Resumen

Por el Teorema de Ado se sabe que toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión finita sobre un cuerpo k de característica cero admite una representación fiel de dimensión finita. Esto da origen al problema de calcular

$$\mu(\mathfrak{g}) = \text{mín}\{\dim V : (\pi, V) \text{ es una representación fiel de } \mathfrak{g}\}.$$

En general, no es sencillo de resolver este problema para un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ dada y tampoco lo es obtener cotas óptimas para $\mu(\mathfrak{g})$ con $\mathfrak{g}$ dentro de alguna familia dada.

Los principales aportes de esta tesis son los siguientes resultados:

- Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie k-pasos nilpotente tal que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ entonces

$$\left\lceil \sqrt{2\frac{k+1}{k}\dim \mathfrak{g}} \right\rceil \leq \mu(\mathfrak{g}). \tag{1}$$

  Además, si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie 2-pasos nilpotente y $\mathfrak{a}$ una subálgebra abeliana de $\mathfrak{g}$ de codimensión d tal que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{a}$ entonces $\mu(\mathfrak{g}) \leq \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) + d + 1$.

  Como una consecuencia de la ecuación (1) se obtiene que si $\mathfrak{g}_k$ es el álgebra de Lie k-pasos nilpotente sobre un cuerpo k definida

$$\mathfrak{g}_k = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1k+1} \\ & 0 & A_{23} & \dots & A_{2k+1} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & 0 & & & A_{kk+1} \\ & & & & 0 \end{pmatrix} : A_{ij} \in M_a(\mathrm{k}) \text{ para } 1 \leq i < j \leq k+1 \right\}$$

  entonces $\mu(\mathfrak{g}_k) = (k+1)a$.

- Según la clasificación de las algebras de Lie nilpotentes complejas de dimensión 6 dada por De Graaf, el valor de μ es

Clasificación de De Graaf	$\mu(\mathfrak{g})$	$\mu_{nil}(\mathfrak{g})$
$L_{6,19}(\epsilon)$ con $\epsilon \neq 0$	4	4
$L_{6,3}$, $L_{6,4}$, $L_{6,5}$, $L_{6,8}$	4	5
$L_{6,1}$, $L_{6,2}$, $L_{6,6}$, $L_{6,7}$, $L_{6,10}$, $L_{6,11}$, $L_{6,12}$, $L_{6,13}$, $L_{6,19}(0)$, $L_{6,20}$, $L_{6,21}(\epsilon)$ $L_{6,22}(\epsilon)$, $L_{6,23}$, $L_{6,24}(\epsilon)$, $L_{6,25}$, $L_{6,26}$	5	5
$L_{6,9}$	5	6
$L_{6,14}$, $L_{6,15}$, $L_{6,16}$, $L_{6,17}$, $L_{6,18}$	6	6

  donde $\mu_{nil}(\mathfrak{g}) = \text{mín}\{\dim V : (\pi, V) \text{ es una nilrepresentación fiel de } \mathfrak{g}\}$.

- Sea $\mathfrak{h}_m$ el álgebra de Lie de Heisenberg sobre un cuerpo k de dimensión $2m+1$. Definimos el álgebra de Lie $\mathfrak{h}_{m,p}$ como el k-espacio vectorial

$$\mathfrak{h}_{m,p} = \mathfrak{h}_m \otimes \mathrm{k}[t]/(p)$$

con la estructura de álgebra de Lie dada por $[X \otimes a, Y \otimes b] = [X, Y] \otimes ab$ con $X, Y \in \mathfrak{h}_m$ y $a, b \in \mathrm{k}[t]/(p)$. Entonces para todo $m \in \mathbb{N}$ y todo polinomio no nulo $p \in \mathrm{k}[t]$ se tiene que

$$\mu\big(\mathfrak{h}_m \otimes \mathrm{k}[t]/(p)\big) = m \deg p + \left\lceil 2\sqrt{\deg p}\right\rceil .$$

- Sean $r \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{L}(r)$ el álgebra de Lie 2-pasos nilpotente libre de r generadores. Entonces

  a) si $r \geq 4$ entonces $2 + \left\lceil 2\sqrt{\frac{r(r-1)}{2}}\right\rceil \leq \mu(\mathcal{L}(r)) \leq r + \left\lceil \frac{r}{2}\right\rceil + 1$;

  b) si $r = 1, 2, 3$ entonces $\mu(\mathcal{L}(r)) = 2r - 1$.

Palabras Claves: álgebra de Lie, representación fiel, nilrepresentación fiel, mínima dimensión, Teorema de Ado.

2010 Mathematics subject Clasification: 15A03, 15A18, 17B10, 17B30, 17B70