdot m_{\mathsf{top}} = f_{13}(g)\, m_{(12)(23)(12)}, \tag{III.46}$$
$$x_{(23)}\cdot m_{\mathsf{top}} = f_{23}(g)m_{(13)(12)(13)} + (f_{13}((23))f_{23} + \Omega f_{12})(g)m_{(23)}, \tag{III.47}$$
$$\begin{aligned} x_{(12)}\cdot m_{\mathsf{top}} = &-f_{12}(g)m_{(13)(12)(23)} \\ &+(f_{13}((23))f_{23}((12)\_\_) - f_{12}((23)\_\_)f_{13}((12)\_\_))(g)m_{(12)}; \end{aligned} \tag{III.48}$$

Para terminar con las generalidades y antes de trabajar en los casos genéricos y sub-genéricos, hacemos notar que las componentes isotípicas del módulo de Verma M_e respecto de $\Bbbk^{\mathbb{S}_3}$ son

(III.49)
$$\begin{aligned} M_e[e] &= \langle m_1, m_{\mathsf{top}}\rangle, & M_e[(12)] &= \langle m_{(12)}, m_{(13)(12)(23)}\rangle, \\ M_e[(13)] &= \langle m_{(13)}, m_{(12)(23)(12)}\rangle, & M_e[(23)] &= \langle m_{(23)}, m_{(13)(12)(13)}\rangle, \\ M_e[(123)] &= \langle m_{(13)(12)}, m_{(12)(23)}\rangle, & M_e[(132)] &= \langle m_{(12)(13)}, m_{(23)(12)}\rangle. \end{aligned}$$

Luego, si $g, h \in \mathbb{S}_3$ y $(ij) \in \mathcal{O}_2^3$, por (III.14) y (III.16) tenemos que

$$M_g[h] = M_e[hg^{-1}], \tag{III.50}$$
$$x_{(ij)}\cdot M_g[h] \subseteq M_g[(\mathrm{ij})h]. \tag{III.51}$$

También es conveniente introducir la siguiente notación:

$$m_{\mathsf{soc}} = f_{13}((23))f_{23}((13))m_1 - m_{\mathsf{top}}, \tag{III.52}$$
$$m_{\mathsf{o}} = m_{(13)(12)(13)} + f_{13}((23))m_{(23)}. \tag{III.53}$$

III.2.1 Caso $\mathrm{a} \in \mathfrak{A}_3$ genérico.

En esta subsección asumimos que $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}_3$ es genérico. Para determinar los $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$-módulos simples basta determinar los submódulos maximales de los módulos de Verma de $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$. El Lema III.9 (a) nos reduce a considerar sólo los módulos de Verma M_e y M_g para algún $g \neq e$ fijo. Nosotros elegimos $g = (13)(23)$; para agilizar la exposición escribiremos los elementos de $\mathbb{S}_3$ como producto de trasposiciones.

Empecemos por la siguiente observación. Sea M un $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$-módulo cíclico generado por $v \in M[(13)(23)]$. Por (III.51) y actuando por los monomios en nuestra base de $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$, vemos que

$$M[(23)(13)] = \langle x_{(13)}x_{(23)}\cdot v, x_{(23)}x_{(12)}\cdot v, x_{(12)}x_{(13)}\cdot v\rangle.$$

Este espacio peso es $\neq 0$ por Lema III.9 (b), y una aplicación más de este lema da el siguiente resultado.

Observación III.11. Sea $M \in {}_{\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}}\mathcal{M}$ cíclico generado por $v \in M[(13)(23)]$. Si $\dim M[(23)(13)] = 1$ entonces

$$\begin{aligned} M[(23)] &= \langle x_{(13)} \cdot v\rangle, & M[e] &= \langle x_{(12)}x_{(23)} \cdot v, x_{(13)}x_{(12)} \cdot v\rangle, \\ M[(12)] &= \langle x_{(23)} \cdot v\rangle, & M[(13)] &= \langle x_{(12)} \cdot v\rangle, \\ M[(13)(23)] &= \langle v\rangle, & M[(23)(13)] &= \langle x_{(13)}x_{(23)} \cdot v\rangle. \end{aligned} \tag{III.54}$$

Luego, cualquier módulo cíclico como en la observación es de dimensión 5, 6 ó 7. Más aún, existe un módulo $L = L_{(13)(23)}$ cíclico simple con base $\{v_g | e \neq g \in \mathbb{S}_3\}$ y acción definida por

$$v_g \in L[g], \qquad x_{(ij)} \cdot v_g = \begin{cases} v_{(ij)g} & \text{si } \operatorname{sgn} g = 1, \\ f_{ij}(g)v_{(ij)g} & \text{si } \operatorname{sgn} g = -1. \end{cases} \tag{III.55}$$

Sea $\Bbbk_e$ como en el Lema III.10. Veremos que L y $\Bbbk_e$ son los únicos módulos simples de $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$.

El módulo de Verma M_e se proyecta sobre el módulo simple $\Bbbk_e$. El núcleo de esta proyección resulta ser

$$\begin{aligned} N_e &= \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot \langle M_e[h] : h \not\sim_{\mathbf{a}} e\rangle \\ &= \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot M_e[(13)(23)] = \oplus_{g \sim_{\mathbf{a}} (13)(23)} M_e[g] \oplus \langle m_{\mathsf{top}}\rangle. \end{aligned}$$

Lema III.12. *Los submódulos de M_e son*

$$\langle m_{top}\rangle \subsetneq \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot v \subsetneq N_e \subsetneq M_e$$

para cualquier $v \in M_e[(13)(23)] - 0$. Los submódulos $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot v$ y $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot u$ coinciden si y sólo si $v \in \langle u\rangle$. Los cocientes $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot v/\langle m_{top}\rangle$ y $N_e/\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot v$ son isomorfos a L; por su parte, M_e/N_e y $\langle m_{top}\rangle$ son isomorfos a $\Bbbk_e$.

Prueba. Por (III.47), (III.46) y (III.48), tenemos que $x_{(ij)} \cdot m_{\mathsf{top}} = 0$ para todo $(ij) \in \mathcal{O}_2^3$. Sean

$$\begin{aligned} v &= \lambda m_{(23)(12)} + \mu m_{(12)(13)} && \in M_e[(13)(23)] - 0, \\ w &= \mu m_{(12)(23)} + (\mu - \lambda) m_{(13)(12)} && \in M_e[(23)(13)]. \end{aligned}$$

Usando las fórmulas (III.19) a (III.45), vemos que $x_{(13)}x_{(23)} \cdot v$, $x_{(23)}x_{(12)} \cdot v$ y $x_{(12)}x_{(13)} \cdot v$ son múltiplos no nulos de w. Esto es, $\dim(\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot v)[(23)(13)] = 1$. Además, $x_{(12)}x_{(23)} \cdot v = -\mu m_{\mathsf{top}}$ y $x_{(13)}x_{(12)} \cdot v = \lambda m_{\mathsf{top}}$. Entonces

$$\left\{ v,\, x_{(23)} \cdot v,\, x_{(12)} \cdot v,\, x_{(13)} \cdot v,\, w,\, m_{\mathsf{top}} \right\}$$

es una base de $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot v$ por Observación III.11.

Sea ahora N un submódulo (propio, no trivial) de M_e. Si $N \neq \langle m_{\mathsf{top}} \rangle$ entonces existe $v \in N[(13)(23)] - 0$. Luego $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot v$ es un submódulo de N y $N[e] = \langle m_{\mathsf{top}} \rangle$ porque $m_1 \in M_e[e]$ y $\dim M_e[e] = 2$. Por lo tanto $N = \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot N[(13)(23)]$. □

Es conveniente introducir ahora los siguiente $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$-módulos que usaremos en la Sección III.3.

Definición III.13. Sea $\mathbf{t} \in \mathfrak{A}_3$. Denotamos con $W_{\mathbf{t}}(L, \Bbbk_e)$ al $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$-módulo con base $\{w_g : g \in \mathbb{S}_3\}$ y acción dada por

$$w_g \in W_{\mathbf{t}}(L, \Bbbk_e)[g], \quad x_{(ij)} \cdot w_g = \begin{cases} 0 & \text{si } g = e, \\ w_{(ij)g} & \text{si } g \neq e \text{ y } \operatorname{sgn} g = 1, \\ f_{ij}(g) w_{(ij)g} & \text{si } g \neq (ij) \text{ y } \operatorname{sgn} g = -1, \\ t_{(ij)} w_e & \text{si } g = (ij). \end{cases}$$

La buena definición de $W_{\mathbf{t}}$ sigue del siguiente lema. Recordar que un módulo M se dice que es una *extensión de T por S* si M encaja en una sucesión exacta de módulos $0 \to S \to M \to T \to 0$.

Lema III.14. *Sean $\mathbf{t}, \tilde{\mathbf{t}} \in \mathfrak{A}_3$.*

(a) Si $\mathbf{t} = (0,0,0)$ entonces $W_{\mathbf{t}}(L, \Bbbk_e) \simeq \Bbbk_e \oplus L$.

(b) Si $\mathbf{t} \neq (0,0,0)$ entonces existe $v \in M_e[(13)(23)] - 0$ tal que $W_{\mathbf{t}}(L, \Bbbk_e) \simeq \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot v$.

(c) Si $v \in M_e[(13)(23)] - 0$ entonces existe $\mathbf{t} \neq (0,0,0)$ tal que $W_{\mathbf{t}}(L, \Bbbk_e) \simeq \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot v$.

(d) $W_{\mathbf{t}}(L, \Bbbk_e)$ es una extensión de L por $\Bbbk_e$.

(e) $W_{\mathbf{t}}(L, \Bbbk_e) \simeq W_{\tilde{\mathbf{t}}}(L, \Bbbk_e)$ si y sólo si $\mathbf{t} = \mu \tilde{\mathbf{t}}$ with $\mu \in \Bbbk^{\times}$.

Prueba. (a) es inmediato. Si probamos (b) entonces (d) sigue del Lema III.12.

(b) Llamemos $w_{(13)(23)} = t_{(13)} m_{(23)(12)} - t_{(12)} m_{(12)(13)} \in M_e[(13)(23)] - 0$,

$$w_{(23)} = x_{(13)} \cdot w_{(13)(23)}, \quad w_{(13)} = x_{(12)} \cdot w_{(13)(23)}, \quad w_{(12)} = x_{(23)} \cdot w_{(13)(23)},$$
$$w_{(23)(13)} = \frac{1}{f_{23}((13))} x_{(23)} x_{(12)} \cdot w_{(13)(23)} \quad \text{y} \quad w_e = m_{\mathsf{top}}.$$

Por la prueba del Lema III.12 y (III.7), vemos que $W_{\mathbf{t}}(L, \Bbbk_e) \simeq \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot w_{(13)(23)}$.

(c) sigue de la prueba del Lema III.12.

(e) Sea $\{\tilde{w}_g : g \in \mathbb{S}_3\}$ la base de $W_{\tilde{\mathbf{t}}}(L, \Bbbk_e)$ dada en la Definición III.13. Sea $F : W_{\mathbf{t}}(L, \Bbbk_e) \to W_{\tilde{\mathbf{t}}}(L, \Bbbk_e)$ un isomorfismo de $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$-módulos. En particular, F es un isomorfismo de $\Bbbk^{\mathbb{S}_3}$-módulos y entonces existe $\mu_g \in \Bbbk^\times$ para todo $g \in \mathbb{S}_3$ tal que $F(w_g) = \mu_g \tilde{w}_g$. Además, F induce un automorfismo de L. Dado que L es simple (cf. Teorema III.18), $\mu_g = \mu_L$ para todo $g \neq e$. Por otro lado, $F(x_{(ij)} \cdot w_{(ij)}) = x_{(ij)} \cdot F(w_{(ij)})$ y entonces $\mathbf{t} = \frac{\mu_L}{\mu_e}\tilde{\mathbf{t}}$. Recíprocamente, F está bien definida para todo μ_e y μ_L tales que $\mu = \frac{\mu_L}{\mu_e}$. □

El módulo de Verma $M_{(13)(23)}$ se proyecta sobre el módulo simple L. El núcleo de esta proyección resulta ser

$$N_{(13)(23)} = \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot M_{(13)(23)}[e] = M_{(13)(23)}[e] \oplus \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot m_{\mathsf{soc}}.$$

Recordar la definición de m_{soc} en (III.52).

Lema III.15. *Los submódulos de* $M_{(13)(23)}$ *son*

$$\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot m_{soc} \subsetneq \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot v \subsetneq N_{(13)(23)} \subsetneq M_{(13)(23)}$$

para todo $v \in M_{(13)(23)}[e] - 0$. *Los submódulos* $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot v$ *y* $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot u$ *coinciden si y sólo si* $v \in \langle u \rangle$. *Los cocientes* $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot v / \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot m_{soc}$ *y* $N_{(13)(23)}/\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot v$ *son isomorfos a* $\Bbbk_e$*; por su parte* $M_{(13)(23)}/N_{(13)(23)}$ *y* $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot m_{soc}$ *son isomorfos a* L.

Prueba. Sea $v = \lambda m_1 + \mu m_{\mathsf{top}} \in M_{(13)(23)}[(13)(23)] - 0$ y $N = \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot v$. Usando las fórmulas (III.19) a (III.45) vemos que

$$x_{(12)}x_{(13)} \cdot v = \lambda m_{(12)(13)} - \mu f_{13}((23))^2 m_{(23)(12)} \text{ y}$$
$$x_{(23)}x_{(12)} \cdot v = \mu f_{23}((13))^2 m_{(12)(13)} + \big(\lambda + 2\mu f_{13}((23)) f_{23}((13))\big) m_{(23)(12)}.$$

Luego, $\dim N[(23)(13)] = 1$ si y sólo si $\lambda + \mu f_{13}((23)) f_{23}((13)) = 0$, esto es si y sólo si $v \in \langle m_{\mathsf{soc}} \rangle - 0$. En tal caso,

$$\left\{ v,\, x_{(23)} \cdot v,\, x_{(12)} \cdot v,\, x_{(13)} \cdot v,\, x_{(12)}x_{(13)} \cdot v \right\}$$

es una base de $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot m_{\mathsf{soc}}$ por la Observación III.11.

Sea ahora N un submódulo arbitrario de $M_{(13)(23)}$. Si $\dim N[(13)(23)] = 2$ entonces $N = M_{(13)(23)}$. Si $\dim N[(13)(23)] = 0$ entonces $N \subset M_{(13)(23)}[e]$ por Lema III.9. Pero esto no es posible dado que $\ker x_{(13)} \cap \ker x_{(23)} \cap \ker x_{(12)} = 0$, lo cual es comprobado usando las fórmulas (III.19) a (III.48). Resta el caso $\dim N[(13)(23)] = 1$. Por el argumento del comienzo de la demostración el lema sigue. □

Es conveniente introducir ahora los siguiente $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$-módulos que usaremos en la Sección III.3. Estos estan bien definidos gracias al lema posterior.

Definición III.16. Sea $\mathbf{t} \in \mathfrak{A}_3$. Denotamos con $W_{\mathbf{t}}(\Bbbk_e, L)$ al $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$-módulo con base $\{w_g : g \in \mathbb{S}_3\}$ y acción dada por

$$w_g \in W_{\mathbf{t}}(\Bbbk_e, L)[g], \quad x_{(ij)} \cdot w_g = \begin{cases} t_{(ij)} w_{(ij)} & \text{si } g = e, \\ f_{ij}(g) w_{(ij)g} & \text{si } g \neq e \text{ y } \operatorname{sgn} g = 1, \\ w_{(ij)g} & \text{si } \operatorname{sgn} g = -1. \end{cases}$$

Lema III.17. *Sean* $\mathbf{t}, \tilde{\mathbf{t}} \in \mathfrak{A}_3$.

(a) Si $\mathbf{t} = (0,0,0)$ *entonces* $W_{\mathbf{t}}(\Bbbk_e, L) \simeq L \oplus \Bbbk_e$.

(b) Si $\mathbf{t} \neq (0,0,0)$ *entonces existe* $v \in M_{(13)(23)}[e] - 0$ *tal que* $W_{\mathbf{t}}(\Bbbk_e, L) \simeq \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot v$.

(c) Si $v \in M_{(13)(23)}[e] - 0$ *entonces existe* $\mathbf{t} \neq (0,0,0)$ *tal que* $W_{\mathbf{t}}(\Bbbk_e, L) \simeq \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot v$.

(d) $W_{\mathbf{t}}(\Bbbk_e, L)$ *es una extensión de* $\Bbbk_e$ *por* L.

(e) $W_{\mathbf{t}}(\Bbbk_e, L) \simeq W_{\tilde{\mathbf{t}}}(\Bbbk_e, L)$ *si y sólo si* $\mathbf{t} = \mu\tilde{\mathbf{t}}$ *con* $\mu \in \Bbbk^{\times}$.

Prueba. (a) es inmediato. Si probamos (b) entonces (d) sigue del Lema III.15.

(b) Llamemos $w_{(13)(23)} = m_{\mathsf{soc}} \in M_{(13)(23)}[(13)(23)]$,

$$w_{(23)} = \frac{x_{(13)} \cdot w_{(13)(23)}}{f_{13}((13)(23))},\ w_{(13)} = \frac{x_{(12)} \cdot w_{(13)(23)}}{f_{12}((13)(23))}, \quad w_{(12)} = \frac{x_{(23)} \cdot w_{(13)(23)}}{f_{23}((13)(23))},$$

$w_{(23)(13)} = x_{(23)}x_{(12)} \cdot w_{(13)(23)}$ y $w_e = -t_{(12)}m_{(13)(12)} + t_{(13)}m_{(12)(23)} \neq 0$. Usando las fórmulas (III.19) a (III.45), no es difícil ver que $W_{\mathbf{t}}(\Bbbk_e, L) \simeq \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot w_e$.

(c) sigue usando las fórmulas (III.19) a (III.45).

La prueba de (e) es similar a la del Lema III.14 (e). $\square$

Teorema III.18. *Sea* $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}_3$ *genérico. Salvo isomorfismo* $\Bbbk_e$ *y* L *son los únicos* $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$*-módulos simples.*

Más aún M_e *es la cubierta proyectiva, y la cápsula inyectiva, de* $\Bbbk_e$*; por su parte,* $M_{(13)(23)}$ *es la cubierta proyectiva, y la cápsula inyectiva, de* L.

Prueba. La primera afirmación sigue de la Proposición I.10 y los Lemas III.9 (a), III.12 y III.15. Entonces, un conjunto de idempotentes ortogonales primitivos tiene a lo sumo 6 elementos [23, (6.8)]. Dado que $\{\delta_g : g \in \mathbb{S}_3\}$ son idempotentes ortogonales, también resultan ser primitivos. Por lo tanto, M_e y $M_{(13)(23)}$ son las cubiertas proyectivas, y las cápsulas inyectivas, de $\Bbbk_e$ y L, respectivamente por [23, (9.9)], ver página 13. $\square$

III.2.2 Caso $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}_3$ sub-generico.

En esta subsección $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}_3$ es sub-genérico con $a_{(12)} \neq a_{(13)} = a_{(23)}$. Entonces las clases de equivalencia de $\mathbb{S}_3$ determinadas por $\sim_{\mathbf{a}}$ son

$$\{e\}, \qquad \{(12)\} \qquad \text{y} \qquad \{(13), (23), (13)(23), (23)(13)\}.$$

En efecto,

- e y (12) están en el grupo de isotropía $\mathbb{S}_3^{\mathbf{a}}$.
- $(13) = (23)(12)(23)$ con $f_{12}((23)) = a_{(12)} - a_{(13)} \neq 0$ y $f_{23}((12)(23)) = a_{(23)} - a_{(12)} \neq 0$.
- $(123) = (13)(23)$ con $f_{13}((23)) = a_{(13)} - a_{(12)} \neq 0$.
- $(132) = (23)(13)$ con $f_{23}((13)) = a_{(23)} - a_{(12)} \neq 0$.

Para determinar los $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$-módulos simples, procedemos como en la subsección anterior; i.e., es suficiente determinar los submódulos maximales de los módulos de Verma M_e, $M_{(12)}$ and $M_{(13)(23)}$, ver Proposición III.8.

Sea M un $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$-módulo cíclico generado por $v \in M[(13)(23)]$. Al igual que antes, podemos describir los espacios pesos de M. Por (III.51) y actuando por los monomios en nuestra base de $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$, vemos que

$$M[(23)(13)] = \langle x_{(13)}x_{(23)} \cdot v, x_{(23)}x_{(12)} \cdot v, x_{(12)}x_{(13)} \cdot v\rangle.$$

Este espacio peso es $\neq 0$ por la Observación III.7 aplicada a $(13)(23) \sim_{\mathbf{a}} (23)(13)$, y una aplicación más de esta observación nos da el siguiente resultado.

Observación III.19. Sea $M \in {}_{\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}}\mathcal{M}$ cíclico generado por $v \in M[(13)(23)]$. Si $\dim M[(23)(13)] = 1$ entonces

$$\begin{aligned} M[(23)(13)] &= \langle x_{(12)}x_{(13)} \cdot v\rangle, \quad M[(13)] = \langle x_{(12)} \cdot v\rangle, \\ M[(12)] &= \langle x_{(23)} \cdot v, (x_{(13)}x_{(12)}x_{(13)}) \cdot v\rangle, \quad M[(23)] = \langle x_{(13)} \cdot v\rangle, \\ M[e] &= \langle x_{(23)}x_{(13)} \cdot v, (x_{(12)}x_{(23)}) \cdot v, x_{(13)}x_{(12)} \cdot v\rangle, \quad M[(13)(23)] = \langle v\rangle. \end{aligned} \tag{III.56}$$

Existe un módulo $L = L_{(13)(23)}$ cíclico simple con la acción definida sobre la base $\{v_{(13)}, v_{(23)}, v_{(13)(23)}, v_{(23)(13)}\}$ por

$$\text{(III.57)} \qquad v_g \in L[g], \quad x_{(ij)} \cdot v_g = \begin{cases} 0 & \text{si } g = (ij) \\ m_{(ij)g} & \text{si } g \neq (ij),\ \operatorname{sgn} g = -1, \\ f_{ij}(g) m_{(ij)g} & \text{si } \operatorname{sgn} g = 1. \end{cases}$$

Sean $\Bbbk_{(12)}$ y $\Bbbk_e$ como en Lema III.10. Probaremos que L, $\Bbbk_{(12)}$ y $\Bbbk_e$ son los únicos módulos simples de $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$.

El módulo de Verma M_e se proyecta sobre el módulo simple $\Bbbk_e$. El núcleo de esta proyección resulta ser

$$N_e = \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot \langle M_e[h] : h \not\sim_{\mathbf{a}} e \rangle = \oplus_{g \sim_{\mathbf{a}} (13)(23)} M_e[g] \oplus M_e[(12)] \oplus \langle m_{\mathsf{top}} \rangle.$$

Lema III.20. *El retículo de submódulos (propios, no triviales) de M_e es dibujado en* (III.58)*, donde v y w satisfacen*

$$M_e[(13)(23)] = \langle v, m_{(23)(12)} \rangle, \qquad M_e[(12)] = \langle w, m_{(13)(12)(23)} \rangle.$$

Los submódulos $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot v$ (resp. $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot w$) y $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot v_1$ (resp. $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot w_1$) coinciden si y sólo si $v \in \langle v_1 \rangle$ (resp. $w \in \langle w_1 \rangle$).Las etiquetas de las flechas indican el cociente del submódulo más grande por el más chico.

(III.58)

$$\begin{tikzcd}
 & N_e \arrow[dl, dash, "\Bbbk_{(12)}"'] \arrow[dr, dash, "L"] & \\
\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot M_e[(13)(23)] \arrow[d, dash, "L"'] \arrow[dr, dash, "L"] & & \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot M_e[(12)] \arrow[d, dash, "\Bbbk_{(12)}"] \arrow[dl, dash, "\Bbbk_{(12)}"'] \\
\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot v \arrow[d, dash, "L"'] & \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot \langle m_{(13)(12)(23)}, m_{(23)(12)} \rangle \arrow[dl, dash, "L"] \arrow[dr, dash, "\Bbbk_{(12)}"'] & \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot w \arrow[d, dash, "\Bbbk_{(12)}"] \\
\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot m_{(13)(12)(23)} \arrow[dr, dash, "\Bbbk_{(12)}"'] & & \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot m_{(23)(12)} \arrow[dl, dash, "L"] \\
 & \langle m_{\mathsf{top}} \rangle &
\end{tikzcd}$$

Prueba. Sean

$$\begin{aligned} v &= \lambda m_{(23)(12)} + \mu m_{(12)(13)} && \in M_e[(13)(23)] - 0, \\ \tilde{v} &= \mu m_{(12)(23)} + (\mu - \lambda) m_{(13)(12)} && \in M_e[(23)(13)]. \end{aligned}$$

Usando las fórmulas (III.19) a (III.45) vemos que $x_{(23)}x_{(12)} \cdot v$ y $x_{(12)}x_{(13)} \cdot v$ son múltiplos no nulos de $\tilde{v}$. Esto es, $\dim(\mathcal{A}_{[\mathsf{a}]} \cdot v)[(23)(13)] = 1$. Más aún, $x_{(12)}x_{(23)} \cdot v = -\mu m_{\mathsf{top}}$ y $x_{(13)}x_{(12)} \cdot v = \lambda m_{\mathsf{top}}$; por su parte $x_{(23)} \cdot v$ y $(x_{(13)}x_{(12)}x_{(13)}) \cdot v$ son múltiplos no nulos de $\mu m_{(13)(12)(23)}$. Por la Observación III.19 obtenemos una base para $\mathcal{A}_{[\mathsf{a}]} \cdot v$, a saber:

$$\left\{v,\, x_{(12)} \cdot v,\, x_{(13)} \cdot v,\, \tilde{v},\, m_{\mathsf{top}},\, \mu m_{(13)(12)(23)}\right\}; \tag{III.59}$$

si $\mu = 0$ obviamos el último vector.

Por (III.47), (III.46) y (III.48), $x_{(ij)} \cdot m_{\mathsf{top}} = 0$ para todo $(ij) \in \mathcal{O}_2^3$. Entonces

$$\mathcal{A}_{[\mathsf{a}]} \cdot m_{\mathsf{top}} = \langle m_{\mathsf{top}} \rangle \text{ y } \mathcal{A}_{[\mathsf{a}]} \cdot u = \mathcal{A}_{[\mathsf{a}]} \cdot m_1 = M_e,$$

si $u \in M_e[e]$ es linealmente independiente con m_{top}. Por (III.39), (III.42) y (III.45), $x_{(ij)} \cdot m_{(13)(12)(23)} = -\delta_{(12)}((\mathrm{ij}))m_{\mathsf{top}}$ para todo $(ij) \in \mathcal{O}_2^3$. Entonces

$$\mathcal{A}_{[\mathsf{a}]} \cdot m_{(13)(12)(23)} = \langle m_{\mathsf{top}}, m_{(13)(12)(23)} \rangle.$$

Por (III.18), (III.20) y (III.22),

$$x_{(ij)} \cdot m_{(12)} = \delta_{(13)}((\mathrm{ij}))m_{(13)(12)} + \delta_{(23)}((\mathrm{ij}))m_{(23)(12)}, \text{ para todo } (ij) \in \mathcal{O}_2^3.$$

Entonces

$$\mathcal{A}_{[\mathsf{a}]} \cdot w = \mathcal{A}_{[\mathsf{a}]} \cdot m_{(23)(12)} \oplus \langle w \rangle$$

por (III.59) y Observación III.7, si $w \in M_e[(12)]$ es linealmente independiente con $m_{(13)(12)(23)}$.

Sea ahora N un submódulo (propio, no trivial) de M_e distinto a $\langle m_{\mathsf{top}} \rangle$. Llamemos $\widetilde{N} = \mathcal{A}_{[\mathsf{a}]} \cdot N[(12)] + \mathcal{A}_{[\mathsf{a}]} \cdot N[(13)(23)]$. Entonces $\widetilde{N}[g] = N[g]$ para todo $g \neq e$ por Observación III.7. Por el argumento del comienzo de la demostración, $\langle m_{\mathsf{top}} \rangle \subset \widetilde{N}$. Entonces $\widetilde{N}[e] = \langle m_{\mathsf{top}} \rangle = N[e]$ pues en caso contrario $N = M_e$. Por lo tanto $N = \widetilde{N}$. Para finalizar, tenemos que calcular los submódulos de M_e generado por los subespacios homogéneos $M_e[(12)] \oplus M_e[(13)(23)]$; esto sigue usando el argumento del comienzo de la demostración. □

El módulo de Verma $M_{(13)(23)}$ se proyecta sobre el módulo simple L. El núcleo de esta proyección resulta ser

$$\begin{aligned} N_{(13)(23)} &= \mathcal{A}_{[\mathsf{a}]} \cdot \langle M_{(13)(23)}[h] : h \not\sim_{\mathsf{a}} (13)(23) \rangle \\ &= M_{(13)(23)}[e] \oplus M_{(13)(23)}[(12)] \oplus \mathcal{A}_{[\mathsf{a}]} \cdot m_{\mathsf{soc}}. \end{aligned}$$

Lema III.21. *El retículo de submódulos (propios, no triviales) de $M_{(13)(23)}$ es*

$$\begin{tikzcd}
 & & N_{(13)(23)} \arrow[dll, dash, "\Bbbk_{(12)}"'] \arrow[drr, dash, "\Bbbk_e"] & & \\
\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}\cdot M_{(13)(23)}[e] \arrow[d, dash, "\Bbbk_e"'] \arrow[drr, dash, "\Bbbk_e"] & & & & \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}\cdot M_{(13)(23)}[(12)] \arrow[dll, dash, "\Bbbk_{(12)}"'] \arrow[d, dash, "\Bbbk_{(12)}"] \\
\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}\cdot v \arrow[d, dash, "\Bbbk_e"'] & & \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}\cdot\langle m_o, m_{(12)(23)}\rangle \arrow[dll, dash, "\Bbbk_e"] \arrow[drr, dash, "\Bbbk_{(12)}"'] & & \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}\cdot w \arrow[d, dash, "\Bbbk_{(12)}"] \\
\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}\cdot m_o \arrow[drr, dash, "\Bbbk_{(12)}"'] & & & & \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}\cdot m_{(12)(23)} \arrow[dll, dash, "\Bbbk_e"] \\
 & & \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}\cdot m_{soc} & &
\end{tikzcd}$$

Aquí v y w satisfacen $M_{(13)(23)}[e] = \langle v, m_{(12)(23)}\rangle$, $M_{(13)(23)}[(12)] = \langle w, m_o\rangle$. Los submódulos $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}\cdot v$ (resp. $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}\cdot w$) y $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}\cdot v_1$ (resp. $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}\cdot w_1$) coinciden si y sólo si $v\in\langle v_1\rangle$ (resp. $w\in\langle w_1\rangle$). Las etiquetas de las flechas indican el cociente del submódulo más grande por el más chico.

Prueba. Sea $u = \lambda m_1 + \mu m_{\mathsf{top}} \in M_{(13)(23)}[(13)(23)] - 0$. Usando las fórmulas (III.19) a (III.45) vemos que

$$\begin{aligned}
&x_{(12)}x_{(13)}\cdot u = \lambda m_{(12)(13)} - \mu f_{13}((23))^2 m_{(23)(12)} \text{ y}\\
&x_{(23)}x_{(12)}\cdot u = \mu f_{23}((13))^2 m_{(12)(13)} + \big(\lambda + 2\mu f_{13}((23)) f_{23}((13))\big) m_{(23)(12)}.
\end{aligned}$$

Luego, $\dim N[(23)(13)] = 1$ si y sólo si $\lambda + \mu f_{13}((23)) f_{23}((13)) = 0$, esto es si y sólo si $u\in\langle m_{\mathsf{soc}}\rangle - 0$. Por Observación III.19,

$$\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}\cdot m_{\mathsf{soc}} = \langle m_{\mathsf{soc}},\, x_{(12)}\cdot m_{\mathsf{soc}},\, x_{(13)}\cdot m_{\mathsf{soc}},\, x_{(12)}x_{(13)}\cdot m_{\mathsf{soc}}\rangle$$

y $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}\cdot u = \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}\cdot m_1 = M_{(13)(23)}$, sy $u\in M_{(13)(23)}[(13)(23)]$ es linealmente independiente con m_{soc}.

Por las fórmulas (III.19) a (III.48), si $u\in \big(M_{(13)(23)}[e]\oplus M_{(13)(23)}[(12)]\big)\setminus 0$, entonces $0\neq\langle x_{(13)}\cdot u, x_{(23)}\cdot u\rangle \subset \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}\cdot m_{\mathsf{soc}}$. Luego, por Observación III.7,

$$\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}\cdot m_{\mathsf{soc}} \subset \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}\cdot u.$$

Además, si v y w satisfacen $M_{(13)(23)}[e] = \langle v, m_{(12)(23)}\rangle$ y $M_{(13)(23)}[(12)] = \langle w, m_{\mathsf{o}}\rangle$ entonces

$$\langle x_{(12)}\cdot v\rangle = \langle m_{\mathsf{o}}\rangle \quad \text{y} \quad \langle x_{(12)}\cdot w\rangle = \langle m_{(12)(23)}\rangle.$$

Sea ahora N un submódulo (propio, no trivial) de $M_{(13)(23)}$ distinto a $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot m_{\mathsf{soc}}$. Llamamos $\widetilde{N} = \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot N[e] + \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot N[(12)]$. Entonces $\widetilde{N}[g] = N[g]$ para $g = e, (12)$ por Observación III.7. Por el argumento del comienzo de la demostración, $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot m_{\mathsf{soc}} \subset \widetilde{N}$. Entonces $\oplus_{g \sim_{\mathbf{a}} (13)(23)} N[g] = \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot m_{\mathsf{soc}} = \oplus_{g \sim_{\mathbf{a}} (13)(23)} \widetilde{N}[g]$ pues en caso contrario $N = M_{(13)(23)}$. Por lo tanto $N = \widetilde{N}$. Para finalizar, debemos calcular los submódulos de $M_{(13)(23)}$ generados por los subespacios homogéneos $M_{(13)(23)}[(12)] \oplus M_{(13)(23)}[e]$; esto sigue usando el argumento del comienzo de la demostración. $\square$

El módulo de Verma $M_{(12)}$ se proyecta sobre el módulo simple $\Bbbk_{(12)}$. El núcleo de esta proyección resulta ser

$$\begin{aligned} N_{(12)} &= \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot \langle M_{(12)}[h] : h \not\sim_{\mathbf{a}} (12) \rangle = \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot \big(M_{(12)}[(13)(23)] \oplus M_{(12)}[e] \big) \\ &= \oplus_{g \sim_{\mathbf{a}} (13)(23)} M_{(12)}[g] \oplus M_{(12)}[e] \oplus \langle m_{\mathsf{top}} \rangle. \end{aligned}$$

Lema III.22. *El retículo de submódulos (propios, no triviales) de $M_{(12)}$ es*

$$\begin{tikzcd}
 & & N_{(12)} \arrow[dll, dash, "\Bbbk_e"'] \arrow[drr, dash, "L"] & & \\
\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot M_{(12)}[(13)(23)] \arrow[d, dash, "L"'] \arrow[drr, dash, "L"] & & & & \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot M_{(12)}[e] \arrow[dll, dash, "\Bbbk_e"'] \arrow[d, dash, "\Bbbk_e"] \\
\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot v \arrow[d, dash, "L"'] & & \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot \langle m_{(13)(12)(23)}, m_{\mathsf{o}} \rangle \arrow[dll, dash, "L"] \arrow[drr, dash, "\Bbbk_e"'] & & \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot w \arrow[d, dash, "\Bbbk_e"] \\
\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot m_{(13)(12)(23)} \arrow[drr, dash, "\Bbbk_e"'] & & & & \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot m_{\mathsf{o}} \arrow[dll, dash, "L"] \\
 & & \langle m_{\mathsf{top}} \rangle & &
\end{tikzcd}$$

Aquí v y w satisfacen $M_{(12)}[(13)(23)] = \langle v, m_{\mathsf{o}} \rangle$, $M_{(12)}[e] = \langle w, m_{(13)(12)(23)} \rangle$. Los submódulos $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot v$ (resp. $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot w$) y $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot v_1$ (resp. $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot w_1$) coinciden si y sólo si $v \in \langle v_1 \rangle$ (resp. $w \in \langle w_1 \rangle$). Las etiquetas de las flechas indican el cociente del submódulo más grande por el más chico.

Prueba. Sea $v = \lambda m_{(23)} + \mu m_{(13)(12)(13)} \in M_{(12)}[(13)(23)] \backslash 0$. Por Observación

III.19 y usando las fórmulas (III.19) a (III.48) vemos

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}\cdot v)[(13)(23)] &= \langle v\rangle,\\
(\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}\cdot v)[(13)] &= \langle (f_{13}((23))\mu-\lambda)m_{(12)(23)} - \mu f_{13}((23))m_{(13)(12)}\rangle,\\
(\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}\cdot v)[(23)] &= \langle (f_{13}((23))\mu-\lambda)m_{(12)(13)} - \lambda m_{(23)(12)}\rangle,\\
(\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}\cdot v)[(23)(13)] &= \langle (f_{13}((23))\mu-\lambda)f_{23}((13))m_{(13)} + \lambda m_{(12)(23)(12)}\rangle,\\
(\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}\cdot v)[(12)] &= \langle m_{\mathsf{top}}\rangle \text{ y}\\
(\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}\cdot v)[e] &= \langle (f_{13}((23))\mu-\lambda)m_{(13)(12)(23)}\rangle.
\end{aligned} \tag{III.60}$$

Por (III.47), (III.46) y (III.48), $x_{(ij)}\cdot m_{\mathsf{top}} = 0$ para todo $(ij)\in\mathcal{O}_2^3$. Entonces

$$\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}\cdot m_{\mathsf{top}} = \langle m_{\mathsf{top}}\rangle \text{ y } \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}\cdot u = \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}\cdot m_1 = M_e,$$

si $u\in M_{(12)}[(12)]$ es linelamente independiente con m_{top}. Por (III.39), (III.42) y (III.45), $x_{(ij)}\cdot m_{(13)(12)(23)} = -\delta_{(12)}((\mathrm{ij}))m_{\mathsf{top}}$ para todo $(ij)\in\mathcal{O}_2^3$. Entonces

$$\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}\cdot m_{(13)(12)(23)} = \langle m_{\mathsf{top}}, m_{(13)(12)(23)}\rangle.$$

Por (III.18), (III.20) y (III.22),

$$x_{(ij)}\cdot m_{(12)} = \delta_{(13)}((\mathrm{ij}))m_{(13)(12)} + \delta_{(23)}((\mathrm{ij}))m_{(23)(12)} \text{ para todo } (ij)\in\mathcal{O}_2^3.$$

Entonces

$$\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}\cdot w = \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}\cdot m_{\mathsf{o}} \oplus \langle w\rangle$$

por (III.60) y Observación III.7, si $w\in M_{(12)}[e]$ es linealmente independiente con $m_{(13)(12)(23)}$.

Sea ahora N submódulo (propio, no trivial) de $M_{(12)}$ distinto a $\langle m_{\mathsf{top}}\rangle$. Llamamos $\widetilde{N} = \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}\cdot N[e] + \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}\cdot N[(13)(23)]$. Entonces $\widetilde{N}[g] = N[g]$ para todo $g\neq(12)$ por Observación III.7. Por el argumento del comienzo de la demostración, $\langle m_{\mathsf{top}}\rangle\subset\widetilde{N}$. Entonces $N[(12)] = \langle m_{\mathsf{top}}\rangle = \widetilde{N}[(12)]$ pues en caso contrario $N = M_{(12)}$. Por lo tanto $N=\widetilde{N}$. Para finalizar tenemos que calcular los submódulos de $M_{(12)}$ generados por los subespacios homogéneos de $M_{(12)}[(13)(23)]\oplus M_{(12)}[e]$; esto sigue usando el argumento del comienzo de la demostración. □

Como una consecuencia, obtenemos los módulos simples en el caso sub-genérico. La prueba del siguiente teorema es similar a la del Teorema III.18.

Teorema III.23. *Sea* $\mathbf{a}\in\mathfrak{A}_3$ *sub-genérico con* $a_{(12)}\neq a_{(13)} = a_{(23)}$. *Salvo isomorfismo* $\Bbbk_e$, $\Bbbk_{(12)}$ *y* L *son los únicos* $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$*-módulos simples.*

Más aún, M_e *es la cubierta proyectiva, y la cápsula inyectiva, de* $\Bbbk_e$*;* $M_{(12)}$ *es la cubierta proyectiva, y la cápsula inyectiva, de* $\Bbbk_{(12)}$*;y* $M_{(13)(23)}$ *es la cubierta proyectiva, y la cápsula inyectiva, de* L*.*

Prueba. La primera afirmación sigue de la Proposición I.10 y de los Lemas III.20, III.21 y III.22.

Entonces, un conjunto de idempotentes ortogonales primitivos tiene a lo sumo 6 elementos [23, (6.8)]. Dado que $\{\delta_g : g \in \mathbb{S}_3\}$ son idempotentes ortogonales, también resultan ser primitivos. Por lo tanto, M_e, $M_{(12)}$ y $M_{(13)(23)}$ son las cubiertas proyectivas, y las cápsulas inyectivas, de $\Bbbk_e$, $\Bbbk_{(12)}$ y L, respectivamente por [23, (9.9)], ver página 13. $\square$

III.3 Tipo de representación de los levantamientos de $\mathfrak{B}(V_3)\#\Bbbk^{\mathbb{S}_3}$.

En esta sección asumimos que $n = 3$. Queremos determinar los $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$-módulos que son extensiones de módulos simples. El siguiente lema nos reduce a considerar sólo submódulos de los módulos de Verma de $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$. Así, dividimos nuevamente el trabajo en tres casos al igual que en la sección anterior y hacemos uso de todos los lemas allí demostrados.

Lema III.24. *Sea* $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}_3$ *no nulo. Sea* M *una extensión de* T *por* S*, dos* $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$*-módulos simples. Entonces* $M \simeq S \oplus T$ *como* $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$*-módulos, o bien* M *es un submódulo indescomponible del módulo de Verma* M_S*, siendo* M_S *la cápsula inyectiva de* S*.*

Prueba. Empecemos notando que si existe un submódulo propio N de M distinto a S, entonces $M \simeq S \oplus T$ como $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$-módulos. En efecto, $N \cap S$ debe ser 0 o S dado que S es simple. Sea π como en (III.61). Dado que T es simple, $\pi_{|N} : N \to T$ resulta un epimorfismo. Por lo tanto $M \simeq S \oplus T$ pues $\dim N = \dim(N \cap S) + \dim T$.

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

(III.61)
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & S \arrow[r, "\imath"] \arrow[d, hook] & M \arrow[r, "\pi"] \arrow[dl, dashed, "f"] & T \arrow[r] & 0 \\ & M_S & & & \end{tikzcd}$$

Entonces $M \simeq S \oplus T$ como $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$-módulos o f es inyectiva. Si f es inyectiva entonces M resulta ser indescomponible por los Lemas III.12 y III.15 en el caso genérico, y por los Lemas III.20, III.21 y III.22 en el caso sub-genérico. $\square$

Recordar los módulos $W_{\mathbf{t}}(L, \Bbbk_e)$ y $W_{\mathbf{t}}(\Bbbk_e, L)$ en las Definiciones III.13 y III.16. Los siguientes resultados siguen de los Lemas III.12, III.15, III.20, III.21 y III.22 junto con el Lema III.24.

Lema III.25. *Sean* $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}_3$ *genérico y* M *una extensión de* T *por* S*, dos* $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$*-módulos simples.*

(a) Si $S \simeq T$ *entonces* $M \simeq S \oplus S$.

(b) Si $S \simeq \Bbbk_e$ *y* $T \simeq L$ *entonces* $M \simeq W_{\mathbf{t}}(L, \Bbbk_e)$ *para algún* $\mathbf{t} \in \mathfrak{A}_3$.

(c) Si $S \simeq L$ *y* $T \simeq \Bbbk_e$ *entonces* $M \simeq W_{\mathbf{t}}(\Bbbk_e, L)$ *para algún* $\mathbf{t} \in \mathfrak{A}_3$. □

Lema III.26. *Sean* $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}_3$ *sub-genérico con* $a_{(12)} \neq a_{(13)} = a_{(23)}$ *y* M *una extensión de* T *por* S*, dos* $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$*-módulos simples.*

(a) Si $S \simeq T$ *entonces* $M \simeq S \oplus S$.

(b) Si $S \simeq \Bbbk_e$ *y* $T \simeq \Bbbk_{(12)}$ *entonces* $M \simeq \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot m_{(13)(12)(23)} \subset M_e$.

(c) Si $S \simeq \Bbbk_{(12)}$ *y* $T \simeq \Bbbk_e$ *entonces* $M \simeq \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot m_{(13)(12)(23)} \subset M_{(12)}$.

(d) Si $S \simeq \Bbbk_e$ *y* $T \simeq L$ *entonces* $M \simeq \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot m_{(23)(12)} \subset M_e$.

(e) Si $S \simeq L$ *y* $T \simeq \Bbbk_e$ *entonces* $M \simeq \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot m_{(12)(23)} \subset M_{(13)(23)}$.

(f) Si $S \simeq \Bbbk_{(12)}$ *y* $T \simeq L$ *entonces* $M \simeq \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot m_{\mathsf{o}} \subset M_{(12)}$.

(g) Si $S \simeq L$ *y* $T \simeq \Bbbk_{(12)}$ *entonces* $M \simeq \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \cdot m_{\mathsf{o}} \subset M_{(13)(23)}$. □

Lema III.27. *Sean* $\Bbbk_g$ *y* $\Bbbk_h$ *representaciones simples unidimensionales de* $\mathcal{A}_{[(0,0,0)]}$ *y* M *una extensión de* $\Bbbk_h$ *por* $\Bbbk_g$.

(a) Si $\operatorname{sgn} g = \operatorname{sgn} h$ *entonces* $M \simeq \Bbbk_g \oplus \Bbbk_h$.

(b) Si $\operatorname{sgn} g \neq \operatorname{sgn} h$ *y* $M \not\simeq \Bbbk_g \oplus \Bbbk_h$ *entonces* $g = (st)h$ *para un único* $(st) \in \mathcal{O}_3^2$ *y* M *tiene una base* $\{w_g, w_h\}$ *tal que* $\langle w_g \rangle \simeq \Bbbk_g$ *como* $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$*-módulos,* $w_h \in M[h]$ *y* $x_{(ij)} w_h = \delta_{(ij),(st)} w_g$.

Prueba. $M = M[g] \oplus M[h]$ como $\Bbbk^{\mathbb{S}_3}$-módulos y $M[g] \simeq \Bbbk_g$ como $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$-módulos. Dado que $x_{(ij)} \cdot M[h] \subset M[(\mathrm{ij})h]$ el lema queda demostrado □

Como una consecuencia de los lemas antes probados, mostraremos que el tipo de representación de $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ no es finito para todo $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}_3$. Para esto también necesitamos recordar algunos hechos bien conocidos.

Sean R un álgebra y $\{S_1, ..., S_t\}$ una lista completa de R-módulos simples no isomorfos. El *carcaj separador de* R es construido como sigue. El conjunto de vértices es $\{S_1, ..., S_t, S'_1, ..., S'_t\}$ y escribimos $\dim \operatorname{Ext}^1_R(S_i, S_j)$ flechas desde

S_i a S'_j, cf. [13, p. 350]. Denotemos con Γ_R al grafo que subyace al carcaj separador de R.

Una caracterización de las álgebras hereditarias de tipo de representación finito o manso es bien conocido, ver por ejemplo [25]. Como una consecuencia se obtiene el siguente resultado bien conocido. Si R es de tipo de representación finito entonces lo siguiente es el Teorema D de [24] o el Teorema X.2.6 de [13]. La prueba dada en [13] se adapta inmediatamente al caso en que R es de tipo de representación tame.

Teorema III.28. *Sea R un álgebra de dimensión finita tal que el cuadrado de su radical es cero. Entonces R es de tipo de representación finito (resp. tame) si y sólo si Γ_R es unión disjunta de diagramas de Dynkin finitos (resp. afines).* □

Para usar el teorema anterior es útil saber que

Observación III.29. Si $\mathfrak{r}$ es el radical de R entonces el carcaj separador de R es igual al carcaj separador $R/\mathfrak{r}^2$, ver por ejemplo [34, Lemma 4.5].

Combinando el Corolario VI.1.5 y la Proposición VI.1.6 de [13] obtenemos que

Proposición III.30. *Sean R un álgebra de artin, χ un cardinal infinito y asumir que existen χ módulos indescomponibles no isomorfos del mismo largo. Entonces el tipo de representación de R no es finito.* □

Ahora estamos en condiciones de enunciar el resultado antes anunciado.

Proposición III.31. *$\mathcal{A}_{[(0,0,0)]}$ es de tipo de representación salvaje. Si $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}_3$ es no nulo, entonces el tipo de representación de $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ no es finito.*

Prueba. Si $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}_3$ es genérico, podemos aplicar la Proposición III.30 por Lema III.14 y Lema III.17. Entonces el tipo de representación de $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ no es finito.

Sea $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}_3$ sub-genérico ó $\mathbf{a} = (0, ..., 0)$. Entonces $\dim \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}}(T, S) = 0$ si $S \simeq T$ por Lemas III.26 y III.27, y $\dim \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}}(T, S) = 1$ en caso contrario. En efecto, supongamos que $a_{(12)} \neq a_{(13)} = a_{(23)}$, $S \simeq \Bbbk_e$ y $T \simeq L$. Por Lema III.21 y Teorema III.23, L admite una resolución proyectiva de la forma

$$... \longrightarrow P^2 \longrightarrow M_e \oplus M_{(12)} \xrightarrow{F} M_{(13)(23)} \longrightarrow L \longrightarrow 0,$$

donde F es definido por $F_{|M_e}(m_1) = v$ y $F_{|M_{(12)}}(m_1) = w$; aquí v y w satisfacen $M_{(13)(23)}[e] = \langle v, m_{(12)(23)} \rangle$, $M_{(13)(23)}[(12)] = \langle w, m_{\mathsf{o}} \rangle$. Entonces

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}}(M_{(13)(23)}, \Bbbk_e) \xrightarrow{\partial_0} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}}(M_e \oplus M_{(12)}, \Bbbk_e) \xrightarrow{\partial_1} ...$$

y $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}}(L,\Bbbk_e) = \ker\partial_1/\operatorname{Im}\partial_0$. Dado que M_h es generado por $m_1 \in M_h[h]$ para todo $h \in \mathbb{S}_3$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}}(M_{(13)(23)},\Bbbk_e) = 0$ y $\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}}(M_e \oplus M_{(12)},\Bbbk_e) = 1$. Por Lema III.26, sabemos que existe una extensión no trivial de L por $\Bbbk_e$ y por lo tanto $\dim \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}}(L,\Bbbk_e) = 1$ por ser no nula. Para otros S y T, y para $\mathbf{a} = (0,0,0)$, la prueba es similar.

Entonces el carcaj separador de $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ es

$$\begin{tikzcd} \Bbbk_e \arrow[r] \arrow[d] & \Bbbk'_{(12)} & L \arrow[l] \arrow[d] \\ L' & \Bbbk_{(12)} \arrow[l] \arrow[r] & \Bbbk'_e \end{tikzcd} \qquad \text{en el caso sub-genércio}$$

y para $\mathbf{a} = (0,...,0)$ es

$$\begin{tikzcd} & \Bbbk_e \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ \Bbbk'_{(12)} & \Bbbk'_{(13)} & \Bbbk'_{(23)} \\ \Bbbk_{(13)(23)} \arrow[u] \arrow[ur] \arrow[urr] & & \Bbbk_{(23)(13)} \arrow[u] \arrow[ul] \arrow[ull] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \Bbbk_{(12)} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ \Bbbk'_e & \Bbbk'_{(13)(23)} & \Bbbk'_{(23)(13)} \\ \Bbbk_{(13)} \arrow[u] \arrow[ur] \arrow[urr] & & \Bbbk_{(23)}. \arrow[u] \arrow[ul] \arrow[ull] \end{tikzcd}$$

Por lo tanto la proposición sigue del Teorema III.28 y Observación III.29. □

Observación III.32. Si $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}_3$ es genérico no es difícil probar que el carcaj separador de $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ es

$$\Bbbk_e \rightrightarrows L' \qquad\qquad L \rightrightarrows \Bbbk'_e.$$

III.4 Estructura de los levantamientos de $\mathfrak{B}(V_3)\#\Bbbk^{\mathbb{S}_3}$.

Para terminar el capítulo daremos algunas propiedades internas de las álgebras $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ asumiendo que $n = 3$. Sean

$$\chi = \sum_{g\in\mathbb{S}_3} \mathrm{sgn}(g)\delta_g, \quad y = \sum_{(ij)\in\mathcal{O}_2^3} x_{(ij)}.$$

Es fácil ver que χ es un elemento de tipo grupo y que $y \in \mathcal{P}_{1,\chi}(\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]})$.

Proposición III.33. *Sea* $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}_3$. *Entonces*

(a) $G(\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}) = \{1,\chi\}$.

(b) $\mathcal{P}_{1,\chi}(\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}) = \langle 1-\chi, y\rangle$.

(c) $\Bbbk\langle \chi, y\rangle$ *es isomorfa al álgebra de Hopf de Sweedler, recordar* (I.12).

(d) Las subálgebras de Hopf de $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ *son* $\Bbbk^{\mathbb{S}_3}$, $\Bbbk\langle\chi\rangle$ *y* $\Bbbk\langle\chi, y\rangle$.

(e) $\mathcal{S}^2(a) = \chi a \chi^{-1}$ *para todo* $a \in \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$.

(f) El espacio de integrales a izquierda es $\langle m_{\mathsf{top}}\delta_e\rangle$; $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ *es unimodular.*

(g) $(\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]})^*$ *es unimodular.*

(h) $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ *no es un álgebra de Hopf cuasi-triangular.*

Prueba. Dado que $G(\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}) \subset (\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]})_0 = \Bbbk^{\mathbb{S}_3}$, (a) es inmediato.

(b) Dado que $V_3 = M((12), \mathrm{sgn}) \in {}^{\Bbbk^{\mathbb{S}_3}}_{\Bbbk^{\mathbb{S}_3}}\mathcal{YD}$, $\mathcal{P}_{1,\chi}(\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]})/\langle 1-\chi\rangle$ es isomorfo a la componente isotípica de tipo χ del cómodulo V_3. Supongamos que $z = \sum_{(ij)\in\mathcal{O}_2^3} \lambda_{(ij)} x_{(ij)} \in (V_3)_\chi$ entonces

$$\delta(z) = \sum_{h\in G,(ij)\in\mathcal{O}_2^3} \mathrm{sgn}(h)\lambda_{(ij)}\delta_h \otimes x_{h^{-1}(ij)h} = \chi\otimes z.$$

Evaluando con $g\otimes \mathrm{id}$ para cualquer $g\in\mathbb{S}_3$, vemos que $\lambda_{(ij)} = \lambda_{(12)}$ para todo $(ij)\in\mathcal{O}_2^n$. Entonces $z = \lambda_{(12)}y$.

La prueba de (c) es ahora evidente.

(d) Sea A una subálgebra de Hopf de $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$. Entonces $A_0 = A\cap(\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]})_0 \subseteq \Bbbk^{\mathbb{S}_3}$ por [47, Lemma 5.2.12]. Luego, A_0 es $\Bbbk\langle\chi\rangle$ ó $\Bbbk^{\mathbb{S}_3}$. Si $A_0 = \Bbbk\langle\chi\rangle$, entonces A es punteada sobre el grupo cíclico $\mathbb{Z}/2$. Por lo tanto A es $\Bbbk\langle\chi\rangle$ ó $\Bbbk\langle\chi,y\rangle$ por (b) y [53] ó [20]. Si $A_0 = \Bbbk^{\mathbb{S}_3}$ entonces A es semisimple o igual a $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ por Teorema III.1

Para probar (e) notar que $\chi x_{(ij)}\chi^{-1} = -x_{(ij)}$.

(f) sigue de la Subsecciónes III.2.1 y III.2.2. En efecto, sea $\Lambda\neq 0$ una integral a izquierda de $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$. Por Lema III.10, el elemento de tipo grupo distinguido de $(\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]})^*$ es ζ_h para algún $h\in\mathbb{S}_3^{\mathbf{a}}$. Luego, $\Lambda\delta_h = \zeta_h(\delta_h)\Lambda = \Lambda$. Consideremos $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ como un $\Bbbk^{\mathbb{S}_3}$-módulo vía la acción adjunta a izquierda ad_ℓ. Sean $\Lambda_g \in (\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]})[g]$ tales que $\Lambda = \sum_{g\in\mathbb{S}_3}\Lambda_g$. Entonces $\Lambda = \delta_e\Lambda = \sum_{s,t\in\mathbb{S}_3} \mathrm{ad}\,\delta_s(\Lambda_t)\delta_{s^{-1}}\delta_h = \Lambda_{h^{-1}}\delta_h$. Dado que $M_h \simeq \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}\delta_h$ podemos usar los lemas de las Subsecciones III.2.1 y III.2.2 para calcular Λ.

Así, si $\mathbf{a}$ es genérico entonces $h=e$ por Teorema III.18. Dado que $x_{(ij)}\Lambda = 0$ para todo $(ij)\in\mathbb{S}_3$, $\Lambda = m_{\mathsf{top}}\delta_e$ por Lema III.12. Si $\mathbf{a}$ is sub-genérico asumamos que $a_{(12)} \neq a_{(13)} = a_{(23)}$. Entonces $\Lambda = \Lambda_e\delta_e$ ó $\Lambda_{(12)}\delta_{(12)}$ por

Teorema III.23. Dado que $x_{(ij)}\Lambda = 0$ para todo $(ij) \in \mathbb{S}_3$, $\Lambda = m_{\mathsf{top}}\delta_e$ por los Lemas III.20 y III.22.

(g) Por (e), $\mathcal{S}^4 = \mathrm{id}$. La fórmula de Radford para la antípoda y (f), fuerzan a que el elemento de tipo grupo distinguido de $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ sea central y por lo tanto trivial. Entonces $(\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]})^*$ es unimodular.

(h) Si existe $R \in \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]} \otimes \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ tal que $(\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}, R)$ es un álgebra de Hopf cuasi-triangular entonces $(\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}, R)$ tiene una única subálgebra de Hopf cuasi-triangular minimal (A_R, R) por [56]. Probaremos que una tal subálgebra no existe usando (d) y por lo tanto $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ no es cuasi-triangular.

Por [56, Prop. 2, Thm. 1] sabemos que existen subálgebras de Hopf H y B de $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ tales que $A_R = HB$ y $H^{*\,\mathrm{cop}} \simeq B$ como álgebras de Hopf. Por empezar, $A_R \neq \mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$. En efecto, el corradical de $(\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]})^*$ es isomorfo a

- $\Bbbk^6$ si $\mathbf{a} = (0,0,0)$.
- $\Bbbk \oplus M^*(5,\Bbbk)$ si $\mathbf{a}$ es genérico por Teorema III.18.
- $\Bbbk^2 \oplus M^*(4,\Bbbk)$ if $\mathbf{a}$ es sub-genérico por Teorema III.23.

Dado que $(\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]})_0 \simeq \Bbbk^{\mathbb{S}_3}$, $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ no puede ser isomorfa a $(\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]})^{*\,\mathrm{cop}}$ para ningún $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}_3$.

Por otro lado, claramente A_R no puede ser $\Bbbk^{\mathbb{S}_3}$. Dado que $\mathcal{A}_{[\mathbf{a}]}$ no es coconmutativa, R no puede ser $1\otimes 1$. Las estructuras cuasi-triangulares sobre $\Bbbk\langle\chi\rangle$ y $\Bbbk\langle\chi, y\rangle$ son bien conocidas, ver por ejemplo [56]. Por (d) resta descartar el caso $A_R \subseteq \Bbbk\langle\chi, y\rangle$ con $R = R_0 + R_\alpha$ donde

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{1}{2}(1\otimes 1 + 1\otimes\chi + \chi\otimes 1 - \chi\otimes\chi) \text{ y} \\ R_\alpha &= \frac{\alpha}{2}(y\otimes y + y\otimes \chi y + \chi y\otimes\chi y - \chi y\otimes y) \end{aligned}$$

para algún $\alpha \in \Bbbk$. Dado que $\Delta(\delta_g)^{\mathrm{cop}}R = R\Delta(\delta_g)$ para todo $g \in \mathbb{S}_3$, se sigue que

$$\Delta(\delta_g)^{\mathrm{cop}}R_0 = R_0\Delta(\delta_g) = \Delta(\delta_g)R_0 \quad \text{en } \Bbbk^{\mathbb{S}_3};$$

pero esto no es posible porque $R_0^2 = 1\otimes 1$ y $\Bbbk^{\mathbb{S}_3}$ no es coconmutativa. $\square$

CAPÍTULO IV

ÁLGEBRAS DE HOPF DE DIMENSIÓN 16

En este capítulo terminamos la clasificación de las álgebras de Hopf de dimensión 16 iniciada por [38] en el caso semisimple, por [21] en el caso punteado y por [22] cuando el corradical es una subálgebra de Hopf pero no es contemplada en los casos anteriores. Probaremos que las álgebras de Hopf, y sus duales, listadas en estos trabajos son todas las de dimensión 16 que existen.

Teorema IV.1 (Teorema de Clasificación en dimensión 16). *Si H es un álgebra de Hopf de dimensión 16 entonces H es isomorfa a una y sólo un álgebra de Hopf que aparece en una de las siguientes listas.*

1. *Las álgebras de grupo de grupos de orden* 16 *y sus duales.*
2. *Las álgebras de Hopf semisimples listadas en [38, Thm. 1.2].*
3. *Las álgebras de Hopf punteadas listadas en [21, Sec. 2.5].*
4. *Las dos álgebras de Hopf* [1] *no semisimples, no punteadas cuyo corradical es una subálgebra de Hopf listadas en [22, Thm. 5.1].*
5. *Los duales de las álgebras de Hopf punteadas listadas en [14, Sec. 4.2, Table 2].*

Prueba. Sea H un álgebra de Hopf de dimensión 16. Si H es semisimple entonces H es isomorfa a un álgebra de grupo o al dual de un álgebra de grupo o a una de las álgebras de Hopf listadas en [38, Thm. 1.2]. Si H es no semisimple y punteada entonces H es isomorfa a una de las álgebras de Hopf dadas en [21, Section 2.5]. Si H es no semisimple y su corradical es una subálgebra de Hopf, la cual no es un álgebra de grupo, entonces H es isomorfa a una de las dos álgebras de Hopf dadas por [22, Thm. 5.1]. Si el corradical de H no es una subálgebra de Hopf entonces H^* es punteada por Teorema IV.3. □

[1] Estas álgebras son isomorfas a sus propios duales.

El corradical de las álgebras clasificadas en los trabajos antes citados forman una subálgebra de Hopf. Cuando un álgebra de Hopf de dimensión 16 no satisface esta propiedad veremos que su corradical puede tener una de seis posibles formas diferentes, donde la "forma" es descrita de acuerdo a la siguiente definición.

Definición IV.2. Un álgebra de Hopf H es *de tipo* $(n_1, n_2, \dots, n_t)$ si su corradical es isomorfo a $\Bbbk^{n_1} \oplus \mathcal{M}^*(2,\Bbbk)^{n_2} \oplus \cdots \oplus \mathcal{M}^*(t,\Bbbk)^{n_t}$.

El principal ingrediente para demostrar la exahustividad del Teorema de Clasificación en dimensión 16 es el siguiente teorema. La prueba es hecha caso por caso de acuerdo al tipo del álgebra de Hopf.

Teorema IV.3. *Sea H un álgebra de Hopf de dimensión 16. Si el corradical de H no es una subálgebra de Hopf entonces H^* es punteada.*

Sea H como en el enunciado del Teorema IV.3. A continuación explicaremos las líneas generales de la prueba de este teorema. El primer paso consiste en describir la posible forma del corradical de H, esto lo hacemos en la Sección IV.3. Resulta ser que H es de tipo $(1,2)$, $(2,1)$, $(2,2)$, $(2,3)$, $(4,1)$ o $(4,2)$ por Proposición IV.15.

En la Sección IV.4, una vez fijada la forma del corradical terminamos de probar el Teorema IV.3: H no puede ser de tipo $(1,2)$ ni $(4,1)$ –por las Proposiciones IV.20 y IV.21; y H^* es punteada si H es de tipo $(2,1)$, $(2,2)$, $(2,3)$ o $(4,2)$ – por las Proposiciones IV.25, IV.26 y IV.27. En estas proposiciones nos valemos esencialmente de las subcoálgebras simples de H.

Más explícitamente, consideramos las subálgebras de Hopf generadas por estas subcoálgebras y analizamos la acción de la antípoda y de los elementos de tipo grupo de H sobre ellas. Lo cual nos permite usar los resultados de la Sección IV.1 referido a álgebras de Hopf generadas por coálgebras simples u obtenemos extensiones de álgebras de Hopf para las que existe una vasta teoría que fue recordada en la Sección I.5. Por [54], las subálgebras de Hopf de H son de dimensión 2, 4 ú 8. Las de dimensión 2 y 4 son bien conocidas, son álgebras de grupo o álgebras de Sweedler – recordar la definición en (I.12). Las de dimensión 8 serán recordadas en la Sección IV.2, éstas fueron clasificadas por [58].

IV.1 Álgebras de Hopf generadas por coálgebras simples.

Ştefan en [58] obtuvo algunos resultados aplicables a álgebras de Hopf generadas por coálgebras simples de dimensión 4 que le fueron útiles para la clasificación de álgebras de Hopf de dimensión ≤ 11. Natale en [48] dio una importante consecuencia de uno de los resultados de Ştefan y la utilizó para clasificar álgebras de Hopf de dimensión 12. Estos resultados se basan en considerar el comportamiento del corradical de un álgebra de Hopf luego de aplicarle un automorfismo de coálgebras. Este tipo de argumentos ha sido utilizado en varios otras dimensiones [15, 17].

En esta sección presentamos más consecuencias de los resultados de [58, 48] que nos servirán para la clasificación de álgebras de Hopf de dimensión 16 pero que se pueden emplear en otras dimensiones. Empezamos recordando el siguiente teorema que nos sirve para probar los lemas posteriores.

Teorema IV.4. *[58, Thm. 1.4. b)] Sea f un automorfismo de coálgebras de $C = \mathcal{M}^*(2,\Bbbk)$ de orden finito n. Entonces existe una base de comatrices $\{e_{ij} \mid 1 \leq i,j \leq 2\}$ de C y una raíz de la unidad ω tal que $f(e_{ij}) = \omega^{i-j} e_{ij}$ y $\operatorname{ord}\omega = n$.* □

Lema IV.5. *Sea $\pi : H \to K$ un morfismo de álgebras de Hopf de dimensión finita tal que $\pi(g) = 1$ para algún $g \in G(H)$, $g \neq 1$. Suponer que $H = \Bbbk\langle 1, C\rangle$ con C una subcoálgebra simple de dimensión 4. Si una de las siguientes condiciones vale:*

- *C es estable por L_g o R_g,*
- *C es estable por $\operatorname{ad}_\ell(g)$ o $\operatorname{ad}_r(g)$ y $g \notin \mathcal{Z}(H)$,*

entonces $\pi(H) \subseteq k[G(K)]$. En particular, si π es un epimorfismo entonces K es un álgebra de grupo.

Prueba. Supongamos que C es estable por L_g. En tal caso $L_{g|C} \neq \operatorname{id}_C$. En efecto, si $\{e_{ij} \mid 1 \leq i,j \leq 2\}$ es una base de comatrices de C entonces $1 = e_{11}S(e_{11}) + e_{12}S(e_{21})$. Si $L_{g|C} = \operatorname{id}_C$, multiplicando a ambos lados de la igualdad obtenemos que $g = 1$ lo cual es una contradicción.

Dado que $L_{g|C}$ es un automorfismo de coálgebras de C, por el Teorema IV.4, existen $\omega \in \Bbbk^\times$ con $\operatorname{ord}(\omega) = \operatorname{ord}(L_{g|C}) > 1$ y una base de comatrices $\{e_{ij} \mid 1 \leq i,j \leq 2\}$ de C tal que

$$L_g(e_{ij}) = g e_{ij} = \omega^{i-j} e_{ij}.$$

Aplicando π en ambos lados de esta igualdad, obtenemos $\pi(e_{12}) = \pi(e_{21}) = 0$. Entonces $\pi(e_{11}), \pi(e_{22}) \in G(K)$ y por lo tanto $\pi(H) \subseteq k[G(K)]$.

La prueba con R_g, $\operatorname{ad}_\ell(g)$ o $\operatorname{ad}_r(g)$ es similar. Notar que $\operatorname{ad}_\ell(g)_{|C}$ y $\operatorname{ad}_r(g)_{|C}$ no pueden ser id_C puesto que $g \notin \mathcal{Z}(H)$. □

Lema IV.6. *Sea $\pi : H \to K$ un epimorfismo de álgebras de Hopf de dimensión finita y asumir que K es no-semisimple. Suponer que $H = \Bbbk\langle 1, C\rangle$ con C una subcoálgebra simple de dimensión 4 estable por S_H^2. Entonces* $\operatorname{ord} S_H^2 = \operatorname{ord} S_K^2$.

Prueba. Por IV.4, existen $\omega \in \Bbbk$ con $\operatorname{ord}(\omega) = \operatorname{ord}(S^2_{H|C})$ y una base de comatrices $\{e_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq 2\}$ de C tal que

$$S_H^2(e_{ij}) = \omega^{i-j} e_{ij}$$

Aplicando π en ambos lados de esta igualdad, obtenemos $S_K^2(\pi(e_{ij})) = \omega^{i-j}\pi(e_{ij})$. Entonces ω o ω^{-1} es un autovalor de S_K^2. En efecto, $\pi(e_{12}) \neq 0$ o $\pi(e_{21}) \neq 0$ pues, si sucede lo contrario $\pi(e_{11}), \pi(e_{22}) \in G(K)$ y K sería semisimple, porque H es generada por C y 1 como álgebra. Entonces $\operatorname{ord}(\omega) = \operatorname{ord}(S^2_{H|C}) = \operatorname{ord} S_H^2$ divide a $\operatorname{ord} S_K^2$.

Finalmente $(S_K^2)^{\operatorname{ord} S_H^2} = 1$ dado que $K^* \hookrightarrow H^*$. Entonces $\operatorname{ord} S_K^2$ divide a $\operatorname{ord} S_H^2$ y por lo tanto $\operatorname{ord} S_K^2 = \operatorname{ord} S_H^2$ □

A continuación presentamos el resultado de Natale anunciado al principio del capítulo, la definición de sucesión exacta central de Hopf es recordada en Definición I.13.

Proposición IV.7. *[48, Prop. 1.3]. Sea H una álgebra Hopf no-semisimple de dimensión finita. Suponer que H es generada por una subcoálgebra simple de dimensión 4 estable por la antípoda. Entonces H encaja en una sucesión exacta central de álgebras de Hopf $\Bbbk^G \overset{\imath}{\hookrightarrow} H \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} A$, con G un grupo finito y A^* un álgebra de Hopf punteada no-semisimple.* □

Una consecuencia de esta proposición es

Teorema IV.8. *Sea H un álgebra de Hopf no-semisimple tal que $\dim H$ es impar o igual a $p^a q^b$, con p, q números primos. Suponer que H es generada por una subcoálgebra simple de dimensión 4 estable por la antípoda. Si*

$$H_0 = \Bbbk[G(H)] \oplus \mathcal{M}^*(2, \Bbbk) \quad o \quad G(H) \cap \mathcal{Z}(H) = 1$$

entonces H^* es punteada.

Prueba. Por IV.7, H encaja en una sucesión exacta central $k^G \overset{\imath}{\hookrightarrow} H \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} A$, con G un grupo finito y A^* un álgebra de Hopf punteada no-semisimple.

Notar que si $G = 1$ no hay nada que probar, pues en tal caso $H = A$.

Supongamos que $G \neq 1$. Dado que $|G|$ divide a $\dim H$ por [54], G es soluble por el Teorema de Feit-Thompson en el caso $\dim H$ impar, y por el Teorema de Burnside en el otro caso. Entonces $\Bbbk^G$ tiene al menos un elemento de tipo grupo no-trivial. Sea $\alpha \in G(\Bbbk^G) \subseteq G(H)$ no-trivial.

Si $H_0 = k[G(H)] \oplus \mathcal{M}^*(2, \Bbbk)$ dado que L_α es un automorfismo de coálgebras de H, L_α fija a $\mathcal{M}^*(2, \Bbbk)$. Como $\pi(\alpha) = 1$, IV.5 implica que A es generada por elementos de tipo grupo. En particular, A resulta ser semisimple lo cual es una contradicción. Por lo tanto $G = 1$.

Si $G(H) \cap \mathcal{Z}(H) = 1$ entonces es inmediato que $G = 1$. □

IV.2 Álgebras de Hopf de dimensión 8 no semisimples.

A continuación damos la lista de las álgebras de Hopf punteadas de dimensión 8 [58]. Como álgebras, las presentamos con generadores y relaciones. La comultiplicación es dada en termino de los generadores.

Sea i una raíz primitiva de la unidad de orden 4.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_2 := \ & k\langle g, x, y \mid g^2 - 1 = x^2 = y^2 = gx + xg = gy + yg = xy + yx = 0\rangle,\\ & \Delta(g) = g \otimes g, \quad \Delta(x) = x \otimes g + 1 \otimes x, \quad \Delta(y) = y \otimes g + 1 \otimes y.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}'_4 := \ & k\langle g, x \mid g^4 - 1 = x^2 = gx + xg = 0\rangle,\\ & \Delta(g) = g \otimes g, \quad \Delta(x) = x \otimes g + 1 \otimes x;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}''_4 := \ & k\langle g, x \mid g^4 - 1 = x^2 - g^2 + 1 = gx + xg = 0\rangle,\\ & \Delta(g) = g \otimes g, \quad \Delta(x) = x \otimes g + 1 \otimes x;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}'''_{4,i} := \ & k\langle g, x \mid g^4 - 1 = x^2 = gx - ixg = 0\rangle,\\ & \Delta(g) = g \otimes g, \quad \Delta(x) = x \otimes g^2 + 1 \otimes x;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{2,2} := \ & k\langle g, h, x \mid g^2 = h^2 = 1,\ x^2 = gx + xg = hx + xh = gh - hg = 0\rangle,\\ & \Delta(g) = g \otimes g, \quad \Delta(h) = h \otimes h, \quad \Delta(x) = x \otimes g + 1 \otimes x.\end{aligned}$$

Observación IV.9. Como álgebras de Hopf: $\mathcal{A}_2 \simeq (\mathcal{A}_2)^*$, $\mathcal{A}'''_{4,i} \simeq \mathcal{A}'''_{4,-i} \simeq (\mathcal{A}'_4)^*$ y $\mathcal{A}_{2,2} \simeq (\mathcal{A}_{2,2})^*$ [58]. Además, examinando caso por caso todas estas álgebras de Hopf tienen una subálgebra de Hopf isomorfa a $T_4(-1)$.

Por [58], $\mathcal{A} := (\mathcal{A}''_4)^*$ es la única álgebra de Hopf de dimensión 8 que no es semisimple ni punteada; su corradical es $\mathcal{A}_0 = k[C_2] \oplus \mathcal{M}^*(2, \Bbbk)$ y $\mathcal{A}$ es generada como álgebra por $\mathcal{M}^*(2, \Bbbk)$. Luego calcularemos explícitamente la multiplicación de los elementos de una base de comatrices de $\mathcal{M}^*(2, \Bbbk)$. Para esto, primero describimos las representaciones simples de $\mathcal{A}''_4$.

Sean g y x los generadores de $\mathcal{A}_4''$.

Lema IV.10. *Las representaciones simples de dimensión* 1 *de* $\mathcal{A}_4''$ *son* ε *y*

$$\alpha : \mathcal{A}_4'' \longmapsto \Bbbk, \quad \alpha(g) \mapsto -1, \quad \alpha(x) \mapsto 0. \tag{IV.1}$$

Salvo isomorfismos, la única representación simple de dimensión 2 *de* $\mathcal{A}_4''$ *es*

$$\rho : \mathcal{A}_4'' \longmapsto \mathcal{M}(2, \Bbbk), \quad \rho(g) \mapsto \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \rho(x) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{IV.2}$$

Prueba. Por simplicidad, si (V, ϱ) es una representación simple de $\mathcal{A}_4''$ escribiremos a en vez de $\varrho(a) \in \operatorname{End} V$.

Si $\dim V = 1$, por las relaciones $g^4 = 1$ y $xg = -gx$ se sigue que g es una raíz cuarta de 1 y $x = 0$. Luego $g^2 = 1$ por la relación $x^2 - g^2 + 1 = 0$. Entonces $g = 1$ o $g = -1$. Estas opciones dan lugar a ε y α respectivamente.

Si $\dim V = 2$, porque $g^4 = \mathrm{id}$, podemos elegir una base V que diagonalize a g. Más aún los dos autovalores de g son distintos. En efecto, si fueran iguales entonces $x = 0$ (porque $xg = -gx$) y tal representación no sería simple.

Sean ξ y η los autovalores de g, que son raices cuartas de 1. Entonces

$$xg = \begin{pmatrix} \xi x_{11} & \eta x_{12} \\ \xi x_{21} & \eta x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi x_{11} & -\xi x_{12} \\ -\eta x_{21} & -\eta x_{22} \end{pmatrix} = -gx, \tag{IV.3}$$

por lo tanto $x_{11} = x_{22} = 0$. Más aún $x_{12} \neq 0$ y $x_{21} \neq 0$ porque la representación es simple. Entonces $\eta = -\xi$. Luego

$$0 = \begin{pmatrix} x_{12}x_{21} - \xi^2 + 1 & 0 \\ 0 & x_{12}x_{21} - \xi^2 + 1 \end{pmatrix}. \tag{IV.4}$$

por la relación $0 = x^2 - g^2 + \mathrm{id}$. Entonces $\xi^2 \neq 1$ dado que $x_{12} \neq 0 \neq x_{21}$. Por lo tanto ξ es una raíz primitiva de 1 de orden 4 y $x_{12}x_{21} = -2$. Fijando $x_{12} = 2$ y $x_{21} = -1$, obtenemos ρ.

Dado que $(\mathcal{A}_4'')_0^* = \mathcal{A}_0 = k[C_2] \oplus \mathcal{M}^*(2, \Bbbk)$, el lema queda demostrado. □

Sea $(\Bbbk^2, \rho)$ la representación de dimensión 2 dada por IV.10. Sean $\{E_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq 2\}$ las funciones coordenadas de $\mathcal{M}(2, k)$. Entonces

$$\mathcal{E}_{\mathcal{A}} := \{e_{ij} := E_{ij} \circ \rho \mid 1 \leq i, j \leq 2\}$$

es una base de comatrices de la subcoálgebra simple de dimensión 4 de $\mathcal{A}$.

Lema IV.11. *Los elementos de $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ satisfacen:*

$$S(e_{11}) = e_{22}, \quad S(e_{22}) = e_{11}, \quad S(e_{12}) = -\xi e_{12}, \quad S(e_{21}) = \xi e_{21}, \tag{IV.5}$$

$$e_{11}^2 = e_{22}^2 = \alpha, \quad e_{12}^2 = e_{21}^2 = 0, \tag{IV.6}$$

$$e_{11}e_{22} = e_{22}e_{11} = \varepsilon, \quad e_{12}e_{21} = e_{21}e_{12} = 0, \tag{IV.7}$$

$$e_{12}e_{11} = \xi e_{11}e_{12}, \quad e_{21}e_{11} = \xi e_{11}e_{21}, \tag{IV.8}$$

$$e_{12}e_{22} = -\xi e_{22}e_{12}, \quad e_{21}e_{22} = -\xi e_{22}e_{21}. \tag{IV.9}$$

En particular, obtenemos que:

$$\Delta(e_{11}e_{12}) = e_{11}e_{12} \otimes \varepsilon + \alpha \otimes e_{11}e_{12}, \tag{IV.10}$$

$$\Delta(e_{11}e_{21}) = e_{11}e_{21} \otimes \alpha + \varepsilon \otimes e_{11}e_{21}, \tag{IV.11}$$

es decir, $e_{11}e_{12}$ y $e_{11}e_{21}$ son casi-primitivos no-triviales de $\mathcal{A}$.

Prueba. Dado que $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_4'')^*$, la multiplicación de $\mathcal{A}$ es el producto de convolución y la antípoda de $\mathcal{A}$ es $S(a) = a \circ \mathcal{S}$ para todo $a \in \mathcal{A}$ con $\mathcal{S}$ la antípoda de $\mathcal{A}_4''$. Notar que $\{g^n x^m \mid 0 \leq n \leq 3, 0 \leq m \leq 1\}$ es una base de $\mathcal{A}_4''$, $\mathcal{S}(g) = g^{-1}$ y $\mathcal{S}(x) = -xg^{-1}$ [58].

Por IV.10,

$$\begin{aligned} S(e_{11})(g^n) &= e_{11}(\mathcal{S}(g^n)) = e_{11}(g^{-n}) = \xi^{-n} = (-\xi)^n = e_{22}(g^n) \text{ y} \\ S(e_{11})(g^n x) &= e_{11}(\mathcal{S}(g^n x)) = e_{11}(-xg^{-n-1}) = 0 = e_{22}(g^n x), \end{aligned}$$

entonces $S(e_{11}) = e_{22}$. Similarmente, probamos que $S(e_{22}) = e_{11}$.

Claramente, $S(e_{12})(g^n) = S(e_{21})(g^n) = 0$ para todo n y por IV.10,

$$\begin{aligned} S(e_{12})(g^n x) &= e_{12}(\mathcal{S}(g^n x)) = e_{12}(-xg^{-n-1}) \\ &= -2(-\xi)^{-n-1} = -2\xi\xi^n = -\xi e_{12}(g^n x). \end{aligned}$$

Entonces $S(e_{12}) = -\xi e_{12}$. Similarmente probamos que $S(e_{21}) = \xi e_{21}$ y (IV.5) queda demostrada.

Dado que g es un elemento de tipo grupo $e_{12}^2(g^n) = (e_{12}(g^n))^2 = 0$ y

$$e_{11}^2(g^n) = (e_{11}(g^n))^2 = \xi^{2n} = (-1)^n = \alpha(g^n) \text{ para todo } n.$$

Dado que x es un $(1, g)$-primitivo

$$\begin{aligned} e_{11}^2(g^n x) &= e_{11}(g^n x)e_{11}(g^{n+1}) + e_{11}(g^n)e_{11}(g^n x) = 0 = \alpha(g^n x) \text{ y} \\ e_{12}^2(g^n x) &= e_{12}(g^n x)e_{12}(g^{n+1}) + e_{12}(g^n)e_{12}(g^n x) = 0 \text{ para todo } n. \end{aligned}$$

Por lo tanto $e_{11}^2 = \alpha$ y $e_{12}^2 = 0$. Similarmente probamos que $e_{22}^2 = \alpha$ y $e_{21}^2 = 0$. Queda demostrado (IV.6).

Para demostrar (IV.7), primero probamos que $e_{12}e_{21} = 0 = e_{21}e_{12}$ con cálculos similares a los anteriores. Luego usamos el axioma de la antípoda y (IV.5) para probar que $e_{11}e_{22} = \varepsilon = e_{22}e_{11}$.

(IV.9) sigue de (IV.5) y (IV.8). Entonces basta con probar (IV.8). Dado que $g \in G(\mathcal{A}_4'')$, $e_{11}e_{12}(g^n) = e_{12}e_{11}(g^n) = 0$ y $e_{11}e_{21}(g^n) = e_{21}e_{11}(g^n) = 0$ para todo n. Además

$$\begin{aligned} e_{11}e_{12}(g^n x) &= e_{11}(g^n x)e_{12}(g^{n+1}) + e_{11}(g^n)e_{12}(g^n x) \\ &= e_{11}(g^n)e_{12}(g^n x) = \xi^n \xi^n 2 = (-1)^n 2; \\ e_{12}e_{11}(g^n x) &= e_{12}(g^n x)e_{11}(g^{n+1}) + e_{12}(g^n)e_{11}(g^n x) \\ &= e_{12}(g^n x)e_{11}(g^{n+1}) = \xi^n 2 \xi^{n+1} = (-1)^n 2\xi; \\ e_{11}e_{21}(g^n x) &= e_{11}(g^n x)e_{21}(g^{n+1}) + e_{11}(g^n)e_{21}(g^n x) \\ &= e_{11}(g^n)e_{21}(g^n x) = -\xi^n(-\xi)^n = -1; \\ e_{21}e_{11}(g^n x) &= e_{21}(g^n x)e_{11}(g^{n+1}) + e_{21}(g^n)e_{11}(g^n x) \\ &= e_{21}(g^n x)e_{11}(g^{n+1}) = -(-\xi)^n \xi^{n+1} = -\xi. \end{aligned}$$

Entonces $e_{12}e_{11} = \xi e_{11}e_{12}$ y $e_{21}e_{11} = \xi e_{11}e_{21}$ como queríamos.

Usando (IV.6), (IV.7) y que Δ es un morfismo de álgebras, $e_{11}e_{12}$ y $e_{11}e_{21}$ resultan ser casi-primitivos. Además son no-triviales porque

$$(\varepsilon - \alpha)(g) \neq 0 = e_{11}e_{12}(g) = e_{11}e_{21}(g).$$

□

Sea T la subálgebra de Hopf de $\mathcal{A}$ generada por α e $y := e_{11}e_{21}$; notar que $T \simeq T_4(-1)$. Sea $C_2 = \langle c \rangle$ el grupo cíclico de orden 2.

Lema IV.12. *(i) Si $\pi : \mathcal{A} \to T_4(-1)$ es un morfismo de álgebras de Hopf entonces $\pi(\mathcal{A}) \subseteq \Bbbk[G(T_4(-1))]$ y $T \subseteq \mathcal{A}^{\mathrm{co}\,\pi}$.*

(ii) Existe una sucesión exacta de álgebras de Hopf $T \overset{\imath}{\hookrightarrow} \mathcal{A} \overset{\psi}{\twoheadrightarrow} \Bbbk[C_2]$.

Prueba. (i) El único elemento de tipo grupo de orden 2 en $\mathcal{A}_4''$ es central. Entonces $\mathcal{A}_4''$ no puede tener una subálgebra de Hopf isomorfa a $T_4(-1)$. Por lo tanto π no puede ser un epimorfismo. Luego $\pi(\mathcal{A}) \subseteq \Bbbk[G(T_4(-1))]$.

Dado que $\Bbbk[G(T_4(-1))]$ no tiene elementos nilpotentes, $0 = \pi(e_{12}) = \pi(e_{21})$ por (IV.6). Entonces $\pi(e_{11}), \pi(e_{22}) \in G(T_4(-1))$ y por (IV.6), $\pi(\alpha) = 1$. Luego $T \subseteq \mathcal{A}^{co\pi}$.

(ii) Sea $\psi : \mathcal{A} \to \Bbbk[C_2]$ el epimorfismo de álgebras de Hopf inducido por la inclusión central $\Bbbk[g^2] \hookrightarrow \mathcal{A}_4''$. Luego (ii) sigue por lo anterior y I.14. □

IV.3 La forma del corradical de un álgebra de Hopf de dimensión 16.

La forma del corradical será descrita por la siguiente definición.

Observación IV.13. Si H es un álgebra de Hopf punteada y $\dim H = 16$ entonces H^* es punteada o de tipo $(2,1)$, $(2,2)$, $(2,3)$ o $(4,2)$ por [14, Section 4.2].

Observación IV.14. Sea H un álgebra de Hopf no semisimple, no punteada y $\dim H = 16$. Si el corradical de H es una subálgebra de Hopf entonces $H^* \simeq H$ y es de tipo $(4,1)$ por [22, Thm. 5.1].

Proposición IV.15. *Sea H un álgebra de Hopf de dimensión 16 tal que su corradical no es una subálgebra de Hopf. Entonces H es de tipo: $(1,2)$, $(2,1)$, $(2,2)$, $(2,3)$, $(4,1)$ o $(4,2)$.*

Prueba. Por [54], $|G(H)|$ divide a 16. Si $G(H) = 1$, entonces H debe ser de tipo $(1,2)$ por [15, Prop. 7.1].

Supongamos que H es de tipo $(|G(H)|, n_2, n_3)$ con $|G(H)| > 1$. Por [6, Lemma 2.1], $|G(H)|$ divide a $\dim H_0 = |G(H)| + 4 \cdot n_2 + 9 \cdot n_3$. Entonces $n_3 = 0$. Si $|G(H)| = 2$ entonces $n_2 \in \{1,2,3\}$. Si $|G(H)| = 4$ entonces $n_2 \in \{1,2\}$. □

Luego daremos algunas propiedades de las álgebras de Hopf de dimensión 16 tales que su corradical no sea una subálgebra de Hopf. Antes recordemos un resultado de Beattie y Dăscălescu.

Proposición IV.16. *[15, Cor. 4.3]. Sea H un álgebra de Hopf no cosemisimple de dimensión finita y $H_0 \simeq \Bbbk[G(H)] \oplus \mathcal{M}^*(n_1, \Bbbk) \oplus \cdots \oplus \mathcal{M}^*(n_t, \Bbbk)$ con $2 \leq n_1 \leq \cdots \leq n_t$. Si H no tiene casi-primitivos no triviales entonces*

$$\dim H > (1 + 2n_1)|G(H)| + \sum_{i=1}^{t} n_i^2. \qquad \square$$

Lema IV.17. *Sea H un álgebra de Hopf de dimensión 16.*

(i) Si H es de tipo $(4,1)$ o $(4,2)$ entonces H tiene una subálgebra de Hopf punteada K de dimensión 8 tal que $G(H) = G(K)$.

(ii) Si H es de tipo $(2,2)$ o $(2,3)$ entonces H tiene una subálgebra de Hopf isomorfa a $T_4(-1)$.

(iii) Si H es de tipo $(2,1)$ y H^* es no punteada entonces H tiene una subálgebra de Hopf isomorfa a $\mathcal{A}$. En particular, esta contiene una subálgebra de Hopf isomorfa a $T_4(-1)$.

(iv) Si H es de tipo $(2,2)$ o $(2,3)$ entonces $G(H) \cap \mathcal{Z}(H) = 1$. Si H es de tipo $(2,1)$ y H^* es no punteada entonces $G(H) \cap \mathcal{Z}(H) = 1$. Si H es de tipo $(4,1)$ o $(4,2)$ entonces $|G(H) \cap \mathcal{Z}(H)| \leq 2$.

Prueba. Si H es de tipo $(2,2)$, $(2,3)$, $(4,1)$ o $(4,2)$ entonces H tiene un casi-primitivo no trivial. Pues de no ser así, podemos aplicar IV.16 y obtener una contradicción. Sea K la subálgebra de Hopf de H generada por $G(H)$ y $\mathcal{P}(H)$. Por [47, Lemma 5.5.1], K es punteada y $\dim K > |G(H)|$.

(i) Si $|G(H)| = 4$ entonces $\dim K = 8$ por [54].

(ii) Si $|G(H)| = 2$ entonces K es isomorfa a $T_4(-1)$ o $\mathcal{A}_2$ por [54] y [58], cf. Sección IV.2. Notar que $\mathcal{A}_2$ tiene una subálgebra de Hopf isomorfa a $T_4(-1)$ por Observación IV.9.

Sea H como en *(iii)* y sea C la única subcoálgebra simple de H de dimensión 4. Entonces la subálgebra de Hopf K generada por C es isomorfa a $\mathcal{A}$. En efecto, $\dim K = 8$ ó 16 por [54]. Si $K = H$ entonces H^* es punteada por IV.8, lo cual contradice la hipótesis en *(iii)*. Entonces $\dim K = 8$ y $K \simeq \mathcal{A}$ por [58].

Finalmente probaremos *(iv)*. Si H es de tipo $(2,2)$, $(2,3)$ ó $(2,1)$ con H^* no punteada entonces $\mathcal{Z}(H) \cap G(H) = \mathcal{Z}(H) \cap G(T_4(-1)) = 1$ por *(ii)* y *(iii)*. Si H es de tipo $(4,1)$ o $(4,2)$ entonces *(iv)* sigue de *(i)*, cf. Sección IV.2. $\square$

IV.4 Exahustividad del teorema de clasificación.

En las siguientes subsecciones demostraremos las proposiciones citadas en la prueba anterior.

Notación IV.18. De ahora en adelante, H denotará un álgebra de Hopf de dimensión 16 tal que su corradical no es una subálgebra de Hopf.

Notar que por IV.14, si H^* no es punteada entonces el corradical de H^* no es una subálgebra de Hopf.

IV.4.1 H de tipo $(1, 2)$.

Observación IV.19. Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita generada por dos subcoálgebras simples C y D tal que $S(C) = D$. Entonces C y 1 generan H como un álgebra.

En efecto, la subálgebra A de H generada por C y 1 es una sub-biálgebra. Entonces A es una subálgebra de Hopf porque $\dim H < \infty$. Por lo tanto $D = S(C) \subseteq A$.

Proposición IV.20. *H no puede ser de tipo (1,2).*

Prueba. Supongamos que H es de tipo $(1, 2)$. Entonces H^* no es cosemisimple ni semisimple por [40]. Más aún, H^* no es punteada por IV.13 ni su corradical es una subálgebra de Hopf por IV.14. Entonces podemos por aplicar IV.15 a H^*.

Sean C y D las subcoálgebras simples de dimensión 4 de H. Entonces $\mathcal{S}$ permuta C con D. Si no es así consideremos la subálgebra de Hopf K de H generada por C con $\mathcal{S}(C) = C$. Si $\dim K = 8$, K debería ser isomorfa a $\mathcal{A}$ o semisimple por la clasificación de las álgebras de Hopf de dimensión 8 pero en ambos casos $1 \neq G(K) \subseteq G(H) = 1$. Si $K = H$, H^* debería ser punteada por IV.8, una contradicción con el primer párrafo. Dado que $\mathcal{S}(C) = D$, H es generada por C y D como álgebra por [54]. Más aún, $H = \Bbbk\langle C, 1\rangle$ por IV.19.

Afirmamos que $\mathcal{S}^4 = \mathrm{id}$. En efecto, si $G(H^*) = 1$ es cierto por la fórmula de Radford para $\mathcal{S}^4$. Si $G(H^*) \neq 1$ por IV.17, H^* tiene una subálgebra de Hopf K no cosemisimple con $\mathcal{S}_K^4 = \mathrm{id}_K$. Considerando el epimorfismo de álgebras de Hopf $\pi : H \to K^*$ inducido por la inclusión $K \hookrightarrow H^*$, nuestra afirmación sigue de IV.6.

Ahora bien, si H es de tipo $(1,2)$ con $\mathcal{S}^4 = \mathrm{id}$, [15, Prop. 5.3] afirma que H tiene una subcoálgebra simple de dimensión 4 estable por $\mathcal{S}$. Lo cual ya vimos que no podía suceder.

En resumen, si H es de tipo $(1,2)$, $\mathcal{S}$ no puede fijar ni intercambiar las dos subcoálgebras simples que tiene. Por lo tanto una tal H no puede existir. $\square$

IV.4.2 H de tipo $(4,1)$.

Proposición IV.21. *H no puede ser de tipo (4,1).*

Prueba. Sea K la subálgebra de Hopf de H generada por C, la subcoálgebra simple de H de dimensión 4. Notar que $\dim K \neq 16$ pues en caso contrario H^* sería punteada por IV.8, y esto no puede ser por IV.13. Entonces $\dim K = 8$. Claramente K no es punteada. Tampoco es cosemisimple pues por la dimensión debería ser el corradical de H pero estamos asumiendo que el corradical de H no es una subálgebra de Hopf. Por lo tanto $K \simeq \mathcal{A}$.

Como $G(\mathcal{A}) = C_2$, existe $g \in G(H) - G(K)$. Por ser única, C es estable por los automorfismos de coálgebras L_g y $\mathcal{S}$. Sea $\{e_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq 2\}$ una base de comatrices de C. Dado que $\varepsilon(e_{11}) = 1$, tenemos que

$$g = g\varepsilon(e_{11}) = (ge_{11})\mathcal{S}(e_{11}) + (ge_{12})\mathcal{S}(e_{21}) \in K$$

lo cual es una contradicción. Entonces no H no puede ser de tipo $(4,1)$. $\square$

La proposición anterior nos permite enunciar un criterio que nos ayudara a saber cuando H^* es punteada. El argumento clave para la siguiente prueba esta en [31, Thm. 2.1]. Sea g el generador del grupo cíclico C_2 de orden 2.

Lema IV.22. *Suponer que H encaja en una sucesión exacta de álgebras de Hopf $K \overset{\imath}{\hookrightarrow} H \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \Bbbk[C_2]$ con K^* punteada. Entonces H^* es punteada.*

Prueba. Por la Sección I.5, H es isomorfa como álgebra a un producto cruzado $K\#_{\rightharpoonup,\sigma}\Bbbk[C_2]$. La acción débil $l(g) : K \mapsto K$, $a \mapsto (g \rightharpoonup a)$ es un isomorfismo de álgebras. En particular $\operatorname{Rad} K$ es estable por $l(g)$ y por lo tanto $\operatorname{Rad} K\#_{\rightharpoonup,\sigma}\Bbbk[C_2]$ es un ideal nilpotente C_2-graduado. Esto implica que $\operatorname{Rad} K\#_{\rightharpoonup,\sigma}\Bbbk[C_2] \subseteq \operatorname{Rad} H$. Entonces $H/(\operatorname{Rad} K\#_{\rightharpoonup,\sigma}\Bbbk[C_2]) \simeq (K/\operatorname{Rad} K)\#_{\overline{\rightharpoonup},\overline{\sigma}}\Bbbk[C_2]$ es un álgebra semisimple por [47, Thm. 7.4.2]. Luego $\operatorname{Rad} H \subseteq \operatorname{Rad} K\#_{\rightharpoonup,\sigma}k[C_2]$, y entonces $H/\operatorname{Rad} H \simeq (K/\operatorname{Rad} K)\#_{\overline{\rightharpoonup},\overline{\sigma}}\Bbbk[C_2]$.

Terminaremos la prueba examinando la dimensión de $(H^*)_0$. Dado que K^* es punteada, $\dim(K^*)_0 = \dim(K/\operatorname{Rad} K) = 2, 4$ ó 8 y por lo tanto $\dim(H^*)_0 =$

$\dim(H/\operatorname{Rad} H) = 4, 8$ ó 16. Si $\dim(H^*)_0 = 4$, H^* claramente es punteada. Si $\dim(H^*)_0 = 8$, H^* es punteada por IV.15, IV.14 y IV.21. Dado que H no es semisimple, $\dim(H^*)_0 \neq 16$. □

IV.4.3 H de tipo $(4, 2)$.

Durante esta subsección C y D serán dos subcoálgebras simples de H de dimensión 4. A través de varios lemas probaremos que si H es de tipo $(4, 2)$ entonces H^* es punteada. Primero calculemos el orden de $\mathcal{S}$. Notar que $\mathcal{S}^2$ fija a C y D.

Lema IV.23. *Si H es de tipo $(4, 2)$ entonces*

$$\operatorname{ord} \mathcal{S}^2_{|C} = \operatorname{ord} \mathcal{S}^2_{|D} = 2 \text{ y } \operatorname{ord} \mathcal{S} = 4.$$

Prueba. Sea K la subálgebra de Hopf punteada de H de dimensión 8 dada por IV.17. (i). Entonces $H = K \oplus C \oplus D$ es una suma directa de subespacios vectoriales estables por $\mathcal{S}^2$. Dado que H y K no son semisimples, $\operatorname{Tr}(\mathcal{S}^2) = \operatorname{Tr}(\mathcal{S}^2_{|K}) = 0$. Más aún, $\operatorname{Tr}(\mathcal{S}^2_{|\mathcal{M}^*(2,\Bbbk)}) \geq 0$ por [40, Lemma 3.2]. Por lo tanto $\operatorname{Tr}(\mathcal{S}^2_{|D}) = \operatorname{Tr}(\mathcal{S}^2_{|C}) = 0$.

Sea $\{e_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq 2\}$ una base de comatrices de C tal que $\mathcal{S}^2(e_{ij}) = \omega^{i-j} e_{ij}$ con $\omega \in \Bbbk$ y $\operatorname{ord} \omega = \operatorname{ord} \mathcal{S}^2_{|C} = n$, cf. IV.4. Entonces

$$0 = \operatorname{Tr}(\mathcal{S}^2_{|C}) = 2 + \omega + \omega^{-1}$$
$$[\text{multiplicando por } \omega] \qquad 0 = 1 + 2\omega + \omega^2 = (1 + \omega)^2$$

Entonces $\omega = -1$ y por lo tanto $\operatorname{ord} \mathcal{S}^2_{|C} = 2$. Lo mismo vale para D en lugar de C.

Finalmente, $\operatorname{ord} \mathcal{S} = 4$ dado que por [58], $\operatorname{ord} \mathcal{S}_{|K} = 4$. □

Lema IV.24. *Sea H de tipo $(4, 2)$. Suponer que existe $1 \neq g \in G(H) \cap \mathcal{Z}(H)$ y que H es generada por C y 1 como álgebra. Entonces H^* es punteada.*

Prueba. Por IV.17 (iv), el orden de g es 2. Entonces tenemos una sucesión exacta de álgebras de Hopf $\Bbbk[C_2] \overset{\imath}{\hookrightarrow} H \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} K$ con $K = H/\Bbbk[C_2]^+ H$. Dado que H no es semisimple, K tampoco lo es por [47, Thm. 7.4.2]. Si K es punteada, entonces H^* también lo es por IV.22. Si K no es punteada entonces $K \simeq \mathcal{A}$ por la clasificación de [58], ver Subsección IV.2.

Supongamos que $G(H) = \langle c \rangle$ es un grupo cíclico de orden 4. Entonces $L_g = L_{c^2} = L_c^2$ debe fijar a C y $\pi(g) = 1$ porque $G(\mathcal{A}) \cap \mathcal{Z}(\mathcal{A}) = 1$. Por

IV.5, obtenemos una contradicción. Por lo tanto $G(H) \simeq C_2 \times C_2$. Entonces H tiene una subálgebra de Hopf isomorfa a $\mathcal{A}_{2,2}$ por IV.17 (i) y [58].

Dado que $\mathcal{A}_{2,2}$ y $\mathcal{A}$ no son isomorfas, se sigue que $\pi(\mathcal{A}_{2,2}) \subseteq T_4(-1) \subseteq \mathcal{A}$.

Sea $T_4(-1) \overset{\imath}{\hookrightarrow} \mathcal{A} \overset{\psi}{\twoheadrightarrow} k[C_2]$ la sucesión exacta da en IV.12. Entonces $\psi \circ \pi : H \to k[C_2]$ es un epimorfismo de álgebras de Hopf y $\mathcal{A}_{2,2} \subseteq H^{\mathrm{co}(\psi\circ\pi)}$. Entonces $\mathcal{A}_{2,2} \overset{\imath}{\hookrightarrow} H \overset{\psi\circ\pi}{\twoheadrightarrow} \Bbbk[C_2]$ es una sucesión exacta de álgebras de Hopf por I.14. Dado que $\mathcal{A}_{2,2} \simeq (\mathcal{A}_{2,2})^*$, el lema sigue de IV.22. $\square$

Proposición IV.25. *Si H es de tipo $(4,2)$ entonces H^* es punteada.*

Prueba. Dividiremos la demostración en dos casos, de acuerdo a la acción de $\mathcal{S}$ sobre $\{C, D\}$.

Caso 1: C y D son estable por $\mathcal{S}$.

Sea K la subálgebra de Hopf de H generada por C. Primero, supongamos que $\dim K = 8$. Por IV.23 y [40], K no es semisimple y entonces $K \simeq \mathcal{A}$. Sea $g \in G(H) - G(K)$. Afirmamos que K es una subálgebra de Hopf normal y entonces H^* es punteada por IV.22. En efecto, L_g no puede fijar a C pues si no obtenemos una contradicción como en la prueba de IV.21. Entonces $L_g(C) = D$ y $L_g(D) = C$. Aplicando $\mathcal{S}$ a la segunda igualdad resulta que $R_{g^{-1}}(D) = C$. Entonces C y por lo tanto K son estables por $\mathrm{ad}_\ell(g)$. Dado que $\mathrm{ord}\, g < \infty$, K también es estable por $\mathrm{ad}_r(g)$. Por [54], H es generada como álgebra por K y g entonces K es normal como queríamos.

Ahora supongamos que $K = H$. Por IV.7, tenemos una sucesión exacta de álgebras de Hopf de la forma $\Bbbk^G \overset{\imath}{\hookrightarrow} H \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} A$ con G un grupo finito y A^* punteada pero no semisimple, entonces $|G| \neq 8, 16$. Más aún, $|G| \neq 4$ por IV.17 (iv) y [58]. Si $|G| = 2$, entonces H^* es punteada por IV.24. If $|G| = 1$, H^* es punteada porque $H = A$.

Caso 2: C y D son permutadas por $\mathcal{S}$.

Notar que C y D generan H como álgebra por [54]. Entonces C y 1 también lo hacen por IV.19.

Supongamos que H^* no es punteada. Entonces, por IV.17, existe un epimorfismo de álgebras de Hopf $\pi : H \twoheadrightarrow B$ donde podemos asumir que B es isomorfa a $T_4(-1)$, $\mathcal{A}$ o $\mathcal{A}'''_{4,i}$. En efecto, H^* no puede ser de tipo $(4,1)$ por IV.21. Si H^* es de tipo $(4,2)$ entonces contiene una subálgebra de Hopf L punteada de dimensión 8 isomorfa a $\mathcal{A}'_4 = (\mathcal{A}'''_{4,i})^*$ o $\mathcal{A}''_4 = \mathcal{A}^*$, o L contiene una subálgebra de Hopf isomorfa a $T_4(-1)$, recordar IV.9. Finalmente, si

H^* es de tipo $(2,n)$ entonces contiene una subálgebra de Hopf isomorfa a $T_4(-1)$ por IV.17.

Primero asumamos que $G(H)$ es cíclico generado por g; luego $L_{g^2}(C) = C$. Si $\mathrm{ord}(\pi(g)) \leq 2$ entonces $\pi(g^2) = 1$ y por IV.5, $\pi(H) \subseteq \Bbbk[G(B)]$; lo cual es imposible porque π es un epimorfismo y B no es semisimple. Entonces $\mathrm{ord}(\pi(g)) = 4$. Dado que $|G(T_4(-1))| = |G(\mathcal{A})| = 2$, $B \simeq \mathcal{A}'''_{4,i}$ y $\pi(g)$ genera a $G(B)$. Ahora procedemos como en la prueba de [48, Lemma 2.7]. Consideremos los siguientes subespacios vectoriales de B:

$$B^+ := \{b \in B \mid \mathcal{S}^2(b) = b\} \quad \text{and} \quad B^- := \{b \in B \mid \mathcal{S}^2(b) = -b\}.$$

Por la definición de $\mathcal{A}'''_{4,i}$ (ver Subsección IV.2), $B^+ = \Bbbk[G(B)]$.

Sea $\{e_{ij} \mid 1 \leq i,j \leq 2\}$ la base de comatrices de C tal que $S^2(e_{ij}) = (-1)^{i-j} e_{ij}$ dada por IV.4. Entonces $\pi(e_{11}), \pi(e_{22}) \in B^+ = \Bbbk[G(B)]$ y

$$\Delta(\pi(e_{11})) = \pi(e_{11}) \otimes \pi(e_{11}) + \pi(e_{12}) \otimes \pi(e_{21}) \in B^+ \otimes B^+.$$

Dado que $\pi(e_{11}) \otimes \pi(e_{11}) \in B^+ \otimes B^+$ entonces $\pi(e_{12}) \otimes \pi(e_{21}) \in B^+ \otimes B^+$. Pero $\pi(e_{12}), \pi(e_{21}) \in B^-$, por lo tanto $\pi(e_{12}) = 0$ o $\pi(e_{21}) = 0$ y entonces $\pi(e_{11}), \pi(e_{22}) \in G(B)$. Podemos asumir que $\pi(e_{21}) = 0$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\pi(g^n e_{11}) = 1$. Por las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \Delta(g^n e_{11}) &= g^n e_{11} \otimes g^n e_{11} + g^n e_{12} \otimes g^n e_{21}, \\ \Delta(g^n e_{21}) &= g^n e_{21} \otimes g^n e_{11} + g^n e_{22} \otimes g^n e_{21}, \end{aligned}$$

vemos que $1, g^n e_{11}, g^n e_{21} \in H^{co\pi}$ y entonces $3 \leq \dim H^{co\pi} = 2$ lo cual es imposible (la igualdad anterior es por [57, Thm. 2.4]). Luego H^* es punteada si $G(H) \simeq C_4$.

Ahora asumamos que $G(H) \simeq C_2 \times C_2$. Dado que $G(B)$ es cíclico, existe $1 \neq g \in G(H)$ tal que $\pi(g) = 1$. Por la siguiente deducción vemos que $\mathrm{ad}_\ell(g)(C) = C$. Tenemos dos situaciones posibles:

$$L_g(C) = C \Leftrightarrow L_g(D) = D\,[\text{y aplicando } \mathcal{S}] \Leftrightarrow R_g(C) = C \quad \text{o} \tag{IV.12}$$

$$L_g(C) = D\,[\text{y aplicando } \mathcal{S}] \Leftrightarrow R_g(D) = C. \tag{IV.13}$$

En cualquier caso obtenemos que $\mathrm{ad}_\ell(g)(C) = C$. Luego, si $g \in \mathcal{Z}(H)$ entonces H^* es punteada por IV.24. Si $g \notin \mathcal{Z}(H)$ entonces H^* es punteada por IV.5. En ambos casos llegamos a una contradicción por supponer que H^* is punteada.

□

IV.4.4 H de tipo $(2, n)$.

En esta última subsección probaremos que si H es de tipo $(2,1)$, $(2,2)$ o $(2,3)$ entonces H^* es punteada.

Proposición IV.26. *(i) Si H es de tipo $(2,2)$ y tiene una subcoálgebra simple C de dimensión 4 estable por la antípoda entonces H^* es punteada.*

(ii) Si H es de tipo $(2,1)$ o $(2,3)$ entonces H^* es punteada.

Prueba. Si H es de tipo $(2,1)$ o $(2,3)$, entonces tiene una subcoálgebra simple de dimensión 4 estable por la antípoda. Esto es claro si H es de tipo $(2,1)$. En el otro caso la afirmación sigue del hecho que $\operatorname{ord} \mathcal{S}$ es una potencia de 2 por la fórmula de Radford para la antípoda. Denotemos con C a tal subcoálgebra.

A continucación probaremos (i) y (ii) simultaneamente. Sea K la subálgebra de Hopf generada por C. Por [54], $K = H$ o $K \simeq \mathcal{A}$ dado que K no es punteada por construcción ni tampoco semisimple porque $|G(K)| \leq |G(H)| = 2$.

Si $K = H$ entonces H^* es punteada por IV.8 y el lema queda demostrado.

Si $K \simeq \mathcal{A}$ asumamos que H^* no es punteada. Dado que el corradical no es una subálgebra de Hopf, H^* debe ser de tipo $(2, n)$ por IV.15, IV.20, IV.21 y IV.25. Entonces existe $\pi : H \to T_4(-1)$, un epimorfismo de álgebras de Hopf por IV.17. Consideremos la restricción de π a $K \simeq \mathcal{A}$. Por IV.12 (i), $K^{\operatorname{co} \pi}$ contiene una copia de $T_4(-1)$. Por I.14, $H^{\operatorname{co} \pi} \simeq T_4(-1)$ y entonces H encaja en una sucesión exacta de álgebras de Hopf: $T_4(-1) \overset{\imath}{\hookrightarrow} H \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} T_4(-1)$. Pero de ser así H debería ser punteada por I.19. Por lo tanto H^* debe ser punteada como queríamos. $\square$

Proposición IV.27. *Si H es de tipo $(2,2)$ entonces H^* es punteada.*

Prueba. Supongamos que H^* no es punteada. Entonces H^* también es de tipo $(2,2)$ por IV.15, IV.20, IV.21, IV.25 y IV.26.

Sean C y D las dos subcoálgebras simples de H de dimensión 4. Por IV.26 (ii), $\mathcal{S}$ permuta ambas subcoálgebras y por [54], H es generada como álgebra por ellas; en particular H también es generada por C y 1 por IV.19.

Dividiremos la prueba en varias afirmaciones.

Afirmación 1. *(i) Existe $\pi : H \twoheadrightarrow T_4(-1)$ epimorfismo de álgebras de Hopf.*

(ii) Si $1 \neq g \in G(H)$ entonces $\pi(g) \neq 1$.

(iii) $S^2 = \mathrm{ad}_\ell(g)$.

De hecho, (i) sigue de IV.17 (ii) aplicado a H^*. Usando (IV.12) y (IV.13), vemos que $\mathrm{ad}_\ell(g)$ fija a C y D. Por IV.17 (iv), $g \notin \mathcal{Z}(H)$ y dado que π es un epimorfismo podemos usar IV.5 para probar (ii).

Probemos (iii). Por IV.4 existe una base de comatrices $\{e_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq 2\}$ de C y $\omega \in \Bbbk$ tal que $gS^2(e_{ij})g = \omega^{i-j}e_{ij}$. Aplicando π obtenemos

$$\omega\pi(e_{21}) = \pi(gS^2(e_{21})g) = \pi(g)S^2(\pi(e_{21}))\pi(g) = \pi(e_{21}).$$

La última igualdad es por (ii) y la definición de la antípoda en $T_4(-1)$. Lo mismo es cierto para e_{12} en lugar de e_{21}. Luego, si $\omega \neq 1$ entonces $\pi(e_{12}) = \pi(e_{21}) = 0$ y por lo tanto $\pi(H) \subseteq \Bbbk[G(T_4(-1))]$. Lo que contradice el hecho de que π es un epimorfismo. Entonces $\omega = 1$ y (iii) queda demostrado.

En lo que sigue $\mathcal{E} := \{e_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq 2\}$ denotará una base de comatrices de C tal que $S^2(e_{ij}) = ge_{ij}g = (-1)^{i-j}e_{ij}$,que existe por IV.4. Entonces, como en la prueba de [48, Lemma 2.7], los elementos de $\mathcal{E}$ satisfacen
(IV.14)
$$\pi(e_{12}) = 0 \neq \pi(e_{21}) \in \mathcal{P}(T_4(-1)) \text{ o } \pi(e_{21}) = 0 \neq \pi(e_{12}) \in \mathcal{P}(T_4(-1)).$$

y

(IV.15) $$\pi(e_{11}) = \pi(g) \text{ y } \pi(e_{22}) = 1 \text{ o } \pi(e_{11}) = 1 \text{ y } \pi(e_{22}) = \pi(g).$$

La siguiente afirmación es inspirada por la prueba de [15, Prop. 5.3].

Afirmación 2. *Si* $f_{ij} := \mathcal{S}(e_{ji})$ *con* $1 \leq i, j \leq 2$ *entonces*

(IV.16) $$e_{11}f_{22} = f_{22}e_{11} = e_{22}f_{11} = f_{11}e_{22} = g \quad y$$

(IV.17) $$e_{12}f_{21} = f_{21}e_{12} = e_{21}f_{12} = f_{12}e_{21} = 0.$$

En efecto, como en [15, Prop. 5.3], definimos

$$E_{11} := e_{11}f_{22},\ E_{12} := e_{12}f_{21},\ E_{21} := e_{21}f_{12} \text{ y } E_{22} = e_{22}f_{11}$$

$$F_{11} := f_{11}e_{22},\ F_{12} := f_{12}e_{21},\ F_{21} := f_{21}e_{12} \text{ y } F_{22} = f_{22}e_{11}.$$

Notar que, como en [15, Prop. 5.3], la coálgebra E generada por $\{E_{ij} : 1 \leq i, j \leq 2\}$ es estable por $\mathcal{S}$. Analogamente, lo mismo vale para la subcoálgebra F generada por $\{F_{ij} : 1 \leq i, j \leq 2\}$. Dado que $\mathcal{S}$ permuta a C y D, $\dim E$ y $\dim F$ son menores que 4. Además, ni $1 \in E$ ni $1 \in F$. Pues, si podiéramos escribir $1 = \sum_{ij} a_{ij} E_{ij}$ con $a_{ij} \in \Bbbk$ obtenemos una contradicción al aplicar π:

$$1 = \pi(1) = \sum_{ij} a_{ij}\pi(E_{ij}) = (a_{11} + a_{22})\pi(g),$$

donde la última igualdad es por (IV.15) y (IV.14). De manera similar vemos que $1 \notin F$.

Dado que E y F son coálgebras de tipo matricial de dimensión 1, 2 ó 3 podemos usar la caracterización de estas coálgebras -cf. [15, Thm. 2.1]- para terminar de probar la afirmación; recordar que $\Bbbk$ es algebraicamente cerrado. Entonces $\dim E \neq 3 \neq \dim F$ puesto que en tal caso E y F deberían tener más de dos elementos de tipo grupo pero $1 \notin E \cup F$. La dimensión tampoco puede ser 2 dado que E y F deberían tener un (g, g)-primitivo. Entonces $E = F = \Bbbk \cdot g$ y por lo tanto (IV.16) y (IV.17) valen como queríamos.

Afirmación 3. *Existe una subálgebra de Hopf de H isomorfa a $\mathcal{A}_2$ (recordar Subsección IV.2).*

En efecto, sea $x := f_{11}e_{12}$. Notar que $x = -f_{21}e_{22}$ porque $0 = \varepsilon(e_{12}) = f_{11}e_{12} + f_{21}e_{22}$. Entonces

$$\begin{aligned}
&\Delta(x) = \Delta(f_{11})\Delta(e_{12}) \\
&= f_{11}e_{11} \otimes f_{11}e_{12} + f_{12}e_{11} \otimes f_{21}e_{12} + f_{11}e_{12} \otimes f_{11}e_{22} + f_{12}e_{12} \otimes f_{21}e_{22} \\
&= f_{11}e_{11} \otimes x + f_{12}e_{12} \otimes 0 + x \otimes g + f_{12}e_{12} \otimes (-x) \ \text{[por (IV.17) y (IV.16)]} \\
&= (f_{11}e_{11} - f_{12}e_{12}) \otimes x + x \otimes g \\
&= 1 \otimes x + x \otimes g \qquad\qquad [\text{por } 1 = \varepsilon(f_{11}) = m(\mathrm{id} \otimes \mathcal{S})\Delta(f_{11})].
\end{aligned}$$

Más aún, $x \neq 0$ puesto que f_{11} es invertible por (IV.16) y $e_{12} \neq 0$.

Sea ahora $y := f_{22}e_{21}$. Notar que $y = -f_{12}e_{11}$ porque $0 = \varepsilon(e_{21}) = f_{12}e_{11} + f_{22}e_{21}$. Entonces

$$\begin{aligned}
&\Delta(y) = \Delta(f_{22})\Delta(e_{21}) \\
&= f_{21}e_{21} \otimes f_{12}e_{11} + f_{22}e_{21} \otimes f_{22}e_{11} + f_{21}e_{22} \otimes f_{12}e_{21} + f_{22}e_{22} \otimes f_{22}e_{21} \\
&= f_{21}e_{21} \otimes (-y) + y \otimes g + f_{21}e_{22} \otimes 0 + f_{22}e_{22} \otimes y \ \text{[por (IV.16) y (IV.17)]} \\
&= (f_{22}e_{22} - f_{21}e_{21}) \otimes y + y \otimes g \\
&= 1 \otimes y + y \otimes g \qquad\qquad [\text{por } 1 = \varepsilon(f_{22}) = m(\mathrm{id} \otimes \mathcal{S})\Delta(f_{22})].
\end{aligned}$$

Más aún, $y \neq 0$ puesto que f_{22} es invertible por (IV.16) y $e_{21} \neq 0$.

Finalmente, si $\{1-g, x, y\}$ son linealmente independientes la afirmación vale. En efecto, la subálgebra de Hopf generada por $\{g, x, y\}$ debe ser de dimensión 8 [54], y por la Subsección IV.2 debe ser isomorfa a $\mathcal{A}_2$.

Probemos que $\{1-g, x, y\}$ son linealmente independientes. Sean $a, b, c \in \Bbbk$ tal que $0 = a(1-g) + bx + cy$. Aplicando π, obtenemos que $-a(1-\pi(g)) = b\pi(x) + c\pi(y)$. Por la Afirmación 1 (ii), $\pi(g) \neq 1$ y por (IV.14) y (IV.15), $\pi(x) = 0$ o $\pi(y) = 0$. Entonces $0 \neq 1 - \pi(g) \in \Bbbk[G(T_4(-1))]$ y $\pi(x)$ o $\pi(y)$ es un casi-primitivo no trivial. Por lo tanto $a = 0$ y $b = 0$ o $c = 0$. Pero si $b \neq 0$ o $c \neq 0$, $x = 0$ o $y = 0$; una contradicción. Luego $a = b = c = 0$ y $\{1-g, x, y\}$ son linealmente independientes como queríamos.

Ahora estamos en condiciones de terminar de probar nuestra proposición. Dado que $\mathcal{A}_2 \simeq (\mathcal{A}_2)^*$, la Afirmación 3 aplicada a H^* nos dice que existe $\Pi : H \to \mathcal{A}_2$ un epimorfismo de álgebras de Hopf. Denotemos con $\Pi\mathcal{E}$ a la subcoálgebra de $\mathcal{A}_2$ generada por $\{\Pi(e_{ij}) : 1 \leq i, j \leq 2\}$. A continuación encontraremos una contradicción al tratar de calcular la dimensión de $\Pi\mathcal{E}$. Dado que $(\mathcal{A}_2)_0 \simeq C_2$, $\dim \Pi\mathcal{E} < 4$ y por ser Π un epimorfismo, $\dim \Pi\mathcal{E} \neq 0$. Luego aplicamos [15, Thm. 2.1] a $\Pi\mathcal{E}$: si $\dim \Pi\mathcal{E} \leq 2$ entonces $\Pi\mathcal{E} = \pi(C) \subseteq G(\mathcal{A}_2)$ y por lo tanto $\pi(H) \subseteq \Bbbk[G(\mathcal{A}_2)]$; una contradicción. Si $\dim \Pi\mathcal{E} = 3$, $\Pi\mathcal{E}$ es un espacio vectorial con base dos elementos de tipo grupo y un casi-prmitivo. Entonces $\Pi\mathcal{E} = \Pi(C)$ esta contenida en una subálgebra de Hopf de $\mathcal{A}_2$ isomorfa a $T_4(-1)$. Por lo tanto Π no puede ser epimorfismo; una contradicción.

Resumiendo, H^* no puede tener una subálgebra de Hopf isomorfa a $\mathcal{A}_2$ contradiciendo la Afirmación 3. Por lo tanto H^* debe ser punteada. $\square$

BIBLIOGRAFÍA

[1] N. Andruskiewitsch and J. Cuadra. On the structure of (co-Frobenius) Hopf algebras. *to appear in J. Noncommut. Geom.*, 2010.

[2] N. Andruskiewitsch and J. Devoto. Extensions of Hopf algebras. *Algebra i Analiz*, 7(1):22–61, 1995.

[3] N. Andruskiewitsch, F. Fantino, M. Graña, and L. Vendramin. Finite-dimensional pointed Hopf algebras with alternating groups are trivial. *Ann. Mat. Pura Appl. (4) 190 (2011), no. 2, 225-245.*

[4] N. Andruskiewitsch and M. Graña. Braided Hopf algebras over non-abelian finite groups. *Bol. Acad. Nac. Cienc. (Córdoba)*, 63:45–78, 1999. Colloquium on Operator Algebras and Quantum Groups (Spanish) (Vaquerías, 1997).

[5] N. Andruskiewitsch, I. Heckenberger, and H. Schneider. The Nichols algebra of a semisimple Yetter-Drinfeld module. *Amer. J. Math.*, 132(6):1493–1547, 2010.

[6] N. Andruskiewitsch and S. Natale. Counting arguments for Hopf algebras of low dimension. *Tsukuba Math J.*, 25(1):187–201, 2001.

[7] N. Andruskiewitsch and H.-J. Schneider. Hopf algebras of order p^2 and braided Hopf algebras of order p. *J. Algebra*, 199(2):430–454, 1998.

[8] N. Andruskiewitsch and H.-J. Schneider. Lifting of quantum linear spaces and pointed Hopf algebras of order p^3. *J. Algebra*, 209(2):658–691, 1998.

[9] N. Andruskiewitsch and H.-J. Schneider. Pointed Hopf algebras. In *New directions in Hopf algebras*, volume 43 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 1–68. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.

[10] N. Andruskiewitsch and H.-J. Schneider. On the classification of finite-dimensional pointed Hopf algebras. *Ann. of Math. (2)*, 171(1):375–417, 2010.

[11] I. Angiono. On nichols algebras of diagonal type. *J. Reine Angew. Math, to appear. Preprint: 1104.0268v2.*, 2010.

[12] A. Ardizzoni, C. Menini, and D. Ştefan. A monoidal approach to splitting morphisms of bialgebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 359:991–1044, 2007.

[13] M. Auslander, I. Reiten, and S. Smalo. *Representation theory of Artin algebras*, volume 36 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[14] M. Beattie. Duals of pointed Hopf algebras. *J. Algebra*, 262:54–76, 2003.

[15] M. Beattie and S. Dăscălescu. Hopf algebras of dimension 14. *J. London Math. Soc. II Ser.*, 69(1):65–78, 2004.

[16] M. Beattie, S. Dăscălescu, and Ş. Raianu. Lifting of Nichols algebras of type $B_{(2)}$. *Israel J. Math.*, 132:1–28, 2002. With an appendix by the authors and Ian Rutherford.

[17] M. Beattie and G. A. García. Techniques for classifying Hopf algebras and applications to dimension p^3. *Preprint arXiv:1108.6037v1*, 2011.

[18] G. M. Bergman. The diamond lemma for ring theory. *Adv. in Math.*, 29(2):178–218, 1978.

[19] J. Bichon and S. Natale. Hopf algebra deformations of binary polyhedral groups. *Transform. Groups*, 16(2):339–374, 2011.

[20] S. Caeneepel and S. Dăscălescu. On pointed Hopf algebras of dimension 2^n. *Bull. London Math. Soc.*, 31:17–24, 1999.

[21] S. Caeneepel, S. Dăscălescu, and Ş. Raianu. Classifying pointed Hopf algebras of dimension 16. *Comm. Alg.*, 28(2):541–568, 2000.

[22] C. Calinescu, S. Dăscălescu, A. Masuoka, and C. Menini. Quantum lines over non-cocommutative cosemisimple Hopf algebras. *J. Algebra*, 273:753–779, 2004.

[23] C. W. Curtis and I. Reiner. *Methods of representation theory with applications to finite groups and orders*, volume 1 of *Wiley Classics Library*. Wiley-Interscience, 1994.

[24] V. Dlab and C. M. Ringel. On algebras of finite representation type. *J. Algebra*, 33:306–394, 1975.

[25] V. Dlab and C. M. Ringel. Indecomposable representations of graphs and algebras. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 6(173):v+57, 1976.

[26] Y. Doi and M. Takeuchi. Quaternion Algebras and Hopf Crossed Products. *Comm. Alg.*, 23(9):3291–3325, 1995.

[27] P. Etingof and S. Gelaki. Semisimple Hopf algebras of dimension pq are trivial. *J. Algebra*, 210(2):664–669, 1998.

[28] P. Etingof and S. Gelaki. On families of triangular Hopf algebras. *Int. Math. Res. Not.*, (14):757–768, 2002.

[29] P. Etingof and S. Gelaki. On Hopf algebras of dimension pq. *J. Algebra*, 277(2):668–674, 2004.

[30] N. Fukuda. Semisimple Hopf algebras of dimension 12. *Tsukuba J. Math.*, 21(1):43–54, 1997.

[31] G. A. García. On Hopf algebras of dimension p^3. *Tsukuba J. Math.*, 29(1):259–284, 2005.

[32] G. A. García and A. García Iglesias. Finite dimensional pointed Hopf algebras over $\mathbb{S}_4$. *Israel J. Math*, 183:417–444, 2011.

[33] G. A. García and C. Vay. Hopf algebras of dimension 16. *Algebr. Represent. Theory.*, 13(4):383–405, 2010.

[34] A. García Iglesias. Representations of pointed Hopf algebras over $\mathbb{S}_3$. *Rev. Un. Mat. Argentina*, 51(1):51–77, 2010.

[35] S. Gelaki and S. Westreich. On semisimple Hopf algebras of dimension pq. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 128(1):39–47, 2000.

[36] M. Graña. Nichols algebras of nonabelian group type, zoo of examples. Available at `http://mate.dm.uba.ar/~matiasg/zoo.html`.

[37] I. Kaplansky. *Bialgebras.* Univ. of Chicago Lecture Notes, 1975.

[38] Y. Kashina. Classification of Semisimple Hopf Algebras of dimension 16. *J. Algebra*, 232:617–663, 2000.

[39] C. Kassel. *Quantum groups*, volume 155 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1995.

[40] R. G. Larson and D. Radford. Finite-dimensional cosemisimple Hopf algebras in characteristic 0 are semisimple. *J. Algebra*, 117:267–289, 1988.

[41] S. Majid. Cross products by braided groups and bosonization. *J. Algebra*, 163(1):165–190, 1994.

[42] A. Masuoka. Cleft extension for a Hopf algebra generated by a nearly primitive element. *Comm. Alg.*, 22(11):4537–4556, 1994.

[43] A. Masuoka. Semisimple Hopf algebras of dimension $2p$. *Comm. Alg.*, 23(5):1931–1940, 1995.

[44] A. Masuoka. The p^n theorem for semisimple Hopf algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 124(3):735–737, 1996.

[45] A. Masuoka. Defending the negated Kaplansky conjecture. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 129(11):3185–3192, 2001.

[46] A. Milinski and H.-J. Schneider. Pointed indecomposable Hopf algebras over Coxeter groups. In *New trends in Hopf algebra theory (La Falda, 1999)*, volume 267 of *Contemp. Math.*, pages 215–236. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[47] S. Montgomery. *Hopf algebras and their actions on rings*, volume 82 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1993.

[48] S. Natale. Hopf algebras of dimension 12. *Algebr. Represent. Theory*, 5(5):445–455, 2002.

[49] S.-H. Ng. Non-semisimple Hopf algebras of Dimension p^2. *J. Algebra*, 255(1):182–197, 2002.

[50] S.-H. Ng. Hopf algebras of dimension pq. *J. Algebra*, 276(1):399–406, 2004.

[51] S.-H. Ng. Hopf algebras of dimension $2p$. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 133(5):2237–2242, 2008.

[52] S.-H. Ng. Hopf algebras of dimension pq II. *J. Algebra*, 319(7):2772–2788, 2008.

[53] W. D. Nichols. Bialgebras of type one. *Comm. Algebra*, 6(15):1521–1552, 1978.

[54] W. D. Nichols and M. B. Zoeller. Hopf algebra freeness theorem. *Amer. J. Math.*, 111:381–385, 1989.

[55] D. E. Radford. Hopf algebras with a projection. *J. Algebra*, 92(2):322–347, 1985.

[56] D. E. Radford. Minimal quasitriangular Hopf algebras. *J. Algebra*, 157(2):285–315, 1993.

[57] H.-J. Schneider. Normal basis and transitivity of crossed products for Hopf algebras. *J. Algebra*, 152:389–312, 1992.

[58] D. Ştefan. Hopf algebras of low dimension. *J. Algebra*, 211:343–361, 1999.

[59] L. Vendramin. Nichols algebras associated to the transpositions of the symmetric group are twist-equivalent. *Preprint: arXiv:1011.5267.*

[60] R. Williams. *Finite dimensional Hopf algebras.* PhD thesis, Florida State University, 1988.

[61] Y. Zhu. Hopf algebras of prime dimension. *Internat. Math. Res. Notices*, 1:53–59, 1994.