Congruencias Factor Definibles

por Pedro Sánchez Terraf[1]

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía y Física como parte de los requerimientos para la obtención del grado de Doctor en Matemática de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Marzo de 2007

Director: Diego J. Vaggione[2]

[1]Financiado por CONICET, SECYT-UNC y ANPCYT
[2]Financiado por SECYT-UNC y ANPCYT

Resumen

Estudiamos las representaciones en producto directo de álgebras (universales) en variedades. Recolectamos varias condiciones expresando que estas representaciones son "definibles" en el sentido de la lógica de primer orden, entre ellas el concepto de *Congruencias Factor Definibles (DFC).* Los principales resultados son que DFC es una propiedad de Mal'cev y que es equivalente a todas las otras condiciones formuladas; en particular probamos que $\mathcal{V}$ tiene DFC si y sólo si $\mathcal{V}$ tiene $\vec{0}$ & $\vec{1}$ y *Congruencias Factor Booleanas (BFC).* También obtenemos una definición explícita en primer orden Φ del núcleo de las proyecciones canónicas vía los términos asociados a la condición de Mal'cev para DFC. Un resultado obtenido que es de suma utilidad es que esta caracterización Φ es preservada al tomar productos directos y factores directos. De la condición de Mal'cev para DFC se puede deducir transparentemente una tal condición para BFC, verificando como corolario que BFC es equivalente (en variedades) a la *propiedad (*)*, un problema abierto en el trabajo de R. Willard [23]. Por último, se hace un estudio de algunos casos particulares de DFC, considerando distintas complejidades de la fórmula Φ.

La principal herramienta es el concepto de *elemento central,* que es una generalización en común de los elementos centrales idempotentes en anillos con identidad y los elementos neutrales complementados en reticulados acotados.

Palabras Clave: preservación, definibilidad, congruencias factor, elemento central.
2000 Mathematics Subject Classification: Primary 08B05, Secondary 03C40.

Abstract

We study direct product representations of (universal) algebras in varieties. We collect various conditions expressing that these representations are "definable" in the sense of first order logic, among them the concept of *Definable Factor Congruences (DFC)*. The main results are: DFC is a Mal'cev property and it is equivalent to each of the other conditions formulated; in particular we prove that $\mathcal{V}$ has DFC if and only if $\mathcal{V}$ has $\vec{0}$ & $\vec{1}$ and *Boolean Factor Congruences (BFC)*. We also obtain an explicit first-order definition Φ of the kernel of canonical projections via the terms associated to the Mal'cev condition for DFC. One result which is very useful is that this characterization Φ is preserved by taking direct products and direct factors. From the Mal'cev condition for DFC it can be deduced transparently one such condition for BFC, verifying as a corollary that BFC is equivalent (in varieties) to *property (*)*, an open problem in the work of R. Willard [23]. At last, a thorough study of some particular cases of DFC is performed, considering different complexities of the formula Φ.

The main tool is the concept of *central element*, which is a generalization of both central idempotent elements in rings with identity and neutral complemented elements in bounded lattices.

Keywords: preservation, definability, factor congruences, central element.
2000 Mathematics Subject Classification: Primary 08B05, Secondary 03C40.

Agradecimientos

Es imposible evitar el pisoteado *cliché* de "esta enumeración no es completa, etc., etc.". Pero ahí vamos.

En primer lugar, doy las gracias a mi madre por haberme acompañado desde jardín de 5 hasta este momento. Muy grosa mi vieja.

A la Olimpíada Matemática Argentina, que me hizo conocer esta artística disciplina, y en especial a los chicos de Sabadoma, a quienes debo innumerables veladas que me hicieron más que feliz.

A Reimundito, que me trajo de las mechas a Córdoba y que me aportó muchas cosas (malas y buenas) durante 5 años de "matrimonio". Y a los que fueron mis docentes en primer año de la carrera (compartidos con la Licenciatura en Física) que refrendaron mi decisión de venir a esta hermosa ciudad.

Diego, que me ha demostrado que un tipo muy piola puede manejar con destreza toda la seriedad y todo el rigor de la matemática. Trabajar con alguien tan brillante puede ser hasta un poco exasperante —el alumno no espera superar al maestro en este caso— pero su natural entusiasmo es muy contagioso y casi todo lo que he logrado se lo debo a ese *momentum* que me comunicó.

A David Lagmanovich, cuyo librito [11] me ha servido de guía utilísima durante la redacción final, aunque confieso que no seguí al pie de la letra todas las directivas; me hago responsable de cualquier divergencia entre el estilo pulcro y efectivo que allí se detalla y mi trabajo.

A toda la Comunidad de Software Libre, que me han hecho la vida informática muy feliz y que han contribuido al desarrollo y redacción de esta tesis: free pascal, LaTeX, XY-pic, *MakeIndex*, *UACalc*, *Linux*, y la lista sigue.

A la Sección de Ciencias de la Computación, que además de colegas han sido muy buenos amigos.

Índice general

Capítulo 1

Introducción y Herramientas

En este capítulo haremos una breve revisión de los conceptos de Álgebra Universal necesarios para seguir los resultados de la tesis. También fijaremos la notación que se utilizará a lo largo del trabajo, especialmente en las primeras dos secciones.

La sección 1.3 da un panorama del estudio de las representaciones por producto directo, especialmente enfocado al problema de la unicidad.

El lector especializado puede desear avanzar directamente hasta la sección 1.4 que le servirá de introducción a nuestro tema específico y de ahí pasar al capítulo 2; en tal caso le será de utilidad consultar el Índice de Notación al final de la tesis (página 70).

En la sección 1.5 se trata el tema de las condiciones de Mal'cev, de principal interés para nuestro desarrollo, y la sección 1.6 incluye un resultado técnico de Teoría de Preservación que será de suma utilidad en el siguiente capítulo. Este resultado es el único que se escapa del ámbito introductorio; sin embargo, su prueba es elemental.

El resumen presentado en este capítulo no intenta ser exhaustivo ni autocontenido. El lector que desee repasar los preliminares puede consultar el excelente libro de R. McKenzie, G. McNulty y W. Taylor [9], especialmente el capítulo 1 y las secciones 2.1, 2.2, 4.2, 4.11, 4.12 y 5.6, donde hay una introducción a la propiedad BFC. Por último, el libro de S. Burris y H. P. Sankappanavar [4] contiene todos los preliminares de Lógica.

1.1. Álgebras y Variedades

Llamaremos *álgebra* a un conjunto munido de una familia arbitraria pero fija de operaciones finitarias definidas sobre todo el conjunto. Una clase de álgebras es una *variedad* si está definida por *identidades*, i.e., sentencias de la forma $\forall\vec{x}\; p(\vec{x}) = q(\vec{x})$.

Las siguientes clases son ejemplos de variedades: grupos (todos, abelianos, sin centro, de exponente n, etc), anillos, módulos sobre un anillo fijo y álgebras de Boole.

Para el caso de la variedad $\mathcal{G}$ de todos los grupos debemos especificar como operaciones "básicas" el producto $(\cdot)$, tomar inversos $(^{-1})$ y una operación *nularia* que sea constantemente la identidad (e). Luego las identidades que definen dicha variedad son:

$$x \cdot (y \cdot z) \approx (x \cdot y) \cdot z \quad x \cdot e \approx e \cdot x \approx x \quad x \cdot x^{-1} \approx e.$$

Otro ejemplo de variedad es la clase de todos los *semi-reticulados*, que son álgebras con una operación binaria $\vee$ asociativa, conmutativa e idempotente:

$$x \vee (y \vee z) \approx (x \vee y) \vee z \quad x \vee y \approx y \vee x \quad x \vee x \approx x.$$

De ahora en adelante, el símbolo $\mathcal{V}$ denotará siempre una variedad. Llamaremos *términos* a toda expresión que involucre las operaciones básicas de una variedad y que defina globalmente una función. Así, $sqr(x) := x \cdot x$, y $conj(x, y) := y^{-1} \cdot x \cdot y$ son términos de la variedad $\mathcal{G}$ de todos los grupos.

Toda variedad es una categoría concreta cuyos morfismos son las funciones que preservan las operaciones básicas de cada álgebra. Una propiedad importante de las variedades es que contienen objetos libres generados por conjuntos de cardinalidad arbitraria. La construcción de dichas álgebras libres procede de manera análoga al caso de los grupos (salvando ciertas dificultades técnicas), donde el álgebra de las cadenas con la concatenación se reemplaza por el *álgebra de términos* o *totalmente libre* (en el lenguaje de $\mathcal{V}$). Esta última y el álgebra $\mathcal{V}$-libre sobre X será denotadas por $T_{\mathcal{V}}(X)$ y $F_{\mathcal{V}}(X)$, respectivamente. Salvo en caso de posible confusión, omitiremos los subíndices: $T(X)$ y $F(X)$.

1.2. Congruencias

Una *congruencia* de un álgebra A es (equivalentemente):

- una relación de equivalencia θ sobre A que preserva las operaciones básicas (i.e., si $\vec{x}\,\theta\,\vec{y}$, entonces $F(\vec{x})\,\theta\,F(\vec{y})$);
- una relación de equivalencia sobre A que es además una subálgebra de $A \times A$;
- el núcleo $\ker h := \{(x, y) \in A \times A : h(x) = h(y)\}$ con h un morfismo.

Las congruencias heredan la estructura reticulada del conjunto parcialmente ordenado de las relaciones de equivalencia sobre A. En particular, la relación de equivalencia trivial o diagonal $\Delta := \{(x, x) \in A \times A : x \in A\}$ y la total o universal $\nabla := A \times A$ son congruencias. Llamaremos $\mathbf{CON}(A)$ al reticulado de congruencias de un álgebra A.

Los teoremas de isomorfismo para grupos y módulos siguen valiendo en el caso de álgebras generales; en particular, se tiene que la imagen de A por un morfismo h es isomorfa al álgebra *cociente* A/θ (donde $\theta := \ker h$), cuyo universo es el conjunto de clases de equivalencia módulo θ y las operaciones se definen de la manera canónica.

Si ciertos elementos a, b de un álgebra A están relacionados por una congruencia $\theta \in \mathbf{CON}(A)$, escribiremos indistintamente $(a, b) \in \theta$, $a\,\theta\,b$ ó $a \overset{\theta}{\equiv} b$. Esta notación se generaliza a tuplas, viz. $\vec{a}\,\theta\,\vec{b}$ significará $(a_i, b_i) \in \theta$ para todo i.

Definición 1. Una congruencia θ es *compacta* si $\theta \leq \bigvee_{i\in I} \theta_i$ implica $\theta \leq \bigvee_{i\in I'} \theta_i$ donde $I' \subseteq I$ es finito.

Equivalentemente, las congruencias compactas son exactamente las *generadas* por un conjunto finito. Para $A \in \mathcal{V}$, $\vec{a}, \vec{b} \in A^n$, $\mathrm{Cg}^A(\vec{a}, \vec{b})$ denotará la congruencia generada por el conjunto $\{(a_k, b_k) : 1 \leq k \leq n\}$[1]. Como caso particular, cuando una congruencia puede generarse con un solo par, se la denomina *principal*.

Definición 2. Se dice que dos congruencias θ y φ *permutan* si $x\,\theta\,y\,\varphi\,z$ implica que existe un y' tal que $x\,\varphi\,y'\,\theta\,z$. Es decir, los productos relacionales $\theta \circ \varphi$ y $\varphi \circ \theta$ coinciden.

En el caso que θ y φ permuten, se da $\theta \vee \varphi = \theta \circ \varphi$.

Definición 3. θ es *factor* si existe θ^* complemento de aquélla y ambas permutan. En tal caso se dice que θ y θ^* son un *par de congruencias factor complementarias* y lo denotaremos por $\theta \times \theta^* = \Delta$.

Las congruencias factor son exactamente los núcleos de las proyecciones canónicas en productos directos.

1.3. Productos Directos

El nuestro es un estudio sobre las descomposiciones de un álgebra en producto directo. Se obtiene la máxima utilidad de una tal descomposición cuando uno puede conseguir algún resultado relativo a la unicidad de la misma. Esta idea se remonta al teorema de Wedderburn y R. Remak, y luego generalizado por Krull y Schmidt, que prueban unicidad de descomposiciones en producto directo a más de isomorfismo para grupos (finitos los primeros, infinitos con condiciones de cadenas en subgrupos los segundos).

Como primer paso, tenemos que determinar cuáles serían los elementos últimos de una descomposición:

Definición 4. Un álgebra A se dirá *directamente indescomponible* si es no trivial y no es isomorfa al producto directo de dos álgebras no triviales.

En particular, toda álgebra finita cuyo cardinal es igual a un entero primo, es directamente indescomponible. Dada una variedad $\mathcal{V}$, denotaremos con $\mathcal{V}_{DI}$ a las álgebras directamente indescomponibles que pertenezcan a $\mathcal{V}$.

[1] I.e., la menor congruencia que contiene a dicho conjunto.

Íntimamente relacionadas con la unicidad de factorizaciones, se encuentran diversas nociones de refinamiento. Diremos que A tiene la *propiedad de refinamiento* si $A \cong \prod_{i\in I} A/\theta_i \cong \prod_{j\in J} A/\varphi_j$ (con I y J finitos), entonces existen D_{ij} tales que

$$A/\theta_i \cong \prod_{j\in J} D_{ij} \ \text{ y } \ A/\varphi_j \cong \prod_{i\in I} D_{ij}.$$

B. Jonsson y A. Tarski [8] probaron que todo grupoide con identidad cuyo subgrupo central (i.e., el mayor subgrupo abeliano cuyos elementos conmutan y asocian con todos los elementos del grupoide) es finito tiene la *propiedad de refinamiento* y luego tiene a lo sumo una representación como un producto directo de grupoides directamente indescomponibles. También notaron que si el centro es trivial se satisface la *propiedad de refinamiento estricto (SRP)*[2]*:* si A se descompone de dos maneras $\prod_i A/\theta_i$ y $\prod_j A/\varphi_j$ entonces[3]

$$\varphi_j = \prod_{i\in I} \varphi_j \vee \theta_i.$$

Esta propiedad es la de poder refinar descomposiciones en producto directo *a nivel congruencial*, y por ende implica la propiedad de refinamiento. En [14] se muestra que la SRP es equivalente a que los "subgrupoides factor" formen un poset Booleano con respecto a la inclusión. Varios años más tarde, C. C. Chang, Jónsson y Tarski [1] generalizaron las definiciones de SRP al marco de álgebras arbitrarias (y aun a estructuras relacionales), mostraron que varias clases de estructuras que tienen SRP y probaron que SRP es equivalente a la propiedad que consta en la siguiente definición.

Definición 5. Un álgebra A tiene *Congruencias Factor Booleanas ("BFC")* si y sólo si el conjunto de congruencias factor de A es un sub-reticulado distributivo de su reticulado de congruencias. Diremos que $\mathcal{V}$ tiene BFC si cada una de sus álgebras tiene BFC.

Por último, podemos mencionar la *propiedad de Fraser-Horn-Hu ("FHP")*: si $A = \prod_i A/\theta_i$ entonces

$$\varphi = \prod_{i\in I} \varphi \vee \theta_i$$

para $\varphi \in \mathbf{CON}(A)$, no necesariamente factor. Inmediatamente observamos que FHP implica BFC. Los anillos con unidad y las variedades de *congruencias distributivas* son los ejemplos paradigmáticos de variedades con la FHP.

Utilizaremos la siguiente notación relativa a productos directos. La i-ésima proyección canónica en un producto directo $\Pi_i A_i$ será llamada $\pi_i(\cdot)$ o más brevemente, con el supraíndice i: $a^i := \pi_i(a)$. De este modo, si $a \in A_0 \times A_1$ entonces $a = (a^0, a^1)$.

[2]Como convención, utilizaremos las siglas de la terminología en inglés para mantener coherencia con la literatura; v.g., *SRP* se corresponde con *Strict Refinement Property*.

[3]Decimos que $\varphi = \prod_i \varphi_i$ si $\varphi = \bigcap_i \varphi_i$ y para todos $a_i \in A$ existe $a \in A$ tal que $(a, a_i) \in \varphi_i$. Dicho de otro modo, el sistema de ecuaciones en congruencias $(x, a_i) \in \varphi_i$ siempre tiene solución única módulo φ.

1.4. Elementos Centrales

En este contexto algebraico-universal en el que estamos moviéndonos, uno de los conceptos claves necesarios para profundizar el estudio de las representaciones en producto directo es el de *elemento central*. Los elementos centrales son una generalización de los elementos centrales idempotentes en anillos con identidad y los elementos neutrales complementados en reticulados acotados. En estos casos, los elementos centrales *concentran la información* relativa a las representaciones en producto directo. En el ejemplo de los anillos, una descomposición en producto directo de un anillo R

$$R \cong R_1 \times R_2$$

queda totalmente determinada por el elemento $e := (0^{R_1}, 1^{R_2})$, donde 0^{R_1} es el cero de R_1 y 1^{R_2} la identidad de R_2; así, se tiene que la descomposición anterior es exactamente

$$R = (1 - e)R \oplus eR.$$

Más aun, se puede determinar si dos elementos x, y del anillo tienen su segunda componente igual si y sólo si $xe = ye$, y un anillo es indescomponible si y sólo si satisface la sentencia $\forall e : \ (e^2 = e \wedge \forall x : xe = ex) \rightarrow (e = 0 \vee e = 1)$.

Notemos que todo morfismo h de anillos que cumpla $h(0) = h(1)$ tiene imagen trivial. Esta propiedad nos conduce al concepto de *variedades con* $\vec{0}$ *&* $\vec{1}$ (que serán precisadas más tarde), cuyas álgebras poseen análogos a la identidad (elemento máximo) y al elemento nulo (mínimo) como en anillos (reticulados), y esto alcanza para *definir* elementos centrales. Pero para obtener las mismas propiedades que uno tiene en los casos conocidos, es necesario suponer hipótesis más fuertes sobre la variedad: hemos construido ejemplos (ver la sección 3.4) de variedades con $\vec{0}$ & $\vec{1}$ sobre un lenguaje finito en las que ni siquiera $\mathcal{V}_{DI}$ es definible en primer orden. Como resultado positivo, D. Vaggione mostró en [21] que en variedades con $\vec{0}$ & $\vec{1}$ que tienen la propiedad de Fraser-Horn-Hu, los elementos centrales tienen propiedades análogas a las del párrafo anterior. Es natural entonces formular la siguiente pregunta: ¿Cuál es el contexto más general en el cual los elementos centrales en una variedad jugarán tal rol? Antes de dar algunas respuestas posibles, que serán desarrolladas en el capítulo 2, necesitaremos poner algún rigor en las definiciones que acabamos de bosquejar.

Definición 6. Una *variedad con* $\vec{0}$ *&* $\vec{1}$ es una variedad $\mathcal{V}$ en la cual existen términos unarios $0_1(w), \ldots, 0_l(w)$, $1_1(w), \ldots, 1_l(w)$ tales que

$$\mathcal{V} \models \vec{0}(w) = \vec{1}(w) \rightarrow x = y,$$

donde $\vec{0} = (0_1, \ldots, 0_l)$ y $\vec{1} = (1_1, \ldots, 1_l)$.

Esta generalización incluye propiamente a los ejemplos ya nombrados, y rescatamos la relación existente entre morfismos y nuestros nuevos $\vec{0}$ y $\vec{1}$: para todas $A, B \in \mathcal{V}$ y todo $\lambda \in A$, se da

Si $f : A \to B$ es un morfismo tal que $f(0_i(\lambda)) = f(1_i(\lambda))$ para todo i, entonces $f(A)$ es trivial.

La siguiente proposición reúne otras nociones que resultan equivalentes a tener $\vec{0}$ & $\vec{1}$.

Proposición 7. *Cada una de las siguientes implica las otras dos:*

1. *$\mathcal{V}$ tiene $\vec{0}$ & $\vec{1}$;*
2. *$\mathcal{V}$ es* semidegenerada*: ningún álgebra no trivial de $\mathcal{V}$ tiene una subálgebra no trivial;*
3. *la congruencia universal de cada álgebra en $\mathcal{V}$ es compacta.*

Demostración. Ver J. Kollar [10] y Vaggione [19]. □

En este marco se puede generalizar también la noción de elemento central.

Definición 8. Si $\lambda \in A \in \mathcal{V}$ entonces diremos que $\vec{e} = (e_1, \dots, e_l) \in A^l$ es un *elemento λ-central* de A si existe un isomorfismo $A \to A_1 \times A_2$ tal que $\lambda \mapsto (\lambda_1, \lambda_2)$ y $e_j \mapsto \big(0_j(\lambda_1), 1_j(\lambda_2)\big)$ para todo j. Si para $\vec{a} \in A_1^l$ y $\vec{b} \in A_2^l$, escribimos $[\vec{a}, \vec{b}]$ en lugar de $((a_1, b_1), \dots, (a_l, b_l)) \in \big(A_1 \times A_2\big)^l$, podemos resumir lo anterior con

$$\vec{e} \mapsto [\vec{0}(\lambda_1), \vec{1}(\lambda_2)].$$

Dos elementos λ-centrales $\vec{e}, \vec{f}$ serán llamados *complementarios* si existe un isomorfismo $A \to A_1 \times A_2$ tal que $\lambda \mapsto (\lambda_1, \lambda_2)$ y

$$\begin{aligned} \vec{e} &\mapsto [\vec{0}(\lambda_1), \vec{1}(\lambda_2)] \\ \vec{f} &\mapsto [\vec{1}(\lambda_1), \vec{0}(\lambda_2)]. \end{aligned}$$

Los elementos λ-centrales fueron introducidos por Vaggione en el trabajo [16]. Usaremos $\mathrm{Z}_\lambda(A)$ para denotar el conjunto de elementos λ-centrales de A, el *centro*.

1.5. Condiciones de Mal'cev

Veremos con un ejemplo la noción de una propiedad tipo *Mal'cev* de una variedad. Los grupos satisfacen la siguiente propiedad:

Para todos $G, H \in \mathcal{G}$, $a, b, c \in G$ y $f, g : G \to H$ tales que $f(a) = f(b)$ y $g(b) = g(c)$, existe b' tal que $g(a) = g(b')$ y $f(b') = f(c)$

Esta propiedad es equivalente a la permutabilidad de congruencias en toda la variedad (ver definición 2). La prueba es extremadamente simple, basta tomar $b' := a \cdot b^{-1} \cdot c$, es decir, b' es un término valuado en a, b y c. Resulta que en el caso general, reemplazando $\mathcal{G}$ por una variedad arbitraria en la propiedad anterior, se puede ver que dicha propiedad es equivalente a la existencia de un término ternario p que cumpla

$$p(a, b, b) \approx p(b, b, a) \approx a.$$

Luego, una propiedad tipo Mal'cev es una propiedad equivalente a la existencia de términos que satisfagan ciertas ecuaciones, y una condición de Mal'cev es una presentación de dichos términos y ecuaciones. Para formalizar estas nociones, glosamos la compilación que R. Willard [23] extrae de G. Grätzer [7], W. Taylor [15] y W. D. Neumann [13]. Sea P una propiedad atribuible a variedades. Una *presentación finita (para variedades)* es un par formado por un conjunto finito $\{f_1, \dots, f_r\}$ de símbolos de operación y un conjunto finito $\{\sigma_1 \approx \tau_1, \dots, \sigma_k \approx \tau_k\}$ de leyes ecuacionales en variables y estos símbolos. Una *condición de Mal'cev fuerte para* P es una presentación finita Γ (como arriba) tal que una variedad arbitraria $\mathcal{V}$ satisface P si y sólo si hay términos $t_1, \dots, t_r$ en el lenguaje de $\mathcal{V}$ los cuales, al ser substituidos por $f_1, \dots, f_r$ hacen las ecuaciones en Γ verdaderas en todo miembro de $\mathcal{V}$. Se dice también que P está *definida* por Γ. Una *condición de Mal'cev para* P es una sucesión numerable $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots$ de presentaciones finitas que definen propiedades P_0, P_1, respectivamente, tales que

1. P_i implica P_{i+1} para cada $i \geq 0$, y
2. P es equivalente a la disyunción de las P_i's.

Finalmente, P es una propiedad tipo Mal'cev si existe una condición de Mal'cev para P.

Un ejemplo de propiedad de Mal'cev es la de tener $\vec{0}$ & $\vec{1}$. Una condición de Mal'cev explícita para ella está dada por las ecuaciones (2.52). Otra propiedad de tipo Mal'cev es la de tener *congruencias factor compactas* (ver la sección 3.1 y allí el Lema 41). Mediante un teorema de existencia, S. Burris y S. Bigelow [2] probaron que BFC es de Mal'cev; recién en 2000 Willard halla una condición de la cual se puede extraer una condición de Mal'cev para BFC, pero que no se dio en manera explícita. En la sección 2.4 se da una condición de Mal'cev explícita y se prueba que para el caso de variedades, BFC es equivalente a (*) en el trabajo de Willard [23].

1.6. Un resultado de Preservación

La Teoría de Preservación tuvo su origen en un resultado de G. Birkhoff, el cual caracteriza de una manera algebraica a las variedades. Llamemos $\mathbf{H}(\mathcal{K})$, $\mathbf{S}(\mathcal{K})$ y $\mathbf{P}(\mathcal{K})$ a las clases de todas las imágenes homomórficas, submodelos y productos directos, respectivamente, de modelos de una clase $\mathcal{K}$. Para $\mathbf{O} = \mathbf{H}, \mathbf{S}, \mathbf{P}$ y otros operadores que sean introducidos posteriormente, diremos que una sentencia de primer orden φ es *preservada* por $\mathbf{O}$ si y sólo si para toda clase $\mathcal{K}$ tal que $\mathcal{K} \models \varphi$, se da $\mathbf{O}(\mathcal{K}) \models \varphi$.

Teorema 9 (Birkhoff, [3]). *Una clase de álgebras $\mathcal{K}$ es axiomatizable por identidades si y sólo si es cerrada bajo* $\mathbf{H}$, $\mathbf{S}$ *y* $\mathbf{P}$. *En particular, si una sentencia es preservada por* $\mathbf{H}$, $\mathbf{S}$ *y* $\mathbf{P}$, *entonces es equivalente a una conjunción finita de identidades.*

Es decir, este resultado muestra como se pueden extraer, a partir de la *forma* de los axiomas que definen una clase de modelos $\mathcal{K}$, conclusiones acerca de las propiedades de clausura de dicha clase. Más aun, afirma que estas propiedades son *equivalentes* a la posibilidad de obtener una tal axiomatización.

Nuestro estudio, aunque esencialmente algebraico, hace uso intensivo de estas herramientas de preservación. Buscando definiciones en lenguaje de primer orden de los objetos que nos interesan, podemos deducir qué propiedades tienen en función de la estructura de las definiciones halladas.

Ejemplos clásicos de preservación, que embeben nuestro trabajo, son los siguientes:

Teorema 10 (Lyndon). *Sea $\mathcal{K}$ una clase de primer orden. Son equivalentes:*

1. *$\mathcal{K}$ admite un conjunto de axiomas* positivos *(i.e., en los que sólo ocurren los conectivos $\wedge$ y $\vee$).*

2. *$\mathcal{K}$ es cerrado por* $\mathbf{H}$.

Teorema 11. *Una fórmula de primer orden es preservada al tomar* extensiones *(i.e., $A \models \varphi$ y $A \subseteq B$ implica $B \models \varphi$) si y sólo si es equivalente a una fórmula existencial.*

Una *fórmula de Horn* es una fórmula de primer orden tal que su matriz es de la forma

$$\bigwedge_k \bigvee_j \varphi_{kj}$$

donde cada φ_{kj} es atómica o negación de atómica y para cada k hay a lo sumo un j tal que φ_{kj} es atómica.

Lema 12 (Horn). *Toda fórmula de Horn es preservada por productos directos.*

Requeriremos un resultado muy técnico de preservación (Teorema 17), relativo a *factores directos*. Un factor directo de A es un álgebra A_1 tal que existe A_2 satisfaciendo $A \cong A_1 \times A_2$. Diremos que una fórmula ψ es preservada por factores directos si cada vez que $A \models \psi$ se da $B \models \psi$ para todo factor directo B de A; en este caso, escribiremos "ψ es preservada por $\mathbf{F}$".

El Teorema 17 mostrará que las fórmulas de cierto tipo son preservadas por productos y factores directos. Un resultado relacionado se encuentra en Willard [23, Lemma 1.2], donde se prueba que la clase de fórmulas *$\mathcal{K}$-factorables* cumple con esta propiedad. En nuestro caso, las fórmulas que surgen en el desarrollo del Capítulo 2 no parecen responder a exactamente el mismo esquema que las fórmulas $\mathcal{K}$-factorables, pero igualmente se pudo demostrar la preservación necesaria.

Por el resto de la sección, N será un número natural par.

Lema 13. *Para toda palabra α en el alfabeto $\{1,\dots,N\}$ de longitud no mayor que N, sea $\tau_\alpha = \tau_\alpha(x, y, \vec{z}, x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ una fórmula preservada por productos directos y por* $\mathbf{F}$. *Defina:*

$$E_m := \bigwedge_{\substack{m\le|\alpha|\le N\\ |\alpha|\ par}} \Big(\bigwedge\nolimits_{\gamma\neq\varepsilon} \tau_{\alpha\gamma} \to \tau_\alpha\Big) \qquad O_m := \bigwedge_{\substack{m\le|\alpha|\le N\\ |\alpha|\ impar}} \Big(\bigwedge\nolimits_{\gamma\neq\varepsilon} \tau_{\alpha\gamma} \to \tau_\alpha\Big).$$

Luego,

1. *Para $2 \le m \le N$, m par, si $\big(\exists y_1\forall x_1 \dots \exists y_n\forall x_n\ E_m\big) \wedge \big(\exists x_1\forall y_1 \dots \exists x_n\forall y_n\ O_{m+1}\big)$ es preservada por* $\mathbf{F}$, *también lo es*

$$\big(\exists y_1\forall x_1 \dots \exists y_n\forall x_n\ E_m\big) \wedge \big(\exists x_1\forall y_1 \dots \exists x_n\forall y_n\ O_{m-1}\big).$$

2. *Para $4 \le m \le N$, m par, si $\big(\exists y_1\forall x_1 \dots \exists y_n\forall x_n\ E_m\big) \wedge \big(\exists x_1\forall y_1 \dots \exists x_n\forall y_n\ O_{m-1}\big)$ es preservada por* $\mathbf{F}$, *también lo es*

$$\big(\exists y_1\forall x_1 \dots \exists y_n\forall x_n\ E_{m-2}\big) \wedge \big(\exists x_1\forall y_1 \dots \exists x_n\forall y_n\ O_{m-1}\big).$$

Note que todo subíndice varía sobre palabras de longitud menor o igual a N, así que una expresión de la forma "$\bigwedge_{\gamma\neq\varepsilon}\tau_{\alpha\gamma}$" debería ser leída como "$\bigwedge\{\tau_{\alpha\gamma}\gamma \neq \varepsilon$ y $|\alpha\gamma| \le N\}$". Por esto, si $m \ge N$, $O_m = true$ (conjunción vacía) y $E_N = \bigwedge_{|\beta|=N}\tau_\beta$. También, recuerde que la i-ésima componente de un elemento a en un producto directo $\Pi_i A_i$ se llama a^i.

El caso que nos interesará en las aplicaciones es en el cual las fórmulas τ_α son atómicas, así que el lector puede hacer tal suposición sin perder generalidad.

Ahora enunciaremos y probaremos dos lemas que serán de ayuda para probar el Lema 13. En lo siguiente supondremos que la tupla $\vec{z}$ tiene longitud igual a 1, ya que las pruebas son exactamente las mismas y esta simplificación las hace más fáciles de leer.

Lema 14. *Sea m un entero par, $A_0, A_1 \in \mathcal{V}$ y $c, d, e, a_1, \dots, a_{2n} \in A_0 \times A_1$ tales que $2 \le m \le N$, $A_0 \times A_1 \models E_m(c, d, e, a_1, \dots, a_{2n})$ y $A_1 \models O_{m+1}(c^1, d^1, e^1, a_1^1, \dots, a_{2n}^1)$. Entonces $A_0 \models E_m(c^0, d^0, e^0, a_1^0, \dots, a_{2n}^0)$ y si α tiene longitud m entonces*

$$A_0 \models \Big(\bigwedge_{\gamma\neq\varepsilon}\tau_{\alpha\gamma}\Big)(c^0, d^0, e^0, a_1^0, \dots, a_{2n}^0) \;\Rightarrow\; A_0 \times A_1 \models \Big(\bigwedge_{\mu}\tau_{\alpha\mu}\Big)(c, d, e, a_1, \dots, a_{2n}). \quad (1.1)$$

Demostración. Por inducción en m. Si $m = N$, la primera parte es inmediata pues E_N es una conjunción de fórmulas preservadas por $\mathbf{F}$ y por esto preservada por $\mathbf{F}$. La segunda parte está contenida en las hipótesis. Para hacer la prueba más legible, omitiremos la cadena de parámetros. Tome un entero par m tal que $2 \leq m < N$ y suponga el lema está probado para $m + 2$. Suponga

$$A_0 \times A_1 \models E_m; \qquad \text{Note que:} \qquad E_m = E_{m+2} \wedge \bigwedge_{|\alpha|=m} \Big(\bigwedge\nolimits_{\gamma\neq\varepsilon} \tau_{\alpha\gamma} \to \tau_\alpha\Big) \tag{1.2}$$

$$A_1 \models O_{m+1} \qquad\qquad O_{m+1} = O_{m+3} \wedge \bigwedge_{|\alpha|=m+1} \Big(\bigwedge\nolimits_{\gamma\neq\varepsilon} \tau_{\alpha\gamma} \to \tau_\alpha\Big). \tag{1.3}$$

Por la primera parte de la hipótesis inductiva tenemos $A_0 \models E_{m+2}$. Tenemos que ver que $A_0 \models \bigwedge_{|\alpha|=m} \big(\bigwedge_{\gamma\neq\varepsilon} \tau_{\alpha\gamma} \to \tau_\alpha\big)$. Suponga ahora que para alguna palabra α de longitud m,

$$A_0 \models \bigwedge_{\gamma\neq\varepsilon} \tau_{\alpha\gamma}. \tag{1.4}$$

En particular, para cada $i, j \leq N$ tenemos

$$A_0 \models \bigwedge_{\mu} \tau_{\alpha ij\mu}.$$

Probaremos que $A_0 \models \tau_\alpha$ y la segunda parte del lema será probada en el camino. Por la segunda parte de la hipótesis inductiva (i.e., (1.1)) obtenemos, para todo j,

$$A_0 \times A_1 \models \bigwedge_{\mu} \tau_{\alpha ij\mu} \quad \text{o, dicho de otro modo,} \quad A_0 \times A_1 \models \bigwedge_{\gamma\neq\varepsilon} \tau_{\alpha i\gamma}.$$

Como esta última fórmula es preservada por $\mathbf{F}$, tenemos

$$A_1 \models \bigwedge_{\gamma\neq\varepsilon} \tau_{\alpha i\gamma}. \tag{1.5}$$

Usando (1.3) (observe que $|\alpha i| = m + 1$), tenemos $A_1 \models \tau_{\alpha i}$ para todo i. Esto, junto con (1.5) implica que $A_1 \models \bigwedge_{\gamma\neq\varepsilon} \tau_{\alpha\gamma}$. Ahora aplicamos (1.4), obteniendo

$$A_0 \times A_1 \models \bigwedge_{\gamma\neq\varepsilon} \tau_{\alpha\gamma}.$$

Aplicando (1.2),

$$A_0 \times A_1 \models \tau_\alpha.$$

Las últimas dos fórmulas conjuntamente dicen

$$A_0 \times A_1 \models \bigwedge_{\mu} \tau_{\alpha\mu}. \tag{1.6}$$

Hemos probado (1.4)⇒(1.6), que es la segunda conclusión. Como τ_α es preservada por $\mathbf{F}$, obtenemos $A_0 \models \tau_\alpha$, que es la primera conclusión. □

Lema 15. *Sea m un entero par, $A_0, A_1 \in \mathcal{V}$ y $c, d, e, a_1, \ldots, a_{2n} \in A_0 \times A_1$ tales que $2 \leq m \leq N$, $A_0 \times A_1 \models O_{m-1}(c, d, e, a_1, \ldots, a_{2n})$ y $A_1 \models E_m(c^1, c^1, e^1, a_1^1, \ldots, a_{2n}^1)$. Luego $A_0 \models O_{m-1}(c^0, d^0, e^0, a_1^0, \ldots, a_{2n}^0)$ y si α tiene longitud $m-1$ entonces*

$$A_0 \models \Big(\bigwedge_{\gamma \neq \varepsilon} \tau_{\alpha\gamma}\Big)(c^0, d^0, e^0, a_1^0, \ldots, a_{2n}^0) \;\Rightarrow A_0 \times A_1 \models \Big(\bigwedge_{\mu} \tau_{\alpha\mu}\Big)(c, d, e, a_1, \ldots, a_{2n}).$$

Demostración. Por inducción en m. Si $m = N$, las hipótesis son:

$$A_0 \times A_1 \models O_{N-1} \qquad = \bigwedge_{|\alpha|=N-1} \Big(\bigwedge\nolimits_{\gamma \neq \varepsilon} \tau_{\alpha\gamma} \to \tau_\alpha\Big) \tag{1.7}$$

$$A_1 \models E_N \qquad = \bigwedge_{|\beta|=N} \tau_\beta. \tag{1.8}$$

Suponga que para alguna palabra α de longitud $N-1$,

$$A_0 \models \bigwedge_{\gamma \neq \varepsilon} \tau_{\alpha\gamma} \;=\; \bigwedge_i \tau_{\alpha i},$$

Usando (1.8) y preservación por productos directos, tenemos

$$A_0 \times A_1 \models \bigwedge_i \tau_{\alpha i}.$$

Por (1.7) tenemos $A_0 \times A_1 \models \tau_\alpha$, obteniendo así

$$A_0 \times A_1 \models \bigwedge_\mu \tau_{\alpha\mu}.$$

Hemos probado la segunda parte del lema. Pasando a A_0 obtenemos la primera parte. Ahora tome un entero par m tal que $2 \leq m < N$ y suponga el lema está probado para $m+2$. Suponga

$$A_0 \times A_1 \models O_{m-1} \qquad = O_{m+1} \;\wedge \bigwedge_{|\alpha|=m-1} \Big(\bigwedge\nolimits_{\gamma \neq \varepsilon} \tau_{\alpha\gamma} \to \tau_\alpha\Big) \tag{1.9}$$

$$A_1 \models E_m \qquad = E_{m+2} \;\wedge \bigwedge_{|\alpha|=m} \Big(\bigwedge\nolimits_{\gamma \neq \varepsilon} \tau_{\alpha\gamma} \to \tau_\alpha\Big). \tag{1.10}$$

Por hipótesis inductiva tenemos $A_0 \models O_{m+1}$. El resto del argumento es paralelo a la prueba del Lema 14. □

Prueba del Lema 13. Para ver (1), suponga

$$A_0 \times A_1 \models \Big(\big(\exists y_1 \forall x_1 \dots \exists y_n \forall x_n \; E_m\big) \wedge \big(\exists x_1 \forall y_1 \dots \exists x_n \forall y_n \; O_{m-1}\big)\Big)(c, d, e).$$

Así tenemos funciones (de Skolem) $F_1, \dots, F_n$ tales que F_i es $(i-1)$-aria y

$$A_0 \times A_1 \models \forall \vec{y} O_{m-1}(c, d, e, F_1, y_1, \dots, F_n(y_1, \dots, y_{n-1}), y_n).$$

Como O_{m-1} implica O_{m+1}, tenemos

$$A_0 \times A_1 \models \Big(\big(\exists y_1 \forall x_1 \dots \exists y_n \forall x_n \; E_m\big) \wedge \big(\exists x_1 \forall y_1 \dots \exists x_n \forall y_n \; O_{m+1}\big)\Big)(c, d, e).$$

Y luego, como esta fórmula es preservada por $\mathbf{F}$, por hipótesis,

$$A_0 \models \big(\exists y_1 \forall x_1 \dots \exists y_n \forall x_n \; E_m\big)(c^0, d^0, e^0) \tag{1.11}$$
$$A_1 \models \big(\exists y_1 \forall x_1 \dots \exists y_n \forall x_n \; E_m\big)(c^1, d^1, e^1). \tag{1.12}$$

Así tenemos funciones $G_1, \dots, G_n$ tales que

$$A_1 \models \forall \vec{x} E_m(c^1, d^1, e^1, x_1, G_1, \dots, x_n, G_n(x_1, \dots, x_{n-1})).$$

Ahora, para $j = 1, \dots, n$ defina funciones j-arias $p_j = p_j(a_1, \dots, a_j)$ de A_0 a $A_0 \times A_1$:

$$\begin{aligned} p_1 &:= (a_1, G_1) \\ p_2 &:= (a_2, G_2(F_1^1)) \\ p_j &:= \big(a_j, G_j\big(F_1^1, F_2(p_1)^1, \dots, F_{j-1}(p_1, \dots, p_{j-2})^1\big)\big). \end{aligned}$$

El lector puede verificar que esta selección asegura, para cada $\vec{a} \in A_0^n$,

$$\begin{aligned} A_0 \times A_1 &\models O_{m-1}\big(c, d, e, F_1, p_1, \dots, F_n(p_1, \dots, p_{n-1}), p_n\big) \\ A_1 &\models E_m\big(c^1, d^1, e^1, F_1^1, p_1^1, \dots, F_n(p_1, \dots, p_{n-1})^1, p_n^1\big). \end{aligned}$$

Podemos aplicar el Lema 15 y obtenemos

$$A_0 \models O_{m-1}\big(c^0, d^0, e^0, F_1^0, p_1^0, \dots, F_n(p_1, \dots, p_{n-1})^0, p_n^0\big).$$

Equivalentemente,

$$A_0 \models O_{m-1}\big(c^0, d^0, e^0, F_1^0, a_1, F_2(p_1)^0, a_2, \dots, F_n(p_1, \dots, p_{n-1})^0, a_n\big).$$

Ahora, definiendo $H_j : A_0^{j-1} \to A_0$ como sigue:

$$\begin{aligned} H_1 &:= F_1^0 \\ H_2(y_1) &:= F_2(p_1(y_1))^0 \\ H_j(y_1, \dots, y_{j-1}) &:= F_j(p_1(y_1), \dots, p_{j-1}(y_1, \dots, y_{j-1}))^0, \end{aligned}$$

vemos que

$$A_0 \models \forall \vec{y} O_{m-1}\big(c^0, d^0, e^0, H_1, y_1, \ldots, H_n(y_1, \ldots, y_{n-1}), y_n\big),$$

y luego

$$A_0 \models \big(\exists x_1 \forall y_1 \ldots \exists x_n \forall y_n\ O_{m-1}\big)(c^0, d^0, e^0).$$

Esto, junto con (1.11), prueba este caso.

La parte (2) es enteramente análoga a la anterior y se prueba usando el Lema 14. □

El siguiente lema es una generalización del resultado relativo a fórmulas de Horn, y en palabras dice que si en la definición de una fórmula de Horn reemplazamos las fórmulas atómicas por fórmulas preservada por productos y factores directos, obtenemos la misma preservación. La prueba es enteramente análoga al caso de las fórmulas de Horn.

Lema 16. *Sea Φ una fórmula de la forma*

$$Q_1 u_1 \ldots Q_n u_n \bigwedge_k \bigvee_j \varphi_{kj}$$

donde $Q_i = \exists, \forall$, cada φ_{kj} es preservada por **P** *y* **F** *o es la negación de una tal fórmula y para cada k hay a lo sumo un j tal que φ_{kj} no está negada. Entonces Φ es preservada por* **P**.

Teorema 17. *(Mismas hipótesis que en el Lema 13.) La fórmula*

$$\big(\exists y_1 \forall x_1 \ldots \exists y_n \forall x_n\ E_2\big) \wedge \big(\exists x_1 \forall y_1 \ldots \exists x_n \forall y_n\ O_1\big) \tag{1.13}$$

es preservada al tomar factores directos y productos directos.

Demostración. Primero observe que

$$\big(\exists y_1 \forall x_1 \ldots \exists y_n \forall x_n\ E_N\big) \wedge \big(\exists x_1 \forall y_1 \ldots \exists x_n \forall y_n\ O_{N+1}\big) = \exists y_1 \forall x_1 \ldots \exists y_n \forall x_n \bigwedge_{|\beta|=N} \tau_\beta$$

es preservada por factores directos. Esto es inmediato pues la conjunción y la cuantificación de fórmulas preservadas por **F** son nuevamente preservadas por **F**. Luego de aplicar sucesivas veces el Lema 13 podremos concluir que (1.13) es preservada por **F**.

La prueba de que (1.13) es preservada por productos directos es el contenido del Lema 16. □

Capítulo 2

Variedades con Congruencias Factor Definibles

2.1. Introducción

A través de este capítulo supondremos que $\mathcal{V}$ es una variedad con $\vec{0}$ & $\vec{1}$ tal que los términos $\vec{0}$ y $\vec{1}$ son cerrados. Esto puede ser conseguido cuando el lenguaje tiene una constante. Haremos esta suposición para simplificar y clarificar nuestro tratamiento; sin embargo, las pruebas permanecen válidas en el caso general.

En trabajos de D. Vaggione [17, 18, 20, 21] y en último lugar en un trabajo en conjunto con el autor [22], se han utilizado los elementos centrales para relacionar diversas propiedades de una variedad. Como ejemplo, en [20] se prueba que toda variedad de *congruencias modulares* con $\vec{0}$ & $\vec{1}$ tiene la propiedad de Fraser-Horn-Hu. En estos trabajos, un punto clave es conseguir una descripción en primer orden del centro $\mathrm{Z}(\cdot)$, y dicha descripción está indisolublemente ligada a una caracterización análoga de las congruencias factor.

Hasta el trabajo [22] se consideraba que el contexto más general en el cual los elementos centrales en una variedad con $\vec{0}$ & $\vec{1}$ "codificarían la información relativa a congruencias factor" era el de variedades con *congruencias factor compactas* (cf. sección 3.1) y, en la práctica, variedades tales que la congruencia principal $\mathrm{Cg}\big((0,0),(0,1)\big)$ en un producto directo $A \times B$ igualara al núcleo de la proyección canónica $A \times B \to A$. La frase entre comillas se puede interpretar de diversas maneras; una de ellas es la siguiente:

para $A \in \mathcal{V}$, el mapeo

$$(\theta, \theta^*) \mapsto \text{único } (\vec{e}, \vec{f}) \in A^l \times A^l \text{ satisfaciendo } \vec{0}\,\theta\,\vec{e}\,\theta^*\,\vec{1} \text{ y } \vec{1}\,\theta\,\vec{f}\,\theta^*\,\vec{0}$$

es una biyección entre el conjunto de pares de congruencias $\theta, \theta^* \in \mathbf{CON}(A)$ tales que $\theta \times \theta^* = \Delta$ y el conjunto de pares de elementos centrales complementarios de A.

Pero luego de notar que en el caso de una variedad arbitraria con $\vec{0}$ & $\vec{1}$ y BFC[1] se obtenía el mismo poder expresivo de los elementos centrales, se decidió invertir el punto de vista y preguntarse qué conclusión puede extraerse de la sola hipótesis de definibilidad en primer orden de las congruencias factor con elementos centrales como parámetros, es decir:

> existe una fórmula primer orden $\Phi(x, y, \vec{z}, \vec{w})$ en el lenguaje de $\mathcal{V}$ tal que para todo $A, B \in \mathcal{V}$, y $a, c \in A$, $b, d \in B$,
>
> $$A \times B \models \Phi\big((a, b), (c, d), [\vec{0}, \vec{1}], [\vec{1}, \vec{0}]\big) \quad \text{si y sólo si} \quad a = c.$$

La conclusión de esta línea de trabajo puede condensarse en el siguiente teorema.

Teorema 18. *Sea $\mathcal{V}$ una variedad con $\vec{0}$ & $\vec{1}$. Las siguientes son equivalentes:*

1. *$\mathcal{V}$ tiene la* Propiedad de Determinación Débil (DP Débil)*: para $A \in \mathcal{V}$, el mapeo*

   $$(\theta, \theta^*) \mapsto \textit{único } (\vec{e}, \vec{f}) \in A^l \times A^l \textit{ satisfaciendo } \vec{0}\,\theta\,\vec{e}\,\theta^*\,\vec{1} \textit{ y } \vec{1}\,\theta\,\vec{f}\,\theta^*\,\vec{0}$$

   es una biyección entre el conjunto de pares de congruencias factor complementarias de A y el conjunto de pares de elementos centrales complementarios de A.

2. *$\mathcal{V}$ tiene la* Propiedad de Determinación (DP)*: para $A \in \mathcal{V}$, el mapeo*

   $$(\theta, \theta^*) \mapsto \textit{único } \vec{e} \in A^l \textit{ satisfaciendo } \vec{0}\,\theta\,\vec{e}\,\theta^*\,\vec{1}$$

   es una biyección entre el conjunto de pares de congruencias factor complementarias de A y el conjunto de elementos centrales de A.

3. *$\mathcal{V}$ tiene* Congruencias Factor Definibles (DFC)*: existe una fórmula de primer orden $\Phi(x, y, \vec{z})$ en el lenguaje de $\mathcal{V}$ tal que para todo $A, B \in \mathcal{V}$, y $a, c \in A$, $b, d \in B$,*

   $$A \times B \models \Phi\big((a, b), (c, d), [\vec{0}, \vec{1}]\big) \quad \textit{si y sólo si} \quad a = c.$$

4. *Existe una fórmula de primer orden $\Phi(x, y, \vec{z}, \vec{w})$ en el lenguaje de $\mathcal{V}$ tal que para todo $A, B \in \mathcal{V}$, y $a, c \in A$, $b, d \in B$,*

   $$A \times B \models \Phi\big((a, b), (c, d), [\vec{0}, \vec{1}], [\vec{1}, \vec{0}]\big) \quad \textit{si y sólo si} \quad a = c.$$

5. *$\mathcal{V}$ tiene BFC.*

Más aun, cuando estas condiciones equivalentes valen, la fórmula Φ en (3) puede ser elegida de manera que sea preservada por productos y factores directos. Por último, para todo $A \in \mathcal{V}$, el mapeo

[1] En la sección 3.4 se define una variedad $\mathcal{L}^{\vee}$ que satisface estas dos hipótesis y no tiene congruencias factor compactas.

$$\vec{e} \mapsto \Phi^A(\cdot, \cdot, \vec{e})$$

es una biyección entre el conjunto de elementos centrales y el álgebra de Boole de congruencias factor de A.

Ahora describiremos brevemente los contenidos de cada parte de este capítulo. En la sección 2.2 damos una condición de Mal'cev para una *Propiedad Intermedia* que será definida allí; esta condición es enteramente análoga a una condición de Mal'cev para BFC. Los términos obtenidos en esta parte son los constituyentes últimos de nuestras construcciones de definibilidad. La sección 2.3 provee una fórmula explícita Φ satisfaciendo (3) del Teorema 18. Esta fórmula es construida de tal manera que es preservada por productos directos y factores directos; esta última afirmación usa el resultado probado en la sección 1.6. En la sección 2.5 caracterizamos en primer orden los (pares de) elementos centrales (complementarios) en una variedad con DFC y mostramos que las coordenadas (en una representación por producto directo) de un elemento central son elementos centrales. Estos resultados y los obtenidos en las secciones previas permitirán finalizar la prueba del Teorema 18. En 2.6 damos una fórmula óptima para el caso de una variedad de semi-reticulados con $\vec{0}$ & $\vec{1}$.

2.2. Una Propiedad de Mal'cev Intermedia

Usaremos la siguiente *Propiedad Intermedia (IP):*

> para todo $A \in \mathcal{V}$, $\vec{e} \in A^l$ y $\varphi, \varphi^*, \theta, \theta^* \in \mathbf{CON}(A)$, si $\varphi \times \varphi^* = \Delta$, $\theta \times \theta^* = \Delta$, $\vec{0}\,\theta\,\vec{e}\,\theta^*\,\vec{1}$ y $\vec{0}\,\varphi\,\vec{e}\,\varphi^*\,\vec{1}$, entonces $\theta = \varphi$.

No es difícil ver las implicaciones DP $\Rightarrow$ IP $\Rightarrow$ DP Débil. En lo que sigue, daremos definiciones y lemas que nos encaminen al Teorema 24, el cual nos proporcionará una condición de Mal'cev para la IP.

Sean s_i, t_i términos $(2i + l)$-arios (en el lenguaje de $\mathcal{V}$) para cada $i = 1, \ldots, n$ y sea A un álgebra en el lenguaje de $\mathcal{V}$ (no necesariamente en $\mathcal{V}$). Para $(c, d, \vec{e}, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n) \in A^{2+l+2n}$, definimos $\sigma(c, d, \vec{e}, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)$ como la tupla $(x, y, \vec{z}, x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ dada por la siguiente recursión:

$$\begin{aligned}
x &:= c & \qquad x_j &:= s_j(x, y, \vec{z}, x_1, y_1, \ldots, x_{j-1}, y_{j-1}) \\
y &:= c & \qquad y_j &:= b_j \\
\vec{z} &:= \vec{0} & &
\end{aligned}$$

Definimos σ^*, ρ, ρ^* análogamente.

- $\sigma^*(c, d, \vec{e}, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n) := (x, y, \vec{z}, x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ donde:

$$\begin{aligned} x &:= c & x_j &:= t_j(x, y, \vec{z}, x_1, y_1, \ldots, x_{j-1}, y_{j-1}) \\ y &:= d & y_j &:= b_j \\ \vec{z} &:= \vec{1} \end{aligned}$$

- $\rho(c, d, \vec{e}, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n) := (x, y, \vec{z}, x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ donde:

$$\begin{aligned} x &:= c & x_j &:= a_j \\ y &:= d & y_j &:= s_j(x, y, \vec{z}, x_1, y_1, \ldots, x_{j-1}, y_{j-1}) \\ \vec{z} &:= \vec{0} \end{aligned}$$

- $\rho^*(c, d, \vec{e}, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n) := (x, y, \vec{z}, x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ donde:

$$\begin{aligned} x &:= c & x_j &:= a_j \\ y &:= d & y_j &:= t_j(x, y, \vec{z}, x_1, y_1, \ldots, x_{j-1}, y_{j-1}) \\ \vec{z} &:= \vec{1} \end{aligned}$$

Primero enunciaremos sin prueba un lema que involucra estas funciones.

Lema 19. *Para todo $(c, d, \vec{e}, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n) \in A^{2+l+2n}$, tenemos las siguientes identidades:*

$$\mathrm{Cg}(c, d) \vee \mathrm{Cg}(\vec{e}, \vec{0}) \vee \bigvee_i \mathrm{Cg}(a_i, s_i(c, d, \vec{e}, a_1, b_1, \ldots, a_{i-1}, b_{i-1})) = \\ = \mathrm{Cg}((c, d, \vec{e}, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n), \sigma(c, d, \vec{e}, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n))$$

$$\mathrm{Cg}(\vec{e}, \vec{1}) \vee \bigvee_i \mathrm{Cg}(a_i, t_i(c, d, \vec{e}, a_1, b_1, \ldots, a_{i-1}, b_{i-1})) = \\ = \mathrm{Cg}((c, d, \vec{e}, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n), \sigma^*(c, d, \vec{e}, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n))$$

$$\mathrm{Cg}(\vec{e}, \vec{0}) \vee \bigvee_i \mathrm{Cg}(b_i, s_i(c, d, \vec{e}, a_1, b_1, \ldots, a_{i-1}, b_{i-1})) = \\ = \mathrm{Cg}((c, d, a_1, b_1, \vec{e}, \ldots, a_n, b_n), \rho(c, d, \vec{e}, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n))$$

$$\mathrm{Cg}(\vec{e}, \vec{1}) \vee \bigvee_i \mathrm{Cg}(b_i, t_i(c, d, \vec{e}, a_1, b_1, \ldots, a_{i-1}, b_{i-1})) = \\ = \mathrm{Cg}((c, d, \vec{e}, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n), \rho^*(c, d, \vec{e}, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)).$$

En las pruebas que siguen, repetidamente buscaremos elementos en un álgebra que resuelvan "ecuaciones" congruenciales de la forma

$$a \overset{\theta}{\equiv} x \overset{\theta^*}{\equiv} b$$

cuando $\theta \times \theta^* = \Delta$. Usando las funciones σ, σ^*, ρ y ρ^* recién definidas, podremos sacar conclusiones de la manera en que los elementos como x fueron construidos. Esto es el contenido de las siguientes consecuencias inmediatas del Lema 19:

Corolario 20. *Dados $c, d \in A$, $\vec{e} \in A^l$ y $\theta, \theta^* \in \mathbf{CON}(A)$ tales que $\vec{0}\,\theta\,\vec{e}\,\theta^*\,\vec{1}$ y $c\,\theta\,d$, para todo a_i y b_i ($i = 1, \ldots, n$) tales que*

$$\begin{aligned} s_1(c,d,\vec{e}) &\overset{\theta}{\equiv} a_1 \overset{\theta^*}{\equiv} t_1(c,d,\vec{e}) \\ s_2(c,d,\vec{e},a_1,b_1) &\overset{\theta}{\equiv} a_2 \overset{\theta^*}{\equiv} t_2(c,d,\vec{e},a_1,b_1) \\ &\cdots \\ s_{j+1}(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_j,b_j) &\overset{\theta}{\equiv} a_{j+1} \overset{\theta^*}{\equiv} t_{j+1}(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_j,b_j) \end{aligned} \tag{2.1}$$

tenemos

$$t(\sigma(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)) \overset{\theta}{\equiv} t(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n) \overset{\theta^*}{\equiv} t(\sigma^*(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)) \tag{2.2}$$

para todo término $(2n+l+2)$-ario t en el lenguaje de $\mathcal{V}$.

El siguiente resultado es enteramente análogo.

Corolario 21. *Supongamos que $c, d \in A$, $\vec{e} \in A^l$ y $\varphi, \varphi^* \in \mathbf{CON}(A)$ son tales que $\vec{0}\,\varphi\,\vec{e}\,\varphi^*\,\vec{1}$. Si a_i y b_i ($i = 1, \ldots, n$) satisfacen*

$$\begin{aligned} s_1(c,d,\vec{e}) &\overset{\varphi}{\equiv} b_1 \overset{\varphi^*}{\equiv} t_1(c,d,\vec{e}) \\ &\cdots \\ s_{j+1}(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_j,b_j) &\overset{\varphi}{\equiv} b_{j+1} \overset{\varphi^*}{\equiv} t_{j+1}(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_j,b_j), \end{aligned} \tag{2.3}$$

obtenemos

$$t(\rho(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)) \overset{\varphi}{\equiv} t(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n) \overset{\varphi^*}{\equiv} t(\rho^*(c,d,\vec{e},a_1b_1,\ldots,a_n,b_n)) \tag{2.4}$$

para todo término $(2n+l+2)$-ario t en el lenguaje de $\mathcal{V}$.

También necesitaremos la siguiente versión (debida a Grätzer) de la observación clave de Mal'cev sobre congruencias principales y su corolario.

Lema 22. *Sea A cualquier álgebra y sean $a, b \in A$, $\vec{a}, \vec{b} \in A^n$. Entonces $(a, b) \in \mathrm{Cg}^A(\vec{a}, \vec{b})$ si y sólo si existen términos $(n+m)$-arios $p_1(\vec{x}, \vec{u}), \ldots, p_k(\vec{x}, \vec{u})$, donde k es impar y, $\vec{u} \in A^m$ tales que:*

$$\begin{aligned} a &= p_1(\vec{a}, \vec{u}) \\ p_i(\vec{b}, \vec{u}) &= p_{i+1}(\vec{b}, \vec{u}), \ i \text{ impar} \\ p_i(\vec{a}, \vec{u}) &= p_{i+1}(\vec{a}, \vec{u}), \ i \text{ par} \\ p_k(\vec{b}, \vec{u}) &= b \end{aligned}$$

Corolario 23. *Para todo homomorfismo $F : A \to B$, si $(a, b) \in \theta^A(\vec{a}, \vec{b})$, entonces $(F(a), F(b)) \in \theta^B(F(\vec{a}), F(\vec{b}))$.*

Usaremos $|\alpha|$ para denotar la longitud de una palabra α y ε denotará la palabra vacía.

Teorema 24. *Sea $\mathcal{V}$ una variedad con $\vec{0}$ & $\vec{1}$. $\mathcal{V}$ tiene la IP si y sólo si existen enteros $N = 2k$ y n, términos $(2i + l)$-arios s_i y t_i para cada $i = 1, \ldots, n$, y para toda palabra α en el alfabeto $\{1, \ldots, N\}$, de longitud no mayor a N, hay términos L_α, R_α tales que*

$\boxed{|\alpha| = N}$

$$\begin{aligned} L_\alpha(\rho(\vec{X})) &\approx R_\alpha(\rho(\vec{X})) \\ L_\alpha(\rho^*(\vec{X})) &\approx R_\alpha(\rho^*(\vec{X})) \end{aligned} \tag{2.5}$$

$\boxed{|\alpha| = 0}$

$$\begin{aligned} x &\approx L_\varepsilon(\vec{X}) \\ y &\approx R_\varepsilon(\vec{X}) \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$L_\varepsilon(\rho(\vec{X})) \approx L_1(\rho(\vec{X})) \tag{2.7}$$

$$R_j(\rho(\vec{X})) \approx L_{j+1}(\rho(\vec{X})) \qquad si\ 1 \leq j \leq N-1 \tag{2.8}$$

$$R_N(\rho(\vec{X})) \approx R_\varepsilon(\rho(\vec{X})) \tag{2.9}$$

$\boxed{0 < |\alpha| < N}$

Si $|\alpha|$ es par entonces

$$L_\alpha(\rho(\vec{X})) \approx L_{\alpha 1}(\rho(\vec{X})) \tag{2.10}$$

$$R_{\alpha j}(\rho(\vec{X})) \approx L_{\alpha(j+1)}(\rho(\vec{X})) \qquad si\ 1 \leq j \leq k-1 \tag{2.11}$$

$$R_{\alpha k}(\rho(\vec{X})) \approx R_\alpha(\rho(\vec{X})) \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned} L_\alpha(\rho^*(\vec{X})) &\approx L_{\alpha(k+1)}(\rho^*(\vec{X})) \\ R_{\alpha j}(\rho^*(\vec{X})) &\approx L_{\alpha(j+1)}(\rho^*(\vec{X})) \qquad si\ k+1 \leq j \leq N-1 \\ R_{\alpha N}(\rho^*(\vec{X})) &\approx R_\alpha(\rho^*(\vec{X})) \end{aligned} \tag{2.13}$$

Si $|\alpha|$ es impar entonces

$$\begin{aligned} L_\alpha(\sigma(\vec{X})) &\approx L_{\alpha 1}(\sigma(\vec{X})) \\ R_{\alpha j}(\sigma(\vec{X})) &\approx L_{\alpha(j+1)}(\sigma(\vec{X})) \qquad \text{si } 1 \leq j \leq k-1 \\ R_{\alpha k}(\sigma(\vec{X})) &\approx R_\alpha(\sigma(\vec{X})) \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned} L_\alpha(\sigma^*(\vec{X})) &\approx L_{\alpha(k+1)}(\sigma^*(\vec{X})) \\ R_{\alpha j}(\sigma^*(\vec{X})) &\approx L_{\alpha(j+1)}(\sigma^*(\vec{X})) \qquad \text{si } k+1 \leq j \leq N-1 \\ R_{\alpha N}(\sigma^*(\vec{X})) &\approx R_\alpha(\sigma^*(\vec{X})) \end{aligned} \tag{2.15}$$

donde $\vec{X} = (x, y, \vec{z}, x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ y σ, σ^*, ρ y ρ^* están definidos respecto a s_i, t_i, sobre $T_{\mathcal{V}}(\vec{X})$.

Demostración. ($\Leftarrow$) Suponga la existencia de los términos, y suponga $\varphi \times \varphi^* = \Delta$, $\theta \times \theta^* = \Delta$, $\vec{0}\,\theta\, e\, \theta^*\, \vec{1}$, $\vec{0}\,\varphi\, e\, \varphi^*\, \vec{1}$, y $c\,\theta\, d$. Queremos ver que $c\,\varphi\, d$. Existen únicos a_i, b_i satisfaciendo las siguiente relaciones

$$\begin{aligned} s_1(c,d,\vec{e}) &\overset{\theta}{\equiv} a_1 \overset{\theta^*}{\equiv} t_1(c,d,\vec{e}) \\ s_1(c,d,\vec{e}) &\overset{\varphi}{\equiv} b_1 \overset{\varphi^*}{\equiv} t_1(c,d,\vec{e}) \\ &\cdots \\ s_{j+1}(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_j,b_j) &\overset{\theta}{\equiv} a_{j+1} \overset{\theta^*}{\equiv} t_{j+1}(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_j,b_j) \\ s_{j+1}(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_j,b_j) &\overset{\varphi}{\equiv} b_{j+1} \overset{\varphi^*}{\equiv} t_{j+1}(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_j,b_j) \end{aligned} \tag{2.16}$$

Note que esta definición combina los esquemas de los Corolarios 20 y 21. Luego, por las ecuaciones (2.2) y (2.4) tenemos, tomando $t := L_\alpha, R_\alpha$:

$$\begin{aligned} L_\alpha(\sigma(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)) &\overset{\theta}{\equiv} L_\alpha(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots) \overset{\theta^*}{\equiv} L_\alpha(\sigma^*(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)) \\ L_\alpha(\rho(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)) &\overset{\varphi}{\equiv} L_\alpha(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots) \overset{\varphi^*}{\equiv} L_\alpha(\rho^*(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)) \end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned} R_\alpha(\sigma(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)) &\overset{\theta}{\equiv} R_\alpha(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots) \overset{\theta^*}{\equiv} R_\alpha(\sigma^*(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)) \\ R_\alpha(\rho(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)) &\overset{\varphi}{\equiv} R_\alpha(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots) \overset{\varphi^*}{\equiv} R_\alpha(\rho^*(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)) \end{aligned} \tag{2.18}$$

para toda α. Probaremos inductivamente que

$$L_\alpha(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n) = R_\alpha(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n) \tag{2.19}$$

para toda $\alpha \neq \varepsilon$. Tome α tal que $|\alpha| = N$; luego

$$\begin{aligned}
L_\alpha(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n) &\overset{\varphi}{\equiv} L_\alpha(\rho(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)) && \text{por ecuaciones (2.17)}\\
&= R_\alpha(\rho(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)) && \text{usando identidades (2.5)}\\
&\overset{\varphi}{\equiv} R_\alpha(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n) && \text{por ecuaciones (2.18)}
\end{aligned}$$

Y,

$$\begin{aligned}
L_\alpha(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n) &\overset{\varphi^*}{\equiv} L_\alpha(\rho^*(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)) && \text{por ecuaciones (2.17)}\\
&= R_\alpha(\rho^*(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)) && \text{usando identidades (2.5)}\\
&\overset{\varphi^*}{\equiv} R_\alpha(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n) && \text{por ecuaciones (2.18)}
\end{aligned}$$

Luego $\big(L_\alpha(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n), R_\alpha(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)\big) \in \varphi \cap \varphi^* = \Delta$ y entonces $L_\alpha(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n) = R_\alpha(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)$. Tome $\alpha \neq \varepsilon$ de longitud impar y suponga

$$L_{\alpha j}(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n) = R_{\alpha j}(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)$$

para todo $j = 1,\ldots,N$. Se verifica que

$$L_\alpha(c,d,\vec{e},a_1,b_1\ldots,a_n,b_n) \overset{\theta}{\equiv} R_\alpha(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n):$$

$$\begin{aligned}
L_\alpha(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n) &\overset{\theta}{\equiv} L_\alpha(\sigma(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)) && \text{por las ecuaciones (2.17)}\\
&= L_{\alpha 1}(\sigma(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)) && \text{por las identidades (2.14)}\\
&\overset{\theta}{\equiv} L_{\alpha 1}(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n) && \text{por las ecuaciones (2.17)}\\
&= R_{\alpha 1}(x,x,\vec{z},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n) && \text{por hipótesis inductiva}\\
&\overset{\theta}{\equiv} R_{\alpha 1}(\sigma^*(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)) && \text{por las ecuaciones (2.18)}\\
&\overset{\theta}{\equiv} \cdots && \text{usando (2.14) e iterando}\\
&= R_{\alpha k}(\sigma(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n))\\
&= R_\alpha(\sigma(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)) && \text{usando (2.14)}\\
&\overset{\theta}{\equiv} R_\alpha(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n),
\end{aligned}$$

Ídem para θ^*:

$$\begin{aligned}
L_\alpha(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n) &\overset{\theta^*}{\equiv} L_\alpha(\sigma^*(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)) && \text{por las ecuaciones (2.17)}\\
&= L_{\alpha 1}(\sigma^*(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)) && \text{por las identidades (2.15)}\\
&\overset{\theta^*}{\equiv} L_{\alpha 1}(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n) && \text{por las ecuaciones (2.17)}\\
&= R_{\alpha 1}(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n) && \text{por hipótesis inductiva}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\stackrel{\theta^*}{\equiv} R_{\alpha 1}(\sigma^*(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)) && \text{por las ecuaciones (2.18)}\\
&\stackrel{\theta^*}{\equiv} \cdots && \text{usando (2.15) e iterando}\\
&= R_{\alpha k}(\sigma^*(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)) &&\\
&= R_{\alpha}(\sigma^*(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)) && \text{usando (2.15)}\\
&\stackrel{\theta^*}{\equiv} R_{\alpha}(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n) && \text{por las ecuaciones (2.18)}
\end{aligned}
$$

Entonces $\big(L_\alpha(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n), R_\alpha(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)\big) \in \theta \cap \theta^* = \Delta$, y luego son iguales. Si $\alpha \neq \varepsilon$ tiene longitud par, las relaciones

$$
\begin{aligned}
L_\alpha(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n) &\stackrel{\varphi}{\equiv} L_{\alpha}(\rho(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)) && \text{por las ecuaciones (2.17)}\\
&= L_{\alpha 1}(\rho(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)) && \text{por identidad (2.10)}\\
&\stackrel{\varphi}{\equiv} L_{\alpha 1}(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n) && \text{por las ecuaciones (2.17)}\\
&= R_{\alpha 1}(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n) && \text{por hipótesis inductiva}\\
&\stackrel{\varphi}{\equiv} R_{\alpha 1}(\rho(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)) && \text{por las ecuaciones (2.18)}\\
&\stackrel{\varphi}{\equiv} \cdots && \text{usando (2.11) e iterando}\\
&= R_{\alpha k}(\rho(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)) &&\\
&= R_{\alpha}(\rho(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)) && \text{usando la identidad (2.12)}\\
&\stackrel{\varphi}{\equiv} R_{\alpha}(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n) && \text{por las ecuaciones (2.18)}
\end{aligned}
$$

prueban $\big(L_\alpha(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n), R_\alpha(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)\big) \in \varphi$, y

$$
\begin{aligned}
L_\alpha(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n) &\stackrel{\varphi^*}{\equiv} L_{\alpha}(\rho^*(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)) && \text{por las ecuaciones (2.17)}\\
&= L_{\alpha 1}(\rho^*(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)) && \text{por identidades (2.13)}\\
&\stackrel{\varphi^*}{\equiv} L_{\alpha 1}(c,d,\vec{e},a_1b_1,\ldots,a_n,b_n) && \text{por las ecuaciones (2.17)}\\
&= R_{\alpha 1}(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n) && \text{por hipótesis inductiva}\\
&\stackrel{\varphi^*}{\equiv} R_{\alpha 1}(\rho^*(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)) && \text{por las ecuaciones (2.18)}\\
&\stackrel{\varphi^*}{\equiv} \cdots && \text{usando (2.13) e iterando}\\
&= R_{\alpha k}(\rho^*(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)) &&\\
&= R_{\alpha}(\rho^*(c,d\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)) && \text{usando (2.12)}\\
&\stackrel{\varphi^*}{\equiv} R_{\alpha}(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n) && \text{por las ecuaciones (2.18)}
\end{aligned}
$$

completan este caso. Finalmente, tenemos

$$
\begin{aligned}
c &= L_\varepsilon(\rho(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)) && \text{usando las identidades (2.6)}\\
&= L_1(\rho(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)) && \text{por identidad (2.7)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{\varphi}{\equiv} L_1(c, d, \vec{e}, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n) && \text{por las ecuaciones (2.17)} \\
&= R_1(c, d, \vec{e}, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n) && \text{por (2.19)} \\
&\overset{\varphi}{\equiv} R_1(\rho(c, d\vec{e}, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)) && \text{por las ecuaciones (2.18)} \\
&\overset{\varphi}{\equiv} \cdots && \text{usando ecuaciones (2.8) e iterando\ldots} \\
&= R_N(\rho(c, d, \vec{e}, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)) && \\
&= R_\varepsilon(\rho(c, d, \vec{e}, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)) && \text{usando la identidad (2.9)} \\
&= d && \text{usando las identidades (2.6)}
\end{aligned}
$$

Esto prueba $(c, d) \in \varphi$.

($\Rightarrow$) Para cada conjunto de variables Y, defina

$$
\begin{aligned}
Y^* &:= Y \cup \{x_{p,q} : p, q \in T(Y)\} \cup \{y_{p,q} : p, q \in T(Y)\} \\
Y^{0*} &:= Y \\
Y^{(n+1)*} &:= (Y^{n*})^* \\
Y^\infty &:= \bigcup_{n \geq 1} Y^{n*}
\end{aligned}
$$

donde $x_{p,q}$ y $y_{p,q}$ son nuevas variables. Tome $Z := \{x, y, z_1, \ldots, z_l\}$ y $F := F(Z^\infty)$. Defina el *índice* de $p \in T(Z^\infty)$ como $\operatorname{ind}(p) = \text{mín}\{j : p \in T(Z^{j*})\}$; es evidente que si $\operatorname{ind}(x_{p,q}) \leq \operatorname{ind}(x_{r,s})$, ni p ni q pueden ser términos que dependan de $x_{r,s}$. Lo mismo vale cuando $\operatorname{ind}(x_{p,q}) \leq \operatorname{ind}(y_{r,s})$ y simétricamente, y cuando $\operatorname{ind}(y_{p,q}) \leq \operatorname{ind}(y_{r,s})$.

Tome las siguientes congruencias en F:

$$
\begin{aligned}
\theta &:= \operatorname{Cg}(\vec{0}, \vec{z}) \vee \operatorname{Cg}(x, y) \vee \bigvee\{\operatorname{Cg}(p, x_{p,q}) : p, q \in F\} & \delta_0 = \epsilon_0 &:= \Delta^F \\
\theta^* &:= \operatorname{Cg}(\vec{1}, \vec{z}) \vee \bigvee\{\operatorname{Cg}(x_{p,q}, q) : p, q \in F\} & \delta_{n+1} &:= (\theta \vee \epsilon_n) \cap (\theta^* \vee \epsilon_n) \\
\varphi &:= \operatorname{Cg}(\vec{0}, \vec{z}) \vee \bigvee\{\operatorname{Cg}(p, y_{p,q}) : p, q \in F\} & \epsilon_{n+1} &:= (\varphi \vee \delta_n) \cap (\varphi^* \vee \delta_n) \\
\varphi^* &:= \operatorname{Cg}(\vec{1}, \vec{z}) \vee \bigvee\{\operatorname{Cg}(y_{p,q}, q) : p, q \in F\} & \delta_\infty &:= \bigvee_{n \geq 0} \delta_n = \bigvee_{n \geq 0} \epsilon_n
\end{aligned}
$$

Por construcción, $\varphi \circ \varphi^* = \theta \circ \theta^* = \nabla^F$, $\vec{0}\, \theta\, \vec{z}\, \theta^*\, \vec{1}$, $\vec{0}\, \varphi\, \vec{z}\, \varphi^*\, \vec{1}$, y $x\, \theta\, y$. Observe que si $(a, b) \in (\varphi \vee \delta_\infty) \cap (\varphi^* \vee \delta_\infty)$ entonces existe un $n \geq 0$ tal que $(a, b) \in (\varphi \vee \delta_n) \cap (\varphi^* \vee \delta_n)$. Pero esta congruencia es exactamente ϵ_{n+1}, así que $(a, b) \in \epsilon_{n+1} \subseteq \delta_\infty$. Podemos concluir $(\varphi \vee \delta_\infty) \cap (\varphi^* \vee \delta_\infty) = \delta_\infty$. Lo mismo sucede con θ y θ^*; por esto,

$$
(\varphi \vee \delta_\infty)/\delta_\infty \times (\varphi^* \vee \delta_\infty)/\delta_\infty = \Delta \qquad (\theta \vee \delta_\infty)/\delta_\infty \times (\theta^* \vee \delta_\infty)/\delta_\infty = \Delta
$$

en F/δ_∞. Entonces, por la IP tenemos $(x/\delta_\infty, y/\delta_\infty) \in (\varphi \vee \delta_\infty)/\delta_\infty$ y luego $(x, y) \in \varphi \vee \delta_\infty$. Podemos encontrar un entero par $N = 2k$ tal que $(x, y) \in \varphi \circ^{2N} \delta_N^N$, donde δ_N^N es el resultado de reemplazar cada ocurrencia de "$\vee$" en la definición de δ_N por $\circ^N$, el producto relacional iterado N veces. Definiremos inductivamente términos L_α y R_α, para α una palabra de longitud a lo sumo N en el alfabeto $\{1, \dots, N\}$ tal que:

$$x = L_\varepsilon \qquad y = R_\varepsilon \tag{2.20}$$
$$(L_\varepsilon, L_1) \in \varphi \qquad (R_N, R_\varepsilon) \in \varphi \tag{2.21}$$
$$(L_i, R_i) \in \delta_N^N \qquad \text{si } 1 \leq i \leq N \tag{2.22}$$
$$(R_i, L_{(i+1)}) \in \varphi \qquad \text{si } 1 \leq i \leq N-1. \tag{2.23}$$

Para $\alpha \neq \varepsilon$ tal que $|\alpha| < N$ es un entero impar,

$$(L_\alpha, L_{\alpha 1}) \in \theta \qquad (R_{\alpha k}, R_\alpha) \in \theta \tag{2.24}$$
$$(L_\alpha, L_{\alpha(k+1)}) \in \theta^* \qquad (R_{\alpha N}, R_\alpha) \in \theta^* \tag{2.25}$$
$$(L_{\alpha i}, R_{\alpha i}) \in \epsilon_{N-|\alpha|}^N \qquad \text{si } 1 \leq i \leq N \tag{2.26}$$
$$(R_{\alpha i}, L_{\alpha(i+1)}) \in \theta \qquad \text{si } 1 \leq i \leq k-1 \tag{2.27}$$
$$(R_{\alpha i}, L_{\alpha(i+1)}) \in \theta^* \qquad \text{si } k+1 \leq i \leq N-1 \tag{2.28}$$

y para $\alpha \neq \varepsilon$ tal que $|\alpha| < N$ es un entero par:

$$(L_\alpha, L_{\alpha 1}) \in \varphi \qquad (R_{\alpha k}, R_\alpha) \in \varphi \tag{2.29}$$
$$(L_\alpha, L_{\alpha(k+1)}) \in \varphi^* \qquad (R_{\alpha N}, R_\alpha) \in \varphi^* \tag{2.30}$$
$$(L_{\alpha i}, R_{\alpha i}) \in \delta_{N-|\alpha|}^N \qquad \text{si } 1 \leq i \leq N \tag{2.31}$$
$$(R_{\alpha i}, L_{\alpha(i+1)}) \in \varphi \qquad \text{si } 1 \leq i \leq k-1 \tag{2.32}$$
$$(R_{\alpha i}, L_{\alpha(i+1)}) \in \varphi^* \qquad \text{si } k+1 \leq i \leq N-1 \tag{2.33}$$

Tomamos $L_\varepsilon := x$ y $R_\varepsilon := y$. Como sabemos $(x, y) \in \varphi \circ^{2N} \delta_N^N$, definimos L_i, R_i para $i = 1, \dots, N$ como términos satisfaciendo

$$x \ \varphi \ L_1 \ \delta_N^N \ R_1 \ \varphi \ L_2 \ \delta_N^N \cdots \varphi \ L_N \ \delta_N^N \ R_N \ \varphi \ y \tag{2.34}$$

Note que estos términos satisfacen (2.20)–(2.33) siempre que puedan ser verificadas. Suponga que hemos definido los términos correspondientes a palabras con longitud menor o igual j y que satisfacen las ecuaciones entre (2.20)–(2.33) que involucran palabras de longitud j o menor. Entonces definiremos términos correspondientes a palabras con longitud igual a $j+1$ tales que la totalidad de términos definidos satisfagan las ecuaciones entre (2.20)–(2.33) que involucran palabras de longitud $j+1$ o menor. Tenemos dos casos:

Caso 1: j impar. Tome α tal que $|\alpha| = j$. Tenemos L_α y R_α y por (2.31), satisfacen $(L_\alpha, R_\alpha) \in \delta_{N-j+1}^N = (\theta \circ^N \epsilon_{N-j}^N) \cap (\theta^* \circ^N \epsilon_{N-j}^N)$. Definimos $L_{\alpha i}$ y $R_{\alpha i}$ para $i = 1, \dots, N$ tales que:

$$\begin{gathered} L_\alpha \ \theta \ L_{\alpha 1} \ \epsilon_{N-j}^N \ R_{\alpha 1} \ \theta \ L_{\alpha 2} \cdots R_{\alpha(k-1)} \ \theta \ L_{\alpha k} \ \epsilon_{N-j}^N \ R_{\alpha k} \ \theta \ R_\alpha \\ L_\alpha \ \theta^* \ L_{\alpha(k+1)} \ \epsilon_{N-j}^N \ R_{\alpha(k+1)} \ \theta^* \ L_{\alpha(k+2)} \cdots L_{\alpha N} \ \epsilon_{N-j}^N \ R_{\alpha N} \ \theta^* \ R_\alpha. \end{gathered} \tag{2.35}$$

Las ecuaciones entre (2.20)–(2.33) que involucran términos L_μ y R_μ tales que $|\mu| = j + 1$ son (2.24)–(2.28). Todas ellas pueden ser inferidas de (2.35).

Caso 2: j **par.** Tome α tal que $|\alpha| = j$. Definimos $L_{\alpha i}$ y $R_{\alpha i}$ para $i = 1, \dots, N$. Por (2.26) y por la definición de ϵ^N_{N-j+1} podemos definir nuestros términos satisfaciendo:

$$\begin{aligned} L_\alpha \; \varphi \; L_{\alpha 1} \; \delta^N_{N-j} \; R_{\alpha 1} \; \varphi \; L_{\alpha 2} \cdots R_{\alpha(k-1)} \; \varphi \; L_{\alpha k} \; \delta^N_{N-j} \; R_{\alpha k} \; \varphi \; R_\alpha \\ L_\alpha \; \varphi \; L_{\alpha(k+1)} \; \delta^N_{N-j} \; R_{\alpha(k+1)} \; \varphi^* \; L_{\alpha(k+2)} \cdots R_{\alpha N} \; \varphi^* R_\alpha. \end{aligned} \tag{2.36}$$

De esto inmediatamente concluimos (2.29)–(2.33).

Sea $V \subseteq Z^\infty$ un conjunto finito de variables tal que si reemplazamos θ, θ^*, φ y φ^*, respectivamente, por las siguientes congruencias compactas:

$$\begin{aligned} \theta_0 &:= \mathrm{Cg}(\vec{0}, \vec{z}) \vee \mathrm{Cg}(x, y) \vee \bigvee \{\mathrm{Cg}(p, x_{p,q}) : x_{p,q} \in V\} \\ {\theta^*}_0 &:= \mathrm{Cg}(\vec{1}, \vec{z}) \vee \bigvee \{\mathrm{Cg}(x_{p,q}, q) : x_{p,q} \in V\} \\ \varphi_0 &:= \mathrm{Cg}(\vec{0}, \vec{z}) \vee \bigvee \{\mathrm{Cg}(p, y_{p,q}) : y_{p,q} \in V\} \\ {\varphi^*}_0 &:= \mathrm{Cg}(\vec{1}, \vec{z}) \vee \bigvee \{\mathrm{Cg}(y_{p,q}, q) : y_{p,q} \in V\} \end{aligned}$$

aún obtenemos las relaciones congruenciales (2.20)–(2.33). Es claro que si agrandamos el conjunto V a un nuevo conjunto X, las propiedades enumeradas aún valdrán. Sea V_0 la unión de V y el conjunto (finito) de variables que ocurren en los términos L_α, R_α, donde α es una palabra. Defina:

$$V_{n+1} := V_n \cup \bigcup \{Var(p), Var(q) : x_{p,q} \in V_n \text{ or } y_{p,q} \in V_n\}$$

Luego, para algún M tendremos $V_M = V_{M+1}$; definamos

$$X := \big(V_M \cup \{x_{p,q} : y_{p,q} \in V_M\} \cup \{y_{p,q} : x_{p,q} \in V_M\}\big) \backslash \{x, y, z_1, \dots, z_l\}.$$

Ordene X totalmente de manera que ind : $X \to \omega$ sea no decreciente y $x_{p,q}$ sea el predecesor inmediato de $y_{p,q}$, y agregue $x, y, z_1, \dots, z_l$ al principio. Tenemos

$$\vec{X} = (x, y, \vec{z}, x_{s_1,t_1}, y_{s_1,t_1}, \dots, x_{s_n,t_n}, y_{s_n,t_n}) = (x, y, \vec{z}, x_1, y_1, \dots, x_n, y_n).$$

Entonces podemos considerar $L_\alpha = L_\alpha(\vec{X})$ y lo mismo para R_α, y por los comentarios que seguían a la definición de Z^∞, podemos suponer $s_i = s_i(x, y, \vec{z}, x_1, y_1, \dots, x_{i-1}, y_{i-1})$ y lo mismo para t_i. Finalmente, defina $\sigma, \rho, \sigma^*, \rho^*$ sobre el álgebra de términos $T(\vec{X})$ con respecto a s_i, t_i. Afirmamos que estos $L_\bullet$, $R_\bullet$, $s_\bullet$ y $t_\bullet$ satisfacen la condición de Mal'cev. Verifiquémoslo para identidad (2.10). Tome α tal que su longitud sea un entero par entre 0 y N estrictamente. Por Lema 19 tenemos

$$\varphi = \mathrm{Cg}(\vec{X}, \rho(\vec{X})).$$

Como tenemos $L_\alpha \ \varphi \ L_{\alpha 1}$ por la ecuación (2.29), el Lema 22 nos da términos p_i tales que para alguna tupla $\vec{u}$, F satisface

$$\begin{aligned} L_\alpha &= p_1\big(\vec{X}, \vec{u}\big) \\ p_1\big(\rho(\vec{X}), \vec{u}\big) &= p_2\big(\rho(\vec{X}), \vec{u}\big) \\ p_2\big(\vec{X}, \vec{u}\big) &= p_3\big(\vec{X}, \vec{u}\big) \\ &\dots \\ p_m\big(\rho(\vec{X}), \vec{u}\big) &= L_{\alpha 1} \end{aligned}$$

Como los elementos de la tupla $\vec{u} = \vec{u}(\vec{X}, \vec{Y})$ pueden ser pensados como miembros de $T(Z^\infty)$, obtenemos las siguientes leyes para $\mathcal{V}$:

$$\begin{aligned} L_\alpha(\vec{X}) &\approx p_1\big(\vec{X}, \vec{u}(\vec{X}, \vec{Y})\big) \\ p_1\big(\rho(\vec{X}), \vec{u}(\vec{X}, \vec{Y})\big) &\approx p_2\big(\rho(\vec{X}), \vec{u}(\vec{X}, \vec{Y})\big) \\ p_2\big(\vec{X}, \vec{u}(\vec{X}, \vec{Y})\big) &\approx p_3\big(\vec{X}, \vec{u}(\vec{X}, \vec{Y})\big) \\ &\dots \\ p_m\big(\rho(\vec{X}), \vec{u}(\vec{X}, \vec{Y})\big) &\approx L_{\alpha 1}(\vec{X}) \end{aligned}$$

Reemplazando $\vec{X}$ por $\rho(\vec{X})$ en todos lados y notando que $\rho(\rho(\vec{X})) = \rho(\vec{X})$, tenemos

$$\begin{aligned} L_\alpha\big(\rho(\vec{X})\big) &\approx p_1\big(\rho(\vec{X}), \vec{u}(\rho(\vec{X}), \vec{Y})\big) \\ p_1\big(\rho(\vec{X}), \vec{u}(\rho(\vec{X}), \vec{Y})\big) &\approx p_2\big(\rho(\vec{X}), \vec{u}(\rho(\vec{X}), \vec{Y})\big) \\ p_2\big(\rho(\vec{X}), \vec{u}(\rho(\vec{X}), \vec{Y})\big) &\approx p_3\big(\rho(\vec{X}), \vec{u}(\rho(\vec{X}), \vec{Y})\big) \\ &\dots \\ p_m\big(\rho(\vec{X}), \vec{u}(\rho(\vec{X}), \vec{Y})\big) &\approx L_{\alpha 1}\big(\rho(\vec{X})\big) \end{aligned}$$

y por transitividad,

$$\mathcal{V} \models L_\alpha\big(\rho(\vec{X})\big) \approx L_{\alpha 1}\big(\rho(\vec{X})\big),$$

que es lo que estábamos buscando. Las otras identidades pueden ser obtenidas similarmente. □

La prueba del teorema previo sigue la línea de una prueba para una condición de Mal'cev para BFC. Una condición tal —paralela a la nuestra— nos fue comunicada personalmente por R. Willard.

En los siguientes resultados, conservamos la notación del Teorema 24.

Corolario 25. *Una variedad con $\vec{0}$ & $\vec{1}$ tiene la IP si y sólo si existen enteros N y n, términos $(2i+l)$-arios s_i y t_i para cada $i = 1, \dots, n$ tales que para toda $A \in \mathcal{V}$ y todo $\theta, \theta^*, \varphi, \varphi^* \in \mathbf{CON}(A)$ se da*

$$\left.\begin{array}{c} \mathrm{Cg}(\vec{X}, \sigma(\vec{X})) \subseteq \theta \\ \mathrm{Cg}(\vec{X}, \sigma^*(\vec{X})) \subseteq \theta^* \\ \mathrm{Cg}(\vec{X}, \rho(\vec{X})) \subseteq \varphi \\ \mathrm{Cg}(\vec{X}, \rho^*(\vec{X})) \subseteq \varphi^* \end{array}\right\} \Rightarrow (x, y) \in \varphi \vee \delta_N. \tag{2.37}$$

para todo $x, y, \vec{z}, x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$ en A.

Demostración. ($\Leftarrow$) Supongamos que $\theta, \theta^*, \varphi, \varphi^* \in \mathbf{CON}(A)$ son tales que

$$\theta \times \theta^* = \Delta \qquad \vec{0}\,\theta\,\vec{z}\,\theta^*\,\vec{1}$$
$$\varphi \times \varphi^* = \Delta \qquad \vec{0}\,\varphi\,\vec{z}\,\varphi^*\,\vec{1}$$

y $(x, y) \in \theta$. Como se vio en la primera parte de la prueba del Teorema 24, las ecuaciones congruenciales implícitas en el antecedente de (2.37) en las incógnitas $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$ tienen solución (que además es única; ver ecuaciones (2.16)). Como $\theta \cap \theta^* = \varphi \cap \varphi^* = \Delta$, asimismo $\delta_N = \Delta$ para todo N, y concluimos $(x, y) \in \varphi$. Con esto queda probado que la variedad tiene la IP.

($\Rightarrow$) Supongamos que $\mathcal{V}$ tiene la IP. Los enteros N y n y los términos son los provistos por el Teorema 24. Gracias al Corolario 23, basta verificar la afirmación en la instancia dada por $A = F(\vec{X}) = F(x, y, \vec{z}, x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ y las congruencias

$$\theta = \mathrm{Cg}(\vec{X}, \sigma(\vec{X})) \qquad \varphi = \mathrm{Cg}(\vec{X}, \rho(\vec{X}))$$
$$\theta^* = \mathrm{Cg}(\vec{X}, \sigma^*(\vec{X})) \qquad \varphi^* = \mathrm{Cg}(\vec{X}, \rho^*(\vec{X})).$$

Ahora bien, la parte ($\Leftarrow$) de la prueba del Teorema 24 (página 24) muestra exactamente que los términos L_α, R_α atestiguan la pertenencia de (x, y) a $\varphi \vee \delta_N$, con lo que queda demostrado el corolario. □

Proposición 26. *Sea A en una variedad con la IP y sean $\delta, \delta^* \in \mathbf{CON}(A)$ tales que $\delta \times \delta^* = \Delta$, y $\vec{0}\,\delta\,\vec{z}\,\delta^*\,\vec{1}$. Entonces $x\,\delta\,y$ si y sólo si A satisface*

$$\exists x_1 \forall y_1 \dots \exists x_n \forall y_n \quad \mathrm{Cg}^A(\vec{X}, \sigma(\vec{X})) \cap \mathrm{Cg}^A(\vec{X}, \sigma^*(\vec{X})) = \Delta^A \tag{2.38}$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Tome x_1 tal que

$$s_1(x, y, \vec{z}) \overset{\delta}{\equiv} x_1 \overset{\delta^*}{\equiv} t_1(x, y, \vec{z})$$

y suponiendo x_i ya ha sido elegido y y_i está dado, sea

$$s_{i+1}(x, y, \vec{z}, x_1, y_1, \dots, x_i, y_i) \overset{\delta}{\equiv} x_{i+1} \overset{\delta^*}{\equiv} t_{i+1}(x, y, \vec{z}, x_1, y_1, \dots, x_i, y_i). \tag{2.39}$$

Mediante este procedimiento, y teniendo en cuenta el Lema 20, podemos concluir que $\mathrm{Cg}^A(\vec{X},\sigma(\vec{X})) \subseteq \delta$ y $\mathrm{Cg}^A(\vec{X},\sigma^*(\vec{X})) \subseteq \delta^*$. Como $\delta \cap \delta^* = \Delta^A$, tenemos (2.38).

($\Leftarrow$) Supongamos que vale (2.38). Tome y_1 tal que

$$s_1(x,y,\vec{z}) \overset{\delta}{\equiv} \ y_1 \overset{\delta^*}{\equiv} t_1(x,y,\vec{z}).$$

Sea x_1 dado por el cuantificador existencial exterior de (2.38). Suponiendo y_i ya elegido y que x_i es el correspondiente testigo para (2.38), sea

$$s_{i+1}(x,y,\vec{z},x_1,y_1,\dots,x_i,y_i) \overset{\delta}{\equiv} \ y_{i+1} \overset{\delta^*}{\equiv} t_{i+1}(x,y,\vec{z},x_1,y_1,\dots,x_i,y_i).$$

El Lema 21 nos asegura que $\mathrm{Cg}^A(\vec{X},\rho(\vec{X})) \subseteq \delta$ y $\mathrm{Cg}^A(\vec{X},\rho^*(\vec{X})) \subseteq \delta^*$.

Tomemos en el Corolario 25

$$\begin{aligned} \theta &:= \mathrm{Cg}(\vec{X},\sigma(\vec{X})) & \varphi &:= \delta \\ \theta^* &:= \mathrm{Cg}(\vec{X},\sigma^*(\vec{X})) & \varphi^* &:= \delta^* \end{aligned}$$

De esta manera obtenemos $(x,y) \in \varphi \vee \delta_N$. Como $\varphi \cap \varphi^* = \delta \cap \delta^* = \Delta^A$ y lo mismo sucede con θ, θ^*, tenemos $\delta_N = \Delta^A$ y luego $(x,y) \in \varphi = \delta$. □

La Proposición 26 nos da una caracterización de la pertenencia a una de las congruencias *asociadas* al central $\vec{z}$. Aunque esta "fórmula" (2.38) no es de primer orden, corresponde a una fórmula de la lógica infinitaria $L_{\kappa^+\omega}$ (aquí κ es el cardinal del lenguaje de $\mathcal{V}$), puesto que el fragmento $\mathrm{Cg}^A(\vec{X},\sigma(\vec{X})) \cap \mathrm{Cg}^A(\vec{X},\sigma^*(\vec{X})) = \Delta^A$ se puede reemplazar por una conjunción infinita de cuasi-identidades. Esto puede verse considerando *fórmulas de congruencias principales (PCF)*. Se sabe que si $(x,y) \in \mathrm{Cg}(\vec{a},\vec{b})$ en un álgebra A, entonces existe una conjunción de ciertas ecuaciones $\pi(x,y,\vec{a},\vec{b},\vec{u}_\pi)$ tal que

$$A \models \exists \vec{u}_\pi \ \pi(x,y,\vec{a},\vec{b},\vec{u}_\pi). \tag{2.40}$$

Luego, se puede expresar "$\mathrm{Cg}(\vec{a},\vec{b}) = \Delta$" de la siguiente manera[2]:

$$\bigwedge_{\pi \text{ PCF}} \forall x,y \, \forall \vec{u}_\pi \ \pi(x,y,\vec{a},\vec{b},\vec{u}_\pi) \to x = y.$$

Del mismo modo,

$$\bigwedge_{\pi,\lambda \text{ PCF}} \forall x,y \, \forall \vec{u}_\pi, \vec{v}_\lambda \ : \ \pi\big(x,y,\vec{X},\sigma(\vec{X}),\vec{u}_\pi\big) \wedge \lambda\big(x,y,\vec{X},\sigma^*(\vec{X}),\vec{v}_\lambda\big) \ \to \ x = y,$$

es equivalente a "$\mathrm{Cg}^A(\vec{X},\sigma(\vec{X})) \cap \mathrm{Cg}^A(\vec{X},\sigma^*(\vec{X})) = \Delta^A$".

En la siguiente sección (ver el Teorema 28) veremos que efectivamente se puede conseguir una fórmula de primer orden con la misma estructura que satisfaga con la conclusión de la Proposición.

[2]Estrictamente hablando, la PCF es la fórmula existencial que aparece en (2.40), pero nos tomamos esta licencia para no detenernos demasiado en esto.

2.3. Una Forma Canónica de DFC

Supondremos en esta parte que $\mathcal{V}$ tiene la Propiedad de Determinación. Como la DP implica la IP, podemos definir las siguientes fórmulas en el lenguaje de $\mathcal{V}$ (ver Teorema 24):

$$\Psi_m := \bigwedge_{|\alpha|=m} \left(\Big(\bigwedge_{\gamma \neq \varepsilon} L_{\alpha\gamma}(\vec{X}) = R_{\alpha\gamma}(\vec{X}) \Big) \ \rightarrow \ L_\alpha(\vec{X}) = R_\alpha(\vec{X}) \right)$$

donde cada subíndice se mueve sobre palabras de longitud menor o igual a N; así una expresión de la forma "$\bigwedge_{\gamma\neq\varepsilon} L_{\alpha\gamma} = R_{\alpha\gamma}$" debería ser leída como "$\bigwedge\{L_{\alpha\gamma} = R_{\alpha\gamma} : \gamma \neq \varepsilon$ y $|\alpha\gamma| \leq N\}$". Luego $\Psi_N = \big(\bigwedge_{|\beta|=N} L_\beta(\vec{X}) = R_\beta(\vec{X})\big)$. (El antecedente "se anula".)

Las fórmulas Ψ_m serán el esqueleto de una caracterización en primer orden de la pertenencia a una de las congruencias asociadas a un elemento central $\vec{e}$, como se anunció más arriba. Específicamente, daremos una fórmula Φ_2 con $(2+l)$ variables libres tal que si $A \in \mathcal{V}$ y $\theta, \theta^* \in \mathbf{CON}(A)$ satisfacen $\theta \times \theta^* = \Delta$ y $\vec{0}\,\theta\,\vec{e}\,\theta^*\,\vec{1}$, se tiene $c\,\theta\,d$ si y sólo si $A \models \Phi_2(c, d, \vec{e})$.

Pero para que esta fórmula se pueda aplicar al estudio de las descomposiciones directas (y en particular para la prueba del Teorema 18), necesitaríamos ver que dicha fórmula es preservada por productos y factores directos. Esto no necesariamente va a ser cierto en general, pero en el contexto de $\mathcal{V}$ sí lo es. Esto es, hay una fórmula $\Phi_1(c, d, \vec{e})$ válida en toda la variedad tal que $\Phi_1 \wedge \Phi_2$ es preservada, puesto que tiene la forma prescrita por el Teorema 17.

El lema que sigue define Φ_1 y prueba su validez en $\mathcal{V}$.

Lema 27. *Sea $A \in \mathcal{V}$, y sean $\varphi, \varphi^* \in \mathbf{CON}(A)$ y $\vec{e} \in A^l$ tales que $\varphi \times \varphi^* = \Delta$, y $\vec{0}\,\varphi\,\vec{e}\,\varphi^*\,\vec{1}$. Entonces para todo $c, d \in A$, A satisface $\Phi_1(c, d, \vec{e})$, donde*

$$\Phi_1(x, y, \vec{z}) \ := \ \exists y_1 \forall x_1 \ldots \exists y_n \forall x_n \bigwedge_{m=1}^{k} \Psi_{2m} \tag{2.41}$$

y los enteros n y k son los dados por el Teorema 24.

Demostración. Probaremos la validez de Φ_1 explicando una estrategia para hallar testigos para los cuantificadores existenciales.

El testigo para y_1 será el único $b_1 \in A$ tal que

$$s_1(c, d, \vec{e}) \overset{\varphi}{\equiv} b_1 \overset{\varphi^*}{\equiv} t_1(c, d, \vec{e}).$$

Suponiendo b_i ha sido ya elegido y a_i está dado (por el cuantificador $\forall x_i$), defina b_{i+1} tal que

$$s_{i+1}(c, d, \vec{e}, a_1, b_1, \ldots, a_i, b_i) \overset{\varphi}{\equiv} b_{i+1} \overset{\varphi^*}{\equiv} t_{i+1}(c, d, \vec{e}, a_1, b_1, \ldots, a_i, b_i). \tag{2.42}$$

La construcción de los b_i corresponde entonces a las ecuaciones en el Corolario 21. Luego, (2.4) implica que A satisface

$$\begin{aligned}
L_\alpha(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n) &\overset{\varphi}{\equiv} L_\alpha(\rho(c,d,\vec{e},a_1,b_1\ldots,a_n,b_n))\\
R_\alpha(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n) &\overset{\varphi}{\equiv} R_\alpha(\rho(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n))\\
L_\alpha(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n) &\overset{\varphi^*}{\equiv} L_\alpha(\rho^*(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n))\\
R_\alpha(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n) &\overset{\varphi^*}{\equiv} R_\alpha(\rho^*(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)).
\end{aligned} \tag{2.43}$$

para toda α. Éstas, junto con las ecuaciones (2.5), implican que para cada β tal que $|\beta| = N$,

$$\begin{aligned}
L_\beta(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n) &\overset{\varphi}{\equiv} R_\beta(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)\\
L_\beta(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n) &\overset{\varphi^*}{\equiv} R_\beta(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n).
\end{aligned}$$

Como $\varphi \cap \varphi^* = \Delta$, esto implica $A \models \Psi_N(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)$.

Tome α no vacía tal que $|\alpha|$ es un entero par menor que N y suponga

$$A \models \bigwedge_{\gamma\neq\varepsilon} L_{\alpha\gamma}(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n) = R_{\alpha\gamma}(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n).$$

Usando las ecuaciones (2.10), (2.11) y (2.12) podemos ver que

$$L_\alpha(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n) \overset{\varphi}{\equiv} R_\alpha(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)$$

como sigue:

$$\begin{aligned}
L_\alpha(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n) &\overset{\varphi}{\equiv} L_\alpha(\rho(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)) && \text{por la ecuación (2.43)}\\
&= L_{\alpha 1}(\rho(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)) && \text{por la identidad (2.10)}\\
&\overset{\varphi}{\equiv} L_{\alpha 1}(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n) && \text{por la ecuación (2.43)}\\
&= R_{\alpha 1}(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n) && \text{por hipótesis}\\
&\overset{\varphi}{\equiv} R_{\alpha 1}(\rho(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)) && \text{por la ecuación (2.43)}\\
&= \cdots && \text{usando ecuaciones (2.11),}\\
&= \cdots && \text{(2.43) e iterando...}\\
&= R_{\alpha k}(\rho(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)) &&\\
&= R_\alpha(\rho(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)) && \text{usando la identidad (2.12)}\\
&\overset{\varphi}{\equiv} R_\alpha(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n) && \text{por la ecuación (2.43)}
\end{aligned}$$

Puede ser probado en una manera enteramente análoga (por las ecuaciones (2.13)) que $L_\alpha(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n) \overset{\varphi^*}{\equiv} R_\alpha(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)$, de lo que se deduce

$$A \models L_\alpha(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n) = R_\alpha(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n),$$

y hemos probado el lema. □

Teorema 28. *Sea $A \in \mathcal{V}$, y sean $\theta, \theta^* \in \mathbf{CON}(A)$ y $\vec{e} \in A^l$ tales que $\theta \times \theta^* = \Delta$, y $\vec{0}\,\theta\,\vec{e}\,\theta^*\,\vec{1}$. Entonces $c\,\theta\,d$ si y sólo si $A \models \Phi_1(c,d,\vec{e}) \wedge \Phi_2(c,d,\vec{e})$ donde Φ_1 está dada por la fórmula (2.41) en el Lema 27, y*

$$\Phi_2(x,y,\vec{z}) \ := \ \exists x_1 \forall y_1 \ldots \exists x_n \forall y_n \bigwedge_{m=1}^{k} \Psi_{2m-1} \tag{2.44}$$

Demostración. Sólo tenemos que preocuparnos por $\Phi_2(c,d,\vec{e})$.

($\Rightarrow$) Suponga $c\,\theta\,d$. En casi el mismo modo que en la prueba del Lema 27, defina a_1 tal que

$$s_1(c,d,\vec{e}) \overset{\theta}{\equiv} \ a_1 \overset{\theta^*}{\equiv} t_1(c,d,\vec{e});$$

y suponiendo a_i ya ha sido elegido y b_i está dado, sea

$$s_{i+1}(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_i,b_i) \overset{\theta}{\equiv} \ a_{i+1} \overset{\theta^*}{\equiv} t_{i+1}(c,d\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_i,b_i). \tag{2.45}$$

Esta elección concuerda con el patrón del Corolario 20, así que obtenemos

$$\begin{aligned} L_\alpha(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n) &\overset{\theta}{\equiv} L_\alpha(\sigma(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)) \\ R_\alpha(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n) &\overset{\theta}{\equiv} R_\alpha(\sigma(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)) \end{aligned} \tag{2.46}$$

$$\begin{aligned} L_\alpha(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n) &\overset{\theta^*}{\equiv} L_\alpha(\sigma^*(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)) \\ R_\alpha(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n) &\overset{\theta^*}{\equiv} R_\alpha(\sigma^*(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)). \end{aligned} \tag{2.47}$$

por las ecuaciones (2.2).

Si suponemos ahora que

$$A \models \bigwedge_{\gamma \neq \varepsilon} L_{\alpha\gamma}(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n) = R_{\alpha\gamma}(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)$$

para algún α tal que $|\alpha| < N$ impar, podremos probar

$$L_\alpha(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n) = R_\alpha(c,d,\vec{e},a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)$$

mostrando (del mismo modo que en el Lema 27) que:

- $L_\alpha(c, d, \vec{e}, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n) \overset{\theta}{\equiv} R_\alpha(c, d, \vec{e}, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)$ (esto puede ser logrado usando (2.14) y (2.46)), y
- $L_\alpha(c, d, \vec{e}, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n) \overset{\theta^*}{\equiv} R_\alpha(c, d, \vec{e}, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)$ (por (2.15) y (2.47)).

($\Leftarrow$) Suponga $A \models \Phi_2(c, d, \vec{e})$. Tome b_1 tal que

$$s_1(c, d, \vec{e}) \overset{\theta}{\equiv} b_1 \overset{\theta^*}{\equiv} t_1(c, d, \vec{e}).$$

Sea a_1 dado por el cuantificador existencial exterior de Φ_2. Suponiendo b_i ya elegido y que a_i es el correspondiente testigo para Φ_2, sea

$$s_{i+1}(c, d, \vec{e}, a_1, b_1, \ldots, a_i, b_i) \overset{\theta}{\equiv} b_{i+1} \overset{\theta^*}{\equiv} t_{i+1}(c, d, \vec{e}, a_1, b_1, \ldots, a_i, b_i). \tag{2.48}$$

Esta selección concuerda con el esquema del Corolario 21 (con $\varphi := \theta$ y $\varphi^* := \theta^*$) y satisface la matriz de Φ_1, como fue visto en la prueba del Lema 27. Luego tenemos, respectivamente,

$$\begin{aligned} L_\alpha(c, d, \vec{e}, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n) &\overset{\theta}{\equiv} L_\alpha(\rho(c, d, \vec{e}, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)) \\ R_\alpha(c, d, \vec{e}, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n) &\overset{\theta^*}{\equiv} R_\alpha(\rho(c, d, \vec{e}, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)) \end{aligned} \tag{2.49}$$

para toda α, y

$$A \models \Big(\bigwedge_{m=1}^{N} \Psi_m\Big)(c, d, \vec{e}, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n). \tag{2.50}$$

A partir de una fácil inspección de la forma de Ψ_m, puede ser deducido que

$$A \models \bigwedge_{j=1}^{N} L_j(c, d, \vec{e}, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n) = R_j(c, d, \vec{e}, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n). \tag{2.51}$$

Por esto,

$$\begin{aligned} c &= L_\varepsilon(c, d, \vec{e}, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n) && \text{por identidades (2.6)} \\ &\overset{\theta}{\equiv} L_\varepsilon(\rho(c, d, \vec{e}, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)) && \text{por ecuaciones (2.49)} \\ &= L_1(\rho(c, d, \vec{e}, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)) && \text{por la identidad (2.7)} \\ &\overset{\theta}{\equiv} L_1(c, d, \vec{e}, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n) && \text{por las ecuaciones (2.49)} \\ &= R_1(c, d, \vec{e}, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n) && \text{por (2.51)} \\ &\overset{\theta}{\equiv} R_1(\rho(c, d, \vec{e}, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)) && \text{por las ecuaciones (2.49)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= L_2(\rho(c, d, \vec{e}, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)) && \text{por las identidades (2.8)} \\
&\overset{\theta}{\equiv} \cdots && \text{usando las ecuaciones (2.8),} \\
&\overset{\theta}{\equiv} \cdots && \text{(2.51) e iterando...} \\
&= R_N(\rho(c, d, \vec{e}, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)) && \text{y usando ecuación (2.9):} \\
&= R_\varepsilon(\rho(c, d, \vec{e}, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)) && \\
&\overset{\theta}{\equiv} R_\varepsilon(c, d, \vec{e}, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n) && \text{por ecuaciones (2.49)} \\
&= d && \text{por las identidades (2.6)}
\end{aligned}
$$

En conclusión, $c \overset{\theta}{\equiv} d$. □

Teorema 29. *La fórmula $\Phi_1 \wedge \Phi_2$ del Teorema 28 es preservada al tomar factores y productos directos.*

Demostración. Aplicar el Teorema 17: basta tomar τ_α como "$L_\alpha(\vec{X}) = R_\alpha(\vec{X})$", que es una fórmula preservada por productos y factores directos □

2.4. Una Condición de Mal'cev para Congruencias Factor Booleanas

Hacemos un breve alto en el desarrollo de la IP y los elementos centrales para atender al problema de construir una condición de Mal'cev para BFC. Incluimos este resultado en este punto pues ésta es totalmente análoga a la condición de Mal'cev para la IP. De hecho, basta agregar una variable la tupla $\vec{X}$ y redefinir las funciones σ, σ^*, ρ y ρ^*:

- $\sigma(a, b, c, d, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n) = (x, y, z, w, x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ donde

$$
\begin{aligned}
x &:= a & w &:= b \\
y &:= b & x_j &:= s_j(x, y, z, w, x_1, y_1, \dots, x_{j-1}, y_{j-1}) \\
z &:= a & y_j &:= b_j
\end{aligned}
$$

- $\sigma^*(a, b, c, d, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n) = (x, y, z, w, x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ donde:

$$
\begin{aligned}
x &:= a & w &:= d \\
y &:= a & x_j &:= t_j(x, y, z, w, x_1, y_1, \dots, x_{j-1}, y_{j-1}) \\
z &:= c & y_j &:= b_j
\end{aligned}
$$

- $\rho(a, b, c, d, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n) = (x, y, z, w, x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ donde:

$$\begin{aligned} x &:= a & w &:= c \\ y &:= b & x_j &:= a_j \\ z &:= c & y_j &:= s_j(x, y, z, w, x_1, y_1, \ldots, x_{j-1}, y_{j-1}) \end{aligned}$$

- $\rho^*(a, b, c, d, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n) = (x, y, z, w, x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ donde:

$$\begin{aligned} x &:= a & w &:= d \\ y &:= b & x_j &:= a_j \\ z &:= c & y_j &:= t_j(x, y, z, w, x_1, y_1, \ldots, x_{j-1}, y_{j-1}) \end{aligned}$$

La prueba de la condición de Mal'cev es enteramente paralela a la anterior; basta ver que por las definiciones de σ, σ^*, ρ y ρ^* se cumplen las condiciones necesarias para aplicar BFC. Así, por ejemplo, las congruencias que se definen en la prueba de la implicación directa del análogo al Teorema 24 son las siguientes

$$\begin{aligned} \theta &:= \mathrm{Cg}(x, z) \vee \mathrm{Cg}(y, w) \vee \bigvee\{\mathrm{Cg}(p, x_{p,q}) : p, q \in F\} \\ \theta^* &:= \mathrm{Cg}(x, y) \vee \bigvee\{\mathrm{Cg}(x_{p,q}, q) : p, q \in F\} \\ \varphi &:= \mathrm{Cg}(z, w) \vee \bigvee\{\mathrm{Cg}(p, y_{p,q}) : p, q \in F\} \\ \varphi^* &:= \bigvee\{\mathrm{Cg}(y_{p,q}, q) : p, q \in F\} \end{aligned}$$

y δ_∞ es la misma que antes. Se obtiene

$$(\varphi \vee \delta_\infty)/\delta_\infty \times (\varphi^* \vee \delta_\infty)/\delta_\infty = \Delta \qquad (\theta \vee \delta_\infty)/\delta_\infty \times (\theta^* \vee \delta_\infty)/\delta_\infty = \Delta$$

en F/δ_∞, y por BFC tenemos $(x/\delta_\infty, y/\delta_\infty) \in (\varphi \vee \delta_\infty)/\delta_\infty$, y luego $(x, y) \in \varphi \vee \delta_\infty$. El resto del razonamiento es igual.

Definiendo las análogas a Φ_1 y Φ_2 (que ahora serán fórmulas con 4 variables libres) podemos comprobar las siguientes propiedades:

Lema 30. *Sea $\mathcal{V}$ con BFC. Entonces $\mathcal{V} \models \Phi_1(x, y, z, w)$.*

Lema 31. *Sea $\mathcal{V}$ con BFC. Entonces $\mathcal{V} \models \Phi_2(x, y, x, y)$ y $\mathcal{V} \models \Phi_2(x, x, z, w)$.*

Lema 32. *Sea $a, b, c \in A \in \mathcal{V}$ con BFC. Si A satisface $\Phi_2(a, b, c, c)$, entonces $a = b$.*

Demostración. En todos los casos basta ver que gracias a los cuantificadores de las fórmulas Φ_i se pueden construir tuplas $\vec{D} := (a, b, c, d, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)$ que satisfagan, respectivamente, $\vec{D} = \rho^*(\vec{D})$, $\vec{D} = \sigma(\vec{D})$, $\vec{D} = \sigma^*(\vec{D})$ y $\vec{D} = \rho(\vec{D})$. $\square$

Teorema 33. *Sea $\mathcal{V}$ una variedad. Las siguientes son equivalentes:*

1. *$\mathcal{V}$ satisface la* propiedad (*)*: existe una fórmula de primer orden $\pi(x, y, z, w)$ en el lenguaje de $\mathcal{V}$ que es preservada por factores directos y productos directos, y tal que:*

   a*)* $\mathcal{V} \models \pi(x, x, z, w)$

   b*)* $\mathcal{V} \models \pi(x, y, x, y)$

   c*)* $\mathcal{V} \models \pi(x, y, z, z) \to x = y$

2. *$\mathcal{V}$ tiene BFC.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Ver el trabajo de Willard [23].

($\Leftarrow$) La fórmula $\pi(x, y, z, w) := \Phi_1(x, y, z, w) \wedge \Phi_2(x, y, z, w)$ satisface las tres propiedades gracias a los lemas anteriores, y es preservada al tomar factores directos y productos directos por el Teorema 17. □

2.5. Elementos Centrales en una Variedad con la DP

Retomamos aquí a los elementos centrales bajo la DP. Recordemos que los Teoremas 28 y 29 prueban que la fórmula $\Phi_1 \wedge \Phi_2$ define la congruencia asociada a un elemento central y es preservada al tomar factores y productos directos.

Lema 34. *Suponga que $\mathcal{V}$ tiene la DP. Entonces existe un conjunto de fórmulas de primer orden Σ tal que para todo $A \in \mathcal{V}$, $\vec{e}, \vec{f} \in A^l$ tenemos que $\vec{e}$ y $\vec{f}$ son elementos centrales complementarios si y sólo si $A \models \zeta(\vec{e}, \vec{f})$ para todo $\zeta \in \Sigma$. Más aun, Σ es preservado al tomar productos y factores directos.*

Demostración. Las siguientes fórmulas en el lenguaje de $\mathcal{V}$ afirmarán las propiedades necesarias para forzar que $\Phi(\cdot, \cdot, \vec{e})$ y $\Phi(\cdot, \cdot, \vec{f})$ definan el par de congruencias factor complementarias asociadas a $\vec{e}$ y $\vec{f}$.

- $CAN(\vec{e}, \vec{f}) = \bigwedge_{i=1}^{l} \Phi(0_i, e_i, \vec{e}) \wedge \bigwedge_{i=1}^{l} \Phi(1_i, f_i, \vec{e})$

  Esta fórmula dice que $\vec{e}$ está relacionado con $\vec{0}$ y $\vec{f}$ con $\vec{1}$ vía $\Phi(\cdot, \cdot, \vec{e})$.

- $PROD(\vec{e}, \vec{f}) = \forall x, y \exists z \left(\Phi(x, z, \vec{e}) \wedge \Phi(z, y, \vec{f})\right)$

  El producto relacional de $\Phi(\cdot, \cdot, \vec{e})$ y $\Phi(\cdot, \cdot, \vec{f})$ es la congruencia universal.

- $INT(\vec{e}, \vec{f}) = \forall x, y \left(\Phi(x, y, \vec{e}) \wedge \Phi(x, y, \vec{f}) \to x = y\right)$

  Su intersección es Δ.

- $REF(\vec{e},\vec{f}\,) = \forall x\ \Phi(x,x,\vec{e}\,)$

  $\Phi(\cdot,\cdot,\vec{e}\,)$ es reflexiva.

- $SYM(\vec{e},\vec{f}\,) = \forall x,y,z\ \Big(\Phi(x,y,\vec{e}\,) \wedge \Phi(y,z,\vec{e}\,) \wedge \Phi(z,x,\vec{f}\,) \rightarrow z = x\Big)$

- $TRANS(\vec{e},\vec{f}\,) = \forall x,y,z,u\ \Big(\Phi(x,y,\vec{e}\,) \wedge \Phi(y,z,\vec{e}\,) \wedge \Phi(x,u,\vec{e}\,) \wedge \Phi(u,z,\vec{f}\,) \rightarrow u = z\Big)$

  El lector puede verificar que estas dos fórmulas (en conjunción con las anteriores) dicen que $\Phi(\cdot,\cdot,\vec{e}\,)$ es simétrica y transitiva.

- Para cada símbolo de función m-ario F, defina:

$$\begin{aligned} &PRES_F(\vec{e},\vec{f}\,) = \forall u_1, v_1, \ldots, u_m, v_m \\ &\quad \Big(\bigwedge_j \Phi(u_j, v_j, \vec{e}\,)\Big) \wedge \Phi(F(u_1,\ldots,u_m), z, \vec{e}\,) \wedge \Phi(z, F(v_1,\ldots,v_m), \vec{f}\,) \rightarrow \\ &\qquad\qquad \rightarrow z = F(v_1,\ldots,v_m) \end{aligned}$$

  Estas fórmulas aseguran que $\Phi(\cdot,\cdot,\vec{e}\,)$ es preservada por las operaciones básicas de $\mathcal{V}$.

Finalmente, defina CAN', REF', SYM', $TRANS'$ y $PRES'_F$ como el resultado de intercambiar $\vec{e}$ con $\vec{f}$ en CAN, REF, SYM, $TRANS$ y $PRES_F$, respectivamente, y sea Σ la unión de los siguientes dos conjuntos

$$\{CAN, PROD, INT, REF, SYM, TRANS, CAN', REF', SYM', TRANS'\},$$

$$\{PRES_F, PRES'_F : F \text{ un símbolo de función }\}.$$

Ahora es inmediato verificar que $\vec{e}$ y $\vec{f}$ son elementos centrales complementarios si satisfacen todas las fórmulas en Σ. Para ver la recíproca, note que si $\vec{e}$ y $\vec{f}$ son elementos centrales complementarios, hay un isomorfismo $A \rightarrow A_0 \times A_1$ tal que $\vec{e},\vec{f}$ corresponden a $[\vec{0},\vec{1}]$, $[\vec{1},\vec{0}]$, respectivamente, y el Teorema 28 garantiza que Σ valdrá.

Para ver que Σ es preservado por factores directos, notemos primero que cada una de CAN, CAN' $PROD$, $PROD'$, REF y REF' es obtenida mediante cuantificación de una fórmula preservada por $\mathbf{F}$ (usar el Teorema 29). En segundo lugar, el resto de los axiomas en Σ son de la forma $\forall \vec{x}\ (\tau(\vec{e},\vec{f},\vec{x}) \rightarrow x_i = x_j)$ donde $PROD(\vec{e},\vec{f}\,) \rightarrow \exists \vec{x}\ \tau(\vec{e},\vec{f},\vec{x})$ es válida en $\mathcal{V}$, y basta observar que $\forall \vec{x}\ (\tau(\vec{e},\vec{f},\vec{x}) \rightarrow x_i = x_j) \wedge \exists \vec{x}\ \tau(\vec{e},\vec{f},\vec{x})$ es preservada por $\mathbf{F}$ (siempre que $\tau(\vec{e},\vec{f},\vec{x})$ sea preservada por $\mathbf{P}$ y $\mathbf{F}$). Por último, cada fórmula de Σ es preservada por $\mathbf{P}$ por el Lema 16, y tenemos el resultado. □

Corolario 35. *Suponga que $\mathcal{V}$ tiene la DP. Entonces, si $[\vec{e}_0,\vec{e}_1]$ es un elemento central de $A_0 \times A_1$, entonces $\vec{e}_i$ es un elemento central de A_i, $i = 0, 1$.*

Demostración. Inmediato por el lema previo. □

Recordemos que $\mathcal{V}_{DI}$ denota la clase de miembros directamente indescomponibles de $\mathcal{V}$.

Corolario 36. *Si $\mathcal{V}$ es una variedad sobre un lenguaje finito y tiene la DP entonces $\mathcal{V}_{DI}$ es definible en primer orden.*

Demostración. El conjunto $\Sigma = \Sigma(\vec{e}, \vec{f})$ en el Lema 34 es finito si el lenguaje es finito. Luego

$$\vec{0} \neq \vec{1} \;\wedge\; \forall \vec{e}, \vec{f} \;\; \bigwedge \Sigma(\vec{e}, \vec{f}) \;\rightarrow\; \big((\vec{e} = \vec{0} \wedge \vec{f} = \vec{1}) \vee (\vec{e} = \vec{1} \wedge \vec{f} = \vec{0})\big),$$

junto con los axiomas de $\mathcal{V}$, define $\mathcal{V}_{DI}$. □

Lema 37. *DP implica BFC.*

Demostración. Teniendo en cuenta los lemas básicos de Bigelow y Burris [2], sólo necesitamos verificar que si $A = A_0 \times A_1$, y θ es una congruencia factor sobre A, entonces

$$\{((a, b), (c, b)) : b \in A_1 \text{ y } \exists a', c'(a, a')\,\theta\,(c, c')\} \subseteq \theta.$$

Sea $\vec{e} = [\vec{e}_0, \vec{e}_1]$ el elemento central asociado a θ, de manera que "$x\,\theta\,y$" está definido por $\Phi(x, y, \vec{e})$. Tenemos

$$(a, a')\,\theta\,(c, c') \text{ sii } A_0 \times A_1 \models \Phi((a, a'), (c, c'), [\vec{e}_0, \vec{e}_1]).$$

Por el Teorema 17, esto implica

$$A_0 \models \Phi(a, c, \vec{e}_0).$$

Ahora el Corolario 35 asegura que $\vec{e}_1$ es central en A_1, y luego $A_1 \models \Phi(b, b, \vec{e}_1)$. Como Φ es preservada por productos directos, obtenemos

$$A_0 \times A_1 \models \Phi((a, b), (c, b), [\vec{e}_0, \vec{e}_1]),$$

y luego $(a, b)\,\theta\,(c, b)$. □

Podemos ahora compilar todos los resultados que conseguimos en la prueba del teorema central (valga la redundancia) de nuestro trabajo.

Prueba del Teorema 18. (5)⇒(2) Suponga que tenemos un par de congruencias factor complementarias φ y φ^* tales que $\vec{0}\,\varphi\,\vec{e}\,\varphi^*\,\vec{1}$. Suponga ahora también que $\theta \times \theta^* = \Delta$ y $\vec{0}\,\theta\,\vec{e}\,\theta^*\,\vec{1}$. Luego $\vec{0}\,(\varphi \circ \theta^*)\,\vec{1}$ y de aquí $\varphi \vee \theta^* = \nabla$. Así que tenemos

$$(\varphi \vee \theta^*) \cap \theta = \theta.$$

Por BFC obtenemos $\varphi \cap \theta = \theta$ y entonces $\varphi \subseteq \theta$. Por simetría, obtenemos $\varphi = \theta$ y $\varphi^* = \theta^*$.

(2⇒5) Ver el Lema 37.

(2⇒3) Teorema 28.

(3⇒4) Obvio.

(4⇒1) Inmediato.

(1⇒2) Defina $\tilde{0}_i$ y $\tilde{1}_i$ con $i = 1, \ldots, 2l$ en el siguiente modo:

$$(\tilde{0}_1, \ldots, \tilde{0}_{2l}) := (0_1, \ldots 0_l, 1_1, \ldots 1_l),$$
$$(\tilde{1}_1, \ldots, \tilde{1}_{2l}) := (1_1, \ldots 1_l, 0_1, \ldots, 0_l).$$

Puede ser verificado fácilmente (usando la DP Débil) que con estos $\tilde{0}_i$ y $\tilde{1}_i$ tenemos la DP.

La propiedad de preservación de Φ está probada en el Teorema 29 y por último, la conjunción de 2 y 3 aseguran que el mapeo $e \mapsto \Phi^A(\cdot, \cdot, \vec{e})$ es biyectivo. □

2.6. Ejemplo: Expansiones de Semi-Reticulados

En esta sección, supondremos que $\mathcal{V}$ es una variedad con $\vec{0}$ & $\vec{1}$ para la cual existe un término binario $\vee$ tal que para todo $A \in \mathcal{V}$, $\vee^A$ es una operación de semi-reticulado sobre A. Mantendremos la suposición de que el lenguaje de $\mathcal{V}$ tiene al menos una constante. Primero, observamos que por el Lema 22 junto con la observación que $(x, y) \in \nabla^F = \mathrm{Cg}^F(\vec{0}, \vec{1})$ (donde $F \in \mathcal{V}$ es el álgebra libre libremente generada por $\{x, y\}$), obtenemos términos $(2+l)$-arios $u_i(x, y, \vec{z})$, $i = 1, \ldots, k$, tales que las siguientes identidades valen en $\mathcal{V}$:

$$\begin{aligned} x &\approx u_1(x, y, \vec{0}) \\ u_i(x, y, \vec{1}) &\approx u_{i+1}(x, y, \vec{1}) \text{ para } i \text{ impar} \\ u_i(x, y, \vec{0}) &\approx u_{i+1}(x, y, \vec{0}) \text{ para } i \text{ par} \\ u_k(x, y, \vec{1}) &\approx y \end{aligned} \tag{2.52}$$

De hecho, considerando a k y l como parámetros, esto es una condición de Mal'cev para $\vec{0}$ & $\vec{1}$ en el caso de haber una constante.

Cuando una fórmula de primer orden Φ con $(2+l)$ variables libres satisfaga (3) del Teorema 18 para la variedad $\mathcal{V}$, diremos que Φ *atestigua DFC para* $\mathcal{V}$. Si tiene $(2+2l)$ variables libres y satisface (4) del mismo teorema, diremos que *atestigua DFC débilmente*.

Proposición 38. *La fórmula*

$$\Phi(x, y, \vec{z}) = \forall u \ \left(\bigwedge_{i=1}^{k} u_i(x, y, \vec{0}) \vee u = u_i(x, y, \vec{z}) \vee u \right) \to x \vee u = y \vee u$$

atestigua DFC para $\mathcal{V}$.

Demostración. Sean $A, B \in \mathcal{V}$, $a \in A$ y $b, d \in B$. Primero probaremos que

$$A \times B \models \Phi\big((a,b),(a,d),[\vec{0},\vec{1}]\big)$$

Suponga que para algún (u,v) tenemos

$$A \times B \models \bigwedge_{i=1}^{k} u_i\big((a,b),(a,d),[\vec{0},\vec{0}]\big) \vee (u,v) = u_i\big((a,b),(a,d),[\vec{0},\vec{1}]\big) \vee (u,v).$$

Luego

$$B \models \bigwedge_{i=1}^{k} u_i(b,d,\vec{0}) \vee v = u_i(b,d,\vec{1}) \vee v.$$

Pero las ecuaciones de arriba en combinación con (2.52) producen

$$b \vee v = d \vee v$$

y luego

$$(a,b) \vee (u,v) = (a,d) \vee (u,v).$$

Ahora suponga

$$A \times B \models \Phi\big((a,b),(c,d),[\vec{0},\vec{1}]\big).$$

El lector puede verificar que considerando $u = \big(a, \bigvee_{i=1}^{k} u_i(b,d,\vec{0}) \vee u_i(b,d,\vec{1})\big)$ puede ser probado que $a \vee c = a$, y similarmente con $u = \big(c, \bigvee_{i=1}^{k} u_i(b,d,\vec{0}) \vee u_i(b,d,\vec{1})\big)$ y $a \vee c = c$, luego $a = c$. $\square$

En la sección 3.4 se verá que la complejidad de la fórmula encontrada Φ no puede ser mejorada para el caso general.

Capítulo 3

Una Jerarquía de Definibilidad

Dada una variedad $\mathcal{V}$ con DFC, tenemos un "parámetro lógico" de las propiedades algebraicas de la misma, que viene dado por la fórmula de primer orden Φ. Hablamos de un parámetro puesto que gracias a los resultados disponibles de Teoría de Preservación, el estudio detenido de la *forma* de Φ nos permitirá obtener resultados sobre la estructura de $\mathcal{V}$.

Existen diversos criterios según los cuales uno puede ordenar las fórmulas de primer orden. Una clasificación natural en niveles de complejidad viene dada por la alternancias de cuantificadores. El estrato más bajo está constituido por las fórmulas *abiertas*, es decir, sin cuantificadores; el segundo escalón en complejidad de cuantificadores se da en fórmulas existenciales ($\exists$) y universales ($\forall$); luego las fórmulas $\forall\exists$ y las $\exists\forall$ y así sucesivamente.

De acuerdo con este esquema, se obtienen fórmulas cada vez más expresivas, así que es una dirección natural de organización del estudio. Como se verá más adelante, se puede llamar (abusando un poco del significado del término) *trivial* al caso existencial (que incluye al caso de fórmulas abiertas) puesto que si se consigue una tal Φ, se la puede simplificar para obtener una fórmula existencial y positiva. Inversamente, toda variedad con DFC que tiene una fórmula testigo positiva (de cualquier complejidad) se reduce al caso trivial, tal como lo implica el Teorema 43.

En lo que sigue, los nombres de las secciones indicarán el tipo de fórmula Φ con el que se está trabajando. En particular, en la última sección se muestra que el caso de las fórmulas universales se aparta del comportamiento que llamamos trivial.

3.1. Positiva: Congruencias Factor Compactas

Diremos que $\mathcal{V}$ tiene *congruencias factor compactas (CFC)* si toda congruencia factor de cada álgebra en $\mathcal{V}$ es compacta.

Muchas variedades conocidas tienen CFC, pero desde el punto de vista de la definibilidad de congruencias factor son triviales: estas últimas se reducen a la congruencia compacta $\mathrm{Cg}(\vec{0}, \vec{e})$ (donde $\vec{e}$ es el central asociado) y se pueden definir con fórmulas a la vez existenciales y positivas. En esta sección nos ocuparemos del desarrollo de variedades con CFC, que se incluye en el trabajo [22].

Como la congruencia universal es siempre factor en toda álgebra, toda variedad con CFC tiene $\vec{0}$ & $\vec{1}$, pero se puede hacer que dichos términos tengan propiedades más fuertes:

Lema 39. *Supongamos que $\mathcal{V}$ satisface CFC. Entonces existen términos unarios $0_1(w)$, $\ldots, 0_l(w)$, $1_1(w), \ldots, 1_l(w)$ tales que para toda álgebra $A = A_1 \times A_2 \in \mathcal{V}$, $(\lambda^1, \lambda^2) \in A$,*

$$\ker \pi_1 = \mathrm{Cg}^A \left([\vec{0}(\lambda^1), \vec{0}(\lambda^2)], [\vec{0}(\lambda^1), \vec{1}(\lambda^2)] \right)$$
$$\ker \pi_2 = \mathrm{Cg}^A \left([\vec{1}(\lambda^1), \vec{1}(\lambda^2)], [\vec{0}(\lambda^1), \vec{1}(\lambda^2)] \right)$$

Demostración. Notemos que por el Corolario 23 podemos suponer que $A = F(X) \times F(X)$, donde X es un conjunto infinito de variables. Como $\ker \pi_1$ es compacta, existen $\vec{B}, \vec{C}, \vec{D} \in T(X)^M$ tales que

$$\ker \pi_1 = \mathrm{Cg}^A\big([\vec{B}, \vec{C}], [\vec{B}, \vec{D}]\big)$$

Observe que haciendo crecer M, podemos suponer $\vec{B} = \vec{C}$. Así tenemos

$$\ker \pi_1 = \mathrm{Cg}^A\big([\vec{C}, \vec{C}], [\vec{C}, \vec{D}]\big)$$

Sea $w \in X$ una variable que no ocurra en $\vec{C}, \vec{D}$. Probaremos que

$$\ker \pi_1 = \mathrm{Cg}^A \left([\vec{C}(w,w), \vec{C}(w,w)], [\vec{C}(w,w), \vec{D}(w,w)] \right) \tag{3.1}$$

Tome $p, q, r \in F(X)$. Sean $x, y, z \in X - \{w\}$ variables distintas que no ocurran en $\vec{C}, \vec{D}$. Sea $h : F(X) \to F(X)$ el homomorfismo dado por las prescripciones

$$h(x) = p \qquad h(y) = q$$
$$h(z) = r \qquad h(u) = w,$$

para cada $u \in X - \{x, y, z\}$

Sea $\bar{h} : F(X) \times F(X) \to F(X) \times F(X)$, el homomorfismo inducido coordenada a coordenada por h. Como $((x, y), (x, z)) \in \ker \pi_1 = \mathrm{Cg}^A([\vec{C}, \vec{C}], [\vec{C}, \vec{D}])$, el Corolario 23 dice que

$$((p, q), (p, r)) \in \mathrm{Cg}^A \left([\vec{C}(w,w), \vec{C}(w.w)], [\vec{C}(w,w), \vec{D}(w,w)] \right)$$

y así hemos probado (3.1). Si tomamos

$$\vec{0}(w) = \big(C_1(w,w), \ldots, C_M(w,w), D_1(w,w), \ldots, D_M(w,w)\big)$$
$$\vec{1}(w) = \big(D_1(w,w), \ldots, D_M(w,w), C_1(w,w), \ldots, C_M(w,w)\big),$$

podemos verificar prontamente que

$$\begin{aligned}\ker \pi_1 &= \mathrm{Cg}^A([\vec{0}(w), \vec{0}(w)], [\vec{0}(w), \vec{1}(w)])\\ \ker \pi_2 &= \mathrm{Cg}^A([\vec{1}(w), \vec{1}(w)], [\vec{0}(w), \vec{1}(w)]).\end{aligned}$$

□

La propiedad clave de los elementos centrales en una variedad con CFC es la siguiente consecuencia inmediata del Lema 39.

Lema 40. *Sea $\lambda \in A \in \mathcal{V}$. El mapeo $\vec{e} \to \big(\mathrm{Cg}^A(\vec{0}(\lambda), \vec{e}), \mathrm{Cg}^A(\vec{1}(\lambda), \vec{e})\big)$ es una biyección entre $\mathrm{Z}_\lambda(A)$ y el conjunto de pares de congruencias factor complementarias de A.*

El siguiente lema muestra que tener CFC es una propiedad de Mal'cev, dando una condición para ella.

Lema 41. *$\mathcal{V}$ tiene CFC si y sólo si existen términos P_i $(i = 1, \ldots, k)$, $\vec{U} = (U_1, \ldots, U_m)$, $\vec{V} = (V_1, \ldots, V_m)$, Q_i $(i = 1, \ldots, k)$, $\vec{S} = (S_1, \ldots, S_m)$ y $\vec{T} = (T_1, \ldots, T_m)$ tales que las siguientes identidades valen en $\mathcal{V}$*

$$\begin{aligned} x &\approx P_i(\vec{0}(w), \vec{U}(w, x)), && i = 1, k\\ x &\approx P_1(\vec{0}(w), \vec{V}(w, x, y))\\ P_i(\vec{1}(w), \vec{V}(w, x, y)) &\approx P_{i+1}(\vec{1}(w), \vec{V}(w, x, y)), && i \text{ impar}\\ P_i(\vec{0}(w), \vec{V}(w, x, y)) &\approx P_{i+1}(\vec{0}(w), \vec{V}(w, x, y)), && i \text{ par}\\ P_n(\vec{1}(w), \vec{V}(w, x, y)) &\approx y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &\approx Q_i(\vec{1}(w), \vec{S}(w, x)), && i = 1, k\\ x &\approx Q_1(\vec{1}(w), \vec{T}(w, x, y)),\\ Q_i(\vec{0}(w), \vec{T}(w, x, y)) &\approx Q_{i+1}(\vec{0}(w), \vec{T}(w, x, y)), && i \text{ impar}\\ Q_i(\vec{1}(w), \vec{T}(w, x, y)) &\approx Q_{i+1}(\vec{1}(w), \vec{T}(w, x, y)), && i \text{ par}\\ Q_k(\vec{0}(w), \vec{T}(w, x, y)) &\approx y. \end{aligned}$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Por el Lema 39 tenemos que

$$\begin{aligned}((x, x), (x, y)) &\in \mathrm{Cg}^{F(x,w)\times F(x,y,w)}([\vec{0}(w), \vec{0}(w)], [\vec{0}(w), \vec{1}(w)])\\ ((x, x), (y, x)) &\in \mathrm{Cg}^{F(x,y,w)\times F(x,w)}([\vec{1}(w), \vec{1}(w)], [\vec{0}(w), \vec{1}(w)]).\end{aligned}$$

Ahora los términos pueden ser obtenidos aplicando el Lema 22. La parte ($\Leftarrow$) es inmediata, considerando que los términos atestiguan las dos pertenencias a congruencias que constan arriba. □

Sea $L(w,x,y,\vec{z},\vec{x})$ la fórmula dada por

$$x = P_1(\vec{0},\vec{x}) \wedge \left(\bigwedge_{1\leq i\leq k-1,\ i\ impar} P_i(\vec{z},\vec{x}) = P_{i+1}(\vec{z},\vec{x}) \right) \wedge$$

$$\wedge \left(\bigwedge_{1\leq i\leq k-1,\ i\ par} P_i\big(\vec{0},\vec{x}\big) = P_{i+1}\big(\vec{0},\vec{x}\big) \right) \wedge P_n(\vec{z},\vec{x}) = y$$

Sea $R(w,x,y,\vec{z},\vec{x})$ la fórmula dada por

$$x = Q_1(\vec{1},\vec{x}) \wedge \left(\bigwedge_{1\leq i\leq k-1,\ i\ impar} Q_i(\vec{z},\vec{x}) = Q_{i+}(\vec{z},\vec{x}) \right) \wedge$$

$$\wedge \left(\bigwedge_{1\leq i\leq k-1,\ i\ par} Q_i\big(\vec{1},\vec{x}\big) = Q_{i+1}\big(\vec{1},\vec{x}\big) \right) \wedge Q_k(\vec{z},\vec{x}) = y$$

Lema 42. *Sea $\lambda \in A$ en $\mathcal{V}$ con CFC. Para $\vec{e} \in \mathrm{Z}_\lambda(A)$ tenemos*

1. $(a,b) \in \theta^A\big(\vec{0}(\lambda),\vec{e}\big)$ *sii* $A \models \exists\vec{x}\ L(\lambda,a,b,\vec{e},\vec{x})$
2. $(a,b) \in \theta^A\big(\vec{1}(\lambda),\vec{e}\big)$ *sii* $A \models \exists\vec{x}\ R(\lambda,a,b,\vec{e},\vec{x})$

Demostración. 1. Suponga $(a,b) \in \mathrm{Cg}(\vec{0}_\lambda,\vec{e})$. Para $i = 1,\ldots,N$, sean $c_i \in A$ tales que

$$(c_i, U_i(\lambda,a)) \in \mathrm{Cg}(\vec{0}(\lambda),\vec{e})$$

$$(c_i, V_i(\lambda,a,b)) \in \mathrm{Cg}(\vec{1}(\lambda),\vec{e})$$

El lector puede usar el Lema 41 para ver que $L(\lambda,a,b,\vec{e},\vec{c})$ vale en A, módulo $\mathrm{Cg}(\vec{0}(\lambda),\vec{e})$ y módulo $\mathrm{Cg}(\vec{1}(\lambda),\vec{e})$, así que $A \models \exists\vec{x}\ L(\lambda,a,b,\vec{e},\vec{x})$. La recíproca se sigue del Lema 22.

2. Igual a la prueba anterior.

□

Teorema 43. *Sea $\mathcal{V}$ una variedad con una constante c en su lenguaje. Son equivalentes:*

1. *Existe una fórmula positiva Φ que atestigua DFC débilmente para $\mathcal{V}$,*
2. *$\mathcal{V}$ tiene congruencias factor compactas.*

Demostración. ($\Leftarrow$) El Lema 42 nos asegura que podemos tomar la fórmula positiva

$$\Phi(x, y, \vec{z}, \vec{w}) := \exists \vec{x}\ L(c, x, y, \vec{z}, \vec{x}\,)$$

($\Rightarrow$) Sea $A \in \mathcal{V}$. Probaremos que si $\varphi \times \varphi^* = \Delta$, $\vec{0}\,\varphi\,\vec{e}\,\varphi^*\,\vec{1}$ y $\vec{1}\,\varphi\,\vec{f}\,\varphi^*\,\vec{0}$, entonces $\varphi = \mathrm{Cg}(\vec{0}, \vec{e}\,) \vee \mathrm{Cg}(\vec{1}, \vec{f}\,)$, y luego es compacta. Llame $\theta = \mathrm{Cg}(\vec{0}, \vec{e}\,) \vee \mathrm{Cg}(\vec{1}, \vec{f}\,)$. Trivialmente, $\theta \subseteq \varphi$. Suponga $x\,\varphi\,y$; como Φ atestigua DFC débilmente, obtenemos $A \models \Phi(x, y, \vec{e}, \vec{f}\,)$. Como Φ es positiva, es preservada por imágenes homomórficas y entonces

$$A/\theta \models \Phi(x/\theta, y/\theta, \vec{e}/\theta, \vec{f}/\theta).$$

Equivalentemente,

$$A/\theta \models \Phi(x/\theta, y/\theta, \vec{0}/\theta, \vec{1}/\theta),$$

y obtenemos $x/\theta = y/\theta$. Esto implica $(x, y) \in \theta$, luego $\varphi \subseteq \theta$, y tenemos el resultado. $\square$

3.2. Abierta

En el caso de las fórmulas abiertas, se pudo extender el tratamiento a cualquier clase de modelos $\mathcal{K}$ que sea cerrada por productos directos. Las definiciones del centro $\mathrm{Z}(\cdot)$ y de DFC siguen siendo exactamente las mismas; repetimos esta última aquí para referencia:

> existe una fórmula de primer orden $\Phi(x, y, \vec{z})$ en el lenguaje de $\mathcal{K}$ tal que para todo $A, B \in \mathcal{K}$, y $a, c \in A$, $b, d \in B$,
>
> $$A \times B \models \Phi\big((a, b), (c, d), [\vec{0}, \vec{1}]\big) \quad \text{si y sólo si} \quad a = c. \tag{3.2}$$

Nuevamente, para aligerar la notación tomaremos sin pérdida de generalidad $l = 1$, es decir, las tuplas $\vec{0}$ y $\vec{1}$ tendrán longitud 1.

Supongamos además que Φ es una fórmula abierta:

$$\Phi(x, y, z) := \bigwedge_{i \in I} \bigvee_{j} \varphi_{ij}(x, y, z) \tag{3.3}$$

donde $\varphi_{ij}(x, y, z)$ es atómica o atómica negada. Probaremos en esta sección que bajo estas condiciones, se puede encontrar una fórmula Φ abierta y positiva que también satisfaga (3.2). Si $\mathcal{K}$ fuera una variedad, deduciríamos que tiene CFC por los resultados de la sección 3.1.

Lema 44. *Si Φ satisface (3.2), $x_k, y_k \in A_k$ y $z_k \in \mathrm{Z}(A_k)$ entonces $(z_k)_k \in \mathrm{Z}(\Pi_k A_k)$ y*

$$\Pi_k A_k \models \Phi((x_k)_k, (y_k)_k, (z_k)_k)$$

Demostración. Obvio. $\square$

Lema 45. *Para cada $i \in I$ existe j tal que $\varphi_{ij}(x, y, z)$ es atómica.*

Demostración. Por (3.2), tenemos $\mathcal{K} \models \Phi(x, x, 0)$, en particular $A \models \Phi(x, x, 0)$ para todo modelo trivial A (tal modelo existe en $\mathcal{K}$ puesto que corresponde al producto directo de una familia vacía). Pero si un conjugando es la disyunción de fórmulas atómicas negadas, esto fallará. $\square$

El siguiente lema provee una manera de eliminar redundancias de la fórmula (3.3).

Lema 46. *Para todo $h \in I$ existe $k \notin J_h$ tal que para todo $x, y \in A \in \mathcal{K}$ y $z \in \mathrm{Z}(A)$,*

$$A \models \Phi(x, y, z) \leftrightarrow \Phi_{hk}(x, y, z),$$

donde $J_i = \{j : \varphi_{ij}(x, y, z)$ es negada$\}$ y

$$\Phi_{hk}(x, y, z) = \Big(\bigwedge_{i \neq h} \bigvee_{j} \varphi_{ij}(x, y, z)\Big) \wedge \Big(\varphi_{hk}(x, y, z) \vee \bigvee_{j \in J_h} \varphi_{hj}(x, y, z)\Big).$$

Demostración. Claramente tenemos $A \models \Phi_{hk}(x, y, z) \to \Phi(x, y, z)$ para todo h, k. Tenemos que ver $A \models \Phi(x, y, z) \to \Phi_{hk}(x, y, z)$. En busca de una contradicción, fije h y suponga que para todo $k \notin J_h$ existe $A_k \in \mathcal{K}$, $x_k, y_k \in A_k$ y $z_k \in \mathrm{Z}(A_k)$ tales que

$$A_k \models \Phi(x_k, y_k, z_k) \wedge \neg\Phi_{hk}(x_k, y_k, z_k).$$

Esto es equivalente a

$$\forall k : \qquad A_k \models \Phi(x_k, y_k, z_k) \wedge \neg\varphi_{hk}(x_k, y_k, z_k) \wedge \bigwedge_{j \in J_h} \neg\varphi_{hj}(x_k, y_k, z_k). \tag{3.4}$$

Como $z_k \in \mathrm{Z}(A_k)$, Φ pasa al producto directo por el Lema 44:

$$\Pi_k A_k \models \Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$$

donde $\bar{x} = (x_k)_k$ y lo mismo con los otros dos. En particular,

$$\Pi_k A_k \models \bigvee_{j} \varphi_{hj}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}). \tag{3.5}$$

Pero considerando

$$A_k \models \bigwedge_{j \in J_h} \neg\varphi_{hj}(x_k, y_k, z_k),$$

y como esta fórmula es preservada por productos directos (cuando $j \in J_h$, $\neg\varphi_{hj}$ es equivalente a una fórmula atómica), tenemos

$$\Pi_k A_k \models \bigwedge_{j\in J_h} \neg\varphi_{hj}(\bar{x},\bar{y},\bar{z}),$$

y usando (3.5),

$$\Pi_k A_k \models \bigvee_{j\notin J_h} \varphi_{hj}(\bar{x},\bar{y},\bar{z}).$$

Luego existe $j \notin J_h$ tal que $\Pi_k A_k \models \varphi_{hj}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$. Como φ_{hj} es una fórmula atómica, obtenemos por preservación $A_j \models \varphi_{hj}(x_j, y_j, z_j)$, contradiciendo (3.4). □

Lema 47. *Existen fórmulas atómicas φ_i, ψ_{ij} tales que la siguiente fórmula*

$$\Phi'(x,y,z) := \bigwedge_{i\in I}\Big(\bigwedge_{j\in J_i} \psi_{ij}(x,y,z) \ \rightarrow \varphi_i(x,y,z)\Big) \tag{3.6}$$

satisface (3.2).

Demostración. Aplicando repetidas veces el Lema 46 a Φ obtenemos una fórmula tal que el i-ésimo conjugando tiene exactamente una fórmula atómica. Renombre esta fórmula atómica como "φ_i"; las fórmulas restantes tienen la forma $\varphi_{ij} = \neg\psi_{ij}$. □

Para no recargar demasiado las fórmulas, omitiremos el "J_i" de ahora en adelante.

Lema 48. *La fórmula*

$$\Phi''(x,y,z) = \bigwedge_{i\in I_1} \Big(\bigwedge_{j} \psi_{ij}(x,y,z) \ \rightarrow \varphi_i(x,y,z)\Big), \tag{3.7}$$

donde

$$I_1 := \{i \in I : \mathcal{K} \models \forall x,y \bigwedge_j \psi_{ij}(x,y,1)\},$$

satisface

1. $\Phi''(x,y,1), \Phi''(x,x,0)$ *valen en* $\mathcal{K}$.
2. $\mathcal{K} \models \forall x,y\big(\Phi''(x,y,0) \rightarrow x = y\big)$.

Demostración. La primera aserción es heredada de Φ'. Reescribimos su primera aquí parte para uso futuro:

$$\mathcal{K} \models \forall xy \bigwedge_{i\in I_1} \Big(\bigwedge_{j} \psi_{ij}(x,y,1) \ \rightarrow \varphi_i(x,y,1)\Big). \tag{3.8}$$

A continuación haremos algunos cálculos previos necesarios para establecer la segunda aserción. Para cada $i \notin I_1$, tome $A_i \in \mathcal{K}$, $x_i, y_i \in A_i$ tales que

$$A_i \models \neg \bigwedge_j \psi_{ij}(x_i, y_i, 1).$$

Sea $\Pi := \Pi_{i \notin I_1} A_i$, $\bar{x} = (x_i)_i$ y análogamente $\bar{y}$. Considerando que para cada i algún conjugando debe ser falso, obtenemos

$$\Pi \models \neg \bigwedge_j \psi_{ij}(\bar{x}, \bar{y}, 1), \tag{3.9}$$

para cada $i \notin I_1$. Ahora tome $A \in \mathcal{K}$, $a, b \in A$ arbitrarios y considere $c := (a, \bar{x}), d := (b, \bar{y}), e := (0, 1) \in A \times \Pi$. Tenemos, por (3.9):

$$A \times \Pi \models \neg \bigwedge_j \psi_{ij}(c, d, e).$$

Esto conduce a

$$A \times \Pi \models \bigwedge_j \psi_{ij}(c, d, e) \to \varphi_i(c, d, e)$$

para todo $i \notin I_1$. En conclusión:

$$A \times \Pi \models \bigwedge_{i \notin I_1} \Big(\bigwedge_j \psi_{ij}(c, d, e) \to \varphi_i(c, d, e) \Big). \tag{3.10}$$

También sabemos de (3.8) que

$$\Pi \models \bigwedge_{i \in I_1} \Big(\bigwedge_j \psi_{ij}(\bar{x}, \bar{y}, 1) \to \varphi_i(\bar{x}, \bar{y}, 1) \Big). \tag{3.11}$$

Vamos ahora a la demostración en sí. Suponga ahora que $A \models \Phi''(a, b, 0)$. Explícitamente,

$$A \models \bigwedge_{i \in I_1} \Big(\bigwedge_j \psi_{ij}(a, b, 0) \to \varphi_i(a, b, 0) \Big). \tag{3.12}$$

Como (3.11) y (3.12) son fórmulas de Horn, tenemos preservación por productos directos:

$$A \times \Pi \models \bigwedge_{i \in I_1} \Big(\bigwedge_j \psi_{ij}(c, d, e) \to \varphi_i(c, d, e) \Big).$$

Usando ahora (3.10), tenemos

$$A \times \Pi \models \bigwedge_i \Big(\bigwedge_j \psi_{ij}(c, d, e) \to \varphi_i(c, d, e) \Big).$$

Como puede verse,

$$A \times \Pi \models \Phi'(c, d, e)$$

y, por el Lema 47, esto implica $a = b$. Hemos obtenido entonces:

$$\mathcal{K} \models \Phi''(x, y, 0) \to x = y \tag{3.13}$$

□

Lema 49. *La siguiente fórmula*

$$\Phi'''(x, y, z) = \bigwedge_{i \in I_0 \cup I_2} \varphi_i(x, y, z) \tag{3.14}$$

donde

$$I_0 := \{i \in I_1 : \mathcal{K} \models \forall x, y, \bigwedge_j \psi_{ij}(x, y, 0)\}$$

$$I_2 := \Big\{i \in I_1 \setminus I_0 : \mathcal{K} \models \forall x, y, \bigwedge_{h \in I_0} \varphi_h(x, y, 0) \to \bigwedge_j \psi_{ij}(x, y, 0)\Big\},$$

satisface (3.2).

Demostración. Primero probaremos que Φ''' satisface ambas conclusiones del Lema 48. Como $\Phi''(x, y, 1)$ vale en $\mathcal{K}$, tenemos (en particular)

$$\mathcal{K} \models \bigwedge_{i \in I_0 \cup I_2} \Big(\bigwedge_j \psi_{ij}(x, y, 1) \ \to \varphi_i(x, y, 1)\Big).$$

Pero por definición de I_1, tenemos

$$\mathcal{K} \models \bigwedge_{i \in I_0 \cup I_2} \ \bigwedge_j \psi_{ij}(x, y, 1),$$

así que

$$\mathcal{K} \models \bigwedge_{i \in I_0 \cup I_2} \varphi_i(x, y, 1)$$

y por definición,

$$\mathcal{K} \models \Phi'''(x, y, 1).$$

Análogamente, $\Phi''(x, x, 0)$ vale en $\mathcal{K}$ y entonces

$$\mathcal{K} \models \bigwedge_{i \in I_0 \cup I_2} \Big(\bigwedge_j \psi_{ij}(x, x, 0) \ \to \varphi_i(x, x, 0)\Big). \tag{3.15}$$

Por definición de I_0 obtenemos

$$\mathcal{K} \models \bigwedge_{i \in I_0} \bigwedge_{j} \psi_{ij}(x, x, 0).$$

A partir de esto conseguimos

$$\mathcal{K} \models \bigwedge_{i \in I_0} \varphi_i(x, x, 0), \tag{3.16}$$

y considerando la definición de I_2, obtenemos

$$\mathcal{K} \models \bigwedge_{i \in I_2} \bigwedge_{j} \psi_{ij}(x, x, 0).$$

Usando (3.15) nuevamente,

$$\mathcal{K} \models \bigwedge_{i \in I_2} \varphi_i(x, x, 0),$$

Poniendo esto junto con (3.16), obtenemos:

$$\mathcal{K} \models \bigwedge_{i \in I_0 \cup I_2} \varphi_i(x, x, 0)$$

que es, por definición,

$$\mathcal{K} \models \Phi'''(x, x, 0)$$

Verifiquemos que Φ''' satisface la segunda conclusión del Lema 48. Trabajamos con (3.13).

$$\mathcal{K} \models \Phi''(x, y, 0) \to x = y$$

$$\mathcal{K} \models \bigwedge_{i \in I_1} \Big(\bigwedge_{j} \psi_{ij}(x, y, 0) \to \varphi_i(x, y, 0) \Big) \;\to\; x = y$$

$$\mathcal{K} \models \bigwedge_{i \in I_1} \Big(\bigvee_{j} \neg\psi_{ij}(x, y, 0) \vee \varphi_i(x, y, 0) \Big) \;\to\; x = y$$

Distribuyendo $\wedge$ con respecto a $\vee$,

$$\mathcal{K} \models \bigvee_{j} \; \bigwedge_{l} \epsilon_{jl}(x, y, 0) \;\to\; x = y,$$

donde ϵ_{jl} es de la forma $\neg\psi_{ij}$ ó φ_i. Esto conduce a:

$$\mathcal{K} \models \bigwedge_{j} \left(\Big(\bigwedge_{l} \epsilon_{jl}(x, y, 0) \Big) \to x = y \right).$$

I.e., para todo j tenemos

$$\mathcal{K} \models \Big(\bigwedge_l \epsilon_{jl}(x,y,0)\Big) \to x = y$$

Ahora elija k tal que para todo $i \in I_0 \cup I_2$ hay l tal que $\epsilon_{kl} = \varphi_i$ y ϵ_{kl} es negada para $i \in I_1 \setminus (I_0 \cup I_2)$. Como puede verse,

$$\mathcal{K} \models \Big(\bigwedge_{i\in I_0\cup I_2} \varphi_i(x,y,0) \wedge \bigwedge_{i\notin I_0\cup I_2} \neg\psi_{ik}(x,y,0)\Big) \to x = y \tag{3.17}$$

Sean $a, b \in A \in \mathcal{K}$ arbitrarios, y suponga que

$$A \models \bigwedge_{i\in I_0\cup I_2} \varphi_i(a,b,0). \tag{3.18}$$

Para cada $i \notin I_0 \cup I_2$, tome $A_i \in \mathcal{K}$, $x_i, y_i \in A_i$ tal que

$$A_i \models \bigwedge_{h\in I_0} \varphi_h(x_i,y_i,0) \wedge \neg \bigwedge_j \psi_{ij}(x_i,y_i,0).$$

Así obtenemos

$$A \times \Pi \models \bigwedge_{i\in I_0\cup I_2} \varphi_i(x,y,0) \wedge \neg \bigwedge_j \psi_{ij}(x,y,0),$$

donde $\Pi := \Pi_{i\notin I_0\cup I_2} A_i$, $x = (a,(x_i)_i)$, $y = (b,(y_i)_i)$. De esto y (3.17) inferimos

$$A \times \Pi \models x = y,$$

y luego $a = b$, la cual es la segunda conclusión en el Lema 48.

Ahora tome $A, B \in \mathcal{K}$ y $a, c \in A$, $b, d \in B$, y suponga que

$$A \times B \models \Phi'''\big((a,b),(c,d),(0,1)\big).$$

Por definición,

$$A \times B \models \bigwedge_{i\in I_0} \varphi_i\big((a,b),(c,d),(0,1)\big)$$

si y sólo si

$$A \models \bigwedge_{i\in I_0} \varphi_i(a,c,0) \text{ y } B \models \bigwedge_{i\in I_0} \varphi_i(b,d,1),$$

por preservación. Por los resultados previos, esto finalmente equivale a

$$a = c,$$

así que Φ''' satisface (3.2). □

Hemos probado entonces que Φ dada por la definición (3.2) puede ser reemplazada por la fórmula abierta positiva Φ''' (que es incluso una conjunción de atómicas), bajo la sola hipótesis que nuestra clase $\mathcal{K}$ sea cerrada por productos directos.

Volviendo ahora al reino del álgebra, podemos enunciar la conclusión obvia del lema anterior:

Teorema 50. *Suponga que existe una fórmula abierta Φ que atestigua DFC para $\mathcal{V}$. Luego $\mathcal{V}$ tiene CFC.*

Demostración. La fórmula Φ''' del Lema 49 es positiva, así que por el Teorema 43 tenemos CFC. $\square$

Este resultado se puede afinar de la siguiente manera:

Teorema 51. *Sea $\mathcal{V}$ una variedad con $\vec{0}$ & $\vec{1}$. Son equivalentes:*

1. *Existe una fórmula abierta Φ que atestigua DFC para $\mathcal{V}$.*

2. *Sea B la subálgebra de $F(x) \times F(x,y)$ generada por $\bar{x} := (x,x)$, $\bar{y} := (x,y)$ y $\vec{e} := [\vec{0},\vec{1}]$. Entonces $(\bar{x},\bar{y}) \in \mathrm{Cg}^B(\vec{0},\vec{e})$.*

3. *En $F(x,y,\vec{z})$ se da*
$$(x,y) \in \mathrm{Cg}(\vec{0},\vec{z}) \vee \big(\big(\mathrm{Cg}(\vec{0},\vec{z}) \vee \mathrm{Cg}(x,y)\big) \cap \mathrm{Cg}(\vec{1},\vec{z})\big).$$

4. *Existe una conjunción de ecuaciones $\varphi(x,y,\vec{e}\,)$ tal que para todo $\vec{e} \in A^l$ (donde $A \in \mathcal{V}$), si $\mathrm{Cg}(\vec{0},\vec{e}\,) \cap \mathrm{Cg}(\vec{1},\vec{e}\,) = \Delta$ se tiene*
$$A \models \varphi(x,y,\vec{e}) \text{ si y sólo si } (x,y) \in \mathrm{Cg}(\vec{0},\vec{e}).$$

5. *Existen términos $(2+l)$-arios $p_1,\dots,p_k$, $q_1,\dots,q_k$ en el lenguaje de $\mathcal{V}$ que satisfacen*
$$\mathcal{V} \models \vec{p}(x,y,\vec{1}) \approx \vec{q}(x,y,\vec{1}), \qquad \mathcal{V} \models \vec{p}(x,y,\vec{0}) = \vec{q}(x,y,\vec{0}) \leftrightarrow x = y$$

Demostración. (1$\Leftrightarrow$5) Es el contenido del Lema 49, pues las fórmulas atómicas en el lenguaje de $\mathcal{V}$ coinciden con las ecuaciones.

(5$\Rightarrow$4) La fórmula $\vec{p} = \vec{q}$ sirve. Si $A \models \vec{p}(x,y,\vec{e}) = \vec{q}(x,y,\vec{e})$, obtenemos $A/\mathrm{Cg}(\vec{0},\vec{e}\,) \models \vec{p}(x,y,\vec{e})/\mathrm{Cg}(\vec{0},\vec{e}) = \vec{q}(x,y,\vec{e})/\mathrm{Cg}(\vec{0},\vec{e}\,)$ por preservación por imágenes homomórficas. Equivalentemente,
$$A/\mathrm{Cg}(\vec{0},\vec{e}\,) \models \vec{p}(x/\mathrm{Cg}(\vec{0},\vec{e}\,), y/\mathrm{Cg}(\vec{0},\vec{e}\,), \vec{0}) = \vec{q}(x/\mathrm{Cg}(\vec{0},\vec{e}\,), y/\mathrm{Cg}(\vec{0},\vec{e}), \vec{0}).$$

En conclusión, $x/\mathrm{Cg}(\vec{0},\vec{e}\,) = y/\mathrm{Cg}(\vec{0},\vec{e}\,)$ y esto es $(x,y) \in \mathrm{Cg}(\vec{0},\vec{e}\,)$.

Por otro lado, si suponemos $\mathrm{Cg}(\vec{0},\vec{e})\cap\mathrm{Cg}(\vec{1},\vec{e}) = \Delta$, resulta A un producto subdirecto de $A/\mathrm{Cg}(\vec{0},\vec{e})$ y $A/\mathrm{Cg}(\vec{1},\vec{e})$. Luego, si vale $(x,y) \in \mathrm{Cg}(\vec{0},\vec{e})$, tenemos $x/\mathrm{Cg}(\vec{0},\vec{e}) = y/\mathrm{Cg}(\vec{0},\vec{e})$ y en consecuencia

$$A/\mathrm{Cg}(\vec{0},\vec{e}) \models \vec{p}(x/\mathrm{Cg}(\vec{0},\vec{e}), y/\mathrm{Cg}(\vec{0},\vec{e}), \vec{0})) = \vec{q}(x/\mathrm{Cg}(\vec{0},\vec{e}), y/\mathrm{Cg}(\vec{0},\vec{e}), \vec{0})),$$

y equivalentemente

$$A/\mathrm{Cg}(\vec{0},\vec{e}) \models \vec{p}(x,y,\vec{e})/\mathrm{Cg}(\vec{0},\vec{e}) = \vec{q}(x,y,\vec{e})/\mathrm{Cg}(\vec{0},\vec{e}).$$

Como además

$$A/\mathrm{Cg}(\vec{1},\vec{e}) \models \vec{p}(x,y,\vec{e})/\mathrm{Cg}(\vec{1},\vec{e}) = \vec{q}(x,y,\vec{e})/\mathrm{Cg}(\vec{1},\vec{e})$$

(puesto que $\vec{p}(x,y,\vec{1}) \approx \vec{q}(x,y,\vec{1})$ es cierta en toda la variedad) obtenemos $A \models \vec{p}(x,y,\vec{e}) = \vec{q}(x,y,\vec{e})$, pues la fórmula $\vec{p} = \vec{q}$ es preservada por productos subdirectos.

(4⇒5) Escribamos a la conjunción de ecuaciones como $\vec{p} = \vec{q}$. Sea $A \in \mathcal{V}$ arbitrario y tomemos $\vec{e} = \vec{1}$. Como $\mathrm{Cg}(\vec{0},\vec{1}) \cap \mathrm{Cg}(\vec{1},\vec{1}) = \Delta$ y para todo $x, y \in A$, $(x,y) \in \mathrm{Cg}(\vec{0},\vec{1})$, obtenemos

$$A \models \vec{p}(x,y,\vec{1}) \approx \vec{q}(x,y,\vec{1}).$$

Por otro lado, si $\vec{e} = \vec{0}$, tenemos $\mathrm{Cg}(\vec{0},\vec{0}) \cap \mathrm{Cg}(\vec{0},\vec{1}) = \Delta$ y además

$$A \models \vec{p}(x,y,\vec{0}) = \vec{q}(x,y,\vec{0}) \leftrightarrow x = y.$$

puesto que $\mathrm{Cg}(\vec{0},\vec{0}) = \Delta$. Como lo probado vale para todo A en $\mathcal{V}$, obtenemos 5.

(2⇔3) Llamemos δ a la congruencia $\big(\mathrm{Cg}(\vec{0},\vec{z}) \vee \mathrm{Cg}(x,y)\big) \cap \mathrm{Cg}(\vec{1},\vec{z})$. Probaremos primero que B es isomorfa a $F(x,y,\vec{z})/\delta$. Sea $h : F(x,y,\vec{z}) \to B$ el homomorfismo dado por las restricciones

$$h(x) = \bar{x}, \quad h(y) = \bar{y}; \quad h(z_i) = (0_i, 1_i),\ i = 1, \ldots, l.$$

Basta ver que $\ker h = \delta$. Sean $t_j := t_j(x,y,\vec{z})$ con $j = 1,2$ dos elementos de $F(x,y,\vec{z})$. Luego $(t_1,t_2) \in \ker h$ si y sólo si $h(t_1) = h(t_2)$, o equivalentemente:

$$F(x) \times F(x,y) \models t_1(h(x),h(y),h(\vec{z})) = t_2(h(x),h(y),h(\vec{z})).$$

Esto viene a ser lo mismo que

$$F(x) \models t_1(x,x,\vec{0}) = t_2(x,x,\vec{0}) \ \text{ y } \ F(x,y) \models t_1(x,y,\vec{1}) = t_2(x,y,\vec{1}).$$

Se observa fácilmente que lo último equivale a que

$$(x = y \wedge \vec{z} = \vec{0}) \to t_1(x,y,\vec{z}) = t_2(x,y,\vec{z}) \ \text{ y } \ \vec{z} = \vec{1} \to t_1(x,y,\vec{z}) = t_2(x,y,\vec{z})$$

sean ciertas en la variedad. En última instancia, esto es igual a que simultáneamente se den $(t_1, t_2) \in \mathrm{Cg}(\vec{z}, \vec{0}) \vee \mathrm{Cg}(x, y)$ y $(t_1, t_2) \in \mathrm{Cg}(\vec{z}, \vec{1})$, que es lo mismo que decir que $(t_1, t_2) \in \delta$.

Con esto obtenemos inmediatamente la equivalencia entre las afirmaciones segunda y tercera, pues la congruencia $\mathrm{Cg}^B(\vec{0}, \vec{e})$ corresponde a $\mathrm{Cg}(\vec{0}, \vec{z}) \vee \delta$.

(5⇒2) Supongamos dados los términos y denotemos $F := F(x) \times F(x, y)$. Considerando las propiedades de $\vec{p}$ y $\vec{q}$, obtenemos

$$F \models \vec{p}(\bar{x}, \bar{y}, \vec{e}) = \vec{q}(\bar{x}, \bar{y}, \vec{e}),$$

por preservación por productos directos. Pasando a la subálgebra B,

$$B \models \vec{p}(\bar{x}, \bar{y}, \vec{e}) = \vec{q}(\bar{x}, \bar{y}, \vec{e}). \tag{3.19}$$

Considerando las inclusiones

$$\begin{aligned} \mathrm{Cg}^B(\vec{0}, \vec{e}) &\subseteq \mathrm{Cg}^F(\vec{0}, \vec{e}) \subseteq \ker \pi_1 \\ \mathrm{Cg}^B(\vec{1}, \vec{e}) &\subseteq \mathrm{Cg}^F(\vec{1}, \vec{e}) \subseteq \ker \pi_2 \end{aligned}$$

obtenemos $\mathrm{Cg}^B(\vec{0}, \vec{e}) \cap \mathrm{Cg}^B(\vec{0}, \vec{e}) = \Delta$. Como sabemos que (5⇒4), y estamos bajo las hipótesis de 4, concluimos por (3.19) que $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{Cg}^B(\vec{0}, \vec{e})$.

(3⇒5) Como $(x, y) \in \mathrm{Cg}^F(\vec{0}, \vec{z}) \vee \delta$, donde $F := F(x, y, \vec{z})$, existen términos $v_1, \dots v_k$ tales que

$$v_1 = x \ \mathrm{Cg}^F(\vec{0}, \vec{z}) \ v_2 \ \delta \ v_3 \ \mathrm{Cg}^F(\vec{0}, \vec{z}) \cdots \mathrm{Cg}^F(\vec{0}, \vec{z}) \ v_{k-1} \ \delta \ v_k = y$$

Luego, obtenemos las siguientes leyes de $\mathcal{V}$:

$$\begin{aligned} x &\approx v_i(x, x, \vec{0}) && \text{para todo } i \\ x &\approx v_1(x, y, \vec{0}) \\ v_i(x, y, \vec{1}) &\approx v_{i+1}(x, y, \vec{1}) && \text{para } i \text{ impar} \\ v_i(x, y, \vec{0}) &\approx v_{i+1}(x, y, \vec{0}) && \text{para } i \text{ par} \\ v_k(x, y, \vec{1}) &\approx y \end{aligned}$$

De estos términos podemos extraer los $\vec{p}$ y $\vec{q}$ como sigue:

$$p_i := v_{2i-1}, \qquad q_i := v_{2i}.$$

□

3.3. Existencial

Habiendo observado los resultados obtenidos en las dos secciones anteriores:

- positiva $\Rightarrow$ existencial positiva,
- abierta $\Rightarrow$ existencial positiva,

es natural conjeturar que si Φ es una fórmula existencial, obtengamos la misma conclusión. Felizmente, la conjetura resulta correcta y es fácil de probar.

Teorema 52. *Suponga que existe una fórmula existencial Φ que atestigua DFC para $\mathcal{V}$. Luego $\mathcal{V}$ tiene CFC.*

Demostración. Para verlo, probaremos que podemos reemplazar a Φ por una fórmula positiva. Podemos suponer que Φ es de la forma

$$\Phi(x, y, \vec{z}) := \exists \vec{w} \bigvee_i \bigwedge_j \varphi_{ij}(x, y, \vec{z}, \vec{w}) \tag{3.20}$$

donde cada $\varphi_{ij}(x, y, \vec{z}, \vec{w})$ es atómica o atómica negada. Sea $\Lambda_i = \{j : \varphi_{ij} \text{ es atómica}\}$.

Afirmación. *Existe k tal que*

$$\Phi'(x, y, \vec{z}) := \exists \vec{w} \bigwedge_{j \in \Lambda_k} \varphi_{kj}(x, y, \vec{z}, \vec{w}) \tag{3.21}$$

atestigua DFC para para $\mathcal{V}$.

Prueba de la Afirmación. Puesto que Φ satisface DFC, se tiene

$$F(x) \times F(x, y) \models \exists \vec{w} \bigwedge_{j \in \Lambda_k} \varphi_{kj}((x, x), (x, y), [\vec{0}, \vec{1}], \vec{w})$$

Luego existe $[\vec{u}(x), \vec{v}(x, y)]$ en $F(x) \times F(x, y)$ y k tales que

$$F(x) \times F(x, y) \models \bigwedge_j \varphi_{kj}\big((x, x), (x, y), [\vec{0}, \vec{1}], [\vec{u}(x), \vec{v}(x, y)]\big)$$

Usando preservación por imágenes homomórficas, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &\models \bigwedge_{j \in \Lambda_k} \varphi_{kj}(x, x, \vec{0}, \vec{u}(x)) \\ \mathcal{V} &\models \bigwedge_{j \in \Lambda_k} \varphi_{kj}(x, y, \vec{1}, \vec{v}(x, y)) \end{aligned} \tag{3.22}$$

Ahora probaremos que para este k, la fórmula (3.21) atestigua DFC para $\mathcal{V}$.

($\Leftarrow$) Tome $a \in A$, $b, c \in B$, $A, B \in \mathcal{V}$. Usando (3.22) y preservación por productos directos,

$$A \times B \models \bigwedge_{j \in \Lambda_k} \varphi_{kj}((a,b),(a,c),[\vec{0},\vec{1}\,],[\vec{u}(a),\vec{v}(b,c)]).$$

Luego

$$A \times B \models \exists \vec{w} \bigwedge_{j \in \Lambda_k} \varphi_{kj}((a,b),(a,c),[\vec{0},\vec{1}\,],\vec{w}),$$

y por definición,

$$A \times B \models \Phi'((a,b),(a,c),[\vec{0},\vec{1}\,])$$

($\Rightarrow$) Ahora suponga $A \times B \models \Phi'((a,b),(c,d),[\vec{0},\vec{1}\,])$. Por preservación por imágenes homomórficas, tenemos $A \models \Phi'(a,c,\vec{0})$; tome $\vec{w}$ tal que

$$A \models \bigwedge_{j \in \Lambda_k} \varphi_{kj}(a,c,0,\vec{w}).$$

Considerando

$$F(x) \times F(x,y) \models \bigwedge_{j \notin \Lambda_k} \varphi_{kj}((x,x),(x,y),[\vec{0},\vec{1}\,],[\vec{u}(x),\vec{v}(x,y)])$$

obtenemos

$$A \times \big(F(x) \times F(x,y)\big) \models \bigwedge_{j} \varphi_{kj}\big(\big(a,(x,x)\big),\big(c,(x,y)\big),\big[\vec{0},[\vec{0},\vec{1}\,]\big],\big[\vec{w},[\vec{u}(x),\vec{v}(x,y)]\big]\big).$$

Equivalentemente, por el isomorfismo obvio

$$\big(A \times F(x)\big) \times F(x,y) \models \bigwedge_{j} \varphi_{kj}\big(\big((a,x),x\big),\big((c,x),y\big),\big[[\vec{0},\vec{0}\,],\vec{1}\,\big],\big[[\vec{w},\vec{u}(x)],\vec{v}(x,y)\big]\big).$$

De esto se deduce, tomando, $\mathbf{a} := (a,x)$, $\mathbf{c} = (c,x)$, $\vec{\mathbf{0}} = [\vec{0},\vec{0}\,] = \vec{0}^{A \times F(x)}$,

$$\big(A \times F(x)\big) \times F(x,y) \models \Phi((\mathbf{a},x),(\mathbf{c},x),[\vec{\mathbf{0}},\vec{1}\,])$$

y como Φ satisfacía DFC,

$$A \times F(x) \models \mathbf{a} = \mathbf{c}.$$

I.e. $(a,x) = (c,x)$. Podemos concluir $a = c$, como deseábamos. $\square$

$\square$

Notemos que esta misma prueba permite obtener la conclusión del Teorema 50 de manera igualmente inmediata; reiteramos que la prueba que se dio allí se aplica en un contexto de mucho mayor generalidad. Otra observación es que las pruebas de esta sección y la anterior son igualmente válidas en el caso de fórmulas que atestigüen DFC débilmente.

3.4. Universal

Como se anticipó, las fórmulas universales se apartan del caso trivial. Para verlo, podemos considerar el ejemplo de la sección 2.6 relativo a semi-reticulados. Allí se obtuvo una fórmula Φ universal y no positiva. La Afirmación 1 probará que cierta variedad de semi-reticulados no tiene CFC, y luego no hay fórmula ni positiva ni existencial que reemplace a Φ; por ello decimos que dicha Φ es óptima, desde el punto de vista proposicional y de los cuantificadores.

Como primer paso, construiremos un ejemplo que atestigua que $\vec{0}$ & $\vec{1}$ no implica BFC. La variedad $\mathcal{L}$ con lenguaje $\{\mathbin{+\!\!\!+}, *, 0, 1\}$ dada por el siguiente conjunto de ecuaciones Σ:

$$\begin{aligned} x \mathbin{+\!\!\!+} 0 &\approx x \\ x \mathbin{+\!\!\!+} 1 &\approx x * 1 \\ x * 0 &\approx 0 \end{aligned}$$

tiene $\vec{0}$ & $\vec{1}$. En lo que sigue definiremos varias álgebras en $\mathcal{L}$. En primer lugar tome $\mathbf{L}_\omega := \langle \omega, \mathbin{+\!\!\!+}, *, 0, 1\rangle$, donde

$$\begin{aligned} 0 \mathbin{+\!\!\!+} 1 &:= 0 & \qquad 0 * 1 &:= 0 \\ 1 \mathbin{+\!\!\!+} 1 &:= 1 & 1 * 1 &:= 1 \\ x \mathbin{+\!\!\!+} 0 &:= x & x * 0 &:= 0 \end{aligned}$$

para todo $x \in \omega$ y

$$z \mathbin{+\!\!\!+} y := 2, \qquad z * y := 2$$

para todo $z, y \in \omega$ no considerados previamente. Para cada $n \geq 2$, $\mathbf{L}_n$ denotará la subálgebra de $\mathbf{L}_\omega$ con universo $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Ahora defina $\mathbf{D}_n$ como la subálgebra de $\mathbf{L}_2 \times \mathbf{L}_\omega$ con universo $(2 \times n) \cup \{(1, n)\}$.

Defina los siguientes subconjuntos de $2 \times \omega$:

$$\begin{aligned} P_0 &:= \{(0, j) \mid 3 \leq j\} \\ P_1 &:= \{(1, j) \mid 3 \leq j\} \end{aligned}$$

Luego $2 \times \omega = (2 \times 3) \cup P_0 \cup P_1$. Note que para todo $z \in (2 \times \omega) \setminus \{(0,0), (1,0)\}$ y para todo $x, y \in P_1$ tenemos:

$$\begin{aligned} x \mathbin{+\!\!\!+} z &= y \mathbin{+\!\!\!+} z \\ z \mathbin{+\!\!\!+} x &= z \mathbin{+\!\!\!+} y \\ x * z &= y * z \\ z * x &= z * y. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Lema 53. *Toda función parcial inyectiva* $f : \mathbf{D}_n \to (\mathbf{L}_2 \times \mathbf{L}_n)$ *que fija* $(2 \times 3) \cup P_0$ *es un isomorfismo parcial entre* $\mathbf{D}_n$ *y* $\mathbf{L}_2 \times \mathbf{L}_n$*.*

Demostración. De manera directa se puede ver (usando las ecuaciones (3.23)) que si $B \subseteq P_1$ y σ es cualquier permutación de P_1, entonces $(2\times 3) \cup P_0 \cup B$ y $(2\times 3) \cup P_0 \cup \sigma(B)$ son subálgebras de $\mathbf{L}_2 \times \mathbf{L}_\omega$ y

$$\bar{\sigma}(x) := \begin{cases} x & x \in (2 \times 3) \cup P_0 \\ \sigma(x) & x \in B, \end{cases}$$

es un isomorfismo entre ellas.

Como f es una restricción de un tal isomorfismo $\bar{\sigma}$, es un isomorfismo parcial. □

Lema 54. *Sea* $\mathcal{V}$ *una variedad. Si* $\mathcal{V}_{DI}$ *es definible en primer orden, entonces es finitamente axiomatizable relativa a* $\mathcal{V}$*.*

Demostración. Primero note que un ultraproducto de álgebras directamente descomponibles es nuevamente descomponible (usar *operaciones de descomposición*). Sea Σ un conjunto de sentencias de primer orden que axiomaticen $\mathcal{V}_{DI}$. En busca de una contradicción, suponga que $\mathcal{V}_{DI}$ no es finitamente axiomatizable relativa a $\mathcal{V}$. Luego, para cada $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ finito existe $A_{\Sigma_0} \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_{DI}$ satisfaciendo Σ_0. Ahora es fácil construir un ultraproducto U de estas álgebras descomponibles de tal manera que U satisfaga Σ, un absurdo. □

Teorema 55. $(\mathcal{L})_{DI}$ *no es definible en primer orden.*

Demostración. Primero probaremos que el jugador "$\exists$" tiene una estrategia ganadora para el juego *back-and-forth* ("de Ehrenfeucht") de longitud $n-3$ entre $\mathbf{D}_n$ y $\mathbf{L}_2 \times \mathbf{L}_n$. La estrategia es como sigue:

- si $\forall$ elige un elemento en $(2 \times 3) \cup P_0$ (en cualquier álgebra), $\exists$ elegirá el mismo elemento en la otra álgebra.
- si $\forall$ elije un elemento en P_1, $\exists$ elegirá un elemento en la parte P_1 de la otra álgebra, que no haya sido elegida hasta este punto.

Hay $n-3$ elementos en $P_1 \cap (\mathbf{L}_2 \times \mathbf{L}_n)$, así que estas instrucciones andan hasta $n-3$ movimientos. Llamemos g a la función parcial definida por este juego. Por el Lema 53, g es un isomorfismo parcial y hemos probado nuestra primera afirmación.

Ahora suponga que φ es una sentencia tal que $(\mathcal{L})_{DI} \models \varphi$. Por la estrategia de más arriba tenemos que para todo n suficientemente grande, $\mathbf{D}_n \models \varphi$ si y sólo si $\mathbf{L}_2 \times \mathbf{L}_n \models \varphi$. Tomando n tal que $2n+1 =$ (cardinal de $\mathbf{D}_n$) es un número primo, obtenemos $\mathbf{D}_n \in (\mathcal{L})_{DI}$. Concluimos que hay álgebras descomponibles satisfaciendo φ, y de aquí que $(\mathcal{L})_{DI}$ no puede ser definida por una sola sentencia de primer orden. Usando el Lema 54 tenemos nuestro resultado. □

Corolario 56. *$\mathcal{L}$ no tiene DFC. En particular, $\vec{0}$ & $\vec{1}$ no implican DFC ni BFC.*

Demostración. Como DFC es equivalente a DP, basta considerar el Corolario 36 y el Teorema 55 en conjunto para obtener una contradicción. $\square$

Una indicación de que $(\mathcal{L})_{DI}$ podría no ser definible fue descubierta usando el programa "Universal Algebra Calculator" [6], diseñado por Ralph Freese y Emil Kiss.

Sea $\mathcal{L}^{\vee}$ la variedad con lenguaje $\{+\!\!+, *, 0, 1, \vee\}$ definida por los axiomas de $\mathcal{L}$ más identidades diciendo que $\vee$ es un operación de semi-reticulado para la cual $0 \vee 1 = 0$. Estudiando este ejemplo se verá que la complejidad de la fórmula Φ en la Proposición 38 no puede ser mejorada para el caso general.

Afirmación 1. *$\mathcal{L}^{\vee}$ no tiene CFC. En particular, DFC no implica CFC.*

Demostración. Si $\mathcal{L}^{\vee}$ tuviera CFC, existirían $\mathbf{0}_1(w), \dots \mathbf{0}_l(w)$, $\mathbf{1}_1(w), \dots \mathbf{1}_l(w)$ tales que para toda álgebra $A = A_1 \times A_2 \in \mathcal{V}$, $(\lambda^1, \lambda^2) \in A$,

$$\begin{aligned} \ker \pi_1 &= \mathrm{Cg}^A\big([\vec{\mathbf{0}}(\lambda^1), \vec{\mathbf{0}}(\lambda^2)], [\vec{\mathbf{0}}(\lambda^1), \vec{\mathbf{1}}(\lambda^2)]\big) \\ \ker \pi_2 &= \mathrm{Cg}^A\big([\vec{\mathbf{1}}(\lambda^1), \vec{\mathbf{1}}(\lambda^2)], [\vec{\mathbf{0}}(\lambda^1), \vec{\mathbf{1}}(\lambda^2)]\big), \end{aligned}$$

por el Lema 39. Como el lenguaje contiene constantes, podemos reemplazar estos nuevos $\mathbf{0}_i$ y $\mathbf{1}_i$ por términos cerrados, y luego

$$\begin{aligned} \ker \pi_1 &= \mathrm{Cg}^A\big([\vec{\mathbf{0}}, \vec{\mathbf{0}}], [\vec{\mathbf{0}}, \vec{\mathbf{1}}]\big) \\ \ker \pi_2 &= \mathrm{Cg}^A\big([\vec{\mathbf{1}}, \vec{\mathbf{1}}], [\vec{\mathbf{0}}, \vec{\mathbf{1}}]\big). \end{aligned}$$

Ahora, verificando los axiomas de $\mathcal{L}^{\vee}$, concluimos que todo término cerrado t en el lenguaje de $\mathcal{L}^{\vee}$ es constantemente igual a 0 ó a 1 sobre $\mathcal{L}^{\vee}$, así que deberíamos tener

$$\ker \pi_1 = \mathrm{Cg}^A\big((0,0),(0,1)\big) \vee \mathrm{Cg}^A\big((1,0),(1,1)\big).$$

Pero el lector puede verificar que si tomamos $A = \mathbf{L}_5 \times \mathbf{L}_2$, la relación equivalencia dibujada en la Figura 3.1 es una congruencia que contiene al derecho lado de la última igualdad, y es claramente diferente de $\ker \pi_1$. $\square$

Proposición 57. *No existe una fórmula positiva que atestigüe DFC débilmente para $\mathcal{L}^{\vee}$.*

Demostración. Inmediato por la Afirmación 1. $\square$

Proposición 58. *No existe una fórmula existencial que atestigüe DFC débilmente para $\mathcal{L}^{\vee}$.*

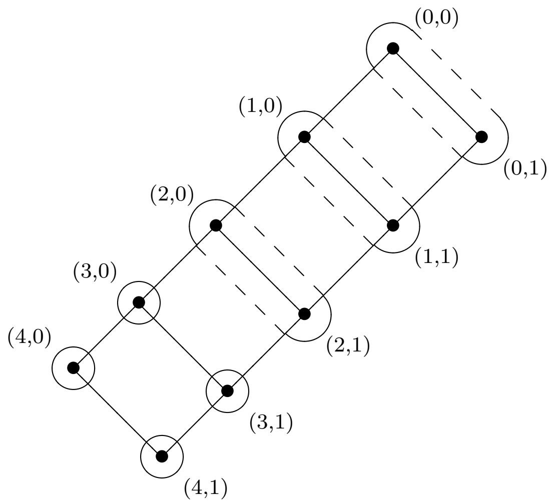

Figura 3.1: Una congruencia en $\mathbf{L}_5 \times \mathbf{L}_2$.

Demostración. Defina operaciones de semi-reticulado (tipo *join*) sobre $\mathbf{L}_2$, $\mathbf{L}_4$ y $\mathbf{L}_5$ tales que éstas resulten totalmente ordenadas con el orden dado por $0 > 1 > 2 > 3 > 4$. Suponga que Φ atestigua DFC débilmente para $\mathcal{L}^{\vee}$, y considere $\mathbf{L}_5 \times \mathbf{L}_2$. Los puntos sombreados en la Figura 3.2 forman una subálgebra de $\mathbf{L}_5 \times \mathbf{L}_2$; llámela $\mathbf{L}$. El lector puede verificar que $F : \mathbf{L}_4 \times \mathbf{L}_2 \to \mathbf{L}$, donde

$$F(x) = \begin{cases} x & x \neq (3,1) \\ (4,1) & x = (3,1) \end{cases}$$

es un isomorfismo. Como Φ atestigua DFC débilmente para $\mathcal{L}^{\vee}$, tenemos

$$\mathbf{L}_4 \times \mathbf{L}_2 \models \Phi((3,0),(3,1),(0,1),(1,0)).$$

Aplicando F en todos lados, se deduce

$$\mathbf{L} \models \Phi((3,0),(4,1),(0,1),(1,0)).$$

Si tuviéramos una fórmula Φ existencial, obtendríamos

$$\mathbf{L}_5 \times \mathbf{L}_2 \models \Phi((3,0),(4,1),(0,1),(1,0)),$$

pues $\mathbf{L}$ es un subálgebra de $\mathbf{L}_5 \times \mathbf{L}_2$. Luego concluiríamos $3 = 4$, un absurdo. $\square$

Comentario. La Proposición 58 también podría haber sido probada usando el Teorema 52 y la Afirmación 1.

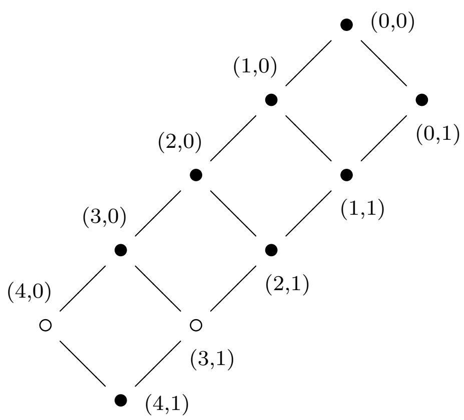

Figura 3.2: La estructura de semi-reticulado de $\mathbf{L}_5 \times \mathbf{L}_2$.

Capítulo 4

Epílogo

Un punto muy interesante del desarrollo de DFC y las propiedades equivalentes bajo la hipótesis de tener $\vec{0}$ & $\vec{1}$ (especialmente BFC y la DP) es que las propiedades de primer orden surgen como la herramienta natural a ser utilizada. Esto puede ser explicado en base a la Teoría de Preservación, que provee de una correlación estrecha entre propiedades elementales y estructurales.

Sin embargo, dada la naturaleza exclusivamente algebraica de la DP y BFC, uno esperaría que sea posible dar una prueba más "semántica" de la equivalencia entre los dos conceptos, sin tener que utilizar artificios sintácticos. De hecho, la prueba de la implicación BFC$\Rightarrow$DP es elemental y se basa simplemente en la estructura de reticulado distributivo de congruencias factor. Es la implicación inversa la que plantea las mayores dificultades.

Observemos que la similitud entre las respectivas condiciones de Mal'cev permitirían reducir la equivalencia a un juego ecuacional; de hecho, el Teorema de Completitud de Birkhoff asegura que existe tal prueba ecuacional. Pero esto no significa que tal prueba nos dé una verdadera profundización en las razones últimas de la equivalencia entre BFC y la DP bajo $\vec{0}$ & $\vec{1}$: la inspección de casos particulares indica que la prueba ecuacional puede ser extremadamente compleja. ¿Es la Lógica de primer orden el único camino para poder manejar tal complejidad? Esta pregunta constituye el primer problema que dejamos abierto.

> **Problema 1.** Dar una prueba estructural de la equivalencia entre BFC y la Propiedad de Determinación bajo la hipótesis de $\vec{0}$ & $\vec{1}$.

También es interesante preguntarse si estas herramientas desarrolladas pueden aplicarse bajo hipótesis más débiles; específicamente, eliminando o relajando la hipótesis de $\vec{0}$ & $\vec{1}$. Como ejemplo de esto podemos mencionar la solución del problema de la equivalencia entre BFC y la propiedad (*). En una charla con el autor (durante la "Conference in Universal Algebra and Lattice Theory", realizada en Szeged en 2005), Ross Willard afirmó que mediante los términos de la condición de Mal'cev para BFC se podía probar dicha equivalencia. Inmediatamente después se obtuvo el resultado de la sección 2.4, utilizando virtualmente la misma fórmula Φ que surgía de nuestro trabajo. La construcción de la fórmula Φ fue anunciada en 2004 durante el II Encuentro Nacional de Álgebra realizado en La Falda (Córdoba) y posteriormente en la conferencia de Szeged (Hungría).

Prosiguiendo con las propiedades de la caracterización Φ de la congruencia asociada a un elemento central, muchas preguntas surgen de los resultados más generales de la sección 3.2, donde se amplia el estudio a una clase arbitraria de modelos cerrada bajo la operación de tomar productos directos. En primer lugar, ¿debería tener $\Phi(x, y, \vec{z})$ las mismas propiedades preservacionales? Es obvio que siempre es preservada por productos directos cuando $\vec{z}$ es un elemento central, pero todo lo demás es conjetural.

> **Problema 2.** Sea $\mathcal{K}$ una clase de modelos cerrada por $\mathbf{P}$ con DFC. Decidir si existe una fórmula $\Phi(x, y, \vec{z})$ que atestigüe DFC para $\mathcal{K}$ y que sea preservada por $\mathbf{F}$ siempre que $\vec{z}$ sea central.

Esto último es cierto cuando ya tenemos una Φ abierta, pues podemos conseguir una fórmula positiva y la preservación por $\mathbf{F}$ es un caso particular de la preservación por $\mathbf{H}$ (pues $\mathbf{F}(\mathcal{K}) \subseteq \mathbf{H}(\mathcal{K})$ para toda clase $\mathcal{K}$).

> **Problema 3.** Sea $\mathcal{K}$ una clase de modelos cerrada por $\mathbf{P}$ con DFC. Decidir si existe una fórmula $\Phi(x, y, \vec{z})$ que atestigüe DFC para $\mathcal{K}$ y que sea preservada por $\mathbf{P}$ y por $\mathbf{F}$.

Creemos que esto es cierto en general, pero no vemos modo de demostrarlo. Una pregunta mucho más fácil de Teoría de Preservación es la siguiente, y su respuesta junto con una positiva al problema anterior sería una prueba inmediata para el caso existencial en clases generales (incluyendo, obviamente, al caso abierto).

> **Problema 4.** Probar que toda fórmula existencial que sea preservada por $\mathbf{P}$ y por $\mathbf{F}$ es equivalente a una fórmula positiva.

Esto no se puede mejorar más (digamos, a fórmulas universales), por lo que atestiguan los ejemplos de la sección 3.4.

No sólo es importante el tipo de preservación que tiene la fórmula Φ, sino también la familia de fórmulas que definen al centro $\mathrm{Z}(\cdot)$ de un álgebra en una variedad con DFC. Abundan ejemplos en los que el estudio de tal preservación ha sido de utilidad. Vaggione [20] mostró que en variedades de congruencias modulares con $\vec{0}$ & $\vec{1}$ el centro es definible mediante fórmulas positivas, y luego se obtiene la FHP; por otro lado, junto con el autor [22], probaron inicialmente que CFC implicaba BFC viendo que $\mathrm{Z}(\cdot)$ era preservado por $\mathbf{F}$, y utilizando la fórmula Φ existencial positiva se puede conseguir una caracterización de $\mathrm{Z}(\cdot)$ de complejidad $\forall\exists$.

> **Problema 5.** Decidir si una variedad con DFC tal que el centro es definible por fórmulas universales-existenciales ($\forall\exists$) tiene CFC.

Un resultado interesante a ser aplicado aquí para obtener una prueba estructural es el siguiente: *Una teoría consistente es preservada por uniones de cadenas de modelos si y sólo si es axiomatizable por sentencias universales-existenciales.* Y quizá este tipo de argumentos conduzcan a la solución de nuestro primer problema (viz., demostrar por separado que DP y BFC equivalen a que $Z(\cdot)$ sea *preservado* por $\mathbf{F}$).

El último problema, que casi no hace falta enunciar pero que dejamos sentado por completitud, es el siguiente.

> **Problema 6.** Estudiar la parte no trivial de la jerarquía de complejidades para Φ. En particular, determinar qué propiedades algebraicas especiales se obtienen en los casos $\forall\exists$ y $\exists\forall$.

De hecho, hay que observar que la mayoría de los ejemplos conocidos de variedades con DFC (viz., la familia de variedades con $\vec{0}$ & $\vec{1}$ que tienen la FHP, que es amplia) tienen CFC y por ende caen en el caso trivial. No hemos construido ejemplos que nos permitan dilucidar si la parte no trivial de la jerarquía se reduce al caso universal, pero creemos que ésta contiene todos los niveles de complejidad de cuantificadores.

Bibliografía

[1] C. C. Chang, B. Jónsson y A. Tarski, "Refinement properties for relational structures". Fund. Math. **54** (1964): 249–281.

[2] D. Bigelow y S. Burris, "Boolean algebras of factor congruences". Acta Sci. Math. **54** (1990): 11–20.

[3] G. Birkhoff, "On the structure of algebras". Proc. Cambridge Phil. Soc. **31** (1937): 433–454

[4] S. Burris y H. P. Sankappanavar, *A course in universal algebra.* Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York (1981).

[5] G. A. Fraser y A. Horn, "Congruence relations in direct products". Proc. Amer. Math. **26** (1970): 390–394.

[6] Ralph S. Freese y Emil W. Kiss, "An algebra calculator program". Sitio web: `http://www.math.hawaii.edu/~ralph/software/uaprog/`

[7] G. Grätzer, "Two Mal'cev type theorems in universal algebra". J. Combin. Theory **8** (1970): 334–342.

[8] B. Jonsson y A. Tarski, "Direct Decompositions of Finite Algebraic System". University of Notre Dame, South Bend, IN (1947).

[9] R. McKenzie, G. McNulty y W. Taylor. *Algebras, Lattices, Varieties,* Volume 1, The Wadsworth & Brooks/Cole Math. Series, Monterey, California (1987).

[10] J. Kollar, "Congruences and one element subalgebras". Algebra Universalis **9** (1979): 266–267.

[11] D. Lagmanovich, *La elaboración de la tesis.* Ediciones del Rectorado, Univers. Nac. Tucumán, Tucumán (2006).

[12] A. I. Mal'cev, "On the general theory of algebraic systems" (en ruso). *Mat. Sb.* **35** 77 (1954): 3–20.

[13] W. D. Neumman, “On Mal’cev conditions”. J. Austral. Math. Soc. **17** (1974): 376–384.

[14] A. Tarski, *Cardinal Algebras.* Oxford Univ. Press, New York (1949).

[15] W. Taylor, “Characterizing Mal’cev conditions”. Algebra univers. **3** (1973): 351–397.

[16] D. Vaggione, “$\mathcal{V}$ with factorable congruences and $\mathcal{V} = \mathbf{I}\mathbf{\Gamma}^a(\mathcal{V}_{DI})$ imply $\mathcal{V}$ is a discriminator variety”. Acta Sci. Math. **62** (1996): 359–368.

[17] D. Vaggione, “Definability of directly indecomposable congruence modular algebras”. Studia Logica **57** (1996): 239–241.

[18] D. Vaggione, “Varieties in which the Pierce stalks are directly indecomposable”. Journal of Algebra **184** (1996): 424–434.

[19] D. Vaggione, “Varieties of shells”. Algebra univers. **36** (1996): 483–487.

[20] D. Vaggione, “Modular varieties with the Fraser-Horn property”. Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1998): No 3, 701–708.

[21] D. Vaggione, “Central elements in varieties with the Fraser-Horn property”. Advances in Mathematics **148** (1999): 193–202.

[22] D. Vaggione, P. Sánchez Terraf, “Compact factor congruences imply Boolean factor congruences”. Algebra univers. **51** (2004): 207–213.

[23] R. Willard, “Varieties Having Boolean Factor Congruences”. J. Algebra, **132** (1990): 130–153.

Índice de Notación

Índice alfabético