Representaciones de crecimiento finito de subálgebras de Lie conformes de gc_N que contienen una subálgebra de Virasoro.

Vanesa Meinardi

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía y Física como parte de los requerimientos para la obtención del grado de Doctor en Matemática de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CORDOBA

Septiembre, 2011

Directora: Carina Boyallian

En la presente tesis clasificamos todas las representaciones de crecimiento finito de todas las subálgebras conformes de rango infinito del álgebra conforme general que contienen una subálgebra de Virasoro. Este problema se reduce al estudio de representaciones de crecimiento finito en las correspondientes álgebras de aniquilación, las cuales son ciertas subálgebras del álgebra de Lie de operadores diferenciales matriciales regulares en el círculo (see Ref. [16]). La principal herramienta utilizada aquí son los resultados obtenidos en [4] la clasificación de módulos de peso máximo cuasifinitos sobre la extensión central del álgebra de Lie de operadores diferenciales matriciales regulares en el círculo y algunas de sus importantes subálgebras (Refs.[11, 13]).

In the present work we classify all finite growth representations of all infinite rank conformal subalgebras of general conformal algebra that contain a Virasoro subalgebra. This problem reduces to the study of finite growth representations on the corresponding extended annihilation algebras, which are certain subalgebras of Lie algebra of all regular matrix differential operators on the circle (see Ref. [16]). The main tools used here are the results [4] on the classification of quasifinite highest weight modules over the central extension of Lie algebra of all regular matrix differential operators on the circle and some of its important subalgebras (Refs.[11, 13]).

Palabras claves: representaciones, módulos de peso máximo, cuasifinitas, crecimiento, álgebra conforme general.

AMSCLASSIFICATION: 06B15 Representation theory, 17B10 Representations, algebraic theory (weight)

1 Introducción

Las álgebras W-infinito surgen en varias teorías físicas, tales como la teoría de campos conformes, la teoría cuántica del efecto Hall, etc. El álgebra $W_{1+\infty}$, que es la extensión central del álgebra de Lie $\mathcal{D}$ de operadores diferenciales en el círculo, es la más fundamental entre esas álgebras.

Cuando estudiamos la teoría de representaciones de un álgebra de Lie de este tipo, nos encontramos con la dificultad que aunque ellas admiten una $\mathbb{Z}$-graduación, cada uno de los subespacios graduados sigue siendo de dimensión infinita, y por lo tanto el estudio de los módulos de peso máximo que satisfacen las condiciones de cuasi-finitud, es decir que los subespacios graduados tengan dimensión finita, se convierte en un problema no trivial.

El estudio de las representaciones del álgebra de Lie $W_{1+\infty}$ fue iniciado en [8], donde se da la caracterización de sus representaciones irreducibles cuasifinitas de peso máximo. Estos módulos fueron construidos en términos de representaciones de peso máximo irreducibles del álgebra de Lie de matrices infinitas y además las unitarias fueron descriptas. Sobre la base de este análisis, más estudios fueron hechos en el contexto de la teoría de álgebras de vértices para el álgebra $W_{1+\infty}$ [5, 9] y para su versión matricial en [4]. El caso de la subálgebra ortogonal de $W_{1+\infty}$ fue estudiado en [10]. La subálgebra simpléctica de $W_{1+\infty}$ fue considerado en [2] en relación a la teoría de números y sus módulos de peso máximo cuasifinitos irreducibles fueron clasificados en [3].

En el artículo [1] se desarrolló una teoría de representaciones de peso máximo cuasifinitas de las subálgebras $W_{\infty,p}$ de $W_{1+\infty}$, donde $W_{\infty,p}$ ($p \in \mathbb{C}[x]$) es la extensión del álgebra de Lie $\mathcal{D}p(t\partial_t)$ de operadores diferenciales en el círculo que son un múltiplo de $p(t\partial_t)$. La más importante de esas subálgebras es $W_\infty := W_{\infty,x}$ que es obtenida considerando $p(x) = x$. Sus representaciones cuasifinitas fueron estudiadas en [7]. En este artículo, Kac y Liberati también dan algunos resultados generales sobre la caracterización de representaciones cuasifinitas de algunas álgebras de Lie $\mathbb{Z}$-graduadas.

Todos estos resultados han sido utilizados en esta tesis para clasificar las representaciones de peso máximo cuasifinitas irreducibles de las correspondientes subálgebras en el caso matricial.

El objetivo de este trabajo es clasificar todas las representaciones irreducibles de crecimiento finito de las subálgebras conformes de rango infinito de gc_N que contienen una subálgebra de Virasoro. Dichas subálgebras son (ver Observación 6.5 en Ref. [14]) $\mathrm{gc}_{N,xI}, \mathrm{oc}_N$ y $\mathrm{spc}_{N,xI}$.

A cada álgebra conforme se le asocia un álgebra de Lie llamada álgebra de aniquilación (ver Observación 3.5), de tal modo que estudiar representaciones sobre el álgebra conforme se reduce al estudio de los módulos de las correspondientes álgebras de Lie. En el caso de las subálgebras de Lie conformes a estudiar, las álgebras de aniquilación son ciertas subálgebras de $\mathcal{D}^N$, el álgebra de operadores diferenciales matriciales sobre el círculo.

La subálgebra de aniquilación asociada con el álgebra oc_N será denotada por $\mathcal{D}^N_{\sigma,-}$ y la subálgebra de aniquilación asociada a $\mathrm{gc}_{N,xI}$ por $\mathcal{D}^N_{0,-}$. Además en [14], se definen las subálgebras de Lie conforme de tipo simpléctico de $\mathrm{gc}_{N,xI}$ y sus subálgebras de aniquilación serán denotadas por $\mathcal{D}^N_{\bar{\sigma},p,-}$.

Entonces, la principal herrramienta usada aquí para clasificar las representaciones irreducibles de crecimiento finito son los resultados obtenidos en (Refs. [4], [7], [8] y [11]-[12]) sobre la clasificación de módulos de peso máximo cuasifinitos de la extensión central de $\mathcal{D}^N$ y algunas de sus importantes subálgebras.

El trabajo está organizado como sigue: En la sección 2 desarrollamos un enfoque general sobre la teoría de representaciones de peso máximo cuasifinitas sobre un álgebra de Lie compleja $\mathfrak{g}$ $\mathbb{Z}$-graduada. En la sección 3 hacemos una breve introducción a la teoría general de representaciones sobre álgebras conformes y damos la relación entre estas y las álgebras de Lie asociadas. En la sección 4 describimos las representaciones de peso máximo cuasifinitas irreducibles del álgebra de Lie $\widehat{g\ell}^{[m]}_{\infty}$ y sus subálgebras de Lie clásicas de tipo A, B, C y D. En la sección 5 describimos el álgebra de Lie $\mathcal{D}^N$ y mostramos la relación con el álgebra de Lie $\widehat{g\ell}^{[m]}_{\infty}$. En la sección 6 clasificamos los módulos de peso máximo cuasifinitos irreducibles de la subálgebra de Lie ortogonal $\mathcal{D}^N_{\sigma}$. También los realizamos en término de la teoría de representaciones del álgebra de Lie compleja $\widehat{g\ell}^{[m]}_{\infty}$ y las correspondientes subálgebras de tipo B y D. En la sección 7 clasificamos los módulos de peso máximo cuasifinitos irreducibles de la subálgebra de Lie $\mathcal{D}^N_p$. También los realizamos en términos de la teoría de representaciones del álgebra de Lie compleja $\widehat{g\ell}^{[m]}_{\infty}$. En la sección 8 clasificamos los módulos de peso máximo cuasifinitos irreducibles de la subálgebra de Lie de tipo simpléctico $\mathcal{D}^N_{0,\bar{\sigma}}$. También los realizamos en términos de la teoría de representaciones del álgebra de Lie compleja $\widehat{g\ell}^{[m]}_{\infty}$ y la correspondiente subálgebra de tipo C. Finalmente en la sección 9 utilizamos todos los resultados de las secciones anteriores para clasificar y realizar los módulos irreducibles de crecimiento finito sobre $\mathrm{g}c_N$ y las subálgebras que contienen una subálgebra de Virasoro.

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi familia, a mi mamá y mi papá, que me brindaron la fuerza y el valor necesario para llegar hasta acá. A mi directora, por haber confiado en mi persona, por la paciencia y la calidez humana sobre todas las cosas. A mis profesores por la buena predisposición, la paciencia y la pasión con la que me *enseñaron* el difícil arte de hacer matemáticas. A mis amigos los de hoy y los de siempre por formar parte de mi vida día a día, compartiendo mis tristezas y festejando mis alegrías. A todos los que me *acompañaron* en esta hermosa travesía. Gracias!!

Indice

2 Representaciones cuasifinitas de álgebras de Lie $\mathbb{Z}$-graduadas

En esta sección desarrollamos un enfoque general sobre la teoría de representaciones de peso máximo cuasifinitas sobre un álgebra de Lie compleja $\mathfrak{g}$ $\mathbb{Z}$-graduada.

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie compleja $\mathbb{Z}$-graduada:

$$\mathfrak{g} = \oplus_{j\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}_j, \qquad [\mathfrak{g}_i,\, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j};$$

donde $\mathfrak{g}_i$ no necesariamente es de dimensión finita. Sea $\mathfrak{g}_\pm = \oplus_{j>0}\mathfrak{g}_{\pm j}$. Una subálgebra $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ es llamada *parabólica* si contiene a $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+$ como una suálgebra propia, esto es

$$\mathfrak{p} = \oplus_{j\in\mathbb{Z}}\mathfrak{p}_j, \quad \text{donde } \mathfrak{p}_j = \mathfrak{g}_j \text{ para } j \geq 0 \quad \text{y} \quad \mathfrak{p}_j \neq 0 \text{ para algún } j < 0.$$

Asumiremos que $\mathfrak{g}$ cumple las siguientes propiedades:

(P1) $\mathfrak{g}_0$ es conmutativa,

(P2) si $a \in \mathfrak{g}_{-k}$ para $k > 0$ y $[a,\, \mathfrak{g}_1] = 0$, entonces $a = 0$.

Lema 2.1. *Sea $\mathfrak{p}$ una subálgebra parabólica de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{p}_{-k} \neq 0$ con $k > 0$, entonces $\mathfrak{p}_{-k+1} \neq 0$.*

Demostración. Si $\mathfrak{p}_{-k+1} = 0$, entonces $[\mathfrak{p}_{-k},\, \mathfrak{g}_1] = 0$, i.e. para todo $a \in \mathfrak{p}_{-k}$ $[a, \mathfrak{g}_1] = 0$ y usando (P2), tenemos que $a = 0$. □

Dado $a \in \mathfrak{g}_{-1}$, $a \neq 0$, se define $\mathfrak{p}^a = \oplus_{j\in\mathbb{Z}}\mathfrak{p}^a_j$, donde $\mathfrak{p}^a_j = \mathfrak{g}_j$ para todo $j \geq 0$ y

$$\mathfrak{p}^a_{-1} = \sum[\cdots[[a,\, \mathfrak{g}_0], \mathfrak{g}_0], \cdots], \qquad \mathfrak{p}^a_{-k-1} = [\mathfrak{p}^a_{-1},\, \mathfrak{p}^a_{-k}]. \tag{2.1}$$

Lema 2.2. *a) $\mathfrak{p}^a$ es la subálgebra parabólica minimal que contiene a a.*

b) $\mathfrak{g}_0 := [\mathfrak{p}^a,\, \mathfrak{p}^a] \cap \mathfrak{g}_0 = [a,\, \mathfrak{g}_1]$.

Demostración. Se debe probar que $\mathfrak{p}^a$ es una subálgebra. Primero $[\mathfrak{p}^a_{-k},\, \mathfrak{p}^a_{-l}] \subseteq \mathfrak{p}^a_{-l-k}$ $(k,\, l > 0)$ es probado por inducción en k :

$$\begin{aligned}
[\mathfrak{p}^a_{-k},\, \mathfrak{p}^a_{-l}] &= [[(\mathfrak{p}^a_{-1})^{k-1},\, \mathfrak{p}^a_{-1}], (\mathfrak{p}^a_{-1})^l] \\
&= [[(\mathfrak{p}^a_{-1})^{k-1},\, (\mathfrak{p}^a_{-1})^l], \mathfrak{p}^a_{-1}] + [(\mathfrak{p}^a_{-1})^{k-1}[\mathfrak{p}^a_{-1},\, (\mathfrak{p}^a_{-1})^l]] \\
&\subseteq [(\mathfrak{p}^a_{-1})^{l+k-1},\, \mathfrak{p}^a_{-1}] + [(\mathfrak{p}^a_{-1})^{k-1},\, (\mathfrak{p}^a_{-1})^{l+1}] \\
&\subseteq (\mathfrak{p}^a_{-1})^{k+l}.
\end{aligned}$$

Además $[\mathfrak{p}^a_{-k},\, \mathfrak{g}_m] \subseteq \mathfrak{p}^a_{m-k}\, (m > k)$ ya que por inducción en k tenemos

$$\begin{aligned}
[\mathfrak{p}^a_{-k},\, \mathfrak{g}_m] &= [[(\mathfrak{p}^a_{-1})^{k-1},\, \mathfrak{p}^a_{-1}],\, \mathfrak{g}_m] \\
&= [[(\mathfrak{p}^a_{-1})^{k-1},\, \mathfrak{g}_m],\, \mathfrak{p}^a_{-1}] + [(\mathfrak{p}^a_{-1})^{k-1}, [\mathfrak{p}^a_{-1},\, \mathfrak{g}_m]] \\
&\subseteq [\mathfrak{p}^a_{m-k+1},\, \mathfrak{p}^a_{-1}] + [(\mathfrak{p}^a_{-1})^{k-1},\, \mathfrak{g}_{m-1}]. \\
&\subseteq \mathfrak{p}^a_{m-k}.
\end{aligned}$$

Finalmente es obvia la minimalidad, con lo que hemos probado a).

b) Para algún $k > 1$:

$$\begin{aligned}
[\mathfrak{p}^a_{-k},\, \mathfrak{g}_k] &= [[(\mathfrak{p}^a_{-1})^{k-1},\, \mathfrak{g}_k],\, \mathfrak{p}^a_{-1}] + [(\mathfrak{p}^a_{-1})^{k-1}, [\mathfrak{p}^a_{-1},\, \mathfrak{g}_k]] \\
&\subseteq [\mathfrak{g}_1,\, \mathfrak{p}^a_{-1}] + [(\mathfrak{p}^a_{-1})^{k-1},\, \mathfrak{g}_{k-1}].
\end{aligned}$$

Por lo tanto, por inducción, $\mathfrak{g}^a_0 = [\mathfrak{g}_1,\, \mathfrak{p}^a_{-1}]$. Pero

$$\begin{aligned}
[\mathfrak{g}_1,\, \mathfrak{p}^a_{-1}] &= linearspan\{[\cdots [[a,\, c_1],\, c_2], \cdots], x] \,:\, c_i \in \mathfrak{g}_0,\, x \in \mathfrak{g}_1\} \quad (\text{por (P1)}) \\
&= linearspan\{[a[c_1, \cdots [c_{k-1}, [c_k,\, x] \cdots]]] \,:\, c_i \in \mathfrak{g}_0,\, x \in \mathfrak{g}_1\} \\
&= [a,\, \mathfrak{g}_1].
\end{aligned}$$

con lo que el lema queda probado. □

Definición 2.3. a) Una subálgebra parabólica $\mathfrak{p}$ es llamada *no-degenerada* si $\mathfrak{p}_{-j}$ tiene codimensión finita en $\mathfrak{g}_{-j}$, para todo $j > 0$.

b) Un elemento $a \in \mathfrak{g}_{-1}$ es llamado *no-degenerado* si $\mathfrak{p}^a$ es no degenerada.

Ahora comenzamos con el estudio de la representaciones cuasifinitas sobre $\mathfrak{g}$. Un $\mathfrak{g}$-módulo V es llamado $\mathbb{Z}$*-graduado* si $V = \oplus_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ y $\mathfrak{g}_i V_j \subset V_{i+j}$. Un $\mathfrak{g}$-módulo V, $\mathbb{Z}$-graduado es llamado *cuasifinito* si $\dim V_j < \infty$ para todo j.

Dado $\lambda \in \mathfrak{g}_0^*$, un *módulo de peso máximo* con peso λ es un $\mathfrak{g}$-módulo $V(\mathfrak{g}, \lambda)$, $\mathbb{Z}$-graduado generado por un vector de peso máximo $v_\lambda \in V(\mathfrak{g}, \lambda)_0$ el cual satisface

$$hv_\lambda = \lambda(h)v_\lambda \quad (h \in \mathfrak{g}_0), \qquad \mathfrak{g}_+ v_\lambda = 0. \tag{2.2}$$

Un vector no nulo $v \in V(\mathfrak{g}, \lambda)$ es llamado *singular* si $\mathfrak{g}_+ v = 0$.

El *módulo de Verma* sobre $\mathfrak{g}$ es definido como es usual:

$$M(\mathfrak{g}, \lambda) = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+)} \mathbb{C}_\lambda \tag{2.3}$$

donde $\mathbb{C}_\lambda$ es el $(\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+)$-módulo de dimensión 1 dado por $h \mapsto \lambda(h)$ si $h \in \mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}_+ \mapsto 0$, y la acción de $\mathfrak{g}$ es inducida por la multiplicación a izquierda en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. De aquí en adelante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ denota el álgebra universal envolvente de $\mathfrak{g}$. Todo módulo de peso máximo $V(\mathfrak{g}, \lambda)$ es un módulo cociente de $M(\mathfrak{g}, \lambda)$. El módulo irreducible $L(\mathfrak{g}, \lambda)$ es el cociente de $M(\mathfrak{g}, \lambda)$ por el submódulo graduado propio maximal.

Consideremos una subálgebra parabólica $\mathfrak{p} = \oplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{p}_j$ de $\mathfrak{g}$ y sea $\lambda \in \mathfrak{g}_0^*$ tal que $\lambda|_{\mathfrak{g}_0 \cap [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]} = 0$. Entones el $(\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+)$-módulo $\mathbb{C}_\lambda$ se extiende a un $\mathfrak{p}$-módulo dado por $\mathfrak{p}_j$ actuando por 0 para $j < 0$, y podemos construir un módulo de peso máximo

$$M(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \lambda) = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{p})} \mathbb{C}_\lambda$$

llamado el *módulo de Verma generalizado*. Claramente todos esos módulos de peso máximo son graduados.

También requeriremos la siguiente condición en $\mathfrak{g}$:

(P3) Si $\mathfrak{p}$ es una subálgebra parabólica no-degenerada de $\mathfrak{g}$, entonces existe un elemento no degenerado a tal que $\mathfrak{p}^a \subseteq \mathfrak{p}$.

Teorema 2.4. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie $\mathbb{Z}$-graduada que cumple $(P1), (P2)$ y $(P3)$. Las siguientes condiciones en $\lambda \in \mathfrak{g}_0^*$ son equivalentes:*

(1) $M(\mathfrak{g}; \lambda)$ contiene un vector singular $av_\lambda \in M(\mathfrak{g}; \lambda)_{-1}$,donde $a \in \mathfrak{g}_{-1}$ es no degenerado;

(2) Existe un elemento no degenerado $a \in \mathfrak{g}_{-1}$, tal que $\lambda([\mathfrak{g}_1, a]) = 0$;

(3) $L(\mathfrak{g}; \lambda)$ es cuasifinito;

(4) Existe un elemento no degenerado $a \in \mathfrak{g}_{-1}$, tal que $L(\mathfrak{g}; \lambda)$ es el cociente irreducible del módulo de Verma generalizado $M(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}^a, \lambda)$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (4) Denotamos por av_λ el vector singular, donde $a \in \mathfrak{g}_{-1}$, entonces (4) vale para este a particular, (4) $\Rightarrow$ (3) es inmediata. Finalmente, $L(\mathfrak{g}; \lambda)$ cuasifinito implica $\dim(\mathfrak{g}_{-1} \cdot \mathrm{v}_\lambda) < \infty$ entonces existe $a \in \mathfrak{g}_{-1}$ tal que $av_\lambda = 0$ en $L(\mathfrak{g}; \lambda)$, entonces $0 = \mathfrak{g}_1.(av_\lambda) = a(\mathfrak{g}_1.v_\lambda) + [\mathfrak{g}_1, a]v_\lambda = \lambda([\mathfrak{g}_1, a])v_\lambda$, resultando (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1). $\square$

3 Álgebras de Lie confomes

En esta sección hacemos una breve introducción a la teoría general de representaciones sobre álgebras conformes y damos la relación entre estas y las álgebras de Lie asociadas. Los resultados que exponemos han sido extraídos de [14] y [16].

Un *álgebra asociativa conforme* R es definida como un $\mathbb{C}[\partial]$-módulo munido con un mapa $\mathbb{C}$-lineal

$$R \otimes R \to \mathbb{C}[\lambda\,] \otimes R, \quad a \otimes b \to a_\lambda b,$$

llamado el λ-producto, que satisface los siguientes axiomas $(a, b, c \in R)$,

(A1) $(\partial a)_\lambda b = -\lambda a_\lambda b$, $a_\lambda(\partial b) = (\lambda + \partial)a_\lambda b$,

(A2) $a_\lambda(b_\mu c) = (a_\lambda b)_{\lambda+\mu}c$.

donde $\mathbb{C}[\partial]$ y $\mathbb{C}[\lambda]$ son álgebras de polinomios en ∂ y λ respectivamente y la estructura de $\mathbb{C}[\partial]$-módulo de $\mathbb{C}[\lambda] \otimes R$ está dada por $\partial(p(\lambda) \otimes r) = \frac{d}{d\lambda}p(\lambda) \otimes r +\, p(\lambda) \otimes \partial r$, con $p(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$, $r \in R$.

Un *álgebra de Lie conforme* R es un $\mathbb{C}[\partial\,]$-módulo munido de un mapa $\mathbb{C}$-lineal $R \otimes R \to \mathbb{C}[\lambda\,] \otimes R$, $a \otimes b \to [a_\lambda b]$ llamado el λ-corchete, que cumple los siguientes axiomas $(a, b, c \in R)$,

(C1) $[(\partial a)_\lambda b\,] = -\lambda[a_\lambda b\,]$,

(C2) $[a_\lambda b\,] = -[b_{-\partial-\lambda} a\,]$,

(C3) $[a_\lambda[b_\mu c]\,] = [[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c\,] + [b_\mu[a_\lambda c]\,]$.

Observación 3.1. a) En general, dada un álgebra asociativa conforme R con λ-producto $a_\lambda b$, el λ-corchete definido por

$$[a_\lambda b] := a_\lambda b - b_{-\partial-\lambda} a \tag{3.1}$$

hace de R un álgebra de Lie conforme.

b) Observar que si R es un álgebra de Lie conforme, como $[a_\lambda b] \in \mathbb{C}[\lambda\,] \otimes R$, entonces tiene una expresión dada por $[a_\lambda b] = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \lambda^{(n)} a_{(n)} b$, dónde $a_{(n)} b$ será llamado el n-producto y $\lambda^{(n)} = \lambda^n/n!$ Por lo tanto, un álgebra de Lie conforme R también se puede definir a través de un producto $\mathbb{C}$-bilineal, $a_{(n)} b$ para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, $a, b \in R$, y los correspondientes axiomas equivalentes a $(C1) - (C3)$.

Un *módulo conforme* M sobre un álgebra de Lie conforme R es un $\mathbb{C}[\partial\,]$-módulo munido con un mapa $\mathbb{C}$-lineal $R \otimes M \to \mathbb{C}[\lambda\,] \otimes M$, $a \otimes v \to a^M_\lambda v$, satisfaciendo los siguientes axiomas $(a, b \in R, v \in M)$,

(M1) $(\partial a)^M_\lambda\, v = -\lambda\, a^M_\lambda v$, (M2) $[a_\lambda^M, b_\mu^M]\, v := [a_\lambda b]_{\lambda+\mu}^M\, v = a_\lambda^M (b_\mu^M v) - b_\mu^M (a_\lambda^M v)$.

Un módulo conforme se dice *finito*, si es finitamente generado como $\mathbb{C}[\partial]$-módulo.

Dados dos $\mathbb{C}[\partial]$-módulos M y N, *un mapa lineal conforme* de M a N es un mapa $\mathbb{C}$-lineal $\tau : M \to \mathbb{C}[\lambda] \otimes_{\mathbb{C}} N$, denotado por $v \to \tau_\lambda(v)$, tal que $\tau_\lambda(\partial^M v) = (\lambda + \partial^N)\tau_\lambda(v)$. El espacio vectorial de todos estos mapas será denotado por $\mathrm{Chom}(M,\, N)$, el cual resulta un $\mathbb{C}[\partial]$-módulo con $(\partial\tau)_\lambda(v) := -\lambda\tau_\lambda(v)$. Ahora, definimos $\mathrm{Cend}\, M := \mathrm{Chom}(M,\, M)$, con M un $\mathbb{C}[\partial]$-módulo. Observemos que si M es un $\mathbb{C}[\partial]$-módulo finito, entonces $\mathrm{Cend}\, M$ es una álgebra asociativa conforme con

$$(\tau_\lambda \sigma)_\mu v = \tau_\lambda(\sigma_{\mu-\lambda}\, v), \qquad \tau, \sigma \in \mathrm{Cend}\, M,\ v \in M. \tag{3.2}$$

Observación 3.2. Observar que, por definición, tener un módulo conforme finito V sobre R un álgebra asociativa conforme, es equivalente a tener un homomorfismo de R al algebra asociativa conforme Cend V.

La *afinización* de un álgebra conforme de Lie R es el álgebra conforme

$$\widetilde{R} = R[t,\, t^{-1}]$$

con $\widetilde{\partial} = \partial \otimes 1 + 1 \otimes \partial_t$ y n-productos definidos por $(a, b \in R,\, f, g \in \mathbb{C}[t, t^{-1}], n \in \mathbb{Z}_+)$

$$(a \otimes f)_{(n)}(b \otimes g) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} a_{(n+j)} b \otimes ((\partial^t f) g). \tag{3.3}$$

Poniendo $a_n := a \otimes t^n$, la fórmula (3.3) nos da $(m, n \in \mathbb{Z})$

$$(a_m)_{(k)}(b_m) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \frac{m!}{(m-j)!\, j!}\, (a_{(k+j)} b)_{m+n-j}. \tag{3.4}$$

Considerando

$$\mathrm{Lie}\, R = \widetilde{R}/\widetilde{\partial}\widetilde{R}$$

con el corchete introducido por el 0-producto en $\widetilde{R}$, obtenemos el *álgebra de Lie* asociada al álgebra conforme R.

Observación 3.3. Es claro de (3.4) que $-1 \otimes \partial_t$ es una derivación del 0-producto del álgebra conforme $\widetilde{R}$. Como este operador conmuta con $\widetilde{\partial}$, este induce una derivación T del álgebra de Lie, Lie R dada por la fórmula

$$T(a_n) = -n a_{n-1}. \tag{3.5}$$

De la definición del corchete de Lie en $\widetilde{R}$ se sigue que

$$(\operatorname{Lie} R)_- = \mathbb{C} - span\{a_n : a \in R,\, n \in \mathbb{Z}_+\} \tag{3.6}$$

es una subálgebra del álgebra de Lie, Lie R. Esta es llamada el *álgebra de aniquilación.* Es claro de 3.5 que $(\operatorname{Lie} R)_-$ es T-invariante, por lo tanto podemos considerar la suma semi-directa $(\operatorname{Lie} R)^- = \mathbb{C}T + (\operatorname{Lie} R)_-$, llamada el *álgebra de aniquilación extendida.*

Comparando las fórmulas (3.3) y (3.5) arribamos al siguiente Teorema importante (cf. [16]):

Teorema 3.4. *Un módulo conforme M sobre un álgebra conforme R es lo mismo que un módulo sobre el álgebra de aniquilación extendida.*

Ahora, consideremos V un $\mathbb{C}[\partial]$-módulo de dimensión finita, es decir finitamente generado como $\mathbb{C}[\partial]$-módulo. El λ-producto (3.2) en $\operatorname{Cend} V$, hace de esta un álgebra asociativa conforme. Sea $\operatorname{gc} V$ el álgebra de Lie conforme asociada munida con el λ-corchete dado por la fórmula (3.1). A esta álgebra la llamaremos *el álgebra conforme general.*

Para todo entero positivo N, definimos $\operatorname{gc}_N := \operatorname{gc} \mathbb{C}[\partial]^N = \operatorname{Mat}_N \mathbb{C}[\partial, x]$ y el λ-corchete (3.1) está dado por

$$[A(\partial,x)_\lambda B(\partial,x)] = A(-\lambda, x+\lambda+\partial)B(\lambda+\partial,x) - B(\lambda+\partial,-\lambda+x)A(-\lambda,x). \tag{3.7}$$

Ejemplo 3.5. Observemos que $\operatorname{Cend}_N := \operatorname{Cend} \mathbb{C}[\partial]^N$, puede ser vista como el álgebra asociativa conforme correspondiente al álgebra asociativa $\mathcal{D}^N_{as}$ de todos los operadores matriciales regulares en el $\mathbb{C}^*$ (en la Sección 5 es dada explícitamente la definición). Consideremos el álgebra conforme correspondiente a $\mathcal{D}^N_{as}$, es decir,

$$\operatorname{Conf}(\mathcal{D}^N_{as}) := \oplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathbb{C}[\partial] J^n \otimes \operatorname{Mat}_N \mathbb{C}$$

con λ-producto dado por

$$J^k_{A\,\lambda} J^l_B = \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{(k-j)!\,j!}\,(\lambda+\partial)^j\, J^{k+l-j}_{AB},$$

donde $J^k_A = J^k \otimes A := \sum_{n\in\mathbb{Z}} t^n(-\frac{d}{dt})^k z^{-n-1} \otimes A$, con $A \in \operatorname{Mat}_N \mathbb{C}$. De aquí en adelante entenderemos por $\operatorname{Mat}_N \mathbb{C}$ las matrices $N \times N$ con entradas en $\mathbb{C}$.

Dado $\alpha \in \mathbb{C}$, la representación natural de $\mathcal{D}_{as}^N$ en $\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathbb{C}^N[t, t^{-1}]$ nos da una estructura de módulo conforme de $\mathbb{C}[\partial]^N$ sobre $\mathrm{Conf}(\mathcal{D}_{as}^N)$, con λ-acción

$$J^m_{A\,\lambda} v = (\lambda + \partial + \alpha)^m Av, \qquad m \in \mathbb{Z}_+,\, v \in \mathbb{C}^N. \tag{3.8}$$

Ahora, usando la Observación 3.2, obtenemos un homomorfismo natural de algebras asociativas conformes de $\mathrm{Conf}(\mathcal{D}_{as}^N)$ a Cend_N, el cual resulta un isomorfismo.

Observación 3.6. Cabe destacar que la noción del funtor Conf no ha sido introducida, para ello remitirse a [16], capítulo 2.

Tenemos por Teorema 4.5 en [14], que toda anti-involución en Cend_N es, salvo conjugación de la siguiente forma

$$\sigma_*(A(\lambda, x)) = A^*(\partial, -\partial - x) \tag{3.9}$$

dónde $*$ es la adjunta con respecto a una forma bilineal simétrica o anti-simétrica no degenerada sobre $\mathbb{C}$. Esas anti-involuciones nos dan dos importantes subálgebras de gc_N, el conjunto de $-\sigma_*$ puntos fijos es el *álgebra conforme ortogonal* oc_N (respectivamente *el álgebra conforme simpléctica* spc_N), en el caso simétrico (respectivamente anti-simétrico). Observar además que $\mathrm{gc}_{N,P} := \mathrm{gc}_N p(x)$ es una subálgebra de Lie conforme para algún $p \in \mathrm{Mat}_N\mathbb{C}[x]$ y $\mathrm{spc}_{N,p}$ denotará la subálgebra de tipo simpléctico de $\mathrm{gc}_{N,p}$.

Como se mencionó en la introducción queremos clasificar las representaciones de crecimiento finito de gc_N y sus subálgebras conforme de rango infinito que contiene una subálgebra de Virasoro. Por lo tanto, recordemos que el *álgebra conforme de Virasoro* es definida como el $\mathbb{C}[\partial]$-módulo libre de rango 1 generado por un elemento L, con λ-corchete definido por

$$[L_\lambda L] = (2\lambda + \partial)L,$$

y extendido a $\mathbb{C}[\partial]L$ usando sesquilinealidad, propiedad (C1)(ver [16] página 34) . Observemos que todas las subálgebras de Virasoro de gc_N son generadas por

$$L = (x + \alpha\partial)I,\ \alpha \in \mathbb{C};\ I \in \mathrm{Mat}_N(\mathbb{C}),\ \text{la matriz identidad.}$$

La lista completa de subálgebras propias de rango infinito de gc_N que contienen una subálgebra de Virasoro es (ver Observación 6.5 en Ref. [14])

$$\begin{gathered} \mathrm{gc}_{N,x} = xI\,\mathrm{Mat}_N\mathbb{C}[\partial, x], \\ \mathrm{oc}_N = \{A(\partial, x) - A(\partial, -\partial - x) :\ A(\partial, x) \in \mathrm{Mat}_N\mathbb{C}[\partial, x]\}, \\ \mathrm{spc}_{N,xI} = \{xI[A(\partial, x) + A(\partial, -\partial - x)] :\ A(\partial, x) \in \mathrm{Mat}_N\mathbb{C}[\partial, x]\}, \end{gathered}$$

donde el elemento de Virasoro es $(x+\alpha\partial)I$, con $\alpha = 0, \frac{1}{2}, 0$, respectivamente.

4 El álgebra de Lie $\widehat{g\ell}_{\infty}^{[m]}$ y sus subálgebras clásicas

En esta sección describimos las representaciones de peso máximo cuasifinitas irreducibles del álgebra de Lie $\widehat{g\ell}_{\infty}^{[m]}$ y sus subálgebras de Lie clásicas de tipo A, B, C y D.

4.1 El álgebra de Lie $\widehat{g\ell}_{\infty}^{[m]}$.

Denotamos por $R_m = \mathbb{C}[u]/(u^{m+1})$, el álgebra cociente del álgebra de polinomios $\mathbb{C}[u]$ por el ideal generado por u^{m+1} ($m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$). Sea $\mathbf{1}$ el elemento identidad en R_m. Denotamos por $g\ell_{\infty}^{[m]} = \{(a_{i,j}(u))_{i,j\in\mathbb{Z}} : a_{i,j} = 0 \text{ si } \mid i-j \mid \gg 0\}$, el álgebra de Lie compleja de todas las matrices infinitas $(a_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ con un número finito de diagonales no nulas con entradas en R_m. Denotamos por $E_{i,j}$ la matriz infinita con 1 en la entrada (i,j) y 0 en el resto de las entradas. Existe un homorfismo natural ν de $g\ell_{\infty}^{[m]}$ dado por

$$\nu(E_{i,j}) = E_{i+1,j+1}. \tag{4.1}$$

Llamaremos la $\mathbb{Z}$-graduación principal de $\widehat{g\ell}_{\infty}^{[m]} = \oplus_{q\in\mathbb{Z}} \left(g\ell_{\infty}^{[m]}\right)_q$, la dada por los pesos, donde el *peso* de la matriz $E_{i,j}$ está dado por $j-i$. Denotamos por $\widehat{g\ell}_{\infty}^{[m]} = g\ell_{\infty}^{[m]} \oplus R_m$ la extensión central de $g\ell_{\infty}^{[m]}$ dada por el siguiente 2-cociclo con valores en R_m:

$$C(A,B) = \mathrm{Tr}([J,A]\,B), \tag{4.2}$$

donde $J = \sum_{i\leq 0} E_{ii}$. La $\mathbb{Z}$-graduación del álgebra de Lie $g\ell_{\infty}^{[m]}$se extiende a $\widehat{g\ell}_{\infty}^{[m]}$ por poner el peso de R_m igual a 0. En particular tenemos la *descomposición triangular*

$$\widehat{g\ell}_{\infty}^{[m]} = \left(\widehat{g\ell}_{\infty}^{[m]}\right)_- \oplus \left(\widehat{g\ell}_{\infty}^{[m]}\right)_0 \oplus \left(\widehat{g\ell}_{\infty}^{[m]}\right)_+, \tag{4.3}$$

donde

$$\left(\widehat{g\ell}_{\infty}^{[m]}\right)_\pm = \bigoplus_{j\in\mathbb{N}} \left(\widehat{g\ell}_{\infty}^{[m]}\right)_{\pm j} \qquad \text{y} \qquad \left(\widehat{g\ell}_{\infty}^{[m]}\right)_0 = \left(g\ell_{\infty}^{[m]}\right)_0 \oplus R_m.$$

Dado $\lambda \in \left(\widehat{g\ell}_\infty^{[m]}\right)_0^*$, denotamos por

$$\begin{aligned} c_i &= \lambda(u^i), \\ {}^a\lambda_j^{(i)} &= \lambda(u^i\, E_{j,j}), \\ {}^a h_j^{(i)} &= {}^a\lambda_j^{(i)} - {}^a\lambda_{j+1}^{(i)} + \delta_{j,0}\, c_i, \end{aligned} \tag{4.4}$$

donde $j \in \mathbb{Z}$ e $i = 0, \ldots, m$. Sea $L\left(\widehat{g\ell}_\infty^{[m]}, \lambda\right)$ el $\widehat{g\ell}_\infty^{[m]}$-módulo irreducible de peso máximo con peso máximo λ. Los ${}^a\lambda_j^{(i)}$ son llamados las *etiquetas* y c_i son las *cargas centrales* de $L\left(\widehat{g\ell}_\infty^{[m]}, \lambda\right)$.

4.2 El álgebra de Lie $b_\infty^{[m]}$.

Consideremos el espacio vectorial $R_m[t, t^{-1}]$, y tomemos la R_m-base $v_i = t^{-i}$, $i \in \mathbb{Z}$. El álgebra de Lie $g\ell_\infty^{[m]}$ actúa en $R_m[t, t^{-1}]$ vía la fórmula usual

$$E_{i,j} v_k = \delta_{j,k} v_i.$$

Ahora consideremos la siguiente $\mathbb{C}$-forma bilineal a valores en $R_m[t, t^{-1}]$:

$$B(u^{\widetilde{m}} v_i, u^n v_j) = u^{\widetilde{m}} (-u)^n \delta_{i,-j}\,. \tag{4.5}$$

Denotamos por $\bar{b}_\infty^{[m]}$ la subálgebra de Lie de $g\ell_\infty^{[m]}$ que preserva la forma bilineal $B(\,,\,)$. Tenemos

$$\bar{b}_\infty^{[m]} = \left\{ (a_{ij}(u))_{i,j\in\mathbb{Z}} \in g\ell_\infty^{[m]} \;:\; a_{ij}(u) = -a_{-j,-i}(-u) \right\}.$$

Denotamos por $b_\infty^{[m]} = \bar{b}_\infty^{[m]} \oplus R_m$ la extensión central de $\bar{b}_\infty^{[m]}$ dado por la restricción del 2-cociclo (2.2) definido en $g\ell_\infty^{[m]}$. Esta subálgebra hereda de $\widehat{g\ell}_\infty^{[m]}$ la $\mathbb{Z}$-graduación principal y la descomposición triangular, (ver [10] y [6], capítulo 7 para notaciones):

$$b_\infty^{[m]} = \oplus_{j\in\mathbb{Z}} \left(b_\infty^{[m]}\right)_j \qquad b_\infty^{[m]} = \left(b_\infty^{[m]}\right)_+ \oplus \left(b_\infty^{[m]}\right)_0 \oplus \left(b_\infty^{[m]}\right)_- .$$

En particular cuando $m = 0$, tenemos la subalgebra de Lie usual de $\widehat{g\ell}_\infty$, denotada por b_∞. Dado $\lambda \in \left(b_\infty^{[m]}\right)_0^*$, denotamos por $L\left(b_\infty^{[m]}; \lambda\right)$ el módulo irreducible de peso máximo sobre $b_\infty^{[m]}$ con peso máximo λ.

Para cada $\lambda \in \left(b_\infty^{[m]}\right)_0^*$ tenemos,

$$\begin{aligned}
c_i &= \lambda\left(u^i\right), \\
{}^b\lambda_0^{(j)} &= \lambda\left(2u^j\, E_{0\,0}\right) \qquad (j\; impar), \\
{}^b\lambda_i^{(j)} &= \lambda\left(u^j\, E_{i\,i} - (-u)^j\, E_{-i\,-i}\right), \\
{}^bH_i^{(j)} &= u^j\, E_{i\,i} - u^j\, E_{i+1\,i+1} + (-u)^j\, E_{-i-1\,-i-1} - (-u)^j\, E_{-i\,-i}, \\
{}^bH_0^{(j)} &= 2\left(u^j\, E_{0\,0} - u^j\, E_{-1\,-1} - u^j\, E_{1\,1}\right) + u^j \qquad (j\; par), \\
{}^bH_0^{(j)} &= \left(2u^j\, E_{0\,0} - u^j\, E_{-1\,-1} - u^j\, E_{1\,1}\right) + u^j \qquad (j\; impar), \\
{}^bh_i^{(j)} &= \lambda\left({}^bH_i^{(j)}\right) = {}^b\lambda_i^{(j)} - {}^b\lambda_{i+1}^{(j)}, \\
{}^bh_0^{(j)} &= \lambda\left({}^bH_0^{(j)}\right) = -2\;{}^b\lambda_1^{(j)} + 2c_j \qquad (j\; par), \\
{}^bh_0^{(j)} &= \lambda\left({}^bH_0^{(j)}\right) = {}^b\lambda_0^{(j)} - {}^b\lambda_1^{(j)} + c_j \qquad (j\; impar),
\end{aligned} \tag{4.6}$$

donde $i \in \mathbb{N}$ y $j = 0, \ldots, m$. Los ${}^b\lambda_j^{(i)}$ son llamados *etiquetas* y c_i son las *cargas centrales* de $L\left(b_\infty^{[m]}, \lambda\right)$.

4.3 El álgebra de Lie $c_\infty^{[m]}$.

Ahora consideremos la $\mathbb{C}$-forma bilineal en $R_m[t, t^{-1}]$ dada por

$$C(u^{\widetilde{m}} v_i, u^n v_j) = u^{\widetilde{m}}(-u^n)(-1)^i \delta_{i,1-j}\,. \tag{4.7}$$

Denotamos por $\bar{c}_\infty^{[m]}$ la subálgebra de Lie de $g\ell_\infty^{[m]}$ que preserva la forma bilineal $C(\ ,\ )$. Tenemos

$$\bar{c}_\infty^{[m]} = \left\{(a_{ij}(u))_{i,j\in\mathbb{Z}} \in g\ell_\infty^{[m]} \mid a_{ij}(u) = (-1)^{i+j+1} a_{1-j\,1-i}(-u)\right\}.$$

Denotamos por $c_\infty^{[m]} = \bar{c}_\infty^{[m]} \oplus R_m$ la extensión central de $\bar{c}_\infty^{[m]}$ dado por la restricción del 2-cociclo (2.2), definido en $g\ell_\infty^{[m]}$. Esta subálgebra hereda de $\widehat{g\ell}_\infty^{[m]}$ la $\mathbb{Z}$-graduación principal y la descomposición triangular, (ver [10] y [6] por notaciones):

$$c_\infty^{[m]} = \oplus_{j\in\mathbb{Z}}(c_\infty^{[m]})_j \qquad c_\infty^{[m]} = (c_\infty^{[m]})_+ \oplus (c_\infty^{[m]})_0 \oplus (c_\infty^{[m]})_-\,.$$

En particular cuando $m = 0$, tenemos la subálgebra de Lie usual de $\widehat{g\ell}_\infty$, denotada por c_∞.

Dado $\lambda \in (c_\infty^{[m]})_0^*$, denotamos por $L(c_\infty^{[m]};\lambda)$ el módulo irreducible de peso máximo sobre $c_\infty^{[m]}$ con peso máximo λ. Para cada $\lambda \in (c_\infty^{[m]})_0^*$, tenemos:

$$\begin{aligned} c_i &= \lambda(u^i), \\ {}^c\lambda_j^{(i)} &= \lambda(u^i\, E_{j,j} - (-u)^i\, E_{1-j,1-j}), \\ {}^c h_j^{(i)} &= {}^c\lambda_j^{(i)} - {}^c\lambda_{1+j}^{(i)}, \\ {}^c h_0^{(i)} &= {}^c\lambda_1^{(i)} + c_i \quad (i \text{ par}), \end{aligned} \tag{4.8}$$

donde $j \in \mathbb{N}$ e $i = 0, \cdots, m$. Los ${}^c\lambda_j^{(i)}$ son llamados las *etiquetas* y c_i son las *cargas centrales* de $L(c_\infty^{[m]}, \lambda)$.

4.4 El álgebra de Lie $d_\infty^{[m]}$.

Finalmente consideraremos la siguiente $\mathbb{C}$-forma bilineal en $R_m[t, t^{-1}]$:

$$D(u^{\widetilde{m}} v_i, u^n v_j) = u^{\widetilde{m}} (-u)^n \delta_{i,1-j}\,. \tag{4.9}$$

Denotamos por $\bar{d}_\infty^{[m]}$ la subálgebra de Lie de $g\ell_\infty^{[m]}$ que preserva la forma bilineal $D(\,,\,)$. Tenemos

$$\bar{d}_\infty^{[m]} = \left\{ (a_{ij}(u))_{i,j\in\mathbb{Z}} \in g\ell_\infty^{[m]} \;:\; a_{ij}(u) = -a_{1-j\,1-i}(-u) \right\}.$$

Denotamos por $d_\infty^{[m]} = \bar{d}_\infty^{[m]} \oplus R_m$ la extensión central de $\bar{d}_\infty^{[m]}$ dada por la restricción del 2-cociclo (2.2) definido en $g\ell_\infty^{[m]}$. Esta subálgebra hereda de $\widehat{g\ell}_\infty^{[m]}$ la $\mathbb{Z}$-graduación principal y la descomposición triangular, (ver [10] y [6] por notaciones):

$$d_\infty^{[m]} = \oplus_{j\in\mathbb{Z}} \left(d_\infty^{[m]}\right)_j \qquad d_\infty^{[m]} = \left(d_\infty^{[m]}\right)_+ \oplus \left(d_\infty^{[m]}\right)_0 \oplus \left(d_\infty^{[m]}\right)_- .$$

En particular cuándo $m = 0$, tenemos la subálgebra de Lie usual de $\widehat{g\ell}_\infty$, denotada por d_∞.

Dado $\lambda \in \left(d_\infty^{[m]}\right)_0^*$, denotamos por $L\left(d_\infty^{[m]};\lambda\right)$ el módulo de peso máximo irreducible sobre $d_\infty^{[m]}$ con peso máximo λ. Para cada $\lambda \in \left(d_\infty^{[m]}\right)_0^*$, tenemos,

$$\begin{aligned}
c_i &= \lambda\left(u^i\right), \\
{}^d\lambda_i^{(j)} &= \lambda\left(u^j\, E_{i,\,i} - (-u)^j\, E_{1-i,\,1-i}\right), \\
{}^dH_i^{(j)} &= u^j\, E_{i,\,i} - u^j\, E_{i+1,\,i+1} + (-u)^j\, E_{-i,\,-i} - (-u)^j\, E_{1-i,\,1-i}, \\
{}^dH_0^{(j)} &= \left((-u)^j\, E_{0,\,0} + (-u)^j\, E_{-1,\,-1} - u^j\, E_{2,\,2} - u^j\, E_{2,\,2} - u^j\, E_{1,\,1}\right) + 2u^j, \\
{}^dh_i^{(j)} &= \lambda\left({}^dH_i^{(j)}\right) = {}^d\lambda_i^{(j)} - {}^d\lambda_{i+1}^{(j)}, \\
{}^dh_0^{(j)} &= \lambda\left({}^dH_0^{(j)}\right) = -\,{}^d\lambda_1^{(j)} - {}^d\lambda_2^{(j)} + 2c_j,
\end{aligned} \tag{4.10}$$

donde $i \in \mathbb{N}$ y $j = 0, \ldots, m$. Los ${}^d\lambda_j^{(i)}$ son llamados *etiquetas* y c_i son las *cargas centrales* de $L\left(d_\infty^{[m]}, \lambda\right)$.

5 El álgebra de Lie $\widehat{\mathcal{D}}^N$

En esta sección describimos el álgebra de Lie $\mathcal{D}^N$ y mostramos la relación con el álgebra de Lie $\widehat{g\ell}_\infty^{[m]}$.

Sea N un entero positivo. Denotamos por $\mathcal{D}_{as}^N$ el álgebra asociativa de operadores diferenciales matriciales regulares en el círculo de la forma

$$E = e_k(t)\partial_t^k + e_{k-1}(t)\partial_t^{k-1} + \ldots + e_0(t)$$

donde

$$e_i(t) \in \mathrm{Mat}_N\mathbb{C}[t, t^{-1}]$$

y denotamos por $\mathcal{D}^N$ la correspondiente álgebra de Lie. De aquí en adelante, $\mathrm{Mat}_N R$ es el álgebra asociativa de todas las matrices $N \times N$ sobre un álgebra R. Es más conveniente escribir los operadores diferenciales como combinaciones lineales de elementos de la forma $z^k f(D)A$, donde f es un polinomio en una variable, $D = z\partial_z$, $k \in \mathbb{Z}, A \in \mathrm{Mat}_N\mathbb{C}$. El producto en $\mathcal{D}_{as}^N$ está dado por

$$(z^r f(D)A)(z^s g(D)B) = z^{r+s} f(D+s)g(D)AB. \tag{5.1}$$

Fijamos una *funcional traza* en $\mathrm{Mat}_N\mathbb{C}[w]$, la cual es un mapa lineal $T : \mathrm{Mat}_N\mathbb{C}[w] \to \mathbb{C}$, tal que $T(ab) = T(ba)$. Entonces tenemos el siguiente

2-cociclo en $\mathcal{D}^N$, donde $f(w), g(w) \in \mathrm{Mat}_N\mathbb{C}[w]$ (cf. [4])

$$\psi_T(z^r f(D)A, z^s g(D)B) = \begin{cases} T\left(\sum_{-r\le m\le -1} f(w+m)g(w+m+r)\right) & \text{si } r=-s>0 \\ 0 & \text{si } \quad r+s\neq 0. \end{cases} \tag{5.2}$$

En particular, si $T : \mathrm{Mat}_N\mathbb{C}[w] \to \mathbb{C}$ es la traza usual compuesta con el mapa evaluación en $w = 0$, obtenemos el siguiente 2-cociclo en el álgebra de Lie $\mathcal{D}^N$,donde $r, s \in \mathbb{Z},\ f, g \in \mathbb{C}[w],\ A, B \in \mathrm{Mat}_N\mathbb{C}$:

$$\psi(z^r f(D)A, z^s g(D)B) = \begin{cases} \mathrm{tr}(AB) \sum_{-r\le m\le -1} f(m)g(m+r) & \text{si } r=-s>0 \\ 0 & \text{si } \quad r+s\neq 0. \end{cases} \tag{5.3}$$

Sea

$$\widehat{\mathcal{D}}^N = \mathcal{D}^N + \mathbb{C}C$$

la extensión central de $\mathcal{D}^N$ por un centro de dimensión uno $\mathbb{C}C$ correspondiente al 2-cociclo (5.3). Los elementos $z^k D^n e_{i\,j}$, ($k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $i, j = 1, \cdots, N$) forman una base de $\mathcal{D}^N$. De aquí en adelante $e_{i\,j}$ es la base canónica de $\mathrm{Mat}_N\mathbb{C}$, es decir la matriz $N \times N$ con 1 en la entrada (i, j) y 0 en caso contrario.

Se define el *peso* en $\widehat{\mathcal{D}}^N$ que denotamos por wt de la siguiente manera:

$$\mathrm{wt}\, z^k f(D)\, e_{i\,j} = kN + i - j, \quad \mathrm{wt}\, C = 0. \tag{5.4}$$

Esto nos da la *$\mathbb{Z}$-graduación principal* de $\widehat{\mathcal{D}}^N$:

$$\widehat{\mathcal{D}}^N = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} (\widehat{\mathcal{D}}^N)_j. \tag{5.5}$$

Sea $\mathcal{O}$ el álgebra de todas las funciones holomorfas en $\mathbb{C}$ con la topología de convergencia uniforme sobre conjuntos compactos. Consideraremos el espacio vectorial $\mathcal{D}_{as}^{N\mathcal{O}}$ generado por los operadores diferenciales matriciales (de orden infinito) de la forma $z^k f(D)A$ donde $f \in \mathcal{O}$. El producto en $\mathcal{D}_{as}$ se extiende a $\mathcal{D}_{as}^{N\mathcal{O}}$. La graduación principal se extiende también por (5.4). Denotamos por $\mathcal{D}^{N\mathcal{O}}$ la correspondiente álgebra de Lie. Entonces el cociclo ψ se extiende a un 2-cociclo en $\mathcal{D}^{N\mathcal{O}}$ por la fórmula (5.3). Sea $\widehat{D}^{N\mathcal{O}} = \mathcal{D}^{N\mathcal{O}} \oplus \mathbb{C}C$ la extensión central correspondiente, con la graduación definida como antes.

Observación 5.1. Observemos que para elementos $z^r e^{\lambda D} A$, $(r \in \mathbb{Z}, \lambda \in \mathbb{C}, A \in \mathrm{Mat}_N \mathbb{C})$, el conmutador en $\widehat{\mathcal{D}}^{N\mathcal{O}}$ está dado por:

$$[z^r e^{\lambda D} A,\, z^s e^{\mu D} B] = z^{r+s} e^{(\lambda+\mu)D}(e^{\lambda s} AB - e^{\mu r} BA) + \delta_{r,-s}(\mathrm{tr} AB)\frac{e^{-\lambda r} - e^{\mu s}}{1 - e^{\lambda+\mu}} C.$$

Consideremos las siguientes trazas en $\mathrm{Mat}_N \mathcal{O}$:

$$\mathrm{tr}_{a,b} f(w) = tr(f(a) - f(b)), \quad \text{donde}\, f \in \mathrm{Mat}_N \mathcal{O}, \quad a, b \in \mathbb{C},$$

$$tr_s^{[m]} f(w) = \frac{d^m}{dw^m} \mid_{w=s} \mathrm{tr}(f(w)), \quad \text{donde}\, s \in \mathbb{C}, \quad m \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

y denotamos los correspondientes cociclos por $\psi_{a,b} := \psi_{\mathrm{tr}_{a,b}}$ y $\psi_s^{(m)} := \psi_{\mathrm{tr}_s^{[m]}}$ (ver (5.2)). En $\mathcal{D}^{N\mathcal{O}}$ esos cociclos no son triviales. Sin embargo, cuando los restringimos a $\mathcal{D}^N$ ellos resultan triviales [ver Ref. [8] 1.3(d)]. Tenemos las siguientes fórmulas explícitas para esos cociclos triviales en $\mathcal{D}^N$:

$$\psi_{a,b}(z^r f(D)A, z^s g(D)B) = \delta_{r,-s} \Lambda_{a,b}([z^r f(D)A, z^s g(D)B]), \tag{5.6}$$

$$\psi_s^{(m)}(z^r f(D)A, z^s g(D)B) = \delta_{r,-s} \Lambda_s^(m)([z^r f(D)A, z^s g(D)B]), \tag{5.7}$$

donde $\Lambda_{a,b}$ y $\Lambda_s^{[m]}$ son las funciones lineales en $\mathrm{Mat}_N \mathbb{C}[w]$ definidas por las siguientes series generatrices en x :

$$\Lambda_{a,b}(e^{xw} A) = -\frac{e^{ax} - e^{bx}}{e^x - 1} \mathrm{tr} A, \quad \Lambda_s^{[m]}(e^{xw} A) = -\frac{x^m e^{sx}}{e^x - 1} \mathrm{tr} A. \tag{5.8}$$

Esta observación la utilizaremos para construir la extensión central del morfismo $\varphi_s^{[m]}$ de $\widehat{\mathcal{D}}_\sigma^N$ a $\widehat{g\ell}_\infty^{[m]}$ que lo introduciremos en la próxima sección en (5.11).

5.1 Conexión entre $\widehat{\mathcal{D}}^N$ y $\widehat{g\ell}_\infty^{[m]}$

En esta parte discutiremos la relación entre $\widehat{\mathcal{D}}^N$ y el álgebra de Lie de matrices infinitas con un número finito de diagonales no nulas sobre el álgebra de polinomios truncados.

Sea R un álgebra asociativa sobre $\mathbb{C}$ y denotamos por R^∞ un R-módulo libre con una base fija $(v_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ y definamos los operadores $E_{i,j}$ en R^∞ por $E_{i,j} v_k = \delta_{j,k} v_i$. Sea $\widetilde{M}(\infty, R)$ la subálgebra asociativa de $\mathrm{End}\, R^\infty$ que consiste de todos los operadores $\sum_{i,j\in\mathbb{Z}} a_{ij} E_{i,j}$, donde $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ tiene un número finito de diagonales no nulas. Recordemos que $\widetilde{M}(\infty, R)$ es una álgebra $\mathbb{Z}$-graduada con la graduación principal definida por wt $E_{i,j} = j - i$. Sean $N \in \mathbb{N}$ y e_i con $i = 1, \cdots N$ la base canónica de R^N, consideremos $\varphi : R^N[z, z^{-1}] \to R[z, z^{-1}]$ el isomorfismo dado por

$$e_i z^j \to z^{jN+i-1} \tag{5.9}$$

donde $R^N[z,\, z^{-1}] := R^N \otimes \mathbb{C}[z,\, z^{-1}]$. Fijamos $s \in \mathbb{C}$ y un elemento nilpotente $t \in R$. Consideraremos $R[z, z^{-1}]z^s$ cómo un R-módulo libre con base $v_j = z^{-j+s}$, $j \in \mathbb{Z}$. Usando el isomorfismo φ asociamos a un elemento $z^k f(D)e_{i,j} \in \mathcal{D}^N_{as}$ el operador $z^k f(D+t)e_{i,j}$ en $R[z, z^{-1}]z^s$.

Más precisamente $(z^k f(D)e_{i,j})v_{lN-m+1} = (z^k f(D+t)e_{i,j})(e_m z^{-l+s}) = \delta_{jm} f(-l+s+t)e_i z^{k-l+s} = \delta_{jm} f(-l+s+t)v_{(l-k)N-i+1}$. Por lo tanto obtenemos un morfismo $\varphi_{s,t} : \mathcal{D}^N_{as} \to \widetilde{M}(\infty, R)$ de álgebras asociativas sobre $\mathbb{C}$, el cuál es compatible con la graduación principal. Explicitamente,

$$\varphi_{s,t}(z^k f(D)e_{i,j}) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} f(-l+s+t)E_{(l-k)N-i+1,\, lN-j+1}, \tag{5.10}$$

y $\varphi_{s,t}$ se extiende a un homomorfismo $\varphi_{s,t} : \mathcal{D}^{N\mathcal{O}}_{as} \to \widetilde{M}(\infty, R)$. Ahora consideremos el álgebra de polinomios truncados $R_m = \mathbb{C}[t]/(t^{m+1})$, donde $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y sea $\widetilde{M}^{[m]}_\infty = \widetilde{M}(\infty, R_m)$. El homomorfismo $\varphi_{s,t} : \mathcal{D}^{N\mathcal{O}}_{as} \to \widetilde{M}^{[m]}_\infty$ dado por (5.10) lo denotaremos por $\varphi^{[m]}_s$, se sigue de la fórmula de Taylor que

$$\varphi^{[m]}_s(z^k f(D)e_{i,j}) = \sum_{r=0}^{m} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \frac{f^{(r)}(-l+s)}{r!} t^r E_{(l-k)N-i+1,\, lN-j+1}. \tag{5.11}$$

Observemos que el homomorfismo de álgebras asociativas $\varphi^{[m]}_s$ define un homomorfismo de álgebras de Lie que denotaremos con la misma letra, es decir $\varphi^{[m]}_s : \mathcal{D}^N \to g\ell^{[m]}_\infty$.

6 La subálgebra de Lie $\mathcal{D}^N_\sigma$

En esta sección clasificamos los módulos de peso máximo cuasifinitos irreducibles de la subálgebra de Lie ortogonal $\mathcal{D}^N_\sigma$. También los realizamos en términos de la teoría de representaciones del álgebra de Lie compleja $\widehat{g\ell}^{[m]}_\infty$ y las correspondientes subálgebras de tipo B y D.

Sea $A \in \mathrm{Mat}_N \mathbb{C}$ definimos$(A)^{\dagger}_{i,j} = A_{N+1-j,\,N+1-i}$, la trasposición respecto de la diagonal opuesta. Consideremos la anti-involución en $\mathcal{D} = \mathcal{D}^1$, introducida en [10],

$$\tau_{+,-1}(z^k f(D)) = z^k f(-D-k-1).$$

Extendemos $\tau_{+,-1}$ a un mapa en $\mathrm{Mat}_N \mathcal{D} = \mathcal{D} \otimes \mathrm{Mat}_N \mathbb{C}$ dado por $[\tau_{+,-1}(A)]_{i\,j} = \tau_{+,-1}(A_{i\,j})$. Ahora, consideremos la anti-involución σ en $\mathcal{D}^N$ definido por

$$\sigma\left(z^k f(D) A\right) = \tau_{+,-1}\left(z^k f(D)\right) A^{\dagger}. \tag{6.1}$$

Denotamos por $\mathcal{D}^N_\sigma$ la subálgebra de Lie de $\mathcal{D}^N$ dada por el conjunto de $-\sigma$-puntos fijos en $\mathcal{D}^N$. Esta anti-involución es una de las anti-involuciones de $\mathcal{D}^N$ que preservan la $\mathbb{Z}$-graduación, clasificadas en [15] y asociada a la subálgebra conforme ortogonal de gc_N. En [11] $\mathcal{D}^N_\sigma$ fue denotada por $\mathcal{D}^N_o$.

De aquí en adelante denotaremos $D_k = D + \frac{k+1}{2}$. Un conjunto de generadores de $\mathcal{D}^N_\sigma$ es:

$$\{z^k\,(f(D_k) e_{i,\,N+1-j} - f(-D_k) e_{j,\,N+1-i}) : \, k \in \mathbb{Z},\ f \in \mathbb{C}[x],\ 1 \leqslant i < j \leqslant N\}$$

junto con los generadores en la diagonal opuesta

$$\{z^k f(D_k) e_{i,\,N+1-i} : \, k \in \mathbb{Z},\ f \in \mathbb{C}[x] \text{ impar },\ 1 \leqslant i \leqslant N\}.$$

Denotamos nuevamente por ψ la restricción del 2-cociclo en (5.3) a $\mathcal{D}^N_\sigma$ y sea $\widehat{\mathcal{D}}^N_\sigma$ la extensión central de $\mathcal{D}^N_\sigma$ por el centro $\mathbb{C}C$ de dimensión 1 correspondiente a este 2-cociclo.

Por lo tanto, $\widehat{\mathcal{D}}^N_\sigma$ hereda la graduación principal de $\widehat{\mathcal{D}}^N$, es decir

$$\widehat{\mathcal{D}}^N_\sigma = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} (\widehat{\mathcal{D}}^N_\sigma)_j.$$

De aquí en adelante denotamos por

$$\delta_{n,\mathrm{par}} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{caso contrario,} \end{cases} \tag{6.2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, similarmente para $\delta_{n,\mathrm{impar}}$. También denotamos por $[s]$ el mayor entero menor o igual que s.

Observación 6.1. (*a*) Las siguientes propiedades son satisfechas por $\widehat{\mathcal{D}}^N_\sigma$:

(P_1) $(\widehat{\mathcal{D}}^N_\sigma)_0$ es conmutativa,

(P_2) si $a \in (\widehat{\mathcal{D}}^N_\sigma)_{-j}$ $(j > 0)$ y $[a, (\widehat{\mathcal{D}}^N_\sigma)_1] = 0$, entonces $a = 0$.

Observar que (P_1) se sigue de la definición de $(\widehat{\mathcal{D}}^N_\sigma)_0$. (P_2) se verifica calculando el corchete

$$0 = [a\,,\, e_{q,\,q-1} - e_{N+2-q,\,N+1-q}],$$

con $a \in (\widehat{\mathcal{D}}^N_\sigma)_{-j}$, $j \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq \left[\frac{N}{2}\right] + \delta_{N,\text{impar}}$, bajo las siguientes consideraciones:

• Si $j = kN$, $k \in \mathbb{N}$, sea q tal que $2 \leqslant q \leqslant \left[\frac{N}{2}\right] + \delta_{N,\,\text{impar}}$;

• Si $j = kN + r$, $k \in \mathbb{N}$, con $1 \leq r \leq N-1$ y suponemos que $1 \leq r \leq \left[\frac{N}{2}\right] + \delta_{N,\,\text{impar}}$ entonces q es elegido en

$$\left\{2 \leq q < \frac{N-r+1}{2}\right\} \bigcup \left\{\left[\frac{r+2}{2}\right] + \delta_{r,\,\text{impar}} \leq q \leq r\right\}$$

y si $\left[\frac{N}{2}\right] + \delta_{N,\,\text{impar}} < r \leq N-1$, q es escogido entre

$$\left\{2 \leq q < \frac{N-r+1}{2}\right\} \bigcup \left\{2 \leq q \leq \left[\frac{r}{2}\right] - \delta_{r,\,\text{impar}}\right\}.$$

Si además N es impar y r par, o viceversa, también se necesita tomar el valor $q = \frac{N+3-r}{2}$, y si r es impar, debemos considerar también $q = \frac{1+r}{2}$.

(b) Además tenemos por Lemas 2.1 y 2.2 que para toda subálgebra parabólica $\mathfrak{p}$ de $\widehat{\mathcal{D}}^N_\sigma$, $\mathfrak{p}_{-k} \neq 0$, implica $\mathfrak{p}_{-k+1} \neq 0$ y $\mathfrak{p}^a$ definida por (2.1) es la subálgebra minimal conteniendo a.

Sea $\mathfrak{p}$ una subálgebra parabólica de $\widehat{\mathcal{D}}^N_\sigma$. Usando (5.4) y observando que para cada entero positivo j existe un entero positivo k tal que $j = kN + r = (k+1)N - (N-r)$ con $0 \leqslant r \leqslant N-1$, podemos describir $\mathfrak{p}_{-j}$ como la subálgebra generada por:

$$\begin{aligned}\mathfrak{p}_{-j} = &\Big\{z^{-k}\Big(f_i(D_{-k})\, e_{i,\,i+r} - f_i(-D_{-k})\, e_{N+1-r-i,\,N+1-i}\Big) \,:\, f_i \in I^i_{-j} \text{ y} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 1 \leq i \leq \left[\frac{N+1-r}{2}\right]\Big\} \\ \bigcup \quad &\Big\{z^{-(k+1)}\Big(g_i(D_{-(k+1)})\, e_{i,\,i-N+r} - g_i(-D_{-(k+1)})\, e_{2N+1-i-r,\,N+1-i}\Big) : \\ &\qquad\qquad g_i \in L^i_{-j} \text{ y } \quad N-r+1 \leq i \leq \left[\frac{2N-r+1}{2}\right]\Big\}\end{aligned}$$

donde I^i_{-j} y L^i_{-j} son subespacios de $\mathbb{C}[w]$. Tomemos i tal que $1 \leq i \leq \left[\frac{N+1-r}{2}\right]$, $f_i(w) \in I^i_{-j}$, y $g_i(w) \in \mathbb{C}[w]$. Computando el corchete

$$\Big[z^{-k}\Big(f_i(D_{-k})e_{i\,i+r} - f_i(-D_{-k})e_{N+1-i-r\,N+1-i}\Big), \\ g_i(D)e_{i\,i} - g_i(-D)e_{N+1-i\,N+1-i}\Big]$$

para $j = Nk$ con $N \geq 2$, vemos que I^i_{-j} satisface

$$A^i_j I^i_{-j} \subseteq I^i_{-j}, \tag{6.3}$$

donde $A^i_j = \{g_i(w)w - g_i(w-k)(w-k) : g_i(w) \in \mathbb{C}[w]\}$. Para $j = Nk + r$ con $N > 1$, $r \neq 0$, como antes, vemos que I^i_{-j} satisface (6.3) para $A^i_j = \{g_i(w-k)(w+k) : g_i(w) \in \mathbb{C}[w]\}$.

Ahora tomemos l tal que $N - r + 1 \leq l \leq \left[\frac{2N+1-r}{2}\right]$, $g_l(w) \in \mathbb{C}[w]$ y $f_l(w) \in L^l_{-j}$. Computando el corchete

$$\Big[z^{-(k+1)}\Big(f_l(D_{-(k+1)})e_{l,\,l-N+r} - f_l(-D_{-(k+1)})e_{2N+1-l-r,\,N+1-l}\Big), \\ g_l(D)e_{l,\,l} + g_l(-D)e_{N+1-l,\,N+1-l}\Big]$$

para $j = Nk + r$ con $N > 1$, $r \neq 0$ vemos que L^l_{-j} satisface

$$A^l_j L^l_{-j} \subseteq L^l_{-j}, \tag{6.4}$$

donde $A^l_j = \{g_l(w-(k+1)(w-(k+1)) : g_l(w) \in \mathbb{C}[w]\}$.

Por lo tanto hemos probado lo siguiente.

Lema 6.2. *a) I^i_{-j} y L^l_{-j} son ideales para todo $j \in \mathbb{N}$ donde $j = kN + r$ con $0 \leqslant r \leqslant N-1$, $1 \leq i \leq \left[\frac{N+1-r}{2}\right]$ y $1 \leq l \leq \left[\frac{2N+1-r}{2}\right]$.*

b) Si $I^i_{-j} \neq 0$, y $L^l_{-j} \neq 0$ entonces tienen codimensión finita en $\mathbb{C}[w]$.

Demostración. Observemos que si $j = kN$, con $k \in \mathbb{N}$, entonces $A^i_j = \mathbb{C}[w]$ para todo $i = 1, \cdots, [\frac{N+1-r}{2}]$ y si $j = kN + r$, con $r \neq 0$, entonces A^i_j y A^l_j con $1 \leq i \leq \left[\frac{N+1-r}{2}\right]$, $l = 1, \cdots [\frac{2N+1-r}{2}]$, son subespacios tales que contienen un polinomio de grado n para todo $n \geq 1$, probando la primera parte. Parte (b) se sigue fácilmente de (a). $\square$

Ahora tenemos el siguiente importante resultado .

Proposición 6.3. *(a) Todo elemento no nulo $d \in (\widehat{\mathcal{D}}^N_\sigma)_{-1}$ que se escribe como:*

$$d = \sum_{i=1}^{[\frac{N}{2}]-\delta_{N,par}} f_i(D_0)e_{i,\,i+1} - f_i(-D_0)e_{N-i,\,N+1-i} + \delta_{N,\,par}\, g(D_0)e_{\frac{N}{2},\,\frac{N}{2}+1} + z^{-1}h(D_{-1})e_{N,\,1} \in (\widehat{\mathcal{D}}^N_\sigma)_{-1},$$

donde cada $f_i(w)$, $g(w)$ y $h(w)$ son polinomios no nulos, tales que g y h son polinomios impares, es no-degenerado.

(b) Sea d como en (a). Entonces

$$\begin{aligned}
(\widehat{\mathcal{D}}^N_\sigma)^d_0 &:= [(\widehat{\mathcal{D}}^N_\sigma)_1, d] \\
&= span\Big\{ f_{k-1}\,(D_0)\,(D_0)^l\,(e_{k-1,\,k-1} - e_{k,\,k}) + \\
&\qquad f_k\,(-D_0)\,(-D_0)^l\,(e_{N+1-k,\,N+1-k} - e_{N+2-k,\,N+2-k}) : \\
&\qquad\qquad k = 2, \dots, \left[\frac{N}{2}\right] + \delta_{N,impar}\; y\; l \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\Big\} \\
&\quad \bigcup \delta_{N,par}\Big\{ g(D_0)(D_0)^r \left(e_{\frac{N}{2},\,\frac{N}{2}} - e_{\frac{N}{2}+1,\,\frac{N}{2}+1}\right) : \\
&\qquad\qquad r \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0},\ enteros\ impares\ y\, g \in \mathbb{C}[w]\ impar\Big\} \\
&\quad \bigcup \Big\{ h(D_{-1}+1)(D_1)^m\, e_{N,\,N} - h(D_{-1})(D_1-1)^m\, e_{1,\,1} : \\
&\qquad\qquad m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0},\ enteros\ impares\ y\, h \in \mathbb{C}[w]\ impar\Big\}.
\end{aligned}$$

Demostración. Sea $d \in (\widehat{\mathcal{D}}^N_\sigma)_{-1}$, como en (a), como cada $f_i(w), g_i(w)$ y $h(w)$ es un polinomio no nulo, L^N_{-j} e $I^i_{-j} \neq 0$ para $1 \leq i \leq N-1$ y para todo $j \geq 1$. Entonces por Lema 6.2 (b), parte (a) se sigue. Finalmente (b) se sigue de calcular el corchete $[d, a]$ con $a = (D_0)^l\, e_{k,\,k-1} - (-D_0)^l\, e_{N+2-k,\,N+1-k}$ y $k = 2 \dots \left[\frac{N}{2}\right] + \delta_{N,\text{impar}}$; $a = \delta_{N,\text{par}}\,(D_0)^r e_{\frac{N}{2}+1,\,\frac{N}{2}}$ y $a = z(D_1)^m\, e_{1,\,N}$ con l, r, $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, r, m enteros impares. □

Resumiendo tenemos que las siguientes propiedades son satisfechas por $\widehat{\mathcal{D}}^N_\sigma$:

(P_1) $(\widehat{\mathcal{D}}^N_\sigma)_0$ es conmutativa,

(P_2) Si $a \in (\widehat{\mathcal{D}}^N_\sigma)_{-j}$ $(j > 0)$ y $[a, (\widehat{\mathcal{D}}^N_\sigma)_1] = 0$, entonces $a = 0$,

(P_3) Si $\mathfrak{p}$ es una suálgebra parabólica no degenerada $(\widehat{\mathcal{D}}^N_\sigma)$, entonces existe un elemente no degenerado a tal que $\mathfrak{p}^a \subseteq \mathfrak{p}$.

Observemos que (P_3) se sigue de la proposición 6.3 a) y el hecho que $\mathfrak{p}$ es no degenerada.

6.1 Caracterización de los módulos de peso máximo cuasifinitos de $\widehat{\mathcal{D}}_\sigma^N$

Observemos que como $\widehat{\mathcal{D}}_\sigma^N$ satisface las propiedades (P1)-(P3) entonces le podemos aplicar el Teorema 2.4 a $\mathfrak{g} = \widehat{\mathcal{D}}_\sigma^N$. Por lo tanto tenemos,

Teorema 6.4. *Las siguientes condiciones en $\lambda \in (\widehat{\mathcal{D}}_\sigma^N)^*$ son equivalentes:*

(a) $M(\widehat{\mathcal{D}}_\sigma^N;\, \lambda)$ contiene un vector singular $av_\lambda \in M(\widehat{\mathcal{D}}_\sigma^N; \lambda)_{-1}$,donde $a \in (\widehat{\mathcal{D}}_\sigma^N)_{-1}$ es no degenerado;

(b) Existe un elemento no degenerado $a \in (\widehat{\mathcal{D}}_\sigma^N)_{-1}$, tal que $\lambda\left([(\widehat{\mathcal{D}}_\sigma^N)_1, a]\right) = 0$;

(c) $L(\widehat{\mathcal{D}}_\sigma^N; \lambda)$ es cuasifinito;

(d) Existe un elemento no degenerado $a \in (\widehat{\mathcal{D}}_\sigma^N)_{-1}$, tal que $L(\widehat{\mathcal{D}}_\sigma^N; \lambda)$ es el cociente irreducible del módulo de Verma generalizado $M(\widehat{\mathcal{D}}_\sigma^N;\, \mathfrak{p}^a,\, \lambda)$.

Escribiremos $M(\lambda)$ y $L(\lambda)$ en lugar de $M(\widehat{\mathcal{D}}_\sigma^N, \lambda)$ y $L(\widehat{\mathcal{D}}_\sigma^N, \lambda)$ cuando no exista ambigüedad.

Una funcional $\lambda \in (\widehat{\mathcal{D}}_\sigma^N)_0^*$ es descripta por sus *etiquetas*

$$\Delta_{i,l} = -\lambda\Big((D_0)^l\, e_{i,\,i} - (-D_0)^l e_{N+1-i,\, N+1-i}\Big)$$

con $l \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $i = 1 \ldots \left[\frac{N}{2}\right] + \delta_{N,\text{impar}}$ y la *carga central* $c = \lambda(C)$. Consideremos las series generatrices

$$\Delta_i(x) = \sum_{l \geqslant 0} \frac{x^l}{l!}\Delta_{i,l} \qquad i = 1 \ldots \left[\frac{N}{2}\right] + \delta_{N,\text{impar}}. \tag{6.5}$$

Recordemos que un *cuasipolinomio* es una combinación lineal de funciones de la forma $p(x)e^{\alpha x}$,donde $p(x)$ es un polinomio y $\alpha \in \mathbb{C}$. Un *cuasipolinomio impar* es una solución de ecuaciones diferenciales no triviales con coeficientes constates $p(\partial_t) = 0$, donde $p(x)$ es un polinomio impar.

Tenemos la siguiente caracterización de los módulos de peso máximo cuasifinitos sobre $\widehat{\mathcal{D}}_\sigma^N$.

Teorema 6.5. *Un $\widehat{\mathcal{D}}_\sigma^N$-módulo $L(\lambda)$ es cuasifinito si y sólo si*

$$G_1(x) = 4\left(\Delta_1(x)e^{\frac{x}{2}} + \Delta_1(-x)e^{-\frac{x}{2}}\right)$$

es un cuasipolinomio impar,

$$F_k(x) = \Delta_k(x) - \Delta_{k+1}(x)$$

para $k = 1, \dots, \left[\frac{N}{2}\right] - \delta_{N,par}$, son cuasipolinomios, y si N es par

$$F_{\frac{N}{2}}(x) = \left(\frac{\Delta_{\frac{N}{2}}(x) + \Delta_{\frac{N}{2}}(-x)}{2}\right)$$

es un cuasipolinomio impar.

Demostración. De la Proposición 6.3 (c) y Teorema 6.4 parte (b), tenemos que $L(\lambda)$ es cuasifinito si y sólo si existen polinomios (mónicos)

$$h(x) = \sum_{t=0}^{p} c_t x^{2t+1}, \qquad g(x) = \sum_{s=0}^{n} b_s\, x^{2s+1} \quad \text{y} \quad f_i(x) = \sum_{q=0}^{m_i} a_{i,q}\, x^q$$

para $i = 1, \dots, \left[\frac{N}{2}\right] - \delta_{N,\text{par}}$, tal que para cada $l \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ y $r, m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, enteros impares tenemos

$$\lambda\left(h(D_{-1}+1)(D_1)^m\, e_{N,N} - h(D_{-1})(D_1-1)^m\, e_{1,1}\right) = 0,$$

$$\delta_{N,\text{par}}\, \lambda\left(g(D_0)(D_0)^r \left[e_{\frac{N}{2},\frac{N}{2}} - e_{\frac{N}{2}+1,\frac{N}{2}+1}\right]\right) = 0,$$

y

$$\begin{aligned}\lambda\Big(f_i(D_0)(D_0)^l\, e_{i,i} - f_i(-D_0)(-D_0)^l\, e_{N+1-i,N+1-i}\\ - \left(f_i(D_0)(D_0)^l\, e_{i+1,i+1} - f_i(-D_0)(-D_0)^l\, e_{N-i,N-i}\right)\Big) = 0,\end{aligned}$$

con $i = 1, \dots, \left[\frac{N}{2}\right] - \delta_{N,\text{par}}$. Esas condiciones las podemos reescribir como sigue,

$$\sum_{t=0}^{p}\sum_{j=0}^{m+2t+1} c_t \binom{2t+1+m}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^j (-1)^j \Delta_{1,\,2t+1+m-j} + h(1)c = 0 \tag{6.6}$$

con $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ impar,

$$\sum_{s=0}^{n} b_s \Delta_{\frac{N}{2},\,2s+2k+2} = 0 \tag{6.7}$$

$k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0},\ r = 2k+1$, y

$$\sum_{q=0}^{m_i} a_{i,\,q}\left(\Delta_{i,\,q+l} - \Delta_{i+1,\,q+l}\right) = 0 \tag{6.8}$$

para todo $i = 2, \dots, \left[\frac{N}{2}\right] - \delta_{N,\mathrm{par}}$ y $l \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Sean

$$G_1(x) = \sum_{w\,\mathrm{par}} F_w \quad \text{donde} \quad F_w = \sum_{q=0}^{w} \binom{w}{q} \left(\frac{-1}{2}\right)^q \Delta_{1\,,w-q}$$

$$F_{\frac{N}{2}}(x) = \sum_{k \geq 0} \Delta_{\frac{N}{2}\,,2k+1} \frac{x^{2k+1}}{(k+1)!}$$

y

$$F_k(x) = \Delta_k(x) - \Delta_{k+1}(x)$$

para $k = 1, \dots, \left[\frac{N}{2}\right] - \delta_{N,\mathrm{par}}$. Es sencillo verificar que las ecuaciones (6.6), (6.7) y (6.8) pueden ser equivalentemente reformuladas como sigue:

$$\left(\sum_{t=0}^{p} c_t \left(\frac{d}{dx}\right)^{2t+1}\right) G_1(x) = 0,$$

$$\left(\sum_{s=0}^{n} b_s \left(\frac{d}{dx}\right)^{2s+1}\right) F_{\frac{N}{2}}(x) = 0 \quad \text{y}$$

$$\left(\sum_{r=0}^{m_k} a_{k,r} \left(\frac{d}{dx}\right)^{r}\right) F_k(x) = 0,$$

para $k = 1, \dots, \left[\frac{N}{2}\right] - \delta_{N\,,\mathrm{par}}$. Por lo tanto, $L(\lambda)$ es cuasifinito si y sólo si $F_k(x)$ son cuasipolinomios y además $G_1(x)$ y $F_{\frac{N}{2}}$ son cuasipolinomios impares. Por lo tanto el teorema se sigue. $\square$

Observación 6.6. Es fácil ver que este resultado coincide con el caso $N = 1$ estudiado en [10].

6.2 Relación entre $\widehat{\mathcal{D}}_\sigma^N$ y las álgebras de Lie clásicas de rango infinito de tipo A, B y D

Sea $\mathcal{O}$ el álgebra de funciones holomorfas sobre $\mathbb{C}$ introducida en la Sección 5. Sea $\mathcal{D}_\sigma^{N\mathcal{O}}$ el conjunto de todos los operadores diferenciales de la forma

$$\{z^k\left(f(D_k)e_{i,\,j} - f(-D_k)e_{N+1-j,\,N+1-i}\right) : k \in \mathbb{Z},\, 1 \leqslant i < j \leqslant N\,,\, f \in \mathcal{O}\},$$

y en la diagonal opuesta,

$$\{z^k f(D_k) e_{i,\,N+1-i}\ :\ k\in\mathbb{Z},\ 1\leqslant i\leqslant N,\ f\in\mathcal{O}\text{ impar }\}.$$

Entonces el 2-cociclo ψ en $\mathcal{D}_\sigma^N$ se extiende a un 2-cociclo en $\mathcal{D}_\sigma^{N\mathcal{O}}$. Sea $\widehat{\mathcal{D}}_\sigma^{N\mathcal{O}}=\mathcal{D}_\sigma^{N\mathcal{O}}+\mathbb{C}C$ la correspondiente extensión central.

Consideremos el morfismo $\varphi_s^{[m]}:\mathcal{D}^N\to g\ell_\infty^{[m]}$ $\big($resp. $\varphi_s^{[m]}:\mathcal{D}^{N\mathcal{O}}\to g\ell_\infty^{[m]}\big)$ introducido en la Sección 5, dado por la fórmula (5.11), el cual es un homomorfismo de álgebras de Lie. Restringiendo esos homomorfismos a $\mathcal{D}_\sigma^N$, obtenemos una familia de morfismos de álgebras de Lie $\varphi_s^{[m]}:\mathcal{D}_\sigma^N\to g\ell_\infty^{[m]}$ (resp. $(\mathcal{D}_\sigma^{N\mathcal{O}})$, $\varphi_s^{[m]}:(\mathcal{D}_\sigma^{N\mathcal{O}})\to g\ell_\infty^{[m]}$), es decir

$$\begin{aligned}
&\varphi_s^{[m]}\Big(z^k\big(f(D_k)\,e_{i,j}-f(-D_k)\,e_{N+1-j,\,N+1-i}\big)\Big)=\\
&=\sum_{l\in\mathbb{Z}}\left[f\left(-l+\frac{k+1}{2}+s+u\right)E_{(l-k)N-i+1,\,lN-j+1}\right.\\
&\qquad\qquad\left.-f\left(l-\frac{k+1}{2}-s-u\right)E_{(l-k-1)N+j,\,(l-1)N+i}\right]\\
&=\sum_{r=0}^{m}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\left[f^{(r)}\left(-l+\frac{k+1}{2}+s\right)\frac{u^r}{r!}\,E_{(l-k)N-i+1,\,lN-j+1}\right.\\
&\qquad\left.-(-1)^r f^{(r)}\left(l-\frac{k+1}{2}-s\right)\frac{u^r}{r!}\,E_{(l-k-1)N+j,\,(l-1)N+i}\right],
\end{aligned}\tag{6.9}$$

donde $1\leqslant i<j\leqslant N$ y similarmente, en el otro conjunto de generadores

$$\begin{aligned}
&\varphi_s^{[m]}\left(z^k f(D_k)e_{i,\,N+1-i}\right)=\\
&\quad=\sum_{l\in\mathbb{Z}}f\left(-l+\frac{k+1}{2}+s+u\right)E_{(l-k)N-i+1,\,(l-1)N+i}\\
&\quad=\sum_{r=0}^{m}\sum_{l\in\mathbb{Z}}f^{(r)}\left(-l+\frac{k+1}{2}+s\right)\frac{u^r}{r!}\,E_{(l-k)N-i+1,\,(l-1)N+i},
\end{aligned}\tag{6.10}$$

donde nuevamente, $1\leqslant i\leqslant N$, f es impar y $f^{(r)}$ denota la r-ésima derivada de f. Para cada $s\in\mathbb{C}$ y $k\in\mathbb{Z}$, tenemos

$$\begin{aligned}
I_{s,k}^{[m]}\quad=\quad&\left\{f\in\mathcal{O}:\ f^{(i)}\left(n+\frac{k+1}{2}+s\right)=0\text{ y}\right.\\
&\qquad\left.f^{(i)}\left(-n-\frac{k+1}{2}-s\right)=0,\ \text{ para todo }n\in\mathbb{Z},\ i=0,\dots,m\right\};
\end{aligned}$$

$$\widetilde{I}_{s,k}^{[m]} = \Big\{ f \in \mathcal{O} : f \text{ es impar y} \\ f^{(i)}\left(n + \frac{k+1}{2} + s\right) = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z},\, i = 0, \dots, m \Big\}.$$

Sea

$$J_s^{[m]} = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \Big\{ z^k \big(f(D_k)\, e_{i,j} - f(-D_k)\, e_{N+1-j,\,N+1-i} \big) : f \in I_{s,k}^{[m]} \text{ y} \\ 1 \leqslant i < j \leqslant N \Big\} \bigoplus \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \Big\{ z^k f(D_k)\, e_{i,\,N+1-i} : f \in \widetilde{I}_{s,k}^{[m]} \Big\}.$$

Claramente observamos que

$$\ker \varphi_s^{[m]} = J_s^{[m]}. \tag{6.11}$$

Fijemos $\vec{s} = (s_1, \cdots, s_M) \in \mathbb{C}^M$, tal que $s_i - s_j \notin \mathbb{Z}$ si $i \neq j$ y $s_i + s_j \notin \mathbb{Z}$ para todo i, j. También fijemos $\vec{m} = (m_1, \cdots, m_M) \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}^M$. Sea $g\ell_\infty^{[\vec{m}]} = \oplus_{i=1}^M g\ell_\infty^{[m_i]}$ y consideremos el homomorfismo

$$\varphi_{\vec{s}}^{[\vec{m}]} = \bigoplus_{i=1}^{M} \varphi_{s_i}^{[m_i]} \ : \ \mathcal{D}_\sigma^{N\mathcal{O}} \longrightarrow g\ell_\infty^{[\vec{m}]}.$$

Proposición 6.7. *Dados $\vec{s}$ y $\vec{m}$ como antes tenemos la siguiente sucesión exacta de álgebras de Lie :*

$$0 \longrightarrow J_{\vec{s}}^{[\vec{m}]} \longrightarrow \mathcal{D}_\sigma^{N\mathcal{O}} \xrightarrow{\varphi_{\vec{s}}^{[\vec{m}]}} g\ell_\infty^{[\vec{m}]} \longrightarrow 0,$$

donde $J_{\vec{s}}^{[\vec{m}]} = \bigcap_{i=1}^{M} J_{s_i}^{[m_i]}$.

Demostración. Por simplicidad probemos esto para el caso $M = 1$. Por las hipótesis anteriores tenemos que $\vec{m} = m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ y $\vec{s} = s \notin \mathbb{Z}/2$. El caso general es similar. Es claro que $\ker \varphi_s^{[m]} = J_s^{[m]}$. Para probar la surjectividad recordemos que para cada sucesión discreta de puntos en $\mathbb{C}$ y enteros no negativos t existe $f(w) \in \mathcal{O}$ que tiene estos prescriptos como valores de sus primeras t derivadas en estos puntos. Como $s \notin \mathbb{Z}/2$, las sucesiones $\{-l + \frac{k+1}{2} + s\}_{l\in\mathbb{Z}}$ y $\{l - \frac{k+1}{2} - s\}_{l\in\mathbb{Z}}$ son disjuntas, entonces la proposición se demuestra. $\square$

Ahora queremos extender el homomorfismo $\varphi_s^{[m]} : \mathcal{D}_\sigma^N \to g\ell_\infty^{[m]}$ (respectivamente $\varphi_s^{[m]} : \mathcal{D}_\sigma^{N\mathcal{O}} \to g\ell_\infty^{[m]}$) a un homomorfismo entre las extensiones centrales de las correspondientes álgebras de Lie. Observemos que estos morfismos preservan la graduación principal.

Introducimos la siguiente función, cf. [10],

$$\eta_j(x,\mu) = \left(\frac{e^{\mu x} + (-1)^j e^{-\mu x}}{2}\right)\frac{x^j}{j!} \quad (j \in \mathbb{Z}_+, \mu \in \mathbb{C}). \tag{6.12}$$

Las funciones $\eta_j(x,\mu)$ satisfacen:

$$\eta_j(-x,\mu) = \eta_j(x,\mu),\ \eta_j(x,-\mu) = (-1)^j\eta_j(x,\mu),\ \eta_0(x,\mu) = \cosh(\mu x).$$

Ahora, observemos que la restricción del 2-cociclo (4.2) a $\varphi_s^{[m]}(\mathcal{D}_\sigma^{N\mathcal{O}})$ nos da el siguiente 2-cociclo en $\mathcal{D}_\sigma^{N\mathcal{O}}$ con valores en R_m :

$$\psi_s^{[m]} := \psi + \psi_{s,0} + \sum_{j=1}^m \psi_s^{(j)}\frac{t^j}{j!},$$

donde el 2-cociclo ψ está dado por (5.2) y los cociclos $\psi_{s,o}$ y $\psi_s^{(m)}$ y están definidos en la Observación 5.1. Por lo tanto las fórmulas (5.6)-(5.8) implican el siguiente resultado.

Proposición 6.8. *El homomorfismo $\varphi_s^{[m]}$ se extiende a un homomorfismo de álgebras de Lie $\widehat{\varphi}_s^{[m]}$ entre las correspondientes extensiones centrales como sigue:*

$$\widehat{\varphi}_s^{[m]}|_{(\widehat{\mathcal{D}}_\sigma^N)_j} = \varphi_s^{[m]}|_{(\mathcal{D}_\sigma^N)_j} \qquad si\ j \neq 0, \tag{6.13}$$

$$\begin{aligned}
&\widehat{\varphi}_s^{[m]}\left(e^{xD_0}\, e_{i,i} - e^{-xD_0}\, e_{N+1-i,N+1-i}\right) = \\
&\quad = \varphi_s^{[m]}\left(e^{xD_0}\, e_{i,i} - e^{-xD_0}\, e_{N+1-i,\,N+1-i}\right) - \left(\frac{\cosh(sx)-1}{\sinh(\frac{x}{2})}\right) \\
&\quad - \sum_{1\leqslant j\leqslant m,} \frac{\eta_j(x,s)}{\sinh(\frac{x}{2})}u^j,
\end{aligned} \tag{6.14}$$

$$\widehat{\varphi}_s^{[m]}(C) = 1. \tag{6.15}$$

El homomorfismo $\varphi_s^{[m]}$ está definido para todo $s \in \mathbb{C}$. Aunque para $s \in \mathbb{Z}/2$, no es suryectivo. Esos casos son descriptos por las siguientes proposiciones.

Proposición 6.9. *Para $s = 0$, tenemos la siguiente sucesión exacta de álgebras de Lie:*

$$0 \to J_s^{[m]} \longrightarrow \mathcal{D}_\sigma^{N\mathcal{O}} \xrightarrow{\varphi_s^{[m]}} \bar{d}_\infty^{[m]} \longrightarrow 0.$$

Demostración. El homomorfismo $\varphi_s^{[m]} : \mathcal{D}^N \to g\ell_\infty^{[m]}$ introducido en la Sección 5 dado por la fórmula (5.11) es suryectivo. Recordemos que tenemos definido en $\mathcal{D}^N$ la anti-involución σ dada por (6.1). Es fácil ver que esta se transfiere, vía $\varphi_s^{[m]}$, a una anti-involución $\omega : g\ell_\infty^{[m]} \to g\ell_\infty^{[m]}$ como sigue:

$$\omega(u^k E_{i,j}) = (-u)^k E_{1-j,1-i}. \tag{6.16}$$

Por lo tanto, la subálgebra de Lie de $-\sigma$ puntos fijos de $\mathcal{D}^N$, denotada por $\mathcal{D}_\sigma^N$, se mapea suryectivamente a la subálgebra de Lie dada por el conjunto de $-\omega$ puntos fijos en $g\ell_\infty^{[m]}$, la cual denotamos por $\bar{d}_\infty^{[m]}$.

□

Proposición 6.10. *Para $s = \frac{1}{2}$, tenemos la siguiente sucesión exacta de álgebras de Lie:*

$$0 \longrightarrow J_s^{[m]} \longrightarrow \mathcal{D}_\sigma^{N\mathcal{O}} \xrightarrow{\varphi_s^{[m]}} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

donde $\mathfrak{g} \simeq \bar{b}_\infty^{[m]}$ si N es impar y $\mathfrak{g} \simeq \bar{d}_\infty^{[m]}$ si N es par.

Demostración. Si N es impar reemplazamos ω por

$$\omega(u^r E_{i,j}) = (-u)^r E_{N+1-j\,,N+1-i} \tag{6.17}$$

en la prueba de la Proposición 6.9. El resto de la prueba es la misma. Entonces, la subálgebra de Lie de $-\sigma$ puntos fijos en $\mathcal{D}^N$, denotada $\mathcal{D}_\sigma^N$, se mapea suryectivamente al álgebra de Lie de $-\omega$ puntos fijos de $g\ell_\infty^{[m]}$.

Entonces es suficiente mostrar que ω es conjugado por un automorfismo T de $g\ell_\infty^{[m]}$ a la anti-involución que define $\bar{b}_\infty^{[m]}$. Para esto, consideremos

$$T(u^r\, E_{i,j}) = u^r\, E_{\frac{N+1}{2}+i,\, \frac{N+1}{2}+j} \tag{6.18}$$

Es sencillo verificar que esta se extiende a un automorfismo del álgebra $g\ell_\infty^{[m]}$ que conjuga ω a la anti-involución que define $\bar{b}_\infty^{[m]}$. Si N es par, reemplazar ω por $\omega(u^r E_{i,j}) = (-u)^r E_{1-j,1-i}$ y T por $T(u^r\, E_{i,j}) = u^r\, E_{\frac{N}{2}+i,\, \frac{N}{2}+j}$. El resto de la prueba sigue siendo la misma. □

Observación 6.11. (a) Para $s=0$ y $s=1/2$, en vista de las Proposiciones 6.9 y 6.10, por un abuso de notación, denotaremos nuevamente $\varphi_s^{[m]}$ el homomorfismo suryectivo de $\mathcal{D}_\sigma^N$ en $\bar{b}_\infty^{[m]}$ o $\bar{d}_\infty^{[m]}$ respectivamente, dado por el viejo $\varphi_s^{[m]}$compuesto con los correspondientes isomorfismos T introducidos en la prueba de la proposición anterior.

(b) Para $s \in \mathbb{Z}/2$, la imagen de $\mathcal{D}_\sigma^N$ bajo el homomorfismo $\varphi_s^{[m]}$ es $\nu^{\widetilde{s}}(X_\infty^{[m]})$ donde ν fue definida en (4.1) y $\widetilde{s}=s$ si $s \in \mathbb{Z}$ y $X=b$, o bien $\widetilde{s}=s-1/2$ si $s \in \mathbb{Z}+1/2$ y $X=b$ si N es impar, o $X=d$ si N es par. Por lo tanto sólo consideraremos $s=0,\ 1/2$ a lo largo de este trabajo.

Dados $\vec{m}=(m_1,\cdots m_M) \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}^M$ y $\vec{s}=(s_1,\cdots,s_M)$ tal que , $s_i \in \mathbb{Z}$ implica $s_i=0$; $s_i \in \mathbb{Z}+1/2$ implica $s_i=1/2$ y $s_i \neq \pm s_j \mod \mathbb{Z}$ para $i \neq j$, y combinando Proposiciones 6.7, 6.9 y 6.10 , obtenemos un homomorfismo de álgebras de Lie

$$\widehat{\varphi}_{\vec{s}}^{[\vec{m}]} = \bigoplus_{i=1}^{M} \varphi_{s_i}^{[m_i]} : \widehat{\mathcal{D}}_\sigma^N \longrightarrow \mathfrak{g}^{[\vec{m}]} := \oplus_{i=1}^M \mathfrak{g}^{[m_i]}, \tag{6.19}$$

donde

$$\mathfrak{g}^{[m]} = \begin{cases} \widehat{g\ell}_\infty^{[m]} & \text{si } s \notin \mathbb{Z}/2, \\ b_\infty^{[m]} & \text{si } s=1/2 \quad \text{y} \quad N \text{ impar}, \\ d_\infty^{[m]} & \text{si } s=0 \text{ o } s=1/2 \quad \text{y}\, N \text{ par}. \end{cases} \tag{6.20}$$

Podemos probar la siguiente Proposición con el mismo argumento que la Proposición 6.7.

Proposición 6.12. *El homomorfismo $\widehat{\varphi}_{\vec{s}}^{[\vec{m}]}$ se extiende a un homomorfismo suryectivo de álgebras de Lie el cual es denotado nuevamente por $\widehat{\varphi}_{\vec{s}}^{[\vec{m}]}$*

$$\widehat{\varphi}_{\vec{s}}^{[\vec{m}]} = \bigoplus_{i=1}^{M} \widehat{\varphi}_{s_i}^{[m_i]} : \widehat{\mathcal{D}}_\sigma^{N\mathcal{O}} \longrightarrow \mathfrak{g}^{[\vec{m}]}.$$

6.3 Realización de módulos de peso máximo cuasifinitos de $\widehat{\mathcal{D}}_\sigma^N$

Sea $\mathfrak{g}^{[m]}$ como (6.20), la prueba de la siguiente proposición es estándar ver [6].

Proposición 6.13. *El $\mathfrak{g}^{[m]}$-módulo $L\left(\mathfrak{g}^{[m]},\ \lambda\right)$ es cuasifinito si y sólo si un número finito de los $^*h_k^{(i)}$ son nulos, donde $*$ representa a, b o d dependiendo si $\mathfrak{g}^{[m]}$ es $\widehat{g\ell}_\infty^{[m]}$, $b_\infty^{[m]}$ o $d_\infty^{[m]}$.*

Tomemos nuevamente $\vec{m} = (m_1, \cdots m_M) \in \mathbb{Z}^M_{\geqslant 0}$, y un cuasifinito $\lambda_i \in \left(\mathfrak{g}^{[m_i]}\right)^*_0$ para cada $i = 1, \cdots, M$ y sea $L\left(\mathfrak{g}^{[m_i]},\ \lambda_i\right)$ el correspondiente $\mathfrak{g}^{[m_i]}$-módulo irreducible. Sea $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \cdots, \lambda_M)$. Entonces el producto tensorial

$$L\left(\mathfrak{g}^{[\vec{m}]}, \vec{\lambda}\right) = \bigotimes_{i=1}^{M} L\left(\mathfrak{g}^{[m_i]},\ \lambda_i\right) \tag{6.21}$$

es un $\mathfrak{g}^{[\vec{m}]}$-módulo irreducible, con $\mathfrak{g}^{[\vec{m}]} = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{M} \mathfrak{g}^{[m_i]}$. El módulo $L(\mathfrak{g}^{[\vec{m}]}, \vec{\lambda})$ puede ser considerado como un $\widehat{\mathcal{D}}_\sigma^N$- módulo vía el homomorfismo $\varphi_{\vec{s}}^{[\vec{m}]}$, y será denotado por $L_{\vec{s}}^{[\vec{m}]}(\vec{\lambda})$. Necesitaremos la siguiente proposición. La prueba de la misma es una adaptación de la prueba de la Proposición 4.3, en [8].

Proposición 6.14. *Sea V un $\widehat{\mathcal{D}}_\sigma^N$-módulo cuasifinito. Entonces la acción de $\widehat{\mathcal{D}}_\sigma^N$ en V naturalmente se extiende a la acción de $(\widehat{\mathcal{D}}_\sigma^N)_k^{\mathcal{O}}$ en V para todo $k \neq 0$.*

Demostración. Reemplazando $B = ad\, D^2 - k^2$ por

$$\begin{aligned} B = ad &\left[\left(D + \frac{k+1}{2}\right) e_{i,i} + \left(D + \frac{k+1}{2} - k\right) e_{j,j}\right] \\ &- ad\left[\left(-D - \frac{k+1}{2}\right) e_{N+1-j,\, N+1-j} \right. \\ &\qquad \left. + \left(-D - \frac{k+1}{2} + k\right) e_{N+1-i,\, N+1-i}\right] \end{aligned}$$

en la prueba de la Proposición 4.3 en [8]. El resto de la prueba resulta la misma. □

Teorema 6.15. *Sea V un $\mathfrak{g}^{[\vec{m}]}$-módule cuasifinito, el cual es considerado como un $\widehat{\mathcal{D}}_\sigma^N$-módulo vía el homomorfismo $\varphi_{\vec{s}}^{[\vec{m}]}$. Entonces todo $\widehat{\mathcal{D}}_\sigma^N$-submódulo de V es también un $\mathfrak{g}^{[\vec{m}]}$-submódulo. En particular, los $\widehat{\mathcal{D}}_\sigma^N$-módulos $L_{\vec{s}}^{[\vec{m}]}(\vec{\lambda})$ son irreducibles si $\vec{s} = (s_1, \cdots, s_M)$ es tal que, $s_i \in \mathbb{Z}$ implica $s_i = 0$; $s_i \in \mathbb{Z} + 1/2$ implica $s_i = 1/2$ y $s_i \neq \pm s_j \, mod \mathbb{Z}$ para $i \neq j$.*

Demostración. Sea U un $\widehat{\mathcal{D}}_\sigma^N$-submódulo de V. Como V es cuasifinito entonces U resulta un $\widehat{\mathcal{D}}_\sigma^N$-módulo cuasifinito , entonces por Proposición 6.14 la acción puede ser extendida a $(\widehat{\mathcal{D}}_\sigma^{N\mathcal{O}})_k$ para todo $k \neq 0$. Por Proposición 6.12, el mapa $\varphi_{\vec{s}}^{[\vec{m}]} : (\widehat{\mathcal{D}}_\sigma^{N\mathcal{O}})_k \to (\mathfrak{g}^{[\vec{m}]})_k$ es suryectivo para todo $k \neq 0$. Por lo tanto U es invariante con respecto a todos los miembros de la graduación principal de $(\mathfrak{g}^{[\vec{m}]})_k$ con $k \neq 0$. Como $\mathfrak{g}^{[\vec{m}]}$ coincide con su álgebra derivada, esto prueba el Teorema. $\square$

Ahora, mostraremos que en efecto todos los $\widehat{\mathcal{D}}_\sigma^N$-módulos cuasifinitos podemos realizarlos como ciertos $L_{\vec{s}}^{[\vec{m}]}(\vec{\lambda})$, para $\vec{m} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^M$ y $\vec{s} \in \mathbb{C}^M$ tal que $s_i - s_j \notin \mathbb{Z}$ si $i \neq j$ y $s_i + s_j \notin \mathbb{Z}$ para todo i, j. Por simplicicidad consideraremos el caso $M = 1$ para calcular la serie generatriz $\Delta_{m,s,\lambda}(x)$ del $\widehat{\mathcal{D}}_\sigma^N$-módulo $L_s^{[m]}(\lambda)$ de peso máximo y carga central c.
Sea $s \notin \mathbb{Z}/2$. Usando la fórmula (6.8), y el hecho que

$$\Delta_{m,s,\lambda,i}(x) = -\lambda\left(\widehat{\varphi}_s^{[m]}(e^{xD_0}\, e_{i,\,i} - e^{-xD_0}\, e_{N+1-i,\,N+1-i})\right), \tag{6.22}$$

con $i = 1, \cdots, \left[\frac{N}{2}\right] + \delta_{N,\text{impar}}$ y (4.4) tenemos que

$$\begin{aligned}\Delta_{m,\,s,\,\lambda,\,i}(x) \quad &= \quad \sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{r=0}^{m}\left(\frac{{}^a\lambda^{(r)}_{(l-1)N+i}}{r!}(-x)^r e^{x\left(l-s-\frac{1}{2}\right)}\right.\\ &\qquad \left. - \frac{{}^a\lambda^{(r)}_{lN-i+1}}{r!}x^r e^{-x\left(l-s-\frac{1}{2}\right)}\right) + \sum_{r=0}^{m}\frac{\eta_r(x,s)c_r}{\sinh\frac{x}{2}} - \frac{c_0}{\sinh\frac{x}{2}}.\end{aligned} \tag{6.23}$$

Introduciendo los polinomios

$${}^a g_t(x) = \sum_{r=0}^{m} {}^a h_t^{(r)}\frac{x^r}{r!}.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}\Delta_{m,\,s,\,\lambda,\,i}(x) - \Delta_{m,\,s,\,\lambda,\,i+1}(x) \quad &= \quad \sum_{l\in\mathbb{Z}}\left(e^{x\left(l-s-\frac{1}{2}\right)}\ {}^a g_{(l-1)N+i}(-x)\right.\\ &\qquad \left. + e^{-x\left(l-s+\frac{1}{2}\right)}\ {}^a g_{lN-i}(x)\right),\end{aligned} \tag{6.24}$$

$$
\begin{aligned}
e^{\frac{x}{2}}\Delta_{m,\,s,\,\lambda,\,1}(x) \quad + \quad & e^{-\frac{x}{2}}\Delta_{m,\,s,\,\lambda,\,1}(-x) = \\
& \sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{r=0}^{m}\sum_{k=1}^{2N-1}\left({}^{a}h^{(r)}_{(l-2)N+k} + \delta_{l,1}c_r\right)\eta_r(x,-l+s+1) - c_0,
\end{aligned}
\tag{6.25}
$$

y si N es par también tenemos

$$
\Delta_{m,\,s,\,\lambda,\,\frac{N}{2}}(x) + \Delta_{m,\,s,\,\lambda,\,\frac{N}{2}}(-x) = \sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{r=0}^{m} {}^{a}h^{(r)}_{(l-\frac{1}{2})N}\,\eta_r\left(x,-l+s+\frac{1}{2}\right).
\tag{6.26}
$$

Ahora consideremos $s = 1/2$ y N par. Recordemos que por la Observación 6.11 (a), en este caso tenemos que el morfismo $\widehat{\varphi}^{[m]}_s : \widehat{\mathcal{D}}^N_\sigma \longrightarrow d^{[m]}_\infty$ es en realidad el morfismo dado por (6.13)-(6.15) compuesto con T^{-1}, donde T fue introducido en la prueba de la Proposición 6.10. Usando esto, (6.22) y (4.10) tenemos que

$$
\begin{aligned}
\Delta_{m,\,\frac{1}{2},\,\lambda,\,i}(x) \quad = \quad & \sum_{l\geq 1}\sum_{r=0}^{m}\left(\frac{{}^{d}\lambda^{(r)}_{(l-\frac{1}{2})N+i}}{r!}(-x)^r e^{xl} - \frac{{}^{d}\lambda^{(r)}_{(l-\frac{1}{2})N-i+1}}{r!}x^r e^{x(-l+1)}\right) \\
& + \sum_{r=0}^{m}\frac{\eta_r\left(x,\frac{1}{2}\right)c_r}{\sinh\frac{x}{2}} - \frac{c_0}{\sinh\frac{x}{2}}.
\end{aligned}
\tag{6.27}
$$

Introduciendo los polinomios

$$
{}^{d}g_t(x) = \sum_{r=0}^{m} {}^{d}h^{(r)}_t\frac{x^r}{r!}.
$$

Tenemos que

$$
\begin{aligned}
\Delta_{m,\,\frac{1}{2},\,\lambda,\,i}(x) - \Delta_{m,\,\frac{1}{2},\,\lambda,\,i+1}(x) \quad = \quad & \sum_{l\geq 0}\Big(e^{(l+1)x}\ {}^{d}g_{\left(l+\frac{1}{2}\right)N+i}(-x) \\
& + e^{-lx}\ {}^{d}g_{\left(l+\frac{1}{2}\right)N-i}(x)\Big),
\end{aligned}
\tag{6.28}
$$

$$e^{\frac{x}{2}}\,\Delta_{m,\,\frac{1}{2},\lambda,\,1}(x)+e^{-\frac{x}{2}}\Delta_{m,\,\frac{1}{2},\lambda,\,1}(-x)=$$
$$\sum_{k=0}^{2N-1}\sum_{l\geq 1}\sum_{r=0}^{m}\left({}^{d}h^{(r)}_{(l-\frac{1}{2})N+k}\;-\delta_{l,0}\left((-1)^{r}\,{}^{d}\lambda_{\frac{N}{2}}-\,{}^{d}\lambda_{\frac{3N}{2}}\right)\right)\eta_r\left(x,-l-\frac{1}{2}\right) \tag{6.29}$$

y

$$\Delta_{m,\,\frac{1}{2},\lambda,\,\frac{N}{2}}(x)+\Delta_{m,\,\frac{1}{2},\lambda,\,\frac{N}{2}}(-x)=\sum_{l\geq 1}\sum_{r=0}^{m}\left({}^{d}h^{(r)}_{lN}-\delta_{l,0}\,{}^{d}\lambda^{(r)}_{N}\right)\eta_r(x,-l+2). \tag{6.30}$$

Consideremos $s=1/2$ y N impar. Recordemos que por la Observación 6.11 (a) en este caso tenemos que el morfismo $\widehat{\varphi}^{[m]}_s:\widehat{\mathcal{D}}^N_\sigma\longrightarrow b^{[m]}_\infty$ es el morfismo dado por (6.13)-(6.15) compuesto con T^{-1}, donde T fue introducido en la prueba de la Proposición 6.10. Usando esto, (6.22) y(4.6) tenemos que

$$\begin{aligned}\Delta_{m,\,\frac{1}{2},\lambda,\,i}(x) &= \sum_{l\geq 1}\sum_{r=0}^{m}\left(\frac{{}^{b}\lambda^{(r)}_{(l-\frac{1}{2})N+i-\frac{1}{2}}}{r!}(-x)^r e^{xl}-\frac{{}^{b}\lambda^{(r)}_{(l-\frac{1}{2})N-i+\frac{1}{2}}}{r!}x^r e^{x(-l+1)}\right)\\ &\qquad +\sum_{r=0}^{m}\frac{\eta_r\left(x,\frac{1}{2}\right)c_r}{\sinh\frac{x}{2}}-\frac{c_0}{\sinh\frac{x}{2}}.\end{aligned} \tag{6.31}$$

Introduciendo los polinomios

$${}^{b}g_t(x)=\sum_{r=0}^{m}{}^{b}h^{(r)}_t\frac{x^r}{r!},$$

tenemos

$$\begin{aligned}\Delta_{m,\,\frac{1}{2},\lambda,\,i}(x)-\Delta_{m,\,\frac{1}{2},\lambda,\,i+1}(x) &= \sum_{l\geq 0}\Big(e^{(l+1)x}\;{}^{b}g_{(l+\frac{1}{2})N+i-\frac{1}{2}}(-x)\\ &\qquad +e^{-lx}\;{}^{b}g_{(l+\frac{1}{2})N-i+\frac{1}{2}}(x)\Big)\end{aligned} \tag{6.32}$$

y

$$e^{\frac{x}{2}}\,\Delta_{m,\,\frac{1}{2},\lambda,\,1}(x)+e^{-\frac{x}{2}}\Delta_{m,\,\frac{1}{2},\lambda,\,1}(-x)=$$
$$\sum_{k=0}^{2N-1}\sum_{l\geq 1}\sum_{r=0}^{m}\left({}^{b}h^{(r)}_{(l-\frac{1}{2})N+k-\frac{1}{2}}\;-\delta_{l,0}((-1)^{r}\,{}^{b}\lambda_{\frac{N}{2}-\frac{1}{2}}-\,{}^{b}\lambda_{\frac{3N}{2}-\frac{1}{2}})\right)\eta_r\left(x,-l-\frac{1}{2}\right). \tag{6.33}$$

Finalmente, consideremos $s = 0$. Usando (6.22) y (4.10) tenemos que

$$\Delta_{m,\,0,\,\lambda,\,i}(x) = \sum_{l\geq 1}\sum_{r=0}^{m}\left(\frac{{}^{d}\lambda_{(l-1)N+i}^{(r)}}{r!}(-x)^{r}e^{x\left(-l+\frac{1}{2}\right)} - \frac{{}^{d}\lambda_{lN-i+1}^{(r)}}{r!}x^{r}e^{x\left(l-\frac{1}{2}\right)}\right) + \sum_{r=0}^{m}\frac{\eta_r(x,0)c_r}{\sinh\frac{x}{2}} - \frac{c_0}{\sinh\frac{x}{2}}. \tag{6.34}$$

Introduciendo los polinomios

$${}^{d}g_t(x) = \sum_{r=0}^{m} {}^{d}h_t^{(r)}\frac{x^r}{r!},$$

resulta

$$\Delta_{m,\,0,\,\lambda,\,i}(x) - \Delta_{m,\,0,\,\lambda,\,i+1}(x) = \sum_{l\geq 0}\left(e^{\left(l+\frac{1}{2}\right)x}\ {}^{d}g_{lN+i}(-x) + e^{\left(-l-\frac{1}{2}\right)x}\ {}^{d}g_{(l+1)N-i}(x)\right), \tag{6.35}$$

$$e^{\frac{x}{2}}\,\Delta_{m,0,\,\lambda,\,1}(x) + e^{-\frac{x}{2}}\Delta_{m,\,0,\,\lambda,\,1}(-x) = \sum_{k=0}^{2N-1}\sum_{l\geq 1}\sum_{r=0}^{m}\left({}^{d}h_{(l-1)N+l}^{(r)} - \delta_{l,\,0}\left[{}^{d}\lambda_N^{(r)} - c_r - \delta_{r,\,0}\,c_0\right]\right)\eta_r(x,-l) \tag{6.36}$$

y si N es par, también tenemos

$$\Delta_{m,\,0,\,\lambda,\,\frac{N}{2}}(x) + \Delta_{m,\,0,\,\lambda,\,\frac{N}{2}}(-x) = \sum_{l\geq 0}\sum_{r=0}^{m} {}^{d}h_{\left(l+\frac{1}{2}\right)N}^{(r)}\,\eta_r\left(x,-l-\frac{1}{2}\right). \tag{6.37}$$

Ahora podemos realizar los $\widehat{\mathcal{D}}_{\sigma}^{N}$-módulos cuasifinitos de peso máximo i-rreducibles cuasifinitos con carga central c y series generatrices $\Delta_i(x)$ tales que

$$G_1(x) = 4\left(\Delta_1(x)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + \Delta_1(-x)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right)$$

es un cuasipolinomio impar.

$$F_i(x) = \Delta_i(x) - \Delta_{i+1}(x)$$

para $i = 1, \ldots, \left[\frac{N}{2}\right] - \delta_{N,\text{par}}$, son cuasipolinomios, y cuando N es par también tenemos que

$$F_{\frac{N}{2}}(x) = \frac{\Delta_{\frac{N}{2}}(x) + \Delta_{\frac{N}{2}}(-x)}{2}$$

es un cuasipolinomio impar. Podemos escribir

$$F_i(x) = \sum_{s\in\mathbb{C}} p_{i,s}(x)e^{sx} \tag{6.38}$$

con $p_{i,s}(x)$ polinomios,

$$G_1(x) = \sum_{s\in\mathbb{C}} \sum_{j=0}^{m_s} a_{s,j}\, \eta_j(x,s) \tag{6.39}$$

y

$$F_{\frac{N}{2}}(x) = \sum_{s\in\mathbb{C}} \sum_{j=0}^{\widetilde{m}_s} b_{s,j}\, \eta_j(x,s) \tag{6.40}$$

donde $a_{s,j}$, $b_{s,j} \in \mathbb{C}$ y $a_{s,j} \neq 0$, $b_{s,j} \neq 0$ para sólo un número finito $s \in \mathbb{C}$.

Observación 6.16. Como, por definición de η_r, tenemos que $\eta_r(x,-s) = (-1)^r\eta_r(x,s)$, para evitar ambigüedades en las expresiones anteriores de $G_1(x)$ y $F_{\frac{N}{2}}(x)$, elegiremos el parámetro s siguiendo las siguientes reglas: cuando $s \in \mathbb{Z}$, requeriremos $s \leq 0$; cuando $s \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$, requeriremos $s \leq \frac{1}{2}$; cuando $s \notin \mathbb{Z}/2$, requeriremos que $\operatorname{Im} s > 0$ si $\operatorname{Im} s \neq 0$, o $s - [s] < \frac{1}{2}$ si $s \in \mathbb{R}$, donde por $\operatorname{Im} s$ denotamos la parte imaginaria de s y $[s]$ el entero más cercano a s el cual no es mayor que s. Descomponemos el conjunto $\{s \in \mathbb{C} : a_{s,j} \neq 0 \text{ para algún}\, j\} \bigcup \{s \in \mathbb{C} : b_{s,j} \neq 0 \text{ para algún}\, j\} \bigcup \{s \in \mathbb{C} : p_{i,s}(x) \neq 0\}$ dentro de una unión disjunta de clases de equivalencias bajo las condiciones: $s \sim \dot{s}$ si y sólo si $s = \pm\dot{s} \pmod{\mathbb{Z}}$. Elegimos un representante s en una clase de equivalencia S tal que $s = 0$ si la clase de quivalencia está en $\mathbb{Z}$, y $s = \frac{1}{2}$ si la clase de equivalencia está en $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$. Sea $S = \{s, s-k_1, s-k_2, \cdots\}$ una de tales clases de equivalencia y tomamos $m = \max_{s\in S}\{m_s, \widetilde{m}_s, \deg p_{i,s}\}$. Ponemos $k_0 = 0$. Es fácil ver que si $s = 0$ o $s = \frac{1}{2}$, entonces $k_i \in \mathbb{N}$.

Asociaremos a cada S el $\mathfrak{g}^{[m]}$–módulo $L_S^{[m]}(\lambda_S)$ del siguiente modo:

• Si $s \notin \mathbb{Z}/2$, sea

$$\sum_{l=1}^{2N-1} {}^a h^{(r)}_{(k_j-2)N+l} + \delta_{1,k_j} c_r = \frac{1}{4}\, a_{-k_j+s+1\,,r}, \quad c_0 = -\frac{1}{4}\, a_{0,0}, \tag{6.41}$$

$${}^a h^{(r)}_{k_j N-i} = \left(\frac{d}{dx}\right)^r p_{i,(-k_j+s+\frac{1}{2})}(0), \tag{6.42}$$

$${}^a h^{(r)}_{(k_j-1)N+i} = (-1)^r \left(\frac{d}{dx}\right)^r p_{i,(k_j-s-\frac{1}{2})}(0), \tag{6.43}$$

y si N es par

$${}^a h^{(r)}_{\left(k_j-\frac{1}{2}\right)N} = 2b_{-k_j+s+\frac{1}{2},\,r} \tag{6.44}$$

para $r = 0\cdots m$ y $j = 0,1,2,\cdots$.

Asociamos a S el $\widehat{\mathfrak{gl}}^{[m]}_\infty$−módulo $L^{[m]}_S(\lambda_S)$ con cargas centrales

$$c_r = \sum_i \sum_{k_j} \left({}^a h^{(r)}_{(k_j-1)N+i} +{}^a h^{(r)}_{k_j N-i}\right) + \sum_{k_j} \left({}^a h^{(r)}_{(k_j-1)N} + \delta_{N,\text{par}}\, {}^a h^{(r)}_{\left(k_j-\frac{1}{2}\right)N}\right) \tag{6.45}$$

y etiquetas

$$\begin{aligned} \lambda^{(r)}_j \;\; = \;\; & \sum_{(k_j-1)N+i\geq j} {}^a\widetilde{h}^{(r)}_{(k_j-1)N+i} + \sum_{k_j N-i \geq j} {}^a\widetilde{h}^{(r)}_{k_j N-i} \\ & + \delta_{N,\text{par}} \sum_{\left(k_j-\frac{1}{2}\right)N\geq j} {}^a\widetilde{h}^{(r)}_{\left(k_j-\frac{1}{2}\right)N} + \sum_{(k_j-1)N\geq j} {}^a\widetilde{h}^{(r)}_{(k_j-1)N}, \end{aligned} \tag{6.46}$$

donde ${}^a\widetilde{h}^{(r)}_k = {}^a h^{(r)}_k - c_r \delta_{k,0}$.

• Si $s = 0$, ponemos

$$(1-\delta_{k_j,\,0}) \sum_{l=1}^{2N-1} {}^d h^{(r)}_{(k_j-1)N+l} - \delta_{k_j,\,0} \left[{}^d\lambda^{(r)}_N - c_r - \delta_{r,\,0}\, c_0\right] = \frac{1}{4}\, a_{-k_j,\,r},$$

$${}^d h_{k_j N+i} = (-1)^r \left(\frac{d}{dx}\right)^r p_{i\,,k_j+\frac{1}{2}}(0), \tag{6.47}$$

$${}^d h_{(k_j+1)N-i} = \left(\frac{d}{dx}\right)^r p_{i\,,-k_j-\frac{1}{2}}(0), \tag{6.48}$$

y si N es par

$$ {}^{d}h^{(r)}_{\left(k_j+\frac{1}{2}\right)N} = 2b_{-k_j-\frac{1}{2},r} \tag{6.49} $$

para $r = 0\cdots m$ y $j = 0,1,2\cdots$.

Asociamos a S el $d_\infty^{[m]}-$módulo $L_S^{[m]}(\lambda_S)$ con cargas centrales

$$ c_r = \sum_i \sum_{k_j} \left({}^{d}h^{(r)}_{k_jN+i} + {}^{d}h^{(r)}_{(k_j+1)N-i} \right) + \sum_{k_j} \left(\delta_{N,\text{par}}\, {}^{d}h^{(r)}_{\left(k_j+\frac{1}{2}\right)N} + {}^{d}h^{(r)}_{k_jN} \right) \tag{6.50} $$

y etiquetas

$$ \begin{aligned} \lambda_j^{(r)} \quad = \quad & \sum_{k_jN+i\geq j} {}^{d}h^{(r)}_{k_jN+i} + \sum_{(k_j+1)N-i\geq j} {}^{d}h^{(r)}_{(k_j+1)N-i} + \sum_{k_jN\geq j} {}^{d}h^{(r)}_{k_jN} \\ & + \delta_{N,\text{par}} \sum_{\left(k_j+\frac{1}{2}\right)N\geq j} {}^{d}h^{(r)}_{\left(k_j+\frac{1}{2}\right)N}. \end{aligned} \tag{6.51} $$

- Si $s = \frac{1}{2}$, y N par

$$ \begin{aligned} (1-\delta_{k_j,0}) \left(\sum_{k=1}^{2N-1} {}^{d}h^{(r)}_{\left(k_j-\frac{1}{2}\right)N+k} \right) \quad - \quad & \delta_{0,k_j} \left((-1)^r\, {}^{d}\lambda^{(r)}_{\frac{1}{2}N} + {}^{d}\lambda^{(r)}_{\frac{3}{2}N} - (-1)^r c_r \right) \\ & = \frac{1}{4} a_{-k_j-\frac{1}{2},r}, \end{aligned} \tag{6.52} $$

$$ c_0 = \frac{1}{4} a_{0,0}, \tag{6.53} $$

$$ {}^{d}h_{\left(k_j+\frac{1}{2}\right)N+i} = (-1)^r \left(\frac{d}{dx}\right)^r p_{i,\,k_j+1}(0), \tag{6.54} $$

$$ {}^{d}h_{\left(k_j+\frac{1}{2}\right)N-i} = \left(\frac{d}{dx}\right)^r p_{i,\,-k_j}(0), \tag{6.55} $$

$$ (1-\delta_{k_j,0})\, {}^{d}h^{(r)}_{k_jN} - \delta_{k_j,0}\, {}^{d}\lambda^{(r)}_{N} = 2b_{-k_j+2,\,r} \tag{6.56} $$

para $r = 0\cdots m$ y $j = 0,1,\cdots$.

Asociamos a S el $d_\infty^{[m]}-$módulo $L_S^{[m]}(\lambda_S)$ con cargas centrales

$$ c_r = \sum_i \sum_{k_j} \left({}^{d}h^{(r)}_{\left(k_j+\frac{1}{2}\right)N+i} + {}^{d}h^{(r)}_{\left(k_j+\frac{1}{2}\right)N-i} \right) + \sum_{k_j} \left({}^{d}h^{(r)}_{k_jN} + {}^{d}h^{(r)}_{\left(k_j+\frac{1}{2}\right)N} \right) \tag{6.57} $$

y etiquetas

$$\begin{aligned}\lambda_j^{(r)} \quad = & \sum_{(k_j+\frac{1}{2})N+i\geq j} {}^d h^{(r)}_{(k_j+\frac{1}{2})N+i} + \sum_{(k_j+\frac{1}{2})N-i\geq j} {}^d h^{(r)}_{(k_j+\frac{1}{2})N-i} \\ & + \sum_{k_jN\geq j} {}^d h^{(r)}_{k_jN} + \sum_{(k_j+\frac{1}{2})N\geq j} {}^d h^{(r)}_{(k_j+\frac{1}{2})N}.\end{aligned} \tag{6.58}$$

• Si $s = \frac{1}{2}$, y N impar, definimos

$$\begin{aligned}(1-\delta_{k_j,0})\left(\sum_{k=1}^{2N-1} {}^b h^{(r)}_{(k_j-\frac{1}{2})N-\frac{1}{2}+k}\right) \quad - \quad \delta_{0,k_j}\left((-1)^r\,{}^b\lambda^{(r)}_{\frac{1}{2}N-\frac{1}{2}} + {}^b\lambda^{(r)}_{\frac{3}{2}N-\frac{1}{2}} - (-1)^r c_r\right) \\ = \frac{1}{4} a_{-k_j-\frac{1}{2},\,r},\end{aligned} \tag{6.59}$$

$$c_0 = \frac{1}{4} a_{0,0}, \tag{6.60}$$

$${}^b h_{(k_j+\frac{1}{2})N+i-\frac{1}{2}} = (-1)^r \left(\frac{d}{dx}\right)^r p_{i,\,k_j+1}(0), \tag{6.61}$$

$${}^b h_{(k_j+\frac{1}{2})N-i-\frac{1}{2}} = \left(\frac{d}{dx}\right)^r p_{i,\,-k_j}(0), \tag{6.62}$$

para $r = 0 \cdots m$ y $j = 0, 1, 2 \cdots$.

Asociamos a S el $b_\infty^{[m]}$−módulo $L_S^{[m]}(\lambda_S)$ con cargas centrales

$$c_r = \sum_i \sum_{k_j} \left({}^b h^{(r)}_{(k_j+\frac{1}{2})N+i-\frac{1}{2}} +{}^b h^{(r)}_{(k_j+\frac{1}{2})N-i-\frac{1}{2}}\right) + \sum_{k_j} {}^b h^{(r)}_{k_jN+[\frac{N}{2}]} \tag{6.63}$$

y etiquetas

$$\begin{aligned}\lambda_j^{(r)} \quad = & \sum_{(k_j+\frac{1}{2})N+i-\frac{1}{2}\geq j} {}^b h^{(r)}_{(k_j+\frac{1}{2})N+i-\frac{1}{2}} + \sum_{(k_j+\frac{1}{2})N-i-\frac{1}{2}\geq j} {}^b h^{(r)}_{(k_j+\frac{1}{2})N-i-\frac{1}{2}} \\ & + \sum_{k_jN+[\frac{N}{2}]\geq j} {}^b h^{(r)}_{k_jN+[\frac{N}{2}]}.\end{aligned} \tag{6.64}$$

Denotamos por $\{s_1, s_2, \cdots, s_M\}$ un conjunto de representantes de las clases de equivalencia en el conjunto $\{s \in \mathbb{C} : a_{s,j} \neq 0$ para algún $j\} \bigcup \{s \in$

$\mathbb{C} : b_{s,j} \neq 0$ para algún $j\} \bigcup \{s \in \mathbb{C} : p_{i,s}(x) \neq 0\}$. Por Teorema 6.15 el $\widehat{\mathcal{D}}_\sigma^N$-módulo $L_{\vec{s}}^{[\vec{m}]}(\vec{\lambda})$ es irreducible para $\vec{s} = (s_1, s_2, \cdots, s_M)$ tal que $s_i \in \mathbb{Z}$ implica $s_i = 0$, $s_i \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ implica $s_i = \frac{1}{2}$, y $s_i \neq \pm s_j \bmod \mathbb{Z}$ para $i \neq j$. Tenemos

$$\Delta_{\vec{m},\vec{s},\vec{\lambda}}(x) = \sum_i \Delta_{m_i,s_i,\lambda_i}(x) \quad \text{y} \quad c = \sum_i c_0(i).$$

Por Teorema 6.5 y resumiendo todo lo anterior hemos probado lo siguiente.

Teorema 6.17. *Sea V un $\widehat{\mathcal{D}}_\sigma^N$-módulo de peso máximo cuasifinito e irreducible con carga central c y series generatrices $\Delta_i(x)$ tal que*

$$G_1(x) = 4\left(\Delta_1(x)e^{\frac{x}{2}} + \Delta_1(-x)e^{-\frac{x}{2}}\right)$$

es un cuasipolinomio impar.

$$F_k(x) = \Delta_k(x) - \Delta_{k+1}(x)$$

para $k = 1, \ldots, \left[\frac{N}{2}\right] - \delta_{N,par}$, son cuasipolinomios, y si N es par

$$F_{\frac{N}{2}}(x) = \frac{\Delta_{\frac{N}{2}(x)} + \Delta_{\frac{N}{2}}(-x)}{2}$$

es un cuasipolinomio impar. Entonces V es isomorfo al producto tensorial de módulos $L_s^{[m]}(\lambda_S)$ para diferentes clases de equivalencias S.

7 La subálgebra $\widehat{\mathcal{D}}_p^N$.

En esta sección clasificamos los módulos de peso máximo cuasifinitos irreducibles de la subálgebra de Lie $\mathcal{D}_p^N$. También los realizamos en términos de la teoría de representaciones del álgebra de Lie compleja $\widehat{g\ell}_\infty^{[m]}$.

Consideremos la siguiente familia de subálgebras de $\mathcal{D}^N$ $(p \in \mathbb{C}[x])$:

$$\mathcal{D}_p^N = \mathcal{D}^N p(D) I,$$

donde I es la matriz identidad $N \times N$. Denotamos por $\widehat{\mathcal{D}}_p^N$ la extensión central de $\mathcal{D}_p^N$ por un centro $\mathbb{C}C$ de dimensión 1 correspondiente a la restricción del 2-cociclo ψ. Observemos que cuando $p(x) = x$, denotaremos $\widehat{\mathcal{D}}_x^N$ como $\widehat{\mathcal{D}}_0^N$. Notemos que $\widehat{\mathcal{D}}_x^N$ en [12] es denotado por W_∞^N.

Como $|p(D)| = 0$ para cualquier polinomio p, entonces $\widehat{\mathcal{D}}_p^N$ hereda la graduación principal de $\widehat{\mathcal{D}}^N$, es decir,

$$\widehat{\mathcal{D}}_p^N = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} (\widehat{\mathcal{D}}_p^N)_j.$$

Observación 7.1. (*a*) Tenemos que las siguientes propiedades son satisfechas por $\widehat{\mathcal{D}}_p^N$:

($P1$) $(\widehat{\mathcal{D}}_p^N)_0$ es conmutativa,

($P2$) si $a \in (\widehat{\mathcal{D}}_p^N)_{-j}$ $(j > 0)$ y $[a, (\widehat{\mathcal{D}}_p^N)_1] = 0$, entonces $a = 0$.

Observemos que (P_1) es inmediata de la definición de $(\widehat{\mathcal{D}}_p^N)_0$. (P_2) resulta de calcular el corchete

$$0 = [a\,,\, p(D)e_{q+1,q}]$$

con $a \in (\widehat{\mathcal{D}}_p^N)_{-j}$, y $j, q \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq N-1$.

(*b*) Por Lemas 2.1 y 2.2 tenemos que para toda subálgebra parabólica $\mathfrak{p}$ de $\widehat{\mathcal{D}}_p^N$, $\mathfrak{p}_{-k} \neq 0$, implica $\mathfrak{p}_{-k+1} \neq 0$ y $\mathfrak{p}^a$ es la subálgebra minimal conteniendo a.

Sea $\mathfrak{p}$ una subálgebra parabólica de $\widehat{\mathcal{D}}_p^N$. Usando el hecho que $\widehat{\mathcal{D}}_p^N$ hereda la graduación principal de $\widehat{\mathcal{D}}^N$ junto con la fórmula (5.4) y observando que para cada entero positivo j existe un entero positivo k tal que $j = kN + r = (k+1)N - (N-r)$ con $0 \leqslant r \leqslant N-1$, podemos describir $\mathfrak{p}_{-j}$ como la subálgebra generada por:

$$\begin{aligned}\mathfrak{p}_{-j} = &\Big\{ z^{-k} f_i(D)\, e_{i,\,i+r} \;:\; f_i \in I_{-j}^i \quad \text{y} \quad i = 1, \cdots, N-r \Big\} \\ &\bigcup (1-\delta_{r,0}) \Big\{ z^{-(k+1)} g_i(D)\, e_{i,\,i-N+r} : \, g_i \in L_{-j}^i \text{ y } \quad i = N-r+1, \cdots, N \Big\}\end{aligned}$$

donde I_{-j}^i y L_{-j}^i son subespacios de $p(w)\mathbb{C}[w]$. Dados $f_i(w)$ y $g_i(w)$ polinomios en la variable w con $g_i \in I_{-j}^i$, e i tal que $1 \leq i \leq N-r$, calculando los corchetes

$$\Big[f_i(D)p(D)e_{i,i},\, z^{-k} g_i(D) e_{i,i+r} \Big],$$

vemos que I_{-j}^i satisface

$$A_j^i I_{-j}^i \subseteq I_{-j}^i, \tag{7.1}$$

donde

$$A_j^i = \Big\{ f_i(w-k)p(w-k) - \delta_{r,0} f_i(w)p(w) : \, f_i(w) \in \mathbb{C}[w] \Big\}.$$

Fijamos l con $N - r + 1 \leq l \leq N$. Dados $f_l(w)$ y $g_l(w)$ polinomios en la variable w con $g_l(w) \in L_{-j}^l$, computando el corchete

$$\Big[f_l(D)p(D)e_{l,l},\, t^{-k+1} g_l(D) e_{l,l-N+r} \Big] \qquad \text{si} \quad r \neq 0,$$

vemos que L^l_{-j} satisface

$$A^l_j L^l_{-j} \subseteq L^l_{-j}, \tag{7.2}$$

donde

$$A^l_j = (1-\delta_{r,0})\Big\{ f_l\,(w-(k+1))\,p(w-(k+1)) \,:\, f_l(w) \in \mathbb{C}[w] \Big\}.$$

Por lo tanto hemos probado el siguiente resultado

Lema 7.2. *a)* I^i_{-j} *y* L^l_{-j} *son ideales para todo* $j \in \mathbb{N}$ *donde* $j = kN + r$ *con* $0 \leqslant r \leqslant N-1$ *y* $1 \le i \le N-r$, $N-r+1 \le l \le N$ *si* $deg\, p \le 2$.

b) Si $I^i_{-j} \neq 0$, *y* $L^l_{-j} \neq 0$ *entonces tienen codimensión finita en* $\mathbb{C}[w]$.

Demostración. La prueba es análoga a la del Lema 6.2 □

Ahora tenemos el siguiente resultado importante.

Proposición 7.3. *(a) Todo elemento no nulo* $d \in (\widehat{\mathcal{D}}^N_p)_{-1}$ *que se escribe como*

$$\begin{aligned} d &= \sum_{i=1}^{N-1} b_i(D) e_{i,\,i+1} + t^{-1} b_N(D) e_{N,\,1} \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} a_i(D)p(D) e_{i,\,i+1} + t^{-1} a_N(D)p(D) e_{N,\,1} \in \Big(\widehat{\mathcal{D}}^N_p\Big)_{-1} \end{aligned}$$

tal que los polinomios $a_i(w)$ *son no nulos, es no degenerado.*

(b) Sea $d \in (\widehat{\mathcal{D}}^N_p)_{-1}$ *como en (a). Entonces,*

$$\begin{aligned} (\widehat{\mathcal{D}}^N_p)^d_0 &:= [(\widehat{\mathcal{D}}^N_p)_1, d] \\ &= span\Big\{ b_j(D) D^l p(D)\Big(e_{j+1,\,j+1} - e_{j,\,j}\Big) \,: \\ &\qquad\qquad j = 1, \cdots, N-1,\, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\Big\} \\ &\bigcup \Big\{ b_N(D) D^l p(D-1) e_{1,\,1} - b_N(D+1)(D+1)^l p(D) e_{N,\,N} \\ &\qquad\qquad + p(-1) b_N(0) C \,:\, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\Big\}. \end{aligned}$$

Demostración. Sea $d \in (\widehat{\mathcal{D}}^N_p)_{-1}$ como en (a). Dado que cada $a_i(w)$ es un polinomio no nulo, L^N_{-j} e $I^i_{-j} \neq 0$ para $1 \le i \le N-1$ y para todo $j \ge 1$. Entonces, por Lema 7.2 (b), parte (a) queda demostrada. Finalmente, parte (b) se prueba computando el conmutador $[a, d]$ con $a = D^l p(D) e_{j+1,\,j} + t\, D^l p(D) e_{1,\,N}$, $j = 1 \ldots N-1$ y $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. □

Resumiendo, tenemos que las siguientes propiedades son satisfechas por $\widehat{\mathcal{D}}_p^N$:

$(P1)$ $(\widehat{\mathcal{D}}_p^N)_0$ es conmutativa,

$(P2)$ Si $a \in (\widehat{\mathcal{D}}_p^N)_{-j}$ $(j > 0)$ y $[a, (\widehat{\mathcal{D}}_p^N)_1] = 0$, entonces $a = 0$,

$(P3)$ Si $\mathfrak{p}$ es una subálgebra parabólica no degenerada de $\widehat{\mathcal{D}}_p^N$, entonces existe un elemento no degenerado a tal que $\mathfrak{p}^a \subseteq \mathfrak{p}$.

Observar que (P_3) se sigue de la Proposición 7.3 $a)$ y el hecho de que $\mathfrak{p}$ es no degenerada.

7.1 Caracterización de los módulos de peso máximo cuasifinitos de $\widehat{\mathcal{D}}_p^N$

Como $\widehat{\mathcal{D}}_p^N$ satisface (P_1), (P_2) y (P_3), aplicamos el Teorema 2.4 a $\mathfrak{g} = \widehat{\mathcal{D}}_p^N$.

Teorema 7.4. *Las siguientes condiciones en $\lambda \in (\widehat{\mathcal{D}}_p^N)^*$ son equivalentes:*

(a) $M(\widehat{\mathcal{D}}_p^N; \lambda)$ *contiene un vector singular* $av_\lambda \in M(\widehat{\mathcal{D}}_p^N; \lambda)_{-1}$,*donde* $a \in (\widehat{\mathcal{D}}_p^N)_{-1}$ *es no degenerado ;*

(b) Existe un elemento no degenerado $a \in (\widehat{\mathcal{D}}_p^N)_{-1}$, *tal que* $\lambda\Big([(\widehat{\mathcal{D}}_p^N)_1, a]\Big) = 0$;

(c) $L(\widehat{\mathcal{D}}_p^N; \lambda)$ *es cuasifinito;*

(d) Existe un elemento no degenerado $a \in (\widehat{\mathcal{D}}_p^N)_{-1}$, *tal que* $L(\widehat{\mathcal{D}}_p^N; \lambda)$ *es el cociente irreducible del módulo de Verma generalizado* $M(\widehat{\mathcal{D}}_p^N; \mathfrak{p}^a, \lambda)$.

Escribiremos $M(\lambda)$ y $L(\lambda)$ en lugar de $M(\widehat{\mathcal{D}}_p^N, \lambda)$ y $L(\widehat{\mathcal{D}}_p^N, \lambda)$ cuando no haya ambigüedad.

Una funcional $\lambda \in (\widehat{\mathcal{D}}_p^N)_0^*$ es descripta por sus *etiquetas*

$$\Delta_{i,l} = -\lambda\Big(D^l p(D) e_{i,i}\Big) \quad i = 1, \cdots, N; \quad l \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \tag{7.3}$$

y *carga central* $c = \lambda(C)$. Consideraremos las series generatrices

$$\Delta_i(x) = \sum_{l \geqslant 0} \frac{x^l}{l!} \Delta_{i,l} \quad i = 1, \ldots, N. \tag{7.4}$$

Tenemos la siguiente caracterización de módulos de peso máximo cuasifinitos sobre $\widehat{\mathcal{D}}_p^N$.

Teorema 7.5. *Un $\widehat{\mathcal{D}}_p^N$-módulo $L(\lambda)$ es cuasifinito si y sólo si*

$$\Delta_N(x) = p\left(\frac{d}{dx}\right)\frac{\varphi_N(x)}{e^x - 1},$$

$$\Delta_i(x) = p\left(\frac{d}{dx}\right)\frac{\varphi_i(x)(e^x - 1) + \varphi_N(x)}{e^x - 1},,$$

donde $\varphi_i(x)$ son cuasipolinomios para $i = 1, \cdots, N-1$ y $\varphi_N(0) = 0$.

Demostración. De la Proposición 7.3 (b) y Teorema 7.4 parte (b), tenemos que $L(\lambda)$ es cuasifinito si y sólo si existen polinomios (mónicos) $b_i(w) = p(w)a_i(w)$, con $i = 1, \cdots, N$ tal que

$$\lambda\Big(b_i(D)p(D)D^l\left[e_{i+1,\,i+1} - e_{i,\,i}\right]\Big) = 0, \quad \text{para} \quad i = 1, \cdots, N-1,$$

$$\lambda\Big(b_N(D)p(D-1)D^l e_{1,\,1} - b_N(D+1)p(D)(D+1)^l e_{N,\,N}\Big) + p(-1)b(0)c = 0.$$

para algún $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, o equivalentemente

$$0 = \lambda\left(b_i(D)p(D)e^{xD}\left[e_{i+1,\,i+1} - e_{i,\,i}\right]\right) \quad \text{para} \quad i = 1, \cdots, N-1, \tag{7.5}$$

$$0 = \lambda\Big(b_N(D)p(D-1)e^{xD}e_{1,\,1} - b_N(D+1)p(D)e^{x(D+1)}e_{N,\,N}\Big) + p(-1)b(0)c. \tag{7.6}$$

Ahora, tomaremos $\Gamma_i(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j^i x^j$ una solución de

$$\Delta_i(x) = p\left(\frac{d}{dx}\right)\Gamma_i(x).$$

Usando que $\Delta_i(x) = -\lambda\left(p\left(\frac{d}{dx}\right)e^{xD}e_{i,\,i}\right)$ y las identidades

$$f(D)e^{xD} = f\left(\frac{d}{dx}\right)(e^{xD}), \qquad p(D)e^{x(D+1)} = e^x p(D)e^{xD} = e^x p\left(\frac{d}{dx}\right)e^{xD},$$

$$e^x p\left(\frac{d}{dx}\right)f(x) = p\left(\frac{d}{dx} - 1\right)e^x f(x),$$

las condiciones (10.3) y (10.4) podemos reescribirlas como sigue:

$$\begin{aligned}
0 &= \lambda\left(b_i(D)p(D)e^{xD}\left[e_{i+1,\,i+1} - e_{i,\,i}\right]\right) \\
&= \lambda\left(b_i(D)p\left(\frac{d}{dx}\right)e^{xD}\left[e_{i+1,\,i+1} - e_{i,\,i}\right]\right) \\
&= -a_i\left(\frac{d}{dx}\right)p\left(\frac{d}{dx}\right)\left[\Delta_{i+1}(x) - \Delta_i(x)\right] \\
&= a_i\left(\frac{d}{dx}\right)p\left(\frac{d}{dx}\right)p\left(\frac{d}{dx}\right)\left[\Gamma_i(x) - \Gamma_{i+1}(x)\right]
\end{aligned}$$

para $i = 1, \cdots, N$ y

$$
\begin{aligned}
0 &= \lambda \Big(b_N(D)p(D-1)e^{xD}e_{1,1} - b_N(D+1)p(D)e^{x(D+1)}e_{N,N} \Big) + p(-1)b(0)c \\
&= \lambda \left(b_N\left(\frac{d}{dx}\right) p\left(\frac{d}{dx} - 1\right) e^{xD}e_{1,1} - b_N\left(\frac{d}{dx}\right) \Big(p(D)e^{x(D+1)} \Big) e_{N,N} \right) \\
&\quad + p(-1)b(0)c \\
&= \lambda \left(b_N\left(\frac{d}{dx}\right) p\left(\frac{d}{dx} - 1\right) e^{xD}e_{1,1} - b_N\left(\frac{d}{dx}\right) \left(e^x p\left(\frac{d}{dx}\right) e^{xD} \right) e_{N,N} \right) \\
&\quad + p(-1)b(0)c \\
&= -a_N\left(\frac{d}{dx}\right) \left(p\left(\frac{d}{dx} - 1\right) \Delta_1(x) - p\left(\frac{d}{dx}\right) e^x \Delta_N(x) + p(-1)p(0)c \right) \\
&= a_N\left(\frac{d}{dx}\right) p\left(\frac{d}{dx}\right) p\left(\frac{d}{dx} - 1\right) \left(e^x\Gamma_N(x) - \Gamma_1(x) + c \right).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $L(\lambda)$ es cuasifinito si y sólo si existen polinomios $a_i(w)$ tales que

$$
a_i\left(\frac{d}{dx}\right) p\left(\frac{d}{dx}\right) p\left(\frac{d}{dx}\right) [\Gamma_i(x) - \Gamma_{i+1}(x)] = 0 \quad \text{for} \quad i = 1, \cdots, N-1, \tag{7.7}
$$

$$
a_N\left(\frac{d}{dx}\right) p\left(\frac{d}{dx}\right) p\left(\frac{d}{dx} - 1\right) \left(e^x\Gamma_N(x) - \Gamma_1(x) + c \right) = 0 \tag{7.8}
$$

Así, $L(\lambda)$ es cuasifinito si y sólo si

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_i(x) - \Gamma_{i+1}(x), \quad \text{para} \quad i = 1, \cdots, N-1, \\
&e^x\Gamma_N(x) - \Gamma_1(x) + c
\end{aligned} \tag{7.9}
$$

son cuasipolinomios, probando el teorema. □

Observación 7.6. Es fácil ver que este resultado coincide con el caso $N = 1$ desarrollado en [7].

Denotamos por

$$
\begin{aligned}
F_i(x) &:= \Gamma_i(x) - \Gamma_{i+1}(x), \quad \text{para} \quad i = 1, \cdots, N-1, \\
F_N(x) &:= e^x\Gamma_N(x) - \Gamma_1(x) + c.
\end{aligned} \tag{7.10}
$$

Entonces cada unos de los cuasipolinomios $F_i(x)$ $(i = 1, \cdots, N)$ podemos escribirlos en la forma

$$
F_i(x) = \sum_{r \in \mathbb{C}} p_{i,r}(x)\, e^{rx}, \quad p_{i,r}(x) \neq 0,\ p_{i,r} \in \mathbb{C}[x], \tag{7.11}
$$

donde estas expresiones son únicas. Los números r que aparecen en (7.11) son llamados los *exponentes* del $\widehat{\mathcal{D}}_p^N$-módulo $L(\lambda)$.

7.2 Relación entre $\widehat{\mathcal{D}}_0^N$ y $\widehat{g\ell}_\infty^{[m]}$

Definimos una completación $\mathcal{D}_p^{N\mathcal{O}}$ de $\mathcal{D}_p^N$ que consiste de todos los operadores diferenciales de la forma

$$\{z^k f(D)p(D)e_{i,j} \,:\, k \in \mathbb{Z},\, 1 \leqslant i,j \leqslant N\,,\, f \in \mathcal{O}\}.$$

Entonces el 2-cociclo ψ en $\mathcal{D}_p^N$ se extiende a un 2-cociclo en $\mathcal{D}_p^{N\mathcal{O}}$. Sea $\widehat{\mathcal{D}}_p^{N\mathcal{O}} = \mathcal{D}_p^{N\mathcal{O}} \bigoplus \mathbb{C}C$ la correspondiente extensión central. Entonces tenemos la graduación principal de $\widehat{\mathcal{D}}_p^{N\mathcal{O}} = \bigoplus_{l\in\mathbb{Z}}(\widehat{\mathcal{D}}_p^{N\mathcal{O}})_l$ por restricción de la graduación principal de $\widehat{D}^{N\mathcal{O}}$.

En lo que sigue, supondremos que $p(x) = x$, ie consideraremos el álgebra $\widehat{\mathcal{D}}_0^N$. Usaremos la notación $\mathcal{D}_0^N := \mathcal{D}_x^N$ and $\mathcal{D}_0^{N\mathcal{O}} := \mathcal{D}_x^{N\mathcal{O}}$.

Dado $s \in \mathbb{C}$, tenemos el morfismo $\varphi_s^{[m]}$ introducido en (5.11). Restringiendo esos homomorfismos a $\mathcal{D}_0^N$, obtenemos una familia de homomorfismos de álgebras de Lie $\varphi_s^{[m]} : \mathcal{D}_0^N \to g\ell_\infty^{[m]}$ (resp. a $\mathcal{D}_0^{N\mathcal{O}}$, $\varphi_s^{[m]} : \mathcal{D}_0^{N\mathcal{O}} \to g\ell_\infty^{[m]}$), más precisamente

$$\varphi_s^{[m]}\Big(z^k f(D)D\, e_{i,j}\Big) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} f\left(-l+s+u\right)\left(-l+s+u\right)E_{(l-k)N-i+1,\, lN-j+1}. \tag{7.12}$$

Este homomorfismo preserva graduación y se extiende a un homomorfismo $\widehat{\varphi}_s^{[m]}$ entre las correspondientes extensiones centrales de la siguiente manera (cf. [4]):

$$\widehat{\varphi}_s^{[m]}(De^{xD}e_{i,i}) = \varphi_s^{[m]}(De^{xD}e_{i,i}) - \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{sx}-1}{e^x-1} + \sum_{j=1}^{m}\frac{x^j e^{sx}}{e^x-1}\frac{t^j}{j!}\right),$$
$$\widehat{\varphi}_s^{[m]}(C) = 1 \in R_m. \tag{7.13}$$

Observación 7.7. Sea $s \in \mathbb{Z}$ y denotamos por $g\ell_{\infty,s}^{[m]}$ la subálgebra de Lie de $g\ell_\infty^{[m]}$ generada por $\{E_{sN-i+1,\, sN-j+1} \;:\; i \neq 1, \cdots N \text{ y } j \neq 1, \cdots, N\}$ con entradas en R_m. Sea $\widehat{g\ell}_{\infty,s}^{[m]}$ la correspondiente extensión central por el centro C. Observemos que $\widehat{g\ell}_{\infty,s}^{[m]}$ es naturalmente isomorfo a $\widehat{g\ell}_\infty^{[m]}$. Sea $p : \widehat{g\ell}_\infty^{[m]} \to \widehat{g\ell}_{\infty,s}^{[m]}$ el mapa proyección. Si $s \in \mathbb{Z}$, redefinimos $\widehat{\varphi}_s^{[m]}$ por el homomorfismo $p \circ \widehat{\varphi}_s^{[m]} : \widehat{\mathcal{D}}_0^N \to \widehat{g\ell}_{\infty,s}^{[m]}$.

Dados $\vec{s} = (s_1, \cdots, s_M) \in \mathbb{C}^M$ y $\vec{m} = (m_1, \cdots, m_M) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^M$, tenemos un homomorfismo de álgebras de Lie sobre $\mathbb{C}$:

$$\widehat{\varphi}_{\vec{s}}^{[\vec{m}]} = \bigoplus_{i=1}^{M} \widehat{\varphi}_{s_i}^{[m_i]} : \widehat{\mathcal{D}}_0^N \to \mathfrak{g}_{\vec{s}}^{[\vec{m}]} = \bigoplus_{i=1}^{M} \mathfrak{g}_{s_i}^{[m_i]}$$

donde $\mathfrak{g}_{s_i}^{[m_i]} = \widehat{g\ell}_{\infty}^{[m_i]}$ si $s_i \notin \mathbb{Z}$, y $\mathfrak{g}_{s_i}^{[m_i]} = g\ell_{\infty, s_i}^{[m_i]}$ si $s_i \in \mathbb{Z}$. La prueba de la siguiente Proposición es similar a la de la Proposición 3.1 en [8].

Proposición 7.8. *El homomorfismo $\widehat{\varphi}_{\vec{s}}^{[\vec{m}]}$ se extiende a un homomorfismo de álgebras de Lie sobre $\mathbb{C}$, el cual también se denota por $\widehat{\varphi}_{\vec{s}}^{[\vec{m}]}$*

$$\widehat{\varphi}_{\vec{s}}^{[\vec{m}]} : \widehat{\mathcal{D}}_0^{N\mathcal{O}} \to \mathfrak{g}_{\vec{s}}^{[\vec{m}]}.$$

El homomorfismo $\widehat{\varphi}_{\vec{s}}^{[\vec{m}]}$ es suryectivo si se satisface que $s_i - s_j \notin \mathbb{Z}$ para $i \neq j$.

7.3 Realización de los módulos de peso máximo cuasifinitos de $\widehat{\mathcal{D}}_0^N$

Retornamos al álgebra de Lie compleja $\mathfrak{g}_s^{[m]}$, definida por $\mathfrak{g}_s^{[m]} = \widehat{g\ell}_{\infty}^{[m]}$ si $s \notin \mathbb{Z}$, y $\mathfrak{g}_s^{[m]} = g\ell_{\infty,s}^{[m]}$ si $s \in \mathbb{Z}$.

Dados $\vec{s} = (s_1, \cdots, s_M) \in \mathbb{C}^M$ y $\vec{m} = (m_1, \cdots m_M) \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}^M$, tomemos un cuasifinito $\lambda_i \in \left(\mathfrak{g}_{s_i}^{[m_i]}\right)_0^*$ para cada $i = 1, \cdots, M$ y sea $L\left(\mathfrak{g}_{s_i}^{[m_i]},\ \lambda_i\right)$ el correspondiente $\mathfrak{g}_{s_i}^{[m_i]}$-módulo irreducible. Sea $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \cdots, \lambda_M)$. Entonces el producto tensorial

$$L\left(\mathfrak{g}_{\vec{s}}^{[\vec{m}]}, \vec{\lambda}\right) = \bigotimes_{i=1}^{M} L\left(\mathfrak{g}_{s_i}^{[m_i]},\ \lambda_i\right) \tag{7.14}$$

es un $\mathfrak{g}_{\vec{s}}^{[\vec{m}]}$-módulo irreducible, con $\mathfrak{g}_{\vec{s}}^{[\vec{m}]} = \bigoplus_{i=1}^{M} \mathfrak{g}_{s_i}^{[m_i]}$. El módulo $L(\mathfrak{g}_{\vec{s}}^{[\vec{m}]}, \vec{\lambda})$ puede ser considerado como un $\widehat{\mathcal{D}}_0^N$- módulo vía el homomorfismo $\varphi_{\vec{s}}^{[\vec{m}]}$, y será denotado por $L_{\vec{s}}^{[\vec{m}]}(\vec{\lambda})$. Necesitaremos la siguiente Proposición.

Proposición 7.9. *Sea V un $\widehat{\mathcal{D}}_0^N$-módulo cuasifinito. Entonces la acción de $\widehat{\mathcal{D}}_0^N$ en V naturalmente se extiende a la acción de $(\widehat{\mathcal{D}}_0^N)_k^{\mathcal{O}}$ en V para todo $k \neq 0$.*

Demostración. Reemplazando $B = ad\, D^2 - k^2$ por $B = \frac{1}{2}\, ad(D^2 e_{i,i} + (D + k)^2 e_{j,j})$ en la prueba de la Proposición 4.3 in [8]. El resto de la prueba es la misma. $\square$

Teorema 7.10. *Sea V un $\mathfrak{g}_{\vec{s}}^{[\vec{m}]}$-módulo cuasifinito, el cual es visto como un $\widehat{\mathcal{D}}_0^N$-módulo via el homomorfismo $\varphi_{\vec{s}}^{[\vec{m}]}$. Entonces todo $\widehat{\mathcal{D}}_0^N$-submódulo de V es también un $\mathfrak{g}_{\vec{s}}^{[\vec{m}]}$-submódulo. En particular, los $\widehat{\mathcal{D}}_0^N$-módulos $L_{\vec{s}}^{[\vec{m}]}(\vec{\lambda})$ son irreducibles si $\vec{s} = (s_1, \cdots, s_M)$ es tal que, $s_i \in \mathbb{Z}$ implica $s_i = 0$; $s_i \in \mathbb{Z}+1/2$ implica $s_i = 1/2$ y $s_i \neq \pm s_j \mod \mathbb{Z}$ para $i \neq j$.*

Demostración. La prueba es análoga a la del Teorema 6.15. $\square$

Por Proposición 6.13 aplicada a $\mathfrak{g}_s^{[m]}$ y Teorema 7.10, tenemos que los $\widehat{\mathcal{D}}_0^N$-módulos $L_{\vec{s}}^{[\vec{m}]}(\vec{\lambda})$ son módulos de peso máximo cuasifinitos irreducibles. Usando las fórmulas (7.12) y (7.13) es fácil calcular las series generatrices $\Delta_{\vec{m},\vec{s},\vec{\lambda},i}(x) = \sum_{n\geq 0} \Delta_{i,n}\,(x^n/n!)$ de los $\widehat{\mathcal{D}}_0^N$-módulos, $L_{\vec{s}}^{[\vec{m}]}(\vec{\lambda})$ de peso máximo y carga central c. Tenemos

$$\Delta_{\vec{m},\,\vec{s},\,\vec{\lambda},\,i}(x) = -\frac{d}{dx}\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{p=0}^{m} \frac{\lambda_{lN-i+1}^{(p)}}{p!} x^p e^{(s-l)x} + \frac{e^{sx}-1}{e^x-1}c_0 + \sum_{p=1}^{m} \frac{x^p e^{sx}}{e^x-1}\frac{c_p}{p!}\right), \tag{7.15}$$

$$c = c_0 \tag{7.16}$$

y

$$\Delta_{\vec{m},\vec{s},\vec{\lambda},i}(x) = \sum_j \Delta_{m_j,s_j,\lambda_j,i}(x), \quad c = \sum_j c_0(j). \tag{7.17}$$

Introduciendo los polinomios

$$g_k(x) = \sum_{j=0}^{m} h_k^{(j)} \frac{x^j}{j!} \quad (k \in \mathbb{Z}), \tag{7.18}$$

tenemos que (7.15) podemos reescribirla como sigue:

$$\Delta_{\vec{m},\vec{s},\vec{\lambda},i}(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{t=1}^{N} \frac{e^{(s-l)x} g_{lN-i+t}(x) - c_0}{e^x - 1}\right) \tag{7.19}$$

Más aún, notemos que

$$\Delta_{\vec{m},\,\vec{s},\,\vec{\lambda},\,i}(x) - \Delta_{\vec{m},\,\vec{s},\,\vec{\lambda},\,i+1}(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} e^{(s-l)x}\; g_{lN-i}(x)\right), \tag{7.20}$$

para $\;i = 1\cdots, N-1$. Observemos que estas fórmulas implican que los módulos de peso máximo cuasifinitos irreducibles $L\left(\widehat{\mathcal{D}}_0^N, \vec{\lambda}\right)$ podemos obtenerlos de una única forma. Más precisamente, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 7.11. *Sea* $L = L\left(\widehat{\mathcal{D}}_0^N, \lambda\right)$ *un módulo de peso máximo cuasifinito irreducible con carga central* c *y series generatrices* $\Delta_i(x)$*, tal que*

$$\Delta_i(x) - \Delta_{i+1}(x) = \frac{d}{dx}F_i(x) \quad i = 1, \cdots, N-1,$$

$$\Delta_N(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sum_{i=1}^N F_i(x) - c}{e^x - 1}\right),$$

donde $F_i(x)$ *son cuasipolinomios y* $\sum_{i=1}^N F_i(0) = c$ *(ver la prueba del Teorema 7.5 y (7.10)). Escribimos* $F_i(x) = \sum_{r\in\mathbb{C}} p_{i,r}(x)e^{rx}$*,donde* $p_{i,r}(x)$ *son polinomios no nulos. Descomponemos el conjunto de exponentes* $\{r\}$ *en una unión disjunta de clases de congruencia mod* $\mathbb{Z}$*. Sea* $S = \{s, s-k_1, s-k_2, \cdots\}$ *una de tales clases de congruencia, sea* $m = max_{r\in S} deg\, p_{i,r}(x)$ *y* $h^{(j)}_{k_rN-i} = (d/dx)^j p_{i,s-k_r}(0)$*, para* $i = 1, 2, \cdots, N$*. Asociaremos a* S *el* $\mathfrak{g}_s^{[m]}$*-módulo* $L_s^{[m]}(\lambda_S)$ *con cargas centrales,*

$$c_j = \sum_{k_rN-i} h^{(j)}_{k_rN-i},$$

y etiquetas

$$\lambda_l^{(j)} = \sum_{\left(k_r+\delta_{i,N}\right)N-i\geq l}\left(h^{(j)}_{k_rN-i} - c_j\delta_{\left(k_r+\delta_{i,N}\right)N-i}\right).$$

Entonces el $\widehat{\mathcal{D}}_0^N$*-módulo* L *es isomorfo al producto tensorial de módulos* $L_s^{[m]}(\lambda_S)$ *para ciertos* S*.*

Demostración. El producto tensorial L' de todos los módulos $L_s^{[m]}(\lambda_S)$ es irreducible debido al Teorema 7.10. Resta que probemos que L' tiene el mismo peso que L. Esto se deduce del hecho que $-\Delta_i(x)$ es el valor del peso máximo en $De^{xD}e_{i,i}$, y de la utilización de las fórmulas (7.15)-(7.20). $\square$

8 La subálgebra $\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar\sigma}$

En esta sección clasificamos los módulos de peso máximo cuasifinitos irreducibles de la subálgebra de Lie de tipo simpléctico $\mathcal{D}^N_{0,\bar\sigma}$. También los realizamos en términos de la teoría de representaciones del álgebra de Lie compleja $\widehat{g\ell}^{[m]}_\infty$ y la correspondiente subálgebra de tipo C.

Consideremos

$$\widetilde{\sigma}(z^k f(D)De_{i,j}) = -z^k f(-D-k)De_{j,\,i},$$

la anti-involución correspondiente a aquella que define la subálgebra conforme de $\mathrm{gc}_{N,xI}$ de tipo simpléctico citada en [14]. Esta anti-involución no preserva la graduación principal de $\mathcal{D}^N_0$. Sin embargo, esta es conjugada por el automorfismo $\tau(z^k f(D)De_{i,j}) = z^k f(D)De_{i,N+1-j}$ a la siguiente anti-involución

$$\bar\sigma(z^k f(D)De_{i,j}) = -z^k f(-D-k)De_{N+1-j,N+1-i}, \tag{8.1}$$

donde $k \in \mathbb{Z}$. Observemos que esta coincide con la anti-involución de Bloch en el caso N=1 cf. [2].

Denotamos por $\mathcal{D}^N_{0,\bar\sigma}$ la subálgebra de Lie de $\mathcal{D}^N_0$ que está formada por el conjunto de los $-\bar\sigma$-puntos fijos.

Recordemos que en la Sección 5 se denotó $D_k = D + \frac{k+1}{2}$. De acuerdo a esta notación, tenemos que un conjunto de generadores de esta subálgebra es

$$\begin{aligned}\{z^k\,(f(D_{k-1})De_{i,N+1-j} + f(-D_{k-1})De_{j,N+1-i}) :\\ k\in\mathbb{Z},\ f\in\mathbb{C}[x],\ 1\leqslant i<j\leqslant N\}\end{aligned}$$

$$, \tag{8.2}$$

junto con los generadores en la diagonal opuesta

$$\{z^k f(D_{k-1})De_{i,N+1-i} :\ k\in\mathbb{Z},\ f\in\mathbb{C}[x]\,\text{par},\ 1\leqslant i\leqslant N\}.$$

Denotamos nuevamente por ψ la restricción del 2-cociclo en (5.3) a $\mathcal{D}^N_{0,\bar\sigma}$. Sea $\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar\sigma}$ la extensión central de $\mathcal{D}^N_{0,\bar\sigma}$ por el centro de dimensión uno $\mathbb{C}C$ correspondiente al 2-cociclo anterior. Por lo tanto $\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar\sigma}$ hereda la graduación principal de $\widehat{\mathcal{D}}^N_0$, es decir,

$$\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar\sigma} = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} (\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar\sigma})_j.$$

Observación 8.1. Tenemos que las siguientes propiedades son satisfechas por $\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar{\sigma}}$:

(P_1) $(\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar{\sigma}})_0$ es conmutativo,

(P_2) Si $a \in (\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar{\sigma}})_{-j}$ $(j > 0)$ y $[a, (\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar{\sigma}})_1] = 0$, entonces $a = 0$.

Observemos que (P_1) es inmediato de la definición de $(\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar{\sigma}})_0$. (P_2) se verifica al calcular el corchete

$$0 = [a\,,\, De_{q+1,q} + De_{N+1-q,N-q}],$$

con $a \in (\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar{\sigma}})_{-j}$; $j,\, q \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq \left[\frac{N}{2}\right] - \delta_{N,\mathrm{par}}$, bajo las siguientes consideraciones :

• Si $j = kN$, $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, sea q tal que $1 \leqslant q \leqslant \left[\frac{N}{2}\right] - \delta_{N,\mathrm{par}}$;

• Si $j = kN + r$, $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, con $1 \leq r \leq N-1$ y suponemos que $1 \leq r < \left[\frac{N}{2}\right] - \delta_{N,\mathrm{par}}$ entonces q es elegido en

$$\{2 \leq q \leq \frac{N-r+1}{2}\} \bigcup \{[\frac{r-1}{2}] - \delta_{N,\mathrm{par}} \leq q \leq r\};$$

y si $\left[\frac{N}{2}\right] - \delta_{N,\,\mathrm{par}} \leq r \leq N-1$, q es seleccionado entre

$$\{2 \leq q \leq \frac{N-r+1}{2}\} \bigcup \{1 \leq q \leq [\frac{r-1}{2}] + \delta_{N,\mathrm{par}}\} \bigcup \{q = N-r+1\}.$$

Sea $\mathfrak{p}$ una subálgebra parabólica de $\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar{\sigma}}$. Usando (5.4) y observando que para cada entero positivo j existe un entero positivo k tal que $j = kN + r = (k+1)N - (N-r)$ con $0 \leqslant r \leqslant N-1$, podemos describir $\mathfrak{p}_{-j}$ como la subálgebra generada por:

$$\mathfrak{p}_{-j} = \Big\{ z^{-k} \Big(f_i(D_{-(k+1)})\, e_{i,\,i+r} + f_i(-D_{-(k+1)})\, e_{N+1-r-i,\,N+1-i} \Big) \;:\; f_i \in I^i_{-j}\,,\; 1 \leq i \leq \left[\frac{N+1-r}{2}\right] \Big\}$$

$$\bigcup \quad \Big\{ z^{-(k+1)} \Big(g_i(D_{-(k+2)})\, e_{i,\,i-N+r} + g_i(-D_{-(k+2)})\, e_{2N+1-i-r,\,N+1-i} : \Big) \; g_i \in L^i_{-j}\,,\; N-r+1 \leq i \leq \left[\frac{2N-r+1}{2}\right] \Big\}$$

donde I^i_{-j} y L^i_j son subespacios de $w\mathbb{C}[w]$. Tomemos i tal que $1 \leq i \leq \left[\frac{N+1-r}{2}\right]$, $f_i(w) \in I^i_{-j}$, y $g_i(w) \in \mathbb{C}[w]$. Calculando el corchete

$$\Big[z^{-k} \Big(f_i(D_{-(k+1)} e_{i,\,i+r} + f_i(-D_{-(k+1)}) e_{N+1-i-r,\,N+1-i} \Big),\; g_i(D_{-1}) De_{i,\,i} + g_i(-D_{-1}) De_{N+1-i,\,N+1-i} \Big]$$

para $j = Nk$ con $N \geq 2$, vemos que I^i_{-j} satisface

$$A^i_j I^i_{-j} \subseteq I^i_{-j}, \tag{8.3}$$

donde $A^i_j = \{g_i(w)w - g_i(w-k)(w-k) : g_i(w) \in \mathbb{C}[w]\}$. Para $j = Nk + r$ con $N > 1$, $r \neq 0$, como antes, vemos que I^i_{-j} satisface (8.3) para $A^i_j = \{g_i(w-k)(w+k) : g_i(w) \in \mathbb{C}[w]\}$.

Ahora tomemos l tal que $N - r + 1 \leq l \leq \left[\frac{2N+1-r}{2}\right]$, $g_l(w) \in \mathbb{C}[w]$ y $f_l(w) \in L^l_{-j}$. Calulando el corchete

$$\Big[z^{-(k+1)}\Big(f_l(D_{-(k+2)})e_{l,\,l-N+r}+f_l(-D_{-(k+2)})e_{2N+1-l-r,\,N+1-l}\Big),$$
$$g_l(D_{-1})De_{l,\,l} + g_l(-D_{-1})De_{N+1-l,\,N+1-l}\Big]$$

para $j = Nk + r$ con $N > 1$, $r \neq 0$ vemos que L^l_{-j} satisface

$$A^l_j L^l_{-j} \subseteq L^l_{-j}, \tag{8.4}$$

donde $A^l_j = \{g_l(w-(k+1)(w-(k+1)) : g_l(w) \in \mathbb{C}[w]\}$. Por lo tanto hemos probado el siguiente resultado:

Lema 8.2. *a) I^i_{-j} y L^l_{-j} son ideales para todo $j \in \mathbb{N}$ donde $j = kN + r$ con $0 \leqslant r \leqslant N-1$ y $1 \leq i \leq \left[\frac{N+1-r}{2}\right]$, $1 \leq l \leq \left[\frac{2N+1-r}{2}\right]$.*

b) Si $I^i_{-j} \neq 0$, y $L^l_{-j} \neq 0$ entonces tienen codimensión finita en $\mathbb{C}[w]$.

Demostración. La prueba es análoga a la demostración del Lema 6.2. $\square$

Ahora tenemos el siguiente importante resultado

Proposición 8.3. *(a) Todo elemento no nulo $d \in (\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar{\sigma}})_{-1}$ que se escribe como*

$$d = \sum_{i=1}^{[\frac{N}{2}]-\delta_{N,par}} f_i(D_{-1})De_{i,\,i+1} + f_i(-D_{-1})De_{N-i,\,N+1-i}$$
$$+\ \delta_{N,\,par}\, f(D_{-1})De_{\frac{N}{2},\frac{N}{2}+1} + t^{-1}h(D_{-2})De_{N,1} \in (\widehat{\mathcal{D}^N_{0,\bar{\sigma}}})_{-1},$$

tal que los polinomios $f_i(w), f(w)$ y $h(w)$ son no nulos y además f y h son polinomios pares, es no degenerado.

(b) Sea $d \in (\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar\sigma})_{-1}$ como en (a). Entonces

$$
\begin{aligned}
(\widehat{\mathcal{D}^N_{0,\bar\sigma}})^d_0 &:= [(\widehat{\mathcal{D}^N_{0,\bar\sigma}})_1, d] \\
&= span\Big\{ g_k\,(D)\,D\,(D)^l\ (e_{k+1,\,k+1} - e_{k,\,k}) + \\
&\qquad g_k\,(-D)\,D\,(-D)^l\,(e_{N-k,\,N-k} - e_{N+1-k,\,N+1-k}) : \\
&\qquad k = 1, \ldots, \left[\frac{N}{2}\right] - \delta_{N,par}\, y\ l \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\Big\} \\
&\bigcup \delta_{N,par}\Big\{\, g(D)(D)^r D\,\left(e_{\frac{N}{2},\,\frac{N}{2}} - e_{\frac{N}{2}+1,\,\frac{N}{2}+1}\right) \\
&\qquad r \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0},\ \ par\ y\ g \in \mathbb{C}[w] es\ impar\Big\} \\
&\bigcup \Big\{ h(D_{-1})D(D^l + (-D-1)^l)\,e_{1,1} + h(-D_{-1})D((D-1)^l \\
&\qquad + (-D)^l)\,e_{N,N}\ : l \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}, par\ y\ h \in \mathbb{C}[w]\ \ es\ par\Big\}
\end{aligned}
$$

donde $g_k(D) = f_k(D)D + f_{N-k}(-D)D$ con $k = 1, \cdots, \left[\frac{N}{2}\right] - \delta_{N,\,par}$ y $g(D) = f(D)D$.

Demostración. Sea $d \in (\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar\sigma})_{-1}$ como en (a). Ya que cada $f_i(w), f(w)$ y $h(w)$ es un polinomio no nulo, L^N_{-j} e $I^i_{-j} \neq 0$ para $1 \leq i \leq N - 1$ y para todo $j \geq 1$. Entonces, por Lema 8.2 (b), parte (a) queda demostrada. Finalmente, parte (b) se verifica al computar el conmutador $[a, d]$ con $a = (D_{-1})^l D\, e_{k+1,\,k} + (-D_{-1})^l D\, e_{N+1-k,\,N-k}$ con $k = 1 \ldots \left[\frac{N}{2}\right] - \delta_{N,\text{par}}$; $a = \delta_{N,\text{par}}\,(D_{-1})^r D e_{\frac{N}{2}+1,\,\frac{N}{2}}$ y $a = t(D_0)^m D\, e_{1,\,N}$ con l, r, $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y r, m enteros pares. $\square$

Resumiendo tenemos que las siguientes propiedades son satisfechas por $\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar\sigma}$:

($P1$) $(\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar\sigma})_0$ es conmutativa,

($P2$) Si $a \in (\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar\sigma})_{-j}\,(j > 0)$ y $[a, (\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar\sigma})_1] = 0$, entonces $a = 0$,

($P3$) Si $\mathfrak{p}$ es una subálgebra no degenerada de $\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar\sigma}$, entonces existe un elemento no degenerado a tal que $\mathfrak{p}^a \subseteq \mathfrak{p}$.

Observar que ($P3$) se sigue de la Proposición 8.3 a) y el hecho de que $\mathfrak{p}$ es no degenerada.

8.1 Caracterización de los módulos de peso máximo cuasifinitos de $\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar{\sigma}}$

Teorema 8.4. *Como $\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar{\sigma}}$ satisface (P_1), (P_2) y (P_3), las siguientes condiciones en $\lambda \in (\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar{\sigma}})^*$ son equivalentes:*

(a) *$M(\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar{\sigma}};\, \lambda)$ contiene un vector singular $av_\lambda \in M(\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar{\sigma}};\lambda)_{-1}$,donde $a \in (\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar{\sigma}})_{-1}$ es no degenerado ;*

(b) *Existe un elemento no degenerado $a \in (\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar{\sigma}})_{-1}$, tal que $\lambda\left([(\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar{\sigma}})_1, a]\right) = 0$;*

(c) *$L(\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar{\sigma}};\lambda)$ es cuasifinito;*

(d) *Existe un elemento no degenerado $a \in (\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar{\sigma}})_{-1}$, tal que $L(\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar{\sigma}};\lambda)$ es el cociente irreducible de un módulo de Verma generalizado $M(\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar{\sigma}};\, \mathfrak{p}^{\,a},\, \lambda)$.*

Escribiremos $M(\lambda)$ and $L(\lambda)$ en lugar de $M(\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar{\sigma}},\lambda)$ y $L(\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar{\sigma}},\lambda)$ mientras no haya ambigüedad.

Una funcional $\lambda \in (\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar{\sigma}})^*_0$ es descripta por sus *etiquetas*

$$\Delta_{i,l} = -\lambda\Big(D^l D\, e_{i,\,i} + (-D)^l D e_{N+1-i,\,N+1-i}\Big)$$

con $l \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $i = 1 \dots \left[\frac{N}{2}\right] + \delta_{N,\text{impar}}$ y la *carga central* $c = \lambda(C)$. Consideremos las series generatrices

$$\Delta_i(x) = \sum_{l\geqslant 0} \frac{x^l}{l!}\Delta_{i,l} \qquad i = 1 \dots \left[\frac{N}{2}\right] + \delta_{N,\text{impar}}. \tag{8.5}$$

Tenemos la siguiente caracterización de los módulos de peso máximo cuasifinitos sobre $\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar{\sigma}}$.

Teorema 8.5. *Un $\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar{\sigma}}$-módulo $L(\lambda)$ es cuasifinito si y sólo si*

$$G_1(x) = \left(\frac{d}{dx} - \frac{1}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}\Delta_1(x) - \left(\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}\right) e^{\frac{x}{2}}\Delta_1(-x)$$

con $G_1(x)$ un cuasipolinomio par,

$$\Delta_k(x) - \Delta_{k+1}(x) = F_k(x)$$

para $k = 1, \ldots, \left[\frac{N}{2}\right] - \delta_{N,par}$*, donde cada* $F_k(x)$ *es un cuasipolinomio y*

$$F_{\frac{N}{2}}(x) = \delta_{N,par} \left(\frac{\Delta_{\frac{N}{2}}(x) - \Delta_{\frac{N}{2}}(-x)}{2} \right)$$

donde $F_{\frac{N}{2}}(x)$ *es un cuasipolinomio impar.*

Demostración. De la Proposición 8.3 (c) y Teorema 8.4 parte (b), tenemos que $L(\lambda)$ es cuasifinito si y sólo si existen polinomios (mónicos) $g_k(x), g(x)$ y $h(x)$ con $g(x)$ polinomio impar, $h(x)$ polinomio par y $k = 1 \cdots \left[\frac{N}{2}\right] - \delta_{N,\text{par}}$, tal que

$$\begin{aligned} &\lambda \left(\cosh(D - 1/2)h(D - 1/2)(D - 1)De_{1,1} - \right. \\ &\qquad \left. \cosh(D + 1/2)h(D + 1/2)(D + 1)De_{N,N}\right) = 0, \end{aligned} \tag{8.6}$$

$$\begin{aligned} &\lambda \left(g_k(D)D\mathrm{e}^{xD} \left[e_{k+1,k+1} - e_{k,k}\right]\right. \\ &\qquad \left. + g_k(-D)D\mathrm{e}^{-xD} \left[e_{N-k,N-k} - e_{N+1-k,N+1-k}\right]\right) = 0 \end{aligned} \tag{8.7}$$

con $k = 1, \ldots, \left[\frac{N}{2}\right] - \delta_{N,\text{par}}$ y

$$\delta_{N,\text{par}}\, \lambda \left(g(D)D\cosh(xD) \left[e_{\frac{N}{2},\frac{N}{2}} - e_{\frac{N}{2}+1,\frac{N}{2}+1} \right] \right) = 0 \tag{8.8}$$

Usando (8.5) junto con las identidades

$$f(D)e^{xD} = f\left(\frac{d}{dx}\right)\left(e^{xD}\right), \quad p(D)e^{x(D+1)} = e^x p(D)e^{xD} = e^x p\left(\frac{d}{dx}\right)e^{xD},$$

$$e^x p\left(\frac{d}{dx}\right) f(x) = p\left(\frac{d}{dx} - 1\right) e^x f(x)$$

y el hecho que g es un polinomio impar y h es un polinomio par, podemos reescribir las condiciones (8.5)-(8.7) como siguen:

$$
\begin{aligned}
0 &= \lambda \ (\cosh(D-1/2)h(D-1/2)(D-1)De_{1,1}- \\
&\qquad\qquad \cosh(D+1/2)h(D+1/2)(D+1)De_{N,N}) \\
&= \frac{1}{2}\,\lambda\left(\left[h\left(\frac{d}{dx}\right)\left(\frac{d^2}{dx^2}-\frac{1}{4}\right)e^{x(D-1/2)}+\right.\right. \\
&\qquad\left. + \, h\left(-\frac{d}{dx}\right)\left(-\frac{d}{dx}-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{d}{dx}+\frac{1}{2}\right)e^{-x(D-1/2)}\right]e_{1,1} \\
&\quad -\left[h\left(\frac{d}{dx}\right)\left(\frac{d}{dx}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{d}{dx}+\frac{1}{2}\right)e^{x(D+1/2)}\ -\right. \\
&\qquad\left.\left. - \ h\left(-\frac{d}{dx}\right)\left(-\frac{d}{dx}-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{d}{dx}+\frac{1}{2}\right)e^{-x(D+1/2)}\right]e_{N,N}\right) \\
&= \frac{1}{2}\,h\left(\frac{d}{dx}\right)\ \left(\frac{d^2}{dx^2}-\frac{1}{4}\right)\ \lambda\ \left(\left(e^{x(D-1/2)}+e^{-x(D-1/2)}\right)e_{1,1}-\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left(e^{x(D+1/2)}+e^{-x(D+1/2)}\right)e_{N,N}\right) \\
&= \frac{1}{2}\,h\left(\frac{d}{dx}\right)\ \left(\frac{d^2}{dx^2}-\frac{1}{4}\right)\ \lambda\ \left(e^{-x/2}(e^{xD}e_{1,1}-e^{-xD}e_{N,N})\right. \\
&\qquad\qquad \left. -e^{x/2}(e^{xD}e_{N,N}-e^{-xD}e_{1,1})\right) \\
&= \frac{1}{2}\,h\left(\frac{d}{dx}\right)\ \ \lambda\ \left(\left(\frac{d}{dx}-\frac{1}{2}\right)e^{-x/2}(De^{xD}e_{1,1}+De^{-xD}e_{N,N})\right. \\
&\qquad\qquad \left. -\left(\frac{d}{dx}+\frac{1}{2}\right)e^{x/2}(De^{xD}e_{N,N}+De^{-xD}e_{1,1})\right) \\
&= -\frac{1}{2}h\left(\frac{d}{dx}\right)\left(\left(\frac{d}{dx}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\Delta_1(x)-\left(\frac{d}{dx}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\Delta_1(-x)\right),
\end{aligned}
\tag{8.9}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= \lambda \big(g_k(D) D \mathrm{e}^{xD} \, [e_{k+1,k+1} - e_{k,k}] \\
&\quad + g_k(-D) D \mathrm{e}^{-xD} \, [e_{N-k,N-k} - e_{N+1-k,N+1-k}] \big) \\
&= \lambda \left(g_k \left(\frac{d}{dx} \right) D \mathrm{e}^{xD} \, [e_{k+1,k+1} - e_{k,k}] \right. \\
&\quad \left. + g_k \left(\frac{d}{dx} \right) D \mathrm{e}^{-xD} \, [e_{N-k,N-k} - e_{N+1-k,N+1-k}] \right) \\
&= \lambda \left(g_k \left(\frac{d}{dx} \right) \left[D \mathrm{e}^{xD} e_{k+1,k+1} + D \mathrm{e}^{-xD} e_{N-k,N-k} \right] \right. \\
&\quad \left. - g_k \left(\frac{d}{dx} \right) \left[D \mathrm{e}^{xD} e_{k,k} + D \mathrm{e}^{-xD} e_{N+1-k,N+1-k} \right] \right) \\
&= -g_k \left(\frac{d}{dx} \right) \left(\Delta_{k+1}(x) - \Delta_k(x) \right)
\end{aligned} \tag{8.10}
$$

y

$$
\begin{aligned}
0 &= \lambda \left(g(D) D \cosh(xD) \left[e_{\frac{N}{2},\frac{N}{2}} - e_{\frac{N}{2}+1,\frac{N}{2}+1} \right] \right) \\
&= \lambda \left(g \left(\frac{d}{dx} \right) \left(\frac{d}{dx} \right) \cosh(xD) \left[e_{\frac{N}{2},\frac{N}{2}} - e_{\frac{N}{2}+1,\frac{N}{2}+1} \right] \right) \\
&= \frac{1}{2} \lambda \left(g \left(\frac{d}{dx} \right) \left(\frac{d}{dx} \right) \left(\mathrm{e}^{xD} e_{\frac{N}{2},\frac{N}{2}} - \mathrm{e}^{-xD} e_{\frac{N}{2}+1,\frac{N}{2}+1} + \right. \right. \\
&\qquad \left. \left. + \mathrm{e}^{-xD} e_{\frac{N}{2},\frac{N}{2}} - \mathrm{e}^{-xD} e_{\frac{N}{2}+1,\frac{N}{2}+1} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} g \left(\frac{d}{dx} \right) \lambda \left(D \mathrm{e}^{xD} e_{\frac{N}{2},\frac{N}{2}} + D \mathrm{e}^{-xD} e_{\frac{N}{2}+1,\frac{N}{2}+1} \right. \\
&\qquad \left. - D \mathrm{e}^{-xD} e_{\frac{N}{2},\frac{N}{2}} - D \mathrm{e}^{xD} e_{\frac{N}{2}+1,\frac{N}{2}+1} \right) \\
&= -g \left(\frac{d}{dx} \right) \frac{\Delta_{\frac{N}{2}}(x) - \Delta_{\frac{N}{2}}(-x)}{2}.
\end{aligned} \tag{8.11}
$$

Por lo tanto, $L(\lambda)$ es cuasifinito si y sólo si existen polinomios $g_k(x), g(x)$ y $h(x)$ con $g(x)$ polinomio impar, $h(x)$ polinomio par y $k = 1 \cdots \left[\frac{N}{2}\right] - \delta_{N,\text{par}}$, tal que

$$
0 = h \left(\frac{d}{dx} \right) \left(\left(\frac{d}{dx} - \frac{1}{2} \right) \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \Delta_1(x) - \left(\frac{d}{dx} + \frac{1}{2} \right) \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \Delta_1(-x) \right), \tag{8.12}
$$

$$0 = g_k \left(\frac{d}{dx}\right) \left(\Delta_{k+1}(x) - \Delta_k(x)\right), \tag{8.13}$$

$$0 = g \left(\frac{d}{dx}\right) \frac{\Delta_{\frac{N}{2}}(x) - \Delta_{\frac{N}{2}}(-x)}{2}. \tag{8.14}$$

Entonces $G_1(x) = \left(\frac{d}{dx} - \frac{1}{2}\right) \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \Delta_1(x) - \left(\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}\right) \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \Delta_1(-x)$ es un cuasipolinomio par, $F_k(x) = \Delta_{k+1}(x) - \Delta_k(x)$ son cuasipolinomios y $F_{\frac{N}{2}} = \left(\Delta_{\frac{N}{2}}(x) - \Delta_{\frac{N}{2}}(-x)\right)/2$ es un cuasipolinomio impar. $\square$

Observación 8.6. Es fácil ver que este resultado coincide con el caso $N = 1$ desarrollado en [3].

8.2 Relación entre $\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar{\sigma}}$ y las álgebras de Lie clásicas de rango infinito de tipo A y C

Similarmente como en las secciones anteriores, definimos una completación $\mathcal{D}^{N\mathcal{O}}_{0,\bar{\sigma}}$ de $\mathcal{D}^N_{0,\bar{\sigma}}$ que consiste de todos los operadores diferenciales de la forma

$$\{z^k \left(f(D_{k-1}) De_{i,j} + f(-D_{k-1}) De_{N+1-j,\,N+1-i}\right) : k \in \mathbb{Z},\, 1 \leqslant i < j \leqslant N\,,\, f \in \mathcal{O}\},$$

y en la diagonal opuesta

$$\{z^k f(D_{k-1}) De_{i,\,N+1-i} : k \in \mathbb{Z},\, 1 \leqslant i \leqslant N,\, f \in \mathcal{O} \text{ polinomio par }\}.$$

Entonces el 2-cociclo ψ en $\mathcal{D}^N_{0,\bar{\sigma}}$ se extiende a un 2-cociclo en $\mathcal{D}^{N\mathcal{O}}_{0,\bar{\sigma}}$. Sea $\widehat{\mathcal{D}}^{N\mathcal{O}}_{0,\bar{\sigma}} = \mathcal{D}^{N\mathcal{O}}_{0,\bar{\sigma}} \bigoplus \mathbb{C}C$ la correspondiente extensión central. En este caso obtenemos la graduación principal $\mathcal{D}^{N\mathcal{O}}_{0,\bar{\sigma}} = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \left(\widehat{\mathcal{D}}^{N\mathcal{O}}_{0,\bar{\sigma}}\right)_k$ por restricción de la graduación principal de $\widehat{\mathcal{D}}^{N\mathcal{O}}_0$.

Dado $s \in \mathbb{C}$, consideremos el morfismo introducido en la Sección 5, dado por (5.11). Restringiendo esos homomorfismos de álgebras de Lie a $\mathcal{D}^N_{0,\bar{\sigma}}$, obtenemos una familia de homomorfismos de álgebras de Lie $\varphi^{[m]}_s : \mathcal{D}^N_{0,\bar{\sigma}} \to g\ell^{[m]}_\infty$ (resp. a $\mathcal{D}^{N\mathcal{O}}_{0,\bar{\sigma}}$, $\varphi^{[m]}_s : \mathcal{D}^{N\mathcal{O}}_{0,\bar{\sigma}} \to g\ell^{[m]}_\infty$) es decir:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_s^{[m]}\Big(z^k\big(f_i(D_{k-1})D\, e_{i,\,j} + f_i(-D_{k-1})D\, e_{N+1-j,\,N+1-i}\big)\Big) = \\
&= \sum_{l\in\mathbb{Z}}\left[f_i\left(-l+\frac{k}{2}+s+u\right)(-l+s+u)E_{(l-k)N-i+1,\,lN-j+1}\right. \\
&\qquad\qquad \left. +f_i\left(l-\frac{k}{2}-s-u\right)(-l+s+u)\,E_{(l-k-1)N+j,\,(l-1)N+i}\right] \\
&= \sum_{r=0}^{m}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\left[f_i^{(r)}\left(-l+\frac{k}{2}+s\right)\frac{(-l+s)u^r+u^{r+1}}{r!}\,E_{(l-k)N-i+1,\,lN-j+1}\right. \\
&\quad \left. +(-1)^r f_i^{(r)}\left(l-\frac{k}{2}-s\right)\frac{(-l+s)u^r+u^{r+1}}{r!}\,E_{(l-k-1)N+j,\,(l-1)N+i}\right],
\end{aligned}
\tag{8.15}
$$

donde $1 \leqslant i < j \leqslant N$ y $f^{(r)}$ denota la r-ésima derivada de f. Similarmente, en el otro conjunto de generadores

$$
\begin{aligned}
&\varphi_s^{[m]}\left(z^k f_i(D_{k-1})De_{i,N+1-i}\right) = \\
&\quad = \sum_{l\in\mathbb{Z}} f_i\left(-l+\frac{k}{2}+s+u\right)(-l+s+u)E_{(l-k)N-i+1,\,(l-1)N+i} \\
&\quad = \sum_{r=0}^{m}\sum_{l\in\mathbb{Z}} f_i^{(r)}\left(-l+\frac{k}{2}+s\right)\frac{(-l+s)u^r+u^{r+1}}{r!}\,E_{(l-k)N-i+1,\,(l-1)N+i},
\end{aligned}
\tag{8.16}
$$

donde al igual que antes, $1 \leqslant i \leqslant N$, f es un polinomio par y $f^{(r)}$ denota la r-ésima derivada de f. Para cada $s \in \mathbb{C}$ y $k \in \mathbb{Z}$ definimos

$$
\begin{aligned}
I_{s,k}^{[m]} \quad = \quad &\left\{f\in\mathcal{O}:\, f^{(r)}\left(n+\frac{k}{2}+s\right)=0 \text{ y}\right. \\
&\qquad \left. f^{(r)}\left(-n-\frac{k}{2}-s\right)=0, \text{ para todo } \quad n\in\mathbb{Z},\, r=0,\dots,m\right\}
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\widetilde{I}_{s,k}^{[m]} = \big\{&f\in\mathcal{O}:\, f \text{ es par y} \\
&f^{(r)}\left(n+\frac{k}{2}+s\right)=0, \text{ para todo } n\in\mathbb{Z},\, r=0,\dots,m\big\}.
\end{aligned}
$$

Sea

$$J_s^{[m]} = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \Big\{ z^k \big(f(D_{k-1}) D\, e_{i,j} + f(-D_{k-1}) D\, e_{N+1-j,N+1-i} \big) : \ f \in I_{s,k}^{[m]} \text{ y } 1 \leqslant i < j \leqslant N \Big\} \bigoplus \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \Big\{ z^k f(D_{k-1}) D\, e_{i,N+1-i} : \ f \in \widetilde{I}_{s,k}^{[m]} \Big\}.$$

Claramente tenemos

$$\ker \varphi_s^{[m]} = J_s^{[m]}. \tag{8.17}$$

Fijemos $\vec{s} = (s_1, \cdots, s_M) \in \mathbb{C}^M$, tal que $s_i - s_j \notin \mathbb{Z}$ si $i \neq j$ y $s_i + s_j \notin \mathbb{Z}$ para todo i, j. También fijamos $\vec{m} = (m_1, \cdots, m_M) \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}^M$. Sea $g\ell_\infty^{[\vec{m}]} = \oplus_{i=1}^M g\ell_\infty^{[m_i]}$ y consideremos el homomorfismo

$$\varphi_{\vec{s}}^{[\vec{m}]} = \bigoplus_{i=1}^M \varphi_{s_i}^{[m_i]} \ : \ \mathcal{D}_{0,\bar{\sigma}}^{N\mathcal{O}} \longrightarrow g\ell_\infty^{[\vec{m}]}.$$

Proposición 8.7. *Dados $\vec{s}$ y $\vec{m}$ como antes tenemos la siguiente suceción exacta de álgebras de Lie.*

$$0 \longrightarrow J_{\vec{s}}^{[\vec{m}]} \longrightarrow \mathcal{D}_{0,\bar{\sigma}}^{N\mathcal{O}} \xrightarrow{\varphi_{\vec{s}}^{[\vec{m}]}} g\ell_\infty^{[\vec{m}]} \longrightarrow 0,$$

donde $J_{\vec{s}}^{[\vec{m}]} = \displaystyle\bigcap_{i=1}^M J_{s_i}^{[m_i]}$.

Demostración. Por simplicidad, igual que en las otras secciones, probaremos esto en el caso $M = 1$. Así tenemos que $\vec{m} = m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ y $\vec{s} = s \notin \mathbb{Z}/2$. El caso general es similar. Es claro que $\ker \varphi_s^{[m]} = J_s^{[m]}$. Para la suryectividad, recordemos que para cada sucesión discreta de puntos en $\mathbb{C}$ y enteros no negativos t existe $f(w) \in \mathcal{O}$ que tiene como valores prescriptos de sus primeras t derivadas a esos puntos. Como $s \notin \mathbb{Z}/2$ las sucesiones $\{-l + \frac{k}{2} + s\}_{l\in\mathbb{Z}}$ y $\{l - \frac{k}{2} - s\}_{l\in\mathbb{Z}}$ son disjuntas, entonces la Proposición queda demostrada. □

Ahora extenderemos el homomorfismo $\varphi_s^{[m]} : \mathcal{D}_{0,\bar{\sigma}}^{N} \to g\ell_\infty^{[m]}$ (resp. $\varphi_s^{[m]} : \mathcal{D}_{0,\bar{\sigma}}^{N\mathcal{O}} \to g\ell_\infty^{[m]}$) a un homomorfismo entre las extensiones centrales de las correspondientes álgebras de Lie . Estos homomorfismos siguen preservando la graduación.

Recordemos las funciones que se introdujeron en la Sección 6

$$\eta_j(x,\mu) = \left(\frac{e^{\mu x} + (-1)^j e^{-\mu x}}{2} \right) \frac{x^j}{j!} \quad (j \in \mathbb{Z}_+, \mu \in \mathbb{C}). \tag{8.18}$$

Tenemos lo siguiente.

Proposición 8.8. *El homomorfismo $\varphi_s^{[m]}$ se extiende a un homomorfismo de álgebras de Lie $\widehat{\varphi}_s^{[m]}$ de las correspondientes extensiones centrales como sigue.*

$$\widehat{\varphi}_s^{[m]}|_{(\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar{\sigma}})_j} = \varphi_s^{[m]}|_{(\mathcal{D}^N_{0,\bar{\sigma}})_j} \qquad \text{si } j \neq 0, \tag{8.19}$$

$$\begin{aligned}&\widehat{\varphi}_s^{[m]}\left(e^{xD} D\, e_{i,i} + e^{xD} D\, e_{N+1-i,N+1-i}\right) = \\ &\quad \varphi_s^{[m]}\left(e^{xD} D\, e_{i,i} + e^{-xD} D\, e_{N+1-i,N+1-i}\right) - \frac{d}{dx}\left(\left(\frac{\cosh\left(\left(s-\frac{1}{2}\right)x\right) - \cosh\left(\frac{x}{2}\right)}{\sinh(\frac{x}{2})}\right)\right. \\ &+ \left.\sum_{1\leqslant j\leqslant m,} \frac{\eta_j(x,s)}{\sinh(\frac{x}{2})}u^j\right),\end{aligned} \tag{8.20}$$

y

$$\widehat{\varphi}_s^{[m]}(C) = \mathbf{1}. \tag{8.21}$$

Demostración. La prueba es análoga a la prueba de la Proposición 6.8. □

El homomorfismo $\varphi_s^{[m]}$ es definido para todo $s \in \mathbb{C}$. Así es fácil ver que si $s \in \mathbb{Z}/2$, ya no es suryectiva. Esos casos los podemos describir por las siguientes Proposiciones.

Proposición 8.9. *Para $s = 0$ y $s = \frac{1}{2}$, tenemos la siguiente sucesión exacta de álgebras de Lie.*

$$0 \longrightarrow J_s^{[m]} \longrightarrow \mathcal{D}^{N\mathcal{O}}_{0,\bar{\sigma}} \xrightarrow{\varphi_s^{[m]}} \widetilde{C} \longrightarrow 0.$$

donde $\widetilde{C} \simeq \bar{c}_\infty^{[m]}$.

Demostración. Primero consideremos $s = 1/2$. El homomorfismo $\varphi_s^{[m]} : \mathcal{D}_0^N \longrightarrow g\ell_\infty^{[m]}$ introducido en la Sección 7 es suryectivo. Recordemos que definimos en $\mathcal{D}_0^N$ la anti-involución $\bar{\sigma}$ dada en (8.1). Es fácil ver que esta se transfiere vía el $\varphi_s^{[m]}$, a una anti-involución $\omega : g\ell_\infty^{[m]} \longrightarrow g\ell_\infty^{[m]}$ como sigue:

$$\omega(u^k - (1/2+\widetilde{m})u^{k-1})E_{i,j}) = ((-u)^k - (1/2+n)(-u)^{k-1})E_{1-j,1-i}) \tag{8.22}$$

para $k \geq 1$ donde $i = nN + q$; $j = \widetilde{m}N + \widetilde{q}$ con $1 \leq q, \widetilde{q} \leq N$.

Por lo tanto, el álgebra de Lie de $-\sigma$ puntos fijos en $\mathcal{D}_0^N$, llamada $\mathcal{D}_{0,\bar{\sigma}}^N$, se mapea suryectivamente al álgebra de Lie de $-\omega$ puntos fijos en $g\ell_\infty^{[m]}$. Entonces es suficiente mostrar que ω es conjudada por un automorfismo T de $g\ell_\infty^{[m]}$ a la anti-involución que define $\bar{c}_\infty^{[m]}$.

Para esto se define

$$\begin{aligned}
&T(u^m\ E_{i,i+1}) = (\widetilde{m} + 1/2)\ u^m\ E_{i,i+1} \\
&T(u^l\ E_{i,i+1}) = (u^{l+1} - (\widetilde{m} + 1/2)\ u^l)\ E_{i,i+1} \ \text{ for } 0 \leq l \leq m-1 \\
&T(u^m\ E_{i+1,i}) = \frac{-1}{(n-1/2)}\ (-u)^m\ E_{i+1,i} \\
&T(u^l\ E_{i+1,i}) = \frac{1}{u-(n-1/2)}(-u)^l\ E_{i+1,i} \ \text{ for } 0 \leq l \leq m-1. \qquad (8.23)
\end{aligned}$$

donde $i+1 = \widetilde{m}N + q$, $i = nN + \bar{q}$ con $1 \leq q, \bar{q} \leq N$. Es sencillo verificar que esta se extiende a un automorfismo del álgebra asociativa $g\ell_\infty^{[m]}$ que conjuga ω a la anti-involución que define $\bar{c}_\infty$.

Ahora, consideremos el caso $s = 0$. Aquí, el homomorfismo $\varphi_0^{[m]}$: $\mathcal{D}_0^N \longrightarrow g\ell_\infty^{[m]}$ introducido en la sección anterior ya no es suryectivo. Por lo tanto, es suryectivo si lo restringimos a $\varphi_0^{[m]} : \mathcal{D}_0^N \longrightarrow \mathfrak{g}^{[m]}$, donde $\mathfrak{g}^{[m]}$ es la subálgebra de $g\ell_\infty^{[m]}$ generada por $\{E_{sN-i+1,\,sN-j+1}\ :\ i \neq 1, \cdots N$ and $j \neq 1, \cdots, N\}$ con entradas en R_m. Llamaremos a tal homomorfismo también como $\varphi_0^{[m]}$. Al igual , que antes, la anti-involución $\bar{\sigma}$ en (8.1) se transfiere a $\mathfrak{g}^{[m]}$ como sigue.

$$\omega_0((u^k - (\widetilde{m}+1)u^{k-1})E_{ij}) = ((-u)^k - (n+1)(-u)^{k-1})E_{-N+1-j,-N+1-i} \qquad (8.24)$$

para $1 \geq k$, donde $i = nN+q$; $j = \widetilde{m}N+\bar{q}$ con $1 \leq q, \bar{q} \leq N$. Como antes, es suficiente mostrar que ω_0 es conjugada por un isomorfismo $T : \mathfrak{g}^{[m]} \longrightarrow g\ell_\infty^{[m]}$ a una anti-involución que defina $\bar{c}_\infty^{[m]}$.

Uno debería tomar $T = \pi \circ T'$, donde π es la proyección natural de $\mathfrak{g}^{[m]}$ sobre $g\ell_\infty^{[m]}$ dada por:

$$\begin{aligned}
&\pi(u^l E_{i,\,i+1}) = u^l E_{i-1,i} \quad \text{si} \quad i > 0, \quad 0 \leq l \leq m \\
&\pi(u^l E_{i,\,i+1}) = u^l E_{i+N+1,\,i+1+N+1} \quad \text{si} \quad i \leq -N-1, \quad 0 \leq l \leq m \\
&\pi(u^l E_{i+1,\,i}) = u^l E_{i+1,\,i} \quad \text{si} \quad i > 0, \quad 0 \leq l \leq m \\
&\pi(u^l E_{i+1,\,i}) = u^l E_{i+1+N,\,i+N} \quad \text{si} \quad i \leq -N-1, \quad 0 \leq l \leq m
\end{aligned} \qquad (8.25)$$

y T' es el automorfismo de $\mathfrak{g}^{[m]}$ definido por:

$$\begin{aligned}
&T'(u^m\ E_{i,i+1}) = -(\widetilde{m}+1)\ (-u)^m\ E_{i,i+1},\\
&T'(u^l\ E_{i,i+1}) = (-1)^l(u^{l+1} - (\widetilde{m}+1)\ u^l)\ E_{i,i+1} \text{ for } 0 \le l \le m-1,\\
&T'(u^m\ E_{i+1,i}) = \frac{-1}{(n+1)}\ (-u)^m\ E_{i+1,i},\\
&T'(u^l\ E_{i+1,i}) = \frac{1}{u-(n+1)}(-u)^l\ E_{i+1,i} \text{ for } 0 \le l \le m-1, \qquad (8.26)
\end{aligned}$$

donde $i+1 = \widetilde{m}N + q$; $i = nN + \bar{q}$ con $1 \le q, \bar{q} \le N$, finalizando la prueba. □

Observación 8.10. (a) Para $s = 0$ y $s = 1/2$, en vista de la Proposición anterior, y haciendo abuso de notación denotaremos nuevamente $\varphi_s^{[m]}$ el homomorfismo suryectivo $\mathcal{D}^N_{0,\bar{\sigma}}$ sobre $\bar{c}_\infty^{[m]}$ dado por el viejo $\varphi_s^{[m]}$ compuesto con el isomorfismo $\widetilde{C} \simeq \bar{c}_\infty^{[m]}$.
(b) Para $s \in \mathbb{Z}/2$ la imagen de $\mathcal{D}^N_{0,\bar{\sigma}}$ bajo el homomorfismo $\varphi_s^{[m]}$ es $\nu^{\widetilde{s}}(\bar{c}_\infty^{[m]})$ donde ν fue definida en (2.1) y $\widetilde{s} = s$ si $s \in \mathbb{Z}$ y $\widetilde{s} = s - 1/2$ if $s \in \mathbb{Z}+1/2$. Por lo tanto sólo consideraremos $s = 0,\ 1/2$ a lo largo de esta tesis.

Dados $\vec{m} = (m_1, \cdots m_M) \in \mathbb{Z}^M_{\geqslant 0}$ y $\vec{s} = (s_1, \cdots, s_M)$ tal que, $s_i \in \mathbb{Z}$ implica $s_i = 0$; $s_i \in \mathbb{Z}+1/2$ implica $s_i = 1/2$ y $s_i \neq \pm s_j \mod \mathbb{Z}$ para $i \neq j$, y combinando las Proposiciones 8.7 y 8.9, obtenemos un homomorfismo de álgebras de Lie.

$$\widehat{\varphi}_{\vec{s}}^{[\vec{m}]} = \bigoplus_{i=1}^{M} \varphi_{s_i}^{[m_i]} : \widehat{\mathcal{D}}^N_{o,\bar{\sigma}} \longrightarrow \mathfrak{g}^{[\vec{m}]} := \oplus_{i=1}^M \mathfrak{g}^{[m_i]}, \qquad (8.27)$$

donde

$$\mathfrak{g}^{[m]} = \begin{cases} \widehat{g\ell}_\infty^{[m]} & \text{if } s \notin \mathbb{Z}/2, \\ c_\infty^{[m]} & \text{if } s = 0 \text{ or } s = 1/2. \end{cases} \qquad (8.28)$$

Podemos probar la siguiente Proposición del mismo modo que la Proposición 8.7.

Proposición 8.11. *El homomorfismo $\widehat{\varphi}_{\vec{s}}^{[\vec{m}]}$ se extiende a un homomorfismo suryectivo de álgebras de Lie el cual es denotado nuevamente por $\widehat{\varphi}_{\vec{s}}^{[\vec{m}]}$*

$$\widehat{\varphi}_{\vec{s}}^{[\vec{m}]} = \bigoplus_{i=1}^{M} \widehat{\varphi}_{s_i}^{[m_i]} : \widehat{\mathcal{D}}^{N\mathcal{O}}_{0,\bar{\sigma}} \longrightarrow \mathfrak{g}^{[\vec{m}]}.$$

8.3 Realización de los módulos de peso máximo cuasifinitos de $\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar{\sigma}}$

Sea $\mathfrak{g}^{[m]}$ como en (8.28). La prueba de la siguiente proposición es estándar ver [6].

Proposición 8.12. *El $\mathfrak{g}^{[m]}$-módulo $L\left(\mathfrak{g}^{[m]},\ \lambda\right)$ es cuasifinito si y sólo si un número finito de los ${}^{*}h_k^{(i)}$ son nulos,donde $*$ representa a, o c dependiendo de si $\mathfrak{g}^{[m]}$ es $\widehat{g\ell}_\infty^{[m]}$, o $c_\infty^{[m]}$.*

Dado $\vec{m} = (m_1, \cdots m_M) \in \mathbb{Z}^M_{\geqslant 0}$, tomar un cuasifinito $\lambda_i \in \left(\mathfrak{g}^{[m_i]}\right)^*_0$ para cada $i = 1, \cdots, M$ y sea $L\left(\mathfrak{g}^{[m_i]},\ \lambda_i\right)$ el correspondiente $\mathfrak{g}^{[m_i]}$-módulo irreducible. Sea $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \cdots, \lambda_M)$, entonces el producto tensorial

$$L\left(\mathfrak{g}^{[\vec{m}]}, \vec{\lambda}\right) = \bigotimes_{i=1}^{M} L\left(\mathfrak{g}^{[m_i]},\ \lambda_i\right) \tag{8.29}$$

es un $\mathfrak{g}^{[\vec{m}]}$-módulo irreducible, con $\mathfrak{g}^{[\vec{m}]} = \bigoplus_{i=1}^{M} \mathfrak{g}^{[m_i]}$. El módulo $L(\mathfrak{g}^{[\vec{m}]}, \vec{\lambda})$ puede ser considerado como un $\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar{\sigma}}$- módulo vía el homomorfismo $\varphi^{[\vec{m}]}_{\vec{s}}$, y será denotado por $L^{[\vec{m}]}_{\vec{s}}(\vec{\lambda})$. Al igual que en las otras secciones, necesitaremos la siguiente Proposición.

Proposición 8.13. *Sea V un $\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar{\sigma}}$-módulo cuasifinito. Entonces la acción de $\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar{\sigma}}$ en V naturalmente se extiende a la acción de $(\widehat{\mathcal{D}}^{N\mathcal{O}}_{0,\bar{\sigma}})_k$ en V para todo $k \neq 0$.*

Demostración. Reemplazar $B = ad\, D^2 - k^2$ por

$$\begin{aligned} B = ad & \left[\left(D + \frac{k+1}{2}\right) e_{i,i} + \left(D + \frac{k+1}{2} - k\right) e_{j,j}\right] \\ & + ad \left[\left(-D - \frac{k+1}{2}\right) e_{N+1-j\,,N+1-j} \right. \\ & \qquad \left. + \left(-D - \frac{k+1}{2} + k\right) e_{N+1-i\,,N+1-i}\right] \end{aligned}$$

en la prueba de la Proposición 4.3 en [8]. El resto de la prueba es la misma. □

Teorema 8.14. *Sea V un $\mathfrak{g}^{[\vec{m}]}$-módulo cuasifinito, el cual es considerado como un $\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar{\sigma}}$-módulo vía el homomorfismo $\varphi^{[\vec{m}]}_{\vec{s}}$. Entonces todo $\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar{\sigma}}$-submódulo de V es también un $\mathfrak{g}^{[\vec{m}]}$-submódulo. En particular, los $\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar{\sigma}}$-módulos $L^{[\vec{m}]}_{\vec{s}}(\vec{\lambda})$ son irreducibles si $\vec{s} = (s_1, \cdots, s_M)$ es tal que , $s_i \in \mathbb{Z}$ implica $s_i = 0$; $s_i \in \mathbb{Z} + 1/2$ implica $s_i = 1/2$ y $s_i \neq \pm s_j \mod \mathbb{Z}$ for $i \neq j$.*

Demostración. la prueba es análoga a la prueba de la Proposición 6.14. $\square$

Ahora, mostraremos que todos los $\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar{\sigma}}$-módulos cuasifinitos pueden ser realizados como algún $L^{[\vec{m}]}_{\vec{s}}(\vec{\lambda})$, para $\vec{m} \in \mathbb{Z}^M_{\geq 0}$ y $\vec{s} \in \mathbb{C}^M$ tal que $s_i - s_j \notin \mathbb{Z}$ si $i \neq j$ y $s_i + s_j \notin \mathbb{Z}$ para todo i, j. Por simplicidad consideraremos el caso $M = 1$. Pero primero calculemos las series generatrices $\Delta_{m,s,\lambda}(x)$ del $\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar{\sigma}}$-módulo $L^{[m]}_s(\lambda)$ de peso máximo y carga central c.
Sea $s \notin \mathbb{Z}/2$. Usando la fórmula (8.19), y el hecho que

$$\Delta_i(x) = -\lambda(e^{xD} D\, e_{i,i} + e^{-xD} D\, e_{N+1-i,N+1-i}), \tag{8.30}$$

con $i = 1, \cdots, \left[\frac{N}{2}\right] + \delta_{N,\text{impar}}$ y (4.4) tenemos que

$$\begin{aligned}\Delta_{m,s,\lambda,i}(x) &= \frac{d}{dx}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{r=0}^{m}\left(\frac{{}^a\lambda^{(r)}_{(l-1)N+i}}{r!}(-x)^r e^{x(l-s)} - \frac{{}^a\lambda^{(r)}_{lN-i+1}}{r!}x^r e^{-x(l-s)}\right)\\ &\quad + \frac{d}{dx}\sum_{r=0}^{m}\frac{\eta_r(x, s-\frac{1}{2})c_r}{\sinh\frac{x}{2}} - \frac{d}{dx}\left(\frac{cosh\left(\frac{x}{2}\right)c_0}{\sinh\frac{x}{2}}\right).\end{aligned} \tag{8.31}$$

Consideremos los polinomios

$${}^a g_t(x) = \sum_{r=0}^{m} {}^a h^{(r)}_t \frac{x^r}{r!}.$$

Así

$$\begin{aligned}\Delta_{m,s,\lambda,i}(x) - \Delta_{m,s,\lambda,i+1}(x) &= \frac{d}{dx}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\Big(e^{x\left(l-s-\frac{1}{2}\right)}\ {}^a g_{(l-1)N+i}(-x)\\ &\qquad + e^{-x\left(l-s+\frac{1}{2}\right)}\ {}^a g_{lN-i}(x)\Big),\end{aligned} \tag{8.32}$$

$$\left(\frac{d}{dx}+\frac{1}{2}\right)e^{\frac{-x}{2}}\Delta_{m,\,s,\,\lambda,\,1}(x)-\left(\frac{d}{dx}-\frac{1}{2}\right)e^{\frac{x}{2}}\Delta_{m,\,s,\,\lambda,\,1}(-x)=$$
$$-\left(\frac{d^2}{dx^2}-\frac{1}{4}\right)\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{r=0}^{m}\left({}^{a}h^{(r)}_{(l-1)N}+\delta_{l,1}c_r\right)\eta_r\left(x,-l+s+\frac{1}{2}\right)$$
$$-\cosh\left(\frac{x}{2}\right)c_0, \tag{8.33}$$

y si N es par también tenemos

$$\Delta_{m,\,s,\,\lambda,\,\frac{N}{2}}(x)-\Delta_{m,\,s,\,\lambda,\,\frac{N}{2}}(-x)=\frac{d}{dx}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{r=0}^{m}{}^{a}h^{(r)}_{\left(l-\frac{1}{2}\right)N}\,\eta_r\left(x,s-l\right). \tag{8.34}$$

Ahora consideremos $s=1/2$ .Recordemos que por la Observación 8.10 (a), en este caso tenemos que el morfismo $\widehat{\varphi}^{[m]}_s:\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar{\sigma}}\longrightarrow c^{[m]}_{\infty}$ es el morfismo dado por (8.19)-(8.21) compuesto con T, donde T fue introducido en la prueba de la Proposición 8.9. Usando esto, (8.30) y (4.8) tenemos que

$$\Delta_{m,\,\frac{1}{2},\,\lambda,\,i}(x) = \frac{d}{dx}\sum_{l\geq 1}\sum_{r=0}^{m}\left(\frac{{}^{c}\lambda^{(r)}_{(l-1)N+i}}{r!}(-x)^r e^{\left(l-\frac{1}{2}\right)x}-\frac{{}^{c}\lambda^{(r)}_{lN-i+1}}{r!}x^r e^{\left(-l+\frac{1}{2}\right)x}\right)$$
$$+\frac{d}{dx}\sum_{r=0}^{m}\frac{\eta_r\left(x,0\right)c_r}{\sinh\frac{x}{2}}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\cosh\left(\frac{x}{2}\right)c_0}{\sinh\frac{x}{2}}\right). \tag{8.35}$$

Ahora, introduciendo los polinomios

$${}^{c}g_t(x)=\sum_{r=0}^{m}{}^{c}h^{(r)}_t\frac{x^r}{r!},$$

tenemos

$$\Delta_{m,\,\frac{1}{2},\,\lambda,\,i}(x)-\Delta_{m,\,\frac{1}{2},\,\lambda,\,i+1}(x) = \frac{d}{dx}\sum_{l\geq 1}\left(e^{\left(l-\frac{1}{2}\right)x}\ {}^{c}g_{(l-1)N+i}(-x)\right.$$
$$\left.+e^{\left(-l+\frac{1}{2}\right)x}\ {}^{c}g_{lN-i}(x)\right), \tag{8.36}$$

$$\left(\frac{d}{dx}+\frac{1}{2}\right)e^{\frac{-x}{2}}\Delta_{m,\,\frac{1}{2},\,\lambda,\,1}(x)-\left(\frac{d}{dx}-\frac{1}{2}\right)e^{\frac{x}{2}}\Delta_{m,\,\frac{1}{2},\,\lambda,\,1}(-x)=$$
$$-\left(\frac{d^2}{dx^2}-\frac{1}{4}\right)\sum_{l\geq 1}\sum_{r=0}^{m}\left({}^{c}h^{(r)}_{(l-1)N}+\delta_{l,1}c_r\right)\eta_r\,(x,1-l)$$
$$-\cosh\left(\frac{x}{2}\right)c_0, \tag{8.37}$$

y si N es par también tenemos

$$\Delta_{m,\,\frac{1}{2},\,\lambda,\,\frac{N}{2}}(x)-\Delta_{m,\,\frac{1}{2},\,\lambda,\,\frac{N}{2}}(-x)=\frac{d}{dx}\sum_{l\geq 1}\sum_{r=0}^{m}{}^{c}h^{(r)}_{(l-\frac{1}{2})N}\,\eta_r\left(x,\frac{1}{2}-l\right). \tag{8.38}$$

Finalmente, consideremos $s=0$. Recordar que por la Observación 8.10 (a), en este caso tenemos que el morfismo $\widehat{\varphi}^{[m]}_0:\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar{\sigma}}\longrightarrow c^{[m]}_\infty$ está dado por (8.19)-(8.21) compuesto con T,donde T fue introducido en la prueba de la Proposición 8.9. Usando esto, (8.30) y (4.8) tenemos que

$$\begin{aligned}\Delta_{m,\,0,\,\lambda,\,i}(x) &= \frac{d}{dx}\sum_{l\geq 1}\sum_{r=0}^{m}\left(\frac{{}^{c}\lambda^{(r)}_{(l-1)N+i}}{r!}x^r e^{lx}-\frac{{}^{c}\lambda^{(r)}_{lN-i+1}}{r!}(-x)^r e^{-lx}\right)\\ &\quad+\frac{d}{dx}\sum_{r=0}^{m}\frac{\eta_r\left(x,\frac{1}{2}\right)c_r}{\sinh\frac{x}{2}}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\cosh\left(\frac{x}{2}\right)c_0}{\sinh\frac{x}{2}}\right).\end{aligned} \tag{8.39}$$

Además

$$\begin{aligned}\Delta_{m,\,0,\,\lambda,\,i}(x)-\Delta_{m,\,0,\,\lambda,\,i+1}(x) &= \frac{d}{dx}\sum_{l\geq 1}\Big(e^{lx}\ {}^{c}g_{(l-1)N+i}(x)\\ &\qquad +e^{-lx}\ {}^{c}g_{lN-i}(-x)\Big),\end{aligned} \tag{8.40}$$

$$\left(\frac{d}{dx}+\frac{1}{2}\right)e^{\frac{-x}{2}}\Delta_{m,\,0,\,\lambda,\,1}(x)-\left(\frac{d}{dx}-\frac{1}{2}\right)e^{\frac{x}{2}}\Delta_{m,\,0,\,\lambda,\,1}(-x)=$$
$$-\left(\frac{d^2}{dx^2}-\frac{1}{4}\right)\sum_{l\geq 1}\sum_{r=0}^{m}\left({}^{c}h^{(r)}_{(l-1)N}+\delta_{l,1}c_r\right)\eta_r\left(x,l-\frac{1}{2}\right)$$
$$-\cosh\left(\frac{x}{2}\right)c_0, \tag{8.41}$$

y si N es par tenemos

$$\Delta_{m,0,\lambda,\frac{N}{2}}(x) - \Delta_{m,0,\lambda,\frac{N}{2}}(-x) = \frac{d}{dx}\sum_{l\geq 1}\sum_{r=0}^{m} {}^{c}h^{(r)}_{(l-\frac{1}{2})N}\,\eta_r\,(x,l)\,. \tag{8.42}$$

Ahora podemos realizar los $\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar{\sigma}}-$módulos de peso máximo cuasifinitos, irreducibles. Tomemos V un $\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar{\sigma}}-$módulo de peso máximo cuasifinito irreducible con carga central c y series generatrices $\Delta_i(x)$ tal que

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}-\frac{1}{4}\right)G_1(x) = \left(\frac{d}{dx}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\Delta_1(x) + \left(\frac{d}{dx}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\Delta_1(-x)$$

es un cuasipolinomio par,

$$F_i(x) = \Delta_i(x) - \Delta_{i+1}(x)$$

para $i = 1,\ldots,\left[\frac{N}{2}\right] - \delta_{N,\mathrm{par}}$, son cuasipolinomios, y cuando N es par también tenemos que

$$F_{\frac{N}{2}}(x) = \frac{\Delta_{\frac{N}{2}}(x) - \Delta_{\frac{N}{2}}(-x)}{2}$$

es un cuasipolinomio impar. Podemos escribir

$$F_i(x) = \sum_{s\in\mathbb{C}} p_{i,s}(x)e^{sx} \tag{8.43}$$

con $p_{i,s}(x)$ polinomios,

$$G_1(x) = \sum_{s\in\mathbb{C}}\sum_{j=0}^{m_s} a_{s,j}\,\eta_j(x,s) \tag{8.44}$$

y

$$F_{\frac{N}{2}}(x) = \sum_{s\in\mathbb{C}}\sum_{j=0}^{\widetilde{m}_s} b_{s,j}\,\eta_j(x,s) \tag{8.45}$$

donde $a_{s,j}$, $b_{s,j} \in \mathbb{C}$ y $a_{s,j} \neq 0$, $b_{s,j} \neq 0$ para sólo un número finito de $s \in \mathbb{C}$.

Observación 8.15. Como, por definición de η_r tenemos que $\eta_r(x,-s) = (-1)^r\eta_r(x,s)$ para evitar ambigüedades en la expresión de $G_1(x)$ y $F_{\frac{N}{2}}(x)$ introducidos anteriormente, elegiremos el parámetro s siguiendo las siguiente reglas: cuando $s \in \mathbb{Z}$, requeriremos $s \leq 0$; cuando $s \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$, requeriremos

$s \leq \frac{1}{2}$; cuando $s \notin \mathbb{Z}/2$, requeriremos que $\operatorname{Im} s > 0$ si $\operatorname{Im} s \neq 0$, o $s - [s] < \frac{1}{2}$ si $s \in \mathbb{R}$, donde $\operatorname{Im} s$ denota la parte imaginaria de s. Se descompone el conjunto $\{s \in \mathbb{C} : a_{s,j} \neq 0 \text{ para algún } j\} \bigcup \{s \in \mathbb{C} : b_{s,j} \neq 0 \text{ para algún } j\} \bigcup \{s \in \mathbb{C} : p_{i,s}(x) \neq 0\}$ en una unión disjunta de clases de equivalencias bajo las condiciones: $s \sim \dot{s}$ si y sólo si $s = \pm\dot{s} \ (\mathrm{mod}\mathbb{Z})$. Escogemos un representante s en una de tales clases de equivalencias S tal que $s = 0$ si la clase de equivalencia está en $\mathbb{Z}$, y $s = \frac{1}{2}$ si la clase de equivalencia está en $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$. Sea $S = \{s, s - k_1, s - k_2, \cdots\}$ una de las clases de equivalencias y tomar $m = \max_{s \in S}\{m_s, \widetilde{m}_s, \deg p_{i,s}(x)\}$. Definiendo $k_0 = 0$, es fácil ver que si $s = 0$ o $s = \frac{1}{2}$, entonces $k_i \in \mathbb{N}$.

Asociaremos a cada S el $\mathfrak{g}^{[m]}-$módulo $L_S^{[m]}(\lambda_S)$ de la siguiente manera:
- Si $s \notin \mathbb{Z}/2$, ponemos

$$ {}^a h^{(r)}_{(k_j-1)N} + \delta_{1,k_j} c_r = \frac{1}{4}\, a_{-k_j+s+\frac{1}{2},r}, \quad c_0 = -\, a_{\frac{1}{2},0}, \tag{8.46} $$

$$ {}^a h^{(r)}_{k_j N - i} = \left(\frac{d}{dx}\right)^r p_{i,-k_j+s}(0), \tag{8.47} $$

$$ {}^a h^{(r)}_{(k_j-1)N+i} = (-1)^r \left(\frac{d}{dx}\right)^r p_{i,k_j-s}(0), \tag{8.48} $$

y si N es par

$$ {}^a h^{(r)}_{\left(k_j-\frac{1}{2}\right)N} = 2b_{-k_j+s,\,r} \tag{8.49} $$

para $r = 0 \cdots m$ y $j = 0, 1, 2, \cdots$.

Asociamos a S el $\widehat{\mathfrak{gl}}_\infty^{[m]}-$módulo $L_S^{[m]}(\lambda_S)$ con cargas centrales

$$ c_r = \sum_i \sum_{k_j} \left({}^a h^{(r)}_{(k_j-1)N+i} + {}^a h^{(r)}_{k_j N-i} \right) + \sum_{k_j} \left({}^a h^{(r)}_{(k_j-1)N} + \delta_{N,\mathrm{par}}\, {}^a h^{(r)}_{\left(k_j-\frac{1}{2}\right)N} \right) \tag{8.50} $$

y etiquetas

$$ \begin{aligned} \lambda_j^{(r)} \quad = \quad & \sum_{(k_j-1)N+i \geq j} {}^a \widetilde{h}^{(r)}_{(k_j-1)N+i} + \sum_{k_j N - i \geq j} {}^a \widetilde{h}^{(r)}_{k_j N-i} \\ & + \delta_{N,\mathrm{par}} \sum_{\left(k_j-\frac{1}{2}\right)N \geq j} {}^a \widetilde{h}^{(r)}_{\left(k_j-\frac{1}{2}\right)N} + \sum_{(k_j-1)N \geq j} {}^a \widetilde{h}^{(r)}_{(k_j-1)N}, \end{aligned} \tag{8.51} $$

donde ${}^a \widetilde{h}^{(r)}_k = {}^a h^{(r)}_k - c_r \delta_{k,0}$.

• Si $s=0$, tomamos

$$ {}^{c}h^{(r)}_{k_jN} - \delta_{k_j,0}c_r = a_{k_j+\frac{1}{2},r}, \quad c_0 = -a_{\frac{1}{2},0}, \tag{8.52} $$

$$ {}^{c}h^{(r)}_{k_jN+i} = \left(\frac{d}{dx}\right)^r p_{i,k_j+1}, \tag{8.53} $$

$$ {}^{c}h^{(r)}_{(k_j+1)N-i} = (-1)^r \left(\frac{d}{dx}\right)^r p_{i,-k_j-1}(0), \tag{8.54} $$

y si N es par

$$ {}^{d}h^{(r)}_{\left(k_j+\frac{1}{2}\right)N} = 2b_{k_j+1,r} \tag{8.55} $$

para $r=0\cdots m$ y $j=0,1,2\cdots$.

Asociamos a S el $c_\infty^{[m]}-$módulo $L_S^{[m]}(\lambda_S)$ con cargas centrales

$$ c_r = \sum_i \sum_{k_j} \left({}^{c}h^{(r)}_{k_jN+i} + {}^{c}h^{(r)}_{(k_j+1)N-i}\right) + \sum_{k_j}\left(\delta_{N,\text{par}}\, {}^{c}h^{(r)}_{\left(k_j+\frac{1}{2}\right)N} + {}^{c}h^{(r)}_{k_jN}\right) \tag{8.56} $$

y etiquetas

$$ \begin{aligned} \lambda_j^{(r)} \quad = \quad & \sum_{k_jN+i\geq j} {}^{c}h^{(r)}_{k_jN+i} + \sum_{(k_j+1)N-i\geq j} {}^{c}h^{(r)}_{(k_j+1)N-i} + \sum_{k_jN\geq j} {}^{c}h^{(r)}_{k_jN} \\ & +\delta_{N,\text{par}} \sum_{\left(k_j+\frac{1}{2}\right)N\geq j} {}^{c}h^{(r)}_{\left(k_j+\frac{1}{2}\right)N}. \end{aligned} \tag{8.57} $$

• Si $s=\frac{1}{2}$,

$$ {}^{c}h^{(r)}_{k_jN} + \delta_{0,k_j}c_r = a_{k_j,r}, \quad c_0 = -a_{-\frac{1}{2},0}, \tag{8.58} $$

$$ {}^{c}h^{(r)}_{k_jN+i} = (-1)^r \left(\frac{d}{dx}\right)^r p_{i,\,k_j+\frac{1}{2}}(0), \tag{8.59} $$

$$ {}^{c}h^{(r)}_{(k_j+1)N-i} = \left(\frac{d}{dx}\right)^r p_{i,\,-k_j-\frac{1}{2}}(0), \tag{8.60} $$

y si N es par

$$ {}^{c}h^{(r)}_{\left(k_j+\frac{1}{2}\right)N} = 2b_{-k_j+\frac{1}{2},r} \tag{8.61} $$

para $r=0\cdots m$ y $j=0,1,\cdots$.

Asociamos a S el $c_\infty^{[m]}-$módulo $L_S^{[m]}(\lambda_S)$ con cargas centrales

$$c_r = \sum_i \sum_{k_j} \left({}^c h^{(r)}_{k_j N+i} + ^c h^{(r)}_{(k_j+1)N-i} \right) + \sum_{k_j} \left(\delta_{N,\text{par}}\, {}^c h^{(r)}_{\left(k_j+\frac{1}{2}\right)N} + {}^c h^{(r)}_{k_j N} \right) \tag{8.62}$$

y etiquetas

$$\begin{aligned} \lambda_j^{(r)} \quad = \quad & \sum_{k_j N+i \geq j} {}^c h^{(r)}_{k_j N+i} + \sum_{(k_j+1)N-i \geq j} {}^c h^{(r)}_{(k_j+1)N-i} + \sum_{k_j N \geq j} {}^c h^{(r)}_{k_j N} \\ & + \delta_{N,\text{par}} \sum_{\left(k_j+\frac{1}{2}\right)N \geq j} {}^c h^{(r)}_{\left(k_j+\frac{1}{2}\right)N}. \end{aligned} \tag{8.63}$$

Denotamos por $\{s_1, s_2, \cdots, s_M\}$ un conjunto de representantes de clases de equivalencia en el conjunto $\{s \in \mathbb{C} : a_{s,j} \neq 0 \text{ para algún}\, j\} \bigcup \{s \in \mathbb{C} : b_{s,j} \neq 0 \text{ para algún}\, j\} \bigcup \{s \in \mathbb{C} : p_{i,s}(x) \neq 0\}$. Por Teorema 8.14 el $\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar{\sigma}}$-módulo $L_{\vec{s}}^{[\vec{m}]}(\vec{\lambda})$ es irreducible para $\vec{s} = (s_1, s_2, \cdots, s_M)$ tal que $s_i \in \mathbb{Z}$ implica $s_i = 0$, $s_i \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ implica $s_i = \frac{1}{2}$, y $s_i \neq \pm s_j \mod \mathbb{Z}$ para $i \neq j$. Tenemos

$$\Delta_{\vec{m},\vec{s},\vec{\lambda}}(x) = \sum_i \Delta_{m_i,s_i,\lambda_i}(x) \quad \text{y} \quad c = \sum_i c_0(i).$$

Por Teorema 8.5 y resumiendo lo anterior hemos probado lo siguiente.

Teorema 8.16. *Sea V un $\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar{\sigma}}$-módulo de peso máximo irreducible cuasifinito con carga central c y series generatrices $\Delta_i(x)$ tales que*

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{4}\right) G_1(x) = \left(\frac{d}{dx} - \frac{1}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} \Delta_1(x) - \left(\frac{d}{dx} - \frac{1}{2}\right) e^{\frac{x}{2}} \Delta_1(-x)$$

es un cuasipolinomio par,

$$F_k(x) = \Delta_k(x) - \Delta_{k+1}(x)$$

para $k = 1, \ldots, \left[\frac{N}{2}\right] - \delta_{N,par}$ son cuasipolinomios, y si N es par

$$F_{\frac{N}{2}}(x) = \frac{\Delta_{\frac{N}{2}}(x) - \Delta_{\frac{N}{2}}(-x)}{2}$$

es un cuasipolinomio impar. Entonces V es isomorfo al el producto tensorial de módulos $L_s^{[m]}(\lambda_S)$ para diferentes clases de equivalencias S.

9 Representaciones irreducibles de crecimiento finito sobre el álgebra de Lie conforme gc_N y algunas de sus subálgebras.

En esta sección clasificamos todas las representaciones irreducibles de crecimiento finito de las subálgebras conformes de rango infinito de gc_N que contienen una subálgebra de Virasoro. Dichas subálgebras propias que contienen una subálgebra de Virasoro son (ver Observación 6.5 en Ref. [14]) $\mathrm{gc}_{N,xI}, \mathrm{oc}_N$ y $\mathrm{spc}_{N,xI}$. Además las realizamos en términos de las álgebras de Lie $g\ell_\infty$ y $g\ell_{+\infty}$

9.1 Crecimiento de los $\widehat{g\ell}_\infty^{[m]}$-módulos irreducibles.

En esta subsección describimos el crecimiento de las representaciones irreducibles sobre el álgebra de Lie $\widehat{g\ell}_\infty^{[m]}$ y sus subálgebras de Lie clásicas de tipo A, B, C y D.

Denotamos por $\mathbb{C}^{+\infty}$ el conjunto de todas las sucesiones de números complejos $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots)$ para el cual todos salvo un número finito de λ_i' s son nulos. Sea $d(\lambda)$ el número de λ_i' s no nulos y $|\lambda|$ denota su suma. Llamaremos Par^+ el subconjunto de $\mathbb{C}^{+\infty}$ que consiste de todas las sucesiones no crecientes de enteros no negativos. Denotaremos por $\widetilde{g\ell}_{+\infty}$ el álgebra de Lie de todas las matrices $(a_{i,j})_{i,j=1}^{+\infty}$ con un número finito de entradas no nulas $a_{i,j} \in \mathbb{C}$. Dado $\lambda \in \mathbb{C}^{+\infty}$, tenemos el único $\widetilde{g\ell}_{+\infty}$-módulo irreducible $L^+(\lambda) := L(\widetilde{g\ell}_{+\infty}, \lambda)$, el cual tiene un vector no nulo v_λ tal que

$$E_{i,j} v_\lambda = 0 \quad \text{para} \quad i < j \quad \text{and} \quad E_{i,i} v_\lambda = \lambda_i v_\lambda. \tag{9.1}$$

Cada $L^+(\lambda)$ tiene una única $\mathbb{Z}_+$-graduación $L^+(\lambda) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}_+} L^+(\lambda)_j$, llamada su *graduación principal*, la cual satisface las siguientes propiedades:

$$L^+(\lambda)_0 = \mathbb{C} v_\lambda, \quad E_{i\,j} L^+(\lambda)_k \subset L^+(\lambda)_{k+i-j}.$$

Cómo $\lambda \in \mathbb{C}^{+\infty}$, es fácil ver que $\mathrm{dim} L^+(\lambda)_j < \infty$, por lo tanto podemos definir el q-caracter de $L^+(\lambda)$ como

$$ch_q L^+(\lambda) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} (\mathrm{dim} L^+(\lambda)_j)\, q^j.$$

Para $\lambda \in \mathrm{Par}^+$, sea $d = d(\lambda)$ y $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \cdots, \lambda_d)$. Sea $\widetilde{g\ell}_d$ el álgebra de Lie de todas las matrices $(a_{ij})_{i,j=1}^d$. Esta puede ser vista como una subálgebra de $\widetilde{g\ell}_{+\infty}$ de modo natural. Denotamos por $\bar{L^+}(\bar{\lambda})$ el $\widetilde{g\ell}_d$-submódulo (irreducible) de $L^+(\lambda)$ generado por v_λ. Este es, por supuesto, isomorfo al $\widetilde{g\ell}_d$-módulo irreducible de dimensión finita asociado a $\bar{\lambda}$, por lo que el q-caracter es un polinomio en q.

Lema 9.1. *Sea $\lambda \in Par^+$, $d = d(\lambda)$. Entonces*

$$ch_q L^+(\lambda) = ch_q \bar{L^+}(\bar{\lambda}) / \prod_j^d (1 - q^j)_q^{\lambda_d - j + 1},$$

donde $(1-a)_q^m = (1-a)(1-qa)\cdots(1-q^{m-1}a)$.

Demostración. Recordemos que (ver Ref. [6])

$$ch_q L^+(\lambda) = \prod_{\alpha > 0} (1 - q^{\langle \lambda + \rho, \alpha \rangle}) / (1 - q^{\langle \rho, \alpha \rangle}). \tag{9.2}$$

Aquí el producto es tomado sobre el conjunto de todas las coraíces positivas de $\widetilde{g\ell}_{+\infty}$, las cuales son todos los elementos $E_{i,i} - E_{j,j}$ con $i < j$, $\langle \lambda, E_{i,i} \rangle = \lambda_i$ y $\langle \rho, E_{i,i} \rangle = -i$. Una fórmula similar vale para $ch_q \bar{L^+}(\bar{\lambda})$; esto es parte del producto (9.2) correspondiente a $i < j \leq d$. Es claro que los factores de (9.2) correspondiente a $d < i < j$ son igual a 1, y es fácil ver que el producto sobre todos los pares i, j con $i \leq d$ fijo y todos los $j > d$ es igual a $1/(1 - q^{d-i+1})_q^{\lambda_i}$. □

Recordemos que dado un espacio vectorial V con una filtración creciente por subespacios de dimensión finita $V_{[j]}$, el *crecimiento* de V se define por

$$\text{growth}\, V = \limsup_{j \to \infty} (\log \dim V_{[j]} / \log j).$$

Definimos el crecimiento de $L^+(\lambda)$ usando su filtración $L^+(\lambda)_{[j]} = \oplus_{i \leq j} L^+(\lambda)_i$ asociada a la graduación principal.

Teorema 9.2. *(a) Si $\lambda \in Par^+$, entonces*

$$\textit{growth}\, L^+(\lambda) = |\lambda|.$$

(b)Si $\lambda \in \mathbb{C}^{+\infty} \setminus Par^+$ entonces $\textit{growth}\, L^+(\lambda) = \infty$.

Demostración. Se sigue de Lema 9.1 que para $\lambda \in \mathrm{Par}^+$ es igual al crecimiento del álgebra de polinomios en generadores de grado $1, 2, \cdots, \lambda_s$; $2, 3, \cdots, \lambda_{s-1} + 1$; $\cdots$; $s, s+1, \cdots, \lambda_1 + s - 1$. El número total de esos generadores es $|\lambda|$ y como el crecimiento de el álgebra de polinomios es independiente de los grados de los generadores, probamos (a).

Sea ahora $\lambda \in \mathbb{C}^{+\infty} \setminus \mathrm{Par}^+$. Entonces $\lambda_k - \lambda_{k+1} \notin \mathbb{Z}_+$ para algún k. Pero entonces $E_{k+1,\,k}^N v_\lambda \neq 0$ para cada $N \in \mathbb{Z}_+$. Mirando a la subálgebra de $\widetilde{g\ell}_{+\infty}$ generado por todos los $E_{i,\,j}$ con $i, j \geq k+1$, concluimos de (a) que

$$\mathrm{growth} L^+(\lambda) \geq N + \sum_{i \geq k+1} \lambda_i .$$

Esto prueba (b). $\square$

De manera similar se puede considerar el álgebra de Lie $\widetilde{g\ell}_{-\infty}$ de todas las matrices $(a_{ij})_{i,j=0}^{-\infty}$ con un número finito de entradas no nulas y el $\widetilde{g\ell}_{-\infty}$-módulo irreducible $L^-(\lambda)$, también denotado por $L(\widetilde{g\ell}_{-\infty}; \lambda)$, parametrizado por el conjunto $\mathbb{C}^{-\infty}$ de sucesiones $\mu = (\cdots, \mu_{-1}, \mu_0)$ con un número finito de elementos no nulos. Resultados similares a el Lema 9.1 y el Teorema 9.2 vale para el subconjunto $\mathrm{Par}^- \subset \mathbb{C}^{-\infty}$ que consiste de sucesiones no-crecientes de enteros no-positivos. Sea $g\ell_\infty$ el álgebra de Lie de todas las matrices $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ tal que $a_{ij} = 0$ si $|i-j| \gg 0$. Denotamos por $g\ell_{+\infty}$ (respectivamente $g\ell_{-\infty}$) la subálgebra de $g\ell_\infty$ que de todas las matrices $a_{ij} = 0$ para i o $j \leq 0$ (respectivamente, i o $j > 0$). Notemos que esas dos subálgebras conmutan y que $g\ell_{\pm\infty}$ contiene a $\widetilde{g\ell}_{\pm\infty}$ como una subálgebra. Observemos también que los $\widetilde{g\ell}_{\pm\infty}$-módulos $L^\pm(\lambda)$ se extienden univocamente a $g\ell_{\pm\infty}$. El álgebra de Lie $g\ell_\infty$ tiene una extensión central $\widehat{g\ell}_\infty = g\ell_\infty + \mathbb{C}C$ por $\mathbb{C}$ definida por el cociclo (4.2). La restricción de este cociclo a $g\ell_{+\infty}$ y a $g\ell_{-\infty}$ es cero. También necesitaremos brevemente el álgebra de Lie $\widehat{g\ell}_\infty^{[m]}$ definida para cada $m \in \mathbb{Z}_+$ en la Sección 4.

Observación 9.3. Para esta parte del trabajo consideraremos la graduación definida por

$$\mathrm{deg} E_{ij} = i - j. \tag{9.3}$$

En el caso de $\widehat{g\ell}_\infty^{[m]}$ también ponemos $\mathrm{deg} R_m = 0$. Esto nos da la descomposición triangular

$$\widehat{g\ell}_\infty^{[m]} = (\widehat{g\ell}_\infty^{[m]})_+ \oplus (\widehat{g\ell}_\infty^{[m]})_0 \oplus (\widehat{g\ell}_\infty^{[m]})_- ,$$

donde

$$(\widehat{g\ell}_\infty^{[m]})_\pm = \oplus_{j\in\mathbb{N}} (\widehat{g\ell}_\infty^{[m]})_{\pm j}.$$

El álgebra de Lie $\widehat{g\ell}_\infty$ tiene una familia de módulos $L(\widehat{g\ell}_\infty); \lambda, c)$ parametrizada por $\lambda \in \mathbb{C}^{+\infty} = \{(\lambda_i)_{i\in\mathbb{Z}} :$ para todos salvo un número finito de λ_i son $0\}$,

$c \in \mathbb{C}$ definido por (9.1) y $\mathbb{C}v_\lambda = cv_\lambda$. Análogamente $\widehat{g\ell}_\infty^{[m]}$ tiene una familia de módulos $L(\widehat{g\ell}_\infty^{[m]}; \vec{\lambda}, \vec{c})$ donde $\vec{\lambda} \in (\mathbb{C}^\infty)^{m+1}$ y $c \in \mathbb{C}^{m+1}$ son definidos de manera similar. Esto es, el $\widehat{g\ell}_\infty^{[m]}$-módulo de peso máximo $L(\widehat{g\ell}_\infty^{[m]}; \Lambda)$ con peso máximo $\Lambda \in (\widehat{g\ell}_\infty^{[m]})_0^*$ es determinado por sus etiquetas $\vec{\lambda}_i^{(j)} = \Lambda(u^j E_{ii})$ y las cargas centrales $\vec{c_j} = \Lambda(u^j)$. La graduación (9.3) es consistente con la graduación de $L^\pm(\lambda)$ y la de $L(\widehat{g\ell}_\infty;, c)$.

9.2 Crecimiento de los $b_\infty^{[m]}$-módulos irreducibles .

Estudiaremos la teoría de representación de b_∞.

El conjunto de coraíces simples de b_∞, puede ser descripto como sigue cf. Ref. [10]:

$$\pi\check{} = \{\alpha_0\check{} = 2E_{-1,-1} - E_{1,1} + 2C,$$
$$\alpha_i\check{} = E_{i,i} - E_{i+1,i+1} - E_{-i,-i} + E_{-1-i,-1-i},\ i \in \mathbb{N}\}.$$

El conjunto de raíces es

$$\Delta = \{\pm\varepsilon_0,\ \pm\varepsilon_i,\ \pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j,\ i \neq j,\ i,j \in \mathbb{N}\}.$$

El conjunto de coraíces positivas es

$$\Delta_+\check{} = \{\alpha_i\check{} + \alpha_{i+1}\check{} + \cdots + \alpha_j\check{},\ 0 \le i \le\ j\}$$
$$\bigcup\{\alpha_0\check{} + 2\alpha_1\check{} + \cdots + 2\alpha_i\check{} + \alpha_{i+1}\check{} + \cdots + \alpha_{j-1}\check{},\ 1 \le i < j\}.$$

El conjunto de raíces simples

$$\pi = \{\alpha_0 = -\varepsilon_1,\ \alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1},\ i \in \mathbb{N}\}.$$

Aquí los ε_i son vistos como restringidos a la subálgebra dual de Cartan restringida de b_∞, esto es $\varepsilon_i = \varepsilon_{-i}$. Dado $\lambda \in (b_\infty)_0^*$, las etiquetas y cargas centrales son simplemente (en este caso, omitimos los supra índices b)

$$\lambda_i = \lambda(E_{i,i} - E_{-i,-i}), \quad i > 0, \quad c = \lambda(C).$$

De modo que $\lambda(\alpha_0\check{}) = 2c - \lambda_1$ y $\lambda(\check{\alpha_i}) = \lambda_i - \lambda_{i+1}$ para $i \in \mathbb{N}$. Denotamos por Λ_i el i-esimo peso fundamental de b_∞, es decir $\Lambda_i(\check{\alpha_j}) = \delta_{i,j}$.

Sea $P^+ = \{\lambda \in (b_\infty)_0^* : \langle\lambda, \alpha_i\check{}\rangle \in \mathbb{Z}_+$ para todo $i \in \mathbb{Z}_+\}$ denota el conjunto de pesos dominantes integrales de b_∞. Dado $\lambda \in P^+$, tenemos $\lambda = \Delta_{n_1} + \Delta_{n_2} + \cdots + \Delta_{n_k} + h\,\Delta_0$, $n_1 \ge n_2 \ge \cdots \ge n_k \ge 1$, $h \in \mathbb{Z}_+$, y el módulo $L(b_{\infty;\lambda})$ tiene carga central $c = k + h/2$. Observemos que el diagrama conjugado de Young correspondiente a la partición $(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ es $(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n_1})$, y $\lambda_i = 0$ para $i > n_1$. Notemos que $n_1 = n_1(\lambda) = \max\{i \in \mathbb{N} : \langle \lambda_i, \alpha_i \rangle\} \neq 0$. Observemos que $\mathfrak{so}(2n_1 + 1)$ puede ser vista como una subálgebra de b_∞ de una manera natural, cuyo conjunto de raíces simples es $\{\varepsilon_1, \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{n_1-1} - \varepsilon_{n_1}\}$. Denotamos por $\bar{\lambda}$ el peso dominante integral de $\mathfrak{so}(2n_1+1)$ dado por $\bar{\lambda}(2(E_{-1,-1} - E_{1,1})) = 2(c - \lambda_1)$ y $\bar{\lambda}(E_{i,i} - E_{i+1,i+1} - E_{-i,-i} + E_{-1-i,-1-i}) = \lambda_i - \lambda_{i+1}$ para $1 \leq i < n_1$. Denotamos por $\bar{L}(\bar{\lambda})$ el $\mathfrak{so}(2n_1+1)$-submódulo irreducible de $L(b_\infty; \lambda)$ generado por su vector de peso máximo. Este es, por supuesto, isomorfo al $\mathfrak{so}(2n_1+1)$-módulo irreducible de dimensión finita asociado a $\bar{\lambda}$, por lo que su q-caracter es un polinomio en q.

Lema 9.4. *Sea $\lambda \in P_+, n_1 = n_1(\lambda)$. Entonces*

$$\mathrm{ch}_q L(b_\infty; \lambda) = ch_q \bar{L}(\bar{\lambda}) \prod_{j=1}^{n_1} \frac{1}{(1-q^j)_q^{\lambda_{n_1}-j+1}} \prod_{i=1}^{n_1} \frac{1}{(1-q^{n_1+i})_q^{2c-\lambda_i}} \times \prod_{n_1 \leq i} \frac{1}{(1-q^{2i+1})_q^{2c}} \tag{9.4}$$

donde $(1-a)_q^m = (1-a)(1-qa)\ldots(1-q^{m-1}a)$.

Demostración. La prueba es completamente similar a la del Lema 9.1, usando la información introducida anteriormente. (cf. prueba de la Proposición 1.1 en [10]).

□

Teorema 9.5. *Todos los módulos no triviales $L(b_\infty^{[m]}; \lambda)$ tienen crecimiento infinito.*

Demostración. Es suficiente considerar el caso $m = 0$. Dado $\lambda \in (b_\infty)_0^*$, consideramos la subálgebra de b_∞ isomorfa a $g\ell_{+\infty}$ generada por todos los $E_{i,j} - E_{-j,-i}$ con $i, j \geq 1$, y por Teorema 9.2, concluimos que $L(b_\infty, \lambda)$ tiene crecimiento infinito si $\lambda_i - \lambda_{i+1} \notin \mathbb{Z}_+$ para algún $i \geq 1$.

Asumamos $\lambda_i - \lambda_{i+1} \in \mathbb{Z}_+$ para todo $i \geq 1$. Si $-2\lambda_1 + 2c \notin \mathbb{Z}_+$, entonces $(E_{1,0} - E_{0,-1})^N v_\lambda \neq 0$ para cada $N \in \mathbb{Z}_+$. Mirando la subálgebra de b_∞ isomorfa a $g\ell_{+\infty}$ previamente definida, concluimos del Teorema 9.2 que

$$\mathrm{growth}\, L(b_\infty, \lambda) \geq N + \sum_{i \geq 1} \lambda_i \,.$$

Si $-2\lambda_1 + 2c \in \mathbb{Z}_+$, entonces por el mismo argumento en la prueba del Teorema 9.2 , y mirando el último factor en el Lema 9.4, concluimos que $L(b_\infty, \lambda)$ tiene el mismo crecimiento que el álgebra de polinomios con un número infinito de generadores, finalizando la prueba.

□

9.3 Crecimiento de los $c_\infty^{[m]}$-módulos irreducibles.

Repasaremos la teoría de representaciones de c_∞.

El conjunto de coraíces simples de c_∞, denotado por $\Pi\check{}$, puede ser descripto como sigue (cf. [10]):

$$\begin{aligned}\Pi\check{} = \{\alpha_0\check{} &= E_{0,0} - E_{1,1} + C,\\ \alpha_i\check{} &= E_{i,i} - E_{i+1,i+1} - E_{-i,-i} + E_{1-i,1-i}\,,\ i \in \mathbb{N}\}\,.\end{aligned}$$

El conjunto de raíces

$$\Delta = \{\pm 2\varepsilon_i,\ \pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j,\ i \neq j,\ i,j \in \mathbb{N}\}\,.$$

El conjunto de coraíces positivas es:

$$\begin{aligned}\Delta_+\check{} &= \{\alpha_i\check{} + \alpha_{i+1}\check{} + \cdots + \alpha_j\check{},\ 0 \le i \le j\}\\ &\cup\ \{2\alpha_0\check{} + 2\alpha_1\check{} + \cdots + 2\alpha_i\check{} + \alpha_{i+1}\check{} + \cdots + \alpha_j\check{},\ 0 \le i < j\}\,.\end{aligned}$$

El conjunto de raíces simples es

$$\Pi = \{\alpha_0 = -2\varepsilon_1,\ \alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1},\ i \in \mathbb{N}\}\,.$$

Aquí ε_i son considerados restringidos a la la subálgebra dual de Cartan restringida a c_∞, esto es $\varepsilon_i = -\varepsilon_{1-i}$. Recordemos, dado $\lambda \in (c_\infty)_0^*$, las etiquetas y las cargas centrales son (en este caso, omitimos el supra índice c)

$$\lambda_j = \lambda(E_{j,j} - E_{1-j,1-j}),\ j \in \mathbb{N}\,, \quad c = \lambda(C).$$

De modo que $\lambda(\alpha_0\check{}) = -\lambda_1 + c$ y $\lambda(\alpha_i\check{}) = \lambda_i - \lambda_{i+1}$ para $i \in \mathbb{N}$. Denotamos por Λ_i el i-ésimo peso fundamental de c_∞, es decir $\Lambda_i(\alpha_j\check{}) = \delta_{i,j}$.

Sea $P_+ = \{\lambda \in (c_\infty)_0^\star \,|\, \langle\lambda, \alpha_i\check{}\rangle \in \mathbb{Z}_+,\ \text{para todo}\, i \in \mathbb{Z}_+\}$ el conjunto de pesos dominantes integrales de c_∞. Dado $\lambda \in P_+$, tenemos $\lambda = \Lambda_{n_1} + \Lambda_{n_2} + \cdots + \Lambda_{n_k} + h\Lambda_0$, $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_k \geq 1$, $h \in \mathbb{Z}_+$, y el módulo $L(c_\infty, \lambda)$ tiene carga central $c = k + h$. Observemos que el diagrama de Young conjugado correspondiente a la partición $(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ es $(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n_1})$, y $\lambda_i = 0$ para $i > n_1$. Notemos que $n_1 = n_1(\lambda) = \max\{i \in \mathbb{N} \,|\, \langle\lambda, \alpha_i\check{}\rangle \neq 0\}$. Observemos que $\mathfrak{sp}(2n_1)$ puede ser visto como una subálgebra de c_∞ de un modo natural, cuyo conjunto de raíces simples es $\{-2\varepsilon_1, \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n_1-1} - \varepsilon_{n_1}\}$. Ses $\bar{\lambda}$ el peso dominante integral de $\mathfrak{sp}(2n_1)$ dado por $\bar{\lambda}((E_{0,0} - E_{1,1}) = c - \lambda_1$ y $\bar{\lambda}(E_{i,i} - E_{i+1,i+1} + E_{-i,-i} - E_{1-i,1-i}) = \lambda_i - \lambda_i$ para $1 \leq i \leq n_1$. Sea $\bar{L}(\bar{\lambda})$ el $\mathfrak{sp}(2n_1)$-submódulo irreducible de $L(c_\infty, \lambda)$ generado por su vector de peso máximo. Este es, por supuesto, isomorfo a el $\mathfrak{sp}(2n_1)$-módulo de dimensión finita irreducible asociado a $\bar{\lambda}$, por lo tanto su q-caracter es un polinomio en q.

Lema 9.6. *Sea $\lambda \in P_+, n_1 = n_1(\lambda)$. Entonces*

$$\mathrm{ch}_q L(c_\infty; \lambda) = ch_q \bar{L}(\bar{\lambda}) \prod_{j=1}^{n_1} \frac{1}{(1-q^j)_q^{\lambda_{n_1}-j+1}} \prod_{i=1}^{n_1} \frac{1}{(1-q^{n_1+i+3})_q^{2c-\lambda_{i+1}}} \times \prod_{n_1 \leq i} \frac{1}{(1-q^{2i+3})_q^{2c}} \tag{9.5}$$

donde $(1-a)_q^m = (1-a)(1-qa)\ldots(1-q^{m-1}a)$.

Demostración. La prueba es completamente similar a la del Lema 9.1, usando los datos introducidos anteriormente (cf. prueba de la Proposición 1.1 en [10]).

□

Teorema 9.7. *Todos los módulos no triviales $L(c_\infty^{[m]}; \lambda)$ tienen crecimiento infinito .*

Demostración. Es suficiente considerar el caso $m = 0$. Dado $\lambda \in (c_\infty)_0^*$, miramos la subálgebra de c_∞ isomorfa a $g\ell_{+\infty}$ generada por todos los $E_{i,j} - E_{1-j,1-i}$ con $i, j \geq 1$, y por Teorema 9.2 concluimos que $L(c_\infty, \lambda)$ tiene crecimiento infinito si $\lambda_i - \lambda_{i+1} \notin \mathbb{Z}_+$ para algún $i \geq 1$.

Asumamos $\lambda_i - \lambda_{i+1} \in \mathbb{Z}_+$ para todo $i \geq 1$. Si $c - \lambda_1 \notin \mathbb{Z}_+$, entonces $(E_{1,0})^N v_\lambda \neq 0$ para cada $N \in \mathbb{Z}_+$. Mirando a la subálgebra de c_∞ isomorfa a $g\ell_{+\infty}$ previamente definida, concluimos del Teorema 9.2 que

$$\mathrm{growth}\, L(c_\infty, \lambda) \geq N + \sum_{i \geq 1} \lambda_i\,.$$

Si $c - \lambda_1 \in \mathbb{Z}_+$, entonces por el mismo argumento que se usó en la prueba del Teorema 9.2, y mirando el último factor en el Lema 9.6, concluimos que $L(c_\infty, \lambda)$ tiene el mismo crecimiento que el álgebra de polinomios en infinitos generadores, finalizando la prueba. □

9.4 Crecimiento de los $d_\infty^{[m]}$-módulos irreducibles.

Resultados similares al Lema 9.4 y Teorema 9.5 valen para $d_\infty^{[m]}$.

9.5 gc_N-módulos irreducibles de crecimiento finito

En esta sección clasificamos y realizamos los módulos irreducibles de crecimiento finito sobre $\mathrm{g}c_N$ y las subálgebras que contienen una subálgebra de Virasoro.

Comenzamos estudiando la teoría de representación de la subálgebra de Lie $\mathcal{D}_-^N$ de operadores diferenciales regulares matriciales en $\mathbb{C}$. Esta consiste de combinaciones lineales de operadores diferenciales de la forma $f(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^m e_{i,j}$,donde f es un polinomio $m \in \mathbb{Z}_+$ y $e_{i,j}$ es la base estándar de $\mathrm{Mat}_N\mathbb{C}$, con $i, j \in \{1, \cdots, N\}$. En particular, $De_{i,j} = \left(t\frac{d}{dt}\right) e_{i,j} \in \mathcal{D}_-^N$. Consideremos la $\mathbb{Z}$-graduación $\mathcal{D}_-^N = \oplus_{p\in\mathbb{Z}} \left(\mathcal{D}_-^N\right)_p$ definida por

$$\deg t = -N \ \ \deg \frac{d}{dt} = N \ \ \deg e_{i,j} = j - i\,. \tag{9.6}$$

Dado $\vec{\Delta} = (\vec{\Delta_0}, \vec{\Delta_1}, \ldots) \in (\mathbb{C}^\infty)^N$ definimos el módulo de peso máximo $L(\vec{\Delta}; \mathcal{D}_-^N)$ sobre $\mathcal{D}_-^N$ como el único (salvo isomorfismo) módulo irreducible que tiene un vector no nulo $v_{\vec{\Delta}}$ con las siguientes propiedades:

$$\left(\mathcal{D}_-^N\right)_p v_{\vec{\Delta}} = 0 \text{ para } p < 0, \ \ D^n e_{i\,i} v_{\vec{\Delta}} = \Delta_n^i v_{\vec{\Delta}} \ \text{ para } \ n \in \mathbb{Z}_+ \quad i = 1, \cdots, N\,.$$

La graduación (9.6) de $\mathcal{D}_-^N$ induce la que llamaremos la graduación principal de $L(\vec{\Delta}; \mathcal{D}_-^N) = \oplus_{p\in\mathbb{Z}_+} L_p$ tal que $L_0 = \mathbb{C}v_{\vec{\Delta}}$. Recordemos que el módulo $L(\vec{\Delta}; \mathcal{D}_-^N)$ es llamado cuasifinito si $\dim L_p < \infty$ para todo $p \in \mathbb{Z}_+$.

Los módulos cuasifinitos sobre $\mathcal{D}_-^N$ pueden ser construidos de la siguiente manera. Consideremos la acción natural de $\mathcal{D}_-^N$ en $\mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathbb{C}^N$, elegimos la base $v_j = t^{-j}$ $(j \in \mathbb{Z})$ de $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$, y sea $\varphi : \mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ el isomorfismo definido por la fórmula (5.9). Esto nos da un morfismo de $\mathcal{D}_-^N$ en $g\ell_\infty$. Como $\mathbb{C}[t] \otimes \mathbb{C}^N$ es $\mathcal{D}_-^N$-invariante, tenemos los $\mathcal{D}_-^N$-módulos $\mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathbb{C}^N / \mathbb{C}[t] \otimes \mathbb{C}^N$ y $\mathbb{C}[t] \otimes \mathbb{C}^N$, lo cual nos da un morfismo de $\mathcal{D}_-^N$ en $g\ell_{+\infty}$ y $g\ell_{-\infty}$, respectivamente, por lo tanto un morfismo de $\mathcal{D}_-^N$ en $g\ell_{+\infty} \oplus g\ell_{-\infty}$. Todos esos morfismo respetan las graduaciones correspondientes.

De aquí en adelante denotaremos $\mathbb{C}^N[t, t^{-1}] := \mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathbb{C}^N$ y $\mathbb{C}^N[t] := \mathbb{C}[t] \otimes \mathbb{C}^N$.

Tomemos $\lambda^\pm \in \mathbb{C}^{\pm\infty}$ y consideremos el $g\ell_{-\infty} \oplus g\ell_{+\infty}$-módulo $L^+(\lambda^+) \otimes L^-(\lambda^-)$. Con el mismo argumento que se usó en [8], tenemos el siguiente resultado.

Lema 9.8. *Cuando restringimos a $\mathcal{D}_-^N$, el módulo $L^+(\lambda^+) \otimes L^-(\lambda^-)$ resulta irreducible.*

Se sigue inmediatamente que $L^+(\lambda^+) \otimes L^-(\lambda^-)$ es un módulo de peso máximo irreducible sobre $\mathcal{D}_-^N$, el cual es obviamente cuasifinito. Es fácil ver que tenemos :

$$\Delta_n^i = \sum_{j\geq 1} (-j)^n \lambda_{jN-i+1}^+ + \sum_{j\leq 0} (-j)^n \lambda_{jN-i+1}^-,$$

de modo que

$$\Delta_i(x) : = \sum_{n\geq 0} \Delta_n x^n/n! = \sum_{j\geq 1} \lambda_{jN-i+1}^+ e^{-jx} + \sum_{j\leq 0} \lambda_{jN-i+1}^- e^{-jx},$$

con $i = 1, \cdots, N$. Es claro que para $\lambda^\pm \in \mathrm{Par}^\pm$ tenemos, cf. Teorema 9.2(a):

$$\mathrm{growth}\, L^+(\lambda^+) \otimes L^-(\lambda^-) = |\lambda^+| + |\lambda^-|\,.$$

Vamos a probar el siguiente Teorema.

Teorema 9.9. *Los $\mathcal{D}_-^N$-módulos $L^+(\lambda^+) \otimes L^-(\lambda^-)$, donde $\lambda^\pm \in \mathrm{Par}^\pm$, son todos los $\mathcal{D}_-^N$-módulos irreducibles de peso máximo cuasifinitos que tienen crecimiento finito.*

Consideremos $\mathcal{D}^N$ el álgebra de Lie de operadores diferenciales matriciales en el circulo introducida en la Sección 5. Obviamente, $\mathcal{D}_-^N$ es una subálgebra de $\mathcal{D}^N$, y su gradución se extiende de $\mathcal{D}_-^N$ a $\mathcal{D}^N$ de la manera obvia.

La idea básica de la prueba del Teorema 9.9 es la misma que la que se usó en [8]: reducir el problema a la teoría de representaciones de la extensión central universal $\widehat{\mathcal{D}}^N$ de $\mathcal{D}^N$ desarrollada en [4]. Una parte de esta teoría fue expuesta en la Sección 5. Recordemos que la extensión central $\widehat{\mathcal{D}}^N = \mathcal{D}^N \oplus \mathbb{C}C$ se define con el cociclo dado por (5.3). La graduación de $\mathcal{D}^N$ se extiende a $\widehat{\mathcal{D}}^N$ poniendo $\deg C = 0$. Notemos también que la restricción del cociclo ψ a $\mathcal{D}_-^N$ es cero.

Consideremos el homomorfismo φ_s de álgebras de Lie definido en (5.10). Este homomorfismo se extiende a uno homomorfismo de las extensiones centrales $\widehat{\varphi}_s : \widehat{\mathcal{D}}^N \to \widehat{g\ell}_\infty$ por

$$\widehat{\varphi}_s|_{(\widehat{\mathcal{D}}^N)_j} = \varphi_s|_{(\widehat{\mathcal{D}}^N)_j} \text{ if } j \neq 0\,,$$

$$\widehat{\varphi}_s(e^x D e_{i,i}) = \varphi_s(e^{xD} e_{i,i}) - \frac{e^{sx}-1}{e^x-1}\,,$$

$$\widehat{\varphi}_s(C) = C \tag{9.7}$$

Más generalmente , para cada $m \in \mathbb{Z}_+$ consideremos el homomorfismo $\varphi_s^{[m]}$ dado por la fórmula (5.11).Uno de los principales resultados de [14] es el siguiente.

Lema 9.10. *Para cada $i = 1, \ldots, r$, escogemos una colección $m_i \in \mathbb{Z}_+$, $s_i \in \mathbb{C}$, $\vec{\lambda}_i \in (\mathbb{C}^\infty)^{m_i+1}$, $\vec{c}_i \in \mathbb{C}^{m_i+1}$, tal que $s_i - s_j \notin \mathbb{Z}$ para $i \neq j$. Entonces el $\oplus_{i=1}^r \widehat{g\ell}_\infty^{[m_i]}$-módulo $\otimes_{i=1}^r L^{[m_i]}(\vec{\lambda}_i, \vec{c}_i)$ resulta irreducible cuando lo restringimos a $\widehat{\mathcal{D}}^N$ vía el morfismo $\oplus_{i=1}^r \widehat{\varphi}_{s_i}^{[m_i]} : \widehat{\mathcal{D}}^N \to \oplus_{i=1}^r \widehat{g\ell}_\infty^{[m_i]}$. Todos los $\widehat{\mathcal{D}}^N$-módulos de peso máximo irreducibles cuasifinitos son obtenidos de esta forma.*

Prueba del Teorema 9.9. Notemos que para $p \geq 1$ existe un entero positivo k tal que $p = kN + r = (k+1)N - (N-r)$ con $0 \leqslant r \leqslant N-1$. Así tenemos

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{D}_-^N\right)_p \;=\;& \{z^{-k} f(D) e_{i,i+r} : f(0) = f(1) = \ldots = f(k-1) = 0, \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i = 1, \cdots, N-r\} \\
& \bigcup \{z^{-(k+1)} g(D) e_{i,i-N+r} : g(0) = g(1) = \ldots = g(k) = 0 \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i = N-r+1, \cdots, N\}.
\end{aligned} \tag{9.8}$$

Por lo tanto $\left(\mathcal{D}_-^N\right)_p$ tiene codimensión finita en $\mathcal{D}_p^N$ entonces la cuasifinitud de un $\mathcal{D}_-^N$-módulo $L(\vec{\Delta}; \mathcal{D}_-^N)$ implica la cuasifinitud de los $\widehat{\mathcal{D}}^N$-módulos $L(\vec{\Delta}, c; \widehat{\mathcal{D}}^N)$. Por el Lema 9.10, $L(\vec{\Delta}, c; \widehat{\mathcal{D}}^N)$ es un producto tensorial de los $\widehat{g\ell}_\infty^{[m]}$-módulos $L^{[m]}(\vec{\lambda}, \vec{c})$ en los cuales $\widehat{\mathcal{D}}^N$ actúa vía el morfismo $\widehat{\varphi}_s^{[m]}$ definido por (5.10) y (9.7).

Es claro del Teorema 9.2 que todos los módulos no triviales $L^{[m]}(\vec{\lambda}_i, \vec{c}_i)$ tiene crecimiento infinito (eligiendo una subálgebra apropiada isomorfa a $\widetilde{g\ell}_{+\infty}$ en $\widetilde{g\ell}_\infty$).

Recordemos que para todo $\widehat{\mathcal{D}}^N$-módulo cuasifinito uno puede extender la acción de $\left(\widehat{\mathcal{D}}^N\right)_p$ para $p \neq 0$ a $\left(\widehat{\mathcal{D}}^{N\mathcal{O}}\right)_p$, donde $\mathcal{O}$ es el álgebra de todas las funciones holomorfas en $\mathbb{C}$, ver [4]. En otras palabras, en (5.10) and (9.7) uno puede tomar $f \in \mathcal{O}$ arbitraria si $p \neq 0$. Lo mismo vale para $\mathcal{D}_-^N$, excepto que para $p \geq 1$ f debe satisfacer las condiciones dadas en (9.8). Aplicamos esto al $\widehat{\mathcal{D}}^N$-módulo $L^{[m]}(\vec{\lambda}, \vec{c})$ en el cual $\widehat{\mathcal{D}}^N$ actúa vía $\widehat{\varphi}_s^{[m]}$. Eligiendo $f_1, f_2 \in \mathcal{O}$ tales que para todo $q \in \mathbb{Z}$, si

(a) $q = k_1 N + r$, con $k_1 \in \mathbb{Z}$ y $0 < r \leq N - 1$,

$$f_1(-l+s) = \delta_{l-1\,k_1},\ f_1^{(n)}(-l+s) = 0 \text{ si } n = 1, \ldots, m, \text{ o bien}$$

(b) $q = k_1 N$, con $k_1 \in \mathbb{Z}$.

$$f_2(-l+s) = \delta_{l\,k_1},\ f_2^{(n)}(-l+s) = 0 \text{ si } n = 1, \ldots, m\,,$$

vemos de (5.10) que todos los operadores $E_{q+1,q}$ viven en la imagen de $\widehat{\varphi}_s^{[m]}(\mathcal{D}_-^{N\mathcal{O}})$, excepto $E_{1,0}$ cuando $s = 0$ (aquí usamos (9.8) para $p = 1$). Por lo tanto, cuando restringimos a $\mathcal{D}_-^N$, el módulo $L^{[m]}(\vec{\lambda}, \vec{c})$ resulta irreducible si se satisface que $s \neq 0$. Por lo tanto, si $L(\vec{\Delta}; \mathcal{D}_-^N)$ tiene crecimiento finito, entonces $L(\vec{\Delta}; \widehat{\mathcal{D}}^N) = L^{[m]}(\vec{\lambda}, \vec{c})$ en el cual $\widehat{\mathcal{D}}^N$ actúa vía el morfismo $\widehat{\varphi}_0^{[m]}$.

Si tomamos q como en (a), eligiendo $f_1 \in \mathcal{O}$ tal que se anule en todo $l \in \mathbb{Z}$ hasta la m-ésima derivada excepto para la i-ésima derivada ($0 < i \leq m$) en $l = k_1 + 1$, y si q es como en (b) eligiendo $f_2 \in \mathcal{O}$ tal que se anule para todo $l \in \mathbb{Z}$ hasta la m-ésima derivada excepto para la i-ésima derivada ($0 < i \leq m$) en $l = k_1$, vemos que todos los operadores $u^i E_{q+1,q}$ con $0 < i \leq m$ viven en la imagen de $\hat{\varphi}_s^{[m]}(\mathcal{D}_-^{N\mathcal{O}})$.

Supongamos que la m-ésima coordenada de $\vec{\lambda}_q$ es no nula y que $m > 0$. Entonces $v := (u^m E_{q+1,q})^N v_{\vec{\lambda}} \neq 0$ para todo $N > 0$. Pero

$$E_{q\,q} v = (-N + \lambda_q^0) v,\ E_{q+1\,q+1} v = (N + \lambda_{q+1}^0) v.$$

Entonces, restrigiendo a la subálgebra de $\widetilde{g\ell}_\infty$ que consiste de matrices $(a_{ij})_{i,j \leq q}$ o $(a_{ij})_{i,j \geq q+1}$ concluimos por Teorema 9.2, que $L^{[m]}(\vec{\lambda}, \vec{c})$ es o trivial o es de crecimiento infinito.

Por lo tanto, la única posibilidad que resta es $s = m = 0$. Como vimos, la imagen de $\widehat{\varphi}_s(\mathcal{D}_-^{N\mathcal{O}})$ contiene todos los $E_{q+1,q}$ excepto $E_{1,0}$, por lo tanto contiene todos los operadores de $\widetilde{g\ell}_{-\infty} \oplus \widetilde{g\ell}_{+\infty}$. Entonces, por el Teorema 9.2, el $\mathcal{D}_-^N$-módulo de peso máximo de crecimiento finito debe ser uno de los $\mathcal{D}_-^N$-módulos $L^+(\lambda^+) \otimes L^-(\lambda^-)$ con $\lambda^\pm \in \mathrm{Par}^\pm$.

$\square$

Dadas dos particiones $\lambda^\pm \in \mathrm{Par}^\pm$,denotamos por $L(\lambda^+, \lambda^-)$ el $\mathcal{D}_-^N$-módulo, que es obtenido al restringir vía φ_0 el $g\ell_{+\infty} \oplus \mathrm{g}\ell_{-\infty}$-módulo $L^+(\lambda^+) \otimes L^-(\lambda^-)$. Ahora construiremos los $\mathcal{D}_-^N$-módulos $L(\lambda^+, \lambda^-)$ explícitamente.

Consideremos el $\mathcal{D}_-^N$-módulo $\mathbb{C}^N[t,t^{-1}]$. Entonces $\mathbb{C}^N[t\,]$ es su submódulo maximal el cual es irreducible. Por lo tanto el $\mathcal{D}_-^N$-módulo

$$V := \mathbb{C}^N[t,t^{-1}]/\mathbb{C}^N[t] \tag{9.9}$$

es irreducible. Es claro que este es el $\mathcal{D}_-^N$-módulo de peso máximo de crecimiento 1 con un vector de peso máximo $(t^{-1}+\mathbb{C}[t])e_1$, donde e_1 es un vector en $\mathbb{C}^N$ el cual tiene 1 en la primer entrada y cero en el resto. Es inmediato deducir que V es isomorfo a $L(\omega_1,0)$ donde $\omega_1 \in \mathrm{Par}^+$, tal que $\omega_1^i = 0$ para $i \neq N$ y $\omega_1^N = 1$. Análogamente, el $\mathcal{D}_-^N$-módulo $\mathbb{C}^N[t\,]^* = \oplus_{j\in\mathbb{Z}_+}(\mathbb{C}^N t^j)^*$ es un módulo de peso máximo irreducible de crecimiento 1 con un vector de peso máximo $\left(\mathbb{C}^N\right)^*$, por lo tanto es isomorfo a $L(0,\omega_{-1})$,donde $\omega_{-1} = (\ldots,0,-1) \in \mathrm{Par}^-$. Denotamos este $\mathcal{D}_-^N$-módulo por V'.

Como en la teoría de Schur-Weyl, el $\mathcal{D}_-^N$-módulo $T^M(V)\otimes T^N(V')$ tiene una descomposición natural como $(\mathcal{D}_-^N, S_M \times S_N)$-módulos:

$$T^M(V)\otimes T^N(V') = \oplus_{\substack{\lambda^\pm\in\mathrm{Par}^\pm \\ |\lambda^+|=M \\ |\lambda^-|=N}} (V_{\lambda^+}\otimes V'_{\lambda^-})\otimes(U_{\lambda^+}\otimes U_{\lambda^-})$$

donde $U_{\lambda^+\,(\text{resp. }\lambda^-)}$ denota el $S_{M\,(\text{resp. }N)}$-módulo irreducible correspondiente a la partición λ^+ (resp. λ^-) y S_M es el el grupo de permutaciones de M elementos.

Lema 9.11. *Los $\mathcal{D}_-^N$-módulos $V_{\lambda^+}\otimes V'_{\lambda^-}$ son irreducibles.*

Demostración. Como en la prueba del Teorema 9.9, extendemos la acción de $\mathcal{D}_-^N$ en $V_{\lambda^+}\otimes V'_{\lambda^-}$ a $\left(\mathcal{D}_-^{N\mathcal{O}}\right)_p$ para cada $p\neq 0$, para lograr que todo $\mathcal{D}_-^N$-submódulo de $V_{\lambda^+}\otimes V'_{\lambda^-}$ sea un submódulo de $\widetilde{g\ell}_{+\infty}\oplus\widetilde{g\ell}_{-\infty}$. Pero, por la teoría de Schur-Weyl, el $\mathrm{g}\ell_{+\infty}\oplus\mathrm{g}\ell_{-\infty}$-módulo $V_{\lambda^+}\otimes V'_{\lambda^-}$ es irreducible, lo cual completa la prueba. $\square$

Por lo tanto, hemos probado

Teorema 9.12. *El $\mathcal{D}_-^N$-módulo $L(\lambda^+,\lambda^-)$ es isomorfo a $V_{\lambda^+}\otimes V'_{\lambda^-}$ para algún par $\lambda^\pm\in\mathrm{Par}^\pm$.*

Observación 9.13. Consideremos $\lambda = (\lambda^-,\lambda^+)\in\mathbb{C}^\infty$ podemos decir que los $\mathcal{D}_-^N$-módulos de peso máximo irreducibles de crecimiento finito son parametrizados por una sucesión no-creciente de enteros $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{Z}}\in\mathbb{C}^\infty$ con la excepción que $\lambda_0\leq\lambda_1$. Equivalentemente, poniendo $m_i=\lambda_i-\lambda_{i+1}$ decimos que esos módulos son parametrizados por una sucesión de enteros no-negativos $(m_i)_{i\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$, tal que, todos salvo un número finito de ellos son cero.

Recordemos que el álgebra de aniquilación extendida $\mathrm{Lie}^-(\mathrm{gc}_N)$ de gc_N es isomorfa a la suma directa del álgebra de Lie $\mathcal{D}_-^N$ y el álgebra de Lie N-dimensional $\mathbb{C}^N(\partial + \frac{d}{dt})$ y que los módulos conformes para un álgebra de Lie conforme coincide con los módulos sobre el álgebra de aniquilación extendida (Teorema 3.4).

Dado un módulo M sobre un álgebra conforme de Lie R y $\alpha \in \mathbb{C}$, podemos construir el módulo α-truncado M_α reemplazando ∂ por $\partial+\alpha$ en las fórmulas para la acción de R en M. Teoremas 9.9 y 9.12 y las observaciones anteriores implican

Teorema 9.14. *Los* gc_N*-módulos* $L(\lambda^+, \lambda^-)_\alpha$*, donde* $\lambda^\pm \in \mathrm{Par}^\pm$*,* $\alpha \in \mathbb{C}$*, son todos los* gc_N*-módulos conformes irreducibles de crecimiento finito .*

Corolario 9.15. *Los* gc_N*-módulos* $\mathbb{C}^N[\partial]_\alpha$ *y* $\mathbb{C}^N[\partial]^*_\alpha$*, donde* $\alpha \in \mathbb{C}$*, son todos los* gc_N*-módulos irreducibles finitos.*

9.6 $\mathrm{gc}_{N,xI}$-módulos irreducibles de crecimiento finito

Los resultados de esta sección son, la mayoría, los mismos que los de la sección anterior, así como las puebras. Por lo tanto, omitiremos los detalles.

Sea $\mathcal{D}_0^N$ (respectivamente, $\mathcal{D}_{0,-}^N$) la subálgebra de $\mathcal{D}^N$ (respectivamente $\mathcal{D}_-^N$) introducida en la Sección 7. Sea $\widehat{\mathcal{D}}_0^N$ la correspondiente extensión central. Esas álgebras heredan la $\mathbb{Z}$-graduación de $\widehat{\mathcal{D}}^N$, definida en la sección anterior dada por 9.6. En esta sección, necesitaremos la teoría de representación del álgebra de Lie $\widehat{\mathcal{D}}_{0,-}^N$.

Dado $\vec{\Delta} = (\vec{\Delta}_1, \vec{\Delta}_2, \cdots) \in (\mathbb{C}^\infty)^N$ definimos el módulo de peso máximo $L(\vec{\Delta}, \mathcal{D}_{0,-}^N)$ sobre $\mathcal{D}_{0,-}^N$ como el (único) módulo irreducible que tiene un vector no nulo $v_{\vec{\Delta}}$ con las siguientes propiedades:

$$(\mathcal{D}_{0,-}^N)_p v_{\vec{\Delta}} = 0 \quad \text{para } p < 0, \qquad D^n e_{i\,i}\, v_{\vec{\Delta}} = \Delta_n^i v_{\vec{\Delta}} \quad \text{para} \quad n \in \mathbb{N},$$

y $i = 1, \cdots, N$. La graduación de $\mathcal{D}_{0,-}^N$ induce la graduación principal $L(\vec{\Delta}; \mathcal{D}_{0,-}^N)$. Los módulos cuasifinitos sobre $\mathcal{D}_{0,-}^N$ pueden ser construidos de la siguiente manera. Los $\mathcal{D}_{0,-}^N$-módulos $\mathbb{C}^N[t, t^{-1}]/\mathbb{C}^N[t]$ y $\mathbb{C}^N[t]/\mathbb{C}^N$ nos dan un morfismo de $\mathcal{D}_{0,-}^N$ en $g\ell_{+\infty}$ y $g\ell_{-\infty}$ respectivamente, por lo tanto un morfismo de $\mathcal{D}_{0,-}^N$ en $g\ell_{+\infty} \oplus g\ell_{-\infty}$. Todos esos morfismo respetan las graduación correspondientes . Ahora tomemos $\lambda^\pm \in \mathbb{C}^{\pm\infty}$ y consideremos el $g\ell_{+\infty} \oplus g\ell_{-\infty}$-módulo $L^+(\lambda^+) \otimes L^-(\lambda^-)$.

El mismo argumento que en [8], nos da lo siguiente.

Lema 9.16. *Cuando restringimos a $\mathcal{D}_{0,-}^N$ el $g\ell_{+\infty}\oplus g\ell_{-\infty}$- módulo $L^+(\lambda^+)\otimes L^-(\lambda^-)$ resulta irreducible.*

Se sigue inmediatamente que $L^+(\lambda^+)\otimes L^-(\lambda^-)$ es un módulo de peso máximo irreducible sobre $\mathcal{D}_{0,-}^N$, el cual es obviamente cuasifinito.

Tenemos el siguiente teorema.

Teorema 9.17. *Los $\mathcal{D}_{0,-}^N$-módulos $L^+(\lambda^+)\otimes L^-(\lambda^-)$, donde $\lambda^\pm\in\mathrm{Par}^\pm$, son todos los $\mathcal{D}_{0,-}^N$-módulos irreducibles de peso máximo que tienen crecimiento finito.*

La prueba del Teorema 9.17 es la misma que la del Teorema 9.9, pero en este caso reducimos el problema a la teoría de representacion de la extensión central universal $\widehat{\mathcal{D}}_0^N$ de $\mathcal{D}_0^N$ que fue desarrollada en Refs. [7] y [12].

Sea $s\in\mathbb{Z}$ recordemos que denotamos por $\widehat{g\ell}_{\infty,s}^{[m]}$ la subálgebra de $\widehat{g\ell}_{\infty}^{[m]}$ generada por C y $\{u^lE_{sN-i+1,\,sN-j+1}\,:\,0\le l\le m,\ i,\,j\neq 1,\cdots,N\}$. Observemos que $\widehat{g\ell}_{\infty}^{[m]}$ es naturalmente isomorfo a $\widehat{g\ell}_{\infty}^{[m]}$. Si $s\notin\mathbb{Z}$, denotamos por $\varphi_s^{[m]}$ el homomorfismo (7.12) restringido a $\mathcal{D}_0^N$. Si $s\in\mathbb{Z}$, redefinimos $\widehat{\varphi}_s^{[m]}$ por el homomorfismo $p_s\circ\widehat{\varphi}_s^{[m]}:\widehat{\mathcal{D}}_0^N\to\widehat{g\ell}_{s,\infty}^{[m]}$ donde $p_s:\widehat{g\ell}_{\infty}^{[m]}\to\widehat{g\ell}_{s,\infty}^{[m]}$ es el mapa proyección.

En este caso, reemplazaremos el Lema 9.10 por uno de los resultados de Ref. [12] (ver también Ref. [7]):

Lema 9.18. *Para cada $i=1,\ldots,r$, escogemos una colección $m_i\in\mathbb{Z}_+$, $s_i\in\mathbb{C}$, $\vec{\lambda}_i\in(\mathbb{C}^\infty)^{m_i+1}$, $\vec{c}_i\in\mathbb{C}^{m_i+1}$, tal que $s_i-s_j\notin\mathbb{Z}$ para $i\neq j$. Entonces el $\oplus_{i=1}^r\widehat{g\ell}_{\infty}^{[m_i]}$-módulo $\otimes_{i=1}^r L^{[m_i]}(\vec{\lambda}_i,\vec{c}_i)$ resulta irreducible cuando lo restringimos a $\widehat{\mathcal{D}_0^N}$ vía el morfismo $\oplus_{i=1}^r\widehat{\varphi}_{s_i}^{[m_i]}:\widehat{\mathcal{D}}_0^N\to\oplus_{i=1}^r\widehat{g\ell}_{\infty}^{[m_i]}$. Todos los $\widehat{\mathcal{D}}_0^N$-módulos de peso máximo cuasifinitos irreducibles son obtenidos de este modo.*

Prueba del Teorema 9.17. La prueba es la misma como la del Teorema 9.9 pero usando el Lema 9.18, y en el caso $s=0$, se debe usar el homomorfimo $\widehat{\varphi}_0^{[m]}$ redefinido.

□

Dadas dos particiones $\lambda^\pm\in\mathrm{Par}^\pm$, el $\mathcal{D}_-^N$-módulo $L(\lambda^+,\lambda^-)$, que es obtenido por restricción vía φ_0 del $g\ell_{+\infty}\oplus g\ell_{-\infty}$-módulo $L^+(\lambda^+)\otimes L^-(\lambda^-)$ resulta irreducible como $\mathcal{D}_{0,-}^N$-módulo. La construcción de los $\mathcal{D}_{0,-}^N$-módulos $L(\lambda^+,\,\lambda^-)$ es igual que antes y Lema 9.11 y Teorema 9.12 valen para $\mathcal{D}_{0,-}^N$. En este caso, el álgebra de aniquilación extendida

Lie($\mathrm{gc}_{N,xI}$) para $\mathrm{gc}_{N,xI}$ es isomorfa a la suma directa de el álgebra de Lie $\mathcal{D}^N_{0,-}$ y el álgebra N-dimensional $\mathbb{C}^N[\partial + (d/dt)]$. Teoremas 9.12 y 9.17 y las observaciones anteriores implican lo siguiente .

Teorema 9.19. *Los* $\mathrm{gc}_{N,xI}$*-módulos* $L(\lambda^+, \lambda^-)_\alpha$*, donde* $\lambda^\pm \in \mathrm{Par}^\pm$*,* $\alpha \in \mathbb{C}$*, son todos los* $\mathrm{gc}_{N,xI}$*-módulos conformes irreducibles de crecimiento finito.*

Corolario 9.20. *Los* $\mathrm{gc}_{N,xI}$*-módulos* $\mathbb{C}^N[\partial]_\alpha$ *y* $\mathbb{C}^N[\partial]^*_\alpha$*,donde* $\alpha \in \mathbb{C}$*, son todos los* $\mathrm{gc}_{N,xI}$*-módulos finitos irreducibles.*

9.7 oc_N-módulos irreducibles de crecimiento finito.

Sea $\mathcal{D}^N_\sigma$ la subálgebra de Lie de $\mathcal{D}^N$ definida en la Sección 6 y sea $\widehat{\mathcal{D}}^N_\sigma$ su extensión central.

Ahora, estamos interesados en la teoría de representación de el álgebra de Lie $\mathcal{D}^N_{\sigma,-} = \widehat{\mathcal{D}}^N_\sigma \bigcap \mathcal{D}^N_-$ de operadores diferenciales regulares matriciales en $\mathbb{C}$ que son invariantes por $-\sigma$. Ambas subálgebras heredan la $\mathbb{Z}$-graduación de $\mathcal{D}^N$, pues σ preserva la $\mathbb{Z}$-graduación de $\mathcal{D}^N$, y tenemos que $\mathcal{D}^N_\sigma = \oplus_{p\in\mathbb{Z}} \left(\mathcal{D}^N_\sigma\right)_p$ donde, si $p = kN + r$, con $k \in \mathbb{N}$ y $0 \le r \le N-1$,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{D}^N_\sigma)_p \;\; = & \Big\{ z^{-k}(f(D-(k-1)/2)e_{i,\,i+r} - f(-D+(k+1)/2)e_{N+1-r-i,\,N+1-i}), \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad 1 \ge i \ge [N+1-r/2] \Big\} \\
& \bigcup \Big\{ t^{(-k+1)}(g(D-k/2)e_{i,\,i-N+r} - g(-D+k/2)e_{2N+1-i-r,\,N+1-i}), \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad N-r+1 \ge i \ge [2N+1-r/2] \Big\}.
\end{aligned} \tag{9.10}$$

En el caso de $(\mathcal{D}_{\sigma,-})_p$ para $p > 0$necesitamos agregar la condición (9.8). Análogamente, tenemos las correspondientes subálgebras de $\mathcal{D}^{N\mathcal{O}}$, denotadas por $\mathcal{D}^{N\mathcal{O}}_\sigma$ y $\mathcal{D}^{N\mathcal{O}}_{\sigma,-}$. Como en el caso de $\mathcal{D}^N_-$, dado $\vec{\Delta} = \{\Delta^i_n\}_{i=1}^{[\frac{N}{2}]+\delta_{N,\,impar}}$ definimos el módulo de peso máximo $L(\vec{\Delta}; \mathcal{D}^N_{\sigma,-})$ sobre $\mathcal{D}^N_{\sigma,-}$ como el único módulo irreducible que tiene un vector no nulo $v_{\vec{\Delta}}$ con las siguientes propiedades:

$$\left(\mathcal{D}^N_{\sigma,-}\right)_p v_{\vec{\Delta}} = 0 \text{ para } p < 0, \quad ((D+\frac{1}{2})^n e_{i,\,i} - (-D-\frac{1}{2})^n e_{N+1-i,\,N+1-i}) v_{\vec{\Delta}} = \Delta^i_n v_{\vec{\Delta}}$$

para $n \in \mathbb{Z}_+ \; i = 1, \cdots, \left[\frac{N}{2}\right] + \delta_{N,\,impar}$.

La graduación de $\mathcal{D}^N_{\sigma,-}$ induce la graduación principal de $L(\vec{\Delta}; \mathcal{D}^N_{\sigma,-}) = \oplus_{p\in\mathbb{Z}_+} L_p$ tal que $L_0 = \mathbb{C} v_{\vec{\Delta}}$.

Módulos cuasifinitos sobre $\mathcal{D}^N_{\sigma,-}$ pueden ser construidos comos sigue. El $\mathcal{D}^N_{\sigma,-}$-módulo $\mathbb{C}^N[t,t^{-1}]/\mathbb{C}^N$ nos da un morfismo de $\mathcal{D}^N_{\sigma,-}$ en $g\ell_{+\infty}$. Este morfismo respeta las graduaciones correspondientes.

Ahora tomemos $\lambda^+ \in \mathbb{C}^{+\infty}$ y consideremos el $g\ell_{+\infty}$-módulo $L^+(\lambda^+)$. El mismo argumento usado en [8], nos da lo siguiente.

Lema 9.21. *Cuando restringimos a $\mathcal{D}^N_{\sigma,-}$, el $g\ell_{+\infty}$- módulo $L^+(\lambda^+)$ resulta irreducible.*

Se sigue inmediatamente que $L^+(\lambda^+)$ es un módulo de peso máximo irreducible sobre $\mathcal{D}^N_{\sigma,-}$, el cual es obviamente cuasifinito. Es fácil ver que tenemos :

$$\Delta^i_n = \sum_{j\geq 1} (-j+1/2)^n \lambda^+_{jN-i+1} - (j-1/2)^n \lambda^-_{(j-1)N+i},$$

de modo que

$$\Delta_i(x) := \sum_{n\geq 0} \Delta^i_n x^n/n! = \sum_{j\geq 1} e^{(-j+1/2)x}\, \lambda^+_{jN-i+1} + e^{(j-1/2)x}\, \lambda^-_{(j-1)N+i}$$

con $i = 1, \cdots, \left[\frac{N}{2}\right] + \delta_{N,impar}$. Probaremos el siguiente teorema.

Teorema 9.22. *Los $\mathcal{D}^N_{\sigma,-}$-módulos $L^+(\lambda^+)$, donde $\lambda^+ \in \mathrm{Par}^+$, son todos los $\mathcal{D}^N_{\sigma,-}$-módulos de peso máximo irreducibles cuasifinitos que tienen crecimiento finito.*

La idea básica de la prueba del Teorema 9.22 es la misma que la del Teorema 9.9: reducir el problema a la teoría de representacionede la extensión central universal $\widehat{\mathcal{D}}^N_\sigma$ desarrollada en [11].

Recordemos que el homomorfismo $\widehat{\varphi}^{[m]}_s : \widehat{\mathcal{D}}^N \to \widehat{g\ell}^{[m]}_\infty$ definido en (5.10) se extiende a un homomorfismo $\widehat{\varphi}^{[m]}_s : \widehat{\mathcal{D}}^{N\mathcal{O}} \to \widehat{g\ell}^{[m]}_\infty$. Ahora, la restricción de $\widehat{\varphi}^{[m]}_s : \widehat{\mathcal{D}}^{N\mathcal{O}}_\sigma \to \widehat{g\ell}^{[m]}_\infty$ a $\widehat{\mathcal{D}}^{N\mathcal{O}}_\sigma$ es suryectiva si y sólo si $s \notin \mathbb{Z}/2$, y en los otros casos, usando (9.10), tenemos que (ver Sección 6 para detalles),

$$\widehat{\varphi}^{[m]}_0 : \widehat{\mathcal{D}}^{N\mathcal{O}}_\sigma \to d^{[m]}_\infty; \qquad \widehat{\varphi}^{[m]}_{1/2} : \widehat{\mathcal{D}}^{N\mathcal{O}}_\sigma \to d^{[m]}_\infty \quad si \quad N par,$$

$$\widehat{\varphi}^{[m]}_{1/2} : \widehat{\mathcal{D}}^{N\mathcal{O}}_\sigma \to b^{[m]}_\infty \quad si\, N\, impar. \tag{9.11}$$

son homomorfismo suryectivos. Ahora, considereremos la restricción a $\widehat{\mathcal{D}}^{N\mathcal{O}}_{\sigma,-}$. Como las limitaciones dadas por (9.8) no afectan el caso $s \neq 0$, tenemos que $\widehat{\varphi}^{[m]}_s : \widehat{\mathcal{D}}^{N\mathcal{O}}_{\sigma,-} \to \widehat{g\ell}^{[m]}_\infty$ $(s \notin \mathbb{Z}/2)$ y $\widehat{\varphi}^{[m]}_{1/2}$ son sobreyectivos. Uno de los principales resultados de [11] es el siguiente (Ver Sección 6).

Lema 9.23. *Para cada $i = 1, \dots, r$, escogemos una colección $m_i \in \mathbb{Z}_+$, $s_i \in \mathbb{C}$, $\vec{\lambda}_i \in (\mathbb{C}^\infty)^{m_i+1}$, $\vec{c}_i \in \mathbb{C}^{m_i+1}$, tal que $s_i \in \mathbb{Z}$ implica $s_i = 0$, $s_i \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ implica $s_i = \frac{1}{2}$, y $s_i - s_j \notin \mathbb{Z}$ para $i \neq j$. Entonces el $\oplus_{i=1}^r g^{[m_i]}$-módulo $\otimes_{i=1}^r L^{[m_i]}(\vec{\lambda}_i, \vec{c}_i)$ resulta irreducible cuando lo restringimos a $\widehat{\mathcal{D}}_\sigma^N$ vía el morfismo $\oplus_{i=1}^r \widehat{\varphi}_{s_i}^{[m_i]} : \widehat{\mathcal{D}}_\sigma^N \to \oplus_{i=1}^r g^{[m_i]}$, donde $g^{[mi]} = \widehat{g\ell}_\infty^{[m_i]}$ (respectivamente $b_\infty^{[m_i]}$ or $d_\infty^{[m_i]}$) si $s_i \notin \mathbb{Z}/2$ (respectivamente , si $= 1/2, N$ impar o $s_i = 0$ o $s_i = 1/2, N$ par.) Todos los $\widehat{\mathcal{D}}_\sigma^N$-módulos de peso máximo cuasifinitos irreducibles son obtenidos de este modo.*

Prueba del Teorema 9.22. La prueba es similar a la del Teorema 9.9. Debido al Lema 9.23, Teorema 9.2 y (9.11), es fácil ver que si $L(\vec{\Delta}, \mathcal{D}_{\sigma,-}^N)$ tiene crecimiento finito, entonces $L(\vec{\Delta}, \mathcal{D}_{\sigma,-}^N) = L(d_\infty^{[m]}; \vec{\lambda}, \vec{c})$ en el cual $\widehat{\mathcal{D}}_\sigma^N$ actúa vía el morfismo $\widehat{\varphi}_0^{[m]}$. Ahora consideremos lo siguiente,

(a) si $q = k_1 N + r$ con $k_1 \in \mathbb{Z}$ y $1 \leq r \leq N - 1$, eligiendo $f_1 \in \mathcal{O}$ que se anule en todo $l \in \mathbb{Z}$ hasta la m-ésima derivada excepto para la i-ésima derivada $(0 \leq i \leq m)$ en $l = k_1 + 1$, o bien

(b) si $q = k_1 N$ con $k_1 \in \mathbb{Z}$ y eligiendo $f_2 \in \mathcal{O}$ que se anule en todo $l \in \mathbb{Z}$ hasta la m-ésima derivada excepto para la i-ésima derivada $(0 \leq i \leq m)$ en $l = k_1$,

vemos que todos los operadores $u^i E_{q+1\,q} - (-u)^i E_{-q+1\,-q}$, con $0 \leq i \leq m$ están en la imagen de $\widehat{\varphi}_s^{[m]}(\mathcal{D}_{\sigma,-}^{N\mathcal{O}})$, excepto para $i = 0$ y $q = 0$, pues no se satisface la condición (9.8).

Supongamos que la m-ésima coordenada de $\vec{\lambda}_q$ es no nula y que $m > 0$. Entonces $v := (u^m E_{q+1\,q} - (-u)^i E_{-q+1\,-q})^N v_{\vec{\lambda}} \neq 0$, para todo $i = 1, \cdots m$ y $N > 0$. Pero

$$(E_{q+1,q+1} - E_{-q,-q})v = (-N + \lambda_{q+1}^0)v.$$

Como en el Teorema 9.9, restringiendo a la subálgebra de $d_\infty^{[m]}$ isomorfa a $\widetilde{g\ell}_{+\infty}$ que consiste de las matrices $(a_{ij} - a_{1-j,1-i})_{i,j \geq q+1}$, concluimos por Teorema 9.2, que $L^{[m]}(d_\infty^{[m]}; \vec{\lambda}, \vec{c})$ es trivial o tiene crecimiento infinito.

Por lo tanto, la única possibilidad que resta es $s = m = 0$. Como ha sido mostrado , la imagen de $\widehat{\varphi}_s(\mathcal{D}_{\sigma,-}^{N\mathcal{O}})$ contiene todos los $E_{q+1,q} - E_{1-q,-q}$ excepto para $q \neq 0$, por lo tanto contiene todos los operadores de $d_\infty^{[m]} \cap \widetilde{g\ell}_{-\infty} \oplus \widetilde{g\ell}_{+\infty} \simeq \widetilde{g\ell}_{+\infty}$. Entonces, por Teorema 9.2 , el $\mathcal{D}_{\sigma,-}^N$-módulo de peso máximo de crecimiento finito debe ser el mismo que uno de los $\mathcal{D}_{\sigma,-}^N$-módulos $L^+(\lambda^+)$ con $\lambda^+ \in \mathrm{Par}^+$.

$\square$

Ahora construiremos los $\mathcal{D}^N_{\sigma,-}$-módulos $L(\lambda^+)$ explicitamente. El $\mathcal{D}^N_-$-módulo $V = \mathbb{C}^N[t,t^{-1}]/\mathbb{C}^N[t]$ definido en (9.9), visto como un $\mathcal{D}^N_{\sigma,-}$-módulo, resulta irreducible. Este es un $\mathcal{D}^N_{\sigma,-}$-módulo de peso máximo de crecimiento 1 isomorfo a $L^+(\omega_1)$ donde $\omega_1 \in \mathrm{Par}^+$, tal que $\omega_1^i = 0$, para $i \neq N$ y $\omega_1^N = 1$.

Observar que el $\mathcal{D}^N_{\sigma,-}$-módulo $\mathbb{C}^N[t]^* = \oplus_{j\in\mathbb{Z}_+}(\mathbb{C}^N t^j)^*$ es isomorfo a $L^+(\omega_1)$.

Como en la teoría de Schur-Weyl, el $\mathcal{D}^N_{\sigma,-}$-módulo $T^M(V)$ tiene una descomposición natural como $(\mathcal{D}^N_{\sigma,-}, S_M)$-módulos:

$$T^M(V) = \oplus_{\substack{\lambda^+\in\mathrm{Par}^+\\ |\lambda^+|=M}} V_{\lambda^+} \otimes U_{\lambda^+}$$

donde U_{λ^+} denota el S_M-módulo irreducible correspondiente a la partición λ^+ y S_M es el grupo de permutaciones.

Lema 9.24. *Los $\mathcal{D}^N_{\sigma,-}$-módulos V_{λ^+} son irreducibles.*

Demostración. Como en la prueba del Teorema 9.22, extendemos la acción de $\mathcal{D}^N_{\sigma,-}$ en V_{λ^+} a $\left(\mathcal{D}^{N\mathcal{O}}_{\sigma,-}\right)_p$ para cada $p \neq 0$. Así obtenemos que cada $\mathcal{D}^N_{\sigma,-}$-submódulo arbitrario de V_{λ^+} resulte un submódulo de $\widetilde{g\ell}_{+\infty} \simeq d_\infty \cap \widetilde{g\ell}_{+\infty} \oplus \mathrm{g}\ell_{-\infty}$. Pero, por la teoría de Schur–Weyl , el $\mathrm{g}\ell_{+\infty}$-módulo V_{λ^+} es irreducible, lo cual completa la prueba. $\square$

Por lo tanto, hemos probado,

Teorema 9.25. *El $\mathcal{D}^N_{\sigma,-}$-módulo $T^M(V)$ tiene la siguiente descomposición como $(\mathcal{D}^N_{\sigma,-}, S_M)$-módulos:*

$$T^M(V) = \oplus_{\substack{\lambda^+\in\mathrm{Par}^+\\ |\lambda^+|=M}} V_{\lambda^+} \otimes U_{\lambda^+}$$

donde U_{λ^+} denota el S_M-módulo irreducible correspondiente a la partición λ^+.

Observación 9.26. Considerando $\lambda^+ \in \mathbb{C}^{+\infty}$ podemos decir que los $\mathcal{D}^N_{\sigma,-}$-módulos de peso máximo irreducible de crecimiento finito son parametrizados por una sucesión no creciente de enteros $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^\infty$ con la excepción de $\lambda_0 \leq \lambda_1$. Equivalenetemente, poniendo $m_i = \lambda_i - \lambda_{i+1}$ podemos decir que esos módulos son parametrizados por sucesiones de enteros no negativos $(m_i)_{i\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$, tal que todos salvo un número finito de ellos son ceros.

El álgebra de aniquilación extendida $\mathrm{Lie}^-(oc_N)$ para oc_N es isomorfa a la suma directa del álgebra de Lie $\mathcal{D}^N_{\sigma,-}$ y el álgebra de Lie N-dimensional

$\mathbb{C}^N(\partial + \frac{d}{dt})$ y que los módulos conformes para un álgebra conforme de Lie coincide con los módulos sobre el álgebra de anulación extendida asociada (ver Observación 3.4).

El Teorema 9.22 y las observaciones anteriores implican lo siguiente.

Teorema 9.27. *Los oc_N-módulos $L(\lambda^+)_\alpha$, donde $\lambda^+ \in \mathrm{Par}^+$, $\alpha \in \mathbb{C}$, son todos los oc_N-módulos conformes irreducibles de crecimiento finito.*

Corolario 9.28. *Los oc_N-módulos $\mathbb{C}^N[\partial]_\alpha$ $\alpha \in \mathbb{C}$, son todos los oc_N-módulos irreducibles finitos.*

9.8 $spc_{N,xI}$-módulos irreducibles de crecimiento finito.

Ahora, consideremos $\mathcal{D}^N_{0,\bar{\sigma}}$ la subálgebra de Lie de $\mathcal{D}^N_0$ fijada por $-\bar{\sigma}$ introducida en la Sección 7. Sea $\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar{\sigma}}$ la extensión central de $\mathcal{D}^N_{0,\bar{\sigma}}$.

Estudiaremos la teoría de representación de la subálgebra de Lie $\mathcal{D}^N_{0,\bar{\sigma},-} = \mathcal{D}^N_- \cap \widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar{\sigma}}$ de operadores diferenciales regulares matriciales en $\mathbb{C}$ que anulan constantes y son invariantes por $-\bar{\sigma}$. Ambas subálgebras heredan una $\mathbb{Z}$-graduación de $\mathcal{D}^N_0$, pues $\bar{\sigma}$ preserva la $\mathbb{Z}$-graduación de $\mathcal{D}^N_0$, $\mathcal{D}^N_{0,\bar{\sigma}} = \oplus_{p\in\mathbb{Z}}(\mathcal{D}^N_{0,\bar{\sigma}})_p$, donde si $p = kN + r$, con $k \in \mathbb{N}$ y $0 \le r \le N-1$,

$$\begin{aligned}(\mathcal{D}^N_{0,\bar{\sigma}})_p = \Big\{ & z^{-k}(f(D-k/2)e_{i,\,i+r} + f(-D+k/2)e_{N+1-r-i,\,N+1-i}),\\ & \qquad\qquad\qquad 1 \le i \le [N+1-r/2]\Big\}\\ \bigcup \Big\{ & t^{(-k+1)}(g(D-(k+1)/2)e_{i,\,i-N+r} + g(-D+(k+1)/2)e_{2N+1-i-r,\,N+1-i}),\\ & \qquad\qquad\qquad N-r+1 \le i \le [2N+1-r/2]\Big\}.\end{aligned} \tag{9.12}$$

En el caso de $(\mathcal{D}^N_{0,\bar{\sigma},-})_p$ para $p > 0$ necesitamos agregar la condición (9.8). Similarmente, tenemos las correspondientes subálgebras de $\mathcal{D}^{N\mathcal{O}}$, denotadas por $\mathcal{D}^{N\mathcal{O}}_{0,\bar{\sigma}}$ y $\mathcal{D}^{N\mathcal{O}}_{0,\bar{\sigma},-}$. Como en el caso de $\mathcal{D}^N_-$, dado $\vec{\Delta} = \{\Delta^i_n\}_{i=1}^{[\frac{N}{2}]+\delta_{N,\,impar}}$ definimos el módulo de peso máximo $L(\vec{\Delta};\mathcal{D}^N_{0,\bar{\sigma},-})$ sobre $\mathcal{D}^N_{0,\bar{\sigma},-}$ como el (único) módulo irreducible, que tiene un vector no nulo $v_{\vec{\Delta}}$ con las siguientes propiedades:

$$\left(\mathcal{D}^N_{0,\bar{\sigma},-}\right)_p v_{\vec{\Delta}} = 0 \text{ para } p<0, \quad (D^n e_{i,i} + (-D)^n e_{N+1-i,\,N+1-i})v_{\vec{\Delta}} = \Delta^i_n v_{\vec{\Delta}}$$

para $n \in \mathbb{Z}_+$ $i = 1, \cdots, \left[\frac{N}{2}\right] + \delta_{N,\,\mathrm{impar}}$.

La graduación de $\mathcal{D}^N_{0,\bar{\sigma},-}$ induce la graduación principal $L(\vec{\Delta};\mathcal{D}^N_{0,\bar{\sigma},-}) = \oplus_{p\in\mathbb{Z}_+} L_p$ tal que $L_0 = \mathbb{C}v_{\vec{\Delta}}$.

Como en la sección anterior, el $\mathcal{D}^N_{0,\bar{\sigma},-}$-módulo $\mathbb{C}^N[t,t^{-1}]/\mathbb{C}^N$ nos da un morfismo de $\mathcal{D}^N_{0,\bar{\sigma},-}$ en $g\ell_{+\infty}$. Esos morfismo respetan las graduaciones correspondientes.

Ahora tomemos $\lambda^+ \in \mathbb{C}^{+\infty}$ y consideremos el $g\ell_{+\infty}$-módulo $L^+(\lambda^+)$. El mismo argumento que se usó en [8], nos da lo siguiente.

Lema 9.29. *Cuando restringimos a $\mathcal{D}^N_{0,\bar{\sigma},-}$, el módulo $L^+(\lambda^+)$ resulta irreducible.*

Teorema 9.30. *Los $\mathcal{D}^N_{0,\bar{\sigma},-}$-módulos $L^+(\lambda^+)$, donde $\lambda^+ \in \mathrm{Par}^+$, son todos los $\mathcal{D}^N_{0,\bar{\sigma},-}$-módulos de peso máximo irreducibles cuasifinitos que tienen crecimiento finito.*

La idea básica del Teorema 9.30 es la misma que la del Teorema 9.9: reducir el problema a la teoría de representaciones sobre la extensión central universal $\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar{\sigma}}$. desarrollada en la Sección 7.

Recordemos que el homomorfismo $\widehat{\varphi}^{[m]}_s : \widehat{\mathcal{D}}^N \to \widehat{g\ell}^{[m]}_\infty$ definido en 5.10 se extiende a un homomorfismo $\widehat{\varphi}^{[m]}_s : \widehat{\mathcal{D}}^{N\mathcal{O}} \to \widehat{g\ell}^{[m]}_\infty$. Ahora, la restricción $\widehat{\varphi}^{[m]}_s : \widehat{\mathcal{D}}^{N\mathcal{O}}_{0,\bar{\sigma}} \to \widehat{g\ell}^{[m]}_\infty$ a $\widehat{\mathcal{D}}^{N\mathcal{O}}_{0,\bar{\sigma}}$ es suryectiva si y sólo si $s \notin \mathbb{Z}/2$, y en los otros casos, usando (9.12), tenemos que (ver Sección (7) para detalles)

$$\widehat{\varphi}^{[m]}_s : \widehat{\mathcal{D}}^{N\mathcal{O}}_{0,\bar{\sigma}} \to c^{[m]}_\infty, \qquad s \in \mathbb{Z}/2 \tag{9.13}$$

es un homomorfismo suryectivo. Ahora, consideremos la restricción a $\widehat{\mathcal{D}}^{N\mathcal{O}}_{0,\bar{\sigma},-}$. Como las restricciones dadas por (9.8) no afectan el caso $s \neq 0$, tenemos que $\widehat{\varphi}^{[m]}_s : \widehat{\mathcal{D}}^{N\mathcal{O}}_{0,\bar{\sigma},-} \to \widehat{g\ell}^{[m]}_\infty$ ($s \notin \mathbb{Z}/2$) y $\widehat{\varphi}^{[m]}_{1/2} : \widehat{\mathcal{D}}^{N\mathcal{O}}_{0,\bar{\sigma}} \to c^{[m]}_\infty$ son suryectivos. Uno de los principales resultados [13] es el siguiente.

Lema 9.31. *Para cada $i = 1,\ldots,r$, escogemos una colección $m_i \in \mathbb{Z}_+$, $s_i \in \mathbb{C}$, $\vec{c}_i \in (\mathbb{C}^\infty)^{m_i+1}$, $\vec{c}_i \in \mathbb{C}^{m_i+1}$, tal que $s_i \in \mathbb{Z}$ implica $s_i = 0$, $s_i \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}$ implica $s_i = \frac{1}{2}$, y $s_i - s_j \notin \mathbb{Z}$ para $i \neq j$. Entonces el $\oplus_{i=1}^r g^{[m_i]}$-módulo $\otimes_{i=1}^r L(g^{[m_i]},\vec{\lambda}_i,\vec{c}_i)$ resulta irreducible cuando lo restringimos a $\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar{\sigma}}$ vía el morfismo $\oplus_{i=1}^r \widehat{\varphi}^{[m_i]}_{s_i} : \widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar{\sigma}} \to \oplus_{i=1}^r g^{[m_i]}$, donde $g^{[mi]} = \widehat{g\ell}^{[m_i]}_\infty$ (respectivamente $c^{[m_i]}_\infty$) si $s_i \notin \mathbb{Z}/2$ (respectivamente , $si = 1/2$, o $s_i = 0$.) Todos los $\widehat{\mathcal{D}}^N_{0,\bar{\sigma}}$-módulos de peso máximo cuasifinitos irreducibles son obtenidos de este modo.*

Prueba del Teorema 9.30. La prueba es similar a la del Teorema 9.9 Debido a el Lema 9.31, Teorema 9.2 y (9.13), es fácil ver que si $L(\vec{\Delta}, \mathcal{D}^N_{0,\bar{\sigma},-})$ tiene crecimiento finito, entonces $L(\vec{\Delta}, \mathcal{D}^N_{0,\bar{\sigma},-}) = L(c^{[m]}_\infty; \vec{\lambda}, \vec{c})$ en el cual $\widehat{\mathcal{D}}^N_\sigma$ actúa vía el morfismo $\widehat{\varphi}^{[m]}_0$. Ahora consideremos lo siguiente:

(a) si $q = k_1 N + r$, con $k_1 \in \mathbb{Z}$ y $1 \leq r \leq N-1$, elegimos $f_1 \in \mathcal{O}$ tal que se anule en todo $l \in \mathbb{Z}$ hasta la m-ésima derivada excepto para la i-ésima derivada $(0 < i \leq m)$ en $l = k_1 + 1$.

(b) Si $q = (k_1 + 1)N$, con $k_1 \in \mathbb{Z}$, elegimos $f_2 \in \mathcal{O}$ tal que sea anule en todo $l \in \mathbb{Z}$ hasta la m-ésima derivada excepto para la i-ésima derivada $(0 < i \leq m)$ en $l = k_1 + 1$.

Vemos así que todos los operadores $u^i E_{q+1,q} + (-u)^i E_{-q+1,-q}$, con $0 < i \leq m$ están en la imagen de $\widehat{\varphi}^{[m]}_s(\mathcal{D}^{N\mathcal{O}}_{0,\bar{\sigma},-})$.

Supongamos que la m-ésima coordenada de $\vec{\lambda}_q$ es no nula, y que $m > 0$. Entonces $v := (u^m E_{q+1,q} + (-u)^i E_{-q+1,-q})^N v_{\vec{\lambda}} \neq 0$ para todo $N > 0$. Pero

$$(E_{q+1,q+1} - E_{-q,-q})v = (-N + \lambda^0_{q+1})v.$$

Como en el Teorema 9.9, restringiendo a la subálgebra de $c^{[m]}_\infty$ isomorfa a $\widetilde{g\ell}_{+\infty}$ que consiste de matrices $(a_{ij} - (-1)^{i+j} a_{1-j,1-i})_{i,j \geq q+1}$ concluimos por Teorema 9.2, que $L^{[m]}(c^{[m]}_\infty; \vec{\lambda}, \vec{c})$ es trivial o tiene crecimiento infinito.

Por lo tanto, la única posibilidad que resta es $s = m = 0$. Como ha sido mostrado, la imagen de $\widehat{\varphi}_s(\mathcal{D}^{N\mathcal{O}}_{0,\bar{\sigma},-})$ contiene todos los $E_{q+1,q} + E_{1-q,-q}$ excepto para $q \neq 0$ (pues no se satisface la condidición 9.8) para $p = 1$. Por lo tanto contiene todos los operadores de $c^{[m]}_\infty \cap \widetilde{g\ell}_{-\infty} \oplus \widetilde{g\ell}_{+\infty} \simeq \widetilde{g\ell}_{+\infty}$. Entonces, por Teorema 9.2 , $\mathcal{D}^N_{0,\bar{\sigma},-}$-módulo debe ser el mismo que uno de los $\mathcal{D}^N_{0,\bar{\sigma},-}$-módulo $L^+(\lambda^+)$ con $\lambda^+ \in \mathrm{Par}^+$.

□

Como en la sección precedente, podemos construir los $\mathcal{D}^N_{0,\bar{\sigma},-}$-módulos $L(\lambda^+)$ explícitamente. El $\mathcal{D}^N_-$-módulo $V = \mathbb{C}^N[t, t^{-1}]/\mathbb{C}^N[t]$ definido en (9.9), visto como un $\mathcal{D}^N_{\sigma,-}$-módulo, resulta irreducible. Este es un $\mathcal{D}^N_{0,\bar{\sigma},-}$-módulo de peso máximo de crecimiento 1 isomorfo a $L^+(\omega_1)$donde $\omega_1 \in \mathrm{Par}^+$, tal que $\omega^i_1 = 0$, para $i \neq N$ y $\omega^N_1 = 1$.

Observar que el $\mathcal{D}^N_{0,\bar{\sigma},-}$-módulo $\mathbb{C}^N[t]^* = \oplus_{j \in \mathbb{Z}_+} (\mathbb{C}^N t^j)^*$ es isomorfo a $L^+(\omega_1)$.

Como en la teoría de Schur-Weyl , el $\mathcal{D}^N_{0,\bar{\sigma},-}$-módulo $T^M(V)$ tiene una descomposición natural como $(\mathcal{D}^N_{0,\bar{\sigma},-}, S_M)$-módulos:

$$T^M(V) = \oplus_{\substack{\lambda^+ \in \mathrm{Par}^+ \\ |\lambda^+|=M}} V_{\lambda^+} \otimes U_{\lambda^+}$$

donde U_{λ^+} denota el S_M-módulo irreducible sorrespondiente a la partición λ^+.

Lema 9.32. *Los $\mathcal{D}^N_{0,\bar{\sigma},-}$-módulos V_{λ^+} son irreducibles.*

Demostración. Como en la prueba del Teorema 9.22, extendemos la acción de $\mathcal{D}^N_{0,\bar{\sigma},-}$ en V_{λ^+} a $\left(\mathcal{D}^{N\mathcal{O}}_{0,\bar{\sigma},-}\right)_p$ para cada $p \neq 0$, obtenemos que cada $\mathcal{D}^N_{0,\bar{\sigma},-}$-submódulo arbitario de V_{λ^+} es un submódulo de $\widetilde{g\ell}_{+\infty} \simeq c_\infty \cap \widetilde{g\ell}_{+\infty} \oplus \widetilde{g\ell}_{-\infty}$. Pero, por la terоría de Schur–Weyl, el $\widetilde{g\ell}_{+\infty}$-módulo V_{λ^+} es irreducible, lo cual completa la prueba. □

Teorema 9.33. *Los $\mathcal{D}^N_{0,\bar{\sigma},-}$-módulos $T^M(V)$ tienen la siguiente descomposición como $(\mathcal{D}^N_{0,\bar{\sigma},-}, S_M)$-módulos:*

$$T^M(V) = \oplus_{\substack{\lambda^+ \in \mathrm{Par}^+ \\ |\lambda^+|=M}} V_{\lambda^+} \otimes U_{\lambda^+}$$

donde U_{λ^+} denota el S_M-módulo irreducible correspondiente a la partición λ^+.

El álgebra de anulación extendida $\mathrm{Lie}^-(spc_{N,xI})$ para $spc_{N,xI}$ es isomorfa a la suma directa de el álgebra de Lie $\mathcal{D}^N_{0,\bar{\sigma},-}$ y el álgebra de Lie N-dimensional $\mathbb{C}^N(\partial + \frac{d}{dt})$ y que los módulos conformes para un álgebra conforme de Lie coinciden con los módulos sobre el álgebra de anulación extendida (Ver Observación 3.4).

El Teorema 9.30 y las observaciones anteriores implican lo siguiente

Teorema 9.34. *Los $spc_{N,xI}$-módulos $L(\lambda^+)_\alpha$,donde $\lambda^+ \in \mathrm{Par}^+$, $\alpha \in \mathbb{C}$, son todos los $spc_{N,xI}$-módulos conformes irreducibles de crecimiento finito.*

Corolario 9.35. *Los $spc_{N,xI}$-módulos $\mathbb{C}^N[\partial]_\alpha$ $\alpha \in \mathbb{C}$, son todos los $spc_{N,xI}$-módulos irreducibles finitos.*

References

[1] H. Awata, M. Fukuma, Y. Matsuo and S. Odake, *Subalgebras of* $W_{1+\infty}$ *and their quasifinite representations* , J. Phys. A **28** (1995), 105-112.

[2] S. Bloch, *Zeta values and differential operators on the circle*, J. Algebra **182** (1996), 476-500.

[3] C. Boyallian and J. Liberati, *Representations of a symplectic type subalgebra of W_∞*, Journal of Math. Phys. **44** no. 5 (2003), 2192-2205.

[4] C. Boyallian, V. Kac, J. Liberati and C. Yan, *Quasifinite highest weight modules over the Lie algebra of matrix differential operators on the circle*, Journal of Math. Phys. **39** (1998), 2910-2928.

[5] E. Frenkel, V. Kac, A. Radul and W. Wang , *$W_{1+\infty}$ and $W(gl_N)$ with central charge N* , Comm. Math. Phys. **170** (1995), 337-357.

[6] V. G. Kac, *Infinite-dimensional Lie algebras*, 3rd edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[7] V. G. Kac and J. I. Liberati, *Unitary quasifinite representations of W_∞*, Letters Math. Phys. , **53** (2000), 11-27.

[8] V. G. Kac and A. Radul, *Quasifinite highest weight modules over the Lie algebra of differential operators on the circle*, Comm. Math. Phys. **157** (1993), 429-457.

[9] V. G. Kac and A. Radul, *Representation theory of the vertex algebra $W_{1+\infty}$*, Transformation Groups **1** (1996), 41-70.

[10] V. G. Kac, W. Wang and C. Yan, *Quasifinite representations of classical Lie subalgebras of $W_{1+\infty}$* Adv. Math. **139** (1998), 56-140.

[11] C. Boyallian, V.B Meinardi *QHWM of the orthogonal type Lie subalgebra of the Lie algebra of matrix differential operators on the circle.* Journal of Mahtematical Physics. **51** online (2010).

[12] C. Boyallian, V.B Meinardi *Quasifinite highest weight modules over W_∞^N.* Journal Physics A., Math. Theor. **44** (2011) 235201 (2011).

[13] C. Boyallian, V.B Meinardi *Representations of a sympletic type subalgebra of W_∞^N.* Journal of Mahtematical Physics. **54** online (14 de junio del 2011.)

[14] C. Boyallian V. G. Kac and J. I. Liberati, *On the classification of subalgebras of $Cend_N$ and gc_N.* Journal of Algebra **260** (2003), 32-63

[15] C. Boyallian and J. Liberati, *Classical Lie subalgebras of the Lie algebra of matrix differential operators on the circle*, Journal of Math. Phys. **42** (2001), 3735-3753.

[16] V.Kac, *Vertex Algebras for Begginers*, 2nd Edition, Amer.Math. Soc. Providence, RI, 1998.