

Álgebras de Lie 2-pasos nilpotentes nosingulares

David Oscari

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía y Física
como parte de los requerimientos para la obtención del grado de
Doctor en Matemática de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Agosto de 2012

©FaMAF-UNC 2012

Director: Dr. Jorge Lauret

*Dedicado a
A mis padres y hermana.*

Resumen

En esta tesis estudiamos las álgebras de Lie 2-pasos nilpotentes sobre \mathbb{R} , particularmente el caso nosingular. Las álgebras 2-pasos se dividen en tipos (n, m) . Yuri Nikolayevsky ha obtenido importantes resultados, entre ellos, la clasificación, en términos de ‘pencil’ de matrices, de todas las álgebras de tipo $(2, q)$ que admiten un nilsoliton. Damos una demostración alternativa del teorema de clasificación en el caso nosingular.

Usando métodos de teoría geométrica de invariantes real, caracterizamos las álgebras de tipo (n, m) nosingulares que admiten un nilsoliton. Como aplicación de este resultado, exhibimos los primeros ejemplos explícitos de álgebras 2-pasos nosingulares de tipo $(3, 8)$ que no admiten un nilsoliton, y otras que sí.

En relación con esto último, se plantea el problema concreto de distinguir dos álgebras de Lie dadas, salvo isomorfismo. Para ello usamos la forma Pfaffiana de Scheuneman, un invariante de isomorfismo muy útil asociado a las álgebras 2-pasos, que consiste de una clase de equivalencia proyectiva de un polinomio homogéneo de grado $m/2$ en n variables con coeficientes en \mathbb{R} . Usando ideas de L. E. Dickson y aplicando el teorema de clasificación de pencils anti-simétricos, probamos que toda cuártica ternaria positiva es la forma Pfaffiana de al menos un álgebra nosingular. En otras palabras, toda ternaria cuártica positiva admite una representación Pfaffiana lineal, sobre \mathbb{R} .

Durante mucho tiempo se creyó que cierta igualdad podría caracterizar las álgebras de tipo- H entre las nosingulares. Damos ejemplos de álgebras nosingulares de tipo $(2, 4k)$ que cumplen esa igualdad, y que no son tipo- H .

Construimos álgebras de Lie 2-pasos nilpotentes que no admiten nilsolitones, cubriendo casi todos los tipos posibles. Por otra parte, usando el teorema de clasificación de Nikolayevsky, obtenemos curvas de álgebras 2-pasos dos-a-dos no-isomorfas, indescomponibles y no necesariamente nosingulares, que no admiten nilsolitones, en toda dimensión ≥ 14 y dimensión 12. Esto responde a una pregunta formulada por T. Payne.

Palabras y frases claves: solvariedades, solitones de Ricci, nilradical Einstein.

2010 Mathematics subject Classification: 53C25, 22E25, 14L24.

Agradecimientos

A mi director Jorge Lauret sin cuya ayuda esto no hubiera sido posible, tanto en lo profesional como en lo personal.

A Amelia Barrionuevo y Adrián Will por el aliento que dan a todos sus alumnos de la Universidad Nacional de Tucumán, y a mí en este caso, a seguir estudios de posgrado.

A Isabel Dotti por su valiosa ayuda en lo personal en un momento de transición.

A Esther Galina por su ayuda para iniciar el Doctorado en Matemática.

A Roberto Miatello y Jorge Vargas por la enorme ayuda personal brindada, ayuda que ha superado largamente lo que correspondía como integrantes de mi comisión asesora.

A CONICET y SECYT-UNC por el apoyo económico.

A FaMAF por el lugar de trabajo.

A mis compañeros, todos los cuales me han ayudado de distintas maneras.

Índice general

Resumen	i
Agradecimientos	iii
1 Introducción	1
2 Preliminares	5
2.1 Álgebras 2-pasos nosingulares	5
2.2 Teoría geométrica de invariantes real	7
3 Formas Pfaffianas	13
3.1 Forma Pfaffiana e invariantes	13
3.2 Polinomios positivos	15
3.3 Laplaciano	17
3.4 Sobre la suryectividad de la forma Pfaffiana	19
3.4.1 Ternarias cuárticas positivas: caso irreducible	21
4 Nilsolitones en álgebras nosingulares	29
4.1 Nilsolitones	29
4.2 Álgebras nosingulares de tipo $(2, m)$	33
4.3 Álgebras nosingulares de tipo $(3, 8)$	37
4.3.1 Existencia de nilsolitones	37
4.3.2 No-existencia de nilsolitones	39
5 Automorfismos de álgebras nosingulares	41
6 No-existencia de nilsolitones en álgebras 2-pasos	45
6.1 Introducción	45
6.2 Preliminares	46
6.2.1 El álgebra de Lie asociada con un grafo	46
6.2.2 Descomposición coherente de un grafo	47
6.2.3 Resultados para dos o tres componentes coherentes	48
6.3 Condiciones suficientes para no-positividad	50
6.3.1 Cuatro componentes coherentes	50
6.3.2 Cinco componentes coherentes	52
6.4 Prueba del Teorema 6.1.2	52

6.5	Curvas de nilradicales no-Einstein de tipo $(2, q)$, $q = 10, q \geq 12$	58
Apéndice A		61
Apéndice B		63
Bibliografía		71

Capítulo 1

Introducción

Dado un par de espacios vectoriales reales \mathfrak{n}_1 , \mathfrak{n}_2 , estudiamos los mapas bilineales anti-simétricos

$$\mu : \mathfrak{n}_1 \times \mathfrak{n}_1 \longrightarrow \mathfrak{n}_2,$$

tal que la función $(X, Y) \mapsto \alpha(\mu(X, Y))$ es una 2-forma no-degenerada en \mathfrak{n}_1 para todo $\alpha \in \mathfrak{n}_2^*$ no nulo. Esta es precisamente la condición que el tensor de O'Neill de una submersión Riemannian debe necesariamente cumplir en un punto para que todos los 2-planos vertizontales tengan curvatura seccional positiva, caso en el cual el fibrado se llama *fat* (ver [FZ11]). Por otro lado, cada uno de tales μ 's define un álgebra de Lie 2-pasos nilpotente $(\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2, \mu)$, llamada *nosingular* (o regular, o fat) en la literatura si cumple la condición anterior. La clase de grupos de Lie nosingulares contiene estrictamente a los bien conocidos grupos de *tipo-H* introducidos por A. Kaplan [K81], y sus métricas invariantes a izquierda gozan también de lindas propiedades que tienen que ver con la curvatura y con las subvariedades totalmente geodésicas, las cuales fueron probadas por P. Eberlein en [E94].

Si $\dim \mathfrak{n}_1 = m$ y $\dim \mathfrak{n}_2 = n$, entonces la relación de *isomorfismo* entre dos álgebras nosingulares está dada por la $GL_m \times GL_n$ -acción natural en el espacio vectorial

$$V_{n,m} := \Lambda^2 \mathfrak{n}_1^* \otimes \mathfrak{n}_2$$

y coincide con el isomorfismo de álgebras de Lie, donde $GL_n := GL_n(\mathbb{R})$. Existen restricciones muy fuertes para el *tipo* (n, m) de un álgebra nosingular, las cuales coinciden con los tipos de las álgebras de tipo-*H*, incluyendo $n = 1$, $m = 2k$; $n = 2, 3$, $m = 4k$; $n = 4, \dots, 7$, $m = 8k$; etc. Desde ambos puntos de vista, geométrico y algebraico, surgen las siguientes preguntas naturales:

- (i) ¿Qué tan 'salvaje' es el problema de clasificación de las álgebras nosingulares salvo isomorfismo?
- (ii) Dada un álgebra nosingular $\mu : \mathfrak{n}_1 \times \mathfrak{n}_1 \longrightarrow \mathfrak{n}_2$, ¿hay un producto interno canónico en $\mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2$ asociado a μ ?
- (iii) ¿Es toda álgebra de tipo-*H* la 'más simétrica' entre todas las álgebras nosingulares del mismo tipo?, en el sentido de que su grupo de automorfismo tiene dimensión maximal, o equivalentemente, su $GL_m \times GL_n$ -órbita en $V_{n,m}$ es de dimensión minimal.

La clasificación de las álgebras 2-pasos se considera un problema ‘sin esperanza’, lo cual ha sido demostrado desde un punto de vista riguroso en [BLS05]. Una clasificación completa sólo se conoce para los tipos $(1, m)$ (todas álgebras de Heisenberg salvo factores abelianos), $(2, m)$ (ver [G73, LT99] o Sección 4.2), $(5, 5)$ y (n, m) con $n + m \leq 9$ (sobre \mathbb{C} , ver [GT99]). Usando invariantes de ‘pencil’, se puede mostrar que las álgebras nosingulares de tipo $(2, m)$ están parametrizadas por conjuntos de la forma $\mathcal{S} = \{(\alpha_1, k_1), \dots, (\alpha_r, k_r)\}$, donde $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, y las clases de isomorfismo corresponden a $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ -órbitas de tales conjuntos con respecto a la $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ -acción en \mathbb{C} por transformaciones de Möbius (ver Sección 4.2).

Dado un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ fijo en $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2$ (con $\mathfrak{n}_1 \perp \mathfrak{n}_2$), se puede codificar las constantes de estructura de μ en un mapa $J_\mu : \mathfrak{n}_2 \rightarrow \mathfrak{so}(\mathfrak{n}_1)$ definido por

$$\langle J_\mu(Z)X, Y \rangle = \langle \mu(X, Y), Z \rangle, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{n}_1, Z \in \mathfrak{n}_2.$$

Hay un invariante de isomorfismo muy útil para las álgebras 2-pasos (con m par) llamado la *forma Pfaffiana*, el cual consiste en la clase de equivalencia proyectiva de un polinomio homogéneo f_μ de grado $m/2$ en n variables definido por

$$f_\mu(Z)^2 = \det J_\mu(Z), \quad \forall Z \in \mathfrak{n}_2,$$

para cada μ de tipo (n, m) (ver Sección 3.1). Es un hecho inmediato, aunque bastante intrigante, que

μ es nosingular si y sólo si f_μ es un *polinomio positivo* (es decir $f_\mu(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ no nulo).

Aunque la teoría de polinomios positivos tiene una presencia muy rica en la literatura, una descripción completa de ellos, salvo equivalencia proyectiva, parece tan difícil como la clasificación de todas las formas y por lo tanto se desconoce y es casi intratable, incluso en casos de dimensión baja como ternarias cuárticas (i.e. $(n, m) = (3, 8)$). Sin embargo, en esta trabajo, la forma Pfaffiana ha probado ser una herramienta poderosa para exhibir familias continuas de álgebras nosingulares no-isomorfas dos-a-dos. Además, en la Sección 3.4, probamos que toda forma ternaria cuártica positiva es la forma Pfaffiana de al menos un álgebra nosingular de tipo $(3, 8)$, mostrando que una clasificación razonable en este tipo estaría fuera de alcance.

Con respecto a la cuestión (ii) planteada más arriba, el significado de la palabra ‘canónico’ es parte del problema. Los mapas $J_\mu(Z)$ ’s proporcionan una herramienta muy útil para considerar condiciones de compatibilidad entre μ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Por ejemplo, cuando

$$J_\mu(Z)^2 = -\|Z\|^2 I \quad \text{para todo } Z \in \mathfrak{n}_2,$$

el álgebra de Lie métrica $(\mathfrak{n}, \mu, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se llama de *tipo-H* (ver [BTV95]), y si más en general,

$$Z \mapsto (-\det J_\mu(Z))^2)^{1/m}$$

es una forma cuadrática, entonces el álgebra se dice que es de *tipo- \tilde{H}* (ver [LT99]).

Es también natural considerar la siguiente condición, que involucra solamente a μ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$, como otra generalización de tipo-*H*: para toda (o alguna) base ortonormal $\{Z_i\}$ de \mathfrak{n}_2 ,

$$\sum J_\mu(Z_i)^2 = aI, \quad \mathrm{tr} J_\mu(Z_i)J_\mu(Z_j) = b\delta_{ij}, \quad \text{for some } a, b < 0. \quad (1.1)$$

Se deduce de resultados bien conocidos de teoría geométrica de invariantes (ver Sección 2.2) que si la condición (1.1) vale, entonces:

- μ es un vector minimal para la $\mathrm{SL}_m \times \mathrm{SL}_n$ -acción en $V_{n,m}$ (i.e. $\|\mu\| \leq \|h \cdot \mu\|$ para todo $h \in \mathrm{SL}_m \times \mathrm{SL}_n$).
- La $\mathrm{SL}_m \times \mathrm{SL}_n$ -órbita de μ es cerrada en $V_{n,m}$.
- El subconjunto de vectores minimales (si los hay) en cada $\mathrm{SL}_m \times \mathrm{SL}_n$ -órbita consiste de una única $\mathrm{SO}(m) \times \mathrm{SO}(n)$ -órbita. Usaremos fuertemente esta propiedad de unicidad para distinguir, salvo isomorfismo, álgebras nosingulares especiales que satisfacen (1.1) usando $\mathrm{SO}(m) \times \mathrm{SO}(n)$ -invariantes, los cuales son mucho más abundantes.

Desde un punto de vista geométrico diferente, la condición (1.1) implica que la métrica invariante a izquierda g determinada por $(\mathfrak{n}, \mu, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ en el correspondiente grupo de Lie nilpotente simplemente conexo es un *soliton de Ricci*, i.e. la solución del flujo de Ricci que comienza en g y evoluciona solamente por multiplicación por escalares y pull-back por difeomorfismos que dependen del tiempo. Tales métricas se llaman *nilsolitones* en la literatura y han sido extensamente estudiadas en la última década (ver por ejemplo el artículo expositivo [L09]). Resulta de la unicidad de los nilsolitones que un producto interno para el cual (1.1) vale es único salvo multiplicación por escalares y automorfismos de μ . Esto también respalda la presentación de estos productos internos como canónicos o distinguidos para una μ dada.

En esta tesis probamos que la condición (1.1) es en realidad también necesaria para cualquier nilsoliton en un álgebra nosingular.

Teorema. *Sea μ un álgebra nosingular de tipo (n, m) y sea $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

- (i) \mathfrak{n} admite un producto interno para el cual (1.1) vale.
- (ii) El álgebra de Lie (\mathfrak{n}, μ) admite un nilsoliton.
- (iii) La $\mathrm{SL}_m \times \mathrm{SL}_n$ -órbita de μ es cerrada en $V_{n,m}$.

En [N12], Y. Nikolayevsky ha dado una clasificación completa de las álgebras de Lie 2-pasos nilpotentes de tipo $(2, m)$ que admiten un nilsoliton. En Sección 4.2, damos una prueba alternativa en el caso nosingular.

Teorema. *Un álgebra nosingular $\mu_{\mathcal{S}}$ de tipo $(2, m)$, donde $\mathcal{S} = \{(\alpha_1, k_1), \dots, (\alpha_r, k_r)\}$, admite un nilsoliton si y sólo si $k_1 = \dots = k_r = 1$.*

En particular, para el tipo $(2, 8)$, $k \geq 2$, la curva $\mu_t = \mu_{\mathcal{S}_t}$, donde

$$\mathcal{S}_t := \{(\mathbf{i}, 1), (\sqrt{t}\mathbf{i}, 1)\}, \quad t \geq 1,$$

es no-isomorfa dos-a-dos y consiste de álgebras nosingulares que no admiten un nilsoliton. Sus formas Pfaffianas son iguales a

$$f_{\mu_t}(x, y) = (x^2 + y^2)(x^2 + ty^2)$$

y son todas de tipo- \tilde{H} (comparar con [LT99, Corolario 4.9, (ii)]). Por otra parte, notemos que $\mu_{\mathcal{S}}$ con $\mathcal{S} := \{(i, 2)\}$ tiene Pfaffian idéntico al de μ_1 (a saber, $(x^2 + y^2)^2$), pero $\mu_{\mathcal{S}}$ no admite un nilsoliton. También usamos la clasificación de Nikolayevsky para obtener en Capítulo 6 curvas de álgebras 2-pasos de tipo $(2, m)$ no-isomorfas dos-a-dos (no necesariamente nosingulares) que no admiten métricas nilsoliton. Esto responde a una pregunta formulada por T. Payne en [P11], donde se exhiben familias de este tipo en el caso 3-pasos nilpotente en toda dimensión ≥ 8 . Nuestros ejemplos cubren toda dimensión ≥ 14 y dimensión 12. Por lo tanto, también en el Capítulo 6, probamos lo siguiente.

Teorema. *Existen álgebras de Lie 2-pasos nilpotentes indescomponibles de tipo (p, q) , las cuales no admiten nilsolitones, para todo par (p, q) tal que*

$$21 \leq q \quad y \quad q - 1 \leq p \leq \frac{1}{2}q^2 - \frac{5}{2}q + 9.$$

Para esto usamos una clase de álgebras 2-pasos asociadas a grafos.

En la Sección 4.3, damos varias curvas de álgebras nosingulares de tipo $(3, 8)$ que admiten una métrica nilsoliton. También hemos encontrado en tipo $(3, 8)$ dos curvas de álgebras nosingulares, las cuales no admiten nilsoliton y sus formas Pfaffianas coinciden, pero las dimensiones de sus respectivas $GL_8 \times GL_3$ -órbitas son distintas.

Ahora consideremos la cuestión (iii) planteada arriba. Recientemente, A. Kaplan y A. Tiraboschi probaron en [KT12] que para toda álgebra nosingular μ , la proyección del grupo de automorfismo $\text{Aut}(\mu)$ en $\mathfrak{gl}_n = \mathfrak{gl}(\mathfrak{n}_2)$ satisface

$$\dim \text{Aut}(\mu)|_{\mathfrak{n}_2} \leq 1 + \frac{n(n-1)}{2}, \tag{1.2}$$

debido a la existencia de un producto interno $\text{Aut}(\mu)$ -invariante (salvo multiplicación por escalar) en \mathfrak{n}_2 (lo cual generaliza un resultado de L. Saal en el caso de álgebras de tipo- H , ver [S96]). Es bien sabido que la igualdad vale para álgebras tipo- H (ver [Ri82]), y se creyó durante mucho tiempo que esto podría ser una forma de caracterizar a las álgebras tipo- H entre las nosingulares. En Sección 5, mostramos que esto no es verdad probando que el álgebra nosingular $\mu_{\mathcal{S}}$ de tipo $(2, 4k)$, donde $\mathcal{S} = \{(i, k)\}$, la cual es de tipo- H si y sólo si $k = 1$, satisface la igualdad en la condición (1.2) para todo $k \in \mathbb{N}$ (nos hemos enterado recientemente de que este resultado ha sido obtenido independientemente en [KT12]).

Capítulo 2

Preliminares

En primer lugar, comencemos viendo algunas definiciones básicas, y enunciemos algunos resultados ya conocidos.

2.1 Álgebras 2-pasos nosingulares

Consideremos un espacio vectorial real \mathfrak{n} y fijemos una descomposición en suma directa

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2, \quad \dim \mathfrak{n}_1 = m, \quad \dim \mathfrak{n}_2 = n.$$

Toda álgebra de Lie 2-pasos nilpotente de dimensión $m + n$ con álgebra derivada de dimensión $\leq n$ se puede representar por un mapa bilineal antisimétrico

$$\mu : \mathfrak{n}_1 \times \mathfrak{n}_1 \longrightarrow \mathfrak{n}_2.$$

El conjunto de tales mapas es el espacio vectorial $V_{n,m} := \Lambda^2 \mathfrak{n}_1^* \otimes \mathfrak{n}_2$ de dimensión $n \binom{m}{2}$, y un elemento $\mu \in V_{n,m}$ se dice que es de *tipo* (n, m) si $\mu(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_1) = \mathfrak{n}_2$. Notemos que estos elementos forman un subconjunto abierto y denso de $V_{n,m}$, y dos de ellos son isomorfos como álgebras de Lie si y sólo si viven en la misma $\mathrm{GL}_m \times \mathrm{GL}_n$ -órbita con respecto a la acción natural:

$$(\psi, \varphi) \cdot \mu := \varphi \mu(\psi^{-1} \cdot, \psi^{-1} \cdot), \quad (\psi, \varphi) \in \mathrm{GL}_m \times \mathrm{GL}_n, \quad \mu \in V_{n,m}. \quad (2.1)$$

Aquí y en el resto de esta tesis, GL_n denotará el grupo lineal general real $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Si fijamos bases $\{X_1, \dots, X_m\}$ y $\{Z_1, \dots, Z_n\}$ de \mathfrak{n}_1 y \mathfrak{n}_2 , respectivamente, entonces cada $\mu \in V_{n,m}$ está determinado por sus constantes de estructura $\mu_{ij}^k \in \mathbb{R}$ definidas por

$$\mu(X_i, X_j) = \sum_k \mu_{ij}^k Z_k.$$

Una forma alternativa de reordenar las constantes de estructuras de μ es fijar el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en \mathfrak{n} que hace ortogonal a la base anterior para definir $J_\mu : \mathfrak{n}_2 \longrightarrow \mathfrak{so}(\mathfrak{n}_1)$ por

$$\langle J_\mu(Z)X, Y \rangle = \langle \mu(X, Y), Z \rangle, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{n}_1, Z \in \mathfrak{n}_2.$$

En realidad, la entrada ij de la matriz de $J_\mu(Z_k)$ está dada precisamente por $-\mu_{ij}^k$.

Ejemplo 2.1.1. El álgebra 2-pasos 11-dimensional $\mu \in V_{3,8}$ definida por

$$\begin{aligned} \mu(X_1, X_3) &= -Z_1, & \mu(X_1, X_5) &= -Z_2, & \mu(X_1, X_7) &= -2Z_2 + \sqrt{2}Z_3, \\ \mu(X_2, X_4) &= -Z_1, & \mu(X_2, X_6) &= -Z_2, & \mu(X_2, X_8) &= -Z_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}Z_3, \\ \mu(X_3, X_6) &= -Z_3, & \mu(X_3, X_8) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}Z_2, & \mu(X_4, X_6) &= -Z_3, \\ \mu(X_4, X_8) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}Z_2, & \mu(X_5, X_8) &= -Z_1, & \mu(X_6, X_7) &= -Z_1, \end{aligned}$$

se puede representar por su mapa estructural J_μ dado por

$$J_\mu(xZ_1 + yZ_2 + zZ_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & x & 0 & y & 0 & 2y - \sqrt{2}z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 & y & 0 & y + \frac{1}{\sqrt{2}}z \\ -x & 0 & 0 & 0 & z & 0 & \sqrt{2}y & 0 \\ 0 & -x & 0 & 0 & 0 & z & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}y \\ -y & 0 & -z & 0 & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & -y & 0 & -z & 0 & 0 & x & 0 \\ -2y + \sqrt{2}z & 0 & -\sqrt{2}y & 0 & 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & -y - \frac{1}{\sqrt{2}}z & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}y & -x & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nos dedicamos al estudio de la siguiente clase especial de álgebras.

Definición 2.1.2. Un álgebra 2-pasos $(\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2, \mu)$, $\mu \in V_{n,m}$, se llama *nonsingular* si alguna de las siguientes condiciones vale:

- El mapa $\mathfrak{n}_1 \rightarrow \mathfrak{n}_2$, $Y \mapsto \mu(X, Y)$ es sobre para todo $X \in \mathfrak{n}_1$ no nulo.
- Para cada $Z \in \mathfrak{n}_2$ no nulo, el mapa $(X, Y) \mapsto \langle \mu(X, Y), Z \rangle$ es una 2-forma no-degenerada en \mathfrak{n}_1 .
- $J_\mu(Z)$ es invertible para todo $Z \in \mathfrak{n}_2$ no nulo.

Es fácil ver que estas condiciones son en realidad equivalentes y no dependen del producto interno elegido. Resulta de las fuertes restricciones para el número maximal de campos vectoriales linealmente independientes en esferas que las álgebras nonsingulares sólo pueden existir en dimensiones muy especiales. En realidad, si $m = (2a + 1)2^{4b+c}$, donde $0 \leq c \leq 3$, entonces $n \leq 2^c + 8b - 1$. En particular, para $n \leq 11$ se tiene

$$\frac{n}{m} \mid \frac{1}{2k} \mid \frac{2-3}{4k} \mid \frac{4-7}{8k} \mid \frac{8}{16k} \mid \frac{9}{32k} \mid \frac{10-11}{64k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

El subconjunto $V_{n,m}^+ \subset V_{n,m}$ de álgebras nonsingulares es claramente abierto en $V_{n,m}$, aunque no siempre es denso. Por ejemplo, $V_{2,4}^+$ consiste de una sola $GL_4 \times GL_2$ -órbita de dimensión 12, la correspondiente al álgebra tipo- H (real) $\mathfrak{h}_3 \otimes \mathbb{C}$ (donde \mathfrak{h}_3 denota el álgebra de Heisenberg real 3-dimensional), pero la órbita de $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathfrak{h}_3$ es también 12-dimensional (y abierta) y así $V_{2,4}^+$ no es denso en $V_{2,4}$.

Hay un gran escasez de invariantes a disposición para distinguir clases de isomorfismos en $V_{n,m}$, incluso para elementos nonsingulares. Una clasificación completa sólo se conoce para los tipos $(1, m)$ (todas álgebras de salvo factores abelianos), $(2, m)$ (ver [G73] o Sección 4.2), $(5, 5)$ y (n, m) con $n + m \leq 9$ (sobre \mathbb{C} , ver [GT99]). Por invariante queremos decir una función de $V_{n,m}$ a algún conjunto X que sea constante en las $GL_m \times GL_n$ -órbitas, proporcionando una condición necesaria para que dos álgebras sean isomorfas: los valores del invariante en dos álgebras isomorfas deben coincidir.

En las siguientes secciones consideramos diferentes enfoques para obtener invariantes.

2.2 Teoría geométrica de invariantes real

Sea G un grupo reductivo real que actúa linealmente en un espacio vectorial real de dimensión finita V . La definición precisa de nuestro marco es la considerada en [RS90], o la más general de [HSS08] (ver también [EJ07]), donde muchos resultados de teoría de invariantes geométrica son adaptados y probados sobre \mathbb{R} .

La derivada de la acción anterior define una representación del álgebra de Lie \mathfrak{g} de G en V , la cual será denotada por $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$. Consideremos una descomposición de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, donde \mathfrak{k} es el álgebra de Lie de un subgrupo compacto maximal K de G . De ahora en adelante, dotemos a V con un producto interno K -invariante fijo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tal que \mathfrak{p} actúa en V por operadores simétricos, y dotemos a \mathfrak{p} con un producto interno $\text{Ad}(K)$ -invariante denotado también por $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

La función $m : V \rightarrow \mathfrak{p}$ definida implícitamente por

$$\langle m(v), \alpha \rangle = \frac{1}{\|v\|^2} \langle \pi(\alpha)v, v \rangle, \quad \forall \alpha \in \mathfrak{p}, v \in V \setminus \{0\}, \quad m(0) = 0,$$

se llama el *aplicación momento* para la representación V de G . Puesto que $m(cv) = m(v)$ para todo $c \in \mathbb{R}$ no nulo, podemos ver también la aplicación momento como definida en el espacio proyectivo $\mathbb{P}V$ de V . Es fácil ver que m es K -equivariante: $m(k.v) = \text{Ad}(k)m(v)$ para todo $k \in K$.

Denotemos por $\mathcal{M} = \mathcal{M}(G, V)$ al conjunto de *vectores minimales*, es decir,

$$\mathcal{M} = \{v \in V : \|v\| \leq \|g.v\| \quad \forall g \in G\}.$$

En [RS90], los siguientes resultados fueron obtenidos:

- una órbita $G.v$ es cerrada si y sólo si $G.v$ interseca a \mathcal{M} ;
- $G.v \cap \mathcal{M}$ es vacío o consiste de una sola K -órbita;
- la clausura de cualquier G -órbita contiene una única G -órbita cerrada;
- $\mathcal{M} = \{v \in V : m(v) = 0\}$.

La función cuadrado de la norma de la aplicación momento,

$$F_m : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_m(v) := \|m(v)\|^2, \quad (2.2)$$

es invariante por multiplicación por escalares y por lo tanto puede ser vista como una función desde cualquier esfera de V o de $\mathbb{P}V$. Los restantes puntos críticos de F_m además de los vectores minimales (es decir aquellos para los cuales $F_m(v) > 0$), son todos *inestables* (es decir $0 \in \overline{G.v}$), pero la mayoría de las lindas propiedades que satisfacen los vectores minimales descritas arriba se mantienen. Denotemos por $\mathcal{C}(F_m)$ al conjunto de puntos críticos de $F_m : V \rightarrow \mathbb{R}$.

Teorema 2.2.1. [Mr01, HSS08] *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (i) $v \in \mathcal{C}(F_m)$.
- (ii) La funcional $F_m|_{G.v}$ alcanza su valor mínimo en v .

(iii) $\pi(m(v))v = cv$ para algún $c \in \mathbb{R}$.

Además, se cumple la siguiente propiedad de unicidad:

(iv) La intersección de $\mathcal{C}(F_m)$ con cualquier G -órbita es vacía o consiste de una sola K -órbita (salvo multiplicación por escalares).

Resulta de la parte (iv) que dos G -órbitas que contienen puntos críticos de F_m se pueden distinguir usando K -invariantes, los cuales son siempre muchos más abundantes. Este método será usado en varias oportunidades a lo largo de la tesis.

Ejemplo 2.2.2. Consideremos la acción lineal natural de $G = \mathrm{GL}_n$ en $V = P_{n,d}$ dada por $\varphi \cdot f = f \circ \varphi^{-1}$, donde $P_{n,d} := P_{n,d}(\mathbb{R})$ es el álgebra de todos los polinomios homogéneos de grado d en n variables con coeficientes en \mathbb{R} . Tenemos que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n, \quad K = \mathrm{O}(n), \quad \mathfrak{k} = \mathfrak{so}(n) \quad \text{y} \quad \mathfrak{p} = \mathrm{sym}(n).$$

Como producto interno $\mathrm{Ad}(K)$ -invariante en \mathfrak{p} tomamos $\langle \alpha, \beta \rangle = \mathrm{tr} \alpha \beta$, y es fácil ver que el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en V para el cual la base de monomios

$$\{x^D := x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n} : d_1 + \dots + d_n = d, D = (d_1, \dots, d_n)\}$$

es ortogonal y

$$\|x^D\|^2 = \frac{d_1! \dots d_n!}{d!}, \quad \forall D = (d_1, \dots, d_n),$$

satisface las condiciones requeridas. Es fácil ver que $\langle f \circ \alpha, g \rangle = \langle f, g \circ \alpha^t \rangle$ para todo $f, g \in P_{n,d}$, $\alpha \in \mathfrak{gl}_n$ (ver por ejemplo [R10, (1.30)]). Como es usual denotemos por E_{ij} a la matriz $n \times n$ cuyo único coeficiente no nulo es un 1 en la entrada ij . Como

$$\pi(E_{ij})f = \frac{d}{dt} \Big|_0 f \circ e^{-tE_{ij}} = -x_j \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

obtenemos que la aplicación momento $m : P_{n,d} \rightarrow \mathrm{sym}(n)$ está dada por

$$m(f) = -\frac{1}{\|f\|^2} \left[\left\langle x_j \frac{\partial f}{\partial x_i}, f \right\rangle \right]. \quad (2.3)$$

Aquí usamos que $\langle x_j \frac{\partial f}{\partial x_i}, f \rangle = \langle x_i \frac{\partial f}{\partial x_j}, f \rangle$ for all i, j . También es fácil ver que la acción de una matriz diagonal $\alpha \in \mathfrak{gl}_n$ con entradas a_1, \dots, a_n está dada por

$$\pi(\alpha)x^D = -\left(\sum_{i=1}^n a_i d_i \right) x^D, \quad \forall D = (d_1, \dots, d_n), \quad (2.4)$$

y puesto que

$$m(x^D) = \begin{bmatrix} -d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & -d_n \end{bmatrix},$$

tenemos que x^D es un autovalor de $m(x^D)$ con autovalor $F_m(x^D) = \sum d_i^2$. Todo monomial es por lo tanto un punto crítico de F_m por el Teorema 2.2.1, aunque se sabe que $\mathcal{C}(F_m)$ es mucho más amplio (ver [N84, Sección 10] and [L09, Ejemplo 11.5]).

Ejemplo 2.2.3. Ahora, usando (2.3), calculamos la aplicación momento para el polinomio

$$p(x, y, z) = x^4 + y^4 + \sqrt{\frac{t^2+12}{12}}z^4 + tx^2y^2.$$

En este caso, tenemos que,

$$\frac{\partial}{\partial x}p = 4x^3 + 2txy^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}p = 4y^3 + 2tx^2y,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}p = \frac{2}{3}\sqrt{3t^2 + 36}z^3,$$

$$\begin{aligned} \|p\|^2 &= \left\langle x^4 + y^4 + \sqrt{\frac{t^2+12}{12}}z^4 + tx^2y^2, x^4 + y^4 + \sqrt{\frac{t^2+12}{12}}z^4 + tx^2y^2 \right\rangle \\ &= 4! + 4! + \frac{t^2+12}{12} \cdot 4! + 2 \cdot 2 \cdot t^2 \\ &= 6t^2 + 72. \end{aligned}$$

Entonces

$$\left\langle x \cdot \frac{\partial}{\partial x}p, p \right\rangle = \left\langle 4x^4 + 2tx^2y^2, x^4 + y^4 + \sqrt{\frac{t^2+12}{12}}z^4 + tx^2y^2 \right\rangle$$

$$= 4 \cdot 4! + 2t^2 \cdot 4$$

$$= 8(t^2 + 12),$$

$$\left\langle y \cdot \frac{\partial}{\partial y}p, p \right\rangle = \left\langle 4y^4 + 2tx^2y^2, x^4 + y^4 + \sqrt{\frac{t^2+12}{12}}z^4 + tx^2y^2 \right\rangle$$

$$= 4 \cdot 4! + 2t^2 \cdot 4$$

$$= 8(t^2 + 12),$$

$$\left\langle z \cdot \frac{\partial}{\partial z}p, p \right\rangle = \left\langle \frac{2}{3}\sqrt{3t^2 + 36}z^4, x^4 + y^4 + \sqrt{\frac{t^2+12}{12}}z^4 + tx^2y^2 \right\rangle$$

$$= 8(t^2 + 12),$$

$$\left\langle x \cdot \frac{\partial}{\partial y}p, p \right\rangle = \left\langle 4xy^3 + 2tx^3y, x^4 + y^4 + \sqrt{\frac{t^2+12}{12}}z^4 + tx^2y^2 \right\rangle = 0,$$

$$\left\langle x \cdot \frac{\partial}{\partial z}p, p \right\rangle = \left\langle \frac{2}{3}\sqrt{3t^2 + 36}xz^3, x^4 + y^4 + \sqrt{\frac{t^2+12}{12}}z^4 + tx^2y^2 \right\rangle = 0,$$

$$\left\langle y \cdot \frac{\partial}{\partial z}p, p \right\rangle = \left\langle \frac{2}{3}\sqrt{3t^2 + 36}yz^3, x^4 + y^4 + \sqrt{\frac{t^2+12}{12}}z^4 + tx^2y^2 \right\rangle = 0.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} m(p) &= -\frac{1}{6(t^2+12)} \begin{bmatrix} 8(t^2+12) & 0 & 0 \\ 0 & 8(t^2+12) & 0 \\ 0 & 0 & 8(t^2+12) \end{bmatrix} \\ &= -\frac{4}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Consideremos ahora la representación donde viven las álgebras 2-pasos.

Ejemplo 2.2.4. Sea $V = V_{n,m}$ la representación del grupo reductivo real $G = \mathrm{GL}_m \times \mathrm{GL}_n$ dada por (2.1), para la cual tenemos

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_m \oplus \mathfrak{gl}_n, \quad K = \mathrm{O}(m) \times \mathrm{O}(n), \quad \mathfrak{k} = \mathfrak{so}(m) \oplus \mathfrak{so}(n) \quad \text{y} \quad \mathfrak{p} = \mathrm{sym}(m) \oplus \mathrm{sym}(n).$$

Recordemos que hemos fijado un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en \mathfrak{n} . Como producto interno $\mathrm{Ad}(K)$ -invariante en \mathfrak{p} tomamos $\langle \alpha, \beta \rangle = \mathrm{tr} \alpha \beta$ sobre cada factor y el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en V es definido por

$$\langle \mu, \lambda \rangle := \sum_{ij} \langle \mu(X_i, X_j), \lambda(X_i, X_j) \rangle = \sum_{ijk} \mu_{ij}^k \lambda_{ij}^k. \quad (2.5)$$

La correspondiente representación de \mathfrak{g} on V es

$$\pi(\alpha, \beta)\mu = \beta\mu(\cdot, \cdot) - \mu(\alpha\cdot, \cdot) - \mu(\cdot, \alpha\cdot), \quad (2.6)$$

y la aplicación momento $m : V_{n,m} \longrightarrow \mathrm{sym}(m) \oplus \mathrm{sym}(n)$ está dada por

$$m(\mu) = (m_1(\mu), m_2(\mu))$$

(ver por ejemplo [E07]), donde

$$m_1(\mu) = \frac{2}{\|\mu\|^2} \sum_i J_\mu(Z_i)^2, \quad \langle m_2(\mu)Z, W \rangle = -\frac{1}{\|\mu\|^2} \mathrm{tr} J_\mu(Z)J_\mu(W), \quad \forall Z, W \in \mathfrak{n}_2. \quad (2.7)$$

Ejemplo 2.2.5. Usando (2.7) veamos cuál es la aplicación momento para el álgebra μ definida por

$$J_\mu(xZ_1 + yZ_2 + zZ_3) = \begin{bmatrix} 0 & 3x & -\sqrt{3}y & -\sqrt{3}z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3x & 0 & \sqrt{3}z & -\sqrt{3}y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}y & -\sqrt{3}z & 0 & x & -2y & -2z & 0 & 0 \\ \sqrt{3}z & \sqrt{3}y & -x & 0 & 2z & -2y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2y & -2z & 0 & -x & -\sqrt{3}y & -\sqrt{3}z \\ 0 & 0 & 2z & 2y & x & 0 & \sqrt{3}z & -\sqrt{3}y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}y & -\sqrt{3}z & 0 & -3x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}z & \sqrt{3}y & 3x & 0 \end{bmatrix}.$$

Claramente

$$J_\mu(Z_1) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$J_\mu(Z_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$J_\mu(Z_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Además, por (2.5), tenemos que

$$\|\mu\|^2 = \sum_{ijk} (\mu_{ij}^k)^2 = 60.$$

Entonces

$$\begin{aligned} m_1(\mu) &= \frac{2}{60} (J_\mu(Z_1)^2 + J_\mu(Z_2)^2 + J_\mu(Z_3)^2) \\ &= \frac{2}{60} \begin{bmatrix} -15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{2}I_8, \\ m_2(\mu) &= -\frac{1}{\|\mu\|^2} [\text{tr } J_\mu(Z_i)J_\mu(Z_j)] \\ &= -\frac{1}{60} \begin{bmatrix} -40 & 0 & 0 \\ 0 & -40 & 0 \\ 0 & 0 & -40 \end{bmatrix} \\ &= \frac{2}{3}I_3. \end{aligned}$$

Capítulo 3

Formas Pfaffianas

En este capítulo, veremos una aplicación de la forma Pfaffiana de un álgebra 2-pasos para distinguir tales álgebras salvo isomorfismo (de álgebras de Lie), debida a un resultado de Scheuneman [Sc67]. También trataremos con el problema clásico de representar polinomios homogéneos (*formas*) de grado d , con coeficientes en \mathbb{F} , como el Pfaffiano de una matriz antisimétrica $d \times d$, cuyas entradas son formas lineales (*representación Pfaffiana lineal*). El caso concreto $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ha sido ampliamente estudiado. En este trabajo, estudiamos el caso $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, para ternarias cuárticas *positivas*. Probaremos que todas ellas admiten una representación Pfaffiana lineal (Teorema 3.4.2).

3.1 Forma Pfaffiana e invariantes

Asociamos a cada $\mu \in V_{n,m}$ su *forma Pfaffiana* f_μ definida por

$$f_\mu(x_1, \dots, x_n) = \text{Pf}(J_\mu(x_1 Z_1 + \dots + x_n Z_n)),$$

donde $\text{Pf} : \mathfrak{so}(\mathfrak{n}_1) \rightarrow \mathbb{R}$ es el Pfaffiano usual, es decir, la única función polinomial que satisface $\text{Pf}(B)^2 = \det B$ para todo $B \in \mathfrak{so}(\mathfrak{n}_1)$ y $\text{Pf}(J) = 1$ para alguna $J \in \mathfrak{so}(\mathfrak{n}_1)$ fija que tiene solamente $\pm i$ como autovalores (ver por ejemplo [M03, 10.3] para más información de Pfaffianos de matrices antisimétricas). Recordemos que $J_\mu(Z)$ es una matriz $m \times m$ antisimétrica y puesto que

$$f_\mu(Z)^2 = \det J_\mu(Z),$$

necesitamos que m sea par para obtener $f_\mu \neq 0$.

Supongamos entonces que m es par, digamos $m = 2d$, y así el Pfaffiano determina una función continua

$$f : V_{n,2d} \rightarrow P_{n,d}, \quad \mu \mapsto f_\mu, \quad (3.1)$$

donde $P_{n,d} := P_{n,d}(\mathbb{R})$ es el álgebra de todos los polinomios homogéneos de grado d en n variables con coeficientes en \mathbb{R} (algunas veces llamadas *formas n -arias d -ádicas*). Hay una GL_n -acción a izquierda natural en $P_{n,d}$ dada por $\varphi \cdot f := f \circ \varphi^{-1}$ (ver Ejemplo 2.2.2).

Ejemplo 3.1.1. Por un cálculo directo se obtiene que la forma Pfaffiana del álgebra en el Ejemplo 2.1.1 está dada por

$$f_\mu(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4.$$

La clase de equivalencia proyectiva de la forma $f_\mu(x_1, \dots, x_n)$ es un invariante de isomorfismo del álgebra de Lie (\mathfrak{n}, μ) (ver [Sc67] o [L08, Proposición 2.4]). Más precisamente, si $\mu, \lambda \in V_{n,m}$ son isomorfas, entonces f_μ y f_λ son *proyectivamente equivalentes* (denotado por $f_\mu \simeq f_\lambda$), es decir existe $\varphi \in \text{GL}_n$ y $c \neq 0$ tales que

$$f_\lambda(x_1, \dots, x_n) = cf_\mu(\varphi(x_1, \dots, x_n)), \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

En realidad, esto se deduce del siguiente hecho: si $\lambda = (\psi, \varphi) \cdot \mu$ para algún $(\psi, \varphi) \in \text{GL}_{2d} \times \text{GL}_n$, entonces

$$J_\lambda(Z) = (\psi^{-1})^t J_\mu(\varphi^t Z) \psi^{-1}$$

para todo Z y así $f_\lambda = (\det \psi)^{-1} f_\mu \circ \varphi^t$.

Ejemplo 3.1.2. La forma Pfaffiana del álgebra $\mu \in V_{3,8}$ considerada en Ejemplo 2.2.5 está dada por $f_\mu(x, y, z) = 9(x^2 + y^2 + z^2)^2$, y en consecuencia, no es isomorfa al álgebra de los Ejemplos 2.1.1-3.1.1.

Es posible entonces usar invariantes de formas para distinguir álgebras en $V_{n,m}$ salvo isomorfismo. Consideremos el anillo $\mathbb{R}[P_{n,d}]^{\text{SL}_n}$ de polinomios SL_n -invariantes en $P_{n,d}$, es decir, el conjunto de todas las funciones polinomiales $I : P_{n,d} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$I(\varphi \cdot f) = I(f) \quad \forall \varphi \in \text{SL}_n, \quad f \in P_{n,d}.$$

Es bien conocido que I es invariante si y sólo si cada una de sus componentes homogéneas lo es. Sin embargo, un conjunto de generadores y sus relaciones para el anillo $\mathbb{R}[P_{n,d}]^{\text{SL}_n}$ sólo se conoce para algunos valores pequeños de n y d , incluyendo $d = 2$ y cualquier n , $n = 2$ y $d \leq 8$, $n = 3$ y $d \leq 3$. Referimos a los libros [Do03, M03], donde muchos resultados de clasificación explícitos de formas e invariantes de formas son desarrollados.

Lema 3.1.3. *Para $f, g \in P_{n,d}$, n impar, supongamos que existen invariantes homogéneos $I, I' \in \mathbb{R}[P_{n,d}]^{\text{SL}_n}$ del mismo grado tales que $I'(f), I'(g) \neq 0$ y*

$$\frac{I(f)}{I'(f)} \neq \frac{I(g)}{I'(g)}.$$

Entonces f no es proyectivamente equivalente a g .

Prueba. Apliquemos el hecho de que para n impar se tiene $\text{GL}_n = \mathbb{R}^* \text{SL}_n$. Si f y g son proyectivamente equivalentes, existen $\tilde{\varphi} \in \text{GL}_n = \mathbb{R}^* \text{SL}_n$ y $c_0 \in \mathbb{R}^*$ con $f = c_0 \tilde{\varphi} \cdot g$. Es decir, $f = c_0 c \varphi \cdot g$, donde $c, c_0 \in \mathbb{R}^*$ y $\varphi \in \text{SL}_n$.

Como $I, I' \in \mathbb{R}[P_{n,d}]^{\text{SL}_n}$ son polinomios homogéneos, digamos de grado k , resulta que

$$I(f) = I(c_0 c \varphi \cdot g) = (cc_0)^k I(g), \quad I'(f) = I'(c_0 c \varphi \cdot g) = (cc_0)^k I'(g),$$

de donde se deduce que

$$\frac{I(f)}{I'(f)} = \frac{I(g)}{I'(g)},$$

una contradicción. □

Ejemplo 3.1.4. Supongamos que tenemos una familia 1-paramétrica $\mu_t \in V_{3,8}$ de álgebras 2-pasos con formas Pfaffianas

$$f_{\mu_t}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^2 + tx^2y^2 \in P_{3,4}.$$

La cuestión es: ¿es esto realmente una ‘curva’ de álgebras, en el sentido que μ_t no es isomorfa a μ_s para todo $t \neq s$? Si escribimos cualquier ternaria cuártica $f \in P_{3,4}$ como

$$f(x, y, z) = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4 + 4fx^3z + 12gx^2yz + 12hxy^2z + 4iy^3z + 6jx^2z^2 + 12kxyz^2 + 6ly^2z^2 + 4mzx^3 + 4nyz^3 + pz^4, \quad (3.2)$$

entonces de [Di87] obtenemos los siguientes polinomios homogéneos SL_3 -invariantes en $P_{3,4}$ de grado 3 y 6, respectivamente:

$$\begin{aligned} I_3(f) := & aep + 3(al^2 + ej^2 + pc^2) + 4(bim + fdn) \\ & - 4(ain + efm + pbd) + 6cjl + 12(ck^2 + jh^2 + lg^2) - 12ghk \\ & - 12(bkl + fhl + dkj + igj + mhc + ngc) + 12(gdm + hnb + kfi), \end{aligned}$$

y

$$I_6(f) := \det H(f), \quad \text{where } H(f) := \begin{vmatrix} a & c & j & g & f & b \\ c & e & l & i & h & d \\ j & l & p & n & m & k \\ g & i & n & l & k & h \\ f & h & m & k & j & g \\ b & d & k & h & g & c \end{vmatrix}. \quad (3.3)$$

El invariante $I_6(f)$ se llama el *catalecticant* y $H(f)$ la matriz de *Hankel* (o forma cuadrática) de f . Hay otros cinco invariantes descritos en [Di87] de grado 9, 12, 15, 18 and 27, respectivamente, los cuales son más difíciles de manejar. De cualquier forma, por un cálculo directo, obtenemos que

$$I_6(f_{\mu_t}) = -\frac{1}{1944}t^3 - \frac{7}{2916}t^2 + \frac{8}{729}t + \frac{20}{729}, \quad I_3(f_{\mu_t}) = \frac{1}{12}t^2 + \frac{4}{9}t + \frac{20}{9},$$

y así

$$\frac{I_6(f_{\mu_t})}{I_3(f_{\mu_t})^2} = -\frac{2}{9} \frac{(3t^3 + 14t^2 - 64t - 160)}{(3t^2 + 16t + 80)^3},$$

la cual resulta una función inyectiva para $t \in [12, \infty)$. Así las f_{μ_t} , $t \geq 12$, pertenecen a clases de equivalencia proyectivas diferentes por el Lema 3.1.3, lo cual implica que μ_t , $t \geq 12$, representa una familia de álgebras nosingulares no-isomorfas dos-a-dos de tipo (3, 8). Otros intervalos para t que llevan a la misma conclusión son $(-\infty, -4]$, $[-4, 0]$ y $[0, 12]$.

3.2 Polinomios positivos

El siguiente hecho elemental, pero también crucial e intrigante, resulta de la tercera condición en la Definición 2.1.2,

$\mu \in V_{n,2d}$ es nosingular si y sólo si f_μ (o $-f_\mu$) es un polinomio *positivo*, es decir, $f_\mu(x_1, \dots, x_n) > 0$ para todo $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ no nulo.

Por ejemplo, las álgebras 2-pasos de tipo (3,8) dadas en los Ejemplos 2.1.1-3.1.1 y 3.1.2 son ambas nosingulares. Nótese que una de las formas $\pm f \in P_{n,d}$ es positiva si y sólo f se anula solamente en $0 \in \mathbb{R}^n$, y así para la existencia de formas d -ádicas positivas nonulas, d debe ser par. El subconjunto $P_{n,d}^+ \subset P_{n,d}$ de formas positivas es abierto, más precisamente, es el interior del cono convexo cerrado de todas las formas n -arias d -ádicas *no-negativas* (es decir $f \geq 0$) (ver por ejemplo [R10, Teorema 3.14]).

Aunque la teoría de polinomios positivos tiene una larga y rica historia en la literatura, incluyendo el Problema 17 de Hilbert (ver [R10] para más información), una clasificación completa de ellos salvo equivalencia proyectiva parece ser tan difícil como la clasificación de todas las formas, y por lo tanto se desconoce y es casi intratable, incluso en casos de dimensión baja como las ternarias cuárticas (es decir para el tipo $(n, m) = (3, 8)$).

Ejemplo 3.2.1. Hay solamente una forma cuadrática positiva $f \in P_{n,2}$ salvo equivalencia proyectiva; a saber, $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2$. La familia $(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{d/2}$ proporciona ejemplos para cualquier grado par $d \geq 2$ de polinomios positivos cuya SL_n -órbita es cerrada y sin embargo son *singulares* (es decir $\frac{\partial}{\partial x_i} f = 0$, $i = 1, \dots, n$ tiene una solución nonula en \mathbb{C}^n) para $d \geq 4$. Sus SL_n -órbitas no son de dimensión maximal, pues sus subgrupos de isotropía son todos iguales a $O(n)$.

Ejemplo 3.2.2. Una forma binaria d -ádica compleja $f \in P_{2,d}(\mathbb{C})$ puede ser identificada (salvo multiplicación por un escalar) con su conjunto de ceros en $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}\mathbb{C}^2$ como sigue:

$$f(x, y) = \prod_{i=1}^d (a_i y - b_i x) \quad \leftrightarrow \quad \mathcal{Z}(f) = \{(a_1 : b_1), \dots, (a_d : b_d)\} \subset \mathbb{P}^1.$$

La $SL_2(\mathbb{C})$ -acción en el espacio proyectivo de $P_{2,d}(\mathbb{C})$ es por lo tanto equivalente a la acción en subconjuntos de d puntos no-ordenados en \mathbb{P}^1 (contando multiplicidades). Se conoce bien en teoría de invariantes (ver por ejemplo [Do03, M03]) que

- f es *semistable* (es decir $0 \notin \overline{SL_2(\mathbb{C}) \cdot f}$) si y sólo si todo elemento en $\mathcal{Z}(f)$ tiene multiplicidad $\leq d/2$.
- f es *estable* (es decir $SL_2(\mathbb{C}) \cdot f$ es cerrado y el subgrupo de isotropía en f es finito) si y sólo si todo elemento en $\mathcal{Z}(f)$ tiene multiplicidad $< d/2$.

Se deduce fácilmente que $f \in P_{2,d}(\mathbb{C})$ es real y positivo si sólo si d es par y

$$\mathcal{Z}(f) = \{(1 : \alpha_1), (1 : \overline{\alpha_1}), \dots, (1 : \alpha_{d/2}), (1 : \overline{\alpha_{d/2}})\}, \quad \text{con } \alpha_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Las formas binarias positivas son por lo tanto todas estables con la única excepción de $(x^2 + y^2)^{d/2}$, la cual todavía tiene $SL_2(\mathbb{C})$ -órbita cerrada de cualquier manera. Como para una forma real f , su $SL_2(\mathbb{C})$ -órbita es cerrada si y sólo si su $SL_2(\mathbb{R})$ -órbita lo es (ver por ejemplo [BH62, Proposición 2.3] y [B71, Corolario 5.3]), resulta que $SL_2(\mathbb{R}) \cdot f$ es cerrado para cualquier forma binaria positiva f .

Ejemplo 3.2.3. Hilbert [H88] probó que cualquier ternaria cuártica no-negativa, así como también cualquier forma binaria o cuadrática, es suma de cuadrados (Hilbert también

mostró que esto no vale para ningún otro caso). Se sabe también que $f \in P_{3,4}$ (o f una forma binaria o cuadrática) es suma de cuartas potencias de formas lineales (y consecuentemente $f \geq 0$) si y sólo si su matriz de Hankel $H(f)$ (ver (3.3)) es semidefinida positiva (ver el segundo párrafo después de [R10, (5.25)] y corregir un error de tipeo reemplazando la primera Q por P). Esto no es cierto en los otros casos. Sin embargo, F. Cukierman probó en [C07] que para toda forma $f \in P_{n,d}$, tenemos que si $f > 0$ ($f \geq 0$) entonces $H(f) > 0$ ($H(f) \geq 0$).

Notemos que la positividad es una noción que solamente tiene sentido sobre \mathbb{R} , y es por lo tanto difícil estudiar las propiedades de formas positivas desde el punto de vista de la teoría de invariantes, un campo principalmente desarrollado sobre cuerpos algebraicamente cerrados. Hemos visto en los ejemplos 3.2.1 y 3.2.2 que las formas binarias y cuadráticas positivas tienen SL_n -órbitas cerradas. No sabemos si esto es cierto también para cualquier forma positiva. Ciertamente falla en el caso no-negativo, por ejemplo $0 \in \overline{\mathrm{SL}_n \cdot x_1^d}$ para todo $n \geq 2$ (y d par). De todas maneras, probamos ahora que una forma positiva es al menos siempre semiestable, lo cual nos será muy útil en el estudio de existencia de nilsolitones para álgebras nosingulares.

Lema 3.2.4. *Si $f \in P_{n,d}$ es positiva, entonces $0 \notin \overline{\mathrm{SL}_n \cdot f}$.*

Prueba. Supongamos que $0 \in \overline{\mathrm{SL}_n \cdot f}$, es decir, existe una sucesión $\varphi_k \in \mathrm{SL}_n$ tal que $f \circ \varphi_k \rightarrow 0$, cuando $k \rightarrow \infty$. Si $S \subset \mathbb{R}^n$ es cualquier esfera, entonces obtenemos la siguiente contradicción:

$$\begin{aligned} 0 < \min(f|_S) \mathrm{vol}(S) &= \min(f|_S) \mathrm{vol}(\varphi_k(S)) \\ &\leq \int_{\varphi_k(S)} f = \int_S f \circ \varphi_k \leq \max(f \circ \varphi_k|_S) \mathrm{vol}(S) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

cuando $k \rightarrow \infty$, concluyendo la prueba del lema. □

3.3 Laplaciano

Resulta del Teorema 2.2.1, (iv) que los $O(n)$ -invariantes de formas n -arias juegan un rol clave en distinguir puntos críticos de $F_m : P_{n,d} \rightarrow \mathbb{R}$. Por lo tanto, consideremos el *Laplaciano* $\Delta : P_{n,d} \rightarrow P_{n,d-2}$ definido por

$$\Delta(f) := \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}.$$

Es bien conocido que el laplaciano es $O(n)$ -equivariante, lo cual demostramos a continuación por completitud.

Lema 3.3.1.

$$\Delta(\varphi \cdot f) = \varphi \cdot \Delta(f), \quad \text{para todo } \varphi \in O(n), \quad f \in P_{n,d}.$$

Prueba. Sean $\varphi = (a_{ij}) \in O(n)$, $f = f(u_1, \dots, u_k) \in P_{k,n}(\mathbb{R})$. Llamemos $f_m = \frac{\partial f}{\partial u_m}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\Delta(\varphi \cdot f) &= \Delta(f(\sum_i a_{1i}x_i, \sum_i a_{2i}x_i, \dots, \sum_i a_{ni}x_i)) \\
&= \sum_j \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f(\sum_i a_{1i}x_i, \sum_i a_{2i}x_i, \dots, \sum_i a_{ni}x_i) \\
&= \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\sum_m a_{mj} \cdot f_m(\sum_i a_{1i}x_i, \sum_i a_{2i}x_i, \dots, \sum_i a_{ni}x_i)) \\
&= \sum_j \sum_m a_{mj} \frac{\partial}{\partial x_j} f_m(\sum_i a_{1i}x_i, \sum_i a_{2i}x_i, \dots, \sum_i a_{ni}x_i) \\
&= \sum_j \sum_m a_{mj} \sum_l a_{lj} \cdot f_{ml}(\sum_i a_{1i}x_i, \sum_i a_{2i}x_i, \dots, \sum_i a_{ni}x_i) \\
&= \sum_j \sum_m \sum_l a_{mj} a_{lj} f_{ml}(\sum_i a_{1i}x_i, \sum_i a_{2i}x_i, \dots, \sum_i a_{ni}x_i) \\
&= \sum_j (\sum_m \sum_l a_{mj} a_{lj} f_{ml}(\sum_i a_{1i}x_i, \sum_i a_{2i}x_i, \dots, \sum_i a_{ni}x_i)) \\
&= \sum_j \sum_{m=l} a_{mj} a_{lj} \cdot f_{ml}(\sum_i a_{1i}x_i, \sum_i a_{2i}x_i, \dots, \sum_i a_{ni}x_i) \\
&\quad + \sum_j \sum_{m \neq l} a_{mj} a_{lj} \cdot f_{ml}(\sum_i a_{1i}x_i, \sum_i a_{2i}x_i, \dots, \sum_i a_{ni}x_i) \\
&= \sum_j \sum_m a_{mj}^2 \cdot f_{mm}(\sum_i a_{1i}x_i, \sum_i a_{2i}x_i, \dots, \sum_i a_{ni}x_i) + \\
&\quad + 2 \cdot \sum_j \sum_{m < l} a_{mj} a_{lj} \cdot f_{ml}(\sum_i a_{1i}x_i, \sum_i a_{2i}x_i, \dots, \sum_i a_{ni}x_i) \\
&= \sum_m (\sum_j a_{mj}^2) \cdot f_{mm}(\sum_i a_{1i}x_i, \sum_i a_{2i}x_i, \dots, \sum_i a_{ni}x_i) + \\
&\quad + 2 \sum_{m < l} (\sum_j a_{mj} a_{lj}) f_{ml}(\sum_i a_{1i}x_i, \sum_i a_{2i}x_i, \dots, \sum_i a_{ni}x_i) \\
&= \sum_m f_{mm}(\sum_i a_{1i}x_i, \sum_i a_{2i}x_i, \dots, \sum_i a_{ni}x_i) \\
&= \varphi \cdot \Delta(f).
\end{aligned}$$

Como $\varphi \in O(n)$, entonces $\sum_j a_{mj}^2 = 0$ para todo $1 \leq m \leq n$, y $\sum_j a_{mj} a_{lj} = 0$ para todo $1 \leq m < l \leq n$. \square

Ejemplo 3.3.2. ¿Son las ternarias cuárticas

$$f_t = x^4 + y^4 + z^4 + tx^2y^2$$

dos-a-dos no proyectivamente equivalentes? El argumento usado en el Ejemplo 3.1.4 en términos de SL_3 -invariantes no funciona aquí pues $I_6(f_t) = 0$ para todo t . Sin embargo, si consideramos

$$\varphi_t \cdot f_t = x^4 + y^4 + (1 + t^2/12)^{1/2} z^4 + tx^2y^2, \quad \text{donde } \varphi_t := \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & (1+t^2/12)^{-1/8} \end{bmatrix},$$

entonces sabemos de Ejemplo 2.2.3 que $m(\varphi_t \cdot f_t) = -\frac{4}{3}I$. Esto implica que $\varphi_t \cdot f_t \in \mathcal{C}(F_m)$ para todo t por Teorema 2.2.1, (iii). De acuerdo al Teorema 2.2.1, (iv) ahora sólo necesitamos diferenciar $\varphi_t \cdot f_t$ con $O(3)$ -invariantes (salvo multiplicación por escalares). Un cálculo del Laplaciano da

$$\Delta(\varphi_t \cdot f_t) = (12 + 2t)x^2 + (12 + 2t)y^2 + 12(1 + t^2/12)^{1/2} z^2.$$

Como la función $\frac{12+2t}{12(1+t^2/12)^{1/2}}$ es el cociente de dos autovalores diferentes de estas formas ternarias cuadráticas, y como es una función estrictamente decreciente para $t \geq 2$, resulta que $\varphi_t \cdot f_t$ (o equivalentemente, f_t), $t \geq 2$, es una familia de ternarias cuárticas no proyectivamente equivalentes dos-a-dos.

3.4 Sobre la suryectividad de la forma Pfaffiana

La forma Pfaffiana $f_\mu \in P_{n,d}$ asociada a cada álgebra 2-pasos $\mu \in V_{n,2d}$ ha sido una herramienta muy útil para distinguir estas álgebras salvo isomorfismo, y en particular para obtener familias continuas, gracias a su propiedad equivariante:

$$f_{(\psi,\varphi)\cdot\mu} = (\det \psi)^{-1} f_\mu \circ \varphi^t, \quad \forall (\psi, \varphi) \in \text{GL}_{2d} \times \text{GL}_n.$$

El hecho de que μ es nosingular precisamente cuando f_μ es un polinomio positivo también será crucial en la mayoría de los resultados obtenidos en secciones posteriores.

En esta sección, estamos interesados en la pregunta de para cuáles valores de (n, d) son los mapas

$$f : V_{n,2d} \longrightarrow P_{n,d}, \quad f : V_{n,2d}^+ \longrightarrow P_{n,d}^+$$

suryectivos, donde $V_{n,2d}^+$ y $P_{n,d}^+$ denotan el subconjuntos de álgebras nosingulares y polinomios positivos, respectivamente. Una respuesta afirmativa para un par dado (n, d) mostraría que el problema de clasificación de álgebras (nosingulares) de tipo $(n, 2d)$ es por lo menos tan difícil como el de las formas (positivas) n -arias d -ádicas, el cual es un problema clásico en teoría de invariantes (ver [Do03, M03]).

Resulta del Ejemplo 3.2.2 que $f : V_{2,2d} \longrightarrow P_{2,d}$ es sobre para cualquier d . Por el contrario, un elemento en $P_{4,2}^+$ (por ejemplo $x^2 + y^2 + z^2 + w^2$) nunca puede ser la forma Pfaffiana de un álgebra en $V_{4,4}$, ya que esta dimensión no está permitida para la existencia de un álgebra nosingular. Así $f : V_{4,4} \longrightarrow P_{4,2}$ no es suryectiva.

Es sencillo comprobar que la forma ternaria cuadrática general

$$f(x, y, z) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4xy + a_5xz + a_6yz,$$

es la forma Pfaffiana del álgebra 2-pasos $\mu = \mu_{a_1, \dots, a_6} \in V_{3,4}$ definida por

$$J_\mu(xZ_1 + yZ_2 + zZ_3) = \begin{bmatrix} 0 & x & -xa_5 - ya_6 - a_3z & y \\ -x & 0 & xa_4 + a_2y & z \\ xa_5 + ya_6 + a_3z & -xa_4 - a_2y & 0 & a_1x \\ -y & -z & -a_1x & 0 \end{bmatrix}.$$

Esto implica que $f : V_{3,4} \longrightarrow P_{3,2}$ es sobre.

También tenemos que $f : V_{3,6} \longrightarrow P_{3,3}$ es suryectivo. En efecto, la forma ternaria cúbica general

$$f(x, y, z) = r_1x^3 + r_2y^3 + r_3z^3 + r_4x^2y + r_5xy^2 + r_6x^2z + r_7xz^2 + r_8y^2z + r_9yz^2 + r_{10}xyz$$

es la forma Pfaffiana del álgebra $\mu \in V_{3,6}$ definida por

$$J_\mu(xZ_1 + yZ_2 + zZ_3) = [a_{ij}]x + [b_{ij}]y + [c_{ij}]z,$$

donde

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & a_{13} & a_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ & 0 & a_{34} & 0 & 0 & -1 \\ * & & 0 & a_{45} & a_{46} & \\ & & & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [b_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & r_2 & -r_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & b_{34} & 0 & 0 & 0 \\ * & & 0 & -1-r_9 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [c_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ * & & 0 & -r_3-r_7 & -r_7 & \\ & & & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} a_{1,3} &= r_3 + r_6 + r_7 + 1 + r_1, & a_{1,4} &= 2 - r_8 + r_9 - r_{10} - r_3 r_2, \\ a_{3,4} &= -3 - 2r_1 + r_2 - 2r_3 - r_4 - 2r_7 + r_8 - 2r_6 - 2r_9 - r_9 r_6 + r_3 r_2 - r_9 r_3 - r_9 r_7 - r_9 r_1, \\ a_{4,5} &= 1 - 2r_3 - r_7 - r_8 - r_6 + r_9 - r_{10} - r_7 r_3 - r_3 r_2 - r_3 r_6 - r_3^2 - r_3 r_1, \\ a_{4,6} &= -3r_3 - r_7 - r_8 - r_6 + r_9 - r_{10} - r_7 r_3 - r_3 r_2 - r_3 r_6 - r_3^2 - r_3 r_1, \\ b_{3,4} &= 1 - r_9 r_2 + r_1 - 2r_2 + r_3 - r_5 + r_7 + r_6. \end{aligned}$$

Hagamos un resumen de los resultados positivos que hemos obtenido hasta el momento.

Proposición 3.4.1. *Toda forma n -aria d -ádica es el Pfaffiano de un álgebra 2-pasos para cada uno de los siguientes pares (n, d) :*

$$(2, d), \quad (3, 2), \quad (3, 3).$$

El resultado principal de esta sección es el siguiente sobre ternarias cuárticas y el correspondiente tipo $(3, 8)$.

Teorema 3.4.2. *$f : V_{3,8}^+ \rightarrow P_{3,4}^+$ es suryectiva, es decir toda ternaria cuártica positiva es la forma Pfaffiana de algún álgebra 2-pasos nilpotente nosingular de tipo $(3, 8)$.*

Ahora describimos la estrategia y cuestiones técnicas de la prueba del Teorema 3.4.2.

El Teorema 3.4.2 establece que para toda ternaria cuártica positiva $f(x, y, z)$ existen matrices 8×8 antisimétricas A, B, C con entradas en \mathbb{R} tales que

$$\det(xA + yB + zC) = f(x, y, z)^2. \quad (3.4)$$

Cuando $f(x, y, z)$ se factoriza, digamos como $f = f_1 f_2$, donde f_1, f_2 son ternarias de grado $d = 1, 2, 3$, tales matrices A, B, C existen por la suryectividad de la forma Pfaffiana para ternarias de grado $d = 2, 3$ establecidas en la Proposición 3.4.1 (el caso $d = 1$ es trivial). En efecto, para f_i , con $i = 1, 2$, existen matrices $d_i \times d_i$ antisimétricas A_i, B_i, C_i con entradas en \mathbb{R} tales que

$$\det(xA_i + yB_i + zC_i) = f_i(x, y, z)^2 \quad i = 1, 2.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \det\left(x \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}\right) &= \det(xA_1 + yB_1 + zC_1) \cdot \det(xA_2 + yB_2 + zC_2) \\ &= f_1(x, y, z)^2 \cdot f_2(x, y, z)^2 \\ &= f(x, y, z)^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, solamente queda considerar el caso cuando $f(x, y, z)$ es irreducible en $\mathbb{R}[x, y, z]$.

3.4.1 Ternarias cuárticas positivas: caso irreducible

Seguimos la misma idea de Dickson en [D]. Si hacemos $z = 0$ en $f(x, y, z)$ obtenemos la binaria cuártica $f(x, y, 0)$ y, por la Proposición 3.4.1, sabemos que $f(x, y, 0)$ admite una *representación Pfaffiana lineal*, es decir, existen matrices 8×8 antisimétricas A_0, B_0 con entradas en \mathbb{R} tales que

$$\det(xA_0 + yB_0) = f(x, y, 0)^2.$$

Luego, intentamos encontrar la restante matriz antisimétrica C planteando la ecuación

$$\det(xA_0 + yB_0 + zC) = f(x, y, z)^2.$$

En la computadora encontramos soluciones explícitas para C cuando $f(x, y, 0)$ tiene la forma canónica

$$f(x, y, 0) = (x^2 + y^2)(x^2 + uy^2)$$

donde $u \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ (Lema 3.4.6).

Por lo tanto, bastaría llevar una ternaria cuártica positiva irreducible $f(x, y, z)$ arbitraria, mediante un cambio lineal (invertible) de variables (x, y, z) , a una ternaria cuártica (positiva) $\tilde{f}(x, y, z)$ tal que $\tilde{f}(x, y, 0) = (x^2 + y^2)(x^2 + uy^2)$ donde $u \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

De poder realizarse, hay dos aspectos en la estrategia planteada.

El primero, que es elemental, es el siguiente: llevar la binaria cuártica positiva $f(x, y, 0)$ arbitraria, mediante sucesivos cambios lineales de variables (x, y) , a la forma canónica $(x^2 + y^2)(x^2 + uy^2)$.

El segundo aspecto, que surge del primero, es el problema técnico de probar que $u \neq 0, 1$. $u \neq 0$ resulta de la positividad de $f(x, y, 0)$. Ahora, $u \neq 1$ implica que $f(x, y, 0)$ debe tener la forma

$$f(x, y, 0) = C(x - \alpha y)(x - \bar{\alpha}y)(x - \beta y)(x - \bar{\beta}y)$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ son *distintos*.

Entonces dada una ternaria cuártica positiva irreducible $f(x, y, z)$ deberíamos realizar los siguientes pasos:

Paso 1. Llevar, mediante un cambio lineal de variables (x, y, z) en $f(x, y, z)$, a una ternaria cuártica $\tilde{f}(x, y, z)$ tal que, en la factorización de $\tilde{f}(x, y, 0)$, tengamos $\alpha \neq \beta$ (Lema 3.4.4).

Paso 2. Llevar, mediante un cambio lineal de variables (x, y) en $\tilde{f}(x, y, 0)$ la binaria cuártica $\tilde{f}(x, y, 0)$ a la forma canónica $(x^2 + y^2)(x^2 + uy^2)$ con $u \in \mathbb{R}$. Siempre tendremos que $u \neq 1$ (Lema 3.4.5).

Paso 3. Componer adecuadamente los cambios lineales de variables en los Pasos 1 y 2, obteniendo $\varphi \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$.

Paso 4. Obtener una representación Pfaffiana lineal (explícita) para $f(\varphi(x, y, z))$ (Lema 3.4.6).

Paso 5. En la representación Pfaffiana lineal del Paso 4, volver con φ^{-1} para obtener una representación Pfaffiana lineal de $f(x, y, z)$ dada.

Respecto del Paso 3, podemos decir lo siguiente.

Observación 3.4.3. A un cambio lineal de variables (x, y) en $f(x, y, 0)$, digamos via $A \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$, le corresponde un cambio lineal de variables (x, y, z) en $f(x, y, z)$, donde claramente se deja fija z , via la matriz $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$. Más precisamente, llamando

$$f_1(x, y, z) = f\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}(x, y, z)\right), \quad f_2(x, y) = f(x, y, 0),$$

tenemos que

$$f_1(x, y, 0) = f_2(A(x, y)).$$

Recordemos que toda forma binaria $f(x, y)$ de grado n con coeficientes en \mathbb{R} se factoriza en factores de la forma $(ax + by)^{d_i}$ con $ab \neq 0$ y $(ax^2 + bxy + cy^2)^{d_j}$ con $b^2 - 4ac < 0$; ver, por ejemplo, [O, Ejercicio 2.14].

Lema 3.4.4. Sea $f(x, y, z)$ un ternaria cuártica positiva irreducible (en $\mathbb{R}[x, y, z]$). Entonces existe $A_0 \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ tal que $f(A_0(x, y, z))$ en $z = 0$ tiene la forma

$$f(A_0(x, y, 0)) = C(x - \alpha y)(x - \bar{\alpha}y)(x - \beta y)(x - \bar{\beta}y)$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ y $\alpha \neq \beta$.

Prueba. Sea f dada por

$$f(x, y, z) = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4 + 4fx^3z + 12gx^2yz + 12hxy^2z + 4iy^3z + 6jx^2z^2 + 12kxyz^2 + 6ly^2z^2 + 4mxxz^3 + 4nyz^3 + pz^4$$

Como f es positivo, en particular, $a = f(1, 0, 0) > 0$, $e = f(0, 1, 0) > 0$ y $p = f(0, 0, 1) > 0$ y además el polinomio en 2 variables

$$f(x, y, 0) = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4$$

también es positivo. Entonces $f(x, y, 0)$ se factoriza como el producto de dos ternarias cuadráticas (indescomponibles en $\mathbb{R}[x, y]$), es decir,

$$\begin{aligned} f(x, y, 0) &= (a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2)(\tilde{a}_1x^2 + \tilde{a}_2xy + \tilde{a}_3y^2) \\ &= b_1(x - \alpha y)(x - \bar{\alpha}y) \cdot c_1(x - \beta y)(x - \bar{\beta}y) \end{aligned}$$

donde $a_i, \tilde{a}_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, 3$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. (Como $a \neq 0$, $f(x, 1, 0)$ es de grado 4.)

Si $\alpha \neq \beta$, el lema está probado.

En caso contrario, si $\alpha = \beta$, tenemos

$$\begin{aligned} f(x, y, 0) &= (a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2)^2 \\ &= a_1^2x^4 + 2a_1a_2x^3y + (2a_1a_3 + a_2^2)x^2y^2 + 2a_2a_3xy^3 + a_3^2y^4 \end{aligned}$$

donde

$$a_2^2 - 4a_1a_3 < 0. \tag{3.5}$$

Necesariamente f tiene la forma

$$f(x, y, z) = a_1^2x^4 + 2a_1a_2x^3y + (2a_1a_3 + a_2^2)x^2y^2 + 2a_2a_3xy^3 + a_3^2y^4 + 4fx^3z + 12gx^2yz + 12hxy^2z + 4iy^3z + 6jx^2z^2 + 12kxyz^2 + 6ly^2z^2 + 4mxxz^3 + 4nyz^3 + pz^4$$

Análogamente, como $f(x, y, z)$ es positivo, entonces $f(x, 0, z)$ se factoriza en la forma

$$\begin{aligned} f(x, 0, z) &= (a_1x^2 + b_2xz + b_3z^2)(a_1x^2 + \tilde{b}_2xz + \tilde{b}_3z^2) \\ &= a_1^2 \cdot (x - \alpha z)(x - \bar{\alpha}z) \cdot (x - \beta z)(x - \bar{\beta}z) \end{aligned}$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

De nuevo, si $\alpha \neq \beta$, el lema está probado (porque intercambiamos y con z , es decir $A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ satisface el lema).

Si $\alpha = \beta$,

$$\begin{aligned} f(x, 0, z) &= (a_1x^2 + b_2xz + b_3z^2)^2 \\ &= a_1^2x^4 + 2a_1b_2x^3z + (2a_1b_3 + b_2^2)x^2z^2 + 2b_2b_3xz^3 + b_3^2z^4 \end{aligned}$$

donde

$$b_2^2 - 4a_1b_3 < 0. \quad (3.6)$$

Entonces $f(x, y, z)$ tiene la forma

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= a_1^2x^4 + 2a_1a_2x^3y + (2a_1a_3 + a_2^2)x^2y^2 + 2a_2a_3xy^3 + a_3^2y^4 + 2a_1b_2x^3z \\ &\quad + 12gx^2yz + 12hxy^2z + 4iy^3z + (2a_1b_3 + b_2^2)x^2z^2 + 12kxyz^2 + 6ly^2z^2 \\ &\quad + 2b_2b_3xz^3 + 4nyz^3 + b_3^2z^4 \end{aligned}$$

Como $f(0, y, z)$ es positivo, entonces debemos tener

$$\begin{aligned} f(0, y, z) &= (a_3y^2 + c_2yz + b_3z^2)(a_3y^2 + \tilde{c}_2yz + b_3z^2) \\ &= a_3^2 \cdot (y - \alpha z)(y - \bar{\alpha}z) \cdot (y - \beta z)(y - \bar{\beta}z) \end{aligned}$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Si $\alpha \neq \beta$, el lema está probado (pues intercambiamos x con z , es decir, $A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$).

Si $\alpha = \beta$, entonces

$$\begin{aligned} f(0, y, z) &= (a_3y^2 + c_2yz + b_3z^2)^2 \\ &= a_3^2y^4 + 2a_3c_2y^3z + (2a_3b_3 + c_2^2)y^2z^2 + 2c_2b_3yz^3 + b_3^2z^4 \end{aligned}$$

donde

$$c_2^2 - 4a_3b_3 < 0. \quad (3.7)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= a_1^2x^4 + 2a_1a_2x^3y + (2a_1a_3 + a_2^2)x^2y^2 + 2a_2a_3xy^3 + a_3^2y^4 + 2a_1b_2x^3z \\ &\quad + 12gx^2yz + 12hxy^2z + 2a_3c_2y^3z + (2a_1b_3 + b_2^2)x^2z^2 + 12kxyz^2 \\ &\quad + (2a_3b_3 + c_2^2)y^2z^2 + 2b_2b_3xz^3 + 2c_2b_3yz^3 + b_3^2z^4 \\ &= (a_1x^2 + a_3y^2 + b_3z^2 + a_2xy + b_2xz + c_2yz)^2 + f_1x^2yz + f_2xy^2z + f_3xyz^2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde

$$a_1, a_3, b_3 > 0, \quad (3.9)$$

$$f_1 = 12g - 2a_1c_2 - 2a_2b_2,$$

$$f_2 = 12h - 2a_2c_2 - 2a_3b_2,$$

$$f_3 = 12k - 2a_2b_3 - 2b_2c_2.$$

Ahora $f(x, y, z)$ está dada por (3.8), y consideremos el cambio lineal de variables via

$$A_a^b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{bmatrix}$$

es decir, $f(A_a^b(x, y, z)) = f(x, y, ax + by + z)$. En $z = 0$, nos queda

$$f(A_a^b(x, y, 0)) = f(x, y, ax + by).$$

El discriminante Δ de un polinomio $f_0 \in \mathbb{R}[x]$ tiene la propiedad que $\Delta \neq 0$ si y sólo si f_0 no tiene raíces múltiples.

Consideremos

$$\Delta(a, b) = \text{discriminante de } f(A_a^b(x, 1, 0)) = f(x, 1, ax + b \cdot 1) \text{ respecto de } x.$$

Definamos

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_1(a) &= \Delta(a, 0) \\ &= 16a_3^2 b_3 (c_2^2 - 4a_3 b_3)^2 (a_3 f_3^2 + b_3 f_2^2 - c_2 f_2 f_3) a^{10} + \text{términos de menor grado} \\ \tilde{\Delta}_2(a) &= \Delta(0, a) \\ &= 16a_1^2 b_3 (b_2^2 - 4a_1 b_3)^2 (a_1 f_3^2 + b_3 f_1^2 - b_2 f_1 f_3) a^{10} + \text{términos de menor grado} \end{aligned}$$

Por (3.9), a_1, a_3, b_3 son $\neq 0$; también $c_2^2 - 4a_3 b_3$ y $b_2^2 - 4a_1 b_3$ son $\neq 0$ por (3.7) y (3.6) respectivamente. El sistema

$$\begin{cases} a_3 f_3^2 + b_3 f_2^2 - c_2 f_2 f_3 = 0 \\ a_1 f_3^2 + b_3 f_1^2 - b_2 f_1 f_3 = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

implica

$$f_1 = f_2 = f_3 = 0.$$

En efecto, si $f_1 \neq 0$, de la segunda ecuación del sistema (3.10) resulta

$$f_3 = \frac{b_2 \pm \sqrt{b_2^2 - 4a_1 b_3}}{2a_1} \cdot f_1$$

lo cual no puede ocurrir porque $f_i \in \mathbb{R}$ y $b_2^2 - 4a_1 b_3 < 0$ por (3.6). De igual manera, si $f_2 \neq 0$, de la primera ecuación de (3.10) resulta

$$f_3 = \frac{c_2 \pm \sqrt{c_2^2 - 4a_3 b_3}}{2a_3} \cdot f_2$$

y, como antes, no puede ocurrir porque $f_i \in \mathbb{R}$ y $c_2^2 - 4a_3 b_3 < 0$ por (3.7). Finalmente, si $f_3 \neq 0$, entonces, por ejemplo de la primera ecuación de (3.10), nos queda

$$f_1 = \frac{b_2 \pm \sqrt{b_2^2 - 4a_1 b_3}}{2b_3} \cdot f_3$$

lo cual no es posible porque $f_i \in \mathbb{R}$ y $b_2^2 - 4a_1 b_3 < 0$ por (3.6). Entonces $f_1 = f_2 = f_3 = 0$.

Si reemplazamos $f_1 = f_2 = f_3 = 0$ en (3.8), nos lleva a que

$$f(x, y, z) = (a_1 x^2 + a_3 y^2 + b_3 z^2 + a_2 xy + b_2 xz + c_2 yz)^2,$$

lo cual es una contradicción porque $f(x, y, z)$ es irreducible en $\mathbb{R}[x, y, z]$, por hipótesis. Por lo tanto, como la única solución del sistema (3.10) es $f_1 = f_2 = f_3 = 0$, los coeficientes principales de $\tilde{\Delta}_1(a)$ y $\tilde{\Delta}_2(a)$ no son simultáneamente cero. Entonces existe un $a_0 \in \mathbb{R}$ suficientemente grande tal que $\tilde{\Delta}_1(a_0) \neq 0$ o $\tilde{\Delta}_2(a_0) \neq 0$. Luego, como el discriminante de $f(A_{a_0}^0(x, 1, 0))$ es $\tilde{\Delta}_1(a_0)$ y el de $f(A_0^{a_0}(x, 1, 0))$ es $\tilde{\Delta}_2(a_0)$, entonces $f(A_{a_0}^0(x, 1, 0))$ o $f(A_0^{a_0}(x, 1, 0))$ no tiene raíces múltiples. Luego, como $f(A_{a_0}^0(x, 1, 0))$ y $f(A_0^{a_0}(x, 1, 0))$ son positivos, alguna de las siguientes vale:

- $f(A_{a_0}^0(x, 1, 0)) = C(x - \alpha y)(x - \bar{\alpha} y)(x - \beta y)(x - \bar{\beta} y)$
- $f(A_0^{a_0}(x, 1, 0)) = C(x - \alpha y)(x - \bar{\alpha} y)(x - \beta y)(x - \bar{\beta} y)$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ y $\alpha \neq \beta$, como se quería probar. \square

Lema 3.4.5. *Bajo las condiciones del lema anterior, existe $A \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ tal que $f(A(x, y, z))$ en $z = 0$ tiene la forma*

$$f(A(x, y, 0)) = (x^2 + y^2)(x^2 + uy^2)$$

donde $u \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Prueba. Por el Lema 3.4.4, existe $A_0 \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ tal que $f(A_0(x, y, z))$ en $z = 0$ tiene la forma

$$F(x, y) := f(A_0(x, y, 0)) = C(x - \alpha y)(x - \bar{\alpha} y)(x - \beta y)(x - \bar{\beta} y),$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ y $\alpha \neq \beta$

Existe un cambio lineal de variables $B^1 \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ que lleva el factor $C(x - \alpha y)(x - \bar{\alpha} y)$ de $F(x, y)$ su forma canónica $x^2 + y^2$:

$$F(B^1(x, y)) = (x^2 + y^2) \cdot (x - \beta y)(x - \bar{\beta} y).$$

Por una matriz ortogonal B^2 , con $\det(B^2) = 1$, dejamos invariante el primer factor $x^2 + y^2$, y eliminamos el término xy del segundo factor $(x - \beta y)(x - \bar{\beta} y)$:

$$F(B^1 B^2(x, y)) = (x^2 + y^2)(cx^2 + dy^2).$$

Como $c, d > 0$ porque $F(B^1 B^2(x, y))$ es positivo, con

$$B^3 = \begin{bmatrix} c^{-1/4} & 0 \\ 0 & c^{-1/4} \end{bmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$$

normalizamos, obteniendo

$$\begin{aligned} F(B^1 B^2 B^3(x, y)) &= \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{c}} \left(\frac{cx^2}{\sqrt{c}} + \frac{dy^2}{\sqrt{c}} \right) \\ &= (x^2 + y^2) \left(x^2 + \frac{dy^2}{c} \right) \\ &= (x^2 + y^2) (x^2 + uy^2) \end{aligned}$$

donde $u \neq 0$ porque $F(B^1 B^2 B^3(x, y))$ es positivo. Supongamos que $u = 1$, entonces $F(B^1 B^2 B^3(x, y)) = (x^2 + y^2)^2$, es decir, denotando por $M^{-1} \cdot F(x, y) = F(M(x, y))$,

$$[(B^1 B^2 B^3)^{-1} \cdot C(x - \alpha y)(x - \bar{\alpha} y)] \cdot [(B^1 B^2 B^3)^{-1} \cdot (x - \beta y)(x - \bar{\beta} y)] = (x^2 + y^2)^2 \quad (3.11)$$

(3.11) es la igualdad de dos factorizaciones en polinomios primos en $\mathbb{R}[x, y]$. Por unicidad, existen $u, w \in \mathbb{R}$ con $u, w \neq 0$ tales que

$$\begin{aligned} (uC B^1 B^2 B^3)^{-1} \cdot (x - \alpha y)(x - \bar{\alpha} y) &= x^2 + y^2, \\ (w B^1 B^2 B^3)^{-1} \cdot (x - \beta y)(x - \bar{\beta} y) &= x^2 + y^2. \end{aligned}$$

Esto implica

$$uCw^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (x - \alpha y)(x - \bar{\alpha} y) = (x - \beta y)(x - \bar{\beta} y).$$

Así, $uCw^{-1} = 1$, y luego $\alpha = \beta$, lo que contradice las hipótesis. Entonces $u \neq 1$.

Por construcción,

$$A = A_0 \begin{bmatrix} B^1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$$

satisface el corolario, lo que concluye la demostración. \square

Lema 3.4.6. *Sea $f(x, y, z)$ una ternaria cuártica (no necesariamente positiva ni irreducible) tal que*

$$f(x, y, 0) = (x^2 + y^2)(x^2 + uy^2)$$

donde $u \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Entonces $f(x, y, z)$ es pfaffian.

Prueba. Una matriz $M = [a_{ij}x + b_{ij}y + c_{ij}z]$ tal que $\det(M) = f(x, y, z)^2$ es la siguiente

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -x & y \\ 0 & 0 & y & x \\ x & -y & 0 & 0 \\ -y & -x & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & -x & uy \\ & 0 & 0 & y & x \\ & x & -y & 0 & 0 \\ & -uy & -x & 0 & 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{1,8} \\ 0 & 0 & c_{2,3} & c_{2,4} & c_{2,5} & 0 & c_{2,7} & 0 \\ 0 & c_{3,2} & 0 & c_{3,4} & 0 & 0 & c_{3,7} & c_{3,8} \\ 0 & c_{4,2} & c_{4,3} & 0 & 0 & c_{4,6} & c_{4,7} & 0 \\ 0 & c_{5,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{5,8} \\ 0 & 0 & 0 & c_{6,4} & 0 & 0 & 0 & c_{6,8} \\ 0 & c_{7,2} & c_{7,3} & c_{7,4} & 0 & 0 & 0 & c_{7,8} \\ c_{8,1} & 0 & c_{8,3} & 0 & c_{8,5} & c_{8,6} & c_{8,7} & 0 \end{bmatrix}$$

donde los $c_{i,j}$ están dados por

$$\begin{aligned} c_{1,8} &= 1, c_{2,3} = -\frac{12g - 4i}{u - 1}, c_{2,4} = \frac{-4f + 12h}{u - 1}, c_{2,5} = 1 \\ c_{2,7} &= \left(-1 + 12k - p + \frac{(12g - 4i)(-12h + 4fu)}{(u - 1)^2} + \frac{(-4f + 12h)(4i - 12gu)}{(u - 1)^2} \right) u^{-1} \\ c_{3,4} &= 4n - \frac{p(-12h + 4fu)}{u - 1}, c_{3,7} = p \\ c_{3,8} &= -6l + \frac{(4i - 12gu)(12g - 4i)}{(u - 1)^2}, c_{4,6} = 1 \\ c_{4,7} &= -\left(\frac{(-12h + 4fu)(-4f + 12h)u}{(u - 1)^2} - 6ju \right) u^{-1}, c_{5,8} = -\frac{4i - 12gu}{u - 1} \\ c_{6,8} &= \frac{-12h + 4fu}{u - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{7,8} = & -\frac{1}{u} \left(-\frac{(-12h+4fu)6ju}{u-1} - \frac{4i-12gu}{u-1} + \frac{(12g-4i)u}{u-1} \right. \\
& - \frac{(4i-12gu)p}{u-1} + \frac{(4i-12gu)(12g-4i)(-12h+4fu)}{(u-1)^3} + \\
& \frac{(4i-12gu)12k}{u-1} + \frac{(4i-12gu)^2(-4f+12h)}{(u-1)^3} + \\
& \left. \frac{(-12h+4fu)^2(-4f+12h)u}{(u-1)^3} + 4um \right) \quad \square
\end{aligned}$$

Prueba del Teorema 3.4.2. Sea $f(x, y, z)$ una ternaria cuártica positiva irreducible. Por el Corolario 3.4.5, existe $\varphi \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ tal que $\tilde{f}(x, y, z) = f(\varphi(x, y, z))$ en $z = 0$ tiene la forma

$$\tilde{f}(x, y, 0) = (x^2 + y^2)(x^2 + uy^2)$$

donde $u \neq 0, 1$. Por Lema 3.4.6, existen matrices 8×8 anti-simétricas A_1, A_2, A_3 con entradas en \mathbb{R} tales que

$$\det(xA_1 + yB_1 + zC_1) = \tilde{f}(x, y, z)^2 = f(\varphi(x, y, z))^2. \quad (3.12)$$

Pero queremos una tal representación para $f(x, y, z)$. Entonces volvemos con φ^{-1} . En (3.12), apliquemos el cambio lineal de variables via φ^{-1} . En el segundo miembro de (3.12), claramente nos queda $f(\varphi\varphi^{-1}(x, y, z))^2 = f(x, y, z)^2$. En el primer miembro, con φ^{-1} sucede lo propio. De hecho,

$$\det(x\tilde{A}_1 + y\tilde{A}_2 + z\tilde{A}_3) = f(\varphi\varphi^{-1}(x, y, z))^2 = f(x, y, z)^2.$$

donde

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_1 &= (b_{11}A_1 + b_{21}A_2 + b_{31}A_3); \\
\tilde{A}_2 &= (b_{12}A_1 + b_{22}A_2 + b_{32}A_3); \\
\tilde{A}_3 &= (b_{13}A_1 + b_{23}A_2 + b_{33}A_3);
\end{aligned}$$

Esto concluye la prueba del Teorema 3.4.2. □

Capítulo 4

Nilsolitones en álgebras nosingulares

En este capítulo consideramos el problema de la existencia de un producto interno ‘canónico’ para un álgebra nosingular dada. Nuestro enfoque seguirá las líneas de la teoría geométrica de invariantes real descrita en la Sección 2.2, y resulta que la unicidad (salvo isometría) de tales productos internos distinguidos dará lugar a nuevos invariantes.

Un álgebra de Lie nilpotente \mathfrak{n} se dice que es un *nilradical Einstein* si admite un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tal que $\text{Ric}_{\langle \cdot, \cdot \rangle} = cI + D$ para algún $c \in \mathbb{R}$ y $D \in \text{Der}(\mathfrak{n})$, donde $\text{Ric}_{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ es el operador de Ricci de la métrica Riemanniana invariante a izquierda definida por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en el grupo de Lie nilpotente simplemente conexo N con álgebra de Lie \mathfrak{n} . Tales métricas se llaman *nilsolitones* en la literatura y juegan el rol de las métricas más distinguidas o canónicas en nilvariedades, ya que en [L01] se prueba que satisfacen las siguientes propiedades:

- Son *solitones de Ricci*, es decir, las soluciones del flujo de Ricci que comienzan en ellas y evolucionan solamente por múltiplos por escalares y por la acción de difeomorfismos (ver [C+, Capítulo 1]).
- Un grupo dado N puede admitir a lo sumo un nilsoliton salvo isometría y múltiplos por escalares entre todas sus métricas invariantes a izquierda.
- Los nilradicales Einstein son precisamente las partes nilpotentes de las solvariedades Einstein.

Sin embargo, los problemas de existencia, estructura y clasificación parecen estar lejos de ser resueltos satisfactoriamente, si es que es del todo posible (ver el resumen [L09] para más información).

4.1 Nilsolitones

Recordemos las transformaciones $J_\mu(Z) \in \mathfrak{so}(\mathfrak{n}_1)$, $Z \in \mathfrak{n}_2$, definidas al comienzo del primer Capítulo fijando un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2$ (con $\mathfrak{n}_1 \perp \mathfrak{n}_2$). Estos mapas

proporcionan una herramienta adecuada para considerar condiciones de compatibilidad entre un álgebra μ y un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Por ejemplo, cuando

$$J_\mu(Z)^2 = -\|Z\|^2 I$$

para cualquier $Z \in \mathfrak{n}_2$, el álgebra de Lie métrica $(\mathfrak{n}, \mu, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es llamada de *tipo- H* (ver [K81, BTV95]), y si más en general,

$$Z \mapsto (-\det J_\mu(Z)^2)^{1/m}$$

es una forma cuadrática positiva, entonces el álgebra se dice que es de *tipo- \tilde{H}* (ver [LT99]). Equivalentemente, en términos de su forma Pfaffiana, $(\mathfrak{n}, \mu, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es tipo- \tilde{H} si y sólo si, salvo equivalencia proyectiva,

$$f_\mu(x_1, \dots, x_n) = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{m/4}.$$

Es natural también considerar la siguiente condición que involucra solamente μ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$, como otra generalización de tipo- H : para cualquier (o alguna) base ortonormal $\{Z_i\}$ de \mathfrak{n}_2 ,

$$\sum_i J_\mu(Z_i)^2 = aI, \quad \text{tr } J_\mu(Z_i)J_\mu(Z_j) = b\delta_{ij}, \quad \text{para algunos } a, b < 0. \quad (4.1)$$

En términos de la aplicación momento, esta condición sobre $(\mu, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es equivalente a tener

$$m(\mu) = (2aI, -bI)$$

(ver (2.7)), de lo cual resulta fácilmente que la parte (iii) en el Teorema 2.2.1 vale y así μ es un punto crítico de F_m .

De la expresión de unicidad en la parte (iv) de Teorema 2.2.1 obtenemos que dentro de la clase de isomorfismo $\text{GL}_m \times \text{GL}_n \cdot \mu$, solamente los elementos en el subconjunto $\mathbb{R}^* \text{O}(n) \cdot \mu$ satisfacen la condición (4.1). Usando que tal condición vale para el par $(\varphi \cdot \mu, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $\varphi \in \text{GL}_m \times \text{GL}_n$ si y sólo si vale para $(\mu, \langle \varphi \cdot, \varphi \cdot \rangle)$, esta propiedad de unicidad se puede expresar equivalentemente en los siguientes términos:

Dado un álgebra $\mu \in V_{n,m}$, existe a lo sumo un producto interno en \mathfrak{n} (con $\mathfrak{n}_1 \perp \mathfrak{n}_2$) para el cual vale (4.1), salvo multiplicación por escalares y automorfismos de μ .

Esto respalda fuertemente la propuesta de estos productos internos como canónicos o distinguidos para un álgebra dada μ .

También resulta de la teoría de invariantes que si la condición (4.1) vale, entonces la $\text{SL}_m \times \text{SL}_n$ -órbita de μ es cerrada en $V_{n,m}$. En efecto, la proyección ortogonal de la aplicación momento $m(\mu)$ sobre $\mathfrak{sl}_m \oplus \mathfrak{sl}_n$ se anula, y como esto es precisamente la aplicación momento para la $\text{SL}_m \times \text{SL}_n$ -acción en $V_{n,m}$, tenemos que μ es un vector minimal y entonces $\text{SL}_m \times \text{SL}_n \cdot \mu$ es cerrado (ver Sección 2.2). Además, las siguientes condiciones son equivalentes para un álgebra 2-pasos $\mu \in V_{n,m}$:

- existe un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en \mathfrak{n} tal que la condición (4.1) vale para $(\mu, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ (en particular, $\mu \in \mathcal{C}(F_m)$);

- para cualquier producto interno fijo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en \mathfrak{n} , existe un álgebra isomorfa $\mu_0 \in \text{GL}_m \times \text{GL}_n \cdot \mu$ tal que la condición (4.1) vale para $(\mu_0, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ (o equivalentemente, μ_0 es un vector minimal para la $\text{SL}_m \times \text{SL}_n$ -acción);
- la órbita $\text{SL}_m \times \text{SL}_n \cdot \mu$ es cerrada.

En particular, la existencia para una μ nosingular de un producto interno que satisface (4.1) proporciona un candidato para la ‘forma normal’ de μ ; a saber, el vector minimal μ_0 anterior, el cual es único salvo multiplicación por escalares y la acción de $\text{O}(m) \times \text{O}(n)$.

Desde un punto de vista geométrico, sabemos que μ es un punto crítico de F_m si y sólo si la métrica Riemanniana invariante a izquierda g determinada por $(\mathfrak{n}, \mu, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ en el correspondiente grupo de Lie nilpotente simplemente conexo N es un *soliton de Ricci*, es decir, la solución del flujo de Ricci que comienza en g evoluciona solamente por multiplicaciones escalares y pull-back por difeomorfismos que dependen del tiempo (ver [L01]). Tales métricas se llaman *nilsolitones* en la literatura y han sido extensamente estudiadas en la última década (ver el artículo expositivo [L09] para más información). La clave de esta interacción es el hecho de que

$$m(\mu) = \frac{4}{\|\mu\|^2} \text{Ric}(g), \quad (4.2)$$

donde $m(\mu)$ es la aplicación momento y $\text{Ric}(g)$ es el operador de Ricci de (N, g) .

Ahora probaremos que la condición (4.1) debe cumplirse en realidad para cualquier nilsoliton en un álgebra nosingular.

Teorema 4.1.1. *Sea μ un álgebra nosingular de tipo (n, m) y tomemos $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (i) \mathfrak{n} admite un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tal que la condición (4.1) vale para $(\mu, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.
- (ii) El álgebra de Lie (\mathfrak{n}, μ) admite un producto interno nilsoliton (o equivalentemente, $\mu \in \mathcal{C}(F_m)$ para algún $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en \mathfrak{n}).
- (iii) La $\text{SL}_m \times \text{SL}_n$ -órbita de μ es cerrada en $V_{n,m}$.

Observación 4.1.2. Es posible obtener una prueba alternativa de este teorema usando [N06, Lemma 5] y [N11, Theorem 2].

Prueba. La equivalencia entre las partes (i) y (iii) ha sido observada anteriormente (comparar con [L03, Proposition 9.1]), así como también el hecho de que la parte (i) implica (ii). Por lo tanto supongamos que la parte (ii) se cumple y probemos la parte (i). La nosingularidad de μ implica que

$$0 \notin \overline{\text{SL}_m \times \text{SL}_n \cdot \mu}, \quad (4.3)$$

la clausura de la órbita relativa a la topología de espacio vectorial. En realidad, si $\mu_k := (\psi_k, \varphi_k) \cdot \mu \rightarrow 0$, cuando $k \rightarrow \infty$, con $(\psi_k, \varphi_k) \in \text{SL}_m \times \text{SL}_n$, entonces sus formas Pfaffianas $f_{\mu_k} \rightarrow 0$, las cuales están dadas por $f_{\mu_k} = f_\mu \circ \varphi_k^t \in \text{SL}_n \cdot f_\mu$ para todo k , y entonces esto contradice Lema 3.2.4, puesto que f_μ es positivo.

Si usamos el producto interno nilsoliton en \mathfrak{n} (con $\mathfrak{n}_1 \perp \mathfrak{n}_2$) para definir la aplicación momento m , entonces $\mu \in \mathcal{C}(F_m)$ por [L01, Theorem 4.2]. Sea $\beta \in \mathfrak{gl}_{m+n}$ la única matriz

de la forma $\beta = \begin{bmatrix} cI_m & \\ & dI_n \end{bmatrix}$ tal que $\text{tr } \beta = -1$ (es decir $cm + dn = -1$) y $\beta + \|\beta\|^2 I = \begin{bmatrix} eI_m & \\ & 2eI_n \end{bmatrix}$ para algún $e \in \mathbb{R}$ (es decir $d + c^2m + d^2n = 2(c + c^2m + d^2n)$).

En lo que sigue, usaremos la notación en [L10, pp. 1869-1870]. Tenemos que $\mu \in Z_\beta$ por el hecho de que $\beta + \|\beta\|^2 I \in \text{Der}(\mu)$, y como $H_\beta = \text{SL}_m \times \text{SL}_n$, resulta de (4.3) y [L10, Proposición 2.14,(i)] que μ pertenece al estrato \mathcal{S}_β . Finalmente, usando [LW11, Teorema 2.3] y [LW11, Proposición 3.4,(ii)], obtenemos de $\mu \in \mathcal{C}(F_m)$ que $m(\mu)$ es conjugado a β (ver (4.2)). Esto implica que la condición (4.1) vale para el par $(\varphi \cdot \mu, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ para algún $\varphi \in \text{O}(m) \times \text{O}(n)$, y en consecuencia también vale para $(\mu, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, de lo cual resulta la parte (i). \square

Fijando un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en \mathfrak{n} como en secciones anteriores, deducimos lo siguiente del Teorema 4.1.1.

Corolario 4.1.3. *Si μ es nosingular, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (i) *La nilvariedad (N, g) asociada a $(\mathfrak{n}, \mu, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un nilsoliton.*
- (ii) *La condición (4.1) vale para $(\mathfrak{n}, \mu, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.*
- (iii) *El operador de Ricci $\text{Ric}(g)$ tiene exactamente dos autovalores distintos.*

Ejemplo 4.1.4. Los grupos de Lie de tipo- H son todos nilsolitones nosingulares. Por otra parte, se obtiene que el álgebra 2-pasos nosingular de tipo (3, 8) dada en el Ejemplo 2.2.5 es un nilsoliton nosingular que no es de tipo- H .

Definición 4.1.5. Sea $\{X_1, \dots, X_n\}$ una base de un álgebra de Lie nilpotente \mathfrak{n} , con coeficientes de estructuras c_{ij}^k 's dados por $[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k X_k$. Entonces la base $\{X_i\}$ se dice *nice* si valen las siguientes condiciones:

- para todo $i < j$ hay a lo sumo un k tal que $c_{ij}^k \neq 0$,
- si $c_{ij}^k, c_{i'j'}^k \neq 0$ entonces $\{i, j\} = \{i', j'\}$ o $\{i, j\} \cap \{i', j'\} = \emptyset$

Dada un álgebra de Lie también definimos una matriz Y como sigue: Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canónica de \mathbb{R}^n , es decir e_i tiene 1 en el lugar i -ésimo, y 0 en los demás lugares. Sea $F = \{(Y)_{ij}^k = e_i + e_j - e_k : c_{ij}^k \neq 0, i < j\}$, y $m = \#F$. Fijando un orden arbitrario en F , definamos la matriz Y de orden $m \times n$ como aquella cuya fila a -ésima, con $1 \leq a \leq m$, es $(Y)_{ij}^k = e_i + e_j - e_k$. Denotamos por $[1]_m$ un vector m -dimensional con todas sus coordenadas 1.

Teorema 4.1.6. [N11] Un álgebra de Lie nilpotente no abeliana \mathfrak{n} con una base nice es un nilradical Einstein si y sólo si existe un vector $\alpha \in \mathbb{R}^m$ con coordenadas positivas que satisface $YY^t\alpha = [1]_m$.

Con el fin de obtener familias continuas explícitas de álgebras nosingulares de tipo (n, m) que admiten una métrica nilsoliton, podemos considerar aquellos $\mu \in V_{n,m}$ tales que cada entrada de $J_\mu(x_1 Z_1 + \dots + x_n Z_n)$ es un múltiplo escalar de algún x_i y no hay ninguna otra repetición de x_i 's en una fila (o columna) dada. Esto es equivalente a decir que $\{X_1, \dots, X_m, Z_1, \dots, Z_n\}$ es una base *nice*. Si además de la condición de base nice agregamos que para cada fila (o columna) de $J_\mu(x_1 Z_1 + \dots + x_n Z_n)$ tenemos el mismo

número de entradas no nulas, entonces el álgebra se llama *uniforme* (ver [D79, Wo91]). En este caso, es fácil ver que la matriz $U = YY^t$ del criterio de Nikolayevky (Teorema 4.1.6) tiene todos 3 en las entradas de la diagonal (como siempre) y solamente 1's fuera de la diagonal con un número idéntico de 1's en cada fila (o columna). Resulta entonces que existe $\alpha \in \mathbb{R}^q$ solución positiva para $U\alpha = [1]$ (basta tomar $\alpha_1 = \dots = \alpha_q = a$ para un adecuado $a > 0$), y así μ admite un producto interno nilsoliton. Es importante notar que se obtiene esto independientemente del valor preciso de las constantes de estructura μ_{ij}^k del álgebra μ , así la condición de uniformidad está sólo en términos del conjunto de índices con constantes de estructura distintas de cero.

Resumimos este estudio para futura referencia.

Teorema 4.1.7. [D79, Wo91] *Toda álgebra uniforme $\mu \in V_{n,m}$ admite un producto interno nilsoliton.*

En particular, de acuerdo al Teorema 4.1.1, cualquier álgebra uniforme nosingular admite un producto interno para el cual la condición (4.1) vale.

4.2 Álgebras nosingulares de tipo $(2, m)$

El conjunto de clases de isomorfismo en $V_{2,m}$, es decir, cuando $\dim \mathfrak{n}_2 = 2$, puede ser parametrizado usando invariantes de penciles. Referimos a [G73, LT99] y sus referencias para un tratamiento más detallado y algunas pruebas.

A cada conjunto

$$\mathcal{S} = \{(\alpha_1, k_1), \dots, (\alpha_r, k_r), \epsilon_1, \dots, \epsilon_s\}, \quad \alpha_i \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \quad k_i, \epsilon_i \in \mathbb{N},$$

le asociamos el álgebra $\mu_{\mathcal{S}} \in V_{2,m}$ de tipo $(2, m)$ tal que la matriz de $J_{\mu_{\mathcal{S}}}(xZ_1 + yZ_2)$ con respecto a la base fija $\{X_1, \dots, X_m\}$ está compuesta de bloques asociados a cada uno de los elementos de \mathcal{S} , los cuales están definidos de acuerdo a las siguientes reglas:

$$(\infty, k) \rightsquigarrow \left[\begin{array}{c|ccc} & 0 & & x \\ & & x & y \\ & & \ddots & \ddots \\ \hline & x & y & 0 \\ * & & & \end{array} \right] (2k \times 2k),$$

$$(a, k) \rightsquigarrow \left[\begin{array}{c|ccc} & 0 & & y - ax \\ & & y - ax & x \\ & & \ddots & \ddots \\ \hline & y - ax & x & 0 \\ * & & & \end{array} \right] (2k \times 2k),$$

$$(a + ib, k) \rightsquigarrow \left[\begin{array}{c|cccc} & & 0 & & -bx & y - ax \\ & & & & y - ax & bx \\ & & & -bx & y - ax & 0 \\ & & & y - ax & bx & x \\ & & & & & x \\ & & & & & 0 \\ & & & \ddots & & \ddots \\ & & -bx & y - ax & 0 & x \\ & & y - ax & bx & x & 0 \\ \hline * & & & & & & 0 \end{array} \right] \quad (4k \times 4k), \quad (4.4)$$

$$\epsilon \rightsquigarrow \left[\begin{array}{c|ccc} & y & & 0 \\ & x & y & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & x & y \\ \hline & 0 & & & x \\ * & & & & \end{array} \right] \quad ((2\epsilon + 1) \times (2\epsilon + 1)).$$

El bloque derecho superior en la última matriz tiene $\epsilon + 1$ filas y ϵ columnas. Notemos que

$$m = \sum_{\alpha_i \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}} 2k_i + \sum_{\alpha_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}} 4k_i + \sum_{i=1}^s (2\epsilon_i + 1).$$

Todo $\mu \in V_{2,m}$ de tipo $(2, m)$ (es decir $\mu(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_1) = \mathbf{n}_2$) es isomorfa a $\mu_{\mathcal{S}}$ para al menos uno de tales conjuntos \mathcal{S} , y dos $\mu_{\mathcal{S}}, \mu_{\mathcal{S}'}$ son isomorfas si y sólo si $s = s'$, $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_s\} = \{\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_s\}$ (contando multiplicidades), $r = r'$, y existe una transformación de Möbius real $T: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$,

$$Tz := \frac{az + b}{cz + d}, \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{R}),$$

tal que $\{(\alpha'_1, k'_1), \dots, (\alpha'_r, k'_r)\} = \{(T\alpha_1, k_1), \dots, (T\alpha_r, k_r)\}$ (contando multiplicidades). Se ve directamente que la forma Pfaffiana de $\mu_{\mathcal{S}}$ está dada por

$$f_{\mu_{\mathcal{S}}}(x, y) = x^{\sum_{\alpha_i \in \mathbb{R}} k_i} \cdot \prod_{\alpha_i \in \mathbb{R}} (y - \alpha_i x)^{k_i} \cdot \prod_{\alpha_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}} (y - \alpha_i x)^{k_i} (y - \overline{\alpha_i} x)^{k_i},$$

de lo cual deducimos que $\mu_{\mathcal{S}}$ es nosingular si y sólo si

$$\mathcal{S} = \{(\alpha_1, k_1), \dots, (\alpha_r, k_r)\}, \quad \text{con } \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

En este caso, si $\alpha_i = a_i + ib_i$, entonces

$$f_{\mu_{\mathcal{S}}}(x, y) = \prod_i ((y - a_i x)^2 + b_i^2 x^2)^{k_i}.$$

Ejemplo 4.2.1. Si $\mathcal{S} = \{(\mathbf{i}, 1), (\mathbf{i}, 1)\}$ y $\mathcal{S}' = \{(\mathbf{i}, 2)\}$ entonces $\mu_{\mathcal{S}}, \mu_{\mathcal{S}'} \in V_{2,8}$ son dos álgebras nosingulares no-isomorfas con formas Pfaffianas idénticas dada por $(x^2 + y^2)^2$. Agregando la familia $\mu_{\mathcal{S}_t}$, $\mathcal{S}_t = \{(\mathbf{i}, 1), (t\mathbf{i}, 1)\}$, $t > 1$, de álgebras no-isomorfas dos-a-dos con formas Pfaffianas $f_{\mu_{\mathcal{S}_t}} = (x^2 + y^2)(t^2x^2 + y^2)$, se obtiene la clasificación de todas las álgebras de Lie nosingulares de tipo (2, 8) (comparar con [LT99, Corolario 4.9,(ii)]). Que la familia no es isomorfa dos-a-dos resulta usando que la distancia hiperbólica entre \mathbf{i} y $t\mathbf{i}$ es estrictamente creciente con t , o alternativamente, de la no equivalencia proyectiva de sus formas Pfaffianas.

Y. Nikolayevsky ha obtenido una clasificación completa de todas las álgebras de Lie de tipo (2, m) que admiten un producto interno nilsoliton.

Teorema 4.2.2. [N12] *Sea $\mu_{\mathcal{S}}$ un álgebra 2-pasos de tipo (2, m), donde*

$$\mathcal{S} = \{(\alpha_1, k_1), \dots, (\alpha_r, k_r), (a_1, j_1), \dots, (a_u, j_u), \epsilon_1, \dots, \epsilon_s\},$$

$$\alpha_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \quad a_i \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad \epsilon_i, k_i, j_i \in \mathbb{N},$$

y supongamos que $r > 0$ o $u \geq 3$. Entonces $\mu_{\mathcal{S}}$ admite un producto interno nilsoliton si y sólo si

- $k_1 = \dots = k_r = 1$ y $j_1 = \dots = j_u = 1$, y
- $\#\{i : a_i = a\} < r + \frac{1}{2}u$, para todo $i = 1, \dots, u$.

Esto es solamente una parte del teorema de clasificación [N12, Teorema 1], llamado el caso genérico. Las partes restantes son muy complicadas de describir y no son necesarias en el caso nosingular.

Corolario 4.2.3. *Una $\mu_{\mathcal{S}}$ nosingular, $\mathcal{S} = \{(\alpha_1, k_1), \dots, (\alpha_r, k_r)\}$, admite un producto interno nilsoliton si y sólo si $k_1 = \dots = k_r = 1$.*

A continuación, damos una prueba alternativa de este corolario, como una aplicación del Teorema 4.1.1, la cual es mucho más corta. De acuerdo a dicho teorema, el problema de cuáles álgebras nosingulares de tipo (2, m) admiten un producto interno nilsoliton se puede resolver estudiando si sus $\mathrm{SL}_m \times \mathrm{SL}_2$ -órbitas son cerradas o no.

Lema 4.2.4. *Si $\mathcal{S} = \{(\alpha, k)\}$ y $\mathcal{S}' = \{(\alpha, 1), \dots, (\alpha, 1)\}$ (k veces), $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, entonces*

$$\mu_{\mathcal{S}'} \in \overline{\mathrm{SL}_{4k} \times \{I_2\}} \cdot \mu_{\mathcal{S}},$$

donde I_2 denota la matriz identidad 2×2 .

Prueba. Recordemos que la matriz $J_{\mu_{\mathcal{S}}}(xZ_1 + yZ_2)$ que define $\mu_{\mathcal{S}}$ consiste de un solo bloque $4k \times 4k$ en (4.4) para $\alpha = a + ib$. Si consideramos $\mu_t := \varphi_t \cdot \mu_{\mathcal{S}}$, donde

$$\varphi_t := \mathrm{Diag}(e^t, e^t, e^{-t}, e^{-t}, \dots, e^t, e^t, e^{-t}, e^{-t}, 1, 1) \in \mathrm{SL}_{4k} \times \{I_2\},$$

entonces es fácil verificar que el bloque superior derecho de $J_{\mu_t}(xZ_1 + yZ_2)$ está dado para todo t por

$$\begin{bmatrix} 0 & & & & & & -bx & y-ax \\ & & & & & & y-ax & bx \\ & & & & -bx & y-ax & 0 & e^{-2t}x \\ & & & & y-ax & bx & e^{-2t}x & 0 \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ -bx & y-ax & 0 & e^{-2t}x & & & & \\ y-ax & bx & e^{-2t}x & 0 & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Esto implica que $\mu_t \rightarrow \mu_{\mathcal{S}'}$, cuando $t \rightarrow \infty$, puesto que llegamos al límite después de permutar un número de k bloques 4×4 de la forma (4.4). Por lo tanto, obtenemos que $\mu_{\mathcal{S}'} \in \overline{\text{SL}_{4k} \times \{I_2\}} \cdot \mu_{\mathcal{S}}$, como se quería demostrar. \square

La prueba anterior se puede modificar fácilmente para llegar al siguiente resultado más general.

Corolario 4.2.5. $\mu_{\mathcal{S}'} \in \overline{\text{SL}_{4k} \times \{I_2\}} \cdot \mu_{\mathcal{S}}$ para todo $\mathcal{S} = \{(\alpha_1, k_1), \dots, (\alpha_r, k_r)\}$, $\alpha_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, y $\mathcal{S}' = \{(\alpha_1, j_{11}), \dots, (\alpha_1, j_{1s_1}), \dots, (\alpha_r, j_{r1}), \dots, (\alpha_r, j_{rs_r})\}$ tal que

$$\sum_{i=1}^{s_1} j_{1i} = k_1, \quad \dots \quad \sum_{i=1}^{s_r} j_{ri} = k_r.$$

Prueba. Si $k_i \geq 2$ para algún i , entonces resulta del Corolario 4.2.5 que la órbita $\text{SL}_m \times \text{SL}_2 \cdot \mu_{\mathcal{S}}$ no es cerrada, y así $\mu_{\mathcal{S}}$ no admite un producto interno nilsoliton por el Teorema 4.1.1.

Recíprocamente, sea $\mu_{\mathcal{S}} \in V_{2,4r}$ un álgebra nosingular con $\mathcal{S} = \{(\alpha_1, 1), \dots, (\alpha_r, 1)\}$, $\alpha_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. De acuerdo al Teorema 4.1.1, es suficiente mostrar que la órbita $\text{SL}_{4r} \times \text{SL}_2 \cdot \mu_{\mathcal{S}}$ es cerrada en $V_{2,4r}$. Supongamos que $\mu_k := (\psi_k, \varphi_k) \cdot \mu_{\mathcal{S}} \rightarrow \lambda \in V_{2,4r}$, cuando $k \rightarrow \infty$, con $(\psi_k, \varphi_k) \in \text{SL}_{4r} \times \text{SL}_2$. Así sus formas Pfaffianas $f_{\mu_k} \rightarrow f_{\lambda}$ y están dadas por $f_{\mu_k} = f_{\mu_{\mathcal{S}}} \circ \varphi_k^t \in \text{SL}_2 \cdot f_{\mu_{\mathcal{S}}}$ para todo k , de lo cual resulta que $f_{\lambda} \in \text{SL}_2 \cdot f_{\mu_{\mathcal{S}}}$ ya que la SL_2 -órbita de toda forma binaria positiva es cerrada (ver Ejemplo 3.2.2).

En particular, λ es también nosingular. Por otra parte, de la equivalencia entre f_{λ} y $f_{\mu_{\mathcal{S}}}$ se obtiene que λ debe ser isomorfa a un álgebra $\mu_{\mathcal{S}'}$ para algún conjunto \mathcal{S}' de la forma

$$\mathcal{S}' = \{(\alpha_1, k_1), \dots, (\alpha_r, k_r)\},$$

tal que para todo $j = 1, \dots, r$ fijo,

$$\sum_{\alpha_i = \alpha_j} k_i = \#\{\alpha_i : \alpha_i = \alpha_j\}.$$

Es fácil ver usando el Corolario 4.2.5 que $\mu_{\mathcal{S}} \in \overline{\text{SL}_{4r} \times \text{SL}_2} \cdot \lambda$, y como $\lambda \in \overline{\text{SL}_{4r} \times \text{SL}_2} \cdot \mu_{\mathcal{S}}$, obtenemos que $\lambda \in \text{SL}_{4r} \times \text{SL}_2 \cdot \mu_{\mathcal{S}}$. Esto implica que $\text{SL}_{4r} \times \text{SL}_2 \cdot \mu_{\mathcal{S}}$ es en realidad cerrada, como se quería probar. \square

Resulta de los Corolarios 4.2.5 y 4.2.3 que para cualquier forma binaria positiva dada $f \in P_{2,d}$, existe una única álgebra nosingular $\mu \in V_{2,2d}$ (salvo isomorfismo) con forma Pfaffiana $f_{\mu} = f$ que admite un producto interno nilsoliton. Veremos en la siguiente sección que esto no es cierto para ternarias cuárticas.

4.3 Álgebras nosingulares de tipo (3, 8)

En vista de los resultados obtenidos en la Sección 4.2, tenemos una idea bastante clara de las álgebras nosingulares de tipo $(2, m)$, incluyendo de cuales son las que admiten una métrica nilsoliton. Como es bien sabido que sólo hay un álgebra nosingular de tipo $(3, 4)$ (a saber, el álgebra tipo- H cuaterniónica $\mathfrak{n} = \mathbb{H} \oplus \text{Im}\mathbb{H}$), el siguiente tipo para estudiar en grado de dificultad es $(3, 8)$, que es el objetivo de esta sección.

Un primer problema que tenemos que afrontar en tipo $(3, 8)$ es que las formas Pfaffianas son ternarias cuárticas, un tema muy sutil desde muchos puntos de vista. La clasificación de ternarias cuárticas salvo equivalencia es un problema clásico abierto en teoría de invariantes, incluso el anillo de invariantes $\mathbb{C}[P_{3,4}]^{\text{SL}_3(\mathbb{C})}$ no se conoce completamente. Sobre los números reales, se puede inferir que no hay esperanza de una clasificación explícita de ternarias cuárticas positivas. De acuerdo al Teorema 3.4.2, hay por lo menos una $\mu \in V_{3,8}^+$ nosingular con forma Pfaffiana $f \in P_{3,4}^+$ dada, así que en algún sentido, una clasificación de álgebras nosingulares de tipo $(3, 8)$ también se puede considerar fuera de alcance. Se puede obtener una indicación contundente de esto del siguiente resultado de existencia debido a J. Heber (ver [H98, Teorema 6.19]): hay una familia continua 12-paramétrica de álgebras 2-pasos no-isomorfas dos-a-dos de tipo $(3, 8)$ alrededor de la tipo- H , las cuales son todas nosingulares en un entorno por continuidad. Además, todas admiten una métrica nilsoliton.

4.3.1 Existencia de nilsolitones

Las siguientes tres proposiciones proporcionan ejemplos explícitos de familias continuas de álgebras nosingulares que admiten un producto interno nilsoliton con diferentes tipos de formas Pfaffianas.

Proposición 4.3.1. *Sea $\mu_{t_1, t_2, t_3} \in V_{3,8}$ un álgebra de Lie definida por*

$$J_{\mu}(xZ_1 + yZ_2 + zZ_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & x & 0 & y & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_1x & 0 & t_2y & 0 & t_3z \\ -x & 0 & 0 & 0 & z & 0 & -y & 0 \\ 0 & -t_1x & 0 & 0 & 0 & z & 0 & -y \\ -y & 0 & -z & 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & -t_2y & 0 & -z & 0 & 0 & 0 & x \\ -z & 0 & y & 0 & -x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -t_3z & 0 & y & 0 & -x & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces μ_{t_1, t_2, t_3} con

$$t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = 1, \quad 0 < t_3 \leq t_2 \leq t_1, \quad t_1t_2 \leq 1, \quad t_2t_3 \leq 1,$$

es una familia 2-paramétrica de álgebras nosingulares no-isomorfas dos-a-dos que admiten nilsolitones con formas Pfaffianas dadas por

$$f_{\mu_{t_1, t_2, t_3}}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)(t_1x^2 + t_2y^2 + t_3z^2).$$

Prueba. El cálculo de la forma Pfaffiana es sencillo. Para probar que cada μ_{t_1, t_2, t_3} admite

un producto interno nilsoliton aplicamos el Teorema 4.1.6. Un cálculo directo nos da

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Una solución α con todas sus coordenadas positivas que satisface el sistema $U\alpha = [1]_m$ del Teorema 4.1.6 es

$$\alpha = \left(\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10} \right).$$

Entonces, por dicho teorema, μ_{t_1, t_2, t_3} admite un producto interno nilsoliton.

Si μ_{t_1, t_2, t_3} y μ_{s_1, s_2, s_3} son isomorfas, entonces $f_{\mu_{t_1, t_2, t_3}} \simeq f_{\mu_{s_1, s_2, s_3}}$ (ver pág. 14). Por el Lema 6.5.2, existe $c > 0$ y una permutación $\sigma \in S_3$ tales que

$$t_i = cs_{\sigma(i)} \quad \text{o} \quad t_i = \frac{c}{s_{\sigma(i)}}$$

para todo $i = 1, 2, 3$. Esto implica que $t_1 = s_1, t_2 = s_2, t_3 = s_3$, por las condiciones requeridas por la proposición. \square

Proposición 4.3.2. *Sea $\mu_t \in V_{3,8}$ definida por*

$$J_{\mu_t}(xZ_1 + yZ_2 + zZ_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ax & 0 & 0 & y & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & bx & y & 0 & -z & 0 \\ -ax & 0 & 0 & 0 & 0 & z & y & 0 \\ 0 & -bx & 0 & 0 & z & 0 & 0 & y \\ 0 & -y & 0 & -z & 0 & 0 & 0 & x \\ -y & 0 & -z & 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & z & -y & 0 & 0 & -x & 0 & 0 \\ -z & 0 & 0 & -y & -x & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donde $a = \frac{-t - \sqrt{t^2 - 4}}{2}$, $b = \frac{-t + \sqrt{t^2 - 4}}{2}$. Entonces μ_t con $t \geq 2$ es una familia 1-paramétrica de álgebras no-singulares no-isomorfas dos-a-dos que admiten nilsolitones con formas Pfaffianas dadas por

$$f_{\mu_t}(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 + tx^2y^2.$$

Prueba. La existencia de un nilsoliton resulta del Teorema 4.1.7, ya que μ_t es un álgebra uniforme.

Análogamente a la prueba del lema anterior, si μ_s y μ_t son isomorfas, entonces $f_{\mu_s} \simeq f_{\mu_t}$. Del Ejemplo 3.3.2 resulta que $s = t$, lo cual prueba que μ_s y μ_t son isomorfas si y sólo si $s = t$, es decir, μ_t es una curva de álgebras no-isomorfas dos-a-dos. \square

Proposición 4.3.3. *Sea $\mu_t \in V_{3,8}$ definida por*

$$J_{\mu_t}(xZ_1 + yZ_2 + zZ_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -t^2x & 0 & y & 0 & 0 & \alpha_t z \\ 0 & 0 & 0 & -t^2x & 0 & y & z & 0 \\ t^2x & 0 & 0 & 0 & 0 & -z & y & 0 \\ 0 & t^2x & 0 & 0 & -\frac{z}{\alpha_t} & 0 & 0 & y \\ -y & 0 & 0 & \frac{z}{\alpha_t} & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & -y & z & 0 & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & -z & -y & 0 & -x & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_t z & 0 & 0 & -y & 0 & -x & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donde $\alpha_t := \frac{2t^2}{2t^2+1-\sqrt{4t^2+1}}$. Entonces μ_t with $t > 1$ es una familia 1-paramétrica de álgebras nonsingulares no-isomorfas dos-a-dos que admiten nilsolitones con formas Pfaffianas dadas por

$$f_{\mu_t}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^2 + tx^2z^2.$$

Prueba. μ_t es un álgebra uniforme, entonces, por el Teorema 4.1.7, μ_t admiten un producto interno nilsoliton. El hecho de que μ_t es una curva de álgebras dos-a-dos no-isomorfas, resulta del Ejemplo 3.1.4. \square

4.3.2 No-existencia de nilsolitones

Las siguientes dos proposiciones proporcionan ejemplos explícitos de familias continuas de álgebras nonsingulares de tipo (3, 8) las cuales no admiten un producto interno nilsoliton.

Proposición 4.3.4. Sea $\mu_t \in V_{3,8}$ definida por

$$J_{\mu_t}(xZ_1 + yZ_2 + zZ_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -x & -y & 0 & 0 & 0 & -z \\ 0 & 0 & yt & -x & 0 & 0 & -z & 0 \\ x & -yt & 0 & -x & 0 & -z & 0 & 0 \\ y & x & x & 0 & -z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & -x & -y \\ 0 & 0 & z & 0 & 0 & 0 & y & -x \\ 0 & z & 0 & 0 & x & -y & 0 & -x \\ z & 0 & 0 & 0 & y & x & x & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces μ_t with $t > 1$ es una familia 1-paramétrica de álgebras nonsingulares no-isomorfas dos-a-dos con formas Pfaffianas dadas por

$$f_{\mu_t}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + ty^2 + z^2),$$

las cuales no admiten un producto interno nilsoliton.

Prueba. Por el Teorema 6.5.2, del Apéndice 6.5, μ_t es una curva de álgebras de Lie dos-a-dos no-isomorfas, pues $t > 1$.

Veamos ahora que μ_t no admite un producto interno nilsoliton. Si consideramos $\lambda_s := \varphi_s \cdot \mu_t$, donde

$$\varphi_s := \text{Diag}(e^s, e^s, e^{-s}, e^{-s}, e^s, e^s, e^{-s}, e^{-s}, 1, 1, 1) \in \text{SL}_8 \times \text{SL}_3,$$

entonces es fácil probar que $\lambda_s \rightarrow \tilde{\mu}_t$, cuando $s \rightarrow \infty$, donde $\tilde{\mu}_t \in V_{3,8}$ está definida por

$$J_{\tilde{\mu}_t}(xZ_1 + yZ_2 + xZ_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -x & -y & 0 & 0 & 0 & -z \\ 0 & 0 & yt & -x & 0 & 0 & -z & 0 \\ x & -yt & 0 & 0 & 0 & -z & 0 & 0 \\ y & x & 0 & 0 & -z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & -x & -y \\ 0 & 0 & z & 0 & 0 & 0 & y & -x \\ 0 & z & 0 & 0 & x & -y & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 & 0 & y & x & x & 0 \end{bmatrix}.$$

para todo t . Esto implica que $\tilde{\mu}_t \in \overline{\text{SL}_8 \times \text{SL}_3 \cdot \mu_t}$, y puesto que $\dim \text{Der}(\mu_t) = 26$ y $\dim \text{Der}(\tilde{\mu}_t) = 29$ tenemos que μ_t no es isomorfa a $\tilde{\mu}_t$. Resulta que $\text{SL}_8 \times \text{SL}_3 \cdot \mu_t$ no es cerrado y así μ_t no admite un nilsoliton por el Teorema 4.1.1. \square

Proposición 4.3.5. *Sea $\lambda_t \in V_{3,8}$ definida por*

$$J_{\lambda_t}(xZ_1 + yZ_2 + zZ_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -x & -y & 0 & 0 & 0 & -z \\ 0 & 0 & yt & -x & 0 & 0 & -z & 0 \\ x & -yt & 0 & -y & 0 & -z & -y & -y \\ y & x & y & 0 & -z & 0 & -y & -y \\ 0 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & -x & -y \\ 0 & 0 & z & 0 & 0 & 0 & y & -x \\ 0 & z & y & y & x & -y & 0 & -y \\ z & 0 & y & y & y & x & y & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces λ_t with $t > 1$ es una familia 1-paramétrica de álgebras nosingulares no-isomorfas dos-a-dos con formas Pfaffianas dadas por

$$f_{\lambda_t}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + ty^2 + z^2),$$

las cuales no admiten un producto interno nilsoliton.

Prueba. Se aplica el Teorema 6.5.2 para ver que μ_t es una curva. Que μ_t no admite un nilsoliton, resulta de la misma forma como en la prueba de la Proposición 4.3.4, incluso con la misma φ_s and $\tilde{\mu}_t$, y ahora usamos que $\dim \text{Der}(\lambda_t) = 27$ para todo t . \square

Capítulo 5

Automorfismos de álgebras nosingulares

En este capítulo, estudiamos automorfismos y derivaciones de las álgebras 2-pasos que son nosingulares. Nuestra principal contribución aquí es proporcionar otros ejemplos además de las álgebras de tipo- H con ciertas propiedades de maximalidad que tienen que ver con el espacio de derivaciones.

Es fácil ver que el álgebra de Lie de derivaciones de un álgebra 2-pasos $\mu \in V_{n,m}$ de tipo (n, m) se descompone como

$$\text{Der}(\mu) = \mathbb{R} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 2I \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ * & 0 \end{bmatrix} \oplus \text{Der}_{gr}(\mu), \quad (5.1)$$

donde $\text{Der}_{gr}(\mu)$ es la subálgebra de derivaciones graduadas dada por

$$\text{Der}_{gr}(\mu) := \left\{ \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} : B \in \mathfrak{sl}_m, A \in \mathfrak{gl}_n, B^t J_\mu(Z) + J_\mu(Z) B = J_\mu(A^t Z), \forall Z \in \mathfrak{n}_2 \right\}.$$

Esta última es el álgebra de Lie del grupo de Lie $\text{Aut}(\mu)$ dado por

$$\text{Aut}_{gr}(\mu) := \left\{ \begin{bmatrix} \psi & 0 \\ 0 & \varphi \end{bmatrix} : \psi \in \text{SL}_m, \varphi \in \text{GL}_n, \psi^t J_\mu(Z) \psi = J_\mu(\varphi^t Z), \forall Z \in \mathfrak{n}_2 \right\}.$$

Dado $\begin{bmatrix} \psi & 0 \\ 0 & \varphi \end{bmatrix} \in \text{Aut}_{gr}(\mu)$, resulta que $f_\mu(\varphi^t Z) = f_\mu(Z)$ para todo Z , es decir, φ^t está en el grupo de automorfismo $\text{Aut}(f_\mu)$ de la forma Pfaffiana f_μ .

Teorema 5.0.6. [KT12, Teorema 2.1] *Si μ es nonsingular, entonces existe un producto interno en el centro \mathfrak{n}_2 que es invariante por $\text{Aut}_{gr}(\mu)$.*

Supongamos de ahora en más que nuestro producto interno fijo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en \mathfrak{n}_2 es $\text{Aut}_{gr}(\mu)$ -invariante para toda μ nonsingular que consideremos. Definiendo el ideal de $\text{Der}_{gr}(\mu)$,

$$\text{Der}_0(\mu) := \left\{ \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \in \text{Der}_{gr}(\mu) : A = 0 \right\},$$

y el correspondiente subgrupo normal de $\text{Aut}(\mu)$,

$$\text{Aut}_0(\mu) := \left\{ \begin{bmatrix} \psi & 0 \\ 0 & \varphi \end{bmatrix} \in \text{Aut}_{gr}(\mu) : \varphi = I \right\},$$

se deduce lo siguiente.

Corolario 5.0.7. [KT12, Corollary 2.4] Para toda μ nosingular de tipo (n, m) ,

$$\dim \text{Der}_{gr}(\mu)/\text{Der}_0(\mu) = \dim \text{Aut}_{gr}(\mu)/\text{Aut}_0(\mu) \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

Ejemplo 5.0.8. Es bien sabido que $\dim \text{Der}_{gr}(\mu)/\text{Der}_0(\mu) = \frac{n(n-1)}{2}$ para toda álgebra μ de tipo- H (ver [Ri82, S96]). En realidad,

$$\begin{bmatrix} J_\mu(Z) & 0 \\ 0 & R_Z \end{bmatrix} \in \text{Aut}(\mu), \quad \forall Z \in \mathfrak{n}_2, \quad \|Z\| = 1,$$

donde $R_Z(W) = 2\langle Z, W \rangle Z - W$ es la reflexión con respecto al hiperplano $\{Z\}^\perp$ en el centro \mathfrak{n}_2 .

Surge una cuestión natural: ¿cuáles álgebras nosingulares de tipo (n, m) satisfacen alguna de las siguientes condiciones equivalentes? ¿Estas condiciones valen solamente para las álgebras de tipo- H ?

- $\dim \text{Der}_{gr}(\mu)/\text{Der}_0(\mu) = \frac{n(n-1)}{2}$.
- $\text{Der}_{gr}(\mu)/\text{Der}_0(\mu) \simeq \mathfrak{so}(n)$.
- Para toda $A \in \mathfrak{so}(n)$ existe $B \in \mathfrak{sl}_m$ tal que $\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \in \text{Der}(\mu)$.
- Para todo $\varphi \in \text{SO}(n)$ existe $\psi \in \text{SL}_m$ tal que $\begin{bmatrix} \psi & 0 \\ 0 & \varphi \end{bmatrix} \in \text{Aut}(\mu)$.

Vale la pena señalar que estas condiciones implican que la forma Pfaffiana está necesariamente dada, salvo multiplicación por escalares, por $f_\mu = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{m/4}$, ya que esta es la única forma n -aria $m/2$ -ádica que es $\text{SO}(n)$ -invariante.

Ahora mostramos que ya en tipo $(2, m)$, hay ejemplos de álgebras nosingulares que satisfacen las condiciones de maximalidad anteriores y que no son de tipo- H .

Proposición 5.0.9. Si $\mathcal{S} = \{(i, k_1), \dots, (i, k_r)\}$, entonces la correspondiente álgebra nosingular $\mu_{\mathcal{S}}$ de tipo $(2, m)$ (ver Sección 4.2) satisface que

$$\text{Der}_{gr}(\mu_{\mathcal{S}})/\text{Der}_0(\mu_{\mathcal{S}}) \simeq \mathfrak{so}(2).$$

Observación 5.0.10. Este resultado ha sido probado independientemente en [KT12, Theorem 3.5], donde además se obtiene que $\text{Der}_{gr}(\mu_{\mathcal{S}})/\text{Der}_0(\mu_{\mathcal{S}}) = 0$ para toda otra álgebra nosingular de tipo $(2, m)$.

Prueba. Supongamos primero que $\mathcal{S} = \{(i, k)\}$. Es un cálculo engorroso pero elemental ver que

$$\begin{bmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & -1 & 0 \end{bmatrix} \in \text{Der}(\mu_{\mathcal{S}}), \quad (5.2)$$

donde M_1 y M_2 son las $(2k \times 2k)$ -matrices definidas por

$$M_1 = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc} 0 & 0 & -1 & 0 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & -1 & & & & & & & & \\ \hline & & 0 & 2 & 0 & & & & & & & \\ & & -2 & 0 & 0 & & & & & & & \\ \hline & & & & 0 & 4 & 1 & 0 & & & & \\ & & & & -4 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ \hline & & & & & & 0 & 6 & \ddots & & & \\ & & & & & & -6 & 0 & \ddots & & & \\ \hline & & & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & & \ddots & & k-3 & 0 \\ \hline & & & & & & & & & & 0 & k-3 \\ & & & & & & & & & & 0 & 2(k-1) \\ \hline & & & & & & & & & & -2(k-1) & 0 \end{array} \right]$$

y

$$M_2 = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc|cc|cc} 0 & -(2k-1) & -(k-2) & 0 & & & & & & & & \\ (2k-1) & 0 & 0 & -(k-2) & & & & & & & & \\ \hline & & 0 & -(2k-3) & \ddots & & & & & & & \\ & & (2k-3) & 0 & \ddots & & & & & & & \\ \hline & & & & \ddots & & -3 & 0 & & & & \\ & & & & \ddots & & 0 & -3 & & & & \\ \hline & & & & & & 0 & -7 & -2 & 0 & & \\ & & & & & & 7 & 0 & 0 & -2 & & \\ \hline & & & & & & & & 0 & -5 & -1 & 0 \\ & & & & & & & & 5 & 0 & 0 & -1 \\ \hline & & & & & & & & & & 0 & -3 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & & & & & & & & & & 0 & -1 \\ & & & & & & & & & & & & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Se puede usar la fórmula $J_\mu(Z_i) = \begin{bmatrix} 0 & A_i \\ -A_i^t & 0 \end{bmatrix}$ dada en (4.4) y comprobar que

$$M_1^t A_1 + A_1 M_2 = A_2, \quad M_1^t A_2 + A_2 M_2 = -A_1.$$

Finalmente, si $\mathcal{S} = \{(i, k_1), \dots, (i, k_r)\}$, entonces podemos definir las derivaciones requeridas dadas en bloques como antes, concluyendo la prueba. \square

Observación 5.0.11. Para una prueba alternativa completa de (5.2) ver Apéndice 6.5.

Notemos que un álgebra $\mu_{\mathcal{S}}$ como en la Proposición 5.0.9 es de tipo- H si y sólo si $k_1 = \dots = k_r = 1$.

Capítulo 6

No-existencia de nilsolitones en álgebras 2-pasos

6.1 Introducción

En este capítulo, tratamos con la siguiente cuestión:

¿cómo están los nilradicales Einstein y no-Einstein distribuidos entre las álgebras de Lie 2-pasos nilpotentes?

Estamos interesados principalmente en las álgebras de Lie que son *indescomponibles*, en el sentido que no pueden escribirse como suma directa de ideales, ya que se sabe que en tal caso $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2$ es un nilradical Einstein si y sólo si \mathfrak{n}_1 y \mathfrak{n}_2 lo son (ver [J2], [N11]).

Recordar que un álgebra de Lie 2-pasos nilpotente \mathfrak{n} se dice que es de *tipo* (p, q) si $\dim \mathfrak{n} = p + q$ y $\dim[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] = p$. Resulta que siempre

$$p \leq D_q := \frac{1}{2}q(q-1).$$

Hay solamente un álgebra de Lie 2-pasos nilpotente de tipo (D_q, q) y sólo una cantidad finita de tipo $(D_q - 1, q)$ (salvo isomorfismo), y todas son nilradicales Einstein (ver [N11]). Por otro lado, toda álgebra de Lie 2-pasos nilpotente de dimensión ≤ 7 es un nilradical Einstein (ver [W] y [F]). Recientemente, usando la técnica de concatenación y adjunción de álgebras de Lie, Jablonski probó el siguiente resultado.

Teorema 6.1.1. [J1] *Existen álgebras de Lie 2-pasos nilpotentes indescomponibles de tipo (p, q) , las cuales no son nilradicales Einstein, para todo par (p, q) tal que*

$$8 \leq q, \quad y \quad 2 \leq p \leq \frac{5}{4}q - 8.$$

En este capítulo, estudiamos una clase de álgebras de Lie 2-pasos nilpotentes naturalmente asociadas a grafos para encontrar nilradicales no-Einstein en los tipos que no son cubiertos por el teorema anterior. Usamos un criterio basado en la ‘positividad’ de un grafo dado en [LW11]. Nuestro principal resultado se puede establecer como sigue.

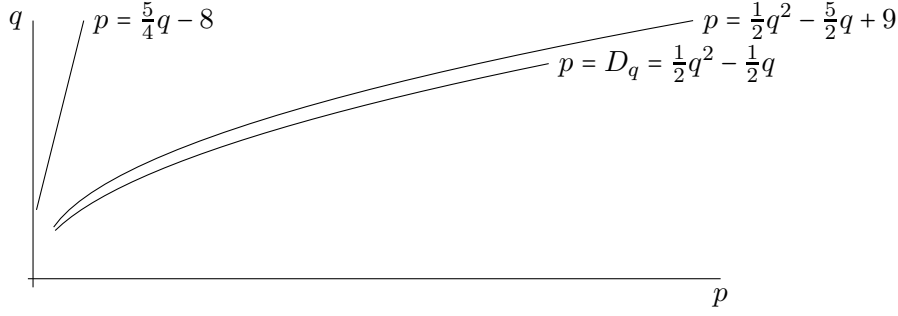


Figura 6.1: Bordes inferiores aproximados de las regiones cubiertas por cada teorema

Teorema 6.1.2. *Existen álgebras de Lie 2-pasos nilpotentes indescomponibles de tipo (p, q) , las cuales no son nilradicales Einstein, para todo par (p, q) tal que*

$$21 \leq q \quad \text{y} \quad q - 1 \leq p \leq \frac{1}{2}q^2 - \frac{5}{2}q + 9.$$

Como se puede visualizar en la Figura 6.1, esta cota mejora considerablemente la dada en el Teorema 6.1.1 para q grande, ya que es cuadrática en vez de lineal. La existencia de nilradicales no-Einstein de tipo (p, q) tales que

$$\frac{1}{2}q^2 - \frac{5}{2}q + 10 \leq p \leq D_q - 2.$$

es una pregunta abierta.

Con respecto a la existencia de curvas de álgebras de Lie 2-pasos que no sean nilradicales Einstein, obtenemos en Sección 6.5 el siguiente resultado, el cual responde una pregunta formulada por Payne en [P11].

Teorema 6.1.3. *Existen familias continuas no-isomorfas dos-a-dos de álgebras 2-pasos que no son nilradicales Einstein en toda dimensión ≥ 14 y en dimensión 12. Son todas de tipo $(2, q)$ para algún q .*

6.2 Preliminares

6.2.1 El álgebra de Lie asociada con un grafo

Sea $\mathcal{G} = (S, E)$ un grafo (finito, no dirigido), con conjunto de vértices $S = \{v_1, \dots, v_q\}$ y aristas $E = \{l_1, \dots, l_p\}$, $l_k = v_i v_j$ para algún i, j . Asociamos a cada \mathcal{G} el álgebra de Lie $\mathfrak{n}_{\mathcal{G}} = (\mathbb{R}^n, [\cdot, \cdot])$, $n = p + q$, con corchete de Lie definido por

$$[e_i, e_j] = \begin{cases} e_{q+k} & \text{si } l_k = v_i v_j, i < j \leq q; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde $\{e_i\}_{i=1}^n$ es la base estándar de \mathbb{R}^n . Frecuentemente identificaremos los vértices del grafo con los vectores e_1, \dots, e_q , y las aristas con e_{q+1}, \dots, e_{q+p} . Entonces el corchete entre

dos vértices v_i y v_j , $i < j$, es la arista que los une, y es nulo en otro caso. Para obtener un corchete de Lie bien definido suponemos además que ningún par de aristas (distintas) une el mismo par de vértices.

Recordemos de la teoría de grafos que dos aristas l_k, l_m de un grafo \mathcal{G} se llaman *adyacentes* si forman un vértice, lo cual se denotará por $l_k \sim l_m$. El *grafo lineal* $L(\mathcal{G})$ de \mathcal{G} es el grafo cuyo vértices son las aristas de \mathcal{G} y donde dos de ellos están unidos si y sólo si son adyacentes. La *matriz de adyacencia* $\text{Adj}(\mathcal{G})$ de un grafo \mathcal{G} con el etiquetado $\{v_1, \dots, v_q\}$ para su conjunto de vértices se define como la matriz (simétrica) $q \times q$ con 1 en la entrada i, j si $v_i v_j$ es una arista y cero en otro caso.

Proposición 6.2.1. [LW11] $\mathfrak{n}_{\mathcal{G}}$ es un nilradical Einstein si y sólo si existe $\nu > 0$ y pesos $c_1, \dots, c_p \in \mathbb{R}$ para las aristas tales que

$$3c_k + \sum_{l_m \sim l_k} c_m = \nu, \quad \forall k = 1, \dots, p, \quad (6.1)$$

$$c_k > 0, \quad \forall k = 1, \dots, p, \quad (6.2)$$

donde la suma es sobre todas las aristas l_m que forman un vértice con l_k .

Un grafo que satisface las propiedades (1) and (2) se llama *positivo*. Si consideramos el grafo lineal $L(\mathcal{G})$ de \mathcal{G} , la primera condición anterior se puede escribir en términos de su matriz de adyacencia $\text{Adj} L(\mathcal{G})$ ya que

$$(3I + \text{Adj} L(\mathcal{G})) \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix} = \nu \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Se puede probar que la matriz $3I + \text{Adj} L(\mathcal{G})$ es definida positiva, así dado $\nu > 0$ el sistema anterior siempre tiene una única solución. Y puesto que $\nu > 0$, tenemos que \mathcal{G} es positivo si y sólo si

$$(3I + \text{Adj} L(\mathcal{G}))^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

tiene todas sus entradas positivas.

6.2.2 Descomposición coherente de un grafo

Sea $\mathcal{G} = (S, E)$ un grafo, y definamos para cada $\alpha \in S$,

$$\Omega'(\alpha) = \{\omega \in S : \omega\alpha \in E\} \quad \text{y} \quad \Omega(\alpha) = \Omega'(\alpha) \cup \{\alpha\}.$$

Ahora consideremos la relación de equivalencia \sim en S definida como sigue:

$$\alpha \sim \beta \quad \text{si y sólo si} \quad \Omega'(\alpha) \subseteq \Omega(\beta) \quad \text{and} \quad \Omega'(\beta) \subseteq \Omega(\alpha),$$

o en otras palabras, dos vértices están relacionados si y sólo si tienen los mismos vecinos. Sea $\Lambda = \Lambda(S, E)$ el conjunto de clases de equivalencia en S con respecto a \sim , para cada $\lambda \in \Lambda$ llamamos $S_\lambda \subseteq S$ a su clase de equivalencia. Los subconjuntos S_λ , $\lambda \in \Lambda$, son las componentes coherentes de (S, E) ; ellos forman una partición del conjunto S .

Esta descomposición fue considerada en [DM], donde se mencionan también las siguientes propiedades:

- Dado $\mathcal{G} = (S, E)$, con S_λ sus componentes coherentes, es fácil ver que si para un dado $\lambda \in \Lambda$ existen $\alpha, \beta \in S_\lambda$ tales que $\alpha\beta \in E$, entonces $\xi\eta \in E$ para todo $\xi, \eta \in S_\lambda$. Esto implica que una componente coherente es en sí mismo un grafo completo o uno discreto.
- Para generalizar lo anterior supongamos que, dado $\lambda, \mu \in \Lambda$ existen $\alpha \in S_\lambda$ y $\beta \in S_\mu$, tales que $\alpha\beta \in E$. Entonces es fácil ver que $\xi\eta \in E$ para todo $\xi \in S_\lambda, \eta \in S_\mu$. Por lo tanto, dadas dos componentes coherentes S_λ y S_μ , o bien no son adyacentes, o bien toda posible arista entre ellas dos está en E . En éste último caso, decimos que S_λ y S_μ son *adyacentes*. Definamos un conjunto de pares no-ordenados \mathcal{E} de tal forma que $\lambda\mu \in \mathcal{E}$ si y sólo si las componentes S_λ y S_μ son adyacentes. Llamamos a (Λ, \mathcal{E}) el *grafo de coherencia* asociado con (S, E) .

Estas propiedades nos dan el siguiente resultado útil sobre los pesos de un grafo general. Llamemos a dos aristas *similares* si unen el mismo par de componentes coherentes, o están en la misma componente coherente.

Proposición 6.2.2. [La, Proposición 2.10] *Sea $\mathcal{G} = (S, E)$ un grafo positivo, con pesos $(c_i)_{i=1}^p$ para algún $\nu > 0$ fijo. Si l_i, l_j son aristas similares, entonces $c_i = c_j$.*

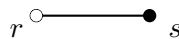
Observación 6.2.3. En un grafo arbitrario, si l_i, l_j son aristas con pesos c_i, c_j respectivamente, entonces las correspondientes ecuaciones para l_i, l_j coinciden en el sistema (6.1) por la Proposición 6.2.2. Por lo tanto, para un grafo dado (S, E) , el sistema (6.1) se puede reescribir, obteniéndose un sistema en $|\mathcal{E}| + |\{\lambda \in \Lambda_0 : |S_\lambda| > 1\}|$ variables.

6.2.3 Resultados para dos o tres componentes coherentes

En [La, Tabla 1], se da la clasificación de grafos con hasta 3 componentes coherentes de acuerdo a la positividad. Aquí repasamos esta clasificación apuntando a una exposición auto-contenida, y también porque necesitamos agregar unos pocos casos donde una componente coherente tiene solamente un vértice.

Representamos un grafo via su grafo de coherencia. Cada círculo representa una componente coherente, siendo negro si la correspondiente componente coherente es un grafo completo, y blanco si es discreto. La existencia de una arista que une dos círculos representa el hecho de que toda arista que une vértices entre esas componentes coherentes está presente en el grafo original. Finalmente, el número natural cerca de cada componente coherente es el número de vértices que contiene dicha componente.

Consideremos el grafo:



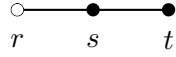
Denotemos S_1, S_2 las componentes coherentes con r, s vértices, respectivamente. Por la Proposición 6.2.2, hay sólo dos pesos posibles para las aristas en este caso: a , para las aristas que unen S_1 con S_2 , y b , para las aristas dentro de S_2 . Ahora, por la Observación 6.2.3, debemos considerar dos casos: $r \geq 1, s > 1$, y $r \geq 1, s = 1$.

Si $r \geq 1, s > 1$, el grafo es positivo si y sólo si $s \geq r$, by [La, Tabla 1].

Ahora si $r \geq 1$ y $s = 1$, todas las ecuaciones del sistema (6.1) coinciden con la simple ecuación $(2+r)a = \nu$, y su solución es $a = \nu/(2+r)$. El grafo es positivo si y sólo si a es positivo, lo cual es claramente cierto, pues $\nu > 0$.

Resulta que el grafo es positivo si y sólo si $s \geq r$ ó $s = 1$.

Ahora consideremos



Llamemos S_1, S_2, S_3 las componentes coherentes con r, s, t vértices, respectivamente. Por la Proposición 6.2.2, hay sólo cuatro posibles pesos para las aristas en este caso: a, b , para las aristas que unen S_1 con S_2 , y S_2 con S_3 respectivamente; y c, d para las aristas dentro de S_2 y S_3 respectivamente. Ahora, por la Observación 6.2.3, debemos considerar dos casos: $r \geq 1, s > 1$, y $r \geq 1, s = 1$. En total debemos considerar cuatro casos:

- (i) $r \geq 1, s > 1, t > 1$;
- (ii) $r \geq 1, s > 1, t = 1$;
- (iii) $r \geq 1, s = 1, t > 1$;
- (iv) $r \geq 1, s = 1, t = 1$.

En (i), si $r \geq 1, s > 1, t > 1$, el grafo es positivo si y sólo si $(s+t)(s-r) > (r-1)(t-1)$, por [La, Tabla 1].

En los casos (ii) y (iv), es decir $t = 1$ y $s \geq 1$, el grafo es realmente



el cual es positivo si y sólo si $s = 1$, o $s \geq r+1$, es decir $s - r > 0$.

En (iii), reescribiendo el sistema (6.1), obtenemos

$$\begin{bmatrix} r+2 & t & 0 \\ r & t+2 & t-1 \\ 0 & 2 & 2t-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ d \end{bmatrix} = \nu \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\nu > 0)$$

Entonces

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ d \end{bmatrix} = \frac{\nu}{2t(2t+r+1)} \begin{bmatrix} 2(r+t) \\ (1+t)t \\ 2t+r-rt \end{bmatrix}.$$

El grafo es positivo si y sólo si $a, b, d > 0$, si y sólo si $2t+r-rt > 0$, es decir $r < \frac{2t}{t-1} = 2 + \frac{2}{t-1}$. El lado derecho es decreciente. Si $t = 2, r = 1, 2, 3$; y si $t \geq 3, r = 1, 2$. Entonces, $2t+r-rt > 0$ si y sólo si $(r, t) = (3, 2), (1, t), (2, t)$ con $t \geq 2$.

Por lo tanto, de los casos (i)-(iv) resulta que el grafo es positivo si y sólo si vale alguna de las siguientes:

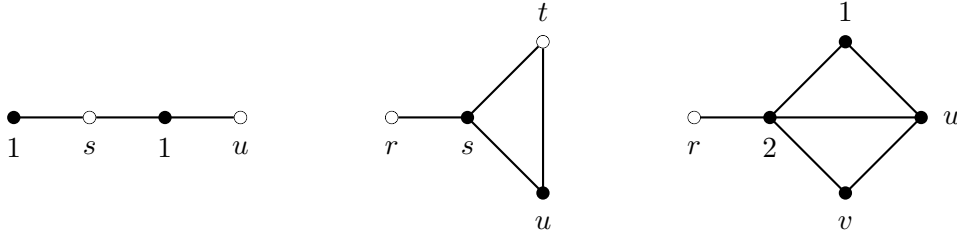


Figura 6.2: Grafos de coherencia que intervienen en la prueba del Teorema 6.1.2

- $(s+t)(s-r) > (r-1)(t-1)$;
- $s = t = 1$;
- $s = 1$ and $(r, t) = (3, 2), (1, t), (2, t)$ con $t \geq 2$.

6.3 Condiciones suficientes para no-positividad

En esta sección, damos condiciones suficientes para que ciertos grafos con 4 o 5 componentes coherentes sean no-positivos usando la misma idea que en [La]: considerar su descomposición coherente y aplicar la Proposición 6.2.1 para reescribir el sistema (6.1), obteniendo en nuestro caso un sistema más pequeño con tamaño a lo sumo 5×5 (ver Observación 6.2.3).

6.3.1 Cuatro componentes coherentes

Lema 6.3.1. *El grafo sobre la izquierda en la Figura 6.3.1 es no-positivo para todo $u \geq 6$, $s = 1, 2$.*

Prueba. Por la Proposición 6.2.2, hay sólo dos pesos posibles para las aristas: a para las aristas que unen la primera componente coherente con la segunda componente coherente (de izquierda a derecha); b para las aristas que unen la segunda componente coherente con la tercera componente coherente; y c para las aristas que unen la tercera componente coherente con la cuarta componente coherente. Entonces el sistema (6.1) se puede reescribir como

$$\begin{bmatrix} 2+s & 1 & 0 \\ 1 & 2+s & u \\ 0 & s & 2+u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \nu \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces,

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \frac{\nu}{6+3u+8s+2su+2u^2} \begin{bmatrix} 2(1+s+u) \\ 2+2s-u \\ 3(1+s) \end{bmatrix}.$$

Supongamos, por el contrario, que el grafo es positivo. En particular, debemos tener que $b > 0$, lo cual es una contradicción porque $u \geq 6$. Entonces el grafo no es positivo. \square

Lema 6.3.2. *Si alguna de las siguientes vale:*

(i) $r \geq 2, s = t = 2$;

(ii) $t \geq 2, s = u = 1$,

entonces el grafo del medio en la Figura 6.3.1 no es positivo.

Prueba. Llamemos S_1, S_2, S_3, S_4 a las componentes coherentes con r, s, t, u vértices. Por la Proposición 6.2.2, hay sólo seis posibles casos para los pesos de las aristas: a, b, c, d , para las aristas que unen S_1 con S_2 , S_2 con S_3 , S_3 con S_4 , y S_2 con S_4 respectivamente; y e, f para las aristas dentro de S_2 y S_4 respectivamente.

En (i) debemos considerar los subcasos $u > 1$ and $u = 1$.

Sea $r \geq 2, s = t = 2$ con $u > 1$. Reescribiendo el sistema (6.1) obtenemos

$$\begin{bmatrix} 2r & 4 & 0 & 2u & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 2u-1 \\ 3+r & 2 & 0 & u & 1 & 0 \\ r & 5 & u & u & 1 & 0 \\ 0 & 2 & u+3 & 2 & 0 & u-1 \\ r & 2 & 2 & u+3 & 1 & u-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \nu \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si llamamos A a la matriz del sistema, su solución está dada por

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \frac{\nu}{\det(A)} \begin{bmatrix} 18+u^3+21u+8u^2 \\ -18-15u+2ru-3u^2+ru^2 \\ 3(6+2r+5u+ru+u^2) \\ ru^2+2ru+3r-3u^2-12u-9 \\ (2r-3)u^2+(7r-12)u+9(r-1) \\ 3(3+r+4u+ru+u^2) \end{bmatrix},$$

donde $\det(A) < 0$ para todo r, u (nótese que A no es la matriz del sistema (6.1)). Si suponemos que el grafo es positivo, debemos tener que $e > 0$, lo cual es una contradicción porque si $r \geq 2$, entonces $\frac{\nu}{\det(A)}[(2r-3)u^2 + (7r-12)u + 9(r-1)] < 0$.

Si $r \geq 2, s = t = 2$ con $u = 1$, entonces

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 2r & 4 & 0 & 2 & 3 \\ 3+r & 2 & 0 & 1 & 1 \\ r & 5 & 1 & 1 & 1 \\ r & 2 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \nu \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

donde

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \frac{\nu}{264 + 18r} \begin{bmatrix} 48 \\ -3(r-12) \\ 9(r+4) \\ -6(r-4) \\ -6(3r-4) \end{bmatrix}.$$

Como antes, si el grafo es positivo, $e > 0$ (contradicción pues $r \geq 2$).

Falta considerar el segundo caso $t \geq 2, s = u = 1$. Aquí

$$\begin{bmatrix} r+2 & t & 0 & 1 \\ r & t & t & 3 \\ 0 & 1 & t+2 & 1 \\ r & t+2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \nu \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \frac{\nu}{\det(A)} \begin{bmatrix} 3(1+t) \\ 2t-r+2 \\ 2(r+t+1) \\ t(2-t)+(3-rt) \end{bmatrix},$$

donde $\det(A) > 0$ para todo r, t . Si suponemos que el grafo es positivo, entonces $d > 0$, lo cual es una contradicción porque, de hecho, $d = \frac{\nu}{\det(A)}[t(2-t) + (3-rt)] < 0$ ($t \geq 2$). \square

6.3.2 Cinco componentes coherentes

Lema 6.3.3. *Bajo las siguientes condiciones,*

(i) $r, u \geq 2$

(ii) $u = 2, v \geq 15$

(iii) $u = 1$ and $r \geq 2$ ó $v \geq 4$,

el grafo de la derecha en la Figura 6.3.1 no es positivo.

Prueba. Llamemos S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 las componentes coherentes con $r, 2, 1, u, v$ vértices, respectivamente. Por la Proposición 6.2.2, hay sólo nueve pesos posibles para las aristas en este caso: a, b, c, d, e, f para las aristas que unen S_1 con S_2 , S_2 con S_3 , S_3 con S_4 , S_4 con S_5 , S_2 con S_5 , y S_2 con S_4 respectivamente; y g, h, i para las aristas dentro de S_2 , S_4 y S_5 respectivamente.

Supongamos que en cada caso el grafo es positivo.

Sea $r, u \geq 2$. Reescribamos el sistema (6.1):

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2u & 4 & 0 & 0 & 0 & 2v-1 \\ 2r & 2 & 0 & 0 & 2v & 2u & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2v & 0 & 4 & 0 & 2u-1 & 0 \\ 3+r & 1 & 0 & 0 & v & u & 1 & 0 & 0 \\ r & 4 & u & 0 & v & u & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2+u & v & 0 & 2 & 0 & u-1 & 0 \\ r & 1 & 0 & u & 3+v & u & 1 & 0 & v-1 \\ 0 & 0 & 1 & u+v+1 & 2 & 2 & 0 & u-1 & v-1 \\ r & 1 & 1 & v & v & 3+u & 1 & u-1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \\ i \end{bmatrix} = \nu \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Puesto que el grafo es positivo, en particular, $g > 0$. Un cálculo directo muestra que $g = \frac{\nu(u+v+2)}{\det(A)} [u^2(2r-3) + uv(2r-3) + u(5r-9) + 3v(2r-1) + (3r-6)]$, lo cual es negativo pues $\det(A) < 0$ para todo r, u, v , y $u^2(2r-3) + uv(2r-3) + u(5r-9) + 3v(2r-1) + (3r-6) > 0$ pues $r \geq 2$. En este caso, el grafo no es positivo.

Para el segundo caso, $u = 2$ y $v \geq 15$, usamos la misma entrada de la matriz g ya calculada. Si $u = 2$, $g = \frac{\nu(v+4)}{\det(A)} [(10rv-9v) + (21r-36)]$. Entonces, $g \leq \frac{\nu(v+4)}{\det(A)} [(10v-9v) + (21-36)] \leq 0$ pues $v \geq 15$. Por lo tanto, el grafo no es positivo.

Finalmente, sea $u = 1$. En este caso

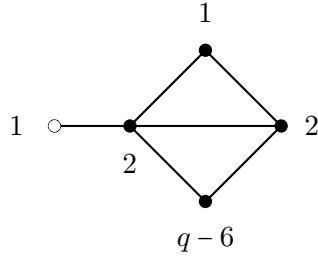
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 2v-1 \\ 0 & 2 & 3 & v & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2r & 2 & 0 & 0 & 2v & 2 & 3 & 0 \\ 3+r & 1 & 0 & 0 & v & 1 & 1 & 0 \\ r & 4 & 1 & 0 & v & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2+v & 2 & 2 & 0 & v-1 \\ r & 1 & 1 & v & v & 4 & 1 & 0 \\ r & 1 & 0 & 1 & 3+v & 1 & 1 & v-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \\ i \end{bmatrix} = \nu \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ya que el grafo es positivo, entonces g es positivo. Aquí $g = \frac{2\nu(3+v)}{\det(A)} [(5r-9) + v(4r-3)] = \frac{2\nu(3+v)}{\det(A)} [(4rv-3v) + (5r-9)]$, donde $\det(A)$ es negativo para todo r, v . Si $r \geq 2$, $g < 0$ pues $(5r-9) + v(4r-3) > 0$; y si $v \geq 4$, $g \leq \frac{2\nu(3+v)}{\det(A)} [(4v-3v) + (5-9)] \leq 0$.

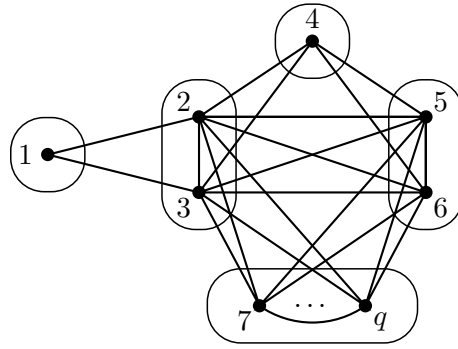
En todos los casos llegamos a una contradicción. \square

6.4 Prueba del Teorema 6.1.2

Sea $q \geq 21$ fijo, y consideremos el siguiente grafo de coherencia,



así el correspondiente grafo debe ser de la forma



\mathcal{G} es un grafo como en el de la derecha en la Figura 6.3.1 con $r = 1$, $s = 2$, $t = 1$, $u = 2$ y $v = q - 6$. Por el Lema 6.3.3, parte (ii), \mathcal{G} no es positivo porque $u = 2$ y $v = q - 6 \geq 15$. Por la Proposición 6.2.1, ya que \mathcal{G} no es positivo, el álgebra de Lie asociada $\mathfrak{n}_{\mathcal{G}}$ no es un nilradical Einstein.

Consideremos el siguiente conjunto ordenado de ciertas aristas del grafo \mathcal{G} :

$$\begin{aligned}
 H = & \{\{4, 5\}, \{4, 6\}; \\
 & \{5, 6\}, \dots, \{5, q\}; \{6, 7\}, \dots, \{6, q\}; \dots; \{q-2, q-1\}, \{q-2, q\}; \{q-1, q\}; \\
 & \{2, 5\}, \dots, \{2, q\}; \\
 & \{2, 3\}, \{1, 2\}\};
 \end{aligned}$$

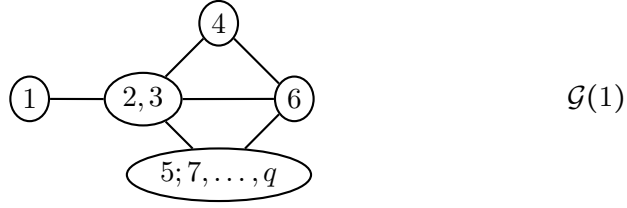
Ahora definamos una sucesión de álgebras de Lie 2-pasos nilpotentes por

$$\begin{cases} \mathfrak{n}_0 & := \mathfrak{n}_{\mathcal{G}}; \\ \mathfrak{n}_l & := \mathfrak{n}_{\mathcal{G}(l)}, \quad 1 \leq l \leq |H|; \end{cases}$$

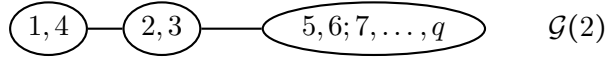
donde $\mathcal{G}(l)$ es el grafo que obtenemos borrando las primeras l aristas en H . Si la arista que está en el l -ésimo lugar en H es $\{i, j\}$, definiremos $\mathcal{G}(i, j) := \mathcal{G}(l)$ y $\mathfrak{n}(i, j) := \mathfrak{n}_l$.

Probaremos que \mathfrak{n}_l no es un nilradical Einstein para todo $l = 1, \dots, |H|$.

Borrando la arista $\{4, 5\}$ en \mathcal{G} , obtenemos $\mathcal{G}(1)$, el cual es un grafo como el de la derecha en la Figura 6.3.1 con $r = u = 1$, $v = q - 5$. Por el Lema 6.3.3, parte (iii), el álgebra de Lie asociado \mathfrak{n}_1 a $\mathcal{G}(1)$ no es un nilradical Einstein porque $u = 1$ y $v = q - 5 \geq 16 \geq 4$.

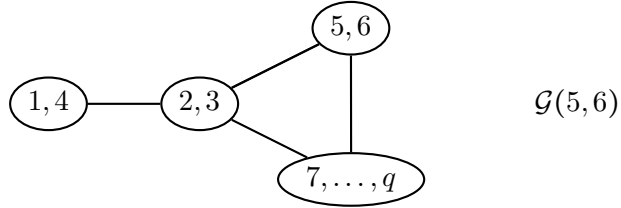


Ahora borrando la arista $\{4,6\}$ en $\mathcal{G}(1)$ obtenemos $\mathcal{G}(2)$ el cual es un grafo con 3 componentes coherentes con $r = s = 2, t = q-4$, como hemos considerado en 6.2.3. Entonces, $\mathcal{G}(2)$ no es un grafo positivo porque la condición de positividad $(s+t)(s-r) > (r-1)(t-1)$ no se cumple: $(s+t)0 = (s+t)(s-r) \leq (r-1)(t-1) = q-5$. Consecuentemente, por la Proposición 6.2.1, \mathfrak{n}_2 no es un nilradical Einstein.



Hasta ahora ya hemos obtenido los grafos $\mathcal{G}(5,6), \mathcal{G}(5,7), \dots, \mathcal{G}(5, q-1), \mathcal{G}(5, q)$.

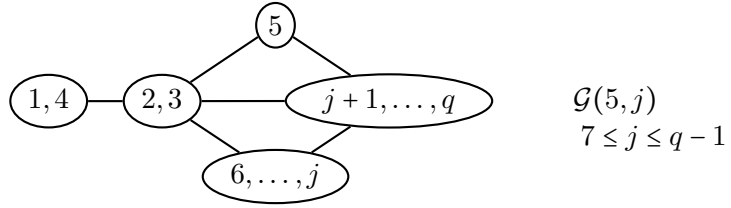
Si borramos la arista $\{5,6\}$ en $\mathcal{G}(2)$ obtenemos $\mathcal{G}(5,6)$, el cual es un grafo con 4 componentes coherentes como el del medio en la Figura 6.3.1 con $r = 2, s = t = 2$ y $u = q-6$. Por el Lema 6.3.2, parte (i), $\mathcal{G}(5,6)$ no es positivo porque $s = t = 2$ y $r \geq 2$. Entonces, por la Proposición 6.2.1, $\mathfrak{n}(5,6)$ resulta que no es un nilradical Einstein.



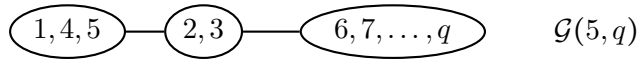
Si borramos sucesivamente las aristas $(5,7), \dots, (5,j)$ en $\mathcal{G}(5,6)$, con $7 \leq j \leq q-1$, obtenemos $\mathcal{G}(5,j)$, que es un grafo con 5 componentes coherentes como el de la derecha en la Figura 6.3.1 con $r = 2, u = q-j$ y $v = j-5$. Para probar que estos grafos no son positivos aplicamos el Lema 6.3.3. Debemos distinguir dos casos: $7 \leq j \leq q-2$ y $j = q-1$.

Si $j \leq q-2$, entonces, por la parte (i) del Lema 6.3.3, $\mathcal{G}(5,j)$ no es positivo porque $r \geq 2$ y $u = q-j \geq q - (q-2) = 2$. If $j = q-1$, por la parte (iii) del Lema 6.3.3, $\mathcal{G}(5, q-1)$ no es positivo porque $u = q - (q-1) = 1$ y $r \geq 2$.

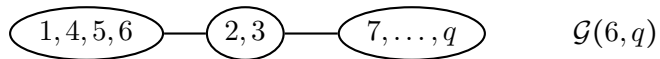
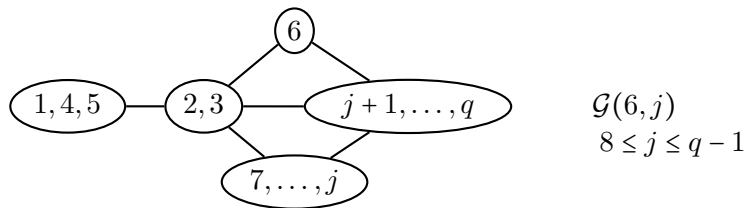
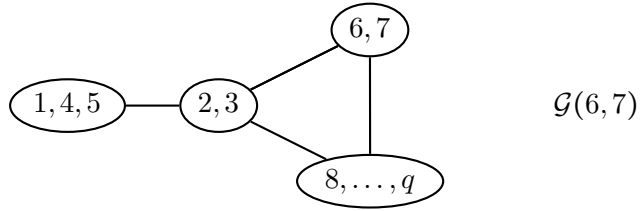
Por lo tanto, los grafos $\mathcal{G}(5,7), \dots, \mathcal{G}(5, q-1)$ no son positivos, y entonces las álgebras de Lie asociadas $\mathfrak{n}(5,7), \dots, \mathfrak{n}(5, q-1)$ no son nilradicales Einstein, por la Proposición 6.2.1.



Borrando la arista $\{5, q\}$ en $\mathcal{G}(5, q-1)$ obtenemos $\mathcal{G}(5, q)$ el cual es un grafo con 3 componentes coherentes con $r = 3, s = 2, t = q - 5$ (ver 6.2.3), y resulta que es un grafo no-positivo porque $(q-3)(-1) = (s+t)(s-r) \leq (r-1)(t-1) = 2(q-6)$. Entonces, $\mathfrak{n}(5, q)$ no es un niradical Einstein (Proposición 6.2.1).



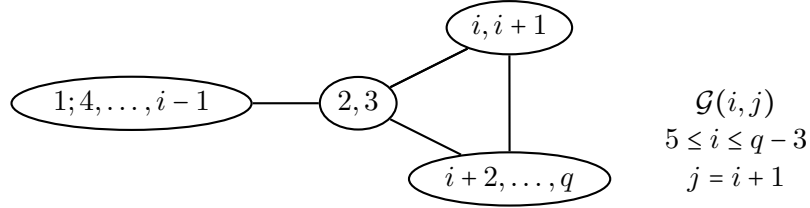
Los grafos $\mathcal{G}(6, 7), \mathcal{G}(6, 8), \dots, \mathcal{G}(6, q-1), \mathcal{G}(6, q)$ son los siguientes:



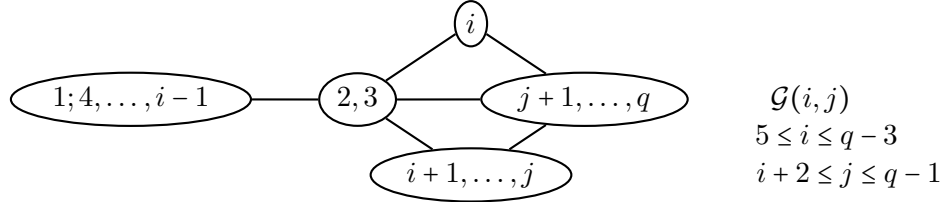
Nótese que la estructuras de los grafos $\mathcal{G}(5, 6), \dots, \mathcal{G}(5, q)$ es la misma que la de los grafos $\mathcal{G}(6, 7), \dots, \mathcal{G}(6, q)$; y $\mathcal{G}(7, 8), \dots, \mathcal{G}(7, q)$; y así sucesivamente hasta $\mathcal{G}(q-3, q-2), \mathcal{G}(q-3, q-1), \mathcal{G}(q-3, q)$.

En general, en los grafos $\mathcal{G}(i, i+1), \mathcal{G}(i, i+2), \dots, \mathcal{G}(i, q-1), \mathcal{G}(i, q)$, con $5 \leq i \leq q-3$, debemos distinguir tres casos: el primer grafo, el último grafo, y los del medio:

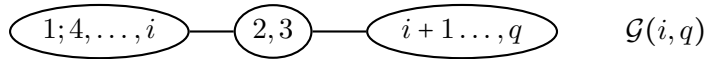
- $\mathcal{G}(i, i+1)$ es un grafo con 4 componentes coherentes como el del medio en la Figura 6.3.1 con $r = i-2, s = 2, t = 2$ y $u = q-i-1$; y entonces no es positivo por el Lema 6.3.2, parte (i) ($s = t = 2$ y $r = i-2 \geq 3 \geq 2$). Entonces, $\mathfrak{n}(i, i+1)$ no es un nilradical Einstein por la Proposición 6.2.1.



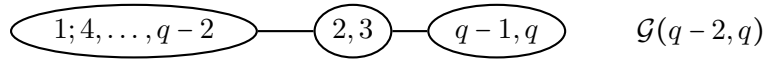
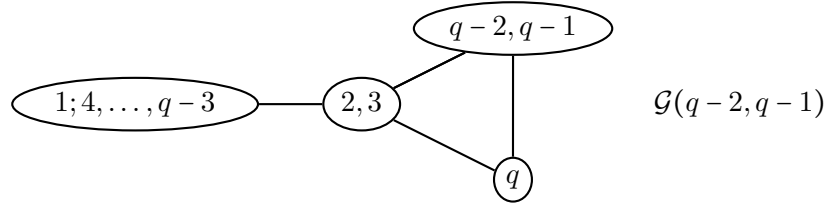
- $\mathcal{G}(i, j)$ con $i+2 \leq j \leq q-1$ son grafos con 5 componentes coherentes como el de la derecha en la Figura 6.3.1 con $r = i-3, u = q-j$ y $v = j-i$, y por el Lema 6.3.3 todos estos grafos no son positivos; en efecto, si $j \leq q-2$, aplicamos la parte (i) del Lema 6.3.3 puesto que $r = i-3 \geq 2$ y $u = q-j \geq q-(q-2) = 2$; y si $j = q-1$, aplicamos la parte (iii) del Lema 6.3.3 porque $u = 1$ y $r = i-3 \geq 2$. Entonces, por la Proposición 6.2.1, $\mathfrak{n}(i, j)$ no es un nilradical Einstein para todo $i = 7, \dots, q-1$.



- $\mathcal{G}(i, q)$ es un grafo como en 6.2.3 con $r = i-2, s = 2$ y $t = q-i$, el cual no es positivo pues la condición de positividad $(s+t)(s-r) > (r-1)(t-1)$ no se cumple: $(s+t)(s-r) = (q-i+2)(4-i) \leq 0 \leq (i-3)(q-i-1) = (r-1)(t-1)$.

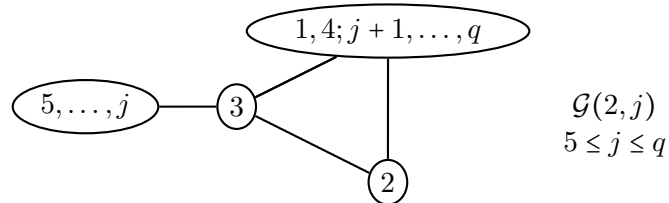


Los grafos $\mathcal{G}(q-2, q-1), \mathcal{G}(q-2, q)$ y $\mathcal{G}(q-1, q)$ son:

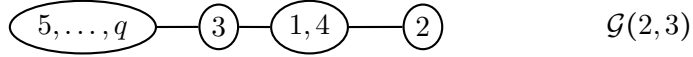


$\mathcal{G}(q-2, q-1)$ es un grafo con 4 componentes coherentes como el del medio de la Figura 6.3.1 con $r = q-5$, $s = 2$, $t = 2$ y $u = q-5$, y entonces no es positivo por la parte (i) del Lema 6.3.2 porque $s = t = 2$ y $r = q-5 \geq 16 \geq 2$; y $\mathcal{G}(q-2, q)$ es un grafo como en 6.2.3 con $r = q-4$, $s = 2$ y $t = 2$ que no es positivo porque $(s+t)(s-r) = 4(2-q) \leq 0 \leq q-5 = (r-1)(t-1)$. Entonces, las álgebras de Lie asociadas $\mathfrak{n}(q-2, q-1)$ y $\mathfrak{n}(q-2, q)$ no son nilradicales Einstein (Proposición 6.2.1). Análogamente, el álgebra de Lie $\mathfrak{n}(q-1, q)$ asociado al grafo $\mathcal{G}(q-1, q)$ no es un nilradical Einstein pues $\mathcal{G}(q-1, q)$ no es positivo (ver 6.2.3: $\mathcal{G}(q-1, q)$ es un grafo con 2 componentes coherentes con $r = q-2$ y $s = 2$, y la condición de positividad, $s \geq r$, no se cumple: $s = 2 < 19 \leq q-2 = r$).

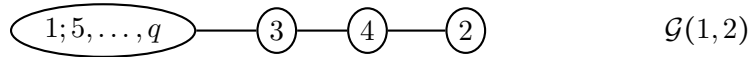
Ahora de $\mathcal{G}(q-1, q)$ obtengamos los grafos $\mathcal{G}(2, 5), \dots, \mathcal{G}(2, q)$. Borrando sucesivamente las aristas $\{2, 5\}, \dots, \{2, j\}$, tenemos $\mathcal{G}(2, j)$, $5 \leq j \leq q$. Cada $\mathcal{G}(2, j)$ es un grafo con 4 componentes coherentes como el del medio en la Figura 6.3.1 con $r = j-4$, $s = 1$, $t = q-j+2$ y $u = 1$. (Convención: en la figura de abajo $\{1, 4, i+1, \dots, q\} = \{1, 4\}$ si $j = q$.) Entonces, por el Lema 6.3.2, parte (ii), $\mathcal{G}(2, j)$ son no-positivos para todo $j = 5, \dots, q$ pues $s = u = 1$ y $t = q-j+2 \geq q-q+2 = 2$. Entonces, por la Proposición 6.2.1, $\mathfrak{n}(2, j)$ no es un nilradical Einstein para todo $j = 5, \dots, q$.



Si borramos la arista $\{2, 3\}$ de $\mathcal{G}(2, q)$ tenemos:



Borrando la arista $\{1, 2\}$ de $\mathcal{G}(2, 3)$ tenemos:



Los grafos $\mathcal{G}(2, 3)$ y $\mathcal{G}(1, 2)$ son como el de la izquierda en la Figura 6.3.1 con $s = 1, 2$ y $u = q - 4$. Entonces por el Lema 6.3.1, $\mathcal{G}(2, 3)$ y $\mathcal{G}(1, 2)$ no son grafos positivos pues $u = q - 4 \geq 6$. Por lo tanto, las álgebras de Lie asociadas, $\mathfrak{n}(2, 3)$ y $\mathfrak{n}(1, 2)$, no son nilradicales Einstein (Proposición 6.2.1).

Recordemos que si un grafo es conexo, entonces el álgebra de Lie asociada es *indecomposable*. Se puede probar que $\mathcal{G}(1, 2) = \mathcal{G}(|H|)$ es conexo. Entonces todos los grafos $\mathcal{G}(l)$, $l = 1, \dots, |H|$, también son conexos (porque los obtenemos agregando aristas a $\mathcal{G}(1, 2)$). Por lo tanto, el álgebra de Lie \mathfrak{n}_l es indescomponible para todo $l = 0, 1, \dots, |H|$.

Además, recordemos que si un grafo conexo \mathcal{G} tiene p aristas y q vértices, su álgebra de Lie 2-pasos nilpotente asociada es de tipo (p, q) . El punto de partida fue el grafo \mathcal{G} que tiene $p = D_q - 2q + 9$ aristas y q vértices, y así $\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{n}_{\mathcal{G}}$ es un álgebra de Lie de tipo $(D_q - 2q + 9, q)$. Borrando sucesivamente todos los elementos de H obtenemos el último grafo $\mathcal{G}(1, 2)$, el cual es un grafo con q vértices y $p = q - 1$ aristas. Entonces $\mathfrak{n}(1, 2) = \mathfrak{n}_{\mathcal{G}(1, 2)}$ es un álgebra de Lie de tipo $(q - 1, q)$. Obviamente cada grafo intermedio entre \mathcal{G} y $\mathcal{G}(1, 2)$ tiene q (fijo) vértices y p aristas, donde $q - 1 \leq p \leq D_q - 2q + 9$. Por lo tanto, hemos probado que para todo (p, q) que satisface $21 \leq q$ y $q - 1 \leq p \leq D_q - 2q + 9$, eligiendo $l = D_q - 2q + 9 - p$, \mathfrak{n}_l es un álgebra de Lie 2-pasos nilpotente de tipo (p, q) indescomponible, y además no es un nilradical Einstein. Esto concluye la prueba del Teorema 6.1.2.

6.5 Curvas de nilradicales no-Einstein de tipo $(2, q)$, $q = 10, q \geq 12$

En [P11], Payne probó la existencia de una curva de álgebras de Lie nilpotentes N -graduadas n -dimensionales indescomponibles, que no admiten un producto interno nilsoliton, en toda dimensión $n \geq 8$, formulando la pregunta de que si esto se podía hacer en

el caso 2-pasos nilpotente. La respuesta es afirmativa. Usamos la notación de la Sección 4.2.

Proposición 6.5.1. *Para todo $r \geq 1, r' \geq 3$, cada una de los siguientes conjuntos $\mathcal{S}_t, t > 1$, proporciona una familia 1-paramétrica $\mu_{\mathcal{S}_t}$ de álgebras 2-pasos no-isomorfas dos-a-dos de tipo $(2, m)$ que no admite ninguna métrica nilsoliton:*

- $m = 8 + 2r, \mathcal{S}_t = \{(it, 1), (0, 2), \overbrace{(1, 1), \dots, (1, 1)}^{r'}\}$.
- $m = 11 + 2r, \mathcal{S}_t = \{(it, 1), (0, 2), \overbrace{(1, 1), \dots, (1, 1)}^{r'}, 1\}$.
- $m = 8 + 4r, \mathcal{S}_t = \{(it, 2), \overbrace{(i, 1), \dots, (i, 1)}^r\}$.
- $m = 8 + 4r + 5, \mathcal{S}_t = \{(it, 2), \overbrace{(i, 1), \dots, (i, 1)}^r, (0, 1), 1\}$.
- $m = 8 + 4r + 2, \mathcal{S}_t = \{(it, 2), \overbrace{(i, 1), \dots, (i, 1)}^r, (0, 1)\}$.
- $m = 8 + 4r + 3, \mathcal{S}_t = \{(it, 2), \overbrace{(i, 1), \dots, (i, 1)}^r, 1\}$.

Prueba. Para cada uno de los conjuntos \mathcal{S}_t , usaremos el Teorema 4.2.2 para probar que el álgebra 2-pasos $\mu_{\mathcal{S}_t}$ asociada no admite un producto interno nilsoliton. Por ejemplo, en

$$\mathcal{S}_t = \{(it, 2), \overbrace{(i, 1), \dots, (i, 1)}^r\},$$

para $\alpha_1 = it$ le corresponde $k_1 = 2 \neq 1$. Entonces, por el Teorema 4.2.2, $\mu_{\mathcal{S}_t}$ no admite un producto interno nilsoliton.

Siguiendo con el mismo ejemplo, $\mu_{\mathcal{S}_s}$ y $\mu_{\mathcal{S}_t}$ son isomorfas si y sólo si existe una transformación de Möbius real T tal que

$$\{T(is), T(i)\} = \{it, i\} \quad (s, t > 1)$$

(ver pág. 34). Las transformaciones de Möbius preservan la distancia hiperbólica, entonces $s = t$. En todos los casos, para probar que $\mu_{\mathcal{S}_t}$ es curva, podemos aplicar este mismo criterio sobre \mathcal{S}_t . □

Apéndice A

En el siguiente teorema clasificamos los polinomios $(x^2 + y^2 + z^2)(t_1x^2 + t_2y^2 + t_2z^2)$, para $t_i > 0$, salvo equivalencia proyectiva. Esto lo usamos en la Sección 4.3 para probar que ciertas familias de álgebras son realmente curvas de álgebras dos-a-dos no-isomorfas.

Teorema 6.5.2. *Sean $t_i, s_i > 0$ para $i = 1, 2, 3$. Entonces*

$$(x^2 + y^2 + z^2)(t_1x^2 + t_2y^2 + t_2z^2) \simeq (x^2 + y^2 + z^2)(s_1x^2 + s_2y^2 + s_2z^2)$$

si y sólo si existen $a > 0$ y una permutación $\sigma \in S_3$ tales que

$$t_i = as_{\sigma(i)} \quad \forall i \quad \text{ó} \quad t_i = \frac{a}{s_{\sigma(i)}} \quad \forall i.$$

Lema 6.5.3.

Si $(x^2 + y^2 + z^2)(t_1x^2 + t_2y^2 + t_2z^2) \simeq (x^2 + y^2 + z^2)(s_1x^2 + s_2y^2 + s_2z^2)$, entonces existe $c \in \mathbb{R}^*$ y $g \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ tales que

$$cg \cdot (x^2 + y^2 + z^2)(t_1x^2 + t_2y^2 + t_2z^2) = (x^2 + y^2 + z^2)(s_1x^2 + s_2y^2 + s_2z^2)$$

Evaluando ambos polinomios en $(x, y, z) = (1, 0, 0)$ resulta que $c > 0$. Entonces tomando $g_c := \sqrt[4]{c}g$ nos queda

$$g_c \cdot (x^2 + y^2 + z^2) g_c \cdot (t_1x^2 + t_2y^2 + t_2z^2) = (x^2 + y^2 + z^2)(s_1x^2 + s_2y^2 + s_2z^2).$$

Los polinomios $g_c \cdot (x^2 + y^2 + z^2)$, $g_c \cdot (t_1x^2 + t_2y^2 + t_2z^2)$ son irreducibles. Entonces como $\mathbb{R}[x, y]$ es un dominio de factorización única, existe $a > 0$, y dos casos posibles:

Caso 1

$$g_c \cdot (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{a} (x^2 + y^2 + z^2) \tag{6.3}$$

$$g_c \cdot (t_1x^2 + t_2y^2 + t_2z^2) = a (s_1x^2 + s_2y^2 + s_2z^2) \tag{6.4}$$

Caso 2

$$g_c \cdot (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{a} (s_1x^2 + s_2y^2 + s_2z^2) \tag{6.5}$$

$$g_c \cdot (t_1x^2 + t_2y^2 + t_2z^2) = a (x^2 + y^2 + z^2) \tag{6.6}$$

Para tratar ambos casos necesitaremos un lema bien conocido.

Lema 6.5.4. $\{g \in \text{GL}_3(\mathbb{R}) : g \cdot (x^2 + y^2 + z^2) = x^2 + y^2 + z^2\} = O(3)$.

Caso 1. La ecuación (6.3) implica $\sqrt{a}g_c \cdot (x^2 + y^2 + z^2) = x^2 + y^2 + z^2$. Por el Lema 6.5.4, $\sqrt{a}g_c \in O(3)$, o sea, $g_c g_c^t = \frac{1}{a}I$. Análogamente, (6.4) implica

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{s_1}} & & \\ & \frac{1}{\sqrt{s_2}} & \\ & & \frac{1}{\sqrt{s_3}} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{a}} g_c \begin{bmatrix} \sqrt{t_1} & & \\ & \sqrt{t_2} & \\ & & \sqrt{t_3} \end{bmatrix} \cdot (x^2 + y^2 + z^2) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Entonces

$$g_c \begin{bmatrix} t_1 & & \\ & t_2 & \\ & & t_3 \end{bmatrix} g_c^t = a \begin{bmatrix} s_1 & & \\ & s_2 & \\ & & s_3 \end{bmatrix}$$

Como $g_c^t = \frac{1}{a}g_c^{-1}$, nos queda

$$g_c \begin{bmatrix} t_1 & & \\ & t_2 & \\ & & t_3 \end{bmatrix} g_c^{-1} = \begin{bmatrix} a^2 s_1 & & \\ & a^2 s_2 & \\ & & a^2 s_3 \end{bmatrix}$$

Las matrices conjugadas tienen los mismos autovalores, entonces existe una permutación $\sigma \in S_3$ tal que

$$t_i = a^2 s_{\sigma(i)} \quad \text{para todo } i = 1, 2, 3.$$

Caso 2. Es análogo al anterior. (6.5) y (6.6) implican respectivamente

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{s_1}} & & \\ & \frac{1}{\sqrt{s_2}} & \\ & & \frac{1}{\sqrt{s_3}} \end{bmatrix} \sqrt{a}g_c \cdot (x^2 + y^2 + z^2) = x^2 + y^2 + z^2 \quad (6.7)$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{t_1}} & & \\ & \frac{1}{\sqrt{t_2}} & \\ & & \frac{1}{\sqrt{t_3}} \end{bmatrix} \cdot (x^2 + y^2 + z^2) = x^2 + y^2 + z^2 \quad (6.8)$$

De (6.7) resulta

$$g_c^t = \frac{1}{a}g_c^{-1} \begin{bmatrix} s_1 & & \\ & s_2 & \\ & & s_3 \end{bmatrix}$$

Y de (6.8),

$$g_c \begin{bmatrix} s_1 & & \\ & s_2 & \\ & & s_3 \end{bmatrix} g_c^{-1} = aI.$$

Combinando las dos últimas,

$$g_c \begin{bmatrix} t_1 & & \\ & t_2 & \\ & & t_3 \end{bmatrix} g_c^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a^2}{s_1} & & \\ & \frac{a^2}{s_2} & \\ & & \frac{a^2}{s_3} \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto existe una permutación $\sigma \in S_3$ tal que

$$t_i = \frac{a^2}{s_{\sigma(i)}} \quad \text{para todo } i = 1, 2, 3.$$

Se puede probar directamente que las condiciones necesarias son también suficientes.

Apéndice B

A continuación veremos una prueba completa de que D , como en el siguiente lema, es una derivación. Simplemente veremos que $D[X_i, X_j] = [DX_i, X_j] + [X_i, DX_j]$ para todo $i < j$.

Lema 6.5.5. *Sea μ el álgebra de Lie (2-pasos nilpotente) de tipo $(2, 4k)$ definida por*

$$J_\mu(xZ_1 + yZ_2) = \left[\begin{array}{c|cccc} & & & & -x & y \\ & & & & y & x \\ & & & -x & y & 0 & x \\ & & & y & x & x & 0 \\ & & & & & \ddots & \\ & & -x & y & 0 & x \\ & & y & -x & x & 0 \\ \hline * & & & & & & \end{array} \right].$$

Entonces existe una derivación de μ de la forma:

$$D = \left[\begin{array}{cc|cc} M_1 & 0 & & \\ 0 & M_2 & & \\ \hline & & 0 & 1 \\ & & -1 & 0 \end{array} \right]$$

Prueba. μ está dada por los siguientes corchetes no nulos:

$$\begin{aligned} [X_i, X_{4k-i+1}] &= Z_2 & i = 1, \dots, 2k \\ [X_i, X_{4k-i+3}] &= Z_1 & i = 3, 4, \dots, 2k \\ [X_{2i}, X_{4k-2i+2}] &= Z_1 & i = 1, \dots, k \\ [X_{2i-1}, X_{4k-2i+1}] &= -Z_1 & i = 1, \dots, k \end{aligned}$$

Sean M_1 y M_2 matrices $(2k) \times (2k)$ dadas en bloques como sigue:

$$M_1 = \left[\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & -1 & 0 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & -1 & & & & & & & & \\ & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & & & & & & \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ & & 0 & 4 & 1 & 0 & & & & & & \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & & & \\ & & 0 & 6 & 2 & 0 & & & & & & \\ & & -6 & 0 & 0 & 2 & & & & & & \\ & & & 0 & 8 & & & & & & & \\ & & & & -8 & 0 & & & & & & \\ & & & & & & \dots & \dots & \dots & & & \\ & & & & & & & & & (k-3) & 0 & \\ & & & & & & & & & 0 & (k-3) & \\ & & & & & & & & & 0 & 2(k-1) & \\ & & & & & & & & & -2(k-1) & 0 & \end{array} \right];$$

Por otro lado, como D está en bloques, debemos considerar j en dos rangos por separado: primero, $1 \leq j \leq 2k$; y segundo, $2k + 1 \leq j \leq 4k$.

$$M_1 = \left[\begin{array}{cc|cc|} \hline 0 & 0 & -1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & -1 & & & & \\ \hline & & 0 & 2 & \ddots & & & \\ & & -2 & 0 & & \ddots & & \\ \hline & & & & \ddots & & i-3 & 0 \\ & & & & & \ddots & 0 & i-3 \\ \hline & & & & & & 0 & 2(i-1) & \ddots & \\ & & & & & & -2(i-1) & 0 & & \ddots \\ \hline & & & & & & & & \ddots & & k-3 & 0 \\ & & & & & & & & & \ddots & 0 & k-3 \\ \hline & & & & & & & & & & 0 & 2(k-1) \\ & & & & & & & & & & -2(k-1) & 0 \\ \hline \end{array} \right]$$

Sea $1 \leq j \leq 2k$. Entonces:

$$DX_{2i} = \begin{cases} 0 & i = 1; \\ (i-3)X_{2i-2} + 2(i-1)X_{2i-1} & i = 2, \dots, k. \end{cases}$$

$$DX_{2i-1} = \begin{cases} 0 & i = 1; \\ (i-3)X_{(2i-1)-2} - 2(i-1)X_{(2i-1)+1} & i = 2, \dots, k. \end{cases}$$

Y cuando $2k + 1 \leq i \leq 4k$:

$$DX_{4k-2(i-1)} = \begin{cases} -(i-1)X_{4k-2(i-1)-2} - (2i-1)X_{4k-2(i-1)-1} & i = 1, \dots, k-1; \\ -(2k-1)X_{2k+1} & i = k. \end{cases}$$

$$DX_{4k-(2i-1)} = \begin{cases} -(i-1)X_{4k-(2i-1)-2} + (2i-1)X_{4k-(2i-1)+1} & i = 1, \dots, k-1; \\ (2k-1)X_{2k+2} & i = k. \end{cases}$$

Verifiquemos la igualdad en los corchetes no-nulos.

Caso $[X_j, X_{4k-j+1}] = Z_2$ con $j = 1, \dots, 2k$.

Subcaso $j = 2i$ par, es decir $[X_{2i}, X_{4k-(2i-1)}] = Z_2$ donde $i = 1, \dots, k$.

Si $i = 1$,

$$\begin{aligned} [DX_2, X_{4k-1}] + [X_2, DX_{4k-1}] &= [0, X_{4k-1}] + [X_2, X_{4k}] \\ &= Z_1 \\ &= DZ_2 \\ &= D[X_2, X_{2k+1}]. \end{aligned}$$

Si $i = k$,

$$\begin{aligned} [DX_{2k}, X_{2k+1}] + [X_{2k}, DX_{2k+1}] &= [(k-3)X_{2k-2} + 2(k-1)X_{2k-1}, X_{2k+1}] + \\ &\quad + [X_{2k}, (2k-1)X_{2k+2}] \\ &= (k-3)[X_{2k-2}, X_{2k+1}] + 2(k-1)[X_{2k-1}, X_{2k+1}] \\ &\quad + (2k-1)[X_{2k}, X_{2k+2}] \\ &= (k-3) \cdot 0 + 2(k-1) \cdot (-Z_1) + (2k-1) \cdot Z_1 \\ &= Z_1 \\ &= DZ_2 \\ &= D[X_{2k}, X_{2k+1}]. \end{aligned}$$

Si $1 < i < k$,

$$\begin{aligned}
& [DX_{2i}, X_{4k-(2i-1)}] + [X_{2i}, DX_{4k-(2i-1)}] = \\
& = [(i-3)X_{2i-2} + 2(i-1)X_{2i-1}, X_{4k-(2i-1)}] + \\
& \quad + [X_{2i}, -(i-1)X_{4k-(2i-1)-2} + (2i-1)X_{4k-(2i-1)+1}] \\
& = (i-3)[X_{2i-2}, X_{4k-(2i-1)}] + 2(i-1)[X_{2i-1}, X_{4k-(2i-1)}] - \\
& \quad - (i-1)[X_{2i}, X_{4k-(2i-1)-2}] + (2i-1)[X_{2i}, X_{4k-(2i-1)+1}] \\
& = (i-3) \cdot 0 + 2(i-1) \cdot (-Z_1) - (i-1) \cdot 0 + (2i-1) \cdot Z_1 \\
& = Z_1 \\
& = DZ_2 \\
& = D[X_{2i}, X_{4k-(2i-1)}].
\end{aligned}$$

Subcaso $j = 2i - 1$ impar, es decir $[X_{2i-1}, X_{4k-2(i-1)}] = Z_2$ donde $i = 1, \dots, k$.

Si $i = 1$,

$$\begin{aligned}
[DX_1, X_{4k}] + [X_1, DX_{4k}] &= [0, X_{4k}] + [X_1, -X_{4k-1}] \\
&= -[X_1, X_{4k-1}] \\
&= Z_1 \\
&= DZ_2 \\
&= D[X_1, X_{4k}].
\end{aligned}$$

Si $i = k$,

$$\begin{aligned}
[DX_{2k-1}, X_{2k+2}] + [X_{2k-1}, DX_{2k+2}] &= [(k-3)X_{2k-3} - 2(k-1)X_{2k}, X_{2k+2}] + \\
& \quad + [X_{2k-1}, -(2k-1)X_{2k+1}] \\
&= (k-3)[X_{2k-3}, X_{2k+2}] - 2(k-1)[X_{2k}, X_{2k+2}] \\
& \quad - (2k-1)[X_{2k-1}, X_{2k+1}] \\
&= (k-3) \cdot 0 - 2(k-1) \cdot Z_1 - (2k-1) \cdot (-Z_1) \\
&= Z_1 \\
&= DZ_2 \\
&= D[X_{2k-1}, X_{2k+2}].
\end{aligned}$$

Si $i \neq 1, k$,

$$\begin{aligned}
& [DX_{2i-1}, X_{4k-2(i-1)}] + [X_{2i-1}, DX_{4k-2(i-1)}] = \\
& = [(i-3)X_{(2i-1)-2} - 2(i-1)X_{2i}, X_{4k-2(i-1)}] + \\
& \quad + [X_{2i-1}, -(i-1)X_{4k-2i} - (2i-1)X_{4k-(2i-1)}] \\
& = (i-3)[X_{(2i-1)-2}, X_{4k-2(i-1)}] - 2(i-1)[X_{2i}, X_{4k-2(i-1)}] + \\
& \quad - (i-1)[X_{2i-1}, X_{4k-2i}] - (2i-1)[X_{2i-1}, X_{4k-(2i-1)}] \\
& = (i-3) \cdot 0 - 2(i-1) \cdot Z_1 - (i-1) \cdot 0 - (2i-1) \cdot (-Z_1) \\
& = Z_1 \\
& = DZ_2 \\
& = D[X_{2i-1}, X_{4k-2(i-1)}].
\end{aligned}$$

Caso $[X_j, X_{4k-j+3}] = Z_1$ con $j = 3, 4, \dots, 2k$

Subcaso $j = 2i$ par, es decir $[X_{2i}, X_{4k-[2(i-1)-1]}] = Z_1$ donde $i = 2, 3, \dots, k$.

No hace falta distinguir DX_{2i} cuando $i = 1$, y $DX_{4k-[2(i-1)-1]}$ cuando $i - 1 = k$ porque $1 < i \leq k$. O sea podemos hacer una sola cuenta:

$$\begin{aligned}
& [DX_{2i}, X_{4k-2(i-1)-1}] + [X_{2i}, DX_{4k-2(i-1)-1}] = \\
& = [(i-3)X_{2i-2} + 2(i-1)X_{2i-1}, X_{4k-2(i-1)-1}] + \\
& \quad + [X_{2i}, -((i-1)-1)X_{4k-2(i-1)-2} + (2(i-1)-1)X_{4k-2(i-1)-1}] \\
& = [(i-3)X_{2i-2} + 2(i-1)X_{2i-1}, X_{4k-2i+3}] + \\
& \quad + [X_{2i}, -(i-2)X_{4k-2(i-1)} + (2i-3)X_{4k-2i+4}] \\
& = (i-3)[X_{2i-2}, X_{4k-2i+3}] + 2(i-1)[X_{2i-1}, X_{4k-2i+3}] + \\
& \quad - (i-2)[X_{2i}, X_{4k-2(i-1)}] + (2i-3)[X_{2i}, X_{4k-2i+4}] \\
& = (i-3) \cdot Z_2 + 2(i-1) \cdot 0 - (i-2) \cdot Z_2 + (2i-3) \cdot 0 \\
& = -Z_2 \\
& = DZ_1 \\
& = D[X_{2i}, X_{4k-2(i-1)-1}].
\end{aligned}$$

Subcaso $j = 2i - 1$ impar, es decir $[X_{2i-1}, X_{4k-2(i-1)-1}] = Z_1$ donde $i = 2, 3, \dots, k$.
Como en el subcaso anterior, podemos hacer una sola cuenta:

$$\begin{aligned}
& [DX_{2i-1}, X_{4k-2(i-1)-1}] + [X_{2i-1}, DX_{4k-2(i-1)-1}] = \\
& = [(i-3)X_{(2i-1)-2} - 2(i-1)X_{(2i-1)+1}, X_{4k-2(i-1)-1}] + \\
& \quad + [X_{2i-1}, -((i-1)-1)X_{4k-2((i-1)-1)-2} - (2(i-1)-1)X_{4k-2((i-1)-1)-1}] \\
& = [(i-3)X_{2i-3} - 2(i-1)X_{2i}, X_{4k-2i+4}] + \\
& \quad + [X_{2i-1}, -(i-2)X_{4k-2i+2} - (2i-3)X_{4k-2i+3}] \\
& = (i-3)[X_{2i-3}, X_{4k-2i+4}] - 2(i-1)[X_{2i}, X_{4k-2i+4}] + \\
& \quad - (i-2)[X_{2i-1}, X_{4k-2i+2}] - (2i-3)[X_{2i-1}, X_{4k-2i+3}] \\
& = (i-3) \cdot Z_2 - 2(i-1) \cdot 0 - (i-2) \cdot Z_2 - (2i-3) \cdot 0 \\
& = -Z_2 \\
& = DZ_1 \\
& = D[X_{2i}, X_{4k-2i+4}].
\end{aligned}$$

Caso $[X_{2i}, X_{4k-2(i-1)}] = Z_1$ con $i = 1, \dots, k$.

Si $i = 1$,

$$\begin{aligned}
[DX_2, X_{4k}] + [X_2, DX_{4k}] & = [0, X_{4k-1}] + [X_2, -X_{4k-1}] \\
& = -Z_2 \\
& = DZ_1 \\
& = D[X_2, X_{4k}].
\end{aligned}$$

Si $i = k$,

$$\begin{aligned}
[DX_{2k}, X_{2k+2}] + [X_{2k}, DX_{2k+2}] & = [(k-3)X_{2k-2} + 2(k-1)X_{2k-1}, X_{2k+2}] + \\
& \quad + [X_{2k}, -(2k-1)X_{2k+1}] \\
& = (k-3)[X_{2k-2}, X_{2k+2}] + 2(k-1)[X_{2k-1}, X_{2k+2}] \\
& \quad + (2k-1)[X_{2k}, X_{2k+2}] \\
& = (k-3) \cdot 0 + 2(k-1) \cdot Z_2 + (2k-1) \cdot (-Z_2) \\
& = -Z_2 \\
& = DZ_1 \\
& = D[X_{2k}, X_{2k+2}].
\end{aligned}$$

Si $i \neq 1, k$,

$$\begin{aligned}
& [DX_{2i}, X_{4k-2(i-1)}] + [X_{2i}, DX_{4k-2(i-1)}] = \\
& = [(i-3)X_{2i-2} + 2(i-1)X_{2i-1}, X_{4k-2(i-1)}] + \\
& \quad + [X_{2i}, -(i-1)X_{4k-2(i-1)-2} - (2i-1)X_{4k-2(i-1)-1}] \\
& = (i-3)[X_{2i-2}, X_{4k-2(i-1)}] + 2(i-1)[X_{2i-1}, X_{4k-2(i-1)}] - \\
& \quad - (i-1)[X_{2i}, X_{4k-2(i-1)-2} - (2i-1)[X_{2i}, X_{4k-2(i-1)-1}]] \\
& = (i-3) \cdot 0 + 2(i-1) \cdot Z_2 - (i-1) \cdot 0 - (2i-1) \cdot Z_2 \\
& = -Z_2 \\
& = DZ_1 \\
& = D[X_{2i}, X_{4k-2(i-1)}].
\end{aligned}$$

Caso $[X_{2i-1}, X_{4k-2i+1}] = -Z_1$ con $i = 1, \dots, k$.

Si $i = 1$,

$$\begin{aligned}
[DX_1, X_{4k-1}] + [X_1, DX_{4k-1}] &= [0, X_{4k-1}] + [X_1, X_{4k}] \\
&= Z_2 \\
&= D(-Z_1) \\
&= D[X_1, X_{4k-1}].
\end{aligned}$$

Si $i = k$,

$$\begin{aligned}
[DX_{2k-1}, X_{2k+1}] + [X_{2k-1}, DX_{2k+1}] &= [(k-3)X_{2k-3} - 2(k-1)X_{2k}, X_{2k+1}] + \\
& \quad + [X_{2k-1}, (2k-1)X_{2k+2}] \\
&= (k-3)[X_{2k-3}, X_{2k+1}] - 2(k-1)[X_{2k}, X_{2k+1}] \\
& \quad + (2k-1)[X_{2k-1}, X_{2k+2}] \\
&= (k-3) \cdot 0 - 2(k-1) \cdot Z_2 + (2k-1) \cdot Z_2 \\
&= Z_2 \\
&= D(-Z_1) \\
&= D[X_{2k-1}, X_{2k+1}].
\end{aligned}$$

Si $i \neq 1, k$,

$$\begin{aligned}
& [DX_{2i-1}, X_{4k-2i+1}] + [X_{2i-1}, DX_{4k-2i+1}] = \\
& = [(i-3)X_{(2i-1)-2} - 2(i-1)X_{(2i-1)+1}, X_{4k-2i+1}] + \\
& \quad + [X_{2i-1}, -(i-1)X_{4k-(2i-1)-2} + (2i-1)X_{4k-(2i-1)+1}] \\
& = (i-3)[X_{(2i-1)-2}, X_{4k-2i+1}] - 2(i-1)[X_{(2i-1)+1}, X_{4k-2i+1}] + \\
& \quad - (i-1)[X_{2i-1}, X_{4k-(2i-1)-2}] + (2i-1)[X_{2i-1}, X_{4k-(2i-1)+1}] \\
& = (i-3) \cdot 0 - 2(i-1) \cdot Z_2 - (i-1) \cdot 0 + (2i-1) \cdot Z_2 \\
& = Z_2 \\
& = D(-Z_1) \\
& = D[X_{2i-1}, X_{4k-2i+1}].
\end{aligned}$$

Falta verificar en los corchetes nulos, a saber: *

Caso $[X_{2i-1}, X_{4k-(2i-3)}] = 0$ donde $i = 2, \dots, k$. Como $i \neq 1, i-1 \neq k$

$$\begin{aligned}
& [DX_{2i-1}, X_{4k-(2i-3)}] + [X_{2i-1}, DX_{4k-(2i-3)}] = \\
& = [DX_{2i-1}, X_{4k-(2i-3)}] + [X_{2i-1}, DX_{4k-[2(i-1)-1]}] \\
& = [(i-3)X_{(2i-1)-2} - 2(i-1)X_{(2i-1)+1}, X_{4k-(2i-3)}] + \\
& \quad + [X_{2i-1}, -((i-1)-1)X_{4k-(2(i-1)-1)-2} + (2(i-1)-1)X_{4k-(2(i-1)-1)+1}] \\
& = [(i-3)X_{(2i-1)-2} - 2(i-1)X_{(2i-1)+1}, X_{4k-(2i-3)}] + \\
& \quad + [X_{2i-1}, -(i-2)X_{4k-2i+1} + (2i-3)X_{4k-i+4}] \\
& = (i-3)[X_{(2i-1)-2}, X_{4k-(2i-3)}] - 2(i-1)[X_{(2i-1)+1}, X_{4k-(2i-3)}] + \\
& \quad - (i-2)[X_{2i-1}, X_{4k-2i+1}] + (2i-3)[X_{2i-1}, X_{4k-2i+4}] \\
& = (i-3) \cdot (-Z_1) - 2(i-1) \cdot Z_1 - (i-2) \cdot (-Z_1) + (2i-3) \cdot Z_1 \\
& = 0 \\
& = D(0) \\
& = D[X_{2i-1}, X_{4k-(2i-3)}].
\end{aligned}$$

Caso $[X_{2i}, X_{4k-2(i-2)}] = 0$ donde $i = 2, \dots, k$. Como $i \neq 1, i-1 \neq k$

$$\begin{aligned}
& [DX_{2i}, X_{4k-2(i-2)}] + [X_{2i}, DX_{4k-2((i-1)-1)}] = \\
& = [(i-3)X_{2i-2} + 2(i-1)X_{2i-1}, X_{4k-2(i-2)}] + \\
& \quad + [X_{2i}, -((i-1)-1)X_{4k-2((i-1)-1)-2} - (2(i-1)-1)X_{4k-2((i-1)-1)+1}] \\
& = [(i-3)X_{2i-2} + 2(i-1)X_{2i-1}, X_{4k-2(i-2)}] + \\
& \quad + [X_{2i}, -(i-2)X_{4k-2i+2} - (2i-3)X_{4k-2i+3}] \\
& = (i-3)[X_{2i-2}, X_{4k-2(i-2)}] + 2(i-1)[X_{2i-1}, X_{4k-2(i-2)}] + \\
& \quad - (i-2)[X_{2i}, X_{4k-2i+2}] - (2i-3)[X_{2i}, X_{4k-2i+3}] \\
& = (i-3) \cdot Z_1 + 2(i-1) \cdot Z_1 - (i-2) \cdot Z_1 - (2i-3) \cdot Z_1 \\
& = 0 \\
& = D(0) \\
& = D[X_{2i}, X_{4k-2(i-2)}].
\end{aligned}$$

Caso $[X_{2i}, X_{4k-2(i-2)}] = 0$ donde $i = 2, \dots, k$. Como $i \neq 1, i-1 \neq k$

$$\begin{aligned}
& [DX_{2i}, X_{4k-2(i-2)}] + [X_{2i}, DX_{4k-2((i-1)-1)}] = \\
& = [(i-3)X_{2i-2} + 2(i-1)X_{2i-1}, X_{4k-2(i-2)}] + \\
& \quad + [X_{2i}, -((i-1)-1)X_{4k-2((i-1)-1)-2} - (2(i-1)-1)X_{4k-2((i-1)-1)+1}] \\
& = [(i-3)X_{2i-2} + 2(i-1)X_{2i-1}, X_{4k-2(i-2)}] + \\
& \quad + [X_{2i}, -(i-2)X_{4k-2i+2} - (2i-3)X_{4k-2i+3}] \\
& = (i-3)[X_{2i-2}, X_{4k-2(i-2)}] + 2(i-1)[X_{2i-1}, X_{4k-2(i-2)}] + \\
& \quad - (i-2)[X_{2i}, X_{4k-2i+2}] - (2i-3)[X_{2i}, X_{4k-2i+3}] \\
& = (i-3) \cdot Z_1 + 2(i-1) \cdot Z_1 - (i-2) \cdot Z_1 - (2i-3) \cdot Z_1 \\
& = 0 \\
& = D(0) \\
& = D[X_{2i}, X_{4k-2(i-2)}].
\end{aligned}$$

□

Bibliografía

- [BLS05] G. BELITSKII, R. LIPYANSKI, V. SERGEICHUK, Problems of classifying associative or Lie algebras and triples of symmetric or skew-symmetric matrices are wild, *Lin. Alg. Appl.* **407** (2005), 249–262.
- [BTV95] J. BERNDT, F. TRICERRI, L. VANHECKE, Generalized Heisenberg groups and Damek-Ricci harmonic spaces, *Lect. Notes in Math.* **1598** (1995) Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [B71] D. BIRKES, Orbits of Linear Algebraic Groups, *Ann. of Math.* (2) **93** (1971), 459–475.
- [BH62] A. BOREL, HARISH-CHANDRA, Arithmetic subgroups of algebraic groups, *Ann. of Math.* (2) **75** (1962), 485–535.
- [BtD85] T. BROCKER, T. TOM DIECK, Representations of compact Lie groups, *Springer-Verlag*, New York, 1985.
- [C+] B. CHOW, S.-C. CHU, D. GLICKENSTEIN, C. GUENTHER, J. ISENBERG, T. IVEY, D. KNOPF, P. LU, F. LUO, L. NI, The Ricci flow: Techniques and Applications, Part I: Geometric Aspects, *AMS Math. Surv. Mon.* **135** (2007), Amer. Math. Soc., Providence.
- [C07] F. CUKIERMAN, Positive polynomials and hyperdeterminants, *Collectanea Math.* **58** (2007), 279–289.
- [DM] S. G. DANI, M. MAINKAR, Anosov automorphisms on compact nilmanifolds associated with graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.* **357** (2004), 2235–2251.
- [D] L.E. DICKSON, Determination of all general homogeneous polynomials expressible as determinants with linear elements, *Trans. Amer. Math. Soc.* **22** (1921), 167–179.
- [D79] E. DELOFF, Naturally reductive metrics and metrics with volume preserving geodesic symmetries on NC algebras, Dissertation, Rutgers 1979.
- [Di87] J. DIXMIER, On the projective invariants of quartic plane curves, *Adv. in Math.* **64**, 279–304 (1987).
- [Do03] I. DOLGACHEV, Lectures on invariant theory, *London Math. Soc. Lect. Notes* **296** (2003), Cambridge Univ. Press.
- [E94] P. EBERLEIN, Geometry of 2-step nilpotent Lie groups with a left invariant metric II, *Trans. Amer. Math. Soc.* **343** (1994), 805–828.

- [E07] P. EBERLEIN, Riemannian 2-step nilmanifolds with prescribed Ricci tensor, *Contemp. Math.* **469** (2008), 167–195.
- [EH96] P. EBERLIEN, J. HEBER, Quarter pinched homogeneous spaces of negative curvature, *Internat. J. Math.* **7**(1996) 441–500.
- [EJ07] P. EBERLEIN, M. JABLONSKI, Closed orbits of semisimple group actions and the real M function, *Contemp. Math.* **491** (2009), 283–321.
- [F] E. FERNANDEZ CULMA, Classification of 7-dimensional Einstein Nilradicals, *Transformation Groups*, en prensa (arXiv).
- [FZ11] L. FLORIT, W. ZILLER, Topological obstructions to fatness, *Geom. Top.* **15** (2011), 891–925.
- [GT99] L. GALITSKI, D. TIMASHEV, On classification of metabelian Lie algebras, *J. Lie Theory* **9** (1999), 125–156.
- [G73] M. GAUGER, On the classification of metabelian Lie algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* **179** (1973), 293–329.
- [H98] J. HEBER, Noncompact homogeneous Einstein spaces, *Invent. Math.* **133** (1998), 279–352.
- [HSS08] P. HEINZNER, G. W. SCHWARZ, H. STÖTZEL, Stratifications with respect to actions of real reductive groups, *Compositio Math.* **144** (2008), 163–185.
- [H88] D. HILBERT, Über die darstellung definiter formen als summe von formenquadraten, *Math. Ann.* **32** (1888), 342–350.
- [J2] M. JABLONSKI, Detecting orbits along subvarieties via the moment map, *Münster J. Math.*, **3** (2010), 67–88.
- [J1] M. JABLONSKI, Moduli of Einstein and non-Einstein nilradicals. *Geom. Dedicata* **152** (2011), 63–84.
- [K81] A. KAPLAN, Riemannian nilmanifolds attached to Clifford modules, *Geom. Dedicata* **11**(1981), 127–136.
- [KT12] A. KAPLAN, A. TIRABOSCHI, Automorphisms of non-singular nilpotent Lie algebras, preprint 2012 (arXiv).
- [La] R. LAFUENTE, Solvsolitons associated with graphs, *Adv. Geom.* (2011), en prensa.
- [L01] J. LAURET, Ricci soliton homogeneous nilmanifolds, *Math. Annalen* **319** (2001), 715–733.
- [L03] J. LAURET, Degenerations of Lie algebras and geometry of Lie groups. *Diff. Geom. Appl.* **18**(2) (2003), 177–194.
- [L08] J. LAURET, Rational forms of nilpotent Lie algebras and Anosov diffeomorphisms, *Monatsh. Math.* **155**, 15–30 (2008).

- [L09] J. LAURET, Einstein solvmanifolds and nilsolitons, *Contemp. Math.* **491** (2009), 1–35.
- [L10] J. LAURET, Einstein solvmanifolds are standard, *Ann. of Math.* **172** (2010), 1859–1877.
- [LW11] J. LAURET, C.E. WILL, Einstein solvmanifolds: existence and non-existence questions, *Math. Annalen* **350** (2011), 199–225.
- [LT99] F. LEVSTEIN, A. TIRABOSCHI, Classes of 2-step nilpotent Lie algebras, *Comm. Alg.* **27** (1999), 2425–2440.
- [Mr01] A. MARIAN, On the real moment map, *Math. Res. Lett.* **8** (2001), 779–788.
- [M03] S. MUKAI, An introduction to invariants and moduli, *Cambridge Studies in adv. math* **81** (2003), Cambridge Univ. Press.
- [N84] L. NESS, A stratification of the null cone via the momentum map, *Amer. J. Math.* **106** (1984), 1281–1329 (with an appendix by D. Mumford).
- [N06] Y. NIKOLAYEVSKY, Nilradicals of Einstein solvmanifolds, preprint 2006 (arXiv).
- [N11] Y. NIKOLAYEVSKY, Einstein solvmanifolds and the pre-Einstein derivation, *Trans. Amer. Math. Soc.* **363** (2011), 3935–3958.
- [N12] Y. NIKOLAYEVSKY, Einstein solvmanifolds attached to two-step nilradicals. *Math. Zeit.*, en prensa.
- [O] P.J. OLVER, Classical invariant theory, *London Mathematical Society Student Texts* **44** (1999).
- [P11] T. PAYNE, The topology of the set of nonsoliton Lie algebras in the moduli space of nilpotent Lie algebras, preprint 2011 (arXiv).
- [R10] B. REZNICK, Sum of even powers of real linear forms, *Memoirs Amer. Math. Soc.* **463** (1992).
- [R10] B. REZNICK, On Hilbert’s construction of positive polynomials, preprint 2007 (arXiv).
- [RS90] R.W. RICHARDSON, P.J. SLODOWY, Minimum vectors for real reductive algebraic groups, *J. London Math. Soc. (2)* **42** (1990), 409–429.
- [Ri82] C. RIEHM, The automorphism group of a composition of quadratic forms, *Trans. Amer. Math. Soc.* **269** (1982), 403–414.
- [S96] L. SAAL, The automorphism group of a Lie algebra of Heisenberg type, *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino* **54** (1996), 101–113.
- [Sc67] J. SCHEUNEMAN, Two-step nilpotent Lie algebras, *J. Algebra* **7** (1967), 152–159.
- [W82] E. WILSON, Isometry groups on homogeneous nilmanifolds, *Geom. Ded.* **12** (1982), 337–346.

- [W] C. E. WILL, Rank-one Einstein solvmanifolds of dimension 7, *Diff. Geom. Appl.*, 19 (2003), 307–318.
- [Wo91] T. H. WOLTER, Einstein metrics on solvable groups, *Math. Zeit.* **206** (1991), 457–471.

