

HOMOLOGÍA ADJUNTA DE
NILRADICALES 2-PASOS NILPOTENTES
DE SUBÁLGEBRAS PARABÓLICAS DE
 A_n

por María Alejandra Alvarez

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía y Física como parte de los
requerimientos para la obtención del grado de Doctor en Matemática de la

Universidad Nacional de Córdoba

Marzo de 2012

Director: Dr. Paulo Tirao

A mis padres.

Resumen

El cálculo de la homología de un álgebra de Lie \mathfrak{n} , con coeficientes en algún módulo especial V , es un problema muy amplio y en la mayoría de los casos aún abierto. Se sabe muy poco sobre la interpretación de $H^*(\mathfrak{n}, V)$ y sobre cómo calcularlo; y tiene amplia relación con la geometría, la teoría de representaciones y la teoría de deformaciones. Este problema, cuando \mathfrak{n} es un nilradical de una subálgebra parabólica de un álgebra de Lie semisimple y el módulo es una representación del nilradical, que es restricción de una representación del álgebra de Lie, fue desarrollado por Kostant en 1961. El caso de la representación adjunta no está contenido en el trabajo de Kostant y es aún desconocido.

Esta tesis trata el problema de calcular la homología adjunta de nilradicales 2-pasos nilpotentes de A_n . Se estudian casos particulares de nilradicales y se dan avances en el cálculo del caso general. Además se incluyen los primeros grupos de homología adjunta para un nilradical en A_n .

Para toda álgebra de Lie 2-pasos nilpotente \mathfrak{n} , se tiene una sucesión exacta larga de homología que permite el cálculo de la homología adjunta $H_*(\mathfrak{n}, \mathfrak{n})$ conociendo la acción del morfismo de conexión de esta sucesión. Para ello es necesario primero conocer los vectores de peso máximo de la homología trivial de \mathfrak{n} y luego los vectores de peso máximo de ciertos productos tensoriales.

Para la primera etapa se hace uso del Teorema de Kostant y además se encuentran los vectores de peso máximo de la homología trivial en forma alternativa. En una segunda etapa, los vectores de peso máximo de ciertos productos tensoriales se obtienen usando un Teorema, basado en un trabajo de Cagliero y Tirao, 2002, y otro de Alvarez y Tirao, 2012.

Todos los casos estudiados en esta tesis comparten una serie de similitudes con los casos dados por Cagliero y Tirao: el álgebra de Lie libre 2-pasos nilpotente (nilradical de tipo B_n) y el álgebra de Lie de Heisenberg (nilradical de tipo C_n), en 2002 y 2004, respectivamente. La similitud más importante es la existencia de la *Propiedad de cancelación*, lo cual permite conjeturar que este no es un fenómeno aislado sino una propiedad de todos los nilradicales 2-pasos nilpotentes.

Palabras Claves: homología de álgebras de Lie, nilradicales de parabólicas.

Mathematics Subject Classification (2010): 17B10, 17B30, 17B56.

Abstract

The computation of the homology of a Lie algebra \mathfrak{n} , with coefficients in a special module V is a widespread problem and in most cases still open. Little is known about the interpretation of $H^*(\mathfrak{n}, V)$ and how to compute it, and has extensive relationship with geometry, representation theory and the theory of deformations. This problem, when \mathfrak{n} is a nilradical of a parabolic subalgebra of a semisimple Lie algebra and the module is a representation of the nilradical, which is the restriction of a representation of the Lie algebra, was developed by Kostant in 1961. The adjoint representation is not contained in the work of Kostant and is still unknown.

This thesis addresses the problem of computing the adjoint homology of 2-step nilpotent nilradicals of A_n . Particular cases of nilradicals are discussed and advances in the computation of the general case are given. Also included are the first adjoint homology groups for a nilradical in A_n .

For any 2-step nilpotent Lie algebra \mathfrak{n} , we have a long exact sequence of homology that allows the computation of the homology $H_*(\mathfrak{n}, \mathfrak{n})$ by knowing the action of the connection morphism of this sequence. In order to do this, we need the highest weight vectors for the trivial homology of \mathfrak{n} , and then the highest weight vectors for certain tensor products.

For the first step we use Kostant's Theorem and also obtain highest weight vectors for trivial homology alternatively. In a second step, the highest weight vectors for certain tensor products are obtained using a theorem, based on the works of Cagliero and Tirao, 2002, and Alvarez and Tirao, 2012.

All the cases studied in this thesis share some similarities with the cases given by Cagliero and Tirao: the free 2-step nilpotent Lie algebra (nilradical of type B_n) and the Heisenberg Lie algebra (nilradical of type C_n) in 2002 and 2004, respectively. The most important similarity is the existence of the *cancellation property*, which allows us to conjecture that this is not an isolated phenomenon but a property of all 2-step nilpotent nilradicals.

Keywords: Lie algebras homology, nilradicals of parabolics.

Mathematics Subject Classification (2010): 17B10, 17B30, 17B56.

Agradecimientos

A mi familia por su constante apoyo.

A mi amor Luis por compartir conmigo cada paso de este proceso.

A mi director Paulo Tirao por su paciencia.

A mis amigos Alfre, Sofy, Vero, Aure, Nadina y Claudia por todos los buenos momentos y por estar cada vez que los necesité.

Al CONICET y a la FaMAF por posibilitar la realización del doctorado.

Índice general

Resumen	V
Abstract	VII
Agradecimientos	IX
Introducción	1
Parte 1. Generalidades y Preliminares	5
Capítulo 1. Álgebras de Lie semisimples y sus representaciones	7
1. Definiciones	7
1.1. Álgebras de Lie nilpotentes	9
2. Criterio de Semisimplicidad de Cartan	9
3. Descomposición en espacios-raíces	10
4. Subálgebras de Cartan	12
5. Raíces	14
6. Sistemas de Raíces abstractos	15
7. El Grupo de Weyl	19
8. Pesos	21
9. Teorema del Peso Máximo	22
Capítulo 2. Cohomología y Homología de álgebras de Lie	25
1. Los operadores $\theta_{\mathfrak{g}}(x)$ y $\theta^{\mathfrak{g}}(x)$	25
2. Los operadores $d_{\mathfrak{g}}$ y $\partial_{\mathfrak{g}}$	26
3. La fórmula de Koszul	27
4. Cohomología y homología de un álgebra de Lie	28
4.1. Homología con coeficientes	29
Capítulo 3. Subálgebras parabólicas y sus nilradicales	31
1. La estructura de los nilradicales	32
Parte 2. (Co)homología de nilradicales 2-pasos nilpotentes de tipo A_n	33
Capítulo 4. Representaciones de $\mathfrak{sl}(m)$	35
1. Representaciones irreducibles de S_d .	35
1.1. Diagramas de Young	35
1.2. Polinomios de Schur	37
1.3. Funtores de Schur	38
2. La regla de Littlewood-Richardson	40
2.1. Las constantes de estructura	42

Capítulo 5. (Co)homología de nilradicales 2-pasos nilpotentes	45
1. (Co)homología de nilradicales: El Teorema de Kostant	45
2. Homología adjunta de nilradicales	46
3. Esquema especial para álgebras de Lie 2-pasos nilpotentes.	47
4. La Propiedad de Cancelación	47
5. Las familias $A_n(k, l)$	48
6. Productos tensoriales en A_n	49
6.1. La representación V_{m-1}	49
6.2. La representación V_1	50
6.3. Vectores de Peso Máximo de productos tensoriales	51
Capítulo 6. La homología adjunta de $A_n(1, 2)$	57
1. La familia $A_n(1, 2)$	57
2. Homología Trivial de $A_n(1, 2)$.	59
3. Dimensiones	62
4. La sucesión exacta larga y la propiedad de cancelación para $A_n(1, 2)$	64
5. La homología adjunta de $A_n(1, 2)$	68
Capítulo 7. Homología adjunta del álgebra de Lie de Heisenberg	71
1. La homología trivial de \mathcal{H}_{2n-1} .	73
2. Dimensiones.	75
3. La homología adjunta de \mathcal{H}_{2n-1} .	76
4. Dimensiones de la Homología Adjunta	86
Capítulo 8. Sobre el caso general: $A_n(k, l)$	89
1. Homología trivial de \mathfrak{n}	92
2. Productos Tensoriales	106
3. La acción del centro de \mathfrak{g}_1	109
Capítulo 9. Las familias $A_n(k, k + 1)$	113
1. Homología trivial de $A_n(k, k + 1)$	113
2. Homología adjunta de $A_n(k, k + 1)$	114
Capítulo 10. Los primeros grupos de homología adjunta	135
1. La acción de δ_3	135
2. La acción de δ_2	138
3. La acción de δ_1	140
4. Los grupos $H_0(\mathfrak{n}, \mathfrak{n})$, $H_1(\mathfrak{n}, \mathfrak{n})$ y $H_2(\mathfrak{n}, \mathfrak{n})$	142
Bibliografía	145

Introducción

Las álgebras de Lie nilpotentes han sido objeto de una investigación activa en los últimos años. En particular el estudio de su homología y cohomología, tanto en el álgebra como en la geometría. Sin embargo, su cálculo y estructura no están del todo desarrollados. Esta tesis tiene relación con importantes resultados de Nomizu, Bott y Kostant, respectivamente.

En 1954, Nomizu en [16] probó que si G es un grupo de Lie simplemente conexo y D es un subgrupo discreto de G , entonces los grupos de cohomología $H^*(\mathfrak{M})$ con coeficientes reales, del espacio compacto homogéneo $\mathfrak{M} = G/D$, son isomorfos a los grupos de cohomología $H^*(\mathfrak{g})$ del álgebra de Lie \mathfrak{g} de G .

En 1957, Bott en [3], trabajó con representaciones inducidas en el campo de los grupos de Lie analíticos complejos y estableció una extensión de la identidad de Frobenius para grupos finitos. Esta extensión le permitió calcular ciertos módulos de cohomología de espacios homogéneos con coeficientes en un fibrado vectorial homogéneo. Más precisamente, si U y G son grupos analíticos complejos con U cerrado en G , la proyección $G \rightarrow G/U$ define a G como un U -fibrado holomorfo principal sobre $X = G/U$. Además, el U -módulo E define un fibrado vectorial analítico $\mathbf{E} = G \times_U E$ sobre X . Si \mathfrak{g} y \mathfrak{u} son las álgebras de Lie (complexificadas) de G y U respectivamente, Wang en [18] probó que \mathfrak{u} es una subálgebra parabólica de \mathfrak{g} . Si $\mathfrak{u} = \mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{n}$ es la descomposición de Levi de \mathfrak{u} , donde \mathfrak{n} es el nilradical de \mathfrak{u} y \mathcal{E} es el haz de secciones locales holomorfas de \mathbf{E} , entonces $H^*(X, \mathcal{E})$ es un \mathfrak{g} -módulo de dimensión finita y además si X es Kähler

$$H^*(X, \mathcal{E}) = \sum V_\pi \otimes H^*(\mathfrak{n}, V_\pi^* \otimes E)^{\mathfrak{g}_1},$$

donde (π, V_π) varía sobre los \mathfrak{g} -módulos irreducibles de dimensión finita y el álgebra de Lie \mathfrak{n} actúa en V_π^* y en E por restricción.

Si el U -módulo E es irreducible, entonces \mathfrak{n} actúa trivialmente en E . Por lo tanto $H^*(\mathfrak{n}, V_\pi^* \otimes E)^{\mathfrak{g}_1} = (H^*(\mathfrak{n}, V_\pi^*) \otimes E)^{\mathfrak{g}_1}$ y el cálculo de $H^*(X, \mathcal{E})$ es equivalente al cálculo de la estructura de \mathfrak{g}_1 -módulo de $H^*(\mathfrak{n}, V_\pi)$ para toda π . Esto fue hecho por Kostant en [13].

En su famoso trabajo de 1961, Kostant introdujo un método que no sólo permite calcular la cohomología $H(\mathfrak{a}, V_\pi)$ para un gran número de casos, sino también conocer como se transforma $H(\mathfrak{a}, V_\pi)$ bajo la acción de un cierto grupo. En particular, la descomposición del grupo de cohomología $H(\mathfrak{n}, V^\lambda)$ bajo la acción de \mathfrak{g}_1 viene dada por

$$H^*(\mathfrak{n}, V^\lambda) = \bigoplus_{w \in W^1} H(\mathfrak{n}, V^\lambda)^{w(\lambda+\rho)-\rho},$$

donde W^1 es cierto subconjunto del grupo de Weyl de \mathfrak{g} .

Sean ahora $V = \mathfrak{n}$ y π la representación adjunta de \mathfrak{n} en \mathfrak{n} . Consideremos $H(\mathfrak{n}, \mathfrak{n})$. Como \mathfrak{n} no es un \mathfrak{g} -módulo, los resultados de Kostant no se aplican. En este caso, la

descripción de la estructura de \mathfrak{g}_1 -módulo tanto de la cohomología $H^*(\mathfrak{n}, \mathfrak{n})$ como de la homología $H_*(\mathfrak{n}, \mathfrak{n})$ son problemas abiertos.

En esta Tesis abordaremos una parte de este problema: el cálculo de la homología adjunta de un nilradical 2-pasos nilpotente de una subálgebra parabólica de A_n .

Dos antecedentes del cálculo de la homología y cohomología adjunta de un nilradical 2-pasos son: las álgebras de Lie libres 2-pasos nilpotentes, familia contenida en B_n , y las álgebras de Lie de Heisenberg, familia contenida en C_n . La homología adjunta de la primera familia fue descrita en [5] y la segunda está contenida en [6], ambos trabajos de Cagliero y Tirao. En [1] consideramos una tercera familia, esta vez en A_n . Los primeros casos y los considerados en esta Tesis comparten varias similitudes.

Vamos a denotar por $A_n(k, l)$ al nilradical de una subálgebra parabólica de A_n resultante de elegir las k -ésima y l -ésima raíces simples de A_n , que será definido en mayor detalle en el transcurso de la Tesis.

Toda álgebra de Lie 2-pasos nilpotente tiene la forma $\mathfrak{n} = V \oplus \mathfrak{z}$, donde \mathfrak{z} es el centro de \mathfrak{n} . Como \mathfrak{n} actúa trivialmente sobre \mathfrak{z} y $V (\simeq \mathfrak{n}/\mathfrak{z})$, se tiene la sucesión exacta larga de homología

$$\rightarrow H_{p+1} \otimes V \xrightarrow{\delta_{p+1}} H_p(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z} \rightarrow H_p(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}) \rightarrow H_p \otimes V \xrightarrow{\delta_p} H_{p-1}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z} \rightarrow,$$

y se puede ver que $H_p(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}) \simeq \ker \delta_p \oplus \text{coker } \delta_{p+1}$.

Teniendo en cuenta que el objetivo principal de esta Tesis es calcular los grupos de homología adjunta $H_p(\mathfrak{n}, \mathfrak{n})$, observando la descomposición anterior y la sucesión exacta larga, se plantea la necesidad de resolver previamente los siguientes tres problemas:

- Determinar la homología trivial de un nilradical 2-pasos de tipo A_n , y calcular sus vectores de peso máximo explícitamente.

Si bien este problema puede ser resuelto a través del Teorema de Kostant, su desarrollo en la mayoría de los casos es extremadamente largo y dificultoso. En esta Tesis se presenta el Teorema 8.4, el cual nos entrega una forma alternativa para calcular los vectores de peso máximo de la homología trivial de \mathfrak{n} .

- La construcción de vectores de peso máximo de los productos tensoriales $H_p(\mathfrak{n}) \otimes V$ y $H_{p-1}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}$.

Construir vectores de peso máximo para un producto tensorial es en general muy complicado. En [5], Cagliero y Tirao dieron la construcción para el producto tensorial $V_D \otimes V_1$, donde V_D es una $\mathfrak{gl}(n)$ -representación cuyo diagrama de Young es D y V_1 es la primera representación fundamental de $\mathfrak{gl}(n)$. En [1] dimos la construcción para el producto tensorial $V_D \otimes V_{m-1}$, donde V_D es una $\mathfrak{sl}(m)$ -representación cuyo diagrama de Young es D y V_{m-1} es la última representación fundamental de $\mathfrak{sl}(m)$. Una combinación de estas dos construcciones nos permite dar el Teorema 8.10, con el cual se resuelve este objetivo para un nilradical 2-pasos de tipo A_n .

- Analizar la acción del morfismo de conexión en cada uno de los vectores de peso máximo de los productos tensoriales anteriores.

Conociendo esta acción es posible obtener la homología adjunta usando la descomposición anterior. En todos los casos estudiados se prueba que éstos tienen

cierta *Propiedad de cancelación* y este hecho facilita el cálculo tanto del kernel como del cokernel del morfismo.

Aplicando los resultados anteriormente obtenidos, podemos calcular la homología adjunta de varias familias de nilradicales 2-pasos de tipo A_n y posteriormente aplicarlos para obtener los primeros tres grupos de homología adjunta para un nilradical 2-pasos de una subálgebra parabólica de A_n .

Para el cumplimiento de estos objetivos y sus aplicaciones, hemos desarrollado esta Tesis en 2 Partes. La Parte 1 consta de 3 Capítulos, en los cuales se incluyen los conceptos básicos necesarios para la comprensión de esta Tesis. Al inicio de la Parte 2 (Capítulo 4 y parte del Capítulo 5) se incluyen conceptos específicos del tema a estudiar. Finalmente, presentamos los resultados propios, más precisamente:

En el Capítulo 5 se desarrolla la construcción para el producto tensorial $V_D \otimes V_{m-1}$.

En el Capítulo 6 se calcula la homología adjunta de $A_n(1, 2)$.

En el Capítulo 7 se calcula la homología adjunta de $A_n(1, n) = \mathcal{H}_{2n-1}$, el álgebra de Lie de Heisenberg.

En el Capítulo 8 se estudia el caso general $A_n(k, l)$, calculando su homología trivial y los vectores de peso máximo de los productos tensoriales necesarios. Además se estudia parcialmente la acción del morfismo de conexión.

En el Capítulo 9 se calcula la homología adjunta de $A_n(k, k + 1)$.

En el Capítulo 10 se dan los primeros tres grupos de homología adjunta de $A_n(k, l)$.

Parte 1

Generalidades y Preliminares

Álgebras de Lie semisimples y sus representaciones

Este capítulo y el siguiente pretenden ser una recopilación de los resultados más utilizados en esta Tesis. No se incluyen las demostraciones de los mismos, las cuales pueden consultarse por ejemplo en [7], [9], [10], [11], [12], entre otros.

1. Definiciones

Sea k un cuerpo. Un **álgebra** \mathfrak{g} (no necesariamente asociativa) es un espacio vectorial sobre k con un producto $[X, Y]$ (llamado “corchete”) que es lineal en cada variable. El álgebra es un **álgebra de Lie** si el producto satisface

- (a) $[X, X] = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$ y
- (b) la **identidad de Jacobi**: $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$.

Para un álgebra de Lie \mathfrak{g} tenemos el mapa lineal $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}_k \mathfrak{g}$ dado por

$$(\text{ad } X)(Y) = [X, Y].$$

Un **homomorfismo** es un mapa lineal $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ tal que

$$\varphi([X, Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)] \quad \text{para todo } X \text{ e } Y.$$

Una **subálgebra de Lie** \mathfrak{h} de \mathfrak{g} es un subespacio que satisface $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$; entonces \mathfrak{h} es en sí misma un álgebra de Lie. Un **ideal** \mathfrak{h} es un subespacio que satisface $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{h}$; un ideal es automáticamente una subálgebra. El álgebra de Lie \mathfrak{g} se dice **abeliana** si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$.

Se define el **centro** de \mathfrak{g} como:

$$Z_{\mathfrak{g}} = \{X \in \mathfrak{g} : [X, Y] = 0 \text{ para todo } Y \in \mathfrak{g}\}.$$

Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie de dimensión finita. Definimos recursivamente

$$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \quad \mathfrak{g}^{j+1} = [\mathfrak{g}^j, \mathfrak{g}^j],$$

entonces la sucesión decreciente

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \supseteq \mathfrak{g}^1 \supseteq \mathfrak{g}^2 \supseteq \dots$$

se llama la **serie derivada** para \mathfrak{g} . Cada \mathfrak{g}^j es un ideal en \mathfrak{g} . Se dice que \mathfrak{g} es **soluble** si $\mathfrak{g}^j = 0$ para algún j .

Ahora definimos recursivamente

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}_1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \quad \mathfrak{g}_{j+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_j].$$

Entonces la sucesión decreciente

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supseteq \mathfrak{g}_1 \supseteq \mathfrak{g}_2 \supseteq \dots$$

se llama la **serie central descendente** para \mathfrak{g} . Cada uno de los \mathfrak{g}_j es un ideal en \mathfrak{g} . Se dice que \mathfrak{g} es **nilpotente** si $\mathfrak{g}_j = 0$ para algún j . Inductivamente vemos que $\mathfrak{g}^j \subseteq \mathfrak{g}_j$, y se sigue que nilpotente implica soluble.

PROPOSICIÓN 1.1. *Si \mathfrak{g} es un álgebra de Lie de dimensión finita, entonces existe un único ideal soluble \mathfrak{r} de \mathfrak{g} que contiene a todos los ideales solubles en \mathfrak{g} .*

El ideal de la Proposición 1.1 se llama el **radical** de \mathfrak{g} y se denota $\text{rad } \mathfrak{g}$.

Un álgebra de Lie de dimensión finita \mathfrak{g} es **simple** si \mathfrak{g} no es abeliana y \mathfrak{g} no tiene ideales propios no nulos. Un álgebra de Lie de dimensión finita \mathfrak{g} es **semisimple** si \mathfrak{g} no tiene ideales solubles no nulos, es decir, si $\text{rad } \mathfrak{g} = 0$.

PROPOSICIÓN 1.2. *En un álgebra de Lie simple $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. Toda álgebra de Lie simple es semisimple. Toda álgebra de Lie semisimple tiene centro 0.*

Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie de dimensión finita sobre k . Si X e Y están en \mathfrak{g} , entonces $\text{ad } X \text{ ad } Y$ es una transformación lineal de \mathfrak{g} en sí misma, y definimos

$$(1.1) \quad B(X, Y) = \text{Tr}(\text{ad } X \text{ ad } Y).$$

Entonces B es una forma bilineal simétrica en \mathfrak{g} conocida como la **forma de Killing** de \mathfrak{g} . La forma de Killing es **invariante** en el sentido de que

$$(1.2) \quad B((\text{ad } X)Y, Z) = -B(Y, (\text{ad } X)Z)$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. Una forma alternativa de escribir (1.2) es

$$(1.3) \quad B([X, Y], Z) = B(X, [Y, Z]).$$

Sea K un cuerpo que satisface $k \subseteq K \subseteq \mathbb{C}$. Sea V un espacio vectorial sobre K , y sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie que tiene a k como cuerpo subyacente. Una **representación** de \mathfrak{g} en V es un homomorfismo de álgebras de Lie $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow (\text{End}_K V)^k$. Por la definición del corchete en $\text{End}_K V$, π debe ser k -lineal y satisfacer

$$\pi([X, Y]) = \pi(X)\pi(Y) - \pi(Y)\pi(X) \quad \text{para todo } X, Y \in \mathfrak{g}.$$

TEOREMA 1.3 (Teorema de Lie). *Sean \mathfrak{g} soluble y $V \neq 0$ un espacio vectorial de dimensión finita sobre K . Sea $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}_K V$ una representación. Si K es algebraicamente cerrado, entonces existe un autovector simultáneo $v \neq 0$ para todos los elementos de $\pi(\mathfrak{g})$. En general (para K), existe un autovector simultáneo si todos los autovalores de todos los $\pi(X)$, $X \in \mathfrak{g}$, están en K .*

COROLARIO 1.4 (Teorema de Lie). *Bajo las condiciones para \mathfrak{g} , V , π y K del Teorema 1.3, existe una sucesión de subespacios*

$$V = V_0 \supseteq V_1 \supseteq V_2 \supseteq \cdots \supseteq V_m = 0$$

tal que cada V_i es estable bajo $\pi(\mathfrak{g})$ y $\dim V_i/V_{i+1} = 1$. Consecuentemente, V tiene una base con respecto a la cual todas las matrices de $\pi(\mathfrak{g})$ son triangulares superiores.

1.1. Álgebras de Lie nilpotentes. Sea k un cuerpo y \mathfrak{g} un álgebra de Lie nilpotente sobre k . Si $\mathfrak{g}_k = 0$, entonces

$$(1.4) \quad (\text{ad } X)^k Y = [X, [X, [\dots, [X, Y] \dots]] \in \mathfrak{g}_k = 0.$$

Por lo tanto $(\text{ad } X)^k = 0$, y $\text{ad } X$ es una transformación lineal en \mathfrak{g} .

PROPOSICIÓN 1.5. *Si \mathfrak{g} es un álgebra de Lie, entonces \mathfrak{g} es nilpotente si y sólo si el álgebra de Lie $\text{ad } \mathfrak{g}$ es nilpotente.*

El Teorema de Engel es la recíproca de (1.4). Es decir, si $\text{ad } X$ es siempre una transformación nilpotente de \mathfrak{g} , entonces \mathfrak{g} es un álgebra de Lie nilpotente. Más en general, tenemos

TEOREMA 1.6 (Teorema de Engel). *Sea $V \neq 0$ un espacio vectorial de dimensión finita sobre k , y sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie de endomorfismos nilpotentes de V . Entonces*

- (a) \mathfrak{g} es un álgebra de Lie nilpotente,
- (b) existe $v \neq 0$ en V tal que $X(v) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$,
- (c) en una base adecuada de V , todos los X son matrices triangulares superiores estrictas.

COROLARIO 1.7. *Si \mathfrak{g} es un álgebra de Lie tal que cada $\text{ad } X$ es nilpotente para $X \in \mathfrak{g}$, entonces \mathfrak{g} es un álgebra de Lie nilpotente.*

PROPOSICIÓN 1.8. *Si \mathfrak{g} es un álgebra de Lie soluble, entonces $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ es nilpotente.*

2. Criterio de Semisimplicidad de Cartan

Sea k un subcuerpo de \mathbb{C} , y \mathfrak{g} un álgebra de Lie sobre k de dimensión finita.

Sean V un espacio vectorial de dimensión finita y $C(\cdot, \cdot)$ una forma bilineal en $V \times V$. Se define

$$\text{rad } C = \{v \in V \mid C(v, u) = 0 \text{ para todo } u \in V\}.$$

Escribimos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para el producto interno entre el dual V^* y V , definimos $\varphi : V \rightarrow V^*$ por $\langle \varphi(v), u \rangle = C(v, u)$. Entonces $\ker \varphi = \text{rad } C$, y por lo tanto φ es un isomorfismo si y sólo si C es no degenerada.

Si U es un subespacio de V , sea

$$U^\perp = \{v \in V \mid C(v, u) = 0 \text{ para todo } u \in U\}.$$

Entonces

$$(1.5) \quad U \cap U^\perp = \text{rad}(C|_{U \times U}).$$

Aún si C es no degenerada, podemos tener $U \cap U^\perp \neq 0$.

PROPOSICIÓN 1.9. *Si C es no degenerada, entonces*

$$\dim U + \dim U^\perp = \dim V.$$

COROLARIO 1.10. *Si C es no degenerada, entonces $V = U \oplus U^\perp$ si y sólo si $C|_{U \times U}$ es no degenerada.*

TEOREMA 1.11 (Criterio de Semisimplicidad de Cartan). *El álgebra de Lie \mathfrak{g} es semisimple si y sólo si la forma de Killing para \mathfrak{g} es no degenerada.*

TEOREMA 1.12. *El álgebra de Lie \mathfrak{g} es semisimple si y sólo si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_m$ con \mathfrak{g}_j ideales que son álgebras de Lie simples. En este caso la decomposición es única, y los únicos ideales de \mathfrak{g} son las sumas de varios \mathfrak{g}_j .*

COROLARIO 1.13. *Si \mathfrak{g} es semisimple, entonces $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. Si \mathfrak{a} es un ideal en \mathfrak{g} , entonces \mathfrak{a}^\perp es un ideal en \mathfrak{g} y $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$.*

DEFINICIÓN 1.14. *Un álgebra de Lie \mathfrak{g} es **reductiva** si a cada ideal \mathfrak{a} en \mathfrak{g} le corresponde un ideal \mathfrak{b} en \mathfrak{g} tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$.*

El Teorema 1.12 muestra que la suma directa de álgebras de Lie semisimples es un álgebra de Lie reductiva y además un álgebra de Lie abeliana es reductiva. El próximo corolario muestra que no existen otras álgebras de Lie reductivas.

COROLARIO 1.15. *Si \mathfrak{g} es reductiva, entonces $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \oplus Z_{\mathfrak{g}}$ con $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ semisimple y $Z_{\mathfrak{g}}$ abeliano.*

3. Descomposición en espacios-raíces

Recordemos que las familias $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ para $n \geq 2$, $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ para $n \geq 3$, y $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ para $n \geq 1$ son semisimples. Cada una de estas álgebras de Lie tiene una subálgebra abeliana \mathfrak{h} tal que el análisis de $\text{ad } \mathfrak{h}$ nos permite entender completamente el corchete en el álgebra total. Veremos el análisis de $\text{ad } \mathfrak{h}$ para $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ y luego definiremos en forma abstracta las herramientas utilizadas.

EJEMPLO 1.16. Sean $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ y

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_0 &= \text{matrices de diagonal real en } \mathfrak{g}, \\ \mathfrak{h} &= \text{todas las matrices diagonales en } \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

Entonces $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \oplus i\mathfrak{h}_0 = (\mathfrak{h}_0)^\mathbb{C}$. Denotamos $E_{i,j}$ a la matriz que tiene un 1 en la entrada (i, j) y 0 en las demás. Se define el elemento e_j del espacio dual \mathfrak{h}^* como

$$e_j \left(\begin{pmatrix} h_1 & & \\ & \ddots & \\ & & h_n \end{pmatrix} \right) = h_j.$$

Para cada $H \in \mathfrak{h}$, $\text{ad } H$ es diagonalizada por la base de \mathfrak{g} que contiene a los elementos de \mathfrak{h} y a los $E_{i,j}$ con $i \neq j$. Tenemos

$$(\text{ad } H)E_{i,j} = [H, E_{i,j}] = (e_i(H) - e_j(H))E_{i,j}.$$

En otras palabras, $E_{i,j}$ es un autovector simultáneo para todas las $\text{ad } H$, con autovalor $e_i(H) - e_j(H)$. Este autovalor es lineal en H y entonces el autovalor es un funcional lineal

en \mathfrak{h} , digamos $e_i - e_j$. Los $e_i - e_j$'s con $i \neq j$, se llaman **raíces**. El conjunto de todas las raíces se denota Δ . Tenemos

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{i \neq j} \mathbb{C}E_{i,j},$$

que puede reescribirse como

$$(1.6) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{i \neq j} \mathfrak{g}_{e_i - e_j},$$

donde

$$\mathfrak{g}_{e_i - e_j} = \{X \in \mathfrak{g} \mid (\text{ad } H)X = (e_i - e_j)(H)X \text{ para todo } H \in \mathfrak{h}\}.$$

La descomposición (1.6) se llama una **descomposición espacio raíz**. El conjunto de raíces Δ genera a \mathfrak{h}^* sobre \mathbb{C} .

Si α y β son raíces, es fácil ver que

$$(1.7) \quad [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \begin{cases} \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} & \text{si } \alpha + \beta \text{ es una raíz} \\ 0 & \text{si } \alpha + \beta \text{ no es una raíz o es } 0 \end{cases}$$

Además, si $\alpha + \beta = 0$ entonces $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{h}$ y se obtiene

$$[E_{i,j}, E_{j,i}] = E_{i,i} - E_{j,j} \in \mathfrak{h}.$$

Todas las raíces son reales en \mathfrak{h}_0 y por lo tanto, por restricción, pueden ser consideradas como elementos de \mathfrak{h}_0^* . El próximo paso es introducir una noción de positividad en \mathfrak{h}_0^* tal que

1. para todo $\varphi \in \mathfrak{h}_0^*$ no nulo, exactamente un elemento de $\{\varphi, -\varphi\}$ es positivo,
2. la suma de elementos positivos es positivo, y cualquier múltiplo positivo de un elemento positivo es positivo.

Observemos la forma canónica de los elementos de \mathfrak{h}_0^* . Los funcionales lineales e_1, \dots, e_n generan \mathfrak{h}_0^* , y su suma es 0. Entonces todo elemento de \mathfrak{h}_0^* puede ser escrito de manera no única como $\sum_j c_j e_j$, donde $\left(\sum_i c_i\right)(e_1 + \dots + e_n) = 0$. Por lo tanto nuestro funcional lineal dado es

$$\sum_{j=1}^n \left(c_j - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c_i \right) e_j.$$

En esta última representación la suma de los coeficientes es 0. Entonces todo elemento de \mathfrak{h}_0^* puede ser representado como $\sum_j a_j e_j$ con $\sum_j a_j = 0$. Ninguna expresión no nula se puede anular en $E_{i,i} - E_{n,n}$ para todo i con $1 \leq i < n$, entonces la realización como $\sum_j a_j e_j$ con $\sum_j a_j = 0$ es única.

Si $\varphi = \sum_j a_j e_j$ es un elemento de \mathfrak{h}_0^* con $\sum_j a_j = 0$, se dice que un φ no nulo es **positivo** ($\varphi > 0$) si el primer coeficiente no nulo a_j es positivo. Esta noción de positividad satisface las propiedades 1 y 2 anteriores.

Se dice que $\varphi > \psi$ si $\varphi - \psi$ es positivo. El resultado es un orden simple en \mathfrak{h}_0^* preservado bajo la suma y bajo la multiplicación por escalares positivos.

Para las raíces el efecto es el siguiente

$$\begin{aligned} e_1 - e_n > e_1 - e_{n-1} > \cdots > e_1 - e_2 > e_2 - e_n > e_2 - e_{n-1} > \cdots > e_2 - e_3 > \\ > \cdots > e_{n-2} - e_{n-1} > e_{n-2} - e_n > e_{n-1} - e_n > 0, \end{aligned}$$

y luego tenemos las negativas. Las raíces positivas son los $e_i - e_j$ con $i < j$.

Veamos ahora que \mathfrak{g} es simple sobre \mathbb{C} para $n \geq 2$. Sea $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ un ideal, y supongamos que $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{h}$. Sea $H \neq 0$ un elemento de \mathfrak{a} . Como las raíces generan \mathfrak{h}_0^* , podemos encontrar una raíz α con $\alpha(H) \neq 0$. Si X está en \mathfrak{g}_α y $X \neq 0$, entonces

$$\alpha(H)X = [H, X] \in [\alpha, \mathfrak{g}] \subseteq \alpha \subseteq \mathfrak{h},$$

luego X está en \mathfrak{h} , lo que es una contradicción. Por lo tanto $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{h}$ implica $\alpha = 0$.

Supongamos ahora que \mathfrak{a} no está contenido en \mathfrak{h} . Sea $X = H + \sum X_\alpha$ un elemento de \mathfrak{a} con cada $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ y con algún $X_\alpha \neq 0$.

Asumamos por ahora que existe alguna raíz $\alpha < 0$ con $X_\alpha \neq 0$, y sea β la menor de tales α . Digamos $X_\beta = cE_{i,j}$ con $i > j$ y $c \neq 0$.

Veamos que

$$(1.8) \quad [E_{1,i}, [X, E_{j,n}]]$$

es un múltiplo no nulo de $E_{1,n}$. De hecho, no podemos tener $i = 1$ ya que $j < i$. Si $i < n$, entonces $[E_{i,j}, E_{j,n}] = aE_{i,n}$ con $a \neq 0$, y además $[E_{1,i}, E_{i,n}] = bE_{1,n}$ con $b \neq 0$. Entonces (1.8) tiene una componente no nula en $\mathfrak{g}_{e_1 - e_n}$ en la descomposición (1.6). Las otras componentes de (1.8) deben corresponder a raíces más grandes. Entonces la afirmación se sigue si $i < n$. Si $i = n$, entonces

$$[E_{1,i}, [X, E_{j,n}]] = [E_{1,n}, [cE_{n,j} + \cdots, E_{j,n}]] = c[E_{1,n}, E_{n,n} - E_{j,j}] + \cdots = cE_{1,n}.$$

Entonces la afirmación se sigue si $i = n$. En cualquier caso concluimos que $E_{1,n}$ está en \mathfrak{a} . Para $i \neq j$, la fórmula

$$E_{k,l} = c'[E_{k,1}, [E_{1,n}, E_{n,l}]] \quad \text{con } c' \neq 0$$

muestra que $E_{k,l}$ está en \mathfrak{a} , y

$$[E_{k,l}, E_{l,k}] = E_{k,k} - E_{l,l}$$

muestra que un conjunto generador de \mathfrak{h} está en \mathfrak{a} . Por lo tanto $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$.

Por lo tanto un ideal \mathfrak{a} que no está en \mathfrak{h} tiene que ser todo \mathfrak{g} si existe algún $\alpha < 0$ con $X_\alpha \neq 0$ como antes. Similarmente si existe algún $\alpha > 0$ con $X_\alpha \neq 0$, sea β la mayor de estas α , digamos $\alpha = e_i - e_j$ con $i < j$. Calculando $[E_{n,i}, [X, E_{j,1}]]$ y trabajando con $E_{n,1}$ de la misma forma obtenemos que $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$. Entonces \mathfrak{g} es simple sobre \mathbb{C} .

4. Subálgebras de Cartan

Sea \mathfrak{h} un álgebra de Lie de dimensión finita sobre \mathbb{C} . Una representación π de \mathfrak{h} en un espacio vectorial complejo V es un homomorfismo de álgebras de Lie lineal y complejo de \mathfrak{h} en $\text{End}_{\mathbb{C}}(V)$. Para tales π y V , cuando α está en el dual \mathfrak{h}^* , definimos V_α como

$$V_\alpha = \{v \in V \mid (\pi(H) - \alpha(H)1)^n v = 0 \text{ para todo } H \in \mathfrak{h} \text{ y algún } n = n(H, v)\}.$$

Si $V_\alpha \neq 0$, V_α se llama el **espacio peso generalizado** y α es un **peso**. Los elementos de V_α se llaman **vectores peso generalizados**.

Para el caso en que V es de dimensión finita, $\pi(H) - \alpha(H)1$ tiene a 0 como su único autovalor generalizado en V_α y es nilpotente en este espacio, como consecuencia de la teoría de la forma normal del Jordan. Por lo tanto $n(H, v)$ puede tomarse como $\dim V$.

PROPOSICIÓN 1.17. *Supongamos que \mathfrak{h} es un álgebra de Lie nilpotente sobre \mathbb{C} y que π es una representación de \mathfrak{h} en un espacio vectorial complejo V de dimensión finita. Entonces existe una cantidad finita de pesos generalizados, cada espacio peso generalizado es estable bajo $\pi(V)$ y V es la suma directa de todos los espacios peso generalizados.*

OBSERVACIONES 1.18.

1. La descomposición de V como suma directa de los espacios peso generalizados se llama una **descomposición espacio peso** de V .
2. Los pesos no necesariamente son linealmente independientes.
3. Como \mathfrak{h} es nilpotente, también es soluble, entonces en una base adecuada de V , $\pi(\mathfrak{h})$ es triangularizable simultáneamente por el Teorema de Lie. Los pesos generalizados serán las distintas entradas diagonales, como funciones en \mathfrak{h} . Sin embargo, para obtener la descomposición en suma directa debemos hacer uso del hecho de que \mathfrak{h} es nilpotente.

PROPOSICIÓN 1.19. *Si \mathfrak{g} es un álgebra de Lie sobre \mathbb{C} de dimensión finita y si \mathfrak{h} es una subálgebra de Lie nilpotente, entonces los espacios peso generalizados de \mathfrak{g} relativos a $\text{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{h}$ satisfacen*

(a) $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}_\alpha$, donde

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid (\text{ad } H - \alpha(H)1)^n X = 0 \text{ para todo } H \in \mathfrak{h} \text{ y algún } n = n(H, X)\},$$

(b) $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}_0$,

(c) $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ (donde se entiende que $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta} = 0$ si $\alpha + \beta$ no es un peso generalizado).

COROLARIO 1.20. \mathfrak{g}_0 es una subálgebra.

DEFINICIÓN 1.21. *Una subálgebra de Lie nilpotente \mathfrak{h} de un álgebra de Lie compleja de dimensión finita \mathfrak{g} es una **subálgebra de Cartan** si $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$.*

PROPOSICIÓN 1.22. *Una subálgebra de Lie nilpotente \mathfrak{h} de un álgebra de Lie compleja de dimensión finita \mathfrak{g} es una subálgebra de Cartan si y sólo si $\mathfrak{h} = N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}\}$.*

TEOREMA 1.23. *Toda álgebra de Lie compleja \mathfrak{g} de dimensión finita tiene una subálgebra de Cartan.*

PROPOSICIÓN 1.24. *Si \mathfrak{g} es un álgebra de Lie compleja semisimple y \mathfrak{h} es una subálgebra de Cartan, entonces \mathfrak{h} es abeliana.*

PROPOSICIÓN 1.25. *En un álgebra de Lie \mathfrak{g} compleja semisimple, una subálgebra de Lie es una subálgebra de Cartan si es maximal entre todas las subálgebras abelianas \mathfrak{h} tal que $\text{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{h}$ es diagonalizable simultáneamente.*

5. Raíces

Sean \mathfrak{g} un álgebra de Lie compleja semisimple, B su forma de Killing y \mathfrak{h} una subálgebra de Cartan de \mathfrak{g} . \mathfrak{h} es abeliana por la Proposición 1.24. Los pesos generalizados no nulos de $\text{ad}_{\mathfrak{h}}$ en \mathfrak{g} se llaman **raíces** de \mathfrak{g} con respecto a \mathfrak{h} . Denotamos al conjunto de raíces como Δ o $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Entonces podemos reescribir la descomposición espacio peso de la Proposición 1.19 como

$$(1.9) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_{\alpha}.$$

Esta descomposición se llama la **descomposición espacio raíz** de \mathfrak{g} con respecto a \mathfrak{h} . Los elementos de \mathfrak{g}_{α} se llaman vectores raíces para la raíz α .

PROPOSICIÓN 1.26.

- (a) Si α y β están en $\Delta \cup \{0\}$ y $\alpha + \beta \neq 0$, entonces $B(\mathfrak{g}_{\alpha}, \mathfrak{g}_{\beta}) = 0$.
- (b) Si α está en $\Delta \cup \{0\}$, entonces B es no singular en $\mathfrak{g}_{\alpha} \times \mathfrak{g}_{\beta}$.
- (c) Si α está en Δ , entonces también lo está $-\alpha$.
- (d) $B|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}}$ es no degenerada; en consecuencia a cada raíz α le corresponde un $H_{\alpha} \in \mathfrak{h}$ con $\alpha(H) = B(H, H_{\alpha})$ para todo $H \in \mathfrak{h}$.
- (e) Δ genera \mathfrak{h}^* .

LEMA 1.27. *Para cada raíz α , sea $E_{\alpha} \neq 0$ un vector en \mathfrak{g}_{α} tal que $[H, E_{\alpha}] = \alpha(H)E_{\alpha}$ para todo $H \in \mathfrak{h}$.*

- (a) Si α es una raíz y X está en $\mathfrak{g}_{-\alpha}$, entonces $[E_{\alpha}, X] = B(E_{\alpha}, X)H_{\alpha}$.
- (b) Si α y β están en Δ , entonces $\beta(H_{\alpha})$ es un múltiplo racional de $\alpha(H_{\alpha})$.
- (c) Si α está en Δ , entonces $\alpha(H_{\alpha}) \neq 0$.

PROPOSICIÓN 1.28. *Si $\alpha \in \Delta$, entonces $\dim \mathfrak{g}_{\alpha} = 1$. Además $n\alpha \notin \Delta$ para todo entero $n \geq 2$.*

COROLARIO 1.29. *En $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$, la forma de Killing está dada por*

$$B(H, H') = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha(H)\alpha(H').$$

COROLARIO 1.30. *El par de vectores $\{E_{\alpha}, E_{-\alpha}\}$ dados en el Lema 1.27 pueden ser normalizados de tal forma que $B(E_{\alpha}, E_{-\alpha}) = 1$.*

DEFINICIÓN 1.31. *Sean $\alpha \in \Delta$ y $\beta \in \Delta \cup \{0\}$. La α -cadena que contiene a β es el conjunto de todos los elementos de $\Delta \cup \{0\}$ de la forma $\beta + n\alpha$ para $n \in \mathbb{Z}$.*

PROPOSICIÓN 1.32. *Sea $\alpha \in \Delta$, y sea $\beta \in \Delta \cup \{0\}$.*

(a) La α -cadena que contiene a β tiene la forma $\beta + n\alpha$ para $-p \leq n \leq q$ con $p \geq 0$ y $q \geq 0$, sin brechas. Además

$$p - q = \frac{2\langle\beta, \alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle}, \quad y \quad \frac{2\langle\beta, \alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle} \in \mathbb{Z}.$$

(b) Si $\beta + n\alpha$ nunca es 0, definimos \mathfrak{sl}_α como la copia isomorfa a $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ generada por

$$H'_\alpha = \frac{2}{\alpha(H_\alpha)} H_\alpha, \quad E'_\alpha = \frac{2}{\alpha(H_\alpha)} E_\alpha \quad y \quad E'_{-\alpha} = E_{-\alpha},$$

y sea $\mathfrak{g}' = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}$. Entonces la representación de \mathfrak{sl}_α en \mathfrak{g}' por ad es irreducible.

COROLARIO 1.33. Si α y β están en $\Delta \cup \{0\}$ y $\alpha + \beta \neq 0$, entonces $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

COROLARIO 1.34. Sean α y β raíces tales que $\beta + n\alpha$ nunca es 0 para $n \in \mathbb{Z}$. Sean $E_\alpha, E_{-\alpha}$ y E_β vectores raíces cualesquiera para $\alpha, -\alpha$ y β , respectivamente, y sean p y q los enteros de la Proposición 1.32. Entonces

$$[E_{-\alpha}, [E_\alpha, E_\beta]] = \frac{q(1+p)}{2} \alpha(H_\alpha) B(E_\alpha, E_{-\alpha}) E_\beta.$$

COROLARIO 1.35. Sea V el \mathbb{R} -espacio lineal generado por Δ en \mathfrak{h}^* . Entonces V es una forma real del espacio vectorial \mathfrak{h}^* , y la restricción de la forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $V \times V$ es un producto interno definido-positivo. Más aún, si \mathfrak{h}_0 denota el \mathbb{R} -espacio lineal generado por todas las H_α con $\alpha \in \Delta$, entonces \mathfrak{h}_0 es una forma real del espacio vectorial \mathfrak{h} , los elementos de V son exactamente aquellos funcionales lineales que son reales en \mathfrak{h}_0 , y la restricción a la operación de aquellos funcionales de \mathfrak{h} a \mathfrak{h}_0 es un \mathbb{R} -isomorfismo de V en \mathfrak{h}_0^* .

Sea $|\cdot|$ la norma asociada al producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en $\mathfrak{h}_0^* \times \mathfrak{h}_0^*$. Sea α una raíz. Relativa al producto interno, se define la **reflexión**

$$s_\alpha(\varphi) = \varphi - \frac{2\langle\varphi, \alpha\rangle}{|\alpha|^2} \alpha \quad \text{para } \varphi \in \mathfrak{h}_0^*.$$

Esta es una transformación ortogonal en \mathfrak{h}_0^* , es -1 en $\mathbb{R}\alpha$, y es +1 en el complemento ortogonal de α .

PROPOSICIÓN 1.36. Para cualquier raíz α , la reflexión s_α lleva a Δ en sí mismo.

6. Sistemas de Raíces abstractos

Un **sistema de raíces abstracto** en un espacio V de dimensión finita con un producto interno real $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y norma al cuadrado $|\cdot|^2$ es un conjunto finito Δ de elementos no nulos de V tal que

(I) Δ genera a V ,

(II) las transformaciones ortogonales $s_\alpha(\varphi) = \varphi - \frac{2\langle\varphi, \alpha\rangle}{|\alpha|^2} \alpha$, para $\alpha \in \Delta$, llevan Δ en sí mismo,

(III) $\frac{2\langle\beta, \alpha\rangle}{|\alpha|^2}$ es un entero siempre que $\alpha, \beta \in \Delta$.

Un sistema de raíces abstracto se dice **reducido** si $\alpha \in \Delta$ implica que $2\alpha \notin \Delta$. Podemos resumir lo visto en las secciones anteriores en el siguiente teorema.

TEOREMA 1.37. *El sistema de raíces de un álgebra de Lie semisimple compleja \mathfrak{g} con respecto a una subálgebra de Cartan \mathfrak{h} forma un sistema de raíces abstracto reducido en \mathfrak{h}_0^* .*

Los sistemas de raíces abstractos reducidos para las familias clásicas son:

	Espacio Vectorial	Sistema de Raíces	\mathfrak{g}
A_n	$V = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} a_i e_i : \sum a_i e_i = 0 \right\}$	$\Delta = \{e_i - e_j : i \neq j\}$	$\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$
B_n	$V = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i e_i \right\}$	$\Delta = \{\pm e_i \pm e_j : i \neq j\}$	$\mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C})$
C_n	$V = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} a_i e_i \right\}$	$\Delta = \{\pm e_i \pm e_j : i \neq j\} \cup \{\pm 2e_i\}$	$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$
D_n	$V = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} a_i e_i \right\}$	$\Delta = \{\pm e_i \pm e_j : i \neq j\}$	$\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$

DEFINICIÓN 1.38. *Dos sistemas de raíces abstractos Δ en V y Δ' en V' son **isomorfos** si existe un isomorfismo de espacios vectoriales de V en V' que lleva Δ en Δ' y preserva los enteros $\frac{2\langle\beta, \alpha\rangle}{|\alpha|^2}$ para $\alpha, \beta \in \Delta$.*

Un sistema de raíces abstracto Δ se dice **reducible** si Δ admite una descomposición no trivial disjunta $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$ con todo elemento de Δ' ortogonal a todo elemento de Δ'' . Se dice que Δ es **irreducible** si no admite tal descomposición.

PROPOSICIÓN 1.39. *El sistema de raíces Δ de un álgebra de Lie semisimple compleja \mathfrak{g} con respecto a una subálgebra de Cartan \mathfrak{h} es irreducible como un sistema de raíces abstracto si y sólo si \mathfrak{g} es simple.*

EJEMPLO 1.40. *Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(4, \mathbb{C})$. El sistema de raíces es $\Delta = \{\pm e_1 \pm e_2\}$. Si $\Delta' = \{\pm(e_1 - e_2)\}$ y $\Delta'' = \{\pm(e_1 + e_2)\}$, entonces $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$ y Δ es reducible. Por la Proposición 1.39, $\mathfrak{so}(4, \mathbb{C})$ no es simple. El sistema de raíces es isomorfo a $A_1 \oplus A_1$.*

Se extiende la definición de cadena-raíz al contexto de un sistema de raíces abstracto Δ . Para $\alpha \in \Delta$ y $\beta \in \Delta \cup \{0\}$, la α -cadena que contiene a β es el conjunto de todos los elementos de $\Delta \cup \{0\}$ de la forma $\beta + n\alpha$ con $n \in \mathbb{Z}$.

Si α es una raíz y $\frac{1}{2}\alpha$ no es una raíz, decimos que α es **reducida**.

PROPOSICIÓN 1.41. *Sea Δ un sistema de raíces abstracto en el espacio con producto interno V .*

- (a) Si α está en Δ , entonces $-\alpha$ está en Δ .
 (b) Si α está en Δ y es reducida, los únicos elementos de $\Delta \cup \{0\}$ proporcionales a α son $\pm\alpha$, $\pm 2\alpha$ y 0 , y $\pm 2\alpha$ no puede ocurrir si Δ es reducido.
 (c) Si α está en Δ y β está en $\Delta \cup \{0\}$, entonces

$$\frac{2\langle\beta, \alpha\rangle}{|\alpha|^2} = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \text{ ó } \pm 4,$$

y ± 4 ocurre sólo en un sistema no reducido con $\beta = \pm 2\alpha$.

- (d) Si α y β son elementos no proporcionales de Δ tales que $|\alpha| \leq |\beta|$, entonces $\frac{2\langle\beta, \alpha\rangle}{|\alpha|^2}$ es igual a $0, +1, \text{ ó } -1$.
 (e) Si α y β están en Δ con $\langle\alpha, \beta\rangle > 0$, entonces $\alpha - \beta$ es una raíz ó es 0 . Si α y β están en Δ con $\langle\alpha, \beta\rangle < 0$, entonces $\alpha + \beta$ es una raíz ó 0 .
 (f) Si α y β están en Δ y tanto $\alpha + \beta$ como $\alpha - \beta$ no están en $\Delta \cup \{0\}$, entonces $\langle\alpha, \beta\rangle = 0$.
 (g) Si α está en Δ y β está en $\Delta \cup \{0\}$, entonces la α -cadena que contiene a β tiene la forma $\beta + n\alpha$ para $-p \leq n \leq q$ con $p \geq 0$ y $q \geq 0$, sin brechas. Más aún $p - q = \frac{2\langle\beta, \alpha\rangle}{|\alpha|^2}$.
 La α -cadena que contiene a β contiene a lo sumo cuatro raíces.

Se introduce ahora una noción de positividad en V que extiende la noción del Ejemplo 1.16. La intención es señalar un subconjunto de elementos no nulos de V como **positivos**, escribiendo $\varphi > 0$ si φ es un elemento positivo. Las únicas propiedades de positividad que necesitamos son

- (I) para todo elemento no nulo $\varphi \in V$, exactamente un elemento de $\{\varphi, -\varphi\}$ es positivo.
 (II) la suma de elementos positivos es positivo, y cualquier múltiplo positivo de un elemento positivo es positivo.

Decimos que $\varphi > \psi$ ó $\psi < \varphi$ si $\varphi - \psi$ es positiva. Entonces $>$ define un orden simple en V que se preserva bajo la suma y multiplicación por escalares positivos.

Una forma de definir la positividad es en términos de un **orden lexicográfico**. Fijamos un conjunto generador $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ de V , y definimos la positividad de la siguiente forma: Decimos que $\varphi > 0$ si existe un índice k tal que $\langle\varphi, \varphi_i\rangle = 0$ para $1 \leq i \leq k-1$ y $\langle\varphi, \varphi_k\rangle > 0$.

Pensemos a V como el espacio vectorial dual del espacio \mathfrak{h}_0 , y fijemos un conjunto generador H_1, \dots, H_m para \mathfrak{h}_0 . Entonces decimos que $\varphi > 0$ si existe un índice k tal que $\varphi(H_i) = 0$ para $1 \leq i \leq k-1$ y $\varphi(H_k) > 0$.

Decimos que una raíz α es **simple** si $\alpha > 0$ y si α no se descompone como $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ con β_1 y β_2 raíces positivas. Una raíz simple es necesariamente reducida.

PROPOSICIÓN 1.42. Si $l = \dim V$, existen l raíces simples $\alpha_1, \dots, \alpha_l$, y son linealmente independientes. Si β es una raíz y se escribe como $\beta = x_1\alpha_1 + \dots + x_l\alpha_l$, entonces todos los x_j no nulos tienen el mismo signo y son enteros.

OBSERVACIONES 1.43.

- Toda raíz positiva α puede escribirse como $\alpha = \sum_{i=1}^l n_i \alpha_i$ con cada n_i un entero ≥ 0 . El entero $\alpha = \sum_{i=1}^l n_i$ se llama el **nivel** de α relativo a $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$.
- Las raíces simples de las familias clásicas son

	<i>Raíces Positivas</i>	<i>Raíces Simples</i>
A_n	$e_i - e_j, i < j$	$e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_n - e_{n+1}$
B_n	$e_i, e_i \pm e_j, i < j$	$e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n, e_n$
C_n	$2e_i, e_i \pm e_j, i < j$	$e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n, 2e_n$
D_n	$e_i \pm e_j, i < j$	$e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n, e_{n-1} + e_n$

LEMA 1.44. Si α y β son raíces simples distintas, entonces $\alpha - \beta$ no es una raíz. Por lo tanto $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$.

Dado un sistema de raíces Δ reducido. Se fija un orden a partir de la noción de positividad anterior. Sea $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ el conjunto de raíces simples, donde $l = \dim V$. La matriz $l \times l$, $A = (A_{ij})$ dada por

$$A_{ij} = \frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{|\alpha_i|^2}$$

se llama la **matriz de Cartan** de Δ y Π . La matriz de Cartan depende de la enumeración de Π , y distintas enumeraciones llevan a matrices de Cartan que son conjugadas entre sí por una matriz de permutación.

PROPOSICIÓN 1.45. La matriz de Cartan $A = (A_{ij})$ de Δ relativa al conjunto Π de raíces simples tiene las siguientes propiedades:

- (a) $A_{ij} \in \mathbb{Z}$ para todo i y todo j ,
- (b) $A_{ii} = 2$ para todo i ,
- (c) $A_{ij} \leq 0$ para $i \neq j$,
- (d) $A_{ij} = 0$ si y sólo si $A_{ji} = 0$,
- (e) existe una matriz diagonal D con entradas diagonales positivas tal que DAD^{-1} es simétrica definida positiva.

Una matriz cuadrada A que satisface todas las propiedades de la Proposición 1.45 se llama una **matriz de Cartan abstracta**. Dos matrices de Cartan abstractas son **isomorfas** si una es conjugada de la otra por una matriz de permutación.

PROPOSICIÓN 1.46. El sistema de raíces reducido abstracto Δ es reducible si y sólo si, para alguna enumeración de los índices, la matriz de Cartan es diagonal en bloques con más de un bloque.

Se dice que una matriz de Cartan abstracta es **reducible** si, para alguna enumeración de los índices, la matriz es diagonal en bloques con más de un bloque. De otra forma la matriz de Cartan abstracta se dice **irreducible**.

Si tenemos varias matrices de Cartan abstractas, podemos arreglarlas como bloques de una matriz diagonal en bloques, y el resultado es una nueva matriz de Cartan abstracta. La recíproca es la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 1.47. *Luego de una enumeración apropiada de índices, toda matriz de Cartan abstracta puede ser escrita en forma de diagonal en bloques con cada bloque una matriz de Cartan abstracta irreducible.*

Al conjunto Π de raíces simples del sistema de raíces abstracto Δ , se le puede asociar un tipo de grafo conocido como “diagrama de Dynkin”. A cada raíz simple α_i le asociamos un vértice de un grafo, y a ese vértice le asignamos un peso proporcional a $|\alpha_i|^2$. Los vértices del grafo están conectados por aristas de la siguiente forma. Si dos vértices están dados, digamos los correspondientes a raíces simples distintas α_i y α_j , conectamos esos vértices por $A_{ij} \cdot A_{ji}$ aristas. El grafo resultante se llama **diagrama de Dynkin** de Π . Se sigue de la Proposición 1.46 que Δ es irreducible si y sólo si el diagrama de Dynkin es conexo.

Los diagramas de Dynkin para los sistemas de raíces A_n, B_n, C_n , y D_n cuando las raíces simples se eligen como en (1.11) son:

$$\begin{array}{l}
 A_n \quad \begin{array}{ccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & \dots & & 1 \\
 & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \dots & \text{---} & \circ \\
 e_1 - e_2 & & e_2 - e_3 & & e_3 - e_4 & & & & & e_n - e_{n+1}
 \end{array} \\
 \\
 B_n \quad \begin{array}{ccccccc}
 & 2 & & 2 & & 2 & & \dots & & 2 & & 1 \\
 & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \dots & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ \\
 e_1 - e_2 & & e_2 - e_3 & & e_3 - e_4 & & & & & e_{n-1} - e_n & & e_n
 \end{array} \\
 \\
 (1.12) \quad C_n \quad \begin{array}{ccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & \dots & & 1 & & 2 \\
 & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \dots & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ \\
 e_1 - e_2 & & e_2 - e_3 & & e_3 - e_4 & & & & & e_{n-1} - e_n & & 2e_n
 \end{array} \\
 \\
 D_n \quad \begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & & & & & & 1 \\
 & & & & & & & & & & & \circ \\
 & & & & & & & & & & & e_{n-1} + e_n \\
 & & & & & & & & & & & / \\
 & & & & & & & & & & & \circ \\
 & & & & & & & & & & & e_{n-1} - e_n \\
 & & & & & & & & & & & \backslash \\
 & & & & & & & & & & & \circ \\
 & & & & & & & & & & & 1 \\
 & & & & & & & & & & & \circ \\
 & & & & & & & & & & & e_{n-1} - e_n
 \end{array}
 \end{array}$$

7. El Grupo de Weyl

DEFINICIÓN 1.48. *Sea Δ un sistema de raíces abstracto en un espacio de dimensión finita V con producto interno. El **grupo de Weyl** de Δ es el subgrupo del grupo ortogonal en V generado por las reflexiones s_α para $\alpha \in \Delta$ y se denota por $W = W(\Delta)$.*

Vemos que W es un grupo finito de transformaciones ortogonales de V . De hecho, cualquier $w \in W$ lleva al conjunto finito Δ en sí mismo.

EJEMPLO 1.49. Consideremos los sistemas de raíces de tipo A_n , B_n , C_n y D_n descritos en la Tabla (1.10).

- Para A_n , $W(\Delta)$ son todas las permutaciones de e_1, \dots, e_{n+1} .
- Para B_n y C_n , $W(\Delta)$ está generado por todas las permutaciones de e_1, \dots, e_n y todos los cambios de signos de los coeficientes de e_1, \dots, e_n .
- Para D_n , $W(\Delta)$ está generado por todas las permutaciones de e_1, \dots, e_n y todos los cambios de signos pares.

Introducimos una noción de positividad dentro de V , por ejemplo a partir de un orden lexicográfico. Sea Δ^+ el conjunto de raíces positivas. El conjunto Δ^+ determina el conjunto $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ de raíces simples.

Supongamos ahora que $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ es cualquier conjunto de l elementos reducidos independientes α_i , tales que toda expresión de un elemento α de Δ como $\sum_i c_i \alpha_i$ tiene todas las c_i no nulas del mismo signo. Llamamos a Π un **sistema simple**. Dado un sistema simple Π , podemos definir Δ^+ como todas las raíces de la forma $\sum_i c_i \alpha_i$ con toda $c_i \geq 0$.

La afirmación es que Δ^+ es el conjunto de las raíces positivas en algún orden lexicográfico. De hecho, podemos usar la base dual de $\{\alpha_i\}$ para obtener tal orden. En mayor detalle si es $\langle \alpha_i, w_j \rangle = \delta_{ij}$ y si j es el primer índice con $\langle \alpha, w_j \rangle$ no nulo, entonces el hecho de que $\langle \alpha_i, w_j \rangle = c_j$ es positivo implica que α es positivo.

Entonces tenemos una caracterización abstracta de los posibles Π 's que pueden surgir como conjuntos de raíces simples: son todos los posibles sistemas simples.

LEMA 1.50. Sea $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ un sistema simple, y sea $\alpha > 0$ en Δ . Entonces

$$s_{\alpha_i}(\alpha) = -\alpha, \text{ si } \alpha = \alpha_i \text{ ó } \alpha = 2\alpha_i, \quad \text{y} \quad s_{\alpha_i}(\alpha) > 0 \text{ en otro caso.}$$

PROPOSICIÓN 1.51. Sea $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ un sistema simple. Entonces $W(\Delta)$ está generado por las reflexiones de raíces s_{α_i} para $\alpha_i \in \Pi$. Si α es cualquier raíz reducida, entonces existen $\alpha_j \in \Pi$ y $w \in W(\Delta)$ tales que $w(\alpha_j) = \alpha$.

TEOREMA 1.52. Si Π y Π' son dos sistemas simples para Δ , entonces existe uno y sólo un elemento $s \in W$ tal que $s\Pi = \Pi'$.

Dado un sistema Δ^+ de raíces positivas y el correspondiente sistema simple Π . Se dice que un elemento λ de v es **dominante** si $\langle \lambda, \alpha \rangle \geq 0$ para $\alpha \in \Delta^+$. Es suficiente que $\langle \lambda, \alpha_i \rangle \geq 0$ para todo $\alpha_i \in \Pi$.

PROPOSICIÓN 1.53. Si λ está en V , entonces existe un sistema simple Π para el cual λ es dominante.

COROLARIO 1.54. Si λ está en V y Δ^+ es un sistema positivo dado, entonces existe algún elemento w del grupo de Weyl tal que $w\lambda$ es dominante.

Para Δ reducido y Δ^+ un sistema positivo fijo, sea ρ la semisuma de los elementos de Δ^+ .

PROPOSICIÓN 1.55. *Dado un sistema positivo Δ^+ para el sistema de raíces abstracto reducido Δ . Si α es una raíz simple, entonces $s_\alpha(\rho) = \rho - \alpha$ y $\frac{2\langle \rho, \alpha \rangle}{|\alpha|^2} = 1$.*

Para $w \in W(\Delta)$, sea $l(w)$ el número de raíces $\alpha > 0$ tales que $w(\alpha) < 0$. $l(w)$ se llama la **longitud** del elemento w del grupo de Weyl relativo a Π . En términos de un sistema simple $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ y su sistema positivo asociado Δ^+ abreviaremos s_{α_j} como s_j .

PROPOSICIÓN 1.56. *Dado un sistema simple $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ para el sistema de raíces abstracto reducido Δ . Entonces $l(w)$ es el menor entero k tal que w puede escribirse como un producto $w = s_{i_k} \dots s_{i_1}$ de k reflexiones en raíces simples.*

LEMA 1.57. *Dado un sistema simple $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ para el sistema de raíces abstracto reducido Δ . Si γ es una raíz simple y w está en $W(\Delta)$, entonces*

$$l(ws_\gamma) = \begin{cases} l(w) - 1 & \text{si } w\gamma < 0 \\ l(w) + 1 & \text{si } w\gamma > 0. \end{cases}$$

PROPOSICIÓN 1.58 (Lema de Chevalley). *Sea el sistema de raíces abstracto Δ reducido. Dado $v \in V$, sea $W_0 = \{w \in W | wv = v\}$. Entonces W_0 está generado por las reflexiones de raíces s_α tales que $\langle v, \alpha \rangle = 0$.*

8. Pesos

Recordemos que las representaciones de dimensión finita de álgebras de Lie semisimples complejas son homomorfismos lineales complejos de un álgebra de Lie semisimple compleja en $\text{End}_{\mathbb{C}} V$ donde V es un espacio vectorial complejo de dimensión finita.

PROPOSICIÓN 1.59 (Lema de Schur). *Sean φ y φ' representaciones irreducibles de un álgebra de Lie \mathfrak{g} en espacios vectoriales de dimensión finita V y V' , respectivamente. Si $L : V \rightarrow V'$ es un mapa lineal tal que $\varphi'(X)L = L\varphi(X)$ para todo $X \in \mathfrak{g}$, entonces L es biyectivo ó $L = 0$.*

COROLARIO 1.60. *Sea φ una representación irreducible de un álgebra de Lie \mathfrak{g} en un espacio vectorial complejo de dimensión finita V . Si $L : V \rightarrow V$ es un mapa lineal tal que $\varphi(X)L = L\varphi(X)$ para todo $X \in \mathfrak{g}$, entonces L es escalar.*

Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie semisimple compleja. Sean \mathfrak{h} una subálgebra de Cartan y $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ el conjunto de raíces. Sea \mathfrak{h}_0 la forma real de \mathfrak{h} en la cual todas las raíces son a valores reales. Sea B una forma bilineal simétrica no degenerada invariante en \mathfrak{g} que es definida positiva en \mathfrak{h}_0 . Respecto a B , podemos definir elementos H_α de \mathfrak{h} para cada $\alpha \in \Delta$. Entonces $\mathfrak{h}_0 = \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R}H_\alpha$.

Sea φ una representación en el espacio vectorial complejo V . Recordemos que si λ está en \mathfrak{h}^* , definimos el subespacio

$$V_\lambda = \{v \in V \mid (\varphi(H) - \lambda(H)1)^n v = 0 \text{ para todo } H \in \mathfrak{h} \text{ y algún } n = n(H, V)\}.$$

Si $V_\lambda \neq 0$, entonces V_λ se llama **espacio peso generalizado** y λ es un **peso**. Los elementos de V_λ se llaman **vectores peso generalizados**. Cuando V es de dimensión finita, V es la suma directa de sus espacios peso generalizados.

El **espacio peso** correspondiente a λ es

$$\{v \in V \mid \varphi(H)v = \lambda(H)v \text{ para todo } H \in \mathfrak{h}\},$$

es decir, el subespacio de V_λ para el cual n puede tomarse como 1. Los elementos del espacio peso se llaman **vectores peso**.

EJEMPLO 1.61. Sea $V = \Lambda^l \mathbb{C}^n$. Sea $H = \text{diag}(it_1, \dots, it_n)$ con $\sum t_j = 0$. Entonces la representación de álgebras de Lie φ tiene

$$\begin{aligned} \varphi(H)(\varepsilon_{j_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{j_l}) &= \sum_{k=1}^l \varepsilon_{j_1} \wedge \dots \wedge H\varepsilon_{j_k} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{j_l} \\ &= \sum_{k=1}^l (it_{j_k})(\varepsilon_{j_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{j_l}). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\varepsilon_{j_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{j_l}$ es un vector peso y su peso es $\sum_{k=1}^l e_{j_k}$.

PROPOSICIÓN 1.62. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie semisimple compleja, sea \mathfrak{h} una subálgebra de Cartan, sea $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ el conjunto de las raíces, y sea $\mathfrak{h}_0 = \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R}H_\alpha$. Si φ es una representación de \mathfrak{g} en el espacio vectorial complejo de dimensión finita V , entonces

- (a) $\varphi(\mathfrak{h})$ actúa diagonalmente en V , de tal forma que todo vector peso generalizado es un vector peso y V es la suma directa de todos los espacios peso,
- (b) todo peso es a valores reales en \mathfrak{h}_0 y es algebraicamente integral,
- (c) las raíces y pesos están relacionadas por $\varphi(\mathfrak{g}_\alpha)V_\lambda \subseteq V_{\lambda+\alpha}$.

9. Teorema del Peso Máximo

Sean \mathfrak{g} un álgebra de Lie semisimple compleja, \mathfrak{h} una subálgebra de Cartan y $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ el conjunto de raíces. Sea $W(\Delta)$ el grupo de Weyl. Sea \mathfrak{h}_0 la forma real de \mathfrak{h} donde todas las raíces son a valores reales, y sea B una forma bilineal no degenerada simétrica invariante en \mathfrak{g} que es definida positiva en \mathfrak{h}_0 . Consideremos un orden en \mathfrak{h}_0^* de la forma usual, y sea Π el sistema simple resultante.

Si φ es una representación de \mathfrak{g} en un espacio vectorial complejo de dimensión finita V , entonces los pesos de V están en \mathfrak{h}_0^* por la Proposición 1.62(b). El peso más grande en el orden se llama **peso máximo** de φ .

TEOREMA 1.63 (Teorema del Peso Máximo). *Salvo equivalencias, las representaciones irreducibles de dimensión finita φ de \mathfrak{g} están en correspondencia uno a uno con los funcionales lineales dominantes algebraicamente integrales λ en \mathfrak{h} , siendo la correspondencia: λ es el peso máximo de φ_λ . El peso máximo λ de φ_λ tiene estas propiedades adicionales:*

- (a) λ depende sólo del sistema simple Π y no del orden usado para definir Π ,
- (b) el espacio peso V_λ para λ es unidimensional,

- (c) cada vector raíz E_α , para una raíz $\alpha \in \Delta^+$ arbitraria, anula los elementos de V_λ , y los elementos de V_λ son los únicos vectores con esta propiedad,
- (d) todo peso de φ_λ es de la forma $\lambda - \sum_{i=1}^l n_i \alpha_i$ con los enteros $n_i \geq 0$ y los $\alpha_i \in \Pi$,
- (e) cada espacio peso V_μ para φ_λ tiene $\dim V_{w\mu} = \dim V_\mu$ para todo w en el grupo de Weyl $W(\Delta)$, y cada peso μ tiene $|\mu| \leq |\lambda|$ con la igualdad sólo si μ está en la órbita $W(\Delta)\lambda$.

OBSERVACIÓN 1.64. Por 1.63(e) los pesos en la órbita $W(\Delta)\lambda$ se dicen **extremos**. El conjunto de pesos extremos no depende de la elección de Π .

EJEMPLOS 1.65.

- Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, sea V el conjunto de todos los polinomios en $z_1, \dots, z_n, y \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$ homogéneos de grado total N . Los pesos son todas expresiones $\sum_{j=1}^n (l_j - k_j) e_j$ con $\sum_{j=1}^n (l_j + k_j) = N$. El peso máximo relativo al sistema positivo usual es Ne_1 . El subespacio de polinomios holomorfos es un espacio invariante, y tiene peso máximo $-Ne_n$.
- Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, sea $V = \Lambda^l \mathbb{C}^n$. Los pesos son todas expresiones $\sum_{k=1}^l e_{j_k}$. El peso máximo relativo al sistema positivo usual es $\sum_{k=1}^l e_k$.

Escribamos $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ y sean además

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{t} &= \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha \\
 \mathfrak{t}^- &= \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_{-\alpha} \\
 \mathfrak{b} &= \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{t} \\
 \rho &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha.
 \end{aligned}
 \tag{1.13}$$

Entonces \mathfrak{t} , \mathfrak{t}^- y \mathfrak{b} son subálgebras de Lie de \mathfrak{g} , y $\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{t}^-$ como suma directa de espacios vectoriales.

Sea V_μ el espacio peso para el peso μ . La suma $\sum V_\mu$ es necesariamente una suma directa. Como en la Proposición 1.62, tenemos

$$\mathfrak{g}_\alpha(V_\mu) \subseteq V_{\mu+\alpha}
 \tag{1.14}$$

si $\alpha \in \Delta$ y $\mu \in \mathfrak{h}^*$. Más aún, (1.14) y la descomposición en espacios raíces de \mathfrak{g} muestran que

$$\mathfrak{g} \left(\bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} V_\mu \right) \subseteq \left(\bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} V_\mu \right).
 \tag{1.15}$$

Un **vector de peso máximo** para V es por definición un vector peso $v \neq 0$ con $\mathfrak{t}(v) = 0$. El conjunto $\mathfrak{t}(v)$ será 0 si $E_\alpha v = 0$ para los vectores raíces E_α de raíces simples α .

Un **módulo de peso máximo** es un $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ -módulo generado por un vector de peso máximo.

PROPOSICIÓN 1.66. *Sea M un módulo de peso máximo para $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, y sea v un vector de peso máximo que genera M , de peso λ . Entonces*

(a) $M = \mathcal{U}(\mathfrak{t}^-)v$,

(b) $M = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} M_\mu$ con cada M_μ de dimensión finita y con $\dim M_\lambda = 1$,

(c) todo peso de M es de la forma $\lambda - \sum_{i=1}^l n_i \alpha_i$ con las α_i 's en Π y cada entero $n_i \geq 0$.

Cohomología y Homología de álgebras de Lie

En este Capítulo vamos a definir la cohomología y homología de álgebras de Lie. Las demostraciones de los resultados pueden consultarse en [4], [8], [19], entre otros.

Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie de dimensión finita sobre un cuerpo k .

Sea ϕ una representación de \mathfrak{g} en un subespacio W . La representación ϕ^\natural de \mathfrak{g} en W^* dual a ϕ se define por

$$\phi^\natural(h) = -\phi(h)^*, \quad h \in \mathfrak{g}.$$

Los operadores de multiplicación determinados por $a \in \Lambda\mathfrak{g}$ y $\Phi \in \Lambda\mathfrak{g}^*$ serán denotados por $\mu(a)$ y $\mu(\Phi)$:

$$\mu(a)(b) = a \wedge b \quad \text{u} \quad \mu(\Phi)(\Psi) = \Phi \wedge \Psi.$$

Los operadores (duales) de sustitución se denotan por $i_{\mathfrak{g}}(a) : \Lambda\mathfrak{g}^* \rightarrow \Lambda\mathfrak{g}^*$ e $i_{\mathfrak{g}}(\Phi) : \Lambda\mathfrak{g} \rightarrow \Lambda\mathfrak{g}$, o simplemente por $i(a)$ e $i(\Phi)$.

1. Los operadores $\theta_{\mathfrak{g}}(x)$ y $\theta^{\mathfrak{g}}(x)$

Dada un álgebra de Lie \mathfrak{g} consideremos el espacio dual \mathfrak{g}^* . Los mapas lineales $\text{ad } x$ ($x \in \mathfrak{g}$) se extienden a derivaciones únicas $\theta^{\mathfrak{g}}(x)$ en el álgebra $\Lambda\mathfrak{g}$. Similarmente, $-(\text{ad } x)^*$ se extiende a una derivación $\theta_{\mathfrak{g}}(x)$ en $\Lambda\mathfrak{g}^*$.

$\theta^{\mathfrak{g}}$ y $\theta_{\mathfrak{g}}$ son representaciones duales de \mathfrak{g} en las álgebras graduadas $\Lambda\mathfrak{g}$ y $\Lambda\mathfrak{g}^*$, que extienden las representaciones duales ad y ad^* . Las propiedades de estos operadores se expresan por las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \theta^{\mathfrak{g}}(x)\mu(a) - \mu(a)\theta^{\mathfrak{g}}(x) &= \mu(\theta^{\mathfrak{g}}(x)a), \quad a \in \Lambda\mathfrak{g}, x \in \mathfrak{g}, \text{ y} \\ \theta_{\mathfrak{g}}(x)\mu(\Phi) - \mu(\Phi)\theta_{\mathfrak{g}}(x) &= \mu(\theta_{\mathfrak{g}}(x)\Phi), \quad \Phi \in \Lambda\mathfrak{g}^*, x \in \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

Dualizando obtenemos,

$$\begin{aligned} \theta_{\mathfrak{g}}(x)i(a) - i(a)\theta_{\mathfrak{g}}(x) &= i(\theta^{\mathfrak{g}}(x)a), \\ \theta^{\mathfrak{g}}(x)i(\Phi) - i(\Phi)\theta^{\mathfrak{g}}(x) &= i(\theta_{\mathfrak{g}}(x)\Phi). \end{aligned}$$

En particular,

$$(2.1) \quad \theta_{\mathfrak{g}}(x)i_{\mathfrak{g}}(y) - i_{\mathfrak{g}}(y)\theta_{\mathfrak{g}}(x) = i([x, y]), \quad x, y \in \mathfrak{g}.$$

Las representaciones $\theta^{\mathfrak{g}}$ y $\theta_{\mathfrak{g}}$ determinan las subálgebras invariantes $(\Lambda\mathfrak{g})_{\theta=0}$ y $(\Lambda\mathfrak{g}^*)_{\theta=0}$, como así también los subespacios estables $\theta(\Lambda\mathfrak{g})$ y $\theta(\Lambda\mathfrak{g}^*)$. Si a y Φ son invariantes, las relaciones anteriores se reducen a una fórmula de conmutación simple. En particular, las subálgebras invariantes y los subespacios $\theta(\Lambda\mathfrak{g})$ y $\theta(\Lambda\mathfrak{g}^*)$ son estables bajo multiplicación y sustitución por elementos invariantes.

Como $\theta^{\mathfrak{g}}$ y $\theta_{\mathfrak{g}}$ son duales, se tiene las relaciones

$$(\Lambda\mathfrak{g})_{\theta=0}^{\perp} = \theta(\Lambda\mathfrak{g}^*) \quad \text{y} \quad (\Lambda\mathfrak{g}^*)_{\theta=0}^{\perp} = \theta(\Lambda\mathfrak{g}).$$

Más aún, como la restricción de $\theta^{\mathfrak{g}}$ a \mathfrak{g} es la representación adjunta, se sigue que

$$(\Lambda^1\mathfrak{g})_{\theta=0} = Z_{\mathfrak{g}} \quad \text{y} \quad \theta(\Lambda^1\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}].$$

Finalmente, sean $e_{\nu}, e^{*\nu}$ ($\nu = 1, \dots, n$) un par de bases duales para \mathfrak{g} y \mathfrak{g}^* . Entonces

$$(2.2) \quad \theta_{\mathfrak{g}}(x) = - \sum_{\nu} \mu(e^{*\nu})i([x, e_{\nu}]) \quad \text{y} \quad \theta^{\mathfrak{g}}(x) = \sum_{\nu} \mu([x, e_{\nu}])i(e^{*\nu}).$$

(Como ambos lados son derivaciones, estas fórmulas sólo deben ser verificadas en \mathfrak{g} y \mathfrak{g}^* , donde son consecuencia inmediata de las definiciones).

2. Los operadores $d_{\mathfrak{g}}$ y $\partial_{\mathfrak{g}}$

Consideremos el mapa lineal $\nu : \Lambda^2\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ dado por

$$\nu(x \wedge y) = [x, y], \quad x, y \in \mathfrak{g}.$$

Extendemos el dual negativo,

$$-\nu^* : \mathfrak{g}^* \rightarrow \Lambda^2\mathfrak{g}^*,$$

a una antiderivación

$$d_{\mathfrak{g}} : \Lambda\mathfrak{g}^* \rightarrow \Lambda\mathfrak{g}^*,$$

homogénea de grado 1.

Se tienen las relaciones fundamentales

$$(2.3) \quad \begin{aligned} i_{\mathfrak{g}}(x)d_{\mathfrak{g}} + d_{\mathfrak{g}}i_{\mathfrak{g}}(x) &= \theta_{\mathfrak{g}}(x) \\ d_{\mathfrak{g}}^2 &= 0 \quad \text{y} \\ \theta_{\mathfrak{g}}(x)d_{\mathfrak{g}} &= d_{\mathfrak{g}}\theta_{\mathfrak{g}}(x), \quad x \in \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

Se sigue de las relaciones (2.3) que $(\Lambda\mathfrak{g}^*, d_{\mathfrak{g}})$ es un álgebra diferencial graduada, que $\theta_{\mathfrak{g}}$ representa a \mathfrak{g} en $(\Lambda\mathfrak{g}^*, d_{\mathfrak{g}})$, y que $\theta_{\mathfrak{g}}^{\#} = 0$, donde $\theta_{\mathfrak{g}}^{\#} : H^*(\mathfrak{g}) \rightarrow H^*(\mathfrak{g})$.

Sea ahora $\partial_{\mathfrak{g}} : \Lambda\mathfrak{g} \rightarrow \Lambda\mathfrak{g}$ el mapa lineal, homogéneo de grado -1, dado por $\partial_{\mathfrak{g}} = -d_{\mathfrak{g}}^*$. Entonces

$$\partial_{\mathfrak{g}}(x \wedge y) = [x, y], \quad \partial_{\mathfrak{g}}x = 0, \quad \text{y} \quad \partial_{\mathfrak{g}}(\lambda) = 0, \quad x, y \in \mathfrak{g}, \lambda \in k.$$

Dualizando las fórmulas (2.3) obtenemos

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \mu(x)\partial_{\mathfrak{g}} + \partial_{\mathfrak{g}}\mu(x) &= \theta^{\mathfrak{g}}(x) \\ \partial_{\mathfrak{g}}^2 &= 0 \quad \text{y} \\ \theta^{\mathfrak{g}}(x)\partial_{\mathfrak{g}} &= \partial_{\mathfrak{g}}\theta^{\mathfrak{g}}(x), \quad x \in \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

En particular, $\theta^{\mathfrak{g}}$ representa a \mathfrak{g} en el espacio diferencial graduado $(\Lambda\mathfrak{g}, \partial_{\mathfrak{g}})$.

3. La fórmula de Koszul

En esta sección estableceremos la *fórmula de Koszul*

$$(2.5) \quad d_{\mathfrak{g}} = \frac{1}{2} \sum_{\nu} \mu(e^{*\nu}) \theta_{\mathfrak{g}}(e_{\nu}),$$

donde $e_{\nu}, e^{*\nu}$ ($\nu = 1, \dots, n$) es un par de bases duales para \mathfrak{g} y \mathfrak{g}^* . Como $d_{\mathfrak{g}}$ y el operador de la derecha son derivaciones, es suficiente verificar esta fórmula para elementos en \mathfrak{g}^* .

Sean $x^* \in \mathfrak{g}^*$ y $x \in \mathfrak{g}$ arbitrarios. Entonces, usando las relaciones (2.3) y (2.1), encontramos que

$$i_{\mathfrak{g}}(x) d_{\mathfrak{g}} x^* = \theta_{\mathfrak{g}}(x) x^*,$$

mientras que

$$\begin{aligned} i_{\mathfrak{g}}(x) \frac{1}{2} \sum_{\nu} \mu(e^{*\nu}) \theta_{\mathfrak{g}}(e_{\nu}) x^* &= \frac{1}{2} \theta_{\mathfrak{g}}(x) x^* - \frac{1}{2} \sum_{\nu} \mu(e^{*\nu}) i_{\mathfrak{g}}(x) \theta_{\mathfrak{g}}(e_{\nu}) x^* \\ &= \frac{1}{2} \theta_{\mathfrak{g}}(x) x^* - \frac{1}{2} \sum_{\nu} \mu(e^{*\nu}) i_{\mathfrak{g}}([x, e_{\nu}]) x^*. \end{aligned}$$

La fórmula (2.2) nos da

$$i_{\mathfrak{g}}(x) \left(\frac{1}{2} \sum_{\nu} \mu(e^{*\nu}) \theta_{\mathfrak{g}}(e_{\nu}) x^* \right) = \theta_{\mathfrak{g}}(x) x^* = i_{\mathfrak{g}}(x) d_{\mathfrak{g}} x^*,$$

lo que completa la prueba.

Dualizando la fórmula de Koszul obtenemos la ecuación

$$(2.6) \quad \partial_{\mathfrak{g}} = \frac{1}{2} \sum_{\nu} \theta^{\mathfrak{g}}(e_{\nu}) i_{\mathfrak{g}}(e_{*\nu}) \quad (\text{fórmula de Koszul contravariante}).$$

Como consecuencia inmediata obtenemos

$$(2.7) \quad \partial_{\mathfrak{g}}(x_1 \wedge \dots \wedge x_p) = \sum_{i < j} (-1)^{i+j+1} [x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge \dots \wedge \widehat{x}_i \wedge \dots \wedge \widehat{x}_j \wedge \dots \wedge x_p, \quad x_i \in \mathfrak{g}.$$

Por lo tanto, si $\Lambda^p \mathfrak{g}^*$ es interpretado como el espacio de funciones p -alternantes en \mathfrak{g} , entonces $d_{\mathfrak{g}}$ está dado por

$$(2.8) \quad (d_{\mathfrak{g}} \Phi)(x_1 \wedge \dots \wedge x_p) = \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \Phi([x_i, x_j], x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_p).$$

Con todo esto podemos derivar las relaciones

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \partial_{\mathfrak{g}}(a \wedge b) &= \partial_{\mathfrak{g}} a \wedge b + (-1)^p a \wedge \partial_{\mathfrak{g}} b + \sum_{\nu} i_{\mathfrak{g}}(e^{*\nu}) a \wedge \theta^{\mathfrak{g}}(e_{\nu}) b \\ \partial_{\mathfrak{g}}(a \wedge b) &= \partial_{\mathfrak{g}} a \wedge b + (-1)^p a \wedge \partial_{\mathfrak{g}} b + (-1)^p \sum_{\nu} \theta^{\mathfrak{g}}(e_{\nu}) a \wedge i_{\mathfrak{g}}(e_{*\nu}) b \end{aligned}$$

y

$$(2.10) \quad \partial_{\mathfrak{g}}(a \wedge b) = -\partial_{\mathfrak{g}} a \wedge b + (-1)^p a \wedge \partial_{\mathfrak{g}} b + \sum_{\nu} \theta^{\mathfrak{g}}(e_{\nu}) (i_{\mathfrak{g}}(e_{*\nu}) a \wedge b), \quad a \in \Lambda^p \mathfrak{g}, b \in \Lambda \mathfrak{g},$$

donde $e_{\nu}, e^{*\nu}$ ($\nu = 1, \dots, n$) son bases duales para \mathfrak{g} y \mathfrak{g}^* .

4. Cohomología y homología de un álgebra de Lie

Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie de dimensión n , y recordemos el álgebra diferencial graduada $(\Lambda\mathfrak{g}^*, d_{\mathfrak{g}})$ introducida en la Sección 2. Las algebras de cociclos (respectivamente, cobordes) de esta álgebra diferencial se denotan por

$$Z^*(\mathfrak{g}) = \sum_p Z^p(\mathfrak{g}) \quad \text{y} \quad B^*(\mathfrak{g}) = \sum_p B^p(\mathfrak{g}).$$

La correspondiente álgebra de cohomología

$$H^*(\mathfrak{g}) = \sum_p H^p(\mathfrak{g})$$

se llama el *álgebra de cohomología del álgebra de Lie* \mathfrak{g} . Notemos que $H^0(\mathfrak{g}) = k$.

Consideremos ahora el espacio diferencial graduado $(\Lambda\mathfrak{g}, \partial_{\mathfrak{g}})$. Los subespacios de ciclos (respectivamente, bordes) se denotan por

$$Z_*(\mathfrak{g}) = \sum_p Z_p(\mathfrak{g}) \quad \text{y} \quad B_*(\mathfrak{g}) = \sum_p B_p(\mathfrak{g}).$$

El correspondiente espacio de homología

$$H_*(\mathfrak{g}) = \sum_p H_p(\mathfrak{g})$$

se llama el *espacio de homología del álgebra de Lie* \mathfrak{g} .

Por ejemplo, $Z_1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$, $B_1(\mathfrak{g}) = \partial_{\mathfrak{g}}(\Lambda^2\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, y entonces

$$H_1(\mathfrak{g}) = \frac{\mathfrak{g}}{[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]}.$$

Como $\partial_{\mathfrak{g}} = -d_{\mathfrak{g}}^*$, se sigue que

$$B_*(\mathfrak{g}) = Z^*(\mathfrak{g})^{\perp} \quad \text{y} \quad Z_*(\mathfrak{g}) = B^*(\mathfrak{g})^{\perp},$$

y por lo tanto existe una dualidad natural entre los espacios $H^*(\mathfrak{g})$ y $H_*(\mathfrak{g})$. Esta dualidad se restringe a una dualidad entre cada par $H^p(\mathfrak{g})$, $H_p(\mathfrak{g})$ ($p = 0, \dots, n$). En particular, $\dim H^p(\mathfrak{g}) = \dim H_p(\mathfrak{g})$, $p = 0, \dots, n$.

Los enteros

$$b_p = \dim H^p(\mathfrak{g}), \quad p = 0, \dots, n,$$

se llaman los *p-ésimos números de Betti de* \mathfrak{g} y el polinomio

$$f_{H(\mathfrak{g})} = \sum_{p=0}^n b_p t^p$$

se llama el *polinomio de Poincaré de* $H^*(\mathfrak{g})$. Como $Z^p(\mathfrak{g}) \subset \Lambda^p\mathfrak{g}^*$, se sigue que

$$b_p \leq \binom{n}{p} \quad (n = \dim \mathfrak{g}).$$

4.1. Homología con coeficientes. En lo que sigue denotaremos por ∂_0 en lugar de $\partial_{\mathfrak{g}}$ al operador diferencial de la homología trivial del álgebra de Lie \mathfrak{g} .

La homología de \mathfrak{g} con coeficientes en un \mathfrak{g} -módulo M , $H_*(\mathfrak{g}, M) = \frac{\ker \partial}{\text{im } \partial}$, es la homología del complejo $(\Lambda^* \mathfrak{g} \otimes M, \partial)$,

$$\dots \xrightarrow{\partial} \Lambda^{p+1} \mathfrak{g} \otimes M \xrightarrow{\partial} \Lambda^p \mathfrak{g} \otimes M \xrightarrow{\partial} \Lambda^{p-1} \mathfrak{g} \otimes M \xrightarrow{\partial} \Lambda^{p-2} \mathfrak{g} \otimes M \xrightarrow{\partial} \dots$$

donde $\partial = \partial_0 \otimes 1 + \partial_1$, y ∂_1 está definido por

$$(2.11) \quad \partial_1(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_p \otimes m) = \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} x_1 \wedge \dots \wedge \widehat{x}_i \wedge \dots \wedge x_p \otimes (x_i \cdot m)$$

En el caso que nos interesará en esta Tesis, el de la homología adjunta, $M = \mathfrak{g}$ con la acción adjunta y ∂_1 viene dado por

$$(2.12) \quad \partial_1(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_p \otimes m) = \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} x_1 \wedge \dots \wedge \widehat{x}_i \wedge \dots \wedge x_p \otimes [x_i, m].$$

Subálgebras parabólicas y sus nilradicales

En este Capítulo definiremos nuestro objeto de estudio: las subálgebras parabólicas de álgebras de Lie semisimples y sus nilradicales.

Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie compleja semisimple de dimensión finita, \mathfrak{h} una subálgebra de Cartan, $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ el conjunto de raíces, y B una forma bilineal simétrica no degenerada invariante en \mathfrak{g} .

Una **subálgebra de Borel** de \mathfrak{g} es una subálgebra $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{t}$, donde $\mathfrak{t} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha$ para

un sistema positivo Δ^+ en Δ .

Una subálgebra \mathfrak{p} de \mathfrak{g} que contiene una subálgebra de Borel se llama una **subálgebra parabólica** de \mathfrak{g} .

Sea Π el sistema simple que determina Δ^+ y \mathfrak{t} , y definamos $\mathfrak{t}^- = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Como $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{h}$ y los espacios raíces son de dimensión 1, \mathfrak{p} es de la forma:

$$(3.1) \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} \mathfrak{g}_\alpha,$$

donde Γ es un subconjunto de Δ que contiene a Δ^+ . Los casos extremos son $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$ ($\Gamma = \Delta^+$) y $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}$ ($\Gamma = \Delta$). Si para cada $\Pi_0 \subseteq \Pi$ definimos

$$(3.2) \quad \Gamma = \Delta^+ \cup \{\alpha \in \Delta : \alpha \in \text{span}(\Pi_0^c)\}$$

donde Π_0^c es el complemento de Π_0 en Π , entonces tenemos la siguiente parametrización de subálgebras parabólicas que contienen a \mathfrak{b} .

PROPOSICIÓN 3.1. *Las subálgebras parabólicas \mathfrak{p} que contienen a \mathfrak{b} están parametrizadas por el conjunto de subconjuntos de raíces simples; el correspondiente a Π_0 es de la forma (3.1) con Γ como en (3.2).*

Definamos

$$(3.3) \quad \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Gamma \cap -\Gamma} \mathfrak{g}_\alpha \quad \text{y} \quad \mathfrak{n} = \bigoplus_{\substack{\alpha \in \Gamma \\ \alpha \notin -\Gamma}} \mathfrak{g}_\alpha,$$

de tal forma que

$$(3.4) \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{n}.$$

COROLARIO 3.2. *Relativo a la subálgebra parabólica \mathfrak{p} que contiene a \mathfrak{b} ,*
(a) \mathfrak{g}_1 y \mathfrak{n} son subálgebras de \mathfrak{p} y \mathfrak{n} es un ideal en \mathfrak{p} ,

(b) \mathfrak{n} es nilpotente,

(c) \mathfrak{g}_1 es reductiva con centro $\mathfrak{h}'' = \bigcap_{\alpha \in \Gamma \cap -\Gamma} \ker \alpha \subseteq \mathfrak{h}$ con parte semisimple \mathfrak{g}_1^{ss} que tiene una descomposición espacio raíz

$$\mathfrak{g}_1^{ss} = \mathfrak{h}' \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Gamma \cap -\Gamma} \mathfrak{g}_\alpha,$$

$$\text{donde } \mathfrak{h}' = \sum_{\alpha \in \Gamma \cap -\Gamma} \mathbb{C}H_\alpha.$$

En la descomposición (3.4) de \mathfrak{p} , \mathfrak{g}_1 se llama el **factor de Levi** y \mathfrak{n} se llama el **nilradical**. El nilradical puede ser caracterizado únicamente en términos de \mathfrak{p} como el radical de la forma bilineal simétrica $B|_{\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}}$, donde B es la forma invariante para \mathfrak{g} . Pero el factor de Levi \mathfrak{g}_1 depende tanto de \mathfrak{h} como de \mathfrak{p} .

Así tenemos que la subálgebra parabólica \mathfrak{p} se descompone como un producto semidirecto $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{n}$, de su factor de Levi y su nilradical.

Si definimos,

$$(3.5) \quad \Delta(\mathfrak{n}) = \{\alpha \in \Delta^+ : \alpha \notin \text{span}(\Pi_0^c)\} \quad \text{y} \quad \Delta_1^+ = \Delta^+ - \Delta(\mathfrak{n})$$

entonces tenemos,

$$\begin{aligned} \mathfrak{n} &= \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{n})} \mathfrak{g}_\alpha, & \mathfrak{g}_1^+ &= \sum_{\alpha \in \Delta_1^+} \mathfrak{g}_\alpha, \\ \mathfrak{g}_1^- &= \sum_{\alpha \in \Delta_1^+} \mathfrak{g}_{-\alpha} & \text{y} & \quad \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_1^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_1^+. \end{aligned}$$

1. La estructura de los nilradicales

El nilradical \mathfrak{n} de una subálgebra parabólica $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{n}$ tiene una descomposición en vectores raíces como \mathfrak{g}_1 -módulo, donde las raíces están definidas por la acción del centro de \mathfrak{g}_1 (ver [14]).

PROPOSICIÓN 3.3 (Kostant). *La clase de nilpotencia de \mathfrak{n} es la suma de los coeficientes de las raíces simples en Π_0 en la raíz más larga de \mathfrak{g} .*

EJEMPLO 3.4. *Si \mathfrak{g} es de tipo B_n , i.e. $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C})$, entonces la raíz más larga de \mathfrak{g} es*

$$e_1 + e_2 = (e_1 - e_2) + 2(e_2 - e_3) + \cdots + 2(e_{n-1} - e_n) + 2e_n.$$

Por la Proposición 3.3, un nilradical \mathfrak{n} de una subálgebra parabólica \mathfrak{p} de \mathfrak{g} es 2-pasos nilpotente si y sólo si $\Pi_0 = \{e_i - e_{i+1} : 2 \leq i \leq n-1\}$ ó $\Pi_0 = \{e_n\}$. Este último caso nos da el álgebra de Lie libre 2-pasos nilpotente.

Parte 2

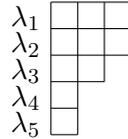
(Co)homología de nilradicales 2-pasos nilpotentes de tipo A_n

Representaciones de $\mathfrak{sl}(m)$

En este Capítulo vamos a introducir el concepto de diagrama de Young y el Teorema de Littlewood - Richardson. Ambas herramientas serán de gran utilidad en los capítulos posteriores. Pueden consultarse las demostraciones en [7] y [9], entre otros.

1. Representaciones irreducibles de S_d .

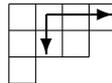
1.1. Diagramas de Young. El número de representaciones irreducibles del grupo simétrico de grado d , S_d , es el número de clases de conjugación, que es el número $p(d)$ de particiones de $d : d = \lambda_1 + \dots + \lambda_k$, $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 1$. A la partición $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ le asociamos un *diagrama de Young*. Un diagrama de Young es un conjunto de cuadritos, arreglados en filas justificadas a la izquierda, con un número decreciente de cuadritos en cada fila. Por ejemplo, a la partición $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ le corresponde el diagrama de Young que tiene λ_1 cuadritos en la primera fila, λ_2 cuadritos en la segunda fila, \dots , λ_k cuadritos en la k -ésima fila:



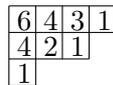
Si consideramos $\lambda_k \geq 0$ podemos definir la **longitud** de una partición $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ como la cantidad de términos que tiene. Se define la **profundidad** de λ como el mayor $j \geq 0$ tal que $\lambda_j \neq 0$. Así por ejemplo, la partición $\lambda = (4, 3, 2, 2, 1, 0, 0, 0)$ tiene longitud 8 y profundidad 5.

La *partición conjugada* $\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_r)$ a la partición λ se define intercambiando filas y columnas en el diagrama de Young. Por ejemplo, el diagrama anterior corresponde a la partición $\lambda = (3, 3, 2, 1, 1)$, cuyo conjugado es $\lambda' = (5, 3, 2)$. (Sin referirnos al diagrama, la partición conjugada de λ puede definirse diciendo que λ'_i es el número de términos en la partición λ que son mayores o iguales que i .)

La *longitud hook* de un cuadrito en un diagrama de Young, es el número de cuadritos directamente abajo o a la derecha del cuadrito, incluyendo el cuadrito una sola vez.



En el siguiente diagrama cada cuadrito está etiquetado por su longitud hook:



Los diagramas de Young pueden ser usados para describir operadores de proyección para la representación regular, que luego nos darán las representaciones irreducibles de S_d . Para un diagrama de Young dado, enumeramos los cuadritos consecutivamente como se muestra:

1	2	3
4	5	
6	7	
8		

Más generalmente, un *tableau* en un diagrama de Young dado, es una enumeración de los cuadritos por los enteros $1, \dots, d$. Dada una partición, se definen dos subgrupos del grupo simétrico

$$P = P_\lambda = \{g \in S_d : g \text{ preserva cada fila}\}$$

y

$$Q = Q_\lambda = \{g \in S_d : g \text{ preserva cada columna}\}.$$

En el álgebra de grupo $\mathbb{C}S_d$, introducimos dos elementos correspondientes a estos subgrupos:

$$a_\lambda = \sum_{g \in P} e_g \quad \text{y} \quad b_\lambda = \sum_{g \in Q} \text{sgn}(g) \cdot e_g.$$

Para ver como actúan a_λ y b_λ , observemos que si V es cualquier espacio vectorial y S_d actúa en $V^{\otimes d}$ permutando los factores, la imagen de un elemento $a_\lambda \in \mathbb{C}S_d \rightarrow \text{End}(V^{\otimes d})$ es el subespacio

$$\text{Im}(a_\lambda) = \text{Sym}^{\lambda_1} V \otimes \text{Sym}^{\lambda_2} V \otimes \dots \otimes \text{Sym}^{\lambda_k} V \subseteq V^{\otimes d},$$

donde la inclusión se obtiene agrupando los factores de $V^{\otimes d}$ de acuerdo a las filas del tableau de Young. Similarmente, la imagen de b_λ en esta potencia tensorial es

$$\text{Im}(b_\lambda) = \Lambda^{\mu_1} V \otimes \Lambda^{\mu_2} V \otimes \dots \otimes \Lambda^{\mu_l} V \subseteq V^{\otimes d},$$

donde μ es la partición conjugada de λ . Se define el *simetrizador de Young* como:

$$c_\lambda = a_\lambda \cdot b_\lambda \in \mathbb{C}S_d.$$

Por ejemplo, cuando $\lambda = (d)$, $c_{(d)} = a_{(d)} = \sum_{g \in S_d} e_g$, y la imagen de $c_{(d)}$ en $V^{\otimes d}$ es $\text{Sym}^d V$. Cuando $\lambda = (1, \dots, 1)$, $c_{(1, \dots, 1)} = b_{(1, \dots, 1)} = \sum_{g \in S_d} \text{sgn}(g) \cdot e_g$, y la imagen de $c_{(1, \dots, 1)}$ en $V^{\otimes d}$ es $\Lambda^d V$.

TEOREMA 4.1. *Algún múltiplo de c_λ es idempotente, i.e., $c_\lambda^2 = n_\lambda \cdot c_\lambda$, y la imagen de c_λ (por multiplicación a la izquierda en $\mathbb{C}S_d$) es una representación irreducible V_λ de S_d . Toda representación irreducible de S_d puede obtenerse de esta forma para una única partición.*

Este teorema nos da una correspondencia entre las clases de conjugación en S_d y las representaciones irreducibles de S_d .

Por ejemplo, para $\lambda = (d)$,

$$V_{(d)} = \left(\sum_{g \in S_d} e_g \right) \cdot \mathbb{C}S_d = \mathbb{C} \sum_{g \in S_d} e_g$$

es la representación trivial, y cuando $\lambda = (1, \dots, 1)$,

$$V_{(1, \dots, 1)} = \left(\sum_{g \in S_d} \text{sgn}(g) \cdot e_g \right) \cdot \mathbb{C}S_d = \mathbb{C} \sum_{g \in S_d} \text{sgn}(g) \cdot e_g$$

es la representación signo. Para $\lambda = (2, 1)$,

$$c_{(2,1)} = (e_1 + e_{(12)}) \cdot (e_1 - e_{(13)}) = 1 + e_{(12)} - e_{(13)} - e_{(132)}$$

en $\mathbb{C}S_3$, y $V_{(2,1)}$ está generado por $c_{(2,1)}$ y $c_{(2,1)} \cdot (13)$, entonces $V_{(2,1)}$ es la representación estándar de S_3 .

1.2. Polinomios de Schur. El espacio vectorial de polinomios simétricos homogéneos de grado d en k variables x_1, \dots, x_k normalmente se indexa por particiones $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ de d en a lo sumo k partes, ó por diagramas de Young con a lo sumo k filas. Listamos tres de estas bases, que son válidas para polinomios con coeficientes enteros, ó coeficientes en un anillo conmutativo.

1. *Monomios en los polinomios simétricos completos:*

$$H_\lambda = H_{\lambda_1} \cdot H_{\lambda_2} \cdots H_{\lambda_k},$$

donde H_j es el j -ésimo polinomio simétrico completo, i.e. la suma de todos los distintos monomios de grado j ; equivalentemente,

$$\prod_{i=1}^k \frac{1}{1 - x_i t} = \sum_{j=0}^{\infty} H_j t^j.$$

EJEMPLO 4.2. *Con tres variables tenemos,*

$$\begin{aligned} H_{(1,1)} &= (x_1 + x_2 + x_3)^2, \\ H_{(2,0)} &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3. \end{aligned}$$

2. *Funciones simétricas elementales.* Estas funciones están parametrizadas por particiones μ de d tales que $k \geq \mu_1 \geq \dots \geq \mu_l \geq 0$. Estas particiones son exactamente las conjugadas a una partición de d en a lo sumo k partes. Para cada μ se define

$$E_\mu = E_{\mu_1} \cdot E_{\mu_2} \cdots E_{\mu_l}$$

donde E_j es el j -ésimo polinomio simétrico elemental, i.e.,

$$E_j = \sum_{i_1 < \dots < i_j} x_{i_1} \cdots x_{i_j}, \quad \prod_{i=1}^k (1 + x_i t) = \sum_{j=0}^{\infty} E_j t^j.$$

EJEMPLO 4.3. *Con tres variables tenemos,*

$$\begin{aligned} E_{(1,1)} &= (x_1 + x_2 + x_3)^2, \\ E_{(2,0)} &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3. \end{aligned}$$

3. *Polinomios de Schur:*

$$S_\lambda = \frac{|x_j^{\lambda_i+k-i}|}{|x_j^{k-i}|} = \frac{|x_j^{\lambda_i+k-i}|}{\Delta(x)},$$

donde $\Delta(x) = \prod_{i < j} (x_i - x_j)$ es el discriminante, y $|a_{i,j}|$ es el determinante de la matriz $k \times k$ con entrada a_{ij} en el lugar (i, j) .

EJEMPLO 4.4. *Con tres variables tenemos,*

$$\begin{aligned} S_{(1,1)} &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \\ S_{(2,0)} &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \end{aligned}$$

1.3. Funtores de Schur. Sea V un \mathbb{C} -espacio vectorial de dimensión finita. El grupo $GL(V)$ actúa en $V^{\otimes d}$, y esto da una descomposición de $V^{\otimes d}$ como suma directa de $GL(V)$ -representaciones irreducibles. Por ejemplo, para $d = 2$ tenemos la descomposición canónica

$$V \otimes V = \text{Sym}^2 V \oplus \Lambda^2 V.$$

El grupo simétrico S_d actúa en $V^{\otimes d}$ permutando los factores

$$\sigma \cdot (v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) = v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(d)}.$$

Esta acción conmuta con la acción de $GL(V)$. Para una partición λ de d , tenemos un simetrizador de Young c_λ en $\mathbb{C}S_d$. Denotamos la imagen de c_λ en $V^{\otimes d}$ por $\mathbb{S}_\lambda V$:

$$\mathbb{S}_\lambda V = \text{Im}(c_\lambda |_{V^{\otimes d}})$$

que es de nuevo una representación de $GL(V)$. Llamamos al funtor $V \rightsquigarrow \mathbb{S}_\lambda V$ el *funtor de Schur* correspondiente a λ .

Por ejemplo, la partición $d = d$ corresponde al funtor $V \rightsquigarrow \text{Sym}^d V$, y la partición $d = 1 + \cdots + 1$ al funtor $V \rightsquigarrow \Lambda^d V$.

Un endomorfismo g de V da lugar a un endomorfismo de $\mathbb{S}_\lambda V$. Para decir qué representaciones obtenemos, necesitamos calcular la traza de este endomorfismo en $\mathbb{S}_\lambda V$; denotamos esta traza por $\chi_{\mathbb{S}_\lambda V}(g)$. Sean x_1, \dots, x_k los autovalores de g en V y $k = \dim V$. Dos casos son fáciles. Para $\lambda = (d)$,

$$\mathbb{S}_{(d)} V = \text{Sym}^d V, \quad \chi_{\mathbb{S}_{(d)} V}(g) = H_d(x_1, \dots, x_k),$$

donde $H_d(x_1, \dots, x_k)$ es el polinomio simétrico completo de grado d . Para $\lambda = (1, \dots, 1)$, tenemos similarmente

$$\mathbb{S}_{(1, \dots, 1)} V = \Lambda^d V, \quad \chi_{\mathbb{S}_{(1, \dots, 1)} V}(g) = E_d(x_1, \dots, x_k),$$

con $E_d(x_1, \dots, x_k)$ el polinomio simétrico elemental. Los polinomios H_d y E_d son casos especiales de polinomios de Schur ($S_\lambda(x_1, \dots, x_k)$). Cuando λ varía sobre todas las particiones de d en a lo sumo k partes, estos polinomios S_λ forman una base para los polinomios simétricos de grado d en estas k variables. Las dos fórmulas anteriores se pueden reescribir como:

$$\chi_{\mathbb{S}_\lambda V}(g) = S_\lambda(x_1, \dots, x_k) \quad \text{para } \lambda = (d) \text{ y } \lambda = (1, \dots, 1).$$

TEOREMA 4.5.

1. Sea $k = \dim V$. Entonces $\mathbb{S}_\lambda V$ es cero si $\lambda_{k+1} \neq 0$.
Si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, entonces

$$\dim \mathbb{S}_\lambda V = S_\lambda(1, \dots, 1) = \prod_{1 \leq i < j \leq k} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i}.$$

2. Sea m_λ la dimensión de la representación irreducible V_λ de S_d correspondiente a λ . Entonces

$$V^{\otimes d} \simeq \bigoplus_{\lambda} \mathbb{S}_\lambda V^{\otimes m_\lambda}.$$

3. Para $g \in GL(V)$, la traza de g en $\mathbb{S}_\lambda V$ es el valor del polinomio de Schur en los autovalores x_1, \dots, x_k de g en V :

$$\chi_{\mathbb{S}_\lambda V}(g) = S_\lambda(x_1, \dots, x_k).$$

4. Cada $\mathbb{S}_\lambda V$ es una representación irreducible de $GL(V)$.

Otra fórmula para la dimensión de $\mathbb{S}_\lambda V$ viene dada por:

$$(4.1) \quad \dim \mathbb{S}_\lambda V = \frac{m_\lambda}{d!} \prod (k - i + j) = \prod \frac{k - i + j}{h_{ij}},$$

donde el producto es sobre los d pares (i, j) que numeran la fila y columna de cuadritos del diagrama de Young para λ , y h_{ij} es el número hook del cuadrito correspondiente.

COROLARIO 4.6. Si $c \in \mathbb{C}S_d$, y $c \cdot (\mathbb{C}S_d) = \bigoplus_{\lambda} V_\lambda^{\oplus r_\lambda}$ como representaciones de S_d , entonces existe una descomposición correspondiente de $GL(V)$ -espacios:

$$c \cdot V^{\otimes d} = \bigoplus_{\lambda} \mathbb{S}_\lambda V^{\oplus r_\lambda}.$$

Si x_1, \dots, x_k son los autovalores de un endomorfismo de V , la traza del endomorfismo inducido de $c \cdot V^{\otimes d}$ es $\sum_{\lambda} r_\lambda S_\lambda(x_1, \dots, x_k)$.

Si λ y μ son diferentes particiones, cada una con a lo sumo $k = \dim V$ partes, los $GL(V)$ -espacios irreducibles $\mathbb{S}_\lambda V$ y $\mathbb{S}_\mu V$ son no isomorfos. De hecho, sus caracteres son los polinomios de Schur S_λ y S_μ , que son diferentes. Más generalmente, las representaciones están completamente determinadas por sus caracteres. Esto se sigue del hecho de que los polinomios de Schur son linealmente independientes.

Una importante aplicación del Corolario, es la descomposición del producto tensorial $\mathbb{S}_\mu V \otimes \mathbb{S}_\nu V$, con μ una partición de d y ν una partición de m . El resultado es

$$(4.2) \quad \mathbb{S}_\mu V \otimes \mathbb{S}_\nu V \simeq \bigoplus_{\lambda} c_{\mu\nu}^{\lambda} \mathbb{S}_\lambda V;$$

donde la suma es sobre todas las particiones λ de $d + m$, y los enteros $c_{\mu\nu}^{\lambda}$ son todos positivos y se llaman los **coeficientes de Littlewood-Richardson**.

2. La regla de Littlewood-Richardson

Sea G el grupo unitario $U(n)$, es decir $G = \{x \in GL(n, \mathbb{R}) | xx^* = 1\}$. Una representación τ de $U(n)$ es una **representación polinomial** si todos los coeficientes matriciales $x \mapsto (\tau(x)\psi', \psi)$ son funciones polinomiales de las entradas x_{ij} . Equivalentemente, todos los coeficientes matriciales de la extensión holomorfa de τ a $GL(n, \mathbb{C})$ deben ser polinomios holomorfos de las entradas de la matriz en $GL(n, \mathbb{C})$. Este concepto es preservado al pasar de una representación a una representación equivalente y bajo sumas directas, productos tensoriales, y subrepresentaciones. Consecuentemente todo elemento irreducible del producto tensorial de dos representaciones polinomiales es de nuevo una representación polinomial.

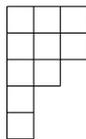
Una forma integral $v = \sum_{j=1}^n v_j e_j$ para $U(n)$, que es un elemento del dual de la subálgebra de Cartan, es **no negativa** si $v_j \geq 0$ para todo j . Restringiendo una representación polinomial a las matrices diagonales, vemos que cada peso de una representación polinomial es no negativo. Recíprocamente podemos ver que toda representación irreducible cuyo peso máximo es no negativo, es una representación polinomial. De hecho, la representación estándar, con peso máximo e_1 , es una representación polinomial. La representación usual en tensores alternantes de rango k pertenece a la k -ésima potencia tensorial de la representación estándar y es por lo tanto polinomial; su peso máximo es $\sum_{j=1}^k e_j$. Finalmente,

si se define $\lambda_{n+1} = 0$, un peso máximo general $\lambda = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j$ puede ser reescrito como

la suma $\lambda = \sum_{k=1}^n \left((\lambda_k - \lambda_{k+1}) \sum_{i=1}^k e_i \right)$. Una representación irreducible con peso máximo λ pertenece entonces a un adecuado producto tensorial de representaciones tensoriales alternantes y es polinomial.

La teoría clásica de representaciones para el grupo unitario trata con representaciones polinomiales irreducibles, que son las representaciones irreducibles con peso máximo no negativo ó, equivalentemente, con todos los pesos no negativos.

Sea τ_λ una representación polinomial irreducible con peso máximo $\lambda = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j$. Si λ tiene profundidad d , las partes de λ son los d enteros positivos λ_j . A τ_λ (o simplemente λ) le asociamos un diagrama de Young. Por ejemplo, el peso máximo $3e_1 + 3e_2 + 2e_3 + e_4 + e_5$ está asociado al diagrama



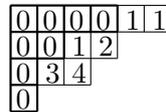
Si ν es una forma integral no negativa, escribimos $\|\nu\|$ para $\langle \nu, e_1 + \dots + e_n \rangle$. En el ejemplo anterior con cuadritos, la profundidad es el número de filas, 5, y el valor de $\|\nu\|$ es el número total de cuadritos, es decir 10.

Supongamos que el producto tensorial de dos representaciones polinomiales irreducibles τ_μ y τ_ν de $U(n)$ se descompone en representaciones irreducibles como

$$(4.3) \quad \tau_\mu \otimes \tau_\nu \simeq \sum_{\text{prof}(\lambda) \leq n} c_{\mu\nu}^\lambda \tau_\lambda.$$

Los enteros $c_{\mu\nu}^\lambda$, que son no negativos, son los coeficientes de Littlewood- Richardson.

Fijemos μ y ν y supongamos que τ_λ ocurre en $\tau_\mu \otimes \tau_\nu$ en el sentido de que $c_{\mu\nu}^\lambda \neq 0$. Entonces λ es no negativo y $\|\lambda\| = \|\mu\| + \|\nu\|$ debido a que todo peso del producto tensorial tiene estas propiedades. Una propiedad más sutil de λ es que λ es la suma de μ y una forma integral no negativa (y también la suma de ν y una forma integral no negativa). En términos de diagramas, esta relación significa que el diagrama de μ es un subconjunto del diagrama de λ , y en consecuencia escribimos $\mu \subseteq \lambda$ para esta relación. Para encontrar todos los posibles λ 's, podemos pensar en expandir el diagrama de μ con $\|\nu\|$ cuadritos adicionales y determinar qué diagramas expandidos correspondientes a λ realmente ocurren. Por supuesto, el diagrama debe corresponder a una forma dominante, y entonces las longitudes de sus filas son decrecientes. Pero esta condición no es suficiente. Los datos adicionales que necesitamos para describir qué λ 's realmente ocurren son los llamados "símbolos" de ν : si $\nu = \sum \nu_j e_j$ tiene profundidad d , los **símbolos** de ν son ν_1 ocurrencias del entero 1, ν_2 ocurrencias del entero 2, \dots , y ν_d ocurrencias del entero d . El diagrama de μ se escribe con 0's, y la expansión se forma poniendo los símbolos de ν en cada lugar de tal forma que resulte el diagrama de una forma dominante. Por ejemplo, sean $\mu = 4e_1 + 2e_2 + e_3 + e_4$ y $\nu = 3e_1 + e_2 + e_3 + e_4$. Los símbolos de ν son $\{1, 1, 1, 2, 3, 4\}$. Una expansión del diagrama de μ es



De hecho, esta expansión en particular no estará permitida en el Teorema siguiente porque no satisface la condición (c).

TEOREMA 4.7 (Littlewood-Richardson). *Sean τ_μ y τ_ν representaciones polinomiales irreducibles de $U(n)$, y sea τ_λ una representación polinomial de $U(n)$ con $\|\lambda\| = \|\mu\| + \|\nu\|$ y $\mu \subseteq \lambda$. Representemos a μ por un diagrama de 0's, y consideremos expansiones de este diagrama, usando los símbolos de ν , a diagramas de λ . Entonces el número $c_{\mu\nu}^\lambda$ de veces que τ_λ ocurre en $\tau_\mu \otimes \tau_\nu$ es igual al número de diagramas expandidos tales que*

- (a) los enteros a lo largo de cada fila del diagrama expandido son crecientes pero no necesariamente estrictamente crecientes.
- (b) los enteros no nulos a lo largo de cada columna son estrictamente crecientes, y
- (c) los enteros no nulos en el diagrama extendido, cuando se leen de derecha a izquierda y fila por fila comenzando por la primera fila, son tales que cada segmento inicial nunca tiene más de un entero i que de un entero j con $1 \leq j < i$.

EJEMPLO 4.8. El producto tensorial $\tau_\mu \otimes \tau_\nu$ en $U(3)$, donde $\mu = \nu = 2e_1 + e_2$. El diagrama para μ es $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$, y los símbolos de ν son $\{1, 1, 2\}$. El primer símbolo de ν que encontramos en (c) debe ser un 1, y entonces ningún símbolo 2 puede ser ubicado en la primera fila, por (a). Un diagrama expandido puede tener a lo sumo 3 filas, para corresponder a un peso máximo de $U(3)$. Encontramos 6 diagramas expandidos:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 2 & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & & & \\ \hline 2 & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array} \\ \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 2 & \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Los pesos máximos de los términos irreducibles del producto tensorial son las formas dominantes correspondientes a los 6 diagramas anteriores: $4e_1 + 2e_2$, $4e_1 + e_2 + e_3$, $3e_1 + 3e_2$, $3e_1 + 2e_2 + e_3$, $3e_1 + 2e_2 + e_3$, y $2e_1 + 2e_2 + 2e_3$. Las multiplicidades respectivas son el número de veces que cada forma aparece en esta lista. Entonces el término con peso máximo $3e_1 + 2e_2 + e_3$ ocurre con multiplicidad 2, y los otros cuatro ocurren con multiplicidad 1. La representación τ_μ dada tiene dimensión 8, y entonces el producto tensorial tiene dimensión 64. La dimensión de cada término es 27, 10, 10, y 1 en el caso de las representaciones de multiplicidad 1, y 8 en el caso de la representación de multiplicidad 2. Tenemos entonces $27 + 10 + 10 + 1 + 2(8) = 64$, y por lo tanto las dimensiones coinciden.

OBSERVACIÓN 4.9. Nuestro cálculo sólo tuvo en cuenta los diagramas expandidos con a lo sumo 3 filas. Para $U(n)$ con $n \geq 4$, encontramos dos diagramas adicionales

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & & \\ \hline 1 & & \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array} \quad y \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$$

Estos corresponden a $3e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ y $2e_1 + 2e_2 + e_3 + e_4$.

2.1. Las constantes de estructura. Sea n cualquier natural y sean $O(n, \mathbb{C})$ y $Sp(2n, \mathbb{C})$ los grupos ortogonal y simpléctico respectivamente. Denotemos τ_μ^O a una representación de $O(n, \mathbb{C})$ de peso máximo μ y τ_μ^{Sp} a una representación de $Sp(2n, \mathbb{C})$ de peso máximo μ . Entonces se pueden definir las constantes de estructura:

DEFINICIÓN 4.10. Dadas las descomposiciones de los productos tensoriales,

$$\tau_\mu^O \otimes \tau_\nu^O = \sum_{\lambda} B_{\mu\nu}^{\lambda} \tau_{\lambda}^O \quad y \quad \tau_\mu^{Sp} \otimes \tau_\nu^{Sp} = \sum_{\lambda} C_{\mu\nu}^{\lambda} \tau_{\lambda}^{Sp},$$

las constantes $B_{\mu\nu}^{\lambda}$ y $C_{\mu\nu}^{\lambda}$ se denominan constantes de estructura.

Se tiene además,

TEOREMA 4.11 (El teorema de constantes de estructura).

$$B_{\mu\nu}^{\lambda} = C_{\mu\nu}^{\lambda} = \sum_{\alpha, \beta, \tau} c_{\tau\alpha}^{\mu} c_{\tau\beta}^{\nu} c_{\alpha, \beta}^{\lambda}.$$

donde $c_{\tau\alpha}^{\mu}$, $c_{\tau\beta}^{\nu}$ y $c_{\alpha, \beta}^{\lambda}$ son los coeficientes de Littlewood-Richardson.

Es decir que las constantes de estructura de los tipos B_n , C_n y D_n coinciden.

(Co)homología de nilradicales 2-pasos nilpotentes

En este Capítulo vamos a introducir las herramientas necesarias para el cálculo de la homología de los nilradicales estudiados.

1. (Co)homología de nilradicales: El Teorema de Kostant

Dada un álgebra de Lie semisimple \mathfrak{g} , una subálgebra parabólica $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{n}$ como en el Capítulo 3 y una representación irreducible V^λ de \mathfrak{g} de peso máximo λ , el siguiente teorema describe la estructura como \mathfrak{g}_1 -módulo de la cohomología de \mathfrak{n} con coeficientes en V^λ considerada como un \mathfrak{n} -módulo por restricción.

Sea W el grupo de Weyl de \mathfrak{g} , para cada $w \in W$ se define

$$(5.1) \quad \Phi_w = \{\alpha \in \Delta(\mathfrak{n}) : w^{-1}(\alpha) < 0\}.$$

Sea además $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha$ y denotemos X_α^* a un vector de \mathfrak{n}^* de peso α y X_α a un vector de \mathfrak{n} de peso α .

TEOREMA 5.1 (Kostant). *La descomposición de $H^*(\mathfrak{n}, V^\lambda)$ como suma directa de representaciones irreducibles de \mathfrak{g}_1 es:*

$$(5.2) \quad H^*(\mathfrak{n}, V^\lambda) \simeq \bigoplus_{w \in W^1} V_1^{w(\lambda+\rho)-\rho}$$

donde V^λ es una representación de \mathfrak{n} que es restricción de un representación de \mathfrak{g} , $W^1 = \{w \in W : w^{-1}\Delta_1^+ \subseteq \Delta^+\} = \{w \in W : w\Delta^- \cap \Delta^+ \subseteq \Delta(\mathfrak{n})\}$ y $V_1^{w(\lambda+\rho)-\rho}$ es la representación irreducible de \mathfrak{g}_1 de peso máximo $w(\lambda+\rho)-\rho$.

Además,

- Si $w \in W^1$, entonces $l = \#\Phi_w$ es el grado cohomológico.
- Sea $w \in W^1$, $w\Delta^- \cap \Delta^+ = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} \subseteq \Delta(\mathfrak{n})$, si $v \in V^\lambda$ es un vector de peso máximo de peso $w\lambda$, entonces

$$(5.3) \quad X_{-\alpha_1}^* \wedge \dots \wedge X_{-\alpha_l}^* \otimes v \in \Lambda^l \mathfrak{n}^* \otimes V^\lambda$$

es un vector de peso máximo de $H^l(\mathfrak{n}, V^\lambda)$ de peso $w(\lambda+\rho)-\rho$.

OBSERVACIÓN 5.2. *La homología y la cohomología están relacionadas vía el isomorfismo $H_*(\mathfrak{n}, V) \simeq H^*(\mathfrak{n}, V^*)^*$, por lo tanto por el Teorema de Kostant se tienen cohomología y homología.*

Veamos el Teorema de Kostant para el cálculo de la homología trivial de nilradicales.

Sea $w_0 \in W$ el único elemento del grupo de Weyl tal que $w_0(\Delta^+) = \Delta^-$, entonces tenemos el siguiente teorema ([9]):

TEOREMA 5.3. *Sea (π, V) un \mathfrak{g} -módulo irreducible de dimensión finita con peso máximo λ y sea (π^*, V^*) el módulo dual. Entonces:*

- (a) *el peso mínimo de V es $w_0(\lambda)$,*
- (b) *el peso máximo de V^* es $-w_0(\lambda)$ y el peso mínimo de V^* es $-\lambda$.*

Consideremos ahora $w_0 \in W$ el único elemento del grupo de Weyl de \mathfrak{g}_1 tal que $w_0(\Delta_1^+) = \Delta_1^-$. Usando la Observación (5.2) y el Teorema 5.3 para \mathfrak{g}_1 , podemos reescribir el teorema de Kostant para homología trivial:

TEOREMA 5.4. *La descomposición de $H_*(\mathfrak{n})$ como suma directa de representaciones irreducibles de \mathfrak{g}_1 es:*

$$(5.4) \quad H_*(\mathfrak{n}) \simeq \bigoplus_{w \in W^1} V_1^{-w_0(w\rho - \rho)}$$

donde $W^1 = \{w \in W : w^{-1}\Delta_1^+ \subseteq \Delta^+\}$ y $V_1^{-w_0(w\rho - \rho)}$ es la representación irreducible de \mathfrak{g}_1 de peso máximo $-w_0(w\rho - \rho)$.

Además,

- Si $w \in W^1$, entonces $l = \#\Phi_w$ es el grado homológico.
- Para $w \in W^1$, se tiene $w\Delta^- \cap \Delta^+ = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} \subseteq \Delta(\mathfrak{n})$ y entonces

$$(5.5) \quad X_{w_0(\alpha_1)} \wedge \dots \wedge X_{w_0(\alpha_l)} \in \Lambda^l \mathfrak{n}$$

es un vector de peso máximo de $H_l(\mathfrak{n})$ de peso $-w_0(w\rho - \rho)$.

2. Homología adjunta de nilradicales

El cálculo de la homología adjunta de nilradicales no está contenido en el Teorema de Kostant. De hecho, la representación adjunta de \mathfrak{n} no es restricción de ninguna representación de \mathfrak{g} .

Si \mathfrak{g} es un álgebra de Lie compleja semisimple, \mathfrak{n} es el nilradical de una subálgebra parabólica $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{g}$ y $\text{ad}_{\mathfrak{n}}$ es la representación adjunta de \mathfrak{n} , se tiene que $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}_i$ con \mathfrak{g}_i simple y $\mathfrak{n}_i = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}_i$, entonces se sigue que $\mathfrak{n} = \bigoplus \mathfrak{n}_i$. Para cada z_i en el centro de \mathfrak{n}_i , $\pi(z_i) = \text{ad}_{\mathfrak{n}_i}(z_i) = 0$, entonces por simplicidad, $\pi(\mathfrak{g}_i) = 0$ y en particular $\text{ad}(\mathfrak{n}_i) = 0$ para todo i . Por lo tanto $\text{ad}(\mathfrak{n}) = 0$ y \mathfrak{n} es abeliano.

Estamos frente a un problema abierto donde los únicos antecedentes son:

1. La homología adjunta del álgebra de Lie libre 2-pasos nilpotentes, en [5];
2. La cohomología adjunta del álgebra de Lie de Heisenberg, en [15];
3. La (co)homología adjunta del álgebra de Lie de Heisenberg como \mathfrak{sp} -módulo, contenida en [6];

En esta tesis, agregamos a estos casos, los siguientes nuevos resultados:

1. La homología adjunta del álgebra de Lie $A_n(1, 2)$, en el Capítulo 6 y además puede consultarse en [1];
2. La homología adjunta del álgebra de Lie de Heisenberg como \mathfrak{sl} -módulo y además la dimensión de estos grupos, en el Capítulo 7;
3. La homología adjunta de las familias de álgebras de Lie $A_n(k, k + 1)$ como \mathfrak{sl} -módulo, en el Capítulo 9.

3. Esquema especial para álgebras de Lie 2-pasos nilpotentes.

Sea $\mathfrak{n} = V \oplus \mathfrak{z}$ un álgebra de Lie 2-pasos nilpotente, donde \mathfrak{z} es el centro de \mathfrak{n} . Entonces tenemos la sucesión exacta corta de \mathfrak{n} -módulos:

$$0 \rightarrow \mathfrak{z} \rightarrow \mathfrak{n} \rightarrow V \rightarrow 0$$

que induce la sucesión exacta larga de homología:

$$\rightarrow H_{p+1}(\mathfrak{n}, V) \xrightarrow{\delta_{p+1}} H_p(\mathfrak{n}, \mathfrak{z}) \rightarrow H_p(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}) \rightarrow H_p(\mathfrak{n}, V) \xrightarrow{\delta_p} H_{p-1}(\mathfrak{n}, \mathfrak{z}) \rightarrow$$

donde δ_p es el morfismo de conexión.

Dado que tanto \mathfrak{z} como V son \mathfrak{n} -módulos triviales, la sucesión nos queda:

$$(5.6) \quad \rightarrow H_{p+1}(\mathfrak{n}) \otimes V \xrightarrow{\delta_{p+1}} H_p(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z} \rightarrow H_p(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}) \rightarrow H_p(\mathfrak{n}) \otimes V \xrightarrow{\delta_p} H_{p-1}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z} \rightarrow$$

Entonces es fácil ver que

$$(5.7) \quad H_p(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}) \simeq \ker \delta_p \oplus \operatorname{coker} \delta_{p+1}$$

y se tiene:

LEMA 5.5. *Sea $v \in \Lambda^p(\mathfrak{n}) \otimes V$ tal que $[v] \in H_p(\mathfrak{n}) \otimes V$. Entonces $\delta_p([v]) = [\partial_1(v)]$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$(5.8) \quad \begin{array}{ccccccc} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \Lambda^p \mathfrak{n} \otimes \mathfrak{z} & \longrightarrow & \Lambda^p \mathfrak{n} \otimes \mathfrak{n} & \longrightarrow & \Lambda^p \mathfrak{n} \otimes V \longrightarrow 0 \\ & & \partial_0 \otimes 1 \downarrow & & \partial_0 \otimes 1 + \partial_1 \downarrow & & \partial_0 \otimes 1 \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \Lambda^{p-1} \mathfrak{n} \otimes \mathfrak{z} & \longrightarrow & \Lambda^{p-1} \mathfrak{n} \otimes \mathfrak{n} & \longrightarrow & \Lambda^{p-1} \mathfrak{n} \otimes V \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

El mapa δ_p está definido por tomar imágenes y preimágenes en este diagrama. Sea $v \in \Lambda^p(\mathfrak{n}) \otimes V$ tal que $[v] \in H_p(\mathfrak{n}) \otimes V$, es decir $\partial_0 \otimes 1(v) = 0$. Esto implica que $\partial(v) = \partial_1(v)$. De la definición de ∂_1 (ver (2.12)) se sigue que $\partial_1(v) \in \Lambda^{p-1}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}$. Por lo tanto $[\partial_1(v)]$ es la imagen de v por δ_p . \square

4. La Propiedad de Cancelación

Una herramienta muy importante en el cálculo de la homología adjunta de todos los casos considerados en esta Tesis, es el hecho de que todos los nilradicales estudiados tienen una *Propiedad de Cancelación*.

Dada una sucesión exacta larga de \mathfrak{g}_1 -módulos

$$\rightarrow V_{n+1} \xrightarrow{\phi_{n+1}} V_n \xrightarrow{\phi_n} V_{n-1} \xrightarrow{\phi_{n-1}} V_{n-2} \xrightarrow{\phi_{n-2}} V_{n-3} \rightarrow$$

decimos que tiene la *propiedad de cancelación* si para cada una de sus sucesiones isotópicas, ϕ_m es sobreyectiva o es inyectiva.

Es nuestro contexto, la sucesión exacta larga es

$$\rightarrow H_{p+1}(\mathfrak{n}) \otimes (X \oplus Y) \xrightarrow{\delta_{p+1}} H_p(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z} \rightarrow H_p(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}) \rightarrow H_p(\mathfrak{n}) \otimes (X \oplus Y) \xrightarrow{\delta_p} H_{p-1}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z} \rightarrow$$

Entonces, tener la *propiedad de cancelación* significa que, si para un tipo dado de \mathfrak{g}_1 -módulo, la multiplicidad de éste en $H_p(\mathfrak{n}) \otimes (X \oplus Y)$ es mayor o igual que su multiplicidad en $H_{p-1}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}$, entonces δ_p es sobreyectiva, y si la multiplicidad de un tipo dado en $H_p(\mathfrak{n}) \otimes (X \oplus Y)$ es menor o igual que su multiplicidad en $H_{p-1}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}$, entonces δ_p es inyectiva.

En tal caso, la descripción de la estructura de \mathfrak{g}_1 -módulo de la homología adjunta de \mathfrak{n} , a partir de $H(\mathfrak{n}) \otimes (X \oplus Y)$ y $H(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}$, se sigue.

Cabe destacar que los nilradicales estudiados en [5], [6], [1] y todos los de esta tesis tienen la *propiedad de cancelación*, y conjeturamos que este es un fenómeno de todos los nilradicales 2-pasos nilpotentes de subálgebras parabólicas.

5. Las familias $A_n(k, l)$

En esta Sección vamos a introducir los nilradicales que van a ser objeto de estudio en esta Tesis. Para ello vamos a seguir la notación introducida en [1].

Sea $\mathfrak{g} = A_n = \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$ el álgebra de Lie de matrices de traza cero de orden $n+1$. Sea Δ el conjunto de raíces de A_n , Δ^+ el conjunto de raíces positivas y Π el conjunto de raíces simples de A_n , es decir:

$$\begin{aligned} \Delta &= \{e_i - e_j : 1 \leq i, j \leq n+1, i \neq j\}, \\ \Delta^+ &= \{e_i - e_j : 1 \leq i < j \leq n+1\}, \\ \Pi &= \{e_i - e_{i+1} : 1 \leq i \leq n, i \neq j\}. \end{aligned}$$

El grupo de Weyl de A_n es isomorfo al grupo de permutaciones S_{n+1} y su acción en Δ está dada por

$$\sigma \cdot (e_i - e_j) = e_{\sigma(i)} - e_{\sigma(j)}.$$

La raíz más larga de A_n es

$$e_1 - e_{n+1} = (e_1 - e_2) + (e_2 - e_3) + \cdots + (e_n - e_{n+1}),$$

entonces por la Proposición 3.3 se tiene que un nilradical de una subálgebra parabólica \mathfrak{p} de \mathfrak{g} es 2-pasos nilpotente si elegimos $\Pi_0 \subseteq \Pi$ de la forma

$$\Pi_0 = \{e_k - e_{k+1}, e_l - e_{l+1}\} \text{ con } 1 \leq k < l \leq n.$$

Al nilradical correspondiente a la elección de tal Π_0 lo vamos a denotar por $A_n(k, l)$.

Gráficamente podemos ver la subálgebra parabólica $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{n}$, su nilradical \mathfrak{n} y su factor de Levi \mathfrak{g}_1 de la siguiente forma:

\mathfrak{g}_1	\mathfrak{n}	\mathfrak{n}
	\mathfrak{g}_1	\mathfrak{n}
		\mathfrak{g}_1

En los capítulos siguientes calcularemos la homología adjunta de algunas familias de estos nilradicales 2-pasos nilpotentes de A_n y además estudiaremos en caso general $A_n(k, l)$.

6. Productos tensoriales en A_n

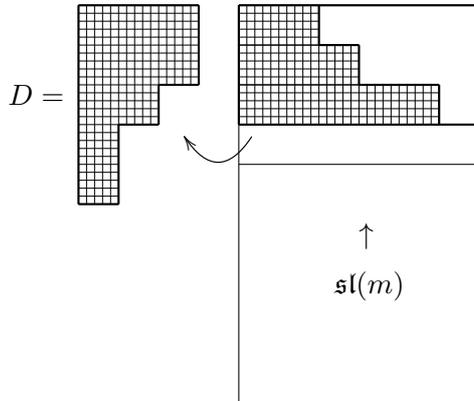
Por lo visto en la Sección 3 de este Capítulo, podemos calcular la homología adjunta de un nilradical 2-pasos nilpotente conociendo cómo actúa δ_p sobre los vectores de peso máximo de los productos tensoriales $H_p(\mathfrak{n}) \otimes V$ y $H_{p-1}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}$. En esta Sección vamos a construir estos vectores de peso máximo para luego utilizarlos en los dos primeros casos estudiados.

6.1. La representación V_{m-1} . Sea V_D una representación irreducible de $\mathfrak{sl}(m)$ representada por el diagrama de Young D y sea V_{m-1} la última representación fundamental de $\mathfrak{sl}(m)$, que está representada por el diagrama de Young D_{m-1} (la columna con $m-1$ cuadritos).

Sea u_m un vector de peso máximo de V_{m-1} y para $i = m, \dots, 2$, definimos u_{i-1} como $u_{i-1} = -E_{i,i-1}u_i$. Entonces $\{u_m, u_{m-1}, \dots, u_1\}$ es una base de vectores peso de V_{m-1} . Así, u_m es de peso $(\underbrace{1, \dots, 1}_{m-1})$, y para $1 \leq i \leq m-1$, u_i es de peso $(0, \dots, \underbrace{-1}_i, \dots, 0)$.

Recordemos que $E_{j,j-1} \cdot u_j = -u_{j-1}$ y $E_{j,j-1} \cdot u_i = 0$ si $i \neq j$.

Gráficamente, la forma en que actúa $\mathfrak{sl}(m)$ es la siguiente:



El producto tensorial $V_D \otimes V_{m-1}$ se descompone como suma directa de las representaciones irreducibles representadas por el diagrama de Young obtenido a partir de D agregando un cuadrado en cada fila, más todos los diagramas de Young que pueden construirse a partir de D eliminando un cuadrado. Notar que hay al menos 1 y a lo sumo m sumandos en esta descomposición.

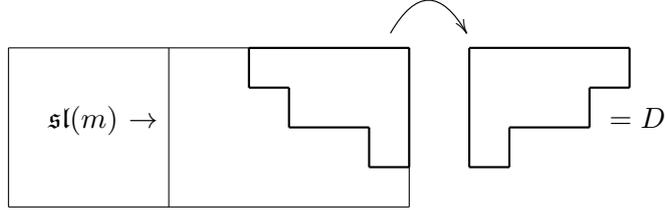
Si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1})$ es el peso máximo de V_D , esto es, λ_i es el número de cuadrillos en la i -ésima fila de D , entonces $V_D \otimes V_{m-1}$ tiene siempre una componente de peso $(\lambda_1 + 1, \dots, \lambda_{m-1} + 1)$, que denotamos $V_D \otimes V_{m-1}(m)$. Además para cada $1 \leq s \leq m-1$ tal que $\lambda_s > \lambda_{s+1}$ (definimos $\lambda_m = 0$) tiene una componente de peso $(\lambda_1, \dots, \lambda_s - 1, \dots, \lambda_{m-1})$ que denotamos $V_D \otimes V_{m-1}(s)$.

EJEMPLO 5.6. Para $n = 5$, la regla de Littlewood-Richardson nos da la siguiente descomposición para este particular producto tensorial de representaciones de $\mathfrak{sl}(5)$.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \\ \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \square & \square & & \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} .$$

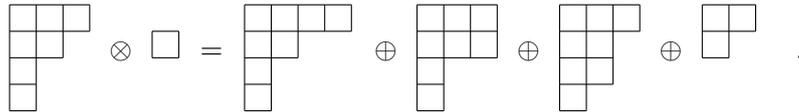
6.2. La representación V_1 . Sea V_1 la primera representación fundamental de $\mathfrak{sl}(m)$, que está representada por el diagrama de Young D_1 (la columna con 1 cuadrado). El producto tensorial $V_D \otimes V_1$ se descompone como suma directa de las representaciones irreducibles representadas por el Diagrama de Young obtenido a partir de D agregando un cuadrado en cada fila donde sea posible.

Gráficamente, la forma en la que actúa $\mathfrak{sl}(m)$, en este caso, es la siguiente:



Si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1})$ es el peso máximo de V_D , esto es, λ_i es el número de cuadritos en la i -ésima fila de D , entonces $V_D \otimes V_1$ tiene siempre una componente de peso $(\lambda_1 + 1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1})$, que denotamos $V_D \otimes V_1(1)$. Además para cada $2 \leq s \leq m$ tal que $\lambda_s < \lambda_{s-1}$ (se define $\lambda_m = 0$) tiene una componente de peso $(\lambda_1, \dots, \lambda_{s-1}, \lambda_s + 1, \lambda_{s+1}, \dots, \lambda_{m-1})$ que denotamos $V_D \otimes V_1(s)$.

EJEMPLO 5.7. Para $n = 5$, la regla de Littlewood-Richardson nos da la siguiente descomposición para este particular producto tensorial de representaciones de $\mathfrak{sl}(5)$.



6.3. Vectores de Peso Máximo de productos tensoriales. Como se mencionó anteriormente, vamos a construir vectores de peso máximo de los productos tensoriales $H_p(\mathfrak{n}) \otimes V$ y $H_{p-1} \otimes \mathfrak{z}$. Para el caso $\mathfrak{g} = A_n$, estos productos tensoriales son todos de la forma $V_D \otimes V_1$ y $V_D \otimes V_{m-1}$.

Veamos algunas definiciones previas.

DEFINICIÓN 5.8. Sea $[[r]]$ el conjunto de enteros $\{1, 2, \dots, r\}$. Para un subconjunto no vacío $J = \{j_1, \dots, j_k\} \subseteq [[r]]$, con $j_1 < \dots < j_k$, sean $U_J, V_J \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$ definidos por:

$$(5.9) \quad U_J = \begin{cases} 1 & k = 1 \\ E_{j_k, j_{k-1}} E_{j_{k-1}, j_{k-2}} \dots E_{j_3, j_2} E_{j_2, j_1} & k > 1 \end{cases}$$

$$(5.10) \quad V_J = \begin{cases} 1 & k = 1 \\ E_{j_2, j_1} E_{j_3, j_2} \dots E_{j_{k-1}, j_{k-2}} E_{j_k, j_{k-1}} & k > 1 \end{cases}$$

El operador V_J fue introducido en [5] en 2002 y el operador U_J en [1] en 2012.

Denotemos $J_{>c} = J \cap \{c + 1, \dots, r\}$, $J_{<c} = J \cap \{1, \dots, c - 1\}$, $J_{\geq c} = J \cap \{c, \dots, r\}$ y $J_{\leq c} = J \cap \{1, \dots, c\}$.

Entonces de [1] y [5] tenemos el siguiente Lema:

LEMA 5.9. Sean $\emptyset \neq J \subseteq [[r]]$ y $c < r$. Entonces los conmutadores $[E_{c,c+1}, U_J]$ y $[E_{c,c+1}, V_J]$ vienen dados por las siguientes tablas:

(5.11)	$c \in J$	$J_{>c+1} \neq \emptyset$	$U_{J_{>c+1}}(E_{c,c} - E_{c+1,c+1})U_{J_{<c}}$	(1)
	$c+1 \in J$	$J_{>c+1} = \emptyset$	$(E_{c,c} - E_{c+1,c+1})U_{J_{<c}}$	(2)
	$c \in J$	$J_{>c+1} \neq \emptyset$	$-U_{\{c+1\} \cup J_{>c}}U_{J_{<c}}$	(3)
	$c+1 \notin J$	$J_{>c+1} = \emptyset$	0	(4)
	$c \notin J$	$J_{<c} \neq \emptyset$	$U_{J_{>c+1}}U_{\{c\} \cup J_{<c+1}}$	(5)
	$c+1 \in J$	$J_{<c} = \emptyset$	0	(6)
	$c, c+1 \notin J$		0	(7)

(5.12)	$c \in J$	$J_{>c+1} \neq \emptyset$	$V_{J_{<c}}V_{J_{>c+1}}(E_{c,c} - E_{c+1,c+1} + 1)$	(1)
	$c+1 \in J$	$J_{>c+1} = \emptyset$	$V_{J_{<c}}(E_{c,c} - E_{c+1,c+1})$	(2)
	$c \in J$	$J_{>c+1} \neq \emptyset$	$-V_{J_{<c}}V_{\{c+1\} \cup J_{>c+1}}$	(3)
	$c+1 \notin J$	$J_{>c+1} = \emptyset$	0	(4)
	$c \notin J$	$J_{<c} \neq \emptyset$	$V_{\{c\} \cup J_{<c}}V_{J_{>c+1}}$	(5)
	$c+1 \in J$	$J_{<c} = \emptyset$	0	(6)
	$c, c+1 \notin J$		0	(7)

DEMOSTRACIÓN. Estas relaciones son consecuencia directa de las siguientes relaciones de conmutación:

$$[E_{a,b}, E_{c,d}] = \begin{cases} E_{a,a} - E_{b,b}, & \text{si } a = d, b = c, \\ E_{a,d}, & \text{si } a \neq d, b = c, \\ -E_{b,c}, & \text{si } a = d, b \neq c, \\ 0, & \text{si } a \neq d, b \neq c. \end{cases}$$

□

Con todo esto, podemos enunciar el siguiente Teorema que nos da la construcción de vectores de peso máximo del producto tensorial $V_D \otimes V_1$, donde V_D es un $\mathfrak{sl}(r)$ -módulo.

TEOREMA 5.10 ([5]). Sea $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r-1})$ una partición de longitud $r-1$, y tal que $s = 1$ ó $\lambda_{s-1} > \lambda_s$ para $1 < s \leq r$, se define $\lambda_r = 0$. Sea $A^{(s)} = \{J \subseteq [[r]] : \text{máx}(J) = s\}$ y para $i \leq s$ se define $\sigma_i = \lambda_s - \lambda_i - (s - i) + 1$ y $\sigma_J = \prod_{i \in J} \sigma_i$. Si v es un vector de peso máximo de V_D de peso λ , entonces

$$w = \sum_{J \in A^{(s)}} \frac{1}{\sigma_J} V_J v \otimes u_{\text{mín}(J)}$$

es un vector de peso máximo de $V_D \otimes V_1$ de peso

$$\begin{cases} (\lambda_1 + 1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r-1}), & \text{si } s = 1, \\ (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s + 1, \dots, \lambda_{r-1}), & \text{si } s > 1. \end{cases}$$

Para la construcción de vectores de peso máximo del producto tensorial $V_D \otimes V_{r-1}$ tenemos:

TEOREMA 5.11 ([1]). *Sea $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r-1})$ una partición de longitud $r-1$, y s tal que $\lambda_s > \lambda_{s+1}$ para $1 \leq s \leq r-1$ ó $s = r$ y definimos $\lambda_r = 0$. Sea $A_{(s)} = \{J \subseteq [r] : \min(J) = s\}$ y para $i \geq s$ definimos $\sigma_i = \lambda_s - \lambda_i - (s-i) - 1$ y $\sigma_J = \prod_{i \in J} \sigma_i$. Si v es un vector de peso máximo de V_D de peso λ , entonces*

$$w = \sum_{J \in A_{(s)}} \frac{1}{\sigma_J} U_J v \otimes u_{\max(J)}$$

es un vector de peso máximo de $V_D \otimes V_{r-1}$ de peso

$$\begin{cases} (\lambda_1 + 1, \lambda_2 + 1, \dots, \lambda_{r-1} + 1), & \text{si } s = r, \\ (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s - 1, \dots, \lambda_{r-1}), & \text{si } s < r. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN.

OBSERVACIÓN 5.12. *Dada una partición $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1})$ de longitud $r-1$ asociada a un vector de peso máximo v , la acción del operador $E_{i,i}$ en v es:*

$$(5.13) \quad E_{i,i} \cdot v = -(\lambda_i - \lambda_{i+1}) \cdot v.$$

Entonces $(E_{c,c} - E_{c+1,c+1}) \cdot v = (\lambda_c - \lambda_{c+1}) \cdot v$.

Para $J \in A_{(s)}$, llamemos $S_J = \frac{1}{\sigma_J} U_J v \otimes u_{\max(J)}$. Si $J = \{s\}$ entonces $S_J = -v \otimes u_s$ es linealmente independiente con el resto de los términos en la suma y $w \neq 0$ es un vector de peso $\begin{cases} (\lambda_1 + 1, \lambda_2 + 1, \dots, \lambda_{r-1} + 1), & \text{si } s = r, \\ (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s - 1, \dots, \lambda_{r-1}), & \text{si } s < r. \end{cases}$

Sea $A_{(s)}^{(d)} = \{J \in A_{(s)} : \max(J) = d\}$.

Para probar que w es un vector de peso máximo, es suficiente ver que $E_{c,c+1} w = 0$ para $1 \leq c < r$. Vamos a considerar los casos $c \leq s-1$, $c = s$ y $c > s$.

- $c \leq s-1$. Esto es consecuencia directa de (6) y (7) de la Tabla (5.11) del Lema anterior.
- $c = s$. Para $d \neq s+1$, sea $J \in A_{(s)}^{(d)}$ tal que $s+1 \notin J$, definimos $J^{s+1} = J \cup \{s+1\}$, entonces

$$A_{(s)} = \bigcup_{d \neq s+1} \{J, J^{s+1} : J \in A_{(s)}^{(d)}, s+1 \notin J\}.$$

Si $d = s$ entonces $J = \{s\}$ y

$$\begin{aligned} E_{s,s+1}(S_J + S_{J^{s+1}}) &= E_{s,s+1}(v \otimes u_s) + \frac{1}{\lambda_s - \lambda_{s+1}} E_{s,s+1}(E_{s+1,s} v \otimes u_{s+1}) \\ &= v \otimes (-u_{s+1}) + \frac{1}{\lambda_s - \lambda_{s+1}} (\lambda_s - \lambda_{s+1}) v \otimes u_{s+1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Si $d > s + 1$ entonces por (3) y (1) de la Tabla (5.11).

$$\begin{aligned} E_{s,s+1}(S_J + S_{J^{s+1}}) &= \frac{1}{\sigma_J} E_{s,s+1}(U_J v \otimes u_d) + \frac{1}{\sigma_J \sigma_{s+1}} E_{s,s+1}(U_{J^{s+1}} v \otimes u_d) \\ &= -\frac{1}{\sigma_J} U_{\{s+1\} \cup J > s} v \otimes u_d + \frac{U_{J^{s+1} \geq s+1} (\lambda_s - \lambda_{s+1}) v}{\sigma_J (\lambda_s - \lambda_{s+1})} \otimes u_d \\ &= 0 \end{aligned}$$

- $c > s$. Para $d \neq c, c + 1$, sea $J \in A_{(s)}^{(d)}$ tal que $c, c + 1 \notin J$ y sea $J^c = J \cup \{c\}$, $J^{c+1} = J \cup \{c + 1\}$ y $J^{c,c+1} = J \cup \{c, c + 1\}$, entonces

$$A_{(s)} = \bigcup_{d \neq c, c+1} \{J, J^c, J^{c+1}, J^{c,c+1} : J \in A_{(s)}^{(d)}, c, c + 1 \notin J\}.$$

Por lo tanto:

- Si $d > c + 1$, por (7), (3), (5) y (1) de la Tabla (5.11) del Lema anterior tenemos:

$$\begin{aligned} E_{c,c+1}(S_J) &= 0 \\ E_{c,c+1}(S_{J^c}) &= -\frac{1}{\sigma_J \sigma_c} U_{\{c+1\} \cup J^c > c} U_{J^c \leq c} v \otimes u_d \\ E_{c,c+1}(S_{J^{c+1}}) &= \frac{1}{\sigma_J \sigma_{c+1}} U_{J^{c+1} \geq c+1} U_{\{c\} \cup J^{c+1} < c+1} v \otimes u_d \\ E_{c,c+1}(S_{J^{c,c+1}}) &= \frac{1}{\sigma_J \sigma_c \sigma_{c+1}} U_{J^{c,c+1} \geq c+1} U_{J^{c,c+1} \leq c} (1 + E_{c,c} - E_{c+1,c+1}) v \otimes u_d \\ &= \frac{1 + \lambda_c - \lambda_{c+1}}{\sigma_J \sigma_c \sigma_{c+1}} U_{J^{c,c+1} \geq c+1} U_{J^{c,c+1} \leq c} v \otimes u_d \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} E_{c,c+1}(S_{J^c} + S_{J^{c+1}} + S_{J^{c,c+1}}) &= \\ &= \left(-\frac{1}{\sigma_J \sigma_c} + \frac{1}{\sigma_J \sigma_{c+1}} + \frac{1 + \lambda_c - \lambda_{c+1}}{\sigma_J \sigma_c \sigma_{c+1}} \right) U_{\{c+1\} \cup J^c > c} U_{J^c \leq c} v \otimes u_d \\ &= 0 \end{aligned}$$

ya que $-\sigma_{c+1} + \sigma_c + 1 + \lambda_c - \lambda_{c+1} = 0$.

- Si $d < c$, por (7), (4), (5) y (2) de la Tabla (5.11) del Lema anterior:

$$\begin{aligned} E_{c,c+1}(S_J) &= 0 \\ E_{c,c+1}(S_{J^c}) &= \frac{1}{\sigma_J \sigma_c} U_{J^c} v \otimes (-u_{c+1}) \\ E_{c,c+1}(S_{J^{c+1}}) &= \frac{1}{\sigma_J \sigma_{c+1}} U_{\{c\} \cup J^{c+1} < c+1} v \otimes u_{c+1} \\ E_{c,c+1}(S_{J^{c,c+1}}) &= \frac{1}{\sigma_J \sigma_c \sigma_{c+1}} U_{J^{c,c+1} \leq c} (1 + E_{c,c} - E_{c+1,c+1}) v \otimes u_{c+1} \\ &= \frac{1 + \lambda_c - \lambda_{c+1}}{\sigma_J \sigma_c \sigma_{c+1}} U_{J^{c,c+1} \leq c} v \otimes u_{c+1} \end{aligned}$$

Entonces

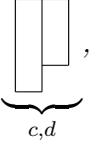
$$\begin{aligned} E_{c,c+1}(S_{J^c} + S_{J^{c+1}} + S_{J^{c,c+1}}) &= \\ &= \left(-\frac{1}{\sigma_J \sigma_c} + \frac{1}{\sigma_J \sigma_{c+1}} + \frac{1 + \lambda_c - \lambda_{c+1}}{\sigma_J \sigma_c \sigma_{c+1}} \right) U_{J^c v} \otimes u_{c+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ya que $-\sigma_{c+1} + \sigma_c + 1 + \lambda_c - \lambda_{c+1} = 0$.

□

Veamos ahora un Lema que nos permitirá más adelante calcular las dimensiones de la homología trivial de un nilradical.

LEMA 5.13. Dado un diagrama de Young asociado a un $\mathfrak{sl}(r)$ -módulo, $D_{c,d} =$



se tiene que $\dim D_{c,d} = \binom{r}{c} \cdot \binom{r+1}{d} - \binom{r+1}{c+1} \cdot \binom{r}{d-1}$.

DEMOSTRACIÓN. De acuerdo a la fórmula (4.1) se tiene que:

$$\dim D_{c,d} = \prod_{(i,j) \in D} \frac{r-i+j}{h_{i,j}},$$

donde (i, j) son los pares que enumeran la fila y columna de $D_{c,d}$ y $h_{i,j}$ es el número hook del correspondiente cuadrado. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} \dim D_{c,d} &= \prod_{(i,j) \in D} \frac{r-i+j}{h_{i,j}} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^d (r-i+1)}{(c+1)!} \cdot \frac{\prod_{i=1}^d (r-i+2)}{d!} \cdot \frac{\prod_{i=d+1}^c (r-i+1)}{(c-d)!} \\ &= \frac{r!}{(c+1)!} \cdot \frac{(r+1)!}{d!} \cdot \frac{(r-d)!}{(c-d)!} \\ &= \frac{r!}{(c+1)!} \cdot \frac{(r+1)!}{d!} \cdot \frac{(r-d)!}{(r-c)!} \\ &= \frac{r!(r+1)!(c-d+1)}{(r-c)!(r+1-d)!d!(c+1)!} \\ &= \frac{r!(r+1)!(c+1)}{(r-c)!(r+1-d)!d!(c+1)!} - \frac{r!(r+1)!d}{(r-c)!(r+1-d)!d!(c+1)!} \\ &= \frac{r!}{(r-c)!c!} \cdot \frac{(r+1)!}{d!(r+1-d)!} - \frac{r!}{(r+1-d)!(d-1)!} \cdot \frac{(r+1)!}{(r-c)!(c+1)!} \\ &= \binom{r}{c} \cdot \binom{r+1}{d} - \binom{r+1}{c+1} \cdot \binom{r}{d-1} \end{aligned}$$

□

La homología adjunta de $A_n(1, 2)$

En este Capítulo se calcula la homología adjunta del nilradical $A_n(1, 2)$.

1. La familia $A_n(1, 2)$

Para cada $n \geq 2$ sea $A_n(1, 2)$ el nilradical de la subálgebra parabólica de $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$ correspondiente al subconjunto de raíces simples $\Pi_0 = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3\}$. Entonces tenemos:

$$\Delta(\mathfrak{n}) = \{e_1 - e_2\} \cup \{e_1 - e_j : 3 \leq j \leq n+1\} \cup \{e_2 - e_j : 3 \leq j \leq n+1\}$$

$$\Delta_1^+ = \{e_i - e_j : 3 \leq i < j \leq n+1\} \quad \text{y} \quad \Delta_1 = \Delta_1^+ \cup -\Delta_1^+.$$

Si denotamos $x = E_{1,2}$, $y_k = E_{2,k+2}$ y $z_k = E_{1,k+2}$ para $i = 1, \dots, n-1$, entonces $\{x, y_1, \dots, y_{n-1}, z_1, \dots, z_{n-1}\}$ es una base para $\mathfrak{n} = A_n(1, 2)$ y los únicos corchetes no nulos de elementos de la base son $[x, y_i] = z_i$ para $i = 1, \dots, n-1$. El centro de \mathfrak{n} es $\mathfrak{z} = \langle \{z_1, \dots, z_{n-1}\} \rangle$ y \mathfrak{n} está generada como álgebra de Lie por $V = X \oplus Y$, donde $X = \langle \{x\} \rangle$ e $Y = \langle \{y_1, \dots, y_{n-1}\} \rangle$.

La subálgebra parabólica $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{n}$ dentro de \mathfrak{g} es

\mathfrak{g}_1	x	z_1	z_2	\dots	z_{n-1}
	\mathfrak{g}_1	y_1	y_2	\dots	y_{n-1}
\mathfrak{g}_1					

Sabemos que $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\substack{3 \leq i, j \leq n+1 \\ i \neq j}} \mathfrak{g}_{e_i - e_j}$ y además $\mathfrak{g}_1 = [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] \oplus Z_{\mathfrak{g}_1}$, donde $Z_{\mathfrak{g}_1}$ es el centro de \mathfrak{g}_1 , por ser \mathfrak{g}_1 reductiva. La parte semisimple \mathfrak{g}_1^{ss} es entonces

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_1^{ss} = [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] &= \left[\bigoplus_{i=1}^{n+1} \mathbb{C}E_{i,i} \oplus \bigoplus_{\substack{3 \leq i, j \leq n+1 \\ i \neq j}} \mathbb{C}E_{i,j}, \bigoplus_{i=1}^{n+1} \mathbb{C}E_{i,i} \oplus \bigoplus_{\substack{3 \leq i, j \leq n+1 \\ i \neq j}} \mathbb{C}E_{i,j} \right] \\ &= \bigoplus_{\substack{3 \leq i, j \leq n+1 \\ i \neq j}} \mathbb{C}E_{i,j} \oplus \bigoplus_{\substack{3 \leq i, j \leq n+1 \\ i \neq j}} \mathbb{C}[E_{i,j}, E_{j,i}], \end{aligned}$$

donde $[E_{i,j}, E_{j,i}] = E_{i,i} - E_{j,j}$, y el conjunto $\{E_{i,i} - E_{j,j} : 3 \leq i, j \leq n+1, i \neq j\}$ es un conjunto generador de las matrices diagonales de traza cero de orden $n-1$. Por lo tanto, la parte semisimple $\mathfrak{g}_1^{ss} \simeq \mathfrak{sl}(n-1)$.

El centro $Z_{\mathfrak{g}_1}$ está formado por las matrices

$$H = \alpha E_{1,1} + \beta E_{2,2} + \gamma \sum_{i=3}^{n+1} E_{i,i}, \quad \text{con } \alpha + \beta + (n-1)\gamma = 0.$$

Fijamos como base del centro de \mathfrak{g}_1 al conjunto $\{H_1, H_2\}$ donde

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{n+1} \left((2n-1)E_{1,1} + (n-2)E_{2,2} - 3 \sum_{i=3}^{n+1} E_{i,i} \right), \\ H_2 &= \frac{1}{n+1} \left((n-2)E_{1,1} + (2n-1)E_{2,2} - 3 \sum_{i=3}^{n+1} E_{i,i} \right) \end{aligned}$$

y definimos

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{n+1} \left((2n-1)e_1 + (n-2)e_2 - 3 \sum_{i=3}^{n+1} e_i \right), \\ h_2 &= \frac{1}{n+1} \left((n-2)e_1 + (2n-1)e_2 - 3 \sum_{i=3}^{n+1} e_i \right) \end{aligned}$$

Como base para el dual de la subálgebra de Cartan de \mathfrak{g}_1 tomamos

$$(6.1) \quad \mathcal{H} = \{h_1, h_2, e_3, e_4, \dots, e_n\}.$$

Aquí $\{e_3, \dots, e_n\}$ es una base de $\langle \{e_3, \dots, e_n, e_{n+1}\} \rangle / \langle \{e_3 + \dots + e_{n+1} = 0\} \rangle$, el dual de la subálgebra de Cartan de la parte semisimple $\mathfrak{g}_1^{ss} \simeq \mathfrak{sl}(n-1)$.

Los subespacios X, Y y \mathfrak{z} de \mathfrak{n} son \mathfrak{g}_1 -irreducibles, donde los vectores de peso máximo son x, y_{n-1} y z_{n-1} respectivamente. Se puede ver que

- $[H_1, x] = x$ y $[H_2, x] = -x$,
- $[H_1, y_{n-1}] = y_{n-1}$ y $[H_2, y_{n-1}] = 2y_{n-1}$,
- $[H_1, z_{n-1}] = 2z_{n-1}$ y $[H_2, z_{n-1}] = z_{n-1}$.

Por lo tanto con respecto a \mathcal{H} , tenemos que:

- (1) x es de peso $(1, -1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-2})$;
- (2) y_{n-1} es de peso $(1, 2, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-2})$;

(3) z_{n-1} es de peso $(2, 1, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-2})$.

Notemos que en particular Y y \mathfrak{z} son equivalentes como representaciones de $\mathfrak{sl}(n-1)$ y ambos son equivalentes a la última representación fundamental de $\mathfrak{sl}(n-1)$, V_{n-2} .

OBSERVACIÓN 6.1. *Esta familia de álgebras de Lie es la misma considerada por Armstrong, Cairns y Jessup en [2].*

2. Homología Trivial de $A_n(1, 2)$.

Siguiendo a Kostant (ver Teorema 5.4), la homología trivial de \mathfrak{n} es

$$H_*(\mathfrak{n}) = \bigoplus_{w \in W^1} V^{-w_0(w\rho - \rho)}.$$

Entonces el problema se reduce a calcular el conjunto W^1 . Para ello definimos para $1 \leq a < b \leq n+1$, las permutaciones $\sigma_{a,b}$ y $\mu_{a,b}$ del conjunto $\{1, \dots, n+1\}$ definidas por:

$$\begin{aligned} \sigma_{a,b}^{-1}(1) &= a, & \sigma_{a,b}^{-1}(2) &= b, & \sigma_{a,b}^{-1}(i) &< \sigma_{a,b}^{-1}(j), & 3 \leq i < j \leq n+1; \\ \mu_{a,b}^{-1}(1) &= b, & \mu_{a,b}^{-1}(2) &= a, & \mu_{a,b}^{-1}(i) &< \mu_{a,b}^{-1}(j), & 3 \leq i < j \leq n+1. \end{aligned}$$

Es inmediato ver que:

$$(6.2) \quad \sigma_{a,b}(i) = \begin{cases} 1, & i = a; \\ 2, & i = b; \\ i+2, & i < a; \\ i+1, & a < i < b; \\ i, & i > b. \end{cases} \quad \mu_{a,b}(i) = \begin{cases} 1, & i = b; \\ 2, & i = a; \\ i+2, & i < a; \\ i+1, & a < i < b; \\ i, & i > b. \end{cases}$$

Con esto tenemos la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 6.2. *El conjunto W^1 viene dado por*

$$W^1 = \{\sigma_{a,b}, \mu_{a,b} : 1 \leq a < b \leq n+1\}.$$

Más aún tenemos,

$$\begin{aligned} \sigma_{a,b}\Delta^- \cap \Delta^+ &= \{e_1 - e_j : 3 \leq j \leq a+1\} \cup \{e_2 - e_j : 3 \leq j \leq b\} \\ \mu_{a,b}\Delta^- \cap \Delta^+ &= \{e_1 - e_2\} \cup \{e_1 - e_j : 3 \leq j \leq b\} \cup \{e_2 - e_j : 3 \leq j \leq a+1\} \end{aligned}$$

$$\text{y por lo tanto } \#\Phi_w = \begin{cases} a+b-3, & \text{si } w = \sigma_{a,b} \\ a+b-2, & \text{si } w = \mu_{a,b} \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. Si $e_i - e_j \in \Delta_1^+$ entonces $w^{-1}(e_i - e_j) = e_{w^{-1}(i)} - e_{w^{-1}(j)} > 0$ si y sólo si $w^{-1}(i) < w^{-1}(j)$ para $3 \leq i < j \leq n+1$, por lo tanto $w = \sigma_{a,b}$ ó $w = \mu_{a,b}$.

Sea $\alpha \in \Delta(\mathfrak{n})$ tal que $\sigma_{a,b}^{-1}(\alpha) \in \Delta^-$. Si $\alpha = e_1 - e_j$, $\sigma_{a,b}^{-1}(e_1 - e_j) < 0$ si y sólo si $a > \sigma_{a,b}^{-1}(j)$, es decir $3 \leq j \leq a+1$. Si $\alpha = e_2 - e_j$, $\sigma_{a,b}^{-1}(e_2 - e_j) < 0$ si y sólo si $b > \sigma_{a,b}^{-1}(j)$, es decir $3 \leq j \leq b$. Entonces

$$\sigma_{a,b}\Delta^- \cap \Delta^+ = \{e_1 - e_j : 3 \leq j \leq a+1\} \cup \{e_2 - e_j : 3 \leq j \leq b\}.$$

y de la misma forma,

$$\mu_{a,b}\Delta^- \cap \Delta^+ = \{e_1 - e_2\} \cup \{e_1 - e_j : 3 \leq j \leq b\} \cup \{e_2 - e_j : 3 \leq j \leq a+1\}$$

□

Sea W_1 el grupo de Weyl de \mathfrak{g}_1 . Entonces la única permutación w_0 en W_1 tal que $w_0(\Delta_1^+) = -\Delta_1^+$, es

$$w_0 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \dots & n & n+1 \\ n+1 & n & \dots & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Entonces tenemos los siguientes resultados:

PROPOSICIÓN 6.3. *Para cada $1 \leq a < b \leq n+1$ tenemos los siguientes pesos en términos de $\{e_1, e_2, \dots, e_{n+1}\}$:*

$$\begin{aligned} -w_0(\sigma_{a,b}\rho - \rho) &= (a-1, b-2, \underbrace{0, \dots, 0}_{n+1-b}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{b-a-1}, \underbrace{-2, \dots, -2}_{a-1}), \\ -w_0(\mu_{a,b}\rho - \rho) &= (b-1, a-2, \underbrace{0, \dots, 0}_{n+1-b}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{b-a-1}, \underbrace{-2, \dots, -2}_{a-1}) \end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned} w_0(\sigma_{a,b}\Delta^- \cap \Delta^+) &= \{e_1 - e_j : n+3-a \leq j \leq n+1\} \\ &\quad \cup \{e_2 - e_j : n+4-b \leq j \leq n+1\} \\ w_0(\mu_{a,b}\Delta^- \cap \Delta^+) &= \{e_1 - e_2\} \cup \{e_1 - e_j : n+4-b \leq j \leq n+1\} \\ &\quad \cup \{e_2 - e_j : n+3-a \leq j \leq n+1\} \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Los enunciados salen por cálculo directo. □

Por el Teorema (5.4) sabemos que para cada $1 \leq a < b \leq n+1$ existen submódulos \mathfrak{g}_1 -irreducibles $H^\sigma(a, b)$ de peso máximo $-w_0(\sigma_{a,b}\rho - \rho)$ y grado homológico $a+b-3$, y $H^\mu(a, b)$ de peso máximo $-w_0(\mu_{a,b}\rho - \rho)$ y de grado homológico $a+b-2$.

Sea $0 \leq p \leq 2n-1$. Para cada $1 \leq a \leq \lfloor \frac{p+2}{2} \rfloor$ definimos

$$H_{p,a}^\sigma = H^\sigma(a, p+3-a)$$

y para cada $1 \leq a \leq \lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor$ sea

$$H_{p,a}^\mu = H^\mu(a, p+2-a).$$

Notemos que $H_{p,a}^\sigma$ y $H_{p,a}^\mu$ son ambos submódulos de $H_p(\mathfrak{n})$.

La descripción completa de la homología trivial de \mathfrak{n} como módulo para \mathfrak{g}_1 es la siguiente.

TEOREMA 6.4. *La estructura de \mathfrak{g}_1 -módulo de la homología trivial de $\mathfrak{n} = A_n(1, 2)$,*

$$H_*(\mathfrak{n}) = \bigoplus_{p=0}^{2n-1} H_p(\mathfrak{n}), \text{ está dada por:}$$

- Para $0 \leq p \leq n$,

$$(6.3) \quad H_p(\mathfrak{n}) = \underbrace{\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array}}_{n-p-1} \oplus \underbrace{\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array}}_{n-p} \oplus \sum_{a=2}^{\lfloor \frac{p+2}{2} \rfloor} \underbrace{\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array}}_{n-a, n+a-p-2} \oplus \sum_{a=2}^{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor} \underbrace{\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array}}_{n-a, n+a-p-1}$$

- Para $n+1 \leq p \leq 2n-1$,

$$H_p(\mathfrak{n}) = \sum_{a=p+2-n}^{\lfloor \frac{p+2}{2} \rfloor} \underbrace{\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array}}_{n-a, n+a-p-2} \oplus \sum_{a=p+1-n}^{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor} \underbrace{\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array}}_{n-a, n+a-p-1}$$

Un \mathfrak{g}_1 -módulo irreducible W será identificado por un triple (c, d, D) , donde el par (c, d) determina la acción del centro de \mathfrak{g}_1 y D es un diagrama de Young que determina la acción de la parte simple de \mathfrak{g}_1 en W . Escribiremos

$$W \simeq (c, d, D).$$

Por ejemplo (ver Teorema 6.4), para $a \geq 2$,

$$(6.4) \quad H_{p,a}^\sigma \simeq (p+a-1, 2p-a+1, D_{n-a, n-p+a-2}),$$

$$(6.5) \quad H_{p,a}^\mu \simeq (2p-a, p+a-3, D_{n-a, n-p+a-1}),$$

y además para $a = 1$,

$$(6.6) \quad H_{p,1}^\sigma \simeq (p, 2p, D_{n-(p+1)}),$$

$$(6.7) \quad H_{p,1}^\mu \simeq (2p-1, p-2, D_{n-p}),$$

y

$$X \simeq (1, -1, D_0), \quad Y \simeq (1, 2, D_{n-2}), \quad \mathfrak{z} \simeq (2, 1, D_{n-2}).$$

3. Dimensiones

Conociendo los diagramas de Young de la homología trivial de $A_n(1, 2)$, podemos recalculer sus números de Betti:

TEOREMA 6.5 ([2]). Para $0 \leq p \leq 2n-1$,

$$\dim H_p(\mathfrak{n}) = \binom{n}{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor} \binom{n-1}{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor}$$

DEMOSTRACIÓN. Es suficiente calcular las dimensiones sólo para la primera mitad, ya que por la dualidad de Poincaré se tiene

$$\dim H_p(\mathfrak{n}) = \dim H_{2n-1-p}(\mathfrak{n}).$$

Por (6.3) y el Lema 5.13 tenemos, para $0 \leq p \leq n$:

$$\begin{aligned}
\dim H_p(\mathbf{n}) &= \left[\binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} \right] \\
&+ \sum_{a=2}^{\lfloor \frac{p+2}{2} \rfloor} \left[\binom{n-1}{n-a} \binom{n}{n+a-p-2} - \binom{n}{n+1-a} \binom{n-1}{n+a-p-3} \right] \\
&+ \sum_{a=2}^{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor} \left[\binom{n-1}{n-a} \binom{n}{n+a-p-1} - \binom{n}{n+1-a} \binom{n-1}{n+a-p-2} \right] \\
&= \binom{n}{p} + \sum_{a=1}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} \binom{n-1}{n-a-1} \binom{n}{n+a-p-1} + \sum_{a=2}^{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor} \binom{n-1}{n-a} \binom{n}{n+a-p-1} \\
&- \sum_{a=2}^{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor} \binom{n}{n+1-a} \left[\binom{n-1}{n+a-p-3} + \binom{n-1}{n+a-p-2} \right] \\
&- \sum_{a=\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor+1}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor+1} \binom{n}{n+1-a} \binom{n-1}{n+a-p-3} \\
&= \binom{n}{p} + \sum_{a=2}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} \binom{n}{n+a-p-1} \left[\binom{n-1}{n-a-1} + \binom{n-1}{n-a} \right] \\
&+ \binom{n-1}{n-2} \binom{n}{n-p} + \sum_{a=\lfloor \frac{p}{2} \rfloor+1}^{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor} \binom{n-1}{n-a} \binom{n}{n+a-p-1} \\
&- \sum_{a=2}^{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor} \binom{n}{n+1-a} \binom{n}{n+a-p-2} - \sum_{a=\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor+1}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor+1} \binom{n}{n+1-a} \binom{n-1}{n+a-p-3} \\
&= n \binom{n}{p} + \sum_{a=2}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} \binom{n}{n+a-p-1} \binom{n}{n-a} - \sum_{a=1}^{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor-1} \binom{n}{n-a} \binom{n}{n+a-p-1} \\
&+ \sum_{a=\lfloor \frac{p}{2} \rfloor+1}^{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor} \binom{n-1}{n-a} \binom{n}{n+a-p-1} - \sum_{a=\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor+1}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor+1} \binom{n}{n+1-a} \binom{n-1}{n+a-p-3} \\
&= n \binom{n}{p} + \sum_{a=\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} \binom{n}{n+a-p-1} \binom{n}{n-a} - \binom{n}{n-1} \binom{n}{n-p} \\
&+ \sum_{a=\lfloor \frac{p}{2} \rfloor+1}^{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor} \binom{n-1}{n-a} \binom{n}{n+a-p-1} - \sum_{a=\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} \binom{n}{n-a} \binom{n-1}{n+a-p-2} \\
&= \sum_{a=\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} \left[\binom{n}{n+a-p-1} - \binom{n-1}{n+a-p-2} \right] \binom{n}{n-a} \\
&+ \sum_{a=\lfloor \frac{p}{2} \rfloor+1}^{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor} \binom{n-1}{n-a} \binom{n}{n+a-p-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dim H_p(\mathfrak{n}) &= \sum_{a=\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} \binom{n-1}{n+a-p-1} \binom{n}{n-a} + \sum_{a=\lfloor \frac{p}{2} \rfloor+1}^{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor} \binom{n-1}{n-a} \binom{n}{n+a-p-1} \\ &= \binom{n}{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor} \binom{n-1}{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} \end{aligned}$$

□

4. La sucesión exacta larga y la propiedad de cancelación para $A_n(1, 2)$

Una completa descripción de la estructura de \mathfrak{g}_1 -módulo de la homología adjunta del álgebra $\mathfrak{n} = A_n(1, 2)$, se sigue del hecho de que la sucesión exacta larga

$$(6.8) \quad \rightarrow H_{p+1}(\mathfrak{n}) \otimes (X \oplus Y) \xrightarrow{\delta_{p+1}} H_p(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z} \rightarrow H_p(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}) \rightarrow H_p(\mathfrak{n}) \otimes (X \oplus Y) \xrightarrow{\delta_p} H_{p-1}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z} \rightarrow$$

tiene la *propiedad de cancelación* (ver la Sección 4 del Capítulo 5).

Para entender los morfismos δ_p , estudiamos en detalle la estructura de \mathfrak{g}_1 -módulo de la sucesión exacta larga. En particular, en algunos casos, construimos vectores de peso máximo para algunos submódulos irreducibles y luego evaluamos los morfismos de conexión δ_p .

Para esta subálgebra vamos a necesitar conocer los vectores de peso máximo del producto tensorial $V_D \otimes V_{n-2}$ (ver la sección 6.1), recordemos que tanto Y como \mathfrak{z} son isomorfas a V_{n-2} como representaciones de $\mathfrak{sl}(n-1)$. Para ello vamos a utilizar el Teorema 5.11 con $r = n-1$.

Vamos a analizar primero la acción del centro de \mathfrak{g}_1 . Para ello recordemos que las coordenadas de X , Y y \mathfrak{z} respecto de $\{h_1, h_2\} \subseteq \mathcal{H}$ (ver (6.1)) son $(1, -1)$, $(1, 2)$ y $(2, 1)$ respectivamente, y las coordenadas de los vectores de peso máximo de la homología trivial se pueden ver en el Teorema 6.4.

La siguiente tabla que nos da las coordenadas de los productos tensoriales necesarios para calcular la homología adjunta de \mathfrak{n} .

w	$H_{p,a}^w \otimes X$	$H_{p,a}^w \otimes Y$	$H_{p-1,a'}^w \otimes \mathfrak{z}$
σ	$(p+a, 2p-a)$	$(p+a, 2p-a+3)$	$(p+a', 2p-a')$
μ	$(2p-a+1, p+a-4)$	$(2p-a+1, p+a-1)$	$(2p-a', p+a'-3)$

A partir de esta tabla, tenemos el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 6.6. *Para $0 \leq p \leq 2n-1$, todas las componentes isotópicas de $H_p(\mathfrak{n}) \otimes (X \oplus Y)$ de tipos distintos al de $H_{p, \lfloor \frac{p+2}{2} \rfloor}^\sigma \otimes X$, son de libre de multiplicidad; y la componente isotópica de $H_p(\mathfrak{n}) \otimes (X \oplus Y)$ que contiene a $H_{p, \lfloor \frac{p+2}{2} \rfloor}^\sigma \otimes X$ es de multiplicidad 2. Además $H_p(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}$ es libre de multiplicidad.*

DEMOSTRACIÓN. De acuerdo a la tabla (6.9), el centro de \mathfrak{g}_1 actúa por diferentes pesos en la familia de módulos $\{H_{p,a}^\sigma \otimes X, H_{p,a}^\sigma \otimes Y, H_{p,a}^\mu \otimes X, H_{p,a}^\mu \otimes Y\}$ para todos los valores posibles de a , con una única excepción. De hecho $(p+a, 2p-a) = (2p-a'+1, p+a'-1)$ se satisface sólo con $a = \lfloor \frac{p+2}{2} \rfloor$ y $a' = \lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor$.

Notemos que, por un lado

$$H_{p, \lfloor \frac{p+2}{2} \rfloor}^\sigma \otimes X \simeq \left(p + \lfloor \frac{p+2}{2} \rfloor, 2p - \lfloor \frac{p+2}{2} \rfloor, D_{n - \lfloor \frac{p+2}{2} \rfloor, n - \lfloor \frac{p+3}{2} \rfloor} \right),$$

y por otro lado,

$$\begin{aligned} H_{p, \lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor}^\mu \otimes Y &\simeq \left(p + \lfloor \frac{p+2}{2} \rfloor, 2p - \lfloor \frac{p+2}{2} \rfloor, D_{n-2, n - \lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor, n - \lfloor \frac{p+2}{2} \rfloor} \right) \\ &\oplus \left(\lfloor \frac{p+2}{2} \rfloor, \lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor, D_{n - \lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor, n - \lfloor \frac{p+4}{2} \rfloor} \right) \\ &\oplus \left(\lfloor \frac{p+2}{2} \rfloor, \lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor, D_{n - \lfloor \frac{p+3}{2} \rfloor, n - \lfloor \frac{p+2}{2} \rfloor} \right), \end{aligned}$$

donde el tercer sumando no existe si p es impar.

Es decir que $H_{p, \lfloor \frac{p+2}{2} \rfloor}^\sigma \otimes X$ coincide con un submódulo de $H_{p, \lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor}^\mu \otimes Y$ (el segundo sumando si p es impar y el tercero si p es par).

Por lo tanto la componente isotópica que contiene a $H_{p, \lfloor \frac{p+2}{2} \rfloor}^\sigma \otimes X$ tiene multiplicidad 2.

Análogamente $H_p(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}$ es libre de multiplicidad. \square

Enunciamos además el siguiente Lema, que será de utilidad más adelante,

LEMA 6.7. *El mapa lineal $\partial_0 : \Lambda^p \mathfrak{n} \rightarrow \Lambda^{p-1} \mathfrak{n}$ satisface:*

1. $\text{Im } \partial_0 \subseteq \Lambda^k Y \otimes \Lambda^l \mathfrak{z}$, con $l > 0$.
2. Para $l \geq 1$, $y_{i_1} \wedge \dots \wedge y_{i_l} \wedge \dots \wedge y_{i_m} \wedge z_{i_1} \wedge \dots \wedge z_{i_l} \notin \text{Im } \partial_0$.

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de la definición de ∂_0 y el corchete de \mathfrak{n} . \square

PROPOSICIÓN 6.8. *La acción del \mathfrak{g}_1 -morfismo δ_p , para $0 \leq p \leq 2n - 1$, está dada en cada sumódulo irreducible de $H_p(\mathfrak{n}) \otimes (X \oplus Y)$ de la siguiente forma:*

1. $\delta_p(H_{p,a}^\sigma \otimes Y) = 0$, para todo $\text{máx}\{1, p+2-n\} \leq a \leq \lfloor \frac{p+2}{2} \rfloor$,
2. $\delta_p(H_{p,a}^\mu \otimes Y) = 0$, para todo $\text{máx}\{1, p+1-n\} \leq a \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$.
3. Si p es impar, $0 \neq \delta_p \left(H_{p, \frac{p+1}{2}}^\mu \otimes Y(s) \right) \subseteq H_{p-1, \frac{p+1}{2}}^\sigma \otimes \mathfrak{z}(s)$, para cada s posible de acuerdo al teorema 5.11,
4. $0 \neq \delta_p(H_{p,a}^\sigma \otimes X) \subseteq H_{p-1,a}^\sigma \otimes \mathfrak{z}$, para todo $\text{máx}\{1, p+2-n\} \leq a \leq \lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor$,
5. Si p es par, $\delta_p \left(H_{p, \frac{p+2}{2}}^\sigma \otimes X \right) = 0$,
6. $0 \neq \delta_p(H_{p,a}^\mu \otimes X) \subseteq H_{p-1,a-1}^\mu \otimes \mathfrak{z}$, para todo $\text{máx}\{2, p+1-n\} \leq a \leq \lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor$,
7. $\delta_p(H_{p,1}^\mu \otimes X) = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que $\delta_p(H_{p,a}^\sigma \otimes Y) \subseteq H_{p-1}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}$ y $\delta_p(H_{p,a}^\mu \otimes Y) \subseteq H_{p-1}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}$. En lo que sigue vamos a utilizar los resultados de la Tabla (6.9).

1. El centro de \mathfrak{g}_1 actúa por distintos pesos en $H_{p,a}^\sigma \otimes Y$ y todos los submódulos irreducibles de $H_{p-1}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}$.
2. El centro de \mathfrak{g}_1 actúa en $H_{p,a}^\mu \otimes Y$ por $(2p - a + 1, p + a - 1)$ y actúa por diferentes pesos en todos los submódulos de $H_{p-1}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}$, excepto en $H_{p-1,a'}^\sigma \otimes \mathfrak{z}$ con $a' = p + 1 - a$. Como $a, a' \leq [\frac{p+1}{2}]$, entonces $a + a' \leq 2[\frac{p+1}{2}] \leq p + 1 = a + a'$. Por lo tanto se sigue que p debe ser impar y $a = a' = \frac{p+1}{2}$.
3. Si p es impar, entonces por el item anterior tenemos

$$\delta_p \left(H_{p, \frac{p+1}{2}}^\mu \otimes Y \right) \subseteq H_{p-1, \frac{p+1}{2}}^\sigma \otimes \mathfrak{z}.$$

Por el Teorema 6.4,

$$v = x \wedge y_{n-1} \wedge \dots \wedge y_{n+1-\frac{p+1}{2}} \wedge z_{n-1} \wedge \dots \wedge z_{n+1-\frac{p+1}{2}}$$

es un vector de peso máximo de $H_{p, \frac{p+1}{2}}^\mu$, y por el Teorema 5.11,

$$w_s = -v \otimes y_s + \sum_{\substack{J \in A(s) \\ J \neq \{s\}}} \frac{1}{\sigma_J} U_{Jv} \otimes y_{\max(J)}$$

es un vector de peso máximo de $H_{p, \frac{p+1}{2}}^\mu \otimes Y(s)$ para cada s posible.

Ahora,

$$\begin{aligned} \partial_1(w_s) &= \partial_1(-v \otimes y_s) + \partial_1 \left(\sum_{\substack{J \in A(s) \\ J \neq \{s\}}} \frac{1}{\sigma_J} U_{Jv} \otimes y_{\max(J)} \right) \\ &= -y_{n-1} \wedge \dots \wedge y_{n+1-\frac{p+1}{2}} \wedge z_{n-1} \wedge \dots \wedge z_{n+1-\frac{p+1}{2}} \otimes z_s \\ &\quad + \partial_1 \left(\sum_{\substack{J \in A(s) \\ J \neq \{s\}}} \frac{1}{\sigma_J} U_{Jv} \otimes y_{\max(J)} \right) \\ &= -y_{n-1} \wedge \dots \wedge y_{n+1-\frac{p+1}{2}} \wedge z_{n-1} \wedge \dots \wedge z_{n+1-\frac{p+1}{2}} \otimes z_s \\ &\quad + \sum_{\substack{J \in A(s) \\ J \neq \{s\}}} \frac{1}{\sigma_J} U_J(y_{n-1} \wedge \dots \wedge y_{n+1-\frac{p+1}{2}} \wedge z_{n-1} \wedge \dots \wedge z_{n+1-\frac{p+1}{2}}) \otimes z_{\max(J)} \\ &= \sum_{J \in A(s)} \frac{1}{\sigma_J} U_J(y_{n-1} \wedge \dots \wedge y_{n+1-\frac{p+1}{2}} \wedge z_{n-1} \wedge \dots \wedge z_{n+1-\frac{p+1}{2}}) \otimes z_{\max(J)} \end{aligned}$$

que es un vector de peso máximo de $H_{p-1, \frac{p+1}{2}}^\sigma \otimes \mathfrak{z}(s)$ por el Teorema 5.11.

4. El centro de \mathfrak{g}_1 actúa en $H_{p,a}^\sigma \otimes X$ por $(a, p - a)$ y actúa por diferentes pesos en todos los submódulos de $H_{p-1,a'}^\sigma \otimes \mathfrak{z}$ y $H_{p-1,a'}^\mu \otimes \mathfrak{z}$ salvo en $H_{p-1,a}^\sigma \otimes \mathfrak{z}$. Por lo tanto $\delta_p(H_{p,a}^\sigma \otimes X) \subseteq H_{p-1,a}^\sigma \otimes \mathfrak{z}$ para $\max\{1, p + 2 - n\} \leq a \leq [\frac{p+1}{2}]$.

Para ver que $\delta_p(H_{p,a}^\sigma \otimes X) \neq 0$, evaluamos δ_p en el vector de peso máximo v_a de $H_{p,a}^\sigma \otimes X$.

- Para $a = 1$, el vector de peso máximo de $H_{p,1}^\sigma \otimes X$ es

$$v_1 = y_{n-1} \wedge \dots \wedge y_{n-p} \otimes x,$$

- Para $2 \leq a \leq \lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor$ el vector de peso máximo de $H_{p,a}^\sigma \otimes X$ es

$$v_a = y_{n-1} \wedge \dots \wedge y_{n+a-p-1} \wedge z_{n-1} \wedge \dots \wedge z_{n+1-a} \otimes x$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \partial_1(v_1) &= \sum_{i=1}^p (-1)^i y_{n-1} \wedge \dots \wedge \widehat{y_{n-i}} \wedge \dots \wedge y_{n-p} \otimes z_{n-i} \\ \partial_1(v_a) &= \sum_{i=1}^{p+1-a} (-1)^i y_{n-1} \wedge \dots \wedge \widehat{y_{n-i}} \wedge \dots \\ &\quad \dots \wedge y_{n+a-p-1} \wedge z_{n-1} \wedge \dots \wedge z_{n+1-a} \otimes z_{n-i} \end{aligned}$$

y la conclusión se sigue del Lema 6.7.

5. Si p es par, el centro de \mathfrak{g}_1 actúa en $H_{p, \frac{p+2}{2}}^\sigma \otimes X$ por $\left(\frac{3p+2}{2}, \frac{3p-2}{2}\right)$ y actúa por diferentes pesos en todos los submódulos $H_{p-1, a'}^\sigma \otimes \mathfrak{z}$ y $H_{p-1, a'}^\mu \otimes \mathfrak{z}$.
6. El centro de \mathfrak{g}_1 actúa en $H_{p,a}^\mu \otimes X$ por $(2p-a+1, p+a-4)$ y actúa por diferentes pesos en todos los submódulos $H_{p-1, a'}^\sigma \otimes \mathfrak{z}$ y $H_{p-1, a'}^\mu \otimes \mathfrak{z}$ excepto por $H_{p-1, a-1}^\mu \otimes \mathfrak{z}$. Por lo tanto $\delta_p(H_{p,a}^\mu \otimes X) \subseteq H_{p-1, a-1}^\mu \otimes \mathfrak{z}$ para $\max\{2, p+1-n\} \leq a \leq \lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor$.

Para ver que $\delta_p(H_{p,a}^\mu \otimes X) \neq 0$, evaluamos δ_p en un vector de peso máximo v_a de $H_{p,a}^\mu \otimes X$.

Para $2 \leq a \leq \lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor$,

$$v_a = x \wedge y_{n-1} \wedge \dots \wedge y_{n+1-a} \wedge z_{n-1} \wedge \dots \wedge z_{n+a-p} \otimes x$$

es un vector de peso máximo de $H_{p,a}^\mu \otimes X$. Entonces

$$\partial_1(v_a) = \sum_{i=1}^{a-1} (-1)^{i+1} x \wedge y_{n-1} \wedge \dots \wedge \widehat{y_{n-i}} \wedge \dots \wedge y_{n+1-a} \wedge z_{n-1} \wedge \dots \wedge z_{n+a-p} \otimes z_{n-i}$$

y la conclusión se sigue del Lema 6.7.

7. El centro de \mathfrak{g}_1 actúa en $H_{p,1}^\mu \otimes X$ por $(2p, p-3)$ y actúa por diferentes pesos en todos los submódulos $H_{p-1, a'}^\sigma \otimes \mathfrak{z}$ y $H_{p-1, a'}^\mu \otimes \mathfrak{z}$. □

Por lo tanto podemos concluir:

TEOREMA 6.9. *La sucesión exacta larga de \mathfrak{g}_1 -módulos (6.8), tiene la propiedad de cancelación.*

DEMOSTRACIÓN. Dado que $H_{p-1}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}$ es de multiplicidad libre, es suficiente mostrar que cuando $\delta_p(W) = 0$, para un submódulo irreducible W , entonces $H_{p-1}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}$ no contiene ningún submódulo isomorfo a W .

De hecho este es el caso, por lo visto en la Proposición 6.8. □

5. La homología adjunta de $A_n(1, 2)$

De acuerdo al Teorema 6.9, podemos dar una completa descripción de la estructura de \mathfrak{g}_1 -módulo de $H_p(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}) = \ker \delta_p \oplus \text{coker } \delta_{p+1}$, para todo $p = 0, 1, \dots, 2n - 1$, entendiendo qué \mathfrak{g}_1 -submódulos irreducibles ocurren simultáneamente en $H_p(\mathfrak{n}) \otimes (X \otimes Y)$ y $H_{p-1}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}$ y cuáles no. Los que aparecen en ambos se cancelan, los que quedan en el primero es $\ker \delta_p$, mientras que lo que queda en el segundo es $\text{coker } \delta_p$. Esto es esencialmente lo que hicimos en la Proposición 6.8.

OBSERVACIÓN 6.10. *Recordemos que:*

- *Un submódulo $H_{p,a}^\sigma$ existe si y sólo si $a \in \mathbb{N}$ y $\max\{1, p + 2 - n\} \leq a \leq \lfloor \frac{p+2}{2} \rfloor$.*
- *Un submódulo $H_{p,a}^\mu$ existe si y sólo si $a \in \mathbb{N}$ y $\max\{1, p + 1 - n\} \leq a \leq \lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor$.*

Si p es par, de la Proposición 6.8 obtenemos que

$$\ker \delta_p = H_p(\mathfrak{n}) \otimes Y \oplus H_{p, \frac{p+2}{2}}^\sigma \otimes X \oplus H_{p,1}^\mu \otimes X.$$

Si p es impar, cada uno de los submódulos de $H_{p, \frac{p+1}{2}}^\mu \otimes Y$ y $H_{p, \frac{p+1}{2}}^\sigma \otimes X$ no están en $\ker \delta_p$. Sin embargo, el submódulo irreducible de $H_{p, \frac{p+1}{2}}^\mu \otimes Y$ que es isomorfo a $H_{p, \frac{p+1}{2}}^\sigma \otimes X$ y este último tienen la misma imagen por δ_p (que es un submódulo irreducible de $H_{p-1, \frac{p+1}{2}}^\sigma \otimes \mathfrak{z}$). Entonces $\ker \delta_p$ contiene un submódulo irreducible W isomorfo a $H_{p, \frac{p+1}{2}}^\sigma \otimes X$ que vive en la suma directa $\left(H_{p, \frac{p+1}{2}}^\sigma \otimes X \right) \oplus \left(H_{p, \frac{p+1}{2}}^\mu \otimes Y \right)$; con lo cual

$$\ker \delta_p = \frac{H_p(\mathfrak{n}) \otimes Y}{H_{p, \frac{p+1}{2}}^\mu \otimes Y} \oplus W \oplus H_{p,1}^\mu \otimes X$$

Entonces, uniendo los casos par e impar y teniendo en cuenta la Observación 6.10, obtenemos que para todo $1 \leq p \leq 2n - 1$,

$$(6.10) \quad \ker \delta_p \simeq \frac{H_p(\mathfrak{n}) \otimes Y}{H_{p, \frac{p+1}{2}}^\mu \otimes Y} \oplus H_{p, \frac{p+2}{2}}^\sigma \otimes X \oplus H_{p, \frac{p+1}{2}}^\sigma \otimes X \oplus H_{p,1}^\mu \otimes X$$

Para conocer la estructura de $\text{coker } \delta_{p+1}$, para $1 \leq p \leq 2n - 1$, notemos que $H_{p,a}^\sigma \otimes \mathfrak{z}$ y $H_{p,a-1}^\mu \otimes \mathfrak{z}$ tienen en general tres submódulos irreducibles cada uno. Se sigue de (6.4) y (6.5) que para $a \geq 2$:

$$H_{p,a}^\sigma \otimes \mathfrak{z} = H_{p,a}^\sigma \otimes \mathfrak{z}(n-1) \oplus H_{p,a}^\sigma \otimes \mathfrak{z}(n-p+a-2) \oplus H_{p,a}^\sigma \otimes \mathfrak{z}(n-a)$$

donde el segundo sumando existe sólo si $a \geq p+3-n$ y el tercer sumando sólo existe para $a \leq \lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor$.

$$H_{p,a}^\mu \otimes \mathfrak{z} = H_{p,a}^\mu \otimes \mathfrak{z}(n-1) \oplus H_{p,a}^\mu \otimes \mathfrak{z}(n-p+a-1) \oplus H_{p,a}^\mu \otimes \mathfrak{z}(n-a).$$

donde el segundo sumando existe sólo si $a \geq p+2-n$ y el tercer sumando sólo existe para $a \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$.

Para $a = 1$ (ver (6.6) y (6.7)),

$$\begin{aligned} H_{p,1}^\sigma \otimes \mathfrak{z} &= H_{p,1}^\sigma \otimes \mathfrak{z}(n-1) \oplus H_{p,1}^\sigma \otimes \mathfrak{z}(n-p-1); \\ H_{p,1}^\mu \otimes \mathfrak{z} &= H_{p,1}^\mu \otimes \mathfrak{z}(n-1) \oplus H_{p,1}^\mu \otimes \mathfrak{z}(n-p). \end{aligned}$$

Como $H_{p+1,a}^\sigma \otimes X$ es del mismo tipo de $H_{p,a}^\sigma \otimes \mathfrak{z}(n-p+a-2)$ y $H_{p+1,a}^\mu \otimes X$ es del mismo tipo de $H_{p,a-1}^\mu \otimes \mathfrak{z}(n-a+1)$, se sigue por la Proposición 6.8 que

$$\begin{aligned} \delta_{p+1}(H_{p+1,a}^\sigma \otimes X) &= H_{p,a}^\sigma \otimes \mathfrak{z}(n-p+a-2) \\ \delta_{p+1}(H_{p+1,a}^\mu \otimes X) &= H_{p,a-1}^\mu \otimes \mathfrak{z}(n-a+1). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \text{coker } \delta_{p+1} &= \sum_{a=\text{máx}\{1,p+2-n\}}^{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor} H_{p,a}^\sigma \otimes \mathfrak{z}(n-1) \oplus \sum_{a=\text{máx}\{2,p+2-n\}}^{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor} H_{p,a}^\sigma \otimes \mathfrak{z}(n-a) \\ &\oplus \sum_{a=\text{máx}\{2,p+1-n\}}^{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor} H_{p,a}^\mu \otimes \mathfrak{z}(n-1) \\ &\oplus \sum_{a=\text{máx}\{1,p+2-n\}}^{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor} H_{p,a}^\mu \otimes \mathfrak{z}(n-p+a-1) \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 6.11. *Notemos que, en virtud del Teorema 5.11, podemos exhibir explícitamente vectores de peso máximo para todos los submódulos irreducibles de $\ker \delta_p$ y $\text{coker } \delta_{p+1}$.*

TEOREMA 6.12. *Para $0 \leq p \leq 2n-1$, la estructura de \mathfrak{g}_1 -módulo de la homología adjunta del álgebra de Lie $\mathfrak{n} = A_n(1, 2)$ es la siguiente:*

$$\begin{aligned} H_p(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}) &\simeq \frac{H_p(\mathfrak{n}) \otimes Y}{H_{p, \frac{p+1}{2}}^\mu \otimes Y} \oplus (H_{p, \frac{p+2}{2}}^\sigma \otimes X) \oplus (H_{p,1}^\mu \otimes X) \oplus (H_{p, \frac{p+1}{2}}^\sigma \otimes X) \\ &\oplus \sum_{\substack{a=p+2-n \\ a \geq 2}}^{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor} H_{p,a}^\sigma \otimes \mathfrak{z}(n-1) \oplus \sum_{a=p+2-n}^{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor} H_{p,a}^\sigma \otimes \mathfrak{z}(n-a) \\ &\oplus \sum_{\substack{a=p+1-n \\ a \geq 2}}^{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor} H_{p,a}^\mu \otimes \mathfrak{z}(n-1) \oplus \sum_{a=p+2-n}^{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor} H_{p,a}^\mu \otimes \mathfrak{z}(n-p-1+a). \end{aligned}$$

Siempre teniendo en cuenta la Observación 6.10.

COROLARIO 6.13. *Los primeros grupos de homología adjunta del álgebra de Lie $\mathfrak{n} = A_n(1, 2)$ como \mathfrak{g}_1 -módulos, para $n \geq 4$, son:*

$$H_0(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}) \simeq H_0(\mathfrak{n}) \otimes Y \oplus H_{0,1}^\sigma \otimes X;$$

$$\begin{aligned} H_1(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}) &\simeq \frac{H_1(\mathfrak{n}) \otimes Y}{H_{1,1}^\mu \otimes Y} \oplus H_{1,1}^\mu \otimes X \oplus (H_{1,1}^\sigma \otimes X \oplus H_{1,1}^\sigma \otimes \mathfrak{z}(n-1)) \\ &\quad \oplus (H_{1,1}^\mu \otimes \mathfrak{z}(n-1)) \\ &\simeq H_{1,1}^\sigma \otimes Y \oplus H_{1,1}^\mu \otimes X \oplus H_{1,1}^\sigma \otimes X \oplus H_{1,1}^\sigma \otimes \mathfrak{z}(n-1) \oplus H_{1,1}^\mu \otimes \mathfrak{z}(n-1) \\ &\simeq H_{1,1}^\sigma \otimes Y(n-1) \oplus (H_{1,1}^\sigma \otimes Y(n-2)) \oplus (H_{1,1}^\mu \otimes X) \oplus (H_{1,1}^\sigma \otimes X) \\ &\quad \oplus H_{1,1}^\sigma \otimes \mathfrak{z}(n-1) \oplus H_{1,1}^\mu \otimes \mathfrak{z}(n-1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_2(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}) &\simeq H_2(\mathfrak{n}) \otimes Y \oplus H_{2,2}^\sigma \otimes X \oplus H_{2,1}^\mu \otimes X \oplus H_{2,1}^\sigma \otimes \mathfrak{z}(n-1) \oplus H_{2,1}^\mu \otimes \mathfrak{z}(n-2) \\ &\simeq H_{2,1}^\sigma \otimes Y(n-1) \oplus H_{2,1}^\sigma \otimes Y(n-3) \oplus H_{2,2}^\sigma \otimes Y(n-1) \oplus H_{2,2}^\sigma \otimes Y(n-2) \\ &\quad \oplus H_{2,1}^\mu \otimes Y(n-1) \oplus H_{2,1}^\mu \otimes Y(n-2) \oplus H_{2,2}^\sigma \otimes X \oplus H_{2,1}^\mu \otimes X \oplus H_{2,1}^\sigma \otimes \mathfrak{z}(n-1) \\ &\quad \oplus H_{2,1}^\mu \otimes \mathfrak{z}(n-2). \end{aligned}$$

Más aún, los vectores de peso máximo de la homología para todo sumando irreducible son:

$$\begin{aligned} H_0(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}) &= \langle 1 \otimes y_{n-1} \rangle \oplus \langle 1 \otimes x \rangle \\ H_1(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}) &= \langle -y_{n-1} \otimes y_{n-1} \rangle \oplus \langle -y_{n-1} \otimes y_{n-2} + y_{n-2} \otimes y_{n-1} \rangle \oplus \langle x \otimes x \rangle \\ &\quad \oplus \langle y_{n-1} \otimes x + x \otimes y_{n-1} \rangle \\ H_2(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}) &= \langle -y_{n-1} \wedge y_{n-2} \otimes y_{n-1} \rangle \\ &\quad \oplus \langle -y_{n-1} \wedge y_{n-2} \otimes y_{n-3} + y_{n-1} \wedge y_{n-3} \otimes y_{n-2} - y_{n-2} \wedge y_{n-3} \otimes y_{n-1} \rangle \\ &\quad \oplus \langle -y_{n-1} \wedge z_{n-1} \otimes y_{n-1} \rangle \\ &\quad \oplus \langle -y_{n-1} \wedge z_{n-1} \otimes y_{n-2} + \frac{1}{2}y_{n-2} \wedge z_{n-1} \otimes y_{n-1} + \frac{1}{2}y_{n-1} \wedge z_{n-2} \otimes y_{n-1} \rangle \\ &\quad \oplus \langle -x \wedge z_{n-1} \otimes y_{n-1} \rangle \oplus \langle -x \wedge z_{n-1} \otimes y_{n-2} + x \wedge z_{n-2} \otimes y_{n-1} \rangle \\ &\quad \oplus \langle y_{n-1} \wedge z_{n-1} \otimes x \rangle \oplus \langle x \wedge z_{n-1} \otimes x \rangle \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Las descomposiciones en la primera parte se siguen del Teorema 6.12. Los vectores de peso máximo se construyen de acuerdo al Teorema 5.11 usando aquellos del Teorema 6.4 \square

Homología adjunta del álgebra de Lie de Heisenberg

En este Capítulo vamos a calcular los grupos de homología adjunta del álgebra de Lie de Heisenberg de dimensión $2n - 1$ y además las dimensiones de estos grupos.

Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$ y $\Pi_0 = \{e_1 - e_2, e_n - e_{n+1}\}$, entonces tenemos que $A_n(1, n) = \mathcal{H}_{2n-1}$ es el álgebra de Lie de Heisenberg de dimensión $2n - 1$, es decir

$$\mathfrak{n} = \langle \{x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{n-1}, z\} \rangle,$$

donde los únicos corchetes no nulos de elementos de la base son $[x_k, y_k] = z$. Llamemos $X = \langle \{x_1, \dots, x_{n-1}\} \rangle$, $Y = \langle \{y_1, \dots, y_{n-1}\} \rangle$ y $\mathfrak{z} = \langle \{z\} \rangle$. Entonces \mathcal{H}_{2n-1} está generada como álgebra de Lie por $V = X \oplus Y$.

La subálgebra parabólica dentro de $\mathfrak{sl}(n+1)$ es:

\mathfrak{g}_1	x_1	x_2	\dots	x_{n-1}	z
\mathfrak{g}_1					y_1
					y_2
					\vdots
					y_{n-1}
					\mathfrak{g}_1

Al igual que en el Capítulo 6, la parte semisimple \mathfrak{g}_1^{ss} es

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_1^{ss} = [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] &= \left[\bigoplus_{i=1}^{n+1} \mathbb{C}E_{i,i} \oplus \bigoplus_{\substack{2 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \mathbb{C}E_{i,j}, \bigoplus_{i=1}^{n+1} \mathbb{C}E_{i,i} \oplus \bigoplus_{\substack{2 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \mathbb{C}E_{i,j} \right] \\ &= \bigoplus_{\substack{2 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \mathbb{C}E_{i,j} \oplus \bigoplus_{\substack{2 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \mathbb{C}[E_{i,j}, E_{j,i}]. \end{aligned}$$

Es decir, $\mathfrak{g}_1^{ss} \simeq \mathfrak{sl}(n-1)$.

El centro $Z_{\mathfrak{g}_1}$ está formado por las matrices

$$H = \alpha E_{1,1} + \beta \sum_{i=2}^n E_{i,i} + \gamma E_{n+1, n+1}, \quad \text{con } \alpha + (n-1)\beta + \gamma = 0.$$

Fijamos como base del centro de \mathfrak{g}_1 al conjunto $\{H_1, H_2\}$ donde

$$H_1 = E_{1,1} - E_{n+1,n+1},$$

$$H_2 = \frac{1}{n+1} \left((2-n)E_{1,1} + 3 \sum_{i=2}^n E_{i,i} + (1-2n)E_{n+1,n+1} \right)$$

y definimos

$$h_1 = e_1 - e_{n+1},$$

$$h_2 = \frac{1}{n+1} \left((2-n)e_1 + 3 \sum_{i=2}^n e_i + (1-2n)e_{n+1} \right)$$

Como base para el dual de la subálgebra de Cartan de \mathfrak{g}_1 tomamos

$$(7.1) \quad \mathcal{H} = \{h_1, h_2, e_2, e_3, \dots, e_{n-1}\}.$$

Aquí $\{e_2, \dots, e_{n-1}\}$ es una base de $\langle \{e_2, \dots, e_{n-1}, e_n\} / \langle \{e_2 + \dots + e_n = 0\} \rangle \rangle$, el dual de la subálgebra de Cartan de la parte semisimple $\mathfrak{g}_1^{ss} \simeq \mathfrak{sl}(n-1)$.

Los subespacios \mathfrak{z} , X e Y de \mathfrak{n} son \mathfrak{g}_1 -irreducibles, donde los vectores de peso máximo son z , x_{n-1} e y_1 respectivamente.

Al igual que en el caso anterior se puede ver que con respecto a \mathcal{H} , tenemos que:

- (1) z es de peso $(2, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-2})$;
- (2) x_{n-1} es de peso $(1, -1, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-2})$;
- (3) y_1 es de peso $(1, 2, \underbrace{1, 0, \dots, 0}_{n-2})$.

Para el caso $\mathfrak{n} = \mathcal{H}_{2n-1}$ se tiene:

$$\Delta(\mathfrak{n}) = \{e_1 - e_j : 2 \leq j \leq n\} \cup \{e_i - e_{n+1} : 2 \leq i \leq n\} \cup \{e_1 - e_{n+1}\},$$

$$\Delta_1^+ = \{e_i - e_j : 2 \leq i < j \leq n\}.$$

Por el Teorema de Kostant, sólo necesitamos calcular el conjunto W^1 para conocer la homología trivial de esta álgebra.

Para ellos definimos para $1 \leq a < b \leq n+1$, las permutaciones $\sigma_{a,b}$ y $\mu_{a,b}$ como:

$$\sigma_{a,b}^{-1}(1) = a, \quad \sigma_{a,b}^{-1}(n+1) = b, \quad \sigma_{a,b}^{-1}(i) < \sigma_{a,b}^{-1}(j), \text{ para } 2 \leq i < j \leq n,$$

$$\mu_{a,b}^{-1}(1) = b, \quad \mu_{a,b}^{-1}(n+1) = a, \quad \mu_{a,b}^{-1}(i) < \mu_{a,b}^{-1}(j), \text{ para } 2 \leq i < j \leq n.$$

Entonces es fácil ver que:

$$(7.2) \quad \sigma_{a,b}(i) = \begin{cases} 1, & i = a; \\ n+1, & i = b; \\ i+1, & i < a; \\ i, & a < i < b; \\ i-1, & i > b. \end{cases} \quad \mu_{a,b}(i) = \begin{cases} 1, & i = b; \\ n+1, & i = a; \\ i+1, & i < a; \\ i, & a < i < b; \\ i-1, & i > b \end{cases}$$

y podemos enunciar:

PROPOSICIÓN 7.1. Para \mathcal{H}_{2n-1} tenemos:

- $W^1 = \{\sigma_{a,b}, \mu_{a,b} : 1 \leq a < b \leq n+1\}$,
- $\sigma_{a,b}\Delta^- \cap \Delta^+ = \{e_1 - e_j : 2 \leq j \leq a\} \cup \{e_i - e_{n+1} : b \leq j \leq n\}$ y
- $\mu_{a,b}\Delta^- \cap \Delta^+ = \{e_1 - e_{n+1}\} \cup \{e_1 - e_j : 2 \leq j \leq b-1\} \cup \{e_i - e_{n+1} : a+1 \leq j \leq n\}$.

$$\text{Más aún, } \#\Phi_w = \begin{cases} n+a-b, & \text{si } w = \sigma_{a,b} \\ n-a+b-1, & \text{si } w = \mu_{a,b} \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. Dada una raíz $e_i - e_j \in \Delta_1^+$ entonces $w^{-1}(e_i - e_j) > 0$ si y sólo si $w^{-1}(i) < w^{-1}(j)$ para $2 \leq i < j \leq n$, es decir $w = \sigma_{a,b}$ ó $w = \mu_{a,b}$.

Dada $e_i - e_j \in \Delta^-$, i.e. con $i > j$, $\sigma_{a,b}(e_i - e_j) > 0$ si y sólo si $\sigma_{a,b}(i) < \sigma_{a,b}(j)$ y esto sólo puede ocurrir si $i = a$ ó $j = b$. Así tenemos, $\sigma_{a,b}(e_a - e_j) > 0$ si y sólo si $1 < j+1$, y entonces $e_1 - e_j \in \sigma_{a,b}\Delta^- \cap \Delta^+$ para $2 \leq j \leq a$.

De la misma forma $\sigma_{a,b}(e_i - e_b) > 0$ si y sólo si $i-1 < n+1$, entonces tenemos que $e_i - e_{n+1} \in \sigma_{a,b}\Delta^- \cap \Delta^+$ para $b \leq i \leq n$.

Por lo tanto $\sigma_{a,b}\Delta^- \cap \Delta^+ = \{e_1 - e_j : 2 \leq j \leq a\} \cup \{e_i - e_{n+1} : b \leq i \leq n\}$ y $\#\Phi_{\sigma_{a,b}} = n+a-b$.

Análogamente,

$$\mu_{a,b}\Delta^- \cap \Delta^+ = \{e_1 - e_{n+1}\} \cup \{e_1 - e_j : 2 \leq j \leq b-1\} \cup \{e_i - e_{n+1} : a+1 \leq i \leq n\}, \text{ y}$$

$$\#\Phi_{\mu_{a,b}} = n-a+b-1.$$

□

1. La homología trivial de \mathcal{H}_{2n-1} .

Para el caso Heisenberg, el único $w_0 \in W_1$ (el grupo de Weyl de \mathfrak{g}_1) tal que $w_0(\Delta^+) = \Delta^-$ es

$$w_0 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Con esto se tiene:

$$\begin{aligned} w_0(\sigma_{a,b}\Delta^- \cap \Delta^+) &= \{e_1 - e_j : n+2-a \leq j \leq n\} \cup \{e_i - e_{n+1} : 2 \leq i \leq n+2-b\}, \\ w_0(\mu_{a,b}\Delta^- \cap \Delta^+) &= \{e_1 - e_{n+1}\} \cup \{e_1 - e_j : n+3-b \leq j \leq n\} \\ &\quad \cup \{e_i - e_{n+1} : 2 \leq i \leq n+1-a\}. \end{aligned}$$

Al igual que en el caso anterior, sabemos que para cada $1 \leq a < b \leq n+1$ existen \mathfrak{g}_1 -submódulos irreducibles $H^\sigma(a,b)$ y $H^\mu(a,b)$ de $H_p(\mathcal{H}_{2n-1})$.

- si $0 \leq p \leq n-1$, para $1 \leq a \leq p+1$ definimos

$$(7.3) \quad H_{p,a}^\sigma = H^\sigma(a, n+a-p),$$

- si $n \leq p \leq 2n-1$, para $1 \leq a \leq 2n-p$ definimos,

$$(7.4) \quad H_{p,a}^\mu = H^\mu(a, p+a+1-n).$$

Notemos que $H_0(\mathfrak{n}) = H_{0,1}^\sigma$.

Por lo tanto, tenemos:

TEOREMA 7.2. *Los vectores de peso máximo de la homología trivial de \mathcal{H}_{2n-1} y sus pesos en la base \mathcal{H} son:*

- Para $1 \leq p \leq n-1$.

1. Si $a = 1$ y $p = n+1-b$:

$$\boxed{y_1 \wedge y_2 \wedge \dots \wedge y_p},$$

$$(p, 2p, \underbrace{1, \dots, 1}_p, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-p-2}).$$

2. Si $2 \leq a \leq p$ y $p = n+a-b$:

$$\boxed{x_{n-1} \wedge x_{n-2} \wedge \dots \wedge x_{n+1-a} \wedge y_1 \wedge y_2 \wedge \dots \wedge y_{p-a+1}},$$

$$(p, 2p-3a+3, \underbrace{2, \dots, 2}_{p-a+1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-p-1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{a-2}).$$

3. Si $a = p+1$ y $p = n+a-b$:

$$\boxed{x_{n-1} \wedge x_{n-2} \wedge \dots \wedge x_{n-p}},$$

$$(p, -p, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-p-1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{p-1}).$$

- Para $p = n$.

1. Si $a = 1$ y $b = 2$:

$$\boxed{z \wedge y_1 \wedge y_2 \wedge \dots \wedge y_{n-1}},$$

$$(n+1, 2n-1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-2}).$$

2. Si $b = a+1$ y $2 \leq a \leq n-1$:

$$\boxed{z \wedge x_{n-1} \wedge x_{n-2} \wedge \dots \wedge x_{n+1-a} \wedge y_1 \wedge y_2 \wedge \dots \wedge y_{n-a}},$$

$$(n+1, 2n+2-3a, \underbrace{2, \dots, 2}_{n-a}, \underbrace{0, \dots, 0}_{a-2}).$$

3. Si $a = n$ y $b = n+1$:

$$\boxed{z \wedge x_{n-1} \wedge x_{n-2} \wedge \dots \wedge x_1},$$

$$(n+1, 2-n, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-2}).$$

- Para $n+1 \leq p \leq 2n-1$.

1. Si $a = 1$ y $p = n+b-2$:

$$\boxed{z \wedge x_{n-1} \wedge x_{n-2} \wedge \dots \wedge x_{2n-p} \wedge y_1 \wedge y_2 \wedge \dots \wedge y_{n-1}},$$

$$(p+1, 3n-p-1, \underbrace{1, \dots, 1}_{2n-p-1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{p-n-1}),$$

2. Si $2 \leq a \leq 2n-p$ y $p = n-a+b-1$:

$$\boxed{z \wedge x_{n-1} \wedge x_{n-2} \wedge \dots \wedge x_{2n+1-a-p} \wedge y_1 \wedge y_2 \wedge \dots \wedge y_{n-a}},$$

$$(p+1, 3n+2-p-3a, \underbrace{2, \dots, 2}_{2n-a-p}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p-n}, \underbrace{0, \dots, 0}_{a-2}).$$

Y en términos de diagramas de Young para la parte simple $\mathfrak{sl}(n-1)$, podemos escribir:

- Para $1 \leq p \leq n-1$:

$$H_p(\mathcal{H}_{2n-1}) = \underbrace{\left[\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \right]}_p \oplus \sum_{a=2}^p \underbrace{\left[\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \right]}_{n-a, p-a+1} \oplus \underbrace{\left[\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \right]}_{n-p-1}$$

- Para $p = n$:

$$H_n(\mathcal{H}_{2n-1}) = \emptyset \oplus \sum_{a=2}^{n-1} \underbrace{\left[\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \right]}_{n-a, n-a} \oplus \emptyset.$$

- Para $n+1 \leq p \leq 2n-1$:

$$H_p(\mathcal{H}_{2n-1}) = \underbrace{\left[\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \right]}_{2n-1-p} \oplus \sum_{a=2}^{2n-p} \underbrace{\left[\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \right]}_{n-a, 2n-a-p}$$

Con todo esto, podemos identificar un submódulo irreducible a través de una terna que contenga: la acción del centro de \mathfrak{g}_1 , $\{h_1, h_2\}$ (de la base \mathcal{H}) y el diagrama de Young correspondiente a la acción de la parte simple de \mathfrak{g}_1 ($\mathfrak{sl}(n-1)$).

Así tenemos,

1. Para $a = 1$:

$$H_{p,1}^\sigma \simeq (p, 2p, D_p),$$

$$H_{p,1}^\mu \simeq (p+1, 3n-p-1, D_{2n-1-p}).$$

2. Para $a \geq 2$:

$$(7.5) \quad H_{p,a}^\sigma \simeq (p, 2p-3a+3, D_{n-a, p-a+1}),$$

$$(7.6) \quad H_{p,a}^\mu \simeq (p+1, 3n+2-p-3a, D_{n-a, 2n-a-p}).$$

2. Dimensiones.

A partir del Lema 5.13 y usando los resultados del Teorema 7.2, podemos recalculer las dimensiones de la homología trivial.

TEOREMA 7.3 ([17]). Para cada $0 \leq p \leq n-1$ tenemos,

$$\dim H_p(\mathcal{H}_{2n-1}) = \binom{2n-2}{p} - \binom{2n-2}{p-2}$$

y el resto de los términos vienen dados por la dualidad de Poincaré.

DEMOSTRACIÓN. Para $0 \leq p \leq n-1$ tenemos,

$$\dim H_p(\mathcal{H}_{2n-1}) = \left[\binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{n-p-1} \right] + \sum_{a=2}^p \binom{n-1}{n-a} \binom{n}{p-a+1} - \sum_{a=2}^p \binom{n}{n-(a-1)} \binom{n-1}{p-a}$$

Además sabemos que,

$$\begin{aligned} \binom{2n-1}{p} &= \sum_{a=1}^{p+1} \binom{n-1}{a-1} \binom{n}{p-a+1}, \\ \binom{2n-1}{p-1} &= \sum_{a=1}^p \binom{n}{a-1} \binom{n-1}{(p-1)-(a-1)}, \end{aligned}$$

con lo que obtenemos:

$$\begin{aligned} \dim H_p(\mathcal{H}_{2n-1}) &= 2 \binom{n-1}{p} + \binom{2n-1}{p} - \binom{n}{p} - \binom{n-1}{p} \\ &\quad - \binom{2n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p-1} \\ &= \left[\binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} \right] - \binom{n}{p} + \binom{2n-1}{p} - \binom{2n-1}{p-1} \\ &= \binom{n}{p} - \binom{n}{p} + \left[\binom{2n-2}{p} + \binom{2n-2}{p-1} \right] \\ &\quad - \left[\binom{2n-2}{p-1} + \binom{2n-2}{p-2} \right] \\ &= \binom{2n-2}{p} - \binom{2n-2}{p-2} \end{aligned}$$

□

3. La homología adjunta de \mathcal{H}_{2n-1} .

Vamos a analizar la acción del centro de \mathfrak{g}_1 . Para ellos recordemos que las coordenadas de X , Y y \mathfrak{z} respecto de $\{h_1, h_2\} \subseteq \mathcal{H}$ (ver (7.1)) son $(1, -1)$, $(1, 2)$ y $(2, 1)$ respectivamente.

La siguiente tabla nos da esta acción sobre los productos tensoriales necesarios para calcular la homología adjunta de \mathfrak{n} .

w	$H_{p,a}^w \otimes X$	$H_{p,a}^w \otimes Y$	$H_{p-1,a'}^w \otimes \mathfrak{z}$
σ	$(p+1, 2p-3a+2)$	$(p+1, 2p-3a+5)$	$(p+1, 2p-3a'+2)$
μ	$(p+2, 3n+1-p-3a)$	$(p+2, 3n+4-p-3a)$	$(p+2, 3n+4-p-3a')$

Entonces podemos enunciar los siguientes resultados:

PROPOSICIÓN 7.4. $H_{p-1}(\mathcal{H}_{2n-1}) \otimes \mathfrak{z}$ es libre de multiplicidad.

DEMOSTRACIÓN. De la Tabla (7.7) se observa que la acción del elemento h_1 (de la base \mathcal{H} del centro de \mathfrak{g}_1) en $H_{p-1,a'}^\sigma \otimes \mathfrak{z}$ es $p+1$, mientras que la acción sobre $H_{p-1,a'}^\mu \otimes \mathfrak{z}$ es $p+2$. Por lo tanto, cada módulo tiene una acción del centro de \mathfrak{g}_1 distinta y entonces $H_p(\mathcal{H}_{2n-1}) \otimes \mathfrak{z}$ es libre de multiplicidad. \square

LEMA 7.5. El morfismo de conexión δ_p satisface lo siguiente:

- Para $1 \leq p \leq n-1$,
 1. $\delta_p(H_{p,a}^\sigma \otimes X) \subseteq H_{p-1,a}^\sigma \otimes \mathfrak{z}$ para todo $1 \leq a \leq p$.
 2. $\delta_p(H_{p,p+1}^\sigma \otimes X) = 0$.
 3. $\delta_p(H_{p,a}^\sigma \otimes Y) \subseteq H_{p-1,a-1}^\sigma \otimes \mathfrak{z}$ para todo $2 \leq a \leq p+1$.
 4. $\delta_p(H_{p,1}^\sigma \otimes Y) = 0$.
- Para $p = n$.
 5. $\delta_p(H_{n,a}^\mu \otimes (X \oplus Y)) = 0$.
- Para $n+1 \leq p \leq 2n-1$,
 6. $\delta_p(H_{p,a}^\mu \otimes X) \subseteq H_{p-1,a+1}^\mu \otimes \mathfrak{z}$ para todo $1 \leq a \leq 2n-p$.
 7. $\delta_p(H_{p,a}^\mu \otimes Y) \subseteq H_{p-1,a}^\mu \otimes \mathfrak{z}$ para todo $1 \leq a \leq 2n-p$.

DEMOSTRACIÓN. De la Tabla (7.7) se puede observar que:

1. La acción del centro de \mathfrak{g}_1 en $H_{p,a}^\sigma \otimes X$ es $(p+1, 2p-3a+2)$ y el único submódulo de $H_{p-1}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}$ con la misma acción es $H_{p-1,a}^\sigma \otimes \mathfrak{z}$ para $1 \leq a \leq p$.
2. Como no hay ningún submódulo de $H_{p-1}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}$ que tenga la misma acción de $H_{p,p+1}^\sigma \otimes X$, entonces $\delta_p(H_{p,p+1}^\sigma \otimes X) = 0$.
3. El único submódulo de $H_{p-1}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}$ con la misma acción que $H_{p,a}^\sigma \otimes Y$ es $H_{p-1,a-1}^\sigma \otimes \mathfrak{z}$ para $2 \leq a \leq p+1$.
4. Como no hay ningún submódulo de $H_{p-1}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}$ que tenga la misma acción de $H_{p,1}^\sigma \otimes Y$, se tiene que $\delta_p(H_{p,1}^\sigma \otimes Y) = 0$.
5. Ningún submódulo de $H_{n-1}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}$ tiene acción $(n+2, 2n+1-3a)$ ó $(n+2, 2n+4-3a)$, por lo tanto $\delta_p(H_{n,a}^\mu \otimes (X \oplus Y)) = 0$.
6. El único submódulo de $H_{p-1}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}$ con la misma acción que $H_{p,a}^\mu \otimes X$ es $H_{p-1,a+1}^\mu \otimes \mathfrak{z}$ para $1 \leq a \leq 2n-p$.
7. El único submódulo de $H_{p-1}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}$ con la misma acción que $H_{p,a}^\mu \otimes Y$ es $H_{p-1,a}^\mu \otimes \mathfrak{z}$ para $1 \leq a \leq 2n-p$.

\square

La descomposición de $H_{p,a}^\sigma \otimes (X \oplus Y)$ es, por los Teoremas 5.10 y 5.11, la siguiente:

1. Para $1 \leq p \leq n-1$, $1 \leq a \leq p+1$,
 - a) $H_{p,a}^\sigma \otimes X = H_{p,a}^\sigma \otimes X(n-1) \oplus H_{p,a}^\sigma \otimes X(p-a+1) \oplus H_{p,a}^\sigma \otimes X(n-a)$, donde el segundo sumando de la derecha sólo existe para $\max\{1, p+3-n\} \leq a \leq p$ y el tercer sumando sólo existe para $a \geq 2$ y $p \leq n-2$.

$$b) H_{p,a}^\sigma \otimes Y = H_{p,a}^\sigma \otimes Y(1) \oplus H_{p,a}^\sigma \otimes Y(p-a+2) \oplus H_{p,a}^\sigma \otimes Y(n-a+1),$$

donde el segundo sumando de la derecha sólo existe para $a \leq p$ y $p \leq n-2$ y el tercer sumando sólo existe para $2 \leq a \leq \min\{n-1, p+1\}$.

2. Para $n \leq p \leq 2n-1$, $1 \leq a \leq 2n-p$,

$$a) H_{p,a}^\mu \otimes X = H_{p,a}^\mu \otimes X(n-1) \oplus H_{p,a}^\mu \otimes X(2n-a-p) \oplus H_{p,a}^\mu \otimes X(n-a),$$

donde el segundo sumando de la derecha sólo existe para $\max\{1, n+2-p\} \leq a \leq 2n-p-1$ y el tercer sumando sólo existe para $a \geq 2$ y $p \geq n+1$.

$$b) H_{p,a}^\mu \otimes Y = H_{p,a}^\mu \otimes Y(1) \oplus H_{p,a}^\mu \otimes Y(2n-a-p+1) \oplus H_{p,a}^\mu \otimes Y(n-a+1),$$

donde el segundo sumando de la derecha sólo existe para $a \leq 2n-p-1$ y $p \geq n+1$ y el tercer sumando sólo existe para $2 \leq a \leq \min\{2n-p, n-1\}$.

En las siguientes proposiciones daremos la acción explícita del \mathfrak{g}_1 -morfismo δ_p :

PROPOSICIÓN 7.6. *El morfismo δ_p actúa de la siguiente forma:*

- Para $1 \leq p \leq n-2$,
 1. $\delta_p(H_{p,a}^\sigma \otimes X(n-1)) = 0$ para todo $1 \leq a \leq p+1$,
 2. $\delta_p(H_{p,a}^\sigma \otimes X(n-a)) = 0$ para todo $2 \leq a \leq p+1$,
 3. $\delta_p(H_{p,a}^\sigma \otimes Y(1)) = 0$ para todo $1 \leq a \leq p+1$,
 4. $\delta_p(H_{p,a}^\sigma \otimes Y(p-a+2)) = 0$ para todo $1 \leq a \leq p$.
- Para $p = n-1$,
 5. $\delta_p(H_{n-1,a}^\sigma \otimes X(n-1)) = 0$ para todo $2 \leq a \leq n$,
 6. $\delta_p(H_{n-1,a}^\sigma \otimes Y(1)) = 0$ para todo $1 \leq a \leq n$,
- Para $p = n$,
 7. $\delta_p(H_{n,a}^\mu \otimes X(n-1)) = 0$ para todo $1 \leq a \leq n$,
 8. $\delta_p(H_{n,a}^\mu \otimes X(2n-a-n)) = 0$ para todo $1 \leq a \leq n-1$,
 9. $\delta_p(H_{n,a}^\mu \otimes Y(1)) = 0$ para todo $1 \leq a \leq n$,
 10. $\delta_p(H_{n,a}^\mu \otimes Y(n-a+1)) = 0$ para todo $2 \leq a \leq n-1$.
- Para $n+1 \leq p \leq 2n-1$,
 11. $\delta_p(H_{p,a}^\mu \otimes X(n-1)) = 0$ para todo $2 \leq a \leq 2n-p$,
 12. $\delta_p(H_{p,a}^\mu \otimes X(2n-a-p)) = 0$ para todo $1 \leq a \leq 2n-p-1$,
 13. $\delta_p(H_{p,a}^\mu \otimes Y(1)) = 0$ para todo $1 \leq a \leq 2n-p-1$,
 14. $\delta_p(H_{p,a}^\mu \otimes Y(n-a+1)) = 0$ para todo $2 \leq a \leq 2n-p$.

DEMOSTRACIÓN. Vamos a demostrar sólo el ítem 1, los ítems 2 a 6 y 11 a 14 son análogos.

Por el Lema 7.5, $\delta_p(H_{p,a}^\sigma \otimes X(n-1)) \subseteq H_{p-1,a}^\sigma \otimes \mathfrak{z}$ para todo $1 \leq a \leq p$.

El diagrama de Young (de la parte simple de \mathfrak{g}_1) asociado a este submódulo es $D_{n-2,p}$ si $a = 1$ y $D_{n-2,n-a,p-a+1}$ si $2 \leq a \leq p$, mientras que el correspondiente a $H_{p-1,a}^\sigma \otimes \mathfrak{z}$ es D_{p-1} si $a = 1$ y $D_{n-a,p-a}$ si $a \geq 2$. Por lo tanto $\delta_p(H_{p,a}^\sigma \otimes X(n-1)) = 0$ para $1 \leq a \leq p$. Por el Lema 2 tenemos que esto se cumple también para $a = p+1$.

Los ítems 7 a 10 se siguen del Lema 7.5. □

Veamos ahora un Lema que nos será de utilidad en la siguiente Proposición y además en el Capítulo 10.

LEMA 7.7. *Sea s de acuerdo al Teorema 5.10, entonces se tiene*

$$\sum_{J \in A^{(s)}} \frac{1}{\sigma_J} (-1)^{|J|} < 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 5.10, $s = 1$ ó s es tal que $\lambda_s < \lambda_{s-1}$.

- Si $s = 1$ entonces el único J es $J = \{1\}$ y $\sum_{J \in A^{(1)}} \frac{1}{\sigma_J} (-1)^{|J|} = -1 < 0$.
- Si $s \neq 1$ entonces, para cada $J \in A^{(s)}$ y cada $i \in J$, $1 \leq i < s$, tenemos

$$\sigma_i = \lambda_s - \lambda_i - (s - i) + 1 < 0,$$

y si $i = s$,

$$\sigma_s = \lambda_s - \lambda_s - (s - s) + 1 = 1,$$

es decir que

$$\sigma_J = \prod_{i \in J} \sigma_i = (-1)^{|J|-1} \prod_{\substack{i \in J \\ i < s}} |\sigma_i|.$$

y también,

$$\frac{1}{\sigma_J} (-1)^{|J|} = \frac{-1}{\prod_{\substack{i \in J \\ i < s}} |\sigma_i|} < 0.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \sum_{J \in A^{(s)}} \frac{1}{\sigma_J} (-1)^{|J|} &= \sum_{\substack{J \in A^{(s)} \\ |J| \geq 2}} \frac{1}{\sigma_J} (-1)^{|J|} + \sum_{\substack{J \in A^{(s)} \\ J = \{s\}}} \frac{1}{\sigma_J} (-1)^{|J|} \\ &= \sum_{\substack{J \in A^{(s)} \\ |J| \geq 2}} \frac{1}{\sigma_J} (-1)^{|J|} - 1 \\ &< 0. \end{aligned}$$

□

PROPOSICIÓN 7.8.

1. Para $1 \leq p \leq n - 1$,
 $0 \neq \delta_p(H_{p,a}^\sigma \otimes Y(n - a + 1)) \subseteq H_{p-1,a-1}^\sigma \otimes \mathfrak{z}$ para todo $2 \leq a \leq \min\{n - 1, p + 1\}$,
2. Para $n + 1 \leq p \leq 2n - 1$,
 $0 \neq \delta_p(H_{p,a}^\mu \otimes Y(2n - a - p + 1)) \subseteq H_{p-1,a}^\mu \otimes \mathfrak{z}$ para todo $1 \leq a \leq 2n - p - 1$.

DEMOSTRACIÓN.

1. Por los Teoremas 7.2 y 5.10 el vector de peso máximo de $H_{p,a}^\sigma \otimes Y(n - a + 1)$ para $2 \leq a \leq p + 1$ es

$$w = \sum_{J \in A^{(n-a+1)}} \frac{1}{\sigma_J} V_J(x_{n-1} \wedge \dots \wedge x_{n+1-a} \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_{p-a+1}) \otimes y_{\min(J)}$$

por lo tanto tenemos,

$$\begin{aligned}\partial_1(w) &= \sum_{J \in A^{(n-a+1)}} \frac{1}{\sigma_J} (-1)^{|J|+a-1} x_{n-1} \wedge \dots \wedge x_{n-a+2} \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_{p-a+1} \otimes z \\ &= \left(\sum_{J \in A^{(n-a+1)}} \frac{1}{\sigma_J} (-1)^{|J|} \right) (-1)^{a-1} x_{n-1} \wedge \dots \wedge x_{n-a+2} \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_{p-a+1} \otimes z\end{aligned}$$

que salvo por el escalar, es el vector de peso máximo de $H_{p-1,a-1}^\sigma \otimes \mathfrak{z}$. Por el Lema

7.7, $\sum_{J \in A^{(n-a+1)}} \frac{1}{\sigma_J} (-1)^{|J|} < 0$. Por lo tanto $\delta_p(H_{p,a}^\sigma \otimes Y(n-a+1)) = H_{p-1,a-1}^\sigma \otimes \mathfrak{z}$ para $2 \leq a \leq p+1$.

2. Por los Teoremas 7.2 y 5.10, el vector de peso máximo de $H_{p,1}^\mu \otimes Y(2n-p)$ es

$$w = \sum_{J \in A^{(2n-p)}} \frac{1}{\sigma_J} V_J(z \wedge x_{n-1} \wedge \dots \wedge x_{2n-p} \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_{n-1}) \otimes y_{\min(J)}$$

y entonces tenemos,

$$\begin{aligned}\partial_1(w) &= \sum_{J \in A^{(2n-p)}} \frac{1}{\sigma_J} (-1)^{|J|+1+p-n} z \wedge x_{n-1} \wedge \dots \wedge x_{2n-p+1} \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_{n-1} \otimes z \\ &= \left(\sum_{J \in A^{(2n-p)}} \frac{1}{\sigma_J} (-1)^{|J|} \right) (-1)^{1+p-n} z \wedge x_{n-1} \wedge \dots \wedge x_{2n-p+1} \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_{n-1} \otimes z\end{aligned}$$

que salvo por el escalar es el vector de peso máximo de $H_{p-1,1}^\mu \otimes \mathfrak{z}$.

Por el Lema 7.7 este escalar es no nulo y por lo tanto

$$\delta_p(H_{p,1}^\mu \otimes Y(2n-p)) = H_{p-1,1}^\mu \otimes \mathfrak{z}.$$

Por los Teoremas 7.2 y 5.10 el vector de peso máximo de $H_{p,a}^\mu \otimes Y(2n-a-p+1)$ para $2 \leq a \leq 2n-p-1$ es

$$w = \sum_{J \in A^{(2n-a-p+1)}} \frac{1}{\sigma_J} V_J(z \wedge x_{n-1} \wedge \dots \wedge x_{2n-a-p+1} \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_{n-a}) \otimes y_{\min(J)}$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned}\partial_1(w) &= \sum_{J \in A^{(2n-a-p+1)}} \frac{1}{\sigma_J} (-1)^{|J|+a+p-n} z \wedge x_{n-1} \wedge \dots \\ &\quad \dots \wedge x_{2n-a-p+2} \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_{n-a} \otimes z \\ &= \left(\sum_{J \in A^{(2n-a-p+1)}} \frac{1}{\sigma_J} (-1)^{|J|} \right) (-1)^{a+p-n} z \wedge x_{n-1} \wedge \dots \\ &\quad \dots \wedge x_{2n-a-p+2} \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_{n-1} \otimes z\end{aligned}$$

que salvo por el escalar es el vector de peso máximo de $H_{p-1,a}^\mu \otimes \mathfrak{z}$.

Por el Lema 7.7 este escalar es no nulo y por lo tanto para $2 \leq a \leq 2n-p-1$

$$\delta_p(H_{p,a}^\mu \otimes Y(2n-a-p+1)) = H_{p-1,a}^\mu \otimes \mathfrak{z}.$$

□

Veamos ahora, otro Lema de utilidad tanto para la próxima proposición, como para el Capítulo 10.

LEMA 7.9. *Sea s de acuerdo al Teorema 5.11, entonces se tiene*

$$\sum_{J \in A_{(s)}} \frac{1}{\sigma_J} < 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que de acuerdo al Teorema 5.11, $s = n - 1$ ó s es tal que $\lambda_s > \lambda_{s+1}$.

- Si $s = n - 1$ entonces $J = \{n - 1\}$ y $\sum_{J \in A_{(s)}} \frac{1}{\sigma_J} = -1 < 0$.
- Si $s \neq n - 1$, para cada $J \in A_{(s)}$ y cada $i \in J$, $i > s$ tenemos

$$\sigma_i = \lambda_s - \lambda_i - (s - i) - 1 > 0$$

y si $i = s$,

$$\sigma_s = \lambda_s - \lambda_s - (s - s) - 1 = -1.$$

Por lo tanto

$$\sigma_J = \prod_{i \in J} \sigma_i = - \prod_{\substack{i \in J \\ i > s}} \sigma_i < 0,$$

y entonces $\sum_{J \in A_{(s)}} \frac{1}{\sigma_J} < 0$.

□

PROPOSICIÓN 7.10. *El morfismo δ_p actúa de la siguiente forma:*

- Para $1 \leq p \leq n - 2$,
 1. $0 \neq \delta_p(H_{p,a}^\sigma \otimes X(p - a + 1)) \subseteq H_{p-1,a}^\sigma \otimes \mathfrak{z}$ para todo $1 \leq a \leq p$.
- Para $p = n - 1$,
 2. $0 \neq \delta_p(H_{n-1,1}^\sigma \otimes X(n - 1)) \subseteq H_{n-2,1}^\sigma \otimes \mathfrak{z}$,
 3. $0 \neq \delta_p(H_{n-1,a}^\sigma \otimes X(n - a)) \subseteq H_{n-2,a}^\sigma \otimes \mathfrak{z}$ para todo $2 \leq a \leq n - 1$.
- Para $n + 1 \leq p \leq 2n - 1$,
 4. $0 \neq \delta_p(H_{p,1}^\mu \otimes X(n - 1)) \subseteq H_{p-1,2}^\mu \otimes \mathfrak{z}$,
 5. $0 \neq \delta_p(H_{p,a}^\mu \otimes X(n - a)) \subseteq H_{p-1,a+1}^\mu \otimes \mathfrak{z}$ para todo $2 \leq a \leq 2n - p$.
 6. $0 \neq \delta_p(H_{p,2n-p}^\mu \otimes Y(1)) \subseteq H_{p-1,2n-p}^\mu \otimes \mathfrak{z}$.

DEMOSTRACIÓN.

1. Por el Lema 7.5, $\delta_p(H_{p,a}^\sigma \otimes X) \subseteq H_{p-1,a}^\sigma \otimes \mathfrak{z}$. En particular, para $1 \leq a \leq p$, tenemos $\delta_p(H_{p,a}^\sigma \otimes X(p - a + 1)) \subseteq H_{p-1,a}^\sigma \otimes \mathfrak{z}$.

Por los Teoremas 7.2 y 5.11 un vector de peso máximo de $H_{p,1}^\sigma \otimes X(p)$ es

$$\begin{aligned} w_1 &= \sum_{J \in A_{(p)}} \frac{1}{\sigma_J} U_J(y_1 \wedge \dots \wedge y_p) \otimes x_{\max(J)} \\ &= \sum_{J \in A_{(p)}} \frac{1}{\sigma_J} y_1 \wedge \dots \wedge y_{p-1} \wedge y_{\max(J)} \otimes x_{\max(J)} \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} \partial_1(w_1) &= \sum_{J \in A_{(p)}} \frac{1}{\sigma_J} (-1)^p y_1 \wedge \dots \wedge y_{p-1} \otimes z \\ &= \left(\sum_{J \in A_{(p)}} \frac{1}{\sigma_J} \right) (-1)^p y_1 \wedge \dots \wedge y_{p-1} \otimes z \end{aligned}$$

que salvo por el escalar es el vector de peso máximo de $H_{p-1,1}^\sigma \otimes \mathfrak{z}$.

Por el Lema 7.9 para $s = p$, tenemos que $\sum_{J \in A_{(p)}} \frac{1}{\sigma_J} \neq 0$ y por lo tanto

$$\delta_p(H_{p,1}^\sigma \otimes X(p)) = H_{p-1,1}^\sigma \otimes \mathfrak{z}.$$

Un vector de peso máximo de $H_{p,a}^\sigma \otimes X(p-a+1)$ para $2 \leq a \leq p$ es

$$w_a = \sum_{J \in A_{(p-a+1)}} \frac{1}{\sigma_J} U_J(x_{n-1} \wedge \dots \wedge x_{n+1-a} \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_{p-a+1}) \otimes x_{\max(J)}.$$

Entonces tenemos,

$$\begin{aligned} \partial_1(w_a) &= \sum_{J \in A_{(p-a+1)}} \frac{1}{\sigma_J} (-1)^p x_{n-1} \wedge \dots \wedge x_{n+1-a} \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_{p-a} \otimes z \\ &= \left(\sum_{J \in A_{(p-a+1)}} \frac{1}{\sigma_J} \right) (-1)^p x_{n-1} \wedge \dots \wedge x_{n+1-a} \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_{p-a} \otimes z \end{aligned}$$

que salvo por el escalar es el vector de peso máximo de $H_{p-1,a}^\sigma \otimes \mathfrak{z}$.

Por el Lema 7.9 para $s = p-a+1$, tenemos que el escalar es no nulo y por lo tanto $\delta_p(H_{p,a}^\sigma \otimes X(p-a+1)) = H_{p-1,a}^\sigma \otimes \mathfrak{z}$ para $2 \leq a \leq p$.

2. Por los Teoremas 7.2 y 5.11, un vector de peso máximo de $H_{n-1,1}^\sigma \otimes X(n-1)$ es

$$w_1 = -y_1 \wedge \dots \wedge y_{n-1} \otimes x_{n-1}$$

y por lo tanto,

$$\partial_1(w_1) = (-1)^{n+1} y_1 \wedge \dots \wedge y_{n-2} \otimes z$$

que es un múltiplo no nulo del vector de peso máximo de $H_{p-1,1}^\sigma \otimes \mathfrak{z}$.

Por lo tanto $\delta_p(H_{n-1,1}^\sigma \otimes X(n-1)) = H_{p-1,1}^\sigma \otimes \mathfrak{z}$.

3. Un vector de peso máximo de $H_{n-1,a}^\sigma \otimes X(n-a)$ para $2 \leq a \leq n-1$ es

$$w_a = \sum_{J \in A_{(n-a)}} \frac{1}{\sigma_J} U_J(x_{n-1} \wedge \dots \wedge x_{n+1-a} \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_{n-a}) \otimes x_{\max(J)}.$$

y entonces tenemos,

$$\begin{aligned} \partial_1(w_a) &= \sum_{J \in A_{(n-a)}} \frac{1}{\sigma_J} (-1)^{n+1} x_{n-1} \wedge \dots \wedge x_{n+1-a} \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_{n-a-1} \otimes z \\ &= \left(\sum_{J \in A_{(n-a)}} \frac{1}{\sigma_J} \right) (-1)^{n+1} x_{n-1} \wedge \dots \wedge x_{n+1-a} \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_{n-a-1} \otimes z \end{aligned}$$

que salvo por el escalar es el vector de peso máximo de $H_{n-2,a}^\sigma \otimes \mathfrak{z}$.

Por el Lema 7.9 para $s = n-a$, tenemos que el escalar es no nulo y por lo tanto $\delta_p(H_{n-1,a}^\sigma \otimes X(n-a)) = H_{n-2,a}^\sigma \otimes \mathfrak{z}$ para $2 \leq a \leq n-1$.

4. El vector de peso máximo de $H_{p,1}^\mu \otimes X(n-1)$ por los Teoremas 7.2 y 5.11 es

$$w = z \wedge x_{n-1} \wedge \dots \wedge x_{2n-p} \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_{n-1} \otimes x_{n-1}$$

Aplicando ∂_1 obtenemos

$$\partial_1(w) = (-1)^p z \wedge x_{n-1} \wedge \dots \wedge x_{2n-p} \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_{n-2} \otimes z,$$

y este es un múltiplo no nulo del vector de peso máximo de $H_{p-1,2}^\mu \otimes \mathfrak{z}$. Por lo tanto $\delta_p(H_{p,1}^\mu \otimes X(n-1)) = H_{p-1,2}^\mu \otimes \mathfrak{z}$.

5. Por los Teoremas 7.2 y 5.11 un vector de peso máximo de $H_{p,a}^\mu \otimes X(n-a)$ para $2 \leq a \leq 2n-p$ es

$$w_a = \sum_{J \in A_{(n-a)}} \frac{1}{\sigma_J} U_J(z \wedge x_{n-1} \wedge \dots \wedge x_{2n+1-a-p} \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_{n-a}) \otimes x_{\max(J)}$$

Por lo tanto tenemos,

$$\begin{aligned} \partial_1(w_a) &= \sum_{J \in A_{(n-a)}} \frac{1}{\sigma_J} (-1)^p z \wedge x_{n-1} \wedge \dots \wedge x_{2n+1-a-p} \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_{n-a-1} \otimes z \\ &= \left(\sum_{J \in A_{(n-a)}} \frac{1}{\sigma_J} \right) (-1)^p z \wedge x_{n-1} \wedge \dots \wedge x_{2n+1-a-p} \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_{n-a-1} \otimes z \end{aligned}$$

que salvo por el escalar es el vector de peso máximo de $H_{p-1,a+1}^\mu \otimes \mathfrak{z}$ para $2 \leq$

$a \leq 2n-p$. Pero $\sum_{J \in A_{(n-a)}} \frac{1}{\sigma_J} \neq 0$ por el Lema 7.9 para $s = n-a$. Por lo tanto

$\delta_p(H_{p,a}^\mu \otimes X(n-a)) = H_{p-1,a+1}^\mu \otimes \mathfrak{z}$ para $2 \leq a \leq 2n-p$.

6. Por los Teoremas 7.2 y 5.10 un vector de peso máximo de $H_{p,2n-p}^\mu \otimes Y(1)$ es

$$w = z \wedge x_{n-1} \wedge \dots \wedge x_1 \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_{p-n} \otimes y_1$$

Por lo tanto tenemos,

$$\partial_1(w) = (-1)^{n+1} z \wedge x_{n-1} \wedge \dots \wedge x_2 \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_{p-n} \otimes z$$

que es un múltiplo no nulo del vector de peso máximo de $H_{p-1,2n-p}^\mu \otimes \mathfrak{z}$. Por lo tanto $\delta_p(H_{p,2n-p}^\mu \otimes Y(1)) = H_{p-1,2n-p}^\mu \otimes \mathfrak{z}$. \square

OBSERVACIÓN 7.11. *Por las Proposiciones 7.8 y 7.10 se tiene que los siguientes submódulos de $H_p(\mathfrak{n}) \otimes (X \oplus Y)$ tienen como imagen por δ_p al mismo submódulo de $H_{p-1} \otimes \mathfrak{z}$.*

- Para $1 \leq p \leq n-2$ y $1 \leq a \leq p$, $H_{p,a}^\sigma \otimes X(p-a+1)$ y $H_{p,a+1}^\sigma \otimes Y(n-a)$ tienen como imagen al submódulo $H_{p-1,a}^\sigma \otimes \mathfrak{z}$. Esto dice que un submódulo de $H_{p,a}^\sigma \otimes X(p-a+1) \oplus H_{p,a+1}^\sigma \otimes Y(n-a)$ está en $\ker \delta_p$.
- Para $p = n-1$ y $1 \leq a \leq n-2$, $H_{n-1,a}^\sigma \otimes X(n-a)$ y $H_{n-1,a+1}^\sigma \otimes Y(n-a)$ van al submódulo $H_{n-2,a}^\sigma \otimes \mathfrak{z}$. Esto dice que un submódulo de $H_{n-1,a}^\sigma \otimes X(n-a) \oplus H_{n-1,a+1}^\sigma \otimes Y(n-a)$ está en $\ker \delta_{n-1}$.
- Para $n+1 \leq p \leq 2n-1$ y $2 \leq a \leq 2n-p$, $H_{p,a-1}^\mu \otimes X(n-a+1)$ y $H_{p,a}^\mu \otimes Y(2n-a-p+1)$ van al submódulo $H_{p-1,a}^\mu \otimes \mathfrak{z}$. Esto dice que un submódulo de $H_{p,a-1}^\mu \otimes X(n-a+1) \oplus H_{p,a}^\mu \otimes Y(2n-a-p+1)$ está en $\ker \delta_p$.

Dado que $H_{p-1}(\mathcal{H}_{2n-1}) \otimes \mathfrak{z}$ es de multiplicidad libre, los únicos módulos que están en el coker δ_p son aquellos que no tienen una preimagen por δ_p . Por las Proposiciones 7.8 y 7.10 tenemos:

1. Para $0 \leq p \leq n-2$,

$$\text{coker } \delta_{p+1} = 0$$

2. Para $p = n-1$,

$$\text{coker } \delta_{p+1} = \text{coker } \delta_n = \sum_{a=1}^n H_{n-1,a}^\sigma \otimes \mathfrak{z},$$

3. Para $n \leq p \leq 2n-2$,

$$\text{coker } \delta_{p+1} = 0,$$

4. Para $p = 2n-1$,

$$\text{coker } \delta_{p+1} = H_{2n-1,1}^\mu \otimes \mathfrak{z}.$$

Como $\delta_0 = 0$, tenemos

$$\ker \delta_0 = H_0(\mathfrak{n}) \otimes (X \oplus Y) = H_{0,1}^\sigma \otimes X(n-1) \oplus H_{0,1}^\sigma \otimes Y(1).$$

Además, por la Proposición 7.6 y la Observación 7.11 tenemos:

1. Para $1 \leq p \leq n-2$,

$$\begin{aligned} \ker \delta_p \simeq & \sum_{a=1}^{p+1} H_{p,a}^\sigma \otimes X(n-1) \oplus \sum_{a=2}^{p+1} H_{p,a}^\sigma \otimes X(n-a) \oplus \sum_{a=1}^{p+1} H_{p,a}^\sigma \otimes Y(1) \\ & \oplus \sum_{a=1}^p H_{p,a}^\sigma \otimes Y(p-a+2) \oplus \sum_{a=2}^{p+1} H_{p,a}^\sigma \otimes Y(n-a+1) \end{aligned}$$

2. Para $p = n - 1$,

$$\ker \delta_{n-1} \simeq \sum_{a=2}^n H_{n-1,a}^\sigma \otimes X(n-1) \oplus \sum_{a=1}^n H_{n-1,a}^\sigma \otimes Y(1) \oplus \sum_{a=2}^{n-1} H_{n-1,a}^\sigma \otimes Y(n-a+1)$$

3. Para $p = n$,

$$\begin{aligned} \ker \delta_n &= \sum_{a=1}^n H_{n,a}^\mu \otimes X(n-1) \oplus \sum_{a=1}^{n-1} H_{n,a}^\mu \otimes X(n-a) \oplus \sum_{a=1}^n H_{n,a}^\mu \otimes Y(1) \\ &\quad \oplus \sum_{a=2}^{n-1} H_{n,a}^\mu \otimes Y(n-a+1) \end{aligned}$$

4. Para $n+1 \leq p \leq 2n-1$,

$$\begin{aligned} \ker \delta_p &\simeq \sum_{a=2}^{2n-p} H_{p,a}^\mu \otimes X(n-1) \oplus \sum_{a=1}^{2n-p-1} H_{p,a}^\mu \otimes X(2n-a-p) \oplus \sum_{a=1}^{2n-p-1} H_{p,a}^\mu \otimes Y(1) \\ &\quad \oplus \sum_{a=2}^{2n-p} H_{p,a}^\mu \otimes Y(n-a+1) \oplus \sum_{a=2}^{2n-p} H_{p,a}^\mu \otimes Y(2n-a-p+1) \end{aligned}$$

Con todo esto, tenemos el resultado fundamental de este capítulo:

TEOREMA 7.12. *La estructura de \mathfrak{g}_1 -módulo de la homología adjunta de \mathcal{H}_{2n-1} viene dada por:*

1. Para $0 \leq p \leq n-2$,

$$\begin{aligned} H_p(\mathcal{H}_{2n-1}, \mathcal{H}_{2n-1}) &\simeq \sum_{a=1}^{p+1} H_{p,a}^\sigma \otimes X(n-1) \oplus \sum_{a=2}^{p+1} H_{p,a}^\sigma \otimes X(n-a) \\ &\quad \oplus \sum_{a=1}^{p+1} H_{p,a}^\sigma \otimes Y(1) \oplus \sum_{a=1}^p H_{p,a}^\sigma \otimes Y(p-a+2) \\ &\quad \oplus \sum_{a=2}^{p+1} H_{p,a}^\sigma \otimes Y(n-a+1) \end{aligned}$$

2. Para $p = n-1$,

$$\begin{aligned} H_{n-1}(\mathcal{H}_{2n-1}, \mathcal{H}_{2n-1}) &\simeq \sum_{a=2}^n H_{n-1,a}^\sigma \otimes X(n-1) \oplus \sum_{a=1}^n H_{n-1,a}^\sigma \otimes Y(1) \\ &\quad \oplus \sum_{a=2}^{n-1} H_{n-1,a}^\sigma \otimes Y(n-a+1) + \sum_{a=1}^n H_{n-1,a}^\sigma \otimes \mathfrak{z} \end{aligned}$$

3. Para $p = n$,

$$\begin{aligned} H_n(\mathcal{H}_{2n-1}, \mathcal{H}_{2n-1}) &= \sum_{a=1}^n H_{n,a}^\mu \otimes X(n-1) \oplus \sum_{a=1}^{n-1} H_{n,a}^\mu \otimes X(n-a) \\ &\oplus \sum_{a=1}^n H_{n,a}^\mu \otimes Y(1) \oplus \sum_{a=2}^{n-1} H_{n,a}^\mu \otimes Y(n-a+1) \end{aligned}$$

4. Para $n+1 \leq p \leq 2n-2$,

$$\begin{aligned} H_p(\mathcal{H}_{2n-1}, \mathcal{H}_{2n-1}) &\simeq \sum_{a=2}^{2n-p} H_{p,a}^\mu \otimes X(n-1) \oplus \sum_{a=1}^{2n-p-1} H_{p,a}^\mu \otimes X(2n-a-p) \\ &\oplus \sum_{a=1}^{2n-p-1} H_{p,a}^\mu \otimes Y(1) \oplus \sum_{a=2}^{2n-p} H_{p,a}^\mu \otimes Y(n-a+1) \\ &\oplus \sum_{a=2}^{2n-p} H_{p,a}^\mu \otimes Y(2n-a-p+1) \end{aligned}$$

5. Para $p = 2n-1$,

$$H_{2n-1}(\mathcal{H}_{2n-1}, \mathcal{H}_{2n-1}) \simeq H_{2n-1,1}^\mu \otimes \mathfrak{z}$$

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de las Proposiciones 7.6, 7.8 y 7.10 □

4. Dimensiones de la Homología Adjunta

En esta Sección se incluyen los números de Betti adjuntos para el álgebra de Lie de Heisenberg.

TEOREMA 7.13. *Las dimensiones de los grupos de homología adjunta del álgebra de Lie de Heisenberg \mathcal{H}_{2n-1} son las siguientes:*

1. Para $0 \leq p \leq n-2$,

$$\dim H_p(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}) = \left[\binom{2n-2}{p} - \binom{2n-2}{p-2} \right] (2n-2) - \left[\binom{2n-2}{p-1} - \binom{2n-2}{p-3} \right].$$

2. Para $p = n-1$,

$$\dim H_{n-1}(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}) = \left[\binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n-3} \right] (2n-1) - \left[\binom{2n-2}{n-2} - \binom{2n-2}{n-4} \right].$$

3. Para $p = n$,

$$\dim H_n(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}) = \left[\binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n-3} \right] (2n-2).$$

4. Para $n+1 \leq p \leq 2n-2$,

$$\dim H_p(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}) = \left[\binom{2n-2}{p-1} - \binom{2n-2}{p+1} \right] (2n-2) - \left[\binom{2n-2}{p-2} - \binom{2n-2}{p} \right].$$

5. Para $p = 2n - 1$,

$$\dim H_p(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}) = 1.$$

DEMOSTRACIÓN. Dado que $\dim(H_p(\mathfrak{n}) \otimes V) = \dim(\ker \delta_p) + \dim(\operatorname{Im} \delta_p)$ y además $\dim(\operatorname{Im} \delta_{p+1}) = \dim(H_p(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}) - \dim(\operatorname{coker} \delta_{p+1})$, entonces se tiene

$$\dim H_p(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}) = \dim(H_p(\mathfrak{n}) \otimes V) - \dim(H_{p-1}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}) + \dim(\operatorname{coker} \delta_p) + \dim(\operatorname{coker} \delta_{p+1}).$$

Utilizando el Teorema 7.3, la demostración se sigue.

□

Sobre el caso general: $A_n(k, l)$

En este capítulo vamos a estudiar el caso general y dar algunos resultados que nos permitirán luego dar la homología adjunta de $A_n(k, k+1)$ y conocer además los primeros grupos de homología adjunta para $\mathfrak{n} = A_n(k, l)$, como se verá en los dos capítulos siguientes.

Un nilradical \mathfrak{n} de una subálgebra parabólica de A_n es 2-pasos nilpotente si y sólo si $|\Pi_0| = 2$ (Proposición 3.3), es decir si

$$\Pi_0 = \{e_k - e_{k+1}, e_l - e_{l+1}\} \text{ con } 1 \leq k < l \leq n.$$

Se tiene entonces que,

$$(8.1) \quad \Delta^+ = \{e_i - e_j : 1 \leq i < j \leq n+1\},$$

$$(8.2) \quad \begin{aligned} \Delta_1^+ = & \{e_1 - e_2, \dots, e_1 - e_k, e_2 - e_3, \dots, e_2 - e_k, \dots, e_{k-1} - e_k\} \\ & \cup \{e_{k+1} - e_{k+2}, \dots, e_{k+1} - e_l, \dots, e_{l-1} - e_l\} \\ & \cup \{e_{l+1} - e_{l+2}, \dots, e_{l+1} - e_{n+1}, \dots, e_n - e_{n+1}\}, \end{aligned}$$

y además,

$$(8.3) \quad \begin{aligned} \Delta(\mathfrak{n}) = & \{e_1 - e_{k+1}, \dots, e_1 - e_l, e_2 - e_{k+1}, \dots, e_2 - e_l, \dots, e_k - e_{k+1}, \dots, e_k - e_l\} \\ & \cup \{e_1 - e_{l+1}, \dots, e_1 - e_{n+1}, \dots, e_k - e_{l+1}, \dots, e_k - e_{n+1}\} \\ & \cup \{e_{k+1} - e_{l+1}, \dots, e_{k+1} - e_{n+1}, \dots, e_l - e_{l+1}, \dots, e_l - e_{n+1}\}. \end{aligned}$$

Si denotamos,

- $x_j^i = E_{i,j+k}$ para $1 \leq i \leq k$ y $1 \leq j \leq l-k$,
- $z_j^i = E_{i,j+l}$ para $1 \leq i \leq k$ y $1 \leq j \leq n+1-l$,
- $y_j^i = E_{i+k,j+l}$ para $1 \leq i \leq l-k$ y $1 \leq j \leq n+1-l$,

y además llamamos

$$X = \langle \{x_1^1, x_2^1, \dots, x_{l-k}^1, \dots, x_1^k, \dots, x_{l-k}^k\} \rangle,$$

$$Y = \langle \{y_1^1, \dots, y_{n+1-l}^1, \dots, y_1^{l-k}, \dots, y_{n+1-l}^{l-k}\} \rangle,$$

obtenemos que una base para \mathfrak{n} es $V \oplus \mathfrak{z}$, donde $V = X \oplus Y$, y

$$\mathfrak{z} = \langle \{z_1^1, \dots, z_{n+1-l}^1, \dots, z_1^k, \dots, z_{n+1-l}^k\} \rangle,$$

es el centro de \mathfrak{n} , es decir $\mathfrak{n} = V \oplus \mathfrak{z}$, y los únicos corchetes no nulos de elementos de la base son $[x_b^a, y_c^b] = z_c^a$.

Matricialmente la parábola $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{n}$ dentro de $\mathfrak{sl}(n + 1)$ nos queda:

(8.4)

\mathfrak{g}_1	x_1^1	...	x_{l-k}^1	z_1^1	...	z_{n+1-l}^1
	\vdots		\vdots	\vdots		\vdots
	x_1^k	...	x_{l-k}^k	z_1^k	...	z_{n+1-l}^k
\mathfrak{g}_1	\mathfrak{g}_1			y_1^1	...	y_{n+1-l}^1
				\vdots		\vdots
				y_1^{l-k}	...	y_{n+1-l}^{l-k}
				\mathfrak{g}_1		

Como $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\substack{1 \leq i, j \leq k \\ i \neq j}} \mathfrak{g}_{e_i - e_j} \oplus \bigoplus_{\substack{k+1 \leq i, j \leq l \\ i \neq j}} \mathfrak{g}_{e_i - e_j} \oplus \bigoplus_{\substack{l+1 \leq i, j \leq n+1 \\ i \neq j}} \mathfrak{g}_{e_i - e_j} = [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] \oplus Z_{\mathfrak{g}_1}$, con $Z_{\mathfrak{g}_1}$ el centro de \mathfrak{g}_1 . La parte semisimple \mathfrak{g}_1^{ss} es

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_1^{ss} &= [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] \\ &= \left[\begin{aligned} &\bigoplus_{i=1}^{n+1} \mathbb{C}E_{i,i} \oplus \bigoplus_{\substack{1 \leq i, j \leq k \\ i \neq j}} \mathbb{C}E_{i,j} \oplus \bigoplus_{\substack{k+1 \leq i, j \leq l \\ i \neq j}} \mathbb{C}E_{i,j} \oplus \bigoplus_{\substack{l+1 \leq i, j \leq n+1 \\ i \neq j}} \mathbb{C}E_{i,j}, \\ &\bigoplus_{i=1}^{n+1} \mathbb{C}E_{i,i} \oplus \bigoplus_{\substack{1 \leq i, j \leq k \\ i \neq j}} \mathbb{C}E_{i,j} \oplus \bigoplus_{\substack{k+1 \leq i, j \leq l \\ i \neq j}} \mathbb{C}E_{i,j} \oplus \bigoplus_{\substack{l+1 \leq i, j \leq n+1 \\ i \neq j}} \mathbb{C}E_{i,j} \end{aligned} \right] \\ &= \bigoplus_{\substack{1 \leq i, j \leq k \\ i \neq j}} \mathbb{C}E_{i,j} \oplus \bigoplus_{\substack{1 \leq i, j \leq k \\ i \neq j}} \mathbb{C}[E_{i,j}, E_{j,i}] \oplus \bigoplus_{\substack{k+1 \leq i, j \leq l \\ i \neq j}} \mathbb{C}E_{i,j} \\ &\quad \oplus \bigoplus_{\substack{k+1 \leq i, j \leq l \\ i \neq j}} \mathbb{C}[E_{i,j}, E_{j,i}] \oplus \bigoplus_{\substack{l+1 \leq i, j \leq n+1 \\ i \neq j}} \mathbb{C}E_{i,j} \oplus \bigoplus_{\substack{l+1 \leq i, j \leq n+1 \\ i \neq j}} \mathbb{C}[E_{i,j}, E_{j,i}] \end{aligned}$$

donde $[E_{i,j}, E_{j,i}] = E_{i,i} - E_{j,j}$, y los conjuntos $\{E_{i,i} - E_{j,j} : 1 \leq i, j \leq k, i \neq j\}$, $\{E_{i,i} - E_{j,j} : k+1 \leq i, j \leq l, i \neq j\}$ y $\{E_{i,i} - E_{j,j} : l+1 \leq i, j \leq n+1, i \neq j\}$ son conjuntos generadores de las matrices diagonales de traza cero de orden k , $l-k$ y $n+1-l$ respectivamente. Por lo tanto, la parte semisimple $\mathfrak{g}_1^{ss} \simeq \mathfrak{sl}(k) \oplus \mathfrak{sl}(l-k) \oplus \mathfrak{sl}(n+1-l)$.

El centro $Z_{\mathfrak{g}_1}$ está formado por las matrices

$$H = \alpha \sum_{i=1}^k E_{i,i} + \beta \sum_{i=k+1}^l E_{i,i} + \gamma \sum_{i=l+1}^{n+1} E_{i,i},$$

con $k\alpha + (l-k)\beta + (n+1-l)\gamma = 0$.

Fijamos como base del centro de \mathfrak{g}_1 al conjunto $\{H_1, H_2\}$ donde

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{n+1} \left((2n+2-l-k) \sum_{i=1}^k E_{i,i} + (n+1-l-k) \sum_{i=k+1}^l E_{i,i} \right. \\ &\quad \left. - (l+k) \sum_{i=l+1}^{n+1} E_{i,i} \right), \\ H_2 &= \frac{1}{n+1} \left((n+1+k-2l) \sum_{i=1}^k E_{i,i} + (2n+2+k-2l) \sum_{i=k+1}^l E_{i,i} \right. \\ &\quad \left. + (k-2l) \sum_{i=l+1}^{n+1} E_{i,i} \right), \end{aligned}$$

y definimos

$$h_1 = \frac{1}{n+1} \left((2n+2-l-k) \sum_{i=1}^k e_i + (n+1-l-k) \sum_{i=k+1}^l e_i - (l+k) \sum_{i=l+1}^{n+1} e_i \right),$$

$$h_2 = \frac{1}{n+1} \left((n+1+k-2l) \sum_{i=1}^k e_i + (2n+2+k-2l) \sum_{i=k+1}^l e_i + (k-2l) \sum_{i=l+1}^{n+1} e_i \right),$$

Como base para el dual de la subálgebra de Cartan de \mathfrak{g}_1 tomamos

$$(8.5) \quad \mathcal{H} = \{h_1, h_2, \underbrace{e_1, \dots, e_{k-1}}_{k-1}, \underbrace{e_{k+1}, \dots, e_{l-k-1}}_{l-k-1}, \underbrace{e_{l+1}, \dots, e_n}_{n-l}\},$$

donde,

- $\{e_1, \dots, e_{k-1}\}$ es una base de $\langle \{e_1, \dots, e_k\} \rangle / \langle \{e_1 + \dots + e_k = 0\} \rangle$, el dual de la subálgebra de Cartan de $\mathfrak{sl}(k)$,
- $\{e_{k+1}, \dots, e_{l-k-1}\}$ es una base de $\langle \{e_{k+1}, \dots, e_l\} \rangle / \langle \{e_{k+1} + \dots + e_l = 0\} \rangle$, el dual de la subálgebra de Cartan de $\mathfrak{sl}(l-k)$,
- $\{e_{l+1}, \dots, e_n\}$ es una base de $\langle \{e_{l+1}, \dots, e_{n+1}\} \rangle / \langle \{e_{l+1} + \dots + e_{n+1} = 0\} \rangle$, el dual de la subálgebra de Cartan de $\mathfrak{sl}(n+1-l)$.

OBSERVACIÓN 8.1. *Notemos que tenemos tres bloques actuando ($\mathfrak{sl}(k)$, $\mathfrak{sl}(l-k)$ y $\mathfrak{sl}(n+1-l)$), para cada uno de ellos denotaremos siempre a cada operador $E_{i,j}$ con $1 \leq i, j \leq k$, $1 \leq i, j \leq l-k$ y $1 \leq i, j \leq n+1-l$ respectivamente. Es decir que consideraremos su posición dentro del bloque correspondiente y no dentro de $\mathfrak{sl}(n+1)$. Con esto tenemos la siguiente acción:*

$$E_{i,j} \cdot x_b^a = \begin{cases} x_b^i & \text{si } j = a, i \neq j, \\ -x_j^a & \text{si } i = b, i \neq j, \\ x_b^a & \text{si } i = j = a, \\ -x_b^a & \text{si } i = j = b \end{cases}$$

Que coincide con la acción pensando al operador dentro de $\mathfrak{sl}(n+1)$.

1. Homología trivial de \mathfrak{n}

Por el Teorema de Kostant, el cálculo de la homología trivial de \mathfrak{n} se reduce a encontrar el subconjunto $W^1 \subset W$ y parametrizar los vectores de peso máximo de la homología en base a este subconjunto. Recordemos que el grupo de Weyl de A_n es isomorfo al grupo de permutaciones en $n+1$ letras, S_{n+1} , y que la acción de S_{n+1} sobre Δ viene dada por:

$$\sigma(e_i - e_j) = e_{\sigma(i)} - e_{\sigma(j)}.$$

Por lo tanto, para el caso general tenemos:

LEMA 8.2. W^1 es el conjunto de todas las permutaciones $w \in S_{n+1}$ tales que:

- $w^{-1}(i) < w^{-1}(j)$ para $1 \leq i < j \leq k$,

- $w^{-1}(i) < w^{-1}(j)$ para $k+1 \leq i < j \leq l$,
- $w^{-1}(i) < w^{-1}(j)$ para $l+1 \leq i < j \leq n+1$.

DEMOSTRACIÓN. Dado que $W^1 = \{w \in S_{n+1} : w^{-1}\Delta^- \subseteq \Delta^+\}$, tomando Δ_1^+ y Δ^+ como en (8.2) y (8.1) tenemos que si $\alpha = e_i - e_j \in \Delta_1^+$, entonces $w^{-1}(\alpha) = w^{-1}(e_i - e_j) = e_{w^{-1}(i)} - e_{w^{-1}(j)}$ y para que $w^{-1}(\alpha) \in \Delta^+$ debemos tener $w^{-1}(i) < w^{-1}(j)$. Por lo tanto w es tal que $w^{-1}(i) < w^{-1}(j)$ para $1 \leq i < j \leq k$, $k+1 \leq i < j \leq l$ y $l+1 \leq i < j \leq n+1$. \square

Si bien sabemos cómo actúan las permutaciones en cada bloque de \mathfrak{g}_1 , desconocemos cómo actúan en dos raíces de bloques distintos de \mathfrak{n} . Este cálculo se vuelve bastante complicado a medida que aumenta n y los tamaños de cada bloque. Por este motivo, vamos a utilizar otra estrategia para calcular los vectores de peso máximo de la homología trivial.

Para ello, veamos primero la siguiente

DEFINICIÓN 8.3. Para cada p fijo, definimos $\mathcal{P}_a^b(p)$ como el conjunto de todas las particiones de p de longitud igual a b y con términos menores o iguales que a . Es decir, el conjunto de elementos de la forma

$$[n_1, n_2, \dots, n_b],$$

con $a \geq n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_b \geq 1$ y tales que $\sum_{i=1}^b n_i = p$.

Sea ahora $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q]$ con $q \leq k$ una partición en $\mathcal{P}_{l-k}^q(p)$. Vamos a denotar v_α al vector de $\Lambda^p \mathfrak{n}$,

$$v_\alpha = x_{l-k}^1 \wedge x_{l-k-1}^1 \wedge \dots \wedge x_{l-k+1-\alpha_1}^1 \wedge x_{l-k}^2 \wedge \dots \wedge x_{l-k+1-\alpha_2}^2 \wedge \dots \wedge x_{l-k}^q \wedge \dots \wedge x_{l-k+1-\alpha_q}^q.$$

Matricialmente podemos ver a v_α de la siguiente forma:

\mathfrak{g}_1	<table border="1" style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">$x_{l-k+1-\alpha_1}^1$</td> <td style="padding: 5px;">\dots</td> <td style="padding: 5px;">x_{l-k}^1</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$x_{l-k+1-\alpha_2}^2$</td> <td style="padding: 5px;">\dots</td> <td style="padding: 5px;">x_{l-k}^2</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">\ddots</td> <td style="padding: 5px;">\vdots</td> <td style="padding: 5px;">\vdots</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$x_{l-k+1-\alpha_q}^q$</td> <td style="padding: 5px;">\dots</td> <td style="padding: 5px;">x_{l-k}^q</td> </tr> </table>	$x_{l-k+1-\alpha_1}^1$	\dots	x_{l-k}^1	$x_{l-k+1-\alpha_2}^2$	\dots	x_{l-k}^2	\ddots	\vdots	\vdots	$x_{l-k+1-\alpha_q}^q$	\dots	x_{l-k}^q	
$x_{l-k+1-\alpha_1}^1$	\dots	x_{l-k}^1												
$x_{l-k+1-\alpha_2}^2$	\dots	x_{l-k}^2												
\ddots	\vdots	\vdots												
$x_{l-k+1-\alpha_q}^q$	\dots	x_{l-k}^q												
	\mathfrak{g}_1													
		\mathfrak{g}_1												

Análogamente, dada una partición $\beta = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q]$ con $q \leq l - k$ en $\mathcal{P}_{n+1-l}^q(p)$. Denotamos v_β al vector de $\Lambda^p \mathfrak{n}$,

$$v_\beta = y_{n+1-l}^1 \wedge y_{n-l}^1 \wedge \dots \wedge y_{n+2-l-\beta_1}^1 \wedge y_{n+1-l}^2 \wedge \dots \wedge y_{n+2-l-\beta}^2 \wedge \dots \wedge y_{n+1-l}^q \wedge \dots \wedge y_{n+2-l-\beta_q}^q.$$

Matricialmente podemos ver a v_β de la siguiente forma:

\mathfrak{g}_1														
	\mathfrak{g}_1	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px;">$y_{n+2-l-\beta_1}^1$</td> <td style="padding: 2px;">\dots</td> <td style="padding: 2px;">y_{n+1-l}^1</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">$y_{n+2-l-\beta_2}^2$</td> <td style="padding: 2px;">\dots</td> <td style="padding: 2px;">y_{n+1-l}^2</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">\vdots</td> <td style="padding: 2px;">\vdots</td> <td style="padding: 2px;">\vdots</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">$y_{n+2-l-\beta_q}^q$</td> <td style="padding: 2px;">\dots</td> <td style="padding: 2px;">y_{n+1-l}^q</td> </tr> </table>	$y_{n+2-l-\beta_1}^1$	\dots	y_{n+1-l}^1	$y_{n+2-l-\beta_2}^2$	\dots	y_{n+1-l}^2	\vdots	\vdots	\vdots	$y_{n+2-l-\beta_q}^q$	\dots	y_{n+1-l}^q
$y_{n+2-l-\beta_1}^1$	\dots	y_{n+1-l}^1												
$y_{n+2-l-\beta_2}^2$	\dots	y_{n+1-l}^2												
\vdots	\vdots	\vdots												
$y_{n+2-l-\beta_q}^q$	\dots	y_{n+1-l}^q												
		\mathfrak{g}_1												

De la misma forma, consideremos $\gamma = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_q]$, una partición en $\mathcal{P}_{n+1-l}^q(p)$ con $q \leq k$. Vamos a denotar v_γ al vector de $\Lambda^p \mathbf{n}$,

$$v_\gamma = z_{n+1-l}^1 \wedge z_{n-l}^1 \wedge \dots \wedge z_{n+2-l-\gamma_1}^1 \wedge z_{n+1-l}^2 \wedge \dots \wedge z_{n+2-l-\gamma_2}^2 \wedge \dots \wedge z_{n+1-l}^q \wedge \dots \wedge z_{n+2-l-\gamma_q}^q,$$

que matricialmente se puede ver como:

\mathfrak{g}_1		$z_{n+2-l-\gamma_1}^1$	\dots	z_{n+1-l}^1
			$z_{n+2-l-\gamma_2}^2$	\dots
			\ddots	\vdots
				$z_{n+2-l-\gamma_q}^q$
	\mathfrak{g}_1			
		\mathfrak{g}_1		

Con estas definiciones, vamos a ver que un vector de peso máximo v de $H_p(\mathfrak{n})$ es un vector de la forma

$$v = v_\alpha \wedge v_\beta \wedge v_\gamma,$$

donde $a + b + c = p$,

- $\alpha \in P_{l-k}^{q_1}(a)$, con $q_1 \leq k$;
- $\beta \in P_{n+1-l}^{q_2}(b)$, con $q_2 \leq l - k$;
- $\gamma \in P_{n+1-l}^{q_3}(c)$, con $q_3 \leq k$.

y bajo ciertas condiciones en la elección de las particiones α , β y γ .

El siguiente Teorema nos da la forma de los vectores de peso máximo de la homología trivial $H_p(\mathfrak{n})$.

TEOREMA 8.4. *Dado p fijo, los vectores de peso máximo de $H_p(\mathfrak{n})$, salvo multiplicación por escalar, son:*

1. $v = v_\alpha$, con $\alpha \in \mathcal{P}_{l-k}^q(p)$ con $q \leq k$.
2. $v = v_\beta$, con $\beta \in \mathcal{P}_{n+1-l}^q(p)$ con $q \leq l - k$.
3. $v = v_\alpha \wedge v_\gamma$, donde
 - $\gamma \in \mathcal{P}_{n+1-l}^q(c)$ tal que $1 \leq q \leq k$ y $c \leq p - q(l - k)$; y
 - $\alpha = [\underbrace{l - k, \dots, l - k}_q, \alpha_{q+1}, \alpha_{q+2}, \dots, \alpha_m] \in \mathcal{P}_{l-k}^m(p - c)$ con $q \leq m \leq k$ y

$$l - k \geq \alpha_{q+1} \geq \alpha_{q+2} \geq \dots \geq \alpha_m \geq 1.$$
4. $v = v_\beta \wedge v_\gamma$, donde
 - $\gamma \in \mathcal{P}_{n+1-l}^q(c)$ tal que $1 \leq q \leq k$ y $c \leq p - (l - k)\gamma_1$; y
 - $\beta = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m, \underbrace{\gamma_1, \dots, \gamma_1}_{l-k-m}] \in \mathcal{P}_{n+1-l}^{l-k}(p - c)$ con $1 \leq m \leq l - k$ y $n + 1 - l \geq \beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_m \geq \gamma_1$.
5. $v = v_\alpha \wedge v_\beta$, donde
 - $\alpha \in \mathcal{P}_{l-k-1}^q(a)$ tal que $a < p$ y $q \leq k$; y
 - $\beta \in \mathcal{P}_{l-k}^m(p - a)$ con $1 \leq m \leq l - k - \alpha_1$.
6. (a) $v = v_\alpha \wedge v_\beta \wedge v_\gamma$, obtenido por la Construcción 8.6.
 (b) $v = v_\alpha \wedge v_\beta \wedge v_\gamma$, obtenido por la Construcción 8.7

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema de Kostant (5.1), un vector de peso máximo de la homología trivial es un vector homogéneo. Entonces, para un nilradical 2 pasos nilpotente de una subálgebra parabólica de A_n , un vector de $H_p(\mathfrak{n})$ será de la forma,

$$v = x_{i_1}^1 \wedge \dots \wedge x_{i_{a_1}}^1 \wedge \dots \wedge x_{i_1^k}^k \wedge \dots \wedge x_{i_{a_k}^k}^k \wedge y_{j_1}^1 \wedge \dots \wedge y_{j_{b_1}}^1 \wedge \dots \wedge y_{j_1^{l-k}}^{l-k} \wedge \dots \\ \dots \wedge y_{j_{b_{l-k}}^{l-k}}^{l-k} \wedge z_{m_1}^1 \wedge \dots \wedge z_{m_{c_1}}^1 \wedge \dots \wedge z_{m_1^{l-k}}^{l-k} \wedge \dots \wedge z_{m_{c_{l-k}}^{l-k}}^{l-k}$$

Vamos a demostrar primero que todo vector de peso máximo homogéneo, es de la forma $v_\alpha \wedge v_\beta \wedge v_\gamma$. Para ello vamos a analizar cada bloque X , Y y \mathfrak{z} por separado. Analicemos el bloque X , los otros dos se analizan en forma análoga.

Sea $v = x_{i_1}^1 \wedge \dots \wedge x_{i_{a_1}}^1 \wedge \dots \wedge x_{i_k}^k \wedge \dots \wedge x_{i_{a_k}}^k$. Para que v sea un vector de peso máximo debe cumplir que si $E_{j,j+1} \in \mathcal{U}^+(\mathfrak{sl}(k))$ entonces $E_{j,j+1} \cdot v = 0$ para $1 \leq j \leq k-1$ y además si $E_{i,i+1} \in \mathcal{U}^+(\mathfrak{sl}(l-k))$ entonces $E_{i,i+1} \cdot v = 0$ para $1 \leq i \leq l-k-1$.

La acción del operador de crecimiento $E_{j-1,j} \in \mathcal{U}^+(\mathfrak{sl}(k))$ con $2 \leq j \leq k$ es:

$$\begin{aligned} E_{j-1,j} \cdot v &= \sum_{i=1}^{a_j} x_{i_1}^1 \wedge \dots \wedge x_{i_{a_1}}^1 \wedge \dots \wedge x_{i_j}^j \wedge \dots \wedge E_{j-1,j}(x_{i_j}^j) \wedge \dots \wedge x_{i_{a_j}}^j \\ &\quad \wedge \dots \wedge x_{i_1}^k \wedge \dots \wedge x_{i_{a_k}}^k \\ &= \sum_{i=1}^{a_j} x_{i_1}^1 \wedge \dots \wedge x_{i_{a_1}}^1 \wedge \dots \wedge x_{i_j}^j \wedge \dots \wedge x_{i_j}^{j-1} \wedge \dots \wedge x_{i_{a_j}}^j \\ &\quad \wedge \dots \wedge x_{i_1}^k \wedge \dots \wedge x_{i_{a_k}}^k \end{aligned}$$

Como los términos no nulos de esta suma son linealmente independientes, para que $E_{j-1,j} \cdot v = 0$, debemos tener

$$x_{i_1}^1 \wedge \dots \wedge x_{i_{a_1}}^1 \wedge \dots \wedge x_{i_j}^j \wedge \dots \wedge x_{i_j}^{j-1} \wedge \dots \wedge x_{i_{a_j}}^j \wedge \dots \wedge x_{i_1}^k \wedge \dots \wedge x_{i_{a_k}}^k = 0$$

para cada $1 \leq i \leq a_j$, y cada $1 \leq j \leq k-1$. Y esto sólo ocurre si $x_{i_j}^{j-1}$ es un factor de v . Por lo tanto v tiene la forma,

$$v = x_{i_1}^1 \wedge x_{i_1}^2 \wedge \dots \wedge x_{i_1}^{j_1} \wedge x_{i_2}^1 \wedge x_{i_2}^2 \wedge \dots \wedge x_{i_2}^{j_2} \wedge \dots \wedge x_{i_m}^1 \wedge x_{i_m}^2 \wedge \dots \wedge x_{i_m}^{j_m}$$

Mirando la representación matricial 8.4, esto nos dice que si $x_{i_j}^j$ es factor de v entonces el elemento que está en la misma columna de $x_{i_j}^j$ pero en la fila anterior, también es factor de v .

Veamos ahora la acción de $E_{i-1,i} \in \mathcal{U}^+(\mathfrak{sl}(l-k))$ para $2 \leq i \leq l-k$. Tomemos en particular la acción de E_{i_q, i_q+1} para $1 \leq q \leq m$.

$$\begin{aligned} E_{i_q, i_q+1} \cdot v &= \sum_{i=1}^{j_m} x_{i_1}^1 \wedge x_{i_1}^2 \wedge \dots \wedge x_{i_1}^{j_1} \wedge \dots \wedge x_{i_q}^1 \wedge \dots \wedge E_{i_q, i_q+1}(x_{i_q}^i) \wedge \dots \wedge x_{i_q}^{j_q} \\ &\quad \wedge \dots \wedge x_{i_m}^1 \wedge \dots \wedge x_{i_m}^{j_m} \\ &= - \sum_{i=1}^{j_m} x_{i_1}^1 \wedge x_{i_1}^2 \wedge \dots \wedge x_{i_1}^{j_1} \wedge \dots \wedge x_{i_q}^1 \wedge \dots \wedge x_{i_q+1}^i \wedge \dots \wedge x_{i_q}^{j_q} \\ &\quad \wedge \dots \wedge x_{i_m}^1 \wedge \dots \wedge x_{i_m}^{j_m} \end{aligned}$$

Como los términos no nulos de esta suma son linealmente independientes, para que $E_{i_q, i_q+1} \cdot v = 0$, debemos tener

$$x_{i_1}^1 \wedge \dots \wedge x_{i_1}^{j_1} \wedge \dots \wedge x_{i_q}^1 \wedge \dots \wedge x_{i_q+1}^i \wedge \dots \wedge x_{i_q}^{j_q} \wedge \dots \wedge x_{i_m}^1 \wedge \dots \wedge x_{i_m}^{j_m} = 0$$

y esto ocurre sólo si $x_{i_q+1}^i$ es un factor de v para todo $1 \leq i \leq j_n$ y $1 \leq q \leq m$.

Dado que $x_{i_m+1}^i$ es un factor de v , haciendo actuar E_{i_m+1, i_m+2} sobre v , obtenemos que $x_{i_m+2}^i$ también es un factor de v y continuando de esta manera, concluimos que x_j^i es un factor de v para todo $1 \leq i \leq j_q$ y $j_q \leq j \leq l-k$.

En la representación matricial esto dice que si un elemento x_j^i es factor de v entonces el elemento de la misma fila pero de la columna siguiente, también es factor de v .

De la acción de los dos bloques que actúan sobre el bloque X concluimos que v tiene la forma,

$$v = x_{l-k}^1 \wedge x_{l-k-1}^1 \wedge \dots \wedge x_{l-k+1-\alpha_1}^1 \wedge \dots \wedge x_{l-k}^q \wedge x_{l-k-1}^q \wedge \dots \wedge x_{l-k+1-\alpha_q}^q$$

donde $l-k \geq \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_q \geq 1$ y $1 \leq q \leq k$.

Análogamente obtenemos que en el bloque Y debemos tener v_β y en el bloque \mathfrak{z} , v_γ .

Por lo tanto, un vector de peso máximo homogéneo es de la forma $v = v_\alpha \wedge v_\beta \wedge v_\gamma$.

Veamos bajo qué condiciones son vectores de la homología.

1. v_α es un vector de la homología ya que no contiene ningún factor que pertenezca al centro de \mathfrak{n} .
2. Al igual que en el caso anterior, v_β tampoco tiene factores que pertenezcan al centro de \mathfrak{n} , por lo tanto es un vector de la homología.

Consideremos ahora

$$v_\gamma = z_{n+1-l}^1 \wedge z_{n-l}^1 \wedge \dots \wedge z_{n+2-l-\gamma_1}^1 \wedge \dots \wedge z_{n+1-l}^q \wedge \dots \wedge z_{n+2-l-\gamma_q}^q$$

Veamos que no es un vector de la homología. Sea

$$w = x_{l-k}^1 \wedge y_{n+1-l}^{l-k} \wedge z_{n-l}^1 \wedge \dots \wedge z_{n+2-l-\gamma_1}^1 \wedge \dots \wedge z_{n+1-l}^q \wedge \dots \wedge z_{n+2-l-\gamma_q}^q$$

entonces $\partial_0(w) = v_\gamma$ y por lo tanto $v_\gamma \in \text{Im } \partial_0$.

3. Veamos cuándo un vector $v = v_\alpha \wedge v_\gamma$ está en la homología.

Para que v esté en la homología, ningún factor z_j^i de v ($1 \leq i \leq k$, $\delta_i \leq j \leq n+1-l$) debe poderse obtener como corchete de un x_a^i y un y_j^a para $1 \leq a \leq l-k$. Dado que ningún y_j^a es factor de v , siempre podemos usar un y_j^a para obtener cualquiera de estos z_j^i . Por lo tanto, para cada z_j^i debemos tener que todos los x_a^i son factores de v para $1 \leq a \leq l-k$. Por lo tanto, v tiene la forma,

$$\begin{aligned} v = & x_{l-k}^1 \wedge \dots \wedge x_1^1 \wedge x_{l-k}^2 \wedge \dots \wedge x_1^2 \wedge \dots \wedge x_{l-k}^q \wedge \dots \wedge x_1^q \wedge x_{l-k}^{q+1} \wedge \dots \\ & \dots \wedge x_{l-k+1-\alpha_{q+1}}^{q+1} \wedge \dots \wedge x_{l-k}^m \wedge \dots \wedge x_{l-k+1-\alpha_m}^m \wedge z_{n+1-l}^1 \wedge \dots \\ & \dots \wedge z_{n+2-l-\gamma_1}^1 \wedge z_{n+1-l}^2 \wedge \dots \wedge z_{n+2-l-\gamma_2}^2 \wedge \dots \wedge z_{n+1-l}^q \wedge \dots \\ & \dots \wedge z_{n+2-l-\gamma_q}^q \end{aligned}$$

Es decir que debemos elegir $\gamma \in \mathcal{P}_{n+1-l}^q(c)$, donde $1 \leq q \leq k$ y $c \leq p-q(l-k)$; y además $\alpha = \underbrace{[l-k, \dots, l-k]}_q, \alpha_{q+1}, \alpha_{q+2}, \dots, \alpha_m] \in \mathcal{P}_{l-k}^k(p-c)$, donde $q \leq m \leq k$ y $l-k \geq \alpha_{q+1} \geq \alpha_{q+2} \geq \dots \geq \alpha_m \geq 1$.

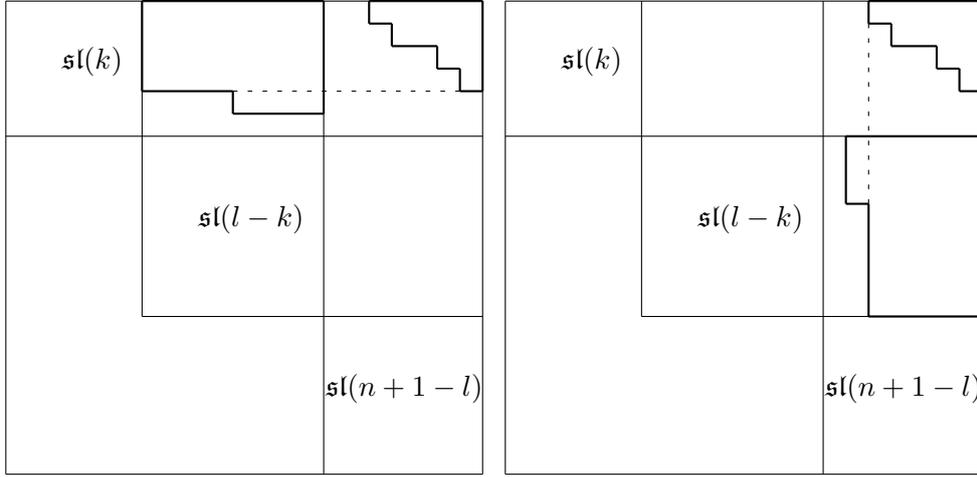
4. Análogamente al caso anterior, si $v = v_\beta \wedge v_\gamma$ es un vector de la homología debe tener como factores a todos los y_j^a con $1 \leq a \leq l-k$, por lo tanto podemos concluir

que

$$\begin{aligned} v = & y_{n+1-l}^1 \wedge \dots \wedge y_{n+2-l-\beta_1}^1 \wedge y_{n+1-l}^2 \wedge \dots \wedge y_{n+2-l-\beta_2}^2 \wedge \dots \\ & \dots \wedge y_{n+1-l}^m \wedge \dots \wedge y_{n+2-l-\beta_m}^m \wedge y_{n+1-l}^{m+1} \wedge \dots \wedge y_{n+2-l-\gamma_1}^{m+1} \wedge \dots \\ & \dots \wedge y_{n+1-l}^{l-k} \wedge \dots \wedge y_{n+2-l-\gamma_1}^{l-k} \wedge z_{n+1-l}^1 \wedge \dots \wedge z_{n+2-l-\gamma_1}^1 \wedge \dots \\ & \dots \wedge z_{n+1-l}^q \wedge \dots \wedge z_{n+2-l-\gamma_q}^q \end{aligned}$$

donde $\gamma \in P_{n+1-l}^q(c)$ con $1 \leq q \leq k$ y tal que $c \leq p - (l - k)\gamma_1$; y $\beta = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m, \underbrace{\gamma_1, \dots, \gamma_1}_{l-k-m}] \in P_{n+1-l}^{l-k}(p - c)$ con $1 \leq m \leq l - k$ y $n + 1 - l \geq \beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_m \geq \gamma_1$.

Gráficamente podemos ver los vectores $v = v_\alpha \wedge v_\gamma$ y $v = v_\beta \wedge v_\gamma$ de la siguiente forma:



5. Notemos que un vector $v = v_\alpha \wedge v_\beta \notin \text{Im } \partial_0$ ya que no contiene ningún factor que pertenezca al centro de \mathfrak{n} . Entonces, para que sea un vector de peso máximo de la homología basta ver que está en $\ker \partial_0$.

Sea

$$\begin{aligned} v = & x_{l-k}^1 \wedge \dots \wedge x_{l-k+1-\alpha_1}^1 \wedge \dots \wedge x_{l-k}^q \wedge \dots \wedge x_{l-k+1-\alpha_q}^q \wedge \\ & \wedge y_{n+1-l}^1 \wedge \dots \wedge y_{n+1-\beta_1}^1 \wedge \dots \wedge y_{n+1-l}^m \wedge \dots \wedge y_{n+1-l-\beta_m}^m \end{aligned}$$

Entonces $\partial_0(v)$ es una suma de términos que involucran una z , y varios x 's e y 's. Es decir

$$\partial_0(v) = \sum z \wedge \tilde{v}_{\alpha'} \wedge \tilde{v}_{\beta'}$$

Veamos que para que $\partial_0(v) = 0$ estos sumandos no pueden contener una z . Es decir que el corchete entre una x y una y siempre es 0.

Supongamos que existe un corchete no nulo entre factores de v , digamos $z = [x, y]$. Entonces, para que $\partial_0(v) = 0$ debe existir otro sumando que se anule con

el primero, es decir que existen x' e y' factores de v tales que $z = [x', y']$. Por lo tanto el primer sumando será

$$z \wedge x_{l-k}^1 \wedge \dots \wedge \widehat{x} \dots \wedge x' \wedge \dots \wedge x_{l-k+1-\alpha_q}^q \wedge \\ \wedge y_{n+1-l}^1 \wedge \dots \wedge \widehat{y} \wedge \dots \wedge y' \wedge \dots \wedge y_{n+1-l-\beta_m}^m$$

y el sumando con el que se cancelará será

$$z \wedge x_{l-k}^1 \wedge \dots \wedge \widehat{x'} \dots \wedge x \wedge \dots \wedge x_{l-k+1-\alpha_q}^q \wedge \\ \wedge y_{n+1-l}^1 \wedge \dots \wedge \widehat{y'} \wedge \dots \wedge y \wedge \dots \wedge y_{n+1-l-\beta_m}^m$$

pero esto es absurdo ya que uno contiene a x' y no a x y el otro contiene a x y no a x' . Por lo tanto no existe tal z y todo corchete de factores de v es igual a cero.

Esto nos dice que si

$$v_\alpha = x_{l-k}^1 \wedge \dots \wedge x_{l-k+1-\alpha_1}^1 \wedge \dots \wedge x_{l-k}^q \wedge \dots \wedge x_{l-k+1-\alpha_q}^q,$$

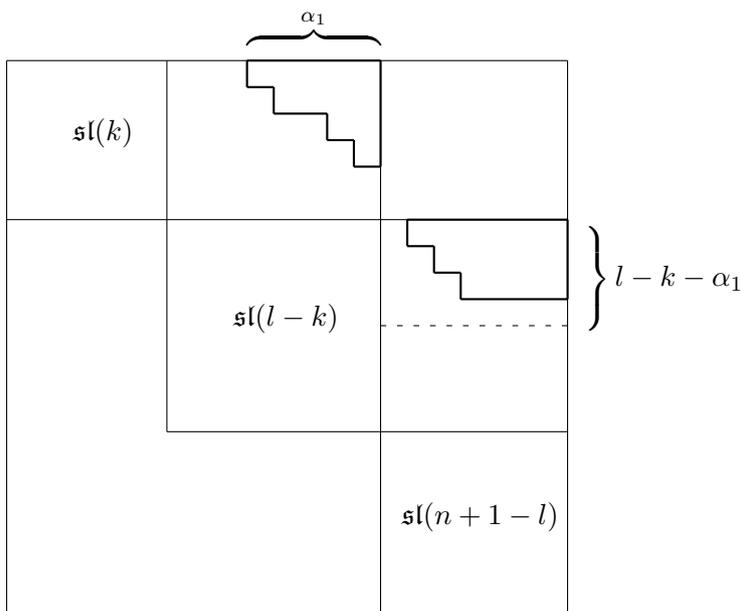
entonces v no debe contener factores y_j^i tales que $l - k + 1 - \alpha_1 \leq i \leq l - k$. Por lo tanto v tiene la forma

$$v = x_{l-k}^1 \wedge \dots \wedge x_{l-k+1-\alpha_1}^1 \wedge \dots \wedge x_{l-k}^q \wedge \dots \wedge x_{l-k+1-\alpha_q}^q \wedge \\ \wedge y_{n+1-l}^1 \wedge \dots \wedge y_{n+1-\beta_1}^1 \wedge \dots \wedge y_{n+1-l}^m \wedge \dots \wedge y_{n+1-l-\beta_m}^m$$

donde $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_q] \in \mathcal{P}_{l-k-1}^k(a)$ con $1 \leq a < p$ y $\beta = [\beta_1, \dots, \beta_m] \in \mathcal{P}_{l-k}^m(p-a)$ con $1 \leq m \leq l - k - \alpha_1$.

OBSERVACIÓN 8.5. *Notemos que para que exista al menos un elemento del bloque Y , debemos tener $l - k + 1 - \alpha_1 > 1$, es decir $\alpha_1 \leq l - k - 1$.*

Gráficamente, el vector de peso máximo de la homología $v = v_\alpha \wedge v_\beta$ tiene la forma



6. Consideremos ahora el caso $v = v_\alpha \wedge v_\beta \wedge v_\gamma$. Tenemos que

$$\partial_0(v) = \sum z \wedge \widetilde{v}_{\alpha'} \wedge \widetilde{v}_{\beta'} \wedge v_\gamma,$$

donde z es el corchete entre un x y un y factores de v (como en el caso anterior). Entonces para que $\partial_0(v)$ sea 0, debemos tener que los sumandos se cancelen entre sí, ó que los sumandos sean 0.

Los sumandos no se pueden cancelar entre sí por la misma razón que en el caso anterior. Entonces cada sumando debe ser cero. Entonces tenemos dos posibilidades:

- (a) Todo corchete $[x, y] = 0$.
- (b) El corchete $z = [x, y]$ es un factor de v para todo par (x, y) tal que $z \neq 0$.

Analicemos cada uno de estos casos:

- (a) Supongamos que $[x, y]$ es siempre cero, entonces sabemos cómo deben ser v_α y v_β por el caso anterior; $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_q]$ con $1 \leq \alpha_1 \leq l-k-1$ y $\beta = [\beta_1, \dots, \beta_m]$ con $1 \leq m \leq l-k-\alpha_1$.

Veamos qué otras condiciones deben cumplir β y γ para que v sea un vector de peso máximo de la homología.

- Si $v_\gamma = z_{n+1-l}^1 \wedge \dots \wedge z_{n+2-l-\gamma_1}^1 \wedge \dots \wedge z_{n+1-l}^s \wedge \dots \wedge z_{n+2-l-\gamma_s}^s$, entonces denotemos

$$\widehat{v}_\gamma = z_{n-l}^1 \wedge \dots \wedge z_{n+2-l-\gamma_1}^1 \wedge \dots \wedge z_{n+1-l}^s \wedge \dots \wedge z_{n+2-l-\gamma_s}^s,$$

es decir que \widehat{v}_γ es v_γ sin su primer factor z_{n+1-l}^1 .

Supongamos que $m < l-k-\alpha_1$. Entonces si

$$w = x_{l-k-\alpha_1}^1 \wedge y_{n+1-l}^{l-k-\alpha_1} \wedge v_\alpha \wedge v_\beta \wedge \widehat{v}_\gamma,$$

tenemos $\partial_0(w) = v$. Por lo tanto debemos tener que $m = l-k-\alpha_1$.

- Supongamos ahora que $\gamma_1 > \beta_{l-k-\alpha_1}$. Entonces sea

$$\widehat{v}_\gamma = z_{n+1-l}^1 \wedge \dots \wedge \widehat{z_{n+1-l-\beta_{l-k-\alpha_1}}^1} \wedge \dots \wedge z_{n+2-l-\gamma_1}^1 \wedge \dots \\ \dots \wedge z_{n+1-l}^s \wedge \dots \wedge z_{n+2-l-\gamma_s}^s,$$

Consideremos $w = x_{l-k-\alpha_1}^1 \wedge y_{n+1-l-\beta_{l-k-\alpha_1}}^{l-k-\alpha_1} \wedge v_\alpha \wedge v_\beta \wedge \widehat{v}_\gamma$, entonces

$$\partial_0(w) = z_{n+1-l-\beta_{l-k-\alpha_1}}^1 \wedge v_\alpha \wedge v_\beta \wedge \widehat{v}_\gamma = v.$$

Esto nos dice que $\gamma_1 \leq \beta_{l-k-\alpha_1}$.

- Consideremos ahora el primer α_i tal que $\alpha_j < \alpha_1$, $2 \leq i \leq q$ (podría no existir). Si

$$v_\gamma = z_{n+1-l}^1 \wedge \dots \wedge z_{n+2-l-\gamma_1}^1 \wedge \dots \wedge z_{n+1-l}^s \wedge \dots \wedge z_{n+2-l-\gamma_s}^s,$$

con $s \geq i$ entonces sean

$$\widehat{v}_\gamma = z_{n+1-l}^1 \wedge \dots \wedge z_{n+2-l-\gamma_1}^1 \wedge \dots \wedge \widehat{z_{n+1-l}^i} \wedge \dots \wedge z_{n+2-l-\gamma_s}^s,$$

y $w = x_{l-k-\alpha_i}^i \wedge y_{n+1-l}^{l-k-\alpha_i} \wedge v_\alpha \wedge v_\beta \wedge \widehat{v}_\gamma$, por lo tanto

$$\partial_0(w) = z_{n+1-l}^i \wedge v_\alpha \wedge v_\beta \wedge \widehat{v}_\gamma = v.$$

Y esto nos dice que $s < i$.

- Si $q < k$ entonces consideremos

$$v_\gamma = z_{n+1-l}^1 \wedge \dots \wedge z_{n+2-l-\gamma_1}^1 \wedge \dots \wedge z_{n+1-l}^s \wedge \dots \wedge z_{n+2-l-\gamma_s}^s,$$

con $s \geq q + 1$ y sean

$$\widehat{v}_\gamma = z_{n+1-l}^1 \wedge \dots \wedge z_{n+2-l-\gamma_1}^1 \wedge \dots \wedge \widehat{z_{n+1-l}^{q+1}} \wedge \dots \wedge z_{n+2-l-\gamma_s}^s,$$

$$\text{y } w = x_{l-k}^{q+1} \wedge y_{n+1-l}^{l-k} \wedge v_\alpha \wedge v_\beta \wedge \widehat{v}_\gamma, \text{ por lo tanto}$$

$$\partial_0(w) = z_{n+1-l}^{q+1} \wedge v_\alpha \wedge v_\beta \wedge \widehat{v}_\gamma = v.$$

Y esto nos dice que $s < q + 1$.

Entonces debemos tener,

- $1 \leq a \leq p - 2$,
- $a + \beta_{l-k-\alpha_1}(l - k - \alpha_1) + 1 \leq p$ y además
- $a + b + \beta_{l-k-\alpha_1}(i - 1) \geq p$.

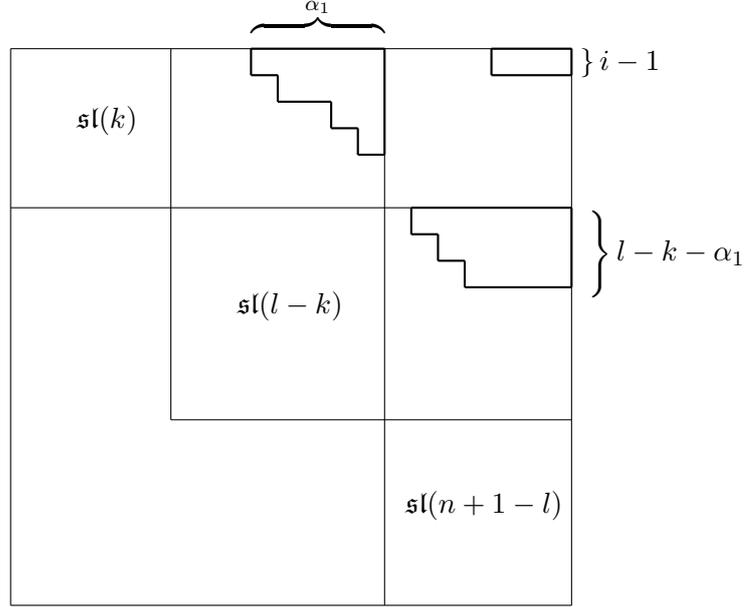
Por lo tanto podemos construir un vector de peso máximo de la homología $H_p(\mathfrak{n})$ de la siguiente forma:

CONSTRUCCIÓN 8.6.

- 1) Elegimos $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_q] \in \mathcal{P}_{l-k-1}^q(a)$ con $1 \leq q \leq k$, $1 \leq a \leq \min\{p - 2, k(l - k)\}$. Esto nos da el valor de α_1 y definimos i tal que α_i es el primer $\alpha_j < \alpha_1$, y sino $i = q + 1$.
- 2) Elegimos $\beta_{l-k-\alpha_1}$ tal que $\beta_{l-k-\alpha_1}(l - k - \alpha_1) \leq p - a - 1$.
- 3) Elegimos b tal que: $p - a - \beta_{l-k-\alpha_1}(i - 1) \leq b \leq p - a - 1$. Entonces elegimos $\beta = [\beta_1, \dots, \beta_{l-k-\alpha_1}] \in \mathcal{P}_{n+1-l}^{l-k-\alpha_1}(b)$ y finalmente,
- 4) Elegimos $\gamma = [\gamma_1, \dots, \gamma_s] \in \mathcal{P}_{\beta_{l-k-\alpha_1}}^{i-1}(p - a - b)$.

Con esta construcción $v = v_\alpha \wedge v_\beta \wedge v_\gamma$ es un vector de peso máximo de $H_p(\mathfrak{n})$; ya que por lo visto anteriormente, todo corchete es nulo y por lo tanto $\partial_0(v) = 0$; además ninguno de factores de v que son elementos del centro se puede obtener como corchete de dos elementos que no sean factores de v , y entonces $v \notin \text{Im } \partial_0$.

Gráficamente podemos ver el vector de peso máximo de la siguiente forma,



- (b) Supongamos ahora que todo corchete no nulo de elementos de v también es un factor de v .

Sean

$$v_\alpha = x_{l-k}^1 \wedge \dots \wedge x_{l-k+1-\alpha_1}^1 \wedge \dots \wedge x_{l-k}^q \wedge \dots \wedge x_{l-k+1-\alpha_q}^q,$$

y

$$v_\beta = y_{n+1-l}^1 \wedge \dots \wedge y_{n+2-l-\beta_1}^1 \wedge \dots \wedge y_{n+1-l}^m \wedge \dots \wedge y_{n+2-l-\beta_m}^m.$$

Sea i el menor tal que $m < l - k + 1 - \alpha_i$, sino $i = q + 1$. Entonces para $r \geq i$, el corchete $[x_j^r, y_t^s] = 0$.

Para $1 \leq r < i$ tenemos $[x_j^r, y_t^s] = z_t^r$ con $l - k + 1 - \alpha_r \leq j \leq m$ y $n + 2 - l - \beta_j \leq t \leq n + 1 - l$. Teniendo en cuenta que si $l - k + 1 - \alpha_r \leq j \leq m \Rightarrow n + 2 - l - \beta_{l-k+1-\alpha_r} \leq n + 2 - l - \beta_j \leq n + 2 - l - \beta_m$, obtenemos que v_γ debe tener por factores a los

$$(8.6) \quad z_t^r \text{ con } r < i \text{ y } n + 2 - l - \beta_{l-k+1-\alpha_r} \leq t \leq n + 1 - l.$$

Falta ver que otros posibles factores puede tener v_γ .

Los únicos z_t^r que pueden ser factores de v son aquellos tales que uno de x_j^r y y_t^j también sea factor de v pero no ambos (si ambos son factores, z_t^r ya fue considerado antes). Si ni x_j^r ni y_t^j son factores podemos construir un w tal que $\partial_0(w) = v$ como lo hicimos en el caso anterior. Entonces si x_j^r es factor de v , y_t^j no puede ser factor de v y viceversa, para todos los posibles valores de j .

- 1) Consideremos los x_j^r que si son factores de v , es decir que $1 \leq r \leq q$ y $l - k + 1 - \alpha_r \leq j \leq l - k$. Tomemos también los y_t^j que no sean factores de v , es decir aquellos con $1 \leq j \leq l - k$ y $1 \leq t \leq n + 1 - l - \beta_j$. Entonces debemos tener $\max\{1, l - k - 1 - \alpha_r\} \leq j \leq l - k$ y por lo tanto los posibles factores de v_γ obtenidos son los

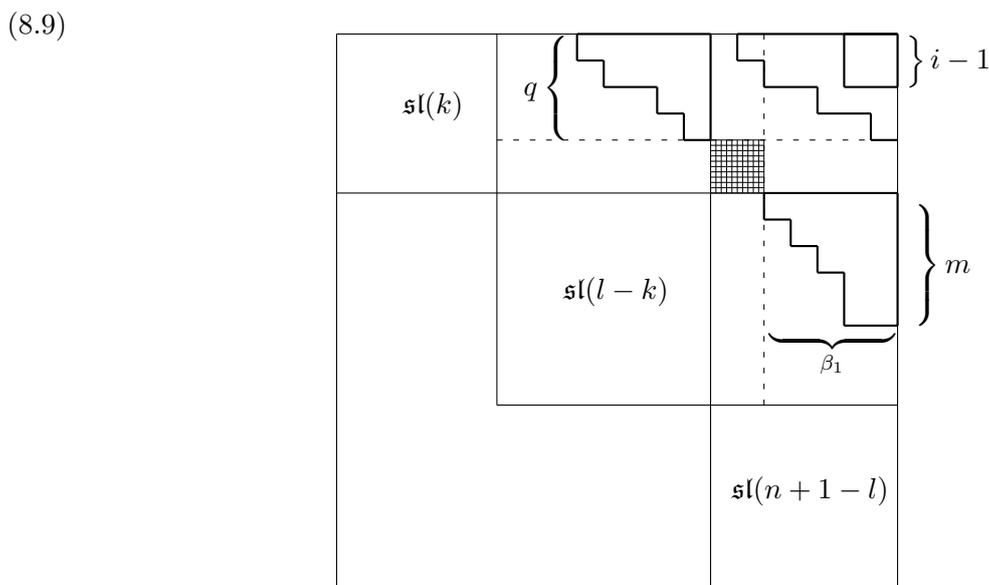
$$(8.7) \quad z_t^r \text{ con } 1 \leq r \leq q \text{ y } 1 \leq t \leq n + 1 - l - \beta_{l-k}.$$

- 2) Consideremos ahora los x_j^r que no son factores de v , es decir aquellos con $1 \leq r \leq k$ y $1 \leq j \leq l - k - \alpha_r$. Tomemos también los y_t^j que si sean factores de v , es decir aquellos con $1 \leq j \leq m$ y $n + 2 - l - \beta_j \leq t \leq n + 1 - l$. Entonces debemos tener $1 \leq j \leq \min\{l - k - \alpha_r, m\}$ y por lo tanto los posibles factores de v_γ obtenidos son los

$$(8.8) \quad z_t^r \text{ con } 1 \leq r \leq k \text{ y } n + 2 - l - \beta_1 \leq t \leq n + 1 - l.$$

Notemos que (8.7) y (8.8) contienen a (8.6).

Podemos graficar la situación de la siguiente forma:



Es decir, que el vector de peso máximo tiene la forma $v = v_\alpha \wedge v_\beta \wedge v_\gamma$, donde v_γ puede contener a cualquier factor de un $v_{\gamma'}$ contenido en la “esquina” del bloque \mathfrak{z} que no incluye al rectángulo sombreado de la figura (8.9) y que además contiene a los factores obtenidos en (8.6).

Con todo esto podemos construir este tipo de vectores de peso máximo de la siguiente forma:

CONSTRUCCIÓN 8.7.

- 1) Elegimos a tal que $1 \leq a \leq \min\{k(l-k), p-2\}$ y $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_q] \in \mathcal{P}_{l-k}^q(a)$ con $1 \leq q \leq k$.

- 2) Definimos $\alpha_{q+1} = 0$ y elegimos i de modo que $l - k + 1 - \alpha_{i-1} < \min\{l - k + 1 - \alpha_i, p - a\}$.
- 3) Elegimos m tal que $l - k + 1 - \alpha_{i-1} \leq m < \min\{l - k + 1 - \alpha_i, p - a\}$.
- 4) Elegimos $\beta_{l-k+1-\alpha_{i-1}} \geq 1$ tal que

$$\beta_{l-k+1-\alpha_{i-1}}(l - k - \alpha_{i-1} + i) \leq p - a - m + (l - k + 1 - \alpha_{i-1})$$
- 5) Elegimos b tal que

$$b \geq \beta_{l-k+1-\alpha_{i-1}}(l - k + 1 - \alpha_{i-1}) + m - (l - k + 1 - \alpha_{i-1}),$$
 y

$$b \leq \min\{p - a - (i - 1)\beta_{l-k+1-\alpha_{i-1}}, m(n + 1 - l)\}.$$
- 6) Elegimos $\beta_1 \geq 1$ tal que $k\beta_1 + q(n + 1 - l - \beta_1) \geq p - a - b$ y

$$\beta_1 \leq \min\{b - (\beta_{l-k+1-\alpha_{i-1}} - 1)(l - k - \alpha_{i-1}) - m + 1, n + 1 - l\}.$$
- 7) Elegimos $\beta = [\beta_1, \dots, \beta_{l-k+1-\alpha_{i-1}}, \dots, \beta_m] \in \mathcal{P}_{n+1-l}^m(b)$.
- 8) Elegimos $\gamma = [\gamma_1, \dots, \gamma_s] \in \mathcal{P}_{n+1-l}^s(p - a - b)$ con $i - 1 \leq s \leq k$, $\gamma_j \geq \beta_{l-k+1-\alpha_j}$ para $1 \leq j \leq i - 1$ y además $\gamma_{q+1} \leq \beta_1$.

OBSERVACIÓN 8.8. Notemos que con esta construcción, después de seguir los ocho pasos el vector que se obtiene es de peso máximo de la homología. Sin embargo, algún paso podría no ser posible debido a una mala elección en algún paso anterior.

□

OBSERVACIÓN 8.9. Vamos a denotar el módulo de la homología trivial asociado a alguna combinación de las particiones α, β, γ como $H_p^\alpha(\mathbf{n})$, $H_p^\beta(\mathbf{n})$, $H_p^{\alpha\gamma}(\mathbf{n})$, $H_p^{\beta\gamma}(\mathbf{n})$, $H_p^{\alpha\beta}(\mathbf{n})$ y $H_p^{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{n})$ respectivamente.

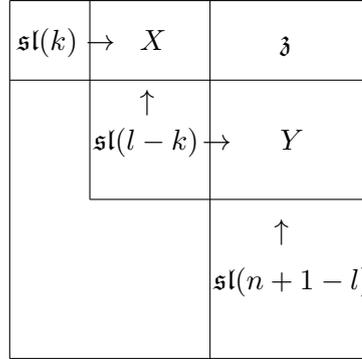
2. Productos Tensoriales

Por todo lo expuesto en los capítulos anteriores, podemos calcular la homología adjunta de $\mathbf{n} = A_n(k, l)$ en tres pasos:

1. calculando los vectores de peso máximo de la homología trivial $H_p(\mathbf{n})$ (resuelto en el Teorema 8.4);
2. calculando los vectores de peso máximo de los productos tensoriales $H_p(\mathbf{n}) \otimes V$ y $H_p(\mathbf{n}) \otimes \mathfrak{z}$, y por último
3. conociendo cómo actúa el morfismo de conexión δ_p sobre cada vector de los productos tensoriales.

En esta sección vamos a resolver el segundo paso, mientras que en la sección siguiente daremos algunos resultados sobre la acción del morfismo de conexión.

De la representación matricial 8.4 y de la demostración del Teorema 8.4, se observa que sobre cada bloque (X, Y, \mathfrak{z}) actúan dos bloques. Gráficamente la situación es la siguiente,



Así, por ejemplo, $\mathfrak{sl}(k)$ actúa sobre los bloques X y \mathfrak{z} , y $\mathfrak{sl}(n+1-l)$ actúa sobre los bloques Y y \mathfrak{z} .

Para cada conjunto J , recordemos que los operadores V_J y U_J son los definidos en (5.8).

Consideremos en general un bloque B (que puede ser uno de los bloques X, Y ó \mathfrak{z}) de tamaño $a \times b$ y cuyo vector de peso máximo es u_b^1 . Sea además u_j^i un elemento de B y supongamos que sobre B sólo actúan $\mathfrak{sl}(a)$ y $\mathfrak{sl}(b)$. Entonces si V_D es una representación, un vector de peso máximo de $V_D \otimes B$ viene dado por el siguiente teorema:

TEOREMA 8.10. *Sea v un vector de peso máximo de V_D de peso $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{a-1})$ como $\mathfrak{sl}(a)$ -módulo y de peso $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{b-1})$ como $\mathfrak{sl}(b)$ -módulo.*

- *Sea s tal que $s = 1$ ó $\lambda_{s-1} > \lambda_s$ para $1 < s \leq a$ y definimos $\lambda_a = 0$.*
- *Sea t tal que $t = b$ ó $\mu_t > \mu_{t+1}$ para $1 \leq t < b$ y definimos $\mu_b = 0$.*
- *Sean $A^{(s)} = \{J \subseteq [a] : \max(J) = s\}$ y $A_{(t)} = \{J \subseteq [b] : \min(J) = t\}$.*
- *Para $i \leq s$ definimos $\bar{\sigma}_i = \lambda_s - \lambda_i - (s-i) + 1$ y $\bar{\sigma}_J = \prod_{i \in J} \bar{\sigma}_i$.*
- *Para $i \geq t$ definimos $\sigma_i = \mu_t - \mu_i - (t-i) - 1$ y $\sigma_J = \prod_{i \in J} \sigma_i$.*

Entonces

$$w = \sum_{J_2 \in A_{(t)}} \sum_{J_1 \in A^{(s)}} \frac{1}{\sigma_{J_2}} \frac{1}{\bar{\sigma}_{J_1}} U_{J_2}(V_{J_1}v) \otimes u_{\max(J_2)}^{\min(J_1)}$$

es un vector de peso máximo de $V_D \otimes B$.

Además, como $\mathfrak{sl}(a)$ módulo, w tiene peso

$$\begin{cases} (\lambda_1 + 1, \lambda_2, \dots, \lambda_{a-1}), & \text{si } s = 1, \\ (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s + 1, \dots, \lambda_{a-1}), & \text{si } s > 1. \end{cases}$$

y como $\mathfrak{sl}(b)$ módulo, w tiene peso

$$\begin{cases} (\mu_1 + 1, \mu_2 + 1, \dots, \mu_{a-1} + 1), & \text{si } t = b, \\ (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_t - 1, \dots, \mu_{b-1}), & \text{si } t < b. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. Debemos ver que el vector w así definido es vector de peso máximo tanto de $\mathfrak{sl}(a)$ como de $\mathfrak{sl}(b)$.

- Veamos primero el caso $\mathfrak{sl}(a)$. Sea $E_{r,r+1} \in \mathcal{U}^+(\mathfrak{sl}(a))$ con $1 \leq r < a$, entonces tenemos:

$$\begin{aligned}
E_{r,r+1} \cdot w &= \sum_{J_2 \in A_{(t)}} \sum_{J_1 \in A^{(s)}} \frac{1}{\sigma_{J_2}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} [E_{r,r+1}, U_{J_2}(V_{J_1}v)] \otimes u_{\max(J_2)}^{\min(J_1)} \\
&\quad + \sum_{J_2 \in A_{(t)}} \sum_{J_1 \in A^{(s)}} \frac{1}{\sigma_{J_2}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} U_{J_2}(V_{J_1}v) \otimes [E_{r,r+1}, u_{\max(J_2)}^{\min(J_1)}] \\
&= \sum_{J_2 \in A_{(t)}} \sum_{J_1 \in A^{(s)}} \frac{1}{\sigma_{J_2}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} U_{J_2}(E_{r,r+1}V_{J_1}v) \otimes u_{\max(J_2)}^{\min(J_1)} \\
&\quad + \sum_{J_2 \in A_{(t)}} \sum_{J_1 \in A^{(s)}} \frac{1}{\sigma_{J_2}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} U_{J_2}(V_{J_1}v) \otimes [E_{r,r+1}, u_{\max(J_2)}^{\min(J_1)}]
\end{aligned}$$

ya que como $U_{J_2} \in \mathcal{U}^-(\mathfrak{sl}(b))$ conmuta con $E_{r,r+1}$.

Entonces obtenemos:

$$\begin{aligned}
E_{r,r+1} \cdot w &= \sum_{J_2 \in A_{(t)}} \frac{1}{\sigma_{J_2}} U_{J_2} \left(\sum_{J_1 \in A^{(s)}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} (E_{r,r+1}V_{J_1}v) \otimes u_{\max(J_2)}^{\min(J_1)} \right) \\
&\quad + \sum_{J_2 \in A_{(t)}} \frac{1}{\sigma_{J_2}} U_{J_2} \left(\sum_{J_1 \in A^{(s)}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} (V_{J_1}v) \otimes [E_{r,r+1}, u_{\max(J_2)}^{\min(J_1)}] \right) \\
&= \sum_{J_2 \in A_{(t)}} \frac{1}{\sigma_{J_2}} U_{J_2} \left(\sum_{J_1 \in A^{(s)}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} (E_{r,r+1}V_{J_1}v) \otimes u_{\max(J_2)}^{\min(J_1)} + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{J_1 \in A^{(s)}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} (V_{J_1}v) \otimes [E_{r,r+1}, u_{\max(J_2)}^{\min(J_1)}] \right) \\
&= \sum_{J_2 \in A_{(t)}} \frac{1}{\sigma_{J_2}} U_{J_2} \left(E_{r,r+1} \left[\sum_{J_1 \in A^{(s)}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} V_{J_1}v \otimes u_{\max(J_2)}^{\min(J_1)} \right] \right)
\end{aligned}$$

Y como $\sum_{J_1 \in A^{(s)}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} V_{J_1}v \otimes u_{\max(J_2)}^{\min(J_1)}$ es un vector de peso máximo como $\mathfrak{sl}(a)$ -módulo

por el Teorema 5.10, entonces obtenemos que $E_{r,r+1} \cdot w = 0$.

- Análogamente al caso anterior y teniendo en cuenta que U_{J_2} y V_{J_1} conmutan ya que $U_{J_2} \in \mathcal{U}^-(\mathfrak{sl}(b))$ y $V_{J_1} \in \mathcal{U}^-(\mathfrak{sl}(a))$, obtenemos $E_{r,r+1} \cdot w = 0$ para $E_{r,r+1} \in \mathcal{U}^+(\mathfrak{sl}(b))$.

□

OBSERVACIONES 8.11.

1. Notemos que este Teorema contiene a los Teoremas 5.11 y 5.10.
2. Vamos a denotar el submódulo que tiene como vector de peso máximo a w obtenido a partir de este Teorema, como $V_D \otimes B(s, t)$ para distinguir la elección de s y t .

3. Esta construcción preserva los diagramas de Young: veamos esto con un ejemplo.

Supongamos que tenemos $\mathfrak{sl}(15)$ dividido en tres bloques $\mathfrak{sl}(4)$, $\mathfrak{sl}(6)$ y $\mathfrak{sl}(5)$, donde los dos primeros bloques actúan sobre el bloque X .

Consideremos la representación V_D asociada a la partición $(4, 2, 1)$ (como $\mathfrak{sl}(4)$ -módulo) y que tiene como vector de peso máximo a $v = x_6^1 \wedge x_5^1 \wedge x_4^1 \wedge x_3^1 \wedge x_6^2 \wedge x_5^2 \wedge x_6^3$. Entonces como $\mathfrak{sl}(6)$ módulo v tiene peso $(3, 3, 2, 2, 1)$.

El vector de peso máximo de $V_D \otimes X(2, 4)$ (por ejemplo) será entonces

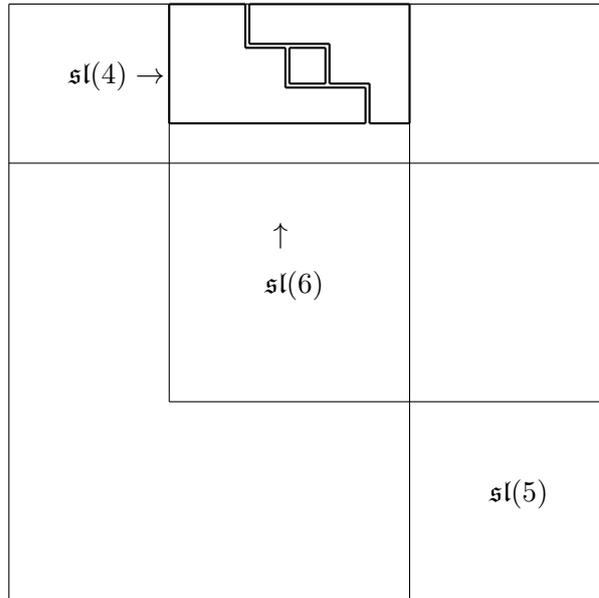
$$w = \sum_{J_2 \in A(4)} \sum_{J_1 \in A(2)} \frac{1}{\sigma_{J_2}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} U_{J_2}(V_{J_1}v) \otimes x_{\max(J_2)}^{\min(J_1)}.$$

Un sumando de w (cuando elegimos $J_2 = \{4\}$ y $J_1 = \{2\}$) es

$$-x_6^1 \wedge x_5^1 \wedge x_4^1 \wedge x_3^1 \wedge x_6^2 \wedge x_5^2 \wedge x_6^3 \otimes x_4^2,$$

que como $\mathfrak{sl}(4)$ -módulo tiene peso $(4, 3, 1)$ y como $\mathfrak{sl}(6)$ -módulo tiene peso $(3, 3, 2, 1, 1)$ que es exactamente el mismo que se obtiene de tomar el diagrama de Young de v , y agregarle un cuadrado en la fila 2 en el caso $\mathfrak{sl}(4)$, ó removerle un cuadrado en la fila 4 en el caso $\mathfrak{sl}(6)$.

Gráficamente,



3. La acción del centro de \mathfrak{g}_1

Tal como lo hicimos en los capítulos anteriores, vamos a analizar la acción del centro de \mathfrak{g}_1 $\{h_1, h_2\}$ (ver (8.5)) en cada uno de los vectores de peso máximo de los productos tensoriales $H_p(\mathfrak{n}) \otimes X$, $H_p(\mathfrak{n}) \otimes Y$ y $H_p(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}$.

LEMA 8.12. Sean

- $\alpha \in \mathcal{P}_{l-k}^{q_1}(a)$, $\beta \in \mathcal{P}_{n+1-l}^{q_2}(b)$, $\gamma \in \mathcal{P}_{n+1-l}^{q_3}(c)$ tales que $a + b + c = p$;
- $\alpha' \in \mathcal{P}_{l-k}^{q'_1}(a')$, $\beta' \in \mathcal{P}_{n+1-l}^{q'_2}(b')$, $\gamma' \in \mathcal{P}_{n+1-l}^{q'_3}(c')$ tales que $a' + b' + c' = p - 1$.

Las siguientes tablas nos dan la acción del centro de \mathfrak{g}_1 sobre los módulos $H_p(\mathfrak{n}) \otimes X$, $H_p(\mathfrak{n}) \otimes Y$ y $H_{p-1}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}$.

w_1	$H_p^{w_1} \otimes X$	$H_p^{w_1} \otimes Y$
α	$(p + 1, -p - 1)$	$(p + 1, -p + 2)$
β	$(p + 1, 2p - 1)$	$(p + 1, 2p + 2)$
$\alpha\gamma$	$(p + 1 + c, -a + c - 1)$	$(p + 1 + c, -a + c + 2)$
$\beta\gamma$	$(p + 1 + c, p + b - 1)$	$(p + 1 + c, p + b + 2)$
$\alpha\beta$	$(p + 1, -a + 2b - 1)$	$(p + 1, -a + 2b + 2)$
$\alpha\beta\gamma$	$(p + 1 + c, -a + 2b + c - 1)$	$(p + 1 + c, -a + 2b + c + 2)$

w_2	$H_{p-1}^{w_2} \otimes \mathfrak{z}$
α'	$(p + 1, -p + 2)$
β'	$(p + 1, 2p - 1)$
$\alpha'\gamma'$	$(p + 1 + c', -a' + c' + 1)$
$\beta'\gamma'$	$(p + 1 + c', p + b' + 1)$
$\alpha'\beta'$	$(p + 1, -a' + 2b' + 1)$
$\alpha'\beta'\gamma'$	$(p + 1 + c', -a' + 2b' + c' + 1)$

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de observar que la acción del centro de \mathfrak{g}_1 , $\{h_1, h_2\}$ (ver (8.5)) es:

- $(a, -a)$, en un vector de tipo v_α , con α una partición de a ,
- $(b, 2b)$, en un vector de tipo v_β , con β una partición de b ,
- $(2c, c)$, en un vector de tipo v_γ , con γ una partición de c ,
- $(1, -1)$, en x_{l-k}^1 , el vector de peso máximo de X ,
- $(1, 2)$, en y_{n+1-l}^1 , el vector de peso máximo de Y ,
- $(2, 1)$, en x_{n+1-l}^1 , el vector de peso máximo de \mathfrak{z} ,

□

PROPOSICIÓN 8.13. Para cada $0 \leq p \leq \dim \mathfrak{n}$, $H_p(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}$ es de multiplicidad libre.

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de la comparación de la acción del centro de \mathfrak{g}_1 sobre $H_p^w(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}$ para cada par de posibles w (Tabla (8.11)). □

En el siguiente Teorema damos algunos resultados sobre la acción del morfismo δ_p en el caso general.

TEOREMA 8.14. Sean $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta'$ y γ' como en el Lema 8.12. Entonces δ_p actúa de la siguiente forma:

1. $\delta_p(H_p^\alpha(\mathfrak{n}) \otimes X) = 0$,
2. $\delta_p(H_p^{\alpha\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes X) = 0$,
3. $\delta_p(H_p^{\beta\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes X) = 0$,
4. $\delta_p(H_p^{\alpha\beta}(\mathfrak{n}) \otimes X) = 0$,
5. $\delta_p(H_p^\beta(\mathfrak{n}) \otimes Y) = 0$,

$$6. \delta(H_p^{\beta\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes Y) = 0,$$

Y además,

7. $\delta_p(H_p^\beta(\mathfrak{n}) \otimes X) \subseteq H_{p-1}^{\beta'}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z},$
8. $\delta_p(H_p^{\alpha\beta\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes X) \subseteq H_{p-1}^{\alpha'\gamma'}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}$ si $a = a', b = 1$ y $c = c',$
9. $\delta_p(H_p^{\alpha\beta\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes X) \subseteq H_{p-1}^{\alpha'\beta'\gamma'}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}$ si $a = a', b = b' + 1$ y $c = c',$
10. $\delta_p(H_p^\alpha(\mathfrak{n}) \otimes Y) \subseteq H_{p-1}^{\alpha'}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z},$
11. $\delta_p(H_p^{\alpha\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes Y) \subseteq H_{p-1}^{\alpha'\gamma'}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}$ si $a = a' + 1$ y $c = c',$
12. $\delta_p(H_p^{\alpha\beta}(\mathfrak{n}) \otimes Y) \subseteq H_{p-1}^{\beta'}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}$ si $a = 1,$
13. $\delta_p(H_p^{\alpha\beta}(\mathfrak{n}) \otimes Y) \subseteq H_{p-1}^{\alpha'\beta'}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}$ si $a = a' + 1$ y $b = b',$
14. $\delta_p(H_p^{\alpha\beta\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes Y) \subseteq H_{p-1}^{\alpha'\beta'\gamma'}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}$ si $a = a' + 1, b = b'$ y $c = c'.$

Se tiene también que $H_{p-1}^{\beta'\gamma'}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z} \subseteq \text{coker } \delta_p.$

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de la comparación de la acción del centro de \mathfrak{g}_1 sobre $H_p(\mathfrak{n}) \otimes X$ y $H_p(\mathfrak{n}) \otimes Y$ con la acción sobre $H_{p-1}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}.$ \square

Las familias $A_n(k, k + 1)$

En este capítulo vamos a considerar las familias de nilradicales que se obtienen de elegir dos raíces consecutivas, es decir cuando $\Pi_0 = \{e_k - e_{k+1}, e_{k+1} - e_{k+2}\}$ con $1 \leq k \leq n - 1$. Notemos que el caso $k = 1$ corresponde a $A_n(1, 2)$, y el caso $k = n - 1$ (es decir $A_n(n - 1, n)$) es isomorfo a $A_n(1, 2)$.

Sean $X = \langle \{x_1^1, \dots, x_1^k\} \rangle$, $Y = \langle \{y_1^1, \dots, y_{n-k}^1\} \rangle$ y $\mathfrak{z} = \langle \{z_1^1, \dots, z_{n-k}^1, \dots, z_1^k, \dots, z_{n-k}^k\} \rangle$, entonces $\mathfrak{n} = A_n(k, k + 1)$ está generada como álgebra de Lie por $V = X \oplus Y$ y los únicos corchetes no nulos de elementos de la base son $[x_1^i, y_j^1] = z_j^i$. Es decir, \mathfrak{z} es el centro de \mathfrak{n} .

La subálgebra parabólica \mathfrak{p} dentro de \mathfrak{g}_1 es,

(9.1)

$\mathfrak{sl}(k)$	x_1^1	z_1^1	\dots	z_{n-k}^1
	\vdots	\vdots		\vdots
	x_1^k	z_1^k	\dots	z_{n-k}^k
		y_1^1	\dots	y_{n-k}^1
$\mathfrak{sl}(n - k)$				

Y se puede ver fácilmente a partir del Capítulo anterior, que la parte semisimple de la subálgebra reductiva es $\mathfrak{g}_1^{ss} \simeq \mathfrak{sl}(k) \oplus \mathfrak{sl}(n - k)$.

1. Homología trivial de $A_n(k, k + 1)$

Como en los casos anteriores, necesitamos como paso intermedio para calcular la homología adjunta de \mathfrak{n} , conocer primero su homología trivial. Para ello tenemos

TEOREMA 9.1. *Los vectores de peso máximo de $H_p(\mathfrak{n})$ son:*

1. $v_\alpha = x_1^1 \wedge x_1^2 \wedge \dots \wedge x_1^p$ si $p \leq k$, donde $\alpha = \underbrace{[1, \dots, 1]}_p$.
2. $v_\beta = y_{n+1-k-p}^1 \wedge y_{n+2-k-p}^1 \wedge \dots \wedge y_{n+1-k}^1$ si $p \leq k$, donde $\beta = [p]$.
3. $v = v_\alpha \wedge v_\gamma$, donde
 - $\gamma \in \mathcal{P}_{n+1-l}^q(c)$ tal que $1 \leq q \leq k$ y $c \leq p - q$; y
 - $\alpha = \underbrace{[1, \dots, 1]}_q, \alpha_{q+1}, \alpha_{q+2}, \dots, \alpha_m \in \mathcal{P}_1^m(p-c)$ con $q \leq m \leq k$ y $\alpha_{q+1} = \alpha_{q+2} = \dots = \alpha_m = 1$.
4. $v = v_\beta \wedge v_\gamma$, donde
 - $\gamma \in \mathcal{P}_{n+1-l}^q(c)$ tal que $1 \leq q \leq k$, $c < p$ y $\gamma_1 \leq p - c$; y
 - $\beta = [\beta_1] \in \mathcal{P}_{n-k}^1(p-c)$ con $\beta_1 \geq \gamma_1$.
5. $v = v_\alpha \wedge v_\beta \wedge v_\gamma$, donde
 - $\alpha \in \mathcal{P}_1^q(a)$ tal que $1 \leq q \leq k$, $1 \leq a$ y $2a + 1 \leq p$;
 - $\beta \in \mathcal{P}_{n-k}^1(b)$ con $1 \leq b$ y $b(a+1) \leq p - a$;
 - $\gamma = [\gamma_1, \dots, \gamma_m] \in \mathcal{P}_{n-k}^m(p-a-b)$ con $1 \leq m \leq k$, $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \geq \gamma_a \geq b$ y $b \geq \gamma_{a+1} \geq \gamma_{a+2} \geq \dots \geq \gamma_m \geq 1$.

DEMOSTRACIÓN. Se sigue del Teorema 8.10. □

2. Homología adjunta de $A_n(k, k+1)$

Vamos a analizar la acción de δ_p en cada tipo de módulo del producto tensorial, para luego calcular explícitamente la homología adjunta de esta familia de nilradicales.

TEOREMA 9.2. *Sean $p \geq 2$, $a, a', b, b', c, c' > 0$ y*

- $\alpha \in \mathcal{P}_1^{q_1}(a)$, $\beta \in \mathcal{P}_{n+1-l}^1(b)$, $\gamma \in \mathcal{P}_{n+1-l}^{q_3}(c)$ tales que $a + b + c = p$;
- $\alpha' \in \mathcal{P}_1^{q'_1}(a')$, $\beta' \in \mathcal{P}_{n+1-l}^1(b')$, $\gamma' \in \mathcal{P}_{n+1-l}^{q'_3}(c')$ tales que $a' + b' + c' = p - 1$.

Entonces δ_p actúa de la siguiente forma:

1. Si $p \leq n - k$, $\beta = [p]$ y $\beta' = [p - 1]$ entonces

$$\delta_p \left(H_p^\beta(\mathfrak{n}) \otimes X(1, 1) \right) = H_{p-1}^{\beta'}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n - k - p + 1).$$

Más aún,

$$H_{p-1}^{\beta'}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n - k) \subset \text{coker } \delta_p.$$

2. Si $p \leq k$, $\alpha = \underbrace{[1, \dots, 1]}_p$ y $\alpha' = \underbrace{[1, \dots, 1]}_{p-1}$,

$$\delta_p \left(H_p^\alpha(\mathfrak{n}) \otimes Y(1, n - k) \right) = H_{p-1}^{\alpha'}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(p, n - k).$$

Más aún,

$$H_{p-1}^{\alpha'}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n - k) \subset \text{coker } \delta_p.$$

3. ▪ Si $a = a' + 1$, $\alpha = \underbrace{[1, \dots, 1]}_{a'+1}$ y $\gamma = [\gamma_1, \dots, \gamma_q]$ con $1 \leq q \leq a' + 1$ y además,

a) si $q \leq a'$ entonces

$$\delta_p (H_p^{\alpha\gamma}(\mathbf{n}) \otimes Y(1, t)) = H_{p-1}^{\alpha'\gamma}(\mathbf{n}) \otimes \mathfrak{z}(a' + 1, t);$$

b) si $q = a' + 1$ entonces

$$\delta_p (H_p^{\alpha\gamma}(\mathbf{n}) \otimes Y(1, t)) = 0.$$

- Si $a = a'$, $b = 1$, $c = c'$, $\gamma = [\gamma_1, \dots, \gamma_q]$ con $1 \leq q \leq a' + 1$ y además,
 - c) $\gamma_{a'+1} = 0$, entonces

$$\delta_p (H_p^{\alpha'\beta\gamma}(\mathbf{n}) \otimes X(s, 1)) = H_{p-1}^{\alpha'\gamma}(\mathbf{n}) \otimes \mathfrak{z}(s, n - k).$$

Más aún, si $s \neq a' + 1$ y $t \neq n - k$ entonces,

$$H_{p-1}^{\alpha'\gamma'}(\mathbf{n}) \otimes \mathfrak{z}(s, t) \subset \text{coker } \delta_p.$$

4. ▪ Si $a = a'$, $b = b' + 1$, $c = c'$ y además

a) si $\gamma_{a'+1} = b' + 1$, entonces

$$\delta_p (H_p^{\alpha'\beta\gamma}(\mathbf{n}) \otimes X) = 0,$$

b) si $\gamma_{a'+1} < b' + 1$, entonces

$$\delta_p (H_p^{\alpha'\beta\gamma}(\mathbf{n}) \otimes X(s, 1)) = H_{p-1}^{\alpha'\beta'\gamma}(\mathbf{n}) \otimes \mathfrak{z}(s, n - k - b').$$

- Si $a = a' + 1$, $b = b'$, $c = c'$ y además

c) si $\gamma_{a'+1} > b'$, entonces

$$\delta_p (H_p^{\alpha\beta'\gamma}(\mathbf{n}) \otimes Y) = 0,$$

d) si $\gamma_{a'+1} = b'$, entonces

$$\delta_p (H_p^{\alpha\beta'\gamma}(\mathbf{n}) \otimes Y(1, t)) = H_{p-1}^{\alpha'\beta'\gamma}(\mathbf{n}) \otimes \mathfrak{z}(a' + 1, t).$$

Más aún, si $\gamma'_{a'+1} < b'$ y $t \neq n - k - b'$; ó si $\gamma'_{a'+1} = b'$, $s \neq a' + 1$ y $t \neq n - k$, entonces

$$H_p^{\alpha'\beta'\gamma'}(\mathbf{n}) \otimes \mathfrak{z}(s, t) \subset \text{coker } \delta_p.$$

DEMOSTRACIÓN.

1. Sea $v_\beta = y_{n-k}^1 \wedge \dots \wedge y_{n+1-k-p}^1$ con $\beta = [p]$. Entonces un vector de peso máximo del producto tensorial $H_p^\beta(\mathbf{n}) \otimes X$ de acuerdo al Teorema 8.10 será

$$w = \sum_{J_2 \in A(t)} \sum_{J_1 \in A(s)} \frac{1}{\sigma_{J_2}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} U_{J_2}(V_{J_1} v_\beta) \otimes x_{\max(J_2)}^{\min(J_1)}.$$

En este caso $t = 1$ ya que el segundo bloque actuando sobre X es $\mathfrak{sl}(1)$ y como $\mathfrak{sl}(k)$ actúa trivialmente sobre v_β , entonces el único s posible es $s = 1$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} w &= \sum_{J_2 \in A(1)} \sum_{J_1 \in A(1)} \frac{1}{\sigma_{J_2}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} U_{J_2}(V_{J_1} v_\beta) \otimes x_{\max(J_2)}^{\min(J_1)} \\ &= -v_\beta \otimes x_1^1 \\ &= -y_{n-k}^1 \wedge \dots \wedge y_{n+1-k-p}^1 \otimes x_1^1 \end{aligned}$$

Evaluando ∂_1 obtenemos:

$$\partial_1(w) = \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} y_{n-k}^1 \wedge \dots \wedge \widehat{y_{n+1-k-i}^1} \wedge \dots \wedge y_{n+1-k-p}^1 \otimes z_{n+1-k-i}^1.$$

Evidentemente $\partial_1(w) \notin \text{Im } \partial_0 \otimes 1$ ya que ningún factor y_j^i pertenece al centro de \mathfrak{n} y cada sumando es linealmente independiente con el resto. Como $\mathfrak{sl}(k)$ módulo, $\partial_1(w)$ tiene peso $(1, 0, \dots, 0)$ y como $\mathfrak{sl}(n-k)$ módulo, su peso es $(\underbrace{1, \dots, 1}_{n-k-p}, \underbrace{0, \dots, 0}_{p-1})$. En-

tonces si existiese un submódulo de $H_{p-1}^{\beta'} \otimes \mathfrak{z}$ con el mismo peso, por la Proposición 8.13 se tendría que

$$0 \neq \delta_p(H_p^\beta(\mathfrak{n}) \otimes X(1, 1)) \subset H_{p-1}^{\beta'} \otimes \mathfrak{z}.$$

Veamos cuál es este submódulo.

Sea $v_{\beta'} = y_{n-k}^1 \wedge \dots \wedge y_{n+2-k-p}^1$ con $\beta' = [p-1]$. Entonces un vector de peso máximo de $H_{p-1}^{\beta'} \otimes \mathfrak{z}$ tiene la forma

$$w = \sum_{J_2 \in A(t)} \sum_{J_1 \in A(s)} \frac{1}{\sigma_{J_2}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} U_{J_2}(V_{J_1} v_{\beta'}) \otimes z_{\max(J_2)}^{\min(J_1)},$$

donde los posibles valores de t son $t = n-k$ y $t = n-k-p+1$ ya que $v_{\beta'}$ tiene peso $(\underbrace{1, \dots, 1}_{n-k-p+1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{p-2})$ como $\mathfrak{sl}(n-k)$ -módulo. Dado que $\mathfrak{sl}(k)$ actúa trivialmente

sobre $v_{\beta'}$ entonces $s = 1$ y por lo tanto obtenemos los siguientes w 's

$$\begin{aligned} w_1 &= \sum_{J_2 \in A(n-k)} \sum_{J_1 \in A(1)} \frac{1}{\sigma_{J_2}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} U_{J_2}(V_{J_1} v_{\beta'}) \otimes z_{\max(J_2)}^{\min(J_1)} \\ &= -v_{\beta'} \otimes z_{n-k}^1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_2 &= \sum_{J_2 \in A(n-k-p+1)} \sum_{J_1 \in A(1)} \frac{1}{\sigma_{J_2}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} U_{J_2}(V_{J_1} v_{\beta'}) \otimes z_{\max(J_2)}^1 \\ &\quad \sum_{J_2 \in A(n-k-p+1)} \frac{1}{\sigma_{J_2}} U_{J_2} v_{\beta'} \otimes z_{\max(J_2)}^1. \end{aligned}$$

Notemos que w_1 como $\mathfrak{sl}(n-k)$ módulo tiene peso $(\underbrace{2, \dots, 2}_{p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-k-p})$. Un sumando de w_2 es $-v_{\beta'} \otimes z_{n-k-p+1}^1$ (que resulta de elegir $J_2 = \{n-k-p+1\}$) por lo tanto se ve que w_2 tiene peso $(\underbrace{1, \dots, 1}_{n-k-p}, \underbrace{0, \dots, 0}_{p-1})$ como $\mathfrak{sl}(n-k)$ -módulo y tiene peso $(\underbrace{1, 0, \dots, 0}_{k-2})$ como $\mathfrak{sl}(k)$ -módulo; y entonces podemos concluir que

$$\delta_p(H_p^\beta(\mathfrak{n}) \otimes X(1, 1)) = H_{p-1}^{\beta'}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n-k-p+1)$$

y

$$H_{p-1}^{\beta'}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n-k) \subset \text{coker } \delta_p.$$

2. Este caso es análogo al anterior. Sea $v_\alpha = x_1^1 \wedge \dots \wedge x_1^p$ con $\alpha = \underbrace{[1, \dots, 1]}_p$. Entonces un vector de peso máximo del producto tensorial $H_p^\alpha(\mathfrak{n}) \otimes Y$ de acuerdo al Teorema 8.10 será

$$w = \sum_{J_2 \in A(t)} \sum_{J_1 \in A(s)} \frac{1}{\sigma_{J_2}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} U_{J_2}(V_{J_1} v_\alpha) \otimes y_{\max(J_2)}^{\min(J_1)}.$$

En este caso $s = 1$ ya que el primer bloque actuando sobre Y es $\mathfrak{sl}(1)$ y como $\mathfrak{sl}(n-k)$ actúa trivialmente sobre v_α , entonces el único t posible es $t = n-k$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} w &= \sum_{J_2 \in A(n-k)} \sum_{J_1 \in A(1)} \frac{1}{\sigma_{J_2}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} U_{J_2}(V_{J_1} v_\alpha) \otimes x_{\max(J_2)}^{\min(J_1)} \\ &= -v_\alpha \otimes y_{n-k}^1 \\ &= -x_1^1 \wedge \dots \wedge x_1^p \otimes y_{n-k}^1 \end{aligned}$$

Evaluando ∂_1 obtenemos:

$$\partial_1(w) = \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} x_1^1 \wedge \dots \wedge \widehat{x_1^i} \wedge \dots \wedge x_1^p \otimes z_{n-k}^i.$$

Evidentemente $\partial_1(w) \notin \text{Im } \partial_0 \otimes 1$ ya que ningún factor x_j^i pertenece al centro de \mathfrak{n} y cada sumando es linealmente independiente con el resto. Como $\mathfrak{sl}(k)$ módulo, $\partial_1(w)$ tiene peso $(\underbrace{1, \dots, 1}_p, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-p-1})$ y como $\mathfrak{sl}(n-k)$ módulo su peso es $(\underbrace{1, \dots, 1}_{n-k-1})$. Entonces

si existiese un submódulo de $H_{p-1}^{\alpha'} \otimes \mathfrak{z}$ con el mismo peso, por la Proposición 8.13 se tendría que

$$0 \neq \delta_p(H_p^\alpha(\mathfrak{n}) \otimes Y(1, n-k)) \subset H_{p-1}^{\alpha'} \otimes \mathfrak{z}.$$

Veamos cuál es este submódulo.

Sea $v_{\alpha'} = x_1^1 \wedge \dots \wedge x_1^{p-1}$ con $\alpha' = \underbrace{[1, \dots, 1]}_{p-1}$. Entonces un vector de peso máximo

de $H_{p-1}^{\alpha'} \otimes \mathfrak{z}$ tiene la forma

$$w = \sum_{J_2 \in A(t)} \sum_{J_1 \in A(s)} \frac{1}{\sigma_{J_2}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} U_{J_2}(V_{J_1} v_{\alpha'}) \otimes z_{\max(J_2)}^{\min(J_1)},$$

donde los posibles valores de s son $s = 1$ y $s = p$ ya que $v_{\alpha'}$ como $\mathfrak{sl}(k)$ -módulo tiene peso $(\underbrace{1, \dots, 1}_{p-1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-p})$. Dado que $\mathfrak{sl}(n-k)$ actúa trivialmente sobre $v_{\alpha'}$ entonces

$t = n - k$ y por lo tanto obtenemos los siguientes w 's

$$\begin{aligned} w_1 &= \sum_{J_2 \in A_{(n-k)}} \sum_{J_1 \in A^{(1)}} \frac{1}{\sigma_{J_2}} \frac{1}{\bar{\sigma}_{J_1}} U_{J_2}(V_{J_1} v_{\alpha'}) \otimes z_{\max(J_2)}^{\min(J_1)} \\ &= -v_{\alpha'} \otimes z_{n-k}^1, \\ w_2 &= \sum_{J_2 \in A_{(n-k)}} \sum_{J_1 \in A^{(p)}} \frac{1}{\sigma_{J_2}} \frac{1}{\bar{\sigma}_{J_1}} U_{J_2}(V_{J_1} v_{\alpha'}) \otimes z_{\max(J_2)}^{\min(J_1)} \\ &= - \sum_{J_1 \in A^{(p)}} \frac{1}{\bar{\sigma}_{J_1}} V_{J_1} v_{\alpha'} \otimes z_{n-k}^{\min(J_1)}. \end{aligned}$$

Notemos que w_1 como $\mathfrak{sl}(k)$ módulo tiene peso $(2, \underbrace{1, \dots, 1}_{p-2}, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-p})$. Un sumando de w_2 es $-v_{\alpha'} \otimes z_{n-k}^p$ (que resulta de elegir $J_1 = \{p\}$) por lo tanto se ve que w_2 tiene peso $(\underbrace{1, \dots, 1}_p, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-p-1})$ como $\mathfrak{sl}(k)$ -módulo y tiene peso $(\underbrace{1, \dots, 1}_{n-k-1})$ como $\mathfrak{sl}(n-k)$ -módulo. Entonces podemos concluir que

$$\delta_p(H_p^\alpha(\mathfrak{n}) \otimes Y(1, n-k)) = H_{p-1}^{\alpha'}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(p, n-k),$$

y además

$$H_{p-1}^{\alpha'}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n-k) \subset \text{coker } \delta_p.$$

3. Sea $\gamma' = [\gamma'_1, \dots, \gamma'_{q'}]$ con $1 \leq q' \leq a'$ entonces $\bar{v} = v_{\alpha'} \wedge v_{\gamma'}$ un vector de peso máximo de $H_{p-1}^{\alpha' \gamma'}(\mathfrak{n})$. Un vector de peso máximo de $H_{p-1}^{\alpha' \gamma'}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}$ será entonces

$$\bar{w} = \sum_{J_2 \in A^{(t')}} \sum_{J_1 \in A^{(s')}} \frac{1}{\sigma_{J_2}} \frac{1}{\bar{\sigma}_{J_1}} U_{J_2}(V_{J_1} \bar{v}) \otimes z_{\max(J_2)}^{\min(J_1)}.$$

Como \bar{w} tiene peso $(\gamma'_1 + 1, \dots, \gamma'_{a'} + 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-a'-1})$, como $\mathfrak{sl}(k)$ -módulo y tiene el mismo peso de $v_{\gamma'}$ como $\mathfrak{sl}(n-k)$ módulo, digamos $\mu' = (\mu'_1, \dots, \mu'_{m'}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k-m'-1})$, entonces

los posibles s' son:

- $s' = 1$,
- aquellos donde $\gamma_{s'} < \gamma_{s'-1}$
- $s' = a' + 1$ si $a' + 1 \leq k$.

Los posibles t' son

- $t' = n - k$,
- aquellos donde $\mu'_{t'} > \mu'_{t'+1}$.

Por lo tanto \bar{w} tiene peso

$$(9.2) \quad (\gamma'_1 + 1, \dots, \gamma'_{a'} + 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-a'-1}) + (0, \dots, \underbrace{1}_{s'}, \dots, 0),$$

como $\mathfrak{sl}(k)$ -módulo y tiene peso

$$(9.3) \quad (\mu'_1, \dots, \mu'_{m'}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k-m'-1}) + (0, \dots, \underbrace{-1}_{t'}, \dots, 0),$$

como $\mathfrak{sl}(n-k)$ -módulo.

- Sean $\alpha = \underbrace{[1, \dots, 1]}_{a'+1}$ y $\gamma = [\gamma_1, \dots, \gamma_q]$ con $1 \leq q \leq a'+1$. Entonces por el

Teorema 9.1 $v = v_\alpha \wedge v_\gamma$ es un vector de peso máximo de $H_p^{\alpha\gamma}(\mathfrak{n})$. Un vector de peso máximo de $H_p^{\alpha\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes Y$ será entonces

$$w = \sum_{J_2 \in A_{(t)}} \sum_{J_1 \in A_{(s)}} \frac{1}{\sigma_{J_2}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} U_{J_2}(V_{J_1}v) \otimes y_{\max(J_2)}^{\min(J_1)}.$$

Como el primer bloque que actúa es $\mathfrak{sl}(1)$ y v como $\mathfrak{sl}(n-k)$ -módulo tiene peso el mismo peso de v_γ , digamos $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k-m-1})$, obtenemos que

$s = 1$ y los posibles valores de t son:

- $t = n - k$,
- aquellos donde $\mu_t > \mu_{t+1}$.

Por lo tanto tenemos

$$w = \sum_{J_2 \in A_{(t)}} \frac{1}{\sigma_{J_2}} U_{J_2}v \otimes y_{\max(J_2)}^1,$$

que como $\mathfrak{sl}(k)$ -módulo tiene el mismo peso de $v_\alpha \wedge v_\gamma$

$$(9.4) \quad (\gamma_1 + 1, \dots, \gamma_{a'+1} + 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-a'-2}),$$

y como $\mathfrak{sl}(n-k)$ -módulo, tiene peso

$$(9.5) \quad (\mu_1, \dots, \mu_m, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k-m-1}) + (0, \dots, \underbrace{-1}_t, \dots, 0)$$

a) Si $q = a'$, es decir $\gamma_{a'+1} = 0$ y $\gamma_{a'} \geq 1$, aplicando ∂_1 a w obtenemos:

$$\begin{aligned} \partial_1(w) &= \partial_1 \left(\sum_{J_2 \in A_{(t)}} \frac{1}{\sigma_{J_2}} U_{J_2}(v_\alpha \wedge v_\gamma) \otimes y_{\max(J_2)}^1 \right) \\ &= \partial_1 \left(\sum_{J_2 \in A_{(t)}} \frac{1}{\sigma_{J_2}} v_\alpha \wedge U_{J_2}(v_\gamma) \otimes y_{\max(J_2)}^1 \right) \\ &= \partial_1 \left(\sum_{J_2 \in A_{(t)}} \frac{1}{\sigma_{J_2}} x_1^1 \wedge \dots \wedge x_1^{a'+1} \wedge U_{J_2}(v_\gamma) \otimes y_{\max(J_2)}^1 \right) \\ &= \sum_{i=1}^{a'+1} (-1)^{i+1} \sum_{J_2 \in A_{(t)}} \frac{1}{\sigma_{J_2}} x_1^1 \wedge \dots \wedge \widehat{x_1^i} \wedge \dots \wedge x_1^{a'+1} \wedge U_{J_2}(v_\gamma) \otimes z_{\max(J_2)}^i \end{aligned}$$

Vamos a probar que $\partial_1(w) \notin \text{Im } \partial_0 \otimes 1$. Para ello consideremos el sumando de $\partial_1(w)$,

$$w_t^{a'+1} = (-1)^{a'+1} x_1^1 \wedge \dots \wedge x_1^{a'} v_\gamma \otimes z_t^{a'+1},$$

que resulta de elegir $i = a' + 1$ y $J_2 = \{t\}$. Este sumando es linealmente independiente del resto ya que la única forma de obtener $z_t^{a'+1}$ es con dicha elección. Si $u = x_1^1 \wedge \dots \wedge x_1^{a'} v_\gamma$, es decir

$$w_t^{a'+1} = (-1)^{a'+1} u \otimes z_t^{a'+1},$$

veamos que $u \notin \text{Im } \partial_0$. Si $u \in \text{Im } \partial_0$ entonces alguno de sus factores z_j^i se obtiene como corchete entre x_1^i e y_j^1 y ninguno de estos es factor de u . Por lo tanto $i > a'$ ya que $x_1^1 \wedge \dots \wedge x_1^{a'}$ es factor de u , pero entonces no existe tal factor z_j^i ya que para $i > a'$ z_j^i no es factor de v_γ y por lo tanto de u .

Comparando los pesos como $\mathfrak{sl}(k)$ -módulos de (9.2) y (9.4) y los pesos como $\mathfrak{sl}(n-k)$ -módulos de (9.3) y (9.5) obtenemos que si $\gamma = \gamma'$ entonces $\mu = \mu'$ y eligiendo $s' = a' + 1$ y $t' = t$ obtenemos que

$$\delta_p \left(H_p^{\alpha\gamma'}(\mathfrak{n}) \otimes Y(1, t) \right) = H_{p-1}^{\alpha'\gamma'}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(a' + 1, t).$$

b) Si $q = a' + 1$, es decir $\gamma_{a'+1} \geq 1$, aplicando ∂_1 a w obtenemos del caso anterior, que

$$w_t^{a'+1} = (-1)^{a'+1} x_1^1 \wedge \dots \wedge x_1^{a'} v_\gamma \otimes z_t^{a'+1},$$

es un sumando de $\partial_1(w)$ que es linealmente independiente del resto. Si u es igual que antes, es decir

$$w_t^{a'+1} = (-1)^{a'+1} u \otimes z_t^{a'+1},$$

veamos que $u \in \text{Im } \partial_0$. Sea $\bar{u} = x_1^{a'+1} \wedge y_{n-k+1-\gamma_{a'+1}}^1 \wedge x_1^1 \wedge \dots \wedge x_1^{a'} \wedge \widehat{v}_\gamma$ donde

$$\widehat{v}_\gamma = z_{n-k}^1 \wedge \dots \wedge z_{n-k+1-\gamma_1}^1 \wedge \dots \wedge z_{n-k}^{a'+1} \wedge \dots \wedge z_{n-k+2-\gamma_{a'+1}}^{a'+1},$$

es decir \widehat{v}_γ es v_γ sin el factor $z_{n-k+1-\gamma_{a'+1}}^{a'+1}$. Entonces tenemos,

$$\begin{aligned} \partial_0(\bar{u}) &= [x_1^{a'+1}, y_{n-k+1-\gamma_{a'+1}}^1] \wedge x_1^1 \wedge \dots \wedge x_1^{a'} \wedge \widehat{v}_\gamma \\ &\quad + \sum_{i=1}^{a'} (-1)^{i+1} [y_{n-k+1-\gamma_{a'+1}}^1, x_1^i] \wedge x_1^{a'+1} \wedge x_1^1 \wedge \dots \wedge \widehat{x_1^i} \wedge \dots \wedge x_1^{a'} \wedge \widehat{v}_\gamma \\ &= z_{n-k+1-\gamma_{a'+1}}^{a'+1} \wedge x_1^1 \wedge \dots \wedge x_1^{a'} \wedge \widehat{v}_\gamma \\ &\quad + \sum_{i=1}^{a'} (-1)^i z_{n-k+1-\gamma_{a'+1}}^i \wedge x_1^{a'+1} \wedge x_1^1 \wedge \dots \wedge \widehat{x_1^i} \wedge \dots \wedge x_1^{a'} \wedge \widehat{v}_\gamma \\ &= z_{n-k+1-\gamma_{a'+1}}^{a'+1} \wedge x_1^1 \wedge \dots \wedge x_1^{a'} \wedge \widehat{v}_\gamma \\ &= (-1)^{a'+\gamma_1+\dots+\gamma_{a'+1}-1} x_1^1 \wedge \dots \wedge x_1^{a'} \wedge v_\gamma \\ &= (-1)^{a'+\gamma_1+\dots+\gamma_{a'+1}-1} u. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\partial_1(w) \in \text{Im } \partial_0 \otimes 1$ y entonces

$$\delta_p \left(H_p^{\alpha\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes Y(1, t) \right) = 0.$$

- c) Sean $\beta = [1]$ y $\gamma = [\gamma_1, \dots, \gamma_{a'}]$ con $\gamma_{a'} \geq 1$. Entonces por el Teorema 9.1 $v = v_{\alpha'} \wedge v_{\beta} \wedge v_{\gamma}$ es un vector de peso máximo de $H_p^{\alpha'\beta\gamma}(\mathfrak{n})$. Un vector de peso máximo de $H_p^{\alpha'\beta\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes X$ será entonces

$$w = \sum_{J_2 \in A(t)} \sum_{J_1 \in A(s)} \frac{1}{\sigma_{J_2}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} U_{J_2}(V_{J_1}v) \otimes x_{\max(J_2)}^{\min(J_1)}.$$

Como v tiene peso $(\gamma_1 + 1, \dots, \gamma_{a'} + 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-a'-1})$ como $\mathfrak{sl}(k)$ -módulo y el segundo bloque que actúa es $\mathfrak{sl}(1)$, obtenemos que los posibles valores de s son:

- $s = 1$,
- aquellos donde $\gamma_s < \gamma_{s-1}$,
- $s = a' + 1$ si $a' < k$.

y además $t = 1$. Por lo tanto tenemos

$$w = - \sum_{J_1 \in A(s)} \frac{1}{\sigma_{J_1}} V_{J_1}v \otimes x_1^{\min(J_1)},$$

que como $\mathfrak{sl}(k)$ -módulo tiene peso

$$(9.6) \quad (\gamma_1 + 1, \dots, \gamma_{a'} + 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-a'-1}) + (0, \dots, \underbrace{1}_s, \dots, 0),$$

y como $\mathfrak{sl}(n-k)$ -módulo, tiene el mismo peso de $v_{\beta} \wedge v_{\gamma}$, digamos

$$(9.7) \quad (\mu_1, \dots, \mu_{n-k-b'} - 1, \dots, \mu_m, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k-m-1})$$

Aplicando ∂_1 obtenemos

$$\begin{aligned} \partial_1(w_2) &= - \partial_1 \left(\sum_{J_1 \in A(s)} \frac{1}{\sigma_{J_1}} V_{J_1}(v'_{\alpha'} \wedge v_{\beta} \wedge v_{\gamma}) \otimes z_1^{\min(J_1)} \right) \\ &= - \partial_1 \left(\sum_{J_1 \in A(s)} \frac{1}{\sigma_{J_1}} V_{J_1}(v'_{\alpha'} \wedge y_{n-k}^1 \wedge v_{\gamma}) \otimes x_1^{\min(J_1)} \right) \\ &= (-1)^{a'+1} \partial_1 \left(\sum_{J_1 \in A(s)} \frac{1}{\sigma_{J_1}} y_{n-k}^1 \wedge V_J(v'_{\alpha'} \wedge v_{\gamma}) \otimes x_1^{\min(J_1)} \right) \\ &= (-1)^{a'} \sum_{J_1 \in A(s)} \frac{1}{\sigma_{J_1}} V_J(v'_{\alpha'} \wedge v_{\gamma}) \otimes z_{n-k}^{\min(J_1)}. \end{aligned}$$

y este es justamente el vector de peso máximo de $H_{p-1}^{\alpha'\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(s, n-k)$ ya que como $\bar{v} = v_{\alpha'} \wedge v_\gamma$ es vector de peso máximo de $H_{p-1}^{\alpha'\gamma}(\mathfrak{n})$ entonces

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \sum_{J_2 \in A_{(n-k)}} \sum_{J_1 \in A^{(s)}} \frac{1}{\sigma_{J_2}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} U_{J_2}(V_{J_1} \bar{v}) \otimes z_{\max(J_2)}^{\min(J_1)} \\ &= - \sum_{J_1 \in A^{(s)}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} V_{J_1} \bar{v} \otimes z_{n-k}^{\min(J_1)} \end{aligned}$$

es vector de peso máximo de $H_{p-1}^{\alpha'\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(s, n-k)$.

Por lo tanto

$$\delta_p(H_p^{\alpha'\beta\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes X(s, 1)) = H_{p-1}^{\alpha'\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(s, n-k).$$

Teniendo en cuenta que por el Teorema 8.14, las únicas posibles preimágenes de $H_{p-1}^{\alpha'\gamma'}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}$ son

- $H_p^{\alpha'\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes Y$ si $a = a' + 1$ y $c = c'$; y
- $H_p^{\alpha'\beta\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes X$ si $a = a'$, $b = 1$ y $c = c'$,

y que se han analizado todos estos casos, concluimos que

$$H_p^{\alpha'\gamma'}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(s, t) \subset \text{coker } \delta_p \quad \text{si } s \neq a' + 1 \text{ y } t \neq n - k.$$

4. ▪ Sean $\alpha' = \underbrace{[1, \dots, 1]}_{a'}$, $\beta' = [b']$ y $\gamma' = [\gamma'_1, \dots, \gamma'_{q'}]$ con $\gamma'_{a'} \geq b' \geq \gamma'_{a'+1}$ y $q' \leq k$.

Entonces por el Teorema 9.1 $v = v_{\alpha'} \wedge v_{\beta'} \wedge v_{\gamma'}$ es un vector de peso máximo de $H_{p-1}^{\alpha'\beta'\gamma'}(\mathfrak{n})$.

Un vector de peso máximo de $H_{p-1}^{\alpha'\beta'\gamma'}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}$ será entonces

$$(9.8) \quad w = \sum_{J_2 \in A_{(t')}} \sum_{J_1 \in A^{(s')}} \frac{1}{\sigma_{J_2}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} U_{J_2}(V_{J_1} v) \otimes z_{\max(J_2)}^{\min(J_1)}.$$

Como v tiene peso $(\gamma'_1 + 1, \dots, \gamma'_{a'} + 1, \gamma'_{a'+1}, \dots, \gamma'_{q'}, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-q'-1})$ como $\mathfrak{sl}(k)$ -módulo

y como $\mathfrak{sl}(n-k)$ módulo tiene el mismo peso que $v_{\beta'} \wedge v_{\gamma'}$, digamos $\mu = (\mu'_1, \dots, \mu'_{n-k-b'}, \dots, \mu'_{m'})$, entonces obtenemos que los posibles valores de s' son:

- $s' = 1$,
- aquellos donde $\gamma'_{s'} < \gamma'_{s'-1}$,
- $s' = a' + 1$ si $a' < k$.

Y los posibles valores de t' son:

- $t' = n - k$,
- aquellos donde $\mu_{t'} > \mu_{t'+1}$.

Entonces w tiene peso, como $\mathfrak{sl}(k)$ -módulo,

$$(9.9) \quad (\gamma'_1 + 1, \dots, \gamma'_{a'} + 1, \gamma'_{a'+1}, \dots, \gamma'_{q'}, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-q'-1}) + (0, \dots, \underbrace{1}_{s'}, \dots, 0)$$

y como $\mathfrak{sl}(n-k)$ -módulo

$$(9.10) \quad (\mu'_1, \dots, \mu'_{n-k-b'}, \dots, \mu'_{m'}) + (0, \dots, \underbrace{-1}_{t'}, \dots, 0),$$

Teniendo en cuenta que por el Teorema 8.14, las preimágenes posibles de $H_{p-1}^{\alpha'\beta'\gamma'}(\mathbf{n}) \otimes \mathfrak{z}$ son únicamente

- $H_p^{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{n}) \otimes X$ con $a = a'$, $b = b' + 1$ y $c = c'$,
- $H_p^{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{n}) \otimes Y$ con $a = a' + 1$, $b = b'$ y $c = c'$,

podemos dividir los posibles $\gamma = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_q]$ tales que $\gamma_a \geq b \geq \gamma_{a+1}$ de la siguiente forma:

- (a) $a = a'$, $b = b' + 1$, γ tal que $\gamma_{a'+1} = b' + 1$,
- (b) $a = a'$, $b = b' + 1$, γ tal que $\gamma_{a'+1} \leq b'$,
- (c) $a = a' + 1$, $b = b'$, γ tal que $\gamma_{a'+1} > b'$,
- (d) $a = a' + 1$, $b = b'$, γ tal que $\gamma_{a'+1} = b'$.

Analicemos cada caso:

- a) Sean $\beta = [b' + 1]$ y $\gamma = [\gamma_1, \dots, \gamma_q]$ con $\gamma_{a'+1} = b' + 1$. Entonces por el Teorema 9.1 $v_1 = v_{\alpha'} \wedge v_{\beta} \wedge v_{\gamma}$ es un vector de peso máximo de $H_p^{\alpha'\beta'\gamma'}(\mathbf{n})$. Un vector de peso máximo de $H_p^{\alpha'\beta'\gamma'}(\mathbf{n}) \otimes X$ será entonces

$$w_1 = \sum_{J_2 \in A^{(t)}} \sum_{J_1 \in A^{(s)}} \frac{1}{\sigma_{J_2}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} U_{J_2}(V_{J_1} v_1) \otimes y_{\max(J_2)}^{\min(J_1)}.$$

Como v_1 tiene peso $(\gamma_1 + 1, \dots, \gamma_{a'} + 1, \gamma_{a'+1}, \dots, \gamma_q \underbrace{0, \dots, 0}_{k-q-1})$ como $\mathfrak{sl}(k)$ -

módulo y el segundo bloque que actúa es $\mathfrak{sl}(1)$, obtenemos que los posibles valores de s son:

- $s = 1$,
- aquellos donde $\gamma_s < \gamma_{s-1}$,
- $s = a' + 1$ si $a' < k$.

y además $t = 1$. Por lo tanto tenemos

$$w_1 = - \sum_{J_1 \in A^{(s)}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} V_{J_1} v_1 \otimes x_1^{\min(J_1)}.$$

Aplicando ∂_1 obtenemos

$$\begin{aligned} \partial_1(w_1) &= - \partial_1 \left(\sum_{J_1 \in A^{(s)}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} V_{J_1}(v_{\alpha'} \wedge v_{\beta} \wedge v_{\gamma}) \otimes z_1^{\min(J_1)} \right) \\ &= - \partial_1 \left(\sum_{J_1 \in A^{(s)}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} V_{J_1}(v_{\alpha'} \wedge y_{n-k}^1 \wedge \dots \wedge y_{n-k-b'}^1 \wedge v_{\gamma}) \otimes x_1^{\min(J_1)} \right) \\ &= (-1)^{a'(b'+1)+1} \partial_1 \left(\sum_{J_1 \in A^{(s)}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} y_{n-k}^1 \wedge \dots \wedge y_{n-k-b'}^1 \wedge V_J(v_{\alpha'} \wedge v_{\gamma}) \otimes x_1^{\min(J_1)} \right) \\ &= (-1)^{a'(b'+1)+1} \sum_{i=1}^{b'+1} (-1)^i \sum_{J_1 \in A^{(s)}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} y_{n-k}^1 \wedge \dots \wedge \widehat{y_{n-k+1-i}^1} \wedge \dots \wedge y_{n-k-b'}^1 \wedge \\ &\quad \wedge V_J(v_{\alpha'} \wedge v_{\gamma}) \otimes z_{n-k+1-i}^{\min(J_1)}. \end{aligned}$$

Veamos que este vector $\partial_1(w)$ está en $\text{Im } \partial_0 \otimes 1$. Para esto consideremos uno de los sumandos de $\partial_1(w_1)$,

$$w_s^{b'+1} = (-1)^{a'(b'+1)+1} (-1)^{b'+1} y_{n-k}^1 \wedge \dots \wedge y_{n-k+1-b'}^1 \wedge v_{\alpha'} \wedge v_{\gamma'} \otimes z_{n-k-b'}^s,$$

que resulta de elegir $i = b' + 1$ y $J_1 = \{s\}$. Este sumando es linealmente independiente con el resto ya que la única forma de obtener $z_{n-k-b'}^s$ es eligiendo i y J_1 de dicha forma.

Si $u = y_{n-k}^1 \wedge \dots \wedge y_{n-k+1-b'}^1 \wedge v_{\alpha'} \wedge v_{\gamma'}$, es decir

$$w_s^{b'+1} = (-1)^{a'(b'+1)+1} (-1)^{b'+1} u \otimes z_{n-k-b'}^s,$$

veamos que $u \in \text{Im } \partial_0$.

Sea

$$\widehat{v}_\gamma = z_{n-k}^1 \wedge \dots \wedge z_{n-k}^{a'+1} \wedge \dots \wedge z_{n-k+1-b'}^{a'+1} \wedge \dots \wedge z_{n-k}^q \wedge \dots \wedge z_{n-k+1-\gamma_q}^q,$$

es decir, v_γ sin el factor $z_{n-k-b'}^{a'+1}$. Consideremos $\bar{u} = x_1^{a'+1} \wedge v_\beta \wedge v_{\alpha'} \wedge \widehat{v}_\gamma$. Entonces

$$\begin{aligned} \partial_0(\bar{u}) &= \sum_{i=1}^{b'+1} (-1)^{i+1} [x_1^{a'+1}, y_{n-k+1-i}^1] \wedge y_{n-k}^1 \wedge \dots \wedge \widehat{y_{n-k+1-i}^1} \wedge \dots \wedge y_{n-k-b'}^1 \wedge v_{\alpha'} \wedge \widehat{v}_\gamma \\ &\quad + \sum_{i=1}^{a'} \sum_{j=1}^{b'+1} (-1)^{i+j+b'} [x_1^i, y_{n-k+1-j}^1] \wedge x_1^{a'+1} \wedge y_{n-k}^1 \wedge \dots \wedge \widehat{y_{n-k+1-j}^1} \wedge \dots \wedge y_{n-k-b'}^1 \\ &\quad \wedge x_1^1 \wedge \dots \wedge \widehat{x_1^i} \wedge \dots \wedge x_{a'}^1 \wedge \widehat{v}_\gamma \\ &= \sum_{i=1}^{b'+1} (-1)^{i+1} z_{n-k+1-i}^{a'+1} \wedge y_{n-k}^1 \wedge \dots \wedge \widehat{y_{n-k+1-i}^1} \wedge \dots \wedge y_{n-k-b'}^1 \wedge v_{\alpha'} \wedge \widehat{v}_\gamma \\ &\quad + \sum_{i=1}^{a'} \sum_{j=1}^{b'+1} (-1)^{i+j+b'} z_{n-k+1-j}^i \wedge x_1^{a'+1} \wedge y_{n-k}^1 \wedge \dots \wedge \widehat{y_{n-k+1-j}^1} \wedge \dots \wedge y_{n-k-b'}^1 \\ &\quad \wedge x_1^1 \wedge \dots \wedge \widehat{x_1^i} \wedge \dots \wedge x_{a'}^1 \wedge \widehat{v}_\gamma \\ &= \sum_{i=1}^{b'+1} (-1)^{i+1} z_{n-k+1-i}^{a'+1} \wedge y_{n-k}^1 \wedge \dots \wedge \widehat{y_{n-k+1-i}^1} \wedge \dots \wedge y_{n-k-b'}^1 \wedge v_{\alpha'} \wedge \widehat{v}_\gamma \\ &= (-1)^{b'} z_{n-k-b'}^{a'+1} \wedge y_{n-k}^1 \wedge \dots \wedge y_{n-k+1-b'}^1 \wedge v_{\alpha'} \wedge \widehat{v}_\gamma \\ &= (-1)^{a'+\gamma_1+\dots+\gamma_{a'}-1} y_{n-k}^1 \wedge \dots \wedge y_{n-k+1-b'}^1 \wedge v_{\alpha'} \wedge v_\gamma \\ &= (-1)^{a'+\gamma_1+\dots+\gamma_{a'}-1} u \end{aligned}$$

Por lo tanto $\partial_1(w_1) \in \text{Im } \partial_0 \otimes 1$.

- b) Sean $\beta = [b' + 1]$, es decir $b = b' + 1$, y $\gamma = [\gamma_1, \dots, \gamma_q]$ con $\gamma_{a'} \geq b' + 1 > \gamma_{a'+1}$. Entonces por el Teorema 9.1 $v_2 = v_{\alpha'} \wedge v_\beta \wedge v_\gamma$ es un vector de peso máximo de $H_p^{\alpha' \beta \gamma}(\mathfrak{n})$. Un vector de peso máximo de $H_p^{\alpha' \beta \gamma}(\mathfrak{n}) \otimes X$

será entonces

$$w_2 = \sum_{J_2 \in A^{(t)}} \sum_{J_1 \in A^{(s)}} \frac{1}{\sigma_{J_2}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} U_{J_2}(V_{J_1} v_2) \otimes x_{\max(J_2)}^{\min(J_1)}.$$

Como v_2 tiene peso $(\gamma_1 + 1, \dots, \gamma_{a'} + 1, \gamma_{a'+1}, \dots, \gamma_q, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-q-1})$ como $\mathfrak{sl}(k)$ -

módulo y el segundo bloque que actúa es $\mathfrak{sl}(1)$, obtenemos que los posibles valores de s son:

- $s = 1$,
- aquellos donde $\gamma_s < \gamma_{s-1}$,
- $s = a' + 1$ si $a' < k$.

y además $t = 1$. Por lo tanto tenemos

$$w_2 = - \sum_{J_1 \in A^{(s)}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} V_{J_1} v_2 \otimes x_1^{\min(J_1)},$$

que como $\mathfrak{sl}(k)$ -módulo tiene peso

$$(9.11) \quad (\gamma_1 + 1, \dots, \gamma_{a'} + 1, \gamma_{a'+1}, \dots, \gamma_q, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-q-1}) + (0, \dots, \underbrace{1}_s, \dots, 0),$$

y como $\mathfrak{sl}(n-k)$ -módulo, tiene el mismo peso de $v_\beta \wedge v_\gamma$, digamos

$$(9.12) \quad (\mu_1, \dots, \mu_{n-k-b'} - 1, \dots, \mu_m, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k-m-1})$$

Aplicando ∂_1 obtenemos

$$\begin{aligned} \partial_1(w_2) &= - \partial_1 \left(\sum_{J_1 \in A^{(s)}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} V_{J_1}(v'_\alpha \wedge v_\beta \wedge v_\gamma) \otimes z_1^{\min(J_1)} \right) \\ &= - \partial_1 \left(\sum_{J_1 \in A^{(s)}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} V_{J_1}(v'_\alpha \wedge y_{n-k}^1 \wedge \dots \wedge y_{n-k-b'}^1 \wedge v_\gamma) \otimes x_1^{\min(J_1)} \right) \\ &= (-1)^{a'(b'+1)+1} \partial_1 \left(\sum_{J_1 \in A^{(s)}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} y_{n-k}^1 \wedge \dots \wedge y_{n-k-b'}^1 \wedge V_J(v'_\alpha \wedge v_\gamma) \otimes x_1^{\min(J_1)} \right) \\ &= (-1)^{a'(b'+1)+1} \sum_{i=1}^{b'+1} (-1)^i \sum_{J_1 \in A^{(s)}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} y_{n-k}^1 \wedge \dots \wedge \widehat{y_{n-k+1-i}^1} \wedge \dots \wedge y_{n-k-b'}^1 \wedge \\ &\quad \wedge V_J(v'_\alpha \wedge v_\gamma) \otimes z_{n-k+1-i}^{\min(J_1)}. \end{aligned}$$

Veamos que este vector $\partial_1(w_2)$ no está en $\text{Im } \partial_0 \otimes 1$. Para esto consideremos uno de los sumandos de $\partial_1(w_2)$,

$$w_s^{b'+1} = (-1)^{a'(b'+1)+1} (-1)^{b'+1} y_{n-k}^1 \wedge \dots \wedge y_{n-k+1-b'}^1 \wedge v'_\alpha \wedge v'_\gamma \otimes z_{n-k-b'}^s,$$

que resulta de elegir $i = b' + 1$ y $J_1 = \{s\}$. Este sumando es linealmente independiente con el resto ya que la única forma de obtener $z_{n-k-b'}^s$ es eligiendo i y J_1 de dicha forma. Si $u = y_{n-k}^1 \wedge \dots \wedge y_{n-k+1-b'}^1 \wedge v'_\alpha \wedge v'_\gamma$, es decir $w_s^{b'+1} = (-1)^{a'(b'+1)+1} (-1)^{b'+1} u \otimes z_{n-k-b'}^s$ veamos que $u \notin \text{Im } \partial_0$.

Si u estuviese en $\text{Im } \partial_0$ entonces alguno de sus factores z_j^i debería obtenerse como el corchete de x_1^i y y_j^1 y además estos elementos no deberían ser factores de u . Supongamos que z_j^i es tal factor, entonces debemos tener $i > a'$ ya que x_1^i es factor de u para $1 \leq i \leq a'$ y además debemos tener $j \geq n - k + 1 - \gamma_i \geq n - k + 1 - b'$ ya que $z_j^i \in v_\gamma$ y $\gamma_i \leq b'$ para $i \geq a' + 1$. Pero todo y_j^1 con $n - k + 1 - b' \leq j \leq n - k$ es factor de u entonces no existe tal z_j^i y $u \notin \text{Im } \partial_0$.

De la comparación de los pesos de (9.9) y (9.11); y los pesos de (9.10) y (9.12) obtenemos que si $\gamma' = \gamma$ entonces $\mu' = \mu$ y si elegimos $s' = s$ y $t = n - k - b'$ entonces $\partial_1(w_2)$ y el vector de peso máximo de $H_{p-1}^{\alpha'\beta'\gamma'}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(s, n - k - b')$ tienen los mismos diagramas de Young como $\mathfrak{sl}(k)$ y $\mathfrak{sl}(n - k)$ -módulos. Por lo tanto

$$\delta_p(H_p^{\alpha'\beta'\gamma'}(\mathfrak{n}) \otimes X(s, 1)) = H_{p-1}^{\alpha'\beta'\gamma'}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(s, n - k - b').$$

c) Sean $\alpha = \underbrace{[1, \dots, 1]}_{a'+1}$ y $\gamma = [\gamma_1, \dots, \gamma_q]$ con $\gamma_{a'+1} > b'$. Entonces por el

Teorema 9.1 $v_3 = v_\alpha \wedge v_{\beta'} \wedge v_\gamma$ es un vector de peso máximo de $H_p^{\alpha\beta'\gamma}(\mathfrak{n})$. Un vector de peso máximo de $H_p^{\alpha\beta'\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes Y$ será entonces

$$w_3 = \sum_{J_2 \in A(t)} \sum_{J_1 \in A(s)} \frac{1}{\sigma_{J_2}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} U_{J_2}(V_{J_1} v_3) \otimes y_{\text{máx}(J_2)}^{\min(J_1)}.$$

Como el primer bloque que actúa es $\mathfrak{sl}(1)$ y v_3 tiene el mismo peso que $v_{\beta'} \wedge v_\gamma$ como $\mathfrak{sl}(n - k)$ -módulo, digamos $(\mu_1, \dots, \mu_{n-k-b'}, \dots, \mu_m, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k-m-1})$,

obtenemos que $s = 1$ y los posibles valores de t son:

- $t = n - k$,
- aquellos donde $\mu_t > \mu_{t+1}$,
- $t = n - k - b'$.

Por lo tanto tenemos

$$w_3 = \sum_{J_2 \in A(t)} \frac{1}{\sigma_{J_2}} U_{J_2} v_3 \otimes y_{\text{máx}(J_2)}^1.$$

Aplicando ∂_1 obtenemos

$$\begin{aligned}
\partial_1(w_3) &= \partial_1 \left(\sum_{J_2 \in A(t)} \frac{1}{\sigma_{J_2}} U_{J_2} v_3 \otimes y_{\max(J_2)}^1 \right) \\
&= \partial_1 \left(\sum_{J_2 \in A(t)} \frac{1}{\sigma_{J_2}} U_{J_2} (x_1^1 \wedge \dots \wedge x_1^{a'+1} \wedge v_{\beta'} \wedge v_\gamma) \otimes y_{\max(J_2)}^1 \right) \\
&= \partial_1 \left(\sum_{J_2 \in A(t)} \frac{1}{\sigma_{J_2}} x_1^1 \wedge \dots \wedge x_1^{a'+1} \wedge U_{J_2} (v_{\beta'} \wedge v_\gamma) \otimes y_{\max(J_2)}^1 \right) \\
&= \sum_{i=1}^{a'+1} (-1)^{i+1} \sum_{J_2 \in A(t)} \frac{1}{\sigma_{J_2}} x_1^1 \wedge \dots \wedge \widehat{x_1^i} \wedge \dots \wedge x_1^{a'+1} \wedge U_{J_2} (v_{\beta'} \wedge v_\gamma) \otimes z_{\max(J_2)}^i
\end{aligned}$$

Veamos que este vector $\partial_1(w_3)$ está en $\text{Im } \partial_0 \otimes 1$. Para esto consideremos uno de los sumandos de $\partial_1(w_3)$,

$$w_{a'+1}^t = (-1)^{a'+1} x_1^1 \wedge \dots \wedge x_1^{a'} \wedge v_{\beta'} \wedge v_\gamma \otimes z_t^{a'+1},$$

que resulta de elegir $i = a' + 1$ y $J_2 = \{t\}$. Este sumando es linealmente independiente con el resto ya que la única forma de obtener $z_t^{a'+1}$ es eligiendo i y J_2 de dicha forma.

Si $u = x_1^1 \wedge \dots \wedge x_1^{a'} \wedge v_{\beta'} \wedge v_\gamma$, es decir

$$w_{a'+1}^t = (-1)^{a'+1} u \otimes z_t^{a'+1},$$

veamos que $u \in \text{Im } \partial_0$.

Sea

$$\widehat{v}_\gamma = z_{n-k}^1 \wedge \dots \wedge z_{n-k}^{a'+1} \wedge \dots \wedge z_{n-k-b'}^{a'+1} \wedge \dots \wedge z_{n-k}^q \wedge \dots \wedge z_{n-k+1-\gamma_q}^q,$$

es decir, v_γ sin el factor $z_{n-k-b'}^{a'+1}$. Consideremos $\bar{u} = y_{n-k-b'}^1 \wedge v_\alpha \wedge v_{\beta'} \wedge \widehat{v}_\gamma$.
Entonces

$$\begin{aligned}
\partial_0(\bar{u}) &= \sum_{i=1}^{a'+1} (-1)^{1+i} [y_{n-k-b'}^1, x_1^i] \wedge x_1^1 \wedge \dots \wedge \widehat{x_1^i} \wedge \dots \wedge x_1^{a'+1} \wedge v_{\beta'} \wedge \widehat{v}_\gamma + \\
&+ \sum_{i=1}^{a'+1} \sum_{j=1}^{b'} (-1)^{i+j+a'} [x_1^i, y_{n-k+1-j}^1] \wedge y_{n-k-b'}^1 \wedge x_1^1 \wedge \dots \wedge \widehat{x_1^i} \wedge \dots \wedge x_1^{a'+1} \wedge \\
&\quad \wedge y_{n-k}^1 \wedge \dots \wedge \widehat{y_{n-k+1-j}^1} \wedge \dots \wedge \widehat{v}_\gamma \\
&= \sum_{i=1}^{a'+1} (-1)^i z_{n-k-b'}^i \wedge x_1^1 \wedge \dots \wedge \widehat{x_1^i} \wedge \dots \wedge x_1^{a'+1} \wedge v_{\beta'} \wedge \widehat{v}_\gamma + \\
&+ \sum_{i=1}^{a'+1} \sum_{j=1}^{b'} (-1)^{i+j+a'} z_{n-k+1-j}^i \wedge y_{n-k-b'}^1 \wedge x_1^1 \wedge \dots \wedge \widehat{x_1^i} \wedge \dots \wedge x_1^{a'+1} \wedge y_{n-k}^1 \wedge \dots \\
&\quad \dots \wedge \widehat{y_{n-k+1-j}^1} \wedge \dots \wedge \widehat{v}_\gamma \\
&= (-1)^{a'+1} z_{n-k-b'}^{a'+1} \wedge x_1^1 \wedge \dots \wedge x_1^{a'} \wedge v_{\beta'} \wedge \widehat{v}_\gamma \\
&= (-1)^{1+\gamma_1+\dots+\gamma_{a'}} x_1^1 \wedge \dots \wedge x_1^{a'} \wedge v_{\beta'} \wedge v_\gamma \\
&= (-1)^{1+\gamma_1+\dots+\gamma_{a'}} u
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\partial_1(w_3) \in \text{Im } \partial_0 \otimes 1$.

d) Sean $\alpha = \underbrace{[1, \dots, 1]}_{a'+1}$ y $\gamma = [\gamma_1, \dots, \gamma_q]$ con $\gamma_{a'+1} = b'$. Entonces por el

Teorema 9.1 $v_4 = v_\alpha \wedge v_{\beta'} \wedge v_\gamma$ es un vector de peso máximo de $H_p^{\alpha\beta'\gamma}(\mathfrak{n})$.

Un vector de peso máximo de $H_p^{\alpha\beta'\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes Y$ será entonces

$$w_4 = \sum_{J_2 \in A(t)} \sum_{J_1 \in A(s)} \frac{1}{\sigma_{J_2}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} U_{J_2}(V_{J_1} v_4) \otimes x_{\text{máx}(J_2)}^{\min(J_1)}.$$

Como el primer bloque que actúa es $\mathfrak{sl}(1)$ y v_4 tiene el mismo peso que $v_{\beta'} \wedge v_\gamma$ como $\mathfrak{sl}(n-k)$ -módulo, digamos $(\mu_1, \dots, \mu_{n-k-b'}, \dots, \mu_m, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k-m-1})$,

entonces obtenemos que $s = 1$ y los posibles valores de t son:

- $t = n - k$,
- $t = n - k - b'$,
- aquellos donde $\mu_t > \mu_{t+1}$.

Por lo tanto tenemos

$$w_4 = \sum_{J_2 \in A(t)} \frac{1}{\sigma_{J_2}} U_{J_2} v_4 \otimes y_{\text{máx}(J_2)}^1,$$

que como $\mathfrak{sl}(k)$ -módulo tiene peso

$$(9.13) \quad (\gamma_1 + 1, \dots, \gamma_{a'+1} + 1, \gamma_{a'+2}, \dots, \gamma_q, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-q-1}),$$

y como $\mathfrak{sl}(n-k)$ -módulo, tiene el mismo peso

$$(9.14) \quad (\mu_1, \dots, \mu_{n-k-b'}, \dots, \mu_m, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k-m-1}) + (0, \dots, \underbrace{-1}_t, \dots, 0).$$

Aplicando ∂_1 obtenemos

$$\begin{aligned} \partial_1(w_4) &= \partial_1 \left(\sum_{J_2 \in A(t)} \frac{1}{\sigma_{J_2}} U_{J_2}(v_\alpha \wedge v_{\beta'} \wedge v_\gamma) \otimes y_{\max(J_2)}^1 \right) \\ &= \partial_1 \left(\sum_{J_2 \in A(t)} \frac{1}{\sigma_{J_2}} v_\alpha \wedge U_{J_2}(v_{\beta'} \wedge v_\gamma) \otimes y_{\max(J_2)}^1 \right) \\ &= \sum_{i=1}^{a'+1} (-1)^{i+1} \sum_{J_2 \in A(t)} \frac{1}{\sigma_{J_2}} x_1^1 \wedge \dots \wedge \widehat{x_1^i} \wedge \dots \wedge x_1^{a'+1} \wedge U_{J_2}(v_{\beta'} \wedge v_\gamma) \otimes z_{\max(J_2)}^i \end{aligned}$$

Veamos que este vector $\partial_1(w_4)$ no está en $\text{Im } \partial_0 \otimes 1$. Para esto consideremos uno de los sumandos de $\partial_1(w_4)$,

$$w_t^{a'+1} = (-1)^{a'+1} x_1^1 \wedge \dots \wedge x_1^{a'} \wedge v_{\beta'} \wedge v_\gamma \otimes z_t^{a'+1},$$

que resulta de elegir $i = a' + 1$ y $J_2 = \{t\}$. Este sumando es linealmente independiente con el resto ya que la única forma de obtener $z_t^{a'+1}$ es eligiendo i y J_1 de dicha forma. Si $u = x_1^1 \wedge \dots \wedge x_1^{a'} \wedge v_{\beta'} \wedge v_\gamma$, es decir

$$w_t^{a'+1} = (-1)^{a'+1} u \otimes z_t^{a'+1},$$

veamos que $u \notin \text{Im } \partial_0$.

Si u estuviese en $\text{Im } \partial_0$ entonces alguno de sus factores z_j^i debería obtenerse como el corchete de x_1^i y y_j^1 y además estos elementos no deberían ser factores de u . Supongamos que z_j^i es tal factor, entonces debemos tener $i > a'$ ya que x_1^i es factor de u para $1 \leq i \leq a'$ y además debemos tener $j \geq n - k + 1 - \gamma_i \geq n - k + 1 - b'$ ya que $z_j^i \in v_\gamma$ y $\gamma_i \leq b'$ para $i \geq a' + 1$. Pero todo y_j^1 con $n - k + 1 - b' \leq j \leq n - k$ es factor de u entonces no existe tal z_j^i y $u \notin \text{Im } \partial_0$.

De la comparación de los pesos de (9.9) y (9.13); y los pesos de (9.10) y (9.14) obtenemos que si $\gamma' = \gamma$ entonces $\mu' = \mu$ y si elegimos $s' = a' + 1$ y $t' = t$ entonces $\partial_1(w_4)$ y el vector de peso máximo de $H_{p-1}^{\alpha'\beta'\gamma'}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(a'+1, t)$ tienen los mismos diagramas de Young como $\mathfrak{sl}(k)$ y $\mathfrak{sl}(n-k)$ -módulos. Por lo tanto

$$\delta_p(H_p^{\alpha\beta\gamma'}(\mathfrak{n}) \otimes Y(1, t)) = H_{p-1}^{\alpha'\beta'\gamma'}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(a'+1, t).$$

Teniendo en cuenta que por el Teorema 8.14, las únicas posibles preimágenes de $H_{p-1}^{\alpha'\beta'\gamma'}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}$ son

- $H_p^{\alpha\beta\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes X$ si $a = a'$, $b = b' + 1$ y $c = c'$; y
- $H_p^{\alpha\beta\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes Y$ si $a = a' + 1$, $b = b'$ y $c = c'$,

y que se han analizado todos estos casos, concluimos que

$$H_p^{\alpha'\beta'\gamma'}(\mathbf{n}) \otimes \mathfrak{z}(s, t) \subset \text{coker } \delta_p \quad \begin{array}{l} \text{si } \gamma'_{a'+1} < b' \text{ y } t \neq n - k - b'; \text{ ó} \\ \text{si } \gamma'_{a'+1} = b', s \neq a' + 1 \text{ y } t \neq n - k. \end{array}$$

□

OBSERVACIÓN 9.3. Sean:

- $v_\alpha \wedge v_\beta \wedge v_\gamma$ un vector de peso máximo de $H_p^{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{n})$ que como $\mathfrak{sl}(k)$ -módulo tiene peso

$$(\gamma_1 + 1, \dots, \gamma_a + 1, \gamma_{a+1}, \dots, \gamma_{q_3}, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-q_3-1}),$$

y como $\mathfrak{sl}(n-k)$ -módulo tiene peso

$$(\mu_1, \dots, \mu_{n-k-b}, \dots, \mu_m, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k-m-1}).$$

- $v_{\alpha'} \wedge v_{\beta'} \wedge v_{\gamma'}$ un vector de peso máximo de $H_{p-1}^{\alpha'\beta'\gamma'}(\mathbf{n})$ que como $\mathfrak{sl}(k)$ -módulo tiene peso

$$(\gamma'_1 + 1, \dots, \gamma'_{a'} + 1, \gamma'_{a'+1}, \dots, \gamma'_{q'_3}, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-q'_3-1}),$$

y como $\mathfrak{sl}(n-k)$ -módulo tiene peso

$$(\mu'_1, \dots, \mu'_{n-k-b'}, \dots, \mu'_{m'}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k-m'-1}).$$

Además sean

- $\mathcal{S}_1 = \{s \mid s = 1, s = a + 1 \text{ ó } s \text{ es tal que } \gamma_s < \gamma_{s-1}\}$,
- $\mathcal{S}_2 = \{t \mid t = n - k, t = n - k - b \text{ ó } t \text{ es tal que } \mu_t > \mu_{t+1}\}$,
- $\mathcal{Q}_1 = \{(\alpha, \gamma) \mid v_\alpha \wedge v_\gamma \text{ es vector de peso máximo de } H_p(\mathbf{n}) \text{ y } \gamma_a = 0\}$,
- $\mathcal{Q}_2 = \{(\alpha, \gamma) \mid v_\alpha \wedge v_\gamma \text{ es vector de peso máximo de } H_p(\mathbf{n}) \text{ y } \gamma_a > 0\}$,
- $\mathcal{Q}_3 = \{(\beta, \gamma) \mid v_\beta \wedge v_\gamma \text{ es vector de peso máximo de } H_p(\mathbf{n}) \text{ y } \gamma_1 \leq b\}$,
- $\mathcal{R}_1 = \{(\alpha, \beta, \gamma) \mid v_\alpha \wedge v_\beta \wedge v_\gamma \text{ es vector de peso máximo de } H_p(\mathbf{n}) \text{ y } \gamma_{a+1} = b\}$,
- $\mathcal{R}_2 = \{(\alpha, \beta, \gamma) \mid v_\alpha \wedge v_\beta \wedge v_\gamma \text{ es vector de peso máximo de } H_p(\mathbf{n}) \text{ y } \gamma_{a+1} < b\}$,
- $\mathcal{R}_3 = \{(\alpha, \beta, \gamma) \mid v_\alpha \wedge v_\beta \wedge v_\gamma \text{ es vector de peso máximo de } H_p(\mathbf{n}) \text{ y } \gamma_a > b\}$,
- $\mathcal{R}_4 = \{(\alpha, \beta, \gamma) \mid v_\alpha \wedge v_\beta \wedge v_\gamma \text{ es vector de peso máximo de } H_p(\mathbf{n}) \text{ y } \gamma_a = b\}$.

Entonces por el Teorema 8.10 y el Teorema 9.2 se tiene que

- $H_p^\alpha(\mathbf{n}) \otimes Y = H_p^\alpha(\mathbf{n}) \otimes Y(1, n - k)$,
- $H_p^\beta(\mathbf{n}) \otimes X = H_p^\beta(\mathbf{n}) \otimes X(1, 1)$,
- $H_p^{\alpha\gamma}(\mathbf{n}) \otimes Y = \bigoplus_{\mathcal{S}_2} H_p^{\alpha\gamma}(\mathbf{n}) \otimes Y(1, t) \oplus \bigoplus_{\mathcal{S}_2} H_p^{\alpha\gamma}(\mathbf{n}) \otimes Y(1, t)$,
- $H_p^{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{n}) \otimes X = \bigoplus_{\mathcal{S}_1} H_p^{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{n}) \otimes X(s, 1) \oplus \bigoplus_{\mathcal{S}_1} H_p^{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{n}) \otimes X(s, 1)$,
- $H_p^{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{n}) \otimes Y = \bigoplus_{\mathcal{S}_2} H_p^{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{n}) \otimes Y(1, t) \oplus \bigoplus_{\mathcal{S}_2} H_p^{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{n}) \otimes Y(1, t)$,
- $H_p^\alpha(\mathbf{n}) \otimes \mathfrak{z} = H_p^\alpha(\mathbf{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n - k) \oplus H_p^\alpha(\mathbf{n}) \otimes \mathfrak{z}(p+1, n - k)$, donde el segundo sumando existe si $k \geq p + 1$;

- $H_p^\beta(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z} = H_p^\beta(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n-k) \oplus H_p^\beta(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n-k-p)$, donde el segundo sumando existe si $n-k \geq p+1$;

▪

$$H_p^{\alpha\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z} = \bigoplus_{\substack{S_1, S_2 \\ s \neq a+1 \\ t \neq n-k}} H_p^{\alpha\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(s, t) \oplus \bigoplus_{\substack{S_2 \\ t \neq n-k}} H_p^{\alpha\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(a+1, t) \\ \oplus \bigoplus_{\substack{S_1 \\ s \neq a+1}} H_p^{\alpha\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(s, n-k) \oplus H_p^{\alpha\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(a+1, n-k);$$

▪

$$H_p^{\alpha\beta\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z} = \bigoplus_{\substack{S_1, S_2 \\ s \neq a+1 \\ t \neq n-k}} H_p^{\alpha\beta\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(s, t) \oplus \bigoplus_{\substack{S_2 \\ t \neq n-k-b}} H_p^{\alpha\beta\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(a+1, t) \\ \oplus \bigoplus_{\substack{S_1 \\ s \neq a+1}} H_p^{\alpha\beta\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(s, n-k-b) \oplus H_p^{\alpha\beta\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(a+1, n-k-b);$$

Con esta descomposición y el Teorema 9.2, podemos enunciar la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 9.4. Sean $\alpha \in \mathcal{P}_1^a(a)$, $\beta \in \mathcal{P}_{n+1-l}^1(b)$, $\gamma \in \mathcal{P}_{n+1-l}^{q_3}(c)$ tales que $a+b+c = p$ y $\gamma_a \geq b \geq \gamma_{a+1}$. Entonces se tiene:

- para $p \geq 2$:

$$\ker \delta_p \simeq H_p^\alpha(\mathfrak{n}) \otimes X \oplus \bigoplus_{\mathcal{Q}_1 \cup \mathcal{Q}_2} H_p^{\alpha\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes X \oplus \bigoplus_{\mathcal{Q}_3} H_p^{\beta\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes X \oplus H_p^\beta(\mathfrak{n}) \otimes Y \\ \oplus \bigoplus_{\mathcal{Q}_3} H_p^{\beta\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes Y \oplus \bigoplus_{\mathcal{Q}_2, \mathcal{S}_2} H_p^{\alpha\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes Y(1, t) \oplus \bigoplus_{\mathcal{R}_1, \mathcal{S}_1} H_p^{\alpha\beta\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes X(s, 1) \\ \oplus \bigoplus_{\mathcal{R}_3, \mathcal{S}_2} H_p^{\alpha\beta\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes Y(1, t);$$

- para $p \geq 1$:

$$\operatorname{coker} \delta_{p+1} = \bigoplus_{\mathcal{Q}_3} H_p^{\beta\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z} \oplus H_p^\alpha(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n-k) \oplus H_p^\beta(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n-k) \\ \oplus \bigoplus_{\substack{\mathcal{Q}_1 \cup \mathcal{Q}_2, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \\ s \neq a+1 \\ t \neq n-k}} H_p^{\alpha\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(s, t) \oplus \bigoplus_{\substack{\mathcal{R}_1, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \\ s \neq a+1 \\ t \neq n-k-b}} H_p^{\alpha\beta\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(s, t) \\ \oplus \bigoplus_{\substack{\mathcal{R}_2, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \\ t \neq n-k-b}} H_p^{\alpha\beta\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(s, t);$$

donde H_p^α existe si $p \leq k$ y H_p^β existe si $p \leq n-k$.

DEMOSTRACIÓN.

1. Notemos que la condición $\gamma_a \geq b \geq \gamma_{a+1}$ nos permite afirmar que $v_\alpha \wedge v_\beta \wedge v_\gamma$ es un vector de peso máximo de $H_p(\mathfrak{n})$. Por otra parte, notemos que los sumandos con $H_p^{\alpha\beta\gamma}(\mathfrak{n})$ existen sólo si $p \geq 3$.

Los primeros cinco sumandos de $\ker \delta_p$ y el primer sumando de coker δ_{p+1} se siguen del Teorema 8.14. Por la Observación 9.3 y el Teorema 9.2 se sigue que

$$\bigoplus_{\mathcal{Q}_2, \mathcal{S}_2} H_p^{\alpha\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes Y(1, t) \oplus \bigoplus_{\mathcal{R}_1, \mathcal{S}_1} H_p^{\alpha\beta\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes X(s, 1) \oplus \bigoplus_{\mathcal{R}_3, \mathcal{S}_2} H_p^{\alpha\beta\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes Y(1, t) \in \ker \delta_p.$$

y además

$$\begin{aligned} \text{coker } \delta_p \ni & H_p^\alpha(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n-k) \oplus H_{p-1}^\beta(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n-k) \\ & \oplus \bigoplus_{\substack{\mathcal{Q}_1 \cup \mathcal{Q}_2, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \\ s \neq a+1 \\ t \neq n-k}} H_p^{\alpha\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(s, t) \oplus \bigoplus_{\substack{\mathcal{R}_1, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \\ s \neq a+1 \\ t \neq n-k-b}} H_p^{\alpha\beta\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(s, t) \\ & \oplus \bigoplus_{\substack{\mathcal{R}_2, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \\ t \neq n-k-b}} H_p^{\alpha\beta\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(s, t). \end{aligned}$$

□

A partir de esto podemos obtener la homología adjunta de $\mathfrak{n} = A_n(k, k+1)$:

TEOREMA 9.5. Sean $\alpha \in \mathcal{P}_1^a(a)$, $\beta \in \mathcal{P}_{n+1-l}^1(b)$, $\gamma \in \mathcal{P}_{n+1-l}^{q_3}(c)$ tales que $a + b + c = p$ y $\gamma_a \geq b \geq \gamma_{a+1}$. Entonces la homología adjunta del nilradical $\mathfrak{n} = A_n(k, k+1)$ es:

$$\begin{aligned} H_0(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}) & \simeq \mathbb{C} \otimes X \oplus \mathbb{C} \otimes Y, \\ H_1(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}) & \simeq H_1^\alpha(\mathfrak{n}) \otimes X \oplus H_1^\beta(\mathfrak{n}) \otimes X \oplus H_1^\beta(\mathfrak{n}) \otimes Y, \\ H_2(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}) & \simeq H_2^\alpha(\mathfrak{n}) \otimes X \oplus H_2^{\alpha\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes X \oplus H_2^{\beta\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes X \oplus H_2^\beta(\mathfrak{n}) \otimes Y \oplus H_2^{\beta\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes Y \\ & \oplus \bigoplus_{\mathcal{Q}_2, \mathcal{S}_2} H_2^{\alpha\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes Y(1, t) \oplus H_2^{\beta\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z} \oplus H_2^\alpha(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n-k) \\ & \oplus H_2^\beta(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n-k) \oplus \bigoplus_{\substack{\mathcal{Q}_1 \cup \mathcal{Q}_2, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \\ s \neq a+1 \\ t \neq n-k}} H_2^{\alpha\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(s, t) \end{aligned}$$

y para $p \geq 3$

$$\begin{aligned} H_p(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}) & \simeq H_p^\alpha(\mathfrak{n}) \otimes X \oplus \bigoplus_{\mathcal{Q}_1 \cup \mathcal{Q}_2} H_p^{\alpha\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes X \oplus \bigoplus_{\mathcal{Q}_3} H_p^{\beta\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes X \oplus H_p^\beta(\mathfrak{n}) \otimes Y \\ & \oplus \bigoplus_{\mathcal{Q}_3} H_p^{\beta\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes Y \oplus \bigoplus_{\mathcal{Q}_2, \mathcal{S}_2} H_p^{\alpha\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes Y(1, t) \oplus \bigoplus_{\mathcal{R}_1, \mathcal{S}_1} H_p^{\alpha\beta\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes X(s, 1) \\ & \oplus \bigoplus_{\mathcal{Q}_3, \mathcal{S}_2} H_p^{\alpha\beta\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes Y(1, t) \oplus \bigoplus_{\mathcal{Q}_3} H_p^{\beta\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z} \oplus H_p^\alpha(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n-k) \\ & \oplus H_p^\beta(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n-k) \oplus \bigoplus_{\substack{\mathcal{Q}_1 \cup \mathcal{Q}_2, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \\ s \neq a+1 \\ t \neq n-k}} H_p^{\alpha\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(s, t) \\ & \oplus \bigoplus_{\substack{\mathcal{R}_1, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \\ s \neq a+1 \\ t \neq n-k-b}} H_p^{\alpha\beta\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(s, t) \oplus \bigoplus_{\substack{\mathcal{R}_2, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \\ t \neq n-k-b}} H_p^{\alpha\beta\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(s, t); \end{aligned}$$

donde H_p^α existe si $p \leq k$ y H_p^β existe si $p \leq n - k$.

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de la Proposición 9.4.

□

Los primeros grupos de homología adjunta

En este Capítulo se incluyen los grupos de homología adjunta $H_0(\mathfrak{n}, \mathfrak{n})$, $H_1(\mathfrak{n}, \mathfrak{n})$ y $H_2(\mathfrak{n}, \mathfrak{n})$ para cualquier nilradical \mathfrak{n} 2-pasos nilpotente de tipo A_n .

Vamos a analizar sólo para $l - k \geq 2$ ya que el caso $l - k = 1$ fue considerado en el Capítulo 9.

Sean las particiones

- $\alpha_1 = [3], \alpha_2 = [2, 1], \alpha_3 = [1, 1, 1], \beta_1 = [3], \beta_2 = [2, 1], \beta_3 = [1, 1, 1]$, de modo que $v_{\alpha_1}, v_{\alpha_2}, v_{\alpha_3}, v_{\beta_1}, v_{\beta_2}$ y v_{β_3} son vectores de peso máximo de $H_3(\mathfrak{n})$;
- $\alpha_4 = [2], \alpha_5 = [1, 1], \beta_4 = [2], \beta_5 = [1, 1]$, de modo que $v_{\alpha_4}, v_{\alpha_5}, v_{\beta_4}$ y v_{β_5} son vectores de peso máximo de $H_2(\mathfrak{n})$;
- $\alpha_6 = [1], \beta_6 = [1], \gamma = [1]$, de modo que v_{α_6} y v_{β_6} son vectores de peso máximo de $H_1(\mathfrak{n})$;

1. La acción de δ_3

De los Teoremas 8.14 y 8.10 se tiene la siguiente descomposición:

$$\begin{aligned} H_2(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z} = & H_2^{\alpha_4}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n+1-l) \oplus H_2^{\alpha_4}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(2, n+1-l) \\ & \oplus H_2^{\alpha_5}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n+1-l) \oplus H_2^{\alpha_5}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(3, n+1-l) \\ & \oplus H_2^{\beta_4}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n+1-l) \oplus H_2^{\beta_4}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n-1-l) \\ & \oplus H_2^{\beta_5}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n+1-l) \oplus H_2^{\beta_5}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n-l) \\ & \oplus H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n+1-l) \oplus H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n-l) \\ & \oplus H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(2, n+1-l) \oplus H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(2, n-l). \end{aligned}$$

Dado que nos interesa conocer el coker δ_3 , enunciamos la siguiente

PROPOSICIÓN 10.1. *Sea $l - k \geq 2$ y sean las particiones*

- $\alpha_1 = [3], \alpha_2 = [2, 1], \alpha_3 = [1, 1, 1], \beta_1 = [3], \beta_2 = [2, 1], \beta_3 = [1, 1, 1]$ de modo que $v_{\alpha_1}, v_{\alpha_2}, v_{\alpha_3}, v_{\beta_1}, v_{\beta_2}$ y v_{β_3} son vectores de peso máximo de $H_3(\mathfrak{n})$;
- $\alpha_4 = [2], \alpha_5 = [1, 1], \beta_4 = [2], \beta_5 = [1, 1]$ de modo que $v_{\alpha_4}, v_{\alpha_5}, v_{\beta_4}$ y v_{β_5} son vectores de peso máximo de $H_2(\mathfrak{n})$; y
- $\alpha_6 = [1], \beta_6 = [1], \gamma = [1]$ de modo que v_{α_6} y v_{β_6} son vectores de peso máximo de $H_1(\mathfrak{n})$.

Entonces

1. $\delta_3(H_3^{\alpha_1}(\mathfrak{n}) \otimes Y(l-k-2, n+1-l)) = H_2^{\alpha_4}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n+1-l)$ si $l - k \geq 3$,
2. $\delta_3(H_3^{\alpha_2}(\mathfrak{n}) \otimes Y(l-k, n+1-l)) = H_2^{\alpha_4}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(2, n+1-l)$,
3. $\delta_3(H_3^{\alpha_3}(\mathfrak{n}) \otimes Y(l-k-1, n+1-l)) = H_2^{\alpha_5}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n+1-l)$,
4. $\delta_3(H_3^{\alpha_4}(\mathfrak{n}) \otimes Y(l-k, n+1-l)) = H_2^{\alpha_5}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(3, n+1-l)$,

5. $\delta_3(H_3^{\beta_2}(\mathfrak{n}) \otimes X(1, 2)) = H_2^{\beta_4}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n+1-l),$
6. $\delta_3(H_3^{\beta_1}(\mathfrak{n}) \otimes X(1, 1)) = H_2^{\beta_4}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n-1-l),$
7. $\delta_3(H_3^{\beta_3}(\mathfrak{n}) \otimes X(1, 3)) = H_2^{\beta_5}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n+1-l)$ si $l-k \geq 3,$
8. $\delta_3(H_3^{\beta_2}(\mathfrak{n}) \otimes X(1, 1)) = H_2^{\beta_5}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n-l),$
9. $\delta_3(H_3^{\alpha_4\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes Y(l-k-1, n+1-l)) = H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n+1-l),$
10. $\delta_3(H_3^{\alpha_4\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes Y(l-k-1, n-l)) = H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n-l),$
11. $\delta_3(H_3^{\alpha_5\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes Y(l-k, n+1-l)) = H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(2, n+1-l),$
12. $\delta_3(H_3^{\alpha_5\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes Y(l-k, n-l)) = H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(2, n-l),$

DEMOSTRACIÓN. Vamos a demostrar sólo los items 1 y 5 por ser casos representativos, los demás son análogos.

1. Un vector de peso máximo de $H_3^{\alpha_1}(\mathfrak{n}) \otimes Y(l-k-2, n+1-l)$ es, por el Teorema 8.10,

$$\begin{aligned} w_1 &= \sum_{J_2 \in A_{(n+1-l)}} \sum_{J_1 \in A^{(l-k-2)}} \frac{1}{\sigma_{J_2}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} U_{J_2} V_{J_1} (x_{l-k}^1 \wedge x_{l-k-1}^1 \wedge x_{l-k-2}^1) \otimes y_{\max(J_2)}^{\min(J_1)} \\ &= - \sum_{J_1 \in A^{(l-k-2)}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} V_{J_1} (x_{l-k}^1 \wedge x_{l-k-1}^1 \wedge x_{l-k-2}^1) \otimes y_{n+1-l}^{\min(J_1)} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $V_{J_1} \in \mathcal{U}^-(\mathfrak{sl}(l-k))$ y que si $J_1 = \{\min(J_1), j_2, \dots, j_{m-1}, l-k-2\}$ entonces $V_{J_1} = E_{j_2, j_1} E_{j_3, j_2} \dots E_{l-k-2, j_{m-1}}$, obtenemos que

$$V_{J_1} (x_{l-k}^1 \wedge x_{l-k-1}^1 \wedge x_{l-k-2}^1) = (-1)^{|J_1|-1} x_{l-k}^1 \wedge x_{l-k-1}^1 \wedge x_{\min(J_1)}^1,$$

es decir que

$$\begin{aligned} w_1 &= - \sum_{J_1 \in A^{(l-k-2)}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} (-1)^{|J_1|-1} (x_{l-k}^1 \wedge x_{l-k-1}^1 \wedge x_{\min(J_1)}^1) \otimes y_{n+1-l}^{\min(J_1)} \\ &= \sum_{J_1 \in A^{(l-k-2)}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} (-1)^{|J_1|} (x_{l-k}^1 \wedge x_{l-k-1}^1 \wedge x_{\min(J_1)}^1) \otimes y_{n+1-l}^{\min(J_1)} \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\partial_1(w_1) = \left(\sum_{J_1 \in A^{(l-k-2)}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} (-1)^{|J_1|} \right) (x_{l-k}^1 \wedge x_{l-k-1}^1 \otimes z_{n+1-l}^1),$$

que es un múltiplo no nulo del vector de peso máximo de $H_2^{\alpha_4}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n+1-l)$ por el Lema 7.7.

5. Un vector de peso máximo de $H_3^{\beta_2}(\mathfrak{n}) \otimes X(1, 2)$ es, por el Teorema 8.10,

$$\begin{aligned} w_2 &= \sum_{J_2 \in A_{(2)}} \sum_{J_1 \in A_{(1)}} \frac{1}{\sigma_{J_2}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} U_{J_2} V_{J_1} (y_{n+1-l}^1 \wedge y_{n-l}^1 \wedge y_{n+1-l}^2) \otimes x_{\max(J_2)}^{\min(J_1)} \\ &= \sum_{J_2 \in A_{(2)}} \frac{1}{\sigma_{J_2}} U_{J_2} (y_{n+1-l}^1 \wedge y_{n-l}^1 \wedge y_{n+1-l}^2) \otimes x_{\max(J_2)}^1 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $U_{J_2} \in \mathcal{U}^-(\mathfrak{sl}(l-k))$ y que si $J_2 = \{2, j_2, \dots, j_{m-1}, \max(J_2)\}$ entonces $U_{J_2} = E_{\max(J_2), j_{m-1}} E_{j_{m-1}, j_{m-2}} \dots E_{j_3, j_2} E_{j_2, 2}$, obtenemos que

$$U_{J_2} (y_{n+1-l}^1 \wedge y_{n-l}^1 \wedge y_{n+1-l}^2) = y_{n+1-l}^1 \wedge y_{n-l}^1 \wedge y_{n+1-l}^{\max(J_2)},$$

es decir que

$$w_2 = \sum_{J_2 \in A_{(2)}} \frac{1}{\sigma_{J_2}} (y_{n+1-l}^1 \wedge y_{n-l}^1 \wedge y_{n+1-l}^{\max(J_2)}) \otimes x_{\max(J_2)}^1,$$

y por lo tanto

$$\partial_1(w_2) = \left(- \sum_{J_2 \in A_{(2)}} \frac{1}{\sigma_{J_2}} \right) (y_{n+1-l}^1 \wedge y_{n-l}^1 \otimes z_{n+1-l}^1),$$

que es un múltiplo no nulo del vector de peso máximo de $H_2^{\beta_4}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n+1-l)$ por el Lema 7.9.

Los demás casos se analizan de la misma forma utilizando el Teorema 8.10 y los Lemas 7.7 y 7.9. \square

Así podemos enunciar,

COROLARIO 10.2. *Dado un nilradical $\mathfrak{n} = A_n(k, l)$ se tiene:*

- *si $l - k = 1$ entonces:*

$$\begin{aligned} \text{coker } \delta_3 &= H_2^{\beta_6 \gamma}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z} \oplus H_2^{\alpha_5}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n-k) \oplus H_2^{\beta_4}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n-k) \\ &\quad \oplus H_2^{\alpha_6 \gamma}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n-k-1), \end{aligned}$$

- *si $l - k = 2$ entonces:*

$$\text{coker } \delta_3 = H_2^{\alpha_4}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n+1-l) \oplus H_2^{\beta_5}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n+1-l),$$

- *si $l - k \geq 3$ entonces:*

$$\text{coker } \delta_3 = 0.$$

DEMOSTRACIÓN.

El caso $l - k = 1$ se sigue de la Proposición 9.4.

El caso $l - k = 2$ se sigue de observar que la Proposición 10.1 no incluye el caso $l - k = 2$ para estos submódulos y que tanto $H_2^{\alpha_4}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n+1-l)$ como $H_2^{\beta_5}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n+1-l)$ no tienen preimagen en $H_3(\mathfrak{n}) \otimes (X \oplus Y)$ si $l - k = 2$.

El caso $l - k \geq 3$ se sigue de la Proposición 10.1. \square

2. La acción de δ_2

A partir del Teorema 8.14 y el Teorema 8.10 tenemos las siguientes descomposiciones para $l - k \geq 2$:

$$\begin{aligned} H_2(\mathfrak{n}) \otimes X &= H_2^{\alpha_4}(\mathfrak{n}) \otimes X \oplus H_2^{\alpha_5}(\mathfrak{n}) \otimes X \oplus H_2^{\beta_4}(\mathfrak{n}) \otimes X(1, l - k) \oplus H_2^{\beta_4}(\mathfrak{n}) \otimes X(1, 1) \\ &\oplus H_2^{\beta_5}(\mathfrak{n}) \otimes X(1, l - k) \oplus H_2^{\beta_5}(\mathfrak{n}) \otimes X(1, 2) \oplus H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes X(1, l - k) \\ &\oplus H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes X(1, l - k - 1) \oplus H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes X(1, 1) \\ &\oplus H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes X(2, l - k) \oplus H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes X(2, l - k - 1) \\ &\oplus H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes X(2, 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_2(\mathfrak{n}) \otimes Y &= H_2^{\alpha_4}(\mathfrak{n}) \otimes Y(1, n + 1 - l) \oplus H_2^{\alpha_4}(\mathfrak{n}) \otimes Y(l - k - 1, n + 1 - l) \\ &\oplus H_2^{\alpha_5}(\mathfrak{n}) \otimes Y(1, n + 1 - l) \oplus H_2^{\alpha_5}(\mathfrak{n}) \otimes Y(l - k, n + 1 - l) \oplus H_2^{\beta_4}(\mathfrak{n}) \otimes Y \\ &\oplus H_2^{\beta_5}(\mathfrak{n}) \otimes Y \oplus H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes Y(1, n + 1 - l) \\ &\oplus H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes Y(1, n - l) \oplus H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes Y(2, n + 1 - l) \\ &\oplus H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes X(2, n - l) \oplus H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes X(l - k, n + 1 - l) \\ &\oplus H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes X(l - k, n - l), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_1(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z} &= H_1^{\alpha_6}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n + 1 - l) \oplus H_1^{\alpha_6}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(2, n + 1 - l) \\ &\oplus H_1^{\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n + 1 - l) \oplus H_1^{\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n - l). \end{aligned}$$

Tenemos la siguiente

PROPOSICIÓN 10.3. *Sea $l - k \geq 2$ y sean las particiones*

- $\alpha_4 = [2], \alpha_5 = [1, 1], \beta_4 = [2], \beta_5 = [1, 1]$ de modo que $v_{\alpha_4}, v_{\alpha_5}, v_{\beta_4}$ y v_{β_5} son vectores de peso máximo de $H_2(\mathfrak{n})$; y
- $\alpha_6 = [1], \beta_6 = [1], \gamma = [1]$ de modo que $v_{\alpha_6}, v_{\beta_6}$ son vectores de peso máximo de $H_1(\mathfrak{n})$.

Entonces

1. $\delta_2(H_2^{\alpha_4}(\mathfrak{n}) \otimes Y(l - k - 1, n + 1 - l)) = H_1^{\alpha_6}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n + 1 - l)$,
2. $\delta_2(H_2^{\alpha_5}(\mathfrak{n}) \otimes Y(l - k, n + 1 - l)) = H_1^{\alpha_6}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(2, n + 1 - l)$,
3. $\delta_2(H_2^{\beta_5}(\mathfrak{n}) \otimes X(1, 2)) = H_1^{\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n + 1 - l)$,
4. $\delta_2(H_2^{\beta_4}(\mathfrak{n}) \otimes X(1, 1)) = H_1^{\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n - l)$.

DEMOSTRACIÓN. Al igual que en la Proposición 10.1, vamos a demostrar sólo dos casos, los otros dos se demuestran en forma análoga utilizando el Teorema 8.10 y los Lemmas 7.7 y 7.9.

1. Un vector de peso máximo de $H_2^{\alpha_4}(\mathfrak{n}) \otimes Y(l-k-1, n+1-l)$ es, por el Teorema 8.10, de la forma:

$$\begin{aligned} w_1 &= \sum_{J_2 \in A_{(n+1-l)}} \sum_{J_1 \in A^{(l-k-1)}} \frac{1}{\sigma_{J_2}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} U_{J_2} V_{J_1} (x_{l-k}^1 \wedge x_{l-k-1}^1) \otimes y_{\max(J_2)}^{\min(J_1)} \\ &= - \sum_{J_1 \in A^{(l-k-1)}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} V_{J_1} (x_{l-k}^1 \wedge x_{l-k-1}^1) \otimes y_{n+1-l}^{\min(J_1)}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $V_{J_1} \in \mathcal{U}^-(\mathfrak{sl}(l-k))$ y que si $J_1 = \{\min(J_1), j_2, \dots, j_{m-1}, l-k-1\}$ entonces $V_{J_1} = E_{j_2, j_1} E_{j_3, j_2} \dots E_{l-k-1, j_{m-1}}$, obtenemos que

$$V_{J_1} (x_{l-k}^1 \wedge x_{l-k-1}^1) = (-1)^{|J_1|-1} x_{l-k}^1 \wedge x_{\min(J_1)}^1,$$

es decir que

$$w_1 = - \sum_{J_1 \in A^{(l-k-1)}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} (-1)^{|J_1|-1} x_{l-k}^1 \wedge x_{\min(J_1)}^1 \otimes y_{n+1-l}^{\min(J_1)}$$

y por lo tanto,

$$\partial_1(w_1) = \left(- \sum_{J_1 \in A^{(l-k-1)}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} (-1)^{|J_1|} \right) (x_{l-k}^1 \otimes z_{n+1-l}^1),$$

que es un múltiplo no nulo del vector de peso máximo de $H_1^{\alpha_6}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n+1-l)$ por el Lema 7.7.

3. Un vector de peso máximo de $H_2^{\beta_5}(\mathfrak{n}) \otimes X(1, 2)$ es, por el Teorema 8.10,

$$\begin{aligned} w_2 &= \sum_{J_2 \in A_{(2)}} \sum_{J_1 \in A^{(1)}} \frac{1}{\sigma_{J_2}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} U_{J_2} V_{J_1} (y_{n+1-l}^1 \wedge y_{n+1-l}^2) \otimes x_{\max(J_2)}^{\min(J_1)} \\ &= \sum_{J_2 \in A_{(2)}} \frac{1}{\sigma_{J_2}} U_{J_2} (y_{n+1-l}^1 \wedge y_{n+1-l}^2) \otimes x_{\max(J_2)}^1 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $U_{J_2} \in \mathcal{U}^-(\mathfrak{sl}(l-k))$ y que si $J_2 = \{2, j_2, \dots, j_{m-1}, \max(J_2)\}$ entonces $U_{J_2} = E_{\max(J_2), j_{m-1}} E_{j_{m-1}, j_{m-2}} \dots E_{j_3, j_2} E_{j_2, 2}$, obtenemos que

$$U_{J_2} (y_{n+1-l}^1 \wedge y_{n+1-l}^2) = y_{n+1-l}^1 \wedge y_{n+1-l}^{\max(J_2)},$$

es decir que

$$w_2 = \sum_{J_2 \in A_{(2)}} \frac{1}{\sigma_{J_2}} (y_{n+1-l}^1 \wedge y_{n+1-l}^{\max(J_2)}) \otimes x_{\max(J_2)}^1,$$

y por lo tanto

$$\partial_1(w_2) = \left(\sum_{J_2 \in A_{(2)}} \frac{1}{\sigma_{J_2}} \right) (y_{n+1-l}^1 \otimes z_{n+1-l}^1),$$

que es un múltiplo no nulo del vector de peso máximo de $H_1^{\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n+1-l)$ por el Lema 7.9. \square

COROLARIO 10.4. *Dado un nilradical $\mathfrak{n} = A_n(k, l)$ se tiene:*

- *si $l - k = 1$ entonces:*

$$\begin{aligned} \ker \delta_2 &\simeq H_2^{\alpha_5}(\mathfrak{n}) \otimes X \oplus H_2^{\alpha_6\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes X \oplus H_2^{\beta_4\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes X \oplus H_2^{\beta_4}(\mathfrak{n}) \otimes Y \\ &\quad \oplus H_2^{\beta_6\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes Y \oplus H_2^{\alpha_6\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes Y(1, n - k) \\ &\quad \oplus H_2^{\alpha_6\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes Y(1, n - k - 1), \\ \text{coker } \delta_2 &= H_p^\alpha(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n - k) \oplus H_p^\beta(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n - k), \end{aligned}$$

- *si $l - k \geq 2$ entonces:*

$$\begin{aligned} \ker \delta_2 &\simeq H_2^{\alpha_4}(\mathfrak{n}) \otimes X \oplus H_2^{\alpha_5}(\mathfrak{n}) \otimes X \oplus H_2^{\beta_4}(\mathfrak{n}) \otimes X(1, l - k) \\ &\quad \oplus H_2^{\beta_5}(\mathfrak{n}) \otimes X(1, l - k) \oplus H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes X(1, l - k) \\ &\quad \oplus H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes X(1, l - k - 1) \oplus H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes X(1, 1) \\ &\quad \oplus H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes X(2, l - k) \oplus H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes X(2, l - k - 1) \\ &\quad \oplus H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes X(2, 1) \oplus H_2^{\alpha_4}(\mathfrak{n}) \otimes Y(1, n + 1 - l) \\ &\quad \oplus H_2^{\alpha_5}(\mathfrak{n}) \otimes Y(1, n + 1 - l) \oplus H_2^{\beta_4}(\mathfrak{n}) \otimes Y \\ &\quad \oplus H_2^{\beta_5}(\mathfrak{n}) \otimes Y \oplus H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes Y(1, n + 1 - l) \\ &\quad \oplus H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes Y(1, n - l) \oplus H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes Y(2, n + 1 - l) \\ &\quad \oplus H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes X(2, n - l) \oplus H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes X(l - k, n + 1 - l) \\ &\quad \oplus H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes X(l - k, n - l), \\ \text{coker } \delta_2 &= 0. \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de la Proposición 10.3 y de la Proposición 9.4 teniendo en cuenta que si $p = 2$ entonces $\bigoplus_{\mathcal{Q}_2, \mathcal{S}_2} H_p^{\alpha\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes Y(1, t) = H_2^{\alpha_6\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes Y(1, n - k) \oplus H_2^{\alpha_6\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes Y(1, n - k - 1)$. □

3. La acción de δ_1

A partir del Teorema 8.14 y el Teorema 8.10 tenemos las siguientes descomposiciones:

$$\begin{aligned} H_1(\mathfrak{n}) \otimes X &= H_1(\mathfrak{n})^{\alpha_6} \otimes X(1, l-k) \oplus H_1(\mathfrak{n})^{\alpha_6} \otimes X(1, l-k-1) \\ &\quad \oplus H_1(\mathfrak{n})^{\alpha_6} \otimes X(2, l-k) \oplus H_1(\mathfrak{n})^{\alpha_6} \otimes X(2, l-k-1) \\ &\quad \oplus H_1(\mathfrak{n})^{\beta_6} \otimes X(1, l-k) \oplus H_1(\mathfrak{n})^{\beta_6} \otimes X(1, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_1(\mathfrak{n}) \otimes Y &= H_1(\mathfrak{n})^{\alpha_6} \otimes Y(1, n+1-l) \oplus H_1(\mathfrak{n})^{\alpha_6} \otimes Y(l-k, n+1-l) \\ &\quad \oplus H_1(\mathfrak{n})^{\beta_6} \otimes Y(1, n+1-l) \oplus H_1(\mathfrak{n})^{\beta_6} \otimes Y(1, n-l) \\ &\quad \oplus H_1(\mathfrak{n})^{\beta_6} \otimes Y(2, n+1-l) \oplus H_1(\mathfrak{n})^{\beta_6} \otimes Y(2, n-l) \end{aligned}$$

$$H_0(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z} \simeq \mathbb{C} \otimes \mathfrak{z}.$$

Tenemos la siguiente

PROPOSICIÓN 10.5. *Sea $l-k \geq 2$ y sean las particiones $\alpha_6 = [1], \beta_6 = [1], \gamma = [1]$ de modo que v_{α_6} y v_{β_6} son vectores de peso máximo de $H_1(\mathfrak{n})$. Entonces*

$$\delta_1(H_1^{\alpha_6}(\mathfrak{n}) \otimes Y(l-k, n+1-l)) = H_0(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}.$$

DEMOSTRACIÓN. Un vector de peso máximo de $H_1^{\alpha_6}(\mathfrak{n}) \otimes Y(l-k, n+1-l)$ es

$$\begin{aligned} w &= \sum_{J_2 \in A(n+1-l)} \sum_{J_1 \in A(l-k)} \frac{1}{\sigma_{J_2}} \frac{1}{\sigma_{J_1}} U_{J_2} V_{J_1}(x_{l-k}^1) \otimes y_{\max(J_2)}^{\min(J_1)} \\ &= - \sum_{J_1 \in A(l-k)} \frac{1}{\sigma_{J_1}} V_{J_1}(x_{l-k}^1) \otimes y_{n+1-l}^{\min(J_1)} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $V_{J_1} \in \mathcal{U}^-(\mathfrak{sl}(l-k))$ y que si $J_1 = \{\min(J_1), j_2, \dots, j_{m-1}, l-k\}$ entonces $V_{J_1} = E_{j_2, j_1} E_{j_3, j_2} \cdots E_{l-k, j_{m-1}}$, obtenemos que

$$V_{J_1}(x_{l-k}^1) = (-1)^{|J_1|-1} x_{\min(J_1)}^1,$$

es decir que

$$w = - \sum_{J_1 \in A(l-k)} \frac{1}{\sigma_{J_1}} (-1)^{|J_1|-1} x_{\min(J_1)}^1 \otimes y_{n+1-l}^{\min(J_1)}$$

y por lo tanto,

$$\partial_1(w_1) = \left(- \sum_{J_1 \in A(l-k)} \frac{1}{\sigma_{J_1}} (-1)^{|J_1|-1} \right) (1 \otimes z_{n+1-l}^1),$$

que es un múltiplo no nulo del vector de peso máximo de $H_0(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}$ por el Lema 7.7. \square

Así obtenemos,

COROLARIO 10.6. *Dado un nilradical $\mathfrak{n} = A_n(k, l)$ se tiene:*

- *si $l - k = 1$ entonces:*

$$\begin{aligned} \ker \delta_1 &\simeq H_1^{\alpha_6}(\mathfrak{n}) \otimes X(1, 1) \oplus H_1^{\alpha_6}(\mathfrak{n}) \otimes X(2, 1) \\ &\quad \oplus H_1^{\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes X(1, 1) \oplus H_1^{\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes Y(1, n - k) \\ &\quad \oplus H_1^{\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes Y(1, n - k - 1), \\ \text{coker } \delta_1 &= 0 \end{aligned}$$

- *si $l - k \geq 2$ entonces:*

$$\begin{aligned} \ker \delta_1 &\simeq H_1(\mathfrak{n})^{\alpha_6} \otimes X(1, l - k) \oplus H_1(\mathfrak{n})^{\alpha_6} \otimes X(1, l - k - 1) \\ &\quad \oplus H_1(\mathfrak{n})^{\alpha_6} \otimes X(2, l - k) \oplus H_1(\mathfrak{n})^{\alpha_6} \otimes X(2, l - k - 1) \\ &\quad \oplus H_1(\mathfrak{n})^{\beta_6} \otimes X(1, l - k) \oplus H_1(\mathfrak{n})^{\beta_6} \otimes X(1, 1) \\ &\quad \oplus H_1(\mathfrak{n})^{\alpha_6} \otimes Y(1, n + 1 - l) \oplus H_1(\mathfrak{n})^{\beta_6} \otimes Y(1, n + 1 - l) \\ &\quad \oplus H_1(\mathfrak{n})^{\beta_6} \otimes Y(1, n - l) \oplus H_1(\mathfrak{n})^{\beta_6} \otimes Y(2, n + 1 - l) \\ &\quad \oplus H_1(\mathfrak{n})^{\beta_6} \otimes Y(2, n - l) \\ \text{coker } \delta_1 &= 0. \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de las Proposición 10.5 y del Teorema 9.5. □

4. Los grupos $H_0(\mathfrak{n}, \mathfrak{n})$, $H_1(\mathfrak{n}, \mathfrak{n})$ y $H_2(\mathfrak{n}, \mathfrak{n})$

Sean las particiones

- $\alpha_1 = [3], \alpha_2 = [2, 1], \alpha_3 = [1, 1, 1], \beta_1 = [3], \beta_2 = [2, 1], \beta_3 = [1, 1, 1]$, de modo que $v_{\alpha_1}, v_{\alpha_2}, v_{\alpha_3}, v_{\beta_1}, v_{\beta_2}$ y v_{β_3} son vectores de peso máximo de $H_3(\mathfrak{n})$;
- $\alpha_4 = [2], \alpha_5 = [1, 1], \beta_4 = [2], \beta_5 = [1, 1]$, de modo que $v_{\alpha_4}, v_{\alpha_5}, v_{\beta_4}$ y v_{β_5} son vectores de peso máximo de $H_2(\mathfrak{n})$;
- $\alpha_6 = [1], \beta_6 = [1], \gamma = [1]$, de modo que v_{α_6} y v_{β_6} son vectores de peso máximo de $H_1(\mathfrak{n})$;

Con todo lo visto anteriormente podemos enunciar los siguientes Teoremas:

TEOREMA 10.7. *Sea $\mathfrak{n} = A_n(l, k)$ un nilradical 2-pasos nilpotente de tipo A_n . Entonces el grupo de homología adjunta $H_0(\mathfrak{n}, \mathfrak{n})$ es:*

$$H_0(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}) \simeq \mathbb{C} \otimes X \oplus \mathbb{C} \otimes Y.$$

DEMOSTRACIÓN. Se sigue del hecho de que $\ker \delta_0 = H_0(\mathfrak{n}) \otimes (X \oplus Y)$ y del Corolario 10.6. □

TEOREMA 10.8. Sea $\mathfrak{n} = A_n(l, k)$ un nilradical 2-pasos nilpotente de tipo A_n . Entonces el grupo de homología adjunta $H_1(\mathfrak{n}, \mathfrak{n})$ es:

- si $l - k = 1$:

$$\begin{aligned} H_1(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}) \simeq & H_1^{\alpha_6}(\mathfrak{n}) \otimes X(1, 1) \oplus H_1^{\alpha_6}(\mathfrak{n}) \otimes X(2, 1) \\ & \oplus H_1^{\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes X(1, 1) \oplus H_1^{\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes Y(1, n - k) \\ & \oplus H_1^{\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes Y(1, n - k - 1) \oplus H_1^{\alpha_6}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n - k) \\ & \oplus H_1^{\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n - k), \end{aligned}$$

- si $l - k \geq 2$:

$$\begin{aligned} H_1(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}) \simeq & H_1^{\alpha_6}(\mathfrak{n}) \otimes X(1, l - k) \oplus H_1^{\alpha_6}(\mathfrak{n}) \otimes X(1, l - k - 1) \\ & \oplus H_1^{\alpha_6}(\mathfrak{n}) \otimes X(2, l - k) \oplus H_1^{\alpha_6}(\mathfrak{n}) \otimes X(2, l - k - 1) \\ & \oplus H_1^{\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes X(1, l - k) \oplus H_1^{\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes X(1, 1) \\ & \oplus H_1^{\alpha_6}(\mathfrak{n}) \otimes Y(1, n + 1 - l) \oplus H_1^{\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes Y(1, n + 1 - l) \\ & \oplus H_1^{\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes Y(1, n - l) \oplus H_1^{\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes Y(2, n + 1 - l) \\ & \oplus H_1^{\beta_6}(\mathfrak{n}) \otimes Y(2, n - l). \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de los Corolarios 10.6 y 10.4. □

TEOREMA 10.9. Sea $\mathfrak{n} = A_n(l, k)$ un nilradical 2-pasos nilpotente de tipo A_n . Entonces el grupo de homología adjunta $H_2(\mathfrak{n}, \mathfrak{n})$ es:

- si $l - k = 1$:

$$\begin{aligned} H_2(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}) \simeq & H_2^{\alpha_5}(\mathfrak{n}) \otimes X \oplus H_2^{\alpha_6\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes X \oplus H_2^{\beta_6\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes X \oplus H_2^{\beta_4}(\mathfrak{n}) \otimes Y \\ & \oplus H_2^{\beta_6\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes Y \oplus H_2^{\alpha_6\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes Y(1, n - k) \\ & \oplus H_p^{\alpha_6\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes Y(1, n - k - 1) \oplus H_2^{\beta_6\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z} \\ & \oplus H_2^{\alpha_5}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n - k) \oplus H_2^{\beta_4}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n - k) \\ & \oplus H_2^{\alpha_6\gamma}(\mathfrak{n}) \otimes \mathfrak{z}(1, n - k - 1), \end{aligned}$$

- si $l - k = 2$:

$$\begin{aligned}
H_2(\mathbf{n}, \mathbf{n}) \simeq & H_2^{\alpha_4}(\mathbf{n}) \otimes X \oplus H_2^{\alpha_5}(\mathbf{n}) \otimes X \oplus H_2^{\beta_4}(\mathbf{n}) \otimes X(1, 2) \\
& \oplus H_2^{\beta_5}(\mathbf{n}) \otimes X(1, 2) \oplus H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathbf{n}) \otimes X(1, 2) \\
& \oplus H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathbf{n}) \otimes X(1, 1) \oplus H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathbf{n}) \otimes X(2, 2) \\
& \oplus H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathbf{n}) \otimes X(2, 1) \oplus H_2^{\alpha_4}(\mathbf{n}) \otimes Y(1, n+1-l) \\
& \oplus H_2^{\alpha_5}(\mathbf{n}) \otimes Y(1, n+1-l) \oplus H_2^{\beta_4}(\mathbf{n}) \otimes Y \\
& \oplus H_2^{\beta_5}(\mathbf{n}) \otimes Y \oplus H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathbf{n}) \otimes Y(1, n+1-l) \\
& \oplus H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathbf{n}) \otimes Y(1, n-l) \oplus H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathbf{n}) \otimes Y(2, n+1-l) \\
& \oplus H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathbf{n}) \otimes X(2, n-l) \oplus H_2^{\alpha_4}(\mathbf{n}) \otimes \mathfrak{J}(1, n+1-l) \\
& \oplus H_2^{\beta_5}(\mathbf{n}) \otimes \mathfrak{J}(1, n+1-l),
\end{aligned}$$

- si $l - k \geq 3$:

$$\begin{aligned}
H_2(\mathbf{n}, \mathbf{n}) \simeq & H_2^{\alpha_4}(\mathbf{n}) \otimes X \oplus H_2^{\alpha_5}(\mathbf{n}) \otimes X \oplus H_2^{\beta_4}(\mathbf{n}) \otimes X(1, l-k) \\
& \oplus H_2^{\beta_5}(\mathbf{n}) \otimes X(1, l-k) \oplus H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathbf{n}) \otimes X(1, l-k) \\
& \oplus H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathbf{n}) \otimes X(1, l-k-1) \oplus H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathbf{n}) \otimes X(1, 1) \\
& \oplus H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathbf{n}) \otimes X(2, l-k) \oplus H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathbf{n}) \otimes X(2, l-k-1) \\
& \oplus H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathbf{n}) \otimes X(2, 1) \oplus H_2^{\alpha_4}(\mathbf{n}) \otimes Y(1, n+1-l) \\
& \oplus H_2^{\alpha_5}(\mathbf{n}) \otimes Y(1, n+1-l) \oplus H_2^{\beta_4}(\mathbf{n}) \otimes Y \\
& \oplus H_2^{\beta_5}(\mathbf{n}) \otimes Y \oplus H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathbf{n}) \otimes Y(1, n+1-l) \\
& \oplus H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathbf{n}) \otimes Y(1, n-l) \oplus H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathbf{n}) \otimes Y(2, n+1-l) \\
& \oplus H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathbf{n}) \otimes X(2, n-l) \oplus H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathbf{n}) \otimes X(l-k, n+1-l) \\
& \oplus H_2^{\alpha_6\beta_6}(\mathbf{n}) \otimes X(l-k, n-l).
\end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de los Corolarios 10.6 y 10.4.

□

Bibliografía

- [1] Alvarez M. A. and Tirao P., *The adjoint homology of a family of 2-step nilradicals*. Journal of Algebra **352**, (2012) 268-289.
- [2] Armstrong G., Cairns G. and Jessup B., *Explicit Betti numbers for a family of nilpotent Lie algebras*, Proceedings AMS. **125**, N.2, (1997), 381-385.
- [3] Bott R., *Homogeneous vector bundles*, Ann. Math. **66**, N.2, (1957), 203-248.
- [4] Cartan H., Eilenberg S., *Homological Algebra*, Princeton University Press, (1956).
- [5] Cagliero L. and Tirao P., *The adjoint homology of the free 2-step nilpotent Lie algebra*, Quart. J. Math. **53**, N.2, (2002), 125-145.
- [6] Cagliero L. and Tirao P., *The cohomology of the cotangent bundle of Heisenberg groups*, Adv. Math. **181** N.2, (2004), 276-307.
- [7] Fulton, R. and Harris, N., *Representation Theory, a first course*, Springer-Verlag
- [8] Greub W., Halperin S., Vanstone R., *Connections, Curvature, and Cohomology* Academic Press (1973) Volume 3.
- [9] Goodman, R. and Wallace, N., *Representations and invariants of the classical groups*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications N. 68.
- [10] Humphreys J., *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Grad. Texts in Math., Vol. 9, Springer-Verlag, New York, 1972.
- [11] Jacobson N., *Lie Algebras*, Wiley(Interscience), New York, 10, 1962.
- [12] Knapp A.W., *Lie Groups. Beyond an Introduction*, Progress in Mathematics Volume 140
- [13] Kostant B., *Lie algebra cohomology and the generalized Borel-Weil theorem*, Ann. Math. (2) **74**, (1961), 329-387.
- [14] Kostant B., *Root Systems for Levi factors and Borel-de Siebenthal Theory*, Symmetry and spaces, 129-152, Progr. Math. **278**. Birkhäuser Boston 2010.
- [15] Magnin L., *Cohomologie adjointe des algèbres de Lie de Heisenberg*, Comm. Alg. **21** (6), (1993), 2101-2129.
- [16] K. Nomizu, *On the cohomology of compact homogeneous spaces of nilpotent Lie groups*, Ann. Math. **59**, (1954), 531-538.
- [17] Santharourbane L., *Cohomology of Heisenberg Lie algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **87**, (1983), 23-28.
- [18] Wang H., *Closed manifolds with homogeneous complex structure*, Amer. J. Math. Proc. Amer. Math. Soc. **76**, (1945), 1-32.
- [19] Weibel C., *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge University Press, (1994).