Variedades con Congruencias Factor Ecuacionalmente Definibles

por Mariana Badano

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía y Física como parte de los requerimientos para la obtención del grado de Doctor en Matemática de la

Universidad Nacional de Córdoba

Julio de 2012

Director: Diego Vaggione

©FaMAF - UNC 2012

Resumen

En una variedad con constantes distintas 0 y 1 los elementos $(0, 1)$ y $(1, 0)$ en un producto de álgebras de la variedad son *elementos centrales* y están directamente relacionados con las congruencias factor. Una variedad tiene *congruencias factor definibles* si existe una fórmula de primer orden que define cada congruencia factor en términos de uno o ambos elementos centrales asociados. En este trabajo estudiamos el caso en que esta fórmula es una conjunción de ecuaciones. El resultado principal de esta tesis es la obtención de una fórmula explícita que define una congruencia factor en términos de un elemento central para el caso en que existe definibilidad ecuacional respecto del par de elementos centrales complementarios asociado. La fórmula obtenida es una conjunción de cuasi-identidades y es óptima, en el sentido de que hay una variedad para la que no existe una fórmula positiva ni existencial que defina las congruencias factor en términos de un único elemento central asociado. También se encuentra una fórmula ecuacional explícita para variedades con congruencias modulares en función de los términos de Gumm [8] y se obtiene como corolario una fórmula para variedades con congruencias distributivas vía los términos de Jónsson [9]. Por último se presenta una axiomatización del conjunto de elementos centrales con fórmulas $(\forall\exists \bigwedge p \approx q)$ para variedades con congruencias distributivas.

Palabras clave: Congruencias factor, Elemento central, Definibilidad.
Mathematics Subject Classification (2010): 03C05, 03C40.

Abstract

In a variety with distinct constants 0 & 1 the elements $(0,1)$ and $(1,0)$ in a product of algebras in the variety are *central elements* and they are directly related to the factor congruences. A variety has *definable factor congruences* if there is a first order formula which defines every factor congruence in terms of one or both associated central elements. In this work we study the case when this formula is a conjunction of equations. The main result of this thesis is the obtention of an explicit formula which defines every factor congruence in terms of a single central element under the hypothesis of equational definability in terms of both central elements. The obtained formula is a conjunction of quasi-identities and it is optimal, in the sense that there is a variety for which there is no positive nor existential formula defining factor congruences in terms of a single central element. We also find an explicit equational formula for congruence modular varieties by means of the terms given by Gumm [8] and as a corollary we obtain a formula for congruence distributive varieties by means of the terms given by Jónsson [9]. Finally we present an axiomatization for the set of central elements by $(\forall\exists \bigwedge p \approx q)$-formulas for congruence distributive varieties.

Key words: Factor congruences, Central Element, Definability.
Mathematics Subject Classification (2010): 03C05, 03C40.

Índice general

Introdución

El estudio de las congruencias factor es de especial interés por su rol en la representación de álgebras en producto directo en una variedad. Si consideramos variedades con constantes 0 y 1 como los reticulados acotados y los anillos con identidad, hay elementos distinguidos que juegan un papel crucial en esta descomposición. Consideremos $\mathbf{I} = \langle I, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ un reticulado distributivo y $e_1, e_2 \in I$ un par de elementos complementarios, i.e. $e_1 \wedge e_2 = 0$ y $e_1 \vee e_2 = 1$. Sean $I_i = \{a \vee e_i : a \in I\}$ y $\mathbf{I}_i = \langle I_i, \wedge|_{I_i}, \vee|_{I_i}, e_i, 1\rangle$, con $i = 1, 2$. El mapeo $\tau : \mathbf{I} \to \mathbf{I}_1 \times \mathbf{I}_2$, definido por $\tau(x) = (x \vee e_1, x \vee e_2)$ es un isomorfismo que mapea $e_1 \mapsto (0^{I_1}, 1^{I_2})$ y $e_2 \mapsto (1^{I_1}, 0^{I_2})$. Más aún, si π_1 y π_2 son las respectivas proyecciones canónicas entonces

$$(x, y) \in ker(\pi_i \circ \tau) \text{ sii } x \vee e_i = y \vee e_i$$

Tenemos así que en un reticulado distributivo la existencia de elementos complementados garantiza la existencia de una descomposición en producto directo; y la pertenencia a las congruencias factor asociadas es definible por fórmulas en primer orden en función de estos elementos. Algo similar sucede en el caso de los anillos con identidad y los elementos centrales idempotentes. Esto motivó el desarrollo de una generalización de las condiciones mencionadas. Decimos que $\mathcal{V}$ es una *variedad con* $\vec{0}$ *y* $\vec{1}$[1] si existen términos 0-arios 0 y 1 tales que

$$\mathcal{V} \vDash 0 \approx 1 \to x \approx y$$

Si $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$, decimos que $e \in A$ es un *elemento central* de $\mathbf{A}$ si existe un isomorfismo $\tau : \mathbf{A} \to \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2$ tal que $e \mapsto (0, 1)$. Decimos que e y $f \in A$ son un *par de elementos centrales complementarios* de $\mathbf{A}$ si existe un isomorfismo $\tau : \mathbf{A} \to \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2$ tal que $e \mapsto (0, 1)$ y $f \mapsto (1, 0)$. Desde luego, el isomorfismo τ no es necesariamente único, más aún, en el caso general el par e, f de elementos centrales complementarios no

[1]En el Capítulo 1 se dará una definición más general de *variedad con* $\vec{0}$ *y* $\vec{1}$ en la que $\vec{0} = (0_1, .., 0_n)$ y $\vec{1} = (1_1, ..., 1_n)$ para algún n arbitrario.

determina el par $(\ker(\pi_1 \circ \tau), \ker(\pi_2 \circ \tau))$ de congruencias factor complementarias. En el caso afirmativo llamamos a esta propiedad la *propiedad de determinación* (PD):

(1) Para cada par e, f de elementos centrales complementarios existe un único par (θ, δ) de congruencias factor complementarias tales que

$$\begin{array}{c} e \equiv 0(\theta) \text{ y } e \equiv 1(\delta) \\ f \equiv 1(\theta) \text{ y } f \equiv 0(\delta) \end{array}$$

PD es, en cierto sentido, la condición más general necesaria para garantizar que los elementos centrales tienen toda la información de la descomposición en producto directo en una variedad. Notemos que PD es implicada por la siguiente condición de definibilidad:

(2) Existe una fórmula de primer orden $\varphi = \varphi(z, w, x, y)$ tal que para cada $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{V}$,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \models \varphi((0,1),(1,0),(a,b),(a',b')) \text{ sii } a = a'$$

Más aún, con una simple aplicación del Teorema de definibilidad de Beth podemos demostrar la implicación (1)⇒(2). Una forma más fuerte de PD es la siguiente:

(3) Un elemento central e determina un único par (θ, δ) de congruencias factor complementarias que satisfacen

$$e \equiv 0(\theta) \text{ y } e \equiv 1(\delta)$$

Esta propiedad es claramente implicada por el siguiente fortalecimiento de la propiedad (2):

(4) Existen fórmulas de primer orden $\psi_0 = \psi_0(z, x, y)$ y $\psi_1 = \psi_1(z, x, y)$ tales que para cada $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{V}$

$$\begin{array}{c} \mathbf{A} \times \mathbf{B} \models \psi_0((0,1),(a,b),(a',b')) \text{ sii } a = a' \\ \mathbf{A} \times \mathbf{B} \models \psi_1((0,1),(a,b),(a',b')) \text{ sii } b = b' \end{array}$$

Desde luego, (4) es la propiedad más característica de los elementos centrales en los ejemplos clásicos mencionados. Para reticulados acotados tenemos

$$\begin{array}{c} \psi_0 = x \vee z \approx y \vee z \\ \psi_1 = x \wedge z \approx y \wedge z \end{array}$$

y para anillos con identidad

$$\begin{array}{l} \psi_0 = x \cdot (1 - z) \approx y \cdot (1 - z) \\ \psi_1 = x \cdot z \approx y \cdot z \end{array}$$

En [12] Sanchez Terraf y Vaggione demostraron que las propiedades (1), (2), (3) y (4) son todas equivalentes a

(5) $\mathcal{V}$ tiene *congruencias factor booleanas* (CFB), i.e. el conjunto de congruencias factor de cualquier álgebra en $\mathcal{V}$ es un subreticulado distributivo de su reticulado de congruencias.

En este trabajo nos planteamos dos objetivos principales:

1. Si $\mathcal{V}$ es una variedad para la que existe una fórmula φ que es una conjunción de ecuaciones y satisface las condiciones en (2), nos proponemos encontrar una fórmula ψ_0 que satisfaga las condiciones en (4) con la menor complejidad posible, entendiendo por complejidad de una fórmula la cantidad de bloques alternados de cuantificadores existenciales y universales que contiene. Como un primer acercamiento al problema consideramos la hipótesis más fuerte de una fórmula ecuacional ψ_1 que satisfaga las condiciones en (4).

2. Para una variedad $\mathcal{V}$ con congruencias modulares Vaggione [14] demostró la existencia de una fórmula ecuacional ψ_0 que satisface las condiciones en (4), nos proponemos encontrar explícitamente una fórmula con estas características por medio de los términos de Gumm [8]. En el mismo trabajo se probó la existencia de un conjunto Σ de fórmulas $(\forall\exists \bigwedge p \approx q)$ que defina el conjunto de elementos centrales en $\mathcal{V}$, es decir, para cada $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ y cada $e \in A$,

$$e \text{ es un elemento central en } \mathbf{A} \text{ si y sólo si } \mathbf{A} \models \Sigma(e)$$

Buscaremos un conjunto con dichas propiedades para el caso particular de variedades con congruencias distributivas basándonos en un argumento utilizado en la demostración del Teorema de Base Finita de Baker [1].

La diagramación de esta Tesis es la siguiente:

En la Sección 1.1 introducimos herramientas básicas del álgebra universal y fijamos la notación utilizada. En la Sección 1.2 exponemos definiciones y resultados más específicos relacionados con el estudio de los elementos centrales.

En el Capítulo 2 estudiamos la definibilidad de las operaciones en el álgebra de Boole de elementos centrales. En la Sección 2.2 analizamos la definibilidad del complemento, el ínfimo y el supremo entre elementos centrales para ciertas variedades con definibilidad ecuacional de las congruencias factor y que poseen además la propiedad de Fraser-Horn. En la Sección 2.3 se encuentra una fórmula que define el complemento de un elemento central, para cualquier estructura de la fórmula φ que satisface (4), y se obtiene como corolario una definición por quasi-identidades del complemento de un elemento central para el caso en que la fórmula φ es una conjunción de ecuaciones.

En el Capítulo 3 se analiza la definibilidad de las congruencias factor. En la Sección 3.1 se resuelve la primera parte del segundo objetivo propuesto. En las Secciones 3.2 y 3.3 se presentan los resultados relacionados con el primer objetivo; y en la Sección 3.4 se muestra una generalización para cualquier hipótesis de definibilidad en términos de ambos elementos centrales.

En el Capítulo 4 estudiamos la definibilidad del conjunto de elementos centrales. En la Sección 4.1 encontramos explícitamente un conjunto de fórmulas de la forma $\forall\exists \bigwedge p \approx q$ que define el conjunto de elementos centrales para variedades con congruencias distributivas, lo que resuelve la segunda etapa del segundo objetivo. En la Sección 4.2 utilizamos las fórmulas que definen el conjunto de elementos centrales para obtener una definición por fórmulas de congruencias principales para el conjunto de aquellos elementos g tales que $\theta(0, g) \cap \theta(1, g) = \Delta$. Por último, en la Sección 4.3 mostramos un ejemplo de una variedad localmente finita, semisimple y aritmética, para la que el conjunto de elementos centrales no es definible por un conjunto finito de fórmulas.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Herramientas del Álgebra Universal

En esta sección presentamos algunas definiciones básicas y fijamos la notación usada a lo largo de este trabajo. Supondremos que el lector está familiarizado con los conceptos básicos de la lógica y el álgebra universal. Para un desarrollo completo de los temas involucrados se pueden consultar los libros *Model Theory* de C. C. Chang y H. J. Keisler [5] y *A course in Universal Algebra* de S. Burris y H. Sankappanavar [4].

Un *lenguaje* (o *tipo*) de álgebras es un lenguaje de primer orden (con igualdad) sin símbolos de relación, es decir un conjunto $\mathcal{F}$ de *símbolos de función* tales que a cada miembro f de $\mathcal{F}$ es asignado un entero no negativo n. Este entero es llamado *aridad* de f y decimos que f es un *símbolo de función n-ario*. Para el caso de un símbolo de función 0-ario lo llamaremos también *símbolo de constante*. El conjunto de los símbolos de función n-arios en $\mathcal{F}$ es denotado por $\mathcal{F}_n$. Dado X un conjunto de objetos, llamados *variables*, y un tipo de álgebras $\mathcal{F}$, denotamos por $T(X)$ al conjunto de *términos de tipo $\mathcal{F}$* sobre X. Para un término $p \in T(X)$ escribiremos $p(x_1, \ldots, x_n)$ (abreviadamente $p(\vec{x})$) para indicar que las variables que *ocurren* en p están entre $x_1, \ldots, x_n$. Un término es n-ario si el número de variables que aparecen explícitamente en p es $\leq n$.

Para un conjunto dado A una *operación n-aria* en A es cualquier función de A^n en A. Así, si $\mathcal{F}$ es un lenguaje de álgebras entonces un *álgebra* $\mathbf{A}$ de tipo $\mathcal{F}$ es un par ordenado $\langle A, F\rangle$ donde A es un conjunto no vacío y F es una familia de operaciones en A indexadas por el lenguaje $\mathcal{F}$ tal que a cada símbolo de función n-ario f en $\mathcal{F}$ le corresponde una operación n-aria $f^{\mathbf{A}}$ en A. El conjunto A es llamado *universo* de

$\mathbf{A} = \langle A, F\rangle$ y las $f^{\mathbf{A}}$ son llamadas *operaciones fundamentales* de $\mathbf{A}$. (En la práctica escribiremos simplemente f para $f^{\mathbf{A}}$ siempre que no dé lugar a confusión). Si $\mathcal{F}$ es finito, digamos $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_k\}$, escribimos $\langle A, f_1, \ldots, f_k\rangle$ en lugar de $\langle A, F\rangle$. Dado un término $p \in T(X)$ denotamos por $p^{\mathbf{A}}$ a la operación correspondiente en el álgebra $\mathbf{A}$. Un álgebra $\mathbf{A}$ es *finita* si $|A|$ es finito y es *trivial* si $|A| = 1$.

Dadas dos álgebras $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ del mismo tipo $\mathcal{F}$ diremos que una función $\alpha : A \to B$ es un *homomorfismo* de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ si

$$\alpha(f(a_1, \ldots, a_n)) = f(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n))$$

para cada símbolo de función n-ario f en $\mathcal{F}$ y cada $a_1, \ldots, a_n \in A$, y lo denotamos por $\alpha : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$. Si α es suryectiva decimos que es un *epimorfismo* y que $\mathbf{B}$ es *imágen homomórfica* de $\mathbf{A}$. Si α es inyectiva decimos que es un *monomorfismo*. Si α es biyectiva decimos que es un *isomorfismo* y que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son *isomorfos* ($\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$).

Dadas dos álgebras $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ del mismo tipo $\mathcal{F}$ decimos que $\mathbf{B}$ es una *subálgebra* de $\mathbf{A}$ si $B \subseteq A$ y para cada símbolo de función $f \in \mathcal{F}$, $f^{\mathbf{B}}$ es la restricción de $f^{\mathbf{A}}$ a B y lo simbolizamos $\mathbf{B} \leq \mathbf{A}$. Un *subuniverso* de $\mathbf{A}$ es un subconjunto B de A tal que para cada operación fundamental n-aria f de $\mathbf{A}$ y cada $a_1, \ldots, a_n \in B$ tenemos $f(a_1, \ldots, a_n) \in B$. Para un álgebra $\mathbf{A}$ y un subconjunto X de A llamamos $Sg^{\mathbf{A}}(X)$ al *subuniverso de* $\boldsymbol{A}$ *generado por* X.

Si $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$ son dos álgebras del mismo tipo $\mathcal{F}$ definimos el *producto (directo)* $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2$ como el álgebra cuyo universo es el conjunto $A_1 \times A_2$ y para cada $f \in \mathcal{F}_n$ y $a_i \in A_1$, $a'_i \in A_2$, $1 \leq i \leq n$,

$$f^{\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2}((a_1, a'_1), \ldots, (a_n, a'_n)) = (f^{\mathbf{A}_1}(a_1, \ldots, a_n), f^{\mathbf{A}_2}(a'_1, \ldots, a'_n))$$

El mapeo

$$\begin{aligned} \pi_i : A_1 \times A_2 &\to A_i \qquad\qquad i \in \{1, 2\} \\ (a_1, a_2) &\mapsto a_i. \end{aligned}$$

es llamado proyección canónica en la i-ésima coordenada de $A_1 \times A_2$. Para una familia de álgebras $\{\mathbf{A}_i\}_{i\in I}$ el producto directo $\mathbf{A} = \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$ es un álgebra con universo $\prod_{i\in I} A_i$ tal que para cada $f \in \mathcal{F}_n$ y $a_1, \ldots, a_n \in \prod_{i\in I} A_i$,

$$f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)(i) = f^{\mathbf{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i))$$

para cada $i \in I$. Como antes, tenemos proyecciones canónicas

$$\pi_j : \prod_{i\in I} A_i \to A_j$$

para cada $j \in I$ definidas por

$$\pi_j(a) = a(j)$$

Definición 1.1.1. Diremos que una clase de álgebras $\mathcal{V}$ es una *variedad* si es cerrada por imágenes homomórficas, subálgebras y productos directos.

Para una clase de álgebras $\mathcal{K}$ notaremos con $V(\mathcal{K})$ la variedad generada por $\mathcal{K}$. Llamaremos *identidad* a toda sentencia de la forma

$$\forall x_1, \ldots, x_n : p(x_1, \ldots, x_n) \approx q(x_1, \ldots, x_n)$$

que también notaremos por $p(x_1, \ldots, x_n) \approx q(x_1, \ldots, x_n)$. Dado una clase $\mathcal{K}$ de álgebras decimos que $\mathcal{K}$ es una *clase ecuacional* si es axiomatizable por un conjunto de identidades.

Teorema 1.1.1. (Birkhoff). *Una clase de álgebras $\mathcal{V}$ es una variedad si y sólo si es una clase ecuacional.*

Dada una variedad $\mathcal{V}$ y un conjunto de variables X denotaremos con $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)$ (o simplemente $\mathbf{F}(X)$) al álgebra $\mathcal{V}$-*libre* sobre X.

Si $\mathbf{A}$ es un álgebra de tipo $\mathcal{F}$ y θ es una relación de equivalencia en A diremos que θ es una *congruencia* de $\mathbf{A}$ si satisface la siguiente *propiedad de compatibilidad*: Para cada símbolo de función n-ario $f \in \mathcal{F}$ y cada $a_i, b_i \in A$, si $(a_i, b_i) \in \theta$ para $1 \leq i \leq n$ entonces

$$\big(f(a_1, \ldots, a_n), f(b_1, \ldots, b_n)\big) \in \theta.$$

La relación diagonal Δ^A en $\mathbf{A}$ es el conjunto $\{(a, a) : a \in A\}$ y la relación total A^2 es denotada por ∇^A. (Escribimos simplemente Δ y ∇ cuando no haya lugar a confusión). Claramente ambas relaciones son congruencias. El *conjunto de todas las congruencias* en un álgebra $\mathbf{A}$ es denotado por $Con(\mathbf{A})$. El *reticulado de congruencias* de $\mathbf{A}$, denotado por $\mathbf{Con}(\mathbf{A})$, es el reticulado cuyo universo es $Con(\mathbf{A})$ y el ínfimo y el supremo se calculan de la misma forma que para relaciones de equivalencia. Decimos que $\mathbf{A}$ tiene *congruencias distributivas* si $\mathbf{Con}(\mathbf{A})$ es un reticulado distributivo y decimos que $\mathbf{A}$ tiene *congruencias modulares* si $\mathbf{Con}(\mathbf{A})$ es un reticulado modular. Si θ_1, $\theta_2 \in Con(\mathbf{A})$ decimo que θ_1 y θ_2 *permutan* si y sólo si

$$\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$$

y $\mathbf{A}$ tiene *congruencias permutables* si cada par de congruencias de $\mathbf{A}$ permutan. Diremos que una variedad tiene congruencias distributivas, congruencias modulares o congruencias permutables si toda álgebra de la variedad tiene respectivamente congruencias distributivas, congruencias modulares o congruencias permutables.

Dada un álgebra $\mathbf{A}$ y una congruencia $\theta \in Con(\mathbf{A})$, el *álgebra cociente* de $\mathbf{A}$ por θ, que denotamos por $\mathbf{A}/\theta$, es el álgebra cuyo universo es A/θ y cuyas operaciones fundamentales satisfacen

$$f^{\mathbf{A}/\theta}(a_1/\theta, \dots, a_n/\theta) = f^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n)/\theta$$

donde $a_1, \dots, a_n \in A$ y f es un símbolo de función n-ario en $\mathcal{F}$.

Dados dos elementos $a, b \in A$ simbolizamos con $\theta^{\mathbf{A}}(a, b)$ a la menor congruencia en $\mathbf{A}$ que contiene al par (a, b). Decimos que $\theta^{\mathbf{A}}(a, b)$ es una *congruencia principal*. Si $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \in A$ denotamos por $\theta(\vec{a}, \vec{b})$ la congruencia $\bigvee_{i=1}^{n} \theta(a_i, b_i)$ y decimos que es una *congruencia compacta*.

La siguiente definición y el Lema que le sigue son la versión de Grätzer de la observación de Mal'cev sobre congruencias principales.

Definición 1.1.2. Una una fórmula $\pi(x, y, u, v)$ es una *fórmula de congruencia principal* (FCP) si existen k impar y términos t_i con $1 \leq i \leq k$ tales que $\pi(x, y, u, v) =$

$$\exists \vec{w} : x \approx t_1(u, \vec{w}) \wedge \bigwedge_{i \in I} t_i(v, \vec{w}) \approx t_{i+1}(v, \vec{w}) \wedge \bigwedge_{i \in P} t_i(u, \vec{w}) \approx t_{i+1}(u, \vec{w}) \wedge t_k(v, \vec{w}) \approx y$$

donde I es el conjunto de los i impares y P el conjunto de los i pares con $1 \leq i < k$.

Lema 1.1.2. (Mal'cev). *Sea $\boldsymbol{A}$ un álgebra y sean a, b, c, d elementos de A. Entonces $(a, b) \in \theta^{\boldsymbol{A}}(c, d)$ si y sólo si existe una fórmula de congruencia principal π tal que*

$$\boldsymbol{A} \models \pi(a, b, c, d).$$

Tanto la definición como el Lema anteriores pueden generalizarse para congruencias compactas.

Definición 1.1.3. Sea $\mathbf{A}$ un álgebra y δ_1, $\delta_2 \in Con(\mathbf{A})$. Decimos que δ_1 y δ_2 son un par de *congruencias factor complementarias* si y sólo si

$$\delta_1 \cap \delta_2 = \Delta^A$$

$$\delta_1 \circ \delta_2 = \nabla^A$$

y lo simbolizamos con $\delta_1 \diamond \delta_2$. A una congruencia δ_1 para la que existe una congruencia δ_2 que satisface las condiciones anteriores la llamamos *congruencia factor* y denotamos por $CF(\mathbf{A})$ al conjunto de todas las congruencias factor de $\mathbf{A}$.

Definición 1.1.4. Dados dos conjuntos A_1 y A_2 y una relación δ en $A_1 \times A_2$, decimos que δ *factoriza* si existen conjuntos $\delta_1 \subseteq A_1 \times A_1$ y $\delta_2 \subseteq A_2 \times A_2$ tales que, dados $a_1, b_1 \in A_1$ y $a_2, b_2 \in A_2$

$$((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \in \delta \text{ sii } (a_1, b_1) \in \delta_1 \text{ y } (a_2, b_2) \in \delta_2.$$

En tal caso decimos que δ factoriza en δ_1 y δ_2 y lo simbolizamos $\delta = \delta_1 \times \delta_2$.

Lema 1.1.3. *Si $\delta \in Con(\boldsymbol{A}_1 \times \boldsymbol{A}_2)$ factoriza en δ_1 y δ_2 entonces δ_1 y δ_2 son congruencias de $\boldsymbol{A}_1$ y $\boldsymbol{A}_2$ respectivamente.*

Definición 1.1.5. Diremos que un álgebra $\mathbf{A}$ tiene *Congruencias Factor Booleanas* (CFB) si el conjunto $CF(\mathbf{A})$ es el universo de un subreticulado distributivo $\mathbf{CF}(\mathbf{A})$ de $\mathbf{Con}(\mathbf{A})$. Diremos que una variedad $\mathcal{V}$ tiene *Congruencias Factor Booleanas* si toda álgebra $\mathbf{A}$ en $\mathcal{V}$ tiene Congruencias Factor Booleanas.

Lema 1.1.4. *Sea $\mathcal{V}$ una variedad. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\mathcal{V}$ tiene CFB.*
2. *Si $\boldsymbol{A} \in \mathcal{V}$, θ, δ, $\delta' \in CF(\boldsymbol{A})$ y $\delta \diamond \delta'$, entonces $\theta \supseteq (\theta \vee \delta) \cap (\theta \vee \delta')$*
3. *$\mathcal{V}$ tiene congruencias factor factorizables, i.e., Si $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathcal{V}$ y $\theta \in FC(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})$, entonces θ factoriza.*

Definición 1.1.6. Diremos que una variedad tiene la *propiedad de Fraser-Horn* (PFH) si toda congruencia en un producto de álgebras de la variedad factoriza.

Lema 1.1.5. *Sea $\mathcal{V}$ una variedad. Son equivalentes:*

1. *$\mathcal{V}$ tiene la PFH.*
2. *Si $\boldsymbol{A} \in \mathcal{V}$ y $\theta, \delta \in Con(\boldsymbol{A})$ son un par de congruencias factor complementarias, entonces para cada $\gamma \in Con(\boldsymbol{A})$, $\gamma \supseteq (\gamma \vee \theta) \cap (\gamma \vee \delta)$.*
3. *Si $\boldsymbol{A} \in \mathcal{V}$ y $\theta, \delta \in Con(\boldsymbol{A})$ son un par de congruencias factor complementarias, entonces para cada $\gamma \in Con(\boldsymbol{A})$, $\gamma \supseteq (\gamma \vee \theta) \cap \delta$.*
4. *Si $\boldsymbol{A} \in \mathcal{V}$ y θ, δ, $\gamma \in Con(\boldsymbol{A})$, vale la igualdad $\gamma \cap (\theta \vee \delta) = (\gamma \cap \theta) \vee (\gamma \cap \delta)$, cada vez que en $\{\gamma, \theta, \delta\}$ haya al menos una congruencia factor.*
5. *Si $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathcal{V}$ y $a, a' \in A$, $b, b' \in B$, entonces $\theta^{\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}}((a, b), (a', b')) = \theta^{\boldsymbol{A}}(a, a') \times \theta^{\boldsymbol{B}}(b, b')$.*

1.2. Elementos Centrales

Notación. Si $p_1, \ldots, p_n$ y $q_1, \ldots, q_n$ son términos notamos $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ y $\vec{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ y simbolizamos con $\vec{p} \approx \vec{q}$ la fórmula $\bigwedge_{i=1}^n p_i \approx q_i$.

Definición 1.2.1. Sea $\mathcal{V}$ una variedad. Diremos que $\mathcal{V}$ es una *variedad con* $\vec{0}$ *y* $\vec{1}$ si existen términos 0-arios $0_1, \ldots, 0_n, 1_1, \ldots, 1_n$ tales que

$$\mathcal{V} \vDash \vec{0} \approx \vec{1} \rightarrow x \approx y.$$

Teorema 1.2.1. (Kollar [10] y Vaggione[13]). *Sea $\mathcal{V}$ una variedad cuyo lenguaje tiene al menos un símbolo de constante. Son equivalentes:*

1. *$\mathcal{V}$ es una variedad con $\vec{0}$ y $\vec{1}$.*

2. *Para toda álgebra $\boldsymbol{A}$ en $\mathcal{V}$, ∇^A es una congruencia compacta.*

3. *Existen términos 0-arios $0_i, 1_i$ con $1 \leq i \leq n$ y términos $u_j \in T(z_1, \ldots, z_n, x, y)$ con $1 \leq j \leq m$ y m impar, tales que $\mathcal{V}$ satisface las identidades*

$$\begin{aligned} x &\approx u_1(\vec{0}, x, y) \\ u_j(\vec{1}, x, y) &\approx u_{j+1}(\vec{1}, x, y) \text{ para } 1 \leq j < m \text{ y } j \text{ impar} \\ u_j(\vec{0}, x, y) &\approx u_{j+1}(\vec{0}, x, y) \text{ para } 1 \leq j \leq m \text{ y } j \text{ par} \\ u_m(\vec{1}, x, y) &\approx y \end{aligned}$$

4. *Ningún álgebra no trivial en $\mathcal{V}$ tiene subálgebras triviales.*

Definición 1.2.2. Sea $\mathcal{V}$ una variedad con $\vec{0}$ y $\vec{1}$. Si $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$, decimos que $\vec{e} \in A^n$ es un *elemento central* de $\mathbf{A}$ si existe un isomorfismo

$$\begin{array}{rrcll} \tau: & \mathbf{A} & \rightarrow & \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 & \\ \text{tal que} & e_i & \mapsto & (0_i, 1_i) & i = 1, \ldots, n \end{array}$$

Diremos que $\vec{e}$ y $\vec{f} \in A^n$ son un *par de elementos centrales complementarios* de $\mathbf{A}$ si existe un isomorfismo

$$\begin{array}{rrcll} \tau: & \mathbf{A} & \rightarrow & \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 & \\ \text{tal que} & e_i & \mapsto & (0_i, 1_i) & \\ & f_i & \mapsto & (1_i, 0_i) & i = 1, \ldots, n \end{array}$$

y lo simbolizamos $\vec{e} \diamond_{\mathbf{A}} \vec{f}$.

Definición 1.2.3. Llamaremos *centro* al conjunto de todos los elementos centrales de un álgebra $\mathbf{A}$ y lo denotamos por $Z(\mathbf{A})$.

Notación. Dados $a_i, b_i \in A$, $i = 1, \ldots, n$ y $\theta \in Con(\mathbf{A})$, con $\vec{a} \equiv \vec{b}(\theta)$ simbolizamos $(a_i, b_i) \in \theta$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Y con $[\vec{a}, \vec{b}]$ simbolizamos la n-upla $((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n))$.

Lema 1.2.2. *Sea $\mathcal{V}$ una variedad con $\vec{0}$ y $\vec{1}$ y sea $\boldsymbol{A} \in \mathcal{V}$. Dado un par de congruencias factor complementarias $\delta_1, \delta_2 \in Con(\boldsymbol{A})$ existe un único par de elementos centrales complementarios $\vec{e}$ y $\vec{f}$ de $\boldsymbol{A}$ tal que*

$$\vec{e} \equiv \vec{0}(\delta_1) \text{ y } \vec{e} \equiv \vec{1}(\delta_2)$$
$$\vec{f} \equiv \vec{1}(\delta_1) \text{ y } \vec{f} \equiv \vec{0}(\delta_2).$$

Demostración. Se sigue directamente de la definición de las congruencias factor complementarias considerando el isomorfismo natural $\mathbf{A} \to \mathbf{A}/\delta_1 \times \mathbf{A}/\delta_2$.$\dashv$

En el caso general la recíproca de este lema no es cierta, es decir, ni un elemento central ni un par de elementos centrales complementarios están asociados necesariamente a un único par de congruencias factor complementarias.

Definición 1.2.4. Sea $\mathcal{V}$ una variedad con $\vec{0}$ y $\vec{1}$. Diremos que $\mathcal{V}$ tiene la *propiedad de determinación débil* (PD débil) si para cada par $\vec{e}$,$\vec{f}$ de elementos centrales complementarios en cada álgebra $\mathbf{A}$ de $\mathcal{V}$ existe un único par de congruencias factor complementarias $\delta_1, \delta_2 \in Con(\mathbf{A})$ tales que

$$\vec{e} \equiv \vec{0}(\delta_1) \text{ y } \vec{e} \equiv \vec{1}(\delta_2)$$
$$\vec{f} \equiv \vec{1}(\delta_1) \text{ y } \vec{f} \equiv \vec{0}(\delta_2).$$

Diremos que $\mathcal{V}$ tiene la *propiedad de determinación fuerte* (PD fuerte) si para cada elemento central $\vec{e}$ en cada álgebra $\mathbf{A}$ de $\mathcal{V}$ existe un único par de congruencias factor complementarias $\delta_1, \delta_2 \in Con(\mathbf{A})$ tales que

$$\vec{e} \equiv \vec{0}(\delta_1) \text{ y } \vec{e} \equiv \vec{1}(\delta_2).$$

El siguiente Teorema muestra que ambas formas de la propiedad de determinación son equivalentes y caracteriza las variedades que la poseen.

Teorema 1.2.3. (Sánchez Terraf-Vaggione [12]). *Sea $\mathcal{V}$ una variedad con $\vec{0}$ y $\vec{1}$. Son equivalentes:*

1. *$\mathcal{V}$ tiene la PD débil.*
2. *$\mathcal{V}$ tiene la PD fuerte.*
3. *Existe una fórmula de primer orden $\varphi(\vec{z}, x, y)$ en el lenguaje de $\mathcal{V}$ tal que para todo $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathcal{V}$ y $a, a' \in A$, $b, b' \in B$*
$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \models \varphi([\vec{0}, \vec{1}], (a, b), (a', b')) \text{ si y sólo si } a = a'.$$
4. *Existe una fórmula de primer orden $\varphi(\vec{z}, \vec{w}, x, y)$ en el lenguaje de $\mathcal{V}$ tal que para todo $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathcal{V}$ y $a, a' \in A$, $b, b' \in B$*
$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \models \varphi([\vec{0}, \vec{1}], [\vec{1}, \vec{0}], (a, b), (a', b')) \text{ si y sólo si } a = a'.$$
5. *$\mathcal{V}$ tiene CFB.*

Más aún, cuando las condiciones anteriores valen, la fórmula φ en 3 y 4 puede elegirse de forma que es preservada por productos y factores directos.

Si $\mathcal{V}$ es una variedad que satisface las condiciones equivalentes del Teorema anterior, en particular es una varieda con la PD fuerte, por lo que un elemento central determina un único par de congruencias factor. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 1.2.5. Sea $\mathcal{V}$ una variedad con $\vec{0}$ y $\vec{1}$ que satisface las condiciones equivalentes del Teorema 1.2.3. Dada un álgebra $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ y un elemento central $\vec{e}$ de $\mathbf{A}$, llamaremos $\theta^{\mathbf{A}}_{\vec{0},\vec{e}}$ y $\theta^{\mathbf{A}}_{\vec{1},\vec{e}}$ (o simplemente $\theta_{\vec{0},\vec{e}}$ y $\theta_{\vec{1},\vec{e}}$ cuando no haya lugar a confusión) al único par de congruencias factor complementarias que satisface
$$\vec{e} \equiv \vec{0}(\theta^{\mathbf{A}}_{\vec{0},\vec{e}})$$
$$\vec{e} \equiv \vec{1}(\theta^{\mathbf{A}}_{\vec{1},\vec{e}}).$$

Notemos que $\vec{0}$ y $\vec{1}$ son elementos centrales en cualquier álgebra $\mathbf{A}$ y las congruencias factor asociadas a ellos son
$$\theta^{\mathbf{A}}_{\vec{0},\vec{0}} = \Delta^A \quad \text{y} \quad \theta^{\mathbf{A}}_{\vec{1},\vec{0}} = \nabla^A$$
$$\theta^{\mathbf{A}}_{\vec{0},\vec{1}} = \nabla^A \quad \text{y} \quad \theta^{\mathbf{A}}_{\vec{1},\vec{1}} = \Delta^A.$$

El estudio de las fórmulas φ que satisfacen las condiciones del Teorema 1.2.3 será el eje central de este trabajo por lo que necesitaremos de la siguiente definición.

Definición 1.2.6. Dada una variedad $\mathcal{V}$ diremos que una fórmula $\varphi(\vec{z}, \vec{w}, x, y)$ *define* $\theta_{\vec{0},\vec{e}}$ *en términos de* $\vec{e}$ *y* $\vec{e}^{\mathrm{c}}$ si para todo $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{V}$ y $a, a' \in A$, $b, b' \in B$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \models \varphi([\vec{0}, \vec{1}], [\vec{1}, \vec{0}], (a, b), (a', b')) \text{ si y sólo si } a = a'.$$

Diremos que una fórmula $\varphi(\vec{z}, x, y)$ *define* $\theta_{\vec{0},\vec{e}}$ *en términos de* $\vec{e}$ si para todo $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{V}$ y $a, a' \in A$, $b, b' \in B$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \models \varphi([\vec{0}, \vec{1}], (a, b), (a', b')) \text{ si y sólo si } a = a'.$$

Diremos que una fórmula $\varphi(\vec{z}, x, y)$ *define* $\theta_{\vec{1},\vec{e}}$ *en términos de* $\vec{e}$ si para todo $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{V}$ y $a, a' \in A$, $b, b' \in B$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \models \varphi([\vec{0}, \vec{1}], (a, b), (a', b')) \text{ si y sólo si } b = b'.$$

En este último caso decimos también que φ *define* $\theta_{\vec{0},\vec{e}}$ *en términos de* $\vec{e}^{\mathrm{c}}$.

A continuación exponemos algunos resultados que ponen de manifiesto la relación entre $\theta_{\vec{0},\vec{e}}$ y la fórmula que la define para ciertos casos particulares.

Lema 1.2.4. (Vaggione). *Sea $\mathcal{V}$ una variedad con $\vec{0}$ y $\vec{1}$. Entonces*

1. *Si existe una fórmula positiva que define $\theta_{\vec{0},\vec{e}}$ en términos de $\vec{e}$ entonces para todo álgebra $\boldsymbol{A}$ en $\mathcal{V}$ y todo elemento central $\vec{e}$ en $\boldsymbol{A}$ tenemos $\theta^{\boldsymbol{A}}_{\vec{0},\vec{e}} = \theta^{\boldsymbol{A}}(\vec{0}, \vec{e})$.*

2. *Si existe una fórmula positiva que define $\theta_{\vec{1},\vec{e}}$ en términos de $\vec{e}$ entonces para todo álgebra $\boldsymbol{A}$ en $\mathcal{V}$ y todo elemento central $\vec{e}$ en $\boldsymbol{A}$ tenemos $\theta^{\boldsymbol{A}}_{\vec{1},\vec{e}} = \theta^{\boldsymbol{A}}(\vec{1}, \vec{e})$.*

3. *Si existe una fórmula $\varphi(\vec{z}, \vec{w}, x, y)$ positiva que define $\theta_{\vec{0},\vec{e}}$ en términos $\vec{e}$ y $\vec{e}^{\mathrm{c}}$ entonces para todo álgebra $\boldsymbol{A}$ en $\mathcal{V}$ y todo par de elementos centrales complementarios $\vec{e}$, $\vec{f}$ en $\boldsymbol{A}$ tenemos $\theta^{\boldsymbol{A}}_{\vec{0},\vec{e}} = \theta^{\boldsymbol{A}}(\vec{0}, \vec{e}) \vee \theta^{\boldsymbol{A}}(\vec{1}, \vec{f})$.*

Teorema 1.2.5. (Sanchez Terraf [11]). *Sea $\mathcal{V}$ una variedad con $\vec{0}$ y $\vec{1}$. Entonces*

1. *Si existe una fórmula existencial que define $\theta_{\vec{0},\vec{e}}$ en términos de $\vec{e}$ entonces existe una fórmula positiva que define $\theta_{\vec{0},\vec{e}}$ en términos de $\vec{e}$.*

2. *Si existe una fórmula existencial que define $\theta_{\vec{1},\vec{e}}$ en términos de $\vec{e}$ entonces existe una fórmula positiva que define $\theta_{\vec{1},\vec{e}}$ en términos de $\vec{e}$.*

3. *Si existe una fórmula existencial que define $\theta_{\vec{0},\vec{e}}$ en términos de $\vec{e}$ y $\vec{e}^{\mathrm{c}}$ entonces existe una fórmula positiva que define $\theta_{\vec{0},\vec{e}}$ en términos de $\vec{e}$ y $\vec{e}^{\mathrm{c}}$.*

Lema 1.2.6. (Vaggione). *Sea $\mathcal{V}$ una variedad con $\vec{0}$ y $\vec{1}$. Si para toda álgebra $\boldsymbol{A} \in \mathcal{V}$ tenemos que $\theta^{\boldsymbol{A}}_{\vec{0},\vec{e}} = \theta^{\boldsymbol{A}}(\vec{0},\vec{e})$ entonces $\theta_{\vec{0},\vec{e}}$ es definible por una fórmula de la forma $\exists \bigwedge p \approx q$ en términos de $\vec{e}$.*

Como vimos anteriormente en el caso de los reticulados acotados y de los anillos con identidad las fórmulas que definen $\theta_{\vec{0},\vec{e}}$ y $\theta_{\vec{1},\vec{e}}$ en términos de $\vec{e}$ son ecuaciones, sin embargo este no es el caso general.

Sea $\mathcal{S}^{\wedge}_{0,1}$ la variedad de los semireticulados acotados (con ínfimo). Es un hecho conocido que $\mathcal{S}^{\wedge}_{0,1}$ es una variedad con CFB por lo que satisface las condiciones equivalentes del Teorema 1.2.3. La fórmula

$$\psi(z,x,y) = x \wedge z \approx y \wedge z$$

define $\theta_{1,e}$ en términos de e, sin embargo la estructura de la fórmula que define $\theta_{0,e}$ no es obvia.

Lema 1.2.7. (Vaggione). *$\mathcal{S}^{\wedge}_{0,1}$ satisface:*

1. No hay una fórmula positiva ni existencial que defina $\theta_{0,e}$ en términos de e. La fórmula

$$\varphi(z,x,y) = \forall u \ : (x \wedge u) \wedge z \approx (y \wedge u) \wedge z \to x \wedge u \approx y \wedge u$$

define $\theta_{0,e}$ en términos de e.

2. No existe una fórmula positiva ni existencial que defina la relación $e \diamond w$ en términos de e. La fórmula

$$\alpha(z,w) = w \wedge z \approx 0 \ \ \& \ \ \forall u \ : (w \wedge u) \wedge z \approx u \wedge z \to w \wedge u \approx u$$

define $e \diamond w$ en términos de e.

El siguiente resultado caracteriza la existencia de una fórmula ecuacional que defina $\theta_{\vec{0},\vec{e}}$ en términos de $\vec{e}$.

Teorema 1.2.8. (Vaggione). *Sea $\mathcal{V}$ una variedad con $\vec{0}$ y $\vec{1}$. Son equivalentes:*

1. *Hay una fórmula abierta que define $\theta_{\vec{0},\vec{e}}$ en términos de $\vec{e}$.*
2. *Hay una fórmula $(\bigwedge p \approx q)$ que define $\theta_{\vec{0},\vec{e}}$ en términos de $\vec{e}$.*
3. *Existen términos p_i, q_i, $i = 1, \ldots, n$ tales que*
   $\mathcal{V} \vDash \left(\bigwedge p_i(\vec{0},x,y) \approx q_i(\vec{0},x,y)\right) \leftrightarrow x \approx y$
   $\mathcal{V} \vDash \bigwedge p_i(\vec{1},x,y) \approx q_i(\vec{1},x,y)$

4. *Hay una fórmula $\varphi(\vec{z}, x, y)$ de la forma $(\bigwedge p \approx q)$ que define $\theta(\vec{0}, \vec{e})$ en términos de $\vec{e}$, i.e.*
$$\theta^{\boldsymbol{A}}(\vec{0}, \vec{e}) = \{(a, b) : \boldsymbol{A} \models \varphi(\vec{e}, a, b)\}$$
para toda álgebra $\boldsymbol{A} \in \mathcal{V}$ y todo $\vec{e} \in Z(\boldsymbol{A})$ tal que $\theta^{\boldsymbol{A}}(\vec{0}, \vec{e}) \cap \theta^{\boldsymbol{A}}(\vec{1}, \vec{e}) = \Delta^{\boldsymbol{A}}$.

5. *Existen términos v_i, $i = 1, \ldots, k$, con k impar, tales que las siguientes identidades se satisfacen en $\mathcal{V}$:*
$$\begin{array}{rcl} x & \approx & v_i(\vec{0}, x, x),\ i = 1, \ldots, n \\ x & \approx & v_1(\vec{0}, x, y) \\ v_i(\vec{1}, x, y) & \approx & v_{i+1}(\vec{1}, x, y),\ i \text{ impar} \\ v_i(\vec{0}, x, y) & \approx & v_{i+1}(\vec{0}, x, y),\ i \text{ par} \\ v_k(\vec{1}, x, y) & \approx & y. \end{array}$$

6. $(x, y) \in \theta^{\mathbf{F}}(\vec{0}, \vec{z}) \vee \Big((\theta^{\mathbf{F}}(\vec{0}, \vec{z}) \vee \theta^{\mathbf{F}}(x, y)) \cap \theta^{\mathbf{F}}(\vec{1}, \vec{z})\Big)$*, donde* $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, \vec{z})$.

7. *Si $\boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{B} \in \mathcal{V}$ y $\vec{e} \in A^N \cap Z(\boldsymbol{B})$, entonces $\theta^{\boldsymbol{A}}(\vec{0}, \vec{e}) = \theta^{\boldsymbol{B}}_{\vec{0},\vec{e}} \cap A \times A$.*

De la demostración de este Teorema se desprende el siguiente resultado que nos será de suma utilidad.

Corolario 1.2.9. *Sea $\mathcal{V}$ una variedad con $\vec{0}$ y $\vec{1}$ y $\varphi(\vec{z}, x, y)$ una $(\bigwedge p \approx q)$-fórmula. Entonces φ define $\theta_{\vec{0},\vec{e}}$ en términos de $\vec{e}$ si y sólo si*
$$\mathcal{V} \vDash \varphi(\vec{0}, x, y) \leftrightarrow x \approx y$$
$$\mathcal{V} \vDash \varphi(\vec{1}, x, y).$$

En los capítulos siguientes toda variedad $\mathcal{V}$ mencionada será una variedad con $\vec{0}$ y $\vec{1}$ que satisface las condiciones equivalentes del Teorema 1.2.3. Para simplificar la notación expondremos los resultados para el caso $\vec{0} = 0$ y $\vec{1} = 1$ sin pérdida de generalidad.

Capítulo 2

El álgebra de Boole de elementos centrales

En este capítulo definimos de forma natural una estructura de álgebra de Boole sobre el conjunto de elementos centrales para las álgebras en variedades bajo las hipótesis del Teorema 1.2.3 y estudiamos la definibilidad de las operaciones definidas. En la Sección 2.2 lo hacemos para aquellas variedades que tienen la propiedad de Fraser-Horn y en las que $\theta_{0,e}$ es definible ecuacionalmente en términos de e, o en términos de e y e^c. En la Sección 2.3 estudiamos la definibilidad del complemento de un elemento central a partir de una fórmula cualquiera que define $\theta_{0,e}$ en términos de e y e^c.

2.1. Algunas definiciones

De acuerdo a lo definido en el capítulo anterior si $\mathcal{V}$ es una variedad con la PD fuerte entonces para toda álgebra $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ y todo elemento central e en $\mathbf{A}$ existe un único par de congruencias factor $(\theta_{0,e}^{\mathbf{A}}, \theta_{1,e}^{\mathbf{A}})$ tal que

$$e \equiv 0(\theta_{0,e}^{\mathbf{A}})$$
$$e \equiv 1(\theta_{1,e}^{\mathbf{A}}).$$

En vista del Lema 1.2.2 tenemos que el mapeo

$$e \mapsto (\theta_{0,e}^{\mathbf{A}}, \theta_{1,e}^{\mathbf{A}})$$

es de hecho una biyección entre el conjunto de elementos centrales y el conjunto de pares de congruencias factor complementarias. Más aún, el Teorema 1.2.3 nos dice que $\mathcal{V}$ es una variedad con CFB y en consecuencia cada congruencia factor de $\mathbf{A}$ tiene una única congruencia factor complementaria. Así, tenemos que el mapeo

$$e \mapsto \theta_{0,e}^{\mathbf{A}}$$

es una biyección entre $Z(\mathbf{A})$ y $CF(\mathbf{A})$. Vía este mapeo podemos definir de forma natural un álgebra de Boole sobre el conjunto de elementos centrales.

Definición 2.1.1. Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$. El *álgebra de Boole de elementos centrales sobre* $\boldsymbol{A}$, que denotamos por $\mathbf{Z}(\mathbf{A})$ es el álgebra de Boole $\langle Z(\mathbf{A}),^{c_{\mathbf{A}}}, \wedge_{\mathbf{A}}, \vee_{\mathbf{A}}\rangle$ donde definimos las operaciones como sigue:
Dado $e \in Z(\mathbf{A})$ definimos el *complemento* $e^{c_{\mathbf{A}}}$ de e como la única solución a las ecuaciones

$$\begin{aligned} z &\equiv 1(\theta_{0,e}^{\mathbf{A}}) \\ z &\equiv 0(\theta_{1,e}^{\mathbf{A}}), \end{aligned}$$

es decir, $e^{c_{\mathbf{A}}}$ es el elemento central complementario de e en $\mathbf{A}$. Dados $e, f \in Z(\mathbf{A})$ definimos el *ínfimo* $e \wedge_{\mathbf{A}} f$ entre e y f como la única solución a las ecuaciones

$$\begin{aligned} z &\equiv 0(\theta_{0,e}^{\mathbf{A}} \cap \theta_{0,f}^{\mathbf{A}}) \\ z &\equiv 1(\theta_{1,e}^{\mathbf{A}} \vee \theta_{1,f}^{\mathbf{A}}). \end{aligned}$$

Dados $e, f \in Z(\mathbf{A})$, definimos el *supremo* $e \vee_{\mathbf{A}} f$ entre e y f como la única solución a las ecuaciones

$$\begin{aligned} z &\equiv 0(\theta_{0,e}^{\mathbf{A}} \vee \theta_{0,f}^{\mathbf{A}}) \\ z &\equiv 1(\theta_{1,e}^{\mathbf{A}} \cap \theta_{1,f}^{\mathbf{A}}). \end{aligned}$$

El lema a continuación simplificará la exposición de los resultados posteriores.

Lema 2.1.1. (Vaggione). *Sean $e, f \in Z(\boldsymbol{A})$ y $a \in A$. Entonces*

i. $a = e \wedge_{\boldsymbol{A}} f$ si y sólo si $(0, a) \in \theta_{0,e}^{\boldsymbol{A}}$ y $(a, f) \in \theta_{1,e}^{\boldsymbol{A}}$.

ii. $a = e \vee_{\boldsymbol{A}} f$ si y sólo si $(1, a) \in \theta_{1,e}^{\boldsymbol{A}}$ y $(a, f) \in \theta_{0,e}^{\boldsymbol{A}}$.

Demostración. *i.* Sean $e, f \in Z(\mathbf{A})$. De la Definición 2.1.1 obtenemos

$$(0, e \wedge_{\mathbf{A}} f) \in \theta_{0,e}^{\mathbf{A}} \cap \theta_{0,f}^{\mathbf{A}} \quad \text{y} \quad (1, e \wedge_{\mathbf{A}} f) \in \theta_{1,e}^{\mathbf{A}} \vee \theta_{1,f}^{\mathbf{A}}.$$

Dado que $(0, e \wedge_{\mathbf{A}} f)$ y $(0, f)$ pertenecen a $\theta_{0,f}^{\mathbf{A}}$ tenemos que

$$(e \wedge_{\mathbf{A}} f, f) \in \theta_{0,f}^{\mathbf{A}}$$

Y dado que $(1, f)$ y $(1, e \wedge_{\mathbf{A}} f)$ pertenecen a $\theta_{1,e}^{\mathbf{A}} \vee \theta_{1,f}^{\mathbf{A}}$ tenemos que

$$(e \wedge_{\mathbf{A}} f, f) \in \theta_{1,e}^{\mathbf{A}} \vee \theta_{1,f}^{\mathbf{A}}$$

Así

$$(e \wedge_{\mathbf{A}} f, f) \in \theta_{0,f}^{\mathbf{A}} \cap (\theta_{1,e}^{\mathbf{A}} \vee \theta_{1,f}^{\mathbf{A}}) = \theta_{0,f}^{\mathbf{A}} \cap \theta_{1,e}^{\mathbf{A}}.$$

Para ver la otra dirección tomemos $a \in A$ tal que $(0, a) \in \theta_{0,e}^{\mathbf{A}}$ y $(a, f) \in \theta_{1,e}^{\mathbf{A}}$. Tenemos que

$$(0, a) \in \theta_{0,e}^{\mathbf{A}} \cap (\theta_{1,e}^{\mathbf{A}} \vee \theta_{0,f}^{\mathbf{A}}) = \theta_{0,e}^{\mathbf{A}} \cap \theta_{0,f}^{\mathbf{A}}$$

y

$$(1, a) \in \theta_{1,e}^{\mathbf{A}} \vee \theta_{1,f}^{\mathbf{A}}$$

por lo que $a = e \wedge_{\mathbf{A}} f$.

La demostración de *ii* es totalmente análoga a la de *i*. $\dashv$

Definición 2.1.2. Diremos que una fórmula $\alpha(x, z)$ *define el complemento de un elemento central en* $\mathcal{V}$ si para toda álgebra $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ y todo $e \in Z(\mathbf{A})$ y $f \in A$

$$f = e^{c_{\mathbf{A}}} \text{ si y sólo si } \mathbf{A} \models \alpha(e, f).$$

Diremos que una fórmula $\psi(x, y, z)$ *define el ínfimo entre elementos centrales en* $\mathcal{V}$ si para toda álgebra $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ y todo $e, f \in Z(\mathbf{A})$ y $g \in A$

$$g = e \wedge_{\mathbf{A}} f \text{ si y sólo si } \mathbf{A} \models \psi(e, f, g).$$

Diremos que una fórmula $\psi(x, y, z)$ *define el supremo entre elementos centrales en* $\mathcal{V}$ si para toda álgebra $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ y todo $e, f \in Z(\mathbf{A})$ y $g \in A$

$$g = e \vee_{\mathbf{A}} f \text{ si y sólo si } \mathbf{A} \models \psi(e, f, g).$$

Lema 2.1.2. *Si $\varphi_0(z, x, y)$ y $\varphi_1(z, x, y)$ son dos fórmulas que definen respectivamente $\theta_{0,e}$ y $\theta_{1,e}$ en términos de e en $\mathcal{V}$ entonces la fórmula*

$$\alpha(x, z) = \varphi_0(x, 1, z) \wedge \varphi_1(x, 0, z)$$

define el complemento de un elemento central. La fórmula

$$\psi(x, y, z) = \varphi_0(x, 0, z) \wedge \varphi_1(x, z, y)$$

define el ínfimo entre elementos centrales. Y la fórmula

$$\psi(x, y, z) = \varphi_1(x, 1, z) \wedge \varphi_0(x, z, y)$$

define el supremo entre elementos centrales.

Demostración. Se sigue directamente de la definición del complemento y el Lema 2.1.1. $\dashv$

Observemos que si φ_0 y φ_1 son conjunciones de ecuaciones, entonces las operaciones en $Z(\mathbf{A})$ son definibles ecuacionalmente.

2.2. Variedades con la PFH

En esta sección encontramos definiciones óptimas de las operaciones entre elementos centrales para ciertas variedades particulares que, además de tener definibilidad ecuacional de $\theta_{0,e}$ en términos de uno o ambos elementos centrales asociados, tienen la PFH.

2.2.1. Variedades con un término u corto

Diremos que $\mathcal{V}$ es una *variedad con un término u corto* si existe un término $u(z, x, y)$ en el tipo de $\mathcal{V}$ tal que

$$\mathcal{V} \models u(0, x, y) \approx x$$
$$\mathcal{V} \models u(1, x, y) \approx y.$$

Notemos que en esta clase de variedades las congruencias $\theta_{0,e}$ y $\theta_{1,e}$ están definidas respectivamente por

$$\varphi_0(z, x, y) = u(z, x, y) \approx y$$
$$\varphi_1(z, x, y) = u(z, x, y) \approx x$$

en términos de e. Por el Lema 2.1.2 sabemos que las operaciones entre elementos centrales son definibles ecuacionalmente. El siguiente Teorema muestra que en esta clase particular de variedades las operaciones son definibles por términos.

Teorema 2.2.1. *Si en $\mathcal{V}$ existe un término $u(z, x, y)$ tal que*

$$\mathcal{V} \models u(0, x, y) \approx x$$
$$\mathcal{V} \models u(1, x, y) \approx y$$

entonces para toda $\boldsymbol{A} \in \mathcal{V}$ dados $e, f \in Z(\boldsymbol{A})$

1. $e^{c_{\boldsymbol{A}}} = u(e, 1, 0)$,

2. $e \wedge_{\boldsymbol{A}} f = u(e, 0, f)$,

3. $e \vee_{\boldsymbol{A}} f = u(e, f, 1)$.

Demostración. Sea $\mathbf{A}$ un álgebra en $\mathcal{V}$.

1. Sea $e \in Z(\mathbf{A})$. Basta notar que $(u(e, 1, 0), u(0, 1, 0)) \in \theta_{0,e}^{\mathbf{A}}$ por lo que

$$(u(e, 1, 0), 1) \in \theta_{0,e}^{\mathbf{A}}$$

y $(u(e, 1, 0), u(1, 1, 0)) \in \theta_{1,e}^{\mathbf{A}}$ por lo que

$$(u(e, 1, 0), 0) \in \theta_{1,e}^{\mathbf{A}}$$

Así, por la definición del complemento, $u(e, 1, 0) = e^{c_{\mathbf{A}}}$.

2. Sean $e, f \in Z(\mathbf{A})$. Dado que $(u(e, 0, f), u(0, 0, f)) \in \theta_{0,e}^{\mathbf{A}}$ tenemos que

$$(u(e, 0, f), 0) \in \theta_{0,e}^{\mathbf{A}}$$

y dado que $(u(e, 0, f), u(1, 0, f)) \in \theta_{1,e}^{\mathbf{A}}$ tenemos

$$(u(e, 0, f), f) \in \theta_{1,e}^{\mathbf{A}}$$

Así por el inciso i del Lema 2.1.1 $u(e, 0, f) = e \wedge_{\mathbf{A}} f$.

3. Sean $e, f \in Z(\mathbf{A})$. Dado que $(u(e, f, 1), u(0, f, 1)) \in \theta_{0,e}^{\mathbf{A}}$ tenemos que

$$(u(e, f, 1), f) \in \theta_{0,e}^{\mathbf{A}}$$

y dado que $(u(e, f, 1), u(1, f, 1)) \in \theta_{1,e}^{\mathbf{A}}$ tenemos

$$(u(e, f, 1), 1) \in \theta_{1,e}^{\mathbf{A}}$$

Así por el inciso ii del Lema 2.1.1 $u(e, f, 1) = e \vee_{\mathbf{A}} f$. $\dashv$

2.2.2. Variedades con un término u largo

Diremos que $\mathcal{V}$ es una *variedad con un término u largo* si existe un término $u(z, w, x, y)$ en el tipo de $\mathcal{V}$ tal que

$$\mathcal{V} \models u(0, 1, x, y) \approx x$$
$$\mathcal{V} \models u(1, 0, x, y) \approx y.$$

En esta clase de variedades la fórmula

$$\varphi(z, w, x, y) = u(z, w, x, y) \approx y$$

define $\theta_{0,e}$ en términos de e y e^c. La estructura de las fórmulas que definen $\theta_{0,e}$ y $\theta_{1,e}$ en términos de e no es obvia, sin embargo el siguiente Teorema muestra que en esta variedad las operaciones entre elementos centrales son definibles ecuacionalmente.

Teorema 2.2.2. *Si $\mathcal{V}$ es una variedad para la que existe un término $u(z, w, x, y)$ tal que*

$$\mathcal{V} \models u(0, 1, x, y) \approx x$$
$$\mathcal{V} \models u(1, 0, x, y) \approx y$$

entonces:

1. *La conjunción de las ecuaciones*

$$u(x, z, 1, 0) \approx z \tag{2.1}$$
$$u(x, z, 1, x) \approx 1 \tag{2.2}$$
$$u(x, z, x, 0) \approx 0 \tag{2.3}$$

   define el complemento de un elemento central.

2. *La conjunción de las ecuaciones*

$$u(x, 1, z, 0) \approx u(1, x, z, 0) \tag{2.4}$$
$$u(x, 0, z, y) \approx u(0, x, z, y) \tag{2.5}$$

   define el ínfimo entre elementos centrales.

3. *La conjunción de las ecuaciones*

$$u(x, 1, z, y) \approx u(1, x, z, y) \tag{2.6}$$
$$u(x, 0, z, 1) \approx u(0, x, z, 1) \tag{2.7}$$

   define el supremo entre elementos centrales.

Demostración. Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$.

1. Sea $e \in Z(\mathbf{A})$. De la definición del complemento y las identidades satisfechas por u se desprende que los pares

$$(u(e, e^{c_{\mathbf{A}}}, 1, 0), e^{c_{\mathbf{A}}}),\ (u(e, e^{c_{\mathbf{A}}}, 1, e), 1) \text{ y } (u(e, e^{c_{\mathbf{A}}}, e, 0), 0)$$

pertenecen tanto a $\theta_{0,e}^{\mathbf{A}}$ como a $\theta_{1,e}^{\mathbf{A}}$. Así, dado que $\theta_{0,e}^{\mathbf{A}} \cap \theta_{1,e}^{\mathbf{A}} = \Delta$, tenemos que $e^{c_{\mathbf{A}}}$ satisface las identidades (2.1), (2.2) y (2.3). Para ver la otra dirección de la demostración tomemos $g \in A$ tal que

$$\begin{array}{ll} u(e, g, 1, 0) = g & (1) \\ u(e, g, 1, e) = 1 & (2) \\ u(e, g, e, 0) = 0 & (3) \end{array}$$

Las ecuaciones (1) y (2) implican $(g, 1) \in \theta_{0,e}^{\mathbf{A}}$ y las ecuaciones (1) y (3) implican $(g, 0) \in \theta_{1,e}^{\mathbf{A}}$.

2. Sean e, $f \in Z(\mathbf{A})$. Dado que $(e \wedge_{\mathbf{A}} f, 0) \in \theta_{0,e}^{\mathbf{A}}$

$$(u(e, 1, e \wedge_{\mathbf{A}} f, 0), u(1, e, e \wedge_{\mathbf{A}} f, 0)) \in \theta_{0,e}^{\mathbf{A}}$$

y claramente

$$(u(e, 1, e \wedge_{\mathbf{A}} f, 0), u(1, e, e \wedge_{\mathbf{A}} f, 0)) \in \theta_{1,e}^{\mathbf{A}}.$$

Así, dado que $\theta_{0,e}^{\mathbf{A}} \cap \theta_{1,e}^{\mathbf{A}} = \Delta$, tenemos que $e \wedge_{\mathbf{A}} f$ satisface (2.4). Por el Lema 2.1.1 sabemos que $(e \wedge_{\mathbf{A}} f, f) \in \theta_{1,e}^{\mathbf{A}}$ y en consecuencia

$$(u(e, 0, e \wedge_{\mathbf{A}} f, f), u(0, e, e \wedge_{\mathbf{A}} f, f)) \in \theta_{1,e}^{\mathbf{A}}.$$

Claramente

$$(u(e, 0, e \wedge_{\mathbf{A}} f, f), u(0, e, e \wedge_{\mathbf{A}} f, f)) \in \theta_{0,e}^{\mathbf{A}}$$

por lo que $e \wedge_{\mathbf{A}} f$ satisface (2.5) . Para ver la otra dirección sean $g \in A$ tal que

$$u(e, 1, g, 0) = u(1, e, g, 0) \quad (4)$$

$$u(e, 0, g, f) = u(0, e, g, f) \quad (5)$$

Dado que $u(0, 1, g, 0) = g$ y $u(1, 0, g, 0) = 0$ por (4) tenemos que

$$(g, 0) \in \theta_{0,e}^{\mathbf{A}}.$$

Dado que $u(1, 0, g, f) = f$ y $u(0, 1, g, f) = g$ la ecuación (5) implica

$$(g, f) \in \theta_{1,e}^{\mathbf{A}}.$$

Así, por el Lema 2.1.1 $g = e \wedge_{\mathbf{A}} f$.

La demostración de *3* es totalmente análoga a la de *2*. $\dashv$

Cabe preguntarse si para variedades con un término u largo la definibilidad ecuacional es óptima, i.e. si las operaciones son definibles por términos, como en el caso de variedades con un término u corto. Basta considerar la variedad de los los reticulados distributivos acotados para ver que en el caso general no existe un término que defina el complemento de un elemento central. En el siguiente ejemplo se muestra una variedad bajo las hipótesis del Teorema anterior para la que no hay definibilidad del ínfimo por un término. Para ver que el supremo no es definible por un término basta considerar el ejemplo dual al presentado para el ínfimo.

Ejemplo 2.2.1. *En el tipo* $\tau = \{0, 1, u\}$*, donde* 0 *y* 1 *son símbolos de constante y* u *es un símbolo de función* $4-$*ario, sea* $\mathcal{U}$ *la variedad definida por las identidades*

$$u(0, 1, x, y) \approx x$$
$$u(1, 0, x, y) \approx y$$

Sea $\boldsymbol{3} = \langle \{0, 1, c\}, 0, 1, u^{\boldsymbol{3}} \rangle$ *el álgebra con tres elementos en* $\mathcal{U}$ *donde*

$$u^{\boldsymbol{3}}(z, w, x, y) = \begin{cases} x, & \textit{si } z{=}0,\ w{=}1; \\ y, & \textit{si } z{=}1,\ w{=}0; \\ c, & \textit{caso contrario.} \end{cases}$$

Sean $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{3} \times \boldsymbol{3} \times \boldsymbol{3}$ *y* $e = (0, 1, 1)$*,* $f = (1, 1, 0)$*. Es fácil ver que* $e \wedge_{\boldsymbol{A}} f = (0, 1, 0)$ *y*

$$\begin{aligned} Sg^{\boldsymbol{A}}(\{e, f\}) = \{ \quad & (0,0,0), (0,0,2), (0,1,1), \\ & (0,1,2), (0,2,0), (0,2,1), \\ & (0,2,2), (1,1,0), (1,1,1), \\ & (1,1,2), (1,2,0), (1,2,1), \\ & (1,2,2), (2,0,0), (2,0,2), \\ & (2,1,0), (2,1,1), (2,1,2), \\ & (2,2,0), (2,2,1), (2,2,2) \quad \} \end{aligned}$$

por lo que $e \wedge_{\boldsymbol{A}} f \notin Sg^{\boldsymbol{A}}(\{e, f\})$*. Se sigue que el ínfimo entre elementos centrales no es definible por un término en* $\mathcal{U}$*.*

2.2.3. Variedades con un término mayoritario

Una variedad $\mathcal{V}$ es una variedad con un *término ternario mayoritario* si existe un término $M(x, y, z)$ tal que

$$\mathcal{V} \models M(x, x, y) \approx M(x, y, x) \approx M(y, x, x) \approx x$$

En esta clase de variedades el ínfimo y el supremo entre elementos centrales son definibles por términos, como lo enuncia el siguiente Lema.

Lema 2.2.3. *Si $\mathcal{V}$ es una variedad con un término ternario mayoritario M, entonces dados $\boldsymbol{A} \in \mathcal{V}$ y $e, f \in Z(\boldsymbol{A})$*

1. $e \wedge_{\boldsymbol{A}} f = M(e, f, 0)$
2. $e \vee_{\boldsymbol{A}} f = M(e, f, 1)$

Demostración. Se sigue directamente de las identidades satisfechas por M y el Lema 2.1.1. $\dashv$

Toda variedad con un término mayoritario tiene congruencias distributivas y para toda variedad con congruencias distributivas existen fórmulas ecuacionales que definen $\theta_{0,e}$ y $\theta_{1,e}$ en términos de e (en la Sección 3.1 se encuentra explícitamente la fórmula para $\theta_{0,e}$). Así, por el Lema 2.1.2, el complemento de un elemento central es definible ecuacionalmente. La variedad $\mathcal{D}_{01}$ de los reticulados distributivos acotados es un ejemplo clásico de una variedad con término ternario mayoritario para la que no existe un término que defina el complemento de un elemento central.

2.2.4. FHP no implica definibilidad ecuacional

Los Lemas 1.1.5 y 1.2.6 nos dicen que para una variedad con la PFH existen fórmulas $(\exists \bigwedge p \approx q)$ que definen $\theta_{0,e}$ y $\theta_{1,e}$ en términos de e. Así, por el Lema 2.1.2 sabemos que existen fórmulas $(\exists \bigwedge p \approx q)$ que definen las operaciones en el álgebra de Boole de elementos centrales.

Las variedades consideradas en esta Sección son variedades con la propiedad de Fraser-Horn (Vaggione [17]) que admiten una definición ecuacional de $\theta_{0,e}$ en términos de e y e^c. En todos los casos analizados se obtuvieron definiciones ecuacionales del complemento, el ínfimo y el supremo entre elementos centrales. Cabe preguntarse si la existencia de una fórmula ecuacional que define $\theta_{0,e}$ en términos de e y e^c en una variedad con la propiedad de Fraser-Horn implica la existencia de definiciones ecuacionales de las operaciones entre elementos centrales. Para responder esta pregunta necesitaremos de los siguientes lemas.

Lema 2.2.4. *Si $\mathcal{V}$ es una variedad tal que el complemento de un elemento central es definible por una conjunción de ecuaciones y $\boldsymbol{A} \in \mathcal{V}$, entonces para cada $e \in Z(\boldsymbol{A})$ y cada subálgebra $\boldsymbol{B}$ de $\boldsymbol{A}$ tal que $e, e^{c_{\boldsymbol{A}}} \in B$ tenemos que $(1, e^{c_{\boldsymbol{A}}}) \in \theta^{\boldsymbol{B}}(0, e)$.*

Demostración. Sean p_i, q_i, con $0 \leq i \leq n$, términos tales que la fórmula $\alpha(x, z) = \bigwedge_{i=1}^{n} p_i(x, z) \approx q_i(x, z)$ define el complemento de un elemento central. Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ y $e, f \in A$ tales que $e \diamond_{\mathbf{A}} f$. Dado que α define el complemento tenemos $\mathbf{A} \models \alpha(e, f)$.

Sea $\mathbf{B}$ una subálgebra de $\mathbf{A}$ tal que $e, f \in B$ y sea $\theta = \theta^{\mathbf{B}}(0, e)$. Dado que α es una conjunción de ecuaciones es preservada por subálgebras y cocientes, y así

$$\mathbf{B} \models \alpha(e, f)$$

por lo que $\mathbf{B}/\theta \models \alpha(e/\theta, f/\theta)$ y en consecuencia

$$\mathbf{B}/\theta \models \alpha(0/\theta, f/\theta)$$

Dado que $0/\theta \in Z(\mathbf{B}/\theta)$ tenemos que $f/\theta = (0/\theta)^c = 1/\theta$. $\dashv$

Lema 2.2.5. *Si $\mathcal{V}$ es una variedad tal que el ínfimo entre elementos centrales es definible por una conjunción de ecuaciones y $\boldsymbol{A} \in \mathcal{V}$, entonces para cada $e, f \in Z(\boldsymbol{A})$ y cada subálgebra $\boldsymbol{B}$ de $\boldsymbol{A}$ tal que e, f, $e \wedge_{\boldsymbol{A}} f \in B$ tenemos que $(1, e \wedge_{\boldsymbol{A}} f) \in \theta^{\boldsymbol{B}}(1, e) \vee \theta^{\boldsymbol{B}}(1, f)$.*

Demostración. Sean p_i, q_i, con $0 \leq i \leq n$, términos tales que la fórmula $\psi(x, y, z) = \bigwedge_{i=1}^{n} p_i(x, y, z) \approx q_i(x, y, z)$ define el ínfimo entre elementos centrales. Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ y $e, f, g \in Z(\mathbf{A})$ tales que $g = e \wedge_{\mathbf{A}} f$. Claramente $\mathbf{A} \models \psi(e, f, g)$.

Sea $\mathbf{B}$ una subálgebra de $\mathbf{A}$ tal que $e, f, g \in B$ y sea $\theta = \theta^{\mathbf{B}}(1, e) \vee \theta^{\mathbf{B}}(1, f)$. Tenemos así que

$$\mathbf{B} \models \psi(e, f, g)$$

por lo que $\mathbf{B}/\theta \models \psi(e/\theta, f/\theta, g/\theta)$ y en consecuencia

$$\mathbf{B}/\theta \models \psi(1/\theta, 1/\theta, g/\theta)$$

Dado que $1/\theta \in Z(\mathbf{B}/\theta)$ tenemos que $g/\theta = (1/\theta) \wedge (1/\theta) = 1/\theta$. $\dashv$

Lema 2.2.6. *Si $\mathcal{V}$ es una variedad tal que el supremo entre elementos centrales es definible por una conjunción de ecuaciones y $\boldsymbol{A} \in \mathcal{V}$, entonces para cada $e, f \in Z(\boldsymbol{A})$ y cada subálgebra $\boldsymbol{B}$ de $\boldsymbol{A}$ tal que e, f, $e \vee_{\boldsymbol{A}} f \in B$ tenemos que $(0, e \vee_{\boldsymbol{A}} f) \in \theta^{\boldsymbol{B}}(0, e) \vee \theta^{\boldsymbol{B}}(0, f)$.*

Demostración. La prueba es análoga a la demostración del Lema 2.2.5. $\dashv$

El siguiente es un ejemplo de una variedad con la PFH que admite una definición ecuacional de $\theta_{0,e}$ en términos de e y e^c para la que no existen fórmulas ecuacionales que definan el complemento de un elemento central ni el supremo entre elementos centrales.

Ejemplo 2.2.2. *En el tipo* $\tau = \{0, 1, c, d, \cdot, u\}$ *donde* 0, 1, c, d *son símbolos de constante,* $\cdot$ *es un símbolo de función binario y* u *es un símbolo de función* $3-$*ario, sea* $\mathcal{V}$ *la variedad definida por las identidades*

$$\begin{aligned} x \cdot 1 &\approx x \\ 1 \cdot x &\approx x \\ x \cdot 0 &\approx 0 \\ 0 \cdot x &\approx 0 \\ u(c, x, y) &\approx x \\ u(d, x, y) &\approx y. \end{aligned}$$

Claramente $\mathcal{V} \models 0 \approx 1 \to x \approx y$ *y la fórmula* $\varphi(z, w, x, y) = w \cdot x \approx w \cdot y$ *define* $\theta_{0,e}$ *en términos de* e *y* e^c*. Pero también* $\mathcal{V} \models c \approx d \to x \approx y$*, más aún, dadas las dos últimas ecuaciones, por* [17] *sabemos que* $\mathcal{V}$ *es una variedad con la PFH.*

Consideremos en $\mathcal{V}$ *el álgebra* $\boldsymbol{A} = \langle \{0, 1, c, d\}, 0, 1, c, d, \cdot, u\rangle$ *donde* $\cdot$ *es el ínfimo en la cadena* $0 < c < d < 1$ *y* u *está definido por las identidades en* $\mathcal{V}$ *y las ecuaciones* $u(0, x, y) = 0$, $u(1, x, y) = 1$.

Sea $\boldsymbol{C}$ *la subálgebra de* $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$ *generada por* $\{e, f\}$ *donde* $e = (0, 1)$ *y* $f = (1, 0)$*. La congruencia* $\theta^{\boldsymbol{C}}(0, e)$ *está dada por la partición*

$$\Big\{\big\{(0,0),(0,1),(0,2),(0,3)\big\},\big\{(1,0)\big\},\big\{(1,1)\big\},\big\{(2,0)\big\},\big\{(2,2)\big\},\big\{(3,0)\big\},\big\{(3,3)\big\}\Big\}$$

Dado que $(1, f) \notin \theta^{\boldsymbol{C}}(0, e)$ *por el Lema 2.2.4 podemos concluir que en* $\mathcal{V}$ *el complemento de un elemento central no es definible ecuacionalmente.*

Consideremos ahora en $\boldsymbol{A}^3$ *la subálgebra* $\boldsymbol{B}$ *generada por* $\{e, f, g\}$ *donde* $e = (0, 0, 1)$, $f = (1, 0, 0)$ $g = (1, 0, 1)$*. La congruencia* $\theta^{\boldsymbol{B}}(0, e) \vee \theta^{\boldsymbol{B}}(0, f)$ *está dada por la partición*

$$\begin{gathered} \Big\{\big\{(0,0,0),(0,0,1),(1,0,0),(0,0,2),(2,0,0),(0,0,3),(3,0,0)\big\}, \\ \big\{(1,0,1)\big\},\big\{(1,1,1)\big\},\big\{(2,0,2)\big\},\big\{(2,2,2)\big\},\big\{(3,0,3)\big\},\big\{(3,3,3)\big\}\Big\} \end{gathered}$$

Claramente $g = e \vee_{\boldsymbol{A}^3} f$ y $(0, g) \notin \theta^{\boldsymbol{B}}(0, e) \vee \theta^{\boldsymbol{B}}(0, f)$ por lo que de acuerdo con el Lema 2.2.6 el supremo de elementos centrales no es definible ecuacionalmente en $\mathcal{V}$.

En la variedad $\mathcal{V}$ del ejemplo anterior el ínfimo es definible por un término, ya que $e \wedge f = e \cdot f$. El siguiente es un ejemplo de una variedad con la PFH y definibilidad ecuacional de $\theta_{0,e}$ en términos de e y e^c que no admite una definición por ecuaciones del ínfimo entre elementos centrales.

Ejemplo 2.2.3. *Sea $\mathcal{V}'$ la variedad dada por las identidades*

$$\begin{aligned} x \cdot 1 &\approx 1 \\ 1 \cdot x &\approx 1 \\ x \cdot 0 &\approx x \\ 0 \cdot x &\approx x \\ u(c, x, y) &\approx x \\ u(d, x, y) &\approx y \end{aligned}$$

y sea $\boldsymbol{A} = \langle \{0, 1, c, d\}, 0, 1, c, d, \cdot, u \rangle$ donde $\cdot$ es el supremo en la cadena $0 < c < d < 1$ y u está definido por las identidades en $\mathcal{V}$ y las ecuaciones $u(0, x, y) = 0$, $u(1, x, y) = 1$. Sea $\boldsymbol{B}$ la subálgebra de $\boldsymbol{A}^3$ generada por $\{e, f, g\}$ donde $e = (0, 1, 1)$, $f = (1, 1, 0)$ y $g = (0, 1, 0)$. La congruencia $\theta^{\boldsymbol{B}}(1, e) \vee \theta^{\boldsymbol{B}}(1, f)$ está dada por la partición

$$\Big\{ \big\{ (1, 1, 1), (1, 1, 0), (2, 1, 1), (1, 1, 2), (3, 1, 1), (1, 1, 3) \big\} \\ \big\{ (0, 0, 0) \big\}, \big\{ (2, 2, 2) \big\}, \big\{ (3, 3, 3) \big\}, \big\{ (0, 1, 0) \big\}, \big\{ (2, 1, 2) \big\}, \big\{ (3, 1, 3) \big\} \Big\}$$

Dado que $g = e \wedge_{\boldsymbol{A}^3} f$ y $(1, g) \notin \theta^{\boldsymbol{B}}(1, e) \vee \theta^{\boldsymbol{B}}(1, f)$ por el Lema 2.2.5 concluimos que el ínfimo de elementos centrales no es definible ecuacionalmente en $\mathcal{V}'$.

De los ejemplos anteriores podemos concluir que el hecho de que una variedad tenga la propiedad de Fraser-Horn no implica la existencia de definiciones ecuacionales de las operaciones entre elementos centrales, incluso bajo la hipótesis de que existe una fórmula ecuacional que define $\theta_{0,e}$ en términos de e y e^c.

2.3. El complemento

La definibilidad del complemento de un elemento central es de especial importancia por su relación con la definibilidad de las congruencias factor en términos de un único elemento central. Si $\theta_{0,e}$ es definible en términos de e y e^c por una fórmula $\varphi(z,w,x,y)$ y hay una fórmula $\alpha(x,y)$ que define el complemento de un elemento central, la fórmula

$$\exists w : \alpha(z,w) \wedge \varphi(z,w,x,y)$$

claramente define $\theta_{0,e}$ en términos de e.

Notemos además que podemos obtener una fórmula α que define el complemento de un elemento central de forma natural a partir de una fórmula φ que define $\theta_{0,e}$ en términos de e y e^c. Para ver esto necesitamos definir el siguiente conjunto de fórmulas.

Definición 2.3.1. Dada una fórmula de primer orden $\varphi(z,w,x,y)$ llamaremos $\Sigma(z,w)$ al conjunto formado por las fórmulas:

$\lambda_0^R(z,w) \doteq \forall x : \ \varphi(z,w,x,x)$

$\lambda_0^S(z,w) \doteq \forall x,y : \ \varphi(z,w,x,y) \to \varphi(z,w,y,x)$

$\lambda_0^T(z,w) \doteq \forall x,y,u : \ \varphi(z,w,x,y) \wedge \varphi(z,w,y,u) \to \varphi(z,w,x,u)$

$\lambda_0^f(z,w) \doteq \forall \vec{x},\vec{y} : \ \bigwedge_{k=1}^n \varphi(z,w,x_k,y_k) \to \varphi(z,w,f(\vec{x}),f(\vec{y}))$ para cada f símbolo de función n-ario.

$\lambda_0^P(z,w) \doteq \varphi(z,w,0,z) \wedge \varphi(z,w,1,w)$

$\lambda_1^R(z,w) \doteq \forall x : \ \varphi(w,z,x,x)$

$\lambda_1^S(z,w) \doteq \forall x,y : \ \varphi(w,z,x,y) \to \varphi(w,z,y,x)$

$\lambda_1^T(z,w) \doteq \forall x,y,u : \ \varphi(w,z,x,y) \wedge \varphi(w,z,y,u) \to \varphi(w,z,x,u)$

$\lambda_1^f(z,w) \doteq \forall \vec{x},\vec{y} : \ \bigwedge_{k=1}^n \varphi(w,z,x_k,y_k) \to \varphi(w,z,f(\vec{x}),f(\vec{y}))$ para cada f símbolo de función n-ario.

$\lambda_0^P(z,w) \doteq \varphi(w,z,0,w) \wedge \varphi(w,z,1,z)$

$\lambda^I(z,w) \doteq \forall x,y : \ \varphi(z,w,x,y) \wedge \varphi(w,z,x,y) \to x \approx y.$

$\lambda^J(z,w) \doteq \forall x,y \ \exists u : \ \varphi(z,w,x,u) \wedge \varphi(w,z,u,y).$

Dados un par de elementos e y f en un álgebra $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$, tenemos que

$$\mathbf{A} \models \Sigma(e, f) \text{ si y sólo si } e \diamond_{\mathbf{A}} f$$

y claramente

$$\mathcal{V} \models \Sigma(z, v) \cup \Sigma(z, w) \to v \approx w$$

dada la unicidad del complemento de un elemento central. Así, por Compacidad existe un subconjunto finito $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ tal que

$$\mathcal{V} \models \Sigma_0(z, v) \cup \Sigma_0(z, w) \to v \approx w$$

por lo que si $\alpha(z, w)$ es la conjunción de fórmulas en el conjunto $\Sigma_0(z, w)$ tenemos que $\alpha(z, w)$ es una fórmula de primer orden que define el complemento de un elemento central. Nos proponemos encontrar explícitamente una fórmula α que defina el complemento de un elemento central y que tenga la menor complejidad posible. Para esto necesitaremos del siguiente Lema.

Lema 2.3.1. *Sean $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ y $g \in A \times B$ y sean δ, θ relaciones de equivalencia en $A \times B$ tales que*

1. $((a, b), (a, b')) \in \delta$ *y* $((a', b'), g) \in \delta$
2. $((a', b'), (a, b')) \in \theta$ *y* $((a, b), g) \in \theta$
3. $\delta \cap \theta = \Delta$
4. δ *y* θ *factorizan.*

Entonces $g = (a', b)$.

Demostración. Ya que δ factoriza y $((a, b), (a, b')) \in \delta$ tenemos que $((a', b), (a', b')) \in \delta$ y dado que $((a', b'), g) \in \delta$ tenemos

$$((a', b), g) \in \delta$$

Análogamente, dado que θ factoriza y $((a', b'), (a, b')) \in \theta$ y $((a, b), g) \in \theta$ tenemos

$$((a', b), g) \in \theta$$

Así, ya que $\delta \cap \theta = \Delta$, podemos concluir $g = (a', b)$. $\dashv$

Definición 2.3.2. Dada una fórmula $\varphi(z, w, x, y)$ definimos $\alpha_\varphi(z, w)$ como la conjunción de las fórmulas λ_0^R, λ_0^S, λ_0^T, λ_0^P, λ_1^R, λ_1^S, λ_1^T, λ_1^P, λ^I pertenecientes al conjunto Σ.

Notemos que si $a, b \in A$ son tales que $\mathbf{A} \models \alpha_\varphi(a, b)$ entonces

$$\delta = \{(x, y) \in A^2 : A \models \varphi(a, b, x, y)\}$$
$$\text{y}$$
$$\theta = \{(x, y) \in A^2 : A \models \varphi(b, a, x, y)\}$$

son un par de relaciones de equivalencia en A tales que $(0, a)$ y $(1, b) \in \delta$; $(1, a)$ y $(0, b) \in \theta$ y $\delta \cap \theta = \Delta$.

Teorema 2.3.2. *Si $\mathcal{V}$ es una variedad y $\varphi(z, w, x, y)$ es una fórmula preservada por productos y factores directos que define $\theta_{0,e}$ en términos de e y e^c, entonces para toda álgebra $\boldsymbol{A} \in \mathcal{V}$ y todo $e \in Z(\boldsymbol{A})$, $g \in A$*

$$\boldsymbol{A} \models \alpha_\varphi(e, g) \quad \textit{si y sólo si} \quad e \diamond_{\boldsymbol{A}} g.$$

Demostración. Si $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ y $e, f \in A$ son tales que $e \diamond_{\mathbf{A}} f$, dado que φ define $\theta_{0,e}$ en términos de e y f, claramente $\mathbf{A} \models \alpha_\varphi(e, f)$.

Para ver la otra dirección sean $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in \mathcal{V}$ y $g \in A \times B$ tales que $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \models \alpha_\varphi((0, 1), g)$. Así

$$\delta = \{(x, y) \in (A \times B)^2 : \mathbf{A} \times \mathbf{B} \models \varphi((0, 1), g, x, y)\}$$
$$\text{y}$$
$$\theta = \{(x, y) \in (A \times B)^2 : \mathbf{A} \times \mathbf{B} \models \varphi(g, (0, 1), x, y)\}$$

son relaciones de equivalencia tales que

$$((0, 0), (0, 1)) \in \delta \text{ y } ((1, 1), g) \in \delta,$$
$$((1, 1), (0, 1)) \in \theta \text{ y } ((0, 0), g) \in \theta,$$
$$\delta \cap \theta = \Delta^{A \times B},$$

y dado que φ es una fórmula preservada por productos y factores directos, δ y θ factorizan. Así, de acuerdo con el Lema 2.3.1, podemos concluir que $g = (1, 0)$. $\dashv$

Cabe notar que si $\theta_{0,e}$ es definible por una conjunción de ecuaciones en términos de e y e^c, entonces el Lema anterior nos permite obtener una definición del complemento de un elemento central por cuasi-identidades. El inciso *2* del Lema 1.2.7 nos muestra que en el caso general no hay definibilidad existencial ni positiva de e^c, por lo que para el caso ecuacional la definición del complemento encontrada es óptima.

Capítulo 3

Definibilidad de $\theta_{0,e}$ en términos de e

Este Capítulo se centra en la búsqueda de una fórmula que defina $\theta_{0,e}$ en términos de e bajo distintas hipótesis. En la Sección 3.1 presentamos una fórmula ecuacional que define $\theta_{0,e}$ en términos de e para ciertas variedades que admiten este tipo de definibilidad. En la Sección 3.2 trabajamos bajo la hipótesis de definibilidad ecuacional de $\theta_{1,e}$ en términos de e o, equivalentemente, de $\theta_{0,e}$ en términos de e^c. En la Sección 3.3 trabajamos bajo la hipótesis de definibilidad ecuacional de $\theta_{0,e}$ en términos de e y e^c. Por último en la Sección 3.4 presentamos los resultados que generalizan los obtenidos en las Secciones 3.2 y 3.3 para cualquier fórmula, no necesariamente ecuacional, que defina $\theta_{0,e}$ en términos de e^c y en términos de e y e^c, respectivamente.

3.1. Definibidad ecuacional en términos de e

En esta Sección se presentan definiciones ecuacionales de $\theta_{0,e}$ en términos de e para variedades con congruencias modulares, variedades con congruencias distributivas, y variedades bajo las hipótesis del Teorema 2.2.2.

Recordemos que por el Lema 1.2.1 para toda variedad $\mathcal{V}$ con $\vec{0}$ y $\vec{1}$ existen términos $u_1, \ldots, u_m$, con m impar tales que satisfacen las siguientes identidades:

$$\begin{array}{rcll} x & \approx & u_1(0,x,y) & \\ u_i(1,x,y) & \approx & u_{i+1}(1,x,y) & \textit{para } i \textit{ impar},\ 1 \leq i \leq m-2 \\ u_i(0,x,y) & \approx & u_{i+1}(0,x,y) & \textit{para } i \textit{ par},\ 1 \leq i \leq m-1 \\ u_m(1,x,y) & \approx & y & \end{array}$$

3.1.1. Variedades con congruencias modulares

Consideremos una variedad $\mathcal{V}$ con congruencias modulares. Siendo $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x,y,z)$, el álgebra libre de $\mathcal{V}$ en las variables x, y, z, tenemos que

$$\theta^{\mathbf{F}}(0,z) \vee \Big(\big(\theta^{\mathbf{F}}(0,z) \vee \theta^{\mathbf{F}}(x,y)\big) \cap \theta^{\mathbf{F}}(1,z) \Big) = \big(\theta^{\mathbf{F}}(0,z) \vee \theta^{\mathbf{F}}(x,y)\big) \cap \big(\theta^{\mathbf{F}}(0,z) \vee \theta^{\mathbf{F}}(1,z)\big).$$

Dado que $\theta^{\mathbf{F}}(0,z) \vee \theta^{\mathbf{F}}(1,z) = \nabla^{\mathbf{F}}$, se satisface *6* del Teorema 1.2.8, por lo que $\mathcal{V}$ admite una definición ecuacional de $\theta_{0,e}$. Nos proponemos obtener explícitamente una $(\bigwedge p = q)$-fórmula que defina $\theta_{0,e}$ en términos de e por medio de los términos de Gumm [8] y los términos $u_i's$.

Para variedades con congruencias modulares, Gumm [8] demostró la existencia de términos $p(x,y,z)$ y $q_i(x,y,z)$ con $1 \leq i \leq r$ y r impar tales que en $\mathcal{V}$ se satisfacen las identidades:

$$\begin{array}{rl} q_i(x,z,x) \approx x & \text{para } i = 1, \ldots, r \\ x \approx p(x,y,y) & \\ p(x,x,y) \approx q_1(x,x,y) & \\ q_i(x,y,y) \approx q_{i+1}(x,y,y) & \text{para } i \text{ impar},\ 1 \leq i \leq r-2 \\ q_i(x,x,y) \approx q_{i+1}(x,x,y) & \text{para } i \text{ par},\ 1 \leq i \leq r-1 \\ q_r(x,y,y) \approx y. & \end{array}$$

Sin pérdida de generalidad supondremos que, siendo m la cantidad de términos u_i, $m = 2^n + 1$ para algún $n \geq 1$. Sean $m_j = 2^{n-j} + 1$ con $0 \leq j \leq n$.
Definimos los términos $t_i^j(z,x,y)$, con $0 \leq j \leq n$, $1 \leq i \leq m_j - 1$ como

$$\begin{array}{rcl} t_i^0(z,x,y) & = & u_{m+1-i}(z,x,y) \\ t_i^{j+1}(z,x,y) & = & p(x, t_{m_j-i}^j(z,x,y), t_i^j(z,x,y)) \end{array}$$

y los términos $s_i(x,y)$ con $1 \leq i \leq n$ como

$$\begin{array}{rcl} s_1(x,y) & = & y \\ s_{i+1}(x,y) & = & p(x,x,s_i(x,y)) \end{array}$$

Observemos que para $m = 5$ tenemos $n = 2$ y

$$t_1^n = p(x, p(x, u_3, u_4), p(x, u_2, u_5))$$

Para $m = 9$ tenemos $n = 3$ y

$$t_1^n = p(x, p(x, p(x, u_4, u_7), p(x, u_3, u_8)), p(x, p(x, u_5, u_6), p(x, u_2, u_9)))$$

Invitamos al lector a chequear como opera esta distribución de los términos u_i, evaluando $t_1^n(z, x, y)$ en $z = 0$ y $z = 1$ y utilizando las identidades satisfechas por los términos u_i.

Lema 3.1.1. *Sea $\mathcal{V}$ una variedad con congruencias modulares. En $\mathcal{V}$ se satisfacen las siguientes identidades:*

$$\begin{aligned}
t_i^j(0,x,y) &\approx t_{i+1}^j(0,x,y) \quad \textit{para todo } j \textit{ y para } i \textit{ impar} && (3.1)\\
t_i^j(1,x,y) &\approx t_{i+1}^j(1,x,y) \quad \textit{para todo } j \textit{ y para } i \textit{ par} && (3.2)\\
t_{m_j-1}^j(1,x,y) &\approx x \quad \textit{para } j \geq 1 && (3.3)\\
t_1^n(0,x,y) &\approx x && (3.4)\\
t_1^n(1,x,y) &\approx s_n(x, p(x, u_1(1,x,y), y)) && (3.5)\\
s_i(x,x) &\approx x && (3.6)\\
s_{i+1}(x,y) &\approx s_i(x, p(x,x,y)) \quad \textit{para } 1 \leq i \leq n-1 && (3.7)
\end{aligned}$$

Demostración. 1. Para i impar, $m - i$ es par, así para el caso $j = 0$ tenemos

$$\begin{aligned}
t_i^0(0,x,y) &\approx u_{m+1-i}(0,x,y)\\
&\approx u_{m-i}(0,x,y)\\
&\approx t_{i+1}^0(0,x,y).
\end{aligned}$$

Suponiendo que vale para j tenemos

$$\begin{aligned}
t_i^{j+1}(0,x,y) &\approx p(x, t_{m_j-i}^j(0,x,y), t_i^j(0,x,y))\\
&\approx p(x, t_{m_j-(i+1)}^j(0,x,y), t_{i+1}^j(0,x,y))\\
&\approx t_{i+1}^{j+1}(0,x,y).
\end{aligned}$$

2. Para i par, $m-i$ es impar y así para $j=0$ tenemos

$$\begin{aligned} t_i^0(1,x,y) &\approx u_{m-i+1}(1,x,y) \\ &\approx u_{m-i}(1,x,y) \\ &\approx t_{i+1}^0(1,x,y). \end{aligned}$$

Suponiendo que vale para j tenemos

$$\begin{aligned} t_i^{j+1}(1,x,y) &\approx p(x, t^j_{m_j-i}(1,x,y), t_i^j(1,x,y)) \\ &\approx p(x, t^j_{m_j-(i+1)}(1,x,y), t_{i+1}^j(1,x,y)) \\ &\approx t_{i+1}^{j+1}(1,x,y). \end{aligned}$$

3. De acuerdo con la definición de los términos t_i^j tenemos que para todo $j \geq 1$

$$t^j_{m_j-1}(1,x,y) \approx p(x, t^{j-1}_{m_{j-1}-(m_j-1)}(1,x,y), t^{j-1}_{m_j-1}(1,x,y)).$$

Notemos que $m_{j-1}-(m_j-1) = 2^{n-(j-1)}+1-2^{n-j} = 2^{n-j}+1 = m_j$. Así, siendo m_j-1 par, tenemos por la ec. (3.2) y la definición del término p

$$t^j_{m_j-1}(1,x,y) \approx p(x, t^{j-1}_{m_j}(1,x,y), t^{j-1}_{m_j-1}(1,x,y)) \approx x.$$

4. Por la ec. (3.1) tenemos que

$$t_1^n(0,x,y) \approx p(x, t_2^{n-1}(0,x,y), t_1^{n-1}(0,x,y)) \approx x.$$

5. Veamos que $t_1^j(1,x,y) \approx s_j(x, p(x, u_1(1,x,y), y))$ por inducción en $j \geq 1$

$$\begin{aligned} t_1^1(1,x,y) &\approx p(x, t^0_{m_0-1}(1,x,y), t_1^0(1,x,y)) \\ &\approx p(x, u_2(1,x,y), u_m(1,x,y)) \\ &\approx p(x, u_1(1,x,y), y) \\ &\approx s_1(x, p(x, u_1(1,x,y), y)). \end{aligned}$$

Suponiendo que vale para j, por la ec. (3.3) tenemos

$$\begin{aligned} s_{j+1}(x, p(x, u_1(1,x,y), y)) &\approx p(x, x, s_j(x, p(x, u_1(1,x,y), y))) \\ &\approx p(x, x, t_1^j(1,x,y)) \\ &\approx p(x, t^j_{m_j-1}(1,x,y), t_1^j(1,x,y)) \\ &\approx t_1^{(j+1)}(1,x,y). \end{aligned}$$

Por lo que para $j = n$ tenemos la igualdad buscada.

6. La demostración por inducción sobre i es inmediata de la definición de los s_i y p.

7. Queremos ver que $s_{i+1}(x,y) \approx s_i(x, p(x,x,y))$ para $1 \leq i \leq n-1$. Claramente

$$\begin{aligned} s_2(x,y) &\approx p(x,x,s_1(x,y)) \\ &\approx p(x,x,y) \\ &\approx s_1(x,p(x,x,y)) \end{aligned}$$

y suponiendo que se satisface para i tenemos

$$\begin{aligned} s_{i+2}(x,y) &\approx p(x,x,s_{i+1}(x,y)) \\ &\approx p(x,x,s_i(x,p(x,x,y))) \\ &\approx s_{i+1}(x,p(x,x,y)) \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración.$\dashv$

Teorema 3.1.2. *Si $\mathcal{V}$ es una variedad con congruencias modulares y $\varphi(z,x,y)$ es la conjunción de las ecuaciones*

$$\begin{aligned} t_1^n(z,x,y) &\approx s_n(x, p(x, u_1(z,x,y), y)) && (3.8) \\ q_j(x, u_k(z,x,y), y) &\approx q_j(x, u_k(1,x,y), y) \text{ para todo } j \text{ y todo } k && (3.9) \end{aligned}$$

entonces φ define $\theta_{0,e}$ en términos de e.

Demostración. Por el Corolario 1.2.9 basta verificar que

$$\mathcal{V} \models \varphi(1,x,y) \quad \text{y} \quad \mathcal{V} \models \varphi(0,x,y) \leftrightarrow x = y.$$

$\mathcal{V} \models \varphi(1,x,y)$ es consecuencia directa de la ec. (3.5) del lema anterior.

$\mathcal{V} \models \varphi(0,x,x)$ es consecuencia de las ecuaciones (3.4) y (3.6) y la definición de los términos q_j.

Sean $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ y $a, b \in A$ tales que $\mathbf{A} \models \varphi(0, a, b)$

$$\begin{aligned}
a &= t_1^n(0, a, b) && \text{por la ec. (3.4)} \\
&= s_n(a, p(a, u_1(0, a, b), b)) && \text{por } \varphi(0, a, b) \\
&= s_n(a, p(a, a, b)). && \text{por def. de } u_1
\end{aligned}$$

Aplicando alternativamente la validez de $\varphi(0, a, b)$ y las identidades satisfechas por los términos u_i tenemos que, para todo j

$$\begin{aligned}
q_j(a, a, b) &= q_j(a, u_1(0, a, b), b) \\
&= q_j(a, u_1(1, a, b), b) \\
&\vdots \\
&= q_j(a, u_m(0, a, b), b) \\
&= q_j(a, b, b)
\end{aligned}$$

y por la def de p y los q_j tenemos

$$\begin{aligned}
p(a, a, b) &= q_1(a, a, b) \\
&= q_1(a, b, b) \\
&= q_2(a, b, b) \\
&\vdots \\
&= q_r(a, a, b) \\
&= q_r(a, b, b) \\
&= b.
\end{aligned}$$

Esto implica que para para todo $i > 1$

$$\begin{aligned}
s_i(a, p(a, a, b)) &= s_i(a, b) \\
&= s_{i-1}(a, p(a, a, b)) && \text{por la ec. (3.7)}
\end{aligned}$$

y así

$$\begin{aligned}
a &= s_n(a, p(a, a, b)) \\
&\vdots \\
&= s_1(a, p(a, a, b)) \\
&= p(a, a, b) \\
&= b,
\end{aligned}$$

por lo que podemos concluir $\mathcal{V} \models \varphi(0, x, y) \to x \approx y$. $\dashv$

3.1.2. Variedades con congruencias distributivas

Si $\mathcal{V}$ es una variedad con congruencias distributivas sabemos (Jónsson [9]) que existen términos q_i con $1 \leq i \leq r$ y r impar, tales que en $\mathcal{V}$ se satisfacen las identidades:

$$\begin{array}{rcl} x & \approx & q_i(x,y,x) \quad 0 \leq i \leq n \\ x & \approx & q_1(x,x,y) \\ q_i(x,y,y) & \approx & q_{i+1}(x,y,y) \text{ para } i \text{ impar} \\ q_i(x,x,y) & \approx & q_{i+1}(x,x,y) \text{ para } i \text{ par} \\ q_r(x,y,y) & \approx & y. \end{array}$$

En vista de que los términos de Jónsson son un caso particular de los términos de Gumm, el Teorema 3.1.2 produce el siguiente Corolario.

Corolario 3.1.3. *Si $\mathcal{V}$ es una variedad con congruencias distributivas y $\varphi(z,x,y)$ es la conjunción de las ecuaciones*

$$q_j(x, u_i(z,x,y), y) \approx q_j(x, u_i(1,x,y), y) \text{ para todo } j \text{ y todo } i$$

entonces φ define $\theta_{0,e}$ en términos de e.

Demostración. Definiendo $p(x,y,z) = x$ podemos ver con un simple argumento de inducción que $t_1^n(z,x,y) = x = s_n(x, p(x, u_1(z,x,y), y))$, por lo que aplicando el Teorema 3.1.2 obtenemos las ecuaciones deseadas.$\dashv$

3.1.3. Variedades con un término u

En el capítulo 2 vimos que si $\mathcal{V}$ es una variedad para la que existe un término u tal que

$$\mathcal{V} \models u(0,1,x,y) \approx x \tag{3.10}$$

$$\mathcal{V} \models u(1,0,x,y) \approx y \tag{3.11}$$

entonces $\mathcal{V}$ tiene definibilidad ecuacional del complemento, el ínfimo y el supremo entre elementos centrales. $\mathcal{V}$ es una variedad con la PFH por lo que los Lemas 1.1.5 y 1.2.6 nos dicen que existe una fórmula $(\exists \bigwedge p \approx q)$ que define $\theta_{0,e}$ en términos de e. El siguiente Lema muestra que en este caso particular existe una conjunción de ecuaciones que define $\theta_{0,e}$ en términos de e.

Lema 3.1.4. *Si $\mathcal{V}$ es una variedad para la que existe un término u que satisface las identidades* (3.10) *y* (3.11) *entonces la fórmula*

$$\varphi(z,x,y) = u(z,1,x,y) \approx u(1,z,x,y)$$

define $\theta_{0,e}$ en términos de e.

Demostración. Es una aplicación directa del Corolario 1.2.9 y las identidades (3.10) y (3.11).$\dashv$

3.2. Definibilidad ecuacional en términos de e^c

En esta Sección estudiamos la definibilidad de $\theta_{0,e}$ en términos de e para el caso de una variedad que tiene definibilidad ecuacional de $\theta_{1,e}$ en términos de e. Recordemos que la variedad de los semireticulados acotados admite una definición ecuacional de $\theta_{1,e}$ en términos de e, pero no admite una definición ni positiva ni existencial de $\theta_{0,e}$ en términos de e (Lema 1.2.7).

Lema 3.2.1. *Sea $\mathcal{V}$ una variedad tal que la fórmula*

$$\varphi(z,x,y) = \bigwedge_{i=1}^{n} p_i(z,x,y) \approx q_i(z,x,y)$$

define $\theta_{1,e}$ en términos de e. Entonces la fórmula

$$\psi(z,x,y) = \forall u : \varphi(u,x,x) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi(z, p_i(u,x,y), q_i(u,x,y)) \rightarrow \varphi(u,x,y)$$

define $\theta_{0,e}$ en términos de e.

Demostración. Sean $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$, $e \in Z(\mathbf{A})$ y $a,b,c \in A$ tales que $(a,b) \in \theta_{0,e}^{\mathbf{A}}$ y

$$\mathbf{A} \models \varphi(c,a,a) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi(e, p_i(c,a,b), q_i(c,a,b))$$

Claramente

$$(p_i(c,a,b), p_i(c,a,a)) \in \theta_{0,e}^{\mathbf{A}} \quad , 1 \leq i \leq n$$
$$(q_i(c,a,b), q_i(c,a,a)) \in \theta_{0,e}^{\mathbf{A}} \quad , 1 \leq i \leq n$$

por lo que $\bigwedge_{i=1}^{n} p_i(c,a,a) = q_i(c,a,a)$ implica

$$(p_i(c,a,b), q_i(c,a,b)) \in \theta_{0,e}^{\mathbf{A}} \quad , 1 \leq i \leq n.$$

Dado que $\mathcal{V} \models \varphi(1,x,y) \to x \approx y$ y $\mathbf{A} \models \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi(e, p_i(c,a,b), q_i(c,a,b))$ tenemos que

$$(p_i(c,a,b), q_i(c,a,b)) \in \theta_{1,e}^{\mathbf{A}} \quad , 1 \leq i \leq n$$

por lo que

$$\bigwedge_{i=1}^{n} p_i(c,a,b) = q_i(c,a,b)$$

ya que $\theta_{0,e}^{\mathbf{A}} \cap \theta_{1,e}^{\mathbf{A}} = \Delta$.

Para ver la otra dirección sea $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \in \mathcal{V}$ y $a,b,e,f \in A$, con $e = (0,1)$ y $f = (1,0)$. Observemos que

$$\mathcal{V} \models \varphi(1,x,x) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi(0, p_i(1,x,y), q_i(1,x,y))$$

$$\mathcal{V} \models \varphi(0,x,x) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi(1, p_i(0,x,y), q_i(0,x,y))$$

lo que implica

$$\mathbf{A} \models \varphi(f,x,x) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi(e, p_i(f,x,y), q_i(f,x,y))$$

por lo que si $\mathbf{A} \models \psi(e,a,b)$ en particular, tomando $u = f$, tenemos $\mathbf{A} \models \varphi(f,a,b)$ y en consecuencia $(a,b) \in \theta_{1,f}^{\mathbf{A}} = \theta_{0,e}^{\mathbf{A}}$. $\dashv$

Como mencionamos anteriormente la variedad de los semireticulados acotados con ínfimo $\mathcal{S}_{01}^{\wedge}$ es un ejemplo de una variedad con definición ecuacional de $\theta_{1,e}$ en términos de e que no admite una definición ni existencial ni positiva de $\theta_{0,e}$ en términos de e, por lo que consideramos óptima la fórmula ψ hallada en el Lema 3.2.1.

3.3. Definibilidad ecuacional en términos de e y e^c

En esta Sección estudiamos la definibilidad de $\theta_{0,e}$ en términos de e para aquellas variedades que admiten una fórmula ecuacional que define $\theta_{0,e}$ en términos de e y e^c.

Consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.3.1. *En el tipo $\tau = \{0, 1, +, \cdot\}$, donde 0 y 1 son símbolos de constante y $+$ y $\cdot$ son símbolos de función binarios, sea $\mathcal{W}$ la variedad definida por las identidades*

$$\begin{aligned} x \cdot (0+1) &\approx x \\ x \cdot (1+0) &\approx y \cdot (1+0). \end{aligned}$$

Esta es una variedad con constantes distintas 0 y 1 y la fórmula

$$\varphi(z, w, x, y) = x \cdot (z+w) \approx y \cdot (z+w)$$

define $\theta_{0,e}$ en términos de e y e^c.

Consideremos en $\mathcal{W}$ el álgebra $\boldsymbol{A} = \langle \{0,1\}, 0, 1, \cdot^{\boldsymbol{A}}, +^{\boldsymbol{A}} \rangle$ donde $\cdot^{\boldsymbol{A}}$ y $+^{\boldsymbol{A}}$ son las operaciones definidas como

$\cdot^{\boldsymbol{A}}$	0	1
0	0	0
1	0	1

$+^{\boldsymbol{A}}$	0	1
0	0	1
1	0	1

En este caso tenemos que $\big((1,1),(1,0)\big) \notin \theta^{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}}\big((0,0),(0,1)\big)$, por lo que

$$\theta^{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}}_{(0,0),(0,1)} \neq \theta^{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}}\big((0,0),(0,1)\big).$$

El Lema 1.2.4 y el Teorema 1.2.5 nos dicen entonces que no existe una fórmula ni existencial ni positiva que defina $\theta_{0,e}$ en términos de e.

Consideremos ahora el álgebra $\boldsymbol{B} = \langle \{0,1\}, 0, 1, \cdot^{\boldsymbol{B}}, +^{\boldsymbol{B}} \rangle$ donde $\cdot^{\boldsymbol{B}}$ y $+^{\boldsymbol{B}}$ son las operaciones definidas como

$\cdot^{\boldsymbol{B}}$	0	1
0	0	1
1	1	1

$+^{\boldsymbol{B}}$	0	1
0	0	0
1	1	1

En este caso tenemos que $\big((0,0),(1,0)\big) \notin \theta^{B\times B}\big((1,1),(0,1)\big)$, por lo que

$$\theta^{\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B}}_{(1,1),(0,1)} \neq \theta^{\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B}}\big((1,1),(0,1)\big)$$

Nuevamente el Lema 1.2.4 y el Teorema 1.2.5 nos dicen que no hay una fórmula ni existencial ni positva que defina $\theta_{1,e}$ en términos de e.

El ejemplo anterior en particular nos dice que no necesariamente existe una definición ecuacional de $\theta_{1,e}$ en términos de e por lo que no podemos aplicar los resultados obtenidos en la Sección anterior.

La variedad $\mathcal{W}$ es un caso particular de aquellas variedades para las que existen términos p y q tales que se satisfacen las identidades

$$\begin{aligned} x &\approx p(0,1,x,y) \\ p(1,0,x,y) &\approx q(1,0,x,y) \\ q(0,1,x,y) &\approx y. \end{aligned}$$

En estas variedades la fórmula

$$p(z,w,x,y) \approx q(z,w,x,y)$$

define $\theta_{0,e}$ en términos de e y e^c.

Al final de esta Sección expondremos un Teorema que nos proporcionará una fórmula general que define $\theta_{0,e}$ en términos de e a partir de una fórmula ecuacional que define $\theta_{0,e}$ en términos de e y e^c. Sin embargo, para las variedades que satisfacen las identidades anteriores existe una fórmula más simple que la encontrada en el caso general y la presentamos en el siguiente Lema.

Lema 3.3.1. *Si $\mathcal{V}$ es una variedad para la que existen términos p y q tales que satisfacen las identidades*

$$\begin{aligned} x &\approx p(0,1,x,y) \\ p(1,0,x,y) &\approx q(1,0,x,y) \\ q(0,1,x,y) &\approx y \end{aligned}$$

entonces la fórmula $\psi(z,x,y) =$

$$\forall u : \Big(p(z,u,x,x) \approx q(z,u,x,x) \ \wedge\ p(z,u,p(0,z,x,y),q(0,z,x,y)) \approx p(z,0,x,y)$$

$$\wedge\ q(z,u,p(0,z,x,y),q(0,z,x,y)) \approx q(z,0,x,y)\Big) \rightarrow p(z,u,x,y) \approx q(z,u,x,y)$$

define $\theta_{0,e}$ en términos de e.

Demostración. Sean $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$, $e \in Z(\mathbf{A})$ y $a,b,c \in A$ tales que $(a,b) \in \theta_{0,e}^{\mathbf{A}}$ y en $\mathbf{A}$ se satisface

$$p(e,c,a,a) = q(e,c,a,a) \tag{3.12}$$

$$p(e,c,p(0,e,a,b),q(0,e,a,b)) = p(e,0,a,b) \tag{3.13}$$

$$q(e,c,p(0,e,a,b),q(0,e,a,b)) = q(e,0,a,b). \tag{3.14}$$

Dado que $(a,b) \in \theta^{\mathbf{A}}_{0,e}$ por la ec. (3.12) tenemos

$$(p(e,c,a,b), q(e,c,a,b)) \in \theta^{\mathbf{A}}_{0,e}. \tag{3.15}$$

Por (3.13) tenemos

$$(p(e,c,a,b), p(e,0,a,b)) \in \theta^{\mathbf{A}}_{1,e}$$

y por (3.14) tenemos

$$(q(e,c,a,b), q(e,0,a,b)) \in \theta^{\mathbf{A}}_{1,e}.$$

Ya que $\mathcal{V} \models p(1,0,x,y) \approx q(1,0,x,y)$ esto implica

$$(p(e,c,a,b), q(e,c,a,b)) \in \theta^{\mathbf{A}}_{1,e}. \tag{3.16}$$

Así, de las ecuaciones (3.15) y (3.16) y el hecho de que $\theta^{\mathbf{A}}_{0,e} \cap \theta^{\mathbf{A}}_{1,e} = \Delta$, tenemos

$$p(e,c,a,b) = q(e,c,a,b)$$

Para ver la otra dirección observemos que en $\mathcal{V}$ se satisfacen las identidades

$$\begin{aligned} p(0,1,x,x) &\approx q(0,1,x,x) \\ p(0,1,p(0,0,x,y),q(0,0,x,y)) &\approx p(0,0,x,y) \\ q(0,1,p(0,0,x,y),q(0,0,x,y)) &\approx q(0,0,x,y) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} p(1,0,x,x) &\approx q(1,0,x,x) \\ p(1,0,p(0,1,x,y),q(0,1,x,y)) &\approx p(1,0,x,y) \\ q(1,0,p(0,1,x,y),q(0,1,x,y)) &\approx q(1,0,x,y). \end{aligned}$$

Sean $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \in \mathcal{V}$ y $a,b,e,f \in A$, con $e = (0,1)$ y $f = (1,0)$, tales que $\mathbf{A} \models \psi(e,a,b)$. Por la observación anterior, en $\mathbf{A}$ se satisface

$$\begin{aligned} p(e,f,a,a) &= q(e,f,a,a) \\ p(e,f,p(0,e,a,b),q(0,e,a,b)) &= p(e,0,a,b) \\ q(e,f,p(0,e,a,b),q(0,e,a,b)) &= q(e,0,a,b). \end{aligned}$$

Así, tomando $u = f$ en $\psi(e,a,b)$, tenemos

$$\mathbf{A} \models p(e,f,a,b) = q(e,f,a,b)$$

y en consecuencia $(a,b) \in \theta^{\mathbf{A}}_{0,e}$. $\dashv$

Teorema 3.3.2. *Sea $\mathcal{V}$ una variedad tal que la fórmula*

$$\varphi(z,w,x,y) = \bigwedge_{i=1}^{n} p_i(z,w,x,y) \approx q_i(z,w,x,y)$$

define $\theta_{0,e}$ en términos de e y e^c. Entonces la fórmula $\psi(z,x,y) =$

$$\forall u : \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi(z,u,p_i(z,1,x,x),q_i(z,1,x,x)) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi(z,u,p_i(1,z,x,y),q_i(1,z,x,y))$$

$$\to \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi(z,u,p_i(z,1,x,y),q_i(z,1,x,y))$$

define $\theta_{0,e}$ en términos de e.

Demostración. Sea $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \in \mathcal{V}$ y sean $e = (0,1)$, $f = (1,0)$ y $a, b \in A$ tales que $(a,b) \in \theta_{0,e}^{\mathbf{A}}$, queremos ver que $\mathbf{A} \models \psi(e,a,b)$. Sea $c \in A$ tal que

$$\bigwedge_{j=1}^{n}\bigwedge_{i=1}^{n} \quad p_j(e,c,p_i(e,1,a,a),q_i(e,1,a,a)) = q_j(e,c,p_i(e,1,a,a),q_i(e,1,a,a)) \tag{3.17}$$

$$\bigwedge_{j=1}^{n}\bigwedge_{i=1}^{n} \quad p_j(e,c,p_i(1,e,a,b),q_i(1,e,a,b)) = q_j(e,c,p_i(1,e,a,b),q_i(1,e,a,b)). \tag{3.18}$$

Dado que $(a,b) \in \theta_{0,e}^{\mathbf{A}}$ por (3.17) tenemos que para todo i,j, con $1 \leq i,j \leq n$

$$(p_j(e,c,p_i(e,1,a,b),q_i(e,1,a,b)), q_j(e,c,p_i(e,1,a,b),q_i(e,1,a,b))) \in \theta_{0,e}^{\mathbf{A}}.$$

Por (3.18) y el hecho de que $(1,e) \in \theta_{1,e}^{\mathbf{A}}$ tenemos

$$(p_j(e,c,p_i(e,1,a,b),q_i(e,1,a,b)), q_j(e,c,p_i(e,1,a,b),q_i(e,1,a,b))) \in \theta_{1,e}^{\mathbf{A}}.$$

Dado que $\theta_{0,e} \cap \theta_{1,e} = \Delta$ tenemos

$$\bigwedge_{j=1}^{n}\bigwedge_{i=1}^{n} p_j(e,c,p_i(e,1,a,b),q_i^A(e,1,a,b)) = q_j(e,c,p_i(e,1,a,b),q_i(e,1,a,b))$$

lo que concluye una dirección de la demostración.

Supongamos ahora que $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \models \psi(e,a,b)$. Notemos que dado que $\mathcal{V} \models \varphi(0,1,x,x)$ tenemos

$$\mathcal{V} \models \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi(0,1,p_i(0,1,x,x),q_i(0,1,x,x))$$

y dado que $\mathcal{V} \models \varphi(1,0,x,y)$ tenemos

$$\mathcal{V} \models \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi(1,0,p_i(1,1,x,y),q_i(1,1,x,y))$$

por lo que

$$\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \models \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi(e,f,p_i(e,1,a,a),q_i(e,1,a,a)). \tag{3.19}$$

Similarmente,

$$\mathcal{V} \models \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi(0,1,p_i(1,0,x,y),q_i(1,0,x,y))$$

y

$$\mathcal{V} \models \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi(1,0,p_i(1,1,x,y),q_i(1,1,x,y))$$

por lo que

$$\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \models \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi(e,f,p_i(1,e,a,b),q_i(1,e,a,b)). \tag{3.20}$$

Dado que $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \models \psi(e,a,b)$ en particular, tomando $u = f$, por (3.19) y (3.20) tenemos que

$$\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \models \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi(e,f,p_i(e,1,a,b),q_i(e,1,a,b))$$

por lo que si $a = (a_1, a_2)$ y $b = (b_1, b_2)$,

$$\mathbf{A}_1 \models \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi(0,1,p_i(0,1,a_1,b_1),q_i(0,1,a_1,b_1)).$$

En consecuencia $\mathbf{A}_1 \models \varphi(0,1,a_1,b_1)$, lo que implica $a_1 = b_1$, i.e. $(a,b) \in \theta_{0,e}^{\mathbf{A}}$. $\dashv$

La fórmula ψ obtenida en el Teorema anterior es una cuasi-identidad. Dado que el Ejemplo 3.3.1 muestra que en el caso general no hay una fórmula positiva ni existencial que defina $\theta_{0,e}$ en términos de e podemos concluir que ψ es una definición óptima de $\theta_{0,e}$ en términos de e para variedades con definibilidad ecuacional de $\theta_{0,e}$ en términos de e y e^c.

3.4. Dos generalizaciones

Los Lemas 3.2.1 y 3.3.2 pueden ser generalizados para cualquier hipótesis sobre la estructura de la fórmula φ que define $\theta_{0,e}$, para esto necesitamos de la siguiente definición.

Definición 3.4.1. Para toda fórmula

$$\varphi(\vec{u},x,y) = \vec{Q}\vec{z} : \bigwedge_i \big(\bigwedge_j p^i_j(\vec{u},x,y,\vec{z}) = q^i_j(\vec{u},x,y,\vec{z}) \to r^i(\vec{u},x,y,\vec{z}) = s^i(\vec{u},x,y,\vec{z})\big)$$

donde $\vec{Q}\vec{z}$ es cualquier lista de cuantificadores en las variables $z_1,...z_n$, definimos la fórmula $\widetilde{\varphi}(\vec{u},\vec{v},x,y) =$

$$\vec{Q}\vec{w} : \bigwedge_i \big(\bigwedge_j p^i_j(\vec{v},x,y,\vec{w}) = q^i_j(\vec{v},x,y,\vec{w}) \to \varphi(\vec{u},r^i(\vec{v},x,y,\vec{w}),s^i(\vec{v},x,y,\vec{w}))\big)$$

Como fue probado en [12], toda fórmula que define $\theta_{0,e}$ es equivalente a una fórmula que es preservada por productos y factores directos, más aun, esta fórmula es una conjunción de fórmulas de Horn elegidas de tal forma que si las identidades son reemplazadas por fórmulas que son preservadas por productos y factores directos, la fórmula resultante es preservada por productos y factores directos. Es por esto que, sin pérdida de generalidad, de aquí en adelante asumimos que si $\varphi(u_1,u_2,x,y)$ define $\theta_{0,e}$ en términos de e y e^c entonces $\varphi(u_1,u_2,x,y)$ y $\widetilde{\varphi}(u_1,u_2,v_1,v_2,x,y)$ son fórmulas preservadas por productos y factores directos. Así también si $\varphi(u,x,y)$ define $\theta_{1,e}$ en términos de e asumimos que tanto $\varphi(u,x,y)$ como $\widetilde{\varphi}(u,v,x,y)$ son fórmulas preservadas por productos y factores directos.

El siguiente Teorema es la generalización del Teorema 3.3.2.

Teorema 3.4.1. *Sea $\mathcal{V}$ una variedad tal que $\varphi(u_1,u_2,x,y)$ define $\theta_{0,e}$ en términos de e y e^c. Entonces la fórmula*

$$\psi(u,x,y) = \forall v : \widetilde{\varphi}(u,v,u,1,x,x) \wedge \widetilde{\varphi}(u,v,1,u,x,y) \to \widetilde{\varphi}(u,v,u,1,x,y)$$

define $\theta_{0,e}$ en términos de e.

Demostración. Dado que $\widetilde{\varphi}$ es preservada por productos y factores directos, ψ es preservada por productos directos. Notemos que

$$\mathcal{V} \models \psi(0,x,x)$$

$$\mathcal{V} \models \psi(1, x, y)$$

trivialmente. Por lo que si $e \in Z(\mathbf{A})$ y $(a, b) \in \theta^{\mathbf{A}}_{0,e}$ tenemos

$$\mathbf{A} \models \psi(e, a, b)$$

lo que concluye con una dirección de la demostración.

Dado que $\mathcal{V} \models \varphi(1, 0, x, y)$ y $\mathcal{V} \models \varphi(0, 1, x, y) \leftrightarrow x = y$ se sigue de la definición de $\widetilde{\varphi}$ que

$$\mathcal{V} \models \widetilde{\varphi}(1, 0, v_1, v_2, x, y) \tag{3.21}$$

y notando que, como caso particular, en $\mathcal{V}$ se satisface

$$\varphi(0, 1, r^i(v_1, v_2, x, y, \vec{w}), s^i(v_1, v_2, x, y, \vec{w})) \leftrightarrow r^i(v_1, v_2, x, y, \vec{w}) \approx s^i(v_1, v_2, x, y, \vec{w})$$

tenemos que

$$\mathcal{V} \models \widetilde{\varphi}(0, 1, v_1, v_2, x, y) \leftrightarrow \varphi(v_1, v_2, x, y) \tag{3.22}$$

y en consecuencia

$$\mathcal{V} \models \widetilde{\varphi}(0, 1, 0, 1, x, x) \tag{3.23}$$

$$\mathcal{V} \models \widetilde{\varphi}(0, 1, 1, 0, x, y) \tag{3.24}$$

$$\mathcal{V} \models \widetilde{\varphi}(1, 0, 1, 1, x, y) \tag{3.25}$$

Sean $e, f, a, b \in A$ tales que $e \diamond_{\mathbf{A}} f$ y $\mathbf{A} \models \psi(e, a, b)$. Por (3.23) y (3.25) tenemos entonces

$$\mathbf{A} \models \widetilde{\varphi}(e, f, e, 1, a, a)$$

y por (3.24) y (3.25)

$$\mathbf{A} \models \widetilde{\varphi}(e, f, 1, e, a, b)$$

Dado que $\mathbf{A} \models \psi(e, a, b)$, en particular tenemos

$$\mathbf{A} \models \widetilde{\varphi}(e, f, e, 1, a, b)$$

Por último notemos que por (3.22), (3.25) y el hecho de que $\mathcal{V} \models \varphi(1, 0, x, y)$ tenemos

$$\mathbf{A} \models \widetilde{\varphi}(e, f, e, 1, a, b) \leftrightarrow \varphi(e, f, a, b)$$

y en consecuencia, $(a, b) \in \theta^{\mathbf{A}}_{0,e}$. $\dashv$

El siguiente lema es la generalización del Lema 3.2.1.

Lema 3.4.2. *Sea $\mathcal{V}$ una variedad tal que la fórmula $\varphi(u, x, y)$ define $\theta_{1,e}$ en términos de e. Entonces la fórmula*

$$\psi(u, x, y) = \forall v : \varphi(v, x, x) \wedge \widetilde{\varphi}(u, v, x, y) \to \varphi(v, x, y)$$

define $\theta_{0,e}$ en términos de e.

Demostración. Es análoga a la demostración del Teorema anterior.$\dashv$

Si consideramos como *complejidad* de una fórmula la cantidad de bloques alternados de cuantificadores existenciales y universales que posee, a diferencia de lo sucedido en el caso en que φ es una conjunción de ecuaciones, las fórmulas ψ dadas por el Teorema 3.4.1 y el Lema 3.4.2 no son óptimas en su complejidad para el caso general. Para ver esto observemos que si α_φ es la fórmula obtenida en el Teorema 2.3.2 que define el complemento, entonces la fórmula

$$\psi'(z, x, y) = \exists w : \alpha_\varphi(z, w) \wedge \varphi(z, w, x, y)$$

también define $\theta_{0,e}$ en términos de e. Para una complejidad "grande" de φ, la complejidad de ψ' es estrictamente menor que la de ψ.

Capítulo 4

Definibilidad del centro

En la Sección 2.3 se introdujo un conjunto de fórmulas que define el conjunto de pares de elementos centrales complementarios en función de una fórmula que define $\theta_{0,e}$ en términos de e y e^c. Análogamente, si φ_0 y φ_1 son fórmulas que definen, respectivamente, $\theta_{0,e}$ y $\theta_{1,e}$ en términos de e, existe un conjunto Σ de fórmulas que define el centro en función de φ_0 y φ_1. Dado que necesitaremos explícitamente de tal conjunto de axiomas lo presentamos a continuación.

Definición 4.0.2. *Llamaremos $\Sigma(u)$ al siguiente conjunto de fórmulas:*
$\chi_0^P(u) \doteq \varphi_0(u, 0, u)$
$\chi_0^R(u) \doteq \forall x :\ \varphi_0(u, x, x)$
$\chi_0^S(u) \doteq \forall x, y :\ \varphi_0(u, x, y) \to \varphi_0(u, y, x)$
$\chi_0^T(u) \doteq \forall x, y, z :\ \varphi_0(u, x, y) \wedge \varphi_0(u, y, z) \to \varphi_0(u, x, z)$
$\chi_0^f(u) \doteq \forall \vec{x}, \vec{y} :\ \bigwedge_{k=1}^n \varphi_0(u, x_k, y_k) \to \varphi_0(u, f(\vec{x}), f(\vec{y}))$ *para cada f símbolo de función n-ario.*
$\chi_1^P(u) \doteq \varphi_1(u, 1, u)$
$\chi_1^R(u) \doteq \forall x :\ \varphi_1(u, x, x)$
$\chi_1^S(u) \doteq \forall x, y :\ \varphi_1(u, x, y) \to \varphi_1(u, y, x)$
$\chi_1^T(u) \doteq \forall x, y, z :\ \varphi_1(u, x, y) \wedge \varphi_1(u, y, z) \to \varphi_1(u, x, z)$
$\chi_1^f(u) \doteq \forall \vec{x}, \vec{y} :\ \bigwedge_{k=1}^n \varphi_1(u, x_k, y_k) \to \varphi_1(u, f(\vec{x}), f(\vec{y}))$ *para cada f símbolo de función n-ario.*
$\chi^I(u) \doteq \forall x, y :\ \varphi_0(u, x, y) \wedge \varphi_1(u, x, y) \to x \approx y.$
$\chi^J(u) \doteq \forall x, y\ \exists z :\ \varphi_0(u, x, z) \wedge \varphi_1(u, z, y).$

Notemos que los conjuntos de fórmulas

$$\{\chi_0^P, \chi_0^R, \chi_0^S, \chi_0^T\} \cup \{\chi_0^f\}_{f \in \mathcal{F}}$$

y

$$\{\chi_1^P, \chi_1^R, \chi_1^S, \chi_1^T\} \cup \{\chi^f\}_{f\in\mathcal{F}}$$

expresan que φ_0 y φ_1 definen congruencias que contienen los pares $(0, u)$ y $(1, u)$ respectivamente, y las fórmulas χ^I y χ^J nos dicen que estas congruencias son factor complementarias.

4.1. Congruencias Distributivas

En [14] Vaggione demostró que si $\mathcal{V}$ es una variedad con congruencias modulares entonces el centro de cada álgebra en la variedad es definible por un conjunto de fórmulas $(\forall\exists \bigwedge p \approx q)$. En esta Sección encontramos un conjunto explícito de fórmulas $(\forall\exists \bigwedge p \approx q)$ que define el conjunto de elementos centrales para variedades con congruencias distributivas en función de los términos de Jónsson y los términos para variedades con constantes distintas dados en el Teorema 1.2.1 vía un argumento utilizado por K. A. Baker en la demostración del Teorema de Base Finita [1].

Sea $\mathcal{V}$ una variedad con congruencias distributivas. Recordemos que por Jónsson [9] sabemos que existen términos $q_1, ..., q_r \in T(x, y, z)$ tales que en $\mathcal{V}$ se satisfacen las identidades

$$\begin{array}{rcll}
x & \approx & q_i(x, y, x) & , \quad i = 1, ..., r \\
x & \approx & q_1(x, x, y) & \\
q_i(x, y, y) & \approx & q_{i+1}(x, y, y) & , \quad i \text{ impar} \\
q_i(x, x, y) & \approx & q_{i+1}(x, x, y) & , \quad i \text{ par} \\
q_r(x, y, y) & \approx & y. &
\end{array}$$

y sean $u_1, ...u_m$ los términos dados por el Teorema 1.2.1 tales que en $\mathcal{V}$ se satisfacen las identidades

$$\begin{array}{rcl}
x & \approx & u_1(0, x, y) \\
u_i(1, x, y) & \approx & u_{i+1}(1, x, y) \text{ para } i \text{ impar} \\
u_i(0, x, y) & \approx & u_{i+1}(0, x, y) \text{ para } i \text{ par} \\
u_m(1, x, y) & \approx & y.
\end{array}$$

Recordemos que de acuerdo con el Corolario 3.1.3 la fórmula

$$\varphi_0(z, x, y) = \bigwedge_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{r} q_j(x, u_i(z, x, y), y) \approx q_j(x, u_i(1, x, y), y)$$

define $\theta_{0,e}$ en términos de e. Utilizando un argumento dual podemos demostrar que la fórmula

$$\varphi_1(z,x,y) = \bigwedge_{i=1}^{m}\bigwedge_{j=1}^{r} q_j(x,u_i(z,x,y),y) \approx q_j(x,u_i(0,x,y),y)$$

define $\theta_{1,e}$ en términos de e.

Por comodidad de la escritura definimos los términos p_{ij} como

$$p_{ij}(z,x,y) = q_j(x,u_i(z,x,y),y)$$

Observemos que con esta notación tenemos

$$\varphi_0(z,x,y) = \bigwedge_{i=1}^{m}\bigwedge_{j=1}^{r} p_{ij}(z,x,y) \approx p_{ij}(1,x,y)$$

y

$$\varphi_1(z,x,y) = \bigwedge_{i=1}^{m}\bigwedge_{j=1}^{r} p_{ij}(z,x,y) \approx p_{ij}(0,x,y)$$

Teniendo en cuenta las identidades satisfechas por los términos u_i y q_j notemos que

$$\mathcal{V} \models \bigwedge_{i=1}^{m}\bigwedge_{j=1}^{r} p_{ij}(0,x,y) \approx p_{ij}(1,x,y) \to x \approx y$$

más aún, dado un término $t(z,\vec{w})$ tenemos

$$\mathcal{V} \models \bigwedge_{i=1}^{m}\bigwedge_{j=1}^{r} t(p_{ij}(0,x,y),\vec{w}) \approx t(p_{ij}(1,x,y),\vec{w}) \to t(x,\vec{w}) \approx t(y,\vec{w}) \qquad (4.1)$$

El siguiente Lema es parte de la demostración del Teorema de Baker de Base Finita.

Lema 4.1.1. (Baker [1]). *Para $\boldsymbol{A} \in \mathcal{V}$ y $a,a',b,b' \in A$ tenemos que*

$$\theta(a,b) \cap \theta(a',b') \neq \Delta \textit{ si y sólo si}$$

$$\boldsymbol{A} \models \exists\vec{z}\exists\vec{w} : q_i(p_1(a,\vec{z}),p_2(a',\vec{w}),p_1(b,\vec{z})) \not\approx q_i(p_1(a,\vec{z}),p_2(b',\vec{w}),p_1(b,\vec{z}))$$

para ciertos términos $p_1(x,\vec{z}),p_2(x,\vec{w})$ en el tipo de $\mathcal{V}$ y algún i con $1 \leq i \leq n$.

Este Lema nos permite definir en cada álgebra de $\mathcal{V}$ el conjunto de elementos g que satisface $\theta(0,g)\cap\theta(1,g)=\Delta$ con un conjunto de ecuaciones. Así, el conjunto de elementos centrales puede ser definido por el conjunto de fórmulas

$$q_i(p_1(v,\vec{z}),p_2(v,\vec{w}),p_1(1,\vec{z}))\approx q_i(p_1(v,\vec{z}),p_2(0,\vec{w}),p_1(1,\vec{z}))$$

para todo i y todos los términos $p_1(x,\vec{z}),p_2(x,\vec{w})$ en el tipo de $\mathcal{V}$, más la fórmula $\chi^J(u)$. Este es un conjunto de fórmulas $(\forall\exists\bigwedge p\approx q)$, sin embargo tiene la desventaja de no ser finito para el caso de variedades de tipo finito. Nos proponemos encontrar un conjunto de fórmulas que reúna estas condiciones.

Con $f(\vec{p}_{ij}(z,\vec{x},\vec{y}))$ simbolizamos $f(p_{ij}(z,x_1,y_1),...,p_{ij}(z,x_n,y_n))$. Definimos las siguientes fórmulas

$$\begin{aligned}
\gamma^S_{0,a}(v) \;&\doteq\; \forall x,y: \bigwedge_{i,j,k,s,l} q_k(p_{ij}(v,y,x),q_j(p_{sl}(v,x,y),u_i(v,y,x),x),p_{ij}(1,y,x))\approx\\
&\qquad q_k(p_{ij}(v,y,x),q_j(p_{sl}(0,x,y),u_i(v,y,x),x),p_{ij}(1,y,x)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma^S_{0,b}(v) \;&\doteq\; \forall x,y: \bigwedge_{i,j,k,s,l} q_k(p_{ij}(v,y,x),q_j(p_{sl}(v,x,y),u_i(1,y,x),x),p_{ij}(1,y,x))\approx\\
&\qquad q_k(p_{ij}(v,y,x),q_j(p_{sl}(0,x,y),u_i(1,y,x),x),p_{ij}(1,y,x)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma^T_{0,a}(v) \;&\doteq\; \forall x,y,z: \bigwedge_{i,j,k,s,l} q_k(p_{ij}(v,x,z),q_j(p_{sl}(v,x,y),u_i(v,x,z),z),p_{ij}(1,x,z))\approx\\
&\qquad q_k(p_{ij}(v,x,z),q_j(p_{sl}(0,x,y),u_i(v,x,z),z),p_{ij}(1,x,z)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma^T_{0,b}(v) \;&\doteq\; \forall x,y,z: \bigwedge_{i,j,k,s,l} q_k(p_{ij}(v,x,z),q_j(p_{sl}(v,x,y),u_i(1,x,z),z),p_{ij}(1,x,z))\approx\\
&\qquad q_k(p_{ij}(v,x,z),q_j(p_{sl}(0,x,y),u_i(1,x,z),z),p_{ij}(1,x,z)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma^T_{0,c}(v) \;&\doteq\; \forall x,y,z: \bigwedge_{i,j,k,s,l} q_k(p_{ij}(v,x,z),q_j(y,u_i(v,x,z),p_{sl}(v,y,z)),p_{ij}(1,x,z))\approx\\
&\qquad q_k(p_{ij}(v,x,z),q_j(y,u_i(v,x,z),p_{sl}(0,y,z)),p_{ij}(1,x,z)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma^T_{0,d}(v) \;&\doteq\; \forall x,y,z: \bigwedge_{i,j,k,s,l} q_k(p_{ij}(v,x,z),q_j(y,u_i(1,x,z),p_{sl}(v,y,z)),p_{ij}(1,x,z))\approx\\
&\qquad q_k(p_{ij}(v,x,z),q_j(y,u_i(1,x,z),p_{sl}(0,y,z)),p_{ij}(1,x,z)).
\end{aligned}$$

Para cada símbolo de función n-ario f, $\gamma^f_{0,a}(v) \doteq \forall\vec{x},\vec{y}: \bigwedge_{i,j,k,s,l}$
$q_k(p_{ij}(v,f(\vec{x}),f(\vec{y})),q_j(f(\vec{p}_{sl}(v,\vec{x},\vec{y})),u_i(v,f(\vec{x}),f(\vec{y})),f(\vec{y})),p_{ij}(1,f(\vec{x}),f(\vec{y}))) \approx$
$q_k(p_{ij}(v,f(\vec{x}),f(\vec{y})),q_j(f(\vec{p}_{sl}(0,\vec{x},\vec{y})),u_i(v,f(\vec{x}),f(\vec{y})),f(\vec{y})),p_{ij}(1,f(\vec{x}),f(\vec{y})))$.

Para cada símbolo de función n-ario f, $\gamma^f_{0,b}(v) \doteq \forall\vec{x},\vec{y}: \bigwedge_{i,j,k,s,l}$
$q_k(p_{ij}(v,f(\vec{x}),f(\vec{y})),q_j(f(\vec{p}_{sl}(v,\vec{x},\vec{y})),u_i(1,f(\vec{x}),f(\vec{y})),f(\vec{y})),p_{ij}(1,f(\vec{x}),f(\vec{y}))) \approx$
$q_k(p_{ij}(v,f(\vec{x}),f(\vec{y})),q_j(f(\vec{p}_{sl}(0,\vec{x},\vec{y})),u_i(1,f(\vec{x}),f(\vec{y})),f(\vec{y})),p_{ij}(1,f(\vec{x}),f(\vec{y})))$.

$$\begin{aligned}\gamma^S_{1,a}(v) \;\doteq\; \forall x,y: \bigwedge_{i,j,k,s,l} & q_k(p_{ij}(v,y,x),q_j(p_{sl}(v,x,y),u_i(v,y,x),x),p_{ij}(0,y,x)) \approx \\ & q_k(p_{ij}(v,y,x),q_j(p_{sl}(1,x,y),u_i(v,y,x),x),p_{ij}(0,y,x)).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma^S_{1,b}(v) \;\doteq\; \forall x,y: \bigwedge_{i,j,k,s,l} & q_k(p_{ij}(v,y,x),q_j(p_{sl}(v,x,y),u_i(0,y,x),x),p_{ij}(0,y,x)) \approx \\ & q_k(p_{ij}(v,y,x),q_j(p_{sl}(1,x,y),u_i(0,y,x),x),p_{ij}(0,y,x)).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma^T_{1,a}(v) \;\doteq\; \forall x,y,z: \bigwedge_{i,j,k,s,l} & q_k(p_{ij}(v,x,z),q_j(p_{sl}(v,x,y),u_i(v,x,z),z),p_{ij}(0,x,z)) \approx \\ & q_k(p_{ij}(v,x,z),q_j(p_{sl}(1,x,y),u_i(v,x,z),z),p_{ij}(0,x,z)).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma^T_{1,b}(v) \;\doteq\; \forall x,y,z: \bigwedge_{i,j,k,s,l} & q_k(p_{ij}(v,x,z),q_j(p_{sl}(v,x,y),u_i(0,x,z),z),p_{ij}(0,x,z)) \approx \\ & q_k(p_{ij}(v,x,z),q_j(p_{sl}(1,x,y),u_i(0,x,z),z),p_{ij}(0,x,z)).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma^T_{1,c}(v) \;\doteq\; \forall x,y,z: \bigwedge_{i,j,k,s,l} & q_k(p_{ij}(v,x,z),q_j(y,u_i(v,x,z),p_{sl}(v,y,z)),p_{ij}(0,x,z)) \approx \\ & q_k(p_{ij}(v,x,z),q_j(y,u_i(v,x,z),p_{sl}(1,y,z)),p_{ij}(0,x,z)).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma^T_{1,d}(v) \;\doteq\; \forall x,y,z: \bigwedge_{i,j,k,s,l} & q_k(p_{ij}(v,x,z),q_j(y,u_i(0,x,z),p_{sl}(v,y,z)),p_{ij}(0,x,z)) \approx \\ & q_k(p_{ij}(v,x,z),q_j(y,u_i(0,x,z),p_{sl}(1,y,z)),p_{ij}(0,x,z)).\end{aligned}$$

Para cada símbolo de función n-ario f, $\gamma^f_{1,a}(v) \doteq \forall\vec{x},\vec{y}: \bigwedge_{i,j,k,s,l}$
$q_k(p_{ij}(v,f(\vec{x}),f(\vec{y})),q_j(f(\vec{p}_{sl}(v,\vec{x},\vec{y})),u_i(v,f(\vec{x}),f(\vec{y})),f(\vec{y})),p_{ij}(0,f(\vec{x}),f(\vec{y}))) \approx$

$q_k(p_{ij}(v, f(\vec{x}), f(\vec{y})), q_j(f(\vec{p}_{sl}(1, \vec{x}, \vec{y})), u_i(v, f(\vec{x}), f(\vec{y})), f(\vec{y})), p_{ij}(0, f(\vec{x}), f(\vec{y}))).$

Para cada símbolo de función n-ario f, $\gamma^f_{1,b}(v) \doteq \forall\vec{x},\vec{y} : \bigwedge_{i,j,k,s,l}$

$q_k(p_{ij}(v, f(\vec{x}), f(\vec{y})), q_j(f(p_{sl}(v, \vec{x}, \vec{y})), u_i(1, f(\vec{x}), f(\vec{y})), f(\vec{y})), p_{ij}(1, f(\vec{x}), f(\vec{y}))) \approx$

$q_k(p_{ij}(v, f(\vec{x}), f(\vec{y})), q_j(f(p_{sl}(0, \vec{x}, \vec{y})), u_i(1, f(\vec{x}), f(\vec{y})), f(\vec{y})), p_{ij}(1, f(\vec{x}), f(\vec{y}))).$

Llamaremos Γ al conjunto formado por las fórmulas anteriormente definidas y las fórmulas χ^P_0, χ^P_1, y χ^J.

Teorema 4.1.2. *Si $\mathcal{V}$ es una variedad de congruencias distributivas entonces para cada álgebra en $\boldsymbol{A} \in \mathcal{V}$ y cada $e \in A$*

$$e \in Z(\boldsymbol{A}) \text{ si y sólo si } \boldsymbol{A} \models \Gamma(e).$$

Demostración. Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ y $e \in Z(\mathbf{A})$. Claramente $\mathbf{A} \models \chi^P_0(e) \wedge \chi^P_1(e) \wedge \chi^J(e)$. Para ver que se satisfacen las otras fórmulas basta chequear que se satisfacen para $v = 0$ y $v = 1$, dado que son identidades y por ende preservadas por productos directos.

Para ver la otra dirección veremos que $\mathcal{V} \models \Gamma(v) \to \Sigma(v)$. Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$.

$\underline{\mathcal{V} \models \gamma^S_{0,a}(v) \wedge \gamma^S_{0,b}(v) \to \chi^S_0(v)}$. Sea $e \in A$ tal que $\mathbf{A} \models \gamma^S_{0,a}(e) \wedge \gamma^S_{0,b}(e)$ y sean $a, b \in A$ tales que $\mathbf{A} \models \varphi_0(e, a, b)$.
Dado que $\mathbf{A} \models p_{sl}(e, a, b) = p_{sl}(1, a, b)$ para todo s y l

$$q_k(p_{ij}(e, b, a), q_j(p_{sl}(e, a, b), u_i(e, b, a), a), p_{ij}(1, b, a)) \approx$$
$$q_k(p_{ij}(e, b, a), q_j(p_{sl}(1, a, b), u_i(e, b, a), a), p_{ij}(1, b, a)).$$

Esto sumando a que $\mathbf{A} \models \gamma^S_{0,a}(e)$ produce

$$q_k(p_{ij}(e, b, a), q_j(p_{sl}(0, a, b), u_i(e, b, a), a), p_{ij}(1, b, a)) \approx$$

$$q_k(p_{ij}(e, b, a), q_j(p_{sl}(1, a, b), u_i(e, b, a), a), p_{ij}(1, b, a)).$$

Por (4.1) tenemos

$$q_k(p_{ij}(e, b, a), q_j(a, u_i(e, b, a), a), p_{ij}(1, b, a)) \approx$$

$$q_k(p_{ij}(e, b, a), q_j(b, u_i(e, b, a), a), p_{ij}(1, b, a)).$$

Por un razonamiento análogo pero usando que $\mathbf{A} \models \gamma^S_{0,b}(e)$ tenemos

$$q_k(p_{ij}(e,b,a), q_j(a, u_i(1,b,a), a), p_{ij}(1,b,a)) \approx$$

$$q_k(p_{ij}(e,b,a), q_j(b, u_i(1,b,a), a), p_{ij}(1,b,a)).$$

Dado que $q_j(a, u_i(e,b,a), a) = a = q_j(a, u_i(1,b,a), a)$ y la definición de los términos p_{ij} tenemos

$$q_k(p_{ij}(e,b,a), p_{ij}(e,b,a), p_{ij}(1,b,a)) \approx$$

$$q_k(p_{ij}(e,b,a), p_{ij}(1,b,a), p_{ij}(1,b,a)).$$

Por la definición de los términos q_k tenemos

$$p_{ij}(e,b,a) = p_{ij}(1,b,a) \text{ para todo } i \text{ y para todo } j$$

Por lo que $\mathbf{A} \models \varphi(e,b,a)$.

$\underline{\mathcal{V} \models \gamma^T_{0,a}(v) \wedge \gamma^T_{0,b}(v) \wedge \gamma^T_{0,c}(v) \wedge \gamma^T_{0,d}(v) \to \chi^T_0(u)}$. Sea $e \in A$ tal que

$$\mathbf{A} \models \gamma^S_{0,a}(e) \wedge \gamma^T_{0,b}(e) \wedge \gamma^T_{0,c}(e) \wedge \gamma^T_{0,d}(e)$$

y sean $a, b, c \in A$ tales que

$$\mathbf{A} \models \varphi_0(e,a,b) \wedge \varphi(e,b,c)$$

Utilizando alternadamente la validez de $\varphi_0(e,a,b)$ y $\gamma^T_{0,a}(e)$ tenemos

$$q_k(p_{ij}(e,a,c), q_j(a, u_i(e,a,c), c), p_{ij}(1,a,c)) \approx \qquad (1)$$

$$q_k(p_{ij}(e,a,c), q_j(b, u_i(e,a,c), c), p_{ij}(1,a,c))$$

y análogamente por $\gamma^T_{0,b}$

$$q_k(p_{ij}(e,a,c), q_j(a, u_i(1,a,c), c), p_{ij}(1,a,c)) \approx \qquad (2)$$

$$q_k(p_{ij}(e,a,c), q_j(b, u_i(1,a,c), c), p_{ij}(1,a,c)).$$

La validez de $\varphi_0(e,b,c)$ y $\gamma^T_{0,c}(e)$ implica

$$q_k(p_{ij}(e,a,c), q_j(b, u_i(e,a,c), b), p_{ij}(1,a,c)) \approx \qquad (3)$$

$$q_k(p_{ij}(e,a,c), q_j(b, u_i(e,a,c), c), p_{ij}(1,a,c)),$$

análogamente por $\gamma^T_{0,d}$

$$q_k(p_{ij}(e,a,c), q_j(b, u_i(1,a,c), b), p_{ij}(1,a,c)) \approx \qquad (4)$$
$$q_k(p_{ij}(e,a,c), q_j(b, u_i(1,a,c), c), p_{ij}(1,a,c)).$$

Así, dado que por (1) y (3) tenemos

$$q_k(p_{ij}(e,a,c), q_j(a, u_i(e,a,c), c), p_{ij}(1,a,c)) \approx$$
$$q_k(p_{ij}(e,a,c), q_j(b, u_i(e,a,c), b), p_{ij}(1,a,c))$$

y por (2) y (4)

$$q_k(p_{ij}(e,a,c), q_j(a, u_i(1,a,c), c), p_{ij}(1,a,c)) \approx$$
$$q_k(p_{ij}(e,a,c), q_j(b, u_i(1,a,c), b), p_{ij}(1,a,c)).$$

El argumento se sigue de la misma forma que en el caso anterior.

$\underline{\mathcal{V} \models \gamma^f_{0,a}(v) \wedge \gamma^f_{0,b}(v) \rightarrow \chi^f_0(v)}$, para cada símbolo de función n-ario f. Sea $e \in A$ tal que

$$\mathbf{A} \models \gamma^f_{0,a}(e) \wedge \gamma^f_{0,b}(e)$$

y sean $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n \in A$ tales que

$$\mathbf{A} \models \bigwedge_{h=1}^{n} \varphi_0(e, a_h, b_h).$$

Utilizando alternadamente la validez de $\bigwedge_{h=1}^n \varphi_0(e, a_h, b_h)$ y $\gamma^f_{0,a}$ tenemos

$$q_k(p_{ij}(e, f(\vec{a}), f(\vec{b})), q_j(f(\vec{a}), u_i(e, f(\vec{a}), f(\vec{b})), f(\vec{b})), p_{ij}(1, f(\vec{a}), f(\vec{b}))) \approx$$
$$q_k(p_{ij}(e, f(\vec{a}), f(\vec{b})), q_j(f(\vec{b}), u_i(e, f(\vec{a}), f(\vec{b})), f(\vec{b})), p_{ij}(1, f(\vec{a}), f(\vec{b}))).$$

La validez de $\bigwedge_{h=1}^n \varphi_0(e, a_h, b_h)$ y $\gamma^f_{0,b}$ implica

$$q_k(p_{ij}(e, f(\vec{a}), f(\vec{b})), q_j(f(\vec{a}), u_i(1, f(\vec{a}), f(\vec{b})), f(\vec{b})), p_{ij}(1, f(\vec{a}), f(\vec{b}))) \approx$$
$$q_k(p_{ij}(e, f(\vec{a}), f(\vec{b})), q_j(f(\vec{b}), u_i(1, f(\vec{a}), f(\vec{b})), f(\vec{b})), p_{ij}(1, f(\vec{a}), f(\vec{b})))$$

y en consecuencia

$$q_k(p_{ij}(e, f(\vec{a}), f(\vec{b})), q_j(f(\vec{a}), u_i(e, f(\vec{a}), f(\vec{b})), f(\vec{b})), p_{ij}(1, f(\vec{a}), f(\vec{b}))) \approx$$

$$q_k(p_{ij}(e, f(\vec{a}), f(\vec{b})), q_j(f(\vec{a}), u_i(1, f(\vec{a}), f(\vec{b})), f(\vec{b})), p_{ij}(1, f(\vec{a}), f(\vec{b}))).$$

Las demostraciones de que

$$\mathcal{V} \models \gamma^S_{1,a}(v) \wedge \gamma^S_{1,b}(v) \to \chi^S_1(v),$$

$$\mathcal{V} \models \gamma^T_{1,a}(w) \wedge \gamma^S_{1,b}(v) \wedge \gamma^T_{1,c}(v) \wedge \gamma^S_{1,d}(v) \to \chi^S_1(v) \quad \text{y}$$

$$\mathcal{V} \models \gamma^f_{1,a}(w) \wedge \gamma^f_{1,b}(v) \to \chi^f_1(v)$$

son totalmente análogas a las anteriores. Notemos además que para el caso de congruencias distributivas, de la misma definición de φ_0 y φ_1 y las propiedades de los términos se desprende

$$\mathcal{V} \models \varphi_0(v, x, y) \wedge \varphi_1(v, x, y) \to x \approx y$$

Es decir $\mathcal{V} \models \chi^I(v)$, por lo que hemos concluído la demostración. $\dashv$

4.2. Definibilidad de $\theta(0, g) \cap \theta(1, g) = \Delta$

Por el Teorema 1.2.8, si $\theta_{0,e}$ es definible ecuacionalmente existen términos $v_i(z, x, y)$ con $1 \leq i \leq n$ y n impar tales que

$$\begin{array}{rcl} x & \approx & v_i(0, x, x),\ i = 1, ..., n \\ x & \approx & v_1(0, x, y) \\ v_i(1, x, y) & \approx & v_{i+1}(1, x, y),\ i \text{ impar} \\ v_i(0, x, y) & \approx & v_{i+1}(0, x, y),\ i \text{ par} \\ v_n(1, x, y) & \approx & y \end{array}$$

Análogamente, si $\theta_{1,e}$ es definible ecuacionalmente existen términos $t_i(z, x, y)$ con $1 \leq i \leq m$ y m impar tales que

$$\begin{array}{rcl} x & \approx & t_i(1, x, x),\ i = 1, ..., m \\ x & \approx & t_1(0, x, y) \\ t_i(1, x, y) & \approx & t_{i+1}(1, x, y),\ i \text{ impar} \\ t_i(0, x, y) & \approx & t_{i+1}(0, x, y),\ i \text{ par} \\ t_m(1, x, y) & \approx & y \end{array}$$

Para simplificar la escritura definimos $v_{n+1}(z,x,y) = y$ y $t_0(z,x,y) = x$.

Notemos que las fórmulas

$$\varphi_0(z,x,y) = \bigwedge_{i \ impar} v_i(z,x,y) \approx v_{i+1}(z,x,y)$$

$$\varphi_1(z,x,y) = \bigwedge_{i \ par} t_i(z,x,y) \approx t_{i+1}(z,x,y)$$

definen $\theta_{0,e}$ y $\theta_{1,e}$ para e elemento central. Más aún las fórmulas

$$\varphi_0'(z,x,y) = \varphi_0(z,x,y) \wedge \bigwedge_{i \ par} v_i(0,x,y) \approx v_{i+1}(0,x,y)$$

$$\varphi_1'(z,x,y) = \varphi_1(z,x,y) \wedge \bigwedge_{i \ impar} t_i(1,x,y) \approx t_{i+1}(1,x,y)$$

son fórmulas de congruencias principales (FCP) que atestiguan la pertencia de (x,y) a $\theta(0,z)$ y de (x,y) a $\theta(1,z)$ respectivamente. Además, dadas las identidades satisfechas en $\mathcal{V}$ tenemos que

$$\mathcal{V} \models \varphi_0'(z,x,y) \leftrightarrow \varphi_0(z,x,y)$$

$$\mathcal{V} \models \varphi_1'(z,x,y) \leftrightarrow \varphi_1(z,x,y)$$

De acuerdo con el Teorema 1.2.8, para cada $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ y $g \in A$ que satisface $\theta(0,g) \cap \theta(1,g) = \Delta$ la fórmula $\varphi_0(g,x,y)$ define $\theta(0,g)$ y análogamente $\varphi_1(g,x,y)$ define $\theta(1,g)$. Por lo que el conjunto de elementos $g \in A$ tales que $\theta(0,g) \cap \theta(1,g) = \Delta$ puede ser definido por el conjunto de fórmulas $\Sigma'(g) = \Sigma(g) - \{\chi^J(g)\}$.

Independientemente, para cada álgebra $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ el conjunto de elementos $g \in A$ que satisfacen $\theta(0,g) \cap \theta(1,g) = \Delta$ puede definirse por el conjunto $\Upsilon(g)$ formado por las fórmulas

$$\forall x, y : \xi(g,0,x,y) \wedge \zeta(g,1,x,y) \to x \approx y$$

donde ξ y ζ son dos fórmulas de congruencias principales cualesquiera.

Si $\mathcal{V}$ es una variedad de tipo finito, Σ' es claramente finito, por Compacidad, existe un subconjunto finito Υ_0 de Υ que define el conjunto. Sin embargo no es evidente la forma de obtener Υ_0. Nos proponemos encontrar explícitamente un subconjunto finito de Υ en función de los términos v_i y t_i. Para esto necesitamos definir las siguientes fórmulas

$Pv_j^0(u,x,y)$ es la conjunción de las ecuaciones

$$\begin{aligned} x &\approx v_j(u,0,u) \\ v_j(0,0,0) &\approx v_{j+1}(0,0,0) \\ y &\approx v_{j+1}(u,0,u) \end{aligned}$$

$Pv_j^0(u,x,y)$ es la conjunción de las ecuaciones

$$\begin{aligned} x &\approx v_j(u,0,u) \\ v_j(1,0,u) &\approx v_{j+1}(1,0,u) \\ y &\approx v_{j+1}(u,0,u) \end{aligned}$$

$Rv_j^0(u,x,y,z)$ es la conjunción de las ecuaciones

$$\begin{aligned} x &\approx v_j(u,z,z) \\ v_j(0,z,z) &\approx v_{j+1}(0,z,z) \\ y &\approx v_{j+1}(u,z,z) \end{aligned}$$

$Rv_j^1(u,x,y,z)$ es la conjunción de las ecuaciones

$$\begin{aligned} x &\approx v_j(u,z,z) \\ v_j(1,z,z) &\approx v_{j+1}(1,z,z) \\ y &\approx v_{j+1}(u,z,z) \end{aligned}$$

$Sv_j^0(u,x,y,z,w)$ es la conjunción de las ecuaciones

$$\begin{aligned} x &\approx v_j(u,w,v_1(0,z,w)) \\ v_j(u,w,v_i(u,z,w)) &\approx v_j(u,w,v_{i+1}(u,z,w)) \quad i \text{ } impar \\ v_j(u,w,v_i(0,z,w)) &\approx v_j(u,w,v_{i+1}(0,z,w)) \quad i \text{ } par \\ v_j(0,w,w) &\approx v_{j+1}(0,w,w) \\ v_{j+1}(u,w,v_i(0,z,w)) &\approx v_{j+1}(u,w,v_{i+1}(0,z,w)) \quad i \text{ } par \\ v_{j+1}(u,w,v_i(u,z,w)) &\approx v_{j+1}(u,w,v_{i+1}(u,z,w)) \quad i \text{ } impar \\ y &\approx v_{j+1}(u,w,v_1(0,z,w)) \end{aligned}$$

$Sv_j^1(u,x,y,z,w)$ es la conjunción de las ecuaciones

$$\begin{aligned} x &\approx v_j(u,w,z) \\ v_j(1,w,z) &\approx v_{j+1}(1,w,z) \\ y &\approx v_{j+1}(u,w,z) \end{aligned}$$

$Tv_j^0(u,x,y,z_1,z_2,z_3)$ es la conjunción de las ecuaciones

$$\begin{array}{rcll} x & \approx & v_j(u,z_1,v_n(u,z_3,z_2)) & \\ v_j(u,z_1,v_i(u,z_3,z_2)) & \approx & v_j(u,z_1,v_{i+1}(u,z_3,z_2)) & i \text{ } impar \\ v_j(u,z_1,v_i(0,z_3,z_2)) & \approx & v_j(u,z_1,v_{i+1}(0,z_3,z_2)) & i \text{ } par \\ v_j(u,z_1,v_1(0,z_3,z_2)) & \approx & v_{j+1}(u,z_1,v_1(0,z_3,z_2)) & \\ v_{j+1}(u,z_1,v_i(0,z_3,z_2)) & \approx & v_{j+1}(u,z_1,v_{i+1}(0,z_3,z_2)) & i \text{ } par \\ v_{j+1}(u,z_1,v_i(u,z_3,z_2)) & \approx & v_{j+1}(u,z_1,v_{i+1}(u,z_3,z_2)) & i \text{ } impar \\ y & \approx & v_{j+1}(u,z_1,v_n(u,z_3,z_2)) & \end{array}$$

$Tv_j^1(u,x,y,z_1,z_2,z_3)$ es la conjunción de las ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} x & \approx & v_j(u,z_1,z_2) \\ v_j(1,z_1,z_2) & \approx & v_{j+1}(1,z_1,z_2) \\ y & \approx & v_{j+1}(u,z_1,z_2) \end{array}$$

Notaremos $f(v_j(u,\vec{z},\vec{w})) = f(v_j(u,z_1,w_1),v_j(u,z_2,w_2),...,,v_j(u,z_n,w_n))$ para cualquier símbolo de función n-ario f y z_i,w_i con $1 \leq i \leq n$. Para cada símbolo de función n-ario f, $\alpha v_{f,j}^0(u,x,y,\vec{z},\vec{w})$ es la conjunción de las ecuaciones

$$\begin{array}{rcll} x & \approx & v_j(u,f(v_1(0,\vec{z},\vec{w})),f(\vec{w})) & \\ v_j(u,f(v_i(u,\vec{z},\vec{w})),f(\vec{w})) & \approx & v_j(u,f(v_{i+1}(u,\vec{z},\vec{w})),f(\vec{w})) & i \text{ } impar \\ v_j(u,f(v_i(0,\vec{z},\vec{w})),f(\vec{w})) & \approx & v_j(u,f(v_{i+1}(0,\vec{z},\vec{w})),f(\vec{w})) & i \text{ } par \\ v_j(0,f(\vec{w}),f(\vec{w})) & \approx & v_{j+1}(0,f(\vec{w}),f(\vec{w})) & \\ v_{j+1}(u,f(v_i(0,\vec{z},\vec{w})),f(\vec{w})) & \approx & v_{j+1}(u,f(v_{i+1}(0,\vec{z},\vec{w})),f(\vec{w})) & i \text{ } par \\ v_{j+1}(u,f(v_i(u,\vec{z},\vec{w})),f(\vec{w})) & \approx & v_{j+1}(u,f(v_{i+1}(u,\vec{z},\vec{w})),f(\vec{w})) & i \text{ } impar \\ y & \approx & v_{j+1}(u,f(v_1(0,\vec{z},\vec{w})),f(\vec{w})) & \end{array}$$

Para cada símbolo de función n-ario f, $\alpha v_{f,j}^1(u,x,y,\vec{z},\vec{w})$ es la conjunción de las ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} x & \approx & v_j(u,f(\vec{z}),f(\vec{w})) \\ v_j(1,f(\vec{z}),f(\vec{w})) & \approx & v_{j+1}(1,f(\vec{z}),f(\vec{w})) \\ y & \approx & v_{j+1}(u,f(\vec{z}),f(\vec{w})) \end{array}$$

$Pt_j^0(u,x,y)$ es la conjunción de las ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} x & \approx & t_j(u,1,u) \\ t_j(0,1,u) & \approx & t_{j+1}(0,1,u) \\ y & \approx & t_{j+1}(u,1,u) \end{array}$$

$Pt_j^1(u,x,y)$ es la conjunción de las ecuaciones

$$\begin{aligned} x &\approx t_j(u,1,u) \\ t_j(1,1,1) &\approx t_{j+1}(1,1,1) \\ y &\approx t_{j+1}(u,1,u) \end{aligned}$$

$Rt_j^0(u,x,y,z)$ es la conjunción de las ecuaciones

$$\begin{aligned} x &\approx t_j(u,z,z) \\ t_j(0,z,z) &\approx t_{j+1}(0,z,z) \\ y &\approx t_{j+1}(u,z,z) \end{aligned}$$

$Rt_j^1(u,x,y,z)$ es la conjunción de las ecuaciones

$$\begin{aligned} x &\approx t_j(u,z,z) \\ t_j(1,z,z) &\approx t_{j+1}(1,z,z) \\ y &\approx t_{j+1}(u,z,z) \end{aligned}$$

$St_j^0(u,x,y,z,w)$ es la conjunción de las ecuaciones

$$\begin{aligned} x &\approx t_j(u,w,z) \\ t_j(0,w,z) &\approx t_{j+1}(0,w,z) \\ y &\approx t_{j+1}(u,w,z) \end{aligned}$$

$St_j^1(u,x,y,z,w)$ es la conjunción de las ecuaciones

$$\begin{aligned} x &\approx t_j(u,w,t_1(u,z,w)) \\ t_j(u,w,t_i(1,z,w)) &\approx t_j(u,w,t_{i+1}(1,z,w)) \quad i\ impar \\ t_j(u,w,t_i(u,z,w)) &\approx t_j(u,w,t_{i+1}(u,z,w)) \quad i\ par \\ t_j(1,w,w) &\approx t_{j+1}(1,w,w) \\ t_{j+1}(u,w,t_i(u,z,w)) &\approx t_{j+1}(u,w,t_{i+1}(u,z,w)) \quad i\ par \\ t_{j+1}(u,w,t_i(1,z,w)) &\approx t_{j+1}(u,w,t_{i+1}(1,z,w)) \quad i\ impar \\ y &\approx t_{j+1}(u,w,t_1(u,z,w)) \end{aligned}$$

$Tt_j^0(u,x,y,z_1,z_2,z_3)$ es la conjunción de las ecuaciones

$$\begin{aligned} x &\approx t_j(u,z_1,z_2) \\ t_j(1,z_1,z_2) &\approx t_{j+1}(1,z_1,z_2) \\ y &\approx t_{j+1}(u,z_1,z_2) \end{aligned}$$

$Tt_j^1(u,x,y,z,w,u)$ es la conjunción de las ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} x & \approx & t_j(u,z_1,t_1(u,z_3,z_2)) \\ t_j(u,z_1,t_i(1,z_3,z_2)) & \approx & t_j(u,z_1,t_{i+1}(1,z_3,z_2)) \;\; i \textit{ impar} \\ t_j(u,z_1,t_i(u,z_3,z_2)) & \approx & t_j(u,z_1,t_{i+1}(u,z_3,z_2)) \;\; i \textit{ par} \\ t_j(u,z_1,t_m(1,z_3,z_2)) & \approx & t_{j+1}(u,z_1,t_m(1,z_3,z_2)) \\ t_{j+1}(u,z_1,t_i(u,z_3,z_2)) & \approx & t_{j+1}(u,z_1,t_{i+1}(u,z_3,z_2)) \;\; i \textit{ par} \\ t_{j+1}(u,z_1,t_i(1,z_3,z_2)) & \approx & t_{j+1}(u,z_1,t_{i+1}(1,z_3,z_2)) \;\; i \textit{ impar} \\ y & \approx & t_{j+1}(u,z_1,v_1(0,z_3,z_2)) \end{array}$$

Para cada símbolo de función n-ario f, $\alpha t_{f,j}^0(u,x,y,\vec{z},\vec{w})$ es la conjunción de las ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} x & \approx & t_j(u,f(\vec{z}),f(\vec{w})) \\ t_j(0,f(\vec{z}),f(\vec{w})) & \approx & t_{j+1}(0,f(\vec{z}),f(\vec{w})) \\ y & \approx & t_{j+1}(u,f(\vec{z}),f(\vec{w})) \end{array}$$

Para cada símbolo de función n-ario f, $\alpha t_{f,j}^1(u,x,y,\vec{z},\vec{w})$ es la conjunción de las ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} x & \approx & t_j(u,f(t_1(u,\vec{z},\vec{w})),f(\vec{w})) \\ t_j(u,f(t_i(1,\vec{z},\vec{w})),f(\vec{w})) & \approx & t_j(u,f(t_{i+1}(1,\vec{z},\vec{w})),f(\vec{w})) \;\; i \textit{ impar} \\ t_j(u,f(t_i(u,\vec{z},\vec{w})),f(\vec{w})) & \approx & t_j(u,f(t_{i+1}(u,\vec{z},\vec{w})),f(\vec{w})) \;\; i \textit{ par} \\ t_j(0,f(\vec{w}),f(\vec{w})) & \approx & t_{j+1}(0,f(\vec{w}),f(\vec{w})) \\ t_{j+1}(u,f(t_i(u,\vec{z},\vec{w})),f(\vec{w})) & \approx & t_{j+1}(u,f(t_{i+1}(u,\vec{z},\vec{w})),f(\vec{w})) \;\; i \textit{ par} \\ t_{j+1}(u,f(t_i(1,\vec{z},\vec{w})),f(\vec{w})) & \approx & t_{j+1}(u,f(t_{i+1}(1,\vec{z},\vec{w})),f(\vec{w})) \;\; i \textit{ impar} \\ y & \approx & t_{j+1}(u,f(t_1(u,\vec{z},\vec{w})),f(\vec{w})) \end{array}$$

En función de las fórmulas anteriores, definimos Υ_0 como el conjunto integrado por las fórmulas

$\pi_j^{Pv}(u) \doteq \forall x,y: \; Pv_j^0(u,x,y) \wedge Pv_j^1(u,x,y) \to x \approx y$

$\pi_j^{Rv}(u) \doteq \forall x,y: \; \big(\exists z: Rv_j^0(u,x,y,z)\big) \wedge \big(\exists z: Rv_j^1(u,x,y,z)\big) \to x \approx y$

$\pi_j^{Sv}(u) \doteq \forall x, y: \ \big(\exists z, w : Sv_j^0(u, x, y, z, w)\big) \wedge \big(\exists z, w : Sv_j^1(u, x, y, z, w)\big) \rightarrow x \approx y$

$\pi_j^{Tv}(u) \doteq \forall x, y: \ \big(\exists \vec{z} : Tv_j^0(u, x, y, z_1, z_2, z_3)\big) \wedge \big(\exists \vec{z} : Tv_j^1(u, x, y, z_1, z_2, z_3)\big) \rightarrow x \approx y$

$\pi_j^{fv}(u) \doteq \forall x, y: \big(\exists \vec{z}, \vec{w} : \alpha v_{f,j}^0(u, x, y, \vec{z}, \vec{w})\big) \wedge \big(\exists \vec{z}, \vec{w} : \alpha v_{f,j}^1(u, x, y, \vec{z}, \vec{w})\big) \rightarrow x \approx y$
para cada símbolo de función n- ario.

$\pi_j^{Pt}(u) \doteq \forall x, y: \ Pt_j^0(u, x, y) \wedge Pt_j^1(u, x, y) \rightarrow x \approx y$

$\pi_j^{Rt}(u) \doteq \forall x, y: \ \big(\exists z : Rt_j^0(u, x, y, z)\big) \wedge \big(\exists z : Rt_j^1(u, x, y, z)\big) \rightarrow x \approx y$

$\pi_j^{St}(u) \doteq \forall x, y: \ \big(\exists z, w : St_j^0(u, x, y, z, w)\big) \wedge \big(\exists z, w : St_j^1(u, x, y, z, w)\big) \rightarrow x \approx y$

$\pi_j^{Tt}(u) \doteq \forall x, y: \ \big(\exists \vec{z} : Tt_j^0(u, x, y, z_1, z_2, z_3)\big) \wedge \big(\exists \vec{z} : Tt_j^1(u, x, y, z_1, z_2, z_3)\big) \rightarrow x \approx y$

$\pi_j^{ft}(u) \doteq \forall x, y: \big(\exists \vec{z}, \vec{w} : \alpha t_{f,j}^0(u, x, y, \vec{z}, \vec{w})\big) \wedge \big(\exists \vec{z}, \vec{w} : \alpha t_{f,j}^1(u, x, y, \vec{z}, \vec{w})\big) \rightarrow x \approx y$
para cada símbolo de función n- ario.

$\pi^I \ (u) \doteq \forall x, y : \varphi_0'(u, x, y) \wedge \varphi_1'(u, x, y) \rightarrow x \approx y.$

Claramente Υ_0 es un subconjunto de Υ.

Lema 4.2.1. *Sea $\mathcal{V}$ una variedad tal que $\theta_{0,e}$ y $\theta_{1,e}$ son definibles ecuacionalmente en términos de e. Entonces, para cada $\boldsymbol{A} \in \mathcal{V}$ y cada $g \in A$ tenemos que*

$$\theta^{\boldsymbol{A}}(0, g) \cap \theta^{\boldsymbol{A}}(1, g) = \Delta \textit{ si y sólo si } \boldsymbol{A} \models \Upsilon_0(g).$$

Demostración. Si $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ y $g \in A$ satisface $\theta^{\mathbf{A}}(0, g) \cap \theta^{\mathbf{A}}(0, g) = \Delta$ tenemos que $\mathbf{A} \models \Upsilon(g)$ por lo que

$$\mathbf{A} \models \Upsilon_0(g)$$

trivialmente.

Para ver la otra dirección probaremos que $\mathcal{V} \models \Upsilon_0(u) \rightarrow \Sigma'(u)$.

$\underline{\mathcal{V} \models \bigwedge_{j \ impar} \pi_j^{Pv}(u) \rightarrow \chi_0^P(u)}$. Es consecuencia directa de que $\mathcal{V}$ satisface

$Pv_j^0(u, v_j(u, 0, u), v_{j+1}(u, 0, u))$ y $Pv_j^1(u, v_j(u, 0, u), v_{j+1}(u, 0, u))$ para todo j impar.

$\underline{\mathcal{V} \models \bigwedge_{j\ impar} \pi_j^{Rv}(u) \to \chi_0^R(u)}$. Similarmente al caso anterior, basta notar que $\mathcal{V}$ satisface $Rv_j^0(u, v_j(u,z,z), v_{j+1}(u,z,z), z)$ y $Rv_j^1(u, v_j(u,z,z), v_{j+1}(u,z,z), z)$ para todo j impar.

$\underline{\mathcal{V} \models \bigwedge_{j\ impar} \pi_j^{Sv}(u) \to \chi_0^S(u)}$. Notemos que

$$\mathcal{V} \models \bigwedge_{j\ impar} Sv_j^1(u, v_j(u,w,z), v_{j+1}(u,w,z), z, w) \text{ y}$$

$$\mathcal{V} \models \varphi(u,z,w) \to \bigwedge_{j\ impar} Sv_j^0(u, v_j(u,w,z), v_{j+1}(u,w,z), z, w).$$

$\underline{\mathcal{V} \models \bigwedge_{j\ impar} \pi_j^{Tv}(u) \to \chi_0^T(u)}$. Se deduce de

$$\mathcal{V} \models \bigwedge_{j\ impar} Tv_j^1(u, v_j(u,z_1,z_2), v_{j+1}(u,z_1,z_2), z_1, z_2, z_3) \text{ y}$$

$$\mathcal{V} \models \varphi(u,z_1,z_3) \wedge \varphi(u,z_3,z_2) \to \bigwedge_{j\ impar} Tv_j^0(u, v_j(u,z_1,z_2), v_{j+1}(u,z_1,z_2), z_1, z_2, z_3).$$

$\underline{\mathcal{V} \models \bigwedge_{j\ impar} \pi_j^{fv} \to \chi_0^f}$ para cada f símbolo de función n-ario. Basta ver que

$$\mathcal{V} \models \bigwedge_{j\ impar} \alpha v_{f,j}^1(u, v_j(u, f(\vec{z}), f(\vec{w})), v_{j+1}(u, f(\vec{z}), f(\vec{w})), \vec{z}, \vec{w}) \text{ y}$$

$$\mathcal{V} \models \bigwedge_{k=1}^{n} \varphi(u, z_k, w_k) \to \bigwedge_{j\ impar} \alpha v_{f,j}^0(u, v_j(u, f(\vec{z}), f(\vec{w})), v_{j+1}(u, f(\vec{z}), f(\vec{w})), \vec{z}, \vec{w}).$$

Las demostraciones de las implicaciones

$\mathcal{V} \models \bigwedge_{j\ impar} \pi_j^{Pt}(u) \to \chi_1^P(u)$,

$\mathcal{V} \models \bigwedge_{j\ impar} \pi_j^{Rt}(u) \to \chi_1^R(u)$,

$\mathcal{V} \models \bigwedge_{j\ impar} \pi_j^{St}(u) \to \chi_1^S(u)$,

$\mathcal{V} \models \bigwedge_{j\ impar} \pi_j^{Tt}(u) \to \chi_1^T(u)$ y

$\mathcal{V} \models \bigwedge_{j\ impar} \pi_j^{ft}(u) \to \chi_1^f(u)$ para cada f símbolo de función n-ario

son totalmente análogas a las anteriores. $\dashv$

4.3. Definibilidad en Primer Orden Estricto

Si $\mathcal{V}$ es una variedad en un tipo finito basta observar la axiomatización dada al principio de este Capítulo para ver que el centro es definible por un conjunto finito de fórmulas. Aunque la finitud del tipo no es una condición necesaria, nos proponemos mostrar que incluso fortaleciendo las hipótesis semánticas sobre la variedad tanto como es posible el conjunto de elementos centrales no necesariamente es definible en primer orden estricto. Para ésto necesitamos de algunas definiciones y resultados previos.

Definición 4.3.1. La *función discriminador* en un conjunto A es la función $t : A^3 \to A$ definida por

$$t(a,b,c) = \begin{cases} \text{a}, & \text{si } a \neq b; \\ \text{c}, & \text{si } a = b. \end{cases}$$

Un término ternario $t(x,y,z)$ que representa la función discriminador en un álgebra $\mathbf{A}$ es llamado *término discriminador* para $\mathbf{A}$.

Definición 4.3.2. Sea $\mathcal{K}$ una clase de álgebras con un término discriminador $t(x,y,z)$ común. Entonces $V(\mathcal{K})$ es llamada una *variedad con discriminador*.

Teorema 4.3.1. (Bulman- Fleming, Keimel, Werner). *Sea $t(x,y,z)$ un término discriminador para todas las álgebras en la clase $\mathcal{K}$. Entonces*
(a) $V(\mathcal{K})$ es una variedad aritmética.
(b) Los miembros directamente indescomponibles de $V(\mathcal{K})$ son álgebras simples, y
(c) Las álgebras simples son precisamente los miembros de $ISP_U(\mathcal{K}_+)$, donde $\mathcal{K}_+$ es $\mathcal{K}$ más un álgebra trivial.

Definición 4.3.3. Un álgebra es *semisimple* si es isomorfa a un producto subdirecto de álgebras simples. Una variedad $\mathcal{V}$ es *semisimple* si todo miembro de $\mathcal{V}$ es semisimple.

Lema 4.3.2. *Una variedad $\mathcal{V}$ es semisimple si y sólo si todo miembro subdirectamente irreducible de $\mathcal{V}$ es simple.*

En una variedad con discriminador localmente finita el conjunto de elementos centrales es definible por un conjunto finito de fórmulas (Vaggione). Sin embargo éstas hipótesis no pueden relajarse como mostraremos dando un ejemplo de una variedad aritmética, semisimple y localmente finita, para la que el conjunto de elementos centrales no es definible en primer orden estricto.

Con $\mathcal{D}_{01}$ notamos la variedad de los reticulados distributivos acotados. Sea $\mathcal{L}_P$ el lenguaje que resulta de agregar el símbolo de función binario $\Rightarrow$ al lenguaje de los reticulados acotados. Dada una cadena $\mathbf{C} \in \mathcal{D}_{01}$ definimos

$$x \Rightarrow y = \begin{cases} 1, & x \leq y; \\ 0, & \text{cc.} \end{cases}$$

La variedad $\mathcal{P} = V(\{(\mathbf{C}, \Rightarrow^{\mathbf{C}}) : \ \mathbf{C} \text{ es una cadena acotada}\})$ es con discriminador y su clase de álgebras simples es $\{(\mathbf{C}, \Rightarrow^{\mathbf{C}}) : \ \mathbf{C} \text{ es una cadena acotada}\}$.

Teorema 4.3.3. (Jónsson). *Sea $\mathcal{K}$ una clase de álgebras tal que $V(\mathcal{K})$ es una variedad de congruencias distributivas. Entonces $V(\mathcal{K}))_{SI} \subset HSP_{\mathcal{U}}(\mathcal{K})$.*

Definición 4.3.4. Diremos que $\mathcal{K}$ es una clase de álgebras *regularmente localmente finita* si y sólo si $\mathcal{K}$ es localmente finita y para cualquier $n \in \omega$ existe sólo un número finito de subálgebras n-generadas de álgebras en $\mathcal{K}$ no isomorfas.

Lema 4.3.4. (G. Bezhanishvili [2]). *Una variedad $\mathcal{V}$ es localmente finita si y sólo si $\mathcal{V}$ está generada por una clase regularmente localmente finita.*

Lema 4.3.5. *Si $\mathbf{B} = (\mathbf{C_1} \times \mathbf{C_2}, g)$ donde $\mathbf{C_1}$ y $\mathbf{C_2}$ son P-álgebras simples y g es una función n-aria definida como:*

$$g(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} 0, & x_i \neq x_j \textit{ para todo } i \neq j; \\ 1, & \textit{c.c.} \end{cases}$$

Entonces $\mathbf{B}$ es simple o producto de dos álgebras simples.

Demostración. Notemos primero que g es constantemente 1 si y sólo si $|B| < n$, por lo que si $|B| < n$, $\mathbf{B}$ es un producto de álgebras simples.
Si $\mathbf{C_1}$ o $\mathbf{C_2}$ son triviales entonces $\mathbf{B}$ es simple.
Sean θ_1 y θ_2 los kernels de las proyecciones de $\mathbf{B}|_{\mathcal{P}}$ (el reducto de $\mathbf{B}$ al tipo de $\mathcal{P}$). Si $|B| \geq n$ y $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$ son no triviales, existen $a_1, a_2, ...a_n \in B$ tales que, para todo $i \neq j$, $a_i \neq a_j$ y $(a_1, a_2) \in \theta_1$. Así, $g(a_1, a_2, ...a_n) = 0$ y $g(a_1, a_1, ...a_n) = 1$, por lo que $(g(a_1, a_2, ..., a_n), g(a_1, a_1, ..., a_n)) \notin \theta_1$. En consecuencia $\theta_1 \notin Con(\mathbf{B})$. Similarmente existen $b_1, ..., b_n$ tales que $(b_1, b_2) \in \theta_2$ y $(g(b_1, b_2, ..., b_n), g(b_1, b_1, ..., b_n)) \notin \theta_2$. Por lo que $\mathbf{B}$ es simple. $\dashv$

Ejemplo 4.3.1. *Para cada $k \in \omega, k \geq 1$ sea $\mathbf{A_k} = \langle \mathbf{P_k} \times \mathbf{P_k}, \{f_n^k\}_{n\geq 1}\rangle$ donde $\mathbf{P_k}$ es la P- álgebra simple de k elementos, y*

$$f_n^k(x_1, ..., x_n) \; = \begin{cases} 0, & k = n \text{ y } x_i \neq x_j \text{ para todo } i \neq j; \\ 1, & c.c. \end{cases}$$

Sea $\mathcal{K_P}$ la clase de álgebras $\{\mathbf{A_k}\}_{k\in\omega}$.

Lema 4.3.6. *$V(\mathcal{K_P})$ es una variedad aritmética, semisimple y localmente finita tal que el conjunto de elementos centrales no es definible por un conjunto finito de fórmulas.*

Demostración. Claramente $V(\mathcal{K_P})$ es una variedad aritmética dado que $\mathcal{P}$ lo es.

$V(\mathcal{K_P})$ *es semi-simple:* Para cualquier familia $\{\mathbf{A}_{i_j}\}_{j\in J} \subseteq \mathcal{K_P}$ y cualquier ultrafiltro $\mathcal{U}$ en J sea $\mathbf{A} = \prod_{j\in J} \mathbf{A}_{i_j}/\mathcal{U}$. Si existen $a_1, ..., a_n \in A$ tales que $f_n^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n) \neq 1$, dado que $f_n \not\equiv 1$ sólo para $\mathbf{A}_n$, tenemos que existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $\mathbf{A}_{i_j} \cong \mathbf{A}_n$ para todo $j \in V$ y así $\mathbf{A} \cong \mathbf{A}_n$. En caso contrario, para cada n $f_n \equiv 1$ y $\mathbf{A}|_{\mathcal{P}}$ es un producto de dos P-álgebras simples. Es fácil ver que toda subálgebra de un producto de P- álgebras simples es un producto de P-álgebras simples. Así, por el Lema 4.3.5 tenemos que $SP_{\mathcal{U}}(\mathcal{K_P})$ es una clase de álgebras que son simples o producto de álgebras simples. Finalmente, por el lema de Jónsson, cada $\mathbf{A} \in V(\mathcal{K_P})_{SI}$ es simple.

$V(\mathcal{K_P})$ *es localmente finita:* Claramente $\mathcal{K_P}$ es localmente finita. Dado que $\mathcal{P}$ es una variedad localmente finita existe una cantidad finita de subálgebras m-generadas de álgebras de $\mathcal{K_P}$ no isomorfas como P-álgebras. Sea $\mathbf{B}$ una subálgebra m-generada de algún álgebra en $\mathcal{K_P}$ y observemos que el subuniverso generado es el mismo que el que se obtiene al considerar sólo el lenguaje de las $\mathcal{P}$-álgebras. Como observamos anteriormente, para $r > |B|$, $f_r^{\mathbf{B}} \equiv 1$. Dado que $f_1, ..., f_{|B|}$ son una cantidad finita de símbolos de función, existe una cantidad finita de álgebras no isomorfas a $\mathbf{B}$.

No existe un conjunto finito de fórmulas que defina los elementos centrales en $V(\mathcal{K_P})$*:* El conjunto de los elementos centrales en $V(\mathcal{K_P})$ es axiomatizable por el conjunto de fórmulas $\Omega = \{\alpha, \beta\} \cup \{\delta_n\}_{n\in\omega}$ donde

$$\alpha(e) = \; e \vee (e \Rightarrow 0) = 1$$

$$\begin{aligned} \beta(e) = \; & \forall x, y : ((x \wedge e) \Rightarrow (y \wedge e)) \wedge e \approx (x \Rightarrow y) \wedge e \; \& \\ & ((x \wedge (e \Rightarrow 0)) \Rightarrow (y \wedge (e \Rightarrow 0))) \wedge (e \Rightarrow 0) \approx (x \Rightarrow y) \wedge (e \Rightarrow 0) \end{aligned}$$

$\delta_n(e) = \ \forall x_1, ..., x_n : (f_n(x_1 \wedge e, ..., x_n \wedge e) \wedge e \approx f_n(x_1, ..., x_n) \wedge e)$ &
$\quad (f_n(x_1 \wedge (e \Rightarrow 0), ..., x_n \wedge (e \Rightarrow 0)) \wedge (e \Rightarrow 0) \approx f_n(x_1, ..., x_n) \wedge (e \Rightarrow 0))$.

Claramente $(0, 1)$ no es un elemento central de $\mathbf{A}_n$ para ningún n ya que las álgebras $\mathbf{A}_n$ son simples. Notemos que dado que, para todo $k \neq n$, f_k es constantemente 1, tenemos

$$\mathbf{A}_n \models \alpha((0, 1)) \ \& \ \beta((0, 1))$$

$$\mathbf{A}_n \models \delta_k((0, 1)) \text{ para todo } k \neq n$$

Supongamos que existe un conjunto finito de axiomas que define el conjunto de elementos centrales en $V(\mathcal{K}_{\mathcal{P}})$, por compacidad existe un subconjunto finito Ω_0 de Ω que define el conjunto de elementos centrales. Tomemos n suficientemente grande de forma que $\delta_n \notin \Omega_0$ Tenemos entonces que $\mathbf{A}_n \models \Omega_0((0, 1))$, lo que nos conduce a un absurdo.$\dashv$

Bibliografía

[1] K.A. Baker, *Finite equational bases for finite algebras in a congruence-distributive equational class*, Adv. in Math. 24 (1977) 207-243.

[2] G. Bezhanishvili, *Locally finite varieties.* Algebra Universalis. 46 (2001), 531-548.

[3] D. Bigelow y S. Burris, *Boolean algebras of factor congruences*, Acta Sci. Math. 54 (1990), 11-20.

[4] S. Burris y H. Sankappanavar, *A course in Universal Algebra*, Springer-Verlag, New York, (1981).

[5] C. C. Chang y H. J. Keisler, *Model Theory*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics (3rd ed.),Elsevier,(1990) [1973].

[6] G. A. Fraser y A. Horn, *Congruence relations in direct products.* Proc. Amer. Math. 26 (1970), 390-394.

[7] G. Grätzer, *Two Mal'cev type theorems in universal algebra.* J. Combin. Theory 8 (1970), 334-342.

[8] H. Peter Gumm, *Congruence modularity is permutability composed with distributivity.* Arch. Math. 36 (1981), 569-576.

[9] B. Jónsson, *Algebras whose congruence lattices are distributive*, Math. Scand. 21 (1967), 110-121.

[10] J. Kollar, *Congruences and one element subalgebras*, Algebra Universalis, 9 (1979), 266-267.

[11] P. Sanchez Terraf, *Existentially definable factor congruences*, Acta Sci. Math. 76 (2010), 49-54.

[12] P. Sanchez Terraf y D. Vaggione, *Varieties with definable factor congruences*, Trans. Amer. Math. Soc. 361 (2009), 5061-5088.

[13] D. Vaggione, *Varieties of shells,* Algebra Universalis, 36 (1996), 483-487.

[14] D. Vaggione, *Modular varieties with the Fraser-Horn property*, Proc. Amer. Math. Soc. 127, No 3, 701-708 (1998).

[15] D. Vaggione, *Central elements in varieties with the Fraser–Horn property*, Adv. in Math. 148 (1999), 193–202.

[16] D. Vaggione, *$\mathcal{V}$ with factorable congruences and $\mathcal{V} = I\Gamma^a(\mathcal{V}_{DI})$ imply $\mathcal{V}$ is a discriminator variety*. Acta Sci. Math. 62 (1996), 359-368.

[17] D. Vaggione, *Varieties in which the Pierce stalks are directly indecomposable*, Journal of Algebra, 184 (1996), 424-434.

Índice de notación

Índice alfabético