Holonomía y espacios naturalmente reductivos

por Silvio Reggiani

Presentado ante la
Facultad de Matemática, Astronomía y Física
como parte de los requerimientos para la obtención
del grado de Doctor en Matemática de la

Universidad Nacional de Córdoba

Agosto de 2012

Director: Dr. Carlos Olmos

Resumen

Se prueba un teorema tipo Simons-Berger sobre 1-formas totalmente anti-simétricas con valores en un álgebra de Lie de isometrías lineales. El único caso transitivo para este teorema es el grupo total ortogonal. En su demostración solamente usamos métodos geométricos, evitando cualquier tipo de resultado clasificatorio (incluso la clasificación de los espacios simétricos de rango uno o la de las acciones isométricas transitivas en la esfera).

Como aplicación probamos que la conexión canónica de un espacio naturalmente reductivo localmente irreducible es única, excepto para esferas, grupos de Lie con métrica bi-invariante, o duales simétricos de grupos de Lie con métrica bi-invariante. Como consecuencia, calculamos el grupo isometrías de espacios naturalmente reductivos compactos. Esto generaliza las clasificaciones de Onishchik, para cocientes normal homogéneos de grupos simples, y Shankar, para espacios homogéneos de curvatura positiva. También responde a una pregunta formulada por J. Wolf y Wang-Ziller: por qué el grupo de presentación de un espacio isotrópicamente irreducible no se puede extender (excepto para esferas o grupos de Lie).

Otra aplicación que damos es un teorema tipo-Berger para conexiones métricas con torsión antisimétrica. Más precisamente, si el subgrupo ortogonal que se obtiene transportando paralelamente el tensor de torsión es transitivo en la esfera, entonces el espacio (asumido irreducible) es localmente isométrico a un grupo de Lie con métrica bi-invariante o su dual simétrico. También estudiamos en detalle este tipo de conexiones en grupos de Lie con métrica bi-invariante. Obtenemos que las únicas conexiones planas posibles son las dos conexiones canónicas planas y mostramos que la holonomía de una conexión no-plana genérica coincide con la holonomía riemanniana.

Finalmente, definimos y estudiamos un invariante geométrico que llamamos el índice de simetría de una variedad riemanniana. Este invariante es trivial para espacios simétricos y espacios isotrópicamente irreducibles (en los cuales es igual a la dimensión del espacio o nulo). En contraste, probamos que para espacios normal homogéneos compactos, no-simétricos, y ciertas presentaciones de espacios naturalmente reductivos compactos, el índice de simetría es igual a la dimensión del subespacio de vectores fijos por la isotropía (en el espacio tangente).

MSC (2010): 53C30 Homogeneous manifolds, 53C35 Symmetric spaces, 53C29 Issues of holonomy.

Palabras clave: holonomía, espacios naturalmente reductivos, espacios normal homogéneos, espacios simétricos, conexiones con torsión antisimétrica.

Abstract

We prove a Simons-Berger type theorem for totally skew-symmetric 1-forms with values in a Lie algebra of linear isometries. The only transitive case for this theorem is the full orthogonal group. We only use geometric tools and we do not use any classification (not even that of transitive isometric actions on the sphere or the list of rank one symmetric spaces).

As an application, we prove that the canonical connection of a locally irreducible naturally reductive space is unique, provided the space is not a sphere, nor a compact Lie group with a bi-invariant metric or its symmetric dual. As a consequence, we compute the isometry group of compact naturally reductive spaces. This generalizes the known classification results of Onishchik, for normal homogeneous quotients of a simple Lie group, and Shankar, for homogeneous spaces of positive curvature. This also answers a question posed by J. Wolf and Wang-Ziller: why the isometry group of an isotropy irreducible space cannot be enlarged (except for spheres or Lie groups with a bi-invariant metric).

Another application is a Berger-type theorem for metric connections with skew-symmetric torsion. Namely, if the orthogonal subgroup spanned by parallel translations of the torsion tensor is transitive on the sphere, then the space (assumed irreducible) is locally isometric to a Lie group with a bi-invariant metric or its symmetric dual. We also study in some detail this kind of connections on Lie groups with a bi-invariant metric. We obtain that the only flat connections are the two flat canonical connections, and we show that the holonomy of a non-flat generic connection coincides with the Riemannian holonomy.

Finally, we define and study a geometric invariant called the index of symmetry of a Riemannian manifold. This invariant is trivial for symmetric spaces and isotropy irreducible spaces (it is equal to the dimension of the space or it vanishes). In contrast, we prove that for compact, non-symmetric, normal homogeneous spaces, and some presentations of naturally reductive spaces, the index of symmetry is the dimension of the subspace of fixed vector of the isotropy (in the tangent space).

MSC (2010): 53C30 Homogeneous manifolds, 53C35 Symmetric spaces, 53C29 Issues of holonomy.

Key words: holonomy, naturally reductive spaces, normal homogeneous spaces, symmetric spaces, connections with skew-symmetric torsion.

Agradecimientos

Agradezco en primer lugar a mi director, Carlos Olmos, por su paciencia y su continua guía a lo largo de estos años, sin las cuales no hubiera podido completar el doctorado. Agradezco también su generosidad y le expreso mi gran admiración, pues de él pude aprender muchísimas cosas, tanto a nivel matemático como personal.

Agradezco al CONICET, a la FaMAF y al CIEM por el apoyo económico y el lugar de trabajo para realizar mi doctorado.

Agradezco al tribunal de tesis, Isabel Dotti, Sergio Console y Jorge Vargas por sus comentarios y sugerencias sobre la presentación. Asimismo agradezco a mi comisión de Doctorado.

Muchas gracias también a mis compañeros y amigos de la Facultad, y a muchos de los profesores que tuve a lo largo de estos años.

Finalmente quisiera agradecer a mi familia, en especial a mi padre y a mi hermana Carla. Y a Isolda quien me acompaña desde estos últimos años.

Índice general

Introducción

1. Introducción general

La familia de espacios simétricos es tal vez la familia más importante de variedades riemannianas. Estos espacios fueron definidos y clasificados por É. Cartan [**Car26**] y se caracterizan localmente por tener el tensor de curvatura paralelo. Los espacios simétricos se generalizan de diversas formas a familias más grandes de espacios riemannianos homogéneos. Por ejemplo, es un hecho bien conocido que el grupo de isotropía total de un espacio simétrico irreducible actúa irreduciblemente en el espacio tangente, vía la representación isotrópica. En este sentido, los espacios isotrópicamente irreducibles son una familia de espacios homogéneos que contiene propiamente a los espacios simétricos irreducibles. Los espacios isotrópicamente irreducibles han sido largamente estudiados (y también clasificados), por ejemplo en [**Wol68, WZ91**]. Los espacios isotrópicamente irreducibles llevan todos métricas de Einstein, y, por un resultado en [**Bes87**], un espacio isotrópicamente irreducible no-compacto resulta simétrico. Otra familia que extiende a los espacios simétricos compactos es la de los llamados espacios normal homogéneos, o, más generalmente, los espacios naturalmente reductivos [**DZ79**]. La familia de espacios normal homogéneos contiene a los espacios isotrópicamente irreducibles. Al igual que los espacios isotrópicamente irreducibles, casi todos los ejemplos de espacios de Einstein llevan métricas naturalmente reductivas (ver [**DZ79, Mor94, AMS09**]).

Los espacios simétricos se pueden definir de manera geométrica (la simetría geodésica en cada punto se extiende a una isometría global), o por medio de una presentación homogénea que involucra el grupo total de isometrías (la presentación como par simétrico efectivo). Sin embargo, la definición de un espacio naturalmente reductivo, e incluso la de un espacio normal homogéneo, $M = G/H$ depende del grupo de presentación G. En este caso, no es necesario que G sea el grupo total de isometrías. Por ejemplo, la esfera de dimensión 7, con la métrica usual, admite dos presentaciones isotrópicamente irreducibles (y por ende, naturalmente reductivas)

$$S^7 = \mathrm{SO}(8)/\mathrm{SO}(7) = \mathrm{Spin}(7)/G_2.$$

Lo mismo es cierto para

$$S^6 = \mathrm{SO}(7)/\mathrm{SO}(6) = G_2/\mathrm{SU}(3).$$

Asociado a un espacio naturalmente reductivo $M = G/H$ se tiene una conexión canónica ∇^c. La conexión canónica de un espacio naturalmente reductivo es una conexión métrica, G-invariante, que tiene las mismas geodésicas que la conexión de Levi-Civita de M (las cuales están dadas por subgrupos monoparamétricos de G). La explicación de la patología en los ejemplos mencionados más arriba podría ser la siguiente. El grupo de isometrías $\mathrm{SO}(8)$ de S^7 no se comporta apropiadamente con respecto a la conexión canónica de $S^7 = \mathrm{Spin}(7)/G_2$ (análogamente para la presentación $S^6 = G_2/\mathrm{SU}(3)$).

En un contexto más general, ya en la década de 1920, Cartan había pensado en la idea buscar una conexión que se "adapte" a la geometría del espacio [**Car24**]. Por ejemplo, para un espacio naturalmente reductivo no-simétrico $M = G/H$ el tensor de curvatura riemanniano R no es paralelo con respecto a la conexión de Levi-Civita, $\nabla R \neq 0$, pero sí lo es con respecto a la conexión canónica, $\nabla^c R = 0$, Más aún, cualquier tensor geométrico en M es paralelo con respecto a la conexión canónica, pues ∇^c es G-invariante. Vale la pena aclarar que en un espacio simétrico la conexión de Levi-Civita es una conexión canónica.

Más generalmente, pensemos en una variedad riemanniana arbitraria $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Informalmente hablando, si $\tilde{\nabla}$ es una conexión en M que se adapta a la geometría del espacio, uno podría pensar que el tensor métrico es paralelo con respecto a $\tilde{\nabla}$,

$$\tilde{\nabla}\langle\cdot,\cdot\rangle = 0,$$

es decir, $\tilde{\nabla}$ es una conexión métrica. Si M no tiene estructuras adicionales, la siguiente condición razonable que se podría imponer, es pedir que la conexión adaptada $\tilde{\nabla}$ tenga las mismas geodésicas que la conexión de Levi-Civita. Este hecho es equivalente a que el tensor de torsión de $\tilde{\nabla}$ sea totalmente antisimétrico en todas sus variables (contraído con el tensor métrico). Es tal vez por esto que Cartan dirigió su atención, en principio, hacia las conexiones métricas con torsión antisimétrica (cfr. [**Car22**]). En la actualidad, las conexiones con torsión antisimétrica son de particular importancia en física teórica: teoría de cuerdas y supercuerdas (ver, por ejemplo, [**Agr03, AF04, Agr06**] y las referencias allí).

Ilustremos lo anterior por medio de un ejemplo. Por un resultado de Cartan-Schouten [**CS26**], estas conexiones adaptadas sirven para detectar cuándo el espacio es un grupo de Lie (con métrica bi-invariante). En efecto, si M admite una conexión métrica plana con torsión antisimétrica, entonces M es (localmente) un producto de grupos de Lie con métrica bi-invariante y esferas S^7 con la métrica usual. (Aquí uno puede observar que la esfera S^7, pensada como las unidades del anillo de octoniones, sólo deja de ser un grupo de Lie porque la multiplicación no es asociativa.) Recientemente Agricola-Friedrich [**AF10**] dieron una nueva demostración del teorema de Cartan-Schouten que no depende de la clasificación de los espacios simétricos, como sí lo hace la prueba original.

Un concepto sumamente importante, y estrechamente ligado al la teoría de conexiones, es el de grupo de holonomía. Para el caso de la conexión de Levi-Civita (o, más generalmente, para una conexión métrica) estos grupos son grupos ortogonales que miden cuánto se aleja el espacio (o la conexión en cuestión) de ser plano. Los grupos de holonomía también fueron introducidos por Cartan [**Car26**] en su clasificación de los espacios simétricos. En 1955, M. Berger [**Ber55**] probó que si el grupo de holonomía (riemanniana) de un espacio irreducible no actúa transitivamente en la esfera (del espacio tangente), entonces el espacio debe ser localmente simétrico. Este teorema es conocido como el teorema de holonomía de Berger, y es considerado uno de los resultados generales más importantes de la geometría riemanniana. Berger demostró este teorema clasificando los posibles grupos de holonomía de espacios no-localmente simétricos (observando que todos estos grupos resultan transitivos en la esfera). Estos grupos conforman la llamada lista de Berger, ver Cuadro 1.1 en los Preliminares. A lo largo de los años se fue probando que cada grupo de la lista de Berger es, en efecto, la holonomía de un espacio riemanniano. Esto no siempre fue fácil, de hecho algunos de estos ejemplos se encontraron muchos años después (e.g., [**Yau78, Bry87, BS89, Joy96b, Joy96c, Joy96a, Kov03**]). Es un hecho notable que cada uno de estos grupos de holonomía transitivos da lugar a una geometría muy rica y particular. Esto es lo que a veces se conoce como el estudio de la geometría riemanniana desde un punto de vista holonómico.

Siete años después, en 1962, J. Simons dio una demostración algebraica del teorema de holonomía de Berger, la cual evita completamente la clasificación de Berger. Para dar esta prueba, Simons define y estudia los llamados sistemas holonómicos (i.e., tensores algebraicos de curvatura que toman valores en un álgebra de Lie ortogonal; ver Capítulo 1, Sección 3). Es bien conocido el llamado teorema de holonomía de Simons [**Sim62**], que dice que un sistema holonómico irreducible y no-transitivo debe ser simétrico.

Los teoremas de Simons-Berger son ejemplos clásicos de lo que recientemente se ha denominado como teoremas tipo-Berger. Informalmente, para establecer un teorema tipo-Berger sobre ciertos objetos (algebraicos, geométricos, etc.) X, uno debería tener asignado a cada objeto X un subgrupo ortogonal Φ_X y se deberían conocer los modelos simétricos de X. Por ejemplo, si nuestros objetos son las variedades riemannianas, los subgrupos Φ_X son los grupos de holonomía de X y los modelos simétricos son los espacios (localmente) simétricos. Un teorema tipo Berger diría que si X es irreducible y no es genérico (e.g., Φ_X no es transitivo en la esfera), entonces X es simétrico.

Para clarificar un poco esta idea, mencionemos otros dos ejemplos de teoremas tipo-Berger. El primero es un resultado debido a Thorbergsson [**Tho91, Olm93**]: si M es una subvariedad de la esfera con curvaturas principales constantes y el grupo de holonomía normal de M actúa de manera irreducible y no-transitiva, entonces M es la órbita de una s-representación (i.e., la representación isotrópica de un espacio simétrico semisimple). Recordemos que las órbitas de s-representaciones juegan un papel central en la geometría de subvariedades, similar al que juegan los espacios simétricos en la geometría riemanniana. Recientemente Console-Di Scala-Olmos [**CDSO11**] probaron un teorema tipo-Berger para subvariedades complejas: si M es una subvariedad completa, substancial e irreducible de $\mathbb{C}P^n$ y el grupo de holonomía normal de M es no-transitivo, entonces M es la órbita (proyectivizada) de una s-representación hermitiana irreducible.

Otro problema de interés que se presenta en geometría riemanniana homogénea es el de encontrar el grupo total de isometrías (componente conexa) de un espacio riemanniano homogéneo $M = G/H$. Para espacios isotrópicamente irreducibles, [**Wol68, WZ91**] probaron que el grupo de presentación G da la componente conexa del grupo de isometrías, excepto para ciertos ejemplos patológicos en esferas de dimensión baja y grupos de Lie con métrica bi-invariante (ver los Preliminares y Capítulo 3), los cuales son espacios simétricos y por ende su grupo de isometrías está bien determinado. Para espacios normal homogéneos $M = G/H$, con G simple, el grupo de isometrías se puede obtener de la clasificación de Onishchik [**Oni92**]. Otro resultado en esta dirección es debido a K. Shankar [**Sha01**], quien determinó el grupo de isometrías de espacios homogéneos de curvatura positiva.

Observemos que para un espacio naturalmente reductivo $M = G/H$ con conexión canónica asociada ∇^c, existe una forma estándar de extender el grupo G a un grupo más grande de isometrías de M. Más precisamente, esto se hace incluyendo todas las isometrías de M que preservan la conexión canónica, es decir las isometrías ∇^c-afines. En efecto, si M es simplemente conexa, cualquier isometría lineal $\ell : T_pM \to T_qM$, con $\ell_*(R^c_p) = R^c_q$ y $\ell_*(T^c_p) = T^c_q$ se extiende a una isometría de M (pues la conexión canónica tiene torsión y curvatura ∇^c-paralelas T^c y R^c, respectivamente). Esta extensión también se puede hacer, para la componente conexa y sólo en el caso compacto, agregando al álgebra de Lie de G los campos invariantes por el grupo de transvecciones de la conexión canónica $\mathrm{Tr}(M, \nabla^c)$, el cual es un subgrupo normal y transitivo de G (estos campos están en correspondencia biyectiva con los vectores fijos de la isotropía H en $T_{eH}M$). La extensión estándar es trivial en para $S^7 = \mathrm{Spin}(7)/G_2$ y $S^6 = G_2/\,\mathrm{SU}(3)$ (ver [**Reg10**]).

En esta tesis se obtienen diversos resultados sobre espacios naturalmente reductivos, y más generalmente, sobre variedades riemannianas munidas de una conexión métrica con torsión antisimétrica, relacionados con los problemas mencionados anteriormente.

En lo que se refiere al grupo de isometrías de espacios naturalmente reductivos obtenemos el siguiente resultado.

TEOREMA A. *Sea M un espacio naturalmente reductivo compacto y localmente irreducible. Supongamos que M no es globalmente isométrico a una esfera ni a un espacio proyectivo real. Entonces, la componente conexa del grupo de isometrías de M coincide con la componente conexa del grupo de transformaciones afines de la conexión canónica. Más aún, si existe una isometría de M que no preserva la conexión canónica, entonces M es isométrico a un grupo de Lie con métrica bi-invariante.*

Este teorema extiende los resultados de [**Oni92, Sha01**] y también sirve para obtener geométricamente los resultados de [**Wol68, WZ91**] sobre el grupo de isometrías de espacios isotrópicamente irreducibles.

El Teorema A sigue del hecho de que la conexión canónica de un espacio naturalmente reductivo es esencialmente única.

TEOREMA B. *Sea M un espacio naturalmente reductivo localmente irreducible. Supongamos que M no es globalmente isométrico a una esfera, un grupo de Lie con métrica bi-invariante, ni al dual simétrico de un grupo de Lie con métrica bi-invariante. Entonces, la conexión canónica en M es única.*

Sigue del teorema anterior que los espacios naturalmente reductivos que admiten más de una conexión canónica son necesariamente simétricos. Por tanto, tiene sentido pensar que podría existir una definición geométrica de los espacios naturalmente reductivos (que sea independiente de la presentación como espacio homogéneo). Por supuesto, tal definición debería coincidir con la definición usual de los espacios simétricos.

El Teorema B sirve para responder, de manera geométrica, a una pregunta formulada por J. Wolf y Wang-Ziller: ¿por qué el grupo de presentación de un espacio isotrópicamente irreducible da la componente conexa del grupo de isometrías del espacio (excepto para esferas y grupos de Lie, por supuesto)?. Ver Corolario 3.10.

La demostración del Teorema B sorprendentemente nos lleva, de manera natural, a un teorema tipo-Berger análogo al teorema de holonomía de Simons. Más precisamente, si ∇^c y $\nabla^{c'}$ son dos conexiones canónicas en un espacio naturalmente reductivo M, entonces el tensor diferencia

$$\Theta = (\nabla^{c'} - \nabla^c)_p,$$

evaluado en un punto $p \in M$, define una 1-forma algebraica totalmente antisimétrica en T_pM (i.e., $\langle \Theta_u v, w\rangle$ define una 3-forma en T_pM).

Luego, es natural definir, como Simons hizo en [**Sim62**] para sistemas holonómicos, el concepto de *skew-torsion holonomy system*: es decir un triple $[\mathbb{V}, \Theta, G]$ en donde $\mathbb{V}$ es un espacio euclídeo, G es un subgrupo de Lie conexo de $\mathrm{SO}(\mathbb{V})$ y Θ es una 1-forma totalmente antisimétrica en $\mathbb{V}$ que toma valores en el álgebra de Lie de G. Se tiene el siguiente teorema de holonomía.

Teorema C. *Si* $[\mathbb{V}, \Theta, G]$ *es irreducible y no-transitivo, entonces es simétrico. Más aún, si* $[\mathbb{V}, \Theta, G]$ *es transitivo, entonces* $G = \mathrm{SO}(\mathbb{V})$.

Este resultado podría confirmar la esperanza de J. Simons, quien decía que una variación algebraica de los sistemas holonómicos podría ser aplicable en otras situaciones (ver [**Sim62**, Introduction]).

Quisiéramos aclarar que el Teorema C fue obtenido independientemente por P.-A. Nagy [**Nag07**], quien sigue un enfoque algebraico, utilizando las llamadas álgebras de Berger. Nuestra demostración, aunque tampoco es sencilla, es totalmente geométrica, y utiliza ingredientes la geometría de subvariedades. La parte más complicada es probar que el único caso transitivo para un skew-torsion holonomy system $[\mathbb{V}, \Theta, G]$ es el grupo ortogonal $G = \mathrm{SO}(\mathbb{V})$. Aclaremos también que casi todos los casos transitivos ya habían sido excluidos por Agricola-Friedrich en [**AF04**] (para Spin(9) después de largos cálculos). En realidad, el único caso que les faltó tratar es el caso cuaterniónico-Kähler $G = \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(n) \subset \mathrm{SO}(4n)$. Pero, con las mismas ideas que ellos usan para excluir el caso Kähleriano $G = \mathrm{U}(n) \subset \mathrm{SO}(2n)$, este caso se puede descartar fácilmente (considerando una 4-forma de Kähler cuaterniónica en lugar de una 2-forma de Kähler).

Para aplicar el Teorema C en la demostración que damos para el Teorema B en el caso compacto, es necesario un resultado general de descomposición de espacios homogéneos compactos, ver Teorema 3.4, el cual es usado a su vez para probar el Teorema C. Esto muestra la estrecha relación que hay entre ambos resultados. El Teorema 3.4 es falso en el caso no-compacto (en el cual tenemos que usar otros argumentos para probar el Teorema B) y también resulta no trivial, debido al hecho que la subvariedad integral determinada por los puntos fijos de la isotropía de un espacio homogéneo es, en general, no trivial.

Remarquemos que el Teorema C no solamente tiene aplicaciones a espacios naturalmente reductivos. Nosotros lo aplicaremos en un contexto más general, el de las variedades riemannianas (no necesariamente homogéneas) munidas además de una conexión métrica $\tilde{\nabla}$ con las mismas geodésicas que la conexión de Levi-Civita. En este caso el tensor diferencia $D = \nabla - \tilde{\nabla}$ también define una 1-forma totalmente antisimétrica en cada espacio tangente. Inspirados por la construcción de Ambrose-Singer para el álgebra de Lie de la holonomía, uno puede construir un subgrupo ortogonal $H(M, \tilde{\nabla}) \subset \mathrm{SO}(T_pM)$, transportando paralelamente las transformaciones antisimétricas D_v, con $v \in TM$, a lo largo de curvas arbitrarias. Así, se obtiene el siguiente teorema tipo-Berger.

Teorema D. *Si M es localmente irreducible y $\{e\} \neq H(M, \tilde{\nabla}) \neq \mathrm{SO}(\tilde{\nabla})$, entonces M es localmente isométrica a un grupo de Lie con métrica bi-invariante o su dual simétrico.*

En realidad, si uno asume que $\tilde{\nabla} \neq \nabla$, forzosamente se tiene $H(M, \tilde{\nabla}) \neq \{e\}$. Cabe aclarar que no existe un análogo general para el teorema de holonomía de Berger para conexiones arbitrarias. En nuestro caso $H(M, \tilde{\nabla})$ no es el grupo de holonomía de $\tilde{\nabla}$. De hecho, en ciertos casos en los que $\tilde{\nabla}$ es plana, el grupo $H(M, \tilde{\nabla})$ contiene información sobre la geometría de $(M, \tilde{\nabla})$. Como consecuencia del Teorema D, el estudio de conexiones métricas con torsión antisimétrica se restringe, cuando éstas no son genéricas, a su estudio en grupos de Lie de compactos (ver Capítulo 4).

Finalmente, el estudio de los espacios naturalmente reductivos, y la riqueza de la geometría de los puntos fijos de la isotropía (en contraposición a los espacios isotrópicamente irreducibles, en donde no hay puntos fijos), nos llevan naturalmente a definir un nuevo invariante geométrico para variedades riemannianas, el cual llamamos *índice de simetría*. Informalmente hablando, el índice de simetría $i_{\mathfrak{s}}(M)$ de una variedad riemanniana M, puede pensarse localmente como la máxima dimensión de la foliación totalmente geodésica $\mathscr{L}$ de M, en cuyas hojas, cualquier tensor geométrico del espacio ambiente es paralelo. En particular, las hojas de $\mathscr{L}$ resultan subvariedades extrínsecamente simétricas. Obviamente se tiene que $i_{\mathfrak{s}}(M) = \dim M$ si y sólo si M es un espacio simétrico. La definición precisa del índice de simetría y de la foliación de simetría $\mathscr{L}$ puede hacerse en términos de transvecciones infinitesimales (i.e., campos de Killing cuya derivada se anula en un punto). Para espacios normal homogéneos compactos y ciertas presentaciones de espacios naturalmente reductivos compactos, uno puede calcular explícitamente el índice de simetría.

Teorema E. *Sea $M = G/H$ un espacio normal homogéneo compacto, simplemente conexo e irreducible que no es localmente simétrico. Entonces la foliación de simetría de M coincide con la foliación G-invariante definida por los puntos fijos de H en M.*

Utilizando la llamada forma de Kostant, la cual permite pensar a un espacio naturalmente reductivo como un espacio normal homogéneo, con respecto a una métrica pseudo-riemanniana bi-invariante definida en el subgrupo de transvecciones de la conexión canónica, el teorema anterior se generaliza al caso naturalmente reductivo.

Teorema F. *Sea $M = G/H$ un espacio naturalmente reductivo compacto, simplemente conexo e irreducible que no es localmente simétrico. Supongamos que M está presentado por el grupo de transvecciones de la conexión canónica. Entonces la foliación de simetría de M coincide con la foliación G-invariante definida por los puntos fijos de H en M.*

Antes de pasar al resumen de los resultados obtenidos y organización de la tesis, quisiéramos hacer un pequeño comentario sobre la metodología de trabajo. Nuestro enfoque fue puramente geométrico, eventualmente usando resultados algebraicos elementales. En este sentido, siempre priorizamos los argumentos conceptuales, evitando todo tipo de resultados clasificatorios (incluso la clasificación de los espacios simétricos, o las acciones transitivas en la esfera). Así es que obtenemos nuevas pruebas conceptuales de resultados conocidos que dependían de estas clasificaciones (ver, por ejemplo, el Apéndice). Si bien estas demostraciones geométricas fueron, a veces, difíciles de obtener, a partir de resultados sobre geometría altamente no triviales (e.g., el teorema de Cartan-Schouten [**CS26**], los teoremas de holonomía de Simons-Berger [**Ber55, Sim62**], el estudio sobre espacios k-flats homogéneos [**HPTT94**]), cada uno de estos resultados tiene una demostración conceptual y geométrica (e.g., [**AF10**], [**Olm05a, Olm05b**], [**EO94**] respectivamente). Nuestros métodos geométricos nos llevan frecuentemente a la geometría de subvariedades, ilustrando, una vez más, cómo se pueden obtener resultados sobre geometría intrínseca a través de la geometría extrínseca, por medio de la llamada holonomía normal.

Esta tesis puede considerarse como un nuevo esfuerzo en la dirección de lo que a veces se llama la geometrización de la teoría de Lie.

2. Sobre los resultados obtenidos

Los resultados originales de esta tesis se encuentran en los Capítulos 2–6, en tanto que el Capítulo 1 lo dedicamos a repasar algunos conceptos básicos y resultados conocidos.

En el Capítulo 2 definimos y estudiamos los llamados skew-torsion holonomy systems. Después de estudiar la estructura del grupo generado por una familia de 1-formas con valores en un álgebra de Lie ortogonal, damos una versión débil, Teorema 2.4, del Teorema C, la cual es necesaria para probar la versión fuerte, enunciada con precisión en el Teorema 2.10. La prueba del Teorema 2.4 es análoga a la dada en [**Olm05b**] para el teorema de holonomía de Simons y combina argumentos de geometría de subvariedades y holonomía normal. El resultado principal de este capítulo es el Teorema 2.11, a partir del cual sigue fácilmente el Teorema 2.10, también llamado el skew-torsion holonomy theorem. La demostración del Teorema 2.11 está lejos de ser trivial, involucra la geometría de subvariedades isoparamétricas del espacio euclídeo y utiliza el Teorema de descomposición 3.4 y la Proposición 6.4, demostrados en los capítulos subsiguientes. Terminamos el Capítulo 2 haciendo una consideración sobre el caso cuaterniónico-Kähler (recordar que Agricola-Friedrich [**AF04**] habían excluido todos los casos transitivos excepto éste).

El Capítulo 3 está destinado a probar los Teoremas A y B. Para probar el Teorema B distinguimos en dos casos: el caso compacto en el Teorema 3.7 y el caso no-compacto en el Teorema 3.16. La primera sección del Capítulo 3 la dedicamos a probar un resultado general de descomposición de espacios homogéneos compactos, Teorema 3.4, bajo cierta hipótesis sobre el grupo de isotropía. El Teorema 3.4 combinado con el skew-torsion holonomy theorem implican el Teorema 3.7 de unicidad. Como consecuencia obtenemos el Corolario 3.10, el cual responde de manera geométrica a una pregunta formulada por J. Wolf y Wang-Ziller sobre el grupo de isometrías de espacios isotrópicamente irreducibles (ver la introducción general). Usamos también el skew-torsion holonomy theorem para calcular la holonomía de espacios naturalmente reductivos (compactos o no). Como el Teorema 3.4 no vale para espacios no-compactos, tenemos que modificar nuestros argumentos para probar la unicidad de la conexión canónica en este caso. Esto lo hacemos en el Teorema 3.16. Más aún, si $n \neq 3$, probamos que el espacio hipérbolico H^n admite una única presentación naturalmente reductiva y también, usando teoría de Hodge, vemos que la esfera S^n admite una única conexión canónica asociada a la descomposición simétrica. Una simple observación que usamos en la prueba del Teorema 3.16, en combinación con [**Reg10**], nos permite calcular el grupo de isometrías de un espacio naturalmente reductivo compacto (este grupo era conocido sólo para espacios normal homogéneos).

En la primera parte del Capítulo 4 introducimos los, a veces llamados, grupos de holonomía combinada $H(M, \tilde{\nabla})$ asociados a una variedad riemanniana M munida de una conexión métrica con torsión antisimétrica $\tilde{\nabla}$, y demostramos el Teorema 4.5, que no es otra cosa que una versión precisa del Teorema D. En la segunda parte de este capítulo estudiamos minusciosamente las conexiones métricas $\tilde{\nabla}$ en un grupo de Lie compacto G con métrica bi-invariante y $H(G, \tilde{\nabla}) \neq \mathrm{SO}(\mathfrak{g})$, en donde $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie de G. Vemos que esta familia de conexiones está en correspondencia biyectiva con el álgebra de funciones diferenciables de G, y calculamos el grupo de holonomía de cada una de estas conexiones. Como consecuencia, se obtiene que las únicas conexiones planas con torsión antisimétrica en G son las llamadas conexiones $(\pm)$, cuyo tensor de torsión está dado por $T(X,Y) = \pm[X,Y]$ (las cuales son conexiones canónicas).

En el Capítulo 5 definimos el llamado índice de simetría de una variedad riemanniana. En la primera parte nos referimos a ciertas propiedades estructurales de este invariante para espacios compactos. En la segunda parte de este capítulo probamos el Teorema E (en un contexto ligeramente más general). En la parte final del Capítulo 5 mostramos cómo adaptar la prueba del Teorema E para probar el Teorema F, usando la llamada forma de Kostant.

Finalmente, el Capítulo 6 de esta tesis es un apéndice destinado a probar, con argumentos puramente geométricos, un resultado sobre espacios isotrópicamente irreducibles que sigue de la clasificación de J. Wolf [**Wol68**], ver Proposición 6.4. Aquí también se encuentran algunos resultados bien conocidos que usamos a lo largo de la tesis. La idea es siempre dar demostraciones conceptuales, tratando de evitar resultados clasificatorios. Por ejemplo, recordamos cómo probar que el único grupo de Lie compacto de rango 1 es Spin(3), el cual es isométrico a la esfera S^3. Esto sigue de la clasificación de los espacios simétricos, pero también puede probarse usando sucesiones exacatas de homotopía.

Esta tesis está basada en los artículos [**OR12a, Reg11, OR12b, ORT12**] y parte del artículo [**Reg10**].

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo introducimos las definiciones básicas más importantes que utilizaremos a lo largo de la tesis, así como algunas notaciones y convenciones. También recordamos, sin demostración, algunos resultados bien conocidos e importantes que utilizaremos en los próximos capítulos.

A lo largo de la tesis la palabra *diferenciable* significará de clase C^∞. Las variedades diferenciables se asumen satisfaciendo el segundo segundo axioma de numerabilidad. Los espacios vectoriales y las álgebras de Lie, salvo mención explícita, se asumen reales y de dimensión finita. La exponencial geométrica de una variedad riemanniana se denotará por exp, en tanto que la función exponencial de un grupo de Lie se denotará por Exp.

Cuando nos referimos a una *variedad riemanniana homogénea* $M = G/H$, entendemos que G actúa en M por isometrías y, salvo que aclaremos lo contrario, de manera (casi) efectiva (es decir, el subgrupo de elementos de G que actúan trivialmente en M se asume discreto). Finalmente, cuando digamos que $G = H \times K$ es el producto *casi directo* de los subgrupos H y K asumimos que $G = HK$ y que $H \cap K$ es un subgrupo discreto de G. En este siempre caso las correspondientes subálgebras de Lie forman una suma directa de ideales $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{k}$. A lo largo de la tesis, los productos de grupos de Lie serán productos casi directos (salvo que aclaremos lo contrario), por ende sólo mencionaremos esto para enfatizarlo.

1. Geometría riemanniana

1.1. La conexión de Levi-Civita y la curvatura riemanniana. Sea $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ una variedad riemanniana de dimensión n. Denotamos por $\mathfrak{X}(M)$ el álgebra de Lie de campos diferenciables en M. La conexión de Levi-Civita de M será usualmente denotada por ∇. El tensor de curvatura (riemanniano) de M se denotará usualmente por R y está definido por

$$R_{X,Y}Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Son bien conocidas las identidades del tensor de curvatura: para todos $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ valen

(i) $R_{X,Y} = -R_{Y,X}$;
(ii) $\langle R_{X,Y}Z, W\rangle = -\langle R_{X,Y}W, Z\rangle$, es decir, $R_{X,Y}$ es una transformación antisimétrica en cada espacio tangente;
(iii) $\langle R_{X,Y}Z, W\rangle = \langle R_{Z,W}X, Z\rangle$;
(iv) $R_{X,Y}Z + R_{Y,Z}X + R_{Z,X}W = 0$ (primera identidad de Bianchi).

Es un hecho algebraico que (iii) es consecuencia de las otras tres identidades. La derivada covariante ∇R del tensor de curvatura también satisface la identidad de Bianchi, es decir, el tensor de curvatura también tiene la siguiente propiedad:

(v) $(\nabla_X R)_{Y,Z}W + (\nabla_Y R)_{Z,X}W + (\nabla_Z R)_{X,Y}W = 0$ (segunda identidad de Bianchi).

Dado $p \in M$ y $\pi \subset T_pM$ un plano por el origen, denotamos por $\kappa(\pi)$ la curvatura seccional de π, la cual se define por

$$\kappa(\pi) = \langle R_{u,v}v, u\rangle$$

en donde u, v es una base ortonormal de π. La curvatura escalar en p se define por

$$\mathrm{scal}_p(R) = \sum_{i<j} \langle R_{e_i,e_j}e_j, e_i\rangle,$$

en donde $e_1, \ldots, e_n$ es una base ortonormal de T_pM. Es un hecho elemental que las definiciones de la curvatura seccional y la curvatura escalar no dependen de las bases elegidas.

Dado $v \in T_pM$, el *operador de Jacobi* $J_v : \{v\}^\perp \to \{v\}^\perp$ se define por

$$J_v(w) = R_{w,v}v$$

para todo $w \in \{v\}^\perp \subset T_pM$. Es un hecho bien conocido, el cual usaremos eventualmente, que M tiene curvaturas seccionales constantes en p si y sólo si todos los operadores de Jacobi J_v, con $0 \neq v \in T_pM$, son un múltiplo de la identidad.

1.2. Conexiones métricas con torsión antisimétrica. En esta tesis consideraremos, además de la conexión de Levi-Civita, conexiones métricas con torsión antisimétrica. Se dice que una conexión $\tilde{\nabla}$ en una variedad riemanniana M es una *conexión métrica* si el tensor métrico es paralelo con respecto a $\tilde{\nabla}$, es decir, si

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \tilde{\nabla}_X Y, Z\rangle + \langle Y, \tilde{\nabla}_X Z\rangle$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Se dice que una conexión métrica $\tilde{\nabla}$ en M es una *conexión métrica con torsión (totalmente) antisimétrica*, si las $\tilde{\nabla}$-geodésicas coinciden con las geodésicas riemannianas. Sigue de la fórmula de Koszul que $\tilde{\nabla}$ es una conexión métrica con torsión totalmente antisimétrica si y sólo si el tensor diferencia $D = \nabla - \tilde{\nabla}$ es totalmente antisimétrico, es decir, $(X, Y, Z) \mapsto \langle D_X Y, Z\rangle$ define una 3-forma en M.

Notemos que si $\tilde{\nabla}$ es una conexión métrica en M y $\tilde{\nabla} \neq \nabla$, entonces el tensor de torsión $\tilde{T}(X, Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X - [X, Y]$ de $\tilde{\nabla}$ es forzosamente distinto de cero. Si además $\tilde{\nabla}$ tiene torsión antisimétrica, el tensor diferencia y el tensor de torsión llevan la misma información.

Proposición 1.1. *Sea $\tilde{\nabla}$ una conexión métrica en M con torsión totalmente antisimétrica. Entonces*

$$D_X Y = -\frac{1}{2}\tilde{T}(X, Y) \qquad \textit{para todos } X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

en donde $D = \nabla - \tilde{\nabla}$ es el tensor diferencia y $\tilde{T}$ es el tensor de torsión de $\tilde{\nabla}$.

Naturalmente, esto motiva la definición anterior.

Antes de pasar al siguiente apartado, quisiéramos mencionar un resultado de Ambrose-Singer, el cual caracteriza los espacios homogéneos en términos de conexiones métricas (no necesariamente con torsión antisimétrica).

TEOREMA 1.2 (Ambrose-Singer [**AS58, TV83**]). *Una variedad riemanniana M es localmente homogénea si y sólo si existe una conexión métrica $\tilde{\nabla}$ en M tal que $\tilde{\nabla}R = 0$ y $\tilde{\nabla}D = 0$, en donde R es el tensor de curvatura riemanniano y D es el tensor diferencia entre $\tilde{\nabla}$ y la conexión de Levi-Civita.*

Un tensor D de tipo $(1,2)$ y tal que $\tilde{\nabla}R = 0$, $\tilde{\nabla}D = 0$, en donde $\tilde{\nabla} = \nabla - D$, suele llamarse una *estructura homogénea.*

1.3. Grupos de holonomía y el teorema de Berger. Sea $\tilde{\nabla}$ una conexión métrica en M. El transporte $\tilde{\nabla}$-paralelo a lo largo de una curva diferenciable a trozos $c : [0,1] \to M$ se denotará usualmente por $\tilde{\tau}_c$. El hecho de que $\tilde{\nabla}$ sea una conexión métrica se ve reflejado en que $\tilde{\tau}_c : T_{c(0)}M \to T_{c(1)}M$ es una isometría lineal. Dado $p \in M$, el *grupo de holonomía* de $\tilde{\nabla}$ en p se define por

$$\mathrm{Hol}_p(\tilde{\nabla}) = \{\tilde{\tau}_c : c \text{ es una curva cerrada por } p\}.$$

Se sabe de la teoría que $\mathrm{Hol}_p(\tilde{\nabla}) \subset \mathrm{O}(T_pM)$ es un subgrupo de Lie (no necesariamente cerrado). Su componente conexa por la identidad $\mathrm{Hol}^*_p(\tilde{\nabla}) \subset \mathrm{SO}(T_pM)$ es llamado el *grupo de holonomía restricta* en p y se obtiene obtiene considerando transportes $\tilde{\nabla}$-paralelos a lo largo de curvas cerradas por p homotópicas a cero. En particular, si M es simplemente conexa $\mathrm{Hol}_p(\tilde{\nabla}) = \mathrm{Hol}^*_p(\tilde{\nabla})$.

Si M es conexa, entonces los grupos de holonomía en diferentes puntos $\mathrm{Hol}_p(\tilde{\nabla})$ y $\mathrm{Hol}_q(\tilde{\nabla})$ son conjugados por transporte paralelo a lo largo de cualquier curva que una p con q. Es por eso que en este caso omitimos el subíndice que indica el punto base, y nos referimos al grupo de holonomía $\mathrm{Hol}(\tilde{\nabla})$, o al grupo de holonomía restricta $\mathrm{Hol}^*(\tilde{\nabla})$, de $\tilde{\nabla}$ (aunque, a veces, el punto base estará implícito, por ejemplo si quisiéramos ver a la holonomía como un subgrupo de $\mathrm{SO}(T_pM)$).

El teorema de Ambrose-Singer nos dice que el tensor de curvatura $\tilde{R}$ de $\tilde{\nabla}$ (el cual se define igual que el tensor de curvatura riemanniano) determina la holonomía restricta. Notemos que si $\tilde{\nabla}$ es una conexión métrica, entonces $\tilde{R}_{X,Y}$ determina una transformación antisimétrica en cada punto. Denotemos por $\mathfrak{hol}(\tilde{\nabla})$ el álgebra de Lie del grupo de holonomía de M. Se tiene el siguiente resultado.

TEOREMA 1.3 (Ambrose-Singer [**AS53**]). *La subálgebra de Lie*

$$\mathfrak{hol}(\tilde{\nabla}) \subset \mathfrak{so}(T_pM)$$

del grupo de holonomía de $\tilde{\nabla}$ en p, está linealmente generada por elementos de la forma

$$(\tilde{\tau}_c)_*(R_{u,v}) := (\tilde{\tau}_c)^{-1} \circ \tilde{R}_{u,v} \circ \tilde{\tau}_c \in \mathfrak{so}(T_pM),$$

en donde c se toma entre todas las curvas diferenciables a trozos con $c(0) = p$ y u, v son vectores arbitrarios en $T_{c(1)}M$.

Cuando $\tilde{\nabla}$ es la conexión de Levi-Civita de M, el grupo de holonomía de ∇ es llamado el grupo de holonomía de M y se denota $\mathrm{Hol}(\nabla) = \mathrm{Hol}(M)$. (Análogamente, nos referimos al grupo de holonomía restricta $\mathrm{Hol}^*(M)$ de M.) En este caso, objetos algebraicos en un espacio tangente T_pM invariantes por el grupo de holonomía (e.g. vectores invariantes, subespacios invariantes, tensores algebraicos invariantes, etc.), determinan objetos paralelos en M (e.g. campos paralelos, distribuciones paralelas, tensores paralelos, etc.). Por ejemplo, tenemos los famosos teoremas de descomposición de de Rham.

TEOREMA 1.4 (Teorema de de Rham local). *Una variedad riemanniana M es localmente un producto alrededor de $p \in M$ si y sólo si existe una distribución paralela $\mathscr{D}$ definida en un entorno de p.*

Estrictamente hablando, en este caso el subespacio $\mathscr{D}_q \subset T_pM$ es invariante por el llamado *grupo de holonomía local* $\mathrm{Hol}_p^{\mathrm{loc}}(M)$ en p. Dicho grupo se define como

$$\mathrm{Hol}_p^{\mathrm{loc}}(M) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathrm{Hol}^*(U_k)$$

para cualquier base $U_1 \supset U_2 \supset \cdots$ de entornos abiertos y conexos de $p \in M$.

Recordemos que una distribución $\mathscr{D}$ en M se dice *paralela* si $\nabla_X Y \in \mathscr{D}$ para todos $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathscr{D}$. En tanto que $\mathscr{D}$ se dice *autoparalela* si $\nabla_X Y \in \mathscr{D}$ para todos $X, Y \in \mathscr{D}$. Una distribución $\mathscr{D}$ es autoparalela si y sólo si es integrable con hojas totalmente geodésicas. Si $\mathscr{D}$ es paralela entonces la distribución ortogonal a $\mathscr{D}$, usualmente denotada por $\mathscr{D}^\perp$ es también paralela. Recíprocamente, dos distribuciones autoparalelas complementarias, deben ser paralelas. Es decir si $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2$ son dos distribuciones autoparalelas ortogonales en M tales que $TM = \mathscr{D}_1 \oplus \mathscr{D}_2$, entonces $\mathscr{D}_i$ es una distribución paralela en M, para $i = 1, 2$. Esto no es necesariamente cierto si se suman ortogonalmente más de dos distribuciones autoparalelas.

TEOREMA 1.5 (Teorema de de Rham global). *Sea M una variedad riemanniana completa y simplemente conexa y sea $p \in M$. Descomponemos ortogonalmente el espacio tangente en p como $T_pM = \mathbb{V}_0 \oplus \mathbb{V}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{V}_k$ en donde $\mathbb{V}_0$ es el conjunto de vectores fijos de $\mathrm{Hol}(M)$ en T_pM y $\mathrm{Hol}(M)$ actúa irreduciblemente en $\mathbb{V}_i$ para todo $i = 1, \ldots, k$. Entonces M es el producto (riemanniano)*

$$M = M_0 \times M_1 \times \cdots \times M_k$$

en donde M_i es la subvariedad integral de la distribución paralela $\mathscr{D}_i$ en M definida por $\mathscr{D}_i(p) = \mathbb{V}_i$, para $i = 0, 1, \ldots, k$. Más aún, los factores $M_1, \ldots, M_k$ son únicos salvo el orden.

El factor M_0 se dice el *factor plano* de M. Se dice que M es plana si $M = M_0$, o equivalentemente si el tensor de curvatura se anula idénticamente, $R = 0$. Se dice que M es sin factor plano si $M = M_1 \times \cdots \times M_k$. También decimos que M es *irreducible* si $M = M_1$ en la descomposición anterior, o bien $M = M_0$ con $\dim M = \dim M_0 = 1$. Si M no es simplemente conexa, decimos que M es irreducible (resp. sin factor plano) si su cubrimiento universal es irreducible (resp. sin factor plano). Si no asumimos completitud las nociones anteriores se definen localmente.

Uno de los teoremas más importantes de la geometría riemanniana es el llamado teorema de holonomía de Berger.

TEOREMA 1.6 (Berger [**Ber55**]). *Si el grupo de holonomía de un espacio localmente irreducible no actúa transitivamente en la esfera (del espacio tangente), entonces el espacio debe ser localmente simétrico.*

La prueba de Berger sigue de la clasificación de los posibles grupos de holonomía de espacios no-localmente simétricos, los cuales resultan todos transitivos en la esfera. Esta es la llamada lista de Berger (ver Cuadro 1.1). Esta lista incluía originalmente al grupo $\mathrm{Spin}(9)$, pero en 1968 fue probado por D. V. Alekseevskii [**Ale68**] (e independientemente por Brown-Gray [**BG72**] en 1972) que cualquier espacio con holonomía $\mathrm{Spin}(9)$ debe ser simétrico. Los grupos $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{Sp}(n)$, $\mathrm{Spin}(7)$ y G_2 son las llamadas holonomías excepcionales, puesto que no existen espacios simétricos que los tengan como holonomía. En 1962, J. Simons [**Sim62**] dio una prueba algebraica del Teorema 1.6, la cual elude la clasificación de Berger (ver Sección 3). En 2005, C. Olmos [**Olm05a**] dio una demostración geométrica del teorema de Berger, dicha demostración utiliza herramientas de la geometría de subvariedades y la llamada holonomía normal.

$\mathrm{Hol}(M)$	$\dim M$	Nombre	Einstein	Ricci-flat
$\mathrm{SO}(n)$	n	variedad genérica orientable	-	-
$\mathrm{U}(n)$	$2n$	Kähler	-	-
$\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(n)$	$4n$	cuaterniónico-Kähler	Sí	-
$\mathrm{SU}(n)$	$2n$	Calabi-Yau	Sí	Sí
$\mathrm{Sp}(n)$	$4n$	hiper-Kähler	Sí	Sí
$\mathrm{Spin}(7)$	8	variedad $\mathrm{Spin}(7)$	Sí	Sí
G_2	7	variedad G_2	Sí	Sí

Cuadro 1.1. Grupos de holonomía de espacios no-localmente simétricos.

1.4. Espacios simétricos y s-representaciones. Una de las familias más bellas e importantes de variedades riemannianas es la de los llamados espacios simétricos, en los cuales la simetría geodésica en cada punto se extiende a una isometría global (y por ende resultan homogéneos). Estos espacios se caracterizan localmente por tener el tensor de curvatura paralelo. Una presentación que usaremos a menudo es la dada por las transvecciones infinitesimales. Más precisamente, sea M un espacio simétrico y sea $\mathscr{K}(M)$ el álgebra de Lie de campos de Killing en M, la cual se identifica naturalmente con el álgebra de Lie del grupo isometrías $\mathrm{Iso}(M)$ de M. Dado $p \in M$, existen dos subespacios distinguidos en $\mathscr{K}(M)$:

$$\mathfrak{p}^p = \{X \in \mathscr{K}(M) : (\nabla X)_p = 0\} \qquad \text{y} \qquad \mathfrak{k}^p = \{[X, Y] : X, Y \in \mathfrak{p}^p\}.$$

Como $\mathfrak{k}^p$ está en el álgebra de isotropía $\mathscr{K}_p(M) = \{X \in \mathscr{K}(M) : X_p = 0\}$ de M, se tiene que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}^p \oplus \mathfrak{p}^p$ es un álgebra de Lie involutiva, es decir,

$$[\mathfrak{k}^p, \mathfrak{k}^p] \subset \mathfrak{k}^p, \qquad [\mathfrak{p}^p, \mathfrak{p}^p] \subset \mathfrak{k}^p, \qquad [\mathfrak{k}^p, \mathfrak{p}^p] \subset \mathfrak{p}^p.$$

Se tiene que $\mathfrak{g} \subset \mathscr{K}(M)$ es independiente del punto $p \in M$, razón por la cual hemos omitido el supraíndice en la notación. Más aún, si M es un espacio *simétrico semisimple* (i.e., sin factor plano) entonces $\mathfrak{g} = \mathscr{K}(M)$. Los elementos de $\mathfrak{p}^p$ suelen llamarse *transvecciones infinitesimales* en p y el subgrupo de Lie $G \subset \mathrm{Iso}(M)$ asociado a $\mathfrak{g}$ se dice el *grupo de transvecciones (geométricas)* de M. Al ser M geodésicamente completo, se tiene que G es transitivo en M, pues las curvas integrales de elementos en $\mathfrak{p}^p$ son geodésicas por p.

Otra forma de presentar un espacio simétrico es mediante los llamados pares simétricos. Sea G un grupo de Lie conexo y σ un automorfismo involutivo de G (i.e., $\sigma^2 = \mathrm{Id}$). Denotemos por $G^\sigma \subset G$ el conjunto de puntos fijos de σ y por $(G^\sigma)_0$ la componente conexa de G^σ por $e \in G$. Consideramos un subgrupo cerrado K de G con $(G^\sigma)_0 \subset K \subset G^\sigma$. Notemos que la diferencial σ_* de σ en la identidad es un automorfismo involutivo del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G. Sean

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} : \sigma_*(X) = X\} \qquad \text{y} \qquad \mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} : \sigma_*(X) = -X\}.$$

Claramente $\mathfrak{k}$ es el álgebra de Lie de K, además $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ es un álgebra de Lie involutiva. Esta descomposición se llama descomposición de Cartan de $\mathfrak{g}$ con respecto a σ_*. Si $\mathrm{Ad}_G(K)$ es un subgrupo compacto de $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ y $\mathfrak{p}$ está equipado con un producto escalar $\mathrm{Ad}_G(K)$-invariante, entonces (G, K) se dice un *par simétrico riemanniano*. En este caso, la métrica G-invariante en $M = G/K$ definida por el producto interno $\mathrm{Ad}_G(K)$-invariante en $\mathfrak{p} \simeq T_{eK}M$ hace de M un espacio simétrico.

Recíprocamente, sean M un espacio simétrico y $G = \mathrm{Iso}_0(M)$ la componente conexa de la identidad del grupo de isometrías de M. Dados $p \in M$ y K el subgrupo de isotropía en p, la simetría geodésica s_p determina un automorfismo involutivo de G, definido por $\sigma(g) = s_p \circ g \circ s_p$, con $(G^\sigma)_0 \subset K \subset G^\sigma$. El par (G, K) resulta un par simétrico riemanniano.

Se tiene entonces que hay una correspondencia biyectiva entre espacios simétricos M y pares simétricos riemannianos efectivos (G, K) (es decir, $\mathfrak{k}$ no contiene ideales no triviales de $\mathfrak{g}$). Notar que el grupo de transvecciones de M podría estar propiamente contenido en G, si M tiene factor plano.

Sea $M = G/K$ un espacio simétrico semisimple (presentado como par simétrico, o equivalentemente, por su grupo de transvecciones geométricas) con descomposición de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. Supongamos que K es el subgrupo de isotropía de $p \in M$. Un *k-flat* en M es una subvariedad totalmente geodésica y plana de dimensión k. Un k-flat por p se obtiene a partir de un subespacio abeliano $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ vía la exponencial geométrica $\exp_p : \mathfrak{p} \to M$, en donde identificamos T_pM con $\mathfrak{p}$ de la manera usual. El *rango* del espacio simétrico M es la dimensión de un k-flat maximal, o equivalentemente la dimensión de una subálgebra abeliana maximal de $\mathfrak{p}$. Recordemos que toda geodésica de M está contenida en un r-flat, en donde r es el rango de M.

La representación isotrópica de K en $\mathbb{V} = T_pM$, en donde K se identifica con un subgrupo de $\mathrm{SO}(\mathbb{V})$ tomando las diferenciales en p de los elementos de K, es lo que se llama una *s-representación*. Se tiene que las órbitas de K en $\mathbb{V}$ son *polares*, es decir, existe un subespacio afín $\Sigma \subset \mathbb{V}$, llamado una sección, que intersecta perpendicularmente cada órbita $K \cdot v$. Más precisamente, una sección Σ se corresponde con una subálgebra abeliana maximal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$.

Un hecho bien conocido, y que necesitaremos más adelante, es el siguiente.

Lema 1.7 ([**BCO03**, pág. 192]). *Sean $\mathbb{V}$ un espacio euclídeo y K un subgrupo de Lie conexo de* $\mathrm{SO}(\mathbb{V})$. *Si K actúa en $\mathbb{V}$ como una s-representación, entonces $K = N(K)$, en donde $N(K)$ es la componente conexa del normalizador de K en* $\mathrm{SO}(\mathbb{V})$.

Observemos que si M es un espacio simétrico simple, la representación isotrópica es irreducible (i.e., la isotropía actúa irreduciblemente en el espacio tangente, pues coincide con la holonomía). En este sentido, la siguiente familia de variedades riemannianas generaliza a los espacios simétricos.

1.5. Espacios isotrópicamente irreducibles. Una variedad riemanniana homogénea $M = G/H$ se dice un espacio *(fuertemente) isotrópicamente irreducible* si (la componente conexa de) H no tiene subespacios invariantes en $T_{eH}M$. Estos espacios fueron estudiados exhaustivamente por J. Wolf en [**Wol68**] y posteriormente, en el caso general, por Wang-Ziller en [**WZ91**]. No es difícil ver, usando que H es compacto, que un espacio isotrópicamente irreducible es de Einstein. Luego si

M no es compacto, entonces es un espacio simétrico (ver [**Bes87**]). Esto restringe la atención a los espacios isotrópicamente irreducibles compactos.

Destacamos algunos resultados que nos interesan sobre estos espacios.

Teorema 1.8 (Wolf [**Wol68**]). *Sean $M = G/H$, $M' = G'/H'$ dos espacios (fuertemente) isotrópicamente irreducibles tales que M es isométrico a M'. Entonces vale alguna de las siguientes:*

1. *Existe un isomorfismo $\Psi : G \to G'$ con $\Psi(H) = H'$;*
2. *M y M' son isométricos al espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ ($n = \dim M = \dim M'$);*
3. *M y M' son isométricos a la esfera S^7 con la métrica usual y las presentaciones $S^7 = \mathrm{SO}(8)/\mathrm{SO}(7) = \mathrm{Spin}(7)/G_2$;*
4. *M y M' son isométricos a la esfera S^6 con la métrica usual y las presentaciones $S^6 = \mathrm{SO}(7)/\mathrm{SO}(6) = G_2/\mathrm{SU}(3)$.*

Se tiene que el grupo de presentación de un espacio isotrópicamente irreducible no se puede extender, salvo para esferas y grupos de Lie, a un grupo más grande de isometrías. Más precisamente, sea $M = G/H$ un espacio isotrópicamente irreducible y supongamos que M no es un espacio euclídeo. Como ya dijimos, si M es un espacio simétrico, entonces la componente conexa G_0 de G es la componente conexa del grupo total de isometrías. Si M es fuertemente isotrópicamente irreducible y $G/H \neq S^7 = \mathrm{Spin}(7)/G_2$, $G/H \neq S^6 = G_2/\mathrm{SU}(3)$, sigue de [**Wol68**] que $G_0 = \mathrm{Iso}_0(M)$. Más aún, en el caso general, sigue de [**WZ91**] que $G_0 = \mathrm{Iso}_0(M)$, excepto para los ejemplos anteriores y ciertas presentaciones de grupos de Lie compactos con métrica bi-invariante.

1.6. Espacios naturalmente reductivos. Una variedad riemanniana homogénea $M = G/H$ se dice un *espacio naturalmente reductivo* si el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G admite una descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, en donde $\mathfrak{h}$ es el álgebra de Lie de H y $\mathfrak{m}$ es un subespacio $\mathrm{Ad}(H)$-invariante tal que las geodésicas por $p = eH$ están dadas por los subgrupos monoparamétricos $\mathrm{Exp}(tX) \cdot p$, con $X \in \mathfrak{m}$. Asociada a la descomposición reductiva $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ uno tiene una conexión métrica G-invariante ∇^c, llamada la *conexión canónica*, cuyas geodésicas por p coinciden con las geodésicas riemannianas. Por ende, ∇^c es una conexión con torsión totalmente antisimétrica. Más precisamente, ∇^c se obtiene, pasando a un fibrado vectorial asociado, a partir de la conexión en el fibrado principal $H \to G \to M = G/H$, cuya distribución horizontal está determinada por el subespacio $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$. En particular, el transporte ∇^c-paralelo a lo largo de la geodésica canónica (y riemanniana) $\mathrm{Exp}(tX) \cdot p$, con $X \in \mathfrak{m}$, se realiza por la diferencial $\mathrm{Exp}(tX)_*$. (Ver [**KN69**] para más detalles.)

Un caso particular, pero de espacial importancia, es el de los *espacios normal homogéneos*, en donde el complemento reductivo se obtiene como $\mathfrak{m} = \mathfrak{h}^\perp$, el complemento ortogonal de la isotropía respecto de un producto escalar $\mathrm{Ad}(G)$-invariante en $\mathfrak{g}$ (o equivalentemente, una métrica bi-invariante en G). En este caso se tiene que $G \to M = G/H$ es una submersión riemanniana.

Obviamente, no todo espacio naturalmente reductivo es normal homogéneo (e.g. el grupo de presentación puede no admitir una métrica bi-invariante). Sin embargo, es debido a B. Kostant [**Kos56**] el siguiente resultado, el cual nos dice, rápidamente hablando, que todo espacio naturalmente reductivo puede presentarse como un espacio normal homogéneo con respecto a una métrica pseudo-riemanniana definida en un subgrupo del grupo de presentación. Más precisamente, sea $M = G/H$ un espacio naturalmente reductivo y sea $\mathrm{Tr}(M, \nabla^c) \subset G$ el subgrupo de *transvecciones* *de la conexión canónica*. Este grupo se puede definir como el subgrupo de Lie conexo de G con álgebra de Lie $\mathfrak{tr}(M, \nabla^c) = \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$. Se tiene que $G' = \mathrm{Tr}(M, \nabla^c)$ actúa transitivamente en M y que el subgrupo de isotropía $H' = \mathrm{Tr}(M, \nabla^c)_p$ en p tiene álgebra de Lie $\mathfrak{h}' = \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{h}$, en donde $\mathfrak{g}' = \mathfrak{tr}(M, \nabla^c)$. Por ende, $M = G'/H'$ es también naturalmente reductivo con descomposición reductiva $\mathfrak{g}' = \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{m}$. Manteniendo esta notación se tiene el siguiente teorema.

Teorema 1.9 (Kostant [**Kos56**]). *Existe una única forma bilineal simétrica, no-degenerada y* $\mathrm{Ad}(G')$*-invariante* Q *en* $\mathfrak{g}'$ *tal que*

$$Q(\mathfrak{h}', \mathfrak{m}) = 0 \qquad y \qquad Q|_{\mathfrak{m}} = \langle \cdot, \cdot \rangle,$$

en donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *se identifica con la métrica riemanniana en* $T_pM \simeq \mathfrak{m}$ *de la manera usual. En particular* $Q|_{\mathfrak{h}}$ *es no degenerada.*

Recíprocamente, supongamos que $M = G'/H'$ *es una variedad homogénea y* $\mathfrak{g}'$ *admite una forma bilineal simétrica no-degenerada y* $\mathrm{Ad}(G')$*-invariante* Q*, tal que la restricción de* Q *a* $\mathfrak{m} = (\mathfrak{h}')^{\perp}$ *es definida positiva. Entonces* M*, con la métrica* G'*-invariante inducida por* $Q|_{\mathfrak{m}}$*, es un espacio naturalmente reductivo con respecto a dicha descomposición.*

Notemos que la métrica de un espacio isotrópicamente irreducible compacto $M = G/H$ debe ser naturalmente reductiva (más aún, es normal homogénea). Así, la familia de espacios naturalmente reductivos es una generalización de los espacios simétricos, la cual incluye a la familia de los espacios isotrópicamente irreducibles.

Los espacios naturalmente reductivos también generalizan a los espacios simétricos en el siguiente sentido. Si $M = G/K$ es un espacio simétrico con descomposición de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, entonces M es naturalmente reductivo con respecto a esta descomposición, tomando $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$.

Finalmente, observemos que Tricerri-Vanhecke [**TV83**] caracterizaron a los espacios naturalmente reductivos en términos de estructuras homogéneas. Más precisamente, un espacio homogéneo es un espacio naturalmente reductivo si y sólo si admite una estructura homogénea D tal que $D_x x = 0$ para todo x (ver Teorema 1.2). En este caso, D suele llamarse una *estructura homogénea naturalmente reductiva* o una *estructura homogénea de clase* $\mathscr{T}_3$.

2. Geometría de subvariedades

Aunque muchos de los resultados que se obtienen en esta tesis conciernen a problemas de geometría intrínseca (tanto local como global), los métodos que utilizamos para resolverlos frecuentemente nos llevan al campo de la geometría extrínseca o geometría de subvariedades, evidenciando una vez más el estrecho vínculo entre estas dos áreas (a través de llamada holonomía normal).

A continuación nos referimos brevemente, y para su uso posterior, a algunos resultados importantes de la geometría de subvariedades del espacio euclídeo.

Sea M^n una subvariedad de $\mathbb{R}^{n+k}$ con la métrica inducida. El *fibrado normal* de M se define como

$$\nu M = \bigcup_{p \in M} (T_pM)^{\perp}$$

La fibra por $p \in M$ se denota por $\nu_p M = (T_pM)^{\perp}$ y es el espacio normal a M en p. La conexión de Levi-Civita ∇ de M se obtiene como

$$\nabla_X Y = (\nabla^E_X Y)^{\top}, \qquad X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

en donde ∇^E es la conexión de Levi-Civita del espacio euclídeo $\mathbb{R}^{n+k}$ y el supraíndice $\top$ significa tomar la componente tangencial a M. También se tiene la llamada *conexión normal* $\nabla^\perp$ de M, la cual es una conexión métrica en el fibrado vectorial $\nu M \to M$ y se define de la siguiente manera. Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\xi \in \Gamma(\nu M)$ es una sección del fibrado normal (i.e., un un campo siempre perpendicular M), entonces

$$\nabla^\perp_X \xi = (\nabla^E_X \xi)^\perp.$$

La *curvatura normal* se define por

$$R^\perp_{X,Y}\xi = \nabla^\perp_X \nabla^\perp_Y \xi - \nabla^\perp_Y \nabla^\perp_X \xi - \nabla^\perp_{[X,Y]}\xi$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\xi \in \Gamma(\nu M)$. Análogamente se definen el transporte paralelo normal a lo largo de una curva $c : [0,1] \to M$ y los grupos de holonomía normal $\mathrm{Hol}(\nabla^\perp)$ y de holonomía normal restricta $\mathrm{Hol}^*(\nabla^\perp)$ (asumimos que M es conexa). En este caso también vale teorema de Ambrose-Singer, es decir, el álgebra de Lie de la holonomía normal $\mathfrak{hol}(\nabla^\perp)$ se recupera a partir del tensor de curvatura normal.

Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, ponemos

$$\nabla^E_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X,Y)$$

en donde $\alpha(X,Y) = (\nabla^E_X Y)^\perp$ es la llamada *segunda forma fundamental* de M. Dados $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\xi \in \Gamma(\nu M)$ ponemos

$$\nabla^E_X \xi = \nabla^\perp_X \xi - A_\xi X$$

en donde $A_\xi X = -(\nabla^E_X \xi)^\top$ es el llamado *operador de forma*. Tanto la segunda forma fundamental como el operador de forma son tensoriales y están relacionados por

$$\langle \alpha(X,Y), \xi \rangle = \langle A_\xi X, Y \rangle.$$

Se tiene que la segunda forma fundamental es simétrica, o, equivalentemente, los operadores A_ξ son simétricos y, en particular, diagonalizan en una base ortonormal. La curvatura normal se puede obtener a partir del operador de forma, usando la llamada ecuación de Ricci, que en nuestro caso tiene la forma

$$\langle R^\perp_{X,Y}\xi, \eta \rangle = \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y \rangle$$

en donde $[A_\xi, A_\eta] = A_\xi A_\eta - A_\eta A_\xi$.

Se tiene que M es una subvariedad totalmente geodésica si y sólo si la segunda forma fundamental se anula idénticamente (o equivalentemente, todos los operadores de forma se anulan).

Decimos que M es *totalmente umbílica* si todos los operadores de forma son un múltiplo de la identidad. Es decir, $A_\xi = \lambda(\xi)\,\mathrm{Id}$. En particular, todos los operadores de forma conmutan. Como λ es lineal en ξ, existe una sección $\eta \in \Gamma(\nu M)$ tal que $\lambda(\xi) = \langle \eta, \xi \rangle$. Un tal η se dice un normal de curvatura de M.

Más generalmente, decimos que M tiene *fibrado normal plano* si el tensor de curvatura normal es idénticamente nulo, $R^\perp = 0$, lo cual es equivalente, por la identidad de Ricci, a que la familia de operadores A_ξ, con $\xi \in \nu_p M$, sea conmutativa, y por ende simultáneamente diagonalizable (para cada $p \in M$). Luego, dado $p \in M$, uno puede descomponer ortogonalmente

$$T_p M = E_0(p) \oplus E_1(p) \oplus \cdots \oplus E_g(p)$$

en autoespacios de los operadores de forma. Así, para cada $\xi \in \nu_p M$, $A_\xi(v_i) = \lambda_i(\xi) v_i$ si $v_i \in E_i(p)$, para $i = 0, 1, \ldots, g$ y $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$. Aquí, $E_0(p)$ corresponde al autovalor cero y podría ser trivial. Análogamente al caso umbílico, se tiene que λ_i es lineal en ξ y por ende existe un único $\eta_i(p) \in \nu_p M$ tal que $\lambda_i(\xi) = \langle \eta_i(p), \xi \rangle$. Los vectores normales $\eta_1(p), \ldots, \eta_g(p)$ (y eventualmente $\eta_0(p) = 0$ si $E_0(p) \neq \{0\}$) se llaman *normales de curvatura* en p, y $E_1(p), \ldots, E_g(p)$ (y eventualmente $E_0(p)$ si es no trivial) se dicen las autodistribuciones en p. Se tiene que en un abierto denso $U \subset M$ la cantidad de normales de curvatura es localmente constante. Las distribuciones E_i son C^∞ en U para todo $i = 0, 1, \ldots, g$. Más aún, E_i es integrable en U y sus subvariedades integrales son subvariedades totalmente umbílicas del espacio ambiente (de hecho, las subvariedades integrales de E_0 son totalmente geodésicas en el espacio ambiente).

2.1. Subvariedades isoparamétricas del espacio euclídeo. Una subvariedad M^n de $\mathbb{R}^{n+k}$ se dice *isoparamétrica* si M tiene fibrado normal plano y para cada campo normal paralelo ξ, el operador de forma A_ξ tiene autovalores constantes (con multiplicidades constantes).

El siguiente teorema nos dice que toda subvariedad isoparamétrica homogénea es una órbita de la representación isotrópica de un espacio simétrico. También mencionamos que, recíprocamente, si M es una órbita principal de una s-representación, dicha órbita debe ser polar, por [**PT87**]. Luego, por un resultado de Palais-Terng [**PT88**], se tiene que M es isoparamétrica. Las órbitas de s-representaciones juegan un papel muy importante en la geometría de subvariedades (similar al que juegan los espacios simétricos en la geometría riemanniana). La definición precisa de *órbita principal* se puede consultar en el Apéndice.

TEOREMA 1.10 (ver [**BCO03**, pág. 162]). *Sea M^n una subvariedad isoparamétrica de $\mathbb{R}^{n+k}$. Si M es extrínsecamente homogénea (i.e., M es la órbita de un subgrupo de isometrías del espacio ambiente), entonces M es una órbita principal de una s-representación.*

Recordemos que una subvariedad M^n de $\mathbb{R}^{n+k}$ se dice *substancial*[1] si no está contenida en ningún subespacio afín de $\mathbb{R}^{n+k}$. En el caso de rango alto se tiene el siguiente resultado, el cual no asume, a priori, homogeneidad. (La noción de rango de una subvariedad se puede consultar en [**BCO03**, pág. 178].)

TEOREMA 1.11 (Thorbergsson [**Tho91, Olm93**]). *Sea M^n es una subvariedad substancial e irreducible de $\mathbb{R}^{n+k}$ de rango al menos 3, entonces M es una órbita de una s-representación.*

3. Tensores algebraicos de curvatura y el teorema de Simons

Sea $\mathbb{V}$ un espacio euclídeo, es decir un espacio vectorial real con producto interno. Un *tensor algebraico de curvatura* R en $\mathbb{V}$ es una aplicación $R : \mathbb{V}\times\mathbb{V}\times\mathbb{V} \to \mathbb{V}$, denotada $(u, v, w) \mapsto R_{u,v}w$, que es lineal en cada variable (fijadas las otras dos) y satisface las identidades algebraicas del tensor de curvatura riemanniano (es decir, todas las identidades mencionadas al principio de este capítulo, excepto la segunda identidad de Bianchi). En particular, se tiene que $R_{u,v} \in \mathfrak{so}(\mathbb{V})$ para todos $u, v \in \mathbb{V}$. El conjunto $\mathscr{R}$, de todos tensores algebraicos de curvatura en $\mathbb{V}$, es un subespacio del espacio de tensores algebraicos de tipo $(1, 3)$ en $\mathbb{V}$. Observemos que si $g \in \mathrm{SO}(\mathbb{V})$

[1] En inglés, *full*.

y R es un tensor algebraico de curvatura, uno puede construir un nuevo tensor algebraico de curvatura $g(R) \in \mathscr{R}$ definiendo

$$g(R)_{u,v} = g \circ R_{g^{-1}(u),g^{-1}(v)} \circ g^{-1}.$$

También podemos derivar el tensor algebraico de curvatura R con respecto a $X \in \mathfrak{so}(\mathbb{V})$ y obtener un nuevo tensor algebraico de curvatura $X \cdot R \in \mathscr{R}$, el cual se define como

$$(X \cdot R)_{u,v} = [X, R_{u,v}] - R_{Xu,v} - R_{u,Xv}.$$

Observemos que se verifica

$$X \cdot R = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \operatorname{Exp}(tX)(R).$$

Las curvaturas seccionales, curvatura escalar, etc., de un tensor algebraico de curvatura R se definen de la misma manera que para el tensor de curvatura riemanniano. Es un hecho bien conocido que $R = 0$ si y sólo si todas sus curvaturas seccionales son nulas.

Un *sistema holonómico* es un triple $[\mathbb{V}, R, G]$ en donde $\mathbb{V}$ es un espacio euclídeo, G es un subgrupo de Lie conexo de $\mathrm{SO}(\mathbb{V})$ y R es un tensor algebraico de curvatura que toma valores en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G. Es decir $R_{u,v} \in \mathfrak{g}$ para todos $u, v \in \mathbb{V}$. Un sistema holonómico $[\mathbb{V}, R, G]$ se dice:

- *irreducible* si G actúa irreduciblemente en $\mathbb{V}$;
- *transitivo* si G actúa transitivamente en la esfera de $\mathbb{V}$;
- *simétrico* si $g(R) = R$ para todo $g \in G$, o equivalentemente, si $X \cdot R = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$.

El siguiente resultado es conocido como el teorema de holonomía de Simons.

TEOREMA 1.12 (Simons [**Sim62**]). *Un sistema holonómico irreducible y no-transitivo debe ser simétrico.*

Los sistemas holonómicos fueron introducidos por J. Simons [**Sim62**] en 1962 para dar una demostración algebraica del teorema de Berger que elude la clasificación de M. Berger [**Ber55**].[2] En 2005, C. Olmos [**Olm05b**] también dio una prueba del teorema de holonomía de Simons usando argumentos puramente geométricos.

Un último resultado que quisiéramos destacar para su uso posterior es el siguiente.

LEMA 1.13 ([**Sim62, Olm05b**]). *Supongamos que $[\mathbb{V}, R, G]$ es un sistema holonómico irreducible y simétrico, con $R \neq 0$. Entonces G actúa en $\mathbb{V}$ como una s-representación. Más aún, si $[\mathbb{V}, R', G]$ es otro sistema holonómico irreducible y simétrico, entonces $R' = \lambda R$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.*

[2] De hecho, la definición de los sistemas holonómicos está motivada por la siguiente observación. Si M es una variedad riemanniana conexa y R es el tensor de curvatura riemanniano evaluado en $p \in M$, entonces $[T_pM, R, \mathrm{Hol}^*(M)]$ es un sistema holonómico (por el teorema de Ambrose-Singer).

Capítulo 2

El skew-torsion holonomy theorem

En este capítulo definimos los llamados skew-torsion holonomy systems y desarrollamos cierta teoría general. Estos objetos algebraicos son una variación de los llamados sistemas holonómicos definidos por J. Simons [**Sim62**] (ver Sección 3 del Capítulo 1), considerando, en lugar de tensores algebraicos de curvatura, 1-formas con valores en un álgebra de Lie ortogonal, y aparecen de manera muy natural un contexto geométrico (ver Capítulos 3 y 4).

El principal resultado de este capítulo es el Teorema 2.10 y es uno de los llamados teoremas tipo-Berger, análogo al teorema de holonomía de Simons. De hecho, este resultado es, en realidad, más fuerte que el teorema de Simons (en el cual hay muchos casos transitivos, ver Cuadro 1.1), y fue probado independientemente por P.-A. Nagy en [**Nag07**]. También Agricola-Friedrich [**AF04**] dieron una demostración parcial en la cual excluyen casi todos los casos transitivos excepto uno. La prueba de Nagy es algebraica y utiliza las llamadas álgebras de Berger. Nuestra demostración es puramente geométrica y utiliza herramientas de la geometría de subvariedades. Alternativamente, también analizamos el caso cuaterniónico-Kähler, que faltaba cubrir en [**AF04**], y mostramos cómo, con argumentos similares, puede excluirse también (ver Nota 2.13).

La referencia principal para este capítulo es el artículo [**OR12a**].

1. 1-formas totalmente antisimétricas

Sea $\mathbb{V}$ un espacio euclídeo, es decir un espacio vectorial real con producto interno, y sea G un subgrupo de Lie conexo de $\mathrm{SO}(\mathbb{V})$. Denotemos por $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de G. Un *skew-torsion holonomy system* es un triple $[\mathbb{V}, \Theta, G]$ en donde Θ es una 1-forma totalmente antisimétrica en $\mathbb{V}$ que toma valores en $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(\mathbb{V})$. Más precisamente, $\Theta : \mathbb{V} \to \mathfrak{g}$, $u \mapsto \Theta_u$, es lineal y tal que $(u, v, w) \mapsto \langle \Theta_u v, w \rangle$ es una 3-forma algebraica en $\mathbb{V}$, es decir, antisimétrica en todas las variables. Un skew-torsion holonomy system $[\mathbb{V}, \Theta, G]$ se dice:

- *irreducible* si G actúa irreduciblemente en $\mathbb{V}$;
- *transitivo* si G actúa transitivamente en la esfera de $\mathbb{V}$;
- *simétrico* si $g(\Theta) = \Theta$ para todo $g \in G$, en donde $g(\Theta)_u = g \circ \Theta_{g^{-1}(u)} \circ g^{-1}$.

Observar que la condición de simetría resulta equivalente a que $X \cdot \Theta = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$, en donde $(X \cdot \Theta)_u = [X, \Theta_u] - \Theta_{Xu}$ es la derivada de la curva de 1-formas $\mathrm{Exp}(tX)(\Theta)_u$ en $t = 0$.

Sea $[\mathbb{V}, \Theta^\alpha, G]$, con $\alpha \in I$, una familia de skew-torsion holonomy systems y sea

$$\mathscr{F} = \{g(\Theta^\alpha) : g \in G,\ \alpha \in I\}.$$

Sea $\mathfrak{g}^{\mathscr{F}}$ el subespacio lineal de $\mathfrak{g}$ generado por $\{\Theta_u : \Theta \in \mathscr{F},\ u \in \mathbb{V}\}$. Entonces se tiene que $\mathfrak{g}^{\mathscr{F}}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$. En efecto, la familia $\mathscr{F}$ es $\mathrm{Ad}(G)$-invariante, lo cual implica que $\mathfrak{g}^{\mathscr{F}}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$ (notar que $\mathfrak{g}^{\mathscr{F}}$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ pues las 1-formas Θ^α toman valores en $\mathfrak{g}$). Sea $G^{\mathscr{F}}$ el subgrupo de Lie conexo de G con álgebra de Lie $\mathfrak{g}^{\mathscr{F}}$. Descomponemos ortogonalmente

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}_0 \oplus \mathbb{V}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{V}_k$$

en donde $\mathbb{V}_0$ es el conjunto de puntos fijos de $G^{\mathscr{F}}$ y $G^{\mathscr{F}}$ actúa irreduciblemente en $\mathbb{V}_i$ para todo $i = 1, \ldots, k$. Sea $\mathfrak{g}_i^{\mathscr{F}} = \{\Theta_{u_i} : \Theta \in \mathscr{F},\, u_i \in \mathbb{V}_i\}$ la subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$, con subgrupo de Lie conexo asociado $G_i^{\mathscr{F}} \subset G$ (cfr. [**Sim62**]). Observemos que $G_0^{\mathscr{F}} = \{e\}$, pues $\Theta_{u_0} v = -\Theta_v u_0 = 0$ para todo $u_0 \in \mathbb{V}_0$, $v \in \mathbb{V}$.

LEMA 2.1 (Ver [**AF04**, Section 4]). *Siguiendo la notación anterior se tiene que:*

1. $G^{\mathscr{F}} = G_1^{\mathscr{F}} \times \cdots \times G_k^{\mathscr{F}}$ *y* $G_i^{\mathscr{F}}$ *actúa irreduciblemente en* $\mathbb{V}_i$ *y trivialmente en* $\mathbb{V}_j$ *para todo* $0 \neq i \neq j$.
2. *La descomposición* $\mathbb{V} = \mathbb{V}_0 \oplus \mathbb{V}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{V}_k$ *es única salvo el orden de los sumandos.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\Theta \in \mathscr{F}$, $u_i \in \mathbb{V}_i$ y $u_j \in \mathbb{V}_j$, con $i \neq j$. Entonces $\Theta_{u_i} u_j \in \mathbb{V}_j$, pero además $\Theta_{u_i} u_j = -\Theta_{u_j} u_i \in \mathbb{V}_i$. Luego $\Theta_{u_i} u_j \in \mathbb{V}_i \cap \mathbb{V}_j = \{0\}$, lo cual implica que $G_i^{\mathscr{F}}$ actúa sólo en $\mathbb{V}_i$. Por otro lado, si $v = v_0 + v_1 + \cdots + v_k$, con $v_j \in \mathbb{V}_j$, entonces la observación que acabamos de hacer implica que $\Theta_v = \Theta_{v_1} + \cdots + \Theta_{v_k}$, en donde $\Theta_{v_i} \in \mathfrak{so}(\mathbb{V}_i)$. De aquí sigue que la acción de $G_i^{\mathscr{F}}$ en $\mathbb{V}$ es irreducible, pues $G^{\mathscr{F}}$ actúa irreduciblemente en $\mathbb{V}_i$, lo cual prueba la primera parte del lema. La segunda parte sigue de la misma construcción de los subespacios $\mathbb{V}_j$ $(j = 0, \ldots, k)$. □

LEMA 2.2 (Ver [**AF04**, Section 4]). *Sea* $\mathscr{C}_i(\mathfrak{g}_i^{\mathscr{F}}) = \{B \in \mathfrak{so}(\mathbb{V}_i) : [B, \mathfrak{g}_i^{\mathscr{F}}] = 0\}$. *Entonces* $\mathscr{C}_i(\mathfrak{g}_i^{\mathscr{F}}) = \{0\}$. *En particular,* $\mathfrak{g}_i^{\mathscr{F}}$ *es semisimple.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $B \in \mathfrak{so}(\mathbb{V}_i)$. Observemos que $\ker B$ es $G_i^{\mathscr{F}}$-invariante. Luego, como $G_i^{\mathscr{F}}$ actúa irreduciblemente en $\mathbb{V}_i$, sigue que $\ker B = \{0\}$ o $\ker B = \mathbb{V}_i$. Por tanto, si asumimos que $B \neq 0$, tenemos que B es invertible. Sean $\Theta \in \mathscr{F}$, $u, v, w \in \mathbb{V}_i$. Entonces

$$\begin{aligned} \langle \Theta_u B v, w \rangle &= \langle B \Theta_u v, w \rangle = -\langle B \Theta_v u, w \rangle \\ &= -\langle \Theta_v B u, w \rangle = \langle \Theta_{Bu} v, w \rangle. \end{aligned}$$

Luego $\langle \Theta_u B v, w \rangle = \langle \Theta_{Bu} v, w \rangle$. Intercambiando u con w se obtiene además que

$$\langle \Theta_u B v, w \rangle = -\langle \Theta_w B v, u \rangle = -\langle \Theta_{Bw} v, u \rangle = \langle \Theta_u v, B w \rangle.$$

pero como B es antisimétrica,

$$\langle \Theta_u v, B w \rangle = -\langle B \Theta_u v, w \rangle = -\langle \Theta_u B v, w \rangle,$$

de donde sigue $\Theta_u B v = -\Theta_u B v$. Por tanto, $\Theta = 0$ para toda $\Theta \in \mathscr{F}$, una contradicción. Así $B = 0$, lo cual concluye la prueba del lema. □

PROPOSICIÓN 2.3. *Se tiene que* $G = G_0 \times G^{\mathscr{F}} = G_0 \times G_1^{\mathscr{F}} \times \cdots \times G_k^{\mathscr{F}}$, *en donde* G_0 *actúa en* $\mathbb{V}_0$ *y trivialmente en* $(\mathbb{V}_0)^\perp$ *(notar que* G_0 *puede ser arbitrario).*

DEMOSTRACIÓN. Como $\mathfrak{g}^{\mathscr{F}}$ es G-invariante, sigue que $\mathfrak{g}^{\mathscr{F}}|_{(\mathbb{V}_0)^\perp}$ es un ideal de $\mathfrak{g}|_{(\mathbb{V}_0)^\perp}$. Luego, usando el lema anterior tenemos que $\mathfrak{g}^{\mathscr{F}}|_{(\mathbb{V}_0)^\perp} = \mathfrak{g}|_{(\mathbb{V}_0)^\perp}$. En efecto, si B pertenece al ideal complementario de $\mathfrak{g}^{\mathscr{F}}|_{(\mathbb{V}_0)^\perp}$ en $\mathfrak{g}|_{(\mathbb{V}_0)^\perp}$, entonces $B \in \mathscr{C}(\mathfrak{g}^{\mathscr{F}}|_{(\mathbb{V}_0)^\perp})$ y por consiguiente $B = 0$. De aquí sigue la proposición, pues $\mathfrak{g}^{\mathscr{F}}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$. □

Consideremos ahora un skew-torsion holonomy system $[\mathbb{V}, \Theta, G]$ irreducible y sea $\nu_v(G \cdot v)$ el espacio normal en v a la órbita $G \cdot v$. Digamos,

$$\nu_v(G \cdot v) = \{\xi \in \mathbb{V} : \langle \xi, \mathfrak{g} \cdot v\rangle = 0\}.$$

Se tiene, al igual que para sistemas holonómicos [**Olm05b**, Proposition 3.1], que $\mathbb{W} = \nu_v(G \cdot v)$ es un subespacio Θ-invariante, es decir $\Theta_{\mathbb{W}}\mathbb{W} \subset \mathbb{W}$. En efecto, si $\xi \in \mathbb{W}$ y $u \in \mathbb{V}$ entonces

$$0 = \langle \Theta_u v, \xi\rangle = -\langle \Theta_\xi v, u\rangle$$

y por lo tanto $\Theta_\xi v = 0$. Luego, $\Theta_\xi \in \mathfrak{g}_v$, el álgebra de Lie del subgrupo de isotropía G_v de v. Como G_v deja invariante el espacio normal $\mathbb{W}$ a $G \cdot v$ en v, se tiene que $\mathbb{W}$ es Θ-invariante.

La demostración que se da en [**Olm05b**] para el teorema de holonomía de Simons, se puede adaptar para probar el siguiente teorema de holonomía para skew-torsion holonomy systems. De hecho, la prueba resulta un poco más sencilla, pues hay menos variables involucradas.

TEOREMA 2.4 (Weak skew-torsion holonomy theorem). *Sea* $[\mathbb{V}, \Theta, G]$, $\Theta \neq 0$, *un skew-torsion holonomy system irreducible y no-transitivo. Entonces* $[\mathbb{V}, \Theta, G]$ *es simétrico.*

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar observemos que, dado $v \in \mathbb{V}$, la restricción Θ^v de Θ al espacio normal $\nu_v(G\cdot v)$ es invariante por el grupo de holonomía normal $\mathrm{Hol}(\nabla^\perp)$ de $G \cdot v$ en v, es decir $g(\Theta^v) = \Theta^v$ para todo $g \in \mathrm{Hol}(\nabla^\perp)$. En efecto, sea $c(t)$ una curva suave a trozos en $G \cdot v$ y sea $\tau_t^\perp$ el transporte paralelo normal, es decir asociado a la conexión normal de la órbita $G \cdot v$, a lo largo de $c(t)$. Sean $\xi_i \in \nu_v(G \cdot v)$, $i = 1, 2, 3$. Como Θ es constante en $\mathbb{V}$, tiene derivada covariante euclídea nula, $\nabla\Theta = 0$. Luego, si $\xi_i(t) = \tau_t^\perp(\xi)$, entonces

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt}\langle \Theta_{\xi_1(t)}\xi_2(t), \xi_3(t)\rangle &- \langle \Theta_{\frac{d}{dt}\xi_1(t)}\xi_2(t), \xi_3(t)\rangle \\ &- \langle \Theta_{\xi_1(t)}\tfrac{d}{dt}\xi_2(t), \xi_3(t)\rangle - \langle \Theta_{\xi_1(t)}\xi_2(t), \tfrac{d}{dt}\xi_3(t)\rangle. \end{aligned}$$

Pero, al ser $\xi_i(t)$ paralelo respecto a la conexión normal, $\frac{d}{dt}\xi_i(t)$ es tangente a la órbita $G \cdot v$ en $c(t)$. Luego, por el comentario previo al teorema y usando que Θ es totalmente antisimétrica, sigue que

$$\frac{d}{dt}\langle \Theta_{\xi_1(t)}\xi_2(t), \xi_3(t)\rangle = 0,$$

lo cual implica, tomando curvas cerradas por v, que $g(\Theta^v) = \Theta^v$ para todo $g \in \mathrm{Hol}(\nabla^\perp)$.

Supongamos que $v \in \mathbb{V}$ es un vector principal. Por [**Olm05a**, Lemma 2.2] sabemos que existe un vector $\xi \in \nu_v(G \cdot v)$, el cual no es un múltiplo de v, tal que la familia de espacios normales

$$\mathbb{W}_t = \nu_{\gamma(t)}(G \cdot \gamma(t))$$

genera $\mathbb{V}$, en donde $\gamma(t) = v + t\xi$. Más aún, se tiene que $v \in \mathbb{W}_t$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Sea $X \in \mathfrak{g}$, el cual identificamos con el campo de Killing de $\mathbb{V}$ dado por

$$q \mapsto \frac{d}{dt}\,\mathrm{Exp}(tX) \cdot q.$$

Es un hecho bien conocido que, dado un subespacio $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$, la proyección ortogonal a $\mathbb{W}$ de la restricción $X|_{\mathbb{W}}$ es un campo de Killing de $\mathbb{W}$. Más aún, en [**Olm05b**] (ver también [**OS95**]) se prueba que la proyección ortogonal de la restricción de X al espacio normal afín $v + \nu_v(G \cdot v)$ pertenece al álgebra de Lie del grupo de holonomía normal $\mathrm{Hol}(\nabla^\perp)$.

Luego, si denotamos por X^t la proyección ortogonal de la restricción de X a $\mathbb{W}_t$ y por Θ^t la restricción de Θ a $\mathbb{W}_t$, se tiene que $X^t \cdot \Theta^t = 0$. Es claro que $X^t \cdot \Theta^t = (X \cdot \Theta)^t$ es la restricción de la 1-forma totalmente antisimétrica $X \cdot \Theta$ a $\mathbb{W}_t$. Como $v \in \mathbb{W}_t$ para todo t, tenemos que $(X \cdot \Theta)_v|_{\mathbb{W}_t}$ y por consiguiente $(X \cdot \Theta)_v = 0$, pues los subespacios $\mathbb{W}_t$ generan $\mathbb{V}$. Como el conjunto de vectores principales es denso en $\mathbb{V}$, se tiene que $X \cdot \Theta = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$, lo cual implica que $[\mathbb{V}, \Theta, G]$ es simétrico. $\square$

Proposición 2.5. *Sea $[\mathbb{V}, \Theta, G]$, $\Theta \neq 0$, un skew-torsion holonomy system irreducible y simétrico. Entonces:*

1. *$G = G^{\mathscr{F}}$, es decir el span lineal de $\{g(\Theta)_u : g \in G,\, u \in \mathbb{V}\}$ coincide con el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G (aquí la familia $\mathscr{F} = \{g(\Theta) : g \in G\}$ está generada por una única 1-forma);*
2. *$(\mathbb{V}, [\cdot,\cdot])$ es un álgebra de Lie (ortogonal) simple con respecto al corchete $[u, v] = \Theta_u v$;*
3. *$G = \mathrm{Ad}(H)$, en donde H es el grupo de Lie conexo asociado a $(\mathbb{V}, [\cdot,\cdot])$;*
4. *Θ es única, salvo múltiplos escalares.*

Demostración. El ítem 1 sigue de la Proposición 2.3 pues G actúa irreduciblemente en $\mathbb{V}$. Si $B \in \mathfrak{g}$, entonces $B \cdot \Theta = 0$, pues $[\mathbb{V}, \Theta, G]$ es simétrico. Luego

$$0 = (B \cdot \Theta)_u v = B\Theta_u v - \Theta_u B v - \Theta_{Bu} v. \tag{2.1}$$

Tomando $B = \Theta_w$ sigue la identidad de Jacobi, lo cual implica que $(\mathbb{V}, [\cdot,\cdot])$ es un álgebra de Lie. Usando esto y el ítem 1, sigue el ítem 3. Ahora, usando nuevamente que G actúa irreduciblemente en $\mathbb{V}$, se tiene que $(\mathbb{V}, [\cdot,\cdot])$ es simple, lo cual completa la prueba del ítem 2. En efecto, un subespacio $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ tal que $\Theta_u \mathbb{W} \subset \mathbb{W}$ para todo $u \in \mathbb{V}$ resulta un subespacio G-invariante.

Para probar el ítem 4 usamos el hecho de que $(\mathbb{V}, [\cdot,\cdot])$ es un álgebra de Lie simple. En efecto, si $[\mathbb{V}, \Theta', G]$ es otro skew-torsion holonomy system simétrico, entonces Θ'_u es una derivación de $(\mathbb{V}, [\cdot,\cdot])$ para todo $u \in \mathbb{V}$. En efecto, esto sigue de la igualdad 2.1 tomando $B = \Theta'_u$. Como $(\mathbb{V}, [\cdot,\cdot])$ es simple, toda derivación es interior, y por consiguiente Θ'_u es de la forma $\Theta'_u = [\ell(u), \cdot]$, en donde $\ell : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ es lineal. Como Θ' y $[\cdot,\cdot]$ son G-invariantes, también lo es ℓ, es decir, ℓ conmuta con G. Como G actúa por isometrías en $\mathbb{V}$, entonces la parte antisimétrica ℓ_1 y la parte simétrica ℓ_2 de ℓ ambas deben conmutar con G. Usando el Lema 2.2 obtenemos que $\ell_1 = 0$. Más aún, como G actúa irreduciblemente en $\mathbb{V}$ tenemos que $\ell_2 = \lambda\,\mathrm{Id}$, para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, lo cual concluye la prueba de la proposición. $\square$

2. La 2-forma derivada con valores en un álgebra de Lie

Sea $[\mathbb{V}, \Theta, G]$, $\Theta \neq 0$, un skew-torsion holonomy system. A continuación definiremos una 2-forma Ω que toma valores en $\mathfrak{g}$ tal que $\langle \Omega_{x,y} z, w\rangle$ es una 4-forma en $\mathbb{V}$. En efecto, definamos

$$\Omega_{x,y} := (\Theta_x \cdot \Theta)_y = [\Theta_x, \Theta_y] - \Theta_{\Theta_x y}.$$

Claramente se tiene que $\Omega_{x,y} \in \mathfrak{g}$ para todos $x, y \in \mathbb{V}$. Además, de la definición sigue que $\Omega_{x,y}$ es antisimétrica en x e y. Más aún, para cada x fijo, $\langle \Omega_{x,y} z, w\rangle$ es una 3-forma en las últimas tres variables, pues Θ es totalmente antisimétrica y en consecuencia, $B \cdot \Theta$ también lo es, para todo $B \in \mathfrak{so}(\mathbb{V})$. Por lo tanto $\langle \Omega_{x,y} z, w \rangle$ es una 4-forma algebraica.

NOTA 2.6. Si $v \in \mathbb{V}$ entonces $\Omega_{v,\cdot}$ es una 1-forma totalmente antisimétrica que toma valores en el álgebra de isotropía $\mathfrak{g}_v = \{B \in \mathfrak{g} : Bv = 0\}$. En efecto, como Ω es antisimétrica en todas sus variables, sigue que $\Omega_{v,\cdot} v = 0$.

LEMA 2.7. *Sea* $[\mathbb{V}, \Theta, G]$, $\Theta \neq 0$, *un skew-torsion holonomy system y sea* Σ *el conjunto de vectores fijos de* H, *en donde* H *es un subgrupo de* $N(G, \mathrm{O}(\mathbb{V}))$ *(el normalizador de* G *en el grupo ortogonal). Supongamos que la restricción a* Σ *de* $\langle \Theta.\cdot, \cdot \rangle$ *no es idénticamente nula. Sea* G^{Σ} *la componente conexa del subgrupo de* G *que deja* Σ *invariante. Entonces:*

1. *La cohomogeneidad de* G^{Σ} *en* Σ *es menor o igual que la cohomogeneidad de* G *en* $\mathbb{V}$ *(cohomogeneidad significa codimensión de una órbita principal).*
2. *Existe una* 1*-forma totalmente antisimétrica* $\Theta^{\Sigma} \neq 0$ *en* Σ, *la cual toma valores en el álgebra de Lie* $\mathfrak{g}^{\Sigma}$ *de* $\{g|_{\Sigma} : g \in G^{\Sigma}\}$, *y tal que* $\langle \Theta^{\Sigma}_{\cdot} \cdot, \cdot \rangle$ *coincide con la restricción a* Σ *de* $\langle \Theta.\cdot, \cdot \rangle$.

DEMOSTRACIÓN. La parte 1 es un caso particular del Lema 3.2 que probaremos más adelante. La parte 2 sigue del hecho que la proyección a Σ (de la restricción a Σ, de un campo de Killing en $\mathbb{V}$ inducido por G, yace en $\mathfrak{g}^{\Sigma}$; ver la prueba del Lema 3.2. Para ser un poco más claros, adaptaremos los argumentos a este caso particular.

Podemos asumir, tal vez tomando clausura, que H es compacto. Definimos

$$\tilde{\Theta}^{\Sigma} = \int_{h \in H} h(\Theta)\, dh,$$

en donde la integral viene a partir de la medida de Haar a izquierda de H normalizada para que H tenga volumen 1. Observemos que $\tilde{\Theta}^{\Sigma}$ es una 1-forma totalmente antisimétrica en $\mathbb{V}$ que toma valores en $\mathfrak{g}$. En efecto, si $h \in N(G, \mathrm{O}(\mathbb{V}))$ tenemos que $h(\Theta)_x = h \circ \Theta_{h^{-1}(x)} \circ h^{-1} \in \mathfrak{g}$. Luego, $h(\Theta)$ toma valores en $\mathfrak{g}$ para todo $h \in H$ y por lo tanto $\tilde{\Theta}^{\Sigma}$ lo hace.

Por otro lado, si $w_1, w_2, w_3 \in \Sigma$, entonces

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Theta}^{\Sigma}_{w_1} w_2, w_3 \rangle &= \int_{h \in H} \langle \Theta_{h^{-1}(w_1)} h^{-1}(w_2), h^{-1}(w_3) \rangle\, dh \\ &= \int_{h \in H} \langle \Theta_{w_1} w_2, w_3 \rangle\, dh = \langle \Theta_{w_1} w_2, w_3 \rangle. \end{aligned}$$

Sea ahora $v \in \Sigma^{\perp}$. Observemos que $\Sigma^{\perp}$ es H-invariante y por lo tanto

$$\int_{h \in H} h^{-1}(v)\, dh = 0$$

pues es un vector de $\Sigma^{\perp}$ que es fijo por H. Luego

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Theta}^{\Sigma}_{w_1} w_2, v \rangle &= \int_{h \in H} \langle \Theta_{h^{-1}(w_1)} h^{-1}(w_2), h^{-1}(v) \rangle\, dh \\ &= \int_{h \in H} \langle \Theta_{w_1} w_2, h^{-1}(v) \rangle\, dh \\ &= \left\langle \Theta_{w_1} w_2, \int_{h \in H} h^{-1}(v)\, dh \right\rangle = 0. \end{aligned}$$

Luego $\langle \tilde{\Theta}^{\Sigma}_{w_1} w_2, v\rangle = 0$, es decir $\tilde{\Theta}_{w_1} w_2 \in \Sigma$ para todos $w_1, w_2 \in \Sigma$. Esto implica que Θ^{Σ}, la restricción de $\tilde{\Theta}^{\Sigma}$, tiene las propiedades deseadas. □

NOTA 2.8. Sea H un grupo de Lie compacto y sea $\mathfrak{h}$ su álgebra de Lie. Sea además $0 \neq v \in \mathfrak{h}$. El espacio normal a la órbita $H \cdot v := \mathrm{Ad}(H)v$ está dado por

$$\nu_v(H \cdot v) = \mathscr{C}(v) := \{\xi \in \mathfrak{h} : \mathrm{ad}_v(\xi) = 0\} = \{\xi \in \mathfrak{h} : [v, \xi] = 0\}.$$

Se tiene que $v = \mathrm{Exp}(tv) \cdot v = \mathrm{Ad}(\mathrm{Exp}(tv))v$, y por lo tanto $\mathrm{Ad}(\mathrm{Exp}(tv))$ deja invariante $\nu_v(H \cdot v)$. Más aún, de la igualdad anterior se tiene que el conjunto de puntos fijos del subgrupo monoparamétrico de isometrías lineales $\{\mathrm{Ad}(\mathrm{Exp}(tv))\}$ de $\mathfrak{h}$, es exactamente el espacio normal $\nu_v(H \cdot v)$.

LEMA 2.9. *Sea* $[\mathbb{V}, \Theta, G]$, $\Theta \neq 0$, *un skew-torsion holonomy system irreducible. Entonces* G *actúa en* $\mathbb{V}$ *como una s-representación irreducible (i.e., la representación isotrópica de un espacio simétrico simple).*

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, definimos un tensor algebraico de curvatura $R \neq 0$ en $\mathbb{V}$ que toma valores $R_{x,y}$ en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G. En efecto, sea

$$R_{v,w} = [\Theta_v, \Theta_w] - \frac{2}{3}\Omega_{v,w},$$

en donde $\Omega_{v,w} = (\Theta_v \cdot \Theta)_w$ es la 2-forma derivada de Θ que definimos al comienzo de la sección. Luego, $R_{v,w} \in \mathfrak{g}$ para todos $v, w \in \mathbb{V}$. A continuación verificamos que R es efectivamente un tensor algebraico de curvatura. Como $\langle \Omega_{v,w} z, u\rangle$ define una 4-forma, sigue que $R_{v,w} = -R_{w,v}$, además como $[\Theta_v, \Theta_w] \in \mathfrak{g}$ es antisimétrica, sigue que $\langle R_{v,w} z, u\rangle = -\langle R_{v,w} u, z\rangle$. Sólo falta verificar la primera identidad de Bianchi. Si T es un tensor algebraico de tipo $(1,3)$, denotamos por $\mathscr{B}(T(v,w,z))$ la suma cíclica en las variables v, w, z, es decir

$$\mathscr{B}(T(v,w,z)) = T(v,w,z) + T(w,z,v) + T(z,v,w).$$

Ahora, como $\Omega_{v,w} z$ es antisimétrica en v, w, z tenemos que $\mathscr{B}(\frac{2}{3}\Omega_{v,w} z) = 2\Omega_{v,w} z$. Ahora calculemos

$$\begin{aligned}\mathscr{B}([\Theta_v, \Theta_w] z) &= [\Theta_v, \Theta_w] z + [\Theta_w, \Theta_z] v + [\Theta_z, \Theta_v] w \\ &= \Theta_v \Theta_w z - \Theta_w \Theta_v z + \Theta_w \Theta_z v - \Theta_z \Theta_w v + \Theta_z \Theta_v w - \Theta_v \Theta_z w.\end{aligned}$$

Observemos que en esta suma, el primer término es igual al último, el segundo es igual al tercero y los otros dos términos restantes también son iguales. Luego,

$$\begin{aligned}\mathscr{B}([\Theta_v, \Theta_w] z) &= 2(\Theta_v \Theta_w z - \Theta_w \Theta_v z + \Theta_z \Theta_v w) \\ &= 2([\Theta_v, \Theta_w] z - \Theta_{\Theta_v w} z) = 2\Omega_{v,w} z.\end{aligned}$$

Luego $\mathscr{B}(R_{v,w} z) = 0$ y se cumple la primera identidad de Bianchi.

Calculemos la curvatura escalar $\mathrm{scal}(R)$ del tensor de curvatura R. En efecto, sea $e_1, \ldots, e_n$ una base ortonormal de $\mathbb{V}$. Como $\langle \Omega_{v,w} z, u \rangle$ es una 4-forma se tiene

$$\begin{aligned}
\mathrm{scal}(R) &= \sum_{i<j} \langle R_{e_i,e_j} e_j, e_i \rangle = \sum_{i<j} \langle [\Theta_{e_i}, \Theta_{e_j}] e_j, e_i \rangle \\
&= \sum_{i<j} \left(\langle \Theta_{e_i} \Theta_{e_j} e_j, e_i \rangle - \langle \Theta_{e_j} \Theta_{e_i} e_j, e_i \rangle \right) \\
&= -\sum_{i<j} \langle \Theta_{e_j} \Theta_{e_i} e_j, e_i \rangle = \sum_{i<j} \langle \Theta_{e_i} e_j, \Theta_{e_j} e_i \rangle \\
&= -\sum_{i<j} \langle \Theta_{e_i} e_j, \Theta_{e_i} e_j \rangle = -\sum_{i<j} \| \Theta_{e_i} e_j \|^2 .
\end{aligned}$$

Luego, $\mathrm{scal}(R) \neq 0$ pues $\Theta \neq 0$. Por lo tanto $[\mathbb{V}, R, G]$ es un sistema holonómico irreducible, en el sentido de Simons y con curvatura escalar $\mathrm{scal}(R) \neq 0$. Por consiguiente, G actúa en $\mathbb{V}$ como una s-representación, por Lema 1.13. En efecto, uno puede construir un nuevo tensor algebraico de curvatura

$$\tilde{R} = \int_{g \in G} g(R) \, dg.$$

Se tiene que $\mathrm{scal}(\tilde{R}) = \mathrm{scal}(R) \neq 0$ y por lo tanto $[\mathbb{V}, \tilde{R}, G]$ es un sistema holonómico irreducible y simétrico (pues $\tilde{R}$ es por definición G-invariante). □

3. Enunciado y demostración del skew-torsion holonomy theorem

En esta sección probamos el resultado principal sobre skew-torsion holonomy systems. Se trata de un teorema de holonomía del estilo del teorema de holonomía de Simons [**Sim62**]. De hecho, este resultado es un poco más fuerte, pues nos dice que existe un único caso transitivo para los skew-torsion holonomy systems. Esto no es cierto para los sistemas holonómicos, cuyos grupos transitivos fueron clasificados por Berger [**Ber55**].

TEOREMA 2.10 (Skew-torsion holonomy theorem (ver también [**Nag07**])). *Sea* $[\mathbb{V}, \Theta, G]$, $\Theta \neq 0$, *un skew-torsion holonomy system irreducible con* $G \neq \mathrm{SO}(\mathbb{V})$. *Entonces* $[\mathbb{V}, \Theta, G]$ *es simétrico y no-transitivo. Más aún,*

1. $(\mathbb{V}, [\cdot, \cdot])$ *es un álgebra de Lie ortogonal, de rango al menos* 2*, con respecto al corchete* $[u, v] = \Theta_u v$*;*
2. $G = \mathrm{Ad}(H)$ *en donde* H *es el grupo de Lie conexo asociado al álgebra de Lie* $(\mathbb{V}, [\cdot, \cdot])$*;*
3. Θ *es única, salvo múltiplos escalares.*

Este teorema es consecuencia del siguiente resultado no trivial.

TEOREMA 2.11. *Sea* $[\mathbb{V}, \Theta, G]$, $\Theta \neq 0$, *un skew-torsion holonomy system transitivo. Entonces* $G = \mathrm{SO}(\mathbb{V})$.

DEMOSTRACIÓN. En realidad, como sólo asumimos transitividad, podemos independizarnos de la 1-forma Θ en el siguiente sentido. Consideraremos la familia $\mathscr{F}$ de 1-formas totalmente antisimétricas en $\mathbb{V}$ que toman valores en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G. Sigue de nuestras hipótesis que $\mathscr{F} \neq \{0\}$. Más aún, como vimos a comienzos del presente capítulo, se tiene que el subespacio lineal generado por

$\{\Theta_v : \Theta \in \mathscr{F}, v \in \mathbb{V}\}$ coincide con $\mathfrak{g}$. En efecto, como G es transitivo en la esfera de $\mathbb{V}$, su acción en $\mathbb{V}$ resulta irreducible, y por lo tanto el factor G_0 en la Proposición 2.3 es trivial.

Para probar el teorema haremos inducción en la dimensión n de $\mathbb{V}$. Observar que debemos considerar $n \geq 3$, pues de lo contrario $\mathscr{F} = \{0\}$. Si $n = 3$, el teorema vale, pues en dimensión 3 el espacio de 3-formas algebraicas tiene dimensión 1, es decir $\mathscr{F} = \mathbb{R}\Theta$ para (cualquier) $\Theta \neq 0$ (o, lo que es lo mismo, una 3-forma resulta única salvo múltiplos escalares), ya que $\langle \Theta_v w, z\rangle$ define una 3-forma en $\mathbb{V}$. Por lo tanto $\mathfrak{g} = \{\Theta_v : v \in \mathbb{V}\} = \mathfrak{so}(3)$, pues SO(3) no tiene subgrupos no triviales.

Sea entonces $n > 3$ y asumamos que el teorema vale para $\dim \mathbb{V} < n$.

Caso (a). Asumamos que existe una 1-forma $\Theta \in \mathscr{F}$ tal que su 2-forma derivada Ω es distinta de cero, en donde $\Omega_{v,w} = (\Theta_v \cdot \Theta)_w$. Tomemos un $v \in \mathbb{V}$ tal que $\Theta^v = \Omega_{v,\cdot}$ es distinta de cero. Observemos que Θ^v es una 1-forma totalmente antisimétrica en el complemento ortogonal $\{v\}^\perp$ de v, la cual toma valores en la subálgebra de isotropía $\mathfrak{g}_v$ de v (esto lo vimos en la Nota 2.6). Sea G_v el subgrupo de isotropía de v y presentemos a la esfera de $\mathbb{V}$ como $S^{n-1} = G/G_v$. Por la teoría para skew-torsion holonomy systems que desarrollamos al comienzo de este capítulo, tenemos que $H = G_v$ y $M = G/H$ satisfacen las hipótesis del Teorema 3.4 con $k \geq 1$, pues $\Theta^v \neq 0$. Observemos que como la esfera S^{n-1} es simplemente conexa, G_v resulta conexo. Luego, como la esfera es localmente irreducible, podemos aplicar el Teorema 3.4 para concluir que $k = 1$, y en consecuencia H actúa irreduciblemente en el espacio tangente $T_v S^{n-1}$ de la esfera $S^{n-1} = G \cdot v$. Si la isotropía H no es transitiva (en la esfera unitaria de $T_v S^{n-1} = \{v\}^\perp$), entonces $[\{v\}^\perp, \Theta^v, H]$ es un skew-torsion holonomy system irreducible y no-transitivo. Luego, por la versión débil del skew-torsion holonomy theorem, Teorema 2.4, tenemos que $[\{v\}^\perp, \Theta^v, H]$ es simétrico. Ahora, usando la Proposición 2.5, verificamos que G/H está en las hipótesis de la Proposición 6.4, y por tanto $S^{n-1} = G \cdot v$ resulta isométrica a un grupo de Lie simple con métrica bi-invariante, el cual debe tener rango al menos 2. Esto es una contradicción, pues en un grupo de Lie como ése existen subvariedades totalmente geodésicas planas de dimensión mayor o igual que 2. Por lo tanto H es transitivo en la esfera unitaria de $\{v\}^\perp$ y $[\{v\}^\perp, \Theta^v, H]$ satisface las hipótesis de nuestro teorema con $\dim\{v\}^\perp = n - 1 < n = \dim \mathbb{V}$. Luego, por la hipótesis inductiva, tenemos que $H = \mathrm{SO}(\{v\}^\perp)$, lo cual implica $G = \mathrm{SO}(\mathbb{V})$, ya que $H = G_v$ es el subgrupo de isotropía de v.

Caso (b). Supongamos que $\Theta_v \cdot \Theta = 0$ para toda $\Theta \in \mathscr{F}$ y para todo $v \in \mathbb{V}$ (ver Nota 2.12 donde se muestra que esto puede ocurrir de manera no trivial).

Observemos que bajo nuestras hipótesis, cualquier elemento $\Theta \in \mathscr{F}$ define un corchete de Lie ortogonal en $\mathbb{V}$. En efecto, esto está hecho en la prueba de la Proposición 2.5, y es la condición $\Theta_v \cdot \Theta = 0$ la que implica que $[u, v]^\Theta := \Theta_u v$ satisface la identidad de Jacobi. Luego $[\cdot,\cdot]^\Theta$ es un corchete de Lie y $\mathrm{ad}_u^\Theta = \Theta_u$.

Sea G^Θ el subgrupo de Lie conexo de G asociado a la subálgebra $\{\Theta_v : v \in \mathbb{V}\}$ de $\mathfrak{g}$.

Proyectando una 1-forma dada $0 \neq \Theta \in \mathscr{F}$ a un subespacio G^Θ-irreducible, como lo hicimos al comienzo de este capítulo, podemos asumir que $\mathbb{V}$ se descompone $\mathbb{V} = \mathbb{V}_0 \oplus (\mathbb{V}_0)^\perp$ como suma directa de subespacios Θ-invariantes tal que Θ es trivial en $\mathbb{V}_0$ e irreducible en $(\mathbb{V}_0)^\perp$. Más precisamente, $\Theta_{\mathbb{V}_0} = \{0\}$ y G^Θ actúa irreduciblemente en $(\mathbb{V}_0)^\perp$.

Aquí surgen tres subcasos que requieren diferentes argumentos geométricos. Estos subcasos son $\dim \mathbb{V}_0 \geq 2$, $\dim \mathbb{V}_0 = 1$ y $\dim \mathbb{V}_0 = 0$.

En estos tres subcasos usaremos que G actúa en $\mathbb{V}$ como la representación isotrópica de un espacio simétrico simple, lo cual fue probado en el Lema 2.9. Sea $0 \neq R$ el único (salvo múltiplos) tensor algebraico de curvatura en $\mathbb{V}$ tal que $[\mathbb{V}, R, G]$ es un sistema holonómico simétrico (i.e. tal que $g(R) = R$ para todo $g \in G$). En este caso, $\mathfrak{g}$ coincide con el subespacio lineal generado por $\{R_{u,v} : u, v \in \mathbb{V}\}$. Nuestro objetivo es probar que R tiene curvaturas seccionales constantes y por consiguiente $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(\mathbb{V})$. Como G preserva R y actúa transitivamente en la esfera, es suficiente probar que existe $v \neq 0$ tal que el operador de Jacobi $J_v = R_{\cdot,v}v : \{v\}^\perp \to \{v\}^\perp$ es un múltiplo de la transformación identidad.

Antes de continuar con la demostración observemos el siguiente hecho: cualquier espacio normal ν_z, en z, a la órbita $G^\Theta \cdot z$ es R-totalmente geodésico, es decir invariante por R, $R_{\nu_z,\nu_z}\nu_z \subset \nu_z$. En efecto, dado $g \in \{e^{t\Theta_z} : t \in \mathbb{R}\}$, como $g(R) = R$, tenemos para $u, x, y \in \nu_z$,

$$R_{u,x}y = g(R)_{u,x}y = g(R_{g^{-1}(u),g^{-1}(x)}g^{-1}(y)) = g(R_{u,x}y).$$

Luego $R_{u,x}y$ es un vector fijo por el subgrupo monoparamétrico $\{e^{t\Theta_z} : t \in \mathbb{R}\}$. Por tanto, por Nota 2.8, sigue que $R_{u,x}y \in \nu_z$ y entonces ν_z es invariante por R.

Subcaso (b_1). Asumamos que $\dim \mathbb{V}_0 \geq 2$. Para $v \in \mathbb{V}$, denotemos por ν_v el espacio normal en v a la órbita $G^\Theta \cdot v$. Observemos que $\mathbb{V}_0 + \mathbb{R}v \subset \nu_v$. Más aún, observemos que ν_v es el conjunto de puntos fijos del subgrupo monoparamétrico de isometrías lineales $\{e^{t\Theta_v} : t \in \mathbb{R}\}$ (ver Nota 2.8). Se puede asumir que $\Theta \in \mathscr{F}$ tiene la siguiente propiedad: existe $v \in \mathbb{V}$ tal que la 3-forma asociada $\langle \Theta.\cdot, \cdot \rangle$, restringida al espacio normal ν_v, no es idénticamente nula. De lo contrario, si $v_0, w_0 \in \mathbb{V}_0$ son linealmente independientes, entonces

$$\langle \Theta_v v_0, w_0 \rangle = 0$$

para todos $\Theta \in \mathscr{F}$ y $v \in \mathbb{V}$. Luego, $\mathbb{R}v_0 \oplus \mathbb{R}w_0$ es perpendicular a cualquier G-órbita, pues $\mathfrak{g}$ está linealmente generado por $\{\Theta_v : \Theta \in \mathscr{F}, v \in \mathbb{V}\}$. Esto es una contradicción, ya que G es transitivo en la esfera.

Tomemos entonces $v \in \mathbb{V}$ y $\Theta \in \mathscr{F}$ tal que Θ restringida a ν_v no es idénticamente nula. Perturbando ligeramente v, uno puede asumir que $v \notin \mathbb{V}_0$. Más aún, si v' es la proyección ortogonal de v sobre $(\mathbb{V}_0)^\perp$, se tiene que $\nu_{v'} = \nu_v$. Por consiguiente, podemos asumir que $0 \neq v \in (\mathbb{V}_0)^\perp$.

Ahora podemos aplicar el Lema 2.7 a $\Sigma = \nu_v$ y $H = \{e^{t\Theta_v} : t \in \mathbb{R}\}$, de donde concluimos que la cohomogeneidad de G^{ν_v} en ν_v es 1, es decir, G^{ν_v} es transitivo en la esfera (recordar que, de acuerdo a la notación del Lema 2.7, G^{ν_v} es la componente conexa del subgrupo de G que deja ν_v invariante). Más aún, existe una 1-forma totalmente antisimétrica $\Theta^v \neq 0$ en ν_v que toma valores en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}^v$ de $\{g|_{\nu_v} : g \in G^{\nu_v}\}$. Como $\dim \nu_v < n = \dim \mathbb{V}$, tenemos, por la hipótesis inductiva, que $\{g|_{\nu_v} : g \in G^{\nu_v}\} = \mathrm{SO}(\nu_v)$.

Si denotamos por R^v la restricción de R al espacio normal ν_v (lo cual tiene sentido pues ν_v es R-totalmente geodésico), entonces R^v tiene curvaturas seccionales constantes, pues R^v es $\mathrm{SO}(\nu_v)$-invariante. Para calcular la curvatura seccional λ, simplemente fijamos dos vectores ortonormales $v_0, w_0 \in \mathbb{V}_0 \subset \nu_v$ (notar que aquí usamos la hipótesis $\dim \mathbb{V}_0 \geq 2$), entonces

$$\lambda = \langle J_{v_0}(w_0), w_0 \rangle.$$

Más aún, esto sucede a lo largo de toda la órbita $G^\Theta \cdot v$. En efecto, dado $g \in G^\Theta$, se tiene que $g(\nu_v) = \nu_{g(v)}$ y $g(R^v) = R^{g(v)}$. Como $G^{\nu_{g(v)}} = gG^{\nu_v}g^{-1}$, tenemos que $G^{\nu_{g(v)}} = \mathrm{SO}(\nu_{g(v)})$ y por consiguiente $R^{g(v)}$ tiene curvaturas seccionales constantes. Como $\mathbb{V}_0 \subset \nu_{g(v)}$ para todo $g \in G^\Theta$, estas curvaturas son iguales a λ. En particular, $J_{g(v)} = \lambda \,\mathrm{Id}_{\nu_{g(v)}}$ para todo $g \in G^\Theta$. Si ahora $z \in \mathbb{V}$ es arbitrario, entonces siempre existe $g \in G^\Theta$ tal que $z \in \nu_{g(v)}$. En efecto, esto puede hacerse, por ejemplo, considerando el máximo de la función altura $x \mapsto \langle z, x\rangle$ a lo largo de la órbita $G^\Theta \cdot v$. Por consiguiente $J_{v_0}(z) = \lambda z$ y $J_{v_0} : \{v_0\}^\perp \to \{v_0\}^\perp$ es un múltiplo de la identidad. Esto completa la prueba de nuestro primer subcaso.

Subcaso (b$_2$). Supongamos que $\dim \mathbb{V}_0 = 1$ y sea $v \in \mathbb{V}_0$ un vector de longitud unitaria. Observemos que G^Θ preserva R, fija v y actúa irreduciblemente en $(\mathbb{V}_0)^\perp = \{v\}^\perp$. Luego G^Θ conmuta con J_v y por consiguiente, J_v resulta un múltiplo de la identidad.

Subcaso (b$_3$). Supongamos que $\dim \mathbb{V}_0 = 0$, es decir, que G^Θ actúa irreduciblemente en $\mathbb{V}$. En este caso, las órbitas principales de G^Θ son subvariedades isoparamétricas irreducibles y substanciales de $\mathbb{V}$. En efecto, esto sigue de que G^Θ actúa en $\mathbb{V}$ como la representación adjunta de $(\mathbb{V}, [\cdot,\cdot]^\Theta)$ (ver los Preliminares, también [**PT88**] y [**BCO03**]). Se tiene que la cohomogeneidad de G^Θ en $\mathbb{V}$ es al menos 2, en caso contrario el grupo de Lie asociado a $(\mathbb{V}, [\cdot,\cdot]^\Theta)$ debería ser de rango 1 y por lo tanto, por Lema 6.1, $\dim \mathbb{V} = 3$. Lo cual es absurdo, pues estamos asumiendo $n > 3$.

Sea $M = G^\Theta \cdot v$ una órbita principal. Sea ξ un elemento del espacio normal ν_v de M en v tal que el operador de forma A_ξ tiene todos sus autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_g$ distintos de cero, y $g \geq 2$. Un tal ξ puede elegirse perturbando ligeramente el vector posición, pues la codimensión de M es al menos 2 y como consecuencia, dado que M es substancial, M no es umbílica.[1] Sean $E_1, \ldots, E_g$ los autoespacios de A_ξ asociados a $\lambda_1, \ldots, \lambda_g$ respectivamente. Escribimos

$$\mathbb{V} = \nu_v \oplus E_1 \oplus \cdots \oplus E_g.$$

Sea $v_i = v + \lambda_i^{-1}\xi$, para $i = 1, \ldots, g$. Se tiene que el espacio normal a la órbita $M_i = G^\Theta \cdot v_i$ en v_i está dado por

$$\nu_{v_i} = \{\eta \in \mathbb{V} : \Theta_\eta v_i = 0\} = \nu_v \oplus E_i,$$

el cual es Θ-invariante pues $\{\eta \in \mathbb{V} : \Theta_\eta v_i = 0\}$ es una subálgebra de Lie de $(\mathbb{V}, [\cdot,\cdot]^\Theta)$. Más aún, la restricción de Θ a ν_{v_i} no es idénticamente nula, pues ν_{v_i} no es abeliana. En efecto, ν_{v_i} contiene a la subálgebra abeliana maximal ν_v. Observar que, por Nota 2.8, ν_{v_i} es el conjunto de puntos fijos de $\{e^{t\Theta_{v_i}} : t \in \mathbb{R}\}$, y como ya observamos antes, ν_{v_i} resulta invariante por R. Por Lema 2.7 sigue que $G^{\nu_{v_i}}$ es transitivo en la esfera de ν_{v_i}. Como consecuencia, por la hipótesis inductiva, ya que $\dim \nu_{v_i} < \dim \mathbb{V}$, sigue que $G^{\nu_{v_i}} = \mathrm{SO}(\nu_{v_i})$.

Como la restricción R^i de R a ν_{v_i} es invariante por $G^{\nu_{v_i}} = \mathrm{SO}(\nu_{v_i})$, sigue que R^i tiene curvaturas seccionales constantes, digamos μ. Sea $\mathbb{W}_i = \{v\}^\perp \cap \nu_{v_i}$,

[1] En efecto, si algún λ_i se anulara idénticamente en un entorno de v, entonces M tendría un factor plano, lo cual es absurdo pues M está contenida en la esfera de $\mathbb{V}$. Por otro lado, si $g = 1$ en un entorno de v, entonces M resulta umbílica (i.e. todos los operadores de forma son un múltiplo de la identidad), y como consecuencia M es una esfera extrínseca, lo cual implica que M está contenida en un subespacio afín propio de $\mathbb{V}$ y por tanto M no sería substancial. Absurdo.

entonces

$$J_v|_{\mathbb{W}_i} = \mu \operatorname{Id}_{\mathbb{W}_i} .$$

Observar que hemos omitido el subíndice i para μ, pues éste no depende de i. Para verificar esto simplemente observamos que si $w \in \nu_v$ es un vector de norma 1 y perpendicular a v, entonces ambos, v y w, pertenecen a cualquier ν_{v_i} y por tanto $\mu = \langle R_{v,w} w, v\rangle$. Esto muestra que μ es independiente de $i = 1, \ldots, g$. Como $\{v\}^\perp = \bigcup_i \mathbb{W}_i$, concluimos que J_v coincide en $\{v\}^\perp$ con $\mu \operatorname{Id}_{\{v\}^\perp}$.

Esto concluye la prueba del teorema. $\square$

Demostración del Teorema 2.10. Poniendo juntos el Teorema 2.4 (weak skew-torsion holonomy theorem), la Proposición 2.5 y el Teorema 2.11 sigue el Teorema 2.10. Más aún, usando el Lema 6.1 sigue que $(\mathbb{V}, [\cdot,\cdot])$ tiene rango al menos 2, de lo contrario $\dim \mathbb{V} = 3$ y $(\mathbb{V}, [\cdot,\cdot]) = \mathfrak{so}(3)$. $\square$

Nota 2.12. Consideremos en $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{so}(3)$ el corchete dado por el corchete (trivial) de $\mathbb{R}$ y el corchete de $\mathfrak{so}(3)$, es decir

$$[(x, X), (y, Y)] = (0, XY - YX), \qquad x, y \in \mathbb{R},\ X, Y \in \mathfrak{so}(3).$$

Como el espacio de 3-formas en $\mathbb{R}^4$ es canónicamente isométrico a $\mathbb{R}^4$, cualquier corchete en $\mathbb{R}^4$ define de manera natural una 3-forma. Más aún, el grupo ortogonal $\mathrm{SO}(4)$ actúa transitivamente en la familia de 3-formas de longitud unitaria. Esto implica que cualquier 3-forma en $\mathbb{R}^4$ define un corchete en $\mathbb{R}^4$, el cual es ortogonalmente equivalente (salvo un múltiplo escalar) al dado. Sea entonces $\Theta \neq 0$ una 1-forma totalmente antisimétrica con valores en $\mathfrak{so}(4)$. Sigue que Θ satisface la ecuación

$$\Theta_v \cdot \Theta = 0$$

para todo $v \in \mathbb{R}^4$. Sin embargo, $[\mathbb{R}^4, \Theta, \mathrm{SO}(4)]$ nunca es un skew-torsion holonomy system simétrico.

Nota 2.13. Usando la clasificación de los grupos transitivos en la esfera, también es posible probar el Teorema 2.11. En efecto, casi todos los casos fueron excluidos por Agricola y Friedrich en [**AF04**], excepto por el caso cuaterniónico-Kähler $G = \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(n) \subset \mathrm{SO}(4n)$, con $n > 1$. Repitiendo su argumento, el que usaron para excluir el caso Kähleriano, también es posible excluir este grupo. En efecto, en lugar de usar la forma de Kähler, uno tiene que usar 4-forma cuaterniónico-Kähler. La cual puede expresarse en una base adecuada $e_1, \ldots, e_{4n}$ de $\mathbb{R}^{4n}$ como

$$\omega = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 + \cdots + e_{4n-3} \wedge e_{4n-2} \wedge e_{4n-1} \wedge e_{4n}.$$

Notar que ω es invariante por $\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(n)$. Sea Θ una 1-forma totalmente antisimétrica en $\mathbb{R}^4$ la cual toma valores en $\mathfrak{sp}(1) \oplus \mathfrak{sp}(n)$ y denotemos $\Theta_{ijk} = \langle \Theta_{e_i} e_j, e_k\rangle$. Como ω es invariante por $\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(n)$ se tiene que $\Theta_v \cdot \omega = 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^{4n}$. Sean i, j, k tres índices tomados del conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$. En realidad, asumimos por simplicidad que $i = 1$, $j = 2$ y $k = 3$ (los otros casos son similares). Sea $m > 4$ y r arbitrario, entonces

$$\begin{aligned}
0 &= (\Theta_{e_r} \cdot \omega)(e_1, e_2, e_3, e_m) \\
&= \omega(\Theta_{e_r} e_1, e_2, e_3, e_m) + \omega(e_1, \Theta_{e_r} e_2, e_3, e_m) + \omega(e_1, e_2, \Theta_{e_r} e_3, e_m) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \omega(e_1, e_2, e_3, \Theta_{e_r} e_m) \\
&= \Theta_{rm4}\, \omega(e_1, e_2, e_3, e_4) = \Theta_{rm4} = -\Theta_{r4m}.
\end{aligned}$$

Luego, $\Theta_{r4m} = 0$. Similarmente se tiene $\Theta_{r3m} = \Theta_{r2m} = \Theta_{r1m} = 0$. Y lo mismo vale si reemplazamos Θ por $g(\Theta)$, para todo $g \in \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(n)$. Por tanto, para todo $g \in \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(n)$ y para todo $m \geq 1$, tenemos

$$g(\Theta)_{r1m} = g(\Theta)_{r2m} = g(\Theta)_{r3m} = g(\Theta)_{r4m} = 0.$$

Observemos que el Lema 2.1 y la Proposición 2.5 implican que $\mathfrak{sp}(1) \oplus \mathfrak{sp}(n)$ está linealmente generado por $\{g(\Theta)_v : v \in \mathbb{R}^{4n}\}$. Luego, la igualdad anterior implica que $\mathrm{Sp}(1)\times\mathrm{Sp}(n)$ deja invariante el subespacio generado por $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Esto es una contradicción, pues $\mathrm{Sp}(1)\times\mathrm{Sp}(n)$ actúa irreduciblemente en $\mathbb{R}^{4n}$, $n > 1$. Por lo tanto, el caso $G = \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(n)$ también es excluido.

Capítulo 3

La unicidad de la conexión canónica en espacios naturalmente reductivos

En este capítulo probamos que la conexión canónica de un espacio naturalmente reductivo es esencialmente única (es decir, salvo que el espacio sea un grupo de Lie con métrica bi-invariante o una esfera, en el caso compacto, o el dual simétrico de un grupo de Lie con métrica bi-invariante en el caso no compacto). En el caso de grupos de Lie compactos (o sus duales simétricos) encontramos todas las conexiones canónicas, las cuales forman una recta (ver Nota 3.8). También mostramos que en la esfera la conexión canónica es única con la presentación simétrica (salvo en dimensión 3, ver Nota 3.20). Además calculamos el grupo de isometrías de un espacio naturalmente reductivo compacto (ver Teorema 3.23).

La demostración del resultado principal de este capítulo, la unicidad de la conexión canónica, trata por separado el caso compacto en el Teorema 3.7 y el caso no-compacto en el Teorema 3.16. La demostración del Teorema 3.7 se basa en el skew-torsion holonomy theorem (Teorema 2.10) y un resultado general de descomposición para espacio homogéneos compactos, el Teorema 3.4. Es un hecho remarcable, que el Teorema 3.4 es, a su vez, crucial para probar el skew-torsion holonomy theorem.

El Teorema 3.4 no vale para espacios no-compactos y damos un contraejemplo para esto. Por lo que para probar el resultado de unicidad en el caso no compacto, usamos el skew-torsion holonomy theorem, pero tenemos variar los argumentos, pues no podemos usar el Teorema 3.4. De hecho, la prueba que damos para el caso no compacto es general (o sea, también vale para espacios naturalmente reductivos compactos). Sin embargo, decidimos tratar por separado los dos casos no sólo por razones cronológicas (el artículo con la demostración para espacios naturalmente reductivos compactos apareció antes), sino porque además, como ya dijimos, el Teorema 3.4 es un ingrediente esencial para probar el skew-torsion holonomy theorem. Esto muestra el profundo vínculo que hay entre los espacios naturalmente reductivos y los skew-torsion holonomy systems.

La referencia general para este capítulo son los artículos [**OR12a**] para el caso compacto, [**OR12b**] para el caso no-compacto y [**Reg10**] en lo que concierne al cálculo del grupo de isometrías de un espacio naturalmente reductivo.

1. Descomposición de ciertos espacios homogéneos

En esta sección probamos un resultado general, Teorema 3.4, para espacios homogéneos compactos cuyo subgrupo de isotropía satisface cierta condición.

Antes que nada, probamos algunos resultados que necesitaremos luego.

LEMA 3.1. *Sea $M = G/G_p$ una variedad riemanniana homogénea, sea H un subgrupo normal de la isotropía G_p y sea $\mathbb{W}$ el subespacio de T_pM definido por*

$$\{v \in T_pM : dh(v) = v \text{ para todo } h \in H\}.$$

Entonces $\mathbb{W}$ es G_p-invariante. Más aún, si $\mathscr{D}$ es la distribución G-invariante en M definida por $\mathscr{D}_p = \mathbb{W}$, entonces $\mathscr{D}$ es integrable con hojas totalmente geodésicas (o, equivalentemente, $\mathscr{D}$ es autoparalela).

DEMOSTRACIÓN. Como H es un subgrupo normal de G_p, claramente se tiene que $\mathbb{W}$ es un subespacio G_p-invariante. Construyamos explícitamente la subvariedad integral $S(q)$ de $\mathscr{D}$ que pasa por el punto q. Sea $q = g \cdot p$ y sea

$$S(q) = \{x \in M : h \cdot x = x \text{ para todo } h \in gHg^{-1}\}$$

el conjunto de puntos fijos de gHg^{-1}. Es un hecho bien conocido que $S(q)$ es una subvariedad totalmente geodésica de M (podemos asumir que H es compacto, pues en caso contrario, la clausura de H es también un subgrupo normal de G_p que tiene el mismo conjunto de vectores fijos). Se tiene que $T_q(S(q)) = \mathscr{D}_q$. Sea ahora $r \in S(q)$. Como $S(q)$ es una subvariedad homogénea de M (ver Lema 3.2 más abajo) existe $g' \in G$ tal que $r = g' \cdot q$ y tal que $g'(S(q)) = S(q)$. Luego $T_r(S(q)) = dg'(T_q(S(q))) = dg'(\mathscr{D}_q) = \mathscr{D}_r$, pues $\mathscr{D}$ es G-invariante. Esto prueba que $S(q)$ es una subvariedad integral de $\mathscr{D}$. □

LEMA 3.2. *Sea M una variedad riemanniana, G un subgrupo cerrado y conexo del grupo de isometrías* $\mathrm{Iso}(M)$ *de M y sea $H \subset N(G, \mathrm{Iso}(M))$ (el normalizador de G en el grupo total de isometrías). Sea*

$$\Sigma = \{x \in M : h(x) = x \text{ para todo } h \in H\}$$

el conjunto de puntos fijos de H, el cual asumimos no vacío (observar que Σ es una subvariedad cerrada y totalmente geodésica de M). Sea G^Σ la componente conexa del subgrupo de G que deja invariante Σ. Entonces la cohomogeneidad de G^Σ en Σ es menor o igual que la cohomogeneidad de G en M. En particular, si G es transitivo en M, entonces G^Σ es transitivo en Σ.

Recordemos que la cohomogeneidad de la acción de G en M significa codimensión de una G-órbita principal.

DEMOSTRACIÓN. Uno puede asumir, tomando clausura, que H es un subgrupo cerrado. Luego, H resulta compacto, pues cualquier elemento de Σ es fijo por H. Dotamos a H de un elemento de volumen H-invariante tal que $\mathrm{vol}(H) = 1$. Sea $X \in \mathscr{K}_G(M) \simeq \mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, la subálgebra de Lie de campos de Killing inducidos por G, y definamos $\bar{X} \in \mathscr{K}_G(M)$ por

$$\bar{X} = \int_{h \in H} h_*(X)\, dh \in \mathscr{K}_G(M).$$

Se tiene que $\bar{X}_r$ es la proyección a $T_r\Sigma$ de X_r para todo $r \in \Sigma$. En efecto,

$$\begin{aligned} \bar{X}_r &= \int_{h \in H} dh|_{h^{-1}(r)}(X_{h^{-1}(r)})\, dh \\ &= \int_{h \in H} dh|_r(X_r)\, dh \\ &= \int_{h \in H} dh|_r(v)\, dh + \int_{h \in H} dh|_r(w)\, dh, \end{aligned}$$

en donde $X_r = v + w$ con $v \in T_r\Sigma$ y $w \in (T_r\Sigma)^\perp$. Se tiene que

$$\int_{h\in H} dh|_r(v)\, dh = \int_{h\in H} v\, dh = v.$$

Por otro lado, el vector $z = \int_{h\in H} w\, dh$ es perpendicular a $T_r\Sigma$ y es fijo por H. Esto implica que $z = 0$. Luego $\bar{X}|_\Sigma$ es siempre tangente a Σ. Más aún, $\bar{X}|_\Sigma$ coincide con la proyección de $X|_\Sigma$ a $T\Sigma$.

Sea $\mathscr{K}_G(\Sigma)$ el álgebra de Lie de campos de Killing de M, inducidos por G, tales que restrictos a Σ son siempre tangentes a Σ. Luego, $\mathscr{K}_G(M)$ coincide con la proyección, de la restricción a Σ, de los elementos de $\mathscr{K}_G(M)$. Ahora es claro que un vector en $T_r\Sigma$ que es perpendicular a $G^\Sigma \cdot r$, es también perpendicular a $G \cdot r$. Esto implica el lema. $\square$

El siguiente lema es crucial para nuestros propósitos.

Lema 3.3. *Sea $M = G/H$ una variedad riemanniana homogénea compacta con H conexo. Sea $\mathbb{V}_0 \subset T_pM$ el conjunto de vectores fijos de H en $p = eH$. Supongamos que H actúa irreduciblemente en $(\mathbb{V}_0)^\perp$ y que $\mathscr{C}(\mathfrak{h}) = \{0\}$, en donde $\mathfrak{h}$ es el álgebra de Lie de H y $\mathscr{C}(\mathfrak{h}) = \{B \in \mathfrak{so}((\mathbb{V}_0)^\perp) : [B, \mathfrak{h}] = 0\}$. Sea $\mathscr{D}$ la distribución G-invariante en M definida por $\mathscr{D}_p = \mathbb{V}_0$. Entonces $\mathscr{D}$ es una distribución paralela en M (y por lo tanto, si $\mathscr{D}$ es no trivial, M es localmente un producto).*

Demostración. Sea $v \in \mathbb{V}_0$ y sea V el campo G-invariante en M definido por $V_p = v$. Como M es compacta, V es sin divergencia en M (pues su flujo conmuta con G y, por ende, éste preserva volumen; ver Nota 3.6). Más aún, si $S(q)$ es la subvariedad integral de $\mathscr{D}$ por q (la cual es una subvariedad cerrada y totalmente geodésica de M), entonces $V|_{S(q)}$ es sin divergencia en $S(q)$. En efecto, sea

$$G(q) = \{g \in G : g(S(q)) \subset S(q)\}.$$

Entonces $G(q)$ es un subgrupo cerrado de G, el cual actúa transitivamente en la subvariedad compacta $S(q)$ (ver Lema 3.2). Se tiene que $V|_{S(q)}$ es $G(q)$-invariante. Por consiguiente $V|_{S(q)}$ es sin divergencia en $S(q)$.

Como $\mathscr{D}$ es una distribución G-invariante, es suficiente probar que $\mathscr{D}$ es paralela en p. Si $h \in H$ es arbitrario, se tiene

$$dh(\nabla_u V) = \nabla_{dh(u)} h_*(V) = \nabla_{dh(u)} V$$

para todo $u \in T_pM$. Luego si $\ell : T_pM \to T_pM$ es el endomorfismo definido por $\ell(u) = \nabla_u V$, entonces ℓ conmuta con H (vía la representación isotrópica). Luego H conmuta con las partes simétrica, digamos A, y antisimétrica, digamos B, de ℓ. En particular, tanto A como B dejan invariantes los subespacios $\mathbb{V}_0$ y $(\mathbb{V}_0)^\perp$. Como $B|_{(\mathbb{V}_0)^\perp} \in \mathscr{C}(\mathfrak{h})$, uno tiene por hipótesis que $B|_{(\mathbb{V}_0)^\perp} = 0$.

Como V es sin divergencia en M, uno tiene que traza$(A) = 0$. Como $V|_{S(q)}$ es también sin divergencia, traza$(A|_{\mathbb{V}_0}) = 0$ y por lo tanto traza$(A|_{(\mathbb{V}_0)^\perp}) = 0$. Ahora, como H actúa irreduciblemente en $(\mathbb{V}_0)^\perp$, se tiene que $A|_{(\mathbb{V}_0)^\perp} = \lambda\,\mathrm{Id}$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. Esto implica que $A|_{(\mathbb{V}_0)^\perp} = 0$.

Luego $\ell(T_pM) = \nabla_{T_pM} V \subset \mathbb{V}_0 = \mathscr{D}_p$, y por tanto $\mathscr{D}$ es paralela en p. Como $\mathscr{D}$ es G-invariante, $\mathscr{D}$ resulta paralela en todo M. $\square$

El siguiente teorema es el resultado principal de esta sección.

TEOREMA 3.4. *Sea $M = G/H'$ una variedad riemanniana homogénea compacta y sea H la componente conexa de H'. Supongamos que en $p = eH'$ existen una descomposición ortogonal del espacio tangente $T_pM = \mathbb{V}_0 \oplus \mathbb{V}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{V}_k$ y una descomposición $H = H_0 \times H_1 \times \cdots \times H_k$ en donde:*

1. *H_0 actúa solamente en $\mathbb{V}_0$ y, para $i \geq 1$, H_i actúa irreduciblemente en $\mathbb{V}_i$ y trivialmente en $\mathbb{V}_j$ si $j \neq i$;*
2. *Más aún, supongamos que para $i \geq 1$ se tiene $\mathscr{C}_i(\mathfrak{h}_i) = \{0\}$, en donde $\mathfrak{h}_i$ es el álgebra de Lie de H_i y $\mathscr{C}_i(\mathfrak{h}_i) = \{B \in \mathfrak{so}(\mathbb{V}_i) : [B, \mathfrak{h}_i] = 0\}$.*

Si M es localmente irreducible, entonces $k = 0$ o $k = 1$. Más aún, si $k = 1$ entonces $\mathbb{V}_0 = \{0\}$.

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar observemos que G puede asumirse compacto. En efecto, sea $(\bar{G}_p)_0$ la componente conexa del subgrupo de isotropía $\bar{G}_p$ de la clausura $\bar{G}$ de G en el grupo total de isometrías $\mathrm{Iso}(M)$ (el cual es compacto). Entonces $(\bar{G}_p)_0|_{\mathbb{V}_i} = H|_{\mathbb{V}_i}$ para todo $i = 1, \ldots, k$. Si así no fuera, cualquier elemento $X \neq 0$ en un ideal complementario de $\mathfrak{h}_i$ (dentro del álgebra de Lie de $(\bar{G}_p)|_{\mathbb{V}_i}$), pertenecería $\mathscr{C}_i(\mathfrak{h}_i)$, lo cual es absurdo. Esto implica que

$$(\bar{G}_p)_0 = \tilde{H}_0 \times H_1 \times \cdots \times H_k,$$

en donde $\tilde{H}_0$ actúa solamente en $\mathbb{V}_0$. Luego $(\bar{G}_p)_0$ está dentro de las hipótesis del teorema que queremos probar. También podemos asumir, pasando tal vez a un cubrimiento finito, que $H' = H$.

El hecho clave es probar que la distribución que definen los puntos fijos de la isotropía, es paralela a lo largo de las distribuciones G-invariantes definidas por $(\mathbb{V}_0)^\perp$.

Asumamos que $k \geq 1$ y sea

$$H^1 = H_0 \times H_2 \times \cdots \times H_k,$$

el cual es, así como lo es H_1, un subgrupo normal de H. Sea $\mathbb{V}^1 = \mathbb{W}_0 \oplus \mathbb{V}_1$ el conjunto de vectores fijos en p de H^1, en donde $\mathbb{W}_0$ es el conjunto de vectores fijos en p de H_0. El subespacio $\mathbb{V}^1$ es H-invariante y por tanto se extiende a una distribución G-invariante $\mathscr{D}^1$ en M, la cual es autoparalela por el Lema 3.1. Observemos que la subvariedad integral $S^1(p)$ de $\mathscr{D}^1$ por p es (la componente conexa que contiene a p de) el conjunto de puntos fijos de H^1 en M. De acuerdo con el Lema 3.2, se tiene que $S^1(p)$ es homogénea bajo la acción del grupo

$$G^1(p) = \{g \in G : g(S^1(p)) \subset S^1(p)\} = \{g \in G : g \cdot p \in S^1(p)\}.$$

Observemos que la isotropía $(G^1(p))_p$ coincide con H. Pero H^1 actúa trivialmente en $S^1(p)$. Luego, la isotropía efectiva de $S^1(p)$ es H_1. Se tiene que $\mathbb{W}_0 \subset T_p(S^1(p))$ es el conjunto de vectores fijos en p de H_1 en $S^1(p)$. Luego, por el lema anterior, la distribución G-invariante $\mathscr{D}_0$, definida por $\mathscr{D}_0(p) = \mathbb{W}_0$, es paralela a lo largo de $S^1(p)$. Esto implica que la distribución G-invariante $\mathscr{D}_1$ en M, definida por $\mathscr{D}_1(p) = \mathbb{V}_1$, también es paralela a lo largo de $S^1(p)$. Luego, por la G-invariancia de $\mathscr{D}_1$ y $\mathscr{D}^1$, tenemos que $\mathscr{D}_1$ es paralela a lo largo de $S^1(q)$ para todo $q \in M$. Sigue que $\mathscr{D}_1$ es una distribución autoparalela en M, pues $\mathscr{D}^1$ es autoparalela y $\mathscr{D}_1 \subset \mathscr{D}^1$. Pero $(\mathscr{D}_1)^\perp$ también es autoparalela en M. En efecto, $(\mathscr{D}_1)^\perp_p = \mathbb{V}_0 \oplus \mathbb{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{V}_k$ es el conjunto de vectores fijos en p de H_1 (y aquí aplicamos nuevamente el Lema 3.1). Ahora, dos distribuciones ortogonales, complementarias y autoparalelas deben ser paralelas (ver por ejemplo [**BCO03**, pág. 31]). Luego M es localmente un producto, a menos que $(\mathscr{D}_1)^\perp = \{0\}$. $\square$

Nota 3.5. El Teorema 3.4 no vale si no asumimos que M es compacta. En efecto, sea H^n, $n \geq 4$, el espacio hiperbólico real y sea $\mathscr{F}$ la foliación de H^n por horosferas paralelas centradas en el mismo punto en el infinito q_∞. Sea G (la componente conexa de) el subgrupo de isometrías $\mathrm{Iso}_0(H^n) = \mathrm{SO}_0(n{+}1,1)$ que deja $\mathscr{F}$ invariante. Entonces G actúa transitivamente en H^n, pues contiene un subgrupo soluble que fija el punto q_∞. Sea $p \in H^n$ y sea $v \in T_pH^n$ un vector perpendicular a la horosfera de $\mathscr{F}$ que pasa por p. Entonces el subgrupo de isotropía G_p, vía la representación isotrópica, fija v. Más aún G_p, restringido a $\{v\}^\perp$ coincide con $\mathrm{SO}(\{v\}^\perp) \simeq \mathrm{SO}(n{-}1)$, el cual actúa irreduciblemente, pues $n \geq 4$. Si el Teorema 3.4 valiera, entonces H^n sería reducible, y en este caso H^n tendría una línea como factor riemanniano, lo cual es absurdo.

Nota 3.6. Sea M una variedad riemanniana y sea G un grupo de Lie que actúa transitivamente en M por isometrías y admite una métrica bi-invariante $(\cdot,\cdot)$. Sea φ un difeomorfismo de M que conmuta con G. Entonces, como es bien sabido, φ preserva volumen. En efecto, sea B_ε una bola de volumen ε, con respecto a $(\cdot,\cdot)$, alrededor de la identidad $e \in G$. Si $p \in M$, entonces $\{B_\varepsilon \cdot p : \varepsilon > 0\}$ es una base de entornos de p en M. Sea $g \in G$ tal que $g \cdot p = \varphi(p)$. Entonces

$$\varphi(B_\varepsilon \cdot p) = B_\varepsilon \cdot \varphi(p) = B_\varepsilon \cdot (g \cdot p) = g(g^{-1}B_\varepsilon g) \cdot p = gB_\varepsilon \cdot p$$

y por tanto

$$\mathrm{vol}(\varphi(B_\varepsilon \cdot p)) = \mathrm{vol}(gB_\varepsilon \cdot p) = \mathrm{vol}(B_\varepsilon \cdot p).$$

Esto implica que φ preserva volumen.

2. Aplicaciones a espacios naturalmente reductivos compactos

Sea $M = G/H$ una variedad riemanniana homogénea, dotada de una métrica G-invariante $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Se dice que M es un *espacio naturalmente reductivo* si existe una descomposición reductiva

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$$

en donde $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie de G, $\mathfrak{h}$ es el álgebra de Lie de H y $\mathfrak{m}$ es un subespacio $\mathrm{Ad}(H)$-invariante de $\mathfrak{g}$ tal que las geodésicas por $p = eH$ están dadas por los subgrupos monoparamétricos

$$\gamma_{X \cdot p}(t) = \mathrm{Exp}(tX) \cdot p$$

para todo $X \in \mathfrak{m}$. En otras palabras, las geodésicas riemannianas coinciden con las ∇^c-geodésicas, en donde ∇^c es la conexión canónica en M, la cual es una conexión métrica, asociada a la descomposición reductiva $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$. Este hecho es equivalente a la siguiente propiedad: los operadores $[X,\cdot]_\mathfrak{m} : \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$ son antisimétricos para todo $X \in \mathfrak{m}$, es decir

$$\langle [X,Y]_\mathfrak{m}, Z\rangle + \langle Y, [X,Z]_\mathfrak{m}\rangle = 0$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$. Mencionemos también que el transporte ∇^c-paralelo a lo largo de las geodésicas $\mathrm{Exp}(tX) \cdot p$, con $X \in M$, está dado por $\mathrm{Exp}(tX)_*$. La conexión canónica es G-invariante y tiene torsión y curvatura ∇^c-paralelas. En general, cualquier tensor G-invariante resulta ∇^c-paralelo. Por tanto, cualquier tensor geométrico, como el tensor métrico o la curvatura riemanniana, también resulta ∇^c-paralelo.

Una familia muy importante de espacios naturalmente reductivos es la de los llamados espacios normal homogéneos. Decimos que un espacio naturalmente reductivo $M = G/H$ es un *espacio normal homogéneo* si el complemento reductivo

$\mathfrak{m} = \mathfrak{h}^{\perp}$ está dado por el complemento ortogonal de $\mathfrak{h}$ con respecto a una métrica bi-invariante en G.

En cualquier espacio naturalmente reductivo (no necesariamente compacto) uno puede calcular explícitamente, identificando T_pM con $\mathfrak{m}$, la conexión de Levi-Civita y la conexión canónica. En efecto,

$$(\nabla_{\tilde{X}}\tilde{Y})_p = \frac{1}{2}[\tilde{X},\tilde{Y}]_p \simeq -\frac{1}{2}[X,Y]_{\mathfrak{m}},$$

$$(\nabla^c_{\tilde{X}}\tilde{Y})_p = [\tilde{X},\tilde{Y}]_p \simeq -[X,Y]_{\mathfrak{m}},$$

en donde denotamos por $\tilde{Z}$ el campo de Killing en M inducido por el elemento $Z \in \mathfrak{m}$, es decir $\tilde{Z}_q = Z\cdot q = \frac{d}{dt}\big|_0 \operatorname{Exp}(tZ)\cdot q$. En efecto, siempre evaluando en p, al ser $\nabla_{\tilde{X}}\tilde{X} = 0$, se tiene que $\nabla_{\tilde{X}}\tilde{Y} = -\nabla_{\tilde{Y}}\tilde{X}$, y por lo tanto

$$[\tilde{X},\tilde{Y}] = \nabla_{\tilde{X}}\tilde{Y} - \nabla_{\tilde{Y}}\tilde{X} = 2\nabla_{\tilde{X}}\tilde{Y}.$$

La segunda identidad es una consecuencia directa de la fórmula de la derivada de Lie en términos del flujo.

El tensor diferencia entre la conexión canónica y la conexión de Levi-Civita está dado, para $v, w \in T_pM$, por

$$D_v w = \nabla_v \tilde{w} - \nabla^c_v \tilde{w} = -\frac{1}{2}[\tilde{v},\tilde{w}] = -\nabla_v \tilde{w},$$

en donde $\tilde{u}$ denota el campo de Killing en M inducido por el único elemento $U \in \mathfrak{m}$ tal que $U\cdot p = u \in T_pM$. Luego D es un tensor totalmente antisimétrico, es decir $\langle D_v w, u\rangle$ define una 3-forma en M.

A partir de ahora, y en lo que resta de esta sección, asumimos, salvo mención contraria, que M es compacta.

2.1. La unicidad de la conexión canónica. Supongamos que M es también naturalmente reductiva con respecto a otra descomposición. Es decir, podemos presentar $M = G'/H'$ y existe una descomposición reductiva

$$\mathfrak{g}' = \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{m}'$$

en donde $\mathfrak{g}'$ es el álgebra de Lie de G', $\mathfrak{h}'$ es el álgebra de Lie de H', $\mathfrak{m}'$ es un subespacio de $\mathfrak{g}'$ tal que $\operatorname{Ad}(H')\mathfrak{m}' \subset \mathfrak{m}'$ y las geodésicas riemannianas por p están dadas por

$$\gamma_{X\cdot p}(t) = \operatorname{Exp}(tX)\cdot p$$

para todo $X \in \mathfrak{m}'$.

Denotemos por $\nabla^{c'}$ la conexión canónica asociada a esta nueva descomposición reductiva. Similarmente, se define el tensor diferencia $D' = \nabla - \nabla^{c'}$, el cual satisface

$$D'_v w = \nabla_v \tilde{w}' - \nabla^{c'}_v \tilde{w}' = -\frac{1}{2}[\tilde{v}',\tilde{w}']_p = -\nabla_v \tilde{w}',$$

en donde ahora $\tilde{u}'$ denota el campo de Killing en M inducido por el único elemento $U' \in \mathfrak{m}'$ tal que $U'\cdot p = u \in T_pM$. El tensor D' es, al igual que D, totalmente antisimétrico.

Se tiene que

$$D_v w - D'_v w = -\nabla_v(\tilde{w} - \tilde{w}') = -\nabla_v W,$$

en donde $W = \tilde{w} - \tilde{w}'$ es un campo de Killing en M que se anula en p. Luego, uno tiene que $(\nabla W)_p \in \mathfrak{iso}(M)_p$ toma valores en el álgebra de Lie $\mathfrak{iso}(M)_p$ del grupo de isotropía $\mathrm{Iso}(M)_p$ del grupo total de isometrías (vía la representación isotrópica). En efecto,

$$e^{t(\nabla W)_p} = d\varphi_t|_p,$$

en donde φ_t es el flujo local asociado a W. Observemos también que $D - D' = \nabla^{c'} - \nabla^c$ es el tensor diferencia entre las dos conexiones canónicas dadas.

Luego, si uno define $\Theta = D - D'$, se tiene $\Theta w = -(\nabla W)_p \in \mathfrak{iso}(M)_p$, o, equivalentemente

$$\Theta_w = (\nabla W)_p \in \mathfrak{iso}(M)_p,$$

pues Θ es totalmente antisimétrica. Es decir, Θ_w pertenece al álgebra de isotropía del grupo total de isometrías, para todo $w \in T_pM$.

Sea

$$\bar{\mathfrak{h}} = \mathrm{span}\{g(\Theta)_w : g \in \mathrm{Iso}(M)_p,\ w \in T_pM\},$$

en donde "span" significa "subespacio lineal generado por". Por los resultados del Capítulo 2 se tiene $\bar{\mathfrak{h}}$ es un ideal de $\mathfrak{iso}(M)_p \subset \mathfrak{so}(T_pM)$.

Sea $\bar{H}$ el subgrupo de Lie conexo de $\mathrm{SO}(T_pM)$ con álgebra de Lie $\bar{\mathfrak{h}}$. Por la teoría que desarrollamos para skew-torsion holonomy systems en el Capítulo 2, tenemos una descomposición ortogonal

$$T_pM = \mathbb{V}_0 \oplus \mathbb{V}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{V}_k$$

y una descomposición de la isotropía total

$$(\mathrm{Iso}_0(M)_p)_0 = H_0 \times H_1 \times \cdots \times H_k,$$

en donde H_0 actúa solamente en $\mathbb{V}_0$ y, para $i \geq 1$, H_i actúa irreduciblemente en $\mathbb{V}_i$ y trivialmente en $\mathbb{V}_j$ si $j \neq i$. Más aún, estos grupos satisfacen las hipótesis del Teorema 3.4. Luego, si M es localmente irreducible, o bien se tiene

$$(\mathrm{Iso}_0(M)_p)_0 = H_0 \quad \text{y} \quad T_pM = \mathbb{V}_0,$$

o bien

$$(\mathrm{Iso}_0(M)_p)_0 = H_1 \quad \text{y} \quad T_pM = \mathbb{V}_1.$$

Si $(\mathrm{Iso}_0(M)_p)_0 = H_0$, entonces $g(\Theta) = 0$ para todo g. En particular, $\Theta = 0$ y por consiguiente $\nabla^{c'} = \nabla^c$.

Analicemos el caso en que $(\mathrm{Iso}_0(M)_p)_0 = H_1$. Por el Teorema 2.10 hay solamente dos posibilidades.

Caso (a). $H_1 = \mathrm{SO}(T_pM)$. En este caso M tiene curvaturas seccionales constantes (positivas) y por tanto es un espacio globalmente simétrico (ver Lema 6.2). Luego $M = S^n$ o $M = \mathbb{R}P^n$.

Caso (b). H_1 actúa en T_pM como la representación adjunta de un grupo de Lie simple y compacto. Se sigue que M es isométrica a un grupo de Lie compacto con métrica bi-invariante. Este es un hecho bien conocido que sigue de la clasificación de J. Wolf de los espacios isotrópicamente irreducibles [**Wol68**]. Nosotros damos una prueba geométrica, y que no utiliza resultados clasificatorios, de este mismo hecho (ver Proposición 6.4).

Resumiendo, hemos probado el siguiente teorema de unicidad.

Teorema 3.7. *Sea M un espacio naturalmente reductivo compacto y localmente irreducible. Supongamos que M no es (globalmente) isométrico a una esfera, ni a un espacio proyectivo real, ni a un grupo de Lie con métrica bi-invariante. Entonces la conexión canónica en M es única.*

2.2. El grupo de isometrías de un espacio naturalmente reductivo compacto. En esta subsección mostramos que la componente conexa del grupo de isometrías de un espacio naturalmente reductivo compacto coincide con la componente conexa del grupo de transformaciones afines de la conexión canónica, excepto quizás (dependiendo de la presentación), para la esfera o el espacio proyectivo. Un poco más adelante, en este mismo capítulo, podremos calcular explícitamente el grupo de isometrías de un espacio naturalmente reductivo compacto.

Nota 3.8. Mantengamos la notación de los párrafos anteriores. Supongamos, como en el Caso (b) más arriba, que M es isométrica a un grupo de Lie compacto con métrica bi-invariante. En este caso, la familia de conexiones canónicas en M es la recta afín

$$\mathscr{L} = \{t\nabla + (1-t)\nabla^c : t \in \mathbb{R}\}$$

pues el tensor diferencia entre dos conexiones canónicas debe ser único, salvo múltiplos escalares (ver Proposición 2.5). Aquí asumimos, por supuesto, que $\nabla \neq \nabla^c$. En este caso, $\mathrm{Iso}_0(M)$ fija la recta $\mathscr{L}$ punto a punto, pues $\mathrm{Iso}(M)$ induce una isometría en $\mathscr{L}$ con un punto fijo ∇. Observar también que la simetría geodésica (por la identidad) manda el tensor totalmente antisimétrico D en su opuesto $-D$. Luego, la simetría geodésica manda la conexión canónica $\nabla^c = \nabla - D$ en

$$\nabla + D = 2\nabla + (-\nabla + D) = 2\nabla - \nabla^c.$$

Luego, la simetría geodésica no pertenece al grupo de transformaciones afines $\mathrm{Aff}(M, \nabla^c)$ de ∇^c.

Teorema 3.9. *Sea $M = G/H$ un espacio naturalmente reductivo compacto y sea ∇^c la conexión canónica asociada. Supongamos que M es localmente irreducible y que $M \neq S^n$, $M \neq \mathbb{R}P^n$. Entonces:*

1. $\mathrm{Iso}_0(M) = \mathrm{Aff}_0(M, \nabla^c)$.
2. *Si* $\mathrm{Iso}(M) \not\subset \mathrm{Aff}(M, \nabla^c)$, *entonces M es isométrica a un grupo de Lie con métrica bi-invariante. En este caso, la simetría geodésica por la identidad manda ∇^c en $2\nabla - \nabla^c$.*

Demostración. Supongamos que M tampoco es isométrica a un grupo de Lie compacto (y simple) con métrica bi-invariante. Luego, por el Teorema 3.7 se tiene que $\mathrm{Iso}(M) \subset \mathrm{Aff}(M, \nabla^c)$, pues cualquier isometría debe mandar la conexión canónica en sí misma. Pero siempre vale

$$\mathrm{Aff}(M, \nabla^c) \subset \mathrm{Aff}(M, \nabla),$$

en donde $\mathrm{Aff}(M, \nabla)$ es el grupo de transformaciones afines con respecto a la conexión de Levi-Civita. En efecto, cualquier elemento $g \in \mathrm{Aff}(M, \nabla^c)$, manda geodésicas riemannianas en geodésicas riemannianas, pues las geodésicas riemannianas coinciden con las geodésicas canónicas. Luego, como ∇ es sin torsión, es bien conocido que $g \in \mathrm{Aff}(M, \nabla)$ (ver [**Reg10**]). Sigue que

$$\mathrm{Iso}(M) \subset \mathrm{Aff}(M, \nabla^c) \subset \mathrm{Aff}(M, \nabla).$$

Como M es compacta, uno tiene que $\mathrm{Iso}_0(M) = \mathrm{Aff}_0(M, \nabla)$ (ver Nota 3.12) y por lo tanto

$$\mathrm{Iso}_0(M) = \mathrm{Aff}_0(M, \nabla^c).$$

Si M es isométrica a un grupo de Lie compacto con métrica bi-invariante, entonces $\mathrm{Iso}_0(M) \subset \mathrm{Aff}_0(M, \nabla^c)$ (ver Nota 3.8). Pero, como observamos antes

$$\mathrm{Aff}(M, \nabla^c) \subset \mathrm{Aff}(M, \nabla).$$

Usando la Nota 3.12 una vez más, uno tiene, también en este caso, que

$$\mathrm{Iso}_0(M) = \mathrm{Aff}_0(M, \nabla^c).$$

La simetría geodésica, como ya observamos en la Nota 3.8, no preserva la conexión canónica (si ésta es diferente de la conexión de Levi-Civita). Esto concluye la prueba del teorema. $\square$

El teorema anterior tiene el siguiente corolario que explica, de manera geométrica, por qué el grupo de presentación de un espacio isotrópicamente irreducible da la componente conexa del grupo de isometrías (excepto, tal vez, para la esfera). Esto responde a una pregunta formulada por J. Wolf [**Wol68**] para espacios fuertemente isotrópicamente irreducibles, y por M. Wang y W. Ziller [**WZ91**] en el caso general.

COROLARIO 3.10 ([**Wol68, WZ91**]). *Sea $M^n = G/H$ una variedad riemanniana homogénea, compacta, simplemente conexa e irreducible tal que M no es isométrica a la esfera S^n. Supongamos que M es isotrópicamente irreducible con respecto al par (G, H) (acción efectiva). Supongamos además que M no es isométrica a un grupo de Lie (simple y) compacto con métrica bi-invariante. Entonces la componente conexa de G coincide con la componente conexa del grupo de isometrías de M, es decir $G_0 = \mathrm{Iso}_0(M)$.*

DEMOSTRACIÓN. Observemos primero que G_0 es semisimple. En efecto, sea $\mathscr{D}$ la distribución en M dada por los espacios tangentes a las órbitas de un subgrupo (conexo) normal abeliano maximal A de G_0. Tal distribución debe ser G-invariante y por lo tanto, ya que la acción es efectiva, se tiene que $\mathscr{D}_q = T_qM$ para todo $q \in M$. Luego A actúa transitivamente en M y por consiguiente M es plana, lo cual es absurdo. Dotemos a M de una métrica normal homogénea $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ con respecto a la descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^\perp$. Más precisamente, el producto escalar en $T_pM \simeq \mathfrak{h}^\perp$ es la restricción de $-B$, en donde B es la forma de Killing de G_0.

Tal métrica distinguida deber ser también G-invariante, pues cualquier elemento de H preserva tanto $\mathfrak{h}$ como B. Como H actúa irreduciblemente en el espacio tangente, uno tiene que la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ coincide, salvo un múltiplo, con la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de M. Sea $\mathrm{Tr}(M, \nabla^c)$ el subgrupo normal de $\mathrm{Aff}_0(M, \nabla^c)$ que consiste de las transvecciones con respecto a la conexión canónica ∇^c asociada a la descomposición reductiva $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^\perp$. Recordemos que una transvección es una transformación ∇^c-afín que preserva el subfibrado de holonomía del fibrado de marcos ortonormales. Es un hecho bien conocido que el álgebra de Lie de $\mathrm{Tr}(M, \nabla^c)$ está dada por $\mathfrak{tr}(M, \nabla^c) = [\mathfrak{h}^\perp, \mathfrak{h}^\perp] + \mathfrak{h}^\perp$ (no es suma directa, en general), lo cual implica que $\mathrm{Tr}(M, \nabla^c) \subset G_0$. Por el Teorema 3.9 tenemos que $\mathrm{Iso}_0(M) = \mathrm{Aff}_0(M, \nabla^c)$. Luego, $\mathrm{Tr}(M, \nabla^c)$ es un subgrupo normal de $\mathrm{Iso}_0(M)$.

A continuación probaremos que estos dos grupos coinciden. En efecto, asumamos que $\mathrm{Tr}(M, \nabla^c)$ está propiamente contenido en $\mathrm{Iso}_0(M)$. Sea $\mathfrak{g}'$ un ideal complementario, en el álgebra de Lie de $\mathrm{Iso}_0(M)$, del ideal $\mathfrak{tr}(M, \nabla^c)$ (ver [**Reg10**]). Si $0 \neq X \in \mathfrak{g}'$, entonces el campo $\tilde{X}_q = X \cdot q$ es $\mathrm{Tr}(M, \nabla^c)$-invariante. Luego, la isotropía de $\mathrm{Tr}(M, \nabla^c)$ fija el vector $\tilde{X}_p$, en donde $p = eH$. Pero el subespacio $\mathbb{W}$ de T_pM que consiste de los vectores fijos por $\mathrm{Tr}(M, \nabla^c)_p$ es invariante por

H, pues $\mathrm{Tr}(M, \nabla^c)$ es un subgrupo normal de G. Notemos que, por la parte 2 del Teorema 3.9, uno tiene que $G \subset \mathrm{Aff}(M, \nabla^c)$. Como H actúa irreduciblemente en T_pM, sigue que $\mathbb{W} = T_pM$. Luego $\mathrm{Tr}(M, \nabla^c)$ actúa simple y transitivamente en M. Así, $[\mathfrak{h}^\perp, \mathfrak{h}^\perp] \subset \mathfrak{h}^\perp$ y por lo tanto $\mathfrak{h}^\perp$ es un ideal de $\mathfrak{g}$. Esto implica que M es isométrica al grupo de Lie $\mathrm{Tr}(M, \nabla^c)$ (con métrica bi-invariante), una contradicción. Luego $\mathrm{Tr}(M, \nabla^c) = \mathrm{Iso}_0(M)$, lo cual implica que $G_0 = \mathrm{Iso}_0(M)$, pues $\mathrm{Tr}(M, \nabla^c) \subset G_0 \subset \mathrm{Iso}_0(M)$. □

Nota 3.11. Para espacios fuertemente isotrópicamente irreducibles, uno no necesita asumir que M no es isométrica a un grupo de Lie compacto con métrica bi-invariante. La prueba es la misma, pues siempre vale $\mathrm{Iso}_0(M) = \mathrm{Aff}_0(M, \nabla^c)$, lo cual sigue de la parte 1 del Teorema 3.9 y no necesitamos usar la parte 2 de ese resultado.

Nota 3.12 (ver [**Reg10**]). Sea M una variedad riemanniana compacta y sea X un campo de Killing afín en M, es decir, el flujo φ_s asociado a X preserva la conexión de Levi-Civita ∇. Sea $\gamma(t)$ una geodésica arbitraria en M. Entonces $X(\gamma(t))$ es un campo de Jacobi a lo largo de $\gamma(t)$. En efecto, para cualquier $s \in \mathbb{R}$, uno tiene que $\gamma_s(t) = \varphi_s(\gamma(t))$ es una geodésica, pues las transformaciones afines mandan geodésicas en geodésicas (notemos que $X(\gamma(t)) = \frac{\partial}{\partial s}\big|_0 \gamma_s(t)$). Como M es compacta, X es acotado, y por ende la proyección ortogonal de $X(\gamma(t))$ sobre $\gamma'(t)$ es constante (pues ésta tiene la forma $(a + tb)\gamma'(t)$). Luego, diferenciando la ecuación $\langle X(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle = \text{const.}$, se obtiene

$$\langle \nabla_{\gamma'(t)} X, \gamma'(t)\rangle = 0.$$

Es decir, X satisface la ecuación de Killing (riemanniana), pues $\gamma(t)$ es arbitraria. Luego X es un campo de Killing y esto implica que $\mathrm{Aff}_0(M, \nabla) = \mathrm{Iso}_0(M)$.

Nota 3.13. Sea $M = G/G_p$ un espacio naturalmente reductivo y sea $\tilde{M} = \tilde{G}/\tilde{G}_{\tilde{p}}$ su cubrimiento universal, en donde $\tilde{G}$ es el levantamiento (conexo) de G a $\tilde{M}$ y $\tilde{p}$ se proyecta sobre p. Observemos que $\tilde{M}$ también es un espacio naturalmente reductivo. Como $\tilde{G}$ admite una métrica bi-invariante, cualquier difeomorfismo de $\tilde{M}$ que conmute con $\tilde{G}$, preserva volumen (ver Nota 3.6). Luego, con los mismos argumentos que en la prueba del Teorema 3.7, uno tiene que la conexión canónica de $\tilde{M}$ también es única, siempre que $\tilde{M}$ sea irreducible y no sea isométrica a una esfera ni a un grupo de Lie con métrica bi-invariante. Luego, en este caso, la conexión canónica también es única.

2.3. Holonomía de espacios naturalmente reductivos. Sea M^n un espacio naturalmente reductivo (no necesariamente compacto) con conexión canónica asociada ∇^c. Se tiene que el tensor diferencia $D = \nabla - \nabla^c$ entre la conexión de Levi-Civita y la conexión canónica es totalmente antisimétrico. Más aún, como vimos al comienzo de esta sección, este tensor da la derivada de campos de Killing en un punto $p \in M$. Luego, por [**Kos55, AK75**], uno tiene que para todo $v \in T_pM$, D_v pertenece al álgebra de holonomía restricta (ver [**CDSO02**]). Si M no es un espacio simétrico, entonces $D \neq 0$. Más aún, usando el teorema de Berger y el Teorema 2.10 uno tiene que el grupo de holonomía restricta es $\mathrm{SO}(n)$. Esto extiende el resultado de Wolf [**Wol68**] para espacios (fuertemente) isotrópicamente irreducibles.

2.4. El cálculo del grupo $\mathrm{Aff}(M, \nabla^c)$. En este apartado mostramos cómo se calcula geométricamente el grupo ∇^c-afín (componente conexa) para un espacio naturalmente reductivo compacto. Ver [**Reg10**] para más detalles. Sea $M = G/H$ un espacio naturalmente reductivo compacto, con descomposición reductiva asociada $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ y conexión canónica ∇^c. Supongamos que H es el subgrupo de isotropía de $p \in M$. Consideremos el grupo de transvecciones $\mathrm{Tr}(M, \nabla^c)$ de la conexión canónica (es decir, el subgrupo de transformaciones ∇^c-afines que preservan los subfibrados de ∇^c-holonomía del fibrado de marcos ortonormales). El grupo de transvecciones de la conexión canónica es un subgrupo normal de $\mathrm{Aff}(M, \nabla^c)$. Más aún, $\mathrm{Tr}(M, \nabla^c)$ está contenido en G y el álgebra de Lie de $\mathrm{Tr}(M, \nabla^c)$ está dada por

$$\mathfrak{tr}(M, \nabla^c) = [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] + \mathfrak{m}$$

(no es suma directa, en general).

Ahora, como $\mathrm{Tr}(M, \nabla^c)$ es un subgrupo normal de $\mathrm{Aff}(M, \nabla^c)$, uno puede complementar el ideal $\mathfrak{tr}(M, \nabla^c)$ en el álgebra de Lie $\mathfrak{aff}(M, \nabla)$ del grupo ∇^c-afín. Es decir, existe un ideal $\mathfrak{g}'$ de $\mathfrak{aff}(M, \nabla^c)$ tal que

$$\mathfrak{aff}(M, \nabla^c) = \mathfrak{tr}(M, \nabla^c) \oplus \mathfrak{g}'.$$

Observemos que $\mathrm{Aff}_0(M, \nabla^c)$ es un subgrupo cerrado, y por ende compacto, del grupo

$$\mathrm{Aff}_0(M, \nabla) = \mathrm{Iso}_0(M),$$

ver la prueba del Teorema 3.9 (la última igualdad sigue de la Nota 3.12).

Si $X \in \mathfrak{g}'$, entonces el flujo φ_t de X conmuta con $\mathfrak{tr}(M, \nabla^c)$ y por lo tanto X, mirado como un campo de M, resulta $\mathrm{Tr}(M, \nabla^c)$-invariante. Luego, uno tiene que $\mathfrak{aff}(M, \nabla^c)$ está dada por el álgebra de transvecciones de la conexión canónica y una subálgebra de campos $\mathrm{Tr}(M, \nabla^c)$-invariantes. Así, uno puede escribir el grupo $\mathrm{Aff}_0(M, \nabla^c)$ como el producto (no necesariamente directo) de dos subgrupos bien conocidos de transformaciones ∇^c-afines. En realidad, uno puede mejorar está presentación para obtener un producto casi directo (es decir, con intersección discreta de los factores). Esto está hecho en detalle en [**Reg10**] para espacios normal homogéneos y más adelante, en esta misma tesis, para espacios naturalmente reductivos en general.

Nota 3.14 (Ver [**Reg10**]). Si $M = G/H$ es un espacio normal homogéneo, entonces cualquier campo G-invariante pertenece al álgebra afín $\mathfrak{aff}(M, \nabla^c)$. En efecto, sea φ_t el flujo de un campo G-invariante, entonces $\varphi_t(p)$ es un punto fijo de H para todo $t \in \mathbb{R}$. Pero la isotropía no cambia a lo largo del conjunto de puntos fijos de H. Luego, la descomposición reductiva en $\varphi_t(p)$ es la misma para todo t, pues el complemento reductivo es siempre el mismo $\mathfrak{m} = \mathfrak{h}^\perp$. De este hecho sigue que φ_t es un difeomorfismo ∇^c-afín para todo t.

Nota 3.15. Es un hecho bien conocido que un difeomorfismo es afín (i.e. preserva alguna conexión) si manda geodésicas en geodésicas y preserva el tensor de torsión. Para una conexión canónica ∇^c en un espacio naturalmente reductivo M (simplemente conexo), cualquier isometría lineal $\ell : T_pM \to T_qM$ que mande la curvatura y torsión canónicas en p en los mismo objetos en q, se extiende a una transformación ∇^c-afín. Esto es porque la curvatura y la torsión canónicas son tensores ∇^c-paralelos (ver la Introducción).

3. Aplicaciones a espacios naturalmente reductivos no-compactos

3.1. La unicidad de la conexión canónica en el caso general. En este apartado demostramos un resultado de unicidad para la conexión canónica de un espacio naturalmente reductivo, sin asumir compacidad del espacio. Aunque ciertos hechos cruciales que se usaron para probar la unicidad en el caso compacto no valen si no se asume la compacidad (vale decir, el Teorema 3.4 que es también fundamental para probar el skew-torsion holonomy theorem), aún así es posible adaptar los argumentos del caso compacto al caso general.

TEOREMA 3.16. *Sea M un espacio naturalmente reductivo simplemente conexo e irreducible. Asumamos que M no es (globalmente) isométrico a una esfera, ni al espacio hiperbólico H^3, ni a un grupo de Lie con métrica bi-invariante o su dual simétrico. Entonces la conexión canónica en M es única.*

Notar que H^3 es, efectivamente, el dual simétrico del grupo de Lie Spin(3), el cual es isométrico a la esfera S^3. Sin embargo, lo incluimos en el enunciado, a pesar de que esto sea redundante, para enfatizar que el espacio hiperbólico H^n, con $n \neq 3$, el cual es el dual simétrico de la esferas S^n, satisface la propiedad de que conexión canónica es única (lo cual no es cierto para S^n).

Antes de pasar a la prueba del Teorema 3.16 probamos el siguiente lema.

LEMA 3.17. *Sea $M = G/H$ un espacio naturalmente reductivo. Si X es un campo G-invariante en M, entonces X es un campo de Killing.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $D = \nabla - \nabla^c$ el tensor diferencia entre la conexión de Levi-Civita ∇ y una conexión canónica ∇^c en M. Como X es G-invariante, se tiene que X es ∇^c-paralelo (pues una conexión canónica es G-invariante). Luego $\nabla X = DX$ es antisimétrica. Esto dice que X es un campo de Killing. □

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 3.16. Sean ∇^c y $\nabla^{c'}$ dos conexiones canónicas en M. Siguiendo los argumentos y la notación que utilizamos para el caso compacto tenemos una descomposición ortogonal

$$T_pM = \mathbb{V}_0 \oplus \mathbb{V}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{V}_k$$

y una descomposición de la isotropía

$$H := (\mathrm{Iso}_0(M)_p)_0 = H_0 \times H_1 \times \cdots \times H_k$$

tales que $H_1 \times \cdots \times H_k$ es el grupo generado por la 1-forma totalmente antisimétrica $\Theta = \nabla^{c'} - \nabla^c$ y además H_i actúa solamente en $\mathbb{V}_i$ y esta acción es irreducible si $i \geq 1$ con $\mathscr{C}_i(\mathfrak{h}_i) = \{0\}$. Es decir, estas descomposiciones satisfacen las hipótesis del Teorema 3.4. Observemos que no se puede usar este teorema, pues M no se asume compacta. Sin embargo, podemos utilizar otros argumentos para probar que la conclusión del Teorema 3.4 vale en este caso particular (es decir las descomposiciones anteriores resultan triviales). En efecto, asumamos como lo hicimos en la prueba del Teorema 3.4 que $k \geq 1$ y sea

$$H^1 = H_0 \times H_2 \times \cdots \times H_k.$$

Sea $\mathbb{V}^1 = \mathbb{W}_0 \oplus \mathbb{V}_1$ el conjunto de puntos fijos de H^1, en donde $\mathbb{W}_0$ es el conjunto de vectores fijos de H_0. Por el Lema 3.1 se tiene que la distribución G-invariante en M inducida por $\mathbb{V}^1$ es autoparalela. Sea $\mathscr{D}_0$ la distribución G-invariante y autoparalela inducida por $\mathbb{W}_0$. Probaremos, al igual que lo hicimos en el Teorema 3.4 que $\mathscr{D}_0$ es paralela a lo largo de $\mathscr{D}^1$.

Sea $S^1(p)$ la subvariedad integral conexa maximal de $\mathscr{D}^1$ que contiene a p, es decir, $S^1(p)$ es el conjunto de puntos fijos de H^1 en M (componente conexa). Como ya vimos antes, se tiene que $S^1(p)$ es una subvariedad homogénea bajo la acción del grupo

$$G^1(p) = \{g \in G : g(S^1(p)) \subset S^1(p)\} = \{g \in G : g \cdot p \in S^1(p)\}$$

(aquí denotamos por G el grupo de presentación de M como espacio naturalmente reductivo). Más aún, en nuestro caso particular, tenemos que la métrica en $S^1(p)$ es naturalmente reductiva, pues $S^1(p)$ es una subvariedad totalmente geodésica de M.

Sea $X \in \mathbb{W}_0$ y sea $\tilde{X}$ el campo $G^1(p)$-invariante en $S^1(p)$ tal que $\tilde{X}(p) = X$. Equivalentemente, $\tilde{X}$ puede ser visto como la restricción a $S^1(p)$ del campo G-invariante en M con condición inicial X. Por el Lema 3.17, $\tilde{X}$ es un campo de Killing y por consiguiente su derivada $\nabla\tilde{X}$ es antisimétrica. Luego, si $h \in H_1$ y $v \in \mathbb{W}_0 \oplus \mathbb{V}_1 \simeq T_pS^1(p)$, entonces

$$dh(\nabla\tilde{X}) = \nabla_{dh(v)}h_*(X) = \nabla_{dh}\tilde{X}.$$

Así, $(\nabla\tilde{X})_p$ conmuta con H_1 (vía la representación isotrópica) y por tanto deja invariantes $\mathbb{W}_0$ y $\mathbb{V}_1$. Como $\mathscr{C}_1(\mathfrak{h}_1) = \{0\}$, tenemos que $(\nabla\tilde{X})_p|_{\mathbb{V}_1} \equiv 0$. Esto implica que $\nabla_v\tilde{X} \in \mathbb{W}_0$ para todo $v \in \mathbb{W}_0 \oplus \mathbb{V}_1$. De esto sigue que $\mathscr{D}_0$ es paralela a lo largo de $\mathscr{D}^1$ y por tanto su distribución complementaria $\mathscr{D}_1$ también es paralela a lo largo de $\mathscr{D}^1$. Como $\mathscr{D}^1$ es autoparalela en M, sigue que $\mathscr{D}_1$ es autoparalela en M. Como $(\mathscr{D}_1)^\perp$ es también autoparalela en M, pues $(\mathscr{D}_1^\perp) = \mathbb{V}_0 \oplus \mathbb{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{V}_k$ es el conjunto de vectores fijos por H_1, sigue que M es localmente un producto, a menos que estas distribuciones sean triviales.

Finalmente, y al igual que en el caso compacto, se abren dos posibilidades:

1. $(\mathrm{Iso}_0(M)_p)_0 = H_0$ y $T_pM = \mathbb{V}_0$, o
2. $(\mathrm{Iso}_0(M)_p)_0 = H_1$ y $T_pM = \mathbb{V}_1$.

En el primer caso el grupo generado por $\Theta = \nabla^{c'} - \nabla^c$ resulta trivial y por tanto $\nabla^c = \nabla^{c'}$.

En el segundo caso se abren nuevamente dos posibilidades. Primero, si H_1 es transitivo en la esfera de T_pM, usando el skew-torsion holonomy theorem, se tiene que $H_1 = \mathrm{SO}(T_pM)$. Es estándar ver que en esta situación uno tiene que $M = S^n$ o $M = H^n$. Ver la Proposición 3.18 y la Nota 3.20 para excluir el espacio hiperbólico cuando $n \neq 3$. Por otro lado, si H_1 no es transitivo en la esfera, el skew-torsion holonomy theorem nos dice que H_1 actúa en T_pM como la representación adjunta de un grupo de Lie simple y compacto. Luego, si M es compacto, entonces M es isométrico a un grupo de Lie con métrica bi-invariante, por Proposición 6.4. Si M es no-compacto, no es difícil ver que M es un espacio simétrico (ver Nota 3.21). Si $\nabla^c \neq \nabla^{c'}$ uno tiene, tomando el dual simétrico, que M^* es isométrico a un grupo de Lie con métrica bi-invariante. En efecto, esto sigue de la correspondencia uno a uno entre las conexiones canónicas de M y las conexiones canónicas de M^* (ver Nota 3.22).

Esto completa la prueba del Teorema 3.16. □

PROPOSICIÓN 3.18. *El espacio hiperbólico real H^n admite una única descomposición naturalmente reductiva, la descomposición como par simétrico*

$$H^n = \mathrm{SO}_0(n+1,1)/\,\mathrm{SO}(n).$$

El siguiente lema es estándar y nos será muy útil en la prueba de la Proposición 3.18.

Lema 3.19. *Sea G un subgrupo de Lie de* $\mathrm{Iso}(H^n)$ *tal que G es transitivo en H^n. Supongamos que G no es semisimple y sea A un subgrupo de Lie abeliano y normal en G. Entonces A fija un único punto en el infinito o traslada una única geodésica.*

Demostración. Sea $\mathfrak{a}$ el álgebra de Lie de A y sea $X \in \mathfrak{a}$ un campo de Killing en H^n con flujo asociado φ_t^X. Es un hecho bien conocido para espacios de Hadamard que una de las siguientes tres posibilidades ocurre (ver por ejemplo [**Ebe96**]):

1. existe $p \in H^n$ tal que $X \cdot p = 0$;
2. existe $p \in H^n$ tal que $\varphi_t^X(p)$ es una geodésica;
3. existe $q_\infty \in S_\infty(H^n)$ tal que $\varphi_t^X(q_\infty) = q_\infty$.

Si (3.) vale y φ_t fija otro punto en el infinito, digamos $\tilde{q}_\infty$, entonces φ_t traslada la geodésica que une q_∞ con $\tilde{q}_\infty$. Como A es abeliano, entonces debe trasladar tal geodésica (pues A conmuta con el flujo de X). Notar que una isometría no trivial de H^n traslada a lo sumo una geodésica.

Si vale (2.), entonces φ_t traslada la geodésica dada por la curva integral por p. Por tanto A traslada esta única geodésica también.

Finalmente, si $X \cdot p = 0$ y $X \cdot q = 0$ para $q \neq p$ entonces φ_t^X fija la geodésica que une p con q y, por consiguiente, A lo hace. Si $X \cdot p = 0$ para un único $p \in H^n$, entonces $Y \cdot p = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{a}$. En efecto $\varphi_t^X(\varphi_s^Y(p)) = \varphi_s^Y(p)$, de donde sigue que $\varphi_s^Y(p) = p$. Luego $\mathfrak{a}$ es un ideal abeliano contenido en el álgebra de Lie de la isotropía, por tanto la acción de G en H^n no puede ser efectiva. Absurdo, pues G actúa por isometrías. $\square$

Demostración de la Proposición 3.18. Sea G un subgrupo de Lie conexo y transitivo de $\mathrm{Iso}(H^n)$ tal que $H^n = G/H$ es naturalmente reductivo. Si G es semisimple, es estándar probar que $G = \mathrm{Iso}_0(H^n) = \mathrm{SO}_0(n+1, 1)$. En efecto, sea K un subgrupo compacto maximal de G, entonces, por el teorema del punto fijo de Cartan, K tiene un punto fijo, digamos p. Podemos asumir que H es el subgrupo de isotropía en p. Luego, por maximalidad, $H = K$. Por lo tanto (G, H) es una presentación de H^n como par simétrico riemanniano efectivo, y consecuentemente $G = \mathrm{SO}_0(n+1, 1)$ (de lo contrario H^n tendría otra presentación como par simétrico).

Si G no es semisimple, entonces G tiene un subgrupo de Lie abeliano y normal A. Entonces A debe fijar un único punto del infinito o trasladar una única geodésica, por Lema 3.19. Si A traslada una única geodésica $\gamma(t)$, entonces G deja γ invariante, pues A es un subgrupo normal de G, y por ende G no puede ser transitivo, lo cual es absurdo. Por tanto, sea q_∞ el único punto en el infinito fijo por A, y sea $\mathscr{F}$ la foliación por horosferas centradas en q_∞. Luego A deja invariante $\mathscr{F}$ y por consiguiente G lo hace. Sea $p \in H^n$ y sea $\mathscr{F}_p$ la horosfera por p. Llamemos $\tilde{G}$ a la componente conexa de G que deja $\mathscr{F}_p$ invariante. Entonces $\tilde{G}$ es transitivo en $\mathscr{F}_p$. Luego, como H^n es naturalmente reductivo con respecto a la descomposición G/H, entonces cada horosfera debe ser totalmente geodésica, lo cual es absurdo. $\square$

Nota 3.20. Consideremos la esfera $S^n = \mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n)$. Entonces, para todo $n \neq 3$, la conexión de Levi-Civita es la única conexión canónica en S^n asociada a esta presentación naturalmente reductiva. En efecto, si ∇^c es otra conexión canónica en S^n asociada a dicha presentación, entonces el tensor diferencia $D = \nabla - \nabla^c$ induce una 3-forma $\mathrm{SO}(n+1)$-invariante $\omega(x, y, z) = \langle D_x y, z\rangle$. Como ω es invariante, ω es una 3-forma armónica en S^n (ver [**Hel78**]). Por la teoría de Hodge (ver por ejemplo [**War83**]), ω representa una clase no trivial de cohomología de orden 3 en S^n. Esto es una contradicción, a menos que $n = 3$.

Consecuentemente, sigue de la Proposición 3.18 que el espacio hiperbólico real H^n admite una única conexión canónica para cada $n \neq 3$. Si $n = 3$, entonces H^3 es el dual simétrico del grupo de Lie $S^3 \simeq \mathrm{Spin}(3)$, y por lo tanto tiene exactamente una recta de conexiones canónicas (ver Nota 3.8).

NOTA 3.21 (ver también [**WZ91**, Theorem 2.1]). Sea $M = G/H$ un espacio (fuertemente) isotrópicamente irreducible no-compacto. Si M es naturalmente reductivo, entonces M es un espacio simétrico de tipo no compacto. En efecto, primero notemos que G debe ser semisimple, en caso contrario, existe un ideal abeliano $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ (en donde $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie de G). Como G actúa efectivamente en M, uno tiene que $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{m} \neq \{0\}$, en donde $\mathfrak{m}$ es el complemento naturalmente reductivo del álgebra de isotropía, y por consiguiente $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{m}$ resulta $\mathrm{Ad}(H)$-invariante. Como M es isotrópicamente irreducible sigue que $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$ y así $\mathfrak{m}$ resulta abeliano. Esto implica que M es plana y por lo tanto isométrica al espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, salvo cubrimiento universal. En efecto, recordemos que la conexión de Levi-Civita de M está dada por un múltiplo del corchete de $\mathfrak{m}$. Luego, G es un grupo de Lie semisimple y H es compacto. Si H no es un subgrupo compacto maximal de G, entonces tomando un subgrupo compacto maximal K de G que contenga a H, tenemos que $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{k}$, en donde $\mathfrak{h}$ es el álgebra de Lie de H y $\mathfrak{k}$ es el álgebra de Lie de K. Luego $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{m}$ es $\mathrm{Ad}(H)$-invariante, lo cual contradice el hecho de que M es isotrópicamente irreducible, a menos que $\mathfrak{h} = \mathfrak{k}$. Luego (G, H) es un par simétrico y M es un espacio simétrico de tipo no-compacto.

NOTA 3.22. Sea $M = G/K$ un espacio simétrico con descomposición de Cartan asociada $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. Entonces existe una correspondencia biyectiva entre las conexiones canónicas en $M = G/K$ y las conexiones canónicas en el dual $M^* = G^*/K$. En efecto, supongamos que M admite una conexión canónica ∇^c asociada a una descomposición reductiva $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$. Sea $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{k} \oplus i\,\mathfrak{p}$, mirada como un subespacio de la complexificación $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ de $\mathfrak{g}$. Es claro que $\mathfrak{m}^*$ (el subespacio de $\mathfrak{g}^*$ inducido vía el isomorfismo canónico $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*$) es un subespacio $\mathrm{Ad}^*(K)$-invariante tal que las geodésicas por $p = eK$ están dadas por subgrupos monoparamétricos con velocidades iniciales en $\mathfrak{m}^*$. Luego ∇^c se corresponde a una única conexión canónica en M^* y viceversa.

3.2. El grupo de isometrías de un espacio naturalmente reductivo compacto (continuación). Sea $M = G/H$ un espacio naturalmente reductivo compacto y localmente irreducible, y sea ∇^c la conexión canónica en M asociada a la descomposición reductiva $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$. Supongamos que $M \neq S^n$, $M \neq \mathbb{R}P^n$. Entonces, por el Teorema 3.9, uno tiene que $\mathrm{Iso}_0(M) = \mathrm{Aff}_0(M, \nabla^c)$, en donde $\mathrm{Aff}_0(M, \nabla^c)$ es la componente conexa del grupo de transformaciones afines de la conexión canónica.

Usando el Lema 3.17 y algunos argumentos de [**Reg10**] se puede obtener la componente conexa del grupo de isometrías de M. En realidad, esto simplifica los argumentos usados en [**Reg10**].

En efecto, sea $\mathrm{Tr}(M, \nabla^c)$ el grupo de transvecciones de la conexión canónica, es decir, el subgrupo de Lie conexo de $\mathrm{Aff}(M, \nabla^c)$ con álgebra de Lie $\mathfrak{tr}(M, \nabla^c) = [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] + \mathfrak{m}$ (no es suma directa, en general). Observemos que $\mathrm{Tr}(M, \nabla^c)$ es un subgrupo normal de $\mathrm{Aff}_0(M,\nabla^c)$. Del mismo modo que se hizo en [**Reg10**, Proposition 4.2] para espacios normal homogéneos (ver también la Subsección 2.4 del presente capítulo), uno tiene que $G = \mathrm{Tr}(M,\nabla^c)$, pues $\mathrm{Iso}(M)$ es compacto y por ende G admite una métrica bi-invariante. En efecto, un ideal complementario de $\mathfrak{tr}(M,\nabla^c)$ en $\mathfrak{g}$ debe estar contenido en la isotropía, lo cual contradice el hecho de que la acción de G en M es efectiva.

Ahora, como G es un subgrupo normal de $\mathrm{Aff}_0(M,\nabla^c) = \mathrm{Iso}_0(M)$, uno puede escribir

$$\mathfrak{iso}(M) = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{b}$$

en donde $\mathfrak{b}$ es un ideal complementario a $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{iso}(M)$, con respecto a una métrica bi-invariante en $\mathrm{Iso}(M)$. Notemos que los elementos de $\mathfrak{b}$ son campos de Killing G-invariantes. Más aún, por el Lema 3.17, todo campo G-invariante es un campo de Killing (aunque no necesariamente pertenece a $\mathfrak{b}$).

Resumiendo, obtenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 3.23. *Sea $M = G/H$ un espacio naturalmente reductivo compacto. Supongamos que M es localmente irreducible y que no es globalmente isométrico a la esfera S^n ni al espacio proyectivo $\mathbb{R}P^n$. Entonces, la componente conexa del grupo de isometrías de M está dada por*

$$\mathrm{Iso}_0(M) = G_{\mathrm{ss}} \times K \qquad \textit{(producto casi directo),}$$

en donde G_{ss} es la parte semisimple de G y K es el subgrupo de Lie conexo de $\mathrm{Iso}(M)$ cuya álgebra de Lie consiste de los campos G-invariantes. En particular, $\mathrm{Iso}(M)$ es semisimple si y sólo si K es semisimple.

Usando la descomposición que nos da el teorema anterior, la misma prueba que en [**Reg10**, Theorem 1.4] demuestra el siguiente corolario.

COROLARIO 3.24. *Sea S_p la componente conexa por $p \in M$ de los puntos fijos de la isotropía $\mathrm{Iso}_0(M)_p$ en M. Entonces S_p es un toro (eventualmente trivial).*

Capítulo 4

Un teorema tipo-Berger para conexiones métricas con torsión antisimétrica

En la primera parte de este capítulo obtenemos un teorema tipo-Berger de holonomía, similar al teorema de holonomía de Berger, para conexiones métricas con torsión antisimétrica. Nuestro resultado principal, el Teorema 4.5, es un teorema general (no se asume ni siquiera homogeneidad del espacio) y vale tanto local, como globalmente. Informalmente, recordemos que un teorema tipo-Berger involucra ciertos grupos ortogonales Φ_X asociados a ciertos objetos (geométricos, algebraicos, etc.) X y modelos simétricos de dichos objetos. Un teorema tipo-Berger diría que si nuestro objeto X es irreducible y no es genérico (e.g., Φ_X no es transitivo en la esfera), entonces debe ser simétrico. En nuestro caso, los objetos X serán variedades riemannianas munidas de conexiones métricas con torsión antisimétrica y los objetos simétricos serán grupos de Lie con métrica bi-invariante munidos de una conexión canónica. Cabe aclarar que en nuestro teorema el grupo Φ_X no será el grupo de holonomía de la conexión con torsión en X (de hecho, estos objetos son interesantes aun en el caso plano) sino el grupo ortogonal generado por el tensor de torsión. Así, veremos que si $\{e\} \neq \Phi_X \neq \mathrm{SO}(n)$, en donde $n = \dim X$, entonces X es localmente un grupo de Lie con métrica bi-invariante.

En la segunda parte de este capítulo estudiamos las conexiones métricas no-genéricas con torsión antisimétrica en un grupo de Lie con métrica bi-invariante. Calculamos su grupo de holonomía y probamos que sólo hay dos conexiones métricas planas en un grupo de Lie (simple) con métrica bi-invariante, las llamadas conexiones $(\pm)$, cuyo tensor de torsión está dado por $T(X,Y) = \pm[X,Y]$

La referencia general para este capítulo es el artículo [**Reg11**].

1. El teorema tipo-Berger

Sean $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ una variedad riemanniana, ∇ la conexión de Levi-Civita de M y sea $\tilde{\nabla}$ una conexión métrica en M que tiene las mismas geodésicas que ∇. Sigue que el tensor diferencia

$$D = \nabla - \tilde{\nabla}$$

es totalmente antisimétrico, es decir $(X,Y,Z) \mapsto \langle D_X Y, Z\rangle$ define una 3-forma en M. Equivalentemente, se dice que $\tilde{\nabla}$ es una de las llamadas conexiones con torsión totalmente antisimétrica (ver Capítulo 1).

Dado $p \in M$, definimos $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(T_pM)$ como la subálgebra de Lie generada por los elementos de la forma

$$(\tau_c)_*(D_v) := (\tau_c)^{-1} \circ D_v,$$

donde τ_c denota el transporte paralelo (riemanniano) a lo largo de la curva c, con $c(0) = p$ y $v \in T_{c(1)}M$ (aquí $c : [0,1] \to M$ y v se mueven entre todas las curvas diferenciables a trozos que empiezan en p y todos los vectores tangentes en $c(1)$).

Sea H el subgrupo de Lie conexo de $\mathrm{SO}(T_pM)$ con álgebra de Lie $\mathfrak{h}$. Notemos que si M es conexa, entonces H no depende del punto p. Más precisamente, el grupo que se obtiene a partir de esta construcción en otro punto $q \in M$ es conjugado a H por transporte paralelo a lo largo de cualquier curva que una p con q.

Definición 4.1. Sea M una variedad riemanniana conexa, y sea $\tilde{\nabla}$ una conexión métrica en M con las mismas geodésicas que la conexión de Levi-Civita. Definimos el grupo $H(M, \tilde{\nabla})$ como el subgrupo ortogonal H construido en los párrafos anteriores (observemos que, al ser M conexa, hemos omitido el punto base p en la definición).

A continuación estudiaremos el grupo $H = H(M, \tilde{\nabla})$ desde un punto de vista holonómico, y las implicancias de sus propiedades en la geometría de M.

Antes que nada, observemos que si $g \in \mathrm{Hol}(\nabla)$, el grupo de holonomía de M, entonces $gHg^{-1} \subset H$. Luego,

$$\mathrm{Hol}(\nabla) \subset N(H),$$

en donde $N(H)$ es (la componente conexa de) el normalizador de H en el grupo ortogonal.

Lema 4.2. *Si H actúa irreduciblemente en T_pM, entonces $H = N(H)$. Como consecuencia, se tiene que* $\mathrm{Hol}(\nabla) \subset H$.

Demostración. Sea $p \in M$ tal que $D^p \neq 0$. Solamente tenemos que observar que si $\Theta = D^p$, entonces $[T_pM, \Theta, H]$ es un skew-torsion holonomy system irreducible. Luego, por el Lema 2.9 (ver también [**OR12a**, Lemma 3.4]) se tiene que H actúa en T_pM como una s-representación. Por lo tanto, $H = N(H)$, un hecho bien conocido sobre s-representaciones (ver Lema 1.7). □

Nota 4.3. Uno puede probar el Lema 4.2 directamente desde el skew-torsion holonomy theorem. En efecto, para ambos skew-torsion holonomy systems

$$[T_pM, \Theta, H] \qquad \text{y} \qquad [T_pM, \Theta, N(H)]$$

tenemos que $H = \mathrm{Ad}(G) = N(H)$, donde G es el grupo de Lie (simple) con álgebra de Lie $(T_pM, [\cdot,\cdot])$, con el corchete de Lie dado por $[v,w] = \Theta_v w$. Pero observemos que en la prueba del skew-torsion holonomy theorem se usa el hecho de que H actúa como una s-representación.

Nota 4.4. Notemos que si M es localmente irreducible, entonces H actúa irreduciblemente en T_pM. En efecto, esto se probará más adelante, en la demostración del Teorema 4.5. Sin embargo, H podría actuar irreduciblemente en T_pM incluso si M es localmente un producto (de variedades riemannianas).

Para dar un contraejemplo, consideremos en la esfera S^n una conexión canónica $\nabla^c \neq \nabla$ y sea $D = \nabla - \nabla^c$. En efecto, si $n = 6$ o $n = 7$ tenemos las conexiones canónicas asociadas a las descomposiciones naturalmente reductivas no estándares $S^6 = G_2/\mathrm{SU}(3)$ y $S^7 = \mathrm{Spin}(7)/G_2$ (ver Teorema 1.8). Consideremos en el producto $M = S^n \times S^n$ el tensor totalmente antisimétrico

$$\tilde{D}_{(v,w)}(v', w') = (D_v v' + D_w w', D_w(v' + w'))$$

y la correspondiente conexión $\tilde{\nabla}$ con torsión totalmente antisimétrica en M. No es difícil ver que $H = \mathrm{SO}(2n)$. Luego, la irreductibilidad de la acción de H no implica que M sea irreducible. En efecto, uno puede representar matricialmente

$$\tilde{D}_{(v,w)} = \begin{pmatrix} D_v & D_w \\ D_w & D_w \end{pmatrix}.$$

Luego, como M es un producto, el transporte paralelo τ_c a lo largo de una curva c se parte a lo largo de las curvas proyectadas c_1 y c_2. Así,

$$\begin{aligned}(\tau_c)_*(\tilde{D}_{(v,w)}) &= \begin{pmatrix} \tau_{c_1}^{-1} & 0 \\ 0 & \tau_{c_2}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_v & D_w \\ D_w & D_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_{c_1} & 0 \\ 0 & \tau_{c_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \tau_{c_1}^{-1} D_v \tau_{c_1} & \tau_{c_1}^{-1} D_w \tau_{c_2} \\ \tau_{c_2}^{-1} D_w \tau_{c_1} & \tau_{c_2}^{-1} D_w \tau_{c_2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

y esto implica que $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(2n)$.

TEOREMA 4.5. *Sea M una variedad riemanniana y sea $\tilde{\nabla}$ una conexión métrica en M con torsión totalmente antisimétrica $\tilde{T}$. Supongamos que M es simplemente conexa, completa e irreducible. Si $\{e\} \neq H(M, \tilde{\nabla}) \neq \mathrm{SO}(T_pM)$, entonces M es isométrica a un grupo de Lie con métrica bi-invariante o a su dual simétrico. Más aún, si $\tilde{T}$ es invariante, entonces $\tilde{\nabla}$ es una conexión canónica en M.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $p \in M$ tal que $D^p \neq 0$ y sea $\Theta = D^p$ el tensor diferencia evaluado en p. Denotemos $H = H(M, \tilde{\nabla})$ para simplificar notación. Entonces $[T_pM, \Theta, H]$ es un skew-torsion holonomy system irreducible y no-transitivo. En efecto, como M es irreducible, tenemos que $\mathrm{Hol}(\nabla)$ actúa irreduciblemente en T_pM, y por ende $N(H)$ actúa irreduciblemente en T_pM. Usando el skew-torsion holonomy theorem se tiene que $N(H)$ es un grupo de Lie simple. Como H es un subgrupo normal de $N(H)$, sigue que $H = N(H)$. Luego, el grupo de holonomía de M es no transitivo en la esfera y por consiguiente M es un espacio simétrico.

Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie $(T_pM, [\cdot,\cdot])$, en donde $[v, w] = \Theta_v w$, y sea G el grupo de Lie conexo con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Notemos que G es isomorfo a H vía la representación adjunta $\mathrm{Ad} : G \to H$ (cfr. Capítulo 2 y [**OR12a**]). Consideremos la métrica bi-invariante en H inducida por el producto escalar de T_pM.

Sea R el tensor de curvatura de M evaluado en p y sea $\tilde{R}$ el tensor de curvatura de H evaluado en $e \simeq p$. Observemos que tanto R como $\tilde{R}$ toman valores en el álgebra de Lie de H. Luego, $[T_pM, R, H]$ y $[T_pM, \tilde{R}, H]$ son dos sistemas holonómicos irreducibles y simétricos, en el sentido de Simons (pues tanto R como $\tilde{R}$ son tensores de curvatura de un espacio simétrico irreducible). Por tanto, sigue del Lema 1.13 (ver también [**Sim62, Olm05b**]) que $R = \lambda\tilde{R}$, para algún $\lambda \neq 0$. Tomando un múltiplo del corchete de Lie en $\mathfrak{h}$ podemos asumir que $\lambda = \pm 1$.

Si $\lambda = 1$, entonces por el teorema de Cartan-Ambrose-Hicks se tiene que la identidad $\mathrm{Id} : T_pM \to T_pM$ se extiende a una isometría de M sobre el cubrimiento universal de H. Por otro lado, si $\lambda = -1$, tomando el dual simétrico M^* de M, tenemos que $R^* = -R$. Luego, con el mismo argumento que antes, vemos que M^* es isométrico a un grupo de Lie con métrica bi-invariante.

Finalmente, fijemos una conexión canónica $\nabla^c \neq \nabla$ en M. Luego, por el skew-torsion holonomy theorem tenemos que $D = f(\nabla - \nabla^c)$, para alguna función diferenciable $f : M \to \mathbb{R}$. Notemos que la invariancia de $\tilde{T}$ implica que D es un tensor invariante. Luego, como ∇^c también es invariante, tenemos para todo $v \in T_qM$

$$0 = \nabla^c_v D = v(f)(\nabla - \nabla^c) + f(q)\nabla^c_v(\nabla - \nabla^c) = v(f)(\nabla - \nabla^c).$$

Luego $df = 0$, y por ende f es una función constante (pues se asume que M es conexa). Esto implica que $\tilde{\nabla}$ es una conexión canónica en M (ver Nota 3.8). □

La prueba del teorema anterior motiva el estudio de la familia de conexiones métricas con torsión totalmente antisimétrica de la forma $\nabla - fD$, en un grupo de Lie compacto G con métrica bi-invariante, donde $f : G \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable (en realidad, veremos más adelante que todas las conexiones métricas con torsión antisimétrica no-genéricas en G deben ser de esta forma). Esto es lo que haremos en la próxima sección.

2. El grupo de holonomía de conexiones métricas con torsión antisimétrica en grupos de Lie compactos

Sea M un grupo de Lie (simple y) compacto con métrica bi-invariante. Presentamos a M como un espacio simétrico $M = (G \times G)/\operatorname{diag}(G \times G)$. Denotaremos indistintamente la variedad riemanniana M por $(G \times G)/\operatorname{diag}(G \times G)$ o simplemente G. También identificamos, de manera natural, el grupo de holonomía de M con G. Recordemos que la familia de conexiones canónicas en M es la familia monoparamétrica asociada con los complementos naturalmente reductivos

$$\mathfrak{m}_\lambda = \{((\lambda+1)X, (\lambda-1)X) : X \in \mathfrak{g}\}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

En particular, $\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{p}$ en la descomposición de Cartan $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, y en este caso la correspondiente conexión canónica es la conexión de Levi-Civita de M.

Notación. En lo que resta de la sección denotaremos por ∇^λ la conexión canónica asociada a la descomposición reductiva

$$\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} = \operatorname{diag}(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{m}_\lambda.$$

El transporte ∇^λ-paralelo a lo largo de una curva c se denotará por τ^λ_c. En particular, $\nabla^0 = \nabla$ es la conexión de Levi-Civita de M.

Notemos que tanto ∇^1 como ∇^{-1} tienen holonomía trivial, es decir,

$$\mathfrak{hol}(\nabla^1) = \mathfrak{hol}(\nabla^{-1}) = \{0\}.$$

Más aún, estas son las conexiones canónicas que se obtienen de las presentaciones $M = G/\{e\}$, donde la acción de G en M está dada por multiplicación a izquierda o a derecha, respectivamente. Para todas las demás conexiones canónicas ∇^λ, con $\lambda \neq \pm 1$, se tiene que $\operatorname{Hol}(\nabla^\lambda) = \operatorname{diag}(G \times G) \simeq G$. En efecto, el grupo de holonomía de cualquier conexión canónica ∇^λ, con $\lambda \in \mathbb{R}$, coincide con la isotropía del grupo de transvecciones de ∇^λ. Pero el álgebra de Lie del grupo de transvecciones de ∇^λ está dada por $\mathfrak{tr}(\nabla^\lambda) = [\mathfrak{m}_\lambda, \mathfrak{m}_\lambda] + \mathfrak{m}_\lambda$ (no es suma directa, en general).

Por los resultados de la sección previa, tenemos que el grupo $H(M, \nabla^\lambda)$ asociado con el tensor diferencia $D = \nabla - \nabla^\lambda$, con $\lambda \neq 0$, coincide con G. En efecto, esto sigue del Teorema 4.5, donde probamos que $G \simeq H(M, \nabla^\lambda)$ (salvo cubrimiento universal).

Fijemos $\lambda \neq 0$ y consideremos el tensor diferencia $D = \nabla - \nabla^\lambda$. El objetivo de esta sección es estudiar el grupo de holonomía de la familia de conexiones métricas con torsión antisimétrica dada por

$$\tilde{\nabla}^f = \nabla - fD, \qquad f \in C^\infty(G),$$

es decir, cuyo tensor diferencia es igual a fD.

Antes que nada, observemos que si f es una función constante, entonces $\tilde{\nabla}^f$ es una conexión canónica (esto se debe al hecho de que en un grupo de Lie simple y compacto, existe sólo una recta afín de conexiones canónicas, ver Nota 3.8). En particular, para $f \equiv 0$ tenemos que $\tilde{\nabla}^0 = \nabla^0 = \nabla$, y para $f \equiv 1$ tenemos que $\tilde{\nabla}^1 = \nabla^\lambda$. Remarquemos el caso espacial en el que $\nabla^\lambda = \nabla^{\pm 1}$ es una conexión canónica plana. En este caso, la simetría geodésica manda ∇^λ en la conexión canónica plana opuesta, respecto de la conexión de Levi-Civita, $\nabla^{-\lambda} = \nabla^{\mp 1}$ (pues la simetría geodésica invierte el signo del tensor diferencia, ver Teorema 3.9 o también [**OR12a**, Theorem 1.1]).

Sea $c(t)$ una curva en en M con $c(0) = p$, y denotemos por τ_t (resp. τ_t^λ) el transporte ∇-paralelo (resp. ∇^λ-paralelo) a lo largo de $c|_{[0,t]}$.

LEMA 4.6. *Se tiene que $\tau_{-t}^\lambda \tau_t$, para t pequeño, es un subgrupo (local) monoparamétrico de $H(M, \nabla^\lambda) \simeq G$.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, probemos que la curva $\alpha(t) = \tau_{-t}^\lambda \tau_t \in \mathrm{SO}(T_pM)$ es siempre tangente a $H_p(M, \nabla^\lambda) \simeq H(M, \nabla^\lambda)$. Sea $v \in T_pM$ y sea $v(t) = \tau_t(v)$ el transporte paralelo de v a lo largo de $c(t)$. Claramente se tiene que

$$\nabla^\lambda_{c'(t)} v(t) = -D_{c'(t)} v(t) = -D_{c'(t)} \tau_t(v).$$

Por otro lado,

$$\nabla^\lambda_{c'(t)} v(t) = \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_0 \tau_t^\lambda \tau_{-(t+s)}^\lambda \tau_{t+s}(v) = \tau_t^\lambda \frac{d}{dt} \tau_{-t}^\lambda \tau_t(v).$$

Luego,

$$\frac{d}{dt} \tau_{-t}^\lambda \tau_t = -\tau_{-t}^\lambda D_{c'(t)} \tau_t = -\tau_{-t}^\lambda \tau_t (\tau_{-t} D_{\gamma'(t)} \tau_t) = -\tau_{-t}^\lambda \tau_t D_{c'(0)},$$

pues D es un tensor ∇-paralelo. Esta ecuación diferencial tiene solución única

$$\alpha(t) = \tau_{-t}^\lambda \tau_t = e^{-tD_{c'(0)}}$$

la cual es siempre tangente a $H(M, \nabla^\lambda)$. Finalmente, es obvio que $\alpha(t)$ es un subgrupo monoparamétrico de $H(M, \nabla^\lambda)$ lo cual concluye la prueba del lema. $\square$

Se tiene un resultado similar para la familia de conexiones $\tilde{\nabla}^f$, con $f \in C^\infty(G)$. Denotemos por $\tilde{\tau}_t^f$ el transporte $\tilde{\nabla}^f$-paralelo a lo largo de $c|_{[0,t]}$.

COROLARIO 4.7. *Se tiene que $\tilde{\tau}_{-t}^f \tau_t \in H(M, \nabla^\lambda)$ para todo t. En particular, se tiene que $\mathrm{Hol}(\tilde{\nabla}^f) \subset G$.*

DEMOSTRACIÓN. Con el mismo argumento que usamos en la demostración del lema previo, uno obtiene la siguiente ecuación diferencial,

$$\frac{d}{dt} \tilde{\tau}_{-t}^f \tau_t = -f(c(t)) \tilde{\tau}_{-t}^f \tau_t D_{c'(0)},$$

la cual tiene solución única

$$\tilde{\tau}_{-t}^f \tau_t = e^{-F(t) D_{c'(0)}},$$

donde $F(t) = \int_0^t f(c(s))\, ds$. $\square$

Notemos que $\tilde{\tau}_{-t}^f \tau_t$ no es un subgrupo monoparamétrico de $H(M, \nabla^\lambda)$, a menos, por supuesto, que f sea constante.

Nota 4.8. Como ∇ y $\tilde{\nabla}^f$ tienen las mismas geodésicas, cualquier transformación $\tilde{\nabla}^f$-afín resulta ∇-afín, pues manda geodésicas en geodésicas y ∇ es sin torsión. Como M es compacta, esto implica que cualquier transformación $\tilde{\nabla}^f$-afín en la componente conexa de la identidad es una isometría de M (ver [**Reg10**, Lemma 3.6]). Es decir,

$$\mathrm{Aff}_0(\tilde{\nabla}^f) \subset \mathrm{Iso}_0(M) \subset \mathrm{Iso}(M).$$

En particular, para cada $\varphi \in \mathrm{Aff}_0(\tilde{\nabla}^f)$, se tiene

$$fD = \varphi_*(fD) = (f \circ \varphi)D,$$

pues φ preserva el tensor de torsión de $\tilde{\nabla}^f$ y $\mathrm{Aff}_0(\nabla^\lambda) = \mathrm{Iso}_0(M)$ (ver Teorema 3.9). Esto da una obstrucción al tamaño del grupo afín de $\tilde{\nabla}^f$ cuando f no es una función constante.

Corolario 4.9. *Si $\mathrm{Aff}_0(\tilde{\nabla}^f)$ es transitivo en M, entonces $\tilde{\nabla}^f$ es una conexión canónica en M.*

Demostración. Sigue directamente de la nota previa. En efecto, si $\mathrm{Aff}_0(\tilde{\nabla}^f)$ es transitivo en M, entonces f resultaría invariante por un grupo transitivo de isometrías, y por lo tanto debe ser constante. $\square$

En el caso de una conexión métrica plana con torsión antisimétrica uno puede decir todavía más.

Teorema 4.10. *Sea M una variedad riemanniana completa, simplemente conexa e irreducible. Sea $\tilde{\nabla}$ una conexión métrica en M con las mismas geodésicas que la conexión de Levi-Civita. Si $M \neq S^7$ y $\tilde{\nabla}$ es plana (es decir, $\tilde{R} = 0$), entonces M es un grupo de Lie con métrica bi-invariante y $\tilde{\nabla} = \nabla^{\pm 1}$ es una conexión canónica en M.*

Como asumimos que $M \neq S^7$, sigue de un resultado de Cartan-Schouten [**CS26, AF10**] que M es un grupo de Lie con métrica bi-invariante. Luego, podemos mantener la notación que hemos usado a lo largo de esta sección. Antes de dar la prueba del Teorema 4.10 necesitamos las siguientes observaciones.

Nota 4.11. Sean $X, Y \in \mathfrak{m}_\lambda$ y $\tilde{X}, \tilde{Y}$ los campos de Killing inducidos por X, Y con condiciones iniciales $\tilde{X}(p) = X$, $\tilde{Y}(p) = Y$, en donde hemos identificado T_pM con $\mathfrak{m}_\lambda$ de la manera usual. Como ya hemos observado antes, la conexión de Levi-Civita ∇ y la conexión canónica ∇^λ están dadas por

$$(\nabla_{\tilde{X}}\tilde{Y})_p = \frac{1}{2}[\tilde{X}, \tilde{Y}]_p \simeq -\frac{1}{2}[X, Y]_{\mathfrak{m}_\lambda}$$

y

$$(\nabla^\lambda_{\tilde{X}}\tilde{Y})_p = [\tilde{X}, \tilde{Y}]_p \simeq -[X, Y]_{\mathfrak{m}_\lambda}.$$

Ver, por ejemplo, Capítulo 3 y [**Reg10**]. Teniendo en cuenta estas fórmulas, no es difícil probar que la relación entre los tensores diferencia $D^\lambda = \nabla - \nabla^\lambda$ y $D^\mu = \nabla - \nabla^\mu$ está dada por

$$\frac{\mu}{\lambda} D^\lambda = D^\mu, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0.$$

En particular, para todo $\lambda \neq 0$, obtenemos las dos conexiones canónicas planas con $D^{\pm 1} = \pm\frac{1}{\lambda} D^\lambda$.

Nota 4.12. Sea $\tilde{\nabla}^f = \nabla - fD$. A continuación damos una fórmula explícita para el tensor de curvatura $\tilde{R}^f$ de $\tilde{\nabla}^f$ en coordenadas locales x_i. Abusando de la notación, denotaremos los campos coordenados por $i = \partial/\partial x_i$. No es difícil chequear que la expresión para la curvatura de $\tilde{\nabla}^f$ en estas coordenadas es

$$\tilde{R}^f_{i,j} = R_{i,j} + f^2[D_i, D_j] + f\left([\nabla_j, D_i] - [\nabla_i, D_j]\right) + \frac{\partial f}{\partial x_j}D_i - \frac{\partial f}{\partial x_i}D_j,$$

donde $[\nabla_j, D_i]k = \nabla_j(D_ik) - D_i(\nabla_jk)$. Usando el hecho de que existen dos conexiones canónicas planas, con $f \equiv \pm\frac{1}{\lambda}$, se obtiene que

$$[\nabla_j, D_i] - [\nabla_i, D_j] = 0.$$

Luego la fórmula anterior se simplifica a

$$\tilde{R}^f_{i,j} = R_{i,j} + f^2[D_i, D_j] + \frac{\partial f}{\partial x_j}D_i - \frac{\partial f}{\partial x_i}D_j.$$

Demostración del Teorema 4.10. Para cada $p \in G$ consideramos la subálgebra de Lie $\mathfrak{h}_p \subset \mathfrak{so}(\mathfrak{g})$ definida por $\mathfrak{h}_p = \mathrm{span}\{\tilde{D}_v : v \in T_pG\}$ (span algebraico), con las identificaciones usuales.

Si $\mathfrak{h}_p \neq \mathfrak{so}(\mathfrak{g})$ para todo $p \in G$, entonces $\tilde{D}$ es un múltiplo escalar de D en cada punto (esto es consecuencia del skew-torsion holonomy theorem) y por lo tanto $\tilde{\nabla} = \tilde{\nabla}^f$ para alguna $f \in C^\infty(G)$. Por otro lado, si existe $p \in G$ tal que $\mathfrak{h}_p = \mathfrak{so}(\mathfrak{g})$ entonces G tiene curvaturas seccionales constantes (ver [**AF10**]) y debe ser una esfera, $\tilde{G} = \mathrm{Spin}(3) = S^3$. Pero, en el caso 3-dimensional, sólo existe una 3-forma algebraica, salvo múltiplos escalares. Luego, también se tiene que $\tilde{\nabla} = \tilde{\nabla}^f$ para alguna $f \in C^\infty(G)$.

Por consiguiente, podemos asumir que $\tilde{\nabla}$ es de la forma $\tilde{\nabla} = \tilde{\nabla}^f$ para alguna $f \in C^\infty(G)$.

Ahora, la nota previa nos da un sistema (no lineal) de ecuaciones en derivadas parciales para una conexión plana con torsión antisimétrica $\tilde{\nabla}^f$,

$$0 = R_{i,j} + f^2[D_i, D_j] + \frac{\partial f}{\partial x_j}D_i - \frac{\partial f}{\partial x_i}D_j, \qquad i \neq j. \tag{4.1}$$

Si probamos que el sistema 4.1 no admite soluciones no-constantes, entonces habremos probado que $\tilde{\nabla}^f$ es una conexión canónica. Como sabemos que existen dos soluciones constantes $f \equiv \pm\frac{1}{\lambda}$ para el sistema 4.1, obtenemos que $R_{i,j} = -\frac{1}{\lambda^2}[D_i, D_j]$, y la ecuación anterior se convierte en

$$0 = \left(f^2 - \frac{1}{\lambda^2}\right)[D_i, D_j] + \frac{\partial f}{\partial x_j}D_i - \frac{\partial f}{\partial x_i}D_j.$$

Ahora, como D induce un corchete de Lie ortogonal en cada espacio tangente (nuevamente, por el skew-torsion holonomy theorem), siempre podemos elegir una pareja de índices i, j tal que D_i, D_j y $[D_i, D_j]$ sea un conjunto linealmente independiente (localmente). Luego, $f^2 - \frac{1}{\lambda^2} \equiv 0$ y por lo tanto $f \equiv \pm\frac{1}{\lambda}$. □

A continuación, y para terminar este capítulo, probamos que el grupo de holonomía de una conexión métrica no-genérica, con torsión antisimétrica, $\tilde{\nabla}$ en G, coincide con la holonomía riemanniana.

Teorema 4.13. *Sea $\tilde{\nabla}$ una conexión métrica con torsión antisimétrica en G. Si $\tilde{\nabla}$ no es plana y $H(G, \tilde{\nabla}) \neq \mathrm{SO}(\mathfrak{g})$, entonces* $\mathrm{Hol}(\tilde{\nabla}) = G$.

Demostración. Como $H(G,\tilde{\nabla}) \neq \mathrm{SO}(\mathfrak{g})$ podemos asumir que $\tilde{\nabla} = \tilde{\nabla}^f$ para alguna $f \in C^\infty(G)$. En efecto, esto está hecho en la prueba del Teorema 4.10. Como $\tilde{\nabla}$ no es plana, por el Teorema 4.10, se tiene que $\tilde{\nabla}^f \neq \nabla^{\pm 1}$.

Sea $p \in G$ tal que $|f(p)| \neq 1$ y $\operatorname{grad}(f)_p \neq 0$. Consideremos coordenadas locales x_i como en la Nota 4.12. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $\partial/\partial x_1 = \operatorname{grad}(f)$ es el campo gradiente de f cerca de p y que los campos coordenados $\partial/\partial x_i$ son ortogonales en p. Luego, la aplicación lineal $\tilde{R}^f_{1,\cdot} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{hol}(\tilde{\nabla}^f)$ es inyectiva restringida al subespacio ortogonal a $\operatorname{grad}(f)_p$. En efecto, por los cálculos anteriores, tenemos que

$$\tilde{R}^f_{1,j}|_p = \left(f(p)^2 - \frac{1}{\lambda^2}\right)[D_1, D_j]_p - \|\operatorname{grad}(f)_p\|^2 D_j|_p.$$

Como D induce un álgebra de Lie ortogonal, $[D_1, D_j]$ es ortogonal a D_j en p. Entonces $\tilde{R}^f_{1,j} \neq 0$ para todo $j \geq 2$, y por consiguiente $\dim \mathfrak{hol}(\tilde{\nabla}^f) \geq (\dim \mathfrak{g}) - 1$. Si fuera $\dim \mathfrak{hol}(\tilde{\nabla}^f) = (\dim \mathfrak{g}) - 1$, entonces $\mathfrak{hol}(\tilde{\nabla}^f)$ sería un ideal de 1 de $\mathfrak{g}$, lo cual es absurdo. Luego, $\mathfrak{hol}(\tilde{\nabla}^f) = \mathfrak{hol}(\nabla) = \mathfrak{g}$.

Finalmente, la componente conexa de $\mathrm{Hol}(\tilde{\nabla}^f)$ coincide con $G = \mathrm{Hol}(\nabla)$. Por el Corolario 4.7 sigue que $\mathrm{Hol}(\tilde{\nabla}^f)$ es conexo y coincide con G. □

Capítulo 5

El índice de simetría de una variedad riemanniana

En este capítulo introducimos un invariante geométrico llamado el índice de simetría, el cual mide, en cierto sentido, qué tan lejos está una variedad riemanniana de ser un espacio simétrico. El índice de simetría tiene asociada una foliación llamada foliación de simetría, cuyas hojas son subvariedades totalmente geodésicas simétricas del espacio ambiente, en donde cualquier objeto geométrico del espacio resulta paralelo.

En la primera sección del presente capítulo damos la definición formal del índice de simetría, distribución de simetría, etc., de una variedad riemanniana así como algunos resultados estructurales. En la segunda sección calculamos el índice de simetría de un espacio normal homogéneo compacto. Más aún, probamos que, en el caso no-simétrico, la distribución de simetría está dada por la distribución definida por los puntos fijos de las isotropías. Finalmente, en la última parte del capítulo extendemos el resultado anterior, usando la llamada forma de Kostant, a un espacio naturalmente reductivo compacto, no-simétrico, presentado por el grupo de transvecciones de la conexión canónica.

Los resultados de este capítulo se basan en el artículo [**ORT12**].

1. El índice de simetría

Sea M una variedad riemanniana y denotemos por $\mathscr{K}(M)$ el álgebra de Lie de campos de Killing globales en M. Dado $q \in M$, definimos el *subespacio de Cartan* $\mathfrak{p}^q$ en q por

$$\mathfrak{p}^q := \{X \in \mathscr{K}(M) : (\nabla X)_q = 0\}.$$

El *álgebra de isotropía simétrica* en q se define por

$$\mathfrak{k}^q = \{[X, Y] : X, Y \in \mathfrak{p}^q\}.$$

Observemos que $\mathfrak{k}^q$ está contenida en el álgebra total de isotropía $\mathscr{K}_q(M)$. En efecto, si $X, Y \in \mathfrak{p}^q$, entonces $[X, Y]_q = (\nabla_X Y)_q - (\nabla_Y X)_q = 0$. Más aún, como $\mathfrak{p}^q$ es invariante por la isotropía en q, se tiene que

$$\mathfrak{g}^q := \mathfrak{k}^q \oplus \mathfrak{p}^q$$

es un álgebra de Lie involutiva.

Nota 5.1. Si $X \in \mathfrak{p}^q$, entonces $\gamma(t) = \mathrm{Exp}(tX) \cdot q$ es una geodésica. Más aún, el transporte paralelo a lo largo de $\gamma(t)$ está dado por $dL_{\mathrm{Exp}(tX)}|_q$, en donde $dL_g(x) = g \cdot x$. En efecto, para cualquier campo de Killing X en M se tiene

$$\tau_{-t} \circ dL_{\mathrm{Exp}(tX)}|_q = e^{t(\nabla X)_q} \in \mathfrak{so}(T_q M),$$

en donde τ_t denota el transporte paralelo a lo largo de $\gamma(t)$ (cfr. [**BCO03**, pág. 163] y [**OS95**]).

Sea G^q el subgrupo de Lie conexo de $\mathrm{Iso}(M)$ con álgebra de Lie $\mathfrak{g}^q$. Por la nota anterior tenemos que $G^q \cdot q$ es una subvariedad totalmente geodésica de M. Observemos también que $G^{g \cdot q} = gG^q g^{-1}$ y que $G^x = G^q$ para todo $x \in G^q \cdot q$.

El *subespacio simétrico* $\mathfrak{s}_q$ en q se define por

$$\mathfrak{s}_q := \mathfrak{p}^q \cdot q = \{X \cdot q : X \in \mathfrak{p}^q\}.$$

Definición 5.2. El *índice de simetría* $i_{\mathfrak{s}}(M)$ de M se define como

$$i_{\mathfrak{s}}(M) = \operatorname*{ínf}_{q \in M} \dim \mathfrak{s}_q.$$

Observemos que $L(q) := G^q \cdot q$ coincide con $\exp(\mathfrak{s}_q)$. Más aún, para todo $x \in G^q \cdot q$, se tiene que $T_x(G^q \cdot q) = \mathfrak{s}_x$. Luego, la subvariedad totalmente geodésica $L(q)$ es la hoja de la distribución, a priori no necesariamente suave (y eventualmente singular), $p \mapsto \mathfrak{s}_p$, $p \in M$. Decimos que $\mathfrak{s}$ es la *distribución de simetría* de M. La foliación $\mathscr{L}$ cuya hoja por q es $L(q)$ es llamada la *foliación de simetría* de M. Notemos que $L(q)$ es un espacio localmente simétrico cuyo grupo de transvecciones es G^q, módulo elementos que actúan trivialmente en $L(q)$ (enseguida veremos que la acción de G^q en $L(q)$ es casi efectiva si M es compacta). Más aún, por [**EO94**], se tiene $L(q)$ es un espacio globalmente simétrico (ver Lemma 5 en esta referencia).

Lema 5.3. *Si M es compacta, entonces G^q actúa casi efectivamente en $L(q)$ para todo $q \in M$.*

Demostración. Como M es compacta, el grupo de isometrías de M es también compacto. Sea $(\cdot, \cdot)$ un producto interno $\mathrm{Ad}(\mathrm{Iso}(M))$-invariante en álgebra de Lie de $\mathrm{Iso}(M)$. Sea $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^q$ el ideal correspondiente al subgrupo normal H de G^q que actúa trivialmente en $L(q)$. Sea $Z \in \mathfrak{h}$. Sigue que $[Z, \mathfrak{p}^q] \subset \mathfrak{p}^q$, pues la isotropía en q deja invariante el subespacio de Cartan. Por otro lado, como H actúa trivialmente en $\mathfrak{s}_q = T_q(L(q))$, uno tiene que $[Z, X]_q = 0$ para todo $X \in \mathfrak{p}^q$. Luego $[Z, \mathfrak{p}^q] = \{0\}$. Por lo tanto, si $X, Y \in \mathfrak{k}^q$, entonces $(Z, [X, Y]) = ([Z, X], Y)$. Luego Z es perpendicular a $\mathfrak{k}^q = [\mathfrak{p}^q, \mathfrak{p}^q]$ y por ende $\mathfrak{h} = \{0\}$. □

Identifiquemos $T_q(L(q)) = \mathfrak{s}_q \simeq \mathfrak{p}^q$ y descompongamos $\mathfrak{p}^q = \mathfrak{p}^q_0 \oplus \mathfrak{p}^q_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{p}^q_s$ en donde $\mathfrak{p}^q_0$ corresponde al factor euclídeo y $\mathfrak{p}^q_i$, $i \geq 1$, corresponde al i-ésimo factor irreducible en la descomposición de de Rham de $L(q)$. Para $j = 0, 1, \ldots, s$ definimos $\mathfrak{k}^q_j = [\mathfrak{p}^q_j, \mathfrak{p}^q_j]$ y $\mathfrak{g}^q_j = \mathfrak{k}^q_j \oplus \mathfrak{p}^q_j$. Se tiene el siguiente resultado.

Corolario 5.4. *Si M es compacta, entonces $\mathfrak{k}^q_0 = \{0\}$, $[\mathfrak{g}^q_i, \mathfrak{g}^q_j] = \{0\}$ si $i \neq j$, y por ende $\mathfrak{g}^q$ es la suma directa de los ideales $\mathfrak{g}^q_0, \mathfrak{g}^q_1, \ldots, \mathfrak{g}^q_s$. En otras palabras,*

$$G^q = G^q_0 \times G^q_1 \times \cdots \times G^q_s \qquad \text{(producto casi directo),}$$

en donde G^q_i es el subgrupo de Lie de G^q con álgebra de Lie $\mathfrak{g}^q_i$.

Siguiendo la notación del corolario anterior definimos

$$L_i(q) := G^q_i \cdot q, \qquad i = 0, 1, \ldots, s$$

y lo llamamos *i-ésimo factor de de Rham* por q de $L(q)$. Más generalmente, si $J \subset \{0, 1, \ldots, s\}$ llamamos

$$G^q_J := \prod_{j \in J} G^q_j.$$

La órbita $L_J(q) = G^q_J \cdot q$ es llamada un *factor local* por q de $L(q)$.

Sea

$$\tilde{G}^q = \{g \in \mathrm{Iso}(M) : g \cdot L(q) = L(q)\}_0.$$

Si $g \in \tilde{G}^q$, entonces $G^q = G^{g \cdot q} = gG^q g^{-1}$. Luego, G^q es un subgrupo normal de $\tilde{G}^q$. Llamemos

$$\bar{H}^q = \{g \in \mathrm{Iso}(M) : g \text{ actúa trivialmente en } L(q)\}_0$$

y observemos que $\bar{H}^q$ también es un subgrupo normal de $\tilde{G}^q$.

Lema 5.5. $\tilde{G}^q = G^q \times \bar{H}^q$ *(producto casi directo).*

Demostración. Por Lema 5.3, tenemos que $G^q \cap \bar{H}^q$ es discreto. Sea X un campo de Killing inducido por $\tilde{G}^q$. Se tiene que $X|_{L(q)}$ es un campo de Killing intrínseco de $L(q)$ el cual debe ser acotado. Luego $X|_{L(q)}$ yace en el álgebra de Lie del grupo de transvecciones (intrínsecas) de $L(q)$. Por tanto, existe un campo de Killing $Y \in \mathfrak{g}^q$ tal que $Y|_{L(q)} = X|_{L(q)}$. Así, $Z = Y - X$ es idénticamente nulo restringido a la hoja $L(q)$. Esto implica la descomposición deseada. □

Uno puede hacer una construcción similar trabajando con un factor local. En efecto, si $J \subset \{0, 1, \dots, s\}$ denotemos

$$\tilde{G}^q_J = \{g \in \mathrm{Iso}(M) : g \cdot L_J(q) = L_J(q)\}_0. \tag{5.1}$$

Razonando como antes, se tiene que G^q_J es un subgrupo normal de $\tilde{G}^q_J$. Sea

$$\bar{H}^q = \{g \in \mathrm{Iso}(M) : g \text{ actúa trivialmente en } L_J(q)\}_0.$$

También se tiene que $\bar{H}^q_J$ es un subgrupo normal de $\tilde{G}^q_J$. Observemos que G^q_i actúa trivialmente en $L_J(q)$ para todo $i \notin J$. Luego, por el Lema 5.5 se tiene

$$\bar{H}^q_J = \bar{H}^q \times \hat{G}^q_J$$

en donde

$$\hat{G}^q_J = \prod_{i \notin J} G^q_i.$$

Se tiene además que

$$\tilde{G}^q_J = G^q_J \times \bar{H}^q_J \qquad \text{(producto casi directo)}. \tag{5.2}$$

Observemos que $\mathrm{Iso}(M)_q \subset \tilde{G}^q_J$, pues la isotropía total deja invariante el factor local $L_J(q)$. Luego

$$\mathfrak{iso}(M)_q = \mathfrak{k}^q_J \oplus \bar{\mathfrak{h}}^q_J \qquad \text{(suma directa de ideales)}. \tag{5.3}$$

en donde

$$\bar{\mathfrak{h}}^q_J = \mathrm{Lie}(\bar{H}^q_J) \qquad \text{y} \qquad \mathfrak{k}^q_J = \bigoplus_{j \in J} \mathfrak{k}^q_j.$$

1.1. La fórmula del corchete. Recordemos la llamada fórmula de Koszul, la cual nos da la conexión de Levi-Civita de M en términos de la métrica riemanniana y el corchete de Lie: dados tres campos cualesquiera X, Y, Z en M, vale

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle &= X\langle Y, Z\rangle + Y\langle X, Z\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\ &\quad + \langle [X, Y], Z\rangle - \langle [X, Z], Y\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle. \end{aligned}$$

Supongamos ahora que X, Y, Z son campos de Killing. Como el flujo de un campo de Killing preserva el tensor métrico, la derivada de Lie de la métrica a lo largo de dicho campo de Killing es cero. Luego

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle [X, Y], Z\rangle + \langle Y, [X, Z]\rangle,$$

y lo mismo vale si uno permuta X, Y, Z. Usando estas relaciones en la fórmula de Koszul, se obtiene la bien conocida fórmula para la conexión de Levi-Civita en términos de campos de Killing:

$$2\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \langle [X, Y], Z\rangle + \langle [X, Z], Y\rangle + \langle [Y, Z], X\rangle.$$

Suponiendo además que Y es paralelo en q se obtiene

$$\langle [X, Y], Z\rangle_q + \langle [X, Z], Y\rangle_q + \langle [Y, Z], X\rangle_q = 0.$$

PROPOSICIÓN 5.6. *Sea M una variedad riemanniana homogénea y sea $\mathscr{L}$ su foliación de simetría. Supongamos que la métrica de M se proyecta al cociente $M/\mathscr{L}$.*[1] *Sea $q \in M$ y sea X un campo de Killing paralelo en q (observar que $X(q) \in T_q(L(q))$, donde $L(q)$ es el elemento de $\mathscr{L}$ que contiene a q). Sean ξ, η campos de Killing en M tales que su restricción a $L(q)$ es siempre perpendicular a $L(q)$. Entonces*

$$\langle [\xi, X], \eta\rangle_q = -\frac{1}{2}\langle X, [\xi, \eta]\rangle_q.$$

DEMOSTRACIÓN. En la igualdad previa a la proposición renombramos Y por X, X por ξ y Z por η. Se obtiene

$$\langle [\xi, X], \eta\rangle_q + \langle [\xi, \eta], X\rangle_q + \langle [X, \eta], \xi\rangle_q = 0. \tag{5.4}$$

Ahora observemos que

$$0 = X(q)\langle \xi, \eta\rangle = \langle \nabla_X \xi, \eta\rangle_q + \langle \xi, \nabla_X \eta\rangle_q, \tag{5.5}$$

pues la métrica de M se proyecta al cociente y por ende $\langle \xi, \eta\rangle$ debe ser constante a lo largo de la curva integral de X por q (observar que los campos de Killing son proyectables, pues su flujo preserva la foliación de simetría).

Como ∇ es sin torsión y $(\nabla X)_q = 0$, se tiene que $(\nabla_X \xi)_q = [X, \xi]_q$ y $(\nabla_X \eta)_q = [X, \eta]_q$. Luego, por la igualdad 5.5 se tiene que $\langle [X, \xi], \eta\rangle_q + \langle \xi, [X, \eta]\rangle_q = 0$. Finalmente, usando la igualdad 5.4 se obtiene la fórmula deseada. □

NOTA 5.7. La Proposición 5.6 sigue valiendo si uno reemplaza $\mathscr{L}$ por $\mathscr{L}_i$, en donde $\mathscr{L}_i$ es la foliación cuyas hojas son $L_i(x)$. Si $i > 0$, el cociente $M/\mathscr{L}_i$ es una variedad pues las hojas de $\mathscr{L}_i$ son compactas y por ende órbitas de un grupo de Lie compacto.

Concluimos esta sección con un resultado elemental y bien conocido sobre álgebras de Lie que nos será muy útil en lo que queda del capítulo.

LEMA 5.8. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie (real) y sea Q una forma bilineal simétrica* Ad*-invariante en $\mathfrak{g}$. Supongamos que $\mathfrak{g}$ se descompone como suma directa de ideales $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ en donde $\mathfrak{g}_1$ es semisimple. Entonces tal descomposición debe ser ortogonal con respecto a Q, es decir $Q(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2) = 0$. Más aún, si $\mathfrak{g}_1$ es simple, entonces la restricción $Q|_{\mathfrak{g}_1}$ de Q a $\mathfrak{g}_1$ debe ser un múltiplo escalar de la forma de Killing de $\mathfrak{g}_1$.*

[1] Sólo localmente, pues $M/\mathscr{L}$ podría no ser una variedad si las hojas de $\mathscr{L}$ no son subvariedades cerradas.

Demostración. Sean $X', X'' \in \mathfrak{g}_1$ y sea $Y \in \mathfrak{g}_2$. Si $X = [X', X'']$, un cálculo estándar nos da

$$Q(X,Y) = Q([X',X''],Y) = -Q(X'',[X',Y]) = -Q(X'',0) = 0.$$

Como $\mathfrak{g}_1$ es semisimple se tiene que $\mathfrak{g}_1 = [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1]$ (i.e., $\mathfrak{g}_1$ está linealmente generada por elementos de la forma $X = [X', X'']$) y por ende $Q(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2) = 0$.

Si además suponemos que $\mathfrak{g}_1$ es simple, es bien conocido que el Lema de Schur implica que $Q|_{\mathfrak{g}_1}$ deber ser un múltiplo de la forma de Killing de $\mathfrak{g}_1$. □

2. El índice de simetría de un espacio normal homogéneo

El objetivo de esta sección es probar el siguiente teorema.

Teorema 5.9. *Sea $M = G/H$ un espacio normal homogéneo compacto y simplemente conexo, con G conexo. Supongamos que M es una variedad riemanniana irreducible que no es un espacio simétrico. Entonces la distribución de simetría de M coincide con la distribución G-invariante definida por los vectores fijos de H en $T_{eH}M$ (vía la representación isotrópica).*

Es fácil ver que uno puede debilitar un poco las hipótesis del Teorema 5.9. En efecto, nosotros haremos la prueba de este teorema en el siguiente caso un poco más general.

Hipótesis. *En lo que resta de la sección supondremos que $M = G/H$ es un espacio normal homogéneo compacto, localmente irreducible y no localmente simétrico. Supondremos también que G es compacto y conexo, y que H es conexo.*

Si el subgrupo de isotropía H, digamos en q, tiene vectores fijos no nulos en T_qM, entonces la componente conexa del grupo de isometrías $\mathrm{Iso}_0(M)$ es en general más grande que G. Si $G \subsetneq \mathrm{Iso}_0(M)$ entonces la métrica en M no es normal homogénea con respecto a la presentación $M = \mathrm{Iso}(M)/\mathrm{Iso}(M)_q$. En caso contrario, el grupo de transvecciones de la conexión canónica coincidiría con $\mathrm{Iso}_0(M)$. Lo cual es absurdo (ver [**Reg10**, Proposition 4.2]).

Una transvección X en q, es decir un campo de Killing que es paralelo en q, no puede pertenecer al álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G. En efecto, como seguirá de nuestro resultado principal, X nunca está en $\mathfrak{g}$ (a menos que los vectores fijos de H coincidan con $T_q(G_{\mathrm{ab}} \cdot q)$, en donde G_{ab} es la parte abeliana de G).

Al ser M homogénea, la distribución de simetría $x \mapsto \mathfrak{s}_x$ es G-invariante y por ende diferenciable y no-singular. En particular $i_{\mathfrak{s}}(M) = \dim \mathfrak{s}_q$. Observemos también que $\mathfrak{p}^{g \cdot q} = \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{p}^q$ y $\mathfrak{k}^{g \cdot q} = \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{k}^q$.

Lema 5.10. *Sea $\Sigma(q)$ la componente conexa por q de los puntos fijos de H en M, o, equivalentemente, la subvariedad integral por q de la distribución $\mathscr{D}$ de vectores fijos de las isotropías. Entonces $\Sigma(q)$ es un factor local de $L(q)$.*

Demostración. Por el Teorema 3.23 del Capítulo 3 (ver también [**Reg10**]) uno tiene que la componente conexa del grupo total de isometrías de M es

$$\mathrm{Iso}_0(M) = G_{\mathrm{ss}} \times K \qquad \text{(producto casi directo)}$$

en donde G_{ss} es la parte semisimple de G y los campos de Killing inducidos por K son los campos G-invariantes (un campo G invariante está unívocamente determinado por un vector en $\mathscr{D}_q$). Luego el flujo de cualquier campo de Killing inducido por K preserva la distribución (autoparalela) de vectores fijos de las isotropías $\mathscr{D}$.

Observemos que G_{ss} también preserva $\mathscr{D}$, pues G lo hace. Luego $\mathrm{Iso}_0(M)$ preserva $\mathscr{D}$. En particular, $\mathscr{D}|_{L(q)}$ es preservada por el grupo de transvecciones $G^q \subset \mathrm{Iso}_0(M)$ de la hoja $L(q)$. Por tanto $\mathscr{D}|_{L(q)}$ es una distribución paralela de $L(q)$, la cual debe contener al factor plano, por el Lema 5.11. Esto implica la afirmación. □

Lema 5.11. *Sea $L_0(q) = G_0^q \cdot q$ el factor plano de $L(q)$. Entonces $T_q(L_0(q))$ está incluido en el conjunto de vectores fijos de H en T_qM.*

Demostración. Sea X un campo de Killing inducido por H. Entonces X es acotado, pues M es compacta. El grupo monoparamétrico de isometrías asociado a X debe dejar invariante la hoja $L_0(q)$. Luego, $X|_{L_0(q)}$ es siempre tangente a $L_0(q)$. Como X es acotado y $L_0(q)$ es plana, sigue que $X|_{L_0(q)}$ debe ser paralelo. Como $X(q) = 0$, entonces $X|_{L_0(q)} \equiv 0$. La afirmación sigue pues H es conexo. □

Lema 5.12. *Sea $L_i(q)$ un factor de de Rham por q de $L(q)$ el cual es perpendicular en q al factor $\Sigma(q)$. Entonces $\mathfrak{g}_i^q \subset \mathfrak{g}$. En otras palabras, si X es una transvección en q que pertenece a $\mathfrak{g}_i^q$, entonces $X \in \mathfrak{g}$.*

Notemos que el hecho de que $L_i(q)$ sea perpendicular a $\Sigma(q)$ es equivalente, por Lema 5.10 y Lema 5.11, a que $L_i(q)$ no esté contenido en $\Sigma(q)$. Además, en estas condiciones se tiene que $i \geq 1$, por Lema 5.11.

Demostración del Lema 5.12. Tenemos que $\mathrm{Iso}_0(M) = G_{\mathrm{ss}} \times \tilde{\Sigma}$ (producto casi directo), en donde $\tilde{\Sigma}$ es $\Sigma(q)$ pero mirado como grupo de Lie. En efecto, los campos de Killing en M inducidos por $\Sigma(q)$ son los campos G-invariantes, los cuales están determinados por su condición inicial, es decir, un vector en $T_q(\Sigma(q))$. Sea $\tilde{\Sigma}_{\mathrm{ss}}$ la parte semisimple del grupo de Lie $\tilde{\Sigma}$. Necesitaremos el siguiente resultado auxiliar.

Sub-Lema. *$\tilde{\Sigma}_{\mathrm{ss}} \subset G_J^q$, en donde $J = \{j \in \{1, \dots, s\} : L_j(q) \subset \Sigma_{\mathrm{ss}}(q)\}$ y $\Sigma_{\mathrm{ss}}(q)$ es el factor local semisimple del espacio simétrico $\Sigma(q)$.*

Demostración. Se tiene que $\tilde{\Sigma}_{\mathrm{ss}}$ es un subgrupo normal semisimple de

$$\tilde{G}_J^q = G_J^q \times \bar{H}_J^q \qquad \text{(producto casi directo)},$$

pues $\tilde{\Sigma}_{\mathrm{ss}}$ deja invariante $\Sigma_{\mathrm{ss}}(q)$ y es un subgrupo normal de $\mathrm{Iso}(M)$. Luego, es suficiente probar que $\tilde{\Sigma}_{\mathrm{ss}} \cap \bar{H}_J^q$ es discreto. En efecto, si X pertenece al álgebra de Lie de $\tilde{\Sigma}_{\mathrm{ss}} \cap \bar{H}_J^q$, entonces $X(q) = 0$, pues $\bar{H}_J^q$ está contenido en la isotropía total $\mathrm{Iso}(M)_q$. Pero un campo de Killing en el álgebra de Lie de $\tilde{\Sigma}_{\mathrm{ss}} \subset \tilde{\Sigma}$ está completamente determinado por su valor en q. Luego $X = 0$ y por ende $\tilde{\Sigma}_{\mathrm{ss}} \subset G_J^q$ (estamos usando aquí que $\tilde{\Sigma}_{\mathrm{ss}}$ no tiene parte abeliana, pues $0 \notin J$). □

Continuamos con la prueba del Lema 5.12. Por el sub-lema anterior tenemos que $\tilde{\Sigma}_{\mathrm{ss}} \subset G_J^q$. Llamemos $\mathfrak{g}_J^q$ al álgebra de Lie de G_J^q. Como $[\mathfrak{g}_i^q, \mathfrak{g}_J^q] = \{0\}$ y $\mathfrak{g}_i^q \cap \mathfrak{g}_J^q = \{0\}$, uno tiene que $[\mathfrak{g}_i^q, \mathrm{Lie}(\tilde{\Sigma}_{\mathrm{ss}})] = \{0\}$ y $\mathfrak{g}_i^q \cap \mathrm{Lie}(\tilde{\Sigma}_{\mathrm{ss}}) = 0$. Esto implica que

$$\mathfrak{g}_i^q \subset \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}} \oplus \mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathrm{Lie}(\tilde{\Sigma}_{\mathrm{ss}}) = \mathfrak{iso}(M)$$

(suma directa de ideales), en donde $\mathfrak{a}$ es el álgebra de Lie abeliana asociada a la parte plana de $\tilde{\Sigma}$ y $\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$ es el álgebra de Lie de G_{ss}. Luego, como $\mathfrak{g}_i^q$ es semisimple, se debe tener $\mathfrak{g}_i^q \subset \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}} \subset \mathfrak{g}$. Esto completa la prueba del lema. □

Sea X una transvección en q que yace en $\mathfrak{g}_i^q$, en donde el factor de de Rham $L_i(q) = G_i^q \cdot q$ es perpendicular al factor local Σ de $L(q)$. Por el Lema 5.12 tenemos que X pertenece al álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G.

Denotemos por $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ la descomposición reductiva de M. Como es $M = G/H$ es normal homogénea, $\mathfrak{m} = \mathfrak{h}^\perp$ es el complemento ortogonal con respecto a un producto interno $\mathrm{Ad}(G)$-invariante en $\mathfrak{g}$.

Ahora tomemos $Y \in \mathfrak{m}$ tal que $Y \cdot q = \frac{1}{2} X \cdot q$. Recordemos que la aplicación lineal de $\mathfrak{m}$ en sí mismo, $U \mapsto [W, U]$ es antisimétrica para todo $W \in \mathfrak{m}$. Observemos también que un elemento $\xi \in \mathfrak{m}$, mirado como campo de Killing $x \mapsto \xi \cdot x$, que es perpendicular a $L(q)$ en q, es siempre perpendicular a $L(q)$ (esto está hecho en la Nota 5.18 y lo mismo vale si reemplazamos $L(q)$ por $L_i(q)$). Luego, dados $\xi, \eta \in \mathfrak{m}$ dos elementos arbitrarios, perpendiculares a $L_i(q)$ en q en q, se tiene

$$\langle [\xi, Y], \eta \rangle_q = -\langle Y, [\xi, \eta] \rangle_q.$$

Luego, por Proposición 5.6 se obtiene que $Z = X - Y$ satisface

$$\langle [\xi, Z], \eta \rangle_q = 0$$

y esto implica que Z, mirado en el cociente $M/\mathscr{L}_i$ de M por la foliación $\mathscr{L}_i$, es idénticamente nula (pues sus dos condiciones iniciales son nulas). Recordemos que el cociente $M/\mathscr{L}_i$ se puede mirar globalmente, pues las hojas $L_i(x)$ de $\mathscr{L}_i$ son compactas. Luego, el campo de Killing Z en M es siempre tangente a la foliación $\mathscr{L}_i$. Notemos que $Z \cdot q$ es un vector arbitrario en $T_q(L_i(q))$, pues $Z \cdot q = \frac{1}{2} X \cdot q$. Más aún, el mismo argumento nos dice que siempre existe un campo de Killing, siempre tangente a las hojas de $\mathscr{L}_i$ y con una condición inicial arbitraria en $T_x(L_i(x))$ para cada x fijo en M.

Consideremos el ideal $\hat{\mathfrak{g}}_i$ de $\mathfrak{g}$ de los campos de Killing que son siempre tangentes a las hojas de $\mathscr{L}_i$ (observar que $\hat{\mathfrak{g}}_i$ es no trivial por lo que acabamos de observar en el párrafo anterior). Sea $\hat{G}_i$ el subgrupo normal de G asociado a $\hat{\mathfrak{g}}_i$. Como observamos antes, las órbitas de $\hat{G}_i$ son las hojas $L_i(x)$ de la foliación $\mathscr{L}_i$. Sea G_i' el subgrupo de G asociado al ideal complementario $\mathfrak{g}_i' := (\hat{\mathfrak{g}}_i)^\perp$ de $\hat{\mathfrak{g}}_i$ en $\mathfrak{g}$. Se tiene que

$$G = \hat{G}_i \times G_i' \qquad \text{(producto casi directo)}$$

y que G_i' actúa transitivamente en el cociente $M/\mathscr{L}_i = \mathrm{Iso}_0(M)/\tilde{G}_i^q$. Aquí denotamos $\tilde{G}_i^q = \tilde{G}_{\{i\}}^q$, de acuerdo a la notación dada en 5.1.

Sea $Z \in \hat{\mathfrak{g}}_i$ tal que Z se anula idénticamente en $L_i(x)$ para algún $x \in M$. Si $y \in M$, entonces existe $g' \in G_i'$ tal que $g' \cdot L_i(x) = L_i(y)$, pues G_i' actúa transitivamente en $M/\mathscr{L}_i$. Podemos asumir, reemplazando x por otro elemento en $L_i(x)$, que $g' \cdot x = y$. Luego

$$Z \cdot y = Z \cdot (g' \cdot x) = dm_{g'}(\mathrm{Ad}((g')^{-1})Z) \cdot x = dm_{g'}(Z \cdot x) = 0,$$

en donde m denota la acción de G en M. Esto prueba que el campo de Killing asociado a Z se anula idénticamente en M. Luego, $Z = 0$.

LEMA 5.13. *Se tiene que el subgrupo normal $\hat{G}_i$ de G está contenido en el grupo de transvecciones G_i^x del espacio simétrico $L_i(x)$, para todo $x \in M$.*

DEMOSTRACIÓN. Dado $x \in M$ se tiene que

$$\hat{G}_i \subset \tilde{G}_i^q = G_i^q \times \bar{H}_i^q \qquad \text{(producto casi directo)},$$

pues $\hat{G}_i$ deja invariante cualquier hoja de $\mathscr{L}_i$. Se tiene que $\hat{G}_i \cap \bar{H}_i^q$ es discreto. Si así no fuera, entonces existe $Z \in \hat{\mathfrak{g}}_i$ el cual se anula idénticamente en $L_i(x)$ y por tanto, como observamos antes $Z = 0$. La prueba del lema se concluye observando que $\hat{G}_i$ es un subgrupo normal de $\tilde{G}_i^x$ y que G_i^q es semisimple. □

La siguiente proposición es crucial para la prueba del Teorema 5.9. Aquí se usa fuertemente la hipótesis $i_{\mathfrak{s}}(M) < \dim M$, es decir, que M no es un espacio simétrico.

PROPOSICIÓN 5.14. *El espacio localmente simétrico (irreducible) $L_i(x)$ es de tipo grupo. Más precisamente, $G_i^x = K \times K$ (producto casi directo), en donde K es un grupo de Lie simple de tipo compacto. Más aún, $\hat{G}_i$ coincide con uno de los factores K.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que $\hat{G}_i = G_i^x$. Notemos que si X es una transvección en x con $X \in \mathfrak{p}_i^x \subset \mathfrak{g}_i^x$, entonces X yace en $\hat{\mathfrak{g}}_i$. Sean $X_1, \ldots, X_r \in \mathfrak{p}_i^x$ (i.e., transvecciones en x) tales que $X_1 \cdot x, \ldots, X_r \cdot x$ forman una base de $T_x(L_i(x))$. Entonces $X_1, \ldots, X_r$ es una trivialización local de la distribución $\mathfrak{s}_i$ de los espacios tangentes de la foliación $\mathscr{L}_i$. Como $X_1, \ldots, X_r$ son paralelos en x, concluimos que la distribución $\mathfrak{s}_i$ es paralela en x. Al ser x arbitrario en M, se tiene que la distribución (no trivial) $\mathfrak{s}_i$ es paralela en M y por ende M es localmente un producto, ya que $\dim \mathfrak{s}_i < \dim M$ al no ser M un espacio simétrico. Una contradicción.

Luego $\hat{G}_i$ es un subgrupo normal, propio, no trivial de G_i^x. Al ser $L_i(x)$ un espacio localmente simétrico irreducible, el grupo de isometrías G_i^x de $L_i(x)$ deber ser semisimple. Pero este grupo no puede ser simple, pues admite un subgrupo normal propio y no trivial. Luego $L_i(x)$ debe ser de tipo grupo y $G_i^x = K \times K$ con K simple (pues $L_i(x)$ es irreducible). □

NOTA 5.15. Se tiene que $L_i(x)$ es un grupo de Lie con métrica bi-invariante. En efecto, se tiene que $L_i(x)$ es un espacio globalmente simétrico (esto se prueba con el mismo argumento con el que probamos que $L(x)$ es un espacio globalmente simétrico, ver [**EO94**]). Luego por el Lema 6.3 se concluye que $L_i(x)$ es un grupo de Lie con métrica bi-invariante.

NOTA 5.16. Aquí mostramos cómo identificamos las multiplicaciones a izquierda y a derecha en $L_i(x)$. Fijemos $x \in M$. Sea $\Psi_x : \hat{\mathfrak{g}}_i \to \mathfrak{g}_i'$ definida como sigue. Dado $X \in \hat{\mathfrak{g}}_i$, $\Psi_x(X)$ es el único elemento en $\mathfrak{g}_i'$ tal que $\Psi_x(X) \cdot x = -X \cdot x$. Se tiene que $\Psi_x : \hat{\mathfrak{g}}_i \to \Psi_x(\hat{\mathfrak{g}}_i)$ es un isomorfismo de álgebras de Lie, para cada $x \in M$. Más aún, $\mathfrak{g}_i^x = \hat{\mathfrak{g}}_i \oplus \Psi_x(\hat{\mathfrak{g}}_i)$ y

$$\mathfrak{k}_i^x = \{X + \Psi_x(X) : X \in \hat{\mathfrak{g}}_i\} =: \mathrm{diag}(\hat{\mathfrak{g}} \oplus \Psi_x(\hat{\mathfrak{g}}_i)).$$

En lo que sigue identificaremos $\mathfrak{g}_i^x \simeq \hat{\mathfrak{g}}_i \oplus \hat{\mathfrak{g}}_i$ de esta manera.

Sea $\mathfrak{h}'$ el ideal de la subálgebra de isotropía $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ que consiste de todos los campos de Killing inducidos por G que se anulan idénticamente en la hoja $L_i(q)$. Por el Lema 5.12, se tiene que $\mathfrak{k}_i^q \subset \mathfrak{h}$. Más aún, con los mismos argumentos que en 5.3, para el caso en el que $\mathfrak{h}$ es el álgebra total de isotropía, se descompone

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{k}_i^q \qquad \text{(suma directa de ideales)}.$$

Como $\mathfrak{k}_i^q$ es simple, por Lema 5.8, la descomposición anterior debe ser ortogonal con respecto al producto interno $\mathrm{Ad}(G)$-invariante $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en $\mathfrak{g}$ (o, más generalmente, con respecto a cualquier forma bilineal simétrica $\mathrm{Ad}(G)$-invariante en $\mathfrak{g}$).

Como $\mathfrak{h}' \subset \bar{\mathfrak{h}}_i^q$ y $\bar{\mathfrak{h}}_i^q$ es un ideal de $\tilde{\mathfrak{g}}_i^q$, se tiene que $\mathfrak{h}'$ es también un ideal de $\mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{g}_i^q$. Como $\mathfrak{g}_i^q$ es semisimple, nuevamente por Lema 5.8, esta descomposición debe ser ortogonal.

Por otro lado, la descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{k}_i^q \oplus \mathfrak{m}$ también es ortogonal. Por ende, se tiene que $(\mathfrak{k}_i^q)^\perp \cap \mathfrak{g}_i^q \subset \mathfrak{m}$.

Definimos los siguientes subespacios complementarios de $\mathfrak{m}$:

$$\mathfrak{m}_{i,1}^q := (\mathfrak{k}_i^q)^\perp \cap \mathfrak{g}_i^q \subset \mathfrak{m} \qquad \text{y} \qquad \mathfrak{m}_{i,2}^q := (\mathfrak{m}_{i,1})^\perp \cap \mathfrak{m}.$$

Siguiendo la notación del la Proposición 5.14 y la Nota 5.16, tenemos que la descomposición $\mathfrak{g}_i^q = \hat{\mathfrak{g}}_i \oplus \hat{\mathfrak{g}}_i$, en donde el primer sumando es mirado como un ideal de $\mathfrak{g}$ y el segundo como una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}_i'$, debe ser ortogonal (también por Lema 5.8). Más aún, tomando un múltiplo positivo del producto interno $\mathrm{Ad}(G)$-invariante $\langle\cdot,\cdot\rangle$ en $\mathfrak{g}$, podemos asumir que la restricción de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a $\mathfrak{g}_i^q = \hat{\mathfrak{g}}_i \oplus \hat{\mathfrak{g}}_i$ tiene la forma

$$\langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathfrak{g}_i^q} = B \oplus \lambda B$$

para algún $\lambda > 0$, en donde B es menos la forma de Killing de $\hat{\mathfrak{g}}_i$.

Con esta notación y estas identificaciones se tiene

$$\mathfrak{k}_i^q = \{(v,v) : v \in \hat{\mathfrak{g}}_i\}, \qquad \mathfrak{p}_i^q = \left\{\left(\frac{1}{2}v, -\frac{1}{2}v\right) : v \in \hat{\mathfrak{g}}_i\right\}$$

y

$$\mathfrak{m}_{1,i}^q = \left\{\left(\frac{-\lambda}{1+\lambda}v, \frac{1}{1+\lambda}v\right) : v \in \hat{\mathfrak{g}}_i\right\}.$$

Observar que con estas identificaciones, si $X = (u,v) \in \mathfrak{g}_i^q$, se tiene

$$X \cdot q = (u,v)\cdot q = (u-v)\cdot q.$$

Sea $a = \frac{1}{2}(\lambda - 1)$. Entonces para todo $v \in \hat{\mathfrak{g}}_i$ se tiene que

$$\left(\left(\frac{1}{2}+a\right)v, -\frac{1}{2}v\right) \in \mathfrak{m}_{i,1}^q.$$

En efecto, si $(w,w) \in \mathfrak{k}_i^q$, entonces

$$\begin{aligned}\left\langle (w,w), \left(\left(\frac{1}{2}+a\right)v, -\frac{1}{2}v\right)\right\rangle &= \left\langle w, \left(\frac{1}{2}+a\right)v\right\rangle + \lambda\left\langle w, -\frac{1}{2}v\right\rangle \\ &= \left(\frac{1}{2}+a-\frac{\lambda}{2}\right)\langle w,v\rangle \\ &= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\lambda-1)-\frac{\lambda}{2}\right)\langle w,v\rangle = 0.\end{aligned}$$

Notemos además que

$$\left(\left(\frac{1}{2}+a\right)v, -\frac{1}{2}v\right)\cdot q = (1+a)v\cdot q.$$

Es claro también que, identificando $\mathfrak{m} \simeq T_qM$ de la manera usual, se tiene

$$\mathfrak{m}_{i,2}^q \simeq (T_q(L_i(q)))^\perp.$$

Sean ahora $\xi, \eta \in \mathfrak{m}_{i,2}^q$. Como observamos antes, los campos de Killing en M inducidos por ξ y η son siempre perpendiculares a $L_i(q)$. Si $X = (\frac{1}{2}v, -\frac{1}{2}v) \in \mathfrak{p}_i^q$ es una transvección en q, entonces, por Proposición 5.6, tenemos que

$$\langle [\xi, X], \eta \rangle_q = -\frac{1}{2} \langle X, [\xi, \eta] \rangle_q.$$

Como $\hat{\mathfrak{g}}_i$ es un ideal de $\mathfrak{g}$ sigue que

$$\langle [\xi, (av, 0)], \eta \rangle_q = 0.$$

Luego, si $Y = X + (av, 0)$, entonces

$$\langle [\xi, Y], \eta \rangle_q = \langle [\xi, X], \eta \rangle_q = -\frac{1}{2} \langle X, [\xi, \eta] \rangle_q = \langle X \cdot q, [\xi, \eta] \cdot q \rangle.$$

Como $X \cdot q = \frac{1}{1+a} Y \cdot q$, la igualdad anterior nos lleva a

$$\langle [\xi, Y], \eta \rangle_q = -\frac{1}{2(1+a)} \langle Y \cdot q, [\xi, \eta] \cdot q \rangle.$$

Por otro lado, ya que $Y \in \mathfrak{m}^q_{i,1} \subset \mathfrak{m}$ y M es normal homogénea, se debe tener

$$\langle [\xi, Y], \eta \rangle_q = -\langle Y \cdot q, [\xi, \eta] \cdot q \rangle.$$

Por ende, o bien $\frac{1}{2(1+a)} = 1$, o bien $\mathfrak{m}^q_{i,1}$ es perpendicular a $[\mathfrak{m}^q_{i,2}, \mathfrak{m}^q_{i,2}]_{\mathfrak{m}}$. En el primer caso, se obtiene

$$1 = \frac{1}{2(1 + \frac{1}{2}(\lambda - 1))} = \frac{1}{1 + \lambda},$$

lo cual es absurdo, pues $\lambda > 0$. En el segundo caso se obtiene que la distribución $(\mathfrak{s}_i)^{\perp}$ es integrable, y por lo tanto totalmente geodésica. Esto también es una contradicción (ver Nota 5.17).

Demostración del Teorema 5.9. Sigue de la discusión anterior que no puede existir ninguna transvección en q perpendicular en q a los vectores fijos de la isotropía. Esto completa la prueba del Teorema 5.9. $\square$

Nota 5.17. Denotemos por $\tilde{\xi}$ el campo de Killing en M inducido por ξ, el cual está dado por $\tilde{\xi}_x = \xi \cdot x$ (y lo mismo para η). Tenemos que $[\xi, \eta]_{\mathfrak{m}} \in \mathfrak{m}^q_{i,2}$ y queremos probar que $[\tilde{\xi}, \tilde{\eta}]$ yace en la distribución $(\mathfrak{s}_i)^{\perp}$. Observemos que si $q' = g \cdot q$ y $\bar{\xi}, \bar{\eta}$ son los campos invariantes a derecha en G tales que $\bar{\xi}_e = \xi_e$ y $\bar{\eta}_e = \eta_e$, entonces $\tilde{\xi}_{q'} = d\pi(\bar{\xi}_g), \tilde{\eta}_{q'} = d\pi(\bar{\eta}_q)$ y $[\tilde{\xi}, \tilde{\eta}]_{q'} = d\pi([\bar{\xi}, \bar{\eta}]_g)$, pues $[\bar{\xi}, \bar{\eta}]$ es invariante a derecha, Aquí denotamos $\pi : G \to M = G/H$ la proyección al cociente.

Por otro lado, podemos identificar $T_{q'}M$ con $\mathrm{Ad}(g^{-1})\mathfrak{m}$ vía $Z \mapsto Z \cdot q'$. Notemos que la isotropía en q' es $\mathrm{Ad}(g^{-1})\mathfrak{h}$ y $(\mathfrak{s}_i)^{\perp}_{q'} = (\mathrm{Ad}(g^{-1})\mathfrak{m}^q_{i,2}) \cdot q'$. Luego

$$\begin{aligned}
[\tilde{\xi}, \tilde{\eta}]_{q'} &= d\pi([\bar{\xi}, \bar{\eta}]_g) = d\pi(dR_g[\bar{\xi}, \bar{\eta}]_e) \\
&= -d\pi(dR_g[\xi, \eta]_e) = -d\pi(dL_g \,\mathrm{Ad}(g^{-1})[\xi, \eta]_e) \\
&= -dL_g d\pi(\mathrm{Ad}(g^{-1})[\xi, \eta]_e) \in (\mathfrak{s}_i)^{\perp}_{q'},
\end{aligned}$$

en donde, por abuso de notación, hemos denotado por L_g la multiplicación a izquierda por g tanto en G como en M. Por consiguiente, $(\mathfrak{s}_i)^{\perp}$ es integrable y autoparalela. Esto implica que M es localmente un producto, lo cual es absurdo.

Nota 5.18. Sea $\xi \in \mathfrak{m}$ tal que el campo de Killing $\tilde{\xi}$ definido por $\tilde{\xi}_x = \xi \cdot x$ es perpendicular a $L(q)$ en q. Notemos que $T_x(L(q)) = \mathfrak{s}_x$ para todo $x \in L(q)$. Sea $\mathfrak{m}_0 \subset \mathfrak{m}$ el subespacio tal que $\mathfrak{s}_q = \mathfrak{m}_0 \cdot q$. Como la distribución de simetría es G-invariante, tenemos que $s_{q'} = (\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{m}_0) \cdot q'$, en donde $g \in G$ y $q' = g \cdot q$. Ahora,

$\tilde{\xi}_{q'} = (\mathrm{Ad}(g)\xi) \cdot q'$ es perpendicular a $\mathfrak{s}_{q'}$. Como g es arbitrario, se concluye que si $\tilde{\xi}$ es perpendicular a $L(q)$ en q, entonces es siempre perpendicular a $L(q)$.

3. El caso naturalmente reductivo

El Teorema 5.9 no tiene por qué valer en el caso en que $M = G/H$ es un espacio naturalmente reductivo con descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$. Como vimos en la sección anterior, fue crucial el hecho de que G admitiera una métrica bi-invariante tal que $\mathfrak{m} = \mathfrak{h}^{\perp}$. Esto deja de cumplirse si M no es normal homogénea. Sin embargo, si G es el grupo de transvecciones de la conexión canónica de M, es decir $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$, un famoso resultado de Kostant [**Kos56**] nos asegura que existe una forma bilineal simétrica, no-degenerada, $\mathrm{Ad}(G)$-invariante en $\mathfrak{g}$ (no necesariamente definida positiva) tal que

$$Q(\mathfrak{h}, \mathfrak{m}) = 0, \qquad Q|_{\mathfrak{m}} = \langle \cdot, \cdot \rangle,$$

en donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el tensor métrico de M en $T_{eH}M \simeq \mathfrak{m}$. En particular $Q|_{\mathfrak{h}}$ es no degenerada.[2]

Para el caso naturalmente reductivo estamos en condiciones de probar el siguiente resultado.

Teorema 5.19. *Sea $M = G/H$ un espacio naturalmente reductivo compacto, en donde G es el grupo de transvecciones de la conexión canónica. Supongamos que M es simplemente conexa, irreducible como variedad riemanniana y que no es un espacio simétrico. Entonces la distribución de simetría de M coincide con la distribución G-invariante definida por los vectores fijos de H en $T_{eH}M$ (vía la representación isotrópica).*

Observemos que el grupo G de transvecciones de la conexión canónica es por definición conexo, por ende H resulta conexo, pues M es simplemente conexa.

Demostración del Teorema 5.19. Mantenemos la notación de la sección previa, atentos a que en lugar de tener una métrica bi-invariante $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en G tenemos la forma de Kostant Q antes mencionada. Exactamente la misma demostración que hicimos para el caso normal homogéneo sea adapta si reemplazamos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ por Q. Sin embargo uno debe ser cuidadoso, pues Q podría, a priori, ser degenerada en ciertos subespacios de $\mathfrak{g}$.

Recordemos de la sección anterior que $\mathfrak{g}_i^q = \mathfrak{k}_i^q \oplus \mathfrak{p}_i^q$ se identifica naturalmente con $\hat{\mathfrak{g}}_i \oplus \hat{\mathfrak{g}}_i$ y que con esta identificación $\mathfrak{k}_i^q = \mathrm{diag}(\hat{\mathfrak{g}}_i \oplus \hat{\mathfrak{g}}_i)$. Más aún, como $\hat{\mathfrak{g}}_i$ es simple, sigue del Lema 5.8 que esta descomposición debe ser Q-ortogonal. Se tiene que la restricción de Q a $\mathfrak{g}_i^q$ es de la forma $Q|_{\mathfrak{g}_i^q} = \lambda B \oplus \mu B$, en donde B es menos la forma de Killing de $\hat{\mathfrak{g}}_i$. Observemos primeramente que tanto λ como μ deben ser no nulos. En efecto, si $\lambda = 0$, al ser el primer sumando de la descomposición $\mathfrak{g}_i^q = \hat{\mathfrak{g}}_i \oplus \hat{\mathfrak{g}}_i$ un ideal de $\mathfrak{g}$, Q sería degenerada en $\mathfrak{g}$, lo cual por hipótesis es imposible. Por otro lado, supongamos que $\mu = 0$. Como $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{k}_i^q$ (descomposición ortogonal con respecto a Q) y $Q|_{\mathfrak{h}}$ es no degenerada, entonces $Q|_{\mathfrak{k}_i^q}$ es no degenerada (más aún, es un múltiplo no nulo de la forma de Killing de $\mathfrak{k}_i^q \simeq \mathrm{diag}(\hat{\mathfrak{g}}_i \oplus \hat{\mathfrak{g}}_i) \simeq \hat{\mathfrak{g}}_i$). Como $\mathfrak{g}_i^q = \hat{\mathfrak{g}}_i \oplus \hat{\mathfrak{g}}_i$ es ortogonal a $\mathfrak{h}'$ y el segundo sumando en esta descomposición es ortogonal a $\mathfrak{k}_i^q$, este sumando debe estar contenido en $\mathfrak{m}$, pues $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{k}_i^q \oplus \mathfrak{m}$

[2]La recíproca también es cierta, es decir si existe Q con estas propiedades, entonces $M = G/H$ es un espacio naturalmente reductivo (ver Teorema 1.9).

(descomposición ortogonal con respecto a Q). Pero esto es absurdo, pues $Q|_{\mathfrak{m}}$ es definida positiva.

Si $Q|_{\mathfrak{g}_i^q}$ es definida positiva, la demostración se reduce a la que hicimos en el caso normal homogéneo. Por consiguiente, podemos asumir que $Q|_{\mathfrak{g}_i^q}$ no es definida positiva. Notemos que en este caso λ y μ deben tener distinto signo, pues si ambos fueran negativos, razonando como antes, se contradice el hecho de que $Q|_{\mathfrak{m}}$ es definida positiva. Si $\mu < 0 < \lambda$, entonces modificando por un múltiplo positivo la métrica en M, podemos asumir que

$$Q|_{\mathfrak{g}^q} = B \oplus \mu B$$

y la misma prueba que dimos para el caso normal homogéneo vale (reemplazando λ por μ en la sección previa, por supuesto). En efecto, en la sección anterior sólo usamos que $\mu \neq 0$.

Sólo resta analizar el caso $\lambda < 0 < \mu$. Nuevamente, modificando la métrica en M por un múltiplo positivo podemos asumir que la situación es

$$Q|_{\mathfrak{g}_i^q} = -\lambda B \oplus B, \qquad \text{para algún } \lambda > 0.$$

Observemos que $\lambda \neq 1$, pues de lo contrario Q sería degenerada en el ideal $\mathfrak{k}_i^q$ de la isotropía $\mathfrak{h}$. En este caso obtenemos las siguientes identificaciones similares a las de la Sección 2:

$$\mathfrak{k}_i^q = \{(v, v) : v \in \hat{\mathfrak{g}}_i\}, \qquad \mathfrak{p}_i^q = \left\{ \left(\frac{1}{2} v, -\frac{1}{2} v \right) : v \in \hat{\mathfrak{g}}_i \right\}$$

y

$$\mathfrak{m}_{1,i}^q = \left\{ \left(\frac{1}{1-\lambda} v, \frac{\lambda}{1-\lambda} v \right) : v \in \hat{\mathfrak{g}}_i \right\}.$$

Ahora tenemos que si $a = -\frac{1}{2}(\lambda + 1)$, entonces

$$\left(\left(\frac{1}{2} + a \right) v, -\frac{1}{2} v \right) \in \mathfrak{m}_{i,1}^q$$

para todo $v \in \hat{\mathfrak{g}}_i$. Siguiendo las cuentas que hicimos en la sección previa obtenemos en este caso la contradicción

$$1 = \frac{1}{2(1+a)} = \frac{1}{2(1 - \frac{1}{2}(\lambda + 1))} = \frac{1}{1 - \lambda}.$$

Esto completa la prueba del Teorema 5.19. $\square$

Capítulo 6

Apéndice

Usamos este apéndice para dar una prueba conceptual de la Proposición 6.4, un resultado que sigue de la clasificación de los espacios (fuertemente) isotrópicamente irreducibles dada por J. Wolf en [**Wol68**]. Siguiendo la filosofía de esta tesis, la demostración que damos es puramente geométrica y no usa ninguna clasificación (ni la de los espacios simétricos, ni la de los grupos transitivos en la esfera).

También damos las pruebas conceptuales de ciertos resultados bien conocidos y relativamente elementales que usamos, no sólo para probar el resultado principal de este apéndice, sino en numerosas oportunidades a lo largo de la tesis.

El siguiente resultado es bien conocido y sigue también de la clasificación de Cartan de los espacios simétricos [**Car26**]. A continuación damos una prueba topológica del mismo que no usa esta clasificación.

Lema 6.1 (ver [**Loo69**]). *El único grupo de Lie simplemente conexo de rango* 1 *es* $\mathrm{Spin}(3)$*, el cubrimiento universal de* $\mathrm{SO}(3)$*, el cual es isométrico a la esfera* S^3*.*

Demostración. Sea G un grupo de Lie compacto, simplemente conexo de rango 1 y dimensión n. Presentamos a G como espacio simétrico

$$G = (G \times G)/\operatorname{diag}(G \times G).$$

Como G es un espacio simétrico de rango 1, entonces $G \simeq \operatorname{diag}(G \times G)$ actúa transitivamente en la esfera S^{n-1} del espacio tangente en la identidad. Luego, $S^{n-1} = G/S^1$, en donde S^1 es un subgrupo de Lie compacto de G, de dimensión 1 (y por consiguiente, S^1 es homeomorfo al círculo). Recordemos que todos los grupos de homotopía de S^1 son triviales, excepto por el primero. Si $n-1 \neq 2$, esto lleva a una contradicción en la sucesión exacta en homotopía inducida por

$$0 \longrightarrow S^1 \longrightarrow G \longrightarrow S^{n-1} \longrightarrow 0.$$

Luego $n = 3$. En este caso el corchete es único, pues en dimensión 3 existe una única 3-forma salvo múltiplos. Este corchete da lugar al álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$. $\square$

El siguiente resultado también es bien conocido.

Lema 6.2. *Sea* $M^n = G/H'$ *una variedad riemanniana homogénea tal que la componente conexa* H *de* H' *coincide con el grupo ortogonal del espacio tangente,* $H = \mathrm{SO}(T_{eH}M)$*. Entonces* M *es isométrica a la esfera* S^n *o al espacio proyectivo real* $\mathbb{R}P^n$*.*

Demostración. Sea $p = eH'$. Como la isotropía actúa transitivamente en el conjunto de planos de T_pM, sigue que M tiene curvaturas seccionales constantes, digamos κ. Observar que $\kappa > 0$, pues M es homogénea y compacta. Sea $S^n = \mathrm{SO}(n{+}1)/\mathrm{SO}(n)$ el cubrimiento universal de M y sea Γ el subgrupo de isomorfismos de las fibras de $S^n \to M$. Notar que la isotropía $g\,\mathrm{SO}(n)g^{-1}$ de la esfera en $g \cdot e_1$

se proyecta a M. Luego, como Γ es discreto y las isotropías conexas, sigue que Γ conmuta con cualquier subgrupo de isotropía de la esfera. Esto implica que Γ conmuta con $\mathrm{SO}(n+1)$. Luego $\Gamma = \{\mathrm{Id}\}$ o $\Gamma = \{\pm \mathrm{Id}\}$, y por tanto $M = S^n$ o $M = \mathbb{R}P^n$, respectivamente. $\square$

Antes de pasar al resultado principal de este apéndice, enunciamos y demostramos el siguiente resultado bien conocido, que también será usado varias veces esta tesis.

Lema 6.3. *Si M es un espacio globalmente simétrico irreducible de tipo grupo, entonces M es un grupo de Lie con métrica bi-invariante*

Demostración. Sea $\tilde{M}$ el cubrimiento universal de M, entonces $\tilde{M} = G$ es un grupo de Lie simple y compacto con métrica bi-invariante. Sea $\Gamma \subset \mathrm{Iso}(\tilde{M})$ el grupo de transformaciones de cubrimiento de $\tilde{M} \to M$. Entonces

$$M = \tilde{M}/\Gamma = G/\Gamma',$$

en donde $\Gamma' = \{\gamma \cdot e \in G : \gamma \in \Gamma\}$. Basta ver que Γ' es un subgrupo normal de G. Se tiene que Γ es un subgrupo normal de $\mathrm{Iso}_0(\tilde{M})$. Más aún, como $\tilde{M}$ es compacta, Γ es finito y su acción en $\tilde{M}$ es propiamente discontinua. Por ende, si $\varphi \in \mathrm{Iso}_0(\tilde{M})$ es próximo a la identidad, entonces $\varphi \circ \gamma \circ \varphi^{-1} = \gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Pero esto implica que la componente conexa de $\mathrm{Iso}(\tilde{M}) \simeq G \times G$ conmuta con Γ. Luego

$$g(\gamma \cdot e)g^{-1} = R_g \circ \gamma \circ L_{g^{-1}}(e) = \gamma \circ R_g \circ L_{g^{-1}}(e) = \gamma \cdot e$$

para todo $g \in G$. Por ende Γ' es un subgrupo normal de G y M resulta un grupo de Lie con métrica bi-invariante. $\square$

Proposición 6.4 (ver [**Wol68**]). *Sea $M = G/H'$ una variedad riemanniana homogénea y compacta tal que la componente conexa H de H' actúa en el espacio tangente $T_{eH}M$ como la representación adjunta de un grupo de Lie simple y compacto. Entonces M es isométrica a un grupo de Lie compacto y simple con métrica bi-invariante.*

Demostración. Sea $p = eH'$. Si H tiene rango 1, entonces por el Lema 6.1, M tiene dimensión 3 y $H = \mathrm{SO}(T_pM)$. Luego, por el Lema 6.2 sigue que M es isométrica a $S^3 \simeq \mathrm{Spin}(3)$ o $\mathbb{R}P^3 \simeq \mathrm{SO}(3)$ y la conclusión vale. Por tanto, asumamos que H tiene rango $k \geq 2$, el cual coincide con la codimensión de las H-órbitas principales[1].

Identificando el álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ de H con T_pM tenemos que H actúa en T_pM, vía la representación isotrópica, como la acción adjunta de H en $\mathfrak{h}$. El espacio normal a la órbita $H \cdot v$ está dado por

$$\nu_v(H \cdot v) = \mathscr{C}(v) := \{\xi \in \mathfrak{h} : [\xi, v] = 0\}.$$

[1]Recordemos que una órbita $H \cdot v = H/H_v$ es una *órbita principal* si y sólo si la representación slice es trivial en v. La representación slice se define de la siguiente manera. Si

$$\mathfrak{h} \simeq T_v\mathfrak{h} = T_v(H \cdot v) \oplus \nu_v(H \cdot v),$$

entonces todo elemento $h \in H_v$ manda cada sumando en sí mismo. La *representación slice* de H_v en $\nu_v(H \cdot v)$ se define por $h \cdot \xi = dh|_v(\xi)$. Las órbitas principales son de dimensión maximal. Una órbita de dimensión maximal que no es principal se dice una *órbita excepcional*, en tanto que una órbita de dimensión menor que una órbita principal se dice una *órbita singular*. Es un hecho bien conocido que la unión de todas las órbitas principales es un subconjunto abierto y denso (del espacio ambiente).

Recordemos el siguiente hecho que ya vimos en la Nota 2.8. Se tiene que $v = \mathrm{Exp}(tv) \cdot v = \mathrm{Ad}(\mathrm{Exp}(tv))(v)$. Luego, para todo $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Ad}(\mathrm{Exp}(tv))$ deja invariante el espacio normal $\nu_v(H \cdot v)$. Más aún, por la igualdad anterior sigue que el $\nu_v(H \cdot v)$ es exactamente el conjunto de puntos fijos del subgrupo $\{\mathrm{Ad}(\mathrm{Exp}(tv)) : t \in \mathbb{R}\}$ de isometrías de $\mathfrak{h}$.

Ahora escribamos

$$dh_t|_p = \mathrm{Ad}(\mathrm{Exp}(tv)),$$

donde $h_t \in H$. Luego $S = \{h_t : t \in \mathbb{R}\}$ es un subgrupo monoparamétrico de isometrías de M tal que $M^v := \exp_p(\nu_v(H \cdot v))$ es la componente conexa (que contiene a p) del conjunto de puntos fijos de S. Es un hecho bien conocido que M^v es una subvariedad totalmente geodésica de M. Por el Lema 3.2 sigue que M^v es una subvariedad homogénea de M. Más aún, no es difícil ver que el álgebra de isotropía de M^v es $\mathscr{C}(v)$. En el caso en que $H \cdot v$ es una órbita focal maximal, se tiene que

$$\mathscr{C}(v) = \mathbb{R}v \oplus \tilde{\mathfrak{h}}_v,$$

en donde $\tilde{\mathfrak{h}}_v$ es una subálgebra de Lie semisimple de $\mathfrak{h}$. El álgebra de Lie $\tilde{\mathfrak{h}}_v$ puede mirarse como el álgebra de holonomía normal de la órbita singular maximal $H \cdot v$. Se tiene que $\tilde{\mathfrak{h}}_v$ coincide con su normalizador en $\mathfrak{so}(\{v\}^\perp)$, pues actúa como una s-representación, en donde $\{v\}^\perp$ es mirado dentro de $\nu_v(H \cdot v)$ (ver [**BCO03**, pág. 192]). A partir de esta propiedad, al ser $\tilde{\mathfrak{h}}_v$ semisimple, uno tiene que

$$\{0\} = \mathscr{C}(\tilde{\mathfrak{h}}_v) = \{B \in \mathfrak{so}(\{v\}^\perp) : [B, \tilde{\mathfrak{h}}_v] = 0\}.$$

Así, estamos bajo las hipótesis de Lema 3.3. Por tanto, M^v parte localmente la geodésica γ_v.

Sea ahora $H \cdot u$ una órbita principal y tomemos $0 \neq v \in u + \nu_u(H \cdot u) = \nu_u(H \cdot u)$ tal que $H \cdot v$ es una órbita singular maximal.[2] Como M^v parte localmente la geodésica γ_v, entonces también M^u parte localmente γ_v, pues M^u es una subvariedad totalmente geodésica de M^v (esto se debe a que $\nu_u(H \cdot v) \subset \nu_v(H \cdot v)$).

Sea W el grupo de Weyl de $\nu_u(H \cdot u)$, el cual actúa irreduciblemente en

$$u + \nu_u(H \cdot u) = \nu_u(H \cdot u).$$

Dado $g \in W$, existe $h \in H$ tal que $h \cdot \nu_u(H \cdot u) = \nu_u(H \cdot u)$ y $h|_{\nu_u(H \cdot u)} = g$. Entonces $M^u = h \cdot M^u$ también parte $\gamma_{h \cdot v} = \gamma_{g(v)}$, para todo $g \in W$. Luego M^u es plana (y compacta), pues $W \cdot v$ genera $\nu_u(H \cdot u)$. Sea ahora $z \in T_pM$ un vector arbitrario. Entonces existe $w \in H \cdot u$ tal que $z \in \nu_w(H \cdot u) = \nu_w(H \cdot w)$ (por ejemplo, eligiendo w un punto en donde la función altura $x \mapsto \langle x, z \rangle$, $x \in H \cdot u$, alcanza su valor máximo). Luego, la geodésica arbitraria γ_z, por p, está contenida en el k-flat compacto M^w, en donde $k \geq 2$ es el rango de H. Sigue de [**HPTT94**] que M es un espacio globalmente simétrico de rango al menos 2 (ver [**EO94**] para una prueba conceptual).

Observemos que H, mirado como un subgrupo de la isotropía de M, coincide con la componente conexa de la isotropía total $\mathrm{Iso}_0(M)_p$ de M en p. Si así no fuera, $\mathrm{Iso}_0(M)_p$ sería transitivo en la esfera por el teorema de holonomía de Simons [**Sim62, Olm05b**] (pues una s-representación no se puede agrandar sin actuar

[2] Esto se hace eligiendo v en un simplex 1-dimensional de una cámara de Weyl del espacio normal $\nu_u(H \cdot u)$. Recordemos que las H-órbitas principales son subvariedades isoparamétricas. Ver [**PT88, BCO03**].

transitivamente en la esfera). Pero entonces el espacio simétrico M debería ser de rango 1. Esto es una contradicción, pues existen flats no triviales en M.

Luego, como M es un espacio simétrico, $H = \mathrm{Iso}_0(M)_p$ coincide con el grupo de holonomía restricta de M en p (vía la representación isotrópica).

Sea X el espacio simétrico H munido de una métrica bi-invariante. Identificando $T_pM \simeq T_eX$ uno tiene que tanto M como X tienen la misma holonomía (restricta). Luego los tensores de curvatura de M y de X son iguales salvo un múltiplo escalar positivo (esto sigue, por ejemplo del Lema 1.13). Luego M es localmente un espacio simétrico de tipo grupo. Como M es globalmente simétrico, sigue del Lema 6.3 que M es un grupo de Lie con métrica bi-invariante. $\square$

Bibliografía

[AF04] I. Agricola and Th. Friedrich, *On the holonomy of connections with skew-symmetric torsion*, Math. Ann. **328** (2004), no. 4, 711–748.

[AF10] ———, *A note on flat metric connections with antisymmetric torsion*, Differential Geom. Appl. **28** (2010), no. 4, 480–487.

[Agr03] I. Agricola, *Connections on naturally reductive spaces, their Dirac operator and homogeneous models in string theory*, Comm. Math. Phys. **232** (2003), 535–563.

[Agr06] ———, *The Srní lectures on non-integrable geometries with torsion*, Arch. Math. (Brno) **42** (2006), no. 5, 5–84.

[AK75] D. V. Alekseevskii and B. N. Kimel'fel'd, *Structure of homogeneous Riemannian spaces with zero Ricci curvature*, Funct. Anal. Appl. **9** (1975), no. 2, 97–102.

[Ale68] D. V. Alekseevskii, *Riemannian spaces with exceptional holonomy groups*, Funct. Anal. Appl. **2** (1968), no. 2, 1–10.

[AMS09] A. Arvanitoyeorgos, K. Mori, and Y. Sakane, *Einstein metrics on compact Lie groups which are not naturally reductive*, arXiv:0904.0104v2 [math.DG] (2009), to appear in Geom. Dedicata.

[AS53] W. Ambrose and I. M. Singer, *A theorem on holonomy*, Trans. Amer. Math. Soc. **75** (1953), 428–443.

[AS58] ———, *On homogeneous Riemannian manifolds*, Duke Math. J. **25** (1958), 647–669.

[BCO03] J. Berndt, S. Console, and C. Olmos, *Submanifolds and holonomy*, Research Notes in Mathematics, vol. 434, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2003.

[Ber55] M. Berger, *Sur les groupes d'holonomie homogènes de variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes*, Bull. Soc. Math. France **83** (1955), 270–330.

[Bes87] A. Besse, *Einstein manifolds*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge, Bd. 10, Springer-Verlag, 1987.

[BG72] R. B. Brown and A. Gray, *Riemannian manifolds with holonomy group* Spin(9), Diff. Geometry, in honor of Kentaro Yano (1972), 41–59.

[Bry87] R. L. Bryant, *Metrics with exceptional holonomy*, Ann. of Math. **126** (1987), no. 3, 525–576.

[BS89] R. L. Bryant and S. Salamon, *On the construction of some complete metrics with exceptional holonomy*, Duke Math. J. **58** (1989), no. 3, 829–850.

[Car22] É. Cartan, *Sur une généralisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces à torsion.*, C.R. Hebd. Sean. Acad. Sci. **174** (1922), 593–595.

[Car24] ———, *Les récentes généralisations de la notion d'espace*, Bull. Sci. Math. **48** (1924), 294–320.

[Car26] ———, *Sur une classe remarquable d'spaces de Riemann. I, II*, Bull. Soc. Math. France **54** (1926), 214–264, **55** (1927), 114–134.

[CDSO02] S. Console, A. J. Di Scala, and C. Olmos, *Holonomy and submanifold geometry*, Enseign. Math. **48** (2002), 23–50.

[CDSO11] ———, *A Berger type normal holonomy theorem for complex submanifolds*, Math. Ann. **351** (2011), no. 1, 187–214.

[CS26] É. Cartan and J. A. Schouten, *On Riemannian geometries admitting an absolute parallelism*, Proceedings Amsterdam **29** (1926), 933–946.

[DZ79] J. E. D'Atri and W. Ziller, *Naturally reductive metrics and Einstein metrics on compact Lie groups*, Mem. Amer. Math. Soc. **18** (1979), no. 21, 72 p.

[Ebe96] P. Eberlein, *Geometry of nonpositively curved manifolds*, Chicago Lectures in Mathematics, The University of Chicago Press, 1996.

[EO94] J.-H. Eschenburg and C. Olmos, *Rank and symmetry of Riemannian manifolds*, Comment. Math. Helv. **69** (1994), no. 3, 483–499.

[Hel78] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Pure and Applied Mathematics, vol. 80, Academic Press, 1978.

[HPTT94] E. Heintze, R. Palais, C.-L. Terng, and G. Thorbergsson, *Hyperpolar actions and k-flat homogeneous spaces*, J. Reine Angew. Math. **454** (1994), 163–179.

[Joy96a] D. Joyce, *Compact* 8*-manifolds with holonomy* Spin(7), Invent. Math. **123** (1996), no. 3, 507–552.

[Joy96b] ———, *Compact Riemannian* 7*-manifolds with holonomy G_2. I*, J. Differential Geom. **43** (1996), no. 2, 291–328.

[Joy96c] ———, *Compact Riemannian* 7*-manifolds with holonomy G_2. II*, J. Differential Geom. **43** (1996), no. 2, 329–375.

[KN69] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of differential geometry. I, II*, Interscience Publishers, 1963, 1969.

[Kos55] B. Kostant, *Holonomy and the Lie algebra of infinitesimal motions of a Riemannian manifold*, Trans. Amer. Math. Soc. **80** (1955), 528–542.

[Kos56] ———, *On differential geometry and homogeneous spces. II*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **42** (1956), 354–357.

[Kov03] A. Kovalev, *Twisted connected sums and special Riemannian holonomy*, J. Reine Angew. Math. **565** (2003), 125–160.

[Loo69] O. Loos, *Symmetric spaces. I, II*, Mathematics Lecture Notes Series, Benjamin, New York, 1969.

[Mor94] K. Mori, *Left invariant Einstein metrics on $SU(N)$ that are not naturally reductive*, Master's thesis, Osaka University, 1994.

[Nag07] P.-A. Nagy, *Skew-symmetric prolongations of Lie algebras and applications*, arXiv:0712.1398v2 [math.DG] (2007), to appear in J. Lie Theory.

[Olm93] C. Olmos, *Isoparametric submanifolds and their homogeneous structures*, J. Differential Geom. **38** (1993), no. 2, 225–234.

[Olm05a] ———, *A geometric proof of the Berger holonomy theorem*, Ann. of Math. **161** (2005), no. 1, 579–588.

[Olm05b] ———, *On the geometry of holonomy systems*, Enseign. Math. **51** (2005), 335–349.

[Oni92] A. L. Onishchik, *The group of isometries of a compact Riemannian homogeneous space*, Differential geometry and its applications (Eger, 1989), Colloq. Math. Soc. János Bolyai, vol. 56, North-Holland, Amsterdam, 1992, pp. 597–616.

[OR12a] C. Olmos and S. Reggiani, *The skew-torsion holonomy theorem and naturally reductive spaces*, J. Reine Angew. Math. **664** (2012), 29–53.

[OR12b] ———, *Work in preparation.*

[ORT12] C. Olmos, S. Reggiani, and H. Tamaru, *Work in preparation.*

[OS95] C. Olmos and M. Salvai, *Holonomy of homogeneous vector bundles and polar representations*, Indiana Univ. Math. J. **44** (1995), 1007–1015.

[PT87] R. Palais and C.-L. Terng, *A general theory of canonical forms*, Trans. Amer. Math. Soc. **300** (1987), 771–789.

[PT88] ———, *Critical point theory and submanifold geometry*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1353, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[Reg10] S. Reggiani, *On the affine group of a normal homogeneous manifold*, Ann. Global Anal. Geom. **37** (2010), no. 4, 351–359.

[Reg11] ———, *A Berger-type theorem for metric connections with skew-symmetric torsion*, arXiv:1111.5044v1 [math.DG] (2011).

[Sha01] K. Shankar, *Isometry groups of homogeneous spaces with positive sectional curvature*, Differential Geom. Appl. **14** (2001), no. 1, 57–78.

[Sim62] J. Simons, *On the transitivity of holonomy systems*, Ann. of Math. **76** (1962), 213–234.

[Tho91] G. Thorbergsson, *Isoparametric foliations and their buildings*, Ann. of Math. **133** (1991), no. 2, 429–446.

[TV83] F. Tricerri and L. Vanhecke, *Homogeneous structures on Riemannian manifolds*, London Mathematical Society Lecture Notes Series, vol. 83, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

[War83] F. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 94, Springer-Verlag, New York, 1983.

[Wol68] J. Wolf, *On the geometry and structure of isotropy irreducible homogeneous spaces*, Acta Math. **120** (1968), 59–148, correction: Acta Math. **152** (1984), 141–142.

[WZ91] M. Wang and W. Ziller, *On isotropy irreducible Riemannian manifolds*, Acta Math. **166** (1991), 223–261.

[Yau78] S.-T. Yau, *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation. I*, Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978), 339–411.