REDUCCIÓN ÓPTIMA DE VARIEDADES KÄHLER

Verónica S. Diaz

Tesis presentada ante la
Facultad de Matemática Astronomía y Física
de la
Universidad Nacional de Córdoba
como parte de los requerimientos para la obtención del grado de
Doctor en Matemática

Junio de 2012

Directora: Dra. María Laura Barberis

A Manu y Olivia

Resumen

Los métodos de reducción simpléctica permiten construir nuevas variedades simplécticas a partir de variedades de este tipo. La reducción clásica de Marsden y Weinstein es una herramienta importante para construir nuevas variedades simplécticas y para estudiar sistemas mecánicos con simetrías. Sin embargo, en numerosas situaciones esta técnica no se puede aplicar o no utiliza toda la informacion codificada en las simetrías del sistema. Para sortear esta dificultad una nueva aplicación momento fue introducida por Ortega y Ratiu , dando lugar a la reducción simpléctica óptima. El objetivo de esta tesis es estudiar las variedades simplécticas obtenidas a partir de este método y adaptarlo al caso de las variedades de Kähler e hiperkähler.

Palabras Claves: Reducción simpléctica, reducción óptima, variedades simplécticas, variedades Kähler, variedades hiperkähler.

Mathematics Subject Classification (2010): 53C55, 53C26, 53D20, 17B08

Abstract

Symplectic reduction provides a method to construct a symplectic manifold from - another manifold of this type. Marsden-Weinstein reduction has been a major tool in the construction of new symplectic manifolds and in the study of mechanical systems with symmetry. However, in a large number of situations, this standard approach does not work or is not efficient enough, in the sense that it does not use all the information encoded in the symmetry of the system. A new moment map was defined by Ortega and Ratiu to overcome this problems, which give rise to the Optimal symplectic reduction. The aim of this thesis is to study the symplectic manifolds obtained from this last reduction and extend it to Kähler and hyper-Kähler manifolds.

Keywords: Symplectic reduction, optimal reduction, symplectic manifolds, Kähler manifolds, Hyper-Kähler manifolds.

Mathematics Subject Classification (2010): 53C55, 53C26, 53D20, 17B08

Agradecimientos

Primero quiero agradecerle a mi directora, Dra. M. Laura Barberis, por su apoyo incondicional, su calidez humana, por compartir su tiempo y conocimientos conmigo, por incentivarme cuando yo estaba cansada o creía que no llegaba a cumplir ciertos plazos. También quiero agradecerles a la Dra. Isabel Dotti y el Dr. Pedro Catuogno, quienes hicieron posible que yo realizara el doctorado en Córdoba.

Quiero agradecerle a Manu, por acompañarme durante todo el doctorado, alentándome, dándome fuerzas y tolerando la falta de dedicación de tiempo, pero sobre todo, por acompañarme en todos los momentos de mi vida, con su amor y eterna comprensión.

Gracias a mi mamá, mi papá, y mi hermano, por estar siempre, y apoyarme cada uno desde una perspectiva diferente.

Gracias a mis AMIGOS y compañeros de doctorado: Sofy, Ale, Alfredo y Aure!

Gracias a FaMAF, CIEM , CONICET y SeCyT-UNC, por brindarme el lugar de trabajo y el apoyo económico para llevar a cabo este doctorado.

Índice

Introducción

Durante los últimos 35 años, el método de reducción simpléctica desarrollado por Marsden y Weinstein [MW] ha sido una herramienta importante para construir nuevas variedades simplécticas y para estudiar sistemas mecánicos con simetrías [SL]. Sin embargo, en numerosas situaciones esta técnica no utiliza toda la información codificada en las simetrías del sistema. Para sortear esta dificultad una nueva aplicación momento ha sido introducida por Ortega y Ratiu en [OR1]. El objetivo de este trabajo es estudiar las variedades simplécticas obtenidas a partir de este método y adaptarlo al caso de las variedades de Kähler.

En [OR3] se demuestra un teorema de reducción óptima para el fibrado cotangente T^*G de un grupo de Lie G con una forma simpléctica ω_Σ definida a partir de un dos cociclo $\Sigma : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$, donde $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie de G. Esta forma simpléctica se obtiene sumándole a la forma simpléctica canónica en T^*G un término que involucra a Σ, denominado término magnético. Utilizando este resultado, en la primera parte del trabajo describimos distintas variedades simplécticas obtenidas a partir de (T^*G, ω_Σ) para diferentes grupos de Lie G, variando el dos cociclo Σ. Además obtenemos una expresión explícita de la estructura simpléctica de los espacios reducidos de (T^*G, ω_Σ). Dentro de los distintos ejemplos que se obtienen en particular estudiamos el caso cuando G es un grupo de Lie 2 pasos nilpotente, por ejemplo el grupo de Heisenberg, y en este caso logramos dar condiciones para que los espacios reducidos admitan estructura de grupo de Lie.

Adaptando el método de reducción simpléctica de Marsden y Weinstein [MW] al caso de variedades con estructuras hipersimplécticas o hiperkählerianas, es posible obtener teoremas de reducción [H1], [HKLR]. Estos resultados han sido aplicados para obtener nuevas variedades hipersimplécticas [D] e hiperkählerianas [BDF]. Hasta el momento, el método de reducción óptima sólo se ha generalizado para estructuras de Dirac [JR]. En este trabajo mostramos cómo extender la reducción simpléctica óptima al caso de variedades de Kähler. Para probar este resultado nos inspiramos en la construcción clásica del cociente Kähler introducida en [HKLR].

Por último, logramos adaptar el método de reducción óptima al caso de variedades hiperkähler, basándonos en la reducción óptima Kähler que hemos obtenido. Al igual que en el caso Kähler, para la construcción del cociente hiperkähler óptimo también nos inspiramos en la construcción del cociente hiperkähler cásico [HKLR].

1.1. Estructuras simplécticas, complejas, Kähler e Hiperkähler.

En esta sección introducimos definiciones y probamos varios resultados. Algunos de ellos son conocidos y referimos a la bibliografía existente.

Definición 1.1. *Sea M una variedad diferenciable y ω una 2-forma en M. Entonces ω es una forma simpléctica si ω es cerrada ($d\omega = 0$) y no degenerada. Se dice que (M, ω) es una variedad simpléctica.*

Si ω es simpléctica, entonces $dimT_pM = dimM$ tiene que ser par.

Ejemplo 1.1. *Sea Q una variedad diferenciable y T^*Q su fibrado cotangente. Sea $\pi_Q : T^*Q \longrightarrow Q$ la proyección sobre Q y Θ la uno forma en T^*Q definida por:*

$$\Theta_\beta(v_\beta) := \langle \beta, d\pi_\beta v_\beta \rangle,$$

donde $\beta \in T^*Q$ y $v_\beta \in T_\beta(T^*Q)$.
A partir de Θ definimos la dos forma ω en T^*Q de la siguiente forma:

$$\omega := -d\Theta. \tag{1.1}$$

ω resulta ser una 2-forma no degenerada y cerrada, a la cual se denomina forma simpléctica canónica de T^*Q. Luego (T^*Q, ω) es una variedad simpléctica.

Este ejemplo de variedad simpléctica es el que motivó el estudio general de estas estructuras. Tiene interés en sí mismo, pues es el marco donde se describe la mecánica clásica no relativista con un número finito de grados de libertad.

Definición 1.2. *Sean (M, ω) una variedad simpléctica y $f \in C^\infty(M)$, entonces definimos el campo vectorial Hamiltoniano asociado a f, que lo notaremos X_f, de la siguiente forma:*

$$i_{X_f}\omega = df. \tag{1.2}$$

Definición 1.3. *Una estructura compleja en un espacio vectorial real V es un endomorfismo J de V que satisface $J^2 = -id$.*

Como J induce en V una estructura de espacio vectorial complejo resulta $dim_{\mathbb{R}} V$ par. Sea M una variedad diferenciable conexa.

Definición 1.4. *Una estructura casi compleja en M es un endomorfismo $\mathcal{C}^\infty$ J del fibrado tangente TM que induce una estructura compleja en T_xM $\forall x \in M$. En particular dim M es par. Si además J satisface la condición de integrabilidad:*

$$N_J(X, Y) := [JX, JY] - J[X, JY] - J[JX, Y] - [X, Y] = 0, \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M) \tag{1.3}$$

se dice que J es una estructura compleja en M.

Veamos, a modo de ejemplo, que $\mathbb{C}^n$ admite una estructura compleja natural. Consideremos en $\mathbb{C}^n$ el sistema de coordenadas $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$, donde para $z = (z_1, \ldots, z_n)$ en $\mathbb{C}^n$ se tiene $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, \ldots, n$. Definimos una estructura compleja en $\mathbb{C}^n$ por

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial y_j}, \qquad J\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{1.4}$$

El siguiente lema resulta útil para verificar la condición de integrabilidad de una estructura compleja J.

Lema 1.1. *Si J es una estructura casi compleja en M y $X_1, \ldots, X_n$ son campos definidos en un abierto U de M tales que $\{X_{1_p}, (JX_1)_p, \ldots, X_{n_p}, (JX_n)_p\}$ es una base de T_pM para todo $p \in U$, entonces $N_J|_U \equiv 0$ si y sólo si $N_J(X_i, X_j) = 0$, $\forall i < j$.*

Demostración. Es fácil ver que $N_J(JX, Y) = -JN_J(X, Y)$. El lema sigue usando que N_J es antisimétrico. $\square$

Recordemos que una conexión afín en M es una regla que asigna a cada $X \in \mathcal{X}(M)$ un endomorfismo ∇X de $\mathcal{X}(M)$ que es $\mathcal{C}^\infty(M)$-lineal y satisface además:
(a) $\nabla(X + Y) = \nabla X + \nabla Y$;
(b) $\nabla(fX) = f\nabla X + \nabla(f)X$.
Dada una conexión afín ∇ en M, podemos hablar de transporte paralelo a lo largo de curvas. Denotaremos por $Hol(\nabla)$ al grupo de holonomía correspondiente a ∇, es decir $Hol(\nabla)$ es el subgrupo de $GL(T_pM)$ formado por los desplazamientos paralelos a lo largo de lazos en $p \in M$ (un lazo es una curva cerrada regular a trozos). No haremos referencia al punto p porque todos los grupos construidos de esta forma son conjugados entre sí cuando M es conexa.

Recordemos que la torsión y la curvatura de la conexión afín ∇ son los siguientes campos tensoriales:

$$tor(\nabla)(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \qquad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$$

$$R^\nabla(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]} \qquad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Diremos que ∇ es libre de torsión cada vez que $tor(\nabla) = 0$. Si ∇ es libre de torsión y además $R^\nabla \equiv 0$ se dice que ∇ es plana. Una conexión afín ∇ se puede extender de manera natural a una derivación del álgebra de campos tensoriales en M ([KN], Vol II). Por ejemplo, si J es un tensor de tipo $(1, 1)$, obtenemos la siguiente expresión para ∇J:

$$\nabla J(X, Y) = \nabla_Y(JX) - J(\nabla_Y X) \qquad X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Es frecuente escribir $(\nabla_Y J)X$ en lugar de $\nabla J(X, Y)$.

El siguiente teorema da una definición alternativa de estructura compleja en términos de conexiones afines.

Teorema 1.2. *([KN], Vol II]) Una estructura casi compleja J en M es compleja si y sólo si M admite una conexión afín ∇ libre de torsión tal que $\nabla J = 0$.*

Recordemos que una variedad compleja M es una variedad real de dimensión par $2n$ que admite un cubrimiento por sistemas de coordenadas tal que las funciones de transición $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$ son holomorfas en $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$. Entonces se puede probar (ver [KN, Vol II]) que transfiriendo la estructura compleja canónica (1.4) de $\mathbb{C}^n$ a M por medio de dichas funciones coordenadas, uno obtiene una estructura compleja J globalmente definida. El famoso teorema de Newlander y Nirenberg [NN], demuestra que la recíproca es válida: si J es una estructura compleja en M, entonces existe un cubrimiento de M por sistemas de coordenadas con funciones de transición holomorfas tal que J se obtiene de la forma anteriormente descripta. En particular M resulta variedad compleja.

Teorema 1.3 (Newlander-Nirenberg [NN])**.** *M es una variedad compleja si y sólo si M admite una estructura compleja J.*

Recordemos que si (M, J) es (casi) compleja, una métrica riemanniana en M se dice (casi) hermítica si J es ortogonal. Si M es paracompacta, (M, J) siempre admite una métrica (casi) hermítica ([KN], Vol. II).

Dada $(M, J, \langle , \rangle)$ casi hermítica podemos definir la siguiente 2-forma en M:

$$\omega(X, Y) = \langle JX, Y\rangle \qquad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M), \tag{1.5}$$

que satisface $\omega(JX, JY) = \omega(X, Y)$. A ω se la denomina 2-forma de Kähler. Con esta notación, si ∇ denota la conexión de Levi-Civita asociada a $\langle , \rangle$ y d denota la derivación exterior, en [KN, Vol.II, Propos. 4.2] se prueba:

Proposición 1.4. *Si $(M, J, \langle , \rangle)$ es casi hermítica entonces*

$$4\langle(\nabla_X J)Y, Z\rangle = -6d\omega(X, JY, JZ) + 6d\omega(X, Y, Z) + \langle N_J(Y, Z), JX\rangle$$

para todo $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$.

Podemos probar el siguiente resultado (notar que la equivalencia entre (a) y (c) aparece en [KN, Vol. II]):

Teorema 1.5. *Dada $(M, J, \langle , \rangle)$ casi hermítica, sea ∇ la conexión de Levi-Civita. Son equivalentes:*

(a) $\nabla J = 0$;
(b) $\nabla\omega = 0$;
(c) $d\omega = 0$ *y* J *es integrable.*

Demostración. Probaremos primero que (a) y (b) son equivalentes. Para eso escribimos:

$$\begin{aligned}(\nabla_X\omega)(Y, Z) &= X(\omega(Y, Z)) - \omega(\nabla_X Y, Z) - \omega(Y, \nabla_X Z)\\ &= X\langle JY, Z\rangle - \langle J\nabla_X Y, Z\rangle - \langle JY, \nabla_X Z\rangle\\ &= \langle\nabla_X JY, Z\rangle + \langle JY, \nabla_X Z\rangle - \langle J\nabla_X Y, Z\rangle - \langle JY, \nabla_X Z\rangle\\ &= \langle\nabla_X JY - J\nabla_X Y, Z\rangle = \langle(\nabla_X J)Y, Z\rangle\end{aligned}$$

para todo $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, de donde se deduce que $\nabla J = 0 \Leftrightarrow \nabla\omega = 0$.
$(c) \Rightarrow (a)$ es trivial por la Proposición 1.4.
Para probar $(a) \Rightarrow (c)$ recordemos que

$$3d\omega(X, Y, Z) = X(\omega(Y, Z)) + Y(\omega(Z, X)) + Z(\omega(X, Y))$$

$$-\omega([X,Y],Z)-\omega([Y,Z],X)-\omega([Z,X],Y).$$

Como $\nabla J = 0$ entonces, por lo que acabamos de ver, $\nabla\omega = 0$, por lo tanto

$$X\omega(Y,Z) = \omega(\nabla_X Y, Z) + \omega(Y, \nabla_X Z)$$
$$Y\omega(Z,X) = \omega(\nabla_Y Z, X) + \omega(Z, \nabla_Y X)$$
$$Z\omega(X,Y) = \omega(\nabla_Z X, Y) + \omega(X, \nabla_Z Y)$$

y usando que $tor(\nabla) = 0$ y que ω es antisimétrica resulta $3d\omega(X,Y,Z) = 0\ \forall X,Y,Z \in \mathcal{X}(M)$, es decir $d\omega = 0$. □

Definición 1.5. *Si $\langle,\rangle$ satisface alguna de las condiciones equivalentes del Teorema 1.5 se dice que $\langle,\rangle$ es una métrica kähleriana y que $(M,J,\langle,\rangle)$ es una variedad de Kähler.*

Observación 1.1. Dada $(M,J,\langle,\rangle)$ una variedad de Kähler podemos definir como en la ecuación (1.5) la 2-forma ω:

$$\omega(X,Y) = \langle JX, Y\rangle$$

Observemos que ω resulta no degenerada, sea $p \in M$

$$\omega_p(X,Y) = 0 \quad \forall\, Y \in T_pM \ \Leftrightarrow\ \langle JX,Y\rangle = 0 \quad \forall\, Y \in T_pM \ \Leftrightarrow\ JX = 0 \ \Leftrightarrow\ X = 0$$

Además, como M es una variedad Kähler, entonces satisface la condición (c) del Teorema 1.5, luego ω resulta cerrada y no degenerada, por lo tanto ω es simpléctica. Entonces se puede afirmar que toda variedad de Kähler es una variedad simpléctica. La recíproca no es válida, existen variedades simplécticas que no son Kähler, veamos un ejemplo de este caso:

Ejemplo 1.2. *El primer ejemplo de variedad simpléctica no Kähler fue descripto por Thurston en [T] y consiste en una nilvariedad. Recordemos la definición de nilvariedad:*

Definición 1.6. *Una nilvariedad (ver [M]) es un cociente G/Γ de un grupo de Lie nilpotente simplemente conexo G por un retículo Γ (es decir, Γ es un subgrupo discreto cocompacto).*

El ejemplo de Thurston es la la nilvariedad $S^1 \times H_3/\Gamma_1$, donde

$$H_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

es el grupo de Heisenberg de dimensión 3 y Γ_1 es el subgrupo de matrices en H_3 con coeficientes enteros.

Este ejemplo se puede generalizar de la siguiente forma: para cada $k \in \mathbb{N}$ se define el siguiente retículo Γ_k en H_3:

$$\Gamma_k = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c/k \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\Gamma_i \subset \Gamma_j \ \text{ si y sólo si } \ i \text{ divide a } j.$$

- *H_3/Γ_1 es un cubrimiento de H_3/Γ_k para todo $k > 1$.*
- *$\Gamma_k/[\Gamma_k,\Gamma_k] \cong \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}_k$.*

Las nilvariedades $S^1 \times H_3/\Gamma_k$ tienen grupo fundamental $\mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}_k$, en particular, son no homeomorfas. Todas son simplécticas no Kähler.

Definición 1.7. *Una estructura hipercompleja en un espacio vectorial real V es una familia de estructuras complejas $\{I, J, K\}$ que satisfacen*

$$\begin{aligned} IJ &= -JI = K \\ JK &= -KJ = I \\ KI &= -IK = J \\ I^2 = J^2 &= K^2 = IJK = -id \end{aligned} \tag{1.6}$$

$\{I, J, K\}$ da a V estructura de $\mathbb{H}$-módulo y resulta dim $V \equiv 0$ (mod 4).

Definición 1.8. *Una estructura casi hipercompleja en M es una familia $\{I, J, K\}$ de endomorfismos del fibrado tangente TM tal que $\{I, J, K\}$ define una estructura hipercompleja en T_xM $\forall x \in M$. En particular dim $M \equiv 0$ (mod 4). Si además I, J y K son integrables, es decir, $N_I \equiv 0$, $N_J \equiv 0$ y $N_K \equiv 0$, donde N es el tensor definido en la ecuación (1.3), se dice que la estructura $\{I, J, K\}$ es hipercompleja.*

Definición 1.9. *Dada $\{I, J, K\}$ (casi) hipercompleja, una métrica riemanniana en M se dice (casi) hiperhermítica si I, J y K son ortogonales.*

Definición 1.10. *Dada $(M, \langle,\rangle, I, J, K)$ hiperhermítica, se dice que $\langle,\rangle$ es hiperkähleriana si las variedades $(M, I, \langle,\rangle)$, $(M, J, \langle,\rangle)$ y $(M, K, \langle,\rangle)$ son Kähler. Se dice que $(M, \langle,\rangle, I, J, K)$ es una variedad hiperkähler.*

La siguiente proposición es otra forma de definir variedades hiperkähler:

Proposición 1.6 ([B]). *Una variedad Riemanniana $(M, \langle,\rangle)$ es hiperkähler si y sólo si existen I y J estructuras complejas en M tales que*

1. *la métrica $\langle,\rangle$ es kähleriana con respecto a ambas estructuras, I y J,*
2. *las dos estructuras complejas anticonmutan: $IJ = -JI$.*

Se define $K := IJ$, que es una estructura compleja con respecto a la cual $\langle,\rangle$ es una métrica kähleriana también. Además I, J y K operan como los cuaterniones (ver (1.6)). Luego, el espacio tangente a M en un punto se convierte en un $\mathbb{H}$-módulo, donde $\mathbb{H}$ son los cuaterniones, y entonces la dimensión real de M es $4n$, con n un número entero.

Notar que una variedad hiperkähler es en particular una variedad simpléctica de tres formas distintas, o sea, considerando la 2-forma de Kähler asociada a cada estructura compleja I, J, K:

$$\omega_I(X, Y) = \langle IX, Y\rangle, \tag{1.7}$$

$$\omega_J(X, Y) = \langle JX, Y\rangle, \tag{1.8}$$

$$\omega_K(X, Y) = \langle KX, Y\rangle. \tag{1.9}$$

En realidad $(aI + bJ + cK, \langle , \rangle)$ es una estructura Kähler en M si $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, entonces una variedad hiperkähler admite una esfera de dimensión 2 de estructuras Kähler.

Existe otra forma de caracterizar las variedades hiperkähler, teniendo en cuenta las variedades simplécticas complejas. Veamos la definición de estas últimas:

Definición 1.11. *Dada (M, I) una variedad compleja, se llama estructura simpléctica compleja en M a una 2-forma en M a valores complejos que es cerrada, holomorfa y no degenerada en cada punto de M.*

Entonces tenemos la siguiente proposición:

Proposición 1.7 ([B])**.** *Sea $(M, \langle , \rangle, I, J, K)$ una variedad hiperkähler . Entonces la 2-forma compleja*

$$\omega(X, Y) = \omega_J(X, Y) + i\omega_K(X, Y) \tag{1.10}$$

es cerrada, no degenarada y holomorfa con respecto a I. Entonces ω es una estructura simpléctica compleja en (M, I)

Entonces toda variedad hiperkähler es de una forma muy precisa (una vez que se eligió una estructura compleja I) una variedad simpléctica compleja. En el caso compacto la recíproca de la Proposición 1.7 vale (ver [Bea]).

Otro resultado muy útil para probar que una variedad es hiperkähler es el siguiente:

Proposición 1.8 ([H])**.** *Sea $(M, \langle , \rangle, I, J, K)$ una variedad casi hiperhermítica tal que las formas de Kähler asociadas a I, J y K: ω_I, ω_J y ω_K son cerradas. Entonces I, J y K son integrables y por lo tanto $(M, \langle , \rangle, I, J, K)$ es una variedad hiperkähler.*

1.2. Estructura de Poisson.

Definición 1.12. *Sea M una variedad diferenciable de dimensión finita, una estructura de Poisson C^∞ sobre M es una operación $\mathbb{R}$-bilineal, antisimétrica*

$$\begin{array}{rccc} \{\cdot,\cdot\}: & C^\infty(M) \times C^\infty(M) & \longrightarrow & C^\infty(M) \\ & (f, g) & \longmapsto & \{f, g\} \end{array}$$

sobre el espacio de funciones $C^\infty(M)$ que verifica la identidad de Jacobi

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0 \tag{1.11}$$

y la identidad de Leibniz

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}, \quad \forall f, g, h \in C^\infty(M). \tag{1.12}$$

$\{\cdot,\cdot\}$ se llama corchete de Poisson y $(M, \{\cdot,\cdot\})$ variedad de Poisson.

Observación 1.2. Un álgebra de Lie A es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbf{K}$, con una operación $\mathbf{K}$-bilineal $[,] : A \times A \longmapsto A$ llamada corchete de Lie, que verifica las siguientes propiedades:
i) es antisimétrica $[x, y] = -[y, x] \quad \forall x, y \in A$,
ii) satisface la identidad de Jacobi $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$.
Se puede observar que $C^\infty(M)$ con $\{\cdot,\cdot\}$, es un álgebra de Lie, cuyo corchete de Lie además satisface la identidad de Leibniz.

En particular las variedades simplécticas son variedades de Poisson. Si (M, ω) es una variedad simpéctica se puede definir el siguiente corchete de Poisson en $\mathcal{C}^\infty(M)$:

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g) \tag{1.13}$$

donde X_f, X_g son los campos Hamiltonianos asociados a las funciones $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, respectivamente (ver definición 1.2).

Del isomorfismo natural que existe entre las derivaciones de $\mathcal{C}^\infty(M)$ y los campos vectoriales diferenciables en M (ver [Ma, pág. 73]), tenemos que toda función $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ induce un único campo vectorial en M

$$X_h = \{\,\cdot\,, h\} \tag{1.14}$$

llamado campo vectorial Hamiltoniano asociado a la función h. En particular, cuando M es una variedad simpléctica esta definición es equivalente a la Definición 1.2.

1.2.1. Foliación Simpléctica.
Sea $B \in \Lambda^2(T^*M)$ definido por

$$B(z)(\alpha_z, \beta_z) = \{f, g\}(z), \tag{1.15}$$

donde $\mathbf{d}f(z) = \alpha \in T^*_z M$ y $\mathbf{d}g(z) = \beta \in T^*_z M$. B es un 2-tensor antisimétrico y contravariante, al cual llamamos tensor de Poisson de M. La aplicación $B^\sharp : T^*M \to TM$ que se asocia naturalmente a B está definida por

$$B_z(\alpha_z, \beta_z) = \langle \alpha_z, B^\sharp(\beta_z) \rangle. \tag{1.16}$$

Observación 1.3. Si $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ entonces $B^\sharp(\mathbf{d}f) = X_f$, pues

$$B^\sharp(\mathbf{d}f)(g) = \langle \mathbf{d}g, B^\sharp(\mathbf{d}f) \rangle = B_z(\alpha_z, \beta_z) = \{f, g\}(z) = X_f(g).$$

Llamamoas a $D := B^\sharp(T^*M) \subset TM$ distribución característica asociada a M.

De la observación y $T^*_m M = span\{\mathbf{d}f_m : f \in \mathcal{C}^\infty(M)\ y\ supp(f)\ es\ compacto\}$, tenemos que

$$D = span\{X_f : f \in \mathcal{C}^\infty(M)\ y\ supp(f)\ es\ compacto\}. \tag{1.17}$$

Como vimos antes, toda variedad simpléctica es variedad de Poisson con el corchete de Poisson definido en (1.13), la recíproca de esta afirmación está dada por el siguiente teorema:

Teorema 1.9 (Foliación simpléctica [W]). *Sea $(M, \{\cdot, \cdot\})$ una variedad de Poisson y D la distribución característica asociada. D es una distribución generalizada diferenciable e integrable, y sus subvariedades integrales maximales forman una foliación de M, descomponiendo a M en subvariedades iniciales $\mathfrak{L}$, las cuales resultan ser simplécticas con la única forma simpléctica tal que $i : \mathfrak{L} \to M$ es aplicación de Poisson, o sea $\mathfrak{L}$ es subvariedad de Poisson de $(M, \{\cdot, \cdot\})$.*

Las subvariedades integrales de la distribucion característica se llaman hojas simplécticas de $(M, \{\cdot, \cdot\})$.

Ver en la sección (1.4) la definición y propiedades de las distibruciones generalizadas.

1.2.2. Estructura de Lie-Poisson. [OR2]
Dada $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, se puede definir en $\mathfrak{g}^*$ el siguiente corchete de Poisson

$$\{f,g\}_\pm(\mu) := \pm\left\langle \mu, \left[\frac{\delta f}{\delta\mu}, \frac{\delta g}{\delta\mu}\right]\right\rangle, \qquad f,g\in\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*),\ \mu\in\mathfrak{g}^* \tag{1.18}$$

donde el elemento $\frac{\delta f}{\delta\mu}\in\mathfrak{g}$ está definido por $\langle\nu,\frac{\delta f}{\delta\mu}\rangle = df_\mu\nu$, para todo $\nu\in\mathfrak{g}^*$.
$\{\cdot,\cdot\}_\pm$ se llama $\pm$corchete de Lie-Poisson.
Si $h\in\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$, teniendo en cuenta la ecuación (1.14) el campo vectorial Hamiltoniano asociado a h con respecto al $\pm$corchete de Lie-Poisson está dado por la expresión

$$X_h(\mu) := \mp ad^*_{\frac{\delta h}{\delta\mu}}\mu, \quad \mu\in\mathfrak{g}^*, \tag{1.19}$$

donde ad^* es la representación coadjunta de $\mathfrak{g}$.

1.2.3. Estructura afín de Lie-Poisson. [OR2]
Dada $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y $\Sigma\in Z^2(\mathfrak{g},\mathbb{R})$ un 2-cociclo de $\mathfrak{g}$ la extensión central de $\mathfrak{g}$ por Σ es $\mathfrak{g}_\Sigma := \mathfrak{g}\bigoplus_\Sigma\mathbb{R}$ con el corchete de Lie definido por:

$$[(\xi,s),(\eta,t)] := ([\xi,\eta], -\Sigma(\xi,\eta)),$$

donde $\xi,\eta\in\mathfrak{g}$ y $s,t\in\mathbb{R}$. Se puede identificar $\mathfrak{g}^*_\Sigma$ con $\mathfrak{g}^*\oplus\mathbb{R}$ como espacio vectorial en forma canónica pensando a (μ,a) en $\mathfrak{g}^*_\Sigma$ de la siguiente forma:

$$\langle(\mu,a),(\xi,t)\rangle = \langle\mu,\xi\rangle + at \tag{1.20}$$

donde $\mu\in\mathfrak{g}^*$, $\xi\in\mathfrak{g}$ y $t,a\in\mathbb{R}$. Entonces el $\pm$corchete de Lie Poisson en $\mathfrak{g}^*_\Sigma$ está dado por:

$$\begin{aligned}\{\bar f,\bar h\}_\pm(\mu,a) &= \pm\left\langle(\mu,a), \left[\frac{\delta\bar f}{\delta(\mu,a)}, \frac{\delta\bar h}{\delta(\mu,a)}\right]\right\rangle\\ &= \pm\left\langle(\mu,a), \left[\left(\frac{\delta\bar f}{\delta\mu},\frac{\delta\bar f}{\delta a}\right), \left(\frac{\delta\bar h}{\delta\mu},\frac{\delta\bar h}{\delta a}\right)\right]\right\rangle\\ &= \pm\left\langle(\mu,a), \left(\left[\frac{\delta\bar f}{\delta\mu},\frac{\delta\bar h}{\delta\mu}\right], -\Sigma\left(\frac{\delta\bar f}{\delta\mu},\frac{\delta\bar h}{\delta\mu}\right)\right)\right\rangle\\ &= \pm\left\langle\mu, \left[\frac{\delta\bar f}{\delta\mu},\frac{\delta\bar h}{\delta\mu}\right]\right\rangle \mp a\Sigma\left(\frac{\delta\bar f}{\delta\mu},\frac{\delta\bar h}{\delta\mu}\right)\end{aligned} \tag{1.21}$$

donde $\bar f,\bar h\in\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*_\Sigma)$.
Luego teniendo en cuenta la ecuación (1.14), el campo vectorial Hamiloniano asociado a $\bar h$ está dado por

$$X_{\bar h}(\mu,a) = \left(\mp ad^*_{\frac{\delta\bar h}{\delta\mu}}\mu \pm a\Sigma\left(\frac{\delta\bar h}{\delta\mu},\,\cdot\,\right), 0\right). \tag{1.22}$$

Observemos que si para cada $a\in\mathbb{R}$ definimos el siguiente corchete en $\mathfrak{g}^*\oplus\{a\}$:

$$\{f,g\}^{a\Sigma}_\pm(\mu) := \pm\left\langle\mu, \left[\frac{\delta f}{\delta\mu},\frac{\delta h}{\delta\mu}\right]\right\rangle \mp a\Sigma\left(\frac{\delta f}{\delta\mu},\frac{\delta h}{\delta\mu}\right),$$

entonces $\mathfrak{g}^*\oplus\{a\}$ resulta ser una subvariedad de Poisson de $\mathfrak{g}^*_\Sigma$. En particular, nos interesará el caso $a=1$, al cual llamaremos corche de Lie-Poisson afín.

Luego, el espacio con estructura Lie-Poisson afín determinado por el 2-cociclo $\Sigma \in Z^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ está definido por el espacio vectorial $\mathfrak{g}^*$ junto con el corchete de Poisson

$$\{f, g\}^{\Sigma}_{\pm}(\mu) := \pm \left\langle \mu, \left[\frac{\delta f}{\delta \mu}, \frac{\delta h}{\delta \mu}\right] \right\rangle \mp \Sigma \left(\frac{\delta f}{\delta \mu}, \frac{\delta h}{\delta \mu}\right) \tag{1.23}$$

donde $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$ y $\mu \in \mathfrak{g}^*$. El corchete (1.23) también es llamado $\pm\Sigma$-estructura de Lie-Poisson.
Dada $h : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ el campo Hamiltoniano asociado a h con respecto al corchete $\{\,\cdot\,,\,\cdot\,\}^{\Sigma}_{\pm}$ está dado por

$$X^{\Sigma}_h(\mu) = \mp ad^*_{\frac{\delta \bar{h}}{\delta \mu}} \mu \pm \Sigma \left(\frac{\delta \bar{h}}{\delta \mu}, \,\cdot\,\right) \qquad \mu \in \mathfrak{g}^*. \tag{1.24}$$

1.3. Reducción Simpléctica clásica (Marsden-Weinstein).

En esta sección daremos los conceptos básicos para poder enunciar el teorema de reducción simpléctica clásica. Este tipo de reducción fue generalizada al caso de variedades Kähler, hiperkähler [HKLR]. Una de las desventajas que presenta el método, es que no siempre se puede aplicar, depende de la existencia de una determinada aplicación momento.

Definición 1.13. *Una* ***acción*** *a izquierda de un grupo de Lie G en una variedad diferenciable M es una aplicación:*

$$\begin{array}{rccc} \phi : & G \times M & \longrightarrow & M \\ & (g, m) & \longmapsto & \phi(g, m) = \phi_g(m) = g \cdot m \end{array}$$

tal que

- $\phi(e, m) = m \qquad \forall m \in M,$
- $\phi(g, \phi(h, m)) = \phi(gh, m) \qquad \forall g, h \in G, \forall m \in M.$

Para todo $g \in G$ la aplicación $\phi_g := \phi(g, \cdot) : M \longrightarrow M$ es un difeomorfismo de M con inversa $\phi_{g^{-1}}$.
Análogamente se puede definir acción a derecha.
Diremos que la acción es:

- *$\mathcal{C}^\infty$ o suave si ϕ es $\mathcal{C}^\infty$,*
- ***libre*** *si todos los grupos de isotropía son triviales, i.e. $G_m = \{e\}$ $\forall m \in M$,*
- ***propia*** *si la aplicación $\Phi : G \times M \longrightarrow M \times M$ definida por $\Phi(g, m) = (m, \phi(g, m))$ es propia, o equivalentenmente si para cualquier par de sucesiones $\{m_n\}$ y $\{g_n \cdot m_n\}$ convergentes en M, existe $\{g_{n_k}\}$ subsucesión convergente en G.*

Definición 1.14. *Sea (M, ω) una variedad simpléctica, G un grupo de Lie tal que*

$$\begin{array}{rccc} \phi : & G \times M & \longrightarrow & M \\ & (g, m) & \longmapsto & \phi(g, m) = \phi_g(m) \end{array}$$

es una acción $\mathcal{C}^\infty$. Se dice que ϕ es una acción ***simpléctica o canónica*** *si $\forall g \in G$ ϕ_g es un simplectomorfismo, i.e.*

$$\phi^*_g \omega = \omega \qquad \forall g \in G. \tag{1.25}$$

Definición 1.15. *Sea M una variedad diferenciable, G un grupo de Lie y $\phi : G\times M \to M$ una acción, llamamos campo infinitesimal asociado a $X \in \mathfrak{g}$ al campo vectorial $X_M \in \mathcal{X}(M)$ definido por:*

$$X_M(m) := \frac{d}{dt}|_{t=0}\phi_{exptX}(m).$$

Definición 1.16. *Sean (M, ω) una variedad simpléctica, G un grupo de Lie, $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de G y $\phi : G \times M \longrightarrow M$ una acción simpléctica. Decimos que*

$$\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$$

es la aplicación momento estándar asociada a ϕ si satisface:

1. *para todo $X \in \mathfrak{g}$, X_M es el campo vectorial Hamiltoniano asociado a la función μ^X:*

$$d\mu^X = i_{X_M}\omega,$$

donde $\mu^X : M \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida por $\mu^X(p) := \langle\mu(p), X\rangle$ (μ^X es la componente de μ a lo largo de X);

2. *μ es equivariante con respecto a la acción ϕ de G en M y la acción coadjunta de G en $\mathfrak{g}^*$:*

$$\mu \circ \phi_g = Ad^*_g \circ \mu \qquad \forall g \in G.$$

Observación 1.4. Dada (M, ω) variedad simpléctica y G grupo de Lie, $\phi : G \times M \longrightarrow M$ acción simpléctica no siempre admite una aplicación momento estándar, y en el caso de que sí admita, ésta puede no ser única. Se puede probar que si G es semisimple la aplicación momento estándar siempre existe y es única (ver [C],[OR2]).

Teorema 1.10 (Reducción simpléctica clásica (Marsden-Weinstein) [MW])**.** *Sea (M, ω) una variedad simpléctica conexa, G un grupo de Lie, $\phi : G \times M \to M$ acción simpléctica, libre y propia; y sea $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ la aplicación momento estándar asociada a ϕ. Entonces, el espacio de órbitas $M_{red} := \mu^{-1}(0)//G$ es una variedad simpléctica con forma simpléctica ω_{red} determinada por:*

$$\pi^*\omega_{red} = i^*\omega$$

donde $i : \mu^{-1}(0) \hookrightarrow M$ y $\pi : \mu^{-1}(0) \to \mu^{-1}(0)//G$ denotan la inclusión y proyección respectivamente.
(M_{red}, ω_{red}) se llama espacio simpléctico reducido.

Observación 1.5. El espacio reducido obtenido tiene dimensión igual a la de M menos 2 veces la dimensión de G.

Este método de reducción no sólo se aplica a $0 \in \mathfrak{g}^*$. Bajo las mismas hipótesis del teorema anterior, si tomamos $\xi \in \mathfrak{g}^*$, $\xi \in \mathfrak{Im}\mu$, y consideramos G_ξ el grupo de isotropía en ξ de la acción coadjunta de G en $\mathfrak{g}^*$; entonces el cociente $\mu^{-1}(\xi)//G_\xi$ resulta una variedad simpléctica.

1.4. Distribuciones Generalizadas.

En esta sección daremos la definición y algunos resultados sobre distribuciones generalizadas ([S1],[S2] y [S3]). Este tipo de distribuciones es la herramienta central para poder desarrollar el método de reducción óptima. Además, los conceptos que enunciaremos a continuación serán de mucha utilidad cuando mostremos como adaptar el método de reducción óptima simpléctica al caso de variedades hiperkähler.

Definición 1.17. *Sea M una variedad diferenciable, una* ***distribución generalizada*** *D en M es un subconjunto del fibrado tangente TM, tal que para todo $m \in M$ la fibra $D_m = D \cap T_mM$ es un subespacio vectorial de T_mM.*

Observación 1.6. La dimensión de D_m no es necesariamente la misma para todo $m \in M$.

Se llama ***rango*** *de la distribución D en $m \in M$ a la dimensión de D_m.*

Una ***sección diferenciable*** *de D es un campo vectorial diferenciable X definidio en un entorno abierto U de M, tal que $X_m \in D_m$ para todo $m \in U$.*

Una distribución generalizada D es ***diferenciable*** *si para todo $m \in M$ y $v \in D_m$, existe una sección diferenciable X, definida en un entorno U de m, tal que $X_m = v$.*

Una subvariedad conexa N de M se llama ***subvariedad integral*** *de D si*

$$d\imath_z(T_zM) \subset D_z \quad \forall z \in N;$$

y se dice que N es subvariedad integral de ***dimensión máxima*** *en el punto $z \in N$ si*

$$d\imath_z(T_zM) = D_z.$$

Una distribución generalizada D es ***completamente integrable*** *si para todo $m \in M$ existe una subvariedad integral de dimensión máxima en todo punto que pasa por m.*

Una distribución generalizada D es ***involutiva*** *si es invariante por los flujos (locales) asociados a las secciones diferenciables de D. Es decir, si $X \in \chi(U)$ es una sección diferenciable de D y φ_t es su flujo local, entonces*

$$(d\varphi_t)_x D_x = D_{\varphi_t(x)} \quad \textit{para todo } x \in U.$$

Observación 1.7. Esta definición de distribución involutiva es más general que la definición tradicional donde se dice que D es involutiva si dados $X, Y \in \chi(M)$ secciones diferenciables de D, $[X, Y]$ es sección diferenciable de D. Las dos definiciones son equivalentes cuando D es una distribución de rango constante.

Teorema 1.11. *(Generalización del Teorema de Frobenius). Una distribución generalizada D en una variedad difereciable M es completamente integrable si y sólo si es involutiva.*

Teorema 1.12. *Sea D una distribución generalizada diferenciable y completamente integrable en M; entonces para todo $m \in M$ existe una única subvariedad integral S de D que contiene a m y es máximal en el siguiente sentido: es de dimensión máxima en todo punto y además cualquier otra subvariedad integral N de D de dimensión máxima en todo punto y que contiene a S, es igual a S. Las subvariedades integrales maximales de D forman una partición de M, que se llama foliación generalizada de M definida por D.*

2. Reducción óptima simpléctica

El método de reducción óptima ha sido introducido por Ortega y Ratiu en [OR1]. Este método es similar al de Marsden-Weinstein, pero la principal diferencia entre ambos radica en la forma de definir la aplicación momento; en el caso de Marsden-Weinstein, como ya hemos visto, esto no siempre es posible, mientras que en la reducción óptima, independientemente de como sea la variedad y sobre todo el grupo que actúa sobre ella, siempre puede ser definida.
Toda la construcción del método de reducción óptima simpléctica se puede hacer en un contexto más general, para las variedades de Poisson. Recordemos que las variedades simplécticas son un caso particular de estas últimas; pero por el momento, como nuestro propósito es adaptar el método de reducción óptima para poder aplicarlo a variedades Kähler, sólo nos focalizaremos en la reducción óptima simpléctica.

2.1. Generalidades.

Sea (M, ω) una variedad simpléctica, G un grupo de Lie y

$$\begin{array}{rccc} \phi: & G\times M & \longrightarrow & M \\ & (g,m) & \longmapsto & g\cdot m = \phi_g(m) \end{array}$$

una acción canónica, es decir, ϕ actúa por difeomorfismos que preservan la estructura simpléctica de M.
Sea

$$\varepsilon := \{X_f / f \in \mathcal{C}^\infty(U)^G, con\ U\subset M\ abierto\ G-invariante\}$$

donde X_f es el campo hamiltoniano con función hamiltoniana f, i.e. $\iota_{X_f}\omega = df$.

Definimos la **distribución característica** E como la distribución generalizada suave sobre M generada por ε, esto es

$$E = span\{X_f | f \in \mathcal{C}^\infty(U)^G, con\ U\subset M\ abierto\ G-invariante\} \tag{2.1}$$

E resulta ser una distribución generalizada diferenciable e integrable en el sentido de Stefan-Sussman ([S1],[S2],[S3]).
Cuando la acción es propia se prueba en [OR1] que

$$E = span\{X_f / f \in \mathcal{C}^\infty(M)^G\}. \tag{2.2}$$

Sea M/E el espacio de hojas de la foliación generalizada de M inducida por E (el espacio de todas las subvariedades integrales maximales de E); se define la **aplicación momento óptimo** como la proyección canónica de M sobre dicho espacio

$$\mathcal{J} : M \longrightarrow M/E. \tag{2.3}$$

El espacio de hojas M/E se llama espacio momento, y lo consideraremos como un espacio topológico con la topología cociente.

Observación 2.1. La aplicación momento óptimo $\mathcal{J}$ siempre está definida.

Observación 2.2. Los conjuntos de nivel de $\mathcal{J}$ son preservados por el flujo de los campos Hamiltonianos asociados a funciones G-invariantes, es más, los conjuntos de nivel de $\mathcal{J}$ son las subvariedades más pequeñas que son preservadas por los campos Hamiltonianos; además $\mathcal{J}$ es universal con respecto a esta propiedad.

En el caso de la aplicación momento estándar, teníamos que resultaba equivariante con respecto a la acción ϕ y la acción coadjunta de G en $\mathfrak{g}^*$. En este contexto podemos definir la siguiente acción

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & G \times M/E & \longrightarrow & M/E \\ & (g,\rho) & \longmapsto & \Psi_g(\rho) := \mathcal{J}(\phi_g(m)) \end{array} \tag{2.4}$$

donde $\rho = \mathcal{J}(m)$ para algún $m \in M$.
Ψ resulta ser una acción continua de G en M/E y $\mathcal{J}$ es equivariante con respecto a ϕ y Ψ

$$\Psi_g \circ \mathcal{J}(m) = \Psi_g(\mathcal{J}(m)) = \Psi_g(\rho) = \mathcal{J}(\phi_g(m)) = \mathcal{J} \circ \phi_g(m) \tag{2.5}$$

Pero al no ser Ψ $\mathcal{C}^\infty$ y en general M/E no resultar Hausdorff, no se puede garantizar que los subgrupos de isotropía G_ρ, $\rho \in M/E$, sean cerrados, y por lo tanto embeddings de G. Sin embargo, existe una única estructura diferenciable en G_ρ para la cual resulta ser subgrupo de Lie inicial de G con álgebra de Lie $\mathfrak{g}_\rho$:

$$\mathfrak{g}_\rho = \{\xi \in \mathfrak{g} | \; \xi_M(m) \in T_m\mathcal{J}^{-1}(\rho), \; para\, todo\, m \in \mathcal{J}^{-1}(\rho)\}.$$

Luego, considerando a G_ρ con dicha estructura diferenciable la acción

$$\phi^\rho : G_\rho \times \mathcal{J}^{-1}(\rho) \longrightarrow \mathcal{J}^{-1}(\rho)$$
$$\phi^\rho(g,z) := \phi(g,z)$$

resulta $\mathcal{C}^\infty$.

Para poder enunciar el teorema de reducción óptima simpléctica consideremos el subgrupo de isotropía G_ρ en ρ de la acción Ψ definida en(2.4); es decir:

$$\begin{aligned} G_\rho : &= \{g \in G | \; \Psi_g(\rho) = \rho\} \\ &= \{g \in G | \; \mathcal{J}(\phi_g(m)) = \rho \, para\, todo\, m \in \mathcal{J}^{-1}(\rho)\} \\ &= \{g \in G | \; \mathcal{J}(g \cdot m) = \rho \, para\, todo\, m \in \mathcal{J}^{-1}(\rho)\} \\ &= \{g \in G | \; g \cdot m \in \rho \, para\, todo\, m \in \mathcal{J}^{-1}(\rho)\} \end{aligned} \tag{2.6}$$

Teorema 2.1 (Reducción óptima simpléctica)**.** [OR1] *Sea (M,ω) una variedad simpléctica, G un grupo de Lie, $\phi : G \times M \longrightarrow M$ una acción canónica y propia. Sea $\mathcal{J} : M \longrightarrow M/E$ la aplicación momento asociada a ϕ. Entonces para todo $\rho \in M/E$ cuyo subgrupo de isotropía G_ρ actúa propiamente en $\mathcal{J}^{-1}(\rho)$, $M_\rho := \mathcal{J}^{-1}(\rho)/G_\rho$ es una **variedad simpléctica** regular con forma simpléctica ω_ρ definida por*

$$\pi_\rho^*\omega_\rho = \iota_\rho^*\omega$$

donde $\iota_\rho^* : \mathcal{J}^{-1}(\rho) \longrightarrow M$ es la inclusión y $\pi_\rho : \mathcal{J}^{-1}(\rho) \longrightarrow \mathcal{J}^{-1}(\rho)/G_\rho$ es la proyección.

(M_ρ, ω_ρ) se llama espacio reducido óptimo, y resulta ser una variedad diferenciable regular (ver Definición 4.5).

Observación 2.3. Este teorema también se puede enunciar para una variedad de Poisson M [O], y obtener una variedad simpléctica M_ρ, pero por el momento, a fines prácticos solamente nos va a interesar trabajar con variedades simplécticas.

A pesar de que para el método de reducción óptima siempre se puede definir la aplicación momento óptimo, generalmente calcular dicha aplicación y caracterizar los espacios reducidos no es una tarea sencilla. Sin embargo en el caso particular cuando la variedad diferenciable es el fibrado cotangente magnético de un grupo de Lie se pueden caracterizar los espacios reducidos óptimos obtenidos a partir de estas variedades [OR3].

2.2. Fibrado cotangente magnético de un grupo de Lie.

En esta sección comenzaremos dando algunas definiciones básicas relacionadas a la cohomología de álgebras de Lie (ver [K]), para luego poder intruducir el concepto de fibrado cotangente magnético de un grupo de Lie, y por último poder presentar los resultados existentes y obtenidos sobre la caracterización de los espacios reducidos de dichos fibrados.

Definición 2.1. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, llamamos 2-cociclo del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ a una aplicación bilineal y antisimétrica $\sum : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface la identidad*

$$\Sigma([\xi, \eta], \mu) + \Sigma([\eta, \mu], \xi) + \Sigma([\mu, \xi], \eta) = 0 \tag{2.7}$$

Derivada exterior en $\Lambda^k(\mathfrak{g})$
Definimos

$$\mathbf{d}\omega(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_k) = \sum_{0 \le i < j \le k} (-1)^{i+j} \omega([\xi_i, \xi_j], \xi_0, \dots, \hat{\xi_i}, \dots, \hat{\xi_j}, \dots, \xi_k), \tag{2.8}$$

donde $\omega \in \Lambda^k(\mathfrak{g})$ y el símbolo $\hat{\xi_r}$ significa que se quita el elemento ξ_r.

Luego, si $\Sigma : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ es un 2-cociclo del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, entonces $\Sigma \in \Lambda^2(\mathfrak{g})$ y satisface

$$d\Sigma(\xi, \eta, \mu) := \Sigma([\xi, \eta], \mu) + \Sigma([\eta, \mu], \xi) + \Sigma([\mu, \xi], \eta) = 0. \tag{2.9}$$

Definición 2.2. *Dado Σ 2-cociclo de $\mathfrak{g}$, llamamos a $\mathfrak{g}_\Sigma := \mathfrak{g} \oplus_\Sigma \mathbb{R}$ la extensión central de $\mathfrak{g}$ determinada por el cociclo Σ. $\mathfrak{g}_\Sigma$ es un álgebra de Lie y su corchete de Lie está definido por*

$$[(\xi, s), (\eta, t)] := ([\xi, \eta], -\Sigma(\xi, \eta)). \tag{2.10}$$

Llamamos G_Σ al grupo de Lie conexo y simplemente conexo con álgebra de Lie $\mathfrak{g}_\Sigma$. Y denotamos por $\pi_\mathfrak{g} : \mathfrak{g}_\Sigma \longrightarrow \mathfrak{g}$ a la proyección y $\pi_G : G_\Sigma \longrightarrow G$ al único homomorfismo de grupos de Lie cuya derivada es $\pi_\mathfrak{g}$ y tal que

$$\pi_G \circ exp_{\mathfrak{g}_\Sigma} = exp_\mathfrak{g} \circ \pi_\mathfrak{g}.$$

Definición 2.3. *Sea G un grupo de Lie, V un espacio vectorial, $\rho : G \to GL(V)$ representación de G en V. Un **uno-cociclo** del grupo G valuado en V es una aplicación $\sigma : G \to V$ que satisface la identidad de cociclo*

$$\sigma(gh) = \sigma(g) + \rho(g)\sigma(h). \tag{2.11}$$

En particular si tomamos $g = h = e$ entonces $\sigma(e) = 0$.

Proposición 2.2 ([OR3]). *Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, Σ un 2-cociclo del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, y $\mathfrak{g}_\Sigma$ la extensión central de $\mathfrak{g}$ determinada por Σ. Entonces existe $\mu_\Sigma : G_\Sigma \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ uno-cociclo $\mathcal{C}^\infty$ del grupo G_Σ tal que para todo $g, h \in G_\Sigma, (\xi, s) \in \mathfrak{g}_\Sigma, (\nu, a) \in \mathfrak{g}^*_\Sigma$ se tiene:*

i): $Ad_g(\xi, s) = (Ad_{\pi_G(g)}\xi,\ s + \langle \mu_\Sigma(g), \xi\rangle)$.
ii): $Ad^*_{g^{-1}}(\nu, a) = (Ad^*_{\pi_G(g)^{-1}}\nu + a\mu_\Sigma(g),\ a)$.
iii): $\mu_\Sigma(gh) = \mu_\Sigma(h) + Ad^*_{\pi_G(h)^{-1}}\mu_\Sigma(g)$.

En la proposición hemos identificado $\mathfrak{g}^*_\Sigma$ con $\mathfrak{g}^* \oplus \mathbb{R}$ usando $\langle(\nu, a), (\xi, s)\rangle = \langle \nu, \xi\rangle + as$.

Llamaremos a μ_Σ el uno-cociclo a valores en $\mathfrak{g}^*$ asociado a Σ.

Corolario 2.3 ([OR3]). *La aplicación $\bar{\Xi} : G_\Sigma \times \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ definida por:*

$$\bar{\Xi}(g^{-1}, \nu) := Ad^*_{\pi_G(g)^{-1}}\nu + \mu_\Sigma(g) \quad g \in G_\Sigma,\ \nu \in \mathfrak{g}^*,$$

es una acción. $\bar{\Xi}$ se llama acción afín de G_Σ en $\mathfrak{g}^*$.

Definición 2.4. *Sea G un grupo de Lie de dimensión finita con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, T^*G su fibrado cotangente y $\pi : T^*G \longrightarrow G$ la proyección sobre la base. Dado Σ un 2-cociclo de $\mathfrak{g}$, sea $B_\Sigma \in \Omega^2(G)^G$ una 2-forma en G invariante a izquierda, tal que $B_{\Sigma_e} = \Sigma$, definimos*

$$\omega_\Sigma := \omega_{can} - \pi^* B_\Sigma,$$

donde ω_{can} es la forma simpléctica canónica que se define para el fibrado cotangente de una variedad diferenciable, ver el Ejemplo (1.1). De la condición de cociclo de Σ se deduce que B_Σ es cerrada y por lo tanto ω_Σ resulta una forma simpléctica.
*Luego, (T^*G, ω_Σ) es una variedad simpléctica, llamada **fibrado cotangente magnético**.*

Si consideramos el levantamiento al cotangente de la acción de G en G dada por traslaciones a izquierda, debido a la invariancia de B_Σ tenemos una acción canónica, i.e. que preserva la estructura simpléctica, $\phi : G \times T^*G \longrightarrow T^*G$ de G en (T^*G, ω_Σ). Si omitimos el término magnético, o sea, consideramos T^*G con la forma simpléctica canónica, la acción ϕ admite una aplicación momento estándar equivariante con respecto a la acción coadjunta y ϕ. En este caso, es un resultado conocido que los espacios reducidos obtenidos por el método de Marsden-Weinstein asociados a la acción ϕ son naturalmente simplectomorfos a las órbitas coadjuntas de G en $\mathfrak{g}^*$. En cambio, cuando se introduce el término magnético, y se considera (T^*G, ω_Σ) la acción ϕ no admite en general una aplicación momento estándar, pero sí es posible aplicar la reducción óptima simpléctica y caracterizar los espacios reducidos obtenidos. En este último caso dichos espacios reducidos resultan simplectomorfos a órbitas de la acción afín de G_Σ en $\mathfrak{g}^*$.

Para simplificar las cuentas de aquí en adelante identificamos T^*G con $G \times \mathfrak{g}^*$ vía

$$\begin{array}{rccc} \lambda : & T^*G & \longrightarrow & G \times \mathfrak{g}^* \\ & \alpha_g & \longmapsto & (g, (dl_g)^t_e \alpha_g) \end{array} \tag{2.12}$$

donde $\alpha_g \in T^*_g G$.
Utilizando la identificación (2.12) se obtienen las siguientes expresiones para la acción ϕ, los campos infinitesimales asociados a dicha acción y la forma simpléctica ω_Σ:

$$\phi_h((g,\mu)) = h\cdot(g,\mu) = (hg,\mu) \qquad \textit{para todo}\, h,g\in G, \mu\in\mathfrak{g}^*. \tag{2.13}$$

$$\xi_{G\times\mathfrak{g}^*}(g\mu) = (dl_g)_e(Ad_{g^{-1}}\xi,0) \qquad \textit{para todo}\, \xi\in\mathfrak{g}. \tag{2.14}$$

$$\omega_{\Sigma(g,\mu)}\left(((dl_g)_e\xi,\alpha),((dl_g)_e\eta,\beta)\right) = \langle\beta,\xi\rangle - \langle\alpha,\eta\rangle + \langle\mu,[\xi,\eta]\rangle - \Sigma(\xi,\eta). \tag{2.15}$$

Entonces ahora teniendo en cuenta la identificación (2.12) del fibrado cotangente magnético de un grupo de Lie, considerando $\phi : G\times T^*G \longrightarrow T^*G$ como el levantamiento al cotangente de la acción de G en G dada por traslaciones a izquierda, y la acción afín $\bar{\Xi}$ definida en el Corolario (2.3), podemos enunciar el teorema que caracteriza los espacios obtenidos al aplicar la reducción óptima a fibrados cotangentes magnéticos de grupos de Lie.

Teorema 2.4 ([OR3])**.** *Los espacios reducidos óptimos de la acción ϕ de G en $(G\times\mathfrak{g}^*,\omega_\Sigma)$ son simplectomorfos a las órbitas de la acción afín $\bar{\Xi}$ de G_Σ en $\mathfrak{g}^*$ dotadas de la forma simpléctica que las hace hojas simplécticas de $(\mathfrak{g}^*,\{.,.\}_-^\Sigma)$.*

Observación 2.4. Cuando el término magnético es 0 tenemos que $G_\Sigma = G\times\mathbb{R}$ (suponer G conexo) y la órbitas de la acción afín son simplectomorfas a las órbitas coadjuntas de G. Por lo tanto, este teorema muestra que la reducción óptima generaliza el conocido resultado que dice : al aplicar el método de reducción de Marsden-Weinstein a la acción levantamiento al cotangente (munido con su forma simpléctica canónica) de la acción multiplicación a izquierda de un grupo de Lie G, los espacios reducidos obtenidos son simplectomorfos a las órbitas coadjuntas de G en $\mathfrak{g}^*$ (ver [AM], [OR2]).

A partir de este teorema pudimos calcular en forma explícita la expresión de la forma simpléctica de los espacios reducidos del fibrado cotangente de un grupo de Lie.

Proposición 2.5. *La estructura simpléctica del espacio reducido $\mathcal{O}_\mu^{G_\Sigma} := \bar{\Xi}(G_\Sigma,\mu)$, $\mu\in\mathfrak{g}^*$, está definida por:*

$$\tilde{\omega}_\nu((\xi,a)_{\mathfrak{g}^*}(\nu),(\eta,b)_{\mathfrak{g}^*}(\nu)) = -\langle\nu,[\xi,\eta]\rangle + \Sigma(\xi,\eta),$$

donde $(\xi,a)_{\mathfrak{g}^*},(\eta,b)_{\mathfrak{g}^*}$ son los campos vectoriales infinitesimales generados por $(\xi,a),(\eta,b)\in\mathfrak{g}_\Sigma$, con $\xi,\eta\in\mathfrak{g}$, $a,b\in\mathbb{R}$ y $\nu\in\bar{\Xi}(G_\Sigma,\mu)$.

Demostración. Del Teoerma 2.4 sabemos que la estructura simpléctica de los epacios reducidos $\mathcal{O}_\mu^{G_\Sigma} := \bar{\Xi}(G_\Sigma,\mu)$,con $\mu\in\mathfrak{g}^*$, es la que los hace hojas simplécticas de $(\mathfrak{g}^*,\{.,.\}_-^\Sigma)$. Es decir, la única estructura simpléctica que hace que la inclusión $\iota : \mathcal{O}_\mu^{G_\Sigma} \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ sea una aplicación de Poisson. Llamemos $\tilde{\omega}$ a dicha estructura simpléctica.
Luego, $\tilde{\omega}$ define una estructura Poisson en $\mathcal{O}_\mu^{G_\Sigma}$

$$\{f,g\}(\nu) = \tilde{\omega}_\nu(X_f(\nu),X_g(\nu)) \qquad f,g\in\mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}_\mu^{G_\Sigma}),\ \nu\in\mathcal{O}_\mu^{G_\Sigma}\subset\mathfrak{g}^*. \tag{2.16}$$

Para que $\iota : \mathcal{O}_\mu^{G_\Sigma} \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ resulte una aplicación de Poisson es necesario que se cumpla la siguiente igualdad:

$$\{\iota^*f,\iota^*g\}(\nu) = \iota^*\{f,g\}_-^\Sigma(\nu) \tag{2.17}$$

donde $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$ y $\nu \in \mathcal{O}_\mu^{G_\Sigma} \subset \mathfrak{g}^*$.
Desarrollemos el miembro de la derecha de la ecuación (2.17)

$$\begin{aligned} \iota^*\{f,g\}_-^\Sigma(\nu) &= (\{f,g\}_-^\Sigma \circ \iota)(\nu) \\ &= (\{f,g\}_-^\Sigma(\nu) \\ &= -\left\langle \nu, \left[\frac{\delta f}{\delta(\nu)}, \frac{\delta h}{\delta(\nu)}\right]\right\rangle + \Sigma\left(\frac{\delta f}{\delta(\nu)}, \frac{\delta h}{\delta(\nu)}\right). \end{aligned} \tag{2.18}$$

De (2.16) y (2.18) tenemos que se cumple (2.17) si

$$\tilde{\omega}_\nu(X_{f\circ\iota}(\nu), X_{g\circ\iota}(\nu)) = -\left\langle \nu, \left[\frac{\delta f}{\delta(\nu)}, \frac{\delta h}{\delta(\nu)}\right]\right\rangle + \Sigma\left(\frac{\delta f}{\delta(\nu)}, \frac{\delta h}{\delta(\nu)}\right). \tag{2.19}$$

donde $X_{f\circ\iota}$ y $X_{g\circ\iota}$ son los campos Hamiltonianos asociados a las funciones $f\circ\iota, h\circ\iota \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}_\mu^{G_\Sigma})$ con respecto al $-\Sigma$ corchete de Lie-Poisson, que por lo visto cuando definimos las $\pm\Sigma$ estructuras de Lie-Poisson se pueden expresar de la siguiente forma:

$$X_{f\circ\iota}(\nu) = ad^*_{\frac{\delta f}{\delta\nu}}\nu - \Sigma\left(\frac{\delta f}{\delta\nu}, .\right) \qquad \nu \in \mathfrak{g}^*.$$

La ecuación (2.19) ya nos da la forma explícita de la forma simpéctica de los espacios reducidos $\bar{\Xi}(G_\Sigma, \mu)$, pero observemos que los campos infinitesimales generados por la acción $\bar{\Xi}$ se pueden expresar de la siguiente forma

$$(\xi, a)^*_{\mathfrak{g}}(\mu) = ad^*_\xi\mu - \Sigma(\xi, .) \qquad (\xi, a) \in \mathfrak{g}_\Sigma,\ \mu \in \mathfrak{g}^*. \tag{2.20}$$

Luego tenemos la siguiente expresión para $\tilde{\omega}$

$$\tilde{\omega}_\nu((\xi, a)_{\mathfrak{g}^*}(\nu), (\eta, b)_{\mathfrak{g}^*}(\nu)) = -\langle \nu, [\xi, \eta]\rangle + \Sigma(\xi, \eta). \tag{2.21}$$

$\square$

3. Aplicaciones a grupos de Lie

En esta sección describiremos las variedades simplécticas obtenidas al aplicar el Teorema 2.4 para distintos grupos de Lie G, y variando el 2-cociclo Σ. Primero comenzamos trabajando con el grupo de Lie de Heisenberg, y grupos nilpotentes construidos a partir de éste, luego desarrollamos ejemplos con grupos de Lie solubles, no nilpotentes. Las elecciones de los 2-cociclos no fueron arbitrarias, principalmente se tuvo en cuenta que el cociclo no fuera trivial, y además en algunos casos consideramos que la holonomía Hamiltoniana (ver definición en [OR3]) no fuera nula, ni cerrada; dado que en [OR3] se prueba que una acción simpléctica admite aplicación momento estándar si y sólo si su holonomía Hamiltoniana es nula, y uno de los principales propósitos del método de reducción óptima es aplicarlo cuando no es posible aplicar la reducción simpléctica de Marsden-Weinstein enunciada en el Teorema 1.10. Por último la condición de que la holonomía Hamiltoniana no sea cerrada, nos garantiza que el espacio reducido no coincida con el obtenido al aplicar reducción simpléctica utilizando una aplicación momento a valores en el cilindro (esta es otra generalización del método de reducción de Marsden-Weinstein, ver [OR3]).

3.1. Grupos de Lie nilpotentes.

Vamos a trabajar con grupos de Lie nilpotentes construidos a partir del grupo de Lie real de Heisenberg de dimensión 3, recordemos su definición.

Llamamos álgebra de Lie real de Heisenberg de dimensión 3 al subálgebra de Lie $\mathfrak{h}_3$ de $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ definida por

$$\mathfrak{h}_3 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & y & x \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Se puede ver que $\mathfrak{h}_3$ está generada por

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y el corchete de Lie está definido por

$$[e_2, e_3] = e_1, \qquad [e_1, e_2] = [e_1, e_3] = 0 \tag{3.1}$$

Observación 3.1. $\mathfrak{h}_3$ es 2-pasos nilpotente.

El grupo de Lie de Heisenberg de dimensión 3 es el único grupo de Lie conexo y simplemente conexo que tiene álgebra de Lie $\mathfrak{h}_3$, lo denotamos H_3.

Se puede ver que H_3 queda caracterizado de la siguiente forma:

$$H_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b & a \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \tag{3.2}$$

donde la operación de grupo es la multiplicación de matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & b & a \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b' & a' \\ 0 & 1 & c' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b+b' & a+a'+bc' \\ 0 & 1 & c+c' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

y el inverso de un elemento del grupo está dado por

$$\begin{pmatrix} 1 & b & a \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -b & -a+bc \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

Veamos cuales son los 2-cociclos no triviales de $\mathfrak{h}_3$ que podemos considerar para aplicar la reducción óptima al fibrado cotangente magnético de $\mathfrak{h}_3$. Para esto, calulemos el segundo grupo de la cohomología de álgebras de Lie de $\mathfrak{h}_3$.
Consideramos la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathfrak{h}_3$, con el corchete de Lie (3.1), y $\{e^1, e^2, e^3\}$ su base dual. Denotaremos $e^{i_1 i_2 \ldots i_k}$ a $e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}$.
Tenemos:

$$de^1 = -e^2 \wedge e^3 = -e^{23}$$

$$de^2 = de^3 = 0$$

luego $Im\, d = \langle \{e^{23}\} \rangle$. Calculemos ahora $Ker\, d$

$$de^{12} = de^1 \wedge e^2 - e^1 \wedge de^2 = 0$$

$$de^{13} = de^1 \wedge e^3 - e^1 \wedge de^3 = 0$$

$$de^{23} = de^2 \wedge e^3 - e^2 \wedge de^3 = 0$$

$Ker\, d = \langle \{e^{12}, e^{13}, e^{23}\} \rangle$. Entonces

$$H^2(\mathfrak{h}_3, \mathbb{R}) = Ker\, d / Im\, d = \langle \{[e^{12}], [e^{13}]\} \rangle \tag{3.5}$$

donde $[\,]$ denota la clase de equivalencia del cociclo correspondiente. Observemos que e^{23} es equivalente al cociclo trivial, i.e. $[e^{23}] = [0]$.

3.1.1. $G = H_3,\ \Sigma = e^{12}$.

Sea $G = H_3$, y tomemos el 2-cociclo $\Sigma = e^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Consideremos la variedad simpléctica (T^*G, ω_Σ) y $\phi : G \times T^*G \longrightarrow T^*G$ el levantamiento de la acción por traslaciones a izquierda de G en G. Vamos a calcular los espacios reducidos óptimos de T^*G asociados a la acción ϕ.

El álgebra de Lie de H_3 es $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_3$, tomamos $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ base de $\mathfrak{g}$ con el corchete de Lie (3.1).

Luego la extensión central de $\mathfrak{g}$ determinada por Σ es $\mathfrak{g}_\Sigma = \mathfrak{h}_3 \oplus_\Sigma \mathbb{R}$ con el corchete

$$[e_2, e_3] = e_1 \qquad [e_1, e_2] = e_4 \tag{3.6}$$

donde $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ es una extensión de la base $\mathcal{B}$. ($\mathfrak{g}_\Sigma$ es 3-pasos nilpotente).

Nuestro objetivo es caracterizar los espacios reducidos óptimos de T^*G aplicando el Teorema 2.4, para esto necesitamos conocer G_Σ y cómo es la acción afín $\bar{\Xi}$ de G_Σ en $\mathfrak{g}^*$. Para caracterizar G_Σ, debemos exponenciar los elementos de $\mathfrak{g}_\Sigma$; tener una representación matricial de $\mathfrak{g}_\Sigma$ simplifica estos cálculos. Tengamos en cuenta el corchete de Lie (3.6) de $\mathfrak{g}_\Sigma$, observemos que

$$\mathfrak{g}_\Sigma = \mathbb{R}e_2 \ltimes \langle \{e_1, e_3, e_4\} \rangle \tag{3.7}$$

donde

$$ad_{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

Teniendo en cuenta (3.7) podemos considerar la siguiente representación fiel de $\mathfrak{g}_\Sigma$:

$$\begin{array}{rccc} \rho : & \mathfrak{g}_\Sigma = \mathfrak{h}_3 \oplus_\Sigma \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(4, \mathbb{R}) \\ & xe_1 + ye_2 + ze_3 + \lambda e_4 & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & y & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & z \\ -y & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \tag{3.9}$$

Sea G_Σ el grupo de Lie simplemente conexo que tiene álgebra de Lie $\mathfrak{g}_\Sigma$. Utilizando la representación (3.9) de $\mathfrak{g}_\Sigma$ exponenciamos:

$$exp \begin{pmatrix} 0 & y & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & z \\ -y & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y & 0 & x + \frac{1}{2}yz \\ 0 & 1 & 0 & z \\ -y & -\frac{1}{2}y^2 & 1 & \lambda - \frac{1}{2}yz - \frac{1}{6}y^2 z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y obtenemos

$$G_\Sigma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & c \\ -b & -\frac{1}{2}b^2 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

con operación de grupo el producto usual de matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & b & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & c \\ -b & -\frac{1}{2}b^2 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b' & 0 & a' \\ 0 & 1 & 0 & c' \\ -b' & -\frac{1}{2}b'^2 & 1 & d' \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & b+b' & 0 & a+a'+bc' \\ 0 & 1 & 0 & c+c' \\ -(b+b') & -\frac{1}{2}(b+b')^2 & 1 & d+d'-ba'-\frac{1}{2}b^2c' \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora podemos calcular fácilmente la acción Adjunta de G_Σ en $\mathfrak{g}_\Sigma$

$$\begin{pmatrix} 1 & b & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & c \\ -b & -\frac{1}{2}b^2 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & y & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & z \\ -y & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & c \\ -b & -\frac{1}{2}b^2 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & y & 0 & x-cy+bz \\ 0 & 0 & 0 & z \\ -y & 0 & 0 & \lambda-bx+ay-\frac{1}{2}b^2z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para simplificar la notación identificamos G_Σ con $(\mathbb{R}^4, *)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & b & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & c \\ -b & -\frac{1}{2}b^2 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow (a,b,c,d)$$

donde

$$(a,b,c,d)*(a',b',c',d) = (a+a'+bc', b+b', c+c', d+d'-ba'-\frac{1}{2}b^2c').$$

Entonces la acción adjunta se puede expresar de la siguiente forma:

$$Ad_{(a,b,c,d)}(x,y,z,\lambda) = (x-cy+bz, y, z, \lambda-bx+ay-\frac{1}{2}b^2z)$$

donde $(a,b,c,d) \in G_\Sigma$ y $(x,y,z,\lambda) \in \mathfrak{g}_\Sigma$.

Si tenemos en cuenta la proposición (2.2)i) entonces tenemos

$$\mu_\Sigma : G_\Sigma \longrightarrow \mathfrak{g}^*$$
$$\mu_\Sigma(a,b,c,d) = (-b, a, -\frac{1}{2}b^2).$$

Entonces para todo $\nu = (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathfrak{g}^*$ la órbita de la acción afín Ξ de G_Σ en $\mathfrak{g}^*$ es:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}_{\nu}^{G_\Sigma} &= \Xi(G_\Sigma, \nu) = \{Ad^*_{\pi_G(a,b,c,d)^{-1}}\nu + \mu_\Sigma(a,b,c,d) : (a,b,c,d) \in G_\Sigma\} \\
&= \{(\alpha, \beta - c\alpha, \gamma + b\alpha) + (-b, a, -\frac{1}{2}b^2) : (a,b,c,d) \in G_\Sigma\} \\
&= \{(\alpha - b, \beta - c\alpha + a, \gamma + b\alpha - \frac{1}{2}b^2) : (a,b,c,d) \in G_\Sigma\} \\
&= (\alpha, \beta, \gamma) + \langle\{(0,1,0)\}\rangle + \{(-b, 0, b\alpha - \frac{1}{2}b^2)\}_{b\in\mathbb{R}}
\end{aligned}
$$

3.1.2. $G = H_3$, $\Sigma = e^{13}$.

Sea $G = H_3$, y tomemos el 2-cociclo $\Sigma = e^{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3.1.3. $G = H_3$, $\Sigma = e^{23}$.

En este caso, al elegir un 2-cociclo equivalente al trivial el espacio reducido obtenido es el mismo que se obtiene al aplicar la reducción al fibrado cotangente usual del grupo, es decir, sin tener en cuenta el término magnético. Por lo tanto, teniendo en cuenta el Teorema 2.4, los espacios reducidos óptimos obtenidos son las órbitas de la acción afín $\bar{\Xi}$ de G_Σ en $\mathfrak{g}^*$, las cuales al tomar Σ un 2-cociclo trivial se reducen a la órbitas coadjuntas de $G = H_3$.
Recordemos como son las órbitas de la acción coadjunta de H_3 en $\mathfrak{h}_3^*$. Sea $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathfrak{h}_3^*$, entonces

- si $\alpha \neq 0$ tenemos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}^{H_3}_{(\alpha,\beta,\gamma)} &= \{Ad^*_{(a,b,c)^{-1}}(\alpha,\beta,\gamma) :\ (a,b,c) \in H_3\} \\
&= \{(\alpha, -c\alpha + \beta, b\alpha + \gamma) :\ (a,b,c) \in H_3\} \\
&= \{(\alpha, -c\alpha + \beta, b\alpha + \gamma) :\ b, c \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(\alpha,\beta,\gamma) - c(0,\alpha,0) + b(0,0,\alpha) :\ b, c \in \mathbb{R}\};
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

- si $\alpha = 0$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}^{H_3}_{(0,\beta,\gamma)} &= \{Ad^*_{(a,b,c)^{-1}}(0,\beta,\gamma) :\ (a,b,c) \in H_3\} \\
&= \{(0,\beta,\gamma) :\ (a,b,c) \in H_3\} \\
&= \{(0,\beta,\gamma)\};
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

donde hemos identificado en forma natural H_3 y $\mathfrak{h}_3^*$ con $\mathbb{R}^3$ (análogo a lo que hicimos en la sección (3.1.1)):

$$
\begin{pmatrix} 1 & b & a \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow (a,b,c)
\tag{3.12}
$$

$$
\begin{pmatrix} 0 & y & x \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow (x, y, z) \tag{3.13}
$$

Por lo tanto las órbitas coadjuntas de H_3 son planos y un punto.

Hasta acá hemos trabajado con el grupo de Lie de Heisenberg, ahora trabajaremos con otros grupos construidos a partir de éste: $H_3 \times S^1$ y $H_3 \times T^2$.

Las próximas cuatro aplicaciones del método de reducción óptima serán al fibrado cotangente del grupo de Lie $G = H_3 \times S^1$, cuya álgebra de Lie es $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}$. Al igual que hicimos con $\mathfrak{h}_3$ debemos calcular el segundo grupo de cohomología de álgebras de Lie de $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}$.
Tomemos $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ base de $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}$, con corchete de Lie:

$$[e_2, e_3] = e_1$$

y $\{e^1, e^2, e^3, e^4\}$ su base dual, tenemos:

$$
\begin{aligned}
de^1 &= -e^2 \wedge e^3 = -e^{23}, \\
de^2 &= de^3 = de^4 = 0.
\end{aligned}
$$

Recordemos que $e^{i_1 i_2 \ldots i_k}$ denota $e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}$.
Luego $Im\, d = \langle \{e^{23}\} \rangle$. Calculemos ahora $Ker\, d$

$$
\begin{aligned}
de^{12} &= de^1 \wedge e^2 - e^1 \wedge de^2 = 0 \\
de^{13} &= de^1 \wedge e^3 - e^1 \wedge de^3 = 0 \\
de^{14} &= de^1 \wedge e^4 - e^1 \wedge de^4 = -e^2 \wedge e^3 \wedge e^4 = -e^{234} \\
de^{23} &= de^2 \wedge e^3 - e^2 \wedge de^3 = 0 \\
de^{24} &= de^2 \wedge e^4 - e^2 \wedge de^4 = 0 \\
de^{34} &= de^3 \wedge e^4 - e^3 \wedge de^4 = 0
\end{aligned}
$$

$Ker\, d = \langle \{e^{12}, e^{13}, e^{23}, e^{24}, e^{34}\} \rangle$. Entonces

$$
H^2(\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}, \mathbb{R}) = Ker\, d / Im\, d = \langle \{[e^{12}], [e^{13}], [e^{24}], [e^{34}]\} \rangle \tag{3.14}
$$

donde $[\,]$ denota la clase de equivalencia del cociclo correspondiente.

Observación 3.2. Si consideramos los cociclos e^{12}, e^{13} o e^{23} para aplicar la reducción óptima al fibrado cotangente magnético del grupo de Lie $H_3 \times S^1$, los espacios reducidos óptimos obtenidos son análogos a los obtenidos para estos mismos cociclos y el grupo de Lie H_3, ver las secciones (3.1.1), (3.1.2) y (3.1.3). Los cálculos son los mismos debido a que el álgebra de Lie de S^1 está en el núcleo de la aplicación $\tilde{\Sigma} : \mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R} \to (\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R})^*$, $x \mapsto \Sigma(x, \cdot\,)$, para $\Sigma = e^{12}, e^{13}, e^{23}$. Por lo tanto, para el grupo $H_3 \times S^1$ resulta más interesante considerar los cociclos e^{24} y e^{34}, donde S^1 no pertenece al núcleo de la aplicación $\tilde{\Sigma}$. Además analizaremos el caso cuando los cociclos son combinación de estos dos diferentes grupos, los que tienen a S^1 como parte del núcleo de $\tilde{\Sigma}$ y los que no.

3.1.4. $G = H_3 \times S^1$, $\Sigma = e^{24}$.

Consideramos el 2-cociclo $\Sigma = e^{24} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

En este caso tenemos $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}$ y resulta $\mathfrak{g}_\Sigma := \mathfrak{g} \oplus_\Sigma \mathbb{R} = (\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}) \oplus_\Sigma \mathbb{R}$ con el siguiente corchete de Lie:

$$[e_2, e_3] = e_1$$
$$[e_2, e_4] = e_5$$

donde tomamos $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ base de $\mathfrak{g}_\Sigma := (\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}) \oplus_\Sigma \mathbb{R}$, con $\{\pi_\mathfrak{g}(e_1), \pi_\mathfrak{g}(e_2), \pi_\mathfrak{g}(e_3), \pi_\mathfrak{g}(e_4)\}$ base de $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}$ ($\pi_\mathfrak{g} : \mathfrak{g}_\Sigma \longrightarrow \mathfrak{g}$ proyección canónica).

Observación 3.3. $\mathfrak{g}_\Sigma$ resulta 2-pasos nilpotente.

Se puede ver que

$$\mathfrak{g}_\Sigma = \mathbb{R}e_2 \ltimes \langle \{e_1, e_3, e_4, e_5\} \rangle \tag{3.15}$$

donde

$$ad_{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta (3.15) podemos considerar la siguiente representación fiel de $\mathfrak{g}_\Sigma$ para simplificar los cálculos:

$$\begin{array}{cccc} \rho : & \mathfrak{g}_\Sigma = (\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}) \oplus_\Sigma \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(5, \mathbb{R}) \\ & xe_1 + ye_2 + ze_3 + ve_4 + we_5 & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & y & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & y & 0 & w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \tag{3.16}$$

Sea G_Σ el grupo de Lie simplemente conexo que tiene álgebra de Lie $\mathfrak{g}_\Sigma$. Utilizando la representación (3.16) de $\mathfrak{g}_\Sigma$ exponenciamos:

$$exp \begin{pmatrix} 0 & y & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & y & 0 & w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y & 0 & 0 & x + \frac{1}{2}yz \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & v \\ 0 & 0 & y & 1 & w + \frac{1}{2}yv \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y obtenemos

$$G_\Sigma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & b & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \right\}$$

con operación de grupo el producto usual de matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & b & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & b & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b' & 0 & 0 & a' \\ 0 & 1 & 0 & 0 & c' \\ 0 & 0 & 1 & 0 & d' \\ 0 & 0 & b' & 1 & e' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b+b' & 0 & 0 & a+a'+bc' \\ 0 & 1 & 0 & 0 & c+c' \\ 0 & 0 & 1 & 0 & d+d' \\ 0 & 0 & b+b' & 1 & e+e'+bd' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Utilizando la representación matricial, es sencillo calcular la acción adjunta de G_Σ en $\mathfrak{g}_\Sigma$, pues G_Σ actúa por conjugación:
(3.17)

$$\begin{pmatrix} 1 & b & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & b & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & y & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & y & 0 & w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & b & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & y & 0 & 0 & x+bz-cy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & y & 0 & w+bv-dy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos simplificar la notación identificando G_Σ con $(\mathbb{R}^5, *)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & b & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & b & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow (a, b, c, d, e)$$

donde

$$(a, b, c, d, e) * (a', b', c', d', e') = (a + a' + bc', b + b', c + c', d + d', e + e' + bd').$$

Luego de (3.17) tenemos

$$Ad_{(a,b,c,d,e)}(x, y, z, v, w) = (x + bz - cy, y, z, v, w + bv - dy)$$

Si tenemos en cuenta la Proposición (2.2)i) entonces tenemos

$$\mu_\Sigma : G_\Sigma \longrightarrow \mathfrak{g}^*$$
$$\mu_\Sigma(a, b, c, d, e) = (0, -d, 0, b).$$

Las órbitas de la acción afín Ξ de G_Σ en $\mathfrak{g}^*$ son de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}^{G_\Sigma}_{(\alpha,\beta,\gamma,\delta)} &= \{Ad^*_{\pi_G(a,b,c,d,e)^{-1}}(\alpha,\beta,\gamma,\delta) + \mu_\Sigma(a,b,c,d,e) : (a,b,c,d,e) \in G_\Sigma\} \\
&= \{(\alpha, \beta - c\alpha, \gamma + b\alpha, \delta) + (0,-d,0,b) : (a,b,c,d,e) \in G_\Sigma\} \\
&= \{(\alpha, \beta - c\alpha - d, \gamma + b\alpha, \delta + b) : (a,b,c,d,e) \in G_\Sigma\} \\
&= (\alpha,\beta,\gamma,\delta) + \langle\{(0,1,0,0),(0,0,\alpha,1)\}\rangle
\end{aligned}$$

para $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathfrak{g}^* = \mathfrak{h}_3^* \oplus \mathbb{R}$.
Otra forma de ver las órbitas de la acción afín Ξ es pensar en $\mathcal{O}^{G_\Sigma}_{(\alpha,\beta,\gamma,\delta)} \simeq G_\Sigma / G_{\Sigma(\alpha,\beta,\gamma,\delta)}$.
Entonces calculemos el subgrupo de isotropía en $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathfrak{g}^* = \mathfrak{h}_3^* \oplus \mathbb{R}$

$$(a,b,c,d,e) \in G_{\Sigma(\alpha,\beta,\gamma,\delta)} \;\Leftrightarrow\; \left\{ \begin{array}{c} \beta - c\alpha - d = \beta \\ \gamma + b\alpha = \gamma \\ \delta + b = \delta \end{array} \right\} \;\Leftrightarrow\; b = 0 \,\wedge\, d = -c\alpha$$

Luego $G_{\Sigma(\alpha,\beta,\gamma,\delta)} = \{(a,0,c,-c\alpha,e) : a,c,e \in \mathbb{R}\}$.

En el cociente $G_\Sigma / G_{\Sigma(\alpha,\beta,\gamma,\delta)}$ dos elementos arbitrarios $(a,b,c,d,e),(a',b',c',d',e') \in G_\Sigma$ pertenecen a la misma clase de equivalencia si y sólo si $\left\{ \begin{array}{c} b - b' = 0 \\ d - d' = (c-c')\alpha \end{array} \right\}$.
Entonces $(a,b,c,d,e) \sim (0,b,0,d-c\alpha,0)$ para todo $(a,b,c,d,e) \in G_\Sigma$, o sea para todo $a,b,c,d,e \in \mathbb{R}$. Si elegimos para cada clase de equivalencia un representante de la forma $(0,b,0,d-,0)$, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{(\alpha,\beta,\gamma,\delta)} \simeq G_\Sigma / G_{\Sigma(\alpha,\beta,\gamma,\delta)} &= \{[[(0,b,0,d,0)]] : b,d \in \mathbb{R}\} \\
&= \left\{ \left[\left[\begin{array}{ccccc} 1 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]\right] : b,d \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

donde$[[g]]$, $g \in G_\Sigma$, representa la clase de equivalencia de g en el cociente $G_\Sigma / G_{\Sigma(\alpha,\beta,\gamma,\delta)}$.

Utilizando la identificación (3.1.4) de G_Σ y la operación $*$ definida en la ecuación (3.1.4) es sencillo ver que $G_{\Sigma(\alpha,\beta,\gamma,\delta)}$ es subgrupo normal de G_Σ, por lo tanto $G_\Sigma / G_{\Sigma(\alpha,\beta,\gamma,\delta)}$ tiene estructura de grupo, veamos que el cociente resulta isomorfo a $(\mathbb{R}^2,+)$.

$$[[(0,b,0,d,0)]]*[[(0,b',0,d',0)]] = [[(0,b,0,d,0)*(0,b',0,d',0)]] = [[(0,b+b',0,d+d',bd')]]$$

y por lo visto antes, de la clase de equivalencia $[[(0,b+b',0,d+d',bd')]]$ podemos elegir como representante al elemento $(0,b+b',0,d+d',0)$. Entonces

$$[[(0,b,0,d,0)]]*[[(0,b',0,d',0)]] = [[(0,b+b',0,d+d',0)]]$$

Luego $G_\Sigma / G_{\Sigma(\alpha,\beta,\gamma,\delta)}$ resulta isomorfo a $(\mathbb{R}^2,+)$.

3.1.5. $G = H_3 \times S^1,\ \Sigma = -e^{34}$.

Consideramos el 2-cociclo $\Sigma = -e^{34} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

En este caso tenemos $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}$ y $\mathfrak{g}_\Sigma := \mathfrak{g} \oplus_\Sigma \mathbb{R} = (\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}) \oplus_\Sigma \mathbb{R}$ con el siguiente corchete de Lie

$$[e_2, e_3] = e_1$$

$$[e_3, e_4] = e_5$$

$\mathfrak{g}_\Sigma$ resulta 2-pasos nilpotente.

Se puede ver que $\mathfrak{g}_\Sigma = \mathbb{R}e_3 \ltimes_{ad} \langle\{e_1, e_2, e_4, e_5\}\rangle$ donde

$$ad_{e_3} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para simplificar los cálculos consideremos la siguiente representación fiel de $\mathfrak{g}_\Sigma$:

$$\begin{array}{cccc} \rho: & \mathfrak{g}_\Sigma = (\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}) \oplus_\Sigma \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(5, \mathbb{R}) \\ & xe_1 + ye_2 + ze_3 + ve_4 + we_5 & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & -z & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & z & 0 & w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Sea G_Σ el grupo de Lie simplemente conexo que tiene álgebra de Lie $\mathfrak{g}_\Sigma$. Utilizando la representación ρ de $\mathfrak{g}_\Sigma$ exponenciamos

$$exp \begin{pmatrix} 0 & -z & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & z & 0 & w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -z & 0 & 0 & x - \frac{1}{2}zy \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 & v \\ 0 & 0 & z & 1 & w + \frac{1}{2}zv \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y obtenemos

$$G_\Sigma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -c & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & c & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \right\} \tag{3.18}$$

con operación de grupo el producto usual de matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & -c & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & c & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -c' & 0 & 0 & a' \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b' \\ 0 & 0 & 1 & 0 & d' \\ 0 & 0 & c' & 1 & e' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -c-c' & 0 & 0 & a+a'-cb' \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b+b' \\ 0 & 0 & 1 & 0 & d+d' \\ 0 & 0 & c+c' & 1 & e+e'+cd' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos simplificar la notación identificando G_Σ con $(\mathbb{R}^5, *)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -c & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & c & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow (a, b, c, d, e) \tag{3.19}$$

donde

$$(a, b, c, d, e) * (a', b', c', d', e') = (a + a' - cb', b + b', c + c', d + d', e + e' + cd'). \tag{3.20}$$

Ahora podemos calcular fácilmente la acción Adjunta de G_Σ en $\mathfrak{g}_\Sigma$:

$$Ad_{(a,b,c,d,e)}(x, y, z, v, w) = (x + bz - cy, y, z, v, w + cv - dz).$$

Si tenemos en cuenta la Proposición (2.2)i) entonces tenemos

$$\mu_\Sigma : G_\Sigma \longrightarrow \mathfrak{g}^*$$
$$\mu_\Sigma(a, b, c, d, e) = (0, 0, -d, c).$$

Las órbitas de la acción afín Ξ de G_Σ en $\mathfrak{g}^*$ son de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^{G_\Sigma}_{(\alpha,\beta,\gamma,\delta)} &= \{Ad^*_{\pi_G(a,b,c,d,e)^{-1}}\nu + \mu_\Sigma(a, b, c, d, e) : (a, b, c, d, e) \in G_\Sigma\} \\ &= \{(\alpha, \beta - c\alpha, \gamma + b\alpha, \delta) + (0, 0, -d, c) : (a, b, c, d, e) \in G_\Sigma\} \\ &= \{(\alpha, \beta - c\alpha, \gamma + b\alpha - d, \delta + c) : (a, b, c, d, e) \in G_\Sigma\} \\ &= (\alpha, \beta, \gamma, \delta) + span\{(0, \alpha, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\} \end{aligned}$$

para $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathfrak{g}^* = \mathfrak{h}_3^* \oplus \mathbb{R}$.

Ahora pensemos las órbitas de otra forma, $\mathcal{O}^{G_\Sigma}_{(\alpha,\beta,\gamma,\delta)} \simeq G_\Sigma / G_{\Sigma(\alpha,\beta,\gamma,\delta)}$. Entonces necesitamos calcular el subgrupo de isotropía en $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathfrak{g}^* = \mathfrak{h}_3^* \oplus \mathbb{R}$

$$(a, b, c, d, e) \in G_{\Sigma(\alpha,\beta,\gamma,\delta)} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \beta - c\alpha = \beta \\ \gamma + b\alpha - d = \gamma \\ \delta + c = \delta \end{array} \right\} \Leftrightarrow c = 0 \wedge d = b\alpha$$

Luego $G_{\Sigma(\alpha,\beta,\gamma,\delta)} = \{(a,b,0,b\alpha,e) \in G_\Sigma\}$.

En el cociente $G_\Sigma/G_{\Sigma(\alpha,\beta,\gamma,\delta)}$ dos elementos arbitrarios $(a,b,c,d,e), (a',b',c',d',e') \in G_\Sigma$ pertenecen a la misma clase de equivalencia si y sólo si $\left\{ \begin{array}{c} c - c' = 0 \\ d - d' = (b-b')\alpha \end{array} \right\}$.
Entonces $(a,b,c,d,e) \sim (0,0,c,d-b\alpha,0)$ para todo $(a,b,c,d,e) \in G_\Sigma$, o sea para todo $a,b,c,d,e \in \mathbb{R}$. Si elegimos para cada clase de equivalencia un representante de la forma $(0,0,c,d-b\alpha,0)$, tenemos

$$\begin{aligned} G_\Sigma/G_{\Sigma(\alpha,\beta,\gamma,\delta)} &= \{ [\![(0,0,c,d-b\alpha,0)]\!] \colon c,d \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ \left[\!\!\left[\begin{array}{ccccc} 1 & -c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]\!\!\right] : c,d \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

donde $[\![\, g \,]\!]$, $g \in G_\Sigma$, representa la clase de equivalencia de g con respecto al cociente $G_\Sigma/G_{\Sigma(\alpha,\beta,\gamma,\delta)}$.

Utilizando la identificación (3.19) de G_Σ y la operación $*$ definida en la ecuación (3.20) es sencillo ver que $G_{\Sigma(\alpha,\beta,\gamma,\delta)}$ es subgrupo normal de G_Σ, por lo tanto $G_\Sigma/G_{\Sigma(\alpha,\beta,\gamma,\delta)}$ tiene estructura de grupo, veamos que el cociente resulta isomorfo a $(\mathbb{R}^2, +)$.

$$[\![(0,0,c,d,0)]\!] * [\![(0,0,c',d',0)]\!] = [\![(0,0,c,d,0) * (0,0,c',d',0)]\!] = [\![(0,0,c+c',d+d',cd')]\!]$$

y por lo visto antes, de la clase de equivalencia $[\![\,(0,b+b',0,d+d',cd')\,]\!]$ podemos elegir como representante al elemento $(0,0,c+c',d+d',0)$. Entonces

$$[\![(0,0,c,d,0)]\!] * [\![(0,0,c',d',0)]\!] = [\![(0,0,c+c',d+d',0)]\!]$$

Luego $G_\Sigma/G_{\Sigma(\alpha,\beta,\gamma,\delta)}$ resulta isomorfo a $(\mathbb{R}^2, +)$.

3.1.6. $G = H_3 \times S^1$, $\Sigma = -e^{13} - e^{24}$.

Consideramos $\Sigma = -e^{13} - e^{24} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

En este caso tenemos $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}$ y resulta $\mathfrak{g}_\Sigma := \mathfrak{g} \oplus_\Sigma \mathbb{R} = (\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}) \oplus_\Sigma \mathbb{R}$ con el siguiente corchete de Lie:

$$[e_2, e_3] = e_1$$
$$[e_1, e_3] = e_5$$
$$[e_2, e_4] = e_5$$

donde tomamos $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ base de $\mathfrak{g}_\Sigma := (\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}) \oplus_\Sigma \mathbb{R}$, con $\{\pi_\mathfrak{g}(e_1), \pi_\mathfrak{g}(e_2), \pi_\mathfrak{g}(e_3), \pi_\mathfrak{g}(e_4)\}$ base de $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}$ ($\pi_\mathfrak{g} : \mathfrak{g}_\Sigma \longrightarrow \mathfrak{g}$ proyección canónica).

Observación 3.4. $\mathfrak{g}_\Sigma$ resulta 3-pasos nilpotente.

Esta vez $\mathfrak{g}_\Sigma$ no resulta un producto semidirecto como en las aplicaciones anteriores, pero pudimos encontrar la siguiente representación fiel de $\mathfrak{g}_\Sigma$:

$$\begin{array}{cccc} \rho : & \mathfrak{g}_\Sigma = (\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}) \oplus_\Sigma \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(4, \mathbb{R}) \\ & xe_1 + ye_2 + ze_3 + ve_4 + we_5 & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & x & y & w \\ 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & z & 0 & v \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \tag{3.21}$$

Utilizando la representación (3.16) de $\mathfrak{g}_\Sigma$ exponenciamos y obtenemos la siguiente caracterización de G_Σ:

$$G_\Sigma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b & e \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & c & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \right\} \tag{3.22}$$

con operación de grupo el producto usual de matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b & e \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & c & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a' & b' & e' \\ 0 & 1 & 0 & c' \\ 0 & c' & 1 & d' \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a + a' + bc' & b + b' & e + e' + ac' + bd' \\ 0 & 1 & 0 & c + c' \\ 0 & c + c' & 1 & d + d' + cc' \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

Podemos simplificar la notación identificando G_Σ con $(\mathbb{R}^5, *)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b & e \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & c & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow (a, b, c, d, e) \tag{3.24}$$

donde

$$(a, b, c, d, e) * (a', b', c', d', e') = (a + a' + bc', b + b', c + c', d + d' + cc', e + e' + bd' + ac'). \tag{3.25}$$

Luego tenemos

$$Ad_{(a,b,c,d,e)}(x, y, z, v, w) = (x + bz - cy, y, z, v, w - cx - dy + c^2 y + az - cbz + bv) \tag{3.26}$$

De la Proposición (2.2)i) sabemos que:

$$Ad_{(a,b,c,d,e)}(x, y, z, v, w) = (Ad_{\Pi_G(a,b,c,d,e)}(x, y, z, v), w + \langle \mu_\Sigma(a, b, c, d, e), (x, y, z, v)\rangle)$$

Entonces:

$$\mu_\Sigma : G_\Sigma \longrightarrow \mathfrak{g}^* = \mathfrak{h}_3^* \oplus \mathbb{R}$$
$$\mu_\Sigma(a, b, c, d, e) = (-c, -d + c^2, a - cb, b).$$

Las órbitas de la acción afín Ξ de G_Σ en $\mathfrak{g}^*$ son de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}^{G_\Sigma}_{(\alpha,\beta,\gamma,\delta)} &= \{Ad^*_{\pi_G(a,b,c,d,e)^{-1}}(\alpha,\beta,\gamma,\delta)+\mu_\Sigma(a,b,c,d,e):(a,b,c,d,e)\in G_\Sigma\}\\ &= \{(\alpha,\beta+b\alpha,\gamma-c\alpha,\delta)+(-c,-d+c^2,a-cb,b):(a,b,c,d,e)\in G_\Sigma\}\\ &= \{(\alpha-c,\beta+b\alpha-d+c^2,\gamma-c\alpha+a-cb,\delta+b):(a,b,c,d,e)\in G_\Sigma\}\\ &= (\alpha,\beta,\gamma,\delta)+\langle\{(1,0,\alpha,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,\alpha,0,1)\}\rangle\end{aligned}$$

para $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathfrak{g}^*=\mathfrak{h}_3^*\oplus\mathbb{R}$.
Los espacios reducidos resultan difeomorfos a $\mathbb{R}^4$.
Otra forma de ver las órbitas de la acción afín Ξ es pensar en $\mathcal{O}^{G_\Sigma}_{(\alpha,\beta,\gamma,\delta)}\simeq G_\Sigma/G_{\Sigma(\alpha,\beta,\gamma,\delta)}$.
Entonces calculemos el subgrupo de isotropía en $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathfrak{g}^*=\mathfrak{h}_3^*\oplus\mathbb{R}$

$$(a,b,c,d,e)\in G_{\Sigma(\alpha,\beta,\gamma,\delta)} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\alpha-c=\alpha\\ \beta+b\alpha-d+c^2=\beta\gamma-c\alpha+a-cb=\gamma\\ \delta+b=\delta\end{array}\right\} \Leftrightarrow a=b=c=d=0$$

Luego $G_{\Sigma(\alpha,\beta,\gamma,\delta)}=\{(0,0,0,0,e):e\in\mathbb{R}\}$, que es subgrupo normal de G_Σ.
Entonces tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{(\alpha,\beta,\gamma,\delta)}\simeq G_\Sigma/G_{\Sigma(\alpha,\beta,\gamma,\delta)} &= \{[\![a,b,c,d,e]\!]:a,b,c,d,e\in\mathbb{R}\}/\{(0,0,0,0,e):e\in\mathbb{R}\}\\ &= \{[\![a,b,c,d,0]\!]:a,b,c,d\in\mathbb{R}\}\\ &= \left\{\left[\!\!\left[\begin{array}{cccc}1&a&b&0\\0&1&0&c\\0&c&1&d\\0&0&0&1\end{array}\right]\!\!\right]:a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}\end{aligned}$$

donde $[\![\,g\,]\!]$, $g\in G_\Sigma$, representa la clase de equivalencia de g con respecto al cociente $G_\Sigma/G_{\Sigma(\alpha,\beta,\gamma,\delta)}$.

3.1.7. $G=H_3\times S^1,\ \Sigma=-e^{13}-e^{34}.$

Consideramos $\Sigma=-e^{13}-e^{34}=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$

En este caso tenemos $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}_3\oplus\mathbb{R}$ y resulta $\mathfrak{g}_\Sigma:=\mathfrak{g}\oplus_\Sigma\mathbb{R}=(\mathfrak{h}_3\oplus\mathbb{R})\oplus_\Sigma\mathbb{R}$ con el siguiente corchete de Lie:

$$\begin{aligned}[][e_2,e_3]&=e_1\\ [e_1,e_3]&=e_5\\ [e_3,e_4]&=e_5\end{aligned}$$

donde tomamos $\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$ base de $\mathfrak{g}_\Sigma:=(\mathfrak{h}_3\oplus\mathbb{R})\oplus_\Sigma\mathbb{R}$, con $\{\pi_\mathfrak{g}(e_1),\pi_\mathfrak{g}(e_2),\pi_\mathfrak{g}(e_3),\pi_\mathfrak{g}(e_4)\}$ base de $\mathfrak{h}_3\oplus\mathbb{R}$ ($\pi_\mathfrak{g}:\mathfrak{g}_\Sigma\longrightarrow\mathfrak{g}$ proyección canónica).

Observación 3.5. $\mathfrak{g}_\Sigma$ resulta 3-pasos nilpotente.

Observemos que $\mathfrak{g}_\Sigma = \mathbb{R}e_3 \ltimes_{ad} \langle\{e_1, e_2, e_4, e_5\}\rangle$ donde

$$ad_{e_3} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Utilizaremos la siguiente representación matricial de $\mathfrak{g}_\Sigma$:

$$\begin{array}{cccc} \rho: & \mathfrak{g}_\Sigma = (\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}) \oplus_\Sigma \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(5, \mathbb{R}) \\ & xe_1 + ye_2 + ze_3 + ve_4 + we_5 & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & -z & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \\ -z & 0 & z & 0 & w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \tag{3.27}$$

Exponenciamos y obtenemos la siguiente caracterización de G_Σ:

$$G_\Sigma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -c & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ -c & -\frac{1}{2}c^2 & c & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \right\} \tag{3.28}$$

con operación de grupo el producto usual de matrices.

Podemos simplificar la notación identificando G_Σ con $(\mathbb{R}^5, *)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -c & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ -c & -\frac{1}{2}c^2 & c & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow (a, b, c, d, e) \tag{3.29}$$

donde

$$(a, b, c, d, e)*(a', b', c', d', e') = (a+a'-cb', b+b', c+c', d+d', e+e'-ca'-\frac{1}{2}c^2b'+cd'). \tag{3.30}$$

Luego tenemos

$$Ad_{(a,b,c,d,e)}(x, y, z, v, w) = (x + bz - cy, y, z, v, w + az - dz - cx - \frac{1}{2}c^2y + cv) \tag{3.31}$$

De la proposición (2.2)i) sabemos que:

$$Ad_{(a,b,c,d,e)}(x, y, z, v, w) = (Ad_{\Pi_G(a,b,c,d,e)}(x, y, z, v), w + \langle \mu_\Sigma(a, b, c, d, e), (x, y, z, v)\rangle)$$

Entonces:

$$\mu_\Sigma : G_\Sigma \longrightarrow \mathfrak{g}^* = \mathfrak{h}_3^* \oplus \mathbb{R}$$

$$\mu_\Sigma(a,b,c,d,e) = (-c, -\frac{1}{2}c^2, a-d, c).$$

Las órbitas de la acción afín Ξ de G_Σ en $\mathfrak{g}^*$ son de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}^{G_\Sigma}_{(\alpha,\beta,\gamma,\delta)} &= \{Ad^*_{\pi_G(a,b,c,d,e)^{-1}}(\alpha,\beta,\gamma,\delta) + \mu_\Sigma(a,b,c,d,e) : (a,b,c,d,e) \in G_\Sigma\} \\
&= \{(\alpha, \beta + b\alpha, \gamma - c\alpha, \delta) + (-c, -\frac{1}{2}c^2, a-d, c) : (a,b,c,d,e) \in G_\Sigma\} \\
&= \{(\alpha - c, \beta + b\alpha - \frac{1}{2}c^2, \gamma - c\alpha + a - d, \delta + c) : a,b,c,d \in G_\Sigma\}
\end{aligned}$$

para $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathfrak{g}^* = \mathfrak{h}_3^* \oplus \mathbb{R}$.
Observemos que para todo $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathfrak{g}^*$ se puede tomar un elemento de la forma $(0,\beta',\gamma',\delta') \in \mathcal{O}^{G_\Sigma}_{(\alpha,\beta,\gamma,\delta)}$, entonces, podemos concentrarnos en las órbitas $\mathcal{O}^{G_\Sigma}_{(0,\beta,\gamma,\delta)}$ y estaríamos abarcando todas las órbitas.

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}^{G_\Sigma}_{(0,\beta,\gamma,\delta)} &= \{(-c, \beta - \frac{1}{2}c^2, \gamma + a - d, \delta + c) : a,b,c,d \in G_\Sigma\} \\
&= (0,\beta,\gamma,\delta) + \langle\{(0,0,1,0)\}\rangle + \{(-c, -\frac{1}{2}c^2, 0, c) : c \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

Otra forma de ver estas órbitas de la acción afín Ξ es pensar en $\mathcal{O}^{G_\Sigma}_{(0,\beta,\gamma,\delta)} \simeq G_\Sigma / G_{\Sigma(0,\beta,\gamma,\delta)}$.
Entonces calculemos el subgrupo de isotropía en $(0,\beta,\gamma,\delta) \in \mathfrak{g}^* = \mathfrak{h}_3^* \oplus \mathbb{R}$

$$(a,b,c,d,e) \in G_{\Sigma(0,\beta,\gamma,\delta)} \;\Leftrightarrow\; \left\{ \begin{array}{c} c = 0 \\ a = d \end{array} \right\}$$

Luego $G_{\Sigma(0,\beta,\gamma,\delta)} = \{(a,b,0,a,e) : a,b,e \in \mathbb{R}\}$.
En el cociente $G_\Sigma / G_{\Sigma(0,\beta,\gamma,\delta)}$ dos elementos arbitrarios $(a,b,c,d,e), (a',b',c',d',e') \in G_\Sigma$ pertenecen a la misma clase de equivalencia si y sólo si $\left\{ \begin{array}{c} c - c' = 0 \\ a - a' = d - d' \end{array} \right\}$.
Entonces $(a,b,c,d,e) \sim (0,0,c,d-a,0)$ para todo $(a,b,c,d,e) \in G_\Sigma$, o sea para todo $a,b,c,d,e \in \mathbb{R}$. Si elegimos para cada clase de equivalencia un representante de la forma $(0,0,c,d,0)$, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{(0,\beta,\gamma,\delta)} \simeq G_\Sigma / G_{\Sigma(\alpha,\beta,\gamma,\delta)} & \\
&= \{[\![(0,0,c,d,0)]\!] : c,d \in \mathbb{R}\} \\
&= \left\{ \left[\!\!\left[\begin{array}{ccccc} 1 & -c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ -c & -\frac{1}{2}c^2 & c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]\!\!\right] : a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

donde $[\![\, g\,]\!]$, $g \in G_\Sigma$, representa la clase de equivalencia de g con respecto al cociente $G_\Sigma / G_{\Sigma(\alpha,\beta,\gamma,\delta)}$.

Utilizando la identificación (3.29) de G_Σ y la operación $*$ definida en la ecuación (3.30) es sencillo ver que $G_{\Sigma(0,\beta,\gamma,\delta)}$ es subgrupo normal de G_Σ, por lo tanto $G_\Sigma/G_{\Sigma(0,\beta,\gamma,\delta)}$ tiene estructura de grupo, veamos que el cociente resulta isomorfo a $(\mathbb{R}^2,+)$.

$$[[(0,0,c,d,0)]]*[[(0,0,c',d',0)]]=[[(0,0,c,d,0)*(0,0,c',d',0)]]=[[(0,0,c+c',d+d',cd')]]$$

y por lo visto antes, de la clase de equivalencia $[[\,(0,0,c+c',d+d',cd')\,]]$ podemos elegir como representante al elemento $(0,0,c+c',d+d',0)$. Entonces

$$[[(0,0,c,d,0)]]*[[(0,0,c',d',0)]]=[[(0,0,c+c',d+d',0)]]$$

Luego $G_\Sigma/G_{\Sigma(0,\beta,\gamma,\delta)}$ resulta isomorfo a $(\mathbb{R}^2,+)$.

En los próximos ejemplos en vez de trabajar con los grupos de Lie H_3 o $H_3\times S^1$, tomaremos $G=H_3\times T^2$ (con álgebra de Lie $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}_3\oplus\mathbb{R}^2$) y variamos el 2-cociclo Σ. Para esto, al igual que hicimos en los casos anteriores necesitamos calcular $H^2(\mathfrak{h}_3\oplus\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. Tomemos la base $\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$ de $\mathfrak{h}_3\oplus\mathbb{R}^2$, con el corchete de Lie

$$[e_2,e_3]=e_1$$

y $\{e^1,e^2,e^3,e^{\cdot}e^5\}$ su base dual. Denotamos $e^{i_1i_2\dots i_k}$ a $e^{i_1}\wedge e^{i_2}\wedge\ldots\wedge e^{i_k}$.
Tenemos:

$$de^1=-e^2\wedge e^3=-e^{23}$$
$$de^2=de^3=de^4=de^50$$

luego $Im\,d=\langle\{e^{23}\}\rangle$. Calculemos ahora $Ker\,d$

$$de^{12}=de^{13}=0$$
$$de^{14}=de^1\wedge e^4-e^1\wedge de^4=-e^2\wedge e^3\wedge e^4=-e^{234}$$
$$de^{15}=de^1\wedge e^5-e^1\wedge de^5=-e^2\wedge e^3\wedge e^5=-e^{235}$$
$$de^{23}=de^{24}=de^{25}=de^{34}=de^{35}=de^{45}=0$$

$Ker\,d=\langle\{e^{12},e^{13},e^{23},e^{24},e^{25},e^{34},e^{35},e^{45}\}\rangle$. Entonces

$$H^2(\mathfrak{h}_3,\mathbb{R})=Ker\,d/Im\,d=\langle\{[e^{12}],[e^{13}],[e^{24}],[e^{25}],[e^{34}],[e^{35}],[e^{45}]\}\rangle \tag{3.32}$$

donde $[\,]$ denota la clase de equivalencia del cociclo correspondiente.

Observación 3.6. Con respecto a considerar los cociclos e^{12},e^{13} y e^{23} para $G=H_3\times T^2$ podemos afirmar lo mismo que sabemos para $G=H_3\times S^1$ (ver Observación 3.2): los espacios reducidos óptimos obtenidos son análogos a los obtenidos para estos mismos cociclos y el grupo de Lie H_3; debido a que el álgebra de Lie de $\mathbb{R}^2$ está en el núcleo de la aplicación $\tilde{\Sigma}:\mathfrak{h}_3\oplus\mathbb{R}^2\to(\mathfrak{h}_3\oplus\mathbb{R}^2)^*$, $x\mapsto\Sigma(x,\,\cdot\,)$ para dichos cociclos.
Si consideramos los cociclos e^{24},e^{25},e^{34} o e^{35} estaríamos en el mismo caso que en las secciones 3.1.4 o 3.1.5. Estos son cociclos para los cuales una de las dos componentes del

álgebra de Lie de $\mathbb{R}^2$ no se encuentra en el núcleo de la aplicación $\tilde{\Sigma}: \mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}^2 \to (\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}^2)^*$, $x \mapsto \Sigma(x, \cdot)$.

Teniendo en cuenta esta observación, vamos a aplicar la reducción óptima al fibrado cotangente magnético del grupo de Lie $H_3 \times T^2$ considerando cociclos que sean combinación de los distintos grupos de cociclos que mencionamos. En particular tomaremos una combinación con coeficientes irracionales, en la sección 3.3 explicaremos dicha elección.

3.1.8. $G = H_3 \times T^2,\ \Sigma = -e^{13} - e^{24} - \sqrt{2}e^{25}$.

Sea $G = H_3 \times T^2$, y tomemos el 2-cociclo $\Sigma = -e^{13} - e^{24} - \sqrt{2}e^{25} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Consideremos la variedad simpléctica (T^*G, ω_Σ) y $\phi : G \times T^*G \longrightarrow T^*G$ el levantamiento de la acción por traslaciones a izquierda de G en G. Vamos a calcular los espacios reducidos óptimos asociados a la acción ϕ.

El álgebra de Lie de G es $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}^2$, tomamos $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ base de $\mathfrak{g}$ con corchete

$$[e_2, e_3] = e_1$$

($\mathfrak{g}$ es 2-pasos nilpotente).

Luego la extensión central de $\mathfrak{g}$ determinada por Σ es $\mathfrak{g}_\Sigma = (\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}^2) \oplus_\Sigma \mathbb{R}$ con corchete de Lie no nulo:

$$[e_2, e_3] = e_1 \qquad [e_1, e_3] = e_6 \qquad [e_2, e_4] = e_6 \qquad [e_2, e_5] = \sqrt{2}e_6.$$

($\mathfrak{g}_\Sigma$ es 3-pasos nilpotente).

Para simplificar los cálculos consideremos la siguiente representación fiel de $\mathfrak{g}_\Sigma$:

$$\begin{array}{rccc} \rho : & \mathfrak{g}_\Sigma = (\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}^2) \oplus_\Sigma \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(5, \mathbb{R}) \\ & xe_1 + ye_2 + ze_3 + v_1e_4 + v_2e_5 + we_6 & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & x & y & \sqrt{2}y & w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & z & 0 & 0 & v_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Sea G_Σ el grupo de Lie simplemente conexo que tiene álgebra de Lie $\mathfrak{g}_\Sigma$. Utilizando la representación ρ de $\mathfrak{g}_\Sigma$ exponenciamos

$$exp \begin{pmatrix} 0 & x & y & \sqrt{2}y & w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & z & 0 & 0 & v_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x + \frac{1}{2}yz & y & \sqrt{2}y & w + \frac{1}{2}(xz + yv_1 + \sqrt{2}yv_2) + \frac{1}{6}yz^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & z & 1 & 0 & v_1 + \frac{1}{2}z^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & v_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y obtenemos

$$G_\Sigma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b & \sqrt{2}b & e \\ 0 & 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & c & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c, d_1, d_2, e \in \mathbb{R} \right\} \tag{3.33}$$

con operación de grupo el producto usual de matrices.

Para simplificar la notación identificamos G_Σ con $(\mathbb{R}^6, *)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b & \sqrt{2}b & e \\ 0 & 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & c & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow (a, b, c, d_1, d_2, e) \tag{3.34}$$

donde

$$(a, b, c, d_1, d_2, e) * (a', b', c', d_1', d_2', e') =$$
$$(a + a' + bc', b + b', c + c', d_1 + d_1' + cc', d_2 + d_2', e + e' + ac' + bd_1' + \sqrt{2}bd_2').$$

Ahora podemos calcular fácilmente la acción Adjunta de G_Σ en $\mathfrak{g}_\Sigma$:

$$Ad_{(a,b,c,d_1,d_2,e)}(x, y, z, v_1, v_2, w) =$$
$$(x + bz - cy, y, z, v_1, v_2, w - cx + (-d_1 + c^2 - \sqrt{2}d_2)y + (a - cb)z + bv_1 + \sqrt{2}bv_2).$$

Si tenemos en cuenta la proposición (2.2)i) entonces tenemos

$$\mu_\Sigma : G_\Sigma \longrightarrow \mathfrak{g}^*$$
$$\mu_\Sigma(a, b, c, d_1, d_2, e) = (-c, -d_1 + c^2 - \sqrt{2}d_2, a - cb, b, \sqrt{2}b).$$

Entonces para todo $\nu = (\alpha, \beta, \gamma, \delta_1, \delta_2) \in \mathfrak{g}^*$ la órbita de la acción afín Ξ de G_Σ en $\mathfrak{g}^*$ es:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_\nu^{G_\Sigma} &= \Xi(G_\Sigma, \nu) = \{Ad^*_{\pi_G(a,b,c,d_1,d_2,e)^{-1}}\nu + \mu_\Sigma(a, b, c, d_1, d_2, e) : (a, b, c, d_1, d_2, e) \in G_\Sigma\} \\ &= \{(\alpha, \beta + b\alpha, \gamma - c\alpha, \delta_1, \delta_2) + (-c, -d_1 + c^2 - \sqrt{2}d_2, a - cb, b, \sqrt{2}b) : (a, b, c, d_1, d_2, e) \in G_\Sigma\} \\ &= (\alpha, \beta, \gamma, \delta_1, \delta_2) + span\{(1, 0, \alpha, 0, 0), (o, \alpha, 0, 1, \sqrt{2}), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0)\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, los espacios reducidos óptimos como variedades diferenciables son hiperplanos de $\mathbb{R}^5$, además en particular para este ejemplo los espacios reducidos cuentan con estructura de grupo de Lie.

$$G_\Sigma / G_{\Sigma_{(\alpha,\beta,\gamma,\delta_1,\delta_2)}} = \left\{ \left[\begin{bmatrix} 1 & a & b & \sqrt{2}b & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right] a, b, c, d_2, e \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\Rightarrow \quad G_\Sigma/G_{\Sigma_{(\alpha,\beta,\gamma,\delta_1,\delta_2)}} \simeq H_3 \times \mathbb{R}$$

3.1.9. $G = H_3 \times T^2$, $\Sigma = -e^{13} - e^{34} - \sqrt{2}e^{35}$.

Sea $G = H_3 \times T^2$, y tomemos el 2-cociclo $\Sigma = -e^{13} - e^{34} - \sqrt{2}e^{35} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Consideremos la variedad simpléctica (T^*G, ω_Σ) y $\phi : G \times T^*G \longrightarrow T^*G$ el levantamiento de la acción por traslaciones a izquierda de G en G. Vamos a calcular los espacios reducidos óptimos asociados a la acción ϕ.

El álgebra de Lie de G es $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}^2$, tomamos $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ base de $\mathfrak{g}$ con corchete

$$[e_2, e_3] = e_1$$

($\mathfrak{g}$ es 2-pasos nilpotente).

Luego la extensión central de $\mathfrak{g}$ determinada por Σ es $\mathfrak{g}_\Sigma = (\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}^2) \oplus_\Sigma \mathbb{R}$ con corchete de Lie no nulo:

$$[e_2, e_3] = e_1 \qquad [e_1, e_3] = e_6 \qquad [e_3, e_4] = e_6 \qquad [e_3, e_5] = \sqrt{2}e_6.$$

($\mathfrak{g}_\Sigma$ es 3-pasos nilpotente).
Observemos que $\mathfrak{g}_\Sigma = \mathbb{R}e_3 \ltimes_{ad} \langle \{e_1, e_2, e_4, e_5, e_6\} \rangle$ donde

$$ad_{e_3} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Para simplificar los cálculos consideremos la siguiente representación fiel de $\mathfrak{g}_\Sigma$:

$$\begin{array}{cccc} \rho : & \mathfrak{g}_\Sigma = (\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}^2) \oplus_\Sigma \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(6, \mathbb{R}) \\ & xe_1 + ye_2 + ze_3 + v_1e_4 + v_2e_5 + we_6 & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & -z & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_2 \\ -z & 0 & z & \sqrt{2}z & 0 & w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Sea G_Σ el grupo de Lie simplemente conexo que tiene álgebra de Lie $\mathfrak{g}_\Sigma$. Utilizando la representación ρ de $\mathfrak{g}_\Sigma$ exponenciamos y obtenemos

$$G_\Sigma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -c & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d_2 \\ -c & \frac{1}{2}c^2 & c & \sqrt{2}c & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c, d_1, d_2, e \in \mathbb{R} \right\} \tag{3.35}$$

con operación de grupo el producto usual de matrices.
Para simplificar la notación identificamos G_Σ con $(\mathbb{R}^6, *)$:

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & -c & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d_2 \\ -c & \frac{1}{2}c^2 & c & \sqrt{2}c & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longleftrightarrow (a, b, c, d_1, d_2, e) \tag{3.36}$$

donde

$$(a, b, c, d_1, d_2, e)*(a', b', c', d_1', d_2', e') =$$

$$(a + a' - cb', b + b', c + c', d_1 + d_1', d_2 + d_2', e + e' - ca' + \frac{1}{2}c^2b' + cd_1' + \sqrt{2}cd_2'). \tag{3.37}$$

Ahora podemos calcular fácilmente la acción Adjunta de G_Σ en $\mathfrak{g}_\Sigma$:

$$Ad_{(a,b,c,d_1,d_2,e)}(x, y, z, v_1, v_2, w) =$$

$$(x + bz - cy, y, z, v_1, v_2, w - cx + \frac{1}{2}c^2y + (a - d_1 - \sqrt{2}d_2)z + cv_1 + \sqrt{2}cv_2)$$

Si tenemos en cuenta la Proposición (2.2)i) entonces tenemos

$$\mu_\Sigma : G_\Sigma \longrightarrow \mathfrak{g}^*$$

$$\mu_\Sigma(a, b, c, d_1, d_2, e) = (-c, -\frac{1}{2}c^2, a - d_1 - \sqrt{2}d_2, c, \sqrt{2}c).$$

Entonces para todo $\nu = (\alpha, \beta, \gamma, \delta_1, \delta_2) \in \mathfrak{g}^*$ la órbita de la acción afín Ξ de G_Σ en $\mathfrak{g}^*$ es:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_\nu^{G_\Sigma} &= \Xi(G_\Sigma, \nu) = \{Ad^*_{\pi_G(a,b,c,d_1,d_2,e)^{-1}}\nu + \mu_\Sigma(a, b, c, d_1, d_2, e) : (a, b, c, d_1, d_2, e) \in G_\Sigma\} \\ &= \{(\alpha, \beta - c\alpha, \gamma + b\alpha, \delta_1, \delta_2) + (-c, -\frac{1}{2}c^2, a - d_1 - \sqrt{2}d_2, c, \sqrt{2}c) : (a, b, c, d_1, d_2, e) \in G_\Sigma\} \\ &= (\alpha, \beta, \gamma, \delta_1, \delta_2) + span\{(0, 0, 1, 0, 0)\} + \{(-c, -c\alpha + \frac{1}{2}c^2, 0, c, \sqrt{2}c) : c \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

Por lo tanto, los espacios reducidos óptimos como variedades diferenciables son de dimensión 2.
Otra forma de ver estas órbitas de la acción afín Ξ es pensar en $\mathcal{O}^{G_\Sigma}_{(\alpha,\beta,\gamma,\delta_1,\delta_2)} \simeq G_\Sigma/G_{\Sigma(\alpha,\beta,\gamma,\delta_1,\delta_2)}$.
Entonces si calculamos el subgrupo de isotropía en $(\alpha, \beta, \gamma, \delta_1, \delta_2) \in \mathfrak{g}^* = \mathfrak{h}_3^* \oplus \mathbb{R}^2$ tenemos

$$G_{\Sigma(\alpha,\beta,\gamma,\delta_1,d_2)} = \{(-b\alpha + d_1 + \sqrt{2}d_2, b, 0, d_1, d_2, e) : b, d_1, d_2, e \in \mathbb{R}\}$$

Se puede probar que para todo $(a, b, c, d_1, d_2, e) \in G_\Sigma$, el elemento $(a+b\alpha-d_1-\sqrt{2}d_2, 0, c, 0, 0, 0)$ pertenece a la misma clase de equivalencia que (a, b, c, d_1, d_2, e) en $G_\Sigma/G_{\Sigma(\alpha,\beta,\gamma,\delta_1,\delta_2)}$. Si elegimos para cada clase de equivalencia un representante de la forma $(a, 0, c, 0, 0, 0)$, tenemos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}_{(\alpha,\beta,\gamma,\delta_1,\delta_2)} \simeq G_\Sigma/G_{\Sigma(\alpha,\beta,\gamma,\delta_1,d_2)}& \\
&= \{[[(a,0,c,0,0,0)]]: a,c\in\mathbb{R}\} \\
&= \left\{ \left[\left[\begin{matrix} 1 & -c & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -c & \frac{1}{2}c^2 & c & \sqrt{2}c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right]\right] : a,c\in\mathbb{R} \right\}
\end{aligned}
$$

donde $[[\,g\,]]$, $g \in G_\Sigma$, representa la clase de equivalencia de g con respecto al cociente $G_\Sigma/G_{\Sigma(\alpha,\beta,\gamma,\delta)}$.

Utilizando la identificación (3.36) de G_Σ y la operación $*$ definida en la ecuación (3.37) es sencillo ver que $G_{\Sigma(\alpha,\beta,\gamma,\delta_1,d_2)}$ es subgrupo normal de G_Σ, por lo tanto $G_\Sigma/G_{\Sigma(\alpha,\beta,\gamma,\delta_1,d_2)}$ tiene estructura de grupo, veamos que el cociente resulta isomorfo a $(\mathbb{R}^2,+)$.

$$[[(a,0,c,0,0,0)]]*[[(a',0,c',0,0,0)]]=[[(a,0,c,0,0,0)*(a',0,c',0,0,0)]]=[[(a+a',0,c+c',0,0,ca')]]$$

y por lo visto antes, de la clase de equivalencia $[[(a+a',0,c+c',0,0,ca')]]$ podemos elegir como representante al elemento $(a+a',0,c+c',0,0,0)$. Entonces

$$[[(a,0,c,0,0,0)]]*[[(a',0,c',0,0,0)]]=[[(a+a',0,0,c+c',0,0,0)]]$$

Luego $G_\Sigma/G_{\Sigma(\alpha,\beta,\gamma,\delta_1,d_2)}$ resulta isoomorfo a $(\mathbb{R}^2,+)$.

3.2. Grupos de Lie solubles.

3.2.1. $G = (SO(1,1)\times\mathbb{R}^2)\times S^1$.

$$
\begin{aligned}
G &= (SO(1,1)\ltimes\mathbb{R}^2)\times S^1 \subset E(1,1)\times S^1, \\
\mathfrak{g} &= (\mathfrak{so}(1,1)\ltimes\mathbb{R}^2)\oplus\mathbb{R} \subset \mathfrak{e}(1,1)\oplus\mathbb{R}, \\
\mathfrak{so}(1,1)\ltimes\mathbb{R}^2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & -x & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : x,y,z\in\mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}
$$

$$[e_1,e_2]=e_2, \qquad\qquad [e_1,e_3]=-e_3.$$

Al igual que en los otros casos debemos calcular $H^2(\mathfrak{g};\mathbb{R})$ para decidir qué cociclo tomar.

$$
\begin{aligned}
de^2 &= -e^{12} \\
de^3 &= -e^{13}
\end{aligned}
$$

luego $Im\, d = \langle\{e^{12}, e^{13}\}\rangle$. Calculemos ahora $Ker\, d$

$$de^{24} = -e^{124}$$
$$de^{34} = e^{134}$$

$Ker\, d = \langle\{e^{12}, e^{13}, e^{14}, e^{23}\}\rangle$. Entonces

$$H^2(\mathfrak{g};\mathbb{R}) = \left\langle\left\{[e^{14}], [e^{23}]\right\}\right\rangle$$

Sea $\Sigma = -e^{14}$ y considerar $\mathfrak{g}_\Sigma = \mathfrak{g} \oplus_\Sigma \mathbb{R}$. Los corchetes de Lie no nulos en $\mathfrak{g}_\Sigma$ están dados por:

$$[e_1, e_2] = e_2, \qquad [e_1, e_3] = -e_3, \qquad [e_1, e_4] = e_5.$$

Observar que $\mathfrak{g}_\Sigma = \mathbb{R}e_1 \ltimes \mathbb{R}^4$ y que hay una representación fiel $\rho : \mathfrak{g}_\Sigma \to \mathfrak{gl}(5, \mathbb{R})$ de $\mathfrak{g}_\Sigma$ en $\mathbb{R}^5$ dada por:

$$\rho(x, y, z, v, w) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & -x & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & x & 0 & w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde (x, y, z, v, w) denota el elemento $xe_1 + ye_2 + ze_3 + ve_4 + we_5 \in \mathfrak{g}$. Para obtener la expresión de las representaciones adjunta y coadjunta de G, fijamos $g = (a, b, c, e^{2\pi id}) \in G$ y resulta:

$$\begin{aligned} Ad(g)(x, y, z, v) &= (x, e^a y - bx, e^{-a}z - cx, v), \qquad (x, y, z, v) \in \mathfrak{g}, \\ Ad^*(g^{-1})(\alpha, \beta, \gamma, \delta) &= (\alpha - b\beta - c\gamma, e^a\beta, e^{-a}\gamma, \delta), \qquad (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathfrak{g}^*. \end{aligned}$$

El grupo G_Σ está formado por las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & e^{-a} & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & a & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad a, b, c, d, h \in \mathbb{R},$$

y la multiplicación en G_Σ está dada como sigue:

$$(a, b, c, d, h) * (a', b', c', d', h') = (a + a', e^a b' + b, e^{-a}c' + c, d + d', ad' + h + h').$$

Para calcular la representación adjunta de G_Σ fijamos $g = (a, b, c, d, h) \in G_\Sigma$ y obtenemos:

$$Ad(g)(x, y, z, v, w) = (x, e^a y - bx, e^{-a}z + cx, v, w + av - dx), \qquad (x, y, z, v, w) \in \mathfrak{g}_\Sigma.$$

La aplicación momento $\mu_\Sigma : G_\Sigma \to \mathfrak{g}^*$ resulta entonces:

$$\mu_\Sigma(a, b, c, d, h) = (-d, 0, 0, a).$$

$$\Xi : G_\Sigma \times \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{(\alpha,\beta,\gamma,\delta)} &= \{(\alpha - b\beta - c\gamma, e^a\beta, e^{-a}\gamma, \delta) + (-d, 0, 0, a)\} \\ &= \{(\alpha - b\beta - c\gamma - d, e^a\beta, e^{-a}\gamma, \delta a)\} \\ &= \{(\alpha, 0, 0, \delta) + (-b\beta - c\gamma - d, e^a\beta, e^{-a}\gamma, a)\} = \mathbb{R} \times \{(e^a\beta, e^{-a}\gamma, a) : a \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Si $\beta = \gamma = 0$:

$$\mathcal{O}_{(\alpha,0,0,\delta)} = \{(\alpha - d, 0, 0, \delta a) : d, a \in \mathbb{R}\} \cong \{(d, 0, 0, \pm a) : d, a \in \mathbb{R}\} \cong (\mathbb{R}^2, +)$$

donde $\nu = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$.

3.3. Conclusiones.

En la siguiente tabla resumimos los resultados obtenidos en las dos secciones anteriores.

G	Σ	$\mathfrak{h}$	$\Xi(G_\Sigma, \mu)$
H_3	e^{12}, e^{13}, e^{23}	$\{0\}$	$(\alpha, \beta, \gamma) + span\{(0, \alpha, 0), (0, 0, \alpha)\}$
$H_3 \times S^1$	e^{12}, e^{13}, e^{23}	$\{0\}$	$(\alpha, \beta, \gamma) + span\{(0, \alpha, 0), (0, 0, \alpha)\}$
$H_3 \times S^1$	$-e^{24}$	$\mathbb{Z}$	$(\alpha, \beta, \gamma, \delta)+$ $span\{(0, 1, 0, 0), (0, 0, \alpha, 1)\}$
$H_3 \times S^1$	$-e^{34}$	$\mathbb{Z}$	$(\alpha, \beta, \gamma, \delta)+$ $span\{(0, 0, 1, 0), (0, \alpha, 0, 1)\}$
$H_3 \times S^1$	$-e^{13} - e^{24}$	$\mathbb{Z}$	$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) + span\{(1, 0, \alpha, 0),$ $(0, 1, 0, 0), (0, \alpha, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\}$
$H_3 \times S^1$	$-e^{13} - e^{34}$	$\mathbb{Z}$	$(0, \beta, \gamma, \delta) + \langle\{(0, 0, 1, 0)\}\rangle$ $+\{(-c, -\frac{1}{2}c^2, 0, c) : c \in \mathbb{R}\}$
$H_3 \times T^2$	$-e^{13} - e^{24} - \sqrt{2}e^{25}$	$\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$	$(\alpha, \beta, \gamma, \delta_1, \delta_2) + \langle\{(1, 0, \alpha, 0, 0)$ $(0, 1, 0, 0, 0), (0, \alpha, 0, 1, \sqrt{2}), (0, 0, 0, 1, 0)\}\rangle$
$H_3 \times T^2$	$-e^{13} - e^{34} - \sqrt{2}e^{35}$	$\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$	$(\alpha, \beta, \gamma, \delta_1, \delta_2)+$ $\{(-c, -c\alpha + \frac{1}{2}c^2, a, c, \sqrt{2}c)\}_{a,c\in\mathbb{R}}$
$(E(1,1))_0 \times S^1$	$-e^{14}$	$\mathbb{Z}$	$(\alpha, 0, 0, \delta)+$ $\mathbb{R} \times \{(e^a\beta, e^{-a}\gamma, a)\}_{a\in\mathbb{R}}$

G es el grupo de Lie, Σ un 2-cociclo del álgebra de Lie, $\mathfrak{h}$ la Holonomía Hamiltoniana (ver la definición en [OR3]) y $\bar{\Xi}(G_\Sigma, \mu)$ el espacio reducido óptimo.
El motivo por el cual tuvimos en cuenta la Holonomía Hamiltoniana en cada aplicación es el siguiente resultado:

- una acción de G en M admite aplicación momento estándar si y sólo si $\mathfrak{h} = 0$.(ver [OR3]).

Nuestro objetivo era generar ejemplos de aplicación del método de reducción óptima simpléctica donde se trabajara con grupos de Lie que no fueran abelianos y compactos, ya que los pocos ejemplos que existen sobre esta reducción consideran grupos de Lie de ese tipo. Por ese motivo es que comenzamos trabajando con el grupo de Lie de Heisenberg. Pero luego, estudiando la Holonomía Hamiltoniana cuando $G = H_3$ observamos que ésta resultaba trivial, entonces por el resultado que enuciamos más arriba, teníamos que estos ejemplos admitían aplicación momento estándar, por lo tanto, se podía aplicar la reducción simpléctica clásica. Entonces, como el objetivo consistía también en generar ejemplos donde sólo se pudiera aplicar la reducción óptima comenzamos a trabajar con el grupo de Lie $G = H_3 \times S^1$. Por último, trabajamos con el grupo de Lie $H_3 \times T^2$ y cociclos con coeficientes irracionales para garantizarnos que la Holonomía Hamiltoniana no fuera cerrada, ya que si $\mathfrak{h}$ no es cerrada los espacios reducidos óptimos coinciden con otra generalización de reducción simpléctica descripta en [OR3], que no desarrollaremos en este trabajo.

Observación 3.7.

- A diferencia del método de reducción simpléctica clásica, los espacios reducidos obtenidos a partir de una misma variedad (en este caso el mismos fibrado cotangente) pueden tener dimensiones distintas.
- La mayoría de los espacios reducidos que obtuvimos admiten estructura de grupo de Lie.
- Algunos de los espacios reducidos obtenidos admiten estructura de grupo de Lie abeliano y otros no abeliano.

3.4. Estructura de grupo de Lie de los espacios reducidos.

Luego de analizar las distintas variedades obtenidas al aplicar la reducción óptima de fibrados cotangentes magnéticos variando el grupo G y el cociclo Σ, pudimos observar que muchas de ellas admiten estructura de grupo de Lie. En el siguiente teorema damos algunas de las condiciones suficientes para que esto ocurra:

Teorema 3.1. *Sea G un grupo de Lie 2 pasos nilpotente con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, $\mu \in \mathfrak{g}^*$ y sea $\Sigma : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ un 2-cociclo del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ tal que*

$$\Sigma([\pi_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_{\Sigma_\mu}), \mathfrak{g}], .) \subset \mathfrak{g}^0.$$

Entonces $\mathcal{O}_\mu^{G_\Sigma}$, el espacio reducido óptimo de (T^*G, ω_Σ), admite estructura de grupo de Lie.

($\mathfrak{g}^0$ denota el anulador de $\mathfrak{g}$, i.e. $\mathfrak{g}^0 = \{\alpha \in \mathfrak{g}^* : \langle \alpha, \xi \rangle = 0 \; \forall \xi \in \mathfrak{g}\}$)

Demostración. Observemos que

$$\mathcal{O}_\mu^{G_\Sigma} \simeq G_\Sigma/(G_\Sigma)_\mu \qquad \mu \in \mathfrak{g}^*$$

$\mathcal{O}_\mu^{G_\Sigma}$ grupo de Lie $\Leftrightarrow (G_\Sigma)_\mu$ subgrupo normal de $G_\Sigma \Leftrightarrow (\mathfrak{g}_\Sigma)_\mu$ ideal en $\mathfrak{g}_\Sigma$.
Entonces para ver que el espacio reducido admite estructura de grupo de Lie nos alcanza con probar que $(\mathfrak{g}_\Sigma)_\mu$ es un ideal en $\mathfrak{g}_\Sigma$. Mediante simples cálculos podemos ver que:

$$(\mathfrak{g}_\Sigma)_\mu = \{(\xi, a) \in \mathfrak{g}_\Sigma \mid (\xi, a)_{\mathfrak{g}^*}(\mu) = 0\} = \{(\xi, a) \in \mathfrak{g}_\Sigma \mid ad_\xi^*\mu - \Sigma(\xi, .) = 0\}$$

Sea $(\eta, b) \in \mathfrak{g}_\Sigma$ y $(\xi, a) \in (\mathfrak{g}_\Sigma)_\mu$, veamos que $[(\eta, b), (\xi, a)] = [[\eta, \xi], -\Sigma(\eta, \xi)] \in (\mathfrak{g}_\Sigma)_\mu$:

$$\begin{aligned}
ad_{[\eta,\xi]}^*\mu(\nu) - \Sigma([\eta, \xi], \nu) &= \mu \circ ad_{[\eta,\xi]}\nu - \Sigma([\eta, \xi], \nu) \\
&= \mu([[\eta, \xi], \nu]) - \Sigma([\eta, \xi], \nu) \\
&= 0 + \Sigma([\xi, \nu], \eta) + \Sigma([\nu, \eta], \xi) \\
&= \Sigma([\xi, \nu], \eta) - \Sigma(\xi, [\nu, \eta]) \\
&= \Sigma([\xi, \nu], \eta) - \mu \circ ad_\xi([\nu, \eta]) \\
&= \Sigma([\xi, \nu], \eta) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\square$

4. Reducción óptima de variedades de Kähler

4.1. Nociones Básicas.

En esta sección daremos las nociones básicas necesarias para poder probar el teorema de reducción óptima de variedades Kähler. Principalmente repasaremos definiciones y resultados conocidos sobre acciones de grupos de Lie, fibrados, variedades cocientes y conexiones afines, en cada caso referimos la bibliografía utilizada.

4.1.1. Acciones.

Definición 4.1. *Una **acción** a izquierda de un grupo de Lie G en una variedad diferenciable M es una aplicación:*

$$\begin{array}{rccc} \phi: & G \times M & \longrightarrow & M \\ & (g,m) & \longmapsto & \phi(g,m) = \phi_g(m) = g \cdot m \end{array}$$

tal que

- $\phi(e,m) = m \qquad \forall m \in M,$
- $\phi(g,\phi(h,m)) = \phi(gh,m) \qquad \forall g,h \in G, \forall m \in M.$

Para todo $g \in G$ la aplicación $\phi_g := \phi(g,\cdot) : M \longrightarrow M$ es un difeomorfismo de M con inversa $\phi_{g^{-1}}$.
Análogamente se puede definir acción a derecha.
Diremos que la acción es:

- *$\mathcal{C}^\infty$ o suave si ϕ es $\mathcal{C}^\infty$,*
- ***transitiva** si hay una sola órbita,*
- ***libre** si todos los grupos de isotropía son triviales, i.e. $G_m = \{e\}$ $\forall m \in M$,*
- ***localmente libre** si todos los grupos de isotropía son discretos, i.e. $\mathfrak{g}_m = \{0\}$ $\forall m \in M$,*
- ***efectiva** si $\phi_g = id_M$ implica $g = e$, o equivalentemente si la aplicación $g \longrightarrow \phi_g$ es inyectiva,*
- ***propia** si la aplicación $\Phi : G \times M \longrightarrow M \times M$ definida por $\Phi(g,m) = (m, \phi(g,m))$ es propia, o equivalentenmente si para cualquier par de sucesiones $\{m_n\}$ y $\{g_n \cdot m_n\}$ convergentes en M, existe $\{g_{n_k}\}$ subsucesión convergente en G.*

4.1.2. Fibrados.

Recordemos algunas definiciones de fibrados (ver [KN],[MO]).

Definición 4.2. *Un fibrado (E,B,F) es una terna de variedades diferenciables munida de*

1. *$\pi : E \longrightarrow B$ $\mathcal{C}^\infty$ y sobreyectiva,*
2. *una familia trivializante de difeomorfismos $f_U : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times F$, $U \in \mathcal{U}$, donde $\mathcal{U}$ es un cubrimiento abierto de B, y $p_1 \circ f_U = \pi$ para $U \in \mathcal{U}$.*

Se denota por $E_x = \pi^{-1}(x)$, la fibra de $x \in B$. Se dice que E es el espacio total, B la base y F la fibra del fibrado.

Definición 4.3. *Un fibrado (E, B, F) de dice principal cuando*

1. *$F = G$ un grupo de Lie,*
2. *existe una acción a derecha de G en E,*
3. *la famila f_U es equivariante: $f_U(y \cdot g) = f_U(y)g$, donde $(u, g')g = (u, g \cdot g')$, si $u \in U, g, g' \in G$.*

A G se lo llama grupo de estructura.

Observemos que:

- como f_U es biyectiva y equivariante se tiene que la acción de G en E es libre;
- además, si $u \in \pi^{-1}(x)$,

  $$\pi^{-1}(x) = \{v \in E : \ \pi(v) = x = \pi(u)\} = \{v \in E / \exists g \in G : v = u \cdot g\} = \mathcal{O}_u$$

  es isomosrfo al grupo de estructura G. Luego $B = E/G$ y la proyección $\pi : E \longrightarrow E/G$ es una aplicación diferenciable.

Definición 4.4. *Un fibrado principal (E, B, G) se dice trivial cuando $E = B \times G$; es decir, E es globalmente el producto cartesiano de la base por la fibra.*

4.1.3. Variedad Cociente.

Sea M una variedad diferenciable, G un grupo de Lie, $\phi : G \times M \longrightarrow M$ acción $\mathcal{C}^\infty$ y $M//G$ el espacio cociente (espacio de órbitas de la acción).
Consideramos la topología cociente en $M//G$, entonces $\pi : M \longrightarrow M//G$ es continua, luego el espacio topológico $M//G$ no resulta necesariamente Hausdorff; pero si se pide que la acción de G en M sea propia sí resulta serlo. Mas aún, se puede probar que $M//G$ admite estructura de variedad diferenciable.

Proposición 4.1. [OR2] *Sea $\phi : G \times M \longrightarrow M$ una acción propia del grupo de Lie G en la variedad diferenciable M. Entonces:*

1. *El subgrupo de isotropía G_m es compacto para todo $m \in M$.*
2. *El espacio topológico $M//G$ es Hausdorff (aún cuando M y G no lo son).*
3. *Si la acción de G en M es libre entonces $M//G$ admite estructura de variedad diferenciable y la proyección canónica $\pi : M \longrightarrow M//G$ le da a M estructura de G-fibrado principal (luego $\pi : M \longrightarrow M//G$ resulta submersión).*

Observación 4.1. Si G es un grupo de Lie compacto la acción de G sobre M resulta propia. Luego, en el caso particular cuando G es compacto se cumple la proposición anterior.

Definición 4.5. *Diremos que $M//G$ es una variedad regular si posee estructura de variedad diferenciable cuya estructura topológica es la cociente y tal que la proyección canónica $\pi : M \longrightarrow M//G$ es una submersión.*

4.1.4. Conexión de Levi-Civita de una submersión riemanniana.

Sean (N,g) y (L,h) dos variedades riemannianas y $\pi:(N,g)\longrightarrow(L,h)$ submersión riemanniana. Recordamos ([DC]) que $\mathcal{V} = Ker\ d\pi$ es un subfibrado de TN, que se denomina fibrado vertical. El fibrado horizontal $\mathcal{H}$ se define, para cada $p\in N$, como $\mathcal{H}_p = \mathcal{V}_p^{\perp}$. De modo que

$$T_pN = \mathcal{H}_p \oplus \mathcal{V}_p$$

Dado $X\in\mathcal{X}(L)$ existe un único $\bar{X}\in\mathcal{X}(L)$ tal que $d\pi_p\bar{X}_p = X_{\pi(p)}$, $\bar{X}$ se denomina levantamiento horizontal de X.
Si ∇^N y ∇^L denotan las conexiones de Levi-Civita de g y h, respectivamente, se sabe que:

$$\nabla^N_{\overline{X}}\overline{Y} = \overline{(\nabla^L{}_XY)} + \frac{1}{2}[\overline{X},\overline{Y}]^{\mathcal{V}} \qquad X,Y\in\mathcal{X}(L), \tag{4.1}$$

donde $Z^{\mathcal{V}}$ es la componente vertical del campo vectorial Z.

Llamemos $\nabla^{\mathcal{H}}$ a la conexión en $\mathcal{H}$ que se obtiene mediante la proyección ortogonal sobre $\mathcal{H}$ de ∇^N, o sea:

$$\nabla^{\mathcal{H}}_XY := (\nabla^N_XY)_{\mathcal{H}} \qquad X,Y\in\mathcal{X}(N). \tag{4.2}$$

Luego de (4.1) y (4.2) concluimos que:

$$(\nabla^N_{\overline{X}}\overline{Y})_{\mathcal{H}} = \overline{(\nabla^L_XY)}, \qquad X,Y\in\mathcal{X}(L), \tag{4.3}$$

entonces ∇^L queda definida de la siguiente forma:

$$(\nabla^L_XY)_{\pi(q)} = (d\pi)_q(\nabla^{\mathcal{H}}_{\bar{X}}\bar{Y})_q \qquad X,Y\in\mathcal{X}(L). \tag{4.4}$$

4.2. Cociente Kähler.

Sea (M,g,J) una variedad Kähler, y $\omega(.,.) := g(J.,.)$ su 2-forma de Kähler. Sea G un grupo de Lie compacto que actúa sobre M, donde la acción es libre y preserva la métrica y la forma simpléctica, por lo tanto también preserva la estructura compleja.
Si aplicamos el Teorema de reducción simpléctica de Marsden Weinstein 1.10 a M obtenemos el cociente simpléctico $M_{red} = N//G$, donde $N=\mu^{-1}(0)\subset M$; M_{red} tiene estructura simpléctica $\tilde{\omega}$ definida por:

$$\pi^*\tilde{\omega} = \iota^*\omega$$

donde $\iota: N\longrightarrow M$ es la inclusión y $\pi: N\longrightarrow N//G$ es la proyección canónica.
Además el cociente $M_{red} = N//G$ tiene naturalmente una métrica inducida por g. Llamemos h a la métrica inducida, la cual está definida de la siguiente forma:

$$h(X,Y) := g(\tilde{X},\tilde{Y})$$

donde $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$ son los levantamientos horizontales de $X, Y \in \mathfrak{X}(N//G)$.
A partir de $\tilde{\omega}$ y h podemos obtener una estructura casi compleja en el cociente M_{red}, más aún se puede probar que dicha estructura es integrable, por lo tanto M_{red} es Kähler.

Teorema 4.2. [HKLR] *La métrica inducida en M_{red} es Kähleriana, con forma de Kähler $\tilde{\omega}$.*

Demostración. Sea $\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ la aplicación momento asociada a la acción de G y $N := \mu^{-1}(0) \subset M$.

Sea ∇ la conexión de Levi-Civita de g. Llamamos g_N a la métrica en N que se obtiene al restringir g, como $\iota : N \longrightarrow M$ es una inmersión isométrica, tenemos la siguiente expresión para ∇^N, la conexión de Levi-Civita de g_N,

$$d\iota_q(\nabla^N_X Y)_q := [(\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y})_q]_N$$

para todo $q \in N$, $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$, donde $\tilde{X}, \tilde{Y} : M \longrightarrow TM$ diferenciables en un entorno $U \subset M$ de q tales que X e Y están ι-relacionados con $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$ respectivamente, o sea $(d\iota)X = \tilde{X} \circ \iota$ y $(d\iota)Y = \tilde{Y} \circ \iota$; y $[(\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y})_q]_N$ es la proyección ortogonal de $(\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y})_q \in T_qM = T_qN \oplus T_qN^{\perp}$ sobre T_qN.

Recordemos que como la acción de G es libre, N resulta ser un G-fibrado principal, entonces la proyección $\pi : N \longrightarrow N//G$ resulta ser una submersión riemanniana. Entonces el fibrado horizontal $\mathcal{H} \subset TN$ sobre N se puede identificar vía π con el fibrado tangente $T(N//G)$.

El complemento ortogonal de $\mathcal{H}$ en TN es el fibrado vertical $\mathcal{V}$,

$$T_qN = \mathcal{H}_q \oplus \mathcal{V}_q \qquad \forall q \in N. \tag{4.5}$$

Ahora consideremos el complemento ortogonal de $\mathcal{H}$ en TM, al cual llamaremos $\tilde{\mathcal{V}}$.

$$T_qM = T_qN \oplus (T_qN)^{\perp} = \mathcal{H}_q \oplus \mathcal{V}_q \oplus (T_qN)^{\perp} \qquad \forall q \in N, \tag{4.6}$$

luego

$$\tilde{\mathcal{V}}_q = \mathcal{V}_q \oplus (T_qN)^{\perp} \qquad \forall q \in N. \tag{4.7}$$

Queremos ver que J preserva $\mathcal{H}$, pues como $\mathcal{H}$ isomorfo a $T(N//G)$, esto nos permitirá definir una estructura compleja en $T(N//G)$. Si podemos probar que J preserva $\tilde{\mathcal{V}}$, usando el hecho que J es ortogonal tendremos que J preserva $\mathcal{H}$.
Veamos que $span\{grad\, \mu_i; i : 1, \ldots, k\} = (TN)^{\perp}$; donde μ_i son las funciones coordenadas de la aplicación momento $\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$.

$$v \in T_mN \;\Leftrightarrow\; (d\mu_i)_m(v) = 0 \;\Leftrightarrow\; \langle grad\, \mu_i, v\rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; v \perp \{grad\, \mu_i; i : 1, \ldots, k\}$$

Entonces $\{grad\, \mu_i; i : 1, \ldots, k\} \subset (T_mN)^{\perp}$ y además $dim(T_mN)^{\perp} = dimG = k$
pues $dimN = dimM - dimG$;

$$\Rightarrow span\{grad\, \mu_i; i : 1, \ldots, k\} = (T_mN)^{\perp}.$$

Sabemos que $\mathcal{V}$ está generado por los campos infinitesimales $(X_1)_N, \ldots, (X_k)_N$ con $\{X_1, \ldots, X_k\}$ base de $\mathfrak{g}$; mas aún $\{(X_1)_N, \ldots, (X_k)_N\}$ es base de $\mathcal{V}$.
Sea $\mathcal{B} = \bigcup_{q\in N} T_qM$, dada Y sección de $\mathcal{B}$, $q \in N$

$$\langle grad\, \mu_i(q), Y_q\rangle = d\mu_{i_q}(Y_q) = \omega_q((X_i)_M, Y_q) = \langle J((X_i)_M)_q, Y_q\rangle = \langle J((X_i)_N)_q, Y_q\rangle \tag{4.8}$$

Luego $J((X_i)_N)_q = grad\, \mu_i(q) \qquad \forall q \in N,\ \forall i$. Entonces $J(\mathcal{V}_q) = (T_qN)^{\perp}$, por lo tanto $J(\mathcal{V}_q \oplus (T_qN)^{\perp}) = \mathcal{V}_q \oplus (T_qN)^{\perp}\ \forall q \in N$, o sea J preserva $\tilde{\mathcal{V}}$.

(M, g, J) es Kähler entonces $\nabla_X J = J\nabla_X$. Como J es ortogonal y preserva $\mathcal{H}$ y $\mathcal{V}$, entonces de la ecuación anterior tenemos que J conmuta con $\rho_{\mathcal{H}}$, la proyección ortogonal de TN sobre $\mathcal{H}$. Entonces J conmuta con $\nabla^{\mathcal{H}}$.
Definimos $\tilde{J}$ en $N//G$ tal que $(d\pi \circ J)|_{\mathcal{H}} = (\tilde{J} \circ d\pi)|_{\mathcal{H}}$. De lo anterior se puede concluir que $\nabla_X^{N//G}\tilde{J} = \tilde{J}\nabla_X^{N//G}$, donde $\nabla^{N//G}$ es la conexión de Levi Civita de la submersión riemanniana $\pi : N \longrightarrow N//G$ definida en (4.4). Por lo tanto, la métrica inducida en $N//G$ es kähleriana.

$\square$

4.3. Reducción óptima Kähler.

Sea (M, g, J) una variedad Kähler, y $w(.,.) := g(J.,.)$ su 2-forma de Kähler. Sea G un grupo de Lie que actúa sobre M, donde la acción es propia y preserva la métrica y la forma simpléctica, por lo tanto también preserva la estructura compleja. Si aplicamos la reducción óptima simpléctica 2.1 a (M, ω) obtenemos la variedad simpléctica (M_ρ, ω_ρ).
Además el cociente $M_\rho = \mathcal{J}^{-1}(\rho)//G_\rho$ tiene naturalmente una métrica inducida por g. Llamemos h a la métrica inducida, la cual está definida de la siguiente forma:

$$h(X, Y) := g(\tilde{X}, \tilde{Y})$$

donde $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$ son los levantamientos horizontales de $X, Y \in \mathfrak{X}(M_\rho)$.
A partir de ω_ρ y h podemos obtener una estructura casi compleja en el cociente M_ρ, el objetivo es ver como hacer para obtener una estructura compleja (casi compleja + integrable); y entonces obtener un teorema de reducción óptima para variedades Kähler.
Al principio pensamos que quizás fuera necesario adaptar de alguna forma la aplicación momento óptimo para que el cociente reducido admitiera estructura Kähler, pero estudiando dicho cociente pudimos concluir que pidiendo que el punto donde reduzco cumpla cierta propiedad, se puede construir una estructura compleja en el cociente a partir de la estructura compleja J de la variedad Kähler de partida , este resultado da lugar al siguiente teorema de reducción:

Teorema 4.3 (**Reducción óptima Kähler**). *Sea (M, g, J) una variedad de Kähler, G grupo de Lie, $\phi : G \times M \longrightarrow M$ una acción canónica y propia, y $\mathcal{J} : M \longrightarrow M/E$ la aplicación momento óptimo asociada a ϕ.*
Entonces para todo $\rho \in M/E$ cuyo subgrupo de isotropía actúa propiamente en $\mathcal{J}^{-1}(\rho)$ y tal que $\dim G_\rho = \operatorname{codim} \mathcal{J}^{-1}(\rho)$, (M_ρ, h, J_ρ) es una variedad Kähler, donde:

- $M_\rho := \mathcal{J}^{-1}(\rho)//G_\rho$,
- *h es la métrica inducida por g en el cociente $\mathcal{J}^{-1}(\rho)//G_\rho$,*
- *J_ρ satisface $(d\pi \circ J)|_{\mathcal{H}} = (J_\rho \circ d\pi)|_{\mathcal{H}}$.*

Además, la 2-forma de Kähler de (M_ρ, h, J_ρ) es la forma simpléctica ω_ρ que se obtiene al aplicar la reducción simpléctica óptima a M.
($\mathcal{H}$ es el fibrado horizontal de la submersión riemanniana $\pi_\rho : \mathcal{J}^{-1}(\rho) \longrightarrow \mathcal{J}^{-1}(\rho)//G_\rho$).

Llamamos a (M_ρ, h, J_ρ) espacio reducido óptimo.

Antes de ver la demostración de este teorema, enunciemos dos lemas que serán necesarios.

Lema 4.4. *Sea $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $Y \in \mathcal{X}(M)$, entonces $JX_f = gradf \ \ \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $Y \in \mathcal{X}(M)$

$$\langle gradf, Y \rangle = df(Y) = i_{X_f}\omega(Y) = \omega(X_f, Y) = \langle JX_f, Y \rangle$$

$$\Rightarrow JX_f = gradf \ \ \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

□

Lema 4.5. *Si $h \in \mathcal{C}^\infty(M)^G$, entonces $dh(\xi_N) = 0 \ \ \forall \xi \in \mathfrak{g}$.*

Demostración. Sea $q \in N$, $\xi \in \mathfrak{g}$

$$(dh)_q(\xi_N)_q = (dh)_q(\left.\frac{d}{dt}\right|_0 \phi_{exp t\xi}(q)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 h \circ \phi_{exp t\xi}(q) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 h(q) = 0.$$

□

Demostración (Teorema 4.3, Reducción Óptima Kähler)

Sea $N := \mathcal{J}^{-1}(\rho)$.
Por Teorema 2.1 N resulta ser un G_ρ-fibrado prinicipal, luego la proyección $\pi : N \longrightarrow N//G_\rho$ resulta ser una submersión riemanniana. Entonces el fibrado horizontal $\mathcal{H} \subset TN$ sobre N se puede identificar vía π con el fibrado tangente $T(N//G_\rho)$.
El complemento ortogonal de $\mathcal{H}$ en TN es el fibrado vertical $\mathcal{V}$,

$$T_qN = \mathcal{H}_q \oplus \mathcal{V}_q \qquad \forall q \in N. \tag{4.9}$$

Ahora consideremos el complemento ortogonal de $\mathcal{H}$ en TM, al cual llamaremos $\tilde{\mathcal{V}}$.

$$T_qM = T_qN \oplus (T_qN)^{\perp} = \mathcal{H}_q \oplus \mathcal{V}_q \oplus (T_qN)^{\perp} \qquad \forall q \in N, \tag{4.10}$$

luego

$$\tilde{\mathcal{V}}_q = \mathcal{V}_q \oplus (T_qN)^{\perp} \qquad \forall q \in N. \tag{4.11}$$

Queremos ver que J preserva $\mathcal{H}$, pues como $\mathcal{H}$ isomorfo a $T(N//G_\rho)$, esto nos permitirá definir una estructura compleja en $N//G_\rho$.

Sabemos que $\mathcal{V}$ está generado por los campos infinitesimales $(\xi_1)_N, \dots, (\xi_k)_N$ con $\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ base de $\mathfrak{g}_\rho$; mas aún $\{(\xi_1)_N, \dots, (\xi_k)_N\}$ es base de $\mathcal{V}$.
Si $h \in \mathcal{C}^{\infty}(M)^G$, por Lema 4.5, en particular, $dh\xi_{i_N} = 0 \ \forall i = 1, \dots, k$; i.e. $\langle gradh, \xi_{i_N} \rangle = 0$ $\forall i = 1, \dots, k$

$$\Rightarrow (gradh)_q \in \mathcal{V}_q^{\perp} \qquad \forall q \in N$$

$$\Rightarrow (gradh)_q \in \mathcal{H}_q \oplus (T_qN)^{\perp} \qquad \forall q \in N. \tag{4.12}$$

Del Lema 4.4 y la ecuación 4.12 tenemos

$$(JX_h)_q = (gradh)_q \in \mathcal{V}_q^{\perp} = \mathcal{H}_q \oplus (T_qN)^{\perp} \qquad \forall q \in N.$$

Recordemos que $T_qN = E(q) = span\{X_f(q) : f \in \mathcal{C}^{\infty}(M)^G\}$, pues N es subvariedad integral de la distribución característica E. Entonces:

$$J(T_qN) \subset \mathcal{H}_q \oplus (T_qN)^{\perp} \qquad \forall q \in N$$

$$\Rightarrow J(\mathcal{H}_q \oplus \mathcal{V}_q) \subset \mathcal{H}_q \oplus (T_qN)^{\perp} \qquad \forall q \in N.$$

Como mencionamos antes, sabemos que $\mathcal{V}$ está generado por los campos infinitesimales $(\xi_1)_N, \dots, (\xi_k)_N$ con $\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ base de $\mathfrak{g}_\rho$; por lo tanto $dim\, \mathcal{V}_q = dim\, G_\rho$ y por hipótesis tenemos $dim\ G_\rho = codim\ \mathcal{J}^{-1}(\rho)$, donde $codim\ \mathcal{J}^{-1}(\rho) = dim\ M - dim\ N = dim\ M - dim\, T_qN = dim\ (T_qN)^{\perp}$, $\forall q \in N$. Luego $dim\, \mathcal{V}_q = dim\ (T_qN)^{\perp}$. Entonces

$$J(T_qN) = J(\mathcal{H}_q \oplus \mathcal{V}_q) = \mathcal{H}_q \oplus (T_qN)^{\perp} \qquad \forall q \in N. \tag{4.13}$$

$J((T_qN)^{\perp}) \perp J(T_qN) \implies J((T_qN)^{\perp}) \subset V_q$, por igualdad de dimensiones $J((T_qN)^{\perp}) = V_q$. Luego $(T_qN)^{\perp} = J(V_q)$, entonces de la ecuación (4.13) podemos concluir que $J\mathcal{H} = \mathcal{H}$.

Definimos J_ρ en TM_ρ de forma que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \xrightarrow{J} & \mathcal{H} \\ {\scriptstyle d\pi_\rho}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d\pi_\rho} \\ TM_\rho & \xrightarrow{J_\rho} & TM_\rho \end{array}$$

es decir

$$(d\pi \circ J)|_{\mathcal{H}} = (J_\rho \circ d\pi)|_{\mathcal{H}} \tag{4.14}$$

(M, g, J) es Kähler entonces $\nabla_X J = J\nabla_X$ ($\nabla J = 0$). Como J es ortogonal y preserva $\mathcal{H}$, entonces J conmuta con $\rho_{\mathcal{H}}$ (proyección ortogonal sobre $\mathcal{H}$),luego J conmuta con $\nabla^{\mathcal{H}}$ (conexión de Levi-Civita en $\mathcal{H}$ definida en (4.2)). De las ecuaciones (4.4) y (4.14) se puede concluir que $\bar{\nabla}_X J_\rho = J_\rho \bar{\nabla}_X$, donde $\bar{\nabla}$ es la conexión de Levi-Civita en $N//G_\rho$, luego $\bar{\nabla} J_\rho = 0$, entonces por el Teorema 1.5 J_ρ es integrable y (M_ρ, h, J_ρ) es variedad Kähler.

Falta probar que la forma de Kähler de (M_ρ, h, J_ρ) coincide con ω_ρ.

$$h(J_\rho(d\pi X), d\pi Y) = h(d\pi(JX), d\pi Y) = g(JX, Y) = \omega(X, Y)$$

□

5. Reducción Óptima de variedades hiperkähler

5.1. Cociente hiperkähler clásico.

La construcción del cociente hiperkähler fue desarrollada por Hitchin, Karlhede, Lindström y Roček en [HKLR]. La misma está inspirada en el método de reducción simpléctica de Marsden-Weinstein (ver Teorema 1.10). Este método ha sido utilizado con éxito para construir métricas hiperkähler de interés en física (ver, por ejemplo, [Kron1, Kron2]).

En esta sección haremos un repaso de la construcción del cociente hiperkähler clásico, para luego poder compararla con la construcción del cociente hiperkähler óptimo.

Comenzamos con $(M, \langle , \rangle, I, J, K)$ una variedad hiperkähler, G un grupo de Lie compacto, G actúa en M preservando la estructura hiperkähler, o sea, G actúa por isometrías y difeomofismos holomorfos con respecto a las tres estructuras complejas. En particular, la acción de G preserva las formas de Kähler $\omega_I, \omega_J, \omega_K$.
Cuando cada una de las tres estructuras simplécticas admite una aplicación momento estándar, se pueden combinar las tres en una aplicación momento estándar hiperkähler, definida por

$$\begin{array}{cccc} \mu: & M & \longrightarrow & \mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{R}^3 \\ & m & \longmapsto & i\mu_I(m) + j\mu_J(m) + k\mu_K(m) \end{array} \tag{5.1}$$

donde μ_I, μ_J, μ_K son las aplicaciones momento estándar simplécticas asociadas a $\omega_I, \omega_J, \omega_K$, respectivamente. La métrica hiperkähler en M induce una métrica riemanniana en la variedad $\mu^{-1}(0)/G$ que resulta hiperkähler.

Teorema 5.1 ([HKLR, Theorem 3.2]). *La métrica en el cociente $\mu^{-1}(0)/G$ es hiperkähler.*

Idea de la demostración. Dada la aplicación momento μ como en (5.1), sea g la métrica inducida por $\langle , \rangle$ en $\mu^{-1}(0)/G$. Se comienza fijando una estructura compleja, digamos I, con forma de Kähler ω_I, y se define

$$\mu_+ = \mu_J + i\mu_K : M \to \mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{C}.$$

La aplicación μ_+ resulta holomorfa con respecto a I. La variedad

$$N = \mu_+^{-1}(0) = \mu_J^{-1}(0) \cap \mu_K^{-1}(0)$$

es subvariedad compleja de M con respecto a I y la métrica inducida en N es Kähler. El grupo G actúa en N preservando la forma de Kähler, y la aplicación momento para la acción de G en N es $\mu_I|_N$. Por el Teorema 4.2, la métrica g en $\mu_I^{-1}(0) \cap \mu_+^{-1}(0)/G = \mu^{-1}(0)/G$ es Kähler con respecto a I. Análogamente se demuestra que g es Kähler con respecto a J y K, por lo tanto g es hiperkähler. □

Esta reducción no sólo se puede realizar en el punto $0 \in \mathfrak{g}^*$, si tomamos $\lambda_i \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^*)$ (centro de $\mathfrak{g}^*$), y si $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ es un valor regular de μ y la acción de G sobre $\mu^{-1}(\bar{\lambda})$ es libre y propia, entonces el cociente $\mu^{-1}(\bar{\lambda})/G$ es hiperkähler ([HKLR]).

Observación 5.1. (ver [D])

1. Para poder construir el cociente hiperkähler clásico se necesita que exista la aplicación momento, es decir, que cada una de las tres estructuras simplécticas admita una aplicación momento estándar. Una condición suficiente para la existencia de la aplicación momento es que G sea semisimple, pero esta condición no es necesaria.

2. Si la acción de G en $\mu^{-1}(\bar{\lambda})$ es libre, entonces automáticamente $\bar{\lambda}$ es un valor regular de la aplicación momento μ. En este caso la dimensión del cociente es $dim\, M - 4dim\, G$.

3. Aunque la construcción del cociente hiperkähler es una poderosa herramienta para probar la existencia de métricas hiperkähler, dar la expresión explícita de dichas métricas puede ser muy difícil.

5.2. Cociente hiperkähler óptimo.

En esta sección mostraremos cómo es posible generalizar el método de reducción óptima al caso de las variedades hiperkähler. Al igual que en el caso de las variedades simplécticas y las variedades Kähler, la aplicación momento óptimo siempre podrá ser definida, a diferencia de la aplicación momento estándar, ver por ejemplo la Observación 5.1.

Sea $(M, \langle , \rangle, J_1, J_2, J_3)$ una variedad hiperkähler, G un grupo de Lie compacto y

$$\begin{array}{rccc} \phi : & G \times M & \longrightarrow & M \\ & (g, m) & \longmapsto & g \cdot m \end{array}$$

una acción canónica, es decir G actúa sobre M por difeomorfismos que preservan la estructura hiperkähler de M.

Recordemos que $(M, \langle , \rangle, J_\alpha)$ es una variedad Kähler para cada $\alpha = 1, 2, 3$. A partir de la métrica g para cada estructura compleja J_α tenemos la 2-forma de Kähler (forma simpléctica)

$$\omega_\alpha(X, Y) = \langle J_\alpha X, Y \rangle$$

y como vimos en la ecuación (2.1), en cada caso podemos definir la distribución característica

$$E_\alpha := span\{X_f^\alpha | f \in \mathcal{C}^\infty(U)^G, con\ U \subset M\ abierto\ G - invariante\} \qquad \alpha = 1, 2, 3, \tag{5.2}$$

donde X_f^α es el campo Hamiltoniano con respecto a la estructura simpléctica ω_α, asociado a la función f, i.e. $\iota_{X_f^\alpha} \omega_\alpha = df$.

Si consideramos la intersección de las tres distribuciones características E_1, E_2 y E_3, obtenemos una nueva distribución generalizada diferenciable en M que resulta integrable, por ser intersección de distribuciones generalizadas integrables.

Definición 5.1. *Dada $(M, \langle,\rangle, J_1, J_2, J_3)$ una variedad hiperkähler, G un grupo de Lie y $\phi : G \times M \longrightarrow M$ una acción cánonica, llamaremos aplicación momento óptimo hiperkähler asociado a ϕ a la proyección canónica:*

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{J}: & M & \longrightarrow & M/(E_1 \cap E_2 \cap E_3) \\ & m & \longmapsto & \rho \end{array} \tag{5.3}$$

donde ρ es la subvariedad integral maximal en M de la distribución $E_1 \cap E_2 \cap E_3$, que contiene a m.

Observación 5.2. $\mathcal{J}^{-1}(\rho) = \rho \subset M$, donde en el primer miembro vemos a ρ como hoja de la foliación generalizada de M definida por $E_1 \cap E_2 \cap E_3$, y en el segundo miembro vemos a ρ como subvariedad de M.

Definimos la siguiente acción:

$$\begin{array}{rlcl} \Psi: & G \times M/(E_1 \cap E_2 \cap E_3) & \longrightarrow & M/(E_1 \cap E_2 \cap E_3) \\ & (g, \rho) & \longmapsto & \Psi_g(\rho) := \mathcal{J}(\phi_g(m)) \end{array} \tag{5.4}$$

donde $m \in M$ tal que $\mathcal{J}(m) = \rho$.
Luego, la aplicación momento $\mathcal{J}$ es equivariante con respecto a ϕ y Ψ_α:

$$\Psi_g(\mathcal{J}(m)) = \Psi_g(\rho) = \mathcal{J}(\phi_g(m)).$$

Dado $\rho \in M/(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$, sea G_ρ el subgrupo de isotropía en ρ con respecto a la acción Ψ definida en (5.4), o sea

$$\begin{aligned} G_\rho &= \{g \in G | \Psi_g(\rho) = \rho\} \\ &= \{g \in G | \mathcal{J}(g \cdot m) = \rho \ \ para\, todo\, m \in \mathcal{J}^{-1}(\rho)\} \\ &= \{g \in G | g \cdot m \in \rho \ \ para\, todo\, m \in \mathcal{J}^{-1}(\rho)\} \end{aligned}$$

Teorema 5.2 (**Reducción óptima hiperkähler**). *Sea $(M, \langle,\rangle, J_1, J_2, J_3)$ una variedad hiperkähler, G grupo de Lie compacto, $\phi : G \times M \longrightarrow M$ una acción canónica y $\mathcal{J} : M \longrightarrow M/(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$ la aplicación momento óptimo hiperkähler asociada a ϕ. Entonces para todo $\rho \in M/(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$ que satisfaga las condiciones del Teorema 4.3, $M_\rho := \mathcal{J}^{-1}(\rho)/G_\rho$ es una variedad hiperkähler.*

Demostración. Sea $\rho \in M/(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$, tomamos $m \in M$ tal que $\mathcal{J}(m) = \rho$.

Definimos la aplicación

$$\mathcal{J}_{23} : M \longrightarrow M/(E_2 \cap E_3)$$

como la proyección canónica de M sobre el espacio de subvariedades integrales maximales en M de la distribución $E_2 \cap E_3$.

Sea $\rho_{23} := \mathcal{J}_{23}(m)$.

Definimos $N := \mathcal{J}^{-1}(\rho_{23})$, en realidad $N = \rho_{23}$ por Observación 5.2. Entonces N es la subvariedad integral maximal en M de la distribución $E_2 \cap E_3$, que pasa por m.

Observemos que $\rho \subset N$ y probemos que el espacio tangente a N resulta J_1-invariante. Tomamos $X \in \mathcal{X}(N)$, $X \in E_2 \cap E_3$, podemos suponer que existen $f, h \in \mathcal{C}^\infty(N)$ tales que $X = X_f^2 = X_h^3$. Luego

$$df = \omega_2(X, \cdot) = \langle J_2 X, \cdot \rangle = \langle J_3 J_1 X, \cdot \rangle = \omega_3(J_1 X, \cdot)$$

$$dh = \omega_3(X, \cdot) = \langle J_3 X, \cdot \rangle = \langle -J_2 J_1 X, \cdot \rangle = -\omega_2(J_1 X, \cdot)$$

Por lo tanto, $J_1 X = X_f^3 = X_{-h}^2$, entonces $J_1 X \in E_2 \cap E_3$.

Por lo tanto, J_1 induce una estructura compleja en N y, restringiendo la métrica $\langle , \rangle$ a N, tenemos que $(N, \langle ; \rangle_N, J_1)$ resulta una variedad Kähler. G actúa en N preservando la forma de Kähler, entonces podemos definir la aplicación momento óptimo para N, a la cual denotaremos $\mathcal{J}_N$:

$$\mathcal{J}_N : N \longrightarrow N/(E_1)_N$$

donde $(E_1)_N$ es la distribución generalizada E_1 restringida a N. Se tiene que $((E_1)_N)_p = (E_1 \cap E_2 \cap E_3)_p$ para todo $p \in N$. Entonces tenemos que:

$$\mathcal{J}_N : N \longrightarrow N/(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$$

Sea $\rho_1 = \mathcal{J}_N(m)$, o sea ρ_1 es la subvariedad integral maximal en N de la distribución $E_1 \cap E_2 \cap E_3$, que contiene a m, entonces $\mathcal{J}_N^{-1}(\rho_1) = \rho_1$.

Además tenemos que $\rho = \rho_1$, pues como observamos antes $\rho \subset N$, luego ρ es subvariedad integral de N que contiene a m y además era subvariedad integral maximal de $E_1 \cap E_2 \cap E_3$, que contenía a m. Entonces por unicidad de subvariedades integrales maximales (ver Teorema 1.12) se tiene $\rho = \rho_1$.
Luego $\mathcal{J}_N^{-1}(\rho_1) = \rho_1 = \rho = \mathcal{J}^{-1}(\rho)$, entonces

$$\mathcal{J}^{-1}{}_N(\rho_1)/G_{\rho_1} = \mathcal{J}^{-1}(\rho)/G_\rho \tag{5.5}$$

Aplicamos el Teorema 4.3 de reducción óptima Kähler a N en el elemento ρ_1 y tenemos que la métrica inducida por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en $\mathcal{J}^{-1}(\rho)/G_\rho$ es Kähler con respecto a J_1. Análogamente se demuestra que es Kähler con respecto a J_2 y J_3, por lo tanto $\mathcal{J}^{-1}(\rho)/G_\rho$ es una variedad hiperkähler.

□

Observación 5.3. Pedir que el grupo de Lie G sea compacto nos garantiza poder aplicar el teorema para todo $\rho \in M/(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$.

Observación 5.4. La principal diferencia entre el cociente Kähler óptimo y el hiperkähler óptimo es la aplicación momento que se utiliza para construir el cociente. En el caso Kähler utilizamos la misma aplicación momento óptimo que definieron Ortega y Ratiu [OR1] para la reducción simpléctica, mientras que en el caso hiperkähler nosotros tuvimos que introducir una aplicación momento distinta, que también difiere bastante de la utilizada en el cociente hiperkähler clásico.

Referencias

[ABDF] L.C. De Andrés, M.L. Barberis, I. Dotti, M. Fernández, *Hermitian structures on cotangent bundles of four dimensional solvable Lie groups*, Osaka Journal of Mathematics **44** (4) (2007) 765–793

[AM] R. Abraham, J.E.Marsden, *Foundations of Mechanics*. Second edition, Addison-Wesley. [1978]

[BDF] M.L. Barberis, I. Dotti, A. Fino, *Hyper-Kähler quotients of solvable Lie groups*, Journal of Geometry and Physics **54** (4) (2006), 691–711.

[Bea] A. Beauville, *Variétés Kähleriennes dont la l'ere classe de Chern est nulle*, J. Diff. Geom. 18, 755-782 (1983).

[B] A. Besse, *Einstein manifolds*, Springer Verlag, 1987.

[C] A. Cannas da Silva, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, 1764.

[D] A.S.Dancer, *Hyper-Kähler manifolds*, in Surveys in Differential Geometry VI: Essays on Einstein Manifolds, International Press (1999), 15-38.

[DS] A. Dancer, A. Swann, *Toric hypersymplectic quotients*, Journal Trans. Amer. Math. Soc. 359 (2007), 1265-1284.

[DC] M. Do Carmo, *Riemannian geometry*, Birkhäuser, 1992.

[H] N. Hitchin, *Monopoles,minimal surfaces and algebraic curves*, Notas del curso, Univ. de Montreal, 1987.

[HKLR] N.J. Hitchin, A. Karlhede, U. Lindström, M. Roček, *Hyper-Kähler metrics and supersymmetry*, Commun. Math. Phys. **108** (1987), 535–589.

[H1] N.J. Hitchin, *Hypersymplectic quotients*, Acta Acad, Sci. Tauriensis 124 suppl. (1990), 169–180. (2003), 281–308.

[JR] M.Jotz, T.S.Ratiu, *Optimal Dirac reduction*, aparecerá en Ïnternational Mathematics Research Notices".

[K] A.W. Knapp, *Lie groups, Lie algebras, and cohomology*, Princeton University, 1988.

[KN] S.Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, vol. I, II, Intersciense, New York, 1963.

[Kron1] P. Kronheimer, *The construction of ALE spaces as hyper-Kähler quotients*, J. Diff. Geometry **29** (1989),665–683.

[Kron2] P. Kronheimer, *A Torelli type theorem for gravitational instantons*, J. Diff. Geometry **29** (1989),685–697.

[M] A. Mal'cev, *On a class of homogeneous spaces*, reprinted in Amer. Math. Soc. Trans. Ser. 1 **9** (1962), 276–307.

[Ma] Y. Matsushima, *Differentiable Manifolds*, Pure and Applied Mathematics 9. Marcel Dekker, 1972.

[MO] R.J. Miatello, C.E. Olmos, *Geometría de espacios fibrados*, Serie "B", Trabajos de Matemática n^{o}4 , FaMAF, UNC , 1990.

[MW] J.E Marsden, A. Weinstein, *Reduction of symplectic manifolds with symmetry*, Rep. Math. Phys. 5 (1) (1974), 121–130.

[NN] A. Newlander, L. Nirenberg, *Complex analytic coordinates in almost complex manifolds*, Ann. of Math. 65 (1956), 20-63.

[O] J.-P. Ortega, *The symplectic reduced spaces of a Poisson action*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 999–1004.

[OR1] J.-P. Ortega, T.S. Ratiu, *The optimal momentum map*, Geometry, Dynamics, and Mechanics: 60th Birthday Volume for J.E. Marsden. P. Holmes, P. Newton, and A. Weinstein, eds., Springer-Verlag, New York, 2002.

[OR2] J.-P. Ortega, T.S. Ratiu, *Momentum maps and hamiltonian reduction*, Prog. Math. 222, Boston: Birkhäuser-Verlag (2004).

[OR3] J.-P. Ortega, T.S. Ratiu, *The reduced spaces of a symplectic Lie group action*, Annals of Global Analysis and Geometry **30** (4) (2006), 335–381.

[S1] P. Stefan, *Accesibility and foliations with singularities*, Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974) 1142-1145.

[S2] P. Stefan, *Accesible sets, orbits and foliations with singularities*, Proc. London Math. Soc. 29 (1974) 699-713.

[S3] H. Sussman, *Orbits of families of vector fields and integrability of distributions*, Trans. Amer. Math. Soc. 180 (1973) 171-188.

[SL] R. Sjamaar, E. Lerman, *Stratified symplectic spaces and reduction*, Ann. of Math. 134 (1991), 375–422.

[T] W. Thurston, *Some simple examples of symplectic manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **55** (1976), 467–468.

[W] A. Weinstein, The local structure of Poisson manifolds, J.Differential Geom.18(3) (1983), 523-557.