Representaciones fieles de mínima dimensión de álgebras de Lie nilpotentes

Mg. Nadina Elizabeth Rojas

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía y Física como parte de los requerimientos para obtener el grado de Doctor en Matemática de la

Facultad de Matemática Astronomía y Física

Universidad Nacional de Córdoba

Setiembre de 2011

Director: Dr. Leandro Cagliero

Resumen

Por el Teorema de Ado se sabe que toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión finita sobre un cuerpo k de característica cero admite una representación fiel de dimensión finita. Esto da origen al problema de calcular

$$\mu(\mathfrak{g}) = \text{mín}\{\dim V : (\pi, V) \text{ es una representación fiel de } \mathfrak{g}\}.$$

En general, no es sencillo de resolver este problema para un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ dada y tampoco lo es obtener cotas óptimas para $\mu(\mathfrak{g})$ con $\mathfrak{g}$ dentro de alguna familia dada.

Los principales aportes de esta tesis son los siguientes resultados:

- Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie k-pasos nilpotente tal que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ entonces

  $$\left\lceil \sqrt{2\frac{k+1}{k} \dim \mathfrak{g}} \right\rceil \leq \mu(\mathfrak{g}). \tag{1}$$

  Además, si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie 2-pasos nilpotente y $\mathfrak{a}$ una subálgebra abeliana de $\mathfrak{g}$ de codimensión d tal que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{a}$ entonces $\mu(\mathfrak{g}) \leq \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) + d + 1$.

  Como una consecuencia de la ecuación (1) se obtiene que si $\mathfrak{g}_k$ es el álgebra de Lie k-pasos nilpotente sobre un cuerpo k definida

  $$\mathfrak{g}_k = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1k+1} \\ & 0 & A_{23} & \dots & A_{2k+1} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & & A_{kk+1} \\ & & & & 0 \end{pmatrix} : A_{ij} \in M_a(\mathrm{k}) \text{ para } 1 \leq i < j \leq k+1 \right\}$$

  entonces $\mu(\mathfrak{g}_k) = (k+1)a$.

- Según la clasificación de las algebras de Lie nilpotentes complejas de dimensión 6 dada por De Graaf (ver [Gr]), el valor de μ es

Clasificación de De Graaf	$\mu(\mathfrak{g})$	$\mu_{nil}(\mathfrak{g})$
$L_{6,19}(\epsilon)$ con $\epsilon \neq 0$	4	4
$L_{6,3}$, $L_{6,4}$, $L_{6,5}$, $L_{6,8}$	4	5
$L_{6,1}$, $L_{6,2}$, $L_{6,6}$, $L_{6,7}$, $L_{6,10}$, $L_{6,11}$, $L_{6,12}$, $L_{6,13}$, $L_{6,19}(0)$, $L_{6,20}$, $L_{6,21}(\epsilon)$ $L_{6,22}(\epsilon)$, $L_{6,23}$, $L_{6,24}(\epsilon)$, $L_{6,25}$, $L_{6,26}$	5	5
$L_{6,9}$	5	6
$L_{6,14}$, $L_{6,15}$, $L_{6,16}$, $L_{6,17}$, $L_{6,18}$	6	6

  donde $\mu_{nil}(\mathfrak{g}) = \text{mín}\{\dim V : (\pi, V) \text{ es una nilrepresentación fiel de } \mathfrak{g}\}$.

- Sea $\mathfrak{h}_m$ el álgebra de Lie de Heisenberg sobre un cuerpo k de dimensión $2m+1$. Definimos el álgebra de Lie $\mathfrak{h}_{m,p}$ como el k-espacio vectorial

$$\mathfrak{h}_{m,p} = \mathfrak{h}_m \otimes \mathrm{k}[t]/(p)$$

con la estructura de álgebra de Lie dada por $[X \otimes a, Y \otimes b] = [X,Y] \otimes ab$ con $X, Y \in \mathfrak{h}_m$ y $a, b \in \mathrm{k}[t]/(p)$. Entonces para todo $m \in \mathbb{N}$ y todo polinomio no nulo $p \in \mathrm{k}[t]$ se tiene que

$$\mu\big(\mathfrak{h}_m \otimes \mathrm{k}[t]/(p)\big) = m \deg p + \left\lceil 2\sqrt{\deg p}\right\rceil$$

(ver [CaRo]).

- Sean $r \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{L}(r)$ el álgebra de Lie 2-pasos nilpotente libre de r generadores. Entonces

  a) si $r \geq 4$ entonces $2 + \left\lceil 2\sqrt{\frac{r(r-1)}{2}}\right\rceil \leq \mu(\mathcal{L}(r)) \leq r + \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil + 1$;

  b) si $r = 1, 2, 3$ entonces $\mu(\mathcal{L}(r)) = 2r - 1$.

Palabras Claves: álgebra de Lie, representación fiel, nilrepresentación fiel, mínima dimensión, Teorema de Ado.

2010 Mathematics subject Clasification: 15A03, 15A18, 17B10, 17B30, 17B70

Índice general

Resumen **3**

Introducción **i**

Antecedentes y relevancia del problema i

1. Representaciones fieles de álgebras de Lie **1**

1.1. Resultados básicos de la teoría de álgebra de Lie 1

1.1.1. Representaciones de álgebras de Lie 1

1.1.2. Álgebra Universal Envolvente de un álgebra de Lie 3

1.1.3. Extensión del cuerpo de base 4

1.2. Teorema de Ado-Iwasawa 4

1.3. Nilrepresentaciones fieles 6

1.4. Álgebras de Lie de corrientes 12

1.4.1. Propiedades básicas 12

2. La función μ **17**

2.1. Definición de μ, μ_{nil} y ejemplos 17

2.2. Síntesis de algunos resultados sobre μ 21

2.3. Demostraciones 22

2.4. Estructuras afines y la función μ 24

2.4.1. Álgebras de Lie característicamente nilpotentes 26

2.4.2. Estructuras afines sobre álgebras de Lie filiformes 27

3. Cotas de μ de álgebras de Lie nilpotentes **29**

3.1. Una cota inferior para μ 30

3.1.1. Obtención de una cota inferior 30

3.2. Una cota superior para μ 38

3.2.1. Representaciones inducidas 38

3.2.2. Obtención de una cota superior 38

3.3. Apéndice: resultados de álgebra lineal 42

4. Álgebras de Lie nilpotentes de dimensión ≤ 6 47

4.1. Representación mínima de álgebras de Lie nilpotentes de dim ≤ 6 49

5. ALCs asociadas al álgebra de Lie de Heisenberg 63

5.1. El álgebra de Lie $\mathfrak{h}_{m,p}$ 63

5.2. Nilrepresentaciones fieles de $\mathfrak{h}_{m,p}$ 64

5.2.1. Una primera representación de $\mathfrak{h}_{m,p}$ 64

5.2.2. Las representaciones $\pi_{a,b}$ de $\mathfrak{h}_{m,p}$ 65

5.3. Cota inferior de $\mu(\mathfrak{h}_{m,p})$ 68

5.4. Representaciones fieles de dimensión mínima de $\oplus_{r=1}^{d}\mathfrak{h}_m$ 71

5.4.1. $\mu(\oplus_{r=1}^{d}\mathfrak{h}_m)$ y una nilrepresentación fiel de mínima dimensión 71

5.4.2. Representaciones fieles de $\oplus_{r=1}^{d}\mathfrak{h}_m$ no equivalentes 72

6. El álgebra de Lie 2-pasos nilpotente libre de rango r 77

6.1. Una cota inferior de $\mu(\mathcal{L}(r))$ 77

6.2. Nilrepresentaciones Fieles de $\mathcal{L}(r)$ 90

6.2.1. Una primera representación de $\mathcal{L}(r)$ 90

6.2.2. Nuevas representaciones de $\mathcal{L}(r)$ 91

Bibliografía 105

Introducción

Antecedentes y relevancia del problema

En este trabajo estudiamos representaciones fieles de mínima dimensión de álgebras de Lie nilpotentes sobre un cuerpo k de característica cero. Específicamente tratamos de obtener cotas o dar el valor de

$$\mu(\mathfrak{g}) = \text{mín}\{\dim V : (\pi, V) \text{ es una representación fiel de } \mathfrak{g}\}.$$

Este es un invariante que es finito por el *Teorema de Ado* y difícil de calcular en general, y en particular para álgebras de Lie nilpotentes y solubles.

Una importante aplicación de la función μ es que sirve para dar una respuesta a una famosa pregunta de J. Milnor (ver [Mi]) *¿Todo grupo de Lie soluble simplemente conexo actúa simple y transitivamente por transformaciones afines sobre* $\mathbb{R}^n$ *para algún* $n \in \mathbb{N}$*?* En 1995, Y. Benoist ([Be]) dió la primera respuesta negativa a la pregunta de Milnor. Para ello Benoist construyó un álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$ de dimensión 11 tal que $\mu(\mathfrak{g}) > 12$.

Por otra parte el problema es computacionalmente importante pues varios algoritmos utilizados para obtener información de un álgebra de Lie dada, dependen de tener una representación fiel de ella de dimensión pequeña. Además, hay una conexión estrecha entre el problema de encontrar representaciones fieles de álgebras de Lie nilpotentes y el problema de encontrar representaciones fieles de grupos discretos nilpotentes.

Un objetivo ambicioso sobre este tema es obtener un polinomio $p \in \mathrm{k}[t]$ tal que para toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$

$$\mu(\mathfrak{g}) \leq p(\dim \mathfrak{g}).$$

Algunos resultados parciales que sugieren la existencia de tal polinomio p son los siguientes. Si el centro de $\mathfrak{g}$ es trivial, por la representación adjunta, se tiene que que

$$\mu(\mathfrak{g}) \leq \dim \mathfrak{g},$$

en particular si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie simple (ver [BM]). Por otra parte, Reed mostró que en el caso de $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie k-pasos nilpotente se tiene

$$\mu(\mathfrak{g}) \leq 1 + (\dim \mathfrak{g})^k$$

(ver [R]), para ello usó la construcción de Birkhoff de una representación fiel de $\mathfrak{g}$ por cociente del álgebra universal envolvente de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{g}$ admite una estructura afín entonces

$$\mu(\mathfrak{g}) \leq 1 + \dim \mathfrak{g}.$$

Algunos otros resultados sobre $\mu(\mathfrak{g})$ son:

- Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie abeliana de dimensión $n > 1$ entonces $\mu(\mathfrak{g}) = \lceil 2\sqrt{n-1} \rceil$ (ver [M], [S]).

- Sean $\mathfrak{n}(n, \mathrm{k})$ y $\mathfrak{t}(n, \mathrm{k})$ las álgebras de Lie de matrices triangulares superior estricta y triangulares superior, repectivamente, sobre un cuerpo k de característica cero entonces $\mu(\mathfrak{t}(n, \mathrm{k})) = \mu(\mathfrak{n}(n, \mathrm{k})) = n$.

- Sea $\mathfrak{h}_m$ el álgebra de Lie de Heisenberg de dimensión $2m + 1$ sobre un cuerpo k de característica cero entonces $\mu(\mathfrak{h}_m) = m + 2$ (ver [B2]).

- La siguiente tabla contiene los valores de μ para las álgebras de Lie simples sobre $\mathbb{C}$ (ver [BM]),

$\mathfrak{g}$	$\dim \mathfrak{g}$	$\mu(\mathfrak{g})$	$\mathfrak{g}$	$\dim \mathfrak{g}$	$\mu(\mathfrak{g})$
A_n , $n \geq 1$	$(n+1)^2 - 1$	$n + 1$	E_6	78	27
B_2	10	4	E_7	133	56
B_n , $n \geq 3$	$2n^2 + n$	$2n + 1$	E_8	248	248
C_n , $n \geq 3$	$2n^2 + n$	$2n$	F_4	52	26
D_n , $n \geq 4$	$2n^2 - n$	$2n$	G_2	14	7

- Sea $\mathfrak{g} = I_1 \oplus \cdots \oplus I_r$ un álgebra de Lie semisimple sobre $\mathbb{C}$ e I_i ideales simples de $\mathfrak{g}$, entonces $\mu(\mathfrak{g}) = \sum_{i=1}^{r} \mu(I_i)$.

  Sea $\mathfrak{g} = I_1 \oplus \cdots \oplus I_r \oplus \mathbb{C}^l$ un álgebra de Lie reductiva sobre $\mathbb{C}$ e I_i ideales simples de $\mathfrak{g}$, entonces $\mu(\mathfrak{g}) = \mu(\mathfrak{g}') + \mu(\mathbb{C}^{l-r})$. Donde $\mu(\mathbb{C}^{l-r}) = \lceil 2\sqrt{l-r-1} \rceil$ si $l - r > 1$ y $\mu(\mathbb{C}^{l-r}) = 0$ en otro caso (ver [BM]).

- Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie k-pasos nilpotente sobre un cuerpo k de característica cero, entonces $\mu(\mathfrak{g}) \leq 1 + (\dim \mathfrak{g})^k$ (ver [R]).

- Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie nilpotente que satisface alguna de las siguientes condiciones:

  a) $\dim \mathfrak{g} < 8$.

  b) $\mathfrak{g}$ es k-pasos nilpotente con $k < 4$ (ver [Sc]).

  c) $\mathfrak{g}$ es $\mathbb{Z}$-graduada con enteros positivos (ver [B1]).

  Entonces $\mu(\mathfrak{g}) \leq \dim \mathfrak{g} + 1$.

- Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie filiforme sobre un cuerpo k de característica cero entonces $\mu(\mathfrak{g}) \geq \dim \mathfrak{g}$ (ver [B1]). Más aún si $1 \leq \mathrm{rank}(\mathfrak{g}) \leq 2$ entonces $\dim \mathfrak{g} \leq \mu(\mathfrak{g}) \leq \dim \mathfrak{g} + 1$ (ver 2.4.2).

  Existe un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ nilpotente de dimensión $n = 11$ tal que $\mu(\mathfrak{g}) > \dim \mathfrak{g} + 1$ (ver [Be]).

- Según la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 5 dada por De Graaf (ver

[Gr]), el valor de μ es (ver [BNT])

Clasificación de De Graaf	$\mu(\mathfrak{g})$	$\mu_{nil}(\mathfrak{g})$
$L_{5,4}$	4	4
$L_{5,1}$	4	5
$L_{5,7}$, $L_{5,6}$	5	5
$L_{5,3}$, $L_{5,5}$, $L_{5,8}$	≤ 6	4
$L_{5,9}$	≤ 6	5

Estructura de la tesis

Esta tesis está dividida en 6 capítulos. En el Capítulo 1 hacemos un breve repaso de la teoría de representaciones, presentamos los teoremas básicos, algunos de ellos con demostración, e introducimos ejemplos de álgebras de Lie que serán útiles para el desarrollo de los siguientes capítulos. Este capítulo incluye una breve introducción al concepto de álgebras de Lie de corrientes y repasamos algunas propiedades básicas de estas álgebras de Lie.

El Capítulo 2 contiene las definiciones de las funciones μ y μ_{nil}, ejemplos y propiedades de μ, además damos algunos resultados que se conocen en la teoría y presentamos la demostración de algunos de ellos. Para los casos en los que se necesitan resultados que no se encuentran en esta tesis damos la cita correspondiente. Además investigamos la relación que existe entre las estructuras afines y la función μ. Para ello damos las definiciones básicas, algunas propiedades y finalmente damos una breve introducción de estructuras afines sobre álgebras de Lie filiformes.

El Capítulo 3 está dividido principalmente en dos partes, cotas superiores y cotas inferiores. En la primera de ellas se prueban los siguientes teoremas:

Teorema 1. *Sea* $\mathfrak{g}$ *un álgebra de Lie* k*-pasos nilpotente sobre un cuerpo* k *de característica cero tal que* $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$*. Entonces*

$$\left\lceil \sqrt{2\frac{k+1}{k}\dim \mathfrak{g}} \right\rceil \leq \mu(\mathfrak{g}).$$

Este teorema es útil para demostrar lo siguiente:

Teorema 2. *Sea* k *un cuerpo de característica cero y sea*

$$\mathfrak{g}_k = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1k+1} \\ & 0 & A_{23} & \dots & A_{2k+1} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & 0 & & & A_{kk+1} \\ & & & & 0 \end{pmatrix} : A_{ij} \in M_a(\mathrm{k}) \text{ para } 1 \leq i < j \leq k+1 \right\}$$

el álgebra de Lie k*-pasos nilpotente entonces* $\mu(\mathfrak{g}_k) = (k+1)a$.

En la segunda parte, por medio de representaciones inducidas, construimos representaciones fieles para $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 2-pasos nilpotente de dimensión finita y probamos el siguiente teorema:

Teorema 3. *Sean* $\mathfrak{g}$ *un álgebra de Lie 2-pasos nilpotente de dimensión finita sobre un cuerpo* k *de característica cero y* $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ *el centro de* $\mathfrak{g}$*. Sea* $\mathfrak{a}$ *una subálgebra de Lie abeliana de* $\mathfrak{g}$ *de codimensión* d *tal que* $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{a}$ *entonces*

$$\mu(\mathfrak{g}) \leq \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) + d + 1.$$

En el Capítulo 4, usando la clasificación dada por De Graaf (ver [Gr]) para las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 6, calculamos una representación fiel de matrices. En cada caso damos además una nilrepresentación fiel de dimensión mínima y en esta dirección probamos el siguiente teorema:

Teorema 4. *Según la clasificación de las algebras de Lie nilpotentes complejas de dimensión* 6 *dada por De Graaf, el valor de* μ *es*

Clasificación de De Graaf	$\mu(\mathfrak{g})$	$\mu_{nil}(\mathfrak{g})$
$L_{6,19}(\epsilon)$ *con* $\epsilon \neq 0$	*4*	*4*
$L_{6,3}$, $L_{6,4}$, $L_{6,5}$, $L_{6,8}$	*4*	*5*
$L_{6,1}$, $L_{6,2}$, $L_{6,6}$, $L_{6,7}$, $L_{6,10}$, $L_{6,11}$, $L_{6,12}$, $L_{6,13}$, $L_{6,19}(0)$, $L_{6,20}$, $L_{6,21}(\epsilon)$ $L_{6,22}(\epsilon)$, $L_{6,23}$, $L_{6,24}(\epsilon)$, $L_{6,25}$, $L_{6,26}$	*5*	*5*
$L_{6,9}$	*5*	*6*
$L_{6,14}$, $L_{6,15}$, $L_{6,16}$, $L_{6,17}$, $L_{6,18}$	*6*	*6*

En el capítulo 5 dado un cuerpo k de característica cero, $\mathrm{k}[t]$ el anillo de polinomios en una variable, $p \in \mathrm{k}[t]$ un polinomio no nulo y $d = \deg(p)$. Sabemos que $\mathrm{k}[t]/(p)$ es un álgebra asociativa, conmutativa con unidad y que $\dim \mathrm{k}[t]/(p) = d$. Sea $\mathfrak{h}_m$ el álgebra de Lie de Heisenberg sobre k de dimensión $2m+1$. Definimos el álgebra de Lie $\mathfrak{h}_{m,p}$ como el k-espacio vectorial

$$\mathfrak{h}_{m,p} = \mathfrak{h}_m \otimes \mathrm{k}[t]/(p)$$

con la estructura de álgebra de Lie dada por $[X \otimes a, Y \otimes b] = [X, Y] \otimes ab$ con $X, Y \in \mathfrak{h}_m$ y $a, b \in \mathrm{k}[t]/(p)$. Este capítulo está dedicado a la demostración del siguiente teorema:

Teorema 5. *Sean* k *un cuerpo de característica cero,* $\mathrm{k}[t]$ *el álgebra de polinomios y* $\mathfrak{h}_m$ *el álgebra de Lie de Heisenberg de dimensión* $2m+1$*. Entonces para todo* $m \in \mathbb{N}$ *y todo polinomio no nulo* $p \in \mathrm{k}[t]$ *se tiene*

$$\mu\big(\mathfrak{h}_m \otimes \mathrm{k}[t]/(p)\big) = m \deg p + \left\lceil 2\sqrt{\deg p} \right\rceil.$$

La prueba está dividida en dos partes. En la primera de ellas, construimos para cada $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $ab \geq \deg p$ una nilrepresentación fiel $\pi_{a,b}$ de dimensión $m \deg p + a + b$. Obtenemos así, una familia de nilrepresentaciones fieles entre las cuales hay una de dimensión

$$m \deg p + \left\lceil 2\sqrt{\deg p} \right\rceil$$

En la segunda parte, probamos que

$$\mu(\mathfrak{h}_{m,p}) \geq m \deg p + \left\lceil 2\sqrt{\deg p} \right\rceil.$$

En el Capítulo 6 dado un cuerpo k de característica cero y $r \in \mathbb{N}$. El álgebra de Lie 2-pasos nilpotente libre de rango r sobre k es $\mathcal{L}(r) = V \oplus \wedge^2 V$, donde V es un espacio vectorial de dimensión r sobre k. Este capítulo esta dedicado a demostrar el siguiente teorema:

Teorema 6. *Sean* $r \in \mathbb{N}$ *y* $\mathcal{L}(r)$ *el álgebra de Lie 2-pasos nilpotente libre de* r *generadores. Entonces* *a)* *si* $r \geq 4$ *entonces* $2 + \left\lceil 2\sqrt{\frac{r(r-1)}{2}} \right\rceil \leq \mu(\mathcal{L}(r)) \leq r + \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil + 1$;

b) *si* $r = 1, 2, 3$ *entonces* $\mu(\mathcal{L}(r)) = 2r - 1$.

La prueba está dividida en dos partes. En la primera de ellas, probamos que $\mu(\mathcal{L}(r)) \geq 2 + \left\lceil 2\sqrt{\frac{r(r-1)}{2}} \right\rceil$. En la segunda parte construimos para cada $a, b \in \mathbb{N}$ una nilrepresentación fiel $\pi_{a,b}$ de dimensión $a + b + 2$. Obtenemos así, una familia de nilrepresentaciones fieles entre las cuales hay una de dimensión $r + \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil + 1$

Capítulo 1

Representaciones fieles de álgebras de Lie

En este capítulo repasaremos el concepto de representación fiel de un álgebra de Lie, el *Teorema de Ado* y el *Teorema de Iwasawa*, estos son resultados centrales en la teoría de representaciones de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión finita. En §1.2 presentamos una demostración del *Teorema de Ado* (ver [J1]). En §1.3 demostraremos una versión del Teorema de Ado llamado *Teorema de Embeding de Birkhoff* (ver [Bi]), recordamos el Teorema de Zassenhaus y probamos que éste implica que la parte semisimple y la parte nilpotente de una representación de un álgebra de Lie nilpontente son también reprentaciones. Finalmente probamos que bajo ciertas condiciones, dada una representación fiel (π, V) de un álgebra de Lie nilpotente de dimensión finita, la parte nilpotente (π_N, V) de (π, V) define una nilrepresentación fiel de $\mathfrak{g}$, además damos una pequeña introducción sobre álgebras de Lie de corrientes. Estos resultados son de importancia para el desarrollo de los siguientes capítulos.

1.1. Resultados básicos de la teoría de álgebra de Lie

1.1.1. Representaciones de álgebras de Lie

Definición 1.1.1. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo k. Una *representación* (π, V) de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ en V es un homomorfismo de álgebras de Lie $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$. Más aún, si para cada $X \in \mathfrak{g}$, $\pi(X)$ es un endomorfismo nilpotente diremos que (π, V) es una *nilrepresentación* de $\mathfrak{g}$.

La *dimensión* de una representación (π, V) de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es $\dim V$.

A continuación daremos algunos sencillos ejemplos de representaciones de álgebras de Lie que serán útiles para los próximos capítulos.

Ejemplos 1.1.2. (1) Sea $\mathfrak{h}_m$ el álgebra de Lie de Heisenberg de dimenaión $2m + 1$. Una base para $\mathfrak{h}_m$ es $B = \{X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_m, Z\}$ tal que

$$[X_i, Y_i] = Z$$

y cero en otro caso. Una representación $(\pi_m, \mathrm{k}^{m+2})$ de $\mathfrak{h}_m$ esta dada por

$$\pi_m\left(\sum_{i=1}^m x_i X_i + \sum_{i=1}^m y_i Y_i + zZ\right) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & x_1 & \dots & x_m & z \\ & & & & y_1 \\ & & 0 & & \vdots \\ & & & & y_m \\ & & & & 0 \end{pmatrix}}_{m+2}$$

(2) Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, por la identidad de Jacobi la aplicación

$$\begin{aligned} \mathrm{ad} : \mathfrak{g} &\to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ X &\mapsto \mathrm{ad}(X)(Y) = [X, Y]\ , \end{aligned}$$

es una representación de $\mathfrak{g}$. Esta representación recibe el nombre de *representación adjunta* de $\mathfrak{g}$ y $\ker(\mathrm{ad}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Más aún, si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie nilpotente es fácil ver que la representación adjunta es una nilrepresentación de $\mathfrak{g}$.

(3) Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y sean (π_1, V_1), (π_2, V_2) representaciones de $\mathfrak{g}$. Es fácil ver que la aplicación $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V_1 \oplus V_2)$ con valores $\pi(X)(v_1, v_2) = (\pi_1(X)v_1, \pi_2(X)v_2)$ es una nueva representación de $\mathfrak{g}$ en $V_1 \oplus V_2$. En este caso $\ker(\pi) = \ker(\pi_1) \cap \ker(\pi_2)$.

(4) Sean $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ álgebras de Lie y sean (π_1, V_1), (π_2, V_2) representaciones de $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ respectivamente. La aplicación $\pi_1 \oplus \pi_2 : \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \to \mathfrak{gl}(V_1 \oplus V_2)$ con valores

$$(\pi_1 \oplus \pi_2)(X_1, X_2)(v_1, v_2) = (\pi_1(X_1)(v_1), \pi_2(X_2)(v_2))$$

es una representación del álgebra de Lie $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$.

(5) Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y sean $(\pi_1, V_1), (\pi_2, V_2)$ representaciones de $\mathfrak{g}$. Entonces $\pi_1 \otimes \pi_2 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V_1 \otimes V_2)$ con valores

$$(\pi_1 \otimes \pi_2)(X)(v_1 \otimes v_2) = \pi_1(X)v_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes \pi_2(X)v_2$$

es una representación de $\mathfrak{g}$.

Definición 1.1.3. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, una representación (π, V) de $\mathfrak{g}$ es irreducible si V tiene dos subespacios $\pi(X)$-invariante para todo $X \in \mathfrak{g}$, el subespacio nulo y V. Una representación (π, V) es completamente reducible si existen subespacios V_i de V tales que $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ y para todo $X \in \mathfrak{g}$, V_i es $\pi(X)$-invariante.

Definición 1.1.4. Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie (π_1, V_1) y (π_2, V_2) representaciones de $\mathfrak{g}$. Diremos que (π_1, V_1) y (π_2, V_2) son representaciones equivalentes si existe un isomorfismo lineal $\varphi : V_1 \to V_2$ tal que $\pi_2(X) \circ \varphi = \varphi \circ \pi_1(X)$ para todo $X \in \mathfrak{g}$.

Tres importantes resultados de la teoría de álgebras de Lie son el *Teorema de Engel*, *Teorema de Lie* y el *Teorema de Levi*, dado que estos teoremas no son centrales en el desarrollo de esta tesis no daremos sus respectivas pruebas (ver [K]).

Teorema 1.1.5. *(Engel) Sean $V \neq 0$ un espacio vectorial de dimensión finita sobre* k *y* $\mathfrak{g}$ *un álgebra de Lie de endomorfismos nilpotentes de* V*. Entonces* *a)* $\mathfrak{g}$ *es un álgebra de Lie nilpotente,*

b) *existe* $0 \neq v \in V$ *tal que* $X(v) = 0$ *para todo* $X \in \mathfrak{g}$,

c) *existe una base* B *de* V *tal que para todo* $X \in \mathfrak{g}$ *la matriz asociada en la base* B *es triangular superior estricta.*

Teorema 1.1.6. *(Lie) Sean* $\mathfrak{g}$ *un álgebra de Lie soluble y* V *un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo* k *algebraicamente cerrado de característica cero y sea* (π, V) *una representación de* $\mathfrak{g}$. *Entonces existe* $0 \neq v \in V$ *tal que para todo* $X \in \mathfrak{g}$, $\pi(X)v = \lambda_X v$.

Como sabemos si k no es de característica cero, en general el Teorema de Lie es falso. Por ejemplo, sea k un cuerpo de característica 2 y sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie sobre k generada por $X = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $Y = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, es fácil ver que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie soluble pues $[X, Y] = X$. Además, dado que $char(\mathrm{k}) = 2$, el polinomio característico de X es $P(x) = x^2 + 1 = (x+1)^2$. Por lo tanto el valor propio de X es $\lambda = 1$ y el espacio propio asociado está generado por $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, es fácil ver que v_1 no es vector propio de Y.

Corolario 1.1.7. *Sea* $\mathfrak{g}$ *un álgebra de Lie de dimensión finita soluble. Entonces existe una cadena de ideales* $\mathfrak{g}_i$ *de* $\mathfrak{g}$ *de* $\dim \mathfrak{g}_i = i$ *tales que* $0 = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$.

Teorema 1.1.8. *(Levi) Sean* $\mathfrak{g}$ *un álgebra de Lie de dimensión finita sobre un cuerpo* k *de característica cero y* R *el radical de* $\mathfrak{g}$. *Entonces existe una subálgebra de Lie* $\mathfrak{h}$ *semisimple de* $\mathfrak{g}$ *tal que*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus R \ .$$

1.1.2. Álgebra Universal Envolvente de un álgebra de Lie

Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y $T(\mathfrak{g})$ el álgebra tensorial de $\mathfrak{g}$. Sea I el ideal de $T(\mathfrak{g})$ generado por

$$\{X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y] : X, Y \in \mathfrak{g}\}.$$

Definición 1.1.9. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, el *álgebra universal envolvente* de $\mathfrak{g}$ es el álgebra asociativa con unidad

$$U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/I.$$

Dado que $U(\mathfrak{g})$ es un álgebra asociativa es fácil ver que tiene una estructura de álgebra de Lie.

Sea $\iota : \mathfrak{g} \to T(\mathfrak{g})$ la aplicación canónica de $\mathfrak{g}$ en $T(\mathfrak{g})$. A partir de ι podemos definir una transformación lineal de $\mathfrak{g}$ a $U(\mathfrak{g})$ como $\pi \circ \iota$ donde π es la proyección al cociente de $T(\mathfrak{g})$ en $U(\mathfrak{g})$.

Proposición 1.1.10. *Sean* $\mathfrak{g}$ *un álgebra de Lie y* $U(\mathfrak{g})$ *el álgebra universal envolvente de* $\mathfrak{g}$. *Entonces la transformación lineal* $\pi \circ \iota : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ *es un homorfismo de álgebras de Lie.*

Demostración. Dado que $\pi \circ \iota$ es una transformación lineal, falta probar que $(\pi \circ \iota)[X, Y] = [(\pi \circ \iota)(X), (\pi \circ \iota)(Y)]$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. Sean $X, Y \in \mathfrak{g}$ entonces

$$\begin{aligned}
(\pi \circ \iota)[X, Y] &= \pi(\iota[X, Y]) \\
&= \overline{[X, Y]} \\
&= \overline{X}\,\overline{Y} - \overline{Y}\,\overline{X} \\
&= [(\pi \circ \iota)(X), (\pi \circ \iota)(Y)] \ .
\end{aligned}$$

□

$U(\mathfrak{g})$ es él álgebra de Lie asociativa sobre k libre generada por $\mathfrak{g}$ (visto como espacio vectorial sobre k). Esta álgebra de Lie es descripta por el *Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt* ([K]).

Teorema 1.1.11. *(Poincaré-Birkhoff-Witt) Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y $B = \{X_1, \dots, X_n\}$ una base de $\mathfrak{g}$. Entonces el conjunto de todos los monomios $X_1^{j_1} \dots X_n^{j_n}$ con $j_k \geq 0$, es una base de $U(\mathfrak{g})$.*

El álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ actúa sobre el álgebra universal $U(\mathfrak{g})$ por multiplicación a izquierda, esto da un mapeo de $\mathfrak{g}$ en $\mathrm{End}(U(\mathfrak{g}))$. Es fácil verificar que este mapeo es un homomorfismo de álgebras de Lie, es decir, una representación de $\mathfrak{g}$ en $U(\mathfrak{g})$, además esta acción es fiel ya que $U(\mathfrak{g})$ es un álgebra con unidad.

1.1.3. Extensión del cuerpo de base

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie sobre un cuerpo k y K una extensión de k. Consideremos el K-espacio vectorial $\mathfrak{g} \otimes_{\mathrm{k}} K$ para darle una estructura de álgebra de Lie sobre el cuerpo K a partir de la estructura de $\mathfrak{g}$.

Se puede ver que el mapeo 4-lineal $f : \mathfrak{g} \times K \times \mathfrak{g} \times K \to \mathfrak{g} \otimes_{\mathrm{k}} K$ dado por $f(X, a, Y, b) = [X, Y] \otimes ab$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$ y $a, b \in K$, induce un mapeo k-bilineal que llamaremos

$$\begin{aligned} [\ \ ]_K : (\mathfrak{g} \otimes K) \times (\mathfrak{g} \otimes K) &\to \mathfrak{g} \otimes K \\ (X \otimes a, Y \otimes b) &\mapsto [X, Y] \otimes ab \ . \end{aligned}$$

Además se puede ver que $[\ \ ]_K$ es K-bilineal y que $\mathfrak{g} \otimes K$ con el corchete dado por $[\ \ ]_K$ es un álgebra de Lie sobre K.

La k-álgebra de Lie que resulta de restringir los escalares a k en la K-álgebra de Lie $\mathfrak{g} \otimes_{\mathrm{k}} K$ será denotada por $(\mathfrak{g} \otimes_{\mathrm{k}} K)_{\mathrm{k}}$. Un caso especial de este tipo de álgebra de Lie es cuando consideramos $\mathrm{k} = \mathbb{R}, K = \mathbb{C}$ y $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$. El álgebra de Lie compleja que resulta de considerar $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ es llamada la complexificación de $\mathfrak{g}$. En el caso en que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie compleja y $\mathfrak{g}_0$ es un álgebra de Lie real tal que $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ mirada sobre $\mathbb{R}$, está relacionada como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ por $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{g}_0 \oplus i\mathfrak{g}_0$ diremos que $\mathfrak{g}_0$ es la forma real del álgebra de Lie compleja $\mathfrak{g}$.

1.2. Teorema de Ado-Iwasawa

Definición 1.2.1. Una representación (π, V) de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es *fiel* si π es inyectiva.

El problema de la existencia de una representación fiel de dimensión finita para un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión finita sobre un cuerpo k, fue resuelto por Ado-Iwasawa. En el caso en que $char(\mathrm{k}) = 0$ el teorema es conocido como *Teorema de Ado*, si $char(\mathrm{k}) \neq 0$ el teorema se conoce como el *Teorema de Iwasawa*.

Teorema 1.2.2. *(Teorema de Ado) Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie sobre un cuerpo* k *algebraicamente cerrado de dimensión finita. Entonces existe una representación fiel de dimensión finita de $\mathfrak{g}$.*

El Teorema de Ado es difícil de demostrar en general, pero es sencillo en algunos casos particulares. Por ejemplo, si tomamos la representación adjunta de $\mathfrak{g}$ sabemos que el núcleo de esta representación es el centro $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, en este caso el Teorema de Ado es sencillo para las álgebras de Lie semisimples por ejemplo.

Pero la representación adjunta claramente no es suficiente para probar el Teorema de Ado. Sin embargo esta da una importante reducción en la demostración, es decir el problema se reduce a demostrar que cualquier álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ tiene una representación de dimensión finita (ρ, V) que es fiel sobre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Dado que si tenemos una representación con estas características podemos tomar la representación $(\mathrm{ad} \oplus \rho, \mathfrak{g} \oplus V)$ la cual es fiel sobre $\mathfrak{g}$.

En [J1] se puede ver una demostración del Teorema de Ado que es esencialmente una simplificación de una prueba dada por Harish-Chandra. Nosotros daremos un breve resumen de la misma y para ello citaremos algunos resultados previos.

Proposición 1.2.3. *([J1]) Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión finita sobre un cuerpo* k *de característica cero. Sean R y N el radical y el nilradical respectivamente de $\mathfrak{g}$. Entonces $[R, N] \subseteq N$.*

Teorema 1.2.4. *Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión finita, R y N el radical y nilradical respectivamente de $\mathfrak{g}$. Sea $\mathfrak{h}$ un ideal de $\mathfrak{g}$ entonces el radical y nilradical de $\mathfrak{h}$ son $R_{\mathfrak{h}} = R \cap \mathfrak{h}$ y $N_{\mathfrak{h}} = N \cap \mathfrak{h}$ respectivamente.*

Demostración. Es claro que $R \cap \mathfrak{h}$ es un ideal soluble de $\mathfrak{h}$ entonces $R \cap \mathfrak{h} \subseteq R_{\mathfrak{h}}$. Por otra parte $R_{\mathfrak{h}}/(\mathfrak{h} \cap R)$ es un ideal soluble de $\mathfrak{h}/(\mathfrak{h} \cap R)$, además $\mathfrak{h}/(\mathfrak{h} \cap R)$ es un álgebra de Lie isomorfa a $(\mathfrak{h} + R)/R$ que a su vez es un ideal de $\mathfrak{g}/R$. Dado que $\mathfrak{g}/R$ es un álgebra de Lie semisimple entonces $(\mathfrak{h} + R)/R$ es un álgebra de Lie semisimple por lo tanto $\mathfrak{h}/(\mathfrak{h} \cap R)$ es un álgebra de Lie semisimple. Luego $R_{\mathfrak{h}}/(\mathfrak{h} \cap R)$ es un álgebra de Lie semisimple entonces $R_{\mathfrak{h}} \subseteq \mathfrak{h} \cap R$.

Por la Proposición 1.2.3 sabemos que $[\mathfrak{g}, R] \subseteq N$ y por lo probado anteriormente $R_{\mathfrak{h}} \subseteq R$ entonces $[\mathfrak{g}, R_{\mathfrak{h}}] \subseteq N \cap \mathfrak{h} \subseteq N_{\mathfrak{h}}$. Luego $[\mathfrak{g}, N_{\mathfrak{h}}] \subseteq N_{\mathfrak{h}}$ lo que implica que $N_{\mathfrak{h}}$ es un ideal nilpotente en $\mathfrak{g}$ entonces $N_{\mathfrak{h}} \subseteq N \cap \mathfrak{h}$. Es claro que $N \cap \mathfrak{h} \subseteq N_{\mathfrak{h}}$, por lo tanto $N_{\mathfrak{h}} = N \cap \mathfrak{h}$. ☐

Teorema 1.2.5. *[J1] Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión finita sobre un cuerpo* k *de característica cero tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_1$ donde $\mathfrak{h}$ es un ideal soluble de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}_1$ una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$. Sea (ρ, V_1) una representación de dimensión finita de $\mathfrak{h}$ tal que $\rho(Z)$ es un endomorfismo nilpotente para todo $Z \in N_{\mathfrak{h}}$. Entonces existe (π, V_2) una representación de dimensión finita de $\mathfrak{g}$ tal que*

a) Si $\pi(X) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{h}$ entonces $\rho(X) = 0$.

b) Sea $X = Z + Y$ con $Z \in N, Y \in \mathfrak{g}_1$ tal que $ad \mid_{\mathfrak{h}} (Y)$ es nilpotente entonces $\pi(X)$ es un endomorfismo nilpotente.

Demostración. (*del Teorema de Ado*) Sea $ad : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ la representación adjunta de $\mathfrak{g}$. El $\ker ad = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ entonces si $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$ tenemos que $(ad, \mathfrak{g})$ es una representación fiel de $\mathfrak{g}$. Falta ver que ocurre si $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq 0$.

Supongamos que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq 0$ entonces será suficiente probar que existe una representación $(\widetilde{\pi}, V)$ de dimensión finita de $\mathfrak{g}$ tal que $(\widetilde{\pi} \mid_{\mathfrak{z}(\mathfrak{g})}, V)$ sea fiel. Ya que de esta manera la representación

$(\widetilde{\pi} \oplus ad, V \oplus \mathfrak{g})$ es fiel ya que

$$\begin{aligned}\ker(\widetilde{\pi} \oplus ad) &= \ker \widetilde{\pi} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \\ &= \ker \widetilde{\pi} \mid_{\mathfrak{z}(\mathfrak{g})} \\ &= 0\end{aligned}$$

por lo tanto $(\widetilde{\pi} \oplus ad, V \oplus \mathfrak{g})$ es una representación fiel de dimensión finita de $\mathfrak{g}$.

Sea R y N el radical y nilradical de $\mathfrak{g}$ respectivamente. Es fácil ver que $N/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ es un álgebra de Lie soluble, luego por el Cororlario 1.1.7 existe $N_0 = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subset N_1 \subset \cdots \subset N_k = N$ donde cada N_i es un ideal en N_{i+1} y $\dim N_{i+1} = N_i + 1$. Sea $n = \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ entonces existe un espacio vectorial V_1 de dimensión $n+1$ tal que existe una transformación lineal T nilpotente y $T^n \neq 0$. Entonces $\{T, \ldots, T^n\} \subseteq \mathrm{End}(V_1)$ es un conjunto conmutativo y linealmente independiente. Luego existe una nilrepresentación fiel de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ en $\mathrm{k}\{T, \ldots, T^n\}$ de dimensión $n+1$. Por otra parte N_i es un ideal nilpotente para cada $i = 0, \ldots, k$ ya que N es un ideal nilpotente de $\mathfrak{g}$ y $N_{i+1} = N_i \oplus \widetilde{N}_{i+1}$ tal que $\dim \widetilde{N}_{i+1} = 1$. Aplicando el Teorema 1.2.5 para cada $i = 0, \ldots, k$ vemos que existe una representación de dimensión finita (ρ, V_1) de dimensión finita de N tal que $(\rho \mid_{\mathfrak{z}(\mathfrak{g})}, V_1)$ es fiel.

Es fácil ver que R/N es un álgebra de Lie soluble de dimensión finita, luego de la misma forma que $N/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, existe $R_0 = N \subset R_1 \subset \cdots \subset R_s = R$ donde cada R_i es un ideal en R_i en R_{i+1} y la $\dim R_{i+1} = \dim R_i + 1$. Entonces $R_{i+1} = R_i \oplus \widetilde{R}_i$ tal que $\dim \widetilde{R}_i = 1$, de la misma forma que para la cadena $\{N_i\}$, existe una representación $(\widetilde{\rho}, V_2)$ de R a partir de (ρ, V_1) tal que $(\widetilde{\rho} \mid_{\mathfrak{z}(\mathfrak{g})}, V_2)$ es fiel. Por el Teorema de Levi $\mathfrak{g} = R \oplus \mathfrak{g}_1$ tal que $\mathfrak{g}_1$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$. Aplicando nuevamente el Teorema 1.2.5, a partir de la representación $(\widetilde{\rho}, V_2)$ obtenemos una representación (π, V) de dimensión finita de $\mathfrak{g}$ tal que $(\pi \mid_{\mathfrak{z}(\mathfrak{g})}, V)$ es una representación fiel de dimensión finita. □

Observación 1.2.6. La representación $(\pi \oplus \mathrm{ad}, V \oplus \mathfrak{g})$ que se obtiene en el Teorema de Ado es tal que $((\pi \oplus \mathrm{ad}) \mid_N, V \oplus \mathfrak{g})$ es una nilrepresentación fiel de dimensión finita de N.

1.3. Nilrepresentaciones fieles

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión finita sobre un cuerpo k. Si $\mathfrak{g}$ no es nilpotente entonces no existe ninguna nilrepresentación fiel de $\mathfrak{g}$, por el Teorema de Engel.

Por el Teorema de Embeding de Birkhoff, toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ nilpotente de dimensión finita sobre un cuerpo k de característica cero admite una nilrepresentación fiel de dimensión finita. En esta sección daremos una prueba del Teorema Birkhoff y mostraremos que, bajo ciertas hipótesis, dada una representación fiel de $\mathfrak{g}$ de dimensión finita, se puede obtener una nilrepresentación fiel de $\mathfrak{g}$ de la misma dimensión.

Teorema 1.3.1. *(Teorema de Embeding de Birkhoff) Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie k-pasos nilpotente de dimensión n sobre un cuerpo de característica cero. Entonces existe una nilrepresentación fiel (π, V) de $\mathfrak{g}$ tal que tal que* $\dim V \leq 1 + n + n^2 + \cdots + n^k$.

Este teorema es una versión constructiva del Teorema de Ado, que es válido para álgebras de Lie nilpotentes de dimensión finita y es el caso de particular interés de esta tesis. Para la prueba del teorema necesitaremos algunas definiciones y resultados previos que enunciamos a continuación.

Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie k-pasos nilpotente y $B = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ una base de $\mathfrak{g}$ donde los primeros n_1 vectores generan $\mathfrak{g}^{k-1}$, los primeros n_2 vectores generan $\mathfrak{g}^{k-2}$ y así sucesivamente. Sean $B_U = \{X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n} : \alpha_i \in \mathbb{N}_0\}$ la base de $U(\mathfrak{g})$ dada por el Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt y la función $o : U(\mathfrak{g}) \to \mathbb{N}_0$ definida por

$$o(X_j) = \text{máx}\{t + 1 : X_j \in \mathfrak{g}^t\} \qquad o(X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \ldots X_n^{\alpha_n}) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j o(X_j)$$

$$o\left(\sum_\alpha c_\alpha X^\alpha\right) = \text{mín}\{o(X^\alpha) : c_\alpha \neq 0\} \qquad o(1) = 0\ ,\ o(0) = \infty.$$

Ejemplo 1.3.2. Sean $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_m$ el álgebra de Lie de Heisenberg de dimensión $2m + 1$ y $B = \{Z, X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_m\}$

$$o(Z) = 2 \quad o(X_i) = o(Y_i) = 1 \quad o(Z^2 X_1 Y_3^2) = 7$$

Lema 1.3.3. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie k-pasos nilpotente sobre un cuerpo de característica cero. Entonces*

$$o(W_1 + \cdots + W_r) \geq \text{mín}\{o(W_1), \ldots, o(W_r)\},$$
$$o(W_1 \ldots W_r) \geq o(W_1) + \cdots + o(W_r)$$

para todo $W_i \in U(\mathfrak{g})$.

Demostración. La primera ecuación es inmediata para $r = 2$, luego por inducción sobre r se tiene el resultado deseado. La prueba de la segunda ecuación es por inducción y la reducimos al caso en que $r = 2$ y W_i son elementos homogéneos de $U(\mathfrak{g})$. Pues si $W_1 = \sum_{\alpha \in I} c_\alpha X^\alpha$, $W_2 = \sum_{\beta \in J} d_\beta X^\beta$ con $X^\alpha, X^\beta \in B_U$ tenemos que

$$\begin{aligned} o(W_1 W_2) &= o(\sum_{\alpha \in I} c_\alpha X^\alpha . \sum_{\beta \in J} d_\beta X^\beta) = o(\sum_{\alpha \in I, \beta \in J} c_\alpha d_\beta X^\alpha X^\beta) \\ &\geq \text{mín}\{o(X^\alpha X^\beta) : (\alpha, \beta) \in I \times J\} \\ &\geq \text{mín}\{o(X^\alpha) + o(X^\beta) : (\alpha, \beta) \in I \times J\} \qquad \text{es válido para monomios} \\ &= \text{mín}\{o(X^\alpha) : \alpha \in I\} + \text{mín}\{o(X^\beta) : \beta \in J\} \\ &= o(W_1) + o(W_2). \end{aligned}$$

Sean W_1, W_2 elementos homogéneos de $U(\mathfrak{g})$, es decir $W_i = X^{\alpha_i}$ con $\alpha_i = (\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,n}) \in \mathbb{Z}_+^n$. Si $W_1 W_2$ es un monomio ordenado X^β con $\beta = (\alpha_{1,1} + \alpha_{2,1}, \ldots, \alpha_{1,n} + \alpha_{2,n})$, entonces

$$\begin{aligned} o(W_1 W_2) = o(X^\beta) &= \sum_{j=1}^{n} \beta_j o(X^j) = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_{1,j} + \alpha_{2,j}) o(X^j) \\ &= \sum_{i=1}^{2} (\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} o(X^j)) \\ &= \sum_{i=1}^{2} o(W_i) \qquad \text{por definición.} \end{aligned}$$

Supongamos que W_1W_2 no es un monomio ordenado. Para probar la ecuación anterior daremos la siguiente definición; sea $W = X^{\alpha_1} \dots X^{\alpha_r}$ con $\alpha_i = (\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,n}) \in \mathbb{Z}_+^n$, definimos $d = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j}$ como el grado de W.

Haremos inducción sobre d, para el caso $d = 1$ es claro que se verifica. Asumamos que la ecuación es válida si $1 \leq d < N$ y W_1W_2 un monomio de grado N. Dado que W_1W_2 es un monomio no ordenado, tenemos que $W_1W_2 = X^{\alpha_1}X^{\alpha_2}$ donde $X^{\alpha_1} = W^{'}X_i, X^{\alpha_2} = X_jW^{''}$ con $j < i$.

Si $o(X_i) = m_i$ y $o(X_i) = m_j$ entonces $[X_i, X_j] = \sum_{l\in I} c_lX_l \in \mathfrak{g}^{m_i+m_j}$. Es decir $o(X_l) \geq m_i + m_j = o(X_i) + o(X_j)$ si $c_l \neq 0$. Además

$$\begin{aligned} W_1W_2 &= W^{'}[X_i, X_j]W^{''} + W^{'}X_jX_iW^{''} \\ &= \sum_{l\in I} c_lW^{'}X_lW^{''} + W^{'}X_jX_iW^{''}. \end{aligned}$$

Es fácil ver que el valor de d para cada término del primer sumando es menor que N. Por hipótesis inductiva y dado que $o(X^{\alpha_1}) = o(W^{'}) + o(X_i)$ por definición de o, tenemos

$$\begin{aligned} o(W^{'}X_lW^{''}) &\geq o(W^{'}) + o(X_l) + o(W^{''}) \\ &= (o(X^{\alpha_1}) - o(X_i)) + o(X_l) + (o(X^{\alpha_2}) - o(X_j)) \\ &\geq o(W_1) + o(W_2). \end{aligned}$$

entonces, por la primera ecuación del lema

$$\begin{aligned} o(W_1W_2) &\geq \text{mín}\{o(W^{'}X_jX_iW^{''}), \sum_{l\in I} o(W^{'}X_lW^{''})\} \\ &\geq \text{mín}\left\{o(W^{'}X_jX_iW^{''}), \sum_{i=1}^{2} o(W_i)\right\}. \end{aligned}$$

Aplicando este procedimiento a $W^{'}X_jX_iW^{''}$ repetidas veces se puede verificar que el término $\sum_{i=1}^2 o(W_i)$ se preserva y así la desigualdad nos queda

$$o(W_1W_2) \geq \text{mín}\left\{o(X^\beta), \sum_{i=1}^{2} o(W_i)\right\}.$$

Pero $o(X^\beta) = \sum_{j=1}^n \beta_j o(X_j) = o(W_1) + o(W_2)$, luego $o(W_1W_2) \geq o(W_1) + o(W_2)$. □

Lema 1.3.4. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie k-pasos nilpotente de dimensión n sobre un cuerpo de característica cero y sea*

$$U^m(\mathfrak{g}) = \{W \in U(\mathfrak{g}) : o(W) \geq m\}$$

$m \in \mathbb{N}$ y $m \leq n$. Entonces $U^m(\mathfrak{g})$ es un ideal de $U(\mathfrak{g})$ de codimensión menor o igual que $1 + n + n^2 + \cdots + n^{m-1}$.

Demostración. Por la primera ecuación del Lema 1.3.3, $U^m(\mathfrak{g})$ es cerrado bajo la suma. Además, por la segunda ecuación del mismo lema, para todo $W \in U(\mathfrak{g}), W_1 \in U^m(\mathfrak{g})$ tenemos que $WW_1 \in U^m(\mathfrak{g})$, del mismo modo para W_1W. Por lo tanto, $U^m(\mathfrak{g})$ es un ideal de $U(\mathfrak{g})$.

Debemos probar que la codimensión de $U^m(\mathfrak{g})$ es menor o igual que $1 + n^{m-1}$. Sea $B_U = \{X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n} : \alpha_i \in \mathbb{N}_0\}$ la base de $U(\mathfrak{g})$ obtenida anteriormente y $B_m = \{X^\alpha : o(X^\alpha) \geq m\} \subseteq B_U$.

Veamos que B_m es una base de $U^m(\mathfrak{g})$, sea $W = \sum_\alpha c_\alpha X^\alpha \in U^m(\mathfrak{g})$, por la primera ecuación del Lema 1.3.3, $o(W) \geq m$. Luego, B_m es un generador de $U^m(\mathfrak{g})$ entonces la codimensión de $U^m(\mathfrak{g})$ es $\#\{X^\alpha : o(X^\alpha) < m\}$. Es claro, por la definición de o, que

$$\#\{X^\alpha : o(X^\alpha) < m\} \leq \# \left\{ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n : \sum_{i=1}^n \alpha_i \leq m-1 \right\}$$

y dado que $\# \left\{ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n : \sum_{i=1}^n \alpha_i \leq m-1 \right\} \leq \sum_{j=0}^{m-1} n^j$, obtenemos lo que queriamos $\#\{X^\alpha : o(X^\alpha) < m\} \leq \sum_{j=0}^{m-1} n^j$. □

Demostración. (Teorema 1.3.1) Sea $\rho : U(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}(U(\mathfrak{g}))$ con valores $\rho(W_1)W_2 = W_1W_2$ para todo $W_1, W_2 \in U(\mathfrak{g})$. Es fácil verificar que ρ es una representación del álgebra de Lie $U(\mathfrak{g})$. Sea $m \in \mathbb{N}$, por el Lema 1.3.4, $U^m(\mathfrak{g})$ es un ideal de $U(\mathfrak{g})$, por lo tanto $U^m(\mathfrak{g})$ es un subespacio invariante por $\rho(W)$ para todo $W \in U(\mathfrak{g})$.

Sea $V = U(\mathfrak{g})/U^m(\mathfrak{g})$. Por la observación anterior y por el Lema 1.3.4, podemos definir una representación de dimensión finita del álgebra de Lie $U(\mathfrak{g})$. Dicha representación la llamaremos $\widetilde{\rho} : U(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}(V)$ con valores $\widetilde{\rho}(W)\overline{v} = \overline{\rho(W)v}$ para todo $W \in U(\mathfrak{g}), v \in U(\mathfrak{g})$. Además, por el Lema 1.3.4, V es un espacio vectorial de dimensión finita.

Dado que $\mathfrak{g}$ es una subálgebra de Lie de $U(\mathfrak{g})$, es claro que $(\pi = \widetilde{\rho}_{|_\mathfrak{g}}, V)$ es una representación del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Es claro que $U(\mathfrak{g})^i \supset U^{i+1}(\mathfrak{g})$ para todo $i \in \mathbb{Z}_+$. Sean $V_i = U^i(\mathfrak{g})/U^m(\mathfrak{g})$ subespacios de V para $i = 0, \ldots, m$, entonces

$$V = V_0 \supset V_1 \supset \cdots \supset V_{m-1} \supset V_m = 0.$$

Por la segunda ecuación del Lema 1.3.3, es fácil ver que $\pi(X)V_i \subseteq V_{i+1}$ para todo $i = 0, \ldots, m-1$. Sea $\widetilde{B} = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2 \ldots, \overline{v}_s\}$ una base de V tal que los primeros m_1 vectores generan a V_{m-1}, los primeros m_2 vectores generan a V_{m-2} y así sucesivamente. Entonces $[\pi(X)]_{\widetilde{B}} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 0 & 0 & & * \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{n}(s, \mathrm{k})$ para todo $X \in \mathfrak{g}$, por lo tanto π es una nilrepresentación de $\mathfrak{g}$.

Si $m \geq k+1$, $\mathfrak{g} \cap U^m(\mathfrak{g}) = 0$, entonces para todo $X \in \mathfrak{g}$, $\pi(X)1 = X \neq 0$. Por lo tanto π es una nilrepresentación fiel de $\mathfrak{g}$. □

Observación 1.3.5. Se puede ver que para $n > 2$

$$\# \left\{ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n : \sum_{i=1}^n \alpha_i = j \right\} = \frac{n^{j-1}(n+1)}{2}$$

para cada $j = 2, \ldots, k$. Luego $\# \left\{ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n : \sum_{i=1}^n \alpha_i \leq k \right\} = 1 + n + \sum_{j=2}^k \frac{n^{j-1}(n+1)}{2}$. Además

$$1 + n + \sum_{j=2}^k \frac{n^{j-1}(n+1)}{2} = \frac{n^k - 1}{n-1} + \frac{n + n^k}{2} \leq 1 + n^k.$$

Por lo tanto la dimensión de la nilrepresentación obtenida en el Teorema 1.3.1 es menor o igual a $1 + n^k$, esta mejora a la cota del Teorema 1.3.1 fue dada por [R].

Teorema 1.3.6. *(Teorema de Zassenhaus) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo* k *algebraicamente cerrado y sea $\mathfrak{g}$ una subálgebra de Lie nilpotente de $\mathfrak{gl}(V)$. Entonces existen $V_0, V_1, \ldots, V_r$ subespacios de V tales que*

$$V = V_0 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_r.$$

donde V_i es $\mathfrak{g}$-invariante. Además, para cada $X \in \mathfrak{g}$, $X\mid_{V_i} = \lambda_{i,X} I + N_i(X)$ tal que $N_i(X)$ es un operador nilpotente para todo i.

La prueba del Teorema de Zassenhaus no la realizaremos dado que no es de importancia en el desarrollo de esta tesis, para ello se puede consultar [J1].

Observación 1.3.7. Sean V un k-espacio vectorial de dimensión finita y K una extensión de k. Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión finita sobre k y (π, V) una representación fiel de $\mathfrak{g}$. Es fácil ver que la aplicación $\pi \otimes \mathrm{id} : \mathfrak{g} \otimes K \to \mathfrak{gl}(V) \otimes K$ es un homomorfismo inyectivo de álgebras de Lie sobre K, donde $\mathfrak{g} \otimes K$ y $\mathfrak{gl}(V) \otimes K$ tienen la estructura de álgebra de Lie sobre K dada en §1.1.3. Más aún, es fácil ver que el álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(V) \otimes K$ es isomorfa al álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(V \otimes K)$ sobre K. Por lo tanto, a partir de la representación fiel (π, V) existe una representación fiel $(\overline{\pi}, V \otimes K)$ de $\mathfrak{g} \otimes K$ definida por $\overline{\pi}(X \otimes a)(v \otimes b) = \pi(X)(v) \otimes ba$ para todo $X \in \mathfrak{g}, a, b \in K$. Además $\overline{\pi}$ es una aplicación k-lineal, luego $(\overline{\pi}, V \otimes K)$ es una representación fiel del álgebra de Lie $(\mathfrak{g} \otimes K)_{\mathrm{k}}$.

Teorema 1.3.8. *Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie nilpotente de dimensión finita sobre un cuerpo* k *de característica cero y sea (π, V) una representación de $\mathfrak{g}$ de dimensión finita. Para cada $X \in \mathfrak{g}$ sean $\pi_S(X)$ y $\pi_N(X)$ respectivamente las partes semisimple y nilpotente de $\pi(X)$. Entonces (π_S, V) y (π_N, V) son representaciones de $\mathfrak{g}$, más aún $\pi_S(g') = 0$.*

Demostración. Debemos demostrar que π_S y π_N son lineales y preservan el corchete. Para ello consideremos primero que k es un cuerpo algebraicamente cerrado.

Es claro que $\pi(\mathfrak{g})$ es una subálgebra de Lie nilpotente de $\mathfrak{gl}(V)$. Por el Teorema de Zassenhaus (ver §1.3.6) V se puede descomponer como $V = V_0 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$. Donde cada V_i es un subespacio de V tal que

$$\pi(X)V_i \subseteq V_i \qquad \pi(X)\mid_{V_i} = \pi_{Si}(X) + \pi_{Ni}(X)$$

para todo $X \in \mathfrak{g}$ y $\pi_{Ni}(X)$ es un endomorfismo nilpotente, $\pi_{Si}(X) = \lambda_i(X) I_i$ con I_i la transformación identidad en V_i y $\lambda_i(X) \in$ k para todo $i = 0, \ldots, r$. Como $\pi_S(X)$ y $\pi_N(X)$ son respectivamente las partes semisimple y nilpotente de $\pi(X)$, obtenemos que $\pi_S(X)\mid_{V_i} = \pi_{Si}(X)$ y $\pi_N(X)\mid_{V_i} = \pi_{Ni}(X)$. Por lo tanto, para probar que π_S es lineal y preserva el corchete, basta ver que cada π_{Si} lo hace. Por el Teorema de Lie, existe una base $B_i = \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_s}\}$ de V_i tal que $[\pi_i(X)]_{B_i} = \begin{pmatrix} \lambda_i(X) & & & \\ & \lambda_i(X) & * & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \lambda_i(X) \end{pmatrix}$ para todo $X \in \mathfrak{g}$. Es claro que $\pi_i(X)v_{i_1} = \lambda_i(X)v_{i_1}$ para todo $X \in \mathfrak{g}$, luego

$$\begin{aligned} \lambda_i(aX + Y)v_{i_1} &= \pi(aX + Y)v_{i_1} \\ &= (a\pi(X) + \pi(Y))v_{i_1} \\ &= (a\lambda_i(X) + \lambda_i(Y))v_{i_1} \end{aligned}$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}, a \in \mathrm{k}$. Entonces λ_i es una funcional lineal por lo tanto π_{Si} es una transformación lineal para cada i. Además, λ_i es una representación de $\mathfrak{g}$ sobre k para todo i, pues

$$\begin{aligned} \lambda_i([X,Y])v_{i_1} &= \pi_i([X,Y])v_{i_1} \\ &= (\pi_i(X)\pi_i(Y) - \pi_i(Y)\pi_i(X))v_{i_1} \\ &= (\lambda_i(X)\lambda_i(Y) - \lambda_i(Y)\lambda_i(X))v_{i_1} \\ &= 0 \\ &= [\lambda_i(X), \lambda_i(Y)]v_{i_1} \ . \end{aligned}$$

Por lo tanto, π_{Si} es una representación de $\mathfrak{g}$ y $\pi_{Si}([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = 0$ para cada i. Entonces π_S es representación tal que

$$\pi_S([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = 0. \tag{1.1}$$

Falta probar que π_N es representación. Como $\pi_N = \pi - \pi_S$ es claro que π_N es lineal. Por lo tanto basta probar que cada π_{Ni} preserva el corchete. Dado que π_{Si} es múltiplo de I_i tenemos que $[\pi_{Ni}(X), \pi_{Si}(Y)] = 0$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. Luego,

$$\begin{aligned} \pi_{Ni}([X,Y]) &= \pi_i([X,Y]) - \pi_{Si}([X,Y]) \\ &= [\pi_i(X), \pi_i(Y)] \quad \text{ por la ecuación } (2{,}1) \\ &= [\pi_{Ni}(X) + \pi_{Si}(X), \pi_{Ni}(Y) + \pi_{Si}(Y)] \\ &= [\pi_{Ni}(X), \pi_{Ni}(Y)]. \end{aligned}$$

Por lo tanto π_{Ni} es una representación de $\mathfrak{g}$.

Si k no es algebraicamente cerrado, consideremos $\overline{\mathrm{k}}$ su clausura algebraica. Sea $\overline{V} = V \otimes_{\mathrm{k}} \overline{\mathrm{k}}$ y sea $(\overline{\pi}, \overline{V})$ la representación de $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathrm{k}} \overline{\mathrm{k}}$ obtenida a partir de la representación (π, V). Sean $\overline{\pi}_S$ y $\overline{\pi}_N$ las representaciones obtenidas en el caso en que el cuerpo es algebraicamente cerrado.

Dada una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V se sabe que $\overline{B} = \{v_1 \otimes 1, \ldots, v_n \otimes 1\}$ es una base de $\overline{V}$. Si $\overline{X} = X \otimes 1$ entonces $[\pi(X)]_B = [\overline{\pi}(\overline{X})]_{\overline{B}}$ para todo $X \in \mathfrak{g}$, luego

$$[\pi_S(X)]_B + [\pi_N(X)]_B = [\overline{\pi}_S(\overline{X})]_{\overline{B}} + [\overline{\pi}_N(\overline{X})]_{\overline{B}}.$$

Se sabe que si $\pi_S(X)$ es una transformación semisimple entonces $[\pi_S(X)]_B$ es diagonalizable sobre $\overline{\mathrm{k}}$, a su vez $[\overline{\pi}_S(\overline{X})]_{\overline{B}}$ es diagonalizable sobre $\overline{\mathrm{k}}$. Más aún, $[\pi_N(X)]_B$ y $[\overline{\pi}_N(\overline{X})]_{\overline{B}}$ son matrices nilpotentes. Dado que la descomposición es única entonces

$$[\pi_S(X)]_B = [\overline{\pi}_S(\overline{X})]_{\overline{B}} \quad \text{y} \quad [\pi_N(X)]_B = [\overline{\pi}_N(\overline{X})]_{\overline{B}}.$$

Por lo tanto (π_S, V) y (π_N, V) son representaciones de dimensión finita de $\mathfrak{g}$ en V y por definición de π_N obtenemos que (π_N, V) es una nilrepresentación de $\mathfrak{g}$. Además, como $\overline{\mathfrak{g}}' = \mathfrak{g}' \otimes_{\mathrm{k}} \overline{\mathrm{k}}$ y $\overline{\pi}_S(\overline{\mathfrak{g}}') = 0$ entonces $\pi_S(\mathfrak{g}') = 0$. □

Definición 1.3.9. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie nilpotente de dimensión finita y (π, V) una representación de dimensión finita de $\mathfrak{g}$. Llamaremos parte semisimple y nilpotente de π a las representaciones (π_S, V) y (π_N, V) obtenidas en el Teorema 1.3.8 respectivamente.

Teorema 1.3.10. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie nilpotente de dimensión finita sobre un cuerpo* k *de característica cero tal que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g}'$. Sea (π, V) una representación fiel de $\mathfrak{g}$ de dimensión finita y sea (N, V) la parte nilpotente de (π, V). Entonces (π_N, V) es una nilrepresentación fiel de $\mathfrak{g}$.*

Demostración. La representación (π_N, V) dada en el Teorema 1.3.8 es una nilrepresentación. Por lo tanto nos falta probar que π_N es inyectiva. Sea $\pi_N(X_0) = 0$,

$$\begin{aligned}
\pi([X_0, X]) &= \pi_N([X_0, X]) + \pi_S([X_0, X]) \\
&= [\pi_N(X_0), \pi_N(X)] + \pi_S([X_0, X]) \\
&= 0 \qquad \text{pues } \pi_S(\mathfrak{g}') = 0
\end{aligned}$$

para todo $X \in \mathfrak{g}$. Como π es un representación fiel de $\mathfrak{g}$ entonces $[X_0, X] = 0$, es decir $X_0 \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Dado que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g}'$ y $\pi_S(\mathfrak{g}') = 0$ obtenemos $\pi_S(X_0) = 0$. Por lo tanto $\pi(X_0) = 0$ entonces $X_0 = 0$. □

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie nilpotente de dimensión finita. La condición $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ de la proposición anterior es importante para que la nilrepresentación (π_N, V) sea fiel. Por ejemplo, $\mathfrak{g} = \mathrm{k}$ es un álgebra de Lie abeliana sobre k entonces $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ y $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$ y $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(2, \mathrm{k})$ tal que $\pi(1) = I$ es una representación fiel de $\mathfrak{g}$. Pero en este caso $\pi_N = 0$.

1.4. Álgebras de Lie de corrientes

Dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y A un álgebra asociativa y conmutativa, se puede definir en $\mathfrak{g} \otimes A$ un corchete de la siguiente manera

$$[X \otimes a, Y \otimes b] = [X, Y] \otimes ab \quad \forall\, X, Y \in \mathfrak{g},\ a, b \in A.$$

En la Proposición 1.4.1, probaremos que este corchete define una estructura de álgebra de Lie en $\mathfrak{g} \otimes A$. Esta álgebra de Lie es conocida como el *álgebra de Lie de corrientes* asociada a $\mathfrak{g}$ y A.

Las álgebras de Lie de corrientes aparecen al considerar álgebras de funciones sobre alguna variedad con valores en un álgebra de Lie. El estudio de estas álgebras de Lie tienen origen en diversos e importantes problemas provenientes, generalmente, de la física y la geometría. Por ejemplo en los trabajos [He], [LR], [Ro],[GoR], etc., se estudian problemas asociados a deformaciones de álgebras; en [CM], [FL] se estudia la teoría de representaciones de álgebras de corrientes asociadas a álgebras de Lie semisimples, y problemas con origen en la geometría son considerados por los trabajos [FGT], [T], [Z], etc.

Esta sección está dedicada a demostrar propiedades básicas de estas álgebras de Lie.

1.4.1. Propiedades básicas

Esta primera proposición muestra que el corchete definido anteriormente en $\mathfrak{g} \otimes A$ da una estructura de álgebra de Lie sobre k.

Proposición 1.4.1. *Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y A un álgebra asociativa y conmutativa. Entonces $\mathfrak{g} \otimes A$ es un álgebra de Lie sobre* k *con corchete*

$$[X \otimes a, Y \otimes b] = [X, Y] \otimes ab \quad \forall\, X, Y \in \mathfrak{g},\ a, b \in A.$$

Demostración. Utilizando la propiedad universal del producto tensorial se puede probar, sin dificultad, que el corchete dado por la proposición está bien definido y es bilineal en $\mathfrak{g} \otimes A$.

Verifiquemos que $[Z, Z] = 0$ para todo $Z \in \mathfrak{g} \otimes A$, por la antisimetría del corchete en $\mathfrak{g}$ y dado que A es conmutativa tenemos

$$[X \otimes a, Y \otimes b] = -[Y \otimes b, X \otimes a]. \tag{1.2}$$

Sea $Z \in \mathfrak{g} \otimes A$ entonces existen $X_i \in \mathfrak{g}$, $a_i \in A$ tal que $Z = \sum_{i=1}^{r} X_i \otimes a_i$. Por la linealidad del corchete definido en $\mathfrak{g} \otimes A$ tenemos que

$$\begin{aligned}
[Z, Z] &= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} [X_i, X_j] \otimes a_i a_j \\
&= \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^{r} [X_i, X_j] \otimes a_i a_j + \sum_{i=2}^{r} \sum_{j=1}^{i-1} [X_i, X_j] \otimes a_i a_j \ ,
\end{aligned}$$

reordenando el segundo témino de la suma, usando (1.2) y el hecho que A es un álgebra conmutativa obtenemos $[Z, Z] = 0$.

Falta probar la identidad de Jacobi, para ello es suficiente verificar que

$$[X \otimes a, [Y \otimes b, Z \otimes c]] + [Z \otimes c, [X \otimes a, Y \otimes b]] + [Y \otimes b, [Z \otimes c, X \otimes a]] = 0$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, $a, b, c \in \mathfrak{a}$. Por definición de $[,]$ en $\mathfrak{g} \otimes A$ tenemos que

$$[X \otimes a, [Y \otimes b, Z \otimes c]] = [X, [Y, Z]] \otimes a(bc) \tag{1.3}$$
$$[Z \otimes c, [X \otimes a, Y \otimes b]] = [Z, [X, Y]] \otimes c(ab) \tag{1.4}$$
$$[Y \otimes b, [Z \otimes c, X \otimes a]] = [Y, [Z, X]] \otimes b(ca) \tag{1.5}$$

si sumamos (1.3), (1.4) y (1.5), dado que A es un álgebra asociativa y conmutativa y por la identidad de Jacobi obtenemos $([X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]]) \otimes abc = 0$. $\square$

Es claro, que si A, B, C son álgebras asociativas y conmutativas tales que $A \simeq B \oplus C$, entonces el álgebra de Lie $\mathfrak{g} \otimes A$ es isomorfa al álgebra de Lie $(\mathfrak{g} \otimes B) \oplus (\mathfrak{g} \otimes C)$. Además, si I es un ideal de A entonces $\mathfrak{g} \otimes I$ es un ideal de $\mathfrak{g} \otimes A$. Luego, es fácil ver que el álgebra de Lie $(\mathfrak{g} \otimes A)/(\mathfrak{g} \otimes I)$ es isomorfa al álgebra de Lie $\mathfrak{g} \otimes A/I$.

Combinando estas dos observaciones con el Teorema chino del resto obtenemos el siguiente teorema,

Teorema 1.4.2. *Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y A un álgebra asociativa con unidad y conmutativa. Sean $I_1, \dots, I_n$ ideales de A tales que $I_i + I_j = A$ para todo $i \neq j$. Entonces*

$$\mathfrak{g} \otimes \big(A/ \cap_{i=1}^{n} I_i\big) \simeq \big(\mathfrak{g} \otimes A/I_1\big) \oplus \cdots \oplus \big(\mathfrak{g} \otimes A/I_n\big).$$

Corolario 1.4.3. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie sobre un cuerpo* k *y $p(t) = (t - b_1)^{d_1} \dots (t - b_q)^{d_q} \in \mathrm{k}[t]$ con b_i distintos. Entonces $\mathfrak{g} \otimes \mathrm{k}[t]/(p) \simeq \bigoplus_{i=1}^{q} \mathfrak{g} \otimes \mathrm{k}[t]/\big(t^{d_i}\big)$.*

Demostración. Sean $A = \mathrm{k}[t]/(p)$ e $I_i = ((t-b_i)^{d_i})$ para todo $i = 1, \dots, q$. Se puede ver que A es un álgebra asociativa con unidad y conmutativa y que I_i es un ideal de A para todo $i = 1, \dots, q$ luego por el Teorema 1.4.2

$$\mathfrak{g} \otimes \mathrm{k}[t]/(p) \simeq \bigoplus_{i=1}^{q} \mathfrak{g} \otimes \mathrm{k}[t]/\big((t-b_i)^{d_i}\big). \tag{1.6}$$

Dado que el álgebra $\mathrm{k}[t]/\big((t-b_i)^{d_i}\big)$ es isomorfa al álgebra $\mathrm{k}[t]/\big(t^{d_i}\big)$ la ecuación (1.6), dice que

$$\mathfrak{g} \otimes \mathrm{k}[t]/(p) \simeq \bigoplus_{i=1}^{q} \mathfrak{g} \otimes \mathrm{k}[t]/\big(t^{d_i}\big). \tag{1.7}$$

$\square$

Si p no es de la forma anterior, consideremos K una extensión de k que contenga las raíces de p. Es decir, $p = (t-b_1)^{d_1} \dots (t-b_r)^{d_r}$ con $b_i \in K$ distintos y como $\big(\mathfrak{g} \otimes_{\mathrm{k}} \mathrm{k}[t]/(p)\big) \otimes_{\mathrm{k}} K$ es un álgebra de Lie sobre K isomorfa a $\mathfrak{g} \otimes_{\mathrm{k}} K[t]/(p)$ obtenemos

$$\big(\mathfrak{g} \otimes_{\mathrm{k}} \mathrm{k}[t]/(p)\big) \otimes_{\mathrm{k}} K \simeq \bigoplus_{i=1}^{q} \mathfrak{g} \otimes K[t]/\big((t-b_i)^{d_i}\big). \tag{1.8}$$

Del mismo modo que en (1.7), obtenemos a partir de (1.8) que

$$\big(\mathfrak{g} \otimes_{\mathrm{k}} \mathrm{k}[t]/(p)\big) \otimes_{\mathrm{k}} K \simeq \bigoplus_{i=1}^{q} \mathfrak{g} \otimes K[t]/\big(t^{d_i}\big). \tag{1.9}$$

Observación 1.4.4. Si A es un álgebra asociativa y conmutativa con unidad podemos pensar a k dentro de A mediante la identificación $f : \mathrm{k} \to A$ definida por $f(k) = k1_A$ por lo tanto podemos pensar que $M(n, \mathrm{k}) \subseteq M(n, A)$. El álgebra $M(n, A)$ es el álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n, A)$ con el corchete definido por $[A, B] = AB - BA$ para todo $A, B \in M(n, A)$. De este modo se puede ver a $\mathfrak{gl}(n, \mathrm{k}) \subset \mathfrak{gl}(n, A)$ y, si $\mathfrak{g}$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathrm{k})$, podemos ver al A-módulo generado por $\mathfrak{g}$ dentro de $\mathfrak{gl}(n, A)$. Concluimos esta sección demostrando el siguiente Teorema.

Teorema 1.4.5. *Sea A un álgebra asociativa y conmutativa con unidad y sea $\mathfrak{g}$ una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathrm{k})$. Si $\mathfrak{g}_A$ es el A-módulo generado por $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{gl}(n, A)$, entonces $\mathfrak{g}_A$ es un álgebra de Lie sobre* k *isomorfa a el álgebra de Lie $\mathfrak{g} \otimes_{\mathrm{k}} A$.*

Para su prueba necesitaremos dos resultados previos,

Proposición 1.4.6. *Sean A un álgebra asociativa con unidad, M un A-módulo libre con base B y M_0 el espacio vectorial generado por B sobre* k*. Si B' es una base de M_0 entonces B' es una base del A-módulo M.*

Demostración. Como B' es un conjunto generador de M_0 entonces $B \subseteq \mathrm{k}B'$, por lo tanto B' es un conjunto generador de M como A-módulo.

Veamos que B' es linealmente independiente en el A-módulo M. Sea J un conjunto finito de índices tal que $v'_j \in B'$ para todo $j \in J$ y

$$\sum_{j \in J} a_j v'_j = 0 \tag{1.10}$$

con $a_j \in A$. Dado que B es una base de M_0, para cada $j \in J$ existen únicos $k_{ij} \in \mathrm{k}$ tal que

$$v'_j = \sum_{i \in I_j} k_{ij} v_i \ , \tag{1.11}$$

con $v_i \in B$ para todo $i \in I_j$, e I_j un conjunto finito de índices. Sea $m = \max\{i \in I_j : \forall \ \ j \in J\}$, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $J = \{1, \ldots, n\}$. Entonces las columnas $\begin{pmatrix} k_{1j} \\ k_{2j} \\ \vdots \\ k_{mj} \end{pmatrix}$ son linealmente independientes sobre k, para todo $j = 1, \ldots, n$, pues B' es k-linealmente independiente en M_0. Luego la matriz $C = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \ldots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \ldots & k_{2n} \\ \vdots & & & \\ k_{m1} & k_{m2} & \ldots & k_{mn} \end{pmatrix}$ tiene rango n sobre k. Entonces, dado que $\mathrm{k} \subseteq A$, el rango de C es n sobre A es decir que las columnas de C son linealmente independientes sobre A. Por lo tanto, la ecuación (1.10) tiene solución trivial. □

Es sabido que $V_0 \otimes_{\mathrm{k}} A$ es un A-módulo a derecha pues A es un A-módulo a derecha. Además, A es un A-módulo a izquierda, pero no siempre es cierto que $V_0 \otimes_{\mathrm{k}} A$ es un A-módulo a izquierda. Dado que $\mathrm{k} \subseteq \mathfrak{z}(A)$, se puede verificar que la aplicación $\cdot : A \times (V_0 \otimes_{\mathrm{k}} A) \to V_0 \otimes_{\mathrm{k}} A$ tal que $b \cdot v \otimes a = v \otimes ba$ para todo $a, b \in A \ , \ v \in V_0$, define una estructura de A-módulo a izquierda en $V_0 \otimes A$.

Proposición 1.4.7. *Sean A un álgebra asociativa con unidad y M un A-módulo a izquierda libre con base B. Sea M_0 el espacio vectorial generado por B sobre* k*, V_0 un subespacio de M_0 y V el A-módulo a izquierda generado por V_0. Entonces $V_0 \otimes_{\mathrm{k}} A$ es isomorfo a V como A-módulo a izquierda.*

Demostración. Sea $F : V_0 \otimes_{\mathrm{k}} A \to V$ tal que $F(v \otimes a) = av$ para todo $a \in A, v \in V$. Se puede ver fácilmente que F es un homomorfismo suryectivo de A-módulos a izquierda. Veamos que F es inyectiva, sea $\widetilde{B}$ una base de V_0, por el Proposición 1.4.6 $\widetilde{B}$ es una base de V como A-módulo. Luego cada $u \in V_o \otimes_{\mathrm{k}} A$ se puede escribir de manera única como $u = \sum_{i \in I}^{r} v_i \otimes a_i$ con $v_i \in \widetilde{B}, a_i \in A$ e I un conjunto finito de índices. Entonces, si $u \in \ker F$ tenemos que $0 = F(u) = \sum_{i=1}^{r} a_i v_i$. Por lo tanto $a_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, r$. □

Demostración del Teorema 1.4.5. Por la Proposición 1.4.1, $\mathfrak{g} \otimes_{\mathrm{k}} A$ es un álgebra de Lie sobre k. Dado que $\mathfrak{g}_A$ es el A-módulo generado por $\mathfrak{g}$ y $\mathrm{k} \subseteq A$, por la observación anterior, podemos pensar a $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(n, A)$. Además, es claro que $\mathfrak{g}_A$ es un álgebra de Lie sobre k pues $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie sobre k.

Por la Proposición 1.4.7, $\mathfrak{g} \otimes_{\mathrm{k}} A$ y $\mathfrak{g}_A$ son A-módulos a izquierda isomorfos un isomorfismo entre ellos es $F : \mathfrak{g} \otimes_{\mathrm{k}} A \to \mathfrak{g}_A$ tal que $X \otimes a = aX$ para todo $X \in \mathfrak{g}, a \in A$.

Nos falta ver que F es un homomorfismo de álgebras de Lie sobre k. Para ello es suficiente probar que $F([X \otimes a, Y \otimes b]) = [F(X \otimes a), F(Y \otimes b)]$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$, $a, b \in A$. Entonces

$$\begin{aligned} F([X \otimes a, Y \otimes b]) &= F([X, Y] \otimes ab) \\ &= ab[X, Y] \\ &= ab(XY - YX) \\ &= (aX)(bY) - (bY)(aX) \\ &= [aX, bY] \\ &= [F(X \otimes a), F(Y \otimes b)]. \end{aligned}$$

como queríamos demostrar. $\square$

Capítulo 2

La función μ

En la sección §2.1 damos la definición de las funciones μ y μ_{nil}, ejemplos y propiedades de las mismas. En la sección §2.2 presentamos una síntesis de los resultados que se conocen sobre μ y la sección §2.3 contiene las demostraciones de alguno de ellos. En los casos donde la prueba necesita contenidos que no se encuentran en esta tesis, daremos la cita correspondiente. En la sección §2.4 investigamos la relación que existe entre las estructuras afines y la función μ. Para esto primero hacemos una breve introducción sobre estructura afín de un álgebra de Lie y finalmente en la subsección §2.4.2 introducimos dos resultados relacionados con las estructuras afines sobre álgebras de Lie filiformes.

2.1. Definición de μ, μ_{nil} y ejemplos

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensón finita sobre un cuerpo k. Por el *Teorema de Ado-Iwasawa* existe una representación fiel de dimensión finita de $\mathfrak{g}$. Un problema nada sencillo es, dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión finita encontrar una representación fiel de $\mathfrak{g}$ de dimensión mínima. Esto motiva la siguiente definición;

Definición 2.1.1. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensón finita sobre un cuerpo k. Sea

$$\mu(\mathfrak{g}, \mathrm{k}) = \text{mín}\{\dim V : (\pi, V) \text{ es una representación fiel de } \mathfrak{g}\}.$$

Observación 2.1.2. Para simplificar notación llamaremos $\mu(\mathfrak{g}) := \mu(\mathfrak{g}, \mathrm{k})$ salvo que fuera necesario identificar el cuerpo sobre el cual se esta definida el álgeba de Lie.

Es fácil probar que la función μ es invariante bajo isomorfismos de álgebras de Lie.

Ejemplo 2.1.3. (1) Sea $\mathfrak{sl}(n, \mathrm{k})$ el álgebra de Lie lineal especial. Veamos que

$$\mu(\mathfrak{sl}(n, \mathrm{k})) = n.$$

Probemos por el absurdo, si $\mu(\mathfrak{sl}(n, \mathrm{k})) = d < n$ entonces existe una representación fiel (π, V) de $\mathfrak{sl}(n, \mathrm{k})$ tal que $\dim V = d$. Luego $d^2 \leq n^2 - 1$ y como $\dim \mathfrak{sl}(n, \mathrm{k}) = n^2 - 1$ obtenemos que $d^2 = n^2 - 1$. Pero esto es una contradicción dado que no existen dos naturales cuyos cuadrados sean consecutivos. Por lo tanto $\mu(\mathfrak{sl}(n, \mathrm{k})) = n$.

(2) Sea $\mathfrak{t}(n,\mathrm{k})$ el álgebra de Lie de matrices triangulares superiores sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado. Por el Teorema de Lie, es fácil ver que $\mu(\mathfrak{t}(n,\mathrm{k})) = n$.

(3) Sea $\mathfrak{g}$ una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(3,\mathrm{k})$ generada por $X = \left(\begin{smallmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{smallmatrix}\right)$, $Y = \left(\begin{smallmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\0&0&0 \end{smallmatrix}\right)$, $Z = \left(\begin{smallmatrix} 0&0&0\\0&0&1\\0&0&0 \end{smallmatrix}\right)$, entonces $[X,Y] = Y$, $[X,Z] = Z$, $[Y,Z] = 0$. Es claro que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie soluble y $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$.

Veamos que $\mu(\mathfrak{g}) = 3$, si $\mu(\mathfrak{g}) = 2$ existe una subálgebra de Lie $\widetilde{\mathfrak{g}}$ soluble de dimensión 3 de $\mathfrak{gl}(2,\mathrm{k})$ isomorfa a $\mathfrak{g}$. Dado que $\dim \mathfrak{gl}(2,\mathrm{k}) = 4$ y $I \notin \widetilde{\mathfrak{g}}$, pues $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$, tenemos que

$$\mathfrak{gl}(2,\mathrm{k}) = \mathrm{k}\{I\} \oplus \widetilde{\mathfrak{g}}.$$

Es fácil ver que $\mathfrak{z}(\mathfrak{gl}(2,\mathrm{k})) = \mathrm{k}\{I\}$ y $\widetilde{\mathfrak{g}}$ un ideal de $\mathfrak{g}$. Dado que $\mathfrak{gl}(2,\mathrm{k})' \subseteq \widetilde{\mathfrak{g}}'$, $\mathfrak{gl}(2,\mathrm{k})$ es soluble. Esto es una contradicción, pues $\mathfrak{sl}(2,\mathrm{k})$ es una subálgebra de Lie simple de $\mathfrak{gl}(2,\mathrm{k})$, por lo tanto $\mu(\mathfrak{g}) = 3$.

(4) Sea $\mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$ el álgebra de Lie ortogonal y $B = \{X_1, X_2, X_3\}$ una base tal que $X_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0 \end{smallmatrix}\right)$, $X_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0 \end{smallmatrix}\right)$, $X_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0 \end{smallmatrix}\right)$. Sea $\pi : \mathfrak{so}(3,\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(2,\mathbb{C})$ con los siguientes valores en B

$$\pi(X_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & 0\\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad \pi(X_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \pi(X_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & i\\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Es fácil verificar que π es una representación fiel de $\mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$, por lo tanto $\mu(\mathfrak{so}(3,\mathbb{C})) = 2$. En realidad, π establece un isomorfismo entre $\mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$ y $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

(5) Sea $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ el álgebra de Lie ortogonal y $B = \{X_1, X_2, X_3\}$ una base tal que $X_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0 \end{smallmatrix}\right)$, $X_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0 \end{smallmatrix}\right)$, $X_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0 \end{smallmatrix}\right)$.

Veamos que $\mu(\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})) = 3$. Si $\mu(\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})) = 2$ entonces $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ es isomorfa a una subálgebra de Lie $\widetilde{\mathfrak{g}}$ de dimensión 3 de $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{R})$. Al igual que en el Ejemplo 2.1.3(3) podemos concluir que $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{R}) = \mathbb{R}I \oplus \widetilde{\mathfrak{g}}$. Entonces, $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) = \widetilde{\mathfrak{g}}$, pues $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) = \mathfrak{gl}(2,\mathbb{R})' \subseteq \widetilde{\mathfrak{g}}$, luego $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ es isomorfa a $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. Es fácil verificar que para ningún $X \in \mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$, $\mathrm{ad}(X)$ es diagonalizable. Lo que contradice el hecho que $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ sea isomorfa a $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, por lo tanto $\mu(\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})) = 3$.

El invariante μ depende del cuerpo sobre el cual esta definida el álgebra de Lie.

Ejemplo 2.1.4. Sea k un cuerpo de característica 2 y $\mathfrak{h}_1$ el álgebra de Lie de *Heisenberg* sobre k de dimensión 3. Se puede ver que $\mathfrak{h}_1$ es isomorfa al álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2,\mathrm{k})$ luego $\mu(\mathfrak{h}_1) = 2$.

Otro resultado que muestra la dependencia de μ y del cuerpo es la siguiente proposición

Proposición 2.1.5. *Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión finita sobre* k *y K una extensión de* k. *Sea $\mathfrak{g} \otimes K$ el álgebra de Lie sobre K con la estructura dada en §1.1.3 y sea $(\mathfrak{g} \otimes K)_{\mathrm{k}}$ el álgebra de Lie $\mathfrak{g} \otimes K$ pensada con escalares en* k. *Entonces*

$$\mu(\mathfrak{g} \otimes K) \leq \mu(\mathfrak{g});$$

$$\mu((\mathfrak{g} \otimes K)_{\mathrm{k}}) \leq \mu(\mathfrak{g} \otimes K)\dim_{\mathrm{k}} K.$$

Demostración. Dada una representación fiel (π, V) de dimensión finita de $\mathfrak{g}$, vimos en la observación de §1.3.7 que se puede obtener una representación fiel $(\overline{\pi}, V \otimes K)$ de $\mathfrak{g} \otimes K$ sobre K entonces $\mu(\mathfrak{g} \otimes K) \leq \mu(\mathfrak{g})$. A su vez, vimos que la aplicación $\overline{\pi}$ restringida a k es una representación de $(\mathfrak{g} \otimes K)_{\mathrm{k}}$ y dado que $\overline{\pi}$ es inyectiva obtenemos, de esta forma, una representación fiel de $(\mathfrak{g} \otimes K)_{\mathrm{k}}$. Por lo tanto $\mu((\mathfrak{g} \otimes K)_{\mathrm{k}}) \leq \mu(\mathfrak{g} \otimes K) \dim_{\mathrm{k}} K$. □

Ejemplo 2.1.6. (1) Un ejemplo donde las desigualdades son estrictas es cuando $\mathrm{k} = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{C}$ y $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$. Como $\mathfrak{g} \otimes K = \mathfrak{so}(3, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{so}(3, \mathbb{C})$, tenemos que

$$2 = \mu(\mathfrak{so}(3, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}) < \mu(\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})) = 3$$

(ver Ejemplos 4 y 5 más arriba). Por otra parte, sea $B = \{X_1, X_2, X_3\}$ la base de $\mathfrak{so}(3, \mathbb{C})$ dada en la sección anterior, es fácil ver que una representación fiel del álgebra de Lie $(\mathfrak{so}(3, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ es de la forma

$$\pi(X) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -x_4 & x_2-x_6 & -x_1 & -x_3-x_5 \\ -x_2-x_6 & x_4 & -x_3+x_5 & x_1 \\ x_1 & x_3+x_5 & -x_4 & x_2-x_6 \\ x_3-x_5 & -x_1 & -x_2-x_6 & x_4 \end{pmatrix},$$

para todo $X = x_1X_1 + x_2X_2 + x_3X_3 + x_4(iX_1) + x_5(iX_2) + x_6(iX_3) \in (\mathfrak{so}(3, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$. Entonces $\mu((\mathfrak{so}(3, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C})_{\mathbb{R}}) \leq 4$ por lo tanto

$$\mu((\mathfrak{so}(3, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C})_{\mathbb{R}}) \leq 2 \times 2 = \mu(\mathfrak{so}(3, \mathbb{C})) \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} < 3 \times 2 = \mu(\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})) \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

(2) Sean $\mathfrak{h}_1(\mathbb{R})$ y $\mathfrak{h}_1(\mathbb{C}) = \mathfrak{h}_1(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ el álgebra de Lie de Heisenberg de dimensión 3 sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ respectivamente. Sea $B = \{X_1, Y_1, Z\}$ una base de $\mathfrak{h}_1(\mathbb{C})$ tal que $[X_1, Y_1] = Z$ y cero en otro caso, entonces una base de $\mathfrak{h}_1(\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ es $B_{\mathbb{R}} = \{X_1, iX_1, Y_1, iY_1, Z, iZ\}$. Sean $X = x_1X_1 + x_2(iX_1) + y_1Y_1 + y_2(iY_2) + z_1Z + z_2(iZ)$ tales que $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ y $\pi : \mathfrak{h}_1(\mathbb{C})_{\mathbb{R}} \to \mathfrak{gl}(5, \mathbb{R})$ definida por

$$\pi(X) = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 & z_1 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 & y_1 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & -y_2 & y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

es fácil ver que $(\pi, \mathbb{R}^5)$ es una nilrepresentación fiel de $\mathfrak{h}_1(\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$, en el siguiente capítulo veremos una generalización de este resultado. Por lo tanto

$$\mu(\mathfrak{h}_1(\mathbb{C})_{\mathbb{R}}) \leq 5 < 3 \times 2 = \mu(\mathfrak{h}_1(\mathbb{C})) \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mu(\mathfrak{h}_1(\mathbb{C})) \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

(3) Una base del álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}} = (\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ es $\{E, F, H, iE, iF, iH\}$. Sean $X = x_1E + x_2F + x_3H + x_4(iE) + x_5(iF) + x_6(iH)$ tal que $x_i \in \mathbb{R}$ y $\pi : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}} \to \mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})$ definida por

$$\pi(X) = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 & -x_6 & -x_4 \\ x_2 & -x_3 & -x_5 & x_6 \\ x_6 & x_4 & x_3 & x_1 \\ x_5 & -x_6 & x_2 & -x_3 \end{pmatrix}.$$

Es fácil ver que $(\pi, \mathbb{R}^4)$ es una representación fiel de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$, luego $\mu(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}) \leq 4$. Además, $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ es isomorfa al álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ sobre $\mathbb{C}$. Por los puntos 2.1.5) y 1f)

$$4 = 2\mu(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})) = \mu(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \leq \mu(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}) \leq 4.$$

Por lo tanto

$$4 = \mu(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}) = \mu(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})) \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mu(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

La función μ tiene dos propiedades sencillas pero necesarias mencionarlas. Una de ellas es que μ es una función monótona;

Proposición 2.1.7. *Sean* $\mathfrak{g}$ *un álgebra de Lie y* $\mathfrak{g}_1$ *una subálgebra de* $\mathfrak{g}$*. Entonces* $\mu(\mathfrak{g}_1) \leq \mu(\mathfrak{g})$*.*

Otra de las propiedades es que la función μ es subaditiva;

Proposición 2.1.8. *Sean* $\mathfrak{g}_1$ *y* $\mathfrak{g}_2$ *álgebras de Lie. Entonces* $\mu(\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2) \leq \mu(\mathfrak{g}_1) + \mu(\mathfrak{g}_2)$*.*

Ejemplo 2.1.9. (1) sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie abeliana de dimensión 5 sobre k. Entonces $\mathfrak{g}$ es isomorfa a

$$\mathrm{k} \oplus \mathrm{k} \oplus \mathrm{k} \oplus \mathrm{k} \oplus \mathrm{k}.$$

Veamos una representación fiel de $\mathfrak{g}$, sea $B = \{X_1, \ldots, X_5\}$ una base de $\mathfrak{g}$ y (π, k^4) definida por

$$\pi\left(\sum_{i=1}^{5} x_i X_i\right) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & x_2 & x_3 \\ 0 & x_1 & x_4 & x_5 \\ 0 & 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 \end{pmatrix}$$

entonces $\mu(\mathfrak{g}) \leq 4 < \sum_{i=1}^{5} \mu(\mathrm{k}) = 5$.

(2) Sean $\mathfrak{s}$ y $\mathfrak{g}$ álgebras de Lie sobre $\mathbb{C}$ tal que $\mathfrak{s}$ semisimple y $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ entonces $\mu(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{s}) = \mu(\mathfrak{g}) + \mu(\mathfrak{s})$ (ver [BM]).

Dado que $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ la ecuación anterior nos da que

$$\mu(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}) = 2\mu(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})) = 4.$$

En el caso de tener un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ nilpotente de dimensión finita sobre un cuerpo de característica cero podemos definir, por el Teorema de Embeding de Birkhoff (ver §1.3.1), que existe un nilrepresentación fiel de $\mathfrak{g}$ de dimensión finita.

Definición 2.1.10. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie nilpotente de dimensión finita, sobre un cuerpo de característica cero. Sea

$$\mu_{nil}(\mathfrak{g}) = \min\{\dim V : (\pi_N, V) \text{ es una nilrepresentación fiel de } \mathfrak{g}\}.$$

De la misma forma que para μ, es fácil ver que μ_{nil} es invariante bajo isomorfismo de álgebras de Lie. Por la definición de $\mu_{nil}(\mathfrak{g})$, es claro que $\mu(\mathfrak{g}) \leq \mu_{nil}(\mathfrak{g})$. Un sencillo ejemplo donde $\mu(\mathfrak{g}) < \mu_{nil}(\mathfrak{g})$ es $\mathfrak{g} = \mathrm{k}$, en este caso $\mu(\mathfrak{g}) = 1$ y $\mu_{nil}(\mathfrak{g}) = 2$.

En el caso en que $\mathfrak{g}$ sea un álgebra de Lie nilpotente y $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g}'$, por el Teorema 1.3.10, es fácil ver que $\mu(\mathfrak{g}) = \mu_{nil}(\mathfrak{g})$.

Una propiedad que relaciona a μ y μ_{nil}, y será útil en el Capítulo 4, es la siguiente;

Proposición 2.1.11. *Sea* $\mathfrak{g}$ *un álgebra de Lie nilpotente tal que* $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$*. Entonces* $\mu(\mathfrak{g} \oplus \mathrm{k}) = \mu_{nil}(\mathfrak{g})$*.*

Demostración. Sea $\pi_{nil} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ una nilrepresentación fiel de $\mathfrak{g}$. Definimos $\pi : \mathfrak{g} \oplus \mathrm{k} \to \mathfrak{gl}(V)$ tal que $\pi(X + a) = \pi_{nil}(X) + aI$ donde I es el endomorfismo identidad. Es fácil ver que (π, V) es una representación de $\mathfrak{g} \oplus \mathrm{k}$ ya que (π_{nil}, V) es una representación de $\mathfrak{g}$.

Veamos que es fiel, para ello supongamos que $\pi(X + a) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$ entonces $\pi_{nil}(X) = -aI$. Dado que $\pi_{nil}(X)$ es un endomorfismo nilpotente esto implica que $a = 0$. Luego $X = 0$ ya que (π_{nil}, V) es fiel. Por lo tanto (π, V) es una representación fiel de $\mathfrak{g} \oplus \mathrm{k}$.

Falta ver que $\mu_{nil}(\mathfrak{g}) \leq \mu(\mathfrak{g} \oplus \mathrm{k})$. Como $\mathfrak{g}$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g} \oplus \mathrm{k}$ entonces $\mu(\mathfrak{g}) \leq \mu(\mathfrak{g} \oplus \mathrm{k})$ y por el Teorema 1.3.10 se sigue que $\mu_{nil}(\mathfrak{g}) = \mu(\mathfrak{g})$. $\square$

2.2. Síntesis de algunos resultados sobre μ

En esta sección haremos una síntesis de algunos resultados que se conocen sobre μ. La próxima sección contiene las demostraciones de alguno de ellos. En casos excepcionales, en donde la prueba necesita contenidos que no se encuentran en esta tesis, daremos solamente la cita correspondiente.

1. **$\mu(\mathfrak{g})$ para ciertas álgebras de Lie**

   a) Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie abeliana de dimensión $n > 1$ entonces $\mu(\mathfrak{g}) = \lceil 2\sqrt{n-1} \rceil$. Este resultado es una consecuencia del siguiente Teorema de Schur.

   Teorema 2.2.1. *(Teorema de Schur) Sean $A_1, \ldots, A_q$ matrices linealmente independientes que conmutan de orden n sobre un cuerpo* k. *Entonces*
$$q \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor + 1.$$

   Una familia de matrices linealmente independientes que conmutan de orden d con el máximo número de matrices posible es $\mathfrak{F} = \{E_{ij} : 1 \leq i \leq [d/2]\ ,\ [d/2]+1 \leq j \leq d\} \cup \{I\}$. Una simple prueba de este teorema se puede ver en [M].

   b) Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie tal que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$ entonces $\mu(\mathfrak{g} \oplus \mathrm{k}) = \mu(\mathfrak{g})$ (ver §2.3(1)).

   c) Sean $\mathfrak{n}(n, \mathrm{k})$ y $\mathfrak{t}(n, \mathrm{k})$ las álgebras de Lie de matrices triangulares superior estricta y triangulares superior repectivamente sobre un cuerpo k de característica cero, entonces $\mu(\mathfrak{t}(n, \mathrm{k})) = \mu(\mathfrak{n}(n, \mathrm{k})) = n$ (ver §2.3(2)).
   En el Ejemplo 2.1.3.(2) vimos que si k es álgebraicamente cerrado $\mu(\mathfrak{t}(n, \mathrm{k})) = n$. Este resultado es válido aún para cuerpos arbitrarios de característica cero, para probarlo será necesaria el Teorema 1.3.10.

   d) Sea $\mathfrak{h}_m$ el álgebra de Lie de Heisenberg de dimensión $2m+1$ sobre un cuerpo de característica cero, entonces $\mu(\mathfrak{h}_m) = m + 2$ y una representación fiel de dimensión $m + 2$ es $\pi_m : \mathfrak{h}_m \to \mathfrak{gl}(m + 2, \mathrm{k})$ definida por
$$\pi_m \left(\sum_{i=1}^{m} x_i X_i + \sum_{i=1}^{m} y_i Y_i + zZ \right) = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & \ldots & x_m & z \\ & & & & y_1 \\ & & 0 & & \vdots \\ & & & & y_m \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

   La demostración de que $\mu(\mathfrak{h}_m) \geq m + 2$ se encuentra en §2.3.

   e) La siguiente tabla contiene los valores de $\mu(\mathfrak{g})$ para $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie simple sobre $\mathbb{C}$,

$\mathfrak{g}$	$\dim \mathfrak{g}$	$\mu(\mathfrak{g})$	$\mathfrak{g}$	$\dim \mathfrak{g}$	$\mu(\mathfrak{g})$
$A_n\ ,\ n \geq 1$	$(n+1)^2 - 1$	$n+1$	E_6	78	27
B_2	10	4	E_7	133	56
$B_n\ ,\ n \geq 3$	$2n^2 + n$	$2n+1$	E_8	248	248
$C_n\ ,\ n \geq 3$	$2n^2 + n$	$2n$	F_4	52	26
$D_n\ ,\ n \geq 4$	$2n^2 - n$	$2n$	G_2	14	7

(ver [BM]).

f) Sea $\mathfrak{g} = I_1 \oplus \cdots \oplus I_r$ un álgebra de Lie semisimple sobre $\mathbb{C}$ e I_i ideales simples de $\mathfrak{g}$ entonces $\mu(\mathfrak{g}) = \sum_{i=1}^{r} \mu(I_i)$ (ver [BM]).

g) Sea $\mathfrak{h}_m(\mathbb{C})$ el álgebra de Lie de Heisenberg sobre $\mathbb{C}$ de dimensión $2m+1$ y sea $\mathfrak{h}_m(\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ el álgebra de Lie $\mathfrak{h}_m(\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{R}$, entonces $\mu(\mathfrak{h}_m(\mathbb{C})_{\mathbb{R}}) = 2m+3$. Cf. resultado 2.e).

Demostración. Si $\mathfrak{h}_m(\mathbb{C})$ es el álgebra de Lie de Heisenberg sobre $\mathbb{R}$ de dimensión $2m+1$, es fácil ver que $\mathfrak{h}_m(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[t]/(t^2+1)$ es un álgebra de Lie real isomorfa a $\mathfrak{h}_m(\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$. En el siguiente capítulo probaremos que $\mu(\mathfrak{h}_m(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[t]/(t^2+1)) = 2m+3$, por lo tanto $\mu(\mathfrak{h}_m(\mathbb{C})_{\mathbb{R}}) = 2m+3$. □

h) Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie filiforme tal que satisface alguna de las siguientes condiciones:
   i) $\mathfrak{g}'$ abeliana.
   ii) $\dim \mathfrak{g} < 10$.

   Entonces $\mu(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{g}$ (ver [B2]).

i) En el caso de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión menor o igual a 5 el valor de μ_{nil}, y en algunos casos el valor de μ y en otros cotas para μ fueron dados (ver [BNT])

2. **Cotas para $\mu(\mathfrak{g})$ de ciertas álgebras de Lie $\mathfrak{g}$**

a) Sea $\mathfrak{g} = I_1 \oplus \cdots \oplus I_r \oplus \mathbb{C}^l$ un álgebra de Lie reductiva sobre $\mathbb{C}$ e I_i ideales simples de $\mathfrak{g}$, entonces $\mu(\mathfrak{g}) \leq \mu(\mathfrak{g}') + \mu(\mathbb{C}^{l-r})$. Donde $\mu(\mathbb{C}^{l-r}) = \lceil 2\sqrt{l-r-1} \rceil$ si $l-r > 1$ y $\mu(\mathbb{C}^{l-r}) = 0$ en otro caso.

b) Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie k-pasos nilpotente sobre un cuerpo de característica cero, entonces $\mu(\mathfrak{g}) \leq 1 + (\dim \mathfrak{g})^k$, ver observación después de la prueba del Teorema §1.3.1.

c) Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie nilpotente que satisface alguna de las siguientes condiciones:
   i) $\dim \mathfrak{g} < 8$.
   ii) $\mathfrak{g}$ es k-pasos nilpotente con $k < 4$ (ver [Sc]).
   iii) $\mathfrak{g}$ es $\mathbb{Z}$-graduada con enteros positivos (ver [B1]).

   Entonces $\mu(\mathfrak{g}) \leq \dim \mathfrak{g} + 1$.

d) Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie filiforme sobre un cuerpo de característica cero entonces $\mu(\mathfrak{g}) \geq \dim \mathfrak{g}$. Más aún si $1 \leq \operatorname{rank}(\mathfrak{g}) \leq 2$ entonces

$$\dim \mathfrak{g} \leq \mu(\mathfrak{g}) \leq \dim \mathfrak{g} + 1.$$

Existe un álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$ de dimensión $n = 11$ tal que $\mu(\mathfrak{g}) > \dim \mathfrak{g} + 1$ (ver [Be]).

2.3. Demostraciones

1. b) Sin pérdida de generalidad podemos pensar a $\mathfrak{g}$ como una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g} \oplus \mathrm{k}$ entonces $\mu(\mathfrak{g}) \leq \mu(\mathfrak{g} \oplus \mathrm{k})$.

Veamos que $\mu(\mathfrak{g} \oplus \mathrm{k}) \leq \mu(\mathfrak{g})$. Sean (π, V) una representación de fiel de $\mathfrak{g}$ e $I \in \mathfrak{gl}(V)$ el operador identidad. Como $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$ tenemos que $I \notin \pi(\mathfrak{g})$, definimos

$$\begin{aligned} \pi_1 : \mathfrak{g} \oplus \mathrm{k} &\to \mathfrak{gl}(V) \\ (X, a) &\mapsto \pi(X) + aI\ . \end{aligned}$$

Es fácil ver que (π_1, V) es una representación de $\mathfrak{g} \oplus \mathrm{k}$ y, dado que $I \notin \pi(\mathfrak{g})$, (π_1, V) es una representación es fiel. Entonces $\mu(\mathfrak{g} \oplus \mathrm{k}) \leq \mu(\mathfrak{g})$.

2. b) Probaremos primero que $\mu(\mathfrak{n}(n, \mathrm{k})) = n$. Dado que una representación fiel de $\mathfrak{n}(n, \mathrm{k})$ es la identidad tenemos que $\mu(\mathfrak{n}(n, \mathrm{k})) \leq n$.

   Sea (π, V) una representación fiel de $\mathfrak{n}(n, \mathrm{k})$ y supongamos que $\dim V = d < n$. Por el Teorema 1.3.10 podemos suponer que (π, V) es una nilrepresentación fiel de $\mathfrak{n}(n, \mathrm{k})$, pues es un álgebra de Lie nilpotente y $\mathfrak{z}(\mathfrak{n}(n, \mathrm{k})) = \mathrm{k}\{E_{1n}\}$. Luego, por el Teorema de Engel (ver §1.1.5), $\mathfrak{n}(n, \mathrm{k})$ es isomorfa a una subálgebra de Lie de $\mathfrak{n}(d, \mathrm{k})$. Entonces

$$\frac{n(n-1)}{2} \leq \frac{d(d-1)}{2},$$

   esto es una contradicción dado que $d < n$.

   Nos falta probar que $\mu(\mathfrak{t}(n, \mathrm{k})) = n$. De la misma forma que para el caso $\mathfrak{n}(n, \mathrm{k})$, podemos concluir que $\mu(\mathfrak{t}(n, \mathrm{k})) \leq n$.

   Sea (π, V) una representación fiel de $\mathfrak{t}(n, \mathrm{k})$. Como $\mathfrak{t}(n, \mathrm{k})' = \mathfrak{n}(n, \mathrm{k})$ entonces $(\pi|_{\mathfrak{n}(n,\mathrm{k})}, V)$ es una representación fiel de $\mathfrak{n}(n, \mathrm{k})$, por lo tanto $\dim V \geq n$.

   c) Para probar que $\mu(\mathfrak{h}_m) \geq m + 2$ usaremos los siguientes resultados,

   Lema 2.3.1. *Sean V un espacio vectorial de dimensión finita y F una forma bilineal no degenerada de V tal que V_1 es un subespacio de V, F-isotrópico. Entonces* $\dim V_1 \leq \frac{\dim V}{2}$.

   Una sencilla prueba de este lema se puede consultar en [GHW] (ver §2.1.3).

   Proposición 2.3.2. *Sea $\mathfrak{g}$ una subálgebra de Lie abeliana de $\mathfrak{h}_m$ tal que $Z \notin \mathfrak{g}$. Entonces $\dim \mathfrak{g} \leq m$.*

   Demostración. Es claro que $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}_m) \cap \mathfrak{g} = \{0\}$ pues $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}_m) = \mathrm{k}\{Z\}$. Entonces existe un subespacio U de $\mathfrak{h}_m$ tal que $\mathfrak{h}_m = \mathfrak{g} \oplus U \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{h}_m)$. Sean $W = \mathfrak{g} \oplus U$ y $F : W \times W \to \mathrm{k}$ la aplicación tal que para todo $X, Y \in W$, $[X, Y] = F(X, Y)Z$. Es fácil verificar que F es una forma bilineal. Veamos que es no degenerada, sea $X_0 \in W$ tal que para todo $X \in W$, $F(X_0, X) = 0$ es decir $[X_0, X] = 0$. Por lo tanto $[X_0, v] = 0$ para todo $v \in \mathfrak{h}_m$ pues $v = X + kZ$ para algún $k \in \mathrm{k}$ y $X \in W$. Luego $X_0 \in \mathfrak{z}(\mathfrak{h}_m)$ entonces $X_0 = 0$ y como $\mathfrak{g}$ es una subálgebra de Lie abeliana de $\mathfrak{h}_m$, es claro que es un subespacio F-isotrópico de W. Por lo tanto, por el Lema 2.3.1, $\dim \mathfrak{g} \leq \frac{\dim W}{2} = m$. □

   A continuación probaremos que $\mu(\mathfrak{h}_m) \geq m + 2$.

   Sea (π, V) una representación fiel de $\mathfrak{h}_m$ de dimensión finita. Veamos que $\dim V \geq m + 2$. Dado que $\mathfrak{h}_m$ es una subálgebra de Lie nilpotente y $\mathfrak{h}'_m = \mathfrak{z}(\mathfrak{h}_m)$, por la Proposición 1.3.10, podemos considerar a (π, V) como una nilrepresentación fiel. Sean $0 \neq v \in V$ tal que $\pi(Z)v \neq 0$ y

$$\begin{aligned} F_v : \mathfrak{h}_m &\to V \\ X &\mapsto \pi(X)v \;. \end{aligned}$$

   Como (π, V) es una representación, es fácil verificar que F_v es una transformación lineal y $\ker F_v$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{h}_m$. Por la elección de v, es claro que $\ker F_v \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{h}_m) = 0$.

Entonces $[\ker F_v, \ker F_v] = 0$, es decir que $\ker F_v$ es una subálgebra de Lie abeliana de $\mathfrak{h}_m$. Además,

$$\dim \mathfrak{h}_m = \dim \ker F_v + \dim \operatorname{im} F_v$$
$$2m + 1 = \dim \ker F_v + \dim \operatorname{im} F_v.$$

Entonces $\dim V \geq \dim \operatorname{im}(F_v) \geq m + 1$ pues, por la Proposición 2.3.2 $\dim \ker F_v \leq m$. Veamos que $v \notin im(F_v)$, para ello supongamos lo contrario. Es decir, existe $X_0 \in \mathfrak{h}_m$ tal que $F_v(X_0) = v$, por lo tanto $\pi(X_0)v = v \neq 0$. Pero esto contradice el hecho que (π, V) es una nilrepresentación, entonces $v \notin \operatorname{im} F_v$. Luego $\dim V \geq \dim \operatorname{im}(F_v) + 1 \geq m + 2$.

2.4. Estructuras afines y la función μ

En esta sección investigaremos la relación que existe entre las estructuras afines y la función μ. Tal relación tiene su inicio en la famosa conjetura de Auslander: *Una variedad afín completa compacta es finitamente cubierta por cocientes de grupos de Lie solubles con estructuras afín invariante a izquierda.* En este contexto Milnor preguntó: *Qué grupos de Lie admiten una estructura afín completa invariante a izquierda.* Esta pregunta es particularmente difícil de responder para grupos de Lie nilpotentes. Existe mucha evidencia que estos grupos de Lie admiten una estructura afín invariante a izquierda. Milnor conjeturo que esto era cierto aún para los grupos de Lie solubles. Finalmente, en 1995 Benoist dió una respuesta negativa a la conjetura de Milnor construyendo un álgebra de Lie filiforme de dimensión 11 la cual no admite una estructura afín (ver [Be]). Más tarde Grunewald y Burde (ver [BG], [B1], [B3]) construyeron familias de álgebras de Lie que contradicen la conjetura de Milnor.

Es sabido que si un grupo G admite una estructura afin invariante a izquierda entonces el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ asociada al grupo de Lie G admite una representación fiel de dimensión $\dim \mathfrak{g} + 1$, una prueba está dada por el Lema 2.4.1. Luego, una manera de hallar contraejemplos a la conjetura de Milnor es encontrar álgebras de Lie que no admitan representaciones de dimensión menor o igual que $\dim \mathfrak{g} + 1$. Es decir,

$$\mu(\mathfrak{g}) > \dim \mathfrak{g} + 1.$$

Lema 2.4.1. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie que admite una estructura afín entonces $\mu(\mathfrak{g}) \leq \dim \mathfrak{g} + 1$.*

Antes de la demostración daremos unos resultados previos.

Definición 2.4.2. Una conexión ∇ sobre una variedad M es afín si

$$\nabla_{fX+gY} = f\nabla_X + g\nabla_Y$$
$$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M), f, g \in C^\infty(M)$.

Definición 2.4.3. Sea G un grupo de Lie y ∇ una conexión afín sobre G. Se dice que ∇ es invariante a izquierda si para toda traslación a izquierda L_g se tiene que

$$(\nabla_{X^{L_g}} Y^{L_g})^{L_{g^{-1}}} = \nabla_X Y$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$.

Una conexión sobre un grupo de Lie G es invariante a izquierda si y solamente si las traslaciones a izquierda son mapeos afines. Recordemos que la torsión T y la curvatura R de una conexión afín ∇ son los tensores definidos por

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y];$$
$$R(X,Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}.$$

En este trabajo consideraremos conexiones afines invariante a izquierda de torsión y curvatura nula.

Sea (G,∇) un grupo de Lie afín y $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de G. Dado que el operador ∇ es invariante a izquierda, este induce un mapeo bilineal sobre $\mathfrak{g}$, denotado por de la misma forma que el operador ∇. En este caso el mapeo bilineal ∇ esta caracterizado por las propiedades dadas en la siguiente definición. En este caso diremos que el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ con tal mapeo ∇ es afín.

Definición 2.4.4. Un mapeo bilineal $\nabla : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ que satisface;

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y];$$
$$\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X = \nabla_{[X,Y]}$$

se llama una estructura afín sobre $\mathfrak{g}$.

Definición 2.4.5. Una estructura afín sobre $\mathfrak{g}$ es completa si los endomorfismos $\psi_X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ definido por $\psi_X(Y) = Y + \nabla_Y X$ son biyectivos para todo $X \in \mathfrak{g}$.

Un ejemplo de un álgebra que admite una estructura afín son las álgebras de Lie p-pasos nilpotente con $p \leq 3$ (ver [Sc]).

Demostración. (*del Lema 2.4.1*) Sea ∇ una estructura afín sobre el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Definimos $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g} \oplus \mathrm{k})$ dada por $\pi(X)(Y,t) = (\nabla_X Y + tX, 0)$. Es fácil verificar que $(\pi, \mathfrak{g} \oplus \mathrm{k})$ es una representación fiel de $\mathfrak{g}$ de dimensión $\dim \mathfrak{g} + 1$. Por lo tanto $\mu(\mathfrak{g}) \leq \dim \mathfrak{g} + 1$. □

Por el Lema 2.4.1; para dar contraejemplos a la conjetura de Milnor es necesario encontrar álgebras de Lie nilpotentes de dimensión finita tal que $\mu(\mathfrak{g}) > \dim \mathfrak{g} + 1$.

Proposición 2.4.6. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie que admite una derivación regular. Entonces $\mathfrak{g}$ admite una estructura afín.*

Demostración. Sea $T \in Der(\mathfrak{g})$ una derivación regular de $\mathfrak{g}$. Sea $\nabla : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ definido por

$$\nabla_X Y = (T^{-1} \circ \mathrm{ad}(X) \circ T)(Y)$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. Es fácil ver que ∇ define una estructura afín sobre $\mathfrak{g}$. □

Proposición 2.4.7. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie nilpotente tal que $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ admite una derivación T regular. Entonces $\mathfrak{g}$ admite una estructura afín.*

Demostración. Sea $\widetilde{T} \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ tal que $\widetilde{T}\mid_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]} = T^{-1}$. Sea $\nabla : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ definido por

$$\nabla_X Y = \widetilde{T} \circ \mathrm{ad}(X) \circ T(Y)$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. Es fácil ver que ∇ define una estructura afín sobre $\mathfrak{g}$. $\square$

Por el Lema 2.4.1 sabemos que las distintas clases de álgebras de Lie presentadas en las proposiciones anteriores son tales que $\mu(\mathfrak{g}) \leq \dim \mathfrak{g} + 1$.

2.4.1. Álgebras de Lie característicamente nilpotentes

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. Consideremos una subálgebra abeliana maximal $\mathfrak{t} \in Der\mathfrak{g}$ que consiste de endomorfismos semisimples, esta subálgebra es llamada un *toro de* $\mathfrak{g}$. La dimensión común de todos los toros se llama el *rango de* $\mathfrak{g}$ y lo denotaremos con $rank(\mathfrak{g})$.

Un álgebra de Lie de rango cero se dice ser *característicamente nilpotente*, es decir, un álgebra de Lie tal que todas sus derivaciones son endomorfismos nilpotentes se dice ser característicamente nilpotente.

El siguiente teorema muestra la relación que existe entre las álgebras Lie de $rank(\mathfrak{g}) \geq 1$ y las $\mathbb{Z}$-graduadas.

Teorema 2.4.8. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión finita de $rank(\mathfrak{g}) \geq 1$. Entonces $\mathfrak{g}$ admite una $\mathbb{Z}$-graduación.*

Para probar este teorema primero introduciremos unos resultados previos.

Lema 2.4.9. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión finita y $T \in Der(\mathfrak{g})$ tal que T es un endomorfismo semisimple con autovalores enteros. Entonces $\mathfrak{g}$ es $\mathbb{Z}$-graduada.*

Demostración. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{Z}$ valores propios de T tal que $\lambda_1 < \cdots < \lambda_k$ y sean $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_k$ los subespacios propios de T asociados a $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ respectivamente, por lo tanto $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k$.

Veamos que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie graduada, cuya graduación está dada por los espacios propios $\mathfrak{g}_i$. Sean $X_i \in \mathfrak{g}_i$ y $X_j \in \mathfrak{g}_j$ luego

$$\begin{aligned} T[X_i, X_j] &= [T(X_i), X_j] + [X_i, T(X_j)] \\ &= \lambda_i [X_i, X_j] + \lambda_j [X_i, X_j] \end{aligned}$$

entonces $T[X_i, X_j] = (\lambda_i + \lambda_j)[X_i, X_j]$. Luego $[X_i, X_j] \in \mathfrak{g}_{i+j}$, por lo tanto $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie $\mathbb{Z}$-graduada. $\square$

Lema 2.4.10. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión n tal que el $rank(\mathfrak{g}) \geq 1$. Entonces existe $T \in Der(\mathfrak{g})$ semisimple con autovalores enteros.*

Demostración. Como el $rank(\mathfrak{g}) \geq 1$ entonces existe una derivación no nula D semisimple de $\mathfrak{g}$. Sean $\lambda_1 < \cdots < \lambda_k$ valores propios de D y sean $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_k$ los subespacios propios de D asociados a $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ respectivamente. Sean B_i una base de vectores propios de $\mathfrak{g}_i$ para cada $i = 1, \ldots, k$ entonces $B = \cup_{i=1}^{k} B_i$ es una base de vectores propios de $\mathfrak{g}$.

Definamos la transformación lineal $F : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ tal que $F(X) = \mu_i X$ para cada $X \in \mathfrak{g}_i$ $i = 1, \dots, k$. Para que F sea una derivación semisimple de $\mathfrak{g}$ basta ver que

$$F[X,Y] = [F(X), Y] + [X, F(Y)] \tag{2.1}$$

para cada $X, Y \in B$.

Sean $X \in B_i, Y \in B_j$

1) si $[X,Y] = 0$ entonces F cumple la ecuación (2.1),

2) si $[X,Y] \neq 0$ entonces $[X,Y] \in \mathfrak{g}_{i+j}$ luego F verifica la ecuación (2.1) si y sólo si $\mu_i + \mu_j = \mu_{i+j}$.

Por lo tanto para que F sea una derivación es suficiente pedir que $\mu_i + \mu_j = \mu_{i+j}$ cada vez que $\lambda_i + \lambda_j = \lambda_{i+j}$, dado que D es una derivación semisimple de $\mathfrak{g}$. Es decir que basta que $\mu_1, \dots, \mu_k$ cumplan el mismo sistema lineal homogéneo que cumplen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ cuya matriz asociada A esta formada por los vectores filas $e_i + e_j - e_{i+j}$, donde $e_s = (\underbrace{0, \dots, 0}_{s-1}, 1, 0, \dots, 0)$.

Dado que A tiene coeficientes en $\mathbb{Q}$ y admite al menos una solución no trivial, que son $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, entonces también admite una solución entera no trivial. Luego eligiendo los valores $\mu_1, \dots, \mu_k$ que sean una solución entera no trivial, resulta que F es una derivación con valores propios enteros. □

Demostración. (*del Teorema 2.4.8*) Por los Lemas 2.4.10 y 2.4.9 se sigue la demostración del teorema. □

2.4.2. Estructuras afines sobre álgebras de Lie filiformes

En esta subsección estamos interesados en enunciar dos resultados sobre álgebras de Lie filiformes característicamente nilpotentes que muestran en cierto sentido la dificultad al obtener contraejemplos a la conjetura de Milnor dentro de las álgebras de Lie filiformes.

Se puede ver que el rango de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ nilpotente es menor o igual que la codimensión de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, ya que $\mathfrak{g}$ es un álgebra generada por cualquier subespacio de $\mathfrak{g}$ complementario a $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Luego el rango de un álgebra de Lie filiforme es menor o igual a 2. Por otra parte las álgebras de Lie filiformes de rango 1 y 2 son tales que admiten una estructura afín (ver [GoK]). Dicho de otra manera toda álgebra de Lie filiforme no afín es característicamente nilpotente.

Ahora daremos una introducción a la variedad $\mathcal{L}^n$ de corchetes de álgebras de Lie. Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre el cuerpo k y sea $B^2(V)$ el espacio de todos los mapeos bilineales $V \times V \to V$. Un corchete de álgebra de Lie sobre V es un elemento u de $B^2(V)$ que satisface las siguientes condiciones polinomiales:

- $u(X,Y) + u(Y,X) = 0$;
- $u(u(X,Y),Z) + u(u(Y,Z),X) + u(u(Z,X),Y) = 0$.

para todo $X, Y, Z \in V$. Dada una base de V un corchete de álgebra de Lie es definida por el conjunto de constantes de estructuras $\{c_{ij}^k\}$ en el espacio k^{n^3} que satisfacen las siguientes condiciones;

$$c_{ij}^k + c_{ji}^k = 0 \qquad \sum_{k=1}^{n} \left(c_{ij}^k c_{km}^l + c_{jm}^k c_{ki}^l + c_{mi}^k c_{kj}^l \right) = 0. \tag{2.2}$$

El subconjunto $\mathfrak{L}^n$ de corchetes de álgebras de Lie en el espacio k^{n^3} esta definido por el sistema de ecuaciones polinomiales dado en (2.2), entonces $\mathfrak{L}^n$ es una variedad algebraica afin.

Los corchetes de álgebras de Lie de clase de nilpotencia $\leq p$ definen una subvariedad cerrada $\mathfrak{N}_p^n$ en $\mathfrak{L}^n$. La clase de nilpotencia de un álgebra de Lie de dimensión n es siempre menor o igual que $n-1$ por lo tanto $\mathfrak{N}_{n-1}^n$ es el conjunto de todos los corchetes de álgebras de Lie nilpotente de dimensión n. Denotaremos por $\mathfrak{N}^n$ a esta variedad y la llamaremos la variedad de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión n. Un subconjunto de $\mathfrak{N}^n$ que nos resulta importante en esta sección es la variedad de álgebras de Lie filiformes que denotaremos por $\mathfrak{F}^n$.

La variedad $\mathfrak{L}^n$ tiene naturalmente la topología de Zariski, la variedad $\mathfrak{F}^n$ resulta ser un abierto Zariski en la variedad $\mathfrak{N}^n$.

Como vimos en un principio la clase de álgebras de Lie filiformes no afines esta incluido en la clase de álgebras de Lie característicamente nilpotentes de la misma dimensión. Un resultado sobre estas álgebras es (ver [Go1] y [K1]):

Teorema 7. *Toda componente irreducible de la variedad de corchete de álgebras de Lie filiformes $\mathfrak{F}^m$ de dimensión $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 8$ contiene un abierto Zariski cuyos elementos son corchetes de álgebras de Lie característicamente nilpotentes.*

Otro resultado obtenido para las álgebras de Lie filiforme (ver [K2])

Teorema 8. *Para todo $m \in \mathbb{N}$, $m \neq 1 \pmod 5$, la variedad $\mathfrak{F}^n$ contiene un abierto Zariski no vacío cuyos elementos son corchetes de álgebras de Lie afines.*

Es decir que el conjunto de los corchetes de álgebras de Lie filiformes afines de dimensión finita cuyos elementos son álgebras de Lie característicamente nilpotente es un abierto denso en $\mathfrak{L}^n$. Esto muestra la dificultad al obtener contraejemplos a la conjetura de Milnor dentro de las álgebras de Lie filiformes.

Capítulo 3

Cotas de μ de álgebras de Lie nilpotentes

Por el Teorema de Ado-Iwasawa se sabe que toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión finita admite una representación fiel de dimensión finita. Es decir que toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión finita puede ser embebida en el álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(V)$ donde V es un espacio vectorial de dimensión finita. De esta forma $\dim \mathfrak{g} \leq (\dim V)^2$ lo cual nos dice que

$$\sqrt{\dim \mathfrak{g}} \leq \mu(\mathfrak{g}).$$

Por otra parte si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie tal que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$ la representación adjunta es una representación fiel de $\mathfrak{g}$ luego $\mu(\mathfrak{g}) \leq \dim \mathfrak{g}$. Por lo tanto

$$\sqrt{\dim \mathfrak{g}} \leq \mu(\mathfrak{g}) \leq \dim \mathfrak{g} \quad \text{si} \quad \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0.$$

En el caso en que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie soluble, por el Teorema de Lie, para toda representación (π, V) de $\mathfrak{g}$ existe una base B de V tal que $[\pi(X)]_B \in \mathfrak{t}_{\dim V}$. Es decir que la $\dim \mathfrak{g} \leq \frac{(\dim V+1)\dim V}{2}$ por lo tanto

$$\sqrt{2 \dim \mathfrak{g}} \leq \mu(\mathfrak{g}) + 1.$$

En particular si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie nilpotente tenemos que $\sqrt{2 \dim \mathfrak{g}} \leq \mu(\mathfrak{g}) + 1$. Pero esta cota se puede mejorar por el Teorema 1.3.10 para las álgebras de Lie nilpotentes tales que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, dado que toda representación fiel (π, V) se puede obtener una nilrepresentación fiel (π_N, V). Luego por el Teorema de Engel existe una base B de V tal que $[\pi_N(X)]_B \in \mathfrak{n}_{\dim V}$ para todo $X \in \mathfrak{g}$ entonces $\dim \mathfrak{g} \leq \frac{\mu(\mathfrak{g})(\mu(\mathfrak{g})-1)}{2}$ por lo tanto

$$\sqrt{2 \dim \mathfrak{g}} \leq \mu(\mathfrak{g}).$$

En la sección §3.1 presentamos una serie de resultados que son útiles para dar una cota inferior para μ de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ k-pasos nilpotente y que son necesarios para probar los siguientes teoremas:

Teorema. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie k-pasos nilpotente sobre un cuerpo* k *de característica cero tal que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Entonces*

$$\left\lceil \sqrt{2 \frac{k+1}{k} \dim \mathfrak{g}} \right\rceil \leq \mu(\mathfrak{g}).$$

Teorema. *Sea $\mathfrak{g}_k$ es el álgebra de Lie k-pasos nilpotente sobre un cuerpo* k *de característica cero definida*

$$\mathfrak{g}_k = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1k+1} \\ & 0 & A_{23} & \dots & A_{2k+1} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & & A_{kk+1} \\ & & & & 0 \end{pmatrix} : A_{ij} \in M_a(\mathrm{k}) \text{ para } 1 \le i < j \le k+1 \right\}$$

entonces $\mu(\mathfrak{g}_k) = (k+1)a$.

En la sección §3.2, por medio de representaciones inducidas, construimos nilrepresentaciones fieles para $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 2-pasos nilpotente, la cual es útil para demostrar el siguiente teorema:

Teorema. *Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 2-pasos nilpotente de dimensión finita sobre un cuerpo* k *de característica cero y $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ el centro de $\mathfrak{g}$. Sea $\mathfrak{a}$ una subálgebra de Lie abeliana de $\mathfrak{g}$ de codimensión d tal que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{a}$ entonces*

$$\mu(\mathfrak{g}) \le \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) + d + 1$$

3.1. Una cota inferior para μ

Esta sección mostraremos el siguiente teorema relacionado con las álgebras de Lie k-pasos nilpotente.

Teorema 3.1.1. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie k-pasos nilpotente sobre un cuerpo* k *de característica cero tal que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Entonces*

$$\left\lceil \sqrt{2\frac{k+1}{k} \dim \mathfrak{g}} \right\rceil \le \mu(\mathfrak{g}).$$

En particular si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie 2-pasos nilpotente tal que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$

$$\sqrt{3 \dim \mathfrak{g}} \le \mu(\mathfrak{g}).$$

3.1.1. Obtención de una cota inferior

Los siguientes resultados serán importantes a la hora de obtener resultados relacionados con las álgebras de Lie y su valor de μ, las demostraciones de algunos de ellos se encuentran en el apéndice al final del capítulo. Más aún algunos de estos resultados pueden verse en [CaRo].

Además se puede ver que

$$\min\{a+b : a, b \in \mathbb{N}, ab \ge d\} = \left\lceil 2\sqrt{d} \right\rceil. \tag{3.1}$$

Teorema 3.1.2. *Sean* k *un cuerpo infinito, V un espacio vectorial sobre* k *de dimensión finita. Sea $\mathcal{T}$ un subespacio no nulo de operadores nilpotentes de $\mathrm{End}(V)$ que conmutan. Entonces existe un conjunto linealmente independiente $B = \{v_1, \dots, v_s\} \subset V$ y una descomposición $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{T}_s$ tales que las aplicaciones $F_i : \mathcal{T} \to V$ definida por $F_i(T) = T(v_i)$ satisfacen*

(1) *$F_i|_{\mathcal{T}_i}$ es inyectiva para todo $i = 1 \dots s$;*

(2) $\mathcal{T}_j \subset \ker F_i$ *para todo* $1 \leq i < j \leq s$*;*

(3) $\mathcal{T}_j V \subset \operatorname{im} F_i|_{\mathcal{T}_i}$ *para todo* $1 \leq i < j \leq s$*,*

Más aún, dado $\{T_1, \dots, T_q\} \subseteq \mathcal{T}$ *existe* v_1 *tal que* $T_i(v_1) \neq 0$ *para todo* i*. Además, sea* $\{\widetilde{T}_1, \dots, \widetilde{T}_r\}$ *una base de* $\mathcal{T}_1$*. Entonces el conjunto* $\{\widetilde{T}_1(v_1), \dots, \widetilde{T}_r(v_1), v_1, \dots, v_s\}$ *es linealmente independiente.*

Demostración. Ver apéndice □

Corolario 3.1.3. *Sea* V *un espacio vectorial finito dimensional y sea* $\mathfrak{T}$ *un subespacio abeliano no nulo de* $\operatorname{End}(V)$ *de operadores nilpotente. Entonces*

$$\dim V \geq \lceil 2\sqrt{\dim \mathfrak{T}} \rceil.$$

Demostración. Por la condición (3) del Teorema 3.1.2 la $\dim \mathfrak{T}_j V \leq \dim \operatorname{im} F_1 |_{\mathfrak{T}_1}$ y por (1) $\dim \mathfrak{T}_j \leq \dim \operatorname{im} F_1 |_{\mathfrak{T}_1}$ para todo $j = 1, \dots, s$. Por lo tanto, como $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{T}_s$ obtenemos que $\dim \mathfrak{T} \leq s \dim \mathfrak{T}_1$ donde $\dim \mathfrak{T}_1 = \dim \operatorname{im} F_1 |_{\mathfrak{T}_1} = \dim \operatorname{im} F_1$. Luego $\dim \mathfrak{T} \leq s \dim \operatorname{im} F_1$ entonces, por (3.1)

$$\left\lceil 2\sqrt{\dim \mathfrak{T}} \right\rceil \leq s + \dim \operatorname{im} F_1 \ .$$

Veamos que $\operatorname{im} F_1 \cap \mathrm{k}\{v_1, \dots, v_s\} = 0$. Sea $v \in \operatorname{im} F_1 \cap \mathrm{k}\{v_1, \dots, v_s\}$ entonces existe $T \in \mathfrak{T}$ y $a_1, \dots a_s \in \mathrm{k}$ tales que

$$T(v_1) = \sum_{i=1}^{s} a_i v_i \ .$$

Sean $i_0 = \max\{i = 1, \dots, s : a_i \neq 0\}$ y $T_{i_0} \in \mathfrak{T}_{i_0}$ entonces por (2) obtenemos que

$$T_{i_0} T(v_1) = a_{i_0} T_{i_0}(v_{i_0}).$$

Como $\mathfrak{T}$ es un subespacio de endomorfismos que conmutan, se tiene que $0 = a_{i_0} T_{i_0}(v_{i_0})$ pero esto contradice que $F_1 |_{\mathfrak{T}_1}$ es inyectiva y que $a_{i_0} \neq 0$. Por lo tanto $\operatorname{im} F_1 \cap \mathrm{k}\{v_1, \dots, v_s\} = 0$, luego $\dim V \geq s + \dim \operatorname{im} F_1$ con lo cual por (3.1) tenemos que $\dim V \geq \left\lceil 2\sqrt{\dim \mathfrak{T}} \right\rceil$. □

Lema 3.1.4. *Sea* V *un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo* k*. Sean* $\mathfrak{T}_1$ *y* $\mathfrak{T}_2$ *subespacios de* $\operatorname{End}(V)$*. Entonces existe* $v_1 \in V$ *tal que*

(1) $\dim \mathfrak{T}_1 v_1 = \max\{\dim \mathfrak{T}_1 v : v \in V\}$ *y;*

(2) $\dim \mathfrak{T}_2 v_1 = \max\{\dim \mathfrak{T}_2 v : v \in V\}$.

Demostración. Ver apéndice □

Proposición 3.1.5. *Sean* k *un cuerpo infinito,* V *un espacio vectorial sobre* k *de dimensión finita. Sean* $\mathfrak{T}$ *un subespacio de operadores nilpotentes de* $\operatorname{End}(V)$ *y* $\mathfrak{T}'$ *un subespacio de* $\mathfrak{T}$ *tal que* $\mathfrak{T}\mathfrak{T}' = \mathfrak{T}'\mathfrak{T}$ *y* $[\mathfrak{T}, \mathfrak{T}] \subseteq \mathfrak{T}'$*. Entonces existe un conjunto linealmente independiente* $B = \{v_1, \dots, v_{s'}, v_{s'+1}, \dots, v_s\} \subseteq V$ *y una descomposición*

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{T}_{s'} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{T}_s \quad y \quad \mathfrak{T}' = \mathfrak{T}'_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{T}'_{s'}$$

y aplicaciones $F_i : \mathfrak{T} \to V$ *definidas por* $F_i(T) = T(\alpha_i)$ *tal que* $F_i |_{\mathfrak{T}'}$ *y* F_i *verifican las condiciones* 1), 2) *y* 3) *del Teorema 3.1.2. Más aún*

(4) $\mathfrak{T}'_i \subseteq \mathfrak{T}_i$ *para todo* $i = 1, \dots, s$;

(5) $\mathfrak{T}_j \mathfrak{T}_i v_i \subseteq \mathfrak{T}' v_i$ *para todo* $1 \leq i < j \leq s$.

Además, sean $W' = \mathrm{k}\{v_1, \dots, v_{s'}\}$ *y* $W = \mathrm{k}\{v_1, \dots, v_{s'}, v_{s'+1}, \dots, v_s\}$. *Entonces*

$$\mathfrak{T} v_1 \cap W' = 0 \quad y \quad \mathfrak{T}' v_1 \cap W = 0.$$

Demostración. La demostración la haremos por inducción sobre la dimensión de V. Por el Lema 3.1.4 existe $v_1 \in V$ tal que $\dim \mathfrak{T} v_1 = \max\{\dim \mathfrak{T} v : v \in V\}$ y $\dim \mathfrak{T}' v_1 = \max\{\dim \mathfrak{T}' v : v \in V\}$. Sea $F_1 : \mathfrak{T} \to V$ una aplicación lineal tal que $F_1(T) = T(v_1)$ y $F'_1 = F_1 \mid_{\mathfrak{T}'}$, las aplicaciones F_1 y F'_1 son como las del Teorema 3.1.2. Sean $\widetilde{\mathfrak{T}} = \ker F_1$ y $\widetilde{\mathfrak{T}}' = \ker F'_1$ y sean $\mathfrak{T}_1$ y $\mathfrak{T}'_1$ un complemento directo de $\widetilde{\mathfrak{T}}$ y $\widetilde{\mathfrak{T}}'$ respectivamente en $\mathfrak{T}$ y $\mathfrak{T}'$. Por hipótesis inductiva existe $\{v_2, \dots, v_s, \dots, v_{s'}\} \subseteq V$ linealmente independiente y una descomposición

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{T}_{s'} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{T}_s \quad \text{y} \quad \mathfrak{T}' = \mathfrak{T}'_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{T}'_{s'}$$

y aplicaciones $F_i : \mathfrak{T} \to V$ definidas por $F_i(T) = T(\alpha_i)$ tal que $F_i \mid_{\mathfrak{T}'}$ y F_i que verifican las condiciones. Es claro que $\{v_1, v_2, \dots, v_s, \dots, v_{s'}\}$ y la descomposición

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{T}_{s'} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{T}_s \quad \text{y} \quad \mathfrak{T}' = \mathfrak{T}'_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{T}'_{s'}$$

verifican $(1), (2)$ y (4) trivialmente. Para probar (3) debemos hacer lo mismo que en la demostración del Teorema 3.1.2 aplicado a la función F_1, F'_1 respectivamente. Veamos (5). Sea $T \in \mathfrak{T}_j$ y $\mathfrak{T}_i$ con $1 \leq i < j \leq s$ tal que

$$\begin{aligned}(T \circ H)(v_i) &= (H \circ T)(v_i) + [H, T](v_i) \\ &= [H, T](v_i) \text{ por } (2) \\ &\in \mathfrak{T}'(v_i) \text{ por hipótesis}\end{aligned}$$

Vamos a probar que $\mathfrak{T}(v_1) \cap W' = 0$. Sean $T \in \mathfrak{T}$ y $a_1, \dots, a_{s'} \in \mathrm{k}$ tal que

$$T(v_1) = \sum_{i=1}^{s'} a_i v_i.$$

Sea $i_0 = \max\{i = 1, \dots, s' : a_i \neq 0\}$ y $T_{i_0} \in \mathfrak{T}_{i_0}$ entonces $T' T(v_1) = a_{i_0} T'(v_{i_0})$ entonces $a_{i_0} T'(v_{i_0}) = 0$ pero esto contradice el hecho que $a_{i_0} \neq 0$ y la condición (1). Por lo tanto $\mathfrak{T}(v_1) \cap W' = 0$. La prueba que $\mathfrak{T}'(v_1) \cap W = 0$ es análoga a la anterior. $\square$

Como primer resultado que se obtiene del Teorema 3.1.2 relacionado con las álgebras de Lie abelianas es el valor de μ_{nil}. El valor de μ para las álgebras de Lie abelianas se obtiene a partir del Teorema de Schur (ver Teorema 2.2.1)

Teorema 3.1.6. *Sea* $\mathfrak{a}$ *un álgebra de Lie abeliana de dimensión finita sobre* k. *Entonces*

$$\mu_{nil}(\mathfrak{a}) = \left\lceil 2\sqrt{\dim \mathfrak{a}} \right\rceil.$$

Demostración. Por el Corolario 3.1.3 se tiene que $\mu_{nil}(\mathfrak{a}) \geq \lceil 2\sqrt{\dim \mathfrak{a}} \rceil$. Vamos a obtener una nilrepresentación fiel de $\mathfrak{a}$ de dimensión $\left\lceil 2\sqrt{\dim \mathfrak{a}} \right\rceil$. Sean $a = \left\lfloor \sqrt{\dim \mathfrak{a}} \right\rfloor$ y $b = \left\lceil \frac{\dim \mathfrak{a}}{\lfloor \sqrt{\dim \mathfrak{a}} \rfloor} \right\rceil$. Por lo tanto $ab \geq \dim \mathfrak{a}$ luego por (3.1) $a + b \geq \left\lceil 2\sqrt{\dim \mathfrak{a}} \right\rceil$.

Sea

$$\widetilde{\mathfrak{a}} = \mathrm{k}\,\{E_{ij} : 1 \leq i \leq a \text{ y } b \leq j \leq a+b\} \subseteq M_{a+b}(\mathrm{k})$$

Es fácil ver que $\widetilde{\mathfrak{a}}$ es un álgebra de Lie abeliana de matrices nilpotentes de tamaño $a+b$ de dimensión ab. Como $ab \geq \dim \mathfrak{a}$ se tiene que $\dim \widetilde{\mathfrak{a}} \geq \dim \mathfrak{a}$ entonces existe una nilrepresentación fiel de $\mathfrak{a}$ de dimensión $\left\lceil 2\sqrt{\dim \mathfrak{a}} \right\rceil$. Por lo tanto $\mu_{nil}(\mathfrak{g}) = \left\lceil 2\sqrt{\dim \mathfrak{a}} \right\rceil$. $\square$

Otro resultado relacionado con las álgebras de Lie de dimensión finita sobre un cuerpo k es el siguiente teorema:

Teorema 3.1.7. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 2-pasos nilpotente de dimensión finita y (π, V) una nilrepresentación fiel de $\mathfrak{g}$. Entonces existen $a, b, m \in \mathbb{N}$ tales que*

- $\dim \mathfrak{g} \leq ab + m(b+a)$;
- $\dim V \geq a + b + m$;
- $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \leq bm$.

Antes de hacer la demostración del Teorema 3.1.7 vamos a establecer algunas notaciones y observaciones que serán útiles para la prueba del mismo.

Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 2-pasos nilpotente y (π, V) una nilrepresentación fiel de $\mathfrak{g}$. Apliquemos la Proposición 3.1.5 a $\pi(\mathfrak{g})$ y a $\pi(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}))$ respectivamente, donde $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ es el centro de $\mathfrak{g}$.

Para simplificar la notación llamaremos $\mathfrak{g} := \pi(\mathfrak{g})$ y $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) := \pi(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}))$, por la Proposición 3.1.5 existe una descomposición de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ tal que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{s'} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_s \quad \text{y} \quad \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{z}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{z}_{s'}$$

Sea $\{T_1', \ldots, T_b', T_1, \ldots, T_a\}$ una base de $\mathfrak{g}_1$ tal que $\{T_1', \ldots, T_b'\}$ es una base de $\mathfrak{z}_1$, esto lo podemos hacer dado que $\mathfrak{z}_1 \subseteq \mathfrak{g}_1$. Entonces por (1) de la Proposición 3.1.5

$$\{T_1'(v_1), \ldots, T_b'(v_1), T_1(v_1), \ldots, T_a(v_1)\}$$

es una base de $\mathfrak{g}_1(v_1)$ tal que $\{T_1'(v_1), \ldots, T_b'(v_1)\}$ es una base de $\mathfrak{z}_1(v_1)$. Sea

$$B = \{T_1'(v_1), \ldots, T_b'(v_1), T_1(v_1), \ldots, T_a(v_1), v_1, \ldots, v_{s'}, w_1, \ldots, w_n\} \tag{3.2}$$

una base de V, veamos la forma de $[X]_B$ para todo $X \in \mathfrak{g}$.

Si $X_1 \in \mathfrak{g}_1$ entonces

$$[X_1]_B = \begin{pmatrix} A_{11}^1 & A_{12}^1 & A_{13}^1 & A_{14}^1 \\ A_{21}^1 & A_{22}^1 & A_{23}^1 & A_{24}^1 \\ A_{31}^1 & A_{32}^1 & A_{33}^1 & A_{34}^1 \\ A_{41}^1 & A_{42}^1 & A_{43}^1 & A_{44}^1 \end{pmatrix}$$

Si $X_i \in \mathfrak{g}_i$ entonces

$$[X_i]_B = \begin{pmatrix} 0 & A_{12}^i & A_{13}^i & A_{14}^i \\ 0 & 0 & A_{23}^i & A_{24}^i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

para todo $i = 2, \ldots, s'$. Tal que la primera columna de A_{13}^i y A_{23}^i es nula por la Proposición 3.1.5, más aún si $X_i \in \mathfrak{z}$ entonces por (1) de la Proposición 3.1.5 tenemos que A_{12}^i y A_{23}^i son matrices nulas.

Si $X_i \in \mathfrak{g}_i$ entonces

$$[X_i]_B = \begin{pmatrix} 0 & A_{12}^i & 0 & A_{14}^i \\ 0 & 0 & 0 & A_{24}^i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

para todo $i = s'+1, \ldots, s$.

Observación 3.1.8. Dado que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{s'} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_s$, existen únicos $X_i \in \mathfrak{g}_i$ tal que $X = X_1 + \cdots + X_s$ para todo $X \in \mathfrak{g}$.

Lema 3.1.9. *Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 2-pasos nilpotente y (π, V) una nilrepresentación fiel de $\mathfrak{g}$. Sea $A_{i3} = A_{i3}^1 + \cdots + A_{i3}^{s'}$ y $A_{ij} = A_{ij}^{s'+1} + \cdots + A_{ij}^s$ para $i = 1, 2$ y $j = 2, 4$ donde A_{ij}^t es el bloque de la matriz de $[X_t]_B$ para todo $t = 1, \ldots, s$;. Entonces la aplicación $H : \mathfrak{g} \to \mathrm{k}^{(b+a)\times(a+m)}$ definida por*

$$H(X) = \begin{pmatrix} A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{23} & A_{24} \end{pmatrix}$$

es una aplicación lineal inyectiva.

Demostración. Como (π, V) es una representación entonces es fácil ver que H es una aplicación lineal.

Veamos que H es inyectiva. Sea $B = \{T_1'(v_1), \ldots, T_a'(v_1), T_1(v_1), \ldots, T_b(v_1), v_1, \ldots, v_{s'}, w_1, \ldots, w_m\}$ una base como la dada en (3.2) de V y $X = X_1 + \cdots + X_s \in \mathfrak{g}$ tal que $H(X) = 0$. En particular $A_{13} = 0$ y $A_{23} = 0$ entonces

$$A_{i3}^1 + \cdots + A_{i3}^{s'} = 0$$

para $i = 1, 2$. Entonces por la forma de $[X]_B$ tenemos que $X_1(v_1) = 0$ luego, por la Proposición 3.1.5 obtenemos que $X_1 = 0$. De la misma forma se puede ver que $X_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, s'$ por lo tanto $X = X_{s'+1} + \cdots + X_s$. Como $H(X) = 0$, $A_{i3} = 0$ y por la ecuación (3.3) tenemos que $[X]_B = 0$ entonces $X = 0$. Por lo tanto H es una aplicación lineal inyectiva. □

Demostración. (*del Teorema 3.1.7*) Para simplificar la notación sea $\mathfrak{g} := \pi(\mathfrak{g})$ y $\mathfrak{z} := \pi(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}))$. Por el Lema 3.1.9 existe una aplicación lineal inyectiva $H : \mathfrak{g} \to \mathrm{k}^{(b+a)\times(a+m)}$ definida por

$$H(X) = \begin{pmatrix} A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{23} & A_{24} \end{pmatrix}$$

luego $\dim \mathfrak{g} \leq ab + m(b+a), \dim V \geq a + b + m$ y $bm \geq \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. □

Corolario 3.1.10. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 2-pasos nilpotente de dimensión finita sobre un cuerpo* k *de característica cero tal que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Entonces*

$$\left\lceil \sqrt{3 \dim \mathfrak{g}} \right\rceil \leq \mu(\mathfrak{g}).$$

Demostración. Sea (π, V) una representación fiel de $\mathfrak{g}$. Por el Teorema 1.3.10 existe (π_{nil}, V) una nilrepresentación fiel de $\mathfrak{g}$, es decir $\mu(\mathfrak{g}) = \mu_{nil}(\mathfrak{g})$. Luego, por el Teorema 3.1.7,

$$\dim \mathfrak{g} \leq \text{máx}\{ab + m(b+a) : \dim V \geq a + b + m \text{ y } bm \geq \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g})\}$$

por lo tanto $\left\lceil \sqrt{3 \dim \mathfrak{g}} \right\rceil \leq \mu(\mathfrak{g})$. □

Daremos una extensión de la Proposición 3.1.5, la demostración es análoga a la dada para la Proposición 3.1.5.

Proposición 3.1.11. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre* k. *Sean $\mathfrak{T}^k \subset \cdots \subset \mathfrak{T}^2 \subset \mathfrak{T}^1 \subset \mathfrak{T}$ subespacios de endomorfismos nilpotentes de* $\mathrm{End}(V)$. *Entonces existe un conjunto $\{v_1, \ldots, v_{s_k}, v_{s_k+1}, \ldots, v_{s_{k-1}}, \ldots, v_{s_1+1}, \ldots, v_s\} \subseteq V$ linealmente independiente y una descomposición*

$$\mathfrak{T}^m = \mathfrak{T}_1^m \oplus \cdots \oplus \mathfrak{T}_{s_m}^m$$

para cada $m = 0, \ldots, k$, donde $\mathfrak{T}^0 = \mathfrak{T}$, y aplicaciones $F_i : \mathfrak{T} \to V$ definidas por $F_i(T) = T(v_i)$ tal que $F_i\,|_{\mathfrak{T}^m}$ y F_i verifican las condiciones 1), 2) *y* 3) *del Teorema 3.1.2. Más aún*

(4) $\mathfrak{T}_i^m \subseteq \mathfrak{T}_i^{m-1}$ para todo $i = 1, \ldots, s$ y $m = 1, \ldots, k$;

(4) Si $[\mathfrak{T}^{m_1}, \mathfrak{T}^{m_2}] \subseteq \mathfrak{T}^{m_1+m_2}$ entonces $\mathfrak{T}_j^{m_1}\mathfrak{T}_i^{m_2} v_i \subseteq \mathfrak{T}^{m_1+m_2} v_i$ para todo $1 \leq i < j \leq s$.

Además, si $[\mathfrak{T}^{m_1}, \mathfrak{T}^{m_2}] = 0$ con $m_1 \leq m_2$ entonces

$$\mathfrak{T}^{m_1} v_1 \cap \mathrm{k}\{v_1, \ldots, v_{m_2}\} = 0.$$

A partir de la Proposición 3.1.11 obtenemos el siguiente resultado relacionado con las álgebras de Lie nilpotentes y su valor de μ.

Teorema 3.1.12. *Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie k-pasos nilpotente de dimensión finita y (π, V) una nilrepresentación fiel de $\mathfrak{g}$. Entonces existen $a_0, \ldots, a_{k-1}, m \in \mathbb{N}$ tales que*

- $\dim \mathfrak{g} \leq \sum_{j=0}^{k-2} a_j \left(a_{j+1} + \cdots + a_{k-1}\right) + m\left(a_0 + \cdots + a_{k-1}\right)$

- $\dim V \geq \sum_{i=0}^{k-1} a_i + m$

Para la demostración de este teorema primero vamos a establecer algunas notaciones y resultados previos.

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie k-pasos nilpotente de dimensión finita y (π, V) una nilrepresentación fiel de $\mathfrak{g}$. Aplicaremos la Proposición 3.1.12 a $\pi(\mathfrak{g}^i)$ donde $\mathfrak{g}^i = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{i-1}]$.

Para simplificar la notación llamaremos $\mathfrak{g}^i := \pi(\mathfrak{g}^i)$ para cada $i = 0, \ldots, k-1$ por la Proposición 3.1.11 existe una descomposición

$$\mathfrak{g}^i = \mathfrak{g}_1^i \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{s_i}^i$$

para todo $i = 0, \ldots, k-1$, sea $a_i = \dim \mathfrak{g}_1^i / \mathfrak{g}_1^{i+1}$.

Sea $\{T_1, \ldots, T_a\}$ una base de $\mathfrak{g}_1$ tal que los primeros $\sum_{i=1}^{j} a_i$ elementos forman una base de $\mathfrak{g}_1^j$. Entonces

$$\{T_1(v_1), \ldots, T_a(v_1)\}$$

es una base de $\mathfrak{g}_1(v_1)$ tal que $\{T_1(v_1), \ldots, T_{\sum_{i=1}^{j} a_i}(v_1)\}$ es una base de $\mathfrak{g}_1^j$ para todo $j = 0, \ldots, k-1$.

Como $\mathfrak{g}(v_1) \cap \mathrm{k}\{v_1, \ldots, v_{s_{k-1}}\} = 0$ entonces existe una base de V

$$B = \{T_1(v_1), \ldots, T_a(v_1), v_1, \ldots, v_{s_{k-1}}, w_1, \ldots, w_n\}. \tag{3.4}$$

Veamos la forma de $[X]_B$ para todo $X \in \mathfrak{g}$.

Si $X_1 \in g_1$

$$[X_1]_B = \begin{pmatrix} A^1_{11} & A^1_{12} & \ldots & A^1_{1k+1} & A^1_{1k+2} \\ A^1_{21} & A^1_{22} & \ldots & A^1_{2k+1} & A^1_{2k+2} \\ A^1_{31} & A^1_{32} & \ldots & A^1_{3k+1} & A^1_{2k+2} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ A^1_{k1} & A^1_{k2} & \ldots & A^1_{kk+1} & A^1_{kk+2} \\ A^1_{k+11} & A^1_{k+12} & \ldots & A^1_{k+1k+1} & A^1_{k+1k+2} \\ A^1_{k+21} & A^1_{k+22} & \ldots & A^1_{k+2k+1} & A^1_{k+2k+2} \end{pmatrix}.$$

Si $X_i \in \mathfrak{g}_i$ entonces

$$[X_i]_B = \begin{pmatrix} 0 & A^i_{12} & A^i_{13} & \ldots & A^i_{1k+1} & A^i_{1k+2} \\ 0 & 0 & A^i_{23} & \ldots & A^i_{2k+1} & A^i_{2k+2} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A^i_{3k+1} & A^i_{3k+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A^i_{kk+1} & A^i_{kk+2} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

para todo $i = 2, \ldots, s_{k-1}$.

Si $X_i \in \mathfrak{g}_i$ entonces

$$[X_i]_B = \begin{pmatrix} 0 & A^i_{12} & A^i_{13} & \ldots & 0 & A^i_{1k+2} \\ 0 & 0 & A^i_{23} & \ldots & 0 & A^i_{2k+2} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & A^i_{3k+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & A^i_{kk+2} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

para todo $i = s_{k-1} + 1, \ldots, s$.

Sean $a = \sum_{i=0}^{k-1} a_i$ y $b = \sum_{i=1}^{k-2} a_i + s_{k-1} + n$.

Lema 3.1.13. *Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie k-pasos nilpotente de dimensión finita y (π, V) una nilrepresentación fiel de $\mathfrak{g}$. Sean $A_{m(k+1)} = \sum_{j=1}^{s_k} A^j_{m(k+1)}$ y $A_{mn} = \sum_{j=1}^{s} A^j_{mn}$ para todo $m = 1, \ldots, k, n =$*

$2, \ldots, k+2$ *y* $n \neq k+1$. *Entonces la aplicación* $H : \mathfrak{g} \to \mathrm{k}^{a \times b}$ *definida por*

$$H(X) = \begin{pmatrix} A^j_{12} & A^j_{13} & \ldots & A^j_{1k+1} & A^j_{1k+2} \\ 0 & A^j_{23} & \ldots & A^j_{2k+1} & A^j_{2k+2} \\ 0 & 0 & \ldots & A^j_{3k+1} & A^j_{3k+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & A^j_{kk+1} & A^j_{kk+2} \end{pmatrix}$$

es una aplicación lineal inyectiva.

La demostración de este lema es análoga a la del Lema 3.1.9.

Demostración. (*del Teorema 3.1.12*) Para simplificar la notación definiremos $\mathfrak{g}^i := \pi(\mathfrak{g}^i)$. Por el Lema 3.1.13 existe una aplicación lineal $H : \mathfrak{g} \to \mathrm{k}^{a \times b}$ definida por

$$H(X) = \begin{pmatrix} A^j_{12} & A^j_{13} & \ldots & A^j_{1k+1} & A^j_{1k+2} \\ 0 & A^j_{23} & \ldots & A^j_{2k+1} & A^j_{2k+2} \\ 0 & 0 & \ldots & A^j_{3k+1} & A^j_{3k+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & A^j_{kk+1} & A^j_{kk+2} \end{pmatrix}$$

tal que $a = \sum_{i=0}^{k-1} a_i$ y $b = \sum_{i=1}^{k-2} a_i + s_{k-1} + n$ donde $a_i = \dim \mathfrak{g}_1^i / \mathfrak{g}_1^{i+1}$ para todo $i = 0, \ldots, k-1$. Luego $\dim \mathfrak{g} \leq \sum_{j=0}^{k-2} a_j \left(a_{j+1} + \cdots + a_{k-1}\right) + m \left(a_0 + \cdots + a_{k-1}\right)$ y $\dim V \geq \sum_{i=0}^{k-1} a_i + m$. □

Corolario 3.1.14. *Sea* $\mathfrak{g}$ *un álgebra de Lie* k*-pasos nilpotente de dimensión finita sobre un cuerpo* k *de característica cero tal que* $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. *Entonces*

$$\left\lceil \sqrt{2 \frac{k+1}{k} \dim \mathfrak{g}} \right\rceil \leq \mu(\mathfrak{g}).$$

Demostración. Sea (π, V) una representación fiel de $\mathfrak{g}$. Por el Teorema 1.3.10 existe (π_{nil}, V) una nilrepresentación fiel de $\mathfrak{g}$, es decir $\mu(\mathfrak{g}) = \mu_{nil}(\mathfrak{g})$. Entonces, por el Teorema 3.1.12,

$$\dim \mathfrak{g} \leq \max \left\{ \sum_{j=0}^{k-2} a_j \left(a_{j+1} + \cdots + a_{k-1}\right) + m \left(a_0 + \cdots + a_{k-1}\right) : \dim V \geq \sum_{i=0}^{k-1} a_i + m \right\},$$

es fácil ver que $\dim \mathfrak{g} \leq \frac{1}{2} \frac{k}{k+1} (\dim V)^2$. Por lo tanto $\left\lceil \sqrt{2 \frac{k+1}{k} \dim \mathfrak{g}} \right\rceil \leq \mu(\mathfrak{g})$. □

Teorema 3.1.15. *Sea* k *un cuerpo de característica cero y sea*

$$\mathfrak{g}_k = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} & \ldots & A_{1k+1} \\ & 0 & A_{23} & \ldots & A_{2k+1} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & 0 & & & A_{kk+1} \\ & & & & 0 \end{pmatrix} : A_{ij} \in M_a(\mathrm{k}) \text{ para } 1 \leq i < j \leq k+1 \right\}$$

el álgebra de Lie k*-pasos nilpotente entonces* $\mu(\mathfrak{g}_k) = (k+1)a$.

Demostración. Es fácil ver que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_k) \subseteq [\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_k]$ entonces por el Corolario 3.1.14

$$\begin{aligned} \mu(\mathfrak{g}_k) &\geq \left\lceil \sqrt{2\frac{k+1}{k} \dim \mathfrak{g}_k} \right\rceil \\ &\geq \left\lceil \sqrt{2\frac{k+1}{k}\frac{(k+1)k}{2} a^2} \right\rceil \\ &\geq (k+1)a \end{aligned}$$

Por la definición de $\mathfrak{g}_k$ es claro que $\mu(\mathfrak{g}_k) \leq (k+1)a$. Por lo tanto $\mu(\mathfrak{g}_k) = (k+1)a$. □

3.2. Una cota superior para μ

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 2-pasos nilpotente. Para obtener una cota superior de $\mu(\mathfrak{g})$ usaremos representaciones inducidas.

Burde para álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ 2-pasos nilpotente obtuvo que $\mu(\mathfrak{g}) \leq \dim \mathfrak{g} + 1$. En esta sección damos una mejora de dicha cota en el caso de un álgebra de Lie 2-pasos nilpotente y obtenemos el siguiente teorema

Teorema 3.2.1. *Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 2-pasos nilpotente de dimensión finita sobre* k *y $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ el centro de $\mathfrak{g}$. Sea $\mathfrak{a}$ una subálgebra de Lie abeliana de $\mathfrak{g}$ de codimensión d tal que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{a}$ entonces*

$$\mu(\mathfrak{g}) \leq \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) + d + 1.$$

En particular, $\mu(\mathfrak{g}) \leq \dim \mathfrak{g}$.

3.2.1. Representaciones inducidas

Dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$. Sea (ρ, W) una representación de $\mathfrak{h}$. Se puede ver que W es un $U(\mathfrak{h})$-módulo a izquierda a partir de la representación (ρ, W) cuya acción esta dada por la siguiente aplicación

$$\rightharpoonup : U(\mathfrak{h}) \times W \to W$$

tal que $h_1^{\alpha_1} \dots h_s^{\alpha_s} \rightharpoonup w = \rho(h_1)^{\alpha_1} \circ \cdots \circ \rho(h_s)^{\alpha_s}(w)$ donde $\{h_1, \dots, h_s\}$ es una base del álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbb{N}$. Por otra parte $U(\mathfrak{g})$ es un $U(\mathfrak{h})$-módulo a derecha, luego podemos definir $V = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{h})} W$. Como $U(\mathfrak{g})$ es un $U(\mathfrak{g})$-módulo a izquierda entonces V es un $U(\mathfrak{g})$-módulo a izquierda. Por lo tanto existe una representación (π, V) de $\mathfrak{g}$ que se obtiene a partir de la representación (ρ, W) de $\mathfrak{h}$, diremos que (π, V) es la *representación de $\mathfrak{g}$ inducida por ρ.*

3.2.2. Obtención de una cota superior

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 2-pasos nilpotente y $\mathfrak{v}$ un complemento directo de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, es decir, $\mathfrak{g} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ y sea $\rho : \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{gl}(V)$ una representación fiel de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ tal que V tiene una base $B = \{v_1, \dots, v_a, v'_1, \dots, v'_b\}$ con la propiedad

- $\rho(Z)v_i = 0$;

- $\rho(Z)v_i' \in \mathrm{k}\{v_1, \dots, v_a\}$.

para todo $Z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Entonces existe una subálgebra de Lie abeliana de $\mathfrak{gl}(a+b)$

$$\widetilde{\mathfrak{g}} \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : A \in M(a,b) \right\}$$

que es isomorfa a $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Por lo tanto $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \leq ab$.

Sean $V_a = \mathrm{k}\{v_1, \dots, v_a\}$ y $V_b = \mathrm{k}\{v_1', \dots, v_b'\}$ entonces $V = V_a \oplus V_b$ y sean $\mathfrak{a}$ una subálgebra abeliana de $\mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{a}$ y $\mathfrak{a}'$ un complemento directo de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ en $\mathfrak{a}$. Definimos la aplicación lineal $\widetilde{\rho} : \mathfrak{a} \to \mathfrak{gl}(V_a \oplus V_b)$ tal que

$$\widetilde{\rho}(A) = \begin{cases} \rho(A) & \text{si } A \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \\ 0 & \text{si } \mathfrak{a}' \end{cases}.$$

Como $\mathfrak{a}$ es una subálgebra abeliana entonces $(\widetilde{\rho}, V_{a,b})$ es una representación de $\mathfrak{a}$. Consideramos $(\widetilde{\pi}, U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{a})} V_{a,b})$ la representación inducida en $\mathfrak{g}$ obtenida a partir de $\mathfrak{a}$ dada por $\widetilde{\rho}$. Se puede probar que el espacio vectorial $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{a})} V_{a,b}$ es isomorfo al espacio vectorial $\mathcal{S}(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) \otimes V_{a,b}$.

Lema 3.2.2. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 2-pasos nilpotente. Sean $B = \{X_1, \dots, X_n\}$ una base de $\mathfrak{g}$ y $\{X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n} : \alpha_i \in \mathbb{N}\}$ la base de PBW de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ obtenida a partir de B. Entonces*

$$X_j X_1^{\alpha_1} \dots X_{j-1}^{\alpha_{j-1}} = X_1^{\alpha_1} \dots X_{j-1}^{\alpha_{j-1}} X_j + \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_k X_1^{\alpha_1} \dots X_k^{\alpha_k - 1} \dots X_{j-1}^{\alpha_{j-1}} [X_j, X_k]$$

para todo $j = 1, \dots, n$.

Demostración. Primero probaremos por inducción que

$$X_j X_i^{\alpha} = X_i^{\alpha} X_j + \alpha X_i^{\alpha-1} [X_j, X_i] \tag{3.6}$$

Es claro que para $\alpha = 1$ se tiene la ecuación (3.6).Supongamos que vale para $\alpha \in \mathbb{N}$ entonces $X_j X_i^{\alpha} = X_i^{\alpha} X_j + \alpha X_i^{\alpha-1}[X_j, X_i]$. Luego

$$\begin{aligned} X_j X_i^{\alpha+1} &= X_j X_i^{\alpha} X_i \\ &= (X_i^{\alpha} X_j + \alpha X_i^{\alpha-1}[X_j, X_i]) X_i \quad \text{por hipótesis inductiva} \\ &= X_i^{\alpha} X_j X_i + \alpha X_i^{\alpha}[X_j, X_i] \quad \text{como } \mathfrak{g} \text{ es 2-pasos nilpotente} \\ &= X_i^{\alpha+1} X_j + \alpha X_i^{\alpha}[X_j, X_i] \end{aligned}$$

Por la ecuación (3.6) y dado que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie 2-pasos nilpotente obtenemos que

$$X_j X_1^{\alpha_1} \dots X_{j-1}^{\alpha_{j-1}} = X_1^{\alpha_1} \dots X_{j-1}^{\alpha_{j-1}} X_j + \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_k X_1^{\alpha_1} \dots X_k^{\alpha_k - 1} \dots X_{j-1}^{\alpha_{j-1}} [X_j, X_k]$$

para todo $j = 1, \dots, n$. $\square$

Proposición 3.2.3. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 2-pasos nilpotente y $\mathfrak{a}$ una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ de codimensión d tal que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{a}$. Entonces el subespacio*

$$W = \oplus_{k\geq 2}\mathcal{S}^k(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) \otimes V_{a,b} \oplus \mathcal{S}^1(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) \otimes V_a$$

es $\mathfrak{g}$-invariante de codimensión $a + (d+1)b$.

Demostración. Sea $B = \{X_1, \dots, X_d, \dots, X_n\}$ una base de $\mathfrak{g}$ tal que los últimos $n-d$ vectores forman una base de $\mathfrak{a}$. Entonces $\{X_1^{\alpha_1} \dots X_d^{\alpha_d} : \alpha_i \in \mathbb{N}_0\}$ es una base de $S(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})$.

Sea $w = X_1^{\alpha_1} \dots X_d^{\alpha_d} \otimes v \in W$ y $X_j \in B$, por la ecuación (3.6)

$$X_j.w = \left(X_1^{\alpha_1} \dots X_{j-1}^{\alpha_{j-1}} X_j^{\alpha_j+1} \dots X_d^{\alpha_d} + \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_k X_1^{\alpha_1} \dots X_k^{\alpha_k-1} \dots X_{j-1}^{\alpha_{j-1}} \dots X_d^{\alpha_d}[X_j, X_k] \right) \otimes v$$

luego

$$X_j.w = X_1^{\alpha_1} \dots X_{j-1}^{\alpha_{j-1}} X_j^{\alpha_j+1} \dots X_d^{\alpha_d} \otimes v + \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_k X_1^{\alpha_1} \dots X_k^{\alpha_k-1} \dots X_{j-1}^{\alpha_{j-1}} \dots X_d^{\alpha_d} \otimes [X_j, X_k].v.$$

Por lo tanto si $\alpha_1 + \dots + \alpha_d \geq 1$ entonces $X_j.w \in W$. Luego W es un espacio vectorial $\mathfrak{g}$-invariante. □

Teorema 3.2.4. *Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 2-pasos nilpotente y $\mathfrak{a}$ una subálgebra de Lie abeliana de $\mathfrak{g}$ de codimensión d tal que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{a}$ entonces*

$$\mu(\mathfrak{g}) \leq \text{mín}\{a + b(d+1) : ab \geq \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g})\}.$$

Demostración. Sea $(\widetilde{\rho}, V_{a,b})$ la representación de $\mathfrak{a}$, dada anteriormente y $(\widetilde{\pi}, U(\mathfrak{g}) \otimes V_{a,b})$ la representación inducida de $\mathfrak{g}$ por $\mathfrak{a}$. Por la Proposición 3.2.3 sabemos que

$$W = \oplus_{k\geq 2}\mathcal{S}^k(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) \otimes V_{a,b} \oplus \mathcal{S}^1(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) \otimes V_a$$

es un subespacio de $U(\mathfrak{g}) \otimes V_{a,b}$ es $\mathfrak{g}$-invariante. Sea $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}((U(\mathfrak{g}) \otimes V_{a,b})/W)$ la representación cociente. Falta ver que $(\pi, (U(\mathfrak{g}) \otimes V_{a,b})/W)$ sea fiel, para ello es suficiente ver que $(\pi\ |_{\mathfrak{z}}, (U(\mathfrak{g}) \otimes V_{a,b})/W)$ es una representación fiel ya que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie nilpotente. Como $(\rho, V_{a,b})$ es una representación fiel de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ entonces existe $v \in V_{a,b}$ tal que $\pi(Z)(1 \otimes v) \neq 0$. Por lo tanto $(\pi\ |_{\mathfrak{z}}, (U(\mathfrak{g}) \otimes V_{a,b})/W)$ es una representación fiel de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, luego $(\pi, (U(\mathfrak{g}) \otimes V_{a,b})/W)$ es una representación fiel de $\mathfrak{g}$. Entonces

$$\mu(\mathfrak{g}) \leq \text{mín}\{a + b(d+1) : ab \geq \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g})\}.$$

□

Corolario 3.2.5. *Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 2-pasos nilpotente de dimensión finita sobre* k *y $\mathfrak{a}$ una subálgebra de Lie abeliana de $\mathfrak{g}$ de codimensión d tal que $\mathfrak{z} \subseteq \mathfrak{a}$ entonces*

$$\mu(\mathfrak{g}) \leq \begin{cases} \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) + d + 1 & \textit{si } \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) < 4(d+1) \\ \left\lceil 2\sqrt{\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g})(d+1)} \right\rceil + \left(\left\lfloor \frac{\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g})}{d+1} \right\rfloor - \left\lfloor \sqrt{\frac{\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g})}{d+1}} \right\rfloor^2 + 1 \right)(d+1) & \textit{en otro caso} \end{cases}.$$

Demostración. Por el Teorema 3.2.4 $\mu(\mathfrak{g}) \leq \min\{a + b(d+1) : ab \geq \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g})\}$.

- Si $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) < 4(d+1)$ consideremos $b = 1$ y $a = \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Entonces

$$\min\{a + b(d+1) : ab \geq \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g})\} \leq d + 1 + \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g});$$

- si $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \geq 4(d+1)$ en este caso escribimos a $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = k^2(d+1)+\delta$ tal que $\delta = 0, \dots, 2k(d+1)$, ya que $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \in \mathbb{N}$. Luego $\left\lfloor \sqrt{\frac{\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g})}{d+1}} \right\rfloor = k$ entonces

$$\left\lceil \frac{\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g})}{k} \right\rceil = k(d+1) + \left\lceil \frac{\delta}{k} \right\rceil. \tag{3.7}$$

Sea $m = 0, \dots, 2k$ tal que $m(d+1) \leq \delta < (m+1)(d+1)$ entonces $m = \left\lfloor \frac{\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g})}{d+1} \right\rfloor - \left\lfloor \sqrt{\frac{\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g})}{d+1}} \right\rfloor^2$. Por la ecuación (3.7) dado que $k \geq 1$ tenemos que

$$\left\lceil \frac{\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g})}{k} \right\rceil \leq k(d+1) + (m+1)(d+1).$$

Sean $b = \left\lfloor \sqrt{\frac{\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g})}{d+1}} \right\rfloor (d+1)$ y $a = \left\lceil \frac{\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g})}{b} \right\rceil$ entonces

$$\begin{aligned}
\mu(\mathfrak{g}) = \min\{a + b(d+1) : ab \geq \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g})\} &\leq \left\lceil \frac{\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g})}{b} \right\rceil + \left\lfloor \sqrt{\frac{\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g})}{d+1}} \right\rfloor (d+1) \\
&\leq 2k(d+1) + \left\lceil \frac{\delta}{k} \right\rceil \\
&\leq \left\lceil 2\sqrt{\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g})(d+1)} \right\rceil + (m+1)(d+1)
\end{aligned}$$

□

Demostración. (*del Teorema 3.2.1*) Por el Corolario 3.2.5 tenemos que $\mu(\mathfrak{g}) \leq \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) + d + 1$ si $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) < 4(d+1)$ y en el caso en que $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \geq 4(d+1)$ sabemos que $\mu(\mathfrak{g}) \leq \left\lceil 2\sqrt{\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g})(d+1)} \right\rceil + \left(\left\lfloor \frac{\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g})}{d+1} \right\rfloor - \left\lfloor \sqrt{\frac{\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g})}{d+1}} \right\rfloor^2 \right)(d+1)$.

Veamos que $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) + d + 1 \geq 2k(d+1) + \left\lceil \frac{\delta}{k} \right\rceil$.

$$\begin{aligned}
\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) + d + 1 - \left(2k(d+1) + \left\lceil \frac{\delta}{k} \right\rceil\right) &= \\
k^2(d+1) + \delta + d + 1 - \left(2k(d+1) + \left\lceil \frac{\delta}{k} \right\rceil\right) &\geq \\
k^2(d+1) + m(d+1) + d + 1 - 2k(d+1) - m(d+1) - (d+1) &= (k^2 - 2k)(d+1) \\
&= k(k-2)(d+1) \\
&\geq 0\ .
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mu(\mathfrak{g}) \leq \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) + (d+1)$. □

Ejemplos 3.2.6. 1. Sea $\mathfrak{h}_m$ el álgebra de Lie de Heisenberg. Una base de $\mathfrak{h}_m$ es

$$B = \{X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_m, Z\}$$

tal que $[X_i, Y_i] = Z$ y cero en otro caso. Sea $\mathfrak{a}$ el álgebra de Lie abeliana generada por $\{Y_1, \ldots, Y_m, Z\}$. Entonces $d = \dim(\mathfrak{h}_m/\mathfrak{a}) = m$, luego por el Corolario 3.2.5 tenemos que

$$\mu(\mathfrak{h}_m) \leq m + 1 + 1 = m + 2.$$

Donde $m + 2$ es el valor de $\mu(\mathfrak{h}_m)$ (ver 2.2(1d)).

2. Sea $\mathcal{L}(r)$ el álgebra de Lie 2-pasos nilpotente libre de r-generadores. Sea $\mathfrak{a}$ la subálgebra de Lie abeliana de $\mathcal{L}(r)$ generada por $\mathfrak{z}(\mathcal{L}(r)) \cup \{X\}$ donde $X \in \mathcal{L}(r)$ no nulo. Entonces $d = r - 1$, luego $\mu(\mathcal{L}(r)) \leq \dim \mathfrak{l}_r$ (en el capítulo 6 daremos una mejor cota para $\mu(\mathcal{L}(r))$ que es mucho menor a este).

3.3. Apéndice: resultados de álgebra lineal

En esta sección probaremos el Teorema 3.1.2, para ello usaremos algunos resultados previos que demostramos a continuación. En esta tesis se ha asumido casi siempre que k es de característica cero, pero en esta sección basta asumir que k es infinito.

Proposición 3.3.1. *Sean* k *un cuerpo infinito,* V *un espacio vectorial sobre* k *de dimensión finita y* $\mathcal{F}$ *un subespacio no nulo de* $\mathrm{End}(V)$*. Si* $\{T_1, T_2, \ldots, T_q\} \subseteq \mathcal{F}$ *y* $r = \max\{\dim \mathcal{F}v : v \in V\}$ *entonces existe* $v_1 \in V$ *tal que* $r = \dim \mathcal{F}v_1$ *y* $T_i(v_1) \neq 0$ *para todo* $i = 1, \ldots, q$.

Demostración. La prueba la haremos por inducción en la cantidad de elementos de $\{T_1, T_2, \ldots, T_q\}$. Sea $v' \in V$ tal que $r = \dim \mathcal{F}v'$, es claro que el lema se verifica para el caso $q = 0$.

Sea $\{T_1, \ldots, T_q, T_{q+1}\} \subseteq \mathcal{F}$, por hipótesis inductiva existe $v_0 \in V$ tal que $r = \dim \mathcal{F}v_0$ y $T_i(v_0) \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, q$. Si $T_{q+1}(v_0) \neq 0$ tomamos $v_1 = v_0$. Supongamos que $T_{q+1}(v_0) = 0$, dado que $T_{q+1} \neq 0$ existe $v'' \in V$ tal que $T_{q+1}(v'') \neq 0$. Sea $B = \{\widetilde{T}_1(v_0), \ldots, \widetilde{T}_r(v_0)\}$ una base de $\mathcal{F}v_0$ y A_t la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores $\{\widetilde{T}_1(v_0{+}tv''), \ldots, \widetilde{T}_r(v_0{+}tv'')\}$ en una base de V. Para $t = 0$ la matriz A_t tiene un menor, $\widetilde{A}_t$ de orden r, con determinante no nulo. Sea $P(t) = \det(\widetilde{A}_t)$, existen a lo sumo $\deg(P)$ valores de $t \in$ k tal que $P(t) = 0$. Dado que T_i son transformaciones lineales, podemos pensar a las coordenadas de $T_i(v_0 + tv'')$ como polinomios de grado menor o igual a uno, donde alguna de dichas coordenadas es distinta de cero pues $T_i(v_0) \neq 0$. Sea $P_i(t)$ una de las posibles coordenadas no nulas de $T_i(v_0 + tv'')$ y sea $Q(t) = (PP_0P_1 \ldots P_q)(t)$. Como Q es un polinomio distinto de cero existe $t' \in$ k tal que $Q(t') \neq 0$, por lo tanto $P(t') \neq 0$ y $P_i(t') \neq 0$ para todo i. Es decir $\dim \mathcal{F}(v_0 + t'v'') \geq r$ y $T_i(v_0 + t'v'') \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, q$. Por la elección de r tenemos que $\dim \mathcal{F}(v_0 + t_0v'') = r$ y $T_{q+1}(v_0 + t'v'') \neq 0$. $\square$

Proposición 3.3.2. *Sean* k *un cuerpo infinito,* V *un espacio vectorial sobre* k *de dimensión finita y* $\mathcal{T}$ *un subespacio no nulo de* $\mathrm{End}(V)$*. Entonces existe un conjunto linealmente independiente* $B = \{v_1, \ldots, v_s\} \subset V$ *y una descomposición* $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{T}_s$ *con* $\mathcal{T}_i \neq 0$ *y tales que las aplicaciones* $F_i : \mathcal{T} \to V$ *definida por* $F_i(T) = T(v_i)$ *satisfacen*

(1) $F_i|_{\mathcal{T}_i}$ *es inyectiva para todo* $i = 1 \ldots s$;

(2) $\mathcal{T}_j \subset \ker F_i$ *para todo* $1 \leq i < j \leq s$;

(3) $\mathcal{T}_j V \subset \operatorname{im} F_i|_{\mathcal{T}_i}$ *para todo* $1 \leq i < j \leq s$.

Más aún, dado $\{T_1, \ldots, T_q\} \subseteq \mathcal{T}$ *se puede elegir* v_1 *tal que* $T_i(v_1) \neq 0$ *para todo* $i = 1, \ldots, q$.

Demostración. Sea $r = \max\{\dim \mathcal{T}v : v \in V\}$. Por el Proposición 3.3.1, existe $v_1 \in V$ tal que para cada i, $T_i(v_1) \neq 0$ y $r = \dim \mathcal{F}v_1$. Para la prueba procederemos por inducción en la dimensión de $\mathcal{T}$. Si la $\dim \mathcal{T} = 1$, tomamos $B = \{v_1\}$ y $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}$ entonces $\ker F_1 = 0$ pues $T_1(v_1) \neq 0$. Por lo tanto la condición (1) es trivial y las condiciones (2) y (3) son vacias. Supóngase que el teorema es válido para todo subespacio no nulo de $\operatorname{End}(V)$ de dimensión menor que $\dim \mathcal{T}$.

Sea $F_1 : \mathcal{T} \to V$ definido por $F_1(T) = T(v_1)$ y $\mathcal{T}' = \ker F_1$. Como $T_i \notin \mathcal{T}'$, tenemos $\dim \mathcal{T}' < \dim \mathcal{T}$. Aplicando la hipótesis inductiva a $\mathcal{T}'$, existe un conjunto linealmente independiente $B' = \{v_2, \ldots, v_s\} \subset V$ y una descomposición $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{T}_s$ tales que

($1'$) $F_i|_{\mathcal{T}_i}$ es inyectiva para todo $i = 2 \ldots s$;

($2'$) $\mathcal{T}_j \subset \ker F_i$ para todo $2 \leq i < j \leq s$;

($3'$) $\mathcal{T}_j V \subset \operatorname{im} F_i|_{\mathcal{T}_i}$ para todo $2 \leq i < j \leq s$.

Veamos que $v_1 \notin \mathrm{k}B'$. Si $v_1 \in \mathrm{k}B'$ entonces existen $a_j \in \mathrm{k}$ no todos nulos tal que $v_1 = \sum_{j=2}^{s} a_j v_j$. Sea $j_0 = \max\{j : a_j \neq 0\}$ y $0 \neq T \in \mathcal{T}_{j_0}$, si aplicamos T a la ecuación anterior obtenemos $T(v_1) = \sum_{j=2}^{j_0} a_j T(v_j)$. Por la definición de $\mathcal{T}'$ y la condición ($2'$) tendríamos $T(v_{j_0}) = 0$, lo cual contradice (1'). Por lo tanto $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_s\} \subset V$ es un conjunto linealmente independiente. Sea $\mathcal{T}_1$ un complemento directo de $\mathcal{T}'$, es claro que se verifican las condiciones (1) y (2) y que la $\dim \mathcal{T}_1 = r$ pues

$$\dim \mathcal{T} = \dim \ker F_1 + \dim \operatorname{im} F_1 = \dim \mathcal{T}' + r.$$

Para probar (3) basta ver que $T'v' \in \operatorname{im} F_1$ para todo $T' \in \mathcal{T}'$ y $v' \in V$. Sea $\{\widetilde{T}_1, \ldots, \widetilde{T}_r\}$ una base de $\mathcal{T}_1$, veamos que $\left\{T'v', \widetilde{T}_1 v_1, \ldots, \widetilde{T}_r v_1\right\}$ es un conjunto linealmente dependiente. Por la elección de v_1, el conjunto $\left\{T'(v_1 + tv'), \widetilde{T}_1(v_1 + tv'), \ldots, \widetilde{T}_r(v_1 + tv')\right\}$ es linealmente dependiente para todo $t \in \mathrm{k}$. Dado que $T'v_1 = 0$, tenemos que

$$B' = \left\{T'(v'), \widetilde{T}_1(v_1 + tv'), \ldots, \widetilde{T}_r(v_1 + tv')\right\}$$

es linealmente dependiente para todo $t \in \mathrm{k}^\times$. Sea A_t la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de B' en alguna base de V. Como B' es linealmente dependiente para todo $t \in \mathrm{k}^\times$ entonces todo menor de A_t tiene determinante nulo para $t \in \mathrm{k}^\times$. Veamos que todo menor de A_0 tiene determinante nulo. Sea M_t un menor de A_t y $P(t) = \det(M_t)$. Por hipótesis $P(t) = 0$ para todo $t \in \mathrm{k}^\times$ y k es infinito entonces $P(0) = 0$, es decir $\det(M_0) = 0$. Esto implica que $\{T'v', \widetilde{T}_1 v_1, \ldots, \widetilde{T}_r v_1\}$ es un conjunto linealmente dependiente. □

Teorema 3.3.3. *Sean* k *un cuerpo infinito,* V *un espacio vectorial sobre* k *de dimensión finita. Sea* $\mathcal{T}$ *un subespacio no nulo de operadores nilpotentes de* $\operatorname{End}(V)$ *que conmutan. Entonces existe un conjunto linealmente independiente* $B = \{v_1, \ldots, v_s\} \subset V$ *y una descomposición* $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{T}_s$ *tales que las aplicaciones* $F_i : \mathcal{T} \to V$ *definida por* $F_i(T) = T(v_i)$ *satisfacen*

(1) *$F_i|_{\mathcal{T}_i}$ es inyectiva para todo $i = 1 \dots s$;*

(2) *$\mathcal{T}_j \subset \ker F_i$ para todo $1 \leq i < j \leq s$;*

(3) *$\mathcal{T}_j V \subset \operatorname{im} F_i|_{\mathcal{T}_i}$ para todo $1 \leq i < j \leq s$,*

Más aún, dado $\{T_1, \dots, T_q\} \subseteq \mathcal{T}$ existe v_1 tal que $T_i(v_1) \neq 0$ para todo i. Además, sea $\{\widetilde{T}_1, \dots, \widetilde{T}_r\}$ una base de $\mathcal{T}_1$. Entonces el conjunto $\{\widetilde{T}_1(v_1), \dots, \widetilde{T}_r(v_1), v_1, \dots, v_s\}$ es linealmente independiente.

Demostración. Por la Proposición 3.3.2 nos falta ver que el conjunto $\widetilde{B} = \{\widetilde{T}_1(v_1), \dots, \widetilde{T}_r(v_1), v_1, \dots, v_s\}$ sea linealmente independiente. Sea $s \geq 2$ y sean $a_i, b_j \in \mathrm{k}$ tal que

$$\sum_{i=1}^{r} a_i \widetilde{T}_i(v_1) + \sum_{j=1}^{s} b_j v_j = 0. \tag{3.8}$$

Sea $0 \neq T \in \mathcal{T}_s$, si aplicamos T a la ecuación (3.8) obtenemos $\sum_{i=1}^{r} a_i T\widetilde{T}_i(v_1) + \sum_{j=1}^{s} b_j T v_j = 0$. Como $\mathcal{T}$ es una familia conmutativa y por (2) nos queda $b_s T(v_s) = 0$. Luego por (1), $b_s = 0$. Si repetimos este procedimiento de manera decreciente con $T \in \mathcal{T}_j$ y $j = 2, \dots, s$ tenemos que $b_j = 0$. Es decir, la ecuación (3.8) tiene la siguiente forma

$$\sum_{i=1}^{r} a_i \widetilde{T}_i(v_1) + b_1 v_1 = 0 \tag{3.9}$$

Veamos que $b_1 = 0$. Dado que $\mathcal{T}$ es una familia conmutativa de operadores nilpotentes $\sum_{i=1}^{r} a_i \widetilde{T}_i$ es nilpotente, además por (1), $T(v_1) \neq 0$. Luego, si aplicamos $T \in \mathcal{T}_1$ a la ecuación anterior nos queda que $(\sum_{i=1}^{r} a_i \widetilde{T}_i) T(v_1) + b_1 T(v_1) = 0$. Por lo tanto $b_1 = 0$, es decir

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{i=1}^{r} a_i \widetilde{T}_i(v_1) = 0 \\ = (\sum_{i=1}^{r} a_i \widetilde{T}_i)(v_1) \ . \end{aligned}$$

Como $\sum_{i=1}^{r} a_i \widetilde{T}_i \in \mathcal{T}_1$ por (1), $\sum_{i=1}^{r} a_i \widetilde{T}_i = 0$. Luego $a_i = 0$ para todo i, pues $\{\widetilde{T}_1, \widetilde{T}_2, \dots, \widetilde{T}_r\}$ es una base de $\mathcal{T}_1$. Cuando $s = 1$ la prueba se deduce a partir de la ecuación (3.9). □

Lema 3.3.4. *Sean $\mathfrak{T} \subseteq \mathrm{End}(\mathrm{k}^n)$ y $r = \max\{\dim \mathfrak{T}v : v \in \mathrm{k}^n\}$. Entonces*

$$W = \{w \in \mathrm{k}^n : \dim \mathfrak{T}w = r\}$$

es un abierto denso de k^n.

Demostración. Veamos primero que W es un abierto de k^n. Sea $w \in W$ entonces $\dim \mathfrak{T}w = r$. Sean $\{T_1, \dots, T_a\}$ una base de $\mathfrak{T}$, $t = (t_1, \dots, t_n)$ y $w_t = (t_1 w_1, \dots, t_n w_n)$. Sea A_t la matriz cuyas columnas están formadas por las coordenadas de los vectores $T_i(w_t)$ en alguna base de k^n y sea A_r un menor de orden $r \times r$ tal que $\det(A_{r,\mathbf{1}}) \neq 0$, con $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$. Definimos la función $F : \mathrm{k}^n \to \mathrm{k}$ tal que $F(t) = \det(A_{r,t})$. Dado que F es una función continua y $F(\mathbf{1}) \neq 0$. Existe un entorno abierto $\widetilde{U}$ de w tal que $\widetilde{U} \subseteq W$. Por lo tanto W es un conjunto abierto en k^n.

Falta ver qque W es un conjunto denso en k^n. Sea U un abierto tal que $U \cap W = \emptyset$ entonces $\det(A_{r,t}) = 0$ para todo $t \in U$. Como $\det(A_{r,t})$ es un polinomio en k^n entonces $\det(A_{r,t}) = 0$ para todo $t \in k^n$. Pero esto contradice la hipótesis que $W \neq \emptyset$. Por lo tanto W es un conjunto denso en k^n. $\square$

Capítulo 4

Álgebras de Lie nilpotentes de dimensión ≤ 6

Diversas clasificaciones de álgebras de Lie nilpotentes de dimensión menor o igual que 6 existen en la literatura. Por ejemplo la realizada por Morozov (ver [Mo]) sobre un cuerpo de característica 0, por Beck y Kolman (ver [BK]) sobre $\mathbb{R}$, por Seeley (ver [See]), por Gong (ver [Go1]) sobre cuerpo algebraicamente cerrado, por De Graaf (ver [Gr]) sobre un cuerpo de característica distinta de dos, etc. En el caso de álgebras de Lie de dimensión menor o igual que 5 una clasificación fue dada por Dixmier(ver [Dix]). La clasificación de estas álgebras de Lie son en términos de los corchetes en una base conveniente.

En este capítulo calculamos una representación de dimensión mínima, según la lista de De Graaf, del álgebra de Lie $L_{i,j}$ de dimensión i con i menor o igual a 6 sobre un cuerpo de característica cero. En el caso de las álgebras de Lie nilpotnetes de dimensión 6 el cuerpo es algebraicamente cerrado. Damos además una nilprepresentación fiel de dimensión mínima de $L_{i,j}$ para i menor o igual a 6.

Demostramos los siguientes teremas:

Teorema. *Según la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión menor o igual a* 4 *dada por De Graaf, el valor de* μ *es*

Dim.	*Clasificación de De Graaf*	$\mu(\mathfrak{g})$	$\mu_{nil}(\mathfrak{g})$
1	$L_{1,1}$	*1*	*2*
2	$L_{2,1}$	*2*	*3*
3	$L_{3,2}$	*3*	*3*
	$L_{3,1}$	*3*	*4*
4	$L_{4,2}$	*3*	*4*
	$L_{4,1}$, $L_{4,3}$	*4*	*4*

Teorema. *Según la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión* 5 *dada por De*

Graaf, el valor de μ es

Clasificación de De Graaf	$\mu(\mathfrak{g})$	$\mu_{nil}(\mathfrak{g})$
$L_{5,3}$, $L_{5,4}$, $L_{5,5}$, $L_{5,8}$	*4*	*4*
$L_{5,1}$, $L_{5,2}$	*4*	*5*
$L_{5,6}$, $L_{5,7}$, $L_{5,9}$	*5*	*5*

Teorema. *Según la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes complejas de dimensión* 6 *dada por De Graaf, el valor de μ es*

Clasificación de De Graaf	$\mu(\mathfrak{g})$	$\mu_{nil}(\mathfrak{g})$
$L_{6,19}(\epsilon)$ *con* $\epsilon \neq 0$	*4*	*4*
$L_{6,3}$, $L_{6,4}$, $L_{6,5}$, $L_{6,8}$	*4*	*5*
$L_{6,1}$, $L_{6,2}$, $L_{6,6}$, $L_{6,7}$, $L_{6,10}$, $L_{6,11}$, $L_{6,12}$, $L_{6,13}$, $L_{6,19}(0)$, $L_{6,20}$, $L_{6,21}(\epsilon)$ $L_{6,22}(\epsilon)$, $L_{6,23}$, $L_{6,24}(\epsilon)$, $L_{6,25}$, $L_{6,26}$	*5*	*5*
$L_{6,9}$	*5*	*6*
$L_{6,14}$, $L_{6,15}$, $L_{6,16}$, $L_{6,17}$, $L_{6,18}$	*6*	*6*

4.1. Representación mínima de álgebras de Lie nilpotentes de dim ≤ 6

A lo largo de esta sección denotaremos por $\mathfrak{a}_n$ el álgebra de Lie abeliana de dimensión i. Sea $B = \{A_1, \ldots, A_n\}$ una base de $\mathfrak{a}_n$.

En el caso de las álgebras de Lie sin factor abeliano, una base para el centro de las mismas será $\{Z_1, \ldots, Z_m\}$ salvo que se indique lo contrario.

Las siguientes álgebras de Lie nilpotentes de dimensión menor o igual que 6 son las siguientes, cabe destacar que la notación que usaremos es la establecida por De Graaf (ver [Gr]).

Álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 1

$L_{1,1} = \mathfrak{a}_1$

Álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 2

$L_{2,1} = \mathfrak{a}_2$

Álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 3

$L_{3,1} = \mathfrak{a}_3$

$L_{3,2} : [X_1, X_2] = Z$ (álgebra de Lie de Heisenberg).

Álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 4

$L_{4,1} = \mathfrak{a}_4$

$L_{4,2} = L_{3,2} \oplus \mathfrak{a}_1$

$L_{4,3} : [X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = Z$ álgebra de Lie filiforme.

Teorema 4.1.1. *Según la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión menor o igual a 4 dada por De Graaf, el valor de μ es*

Dim.	*Clasificación de De Graaf*	$\mu(\mathfrak{g})$	$\mu_{nil}(\mathfrak{g})$
1	$L_{1,1}$	*1*	*2*
2	$L_{2,1}$	*2*	*3*
3	$L_{3,2}$	*3*	*3*
	$L_{3,1}$	*3*	*4*
4	$L_{4,2}$	*3*	*4*
	$L_{4,1},\ L_{4,3}$	*4*	*4*

Demostración. $\mathfrak{g} = L_{1,1}$ es claro que $\mu(L_{1,1}) = 1$ y $\mu_{nil}(L_{1,1}) = 2$. Una nilrepresentación fiel de $L_{1,1}$ de dimensión 2 es

$$\pi_{nil}(A) = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathfrak{g} = L_{2,1}$: Por el Teorema 2.2.1 y por el Teorema 3.1.6 tenemos que $\mu(L_{2,1}) = 2$ y $\mu_{nil}(L_{2,1}) = 3$, respectivamente. Una representación fiel y una nilrepresentación fiel de $L_{2,1}$ de dimensión 2 y 3 son

$$\pi(A) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} \qquad \pi_{nil}(A) = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathfrak{g} = L_{3,1}$: Por el Teorema 2.2.1 y por el Teorema 3.1.6 $\mu(L_{3,1}) = 3$ y $\mu_{nil}(L_{3,1}) = 4$ respectivamente. Una representación fiel y una nilrepresentación fiel de $L_{3,1}$ de dimensión 3 y 4 son

$$\pi(A) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & a_2 \\ 0 & a_1 & a_3 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \pi_{nil}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathfrak{g} = L_{3,2}$: Por el Teorema 1.3.10 $\mu(L_{3,2}) = \mu_{nil}(L_{3,2})$ y dado que $\dim L_{3,2} = 3$ entonces $\mu_{nil}(L_{3,2}) \geq 3$. Una nilrepresentación fiel de dimensión 3 de $L_{3,2}$ es

$$\pi_{nil}(X) = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & z \\ 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathfrak{g} = L_{4,1}$: Por Teorema 2.2.1 y por el Teorema 3.1.6 $\mu(L_{4,1}) = 4$ y $\mu_{nil}(L_{4,1}) = 4$, respectivamente. Una nilrepresentación fiel de dimensión 4 de $L_{4,1}$ es

$$\pi_{nil}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathfrak{g} = L_{4,2}$: Como $L_{3,2}$ es una subálgebra de Lie de $L_{4,2}$ entonces $3 \leq \mu(L_{4,2})$. Por otra parte, dado que $\dim \mathfrak{n}_3 = 3$ entonces $4 \leq \mu_{nil}(L_{4,2})$. Una representación fiel y una nilrepresentación fiel de $L_{4,2}$ de dimensión 3 y 4, respectivamente son

$$\pi(X) = \begin{pmatrix} a_1 & x_1 & z \\ 0 & a_1 & x_2 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} \qquad \pi_{nil}(X) = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & z & a_1 \\ 0 & 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathfrak{g} = L_{4,3}$: Por el Teorema 1.3.10, $\mu(L_{4,3}) = \mu_{nil}(L_{4,3})$. Es fácil ver que $L_{4,3}$ es un álgebra de Lie filiforme, luego por 2.2(1h) tenemos que $\mu(L_{4,3}) = 4$. Una nilrepresentación fiel de dimensión 4 de $L_{4,3}$ es

$$\pi_{nil}(X) = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & 0 & z \\ 0 & 0 & x_1 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 5

$L_{5,1} = \mathfrak{a}_5$
$L_{5,2} = L_{3,2} \oplus \mathfrak{a}_2$
$L_{5,3} = L_{4,3} \oplus \mathfrak{a}_1$
$L_{5,4} : [X_1, X_2] = Z, [X_3, X_4] = Z$
$L_{5,5} : [X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = Z, [X_2, X_4] = Z$
$L_{5,6} : [X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4, [X_1, X_4] = Z, [X_2, X_3] = Z$
$L_{5,7} : [X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4, [X_1, X_4] = Z$
$L_{5,8} : [X_1, X_2] = Z_1, [X_1, X_3] = Z_2$
$L_{5,9} : [X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = Z_1, [X_2, X_3] = Z_2$

Lema 4.1.2. *Sea* $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{n}_4(\mathrm{k})$ *tal que* $a_{12} \neq 0$ *ó* $a_{23} \neq 0$ *ó* $a_{34} \neq 0$. *Entonces* $\dim \mathfrak{Cent}_{\mathfrak{n}_4(\mathrm{k})}(A) \leq 4$.

Demostración. Sea $X = \left(\begin{smallmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ 0 & 0 & x_{23} & x_{24} \\ 0 & 0 & 0 & x_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{Cent}_{\mathfrak{n}_4(\mathrm{k})}(A)$ entonces $[A, X] = 0$. Por lo tanto tenemos la siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} a_{12}x_{23} - a_{23}x_{12} &= 0 \\ a_{23}x_{34} - a_{34}x_{23} &= 0 \\ a_{12}x_{24} + a_{13}x_{34} - a_{24}x_{12} - a_{34}x_{13} &= 0. \end{aligned}$$

Por hipótesis y por las ecuaciones anteriores se puede ver que $\dim \mathfrak{Cent}_{\mathfrak{n}_4(\mathrm{k})}(A) \leq 4$. □

Teorema 4.1.3. *Según la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión* 5 *dada por De Graaf, el valor de* μ *es*

Clasificación de De Graaf	$\mu(\mathfrak{g})$	$\mu_{nil}(\mathfrak{g})$
$L_{5,3},\ L_{5,4},\ L_{5,5},\ L_{5,8}$	*4*	*4*
$L_{5,1},\ L_{5,2}$	*4*	5
$L_{5,6},\ L_{5,7},\ L_{5,9}$	5	5

Observación 4.1.4. Parte de los resultados del Teorema 4.1.1 y el Teorema 4.1.3 se pueden encontrar además en [BNT]

Demostración. Dado que $\dim L_{5,i} = 5$ tenemos que $\mu_{nil}(L_{5,i}) \geq 4$ para todo $i = 1, \ldots, 9$.

$\mathfrak{g} = L_{5,1}$: Por el Teorema 2.2.1 y por el Teorema 3.1.6 $\mu(L_{5,1}) = 4$ y $\mu_{nil}(L_{5,1}) = 5$ respectivamente. Una representación fiel y una nilrepresentación fiel de $L_{5,1}$ de dimensión 4 y 5 respectivamente es

$$\pi(A) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_1 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} \qquad \pi_{nil}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathfrak{g} = L_{5,2}$: Sea $\widetilde{\mathfrak{a}}$ la subálgebra de Lie abeliana de $L_{5,2}$ generada por $\{X_2, Z_1, A_1, A_2\}$ entonces por el Teorema 2.2.1 $\mu(\widetilde{\mathfrak{a}}) = 4$ y $\mu(\widetilde{\mathfrak{a}}) \leq \mu(L_{5,2})$. Una representación fiel de dimensión 4 de $L_{5,2}$ es

$$\pi(X) = \begin{pmatrix} a_1 & x_1 & z & 0 \\ 0 & a_1 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Ahora probaremos que $\mu_{nil}(L_{5,2}) = 5$. Para ello supongamos que $\mu_{nil}(L_{5,2}) = 4$ entonces existe $\mathfrak{h}$ subálgebra de $\mathfrak{n}_4$ tal que $\mathfrak{h}$ es isomorfa a $L_{5,2}$. Por el Lema 4.1.2 tenemos que $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}) = \mathrm{k}\{E_{13}, E_{14}, E_{24}\}$. Sea $X \notin \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ entonces $X = a_{12}E_{12} + a_{23}E_{23} + a_{34}E_{34} + Z$ con $Z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$, luego $X - Z = a_{12}E_{12} + a_{23}E_{23} + a_{34}E_{34}$ conmuta con $\widetilde{Z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \widetilde{z}_{13} & \widetilde{z}_{14} \\ 0 & 0 & 0 & \widetilde{z}_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ para todo $\widetilde{Z} \in \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$. Es decir $[a_{12}E_{12} + a_{23}E_{23} + a_{34}E_{34}, \widetilde{Z}] = 0$ entonces $a_{12}\widetilde{z}_{24} - a_{34}\widetilde{z}_{13} = 0$ para todo $\widetilde{z}_{24}, \widetilde{z}_{13} \in \mathrm{k}$. Por lo tanto $a_{12} = a_{34} = 0$. Luego $X = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & x_{13} & x_{14} \\ 0 & 0 & x_{23} & x_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ para todo $X \in \mathfrak{h}$, lo que implica que $\dim \mathfrak{h} = 4$. Pero esto contradice que $\mathfrak{h}$ sea isomorfa a $L_{5,2}$, por lo tanto $5 \leq \mu_{nil}(L_{5,2})$. Una nilrepresentación fiel de dimensión 5 de $L_{5,2}$ es

$$\pi_{nil}(X) = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & z & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathfrak{g} = L_{5,3}$: Como $L_{4,3}$ es una subálgebra de Lie de $L_{5,3}$ entonces $4 = \mu(L_{4,3}) \leq \mu(L_{5,3})$. Una nilrepresentación fiel de dimensión 4 de $L_{5,3}$ es

$$\pi_{nil}(X) = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_3 + a_1 & -2z \\ 0 & 0 & x_2 & -x_3 + a_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto $\mu_{nil}(L_{5,3}) = \mu(L_{5,3}) = 4$.

Las siguientes álgebras de Lie son tales que $\mathfrak{z}(L_{5,i}) \subseteq [L_{5,i}, L_{5,i}]$ para todo $i = 4, \ldots, 9$. Luego por el Teorema 1.3.10 se tiene que $\mu_{nil}(L_{5,i}) = \mu(L_{5,i})$.

Una nilrepresentación fiel de $L_{5,i}$ para $i = 4, 5, 8$ de dimensión 4 es

$\mathfrak{g} = L_{5,4}$

$$\pi_{nil}(X) = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_3 & z \\ 0 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathfrak{g} = L_{5,5}$

$$\pi_{nil}(X) = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & -x_4 & z \\ 0 & 0 & x_1 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathfrak{g} = L_{5,8}$

$$\pi_{nil}(X) = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & z_1 & z_2 \\ 0 & 0 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathfrak{g} = L_{5,9}$: Supongamos que $\mu_{nil}(L_{5,9}) = 4$ entonces existe una subálgebra de Lie $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{n}_4$ isomorfa a $L_{5,9}$. Luego $2 = \dim \mathfrak{h}'' \leq \dim \mathfrak{n}_4''$ lo cual es una contradicción por lo tanto $5 \leq \mu_{nil}(L_{5,9})$. Una nilrepresentación fiel de $L_{5,9}$ de dimensión 5 es

$$\pi_{nil}(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & z_2 \\ 0 & 0 & x_1 & 0 & z_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es fácil ver que $L_{5,6}$ y $L_{5,7}$ son álgebras de Lie filiformes de dimensión 5 ya que son álgebras de Lie 4-pasos nilpotente, luego por 2.2.(1h) se sabe que $\mu_{nil}(L_{5,6}) = \mu_{nil}(L_{5,7}) = 5$. Una nilrepresentación fiel de dimensión 5 de $L_{5,i}$ para $i = 6, 7$ respectivamente es

$$\pi_{nil}(X) = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & \frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & z \\ 0 & 0 & x_1 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \pi_{nil}(X) = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & x_1 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 6

$L_{6,1} = \mathfrak{a}_6$	$L_{6,4} = L_{5,4} \oplus \mathfrak{a}_1$	$L_{6,7} = L_{5,7} \oplus \mathfrak{a}_1$
$L_{6,2} = L_{3,2} \oplus \mathfrak{a}_3$	$L_{6,5} = L_{5,5} \oplus \mathfrak{a}_1$	$L_{6,8} = L_{5,8} \oplus \mathfrak{a}_1$
$L_{6,3} = L_{4,3} \oplus \mathfrak{a}_2$	$L_{6,6} = L_{5,6} \oplus \mathfrak{a}_1$	$L_{6,9} = L_{5,9} \oplus \mathfrak{a}_1$

$L_{6,10} : [X_1, X_2] = X_3\ ,\ [X_1, X_3] = Z\ ,\ [X_4, X_5] = Z$

$L_{6,11} : [X_1, X_2] = X_3\ ,\ [X_1, X_3] = X_4\ ,\ [X_1, X_4] = Z\ ,\ [X_2, X_3] = Z\ ,\ [X_2, X_5] = Z$

$L_{6,12} : [X_1, X_2] = X_3\ ,\ [X_1, X_3] = X_4\ ,\ [X_1, X_4] = Z\ ,\ [X_2, X_5] = Z$

$L_{6,13} : [X_1, X_2] = X_3\ ,\ [X_1, X_3] = X_5\ ,\ [X_2, X_4] = X_5\ ,\ [X_1, X_5] = Z\ ,\ [X_3, X_4] = Z$

$L_{6,14} : [X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4, [X_1, X_4] = X_5, [X_2, X_3] = X_5\ , [X_2, X_5] = Z\ , [X_3, X_4] = -Z$

$L_{6,15}: [X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4, [X_1, X_4] = X_5, [X_2, X_3] = X_5\ , [X_1, X_5] = Z\ , [X_2, X_4] = Z$
$L_{6,16}: [X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4, [X_1, X_4] = X_5, [X_2, X_5] = Z\ , [X_3, X_4] = -Z$
$L_{6,17}: [X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4, [X_1, X_4] = X_5, [X_1, X_5] = Z\ , [X_2, X_3] = Z$
$L_{6,18}: [X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4, [X_1, X_4] = X_5, [X_1, X_5] = Z$
$L_{6,19}(\epsilon): [X_1, X_2] = X_4, [X_1, X_3] = X_5, [X_2, X_4] = Z, [X_3, X_5] = \epsilon Z.$
Isomorfismo: $L_{6,19}(\epsilon) \cong L_{6,19}(\delta)$ si y solamente si existe $\alpha \in \mathrm{k}^*$ tal que $\delta = \alpha^2\epsilon$.
$L_{6,20}: [X_1, X_2] = X_4, [X_1, X_3] = X_5, [X_1, X_5] = Z, [X_2, X_4] = Z$
$L_{6,21}(\epsilon): [X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4, [X_2, X_3] = X_5, [X_1, X_4] = Z, [X_2, X_5] = \epsilon Z.$
Isomorfismo: $L_{6,21}(\epsilon) \cong L_{6,21}(\delta)$ si y solamente si existe $\alpha \in \mathrm{k}^*$ tal que $\delta = \alpha^2\epsilon$.
$L_{6,22}(\epsilon): [X_1, X_2] = Z_1, [X_1, X_3] = Z_2, [X_2, X_4] = \epsilon Z_2, [X_3, X_4] = Z_1.$
Isomorfismo: $L_{6,22}(\epsilon) \cong L_{6,22}(\delta)$ si y solamente si existe $\alpha \in \mathrm{k}^*$ tal que $\delta = \alpha^2\epsilon$.
$L_{6,23}: [X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = Z_1, [X_1, X_4] = Z_2, [X_2, X_4] = Z_1$
$L_{6,24}(\epsilon): [X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = Z_1, [X_1, X_4] = \epsilon Z_2, [X_2, X_3] = Z_2, [X_2, X_4] = Z_1.$
Isomorfismo: $L_{6,24}(\epsilon) \cong L_{6,24}(\delta)$ si y solamente si existe $\alpha \in \mathrm{k}^*$ tal que $\delta = \alpha^2\epsilon$.
$L_{6,25}: [X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = Z_1, [X_1, X_4] = Z_2$
$L_{6,26}: [X_1, X_2] = Z_1, [X_1, X_3] = Z_2, [X_2, X_3] = Z_3$

Lema 4.1.5. $\mu_{nil}(L_{6,9}) \geq 6.$

Demostración. Es fácil ver que $L_{6,9}$ es un álgebra de Lie 3-pasos nilpotente y $\mathfrak{z}(L_{6,9}) = L''_{6,9}$.

Supongamos que $\mu_{nil}(L_{6,9}) = 5$ entonces existe una subálgebra $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{n}_5$ de dimensión 6 isomorfa a $L_{6,9}$ cuyo centro es $\mathfrak{g}''$. Sea $\{\overline{Z}_1, \overline{Z}_2\} \subseteq \mathfrak{n}_5$ base de $\mathfrak{g}''$. Luego existen $z_1, z_2, z_3, \overline{z}_1, \overline{z}_2, \overline{z}_3 \in \mathrm{k}$ tales que

$$\begin{aligned} Z_1 &= z_1E_{14} + z_2E_{25} + z_3E_{15} \\ Z_2 &= \overline{z}_1E_{14} + \overline{z}_2E_{25} + \overline{z}_3E_{15} \end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad podemos pensar que Z_1, Z_2 pueden ser escritos en alguna de las siguientes formas;

a) $Z_1 = E_{14} + z_3E_{15} \quad Z_2 = E_{25} + \overline{z}_3E_{15}$ ó

b) $Z_1 = E_{14} \quad Z_2 = E_{15}$ ó

c) $Z_1 = E_{25} \quad Z_2 = E_{15}$.

Supongamos que estamos en el caso (a). Entonces $\mathfrak{g}$ es una subálgebra de Lie de

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ 0 & 0 & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ 0 & 0 & 0 & x_{34} & x_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : x_{ij} \in \mathrm{k} \right\}.$$

Pero esto es una contradicción ya que $\mathfrak{g}$ es 3-pasos nilpotente.

Si estamos en el caso (b) entonces $\mathfrak{g}$ es una subálgebra de Lie de

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ 0 & 0 & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ 0 & 0 & 0 & x_{34} & x_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : x_{ij} \in \mathrm{k} \right\}.$$

Dado que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie isomorfa a $L_{6,9}$ existe $A \in \mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{Cent}(A)_{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}$. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}$ entonces $[A, X] = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$. Luego las ecuaciones que obtenemos son

$$\begin{aligned} a_{12}x_{23} - x_{12}a_{23} &= 0 \quad (1) \\ a_{23}x_{34} - x_{23}a_{34} &= 0 \quad (2) \\ a_{23}x_{35} - x_{23}a_{35} &= 0 \quad (3) \\ a_{12}x_{24} + a_{13}x_{34} - x_{12}a_{24} - x_{13}a_{34} &= 0 \quad (4) \\ a_{12}x_{25} + a_{13}x_{35} - x_{12}a_{25} - x_{13}a_{35} &= 0 \quad (5) \end{aligned}$$

Es fácil ver que si $a_{12} \neq 0$ y $a_{23} \neq 0$ entonces $\dim \mathfrak{Cent}_{\mathfrak{g}}(A) \leq 4$, lo cual es una contradicción. Si $a_{23} = 0$ se puede ver que $\mathfrak{g}$ es una subálgebra de Lie de

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ 0 & 0 & 0 & x_{24} & x_{25} \\ 0 & 0 & 0 & x_{34} & x_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : x_{ij} \in \mathrm{k} \right\}.$$

Entonces $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie 2-pasos nilpotente lo cual contradice el hecho que $L_{6,9}$ es un álgebra de Lie 3-pasos nilpotente. En el caso que $a_{12} = 0$ se puede ver que $\mathfrak{g}$ es una subálgebra de Lie de

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ 0 & 0 & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ 0 & 0 & 0 & x_{34} & x_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Entonces es un álgebra de Lie 2-pasos nilpotente lo cual contradice el hecho que $L_{6,9}$ es un álgebra de Lie 3-pasos nilpotente. Por lo tanto $6 \leq \mu_{nil}(L_{6,9})$. $\square$

Teorema 4.1.6. *Según la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes complejas de dimensión* 6 *dada por De Graaf, el valor de μ es*

Clasificación de De Graaf	$\mu(\mathfrak{g})$	$\mu_{nil}(\mathfrak{g})$
$L_{6,19}(\epsilon)$ *con* $\epsilon \neq 0$	*4*	*4*
$L_{6,3}$, $L_{6,4}$, $L_{6,5}$, $L_{6,8}$	*4*	*5*
$L_{6,1}$, $L_{6,2}$, $L_{6,6}$, $L_{6,7}$, $L_{6,10}$, $L_{6,11}$, $L_{6,12}$, $L_{6,13}$, $L_{6,19}(0)$, $L_{6,20}$, $L_{6,21}(\epsilon)$ $L_{6,22}(\epsilon)$, $L_{6,23}$, $L_{6,24}(\epsilon)$, $L_{6,25}$, $L_{6,26}$	*5*	*5*
$L_{6,9}$	*5*	*6*
$L_{6,14}$, $L_{6,15}$, $L_{6,16}$, $L_{6,17}$, $L_{6,18}$	*6*	*6*

Demostración. Comenzaremos probando que

$$\mu(L_{6,19}(\epsilon)) = \mu_{nil}(L_{6,19})(\epsilon) = \begin{cases} 4 & \text{si } \epsilon \neq 0 \\ 5 & \text{si } \epsilon = 0 \end{cases}$$

ya que nos será útil para más adelante.

Es fácil ver que $\mathfrak{z}(L_{6,19}(\epsilon)) \subseteq [L_{6,19}(\epsilon), L_{6,19}(\epsilon)]$ para todo $\epsilon \in$ k. Entonces $\mu(L_{6,19}(\epsilon)) = \mu_{nil}(L_{6,19}(\epsilon))$, por el Teorema 1.3.10.

Si $\epsilon = 0$, se puede ver que $\dim \mathfrak{z}(L_{6,19}(0)) = 2$ y $\dim L_{6,19}(0) = 6$ entonces $5 \leq \mu_{nil}(L_{19}(0))$. Una nilrepresentación fiel de dimensión 5 de $L_{6,19}(0)$ es

$$\pi_{nil}(X) = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_4 & x_5 & z \\ 0 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $\epsilon = -1$, veamos que $L_{6,19}(-1)$ es isomorfa a $\mathfrak{n}_4$. Sea $\{Y_1, \dots, Y_6\}$ una base de $\mathfrak{n}_4$ donde

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} \; Y_2 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} \; Y_3 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&-1 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} \; Y_4 = \begin{pmatrix} 0&0&-1&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} \; Y_5 = \begin{pmatrix} 0&0&-1&0 \\ 0&0&0&-1 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} \; Y_6 = \begin{pmatrix} 0&0&0&2 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

y sea $F : L_{6,19}(-1) \to \mathfrak{n}_4$ la función lineal tal que $F(X_i) = Y_i$ para todo $i = 1, \dots, 5$ y $F(Z) = Y_6$. Es fácil ver que F es un isomorfismo de álgebras de Lie, luego $L_{6,19}(-1)$ es isomorfa a $\mathfrak{n}_4$. Por lo tanto $L_{6,19}(-1)$ es un álgebra de Lie isomorfa a $\mathfrak{n}_4$ luego $\mu(L_{6,19}(-1)) = 4$. Además como $L_{6,19}(\epsilon)$ es un álgebra de Lie isomorfa a $L_{6,19}(-1)$ para todo $\epsilon \neq 0$ tenemos que $\mu(L_{6,19}(\epsilon)) = 4$ para todo $\epsilon \neq 0$.

Luego, dado que $L_{6,i}$ y $L_{6,j}$ son álgebras de Lie isomorfas si y solamente si $i = j$ y $\dim L_{6,i} = 6$ entonces $5 \leq \mu_{nil}(L_{6,i})$ para todo $i \neq 19$.

$\mathfrak{g} = L_{6,1}$ es el álgebra de Lie abeliana de dimesión 6. Entonces por el Teorema 2.2.1 y por el Teorema 3.1.6 tenemos que $\mu(L_{6,1}) = \mu_{nil}(L_{6,1}) = 5$. Una nilrepresentación fiel de $L_{6,1}$ de dimensión 5 es

$$\pi_{nil}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & a_4 & a_5 & a_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathfrak{g} = L_{6,2}$. Para probar que $5 \leq \mu(L_{6,2})$ usaremos el Teorema de Zassenhauss (ver Teorema 1.3.6). Sea (π, V) una representación fiel de $L_{6,2}$ entonces existen $V_1, \dots, V_s$ subespacios vectoriales no nulos de V tal que

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s \qquad \pi(L_2)V_i \subseteq V_i \text{ para todo } i \qquad \text{y} \qquad \pi(L_{6,2})V_i = \lambda_i I + N_i.$$

Como $L_{3,2}$ es una subálgebra de Lie de $L_{6,2}$ y (π, V) es una representación fiel existe $v \in V$ tal que $Z(v) \neq 0$. Por lo tanto $(\pi \mid_{L_{3,2}}, V_i)$ es una representación fiel de $L_{6,2}$ para algún $i = 1, \dots, s$ entonces por Teorema 4.1.1 $\dim V_i \geq 3$, sin pérdida supongamos que $i = 1$.

Si $s \geq 3$ entonces $\dim V \geq 5$.

Si $s = 2$ entonces $V = V_1 \oplus V_2$. Existe $\mathfrak{a}$ subálgebra de Lie abeliana tal que $\dim \mathfrak{a} \geq 2$, $\mathfrak{a} \cap L_{6,2} = 0$ y

- $(\pi \mid_{\mathfrak{a}}, V_2)$ es una representación fiel ó
- $(\pi \mid_{\mathfrak{a}}, V_1)$ es una representación fiel.

Si $(\pi \mid_{\mathfrak{a}}, V_2)$ es una representación fiel entonces $\dim V_2 \geq 2$, luego $\dim V \geq 5$. Si $(\pi \mid_{\mathfrak{a}}, V_1)$ es una representación fiel tenemos que $(\pi \mid_{L_{3,2} \oplus \mathfrak{a}}, V_1)$ es una representación fiel de $L_{3,2} \oplus \mathfrak{a} = L_{5,3}$ luego por el Teorema 4.1.3 $4 \leq \dim V_1$. Por lo tanto $5 \leq \dim V$.

Si $s = 1$ entonces $\pi(X) = \lambda(X)I + N(X)$. Como $Z \in [L_{6,2}, L_{6,2}]$ tenemos que $\lambda(Z) = 0$ por lo tanto $(N \mid_{L_{3,2}}, V_1)$ es una nilrepresentación fiel de $L_{3,2}$.

Veamos que existe $\{A_1, A_2\} \subseteq \mathfrak{a}_3$ linealmente independiente tal que $N(A_i) \neq 0$ para $i = 1, 2$. Supongamos lo contrario, es decir $N(A_i) = 0$ entonces, como (π, V) es fiel, $\lambda(A_1)I \neq 0$ y $\lambda(A_2)I \neq 0$ luego existe $A = \lambda(A_2)A_1 - \lambda(A_1)A_2 \in L_2$ tal que $\pi(A) = 0$ lo cual es un absurdo ya que (π, V) es una representación fiel de L_2.

Por lo probado anteriormente podemos suponer que existen $\{A_1, A_2\}$ linealmente independiente tales que $N(A_1) \neq 0$ y $N(A_2) \neq 0$ y $[A_1, A_2] = 0$. Por lo tanto $(N \mid_{L_{3,2} \oplus \mathrm{k}\{A_1, A_2\}}, V_1)$ es una nilrepresentación fiel de $L_{3,2} \oplus \mathrm{k}\{A_1, A_2\}$ es isomorfa a el álgebra de Lie $L_{6,2}$ entonces $5 \leq \dim V_1$.

Una nilrepresentación fiel $L_{6,2}$ de dimensión 5 es

$$\pi_{nil}(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & x_1 & z & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

por lo tanto $5 = \mu(L_{6,2}) = \mu_{nil}(L_{6,2})$.

$\mathfrak{g} = L_{6,3}$: Como $\dim \mathfrak{z}(L_{6,3}) = 3$ entonces $4 \leq \mu(L_{6,3})$ y una representación fiel de dimensión 4 de $L_{6,3}$ es

$$\pi(X) = \begin{pmatrix} a_2 & x_1 & x_3 + a_1 & -2z \\ 0 & a_2 & x_2 & -x_3 + a_1 \\ 0 & 0 & a_2 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Como $k\{X_2, X_3, Z, A_1, A_2\}$ es una subálgebra de Lie abeliana de $L_{6,3}$ entonces por el Teorema 3.1.6 tenemos que $5 \leq \mu_{nil}(L_{6,3})$ y una nilrepresentación fiel de dimensión 5 de $L_{6,3}$ es

$$\pi_{nil}(X) = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_3 + a_1 & -2z & a_2 \\ 0 & 0 & x_2 & -x_3 + a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathfrak{g} = L_{6,i}$ para $i = 4, \ldots, 9$. Dado que $L_{6,i} = L_{5,i} \oplus k$ y por el Teorema 2.1.11, $\mu(L_{6,i}) = \mu_{nil}(L_{5,i})$ y además por lo probado para el álgebra de Lie $L_{6,19}(\epsilon)$ tenemos que $5 \leq \mu_{nil}(L_{6,i})$.

Para cada $i = 1, \ldots, 8$ daremos una nilrepresentación de dimensión 5 de $L_{6,i}$ y para el álgebra de Lie $L_{6,9}$ damos una nilrepresentación fiel de dimensión 6. Luego por el Lema 4.1.5 tenemos que $\mu_{nil}(L_{6,9}) = 6$.

$L_{6,4}$

$$\pi(X) = \begin{pmatrix} a_1 & x_1 & x_2 & z \\ 0 & a_1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & a_1 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} \qquad \pi_{nil}(X) = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 & z & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$L_{6,5}$

$$\pi(X) = \begin{pmatrix} a_1 & x_1 & -x_4 & z \\ 0 & a_1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 0 & a_1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} \qquad \pi_{nil}(X) = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & -x_4 & z & a_1 \\ 0 & 0 & x_1 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$L_{6,6}$

$$\pi_{nil}(X) = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & 3x_2 & x_4 + a_1 & -3z \\ 0 & 0 & x_1 & x_3 & -2x_4 + a_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & -x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$L_{6,7}$

$$\pi_{nil}(X) = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & 0 & x_4 + a_1 & -3z \\ 0 & 0 & x_1 & x_3 & -2x_4 + a_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & -x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$L_{6,8}$

$$\pi(X) = \begin{pmatrix} a_1 & x_1 & z_1 & z_2 \\ 0 & a_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} \qquad \pi_{nil}(X) = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & z_1 & z_2 & a_1 \\ 0 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$L_{6,9}$

$$\pi(X) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & z_2 \\ 0 & a_1 & x_1 & 0 & z_1 \\ 0 & 0 & a_1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} \qquad \pi_{nil}(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & z_2 & a_1 \\ 0 & 0 & x_1 & 0 & z_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las siguientes álgebras de Lie son tales que $\mathfrak{z}(L_{6,i}) \subseteq [L_{6,i}, L_{6,i}]$ para todo $i = 10, \ldots, 26$. Entonces por el Teorema 1.3.10, $\mu(L_{6,i}) = \mu_{nil}(L_{6,i})$ para todo $i = 10, \ldots, 26$. Además, $L_{6,19}(\epsilon)$ no es isomorfa a $L_{6,i}$ para todo $i \neq 19$ y $\epsilon \neq 0$ por lo tanto $5 \leq \mu(L_{6,i})$ para todo $i \neq 19$.

Una nilrepresentación fiel de dimensión 5 de $L_{6,i}$ para todo $i = 10, 11, 12, 13, 20, 23, 25, 26$ es

$L_{6,10}$

$$\pi_{nil}(X) = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & 0 & x_4 & z \\ 0 & 0 & x_1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$L_{6,11}$

$$\pi(X) = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 & -x_5 & z \\ 0 & 0 & x_1 & x_2 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$L_{6,12}$

$$\pi(X) = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & 0 & -x_5 & z \\ 0 & 0 & x_1 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$L_{6,13}$

$$\pi(x) = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & -x_4 & 0 & z \\ 0 & 0 & x_1 & -x_4 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$L_{6,20}$

$$\pi_{nil}(X) = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & 0 & x_4 & z \\ 0 & 0 & x_1 & x_2 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$L_{6,23}$

$$\pi(X) = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & -x_4 & z_2 & z_1 \\ 0 & 0 & x_1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$L_{6,25}$

$$\pi(X) = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_3 & 2z_1 & z_2 \\ 0 & 0 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & -x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$L_{6,26}$

$$\pi(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_1 & z_1 & z_2 \\ 0 & 0 & x_2 & 0 & z_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es fácil ver que $L_{6,i}$ es un álgebra de Lie 5-pasos nilpotente para todo $i = 14, \ldots, 18$ por lo tanto es un álgebra de Lie filiforme de dimensión 6. Por 2.2(1h), $\mu(L_{6,i}) = 6$ para todo $i = 14, \ldots, 18$. Una nilrepresentación fiel de dimensión 6 es

$L_{6,14}$

$$\pi_{nil}(X) = \begin{pmatrix} 0 & x_2 & -x_3 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & x_1 & \frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$L_{6,15}$

$$\pi_{nil}(X) = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & \frac{1}{2}x_2 & 0 & -\frac{1}{2}x_4 & z \\ 0 & 0 & x_1 & \frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$L_{6,16}$

$$\pi_{nil}(X) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & \frac{1}{2}x_4 & -\frac{1}{2}x_5 & z \\ 0 & 0 & x_1 & 0 & 0 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$L_{6,17}$

$$\pi_{nil}(X) = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & 0 & \frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & z \\ 0 & 0 & x_1 & 0 & 0 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$L_{6,18}$

$$\pi_{nil}(X) = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & x_1 & 0 & 0 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$L_{6,21}(\epsilon)$: Sea $B = \{\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_5, \overline{Z}\} \subseteq \mathfrak{n}_5$ donde

$$\overline{X}_1 = \begin{pmatrix} 0&1&1&2&0 \\ 0&0&1&1&0 \\ 0&0&0&1&-1 \\ 0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \overline{X}_2 = \begin{pmatrix} 0&0&-1&1&0 \\ 0&0&1&-1&1 \\ 0&0&0&2&-1 \\ 0&0&0&0&-\epsilon \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \overline{X}_3 = \begin{pmatrix} 0&0&1&2&-2\epsilon-2 \\ 0&0&0&1&1-\epsilon \\ 0&0&0&0&-\epsilon-2 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{X}_4 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&-2\epsilon-2 \\ 0&0&0&0&-\epsilon-3 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \overline{X}_5 = \begin{pmatrix} 0&0&0&-2&3\epsilon+3 \\ 0&0&0&0&-2 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \overline{Z} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&-\epsilon-3 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

Es claro que B es un subconjunto de $\mathfrak{n}_5$ linealmente independiente. Sea $\pi_\epsilon : L_{6,21}(\epsilon) \to \mathfrak{gl}(5)$ la aplicación lineal tal que $\pi_\epsilon(X_i) = \overline{X}_i$ y $\pi_\epsilon(Z) = \overline{Z}$. Es fácil ver que $(\pi_\epsilon, \mathrm{k}^5)$ es una nilrepresentación fiel de $L_{6,21}(\epsilon)$ para $\epsilon = 0$ y -1.

$L_{6,22}(\epsilon)$: Para todo $\epsilon \in \mathrm{k}$ una nilrepresentación fiel de dimensión 5 es

$$\pi(X)_\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_4 & z_1 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 & \epsilon x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$L_{6,24}(\epsilon)$: Para probar que $\mu(L_{6,24}(\epsilon)) = 5$ vamos a separar en dos casos

$\epsilon = 0$

Sea $B = \{\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3, \overline{X}_4, \overline{Z}_1, \overline{Z}_2\} \subseteq \mathfrak{n}_5$ tal que

$$\overline{X}_1 = \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \overline{X}_2 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&-1 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \overline{X}_4 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{X}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \overline{Z}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \overline{Z}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es claro que B es un subconjunto linealmente independiente de $\mathfrak{n}_5$. Sea $\pi_\epsilon : L_{6,24}(0) \to \mathfrak{gl}(5)$ la aplicación lineal tal que $\pi_\epsilon(X_i) = \overline{X}_i$ y $\pi_\epsilon(Z_i) = \overline{Z}_i$. Es fácil ver que $(\pi_\epsilon, \mathrm{k}^5)$ es una nilrepresentación fiel de $L_{6,24}(0)$. Por lo tanto $\mu_{nil}(L_{6,24}(0)) = 5$.

$\epsilon = 1$.

Sea $B = \{\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3, \overline{X}_4, \overline{Z}_1, \overline{Z}_2\} \subseteq \mathfrak{n}_5$ tal que

$$\overline{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \overline{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \overline{X}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{X}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \overline{Z}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \overline{Z}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es claro que B es un subconjunto linealmente independiente de $\mathfrak{n}_5$. Sea $\pi_\epsilon : L_{6,24}(1) \to \mathfrak{gl}(5)$ la aplicación lineal tal que $\pi_\epsilon(X_i) = \overline{X}_i$ y $\pi_\epsilon(Z_i) = \overline{Z}_i$. Es fácil ver que $(\pi_\epsilon, \mathrm{k}^5)$ es una nilrepresentación fiel de $L_{6,24}(1)$ por lo tanto $\mu_{nil}(L_{6,24}(1)) = 5$. El álgebra de Lie $L_{6,24}(1)$ es isomorfa a $L_{6,24}(\epsilon)$ para todo $\epsilon \neq 0$ entonces $\mu_{nil}(L_{6,24}(\epsilon)) = 5$ para todo $\epsilon \in \mathrm{k}$.

□

Capítulo 5

ALCs asociadas al álgebra de Lie de Heisenberg

Este capítulo esta dedicado a demostrar el siguiente teorema:

Teorema. *Sean* k *un cuerpo de característica cero,* $\mathrm{k}[t]$ *el álgebra de polinomios y* $\mathfrak{h}_m$ *el álgebra de Lie de Heisenberg de dimensión* $2m+1$. *Entonces para todo* $m \in \mathbb{N}$ *y todo polinomio no nulo* $p \in \mathrm{k}[t]$ *se tiene*

$$\mu\big(\mathfrak{h}_m \otimes \mathrm{k}[t]/(p)\big) = m \deg p + \left\lceil 2\sqrt{\deg p} \right\rceil .$$

Para ello en la sección §5.1 damos una breve introducción sobre las álgebras de Lie de corrientes (ALCs) asociadas al álgebra de Lie de Heisenberg $\mathfrak{h}_{m,p}$. La sección §5.2 esta dedicada a construir para cada par de números naturales $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $ab \leq \deg p$, donde $p \in \mathrm{k}[t]$, una nilrepresentación fiel $\pi_{a,b}$ de dimensión $md + a + b$. En la sección §5.3, usando resultados obtenidos en el Capítulo 3, demostramos que la cota inferior de $\mu(\mathfrak{h}_{m,p})$ es $md + \left\lceil 2\sqrt{\deg p} \right\rceil$. Finalmente, en la sección §5.4 damos una nilrepresentación fiel de $\oplus_{r=1}^{d} \mathfrak{h}_m$ que no es equivalente a la nilrepresentación fiel que se obtiene a partir de la nilrepresentación $\pi_{a,b}$ dada en la sección §5.2 con $a = \lfloor \sqrt{d} \rfloor$ y $b = \left\lceil \frac{d}{a} \right\rceil$.

Parte de los resultados de este capítulo fueron publicados en [CaRo].

5.1. El álgebra de Lie $\mathfrak{h}_{m,p}$

Sean k un cuerpo de característica cero, $\mathrm{k}[t]$ el anillo de polinomios en una variable, $p \in \mathrm{k}[t]$ un polinomio no nulo y $d = \deg(p)$. Sabemos que $\mathrm{k}[t]/(p)$ es un álgebra asociativa, conmutativa con unidad y que $\dim \mathrm{k}[t]/(p) = d$. Sea $\mathfrak{h}_m$ el álgebra de Lie de Heisenberg sobre k de dimensión $2m+1$. Definimos el álgebra de Lie $\mathfrak{h}_{m,p}$ como el k-espacio vectorial

$$\mathfrak{h}_{m,p} = \mathfrak{h}_m \otimes \mathrm{k}[t]/(p)$$

con la estructura de álgebra de Lie dada por $[X \otimes a, Y \otimes b] = [X, Y] \otimes ab$ con $X, Y \in \mathfrak{h}_m$ y $a, b \in \mathrm{k}[t]/(p)$ (ver detalles abajo en §1.4). Es claro que $\dim \mathfrak{h}_{m,p} = (2m+1)d$.

Las k-álgebras de Lie $\mathfrak{h}_{m,p}$ son las *álgebras de Lie de corrientes polinomiales en una variable* asociadas al álgebra de Lie de Heisenberg $\mathfrak{h}_m$. En la §1.4 presentamos una breve introducción al tema de álgebras Lie de corrientes. El conjunto de k-álgebras de Lie $\mathfrak{h}_{m,p}$ constituye una amplia familia de álgebras de Lie 2-pasos nilpotentes que contiene, a su vez, dos subfamilias que queremos destacar:

Álgebras de Lie corrientes truncadas de Heisenberg. Estas son las correspondientes al caso en que $p = t^n$, $n \in \mathbb{N}$. Las k-álgebras de Lie de $\mathfrak{g} \otimes \mathrm{k}[t]/(t^n)$ son conocidas como las *álgebras de Lie de corrientes truncadas* asociadas a $\mathfrak{g}$, estas álgebras de Lie aparecen ligadas a las *Strong Macdonald Conjetures*. Algunas referencias que tratan estos temas son por ejemplo [FGT], [HW], [Ku], [Mac], [T], etc.

Álgebras de Lie de Heisenberg sobre extensiones finitas de k. Estas son las correspondientes al caso en que p es un polinomio irreducible. En este caso $K_p = \mathrm{k}[t]/(p)$ es un cuerpo que es una extensión finita de k y $\mathfrak{h}_m \otimes K_p$ es también una K_p-algebra de Lie (ver §1.1.3) isomorfa al álgebra de Lie de Heisenberg sobre el cuerpo K_p. Por lo tanto la familia de k-álgebras de Lie $\mathfrak{h}_{m,p}$ contiene las k-álgebras de Lie que resultan de restringir los escalares a k en álgebras de Lie de Heisenberg sobre extensiones finitas de k.

A continuación introduciremos algunos conceptos básicos del álgebra de Lie $\mathfrak{h}_{m,p}$ que serán usados a lo largo de este capítulo.

Definición 5.1.1. Sea $p \in \mathrm{k}[t]$ no nulo y $m \in \mathbb{N}$, definimos el álgebra de Lie de corriente $\mathfrak{h}_{m,p}$ asociada al álgebra de Lie de Heisenberg $\mathfrak{h}_m$ como el producto tensorial $\mathfrak{h}_m \otimes \mathrm{k}[t]/(p)$.

Es claro que $\mathfrak{h}_{m,p}$ es un álgebra de Lie 2-pasos nilpotente de dimensión $(2m+1)d$ con $d = \deg(p)$.

Una base de $\mathfrak{h}_{m,p}$ se puede obtener de la siguiente forma: Sea $\{1, t, \ldots, t^{d-1}\}$ la base de $\mathrm{k}[t]/(p)$ y $B_m = \{X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_m, Z\}$ tal que $[X_i, Y_i] = Z$ y cero en otro caso. Denotemos por $X_i^j = X_i \otimes t^j, Y_i^j = Y_i \otimes t^j, Z^j = Z \otimes t^j$. Por lo tanto una base para $\mathfrak{h}_{m,p}$ es

$$B = \left\{X_i^j \ , \ Y_i^j \ , \ Z^j : 1 \leq i \leq m \ ; 0 \leq j \leq d-1\right\} \tag{5.1}$$

es fácil verificar que $[X_i^h, Y_r^j] = Z^{h+j}$ si $h + j \leq d-1$, $r = i$ y cero si $i \neq r$.

Veamos que $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}_{m,p}) = \mathrm{k}\left\{Z^j : j = 0, \ldots, d-1\right\}$. Es claro, por la definición del corchete, que $\mathrm{k}\left\{Z^j : j = 0, \ldots, d-1\right\} \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{h}_{m,p})$. Sea

$$Z = \sum_{j=0}^{d-1} \left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij} X_i^j + \sum_{i=1}^{m} y_{ij} Y_i^j + z_j Z^j \right) \in \mathfrak{z}(\mathfrak{h}_{m,p})$$

tal que $x_{ij}, y_{ij}, z_j \in \mathrm{k}$, es fácil ver que $0 = [Z, Y_{i_0}^0] = \sum_{j=0}^{d-1} x_{i_0 j} Z^j$ para cada i_0, por lo tanto $x_{i_0 j} = 0$ para todo j. Del mismo modo $0 = [Z, X_{i_0}^0] = \sum_{j=0}^{d-1} y_{i_0 j} Z^j$, es decir $y_{i_0 j} = 0$ para todo j. Entonces $Z = \sum_{j=0}^{d-1} z_j Z^j \in \mathrm{k}\left\{Z^j : j = 0, \ldots, d-1\right\}$.

5.2. Nilrepresentaciones fieles de $\mathfrak{h}_{m,p}$

5.2.1. Una primera representación de $\mathfrak{h}_{m,p}$

Una manera natural de obtener representaciones fieles de las álgebras de Lie de corrientes $\mathfrak{g} \otimes A$ es la siguiente: Sean (π, V_1) una representación fiel de $\mathfrak{g}$ y (ρ, V_2) una representación inyectiva de A, es decir ρ es una aplicación k-lineal y $\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)$ para todo $a, b \in A$. Entonces la aplicación $\pi \otimes \rho : \mathfrak{g} \otimes A \to \mathfrak{gl}(V_1 \otimes V_2)$ definida por $(\pi \otimes \rho)(X \otimes a) = \pi(X) \otimes \rho(a)$ es una representación fiel del álgebra de Lie $\mathfrak{g} \otimes A$. Por lo tanto

$$\mu(\mathfrak{g} \otimes A) \leq \mu(\mathfrak{g}) \dim_{\mathrm{k}} A,$$

observar que 2.2(2.1.5) es un caso particular de esta desigualdad.

Si (π, V) es una nilrepresentación fiel de $\mathfrak{g}$ entonces $(\pi \otimes \rho, V_1 \otimes V_2)$ en una nilrepresentación fiel del álgebra de Lie $\mathfrak{g} \otimes A$. Esto nos permite construir una primera nilrepresentación fiel de $\mathfrak{h}_{m,p}$, a partir de la nilrepresentación fiel

$$\pi_m \left(\sum_{i=1}^{m} x_i X_i + \sum_{i=1}^{m} y_i Y_i + zZ \right) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & x_1 & \dots & x_m & z \\ & & & & y_1 \\ & & 0 & & \vdots \\ & & & & y_m \\ & & & & 0 \end{pmatrix}}_{m+2}$$

de $\mathfrak{h}_m$ descrita en 2.3(1d) y la representación $\rho : \mathrm{k}[t]/(p) \to \mathrm{End}(\mathrm{k}^d, \mathrm{k})$ definida por $\rho(t^j) = P_0^j$, con

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{d-1} \end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

la matriz en forma racional de p. Es fácil ver que ρ es la dual de la representación regular de $\mathrm{k}[t]/(p)$ y por lo tanto es una representación inyectiva de $\mathrm{k}[t]/(p)$. Por otra parte, para cada $j = 0, \dots, d-1$, la representación matricial de $(\pi_m \otimes \rho) \left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij} X_i^j + \sum_{i=1}^{m} y_{ij} Y_i^j + z_j Z^j \right)$ en términos de la base canónica del producto tensorial es

$$\begin{pmatrix} 0 & x_1 P_0^j & \dots & x_m P_0^j & z_j P_0^j \\ & & & & y_1 P_0^j \\ & & 0 & & \vdots \\ & & & & y_m P_0^j \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto hemos construido una representación fiel de $\mathfrak{h}_{m,p}$ de dimensión $(m+2)d = md + 2d$.

5.2.2. Las representaciones $\pi_{a,b}$ de $\mathfrak{h}_{m,p}$

Para comenzar, observemos que la acción de $\pi_m \otimes \rho$ se puede expresar de la siguiente manera. Para cada $i = 1, \dots, m$, sean $\overline{A}_i, \overline{B}_i, \overline{P}$ las siguientes matrices de orden $(m+2)d$

$$\overline{A}_i = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 \;\; \dots \;\; I \;\; \dots \;\; 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \overline{B}_i = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ I \\ \vdots \\ 0 \end{array} \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \overline{P} = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{array}{cccc} P_0 & & & \\ & P_0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_0 \end{array} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

donde I es la matriz identidad de orden $m+2$. La representación matricial de $\pi_m \otimes \rho$ en términos de la base canónica del producto tensorial está dada por

$$(\pi_m \otimes \rho)(X_i \otimes q) = \overline{A}_i q(\overline{P}) \qquad (\pi_m \otimes \rho)(Y_i \otimes q) = q(\overline{P})\overline{B}_i \qquad (\pi_m \otimes \rho)(Z \otimes q) = \overline{A}_1 q(\overline{P})\overline{B}_1,$$

es decir $(\pi_m \otimes \rho)(X_i^j) = \overline{A}_i\overline{P}^j$, $(\pi_m \otimes \rho)(Y_i^j) = \overline{P}^j\overline{B}_i$, $(\pi_m \otimes \rho)(Z^j) = \overline{A}_1\overline{P}^j\overline{B}_1$, para todo $i = 1, \dots, m$ y $j = 0, \dots, d-1$. Como ya dijimos, estas representaciones son fieles de dimensión $(m+2)d = md + 2d$, bastante mayor que $\mu(\mathfrak{h}_{m,p})$.

A continuación construiremos una familia $\{\pi_{a,b}\}$ de nilrepresentaciones fieles donde los parámetros a y b son naturales arbitrarios que cumplen $ab \geq d$. La representación $\pi_{a,b}$ tendrá dimensión $md + a + b$ y dado que

$$\text{mín}\{a + b : a, b \in \mathbb{N},\ ab \geq d\} = \left\lceil 2\sqrt{d} \right\rceil \tag{5.3}$$

obtendremos una nilrepresentación fiel de dimensión igual a la establecida por el Teorema **??**.

Fijamos $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $ab \geq d$ definimos la matriz A de orden $a \times d$ y la matriz B de orden $d \times b$ por

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j; \\ 0, & \text{en otro caso;} \end{cases} \qquad B_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = d - (b-j)a; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{5.4}$$

Por ejemplo, si $d \geq a$ tenemos $A = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}_{a} \; \underbrace{\begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix}}_{d-a} \right)$ y en particular si $d = 6$, $a = 2$ y $b = 3$ obtenemos $B = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 1&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}$.

Para cada $i = 1, \dots, m$ sean

$$A_i = \begin{array}{l} \text{tamaño } a\{ \\ \\ \\ \end{array} \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & \dots & A & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{5}{c|}{0} & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{5}{c|}{0} & 0 \\ \hline \end{array}}_{m+2 \text{ bloques}} \qquad B_i = \left.\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline & & 0 \\ & & \vdots \\ 0 & 0 & B \\ & & \vdots \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}\right\} \begin{array}{l} m+2 \\ \text{bloques} \end{array} \qquad P = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline & \begin{matrix} P_0 & & & \\ & P_0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_0 \end{matrix} & \\ 0 & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

donde las matrices A y B están ubicadas en el $(i+1)$-ésimo bloque de A_i y B_i respectivamente. Las matrices A_i, B_i y P son de orden $md + a + b$.

Ahora definimos $\pi_{a,b} : \mathfrak{h}_{m,p} \to \mathfrak{gl}(md + a + b, \mathrm{k})$ la aplicación dada por

$$\pi_{a,b}(X_i \otimes q) = A_i\, q(P) \quad \pi_{a,b}(Y_i \otimes q) = q(P)\, B_i \quad \pi_{a,b}(Z \otimes q) = A_1\, q(P)\, B_1; \tag{5.5}$$

Observar la analogía con $\pi_m \otimes \rho$. Queremos probar que $\pi_{a,b}$ es una nilrepresentación fiel del álgebra de Lie $\mathfrak{h}_{m,p}$. No es difícil ver que es representación, pero la inyectividad es más delicada. El siguiente lema es crucial y refleja la propiedad fundamental que tienen las matrices A y B elegidas en (5.4).

Lema 5.2.1. *Sea $q \in \mathrm{k}[t]$ no nulo tal que $Aq(P_0)B = 0$ entonces $q \in (p)$.*

Demostración. Es claro que $G = \{q \in \mathrm{k}[t] : Aq(P_0)B = 0\}$ es un subgrupo de $\mathrm{k}[t]$ con respecto a la suma y que $(p) \subseteq G$ (por ser p polinomio minimal de P_0).

Debemos probar que $(p) \supseteq G$. Sean $q \in G$ y $f, r \in \mathrm{k}[t]$ tales que $q = fp + r$ con $\deg r < d$. Dado que $(p) \subseteq G$ y G es subgrupo de $\mathrm{k}[t]$ obtenemos que $r \in G$. Probemos que $r = 0$. Sea $n = \deg r$ y r_n el coeficiente correspondiente al monomio de grado n.

Es fácil ver que

$$(P_0^j)_{ls} = \begin{cases} 1 & \text{si } s = l + j \\ 0 & \text{si } s \neq l + j \end{cases} \tag{5.6}$$

para todo $1 \leq l \leq d - j$. Por la ecuación (5.6) y por la definición de A y B tenemos que

$$(AP_0^jB)_{l,s} = \begin{cases} 1 & \text{si } l + j = d - (b - s)a \\ 0 & \text{si } l + j \neq d - (b - s)a \end{cases} \tag{5.7}$$

para todo $1 \leq l \leq d - j$, recordemos que $1 \leq l \leq a$ y $1 \leq s \leq b$ por el orden de la matriz AP_0^jB.

Probaremos luego que para $j = n$ existen l_0, s_0 tales que $l_0 + n = d - (b - s_0)a$ con $1 \leq l_0 \leq \min\{a, d - n\}$ y $1 \leq s_0 \leq b$. Bajo esta condición y por la ecuación (5.7) obtenemos

$$(AP_0^jB)_{l_0,s_0} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = n \\ 0 & \text{si } j = 0, \dots, n - 1 \end{cases}$$

entonces $0 = (Ar(P_0)B)_{l_0,s_0} = r_n$. Luego $r = 0$ y por lo tanto $q = fp$ como queríamos probar.

Veamos que para $j = n$ existen l_0, s_0 tales que $l_0 + n = d - (b - s_0)a$ con $1 \leq l_0 \leq \min\{a, d - n\}$ y $1 \leq s_0 \leq b$. Para esto es suficiente probar que existe $t_0 = 0, \dots, b-1$ tal que $1 \leq d-n-t_0a \leq a$. Sea $t_0 = \left\lceil \frac{d-n}{a} - 1 \right\rceil$ es claro que $t_0 \geq 0$. Como $d \leq ab$ entonces $\left\lfloor \frac{d-1}{a} \right\rfloor \leq b-1$, luego $\left\lfloor \frac{d-n-1}{a} \right\rfloor \leq b-1$ para todo $n = 0, \dots, d-1$. Se puede probar que para todo $x, y \in \mathbb{N}$ tenemos que $\left\lceil \frac{x}{y} - 1 \right\rceil \leq \left\lfloor \frac{x-1}{y} \right\rfloor$, en particular $\left\lceil \frac{d-n}{a} - 1 \right\rceil \leq \left\lfloor \frac{d-n-1}{a} \right\rfloor$. Por lo tanto

$$\frac{d-n}{a} - 1 \leq t_0 \leq \frac{d-n-1}{a},$$

sean $s_0 = b - t_0$ y $l_0 = d - n - t_0a$. □

Observación Si $Aq(P_0) = 0$ o $q(P_0)B = 0$ entonces $Aq(P_0)B = 0$, por lo tanto por el lema anterior $q \in (p)$.

Teorema 5.2.2. *Sean $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $ab \geq d$ y $\pi_{a,b} : \mathfrak{h}_{m,p} \to \mathfrak{gl}(md + a + b, \mathrm{k})$ la aplicación definida en (5.5). Entonces $\pi_{a,b}$ es una nilrepresentación fiel del álgebra de Lie $\mathfrak{h}_{m,p}$.*

Demostración. Veamos primero que $\pi_{a,b}$ es una representación. Por la definición de las matrices

A_i, B_i y P es fácil ver que $A_i q(P) B_i = A_1 q(P) B_1$ para todo $i = 1, \dots, m$ y para todo q. Luego

$$\begin{aligned}
\pi_{a,b}\big([X_i \otimes t^j, Y_i \otimes t^{j'}]\big) &= \pi_{a,b}\big(Z \otimes t^{j+j'}\big) \\
&= A_1 P^{j+j'} B_1 \\
&= A_i P^{j+j'} B_i \\
&= A_i P^{j+j'} B_i - P^{j'} B_i A_i P^j \\
&= \big[\pi_{a,b}\big(X_i \otimes t^j\big), \pi_{a,b}\big(Y_i \otimes t^{j'}\big)\big]\ ,
\end{aligned}$$

para todo $j, j' = 0, \dots, d-1$ y $\pi_{a,b}\big([X_i \otimes t^j, Y_{i'} \otimes t^{j'}]\big) = 0$ si $i \neq i'$. Por lo tanto $\big(\pi_{a,b}, \mathrm{k}^{md+a+b}\big)$ es una representación del álgebra de Lie $\mathfrak{h}_{m,p}$ y es fácil verificar que es una nilrepresentación de $\mathfrak{h}_{m,p}$.

Veamos que $\pi_{a,b}$ es inyectiva. Sea $W \in \mathfrak{h}_{m,p}$ y $x_j, y_j, z_j \in \mathrm{k}$ tal que

$$W = \sum_{i=1}^{m} X_i \otimes p_{i,x}(t) + \sum_{i=1}^{m} Y_i \otimes p_{i,y}(t) + Z \otimes p_z(t),$$

por la ecuación (5.5), $\pi_{a,b}(W) = \sum_{i=1}^m A_i p_{i,x}(P) + \sum_{i=1}^m p_{i,y}(P) B_i + A_1 p_z(P) B_1$. Si $\pi_{a,b}(W) = 0$, por la definición de A_i, B_i y P obtenemos que

$$A p_{i,x}(P_0) = p_{i,y}(P_0) B = A p_z(P_0) B = 0$$

para todo i. Luego por el Lema 5.2.1 y la observación de dicho lema obtenemos que $p_{i,x} = p_{i,y} = p_z = 0$ para cada i. Por lo tanto $\pi_{a,b}$ es una nilrepresentación fiel. □

Corolario 5.2.3. *Sea* k *un cuerpo de característica cero y sea* $p \in \mathrm{k}[t]$ *un polinomio no nulo de grado* d*. Entonces, para todo* $m \in \mathbb{N}$

$$\mu(\mathfrak{h}_{m,p}) \leq md + \left\lceil 2\sqrt{d} \right\rceil .$$

Demostración. Por el teorema anterior para cada $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $ab \geq d$ tenemos que

$$\mu(\mathfrak{h}_{m,p}) \leq md + a + b.$$

Por la ecuación (5.3), $\mu(\mathfrak{h}_{m,p}) \leq md + \left\lceil 2\sqrt{d} \right\rceil$. □

5.3. Cota inferior de $\mu(\mathfrak{h}_{m,p})$

Si $p = (t-b_1)^{d_1} \dots (t-b_q)^{d_q} \in \mathrm{k}[t]$ con $b_i \in \mathrm{k}$ distintos entonces, por la ecuación (1.7)

$$\mu\big(\mathfrak{g} \otimes \mathrm{k}[t]/(p)\big) = \mu\left(\bigoplus_{i=1}^{q} \mathfrak{g} \otimes \mathrm{k}[t]/\big(t^{d_i}\big)\right). \tag{5.8}$$

Si p no es de la forma anterior y K una extensión de k que contenga las raíces de p, por la ecuación (1.9) y 2.2(2.1.5) tenemos que

$$\mu\big(\mathfrak{g} \otimes_{\mathrm{k}} \mathrm{k}[t]/(p)\big) \geq \mu\left(\bigoplus_{r=1}^{q} \mathfrak{g} \otimes_{\mathrm{k}} K[t]/\big(t^{d_r}\big)\right). \tag{5.9}$$

En particular si $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_m$ para obtener una cota inferior de $\mu(\mathfrak{h}_{m,p})$ es suficiente conocer una cota inferior de $\mu\left(\bigoplus_{r=1}^{q} \mathfrak{h}_m \otimes_{\mathrm{k}} \mathrm{k}[t]/(t^{d_r})\right)$.

Tomemos $p_r = t^{d_r}$ y $\mathfrak{h}_{m,p_r} = \mathfrak{h}_m \otimes_{\mathrm{k}} \mathrm{k}[t]/(p_r)$ el álgebra de Lie de corriente truncada de Heisenberg de dimensión $(2m+1)d_r$. Sea $B_r = \left\{X_i^j, Y_i^j, Z^j : 1 \le i \le m \text{ y } 0 \le j \le d_r\right\}$ la base de $\mathfrak{h}_{m,p_r}$ con la propiedad

$$[X_i^j, Y_{i'}^{j'}] = \begin{cases} Z^{j+j'} & \text{si } i = i' \text{ y } j + j' < d_r \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Llamemos $X_{i,r}^j = \underbrace{(0, \ldots, X_i^j, \ldots, 0)}_{q \text{ coord.}}$, $Y_{i,r}^j = \underbrace{(0, \ldots, Y_i^j, \ldots, 0)}_{q \text{ coord.}}$, $Z_r^j = \underbrace{(0, \ldots, Z^j, \ldots, 0)}_{q \text{ coord.}}$ donde X_i^j, Y_i^j, Z^j están ubicados en la r-ésima coordenada de $X_{i,r}^j, Y_{i,r}^j, Z_r^j$ respectivamente y sea $B = \left\{X_{i,r}^j, Y_{i,r}^j, Z_r^j : 1 \le r \le q \ , \ 1 \le i \le m \ , \ \ 0 \le j \le d_r\right\}$ la base de $\bigoplus_{r=1}^{q} \mathfrak{h}_{m,p_r}$ obtenida a partir de B_r. Es fácil verificar que una base del centro es $\left\{Z_r^j : 1 \le r \le q \ , \ 0 \le j \le d_r\right\}$.

Observación. En lo que resta de este capítulo consideraremos a k como un cuerpo de característica cero, salvo mención alguna.

Teorema 5.3.1. *Si (π, V) es una representación fiel de $\bigoplus_{r=1}^{q} \mathfrak{h}_{m,p_r}$ entonces*

$$\dim V \ge md + \left\lceil 2\sqrt{d} \right\rceil,$$

con $d = \sum_{r=1}^{q} d_r$. En particular $\mu\left(\bigoplus_{r=1}^{q} \mathfrak{h}_{m,p_r}\right) \ge md + \left\lceil 2\sqrt{d} \right\rceil$.

Para la prueba de este teorema daremos algunos resultados previos.

Lema 5.3.2. *Sea $X \in \bigoplus_{r=1}^{q} \mathfrak{h}_{m,p_r}$ y $X \notin \mathfrak{z}$ entonces existe $Y \in \bigoplus_{r=1}^{q} \mathfrak{h}_{m,p_r}$ tal que $[X, Y] = Z_r^{d_r - 1}$ para algún $r = 1, \ldots, q$.*

Demostración. Sean $a_{i,r}^j, b_{i,r}^j, c_r^j \in \mathrm{k}$ tales que $X = \sum_{r=1}^{q} \sum_{j=0}^{d_r-1} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{i,r}^j X_{i,r}^j + \sum_{i=1}^{m} b_{i,r}^j X_{i,r}^j + c_r^j Z_r^j\right)$. Dado que no todos los $a_{i,r}^j, b_{i,r}^j$ son simultáneamente nulos, pues $X \notin \mathfrak{z}$, existe r tal que $a_{i,r}^j \ne 0$ (o $b_{i,r}^j \ne 0$) para algún i, j. Sean $j' = \min\{j : a_{i,r}^j \ne 0\}$ e $Y = \frac{1}{a_{i,r}^j} X_{i,r}^{d_r - 1 - j'}$ entonces $[X, Y] = Z_r^{d_r - 1}$. □

Lema 5.3.3. *Sean $\mathfrak{g}$ una subálgebra de Lie de $\bigoplus_{r=1}^{q} \mathfrak{h}_{m,p_r}$ tal que $Z_r^{d_r-1} \notin \mathfrak{g}$ para todo $r = 1, \ldots, q$ entonces*

$$\dim \mathfrak{g} \le md + \dim \mathfrak{g} \cap \mathfrak{z}$$

con $d = \sum_{r=1}^{q} d_r$.

Demostración. Sea $\mathfrak{z}_0 = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{z}$, es claro que $Z_r^{d_r-1} \notin \mathfrak{z}_0$ para todo r. Sean $\widetilde{\mathfrak{z}}$ un complemento directo de $\mathfrak{z}_0$ en $\mathfrak{z}$ es decir $\mathfrak{z} = \widetilde{\mathfrak{z}} \oplus \mathfrak{z}_0$ y una funcional lineal $\alpha : \mathfrak{z} \to \mathrm{k}$ tal que $\alpha \mid_{\mathfrak{z}_0} = 0$ y $\alpha(Z_r^{d_r-1}) \ne 0$. Sean $\mathfrak{g}_0$ un complemento directo de $\mathfrak{z}_0$ en $\mathfrak{g}$ y $\widetilde{\mathfrak{g}}$ un complemento directo de $\oplus_{r=1}^{q} \mathfrak{h}_{m,d_r}$, es decir $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{z}_0$ y $\bigoplus_{r=1}^{q} \mathfrak{h}_{m,p_r} = \widetilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{z}_0 \oplus \widetilde{\mathfrak{z}}$ respectivamente. Definamos $V = \widetilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathfrak{g}_0$ y

$$\begin{aligned} \mathcal{B} : V \times V &\to \mathrm{k} \\ (X, Y) &\mapsto \alpha([X, Y]) \ , \end{aligned}$$

es claro que $\mathcal{B}$ es una función bilineal sobre k. Veamos que $\mathcal{B}$ es no degenerada, sea $0 \neq X \in V$, por el Lema 5.3.2 existe $Y \in \oplus_{r=1}^{q}\mathfrak{h}_{m,d_r}$ tal que $[X,Y] = Z_r^{d_r-1}$ para algún r. Entonces existe $\widetilde{Y} \in V$ tal que $[X,\widetilde{Y}] = Z_r^{d_r-1}$, luego $\mathcal{B}(X,\widetilde{Y}) \neq 0$. Es decir, $\mathcal{B}$ es una forma bilineal no degenerada.

Veamos que $\mathfrak{g}_0$ es $\mathcal{B}$-isotrópico. Sean $X, Y \in \mathfrak{g}_0$, dado que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie y $\mathfrak{z} = \left[\bigoplus_{r=1}^{q}\mathfrak{h}_{m,p_r}, \bigoplus_{r=1}^{q}\mathfrak{h}_{m,p_r}\right]$ tenemos que $[X,Y] \in \mathfrak{g} \cap \mathfrak{z} = \mathfrak{z}_0$. Por lo tanto $\mathcal{B}(X,Y) = 0$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}_0$.

Por lo tanto, $\mathcal{B}$ es una forma bilineal no degenerada y $\mathfrak{g}_0$ es un subespacio $\mathcal{B}$-isotrópico de V entonces $\dim \mathfrak{g}_0 \leq \frac{\dim V}{2} = md$, luego $\dim \mathfrak{g} \leq md + \dim \mathfrak{g} \cap \mathfrak{z}$. □

Demostración. (Teorema 5.3.1.) Por el Teorema 1.3.10 podemos pensar a (π, V) como una nil-representación fiel de $\bigoplus_{r=1}^{q}\mathfrak{h}_{m,p_r}$. Sea $\mathfrak{z}$ el centro de $\bigoplus_{r=1}^{q}\mathfrak{h}_{m,p_r}$, entonces $\pi(\mathfrak{z})$ es una familia de endomorfismos nilpotentes de $\mathrm{End}(V)$ que conmutan. Más aún, como (π, V) es fiel, $\pi(Z)$ es no nulo para todo $Z \in \mathfrak{z}$ en particular $\pi\big(Z_r^{d_r-1}\big)$. Luego por el Teorema 3.1.2, existen vectores linealmente independientes $\{v_1, \ldots, v_s\}$ en V y una descomposición $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{z}_s$ tal que $\pi\big(Z_r^{d_r-1}\big)v_1 \neq 0$. Sea

$$\begin{aligned} F : \bigoplus_{r=1}^{q}\mathfrak{h}_{m,p_r} &\to V \\ X &\mapsto \pi(X)v_1 \ , \end{aligned}$$

dado que π es una representación es claro que F es una aplicación lineal y $\ker F$ es una subálgebra de Lie de $\bigoplus_{r=1}^{q}\mathfrak{h}_{m,p_r}$. Como $F\big(Z_r^{d_r-1}\big) \neq 0$ para todo r, por el Lema 5.3.3, tenemos que

$$\dim \mathrm{im}\, F + \dim \ker F \cap \mathfrak{z} \geq (m+1)d. \tag{5.10}$$

con $d = \sum_{r=1}^{q} d_r$.

Sea $W = \mathrm{k}\{v_1, \ldots, v_s\}$, siguiendo los pasos de la prueba del Teorema 3.1.2 se puede ver que $W \cap \mathrm{im}\, F = 0$. Como consecuencia $\dim V \geq \dim \mathrm{im}\, F + s$ luego por la ecuación (6.9)

$$\dim V + \dim \ker F \cap \mathfrak{z} \geq (m+1)d + s. \tag{5.11}$$

Dado que $F|_{\mathfrak{z}} : \mathfrak{z} \longrightarrow V$ coincide con la aplicación F_1 del Teorema 3.1.2 tenemos que $d \leq s \dim(\mathrm{im}\, F|_{\mathfrak{z}})$. Luego por la ecuación (5.3)

$$\left\lceil 2\sqrt{d} \right\rceil \leq s + \dim\big(\mathrm{im}\, F|_{\mathfrak{z}}\big). \tag{5.12}$$

Combinando las ecuaciones (6.8) y (5.12) con $d = \dim \mathfrak{z} = \dim \ker F \cap \mathfrak{z} + \dim(\mathrm{im}\, F|_{\mathfrak{z}})$ nos queda que $\dim V \geq md + \left\lceil 2\sqrt{d} \right\rceil$. □

Teorema 5.3.4. *Sea* k *un cuerpo de característica cero y sea* $p \in \mathrm{k}[t]$ *un polinomio no nulo de grado d. Entonces, para todo* $m \in \mathbb{N}$

$$\mu\big(\mathfrak{h}_{m,p}\big) = md + \left\lceil 2\sqrt{d} \right\rceil.$$

Demostración. Si k es un cuerpo que contiene todas la raíces de p entonces por la ecuación (5.8) y el Teorema 5.3.1, $\mu(\mathfrak{h}_{m,p}) \geq md + \left\lceil 2\sqrt{d} \right\rceil$. Si k no contiene todas las raíces de p, consideremos K una extensión de k que contenga las raíces de p. Por la ecuación (5.9) y el Teorema 5.3.1, $\mu\big(\mathfrak{h}_{m,p}\big) \geq md + \left\lceil 2\sqrt{d} \right\rceil$. Luego por el Corolario 5.2.3 obtenemos $\mu\big(\mathfrak{h}_{m,p}\big) = md + \left\lceil 2\sqrt{d} \right\rceil$. □

5.4. Representaciones fieles de dimensión mínima de $\oplus_{r=1}^{d}\mathfrak{h}_m$

5.4.1. $\mu(\oplus_{r=1}^{d}\mathfrak{h}_m)$ y una nilrepresentación fiel de mínima dimensión

En esta sección calcularemos el valor de $\mu(\oplus_{r=1}^{d}\mathfrak{h}_m)$ para todo $m \in \mathrm{k}$ y daremos una nilrepresentación fiel de $\oplus_{r=1}^{d}\mathfrak{h}_m$.

Corolario 5.4.1. *(del Teorema 5.3.4) Sea* k *un cuerpo infinito. Sea* $m, d \in \mathbb{N}$ *entonces*

$$\mu(\oplus_{r=1}^{d}\mathfrak{h}_m) = md + \left\lceil 2\sqrt{d} \right\rceil .$$

Demostración. Sea $\alpha \in \mathrm{k}$, se puede ver que $\mathfrak{h}_m \simeq \mathfrak{h}_m \otimes \frac{\mathrm{k}[t]}{(t-\alpha)}$. Luego, como k es un cuerpo infinito, existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathrm{k}$ distintos tales que

$$\oplus_{r=1}^{d}\mathfrak{h}_m \simeq \mathfrak{h}_m \otimes \frac{\mathrm{k}[t]}{(t-\alpha_1)} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}_m \otimes \frac{\mathrm{k}[t]}{(t-\alpha_d)}.$$

Sea $p(t) = (t-\alpha_1)\ldots(t-\alpha_d)$, por el Corolario 1.4.3,

$$\mathfrak{h}_{m,p} = \mathfrak{h}_m \otimes \frac{\mathrm{k}[t]}{(p)} \simeq \bigoplus_{r=1}^{d} \mathfrak{h}_m \otimes \frac{\mathrm{k}[t]}{(t-\alpha_r)}$$

luego $\mathfrak{h}_{m,p} \simeq \oplus_{r=1}^{d}\mathfrak{h}_m$. Por lo tanto $\mu(\oplus_{r=1}^{d}\mathfrak{h}_m) = \mu(\mathfrak{h}_{m,p})$. $\square$

Ahora describimos una nilrepresentación fiel de $\oplus_{r=1}^{d}\mathfrak{h}_m$. Sea $\{X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_m, Z\}$ una base de $\mathfrak{h}_m$ tal que $[X_i, Y_i] = Z$ y cero en otro caso. Entonces una base para $\oplus_{r=1}^{d}\mathfrak{h}_m$ es $\{X_{ij}, Y_{ij}, Z_j : i = 1, \ldots, m \text{ y } j = 1, \ldots, r\}$ tales que

$$X_{ij} = \underbrace{(0, \ldots, X_i, \ldots, 0)}_{\text{en la j-ésima coordenada}}, Y_{ij} = \underbrace{(0, \ldots, Y_i, \ldots, 0)}_{\text{en la j-ésima coordenada}} \; Z_j = \underbrace{(0, \ldots, Z, \ldots, 0)}_{\text{en la j-ésima coordenada}} .$$

Sean $a = \left\lfloor \sqrt{d} \right\rfloor$ y $b = \left\lceil \frac{d}{a} \right\rceil$. Definimos las matrices

$$\overline{X}_{ij} = E_{j-\lfloor \frac{j-1}{a} \rfloor a, j+a+m(i-1)} \quad \overline{Y}_{ij} = E_{j+a+m(i-1), \lceil \frac{j}{a} \rceil + a + md} \quad \overline{Z}_j = E_{j-\lfloor \frac{j-1}{a} \rfloor a, \lceil \frac{j}{a} \rceil + a + md}$$

de tamaño $a + md + b$.

Sea $\tau_{a,b} : \oplus_{r=1}^{d}\mathfrak{h}_m \to \mathfrak{gl}(a+md+b)$ la aplicación lineal tal que

$$\tau_{a,b}(X_{ij}) = \overline{X}_{ij} \quad \tau_{a,b}(Y_{ij}) = \overline{Y}_{ij} \quad \tau_{a,b}(Z_j) = \overline{Z}_j.$$

Es fácil ver que $(\tau_{a,b}, \mathrm{k}^{a+md+b})$ es una nilrepresentación fiel de $\oplus_{r=1}^{d}\mathfrak{h}_m$ y por la ecuación (3.1) tenemos que $a + b = \left\lceil 2\sqrt{d} \right\rceil$, por lo tanto la dimensión de dicha representación es la dada en el Corolario 5.4.1.

Ejemplos 5.4.2. Sea $d=4$ y $m=1$ entonces $\mu(\oplus_{r=1}^{4}\mathfrak{h}_1)=8$. Sean $a=b=2$, la nilrepresentación fiel $(\tau_{2,2},\mathrm{k}^8)$ es la siguiente

$$\tau_{2,2}(X)=\begin{pmatrix}0&0&x_{11}&0&x_{13}&0&z_1&z_3\\0&0&0&x_{12}&0&x_{14}&z_2&z_4\\0&0&0&0&0&0&y_{11}&0\\0&0&0&0&0&0&y_{12}&0\\0&0&0&0&0&0&0&y_{13}\\0&0&0&0&0&0&0&y_{14}\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

para todo $X\in\oplus_{r=1}^{4}\mathfrak{h}_1$.

5.4.2. Representaciones fieles de $\oplus_{r=1}^{d}\mathfrak{h}_m$ no equivalentes

Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado y sea $p(t)=t^d-a$. Un isomorfismo entre las álgebras de Lie $\mathfrak{h}_{m,p}$ y $\oplus_{r=1}^{d}\mathfrak{h}_m$ esta dado por la aplicación $H:\mathfrak{h}_{m,p}\to\oplus_{r=1}^{d}\mathfrak{h}_m$ tal que

$$H(X\otimes\overline{q})=(q(\delta)X,q(\delta\xi)X,\dots,q(\delta\xi^{d-1})X)\tag{5.13}$$

En esta sección probaremos que la nilrepresentación $(\tau_{a,b},\mathrm{k}^{a+md+b})$ es no equivalente a la nilrepresentación que se obtiene a partir de la representación $(\pi_{a,b},\mathrm{k}^{a+md+b})$ de $\mathfrak{h}_{m,p}$ con $a=\lfloor d\rfloor$ y $b=\lceil\frac{d}{a}\rceil$. Para esto es suficiente probar que existe $X\in\mathfrak{h}_{m,p}$ tal que $\dim\pi_{a,b}(X)\neq\dim(\tau_{a,b}\circ H)(X)$. Pues, si $(\tau_{a,b},\mathrm{k}^{a+md+b})$ y $(\pi_{a,b}\circ H^{-1},\mathrm{k}^{a+md+b})$ son equivalentes entonces $(\tau_{a,b}\circ H,\mathrm{k}^{a+md+b})$ y $(\pi_{a,b},\mathrm{k}^{a+md+b})$ son representaciones equivalentes de $\mathfrak{h}_{m,p}$. Luego por la definición 1.1.4 existe

$$\varphi:\mathrm{k}^{a+md+b}\to\mathrm{k}^{a+md+b}$$

un isomorfismo lineal tal que para todo $X\in\mathfrak{h}_{m,p}$ se verifica que $\varphi\circ(\tau_{a,b}\circ H)(X)=\pi_{a,b}(X)\circ\varphi$. Por lo tanto por ser φ un isomorfismo lineal mantiene invariante la dimensión de $\ker(\tau_{a,b}\circ H)(X)$ y $\ker\pi_{a,b}(X)$.

Llamaremos $\widetilde{\tau}_{a,b}=\tau_{a,b}\circ H$, recordemos que una base para $\mathfrak{h}_{m,p}$ es

$$\{X_i^j,Y_i^j,Z^j:i=1,\dots,m;j=0,\dots,d-1\}.$$

Lema 5.4.3. *Sean $0\neq\delta,t_0,\dots,t_{a-1}\in\mathrm{k}$ distintos y*

$$D=\begin{pmatrix}1&\delta&\delta^2&\dots&\delta^{a-1}&\delta^a\\1&\delta t_1&\delta^2t_1^2&\dots&\delta^{a-1}t_1^{a-1}&\delta^at_1^a\\1&\delta t_2&\delta^2t_2^2&\dots&\delta^{a-1}t_2^{a-1}&\delta^at_2^a\\1&\delta t_3&\delta^2t_3^2&\dots&\delta^{a-1}t_3^{a-1}&\delta^at_3^a\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\1&\delta t_{a-1}&\delta^2t_{a-1}^2&\dots&\delta^{a-1}t_{a-1}^{a-1}&\delta^at_{a-1}^a\end{pmatrix}.$$

Entonces existe una solución $Y=\begin{pmatrix}y_0\\y_1\\y_2\\\vdots\\y_a\end{pmatrix}$ *del sistema $DY=0$ tal que y_0 yy_j son distintos de cero para algún $j\neq0$.*

Demostración. Consideremos el sistema $AY = B$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^{a-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_{a-1} & t_{a-1}^2 & \dots & t_{a-1}^{a-1} \end{pmatrix} \quad \text{y } B = \begin{pmatrix} 1 \\ t_1^a \\ \vdots \\ t_{a-1}^a \end{pmatrix}.$$

Dado que A es inversible ya que es la matriz de *Vandermonde*, el sistema anterior admite solución distinta de la trivial para todo $B \in \mathrm{k}^a$ de la forma anterior. Sea $Y_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{a-1} \end{pmatrix}$ una solución de dicho sistema, veamos que $y_0 \neq 0$. Supongamos lo contrario, si $y_0 = 0$ entonces el sistema $AY = B$ se reduce al sistema $A'Y' = B$ el cual admite una solución distinta de la trivial donde $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^{a-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{a-1} & t_{a-1}^2 & \dots & t_{a-1}^{a-1} \end{pmatrix}$ y $Y' = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{a-1} \end{pmatrix}$. A partir de este sistema se obtiene un sistema homogéneo cuya matriz del sistema es $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^{a-1} & t_1^a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{a-1} & t_{a-1}^2 & \dots & t_{a-1}^{a-1} & t_{a-1}^a \end{pmatrix}$, este sistema admite una solución distinta de la trivial. Pero esto contradice el hecho que C sea una matriz inversible ya que es una matriz de *Vandermonde*, por lo tanto $y_0 \neq 0$.

Dado que los t_i son todos distintos entre si existe un $j = 1, \dots, a-1$ tal que $y_j \neq 0$. Luego el vector $\widetilde{Y} = \begin{pmatrix} \delta^a y_0 \\ \delta^{a-1} y_1 \\ \vdots \\ \delta y_{a-1} \\ -1 \end{pmatrix}$ es una solución del sistema $D\widetilde{Y} = 0$. Donde $\delta^a y_0 \neq 0$ y existe $j = 0, \dots, a-1$ tal que $\delta^{a-j} y_j \neq 0$. $\square$

Lema 5.4.4. *Existe* $Y \in \mathfrak{h}_{m,p}$ *tal que* $\dim \ker \widetilde{\pi}_{a,b}(Y) \geq md + a + 1$ *y* $\dim \ker \pi_{a,b}(Y) = md + a$.

Demostración. Sea $Y = \sum_{j=0}^{a} y_j Y_1^j \in \mathfrak{h}_{m,p}$, calculemos $\widetilde{\tau}_{a,b}(Y)$.

$$\begin{aligned}
\widetilde{\tau}_{a,b}(Y) &= \sum_{j=0}^{a} y_j \widetilde{\tau}_{a,b}(Y_1^j) \\
&= \sum_{j=0}^{a} y_j (\tau_{a,b} \circ H)(Y_1^j) \\
&= \sum_{j=0}^{a} y_j \tau_{a,b}(\delta^j Y_1, (\delta\xi)^j Y_1, \ldots, (\delta\xi^{d-1})^j Y_1) \\
&= \sum_{j=0}^{a} y_j \delta^j \left(\sum_{r=1}^{d} \xi^{r-1} \tau_{a,b}(Y_{1,r-1}) \right) \\
&= \sum_{j=0}^{a} y_j \delta^j \left(\sum_{r=1}^{d} \xi^{r-1} \overline{Y}_{1,r-1} \right) \\
&= \sum_{r=1}^{d} \left(\sum_{j=0}^{a} y_j \delta^j \xi^{r-1} \right) \overline{Y}_{1,r-1} \ .
\end{aligned}$$

Por la forma de la matriz $\overline{Y}_{1,r-1}$ para todo $r = 1, \ldots, d$, es fácil ver que $\widetilde{\tau}_{a,b}(Y)$ es una matriz con un único bloque de tamaño $d \times b$ no nulo, luego $md + a \leq \dim\ker \widetilde{\tau}_{a,b}(Y)$. Llamemos $\widetilde{Y}_{1,r-1}$ al bloque no nulo de la matriz $\overline{Y}_{1,r-1}$ para todo $r = 1, \ldots, d$ y sea

$$\widetilde{Y} = \sum_{r=1}^{d} \left(\sum_{j=0}^{a} y_j \delta^j \xi^{r-1} \right) \widetilde{Y}_{1,r-1}$$

el bloque no nulo de $\widetilde{\tau}_{a,b}(Y)$.

Si tomamos $t_r = \xi^r$ con $r = 0, \ldots, a-1$ en el Lema 5.4.3 se tiene que existe $\delta^a y_0, \delta^{a-1} y_1, \ldots, \delta y_{a-1} \in$ k tal que la primera columna de $\widetilde{Y}$ es nula. Por lo tanto $\dim\ker \widetilde{\tau}_{a,b}(Y) \geq md + a + 1$

Veamos que se verifica que $\dim\ker \pi_{a,b}(Y) = md + a$ para el valor de Y obtenido anteriormente.

$$\begin{aligned}
\pi_{a,b}(Y) &= \sum_{j=0}^{a} y_j \pi_{a,b}(Y_1^j) \\
&= \sum_{j=0}^{a} y_j P^j B_1 \ .
\end{aligned}$$

La matriz $\pi_{a,b}(Y)$ tiene un único bloque posiblemente no nulo de tamaño $d \times b$ entonces

$$\dim\ker \pi_{a,b}(Y) \geq md + a.$$

Sea $\widetilde{Y}$ el bloque de $\pi_{a,b}(Y)$ no nulo, dicho bloque lo denotaremos por $\widetilde{Y}$, este bloque se obtiene realizando el producto de $\widetilde{P}^j B$.

Es fácil verificar que $(\widetilde{P}^j B)_{pq} = \begin{cases} 1 & \text{si } p + (b-q)a + j = d \\ 1 & \text{o } p + (b-q)a + j = 2d \text{ y } p + j > d \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$, luego

$$(\widetilde{P}^j B)_{pq} = \begin{cases} y_{d-p-(b-q)a} & \text{si } 0 \leq d - p - (b-q)a \leq a \\ y_{2d-p-(b-q)a} & \text{si } 0 \leq 2d - p - (b-q)a \leq a \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Para demostrar que $\dim \ker \pi_{a,b}(Y) = md + a$ es suficiente probar que $\widetilde{Y}$ tiene un menor de orden b con determinante distinto de cero, es decir que el rango de $\widetilde{Y}$ es b. Por lo visto anteriormente, existe un $j = 1, \ldots, a-1$ tal que y_0 y y_j son distintos de cero. Si $p = d - a(b - s + 1) + (a - j)$ entonces

$$(\widetilde{Y})_{pq} = \begin{cases} y_j & \text{si } q = s \\ y_{d+j-(b-1)a} & \text{si } q = 1 \text{ y } s = b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

para todo $s = 2, \ldots, b$. Si $p = d - a(b-1)$ entonces

$$(\widetilde{Y})_{pq} = \begin{cases} y_0 & \text{si } q = 1 \\ y_a & \text{si } q = 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Es decir $\widetilde{Y}$ tiene un menor de la forma

$$M = \begin{pmatrix} y_0 & y_a & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & y_j & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_j & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{d+j-(b-1)a} & 0 & 0 & \ldots & 0 & y_i \end{pmatrix}$$

tal que $\det(M) = y_0 y_j^{b-1} \neq 0$ por el Lema 5.4.3. □

Teorema 5.4.5. *Sea $d \in \mathbb{N}$ y sean $a = \sqrt{d}, b = \lceil \frac{d}{a} \rceil$. Entonces las nilrepresentaciones fieles $(\widetilde{\tau}_{a,b}, \mathrm{k}^{a+md+b})$ y $(\pi_{a,b}, \mathrm{k}^{a+md+b})$ de $\mathfrak{h}_{m,p}$ no son equivalentes.*

Demostración. Por el Lema 5.4.4 existe $Y \in \mathfrak{h}_{m,p}$ no nulo tal que $\dim \ker \widetilde{\tau}_{a,b}(Y) \geq md + a + 1$ y $\dim \ker \pi_{a,b}(Y) = md + a$. Por lo tanto $(\widetilde{\tau}_{a,b}, \mathrm{k}^{a+md+b})$ y $(\pi_{a,b}, \mathrm{k}^{a+md+b})$ son nilrepresentaciones no equivalentes. □

Capítulo 6

El álgebra de Lie 2-pasos nilpotente libre de rango r

El principal propósito de este capítulo es obtener cotas ajustadas $\mu(\mathcal{L}(r))$ para todo $r \in \mathbb{N}$. Es decir, demostrar el siguiente teorema:

Teorema. *Sean $r \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{L}(r)$ el álgebra de Lie 2-pasos nilpotente libre de r generadores. Entonces*

- *si $r \geq 4$ se tiene que* $2 + \left\lceil 2\sqrt{\frac{r(r-1)}{2}} \right\rceil \leq \mu(\mathcal{L}(r)) \leq r + \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil + 1$;

- *si $r = 1, 2, 3$ se tiene que* $\mu(\mathcal{L}(r)) = 2r - 1$.

Para ello en la sección §6.1 damos una breve introducción sobre $\mathcal{L}(r)$ el álgebra de Lie 2-pasos nilpotente libre de rango r sobre k y demostramos que una cota inferior para $\mu(\mathcal{L}(r))$ es $2 + \left\lceil 2\sqrt{\frac{r(r-1)}{2}} \right\rceil$. En la sección §6.2 construimos para cada par de números naturales $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $a \geq b, 2b \geq r$ y $a \geq r - 1$ una nilrepresentación fiel $\pi_{a,b}$ de dimensión $a + b + 2$. De esta forma obtendremos una familia de nilrepresentaciones fieles $\{\pi_{a,b}\}$ de $\mathcal{L}(r)$ entre las cuales tendremos una nilrepresentación fiel de dimensión $r + \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil + 1$.

6.1. Una cota inferior de $\mu(\mathcal{L}(r))$

Sean k un cuerpo de característica cero y $r \in \mathbb{N}$. El álgebra de Lie 2-pasos nilpotente libre de rango r sobre k es $\mathcal{L}(r) = V \oplus \wedge^2 V$, donde V es un espacio vectorial de dimensión r sobre k. Los únicos corchetes de Lie no nulos son

$$[u, v] = u \wedge v \in \bigwedge^2 V$$

para todo $u, v \in V$. El centro de $\mathcal{L}(r)$ es $\mathfrak{z}(\mathcal{L}(r)) = \bigwedge^2 V$. $\mathcal{L}(r)$ es el objeto libre en las álgebras de Lie 2-pasos nilpotente con r-generadores sobre k. Más aún, toda álgebra de Lie 2-pasos nilpotente es de la forma $\mathfrak{n} = \mathcal{L}(r)/W = V \bigoplus \bigwedge^2 V/W$ para algún r, donde W es un subespacio de $\bigwedge^2 V$.

Sea $B_r = \{X_1, \ldots, X_r, Z_{ij} : 1 \leq i < j \leq r\}$ una base de $\mathcal{L}(r)$ tal que

$$[X_i, X_j] = Z_{ij} \ . \tag{6.1}$$

Donde $\{Z_{ij} : 1 \leq i < j \leq r\}$ es una base del centro de $\mathcal{L}(r)$ y llamaremos $\mathcal{V}_r$ al espacio generado por $\{X_1, \ldots, X_r\}$ de esta manera

$$\mathcal{L}(r) = \mathcal{V}_r \oplus \mathfrak{z}(\mathcal{L}(r)) \ .$$

Sea $\mathcal{L}(r-1)$ la subálgebra de Lie 2-pasos nilpotente libre de rango $r-1$ de $\mathcal{L}(r)$ cuya base esta dada por $B_{r-1} = \{X_1, \ldots, X_{r-1}, Z_{ij} : 1 \leq i < j \leq r-1\}$.

Observación 6.1.1. En lo que resta de esta sección (π, V) será una nilrepresentación fiel de $\mathcal{L}(r)$ salvo mención alguna.

Teorema 6.1.2. *Sean $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 4$ y (π, V) una representación fiel de $\mathcal{L}(r)$ entonces*

$$\dim V \geq 2 + \left\lceil 2\sqrt{\dim \mathfrak{z}(\mathcal{L}(r))} \right\rceil .$$

En particular, $\mu(\mathcal{L}(r)) \geq 2 + \left\lceil 2\sqrt{\dim \mathfrak{z}(\mathcal{L}(r))} \right\rceil$.

Para la prueba de este teorema daremos algunos resultados previos.

Lema 6.1.3. *Sean $r \in \mathbb{N}$ y $r \geq 4$. Sea $B = \{w_1, \ldots, w_{s+1}\}$ una base de V tal que la matriz $[\pi(X)]_B$ es de la forma*

$$[\pi(X)]_B = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{r-1} \end{matrix} & * & 0 \\ \hline 0 & 0 & * & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad [\pi(Z)]_B = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 0 & * & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

para todo $X = \sum_{i=1}^{r-1} x_i X_i, Z \in \mathcal{L}(r-1)$ y

$$[\pi(x_rX_r)]_B = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline * & * & * & 0 \\ \hline * & * & * & x_r \\ \hline * & * & * & 0 \\ \hline * & * & * & 0 \\ \hline \end{array} \qquad [\pi(Z)]_B = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline * & * & * & \begin{matrix} z_{1r} \\ \vdots \\ z_{r-1r} \end{matrix} \\ \hline * & * & * & 0 \\ \hline * & * & * & 0 \\ \hline * & * & * & 0 \\ \hline \end{array}$$

para todo $Z = \sum_{i=1}^{r-1} z_{ir} Z_{ir}$. Entonces existe $i = 1, \ldots, r-1$ tal que para todo $1 \leq m < n \leq r-1$, $\pi(Z_{mn})V \nsubseteq \mathrm{k}\{u_i\}$.

Observación 6.1.4. En el lema anterior la notación $*$ en las matrices indica una matriz sobre la cual no tenemos información alguna.

Demostración. Para simplificar la notación llamaremos X a $\pi(X)$ para todo $X \in \mathcal{L}(r)$.

La demostración la haremos por el absurdo, es decir, supongamos que para cada $i = 1, \ldots, r-1$ existe $1 \leq m < n \leq r-1$ tal que $Z_{mn}(v) = \lambda(v)w_i$ para todo $v \in V$. Por la ecuación (6.1) $Z_{mn} = [X_m, X_n]$ y por la forma de $[X_m]_B$ y $[X_n]_B$ tenemos que

- $X_m(w_k) = \sum_{i=1}^{r-1} a_{m,i}w_i + a_m(w_k)w_r$;
- $X_n(w_k) = \sum_{i=1}^{r-1} a_{n,i}w_i + a_n(w_k)w_r$.

para todo $k = r+1, \ldots, s$. Entonces

$$\begin{aligned} Z_{mn}(w_k) = [X_m, X_n](w_k) &= X_mX_n(w_k) - X_nX_m(w_k) \\ &= a_n(w_k)w_m - a_m(w_k)w_n \text{ pues } X_i(w_j) = 0 \text{ para todo } i, j = 1, \ldots, r-1 \end{aligned}$$

además $Z_{mn}(w_k) = \lambda(w_k)w_i$ por hipótesis . Luego

$$a_n(w_k)w_m - a_m(w_k)w_n - \lambda(w_k)u_i = 0$$

para todo $k = r+1, \ldots, s$.

Si $m \neq i$ y $n \neq i$ entonces $a_m(w_k) = a_n(w_k) = \lambda(w_k) = 0$ para todo $k = r+1, \ldots, s$ ya que $\{w_m, w_n, w_i\}$ es linealmente independiente, por lo tanto $Z_{mn}(w_k) = 0$ para todo $k = r+1, \ldots, s$. Luego por la forma de $[Z_{mn}]_B$ tenemos que $Z_{mn} = 0$, lo que contradice el hecho que (π, V) es una representación fiel de $\mathcal{L}(r)$.

Supongamos que $m = i$ y $n \neq i$ entonces, como $\{w_n, w_i\}$ es linealmente independiente, tenemos que

$$a_m(w_k) = 0 \tag{6.2}$$

para todo $k = r+1, \ldots, s$.

Sea $\alpha : V \to \mathrm{k}$ la funcional lineal tal que $\alpha(v) = a_r$ para todo $v = \sum_{j=1}^{s+1} a_jw_j \in V$. Luego la ecuación (6.2) la podemos escribir como $\alpha(X_m(w_k)) = 0$ para todo $k = r+1, \ldots, s$. Como por hipótesis esto es válido para todo $i = 1, \ldots, r-1$ y $r \geq 4$ entonces existe $j \neq m$ tal que $\alpha(X_j(w_k)) = \alpha(X_m(w_k)) = 0$ para todo $k = r+1, \ldots, s$. Es decir $X_j(w_k), X_m(w_k) \in \mathrm{k}\{w_1, \ldots, w_{r-1}\}$. Luego

$$\begin{aligned} Z_{mj}(w_k) &= [X_m, X_j](w_k) \\ &= X_mX_j(w_k) - X_jX_m(w_k) \\ &= 0 \quad \text{por la forma de } [X_m]_B \ . \end{aligned}$$

Sea $W = \mathrm{k}\{w_{r+1}, \ldots, w_s\}$ entonces $Z_{mj}\mid_W = 0$ por lo tanto $Z_{mj} = 0$, pero esto contradice el hecho que (π, V) es una representación fiel de $\mathcal{L}(r)$. Luego existe $w_i \in B$ tal que $Z_{mn}(v) \neq aw_i$ para todo $1 \leq m < n \leq r-1$. $\square$

Para los siguientes resultados denotaremos por E_{ij} a una matriz cuadrada de orden $s+1$ tal que

$$(E_{ij})_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Lema 6.1.5. *Sean* $A \in \mathrm{k}^{(r-2)\times(r-2)}, C \in \mathrm{k}^{(s-r)\times(r-2)}, E \in \mathrm{k}^{1\times 1}, F \in \mathrm{k}^{(s-r)\times 1}, H \in \mathrm{k}^{(r-2)\times(r-2)}$ *y* $B, D \in \mathrm{k}^{1\times(r-2)}$. *Sea*

$$X = \left[\begin{array}{c|c|c|c} A & * & * & 0 \\ \hline B & E & * & 1 \\ \hline C & F & H & 0 \\ \hline D & * & * & 0 \end{array}\right]$$

tal que X *conmuta con las matrices* $aE_{i-1,r} - E_{i-1,r+1}$ *para todo* $i = 2, \ldots, r$. *Entonces* A *es una matriz diagonal y* B, C *y* D *son matrices nulas. Si además* X *es una matriz nilpotente que conmuta con la matriz* $bE_{i-1,r} + cE_{n-1,r} - E_{n-1,r+i}$ *para todo* $i = 2, s-r$ *y* $b \neq 0$ *entonces las matrices* A, E, F *y* H *son matrices nulas, es decir,* X *es de la forma*

$$X = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & * & * & 0 \\ \hline 0 & 0 & * & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & * & * & 0 \end{array}\right]$$

Demostración. Primero calculemos los productos $X(aE_{i-1,r} - E_{i-1,r+1})$ y $(aE_{i-1,r} - E_{i-1,r+1})X$,

$$X(aE_{i-1,r} - E_{i-1,r+1}) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & aX^{i-1} & X^{i-1} & 0 & \ldots 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{k}^{(s+1)\times(s+1)}$$

para todo $i = 2, \ldots, r$ y

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ aX_r - X_{r+1} \\ -X_{r+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{k}^{(s+1)\times(s+1)}$$

Por hipótesis $X(aE_{i-1,r} - E_{i-1,r+1}) = (aE_{i-1,r} - E_{i-1,r+1})X$ para todo $i = 2, \ldots, r$ entonces

$$(X)_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{si } r-1 \leq m \leq s \text{ y } 1 \leq n \leq r-2 \text{ ó } m = r, r+1 \text{ y } r+2 \leq n \leq s \text{ ó} \\ & m = r, r+1 \text{ y } n = r-1 \\ (X)_{mn} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es decir

$$X = \left[\begin{array}{c|c|c|c} A & * & * & 0 \\ \hline 0 & E & * & 1 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ * \\ \vdots \\ * \end{matrix} & H & 0 \\ \hline 0 & * & * & 0 \end{array}\right]$$

donde A es una matriz diagonal y $H = \begin{bmatrix} * & * & 0 & \dots & 0 \\ * & * & 0 & \dots & 0 \\ * & * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \dots & * \end{bmatrix}$.

Si X es una matriz nilpotente, como A es diagonal, tenemos que A es una matriz nula y por la ubicación de la matriz E podemos decir que E es una matriz nula. Por otra parte por la forma de X obtenida anteriormente es fácil ver que $X(bE_{i-1,r} + cE_{n-1,r} - E_{n-1,r+i}) = 0$. Luego dado que X y $bE_{i-1,r} + cE_{n-1,r} - E_{n-1,r+i}$ conmutan entonces $(bE_{i-1,r} + cE_{n-1,r} - E_{n-1,r+i})X = 0$ por lo tanto

$$(bE_{i-1,r} + cE_{n-1,r} - E_{n-1,r+i})X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ bX_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ cX_r - X_{r+i} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{k}^{(s+1)\times(s+1)}$$

es una matriz nula. Como $b \neq 0$ la fila X_r es nula, luego la fila X_{r+i} es nula para todo $i = 2, \dots, s-r$. Por lo tanto X es de la forma deseada. $\square$

Lema 6.1.6. *Sean $r, s \in \mathbb{N}$ tales que $r < s \leq 2r - 1$ y $r \geq 4$. Sean (π, V) una nilrepresentación de $\mathcal{L}(r)$ y $B = \{w_1, \dots, w_{s+1}\}$ una base de V con las siguientes propiedades*

- *para cada $w \in \mathrm{k}\{w_r, \dots, w_s\}$ existe $Z \in \mathfrak{z}(\mathcal{L}(r-1))$ tal que $\pi(Z)(w) \neq 0$;*

- *$[\pi(X)]_B$ es de la forma*

$$[\pi(X)]_B = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & \begin{matrix} x_2 \\ \vdots \\ x_{r-1} \end{matrix} & * & 0 \\ \hline 0 & 0 & * & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad [\pi(X_r)]_B = \left[\begin{array}{c|c|c|c} * & * & * & 0 \\ \hline * & * & * & 1 \\ \hline * & * & * & 0 \\ \hline * & * & * & 0 \end{array}\right]$$

para todo $X = \sum_{i=1}^{r-1} x_i X \in \mathcal{L}(r-1)$ *y*

$$[\pi(Z)]_B = \left|\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & * & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right| \qquad [\pi(\widetilde{Z})]_B = \left|\begin{array}{c|c|c|c} * & * & * & \begin{matrix} z_{2r} \\ \vdots \\ z_{r-1r} \end{matrix} \\ \hline * & * & * & 0 \\ \hline * & * & * & 0 \\ \hline * & * & * & 0 \end{array}\right|$$

para todo $Z \in \mathfrak{z}(\mathcal{L}(r-1))$ *ó* $Z = z_{1r} Z_{1r}$ *y* $\widetilde{Z} = \sum_{i=2}^{r-1} z_{ir} Z_{ir}$;

- $Z_{1r}(w_r) \neq 0$ *y*

- *existe* m, n *tal que* $2 \leq m < n \leq r-1$ *y* $\pi(Z_{mn})(w_k) = 0$ *para todo* $k = r+1, \ldots, s$.

Entonces (π, V) *no es una nilrepresentación fiel de* $\mathcal{L}(r)$.

Demostración. Para simplificar la notación llamaremos X a $\pi(X)$ para todo $X \in \mathcal{L}(r)$.

Supongamos que (π, V) es nilrepresentación fiel y veamos que llegamos a una contradicción. Para esto mostraremos que existe una base $\widetilde{B} = \{w_1, \ldots, w_{r-1}, \widetilde{w}_r, \ldots, \widetilde{w}_s, w_{s+1}\}$ de V tal que

$$[X_r]_{\widetilde{B}} = \left|\begin{array}{c|c|c|c} 0 & * & * & 0 \\ \hline 0 & 0 & * & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & * & 0 \end{array}\right| \qquad [X_1]_{\widetilde{B}} = \left|\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & * & 0 \\ \hline 0 & 0 & a \quad e_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

donde $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$.

Observemos que la diferencia entre las bases B y $\widetilde{B}$ de V es que en B hemos sustituido los vectores $w_r, \ldots, w_s$ por $\widetilde{w}_r, \ldots, \widetilde{w}_s$. Por la manera en que obtendremos los vectores $\widetilde{w}_i$ será fácil ver que la condición (2) del enunciado se mantiene para todo $X \in \mathcal{L}(r)$. Luego, como $Z_{1i} = [X_1, X_i]$ tenemos que el conjunto $\left\{[Z_{1i}]_{\widetilde{B}} : i = 2, \ldots, r\right\}$ es linealmente dependiente lo cual contradice que (π, V) sea una nilrepresentación fiel. Por lo tanto (π, V) es una nilrepresentación no fiel de $\mathcal{L}(r)$.

Sea $\alpha : V \to \mathrm{k}$ la funcional lineal tal que $\alpha\left(\sum_{j=1}^{s+1} a_j w_j\right) = a_{r-1}$. Para todo $k = r, \ldots, s$ y por la forma de $[X_m]_B$ y $[X_n]_B$ tenemos que

- $X_m(w_k) = \sum_{j=1}^{r-2} a_{m,j} w_j + \alpha(X_m(w_k)) w_{r-1}$;

- $X_n(w_k) = \sum_{j=1}^{r-2} a_{n,j} w_j + \alpha(X_n(w_k)) w_{r-1}$

Como $Z_{mn} = [X_m, X_n]$ y por la condición (4) de enunciado $Z_{mn}(w_k) = 0$ para todo $k = r+1, \dots, s$ tenemos que

$$\begin{aligned}
[X_m, X_n](w_k) &= X_m X_n(w_k) - X_n X_m(w_k) \\
&= \alpha(X_m(w_k))u_m - \alpha(X_n(w_k))u_n \quad \text{pues} \quad X_i(u_j) = 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, r-1, j = 1, \dots, r-2,
\end{aligned}$$

entonces $\alpha(X_m(w_k))w_{m-1} - \alpha(X_n(w_k))w_{n-1} = 0$. Dado que $\{w_{m-1}, w_{n-1}\}$ es linealmente independiente en V tenemos que

$$\alpha(X_m(w_k)) = \alpha(X_n(w_k)) = 0 \tag{6.3}$$

para todo $k = r+1, \dots, s$. Sea $W_1 = \mathrm{k}\{w_r, \dots, w_s\}$ entonces por la ecuación (6.3) tenemos que $\alpha(X_m\,|_{W_1}) = \alpha(X_n\,|_{W_1}) = 0$.

Probaremos que $\alpha(X_1(w_k)) \neq 0$ para algún $k = r+1, \dots, s$. Supongamos que esto no ocurre, es decir, $\alpha(X_1\,|_{W_1}) = 0$. Por la condición (2) del enunciado tenemos que

$$[X_1]_B = \left|\begin{array}{c|c|c|c}
0 & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & * & 0 \\ \hline
0 & 0 & a \;\; 0 \, \dots \, 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right|$$

donde $a = \alpha(X_1(w_r))$.

Si $a = 0$ entonces $X_1 \in \mathfrak{z}(\mathcal{L}(r))$ lo cual es un absurdo. Luego $a \neq 0$, es decir, $\alpha(X_1(w_r)) \neq 0$.

Como hemos supuesto que (π, V) es una nilrepresentación fiel de $\mathcal{L}(r)$ y por las condiciones (2) y (4) del enunciado tenemos que $Z_{mn}(w_r) \neq 0$. Además obtenemos que

$$0 \neq Z_{mn}(w_1) = \alpha(X_n(w_r))w_{m-1} - \alpha(X_m(w_r))w_{n-1}.$$

Por lo tanto, por la condición (2) del enunciado, $Z_{mn}(v) = \alpha(X_n(v))u_m - \alpha(X_m(v))u_n$ para todo $v \in V$. Por otra parte

$$\begin{aligned}
Z_{1m}(w_k) &= X_1 X_m(w_k) - X_m X_1(w_k) \\
&= X_1 \left(\sum_{j=1}^{r-2} a_{m,j} w_j + \alpha(X_m(w_k) \right) w_{r-1}) - X_m \left(\sum_{j=1}^{r-2} a_{1,j} w_j + \alpha(X_m(w_k) \right) w_{r-1}) \\
&= -\alpha(X_1(w_k))w_{m-1} \quad \text{por la forma de } [X_1]_B,
\end{aligned}$$

luego $Z_{1m}(v) = -\alpha(X_1(v))w_{m-1}$. Del mismo modo $Z_{1n}(w_k) = -\alpha(X_1(w_k))w_{n-1}$, es decir $Z_{1n}(v) = -\alpha(X_1(v))w_{n-1}$. Por lo tanto existen $a, b \in V^*$ tal que

$$Z_{mn} = aZ_{1m} + bZ_{1n}$$

pero esto contradice que $\{Z_{mn}, Z_{1m}, Z_{1n}\}$ es linealmente independiente. Esta contradicción sale de suponer que $\alpha(X_1\,|_{W_1}) = 0$, por lo tanto existe $k = r+1, \dots, s$ tal que $\alpha(X_1(w_k)) \neq 0$.

Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $k = r+1$, ya que de lo contrario podemos reordenar el conjunto $\{w_{r+1}, \dots, w_s\} \subset B$. Este cambio no modificaría la forma de $[X]_B$ para todo $X \in \mathcal{L}(r)$.

Ahora determinaremos la base $\widetilde{B}$ de V. Podemos modificar la base de W_1; $\{w_{r+1}, \overline{w}_{r+2}, \dots, \overline{w}_s\}$ tal que $\alpha(X_1(\overline{w}_k)) = 0$ para $k = r+2, \dots, s$. Por la condición (1) del enunciado para $\overline{w}_{r+2}$ existe $Z \in \mathfrak{z}(\mathcal{L}(r-1))$ tal que $Z(\widetilde{w}_{r+2}) \neq 0$. Como $\mathfrak{z}(\mathcal{L}(r)) = [\mathcal{L}(r), \mathcal{L}(r)]$ existe $i = 2, \dots, r-1$ tal que $\alpha(X_i(\overline{w}_{r+2})) \neq 0$. Supongamos $i = 2$, es decir, $\alpha(X_2(\overline{w}_{r+2})) \neq 0$. Nuevamente modificamos la base de W_1 por $\{w'_{r+1}, \overline{w}_{r+2}, w'_{r+3} \dots, w'_s\}$ tal que

$$\alpha(X_1(w'_{r+1})) \neq 0\ ,\ \alpha(X_2(\overline{w}_{r+2})) \neq 0 \quad \text{y}$$

$$\alpha(X_1(\overline{w}_{r+2})) = \alpha(X_1(w'_k)) = \alpha(X_2(w'_k)) = \alpha(X_2(w'_{r+1})) = 0 \text{ para todo } k = r+3, \dots, s.$$

Si seguimos con este procedimiento podemos suponer que existe $\{\widetilde{w}_{r+1}, \dots, \overline{w}_s\}$ base de W_1 tal que

$$\alpha(X_{i-r}(\widetilde{w}_i)) \neq 0 \quad \text{y} \quad \alpha(X_{i-r}(\widetilde{w}_j)) = 0 \quad \text{para todo } j \neq i; i = r+1, \dots, s\ .$$

Sea $\widetilde{B} = \{w_1, \dots, w_r, \widetilde{w}_{r+1}, \dots, \overline{w}_s, w_{s+1}\} \subseteq V$. Por la forma en que hemos obtenido $\widetilde{B}$ es claro que es una base de V, además se puede ver que

$$[X_i]_{\widetilde{B}} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & x_i\widetilde{e}_i & * & 0 \\ \hline 0 & 0 & a \quad e_i & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

donde $e_i = (\underbrace{0, \dots, 0}_{(i-1) \text{ veces}}, 1, 0, \dots, 0)$, $\widetilde{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ y $x_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq 1 \\ 0 & \text{si } i = 1 \end{cases}$ para todo $i = 1, \dots, s-r$.

Dado que $Z_{1i} = [X_1, X_i]$ entonces

$$[Z_{1i}]_{\widetilde{B}} = -\alpha(X_1(w_r))E_{i-1,r} - E_{i-1,r+1}$$

para todo $i = 2, \dots, r-1$ y como $Z_{in} = [X_i, X_n]$ entonces

$$[Z_{in}]_{\widetilde{B}} = -\alpha(X_n(w_r))E_{i-1,r} - \alpha(X_i(w_r))E_{n-1,r} - E_{n-1,r+i}$$

para todo $i = 2, \dots, s-r$.

Como el conjunto $\{Z_{1i}, Z_{in}\} \subseteq \mathfrak{z}(\mathcal{L}(r))$ tenemos que las matrices $[Z_{1i}]_{\widetilde{B}}$ y $[Z_{in}]_{\widetilde{B}}$ conmutan con la matriz $[X_r]_{\widetilde{B}}$. Entonces, por el Lema 6.1.5,

$$[X_r]_{\widetilde{B}} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & * & * & 0 \\ \hline 0 & 0 & * & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & * & * & 0 \end{array}\right]$$

Dado que $Z_{1r} = [X_1, X_r]$ y por la forma de $[Z_{1r}]_B$ dada en la condición (2) del enunciado tenemos que $[X_r]_{\widetilde{B}}$ tiene la forma

$$[X_r]_{\widetilde{B}} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & * & * & 0 \\ \hline 0 & 0 & * & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & * & 0 \end{array}\right]$$

que es lo que queríamos probar. $\square$

Lema 6.1.7. *Sean $r, s \in \mathbb{N}$ tales que $r < s \leq 2r-1$ y $r \geq 4$. Sean (π, V) una nilrepresentación fiel de $\mathcal{L}(r)$ y $B = \{w_1, \ldots, w_{s+1}\}$ una base de V con las siguientes propiedades*

- *para cada $w \in \mathrm{k}\{w_r, \ldots, w_s\}$ existe $Z \in \mathfrak{z}(\mathcal{L}(r-1))$ tal que $\pi(Z)(w) \neq 0$ y*

- *$[\pi(X)]_B$ es de la forma*

$$[\pi(X)]_B = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & \begin{smallmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_{r-1} \end{smallmatrix} & * & 0 \\ \hline 0 & 0 & * & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad [\pi(X_r)]_B = \left[\begin{array}{c|c|c|c} * & * & * & 0 \\ \hline * & * & * & 1 \\ \hline * & * & * & 0 \\ \hline * & * & * & 0 \end{array}\right]$$

para todo $X = \sum_{i=1}^{r-1} x_i X \in \mathcal{L}(r-1)$ y

$$[\pi(Z)]_B = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & * & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad [\pi(\widetilde{Z})]_B = \left[\begin{array}{c|c|c|c} * & * & * & \begin{smallmatrix} z_{2r} \\ \vdots \\ z_{r-1\,r} \end{smallmatrix} \\ \hline * & * & * & 0 \\ \hline * & * & * & 0 \\ \hline * & * & * & 0 \end{array}\right]$$

para todo $Z \in \mathfrak{z}(\mathcal{L}(r-1))$ ó $Z = z_{1r} Z_{1r}$ y $\widetilde{Z} = \sum_{i=2}^{r-1} z_{ir} Z_{ir}$.

Entonces existe $i_0 = r, \dots, s$ tal que para cada $1 \leq m < n \leq r-1$ existe $k \neq i_0$ y $k = r, \dots, s$ tal que $\pi(Z_{mn}(w_k))(w_k) \neq 0$.

Demostración. Para simplificar la notación llamaremos X a $\pi(X)$ para todo $X \in \mathcal{L}(r)$.

La demostración la haremos por el absurdo, es decir, supongamos que para cada $i = r, \dots, s$ existe $1 \leq m < n \leq r-1$ tal que $Z_{mn}(w_k) = 0$ para todo $k \neq i$ y $k = r, \dots, s$.

Dado que (π, V) es una representación fiel de $\mathcal{L}(r)$ y por la forma de $[Z_{1r}]_B$ dada en la condición (2) del enunciado es fácil ver que existe $w_{i_0} \in B$ con $i_0 = r, \dots, s$ tal que $Z_{1r}(w_{i_0}) \neq 0$. Entonces existe $1 \leq m < n \leq r-1$ tal que $Z_{mn}(w_k) = 0$ para todo $k \neq i_0$ y $k = r, \dots, s$.

Sea $\alpha : V \to \mathrm{k}$ la funcional lineal tal que $\alpha\left(\sum_{j=1}^{s+1} a_j w_j\right) = a_{r-1}$.

Veamos que podemos tomar $m \neq 1$. Supongamos lo contrario, es decir, para todo $i_0 = r, \dots, s$ tal que $Z_{1r}(w_{i_0}) \neq 0$ existe $2 \leq n \leq r-1$ tal que $Z_{1n}(w_k) = 0$ para todo $k \neq i_0$ y $k = r, \dots, s$. Luego

$$\begin{aligned}
Z_{1n}(w_k) = [X_1, X_n](w_k) &= X_1 X_n(w_k) - X_n X_1(w_k) \\
&= X_1 \left(\sum_{j=1}^{r-2} a_{n_j} w_j + \alpha(X_n(w_k)) w_{r-1} \right) - X_n \left(\sum_{j=1}^{r-2} a_j w_j + \alpha(X_1(w_k)) w_{r-1} \right) \\
&= -\alpha(X_1(w_k)) w_{n-1} \qquad \text{por la forma de } [X_1]_B \\
&= 0\ ,
\end{aligned}$$

entonces $\alpha(X_1(w_k)) = 0$ para todo $k \neq i_0$ y $k = r, \dots, s$. Por la condición (2) del enunciado tenemos que

$$[X_1]_B = \begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
0 & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & * & 0 \\
\hline
0 & 0 & a e_{i_0} & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}$$

donde $a = \alpha(X_1(w_{i_0}))$ y $e_{i_0} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{i_0-1 \text{ veces}}, 1, 0, \dots 0)$.

Si $a = 0$ entonces $X_1 \in \mathfrak{z}(\mathcal{L}(r-1))$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $a \neq 0$ es decir, $\alpha(X_1(w_{i_0})) \neq 0$.

Supongamos que existe $i_1 = r, \dots, s$ y $i_1 \neq i_0$ tal que $Z_{1r}(w_{i_1}) \neq 0$ entonces existe $2 \leq \tilde{n} \leq r-1$ tal que $Z_{1\tilde{n}}(w_k) = 0$ para todo $k \neq i_1$ y $k = r, \dots, s$. Luego obtenemos que $\alpha(X_1(w_k)) = 0$ para todo $k \neq i_1$ y $k = r, \dots, s$. En particular $\alpha(X_1(w_{i_0})) = 0$, pero esto contradice lo probado anteriormente. Por lo tanto existe un único $i_0 = r, \dots, s$ tal que $Z_{1r}(w_{i_0}) \neq 0$ luego, por la forma de $[Z_{1r}]_B$ dada en la condición (2) del enunciado, tenemos que

$$[Z_{1r}]_B \in \mathrm{k}\{E_{j-1,i_0} : j = 2, \dots, r\}\ . \tag{6.4}$$

Como $Z_{1j} = [X_1, X_j]$ para todo $j = 2, \dots, r-1$ y por la forma de $[X_j]_B$, dada en la condición (2) del enunciado, se puede ver que $[Z_{1j}]_B = -\alpha(X_1(w_{i_0})) E_{j-1,i_0}$ para todo $j = 2, \dots, r-1$. Luego, por la ecuación (6.4), el conjunto $\{Z_{1j} : j = 2, \ldots, r\}$ es linealmente dependiente lo cual contradice el hecho que (π, V) es una representación fiel de $\mathcal{L}(r)$.

Por lo tanto existe $i_0 = r, \ldots, s$ tal que $Z_{1r}(w_{i_0}) \neq 0$ y $2 \leq m < n \leq r-1$ tal que $Z_{mn}(w_k) = 0$ para todo $k \neq i_0$ y $k = r, \ldots, s$.

Podemos suponer que $i_0 = r$ ya que de caso contrario reordenamos el subconjunto $\{w_r, \ldots, w_s\}$ de B de tal forma que el primer elemento fuera w_{i_0}, este reordenamiento no modificaría la forma de $[X]_B$ dada en la condición (2) del enunciado para todo $X \in \mathcal{L}(r)$.

Luego para $i_0 = r$ existe $2 \leq m < n \leq r-1$ tal que $Z_{mn}(w_r) \neq 0$ y $Z_{mn}(w_k) = 0$ para todo $k = r+1, \ldots, s$. Entonces, por el Lema 6.1.6, (π, V) es una nilrepresentación no fiel de $\mathcal{L}(r)$ pero esto contradice las hipótesis del enunciado. □

Lema 6.1.8. *Sea (π, V) una nilrepresentación fiel de $\mathcal{L}(r)$ y B una base de V tal que alguna de las siguientes condiciones se verifican para todo $X \in \mathcal{L}(r)$*

a. $\pi(X)$ es como en el Lema 6.1.3;

b. $\pi(X)$ es como en el Lema 6.1.7.

Entonces existe (π_1, V_1) una nilrepresentación fiel de $\mathcal{L}(r-1)$ tal que $\dim V = \dim V_1 + 2$.

Demostración. Supongamos que estamos en el caso (a). Sea $u_i \in B$ del Lema 6.1.3 y $V_1 = V/(\mathrm{k}\{u_i, v_1\})$ y sea

$$\begin{aligned} \pi_1 : \mathcal{L}(r-1) &\to \mathfrak{gl}(V_1) \\ X &\mapsto \overline{\pi(X)(v)} \ , \end{aligned}$$

es claro que

- $\dim V = \dim V_1 + 2$;

- (π_1, V_1) es una nilrepresentación de $\mathcal{L}(r-1)$.

Falta probar que (π_1, V_1) sea fiel, para ello es suficiente probar que $(\pi_1 |_{\mathfrak{z}(\mathcal{L}(r-1))}, V_1)$ es fiel. Supongamos lo contrario, es decir, existe $Z \in \mathfrak{z}(\mathcal{L}(r-1))$ tal que para todo $v \in V_1$ tenemos que $\overline{\pi(Z)(v)} = 0$. Entonces $\pi(Z)V \in \mathrm{k}\{u_i, v_1\}$, es decir $\pi(Z)(v) = \alpha(v)u_i + \lambda(v)v_1$, por la forma de $[\pi(Z)]_B$ tenemos que $\pi(Z)(v) = \alpha(v)u_i$, es decir $\lambda(v) = 0$. Pero esto contradice el Lema 6.1.3, por lo tanto (π_1, V_1) es una nilrepresentación fiel de $\mathcal{L}(r-1)$.

Supongamos que estamos en el caso (b). Como (π, V) es una nilrepresentación fiel de $\mathcal{L}(r)$ existe $w_k \in B$ tal que $\pi(Z_{1r})(w_k) \neq 0$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $k = 1$. Sea $V_1 = \mathrm{k}\{u_1, \ldots, u_{r-1}, w_2, \ldots, w_s\}$ entonces $\pi(X)V_1 \subseteq V_1$ para todo $X \in \mathcal{L}(r-1)$. Sea

$$\begin{aligned} \pi_1 : \mathcal{L}(r-1) &\to \mathfrak{gl}(V_1) \\ X &\mapsto \pi(X)(v) \ , \end{aligned}$$

es claro que

- $\dim V = \dim V_1 + 2$;

- (π_1, V_1) es una nilrepresentación de $\mathcal{L}(r-1)$.

Falta probar que (π_1, V_1) es fiel, para ello es suficiente probar que $(\pi_1 \mid_{\mathfrak{z}(\mathcal{L}(r-1))}, V_1)$ es fiel. Sea $Z \in \mathfrak{z}(\mathcal{L}(r-1))$ tal que $\pi_1(Z)V_1 = 0$ entonces $\pi_1(Z)(w_j) = 0$ para todo $w_j \in B$ salvo w_1 ya que $\pi(Z)V \neq 0$, es decir, $\pi(Z)(w_1) \neq 0$. Además existen $X, Y \in \mathcal{L}(r-1)$ tal que $Z = [X, Y]$. Sin pérdida de generalidad podemos pensar a

$$X = \sum_{i=1}^{r-1} x_i X_i \qquad Y = \sum_{i=1}^{r-1} y_i X_i \ .$$

Sea $i_1 = \text{mín}\{i \in \{1, \dots, r-1\} : x_i \neq 0\}$ e $i_2 = \text{mín}\{i \in \{1, \dots, r-1\} : y_i \neq 0 \text{ y } i \neq i_1\}$, definimos $X_{i_1} := X$ y $X_{i_2} := Y$ y sea $B' = \{X_1, \dots, X_{i_1}, \dots, X_{i_2}, \dots, X_r, Z_{ij} : 1 \leq i < j \leq r\}$ tal que $Z_{ij} = [X_i, X_j]$, en particular $Z_{i_1 i_2} = Z$. La base B' tiene la particularidad que $Z_{1r}(w_1) \neq 0$ y existe $Z_{i_1 i_2} \in \mathcal{L}(r-1)$ tal que $Z_{i_1 i_2}(w_1) \neq 0$ y $Z_{i_1 i_2}(w_k) = 0$ para todo $w_k \in B$. Pero esto contradice el Lema (6.1.7). Por lo tanto (π_1, V_1) es una nilrepresentación fiel de $\mathcal{L}(r-1)$. □

Teorema 6.1.9. *Sean $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 4$ y (π, V) una representación fiel de $\mathcal{L}(r)$ entonces*

$$\dim V \geq 2 + \left\lceil 2\sqrt{\dim \mathfrak{z}(\mathcal{L}(r))} \right\rceil .$$

En particular, $\mu(\mathcal{L}(r)) \geq 2 + \left\lceil 2\sqrt{\frac{r(r-1)}{2}} \right\rceil$.

Demostración. Como $\mathfrak{z}(\mathcal{L}(r)) = [\mathcal{L}(r), \mathcal{L}(r)]$, por el Teorema 1.3.10, podemos pensar que (π, V) es una nilrepresentación fiel de $\mathcal{L}(r)$. Entonces $\pi(\mathcal{L}(r))$ es una familia de endomorfismos nilpotentes que conmutan con $\pi(\mathfrak{z}(\mathcal{L}(r)))$, ya que $\mathfrak{z}(\mathcal{L}(r))$ es el centro de $\mathcal{L}(r)$. Luego por la Proposición 3.1.5, existen vectores linealmente independientes $\{v_1, \dots, v_{s'}, \dots, v_s\}$ y una descomposición de $\mathcal{L}(r) = \mathcal{L}_{r,1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_{r,s}$ y $\mathfrak{z}(\mathcal{L}(r)) = \mathfrak{z}_1(\mathcal{L}(r)) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{z}_{s'}(\mathcal{L}(r))$.

Sea

$$\begin{aligned} F : \mathcal{L}(r) &\to V \\ X &\mapsto \pi(X)v_1 \ , \end{aligned}$$

dado que π es una representación de $\mathcal{L}(r)$ es claro que F es una aplicación lineal y $\ker F$ es una subálgebra de Lie de $\mathcal{L}(r)$. El $\ker F$ lo podemos escribir

$$\ker F = \ker F \cap \mathfrak{z}(\mathcal{L}(r)) \oplus \mathcal{U}$$

donde $\mathcal{U}$ es un complemento directo de $\ker F \cap \mathfrak{z}(\mathcal{L}(r))$ en el $\ker F$ de dimensión m.

Sea $\mathfrak{h}$ el álgebra de Lie de dimensión m generada por $\mathcal{U}$ de dimensión m, como $\ker F$ es un álgebra de Lie entonces $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de Lie de $\ker F$.

Por la Proposición 3.1.5, $\operatorname{im} F \cap \mathrm{k}\{v_1, \dots, v_{s'}\} = 0$ entonces $\dim V \geq \operatorname{im} F + s'$. Por lo tanto

$$\dim V + \ker F \mid_{\mathfrak{z}(\mathcal{L}(r))} + m \geq \dim \mathcal{L}(r) + s' \ ,$$

entonces

$$\begin{aligned} \dim V + \ker F \mid_{\mathfrak{z}(\mathcal{L}(r))} + m &\geq \dim \mathcal{V}_r + \dim \mathfrak{z}(\mathcal{L}(r)) + s' \\ \dim V &\geq \dim \mathcal{V}_r - m + \dim \operatorname{im} F \mid_{\mathfrak{z}(\mathcal{L}(r))} + s' \ , \end{aligned}$$

Dado que $F\mid_{\mathfrak{z}(\mathcal{L}(r))}: \mathfrak{z}(\mathcal{L}(r)) \to V$ coincide con la aplicación $F_1\mid_{\mathfrak{z}(\mathcal{L}(r))}$ de la Proposición 3.1.5 entonces $\dim \mathfrak{z}(\mathcal{L}(r)) \leq s' \dim \operatorname{im} F\mid_{\mathfrak{z}(\mathcal{L}(r))}$, luego por la ecuación (3.1)

$$\left\lceil 2\sqrt{\dim \mathfrak{z}(\mathcal{L}(r))}\right\rceil \leq s' + \dim \operatorname{im} F\mid_{\mathfrak{z}(\mathcal{L}(r))} .$$

Por lo tanto $\dim V \geq \dim \mathcal{V}_r - m + \left\lceil 2\sqrt{\dim \mathfrak{z}(\mathcal{L}(r))}\right\rceil$.

- Si $m \leq r-2$ entonces $\dim \mathcal{V}_r - m \geq 2$, luego $\dim V \geq 2 + \left\lceil 2\sqrt{\dim \mathfrak{z}(\mathcal{L}(r))}\right\rceil$.

- Si $m = r-1$ entonces $\ker F = \mathcal{L}(r-1) \oplus \mathfrak{z}_0$, donde $\mathfrak{z}_0 \subseteq \mathfrak{z}(\mathcal{L}(r)) \cap \ker F$.

Probaremos que $\dim \mathfrak{z}_0 \leq 1$. Sea $B_r = \{X_1, \ldots, X_{r-1}, X_r, Z_{ij} : 1 \leq i < j \leq r\}$ base de $\mathcal{L}(r)$ y tal que $B_{r-1} = \{X_1, \ldots, X_{r-1}, Z_{ij} : 1 \leq i < j \leq r-1\}$ es una base de $\mathcal{L}(r-1)$, luego $\pi(X_i)(v_1) = \pi(Z_{ij})(v_1) = 0$ para todo $X_i, Z_{ij} \in B_{r-1}$.

Sea $Z_1 \in \mathfrak{z}_0$ entonces $Z_1 = \sum_{1\leq i<j\leq r-1} a_{ij} Z_{ij} + \sum_{i=1}^{r-1} b_i Z_{ir}$. Luego

$$0 = \pi(Z_1)(v_1) = \sum_{i=1}^{r-1} b_i \pi(Z_{ir})(v_1),$$

por lo tanto $\sum_{i=1}^{r-1} b_i Z_{ir} \in \ker F$.

Sea $X_1' = \sum_{i=1}^{r-1} b_i X_i \in \mathcal{L}(r-1)$. Cambiamos la base B_r y B_{r-1} por $B_r' = \{X_1', X_2, \ldots, X_{r-1}, X_r, Z_{ij}\}$ y $B_{r-1}' = \{X_1', X_2, \ldots, X_{r-1}, Z_{ij}\}$ tal que $Z_{ij} := [X_i, X_j]$, en particular $Z_{1r} = Z_1$. Supongamos que existe $Z_2 \in \mathfrak{z}_0$ entonces $Z_2 = \sum_{1\leq i<j\leq r-1} a_{ij} Z_{ij} + \sum_{i=1}^{r-1} b_i' Z_{ir}$, de la misma forma que con Z_1 tenemos que $\sum_{i=2}^{r-1} b_i Z_{ir} \in \ker F$. Cambiamos nuevamente la base tomando $X_2' = \sum_{i=2}^{r-1} b_i X_i$ donde $Z_{2r} = z_2$, por lo tanto podemos pensar que una base para $\mathfrak{z}_0$ es $\{Z_{1r}, \ldots, Z_{pr}\}$.

Por la Proposición 3.1.5 existe una base de

$$B = \{Z_{p+1r}(v_1), \ldots, Z_{r-1r}(v_1), X_r(v_1), w_1, \ldots, w_s, v_1\}$$

tal que

1) $\operatorname{im} F = \mathrm{k}\{Z_{p+1r}(v_1), \ldots, Z_{r-1r}(v_1), X_r(v_1)\}$;

2) $\ker F\, V \subseteq \operatorname{im} F$

Sea $Z_{ir} \in \ker F$ entonces

$$0 = Z_{ir}(v_1) = [X_i, X_r](v_1) = X_i(X_r(v_1)),$$

luego por (1) tenemos que $X_i \operatorname{im} F = 0$ para todo $i = 1, \ldots, p$ y por (2), $X_i(w_j) \in \operatorname{im} F$ para todo $w_j \in B$ por lo tanto

$$\begin{aligned} Z_{1i}(w_j) &= X_1 X_i(w_j) - X_i X_1(w_j) \text{ para todo } w_j \in B \\ &= 0 \end{aligned}$$

luego $Z_{1i}V = 0$. Esto contradice el hecho que (π, V) es una representación fiel, si $i > 1$. Por lo tanto $\dim \mathfrak{z}_0 \leq 1$.

Como dijimos anteriormente $B = \{Z_{p+1r}(v_1), \ldots, Z_{r-1r}(v_1), X_r(v_1), w_1, \ldots, w_s, v_1\}$ es una base de V, para $p = 0$ ó 1. En este caso la base B cumple las condiciones del Lema 6.1.3 ó Lema 6.1.7, respectivamente. Luego por el Lema 6.1.8 dada (π, V) una nilrepresentación fiel de $\mathcal{L}(r)$ existe (π_1, V_1) una nilrepresentación fiel de $\mathcal{L}(r-1)$ tal que $\dim V = 2 + \dim V_1$.

Haciendo inducción sobre r tenemos que

$$\dim V_1 \geq 2 + \left\lceil 2\sqrt{\dim \mathfrak{z}(\mathcal{L}(r-1))} \right\rceil .$$

Por otra parte $\dim \mathfrak{z}(\mathcal{L}(r-1)) = \frac{(r-1)(r-2)}{2}$, es fácil ver que $2 + \left\lceil 2\sqrt{\frac{(r-1)(r-2)}{2}} \right\rceil \geq \left\lceil 2\sqrt{\frac{r(r-1)}{2}} \right\rceil$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\dim V &= 2 + \dim V_1 \\
\dim V &\geq 2 + 2 + \left\lceil 2\sqrt{\frac{(r-1)(r-2)}{2}} \right\rceil \\
&\geq 2 + \left\lceil 2\sqrt{\frac{r(r-1)}{2}} \right\rceil .
\end{aligned}$$

□

6.2. Nilrepresentaciones Fieles de $\mathcal{L}(r)$

6.2.1. Una primera representación de $\mathcal{L}(r)$

Sean k un cuerpo de característica cero y $r \in \mathbb{N}$. El álgebra de Lie 2-pasos nilpotente libre de rango r sobre k es $\mathcal{L}(r) = V \oplus \wedge^2 V$, donde V es un espacio vectorial de dimensión r sobre k. Los únicos corchetes de Lie no nulos son $[u, v] = u \wedge v \in \bigwedge^2 V$ para todo $u, v \in V$. El centro de $\mathcal{L}(r)$ es $\bigwedge^2 V$. $\mathcal{L}(r)$ es el objeto libre en las álgebras de Lie 2-pasos nilpotente con r-generadores sobre k. Más aún, toda álgebra de Lie 2-pasos nilpotente es de la forma $\mathfrak{n} = \mathcal{L}(r)/W = V \bigoplus \bigwedge^2 V/W$ para algún r, donde W es un subespacio de $\bigwedge^2 V$. El grupo $GL(V)$ actúa sobre V y $\bigwedge^2 V$, luego actúa sobre $\mathcal{L}(r)$. A partir de esta acción $\mathcal{L}(r)$ puede ser vista como el radical nilpotente de una subálgebra parabólica de un álgebra de Lie simple.

Vamos a describir una primera nilrepresentación fiel de $\mathcal{L}(r)$, que denotaremos $(\pi_{r,r,1}, \mathrm{k}^{2r+1})$. Sea $B = \{X_1, \ldots, X_r, Z_{ij} : 1 \leq i < j \leq r\}$ una base de $\mathcal{L}(r)$ tal que $[X_i, X_j] = Z_{ij}$ y cero en otro caso. Entonces

$$\pi_{r,r,1}(X) = \begin{array}{|c|c|ccccc|}
\hline
 & x_1 & z_{1r} & \dots & z_{13} & z_{12} & 0 \\
 & x_2 & z_{2r} & \dots & z_{23} & 0 & -z_{12} \\
0 & x_3 & z_{3r} & \dots & 0 & -z_{23} & -z_{13} \\
 & \vdots & & \vdots & & & \\
 & x_r & 0 & \dots & -z_{3r} & -z_{2r} & -z_{1r} \\
\hline
0 & 0 & x_r & \dots & x_3 & x_2 & x_1 \\
\hline
 & & & & & & \\
0 & 0 & & & 0 & & \\
 & & & & & & \\
\hline
\end{array}$$

para todo $X = \sum_{i=1}^{r} x_i X_i + \sum_{1 \leq i < j \leq r} zijZ_{ij} \in \mathcal{L}(r)$. Por lo tanto tenemos una nilrepresentación fiel de $\mathcal{L}(r)$ de dimensión $2r + 1$.

6.2.2. Nuevas representaciones de $\mathcal{L}(r)$

Para comenzar esta sección daremos algunas definiciones y probaremos unos resultados que serán útiles para formar nuevas representaciones fieles del álgebra de Lie $\mathcal{L}(r)$ para todo $r \in \mathbb{N}$.

Sean $a, b, r \in \mathbb{N}$ tales que $a \geq b, 2b \geq r$ y $a \geq r - 1$ y sean

- $W = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ \\ 0 \end{pmatrix} \in M(2b, r) : X \in M(r, r) \text{ tal que } X + X^t = 0 \right\}$;

- $U_{\mathcal{V}_a} = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_b \end{pmatrix} \in M(2b, r) : A_i \in \mathcal{V}_a \right\}$ donde $\mathcal{V}_a$ un subespacio de $M(2, r)$ tal que $\dim \mathcal{V}_a = 2r - a$.

Es fácil ver que W y $U_{\mathcal{V}_a}$ son subespacios de $M(2b, r)$.

Observación 6.2.1. Un modo de escribir a $U_{\mathcal{V}_a}$ es

$$U_{\mathcal{V}_a} = \mathcal{V}_a^1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_a^b$$

tal que $\mathcal{V}_a^s$ es un subespacio vectorial de $\mathrm{k}\{E_{2(s-1)+i,j} : i = 1, 2; j = 1, \dots, r\}$ isomorfo a $\mathcal{V}_a$ para todo $s = 1, \dots, b$ y donde $E_{mn} \in M(2, r)$ tal que

$$(E_{mn})_{pq} = \begin{cases} 1 & \text{si } p = m; n = q \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

A continuación veamos la forma que tiene un elemento $\widetilde{v} \in U_{\mathcal{V}_a}$. Sean $d = \dim \mathcal{V}_a$, $\{v_1, \dots, v_d\}$ una base de $\mathcal{V}_a$ y $v \in \mathcal{V}_a$. Entonces existen $\lambda_t \in \mathrm{k}$ tal que $v = \sum_{t=1}^{d} \lambda_t v_t$. Además, como $v_t \in M(2, r)$ existen $\alpha_{ij}^t \in \mathrm{k}$ tal que

$$v_t = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij}^t E_{ij}.$$

para todo $t = 1, \dots, d$. Por lo tanto

$$v = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{t=1}^{d} \lambda_t \alpha_{ij}^t \right) E_{ij} \ .$$

Sean

$$p_{ij}(x_1, \dots, x_d) := \sum_{t=1}^{d} \alpha_{ij}^t x_t \in \mathrm{k}[x_1, \dots, x_d] \ .$$

Veamos como escribimos $\widetilde{v} \in U_{\mathcal{V}_a}$ en función de los polinomios p_{ij}. Por la observación anterior existen $\widetilde{v}_s \in \mathcal{V}_a^s$ para cada $s = 1, \dots, b$ tales que

$$\begin{aligned}
\widetilde{v} &= \widetilde{v}_1 + \widetilde{v}_2 + \cdots + \widetilde{v}_b \\
&= \sum_{t=1}^{d} \lambda_t^1 v_t + \sum_{t=1}^{d} \lambda_t^2 v_t + \cdots + \sum_{t=1}^{d} \lambda_t^b v_t \qquad \lambda_y \in \mathrm{k}, v_t^s \in \mathcal{V}_a^s \\
&= \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{t=1}^{d} \lambda_t^1 \alpha_{ij}^t \right) E_{ij} + \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{t=1}^{d} \lambda_t^2 \alpha_{ij}^t \right) E_{2+i,j} + \cdots + \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{t=1}^{d} \lambda_t^b \alpha_{ij}^t \right) E_{2(b-1)+i,j} \\
&= \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{r} p_{ij}(\lambda_1^1, \dots, \lambda_d^1) E_{ij} + \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{r} p_{ij}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_d^2) E_{2+i,j} + \cdots + \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{r} p_{ij}(\lambda_1^b, \dots, \lambda_d^b) E_{2(b-1)+i,j} \\
&= \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{s=1}^{b} p_{ij}(\lambda_1^s, \dots, \lambda_d^s) E_{2(s-1)+i,j} \right) \ .
\end{aligned}$$

Luego $\widetilde{v}$ en forma matricial tiene la forma

$$\widetilde{v} = \left(\begin{array}{cccccc}
p_{11}(\lambda_i^1) & p_{12}(\lambda_i^1) & p_{13}(\lambda_i^1) & p_{14}(\lambda_i^1) & \dots & p_{1r}(\lambda_i^1) \\
p_{21}(\lambda_i^1) & p_{22}(\lambda_i^1) & p_{23}(\lambda_i^1) & p_{24}(\lambda_i^1) & \dots & p_{2r}(\lambda_i^1) \\
\hline
p_{11}(\lambda_i^2) & p_{12}(\lambda_i^2) & p_{13}(\lambda_i^2) & p_{14}(\lambda_i^2) & \dots & p_{1r}(\lambda_i^2) \\
p_{21}(\lambda_i^2) & p_{22}(\lambda_i^2) & p_{23}(\lambda_i^2) & p_{24}(\lambda_i^2) & \dots & p_{2r}(\lambda_i^2) \\
\hline
p_{11}(\lambda_i^3) & p_{12}(\lambda_i^3) & p_{13}(\lambda_i^3) & p_{14}(\lambda_i^3) & \dots & p_{1r}(\lambda_i^3) \\
p_{21}(\lambda_i^3) & p_{22}(\lambda_i^3) & p_{23}(\lambda_i^3) & p_{24}(\lambda_i^3) & \dots & p_{2r}(\lambda_i^3) \\
\hline
\vdots & & & & \vdots & \\
\hline
p_{11}(\lambda_i^b) & p_{12}(\lambda_i^b) & p_{13}(\lambda_i^b) & p_{14}(\lambda_i^b) & \dots & p_{1r}(\lambda_i^b) \\
p_{21}(\lambda_i^b) & p_{22}(\lambda_i^b) & p_{23}(\lambda_i^b) & p_{24}(\lambda_i^b) & \dots & p_{2r}(\lambda_i^b)
\end{array} \right) \in M(2b, r) \ , \tag{6.5}$$

donde $p_{mn}(\lambda_i^s) := p_{mn}(\lambda_1^s, \lambda_2^s, \dots, \lambda_d^s)$ para todo $1 \leq m \leq 2$ y $1 \leq n \leq r$.

Supongamos además que $\widetilde{v} \in W$, es decir $\widetilde{v} \in W \cap U_{\mathcal{V}_a}$. Entonces las entradas de $\widetilde{v}$ verifican las siguientes ecuaciones;

- $p_{1,2s-1}(\lambda_i^s) = p_{2,2s}(\lambda_i^s) = 0$;

- $p_{1,2s-1}(\lambda_i^s) + p_{2,2s}(\lambda_i^s) = 0$

para todo $s = 1, \dots, \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor$ y

- $p_{i,j}(\lambda_m^s) + p_{j',2(s-1)+i}(\lambda_m^{s'}) = 0$

donde

$$(j', s') = \begin{cases} \left(1, \frac{j+1}{2}\right) & \text{si } j \text{ es impar ;} \\ \left(2, \frac{j}{2}\right) & \text{si } j \text{ es par} \end{cases}$$

para todo $j = 2s+1, \dots, r$ y $s = 1, \dots, \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - 1$ y

- $p_{ij}(\lambda_1^s, \lambda_2^s, \dots, \lambda_d^s) = 0$ para todo $s = \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil + 1, \dots, b$;

- en el caso en que r es impar tenemos

  $p_{1,r}(\lambda_i^{\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil}) = 0,$

  $p_{2j}(\lambda_1^{\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil}) = 0$ para todo $j = 1, \dots, r$.

Estas ecuaciones dan origen al sistema homogéneo $A\lambda = 0$ donde

$$\lambda = \left(\begin{array}{c} \lambda_1^1 \\ \vdots \\ \lambda_d^1 \\ \hline \lambda_1^2 \\ \vdots \\ \lambda_d^2 \\ \hline \vdots \\ \hline \lambda_1^b \\ \vdots \\ \lambda_d^b \end{array} \right) \in M(1, db)$$

y A es una matriz de orden $\left(\frac{r(r+1)}{2} + r(2b-r)\right) \times db$. Para dar una mejor descripción de A vamos a separar en dos casos r par y r impar.

Si r es par entonces $A = \begin{pmatrix} A_r & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$. donde A_r es una matriz de orden $\frac{r(r+1)}{2} \times d\frac{r}{2}$ y B es de orden $r(2b-r) \times \left(b - \frac{r}{2}\right)$. La forma de cada una de estas matrices es;

$$A_r = \left(\begin{array}{ccccccc}
A_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & A_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & A_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & A_4 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{\frac{r}{2}} \\
\hline
A_{34} & A_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
A_{56} & 0 & A_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\
A_{78} & 0 & 0 & A_{12} & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & & \dots & 0 & \vdots & & \\
A_{r-1,r} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{12} \\
\hline
0 & A_{56} & A_{34} & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & A_{78} & 0 & A_{34} & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & & \\
0 & A_{r-1,r} & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{34} \\
\hline
0 & 0 & A_{78} & A_{56} & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & & \\
0 & 0 & A_{r-1,r} & 0 & \dots & 0 & A_{56} \\
\hline
\vdots & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & A_{r-1,r} & A_{r-3,r-2}
\end{array}\right),$$

donde la matriz

$$A_s = \begin{pmatrix} \alpha^1_{1,2s-1} & \alpha^2_{1,2s-1} & \dots & \alpha^d_{1,2s-1} \\ \alpha^1_{2,2s} & \alpha^2_{2,2s} & \dots & \alpha^d_{2,2s} \\ \alpha^1_{1,2s} + \alpha^1_{2,2s-1} & \alpha^2_{1,2s} + \alpha^2_{2,2s-1} & \dots & \alpha^d_{1,2s} + \alpha^d_{2,2s-1} \end{pmatrix} \in M(3,d)$$

para todo $s = 1, \dots, \frac{r}{2}$ y

$$A_{2i-1,2i} = \begin{pmatrix} \alpha^1_{1,2i-1} & \alpha^2_{1,2i-1} & \dots & \alpha^d_{1,2i-1} \\ \alpha^1_{2,2i} & \alpha^2_{2,2i} & \dots & \alpha^d_{2,2i} \\ \alpha^1_{2,2i-1} & \alpha^2_{2,2i-1} & \dots & \alpha^d_{2,2i-1} \\ \alpha^1_{1,2i} & \alpha^2_{1,2i} & \dots & \alpha^d_{1,2i} \end{pmatrix} \in M(4,d)$$

para todo $i = 1, \dots, r-1$ y

$$B = \begin{pmatrix} B' & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & B' & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B' & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & B' \end{pmatrix} \in M\left(r(2b-r), d\left(b - \frac{r}{2}\right)\right)$$

donde

$$B' = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^1 & \alpha_{11}^2 & \dots & \alpha_{11}^d \\ \alpha_{22}^1 & \alpha_{22}^2 & \dots & \alpha_{22}^d \\ \alpha_{13}^1 & \alpha_{13}^2 & \dots & \alpha_{13}^d \\ \alpha_{24}^1 & \alpha_{24}^2 & \dots & \alpha_{24}^d \\ \alpha_{15}^1 & \alpha_{15}^2 & \dots & \alpha_{15}^d \\ \alpha_{26}^1 & \alpha_{26}^2 & \dots & \alpha_{26}^d \\ \vdots & & \dots & \\ \alpha_{1,r-1}^1 & \alpha_{1,r-1}^2 & \dots & \alpha_{1,r-1}^d \\ \alpha_{2r}^1 & \alpha_{2r}^2 & \dots & \alpha_{2r}^d \\ \alpha_{21}^1 & \alpha_{21}^2 & \dots & \alpha_{21}^d \\ \alpha_{12}^1 & \alpha_{12}^2 & \dots & \alpha_{12}^d \\ \alpha_{23}^1 & \alpha_{23}^2 & \dots & \alpha_{23}^d \\ \alpha_{14}^1 & \alpha_{14}^2 & \dots & \alpha_{14}^d \\ \vdots & & \dots & \\ \alpha_{2,r-1}^1 & \alpha_{2,r-1}^2 & \dots & \alpha_{2,r-1}^d \\ \alpha_{1,r}^1 & \alpha_{1,r}^2 & \dots & \alpha_{1,r}^d \end{pmatrix} \in M(2r, d).$$

Observación 6.2.2. En particular si $2b = r$ entonces $A = A_r$.

Si r es impar $A = \begin{pmatrix} A_{r-1} & 0 & 0 \\ C & D & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}$ donde A_{r-1} es del tipo de A_r cuando r es par de orden $\frac{(r-1)r}{2} \times \frac{r-1}{2} d$ y B es del mismo tipo de la anterior matriz B de A en el caso par de orden $r(2b - r) \times d\left(b - \frac{r+1}{2}\right)$. Las matrices C, D y E son de la forma

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{1r}^1 & \dots & \alpha_{1r}^d & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{2r}^1 & \dots & \alpha_{2r}^d & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{1r}^1 & \dots & \alpha_{1r}^d & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{2r}^1 & \dots & \alpha_{2r}^d & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{1r}^1 & \dots & \alpha_{1r}^d \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{2r}^1 & \dots & \alpha_{2r}^d \end{pmatrix} \in M\left(r+1, d\frac{r-1}{2}\right),$$

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_{1r}^1 & \dots & \alpha_{1r}^d \\ \alpha_{2r}^1 & \dots & \alpha_{2r}^d \\ \alpha_{11}^1 & \dots & \alpha_{11}^d \\ \alpha_{12}^1 & \dots & \alpha_{12}^d \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1,r-1}^1 & \dots & \alpha_{1,r-1}^d \end{pmatrix} \in M(r+1, d) \quad \text{y} \quad E = \begin{pmatrix} \alpha_{21}^1 & \dots & \alpha_{21}^d \\ \alpha_{22}^1 & \dots & \alpha_{22}^d \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{2,r-1}^1 & \dots & \alpha_{2,r-1}^d \end{pmatrix} \in M(r-1, d).$$

En ambos casos el número de ecuaciones e incógnitas del sistema $A\lambda = 0$ es $Ec := \frac{r(r+1)}{2} + r(2b - r)$ e $In := db$ respectivamente.

Lema 6.2.3. *Para todo $a, b, r \in \mathbb{N}$ tal que $a \leq b; 2b \leq r$ y $2r \leq a$ existe un subespacio $\mathcal{V}_a$ de $M(2,r)$ de $\dim \mathcal{V}_a = 2r - a$ tal que $U_{\mathcal{V}_a} \cap W = 0$.*

Demostración. Es suficiente probar que para cada $b \in \mathbb{N}$ tal que $2b \geq r$ existe un subespacio $\mathcal{V}_{r-1}$ tal que $\mathcal{V}_{r-1} \cap W = 0$. Ya que por hipótesis $a \geq r - 1$ entonces $\dim \mathcal{V}_a \leq 2r - (r-1) = r + 1$ para todo $r \in \mathbb{N}$. Por lo probado existe un espacio vectorial $\mathcal{V}_{r-1}$ de dimensión $r+1$ tal que $\mathcal{V}_{r-1} \cap W = 0$, sea $\mathcal{V}_a$ un subespacio de $\mathcal{V}_{r-1}$ de $\dim \mathcal{V}_a = 2r - a$ entonces $\mathcal{V}_a \cap W = 0$.

Para probar que $\mathcal{V}_{r-1} \cap W = 0$, por las observaciones anteriores, es suficiente encontrar un conjunto $\{\alpha_{ij}^t : i = 1, 2; j = 1, \ldots, r \text{ y } t = 1, \ldots, r+1\}$ tal que

1. el sistema homogéneo $A\lambda = 0$ tiene solución trivial;
2. y el conjunto $\{v_1, \ldots, v_{r+1}\} \subseteq \mathcal{V}_{r-1}$ es linealmente independiente, donde $v_t = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij}^t E_{ij}$ para todo $t = 1, \ldots, r+1$.

Supongamos que hemos probado (1), es decir, existe un conjunto $\{\alpha_{ij}^t : i = 1, 2; j = 1, \ldots, r \text{ y } t = 1, \ldots, r+1\}$ tal que A particularizando para estos valores tiene un menor $\overline{A}$ de orden I tal que $\det(\overline{A}) \neq 0$. Sea

$$O = \left\{\{\alpha_{ij}^t : i = 1, 2; j = 1, \ldots, r \text{ y } t = 1, \ldots, r+1\} : \det(\overline{A}) \neq 0\right\} \neq \emptyset$$

entonces O es un abierto denso no vacío de $\mathrm{k}^{(r+1)b}$. Además el conjunto

$$\{\alpha_{ij}^t : i = 1, 2; j = 1, \ldots, r \text{ y } t = 1, \ldots, r+1\}$$

tal que $\{v_1, \ldots, v_d\}$ es linealmente independiente es un abierto en $\mathrm{k}^{(r+1)b}$ por lo tanto existe $\{\alpha_{ij}^t : i = 1, 2; j = 1, \ldots, r \text{ y } t = 1, \ldots, r+1\}$ que verifican 1) y 2) simultáneamente.

Sea $\alpha_{ij} := (\alpha_{ij}^1, \alpha_{ij}^2, \ldots, \alpha_{ij}^{r+1})$ para todo $i = 1, 2$ y $j = 1, \ldots, r$ y sea $\{\alpha_{ij} : i = 1, 2; j = 1, \ldots, r\}$ el siguiente conjunto particular;

- $\alpha_{1,2s-1} = e_{2s-1}$ y $\alpha_{2,2s-1}^t = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 2s-1, 2s \\ \alpha_{1,2s}^t & \text{si } t = 2s-1, 2s \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = d \end{cases}$ para todo $s = 1, \ldots \lceil \frac{r}{2} \rceil$;

- $\alpha_{2,2s} = e_{2s}$ y $\alpha_{1,2s}^t = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 2s-1, 2s \\ \alpha_{1,2s}^t & \text{si } t = 2s-1, 2s \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = d \end{cases}$ para todo $s = 1, \ldots \lfloor \frac{r}{2} \rfloor$;

tal que $\alpha_{1,2s}^t + \alpha_{2,2s-1}^t \neq 0$ para $t = 2s-1, 2s$. Por lo tanto $\alpha_{1,2s} + \alpha_{2,2s-1} = (\alpha_{1,2s}^{2s-1} + \alpha_{2,2s-1}^{2s-1})e_{2s-1} + (\alpha_{1,2s}^{2s} + \alpha_{2,2s-1}^{2s})e_{2s} + e_{r+1}$.

Analicemos la forma que obtiene A al reemplazar estos valores de α_{ij}.

En el caso r es par $A = \begin{pmatrix} A_r & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ y particularizando la submatriz A_s de A_r tenemos que

$$A_s = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \alpha_{1,2s}^{2s-1} + \alpha_{2,2s-1}^{2s-1} & \alpha_{1,2s}^{2s} + \alpha_{2,2s-1}^{2s} & \ldots & 1 \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$A_{2s-1,2s} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \alpha^{2s-1}_{2,2s-1} & \alpha^{2s}_{2,2s-1} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \alpha^{2s-1}_{1,2s} & \alpha^{2s}_{1,2s} & \dots & 0 \end{pmatrix} \in M(4, r+1)$$

para todo $s = 1, \dots, \frac{r}{2}$.

Dado que A_r es una matriz cuadrada podemos calcular el $\det(A_r)$. Por la forma de las submatrices A_s, el $\det(A_r) = \det(\widetilde{A}_r)$ donde $\widetilde{A}_r$ la obtenemos en dos pasos

- por la forma de A_r al calcular el $\det(A_r)$ podemos suprimir las $3\frac{r}{2}$-primeras filas (y las correspondientes columnas) de A_r;

- como nos interesa el valor absoluto del $\det(A_r)$, reordenamos las columnas de manera conveniente de la matriz que resulta del punto anterior y obtenemos la matriz $\widetilde{A}_r$ que tiene la siguiente forma

$$\widetilde{A}_r = \begin{pmatrix} \widetilde{A}^1_r & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \widetilde{A}^2_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{A}^3_r & \dots & 0 \\ \vdots & & & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \widetilde{A}_r^{\frac{r(r-2)}{8}} \end{pmatrix}$$

donde $\widetilde{A}^i_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \alpha^i_{2,i} & \alpha^{i+1}_{2,i} & \alpha^j_{2,j} & \alpha^{j+1}_{2,i} \\ \alpha^i_{1,i} & \alpha^{i+1}_{1,i} & \alpha^j_{1,j} & \alpha^{j+1}_{1,i} \end{pmatrix} \in M(4,4)$. Por lo tanto el $\det(A_r) = \prod_{i=1}^{\frac{r(r-2)}{8}} \det(\widetilde{A}^i_r)$.
Existen valores de α^t_{ij} tal que $\det(\widetilde{A}^i_r) \neq 0$ entonces el $\det(A_r) \neq 0$ para ciertos valores de α^t_{ij}.

Por otra parte cada submatriz B' de la matriz B particularizada para los valores de α_{ij} es de la forma $B' = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \widetilde{B} & \frac{1}{2}\mathbb{I} \end{pmatrix}$. donde I es la matriz identidad de orden $r \times r$ y

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in M(r, 1).$$

Es claro que B' tiene un menor de orden $r+1$ con determinante distinto de cero. Por otra parte como B tiene $b - \frac{r}{2}$ bloques de matrices B' podemos concluir que B tiene un menor de orden $(r+1)\left(b - \frac{r}{2}\right)$ cuyo determinante es distinto de cero. Por lo probado anteriormente sabemos que existen ciertos valores de α^t_{ij} tal que A tiene un menor de orden $\frac{(r+1)r}{2} + (r+1)\left(b - \frac{r}{2}\right) = (r+1)b$ cuyo determinante es distinto de cero.

Si r es impar recordemos que $A = \begin{pmatrix} A_{r-1} & 0 & 0 \\ C & D & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}$. Los valores de α_{ij} serán los siguientes

- $\alpha_{1,2s-1} = e_{2s-1}$ tal que $s = 1, \dots, \frac{r+1}{2}$;

- $\alpha_{2,2s} = e_{2s}$ tal que $s = 1, \ldots, \frac{r-1}{2}$;

- $\alpha_{2,r} = \alpha_{1,2s}^{d-1} e_{d-1} + \alpha_{1,2s}^{d} e_d$

- $\alpha_{1,2s}^t = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 2s-1, 2s \\ \alpha_{1,2s}^t & \text{si } t = 2s-1, 2s \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = d \end{cases}$ y $\alpha_{2,2s-1}^t = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 2s-1, 2s \\ \alpha_{1,2s}^t & \text{si } t = 2s-1, 2s \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = d \end{cases}$ para todo $s = 1, \ldots, \frac{r-1}{2}$, tal que $\alpha_{1,2s}^t + \alpha_{2,2s-1}^t \neq 0$ para $t = 2s-1, 2s$. Por lo tanto $\alpha_{1,2s} + \alpha_{2,2s-1} = (\alpha_{1,2s}^{2s-1} + \alpha_{2,2s-1}^{2s-1}) e_{2s-1} + (\alpha_{1,2s}^{2s} + \alpha_{2,2s-1}^{2s}) e_{2s} + e_d$.

Como primer paso para encontrar un menor de orden $(r+1)b$ con determinante distinto de cero primero vamos a permutar de cada bloque A_{r-1}^s de A_{r-1} la r-ésima columna y la ubicaremos al comienzo de la matriz D. Con este cambio la matriz A particularizada para los valores de α_{ij} nos quedaria

$$\begin{pmatrix} \overline{A}_{r-1} & 0 & 0 \\ \overline{C} & \overline{D} & 0 \\ 0 & \overline{E} & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}.$$

Donde

$$\overline{C} = \begin{pmatrix}
0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\
0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\
0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\
0 & \ldots & \alpha_{2r}^{r+1} & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\
0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\
0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \alpha_{2r}^{r+1} & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\
\vdots & & & & & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\
0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & \ldots & 0 \\
0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \alpha_{2r}^{r+1}
\end{pmatrix} \in M\left(r+1, r\frac{r-1}{2}\right),$$

$$\overline{D} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \alpha_{2r}^r & \alpha_{2r}^{r+1} \\
1 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\alpha_{2r}^r & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{12}^1 & \alpha_{12}^2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \alpha_{2r}^r & \ldots & 0 & 0 & 0 & \alpha_{14}^3 & \alpha_{14}^4 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & & \vdots & 0 & & & & & & & & & \\
0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & \alpha_{2r}^r & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_{1,r-1}^{r-2} & \alpha_{1,r-1}^{r-1} & 0 & 0
\end{pmatrix} \in M\left(r+1, r+1+\frac{r-1}{2}\right),$$

$$\overline{E} = \begin{pmatrix}
0 & \ldots & 0 & \alpha_{21}^1 & \alpha_{21}^2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \alpha_{23}^3 & \alpha_{23}^4 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & & & \vdots & & 0 & & & & & & \\
0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_{2,r-2}^{d-3} & \alpha_{2,r-1}^{d-2} & 0 & 0 \\
0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix} \in M\left(r-1, r+1+\frac{r-1}{2}\right).$$

Lo primero que debemos observar es que la matriz $\overline{A}_{r-1}$ tiene la forma de la matriz A_r cuando r es par. Luego el $\det(\overline{A}_{r-1}) \neq 0$ para ceirtos valores de α_{ij}^t.

En la submatriz $\begin{pmatrix} \overline{D} \\ \overline{E} \end{pmatrix} \in M\left(2r, r+1+\frac{r-1}{2}\right)$ si realizamos las permutaciones convenientes de filas y columnas obtenemos la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{2r}^r & \alpha_{2r}^{r+1} \\ \widetilde{C}_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & \widetilde{C}_{\frac{r-1}{2}} & 0 & \end{pmatrix} \quad \text{donde} \quad \widetilde{C}_i = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha_{2r}^{d-1} & \alpha_{1i}^i & \alpha_{1i+1}^{i+1} \\ 0 & \alpha_{2i}^i & \alpha_{2i}^{i+1} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, por lo probado en el caso par vemos que $\overline{A}_{r-1}$ tiene un menor de orden $\frac{(r-1)r}{2}$ con determinante distinto de cero y B tiene un menor de orden $(r+1)\left(b-\frac{r-1}{2}\right)$ con determinante distinto de cero. Además podemos encontrar valores de α_{ij}^t tal que la matriz $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{2r}^r & \alpha_{2r}^{r+1} \\ \widetilde{C}_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & \widetilde{C}_{\frac{r-1}{2}} & 0 & \end{pmatrix}$ tenga un menor de orden $\frac{3}{2}(r-1)+2$ cuyo determinante sea distinto de cero. Por lo tanto A tiene un menor de orden $\frac{(r-1)r}{2}+(r+1)\left(b-\frac{r+1}{2}\right)+\frac{3}{2}(r-1)+2=(r+1)b$ con determinante distinto de cero. Por lo tanto el sistema $A\lambda=0$ tiene solución trivial para ciertos valores de α_{ij}. $\square$

Es importante notar que el Lema 6.2.3 es falso en el caso en que $a \leq r-1$. Por ejemplo si $r=8, b=4$ y $a=6$ entonces $d=10$. Luego el número de ecuaciones es $E=24$ y el número de incógnitas es $I=28$ por lo tanto el sistema $A\lambda=0$ tiene infinitas soluciones, es decir $U_{\mathcal{V}_a} \cap W \neq 0$.

En este caso vemos que $E \leq I$ pero para asegurarnos que esto no ocurra es suficiente pedir que $ab \geq \binom{r}{2}$. Pero esto no es suficiente para asegurar que la conclusión del Lema 6.2.3 sea verdadero. Ya que si $a<r-1$ y r par tenemos que

$$I = db = (2r-a)b > (r+1)b > (r+1)\frac{r}{2}$$

pues $d=2r-a>r+1$. Entonces si r es par tenemos que $d\frac{r}{2} > \frac{r}{2}(r+1)$ es decir que en la matriz $\widetilde{A}$ de

$$A = \begin{pmatrix} A_r & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

podemos encontrar a lo sumo un menor de orden $\frac{r}{2}(r+1)$ cuyo determinante sea distinto de cero y dado que la cantidad de columnas de $\widetilde{B}$ es $d(b-\frac{r}{2})$ entonces A tiene como máximo podemos conseguir un menor de orden $\frac{r}{2}(r+1)+d(b-\frac{r}{2})$ con determinante distinto de cero, pero $\frac{r}{2}(r+1)+d(b-\frac{r}{2}) < I$ luego el sistema $A\lambda=0$ tiene infinitas soluciones.

A continuación construiremos una familia $\{\pi_{a,b}\}$ de nilrepresentaciones fieles de $\mathcal{L}(r)$ donde a,b son números naturales que verifican las condiciones iniciales. La representación $\pi_{a,b}$ tendrá dimensión $a+b+2$ y para ciertos valores de a,b obtendremos una nilrepresentación fiel de dimensión igual a la establecida en el Teorema **??**.

Fijamos $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $a \geq b, 2b \geq r$ y $a \geq r-1$. Por el Lema 6.2.3 existe un subespacio $\mathcal{V}_a$ de $M(2,r)$ de dimensión $2r-a$, sea $\{\widetilde{A}_1, \ldots, \widetilde{A}_a\}$ una base de $\mathcal{V}_a^{\perp}$.

Sea $\mathbb{A}$ una matriz de $M(a, 2r)$ con la propiedad que la i-ésima fila $\mathbb{A}_i$ de $\mathbb{A}$ es tal que los primeros 2-elementos es la primera columna de $\widetilde{A}_i$, los 2-elementos siguientes es la segunda columna de $\widetilde{A}_i$ y así sucesivamente.

Ahora vamos a obtener $r-$matrices a partir de $\mathbb{A}$ de tamaño $a \times 2r$ de la siguiente forma;

$$\mathbb{A} = \left(\underbrace{\begin{matrix} a_{11}^1 & a_{21}^1 \\ & \ddots \\ a_{11}^a & a_{21}^a \end{matrix}}_{A_1} \; \underbrace{\begin{matrix} a_{12}^1 & a_{22}^1 \\ & \ddots \\ a_{12}^a & a_{22}^a \end{matrix}}_{A_2} \; \cdots \; \underbrace{\begin{matrix} a_{1r}^1 & a_{2r}^1 \\ & \ddots \\ a_{1r}^a & a_{2r}^a \end{matrix}}_{A_r} \right)$$

Sea

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ \hdashline 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix} \in M(2b, r)$$

donde $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz identidad de tamaño $r \times r$ y $\begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz nula de tamaño $(2b-r) \times r$.

A partir de la matriz $\mathbb{I}$ obtendremos el conjunto $\{B_1, \ldots, B_r\} \subset M(2, b)$ donde

$$B_s = \begin{cases} E_{1\lceil \frac{s}{2} \rceil} & \text{si } s \text{ es impar} \\ E_{2\frac{s}{2}} & \text{si } s \text{ es par .} \end{cases}$$

para todo $s = 1, \ldots, r$. Es claro que el conjunto $\{B_1, \ldots, B_r\} \subset M(2, b)$ es linealmente independiente.

Sea $\{X_1, \ldots, X_r\} \subseteq M(a+b+2)$ donde cada X_i es de la forma

$$X_i = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & A_i & 0 \\ \hline 0 & 0 & B_i \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

por lo tanto

$$[X_i, X_j] = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & A_iB_j - A_jB_i \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Como $\{B_1, \dots, B_r\}$ es linealmente independiente entonces $\{X_1, \dots, X_r\}$ es linealmente independiente, llamaremos $Z_{ij} := [X_i, X_j]$.

Ahora definimos $\pi_{a,b} : \mathcal{L}(r) \to \mathfrak{gl}(a+b+2, \mathrm{k})$ la aplicación dada por

$$\pi_{a,b}(X_i) = X_i \qquad \pi_{a,b}(Z_{ij}) = Z_{ij}. \tag{6.6}$$

No es difícil probar que $\pi_{a,b}$ es una representación, lo más delicado es la inyectividad.

Teorema 6.2.4. *Sean $a, b, r \in \mathbb{N}$ tales que $a \geq b, 2b \geq r$ y $a \geq r-1$ y $\pi_{a,b} : \mathcal{L}(r) \to \mathfrak{gl}(a+b+2, \mathrm{k})$ la aplicación definida en (6.6). Entonces $\pi_{a,b}$ es una nilrepresentación fiel del álgebra de Lie $\mathcal{L}(r)$.*

Demostración. Por lo comentado anteriormente es fácil ver que $(\pi_{a,b}, \mathrm{k}^{a+b+2})$ es una nilrepresentación. Falta probar que es fiel, para esto es suficiente ver que el conjunto $\{Z_{ij} : 1 \leq i < j \leq r\}$ es linealmente independiente. Supongamos que no es asi, recordemos que $Z_{ij} = [X_i, X_j]$, entonces existen $x_{ij} \in \mathrm{k}$ tal que $\sum_{i<j}^{r} x_{ij}[X_i, X_j] = 0$. Esto es lo mismo que

$$\sum_{i<j}^{r} x_{ij}A_iB_j - x_{ij}A_jB_i = 0. \tag{6.7}$$

Sea $\widetilde{x}_{ij} := -x_{ji}$ y $\widetilde{x}_{ij} := x_{ij}$. Luego la ecuación (6.7) se puede escribir como

$$\sum_{i=1}^{r-1} A_i \left(\sum_{j \neq i}^{r} \widetilde{x}_{ij} B_j \right) = 0$$

Sean $\widetilde{B}_i := \sum_{j \neq i}^{r} \widetilde{x}_{ij} B_j \in M(2, b)$ y $\widetilde{B}_i^p$ la p-ésima columna de $\widetilde{B}_i$, luego la ecuación anterior se puede escribir como

$$\sum_{i=1}^{r} A_i \widetilde{B}_i^p = 0 \quad \text{para todo } p = 1, \dots, b. \tag{6.8}$$

Sean

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_r \end{pmatrix} \in M(a, 2r) \quad \text{y} \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} \mathbb{B}^1 & \mathbb{B}^2 & \dots & \mathbb{B}^b \end{pmatrix} \in M(2r, b)$$

tal que la p-ésima columna de $\mathbb{B}$ esta formada de la siguiente forma

$$\mathbb{B}^p = \begin{pmatrix} \widetilde{B}_1^p \\ \widetilde{B}_2^p \\ \vdots \\ \widetilde{B}_r^p \end{pmatrix}.$$

Luego la ecuación (6.8) se puede escribir

$$\mathbb{A}\mathbb{B}^p = 0 \tag{6.9}$$

para todo $p = 1, \dots, b$, es decir el espacio columna de $\mathbb{B}$ está contenido en el complemento ortogonal del espacio fila de $\mathbb{A}$.

Por otra parte sean

$$\widetilde{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbb{B}}^1 & \widetilde{\mathbb{B}}^2 & \dots & \widetilde{\mathbb{B}}^r \end{pmatrix} \in M(2b, r)$$

donde

$$\widetilde{\mathbb{B}}^p = \begin{pmatrix} B_p^1 \\ B_p^2 \\ \vdots \\ B_p^b \end{pmatrix}$$

para cada $p = 1, \dots, r$ y

$$X = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1r} \\ x_{21} & 0 & x_{23} & \dots & x_{2r} \\ & & \vdots & & \\ x_{r1} & x_{r2} & x_{r3} & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1r} \\ -x_{12} & 0 & x_{23} & \dots & x_{2r} \\ & & \vdots & & \\ -x_{1r} & -x_{2r} & -x_{3r} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

es decir X es una matriz antisimétrica, luego $\widetilde{\mathbb{B}}X \in W$. Veamos que $\mathbb{B}X \in U_{\mathcal{V}_a}$ y así llegaremos a un absurdo ya que $W \cap U_{\mathcal{V}_a} = 0$. Para ello veamos a la matriz $\mathbb{B}X$ de la siguiente forma

$$\mathbb{B}X = \begin{pmatrix} \widetilde{B}_1^1 & \widetilde{B}_2^1 & \dots & \widetilde{B}_r^1 \\ \widetilde{B}_1^2 & \widetilde{B}_2^2 & \dots & \widetilde{B}_r^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ \widetilde{B}_1^b & \widetilde{B}_2^b & \dots & \widetilde{B}_r^b \end{pmatrix}$$

donde cada submatriz

$$\begin{pmatrix} \widetilde{B}_1^p & \widetilde{B}_2^p & \dots & \widetilde{B}_r^p \end{pmatrix} \in M(2, r) \tag{6.10}$$

para cada $p = 1, \dots, b$. A la matriz de (6.10) la podemos escribir como

$$\mathbb{B}^p = \begin{pmatrix} \widetilde{B}_1^p \\ \widetilde{B}_2^p \\ \vdots \\ \widetilde{B}_r^p \end{pmatrix}.$$

Por (6.9) tenemos que $\mathbb{B}^p$ esta ortogonal a $\widetilde{A}_i$ para todo $i = 1, \dots a$ y $p = 1, \dots, p$. Entonces

$$\begin{pmatrix} \widetilde{B}_1^p & \widetilde{B}_2^p & \dots & \widetilde{B}_r^p \end{pmatrix} \in \mathcal{V} \quad \text{para todo } p = 1, \dots, b$$

es decir $\mathbb{B}X \in U_{\mathcal{V}_a}$, lo cual contradice el hecho que $W \cap U_{\mathcal{V}_a} = 0$. Por lo tanto el conjunto

$$\{Z_{ij} : 1 \leq i < j \leq r\}$$

es linealmente independiente, es decir $(\pi_{a,b}, V)$ es una nilprepresentación fiel de $\mathcal{L}(r)$. $\square$

Corolario 6.2.5. *Sean $a, b, r \in \mathbb{N}$ tales que $a \geq b; b \geq 2r$ y $a \geq r-1$. Sea $\mathcal{L}(r)$ el álgebra de Lie 2-pasos nilpotente libre con r-generadores. Entonces*

$$\mu(\mathcal{L}(r)) \leq a + b + 2.$$

Teorema 6.2.6. *Sea $r \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{L}(r)$ el álgebra de Lie 2-pasos nilpotente libre de r-generadores. Si $r \geq 4$ entonces*

$$2 + \left\lceil 2\sqrt{\frac{r(r-1)}{2}} \right\rceil \leq \mu(\mathcal{L}(r)) \leq r + \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil + 1 \ .$$

Demostración. Por el Teorema 6.1.9 tenemos la desigualdad de la izquierda y tomando $a = r - 1$ y $b = \lceil \frac{r}{2} \rceil$ en el Corolario 6.2.5 obtenemos la desigualdad de la derecha. $\square$

Bibliografía

[Aus] Auslander, L., *The estructure of complete locally affine manifolds*, Topology, Vol. **3**,(1964), 131-139.

[B1] Burde, D., *Affine structures on nilmanifolds*, J. Inter. Math., Vol. **7**(5),(1996), 599-616.

[B2] Burde, D., *On a refinement of Ado's Theorem*, Archiv.Math. ,Vol. **70**(2),(1998), 118-127.

[B3] Burde, D., *Left-invariant affine structures on nilpotent Lie groups*, Habilitationsschrift, Düsseldorf, 1999.

[Be] Benoist, Y., *Une Nilvariete Non Affine*, J. Diff. Geom., Vol. **41**,(1995), 21-52.

[Bi] Birkhoff, G., *Representability of Lie algebras and Lie groups by matrices*, Ann. of Math. (2), Vol. **38**, (1937), 526-532.

[BG] Burde D., Grunewald, F., *Modules for certain Lie algebras of maximal class*, J. Pure and Appl. Algebra, **99**,(1995), 239-254.

[BK] Beck, R. E., Kolman, B., *Construction of nilpotent Lie algebras over arbitrary fields*, in: PAul S. Wang (Ed.), Proceedings of the 1981 ACM Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, ACM, New York, 1981, pp. 169-174.

[BM] Burde D., Moens, W., *Minimal Faithful Representations of Reductive Lie Algebras*, Archiv der Mathematik.,Vol. **89**, No. 6, (2007), 513-523.

[BNT] Benjumea Acevedo, J. C., Nuñez Valdes, J., Tenorio Villalón, A. F., *Minimal Linear Representations of the Low-Dimensional Nilpotent Lie Algebras*, Math. Scand. ,Vol. **102**, No. 1, (2008), 17-26.

[C] Carter, R., *Lie Algebras of Finite and Affine Type*, Cambridge studies in advance mathematics **96**, (2005).

[CM] Chari, V., Moura, A., *The restricted Kirillov-Reshetikhin modules for the current and twisted current algebras.*, Commun. Math. Phys., **266**, No. 2, (2006), 431-454.

[CaRo] Cagliero, L., Rojas, N. *Faithful representation of minimal dimension of current Heisenberg Lie algebras*, Int. J. Math. Vol. **20**(11), Nov. 2009, 1347-1362.

[Dix] Dixmier, J., *Sur les repréntations unitaries des grouprs de Lie nilpotentes III*, Canadian Journal of Mathematics, **10**, 321-348, 1958.

[FGT] Fishel, S., GrojnowskiB, I., Teleman, C., *The strong Macdonald conjecture and Hodge theory on the Loop Grassmannian*, Ann. of Math. **168**, (2008), 175-220.

[FL] Fourier, G., Littelmann, P., *Weyl modules, Demazure modules, KR-modules, crystals, fusion products and limit constructions*, Adv. Math. **211**, No. 2, (2007), 566-593.

[G] Gong, M. P., *Classification of nilpontent Lie algebras of dimension 7*, PhD thesis, University of Waterloo, Waterloo, Canada, 1998. 260-262.

[GHW] Goodman, R., Howe, R., Wallach, N., *Representations and Invariants of the Classical Groups*, Cambridge, U.K., Cambridge university, (1998).

[Go1] Goze, M., *Sur les algébres de Lie nilpotentes admettant un tore de dérivations*, Manuscripta Math. **84**,(1994), 115-224.

[Go2] Goze, M., *Some nilpotent Lie algebras and aplications*, Algebra and Operator Theory, Proc. Colloq. in Tashkent, Kluwer, Dordrecht,(1998), 49-64.

[GoK] Goze, M., Khakimdjanov, Y., *Nilpotent Lie algebras*, Kluwer, (1995).

[GolK] Goldman, W., Kamishima, Y., *The fundamental group of a compact flat Lorentz space form is virtually polycyclic*, J. Differ. Geom. **19**, (1984), 233-240.

[GoR] Goze, M., Remm, E., *Rigid current Lie algebras*, arXiv:math/0610478v1 [math.RA] 16 Oct 2006.

[Gr] De Graaf, Willem A. *Classification of 6-dimensional nilpotent Lie algebras over fields of characteristic not 2*, J. of Alg. **309**, (2007), 640-653.

[GrM] Grunewald, F., Margulis, G., *Transitive and quasitransitive actions of affine groups preserving a generalized Lorentz-structure*, J. Geom. Phys. **5**, No.4 , (1988), 493-531.

[GrO] Grunewald, F., O'Halloran, *Varieties of nilpontent algebras of dimension less than six*, J. of Algebra **112**,(1988), 315-325. 493-531.

[HW] Hanlon, P., Wachs, M., *On the Property M Conjeture for the Heisenberg Lie Algebra*, J. Combin. Theory Ser. A **99** (2002), 219-231.

[He] Hermann, R., *Infinite dimensional Lie algebras and current algebra*, Group Represent. Math. Phys., Lect. Notes Phys. **6** (1970),312-338.

[H] Humphreys, J. E., *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer-Verlag, New York, (1994).

[J1] Jacobson, N., *Lie Algebras*, Interscience Publishers, New York, (1962).

[J2] Jacobson, N., *Schur's theorem on commutative matrices*, Bull. Amer. Math. Soc.**50** (1944), 431-436.

[K] Knapp, A. W., *Lie Groups Beyond and Introduction*, Birkhäuser, (2005).

[K1] Khakimdjanov, Yusupdjan, *Variété des lois d'algébres de Lie nilpotentes*, Geometriae Dedicata, **40** (1991), 229-295.

[K2] Khakimdjanov, Yusupdjan, *Affine structures on filiform Lie algebra*, Amer. Math. Soc. Transl., **213**(2) (2005), 141-155.

[Ku] Kumar, Shrawan, *Homology of certain truncated Lie algebras*, Contemp. Math., **248** (1999), 309-325.

[L] Lauret, J., *Finding Einstein solvmanifolds by a variational method*, Math. Z., **241**, (2002), 83-99.

[LR] Lecomte, P., Roger, C., *Rigidity of current Lie algebras of complex simple type*, J. Lond. Math. Soc., **37**, No.2, (1988), 232-240.

[M] Mirzakhani, M., *A Simple Proof of a Theorem of Schur*, American Mathematical Monthly, Vol. **105**, No. 3,(1992), 260-262.

[Mac] Macdonald, I. G., *Some conjectures for root systems*,

[Ma] Margulis, G.A., *Free totally discontinuous groups of affine transformations*, Sov. Math., Dokl., **28** (1983), 435-439.

[Mi] Milnor, John W., *On fundamental groups of complete affinely flat manifolds*, Adv. Math., **25** (1977), 178-187.

[Mo] Morozov, V., *Classification of nilpotent Lie algebras of sixth order*, Izv.Vyss.Ucebn.Zaved.Mat.,1958(4(5))(1958), 161-171.

[R] Reed, B .E., *Representations of solvable Lie algebras*, Mich. Math. J., **16** (1969), 227-233.

[Ro] Roger, C., *Déformations de l'algèbre des courants à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe affine*, C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I, **305** (1987), 613-616.

[S] Schur, I., *Zur Theorie vertauschbarer Matrizen*, J. Reine Angew. Mathematik , **130** (1905), 66-76.

[Sc] Scheuneman, J. , *Affine structures on tree-step nilpotent Lie algebra*, Proc. Amer. Math. Soc., **46** (1974), 451-454.

[See] Seeley, C., *Degenerations of 6-dimensional nilpotent lie algebras over C*, Com. in Algebra, (18)(10) , (1990), 3493-3505.

[T] Teleman, C., *Borel Weil Bott theory on the moduli stack of G-bundle over a curve*, Invent.Math., **134** (1998), 1-57.

[W] Will, C., *Rank-one Einstein solvmanifolds of dimension 7*, Diff. Geo. and its appl., **19** (2003), 307-318.

[Z] Zusmanovich, P., *Low-dimensional cohomology of current Lie Algebras and analogs of the Riemann tensor for loop manifold*, Linear Algebra Appl. **407** (2005), 71-104.