Facultad de Matemática Astronomía y Física
Universidad Nacional de Córdoba

Representaciones de los Grupos de Trenzas y Aplicaciones

Claudia M. Egea

Seminario presentado para optar al grado de Doctora en Matemática.

Director: Dra. Esther Galina

Dedicado a Danley y a Camila

a mi mamá y a la memoria de mi papá.

Índice general

Resumen

Este trabajo está enfocado principalmente a la presentación de un método de construcción de representaciones de grupos discretos y a la explotación para el grupo de trenzas de dicha realización, tanto en el campo de la teoría de representaciones de grupos como en el estudio de subfactores en la teoría de operadores y en la obtención de invariantes de nudos.

La construcción de representaciones del grupo de trenzas de n cuerdas $\mathbb{B}_n$ que se obtiene, ya sea n finito o infinito, depende de cinco parámetros y permite expresarlas en forma matricial. Bajo esta realización se parametrizan, a través de esas cinco variables, todas las representaciones no unitarias de un cociente infinito de $\mathbb{B}_n$ que satisfacen dos condiciones particulares.

En cuanto al problema de la clasificación de las representaciones irreducibles de $\mathbb{B}_n$, hay pocos resultados conocidos. Como aporte a este problema se presentan familias explícitas de nuevas representaciones irreducibles de $\mathbb{B}_n$ de dimensión $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$ con $1 \leq m < n$. Más aún, se obtienen condiciones suficientes en los parámetros que aseguran la irreducibilidad de las representaciones asociadas. Esto permite construir en forma explícita nuevas representaciones irreducibles de $\mathbb{B}_n$ de dimensión arbitrariamente grande.

A través de las representaciones obtenidas se construyen factores de tipo I y álgebras hiperfinitas. Asimismo, se construye una familia de subálgebras de un álgebra hiperfinita no isomorfas entre sí con conmutador relativo no trivial.

Por último, como aplicación de los resultados anteriores y de algunos resultados de Funar, se construye un invariante de nudos.

Abstract

This work is focused primarily on the presentation of a method of construction of representations of discrete groups. We make use of this realization for braid groups, not only in the theory of group representations but also in the study of subfactors of von Neumann algebras in operator theory and in obtaining knots invariants.

The obtained construction of representations of the braid group $\mathbb{B}_n$ of n strings, for n finite or infinite, depends on five parameters and permits express them in matrix form. Under this realization, all non-unitary representations of an infinite quotient of $\mathbb{B}_n$ that satisfies two particular conditions are parametrized through these five variables.

On the problem of classification of all the irreducible representations of $\mathbb{B}_n$ there are few known results. As a contribution to this problem, explicit families of new irreducible representations of $\mathbb{B}_n$ of dimension $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$, where $1 \leq m < n$, are presented. Moreover, sufficient conditions in the parameters to ensure the irreducibility for the associated representation are obtained. This allows the construction of explicit irreducible representations of $\mathbb{B}_n$ of dimension arbitrarily large.

Through the obtained representations, factors of type I and hyperfinite algebras are constructed. Moreover, we construct a family of non isomorphic subalgebras of a hyperfinite algebra with non trivial relative commutator.

Finally, as an application of this method and using results of Funar, we construct a knot invariant.

Palabras Clave: Braid Group; irreducible representations; factors; hyperfinite algebra; knot invariant.

1991 Mathematics Subject Classication: Primary: 20C99; Secondary: 20F36.

1. Introducción

La teoría de trenzas juega un rol muy importante en la matemática moderna por su conexión con diversas ramas de la ciencia como la teoría de nudos, la física teórica, la teoría de operadores, la geometría algebraica y la robótica, entre otras. Los grupos de trenzas aparecen por primera vez en forma explícita en un trabajo de Artin de 1926 en relación a espacios de configuración de finitos puntos en el plano complejo, [**Ar1**]. Si bien estos grupos se conocían hace tiempo, durante los últimos 25 años se han producido los mayores avances en el área y sus aplicaciones. El invariante de links dado por el Polinomio de Jones en 1983 [**J5**], [**J4**], la linealidad del grupo de trenzas obtenida a través de la representación de Lawrence-Krammer-Bigelow en 2001-2002 [**Bi2**] y [**K**], la ordenabilidad del grupo de trenzas $\mathbb{B}_n$ obtenida por Dehornoy en 1991 [**De**], son algunos de los resultados más destacados.

El grupo de trenzas $\mathbb{B}_n$ es un grupo finitamente generado no abeliano cuyos elementos no triviales tienen orden infinito. Tiene la particularidad de tener como cociente al grupo simétrico S_n. Cada $\mathbb{B}_n$ se puede realizar como un subgrupo de $\mathbb{B}_{n+1}$ y la unión formal de todos ellos es conocida como el grupo de trenzas infinito $\mathbb{B}_\infty$.

Este trabajo está enfocado principalmente a la presentación de un método de construcción de representaciones no unitarias de grupos de trenzas y a la explotación de dicha realización, tanto en el campo de la teoría de representaciones de grupos como en el estudio de subfactores en la teoría de operadores y en la obtención de invariantes de nudos.

La construcción de representaciones de $\mathbb{B}_n$ que se obtiene, ya sea n finito o infinito, depende de cinco parámetros (ver Teorema 3.4) y permite expresarlas en forma matricial. Bajo esta realización se parametrizan, a través de esas cinco variables, todas las representaciones no unitarias de un cociente infinito de $\mathbb{B}_n$ que satisfacen dos condiciones particulares (ver Teorema 3.8). La estrategia para realizar esta parametrización es usar resultados de la teoría de álgebras de von Neumann conmutativas. Estas ideas fueron aplicadas por primera vez por Gärding y Wightman para clasificar las representaciones de las relaciones de conmutación [**GW1**], y anticonmutación [**GW2**]. También fueron usada por Galina, Kaplan y Saal para clasificar las representaciones de las álgebras de Clifford asociadas a espacios vectoriales reales, complejos o cuaterniónicos de dimensión infinita [**GKS**].

En cuanto al problema de la clasificación de las representaciones irreducibles de $\mathbb{B}_n$, hay pocos resultados conocidos. Entre otros podemos mencionar los siguientes. Formanek clasificó todas las representaciones irreducibles de dimensión menor que n [**F**] y Sysoeva lo hizo para dimensión igual a n [**S**]. Larsen y Rowell dieron algunos resultados sobre representaciones unitarias de $\mathbb{B}_n$ de dimensión múltiplos lineales de n y probaron que no hay representaciones unitarias irreducibles de dimension $n+1$ [**LR**]. Levaillant caracterizó en qué casos la representación de Lawrence-Krammer es irreducible [**L**].

Como aporte a este problema se presentan familias explícitas de representaciones irreducibles de $\mathbb{B}_n$, $n < \infty$, de dimensión $\binom{n}{m}$ con $1 \leq m < n$ (ver Teoremas 3.13 y 3.14). Las mismas son subfamilias particulares de las dadas por la parametrización. Más aún, se obtienen condiciones suficientes en los parámetros que aseguran la irreducibilidad de las representaciones asociadas (ver Teoremas 3.21 y 3.22). Esto permite construir en forma explícita nuevas representaciones irreducibles de $\mathbb{B}_n$ de dimensión finita arbitrariamente grande (ver Teorema 3.23).

En la teoría de operadores los factores juegan un papel muy importante en el estudio de las álgebras de von Neumann ya que las mismas se descomponen como integral directa de factores. Otro objetivo de este trabajo es usar las representaciones obtenidas para construir factores y álgebras hiperfinitas. En particular se obtienen factores de tipo I_r, $r < \infty$, y álgebras hiperfinitas (ver sección 2 de capítulo 4). Estas álgebras hiperfinitas, definidas a través de una representación de $\mathbb{B}_\infty$, se realizan como límite de álgebras de von Neumann generadas por representaciones de $\mathbb{B}_n$ de dimensión finita variando n. Asimismo, se construye una familia de subálgebras no isomorfas de dichas álgebras hiperfinitas.

Por último, como aplicación de los resultados anteriores, se presenta un invariante de links, unión finita de nudos, usando la existencia de la traza dada por Funar en [**Fu**]. Analizar las ventajas y desventajas de este invariante no es un trabajo sencillo, pero según conversaciones con V. Jones podría ser un caso particular del Polinomio de Kauffman.

A continuación se detallan los contenidos de este trabajo. Los dos primeros capítulos son un somero repaso de los resultados conocidos que se usarán a lo largo del trabajo. En el primer capítulo se presentan algunas definiciones de los grupos de trenzas y las representaciones conocidas.

En el segundo capítulo se repasan algunas nociones sobre teoría de álgebras de von Neumann, factores, sus tipos y la integral directa de espacios de Hilbert. Estos son los ingredientes que se usan en el capítulo 3 para definir representaciones de $\mathbb{B}_n$ y parametizar una gran familia de representaciones de $\mathbb{B}_n$. Luego se analizan algunos ejemplos de representaciones conocidas que se pueden parametrizar según el Teorema 3.8 y se dan los parámetros que las describen. Asimismo, se presentan nuevas representaciones irreducibles de los grupos de trenzas. Se estudian algunos parámetros y se presentan condiciones suficientes que permiten construir más representaciones irreducibles de $\mathbb{B}_n$.

En el capítulo 4 se construyen factores de tipo I_r, $r < \infty$. Se define un álgebra de von Neumann a través de una representación de B_∞, esta resulta ser hiperfinita. También se presenta una familia de subálgebras no isomorfas de la misma que tienen conmutador relativo no trivial.

Finalmente, en el capítulo 5 se repasan algunos resultados sobre teoría de nudos y su relación con los grupos de trenzas. Como aplicación de los resultados obtenidos y usando la traza de Funar se define un invariante de links.

Agradecimientos

Es un placer para mi agradecer a mi directora Esther Galina por su constante apoyo y preocupación tanto en la preparación de este trabajo como en todo el transcurso de la carrera de doctorado. Su dedicación no sólo en lo académico sino también en lo personal fue un gran soporte para mi.

También quisiera agradecer a los profesores Aroldo Kaplan, Jorge Vargas, Nicolás Andruskiewitsch y Christian Kassel por sus valorables contribuciones y sugerencias durante distintas estancias del desarrollo de este trabajo. Asimismo quiero agradecer al tribunal de tesis formado por los profesores Esteban Andruchov, A. K. y Guido Raggio que con sus sugerencias enriquesieron este trabajo. Y a toda la comunidad de FAMAF que fue muy hospitalaria conmigo. No quiero dejar de mencionar al profesor Vaughan Jones por sus generosas sugerencias a fin de mejorar este trabajo.

Además quiero nombrar a los organismos oficiales que con su financiación han permitido que pudiera llevar a cabo este doctorado: CONICET, FaMAF, CIEM, ANPCyT-Foncyt, Secyt-UNC, Agencia Córdoba Ciencia y Ministerio de Ciencia y Tecnología (Córdoba).

Quisiera agradecer especialmente a Danley y a Camila por su infinita paciencia, comprensión y confianza que me alienta a tomar nuevos retos.

Le agradezco a toda mi familia, especialmente a mi mamá, por animarme a seguir adelante.

Finalmente gracias a mis compañeros y amigos, especialmente a Nadina y Jesús con quienes compartí momentos inolvidables.

Capítulo 1

Grupo de trenzas

1. Definiciones

Comenzaremos con la definición algebraica del grupo de trenzas $\mathbb{B}_n$ para cada entero positivo n. Estos grupos fueron introducidos por Emil Artin en 1926, [**Ar1**] y [**Ar2**].

Definición 1.1. El grupo de trenzas de n cuerdas $\mathbb{B}_n$ está generado por los elementos $\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$ sujetos a las relaciones

$$\begin{aligned} \tau_k\tau_j &= \tau_j\tau_k, & &\text{si } |k-j|>1; \\ \tau_k\tau_{k+1}\tau_k &= \tau_{k+1}\tau_k\tau_{k+1}, & &\text{si } 1 \leq k \leq n-2. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Si $n = 1$, $\mathbb{B}_1$ se define como el grupo trivial $\{1\}$. Si $n = 2$, $\mathbb{B}_2$ es el grupo cíclico infinito generado por un elemento. Mientras que si $n \geq 3$, $\mathbb{B}_n$ es un grupo infinito no abeliano.

Podemos definir una inclusión natural $\imath : \mathbb{B}_n \to \mathbb{B}_{n+1}$ por $\imath(\tau_k) = \tau_k$ si $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Bajo esta notación llamaremos $\mathbb{B}_\infty$ al grupo de trenzas en infinitos generadores o equivalentemente la unión $\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

Notemos que se puede definir un morfismo sobreyectivo de $\mathbb{B}_n$ al grupo simétrico $\mathbb{S}_n$ de la siguiente manera. Los elementos de $\mathbb{S}_n$ son pemutaciones del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. Éste grupo está generado por las transposiciones $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$, donde σ_k permuta el elemento k con $k+1$ y deja fijo los demás, y relaciones

$$\begin{aligned} \sigma_k^2 &= 1 & &\text{si } 1 \leq k \leq n-1; \\ \sigma_k\sigma_j &= \sigma_j\sigma_k, & &\text{si } |k-j|>1; \\ \sigma_k\sigma_{k+1}\sigma_k &= \sigma_{k+1}\sigma_k\sigma_{k+1}, & &\text{si } 1 \leq k \leq n-2. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Es claro que el morfismo que envía τ_k en σ_k es un epimorfismo. Su núcleo se llama el subgrupo de *Trenzas Puras* de $\mathbb{B}_n$.

A continuación daremos una definición geométrica o desde un punto de vista topológico del grupo de trenzas.

Definición 1.2. Una trenza geométrica de $n \geq 1$ cuerdas es un subconjunto b de $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ formado por n intervalos disjuntos llamados las cuerdas de b de tal manera que éstas cuerdas son homotópicas al $[0, 1]$ y b intersecta a $R^2 \times \{t\}$, para cada $t \in [0, 1]$, en exactamente n puntos.

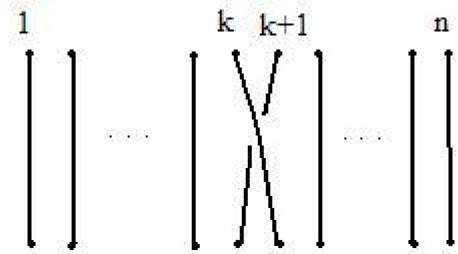

FIGURA 1. Un generador τ_k en $\mathbb{B}_n$.

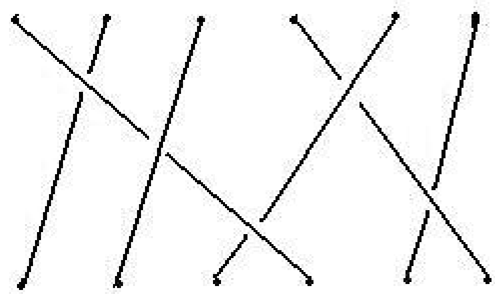

FIGURA 2. Trenza geométrica $\tau_1^{-1}\tau_4\tau_2\tau_5^{-1}\tau_3^{-1}$.

Además b conecta un punto $(j,0,0)$ con $(\sigma(j),0,0)$, donde la sucesión $(\sigma(1),\ldots,\sigma(n))$ define una permutación en $\mathbb{S}_n$ llamada la permutación subyacente a b.

En la figura 1 se puede observar el generador τ_k en $\mathbb{B}_n$. Un ejemplo de una trenza geométrica se puede observar en la figura 2. La permutación subyacente de ésta trenza es el 6-ciclo (146532).

Dos trenzas geométricas b y b' con n cuerdas son isotópicas si b puede ser deformada contínuamente en b'. Es decir si existe un mapa continuo $F: b\times[0,1]\to\mathbb{R}^2\times[0,1]$ tal que para cada $s\in[0,1]$ el mapa $F_s: b\to\mathbb{R}^2\times[0,1]$ definido por $F_s(x)=F(x,s)$ es una inmersión cuya imagen es una trenza geométrica de n cuerdas, $F_0=id_b: b\to b$, y $F_1(b)=b'$. Tanto F como la familia $\{F_s(b)\}_s$ son llamados una *isotropía* de $b=F_0(b)$ en $b'=F_1(b)$.

La relación de isotropía es una relación de equivalencia sobre las trenzas geométricas de n cuerdas. Dadas dos trenzas geométricas b_1,b_2, se define su producto b_1b_2 por el conjunto de puntos $(x,y,t)\in\mathbb{R}^2\times[0,1]$ tal que $(x,y,2t)\in b_1$ si $0\leq t\leq 1/2$ y $(x,y,2t-1)\in b_2$ si $1/2<t\leq 1$. Es claro que b_1b_2 así definida es una trenza geométrica y que si b_1,b_2 son isotópicas

a b_1', b_2' respectivamente, entonces b_1b_2 es isotópica a $b_1'b_2'$. Este producto es asociativo y tiene por elemento neutro la trenza trivial 1_n. Por lo tanto éste producto hace del conjunto de clases de equivalencia de trenzas geométricas un grupo.

Los grupos de trenzas tienen interés desde un punto de vista topológico por su conexión con la teoría de invariantes de nudos. Este tema será tratado en el capítulo 5.

2. Representaciones conocidas

En esta sección trataremos sobre las representaciones conocidas de los grupos de trenzas. Recordemos primero algunas definiciones.

Definición 1.3. Dado un grupo G, una *representación* de G en un espacio vectorial V es una función $\rho : G \to GL(V)$ que respeta el producto en G. Es decir, $\rho(g_1g_2) = \rho(g_1)\rho(g_2)$ para todo $g_1, g_2 \in G$ y $\rho(1) = 1_V$.

Si ρ es una función inyectiva, se dice que la representación es *fiel*. Si V es un espacio de Hilbert con producto interno $<,>$ entonces para cado operador lineal $T \in \mathrm{GL}(V)$, se define el adjunto o * de T al único operador que satisface que $< T(x), y >=< x, T^*(y) >$ para todo $x, y \in V$. Se dice que la representación ρ es *unitaria* si para todo $g \in G$ se satisface que $\rho(g)\rho(g)^* = 1_V$

Recordemos que un subespacio vectorial W de V se dice π-*invariante* si $\pi(g)v \in W$ para todo $g \in G$ y $v \in W$. Una representación π se dice *irreducible* si no tiene subespacios π-invariantes distintos de 0 y V.

Si V es un espacio de Hilbert, es decir un espacio vectorial munido de una forma Hermitiana no negativa $<,>$ tal que $\mathcal{H}$ es completo con la norma definida por esa forma, diremos que la representación es irreducible si los únicos subespacios π-invariantes **cerrados** son 0 y V.

2.1. Representación de Burau. Fue definida por Burau en 1936 [**Bu**] y por mucho tiempo se creyó que era una representación fiel de $\mathbb{B}_n$ ya que lo es para $n = 2, 3$. Moody probó que no es fiel para $n \geq 10$ [**M**] (1993). Más tarde Long y Paton probaron que no lo es para $n \geq 6$ [**LP**] (1993). Mientras que para $n = 5$ lo probó Bigelow [**Bi1**](1999) y finalmente para $n = 4$ no se sabe aún.

La definición de la representación es la siguiente, para cada número complejo t no nulo, consideremos las matrices $n \times n$,

$$S(t)(\tau_k) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & 1-t & 1 & & \\ & & & & t & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

donde $1-t$ está en el lugar (k,k), y el resto de las entradas no especificadas son 0. Observe que si $t=1$, se obtiene la representación de S_n en el espacio de matrices diagonales por permutación de los índices. De esta manera queda determinada una familia de representaciones parametizadas por t.

Esta representación no es irreducible. En efecto, si t no es raíz del polinomio $f_n(z) = z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1$, $\mathbb{C}^n$ se descompone como suma de dos subespacios invariantes: $W_1 =$ el subespacio vectorial generado por el vector $v = (1, t, t^2, \ldots, t^{n-1})$ y $W_2 =$ el hiperplano definido por la ecuación $v_1 + v_2 + \cdots + v_n = 0$.

La representación restringida a W_2 se llama representación de Burau y tiene la siguiente forma

$$\beta(t)(\tau_1) = \begin{pmatrix} -t & 1 & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

$$\beta(t)(\tau_k) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & \\ & & & & 1 & 0 & 0 & & \\ & & & & t & -t & 1 & & \\ & & & & 0 & 0 & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad si \;\; 2 \leq k \leq n-2,$$

donde $-t$ está en el lugar (k, k)

$$\beta(t)(\tau_{n-1}) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & & t & -t \end{pmatrix}$$

Formanek probó que ésta representación y una “extendida de ella”son las únicas representaciones irreducibles no triviales de $\mathbb{B}_n$ de dimensión menor que n [**F**]. Específicamente para $n \geq 7$ el resultado es el siguiente,

Teorema 1.4 (Teorema 22, [**F**]). *Sea $\rho : \mathbb{B}_n \to GL_r(\mathbb{C})$ una representación irreducible, donde $n \geq 7$ y $2 \leq r \leq n-1$. Entonces ρ es de Tipo Burau.*

Una representación se dice de tipo Burau si es la representación de Burau o una “extendida”de ella que definiremos a continuación. Sea t una raíz del polinomio $f_{n+1}(z) = z^n + z^{n-1} + \cdots + z + 1$, donde $n \geq 3$ y sea $\beta(t) : \mathbb{B}_n \to GL_{n-1}(\mathbb{C})$ la representación de Burau. Llamaremos la extensión de $\beta(t)$ a la representación irreducible $\widehat{\beta}(t) : \mathbb{B}_{n+1} \to GL_{n-1}(\mathbb{C})$ definida por

$$\widehat{\beta}(t)(\tau_k) = \beta(t)(\tau_k), \quad (k = 1, \ldots, n-1) \text{ y } \widehat{\beta}(t)(\tau_n) = id - PQ$$

donde

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

$$Q = (-1)^{n-2}t(1, -(1+t), 1+t+t^2, \ldots, (-1)^{n-2}(1+t+\cdots+t^{n-2})).$$

2.2. Representación Estandar. Ésta representación aparece por primera vez en un trabajo de Dian-Min Tong, Shan-De Yang y Zhong-Qi Ma [TYQ]. Sysoeva [S] probó que es la única representación irreducible de $\mathbb{B}_n$ de dimensión n, si $n \geq 9$. Se define de la siguiente manera, $\rho(t) : \mathbb{B}_n \to GL_n(\mathbb{C})$, para cada $k = 1, \ldots, n-1$

$$\rho(t)(\tau_k) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 0 & t & & \\ & & & 1 & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

donde t está ubicado en el lugar $(k, k+1)$.

2.3. Representación de Lawrence-Krammer-Bigelow. Estas representaciones fueron definidas por Lawrence en 1990 via cubrimientos infinitos del espacio de configuración de pares de puntos en el disco perforado. Más tarde, entre 2001 y 2002, Bigelow y Krammer probaron independientemente que esta representación es fiel para $n \geq 6$, [**Bi2**], [**K**]. En éste trabajo presentaremos la forma matricial de la representación dada por Krammer.

Sea V un $\mathbb{C}$ espacio vectorial de dimensión $\frac{n(n-1)}{2}$ cuya base está formada por los elementos de la forma $v_{i,j}$ con $1 \leq i < j \leq n$. Definimos la función $\varrho : \mathbb{B}_n \to GL(V)$ por

$$\varrho(\tau_k)(v_{i,j}) = \begin{cases} v_{i,j} & k < i-1 \text{ ó } j < k; \\ v_{i-1,j} + (1-q)v_{i,j} & k = i-1; \\ tq(q-1)v_{i,i+1} + qv_{i+1,j} & k-i < j-1; \\ tq^2 v_{i,j} & k = i = j-1; \\ v_{i,j} + tq^{k-1}(q-1)^2 v_{k,k+1} & i < k < j-1; \\ v_{i,j-1} + tq^{j-1}(q-1)v_{j-1,j} & i < k = j-1; \\ (1-q)v_{i,j} + qv_{i,j} + 1 & k = j. \end{cases}$$

2.4. Representaciones Locales. Sean V un espacio vectorial y $c : V \otimes V \to V \otimes V$ un operador lineal invertible, se dice que c satisface la ecuación de Yang Baxter o de trenzas si satisface la siguiente igualdad en $V \otimes V \otimes V = V^{\otimes 3}$,

$$(c \otimes 1)(1 \otimes c)(c \otimes 1) = (1 \otimes c)(c \otimes 1)(1 \otimes c)$$

En éste caso se dice que (V, c) es un espacio vectorial trenzado. A partir de este espacio se puede definir una representación de $\mathbb{B}_n$ de la siguiente manera. Sea $\rho(c) : \mathbb{B}_n \to GL(V^{\otimes n})$, para cada $k = 1, \dots, n-1$ se define $\rho(c)(\tau_k) : V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}$ por el operador $\rho(c)(\tau_k) = 1_{k-1} \otimes c \otimes 1_{n-k-1}$, donde $1_k = 1 \otimes \cdots \otimes 1$, es el producto tensorial de la identidad k veces; ésta representación se llama *local*.

Una forma sistemática de encontrar soluciones de la ecuación de trenzas fue obtenido por Drinfeld a partir de Módulos de Yetter Drinfeld de álgebras de Hopf punteadas (ver por ejemplo [**D**]).

Si el algebra de Hopf es el álgebra de un grupo abeliano, entonces las trenzas asociadas son de tipo *diagonal* es decir, existe una base de $\beta = \{v_1, \dots, v_m\}$ de V (el módulo de Yetter Drinfield) tal que $c(v_i \otimes v_j) = q_{ij} v_j \otimes v_i$ para todo $i, j = 1, \dots m$ donde los q_{ij} son números complejos no nulos.

Por lo tanto

$$\rho(c)(\tau_k)(v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_n}) = q_{i_k, i_{k+1}} v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_{k+1}} \otimes v_{i_k} \otimes \cdots \otimes v_{i_n}.$$

Otro ejemplo de representación local es la siguiente ([**AS**]). Sea G un grupo cualquiera y $T \subset G$ tal que para todo $g \in G$ y $t \in T$, $gtg^{-1} \in T$. O sea T es unión de clases de conjugación de G. Sea $\gamma : G \times T \to \mathbb{C} - \{0\}$ una función tal que para todo $g, h \in G$, and $t \in T$

I. $\gamma(1, t) = 1$.
II. $\gamma(gh, t) = \gamma(g, hth^{-1})\gamma(h, t)$.

Sea V el espacio vectorial complejo con base ortogonal $\{v_t : t \in T\}$ y sea c definida por $c_\gamma(v_s \otimes v_t) = \gamma(s, t) v_{sts^{-1}} \otimes v_s$. Las condiciones impuestas a γ aseguran que c_γ verifica la ecuación de trenzas.

Luego

$$\rho(c_\gamma)(\tau_k)(v_{t_1} \otimes \cdots \otimes v_{t_n}) = \gamma(t_k, t_{k+1}) v_{t_1} \otimes \dots v_{t_{k-1}} \otimes v_{t_k t_{k+1} t_k^{-1}} \otimes v_{t_k} \otimes \cdots \otimes v_{t_n}.$$

2.5. Representaciones de álgebras de Hecke. Las álgebras de Hecke (o de Iwahori-Hecke) se definen por generadores y relaciones de la siguiente manera. Sea q un número complejo no nulo, sea $H_n(q)$ el álgebra asociativa sobre $\mathbb{C}$ generada por $n-1$ elementos $e_1, \dots, e_{n-1}$ con las relaciones

$$\begin{array}{ll} e_i e_j = e_j e_i & |i-j| > 1; \\ e_i e_{i+1} e_i = e_{i+1} e_i e_{i+1} & i = 1, \dots, n-2; \\ e_i^2 = (q-1)e_i + q & i = 1, \dots, n-1. \end{array} \tag{1.3}$$

Note que esta álgebra es un cociente del álgebra del grupo de trenzas, luego existe un morfismo del álgebra del grupo $\mathbb{B}_n$ en $H_n(q)$. Por lo tanto toda representación del álgebra de Hecke se extiende a una representación del grupo de trenzas componiendo con ese morfismo.

2.6. Álgebras de Temperley-Lieb. Estas álgebras estan muy relacionadas con las álgebras de Hecke. Fueron introducidas en un trabajo de Temperley y Lieb [**TL**] en 1971 y posteriormente Jones las definió explícitamente en [**J1**] en 1983. Para cada complejo no nulo a, consideremos el álgebra $A_n(a)$ generada por los elementos $f_1, \dots, f_{n-1}$ sujetos a las relaciones

$$\begin{array}{ll} e_ie_j = e_je_i & |i-j| > 1; \\ e_ie_je_i = e_j & |i-j| = 1; \\ e_i^2 = ae_i & i = 1, \dots, n-1. \end{array} \tag{1.4}$$

Dados a, q complejos no nulos tales que $a^2 = \frac{(q+1)^2}{q}$, podemos definir un epimorfismo Ψ entre el álgebra de Hecke $H_n(q)$ y el álgebra de Temperley Lieb $A_n(a)$ por

$$\Psi(e_i) = \frac{q+1}{a} f_i - 1$$

Resulta que para $n = 2$, Ψ es un isomorfismo. Mientras que si $n \geq 3$, el núcleo de Ψ es el ideal bilátero de $H_n(q)$ generado por $1 + e_1 + e_2 + e_1e_2 + e_2e_1 + e_1e_2e_1$, una prueba de este resultado puede encontrarse en [**KT**], pag. 226, Teorema 5.29.

El morfismo Ψ nos permite extender las representaciones del álgebra $A_n(q)$ a representaciones del grupo de trenzas $\mathbb{B}_n$.

Observación 1.5. Las definiciones presentadas en este capítulo fueron extraídas principalmente de los libros [**KT**] y [**Ma**].

Capítulo 2

Álgebras de von Neumann

1. Definición de álgebra de von Neumann

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, es decir un espacio vectorial munido de una forma Hermitiana no negativa $<,>$ tal que $\mathcal{H}$ es completo con la norma definida por esa forma.

Consideremos el espacio de operadores lineales acotados sobre $\mathcal{H}$ y lo denotemos por $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Este espacio es un álgebra de Banach (es decir es un álgebra compleja normada tal que $\|T_1T_2\| \leq \|T_1\|\|T_2\|$) con la norma definida por

$$\|T\| = \sup\left\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \in \mathcal{H}, x \neq 0\right\} = \sup\{\|T(x)\| : x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1\}.$$

A $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ le podemos asignar distintas topologías, repasemos algunas de ellas.

Definición 2.1. **Topología de la norma o uniforme.** Es la topología dada por la norma de operadores acotados $\|\cdot\|$ definida antes. Una base de entornos para esta topología está formada por los conjuntos de la siguiente forma,

$$N(T_0, \varepsilon) = \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \|T - T_0\| < \varepsilon\}$$

donde T_0 es un operador acotado de $\mathcal{H}$ y ε es un número real positivo.

Definición 2.2. **Topología Fuerte.** Es la topología dada por la convergencia puntual. Una sucesión de operadores acotados $\{T_n\}$ converge puntualmente a un operador acotado T si para cada $x \in \mathcal{H}$ la sucesión $\{T_n(x)\}$ converge a $T(x)$ en $\mathcal{H}$.

Una base de entornos para esta topología está dada por los siguientes conjuntos

$$N(T_0, x_1, \ldots, x_r, \varepsilon) = \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \|(T - T_0)(x_i)\| < \varepsilon, \quad \forall i = 1, \ldots, r\}$$

donde $T_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $x_i \in \mathcal{H}$ y ε es un número real positivo.

Definición 2.3. **Topología Débil.** Es la topología dada por la convergencia débil. Una sucesión de operadores acotados $\{T_n\}$ converge débilmente a un operador acotado T si para cada $x, y \in \mathcal{H}$ la sucesión $\{< T_n(x), y >\}$ converge a $< T(x), y >$ en $\mathcal{H}$.

Una base de entornos para esta topología está dada por los siguientes conjuntos

$$N(T_0, x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s, \varepsilon) = \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : | < (T - T_0)(x_i), y_j > | < \varepsilon, \quad \forall i = 1, \ldots, r; \quad \forall j = 1 \ldots, s\}$$

donde $T_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $x_i, y_j \in \mathcal{H}$ y ε es un número real positivo.

Es claro que la topología débil contiene menos abiertos que la topología fuerte. Y ésta a su vez contiene menos abiertos que la topología de la norma.

Dado $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, se define por el adjunto o * de T al único operador que satisface que $< T(x), y >=< x, T^*(y) >$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$. Diremos que M es una *-subálgebra o subálgebra autoadjunta de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ si es una subálgebra de Banach cerrada por *, o sea $T^* \in M$ para todo $T \in M$. Diremos que M actúa en $\mathcal{H}$ si $M \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Definición 2.4. Sea $\mathcal{H}$ un espacio Hilbert. Una *-subálgebra M de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ débilmente cerrada y tal que contiene la identidad de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, se dice *álgebra de von Neumann.*

Analicemos algunos ejemplos de álgebras de von Neumann.

Ejemplo 2.5. Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, entonces claramente $M = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una álgebra de von Neumann.

En el caso particular de $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$, $M = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es el álgebra de matrices $n \times n$ que denotaremos por $M(n)$ ó por $M_n(\mathbb{C})$. En ese caso M tiene dimensión finita (como espacio vectorial), pero si observamos que $\mathbb{C}^n = l^2(\{1, 2, \ldots, n\})$, podemos considerar también el caso $n = \infty$, obteniendo así el álgebra de dimensión infinita $M = \mathcal{B}(l^2(\mathbb{N}))$.

Ejemplo 2.6. Una forma de construir ejemplos de álgebras de von Neumann es a través de la suma directa y el producto tensorial.

Sean M_1, M_2 álgebras de von Neumann actuando sobre los espacios de Hilbert $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ respectivamente. Definimos el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ como la clausura de la suma algebraica, donde la clausura la tomamos respecto del producto interno

$$< x_1 + x_2, y_1 + y_2 >=< x_1, y_1 >_1 + < x_2, y_2 >_2 \tag{2.1}$$

Si los espacios de Hilbert tienen dimensión finita, es claro que la clausura coincide con el espacio algebraico. $M = M_1 \oplus M_2$ es la clausura débil de la suma algebraica de operadores y actúa en el espacio $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ por $(T_1 + T_2)(x + y) = T_1(x) + T_2(x)$.

El espacio de Hilbert $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ se define como la clausura del producto tensorial algebraico respecto del producto interno dado por $< x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2 >=< x_1, y_1 >_1 < x_2, y_2 >_2$. El álgebra $M = M_1 \otimes M_2$ se define como la clausura débil del anillo $M_1 \otimes_{alg} M_2$ y la acción en $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ está dada por la siguiente fórmula en los generadores

$$(T_1 \otimes T_2)(x_1 \otimes x_2) = T_1(x_1) \otimes T_2(x_2).$$

Para construir los ejemplos que usaremos más adelante necesitamos el siguiente concepto. Sea M una subálgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, llamaremos *conmutador* de M al conjunto

$$M' = \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : ST = TS \quad \forall S \in M\}.$$

Von Neumann mostró la siguiente conexión entre el conmutador y la topología de una *-álgebra.

Teorema 2.7. *Sea M una *-subálgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ con la identidad de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, entonces la clausura débil de M es igual al doble conmutador $M'' = (M')'$.*

Demostración. Como los conmutadores son cerrados para la topología débil, $\overline{M} \subset M''$.

Sea $T \in M''$ y V un entorno débil de T, queremos encontrar un elemento S de M en V. Como la topología débil contiene menos abiertos que la topología fuerte, es suficiente encontrar $S \in M$ en un entorno fuerte de T. Sea $N(T, y_1, \ldots, y_r, \varepsilon)$ tal entorno.

Consideremos el espacio $\mathcal{K} = \oplus_{i=1}^{r} \mathcal{H}$, entonces $y = (y_1, \ldots, y_r) \in \mathcal{K}$. Podemos pensar a M actuando en $\mathcal{K}$ por $T_1(x) = (T_1(x_1), \ldots, T_1(x_r))$. O sea, $M \subset M_r(\mathcal{B}(\mathcal{K}))$ con la inclusión $T_1 \to T_1 1_{\mathcal{K}}$.

Sea $\widetilde{M} = \{T_1 1_{\mathcal{K}} : T_1 \in M\}$, es una subálgebra autoadjunta de $M_r(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ pues M lo es.

Para $y = (y_1, \ldots, y_r) \in \mathcal{K}$, consideremos la proyección P_y de $\mathcal{K}$ en la clausura débil de $\widetilde{M}y$. Ya que M es una álgebra, $\widetilde{M}y$ es invariante por la acción de $\widetilde{M}$. Además como $\widetilde{M}$ es autoadjunta, P_y conmuta con $\widetilde{M}$. O sea, $P_y \in \widetilde{M}'$. Luego $T1_{\mathcal{K}}$ conmuta con P_y. Entonces $T\overline{\widetilde{M}y} \subset \overline{\widetilde{M}y}$.

Como $1_{\mathcal{H}} \in M$, $Ty = (T(y_1), \ldots, T(y_r)) \in \overline{\widetilde{M}y}$. Es decir, existe $S \in M$ tal que $\|S(y_i) - T(y_i)\| < \varepsilon$ para todo $i = 1, \ldots, r$. $\square$

El teorema anterior motiva la siguiente definición.

Definición 2.8. Dado un conjunto $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, el *álgebra de von Neumann generada por* A es $(A \cup A^*)''$, donde $A^* = \{T^* : T \in A\}$.

Las álgebras de von Neumann que consideraremos en los próximos capítulos serán justamente las álgebras de von Neumann generadas por los operadores asociados a una representación particular del grupo de trenzas $\mathbb{B}_n$. Es decir definiremos una familia particular de representaciones ϕ de $\mathbb{B}_n$ y consideraremos el álgebra de von Neumann generada por el conjunto $\phi(\mathbb{B}_n)$.

Ejemplo 2.9. Sea (X, μ) un espacio de medida finita, el espacio $A = L^\infty(X, \mu)$ es un álgebra de von Neumann vista como subálgebra autoadjunta del espacio de Hilbert $L^2(X, \mu)$. La identificación es la siguiente, a cada $f \in L^\infty(X, \mu)$ se le asigna el operador M_f multiplicación por la función f. Es decir, para cada $g \in L^2(X, \mu)$, $M_f(g) = fg$.

Esta álgebra es abeliana, más aún es abeliana maximal, de ahí se deduce trivialmente que A es álgebra de von Neumann. Probemos la inclusión no trivial $A' \subset A$. Sea $T \in A'$ y definimos $f := T(1)$. Es claro que $f \in L^\infty(X,\mu)$. Veamos que $T = M_f$. Sea $g \in L^\infty(X,\mu) \subset L^2(X,\mu)$ (la inclusión vale pues $\mu(X) < \infty$), entonces

$$T(g) = TM_g(1) = M_gT(1) = M_g(f) = gf = fg = M_f(g)$$

O sea, T y M_f coinciden en $L^\infty(X,\mu)$ que es denso en $L^2(X,\mu)$, luego $T = M_f$ y $A = A'$.

EJEMPLO 2.10. Sea G un grupo discreto. Se define el espacio $l^2(G) = \{f : G \to \mathbb{C} : \sum_{x \in G} |f(x)|^2 < \infty\}$. Es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$< f, g >= \sum_{x \in G} f(x)\overline{g(x)} \tag{2.2}$$

Una base ortonormal de $l^2(G)$ es $\{\delta_g : g \in G\}$, donde

$$\delta_g(h) = \begin{cases} 1 & g = h, \\ 0 & g \neq h. \end{cases}$$

Cualquiera sea $f \in l^2(G)$, tenemos que

$$f = \sum_{g \in G} f(g)\delta_g.$$

Para cada $g \in G$, definimos el operador unitario u_g de $l^2(G)$ por $u_g(f)(g') = f(g^{-1}g')$. La aplicación

$$\begin{aligned} L: \ & G \to \mathcal{B}(l^2(G)) \\ & g \mapsto u_g \end{aligned}$$

es una representación unitaria de G llamada *representación regular a izquierda* de G.

Los u_g generan el álgebra de grupo $\mathbb{C}G$. Esto motiva que llamemos *álgebra de von Neumann de grupo* al álgebra de von Neumann generada por esta representación.

Un operador u se dice *unitario* si $u^*u = 1_{\mathcal{H}_1}$ y $uu^* = 1_{\mathcal{H}_2}$.

Dos álgebras de von Neumann M_1 y M_2 actuando en espacios de Hilbert $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ respectivamente, se dicen *isomorfas* si existe un operador unitario $u : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ tal que $uM_1u^* = M_2$.

2. Factores y sus tipos

Un álgebra de von Neumann se dice *factor* si su centro es $\mathbb{C}1_{\mathcal{H}}$. Von Neumann probó que toda álgebra de von Neumann se descompone en una *integral directa* de factores de von Neumann, [**vN**]. De aquí la importancia de estudiarlos. A continuación repasaremos la clasificación de los distintos tipos de factores dada por Murray y von Neumann [**MvN**].

En el estudio de las álgebras de von Neumann juegan un rol muy importante las proyecciones. Una proyección P es un operador del álgebra M tal que $P^* = P = P^2$. Denotaremos por M_P al subconjunto de M formado por todas sus proyecciones. En este conjunto podemos definir un orden parcial,

$$P \leq Q \text{ si } \mathrm{Im}(P) \subseteq \mathrm{Im}(Q).$$

DEFINICIÓN 2.11. Sea M un álgebra de von Neumann. Una proyección $P \in M$ se dice *minimal* si no existe otra proyección menor no nula. O sea, si Q es una proyección no nula en M tal que $Q \leq P$, entonces $Q = P$.

DEFINICIÓN 2.12. Un factor se dice *factor de Tipo I* si contiene una proyección minimal.

Queremos establecer la forma que tiene un factor de tipo I para ello necesitamos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.13. Sea M un álgebra de von Neumann. Un *sistema de unidades matriciales (s.u.m.)* de tamaño n es una familia de operadores ($n \leq \infty$) tal que

I. $e_{i,j}^* = e_{j,i}$,

II. $e_{i,j}e_{k,l} = \delta_{j,k}e_{i,l} = \begin{cases} e_{i,l} & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$,

III. $\sum_i e_{i,i} = 1_{\mathcal{H}}$.

Recordemos que un operador u en un espacio de Hilbert se dice *isometría* si $u^*u = 1_{\mathcal{H}}$ y se dice *isometría parcial* si u^*u es una proyección. Dadas dos proyecciones P y Q en un álgebra de von Neumann siempre existe una isometría parcial u tal que $uu^* \leq P$ y $u^*u \leq Q$. Esta afirmación no es difícil de probar pero se necesita profundizar en la estructura del lattice de proyecciones de M, ver por ejemplo [**J3**].

TEOREMA 2.14. *Sea M un factor de tipo I actuando sobre $\mathcal{H}$, un espacio de Hilbert separable, entonces existe un entero no negativo r (puede ser $r = \infty$), una proyección minimal P y un operador unitario $v : \mathcal{H} \to l^2(\{1, 2, \ldots, r\})$ tal que $vMv^* = \mathcal{B}(l^2(\{1, 2, \ldots, r\})) \otimes PMP$.*

DEMOSTRACIÓN. Probaremos esto en dos pasos. El primer paso será crear un s.u.m que genera M. Y el segundo paso será mostrar que el álgebra de von Neumann generada por el s.u.m. es isomorfa a $\mathcal{B}(l^2(\{1, \ldots, r\})) \otimes PMP$, para alguna proyección P adecuada.

Sea $\{P_1, P_2, \ldots, P_r\}$ una familia maximal de proyecciones minimales ortogonales (r puede ser ∞). Para cada par $i < j = 1, \ldots, r$, se puede encontrar una isometría parcial $e_{i,j}$ tal que $e_{i,j}e_{i,j}^* \leq P_i$ y $e_{i,j}^*e_{i,j} \leq P_j$. Pero por minimalidad de P_i y P_j vale la igualdad. Definimos $e_{j,i} = e_{i,j}^*$ y $e_{i,i} = P_i$. Un cálculo directo muestra que la familia $\{e_{i,j} : i, j = 1, 2, \ldots, r\}$ es un s.u.m. Falta ver que generan todo M, pero esto se deduce del hecho que toda álgebra de von Neumann está generada por sus proyecciones. Para ver que M está generada por sus proyecciones es suficiente probarlo para los $T \in M$ autoadjuntos, pues si T no es autoadjunto, es combinación lineal de dos operadores autoadjuntos ($T = \frac{T+T^*}{2} + i\frac{T-T^*}{2i}$). Entonces, sea $T \in M$ autoadjunto, las proyecciones espectrales de T son límites fuertes de polinomios en T, luego están en M y T es combinación lineal de sus proyecciones espectrales. Luego M está generado por sus proyecciones espectrales.

Veamos ahora el segundo paso. Notemos que $e_{i,1}$ envía $\mathrm{Im}(P_1)$ en $\mathrm{Im}(P_i)$. Queremos definir una aplicación v de $l^2(\{1,2,\ldots,r\}) \otimes P_1\mathcal{H} = \bigoplus_{i=1}^r P_1\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}$. Sea $v(\sum_{i=1}^r x_i) = \sum_{i=1}^r e_{i,1}(x_i)$. Es claro que v es unitario y $v^* e_{1,i} v$ es uma matriz en $\mathcal{B}(l^2(\{1,2,\ldots,r\}) \otimes P_1\mathcal{H})$ con el operador identidad en el lugar $(1,i)$ y ceros en el resto. El álgebra generada por estas matrices es $\mathcal{B}(l^2(\{1,2,\ldots,r\})) \otimes 1$ en $l^2(\{1,2,\ldots,r\}) \otimes P_1\mathcal{H}$. Así obtenemos el resultado buscado. $\square$

Definición 2.15. Un factor M de tipo I se dice de *tipo* I_r si M es isomorfa a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ con $\dim(\mathcal{H}) = r$.

De este teorema y algunas propiedades elementales de la familia de proyecciones en M se deduce que si M es un álgebra de von Neumann de dimensión finita (dimensión como espacio vectorial) entonces es isomorfa a una suma directa de álgebras de matrices. Es decir

$$M = \bigoplus_{i=1}^{s} M_{r_i}(\mathcal{H}_i) \tag{2.3}$$

Sea N una subálgebra de M, es decir N es un álgebra de von Neumann tal que $N \subset M$ y la identidad de N es la misma que la identidad de M. Si N es un factor, diremos que N es un *subfactor* de M.

Si M es un álgebra de von Neumann actuando en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y P es una proyección en M, entonces PMP y $M'P$ son álgebras de von Neumann actuando en $P\mathcal{H}$.

Si M es un factor de tipo I_r, entonces los únicos subfactores N de M son de tipo I_s con s un divisor de r. Además están determinados de manera única por una proyección minimal P de N tal que PMP es un factor de tipo k y $s.k = r$. Es decir M es el álgebra de matrices $r \times r$ y N es el álgebra de matrices $s \times s$ actuando en la diagonal k veces.

$$M = \left.\begin{bmatrix} N & & & \\ & N & & \\ & & \ddots & \\ & & & N \end{bmatrix}\right\} k \text{ veces}$$

En esta situación podemos introducir la siguiente definición.

Definición 2.16. Si $N \subset M$ son factores de tipo I, se define el *índice* de N en M y se denota por $[M : N]$, al rango de M visto como N-módulo libre.

Si M y N son álgebras de von Neumann de dimensión finita tal que $N \subset M$ entonces

$$N = \bigoplus_{j=1}^{s} M_{l_j}(\mathcal{H}_j) \subset \bigoplus_{i=1}^{r} M_{m_i}(\mathcal{H}_i)$$

A esta inclusión le podemos asociar una matriz, la llamaremos *matriz de la inclusión* $N \subset M$. La matriz tiene tamaño $s \times r$ y el elemento (j, i) es el número de veces que el subfactor $M_{l_j}(\mathcal{H}_j)$ actúa en el factor $M_{m_i}(\mathcal{H}_i)$. Estos datos también pueden representarse en un grafo bipartito, llamado el *diagrama de Bratteli* de la inclusión $N \subset M$. Este grafo consta de dos filas, la primera tiene tantos vértices como sumandos tiene N, es decir s y la segunda fila corresponde a los sumandos de M, r vértices. Un vértice correspondiente a N está conectado con un vértice correspondiente a M si el subfactor de N asociado a ese vértice actúa en el factor asociado al vértice de M. Veamos un ejemplo, $M = M_5(\mathbb{C}) \oplus M_3(\mathbb{C}) \oplus M_1(\mathbb{C})$ y $N = M_2(\mathbb{C}) \oplus M_1(\mathbb{C})$, actuando en M de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} M_2(\mathbb{C}) & 0 & 0 \\ 0 & M_2(\mathbb{C}) & 0 \\ 0 & 0 & M_1(\mathbb{C}) \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} M_1(\mathbb{C}) & 0 & 0 \\ 0 & M_1(\mathbb{C}) & 0 \\ 0 & 0 & M_1(\mathbb{C}) \end{bmatrix} \oplus M_1(\mathbb{C})$$

Entonces la matriz de la inclusión es

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Y el diagrama de Bratteli es

$$\begin{array}{rl} N = & \bullet \quad \bullet \\ & \| \diagup ||| \diagdown \\ M = & \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array}$$

Queremos analizar ahora los factores de tipo II y III. Comenzaremos definiendo un orden total.

Definición 2.17. Sean P y Q proyecciones en un álgebra de von Neumann M, se dice que $P \preceq Q$ si existe una isometría parcial $u \in M$ tal que $uu^* = P$ y $u^*u \leq Q$.

Diremos que P y Q son equivalentes, denotamos $P \approx Q$, si existe una isometría parcial $u \in M$ tal que $uu^* = P$ y $u^*u = Q$.

Definición 2.18. Una proyección P de un álgebra de von Neumann M se dice *infinita* si existe una proyección $Q \in M$ tal que $P \approx Q$, $Q < P$ y $Q \neq P$. De lo contrario P se dice *finita*.

Definición 2.19. Un álgebra de von Neumann se dice *finita* si su identidad es una proyección finita. Se dice *infinita* si su identidad es infinita. Y se dice *puramente infinita* si no tiene proyecciones finitas distintas de la proyección nula.

Si M es un factor de tipo I_n entonces es finito si y sólamente si n es finito. Por lo tanto $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ con $\mathcal{H}$ de dimensión infinita, es un factor infinito.

Definición 2.20. Sea M un álgebra de von Neumann, un funcional lineal de M, $tr : M \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, se dice *traza* si para todo $T, S \in M$, $tr(TS) = tr(ST)$ y tr es positivo, es decir $tr(T^*T) \geq 0$ para todo $T \in M$. Se dice *normalizada* si $tr(1_{\mathcal{H}}) = 1$. Y se dice *fiel* si $tr(T^*T) = 0$ implica que $T = 0$.

Definición 2.21. Una factor se dice de *tipo II* si es de dimensión infinita y posee una traza.

El álgebra de von Neumann de un grupo discreto infinito G, es decir el álgebra de von Neumann generada por la representación regular de G en $\mathcal{B}(L^2(G))$, es un factor de tipo II. La traza se define por

$$tr(\sum_{g \in G} c_g \delta_g) = c_1.$$

Más aún $tr(1) = 1 < \infty$, entonces es de tipo II_1.

El grupo de trenzas $\mathbb{B}_n$ es un grupo discreto infinito, daremos ejemplos de representaciones de $\mathbb{B}_n$ cuya álgebra de von Neumann asociada es de tipo I ó II.

Definición 2.22. Un factor de tipo II se dice de *tipo* II_1 si $tr(1) < \infty$. Y se dice de *tipo* II_∞ si $tr(1) = \infty$. Finalmente, un factor se dice de *tipo* III si es puramente infinito.

Los factores de tipo III están clasificados según un parámetro $\lambda \in [0, 1]$, pero no nos ocuparemos de dicha clasificación en este trabajo.

Estudiando los ideales de un álgebra de von Neumann se puede probar el siguiente resultado, ver por ejemplo [**J2**] corolario 7.1.13.

Proposición 2.23. *Toda traza no nula de un factor de tipo* II_1 *es fiel.*

Además en un factor M de tipo II_1, la traza es **única** y establece un isomorfismo de conjuntos ordenados entre el conjunto de clases de equivalencia de proyecciones de M y el intervalo $[0, tr(1)]$. O sea que proyecciones equivalentes en M tienen igual traza y si P y Q son dos proyecciones tales que $P \preceq Q$ entonces $tr(P) \leq tr(Q)$.

Para finalizar esta sección consideraremos una clase especial de álgebras de von Neumann que se obtienen como *límite* de subálgebras.

Definición 2.24. Un álgebra de von Neumann M se dice *hiperfinita* si existe una sucesión creciente de subálgebras de von Neumann de dimensión finita de M, $\{A_n\}_n$, cuya unión es débilmente densa en M.

Es claro que el factor I_∞ es un álgebra hiperfinita. En efecto, es la clausura débil de la sucesión de álgebras de matrices $A_n = M_n(\mathbb{C})$. Murray y von Neumann probaron que hay un único factor hiperfinito de tipo II_1, [**MvN**], se lo suele denotar por R. Connes probó que hay un único factor hiperfinito de tipo II_∞ y de tipo III_λ con $0 < \lambda < 1$, [**Co**], mientras que de tipo III_0 hay muchos. Por último Haagerup probó la unicidad del factor hiperfinito de tipo III_1, [**Haa**].

Observación 2.25. Los resultados y definiciones presentados en las últimas dos secciones fueron extraídos principalmente de [**J3**]. Para las definiciones de traza y de los diferentes tipos de factores se utilizó [**T**]. También pueden consultarse [**KR**], [**J2**] y [**JS**].

3. Integral directa de espacios de Hilbert

En esta sección estudiaremos un espacio de Hilbert particular en el cual actuarán las representaciones de los grupos de trenzas que definiremos en el próximo capítulo.

Definición 2.26. Sea X un conjunto. Una σ-álgebra de subconjuntos para X es un subconjunto de $\mathcal{P}(X)$ cerrado por complementos, intersecciones y uniones arbitrarias.

El par (X, μ) es un espacio de medida si X es un conjunto munido de una σ-álgebra de subconjuntos sobre la cual está definida una función real valuada μ, no negativa y completamente aditiva llamada medida.

Definición 2.27. Sea (X, μ) un espacio de medida. Sea $\{\mathcal{H}_x\}_{x\in X}$ una familia de espacios de Hilbert separables indexada por los elementos de X. La *integral directa de la familia de espacios de Hilbert* $\{\mathcal{H}_x\}$, denotada por $\mathcal{H} = \int_X^\oplus \mathcal{H}_x d\mu(x)$, es el espacio de Hilbert dado por el conjunto de funciones vectoriales medibles $f : X \to \bigcup_{x\in X} \mathcal{H}_x$ tales que $f(x) \in \mathcal{H}_x$ para casi todo $x \in X$ y $\int_X \|f(x)\|^2 d\mu < \infty$, y las siguientes operaciones:

Suma: $f + g : X \to \bigcup_{x\in X} \mathcal{H}_x$, definida por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

Producto por escalar: $\lambda f : X \to \bigcup_{x\in X} \mathcal{H}_x$ dada por $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

Producto interno: $< f, g >= \int_X < f(x), g(x) > d\mu(x)$.

Notemos que dada una colección de elementos $u_x \in \mathcal{H}_x$ tales que $x \to < u_x, f(x) >$ es μ-integrable para todo $f \in \mathcal{H}$, entonces existe $u \in \mathcal{H}$ tal que $u(x) = u_x$ para casi todo $x \in X$.

Analicemos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.28. Si $X = \mathbb{N}$ y la medida es aquella que asigna a cada conjunto su cantidad de elementos, la integral directa es sólo la suma directa de espacios de Hilbert de la familia $\{\mathcal{H}_n\}$. En efecto, recordemos que la suma directa de espacios de Hilbert es la completación de la suma directa de los espacios vectoriales subyacentes, es decir que un elemento $f \in \bigoplus \mathcal{H}_n$ es de la forma $f = \sum f_n$ con $f_n \in \mathcal{H}_n$ para todo n, y donde $\sum ||f_n||^2 < \infty$. Además, si $g \in \mathcal{H}$

$$< f, g >= \sum < f(n), g(n) >$$

por definición del producto interno en $\bigoplus \mathcal{H}_n$, pero el lado derecho de la igualdad es justamente la integral $\int_{\mathbb{N}} < f(n), g(n) > d\mu(x)$ respecto de la medida antes mencionada.

Ejemplo 2.29. Si (X, μ) es cualquier espacio medible y para cada $x \in X$, $\mathcal{H}_x = \mathbb{C}$, entonces la integral directa es $L^2(X, \mu)$ el espacio de funciones medibles sobre X de cuadrado integrable.

Podemos generalizar este ejemplo tomando $\mathcal{H}_x = \mathcal{K}$ para casi todo x, donde $\mathcal{K}$ es un espacio de Hilbert arbitrario. Denotaremos a este espacio por $L^2(X, \mu, \mathcal{K})$.

Puede suceder que los $\mathcal{H}_x$ tengan distintas dimensiones, llamaremos *función dimensión* a la función de X en el conjunto $\{1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$ definida por $\nu(x) = \dim \mathcal{H}_x$. Esta función resulta medible y por lo tanto parte a X en conjuntos medibles $X_n = \{x \in X : \nu(x) = n\}$.

Observemos que es equivalente dar la familia de espacios de Hilbert $\{\mathcal{H}_x\}$ o dar la función dimensión ν. En efecto para cada entero no negativo, existe un único espacio de Hilbert separable (salvo isomorfismo), por lo tanto $\mathcal{H}_x$ está unívocamente determinado por $\nu(x)$.

Luego a cada integral directa de espacios de Hilbert $\mathcal{H} = \int_X \mathcal{H}_x d\mu(x)$ le podemos asociar una terna (X, μ, ν), donde (X, μ) es un espacio de medida y ν es una función dimensión tal que $\nu(x) = \dim(\mathcal{H}_x)$. Recíprocamente cada terna define una integral directa de una familia de espacios de Hilbert $\{\mathcal{H}_x\}$ tomando $\mathcal{H}_x$ tal que $\dim(\mathcal{H}_x) = \nu(x)$. Pensando en esta identificación usaremos una terna (X, μ, ν) para hablar de una integral directa de espacios de Hilbert.

Definición 2.30. Sea $\mathcal{H} = \int_X^{\oplus} \mathcal{H}_x d\mu(x)$. Un operador T acotado sobre $\mathcal{H}$ se dice *descomponible* si existe una función $x \to T(x)$ sobre X tal que $T(x)$ es un operador acotado de $\mathcal{H}_x$, y para cada $f \in \mathcal{H}$, $(Tf)(x) = T(x)f(x)$ para casi todo $x \in X$.

Si además cada $T(x)$ es un múltiplo del operador identidad de $\mathcal{H}_x$, diremos que T es *diagonalizable*.

Se deduce directamente de la definición que si T_1, T_2 son operadores descomponibles, entonces también lo son $\lambda T_1 + T_2$, T_1T_2 y T_1^*. Más aún si $T_1(x)$ es un operador positivo para casi todo x, entonces T es un operador positivo. En efecto, tenemos que ver que $< Tf, f >$ es no negativo, para todo $f \in \mathcal{H}$,

$$< Tf, f >= \int_X < T(x)f(x), f(x) > d\mu(x) \geq 0.$$

Un ejemplo sencillo de operador diagonalizable es el siguiente. Si $\mathcal{H} = \int_X^{\oplus} H_x d\mu(x)$, a cada función medible esencialmente acotada $\varphi(x)$ definida sobre X, se le puede asignar un operador diagonalizable sobre $\mathcal{H}$, de la siguiente manera:

$$(M_\varphi f)(x) = \varphi(x) 1_{\mathcal{H}_x} f(x).$$

Es claro que todo operador diagonalizable T es de esta forma. En efecto, si $T(x) = \lambda_x 1_{\mathcal{H}_x}$, a T le podemos asociar la función $\varphi : X \to \mathbb{C}$ definida por $\varphi(x) = \lambda_x$. Esta función es esencialmente acotada pues T es un operador acotado.

El conjunto de operadores M_φ forma un álgebra de von Neuman conmutativa maximal, veremos en la próxima sección que toda álgebra de von Neumann conmutativa maximal es de esa forma.

Observación 2.31. Como referencia de las definiciones presentadas consideramos [**KR**].

4. Álgebras de von Neumann abelianas

El siguiente teorema relaciona las álgebras de von Neumann abelianas y la integral directa de espacios de Hilbert. Dada una integral directa de ciertos espacios de Hilbert $\mathcal{H}_x$, entonces podemos definir un álgebra de von Neumann abeliana M de la siguiente manera,

$$M = \{M_\varphi : \varphi \in L^\infty(X, \mu)\}$$

Más aún, vale el recíproco. Este se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 2.32 (von Neumann, [**vN**]). *Dada un álgebra de von Neumann abeliana M actuando sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ separable, existe un espacio de medida (X, μ) y una familia medible de espacios de Hilbert $\{\mathcal{H}_x\}$ tal que $\mathcal{H} = \int_X \mathcal{H}_x d\mu(x)$.*

5. Representaciones del grupo de trenzas y subfactores

Una pregunta interesante en el estudio de las álgebras de von Neumann es clasificar los subfactores N del factor hiperfinito R. Un parámetro de comparación es calcular el índice de R en N, $[R : N]$, aunque no los caracteriza salvo conjugación por automorfismos. La definición precisa la daremos en el capítulo 4 cuando construyamos el factor hiperfinito a través de las representaciones que definiremos en el próximo capítulo. Otro parámetro de comparación es el *conmutador relativo* $N' \cap R$, éste parámetro los caracteriza salvo conjugación por automorfismos.

Estudiando este problema Jones obtuvo todos los posibles valores del índice para subfactores del factor hiperfinito de tipo II_1. Este conjunto es $\{4\cos^2 \pi/n : n = 3, 4, \dots\} \cup [4, \infty]$, [**J1**]. Además probó que si el índice es menor que 4, el conmutador relativo es trivial.

Para dar ejemplos de subfactores con índice menor que 4, Jones construye álgebras de Temperley-Lieb $A_n(a)$ tales que el límite inductivo $N = \bigcup_n A_n(a)$ es un subfactor de R de índice a^{-1}.

Inspirado en este trabajo, Wenzl obtiene el factor hiperfinito R a través de representaciones de las álgebras de Hecke $H_\infty(q)$ y obtiene subfactores de R como subrepresentaciones de $H_\infty(q)$, [**W**].

Recordemos que representaciones de las álgebras de Hecke y de las álgebras de Temperley-Lieb se extienden a representaciones de los grupos de trenzas, por lo tanto es natural tratar de obtener R a través de representaciones de los grupos de trenzas. En el capítulo 4, construimos ejemplos de factores de tipo I y II, más precisamente construimos el factor hiperfinito R y subfactores N con conmutador relativo $N' \cap R$ no trivial.

Capítulo 3

Parametrización de representaciones de $\mathbb{B}_n$

En los próximos capítulos presentaremos los resultados principales de este trabajo. En este capítulo construiremos y parametrizaremos familias de representaciones de $\mathbb{B}_n$. Presentaremos explícitamente nuevas representaciones irreducibles y daremos condiciones suficientes para la irreducibilidad.

1. Construcción de representaciones de $\mathbb{B}_n$

Comenzaremos con definiciones y construcciones generales para un grupo discreto G. Queremos definir representaciones de G sobre $\mathcal{H}$ la integral directa de espacios de Hilbert asociada a una terna (X, μ, ν). Sea $\pi : G \times X \to X$ una acción de G sobre X, es decir $\pi(gh) = \pi(g)\pi(h)$ para todo $g, h \in G$ y $\pi(1) = 1_X$. Supongamos que la medida μ y la función dimensión ν verifican las siguientes compatibilidades con π que fueron usadas por Gärding y Wightman en 1956, [**GW1**].

Definición 3.1. La medida μ se dice *π-cuasi-invariante* si las medidas $\mu(x)$ y $\mu(\pi(g)x)$ tienen los mismos conjuntos de medida nula, para todo $g \in G$. Es decir, $\mu(E) = 0$ si y solamente si $\mu(\pi(g)E) = 0$, para todo $g \in G$.

Si $\mu(\pi(g)E) = \mu(E)$ para todo E subconjunto de X y para todo $g \in G$, entonces la medida μ se dice *π-invariante*.

Definición 3.2. La función dimension $\nu(x)$ se dice *π-invariante* si $\nu(x) = \nu(\pi(g)x)$, para todo $g \in G$, y para casi todo $x \in X$.

Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, entonces $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un espacio Borel. Le asignamos la σ-álgebra de subconjuntos medibles más pequeña que hace que los mapas $A \to < Af, h >$ sean medibles, para todo $f, h \in \mathcal{H}$.

Definición 3.3. Sea G un grupo discreto y $\mathcal{H}$ la integral directa de espacios de Hilbert asociada a la terna (X, μ, ν). Sea π una acción de G en X, tal que μ es π-cuasi-invariante y ν es π-invariante. Un *$(G, X, \mathcal{H})$-cociclo relativo a μ* es una función $U : G \times X \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ la cual satisface las siguientes propiedades:

i. U es un mapa de Borel,

II. para cada $g \in G$, $U(g, .)$ es un operador acotado descomponible en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, con función descomposición $x \to U(g, x)$,
III. $U(1, x) = 1_{\mathcal{H}}$, para casi todo $x \in X$,
IV. $U(g_1 g_2, x) = U(g_1, \pi(g_2)x)U(g_2, x)$ para casi todo $x \in X$.

Bajo estas condiciones presentamos uno de nuestros resultados principales.

TEOREMA 3.4. *Sea G un grupo discreto y sea (X, π, μ, ν, U) una 5-upla donde*

I. *π es una acción de G en X;*
II. *(X, μ) es un espacio de medida con μ una medida π-cuasi-invariante;*
III. *$\nu : X \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ es una función medible π-invariante;*
IV. *$U : G \times X \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un cociclo relativo a μ, donde $\mathcal{H}$ es la integral directa de espacios de Hilbert asociada a (X, μ, ν).*

Entonces

$$\phi = \phi_{(X,\pi,\mu,\nu,U)} : G \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

definido por

$$(\phi(g)f)(x) = U(g, \pi(g^{-1})x)f(\pi(g^{-1})x) \tag{3.1}$$

es una representación de G sobre $\mathcal{H}$.

DEMOSTRACIÓN. Primero notemos que $\phi(g)$ es un operador acotado pues $U(g, .)$ lo es. Denotemos por $\mathcal{H}$ la integral directa de espacios de Hilbert dado por la terna (X, μ, ν). Para ver que (3.1) define una representación del grupo G en $\mathcal{H}$, debemos chequear que $\phi(1) = 1_{\mathcal{H}}$ y que para todo $g, h \in G$,

$$\phi(gh) = \phi(g)\phi(h) \tag{3.2}$$

Calculemos $\phi(gh)$, sea $f \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned}(\phi(gh)f)(x) &= U(gh, \pi((gh)^{-1})x)f(\pi((gh)^{-1})x) \\ &= U(gh, \pi(h^{-1})\pi(g^{-1})x)f(\pi(h^{-1})\pi(g^{-1})x)\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}(\phi(g)\phi(h)f)(x) &= U(g, \pi(g^{-1})x)(\phi(h)f)(\pi(g^{-1})x) \\ &= U(g, \pi(g^{-1})x)U(h, \pi(h^{-1})\pi(g^{-1})x)f(\pi(h^{-1})\pi(g^{-1})x)\end{aligned}$$

Por ser U un cociclo y μ una medida π-cuasi-invariante, (3.2) es cierta. Además

$$(\phi(1)f)(x) = U(1, \pi^{-1}(1)x)f(\pi^{-1}(1)x) = 1_{\mathcal{H}}f(x)$$

Luego $\phi(1) = 1_{\mathcal{H}}$. Por lo tanto, ϕ es una representación de G sobre $\mathcal{H}$. □

Notemos que 5-uplas diferentes pueden definir representaciones equivalentes.

Varadarajan muestra un resultado similar al anterior cuando la función dimensión ν es constante y el cociclo U es unitario, es decir si $U(g,.)$ es un operador unitario para cada $g \in G$. Obtiene así representaciones unitarias (ver [**V**], teorema 6.7, pag 215).

Si G es un grupo discreto presentado por generadores y relaciones, es suficiente definir un cociclo U en los generadores tal que verifiquen algunas relaciones que provienen de las relaciones de G. En el caso $G = \mathbb{B}_n$, las relaciones que debe satisfacer el cociclo en los generadores son

$$\begin{aligned} &U(\tau_k, \pi(\tau_k^{-1})x)U(\tau_{k+1}, \pi(\tau_{k+1}^{-1})\pi(\tau_k^{-1})x)U(\tau_k, \pi(\tau_k^{-1})\pi(\tau_{k+1}^{-1})\pi(\tau_k^{-1})x) = \\ &= U(\tau_{k+1}, \pi(\tau_{k+1}^{-1})x)U(\tau_k, \pi(\tau_k^{-1})\pi(\tau_{k+1}^{-1})x)U(\tau_{k+1}, \pi(\tau_{k+1}^{-1})\pi(\tau_k^{-1})\pi(\tau_{k+1}^{-1})x) \end{aligned} \tag{3.3}$$

si $1 \leq k \leq n-2$

$$U(\tau_k, \pi(\tau_k^{-1})x)U(\tau_j, \pi(\tau_j^{-1})\pi(\tau_k^{-1})x) = U(\tau_j, \pi(\tau_j^{-1})x)U(\tau_k, \pi(\tau_k^{-1})\pi(\tau_j^{-1})x) \tag{3.4}$$

si $|j-k| > 1$.

De ahora en adelante denotaremos por $\pi_k = \pi(\tau_k)$.

Ejemplo 3.5. Sea $X = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in A\}$ para algún conjunto $A \subset \mathbb{N}$, $n \leq \infty$, sea π la acción de $\mathbb{B}_n$ en X dada por

$$\pi_k(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{k+1}, x_k, \dots, x_n)$$

Notemos que $\pi_k^{-1} = \pi_k$. Entonces, las siguientes ecuaciones sobre $U(\tau_k, \pi_k x)$ implican (3.3) y (3.4). Estas ecuaciones tienen una expresión más sencilla.

I. $U(\tau_{k+1}, \pi_{k+1}x) = U(\tau_k, \pi_k\pi_{k+1}\pi_k x)$, si $1 \leq k \leq n-2$,
II. $U(\tau_k, \pi_k\pi_j x) = U(\tau_k, \pi_j x)$, si $|j-k| > 1$,
III. los operadores $U(\tau_k, \pi_k x)$, $U(\tau_k, \pi_k\pi_{k+1}x)$, y $U(\tau_k, \pi_k\pi_{k+1}\pi_k x)$ conmutan y $U(\tau_k, \pi_k x)$ conmuta con $U(\tau_k, \pi_k\pi_j x)$.

Más aún, en este caso, (I) nos permite definir inductivamente el cociclo de la siguiente manera. Definimos $U(\tau_1, x)$ para todo $x \in X$, luego obtenemos $U(\tau_2, x)$ de (I), verificamos la condición de conmutatividad y, si la cumple, continuamos el proceso definiendo $U(\tau_3, x)$ de (I). Por lo tanto este método dá una maquinaria para construir ejemplos. Notemos que en el caso $\nu(x) = 1$, la condición de conmutatividad es trivial.

Ejemplo 3.6. Sea ρ una representación de $\mathbb{B}_n$ sobre un espacio vectorial V. Consideremos la 5-upla (X, π, μ, ν, U) como en Teorema 3.4, donde μ es una medida discreta, $\nu(x) = \dim V$ para casi todo $x \in X$ y el cociclo es una función constante en X definida por $U(\tau_k, x) = \rho(\tau_k)$.

Entonces podemos definir una representación de $\mathbb{B}_n$ de dimensión $|X|\dim(V)$. En la sección 6 daremos condiciones en la 5-upla tal que la representación asociada sea irreducible.

En sección 3 daremos más ejemplos.

2. Parametrización de representaciones de $\mathbb{B}_n$

Con la notación de la sección anterior, caracterizaremos una clase de representationes de $\mathbb{B}_n$ a través de 5-uplas (X, π, μ, ν, U).

Sea $\psi : \mathbb{B}_n \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ una representación del grupo $\mathbb{B}_n$ ($n \leq \infty$), sobre un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$. Denotamos por $\psi_k := \psi(\tau_k)$. Supondremos que la familia $\mathcal{F} = \{\psi_k\psi_k^*\}$ es una familia conmutativa de operadores con descomposición espectral discreta, es decir

$$\psi_k\psi_k^* = \sum_{l\in I_k} \lambda_{k,l}P_{k,l}, \quad \text{para todo } k \tag{3.5}$$

$$\psi_k\psi_k^*\psi_j\psi_j^* = \psi_j\psi_j^*\psi_k\psi_k^*, \quad \text{para todo } j, k \tag{3.6}$$

Supongamos que para todo k el cardinal de I_k es mayor que 1, en particular ψ_k no es un operador unitario. La segunda condición asegura que el álgebra de von Neumann N generada por la familia $\mathcal{F}$ es conmutativa. Entonces, por teorema 2.32, $\mathcal{H}$ se descompone en la integral directa de espacios de Hilbert asociada al triple (X', μ, ν). Respecto a esta descomposición, cada elemento de N corresponde a un operador diagonalizable M_φ de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. En particular, cada proyección es exactamente el operador multiplicación por la función característica $\chi_{X_{k,l}}$ de un conjunto medible $X_{k,l}$ de medida positiva. Es decir

$$P_{k,l} = M_{\chi_{X_{k,l}}}$$

Se sabe que toda álgebra de von Neumann está generada por sus proyecciones espectrales, (ver por ejemplo [**KR**]). Entonces N está generada por las proyecciones $P_{k,l}$. Así, es suficiente considerar la σ-álgebra de subconjuntos de X' generada por $X_{k,l}$ con $l \in I_k$ y $k = 1, \dots, n-1$. Más aún, ya que $\sum_{l\in I_k} P_{k,l} = 1_{\mathcal{H}}$ para cada k, tenemos que $\bigcup_{l\in I_k} X_{k,l} = X'$, entonces cada $x' \in X'$ pertenece a un conjunto X_{k,x_k} para algún $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Por lo tanto, podemos reemplazar X' por su conjunto factor X, cuyos puntos son los subconjuntos de X' de la forma $\cap_{k=1}^{n-1} X_{k,x_k}$. Así $\mathcal{H}_x = \overline{\cap_{k=1}^{n-1} \operatorname{Im} P_{k,x_k}}$.

Si asignamos el número x_k a cada conjunto X_{k,x_k}, entonces cada elemento $x \in X$ puede ser identificado con la $(n-1)$-upla $(x_1, \dots, x_{n-1})$ (n puede ser ∞). Bajo esta identificación notemos que $X_{j,l} = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in X : x_j = l\}$. Por lo tanto, $X_{j,l} \subset X$ y la σ-álgebra de subconjuntos de X y X' coinciden.

Si la dimensión de $\mathcal{H}$ es finita, esta reducción a la forma diagonal no es más que el proceso de diagonalización simultánea de una familia conmutativa de operadores.

Por otro lado, $\psi_k P_{j,l} \psi_k^{-1}$ es una proyección, supondremos que está en N y la denotaremos por $P_{\pi_k(j,l)}$, es decir

$$P_{\pi_k(j,l)} := \psi_k P_{j,l} \psi_k^{-1}$$

O equivalentemente, ya que todo elemento de N es multiplicar por una función esencialmente acotada, tenemos que $\psi_k M_{\chi_{X_{j,l}}} \psi_k^{-1} = M_\varphi$. Además M_φ es una proyección, luego $\varphi(x) = 0$ ó 1. Llamamos $\pi_k(X_{j,l})$ al conjunto $\{x \in X : \varphi(x) = 1\}$ entonces,

$$\psi_k M_{\chi_{X_{j,l}}} \psi_k^{-1} = M_{\chi_{\pi_k(X_{j,l})}} \tag{3.7}$$

Podemos definir una acción π del grupo $\mathbb{B}_n$ en la σ-álgebra de subconjuntos de X por $\pi(\tau_k) := \pi_k$, donde los valores en los generadores de la σ-álgebra son

$$X_{j,l} \overset{\pi_k}{\longrightarrow} \pi_k(X_{k,l})$$

En efecto, por las ecuaciones del grupo de trenzas tenemos que

$$\pi_k \pi_{k+1} \pi_k = \pi_{k+1} \pi_k \pi_{k+1}$$

si $1 \leq k \leq n-2$ y

$$\pi_k \pi_j = \pi_j \pi_k$$

si $|j-k| > 1$, ya que

$$\psi_k \psi_{k+1} \psi_k P_{j,x_j} \psi_k^{-1} \psi_{k+1}^{-1} \psi_k^{-1} = \psi_{k+1} \psi_k \psi_{k+1} P_{j,x_j} \psi_{k+1}^{-1} \psi_k^{-1} \psi_{k+1}^{-1}$$

para todo k tal que $1 \leq k \leq n-2$, y

$$\psi_j \psi_k P_{j,x_j} \psi_k^{-1} \psi_j^{-1} = \psi_k \psi_j P_{j,x_j} \psi_j^{-1} \psi_k^{-1}$$

si $|j-k| > 1$. Así, el grupo de trenzas $\mathbb{B}_n$ actúa en la σ-álgebra de subconjuntos de X.

Lema 3.7. *El mapa $\pi : \mathbb{B}_n \to Aut\ (X)$ definido por,*

$$\pi_k(x) = \pi_k(\cap_{j=1}^{n-1} X_{j,x_j}) := \cap_{j=1}^{n-1} \pi_k(X_{j,x_j})$$

es una acción de $\mathbb{B}_n$ en X.

Demostración. Debemos ver que,

$$\cap_{j=1}^{n-1} \pi_k(X_{j,x_j}) \neq \emptyset$$

y que $\pi_k(x)$ es un elemento de X, o sea

$$\cap_{j=1}^{n-1} \pi_k(X_{j,x_j}) = \cap_{j=1}^{n-1} X_{j,l_j}$$

para algún $l_j \in I_j$.

En efecto, x se identifica con el conjunto $\cap_{j=1}^{n-1} X_{j,x_j}$ el cual está asociado a la proyección no nula $\wedge_{j=1}^{n-1} P_{j,x_j}$ (en efecto, si P y Q son proyecciones, $P \wedge Q$ denota la proyección ortogonal sobre $\overline{\text{Im}P \cap \text{Im}Q}$). De la misma manera, $\cap_{j=1}^{n-1} \pi_k(X_{j,x_j})$ está asociado al operador

$$\wedge_{j=1}^{n-1}(\psi(\tau_k)P_{j,x_j}\psi(\tau_k^{-1})) = \psi(\tau_k)(\wedge_{j=1}^{n-1}P_{j,x_j})\psi(\tau_k^{-1})$$

Que es no nulo ya que $\psi(\tau_k)$ es invertible. Por lo tanto, $\cap_{j=1}^{n-1}\pi_k(X_{j,x_j}) \neq \emptyset$.

Notemos que para cada j y r, $1 \leq j, r \leq n-1$, existe $l_r \in I_r$ tal que $X_{r,l_r} \cap \pi_k(X_{j,x_j}) \neq \emptyset$. Efectivamente, para cada r, $\sum_{l \in I_r} P_{r,l} = 1_{\mathcal{H}}$. Por lo tanto $\psi(\tau_k)P_{j,x_j}\psi(\tau_k^{-1}) = \sum_{l \in I_r} \psi(\tau_k)P_{j,x_j}\psi(\tau_k^{-1}) \wedge P_{r,l}$. Como el lado izquierdo es una proyección no nula, existe $l_r \in I_r$ tal que $\psi(\tau_k)P_{j,x_j}\psi(\tau_k^{-1}) \wedge P_{r,l}$ es no nulo. Entonces, $X_{r,l_r} \cap \pi_k(X_{j,x_j})$ es un conjunto medible de medida positiva.

Esto dice que todos los conjunto X_{r,l_r}, $1 \leq r \leq n-1$, aparecen en la expresión de $\pi_k(X_{j,x_j})$ como unión de intersecciones de elementos de la σ-álgebra de subconjuntos de X. O sea, si

$$\pi_k(X_{j,x_j}) = \bigcup_{m^j \in L^j} X_{t_1^j, m_1^j} \cap X_{t_2^j, m_2^j} \cap \cdots \cap X_{t_{r^j}^j, m_{r^j}^j} \cap \ldots$$

donde $1 \leq j \leq n-1$ y $m^j = (m_1^j, m_2^j, \ldots, m_{r^j}^j, \ldots)$, entonces para cada r existe i tal que $t_i^j = r$ y $m_i^j = l_r$.

Notemos que l_r puede depender de j, pero podemos elegirlo tal que sea el mismo para todo j. En efecto, queremos ver que para cada r existe $l_r \in I_r$ tal que para todo j, $1 \leq j \leq n-1$, $X_{r,l_r} \cap \pi_k(X_{j,x_j}) \neq \emptyset$. Supongamos por el contrario que para todo $l \in I_r$, existe j' tal que $X_{r,l} \cap \pi_k(X_{j',x_{j'}}) = \emptyset$. Por lo tanto,

$$\emptyset = \cup_{l \in I_r}(X_{r,l} \cap \pi_k(X_{j',x_{j'}})) = (\cup_{l \in I_r} X_{r,l}) \cap \pi_k(X_{j',x_{j'}}) = X \cap \pi_k(X_{j',x_{j'}})$$

que es una contradicción.

Calculemos $\cap_{j=1}^{n-1}\pi_k(X_{j,x_j})$,

$$\begin{aligned}
\textstyle\bigcap_{j=1}^{n-1} \pi_k(X_{j,x_j}) &= \textstyle\bigcap_{j=1}^{n-1}(\bigcup_{m^j \in L^j} X_{t_1^j, m_1^j} \cap X_{t_2^j, m_2^j} \cap \cdots \cap X_{t_{r^j}^j, m_{r^j}^j} \cap \ldots) \\
&= \textstyle\bigcup_{m^1 \in L^1, \ldots, m^{n-1} \in L^{n-1}} \Big(X_{t_1^1, m_1^1} \cap X_{t_2^1, m_2^1} \cap \cdots \cap X_{t_{r^1}^1, m_{r^1}^1} \cap \cdots \cap X_{t_1^k, m_1^k} \cap \\
&\qquad \cap X_{t_2^k, m_2^k} \cap \cdots \cap X_{t_{r^k}^k, m_{r^k}^k} \cap \cdots \cap X_{t_1^{n-1}, m_1^{n-1}} \cap \\
&\qquad\qquad \cap X_{t_2^{n-1}, m_2^{n-1}} \cap \cdots \cap X_{t_{r^{n-1}}^{n-1}, m_{r^{n-1}}^{n-1}} \cap \ldots \Big)
\end{aligned}$$

Pero si en un términmo de la unión

$$\begin{aligned}
&X_{t_1^1, m_1^1} \cap X_{t_2^1, m_2^1} \cap \cdots \cap X_{t_{r^1}^1, m_{r^1}^1} \cap \cdots \cap X_{t_1^k, m_1^k} \cap X_{t_2^k, m_2^k} \cap \\
&\quad \cap \cdots \cap X_{t_{r^k}^k, m_{r^k}^k} \cap \cdots \cap X_{t_1^{n-1}, m_1^{n-1}} \cap X_{t_2^{n-1}, m_2^{n-1}} \cap \cdots \cap X_{t_{r^{n-1}}^{n-1}, m_{r^{n-1}}^{n-1}} \cap \ldots
\end{aligned} \tag{3.8}$$

aparecen los subconjuntos $X_{t_\alpha^l, m_\alpha^l}$ y $X_{t_\alpha^l, m_\beta^l}$, con el mismo primer subíndice t_α^l, entonces los segundos deben ser iguales, $\alpha = \beta$, pues sino la intersección (3.8) es vacía. Por lo tanto, cada término de la unión es intersección de a lo sumo $n-1$ conjuntos, o es vacío. Pero los $n-1$

conjuntos X_{r,l_r} son los únicos conjuntos que aparecen en la descomposición de $\pi_k(X_{j,x_j})$ para todo j. Entonces, aparecen en cada término no vacío de la unión.

Por lo tanto $\bigcap_{j=1}^{n-1} \pi_k(X_{j,x_j}) = \cap_{r=1}^{n-1} X_{r,l_r}$ o es vacío. Pero ya vimos que no es vacío, luego $\pi_k(x)$ está bien definido. □

Bajo estas condiciones podemos establecer la siguiente parametrización.

TEOREMA 3.8. *Sea $\psi : \mathbb{B}_n \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ una representación del grupo de trenzas $\mathcal{B}_n$ $(n \leq \infty)$ sobre un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$. ψ satisface las siguientes condiciones, para todo k, j,*

I. *$\psi_k \psi_k^*$ tiene descomposición espectral discreta y $\psi_k \psi_k^* \neq \lambda 1_{\mathcal{H}}$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ no nulo;*
II. *$\psi_k \psi_k^* \psi_j \psi_j^* = \psi_j \psi_j^* \psi_k \psi_k^*$;*
III. *si N es el álgebra de von Neumann generada por*

$$\mathcal{F} = \{\psi_k \psi_k^* : k = 1, \ldots, n-1\}$$

entonces $\psi_k P \psi_k^{-1} \in N$, para toda proyección $P \in N$.

si y solamente si existe una 5-upla (X, π, μ, ν, U) tal que $\psi = \phi_{(X,\pi,\mu,\nu,U)}$, donde

(a) X es un espacio de medida;
(b) π es una acción de $\mathbb{B}_n$ sobre X;
(c) μ es una medida π-cuasi-invariante;
(d) $\nu : X \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ es una función medible π-invariante;
(e) $U : \mathbb{B}_n \times X \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un cociclo sobre $\mathcal{H}$, la integral directa de espacios de Hilbert asociada a la terna (X, μ, ν), tal que

$$U(\tau_k, \cdot) U(\tau_k, \cdot)^* \text{ es un operador diagonalizable sobre } \mathcal{H}, \tag{3.9}$$

En estos términos, ψ_k tiene la siguiente expresión,

$$(\psi_k f)(x) = (\psi(\tau_k) f)(x) = U(\tau_k, \pi_k^{-1} x) f(\pi_k^{-1} x) \tag{3.10}$$

OBSERVACIÓN 3.9. Las condiciones (3.7) y (III) del teorema son equivalentes pues N está generado por las proyecciones $P_{j,l}$.

DEMOSTRACIÓN. Vimos que el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ se descompone en la integral directa de espacios de Hilbert $\mathcal{H}_x$ de dimensión $\nu(x)$ sobre (X, μ) ya que N, el álgebra de von Neumann generada por $\mathcal{F}$, es abeliana. Más aún, por lema 3.7 existe una acción π del grupo de trenzas $\mathbb{B}_n$ sobre X. Denotemos $\pi_k := \pi(\tau_k)$ para cada k, $1 \leq k \leq n-1$.

Como N está generada por la familia conmutativa $\widetilde{\mathcal{F}} = \{P_{k,l} : l \in I, k = 1, \ldots, n-1\}$ como álgebra de von Neumann, todo elemento M_φ de N es límite fuerte de combinaciones lineales de elementos de $\widetilde{\mathcal{F}}$. Entonces, por la condición (III) tenemos la siguiente relación

$$\psi_k M_\varphi = M_{\varphi \circ \pi_k^{-1}} \psi_k \tag{3.11}$$

Ahora, probemos la π-invarianza de la función dimensión ν. Es suficiente ver que $\dim \mathcal{H}_x = \dim \mathcal{H}_{\pi_k(x)}$ para casi todo x y todo k. Supondremos que esto no es cierto, entonces existe un conjunto $E \subseteq X_m$ de medida positiva tal que $\pi_k(E) \subseteq X_{m-1}$. Sea $x \in E$ y sea $\{h_1, \dots h_m\}$ una base del espacio de Hilbert $\mathcal{H}_m$. Consideremos las siguientes funciones vectoriales $f_i(x) = \chi_F(x) h_i$ con $i = 1, \dots, m$ y F un subconjunto arbitrario de E de medida positiva. Estas funciones son linealmente independientes en $\mathcal{H}$. Sea $g_i(x) = (\psi_k f_i)(x)$, como ψ_k es invertible, el conjunto $\{g_i\}$ es también linealmente independiente en $\mathcal{H}$.

Queremos ver que para casi todo $y \in \pi_k(F)$, el conjunto $\{g_i(y)\}$ es linealmente independiente en $\mathcal{H}_y$. Supondremos que existe un conjunto F de medida positiva tal que ese conjunto es linealmente dependiente para casi todo $y \in \pi_k(F)$. Por lo tanto, podemos suponer que $g_m(y) = \sum_{i=1}^{m-1} a_i g_i(y)$. Entonces, por la linealidad de ψ_k,

$$(\psi_k f_m)(y) = \sum_{i=1}^{m-1} a_i (\psi_k f_i)(y) = \left(\psi_k \left(\sum_{i=1}^{m-1} a_i f_i \right) \right)(y)$$

Es decir, $(\psi_k(f_m - \sum_{i=1}^{m-1} a_i f_i))(y) = 0$ para casi todo $y \in \pi_k(F)$. Por lo tanto $f_m - \sum_{i=1}^{m-1} a_i f_i = 0$ ya que ψ_k es invertible y $\mu(\pi_k(F)) > 0$. Pero esto contradice la independencia lineal de $\{f_i\}$.

Luego $\{g_i(y)\}_{i=1}^m$ es linealmente independiente en $\mathcal{H}_y$. Por otro lado, la dimensión de $\mathcal{H}_y$ es $m-1$ por la elección de E, esto es una contradicción. Así, $\nu(x) = \nu(\pi_k x)$ para casi todo $x \in X$.

Ahora, debemos ver que la medida μ es π-cuasi-invariante, o sea que $\mu(x)$ y $\mu(\pi_k x)$ tienen los mismos conjuntos de medida nula. Vamos a probar que $\mu(E) > 0$ si y solamente si $\mu(\pi_k E) > 0$ para todo k. Pero X es la unión disjunta de subconjuntos $X_m = \{x \in X : \nu(x) = m\}$. Entonces, $E = E \cap X = \bigcup_{m \leq \infty} E \cap X_m$. Por lo tanto $\mu(E) > 0$ si y solamente si $\mu(E \cap X_m) > 0$ para algún m. Luego, podemos suponer que $E \subseteq X_m$.

Sea χ_E la función característica del conjunto E, sea h un vector unitario en el espacio $\mathcal{H}_m$, y consideremos la función vectorial $x \to f(x) = \chi_E(x) h$. Entonces

$$\begin{aligned} < f, f > &= \int_X < f(x), f(x) > d\mu(x) \\ &= \int_X < \chi_E(x) h, \chi_E(x) h > d\mu(x) \\ &= \int_E < h, h > d\mu(x) = \mu(E) \end{aligned}$$

Por otro lado, para cada k, $1 \leq k \leq n-1$

$$\begin{aligned} \mu(E) =< f, f > &=< \psi_k^{-1} \psi_k f, f > \\ &=< \psi_k f, (\psi_k^{-1})^* f > \\ &=< \psi_k M_{\chi_E} f, (\psi_k^{-1})^* M_{\chi_E} f > \\ &=< M_{\chi_{\pi_k(E)}} \psi_k f, M_{\chi_{\pi_k(E)}} (\psi_k^{-1})^* f > \\ &= \int_{\pi_k(E)} < (\psi_k f)(x), ((\psi_k^{-1})^* f)(x) > d\mu(x) \end{aligned}$$

Luego, si suponemos que $\mu(E) > 0$ y $\mu(\pi_k E) = 0$ obtenemos una contradicción. Recíprocamente, sea $E \subset X_m$. Como ν es π-invariante, $\pi_k(E) \subset X_m$ también. Queremos ver que si $\mu(\pi_k E) > 0$ entonces $\mu(E) > 0$. Sea g una función vectorial tal que $g(x) = \chi_{\pi_k(E)}(x)h$, donde h es un vector unitario de $\mathcal{H}_m$. Por lo tanto

$$< g, g >= \int_{\pi_k(E)} < h, h > d\mu(x) = \mu(\pi_k E)$$

Pero

$$\begin{aligned} \mu(\pi_k E) =< g, g > \quad &=< \psi_k \psi_k^{-1} g, g > \\ &=< \psi_k^{-1} g, \psi_k^* g > \\ &=< \psi_k^{-1} M_{\chi_{\pi_k(E)}} g, \psi_k^* M_{\chi_{\pi_k(E)}} g > \\ &=< M_{\chi_E} \psi_k^{-1} g, M_{\chi_E} \psi_k^* g > \\ &= \textstyle\int_E < (\psi_k^{-1} g)(x), (\psi_k^* g)(x) > d\mu(x) \end{aligned}$$

Luego, $\mu(\pi_k E) > 0$ implica $\mu(E) > 0$. Por lo tanto, la π-cuasi-invarianza de la medida ha sido probada.

Consideremos el siguiente operador sobre $\mathcal{H}$, $(V_k f)(x) = f(\pi_k x)$. Observemos que V_k está bien definido por la π-invarianza de ν y es invertible, $(V_k^{-1} f)(x) = f(\pi_k^{-1} x)$. Más aún, tienen la siguiente propiedad,

$$V_k M_\varphi = M_{\varphi \circ \pi_k} V_k \tag{3.12}$$

Sea $U(\tau_k, \cdot) := V_k \psi_k$, este operador conmuta con todos los operadores M_φ de N por (3.11) y (3.12). Entonces, es descomponible y existe $U(\tau_k, x) : \mathcal{H}_x \to \mathcal{H}_x$ tal que

$$(U(\tau_k, \cdot) f)(x) = U(\tau_k, x) f(x)$$

para casi todo x.

Entonces $\psi_k = V_k^{-1} U(\tau_k, \cdot)$, es decir

$$(\psi_k f)(x) = U(\tau_k, \pi_k^{-1} x) f(\pi_k^{-1} x)$$

Las relaciones del grupo de trenzas dicen que los operadores $U(\tau_k, \cdot)$ verifican las siguientes ecuaciones,

$$\begin{aligned} U(\tau_k, \pi_k^{-1} x) \quad & U(\tau_{k+1}, \pi_{k+1}^{-1} \pi_k^{-1} x)\ U(\tau_k, \pi_k^{-1} \pi_{k+1}^{-1} \pi_k^{-1} x) = \\ & = U(\tau_{k+1}, \pi_{k+1}^{-1} x)\ U(\tau_k, \pi_k^{-1} \pi_{k+1}^{-1} x)\ U(\tau_{k+1}, \pi_{k+1}^{-1} \pi_k^{-1} \pi_{k+1}^{-1} x) \end{aligned}$$

si $1 \leq k \leq n-2$,

$$U(\tau_k, \pi_k^{-1}x)U(\tau_j, \pi_j^{-1}\pi_k^{-1}x) = U(\tau_j, \pi_j^{-1}x)U(\tau_k, \pi_k^{-1}\pi_j^{-1}x)$$

si $|j-k| > 1$.

Esto significa que $U : G \times X \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un cociclo. Usando el producto interno definido en $\mathcal{H}$, la integral directa de espacios de Hilbert, obtenemos que $(\psi_k^* f)(x) = U(\tau_k, x)^* f(\pi_k x)$.

Entonces

$$(\psi_k \psi_k^* f)(x) = U(\tau_k, \pi_k^{-1}x)U(\tau_k, \pi_k^{-1}x)^* f(x)$$

Pero por condición (I),

$$(\psi_k \psi_k^* f)(x) = \sum_{l \in I} \lambda_{k,l}(P_{k,l}f)(x) = \sum_{l \in I} \lambda_{k,l}\chi_{X_{k,l}}(x)f(x) = \lambda_{k,x_k} f(x)$$

entonces $U(\tau_k, \pi_k^{-1}x)U(\tau_k, \pi_k^{-1}x)^* = \lambda_{k,x_k} 1_{\mathcal{H}_x}$ y (3.9) es cierta.

Probemos ahora el recíproco. Por teorema 3.4, ψ dado por (3.10) define una representación del grupo de trenzas $\mathbb{B}_n$ sobre la integral directa de espacios de Hilbert asociada a la terna (X, μ, ν). Resta ver que se satisfacen las condiciones (I), (II) y (III).

$\psi_k \psi_k^*$ tiene descomposición espectral discreta ya que $U(\tau_k, \cdot)U(\tau_k, \cdot)^*$ es diagonalizable por (3.9).

Para ver la condición (II), tenemos que

$$(\psi_k \psi_k^* \psi_j \psi_j^* f)(x) = U(\tau_k, \pi_k^{-1}x)U(\tau_k, \pi_k^{-1}x)^* U(\tau_j, \pi_j^{-1}x)U(\tau_j, \pi_j^{-1}x)^* f(x)$$

Por otro lado,

$$(\psi_j \psi_j^* \psi_k \psi_k^* f)(x) = U(\tau_j, \pi_j^{-1}x)U(\tau_j, \pi_j^{-1}x)^* U(\tau_k, \pi_k^{-1}x)U(\tau_k, \pi_k^{-1}x)^* f(x)$$

Pero, por (3.9), $U(\tau_k, \pi_k^{-1}x)U(\tau_k, \pi_k^{-1}x)^* f(x) = \lambda_k(x)1_{\mathcal{H}_x} f(x)$. De la misma manera

$$U(\tau_j, \pi_j^{-1}x)U(\tau_j, \pi_j^{-1}x)^*(x)f(x) = \lambda_j(x)1_{\mathcal{H}_x} f(x)$$

Por lo tanto, $U(\tau_k, \pi_k^{-1}x)U(\tau_k, \pi_k^{-1}x)^*$ conmuta con $U(\tau_j, \pi_j^{-1}x)U(\tau_j, \pi_j^{-1}x)^*$ y (II) está probado.

Para la última condición, tenemos que

$$\begin{aligned}(\psi_k P_{j,l} \psi_k^{-1} f)(x) &= U(\tau_k, \pi_k^{-1}x)\chi_{X_{j,l}}(\pi_k^{-1}x)U(\tau_k, \pi_k^{-1}x)^{-1} f(\pi_k \pi_k^{-1}(x)) \\ &= \chi_{X_{j,l}}(\pi_k^{-1}(x))f(x) = (P_{\pi_k(X_{j,l})}f)(x)\end{aligned}$$

por lo tanto, (III) es cierta como queríamos probar. □

Observación 3.10. La demostración del teorema 3.8 no usa propiedades especiales del grupo de trenzas $\mathbb{B}_n$, por lo tanto podemos sustituir $\mathbb{B}_n$ por cualquier grupo discreto presentado por generadores y relaciones. La prueba general sólo difiere en las relaciones del cociclo U que dependen de las relaciones del grupo.

Un resultado similar fue obtenido por Varadarajan para representaciones unitarias de un grupo G localmente compacto (ver [**V**] Theorem 6.11, pag 220), su dato es un “system of imprimitivity”, este sistema consiste en una representación unitaria del grupo y una familia de proyecciones que satisface cierta compatibilidad. Las hipótesis del teorema 3.8 nos permiten construir un sistema de este tipo, el cual es $(\psi, \widetilde{\mathcal{F}})$.

Corolario 3.11. *Sea (X, π, μ, ν, U) una 5-upla que satisface las condiciones del Teorema (3.8). Sea ϕ la representación de $\mathbb{B}_n$, $n \leq \infty$, asociado a la 5-upla tal que $\phi(\tau_k)$ es un operador autoadjunto para todo k, $1 \leq k \leq n-1$. Entonces, todo subespacio cerrado invariante $\mathcal{K}$ del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, la integral directa asociada a (X, μ, ν), es una integral directa de espacios de Hilbert asociada a $(X_{\mathcal{K}}, \mu_{\mathcal{K}}, \nu_{\mathcal{K}})$, donde $X_{\mathcal{K}} \subset X$, $\mu_{\mathcal{K}} = \mu_{|X_{\mathcal{K}}}$ y $\nu_{\mathcal{K}}(x) \leq \nu(x)$ para todo $x \in X_{\mathcal{K}}$. Además $\mu_{\mathcal{K}}$ es π-cuasi-invariante y $\nu_{\mathcal{K}}$ es π-invariante.*

Demostración. Sea $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$ un subespacio cerrado invariante, entonces $\mathcal{K}$ es también invariante por $\phi(\tau_k)^* = \phi(\tau_k)$. Así, $\phi(\tau_k)$ conmuta con $P_{\mathcal{K}}$, la proyección ortogonal sobre el subespacio $\mathcal{K}$.

Por lo tanto, $\widetilde{\phi_k} := P_{\mathcal{K}}\phi_k P_{\mathcal{K}}$ es una representación de $\mathbb{B}_n$ sobre $\mathcal{K}$ que verifica las hipótesis del Teorema 3.8. En efecto,

$$\widetilde{\phi_k}\widetilde{\phi_k}^* = P_{\mathcal{K}}\phi_k P_{\mathcal{K}}\phi_k^* P_{\mathcal{K}} = P_{\mathcal{K}}\phi_k\phi_k^* P_{\mathcal{K}} = \sum_{l\in I} \lambda_{k,l} P_{\mathcal{K}} P_{k,l} P_{\mathcal{K}} = \sum_{l\in I} \lambda_{k,l} Q_{k,l}$$

y

$$\begin{aligned}\widetilde{\phi_k}\widetilde{\phi_k}^*\widetilde{\phi_j}\widetilde{\phi_j}^* &= P_{\mathcal{K}}\phi_k P_{\mathcal{K}}\phi_k^* P_{\mathcal{K}} P_{\mathcal{K}}\phi_j P_{\mathcal{K}}\phi_j^* P_{\mathcal{K}} = P_{\mathcal{K}}\phi_k\phi_k^*\phi_j\phi_j^* P_{\mathcal{K}} \\ &= P_{\mathcal{K}}\phi_j\phi_j^*\phi_k\phi_k^* P_{\mathcal{K}} = \widetilde{\phi_j}\widetilde{\phi_j}^*\widetilde{\phi_k}\widetilde{\phi_k}^*\end{aligned}$$

Finalmente

$$\widetilde{\phi_k} Q_{j,l}\widetilde{\phi_k}^{-1} = P_{\mathcal{K}}\phi_k P_{\mathcal{K}} P_{\mathcal{K}} P_{k,l} P_{\mathcal{K}} P_{\mathcal{K}}\phi_k^{-1} P_{\mathcal{K}} = P_{\mathcal{K}}\phi_k P_{k,l}\phi_k^{-1} P_{\mathcal{K}} \in \widetilde{N} := P_{\mathcal{K}} N P_{\mathcal{K}}$$

Entonces, $\widetilde{\phi} = \phi_{(X_{\mathcal{K}}, \pi_{\mathcal{K}}, \mu_{\mathcal{K}}, \nu_{\mathcal{K}}, P_{\mathcal{K}} U P_{\mathcal{K}})}$.

Más aún

$$X_{\mathcal{K}} = \{(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in X : P_{\mathcal{K}} P_{k,x_k} P_{\mathcal{K}} \neq 0 \text{ para todo } k, 1 \leq k \leq n-1\} \subseteq X$$

y

$$\mathcal{K}_x = \overline{\cap_k \operatorname{Im}(P_{\mathcal{K}} P_{k,x_k} P_{\mathcal{K}})} = \overline{\operatorname{Im}P_{\mathcal{K}} \cap (\cap_k \operatorname{Im}P_{k,x_k})} = \mathcal{K} \cap \mathcal{H}_x$$

Por lo tanto, $\nu_{\mathcal{K}} \leq \nu$. Más aún $\mu_{\mathcal{K}}(x) = \mu(x)$ si $x \in X_{\mathcal{K}}$. Finalmente, una prueba similar a la dada en el teorema 3.8, muestra la π-cuasi-invarianza de $\mu_{\mathcal{K}}$ y la π-invarianza de $\nu_{\mathcal{K}}$. $\square$

3. Ejemplos conocidos

En esta sección daremos algunos ejemplos de representaciones conocidas del grupo de trenzas que satisfacen las hipótesis del teorema 3.8 y daremos la 5-upla que los parametriza. Además construiremos, a partir de 5-uplas, nuevos ejemplos de representaciones irreducibles de $\mathbb{B}_n$.

3.1. La representación Estandar. Recordemos que se define de la siguiente manera. Dado $t \in \mathbb{C}$, $t \neq 0, 1$, para cada $k = 1, \dots, n-1$,

$$\rho_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 0 & t & & \\ & & & 1 & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

donde t está ubicado en el lugar $(k, k+1)$ y ρ_k actúa en $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$.

Verifiquemos las condiciones del teorema:

$$\rho_k \rho_k^* = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & |t|^2 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

es decir, su espectro consta de dos autovalores $\lambda_{k,0} = |t|^2$ y $\lambda_{k,1} = 1$; las proyecciones espectrales asociadas son las proyecciones ortogonales sobre los autoespacios $W_{k,0} = \mathrm{Ker}(\rho_k \rho_k^* - |t|^2 1)$ y $W_{k,1} = \mathrm{Ker}(\rho_k \rho_k^* - 1)$.

Como $\rho_k \rho_k^*$ es diagonal conmuta con $\rho_j \rho_j^*$ para todo j. Es fácil ver que para todo l, k, $0 \leq l \leq 1$ y $1 \leq k \leq n-1$ tenemos que $\rho_k P_{j,l} \rho_k^{-1} = P_{j,l}$ si $j \neq k, k+1$. Mientras que $\rho_k P_{k,l} \rho_k^{-1} = P_{k+1,l}$ y $\rho_k P_{k+1,l} \rho_k^{-1} = P_{k,l}$ si $k \leq n-2$. Finalmente $\rho_{n-1} P_{n-1,0} \rho_{n-1}^{-1} = \wedge_{j=1}^{n-1} P_{j,1}$ y $\rho_{n-1} P_{n-1,1} \rho_{n-1}^{-1} = \sum_{j=1}^{n-1} P_{j,0}$. Por lo tanto, la condición (III) del teorema 3.8 se verifica. Siguiendo la demostración de dicho teorema, podemos ver que la representación estandar es equivalente a la representación $\phi_{(X,\pi,\mu,\nu,U)}$ dada por la 5-upla (X, π, μ, ν, U), donde

I. $X = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) : x_i = 0, 1;\ i = 1, \dots, n-1\}$,

II. Si δ_k es la $(n-1)$-upla con 1 en el lugar k y cero en los demás lugares, con $k = 1, \dots, n-1$, y $\delta_0 = (0, \dots, 0)$, entonces la medida se define por

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = \delta_k \text{ para algún } k = 0, \dots, n-1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

III. La acción π se define para casi todo $x \in X$ por

$$\pi_k(x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, x_k, \dots, x_{n-1})$$

si $k = 1, \dots, n-2$. Y π_{n-1} se define por

$$\pi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) = \begin{cases} (0, \dots, 0) & \text{si } (x_1, \dots, x_{n-1}) = (0, \dots, 1) \\ (0, \dots, 1) & \text{si } (x_1, \dots, x_{n-1}) = (0, \dots, 0) \\ (x_1, \dots, x_{n-1}) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

iv. $\nu(x) = 1$ para casi todo $x \in X$, entonces $\mathcal{H}_x = \mathbb{C}$,
v. $U(\tau_k, \pi_k^{-1} x) = 1 + (t-1)x_k \in \mathbb{C}$.

Notemos que la medida μ es π-invariante, o sea $\mu(E) = \mu(\pi_k(E))$ cualquiera sea E conjunto medible.

Definimos

$$\begin{array}{rcl} \alpha : \mathbb{C}^n & \to & \mathcal{H} \\ \beta_j & \mapsto & f_j \end{array}$$

donde $\{\beta_j : j = 1, \dots, n\}$ es la base canónica de $\mathbb{C}^n$, y f_j es el elemento de $\mathcal{H}$ definido por $f_j(x) = 1$ si $x = \delta_j$ y $f_j(x) = 0$ en otro caso.

Entonces $\alpha(\rho_k(\beta_j)) = \phi_k(\alpha(\beta_j))$ para todo $j = 1, \dots, n$. Obtenemos así la equivalencia de las representaciones.

Observemos que $|X| = 2^{n-1}$, sin embargo la $\dim \mathcal{H} = n$, ésto se debe a que sólo n puntos de X tienen medida no nula.

Observación 3.12. Notemos que cuando $n = \infty$, la acción de los elementos π_k consiste en permutar los lugares k y $k+1$. Por lo tanto, obtenemos una representación de $\mathbb{B}_\infty$ como una generalización de la representación estandar. Esta es una de las ventajas de la parametrización obtenida, nos permite generalizar naturalmente ejemplos de representaciones de $\mathbb{B}_n$ a $\mathbb{B}_\infty$.

3.2. Representaciones Locales. Analicemos primero el caso de las representaciones locales diagonales, es decir si V tiene una base $\beta = \{v_1, \dots, v_m\}$ tal que $c(v_i \otimes v_j) = q_{ij} v_j \otimes v_i$ para todo $i, j = 1, \dots m$ donde los q_{ij} son números complejos no nulos. En éste caso se satisfacen las hipótesis del teorema, pues

$$\rho_k(c)(v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_n}) = q_{j_k, j_{k+1}} v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_{k+1}} \otimes v_{j_k} \otimes \cdots \otimes v_{j_n}$$

donde $x_{j_i} \in \{1, \dots, m\}$ para todo $i = 1, \dots, n$. Luego

$$\rho_k(c)^*(v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_n}) = \overline{q_{j_{k+1}, j_k}} v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_{k+1}} \otimes v_{j_k} \otimes \cdots \otimes v_{j_n}$$

Y así

$$\rho_k(c)\rho_k(c)^*(v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_n}) = |q_{j_k, j_{k+1}}|^2 v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_k} \otimes v_{j_{k+1}} \otimes \cdots \otimes v_{j_n}$$

Si $S = \{(a,b) : a, b \in \{1,\dots,m\}\}$, tenemos que

$$\rho_k(c)\rho_k(c)^* = \sum_{(a,b)\in S} |q_{(a,b)}|^2 P_{k,(a,b)}$$

donde $P_{k,(a,b)}$ es la proyección sobre el subespacio de $V^{\otimes n}$ generado por todos los vectores $v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_n}$ tales que $j_k = a$ y $j_{k+1} = b$.

Como $\rho_k(c)\rho_k(c)^*$ es diagonal para todo k, $\rho_k(c)\rho_k(c)^*$ y $\rho_j(c)\rho_j(c)^*$ conmutan para todo j.

Falta verificar la condición (III) del teorema 3.8. En efecto,

$$\rho_k(c)P_{j,(a,b)}\rho_k(c)^{-1} = \begin{cases} P_{j,(a,b)} & \text{si } |j-k| > 1, \\ P_{j,(b,a)} & \text{si } j = k, \\ \sum_{d=1}^{\dim V} P_{k-1,(a,d)} \wedge P_{k,(d,b)} & \text{si } j = k-1, \\ \sum_{d=1}^{\dim V} P_{k,(a,d)} \wedge P_{k+1,(d,b)} & \text{si } j = k+1, \end{cases}$$

Por lo tanto, siguiendo la demostración del teorema 3.8, la representación es equivalente a $\phi_{(X,\pi,\mu,\nu,U)}$, donde

I. $X = \{(x_1,\dots,x_{n-1}) : x_i = (a_i,b_i), a_i, b_i \in \{1,\dots,\dim V\}\}$,

II. $\mu((a_1,b_1),\dots,(a_{n-1},b_{n-1})) = \begin{cases} 1 & \text{si } b_i = a_{i+1} \text{ para todo } i = 1,\dots,n-2, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

III. la acción π se define para casi todo $x \in X$ por

$$\begin{aligned} \pi_k \quad & ((a_1,a_2),(a_2,a_3),\dots,(a_{n-1},b_{n-1})) = \\ & = ((a_1,a_2),\dots,(a_{k-1},a_{k+1}),(a_{k+1},a_k),(a_k,a_{k+2}),\dots,(a_{n-1},b_{n-1})), \end{aligned}$$

y $\pi_k^{-1}(x) = \pi_k(x)$ para casi todo x.

IV. $\nu(x) = 1$ para todo $x \in X$,

V. $U(\tau_k, \pi_k^{-1}x) = q_{x_k} = q_{a_k,b_k}$.

Sea $\alpha : V^{\otimes n} \to \mathcal{H}$ el operador lineal definido en la base de $V^{\otimes n}$ por

$$\alpha(v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_n}) = \chi_{((j_1,j_2),(j_2,j_3),\dots,(j_{n-1},j_n))}$$

Se verifica que $\alpha(\rho_k(c)(v_{j_1}\otimes\cdots\otimes v_{j_n})) = \phi_k(\alpha(v_{j_1}\otimes\cdots\otimes v_{j_n}))$. Lo que muestra la equivalencia de las representaciones.

De la misma manera que en el ejemplo anterior, si $n = \infty$ esta construcción nos permite generalizar esta representación a una de $\mathbb{B}_\infty$ de una manera natural.

Analicemos ahora otro ejemplo de representación local, $\rho(c_\gamma)$. Sea V el espacio vectorial complejo con base ortogonal $\{v_t : t \in T\}$ y sea $\rho(c_\gamma)$ definida por

$$\rho_k(c_\gamma)(v_{g_1} \otimes \cdots \otimes v_{g_n}) = \gamma(g_k, g_{k+1}) v_{g_1} \otimes \dots v_{g_{k-1}} \otimes v_{g_k g_{k+1} g_k^{-1}} \otimes v_{g_k} \otimes \cdots \otimes v_{g_n}$$

Y así tomando el producto interno en V,

$$\rho_k(c_\gamma)^*(v_{g_1}\otimes\cdots\otimes v_{g_n}) = \gamma(g_{k+1}, g_{k+1}^{-1}g_kg_{k+1})v_{g_1}\otimes\dots v_{g_{k-1}}\otimes g_{k+1}\otimes v_{g_{k+1}^{-1}g_kg_{k+1}}\otimes\cdots\otimes v_{g_n}$$

Obtenemos entonces que

$$\rho_k(c_\gamma)\rho_k(c_\gamma)^*(v_{g_1}\otimes\cdots\otimes v_{g_n}) = |\gamma(g_{k+1}, g_{k+1}^{-1}g_kg_{k+1})|^2 v_{g_1}\otimes\cdots\otimes v_{g_n}$$

Si $S=\{(a,b): a,b\in T\}$ tenemos que

$$\rho_k(c_\gamma)\rho_k(c_\gamma)^* = \sum_{(a,b)\in S}|\gamma(b,b^{-1}ab)|^2 P_{k,(a,b)}$$

donde $P_{k,(a,b)}$ es la proyección sobre el subespace de $V^{\otimes n}$ generado por todos los vectores $v_{g_1}\otimes\cdots\otimes v_{g_n}$ tales que $g_k=a$ y $g_{k+1}=b$.

Como $\rho_k(c_\gamma)\rho_k(c_\gamma)^*$ es diagonal para todo k, conmuta con $\rho_j(c_\gamma)\rho_j(c_\gamma)^*$ para todo j. Hemos chequeado las conditiones (I) y (II) del teorema 3.8. Para la condición (III) tenemos que,

$$\rho_k(c_\gamma)P_{j,(a,b)}\rho_k(c_\gamma)^{-1} = \begin{cases} P_{j,(a,b)} & \text{si } |j-k|>1,\\ P_{j,(aba^{-1},a)} & \text{si } j=k,\\ \sum_{t\in T} P_{k-1,(a,t)}\wedge P_{k,(t,b)} & \text{si } j=k-1,\\ \sum_{t\in T} P_{k,(tat^{-1},t)}\wedge P_{k+1,(t,b)} & \text{si } j=k+1,\end{cases}$$

Entonces esta representación es equivalente a $\phi := \phi_{(X,\pi,\mu,\nu,U)}$, donde

I. $X=\{(x_1,\dots,x_{n-1}) : x_i=(a_i,b_i)\in S\}$,

II. $\mu((a_1,b_1),\dots,(a_{n-1},b_{n-1})) = \begin{cases} 1 & \text{si } b_i=a_{i+1} \text{ para todo } i=1,\dots,n-2,\\ 0 & \text{en otro caso.}\end{cases}$

III. La acción π se define para casi todo $x\in X$ por

$$\begin{aligned}\pi_k\quad & ((a_1,a_2),(a_2,a_3)\dots,(a_{n-1},b_{n-1})) = ((a_1,a_2),\dots,\\ & (a_{k-1},a_ka_{k+1}a_k^{-1}),(a_ka_{k+1}a_k^{-1},a_k),(a_k,a_{k+2}),\dots,(a_{n-1},b_{n-1})),\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\pi_k^{-1}\quad & ((a_1,a_2),(a_2,a_3)\dots,(a_{n-1},b_{n-1})) = ((a_1,a_2),\dots,(a_{k-1},a_{k+1}),\\ & (a_{k+1},a_{k+1}^{-1}a_ka_{k+1}),(a_{k+1}^{-1}a_ka_{k+1},a_{k+2}),\dots,(a_{n-1},b_{n-1}))\end{aligned}$$

Notemos que $\pi_k^{-1}\neq\pi_k$.

IV. $\nu(x)=1$ para todo $x\in X$,

V. $U(\tau_k,\pi_k^{-1}x)=\gamma(x_k)=\gamma(a_k,b_k)$.

El mapa $\alpha: V^{\otimes n}\to\mathcal{H}$ definido en la base de $V^{\otimes n}$ por

$$\alpha(v_{g_1}\otimes\cdots\otimes v_{g_n}) = \chi_{((g_1,g_2),(g_2,g_3),\dots,(g_{n-1},g_n))}$$

da la equivalencia entre las representationes.

Como en los ejemplos anteriores, estas representationes pueden generalizarse a $\mathbb{B}_\infty$ de una manera natural tomando $n=\infty$.

3.3. La representación de Burau. Los operadores $\beta_k(t)$ no satisfacen que $\beta_k(t)\beta_k(t)^*$ conmuta con $\beta_j(t)\beta_j(t)^*$ por lo tanto no corresponde a una representación dada por una 5-upla como en el teorema 3.8.

4. Nuevas representaciones irreducibles

Consideremos las representationes dadas en [**EG1**], ellas se construyen de la siguiente manera. Elijamos n enteros no negativos $z_1, z_2, \ldots, z_n$, no necesariamente diferentes. Sea X el conjunto de todas las posibles n-uplas obtenidas permutando las coordenadas de la n-upla fija $(z_1, \ldots, z_n)$.

Sea V_ϕ un espacio vectorial complejo con base ortonormal $\beta = \{v_x : x \in X\}$. Entonces la dimensión de V_ϕ es la cardinalidad de X.

Definimos $\phi : \mathbb{B}_n \to \mathrm{GL}(V_\phi)$, tal que

$$\phi(\tau_k)(v_x) = q_{x_k,x_{k+1}} v_{\sigma_k(x)}$$

donde $q_{x_k,x_{k+1}}$ es un número complejo no nulo que depende de x, pero sólo depende de los lugares k y $k+1$ de x. Definimos

$$\sigma_k(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{k+1}, x_k, \ldots, x_n)$$

Es fácil ver que esta representación está dada por la 5-upla (X', π, μ, ν, U), donde

I. $X' := Y^n$, con $Y := \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$;
II. $\pi(\tau_k)(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{k+1}, x_k \ldots, x_n)$, $1 \leq k \leq n-1$, es decir $\pi_k = \sigma_k$;
III. Sea $a := (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in X'$. μ es la medida concentrada en la órbita de a, es decir
$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & \text{si existe } \tau \in \mathbb{B}_n \text{ tal que } x = \pi(\tau)a, \\ 0 & \text{en otro caso;} \end{cases}$$
IV. $\nu(x) = 1$, para todo $x \in X'$;
V. $U(\tau_k, \pi_k x) := q_{x_k,x_{k+1}}$.

En el siguiente teorema mostramos condiciones suficientes para que una representación de este tipo sea irreducible.

Teorema 3.13 ([**EG1**]). *Sea ϕ la representación definida arriba. Si ϕ_k es un operador autoadjunto para todo k, y para cada par $x, y \in X$, existe j, $1 \leq j \leq n-1$, tal que $|q_{x_j,x_{j+1}}|^2 \neq |q_{y_j,y_{j+1}}|^2$, entonces (ϕ, V_ϕ) es una representación irreducible del grupo de trenzas $\mathbb{B}_n$.*

Demostración. Sea $W \subset V_\phi$ un subespacio no nulo invariante. Es suficiente probar que W contiene un vector de la base v_x. En efecto, dado $y \in X$, existe una permutación σ de las coordenadas de x, que envía x a y. Esto pasa pues los elementos de X son n-uplas obtenidas al permutar las coordenadas de la n-upla fija $(z_1, \ldots, z_n)$. Supongamos que $\sigma = \sigma_{i_1} \ldots \sigma_{i_l}$, entonces $\tau := \tau_{i_1} \ldots, \tau_{i_l}$ satisface que $\phi(\tau)(v_x) = \lambda v_y$, para algún número complex no nulo λ. Entonces W contiene a v_y y por lo tanto, W contiene la base $\beta = \{v_x : x \in X\}$.

Como ϕ_k es autoadjunto, conmuta con P_W, la proyección ortogonal sobre el subespacio W. Por lo tanto, ϕ_k^2 conmuta con P_W. Por otro lado, notemos que $\phi_k^2(v_x) = |q_{x_k,x_{k+1}}|^2 v_x$, luego ϕ_k^2 es diagonal en la base $\beta = \{v_x : x \in X\}$. Entonces, la matriz de P_W tiene al menos los mismos bloques que ϕ_k^2 para todo k, $1 \leq k \leq n-1$, donde los bloques corresponden a los autoespacios simultáneos de la familia de operadores $\{\phi_k^2\}$.

Si para algún k, la matriz de ϕ_k^2 tiene un bloque de tamaño 1×1, entonces la matriz de P_W tiene un bloque de tamaño 1×1. En otras palabras, existe $x \in X$ tal que v_x es un autovector de P_W. Si el autovalor asociado a v_x es no nulo, entonces $v_x \in W$.

Resta ver que la matriz de ϕ_k^2 tiene todos sus bloques de tamaño 1×1. Por hipótesis, para cada par de vectores de la base β, v_x y v_y, existe k, $1 \leq k \leq n-1$, tal que $|q_{x_k,x_{k+1}}|^2 \neq |q_{y_k,y_{k+1}}|^2$. Fijando cualquier orden en X y dado x e y el primer y segundo elemento de X. Entonces existe k tal que v_x y v_y son autovectores de ϕ_k^2 de diferente autovalor. Por lo tanto ϕ_k^2 tiene el primer bloque de tamaño 1×1. Como ϕ_j^2 conmuta con ϕ_k^2 para todo j, ϕ_j^2 también tiene esa propiedad.

Por inducción, supongamos que para todo j, ϕ_j^2 tiene sus $r-1$ primeros bloques de tamaño 1×1. Sean x', y' los elementos r y $r+1$ de X, entonces existe k' tal que $v_{x'}$ y $v_{y'}$ son autovectores de $\phi_{k'}^2$ de diferente autovalor. Luego, $\phi_{k'}^2$ tiene los r primeros bloques de tamaño 1×1. Por lo tanto ϕ_j^2 también, ya que conmuta con $\phi_{k'}^2$, para todo j. Entonces obtenemos que todos los bloques son de tamaño 1×1. $\square$

Notemos que ϕ_k es autoadjunto si y sólo si $q_{x_{k+1},x_k} = \overline{q_{x_k,x_{k+1}}}$. A continuación mostraremos un familia explícita de representaciones irreducibles. Sea $z_1 = \cdots = z_m = 1$, $z_{m+1} = \cdots = z_n = 0$ y

$$q_{x_k,x_{k+1}} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_k = x_{k+1}, \\ t & \text{si } x_k \neq x_{k+1}, \end{cases}$$

donde t es un número real, $t \neq 0, 1, -1$. Definimos $\phi_m : \mathbb{B}_n \to \mathrm{GL}(V_m)$, dado por

$$\phi_m(\tau_k) v_x = q_{x_k,x_{k+1}} v_{\sigma_k(x)}.$$

La dimensión de esta representación es $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. Si $m = 1$ es equivalente a la representación estandar.

Por ejemplo, fijando el orden lexicográfico en X, si $n = 5$ y $m = 3$, entonces $\dim V_m = 10$, la base ordenada es

$$\beta := \{v_{(0,0,1,1,1)}, v_{(0,1,0,1,1)}, v_{(0,1,1,0,1)}, v_{(0,1,1,1,0)}, v_{(1,0,0,1,1)},$$
$$v_{(1,0,1,0,1)}, v_{(1,0,1,1,0)}, v_{(1,1,0,0,1)}, v_{(1,1,0,1,0)}, v_{(1,1,1,0,0)}\}$$

y las matrices en esa base son

$$\phi_3(\tau_1) = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&& \\ & 0 &&& t &&&&& \\ & 0 & 0 && 0 & t &&&& \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t &&& \\ & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 &&& \\ && t & 0 && 0 & 0 &&& \\ &&& t &&& 0 &&& \\ &&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&& 1 & \\ &&&&&&&&& 1 \end{pmatrix}$$

$$\phi_3(\tau_2) = \begin{pmatrix} 0 & t &&&&&&&& \\ t & 0 &&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&& \\ &&& 1 &&&&&& \\ &&&& 1 &&&&& \\ &&&&& 0 && t && \\ &&&&& 0 & 0 & 0 & t & \\ &&&&& t & 0 & 0 & 0 & \\ &&&&&& t && 0 & \\ &&&&&&&&& 1 \end{pmatrix}$$

$$\phi_3(\tau_3) = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&& \\ & 0 & t &&&&&&& \\ & t & 0 &&&&&&& \\ &&& 1 &&&&&& \\ &&&& 0 & t &&&& \\ &&&& t & 0 &&&& \\ &&&&&& 1 &&& \\ &&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&& 0 & t \\ &&&&&&&& t & 0 \end{pmatrix}$$

$$\phi_3(\tau_4) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & \\ & & 0 & t & & & & & & \\ & & t & 0 & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & 0 & t & & & \\ & & & & & t & 0 & & & \\ & & & & & & & 0 & t & \\ & & & & & & & t & 0 & \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Notemos que no podemos usar el teorema anterior para probar que estas representaciones son irreducibles. Pero el siguiente resultado que obtenemos lo muestra.

Teorema 3.14 ([**EG1**]). *Sea $n > 2$, entonces (ϕ_m, V_m) es una representación irreducible de $\mathbb{B}_n$, para todo $1 \leq m < n$.*

Demostración. Analizaremos dos casos, $n \neq 2m$ y $n = 2m$. Supongamos que $n \neq 2m$. Sea $x \neq y \in X$, entonces existe j, $1 \leq j \leq n$, tal que $x_j \neq y_j$. Si $j > 1$, podemos suponer que $x_{j-1} = y_{j-1}$, entonces $q_{x_{j-1},x_j} \neq q_{y_{j-1},y_j}$, luego $|q_{x_{j-1},x_j}|^2 \neq |q_{y_{j-1},y_j}|^2$. Si $j = 1$, y $n \neq 2m$, existe $l = 2, \ldots, n$ tal que $x_{l-1} \neq y_{l-1}$ y $x_l = y_l$, entonces $|q_{x_{l-1},x_l}|^2 \neq |q_{y_{l-1},y_l}|^2$. Luego, por teorema 3.13, ϕ_m es una representación irreducible.

Notemos que si $n = 2m$, $x_0 = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ y $y_0 = (0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1)$ satisfacen que $x_0 \neq y_0$ pero $q_{x_{j-1},x_j} = q_{y_{j-1},y_j}$ para todo j. Luego, no podemos usar el teorema 3.13. Pero en la demostración del teorema, en realidad sólo usamos la hipótesis para x e y consecutivos en algún orden. Consideremos el orden lexicográfico, x_0 e y_0 no son consecutivos con ese orden. En general, para cada $x \in X$, existen $y_x \in X$ tal que $q_{x_j,x_{j+1}} = q_{y_j,y_{j+1}}$ para todo $j = 1, \ldots, n-1$. Definimos y_x cambiando en x los ceros por unos y los unos por ceros. Por ejemplo, si $x = (1, 0, 0, 1, 0, 1)$, entonces $y_x = (0, 1, 1, 0, 1, 0)$. Sin embargo, sólo $x = (0, 1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ satisface que y_x es consecutivo a x. Por lo tanto P_W, la proyección sobre el subespacio invariante W, tiene sus bloques 1×1, excepto el bloque 2×2 asociado a $\{v_x, v_{y_x}\}$. Si algún bloque 1×1 de P_W es no nulo, entonces P_W contiene algún v'_x de la base β_m. Luego $W = V_m$. Supongamos ahora que $W \subseteq \{v_x, v_{y_x}\}$. Si la igualdad vale, $v_x \in W$ y $W = V_m$. Por el contrario supongamos que W está generado por $v = av_x + bv_{y_x}$, con $a, b \neq 0$. Pero $\phi_m(\tau_1)v = t(av_{\sigma_1(x)} + bv_{\sigma_1(y_x)})$, con $\sigma_1(x) \neq x$, $\sigma_1(y_x) \neq y_x$ y $\sigma_1(x) \neq y_x$ (si $n > 2$). Por lo tanto $\phi_1(v) \neq \lambda v$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Esto es una contradicción pues W es un subespacio invariante de dimensión finita. $\square$

Si tomamos $m = 2$, esta representación tiene dimensión $n(n-1)/2$ al igual que la representación de Lawrence-Krammer pero no son equivalentes ya que ϕ_m satisface la condición de conmutatividad del teorema 3.8 mientras que la de Lawrence-Krammer no la satisface.

5. Medidas cuasi-invariantes

En ésta sección analizaremos la condición de cuasi-invarianza de la medida y daremos ejemplos de medidas que la satisfacen.

5.1. Medidas discretas. Una medida μ sobre un conjunto X se dice discreta si la σ-álgebra de conjuntos medibles es $\mathcal{P}(X)$, partes de X, que contiene todos los subconjuntos de X. En particular, los conjuntos con un solo punto son medibles.

Sea $X = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) : x_i \in I\}$, $n \leq \infty$, para algún conjunto de índices I y sea a un elemento fijo de X. Entonces un ejemplo fácil de medida π-cuasi-invariante discreta es el siguiente

$$\mu_a(x) = 1 \iff \text{ existe } \tau \in \mathbb{B}_n \text{ tal que } x = \pi(\tau)a$$

Es decir, μ_a está concentrada en $\pi(\mathbb{B}_n)a$, la órbita de a. Estas medidas fueron usadas en la parametrización de la representación estandar y en la representación ϕ_m de la sección 4.

Más generalmente, sea Y un subconjunto de X, $\mu = \sum_{a\in Y} \mu_a$ es una medida π-cuasi-invariante discreta. Y está concentrada en $\cup_{a\in Y}\pi(\mathbb{B}_n)a$, la unión de las órbitas $\pi(\mathbb{B}_n)a$, con $a \in Y$.

5.2. Medidas producto. El espacio X es un producto directo de una cantidad finita o infinita numerable de conjuntos Y_k, entonces si a cada conjunto Y_k le asignamos una medida μ_k, podemos contruir la medida producto para X.

Recordemos como se contruye el espacio producto. Supongamos entonces que para todo k, (Y_k, μ_k) es un espacio de medida (discreto en nuestro caso) y que $\mu_k(Y_k) = 1$, si X es producto de una cantidad finita de Y_k, ésta última condición no es necesaria.

Queremos asignarle a X una σ-álgebra de conjuntos Borel, ésta será la generada por los conjuntos "cilíndricos", que son los siguientes

$$E_{i_1,\dots,i_r}(a_1, \dots, a_r) = \{(x_1, x_2, \dots) : x_{i_j} = a_j, j = 1, \dots, r\}$$

donde $a_j \in Y_{i_j}$ para todo $j = 1, \dots, r$.

Debemos definir ahora una medida sobre ésta σ-álgebra R, pero para ello basta definirla en los conjuntos cilíndricos (ver [**Hal**] pags 155-160), decimos entonces que

$$\mu(E_{i_1,\dots,i_r}(a_1, \dots, a_r)) = \prod_{j=1}^{r} \mu_{i_j}(a_j)$$

Sea π una acción de $\mathbb{B}_n$ en X. Analicemos la π-cuasi-invarianza de ésta medida. Para ello impondremos la condición que todos los Y_k sean iguales. Más aún, supongamos que

$$\pi_k(E_{i_1,\dots,i_r}(a_1, \dots, a_r)) = E_{j_1,\dots,j_s}(b_1, \dots, b_s)$$

entonces,

$$\mu(\pi_k(E_{i_1,\dots,i_r}(a_1,\dots,a_r))) = \mu(E_{j_1,\dots,j_s}(b_1,\dots,b_s)) = \prod_{l=1}^{s}\mu_{j_l}(b_l) =$$

$$= \frac{\prod_{l=1}^{s}\mu_{j_l}(b_l)}{\prod_{l=1}^{r}\mu_{i_j}(a_j)}\mu(E_{i_1,\dots,i_r}(a_1,\dots,a_r))$$

Por lo tanto, si A es un conjunto cilíndrico, existe un número complejo $c_{k,A}$ tal que

$$\mu(\pi_k(A)) = c_{k,A}\mu(A)$$

Proposición 3.15. *Sea $(X = Y^{n-1}, \mu = \prod_{k=1}^{n-1}\mu_k)$ un espacio de medida con medida producto y $n \leq \infty$. Si $Y = \{a^1,\dots,a^t\}$ es un conjunto finito y cada π_k actúa cambiando sólo finitas coordenadas x_j de x, entonces μ es π-cuasi-invariante.*

Demostración. Debemos probar que si E es un conjunto de medida nula, entonces $\pi_k(E)$ también lo es, cualquiera sea $k = 1,\dots,n-1$.

Sea entonces E un conjunto de medida nula. Por definición de la σ-álgebra R, para todo $\varepsilon > 0$, existe una familia de conjuntos cilíndricos $\{E_n\}$ tal que $E \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ y $\mu(\bigcup E_n) < \varepsilon$.

Dado $k \in \mathbb{N}$ queremos ver que $\mu(\pi_k(E)) = 0$, basta ver que $\mu(\pi_k(\bigcup E_n)) < \delta$. Supongamos que π_k cambia los lugares $i_1^k,\dots,i_{r_k}^k$. Para cada $s \in \{1,\dots,r_k\}$ sea $J = J(s) = (j_1,\dots,j_s)$ y $a = a(s) = (a_1,\dots,a_s)$ un multi-índice tal que $j_m \in \{i_1^k,\dots,i_{r_k}^k\}$ y $a_m \in Y$ para todo m, $1 \leq m \leq s$. Sea F_a^J la unión de todos los conjuntos cilíndricos E_l que fijan el lugar j_m por el valor a_m y sea F la unión del resto de los conjuntos cilíndricos. Entonces,

$$\begin{aligned}\mu\left(\pi_k(\bigcup E_n)\right) &= \mu\left(\pi_k(F \cup \bigcup_s \bigcup_{J,a} F_a^J)\right) = \mu\left(\pi_k(F) \cup \bigcup_s \bigcup_{J,a} \pi_k(F_a^J)\right) = \\ &\leq \mu(\pi_k(F)) + \sum_s \sum_{J,a} \mu(\pi_k(F_a^J)) = \mu(F) + \sum_s \sum_{J,a} c_{k,J,a}\mu(F_a^J) \leq \\ &\leq (1 + \sum_s \sum_{J,a} c_{k,J,a})\mu\left(\bigcup E_l\right)\end{aligned}$$

Como $\sum_s \sum_{J,a} c_{k,J,a}$ es finita, esta última expresión es arbitrariamente pequeña.

Mediante un argumento similar, cambiando los roles de π_k por π_k^{-1}, podemos mostrar que si E es un conjunto medible tal que $\mu(E) = 0$ entonces $\mu(\pi_k^{-1}E) = 0$. $\square$

Ejemplo 3.16. **La medida de Lebesgue**

Consideremos la medida de Lebesgue en el intervalo $[0,1]$, ésta se puede ver como una medida producto. Sea $n = \infty$ y X el conjunto de sucesiones $x = (x_1, x_2, \dots)$, con $x_k \in \{0,1\}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. La aplicación

$$\begin{array}{rl} X \to & [0,1] \\ x \mapsto & \sum_{k=1}^{\infty} x_k 2^{-k} \end{array}$$

es una correspondencia uno a uno, salvo por un conjunto de medida nula, entre X y el intervalo $[0,1]$. Sea μ la medida producto dada por $\prod_k \mu$, donde $\mu(a_j) = \frac{1}{2}$, si $a_j \in \{0,1\}$. Por proposición 3.15 esta medida es π-cuasi-invariante, para toda acción π de $\mathbb{B}_\infty$ en $X \approx [0,1]$ con la siguiente propiedad: cada π_k actúa cambiando sólo finitas coordenadas x_j de x.

Golodet probó que μ es la medida de Haar de X, donde X se considera un grupo con la suma componente a componente módulo dos (ver [**G**] p.15). Por lo tanto μ corresponde a la medida de Lebesgue en el intervalo $[0,1]$, bajo esta aplicación.

5.3. Medidas ergódicas. Comencemos con la definición.

Definición 3.17. Sea μ una medida π-cuasi-invariante. Se dice que μ es π-*ergódica* si cada conjunto invariante por la acción π tiene medida nula o su complemento tiene medida nula.

Equivalentemente (ver [**J3**] Proposition 11.1.2, o [**G**] p. 15) si toda función medible esencialmente acotada $\varphi(x)$ definida sobre X que es invariante por la acción π (es decir $\varphi(x) = \varphi(\pi_k(x))$ para casi todo $x \in X$ y todo k), es constante para casi todo $x \in X$.

Dos medidas μ y μ' definidas sobre la σ-álgebra de subconjuntos de X, con $\mu(X) = \mu'(X) = 1$, se dicen *disjuntas* si existe un conjunto medible F tal que $\mu(F) = 1$ y $\mu'(F) = 0$. Se dice que μ es *absolutamente continua respecto a* μ' si $\mu'(E) = 0$ implica que $\mu(E) = 0$.

Proposición 3.18. *Sean μ y μ' dos medidas sobre X π-ergódicas. Si μ' es absolutamente continua respecto a μ, entonces μ y μ' son equivalentes. Si no son equivalentes, entonces son disjuntas.*

Demostración. La segunda afirmación implica la primera. Supongamos entonces que μ y μ' no son equivalentes, existe entonces un conjunto medible E tal que $\mu(E) > 0$ y $\mu'(E) = 0$. Como μ' es π-cuasi-invariante, $\mu'(\pi(\tau)(E)) = 0$ para todo $\tau \in \mathbb{B}_n$. Por lo tanto $F = \bigcup_{\tau \in \mathbb{B}_n} \pi(\tau)(E)$ es un conjunto medible y $\mu'(F) = 0$.

Por otro lado $\mu(F) \geq \mu(E) > 0$ y ya que F es invariante por la acción π y μ es ergódica, tenemos que $\mu(F) = 1 = \mu(X)$. Luego μ y μ' son disjuntas. $\square$

Observación 3.19. De ésta proposición se deduce fácilmente que toda medida discreta π-cuasi-invariante y π-ergódica, está concentrada en la órbita de un elemento $x \in X$, es decir los únicos puntos de X de medida no nula son los que están en la órbita de x.

Observación 3.20. Se sabe que la medida de Lebesgue definida en $X = \{(x_1, x_2, \dots) : x_i = 0 \text{ ó } 1\}$ según el ejemplo 3.16 es π-ergódica para la acción π que permuta las coordenadas de X.

6. Irreducibilidad

En ésta sección trataremos de analizar algunas condiciones para que una representación asociada a una 5-upla (X, π, μ, ν, U) sea irreducible.

Proposición 3.21. *Sea $\phi_{(X,\pi,\mu,\nu,U)}$ una representación de $\mathbb{B}_n$, $n \leq \infty$, que satisface las hipótesis del teorema 3.8 y tal que ϕ_k es un operador autoadjunto para todo k. Si X es finito, la* *medida μ es π-ergódica y $\nu(x) = 1$ para casi todo x, entonces la representación es irreducible. La dimensión de ϕ es igual a la cantidad de puntos de X de medida no nula.*

Demostración. Sea $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$ un subespacio invariante, entonces por corolario 3.11, $\widetilde{\phi} := P_{\mathcal{K}}\phi P_{\mathcal{K}} = \phi_{(X_{\mathcal{K}},\pi_{\mathcal{K}},\mu_{\mathcal{K}},\nu_{\mathcal{K}},P_{\mathcal{K}}UP_{\mathcal{K}})}$, donde $X_{\mathcal{K}} \subseteq X$, $\mu_{\mathcal{K}} = \mu_{|X_{\mathcal{K}}}$ y $\nu_{\mathcal{K}}(x) \leq \nu(x)$. Pero podemos suponer que $X = X_{\mathcal{K}}$ definiendo $\nu_{\mathcal{K}}(x) = 0$, si $x \notin X_{\mathcal{K}}$.

Como $\nu(x) = 1$ para casi todo $x \in X$ y $\mathcal{K}_x \subseteq \mathcal{H}_x$, entonces $\mathcal{K}_x = 0$ ó $\mathcal{K}_x = \mathcal{H}_x$, para $x \in X$. Ahora, sea $A = \{x \in X_{\mathcal{K}} : \mathcal{K}_x \neq 0\} = \{x \in X : \nu_{\mathcal{K}}(x) = 1\} \subseteq X$. Este conjunto es medible ya que $\nu_{\mathcal{K}}$ es medible. Más aún, es un conjunto invariante por π, ya que $\nu_{\mathcal{K}}$ es π-invariante. Como μ es π-ergódica, $\mu(A) = 0$ ó $\mu(A) = 1$. Entonces $\mathcal{K} = 0$ ó $\mathcal{K} = \mathcal{H}$.

La dimensión de la representación es claramente igual a la cantidad de puntos de X de medida no nula. □

Notemos que si $U(\tau_k, x) = c$ para todo $x \in X$ y para todo k, entonces la representación $\phi = \phi_{(X,\pi,\mu,\nu,U)}$ no satisface las hipótesis del teorema 3.8. En efecto, $(\phi_k\phi_k^* f)(x) = c\overline{c}f(x)$, luego el cardinal de I_k no es mayor que 1. Pero es una representación de $\mathbb{B}_n$. Notemos que aún si μ es una medida π-ergódica discreta, ϕ no es irreducible pues $f = \sum_{x\in X} \delta_x$ genera un subespacio invariante de $\mathcal{H} = \int_X \mathbb{C} d\mu(x)$, donde $\delta_x(y) = 1$ si $y = x$ y $\delta_x(y) = 0$ si $y \neq x$.

Podemos obtener otras representaciones irreducibles de $\mathbb{B}_n$.

Proposición 3.22. *Sea ρ una representación autoadjunta irreducible de $\mathbb{B}_n$ sobre un espacio vectorial V de dimensión m, con $1 < m < \infty$. Sea (X, π, μ, ν, U) una 5-upla que satisface las condiciones del teorema 3.8, donde X es finito, μ es una medida π-ergódica discreta, $\nu(x) = m$ y $U(\tau_k, x) := \rho(\tau_k)$ para casi todo $x \in X$. Entonces $\phi_{(X,\pi,\mu,\nu,U)}$ es una representación irreducible de $\mathbb{B}_n$ de dimensión $|Y| \dim(V)$, donde $Y = \{x \in X : \mu(x) \neq 0\}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{K}$ un subespacio invariante de $\mathcal{H} := \int_X V d\mu(x)$. Como $\phi_{(X,\pi,\mu,\nu,U)}$ es autoadjunta, por corolario 3.11, $\mathcal{K} = \int_{X_{\mathcal{K}}} \mathcal{K}_x d\mu_{\mathcal{K}}(x)$, donde $X_{\mathcal{K}} \subset X$, $\mathcal{K}_x$ es un subespacio de V y $\mu_{\mathcal{K}} = \mu_{|X_{\mathcal{K}}}$. Dado $y \in X_{\mathcal{K}}$, tenemos que ver que $\mathcal{K}_y$ es un subespacio invariante por ρ. Sea $v \in \mathcal{K}_y$ un vector no nulo, veamos que para todo k, $1 \leq k \leq n-1$, $\rho(\tau_k)v \in \mathcal{K}_y$. Para cada k, sea $f_k \in \mathcal{K}$ definida por

$$f_k(x) = \begin{cases} v & \text{si } \pi_k x = y \\ 0 & \text{si } \pi_k x \neq y \end{cases}$$

Entonces

$$(\phi_k f_k)(x) = U(\tau_k, \pi_k^{-1}x) f_k(\pi_k^{-1}x) = \begin{cases} \rho(\tau_k)v & \text{si } \pi_k\pi_k^{-1}x = y \\ 0 & \text{si } \pi_k\pi_k^{-1}x \neq y \end{cases}$$

Pero $(\phi_k f)(x) \in \mathcal{K}_x$ para casi todo x ya que $\mathcal{K}$ es invariante. Por lo tanto, $\rho(\tau_k)v \in \mathcal{K}_y$ como queríamos. Luego $\mathcal{K}_x$ es ρ-invariante para casi todo $x \in X_{\mathcal{K}}$, entonces $\mathcal{K}_x = 0$ ó V ya que ρ es irreducible. Ahora, sea $A = \{x \in X_{\mathcal{K}} : \mathcal{K}_x \neq 0\} = \{x \in X : \nu_{\mathcal{K}}(x) = m\} \subseteq X$. Este conjunto es medible pues $\nu_{\mathcal{K}}$ lo es. Más aún A es invariante por π, ya que $\nu_{\mathcal{K}}$ es π-invariante. Como μ es π-ergódica, $\mu(A) = 0$ ó $\mu(A) = 1$. Entonces $\mathcal{K} = 0$ ó $\mathcal{K} = \mathcal{H}$. □

Una de las ventajas más importantes de esta parametrización es que nos permite dar ejemplos explícitos de representaciones irreducibles de dimensión arbitrariamente grande. Más específicamente, la proposición anterior nos permite construir, a partir de una representación irreducible fija, una sucesión de representaciones irreducibles de dimensión estrictamente creciente.

Teorema 3.23. *Para cualquier entero positivo M, existe una representación irreducible de $\mathbb{B}_n$ de dimensión finita mayor que M.*

Demostración. Sea ϕ_m la representación definida antes del teorema 3.14. Sea $(X_1, \pi_1, \mu_1, \nu_1, U_1)$ una 5-upla donde X_1 es el conjunto de n-uplas de ceros y unos, π es la acción dada por permutación de las coordenadas de X_1, μ es la medida discreta concentrada en la órbita de $z = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0) \in X_1$ que tiene m unos y $n - m$ ceros, ν_1 es constante e igual a $\dim(V_m) = \binom{n}{m}$ y $U(\tau_k, x) = \phi_m(\tau_k)$. Entonces, por el teorema anterior $\phi^1 = \phi_{(X_1,\pi_1,\mu_1,\nu_1,U_1)}$ es una representación irreducible de $\mathbb{B}_n$ de dimensión

$$|\pi(\mathbb{B}_n)z| \binom{n}{m} = \binom{n}{m}^2$$

Si $\binom{n}{m}^2 > M$, hemos obtenido la representación deseada. Si no, repetimos el proceso. Sea $(X_2, \pi_2, \mu_2, \nu_2, U_2)$ tal que $X_2 := X_1$, $\pi_2 := \pi_1$, $\mu_2 = \mu_1$, $\nu_2(x) = \binom{n}{m}^2$ y $U_2(\tau_k, x) = \phi^1(\tau_k)$. Así, la dimensión de ϕ^2 es $\binom{n}{m}^3$.

Repitiendo este proceso, existe $r \geq 2$ tal que $\binom{n}{m}^r > M$. Luego, ϕ^{r-1} es la representación buscada. □

Si X es un conjunto finito, es equivalente tomar una medida ergódica en X que una acción transitiva en X. Se sabe que acciones transitivas de un grupo G sobre un conjunto X están en correspondencia con subgrupos H que fijan un elemento x_0 de X. Una pregunta que surge naturalmente es si la representación construida en la proposición 3.22 es la Representación Inducida de la representación ρ restringida a H. En general, la respuesta es no. Antes de mostrar un ejemplo donde las construcciones son diferentes, recordemos que el soporte del carácter de una representación inducida está concentrada en H.

Sea $m > 4$ y sea $\rho = \phi_m$ la representación irreducible de $\mathbb{B}_n$ dada en el teorema 3.14. Sea $X = X_m$ el conjunto de n-uplas con m unos y $n - m$ ceros. La acción π de permutar las coordenadas de X es transitiva. Sea $\phi = \phi_{(X,\pi,\mu,\nu,U)}$ la representación construida en el teorema 3.22 con los parámetros anteriores y donde $\mu(x) = 1$ y $\nu(x) = \binom{n}{m}$ para todo $x \in X$. Finalmente, sea χ el carácter de esta representación. Si H es el subgrupo de $\mathbb{B}_n$ que fija $x_0 = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$, entonces $\chi(\tau_m) > \frac{(n-2)!}{(m-2)!(m-n)!} > 1 \neq 0$ pero τ_m no pertenece a H. Por lo tanto ϕ no es una representación inducida.

Capítulo 4

Representaciones factor y álgebras hiperfinitas

En este capítulo mostraremos algunas condiciones necesarias sobre la 5-upla (X, π, μ, ν, U) para que su representación asociada sea una representación factor. Además construiremos factores de tipo I y álgebras hiperfinitas a partir de representaciones de $\mathbb{B}_n$. Las referencias principales usadas para las definiciones y resultados previos son [**JS**] y [**T**].

DEFINICIÓN 4.1. Una representación ϕ se dice *representación factor* si el álgebra de von Neumann M generada por el conjunto $\{\phi_k\}_k$ es un factor.

Si M es el álgebra de von Neumann generada por una representación irreducible, entonces por el Lema de Schur, $M' = \mathbb{C}1$. Así $Z(M) = M' \cap M = \mathbb{C}1$ y resulta ser un factor.

PROPOSICIÓN 4.2. *Si $\phi_{(X,\pi,\mu,\nu,U)}$ es una representación factor que satisface las hipótesis del teorema 3.8, entonces μ es π-ergódica.*

DEMOSTRACIÓN. Sea φ una función medible esencialmente acotada tal que $\varphi(x) = \varphi(\pi_k(x))$. Por 3.7 tenemos que

$$\begin{aligned}
(\phi_k M_\varphi f)(x) = & \ (M_{\varphi\circ\pi_k^{-1}}\phi_k f)(x) = \varphi(\pi_k^{-1}x)(\phi_k f)(x) \\
= & \ \varphi(\pi_k^{-1}x)U(\tau_k, \pi_k^{-1}x)f(\pi_k^{-1}x) \\
= & \ \varphi(x)U(\tau_k, \pi_k^{-1}x)f(\pi_k^{-1}x) \\
= & \ (M_\varphi \phi_k f)(x)
\end{aligned}$$

Entonces $M_\varphi \in M'$. Más aún al centro de M'. Pero como M es un factor, también lo es M'. Esto significa que $M_\varphi = \lambda 1_{\mathcal{H}}$, y $\varphi(x) = \lambda$ para casi todo $x \in X$. □

COROLARIO 4.3. *Si $\phi := \phi_{(X,\pi,\mu,\nu,U)}$ es una representación factor y ν es una función medible esencialmente acotada, entonces ν es constante.*

DEMOSTRACIÓN. Como ϕ es una representación factor μ es π-ergódica. Esto significa que toda función π-invariante medible y esencialmente acotada es constante. Luego así es ν. □

Notemos que, bajo las condiciones del corolario, $\nu(x) = a < \infty$ para todo $x \in X$.

1. Construcción de factores de tipo I

En lo que resta de esta sección fijamos la siguiente notación, $\phi = \phi_{(X,\pi,\mu,\nu,U)}$ y M es el álgebra de von Neumann generada por los elementos de la representación ϕ, es decir $M = (\{\phi_k, \phi_k^* : 1 \leq k \leq n-1\})''$, donde $n < \infty$.

TEOREMA 4.4. *Si $\phi = \phi_{(X,\pi,\mu,\nu,U)}$ es una representación autoadjunta de $\mathbb{B}_n$, $n < \infty$, tal que $\nu \equiv 1$ y μ es una medida π-ergódica discreta entonces M es un factor de tipo I. Más aún, si μ es la medida concentrada en la órbita de $y \in X$ entonces M es un factor de tipo I_m, donde m es el cardinal de la órbita y.*

DEMOSTRACIÓN. Por proposición 3.21, $\phi_{(X,\pi,\mu,\nu,U)}$ es una representación irreducible y por lo tanto es una representación factor. Debemos ver que M tiene una proyección minimal. En efecto, $P := \chi_{\{x\}}$ es una proyección minimal para todo $x \in X$ tal que $\mu(x) > 0$. Supongamos que $Q \leq P$ entonces $\mathrm{Im}(Q) \subseteq \mathrm{Im}(P)$. Pero $\dim(\mathrm{Im}\ \mathrm{P}) = 1$, luego $\dim(\mathrm{Im}\ \mathrm{Q}) = 1$ ó 0. Por lo tanto, $Q = P$ o $Q = 0$. Así M es un factor de tipo I_m si m es la cardinalidad de la órbita donde la medida está concentrada. $\square$

2. Construcción de álgebras hiperfinitas

A lo largo de esta sección fijaremos la siguiente notación, $\phi = \phi_{(X,\pi,\mu,\nu,U)}$, donde

I. $X = \{(x_1, x_2, \dots) : x_i = 0 \text{ ó } 1\}$;
II. π permuta las coordenadas de X;
III. μ es la medida de Lebesgue vista como medida producto (ver ejemplo 3.16);
IV. ν es constante e igual a 1;
V. Dado $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0, 1, -1$, sea U el cociclo definido por $U(\tau_k, x) = \chi_{F_k} + t\chi_{F_k'}$, donde F_k es el subconjunto de X que tiene los lugares k y $k+1$ iguales y $F_k' = X - F_k$

Sea M el álgebra de von Neumann generada por $\{\phi_k\}_k$, entonces M es un álgebra hiperfinita. En efecto veremos a continuación que $\phi(\mathbb{B}_n)|_{\mathcal{K}_n}$ es una subálgebra de dimensión finita de M, donde $\mathcal{K}_n$ es un subespacio apropiado de $\mathcal{H}$ y $\overline{\bigcup_n \phi(\mathbb{B}_n)|_{\mathcal{K}_n}} = M$.

Sea $n > 1$. El siguiente conjunto

$$\beta = \{\chi_{E_1(a_1)\cap\cdots\cap E_n(a_n)} : a_i = 0 \text{ ó } 1\};$$

formado por funciones características sobre los conjuntos cilíndricos que fijan los primeros n lugares es un conjunto ortogonal de $\mathcal{H}$. Sea $\mathcal{K}$ el subespacio de $\mathcal{H}$ generado por β. Este subespacio es invariante por $\phi(\mathbb{B}_n)$, en efecto dado k, $1 \leq k \leq n-1$,

$$\begin{aligned}(\phi_k \chi_{E_1(a_1)\cap\cdots\cap E_n(a_n)})(x) &= ((\chi_{F_k} + t\chi_{F_k'})(\pi_k x))(\chi_{E_1(a_1)\cap\cdots\cap E_n(a_n)}(\pi_k x)) \\ &= ((\chi_{F_k} + t\chi_{F_k'})(x))(\chi_{E_1(a_1)\cap\cdots\cap E_k(a_{k+1})\cap E_{k+1}(a_k)\cap\cdots\cap E_n(a_n)}(x))\end{aligned}$$

Sea B_n el álgebra de von Neumann generada por $\phi(\mathbb{B}_n)$ actuando en $\mathcal{K}$. Es un álgebra de dimensión finita, luego se descompone en suma de álgebras de matrices donde cada sumando es un factor. Es fácil ver que esta representación está parametrizada por la 5-upla $(X_n, \pi|_{\mathbb{B}_n}, \mu', \nu|_{X_n}, U)$, donde X_n es el conjunto de n-uplas de ceros y unos, $\pi|_{\mathbb{B}_n}$ es la acción de permutar las coordenadas de X_n, $\mu'(x) = \mu(E_1(x_1) \cap \cdots \cap E_n(x_n))$ y los demás parámetros son los mismos que definen a ϕ restringidos a puntos de X_n.

Es claro que $\mu|_{X_n}$ no es π-ergódica, en efecto X_n se parte en $n+1$ órbitas disjuntas y por lo tanto B_n se descompone en la suma directa de $n+1$ factores. Cada órbita de X_n está determinada por la cantidad de unos que tiene un elemento cualquiera en la órbita. Luego, la descomposición es la siguiente

$$B_n = \bigoplus_{j=0}^{n} M\left(\binom{n}{j}\right)$$

donde $M\left(\binom{n}{j}\right)$ es el álgebra de matrices de tamaño el número combinatorio $\binom{n}{j}$.

Es claro que M es el límite inductivo de la sucesión de álgebras de dimensión finita B_n.

Para $n > m > 2$, sea $A_{n,m}$ el álgebra de von Neumann generada por $\{\phi_m, \phi_{m+1}, \ldots, \phi_{n-1}\}$ actuando en $\mathcal{K}$. Siguiendo el razonamiento anterior tenemos la siguiente descomposición en factores de tipo I,

$$A_{n,m} = \bigoplus_{i=0}^{n-m+1} M\left(\binom{n-m+1}{i}\right)$$

Tomando el límite inductivo de $A_{n,m}$ obtenemos una subálgebra hiperfinita N_m de M. Queremos determinar si para cada $m > 1$, las subálgebras obtenidas son isomorfas. Un invariante que las clasifica salvo conjugación por automorfismos es el *conmutador relativo* definido por $N'_m \cap M$. En este caso

$$N'_m \cap M = (\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{m-2}\})''$$

El lado derecho representa el álgebra de von Neumann generada por $\mathbb{B}_{m-1}$. Por lo tanto, para cada $m > 2$ obtenemos subálgebras no isomorfas.

Podemos calcular además la matriz de la inclusión para $A_{n,m} \subset B_n$.

Llamaremos $A_i = M\left(\left(\begin{array}{c} n-m+1 \\ i \end{array}\right)\right)$ y $\widetilde{B}_j = M\left(\left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array}\right)\right)$.

Debemos determinar como actúa A_i en $\widetilde{B}_j$. Recordemos que tanto A_i como $\widetilde{B}_j$ están determinados por la órbita de un elemento en X. El elemento correspondiente a $\widetilde{B}_j$ tiene j unos. Si $j < m$ entonces A_i actúa en $\widetilde{B}_j$ para todo i tal que $0 \leq i \leq j$. Mientras que si $m \leq j \leq n$ entonces A_i actúa en $\widetilde{B}_j$ para todo $j-m+1 \leq i \leq n-m+1$. Además la cantidad de veces que aparece el factor A_i en $\widetilde{B}_j$ es igual a la cantidad de elementos de X con j unos de los cuales i unos están ubicados entre los lugares m y n. Así la matriz tiene la siguiente forma,

$$G_n = \begin{bmatrix} \frac{(m-1)!}{0!(m-1)!} & \frac{(m-1)!}{1!(m-2)!} & & \cdots & \frac{(m-1)!}{(m-1)!0!} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{(m-1)!}{0!(m-1)!} & \frac{(m-1)!}{1!(m-2)!} & \cdots & & \frac{(m-1)!}{(m-1)!0!} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & \frac{(m-1)!}{0!(m-1)!} & \frac{(m-1)!}{1!(m-2)!} & & \cdots & \frac{(m-1)!}{(m-1)!0!} \end{bmatrix}$$

Para concluir este capítulo haremos algunas observaciones sobre factores hiperfinitos de tipo I_∞. Vimos que la representación estandar se puede generalizar a $\mathbb{B}_\infty$. En el caso que esta representación sea irreducible, M sería un factor de tipo I_∞. Siguiendo el razonamiento anterior para construir la sucesión B_n vemos que la representación estandar de $\mathbb{B}_\infty$ es aproximable por factores de tipo I_n, ya que en este caso B_n es el álgebra de von Neumann generada por la representación estandar de $\mathbb{B}_n$. Luego M sería un factor hiperfinito de tipo I_∞. Esta es otra ventaja de nuestra construcción de representaciones, podemos fácilmente obtener álgebras hiperfinitas.

Capítulo 5

Invariantes de nudos

En este capítulo estudiaremos la conexión entre nudos y los grupos de trenzas. Definiremos un invariante de nudos usando algunos resultados de un trabajo de Funar, [**Fu**]. No es tarea sencilla determinar las ventajas y desventajas de este invariante, según conversaciones con V. Jones este invariante podría ser un caso particular del de Kauffman. Como referencia para los resultados preliminares sugerimos [**Ma**] y [**KT**].

1. Trazas de Markov e invariantes

Definición 5.1. Un *nudo* es un imbedding suave del círculo S^1 en $\mathbb{R}^3$. Un *link* es un embedding de una cantidad finita de círculos disjuntos en $\mathbb{R}^3$.

Dos links L y L' se dicen *isotópicos* si L puede deformarse en L' mediante una *isotopía* de $\mathbb{R}^3$ en si mismo. Una isotopía F de $\mathbb{R}^3$ es una familia de homeomorfismos $\{F_s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\}_{s\in[0,1]}$ tales que $F_0 = L$, $F_1 = L'$ y la aplicación

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 \times [0,1] &\to \mathbb{R}^3 \\ (x,s) &\mapsto F_s(x) \end{aligned}$$

es continua.

Un problema que se presenta inmediatamente es determinar si dos links dados son isotópicos o no. Este problema no es sencillo y es aquí donde aparecen los grupos de trenzas. Dado τ un elemento de $\mathbb{B}_n$, le podemos asignar un link que llamaremos la *clausura* de la trenza τ. Esta clausura la obtenemos de la siguiente manera, consideramos la trenza geométrica en $\mathbb{R}^3$ y conectamos los puntos del plano superior con los correspondientes puntos del plano inferior, ver figura 1.

Toda trenza clausurada posee una orientación natural desde el plano superior al plano inferior. De ahora en más consideraremos links orientados. El siguiente resultado fue probado por primera vez por Alexander.

Teorema 5.2 (Alexander, [**Al**]). *Todo link puede ser realizado como la clausura de una trenza.*

Es claro que trenzas isotrópicas originan links isotópicos. Pero el recíproco no es cierto en general. El siguiente teorema que fue obtenido por Markov establece condiciones necesarias y suficientes para determinar cuando dos trenzas tienen clausuras isotópicas.

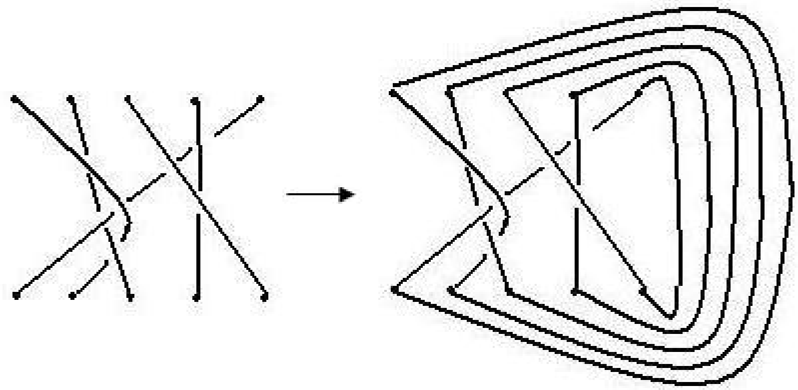

Figura 1. Clausura de una trenza.

Teorema 5.3 (A. Markov, [**Mar**]). *La clausura de las trenzas τ_1 y τ_2 son links isotópicos si y sólamente si τ_2 puede obtenerse de τ_1 mediante una sucesión de los siguientes movimientos, llamados de Markov,*

i. *Primer movimiento de Markov: conjugar b por una trenza arbitraria a con la misma cantidad de cuerdas que b, es decir $b \to aba^{-1}$ con $a, b \in \mathbb{B}_n$,*
ii. *Segundo movimiento de Markov: reemplazar $b \in \mathbb{B}_n \subset \mathbb{B}_{n+1}$ por $b\tau_n^{\pm 1}$,*
iii. *Tercer movimiento de Markov: el movimiento inverso al anterior pasando de una trenza en $\mathbb{B}_{n+1}$ a una en $\mathbb{B}_n$.*

Una demostración de este teorema también puede encontrarse en [**Ma**]. Este resultado, junto con el teorema de Alexander, nos permite trasladar el problema de determinar si dos links en $\mathbb{R}^3$ son isotópicos al problema de establecer si dos trenzas son equivalentes mediante los movimientos de Markov. Es así como se pueden construir invariantes de links orientados a través de funciones definidas en $\mathbb{B}_\infty$ que respeten los movimientos de Markov.

Definición 5.4. Sea ρ una representación de $\mathbb{B}_\infty$ sobre un espacio vectorial V. Una *traza de Markov* sobre $\mathbb{B}_\infty$ es una traza normalizada que satisface la siguiente condición: existen $\eta, \eta' \in \mathbb{C}$ tales que para todo n y $a \in \mathbb{B}_n$,

$$tr(\rho(a)\rho(\tau_n)) = \eta tr(\rho(a)) \qquad \text{y} \qquad tr(\rho(a)\rho(\tau_n)^{-1}) = \eta' tr(\rho(a))$$

Concluimos este trabajo definiendo un invariante de nudos utilizando los resultados obtenidos por Funar para álgebras de Hecke cúbicas (ver [**Fu**]).

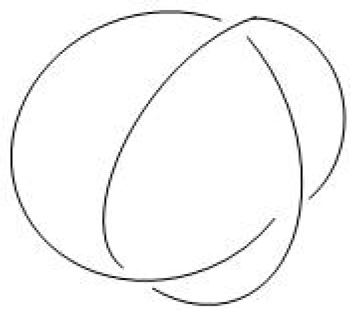

FIGURA 2. El nudo trébol

Recordemos que las álgebras de Hecke clásicas son cocientes del álgebra del grupo de trenzas $\mathbb{B}_n$ por una relación de segundo grado $x^2 = (q-1)x + q$ (ver sección 2.5 del capítulo 1). Un álgebra de Hecke cúbica es un cociente del álgebra de grupo de $\mathbb{B}_n$ por una relación de tercer grado.

Consideremos la representación definida en la sección 2 del capítulo 4. Los operadores ϕ_k dados por ella tienen tres autovalores, $1, t$ y $-t$. Por lo tanto satisfacen la siguiente ecuación de tercer grado,

$$x^3 - x^2 - t^2x + t^2 = 0 \tag{5.1}$$

Es decir, generan un álgebra de Hecke cúbica. Funar dió condiciones para la existencia de una traza de Markov en estas álgebras y definió un invariante polinomial allí, ver proposición 3.6 y comentario después de corolario 4.6 en [**Fu**].

En nuestro caso particular, esos resultados originan el siguiente invariante polinomial

$$Y_L(t,\eta) = \left(\frac{1}{\eta\eta'}\right)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\eta'}{\eta}\right)^{\frac{e}{2}} T(\phi(\tau))$$

donde e es la suma de los exponentes en τ, L es la clausura de τ, η y η' satisfacen la relación $\eta^2 - \eta = t^2 + t^2\eta'$, es decir $\frac{\eta'}{\eta} = t^{-2}(\eta - 1) - \eta^{-1}$.

Como ejemplo calculemos Y_L para $L = L_1$ el nudo "trébol" y $L = L_2$ el "trébol de 5 puntas". L_1 es la clausura de τ_1^3 en $\mathbb{B}_2$ mientras que L_2 es la clausura de τ_1^5.

Calculemos primero la traza T en estos ejemplos. Para ello usaremos que T es traza de Markov y que los operadores ϕ_k satisfacen 5.1.

$$T(\phi_1^3) = T(\phi_1^2 + t^2\phi_1 - t^2) = T(\phi_1 + t^2 - t^2\phi_1^{-1} + t^2\phi_1 - t^2) = \eta(1+t^2) - t^2\eta'$$

Entonces, tenemos que

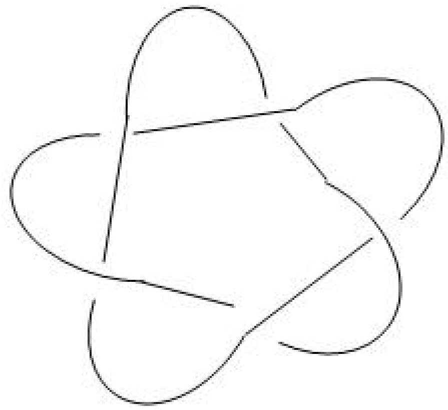

Figura 3. El trébol de 5 puntas

$$\begin{aligned} Y_{L_1}(t,\eta) &= \left(\tfrac{1}{\eta\eta'}\right)^{\frac{2-1}{2}} \left(\tfrac{\eta'}{\eta}\right)^{\frac{3}{2}} T(\phi_1^3) = \tfrac{\eta'}{\eta}(1+t^2) - \left(\tfrac{\eta'}{\eta}\right)^2 t^2 \\ &= -t^{-2}\eta^2 + (3t^{-2}+1)\eta - (2t^{-2}+1) - (3+t^2)\eta^{-1} - t^2\eta^{-2} \end{aligned}$$

Consideremos el caso L_2 el trébol de 5 puntas. Notemos que

$$\phi_1^5 = \phi_1^3\phi_1^2 = (\phi_1(1+t^2) - t^2\phi_1^{-1})(\phi_1 + t^2 - t^2\phi_1^{-1}) = \phi_1(1+t^2+t^4) - t^2(1+t^2)\phi_1^{-1}$$

Por lo tanto,

$$T(\phi_1^5) = \eta(1+t^2+t^4) - \eta' t^2(1+t^2)$$

Y así,

$$Y_{L_2}(t,\eta) = \left(\frac{1}{\eta\eta'}\right)^{\frac{2-1}{2}} \left(\frac{\eta'}{\eta}\right)^{\frac{5}{2}} T(\phi_1^5) = (1+t^2+t^4)\left(\frac{\eta'}{\eta}\right)^2 - t^2(1+t^2)\left(\frac{\eta'}{\eta}\right)^3$$

Reemplazando $\frac{\eta'}{\eta}$ por $t^{-2}(\eta-1)-\eta^{-1}$, tenemos que

$$\begin{aligned} Y_{L_2}(t,\eta) &= -t^{-2}(1+t^{-4})\eta^3 + (4t^{-4}+4t^{-2}+1)\eta^2 + (-5t^{-4}-2t^{-2}+1)\eta + \\ &\quad +(2t^{-4}-6t^{-2}-7-2t^2) + (5t^{-2}+2-t^2)\eta^{-1} + (4+4t^2+t^4)\eta^{-2} + t^2(1+t^2)\eta^{-3} \end{aligned}$$

Jones y Ocneanu fueron precursores en obtener invariantes de links a través de trazas de Markov. Estos han sido obtenidos a partir de representaciones del álgebra de Hecke $H_\infty(q)$. Por lo tanto en esos casos, $\phi(\tau_k)$ tiene dos autovalores. En nuestro caso, Y es un invariante que se obtiene a través de una representación de $\mathbb{B}_\infty$ donde ϕ_k tiene tres autovalores. De acuerdo a conversaciones con V. Jones, este invariante podría ser un caso particular del invariante de Kauffman.

Bibliografía

[Al] J. Alexander, A lemma on systems of knotted curves, Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 19 (1923), 93-95.

[Ar1] E. Artin, Theorie der Zöpfe. Abh. Math, Sem. Hamburg. Univ. 4 (1926), pp. 47-72.

[Ar2] E. Artin, Theory of braids, Ann. of Math. (2) 48 (1947), pp. 101-126.

[AS] N. Andruskiewitsch, H.J. Schneider, Pointed Hopf Algebras, New Directions in Hopf Algebras, Vol 43, Math. Sc. Research Inst. Publications, (2002).

[Bi1] S. Bigelow, The Burau representation is not faithful for $n = 5$, Geometry and Topology 3(1999) 397-404.

[Bi2] S. Bigelow, Braid groups are linear, JAMS 2001.

[Bu] W. Burau, Über Zopfgruppen und gleichsinnig verdrillte Verkettungen, Abh. Math. Sem. Hamburg 11 (1936) 179-186.

[C] W.L. Chow, On the algebraical Braid Group, Annals of Math. 49 (1948), 654-658.

[Co] A. Connes, Classification of injective factors, Acta Math. 104, (1976) 73-115.

[Con] J. Conway, An enumeration of knots and links, Computational Problems in Abstrac Algebra, Pergamon Press, New York (1970), 329-358.

[De] P. Dehornoy, Braid groups and left distributive operations, Trans. Amer. Math. Soc. 345 (1994), 115-150.

[D] V.G. Drinfeld. Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation. Dokl. Akad, Nauk SSSR 283, No 5 (1985), 1060-1064. English trmsl.: Soviet Math. Dokl. 32 (1985). 254-258.

[EG1] C. M. Egea, E. Galina, Some Irreducible Representations of the Braid Group $\mathbb{B}_n$ of dimension greater that n, J. Knot Theory Ramifications 19, No 4 (2009), 539-546.

[EG2] C. M. Egea, E. Galina, Self-adjoint Representations of Braid Groups, ArXiv math.RT/0908.4423v1 (2009).

[EG3] C. M. Egea, E. Galina, Representations of Braid Group and Subfactors, preprint.

[F] E. Formanek, Braid Group Representations of Low Degree, Proc. london Mayh. Soc. 73 (1996), 279-322.

[Fu] L. Funar, On the Quotients of Cubic Hecke Algebras, Commun. Math. Phys. 173 (1995), 513-558.

[FYHLMO] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. Lickorish, K. Millet, y A. Ocneanu, A new polynomial invariant of knots and links, Bull. AMS 12 (1985), 183-312.

[G] V. Golodets, Classification of representations on the anti-commutation relations, Russ. Math. Surv. 24(1969), 1-63.

[GKS] E. Galina, A. Kaplan, L. Saal, Spinor Types in Infinite Dimensions, Journal of Lie Theory 15 (2005), 457-497.

[GW1] L. Gàrding, A. Wightman, Representations of the commutations relations, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 40 (1954), 622-626.

[GW2] L. Gàrding, A. Wightman, Representations of de anti-commutation relations, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 40 (1954), 617S-621.

[Haa] U. Haagerup, Connes' bicentraliser problem and the uniqueness of the injective factor of type III_1, Acta Math 158 (1987), 95-148.

[Hal] P. R. Halmos, Measure Theory, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, (1974).

[J1] V. F. R. Jones, Index for subfactors, Invent. Math. 72 (1983), 1-25.

[J2] V. F. R. Jones, Subfactors and Knots, CBMS of the AMS, 80 (1988).

[J3] V. F. R. Jones, Von Neumann Algebras, Notas de un curso (2003).

[J4] V. F. R. Jones, Hecke algebras representations of Braid Groups and Link polinomials, Ann. of Math. 126 (1987) 335-388.

[J5] V. F. R. Jones, A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras, Bull. AMS 12 (1985), 103-111.

[JS] V. F. R. Jones, V. S. Sunder, Introduction to subfactors, London Math. Society Lecture Note Series 234 (1997).

[K] D. Krammer, Braid groups are linear. Ann. Math. (2002).

[KT] C. Kassel, V. Turaev, Braid Groups, Springer (2008).

[KR] R. Kadison, J. Ringrose, Fundamentals of the Theory of Operator Algebras I y II, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 16, AMS, (1997).

[L] C. Levaillant, Irreducibility of the BMW algebra of type A_{n-1}, PhD thesis (2008), California Institute of Techonology.

[LP] D. D. Long, M. Paton, The Burau representation is not faithful for n = 6, Topology 32 (1993).

[LR] M. Larsen, E. Rowell, Unitary braid representations with finite image, arXiv: math.GR/0805.4222v1.

[Ma] V. Manturov, Knot Theory, Chapman and Hall, London-New York (2004).

[Mar] A. Markov, Über die freie Aquivalenz geschlossener Zöpfe, Math. Sb. 1 (1935), 73-78.

[M] J. Moody, The faithfulness question for the Burau representation, Proc. AMS (1993).

[MvN] F.J. Murray, J. von Neumann, (1936), On rings of operators, Ann. Of Math. (2) 37: 116-229.

[S] I. Sysoeva, Dimension n representations of Braid Group on n Strings, Journal of Algebra 243 (2001), 518-538.

[St] M. H. Stone, Linear transformations in Hilbert Spaces, Amer. math. Soc. Colloquium Publications Vol. XV (1932).

[T] M. Takesaki, Theory of Operator Algebras I Y II. EMS series on Operator Algebras (2002).

[TL] H. N. V. Temperley, E. H. Lieb, Relations between the percolation and colouring problem and other graph-theoretical problems associated with regular planar lattices: some exact results for the percolation problem, Proc. Roy. Soc. London Ser. A 322 (1971), 251-280.

[TYM] D. Tong, S. Yang, Z. Ma, A New Class of representations of braid group", Comm. Theoret. Phys. 26, No 4 (1996), 483-486.

[V] V.S. Varadarajan, Geometry of Quantum Theory, Second Edition, Springer-Verlag, New York, (1985).

[vN] J. Von Neumann, On Rings of Operators Reduction Theory, Ann of Math. 50 (1949), 401-485.

[W] H. Wenzl, Hecke algebras of type A_n and subfactors, Invent. Math 92, (1988), 349-383.