

Álgebras de Hopf punteadas sobre los grupos simétricos S_3 y S_4

por Agustín García Iglesias

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía y Física como
parte de los requerimientos para la obtención del grado de Doctor en
Matemática de la

Universidad Nacional de Córdoba

Diciembre 2010

©FaMAF-UNC 2010

Director: Dr. Nicolás Andruskiewitsch

Resumen

Esta tesis concierne la clasificación de álgebras de Hopf punteadas de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero. Consideramos tanto álgebras de Hopf sobre grupos abelianos como no abelianos y nos interesamos no sólo en la presentación de estas álgebras sino también en sus propiedades, como sus representaciones y sus deformaciones por cociclo.

Uno de los principales resultados de este trabajo es la clasificación de todas las álgebras de Hopf punteadas de dimensión finita cuyo grupo de elementos grupezcós es $\mathbb{S}_4$. También describimos todas las álgebras de Hopf punteadas sobre $\mathbb{S}_5$ cuya trenza infinitesimal está asociada con el rack de trasposiciones. Para esto, introducimos una familia de álgebras de Hopf punteadas $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ sobre grupos no abelianos.

Investigamos los módulos sobre las álgebras $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ cuya restricción al grupo de elementos grupezcós es suma directa de módulos de dimensión uno. Usamos estos resultados para clasificar todos los módulos simples sobre las dos álgebras de Hopf punteadas sobre $\mathbb{S}_3$. También encontramos el carcaj de Gabriel, las cubiertas proyectivas de los módulos simples, y probamos que no son de tipo de representación finito.

Clasificamos las categorías módulo exactas e indescomponibles sobre la categoría de representaciones de todas las álgebras de Hopf con corradical $\mathbb{S}_3$. Como consecuencia, calculamos todas sus extensiones de Hopf-Galois y mostramos que las álgebras de Hopf sobre $\mathbb{S}_3$ y $\mathbb{S}_4$ son deformaciones por cociclos de sus versiones graduadas.

Mostramos que un álgebra de Hopf punteada de dimensión finita tal que su trenza infinitesimal es de tipo estándar está generada por elementos casi primitivos y grupezcós. Este hecho es un paso clave en la clasificación de las álgebras de Hopf punteadas sobre un grupo abeliano y coincide con una conjetura de larga data planteada por Andruskiewitsch y Schneider. También mostramos que las relaciones cuánticas de Serre se satisfacen en cualquier álgebra de Hopf punteada corradicalmente graduada de dimensión finita con trenza diagonal y determinamos cómo estas relaciones se levantan en el caso estándar.

Math. Subject Classification (2010): 16T05, 57T05, 13C60

Palabras y frases claves: Álgebras de Hopf, Categorías módulo, Representaciones

Este trabajo estuvo parcialmente subvencionado por:

CONICET, FONCyT-ANPCyT, Secyt (UNC), Mincyt (Córdoba), FaMAF (UNC).

Abstract

This thesis is about the classification of finite-dimensional pointed Hopf algebras over an algebraically closed field of characteristic 0. We consider both Hopf algebras over abelian and not abelian groups and we deal not only with the presentation of the algebras defined but also with its properties, such as their representation theory or their cocycle deformations.

One of the main results of this work is the classification of all finite-dimensional pointed Hopf algebras whose group of group-likes is $\mathbb{S}_4$. We also describe all pointed Hopf algebras over $\mathbb{S}_5$ whose infinitesimal braiding is associated to the rack of transpositions. To this end, we introduce a family of generic pointed Hopf algebras $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ over non-abelian groups.

We investigate the modules over the algebras $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ whose restriction to the group of group-likes is a direct sum of 1-dimensional modules. We use the results obtained to classify all simple modules over the two pointed Hopf algebras over $\mathbb{S}_3$. We also find the Gabriel quivers, the projective covers of the simple modules, and prove that they are not of finite representation type.

We classify exact indecomposable module categories over the representation category of all Hopf algebras with coradical $\mathbb{S}_3$. As a byproduct, we compute all its Hopf-Galois extensions and we show that the Hopf algebras over $\mathbb{S}_3$ o $\mathbb{S}_4$ are cocycle deformations of their graded versions.

We show that a finite-dimensional pointed Hopf algebra such that its infinitesimal braiding is of standard type is generated by group-like and skew-primitive elements. This fact is a key step in the classification of pointed Hopf algebras over an abelian group and it agrees with a long-standing conjecture by Andruskiewitsch and Schneider. We also show that the quantum Serre relations hold in any coradically graded pointed Hopf algebra over an abelian group of finite dimension and determine how these relations are lifted in the standard case.

Math. Subject Classification (2010): 16T05, 57T05, 13C60.

Key words and phrases: Hopf algebras, Module categories, Representations.

This work was partially supported by:

CONICET, FONCyT-ANPCyT, Secyt (UNC), Mincyt (Córdoba), FaMAF (UNC).

Agradecimientos

Agradezco profundamente a mi director, Nicolás Andruskiewitsch, por el apoyo a lo largo de estos años y por su gran dedicación para leer meticulosamente esta tesis así como los artículos sobre los que está fundada. Esta dedicación ha sido inspiradora y aspiro a lograr imitarla. También le agradezco muchas conversaciones acerca del deber del matemático dentro y fuera de la facultad. Espero poder estar a la altura de esos principios.

Agradezco a mis coautores, Gastón García, Martín Mombelli e Iván Angiono, por haber compartido generosamente conmigo su conocimiento y capacidad, con gran calidez y entusiasmo.

Agradezco al CONICET, por el apoyo económico que me permitió disfrutar plenamente de este doctorado. También a la FaMAF, por brindarme las mejores condiciones de trabajo.

A mis compañeros de doctorado, quienes con alegría y solidaridad me acompañaron durante doctorado. También a los profesores, que con especial humildad me hicieron sentir parte de esta gran facultad.

Índice general

Resumen	III
Abstract	V
Agradecimientos	VII
Introducción	XI
Capítulo 1. Preliminares	1
1.1. Convenciones	1
1.2. Representaciones de álgebras	1
1.3. Racks y 2-cociclos	4
1.4. Álgebras de Hopf	5
1.5. Extensiones de Hopf Galois	11
1.6. Categorías abelianas y tensoriales	13
1.7. Módulos de Yetter Drinfeld	16
1.8. Representaciones de categorías tensoriales	18
1.9. Categorías módulo sobre álgebras de Hopf punteadas	18
Capítulo 2. Álgebras de Nichols	21
2.1. Definición	21
2.2. Espacios vectoriales trenzados	22
2.3. Álgebras de Nichols de tipo diagonal	25
2.4. Álgebras de Nichols asociadas a racks	27
2.5. Álgebras de Nichols de módulos de Yetter-Drinfeld	27
2.6. El Método del Levante	30
Capítulo 3. Álgebras de Hopf punteadas asociadas a racks	33
3.1. Generación en grado uno	33
3.2. Las álgebras de Hopf $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$	34
3.3. Clasificación de levantamientos de Nichols cuadráticas	39
3.4. Álgebras de Hopf punteadas sobre $\mathbb{S}_n$	41
3.5. Clasificación de álgebras de Hopf punteadas sobre $\mathbb{S}_4$	47
Capítulo 4. Representaciones de álgebras de Hopf punteadas	49
4.1. Módulos que son sumas de representaciones de dimensión 1	49
4.2. Módulos simples sobre bosonizaciones	56
4.3. Cubiertas proyectivas de módulos sobre levantamientos cuadráticos	57
4.4. Representaciones de álgebras de Hopf punteadas sobre $\mathbb{S}_3$	58

Capítulo 5. Representaciones de la categoría de módulos sobre álgebras de Hopf punteadas	73
5.1. Clases de equivalencia equivariantes de comódulo álgebras	73
5.2. Subálgebras coideales de álgebras de Nichols cuadráticas	75
5.3. Comódulo álgebras sobre álgebras de Hopf sobre $\mathbb{S}_n$	83
5.4. Deformaciones por cociclo	86
5.5. Representaciones de la categoría de módulos sobre un álgebra de Hopf punteada sobre $\mathbb{S}_3$	92
Capítulo 6. Álgebras de Hopf punteadas con trenza estándar	95
6.1. Generación en grado uno	95
6.2. Levantamiento de las relaciones cuánticas de Serre	103
Índice alfabético	105
Bibliografía	107
Índice alfabético	111

Introducción

Las primeras menciones al concepto de álgebras de Hopf se remiten a la década del '50, en donde son mencionadas en trabajos de Pierre Cartier (1956) y Armand Borel (1953). Cartier introduce el concepto de hiperálgebra en [C], y reconocemos allí los axiomas que hoy definen a una biálgebra coconmutativa, junto con un axioma adicional, que implica la existencia de una antípoda. Por su parte, Borel, en [B], utiliza la expresión álgebra de Hopf (algèbre de Hopf), para referirse a un álgebra con una estructura extra de comultiplicación, que no es necesariamente coasociativa. Mientras Cartier considera estas estructuras en relación a los trabajos de Jean Dieudonné sobre grupos algebraicos en característica positiva, Borel las utiliza para estudiar la homología de los espacios homogéneos. Estas dos líneas de investigación se entrecruzan luego en la década del '60. A fines de esta década (1969), Sweedler publica su libro [S] y es allí donde las álgebras de Hopf se independizan para comenzar a ser estudiadas por sus propiedades algebraicas intrínsecas. Ver el artículo [AFe] para más información sobre la génesis y desarrollo de este concepto.

Sommerhäuser [So, Introduction] dice que un álgebra de Hopf es un álgebra para la cual se pueden tensorear módulos. Es ésta característica la que hace que sus categorías de representaciones den lugar a categorías tensoriales finitas en el sentido de [ENO1, EO1]. En consecuencia, las álgebras de Hopf tienen importantes aplicaciones en matemática y en física matemática. De esta forma, por ejemplo, las álgebras de Hopf semisimples están presentes de una manera fundamental en la teoría de campos conformes racionales. Además, las álgebras de Hopf no semisimples están relacionadas a teorías de campos conformes logarítmicos [Ga].

Por su parte, los grupos cuánticos, introducidos en 1986 por Drinfeld en su Conferencia [D], forman una clase particular de álgebras de Hopf. Los mismos pueden ser presentados a partir de deformaciones en un parámetro de álgebras universales de álgebras de Lie o de álgebras de funciones regulares de grupos algebraicos afines. También se los puede encontrar codificando la simetría de categorías trenzadas, es decir, categorías munidas de un producto tensorial asociativo y conmutativo. El hecho destacable aquí es que la transformación de conmutatividad $c : V \otimes W \rightarrow W \otimes V$ no es involutiva. De esta forma, las álgebras de Hopf pueden hallarse en diversas áreas relacionadas con la teoría conforme de campos; por ejemplo, en invariantes de variedades topológicas de dimensión baja. Así, en los últimos veinte años, las álgebras de Hopf han atraído el interés de matemáticos de distintas áreas.

En particular, ha habido gran interés en problemas de clasificación de álgebras de Hopf, ver por ejemplo [An]. Es natural esperar que resultados

de clasificación sobre álgebras de Hopf de dimensión finita tengan un impacto significativo en las áreas mencionadas. Por otra parte, nuevos ejemplos pueden ser descubiertos en dichos estudios de clasificación.

La clasificación de todas las álgebras de Hopf de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado $\mathbb{k}$ de característica cero es un problema ampliamente abierto. Técnicas estrictamente diferentes son empleadas cuando se trata con álgebras semisimples o no semisimples. En este último caso, técnicas muy útiles se han desarrollado para el caso especial de las álgebras de Hopf punteadas. En particular, un progreso significativo se ha alcanzado en [AS2] en el caso de las álgebras de Hopf punteadas con grupo abeliano de elementos grupezcós.

Un álgebra de Hopf punteada H está caracterizada por el hecho de que su mayor subálgebra cosemisimple coincide con el álgebra de grupo de sus elementos grupezcós, esto es, de los elementos $g \in H$ tales que $\Delta(g) = g \otimes g$. Esta clase incluye las álgebras de grupo $\mathbb{k}\Gamma$, Γ un grupo, y los núcleos de Frobenius-Luzstig $u_q(\mathfrak{g})$ [L], asociados a álgebras de Lie semisimples de dimensión finita $\mathfrak{g}$ y a raíces de la unidad q . Cabe mencionar el “método del levante” [AS1], como herramienta fundamental y principal estrategia de clasificación de las mismas. Éste cuenta, a grandes rasgos, de tres etapas bien diferenciadas, que bosquejamos a continuación (ver el cuerpo de la tesis para una descripción detallada):

- Dado un grupo G , determinar todos los módulos de Yetter-Drinfeld sobre G tales que su álgebra de Nichols $\mathfrak{B}(V)$ es de dimensión finita.
- Para cada V así, encontrar todas las álgebras de Hopf H tales que $\text{gr } H = \mathfrak{B}(V) \# \mathbb{k}G$.
- Probar que todas las álgebras de Hopf punteadas sobre G están generadas “en grado 1”.

Cuando este grupo no es abeliano, el problema se halla lejos de una solución definitiva. Existe alguna esperanza en la falta de ejemplos: en esta situación, las álgebras de Nichols tienden a ser de dimensión infinita, ver por ejemplo [AF], [AFGV], [AZ], [AFZ]. No obstante, sí existen ejemplos en los que las álgebras de Nichols son de dimensión finita. Sobre $\mathbb{S}_4$ estas álgebras fueron determinadas en [AHS]: hay tres de ellas, todas relacionadas a racks y cociclos. Cuando el cociclo es -1 , hay dos álgebras de Nichols, una correspondiente a la clase de conjugación de las trasposiciones y la otra a la de los 4-ciclos, presentadas en [MS] y [AG], respectivamente. Cuando el cociclo es no constante, el álgebra de Nichols respectiva fue definida en [MS] e, independientemente, en [FK] como un álgebra cuadrática. Estas tres álgebras de Nichols son una lista exhaustiva de álgebras de Nichols en la categoría de módulos de Yetter Drinfeld ${}_{\mathbb{S}_4}^{\mathbb{S}_4}\mathcal{YD}$. En [AG2], una familia de álgebras de Hopf punteadas fue definida; se mostró, a través del uso de bases de Gröbner, que eran levantamientos del álgebra de Nichols asociada a la clase de las conjugaciones y al cociclo constante. Siguiendo ideas de ese trabajo, definimos en esta tesis las álgebras de Hopf $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$, que serán estudiadas desde diferentes perspectivas a lo largo de este trabajo, y a las que utilizaremos para concretar resultados de clasificación.

Hemos mencionado que la categoría de representaciones de una álgebra de Hopf es una categoría tensorial. Dada una categoría tensorial $\mathcal{C}$, una *categoría módulo exacta* [EO1] sobre $\mathcal{C}$ es una categoría Abeliiana $\mathcal{M}$ equipada con un funtor bi-exacto $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ sujeto a axiomas naturales de asociatividad y unitariedad tal que, además, para cualquier objeto proyectivo $P \in \mathcal{C}$ y cualquier $M \in \mathcal{M}$ el objeto $P \otimes M$ es nuevamente proyectivo.

Las categorías módulo exactas, o *representaciones* de $\mathcal{C}$, son objetos muy interesantes para considerar. Están implícitamente presentes en muchas áreas de la matemática y de la física matemática como la teoría de subfactores [BEK], álgebras de Hecke afines [BO], extensiones de álgebras de vértice [KO], [HuKo], álgebras de Calabi-Yau [Gi] y teoría conforme de campos, ver por ejemplo [BFRS], [FS], [CS1], [CS2]. Las categorías módulo han sido utilizadas en el estudio de categorías de fusión [ENO1], [ENO2], y en la teoría de álgebras de Hopf (débiles) [O1], [M1], [N].

Los principales resultados y conceptos de la tesis están organizados de la siguiente manera. En el capítulo 1 recordamos las diferentes nociones matemáticas existentes en la literatura clásica que serán utilizadas a lo largo de la tesis. Hemos tratado de ser particularmente detallistas al respecto, procurando que todos los conceptos que el lector encontrará en los resultados que probamos en los capítulos subsiguientes tengan su definición formal en esta parte.

En el capítulo 2 recordamos la definición y los conceptos relacionados con las álgebras de Nichols. Transcribimos resultados de clasificación de [A, H] y establecemos un resultado que ha sido asumido como cierto en la literatura y del que no pudimos dar con una prueba en la misma, a saber que las álgebras de Nichols asociadas a las trasposiciones en $\mathbb{S}_5$ son cuadráticas como sus análogas en $\mathbb{S}_4$.

En el Capítulo 3, introducimos el concepto de ql-datum $\mathcal{Q}$ y definimos las álgebras $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ asociadas ya mencionadas y probamos algunos resultados generales sobre su estructura. Luego, las utilizamos para probar que todas las álgebras de Hopf H con $G(H) \cong \mathbb{S}_4$ están generadas en grado 1 y son efectivamente levantamientos de las álgebras de Nichols mencionadas anteriormente. El teorema principal de este capítulo es el siguiente:

TEOREMA 1. *Sea H un álgebra de Hopf punteada de dimensión finita con $G(H) \cong \mathbb{S}_4$, $H \neq \mathbb{k}\mathbb{S}_4$. Entonces H es isomorfa a una y sólo una de las siguientes álgebras:*

1. $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_2^4, -1) \# \mathbb{k}\mathbb{S}_4$;
2. $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_4^4, -1) \# \mathbb{k}\mathbb{S}_4$;
3. $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_2^4, \chi) \# \mathbb{k}\mathbb{S}_4$;
4. $\mathcal{H}(\mathcal{Q}_4^{-1}[t])$, para exactamente un $t \in \mathbb{P}_{\mathbb{k}}^1$;
5. $\mathcal{H}(\mathcal{D}[t])$, para exactamente un $t \in \mathbb{P}_{\mathbb{k}}^1$;
6. $\mathcal{H}(\mathcal{Q}_4^{\chi}[1])$.

Además, hasta el momento sólo dos álgebras de Nichols de dimensión finita sobre $\mathbb{S}_5$ son conocidas. Describiremos asimismo todos sus levantamientos. Observamos que nuestras pruebas no utilizan bases de Gröbner, en

su lugar, desarrollamos parte de su teoría de representaciones y combinamos este nuevo conocimiento con algunas técnicas de álgebras cuadráticas para obtener estos resultados. Remarcamos que $\mathbb{S}_4$ es el segundo grupo no abeliano que admite álgebras de Hopf punteadas no triviales de dimensión finita y tal que la clasificación está completa, siendo el primero $\mathbb{S}_3$ [AHS]. También se han obtenido familias infinitas de levantamientos de álgebras de Nichols para los grupos $\mathbb{D}_{4m}$, $m \in \mathbb{N}$, en [FG].

En el capítulo 4 nos dedicamos al estudio de la teoría de representaciones de las álgebras $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$. En particular, nos concentramos en aquellos módulos cuyas componentes G -isotópicas son de dimensión 1 y clasificamos los módulos indescomponibles de este tipo. Encontramos condiciones en un G -carácter dado bajo las cuales éste puede ser extendido a una representación del álgebra. También estudiamos los módulos simples y las cubiertas proyectivas de los mismos bajo ciertas condiciones en el ql -datum $\mathcal{Q}$.

Luego, aplicamos estos resultados para clasificar los módulos simples sobre las (dos) álgebras de Hopf punteadas sobre $\mathbb{S}_3$. Además, encontramos sus cubiertas proyectivas y calculamos sus reglas de fusión, lo que nos lleva a mostrar que el levantamiento no trivial no es cuasi-triangular. También escribimos el carcaj de Gabriel y mostramos que estas álgebras no son de tipo de representación finito.

El principal resultado del Capítulo 5 es la clasificación de las categorías módulo exactas sobre la categoría de representaciones de cualquier álgebra de Hopf de dimensión finita con corradical $\mathbb{k}\mathbb{S}_3$.

La clasificación de las categorías módulo exactas sobre una categoría tensorial finita fija $\mathcal{C}$ fue desarrollada por varios autores:

1. Cuando $\mathcal{C}$ es el cociente semisimple de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ [KO], [EO2],
2. sobre las categorías tensoriales de representaciones de los supergrupos finitos [EO1],
3. sobre $\text{Rep}(D(G))$, $D(G)$ el doble de Drinfeld de un grupo finito G [O2],
4. sobre la categoría tensorial de representaciones de los grupos cuántico pequeños de Lusztig $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ [M1],
5. y más generalmente sobre $\text{Rep}(H)$, donde H es un levantamiento de un espacio lineal cuántico [M2].

En este capítulo, contribuimos a la lista de arriba en el caso de las álgebras de Hopf punteadas sobre $\mathbb{S}_3$. Explícitamente, tenemos el siguiente resultado:

TEOREMA 2. *Sea $G = \mathbb{S}_3$. Sean $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ un álgebra de Hopf punteada sobre G , $\mathcal{H} = \text{gr } \mathcal{H}(\mathcal{Q})$. Sea $\mathcal{M}$ una categoría módulo exacta sobre $\text{Rep}(\mathcal{H})$, entonces existen*

- un subgrupo $F < G$ y un 2-cociclo $\psi \in Z^2(F, \mathbb{k}^\times)$,
- un subconjunto $Y \subseteq \mathcal{O}_2^3$ invariante por la acción de F ,
- una familia de escalares $\{\xi_C\}$ compatible con (F, ψ, Y) ,

tal que $\mathcal{M} \simeq_{\mathcal{B}(Y, F, \psi, \xi)} \mathcal{M}$. Aquí $\mathcal{B}(Y, F, \psi, \xi)$ es una $\mathcal{H}$ -comódulo álgebra a izquierda construida con los datos (Y, F, ψ, ξ) .

También mostramos que si H es un álgebra de Hopf de dimensión finita con corradical $\mathbb{k}\mathbb{S}_3$ o $\mathbb{k}\mathbb{S}_4$ entonces H es una deformación por cociclo de $\text{gr } H$. Esto implica que hay una correspondencia biyectiva entre las categorías módulo sobre $\text{Rep}(H)$ y $\text{Rep}(\text{gr } H)$.

Vimos que uno de los principales pasos del Método del Levante es probar que todas las álgebras de Hopf punteadas sobre un grupo Γ están generadas por elementos gruezcós y casi primitivos o, equivalentemente, que el álgebra (de Hopf) graduada asociada con respecto a la filtración corradical está generado en grados cero y uno. Este problema ha sido resuelto para una álgebra de Hopf de dimensión finita H sobre un grupo Γ en los siguientes casos:

- cuando H es co-triangular [AEG],
- cuando Γ es abeliano y $|\Gamma|$ no es divisible por 2, 3, 5, 7 [AS4],
- cuando la trenza surge de algunos racks afines [AG2].

Ha sido conjeturado en [AS2, Conjecture 1.4] que esto vale para cualquier H como arriba. Hemos dicho que en el capítulo 2 lo probamos

- cuando Γ es (isomorfo a) $\mathbb{S}_n$, $n = 3, 4, 5$, completando un resultado en [AG2],

mientras que nuestro principal resultado del Capítulo 6, el Teorema 6.6 es una respuesta positiva a esta conjetura

- cuando la trenza es de tipo estándar.

En este capítulo también mostramos que las relaciones cuánticas de Serre se satisfacen en un álgebra de Hopf trenzada con trenza estándar y calculamos los levantamientos de estas relaciones.

Los resultados de la tesis forman parte de diversos artículos. Los resultados del Capítulo 3, que incluyen el Teorema 1, están en

- *Finite-dimensional pointed Hopf algebras over $\mathbb{S}_4$* .
García, G. A. y García Iglesias, A.
Israel Journal of Mathematics, por aparecer.
Disponible en [arXiv:0904.2558v2](#).

Los resultados del Capítulo 4 se encuentran en

- *Representations of pointed Hopf algebras over $\mathbb{S}_3$* .
García Iglesias, A.
Revista de la Unión Matemática Argentina 51 (1) pp. 51–78 (2010).
Disponible en [arXiv:0904.2558](#).

El capítulo 5, que incluye el Teorema 2, está basado en resultados de

- *Representations of the category of modules over pointed Hopf algebras over $\mathbb{S}_3$ and $\mathbb{S}_4$* .
García Iglesias, A. y Mombelli, M.
Enviado.
Disponible en [arXiv:1006.1857v1](#).

Finalmente, el Capítulo 6 trata sobre resultados en

- *Pointed Hopf algebras with standard braiding are generated in degree one*.
Angiono, I. y García Iglesias, A.

Contemporary Mathematics, por aparecer.
Disponible en [arXiv:1004.3312v1](https://arxiv.org/abs/1004.3312v1).

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo fijamos la notación y recordamos los conceptos básicos que constituirán el lenguaje del trabajo.

1.1. Convenciones

Trabajaremos sobre un cuerpo $\mathbb{k}$ algebraicamente cerrado y de característica cero. Todos los espacios vectoriales, álgebras y categorías serán considerados sobre $\mathbb{k}$.

Para cada $N > 0$, $\mathbb{G}_N$ denotará el conjunto de las raíces N -ésimas primitivas de 1 en $\mathbb{k}$. Fijamos $i = \sqrt{-1}$. Dado $n \in \mathbb{N}$ y $q \in \mathbb{k}$, $q \notin \cup_{0 \leq j \leq n} \mathbb{G}_j$, $q \neq 0$, denotamos

$$\binom{n}{j}_q = \frac{(n)_q!}{(j)_q!(n-j)_q!}, \quad \text{donde } (n)_q! = \prod_{j=1}^n (j)_q \quad \text{y } (k)_q = \sum_{j=0}^{k-1} q^j.$$

Si V es un espacio vectorial y $\{x_i\}_{i \in I}$ es una familia de elementos en V , denotamos por $\mathbb{k}\{x_i\}_{i \in I}$ al subespacio vectorial generado por ella. Si V y W son dos k -espacios vectoriales denotamos por τ a la aplicación lineal “flip”, $\tau : V \otimes W \rightarrow W \otimes V$ dada por $\tau(v \otimes w) = w \otimes v$ para todo $v \in V$, $w \in W$.

Sean G un grupo finito, $\widehat{G}$ el conjunto de sus representaciones irreducibles. Sea $G_{\text{ab}} = G/[G, G]$, $\widehat{G_{\text{ab}}} = \text{Hom}(G, \mathbb{k}^*) \subseteq \widehat{G}$. Denotamos por $\epsilon \in \widehat{G_{\text{ab}}}$ la representación trivial. Si $\chi \in \widehat{G}$, y W es un G -módulo, denotamos por $W[\chi]$ a la componente isotípica de tipo χ , y por W_χ al G -módulo simple correspondiente.

El grupo simétrico en n letras será denotado por $\mathbb{S}_n$ y por $\mathcal{O}_j^n$ denotaremos a la clase de conjugación de todos los j -ciclos en $\mathbb{S}_n$.

Sea $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ una familia de n elementos. Denotamos por $F = \mathbb{k}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ al álgebra libre generada por S . Si $r_1, \dots, r_m$ son polinomios en F , escribimos $\mathbb{k}\langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$ al álgebra presentada por generadores en S y relaciones en $r_1, \dots, r_m$. Si A es un álgebra y $S \subset A$ es un subconjunto, denotaremos por $\langle S \rangle$ al ideal generado por S . Si $S = \{s\}$, denotamos $\langle s \rangle = \langle \{s\} \rangle$. Para un álgebra A , ${}_A\mathcal{M}$, respectivamente ${}_A\mathcal{M}_A$, denotará la categoría de los A -módulos a izquierda, respectivamente bimódulos, de dimensión finita.

Denotaremos por $\mathbb{k}[X]$ al anillo de polinomios en una variable con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{k}$. Para $n \in \mathbb{N}$, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ denotará el mayor entero menor o igual a $\frac{n}{2}$.

1.2. Representaciones de álgebras

Sea B un anillo, M un B -módulo a izquierda.

DEFINICIÓN 1.1. Una *cubierta proyectiva* de M es un par $(P(M), f)$ con $P = P(M)$ un B -módulo proyectivo y $f : P \rightarrow M$ un *morfismo esencial*, esto es un morfismo suryectivo tal que para cada $N \subset M$ submódulo propio, $f(N) \neq M$.

No explicitaremos el mapa f de la definición anterior cuando sea evidente. Las cubiertas proyectivas son únicas salvo isomorfismos, y siempre existen para $\mathbb{k}$ -álgebras de dimensión finita, ver [CR, Sección 6]. Más aún,

$$(1.1) \quad {}_B B \cong \bigoplus_{S \in \widehat{B}} P(S)^{\dim S}.$$

Sea B ahora una $\mathbb{k}$ -álgebra de dimensión finita, $\widehat{B} = \{S_1, \dots, S_n\}$ una lista completa de los B -módulos simples no isomorfos. Recordemos que B se dice *básica* si $\dim S_i = 1, \forall i = 1, \dots, n$.

DEFINICIÓN 1.2. Se dice que B es

- de *tipo de representación finito* si existen sólo finitas clases de isomorfismo de módulos indescomponibles en ${}_B \mathcal{M}$,
- de *tipo de representación manso* si B no es de tipo de representación finito y hay, para cada número $d \in \mathbb{N}$, finitos $(B, \mathbb{k}[X])$ -bimódulos $M_1, \dots, M_{n_d}$ que son libres de rango finito como $\mathbb{k}[X]$ -módulos y tal que todos salvo un número finito de B -módulos indescomponibles de dimensión d contienen un B módulo de la forma $M_i \otimes \mathbb{k}[X]/(X - \lambda)$, para algún $i = 1, \dots, n_d$ y $\lambda \in \mathbb{k}$,
- de *tipo de representación salvaje* si no es de ninguno de los anteriores.

Existen herramientas combinatorias para determinar el tipo de representación de un álgebra. Por ejemplo, se introduce la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.3. El *Ext-Carcaj* (también *Carcaj de Gabriel*) de B es el carcaj $\text{Ext}Q(B)$ con vértices $\{1, \dots, n\}$ y $\dim \text{Ext}_B^1(S_i, S_j)$ flechas desde el vértice i al vértice j .

Utilizaremos el hecho de que dados dos B -módulos M_1, M_2 existe un isomorfismo de grupos abelianos

$$\text{Ext}_B^1(M_1, M_2) = \{\text{clases de equivalencia de extensiones } M_1 \text{ por } M_2\},$$

donde el elemento 0 está dado por la extensión trivial $M_1 \oplus M_2$.

Recordemos que dos álgebras X e Y son *Morita equivalentes* si existe una equivalencia de categorías ${}_X \mathcal{M} \cong {}_Y \mathcal{M}$. B resulta equivalente Morita al álgebra básica $\mathbb{k}\text{Ext}Q(B)/I(B)$, donde $\mathbb{k}\text{Ext}Q(B)$ es el álgebra de caminos del carcaj $\text{Ext}Q(B)$ y $I(B)$ es un ideal contenido en el bi-ideal de caminos de longitud mayor a 1.

DEFINICIÓN 1.4. Dado un carcaj Q con vértices $V = \{1, \dots, n\}$, su *diagrama de separación* es el grafo no orientado cuyo conjunto de vértices es $\{1', \dots, n', 1'', \dots, n''\}$ y una arista $i' - j''$ para cada flecha $i \rightarrow j$ en Q .

Si B es un álgebra, hablamos del diagrama de separación de B para hacer referencia al diagrama de separación de su Ext-Carcaj.

TEOREMA 1.5. [ARS, Teorema X.2.6] *Sea B un álgebra de Artin con radical cuadrado cero. Entonces B es de tipo de representación finito (manso)*

si y sólo si su diagrama de separación es una unión disjunta de diagramas de Dynkin finitos (afines). $\square$

El siguiente lema es conocido por los matemáticos trabajando en el área de teoría de representaciones de álgebras. Incluimos una prueba aquí por completitud.

LEMA 1.6. *Sea J el radical de B . Entonces $\text{Ext}Q(B) = \text{Ext}Q(B/J^2)$.*

DEMOSTRACIÓN. Primero, es inmediato que $\widehat{B} = \widehat{B/J^2}$. Sea $S, T \in \widehat{B}$. Como cualquier B/J^2 -módulo es un B -módulo, tenemos $\text{Ext}_{B/J^2}^1(S, T) \subseteq \text{Ext}_B^1(S, T)$. Ahora, sea $0 \rightarrow T \hookrightarrow V \rightarrow S \rightarrow 0$ un sucesión exacta de B -módulos y sean $x \in V$, $a_1, a_2 \in J$. Si $x \in T \subset V$, entonces $a_1x = 0 \Rightarrow a_2a_1x = 0$. Si $x \notin T$, entonces $0 \neq \bar{x} \in V/T \cong S$ y así $a_1\bar{x} = 0$, esto es $a_1x \in T$, y por lo tanto $a_2a_1x = 0$. Así, la sucesión de arriba en $B - \mathcal{M}$ da lugar a una sucesión exacta en $B/J^2 - \mathcal{M}$, lo que prueba el lema. $\square$

1.2.1. Representaciones de $\mathbb{K}\mathbb{S}_n$. En primer lugar, recordemos que $\mathbb{S}_n$, $n \geq 3$, tiene una representación de dimensión uno no trivial, la llamada *representación signo*, dada por

$$\rho : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{K}, \quad \rho(\sigma) = \text{sgn}(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{S}_n.$$

Ahora, $\mathbb{S}_n$ actúa en $\mathbb{K}^n$ permutando los vectores de la base estándar $\{e_1, \dots, e_n\}$. El vector $e = e_1 + \dots + e_n$ es fijado por esta acción. El complemento ortogonal, con respecto al producto interno canónico, al espacio generado por este vector, con la acción restringida de $\mathbb{S}_n$, es la *representación estándar* de $\mathbb{S}_n$, esto es el módulo de Specht $S^{(n-1,1)}$ asociado a la partición $n = n-1 + 1$. La base canónica para este espacio está dada por $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ para $v_i = e_i - e_n$. La acción en esta base está dada por:

$$\begin{aligned} (i, i+1) \cdot v_j &= v_{(i,i+1)(j)}, \quad \text{si } i < n-1, \\ (n-1, n) \cdot v_j &= \begin{cases} v_j - v_n & \text{si } j < n, \\ -v_n & \text{si } j = n, \end{cases} \end{aligned}$$

Esta representación es fiel.

Si $n \geq 4$, existe otra representación de $\mathbb{S}_n$ de dimensión $(n-1)$, que es el módulo de Specht $S^{(2,1^{n-2})} \cong S^{(n-1,1)} \otimes S^{(1^n)}$ asociado a la partición $n = 2 + 1 + \dots + 1$, donde $S^{(1^n)}$, el módulo asociado a la partición $n = 1 + \dots + 1$, es la representación signo. Para este módulo, fijamos la base $\{w_i\}$, con $w_i = v_i \otimes z$, $i = 1, \dots, n-1$, si $S^{(1^n)} = \mathbb{K}\{z\}$.

En el caso $n = 3$, la representación estándar, la trivial y la signo son una lista exhaustiva de los módulos simples sobre el álgebra de grupo. En este caso, la representación estándar tiene dimensión 2. Si fijamos $\{v, w\}$ como su base canónica, entonces esta representación está dada por las siguientes matrices:

$$[(1, 2)] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [(2, 3)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad [(1, 3)] = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.3. Racks y 2-cociclos

Nuestra referencia para las propiedades de racks será [AG].

DEFINICIÓN 1.7. Un *rack* es un par $(X, \triangleright)$, donde X es un conjunto no vacío y $\triangleright : X \times X \rightarrow X$ es una función, tal que $\phi_i = i \triangleright (\cdot) : X \rightarrow X$ es una biyección para todo $i \in X$ que satisface:

$$i \triangleright (j \triangleright k) = (i \triangleright j) \triangleright (i \triangleright k), \forall i, j, k \in X.$$

EJEMPLOS 1.8. Los siguientes son ejemplos de racks

- Sea X un conjunto y definimos $i \triangleright j = j, \forall i, j \in X$. Entonces $(X, \triangleright)$ es un rack, conocido como el *rack trivial*.
- Sea G un grupo, $g \in G$, y $\mathcal{O}_g$ la clase de conjugación de g . Entonces, si

$$x \triangleright y = xyx^{-1},$$

$(\mathcal{O}_g, \triangleright)$ es un rack.

- Serán de particular importancia en este trabajos los racks $\mathcal{O}_2^n$ de trasposiciones en $\mathbb{S}_n$ y el rack $\mathcal{O}_4^4$ de 4-ciclos en $\mathbb{S}_4$.
- Si $(X, \triangleright)$ es un rack, entonces el *rack inverso* $(X^{-1}, \triangleright^{-1})$ [AFGV] está dado por $X^{-1} = X$ y $i \triangleright^{-1} j = k$, si $i \triangleright k = j, \forall i, j, k \in X^{-1}$. En efecto, notar que

$$\begin{aligned} i \triangleright^{-1} (j \triangleright^{-1} k) = s &\Leftrightarrow i \triangleright s = j \triangleright^{-1} k \\ &\Leftrightarrow j \triangleright (i \triangleright s) = k. \end{aligned}$$

Mientras que

$$\begin{aligned} (i \triangleright^{-1} j) \triangleright^{-1} (i \triangleright^{-1} k) = u &\Leftrightarrow (i \triangleright^{-1} j) \triangleright u = i \triangleright^{-1} k \\ &\Leftrightarrow i \triangleright ((i \triangleright^{-1} j) \triangleright u) = k \\ &\Leftrightarrow (i \triangleright (i \triangleright^{-1} j)) \triangleright (i \triangleright u) = k \\ &\Leftrightarrow j \triangleright (i \triangleright u) = k \Leftrightarrow i \triangleright u = i \triangleright s \\ &\Leftrightarrow u = s, \end{aligned}$$

ya que ϕ_j, ϕ_i son biyecciones.

Notar que los racks $\mathcal{O}_4^4$ y $\mathcal{O}_2^4$ en $\mathbb{S}_4$ no son isomorfos, ya que, para $i \in \mathcal{O}_2^4$, siempre tenemos que $\phi_i^2 = \text{id}$, y para $i \in \mathcal{O}_4^4$ $\phi_i^4 = \text{id}$, pero $\phi_i^2 \neq \text{id}$.

DEFINICIÓN 1.9. Un rack $(X, \triangleright)$ se dice *indescomponible* si no puede ser descompuesto como la unión disjunta de dos sub-racks. Se dice que es *fiel* si $\phi_i = \phi_j$ sólo para $i = j$.

DEFINICIÓN 1.10. Sea $(X, \triangleright)$ un rack. Un *2-cociclo* $q : X \times X \rightarrow \mathbb{k}^*$, $(i, j) \mapsto q_{ij}$ es una función tal que

$$q_{i, j \triangleright k} q_{j, k} = q_{i \triangleright j, i \triangleright k} q_{i, k}, \forall i, j, k \in X.$$

EJEMPLOS 1.11.

- Sea $(X, \triangleright)$ un rack, $\xi \in \mathbb{k}^*$. Un mapa $q : X \times X \rightarrow \mathbb{k}^*$ constante

$$q \equiv \xi, \quad \text{i. e.} \quad q_{\sigma\tau} = \xi, \quad \forall \sigma, \tau \in X$$

es un 2-cociclo.

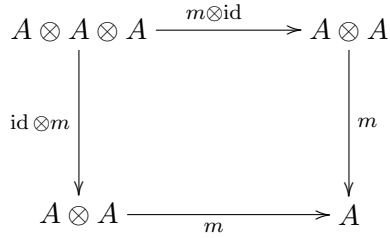
- [MS, Ex. 5.3] Sea $(X, \triangleright) = \mathcal{O}_2^n$. Un 2-cociclo está dado por una función $\chi : X \times X \rightarrow \mathbb{k}^*$ definida como, si $\tau, \sigma \in X$, $\tau = (ij)$ y $i < j$:

$$\chi(\sigma, \tau) = \begin{cases} 1, & \text{si } \sigma(i) < \sigma(j) \\ -1, & \text{si } \sigma(i) > \sigma(j). \end{cases}$$

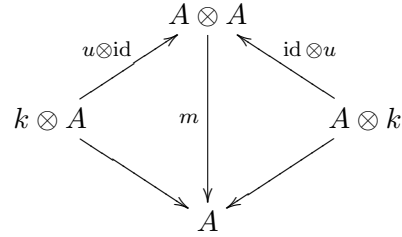
1.4. Álgebras de Hopf

Desarrollaremos aquí algunos de los conceptos básicos de la teoría de álgebras de Hopf y otras estructuras relacionadas. Nos servimos para ello de referencias como [Mo], [Kh2] y [Sc].

Introduciremos primero el concepto de cóalgebra, que en muchos sentidos es un concepto dual al de álgebra (asociativa). Notemos que los axiomas que definen a una k -álgebra asociativa con unidad pueden codificarse en la conmutatividad de los siguientes diagramas:



(Asociatividad)

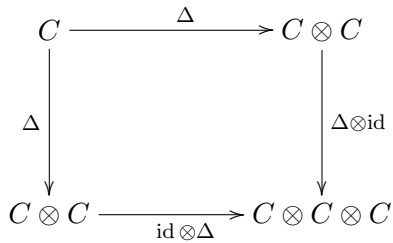
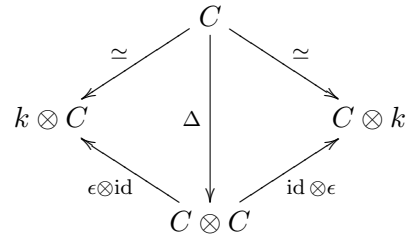


(Unidad)

donde $u : k \rightarrow A$ es un morfismo de anillos cuya imagen está contenida en el centro de A y $m : A \otimes A \rightarrow A$ es la multiplicación. Notar que la unidad en A está dada por $1_A = u(1_k)$.

Podemos entonces dualizar esta noción y obtener la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.12. Una k -cóalgebra coasociativa con counidad es un k -espacio vectorial no nulo C dotado de dos aplicaciones lineales, la *comultiplicación* o *coproducto* $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$ y la *counidad* $\epsilon : C \rightarrow k$ tales que los siguientes diagramas conmutan:

CoasociatividadCounidad

Diremos que C es *coconmutativa* si $\tau \circ \Delta = \Delta$ en C .

DEFINICIÓN 1.13. Sean C y D dos cóalgebras con comultiplicación Δ_C y Δ_D y counidad ϵ_C y ϵ_D respectivamente.

- (i) Una aplicación lineal $f : C \rightarrow D$ es un *morfismo de coálgebras* si $\Delta_D \circ f = (f \otimes f)\Delta_C$ y $\epsilon_D = \epsilon_C \circ f$.
- (ii) Un subespacio $I \subseteq C$ es un *coideal* si $\Delta(I) \subseteq I \otimes C + C \otimes I$ y $\epsilon_C(I) = 0$.

Con esta definición es claro que I es un coideal de C si y sólo si el k -espacio vectorial C/I es una coálgebra con la comultiplicación inducida de Δ_C . Notar que, al ser ϵ_C un morfismo de coálgebras, se sigue que el subespacio $C^+ = \text{Ker } \epsilon \subseteq C$ es un coideal de C .

EJEMPLO 1.14. Sea X un conjunto. Entonces

$$k\{X\} = \left\{ \sum_{x \in X} a_x e_x \mid a_x \in k, a_x \neq 0 \text{ para finitos } x \right\}$$

es una coálgebra coconmutativa. Su estructura está determinada por

$$\Delta(e_x) = e_x \otimes e_x \quad \text{y} \quad \epsilon(e_x) = 1, \quad \text{para todo } x \in X.$$

EJEMPLO 1.15. Si (A, m, u) es un álgebra de dimensión finita, usando la identificación canónica $(A \otimes A)^* \cong A^* \otimes A^*$, A^* resulta ser una coálgebra con comultiplicación m^* y counidad u^* . Explícitamente,

$$m^*(f)(a \otimes b) = f(ab), \quad u^*(f) = f(1), \quad \forall f \in A^*, a, b \in A.$$

Para trabajar con coálgebras usaremos la *notación sigma* de Sweedler: si c es un elemento de una coálgebra (C, Δ, ϵ) , notaremos al elemento $\Delta(c) = \sum_i a_i \otimes b_i \in C \otimes C$ de la siguiente forma

$$\Delta(c) = c_{(1)} \otimes c_{(2)}.$$

Por ejemplo, el axioma de coasociatividad de C dado por $(\Delta \otimes \text{id}) \circ \Delta = (\text{id} \otimes \Delta) \circ \Delta$, se puede expresar como

$$(c_{(1)})_{(1)} \otimes (c_{(1)})_{(2)} \otimes c_{(2)} = c_{(1)} \otimes (c_{(2)})_{(1)} \otimes (c_{(2)})_{(2)} = c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)},$$

para todo $c \in C$. Más aún, generalmente omitiremos los paréntesis de los subíndices, teniendo entonces

$$\Delta(c) = c_1 \otimes c_2.$$

DEFINICIÓN 1.16. Sea C una k -coálgebra. Un C -comódulo a derecha es un k -espacio vectorial M dotado de un morfismo lineal $\rho : M \rightarrow M \otimes C$ tal que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\rho} & M \otimes C \\ \rho \downarrow & & \downarrow \rho \otimes \text{id} \\ M \otimes C & \xrightarrow{\text{id} \otimes \Delta_C} & M \otimes C \otimes C \end{array} \quad \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\rho} & M \otimes C \\ & \searrow \cong & \downarrow \text{id} \otimes \epsilon \\ & & M \otimes k \end{array}$$

Análogamente se define un C -comódulo a izquierda. Las categorías de C -comódulos a derecha y a izquierda se denotarán por $\mathcal{M}^C$ y ${}^C\mathcal{M}$ respectivamente. Un bicomódulo M es un comódulo a izquierda y a derecha tal que

los morfismos de estructura son compatibles. Esto es, si δ_L y δ_R denotan las coacciones a izquierda y a derecha respectivamente, entonces

$$(\text{id} \otimes \delta_R)\delta_L = (\delta_L \otimes \text{id})\delta_R.$$

También usaremos la notación sigma de Sweedler para comódulos: si M es un C -comódulo a derecha, entonces escribimos

$$\rho(m) = m_{(0)} \otimes m_{(1)} \in M \otimes C \quad \text{para todo } m \in M.$$

Análogamente, si M es un C -comódulo a izquierda con morfismo de estructura $\lambda : M \rightarrow C \otimes M$ entonces escribimos

$$\lambda(m) = m_{(-1)} \otimes m_{(0)} \in C \otimes M \quad \text{para todo } m \in M.$$

EJEMPLO 1.17. Sea $C = \mathbb{k}G$, G un grupo. Entonces M es un C -comódulo (a derecha) si y sólo si M es un espacio vectorial G -graduado, esto es $M = \bigoplus_{g \in G} M_g$. En efecto, dado $m \in M$, $\rho(m) = \sum m_g \otimes g$, para (finitos) $m_g \in M_g$.

Se sigue de los axiomas que definen a la coacción ρ que $(m_g)_h = \delta_{g,h} m_g$ y por lo tanto $\rho(m_g) = m_g \otimes g$. Si $M_g = \{m_g : m \in M\}$, esto muestra que la suma es directa. Por otra parte de los mismo axiomas se sigue que $\sum m_g = m$ y por lo tanto vale una implicación. La recíproca es inmediata, tomando $\rho(m) = m \otimes g$, para cada $m \in M_g$.

Sean M y N dos C -comódulos a derecha con morfismos de estructura ρ_M y ρ_N respectivamente. Una aplicación lineal $f : M \rightarrow N$ es un *morfismo de C -comódulos* a derecha si $\rho_N \circ f = (f \otimes \text{id}) \circ \rho_M$.

DEFINICIÓN 1.18. Sean C una coálgebra y M un C -comódulo a derecha. Se define el conjunto de coinvariantes de C en M por

$$M^{\text{co}C} = \{m \in M \mid \rho(m) = m \otimes 1\}.$$

Análogamente, si M es un C -comódulo a izquierda, se define el conjunto de coinvariantes de C en M por

$${}^{\text{co}C}M = \{m \in M \mid \lambda(m) = 1 \otimes m\}.$$

DEFINICIÓN 1.19. Sea C una coálgebra.

(i) El conjunto de elementos de *grupezc*os de C es el conjunto

$$G(C) = \{c \in C \mid c \neq 0 \text{ y } \Delta(c) = c \otimes c\}.$$

(ii) Sean $a, b \in G(C)$. El conjunto de *elementos* (a, b) -*casi-primitivos* de C se define como

$$P_{a,b} = \{c \in C \mid \Delta(c) = a \otimes c + c \otimes b\};$$

en particular, $k(a - b) \subseteq P_{a,b}$ y escribimos $P_{a,b} = \mathbb{k}(a - b) \oplus P'_{a,b}$. A los elementos en $P'_{a,b}$ se los denomina *elementos primitivos*.

Diremos que una coálgebra C es *simple* si no posee subcoálgebras propias y diremos que es *cosemisimple* si es suma directa de subcoálgebras simples.

DEFINICIÓN 1.20. El *corradical* de C es la suma de todas las subcoálgebras simples de C y se denota por C_0 .

DEFINICIÓN 1.21. Si todas las subcoálgebras simples de C tienen dimensión uno, entonces C se dice *punteada* y se tiene que $C_0 = k\{G(C)\}$.

DEFINICIÓN 1.22. Si C_0 es el corradical de C , entonces se define recursivamente C_n para $n \geq 1$ como:

$$C_n = \Delta^{-1}(C \otimes C_{n-1} + C_0 \otimes C).$$

Esta filtración recibe el nombre de *filtración corradical* de C .

Una familia de subespacios $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de C es una *filtración de coálgebras* si

- (i) $C_n \subseteq C_{n+1}$ y $C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$.
- (ii) $\Delta(C_n) \subseteq \sum_{i=0}^n C_i \otimes C_{n-i}$.

La filtración corradical $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia de subcoálgebras de C que da una filtración de coálgebras, ver [Mo, Cap. 5], [S, Cap. IX].

El siguiente teorema, debido a Taft y Wilson [TW], está intrínsecamente relacionado con los métodos de clasificación de álgebras de Hopf punteadas, ver 2.6.

TEOREMA 1.23. [Mo, Teorema 5.4.1] *Sea C una coálgebra punteada, con $G = G(C)$. Entonces*

1. $C_1 = \mathbb{k}G \oplus \left(\bigoplus_{g,h \in G} P'_{g,h}(C) \right)$.
2. *Todo $x \in C_n$, $n \geq 1$, puede escribirse como $x = \sum_{g,h \in G} x_{g,h}$, con*

$$\Delta(x_{g,h}) = x_{g,h} \otimes g + h \otimes x_{g,h} + C_{n-1} \otimes C_{n-1}.$$

DEFINICIÓN 1.24. Una coálgebra C se dice graduada si $C = \bigoplus_{n \geq 0} C^n$ como espacios vectoriales y $\Delta(C^j) \subseteq \sum_{i+k=j} C^i \otimes C^k$. Se dice que C es corradicalmente graduada si la filtración corradical de C coincide con la filtración asociada a su graduación.

DEFINICIÓN 1.25. Sean C una coálgebra y A un álgebra. El conjunto $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(C, A)$ tiene una estructura de álgebra con el *producto de convolución* dado por

$$(f * g)(c) = f(c_{(1)})g(c_{(2)}) \quad \text{para todo } f, g \in \text{Hom}_{\mathbb{k}}(C, A), c \in C.$$

En particular, esto dota a $C^* = \text{Hom}_{\mathbb{k}}(C, \mathbb{k})$ de una estructura de álgebra.

DEFINICIÓN 1.26. Una 5-upla $(B, m, u, \Delta, \epsilon)$ se dice una *biálgebra* si (B, m, u) es un álgebra, (B, Δ, ϵ) es una coálgebra y se cumple alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

- (i) Δ y ϵ son morfismos de álgebras.
- (ii) m y u son morfismos de coálgebras.

Como es de esperar, una aplicación $f : B \rightarrow B'$ entre biálgebras es un *morfismo de biálgebras* si f es un morfismo de álgebras y un morfismo de coálgebras. Un subespacio $I \subseteq B$ es un *bi-ideal* si es un ideal bilátero y un coideal. Al igual que antes, I es un bi-ideal de una biálgebra B si y sólo si el k -espacio vectorial B/I es una biálgebra con las operaciones inducidas por el cociente.

OBSERVACIÓN 1.27. Si B es una biálgebra y M, N son B -módulos, entonces el espacio vectorial $M \otimes N$ es nuevamente un B -módulo, vía la acción diagonal $\cdot$ dada por la comultiplicación:

$$b \cdot (m \otimes n) = \Delta(b)(m \otimes n) = b_1 m \otimes b_2 n, \quad \forall m \in M, n \in N, b \in B.$$

EJEMPLO 1.28. Sea $\mathcal{O}(M_n(k)) = k[X_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n]$ el álgebra de funciones polinomiales en la matrices de $n \times n$. Como álgebra, $\mathcal{O}(M_n(k))$ es simplemente el anillo conmutativo de polinomios en n^2 variables. $\mathcal{O}(M_n(k))$ admite una estructura de coálgebra con la comultiplicación y la counidad determinada por sus valores en los generadores del álgebra $\{X_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq n}$:

$$\Delta(X_{ij}) = \sum_{\ell=1}^n X_{i\ell} \otimes X_{\ell j}, \quad y \quad \epsilon(X_{ij}) = \delta_{ij}, \quad \text{para todo } 1 \leq i, j \leq n.$$

DEFINICIÓN 1.29. Sea $(H, m, u, \Delta, \epsilon)$ una biálgebra. Decimos que H es un *álgebra de Hopf* si existe un elemento $\mathcal{S} \in \text{Hom}_k(H, H)$ que es la inversa de la identidad id_H con respecto al producto de convolución. Es decir, $\mathcal{S}$ debe satisfacer las igualdades

$$\mathcal{S}(h_{(1)})h_{(2)} = \epsilon(h)1_H = h_{(1)}\mathcal{S}(h_{(2)}) \quad \text{para todo } h \in H.$$

Tal $\mathcal{S}$ recibe el nombre de *antípoda* de H .

Si H es un álgebra de Hopf, la antípoda $\mathcal{S}$ resulta ser un morfismo lineal antimultiplicativo y anticomultiplicativo, esto es

$$\mathcal{S}(hk) = \mathcal{S}(k)\mathcal{S}(h), \quad y \quad \Delta(\mathcal{S}(h)) = \mathcal{S}(h_{(2)}) \otimes \mathcal{S}(h_{(1)}), \quad \forall h, k \in H.$$

Una aplicación $f : H \rightarrow K$ entre dos álgebras de Hopf es un *morfismo de álgebras de Hopf* si f es un morfismo de biálgebras. Necesariamente, esto implica la compatibilidad $f(\mathcal{S}_H(h)) = \mathcal{S}_K(f(h))$ para todo $h \in H$.

OBSERVACIÓN 1.30. Si H es un álgebra de Hopf y M es un H -módulo, entonces el espacio vectorial M^* es nuevamente un H -módulo, con la acción traspuesta $\cdot$ dada por la antípoda $\mathcal{S}$:

$$(h \cdot f)(m) = f(\mathcal{S}(h)m), \quad \forall h \in H, f \in M^*, m \in M.$$

Un subespacio I de H es un *ideal de Hopf* si I es un bi-ideal y $\mathcal{S}(I) \subseteq I$. Claramente, $I \subseteq H$ es un ideal de Hopf si y sólo si el espacio vectorial cociente H/I es un álgebra de Hopf. Por ejemplo, el coideal $H^+ = \text{Ker } \epsilon$ es un ideal de Hopf de H y se denomina el *ideal de aumentación* de H .

EJEMPLO 1.31. Sea $(H, m, u, \Delta, \epsilon, \mathcal{S})$ un álgebra de Hopf. Consideremos H^{op} el álgebra con la multiplicación opuesta y H^{cop} la coálgebra con la comultiplicación opuesta, esto es,

$$\Delta^{\text{cop}}(h) = h_{(2)} \otimes h_{(1)} \quad \text{para todo } h \in H.$$

Si $\mathcal{S}$ es biyectiva (por ejemplo, si H es de dimensión finita), se tiene que $(H^{\text{op}}, m^{\text{op}}, u, \Delta, \epsilon, \mathcal{S}^{-1})$ y $(H^{\text{cop}}, m, u, \Delta^{\text{cop}}, \epsilon, \mathcal{S}^{-1})$ son álgebras de Hopf.

EJEMPLO 1.32. Si $(H, m, u, \Delta, \epsilon, \mathcal{S})$ un álgebra de Hopf de dimensión finita, entonces H^* es un álgebra de Hopf. Es una biálgebra con el producto dado por la convolución y la comultiplicación m^* del Ejemplo 1.15. Por su parte, la antípoda $\mathcal{S}^*$ está dada por:

$$\mathcal{S}^*(f)(h) = f(\mathcal{S}^{-1}(h)), \quad f \in H^*, h \in H.$$

EJEMPLO 1.33. Sea G un grupo. Entonces el álgebra de grupo $k[G]$ es un álgebra de Hopf con la antípoda determinada por

$$\mathcal{S}(e_g) = e_{g^{-1}}, \quad \text{para todo } g \in G.$$

EJEMPLO 1.34. Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y $U(\mathfrak{g})$ su álgebra envolvente universal. Entonces $U(\mathfrak{g})$ es un álgebra de Hopf con la estructura determinada por

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x, \quad \epsilon(x) = 0, \quad \mathcal{S}(x) = -x \quad \text{para todo } x \in \mathfrak{g}.$$

EJEMPLO 1.35. Sea $N \geq 2$ un número entero y sea $q \in k$ una raíz N -ésima primitiva de la unidad. El *álgebra de Taft* $T(q)$ es la k -álgebra

$$T(q) = \mathbb{k}\langle g, x \mid g^N = 1, x^N = 0, gx = qxg \rangle$$

$T(q)$ posee una estructura de álgebra de Hopf determinada por

$$\Delta g = g \otimes g, \quad \Delta x = x \otimes 1 + g \otimes x,$$

$T(q)$ es un álgebra de Hopf tal que $G(T(q)) = \langle g \rangle \simeq \mathbb{Z}/(N)$.

DEFINICIÓN 1.36. Un álgebra de Hopf se dice *punteada* si la coálgebra subyacente lo es.

Sea G un grupo. Si H es punteada y $G(H) \cong G$, decimos que H es *punteada sobre* G .

EJEMPLO 1.37. Las álgebras de Hopf $k[G]$, $U(\mathfrak{g})$ y $T(q)$ de los Ejemplos 1.33, 1.34 y 1.35 son punteadas.

OBSERVACIÓN 1.38. Usando la dualidad entre álgebras y coálgebras del Ejemplo 1.15 y la Definición 1.25, se puede ver que un álgebra de Hopf H de dimensión finita es punteada si y sólo si todos los H^* -módulos simples tienen dimensión uno, es decir, si y sólo si H^* es un álgebra básica.

Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita. Entonces H actúa en H^* a izquierda y a derecha por

$$\begin{aligned} \rightharpoonup: H \otimes H^* &\rightarrow H^*, & \langle h \rightharpoonup \alpha, x \rangle &= \langle \alpha, xh \rangle, \\ \leftharpoonup: H^* \otimes H &\rightarrow H^*, & \langle \alpha \leftharpoonup h, x \rangle &= \langle \alpha, hx \rangle, \end{aligned}$$

para todo $h, x \in H, \alpha \in H^*$. Análogamente, H^* actúa en H a izquierda y a derecha por

$$\begin{aligned} \rightharpoonup: H^* \otimes H &\rightarrow H, & \beta \rightharpoonup h &= h_{(1)}\beta(h_{(2)}), \\ \leftharpoonup: H \otimes H^* &\rightarrow H, & h \leftharpoonup \beta &= \beta(h_{(1)})h_{(2)}, \end{aligned}$$

para todo $\beta \in H^*$ y $h \in H$.

Terminamos la sección con la siguiente definición, que será citada en el trabajo. Recordemos que denotamos por τ al flip usual.

DEFINICIÓN 1.39. Un álgebra de Hopf H se dice *casi coconmutativa* si la antípoda de H es biyectiva y existe un elemento invertible $R \in H \otimes H$ tal que, para cada $h \in H$,

$$\tau(\Delta(h)) = R\Delta(h)R^{-1}.$$

H se dice cuasitriangular si además

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes \text{id})R &= R_{13}R_{23}, \\ (\text{id} \otimes \Delta)R &= R_{13}R_{12}.\end{aligned}$$

H es triangular si $\tau(R) = R^{-1}$.

Ver [Mo, Chapter 10] para más precisiones y ejemplos acerca de este concepto.

1.5. Extensiones de Hopf Galois

Referimos al lector a [Bi] para los resultados de esta sección.

1.5.1. Comódulo álgebras.

DEFINICIÓN 1.40. Si H es un álgebra de Hopf, una *comódulo álgebra* (a izquierda) es un álgebra A que es a su vez un comódulo a izquierda sobre H y tal que la correspondiente coacción $\lambda : A \rightarrow H \otimes A$ es un morfismo de álgebras.

EJEMPLO 1.41. Sea A una $\mathbb{k}G$ -comódulo álgebra a izquierda, G un grupo. Del Ejemplo 1.17 sabemos que $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ es un espacio vectorial G -graduado y que si $a_g \in A_g$, entonces $\lambda(a_g) = g \otimes a_g$. Luego $\lambda(a_g b_h) = gh \otimes a_g b_h$, para todo $g, h \in G$ y $1 \in A_1$. Así A es un álgebra G -graduada.

DEFINICIÓN 1.42. Una subálgebra $B \subset H$ se dice subálgebra coideal si $\lambda(B) \subseteq H \otimes B$.

Si A es una H -comódulo álgebra vía $\lambda : A \rightarrow H \otimes A$, diremos que un ideal (a derecha) J es H -coestable si $\lambda(J) \subseteq H \otimes J$.

Decimos que A es H -simple (a derecha), si no tiene ideales (a derecha) H -coestables no triviales.

En particular, si $B \subset H$ es una subálgebra coideal entonces B es H -simple [M1, Proposition 1.6].

DEFINICIÓN 1.43. Si (A, λ) es un H -comódulo, la filtración corradical en H induce una filtración en A , dada por $A_n = \lambda^{-1}(H_n \otimes A)$. Esta filtración se conoce como la *serie de Loewy* en A .

Si A es una comódulo álgebra, el álgebra graduada asociada $\text{gr } A$ es una $\text{gr } H$ -comódulo álgebra. Más aún, se tiene que el álgebra A es H -simple a derecha si y sólo si $\text{gr } A$ es $\text{gr } H$ -simple a derecha, [M1, Corollary 4.5].

DEFINICIÓN 1.44. Si $H = \bigoplus H^i$ es a corradicalmente graduada decimos que una subálgebra coideal a izquierda $K \subseteq H$ es *homogénea* si $K = \bigoplus K^i$ es graduada como álgebra, y para todo n , $K^n \subseteq H^n$ y $\Delta(K^n) \subseteq \bigoplus_{i=0}^n H^i \otimes K^{n-i}$. K se dice *conexa* si $K \cap H^0 = \mathbb{k}$.

1.5.2. Objetos de Hopf-Galois. Si A es una H -comódulo álgebra, el espacio de coinvariantes $C = {}^{\text{co}H}A$ resulta una subálgebra de A .

DEFINICIÓN 1.45. A se dice una extensión H -Galois a izquierda (de C) si la aplicación canónica

$$\text{can} : A \otimes_C A \xrightarrow{\lambda \otimes \text{id}} H \otimes A \otimes A \xrightarrow{\text{id} \otimes m} H \otimes A$$

es una biyección.

Una extensión H -Galois de $\mathbb{k}$ se dice un *objeto de Galois*.

Si L es otra álgebra de Hopf y A es una extensión L -Galois a derecha, de manera tal que A es una bicomódulo álgebra y $C = {}^{\text{co}H}A = A^{\text{co}L}$, entonces se dice que A es una extensión (H, L) -biGalois de C . A se dice un objeto (H, L) -biGalois si $C = \mathbb{k}$.

EJEMPLOS 1.46.

1. H , vista como comódulo álgebra vía la multiplicación es un objeto (H, H) -biGalois.
2. Hemos visto que una comódulo álgebra A sobre $\mathbb{k}G$ es un álgebra G -graduada. A es una extensión de Galois sobre $\mathbb{k}G$ si A es un álgebra fuertemente graduada (i. e. $A_g A_h = A_{gh}$, $\forall g, h \in G$).

DEFINICIÓN 1.47. [D] Un 2-cociclo en H es una mapa lineal invertible para la convolución $\sigma : H \otimes H \rightarrow k$ que satisface

$$\sigma(x_{(1)}, y_{(1)})\sigma(x_{(2)}y_{(2)}, z) = \sigma(y_{(1)}, z_{(1)})\sigma(x, y_{(2)}z_{(2)})$$

y $\sigma(x, 1) = \sigma(1, x) = \varepsilon(x)$, para cada $x, y, z \in H$. El conjunto de 2-cociclos en H se denota por $Z^2(H)$. Cuando $H = k[G]$ es un álgebra de grupo, es fácil ver que $Z^2(k[G]) \simeq Z^2(G, k^*)$. Notar no obstante que en general no hay una estructura natural de grupo en $Z^2(H)$.

Si σ es un 2-cociclo, su inversa para la convolución, denotada σ^{-1} , satisface

$$\sigma^{-1}(x_{(1)}y_{(1)}, z)\sigma^{-1}(x_{(2)}, y_{(2)}) = \sigma^{-1}(x, y_{(1)}z_{(1)})\sigma^{-1}(y_{(2)}, z_{(2)})$$

y $\sigma^{-1}(x, 1) = \sigma^{-1}(1, x) = \varepsilon(x)$, para cada $x, y, z \in H$.

DEFINICIÓN 1.48. Dado un 2-cociclo σ , se define el álgebra ${}_{\sigma}H$. Como espacio vectorial, ${}_{\sigma}H = H$ y el producto se define como:

$$x \cdot y = \sigma(x_{(1)}, y_{(1)})x_{(2)}y_{(2)}, \quad x, y \in H.$$

${}_{\sigma}H$ es un álgebra asociativa con 1 como unidad por la condición de cociclo.

En particular, si Γ es un grupo y $\phi \in Z^2(\Gamma, \mathbb{k}^{\times})$ es un 2-cociclo el *álgebra de grupo torcida* es el álgebra generada por el conjunto $\{e_g : g \in \Gamma\}$ y relaciones $e_g e_h = \phi(g, h)e_{gh}$.

EJEMPLO 1.49. Si H es un álgebra de Hopf y σ es un 2-cociclo, ${}_{\sigma}H$ es una H -comódulo álgebra a derecha con $\Delta : {}_{\sigma}H \rightarrow {}_{\sigma}H \otimes H$ como coacción. Más aún, es un H -objeto de Galois a derecha.

1.5.3. Objetos de Hopf-Galois hendidos. Una clase importante de objetos de Hopf-Galois son los denominados *hendidos*.

OBSERVACIÓN 1.50. En inglés, el término para designar a los objetos hendidos es *cleft*. Así, se habla de, por ejemplo, *left cleft Hopf-Galois object* o *right cleft Hopf-Galois object*. Para simplificar la notación, y evitar la cacofonía en el primer caso, se podría utilizar el adjetivo *cleft* sólo para los objetos hendidos a izquierda e introducir el término *crighth*, para los hendidos a derecha.

Recordamos a continuación algunos resultados básicos sobre estos objetos.

TEOREMA 1.51. [BM, DT] Sea H un álgebra de Hopf y sea A un objeto H -Galois a derecha. Son equivalentes:

1. existe $\sigma \in Z^2(H)$ tal que $A \cong {}_{\sigma}H$ como comódulo álgebras a izquierda.
2. $A \cong H$ como H -comódulos a izquierda.
3. Existe un mapa H -colineal mapa invertible para la convolución $\phi : H \longrightarrow A$

Un objeto H -Galois se dice hendido si satisface alguna de las condiciones enumeradas arriba.

Existen clases de álgebras de Hopf que son naturalmente hendidas.

TEOREMA 1.52. [CK, G] Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita o puntada. Entonces cualquier objeto H -Galois es hendido.

1.5.4. El teorema de Schauenburg. El siguiente resultado, relevante en sí mismo, es también una de las principales motivaciones para el estudio de objetos de Hopf-Galois.

TEOREMA 1.53. [Sch2] Sean H, L dos álgebras de Hopf. Son equivalentes

1. Existe una equivalencia k -lineal de categorías monoideales

$$\text{Comod}(H) \cong^{\otimes} \text{Comod}(L)$$

2. Existe un objeto (H, L) -biGalois.

1.6. Categorías abelianas y tensoriales

Recordaremos aquí algunas nociones como la de categoría abeliana y categoría tensorial. Escribiremos estos conceptos en toda su generalidad, siguiendo [ML], pero en la práctica nuestras categorías abelianas y tensoriales serán del tipo ${}_A\mathcal{M}$, ${}_H\mathcal{M}$, con A un álgebra, H un álgebra de Hopf.

Dada una categoría $\mathcal{C}$, denotamos por $\mathcal{C}(a, b)$ al conjunto de flechas entre dos objetos $a, b, \in \mathcal{C}$.

Comenzamos recordando los siguientes conceptos básicos.

1. Una flecha $m : a \rightarrow b$ en $\mathcal{C}$ es mónica si para cualquier par de flechas $f_1, f_2 : d \rightarrow a$ tales que $mf_1 = mf_2$ se cumple que $f_1 = f_2$. Una flecha $h : a \rightarrow b$ es epi si para cualquier par de flechas $g_1, g_2 : b \rightarrow c$ tales que $g_1h = g_2h$ se cumple que $g_1 = g_2$.
2. Un objeto $t \in \mathcal{C}$ es terminal (respectivamente inicial) si a cada objeto $a \in \mathcal{C}$ existe una única flecha $a \rightarrow t$ (respectivamente $t \rightarrow a$).
3. Un objeto nulo en $\mathcal{C}$ es un objeto que es a la vez terminal y final.
4. Supongamos que $\mathcal{C}$ tiene un objeto nulo. Un núcleo de una flecha $f : a \rightarrow b$ es un ecualizador de las flechas $0, f : a \rightrightarrows b$. Explícitamente, $k : s \rightarrow a$ es un núcleo de $f : a \rightarrow b$ si $fk = 0$ y toda $h : c \rightarrow a$ tal que $fh = 0$ se factoriza a través de k , es decir existe $h' : c \rightarrow s$ tal que $h = kh'$. Análogamente, un conúcleo de $f : a \rightarrow b$ es una flecha $u : b \rightarrow e$ tal que $uf = 0$ y tal que toda flecha $h : b \rightarrow c$ tal que $hf = 0$ se factoriza a través de u a través de una única flecha $h' : e \rightarrow c$.

Para introducir el concepto de categoría abeliana, necesitamos antes recordar otros conceptos relacionados.

DEFINICIÓN 1.54. Una categoría $\mathcal{C}$ es una Ab-categoría si para cada par de objetos $a, b \in \mathcal{C}$ se cumple que $\mathcal{C}(a, b)$ es un grupo abeliano (aditivo) tal que la composición de flechas es bilineal con respecto a la suma.

$\mathcal{C}$ se dice Ab-categoría sobre $\mathbb{k}$, o $\mathbb{k}$ -lineal, si $\mathcal{C}(a, b)$ es un espacio vectorial sobre k y la composición de flechas es $\mathbb{k}$ -bilineal.

DEFINICIÓN 1.55. Una Ab-categoría $\mathcal{C}$ se dice aditiva si

- $\mathcal{C}$ tiene objeto nulo,
- $\mathcal{C}$ tiene biproductos binarios, esto es, para cada par de objetos a, b de $\mathcal{C}$, existe un diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & p_1 & & \\ & & \longleftarrow & & \\ a & \xrightleftharpoons[i_1]{} & c & \xrightleftharpoons[i_2]{} & b \\ & & p_2 & & \end{array}$$

con flechas p_1, p_2, i_1, i_2 tales que $p_1 i_1 = 1_a$, $p_2 i_2 = 1_b$, $i_1 p_1 + i_2 p_2 = 1_c$.

DEFINICIÓN 1.56. Una categoría Abeliana $\mathcal{C}$ es una categoría aditiva tal que las siguientes condiciones son satisfechas

- Toda flecha en $\mathcal{C}$ tiene núcleo y conúcleo.
- Toda flecha mónica es un núcleo, y todo epi es un conúcleo.

EJEMPLO 1.57. Sea A una $\mathbb{k}$ -álgebra. Entonces $\mathcal{C} = {}_A\mathcal{M}$ es una categoría abeliana con los núcleos y conúcleos habituales. Más aún, $\mathcal{C}$ es una categoría abeliana $\mathbb{k}$ -lineal.

Terminamos esta sección con las definiciones de categoría monoidal y tensorial.

DEFINICIÓN 1.58. Una *categoría monoidal* es una colección de datos $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, \alpha, \lambda, \rho)$ donde $\mathcal{C}$ es una categoría, $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ es un bifunctor, $\mathbf{1} \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ y

$$\begin{aligned} \alpha_{U,V,W} &: (U \otimes V) \otimes W \rightarrow U \otimes (V \otimes W) \\ \rho_U &: U \otimes \mathbf{1} \rightarrow U, \quad \lambda_U : \mathbf{1} \otimes U \rightarrow U \end{aligned}$$

son isomorfismos naturales que satisfacen los siguientes axiomas:

1. Identidad del pentágono: Dados $V_i \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ ($i = 1, 2, 3, 4$), tenemos

$$(\text{id}_1 \otimes \alpha_{2,3,4}) \alpha_{1,23,4} (\alpha_{1,2,3} \otimes \text{id}_4) = \alpha_{1,2,34} \alpha_{12,3,4}.$$

2. Identidad del triángulo: Dados $V_1, V_2 \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, vale

$$\rho \otimes \text{id} = (\text{id} \otimes \lambda) \alpha_{1,1,2}.$$

Una categoría monoidal se dice aditiva si la categoría subyacente $\mathcal{C}$ es aditiva y, además, $\otimes$ es bilineal en los espacios de morfismos.

Dado un objeto X en una categoría monoidal $\mathcal{C}$ un dual a derecha de X es un objeto X^* dotado de morfismos $\text{ev}_X : X^* \otimes X \rightarrow \mathbf{1}$, y $\text{coev}_X : \mathbf{1} \rightarrow X \otimes X^*$, tales que las composiciones tal que

$$\begin{aligned} \lambda_X^{-1} (\text{coev}_X \otimes \text{id}) \alpha_{X,X^*,X} (\text{id} \otimes \text{ev}_X) r_X &= \text{id}_X \quad \text{y} \\ \rho_{X^*}^{-1} (\text{id} \otimes \text{coev}_X) \alpha_{X^*,X,X^*}^{-1} (\text{ev}_X \otimes \text{id}) \lambda_{X^*} &= \text{id}_{X^*}. \end{aligned}$$

Los morfismos ev y $coev$ se denominan la evaluación y la coevaluación, respectivamente. Análogamente se define dual a izquierda.

DEFINICIÓN 1.59. Una categoría monoidal $\mathcal{C}$ se dice rígida si todo objeto posee duales a derecha e izquierda.

DEFINICIÓN 1.60. Una categoría tensorial es una categoría abeliana $\mathbb{k}$ -lineal monoidal y rígida tal que sus funtores de estructura son $\mathbb{k}$ -lineales.

EJEMPLOS 1.61.

1. La categoría de espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\mathbb{k}$ es una categoría tensorial, con los funtores de estructura usuales.
2. Si A es un álgebra $\mathcal{C} = {}_A\mathcal{M}_A$ es monoidal, son el producto dado por $\otimes_A$. Si A es semisimple, la categoría de bimódulos de dimensión finita es tensorial.
3. Sea H un álgebra de Hopf y sea $\mathcal{C} = {}_H\mathcal{M}$ la categoría de módulos de dimensión finita sobre H . Entonces $\mathcal{C}$ es tensorial. Los funtores de estructura se detallan a continuación:
 - $\mathcal{C}$ es una categoría abeliana $\mathbb{k}$ -lineal con objeto nulo, núcleos y conúcleos usuales.
 - El objeto $\mathbf{1}$ de $\mathcal{C}$ está dado por el cuerpo de base $\mathbb{k}$ que es un H -módulo vía la counidad ϵ .
 - El bifunctor $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ es el producto tensorial usual (sobre $\mathbb{k}$) y la estructura de H -módulo está dada por la comultiplicación de H .
 - Si $V \in \mathcal{C}$, los duales a derecha e izquierda de V coinciden con el dual lineal, y la estructura de H -módulo en V^* está dada por

$$(h \cdot f)(v) = f(S(h) \cdot v), \quad h \in H, \quad v \in V, \quad f \in V^*.$$

Cuando consideremos a ${}_H\mathcal{M}$ como categoría tensorial, la denotaremos por $\text{Rep}(H)$.

Necesitaremos, en ciertas partes del trabajo, la noción adicional de categoría monoidal trenzada. La introducimos a continuación, y remarcamos que el caso de nuestro interés será siempre el tratado en el ejemplo subsiguiente.

DEFINICIÓN 1.62. Una categoría monoidal $\mathcal{C}$ es trenzada si existe una familia de isomorfismos naturales $c_{a,b} : a \otimes b \rightarrow b \otimes a$ para cada par de objetos $a, b \in \mathcal{C}$ sujetos a los “axiomas del hexágono”:

$$\begin{aligned} \alpha_{b,c,a} c_{a,b \otimes c} \alpha_{a,b,c} &= (\text{id}_b \otimes c_{a,c}) \alpha_{b,a,c} (c_{a,b} \otimes \text{id}_c) \\ \alpha_{c,a,b}^{-1} c_{a \otimes b, c} \alpha_{a,b,c}^{-1} &= (c_{a,c} \otimes \text{id}_b) \alpha_{a,c,b}^{-1} (\text{id}_a \otimes c_{b,c}). \end{aligned}$$

para todos los objetos a, b, c de $\mathcal{C}$. $\mathcal{C}$ se dice simétrica si además se satisface la relación $c_{b,a} = c_{a,b}^{-1}$ para todo $a, b \in \mathcal{C}$.

Dada una categoría tensorial $\mathcal{C}$, un álgebra (R, μ, ν) en $\mathcal{C}$ es un objeto $R \in \mathcal{C}$ junto con morfismos $\mu \in \mathcal{C}(R \otimes R, R)$ y $\nu \in \mathcal{C}(\mathbf{1}, R)$ tales que los axiomas de asociatividad y unidad usuales se satisfacen. Análogamente se define la noción de coálgebra en $\mathcal{C}$.

Si $\mathcal{C}$ es una categoría trenzada y R es un álgebra en $\mathcal{C}$, entonces se puede dar una estructura de álgebra al producto $R \otimes R$. En este caso, la

multiplicación $(R \otimes R) \times (R \otimes R) \rightarrow R \otimes R$ se define como

$$(r \otimes s, t \otimes u) \mapsto \sum_i r t_i \otimes s_i u, \quad \text{con} \quad c(s \otimes t) = \sum_i t_i \otimes s_i.$$

Eso permite definir biálgebras y álgebras de Hopf (trenzadas) en $\mathcal{C}$.

EJEMPLOS 1.63.

1. La categoría de espacios vectoriales es una categoría simétrica, con la trenza dada por el flip τ .
2. Si H es un álgebra de Hopf cuasitriangular, entonces ${}_H\mathcal{M}$ es trezada.
3. Si H es un álgebra de Hopf con antípoda biyectiva, entonces ${}_H^H\mathcal{YD}$ es una categoría tensorial trezada (ver Sección 1.7 a continuación).

1.7. Módulos de Yetter-Drinfeld

En esta sección introducimos una categoría que estará presente en diversas partes del trabajo y que provee un ejemplo de categoría tensorial trezada (rígida).

DEFINICIÓN 1.64. La categoría de módulos de Yetter-Drinfeld (a izquierda) sobre H , ${}_H^H\mathcal{YD}$ se define como sigue: M es un objeto de ${}_H^H\mathcal{YD}$ si y sólo si existe una acción $\cdot$ tal que $(M, \cdot)$ es un H -módulo (a izquierda) y una coacción δ tal que (M, δ) es un H -comódulo (a izquierda), sujetas a la siguiente condición de compatibilidad:

$$\delta(h \cdot m) = h_1 m_{-1} \mathcal{S}(h_3) \otimes h_2 \cdot m_0, \quad \forall m \in M, h \in H,$$

donde $\delta(m) = m_{-1} \otimes m_0$. Si G es un grupo finito y $H = \mathbb{k}G$, escribimos ${}_G^G\mathcal{YD}$ en lugar de ${}_H^H\mathcal{YD}$.

Sea H un álgebra de Hopf. La categoría ${}_H^H\mathcal{YD}$ es tensorial, con el producto dado por el producto tensorial sobre el cuerpo $\mathbb{k}$. Si $M, N \in {}_H^H\mathcal{YD}$ entonces $M \otimes N \in {}_H^H\mathcal{YD}$ con la acción diagonal y la coacción

$$\delta(m \otimes n) = m_{(-1)} n_{(-1)} \otimes m_{(0)} \otimes n_{(0)} \in H \otimes M \otimes N.$$

Si la antípoda de H es biyectiva (en particular, si $H = \mathbb{k}G$), la categoría ${}_H^H\mathcal{YD}$ es rígida (ver 1.6). Explícitamente, sea $M \in {}_H^H\mathcal{YD}$ con base lineal $\{e_i\}_{i=1}^n$ y base dual $\{e^i\}_{i=1}^n$. Su dual (a derecha) M^* es el $\mathbb{k}$ -espacio vectorial dual de M con acción y coacción dadas por:

$$(h \cdot f)(m) = f(\mathcal{S}(h)m), \quad f_{(-1)} \otimes f_{(0)} = \sum_{i=1}^n \mathcal{S}^{-1}((e_i)_{(-1)}) \otimes f((e_i)_{(0)}) e^i,$$

para $f \in M^*$, $m \in M$. El dual a izquierda *M se define de manera análoga, intercambiando los roles de $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}^{-1}$. Cuando $H = \mathbb{k}G$, ${}^*M \cong M^*$.

Más aún, ${}_H^H\mathcal{YD}$ es una categoría trezada (ver 1.6). Si $M, N \in {}_H^H\mathcal{YD}$ entonces una trenza está dada por

$$c(m \otimes n) = m_{(-1)} \cdot n \otimes m_{(0)}, \quad m \in M, n \in N.$$

DEFINICIÓN 1.65. Si R es una álgebra de Hopf trenzada en ${}^H_H\mathcal{YD}$ se define el biproducto de Radford o bosonización $R\#H$ como la siguiente álgebra de Hopf. $R\#H = R \otimes H$ como espacio vectorial, mientras que el producto y el coproducto están dados, respectivamente, por

$$(r\#h)(r'\#h') = r(h_1 \cdot r')\#h_2h',$$

$$\Delta(r\#h) = (r^1\#r^2_{(-1)}h_1) \otimes (r^2_{(0)}\#h_2),$$

para $r, r' \in R$, $h, h' \in H$ y donde $\Delta(h) = h_{(1)} \otimes h_{(2)}$ es el coproducto de H , $\Delta_R(r) = r^1 \otimes r^2$ es el coproducto (trenzado) de R , $\delta(r) = r_{(-1)} \otimes r_{(0)}$ es la coacción del módulo de Yetter-Drinfeld R y $\cdot$ denota la acción.

Referimos a [AS3] para más precisiones y propiedades al respecto de estas álgebras de Hopf trenzadas.

Necesitaremos la siguiente definición, que incluimos aquí por razones que quedarán claras en el teorema que le sigue.

DEFINICIÓN 1.66. Un bimódulo de Hopf sobre un álgebra de Hopf H es un bimódulo y un bicomódulo tal que las coacciones a izquierda y derecha son mapas de bimódulos.

La categoría de bimódulos de Hopf es denotada por ${}^H_H\mathcal{M}_H^H$.

El siguiente teorema determina la estructura de los bimódulos de Hopf.

TEOREMA 1.67. [Sch1, Theorem 5.7][W] *La categoría de bimódulos de Hopf ${}^H_H\mathcal{M}_H^H$ es equivalente a la categoría de módulos de Yetter Drinfeld ${}^H_H\mathcal{YD}$.*

La equivalencia está dada por:

$$\begin{array}{llll} {}^H_H\mathcal{M}_H^H & \ni & (M, \rightharpoonup, \leftharpoonup, \delta_L, \delta_R) & \mapsto & ({}^{\text{co}H}M, \rightrightarrows, \delta_L) & \in & {}^H_H\mathcal{YD} \\ {}^H_H\mathcal{YD} & \ni & (N, *, \lambda) & \mapsto & (N \otimes H, \triangleright, \triangleleft, \lambda, \rho) & \in & {}^H_H\mathcal{M}_H^H \end{array}$$

donde denotamos por:

- $\rightharpoonup, \leftharpoonup$ las acciones a izquierda y derecha de H sobre el bimódulo M ,
- δ_L, δ_R las coacciones a izquierda y derecha de H sobre el bicomódulo M ,
- $\rightrightarrows$ la acción (a izquierda) de H sobre M dada por la conjugación:

$$h \rightrightarrows m = h_1 \rightharpoonup m \leftharpoonup S(h_2), \quad \forall h \in H, m \in M,$$

- $*$, respectivamente λ la acción, respectivamente la coacción, H sobre el módulo de Yetter Drinfeld N ,
- $\triangleright$ la acción diagonal de H sobre $N \otimes H$:

$$h \triangleright (n \otimes k) = h_1 \rightharpoonup n \otimes h_2 k, \quad \forall h, k \in H, n \in N,$$

- $\triangleleft$ la acción de H sobre $N \otimes H$ por multiplicación a derecha en el segundo tensorando,
- ρ la coacción de H sobre $N \otimes H$ por comultiplicación en el segundo tensorando.

1.8. Representaciones de categorías tensoriales

Para los resultados y definiciones básicas de esta parte referimos a [EO1], [O1].

DEFINICIÓN 1.68. Dada $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \otimes, a, \mathbf{1})$ una categoría tensorial, una *categoría módulo* sobre $\mathcal{C}$ o una *representación* de $\mathcal{C}$ es una categoría Abeliana $\mathcal{M}$ equipada con un bifunctor exacto $\overline{\otimes} : \mathcal{C} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ junto con isomorfismos naturales $m_{X,Y,M} : (X \otimes Y) \otimes M \rightarrow X \otimes (Y \otimes M)$, $\ell_M : \mathbf{1} \otimes M \rightarrow M$ que satisfacen los siguientes axiomas de asociatividad y unidad:

$$\begin{aligned} m_{X,Y,Z \otimes M} m_{X \otimes Y, Z, M} &= (\text{id}_X \otimes m_{Y,Z,M}) m_{X,Y \otimes Z, M} (a_{X,Y,Z} \otimes \text{id}_M) \\ (\text{id}_X \otimes \ell_M) m_{X, \mathbf{1}, M} &= \rho_X \otimes \text{id}_M. \end{aligned}$$

EJEMPLOS 1.69. Los siguientes son ejemplos de categorías módulo.

1. Si $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1})$ es una categoría tensorial, entonces $\mathcal{C}$ es una categoría módulo sobre sí misma vía $\otimes$.
2. Si H es un álgebra de Hopf y $\lambda : A \rightarrow H \otimes A$ es una H -comódulo álgebra a izquierda, entonces la categoría de A -módulos a izquierda de dimensión finita, ${}_A\mathcal{M}$ es una representación de $\text{Rep}(H)$ ver Ejemplos 1.61. La acción $\overline{\otimes} : \text{Rep}(H) \times {}_A\mathcal{M} \rightarrow {}_A\mathcal{M}$ está dada por $V \overline{\otimes} M = V \otimes M$ para cada $V \in \text{Rep}(H)$, $M \in {}_A\mathcal{M}$. La estructura de A -módulo en $V \otimes M$ está dada por la coacción λ .

Asumiremos que todas las categorías módulo tienen una cantidad finita de clases de isomorfismo de objetos simples. Una categoría tensorial $\mathcal{C}$ se dice finita si existen sólo finitas clases de isomorfismo de objetos simples, los espacios $\mathcal{C}(-, -)$ son de dimensión finita sobre $\mathbb{k}$ y todo objeto es de longitud finita y tiene cubierta proyectiva.

Una categoría módulo es *indescomponible* si no es equivalente a la suma directa de dos categorías módulo no triviales. Una categoría módulo $\mathcal{M}$ sobre una categoría tensorial finita $\mathcal{C}$ es *exacta* [EO1] si para cada objeto proyectivo $P \in \mathcal{C}$ y cada $M \in \mathcal{M}$, el objeto $P \otimes M$ es nuevamente proyectivo en $\mathcal{M}$.

Si $\mathcal{M}$ es una categoría módulo exacta sobre $\mathcal{C}$ entonces la categoría dual $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}^* = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$, [EO1], es una categoría tensorial finita. Existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de clases de equivalencia de categorías módulo exactas sobre $\mathcal{C}$ y sobre $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}^*$, ver [EO1, Teorema 3.33]. En particular, esto implica que para cualquier álgebra de Hopf de dimensión finita hay una correspondencia biyectiva entre las clases de equivalencia de las categorías módulo exactas sobre $\text{Rep}(H)$ y $\text{Rep}(H^*)$.

1.9. Categorías módulo sobre álgebras de Hopf punteadas

Estamos interesados en las categorías módulo exactas indescomponibles sobre la categoría de representaciones de un álgebra de Hopf de dimensión finita.

Hemos visto en los Ejemplos 1.69 que las comódulo álgebras sobre un álgebra de Hopf H determinan una representación de $\text{Rep}(H)$. Recíprocamente, si $\mathcal{M}$ es una representación exacta indescomponible sobre $\text{Rep}(H)$ entonces existe una H -comódulo álgebra a izquierda A H -simple a derecha

con coinvariantes triviales tal que $\mathcal{M} \simeq {}_A\mathcal{M}$ como módulos sobre $\text{Rep}(H)$, [AM, Theorem 3.3].

Si A, A' son dos H -comódulo álgebras a izquierda H -simples a derecha tales que las categorías ${}_A\mathcal{M}, {}_{A'}\mathcal{M}$ son equivalentes como representaciones sobre $\text{Rep}(H)$, entonces existe un contexto Morita equivariante (P, Q, f, g) . Esto es, si $U = \text{gr } H$, objetos $P \in {}^U_{A'}\mathcal{M}_A, Q \in {}^U_A\mathcal{M}_{A'}$ e isomorfismos de bimódulos $f : P \otimes_A Q \rightarrow A'$ y $g : Q \otimes_{A'} P \rightarrow A$ tales que $A' \simeq \text{End}_A(P)$ como comódulo álgebras. La estructura de comódulo en $\text{End}_A(P)$ está dada por $\lambda(T) = T_{(-1)} \otimes T_{(0)}$, donde

$$(1.2) \quad \langle \alpha, T_{(-1)} \rangle T_{(0)}(p) = \langle \alpha, T(p_0)_{-1} \mathcal{S}^{-1}(p_{-1}) \rangle T(p_0)_0,$$

para cada $\alpha \in H^*, T \in \text{End}_B(P), p \in P$. Ver [AM] para más detalles.

Sean G un grupo finito y H un álgebra de Hopf punteada de dimensión finita con corradical $\mathbb{k}G$. Supongamos que $U = \mathfrak{B}(V) \# \mathbb{k}G$, para $V \in {}^G_G\mathcal{YD}$. Sea A una H -comódulo álgebra a izquierda H -simple a derecha con coinvariantes triviales.

TEOREMA 1.70. [M2, Teorema 3.3] *Bajo las hipótesis de arriba, existen*

1. *un subgrupo $F \subseteq G$,*
2. *un 2-cociclo $\psi \in Z^2(F, \mathbb{k}^\times)$,*
3. *un subálgebra coideal homogénea a izquierda $\mathcal{K} = \bigoplus_{i=0}^m \mathcal{K}^i \subseteq \mathfrak{B}(V)$ tal que $\mathcal{K}^1 \subseteq V$ es un $\mathbb{k}G$ -subcomódulo invariante bajo la acción de F ,*

tal que $\text{gr } A \simeq \mathcal{K} \# \mathbb{k}_\psi F$ como U -comódulo álgebras a izquierda. $\square$

La estructura de álgebra y la estructura de U -comódulo a izquierda de $\mathcal{K} \# \mathbb{k}_\psi F$ se da como sigue. Si $x, y \in \mathcal{K}, f, g \in F$ entonces

$$(x \# g)(y \# f) = x(g \cdot y) \# \psi(g, f) gf,$$

$$\lambda(x \# g) = (x_1 g) \otimes (x_2 \# g),$$

donde la acción de F en $\mathcal{K}$ es la restricción de la acción de G en $\mathfrak{B}(V)$ como objeto en ${}^G_G\mathcal{YD}$.

Álgebras de Nichols

En este capítulo nos dedicamos a una clase de objetos que son de fundamental importancia en el resto del trabajo y en el ámbito general del problema de clasificación de álgebras de Hopf (punteadas).

Destacamos una caracterización para el espacio de relaciones cuadráticas que definen a estas álgebras. También, mostramos que este espacio coincide con el espacio total de relaciones en el caso de las álgebras de Nichols asociadas al rack de trasposiciones en $\mathbb{S}_5$ y a un cociclo no constante (dado).

2.1. Definición

Sea H un álgebra de Hopf. Si $V \in {}^H_H\mathcal{YD}$, entonces el álgebra tensorial $T(V)$ admite una estructura única de álgebra de Hopf trenzada graduada en ${}^H_H\mathcal{YD}$ tal que $V \subseteq \mathcal{P}(V)$.

DEFINICIÓN 2.1. El álgebra de Nichols $\mathfrak{B}(V)$ [AS2] es el cociente de $T(V)$ por el elemento maximal $I(V)$ de la clase $\mathfrak{S}$ de todos los ideales biláteros homogéneos $I \subseteq T(V)$ tales que

- I está generado por elementos homogéneos de grado ≥ 2 ,
- I es un submódulo de Yetter-Drinfeld de $T(V)$,
- I es un ideal de Hopf: $\Delta(I) \subset I \otimes T(V) + T(V) \otimes I$.

$I(V) = \bigoplus_{n \geq 0} I(V)^n$ es un ideal de Hopf graduado. Si $I(V)_2$ es el ideal generado por $I(V)^2$, entonces

$$(2.1) \quad \widehat{\mathfrak{B}}_2(V) = T(V)/I(V)_2$$

es la *aproximación cuadrática* del álgebra de Nichols $\mathfrak{B}(V)$.

Las álgebras de Nichols de dimensión finita satisfacen una dualidad de Poincaré [AG, Section 6]: sea n el grado del espacio de integrales –es fácil ver que éste es homogéneo con respecto a la $\mathbb{N}$ -graduación de $\mathfrak{B}(V)$ –, entonces $\dim \mathfrak{B}^r(V) = \dim \mathfrak{B}^{n-r}(V)$ para cada $r \in \mathbb{N}$. En particular, $\mathfrak{B}^m(V) = 0$ para $m > n$; $\dim \mathfrak{B}^n(V) = 1$ ya que $\dim \mathfrak{B}^0(V) = 1$; y puesto que $\mathfrak{B}(V)$ está generada por $\mathfrak{B}^1(V)$, tenemos que $\dim \mathfrak{B}^r(V) \neq 0$ para $0 \leq r \leq n$. Se dice que n es el *grado máximo* de $\mathfrak{B}(V)$.

Existe una definición equivalente álgebra de Nichols, que resulta más útil al momento de calcular las relaciones que la definen. Para darla, necesitamos antes introducir los espacios vectoriales trenzados, que es el tema de la próxima sección.

2.2. Espacios vectoriales trenzados

DEFINICIÓN 2.2. Un espacio vectorial trenzado es un par (V, c) , donde V es un espacio vectorial y $c \in \text{Aut}(V \otimes V)$ es una solución de la ecuación de trenzas, esto es:

$$(c \otimes \text{id})(\text{id} \otimes c)(c \otimes \text{id}) = (\text{id} \otimes c)(c \otimes \text{id})(\text{id} \otimes c).$$

EJEMPLOS 2.3.

1. Si H es un álgebra de Hopf con antípoda biyectiva, entonces cualquier $V \in {}^H_H\mathcal{YD}$ es un espacio vectorial trenzado [Mo], ver Sección 1.7 para detalles sobre la trenza.
2. Sea $V = \mathbb{k}\{x_1, \dots, x_\theta\}$ un espacio vectorial y $q = (q_{ij})_{i,j \in I} \in \mathbb{k}^{I \times I}$ una matriz de elementos no nulos. Entonces la extensión lineal de la aplicación $c(x_i \otimes x_j) = q_{ij}x_j \otimes x_i$, $i, j \in I$ define una trenza en V .

Si (V, c) es un espacio vectorial trenzado, se define el *espacio vectorial trenzado dual* como el espacio vectorial $V^* = \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, \mathbb{k})$ con la trenza dada por $f \otimes g \mapsto c^*(f \otimes g)$, con

$$c^*(f \otimes g)(x \otimes y) = (f \otimes g)(c(x \otimes y)), \quad f, g \in V^*, \quad x, y \in V.$$

Dado (V, c) un espacio vectorial trenzado, se extiende naturalmente la trenza a $c : T(V) \otimes T(V) \rightarrow T(V) \otimes T(V)$. Si $x, y \in T(V)$, entonces el conmutador trenzado es

$$(2.2) \quad [x, y]_c := \text{multiplicación} \circ (\text{id} - c)(x \otimes y).$$

Para definir el álgebra de Nichols asociada al espacio vectorial trenzado (V, c) , necesitamos desarrollar algunos preliminares. Consideremos el grupo simétrico $\mathbb{S}_n$ y el grupo de trenzas $\mathbb{B}_n$, con generadores $\{\tau_1, \dots, \tau_{n-1}\}$ y $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}$ respectivamente, con τ_i la trasposición $(i, i+1)$, $i = 1, \dots, n-1$.

Si (V, c) es un espacio vectorial trenzado, entonces es posible definir una representación $\rho_n : \mathbb{B}_n \rightarrow \text{End}(T^n(V))$ del grupo de trenzas $\mathbb{B}_n$ en $T^n(V)$ como sigue:

$$\rho_n(\sigma_i)(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = x_1 \otimes \dots \otimes c(x_i \otimes x_{i+1}) \otimes x_{i+2} \otimes \dots \otimes x_n.$$

La *sección de Matsumoto* de la proyección canónica $\mathbb{B}_n \rightarrow \mathbb{S}_n$, $\sigma_i \mapsto \tau_i$, es la función definida en $x \in \mathbb{S}_n$ como sigue:

- se escribe $x = \tau_{i_1} \dots \tau_{i_l}$ en la forma más corta posible, y
- se reemplazan los τ_i 's por los σ_i 's, i.e., $M(x) = \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_l}$ (no depende de la escritura de x elegida).

El *simetrizador cuántico* $Q_n \in \text{End}(T^n(V))$ está dado por

$$Q_n = \sum_{x \in \mathbb{S}_n} \rho_n(M(x)).$$

DEFINICIÓN 2.4. El álgebra de Nichols asociada al espacio vectorial trenzado (V, c) es

$$\mathfrak{B}(V) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{B}^n(V) = \mathbb{k} \oplus V \oplus \left(\bigoplus_{n \geq 2} T^n(V) / \ker Q_n \right).$$

Con esta notación, la aproximación cuadrática $\widehat{\mathfrak{B}}_2(V)$ definida en (2.1) resulta ser el cociente $T(V)/\langle \ker Q_2 \rangle$.

Según las características de la trenza c , los espacios vectoriales trenzados, y sus álgebras de Nichols asociadas, presentan diferentes características, y se conocen más o menos de sus propiedades. A continuación enumeramos algunos tipos de trenzas y listamos sus propiedades más relevantes.

2.2.1. Espacios vectoriales trenzados de tipo diagonal. La siguiente clase de espacios trenzados es de particular interés, como quedará claro en el Ejemplo 2.6.

DEFINICIÓN 2.5. Un espacio vectorial trenzado (V, c) es de *tipo diagonal* con respecto a una base $\{x_i\}_{i \in I}$ si existen escalares $q_{ij} \in \mathbb{k}^\times$ tales que

$$c(x_i \otimes x_j) = q_{ij} x_j \otimes x_i, \quad i, j \in I.$$

La matriz $q = (q_{ij})_{i,j \in I}$ se dice la matriz de la trenza.

EJEMPLO 2.6. Sea Γ un grupo abeliano finito. Cualquier $V \in {}^\Gamma \mathcal{YD}$ es un espacio vectorial trenzado de tipo diagonal. En efecto,

$$V = \bigoplus_{g \in \Gamma, \chi \in \widehat{\Gamma}} V_g^\chi,$$

donde $V_g^\chi = V^\chi \cap V_g$ y

$$V_g = \{v \in V \mid \delta(v) = g \otimes v\},$$

$$V^\chi = \{v \in V \mid g \cdot v = \chi(g)v \text{ para todo } g \in \Gamma\}.$$

La trenza está dada por

$$c(x \otimes y) = \chi(g)y \otimes x, \quad \text{para cada } x \in V_g, y \in V^\chi, g \in \Gamma, \chi \in \widehat{\Gamma}.$$

Recíprocamente, cualquier espacio vectorial trenzado de tipo diagonal puede ser realizado como un módulo de Yetter-Drinfeld sobre el álgebra de grupo de un grupo abeliano.

2.2.2. Espacios vectoriales trenzados de tipo estándar. Dentro de los espacios trenzados de tipo diagonal, existe una subclase que nos interesará en detalle en el trabajo, que son los espacios vectoriales trenzados de tipo estándar. Para dar su definición, necesitaremos algunos preliminares. Referimos a los trabajos [A, AA] para más detalles sobre los resultados y conceptos de esta subsección.

Sea V un espacio vectorial trenzado de tipo diagonal, con $\dim V = \theta$ y matriz de la trenza $(q_{ij})_{1 \leq i, j \leq \theta}$. Sea $E = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_\theta\}$ la base canónica de $\mathbb{Z}^\theta$ y consideremos la forma bilineal

$$\chi : \mathbb{Z}^\theta \times \mathbb{Z}^\theta \rightarrow \mathbb{k}^\times, \quad \chi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = q_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq \theta.$$

Si $F = \{f_1, \dots, f_\theta\}$ es otra base de $\mathbb{Z}^\theta$, entonces sea $q^F = (q_{ij}^F)_{1 \leq i, j \leq \theta}$ dada por $q_{ij}^F = \chi(f_i, f_j)$, $1 \leq i, j \leq \theta$. Así $q = q^E$. Para $i \neq j \in \{1, \dots, \theta\}$, consideremos el conjunto

$$M_{ij}^F = \{m \in \mathbb{N}_0 \mid (m+1)_{q_{ii}^F} ((q_{ii}^F)^m q_{ij}^F q_{ji}^F - 1) = 0\}.$$

Ver página 1 para la notación. Si este conjunto no es vacío, sea m_{ij}^F su elemento minimal. También, sea $m_{ii}^F = 2, \forall i$. Sea s_i^F la pseudo-reflexión en $\mathbb{Z}^\theta$ dada por

$$s_i^F(f_j) = f_j + m_{ij}^F f_i, \quad j = 1, \dots, \theta.$$

Notar que $s_i^F(F)$ es nuevamente una base de $\mathbb{Z}^\theta$.

Sea G un grupo actuando en un conjunto X . Se define el *grupoide de transformación* como $\mathcal{G} = G \times X$, con la estructura de grupoide dada por $(g, x)(h, y) = (gh, y)$ si $x = h(y)$, y no definida en otro caso.

DEFINICIÓN 2.7. [AA, Definition 3.3] Consideremos el conjunto X de todas las bases ordenadas de $\mathbb{Z}^\theta$ y la acción canónica de $\text{GL}(\theta, \mathbb{Z})$ sobre X . El *grupoide de Weyl* $W(\chi)$ de la forma bilineal χ es el menor subgrupoide del grupoide de transformación $\text{GL}(\theta, \mathbb{Z}) \times X$ que satisface las siguientes propiedades:

- $(\text{id}, E) \in W(\chi)$,
- si $(\text{id}, F) \in W(\chi)$ y $s_{i,F}$ está definida, entonces $(s_{i,F}, F) \in W(\chi)$,

Sea $\mathcal{P}(\chi) = \{F : (\text{id}, F) \in W(\chi)\}$ el conjunto de puntos del grupoide $W(\chi)$. El conjunto

$$\Delta(\chi) = \bigcup_{F \in \mathcal{P}(\chi)} F$$

es el *sistema de raíces generalizado* asociado a χ .

DEFINICIÓN 2.8. [AA] La forma χ se dice *estándar* si para cada $F \in \mathcal{P}(\chi)$, los enteros m_{ij}^F están definidos, para cada $1 \leq i, j \leq \theta$, y $m(s_k^F(F))_{ij} = m_{ij}$ para todo i, j, k .

Un espacio vectorial trenzado de tipo diagonal se dice de *tipo estándar* si la forma χ asociada es de tipo estándar.

2.2.3. Espacios vectoriales trenzados asociados a racks.

Dado un rack X y un 2-cociclo $q : X \times X \rightarrow \mathbb{k}^*$, es posible generar una trenza c^q en el espacio vectorial $\mathbb{k}X$ con base $\{x_i\}_{i \in X}$ por

$$c^q(x_i \otimes x_j) = q_{ij} x_{i \triangleright j} \otimes x_i, \quad \forall i, j \in X.$$

Notar que esto generaliza el Ejemplo 2.3 2, que corresponde al rack trivial.

El espacio vectorial trenzado dual de $(\mathbb{k}X, c^q)$ está dado por $(\mathbb{k}X^{-1}, c^{\tilde{q}})$, con

$$(2.3) \quad \tilde{q}_{kl} = q_{k \triangleright^{-1} l}, \quad k, l \in X^{-1}.$$

En efecto, sea $Y = \{y^i : i \in X\}$ una base dual de $\{x_i : i \in X\}$, y consideremos la forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida como $\langle x_i \otimes x_j, y^k \otimes y^l \rangle = \delta_{i,l} \delta_{j,k}$, para $i, j, k, l \in X$. La trenza c^* es entonces

$$\begin{aligned} \langle x_i \otimes x_j, c^*(y^k \otimes y^l) \rangle &= \langle c(x_i \otimes x_j), y^k \otimes y^l \rangle \\ &= q_{ij} \langle x_{i \triangleright j} \otimes x_i, y^k \otimes y^l \rangle = q_{ij} \delta_{l, i \triangleright j} \delta_{k, i} \\ &= q_{k, k \triangleright^{-1} l} \delta_{k \triangleright^{-1} l, j} \delta_{k, i} \end{aligned}$$

y por lo tanto $c^*(y^k \otimes y^l) = q_{k, k \triangleright^{-1} l} y^{k \triangleright^{-1} l} \otimes y^k$.

2.3. Álgebras de Nichols de tipo diagonal

Fijemos $\theta \in \mathbb{N}$, $I = \{1, \dots, \theta\}$ y $(q_{ij})_{1 \leq i, j \leq \theta}$ una trenza de tipo diagonal como arriba.

2.3.1. Diagramas de Dynkin generalizados. Dado un espacio vectorial trenzado de tipo diagonal, con trenza $(q_{ij})_{1 \leq i, j \leq \theta}$, existe un *diagrama de Dynkin generalizado* $[\mathbf{H}]$ asociado. Este diagrama es un grafo con etiquetas con vértices $1, \dots, \theta$, cada uno etiquetado con el correspondiente escalar q_{ii} . Existe una arista entre dos vértices distintos i y j si $q_{ij}q_{ji} \neq 1$ y está etiquetada con este escalar.

EJEMPLO 2.9. Consideremos el espacio vectorial generado por $\{x, y, z\}$ y $q \in \mathbb{k}^*$ tal que $q^3 = 1$. Entonces el diagrama correspondiente a la trenza:

$$\begin{aligned} c(x \otimes x) &= qx \otimes x, & c(x \otimes y) &= y \otimes x, & c(x \otimes z) &= q^2 z \otimes x \\ c(y \otimes x) &= qx \otimes y, & c(y \otimes y) &= y \otimes y, & c(y \otimes z) &= q^2 z \otimes y \\ c(z \otimes x) &= qx \otimes z, & c(z \otimes y) &= y \otimes z, & c(z \otimes z) &= q^2 z \otimes z. \end{aligned}$$

es

$$\mathcal{D} = \circ_q \xrightarrow{q} \circ_1 \xrightarrow{q^2} \circ_{q^2}.$$

En el caso diagonal, los diagramas de Dynkin generalizados cuya álgebra de Nichols es de dimensión finita fueron clasificados en $[\mathbf{H}]$. Dos espacios vectoriales trenzados de tipo diagonal con el mismo diagrama de Dynkin generalizado inducen álgebras de Nichols isomorfas como espacios vectoriales. Así, estos diagramas son particularmente útiles para chequear si una trenza dada determina un álgebra de Nichols finita o no. Con este fin los utilizaremos en el capítulo final.

2.3.2. Álgebras de Nichols de tipo estándar. Estaremos interesados en las trenzas de tipo estándar. En el caso en que el álgebra de Nichols es de dimensión finita, la correspondiente matriz de Cartan $C = (a_{ij} = -m_{ij})_{i, j \in \{1, \dots, \theta\}}$ es finita, ver $[\mathbf{AA}$, Remark 3.7], $[\mathbf{A}$, Theorem 4.1]. Esta familia incluye propiamente a las trenzas de tipo Cartan consideradas en $[\mathbf{AS2}]$ y $[\mathbf{H}]$.

Las trenzas estándar con álgebras de Nichols de dimensión finita están clasificadas en $[\mathbf{A}]$. En el mismo trabajo, se dan: la dimensión, una presentación por generadores y relaciones y una base PBW para cada álgebra de Nichols con esta tipo de trenza. A continuación recordamos este resultado que será de vital importancia para el último capítulo de nuestro trabajo. Para hacerlo, necesitamos antes recordar la noción de hiperpalabras.

Fijemos una base $\{x_1, \dots, x_\theta\}$ de V (asumimos $\dim V < \infty$). Denotemos por $\mathbb{X}$ al conjunto de palabras en las letras $x_1, \dots, x_\theta$ y las ordenaremos usando el orden lexicográfico. Identificamos canónicamente a $\mathbb{X}$ con una base de $T(V)$.

DEFINICIÓN 2.10. Decimos que $u \in \mathbb{X}$ es una *palabra de Lyndon* si u es menos que cualquiera de sus finales propios. Esto es, $u = x_i$ para algún i o para cada $v, w \in \mathbb{X} \setminus \{1\}$ tales que $u = vw$, tenemos $u < w$.

Denotemos por L al conjunto de palabras de Lyndon. Se sigue que $u \in L$ si y sólo si existen $v < w \in L$ tales que $u = vw$ o $u = x_i$, $1 \leq i \leq \theta$. Dada $u \in L \setminus \{x_1, \dots, x_\theta\}$ la *descomposición de Shirshov* $u = vw$ con $v, w \in L$ es la única en la que w es el menor final entre todas las posibles descomposiciones. Ver [Kh1] y las referencias del mismo.

DEFINICIÓN 2.11. Para cada $u \in L$ consideramos un elemento $[u]_c \in T(V)$, llamado la *hiperletra* [Kh1] correspondiente a u , definida inductivamente por

$$[u]_c = \begin{cases} u, & \text{si } u \in \mathbb{X}; \\ [[v]_c, [w]_c]_c, & \text{si } u = vw \text{ es la descomposición de Shirshov de } u. \end{cases}$$

Recordar la definición del conmutador trenzado $[\cdot, \cdot]_c$, de la página 22.

Si $\alpha_1, \dots, \alpha_\theta$ es la base canónica de $\mathbb{Z}^\theta$ y consideremos la graduación inducida por $\deg x_i = \alpha_i$, $i = 1, \dots, \theta$, $T(V)$ resulta $\mathbb{Z}^\theta$ graduada. Para cada $\alpha \in \Delta^+$, fijamos $x_\alpha = [l]_c \in T(V)$, para alguna palabra de Lyndon l de grado α .

TEOREMA 2.12. [A, Theorems 5.14, 5.19, 5.22, 5.25] *Sea V un espacio vectorial trenzado de tipo estándar, de dimensión θ , tal que la matriz de Cartan asociada $C = (-m_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, \theta\}}$ es finita y sea Δ_+ el correspondiente sistema de raíces.*

El álgebra de Nichols $\mathfrak{B}(V)$ está presentada por generadores x_i , $1 \leq i \leq \theta$, y las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} x_\alpha^{N_\alpha} &= 0, \quad \alpha \in \Delta_+; \\ \text{ad}_c(x_k)^{1+m_{kj}}(x_j) &= 0, \quad k \neq j, \quad q_{kk}^{m_{kj}+1} \neq 1; \end{aligned}$$

si existen j, k, l distintos tales que $m_{kj} = m_{kl} = 1$, $q_{kk} = -1$, entonces

$$[(\text{ad } x_k)x_j, (\text{ad } x_k)x_l]_c = 0;$$

si existen $k \neq j$ tales que $m_{kj} = 2, m_{jk} = 1$, $q_{kk} \in \mathbb{G}_3$ o $q_{jj} = -1$, entonces

$$[(\text{ad } x_k)^2 x_j, (\text{ad } x_k)x_j]_c = 0;$$

si existen k, j, l distintos tales que $m_{kj} = 2, m_{jk} = m_{jl} = 1$, $q_{kk} \in \mathbb{G}_3$ o $q_{jj} = -1$, entonces

$$[(\text{ad } x_k)^2 (\text{ad } x_j)x_l, (\text{ad } x_k)x_j]_c = 0;$$

si i, j determina una componente conexa de el diagrama de Dynkin de tipo G_2 y $q_{kk} \in \mathbb{G}_4$ o $q_{jj} = -1$, entonces

$$\begin{aligned} [(\text{ad } x_k)^3 x_j, (\text{ad } x_k)^2 x_j]_c &= 0, \\ [x_k, [x_k^2 x_j x_k x_j]_c]_c &= 0, \\ [[x_k^2 x_j x_k x_j]_c, [x_k x_j]_c]_c &= 0, \\ [[x_k^2 x_j]_c, [x_k^2 x_j x_k x_j]_c]_c &= 0. \quad \square \end{aligned}$$

2.4. Álgebras de Nichols asociadas a racks

Sea X un rack finito, q un 2-cociclo. Denotaremos por $\mathfrak{B}(X, q)$ –o, menos frecuentemente, $\mathfrak{B}(\mathbb{k}X, q)$ – al álgebra de Nichols asociada al espacio vectorial trenzado $(\mathbb{k}X, c^q)$.

Si X es un rack finito, $\mathfrak{B}^n(X, q)^* \cong \mathfrak{B}^n(X^{-1}, \tilde{q})$, para $\tilde{q}$ como en (2.3). Además, si $\dim \mathfrak{B}(X, q) < \infty$, entonces $\mathfrak{B}(X, q)^* \cong \mathfrak{B}(X^{-1}, \tilde{q})$, ver [G4, Lemma 2.6].

2.4.1. Cómputo de las relaciones cuadráticas. Sea $\mathcal{R}$ el conjunto de clases de equivalencia en $X \times X$ para la relación generada por $(i, j) \sim (i \triangleright j, i)$. Sea $C \in \mathcal{R}$, $(i, j) \in C$. Tomemos $i_1 = j$, $i_2 = i$, y recursivamente, $i_{h+2} = i_{h+1} \triangleright i_h$. Para cada C , existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $i_{n+k} = i_k$, $k \in \mathbb{N}$. Sea $n(C)$ el mínimo de tales n ; así $C = \{(i_2, i_1), \dots, (i_{n(C)}, i_1)\}$ y $n(C) = \#C$.

Sea $\mathcal{R}'$ el conjunto de todas las $C \in \mathcal{R}$ que satisfacen

$$(2.4) \quad \prod_{h=1}^{n(C)} q_{i_{h+1}, i_h} = (-1)^{n(C)}.$$

En el resto del trabajo, escribiremos $C = \{i_1, \dots, i_{n(C)}\}$ en lugar de $C = \{(i_2, i_1), \dots, (i_{n(C)}, i_1)\}$.

LEMA 2.13. *Una base para el espacio $\mathcal{J}^2$ de relaciones cuadráticas de $\mathfrak{B}(X, q)$ está dado por*

$$(2.5) \quad b_C := \sum_{h=1}^{n(C)} \eta_h(C) x_{i_{h+1}} x_{i_h}, \quad C \in \mathcal{R}',$$

donde $\eta_1(C) = 1$ y $\eta_h(C) = (-1)^{h+1} q_{i_2 i_1} q_{i_3 i_2} \dots q_{i_h i_{h-1}}$, $h \geq 2$.

DEMOSTRACIÓN. Dada $C \in \mathcal{R}$, sea U_C el subespacio de $\mathbb{k}X \otimes \mathbb{k}X$ generado por $x_i \otimes x_j$, $(i, j) \in C$. Entonces $\mathcal{J}^2 = \ker(c^q + \text{id}) = \bigoplus_{C \in \mathcal{R}} \ker(c^q + \text{id})|_{U_C}$. Tenemos $\det(c^q + \text{id})|_{U_C} = \prod_{h=1}^{n(C)} q_{i_{h+1}, i_h} (-1)^{n(C)+1} + 1$. Si es 0, entonces b_C genera $\ker(c^q + \text{id})|_{U_C}$. $\square$

OBSERVACIONES 2.14. El cociclo constante $q \equiv -1$ evidentemente satisface (2.4), y $\eta_h(C) = 1$ para cada $C \in \mathcal{R}$, $h = 1, \dots, n(C)$.

Más generalmente, el cociclo constante $q \equiv \omega$, para $-\omega$ una raíz l -ésima de la unidad primitiva, y $l|n(C)$, también satisface (2.4), y $\eta_h(C) = (-\omega)^{h-1}$ para cada $C \in \mathcal{R}$, $h = 1, \dots, n(C)$. Ver [AG, Lemma 6.13].

Es fácil ver que el cociclo χ de los Ejemplos 1.11 satisface (2.4) para cada $C \in \mathcal{R}$.

Cuando se consideran los racks $\mathcal{O}_2^n, \mathcal{O}_4^4$, una clase de equivalencia $C \in \mathcal{R}$ puede tener solamente 1, 2, o 3 elementos, y así una relación cuadrática en la base está compuesta de a lo sumo tres sumandos.

2.5. Álgebras de Nichols de módulos de Yetter-Drinfeld

Sean G un grupo finito, $\mathcal{O}$ una clase de conjugación en G y $\rho : G^s \rightarrow \text{GL}(V)$ una representación irreducible del centralizador G^s de un elemento fijo $s \in \mathcal{O}$. Fijemos una enumeración $t_1, \dots, t_n$ de los elementos de $\mathcal{O}$, con

$s = t_1$, y sea $g_i \in G$, $i = 1, \dots, n$ tal que $g_i s g_i^{-1} = t_i$. Los módulos de Yetter-Drinfeld irreducibles sobre G están en correspondencia biyectiva con pares $(\mathcal{O}, \rho)$. Para tal par, el módulo $M(\mathcal{O}, \rho)$ correspondiente se define como $\bigoplus_{i \in I} g_i \otimes V$, con acción y coacción dadas por:

$$g \cdot (g_i \otimes v) = g_j \otimes (\rho(\gamma)(v)), \quad \delta(g_i \otimes v) = t_i \otimes (g_i \otimes v),$$

para $\gamma \in G^s$ tal que $g g_i = g_j \gamma$.

Cuando la representación ρ es de dimensión uno, el espacio vectorial trenzado subyacente de $M(\mathcal{O}, \rho)$ es $(\mathbb{k}X, c^q)$, donde X es el rack dado por la conjugación en $\mathcal{O}$ y $q : X \times X \rightarrow \mathbb{k}^*$ es el 2-cociclo dado por

$$q(t_i, t_j) = \rho(\gamma), \quad \text{para } \gamma \in G^s \text{ tal que } g_i g_j = g_k \gamma.$$

Denotamos por $\mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho)$ el álgebra de Nichols de $M(\mathcal{O}, \rho)$.

2.5.1. Álgebras de Nichols sobre los grupos simétricos. A continuación establecemos algunos resultados conocidos acerca de las álgebras de Nichols sobre los grupos simétricos $\mathbb{S}_3$ y $\mathbb{S}_4$. Además, contribuimos con una prueba para el caso $\mathbb{S}_5$ y cociclo no constante.

TEOREMA 2.15. *Sea $3 \leq n \leq 5$.*

1. *Las álgebras de Nichols $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_2^n, -1)$ son de dimensión finita, de dimensiones 12, 576, 8294400, respectivamente. Además, se satisface que $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_2^n, -1) = \widehat{\mathfrak{B}}_2(\mathcal{O}_2^n, -1)$, ver (2.1).*
2. *Por su parte, se tiene que $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_4^4, -1) = 576$ y también se satisface que $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_4^4, -1) = \widehat{\mathfrak{B}}_2(\mathcal{O}_4^4, -1)$.*

DEMOSTRACIÓN. Vemos (1). Los casos $n = 3, 4$ están en [MS, Ex. 6.4]. Para $n = 5$, el álgebra fue introducida, como álgebra cuadrática, en [MS]. Graña estableció que $\widehat{\mathfrak{B}}_2(V) = \mathfrak{B}(V)$ en [G3]. Su dimensión fue determinada por Roos con el programa de computadora Bergman. (2) es [AG, Theorem 6.12], usando Bergman. $\square$

En el caso de $\mathbb{S}_3$, $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_2^3, -1)$ es la única álgebra de Nichols de dimensión finita [AHS, Theorem 4.5]. Corresponde al módulo $M(\mathcal{O}_2^3, \text{sgn} \otimes \text{sgn})$. El siguiente teorema da la lista de todos los módulos irreducibles $M(\mathcal{O}, \rho)$ en ${}_{\mathbb{S}_4}^{\mathbb{S}_4} \mathcal{YD}$ tales que $\mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho)$ es de dimensión finita.

TEOREMA 2.16. [AHS, Theorem 4.7] *Las únicas álgebras de Nichols de módulos de Yetter-Drinfeld sobre $\mathbb{S}_4$ de dimensión finita son, salvo isomorfismo, $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_2^4, \text{sgn} \otimes \text{sgn})$, $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_2^4, \text{sgn} \otimes \epsilon)$ y $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_4^4, \rho_-)$. Todas tienen dimensión 576.* $\square$

Aquí para el caso $\mathcal{O} = \mathcal{O}_4^4, s = (1234)$, denotamos por ρ_- el carácter de $G^s = \langle s \rangle \cong \mathbb{Z}_4$ dado por $\rho_-(s) = -1$. Si $\mathcal{O} = \mathcal{O}_2^4$ y $s = (12)$, entonces $G^s = \langle (12), (34) \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Denotamos por ϵ y sgn las representaciones trivial signo $\mathbb{Z}_2$, respectivamente.

OBSERVACIÓN 2.17. Cuando $n \geq 6$, si $M \neq M(\mathcal{O}_2^5, \text{sgn} \otimes \mu)$ o $M \neq M(\mathcal{O}_{2,3}^5, \text{sgn} \otimes \epsilon)$ para $\mu \in \{\epsilon, \text{sgn}\}$, entonces el álgebra de Nichols asociada es de dimensión infinita, [AFZ].

Denotemos por $\mathcal{O}_{2,3}^5$ a la clase de conjugación del elemento (12)(345) en $\mathbb{S}_5$. No se sabe si el álgebra de Nichols $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_{2,3}^5, \text{sgn} \otimes \epsilon)$ es de dimensión finita o no. Éste es el único caso abierto en $\mathbb{S}_5$.

OBSERVACIÓN 2.18. Notar que, para $n \in \mathbb{N}$, $q \equiv -1$ y χ como en el Ejemplo 1.11,

$$M(\mathcal{O}_2^n, \text{sgn} \otimes \text{sgn}) \cong (\mathbb{k}\mathcal{O}_2^n, c^q), \quad M(\mathcal{O}_2^n, \text{sgn} \otimes \epsilon) \cong (\mathbb{k}\mathcal{O}_2^n, c^\chi)$$

y

$$M(\mathcal{O}_4^4, \rho_-) \cong (\mathbb{k}\mathcal{O}_4^4, c^q)$$

como espacios vectoriales trenzados.

Las álgebras de Nichols $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_2^4, \chi)$, $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_2^5, \chi)$ también son cuadráticas. Esto ha sido asumido en la literatura, pero no hemos podido dar con una demostración. Lo establecemos entonces en la siguiente proposición. En la misma, utilizaremos operadores diferenciales asociados a un rack $(X, \triangleright)$ en un álgebra de Nichols $\mathfrak{B}(X, q)$. Recordamos aquí su definición. Consideremos la base dual $\{x^* | x \in X\}$ a la base canónica X de $\mathbb{k}X$. Extendemos el morfismo $x^* \circ x^* : \mathfrak{B}(X, q) \rightarrow k$ definiéndolo como 0 en $\mathfrak{B}^m$, la componente homogénea de grado m de $\mathfrak{B}(V)$, para $m \neq 1$. Definamos $\delta_x : \mathfrak{B}^n \rightarrow \mathfrak{B}^{n-1}$ por $\delta_x = (\text{id} \otimes x^*)\Delta$, donde Δ es la comultiplicación del álgebra de Nichols.

Estas derivaciones torcidas proveen una herramienta poderosa para decidir si un elemento en el álgebra es cero, ya que para ver si $\alpha \in \mathfrak{B}^m$ es no nulo, basta encontrar una sucesión de elementos $x_{i_m}, x_{i_{m-1}}, \dots, x_{i_1} \in X$ de manera tal que $\delta_{i_m} \delta_{i_{m-1}} \dots \delta_{i_1}(\alpha) \neq 0$, donde denotamos $\delta_j = \delta_{x_{i_j}}$, $j = 1, \dots, m$. Agradecemos a Matías Graña por proveernos de los cálculos necesarios para terminar esta prueba.

PROPOSICIÓN 2.19. *Sea $n = 4, 5$. Las álgebras de Nichols $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_2^n, \chi)$ son cuadráticas y tienen dimensión 576, 8294400, respectivamente.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $n = 4$, $B = \widehat{\mathfrak{B}}_2(\mathcal{O}_2^4, \chi)$. De acuerdo a [FK, Problem 2.3], el polinomio de Hilbert del álgebra B es

$$(2.6) \quad P_B(t) = [2]^2[3]^2[4]^2,$$

donde se denota por $[k]$ al polinomio $1 + t + t^2 + \dots + t^{k-1}$. Así, $\dim B = P_B(1) = 2^2 3^2 4^2 = 576$. La Ecuación (2.6) también implica que el grado máximo de B es 12. Si $\mathfrak{B}^{12}(\mathcal{O}_2^4, \chi) \neq 0$ tenemos $B = \mathfrak{B}(\mathcal{O}_2^4, \chi)$ por [AG, Theorem 6.4 (2)]. Sea

$$a = x_{(12)}, \quad b = x_{(13)}, \quad c = x_{(14)}, \quad d = x_{(23)}, \quad e = x_{(24)}, \quad f = x_{(34)}.$$

Consideremos $abacabacdedf \in \mathfrak{B}^{12}(\mathbb{k}\mathcal{O}_2^4, \chi)$. Usamos derivaciones junto con el programa de computadora *Deriva* [G2] desarrollado por Matías Graña para ver que

$$\delta_c \delta_b \delta_c \delta_a \delta_b \delta_d \delta_c \delta_b \delta_f \delta_d \delta_f \delta_e (abacabacdedf) \neq 0$$

y así $\mathfrak{B}^{12}(\mathcal{O}_2^4, \chi) \neq 0$.

Para $n = 5$, el resultado se sigue de manera análoga. En este caso el polinomio de Hilbert es $P(t) = [4]^4[5]^2[6]^4$, ver nuevamente [FK, Problem

2.3]. Por lo tanto tenemos que $\dim \widehat{\mathfrak{B}}_2(\mathcal{O}_2^5, \chi) = 8294400$ y que su grado máximo es 40. Ahora, tomemos a, b, c, d, e, f como antes y

$$g = x_{(15)}, \quad h = x_{(25)}, \quad k = x_{(35)}, \quad m = x_{(45)}.$$

Usando nuevamente **Deriva**, vemos que $\mathfrak{B}^{40}(\mathcal{O}_2^5, \chi) \neq 0$ ya que el

$$\begin{aligned} \nabla = & \delta_k \delta_m \delta_f \delta_m \delta_e \delta_h \delta_f \delta_e \delta_c \delta_h \delta_e \delta_h \delta_g \delta_k \delta_c \delta_b \delta_m \delta_d \delta_c \\ & \circ \delta_e \delta_m \delta_g \delta_e \delta_k \delta_g \delta_c \delta_h \delta_e \delta_g \delta_k \delta_d \delta_e \delta_g \delta_k \delta_b \delta_a \delta_d \delta_c \delta_a \delta_b \end{aligned}$$

satisface $\nabla(abadabadgababadgabagdabadgcechcechfkfm) \neq 0$. $\square$

Describimos ahora explícitamente estas álgebras de Nichols:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}(\mathcal{O}_2^n, -1) &= \mathbb{k}\langle x_{(ij)}, 1 \leq i < j \leq n | x_{(ij)}^2, x_{(ij)}x_{(kl)} + x_{(kl)}x_{(ij)}, (ij) \neq (kl), \\ &\quad x_{(ij)}x_{(jk)} + x_{(jk)}x_{(ik)} + x_{(ik)}x_{(ij)}, \quad 1 \leq i < j < k \leq n \rangle; \\ \mathfrak{B}(\mathcal{O}_2^n, \chi) &= \mathbb{k}\langle x_{(ij)}, 1 \leq i < j \leq n | x_{(ij)}^2, x_{(ij)}x_{(kl)} - x_{(kl)}x_{(ij)}, (ij) \neq (kl), \\ &\quad x_{(ij)}x_{(jk)} - x_{(jk)}x_{(ik)} - x_{(ik)}x_{(ij)}, \\ &\quad x_{(jk)}x_{(ij)} - x_{(ik)}x_{(jk)} - x_{(ij)}x_{(ik)}, \quad 1 \leq i < j < k \leq n \rangle; \\ \mathfrak{B}(\mathcal{O}_4^4, -1) &= \mathbb{k}\langle x_\sigma, \sigma \in \mathcal{O}_4^4 | x_\sigma^2, x_\sigma x_{\sigma^{-1}} + x_{\sigma^{-1}} x_\sigma, \\ &\quad x_\sigma x_\tau + x_\nu x_\sigma + x_\tau x_\nu, \text{ si } \sigma\tau = \nu\sigma \text{ y } \tau \neq \sigma \neq \nu \in \mathcal{O}_4^4 \rangle. \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 2.20. En $[\mathbf{R}]$, Roos muestra que las álgebras $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_2^n, \chi)$ no son Koszul para $n \geq 3$. No utilizaremos este resultado en nuestro trabajo, pero nos parece meritorio de ser destacado. Cabe decir que tampoco son Koszul las álgebras $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_2^n, -1)$, y que esto se sigue de una adaptación directa de la prueba de Roos a este caso. Por su parte, $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_4^4, -1)$ tampoco resulta Koszul, ya que como álgebra es isomorfa a $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_2^4, -1)$.

2.6. El Método del Levante

Sea H un álgebra de Hopf. Un conjunto de subespacios $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una filtración de Hopf si es una filtración de álgebras y coálgebras tal que los H_n son estables por la antípoda, para todo n . La filtración corradical de H es una filtración de Hopf si y sólo si H_0 es una subálgebra de Hopf H (por ejemplo, si H es punteada).

En este caso, el *graduado* de H , $\text{gr}^n H = \bigoplus_{n \geq 0} \text{gr}^n H$, donde $\text{gr}^n H = H_n/H_{n-1}$ y $H_{-1} = 0$, es un álgebra de Hopf (corradicalmente) graduada. Consideremos $\pi : \text{gr} H \rightarrow H_0$ la proyección homogénea. Tenemos los siguientes invariantes de H :

- $R = (\text{gr} H)^{\text{co} \pi}$ es el *diagrama* de H ; es un álgebra de Hopf trenzada en ${}^{H_0}_{H_0} \mathcal{YD}$, y es un sub-objeto graduado de $\text{gr} H$.
- $V := R(1) = P(R)$, con la trenza heredada de ${}^{H_0}_{H_0} \mathcal{YD}$, se denomina la *trenza infinitesimal* de H .

Se sigue que el álgebra de Hopf $\text{gr} H$ es el biproducto de Radford $\text{gr} H \simeq R \# \mathbb{k}G(H)$. La subálgebra de R generada por V es isomorfa al álgebra de Nichols $\mathfrak{B}(V)$.

Sea Γ un grupo finito y sea H_0 el álgebra de grupo de Γ . Los pasos principales del *Método del Levante* **[AS1]** para la clasificación de todas las álgebras de Hopf punteadas de dimensión finita con grupo Γ son:

1. Determinar todos los $V \in {}_{H_0}^{H_0}\mathcal{YD}$ tal que el álgebra de Nichols $\mathfrak{B}(V)$ es de dimensión finita,
2. para tal V , calcular todas las álgebras de Hopf H tales que

$$\text{gr } H \simeq \mathfrak{B}(V) \# \mathbb{k}\Gamma.$$

Decimos que H es un *levantamiento* de $\mathfrak{B}(V)$ sobre $\Gamma \cong G(H)$.

3. Decidir si cualquier álgebra de Hopf punteada de dimensión finita con grupo Γ está generada por sus elementos grupezcós y casi-primitivos.

OBSERVACIÓN 2.21. Un álgebra de Hopf H está generada como en 3. si y sólo si su diagrama R está generado en grado uno y por lo tanto coincide con el álgebra de Nichols $\mathfrak{B}(V)$ de la trenza infinitesimal V de H [AS1]. De hecho, se conjetura que el ítem 3 tiene respuesta afirmativa para toda álgebra de Hopf punteada de dimensión finita [AS4, Conjecture 1.4].

Álgebras de Hopf punteadas asociadas a racks

En este capítulo introducimos una clase de álgebras de Hopf $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ asociadas a racks y cociclos, que serán las protagonistas en los capítulos subsiguientes.

En esta parte, las utilizamos para estudiar las álgebras de Hopf punteadas sobre los grupos simétricos. En particular clasificamos aquellas de dimensión finita sobre $\mathbb{S}_4$ y determinamos todas aquellas de dimensión finita sobre $\mathbb{S}_5$ cuya trenza infinitesimal está asociada al rack de trasposiciones.

3.1. Generación en grado uno

Sean X un rack, q un 2-cociclo, y consideremos el espacio vectorial trenzado $(V, c) = (\mathbb{k}X, c^q)$ asociado. Una *realización de Yetter-Drinfeld* de (V, c) sobre un grupo G es una estructura de G -módulo de Yetter-Drinfeld en V de modo tal que la trenza c coincida con la trenza en ${}^G_G\mathcal{YD}$ y que los elementos x_i , $i \in X$ de la base canónica de V sean G -homogéneos, esto es

$$\delta(x_i) = g_i \otimes x_i, \quad g_i \in G, \quad i \in X.$$

En particular, se sigue que necesariamente $g_i \cdot x_j = q_{ij}x_{i \triangleright j}$. La realización se dice *fiel* si $g_i \neq g_j$, $\forall i \neq j \in X$.

DEFINICIÓN 3.1. [AG2, Def. 3.2] Una *realización de Yetter-Drinfeld principal* de (X, q) sobre un grupo finito G es una colección $(\cdot, g, (\chi_i)_{i \in X})$ de datos donde

- $\cdot$ es una acción de G en X ;
- $g : X \rightarrow G$ es una función tal que

$$g_{h \cdot i} = hg_i h^{-1} \quad \text{y} \quad g_i \cdot j = i \triangleright j;$$

- la familia $(\chi_i)_{i \in X}$, con $\chi_i : G \rightarrow \mathbb{k}^*$, es un 1-cociclo, *i. e.*

$$\chi_i(ht) = \chi_i(t)\chi_{t \cdot i}(h), \quad \forall i \in X, h, t \in G,$$

tal que $\chi_i(g_j) = q_{ji}$.

La realización se dice *fiel* si g es inyectiva.

OBSERVACIÓN 3.2. Una realización de Yetter-Drinfeld principal de (X, q) sobre G determina una realización de Yetter-Drinfeld de $(\mathbb{k}X, c^q)$, tomando

$$\delta(x_i) = g_i \otimes x_i \quad \text{y} \quad h \rightharpoonup x_i = \chi_i(h)x_{h \cdot i}.$$

Toda realización fiel proviene de una realización principal de este modo, [AG2, Lemma 3.3].

En este capítulo estaremos interesados en álgebras de Hopf punteadas de dimensión finita H tales que su trenza infinitesimal proviene de una realización de YD principal de un rack (X, q) sobre un grupo G .

El siguiente teorema, que da una respuesta afirmativa a la conjetura [AS4, Conjecture 1.4] en un caso particular de nuestro interés, es un paso clave en la clasificación de estas álgebras de Hopf punteadas. Cuando $(X, q) = (\mathcal{O}_2^n, -1)$, $n = 3, 4, 5$ el resultado es [AG2, Theorem 2.1].

TEOREMA 3.3. *Sea (X, q) un rack tal que $\dim \mathfrak{B}(X, q) < \infty$ y $\mathfrak{B}(X^{-1}, \tilde{q})$ es cuadrática. Sea H un álgebra de Hopf punteada de dimensión finita tal que su trenza infinitesimal se obtiene de una realización de YD principal de (X, q) sobre un grupo finito G .*

Entonces el diagrama de H es un álgebra de Nichols, y consecuentemente H está generada por sus elementos gruepcos y casi primitivos.

DEMOSTRACIÓN. Sean $G = G(H)$, R el diagrama de H , de manera tal que $\text{gr } H = R \sharp \mathbb{k}G$. Tomemos $S = R^*$ el dual graduado. Por [AS4, Lema 5.5], S está generada por $V = S(1)$ y R es un álgebra de Nichols si y sólo si $P(S) = S(1)$, esto es, si S es un álgebra de Nichols. Ahora, $\mathfrak{B}(V) = \mathfrak{B}(X^{-1}, \tilde{q})$. Por lo tanto, queremos ver que las relaciones en $\mathfrak{B}(V) = T(V)/\mathcal{J}_V$ se satisfacen en S .

Por hipótesis, sólo tenemos que considerar relaciones en grado 2. Se verifica fácilmente que, si $r = b_C \in \mathcal{J}_V^2$ como en (2.5), entonces r es primitiva y satisface $c(r \otimes r) = r \otimes r$, donde c es la trenza en ${}^G\mathcal{YD}$.

Como $\dim S < \infty$, $r = 0$ para cada r , ya que de otro modo tendríamos una copia del álgebra (conmutativa) de polinomios $\mathbb{k}[r] \subseteq S$, y este álgebra es de dimensión infinita. Por lo tanto, existe una proyección $\mathfrak{B}(V) \twoheadrightarrow S$, $P(S) = V = S(1)$ y S es un álgebra de Nichols. $\square$

3.2. Las álgebras de Hopf $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$

En esta sección introduciremos una familia de álgebras de Hopf punteadas, que estudiaremos sistemáticamente a lo largo de todo el trabajo.

3.2.1. Levantamiento de relaciones cuadráticas.

Sea H un álgebra de Hopf punteada, y sean $H_0 \cong \mathbb{k}G$ y H_1 los primeros términos de su filtración corradical. H_0 actúa a izquierda (respectivamente a derecha) en H_1 por multiplicación a izquierda (respectivamente a derecha). Por el Teorema de Taft y Wilson 1.23, tenemos que $H_1 = \mathbb{k}G \oplus \bigoplus_{g, h \in G} P'_{g, h}(H)$.

H_1 es un H_0 -bicomódulo con coacciones a izquierda y a derecha δ_L, δ_R respectivamente dadas por

$$\begin{aligned} \delta_L(g) &= g \otimes g, & \delta_R(g) &= g \otimes g, & g &\in G, \\ \delta_L(x) &= g \otimes x, & \delta_R(x) &= x \otimes h, & x &\in P'_{g, h}(H). \end{aligned}$$

Ambas coacciones resultan ser mapas de H_0 bimódulos y por lo tanto H_1 es un H_0 -bimódulo de Hopf. Notar que $H_0 \subset H_1$ es un H_0 -subbimódulo de Hopf y por lo tanto la proyección $\pi : H_1 \rightarrow H_1/H_0$ es un morfismo de bimódulos Hopf sobre $\mathbb{k}G = H_0$.

En esta parte, fijamos

- X un rack finito,
- q un 2-cociclo en X ,
- G un grupo finito,

- H un álgebra de Hopf punteada de dimensión finita tal que su trenza infinitesimal proviene de una realización de YD principal $(\cdot, g, (\chi_i)_{i \in X})$ de (X, q) sobre un grupo G .
- $R \in {}^G\mathcal{YD}$ tal que $\text{gr } H = \bigoplus_{i \geq 0} H_i/H_{i-1} = R \# \mathbb{k}G$, y
- $\{x_i\}_{i \in X}$ una base de $R(1)$, compatible con la acción de G , esto es tal que $g_j \cdot x_i = q_{ji}x_{j \triangleright i}$, $\forall i, j \in X$.

Como antes, $(\text{gr } H)_1 \cong R(1) \# \mathbb{k}G$ es un H_0 -bimódulo de Hopf. Más aún, la identificación canónica $\gamma : H_1/H_0 \xrightarrow{\cong} R(1) \# \mathbb{k}G$ es un isomorfismo de bimódulos de Hopf. Como G es finito, podemos elegir una sección $\sigma : R(1) \# \mathbb{k}G \rightarrow H_1$ de bimódulos de Hopf de la composición $\gamma \circ \pi$.

LEMA 3.4. *Sea $\sigma : R(1) \# \mathbb{k}G \rightarrow H_1$ una sección de $\gamma \circ \pi$ como arriba y sean*

$$a_i = \sigma(x_i \# 1) \in H_1, \quad i \in X,$$

entonces

$$(3.1) \quad a_i \text{ es } (g_i, 1)\text{-primitivo} \quad y \quad g_i a_j g_i^{-1} = q_{ij} a_{i \triangleright j}, \quad \forall i, j \in X.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $i \in X$. Por el Teorema 1.23, podemos escribir a $a = a_i$ como

$$a = \sum_{g \in G} \lambda_g g + \sum_{g, h \in G} a_{g, h},$$

para ciertos escalares $\{\lambda_g\}_{g \in G}$ en $\mathbb{k}$ y elementos $a_{g, h} \in P'_{g, h}(H)$ para cualesquiera $g, h \in G$. Utilizando las identidades

$$\begin{aligned} \delta_L(a) &= \delta_L(\sigma(x_i \# 1)) = (\text{id} \otimes \sigma)(g_i \otimes (x_i \# 1)) = g_i \otimes a, \\ \delta_R(a) &= \delta_R(\sigma(x_i \# 1)) = (\sigma \otimes \text{id})((x_i \# 1) \otimes 1) = a \otimes 1, \end{aligned}$$

obtenemos que $a = a_{g_i, 1} + \lambda_1 \delta_{g_i, 1} 1$.

Ahora $g_i \neq 1$ pues en este caso tendríamos $\mathbb{k}[x_i] \subseteq R$ y R es de dimensión finita, puesto que H lo es. Por lo tanto, $a \in P'_{g_i, 1}$. $\square$

OBSERVACIÓN 3.5. Notar que si g satisface (3.3) como en el Lema 3.8 más abajo, entonces la afirmación del Lema 3.4 se cumple aún sin la hipótesis de dimensión finita sobre H . En efecto, esta hipótesis es utilizada para mostrar que $g_i \neq 1$, $\forall i \in X$ y esto contradice (3.3), pues tendríamos $g_i = g_i g_i$.

Análogamente, si X es fiel, $|X| > 1$ y $i \triangleright i = i$, $\forall i \in X$, el lema también se sigue, pues si $g_i = 1$ para algún i , entonces $g_{i \triangleright j} = g_i g_j g_i^{-1} = g_j$ implica $i \triangleright j = j$, $\forall j \in X$, lo que es una contradicción.

Sea $\mathcal{R}'$ como en la Subsección 2.4.1 y $F = \mathbb{k}\langle X_i \mid i \in X \rangle$ el álgebra asociativa libre en las variables $\{X_i\}_{i \in X}$.

DEFINICIÓN 3.6. Para cada $C \in \mathcal{R}'$, sea

$$(3.2) \quad \phi_C = \sum_{h=1}^{n(C)} \eta_h(C) X_{i_{h+1}} X_{i_h} \in F$$

el polinomio cuadrático con $\eta_h(C)$ como en (2.5).

Recordemos que el espacio de relaciones cuadráticas $\mathcal{J}^2$ de $\mathfrak{B}(X, q)$ está generado por las relaciones $b_C = \phi_C(\{x_i\}_{i \in X})$ para $C \in \mathcal{R}'$. Es fácil

ver que si $(i, j), (k, l) \in C$, entonces $g_j g_i = g_l g_k$ en G . Esto justifica la notación en la siguiente definición.

DEFINICIÓN 3.7. Para cada $C \in \mathcal{R}'$, definimos

$$\begin{aligned} a_C &= \phi_C(\{a_i\}_{i \in X}) \in H, \\ g_C &= g_j g_i \in G, \text{ para algún } (i, j) \in C. \end{aligned}$$

LEMA 3.8. Para cada $i \in X$, sea $a_i \in H$, como en el Lema 3.4 y supongamos que $g : X \rightarrow G$ satisface:

$$(3.3) \quad g_i \neq g_j g_k, \quad \forall i, j, k \in X.$$

Entonces existen $\lambda_C \in \mathbb{k}$, para cada $C \in \mathcal{R}'$, normalizados por

$$(3.4) \quad \lambda_C = 0, \text{ si } g_C = 1,$$

tales que:

$$(3.5) \quad a_C = \lambda_C(1 - g_C) \text{ en } H, \quad C \in \mathcal{R}',$$

$$(3.6) \quad \lambda_C = q_{ki_2} q_{ki_1} \lambda_{k \triangleright C}, \quad \forall k \in X,$$

si $C = \{i_1, \dots, i_n\} \in \mathcal{R}'$ y $k \triangleright C = \{k \triangleright i_1, \dots, k \triangleright i_n\}$.

Si X es fiel e indescomponible, y q es constante, entonces el 1-cociclo $(\chi_i)_{i \in X}$ es constante, $\chi_i = \chi$, para todo $i \in X$ y un carácter multiplicativo χ de G , y tenemos $\lambda_C = \chi^2(t) \lambda_{t \cdot C}$, $\forall t \in G$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $C \in \mathcal{R}'$. Es fácil ver que los elementos a_C son $(g_C, 1)$ -primitivos. En consecuencia, existen λ_C y $\lambda_i \in \mathbb{k}$, para cada $i \in X$ tales que

$$a_C = \lambda_C(1 - g_C) + \sum_{i \in X: g_i = g_C} \lambda_i a_i.$$

La Condición (3.3) fuerza que $\lambda_i = 0$ para todo $i \in X$ y así (3.5) se sigue. La relación (3.6) se sigue aplicando $\text{ad}(g_k)$ a ambos lados de (3.5). En efecto, sea $C' = k \triangleright C = \{i'_1, \dots, i'_n\}$ y notemos primero que, como $i'_1 = k \triangleright i_1$, $i'_2 = k \triangleright i_2$, entonces $i'_l = k \triangleright i_l$. Ahora,

$$\begin{aligned} \text{ad}(g_k)(a_C) &= \sum_{h=1}^n \eta_h(C) q_{ki_{h+1}} q_{ki_h} a_{k \triangleright i_{h+1}} a_{k \triangleright i_h} \\ &= \sum_{h=1}^n \eta_h(C) q_{ki_{h+1}} q_{ki_h} a_{i'_{h+1}} a_{i'_h}. \end{aligned}$$

Ahora, tenemos que $\text{ad}(g_k)(a_C) = 0 \Leftrightarrow a_C = 0 \Leftrightarrow g_C = 1 \Leftrightarrow g_{C'} = 1$ y en este caso $\lambda_C = \lambda_{C'}$ por (3.4). Si $\text{ad}(g_k)(a_C) \neq 0$, tenemos que, por otro lado,

$$\text{ad}(g_k)(\lambda_C(1 - g_C)) = \lambda_C(1 - g_{C'}) = \frac{\lambda_C}{\lambda_{C'}} a_{C'} = \frac{\lambda_C}{\lambda_{C'}} \sum_{h=1}^n \eta_h(C') a_{i'_{h+1}} a_{i'_h}.$$

pero

$$\begin{aligned}
\eta_h(C') &= (-1)^{h+1} q_{i'_2 i'_1} \cdots q_{i'_h i'_{h-1}} \\
&= (-1)^{h+1} q_{k \triangleright i_2 k \triangleright i_1} \cdots q_{k \triangleright i_h k \triangleright i_{h-1}} \\
&\stackrel{(2.4)}{=} (-1)^{h+1} \prod_{k=1}^{h-1} q_{k i_{k+1} \triangleright i_k} \prod_{k=1}^{h-1} q_{i_{k+1} i_k} \left(\prod_{k=1}^{h-1} q_{k i_k} \right)^{-1} \\
&= \eta_h(C) \prod_{k=3}^{h+1} q_{k i_k} \left(\prod_{k=1}^{h-1} q_{k i_k} \right)^{-1} \\
&= \eta_h(C) q_{k i_h} q_{k i_{h+1}} q_{k i_1}^{-1} q_{k i_2}^{-1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\text{ad}(g_k)(\lambda_C(1 - g_C)) = \frac{\lambda_C}{\lambda_C'} q_{k i_1}^{-1} q_{k i_2}^{-1} \text{ad}(g_k)(a_C)$, de donde se sigue (3.6).

Análogamente, la última relación se sigue aplicando $\text{ad}(H_t)$ a ambos lados de (3.5):

$$\begin{aligned}
\text{ad}(H_t) \left(\sum_{h=1}^n a_{i_{h+1}} a_{i_h} \right) &= \sum_{h=1}^n \chi^2(t) a_{t \cdot i_{h+1}} a_{t \cdot i_h} = \chi^2(t) a_{t \cdot C}, \quad y \\
\text{ad}(H_t)(\lambda_C(1 - g_C)) &= \frac{\lambda_C}{\lambda_{t \cdot C}} \lambda_{t \cdot C} (1 - g_{t \cdot C}) = \frac{\lambda_C}{\lambda_{t \cdot C}} a_{t \cdot C},
\end{aligned}$$

así $\lambda_C = \chi^2(t) \lambda_{t \cdot C}$. $\square$

COROLARIO 3.9. *Con las hipótesis anteriores, asumamos que (X, q) es $(\mathcal{O}_2^n, -1)$, $(\mathcal{O}_4^n, -1)$ o $(\mathcal{O}_2^n, \chi)$. Sea a_i como en (3.1). Entonces*

$$a_C = \lambda_C(1 - g_C) \quad \text{en } H,$$

para $C \in \mathcal{R}'$ y $\lambda_C \in \mathbb{k}$ como en el Lema 3.8.

DEMOSTRACIÓN. Para $(X, q) = (\mathcal{O}_2^n, -1)$, esto es [**AG2**, Lema 3.4]. Ahora, seguimos la prueba allí expuesta para ver la Condición (3.3) en el Lema 3.8 para $(\mathcal{O}_4^n, -1)$. En este caso, para cada $i, j, k \in X$, g_i actúa en la base X por -1 veces una matriz de permutación (ya que el cociclo es $q \equiv -1$) mientras que $g_k g_l$ actúa como una matriz de permutación en la misma base y así $g_i \neq g_k g_l$. Consideremos ahora $(\mathcal{O}_2^n, \chi)$. Asumamos que $i, k, l \in X$ son tales que $g_i = g_k g_l$. Tomemos $j \in X$, entonces, $i \triangleright j = g_i \cdot j = g_k g_l \cdot j = k \triangleright (l \triangleright j)$ y por lo tanto $j i k l = i k l j$, $\forall j \in X$. esto implicaría que $i k l = \text{id}$ en $\mathbb{S}_n$, lo que no es posible. Así, el corolario se sigue del lema previo. $\square$

OBSERVACIÓN 3.10. Notemos que al trabajar con los racks de transposiciones en $\mathcal{O}_2^n$ o $\mathcal{O}_4^n$, la Condición (3.6) determina la existencia de a lo sumo 3 escalares no nulos λ_C , digamos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, donde el subíndice está en correspondencia con el número de elementos en la clase C , ya que K permuta las clases con la misma cardinalidad.

Cuando $G = \mathbb{S}_4$, la trenza infinitesimal de H, V , es uno de los módulos $M(\mathcal{O}_2^4, \text{sgn} \otimes \text{sgn})$, $M(\mathcal{O}_2^4, \text{sgn} \otimes \epsilon)$, o $M(\mathcal{O}_4^4, \text{sgn} \otimes \text{sgn})$, por el Teorema 2.16.

Dado V , si (X, q) son el rack y el cociclo asociados, las relaciones del Corolario 3.9 se satisfacen en H para la realización $(\cdot, \iota, q)$, donde

- $\iota : X \hookrightarrow \mathbb{S}_4$ es la inclusión,
- $\cdot : \mathbb{S}_4 \times X \rightarrow X$ es la acción dada por la conjugación y
- q es o el cociclo $q \equiv -1$ o el cociclo $q = \chi$ como en los Ejemplos 1.11, según corresponda.

En este caso, $g_\sigma = H_\sigma$, $\forall \sigma \in X$. Por lo tanto, por la condición de normalización (3.4), tendremos $\lambda_1 = 0$ o $\lambda_2 = 0$ en el Corolario 3.9 de acuerdo a si estamos trabajando con $(\mathcal{O}_2^n, q)$ o $(\mathcal{O}_4^4, -1)$, respectivamente. En efecto, en el primer caso, si $C = \{(\sigma, \sigma)\}$, $\sigma \in \mathcal{O}_2^n$,

$$g_C = g_\sigma^2 = H_{\sigma^2} = H_1 = 1,$$

mientras que en el segundo caso, si $C = \{(\sigma, \sigma^{-1}), (\sigma^{-1}, \sigma)\}$, $\sigma \in \mathcal{O}_4^4$

$$g_C = g_\sigma g_{\sigma^{-1}} = H_{\sigma\sigma^{-1}} = H_1 = 1.$$

Más aún, cuando el cociclo es $q = \chi$, la Ecuación (3.6) determina $\lambda_2 = 0$. Por ejemplo, si $C = \{((12), (34)), ((34), (12))\}$, $k = (12)$, tenemos que

$$k \triangleright C = C \quad \text{y} \quad q_{ki_2} q_{ki_1} = \chi_{(12)}((12)) \chi_{(12)}((34)) = -1.$$

3.2.2. Datos cuadráticos de levantamiento.

DEFINICIÓN 3.11. Un *dato cuadrático de levantamiento*, o ql-datum, $\mathcal{Q}$ consiste de

- un rack finito X ,
- un 2-cociclo q ,
- un grupo finito G ,
- una realización de Yetter Drinfeld principal $(\cdot, g, (\chi_i)_{i \in X})$ de (X, q) sobre G tal que g satisface (3.3),
- una colección $(\lambda_C)_{C \in \mathcal{R}'}$ que satisface (3.4) y (3.6).

DEFINICIÓN 3.12. Dado un ql-datum $\mathcal{Q}$, definimos el álgebra $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ por generadores $\{a_i, H_t : i \in X, t \in G\}$ y relaciones:

$$(3.7) \quad H_e = 1, \quad H_t H_s = H_{ts}, \quad t, s \in G;$$

$$(3.8) \quad H_t a_i = \chi_i(t) a_{t \cdot i} H_t, \quad t \in G, i \in X;$$

$$(3.9) \quad \phi_C(\{a_i\}_{i \in X}) = \lambda_C(1 - H_{g_i g_j}), \quad C \in \mathcal{R}', (i, j) \in C.$$

Aquí, $i_1 = j$, $i_2 = i$, $i_{h+2} = i_{h+1} \triangleright i_h$ y ϕ_C es como en (3.2). Denotaremos por a_C el lado izquierdo de (3.9).

LEMA 3.13. $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ es un álgebra de Hopf punteada, tomando

$$\begin{aligned} \Delta(H_t) &= H_t \otimes H_t, & t \in G \\ \Delta(a_\sigma) &= g_\sigma \otimes a_\sigma + a_\sigma \otimes 1, & \sigma \in X. \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Es fácil ver que la comultiplicación está bien definida, ver Observación 3.5. Así, $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ está generada por elementos gruepzcicos y casi primitivos; por lo tanto es punteada por [Mo, Lema 5.5.1]. $\square$

3.3. Clasificación de levantamientos de Nichols cuadráticas

3.3.1. Álgebras cuadráticas. Las álgebras de Nichols de dimensión finita en ${}^{\mathbb{S}_4}_{\mathbb{S}_4}\mathcal{YD}$ están definidas por relaciones cuadráticas, ver Teorema 2.16. Necesitamos conocer la dimensión las álgebras en las Definiciones 3.20, 3.21 y 3.22, para mostrar que son levantamientos de estas álgebras de Nichols. Para hacer esto, primero desarrollamos una técnica sobre álgebras cuadráticas para obtener una cota en las dimensiones.

Seguimos [BG] para nuestra exposición. Fijamos un espacio vectorial W , y sea $T = T(W)$ el álgebra tensorial. Esta álgebra presenta una graduación natural $T = \bigoplus_{n \geq 0} T^n$, con $T^0 = \mathbb{k}$ y $T^n = W^{\otimes n}$ y una filtración creciente inducida F^i , con $F^i = \bigoplus_{j \leq i} T^j$.

DEFINICIÓN 3.14. Sea $R \subset W \otimes W$ un subespacio y denotemos por $J(R)$ el ideal bilátero en T generado por R . El álgebra cuadrática (homogénea) $Q(W, R)$ es el cociente $T(W)/J(R)$.

Análogamente, para un subespacio $P \subset F^2 = \mathbb{k} \oplus W \oplus W \otimes W$, denotamos por $J(P)$ al ideal bilátero en T generado por P . El álgebra cuadrática (no homogénea) $Q(W, P)$ es el cociente $T(W)/J(P)$.

Sea $A = Q(W, P)$ un álgebra cuadrática no homogénea. Entonces hereda una filtración creciente A_n de $T(W)$. Explícitamente, $A_n = F^n/J(P) \cap F^n$; sea $\text{Gr } A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n/A_{n-1}$ el álgebra graduada asociada, donde $A_{-1} = 0$.

Consideremos la proyección natural $\pi : F^2 \rightarrow W \otimes W$ con núcleo F^1 y fijemos $R = \pi(P) \subset W \otimes W$. Sea $B = Q(W, R)$ el álgebra cuadrática homogénea definida por R . Entonces tenemos un epimorfismo $\rho : B \rightarrow \text{Gr } A$. Explícitamente, sea $\rho' : T(W) \rightarrow \text{Gr } A$ la aplicación inducida por el mapa $W \hookrightarrow A_1 \twoheadrightarrow A_1/A_0$. Sea $x \in R \subset T^2$. Entonces, existe $x_0 \in \mathbb{k}$, $x_1 \in W$ tal que $x - x_1 - x_0 \in P$ y por lo tanto $x = x_1 + x_0 \in F^2/F^2 \cap J(P) = A_2$, así $\rho'(x) = 0 \in A_2/A_1$, ya que $x_1 + x_0 \in A_1$. Luego, ρ' induce $\rho : B = T/J(R) \rightarrow \text{Gr } A$.

LEMA 3.15. Sea $x = x_0 - x_1 \in P \cap F^1$ tal que $x_0 \in \mathbb{k}$ y $x_1 \in W$. Entonces $\rho(x_1) = 0$, y luego ρ se factoriza a través de un morfismo de álgebras graduadas

$$\rho_x : \tilde{B} = B/Bx_1B \rightarrow \text{Gr } A,$$

y por lo tanto, $\dim \text{Gr}^n A \leq \dim \tilde{B}^n$, $\forall n \geq 0$.

DEMOSTRACIÓN. En efecto, $x_1 + F^1 \cap J(P) = x_0 \in \mathbb{k}$ y así $\rho(x_1) = 0$. La última afirmación se sigue puesto que ρ_x es un epimorfismo de álgebras graduadas. $\square$

3.3.2. Aplicación al caso $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$.

PROPOSICIÓN 3.16. Sea $\mathcal{Q}$ un ql -datum y sea $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ como en la Definición 3.12. Entonces

$$\dim \text{Gr}^n \mathcal{H}(\mathcal{Q}) \leq \dim \hat{\mathfrak{B}}_2^n(X, q) |G|.$$

En particular, $\dim \mathcal{H}(\mathcal{Q}) \leq \dim \hat{\mathfrak{B}}_2(X, q) |G|$.

Para $H = \mathcal{H}(\mathcal{Q}_n^{-1}[t])$ o $\mathcal{H}(\mathcal{Q}_n^X[\lambda])$ y $n = 4, 5$, la proposición implica:

$$\blacksquare \dim \mathcal{H}(\mathcal{Q}_4^{-1}[t]), \dim \mathcal{H}(\mathcal{Q}_4^X[\lambda]), \dim \mathcal{H}(\mathcal{D}[t]) \leq 24^3 < \infty,$$

$$\blacksquare \dim \mathcal{H}(\mathcal{Q}_5^{-1}[t]), \dim \mathcal{H}(\mathcal{Q}_5^X[\lambda]) \leq 2^{15}3^55^3 < \infty.$$

DEMOSTRACIÓN. $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ es el álgebra cuadrática no homogénea $Q(W, P)$ definida por W y P , para $W = \mathbb{k}\{a_i, H_t : i \in X, t \in G\}$ y $P \subset \mathbb{k} \oplus W \oplus W \otimes W$ el subespacio generado por

$$\begin{aligned} &\{H_e - 1, H_t \otimes H_s - H_{ts}, H_t \otimes a_i - \chi_i(t)a_{t \cdot i} \otimes H_t, \\ &a_C - \lambda_C 1 + \lambda_C H_{g_i g_j}, \ C \in \mathcal{R}', t, s \in G, i \in X\}. \end{aligned}$$

Sea $R = \pi(P)$. Explícitamente, $R \subset W \otimes W$ es el subespacio generado por

$$\{H_t \otimes H_s, H_t \otimes a_i - \chi_i(t)a_{t \cdot i} \otimes H_t, a_C, \ C \in \mathcal{R}', t, s \in G, i \in X\}.$$

Sea $B = Q(W, R)$ el álgebra cuadrática homogénea definida por W y R . Sea Y_G el álgebra linealmente generada por el conjunto $\{1, y_t : t \in G\}$, con unidad 1 y tabla de multiplicación:

$$y_t y_s = 0, \quad s, t \in G.$$

Si $\widehat{\mathfrak{B}}_2 = \widehat{\mathfrak{B}}_2(X, q)$, entonces $B \cong \widehat{\mathfrak{B}}_2 \sharp Y_G$ donde $\sharp$ es la relación de conmutación $(1 \sharp y_t)(a_i \sharp 1) = \chi_i(t)a_{t \cdot i} \sharp y_t$, $(1 \sharp 1)(a_i \sharp 1) = a_i \sharp 1$, $t \in G, i \in X$. Así tenemos un epimorfismo $\rho : \widehat{\mathfrak{B}}_2 \sharp Y_G \rightarrow \text{Gr } \mathcal{H}(\mathcal{Q})$.

Ahora, notemos que $P \cap F^1 = \mathbb{k}\{H_e - 1\}$ y así, por el Lema 3.15, tenemos $\rho(H_e) = 0$ y un epimorfismo $\rho_e : \widetilde{B} \rightarrow \text{Gr } \mathcal{H}(\mathcal{Q})$, con $\widetilde{B} = B/B y_e B$. La relación de conmutación y el hecho de que los elementos $\{y_t\}_{t \in G}$ son ortogonales dos a dos, dan $B y_e B = \widehat{\mathfrak{B}}_2 y_e \subset B$. Esto implica

$$\dim B^n - \dim(\widehat{\mathfrak{B}}_2^n y_e) \geq \dim \text{Gr}^n \mathcal{H}(\mathcal{Q}),$$

y, como $\dim B^n = \dim \widehat{\mathfrak{B}}_2^n(|G| + 1)$, tenemos $\dim \widehat{\mathfrak{B}}_2^n |G| \geq \dim \text{Gr}^n \mathcal{H}(\mathcal{Q})$. $\square$

Aplicamos ahora la Proposición 3.16 para mostrar que todos los levantamientos de cierto tipo de álgebras de Nichols cuadráticas son de la forma $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$.

TEOREMA 3.17. *Sea X un rack, q un 2-cociclo. Sea H un álgebra de Hopf punteada de dimensión finita, tal que su trenza infinitesimal es una realización de YD principal $(\cdot, g, (\chi_i)_{i \in X})$ de (X, q) sobre $G := G(H)$ con g cumpliendo (3.3). Asumamos que $\mathfrak{B}(X, q)$, $\mathfrak{B}(X^{-1}, \tilde{q})$ son cuadráticas y de dimensión finita.*

Entonces existe una colección $(\lambda_C)_{C \in \mathcal{R}'}$ que satisface (3.4) y (3.6) tal que $H \cong \mathcal{H}(\mathcal{Q})$, para el ql-datum $\mathcal{Q} = (X, q, G, (\cdot, g, (\chi_i)_{i \in X}), (\lambda_C)_{C \in \mathcal{R}'})$.

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 3.3, $\text{gr}(H) \cong \mathfrak{B}(X, q) \sharp \mathbb{k}G$. Por lo tanto, tenemos $\dim H = \dim \mathfrak{B}(X, q)|G|$. Por otro lado, por el Lema 3.8, existe una colección $\{\lambda_C\}_{C \in \mathcal{R}'}$ y un epimorfismo $\mathcal{H}(\mathcal{Q}) \twoheadrightarrow H$ para el ql-datum $\mathcal{Q} = (X, q, G, (\cdot, g, (\chi_i)_{i \in X}), \{\lambda_C\}_{C \in \mathcal{R}'})$. Así $\dim H \leq \dim \mathcal{H}(\mathcal{Q})$. Ahora, por la Proposición 3.16, $\dim \mathcal{H}(\mathcal{Q}) \leq \dim \mathfrak{B}(X, q)|G|$. Por lo tanto, $H \cong \mathcal{H}(\mathcal{Q})$. $\square$

Hemos visto que los levantamientos de algunas álgebras de Nichols cuadráticas son de la forma $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$. Ahora investigamos la recíproca, esto es cuándo $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ es un levantamiento.

Sea $\mathcal{Q} = (X, q, G, (\cdot, g, (\chi_i)_{i \in X}), \{\lambda_C\}_{C \in \mathcal{R}'})$ un ql-datum; asumamos que $\mathfrak{B}(X, q)$, $\mathfrak{B}(X^{-1}, \tilde{q})$ son cuadráticas y de dimensión finita. Por definición, el grupo de elementos grupecos $G(\mathcal{H}(\mathcal{Q}))$ de $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ es un cociente del grupo G en el datum. Por lo tanto, si $\pi : G \twoheadrightarrow G(\mathcal{H}(\mathcal{Q}))$ es el epimorfismo inducido, cualquier $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ -módulo W es un $\mathbb{k}G$ -módulo tomando $t \cdot w = \pi(t) \cdot w$, $\forall w \in W, t \in G$.

Así, cualquier $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ -módulo es una suma directa de $\mathbb{k}G$ -módulos irreducibles. Para $i \in X$, sea $J_i = \{k \in X : g_i = g_k\}$.

PROPOSICIÓN 3.18. *Si existe una representación $\rho : \mathcal{H}(\mathcal{Q}) \rightarrow \text{End } M$ tal que*

- (i) $\rho|_{G(\mathcal{H}(\mathcal{Q}))} \circ \pi : G \rightarrow \text{End}(M)$, es fiel;
- (ii) $\rho(a_i) \notin \mathbb{k}\rho(G(\mathcal{H}(\mathcal{Q})))$, para cada $i \in X$; y
- (iii) los conjuntos $\{\rho(a_j)\}_{j \in J_i}$ son linealmente independientes para cada $i \in X$;

entonces $\text{gr } \mathcal{H}(\mathcal{Q}) = \mathfrak{B}(X, q) \# \mathbb{k}G$.

DEMOSTRACIÓN. Por (i), $G(\mathcal{H}(\mathcal{Q})) \cong G$. Ahora, $\text{gr } \mathcal{H}(\mathcal{Q}) \cong \mathfrak{B}(W) \# \mathbb{k}G$, para un álgebra de Nichols de dimensión finita $\mathfrak{B}(W) \in {}^G_G\mathcal{YD}$, por Teorema 3.3; y $\dim \mathfrak{B}(W) \leq \dim \mathfrak{B}(X, q)$ por la Proposición 3.16. La aplicación

$$\mathfrak{B}(X, q) \ni x_i \mapsto \bar{a}_i \in \mathcal{H}(\mathcal{Q})_1 / \mathcal{H}(\mathcal{Q})_0$$

define un morfismo $\phi : V \rightarrow W \in {}^G_G\mathcal{YD}$. Las Condiciones (ii) y (iii) hacen de ϕ un mapa inyectivo. Así, tenemos un monomorfismo $\mathfrak{B}(X, q) \hookrightarrow \mathfrak{B}(W)$, ver [AS1, Cor 3.3]; y luego $V \cong W$. $\square$

OBSERVACIÓN 3.19. Si $i, j \in X$, entonces $\rho(a_i) \notin \mathbb{k}\rho(G)$ implica que $\rho(a_{j \triangleright i}) \notin \mathbb{k}\rho(G)$ por (3.8). Así, si X es indescomponible, entonces (ii) es equivalente a

- (ii') $\exists i \in X$ tal que $\rho(a_i) \notin \mathbb{k}\rho(G(\mathcal{H}(\mathcal{Q})))$.

Por otro lado, si la realización es fiel (por ejemplo, si X es fiel), entonces (iii) es automática, puesto que $|J_i| = 1$, $\forall i \in X$.

3.4. Álgebras de Hopf punteadas sobre $\mathbb{S}_n$

Aquí aplicaremos los resultados de las secciones anteriores al caso particular del grupo simétrico $\mathbb{S}_n$. Como hemos notado en la Observación 3.10, en este caso los ql-datos

- $\mathcal{Q}_n^{-1}[t] = (\mathbb{S}_n, \mathcal{O}_2^n, -1, \cdot, \iota, \{0, \Lambda, \Gamma\})$,
- $\mathcal{Q}_n^\chi[\lambda] = (\mathbb{S}_n, \mathcal{O}_2^n, \chi, \cdot, \iota, \{0, 0, \lambda\})$ y
- $\mathcal{D}[t] = (\mathbb{S}_4, \mathcal{O}_4^4, -1, \cdot, \iota, \{\Lambda, 0, \Gamma\})$;

para $\Lambda, \Gamma, \lambda \in \mathbb{k}$, $t = (\Lambda, \Gamma)$, son de particular interés.

Escribiremos las álgebras $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ para estos datos en detalle. En este caso, las relaciones (3.5) para cada $C \in \mathcal{R}'$ con la misma cardinalidad son $\mathbb{S}_n$ -conjugadas. Así es suficiente considerar una única relación para cada C con un número dado de elementos. Ver el Lema 3.27 para determinar los isomorfismos entre las álgebras en la misma familia.

DEFINICIÓN 3.20. [AG2, Definition 3.7] $\mathcal{H}(\mathcal{Q}_n^{-1}[t])$ es el álgebra presentada por generadores $\{a_i, H_r : i \in \mathcal{O}_2^n, r \in \mathbb{S}_n\}$ y relaciones:

$$\begin{aligned} H_e &= 1, \quad H_r H_s = H_{rs}, \quad r, s \in \mathbb{S}_n; \\ H_j a_i &= -a_{jij} H_j, \quad i, j \in \mathcal{O}_2^n; \\ a_{(12)}^2 &= 0; \\ a_{(12)} a_{(34)} + a_{(34)} a_{(12)} &= \Gamma(1 - H_{(12)} H_{(34)}); \\ a_{(12)} a_{(23)} + a_{(23)} a_{(13)} + a_{(13)} a_{(12)} &= \Lambda(1 - H_{(12)} H_{(23)}). \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 3.21. $\mathcal{H}(\mathcal{Q}_n^\chi[\lambda])$ es el álgebra presentada por generadores $\{a_i, H_r : i \in \mathcal{O}_2^n, r \in \mathbb{S}_n\}$ y relaciones:

$$\begin{aligned} H_e &= 1, \quad H_r H_s = H_{rs}, \quad r, s \in \mathbb{S}_n; \\ H_j a_i &= \chi_i(j) a_{jij} H_j, \quad i, j \in \mathcal{O}_2^n; \\ a_{(12)}^2 &= 0; \\ a_{(12)} a_{(34)} - a_{(34)} a_{(12)} &= 0; \\ a_{(12)} a_{(23)} - a_{(23)} a_{(13)} - a_{(13)} a_{(12)} &= \lambda(1 - H_{(12)} H_{(23)}). \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 3.22. $\mathcal{H}(\mathcal{D}[t])$ es el álgebra generada por elementos $\{a_i, H_r : i \in \mathcal{O}_4^4, r \in \mathbb{S}_n\}$ y relaciones:

$$\begin{aligned} H_e &= 1, \quad H_r H_s = H_{rs}, \quad r, s \in \mathbb{S}_n; \\ H_j a_i &= -a_{jij} H_j, \quad i \in \mathcal{O}_4^4, j \in \mathcal{O}_2^4; \\ a_{(1234)}^2 &= \Gamma(1 - H_{(13)} H_{(24)}); \\ a_{(1234)} a_{(1432)} + a_{(1432)} a_{(1234)} &= 0; \\ a_{(1234)} a_{(1243)} + a_{(1243)} a_{(1423)} + a_{(1423)} a_{(1234)} &= \Lambda(1 - H_{(12)} H_{(13)}). \end{aligned}$$

3.4.1. Construcción de $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ -módulos. Sea ahora $\mathcal{Q}$ uno de los ql-datos $\mathcal{Q}_n^{-1}[t]$, $\mathcal{Q}_n^\chi[\lambda]$, $n \geq 4$, o $\mathcal{D}[t]$. Construiremos:

- un $\mathcal{H}(\mathcal{Q}_n^{-1}[t])$ -módulo $W(n)$ soportado en $S^{(n-1,1)} \oplus S^{(2,1^{n-2})}$;
- un $\mathcal{H}(\mathcal{Q}_n^\chi[\lambda])$ -módulo $U(n)$ soportado en $S^{(n-1,1)}$;
- un $\mathcal{H}(\mathcal{D}[t])$ -módulo V soportado en $S^{(3,1)} \oplus S^{(2,1^2)}$.

Notemos que para $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_n^\chi[\lambda]$ un único $\mathbb{K}\mathbb{S}_n$ -módulo irreducible basta. Esto está relacionado con el hecho de que estas álgebras sólo dependen en un parámetro λ . Hemos usado el programa de computadora **Mathematica**® para encontrar las representaciones. Aquí, nos limitamos a dar una base $\mathcal{B}$ de estos módulos y a escribir la matriz de cambio de base entre $\mathcal{B}$ y la base canónica del $\mathbb{K}\mathbb{S}_4$ -módulo. También escribimos la matriz que define la acción de $a_{(12)}$ o $a_{(1234)}$ con respecto a la base $\mathcal{B}$. La acción del resto de los elementos a_i , $i \in X$ puede ser deducida de ésta a través de las relaciones de conmutación (3.8).

Sea $t = (\Gamma : \Lambda) \neq (0, 0)$.

PROPOSICIÓN 3.23. *Existe un $\mathcal{H}(\mathcal{Q}_n^{-1}[t])$ -módulo irreducible $W(n)$ tal que*

- $W(n)$ tiene una base $\{\xi_i, \zeta_i\}_{i=1}^{n-1}$ en la que

$$\begin{aligned} a_{12}\xi_1 &= 2\zeta_1, & a_{12}\zeta_1 &= 0, \\ a_{12}\xi_2 &= 0, & a_{12}\zeta_2 &= \alpha_n(t)\xi_2, \\ a_{12}\xi_j &= 0, & a_{12}\zeta_j &= \Gamma\xi_j, j \geq 3. \end{aligned}$$

- $W(n) \cong_{\mathbb{S}_n} S^{(n-1,1)} \oplus S^{(2,1^{n-2})}$.

$$\text{Aquí, } \alpha_n(t) = 2 \frac{(n-2)\Lambda - (n-3)\Gamma}{n}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $n \geq 4$, fijemos $b = b_n = \frac{2}{2-n}$, y sea $\phi_n : W(n) \rightarrow S^{(n-1,1)} \oplus S^{(2,1^{n-2})}$ el isomorfismo lineal definido, en la base $\{\xi_i, \zeta_i\}_{i=1}^{n-1}$ y $\{v_i, w_i\}_{i=1}^{n-1}$ por

$$[\phi_n] = \begin{pmatrix} \Phi_n & 0 \\ 0 & \Phi_n \end{pmatrix}, \quad \text{para } [\Phi_n] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & & & \\ \vdots & \vdots & & \text{id}_{n-3} & \\ 0 & b & & & \end{pmatrix}.$$

Definimos una estructura de $\mathbb{K}\mathbb{S}_n$ -módulo en $W(n)$ de manera tal que ϕ_n sea un isomorfismo de $\mathbb{K}\mathbb{S}_n$ -módulos. Así, definimos la acción de los elementos H_t en este módulo. Por ejemplo, para $\mathbf{0}_{n-1} \in \mathbb{K}^{n-1 \times n-1}$ la matriz nula; ρ_{ij} , para $2 < i < j < n$, la matriz que intercambia las filas i y j , tenemos

$$\begin{aligned} [H_{(12)}] &= \begin{pmatrix} \alpha & \mathbf{0}_{n-1} \\ \mathbf{0}_{n-1} & -\alpha \end{pmatrix}, & [H_{(23)}] &= \begin{pmatrix} \beta & \mathbf{0}_{n-1} \\ \mathbf{0}_{n-1} & -\beta \end{pmatrix}, \\ [H_{(ij)}] &= \begin{pmatrix} \rho_{ij} & \mathbf{0}_{n-1} \\ \mathbf{0}_{n-1} & -\rho_{ij} \end{pmatrix}, & [H_{(n-1n)}] &= \begin{pmatrix} \omega & \mathbf{0}_{n-1} \\ \mathbf{0}_{n-1} & -\omega \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde $\alpha_{kl} = \delta_{k,l}\eta_k$, con $\eta_2 = -1$, $\eta_k = 1$, $k \neq 2$ y $[\omega]$, $[\beta]$ son, respectivamente:

$$\begin{pmatrix} & & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ \text{id}_{n-1} & & & & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - b & -\frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + b & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ -1 - b & 1 + b - 2b^2 & -b & 0 & \dots & 0 \\ -b & 1 + b - 2b^2 & -b & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \text{id}_{n-4} & & \\ -b & 1 + b - 2b^2 & -b & & & \end{pmatrix}$$

Así $H_{(12)}a_{12}H_{(12)} = -a_{12} = H_{(ij)}a_{12}H_{(ij)} = H_{(n-1n)}a_{12}H_{(n-1n)}$ y las relaciones de conmutatividad se satisfacen. De estas matrices, podemos computar

$$[a_{13}] = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n-1} & a_{13}[1] \\ a_{13}[2] & \mathbf{0}_{n-1} \end{pmatrix}, \quad [a_{23}] = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n-1} & a_{23}[1] \\ a_{23}[2] & \mathbf{0}_{n-1} \end{pmatrix},$$

donde $a_{13}[1]$ y $a_{23}[1]$ son, respectivamente, las matrices

$$\begin{pmatrix} \frac{\Lambda}{2} & \frac{\Lambda(n-4)+\Gamma(6-2n)}{2(n-2)} & \frac{\Lambda-\Gamma}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\Lambda(n-4)+\Gamma(6-2n)}{2n} & \frac{\Lambda(n^2-8n+16)+\Gamma(8n-24)}{2n(n-2)} & \frac{\Lambda(n-4)+\Gamma(6-n)}{2n} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{(n-3)(\Lambda-\Gamma)}{n-2} & \frac{(n-3)(\Lambda(n-4)+\Gamma(6-n))}{(n-2)^2} & \frac{\Lambda(n-3)+\Gamma(4-n)}{n-2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\Gamma-\Lambda}{n-2} & \frac{\Lambda(4-n)+\Gamma(n-6)}{(n-2)^2} & \frac{2\Gamma-\Lambda}{n-2} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \Gamma \text{id}_{n-4} & \\ \frac{\Gamma-\Lambda}{n-2} & \frac{\Lambda(4-n)+\Gamma(n-6)}{(n-2)^2} & \frac{2\Gamma-\Lambda}{n-2} & & & \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\Lambda}{2} & \frac{\Lambda(4-n)+\Gamma(2n-6)}{2(n-2)} & \frac{\Gamma-\Lambda}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\Lambda(4-n)+\Gamma(2n-6)}{2n} & \frac{\Lambda(n^2-8n+16)+\Gamma(8n-24)}{2n(n-2)} & \frac{\Lambda(n-4)+\Gamma(6-n)}{2n} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{(\Gamma-\Lambda)(n-3)}{n-2} & \frac{(n-3)(\Lambda(n-4)+\Gamma(6-n))}{(n-2)^2} & \frac{\Lambda(n-3)+\Gamma(4-n)}{n-2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\Lambda-\Gamma}{n-2} & \frac{\Lambda(4-n)+\Gamma(n-6)}{(n-2)^2} & \frac{2\Gamma-\Lambda}{n-2} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \Gamma \text{id}_{n-4} & \\ \frac{\Lambda-\Gamma}{n-2} & \frac{\Lambda(4-n)+\Gamma(n-6)}{(n-2)^2} & \frac{2\Gamma-\Lambda}{n-2} & & & \end{pmatrix},$$

y $a_{13}[2], a_{23}[2]$ son tales que ambas tienen la j -ésima columna nula para $j > 3$ y las primeras tres filas como sigue:

$$a_{13}[2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{n}{2(n-2)} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{n}{2(n-2)} & -\frac{1}{2} \\ \frac{n-3}{2-n} & \frac{n(3-n)}{(n-2)^2} & \frac{3-n}{2-n} \\ \frac{1}{n-2} & \frac{n}{(n-2)^2} & \frac{1}{2-n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n-2} & \frac{n}{(n-2)^2} & \frac{1}{2-n} \end{bmatrix}, \quad a_{23}[2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{n}{2(2-n)} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{n}{2(n-2)} & -\frac{1}{2} \\ \frac{n-3}{n-2} & \frac{n(3-n)}{(n-2)^2} & \frac{n-3}{n-2} \\ \frac{1}{2-n} & \frac{n}{(n-2)^2} & \frac{1}{2-n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2-n} & \frac{n}{(n-2)^2} & \frac{1}{2-n} \end{bmatrix},$$

La acción de a_{34} difiere en los casos $n = 4$ o $n > 4$. Si $n = 4$,

$$a_{34}\xi_i = 2\delta_{i,3}\zeta_i, \quad a_{34}\zeta_1 = \Gamma\xi_1, \quad a_{34}\zeta_2 = (\Lambda - \frac{\Gamma}{2})\xi_2, \quad a_{34}\zeta_3 = 0,$$

mientras que si $n > 4$ la acción está dada por:

$$[a_{34}] = \begin{pmatrix} 0 & a_{34}[1] \\ a_{34}[2] & 0 \end{pmatrix}$$

donde $a_{34}[2]_{ij} = (\delta_{i,3} - \delta_{i,4})(\delta_{j,3} - \delta_{j,4})$ y

$$a_{34}[1] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{8\Lambda + \Gamma(n^2 - 2n - 12)}{n(n-2)} & \frac{3\Gamma - 2\Lambda}{n} & \frac{3\Gamma - 2\Lambda}{n} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{2(n-4)(3\Gamma - 2\Lambda)}{(n-2)^2} & \frac{\Lambda(4-n) + \Gamma(n-5)}{2-n} & \frac{\Lambda(4-n) + \Gamma(n-5)}{2-n} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{2(n-4)(3\Gamma - 2\Lambda)}{(n-2)^2} & \frac{\Lambda(4-n) + \Gamma(n-5)}{2-n} & \frac{\Lambda(4-n) + \Gamma(n-5)}{2-n} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{4(2\Lambda - 3\Gamma)}{(n-2)^2} & \frac{3\Gamma - 2\Lambda}{n-2} & \frac{3\Gamma - 2\Lambda}{n-2} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ \frac{4(2\Lambda - 3\Gamma)}{(n-2)^2} & \frac{3\Gamma - 2\Lambda}{n-2} & \frac{3\Gamma - 2\Lambda}{n-2} & & & \text{id}_{n-4} \end{pmatrix}$$

Podemos ahora chequear las relaciones cuadráticas. Primero, es claro que $a_{12}^2 = 0$. Resta ver el caso de las ecuaciones

$$(3.10) \quad a_{12}a_{34} + a_{34}a_{12} = \Gamma(1 - H_{(12)}H_{(34)})$$

$$(3.11) \quad a_{12}a_{23} + a_{23}a_{13} + a_{13}a_{12} = \Lambda(1 - H_{(12)}H_{(23)})$$

Notar que en ambas ecuaciones, los lados izquierdo y derecho son cero cuando se calculan en ξ_j, ζ_j para $j > 3$. La relación se verifica en el resto de los generadores mediante una cuenta directa, aunque algo tediosa. Por ejemplo, el lado izquierdo de (3.11) aplicado a ξ_1 es

$$\begin{aligned} & a_{12}\left(\frac{1}{2}(\zeta_1 - \zeta_2) + \frac{n-3}{n-2}\zeta_3 + \frac{1}{2-n}\sum_{j>3}\zeta_j\right) \\ & + a_{23}\left(\frac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta_2) + \frac{n-3}{2-n}\zeta_3 + \frac{1}{n-2}\sum_{j>3}\zeta_j\right) + 2a_{13}\zeta_1 = \\ & = \left[-\frac{1}{2}\alpha_n(t)\zeta_2 + \frac{(n-3)\Gamma}{n-2}\zeta_3 + \frac{\Gamma}{2-n}\sum_{j>3}\zeta_j\right] + \left[\frac{\Lambda + \Gamma(n-3)}{2(n-2)}\xi_1\right. \\ & + \frac{\Lambda(4-n) + \Gamma(n^2 - n - 6)}{2n(n-2)}\xi_2 + \frac{(n-3)(2\Gamma - \Lambda)}{(n-2)^2}\xi_3 + \frac{(\Lambda - 2\Gamma)}{(n-2)^2}\sum_{j>3}\xi_j \\ & + \frac{n-3}{2-n}\left(\frac{\Gamma - \Lambda}{2}\xi_1 + \frac{\Lambda(n-4) + \Gamma(6-n)}{2n}\xi_2 + \frac{\Lambda(n-3) + \Gamma(4-n)}{n-2}\right. \\ & + \frac{2\Gamma - \Lambda}{n-2}\sum_{j>3}\xi_j) + \frac{\Gamma}{n-2}\sum_{j>3}\xi_j] + \left[2\left(\frac{\Lambda}{2}\xi_1 + \frac{\Lambda(n-4) + \Gamma(6-2n)}{2n}\xi_2\right.\right. \\ & + \left.\left.\frac{(n-3)(\Lambda - \Gamma)}{n-2}\xi_3 + \frac{\Gamma - \Lambda}{n-2}\sum_{j>3}\xi_j\right)\right] \\ & = \frac{3\Lambda}{2}\xi_1 - \frac{\Lambda}{2}\xi_2 + \frac{(n-3)\Lambda}{n-2}\xi_3 + \frac{\Lambda}{2-n}\sum_{j>3}\xi_j. \end{aligned}$$

Y esto equivale al lado derecho, ya que

$$H_{(12)}H_{(23)}\xi_1 = \frac{1}{2}(-\xi_1 + \xi_2) + \frac{n-4}{2-n}\xi_3 + \frac{2}{n-2}\sum_{j>3}\xi_j.$$

Finalmente, notar que a_{12} permuta los $\mathbb{K}\mathbb{S}_n$ -módulos $S^{(n-1,1)}$ y $S^{(2,1^{n-2})}$, entonces $W(n)$ es irreducible. $\square$

PROPOSICIÓN 3.24. *Existe un $\mathcal{H}(\mathcal{Q}_n^\chi[\lambda])$ -módulo irreducible $U(n)$ tal que*

- $U(n) \cong_{\mathbb{S}_n} S^{(n-1,1)}$.
- $U(n)$ tiene una base $\{\xi_i\}_{i=1}^{n-1}$ en la que

$$a_{12}\xi_1 = 2\sqrt{-\lambda}\xi_2, \quad a_{12}\xi_j = 0, \quad j \geq 3.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\phi_n : U(n) \rightarrow S^{(n-1,1)}$ el isomorfismo lineal definido en la base $\{\xi_i\}_{i=1}^{n-1}$ y $\{v_i\}_{i=1}^{n-1}$ por

$$[\phi_n] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & \text{id}_{n-3} & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Definimos como antes una estructura de $\mathbb{K}\mathbb{S}_n$ -módulo en $U(n)$ de manera que ϕ_n sea un isomorfismo de $\mathbb{K}\mathbb{S}_n$ -módulos. En particular, tenemos definida así la acción de los elementos H_t en este módulo. Por ejemplo,

$$H_{(12)}\xi_2 = -\xi_2, \quad H_{(12)}\xi_i = \xi_i, \quad i \neq 2.$$

Las matrices $H_{(ij)}$ con $2 < i < j < n$ son matrices de permutación que intercambian a_{ij} con a_{ji} . Cuando $j = n$, tenemos que la k -ésima fila de H_{in} es la k -ésima fila de la identidad $n-1 \times n-1$ mientras que la i -ésima es $(2 \ 0 \ -1 \ \dots \ -1)$. De estas matrices se verifica que $H_{(12)}a_{12}H_{(12)} = -a_{12}$ y $H_{ij}a_{12}H_{ij} = a_{12}$ para cada $i, j \notin \{1, 2\}$, y es inmediato que $[a_{12}]^2 = 0$. Ahora, para $\mathbf{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^{n-4}$,

$$[H_{(13)}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \mathbf{0} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \mathbf{0} \\ 1 & 1 & 0 & \mathbf{0} \\ {}^t\mathbf{0} & {}^t\mathbf{0} & {}^t\mathbf{0} & \text{id}_{n-4} \end{pmatrix}, \quad [H_{(23)}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \mathbf{0} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \mathbf{0} \\ 1 & -1 & 0 & \mathbf{0} \\ {}^t\mathbf{0} & {}^t\mathbf{0} & {}^t\mathbf{0} & \text{id}_{n-4} \end{pmatrix}.$$

Así, ya que $a_{13} = H_{(23)}a_{12}H_{(23)}$, $a_{23} = -H_{(13)}a_{12}H_{(13)}$, tenemos que, en la base $\{\xi_i\}_{i=1}^{n-1}$, las matrices de estos elementos son, respectivamente,

$$\begin{pmatrix} \frac{\Lambda}{4} & -\frac{\Lambda}{4} & \frac{\Lambda}{4} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\Lambda}{4} & \frac{\Lambda}{4} & -\frac{\Lambda}{4} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\Lambda}{2} & \frac{\Lambda}{2} & -\frac{\Lambda}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{\Lambda}{4} & \frac{\Lambda}{4} & \frac{\Lambda}{4} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\Lambda}{4} & \frac{\Lambda}{4} & \frac{\Lambda}{4} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\Lambda}{2} & -\frac{\Lambda}{2} & -\frac{\Lambda}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

De esta descripción se sigue que $[a_{12}a_{23} - a_{23}a_{13} - a_{13}a_{12}] = \lambda[1 - H_{(12)}H_{(23)}]$. Ahora, la matrix de a_{34} depende de si $n = 4$ o $n > 4$. En cada caso:

$$[a_{34}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\Lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad n = 4; \quad [a_{34}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Lambda}{2} & \frac{\Lambda}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Lambda}{2} & \frac{\Lambda}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad n > 4.$$

y siempre tenemos $[a_{12}][a_{34}] = 0 = [a_{34}][a_{12}]$. $U(n)$ es claramente irreducible. $\square$

PROPOSICIÓN 3.25. *Existe un $\mathcal{H}(\mathcal{D}[t])$ -módulo irreducible V tal que*

- $V \cong_{\mathbb{S}_4} S^{(3,1)} \oplus S^{(2,1^2)}$.
- V tiene una base $\{\xi_i, \zeta_i\}_{i=1}^3$ en la que

$$\begin{aligned} a_{1234}\xi_1 &= 2\zeta_1, & a_{1234}\zeta_1 &= \Gamma\xi_1, \\ a_{1234}\xi_2 &= 2\zeta_2, & a_{1234}\zeta_2 &= \Gamma\xi_2, \\ a_{1234}\xi_3 &= 0, & a_{1234}\zeta_3 &= (\Lambda - \Gamma)\xi_3. \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\phi : V \rightarrow S^{(3,1)} \oplus S^{(2,1^2)}$ el isomorfismo lineal definido, en la base $\{\xi_i, \zeta_i\}_{i=1}^3$ y $\{v_i, w_i\}_{i=1}^3$ por

$$[\phi] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definimos una estructura de $\mathbb{KS}_4$ -módulo en V para que ϕ sea un isomorfismo de $\mathbb{KS}_4$ -módulos. Tenemos así definida la acción de los elementos H_t en este módulo. De la definición de la acción para $a_{(1234)}$ es fácil describir la acción de $a_{(1432)}$, $a_{(1243)}$, $a_{(1423)}$ y verificar que en efecto define un $\mathcal{H}(\mathcal{D}[t])$ -módulo. Como $a_{(1234)}$ permuta $S^{(3,1)}$ y $S^{(2,1^2)}$, V es irreducible. $\square$

Ahora estamos listo para probar la siguiente proposición, que provee un prueba que no utiliza bases de Gröbner de un resultado en [AG2, Theorem 3.8], para $\mathcal{H}(\mathcal{Q}_n^{-1}[t])$.

PROPOSICIÓN 3.26. *Sea $n \geq 4$, $t \in \mathbb{k}^2$, $\lambda \in \mathbb{k}$. Sea $A_n = \mathcal{H}(\mathcal{Q}_n^{-1}[t])$ o $\mathcal{H}(\mathcal{Q}_n^\chi[\lambda])$.*

- $G(A_n) \cong \mathbb{S}_n$, $A_n \not\cong \mathbb{KS}_n$.
- $\dim A_4 = 24^3$, $\dim A_5 = 2^{15}3^55^3$.
- $G(\mathcal{H}(\mathcal{D}[t])) \cong \mathbb{S}_4$, $\mathcal{H}(\mathcal{D}[t]) \not\cong \mathbb{KS}_4$ y $\dim \mathcal{H}(\mathcal{D}[t]) = 24^3$.

Por lo tanto, para $n = 4, 5$, el álgebra de Hopf graduada asociada a la filtración corradical de $\mathcal{H}(\mathcal{Q}_n^{-1}[t])$ (respectivamente $\mathcal{H}(\mathcal{Q}_n^\chi[\lambda])$, $\mathcal{H}(\mathcal{D}[t])$) es isomorfa a $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_2^n, -1) \# \mathbb{KS}_n$ (respectivamente $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_2^n, \chi) \# \mathbb{KS}_n$, $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_4^4, -1) \# \mathbb{KS}_4$).

DEMOSTRACIÓN. En vista de la Proposición 3.18, se sigue del Teorema 2.16 y la Observación 2.17, junto con el Teorema 2.15 y la Proposición 2.19, usando las representaciones definidas en las Proposiciones 3.23, 3.24 y 3.25, según corresponda. $\square$

3.5. Clasificación de álgebras de Hopf punteadas sobre $\mathbb{S}_4$

En esta sección probaremos uno de nuestros resultados principales. Necesitamos antes el siguiente lema, que establece las clases de isomorfismo entre las álgebras que pertenecen a una de las familias definidas en las Definiciones 3.20–3.22.

LEMA 3.27. *Sea $t, t' \in \mathbb{k}^2$. Entonces $\mathcal{H}(\mathcal{Q}_n^{-1}[t]) \cong \mathcal{H}(\mathcal{Q}_n^{-1}[t'])$ si y sólo si $t \neq 0$ y $t = t' \in \mathbb{P}_{\mathbb{k}}^1$ o si $t = t' = (0, 0)$, y lo mismo vale para $\mathcal{H}(\mathcal{D}[t])$. Finalmente, $\mathcal{H}(\mathcal{Q}_n^X[\lambda]) \cong \mathcal{H}(\mathcal{Q}_n^X[1])$, $\forall \lambda \in \mathbb{k}^*$ y $\mathcal{H}(\mathcal{Q}_n^X[1]) \not\cong \mathcal{H}(\mathcal{Q}_n^X[0])$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_n^{-1}[t]$, $\mathcal{Q}_n^X[\lambda]$ o $\mathcal{D}[t]$; $\mathcal{Q}' = \mathcal{Q}_n^{-1}[t']$, $\mathcal{Q}_n^X[\lambda']$ o $\mathcal{D}[t']$. Sea $H = \mathcal{H}(\mathcal{Q})$, $H' = \mathcal{H}(\mathcal{Q}')$. Un isomorfismo $\phi : H \rightarrow H'$ induce $\phi|_{\mathbb{S}_n} \in \text{Aut}(\mathbb{S}_n)$ para $n = 4, 5$ según corresponda, y así tenemos una permutación $\varphi : X \rightarrow X$ tal que $\phi(H_i) = H_{\varphi(i)}$ y $\phi(a_i)$ es $(H_{\varphi(i)}, 1)$ -primitivo, para $i \in X$. Más aún, ϕ se restringe a $\phi_1 : H_1 \rightarrow H'_1$ entre los segundos factores de la filtración corradical, y así $\phi(a_i) = \eta a'_{\varphi(i)} + \mu(1 - H_{\varphi(i)})$, $\eta, \mu \in \mathbb{k}$. Cuando $X = \mathcal{O}_2^n$, la relación $a_i^2 = 0$ fuerza $\mu = 0$, y para $X = \mathcal{O}_4^4$ la relación $a_i^2 = \Gamma(1 - H_i^2)$ hace que $\mu = 0$ y $\Gamma = \eta^2 \Gamma'$. Por lo tanto, $\phi(a_i) = \eta a_{\varphi(i)}$. Ahora, tomando en cuenta el resto de las relaciones cuadráticas, tenemos que, para $\mathcal{Q}_n^{-1}[t]$ como así también para $\mathcal{D}[t]$, $t = \eta^2 t'$; mientras que para $\mathcal{Q}_n^{-1}[\lambda]$ obtenemos $\lambda = \eta^2 \lambda'$. Así el resultado se sigue. $\square$

Estamos listos para dar una prueba de nuestro resultado principal en este capítulo.

TEOREMA 3.28. *Sea H un álgebra de Hopf punteada de dimensión finita con $G(H) \cong \mathbb{S}_4$, $H \neq \mathbb{k}\mathbb{S}_4$. Entonces H es isomorfa a una y sólo una de las siguientes álgebras:*

1. $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_2^4, -1) \# \mathbb{k}\mathbb{S}_4$;
2. $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_4^4, -1) \# \mathbb{k}\mathbb{S}_4$;
3. $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_2^4, \chi) \# \mathbb{k}\mathbb{S}_4$;
4. $\mathcal{H}(\mathcal{Q}_4^{-1}[t])$, para exactamente un $t \in \mathbb{P}_{\mathbb{k}}^1$;
5. $\mathcal{H}(\mathcal{D}[t])$, para exactamente un $t \in \mathbb{P}_{\mathbb{k}}^1$;
6. $\mathcal{H}(\mathcal{Q}_4^X[1])$.

DEMOSTRACIÓN. En el Lema 3.13 hemos visto que las álgebras listadas son álgebras de Hopf punteadas. Hemos calculado su dimensión en la Proposición 3.26. Recíprocamente, sea H un álgebra de Hopf punteada de dimensión finita con $G(H) \cong \mathbb{S}_4$. Por el Teorema 2.16, la trenza infinitesimal de H es isomorfa a $M(\mathcal{O}_2^4, \text{sgn} \otimes \text{sgn})$, a $M(\mathcal{O}_2^4, \text{sgn} \otimes \epsilon)$ o a $M(\mathcal{O}_4^4, \rho_-)$. Como todos estos módulos son auto-duales, H es isomorfa a una y sólo una de las álgebras de Hopf en la lista por el Teorema 3.17, la Observación 3.10 y el Lema 3.27. $\square$

OBSERVACIÓN 3.29. La clasificación de las álgebra de Hopf punteadas de dimensión finita con $G(H) \cong \mathbb{S}_3$, alcanzada en [AHS] usando [AG2] y [AZ], puede ser probada alternativamente de este modo.

Concluimos el capítulo describiendo en la siguiente proposición una subclase de álgebras de Hopf punteadas de dimensión finita sobre $\mathbb{S}_5$. Se sigue de la misma manera que el teorema anterior.

COROLARIO 3.30. *Sea A un álgebra de Hopf punteada de dimensión finita con $G(A) \cong \mathbb{S}_5$ y sea $M \in {}_{\mathbb{S}_5}^{\mathbb{S}_5} \mathcal{YD}$ su trenza infinitesimal.*

- Si $M \cong M(\mathcal{O}_2^5, \text{sgn} \otimes \text{sgn})$, entonces $A \cong \mathcal{H}(\mathcal{Q}_5^{-1}[t])$, para exactamente un $t \in \mathbb{P}_{\mathbb{k}}^1 \cup \{(0, 0)\}$.
- Si $M \cong M(\mathcal{O}_2^5, \text{sgn} \otimes \epsilon)$, entonces $A \cong \mathcal{H}(\mathcal{Q}_5^X[\lambda])$, para un $\lambda \in \{0, 1\}$.

$\square$

Representaciones de álgebras de Hopf punteadas

En este capítulo comenzamos el estudio de la teoría de representaciones de las álgebras $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ introducidas en el capítulo anterior. Recordar la definición de un ql-datum $\mathcal{Q}$ de la Definición 3.11 y del álgebra de Hopf punteada $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ construida en la Definición 3.12 en la página 38.

Investigamos los módulos cuya restricción al grupo de elementos grupales es una suma de módulos de dimensión 1 y sus cubiertas proyectivas. También caracterizamos a los módulos simples sobre una bosonización, bajo ciertas condiciones.

Luego, aplicamos estos resultados a las álgebras de Hopf punteadas de dimensión finita sobre $\mathbb{S}_3$. Obtenemos así la clasificación de sus módulos simples. Encontramos también los carcajes de Gabriel, las cubiertas proyectivas de los módulos simples y mostramos que estas álgebras no son de tipo de representación finito.

4.1. Módulos que son sumas de representaciones de dimensión 1

En esta sección, estudiaremos los $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ -módulos cuyo G -módulo subyacente es una suma directa de representaciones en $\widehat{G_{ab}}$.

Empezamos por fijar la siguiente notación. Dado un par (X, q) , sea

$$(4.1) \quad \zeta_h(C) = \begin{cases} (-1)^{\frac{h}{2}-1} \left(\prod_{l=1}^{\frac{h}{2}-1} q_{i_{h-2l+1}, i_{h-2l}} \right) & \text{si } 2|h, \\ (-1)^{\frac{h-1}{2}} \left(\prod_{l=1}^{\frac{h-1}{2}} q_{i_{h-2l+1}, i_{h-2l}} \right) & \text{si } 2|h+1. \end{cases}$$

Notar que $\zeta_1(C) = \zeta_2(C) = 1$, $\zeta_{h+1}(C)\zeta_h(C) = \eta_h(C)$, ver (3.2).

4.1.1. Módulos cuyo G -módulo subyacente es isotópico.

Estudiamos primero las extensiones de caracteres multiplicativos de G a $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$.

PROPOSICIÓN 4.1. *Sea $\rho \in \widehat{G_{ab}}$. Existe $\bar{\rho} \in \text{hom}_{alg}(\mathcal{H}(\mathcal{Q}), \mathbb{k})$ tal que $\bar{\rho}|_G = \rho$ si y sólo si*

$$(4.2) \quad 0 = \lambda_C(1 - \rho(g_i g_j)) \text{ si } (i, j) \in C \text{ y } 2|n(C),$$

y existe una familia $\{\gamma_i\}_{i \in X}$ de escalares tales que

$$(4.3) \quad \gamma_j = \chi_j(t) \gamma_{t \cdot j} \quad \forall t \in G, j \in X,$$

$$(4.4) \quad \gamma_i \gamma_j = \lambda_C(1 - \rho(g_i g_j)) \quad \text{si } (i, j) \in C \text{ y } 2|n(C) + 1.$$

Si se satisface (4.2), entonces el conjunto de todas las extensiones $\bar{\rho}$ de ρ está en correspondencia biyectiva con el conjunto de familias $\{\gamma_i\}_{i \in X}$ que satisfacen (4.3) y (4.4). En particular, si

$$(4.5) \quad \lambda_C \neq 0 \Rightarrow \rho(g_i g_j) = 1, \quad C \in \mathcal{R}', (i, j) \in C.$$

entonces $\gamma_i = 0$, $\forall i \in X$ define un $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ -módulo. Más aún, esta es la única extensión posible si, además,

$$(4.6) \quad \chi_i(g_i) \neq 1, \quad \forall i \in X.$$

OBSERVACIÓN 4.2. (a) Trabajaremos principalmente con álgebras de Nichols para los cuales se satisface:

$$(4.7) \quad \chi_i(g_i) = -1, \quad \forall i \in X.$$

En este caso, obviamente (4.6) se satisface y la clase $C_i = \{(i, i)\}$ pertenece a $\mathcal{R}'$.

(b) Si X es indescomponible, usando (4.3) y el hecho de que $\forall i \in X \exists t \in G$ tal que $i = t \cdot j$, podemos reemplazar (4.4) por

$$(4.4') \quad \gamma_j^2 = \lambda_C(1 - \rho(g_j)^2)\chi_j(t) \quad \text{si } (i, j) \in C \text{ y } 2|n(C) + 1.$$

DEMOSTRACIÓN. Asumamos que tal $\bar{\rho}$ existe y sea $\gamma_i = \bar{\rho}(a_i)$. Entonces (4.3) se sigue de (3.8). En particular, para $p, q \in X$, tenemos $\bar{\rho}(a_{p \triangleright q}) = \chi_q(g_p)^{-1} \bar{\rho}(a_q)$. Entonces, para $C \in \mathcal{R}'$, $(i_2, i_1) = (i, j) \in C$, se sigue que

$$(4.8) \quad \gamma_{i_h} = \bar{\rho}(a_{i_h}) = \begin{cases} (-1)^{\frac{h-1}{2}} \zeta_h(C)^{-1} \bar{\rho}(a_j) & \text{si } 2|h+1 \\ (-1)^{\frac{h}{2}-1} \zeta_h(C)^{-1} \bar{\rho}(a_i) & \text{si } 2|h, \end{cases}$$

cf. (4.1). Consecuentemente,

$$(4.9) \quad \bar{\rho}(a_{i_{h+1}} a_{i_h}) = (-1)^{h+1} \eta_h(C)^{-1} \bar{\rho}(a_i) \bar{\rho}(a_j)$$

y así (4.4) y (3.11) se siguen de (3.9). Recíprocamente, si (3.11) vale y $\{\gamma_i\}_{i \in X}$ es una familia que cumple (4.3) y (4.4), entonces definimos $\bar{\rho} : \mathcal{H}(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathbb{k}$ como el único morfismo de álgebras tal que $\bar{\rho}(H_t) = \rho(t)$ y $\bar{\rho}(a_i) = \gamma_i$. Si (4.6) se satisface, se sigue de (4.3) para $t = g_i$ que $\bar{\rho}(a_i) = 0 \forall i \in X$ es una condición necesaria. $\square$

DEFINICIÓN 4.3. Sea $\bar{\rho}$ una extensión de $\rho \in \widehat{G_{ab}}$ y $\gamma_i = \bar{\rho}(a_i)$, $\gamma = (\gamma_i)_{i \in X} \in \mathbb{k}^X$. Entonces denotamos el $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ -módulo correspondiente por S_ρ^γ . Si $\gamma = 0$, tomamos $S_\rho^\gamma = S_\rho$.

Ahora determinamos todos los $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ -módulos cuyo G -módulo subyacente es isotípico de tipo $\rho \in \widehat{G_{ab}}$, cuando X es indescomponible y (4.6) se cumple.

PROPOSICIÓN 4.4. Asumamos que X es indescomponible. Sea M un $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ -módulo tal que $M = M[\rho]$ para un único $\rho \in \widehat{G_{ab}}$, $\dim M = n$. Entonces M es simple si y sólo si $n = 1$. Si, además, (4.6) se satisface, $M \cong S_\rho^{\oplus n}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\bar{\rho} : \mathcal{H}(\mathcal{Q}) \rightarrow \text{End } M$ la representación correspondiente y $\Gamma_j \in \mathbb{k}^{n \times n}$ la matriz asociada a $\bar{\rho}(a_j)$ en alguna base (fija). Como en la prueba de la Proposición 4.1, $\{\Gamma_i\}_{i \in X}$ satisface (4.3). Así, si fijamos $j \in X$, entonces para cada $i \in X$ existe $t \in G$ tal que $\Gamma_i = \chi_j(t)^{-1} \Gamma_j$. Así, existe una base $\{z_1, \dots, z_n\}$ en la cual todas estas matrices son triangulares superiores y por lo tanto $\mathbb{k}\{z_1\}$ genera un submódulo $M' \subseteq M$. Si (4.6) se satisface, entonces se sigue que $\Gamma_i = 0$, $\forall i \in X$ y así $M \cong \bigoplus_{j=1}^n S_\rho$. $\square$

4.1.2. Módulos cuyo G -módulo subyacente es una suma de dos componentes isotópicas.

Sean $\rho, \mu \in \widehat{G_{ab}}$ que cumplen (3.11), $\gamma, \delta \in \mathbb{k}^X$ que cumplen (4.3) y (4.4) para ρ y μ , respectivamente. Empezamos esta subsección describiendo módulos indescomponible que son extensiones de S_ρ^γ por S_μ^δ . Por simplicidad en el enunciado de (4.11) en el siguiente lema, introducimos la siguiente notación. Sea $C \in \mathcal{R}'$, $j \in C$ y sea

$$\alpha_j(C) = \sum_{r=0}^{\lceil \frac{n(C)}{2} \rceil - 1} \chi_j(g_j)^r, \quad \beta_j(C) = \sum_{r=0}^{\lceil \frac{n(C)+1}{2} \rceil - 1} \chi_j(g_j)^r.$$

Notar que

$$\beta_j = \begin{cases} \alpha_j, & \text{si } 2|n(C), \\ \alpha_j + \chi_j(g_j)^{\lceil \frac{n(C)+1}{2} \rceil - 1}, & \text{si } 2 \nmid n(C). \end{cases}$$

LEMA 4.5. Sea V el espacio de soluciones $\{f_i\}_{i \in X} \in \mathbb{k}^X$ del siguiente sistema

$$(4.10) \quad f_i \mu(t) = \chi_i(t) f_{t \cdot i} \rho(t), \quad i \in X, t \in G \text{ y}$$

$$(4.11) \quad (\alpha_j(C) \delta_j - \beta_j(C) \gamma_j) f_i = -\chi_i(g_i) (\alpha_i(C) \delta_i - \beta_i(C) \gamma_i) f_j,$$

$C \in \mathcal{R}'$, $(i, j) \in C$. Entonces $\text{Ext}_{\mathcal{H}(\mathcal{Q})}^1(S_\rho^\gamma, S_\mu^\delta) \cong V$ y el conjunto de clases de isomorfismo de $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ -módulos indescomponible tales que

$$(4.12) \quad 0 \longrightarrow S_\mu^\delta \longrightarrow M \longrightarrow S_\rho^\gamma \longrightarrow 0 \text{ es exacta}$$

está en correspondencia biyectiva con $\mathbb{P}_k(V)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $M = \mathbb{k}\{z, w\}$ como en (4.12), con $z \in M[\rho]$, $w \in M[\mu]$. Entonces existe $\{f_i\}_{i \in X}$ tal que

$$(4.13) \quad a_i z = \gamma_i z + f_i w.$$

Entonces (4.10) se sigue de (3.8) y esto implica

$$f_{i_h} = \begin{cases} (-\chi_j(g_j))^{\frac{h}{2}-1} \zeta_h(C)^{-1} f_i & \text{si } 2|h, \\ (-\chi_i(g_i))^{\frac{h-1}{2}} \zeta_h(C)^{-1} f_j & \text{si } 2 \nmid h, \end{cases}$$

ya que, para $\tau = \rho$ o $\tau = \mu$,

$$\begin{aligned} \tau(g_{i_{2l+1}}) &= \tau(g_{i_{2l}} g_{i_{2l-1}} g_{i_{2l}}^{-1}) = \tau(g_{i_{2l-1}}) = \dots = \tau(g_{i_1}) = \tau(g_j), \\ \tau(g_{i_{2l+2}}) &= \tau(g_{i_{2l+1}} g_{i_{2l}} g_{i_{2l+1}}^{-1}) = \tau(g_{i_{2l}}) = \dots = \tau(g_{i_2}) = \tau(g_i), \end{aligned}$$

y $\frac{\mu(g_k)}{\rho(g_k)} = \chi_k(g_k)$. Por lo tanto, si $(i, j) \in C$ y $n = n(C)$, (3.9) se satisface si y sólo si

$$\sum_{h=1}^n \eta_h(C) (f_{i_h} \delta_{i_{h+1}} + f_{i_{h+1}} \gamma_{i_h}) = 0, \forall C \in \mathcal{R}',$$

esto es, usando (4.8), (3.9) se satisface si y sólo si (4.11) se satisface.

Recíprocamente, si $\{f_i\}_{i \in X}$ cumple (4.10) y (4.11), entonces (4.13) junto con $a_i w = \delta_i w$ define un $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ -módulo que es una extensión de S_ρ^γ por S_μ^δ .

M es indescomponible si y sólo si $f_i \neq 0$ para algún $i \in X$. Asumamos que M es indescomponible y sea $M' = \mathbb{k}\{z', w'\}$ otro $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ -módulo indescomponible que quepa en (4.12), con $z' \in M'[\rho]$, $w' \in M'[\mu]$. Sea $\{g_i\}_{i \in X} \in V$ la solución correspondiente de (4.10) y (4.11). Asumamos que $\phi : M \rightarrow M'$ es un isomorfismo de $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ -módulos. En particular, ϕ es un G -isomorfismo y así existen $\sigma, \tau \in \mathbb{k}^*$ tales que $\phi(w) = \sigma w'$, $\phi(z) = \tau z'$. Pero entonces es fácil ver que σ, τ deben satisfacer $g_i = \sigma \tau^{-1} f_i$, $i \in X$. Esto es, $[f_i]_{i \in X} = [g_i]_{i \in X}$ en $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}(V)$. La recíproca es clara. $\square$

OBSERVACIÓN 4.6. Si X es indescomponible, entonces, salvo isomorfismo, existe a lo sumo un $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ -módulo indescomponible M como en el Lema. De hecho, si existe uno, sea $\{f_i\}_{i \in X} \in \mathbb{k}^X$ la correspondiente solución de (4.10) y (4.11). Entonces, si fijamos $j \in X$ y $t_i \in G$ es tal que $i = t_i \cdot j$, $i \in X$, entonces

$$(4.14) \quad (f_i)_{i \in X} = f_j \left(\chi_j(t_i) \frac{\mu(t_i)}{\rho(t_i)} \right)_{i \in X} \in \mathbb{k}^X,$$

y así M está unívocamente determinado. En este caso, la existencia de la solución es equivalente a (4.10) y

$$(4.11') \quad (\alpha_j \delta_j - \beta_j \gamma_j) \left(\frac{\mu(t_i)}{\rho(t_i)} + \chi_j(g_j) \right) f_j = 0;$$

si $(i, j) \in C$, $C \in \mathcal{R}'$, $i = t_i \cdot j$.

DEFINICIÓN 4.7. Sea X indescomponible y $\text{Ext}_{\mathcal{H}(\mathcal{Q})}^1(S_\rho^\gamma, S_\mu^\delta) \neq 0$. Denotamos al (único) $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ -módulo indescomponible correspondiente por $M_{\rho, \mu}^{\gamma, \delta}$. Si $\gamma = \delta = 0$, entonces (4.11') es tautológico. Fijamos: $M_{\rho, \mu} := M_{\rho, \mu}^{0, 0}$.

Asumamos que X es indescomponible y que $G = \langle \{g_i\}_{i \in X} \rangle$. Sea j un elemento fijo en X . Definimos $\ell : G \rightarrow \mathbb{Z}$, respectivamente $\psi : G \rightarrow \mathbb{k}^*$, como

$$\ell(t) = \min\{n : t = g_{i_1} \dots g_{i_n}, i_1, \dots, i_n \in X\},$$

respectivamente $\psi(t) = \chi_j(g_j)^{\ell(t)}$, $t \in G$. Notar que $\tau(g_i) = \tau(g_j)$, $\forall i \in X$, y entonces $\tau(t) = \tau(g_j)^{\ell(t)}$, para cualquier $\tau \in \widehat{G_{ab}}$, $t \in G$.

LEMA 4.8. Con las hipótesis de arriba, si $\text{Ext}_{\mathcal{H}(\mathcal{Q})}^1(S_\rho^\gamma, S_\mu^\delta) \neq 0$, entonces

$$(4.15) \quad \mu(s) = \psi(s) \rho(s), \quad \forall s \in G.$$

Por lo tanto ρ determina μ (y vice versa), y ψ es homomorfismo de grupos.

Recíprocamente, si (4.15) se cumple, podemos reemplazar (4.10) y (4.11) por

$$(4.10') \quad f_i \chi_j(g_j)^{\ell(t)} = \chi_i(t) f_{t \cdot i}, \quad i \in X, t \in G \text{ y}$$

$$(4.11'') \quad 0 = f_j(\alpha_j \delta_j - \beta_j \gamma_j) \left(\chi_j(g_j)^{\ell(t_i)-1} + 1 \right),$$

si $(i, j) \in C$, $C \in \mathcal{R}'$, $i = t_i \cdot j$.

DEMOSTRACIÓN. Tomando $i = j$ y $t = g_j$ en (4.10), y elevando a la $\ell(s)$ -ésima potencia, obtenemos (4.15). Lo que sigue es inmediato. $\square$

Ahora mostraremos que no existen módulos simples M de dimensión 2 tales que $M|_G$ es suma de dos (necesariamente diferentes) componentes de dimensión 1, siempre que se satisface lo siguiente:

$$(4.16) \quad \exists C \in \mathcal{R}' \quad \text{con} \quad n(C) > 1.$$

Notemos que si (4.16) no se cumple y $\text{gr } \mathcal{H}(\mathcal{Q}) = \mathfrak{B}(X, q) \# \mathbb{k}G$, entonces se sigue que $\dim \mathcal{H}(\mathcal{Q}) = \infty$, siempre que $|X| > 1$, ya que $\{(a_i a_j)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un conjunto linealmente independiente en $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$.

LEMA 4.9. *Asumamos que X es indescomponible, y que (4.7) y (4.16) se satisfacen. Sean $\rho, \mu \in \widehat{G_{ab}}$, y sea M un $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ -módulo tal que $M = M[\rho] \oplus M[\mu]$, $\dim M[\rho] = \dim M[\mu] = 1$. Entonces M no es simple.*

DEMOSTRACIÓN. Asumamos que existe M simple como en la hipótesis. Afirmamos primero que $\rho \neq \mu$ y que, si $z \in M[\rho]$, entonces $a_i z \in M[\mu]$. En efecto, sea $a_i z = u + w$ con $u \in M[\rho]$, $w \in M[\mu]$, entonces

$$H_t a_i z = \rho(t)u + \mu(t)w, \quad \chi_i(t) a_{t \cdot i} H_t z = \chi_i(t) \rho(t) a_{t \cdot i} z$$

y tomando $t = g_i$, obtenemos

$$\rho(g_i)u + \mu(g_i)w = \chi_i(g_i) \rho(g_i)(u + w) \stackrel{(4.7)}{=} -\rho(g_i)u - \rho(g_i)w.$$

Así $u = 0$; luego $w \neq 0$ pues M es simple. También,

$$(4.17) \quad \rho(g_i) = -\mu(g_i), \quad i \in X.$$

Siguiendo un argumento simétrico, $a_i(M[\mu]) = M[\rho]$.

Ahora, fijemos $0 \neq z \in M[\rho]$, $0 \neq w \in M[\mu]$; sea f_i , $i \in X$, tal que $a_i z = f_i w$. Entonces $(f_i)_{i \in X}$ satisface (4.10), por (3.8). Como X es indescomponible y M es simple, tenemos $f_i \neq 0$, $\forall i \in X$. Necesariamente tenemos

$$(4.18) \quad a_i w = p_i z, \quad \text{para} \quad p_i = f_i^{-1} \lambda_i (1 - \rho(g_i)^2).$$

Notemos que $p_i \neq 0$ o de otro modo $a_i w = 0$, $\forall i \in X$. Como en el caso de la familia $\{f_i\}$, la familia $\{p_i\}$ también satisface (4.10), con los roles de ρ y μ intercambiados.

Asumamos que existe $C \in \mathcal{R}'$, con $n(C) > 1$. Mostramos ahora que esto contradice la existencia de M . Sea $(i_2, i_1) = (i, j) \in C$, entonces

$$a_C z = \sum_{h=1}^{n(C)} \eta_h f_{i_h} a_{i_{h+1}} w = \sum_{h=1}^{n(C)} \eta_h f_{i_h} \frac{\lambda_{i_{h+1}}}{f_{i_{h+1}}} (1 - \rho(g_{i_{h+1}})^2) z.$$

Sea $t \in G$ tal que $i = t \cdot j$ y recordemos que $i_h = i_{h-1} \triangleright i_{h-2}$. Como $g_{s \cdot k} = g_s g_k g_s^{-1}$, entonces

$$\rho(g_{i_{h+1}})^2 = \rho(g_j)^2, \quad \forall h.$$

Ahora, por (3.5), $\lambda_{i_h} = \lambda_{i_{h-1} \triangleright i_{h-2}} = \chi_{i_{h-2}}(g_{i_{h-1}})^{-2} \lambda_{i_{h-2}}$, entonces

$$\lambda_{i_h} = \begin{cases} \zeta_h(C)^{-2} \chi_j(t)^{-2} \lambda_j & \text{si } 2|h, \\ \zeta_h(C)^{-2} \lambda_j & \text{si } 2|h+1. \end{cases}$$

Además, por (4.10), tenemos

$$(4.19) \quad f_{i_h} = \begin{cases} \zeta_h(C)^{-1} \chi_j(t)^{-1} \frac{\mu(t)}{\rho(t)} f_j & \text{si } 2|h, \\ \zeta_h(C)^{-1} f_j & \text{si } 2|h+1, \end{cases}$$

para cada $h = 1, \dots, n(C)$. Por lo tanto, tenemos que:

$$(4.20) \quad \eta_h(C) \lambda_{i_{h+1}} \frac{f_{i_h}}{f_{i_{h+1}}} = \begin{cases} \frac{\mu(t)}{\rho(t)} \chi_j(t)^{-1} \lambda_j & \text{si } 2|h, \\ \frac{\rho(t)}{\mu(t)} \chi_j(t)^{-1} \lambda_j & \text{si } 2|h+1. \end{cases}$$

Análogamente, si analizamos el elemento $a_C w$, obtenemos

$$(4.21) \quad \eta_h(C) \lambda_{i_{h+1}} \frac{p_{i_h}}{p_{i_{h+1}}} = \begin{cases} \frac{\rho(t)}{\mu(t)} \chi_j(t)^{-1} \lambda_j & \text{si } 2|h, \\ \frac{\mu(t)}{\rho(t)} \chi_j(t)^{-1} \lambda_j & \text{si } 2|h+1. \end{cases}$$

No obstante, notar que, si $h > 1$,

$$\begin{aligned} \eta_h(C) \lambda_{i_{h+1}} \frac{p_{i_h}}{p_{i_{h+1}}} &= \eta_h(C) \lambda_{i_{h+1}} \frac{\lambda_{i_h} (1 - \rho(g_{i_h})^2) f_{i_{h+1}}}{\lambda_{i_{h+1}} (1 - \rho(g_{i_{h+1}})^2) f_{i_h}} \\ &= -\eta_{h-1}(C) \chi_{i_{h-1}}(g_{i_h}) \lambda_{i_h} \frac{f_{i_{h+1}}}{f_{i_h}} \\ &\stackrel{(4.10)}{=} -\eta_{h-1}(C) \lambda_{i_h} \frac{f_{i_{h-1}}}{f_{i_h}} \frac{\mu(t)}{\rho(t)} \\ &\stackrel{(4.20)}{=} \begin{cases} -\frac{\mu(t)^2}{\rho(t)^2} \chi_j(t)^{-1} \lambda_j & \text{si } 2|h-1, \\ -\chi_j(t)^{-1} \lambda_j & \text{si } 2|h. \end{cases} \end{aligned}$$

Y de esta igualdad junto con (4.21), obtenemos

$$(4.22) \quad \rho(t) = -\mu(t), \quad \text{si } (i, j) \in C, \quad t \cdot j = i.$$

Pero, como $i \triangleright i = i$, tenemos que $\mu(g_i t) = -\rho(g_i t)$ y también

$$\mu(g_i t) = \mu(g_i) \mu(t) \stackrel{(4.17)}{=} -\rho(g_i) \mu(t) = \rho(g_i) \rho(t) = \rho(g_i t),$$

lo que es una contradicción. □

Asumamos que X es indescomponible. A continuación, describimos los módulos indescomponibles que son sumas de dos componentes isotípicas diferentes, siempre que que (4.7) y (4.16) se cumplan.

TEOREMA 4.10. *Sea $\rho \neq \mu \in \widehat{G_{ab}}$. Asumamos que X es indescomponible y que tanto (4.7) como (4.16) se satisfagan. Sea $M = M[\rho] \oplus M[\mu]$ un $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ -módulo, con $\dim M[\rho], \dim M[\mu] > 0$. Entonces M no es simple.*

Más aún, M es una suma directa de módulos de la forma $S_\rho^\gamma, S_\mu^\delta, M_{\rho,\mu}^{\gamma',\delta'}$ y $M_{\mu,\rho}^{\delta'',\gamma''}$ para varios $\gamma, \delta, \gamma', \delta', \gamma'', \delta''$.

DEMOSTRACIÓN. Tomemos $0 \neq z \in M[\rho]$. Como en la primera parte de la prueba del Lema 4.9, se sigue de (4.7) que $\rho \neq \mu$ y que, si $0 \neq z \in M[\rho]$, entonces $a_i z \in M[\mu]$. Ahora, $a_i w = a_i^2 z = \lambda_i(1 - \rho(g_i)^2)z$, y así el espacio $\mathbb{k}\{z, w\}$ es a_i -estable. Como X es indescomponible, se sigue que es un submódulo. Sea $K = \ker a_i$. Aquí vemos a a_i como un operador en $\text{End } M$. este subespacio es G -estable: si $u \in K$, $u = z + w$, con $z \in M[\rho]$, $w \in M[\mu]$, entonces $0 = a_i u = a_i z + a_i w \Rightarrow z, w \in K$, ya que $a_i w \in M[\rho]$, $a_i z \in M[\mu]$. Así $\rho(t)z = H_t z$ y $\mu(t)w = H_t w \in K$, $\forall t \in G$. Por lo tanto $G \cdot u \subset K$. Lo mismo se satisface para $I = \text{iga}_i$. Sea T un G -submódulo tal que $M = K \oplus T$ (recordemos que $\mathbb{k}G$ es semisimple). Sea

$$K = \ker a_i = K[\rho] \oplus K[\mu], \quad T = T[\rho] \oplus T[\mu], \quad I = \text{iga}_i = I[\rho] \oplus I[\mu].$$

Notemos que $K \neq 0$. En efecto, si $K = 0$, entonces el espacio $\mathbb{k}\{z, w\}$ sería un $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ -módulo simple de dimensión 2, lo que contradice el Lema 4.9. Así $K \neq 0$. Entonces $\gamma_i = 0$, $\forall i \in X$ y $a_i^2 \cdot M = 0$. Notemos que en este caso $I[\psi] \subseteq K[\psi]$, para $\psi = \rho$ o μ , y así tenemos $K[\psi] = I[\psi] \oplus J[\psi]$. Como G -módulos, tenemos

$$M|_G \cong \bigoplus_{\psi=\rho,\mu} M[\psi] = \bigoplus_{\psi=\rho,\mu} I[\psi] \oplus J[\psi] \oplus T[\psi],$$

y esto induce la siguiente descomposición de $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ -módulos:

$$M \cong J[\rho] \oplus J[\mu] \oplus (I[\rho] + T[\mu]) \oplus (I[\mu] + T[\rho]).$$

Sea $\psi = \rho$ o μ . Si $J[\psi] \neq 0$, entonces (3.11) se satisface para ψ , y $J[\psi]$ es una suma de $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ -módulos de dimensión 1, por la Proposición 4.4. Sea $\{w_1, \dots, w_k\}$ una base de $T[\mu]$. Entonces $\{a_i w_1, \dots, a_i w_k\}$ es una base de $I[\rho]$. En efecto, si $z \in I[\rho]$, $z = a_i w$, $w \in T[\mu]$, existen $\sigma_1, \dots, \sigma_k \in \mathbb{k}$ tal que $w = \sum_{j=1}^k \sigma_j w_j$ y entonces $z = \sum_{j=1}^k \sigma_j a_i w_j$. Si, por otro lado, $\{\sigma_j\}_{j=1}^k \in \mathbb{k}$ satisface $0 = \sum_{j=1}^k \sigma_j a_i w_j$ entonces $\sum_{j=1}^k \sigma_j w_j \in K[\mu]$, y como $K \cap T = 0$, $\sigma_j = 0 \forall j = 1, \dots, k$. Así $I[\rho] + T[\mu] = \bigoplus_{j=1}^k \langle w_j \rangle$ como $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ -módulos. Por el Lema 4.5, para cada $j = 1, \dots, k$ existen $\delta_j, \gamma_j \in \mathbb{k}^{*X}$ tales que $\langle w_j \rangle \cong M_{\mu,\rho}^{\delta_j, \gamma_j}$. Una afirmación similar se sigue para $I[\mu] + T[\rho]$. Por lo tanto, existen $m_\rho, m_\mu, m_{\rho,\mu}, m_{\mu,\rho} \in \mathbb{N}_0$, $\{\xi_j\}_{j=1}^{m_\rho}, \{\pi_j\}_{j=1}^{m_\mu}, \{\delta_j\}_{j=1}^{m_{\rho,\mu}}, \{\gamma_j\}_{j=1}^{m_{\rho,\mu}}, \{\sigma_j\}_{j=1}^{m_{\mu,\rho}}, \{\tau_j\}_{j=1}^{m_{\mu,\rho}} \in \mathbb{k}^X$ tales que

$$M \cong \bigoplus_{j=1}^{m_\rho} S_\rho^{\xi_j} \oplus \bigoplus_{j=1}^{m_\mu} S_\rho^{\pi_j} \oplus \bigoplus_{j=1}^{m_{\rho,\mu}} M_{\mu,\rho}^{\delta_j, \gamma_j} \oplus \bigoplus_{j=1}^{m_{\mu,\rho}} M_{\mu,\rho}^{\sigma_j, \tau_j},$$

donde m_ρ (respectivamente m_μ) es no nulo sólo si (3.11) se satisface para ρ (respectivamente μ), ξ_j, π_j satisfacen (4.3) y (4.4) para ρ, μ respectivamente. Por otro lado, $m_{\rho, \mu} \neq 0$ sólo si (4.10) se satisface para ρ, μ y δ_j, γ_j satisface (4.11). Similarmente para $m_{\mu, \rho}, \sigma_j, \tau_j$. $\square$

4.1.3. El caso $G = \mathbb{S}_n, n \geq 3$.

Recordemos que los ql-datos:

- $\mathcal{Q}_n^{-1}[t] = (\mathbb{S}_n, \mathcal{O}_2^n, -1, \cdot, \iota, \{0, \Lambda, \Gamma\}), n \geq 4$;
- $\mathcal{Q}_n^X[\lambda] = (\mathbb{S}_n, \mathcal{O}_2^n, \chi, \cdot, \iota, \{0, 0, \lambda\}), n \geq 4$;
- $\mathcal{Q}_3^{-1}[\lambda] = (\mathbb{S}_3, \mathcal{O}_2^3, -1, \cdot, \iota, \{0, \lambda\})$;

definen álgebras de Hopf punteadas sobre $\mathbb{S}_n$, para $n \in \mathbb{N}$ según corresponda, ver Capítulo 4, [AG2, GG].

OBSERVACIÓN 4.11. Notar que los racks $\mathcal{O}_2^n, n \geq 3$ son indescomponibles y que (4.7) es satisfecha por ambos cociclos. En este caso, $\widehat{G}_{ab} = \{\epsilon, \text{sgn}\}$, donde ϵ , respectivamente sgn , denotan las representaciones trivial y signo respectivamente. En cualquier caso, (4.5) se satisface. Tengamos en cuenta también que $\mathbb{S}_n = \langle \mathcal{O}_2^n \rangle$. En este caso, la función $\ell : G \rightarrow \mathbb{Z}$ es bien conocida y $\psi : G \rightarrow \{\pm 1\} \subset \mathbb{k}^*$ coincide con la función signo, por (4.7). Más aún, (4.16) se satisface en todo estos ql-datos.

PROPOSICIÓN 4.12. *Sea $A = \mathcal{H}(\mathcal{Q}_n^{-1}[t])$ o $\mathcal{H}(\mathcal{Q}_3^{-1}[\lambda])$. Sea M un A -módulo tal que $M|_{\mathbb{S}_n} = M[\epsilon] \oplus M[\text{sgn}]$, $\dim M[\epsilon] = p$, $\dim M[\text{sgn}] = q$. Entonces*

1. *M es simple si y sólo si $M = S_\epsilon$ o $M = S_{\text{sgn}}$.*
2. *M es indescomponible si y sólo si M es simple o $p = q = 1$. En este último caso, existen dos módulos indescomponibles no isomorfos, denotados por $M_{\epsilon, \text{sgn}}$ y $M_{\text{sgn}, \epsilon}$.*

DEMOSTRACIÓN. Se sigue por las Proposiciones 4.1 y 4.4, y por el Lema 4.9 que S_ϵ y S_{sgn} son los únicos dos módulos simples. La segunda afirmación se sigue del Teorema 4.10 y del Lema 4.8. $\square$

PROPOSICIÓN 4.13. *Sea $n \geq 4$. Sea M un $\mathcal{H}(\mathcal{Q}_n^X[\lambda])$ -módulo tal que $M|_{\mathbb{S}_n} = M[\epsilon] \oplus M[\text{sgn}]$, con $\dim M[\epsilon] = p$, $\dim M[\text{sgn}] = q$, $p, q \geq 0$. Entonces M es indescomponible si y sólo si es simple si y sólo si $M = S_\epsilon$ o $M = S_{\text{sgn}}$.*

DEMOSTRACIÓN. La determinación de los módulos simples se sigue de las Proposiciones 4.1 y 4.4 y del Lema 4.9. Por el Lema 4.8 no existen extensiones entre los módulos de dimensión 1. Luego, la Proposición se sigue del Teorema 4.10. $\square$

4.2. Módulos simples sobre bosonizaciones

Sea G un grupo finito. Sea X un rack, q un 2-cociclo y asumamos que existe una realización de YD de (X, q) sobre G . Denotamos por $\mathfrak{B}(X, q)$ al álgebra de Nichols correspondiente.

Consideremos la bosonización $\mathcal{A} = \mathfrak{B}(X, q) \# \mathbb{k}G$. En lo que sigue asumiremos que $\mathfrak{B}(X, q)$, y así $\mathcal{A}$, es de dimensión finita.

PROPOSICIÓN 4.14. *Los módulos simples para $\mathcal{A}$ están en correspondencia biyectiva con los módulos simples sobre G : dada $\rho \in \widehat{G}$, S_ρ es el $\mathcal{A}$ -módulo tal que*

$$S_\rho \cong W_\rho \text{ como } G\text{-módulos, y } a_i S_\rho = 0, \quad \forall i \in X.$$

Esta correspondencia preserva productos tensoriales y duales.

DEMOSTRACIÓN. Con la acción definida arriba, es claro que para cada $\rho \in \widehat{G}$, S_ρ es un $\mathcal{A}$ -módulo. Si $\mathfrak{B}(X, q)^+$ denota el ideal maximal graduado de $\mathfrak{B}(X, q)$, entonces el radical de Jacobson $J = J(\mathcal{A})$ está dado por $J = \mathfrak{B}(X, q)^+ \sharp \mathbb{k}G$. En efecto J es un ideal nilpotente maximal (ya que $\mathcal{A}$ es graduada y de dimensión finita) y $\mathcal{A}/J \cong \mathbb{k}G$ es semisimple. Esto también muestra que la lista $\{S_\rho : \rho \in \widehat{G}\}$ es una lista exhaustiva de $\mathfrak{B}(X, q)$ -módulos, que son claramente no isomorfos dos a dos. La última afirmación se sigue ya que $a_i (S_\rho \otimes S_\mu) = 0$ y $\mathcal{S}(a_i) = -H_{g_i}^{-1} a_i$. $\square$

4.3. Cubiertas proyectivas de módulos sobre levantamientos cuadráticos

Fijemos G un grupo finito y H un álgebra de Hopf punteada sobre G . Sea $\{e_i\}_{i=1}^N$ un conjunto completo de idempotentes ortogonales primitivos para G y sea $I_j = He_j$, para $1 \leq j \leq N$.

LEMA 4.15. *$I_j = \text{Ind}_{\mathbb{k}G}^H \mathbb{k}Ge_j$. En particular, si $\mathbb{k}Ge_j \cong \mathbb{k}Ge_h$ como G -módulos, entonces $I_j \cong I_h$ como H -módulos.*

Más aún, $H \cong \bigoplus_{\rho \in \widehat{G}} I_\rho^{\dim \rho}$ como H -módulos, donde $I_\rho = \text{Ind}_{\mathbb{k}G}^H W_\rho$, y así I_ρ es un H -módulo proyectivo.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\psi : \text{Ind}_{\mathbb{k}G}^H \mathbb{k}Ge_j \rightarrow H$ la composición del isomorfismo canónico $H \otimes_{\mathbb{k}G} \mathbb{k}G \rightarrow H$ con la inclusión $H \otimes_{\mathbb{k}G} \mathbb{k}Ge_j \rightarrow H \otimes_{\mathbb{k}G} \mathbb{k}G$. Se sigue que $\text{Im } \psi = I_j$. Entonces $I_j \cong \text{Ind}_{\mathbb{k}G}^H \mathbb{k}Ge_j$ y I_j no depende del idempotente e_j sino el módulo simple $W_\rho = \mathbb{k}Ge_j$. Por lo tanto, como $\mathbb{k}G = \bigoplus_{i=1}^N \mathbb{k}Ge_i$, tenemos que $H \cong \bigoplus_{\rho \in \widehat{G}} I_\rho^{\dim \rho}$. $\square$

Sea $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la filtración corradical de H , ver 1.22 en la página 8,

$$\text{gr}^n H = H_n / H_{n-1}, \quad \text{gr } H = \bigoplus_{n \geq 0} \text{gr}^n H.$$

Sea $R \in {}^G_G \mathcal{YD}$ tal que $\text{gr } H \cong R \sharp \mathbb{k}G$. Sea $\pi_n : H_n \rightarrow \text{gr}^n H$ la proyección canónica. Como cada H_n es $\text{ad}(G)$ -estable, se sigue que π_n es un morfismo de G -módulos. Por ende existe una sección $\text{gr}^n H \rightarrow H_n$ y $H_n \cong \text{gr}^n H \oplus H_{n-1}$ como G -módulos. Por un argumento inductivo tenemos que

$$H_n \cong \text{gr}^n H \oplus \text{gr}^{n-1} H \oplus \cdots \oplus \text{gr}^0 H.$$

Y así se sigue que $H \cong \text{gr } H$ como G -módulos. Más aún, se sigue que, si consideramos la acción adjunta en $\mathbb{k}G$, $\text{gr } H \cong R \otimes \mathbb{k}G$ como G -módulos, vía la acción diagonal. Así, $H \cong R \otimes \mathbb{k}G$ como G -módulos.

PROPOSICIÓN 4.16. *Sea $\text{gr } H = R \sharp \mathbb{k}G$.*

1. $I_\epsilon \cong R$ como G -módulos.

2. Asumamos que existe un H -módulo simple M tal que $M|_{\mathbb{k}G}$ es un G -módulo simple W_ρ . Entonces $P(M)$ es un sumando directo de I_ρ . En particular, si I_ρ es indescomponible, entonces $I_\rho \cong P(M)$.
3. Si $H = R\sharp\mathbb{k}G$, I_ρ es la cubierta proyectiva de S_ρ , ver Proposición 4.14.

DEMOSTRACIÓN. Sea W_ϵ el G -módulo trivial. Como $I_\epsilon = \text{Ind}_{\mathbb{k}G}^H W_\epsilon$ y $H \cong R \otimes \mathbb{k}G$, tenemos

$$(I_\epsilon)|_G \cong ((R \otimes \mathbb{k}G) \otimes_{\mathbb{k}G} W_\epsilon)|_G \cong R|_G.$$

Y así se sigue el primer ítem. Sea ahora M un H -módulo tal que $M|_{\mathbb{k}G} = W_\rho$. Si $(P(M), f)$ es la cubierta proyectiva de M , tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} & & I_\rho \\ & \swarrow \tau & \downarrow \pi \\ P(M) & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

donde $\pi : I_\rho \rightarrow M$ es la factorización de la acción $\cdot : H \otimes M \rightarrow M$ a través de $H \otimes M \twoheadrightarrow I_\rho = H \otimes_{\mathbb{k}G} W_\rho$. Como $f(\tau(I_\rho)) = \pi(I_\rho) = M$ y f es esencial, tenemos un epimorfismo $I_\rho \twoheadrightarrow P(M)$ y $P(M)$ es un sumando directo de I_ρ . Así $I_\rho \cong P(M)$, si I_ρ es indescomponible.

Finalmente, asumamos que $H = R\sharp\mathbb{k}G$. Si $P(S_\rho)$ es la cubierta proyectiva de S_ρ , debemos tener $\dim P(S_\rho) \leq \dim I_\rho = \dim R \dim W_\rho$. Pero vemos que esto es en efecto una igualdad de las fórmulas:

$$\begin{aligned} \dim H &= \dim R \sum_{\rho \in \widehat{G}} \dim W_\rho^2 = \sum_{\rho \in \widehat{G}} (\dim R \dim W_\rho) \dim W_\rho, \\ \dim H &= \sum_{\rho \in \widehat{G}} \dim P(S_\rho) \dim S_\rho = \sum_{\rho \in \widehat{G}} \dim P(S_\rho) \dim W_\rho. \end{aligned}$$

□

4.4. Representaciones de álgebras de Hopf puntuadas sobre $\mathbb{S}_3$

En esta Sección investigamos las representaciones de las álgebras de Hopf puntuadas de dimensión finita sobre $\mathbb{S}_3$. Describiremos las álgebras $\mathcal{A}_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{k}$. Estas álgebras fueron introducidas en [AG2]. Explícitamente, están generadas por elementos H_t , a_i , $t, i \in \mathcal{O}_2^3$; con relaciones

$$\begin{aligned} H_t H_s H_t &= H_s H_t H_s, \quad H_t^2 = 1, & s \neq t \in \mathcal{O}_2^3; \\ H_t a_i &= -a_{t\sigma i} H_t, & t, i \in \mathcal{O}_2^3; \\ a_{12}^2 &= 0, \\ a_{12} a_{23} + a_{23} a_{13} + a_{13} a_{12} &= \lambda(1 - H_{12} H_{23}). \end{aligned}$$

$\mathcal{A}_\lambda$ es un álgebra de Hopf de dimensión 72. Si H es un álgebra de Hopf puntuada de dimensión finita con $G(H) \cong \mathbb{S}_3$, entonces ya $H \cong \mathbb{k}\mathbb{S}_3$, $H \cong \mathcal{A}_0$ o $H \cong \mathcal{A}_1$ [AHS, Theorem 4.5], junto con [MS, AG, AZ].

Determinaremos todos los módulos simples sobre $\mathcal{A}_0$ y $\mathcal{A}_1$, junto con sus cubiertas proyectivas y sus reglas de fusión. Mostraremos también que estas

álgebras no son de tipo de representación finito y clasificaremos sus módulos indescomponibles que satisfacen ciertas restricciones.

OBSERVACIÓN 4.17. Notemos que para describir a un $\mathcal{A}_\lambda$ -módulo soportado en un G -módulo dado, basta describir la acción de a_{12} , ya que $a_{13}, a_{23} \in \text{ad}(G)(a_{12})$.

4.4.1. Teoría de representaciones de $\mathcal{A}_0$.

PROPOSICIÓN 4.18. *Existen exactamente tres $\mathcal{A}_0$ -módulos simples. Éstos son las extensiones S_ϵ , S_{sgn} y S_{st} de los $\mathbb{K}\mathbb{S}_3$ -módulos simples.*

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de la Proposición 4.14. $\square$

4.4.1.1. Algunos $\mathcal{A}_0$ -módulos indescomponibles.

Fijemos los $\mathbb{K}\mathbb{S}_3$ -módulos $\mathbb{K}\{x\} = W_\epsilon$, $\mathbb{K}\{y\} = W_{\text{sgn}}$, $\mathbb{K}\{v, w\} = W_{\text{st}}$.

LEMA 4.19. *Existen exactamente cuatro $\mathcal{A}_0$ -módulos indescomponibles no simples no isomorfos de dimensión 3:*

- (i) $M_{\text{st},\epsilon} = \mathbb{K}\{x, v, w\}$, con $a_{12} \cdot v = x$, $a_{12} \cdot x = 0$;
- (ii) $M_{\text{st},\text{sgn}} = \mathbb{K}\{y, v, w\}$, con $a_{12} \cdot v = y$, $a_{12} \cdot y = 0$;
- (iii) $M_{\epsilon,\text{st}} = \mathbb{K}\{x, v, w\}$, con $a_{12} \cdot x = v - w$, $a_{12} \cdot v = 0$;
- (iv) $M_{\text{sgn},\text{st}} = \mathbb{K}\{y, v, w\}$, con $a_{12} \cdot y = v + w$, $a_{12} \cdot v = 0$.

En particular,

$$\dim \text{Ext}_{\mathcal{A}_0}^1(S_{\text{st}}, S_\sigma) = \dim \text{Ext}_{\mathcal{A}_0}^1(S_\sigma, S_{\text{st}}) = 1, \quad \sigma \in \{\epsilon, \text{sgn}\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 4.12, sabemos que tal $\mathcal{A}_0$ -módulo M debe contener una copia de W_{st} . Así $M|_{\mathbb{S}_3} \cong W_\epsilon \oplus W_{\text{st}}$ o $M|_{\mathbb{S}_3} \cong W_{\text{sgn}} \oplus W_{\text{st}}$. El lema se sigue ahora por una cuenta directa. $\square$

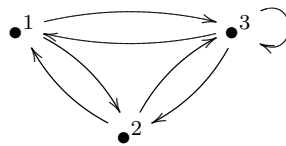
PROPOSICIÓN 4.20. *Los módulos indescomponibles no isomorfos que son extensiones de S_{st} por sí mismo están indexados por $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$. En particular, se sigue que $\dim \text{Ext}_{\mathcal{A}_0}^1(S_{\text{st}}, S_{\text{st}}) = 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $\{v_1, v_2, w_1, w_2\}$ es una base de un tal módulo, y tenemos que $\{v_2, w_2\}|_{\mathbb{S}_3} = W_{\text{st}}$, $\{v_1, w_1\} \cong M_{\text{st}}$, entonces una condición necesaria es que $a_{12}v_2 = av_1 + bw_1$, $a \neq 0$ o $b \neq 0$. Es fácil ver que esta fórmula define de hecho $\mathcal{A}_0$ -módulo indescomponible $M_{(a,b)}$ para cada (a, b) y que dos de estos módulos, $M_{(a,b)}$ y $M_{(a',b')}$, son isomorfos si y sólo si $\exists \gamma \neq 0$ tal que $(a, b) = \gamma(a', b')$. $\square$

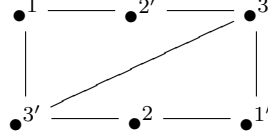
4.4.1.2. Tipo de representación de $\mathcal{A}_0$.

PROPOSICIÓN 4.21. *$\mathcal{A}_0$ es de tipo de representación salvaje.*

DEMOSTRACIÓN. De los Lemas 4.8 y 4.19 junto con la Proposición 4.20, vemos que el Ext-Carcaj de $\mathcal{A}_0$ es



donde hemos ordenado los módulos simples como: $\{S_e, S_{\text{sgn}}, S_{\text{st}}\} = \{1, 2, 3\}$. Así, el diagrama de separación de $\mathcal{A}_0$ es



lo que implica que $\mathcal{A}_0$ es salvaje. $\square$

4.4.2. Teoría de representaciones de $\mathcal{A}_1$.

Investigamos ahora los módulos simples de $\mathcal{A}_1$, sus reglas de fusión y cubiertas proyectivas, y también el tipo de representación de este álgebra.

4.4.2.1. Módulos que son suma de representaciones de dimensión 2.

Nos concentramos primero en aquellos módulos sobre $\mathcal{A}_1$ que son sumas de representaciones estándar de $\mathbb{k}\mathbb{S}_3$.

LEMA 4.22. *Sea $M_{\text{st}} = \mathbb{k}\{v, w\}$. Entonces, las siguientes fórmulas definen cuatro $\mathcal{A}_1$ -módulos no isomorfos soportados en M_{st} :*

- (i) $a_{12}v = i(v - w), \quad a_{12}w = i(v - w);$
- (ii) $a_{12}v = -i(v - w), \quad a_{12}w = -i(v - w);$
- (iii) $a_{12}v = \frac{i}{3}(v + w), \quad a_{12}w = -\frac{i}{3}(v + w);$
- (iv) $a_{12}v = -\frac{i}{3}(v + w), \quad a_{12}w = \frac{i}{3}(v + w).$

Los denotaremos por $S_{\text{st}}(i), S_{\text{st}}(-i), S_{\text{st}}(\frac{i}{3}), S_{\text{st}}(-\frac{i}{3})$, respectivamente. Son todos módulos simples.

DEMOSTRACIÓN. Inmediata. $\square$

PROPOSICIÓN 4.23. *Sea $p \in \mathbb{N}$ y sea M un $\mathcal{A}_1$ -módulo tal que $M = M[\text{st}]$, $\dim M = 2p$. Entonces M es completamente reducible.*

M es simple si y sólo si $p = 1$. En este caso, es isomorfo a uno de los módulos $S_{\text{st}}(i), S_{\text{st}}(-i), S_{\text{st}}(\frac{i}{3}), S_{\text{st}}(-\frac{i}{3})$.

DEMOSTRACIÓN. Sean $\{v_i, w_i\}_{i=1}^p$ copias de la base canónica de W_{st} tal que $\{v_i, w_i\}_{i=1}^p$ es una base lineal de M . Sea $v = (v_1, \dots, v_p)$, $w = (w_1, \dots, w_p)$. Ahora, deben existir matrices $\alpha, \beta \in \mathbb{k}^{p \times p}$ tales que $a_{12} \cdot v = \alpha v + \beta w$ y así $a_{12} \cdot w = -\beta v - \alpha w$, actuando con H_{12} . Actuando con el resto de los elementos H_t obtenemos:

$$\begin{aligned} a_{13} \cdot v &= -(\alpha + \beta)v + 2(\alpha + \beta)w, & a_{13} \cdot w &= -\beta v + (\alpha + \beta)w, \\ a_{23} \cdot v &= -(\alpha + \beta)v + \beta w & a_{23} \cdot w &= -2(\alpha + \beta)v + (\alpha + \beta)w. \end{aligned}$$

Ahora,

$$0 = a_{12}^2 v = \alpha a_{12} \cdot v + \beta a_{12} \cdot w = (\alpha^2 - \beta^2)v + (\alpha\beta - \beta\alpha)w,$$

y esto implica que $\alpha^2 = \beta^2$, $\alpha\beta = \beta\alpha$. Luego,

$$(a_{12}a_{13} + a_{13}a_{23} + a_{23}a_{12}) \cdot v = (-5\alpha^2 - 4\alpha\beta)(v + w),$$

$$\text{mientras } (1 - H_{12}H_{13}) \cdot v = v + w,$$

y así $-5\alpha^2 - 4\alpha\beta = \text{id}$.

Ahora, tenemos que, en particular, $-5\alpha - 4\beta = \alpha^{-1}$ y por lo tanto $\beta = -\frac{5}{4}\alpha - \frac{1}{4}\alpha^{-1}$. Así,

$$\alpha^2 = \beta^2 = \frac{1}{16}(5\alpha + \alpha^{-1})^2 = \frac{1}{16}(25\alpha^2 + \alpha^{-2} + 10\text{id}),$$

de donde se sigue $(\alpha^2)^{-1} = -9\alpha^2 - 10\text{id}$ y $\text{id} = -9\alpha^4 - 10\alpha^2$, lo que es equivalente a

$$(4.23) \quad (\alpha^2 + \frac{5}{9}\text{id})^2 = \frac{16}{81}\text{id}.$$

Esto nos da, en particular, que si $\theta \in \mathbb{k}$ es un autovalor de α , entonces $\theta \in L(\alpha) := \{\pm i, \pm \frac{i}{3}\}$. Ahora, sea $\alpha \in \mathbb{k}^{p \times p}$ una matriz que satisface (4.23). Un simple análisis de las posibles formas de Jordan $J(\alpha)$ de α da $J(\alpha) = \text{diag}(\theta_1, \dots, \theta_p)$, para algún $\theta_i \in L(\alpha)$, $i = 1, \dots, p$. Si $p > 1$, obtenemos que existe una base de M en la cual α (y consecuentemente β) es una matriz diagonal, y por lo tanto M es completamente reducible.

Por otro lado, si $p = 1$, $\alpha \in \{\pm i, \pm \frac{i}{3}\}$ y $\beta = \pm\alpha$ dan las estructuras de módulo definidas en el Lema 4.22. $\square$

4.4.2.2. Clasificación de módulos simples sobre $\mathcal{A}_1$. Ahora, presentamos la clasificación de todo los $\mathcal{A}_1$ -módulos simples.

TEOREMA 4.24. *Sea M un $\mathcal{A}_1$ -módulo simple. Entonces M es isomorfo a uno y sólo uno de los siguientes:*

- S_ϵ ;
- S_{sgn} ;
- $S_{\text{st}}(i)$, $S_{\text{st}}(-i)$, $S_{\text{st}}(\frac{i}{3})$ o $S_{\text{st}}(-\frac{i}{3})$.

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que los módulos listados son simples. En vista de las Proposiciones 4.12 y 4.23, nos resta analizar el caso en que

$$M|_{\mathbb{S}_3} = M[\epsilon] \oplus M[\text{sgn}] \oplus M[\text{st}],$$

con $\dim M[\epsilon] = n$, $\dim M[\text{sgn}] = m$, $\dim M[\text{st}] = p$, $n + m, p > 0$. Sea $\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, v_1, \dots, v_p\}$ una base de M tal que

$$\begin{aligned} \mathbb{k}\{x_i\} &\cong W_\epsilon, & i &= 1, \dots, n, \\ \mathbb{k}\{y_j\} &\cong W_{\text{sgn}}, & j &= 1, \dots, m, \\ \mathbb{k}\{v_k, w_k\} &\cong W_{\text{st}}, & k &= 1, \dots, p. \end{aligned}$$

Usando la acción de H_{12} , vemos que existen matrices $\alpha \in \mathbb{k}^{n \times m}$, $\beta \in \mathbb{k}^{n \times p}$, $\gamma \in \mathbb{k}^{m \times n}$, $\eta \in \mathbb{k}^{m \times p}$, $a \in \mathbb{k}^{p \times n}$, $b \in \mathbb{k}^{p \times m}$ y c y d ambas en $\mathbb{k}^{p \times p}$, tales que, si $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_m)$, $v = (v_1, \dots, v_p)$, $w = (w_1, \dots, w_p)$, la acción de a_{12} está determinada por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} a_{12} \cdot x &= \alpha y + \beta(v - w), & a_{12} \cdot y &= \gamma x + \eta(v + w) \\ a_{12} \cdot v &= ax + by + cv + dw, & a_{12} \cdot w &= -ax + by - dv - cw. \end{aligned}$$

Deducimos como en la Proposición 4.23 la acción de cada a_σ :

$$\begin{aligned} a_{13} \cdot x &= \alpha y - \beta v, & a_{13} \cdot v &= -2ax - (c+d)v + 2(c+d)w, \\ a_{13} \cdot y &= \gamma x + \eta(v-2w) & a_{13} \cdot w &= -ax - by - dv + (c+d)w, \\ a_{23} \cdot x &= \alpha y + \beta w, & a_{23} \cdot v &= ax - by - (c+d)v + dw, \\ a_{23} \cdot y &= \gamma x + \eta(w-2v), & a_{23} \cdot w &= 2ax - 2(c+d)v + (c+d)w. \end{aligned}$$

Recordemos que basta encontrar un subespacio estable bajo la acción de a_{12} y los elementos H_t , por la Observación 4.17. Ahora,

$$\begin{aligned} 0 &= a_{12}^2 x = (\alpha\gamma + 2\beta a)x + (\alpha\eta + \beta(c+d))(v+w); \\ 0 &= a_{12}^2 y = (\gamma\alpha + 2\eta b)y + (\gamma\beta + \eta(c-d))(v-w); \\ 0 &= a_{12}^2 v = (b\gamma + (c-d)a)x + (a\alpha + (c+d)b)y \\ &\quad + (a\beta + b\eta + c^2 - d^2)v + (-a\beta + b\eta + cd - dc)w; \\ 0 &= (a_{12}a_{13} + a_{13}a_{23} + a_{23}a_{12}) \cdot x = (3\alpha\gamma - 3\beta a)x - 3\beta by; \\ 0 &= (a_{12}a_{13} + a_{13}a_{23} + a_{23}a_{12}) \cdot y = 9\eta ax + 3(\gamma\alpha - \eta b)y; \\ v+w &= (a_{12}a_{13} + a_{13}a_{23} + a_{23}a_{12}) \cdot v \\ &= (-3a\beta - 3b\eta - c^2 - 4d^2 - 2dc - 2cd)v \\ &\quad + (3a\beta + 3b\eta - 4c^2 - d^2 - 2dc - 2cd)w. \end{aligned}$$

Entonces tenemos las siguientes igualdades:

$$(4.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = \gamma\alpha = \alpha\gamma = \beta a = \beta b = \eta a = \eta b, \\ \beta(c+d) + \alpha\eta = 0 = \eta(c-d) + \gamma\beta, \\ b\gamma + (c-d)a = 0 = a\alpha + (c+d)b, \\ d^2 - c^2 = a\beta + b\eta, \quad cd - dc = a\beta - b\eta \\ 3a\beta + 3b\eta = -c^2 - 4d^2 - 2dc - 2cd - \text{id} \\ 3a\beta + 3b\eta = 4c^2 + d^2 + 2dc + 2cd + \text{id}. \end{array} \right.$$

De las últimas dos ecuaciones:

$$c^2 - d^2 = 2(a\beta + b\eta), \quad 5(c^2 + d^2) + 4(dc + cd) = -2 \text{id},$$

y así $a\beta + b\eta = 0$, $c^2 = d^2$. Notar que la matriz de a_{12} en la base elegida es:

$$[a_{12}] = \begin{pmatrix} 0 & {}^t\gamma & {}^t a & -{}^t a \\ {}^t\alpha & 0 & {}^t b & {}^t b \\ {}^t\beta & {}^t\eta & {}^t c & -{}^t d \\ -{}^t\beta & {}^t\eta & {}^t d & -{}^t c \end{pmatrix}.$$

Ahora hacemos la siguiente

AFIRMACIÓN 4.4.1. *Si α o γ tienen una fila nula, entonces M no es simple.*

En efecto, asumamos que $(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n}) = 0$. Tenemos

$$a_{12} \cdot x_1 = \sum_j \beta_{1j}(v_j - w_j),$$

si esto es cero, entonces $\langle x_1 \rangle \cong S_\epsilon \subset M$ y M no es simple. Si no, sea

$$\bar{v}_1 = \sum_j \beta_{1j} v_j, \quad \bar{w}_1 = \sum_j \beta_{1j} w_j.$$

Así, $a_{12} \cdot x_1 = \bar{v}_1 - \bar{w}_1$ y como $0 = a_{12}^2 x_1$ tenemos que $a_{12} \bar{v}_1 = a_{12} \bar{w}_1$. Pero, más aún, también tenemos que

$$a_{12} \bar{v}_1 = \sum_i (\beta a)_{1i} x_i + \sum_k (\beta(c+d))_{1k} (v_k + w_k) = 0,$$

ya que $\beta a = 0$ y $(\beta(c+d))_{1k} = -(\alpha\eta)_{1k} = -\sum_l \alpha_{1l} \eta_{lk} = 0$. Entonces $\bar{v}_1 = 0$, $S_\epsilon \subset M$ y M no es simple.

La afirmación cuando una fila de γ es cero se sigue análogamente, o simplemente tensoreando con la representación S_{sgn} , ya que intercambia los roles de α y γ .

Entonces vemos que, para que M sea simple, necesariamente debemos tener ${}^t\alpha$, ${}^t\gamma$ inyectivas. Pero $0 = {}^t(\alpha\gamma) = {}^t\gamma {}^t\alpha \Rightarrow \alpha = 0$. Así M no puede ser simple si $n, m > 0$. Por lo tanto, nos quedan los casos (equivalentes, vía tensorear con S_{sgn})

$$\begin{aligned} M_{|\mathbb{S}_3} &= M[\epsilon] \oplus M[\text{st}], & \text{con } \dim M[\epsilon] &= n, \quad \dim M[\text{st}] = p, \quad n, p > 0; \\ M_{|\mathbb{S}_3} &= M[\text{sgn}] \oplus M[\text{st}], & \text{con } \dim M[\text{sgn}] &= m, \quad \dim M[\text{st}] = p, \quad m, p > 0. \end{aligned}$$

Asumamos que estamos en el primer caso. Así, las ecuaciones de arriba devienen en:

$$(4.25) \quad \begin{cases} a\beta = \beta a = 0, & \beta(c+d) = 0, & (c-d)a = 0, \\ d^2 = c^2, & cd = dc, & c(-5c-4d) = \text{id}. \end{cases}$$

Ahora, en particular, si ${}^t\beta$ es inyectiva, tenemos ${}^t a = 0$ y así $\mathcal{A}_1 \cdot M[\text{st}] \subsetneq M[\text{st}]$. Pero si ${}^t\beta$ no es inyectiva, podemos encontrar una combinación lineal no trivial x de los elementos $\{x_i\}_{i=1}^n$ que harían de $S_\epsilon = \langle x \rangle$ un $\mathcal{A}_1$ -submódulo de M . $\square$

4.4.2.3. Algunos $\mathcal{A}_1$ -módulos indecomponibles.

Empezamos estudiando módulos indecomponibles 3-dimensionales. Como dicho en el Lema 4.19, se sigue que para un tal módulo M , se satisface ya que $M_{|\mathbb{S}_3} \cong W_\epsilon \oplus W_{\text{st}}$ o que $M_{|\mathbb{S}_3} \cong W_{\text{sgn}} \oplus W_{\text{st}}$. Tomemos x, y, v, w tales que $\langle x \rangle_{|\mathbb{S}_3} = W_\epsilon$, $\langle y \rangle_{|\mathbb{S}_3} = W_{\text{sgn}}$, $\langle v, w \rangle_{|\mathbb{S}_3} = W_{\text{st}}$.

LEMA 4.25. *Existen exactamente ocho $\mathcal{A}_1$ -módulos indecomponibles no simples, no isomorfos de dimensión 3:*

- (i) $M_{\text{st},\epsilon}[\pm \frac{i}{3}] = \mathbb{k}\{x, v, w\}$, $a_{12} \cdot v = \pm \frac{i}{3}(v+w) + x$, $a_{12} \cdot x = 0$;
- (ii) $M_{\text{st},\text{sgn}}[\pm i] = \mathbb{k}\{y, v, w\}$, $a_{12} \cdot v = \pm i(v-w) + y$, $a_{12} \cdot y = 0$;
- (iii) $M_{\epsilon,\text{st}}[\pm i] = \mathbb{k}\{x, v, w\}$, $a_{12} \cdot v = \pm i(v-w)$, $a_{12} \cdot x = v-w$;
- (iv) $M_{\text{sgn},\text{st}}[\pm \frac{i}{3}] = \mathbb{k}\{y, v, w\}$, $a_{12} \cdot v = \pm \frac{i}{3}(v+w)$, $a_{12} \cdot y = v+w$.

DEMOSTRACIÓN. Es inmediato chequear que los objetos listados con en efecto $\mathcal{A}_1$ -módulos y que no son isomorfos entre sí. Ahora, asumamos que $M_{|\mathbb{S}_3} = W_\epsilon \oplus W_{\text{st}}$, siendo el otro caso análogo. Si M no es simple, entonces

existe $N \subset M$ y necesariamente $N|_{\mathbb{S}_3} = W_{\text{st}}$ o $N|_{\mathbb{S}_3} = W_\epsilon$. Entonces, el lema se sigue especializando las ecuaciones en (4.24) a este caso. $\square$

PROPOSICIÓN 4.26. *Sea M un $\mathcal{A}_1$ -módulo indecomponible no simple tal que $M|_{\mathbb{S}_3} = M[\epsilon] \oplus M[\text{st}]$, con $\dim M[\epsilon] = p$, $\dim M[\text{st}] = q$ o $M|_{\mathbb{S}_3} = M[\text{sgn}] \oplus M[\text{st}]$, con $\dim M[\text{sgn}] = p$, $\dim M[\text{st}] = q$ para $p, q > 0$. Entonces $p = q = 1$ y M es isomorfo a uno y sólo uno de los módulos definidos en el Lema 4.25.*

DEMOSTRACIÓN. Vemos el caso $M|_{\mathbb{S}_3} = M[\epsilon] \oplus M[\text{st}]$, con $\dim M[\epsilon] = p$, $\dim M[\text{st}] = q$, $p, q \geq 1$, ya que el otro se sigue de esto tensoreando con S_{sgn} . Sean a, β, c, d como en la prueba del Teorema 4.24. Recordemos que satisfacen el sistema de ecuaciones (4.25). Las últimas tres condiciones de ese sistema implican, como en la prueba de la Proposición 4.23, que c, d puede ser elegidos como

$$c = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta' \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} -\delta & 0 \\ 0 & \delta' \end{pmatrix},$$

para $\delta \in \mathbb{K}^{q_1 \times q_1}$, $\delta' \in \mathbb{K}^{q_2 \times q_2}$ matrices diagonales con autovalores en $\{\pm i\}$ y $\{\pm \frac{i}{3}\}$, respectivamente, $q_1 + q_2 = q$. Consecuentemente,

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ \beta_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}, \quad \text{con } a_1\beta_1 + a_2\beta_2 = 0,$$

$$a_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & {}^t a_1 & 0 & -{}^t a_1 \\ 0 & 0 & 0 & {}^t a_2 & 0 & -{}^t a_2 \\ {}^t \beta_1 & {}^t \beta_2 & \delta & 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta' & 0 & -\delta' \\ -{}^t \beta_1 & -{}^t \beta_2 & -\delta & 0 & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta' & 0 & -\delta' \end{pmatrix}.$$

Asumamos que $q_2 > 0$. En este caso, $\tilde{a} = \begin{pmatrix} {}^t a_1 \\ {}^t a_2 \end{pmatrix}$ debe ser inyectiva. De lo contrario, podemos cambiar los elementos $\{v_{q_1+1}, \dots, v_q, w_{q_1+1}, \dots, w_q\}$ de manera tal que, para algunos $q_1 + 1 \leq r < q$, las últimas $q - r$ columnas de $\tilde{a}$ son nulas y en ese caso

$$M = \langle v_{q_1-r+1}, \dots, v_q \rangle \oplus \langle x_i, v_j : i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, q - r \rangle.$$

Así $\tilde{a}$ es inyectiva. Cambiemos la base $\{x_i : i = 1, \dots, p\}$ de forma tal que

$$a_{12} \cdot v_{q_1+i} = x_i + \frac{i}{3}(v_{q_1+i} + w_{q_1+i}), \quad i = 1, \dots, q_2.$$

Notemos que, como $a_{12}(v_{q_1+i} + w_{q_1+i}) = 0$ para cada i y $a_{12}^2 = 0$, entonces $a_{12} \cdot x_i = 0$, $i = 1, \dots, q_2$. Pero entonces

$$M = \bigoplus_{i=1}^{q_2} \langle x_i, v_{q_1+i} \rangle \oplus \langle x_{q_2+1}, \dots, x_p, v_1, \dots, v_{q_1} \rangle.$$

Por lo tanto, si $q_2 > 0$ y M es indecomponible, entonces $q_1 = 0$, $p = q_2 = 1$, y esto no da los módulos del primer ítem del Lema 4.25.

Análogamente, si $q_1 > 0$, $\tilde{\beta} = \begin{pmatrix} {}^t \beta_1 & {}^t \beta_2 \end{pmatrix}$ debe ser inyectiva, y $q_2 = 0$. Si $v_1, \dots, v_p$ se eligen de modo que $a_{12} \cdot x_i = v_i - w_i$, $i = 1, \dots, p$, entonces $M = \bigoplus_{i=1}^p \langle x_i, v_i \rangle \oplus \bigoplus_{i=p+1}^{q_1} \langle v_i \rangle$ y por lo tanto $p = q_1 = 1$, lo que nos da

los módulos en el tercer ítem del lema. Los módulos en los otros dos ítems se siguen de éstos tensoreando con S_{sgn} . $\square$

4.4.2.4. Producto tensorial de $\mathcal{A}_1$ -módulos simples. Aquí calcularemos el producto tensorial de dos $\mathcal{A}_1$ -módulos simples dados, y mostraremos que resulta ser nuevamente un módulo indescomponible.

Primero, listamos todos los $\mathcal{A}_1$ -módulos indescomponibles de dimensión 4. Notemos que si M es un tal módulo indescomponible, entonces necesariamente tenemos $M|_{\mathbb{S}_3} = W_\epsilon \oplus W_{\text{sgn}} \oplus W_{\text{st}}$, por las Proposiciones 4.23 y 4.26. En la base canónica, la matriz de a_{12} está dada por

$$[a_{12}] = \begin{pmatrix} 0 & \gamma & a & -a \\ \alpha & 0 & b & b \\ \beta & \eta & c & -d \\ -\beta & \eta & d & -c \end{pmatrix},$$

para algunos $\alpha, \gamma, a, b \in \mathbb{k}$ y $c = d = \pm \frac{i}{3}$ o $c = -d = i$. Para cada $c = \theta \in \{\pm i, \pm \frac{i}{3}\}$ y para cada colección $(\alpha, \beta, \gamma, \eta, a, b)$ que define una representación, denotamos por $M(\alpha, \beta, \gamma, \eta, a, b)[\theta]$ al módulo correspondiente.

PROPOSICIÓN 4.27.

- Sea $\theta = \pm \frac{i}{3}$. Hay exactamente cuatro módulos indescomponibles no isomorfos $M(\alpha, \beta, \gamma, \eta, a, b)[\pm \frac{i}{3}]$. Están definidos para las siguientes colecciones $(\alpha, \beta, \gamma, \eta, a, b)$:
 1. $(0, 0, 1, 0, 1, 0)$,
 2. $(0, 0, 1, 1, 0, 0)$,
 3. $(1, 0, 0, 0, \mp \frac{2i}{3}, 1)$,
 4. $(1, 1, 0, \mp \frac{2i}{3}, 0, 0)$.
- Sea $\theta = \pm i$. Hay exactamente cuatro módulos indescomponibles no isomorfos $M(\alpha, \beta, \gamma, \eta, a, b)[\pm i]$. Están definidos para $(\alpha, \beta, \gamma, \eta, a, b)$ en la siguiente lista:
 1. $(1, 0, 0, 0, 0, 1)$,
 2. $(1, 1, 0, 0, 0, 0)$,
 3. $(0, \mp 2i, 1, 1, 0, 0)$,
 4. $(0, 0, 1, 0, 1, \mp 2i)$.

La prueba que sigue es esencialmente la interpretación de las ecuaciones (4.24) en este caso.

DEMOSTRACIÓN. Tenemos las siguientes identidades

$$(4.26) \quad \alpha\gamma = \gamma\alpha = 0, \quad \beta a = \beta b = \eta a = \eta b = 0.$$

Asumamos que $c = d = \pm \frac{i}{3}$, entonces a las ecuaciones listadas arriba debemos añadir:

$$0 = 2\beta c + \alpha\eta = a\alpha + 2cb, \quad 0 = \gamma\beta = b\gamma.$$

Calculamos las soluciones. Notemos que $\alpha = 0 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow \eta a = 0$. Entonces de acuerdo a si $\eta = 0$ o $a = 0$ tenemos:

$$\begin{cases} a_{12} \cdot x = 0, \\ a_{12} \cdot y = \gamma x, \\ a_{12} \cdot v = ax + c(v + w) \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} a_{12} \cdot x = 0, \\ a_{12} \cdot y = \gamma x + \eta(v + w), \\ a_{12} \cdot v = c(v + w). \end{cases}$$

Notemos que, en cualquier caso, no podemos tener $\gamma = 0$, o el módulo sería descomponible. Así, podemos asumir que $\gamma = 1$, cambiando y por $\frac{1}{\gamma}y$. Por la misma razón, no podemos tener $a = \eta = 0$. En el primer caso, podemos tomar $a = 1$, cambiando v por $\frac{1}{a}v$ y en el segundo, cambiando v por ηv podemos tomar $\eta = 1$.

Por otro lado, $\gamma = 0 \Rightarrow \alpha \neq 0$; y , de acuerdo a si $\beta = 0$ o $\beta \neq 0$,

$$\beta = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_{12} \cdot x = \alpha y, \\ a_{12} \cdot y = 0 \\ a_{12} \cdot v = ax + by + c(v + w), \end{cases} \quad \text{para } a = -2cb\alpha^{-1}$$

$$\beta \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} a_{12} \cdot x = \alpha y + \beta(v - w), \\ a_{12} \cdot y = \eta(v + w), \\ a_{12} \cdot v = c(v + w), \end{cases} \quad \text{para } \eta = -2\beta c\alpha^{-1}.$$

En el primer caso podemos asumir $\alpha = b = 1$, y así $a = -2c$ y, en el segundo, $\alpha = \beta = 1$, y así $\eta = -2c$.

Asumamos que ahora $c = -d = \pm i$, entonces a las identidades (4.26) que teníamos debemos sumar:

$$\begin{cases} 0 = 2b\gamma + 2ca = \gamma\beta + 2c\eta \\ 0 = a\alpha = \alpha\eta. \end{cases}$$

Encontramos las soluciones:

$$(i) \begin{cases} a_{12} \cdot x = \alpha y, \\ a_{12} \cdot y = 0, \\ a_{12} \cdot v = by + c(v - w). \end{cases} \quad (ii) \begin{cases} a_{12} \cdot x = \alpha y + \beta(v - w), \\ a_{12} \cdot y = 0, \\ a_{12} \cdot v = c(v - w). \end{cases}$$

$$(iii) \begin{cases} a_{12} \cdot x = \beta(v - w), \\ a_{12} \cdot y = \gamma x + \eta(v + w), \\ a_{12} \cdot v = c(v - w), \\ \beta = -2\eta c\gamma^{-1}. \end{cases} \quad (iv) \begin{cases} a_{12} \cdot x = 0, \\ a_{12} \cdot y = \gamma x, \\ a_{12} \cdot v = ax + by + c(v - w), \\ b = -2ca\gamma^{-1}. \end{cases}$$

Por lo tanto, cambiando convenientemente la base en cada caso (por un múltiplo escalar de sus componentes), tenemos los cuatro módulos del segundo ítem. $\square$

Sea $\text{sgn} : i\mathbb{R} \rightarrow \{\pm 1\}$, $\text{sgn}(it) = \text{sgn}(t)$.

PROPOSICIÓN 4.28. *Tenemos los siguientes isomorfismos:*

1. $S_\epsilon \otimes S \cong S \cong S \otimes S_\epsilon$ para $\mathcal{A}_1$ -módulo simple S ;

2. $S_{\text{sgn}} \otimes S_{\text{st}}(\theta) \cong S_{\text{st}}(\vartheta)$, para $\theta, \vartheta \in \{\pm i, \pm \frac{i}{3}\}$ con $\text{sgn}(\theta) = \text{sgn}(\vartheta)$, $|\theta| \neq |\vartheta|$;
3. $S_{\text{st}}(\theta) \otimes S_{\text{sgn}} \cong S_{\text{st}}(\vartheta)$, para $\theta, \vartheta \in \{\pm i, \pm \frac{i}{3}\}$ con $\text{sgn}(\theta) = -\text{sgn}(\vartheta)$, $|\theta| \neq |\vartheta|$.
4.
 - $S_{\text{st}}(i) \otimes S_{\text{st}}(i) \cong S_{\text{st}}(-\frac{i}{3}) \otimes S_{\text{st}}(\frac{i}{3}) \cong M(0, 2i, 1, 1, 0, 0)[-i]$,
 - $S_{\text{st}}(i) \otimes S_{\text{st}}(-i) \cong S_{\text{st}}(-\frac{i}{3}) \otimes S_{\text{st}}(-\frac{i}{3}) \cong M(1, 0, 0, 0, -2\frac{i}{3}, 1)[\frac{i}{3}]$,
 - $S_{\text{st}}(i) \otimes S_{\text{st}}(\frac{i}{3}) \cong S_{\text{st}}(-\frac{i}{3}) \otimes S_{\text{st}}(i) \cong M(0, 0, 1, 0, 1, 2i)[-i]$,
 - $S_{\text{st}}(i) \otimes S_{\text{st}}(-\frac{i}{3}) \cong S_{\text{st}}(-\frac{i}{3}) \otimes S_{\text{st}}(-i) \cong M(1, 1, 0, -2\frac{i}{3}, 0, 0)[\frac{i}{3}]$,
 - $S_{\text{st}}(-i) \otimes S_{\text{st}}(i) \cong S_{\text{st}}(\frac{i}{3}) \otimes S_{\text{st}}(\frac{i}{3}) \cong M(1, 0, 0, 0, 2\frac{i}{3}, 1)[- \frac{i}{3}]$,
 - $S_{\text{st}}(-i) \otimes S_{\text{st}}(-i) \cong S_{\text{st}}(\frac{i}{3}) \otimes S_{\text{st}}(-\frac{i}{3}) \cong M(0, -2i, 1, 1, 0, 0)[i]$,
 - $S_{\text{st}}(-i) \otimes S_{\text{st}}(\frac{i}{3}) \cong S_{\text{st}}(\frac{i}{3}) \otimes S_{\text{st}}(i) \cong M(1, 1, 0, 2\frac{i}{3}, 0, 0)[- \frac{i}{3}]$,
 - $S_{\text{st}}(-i) \otimes S_{\text{st}}(-\frac{i}{3}) \cong S_{\text{st}}(\frac{i}{3}) \otimes S_{\text{st}}(-i) \cong M(0, 0, 1, 0, 1, -2i)[i]$.

DEMOSTRACIÓN. Ítem (i) es inmediato.

Vemos el ítem (ii): sea $\theta \in \{\pm i, \pm \frac{i}{3}\}$, $S_{\text{sgn}} = \mathbb{k}\{z\}$; $S_{\text{st}}(\theta) = \mathbb{k}\{v, w\}$, $a_{12} \cdot v = cv + dw$. Entonces $(S_{\text{sgn}} \otimes S_{\text{st}})|_{\mathbb{S}_3} = W_{\text{st}}$ con la base canónica dada por

$$u = z \otimes v - 2z \otimes w, \quad t = 2z \otimes v - z \otimes w,$$

y entonces

$$a_{12}u = \frac{5c + 4d}{3}u - \frac{4c + 5d}{3}t.$$

Así, la afirmación se sigue de acuerdo a si $c = \pm i$ o $c = \pm \frac{i}{3}$.

El ítem (iii) se sigue de manera análoga: en este caso

$$u = v \otimes z - 2w \otimes z \quad \text{y} \quad a_{12}u = -\frac{5c + 4d}{3}u + \frac{4c + 5d}{3}t.$$

Ahora, tenemos que calcular $S_{\text{st}}(\theta) \otimes S_{\text{st}}(\vartheta)$, para $\theta, \vartheta \in \{\pm i, \pm \frac{i}{3}\}$. Sea $S_{\text{st}}(\theta) = \mathbb{k}\{v, w\}$, $S_{\text{st}}(\vartheta) = \mathbb{k}\{v', w'\}$, $a = v \otimes v', b = v \otimes w', c = w \otimes v', d = w \otimes w'$. Primero,

$$W_{\text{st}} \otimes W_{\text{st}} \cong W_{\epsilon} \oplus W_{\text{sgn}} \oplus W_{\text{st}} = \mathbb{k}\{x\} \oplus \mathbb{k}\{y\} \oplus \mathbb{k}\{v, w\},$$

para $x = 2a - b - c + 2d$, $y = b - c$, $v = a - b - c$, $w = d - b - c$. Ahora, si $a_{12} \cdot v = \alpha v + \beta w$ y $a_{12} \cdot v' = \alpha' v' + \beta' w'$, entonces

$$\begin{aligned} a_{12} \cdot a &= \alpha a + (\beta + \alpha')c + \beta' d, & a_{12} \cdot b &= \alpha b - \beta' c + (\beta - \alpha')d, \\ a_{12} \cdot c &= (\alpha' - \beta)a + \beta' b - \alpha c, & a_{12} \cdot d &= -\beta' a - (\alpha' + \beta)b - \alpha d; \end{aligned}$$

y así

$$\begin{aligned}
a_{12} \cdot x &= (-\alpha - 2\beta - 2\alpha' - \beta')y + (2\alpha + \beta - \alpha' - 2\beta')(v - w), \\
a_{12} \cdot y &= \frac{1}{3}(\alpha + 2\beta - 2\alpha' - \beta')x + (-2\alpha - \beta + \alpha' + 2\beta')(v + w), \\
a_{12} \cdot v &= \frac{1}{6}(2\alpha + \beta + \alpha' + 2\beta')x + \frac{1}{2}(-2\alpha - \beta - \alpha' - 2\beta')y \\
&\quad + \frac{1}{3}(\alpha + 2\beta - 4\alpha' - 2\beta')v + \frac{1}{3}(-2\alpha - 4\beta + 2\alpha' + \beta')w.
\end{aligned}$$

Para cada $\theta, \vartheta \in \{\pm i \pm \frac{i}{3}\}$, obtenemos las identidades en el ítem (iv) insertando los correspondientes valores de $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$. $\square$

COROLARIO 4.29. $\mathcal{A}_1$ no es cuasitriangular.

DEMOSTRACIÓN. Si H es un álgebra de Hopf cuasitriangular y M, N son H -módulos, entonces $M \otimes N \cong N \otimes M$ como H -módulos. Vemos que esto no se satisface para $\mathcal{A}_1$ de, por ejemplo, el segundo y tercer ítem de la Proposición 4.28. $\square$

4.4.2.5. *Cubiertas proyectivas.* Recordemos que una base lineal para $\mathcal{A}_1$ está dada por el conjunto: $S = \{xH_t \mid x \in X, t \in \mathbb{S}_3\}$ [AG], donde

$$\begin{aligned}
X &= \{1, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{12}a_{13}, a_{12}a_{23}, a_{13}a_{23}, a_{13}a_{12}, \\
&\quad a_{12}a_{13}a_{23}, a_{12}a_{13}a_{12}, a_{13}a_{12}a_{23}, a_{12}a_{13}a_{12}a_{23}\}.
\end{aligned}$$

PROPOSICIÓN 4.30. I_χ es la cubierta proyectiva de S_χ , $\chi \in \{\epsilon, \text{sgn}\}$.

DEMOSTRACIÓN. En vista de la Proposición 4.16, sólo tenemos que ver que I_χ es indescomponible. Trabajamos con $\chi = \epsilon$, siendo el otro caso análogo, o se sigue de tensorar con S_{sgn} . Sea $e_\epsilon = \sum_{t \in \mathbb{S}_3} H_t \in \mathcal{A}_1$, entonces es claro que $\{xe_\epsilon \mid x \in X\}$ es una base de I_ϵ . Más aún, si cambiamos esta base por la siguiente:

$$\begin{aligned}
&\{e_\epsilon\} \cup \{(a_{12}a_{13}a_{12}a_{23} - a_{12}a_{23})e_\epsilon\} \cup \{(a_{12} + a_{13} + a_{23})e_\epsilon\} \\
&\cup \{(a_{12}a_{13}a_{12} - a_{12}a_{13}a_{23} - a_{13}a_{12}a_{23} - a_{13} - 2a_{12})e_\epsilon\} \\
&\cup \{(a_{12} - 2a_{13} + a_{23})e_\epsilon, (2a_{23} - a_{12} - a_{13})e_\epsilon\} \\
&\cup \{(a_{13}a_{23} - a_{13}a_{12})e_\epsilon, (a_{12}a_{13} - a_{12}a_{23} + a_{13}a_{23} - a_{13}a_{12})e_\epsilon\} \\
&\cup \{(a_{12}a_{13} + a_{12}a_{23} + a_{13}a_{12})e_\epsilon, (-a_{12}a_{13} + a_{13}a_{23} - a_{13}a_{12})e_\epsilon\} \\
&\cup \{(a_{12}a_{13}a_{12} + 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{13}a_{12}a_{23} + a_{12} - a_{13})e_\epsilon, \\
&\quad (2a_{12}a_{13}a_{12} + a_{12}a_{13}a_{23} + a_{13}a_{12}a_{23} - a_{12} + a_{13})e_\epsilon\}
\end{aligned}$$

entonces podemos ver que

$$(I_\epsilon)_{|\mathbb{S}_3} \cong W_\epsilon \oplus W_\epsilon \oplus W_{\text{sgn}} \oplus W_{\text{sgn}} \oplus W_{\text{st}} \oplus W_{\text{st}} \oplus W_{\text{st}} \oplus W_{\text{st}}.$$

Ahora trabajamos con la acción de a_{12} . Notemos que en la primera base, la matriz de a_{12} es

$$E_{2,1} + E_{5,3} + E_{6,4} + E_{10,7} + E_{9,8} + E_{12,11},$$

donde $E_{i,j}$ es la matriz cuyas entradas son cero excepto para (i,j) -ésima, que es un 1. Es posible cambiar la base de manera tal que la descomposición en $\mathbb{S}_3$ -módulos simples se preserve y la matriz de a_{12} deviene en:

$$[a_{12}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2i & -2i & 2i & 2i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 & i & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 & -i & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{12} & 0 & -\frac{i}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{3} & -\frac{i}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{12} & 0 & \frac{i}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{3} & -\frac{i}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{12} & 0 & -\frac{i}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{3} & \frac{i}{3} \\ -\frac{1}{12} & 0 & \frac{i}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{3} & -\frac{i}{3} \end{bmatrix}.$$

Sea $\{x_1, x_2, y_1, y_2, v_1, w_1, v_2, w_2, v_3, w_3, v_4, w_4\}$ esta nueva base. Asumamos que $I_\epsilon = U_1 \oplus U_2$, para U_1, U_2 $\mathcal{A}_1$ -submódulos. Así, existe $i = 1, 2$, $\lambda \neq 0, \mu \in \mathbb{k}$ tal que $x = \lambda x_1 + \mu x_2 \in U_i$. Actuando con a_{12} tenemos que $y_1, v_1 + v_2 - v_3 - v_4 \in U_i$. Como $y_1 \in U_i$, actuando nuevamente con a_{12} tenemos que también $v_3 - v_4 \in U_i$ y así $v_3 + v_4 \in U_i$ (nuevamente por la acción de a_{12}). Por lo tanto $v_3, v_4 \in U_i$ y luego $x_2, y_2, x_1, v_1 + v_2 \in U_i$. Pero entonces $v_1 - v_2 \in U_i$ y así $U_i = I_\epsilon$. $\square$

Nos resta encontrar las cubiertas proyectivas $P_{\text{st}}(\theta)$ de los $\mathcal{A}_1$ -módulos de dimensión 2 $S_{\text{st}}(\pm\theta)$, $\theta \in \{i, \frac{i}{3}\}$. Como estos módulos son

$$S_{\text{st}}(i), \quad S_{\text{st}}(i) \otimes S_{\text{sgn}}, \quad S_{\text{sgn}} \otimes S_{\text{st}}(i), \quad \text{y} \quad S_{\text{sgn}} \otimes S_{\text{st}}(i) \otimes S_{\text{sgn}},$$

ver Proposición 4.28, y $P_{\text{st}}(\theta) \cong \mathcal{A}_1 e_{\text{st}}(\theta)$, tendrán todas las mismas dimensión. Más aún, necesariamente tendremos $\dim P_{\text{st}}(\theta) = 6$, $\forall \theta$, por (1.1).

PROPOSICIÓN 4.31. *Sea P el $\mathbb{k}\mathbb{S}_3$ -módulo con base $\{x, y, u, t, v, w\}$, donde $\mathbb{k}\{x\} = W_\epsilon$, $\mathbb{k}\{y\} = W_{\text{sgn}}$, $\mathbb{k}\{u, t\} \cong \mathbb{k}\{v, w\} = W_{\text{st}}$. Entonces P es un $\mathcal{A}_1$ -módulo vía*

$$\mathbb{k}\{x, y, u, t\} \cong M(0, 2i, 1, 1, 0, 0)[-i], \quad a_{12} \cdot v = x - 2iy + u + t + i(v - w).$$

Más aún $P = P_{\text{st}}(i)$ es la cubierta proyectiva del módulo simple $S_{\text{st}}(i)$.

Como consecuencia, tenemos $P_{\text{st}}(-\frac{i}{3}) = P_{\text{st}}(i) \otimes S_{\text{sgn}}$, $P_{\text{st}}(\frac{i}{3}) = S_{\text{sgn}} \otimes P_{\text{st}}(i)$ y $P_{\text{st}}(-i) = S_{\text{sgn}} \otimes P_{\text{st}}(i) \otimes S_{\text{sgn}}$.

DEMOSTRACIÓN. La matriz de a_{12} en la base dada es

$$[a_{12}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2i & -2i \\ 2i & 1 & -i & -i & 1 & -1 \\ -2i & 1 & i & i & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & -i \end{pmatrix}.$$

Vía la acción de H_{13}, H_{23} definimos las matrices de a_{13}, a_{23} y entonces es fácil ver que

$$\begin{aligned} [H_{12}][a_{12}] &= -[a_{12}][H_{12}], \\ [a_{12}]^2 &= 0 \\ [a_{12}][a_{13}] + [a_{13}][a_{23}] + [a_{23}][a_{12}] &= \text{id}_{6 \times 6} - [H_{12}][H_{12}], \end{aligned}$$

y así P es un $\mathcal{A}_1$ -módulo.

Ahora, es claro que $U = \mathbb{k}\{x, y, u, t\}$ es un $\mathcal{A}_1$ -submódulo y que la proyección canónica $\pi : P \twoheadrightarrow P/U$ da una proyección sobre $S_{\text{st}}(\mathbf{i})$. Más aún, esta proyección es esencial. En efecto, sea $N \subset P$ un $\mathcal{A}_1$ -submódulo, tal que $N/U \cong S_{\text{st}}(\mathbf{i})$. En particular, existe $\lambda \neq 0 \in \mathbb{k}$ tal que $\lambda u + v \in P$. Ahora, $a_{12}(v + \lambda u) = x - 2iy + (1 - \lambda i)u + (-1 + \lambda i)t + i(v - w)$, y así $x, y \in N$. Pero $x \in N \Rightarrow u, v \in N$ y por lo tanto $N = P$. Consecuentemente, $\pi : P \twoheadrightarrow P/U$ es esencial.

Ahora, si $(P_{\text{st}}(\mathbf{i}), f)$ es la cubierta proyectiva de $S_{\text{st}}(\mathbf{i})$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & & P_{\text{st}}(\mathbf{i}) \\ & \nearrow g & \downarrow f \\ P & \xrightarrow{\pi} & P/U \xrightarrow{\cong} S_{\text{st}}(\mathbf{i}). \end{array}$$

Como π es esencial y $\pi(g(P_{\text{st}}(\mathbf{i}))) \cong S_{\text{st}}(\mathbf{i})$ debemos tener $g(P_{\text{st}}(\mathbf{i})) = P$. Pero entonces $\dim P = \dim P_{\text{st}}(\mathbf{i}) = 6$ y así g es un isomorfismo. Por lo tanto, (P, π) es la cubierta proyectiva de $S_{\text{st}}(\mathbf{i})$. La afirmación acerca de las cubiertas proyectivas de los otros $S_{\text{st}}(\lambda)$'s es ahora evidente. $\square$

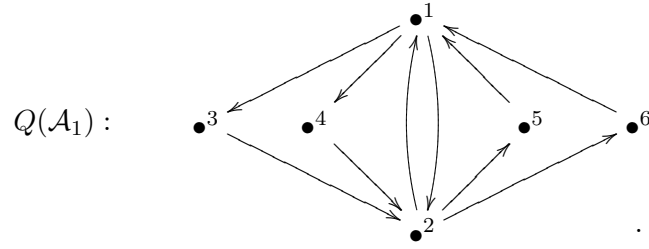
4.4.2.6. Tipo de representación de $\mathcal{A}_1$. Mostramos que el álgebra $\mathcal{A}_1$ no es de tipo de representación finito. De las Proposiciones 4.12 y 4.23 se sigue que $\text{Ext}_{\mathcal{A}_1}^1(S, S) = 0$ para cualquier $\mathcal{A}_1$ -módulo S de dimensión 1, y que existe una única extensión non-trivial de S_ϵ por S_{sgn} , v.g. el $\mathcal{A}_1$ -módulo $M_{\text{sgn}, \epsilon}$. Lo mismo se satisface para las extensiones de S_{sgn} por S_ϵ , considerando el $\mathcal{A}_1$ -módulo $M_{\epsilon, \text{sgn}}$. La Proposición 4.23 muestra que

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}_1}^1(S_{\text{st}}(\lambda), S_{\text{st}}(\mu)) = 0, \quad \forall \lambda, \mu \in \{\pm i, \pm \frac{i}{3}\}.$$

Ahora, una extensión no trivial de uno de los módulos S_ϵ o S_{sgn} por un $\mathcal{A}_1$ -módulo de dimensión 2 $S_{\text{st}}(\lambda)$, o vice versa, debe provenir de un $\mathcal{A}_1$ -módulo indescomponible de dimensión 3 M . Hemos clasificado a tales módulos en el Lema 4.25 y vemos entonces que:

$$\begin{aligned} \dim \text{Ext}_{\mathcal{A}_1}^1(S_\epsilon, S_{\text{st}}(\lambda)) &= \dim \text{Ext}_{\mathcal{A}_1}^1(S_{\text{st}}(\lambda), S_{\text{sgn}}) = \begin{cases} 1, & \text{si } \lambda = \pm i, \\ 0, & \text{si } \lambda = \pm \frac{i}{3}. \end{cases} \\ \dim \text{Ext}_{\mathcal{A}_1}^1(S_{\text{sgn}}, S_{\text{st}}(\lambda)) &= \dim \text{Ext}_{\mathcal{A}_1}^1(S_{\text{st}}(\lambda), S_\epsilon) = \begin{cases} 1, & \text{si } \lambda = \pm \frac{i}{3}, \\ 0, & \text{si } \lambda = \pm i. \end{cases} \end{aligned}$$

Sea $\{S_\epsilon, S_{\text{sgn}}, S_{\text{st}}(\mathbf{i}), S_{\text{st}}(-\mathbf{i}), S_{\text{st}}(\frac{i}{3}), S_{\text{st}}(-\frac{i}{3})\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ un ordenamiento de los $\mathcal{A}_1$ -módulos simples. Entonces el Ext-Caraj de $\mathcal{A}_1$ es:



PROPOSICIÓN 4.32. $\mathcal{A}_1$ no es de tipo de representación finito.

DEMOSTRACIÓN. El diagrama de separación de $\mathcal{A}_1$ es $D_5^{(1)} \coprod D_5^{(1)}$, con $D_5^{(1)}$ el diagrama de Dynkin afín extendido correspondiente al diagrama de Dynkin clásico D_5 . Por el Lema 1.6 tenemos que $\mathcal{A}_1/J(\mathcal{A}_1)^2$ (un cociente de $\mathcal{A}_1$) no es de tipo de representación finito (es, en efecto, manso) por el Teorema 1.5, y por lo tanto tampoco lo es $\mathcal{A}_1$. $\square$

Representaciones de la categoría de módulos sobre álgebras de Hopf punteadas

En este capítulo clasificamos las categorías módulo exactas sobre la categoría de representaciones de las álgebras de Hopf punteadas de dimensión finita sobre $\mathbb{S}_3$. Para esto, calculamos comódulo álgebras sobre álgebras de Hopf punteadas sobre $\mathbb{S}_n$. Además, probamos que las álgebras de Hopf punteadas sobre $\mathbb{S}_3$ y $\mathbb{S}_4$ son deformaciones por cociclo de sus versiones graduadas.

5.1. Clases de equivalencia equivariantes de comódulo álgebras

En esta sección presentaremos cómo distinguir entre clases de equivalencia de algunas comódulo álgebras sobre álgebras de Hopf punteadas y luego aplicaremos este resultado a nuestros casos. Muchas de las ideas aquí expuestas están contenidas en [M1], [M2] aunque con menor generalidad.

Sean H un álgebra de Hopf y A una H -comódulo álgebra a izquierda, ambas de dimensión finita. Hemos visto en 1.9, página 18, que las categorías ${}^H\mathcal{M}_A$ tienen un rol predominante en el problema planteado. En el siguiente teorema condensamos tres importantes resultados de [Sk] que nos serán de gran importancia en lo que sigue.

TEOREMA 5.1. *Sean H y A como arriba. Entonces valen las siguientes afirmaciones:*

- (i) [Sk, Theorem 3.5] *Si A es H -simple y $M \in {}^H\mathcal{M}_A$, entonces existe $t \in \mathbb{N}$ tal que M^t es un A -módulo libre.*
- (ii) [Sk, Theorem 4.2] *$M \in {}^H\mathcal{M}_A$ es libre como A -módulo si y sólo si existe un ideal maximal $J \subset A$ tal que $M/M \cdot J$ es libre como A/J -módulo.*

En realidad, la conclusión del ítem (i) se encuentra en la prueba de [Sk, Theorem 3.5]. En el ítem (ii), notar que si, en particular, $A/J = \mathbb{k}$ entonces $M/M \cdot J$ resulta trivialmente libre como $\mathbb{k}$ -módulo y una base de este espacio vectorial puede levantarse a M ; es esta versión particular la que nos será de utilidad.

Sea Γ un grupo finito y sea H un álgebra de Hopf punteada de dimensión finita con corradical $\mathbb{k}\Gamma$ y filtración corradical $H_0 \subseteq H_1 \subseteq \cdots \subseteq H_m = H$. Supongamos que existe $V \in {}^\Gamma\mathcal{VD}$ tal que $\text{gr } H = U = \mathfrak{B}(V) \# \mathbb{k}\Gamma$.

Sean $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ dos H -comódulo álgebras a izquierda H -simples a derecha. Consideremos las filtraciones $\{\mathcal{A}_i\}, \{\mathcal{A}'_i\}$ de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ dadas por sus series de

Loewy, ver Definición 1.43 en la página 1.43 y los respectivos graduados asociados $\text{gr } \mathcal{A}$ y $\text{gr } \mathcal{A}'$. Por el Teorema 1.70 en la página 19, existen dos subálgebras coideales homogéneas $K, K' \subset \mathfrak{B}(V) \# \mathbb{k}1$, dos subgrupos $F, F' \subseteq \Gamma$ y dos cociclos $\psi \in Z^2(F, \mathbb{k}^\times)$, $\psi' \in Z^2(F', \mathbb{k}^\times)$ tales que $\text{gr } \mathcal{A} = K \# \mathbb{k}_\psi F$ y $\text{gr } \mathcal{A}' = K' \# \mathbb{k}_{\psi'} F'$. En particular, $\mathcal{A}_0 = \mathbb{k}_\psi F$ y $\mathcal{A}'_0 = \mathbb{k}_{\psi'} F'$.

El principal resultado de esta sección es el siguiente.

TEOREMA 5.2. *Las categorías ${}_{\mathcal{A}}\mathcal{M}$, ${}_{\mathcal{A}'}\mathcal{M}$ son equivalentes como módulos sobre $\text{Rep}(H)$ si y sólo existe un elemento $g \in \Gamma$ tal que $\mathcal{A}' \simeq g\mathcal{A}g^{-1}$ como comódulo álgebras.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que ${}_{\mathcal{A}}\mathcal{M} \cong {}_{\mathcal{A}'}\mathcal{M}$ como $\text{Rep}(H)$ -módulos. Luego, por [AM, Proposition 1.24] existe un contexto Morita equivariante (P, Q, f, h) . Esto es, existen objetos $P \in {}^H_{\mathcal{A}'}\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$, $Q \in {}^H_{\mathcal{A}}\mathcal{M}_{\mathcal{A}'}$ e isomorfismos de bimódulos $f : P \otimes_{\mathcal{A}} Q \rightarrow \mathcal{A}'$, $h : Q \otimes_{\mathcal{A}'} P \rightarrow \mathcal{A}$ y resultan $\mathcal{A}' \simeq \text{End}_{\mathcal{A}}(P)$ como comódulo álgebras. La estructura de comódulo en $\text{End}_{\mathcal{A}}(P)$ está dada por $\lambda : \text{End}_{\mathcal{A}}(P) \rightarrow H \otimes \text{End}_{\mathcal{A}}(P)$, $\lambda(T) = T_{(-1)} \otimes T_{(0)}$ donde

$$(5.1) \quad \langle \alpha, T_{(-1)} \rangle T_{(0)}(p) = \langle \alpha, T(p_{(0)})_{(-1)} \mathcal{S}^{-1}(p_{(-1)}) \rangle T(p_{(0)})_{(0)},$$

para cada $\alpha \in H^*$, $T \in \text{End}_{\mathcal{A}}(P)$, $p \in P$ [M1, Lemma 1.26].

Para cada $i = 0, \dots, m$ definamos $P(i) = P_i/P_{i-1}$, donde $\{P_i\}_{i \geq 0}$ denota la filtración de Loewy y $P_{-1} = 0$. Consideremos el espacio vectorial graduado $\text{gr } P = \bigoplus_{i=0}^m P(i)$ y recordemos que $U = \text{gr } H$ y $K \# \mathbb{k}_\psi F = \text{gr } \mathcal{A}$. La estructuras de módulo y comódulos inducidas en $\text{gr } P$ lo hacen un objeto de la categoría ${}^U\mathcal{M}_{K \# \mathbb{k}_\psi F}$ de manera directa. Sea $\bar{\delta} : \text{gr } P \rightarrow U \otimes \text{gr } P$ a la coacción. En particular $\text{gr } P \in {}^U\mathcal{M}_K$ así, por el Teorema 5.1 (ii) tenemos que $\text{gr } P \simeq M \otimes K$, donde $M = \text{gr } P / (\text{gr } P \cdot K^+)$, puesto que $K/K^+ = \mathbb{k}$.

Tenemos que $\bar{\delta}(\text{gr } P \cdot K^+) \subset (U \otimes \text{gr } P)(K^+ \otimes 1 + U \otimes K^+)$, puesto que $K = \mathbb{k} \oplus K^+$ y así el mapa $\bar{\delta}$ induce una aplicación $\hat{\delta} : M \rightarrow U' \otimes M$, donde $U' = U/UK^+U$. Notar que U' es un álgebra de Hopf punteada con corradical $\mathbb{k}\Gamma$, puesto que U es corradicalmente graduada y el ideal UK^+U es homogéneo y no corta a U_0 . M tiene también una estructura de $\mathbb{k}_\psi F$ -módulo dada por $\bar{m} \cdot f = \overline{m \cdot f}$, para $f \in F$, $\bar{m} \in M$. Esta acción está bien definida: si $\bar{m} = \bar{n}$, entonces existen $a \in \text{gr } P$, $x \in K^+$ tales que $m - n = a \cdot x$. Entonces obtenemos que $(m - n) \cdot f = axf \in \text{gr } P \cdot K^+$. Más aún, $M \in {}^{U'}\mathcal{M}_{\mathbb{k}_\psi F}$. En efecto, $\hat{\delta}$ resulta una aplicación de $\mathbb{k}_\psi F$ -módulos pues $\bar{\delta}$ lo es.

AFIRMACIÓN 5.1.1. *Existe $\zeta \in Z^2(U', \mathbb{k})$ tal que se tiene una equivalencia de categorías ${}^{U'}\mathcal{M}_{\mathbb{k}_\psi F} \simeq {}^{U'\zeta}\mathcal{M}_{\mathbb{k}F}$.*

En efecto, sea $\text{cores } \psi$ la extensión de ψ a Γ , $\psi' = \text{cores res } \psi$ la restricción de este cociclo a F . Entonces, si $\{g_i\}_{i=1}^m$ es un conjunto de representantes de las clases dobles FgF en G , vale la siguiente fórmula:

$$\psi' = \left(\sum_{i=1}^n [F : F \cap g_i F g_i^{-1}] \right) \psi,$$

Ver [Br, Proposition III (9.5)]. En particular, $\mathbb{k}_{\psi'} F = \mathbb{k}_\psi F$. Ahora, definimos $\Psi : U \otimes U \rightarrow \mathbb{k}$ como $\Psi_{\Gamma \times \Gamma} = \text{cores } \psi$ y como cero en el complemento de

$\mathbb{k}\Gamma \times \mathbb{k}\Gamma$ en $U \otimes U$. Veamos que resulta un 2-cociclo, esto es, que se satisface la ecuación $\Psi(x_{(1)}, y_{(1)})\Psi(x_{(2)}y_{(2)}, z) = \Psi(y_{(1)}, z_{(1)})\Psi(x, y_{(2)}z_{(2)})$ para cada $x, y, z \in U$. Notemos que si $z \notin \mathbb{k}\Gamma$, el lado izquierdo de esta igualdad es cero. Ahora bien, el lado derecho es no nulo sólo si $z_{(1)} \otimes z_{(2)} \in \mathbb{k}\Gamma \times \mathbb{k}\Gamma$, esto es, si $z \in \mathbb{k}\Gamma$. Un análisis similar muestra que la igualdad en cuestión se satisface trivialmente si $x \notin \mathbb{k}\Gamma$. Ahora, si $x, z \in \Gamma$, ambos miembros de la igualdad son no nulos si y sólo si $y \in \mathbb{k}\Gamma$. Ahora, por definición de Ψ , la igualdad se sigue en general. Sea $\zeta = \Psi^{-1}$. Por [M1, Lemma 2.1] existe una equivalencia de categorías ${}^{U'\zeta}\mathcal{M}_{\mathbb{k}F} \simeq {}^{U'}\mathcal{M}_{(\mathbb{k}F)_{\Psi}}$ y así la afirmación se sigue.

Como antes, por el Teorema 5.1 (ii) cualquier objeto de ${}^{U\Psi^{-1}}\mathcal{M}_{\mathbb{k}F}$ es un $\mathbb{k}F$ -módulo libre. Luego existe un objeto N en ${}^{U'/U'(\mathbb{k}F)^+}\mathcal{M}$ de manera tal que $\text{gr } P \simeq N \otimes K \otimes {}_{\psi}F$. De donde se sigue que $\dim P = (\dim N)(\dim \mathcal{A})$. Similarmente podemos asumir que existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $\dim Q = s \dim \mathcal{A}'$.

Usando el Teorema 5.1 (i) existe $t \in \mathbb{N}$ tal que P^t es libre como $\mathcal{A}$ -módulo a derecha, esto es, existe un espacio vectorial T tal que $P^t \simeq T \otimes \mathcal{A}$, luego

$$(5.2) \quad t \dim N = \dim T.$$

Como $P \otimes_{\mathcal{A}} Q \simeq \mathcal{A}'$ entonces $P^t \otimes_{\mathcal{A}} Q \simeq T \otimes Q \simeq \mathcal{A}'^t$, así se sigue que $s \dim T \dim \mathcal{A}' = t \dim \mathcal{A}'$ y usando (5.2) obtenemos que $s \dim N = 1$ de donde $\dim N = 1$ y así $\dim P = \dim \mathcal{A}$.

AFIRMACIÓN 5.1.2. *Sea $n \in P_0$, entonces $P = n \cdot \mathcal{A}$.*

Notar que $P_0 \neq 0$. En efecto, si $P_0 = 0$ y $k \in \mathbb{N}$ es el mínimo con $P_k \neq 0$, entonces $\Delta(P_k) \subset \sum_{j=0}^k H_{k-j} \otimes P_j = H_0 \otimes P_k$, lo que es una contradicción. Sea $g \in \Gamma$ tal que $\delta(n) = g \otimes n$. Si $J = \{a \in \mathcal{A} : n \cdot a = 0\}$, entonces J es un ideal a derecha de $\mathcal{A}$. Veremos que $J = 0$. Sea $a \in J$ y escribamos $\lambda(a) = \sum_{i=1}^n a^i \otimes a_i$, de manera tal que el conjunto $\{a^i : i = 1, \dots, n\} \subset H$ sea linealmente independiente. Ahora, $\{ga^i : i = 1, \dots, n\} \subset H$ es también linealmente independiente y tenemos $0 = \lambda(n \cdot a) = \sum_{i=1}^n ga^i \otimes n \cdot a_i$. Así se sigue que $n \cdot a_i = 0$, $\forall i = 1, \dots, n$, esto es, $\lambda(a) \in H \otimes J$ y J es H -coestable. Como $\mathcal{A}$ es H -simple a derecha, $J = 0$. Por lo tanto, tenemos que la acción $\cdot : \mathbb{k}\{n\} \otimes \mathcal{A} \rightarrow P$ es inyectiva y como $\dim P = \dim \mathcal{A}$, la afirmación se sigue.

No es difícil ver que el mapa lineal $\phi : g\mathcal{A}g^{-1} \rightarrow \text{End}_{\mathcal{A}}(P)$ dado por $\phi(gag^{-1})(n \cdot b) = n \cdot ab$ es un isomorfismo de H -comódulo álgebras.

Recíprocamente, si $\mathcal{A}' \simeq g\mathcal{A}g^{-1}$ como comódulo álgebras y $M \in {}_{\mathcal{A}}\mathcal{M}$, entonces el conjunto gMg^{-1} tiene una estructura natural de $\mathcal{A}'$ -módulo de manera que el funtor $F : {}_{\mathcal{A}}\mathcal{M} \rightarrow {}_{\mathcal{A}'}\mathcal{M}$, $M \mapsto gMg^{-1}$ resulta una equivalencia de $\text{Rep}(H)$ -módulos $\square$

5.2. Subálgebras coideales de álgebras de Nichols cuadráticas

Una pieza fundamental de información para determinar comódulo álgebras es el cálculo de las subálgebras coideales homogéneas dentro del álgebra de Nichols. Esto es parte del Teorema 1.70. El cálculo de subálgebras coideales es un campo de investigación muy activo en la teoría de álgebras de Hopf y grupos cuánticos, ver por ejemplo [HK], [HS], [Kh2] y [KL].

En esta sección investigamos las subálgebras coideales a izquierda homogéneas en álgebras de Nichols cuadráticas de dimensión finita, ver 2.4, página 27.

Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y $X = \{i_1, \dots, i_n\}$ un rack de n elementos. Consideremos $q : X \times X \rightarrow \mathbb{k}^*$ un 2-cociclo. Recordemos la notación de 2.4.1: denotamos por $\mathcal{R}$ el conjunto de clases de equivalencia en $X \times X$ para la relación generada por $(i, j) \sim (i \triangleright j, i)$. A su vez, $\mathcal{R}'$ es el subconjunto de las $C \in \mathcal{R}$ que satisfacen (2.4), ver página 27. Recordemos que una base para el conjunto de relaciones que definen a la aproximación cuadrática $\widehat{\mathfrak{B}}_2(X, q)$ del álgebra de Nichols $\mathfrak{B}(X, q)$ está indexada por $\mathcal{R}'$. Asumamos que

$$(5.3) \quad (i, j), (i, k) \in C \Rightarrow j = k \quad \text{y} \quad (i, j), (k, i) \in C \Rightarrow k = i \triangleright j.$$

Sea G un grupo finito y sea $(\cdot, g, (\chi_i)_{i \in X})$ una realización de YD principal de (X, q) sobre G , ver Definición 3.1. Recordar que, en particular, $g : X \rightarrow G$ es una función sujeta a ciertos axiomas. En este capítulo asumiremos además que

$$(5.4) \quad g \quad \text{es inyectiva y} \quad \mathcal{R} = \mathcal{R}'.$$

Sea $0 \leq r \leq n$. Para cada subconjunto $Y = \{i_{j_1}, \dots, i_{j_r}\} \subseteq X$ de r elementos denotemos por $\mathcal{K}_Y$ a la subálgebra de $\widehat{\mathfrak{B}}_2(X, q) \# \mathbb{k}1$ generada por $x_{j_1}, \dots, x_{j_r}$. Para cada subálgebra coideal homogénea $\mathcal{K} \subset \widehat{\mathfrak{B}}_2(X, q) \# \mathbb{k}1$, denotamos por $\text{Stab } \mathcal{K}$ al subgrupo de G que la estabiliza. Fijamos $\mathcal{H} = \mathfrak{B}_2(X, q) \# \mathbb{k}G$.

PROPOSICIÓN 5.3. *Para cada conjunto $Y = \{i_{j_1}, \dots, i_{j_r}\} \subseteq X$ el álgebra $\mathcal{K}_Y$ es una subálgebra coideal homogénea de $\mathcal{H}$. Para cada tal elección, si llamamos $S_Y = \{g_i : i \in Y\}$, entonces*

$$\text{Stab } \mathcal{K}_Y = S_Y^G = \{h \in G : h S_Y h^{-1} = S_Y\}.$$

Más aún, si $\mathcal{K}$ es una subálgebra coideal homogénea de $\mathcal{H}$ generada en grado uno, entonces existe un único $Y \subseteq X$ tal que

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_Y.$$

En particular, el conjunto de subálgebras coideales a izquierda homogéneas generadas en grado uno de $\mathcal{H}$ dentro del álgebra $\widehat{\mathfrak{B}}_2(X, q) \# \mathbb{k}1$ está en correspondencia biyectiva con el conjunto 2^X de partes de X .

DEMOSTRACIÓN. Es claro que $\mathcal{K} = \mathcal{K}_Y$ es una subálgebra coideal homogénea. Ahora, para describir $\text{Stab } \mathcal{K}$ basta calcular el estabilizador del espacio vectorial $\mathbb{k}\{x_{j_1}, \dots, x_{j_r}\}$. Pero $h \cdot x_{j_k} = \chi_{j_k}(h) x_{h \cdot j_k}$, $k = 1, \dots, r$ y $x_{h \cdot j_k} \in \{x_{j_1}, \dots, x_{j_r}\}$ si y sólo si $h \cdot j_k \in \{j_1, \dots, j_r\}$, si y sólo si $g_{h \cdot j_k} = g_{j_l}$ para algún $l = 1, \dots, r$. Y la primera parte de la proposición se sigue ya que $g_{h \cdot j_k} = h g_{j_k} h^{-1}$.

Ahora, sea $\mathcal{K}$ una subálgebra coideal homogénea generada en grado uno. Si $\mathcal{K} = \mathbb{k}$ entonces claramente $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\emptyset$. Asumamos entonces que $\mathcal{K} \neq \mathbb{k}$. Como $\mathcal{K}(1)$ genera $\mathcal{K}$, tenemos que $\mathcal{K}(1) \neq 0$. Consideremos un elemento no nulo $y = \sum_i \lambda_i x_i \in \mathcal{K}(1)$, entonces

$$\Delta(y) = y \otimes 1 + \sum_i \lambda_i H_{g_i} \otimes x_i \Rightarrow \sum_i \lambda_i H_{g_i} \otimes x_i \in \mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{K}(1).$$

Sea $\sum_i \lambda_i H_{g_i} \otimes x_i = \sum_{t \in G} H_t \otimes \kappa_t$, $\kappa_t = \sum_{j \in X} \eta_{tj} x_j \in \mathcal{K}(1)$, $\eta_{tj} \in \mathbb{k}$, $\forall t, j$.

Como $H_t = H_{g_j}$ si y sólo si $t = g_j$ y $g_i = g_j$ si y sólo si $i = j$, para todo $i, j \in X$, $t \in G$, (5.4), entonces $\eta_{tk} = 0$ si $t \neq g_k$ para algún $k \in X$. Denotemos $\eta_{ij} = \eta_{g_i j}$, así,

$$\sum_i \lambda_i H_{g_i} \otimes x_i = \sum_{i,j} \eta_{ij} H_{g_i} \otimes x_j.$$

Por lo tanto, $\lambda_i \neq 0$ implica $\eta_{ij} = \delta_{i,j} \lambda_i$ y así $\kappa_i = x_i$. Así, $\{x_i \mid \lambda_i \neq 0\} \subset \mathcal{K}$, $\mathcal{K}(1) = \bigoplus_{x_i \in \mathcal{K}(1)} \mathbb{k}\{x_i\}$ y por lo tanto si $Y = \{i \in X : x_i \in \mathcal{K}(1)\}$ entonces

$\mathcal{K} = \mathcal{K}_Y$. Finalmente, si $Y \neq Y'$ entonces se sigue de la inyectividad de g que $\mathcal{K}_Y \not\cong \mathcal{K}_{Y'}$ como subálgebras coideales. $\square$

El siguiente lema general nos será útil en 5.2.1 para probar que ciertas subálgebras están generadas en grado uno. Dado un rack X , recordemos la noción de derivaciones δ_i , ver página 29, asociadas a cada elemento de la base canónica $\{e_i\}_{i \in X}$. Si $\{e^i\}_{i \in X}$ denota la base dual a esta base, entonces $\delta_i = (\text{id} \otimes e^i) \Delta$. Si $i \in X$ denotamos por X_i al conjunto $X \setminus \{i\}$, y así $\mathbb{k}X_i = \mathbb{k}\{x_j \mid j \in X_i\}$. Supongamos, además, que

$$(5.5) \quad q_{ii} = -1, \quad \forall i \in X.$$

Esta condición se satisface, por ejemplo, si $\dim \widehat{\mathfrak{B}}_2(X, q) < \infty$ o X es tal que $i \triangleright i = i$, por (5.4).

LEMA 5.4. *Sea $\mathcal{K} \subset \widehat{\mathfrak{B}}_2(X, q) \# \mathbb{k}$ una subálgebra coideal homogénea de $\mathcal{H}$. Sea $i \in X$ y supongamos que existe $\bar{\omega} \in \mathcal{K}$ tal que $\delta_i(\bar{\omega}) \neq 0$. Entonces $x_i \in \mathcal{K}(1)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\mathcal{K} = \bigoplus_s \mathcal{K}(s)$, $\omega \in T(\mathbb{k}X)$ e $i \in X$. En $\mathcal{H}$,

$$\omega = \alpha_i(\omega) + \beta_i(\omega)x_i, \quad \alpha_i(\omega), \beta_i(\omega) \in \mathcal{K}_{X_i}.$$

Basta ver esto para un monomio ω . Lo vemos por inducción en $\ell = \ell(\omega) \in \mathbb{N}$ tal que $\omega \in T^\ell(\mathbb{k}X)$. Si $\ell = 0$, o $\ell = 1$ esto es claro. Supongamos que vale para $\ell = n - 1$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Si $\ell(\omega) = n$ y $\omega = x_{j_1} \dots x_{j_n}$, caben dos posibilidades, esto es $j_1 \neq i$ o $j_1 = i$. En el primer caso, sea $\omega' = x_{j_2} \dots x_{j_n}$. Así, $\ell(\omega') \leq n - 1$ y por lo tanto existen $\alpha_i(\omega'), \beta_i(\omega') \in \mathcal{K}_{X_i}$ tales que $\omega' = \alpha_i(\omega') + \beta_i(\omega')x_i$. Como $x_{j_1}\alpha_i(\omega'), x_{j_1}\beta_i(\omega') \in \mathcal{K}_{X_i}$ la afirmación se sigue en este caso.

En el segundo caso, sea $j = j_2$ y notemos que $j \neq i$, por (5.5). Por (5.4), podemos considerar la relación

$$x_i x_j = q_{ij} x_{i \triangleright j} x_i - q_{ij} q_{i \triangleright j i} x_j x_{i \triangleright j}.$$

Así, si $\omega'' = x_{j_3} \dots x_{j_n}$, $\omega = q_{ij} x_{i \triangleright j} x_i \omega'' - q_{ij} q_{i \triangleright j i} x_j x_{i \triangleright j} \omega''$ y ambos sumandos pertenecen a $T(\mathbb{k}X_i) + T(\mathbb{k}X_i)x_i$ por lo visto en el caso anterior y así la afirmación se sigue.

Sea $\pi : \bigoplus_{s=0}^m \mathcal{H}(s) \otimes \mathcal{K}(m-s) \rightarrow \mathcal{H}(m-1) \otimes \mathcal{K}(1)$ la proyección lineal canónica. Sean $\omega \in T(\mathbb{k}X)$, $i \in X$ y $\alpha_i(\omega), \beta_i(\omega)$ como arriba. Entonces,

$$\pi \Delta(\omega) \in \beta_i(\omega) \otimes x_i + \bigoplus_{j \neq i} \mathcal{H} \otimes x_j.$$

Notemos entonces que $\delta_i(\omega) = \beta_i(\omega)$, y por lo tanto si $\delta_i(\omega) \neq 0$ se sigue que $x_i \in \mathcal{K}(1)$ utilizando (5.4) como en la prueba de la Proposición 5.3. $\square$

Introducimos la siguiente notación. Sea $Y \subset X$ un subconjunto y definamos

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_0^Y &= \{C \in \mathcal{R} : C \cap Y \times Y = \emptyset\}, \\ \mathcal{R}_1^Y &= \{C \in \mathcal{R} : |C \cap Y \times Y| = 1\}, \text{ y} \\ \mathcal{R}_2^Y &= \{C \in \mathcal{R} : C \subseteq Y \times Y\}.\end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 5.5. En los racks que estamos considerando, para cualquier subconjunto $Y \subseteq X$, se cumple que $\mathcal{R} = \mathcal{R}_0^Y \cup \mathcal{R}_1^Y \cup \mathcal{R}_2^Y$. Además, si $f \in \text{Stab } \mathcal{K}_Y$, entonces $f \cdot \mathcal{R}_s^Y \subseteq \mathcal{R}_s^Y$ para cualquier $s = 0, 1, 2$.

Recordemos la definición del polinomio cuadrático ϕ_C de la Definición 3.6, página 35. Con esta notación, recordemos también que una base para el ideal de relaciones de $\mathfrak{B}$ está dada por el conjunto $\{\phi_C : C \in \mathcal{R}'\}$, ver Lema 2.13 en la página 27.

DEFINICIÓN 5.6. Para $Y \subseteq X$, sea $\mathcal{T}_Y$ el álgebra asociativa libre en las variables $\{T_l\}_{l \in Y}$. Definimos $\vartheta_{C,Y}(\{T_l\}_{l \in Y})$ en $\mathcal{T}$ como

$$(5.6) \quad \vartheta_C(\{T_l\}_{l \in Y}) = \begin{cases} 0, & \text{si } C \in \mathcal{R}_0^Y; \\ T_i T_j T_i + q_{i \triangleright j, i} T_j T_i T_j, & \text{si } C \in \mathcal{R}_1^Y, (i, j) \in C \cap Y \times Y; \\ \phi_C(\{T_l\}_{l \in X}), & \text{si } C \in \mathcal{R}_2^Y. \end{cases}$$

Definimos el álgebra $\mathcal{L}_Y$ como sigue

$$(5.7) \quad \mathcal{L}_Y = \mathbb{k}\langle\{y_i\}_{i \in Y}\rangle / \langle\vartheta_{C,Y}(\{y_l\}_{l \in Y}) : C \in \mathcal{R}\rangle.$$

OBSERVACIÓN 5.7. Si $Y = X$, entonces $\mathcal{L}_X \cong \mathfrak{B}(X, q)$.

Tomemos $\mathfrak{B}$ una de las álgebras cuadráticas (de Nichols) $\widehat{\mathfrak{B}}_2(\mathcal{O}_2^n, -1)$, $\widehat{\mathfrak{B}}_2(\mathcal{O}_2^n, \chi)$, o $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_4^4, -1)$. En cada caso, sea $X = \mathcal{O}_2^n$, con $q = -1, \chi$ o $(X, q) = (\mathcal{O}_4^4, -1)$. Consideremos una realización de YD para (X, q) tal que (5.4) es satisfecha (por ejemplo, aquellas en la Observación 3.10). Fijemos $H = \mathfrak{B} \# \mathbb{k}G$.

TEOREMA 5.8. Sea $Y \subset X$. Entonces $\mathcal{L}_Y$ es una H -comódulo álgebra con coacción dada por

$$\delta(y_i) = g_i \otimes y_i + x_i \otimes 1, \quad i \in Y.$$

Existe un epimorfismo de H -comódulo álgebras $\mathcal{L}_Y \twoheadrightarrow \mathcal{K}_Y$, generado por la aplicación $y_i \mapsto x_i$, $i \in Y$. Más aún, si $n = 3$, esto es un isomorfismo y $\mathcal{L}_Y \cong \mathcal{K}_Y$.

DEMOSTRACIÓN. Las relaciones que definen a $\mathcal{L}_Y$ se satisfacen también en $\mathfrak{B}$. En efecto, sólo hay que chequear esto para el caso en que $C \in \mathcal{R}_1^Y$ ya que en los otros casos o bien $\vartheta_C = 0$ o bien $\vartheta_C = \phi_C$. Ahora, si $C \in \mathcal{R}_1^Y$ y $(i, j) \in C \cap Y \times Y$, sea $k = i \triangleright j$. Por la definición de $\mathcal{R}_1^Y$, tenemos que necesariamente $k \neq i, j$. Entonces, si multiplicamos la relación $x_i x_j -$

$q_{ij}x_{i \triangleright j}x_i + q_{ij}q_{i \triangleright j}ix_jx_{i \triangleright j} = 0$ por x_i a derecha y aplicamos a esta relación al resultado, obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= x_ix_jx_i + q_{ij}q_{i \triangleright j}ix_jx_{i \triangleright j}x_i = x_ix_jx_i + q_{i \triangleright j}ix_j(x_ix_j + q_{ij}q_{i \triangleright j}ix_jx_{i \triangleright j}) \\ &= x_ix_jx_i + q_{i \triangleright j}ix_jx_ix_j. \end{aligned}$$

Así, tenemos una proyección de álgebras $\pi : \mathcal{L}_Y \twoheadrightarrow \mathcal{K}_Y$. Es inmediato verificar que, para cada $C \in \mathcal{R}$,

$$\delta(\vartheta_{C,Y}(\{y_l\}_{l \in Y})) = \vartheta_{C,Y}(\{x_l\}_{l \in Y}) \otimes 1 + g_{C,Y} \otimes \vartheta_{C,Y}(\{y_l\}_{l \in Y}),$$

donde

$$g_{C,Y} = \begin{cases} 0, & \text{si } C \in \mathcal{R}_0^Y, \\ g_i g_j g_i & \text{si } C \in \mathcal{R}_1^Y, (i, j) \in C \cap Y \times Y, \\ g_i g_j & \text{si } C \in \mathcal{R}_2^Y, (i, j) \in C. \end{cases}$$

Así, δ dota a $\mathcal{L}_Y$ de una estructura de H -comódulo que hace de π un morfismo de comódulos.

Analizamos ahora el caso particular $n = 3$. Si $|Y| = 1$, el resultado es claro. Supongamos entonces que $Y = \{i, j\} \subset \mathcal{O}_2^3$. Notemos que la aplicación π es homogénea, y por lo tanto lo es el ideal $\ker(\pi)$. Si $\gamma \in \ker(\pi)$, $\pi(\gamma) = 0$ en $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_2^3, -1)$. Por la descripción del subespacio de relaciones de grado 2 del Lema 2.13, tenemos que necesariamente $\deg \gamma \geq 3$. Ahora, si $\deg \gamma = 3$,

$$\gamma = \alpha y_i y_j y_i + \beta y_j y_i y_j = (\alpha + \beta) y_j y_i y_j.$$

para $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$. Entonces, $\pi(\gamma) = 0$ implica que $\alpha = -\beta$ y $\gamma = 0$. Finalmente, podemos ver que no hay elementos $\gamma \in \mathcal{L}_Y$ con $\deg \gamma \geq 4$. En efecto, un elemento de grado 4 sería de la forma

$$\gamma = \alpha y_i y_j y_i y_j + \beta y_j y_i y_j y_i = \alpha y_i y_i y_j y_j + \beta y_j y_j y_i y_i = 0.$$

Esto muestra también que no hay elementos no nulos de grado mayor. Por lo tanto, $\mathcal{L}_Y = \mathcal{K}_Y$. $\square$

OBSERVACIÓN 5.9. Si $n \neq 3$, entonces en general $\mathcal{L}_Y \neq \mathcal{K}_Y$. En efecto, si $n = 4$, $q = -1$ y tomamos $Y = \{(13), (23), (34)\} \subseteq \mathcal{O}_2^4$, entonces resulta

$$\mathcal{L}_Y \cong \mathbb{k}\langle x, y, z : x^2, y^2, z^2, xyx - yxy, yzy - zyz, xzx - zxz \rangle.$$

Ahora, en la subálgebra de $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_2^4, -1)$ generada por $x = x_{(23)}$, $y = x_{(34)}$, $z = x_{(13)}$ tenemos la relación

$$\begin{aligned} (xyz)^2 &= x_{(23)}x_{(34)}x_{(13)}x_{(23)}x_{(34)}x_{(13)} \\ &= -x_{(23)}x_{(34)}(x_{(23)}x_{(12)} + x_{(12)}x_{(13)})x_{(34)}x_{(13)} \\ &= x_{(23)}x_{(34)}x_{(23)}x_{(34)}x_{(12)}x_{(13)} \\ &\quad + x_{(23)}x_{(12)}x_{(34)}x_{(13)}x_{(34)}x_{(13)} \\ &= x_{(23)}x_{(23)}x_{(34)}x_{(23)}x_{(12)}x_{(13)} \\ &\quad + x_{(23)}x_{(12)}x_{(34)}x_{(34)}x_{(13)}x_{(34)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

pero $(xyz)^2 \neq 0$ en $\mathcal{L}_Y$. Probamos esto usando el programa de computadora **[GAP]** con el paquete **[GBNP]**. Ver Proposición 5.12 (6), para una descripción de $\mathcal{K}_Y$ en este caso.

5.2.1. Subálgebras coideales de álgebras de Hopf sobre $\mathbb{S}_3$.

En esta parte daremos una descripción completa de todas las subálgebras coideales a izquierda homogéneas de $\mathcal{H} = \mathfrak{B}(\mathcal{O}_2^3, -1) \# \mathbb{k}\mathbb{S}_3$ dentro del álgebra $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\mathcal{O}_2^3, -1) \# \mathbb{k}1$.

Comenzamos mostrando en el siguiente teorema que estas subálgebras coideales están generadas en grado uno, usando el Lema 5.4 y por lo tanto, usando la Proposición 5.3, obtenemos una descripción de las mismas que explicitaremos luego en el Corolario 5.11.

TEOREMA 5.10. *Sea $\mathcal{K}$ una subálgebra coideal a izquierda homogénea de $\mathcal{H}$ tal que $\mathcal{K} \subseteq \mathfrak{B}$. Entonces $\mathcal{K}$ está generada en grado uno. En particular, $\mathcal{K} = \mathcal{K}_Y$ para un único $Y \subseteq X$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\omega \in \mathcal{K}$. Como $\mathcal{K}$ es homogénea y el grado máximo en $\mathfrak{B}$ es 4, tenemos que $\omega \in \mathcal{K}(i)$, $i = 0, \dots, 4$. Veamos que en cada caso resulta $\omega \in \langle \mathcal{K}(1) \rangle$. Los casos $i = 0, 1$ son claros. Utilizaremos las derivaciones $\{\delta_i\}_{i \in \mathcal{O}_2^3}$ y el Lema 5.4 para ver los casos restantes.

Recordemos, de [AG], que una base para $\mathfrak{B}$ está dada por

$$\mathcal{B} = \{1, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{12}a_{13}, a_{12}a_{23}, a_{13}a_{23}, a_{13}a_{12}, a_{12}a_{13}a_{23}, a_{12}a_{13}a_{12}, a_{13}a_{12}a_{23}, a_{12}a_{13}a_{12}a_{23}\}.$$

Ahora, si $\omega \in \mathcal{K}(2)$, $\omega \neq 0$, existen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{k}$ tales que

$$\omega = \alpha a_{12}a_{13} + \beta a_{12}a_{23} + \gamma a_{13}a_{23} + \delta a_{13}a_{12}$$

Ahora, supongamos que, por ejemplo, $\delta_{(12)}(\omega) = 0$, entonces

$$0 = \alpha g_{12}a_{13} + \beta g_{12}a_{23} + \delta a_{13}g_{12} = -\alpha a_{23}g_{12} - \beta a_{13}g_{12} + \delta a_{13}g_{12}.$$

Esto es,

$$\omega = \beta a_{12}a_{23} + \gamma a_{13}a_{23} + \beta a_{13}a_{12} = \beta a_{23}a_{13} + \gamma a_{13}a_{23}.$$

Se verifica entonces que $\delta_{(13)}(\omega) \neq 0$ y $\delta_{(23)}(\omega) \neq 0$, y por lo tanto tenemos que $a_{23}, a_{13} \in \mathcal{K}(1)$ y $\omega \in \langle \mathcal{K}(1) \rangle$. Lo mismo podemos concluir en los casos $\delta_{(13)}(\omega) = 0$ o $\delta_{(23)}(\omega) = 0$.

Ahora, si $\omega \in \mathcal{K}(3)$, existen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{k}$ tales que

$$\omega = \alpha a_{12}a_{13}a_{23} + \beta a_{12}a_{13}a_{12} + \gamma a_{13}a_{12}a_{23}.$$

Si, por ejemplo $\delta_{(23)}(\omega) = 0$, se sigue que $\omega = \beta a_{12}a_{13}a_{12}$. Así, $\delta_{(12)}(\omega) \neq 0$ y $\delta_{(13)}(\omega) \neq 0$ y por lo tanto $\omega \in \langle \mathcal{K}(1) \rangle$. Finalmente, si $\omega \in \mathcal{K}(4)$, se sigue que $\delta_i(\omega) \neq 0$ para cada $i \in \mathcal{O}_2^3$ y por lo tanto también $\omega \in \langle \mathcal{K}(1) \rangle$. La conclusión final del teorema se sigue de la Proposición 5.3. $\square$

Aplicaremos ahora el Teorema 5.10 junto con el Teorema 5.8 para describir explícitamente todas las subálgebras coideales a izquierda homogéneas de $\mathcal{H} = \mathfrak{B}(\mathcal{O}_2^3, -1) \# \mathbb{k}\mathbb{S}_3$ dentro del álgebra $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\mathcal{O}_2^3, -1) \# \mathbb{k}1$. También calcularemos sus subgrupos estabilizadores. Recordemos que para $n = 3$ el álgebra de Nichols coincide con su aproximación cuadrática y la única realización de YD es la que describimos en la Observación 3.10, en la página 37.

COROLARIO 5.11. *La siguiente es una lista de todas las subálgebras coideales a izquierda homogéneas propias de $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_2^3, -1) \# \mathbb{k}1$:*

1. $\mathcal{K}_i = \langle x_i \rangle \cong \mathbb{k}[x]/\langle x^2 \rangle$, $i \in \mathcal{O}_2^3$;
2. $\mathcal{K}_{i,j} = \langle x_i, x_j \rangle \cong \mathbb{k}\langle x, y \rangle / \langle x^2, y^2, xyx - yxy \rangle$, $i, j \in \mathcal{O}_2^3$.

Los subgrupos estabilizadores no triviales de $\mathbb{S}_3$ son, en cada caso

1. $\text{Stab } \mathcal{K}_i = \mathbb{Z}_2 \cong \langle i \rangle \subset \mathbb{S}_3$;
2. $\text{Stab } \mathcal{K}_{i,j} = \mathbb{Z}_2 \cong \langle k \rangle \subset \mathbb{S}_3$, $k \neq i, j$.

Mientras que las dimensiones son 2 y 6, respectivamente. $\square$

5.2.2. Subálgebras coideales de álgebras de Hopf sobre $\mathbb{S}_4$.

Aquí, con la ayuda del programa de computadora [GAP], con el paquete [GBNP], calcularemos las subálgebras coideales generadas en grado uno de las álgebras de Nichols de dimensión finita sobre $\mathbb{S}_4$, asociadas al rack $\mathcal{O}_2^4$. El caso del rack de 4-ciclos $\mathcal{O}_4^4$ puede tratarse también por esta vía.

Necesitamos establecer algunas notaciones y convenciones. Sea $\mathbb{k}\langle x, y, z \rangle$ el álgebra libre en las variables x, y, z . Fijamos los ideales

$$R^\pm(x, y, z) = \langle x^2, y^2, z^2, xy \pm zx + yz \rangle \subset \mathbb{k}\langle x, y, z \rangle.$$

Por ejemplo, tenemos

$$\mathfrak{B}(\mathcal{O}_2^3, -1) \cong \mathbb{k}\langle x_{(12)}, x_{(13)}, x_{(23)} \rangle / \langle R^+(x_{(12)}, x_{(13)}, x_{(23)}) \rangle.$$

De acuerdo a esto, fijemos

$$\mathfrak{B}_4^+ = \mathfrak{B}(\mathcal{O}_2^4, -1) \quad \text{y} \quad \mathfrak{B}_4^- = \mathfrak{B}(\mathcal{O}_2^4, \chi).$$

Recordemos que Y denota un subconjunto de $\mathcal{O}_2^4$.

PROPOSICIÓN 5.12. *Sea $\varepsilon = \pm$ y $\mathcal{K}^\varepsilon$ una subálgebra coideal a izquierda homogénea propia de $\mathfrak{B}_4^\varepsilon \# \mathbb{k}1$, generada en grado uno. Entonces $\mathcal{K}^\varepsilon$ es isomorfa a una de las álgebras en la siguiente lista:*

$$\dim \mathcal{K}^\varepsilon(1) = 1,$$

$$(1) \ Y = \{i\},$$

$$\mathcal{K}^\varepsilon = \mathbb{k}[x]/\langle x^2 \rangle,$$

$$\text{y } \dim \mathcal{K}^\varepsilon = 2.$$

$$\dim \mathcal{K}^\varepsilon(1) = 2,$$

$$(2) \ Y = \{i, j\}, \ i \triangleright j = j,$$

$$\mathcal{K}^\varepsilon = \mathbb{k}\langle x, z \rangle / \langle x^2, z^2, xz + \varepsilon zx \rangle,$$

$$\text{y } \dim \mathcal{K}^\varepsilon = 4.$$

$$(3) \ Y = \{i, j\}, \ i \triangleright j \neq j,$$

$$\mathcal{K}^\varepsilon = \mathbb{k}\langle x, y \rangle / \langle x^2, y^2, xyx - \varepsilon yxy \rangle,$$

$$\text{y } \dim \mathcal{K}^\varepsilon = 6.$$

$$\dim \mathcal{K}^\varepsilon(1) = 3:$$

$$(4) \ Y = \{i, j, k\}, \ i \triangleright j = k,$$

$$\mathcal{K}^\varepsilon = \mathbb{k}\langle x, y, z \rangle / \langle R^\varepsilon(x, y, z) \rangle,$$

$$\text{y } \dim \mathcal{K}^\varepsilon = 12.$$

$$(5) \ Y = \{i, j, k\}, \ i \triangleright j \neq j, k, \ i \triangleright k = k$$

$$\mathcal{K}_{i,j,k}^\varepsilon := \mathbb{k}\langle x, y, z \rangle / \langle x^2, y^2, z^2, xyx - \varepsilon yxy, zyz - \varepsilon yzy, xz + \varepsilon zx \rangle,$$

$$\text{y } \dim \mathcal{K}^\varepsilon = 24.$$

$$(6) Y = \{i, j, k\}, i \triangleright j, j \triangleright k, i \triangleright k \notin \{i, j, k\},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_Y^\varepsilon = \mathbb{k}\langle x, y, z : x^2, y^2, z^2, \\ yxy - \varepsilon xyx, zxz - \varepsilon xzx, zyz - \varepsilon yzy, \\ zxyz + yzxy + xyzx, zyxx + yxzy + xzyx \\ zxyxzx + \varepsilon yzxyxz, zxyxzy + \varepsilon xzxyxz \rangle, \end{aligned}$$

$$y \dim \mathcal{K}^\varepsilon = 48.$$

$$\dim \mathcal{K}^\varepsilon(1) = 4:$$

$$(7) Y = \{i, j, k, l\}, i \triangleright j = k, i \triangleright l = l;$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_Y^\varepsilon = \mathbb{k}\langle x, y, z, w : x^2, y^2, z^2, w^2, \\ zx + \varepsilon yz + \varepsilon xy, zy + yx + \varepsilon xz, wz + \varepsilon zw, \\ yxy - \varepsilon xyx, wxw - \varepsilon xwx, wyw - \varepsilon ywy, \\ wyx + \varepsilon wxz - \varepsilon zwy, wyz + wxz - zwz \\ wxyz - zwxz, wxzw + xwxz, \\ wxyw + ywxy + xywx, wxyxz - \varepsilon zwxyx, \\ wxyxwx + \varepsilon ywxyxw, wxyxwy + \varepsilon xwxyxw \rangle, \end{aligned}$$

$$y \dim \mathcal{K}^\varepsilon = 96.$$

$$(8) Y = \{i, j, k, l\}, i \triangleright j \neq j, k, i \triangleright k = k, j \triangleright l = l,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_Y^\varepsilon = \mathbb{k}\langle x, y, z, w : x^2, y^2, z^2, w^2, zy + \varepsilon yz, wx + \varepsilon xw, \\ yxy - \varepsilon xyx, zxz - \varepsilon xzx, wyw - \varepsilon ywy, wz w - \varepsilon zwz, \\ zxyx + yzxy, zxyz + \varepsilon xzxy, \\ wyx - \varepsilon zwy - yxz + \varepsilon xzw, wzx - \varepsilon zxy - ywz + \varepsilon xyw, \\ wyzxy - \varepsilon ywyzx - xyzwy + xyxzw, \\ wyzwx + zxywz - yxzwy - xwyzx, \\ wyz w - \varepsilon zxwz - yzwx + yxwy + \varepsilon xwyz - \varepsilon xyzx \rangle, \end{aligned}$$

$$y \dim \mathcal{K}^\varepsilon = 144.$$

$$\dim \mathcal{K}^\varepsilon(1) = 5:$$

$$(9) Y = \{i, j, k, l, m\}, i \triangleright j = k, i \triangleright l = m, j \triangleright l \neq l, k \triangleright m \neq m, \\ j \triangleright m = m, k \triangleright l = l,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^\varepsilon = \mathbb{k}\langle x, y, z, w, u : x^2, y^2, z^2, w^2, u^2, wz + \varepsilon zw, uy + \varepsilon yu, \\ zx + \varepsilon yz + \varepsilon xy, zy + yx + \varepsilon xz, \\ ux + \varepsilon wu + \varepsilon xw, uw + wx + \varepsilon xu, \\ yxy - \varepsilon xyx, wxw - \varepsilon xwx, wyw - \varepsilon ywy, uzu - \varepsilon zuz, \\ wyx + \varepsilon wxz - \varepsilon zwy, wyz + wxz - zwz, \\ uz w - \varepsilon wxz - xuz, wxyz - zwxz, \\ wxyw + ywxy + xywx, \\ wxyxz - \varepsilon zwxyx, wxzw + xwxz, \\ wxyxwx + \varepsilon ywxyxw, wxyxwy + \varepsilon xwxyxw \rangle, \end{aligned}$$

$$y \dim \mathcal{K}^\varepsilon = 288.$$

Los subgrupos no triviales de $\mathbb{S}_4$ que fijan cada subálgebra son, en cada caso, los siguientes:

1. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong \langle g_i, g_j \rangle \subset \mathbb{S}_4$ con $i \triangleright j = j$;
2. $D_4 \cong \langle g_i, \sigma \rangle \subset \mathbb{S}_4$ (si, e.g., $g_i = (12)$, $\sigma = (1324)$);
3. $\mathbb{Z}_2 \cong \langle g_k \rangle \subset \mathbb{S}_4$, $k = i \triangleright j$.
4. $\mathbb{S}_3 \cong \langle g_i, g_j, g_k \rangle \subset \mathbb{S}_4$, $i \triangleright j = k$;
5. $\mathbb{Z}_2 \cong \langle g_j g_l \rangle$, $j \neq l$, $j \triangleright l = l$;
6. $\mathbb{S}_3 \cong \langle g_{i \triangleright j}, g_{j \triangleright k}, g_{k \triangleright i} \rangle \subset \mathbb{S}_4$;
7. Si $\mathcal{K}^\varepsilon$ pertenece a los ítems (7) a (8) entonces $\text{Stab } \mathcal{K}^\varepsilon = 1$. $\square$

EJEMPLOS 5.13. Damos un ejemplo de un subconjunto $Y \subseteq \mathcal{O}_2^4$ para cada caso de la proposición anterior, para ilustrar. Notar que toda comódulo álgebra $\mathcal{K}_{Y'}$ tal que Y' no está en la siguiente lista, es $\mathbb{S}_4$ -conjugada a otra, $\mathcal{K}_Y$, con Y un conjunto en la lista.

1. $Y = \{(12)\}$,
2. $Y = \{(12), (34)\}$,
3. $Y = \{(12), (13)\}$,
4. $Y = \{(12), (13), (23)\}$,
5. $Y = \{(12), (13), (34)\}$,
6. $Y = \{(12), (13), (14)\}$,
7. $Y = \{(12), (13), (23), (14)\}$,
8. $Y = \{(12), (13), (24), (34)\}$,
9. $Y = \{(12), (13), (23), (14), (24)\}$. $\square$

OBSERVACIÓN 5.14. Sea $Y \subset \mathcal{O}_2^4$ y sea $Z \subset \mathcal{O}_2^4$ tal que $\mathcal{O}_2^4 = Y \sqcup Z$, como conjuntos. Denotemos por Y_j a uno de los subconjuntos del ítem j de la Proposición 5.12, y por Z_j al complemento correspondiente. Notar que tenemos las siguientes biyecciones:

$$Z_1 \cong Y_9, \quad Z_2 \cong Y_8, \quad Z_3 \cong Y_7, \quad Z_4 \cong Y_6, \quad Z_5 \cong Y_5$$

y por lo tanto, tenemos que $\dim \mathcal{K}_Y \dim \mathcal{K}_Z = \dim \mathfrak{B}^\varepsilon$, para cada Y . Una afirmación análoga se satisface en el caso $X = \mathcal{O}_4^4$.

5.3. Comódulo álgebras sobre álgebras de Hopf sobre $\mathbb{S}_n$

En esta subsección construiremos $\mathcal{H}$ -comódulo álgebras como levantamientos de las subálgebras coideales consideradas arriba.

5.3.1. $\widehat{\mathfrak{B}}_2(X, q) \# \mathbb{k}G$ -comódulo álgebras.

Sea $\mathcal{Q} = (X, q, G, (\cdot, g, (\chi_i)_{i \in X}), (\lambda_C)_{C \in \mathcal{R}'})$ uno de los ql-datos $\mathcal{Q}_n^{-1}[t]$, $\mathcal{Q}_n^X[\lambda]$, $n \geq 4$, o $\mathcal{D}[t]$. Sea $\mathcal{H} = \widehat{\mathfrak{B}}_2(X, q) \# \mathbb{k}G$.

Construiremos una familia de álgebras asociada a triples (Y, F, ψ) , donde $Y \subseteq X$ es un subconjunto, $F \leq G$ es un subgrupo y $\psi \in Z^2(F, \mathbb{k}^\times)$. Bajo algunas hipótesis, estas álgebras poseen una estructura de $\mathcal{H}$ -comódulo álgebras.

Estas familias son lo suficientemente generales para clasificar las representaciones de las categorías de módulos en nuestros casos.

DEFINICIÓN 5.15. Sean $F < G$ un subgrupo y $\psi \in Z^2(F, \mathbb{k}^\times)$. Sea $Y \subseteq X$ un subconjunto tal que $F \cdot Y \subseteq Y$, esto es $F < \text{Stab } \mathcal{K}_Y$. Una familia de

escalares $\xi = \{\xi_C\}_{C \in \mathcal{R}}$, $\xi_C \in \mathbb{k}$ es *compatible* con el triple (Y, F, ψ) si para cualquier $f \in \text{Stab } \mathcal{K}_Y$,

$$(5.8) \quad \xi_{f \cdot C} \chi_i^2(f) \chi_j(f) = \xi_C \psi(f, g_i g_j g_i) \psi(f g_i g_j g_i, f^{-1}), \quad \text{si } C \in \mathcal{R}_1^Y,$$

$$(5.9) \quad \xi_{f \cdot C} \chi_i(f) \chi_j(f) = \xi_C \psi(f, g_i g_j) \psi(f g_i g_j, f^{-1}), \quad \text{si } C \in \mathcal{R}_2^Y,$$

y además ξ está normalizada por las condiciones

$$(5.10) \quad \xi_C = 0, \quad \text{si } C \in \mathcal{R}_1^Y, (i, j) \in C, \text{ y } g_i g_j g_i \notin F,$$

$$(5.11) \quad \xi_{C_i} = \xi_{C_j} = 0, \quad \text{si } C \in \mathcal{R}_1^Y \text{ y } (i, j) \in C,$$

$$(5.12) \quad \xi_C = 0, \quad \text{si } C \in \mathcal{R}_2^Y, (i, j) \in C \text{ y } g_i g_j \notin F.$$

DEFINICIÓN 5.16. Sean $F < G$ un subgrupo, $\psi \in Z^2(F, \mathbb{k}^\times)$, $Y \subseteq X$ un subconjunto tal que $F \cdot Y \subseteq Y$ y sea $\xi = \{\xi_C\}_{C \in \mathcal{R}'}$ compatible con (Y, F, ψ) . $\mathcal{A}(Y, F, \psi, \xi)$ es el álgebra generada por $\{y_l, e_f : l \in Y, f \in F\}$ y relaciones

$$(5.13) \quad e_1 = 1,$$

$$(5.14) \quad e_r e_s = \psi(r, s) e_{rs}, \quad r, s \in F,$$

$$(5.15) \quad e_f y_l = \chi_l(f) y_{f \cdot l} e_f, \quad f \in F, l \in Y,$$

$$(5.16) \quad \vartheta_{C,Y}(\{y_l\}_{l \in X}) = \begin{cases} \xi_C e_C & \text{si } e_C \in F \\ 0 & \text{si } e_C \notin F \end{cases} \quad C \in \mathcal{R}.$$

Aquí, $\vartheta_{C,Y}$ se definió en (5.6) y el elemento e_C se define como

$$(5.17) \quad e_C = \begin{cases} 0, & \text{si } C \in \mathcal{R}_0^Y, \\ e_{g_i g_j g_i} & \text{si } C \in \mathcal{R}_1^Y, (i, j) \in C \cap Y \times Y, \\ e_{g_i g_j} & \text{si } C \in \mathcal{R}_2^Y, (i, j) \in C. \end{cases}$$

Si $Z \subseteq X$ es un subconjunto F -invariante sea $\mathcal{B}(Z, F, \psi, \xi)$ la subálgebra de $\mathcal{A}(X, F, \psi, \xi)$ generada por $\{y_l, e_f : l \in Z, f \in F\}$.

OBSERVACIONES 5.17. (a) Aplicando $ad(f)$, $f \in \text{Stab } \mathcal{K}_Y$ a la ecuación (5.16) podemos deducir las ecuaciones (5.9), (5.8).

(b) En general, podemos tener $\mathcal{B}(Z, F, \psi, \xi) \neq \mathcal{A}(Z, F, \psi, \xi)$.

Sea $\delta : \mathcal{A}(Y, F, \psi, \xi) \rightarrow \mathcal{H} \otimes \mathcal{A}(Y, F, \psi, \xi)$ la aplicación definida por

$$(5.18) \quad \delta(e_f) = f \otimes e_f, \quad \delta(y_l) = x_l \otimes 1 + g_l \otimes y_l,$$

para cada $f \in F, l \in Y$.

PROPOSICIÓN 5.18. $\mathcal{A}(Y, F, \psi, \xi)$ es una $\mathcal{H}$ -comódulo álgebra a izquierda con coacción δ como en (5.18) y $\mathcal{B}(Z, F, \psi, \xi)$ es una subcomódulo álgebra de $\mathcal{A}(X, F, \psi, \xi)$.

DEMOSTRACIÓN. Veamos primero que la aplicación δ está bien definida. Es fácil ver que $\delta(e_f y_l) = \chi_l(f) \delta(y_{f \cdot l} e_g)$ para cualesquiera $f \in F, l \in X$.

Sea $C \in \mathcal{R}_2^Y$ y $(i, j) \in C$. En este caso $\vartheta_C = \phi_C$. Probaremos que $\delta(\phi_C(\{y_l\}_{l \in X})) = \delta(\xi_C e_{g_i g_j})$. Usando la definición del polinomio ϕ_C obtenemos que

$$\begin{aligned} \delta(\phi_C(\{y_l\}_{l \in X})) &= \sum_{h=1}^{n(C)} \eta_h(C) x_{i_{h+1}} x_{i_h} \otimes 1 + x_{i_{h+1}} g_{i_h} \otimes y_{i_h} \\ &\quad + g_{i_{h+1}} x_{i_h} \otimes y_{i_{h+1}} + g_{i_{h+1}} g_{i_h} \otimes y_{i_{h+1}} y_{i_h} \\ &= \phi_C(\{x_l\}_{l \in X}) \otimes 1 + g_i g_j \otimes \phi_C(\{y_l\}_{l \in X}) \\ &= \xi_C g_i g_j \otimes e_{g_i g_j} = \delta(\xi_C e_{g_i g_j}). \end{aligned}$$

La segunda igualdad se sigue ya que $i_{n(C)+1} = i_1$ y

$$g_{i_{h+1}} x_{i_h} = q_{i_{h+1} i_h} x_{i_{h+2}} g_{i_{h+1}}, \quad \eta_h(C) q_{i_{h+1} i_h} = -\eta_{h+1}(C).$$

Ahora, sean $C \in \mathcal{R}_1^Y$, $(i, j) \in C$ y $i \triangleright j \notin Y$. En este caso la relación (5.16) es $y_i y_j y_i - y_j y_i y_j = \xi_C e_{g_i g_j g_i}$. La prueba de que

$$\delta(y_i y_j y_i - y_j y_i y_j) = \xi_C \delta(e_{g_i g_j g_i})$$

se verifica con una cuenta directa. Notar que la hipótesis $\xi_{C_i} = \xi_{C_j} = 0$ implica que $y_i^2 = 0 = y_j^2$. $\square$

TEOREMA 5.19. *Sea $Y \subseteq X$ un subconjunto F -invariante y supongamos que $\mathcal{A}(X, F, \psi, \xi) \neq 0$, entonces se satisfacen las siguientes afirmaciones:*

1. $\mathcal{A}(X, G, \psi, \xi)$ es un $\mathcal{H}$ -objeto de Galois a izquierda.
2. Si $\psi \equiv 1$ y ξ satisface

$$(5.19) \quad \xi_C = \begin{cases} -\lambda_C & \text{si } \lambda_C \neq 0, \\ 0 & \text{si } \lambda_C = 0 \text{ y } g_j g_i \neq 1, \\ \text{arbitrario} & \text{si } \lambda_C = 0 \text{ y } g_j g_i = 1. \end{cases}$$

entonces $\mathcal{A}(X, G, 1, \xi)$ es un objeto $(\mathcal{H}, \mathcal{H}(\mathcal{Q}))$ -biGalois.

3. $\mathcal{B}(Y, F, \psi, \xi)_0 = \mathbb{K}_\psi F$ y luego $\mathcal{B}(Y, F, \psi, \xi)$ es una $\mathcal{H}$ -comódulo álgebra a izquierda $\mathcal{H}$ -simple a derecha.
4. Existe un isomorfismo $\text{gr } \mathcal{B}(Y, F, \psi, \xi) \simeq \mathcal{K}_Y \# \mathbb{K}_\psi F$ de comódulo álgebras.
5. Existe un isomorfismo $\mathcal{B}(Y, F, \psi, \xi) \simeq \mathcal{B}(Y', F', \psi', \xi')$ de comódulo álgebras si y sólo si $Y = Y'$, $F = F'$, $\psi = \psi'$ y $\xi = \xi'$.

DEMOSTRACIÓN. 1. Para probar que $\mathcal{A}(X, G, \psi, \xi)$ es una extensión de Galois probaremos que el mapa canónico

$$\text{can} : \mathcal{A}(X, G, \psi, \xi) \otimes \mathcal{A}(X, G, \psi, \xi) \rightarrow \mathcal{H} \otimes \mathcal{A}(X, G, \psi, \xi),$$

$\text{can}(x \otimes y) = x_{-1} \otimes x_0 y$, es suryectivo. Esto se sigue ya que

$$\text{can}(e_f \otimes e_{f^{-1}}) = f \otimes 1, \quad \text{can}(y_l \otimes 1 - e_{g_l} \otimes e_{g_l^{-1}} y_l) = x_l \otimes 1,$$

para todo $f \in G$, $l \in X$.

2. Definamos el mapa $\rho : \mathcal{A}(X, G, 1, \xi) \rightarrow \mathcal{A}(X, G, 1, \xi) \otimes \mathcal{H}(\mathcal{Q})$, por

$$\rho(e_f) = e_f \otimes H_f, \quad \rho(y_l) = y_l \otimes 1 + e_{g_l} \otimes a_l, \quad l \in X, f \in G.$$

ρ está bien definido. En efecto, si $C \in \mathcal{R}$ y $(i, j) \in C$ entonces

$$\begin{aligned} \rho(\phi_C(\{y_l\}_{l \in X})) &= \phi_C(\{y_l\}_{l \in X}) \otimes 1 + e_{g_i g_j} \otimes \phi_C(\{a_l\}_{l \in X}) \\ &= \xi_C e_{g_i g_j} \otimes 1 + \lambda_C e_{g_i g_j} \otimes (1 - H_{g_i g_j}). \end{aligned}$$

Claramente si ξ satisface (5.19) entonces $\rho(\phi_C(\{y_l\}_{l \in X})) = \xi_C \rho(e_{g_i g_j})$. La prueba de que $\mathcal{A}(X, G, 1, \xi)$ es un $(\mathcal{H}, \mathcal{H}(\mathcal{Q}))$ -bicomódulo y un $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ -objeto de Galois a derecha se sigue con una verificación inmediata.

3. Si $\mathcal{A}(X, F, \psi, \xi) \neq 0$ entonces existe un grupo $\bar{F}$ con una proyección $F \rightarrow \bar{F}$ tal que $\mathcal{A}(X, F, \psi, \xi)_0 = \mathbb{k}_{\bar{\psi}} \bar{F}$. El mapa

$$\mathcal{A}(X, F, \psi, \xi)_0 \otimes \mathcal{A}(X, F, \psi, \xi)_0 \rightarrow \mathbb{k}F \otimes \mathcal{A}(X, F, \psi, \xi)_0$$

definido por $e_f \otimes e_g \mapsto f \otimes \psi(f, g) e_{fg}$ es suryectivo. Por lo tanto $F = \bar{F}$. Esto implica que $\mathcal{B}(Z, F, \psi, \xi)_0 = \mathbb{k}_{\psi} F$ y por [M1, Proposition 4.4] se sigue que $\mathcal{B}(Z, F, \psi, \xi)$ es una $\mathcal{H}$ -comódulo álgebra a izquierda $\mathcal{H}$ -simple a derecha.

4. Se sigue del Teorema 1.70 (3) que $\text{gr } \mathcal{B}(Y, F, \psi, \xi) \simeq \mathcal{K} \# \mathbb{k}_{\psi} F$ para alguna subálgebra coideal a izquierda homogénea $\mathcal{K} \subseteq \widehat{\mathfrak{B}}_2(X, q)$. Recordemos que $\mathcal{K}$ se identifica con la subálgebra de $\text{gr } \mathcal{B}(Y, F, \psi, \xi)$ dada por

$$\{a \in \text{gr } \mathcal{B}(Y, F, \psi, \xi) : (\text{id} \otimes \pi)\delta(a) \in \mathcal{H} \otimes 1\},$$

ver [M1, Proposición 7.3 (3)]. En *loc. cit.* también se prueba que la composición

$$\text{gr } \mathcal{B}(Y, F, \psi, \xi) \xrightarrow{(\theta \otimes \pi)\delta} \mathcal{K} \# \mathbb{k}_{\psi} F \xrightarrow{\mu} \text{gr } \mathcal{B}(Y, F, \psi, \xi),$$

es el mapa identidad, donde

$$\theta : \mathcal{H} \rightarrow \widehat{\mathfrak{B}}_2(X, q), \quad \pi : \text{gr } \mathcal{B}(Y, F, \psi, \xi) \rightarrow \mathbb{k}_{\psi} F$$

son las proyecciones canónicas y μ es la multiplicación. Ambos mapas son biyecciones y ya que para cualquier $l \in Y$, $(\theta \otimes \pi)\delta(y_l) = x_l$, entonces $\mathcal{K} = \mathcal{K}_Y$.

5. Sea $\beta : \mathcal{B}(Y, F, \psi, \xi) \rightarrow \mathcal{B}(Y', F', \psi', \xi')$ un isomorfismo de comódulo álgebras. La restricción de β a $\mathcal{B}(Y, F, \psi, \xi)_0$ induce un isomorfismo entre $\mathbb{k}_{\psi} F$ y $\mathbb{k}_{\psi'} F'$, así $F = F'$ y $\psi = \psi'$. Como β es un morfismo de comódulos es claro que $Y = Y'$ y $\xi_C = \xi'_C$ para toda $C \in \mathcal{R}$. □

5.4. Deformaciones por cociclo

En esta parte demostraremos que las álgebras de Hopf punteadas sobre $\mathbb{S}_3$ y $\mathbb{S}_4$ son deformaciones por cociclo de sus versiones graduadas. Para ello utilizaremos el siguiente corolario del Teorema 5.19.

COROLARIO 5.20. *Si $\mathcal{A}(X, G, 1, \xi) \neq 0$ para algún ξ que satisfaga (5.19), entonces*

1. *Las álgebras de Hopf $\widehat{\mathfrak{B}}_2(X, q) \# \mathbb{k}G$, $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ son deformaciones por cociclo una de la otra.*
2. *Existe una correspondencia biyectiva entre las clases de equivalencia de categorías módulo exactas sobre $\text{Rep}(\mathcal{H})$ y $\text{Rep}(\mathcal{H}(\mathcal{Q}))$.* □

OBSERVACIÓN 5.21. Notemos que bajo las hipótesis del Corolario 5.20, obtenemos, en particular, que $\text{gr } \mathcal{H}(\mathcal{Q}) = \widehat{\mathfrak{B}}_2(X, q) \# \mathbb{k}G$, ya que esta última es un cociente de la anterior.

Veremos que las álgebras de Hopf sobre $\mathbb{S}_3$ y $\mathbb{S}_4$ son deformaciones por cociclo de sus versiones graduadas. Para ello utilizaremos el Corolario 5.20. Necesitamos entonces, para $X = \mathcal{O}_2^n$ y $G = \mathbb{S}_n$, $n = 3, 4$ según corresponda, mostrar que existen comódulo álgebras $\mathcal{A}(X, G, 1, \xi)$ no nulas. Esto será el corazón de las siguientes dos subsecciones.

5.4.1. Comódulo álgebras sobre álgebras de Hopf sobre $\mathbb{S}_3$.

Sean $n = 3$, $\mathcal{H} = \mathfrak{B}(\mathcal{O}_2^3, -1) \# \mathbb{k}\mathbb{S}_3$. Listamos a continuación todas las álgebras $\mathcal{A}(Y, F, \psi, \xi)$ construidas como en la Definición 5.16 para este caso. Luego, mostramos que estas álgebras son no nulas. Así, combinando este resultado con el Teorema 5.8, se sigue que obtenemos todas las $\mathcal{H}$ -comódulo álgebras $\mathcal{H}$ -simples.

DEFINICIÓN 5.22. Sea $n = 3$. La siguiente es una lista de las álgebras $\mathcal{A}(Y, F, \psi, \xi)$ para cada dato (Y, F, ψ, ξ) como arriba. En lo que sigue, i, j, k denotan elementos en $\mathcal{O}_2^3$ y $\xi, \mu, \eta \in \mathbb{k}$. Para cada $i \in \mathcal{O}_2^3$ denotaremos por g_i al elemento i pensado como un elemento en el grupo $\mathbb{S}_3$.

1. Las álgebras de grupo torcidas

$$\mathbb{k}_\psi F,$$

para cada subgrupo $F \subseteq \mathbb{S}_3$, y cada 2-cociclo $\psi \in Z^2(F, \mathbb{k}^\times)$.

2. El álgebra

$$\mathcal{A}(\{i\}, \xi, 1) = \langle y_i : y_i^2 = \xi 1 \rangle,$$

con coacción determinada por

$$\delta(y_i) = x_i \otimes 1 + g_i \otimes y_i.$$

3. El álgebra

$$\mathcal{A}(\{i\}, \xi, \mathbb{Z}_2) = \langle y_i, h : y_i^2 = \xi 1, h^2 = 1, hy_i = -y_i h \rangle$$

con coacción determinada por

$$\delta(y_i) = x_i \otimes 1 + g_i \otimes y_i, \quad \delta(h) = g_i \otimes h.$$

4. El álgebra

$$\mathcal{A}(\{i, j\}, 1) = \langle y_i, y_j : y_i^2 = y_j^2 = 0, y_i y_j y_i = y_j y_i y_j \rangle$$

con coacción determinada por

$$\delta(y_i) = x_i \otimes 1 + g_i \otimes y_i, \quad \delta(y_j) = x_j \otimes 1 + g_j \otimes y_j.$$

5. El álgebra

$$\mathcal{A}(\{i, j\}, \mathbb{Z}_2) = \langle y_i, y_j, h : h^2 = 1, hy_i = -y_j h,$$

$$y_i^2 = y_j^2 = 0, y_i y_j y_i = y_j y_i y_j \rangle$$

con coacción determinada por

$$\delta(h) = g_k \otimes h, \quad k \neq i, j,$$

$$\delta(y_i) = x_i \otimes 1 + g_i \otimes y_i, \quad \delta(y_j) = x_j \otimes 1 + g_j \otimes y_j.$$

6. El álgebra $\mathcal{A}(\mathcal{O}_2^3, \xi, 1)$, generada por $\{y_{(12)}, y_{(13)}, y_{(23)}\}$ sujeta a las relaciones

$$\begin{aligned} y_{(12)}^2 &= y_{(13)}^2 = y_{(23)}^2 = \xi 1, \\ y_{(12)}y_{(13)} + y_{(13)}y_{(23)} + y_{(23)}y_{(12)} &= 0, \\ y_{(13)}y_{(12)} + y_{(23)}y_{(13)} + y_{(12)}y_{(23)} &= 0. \end{aligned}$$

La coacción está determinada por

$$\delta(y_s) = x_s \otimes 1 + g_s \otimes y_s$$

para cada $s \in \mathcal{O}_2^3$.

7. El álgebra $\mathcal{A}(\mathcal{O}_2^3, \xi, \mathbb{Z}_2)$, generada por $\{y_{(12)}, y_{(13)}, y_{(23)}, h\}$ sujeta a relaciones

$$\begin{aligned} y_{(12)}^2 &= y_{(13)}^2 = y_{(23)}^2 = \xi 1, \quad h^2 = 1, \\ hy_{(12)} &= -y_{(12)}h, \quad hy_{(13)} = -y_{(23)}h, \\ y_{(12)}y_{(13)} + y_{(13)}y_{(23)} + y_{(23)}y_{(12)} &= 0. \end{aligned}$$

La coacción está determinada por

$$\begin{aligned} \delta(h) &= g_{(12)} \otimes h, \\ \delta(y_s) &= x_s \otimes 1 + g_s \otimes y_s, \end{aligned}$$

para cualquier $s \in \mathcal{O}_2^3$.

8. El álgebra $\mathcal{A}(\mathcal{O}_2^3, \xi, \mu, \eta, \mathbb{Z}_3)$, por $\{y_{(12)}, y_{(13)}, y_{(23)}, h\}$ sujeta a relaciones

$$\begin{aligned} y_{(12)}^2 &= y_{(13)}^2 = y_{(23)}^2 = \xi 1, \quad h^3 = 1, \\ hy_{(12)} &= y_{(13)}h, \quad hy_{(13)} = y_{(23)}h, \quad hy_{(23)} = y_{(12)}h, \\ y_{(12)}y_{(13)} + y_{(13)}y_{(23)} + y_{(23)}y_{(12)} &= \mu h, \\ y_{(13)}y_{(12)} + y_{(23)}y_{(13)} + y_{(12)}y_{(23)} &= \eta h^2. \end{aligned}$$

La coacción está determinada por

$$\begin{aligned} \delta(h) &= g_{(132)} \otimes h, \\ \delta(y_s) &= x_s \otimes 1 + g_s \otimes y_s, \quad s \in \mathcal{O}_2^3. \end{aligned}$$

9. Para $\psi \in Z^2(\mathbb{S}_3, \mathbb{k}^\times)$ el álgebra $\mathcal{A}(\mathcal{O}_2^3, \xi, \mu, \mathbb{S}_3, \psi)$, generada por elementos $\{y_{(12)}, y_{(13)}, y_{(23)}\} \cup \{e_h : h \in \mathbb{S}_3\}$ sujeta a relaciones

$$\begin{aligned} e_h e_t &= \psi(h, t) e_{ht}, \quad e_h y_s = -y_{h \cdot s} e_h \quad h, t \in \mathbb{S}_3, s \in \mathcal{O}_2^3, \\ y_{(12)}^2 &= y_{(13)}^2 = y_{(23)}^2 = \xi 1, \\ y_{(12)}y_{(13)} + y_{(13)}y_{(23)} + y_{(23)}y_{(12)} &= \mu e_{(123)}. \end{aligned}$$

La coacción está determinada por

$$\begin{aligned} \delta(e_h) &= h \otimes e_h, \\ \delta(y_s) &= x_s \otimes 1 + g_s \otimes y_s, \quad s \in \mathcal{O}_2^3. \quad \square \end{aligned}$$

LEMA 5.23. Sea $n = 3$. $\mathcal{A} = \mathcal{A}(Y, F, \psi, \xi) \neq 0$, para todo $Y \subseteq X$, $F \leq \mathbb{S}_3$, $\psi \in Z^2(F, \mathbb{k}^\times)$ y toda familia ξ de escalares compatible con el triple (Y, F, ψ) .

DEMOSTRACIÓN. El caso $Y \neq \mathcal{O}_2^3$ es claro. Consideremos entonces el caso $Y = \mathcal{O}_2^3$. Notemos que cada una de estas álgebras es naturalmente un $\mathbb{k}F$ -módulo a derecha vía

$$a \leftarrow t = ae_t, \quad a \in \mathcal{A}(Y, F, \psi, \xi), \quad t \in F.$$

Consideremos la representación inducida $W = \mathcal{A}(Y, F, \psi, \xi) \otimes_{\mathbb{k}F} W_\epsilon$, donde $W_\epsilon = \mathbb{k}\{z\}$ es el $\mathbb{k}F$ -módulo trivial. Sea

$$B = \{1, y_{(12)}, y_{(13)}, y_{(23)}, y_{(13)}y_{(12)}, y_{(12)}y_{(13)}, y_{(12)}y_{(23)}, y_{(13)}y_{(23)}, \\ y_{(12)}y_{(13)}y_{(23)}, y_{(13)}y_{(12)}y_{(23)}, y_{(12)}y_{(13)}y_{(12)}, y_{(12)}y_{(13)}y_{(23)}y_{(12)}y_{(23)}\}$$

y consideremos el subespacio lineal V de W generado por $B \otimes z$. Mostramos que es un submódulo no trivial en los cuatro casos que restan, esto es cuando $F = 1, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$ o $\mathbb{S}_3$. En todos estos casos, la acción de $y_{(12)}$ está determinada por la matriz

$$y_{(12)} = \begin{bmatrix} 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ahora, tomemos $F = \mathbb{S}_3$, $\psi \equiv 1$. La acción de $e_{(12)}$ y $e_{(13)}$ está determinada, respectivamente, por las matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & \xi & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu & -\mu & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Notemos que la acción de $e_{(23)}$ está dada por $e_{(12)}e_{(13)}e_{(12)}$. Para cada cociclo $\psi \in Z^2(\mathbb{S}_3, \mathbb{k}^\times)$, definamos $\tilde{\psi} \in Z^2(\mathcal{A}(Y, F, 1, \xi), \mathbb{k}^\times)$, por

$$(5.20) \quad \tilde{\psi}(e_t, e_s) = \psi(t, s), \quad \tilde{\psi}(e_t, y_l) = \tilde{\psi}(y_l, e_t) = \tilde{\psi}(y_l, y_k) = 0,$$

para $t, s \in \mathbb{S}_3$, $l, k \in \mathcal{O}_2^3$. Entonces $\mathcal{A}(Y, F, \psi, \xi) = \mathcal{A}(Y, F, 1, \xi)^{\tilde{\psi}}$. Por lo tanto $\mathcal{A}(Y, F, \psi, \xi) \neq 0$.

En el caso $F = \mathbb{Z}_3$, tenemos que calcular la acción de h , pero esta matriz está dada por $e_{(12)}e_{(13)}$ en el caso previo. Nos queda el caso $F = 1$. La acción de h en este caso está dada por la matriz de $e_{(12)}$ arriba, para $\mu = 0$.

Finalmente, usamos el programa de computadora **Mathematica**® para verificar que estas matrices satisfacen las relaciones que definen al álgebra en cada caso. $\square$

PROPOSICIÓN 5.24. *Sea A una $\mathcal{H}$ -comódulo álgebra $\mathcal{H}$ simple. Entonces $A \cong \mathcal{A}$, para alguna de las álgebras $\mathcal{A}$ listadas en la Definición 5.22.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, las hipótesis del Teorema 5.19 se satisfacen en este caso. Sabemos que el álgebra de Nichols $\mathfrak{B}(\mathcal{O}_2^3, -1)$ es cuadrática y de dimensión finita. Además, para cada $Y \subseteq \mathcal{O}_2^3$, tenemos que $\mathcal{L}_Y = \mathcal{K}_Y$, por el Teorema 5.8. Finalmente, vimos en el lema anterior que las álgebras $\mathcal{A}$ en cuestión son no nulas. $\square$

5.4.2. Comódulo álgebras sobre álgebras de Hopf sobre $\mathbb{S}_4$.

Para $X = \mathcal{O}_2^4$ y $G = \mathbb{S}_4$, introduciremos a continuación tres familias de álgebras $\mathcal{A}(X, G, 1, \xi)$. En el Lema 5.28 abajo mostraremos que estas álgebras son no nulas.

DEFINICIÓN 5.25. Sean $\psi \in Z^2(\mathbb{S}_4, \mathbb{k}^\times)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$.

1. $\mathcal{A}_\psi^{-1}(\alpha, \beta)$ es el álgebra generada por $\{y_i, e_g : i \in \mathcal{O}_2^4, g \in \mathbb{S}_4\}$ con relaciones

$$\begin{aligned} e_1 &= 1, \\ e_r e_s &= \psi(r, s) e_{rs}, & r, s \in \mathbb{S}_4, \\ e_g y_l &= \text{sgn}(g) y_{g \cdot l} e_g, & g \in \mathbb{S}_4, l \in \mathcal{O}_2^4, \\ y_{(12)}^2 &= \alpha 1, \\ y_{(12)} y_{(34)} + y_{(34)} y_{(12)} &= 2\alpha e_{(12)(34)}, \\ y_{(12)} y_{(23)} + y_{(23)} y_{(13)} + y_{(13)} y_{(12)} &= \beta e_{(132)}. \end{aligned}$$

2. $\mathcal{A}_\psi^4(\alpha, \beta)$ es el álgebra generada por $\{y_i, e_g : i \in \mathcal{O}_4^4, g \in \mathbb{S}_4\}$ con relaciones

$$\begin{aligned} e_1 &= 1, \\ e_r e_s &= \psi(r, s) e_{rs}, & r, s \in \mathbb{S}_4, \\ e_g y_l &= \text{sgn}(g) y_{g \cdot l} e_g, & g \in \mathbb{S}_4, l \in \mathcal{O}_4^4, \\ y_{(1234)}^2 &= \alpha e_{(13)(24)}, \\ y_{(1234)} y_{(1432)} + y_{(1432)} y_{(1234)} &= 2\alpha 1, \\ y_{(1234)} y_{(1243)} + y_{(1243)} y_{(1423)} + y_{(1423)} y_{(1234)} &= \beta e_{(132)}. \end{aligned}$$

3. $\mathcal{A}_\psi^X(\alpha, \beta)$ es el álgebra generada por $\{y_i, e_g : i \in \mathcal{O}_2^4, g \in \mathbb{S}_4\}$ con relaciones

$$\begin{aligned} e_1 &= 1, \\ e_r e_s &= \psi(r, s) e_{rs}, & r, s \in \mathbb{S}_4, \\ e_g y_l &= \chi_l(g) y_{g \cdot l} e_g, & g \in \mathbb{S}_4, l \in \mathcal{O}_2^4, \\ y_{(12)}^2 &= \alpha 1, \\ y_{(12)} y_{(34)} - y_{(34)} y_{(12)} &= 0, \\ y_{(12)} y_{(23)} - y_{(23)} y_{(13)} - y_{(13)} y_{(12)} &= \beta e_{(132)}. \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 5.26. Sea $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^{-1}[t]$. Es claro que $\mathcal{A}_\psi^{-1}(\alpha, \beta)$ es el álgebra $\mathcal{A}(\mathcal{O}_2^4, \mathbb{S}_4, \psi, \xi)$ para la familia $\xi = \{\xi_C\}_{C \in \mathcal{R}}$ donde $\xi_C = \xi_i$, si $i = 1, 2, 3$, es constante en las clases C con la misma cardinalidad $|C| = i$ y donde en este caso $\xi_1 = \alpha$, $\xi_2 = 2\alpha$, $\xi_3 = \beta$.

Análogamente, si $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^\chi[t]$, $\mathcal{A}_\psi^\chi(\alpha, \beta)$ es el álgebra $\mathcal{A}(\mathcal{O}_2^4, \mathbb{S}_4, \psi, \xi)$ para cierta familia ξ sujeta a condiciones similares a las del párrafo anterior. Lo mismo ocurre para $\mathcal{Q} = \mathcal{D}[t]$, $\mathcal{A}_\psi^4(\alpha, \beta)$ y $\mathcal{A}(\mathcal{O}_4^4, \mathbb{S}_4, \psi, \xi)$.

Ahora veremos que las familias de álgebras de la Definición 5.25 son no nulas. Necesitamos antes el siguiente lema.

LEMA 5.27. *Sea $\mathcal{Q}$ uno de los ql-datos $\mathcal{Q}_4^{-1}[t]$, $\mathcal{Q}_4^\chi[\lambda]$ o $\mathcal{D}[t]$. Tomemos $\gamma = 0$ si $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_4^{-1}$. Entonces existe un epimorfismo de álgebras*

$$\mathcal{H}(\mathcal{Q}) \twoheadrightarrow \mathcal{H}(\mathcal{Q}_3^{-1}[\lambda]).$$

DEMOSTRACIÓN. Comencemos recordando que existe un epimorfismo de grupos $\pi : \mathbb{S}_4 \twoheadrightarrow \mathbb{S}_3$ dado por

$$(12) \mapsto (12), \quad (23) \mapsto (23), \quad (34) \mapsto (12).$$

Se tiene que $\ker \pi = \langle (12)(34), (13)(24), (23)(14) \rangle$. Más aún, se sigue que $\pi(\mathcal{O}_2^4) = \mathcal{O}_2^3$.

Sea I el ideal de $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ generado por $H_{(12)}H_{(34)} - 1$, y sea $\mathcal{L} = \mathcal{H}(\mathcal{Q})/I$, tenemos

$$\begin{aligned} H_{(14)}H_{(23)} &= \text{ad}(H_{(24)})(H_{(12)}H_{(34)}) &\Rightarrow & H_{(14)}H_{(23)} = 1 && \text{en } \mathcal{L}, \\ a_{(34)} &= \text{ad}(H_{(14)}H_{(23)})(a_{12}) &\Rightarrow & a_{(34)} = a_{(12)} && \text{en } \mathcal{L}. \end{aligned}$$

Análogamente,

$$H_{(13)} = H_{(24)}, \quad a_{(14)} = a_{(23)} \text{ y } a_{(24)} = a_{(13)} \quad \text{en } \mathcal{L}.$$

En estos ql-datos, la acción $\cdot : \mathbb{S}_4 \times X \rightarrow X$ está dada por la conjugación y $g : X \rightarrow \mathbb{S}_4$ es la inclusión ι , y entonces las relaciones (3.7) y (3.8) en la definición de $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ son satisfechas en el cociente.

Es ahora fácil ver que las relaciones cuadráticas (3.9) que definen a $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ devienen en el cociente las relaciones correspondientes que definen al álgebra $\mathcal{H}(\mathcal{Q}_3^{-1}[\lambda])$. $\square$

El siguiente lema muestra que las álgebras de la Definición 5.25 son no nulas, ver Observación 5.26.

LEMA 5.28. *Sea $\mathcal{Q}$ como en el Lema 5.27. Asumamos que (Y, F, ψ, ξ) satisface*

$$(5.21) \quad \xi_{C_i} = \xi_{C_j}, \quad \forall i, j \in Y.$$

Si $\mathcal{Q} \neq \mathcal{Q}_4^\chi(\lambda)$ asumamos además que

$$(5.22) \quad \xi_C = 2\xi_i, \quad \text{si } i, j \in Y, \quad i \triangleright j = j, \quad \text{y } (i, j) \in C.$$

Entonces el álgebra $\mathcal{A}(Y, F, \psi, \xi)$ es no nula.

DEMOSTRACIÓN. Asumamos primero que $\psi \equiv 1$. Ahora, dado un datum (Y, F, ψ, ξ) , $\pi(F) < \mathbb{S}_3$ y es fácil ver que $\pi(Y)$ es un subrack de $\mathcal{O}_2^3$.

Más aún, se sigue que ξ es compatible con el triple $(\pi(Y), \pi(F), \psi)$. Entonces tenemos el álgebra $\mathcal{A}(\pi(Y), \pi(F), \psi, \xi)$. Como en el Lema 5.27, vemos que si dividimos por el ideal generado por $\langle e_f e_g : fg^{-1} \in N \rangle$, entonces tenemos un epimorfismo de álgebras $\mathcal{A}(Y, F, \psi, \xi) \twoheadrightarrow \mathcal{A}(\pi(Y), \pi(F), \psi, \xi)$. Hemos visto que estas álgebras son no nulas en el Lema 5.23, y por lo tanto tampoco lo es $\mathcal{A}(Y, F, \psi, \xi)$.

Notemos que en el caso en que (Y, F, ψ, ξ) está asociado al ql-datum $\mathcal{Q}_4^X(\lambda)$, la hipótesis (5.22) no es necesaria, ya que (5.9) implica que, si $i, j \in Y$, $i \triangleright j = i$ y $C \in \mathcal{R}'$ es la clase correspondiente, entonces $\xi_C = 0$, y esta relación está contenida en el ideal por el cual dividimos.

El caso $\psi \neq 1$ se sigue ahora como en la prueba del Lema 5.23, extendiendo el cociclo ψ a un cociclo $\tilde{\psi} \in Z^2(\mathcal{A}(Y, F, 1, \xi), \mathbb{k}^\times)$ como en (5.20). $\square$

5.4.3. Deformaciones por cociclo sobre $\mathbb{S}_3$ y $\mathbb{S}_4$. Estamos ahora en condiciones de probar el resultado principal de esta sección.

TEOREMA 5.29. *Sea H un álgebra de Hopf punteada no trivial sobre $\mathbb{S}_3$ o $\mathbb{S}_4$. Entonces H es una deformación por cociclo de $\text{gr } H$.*

DEMOSTRACIÓN. Hemos dicho que las álgebras de Nichols de dimensión finita sobre $\mathbb{S}_3$ y $\mathbb{S}_4$ coinciden con sus aproximaciones cuadráticas. Esto es si H es un álgebra de Hopf punteada de dimensión finita sobre $\mathbb{S}_n$, $n = 3, 4$, entonces $\text{gr } H \cong \widehat{\mathfrak{B}}_2(X, q) \# \mathbb{k}\mathbb{S}_n$. Por [GG, Main Theorem] sabemos que $H \cong \mathcal{H}(\mathcal{Q})$. Luego, el teorema se sigue del Corolario 5.20, ya que en los Lemas 5.23, 5.28 mostramos la existencia de objetos $(\text{gr } \mathcal{H}(\mathcal{Q}), \mathcal{H}(\mathcal{Q}))$ -biGalois no nulos en estos casos.

Notar que cuando trabajamos con $\mathcal{Q}_4^{-1}[t]$ o $\mathcal{D}[t]$ la condición $\xi_2 = 2\xi_1$ en el Lema 5.28 no interfiere con la prueba, ya que, por ecuación (5.19) ξ_1 , respectivamente ξ_2 , puede ser elegido arbitrariamente. $\square$

OBSERVACIÓN 5.30. En [Ma, Theorem A1] Masuoka probó que las álgebras de Hopf $u(\mathcal{D}, \lambda, \mu)$ asociadas a un dato de tipo Cartan finito $\mathcal{D}$ que aparece en la clasificación de Andruskiewitsch y Schneider [AS4] son deformaciones por cociclo de las álgebras de Hopf graduadas asociadas $u(\mathcal{D}, 0, 0)$.

Los Corolarios 5.20 (1) y 5.29 prueban un resultado similar para algunas familias de álgebras de Hopf construidas a partir de álgebras de Nichols que no son de tipo diagonal.

5.5. Representaciones de la categoría de módulos sobre un álgebra de Hopf punteada sobre $\mathbb{S}_3$

Fijemos $G = \mathbb{S}_3, \mathbb{S}_4$ y $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ un álgebra de Hopf punteada sobre G ; $\mathcal{H} = \text{gr } \mathcal{H}(\mathcal{Q})$. Sea A una $\mathcal{H}$ -comódulo álgebra A con $\text{gr } A = \mathcal{K}_Y \# \mathbb{k}_\psi F$, $F \leq \text{Stab } \mathcal{K}_Y$, $\psi \in Z^2(F, \mathbb{k}^*)$. Sea Z tal que $X = Y \sqcup Z$ como conjuntos. Notemos que $F \leq \text{Stab } \mathcal{K}_Z$.

LEMA 5.31. *Bajo las hipótesis de arriba, existe una familia de escalares ξ compatible con (X, F, ψ) tal que $A \simeq \mathcal{B}(Y, F, \psi, \xi)$ como comódulo álgebras.*

DEMOSTRACIÓN. La proyección canónica

$$\pi : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_1 / \mathcal{A}_0 \simeq \mathcal{K}_Y(1) = \mathbb{k}Y$$

es un morfismo de $\mathcal{A}_0$ -bimódulos. Sea $\iota : \mathbb{k}Y \rightarrow \mathcal{A}_1$ una sección de π de $\mathcal{A}_0$ -bimódulos. Como los elementos $\{x_l : l \in Y\}$ están en la imagen de π podemos elegir elementos $\{y_l : l \in Y\}$ en $\mathcal{A}_1$ tales que $\iota(x_l) = y_l$ para cualquier $l \in Y$. Es fácil verificar que

$$\lambda(y_l) = x_l \otimes 1 + g_l \otimes y_l, \quad e_f y_l = \chi_l(f) y_{f \cdot l} e_f, \quad f \in F, l \in Y.$$

Como $\text{gr } \mathcal{A}$ está generada por $\{x_l, e_f : l \in Y, f \in F\}$ entonces $\mathcal{A}$ está generada como álgebra por $\{y_l, e_f : l \in Y, f \in F\}$.

Ahora, sea $B = A \otimes \mathcal{K}_Z$. Entonces B tiene una estructura de comódulo álgebra para la cual la inclusión canónica $A \hookrightarrow A \otimes 1 \subset B$ es un homomorfismo. La estructura de álgebra es la siguiente: para $i \in Y, j \in Z, f \in F$,

$$\begin{aligned} (y_i \otimes 1)(1 \otimes y_j) &= (y_i \otimes y_j); \\ (1 \otimes y_j)(y_i \otimes 1) &= \begin{cases} q_{ji}y_i \otimes y_j + \xi_C e_C \otimes 1, & \text{si } i \triangleright j = j; \\ q_{ji}y_{j \triangleright i} \otimes y_j - q_{ji}q_{j \triangleright i j} y_i y_{j \triangleright i} \otimes 1 + \xi_C e_C \otimes 1, & \text{si } i \triangleright j \neq j, i \triangleright j \in Y; \\ q_{ji}1 \otimes y_{j \triangleright i} y_j - q_{ji}q_{j \triangleright i j} y_i \otimes y_{j \triangleright i} + \xi_C e_C \otimes 1, & \text{si } i \triangleright j \neq j, i \triangleright j \notin Y; \end{cases} \\ (e_f \otimes 1)(1 \otimes y_j) &= e_f \otimes y_j; \\ (1 \otimes y_j)(e_f \otimes 1) &= \chi_j^{-1}(f) e_f \otimes y_{f^{-1}j}. \end{aligned}$$

Aquí C se refiere a la clase $C \in \mathcal{R}'$ tal que $(j, i) \in C$. Recordemos que por definición $\xi_C = 0$ si $g_C \notin F$. Entonces la aplicación

$$(5.23) \quad m : B \rightarrow \mathcal{A}(X, F, \psi, \xi), \quad a \otimes x \mapsto ax$$

es un epimorfismo de álgebras. Ahora, si

$$A \ni a \mapsto a_{(-1)} \otimes a_{(0)} \in \mathcal{H} \otimes A \text{ y } \mathcal{K}_Z \ni x \mapsto x_{(-1)} \otimes x_{(0)} \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}_Z$$

denotan a las coacciones correspondientes, definamos $\lambda : B \rightarrow \mathcal{H} \otimes B$ como $\lambda(a \otimes x) = a_{(-1)} x_{(-1)} \otimes a_{(0)} \otimes x_{(0)}$. Es inmediato ver que λ está bien definida. Hacemos esto caso por caso en la definición de la multiplicación de B dada arriba. Por ejemplo, si $i \triangleright j \neq j$ y $i \triangleright j \in Y$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} \lambda(1 \otimes y_j) \lambda(y_i \otimes 1) &= (g_j \otimes (1 \otimes y_j) + x_j \otimes (1 \otimes 1))(g_i \otimes (y_i \otimes 1) + x_i \otimes (1 \otimes 1)) \\ &= (g_j \otimes (1 \otimes y_j))(g_i \otimes (y_i \otimes 1)) + (x_j \otimes (1 \otimes 1))(g_i \otimes (y_i \otimes 1)) \\ &\quad + (g_j \otimes (1 \otimes y_j))(x_i \otimes (1 \otimes 1)) + (x_j \otimes (1 \otimes 1))(x_i \otimes (1 \otimes 1)) \\ &= g_j g_i \otimes (1 \otimes y_j)(y_i \otimes 1) + x_j g_i \otimes (y_i \otimes 1) \\ &\quad + q_{ji} x_{j \triangleright i} g_j \otimes (1 \otimes y_j) + x_j x_i \otimes (1 \otimes 1) \\ &= g_j g_i \otimes (q_{ji} y_{j \triangleright i} \otimes y_j - q_{ji} q_{j \triangleright i j} y_i y_{j \triangleright i} \otimes 1 + \xi_C g_C \otimes 1) \\ &\quad + x_j g_i \otimes (y_i \otimes 1) + q_{ji} x_{j \triangleright i} g_j \otimes (1 \otimes y_j) \\ &\quad + (q_{ji} x_{j \triangleright i} x_j - q_{ji} q_{j \triangleright i j} x_i x_{j \triangleright i} \otimes 1) \otimes (1 \otimes 1), \end{aligned}$$

lo que coincide con $\lambda(q_{ji} y_{j \triangleright i} \otimes y_j - q_{ji} q_{j \triangleright i j} y_i y_{j \triangleright i} \otimes 1 + \xi_C g_C \otimes 1)$.

Así, B es una $\mathcal{H}$ -comódulo álgebra con

$$\dim B = \dim A \dim \mathcal{K}_Z = \dim \mathcal{K}_Y \dim \mathcal{K}_Z |F| = \dim \mathcal{A}(X, F, \psi, \xi),$$

por la Observación 5.14 y luego el mapa m en (5.23) es un isomorfismo. $\square$

Formulamos ahora el principal resultado de este capítulo. Nos restringimos a $G = \mathbb{S}_3$. Para cada $h \in G$, sea $\xi_C^h = \xi_{h^{-1}C}$. Recordemos que denotamos por $\mathcal{B}(Y, F, \psi, \xi)$ a la sub-comódulo álgebra de $\mathcal{A}(X, F, \psi, \xi)$ generada por $\{y_i\}_{i \in Y}$, y que en este caso $\mathcal{B}(Y, F, \psi, \xi) = \mathcal{A}(Y, F, \psi, \xi)$.

- TEOREMA 5.32. 1. Sea $\mathcal{M}$ una categoría módulo indescomponible y exacta sobre $\text{Rep}(\mathcal{H}(\mathcal{Q}))$, entonces existen
- (i) un subgrupo $F < G$, y un 2-cociclo $\psi \in Z^2(F, \mathbb{k}^\times)$,
 - (ii) un subconjunto $Y \subset X$ tal que $F \cdot Y \subset Y$,
 - (iii) una familia de escalares $\{\xi_C\}_{C \in \mathcal{R}'}$ compatible con (Y, F, ψ) , tales que hay una equivalencia de módulos $\mathcal{M} \simeq_{\mathcal{B}(Y, F, \psi, \xi)} \mathcal{M}$.
2. Sean (Y, F, ψ, ξ) , (Y', F', ψ', ξ') dos familias como en 1. Existe una equivalencia de categorías módulo $\mathcal{B}(Y, F, \psi, \xi) \mathcal{M} \simeq_{\mathcal{B}(Y', F', \psi', \xi')} \mathcal{M}$ si y sólo si existe un elemento $h \in G$ tal que $F' = hFh^{-1}$, $\psi' = \psi^h$, $Y' = h \cdot Y$ y $\xi' = \xi^h$.

DEMOSTRACIÓN. 1. Por el Corolario 5.29 podemos asumir que $\mathcal{M}$ es una categoría módulo indescomponible y exacta sobre $\text{gr } \mathcal{H}(\mathcal{Q}) = \mathcal{H}$. Se sigue de [AM, Theorem 3.3] que existe una $\mathcal{H}$ -comódulo álgebra a izquierda $\mathcal{A}$ $\mathcal{H}$ -simple a derecha tal que $\mathcal{M} \simeq_{\mathcal{A}} \mathcal{M}$. El Teorema 1.70 junto con el Teorema 5.10 implican que existe un subgrupo $F < G$, y un 2-cociclo $\psi \in Z^2(F, \mathbb{k}^\times)$, junto con un subconjunto $Y \subset X$, $F \cdot Y \subset Y$, tal que $\text{gr } \mathcal{A} = \mathcal{K}_Y \# \mathbb{k}_\psi F$. Aquí $\mathcal{A}_0 = \mathbb{k}_\psi F$. Luego el resultado se sigue del Lema 5.31.

2. Asumamos que las categorías módulo $\mathcal{B}(Y, F, \psi, \xi) \mathcal{M}$, $\mathcal{B}(Y', F', \psi', \xi') \mathcal{M}$ son equivalentes, entonces el Teorema 5.2 implica que existe un elemento $h \in G$ tal que $\mathcal{B}(Y', F', \psi', \xi') \simeq h \mathcal{B}(Y, F, \psi, \xi) h^{-1}$ como H -comódulo álgebras.

El mapa de álgebras $\alpha : h \mathcal{B}(Y, F, \psi, \xi) h^{-1} \rightarrow \mathcal{B}(h \cdot Y, hFh^{-1}, \psi^h, \xi^h)$ definido por

$$\alpha(h e_f h^{-1}) = e_{h f h^{-1}}, \quad \alpha(h y_l h^{-1}) = \chi_l(h) y_{h \cdot l},$$

para cada $f \in F$, $l \in Y$, es un isomorfismo bien definido de comódulo álgebras. Luego $\mathcal{B}(Y', F', \psi', \xi') \simeq \mathcal{B}(h \cdot Y, hFh^{-1}, \psi^h, \xi^h)$ y usando el Teorema 5.19 (3) obtenemos el resultado. $\square$

Como una consecuencia inmediata del Teorema 5.32 tenemos el siguiente resultado.

COROLARIO 5.33. Los $\mathcal{H}$ -objetos de Galois son de la forma $\mathcal{A}(X, G, \psi, \xi)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea A un $\mathcal{H}$ -objeto de Galois. Entonces ${}_A \mathcal{M}$ es una categoría módulo exacta sobre $\text{Rep } \mathcal{H}$. Más aún, ${}_A \mathcal{M}$ es indescomponible. En efecto, en caso contrario existiría un ideal bilátero propio $J \subset A$ $\mathcal{H}$ -estable [AM, Proposition 1.18]. Así, $\text{can}(A \otimes J) = \text{can}(J \otimes A)$, lo que contradice la biyectividad de can (ver Definición 1.45, en la página 11). Luego, por el Teorema 5.32 existe un dato (X, G, ψ, ξ) tal que $A \cong \mathcal{A}(X, G, \psi, \xi)$. $\square$

Álgebras de Hopf punteadas con trenza estándar

En este capítulo mostramos que cualquier álgebra de Hopf punteada cuya trenza infinitesimal es de tipo diagonal estándar, ver Definición 2.8 en página 24 está generada por sus elementos gruepcos y casi primitivos. Mostramos también que las relaciones cuánticas de Serre se satisfacen en cualquier álgebra de Hopf punteada de dimensión finita que es corradicalmente graduada sobre un grupo abeliano Γ . Este resultado extiende el [AS4, Lemma 5.4], donde se llega a esa conclusión en el caso Cartan. Finalmente, determinamos cómo estas relaciones se levantan en el caso estándar.

6.1. Generación en grado uno

En esta Sección, Γ denotará un grupo abeliano finito y $S = \bigoplus_{n \geq 0} S(n)$ un álgebra de Hopf trezada graduada de dimensión finita en ${}^{\Gamma}\mathcal{YD}$ tal que $S(0) = \mathbb{k}1$ y tal que está generada como álgebra por $S(0) \oplus S(1)$. Fijamos una base $\{x_1, \dots, x_{\theta}\}$ de $V := S(1)$, con $x_i \in S(1)_{g_i}^{\chi_i}$ para algunos $g_i \in \Gamma$ y $\chi_i \in \hat{\Gamma}$, y llamamos $q_{ij} := \chi_j(g_i)$.

Mostraremos que dada una tal S , si V es un espacio vectorial trezado de tipo estándar, entonces S es el álgebra de Nichols $\mathfrak{B}(V)$ asociada a V . En particular, obtenemos el principal resultado de este capítulo, esto es que cualquier álgebra de Hopf punteada de dimensión finita sobre Γ con trenza infinitesimal de tipo estándar está generada por elementos gruepcos y casi primitivos.

Empezamos probando en la siguiente Proposición que las relaciones cuánticas de Serre $\text{ad}_c(x_i)^{1+m_{ij}}(x_j) = 0$ se satisfacen en S , no necesariamente de tipo estándar. En la prueba utilizamos la clasificación de los diagramas de Dynkin generalizados asociados a álgebras de Nichols de dimensión finita de [H].

PROPOSICIÓN 6.1. *Sea S como arriba. Entonces,*

$$(6.1) \quad \text{ad}_c(x_i)^{1+m_{ij}}(x_j) = 0, \quad \text{para todo } i \neq j \text{ tal que } q_{ii}^{m_{ij}+1} \neq 1.$$

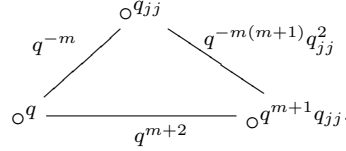
DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\text{ad}_c(x_i)^{1+m_{ij}}(x_j) \neq 0$ para algún $i \neq j$ tal que $q_{ii}^{m_{ij}+1} \neq 1$ (y luego $q_{ii}^{m_{ij}} q_{ij} q_{ji} = 1$ por la definición de m_{ij} , ver Definición 2.8).

Para empezar, comenzamos como en [AS4, Lemma 5.4]. Sean $m = m_{ij}$, $q = q_{ii}$, $y_1 := x_i$, $y_2 := x_j$ y $y_3 := \text{ad}_c(x_i)^{1+m}(x_j)$. También,

$$\begin{aligned} h_1 &= g_i, & h_2 &= g_j, & h_3 &= g_i^{m+1} g_j, \\ \eta_1 &= \chi_i, & \eta_2 &= \chi_j, & \eta_3 &= \chi_i^{m+1} \chi_j, \end{aligned}$$

luego $y_k \in S_{h_k}^{\eta_k}$, $1 \leq k \leq 3$. Notemos que $y_3 \in S$ es primitivo, ver [A3, Lemma A.1] Si $W = \mathbb{k}\{y_1, y_2, y_3\}$, entonces $\mathfrak{B}(W)$ es de dimensión finita. En efecto, el álgebra $\mathbb{k}\langle W \rangle \subset S$ y además $\mathbb{k}\langle W \rangle \rightarrow \mathfrak{B}(W)$. Luego, como $\dim S < \infty$, tenemos que $\dim \mathfrak{B}(W) < \infty$. Calculamos la correspondiente matriz de la trenza $(Q_{kl} = \eta_l(h_k))_{1 \leq k, l \leq 3}$, y consideramos el correspondiente diagrama de Dynkin generalizado:

(6.2)



En consecuencia, este diagrama debería aparecer en [H, Table 2]. Consideramos diferentes casos.

Caso I: $Q_{kl}Q_{lk} \neq 1$ para todo $1 \leq k < l \leq 3$.

Por [H, Lemma 9(ii)], $1 = \prod_{k < l} Q_{kl}Q_{lk} = q^{2-m(m+1)} q_{jj}^2$, y al menos uno de los vértices está etiquetado con -1 . Notemos que $q \neq -1$ porque en tal caso $m = 0$ (asumimos $q^{m+1} \neq 1$). También, $q_{jj} \neq q^{m+1} q_{jj}$ por hipótesis, y por lo tanto exactamente uno de los vértices está etiquetado con -1 .

- Si $q_{jj} = -1$, entonces $1 = (q^{m+1} q_{jj})(q^{-m(m+1)} q_{jj}^2) = -q^{1-m^2}$ y $m = 1$ por el mismo Lema, pero esto es una contradicción.
- Si $q^{m+1} q_{jj} = -1$, entonces $1 = q q^{m+2} = q^{m+3}$ y

$$1 = q_{jj}(q^{-m(m+1)} q_{jj}^2) = q_{jj}^3 q^{-m(m+3)+2m} = q_{jj}^3 q^{2m},$$

por el mismo Lema, luego

$$-1 = (-1)^3 = q_{jj}^3 q^{3m+3} = (q_{jj}^3 q^{2m}) q^{m+3} = q^{m+3},$$

lo que es una contradicción. Por lo tanto (6.2) no pertenece a este caso.

Caso II: $Q_{12}Q_{21} = q^{-m} = 1$.

Aquí $m = 0$, luego tenemos

(6.3)

$$o^q \xrightarrow{q^2} o^{q q_{jj}} \xrightarrow{q_{jj}^2} o^{q_{jj}}.$$

Si $q_{jj} = -1$ entonces tenemos el subdiagrama conexo $o^q \xrightarrow{q^2} o^{-q}$. Notemos que este diagrama no tiene vértices etiquetados con -1 y las etiquetas de los vértices son diferentes. También, el diagrama no es tipo Cartan finito y no corresponde a los diagramas sin -1 en los vértices en las filas 5, 9, 11, 12, 15 de [H, Table 1], y luego los descartamos.

Si $q_{jj} \neq -1$ pero $q = -1$ tenemos una situación análoga, por lo tanto consideramos también $q \neq -1$ y (6.3) es un diagrama conexo de rango 3.

Si $q q_{jj} \neq -1$, [H, Lemma 9(i)] implica que una de las siguientes condiciones se satisface:

- es de tipo Cartan finito, y por lo tanto contiene un subdiagrama de Cartan A_2 . Entonces $1 = q q^2 = (q q_{jj}) q^2$ o $1 = q_{jj} q_{jj}^2 = (q q_{jj}) q_{jj}^2$, luego $q = 1$ o $q_{jj} = 1$;
- $q^3 = 1$, $q_{jj}, q_{jj} q \in \mathbb{G}_6 \cup \mathbb{G}_9$ y $q_{jj} q_{jj}^2 = 1$ o $q_{jj}^3 = 1$, $q, q_{jj} q \in \mathbb{G}_6 \cup \mathbb{G}_9$ y $q q^2 = 1$.

Pero ninguno de estos casos es posible. En consecuencia, $qq_{jj} = -1$. Mirando a [H, Table 2] vemos que $Q_{ii}Q_{i3}Q_{3i} = 1$ para algún $i \in \{1, 2\}$ en todos los casos. Como ambas situaciones son análogas, asumimos $i = 1$: $q^3 = 1$. Por [H, Lemma 9(iii)], una de las siguientes condiciones es verdadera:

- $q_{jj}^3 = 1$, pero $q_{jj}^3 = -q^{-3} = -1$,
- $q_{jj}^4 = 1$,
- $q_{jj} = -q$.

Obtenemos una contradicción, y por lo tanto $m \neq 0$.

Caso III: $Q_{13}Q_{31} = q^{m+2} = 1$.

El diagrama correspondiente es:

$$\circ^q \xrightarrow{q^2} \circ^{q_{jj}} \xrightarrow{q^{-2}q_{jj}^2} \circ^{q^{-1}q_{jj}}.$$

Este diagrama es análogo a (6.3) cambiando q_{jj} por $q_{jj}q^{-1}$ y luego vemos que no pertenece a [H, Table 2]. Por lo tanto $q^{m+2} \neq 1$.

Caso IV: $Q_{23}Q_{32} = 1$. Esto es, $q_{jj}^2 = q^{m(m+1)}$. Tenemos el siguiente diagrama:

$$(6.4) \quad \circ^{q_{jj}} \xrightarrow{q^{-m}} \circ^q \xrightarrow{q^{m+2}} \circ^{q^{m+1}q_{jj}}.$$

Por los casos anteriores, éste es un diagrama conexo de rango 3. Como $m \neq 0$ y $q^{m+1} \neq 1$ tenemos $q \neq -1$. Analizamos las diferentes posibilidades para los valores en los vértices:

$\mathbf{q}_{jj} = \mathbf{q}^{m+1}\mathbf{q}_{jj} = -1$: En tal caso, $q^{m+1} = 1$ y el diagrama es

$$\circ^{-1} \xrightarrow{q} \circ^q \xrightarrow{q} \circ^{-1},$$

pero éste no aparece en la lista de Heckenberger.

$\mathbf{q}_{jj} = -1, \mathbf{q}^{m+1}\mathbf{q}_{jj} \neq -1$: Por [H, Table 2], se sigue que tenemos que $1 = Q_{22}Q_{23}Q_{32} = q^{m+3}$ y el diagrama es

$$\circ^{-q^{-2}} \xrightarrow{q^{-1}} \circ^q \xrightarrow{q^3} \circ^{-1}.$$

También, $1 = q_{jj}^2 = q^{m(m+1)} = q^{2m} = q^{-6}$. Notar que $q^3 \neq 1$ pues $q^m \neq 1$, y por lo tanto $q \in \mathbb{G}_6$. Pero este diagrama no pertenece a la lista de Heckenberger.

$\mathbf{q}_{jj} \neq -1, \mathbf{q}^{m+1}\mathbf{q}_{jj} = -1$: Como en el caso previo, $1 = Q_{22}Q_{21}Q_{12} = q^{1-m}$. Por la definición de m concluimos que $m = 1$ y el diagrama es como en el caso anterior, donde nuevamente $q \in \mathbb{G}_6$ por la condición inicial del caso IV, y tenemos la misma contradicción.

$\mathbf{q}_{jj}, \mathbf{q}^{m+1}\mathbf{q}_{jj} \neq -1$: Por [H, Lemma 9(i)], una de las siguientes se satisface:

- es de tipo Cartan. Por lo tanto $q = q_{jj}$ y $m = 1$, o $q = q^{m+1}q_{jj} = q^{-m-2}$. En ambos casos llegamos al mismo diagrama

$$\circ^q \xrightarrow{q^{-1}} \circ^q \xrightarrow{q^3} \circ^{q^3}.$$

Es fácil ver que no es de tipos A_3, C_3 porque $q, q^2 \neq q^3$. Pero si fuera de tipo C_3 , $q = (q^3)^2 = q^{-3}$, lo que es una contradicción.

- $q_{jj} \in \mathbb{G}_3$, $q \in \mathbb{G}_6 \cup \mathbb{G}_9$ y $1 = q^{1-m} = q_{jj}q^{2m+3}$. Entonces $m = 1$ y $q^5 = q_{jj}^{-1}$, por lo tanto $q^{15} = 1$, pero esto es una contradicción con $q \in \mathbb{G}_6 \cup \mathbb{G}_9$.
- $q^{m+1}q_{jj} \in \mathbb{G}_3$, $q \in \mathbb{G}_6 \cup \mathbb{G}_9$ y $1 = q_{jj}q^{-m} = q^{m+3}$. Nuevamente $q^{15} = 1$, lo cual es una contradicción con $q \in \mathbb{G}_6 \cup \mathbb{G}_9$.

En consecuencia (6.2) no es de tipo finito, lo que concluye la prueba. $\square$

Los siguientes lemas muestran que si la trenza satisface algunas condiciones relacionadas con trenzas de tipo estándar, entonces algunas relaciones adicionales se satisfacen en S . Consideramos la presentación de álgebras de Nichols de tipo estándar del Teorema 2.12, ver página 26. Como esta presentación no es minimal en algunos casos, necesitamos primero descartar algunas relaciones redundantes en el siguiente lema.

LEMA 6.2. *Si existen $j \neq k \in \{1, \dots, \theta\}$ tales que $m_{kj} = 1$, $m_{jk} = 2$, pero $q_{jj} \notin \mathbb{G}_3$ o $q_{kk} \neq -1$, entonces $[(\text{ad}_c x_j)^2 x_k, (\text{ad}_c x_j) x_k]_c = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Para ver esto, por [A, Lemma 5.5(ii)] basta considerar dos casos: $q_{jj} \in \mathbb{G}_3$, $q_{kk} \neq -1$, o $q_{jj} \notin \mathbb{G}_3$, $q_{kk} = -1$. En el primer caso tenemos

$$x_j^3 = 0, \quad (\text{ad}_c x_k)^2 x_j = x_k^2 x_j - (1 + q_{kk}) q_{kj} x_k x_j x_k + q_{kk} q_{kj}^2 x_j x_k^2 = 0.$$

En consecuencia tenemos

$$x_j^2 x_k x_j x_k = (1 + q_{kk})^{-1} q_{kj}^{-1} x_j^2 x_k^2 x_j,$$

y por [A, Lemma 5.5(i)] concluimos que $[(\text{ad}_c x_j)^2 x_k, (\text{ad}_c x_j) x_k]_c = 0$ (podemos restringirnos a la subálgebra de Hopf generada por x_j, x_k para estar bajo las condiciones de ese lema). La prueba para los otros casos es análoga. $\square$

LEMA 6.3. *Asumamos que existen $j, k, l \in \{1, \dots, \theta\}$ distintos tales que $q_{kk} = -1$, $q_{kj} q_{jk} = q_{kl}^{-1} q_{lk}^{-1} \neq 1$, $q_{jl} q_{lj} = 1$. Entonces,*

$$(6.5) \quad x_k^2 = 0, \quad [\text{ad}_c x_j (\text{ad}_c x_k (x_l)), x_k]_c = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. La primera ecuación se sigue rápidamente puesto que x_k^2 es primitivo y el escalar asociado es 1. Esto implica que

$$(\text{ad}_c x_k)^2 x_j = (\text{ad}_c x_k)^2 x_l = 0.$$

Para la segunda ecuación, denotamos $u := [\text{ad}_c x_j (\text{ad}_c x_k (x_l)), x_k]_c$, $g_u := g_j g_k^2 g_l \in \Gamma$, $\chi_u := \chi_j \chi_k^2 \chi_l \in \hat{\Gamma}$, $q := q_{lk} q_{kl}$. Por [A, Lemma 5.8], u es un elemento primitivo.

Procedemos como en la prueba del lema previo. Supongamos que $u \neq 0$. Entonces la trenza de $y_1 = x_j$, $y_2 = x_k$, $y_3 = x_l$ y $y_4 = u$, con los correspondientes elementos $h_i \in \Gamma$, $\eta_i \in \hat{\Gamma}$, corresponde a una en la que el álgebra de Nichols asociada es de dimensión finita. Obtenemos el siguiente

diagrama de Dynkin generalizado asociado a $(Q_{rs} = \eta_s(h_r))_{1 \leq r, s \leq 4}$:

$$(6.6) \quad \begin{array}{ccc} \circ^{q_{jj}} & \xrightarrow{q^{-1}} & \circ^{-1} \\ q_{jj}^2 q^{-2} \downarrow & & \downarrow q \\ \circ^{q_{jj}qu} & \xrightarrow{q_{ll}^2 q^2} & \circ^{qu}. \end{array}$$

Notemos que $q = -1$ implica que (6.6) contiene un diagrama del tipo (6.3) como subdiagrama, lo que es una contradicción a la dimensión finita del álgebra de Nichols asociada. Por lo tanto $q \neq -1$ y como cualquier tal diagrama contiene un 4-ciclo, por [H, Lemma 12] tenemos $q_{jj}^2 q^{-2} = 1$ o $q_{ll}^2 q^2 = 1$. Por la simetría del diagrama podemos asumir $q_{jj} = \pm q$.

Si también $qu = \pm q^{-1}$, ya que $Q_{44} = q_{jj}qu \neq 1$, entonces el diagrama es de la forma $\circ^q \xrightarrow{q^{-1}} \circ^{-1} \xrightarrow{q} \circ^{-q^{-1}}$. Pero esto es una contradicción con [H, Lemma 9(iii)]. Por lo tanto tenemos un diagrama conexo de rango 4:

$$\circ^{\pm q} \xrightarrow{q^{-1}} \circ^{-1} \xrightarrow{q} \circ^{qu} \xrightarrow{q_{ll}^2 q^2} \circ^{q_{jj}qu}.$$

Supongamos que $q_{jj} = -q$. Como $Q_{11}Q_{12}Q_{21} \neq 1$, deducimos de [H, Table 3] que

$$0 = (1 - Q_{11}^3)(Q_{11}^2 Q_{12} Q_{21} - 1) = (1 + q^3)(q - 1),$$

pero descartamos este caso por [H, Table 3].

Por lo tanto $q_{jj} = q$. Obtenemos que no existen diagramas en [H, Table 3] tales que $Q_{22} = -1$, $Q_{11} = Q_{44}Q_{33}^{-1} = q \neq \pm 1$, por lo tanto el diagrama de arriba no pertenece a esa lista. Por lo tanto $u = 0$. $\square$

LEMA 6.4. *Asumamos que existen $j \neq k \in \{1, \dots, \theta\}$ tales que $m_{kj} = 1$, $m_{jk} = 2$. (a) Si $q_{jj} \in \mathbb{G}_3$ y $q_{kk} = -1$, entonces la siguiente relación se satisface:*

$$(6.7) \quad [(\text{ad}_c x_j)^2 x_k, (\text{ad}_c x_j) x_k]_c = 0.$$

(b) Si V es estándar y existen $l \neq j, k \in \{1, \dots, \theta\}$ tales que $m_{jl} = m_{lj} = 0$, $m_{kl} = 1$ y $(1 + q_{kk})(1 - q_{jj}^3) = 0$, entonces:

$$(6.8) \quad [(\text{ad}_c x_k)^2 (\text{ad}_c x_j) x_l, (\text{ad}_c x_j) x_k]_c = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. (a) Procedemos como en los lemas previos. Asumamos que $v := [(\text{ad}_c x_j)^2 x_k, (\text{ad}_c x_j) x_k]_c \neq 0$. Por [A, Lemma 5.9], v es un elemento primitivo: notemos que $x_j^3 = 0$, o $x_k^2 = 0$, o $q_{jj}^2 q_{jk} q_{kj} = q_{kk} q_{jk} q_{kj} = 1$ ya que S es de dimensión finita.

Llamemos $y_1 = x_j$, $y_2 = x_k$, $y_3 = v$, y $h_i \in \Gamma$, $\eta_i \in \hat{\Gamma}$, $i = 1, 2, 3$ a los correspondientes elementos. En consecuencia, la matriz de la trenza $(Q_{rs} = \eta_s(h_r))_{1 \leq r, s \leq 3}$ corresponde a una en la lista de Heckenberger. El diagrama de Dynkin generalizado asociado es

$$\begin{array}{ccc} \circ^{q_{jj}} & \xrightarrow{q} & \circ^{-1} \\ & \searrow q^2 & \swarrow q^3 \\ & \circ^{q^6} & \end{array} \quad , \quad q := q_{jk} q_{kj}.$$

(b) Por el ítem previo, Lema 6.2 y [A, Lemma 5.9(b)].

es un elemento primitivo. Si suponemos que $w \neq 0$, trabajamos como en los casos previos para cada diagrama posible tomando $y_1 = x_j$, $y_2 = x_k$, $y_3 = x_l$, $y_4 = w$, y $h_i \in \Gamma$, $\eta_i \in \hat{\Gamma}$, $i = 1, 2, 3, 4$ los correspondientes elementos: la matriz de la trenza $(Q_{rs} = \eta_s(h_r))_{1 \leq r, s \leq 3}$ corresponde a una en la lista de Heckenberger.

- $$\begin{array}{ccc} \circ^q & \xrightarrow{q^{-2}} & \circ^{-1} \xrightarrow{q^2} \circ^{qu} \\ & \searrow q^2 & \downarrow q^{-4} \nearrow q^4 q_{il}^2 \\ & & \circ^{qu} \end{array}, \quad q := q_{jj}$$

- $q_{jj}^2 q_{kj} q_{jk} = q_{kj} q_{jk} = q_{kk} q_{kl} q_{lk} = 1$: el diagrama para este caso es

Si $q^4 = 1$, nuevamente tenemos (6.3) como subdiagrama. Si $q \in \mathbb{G}_3$ tenemos $q_{ll} = \pm q^2$, porque no existen 4-ciclos. Como $Q_{44} \neq 1$, deberíamos tener $q_{ll} = -q^2$, pero en tal caso tenemos un diagrama conexo de rango 4 con $m_{32} = 4$, porque $Q_{33} = -q^2$ y $Q_{23}Q_{32} = q^2 \in \mathbb{G}_3$, lo que es una contradicción.

- [illegible]

- $q_{jj} = -q_{kj}q_{jk} \in \mathbb{G}_3, q_{kk}q_{kj}q_{jk} = q_{kk}q_{kl}q_{lk} = 1$: ahora el diagrama es

Primero, $q_u = \pm q^2$ porque no existen 4-ciclos y, segundo $Q_{44} \neq 1$ por lo tanto $q_u = -q^2$. Transformando el diagrama por la simetría

en el vértice 4, es equivalente Weyl a

$$\circ^{-1} \xrightarrow{q} \circ^1 \xrightarrow{-q} \circ^{-q^2} \xrightarrow{-q} \circ^{qu},$$

cuya álgebra de Nichols asociada no es de dimensión finita, una contradicción.

En todos los casos obtenemos una contradicción, luego $w = 0$. $\square$

Podemos ahora probar los resultados principales de este capítulo: los Teoremas 6.5 y 6.6.

TEOREMA 6.5. *Sea $S = \oplus_{n \geq 0} S(n)$ un álgebra de Hopf graduada de dimensión finita en ${}_{\Gamma} \mathcal{YD}$, Γ un grupo finito, tal que $S(0) = \mathbb{k}1$. Fijemos una base $x_1, \dots, x_\theta$ de $V := S(1)$, con $x_i \in S(1)^{\chi_i}$ para algún $g_i \in \Gamma$ y $\chi_i \in \hat{\Gamma}$, y llamemos $q_{ij} := \chi_j(g_i)$. Asumamos que*

- *S está generada como álgebra por $S(0) \oplus S(1)$, y*
- *V es un espacio vectorial trenzado estándar.*

Entonces $S \cong \mathfrak{B}(V)$.

DEMOSTRACIÓN. La proyección canónica $T(V) \twoheadrightarrow \mathfrak{B}(V) = T(V)/I(V)$ induce una proyección

$$\pi : S \twoheadrightarrow \mathfrak{B}(V),$$

de álgebras de Hopf trenzadas graduadas, y así consideramos $S = T(V)/I$, para algún ideal de Hopf trenzado graduado I de $T(V)$, generado en grados ≥ 2 , $I \subseteq I(V)$.

Supongamos que $I(V) \supsetneq I$ y sea $\mathbf{x} \in S$ de grado minimal k entre las clases de los elementos x en $I(V) \setminus I$. Como π es un morfismo de álgebras de Hopf trenzadas, tenemos que

$$\Delta(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \otimes 1 + 1 \otimes \mathbf{x} + \sum_{j=1}^n b_j \otimes c_j \in \ker \pi \otimes S + S \otimes \ker \pi,$$

para algunos elementos homogéneos $b_j, c_j \in \bigoplus_{i=1}^{k-1} S^i$, que satisfacen

$$\deg(b_j) + \deg(c_j) = k.$$

Podemos considerar para cada j que $b_j \in \ker \pi$ o $c_j \in \ker \pi$. Si $b_j \in \ker \pi$, entonces $b_j = 0$ por la hipótesis en k . Lo mismo ocurre si $c_j \in \ker \pi$. En consecuencia, $\mathbf{x}$ es primitivo en S .

Consideremos la presentación de $I(V)$ dada por el Teorema 2.12. Entonces, por la Proposición 6.1 y los lemas 6.2, 6.3 y 6.4, tenemos que necesariamente $\mathbf{x} = x_\alpha^{N_\alpha}$ para algún $\alpha \in \Delta_+$, o existen $j \neq k \in \{1, \dots, \theta\}$ tales que $m_{jk} = 3$, $m_{kj} = 1$, $(1 - q_{jj}^4)(1 + q_{kk}) = 0$, $\begin{pmatrix} q_{jj} & q_{jk} \\ q_{kj} & q_{kk} \end{pmatrix}$ es una trenza estándar de tipo G_2 y $\mathbf{x} = [u]_c$, ver 2.2.1, página 23, donde

$$u \in \{x_j^3 x_k x_j x_k, \quad x_j^3 x_k x_j^2 x_k, \quad x_j^2 x_k x_j x_k x_j x_k, \quad x_j^2 x_k x_j^2 x_k x_j x_k\}.$$

Llamemos $g_{\mathbf{x}} \in \Gamma$, $\chi_{\mathbf{x}} \in \hat{\Gamma}$ a los elementos asociados. Descartamos fácilmente el caso $\mathbf{x} = x_\alpha^{N_\alpha}$, porque en tal caso

$$\chi_{\mathbf{x}}(g_{\mathbf{x}}) = q_\alpha^{N_\alpha^2} = 1,$$

($\text{ord}(q_\alpha) = N_\alpha$) y S es de dimensión finita (y en caso contrario tendríamos $\mathbb{k}[\mathbf{x}] \subset S$).

Supongamos que $\mathbf{x} = [u]_c$. Sea $\eta_1 = \chi_j$, $\eta_2 = \chi_k$, $\eta_3 = \chi_{\mathbf{x}}$, $h_1 = g_j$, $h_2 = g_k$, $h_3 = g_{\mathbf{x}}$. Como en la prueba de los lemas previos, la trenza correspondiente to la matriz $(Q_{rs} = \eta_s(h_r))_{1 \leq r, s \leq 3}$ aparece en la lista de Heckenberger. Los posibles diagramas para los vértices j, k son

- $\circ \zeta \xrightarrow{\zeta} \circ \zeta^3$, $\zeta \in \mathbb{G}_4$;
- $\circ \zeta \xrightarrow{-1} \circ^{-1}$, $\zeta \in \mathbb{G}_6$;
- $\circ \zeta^2 \xrightarrow{\zeta} \circ \zeta^7$, $\zeta \in \mathbb{G}_8$;
- $\circ \zeta^2 \xrightarrow{\zeta^3} \circ^{-1}$, $\zeta \in \mathbb{G}_8$;
- $\circ \zeta \xrightarrow{\zeta^5} \circ^{-1}$, $\zeta \in \mathbb{G}_8$.

Salvo tres excepciones concluimos que todos los pares posibles de trenzas y elementos u dan diagramas que no están en la lista de Heckenberger, ya sea porque $Q_{33} = 1$ o

$$Q_{12}Q_{21} \neq 1, \quad Q_{13}Q_{31} \neq 1 \quad \text{y} \quad Q_{23}Q_{32} \neq 1$$

y así es un triángulo pero $\prod_{1 \leq r < s \leq 3} Q_{rs}Q_{sr} \neq 1$.

Los casos restantes son:

1. $\circ \zeta \xrightarrow{\zeta} \circ \zeta^3$, $u = x_j^3 x_k x_j^2 x_k$,
2. $\circ \zeta \xrightarrow{-1} \circ^{-1}$, $u = x_j^3 x_k x_j x_k$,
3. $\circ \zeta \xrightarrow{-1} \circ^{-1}$, $u = x_j^2 x_k x_j x_k x_j x_k$,

y los correspondientes diagramas de (Q_{rs}) son:

1. $\circ \zeta \xrightarrow{\zeta} \circ \zeta^3 \xrightarrow{\zeta} \circ \zeta^3$,
2. $\circ \zeta^4 \xrightarrow{\zeta^2} \circ \zeta \xrightarrow{-1} \circ^{-1}$,
3. $\circ \zeta \xrightarrow{\zeta^5} \circ \zeta \xrightarrow{-1} \circ^{-1}$,

pero son trenzas de Cartan asociadas a matrices de Cartan no finitas, lo que es una contradicción. $\square$

El siguiente teorema da una respuesta afirmativa a la Conjetura [AS2, Conjecture 1.4] en nuestro caso. Como las trenzas de tipo estándar incluyen propiamente a aquellas de tipo Cartan finito, este resultado extiende [AS4, Theorem 5.5].

TEOREMA 6.6. *Sea H un álgebra de Hopf punteada de dimensión finita sobre un grupo abeliano Γ tal que su trenza infinitesimal es de tipo estándar. Entonces H está generada por sus elementos grupezcós y casi primitivos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\text{gr } H = R \# \mathbb{k}\Gamma$, $V = R(1)$. Entonces H está generada por sus elementos grupezcós y casi primitivos si y sólo si R es el álgebra de Nichols $\mathfrak{B}(V)$. Sea S el dual graduado R^* en ${}^G_G\mathcal{YD}$. Notemos que $S(1) = R(1)^*$ tiene la misma trenza que $R(1)$. Por [AS2, Lemma 5.5] basta ver que S es un álgebra de Nichols. Esto se sigue del Teorema 6.5. $\square$

6.2. Levantamiento de las relaciones cuánticas de Serre

Sea $\mathfrak{B}$ un álgebra de Nichols de dimensión finita de tipo estándar, con trenza $(q_{ij})_{1 \leq i, j \leq \theta}$, θ el rango de $\mathfrak{B}$. Sea H un álgebra de Hopf punteada sobre un grupo abeliano Γ tal que $\text{gr } H = \mathfrak{B} \# \mathbb{k}\Gamma$. En esta sección mostramos que las relaciones cuánticas de Serre en $\mathfrak{B}$ se levantan a H como elementos en $\mathbb{k}\Gamma$. La prueba de este resultado es similar a la de la Proposición 6.1. Más aún, distinguimos los casos en los que estas relaciones sólo pueden ser levantadas como cero.

Sea m_{ij} como en la Definición 2.8. Para $1 \leq i \neq j \leq \theta$, sea

$$\chi_{ij} = \xi_i^{m_{ij}+1} \chi_j, \quad g_{ij} = g_i^{m_{ij}+1} g_j.$$

LEMA 6.7. *Sea $1 \leq i \neq j \leq \theta$. Asumamos que $q_{ii}^{m_{ij}+1} \neq 1$. Entonces*

$$(6.9) \quad (\chi_{ij}, g_{ij}) \neq (\chi_l, g_l), \quad \forall 1 \leq l \leq \theta.$$

DEMOSTRACIÓN. Asumamos que existe l tal que (6.9) se satisface. Entonces se sigue como en la prueba de la Proposición 6.1 que $l = i$ o $l = j$, ya que de otro modo obtendríamos un subdiagrama del diagrama $\mathcal{D}$ asociado a la trenza que no sería de tipo finito.

Ahora, $l \neq j$, ya que de otro modo $\chi_{ij}(g_{ij}) = q_{ii}^{m_{ij}+1} q_{jj} = \chi_j(g_j) = q_{jj}$ y $q_{ii}^{m_{ij}+1} \neq 1$. Pero si $l = i$, tendríamos

$$q_{ii}^2 = \chi_i(g_i)^2 = \chi_i(g_{ij})\chi_{ij}(g_i) = q_{ii}^{2(m_{ij}+1)} q_{ji}q_{ij} = q_{ii}^{m_{ij}+2},$$

ya que, como (q_{ij}) es de tipo estándar y $q_{ii}^{m_{ij}+1} \neq 1$, $q_{ii}^{m_{ij}} q_{ij} q_{ji} = 1$. Por lo tanto, por la definición de m_{ij} , tenemos $m_{ij} = 0$. En este caso, $q_{ii} = \chi_i(g_i) = \chi_{ij}(g_{ij}) = q_{ii}q_{jj}$, una contradicción. $\square$

Sea $a_i \in \mathcal{P}_{1, g_i}^{\chi_i}(H)$ tal que a_i es enviado a $x_i \in \mathfrak{B}$ vía $A_1 \twoheadrightarrow A_1/A_0 \cong \mathfrak{B}(1)$. En particular, se sigue que $\text{ad}(a_i)^{m_{ij}+1}(a_j) \in \mathcal{P}_{g_{ij}}^{\chi_{ij}}(H)$. Ver [AS2, Appendix].

Si $1 \leq i \neq j \leq \theta$, denotemos por $\mathcal{D}_{ij}$ al subdiagrama de $\mathcal{D}$ con vértices i, j y por Q_{ij} a la submatriz correspondiente de $(q_{kl})_{1 \leq k, l \leq \theta}$.

PROPOSICIÓN 6.8. *Sean H, a_i como arriba, $1 \leq i \neq j \leq \theta$. Asumamos que $q_{ii}^{m_{ij}+1} \neq 1$. Entonces existe $\lambda \in \mathbb{k}$ tal que*

$$\text{ad}(a_i)^{m_{ij}+1}(a_j) = \lambda(1 - g_i^{m_{ij}+1} g_j).$$

Más aún, λ puede elegirse distinto de cero sólo en los siguientes casos:

1. $m_{ij} = 3$ y

$$(i) \quad \mathcal{D}_{ij} = \circ_q \xrightarrow{q^{-3}} \circ_{q^3}, \quad q \in \mathbb{G}_7 \text{ y } Q_{ij} = \begin{pmatrix} q & q^3 \\ q & q^3 \end{pmatrix},$$

$$(ii) \quad \mathcal{D}_{ij} = \circ_\xi \xrightarrow{\xi^{-3}} \circ_{-1}, \quad \xi \in \mathbb{G}_8 \text{ y } Q_{ij} = \begin{pmatrix} \xi & -1 \\ \xi & -1 \end{pmatrix}.$$

2. $m_{ij} = 2$ y

$$(i) \quad \mathcal{D}_{ij} = \circ_q \xrightarrow{q^{-2}} \circ_{q^2}, \quad q \in \mathbb{G}_5 \text{ y } Q_{ij} = \begin{pmatrix} q & q^2 \\ q & q^2 \end{pmatrix},$$

$$(ii) \quad \mathcal{D}_{ij} = \circ_q \xrightarrow{q^{-2}} \circ_{-1}, \quad q \in \mathbb{G}_6 \text{ y } Q_{ij} = \begin{pmatrix} q & -1 \\ q & -1 \end{pmatrix}.$$

3. $m_{ij} = 1$ implica

- (i) $\mathcal{D}_{ij} = \circ_{q^m} \frac{q^{-m}}{q} \circ_q, q \in \mathbb{G}_{2m+1}$ y $Q_{ij} = \begin{pmatrix} q^m & q \\ q^m & q \end{pmatrix},$
 - (ii) $\mathcal{D}_{ij} = \circ_q \frac{-q}{-1} \circ_{-1}, q \in \mathbb{G}_4$ y $Q_{ij} = \begin{pmatrix} q & -1 \\ q & -1 \end{pmatrix},$
 - (iii) $\mathcal{D}_{ij} = \circ_{-\xi} \frac{-\xi^{-1}}{-\xi} \circ_{\xi}, \xi \in \mathbb{G}_3,$ y $Q_{ij} = \begin{pmatrix} -\xi & \xi \\ -\xi & \xi \end{pmatrix},$
 - (iv) $\mathcal{D}_{ij} = \circ_q \frac{q^{-1}}{q^2} \circ_{q^2}, q \in \mathbb{G}_8$ y $Q_{ij} = \begin{pmatrix} q & q^2 \\ q & q^2 \end{pmatrix}.$
4. $m_{ij} = 0$ implica
- (i) $\mathcal{D}_{ij} = \circ_q \circ_{q^{-1}}, q \in \mathbb{G}_N, N > 1$ y $Q_{ij} = \begin{pmatrix} q & q^{-1} \\ q & q^{-1} \end{pmatrix}.$

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que $\mathcal{P}_{g,1}^\epsilon(H) = \mathbb{k}(1-g)$ y que si $\chi \neq \epsilon$ entonces $\mathcal{P}_{g,1}^\chi(H) \neq 0$ si y sólo si existe $1 \leq l \leq \theta$ tal que $(g_{ij}, \chi_{ij}) = (g_l, \chi_l)$, ver [AS1, Lemma 5.4]. Como $\text{ad}(a_i)^{m_{ij}+1}(a_j) \in \mathcal{P}_{g_{ij}}^{\chi_{ij}}(H)$ entonces la primera parte de la Proposición se sigue del Lema 6.7. Para la segunda parte, como λ puede elegirse $\neq 0$ sólo cuando $\chi_i^{m_{ij}+1}\chi_j = \epsilon$, la Proposición se sigue evaluando χ_{ij} en g_i y g_j para determinar cuándo $q_{ii}^{m_{ij}+1}q_{ij} = q_{ji}^{m_{ij}+1}q_{jj} = 1$, tomando en cuenta que $q_{ii}^{m_{ij}}q_{ij}q_{ji} = 1$. Desarrollamos completamente el caso $m_{ij} = 3$ para ejemplificar este método. Como $q_{ii}^{m_{ij}+1} \neq 1$ debe cumplirse, quedan dos casos, a saber, aquellos correspondientes a los diagramas en (1)(i) y (ii) en el enunciado de la proposición. Sea $(q_{ij})_{1 \leq i,j \leq \theta}$ la trenza. En el primer caso, tenemos $q_{ii} = q, q_{jj} = q^3$ y $q_{ij}q_{ji} = q^{-3}$. Entonces

$$\chi_i^4 \chi_j(g_i) = q^4 q_{ij}, \quad \chi_i^4 \chi_j(g_j) = q_{ji}^4 q^3.$$

Entonces, si $\chi_{ij} = \epsilon$, tenemos $1 = q^4 q_{ij} q_{ji}^4 q^3 = q^4 q_{ji}^3$ y $1 = q_{ji}^4 q^3 = q_{ji} q^{-1}$. Por lo tanto, $q_{ji} = q, q^7 = 1, q_{ij} = q^{-4} = q^3$.

En el segundo caso, tenemos $q_{ii} = \xi, q_{jj} = -1, q_{ij}q_{ji} = \xi^{-3}, \xi \in \mathbb{G}_8$. Entonces, si $\xi_{ij} = \epsilon, 1 = \xi^4 q_{ij} = -q_{ji}^4$. Entonces $q_{ij} = -1$ y $q_{ji} = -\xi^{-3} = \xi$. $\square$

Índice alfabético

- álgebra
 - básica, 2
- álgebra cuadrática
 - homogénea, 39
 - no homogénea, 39
- álgebra de Hopf, 9
 - casi coconmutativa, 10
 - cuasitriangular, 11
 - morfismo de, 9
 - punteada, 10
 - punteada sobre G , 10
- álgebra de Nichols, 21
- 2-cociclo
 - de racks, 4
 - de un álgebra de Hopf, 12
- antípoda, 9
- biálgebra, 8
 - acción diagonal, 9
 - morfismo de, 8
- biprodueto de Radford, *véase*
 - bosonización
- bosonización, 16
- Carcaj de Gabriel, *véase* Ext-Carcaj
- categoría
 - dual, 18
 - exacta, 18
 - finita, 18
 - módulo, 17
 - módulo indescomponible, 18
 - monoidal, 14
 - rígida, 14
 - simétrica, 15
 - tensorial, 15
 - trenzada, 15
- coálgebra, 5
 - coconmutativa, 5
 - cosemisimple, 7
 - graduada, 8
 - morfismo de, 6
 - punteada, 7
 - simple, 7
- coasociatividad, 5
- coideal, 6
- comódulo, 6
 - morfismo de, 7
- comódulo álgebra, 11
 - H -simple, 11
- corradical, 7
 - filtración, 8
- counidad, 5
- cubierta proyectiva, 2
- dato cuadrático de levantamiento, 38
- derivaciones, 29
- descomposición de Shirshov, 26
- diagrama, 30
- diagrama de Dynkin generalizado, 25
- diagrama de separación, 2
- elemento
 - casi-primitivo, 7
 - grupezco, 7
 - primitivo, 7
- equivalencia Morita, 2
- espacio vectorial trenzado, 22
 - de tipo de estándar, 24
 - de tipo diagonal, 23
- dual, 22
- Ext-Carcaj, 2
- Galois
 - extensión H -, 11
 - extensión bi-, 12
 - objeto bi-, 12
 - objeto de, 11
 - objeto hendido, 13
- graduado asociado, 30
- grupoide de Weyl, 24
- hiperletra, 26
- Hopf
 - bimódulo de, 17
 - filtración de, 30
 - ideal de, 9
- ideal
 - bi-, 8
 - coestable, 11

- Método del Levante, 30
- módulo de Yetter-Drinfeld, 16
- morfismo esencial, 2

- notación sigma de Sweedler, 6
 - para comódulos, 7

- palabra de Lyndon, 25
- producto de convolución, 8

- ql-datum, *véase* dato cuadrático de levantamiento

- rack, 4
 - fiel, 4
 - indescomponible, 4
 - inverso, 4
 - trivial, 4
- realización de Yetter-Drinfeld, 33
 - fiel, 33
 - principal, 33
- relaciones cuánticas de Serre, 87
- representación
 - estándar de $\mathbb{S}_n$, 3
 - signo de $\mathbb{S}_n$, 3

- sección de Matsumoto, 22
- serie de Loewy, 11
- simetrizador cuántico, 22
- sistema de raíces generalizado, 24
- subálgebra coideal, 11
 - conexa, 11
 - homogénea, 11

- tipo de representación
 - finito, 2
 - manso, 2
 - salvaje, 2
- trenza infinitesimal, 30

Bibliografía

- [An] ANDRUSKIEWITSCH, N., *About finite dimensional Hopf algebras*, Notes of a course given at the CIMPA School “Quantum symmetries in theoretical physics and mathematics” Bariloche 2000. Contemp. Math 294, 1–57 (2002).
- [AA] ANDRUSKIEWITSCH, N; ANGIONO, I., *On Nichols algebras with generic braiding* Modules and Comodules. Trends in Mathematics. Brzezinski, T.; Gómez Pardo, J.L.; Shestakov, I.; Smith, P.F. (Eds.), pp. 47-64 (2008). ISBN: 978-3-7643-8741-9.
- [AEG] ANDRUSKIEWITSCH, N., ETINGOF, P y GELAKI, S., *Triangular Hopf Algebras With The Chevalley Property*, Michigan Math. J. **49**, 277–298, (2001).
- [AF] ANDRUSKIEWITSCH, N. y FANTINO, F., *On pointed Hopf algebras associated to unmixed conjugacy classes in S_n* , J. Math. Phys. **48**, 033502 1–26 (2007).
- [AFGV1] ANDRUSKIEWITSCH, N., FANTINO, F. , GARCÍA, G. A. y VENDRAMÍN, L., *On Nichols algebras associated to simple racks*. Contemp. Math, to appear. [arXiv:1006.5727v2](#)
- [AFGV2] ANDRUSKIEWITSCH, N., FANTINO, F. , GARCÍA, G. A. y VENDRAMÍN, L., *On twisted homogeneous racks of type D*. [arXiv:1007.1739v1](#)
- [AFGV] ANDRUSKIEWITSCH, N., FANTINO, F., GRAÑA, M., y VENDRAMÍN, L., *Finite-dimensional pointed Hopf algebras with alternating groups are trivial*. Ann. Mat. Pura Appl. (4), to appear. Available at [arXiv:00812.4628](#).
- [AFZ] ANDRUSKIEWITSCH, N., FANTINO, F., y ZHANG, F., *On pointed Hopf algebras associated with the symmetric groups*, Manuscripta Math., Vol. **128**, N. 3, 359–371 2009.
- [AFé] ANDRUSKIEWITSCH, N. y FERRER, W. *The beginnings of the theory of Hopf algebras*, Acta Applicandae Mathematicae (2009) 108: 3–17. Revisions available here: [arXiv:0901.2460](#).
- [AG] ANDRUSKIEWITSCH, N. y GRAÑA, M., *From racks to pointed Hopf algebras*, Adv. in Math. **178** (2), 177–243 (2003).
- [AG2] ANDRUSKIEWITSCH, N. y GRAÑA, M., *Examples of liftings of Nichols algebras over racks*, Algebra Montp. Announc. 2003, Paper 1, 6 pp. (electronic).
- [AHS] ANDRUSKIEWITSCH, N., HECKENBERGER, I., y SCHNEIDER, H.J. *The Nichols algebra of a semisimple Yetter-Drinfeld module*, Amer. J. Math., to appear. [arXiv:0803.2430v1](#).
- [AM] ANDRUSKIEWITSCH, N. y MOMBELLI, M., *On module categories over finite-dimensional Hopf algebras*, J. Algebra **314** (2007), 383–418.
- [AS1] ANDRUSKIEWITSCH, N. y SCHNEIDER, H.J., *Liftings of quantum linear spaces and pointed Hopf algebras of order p^3* , J. Algebra **209**, 658-691 (1998).
- [AS2] ANDRUSKIEWITSCH, N. y SCHNEIDER, H.J., *Finite quantum groups and Cartan matrices*, Adv. Math. **154**, 1–45 (2000).
- [AS3] ANDRUSKIEWITSCH, N. y SCHNEIDER, H.J., *Pointed Hopf algebras*, “New directions in Hopf algebras”, MSRI series Cambridge Univ. Press; 1–68 (2002).
- [AS4] ANDRUSKIEWITSCH, N. y SCHNEIDER, H.J., *On the classification of finite-dimensional pointed Hopf algebras*, Ann. Math. 171 (2010), No. 1, 375–417.
- [AZ] ANDRUSKIEWITSCH, N. y ZHANG, F., *On pointed Hopf algebras associated to some conjugacy classes in S_n* , Proc. Amer. Math. Soc. **135** (2007), 2723–2731.
- [A] ANGIONO, I., *On Nichols algebras with standard braiding*, Algebra and Number Theory Vol. 3, No. 1, 35-106, (2009).

- [AGI] ANGIONO, I. y GARCÍA IGLESIAS, A., *Pointed Hopf algebras with standard braiding are generated in degree 1*. Contemp. Math. to appear. Available at [arXiv:1004.3312v1](#).
- [ARS] AUSLANDER, M., REITEN, I. y SMALØ, S., *Representation theory of Artin algebras*, Cambridge studies in advanced mathematics **36**.
- [Bi] BICHON, J. *Hopf Galois objects and cogrupsoids*, Notas del curso “Objetos de Galois”, FaMAF, UNC (2010) [arXiv:1006.3014v1](#).
- [BM] BLATTNER, R. y MONTGOMERY, S., *Crossed products and Hopf-Galois extensions of algebras*, Pac. J. Math. **137** (1989), 37-54.
- [BEK] BÖCKENHAUER, J., EVANS, D. E. y KAWAHIGASHI, Y., *Chiral Structure of Modular Invariants for Subfactors*, Commun. Math. Phys. **210** (2000), 733–784.
- [BFRS] BARMEIER, T. FUCHS, J., RUNKEL I. y SCHWEIGERT C., *Module categories for permutation modular invariants*, Int Math Res Notices **16** (2010), 3067–3100.
- [BO] BEZRUKAVNIKOV, R. y OSTRIK, V., *On tensor categories attached to cells in affine Weyl groups II*, Representation Theory of Algebraic Groups and Quantum Groups, Adv. Stud. Pure Math. **40** Math. Soc. Japan, Tokyo, 101–119 (2004).
- [BG] BRAVERMAN, A. y GAITSGORY, D., *Poincaré-Birkhoff-Witt Theorem for Quadratic algebras of Koszul type*, Journal of Algebra **181**, 315–328, (1996).
- [B] BOREL, A., *Sur la cohomologie des espaces fibres principaux et des espaces homogenes des groupes de Lie compacts*, Ann. Math **87**, (1953), 115–207.
- [Br] BROWN, K. S., *Cohomology of groups*, Springer-Verlag (1982).
- [C] CARTIER, P., *Hyperalgèbres et groupes de Lie formels*, Seminaire “Sophus Lie” 2e année: 1955/56, (1957).
- [CK] COOK II, P.M. y Kreimer, H.F. *Galois theories and normal bases*, J. Algebra **43** (1976), 115-121.
- [CR] CURTIS, C. W. y REINER, I., *Methods of representation theory, with applications to finite groups and orders I*, Wiley Classics Library, (1981).
- [CS1] COQUEREAUX, R. y SCHIEBER, G., *Orders and dimensions for $\mathfrak{sl}_2$ and $\mathfrak{sl}_3$ module categories and boundary conformal field theories on a torus*, J. of Mathematical Physics, **48**, 043511 (2007).
- [CS2] COQUEREAUX, R. y SCHIEBER, G., *From conformal embeddings to quantum symmetries: an exceptional $SU(4)$ example*, Journal of Physics- Conference Series Volume **103** (2008), 012006.
- [D] DOI, Y., *Braided bialgebras and quadratic algebras*, Comm. Algebra **21**, No.5 (1993), 1731-1749.
- [DT] DOI, Y. y TAKEUCHI, M. *Cleft comodule algebras for a bialgebra*, Comm. Algebra **14** (1986), 801-817.
- [Dr] DROZD, J. A. *Tame and wild matrix problems*, Representations and quadratic forms, Akad. Nauk. Ukrain. SSR, Inst. Mat. Kiev (1979), 39–74 (Russian). Amer. Math. Soc. Transl. **128** (1986), 31–55.
- [EO1] ETINGOF, P. y OSTRIK, V., *Finite tensor categories*, Mosc. Math. J. **4** (2004), no. 3, 627–654.
- [EO2] ETINGOF, P. y OSTRIK, V., *Module categories over representations of $SL_q(2)$ and graphs*, Math. Res. Lett. (1) **11** (2004) 103–114.
- [ENO1] ETINGOF, P., NIKSHYCH, D. y OSTRIK, V., *On fusion categories*, Ann. Math. **162**, 581–642 (2005).
- [ENO2] ETINGOF P., NIKSHYCH D. y OSTRIK, V., *Weakly group-theoretical and solvable fusion categories*, Adv. in Math. (2010), to appear.
- [FG] FANTINO, F. y GARCÍA, G. A., *On pointed Hopf algebras over dihedral groups*. [arXiv:1007.0227v1](#).
- [FK] FOMIN, S. y KIRILOV, A. N., *Quadratic algebras, Dunkl elements and Schubert calculus*, Progress in mathematics **172**, 146–182 (1999).
- [FS] FUCHS, J. y SCHWEIGERT, C., *Category theory for conformal boundary conditions*, in Vertex Operator Algebras in Mathematics and Physics, (2000).

- [Ga] GABERDIEL, M. R. *An algebraic approach to logarithmic conformal field theory*, Int. J. Mod. Phys. A18 **25**, 4593–4638, (2003)
- [GG] GARCÍA, G. A. y GARCÍA IGLESIAS, A., *Finite-dimensional pointed Hopf algebras over $\mathbb{S}_4$* . Israel Journal of Mathematics, to appear. [arXiv:0904.2558v2](#).
- [GI] GARCÍA IGLESIAS, A., *Representations of pointed Hopf algebras over $\mathbb{S}_3$* . Revista de la Unión Matemática Argentina 51 (1) pp. 51–78 (2010).
- [GM] GARCÍA IGLESIAS, A. y MOMBELLI, M., *Representations of the category of modules over pointed Hopf algebras over $\mathbb{S}_3$ and $\mathbb{S}_4$* . Submitted, available at [arXiv:1006.1857v1](#).
- [GAP] THE GAP GROUP, *GAP — Groups, Algorithms, and Programming* Version **4.4.12**, (2008), <http://www.gap-system.org>
- [GBNP] COHEN, A.M. y GIJSBERS, D.A.H., *GBNP 0.9.5 (Non-commutative Gröbner bases)*, , <http://www.win.tue.nl/~amc>.
- [Gi] GINZBURG, V., *Calabi-Yau Algebras*, preprint [arxiv:0612139](#).
- [G1] GRAÑA, M., *On Nichols algebras of low dimension*, “New trends in Hopf algebra theory”; Contemp. Math **267**, 111–136 (2000).
- [G2] GRAÑA, M., *Deriva*, available at <http://mate.dm.uba.ar/~matiasg/programs/deriva.c>.
- [G3] GRAÑA, M., *Zoo of finite dimensional Nichols algebras of non-abelian group type*, available at <http://mate.dm.uba.ar/~matiasg/zoo.html>.
- [G4] GRAÑA, M., *A freeness theorem for Nichols algebras*, J. Algebra **231** (1) 235–257, (2000).
- [G] GÜNTHER, *Crossed products for pointed Hopf algebras*, Comm. Algebra 27, No. 9 (1999), 4389–4410.
- [H] HECKENBERGER, I., *Classification of arithmetic root systems*, Adv. Math. **220** (2009) 59–124.
- [HK] HECKENBERGER, I. y KOLB, S., *Right coideal subalgebras of the Borel part of a quantized enveloping algebra*, Int. Math. Res. Notices (2010), to appear.
- [HS] HECKENBERGER, I. y SCHNEIDER, H.-J., *Right coideal subalgebras of Nichols algebras and the Duflo order on the Weyl groupoid*, preprint [arXiv:0909.0293](#).
- [HuKo] HUANG, Y.-Z. y KONG, L., *Open-String Vertex Algebras, Tensor Categories and Operads*, Commun. Math. Phys. **250** (2004), 433–471.
- [Kh1] KHARCHENKO, V. K., *A quantum analog of the Poincare-Birkhoff-Witt theorem*, Algebra and Logic **38**, (1999), 259–276.
- [Kh2] KHARCHENKO, V. K., *Right coideal subalgebras in $U_q^+(\mathfrak{so}_{2n+1})$* , Journal of the European Mathematical Society, to appear.
- [KL] KHARCHENKO, V. K. y LARA SAGAHON, A.V., *Right coideal subalgebras in $U_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$* , J. Algebra **319** (2008) 2571–2625.
- [KO] KIRILLOV JR., A. y OSTRIK, V., *On a q -analogue of the McKay correspondence and the ADE classification of sl_2 conformal field theories*, Adv. Math. **171** (2002), no. 2, 183–227.
- [L] LUSZTIG, G., *Introduction to quantum groups*, Birkhäuser (1993).
- [ML] MAC LANE, S., *Categories for the working mathematician*, Springer-Verlag (1971).
- [Ma] MASUOKA, A., *Abelian and non-abelian second cohomologies of quantized enveloping algebras*, J. Algebra **320** (2008), 1–47.
- [MS] MILINSKI, A. y SCHNEIDER, H.J., *Pointed indecomposable Hopf algebras over Coxeter groups*, Contemp. Math. **267**, 215–236 (2000).
- [M1] MOMBELLI, M., *Module categories over pointed Hopf algebras*, Math. Z., to appear, preprint [arXiv:0811.4090](#).
- [M2] MOMBELLI, M., *Representations of tensor categories coming from quantum linear spaces*, J. London Math. Soc., to appear.
- [Mo] MONTGOMERY, S., *Hopf algebras and their action on rings*, CBMS Lecture Notes 82, American Math Society, Providence, RI, (1993)
- [N] NIKSHYCH, D., *Non group-theoretical semisimple Hopf algebras from group actions on fusion categories*, Selecta Math. **14** (2008), 145–161.

- [O1] OSTRIK, V., *Module categories, Weak Hopf Algebras and Modular invariants*, Transform. Groups, 2 **8**, 177–206 (2003).
- [O2] OSTRIK, V., *Module categories over the Drinfeld double of a Finite Group*, Int. Math. Res. Not. **2003**, no. 27, 1507–1520.
- [O3] OSTRIK, V., *Module Categories Over Representations of $SL_q(2)$ in the Non-Semisimple Case*, Geom. funct. anal. Vol. **17** (2008), 2005–2017.
- [R] ROOS, J. E., *Some non-Koszul algebras*, Advances in geometry, 385–389, Progr. Math., 172, Birkhäuser, Boston, MA, 1999.
- [Sch1] SCHAUENBURG, P., *Hopf modules and Yetter-Drinfel'd modules*, J. of Algebra **169** (1994) 874–890.
- [Sch2] SCHAUENBURG, P., *Hopf Bigalois extensions*, Comm. in Algebra **24** (1996) 3797–3825.
- [Sc] SCHNEIDER, H. J. *Lectures on Hopf algebras*, Trabajos de Matemática 31/95, FaMAF (1995).
- [Sk] S. SKRYABIN, *Projectivity and freeness over comodule algebras*, Trans. Am. Math. Soc. **359**, No. 6, 2597–2623 (2007).
- [So] SOMMERHÄUSER, Y. *Yetter-Drinfel'd Hopf algebras over groups of prime order*, Lecture Notes in Mathematics **1789**, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2002).
- [S] SWEEDLER, M., *Hopf algebras*, Benjamin, New York, (1969).
- [TW] TAFT, E. J. and WILSON, R.L. *On antipodes in pointed Hopf algebras*, J. of Algebra **29** (1974) 27–32.
- [W] WORONOWICZ, S. L., *Differential calculus on compact matrix pseudogroups (quantum groups)*, Comm. Math. Phys. 122 (1989), pp. 125–170.

Índice alfabético

- álgebra
 - básica, 2
- álgebra cuadrática
 - homogénea, 39
 - no homogénea, 39
- álgebra de Hopf, 9
 - casi coconmutativa, 10
 - cuasitriangular, 11
 - morfismo de, 9
 - punteada, 10
 - punteada sobre G , 10
- álgebra de Nichols, 21
- 2-cociclo
 - de racks, 4
 - de un álgebra de Hopf, 12
- antípoda, 9
- biálgebra, 8
 - acción diagonal, 9
 - morfismo de, 8
- biprodueto de Radford, *véase*
 - bosonización
- bosonización, 16
- Carcaj de Gabriel, *véase* Ext-Carcaj
- categoría
 - dual, 18
 - exacta, 18
 - finita, 18
 - módulo, 17
 - módulo indescomponible, 18
 - monoidal, 14
 - rígida, 14
 - simétrica, 15
 - tensorial, 15
 - trenzada, 15
- coálgebra, 5
 - coconmutativa, 5
 - cosemisimple, 7
 - graduada, 8
 - morfismo de, 6
 - punteada, 7
 - simple, 7
- coasociatividad, 5
- coideal, 6
- comódulo, 6
 - morfismo de, 7
- comódulo álgebra, 11
 - H -simple, 11
- corradical, 7
 - filtración, 8
- counidad, 5
- cubierta proyectiva, 2
- dato cuadrático de levantamiento, 38
- derivaciones, 29
- descomposición de Shirshov, 26
- diagrama, 30
- diagrama de Dynkin generalizado, 25
- diagrama de separación, 2
- elemento
 - casi-primitivo, 7
 - grupezco, 7
 - primitivo, 7
- equivalencia Morita, 2
- espacio vectorial trenzado, 22
 - de tipo de estándar, 24
 - de tipo diagonal, 23
- dual, 22
- Ext-Carcaj, 2
- Galois
 - extensión H -, 11
 - extensión bi-, 12
 - objeto bi-, 12
 - objeto de, 11
 - objeto hendido, 13
- graduado asociado, 30
- grupoide de Weyl, 24
- hiperletra, 26
- Hopf
 - bimódulo de, 17
 - filtración de, 30
 - ideal de, 9
- ideal
 - bi-, 8
 - coestable, 11

- Método del Levante, 30
- módulo de Yetter-Drinfeld, 16
- morfismo esencial, 2

- notación sigma de Sweedler, 6
 - para comódulos, 7

- palabra de Lyndon, 25
- producto de convolución, 8

- ql-datum, *véase* dato cuadrático de levantamiento

- rack, 4
 - fiel, 4
 - indescomponible, 4
 - inverso, 4
 - trivial, 4
- realización de Yetter-Drinfeld, 33
 - fiel, 33
 - principal, 33
- relaciones cuánticas de Serre, 87
- representación
 - estándar de $\mathbb{S}_n$, 3
 - signo de $\mathbb{S}_n$, 3

- sección de Matsumoto, 22
- serie de Loewy, 11
- simetrizador cuántico, 22
- sistema de raíces generalizado, 24
- subálgebra coideal, 11
 - conexa, 11
 - homogénea, 11

- tipo de representación
 - finito, 2
 - manso, 2
 - salvaje, 2
- trenza infinitesimal, 30

