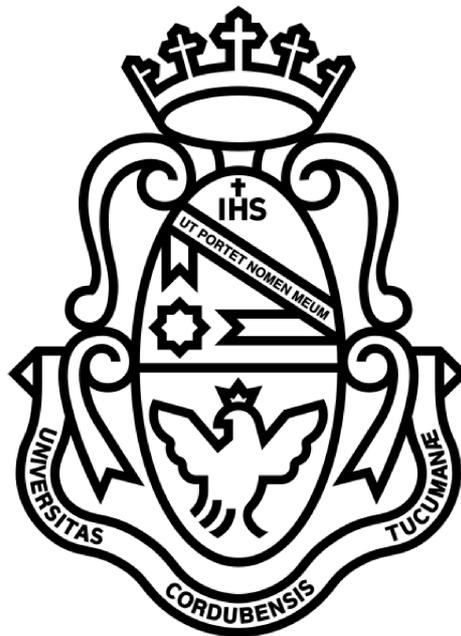


FACULTAD DE MATEMÁTICA ASTRONOMÍA Y FÍSICA  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

# Grupoides y algebroides dobles de Lie

Jesús Alonso Ochoa Arango



Seminario presentado para optar al grado de Doctor en  
Matemática.

Director de Tesis: *Dr. Alejandro Tiraboschi.*

Agosto 2010



*Dedicado a Elisa y Maria Jose.  
A mis padres Maria del Carmen y Francisco Javier.*

## Índice general

1. <b>Introducción</b>	7
Capítulo 1. <b>Preliminares de la teoría de Grupoides</b>	11
1. Definiciones	11
2. Bisecciones	16
3. Acciones de grupoides	19
Capítulo 2. <b>Grupoides Dobles</b>	23
1. Categorías y Grupoides dobles	23
2. Ejemplos de categorías y grupoides dobles	26
Capítulo 3. <b>Algunas propiedades de los Grupoides dobles</b>	31
1. Fibrado canónico de grupos abelianos	31
2. Grupoide doble de Marcos asociado a un grupoide doble	32
3. Grupoide diagonal asociado a un grupoide doble delgado	33
Capítulo 4. <b>Grupoides dobles de Lie</b>	37
1. Grupoides dobles de Lie delgados	37
2. Diagramas de grupoides	39
3. Una equivalencia de Categorías	42
Capítulo 5. <b>Breve introducción a los algebroides de Lie</b>	51
1. Algebroides de Lie	51
2. Bialgebroides de Lie	53
3. Estructuras de Poisson Lineales	57
4. Algebroide de Lie asociado a un grupoide de Lie	58
Capítulo 6. <b>Algebroides de Lie dobles</b>	63
1. Fibrados vectoriales dobles	63
2. Dualidad en fibrados vectoriales dobles	67
3. Ejemplos de fibrados vectoriales dobles	69
4. Prolongación tangente de un algebroide de Lie	73
5. Algebroides de Lie dobles	75
6. Algebroides de Lie dobles construidos a partir de álgebras de Lie	76
7. Algebroide de Lie doble asociado a un grupoide doble de Lie	81

Capítulo 7. <b>Biálgebras infinitesimales de multiplicadores</b>	93
1. Álgebras de Multiplicadores	93
2. Biálgebras infinitesimales de multiplicadores	94
3. Carcaj dobles y álgebras de Hopf infinitesimales	99
4. $\varepsilon$ -Biálgebras de Multiplicadores y categorías monoidales	102
Capítulo 8. <b>Biálgebras de Lie de derivadores</b>	115
1. Biálgebras de Lie de derivadores	115
2. Biálgebras infinitesimales de multiplicadores y biálgebras de Lie de derivadores	116
Bibliografía	119

# Grupoides y algebroides dobles de Lie

Jesús Alonso Ochoa Arango.  
Facultad de Matemática, Astronomía y Física; UNC.

## Resumen

Un grupoide doble es un conjunto  $\mathcal{B}$  dotado con dos estructuras diferentes (pero compatibles) de grupoide sobre bases generalmente diferentes. Es útil representar los elementos de  $\mathcal{B}$  como cajas que pueden ser “concatenadas” horizontal o verticalmente de acuerdo con la estructura de grupoide que esté bajo consideración. Los lados verticales (respectivamente horizontales) de una caja pertenecen a otro grupoide  $\mathcal{V}$  (resp.  $\mathcal{H}$ ). Un grupoide doble se dice *delgado* si cualquier caja está completamente determinada por sus cuatro lados. La noción de grupoide doble fue introducida por [Eh] y estudiada posteriormente en [B, BJ, BM, BS] y referencias allí citadas.

La noción de grupoide doble de Lie fue definida e investigada por K. Mackenzie [M1, M4]; ver también [P, M2, LW2] para aplicaciones a geometría diferencial y de Poisson. En particular, el tema de la clasificación de los grupoides dobles de Lie fue propuesta en [M1] y [BM].

En este trabajo demostramos que todo grupoide doble de Lie con acción medular propia está completamente determinado por una factorización de un cierto grupoide de Lie “diagonal” canónicamente definido. También estudiamos la versión infinitesimal de este concepto, la de *algebroides dobles de Lie* y como resultado introducimos una nueva clase de ejemplos construidos a partir de ciertos diagramas de álgebras de Lie. En la parte final proponemos los conceptos de *biálgebra infinitesimal de multiplicadores* y de *bialgebra de Lie de derivadores*, presentamos algunos ejemplos y como resultado principal de esta parte demostramos, bajo ciertas condiciones, como obtener a partir de una *biálgebra infinitesimal de multiplicadores* una *biálgebra de Lie de derivadores*.

**Palabras claves.** Grupoides de Lie, Algebroides de Lie, Biálgebras infinitesimales, biálgebras de Lie, Álgebras de Multiplicadores.

**2010 Mathematics subject Classification.** 16T05, 16T10, 16T30, 17B62, 18B40, 20A99, 20L05, 22A22, 53D17, 58H05.



## 1. Introducción

El presente trabajo está dividido en tres partes las cuales describiremos a continuación.

Un grupoide doble es un conjunto  $\mathcal{B}$  dotado con dos estructuras diferentes (pero compatibles) de grupoide sobre bases generalmente diferentes. Es útil representar los elementos de  $\mathcal{B}$  como cajas que pueden ser “concatenadas” horizontal o verticalmente de acuerdo con la estructura de grupoide que esté bajo consideración. Los lados verticales (respectivamente horizontales) de una caja pertenecen a otro grupoide  $\mathcal{V}$  (resp.  $\mathcal{H}$ ). Un grupoide doble se dice *delgado* si cualquier caja está completamente determinada por sus cuatro lados. La noción de grupoide doble fue introducida por [Eh] y estudiada posteriormente en [B, BJ, BM, BS] y referencias allí citadas.

La noción de grupoide doble de Lie fue definida e investigada por K. Mackenzie [M1, M4]; ver también [P, M2, LW2] para aplicaciones a geometría diferencial y de Poisson. En particular, el tema de la clasificación de los grupoides dobles de Lie fue propuesta en [M1] y [BM]. En un artículo posterior, una respuesta completa a este problema fue dada en el caso particular de grupoides dobles de Lie localmente triviales. En [AN3] se dio, en dos pasos, una descripción completa de todos los grupoides dobles discretos. Para enunciarla, recordemos que un diagrama sobre un par de grupoides  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{H}$  es un triple  $(\mathcal{D}, j, i)$  donde  $\mathcal{D}$  es un grupoide e  $i: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{D}$ ,  $j: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{D}$  son morfismos de grupoides (sobre un conjunto de puntos fijo). Los resultados obtenidos en [AN3] son los siguientes:

- (a) Cualquier grupoide doble es una extensión de un grupoide doble delgado (su *marco*) por un fibrado de grupos abelianos.
- (b) La categoría de grupoides dobles delgados, con grupoides laterales, vertical y horizontal,  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{H}$ , respectivamente, que satisfacen la condición de llenado, es equivalente a la categoría de diagramas sobre  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{H}$ .

En la primer parte de mi tesis, extendemos la parte (b) al contexto de grupoides dobles de Lie. En este contexto, en lugar de la condición de llenado, requerimos que la aplicación *top-right* sea una submersión suryectiva [M1]. Como es natural esperar, existen algunos ingredientes topológicos y geométricos en nuestro principal resultado el cual es enunciado como sigue:

*La categoría de los grupoides dobles de Lie delgados, con grupoides de Lie laterales (horizontal y vertical)  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{V}$  (respectivamente), y acción medular propia, es equivalente a la categoría de diagramas de grupoides de Lie  $(\mathcal{D}, j, i)$  tal que las aplicaciones  $j$  y  $i$  son transversales en las identidades.*

Nuestra prueba se basa en [AN3, Theorem 2.8] y algunas consideraciones topológicas y diferenciables tales como la propiedad de que la *acción medular* sea propia y la condición de transversalidad sobre los morfismos involucrados en un diagrama de grupoides de Lie.

El paso (a) es imposible de probar en toda su generalidad en el contexto de groupoides dobles de Lie, pero daremos algunas consideraciones bajo las cuales es posible obtener parcialmente dicho resultado.

La segunda parte de esta tesis trata del concepto de *algebroides doble de Lie*, el cual aproximadamente, es la abstracción de la estructura resultante al derivar, *en dos pasos*, un groupoide doble de Lie, en forma similar a la cual a partir de un grupo de Lie obtenemos un álgebra de Lie. El resultado principal de esta parte es la construcción de una nueva familia de ejemplos de algebroides dobles de Lie a partir de un *diagrama de álgebras de Lie*, las cuales son compatibles en un sentido preciso. En efecto, Sea  $(\mathfrak{d}, i, j)$  un diagrama de álgebras de Lie sobre  $\mathfrak{h}$  y  $\mathfrak{v}$  tal que  $\mathfrak{d} = \mathfrak{h} + \mathfrak{v}$ . Existe una estructura de algebroides doble de Lie, sobre el fibrado vectorial doble

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h} \times \mathfrak{v} \times (\mathfrak{h} \times_j \mathfrak{v}) & \longrightarrow & \mathfrak{v} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{h} & \longrightarrow & \{*\} \end{array}$$

de forma tal que  $\mathcal{A}(\mathfrak{d}, i, j) := \mathfrak{h} \times \mathfrak{v} \times (\mathfrak{h} \times_j \mathfrak{v})$  es un subalgebroides doble de Lie del algebroides doble de Lie trivial construido a partir de las álgebras de Lie  $\mathfrak{h}$  y  $\mathfrak{v}$ . La prueba de este resultado radica, esencialmente, en derivar el groupoide doble de Lie construido en la primera parte a partir de un diagrama de grupos de Lie, que satisface ciertas condiciones técnicas adicionales.

La tercera y última parte de esta tesis se centra alrededor de conceptos afines a la teoría de álgebras de Hopf. En esta parte proponemos el concepto de *Biálgebra infinitesimal de multiplicadores* y exponemos, basados en trabajos de M. Aguiar [A1] [A2] y Van Daele [VD1], [VD2], algunos ejemplos de estas estructuras que surgen de forma natural a partir de algunos objetos de naturaleza combinatoria. También introducimos el concepto de *biálgebra de Lie de derivadores* y presentamos algunos ejemplos de esta estructura. El resultado principal de esta parte enuncia una relación entre las biálgebras infinitesimales de multiplicadores y las biálgebras de Lie de derivadores, vía una aplicación llamada *bi-balanceador*. Para ser precisos, se demuestra que si  $(A, \Delta, m)$  es una biálgebra infinitesimal de multiplicadores con bi-balanceador simétrico, entonces  $(A, \Delta - \tau\Delta, m - m\tau)$  es una biálgebra de Lie de derivadores.

### **Agradecimientos.**

Durante los años que pasé en Córdoba (Argentina), estuve influenciado por un sinnúmero de personas. A continuación pondré de forma explícita mis agradecimientos a algunas de ellas y a muchas otras que no alcanzo y/o se me olvida mencionar, pido disculpas a ellas.

Primero que todo agradezco a CONICET quien me apoyó económicamente durante todos estos años a través de una beca con países latinoamericanos. Quiero agradecer a todos aquellos profesores de la FaMAF que me brindaron su apoyo y me ofrecieron acceso a parte de sus conocimientos, en especial al Prof. Jorge Vargas de quien aprendí una gran cantidad de matemáticas, a quien admiro profundamente y quien siempre mostró confianza en que este logro podría ser alcanzado. A mi director A. Tiraboschi, quien siempre mostró un buen carácter a la hora de enfrentar el mío. Agradezco al profesor N. Andruskiewitsch a quien debo la oportunidad de haber ingresado a esta institución y la influencia Hopf teórica. Al profesor Carlos Olmos, de quien aprendí geometría. Al profesor Carlos M. Parra, quien me enseñó lógica y siempre me ha apoyado. A Nancy, la secre del CIEM, su ayuda en todos los problemas de tipo administrativo fue muy importante durante todo este tiempo.

A mis queridas amigas Claudia y Nadina, sin su compañía y amistad, hubieran sido insostenibles todos estos años. Siempre tuve una mano amiga que ayudara a levantarme en cada uno de mis tropiezos. Agradezco a Cesar, con quien he compartido largos años de amistad y matemáticas. A Iván, un gran amigo, con mucho cariño y profunda admiración. A Miguel y Rochita, con quienes he creado fuertes lazos de amistad.

A Edison, Eduar, Felipe, Oscar y Richar amigos con quienes he compartido buenos momentos.

Juanpi, Mauricio, Martín, Noemí, Any, Emilio, Fede, Belén, Santiago, Julia, Romina, Carmen, Hernán, a todos mil y mil gracias.

Finalmente, mi mayor gratitud para quienes dedico esta tesis, a mi Esposa Elisa, cuyo amor, fé, paciencia y compañía se convirtieron en mi fortaleza. A mi hija Maria Jose, aquella que desde sus primeros años estaba convencida de que esta aventura es para brindarle un futuro mejor. A mis padres Francisco Javier y Maria del Carmen, de quienes aprendí casi todo en la vida, quienes me enseñaron a luchar para hacer realidad todos y cada uno de mis sueños.

*GRACIAS.*



## Capítulo 1

### Preliminares de la teoría de Grupoides

En este capítulo introduciremos algunas nociones básicas de la teoría de grupoides y presentaremos algunos resultados topológicos y geométricos necesarios para el desarrollo de nuestro trabajo.

#### 1. Definiciones

##### 1.1. Aplicaciones propias.

DEFINICIÓN 1.1. Sea  $X$  un espacio topológico. Diremos que  $X$  es *cuasicompacto* si todo cubrimiento abierto de  $X$  admite un subcubrimiento finito.

Diremos que  $X$  es *compacto* si  $X$  es Hausdorff y cuasicompacto.

DEFINICIÓN 1.2. Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos. Una aplicación continua  $f : X \rightarrow Y$  se dice *cerrada* si para todo cerrado  $C \subseteq X$ , su imagen  $f(C)$  es cerrado en  $Y$ .

Sean  $X, Y, W$  y  $Z$  espacios topológicos. Si  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : W \rightarrow Z$  son aplicaciones continuas cerradas, el producto  $f \times g : X \times W \rightarrow Y \times Z$  no es necesariamente una aplicación cerrada.

EJEMPLO 1.3. Consideremos la aplicación constante idénticamente nula  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ , donde el codominio de  $f$  lo estamos considerando con la topología discreta. La aplicación  $f \times Id_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  no es cerrada. En efecto, el conjunto  $H = \{(x, 1/x) / x \in \mathbb{Q}, x \neq 0\}$  es cerrado en  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ , sin embargo el conjunto  $\{(0, x) / x \in \mathbb{Q}, x \neq 0\}$  imagen de  $H$  bajo  $f \times Id_{\mathbb{Q}}$ , no lo es.

PROPOSICIÓN 1.4. Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios topológicos y  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación continua; los siguientes enunciados son equivalentes:

- I. Para todo espacio topológico  $Z$ , la aplicación  $f \times Id_Z : X \times Z \rightarrow Y \times Z$  es cerrada.
- II.  $f$  es cerrada y para cada  $y \in Y$ , el conjunto  $f^{-1}(y)$  es cuasicompacto.

DEMOSTRACIÓN. Ver [B, Théorème I.10.2.1]. □

DEFINICIÓN 1.5. Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios topológicos y  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación continua. Diremos que  $f$  es una *aplicación propia*, si  $f$  satisface cualquiera de los enunciados equivalentes de la proposición (1.4).

PROPOSICIÓN 1.6. Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios topológicos y  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación propia. Entonces para todo subespacio cuasicompacto  $K$  de  $Y$ , el conjunto  $f^{-1}(K)$  es cuasicompacto.

DEMOSTRACIÓN. Notemos que, por la proposición (1.4), un espacio topológico  $Z$  es cuasicompacto si y solo si la aplicación  $h : K \rightarrow \{*\}$  es propia.

Ahora, es claro que  $f|_{f^{-1}(K)} : f^{-1}(K) \rightarrow K$  es propia. Así, la composición

$$f^{-1}(K) \xrightarrow{f|_{f^{-1}(K)}} K \longrightarrow \{*\}$$

es propia. Lo cual equivale a decir que  $f^{-1}(K)$  es cuasicompacto.  $\square$

DEFINICIÓN 1.7. Decimos que un espacio topológico  $X$  es *localmente compacto*, si todo punto de  $X$  posee una vecindad compacta.

PROPOSICIÓN 1.8. [T, Prop. 1.6] Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios topológicos y  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación continua. Supongamos que  $Y$  es localmente compacto, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- I.  $f$  es una aplicación propia;
- II. para todo subespacio cuasicompacto  $K$  de  $Y$ , el conjunto  $f^{-1}(K)$  es cuasicompacto;
- III. para todo subespacio compacto  $K$  de  $Y$ , el conjunto  $f^{-1}(K)$  es cuasicompacto;
- IV. para todo  $y \in Y$  existe una vecindad compacta  $K_y$ , tal que  $f^{-1}(K_y)$  es cuasicompacto.

DEMOSTRACIÓN. (I)  $\Rightarrow$  (II) es justo la proposición (1.6). (II)  $\Rightarrow$  (III)  $\Rightarrow$  (IV) son obvias. Demostremos (IV)  $\Rightarrow$  (I). Sea  $y \in Y$ , por hipótesis existe  $K_y$  vecindad compacta de  $y$ , tal que  $f^{-1}(K_y)$  es cuasicompacto. Pero el conjunto  $f^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(K)$  es cerrado, por lo tanto es cuasicompacto.

Demostremos ahora que  $f$  es una aplicación cerrada.

Sea  $F \subset X$  un conjunto cerrado, veamos que  $f(F)$  es cerrado. Sea  $y \in \overline{f(F)}$ , luego existe  $K_y$  vecindad compacta de  $y$ , tal que  $f^{-1}(K_y)$  es cuasicompacto. De aquí,  $f^{-1}(K_y) \cap F$  es cuasicompacto y como  $f$  es continua,  $f(f^{-1}(K_y) \cap F)$  es cuasicompacto. Ahora, dado que  $K_y$  es Hausdorff entonces  $f(f^{-1}(K_y) \cap F)$  es cerrado en  $K_y$ , luego  $\overline{f(f^{-1}(K_y) \cap F)}^{K_y} = f(f^{-1}(K_y) \cap F)$ . Pero  $\overline{f(f^{-1}(K_y) \cap F)}^{K_y} = K_y \cap \overline{f(f^{-1}(K_y) \cap F)}$ , así  $K_y \cap \overline{f(f^{-1}(K_y) \cap F)} = f(f^{-1}(K_y) \cap F)$ . Pero  $y \in K_y \cap \overline{f(f^{-1}(K_y) \cap F)}$  y  $f(f^{-1}(K_y) \cap F) \subseteq f(F)$ , luego  $y \in f(F)$ .  $\square$

## 1.2. Aplicaciones transversales.

DEFINICIÓN 1.9. Sean  $M, N$  y  $P$  variedades diferenciables. Sean  $\varphi : M \rightarrow P$  y  $\psi : N \rightarrow P$  aplicaciones suaves; consideremos  $m \in M, n \in N$  y  $p \in P$  tal que  $\varphi(m) = p = \psi(n)$ . Decimos que  $\varphi$  y  $\psi$  son *transversales* en  $p$  si se cumple que

$$(1.1) \quad T_m\varphi(T_mM) + T_n\psi(T_nN) = T_pP.$$

Decimos que  $\varphi$  y  $\psi$  son transversales si la ecuación (1.1) se cumple para todo  $m \in M, n \in N$  tal que  $\varphi(m) = \psi(n)$ .

OBSERVACIÓN 1.10. Las variedades diferenciables que consideramos en este trabajo son Hausdorff y satisfacen el segundo axioma de numerabilidad.

TEOREMA 1.11. Sean  $M, N$  y  $P$  variedades diferenciables. Sean  $f : M \rightarrow P$  y  $g : N \rightarrow P$  aplicaciones suaves transversales. Si el conjunto

$$M \times_P N = \{(x, y) \in M \times N / f(x) = g(y)\}$$

es no vacío, entonces  $M \times_P N$  es una subvariedad incrustada de  $M \times N$  de dimensión  $m + n - p$ .

El espacio tangente a  $M \times_P N$  en un punto  $(x, y)$  es el espacio vectorial

$$\{(u, v) \in T_x M \times T_y N / T_x f(u) = T_y g(v)\}.$$

Para una prueba del teorema (1.11), el cual básicamente es una consecuencia del teorema de la función implícita, ver [L, Cap.2, Sec.2] o [LM, Ap.1, Sec. 1.7].

### 1.3. Algunas observaciones sobre el espacio tangente a un grupo de Lie.

DEFINICIÓN 1.12. Sean  $G$  y  $H$  grupos de Lie y sea  $\alpha : G \times H \rightarrow H$  una acción a izquierda de  $G$  sobre  $H$  por automorfismos de grupos de Lie (esto es,  $\alpha_g : H \rightarrow H$  es difeomorfismo y automorfismo de  $H$ ). El producto semidirecto  $G \ltimes H$  es la variedad diferenciable  $G \ltimes H = G \times H$  dotada de la siguiente estructura de grupo de Lie,

- $(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1(g_1 h_2)),$
- $(g, h)^{-1} = (g^{-1}, g^{-1} h^{-1}),$

para todo  $g_1, g_2 \in G$  y  $h_1, h_2 \in H$ .

Es claro que  $H$  es un subgrupo normal del producto semidirecto  $G \ltimes H$ .

OBSERVACIÓN 1.13. Sean  $G$  y  $H$  grupos de Lie y sea  $\alpha : G \times H \rightarrow H$  una acción a izquierda de  $G$  sobre  $H$  por automorfismos de grupos de Lie. La aplicación

$$(1.2) \quad \tilde{\alpha} : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{h}), \quad g \mapsto T_e \alpha_g : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$$

es un morfismo de grupos de Lie. Diferenciando en la identidad obtenemos un morfismo de álgebras de Lie  $\varphi := T_e \tilde{\alpha} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{aut}(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{gl}(\mathfrak{h})$ , donde  $\text{aut}(\mathfrak{h})$  denota el álgebra de derivaciones de  $\mathfrak{h}$ . Denotemos  $\xi \cdot \eta := \varphi(\xi)(\eta)$ .

LEMA 1.14. Sean  $G$  y  $H$  grupos de Lie y sea  $\alpha : G \times H \rightarrow H$  una acción a izquierda de  $G$  sobre  $H$  por automorfismos de grupos de Lie. El álgebra de Lie de  $G \ltimes H$  es el espacio vectorial  $\mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{h} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$  dotado del corchete esta dado por

$$[(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2)] = ([\xi_1, \xi_2], \xi_1 \cdot \eta_2 - \xi_2 \cdot \eta_1 + [\eta_1, \eta_2]).$$

PROPOSICIÓN 1.15. Sea  $G$  un grupo de Lie y denotemos por  $m : G \times G \rightarrow G$  su producto. Entonces el espacio tangente  $TG$  tiene estructura de grupo de Lie dada por,

- $u_g \cdot v_h = T_{(g,h)} m(u_g, v_h) = (T_g R_h)(u_g) + (T_h L_g)(v_h) \in T_{gh} G$
- $u_g^{-1} = -(T_e L_{g^{-1}})(T_g R_{g^{-1}})(u_g) \in T_{g^{-1}} G$

para todo  $u_g \in T_g G$ ,  $v_h \in T_h G$  y donde la identidad esta dada por  $0_e \in T_e G$ .

DEFINICIÓN 1.16. Sea  $G$  un grupo de Lie y  $\mathfrak{g}$  su álgebra de Lie. La *acción adjunta* de  $G$  sobre  $\mathfrak{g}$  es la acción inducida por el morfismo de álgebras de Lie

$$(1.3) \quad Ad : G \rightarrow Gl(\mathfrak{g}), \quad g \mapsto T_e I_g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}.$$

donde  $I_g : G \rightarrow G$ ,  $h \mapsto ghg^{-1}$  es el automorfismo interior de  $G$  determinado por  $g$ .

PROPOSICIÓN 1.17. Sea  $G$  un grupo de Lie y  $\mathfrak{g}$  su álgebra de Lie. La aplicación

$$(1.4) \quad TG \rightarrow G \times \mathfrak{g}, \quad u_g \in T_g G \mapsto (g, (T_g R_{g^{-1}})(u_g))$$

es un isomorfismo de grupos de Lie. Donde  $G \times \mathfrak{g}$  denota el producto semidirecto del grupo Lie  $G$  y el grupo de Lie abeliano  $\mathfrak{g}$  y donde  $G$  actúa sobre  $\mathfrak{g}$  via la acción adjunta.

OBSERVACIÓN 1.18. Usando el isomorfismo de la proposición (1.17), el producto en el espacio tangente a  $G$  toma la forma

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 + Ad_{g_1}(h_2)).$$

LEMA 1.19. Sean  $G, H$  grupos de Lie y  $f : G \rightarrow H$  un morfismo de grupos de Lie, entonces usando las identificaciones  $TG \cong G \times \mathfrak{g}$  y  $TH \cong H \times \mathfrak{h}$ , se cumple

$$(1.5) \quad Tf : G \times \mathfrak{g} \rightarrow H \times \mathfrak{h}, \quad (g, X) \mapsto (f(g), T_e f(X)).$$

DEMOSTRACIÓN. En efecto, para todo par  $(g, X) \in G \times \mathfrak{g}$ ,

$$\begin{aligned} (T_g f)(g, X) &= (T_g f)(T_e R_g)(X) = (T_e f \circ R_g)(w) = (T_e R_{f(g)})(T_e f)(X) \\ &= (f(g), (T_{f(g)} R_{f(g)^{-1}})(T_e R_{f(g)})(T_e f)(X)) \\ &= (f(g), (T_e f)(X)) \end{aligned}$$

□

#### 1.4. Teoría de Grupoides.

DEFINICIÓN 1.20. Un grupoide es una categoría (*pequeña*) donde todo morfismo posee un inverso. Esto es, un grupoide consta de la siguiente colección de datos:

- Dos conjuntos  $\mathcal{G}$  (*flechas*) y  $\mathcal{P}$  (*objetos*);
- Dos aplicaciones  $s, e : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{P}$  llamadas *origen* y *final*;
- Una aplicación de *composición*  $m : \mathcal{G}_{e \times_s} \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ , que denotaremos por yuxtaposición, esto es,  $m(g, h) = gh$ ;
- Una aplicación uno a uno  $id : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{G}$  llamada *identidad*;
- Una aplicación  $I : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ , que denotaremos por  $I(g) = g^{-1}$  y llamaremos *inversión*.

Todos estos datos sujetos a los siguientes axiomas:

- La composición  $m$  es asociativa;
- Para todo  $g, h \in \mathcal{G}$ ,  $s(gh) = s(g)$  y  $e(gh) = e(h)$ ;
- Para todo  $p \in \mathcal{P}$ ,  $s(id_p) = e(id_p) = p$ ;
- Para todo  $g \in \mathcal{G}$ , se cumple  $g id_{e(g)} = id_{s(g)} g = g$ ;

- Para todo  $g \in \mathcal{G}$ , se cumple  $g g^{-1} = id_{s(g)}$  y  $g^{-1} g = id_{e(g)}$ .

OBSERVACIÓN 1.21. Por abuso de lenguaje, usaremos la notación  $\mathcal{G} \xrightarrow[s]{e} \mathcal{P}$ , para denotar un grupoide  $(\mathcal{G}, \mathcal{P}, s, e, m, id, I)$ . También, para todo  $p \in \mathcal{P}$ , usaremos la notación  $\mathcal{G}^p = s^{-1}\{p\}$  y  $\mathcal{G}_p = e^{-1}\{p\}$ .

DEFINICIÓN 1.22. Un *morfismo de grupoides* es un funtor entre las categorías subyacentes. Explícitamente, dados dos grupoides  $\mathcal{G} \xrightarrow[s]{e} \mathcal{P}$  y  $\mathcal{H} \xrightarrow[s]{e} \mathcal{Q}$ , un morfismo de grupoides de  $\mathcal{G}$  en  $\mathcal{H}$  es un par de aplicaciones  $F : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  y  $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$  tal que,

- I.  $f \circ s = s \circ F$  y  $f \circ e = e \circ F$ ;
- II.  $F(gh) = F(g)F(h)$  para todo par  $(f, g) \in \mathcal{G}_{e \times_s \mathcal{G}}$ .

DEFINICIÓN 1.23. Un *grupoide topológico* es un grupoide  $\mathcal{G} \xrightarrow[s]{e} \mathcal{P}$  donde  $\mathcal{G}$  y  $\mathcal{P}$  son espacios topológicos y las aplicaciones estructurales  $s, e$ , la composición, la inversión y la identidad son continuas.

DEFINICIÓN 1.24. Un *grupoide de Lie* es un grupoide  $\mathcal{G} \xrightarrow[s]{e} \mathcal{P}$  donde  $\mathcal{G}$  y  $\mathcal{P}$  son variedades diferenciables, las aplicaciones  $s$  y  $e$  son submersiones suryectivas y además, la composición, inversión e identidad son suaves.

A continuación daremos unos cuantos ejemplos de grupoides de Lie que ilustran el alcance de la teoría de grupoides.

EJEMPLO 1.25. Todo grupo de Lie es un grupoide de Lie cuya base es un punto.

EJEMPLO 1.26. Sea  $\mathcal{P}$  una variedad diferenciable y consideremos  $\mathcal{G} = \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ . Definamos,

- aplicaciones origen y final  $s, t : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{P}$ , dadas por las formulas  $s(p, q) = p$  y  $t(p, q) = q$ ;
- Una ley de composición parcial  $\mathcal{G}_{t \times_s \mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{G}$  definida por  $(m, n)(n, p) = (m, p)$ ;
- aplicación identidad  $Id(p) = (p, p)$ ;
- inversos dados por  $(p, q)^{-1} = (q, p)$ ;

para todo  $m, n, p, q \in \mathcal{P}$ . Con estas aplicaciones,  $\mathcal{G}$  es un grupoide de Lie con base  $\mathcal{P}$  denominado *grupoide par* asociado a  $\mathcal{P}$ .

EJEMPLO 1.27. Sean  $\mathcal{P}$  una variedad diferenciable y  $G$  un grupo de Lie. Consideremos  $\mathcal{G} = \mathcal{P} \times G \times \mathcal{P}$  y definamos

- aplicaciones origen y final  $s, t : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{P}$ , dadas por las formulas  $s(p, g, q) = p$  y  $t(p, g, q) = q$ ;
- Una ley de composición parcial  $\mathcal{G}_{t \times_s \mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{G}$  definida por  $(m, g, n)(n, h, p) = (m, gh, p)$ ;
- aplicación identidad  $Id(p) = (p, e, p)$ ;

- inversos dados por  $(p, g, q)^{-1} = (q, g^{-1}, p)$ ;

para todo  $m, n, p, q \in \mathcal{P}$  y donde  $e$  denota la identidad de  $G$ . Con estas aplicaciones,  $\mathcal{G}$  es un grupoide de Lie con base  $\mathcal{P}$  denominado *grupoide trivial* asociado a  $\mathcal{P}$  y  $G$ .

EJEMPLO 1.28. Sea  $(E, \pi, M)$  un fibrado vectorial. Consideremos

$$\Phi(E) = \{ \xi : E_x \rightarrow E_y / x, y \in E \text{ y } \xi \text{ es isomorfismo lineal} \},$$

definamos

- aplicaciones origen y final  $s, t : \Phi(E) \rightarrow M$ , dadas por las formulas  $s(\xi) = x$  y  $t(\xi) = y$ ;
- Una ley de composición parcial  $\Phi(E) \times_s \Phi(E) \rightarrow \Phi(E)$  dada por la composición de funciones;
- aplicación identidad  $Id(x) = Id_x : E_x \rightarrow E_x$ ;
- inverso dado por la aplicación lineal inversa  $\xi^{-1}$  del isomorfismo lineal  $\xi$ ;

para todo  $x, y \in M$  y  $\xi \in \Phi(E)$ . Con estas aplicaciones,  $\Phi(E)$  es un grupoide de Lie sobre  $M$  denominado *grupoide lineal de marcos* asociado a  $(E, \pi, M)$ . Para detalles sobre la estructura diferenciable de  $\Phi(E)$  ver [M5].

EJEMPLO 1.29. Sea  $P(M, G, \pi)$  un fibrado principal<sup>1</sup>. El grupo de Lie  $G$  actúa a derecha sobre  $P \times P$  de forma libre y propia mediante  $(p, q)g = (pg, qg)$ . Denotemos por  $\rho : P \times P \rightarrow \mathcal{G}$  la proyección canónica de  $P \times P$  sobre  $\mathcal{G} = \frac{(P \times P)}{G}$  y denotemos  $\langle p, q \rangle = \rho(p, q)$ , para todo  $p, q \in P$ . Definamos,

- aplicaciones origen y final  $s, t : \mathcal{G} \rightarrow M$ , dadas por las formulas  $s\langle p, q \rangle = \pi(q)$  y  $t\langle p, q \rangle = \pi(p)$ ;
- Una ley de composición parcial  $\mathcal{G} \times_s \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  dada por  $\langle m, n \rangle \langle ng, q \rangle = \langle m, pg \rangle$ ;
- aplicación identidad  $Id(m) = \langle p, p \rangle$ , donde  $p \in P$  es tal que  $\pi(p) = m$ ;
- inverso dado por  $\langle p, q \rangle = \langle ng, mg^{-1} \rangle$ , para cualquier  $g \in G$ ;

para todo  $p, q \in P$  y  $m \in M$ . Con estas aplicaciones,  $\mathcal{G}$  es un grupoide de Lie sobre  $M$  denominado *grupoide calibrador*<sup>2</sup> asociado a  $P(M, G, \pi)$ . Para detalles sobre la estructura diferenciable de  $\mathcal{G}$  ver [M5].

## 2. Bisecciones

A diferencia de la teoría de grupos de Lie, en el estudio de grupoides de Lie no se dispone de *traslaciones a izquierda* y *a derecha* definidas globalmente. Esto se debe a que la composición solo está definida parcialmente. A continuación introduciremos un par de conceptos que nos permitan generalizar parcialmente el concepto de *traslación* al contexto de grupoides.

DEFINICIÓN 1.30. Sea  $\mathcal{G} \xrightarrow[e]{s} \mathcal{P}$  un grupoide de Lie. Una *traslación a izquierda* sobre  $\mathcal{G}$  es un par  $(\varphi, \varphi_0)$  tal que:

<sup>1</sup>Para definiciones y notación sobre fibrados principales referimos al lector a [KN1].

<sup>2</sup>Traducción no estandar del inglés *Gauge Groupoid*.

- $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  y  $\varphi_0 : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  son difeomorfismos,
- $s \circ \varphi = \varphi_0 \circ s$  y  $e \circ \varphi = e$ ,
- Para todo  $p \in \mathcal{P}$ , existe un  $g \in \mathcal{G}_p^{\varphi_0(p)}$ , tal que la restricción  $\varphi^p : \mathcal{G}^p \rightarrow \mathcal{G}^{\varphi_0(p)}$  coincide con la aplicación suave  $L_g : \mathcal{G}^p \rightarrow \mathcal{G}^{\varphi_0(p)}$ .

Una *bisección* de  $\mathcal{G}$  es una aplicación suave  $\sigma : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{G}$  tal que  $e \circ \sigma = Id_{\mathcal{P}}$  y además  $s \circ \sigma : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  es un difeomorfismo. El conjunto de todas las bisecciones sobre  $\mathcal{G}$  lo denotaremos por  $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ .

LEMA 1.31. Sea  $\mathcal{G} \xrightleftharpoons[e]{s} \mathcal{P}$  un grupoide de Lie. Denotemos por  $\mathbb{L}(\mathcal{G})$  el conjunto formado por todas las traslaciones a izquierda sobre  $\mathcal{G}$ . Sea

$$\Psi_l : \mathbb{L}(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{G}), \quad (\lambda, \lambda_0) \mapsto \sigma_\lambda;$$

con  $\sigma_\lambda(p) = \lambda(Id_p)$  para todo  $p \in \mathcal{P}$ . Entonces,  $\Psi$  es biyectiva, con inversa

$$\Phi_l : \mathcal{B}(\mathcal{G}) \rightarrow \mathbb{L}(\mathcal{G}), \quad \sigma \mapsto (L_\sigma, s \circ \sigma);$$

donde  $L_\sigma(g) = \sigma(s(g))g$ .

DEMOSTRACIÓN. Demostremos primero que  $\Psi$  y  $\Phi$  están bien definidas. Sea  $(\lambda, \lambda_0)$  una traslación a izquierda; Ahora,  $s \circ \sigma_\lambda(p) = s(\lambda(Id_p)) = e(Id_p) = p$ . Además,  $e \circ \sigma_\lambda(p) = e(\lambda(Id_p)) = e(Id_p) = p$ . Como consecuencia,  $\sigma_\lambda$  es una bisección.

De otro lado, si  $\sigma : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{G}$  es una bisección, es claro que  $L_\sigma$  es suave. Sea  $\lambda : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  la aplicación suave definida por  $g \mapsto \sigma((s \circ \sigma)^{-1}(s(g)))^{-1}g$ . Entonces

$$\begin{aligned} \lambda \circ L_\sigma(g) &= \lambda(\sigma(s(g))g) \\ &= \sigma((s \circ \sigma)^{-1}(s(\sigma(s(g))g)))^{-1}\sigma(s(g))g \\ &= \sigma(s(g))^{-1}\sigma(s(g))g = g. \end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned} L_\sigma \circ \lambda(g) &= L_\sigma(\sigma((s \circ \sigma)^{-1}(s(g)))^{-1}g) \\ &= \sigma(s(\sigma((s \circ \sigma)^{-1}(s(g))g)^{-1})\sigma((s \circ \sigma)^{-1}(s(g)))^{-1}g \\ &= \sigma(e(\sigma((s \circ \sigma)^{-1}(s(g))))\sigma((s \circ \sigma)^{-1}(s(g)))^{-1}g \\ &= \sigma((s \circ \sigma)^{-1}(s(g)))\sigma((s \circ \sigma)^{-1}(s(g)))^{-1}g \\ &= g. \end{aligned}$$

Además

- $s \circ L_\sigma(g) = s(\sigma(s(g))g) = s(\sigma(s(g))) = s \circ \sigma(s(g))$ ,
- $e \circ L_\sigma(g) = e(\sigma(s(g))g) = e(g)$ ,
- Si  $p \in \mathcal{P}$  y  $h \in \mathcal{G}$ , entonces  $L_\sigma(h) = \sigma(p)h$ .

Luego,  $L_\sigma$  es difeomorfismo con inverso  $\lambda$  y concluimos que  $(L_\sigma, s \circ \sigma)$  es una traslación a izquierda.  $\square$

Existe una noción de traslación a derecha y un resultado analogo al lema (1.31), que relaciona, bisecciones y traslaciones a derecha. Los cuales, por razones de completitud, incluiremos a continuación.

DEFINICIÓN 1.32. Sea  $\mathcal{G} \xrightarrow[e]{s} \mathcal{P}$  un grupoide de Lie. Una traslación a derecha es un par  $(\rho, \rho_0)$  tal que,

- $\rho : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  y  $\rho_0 : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  son difeomorfismos;
- $s \circ \rho = s$  y  $e \circ \rho = \rho_0 \circ e$ ;
- Para todo  $p \in \mathcal{P}$ , existe un  $g \in \mathcal{G}_{\rho_0(p)}^p$ , tal que  $\rho|_{\mathcal{G}_p} : \mathcal{G}_p \rightarrow \mathcal{G}_{\rho_0(p)}$  coincide con  $R_g : \mathcal{G}_p \rightarrow \mathcal{G}_{\rho_0(p)}$ .

LEMA 1.33. Sea  $\mathcal{G} \xrightarrow[e]{s} \mathcal{P}$  un grupoide de Lie. Denotemos por  $\mathbb{R}(\mathcal{G})$  el conjunto formado por todas las traslaciones a izquierda sobre  $\mathcal{G}$ . Sea

$$\Psi_r : \mathbb{R}(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{G}), \quad (\rho, \rho_0) \mapsto \sigma_\rho;$$

con  $\sigma_\rho(p) = \rho(Id_{\rho_0^{-1}(p)})$  para todo  $p \in \mathcal{P}$ . Entonces,  $\Psi$  es biyectiva, con inversa

$$\Phi_r : \mathcal{B}(\mathcal{G}) \rightarrow \mathbb{R}(\mathcal{G}), \quad \sigma \mapsto (R_\sigma, (s \circ \sigma)^{-1});$$

donde  $R_\sigma(g) = g\sigma((s \circ \sigma)^{-1}(e(g)))$ .

DEMOSTRACIÓN. Análoga a la demostración del lema (1.31). □

DEFINICIÓN 1.34. Sea  $\mathcal{G} \xrightarrow[e]{s} \mathcal{P}$  un grupoide de Lie. Dada  $\sigma \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$ , definimos el automorfismo interior asociado a  $\sigma$ , como la aplicación

$$I_\sigma : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}, \quad g \mapsto \sigma(s(g))g\sigma(e(g))^{-1}.$$

En este trabajo, dado que algunos de los problemas a trabajar son de *naturaleza local*, utilizaremos la contraparte local de los conceptos arriba mencionados.

DEFINICIÓN 1.35. Sea  $\mathcal{G} \xrightarrow[e]{s} \mathcal{P}$  un grupoide de Lie. Sea  $U \subseteq \mathcal{P}$  un conjunto abierto. Una bisección local de  $\mathcal{G}$  sobre  $U$ , es una aplicación suave  $\sigma : U \rightarrow \mathcal{G}$  tal que  $e \circ \sigma = Id_U$  y  $s \circ \sigma : U \rightarrow \mathcal{P}$  es un difeomorfismo de  $U$  sobre el conjunto abierto  $V = (s \circ \sigma)(U)$  de  $\mathcal{P}$ .

El conjunto de bisecciones locales de  $\mathcal{G}$  sobre  $U$ , lo denotaremos por  $\mathcal{B}_U(\mathcal{G})$ .

OBSERVACIÓN 1.36. Una bisección local  $\sigma \in \mathcal{B}_U(\mathcal{G})$ , define traslaciones a izquierda y a derecha,  $L_\sigma : \mathcal{G}^U \rightarrow \mathcal{G}^V$  y  $R_\sigma : \mathcal{G}_V \rightarrow \mathcal{G}_U$  respectivamente, haciendo uso de las formulas indicadas en los lemas (1.31) y (1.33) respectivamente.

La siguiente proposición nos indica que existen bisecciones locales con algunas condiciones iniciales impuestas. La demostración aquí expuesta difiere ligeramente de la presentada en [M5].

PROPOSICIÓN 1.37. Sea  $\mathcal{G} \xrightarrow[s]{e} \mathcal{P}$  un grupoide de Lie. Dado  $g \in \mathcal{G}$  existe una bisección local  $\sigma : U \subseteq \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{G}$ , tal que  $g \in U$  y  $\sigma(e(g)) = g$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $g \in \mathcal{G}$ . Dado que  $s$  y  $e$  son submersiones suryectivas, entonces  $\mathcal{G}_{e(g)}$  y  $\mathcal{G}^{s(g)}$  son subvariedades embebidas de  $\mathcal{G}$  de igual dimensión; además,  $T_g(\mathcal{G}_{e(g)}) = \text{Ker}T_g e$  y  $T_g(\mathcal{G}^{s(g)}) = \text{Ker}T_g s$ . Sea  $V$  un complemento directo común en  $T_g \mathcal{G}$  de  $T_g(\mathcal{G}_{e(g)})$  y  $T_g(\mathcal{G}^{s(g)})$ . Esto es,

$$(2.1) \quad T_g \mathcal{G} = T_g(\mathcal{G}_{e(g)}) \oplus V \quad \text{y} \quad T_g \mathcal{G} = T_g(\mathcal{G}^{s(g)}) \oplus V.$$

Consideremos  $\mathcal{P}$  de dimensión  $n$  y  $\mathcal{G}$  de dimensión  $m+n$ . Dado que la aplicación  $e : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{P}$  es una submersión suryectiva, existen sistemas de coordenadas locales  $(U, \phi)$  y  $(V, \psi)$  para  $\mathcal{G}$  y  $\mathcal{P}$ , respectivamente, centrados en  $g$  y  $e(g)$ , respectivamente, tal que  $e(U) \subseteq V$  y

$$\psi \circ e \circ \phi^{-1}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = (x_1, \dots, x_n).$$

Tomemos  $\hat{\sigma} : \psi(V) \rightarrow \phi(U)$  definida por  $\hat{\sigma}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$  y sea  $\sigma : V \rightarrow U$  la composición  $\psi^{-1} \circ \hat{\sigma} \circ \phi$ ; claramente  $\sigma(e(g)) = g$  y  $e \circ \sigma = \text{Id}_V$ . Dado que

$$(T_g e)(X) = T_g(\psi^{-1} \circ \psi \circ e \circ \phi^{-1} \circ \phi)(X) = T_{(\psi \circ e)(g)} \psi^{-1} \circ (T_{\phi(g)})(\psi \circ e \circ \phi^{-1})((T_g \phi)(X)),$$

entonces en coordenadas locales,

$$\begin{aligned} T_g \mathcal{G}_{e(g)} &= \text{Ker}(T_g e) = \{(0, \dots, 0, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) / x_i \in \mathbb{R}\} \text{ y} \\ V &= \{(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) / x_i \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Como consecuencia  $\text{Im}T_{e(g)}\sigma = V$  y así, por (2.1),  $s \circ \sigma$  es un difeo local.  $\square$

### 3. Acciones de grupoides

DEFINICIÓN 1.38. Sea  $\mathcal{G} \xrightarrow[s]{e} \mathcal{P}$  un grupoide y sea  $f : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{P}$  una aplicación. Una acción a izquierda de  $\mathcal{G}$  sobre  $f$  es una aplicación  $\triangleright : \mathcal{G} \times_f \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}$  que satisface las siguientes condiciones

- I.  $f(g \triangleright q) = s(g)$ , para todo par  $(g, q) \in \mathcal{G} \times_f \mathcal{Q}$ ;
- II.  $h \triangleright (g \triangleright q) = (hg) \triangleright q$ ; para todo  $(h, g) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G}$  y  $(g, q) \in \mathcal{G} \times_f \mathcal{Q}$ .
- III.  $\text{Id}_{f(q)} q = q$  para todo  $q \in \mathcal{Q}$ .

OBSERVACIÓN 1.39. Si en la definición 1.38, consideramos  $\mathcal{P} = \{*\}$ , el conjunto con un solo elemento, entonces la noción de acción de grupoide coincide con la noción usual de acción de grupo.

DEFINICIÓN 1.40. Sea  $\mathcal{G} \xrightarrow[s]{e} \mathcal{P}$  un grupoide de Lie y sea  $f : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{P}$  una aplicación suave. Una acción a izquierda de  $\mathcal{G}$  sobre  $f$  es una aplicación suave  $\triangleright : \mathcal{G} \times_f \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}$  que satisface las condiciones de la definición (1.38).

OBSERVACIÓN 1.41. En la definición (1.40) el conjunto  $\mathcal{G} \times_f Q$  es una variedad diferenciable dado que  $e$  es una submersión suryectiva.

OBSERVACIÓN 1.42. Si en la definición (1.40), en lugar de un grupoide de Lie, tenemos que  $\mathcal{G} \xrightarrow[e]{s} \mathcal{P}$  es un grupoide topológico, entonces solo pedimos la continuidad de las aplicaciones mencionadas en la definición.

OBSERVACIÓN 1.43. Existe un concepto similar de acción a derecha el cual se formula de manera obvia intercambiando  $e$  por  $s$  y  $\mathcal{G} \times_f Q$  por  $Q \times_s \mathcal{G}$  en la definición (1.38).

EJEMPLO 1.44. Sea  $P(M, G, \pi)$  un fibrado principal y consideremos su grupoide calibrador asociado (definido en el ejemplo 1.29). Sea  $N$  una variedad diferenciable sobre la cual actúa  $G$  de forma propia y libre. Consideremos el fibrado asociado  $\tau : (P \times F) \rightarrow \frac{(P \times F)}{G}$  y definamos  $\eta : \frac{(P \times F)}{G} \rightarrow P$  por  $[p, f] = \pi(p)$ , donde  $[p, f] = \tau(p, f)$ . Entonces  $\mathcal{G}$  actúa a derecha sobre  $\eta$  via

$$\begin{aligned} \leftarrow : \mathcal{G} \times_{\tau} \frac{(P \times F)}{G} &\longrightarrow \frac{(P \times F)}{G} \\ (\langle p, q \rangle, [q, f]) &\mapsto [p, f]. \end{aligned}$$

Para ver que  $\leftarrow$  define una acción, basta verificar mediante un calculo directo cada uno de los axiomas de la definición 1.40, los detalles se dejan al lector.

LEMA 1.45. Sea  $\mathcal{G} \xrightarrow[e]{s} \mathcal{P}$  un grupoide y  $f : Q \rightarrow \mathcal{P}$  una aplicación. Sea  $\triangleright : \mathcal{G} \times_f Q \rightarrow Q$  una acción a izquierda de  $\mathcal{G}$  sobre  $f$ . Las siguientes aplicaciones dotan al conjunto  $\mathcal{G} \times_f Q$  de una estructura de grupoide sobre  $Q$ ,

- $e(g, q) = q$  y  $s(g, q) = g \triangleright q$  para todo par  $(g, q) \in \mathcal{G} \times_f Q$ ;
- $(g, p)(h, q) = (gh, q)$ , para  $(g, p), (h, q) \in \mathcal{G} \times_f Q$  tal que  $p = h \triangleright q$ ;
- $Id_q = (Id_{f(q)}, q)$ , para todo  $q \in Q$ ;
- $(g, q)^{-1} = (g^{-1}, g \triangleright q)$ , para todo  $(g, q) \in \mathcal{G} \times_f Q$ .

DEMOSTRACIÓN. Basta verificar los axiomas directamente. □

DEFINICIÓN 1.46. Sea  $\mathcal{G} \xrightarrow[e]{s} \mathcal{P}$  un grupoide y  $f : Q \rightarrow \mathcal{P}$  una aplicación. Sea  $\triangleright : \mathcal{G} \times_f Q \rightarrow Q$  una acción a izquierda de  $\mathcal{G}$  sobre  $f$ . El grupoide acción asociado a  $\triangleright$  es el conjunto  $\mathcal{G} \times_f Q$  dotado de la estructura de grupoide del lema (1.45) y será denotado por  $\mathcal{G} \ltimes Q$ .

OBSERVACIÓN 1.47. Si en la definición 1.46,  $G$  es un grupo y  $X$  un conjunto, entonces  $G \times X$  es un grupoide que suele llamarse *grupoide de traslación*.

OBSERVACIÓN 1.48. En la definición (1.38), la aplicación  $f$  es llamada *aplicación momento* de la acción.

### 3.1. Acciones propias de grupoides.

DEFINICIÓN 1.49. Un grupoide  $\mathcal{G} \xrightarrow[e]{s} \mathcal{P}$  se dice *localmente compacto* si  $\mathcal{G}$  es un espacio topológico localmente compacto.

OBSERVACIÓN 1.50. La definición de grupoide localmente compacto que usualmente se encuentra en la literatura (por ejemplo [Re]), corresponde a la definición (1.49) en donde además el espacio de flechas es  $\sigma$ -compacto, el espacio base es Hausdorff y se supone la existencia de un *sistema de Haar*.

DEFINICIÓN 1.51. Un grupoide topológico  $\mathcal{G} \xrightarrow[e]{s} \mathcal{P}$  se dice *propio* si la aplicación  $(s, e) : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ , es propia.

EJEMPLO 1.52. Sea  $X$  un espacio topológico y  $G$  un grupo topológico cuasicompacto. Entonces el grupoide de traslación asociado 1.47 es propio.

OBSERVACIÓN 1.53. Dado un grupoide  $\mathcal{G} \xrightarrow[e]{s} \mathcal{P}$  y un par de subconjuntos  $X, Y \subseteq \mathcal{P}$ , se tiene que  $G_X^Y = \{g \in \mathcal{G} / e(g) \in X, s(g) \in Y\} = (e, s)^{-1}(X \times Y)$ .

PROPOSICIÓN 1.54. [T, Prop.2.10] Sea  $\mathcal{G} \xrightarrow[e]{s} \mathcal{P}$  un grupoide topológico tal que  $\mathcal{P}$  es localmente compacto. Consideremos los siguientes enunciados,

- I.  $\mathcal{G}$  es propio;
- II.  $(s, e)$  es una aplicación cerrada y para todo  $p \in \mathcal{P}$ ,  $G_p^p$  es cuasicompacto;
- III. Para todo par de subespacios cuasicompactos  $K$  y  $L$  de  $\mathcal{P}$ , el conjunto  $G_K^L$  es cuasicompacto;
- IV. Para todo par de subespacios compactos  $K$  y  $L$  de  $\mathcal{P}$ , el conjunto  $G_K^L$  es cuasicompacto;
- V. Para todo espacio cuasicompacto  $K$  de  $\mathcal{P}$ , el conjunto  $G_K^K$  es cuasicompacto;
- VI. Para todo par de puntos  $p, q \in \mathcal{P}$ , existen vecindades compactas  $K_x$  y  $L_y$  de  $p$  y  $q$ , respectivamente, tal que  $G_{K_x}^{L_y}$  es cuasicompacto.

Entonces I, II, III, IV y VI son equivalentes, VI implica V. Además, si  $\mathcal{P}$  es Hausdorff entonces todas las afirmaciones son equivalentes.

DEMOSTRACIÓN. (I)  $\Leftrightarrow$  (II). Si  $G_y^x \neq \emptyset$  entonces dado cualquier  $g \in G_y^x$  la aplicación  $L_{g^{-1}} : G_x^x \rightarrow G_x^y$  es un homeomorfismo. Luego, por la proposición (1.4) la conclusión es inmediata.

(I)  $\Rightarrow$  (III). Si  $K$  y  $L$  son subconjuntos compactos de  $\mathcal{P}$  entonces  $X \times Y$  es un subconjunto compacto de  $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ , luego usando la proposición (1.8) y la observación (1.53), obtenemos la conclusión deseada.

(VI)  $\Rightarrow$  (I) Analoga a (I)  $\Rightarrow$  (III).

(III)  $\Rightarrow$  (IV)  $\Rightarrow$  (VI) y (III)  $\Rightarrow$  (V) son obvias.

(VI)  $\Rightarrow$  (V) sigue de las implicaciones ya demostradas.

Ahora, si  $\mathcal{P}$  es Hausdorff entonces (VI)  $\Rightarrow$  (V) es obvia. es obvia.  $\square$

DEFINICIÓN 1.55. Sea  $\mathcal{G} \xrightarrow[e]{s} \mathcal{P}$  un grupoide topológico y sea  $f : Q \rightarrow \mathcal{P}$  una aplicación continua. Supongamos que  $\triangleright : \mathcal{G} \times_f Q \rightarrow Q$  es una acción a izquierda de  $\mathcal{G}$  sobre  $f$ . Decimos que  $\triangleright$  es propia, si el grupoide acción asociado  $\mathcal{G} \times Q$  es propio. En ocasiones también diremos que  $Q$  es un  $\mathcal{G}$ -espacio propio.

PROPOSICIÓN 1.56. Sea  $\mathcal{G} \xrightarrow[e]{s} \mathcal{P}$  un grupoide topológico y sea  $f : Q \rightarrow \mathcal{P}$  una aplicación continua sobre la cual  $\mathcal{G}$ . Consideremos las siguientes afirmaciones,

- I.  $\mathcal{G}$  actúa de forma propia sobre  $Q$ ;
- II.  $(s, e) : \mathcal{G} \times Q \rightarrow Q \times Q$  es cerrado y para todo  $q \in Q$ , el estabilizador de  $q$  es cuasicompacto;
- III. Para todo par de subespacios cuasicompactos  $K$  y  $L$  de  $Q$ ,  $\{g \in \mathcal{G} / gL \cap K \neq \emptyset\}$  es cuasicompacto;
- IV. Para todo par de subespacios compactos  $K$  y  $L$  de  $Q$ ,  $\{g \in \mathcal{G} / gL \cap K \neq \emptyset\}$  es cuasicompacto;
- V. Para todo subespacio cuasicompacto  $K$  de  $Q$ ,  $\{g \in \mathcal{G} / gK \cup K \neq \emptyset\}$ ;
- VI. Existe una familia  $\{A_i\}_{i \in I}$  de subespacios de  $Q$  tal que  $Q = \bigcup_{i \in I} A_i$  y  $\{g \in \mathcal{G} / gA_i \cap A_j \neq \emptyset\}$  es relativamente cuasicompacto para todo  $i, j \in I$ .

Entonces (I)  $\Rightarrow$  (II), (II)  $\Rightarrow$  (III)  $\Rightarrow$  (IV) y (III)  $\Rightarrow$  (V). Si  $Q$  es localmente compacto, entonces (IV)  $\Rightarrow$  (VI) y (V)  $\Rightarrow$  (VI). Si  $\mathcal{P}$  y  $Q$  son Hausdorff y además  $Q$  es localmente compacto, entonces todas las enunciados anteriores son equivalentes.

PROPOSICIÓN 1.57. Sea  $\mathcal{G} \xrightarrow[e]{s} \mathcal{P}$  un grupoide topológico localmente compacto. Entonces  $\mathcal{G}$  actúa propiamente sobre si mismo si y solo si  $\mathcal{P}$  es Hausdorff.

## Capítulo 2

### Grupoides Dobles

En este capítulo trabajaremos con algunas de las definiciones y notaciones de [AN1], las cuales recordaremos por razones de completez.

#### 1. Categorías y Grupoides dobles

DEFINICIÓN 2.1. Sea  $C$  una categoría con productos fibrados. Un *objeto categoría* en  $C$  o una *categoría interna* a  $C$ , es una colección  $(A, O, s, t, id, m)$  donde  $A$  (“flechas”) y  $O$  (“objetos”) son objetos de  $C$ ;  $s, e : A \rightarrow O$  (aplicaciones “origen” y “final”, respectivamente),  $Id : O \rightarrow A$  (aplicación “identidad”) y  $m : C_e \times_s C \rightarrow C$  (“composición”) son flechas en  $C$ . Estos datos, sujetos a los axiomas usuales de asociatividad e identidad de la definición de categoría. Así mismo, un *grupoide interno* en  $C$  es una categoría interna en  $C$  dotada de una flecha  $I : A \rightarrow A$  en  $C$ , que satisface las propiedades de inversión usuales de la definición de grupoides (1.20).

DEFINICIÓN 2.2. Una *categoría doble* (pequeña)  $\mathcal{T}$  consta de los siguientes datos:

- Cuatro conjuntos no vacíos:  $\mathcal{B}$  (cajas),  $\mathcal{H}$  (lados horizontales),  $\mathcal{V}$  (lados verticales) y  $\mathcal{P}$  (puntos);
- ocho aplicaciones de borde:  $t, b : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{H}$ ;  $r, l : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{V}$ ;  $r, l : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{P}$ ;  $t, b : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{P}$ ;
- cuatro aplicaciones identidad:  $id : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{H}$ ;  $id : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{V}$ ;  $\mathbf{id} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{B}$ ;  $\mathbf{id} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{B}$ ;
- cuatro aplicaciones de composición, todas denotadas por  $m$ :

$\mathcal{B}_b \times_t \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$  (composición vertical),  $\mathcal{B}_r \times_l \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$  (composición horizontal),

$$\mathcal{H}_r \times_l \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad \mathcal{V}_b \times_t \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V};$$

todos estos datos sujetos a los siguientes axiomas.

**Axioma 0.**  $(\mathcal{B}, \mathcal{H}, t, b, \mathbf{id}, m)$ ,  $(\mathcal{B}, \mathcal{V}, l, r, \mathbf{id}, m)$ ,  $(\mathcal{H}, \mathcal{P}, l, r, id, m)$ ,  $(\mathcal{V}, \mathcal{P}, t, b, id, m)$  son categorías.

**Axioma 1.** Cuatro identidades entre las posibles funciones de  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{P}$ ,

$$tr = rt, \quad tl = lt, \quad bl = lb, \quad br = rb.$$

Este último axioma nos permite expresar graficamente todo elemento  $A \in \mathcal{B}$  como una caja

$$A = l \begin{array}{|c|} \hline t \\ \hline \\ \hline b \\ \hline \end{array} r$$

donde  $t(A) = t$ ,  $b(A) = b$ ,  $r(A) = r$ ,  $l(A) = l$ , y los cuatro vértices del cuadrado que representa  $A$  son  $tl(A)$ ,  $tr(A)$ ,  $bl(A)$ ,  $br(A)$ . Aclaremos que la notación  $t, b, r$  y  $l$  significa, respectivamente, ‘top’, ‘bottom’, ‘right’ y ‘left’. El resto de axiomas los expresaremos usando esta notación grafica.

Dado un par de cajas  $A, B \in \mathcal{B}$ , escribiremos  $A|B$  si  $r(A) = l(B)$ , lo cual indica que  $A$  y  $B$  se pueden componer horizontalmente. Del mismo modo, si  $b(A) = t(B)$ , escribiremos  $\frac{A}{B}$ , para indicar que  $A$  y  $B$  se pueden componer verticalmente.

Usaremos la notación  $AB$  (respectivamente,  $\frac{A}{B}$ ) para la composición horizontal (respectivamente, vertical).

**Axioma 2.** *Compatibilidad de las composiciones con las aplicaciones de borde.*

Sean  $A = l \begin{array}{|c|} \hline t \\ \hline \\ \hline b \\ \hline \end{array} r$  y  $B = s \begin{array}{|c|} \hline u \\ \hline \\ \hline c \\ \hline \end{array} m$  en  $\mathcal{B}$ .

$$(1.1) \text{ Si } A|B, \quad \text{entonces } AB = l \begin{array}{|c|} \hline tu \\ \hline \\ \hline bc \\ \hline \end{array} m,$$

$$(1.2) \text{ Si } \frac{A}{B}, \quad \text{entonces } \frac{A}{B} = ls \begin{array}{|c|} \hline t \\ \hline \\ \hline c \\ \hline \end{array} rm.$$

La notación  $\frac{A}{C} \left| \frac{B}{D} \right.$  significa que estan definidas todas las composiciones horizontales y verticales posibles entre dichos elementos; Lo cual implica, gracias al axioma 2, que  $\frac{AB}{CD}$  y

$$\frac{A}{C} \left| \frac{B}{D} \right.$$

**Axioma 3.** Ley de intercambio entre las composiciones horizontal y vertical. Si  $\frac{A}{C} \mid \frac{B}{D}$ , entonces

$$(1.3) \quad \frac{AB}{CD} := \frac{\{AB\}}{\{CD\}} = \left\{ \frac{A}{C} \right\} \left\{ \frac{B}{D} \right\}.$$

Como consecuencia del axioma 3, dadas  $r \times s$  cajas  $A_{ij}$ , con las compatibilidades ilustradas en la siguiente configuración,

$$\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1s} \\ \hline A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2s} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline A_{r1} & A_{r2} & \dots & A_{rs} \end{array},$$

el producto

$$\begin{array}{cccc} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{r1} & A_{r2} & \dots & A_{rs} \end{array}$$

esta bien definido y puede ser computado realizando cualquiera de las asociaciones posibles.

**Axioma 4.** Identidades Horizontales y Verticales. Las aplicaciones identidad  $\mathbf{id} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{B}$  (identidad vertical),  $\mathbf{id} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{B}$  (identidad horizontal) satisfacen

$$\mathbf{id}(g) = \mathbf{id} \begin{array}{c} g \\ \square \\ g \end{array} \mathbf{id} r(g), \quad g \in \mathcal{H}; \quad \mathbf{id}(x) = \begin{array}{c} \mathbf{id} t(x) \\ x \square x \\ \mathbf{id} b(x) \end{array}, \quad x \in \mathcal{V}.$$

Usaremos la notación  $\mathbf{id}_{\mathcal{H}} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{H}$  y  $\mathbf{id}_{\mathcal{V}} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{V}$  para denotar las aplicaciones identidad de los grupoides  $\mathcal{H} \xrightleftharpoons[e]{s} \mathcal{P}$  y  $\mathcal{V} \xrightleftharpoons[e]{s} \mathcal{P}$ .

**Axioma 5.** Identidades horizontal and vertical de identidades en los puntos.

Si  $P \in \mathcal{P}$ , entonces

$$\mathbf{id} \mathbf{id}_{\mathcal{H}} P = \mathbf{id} \mathbf{id}_{\mathcal{V}} P;$$

esta caja será denotada por  $\Theta_P$ .

**Axioma 6.** Compatibilidad de las identidades con la composición de flechas. Si la composición de  $g, h \in \mathcal{V}$  y  $x, y \in \mathcal{H}$  esta definida, entonces

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{id} g \\ \mathbf{id} h \end{array} \right\} = \mathbf{id} gh, \quad \left\{ \mathbf{id} x \mathbf{id} y \right\} = \mathbf{id} xy.$$

LEMA 2.3. [BS]. Una categoría doble es un objeto categoría en la categoría de todas las categorías pequeñas.

DEMOSTRACIÓN. Ver [AN1, Lema 1.2]. □

NOTACIÓN. Una categoría doble la denotaremos como un arreglo

$$(1.4) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \rightrightarrows & \mathcal{V} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \mathcal{H} & \rightrightarrows & \mathcal{P} \end{array}$$

de cuatro categorías relacionadas, y cuyos datos están sujetos a los axiomas anteriores. En el diagrama (0.1) las flechas verticales

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & & \mathcal{V} \\ \Downarrow, & & \Downarrow, \\ \mathcal{H} & & \mathcal{P} \end{array}$$

corresponden a las categorías  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{O}$  de “flechas” y “objetos”, respectivamente, mientras las flechas horizontales

$$\mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{V}, \quad \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{P},$$

corresponde a los funtores  $t, b : \mathcal{A} \rightrightarrows \mathcal{O}$ .

DEFINICIÓN 2.4. [Eh, BS] Un *grupoide doble* es una categoría doble

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \rightrightarrows & \mathcal{V} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \mathcal{H} & \rightrightarrows & \mathcal{P} \end{array}$$

tal que las cuatro categorías que la componen son grupoides y además  $(I_v, I_{\mathcal{V}})$  e  $(I_h, I_{\mathcal{H}})$  son morfismos de grupoides; donde  $I_v$  e  $I_h$  denotan la aplicación de inversión de las estructuras de grupoide sobre  $\mathcal{B}$ , vertical y horizontal respectivamente; y donde  $I_{\mathcal{V}}$  e  $I_{\mathcal{H}}$  denotan las aplicaciones de inversión de los grupoides  $\mathcal{V} \rightrightarrows \mathcal{P}$  y  $\mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{P}$  respectivamente.

DEFINICIÓN 2.5. Un *grupoide doble*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \rightrightarrows & \mathcal{V} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \mathcal{H} & \rightrightarrows & \mathcal{P} \end{array}$$

se dice que satisface la *condición de llenado*, si para todo par  $x \in \mathcal{H}$  y  $f \in \mathcal{V}$  tal que  $r(x) = t(f)$ , existe  $A \in \mathcal{B}$  tal que  $t(A) = x$  y  $r(A) = f$ .

## 2. Ejemplos de categorías y grupoides dobles

EJEMPLO 2.6. Una 2-categoría es una categoría doble donde todas las flechas verticales son identidades; es decir, todo elemento  $f \in \mathcal{V}$  es una identidad. En este caso, los elementos de  $\mathcal{H}$  son los *morfismos* de la 2-categoría, mientras los elementos de  $\mathcal{B}$  son las *celulas*.

EJEMPLO 2.7. Sea  $\mathcal{C}$  una categoría pequeña. Entonces la clase  $\mathcal{B}$  de todos los diagramas cuadrados en  $\mathcal{C}$ , esto es, todos los diagramas

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{x} & Y \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ Z & \xrightarrow{y} & W, \end{array}$$

es una categoría doble, donde las categorías laterales  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{H}$  son iguales a  $\mathcal{C}$ .

Antes de dar un ejemplo de grupoide doble, introduciremos a continuación la definición de *par de grupos apareados*.

DEFINICIÓN 2.8. [M] Dos grupos  $(F, G)$  constituyen un par apareado, si existe una acción a derecha  $\triangleleft : G \times F \rightarrow G$  de  $F$  sobre  $G$  y una acción a izquierda  $\triangleright : G \times F \rightarrow F$  de  $G$  sobre  $F$  tal que,

$$\begin{aligned} e \triangleleft x &= e, (fg) \triangleleft x = (f \triangleleft (g \triangleright x))(g \triangleleft x), \\ g \triangleright e &= e \text{ y } g \triangleright (xy) = (g \triangleleft x)((g \triangleright x) \triangleleft y). \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 2.9. Sean  $D$  un grupo y  $H, V$  subgrupos de  $D$ . Decimos que  $(H, V)$  es una factorización exacta de  $G$  si la aplicación  $H \times V \rightarrow D$  dada por  $(h, v) \mapsto hv$ , es biyectiva.

Sea  $(H, V, \triangleleft, \triangleright)$  un par de grupos apareados. Existe un *grupo diagonal* asociado  $V \bowtie H = V \times H$  donde la composición y la identidad están dados por

$$(g, x)(h, y) = (g(x \triangleright h), (x \triangleleft h)y), \quad e = (e_V, e_H),$$

para todo  $g, h \in V$  y  $x, y \in H$ . Tenemos así una factorización exacta de grupos  $D = VH$ . Recíprocamente, si  $D = VH$  es una factorización exacta de grupos entonces existen acciones  $\triangleleft, \triangleright$  tal que  $(H, V, \triangleleft, \triangleright)$  forman un par de grupos apareados y  $D \simeq V \bowtie H$ .

DEFINICIÓN 2.10. Sean  $D$  un grupo y  $V$  un subgrupo de  $D$ . Decimos que un subgrupo  $H$  de  $D$  es un factor exacto de  $V$ , si  $(H, V)$  es una factorización exacta de  $D$ .

Los siguientes ejemplos de factorizaciones exactas son tomados de [AM].

EJEMPLO 2.11. Dado un grupo  $D$  y un subgrupo  $H$ , cualquier conjugado de un factor exacto de  $H$  es de nuevo un factor exacto de  $H$ .

EJEMPLO 2.12. Existe un grupo finito  $D$ , un subgrupo  $V$  y factores exactos  $H$  and  $H'$  tal que  $H \not\cong H'$ . Por ejemplo, si  $D = \mathbb{S}_4$ ,  $V = \mathbb{S}_3$  (el subgrupo que deja fijo a 4),  $H = \langle (1234) \rangle \simeq \mathbb{Z}/(4)$ ,  $H' = \langle (24)(13), (34)(12) \rangle \simeq \mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(2)$ .

EJEMPLO 2.13. Existe un grupo finito  $D$ , un subgrupo  $V$  y factores exactos  $H$  y  $H'$  con  $H \simeq H'$  pero  $H$  no es conjugado a  $H'$ . Por ejemplo,  $D = \mathbb{S}_n$ ,  $n \geq 6$ ,  $V = A_n$ ,  $H = \langle (12) \rangle$ ,  $H' = \langle (12)(34)(56) \rangle$ .

EJEMPLO 2.14. (Teorema de Schur-Zassenhaus). Si  $D$  es un grupo finito y  $V \triangleleft D$  es un subgrupo normal tal que  $(|V|, [D : V]) = 1$ , entonces  $V$  admite factores exactos, los cuales son todos conjugados. La prueba conocida de la conjugación de los factores exactos se fundamenta en el teorema de Feit-Thompson (Cualquier grupo de orden impar es soluble).

EJEMPLO 2.15. La lista de todas las factorizaciones exactas de  $\mathbb{S}_n$  y  $A_n$  son dadas en [WW].

En base al concepto de par de grupos apareado y de los ejemplos dados de estas estructuras, introducimos en siguiente ejemplo de grupoide doble que posee un punto como base total.

EJEMPLO 2.16. Sea  $\triangleleft : G \times F \rightarrow G, \triangleright : G \times F \rightarrow F$ , un par apareado de grupos finitos.

Sean  $\mathcal{P} := \{*\}$  un conjunto con un solo elemento,  $\mathcal{B} := G \times F$ ,  $\mathcal{V} := G$  y  $\mathcal{H} := F$ . El conjunto  $G \times F$  posee una estructura de grupoide doble,

$$\begin{array}{ccc} G \times F & \rightrightarrows & G \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ F & \rightrightarrows & \mathcal{P}, \end{array}$$

donde los grupoides  $G \times F \rightrightarrows G$  y  $G \times F \rightrightarrows F$  corresponden a los grupoides acción asociados con las acciones  $\triangleleft$  y  $\triangleright$ , respectivamente (ver (1.45)).

Otros ejemplos serán dados mas adelante en el transcurso del trabajo.

**2.1. Grupoide Medular asociado a un grupoide doble.** Sea  $\mathcal{T} = (\mathcal{B}; \mathcal{V}, \mathcal{H}; \mathcal{P})$  un grupoide doble. Brown y Mackenzie introdujeron los conceptos de *grupoide medular* y *diagramas medulares* asociados a  $\mathcal{T}$ , los cuales resultaron ser de gran importancia para estudiar la estructura de  $\mathcal{T}$  (ver [M4, BM]). En esta subsección recordaremos la definición del grupoide medular y describiremos algunas de sus propiedades.

Consideremos el conjunto

$$\mathbf{E} := \{E \in \mathcal{B} : r(E), t(E) \in \mathcal{P}\}.$$

Los elementos de  $\mathbf{E}$  son cajas de la forma  $\boxed{\quad}$ . Notemos que  $\Theta_P \in \mathbf{E}$  para todo  $P \in \mathcal{P}$ , como consecuencia  $\mathbf{E} \neq \emptyset$ .

PROPOSICIÓN 2.17. *Las aplicaciones*

- $s, e : \mathbf{E} \rightrightarrows \mathcal{P}$ , dadas por  $s(E) = bl(E)$  y  $e(E) = br(E)$ , para todo  $E \in \mathbf{E}$ ;
- $\text{id} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbf{E}, P \mapsto \Theta_P$ ;
- $\circ : \mathbf{E}_e \times_s \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ , dada por

$$(2.1) \quad E \circ F := \left\{ \begin{array}{cc} \text{id}l(F) & F \\ E & \text{id}b(F) \end{array} \right\},$$

para todo par  $E, F \in \mathbf{E}$ ;

■  $I : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ , dada por

$$(2.2) \quad I(E) = E^{(-1)} := (E \mathbf{id}b(E)^{-1})^v = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{id}l(E)^{-1} \\ E^h \end{array} \right\},$$

para todo  $E \in \mathbf{E}$ ;

dotan al conjunto  $\mathbf{E}$  de una estructura de grupoide sobre  $\mathcal{P}$ ,

DEMOSTRACIÓN. La prueba se hace verificando directamente cada uno de los axiomas de la definición de grupoide. Ver [BM] o [M1].  $\square$

DEFINICIÓN 2.18. Sea  $\mathcal{T} = (\mathcal{B}; \mathcal{V}, \mathcal{H}; \mathcal{P})$  un grupoide doble. El grupoide  $\mathbf{E} \rightrightarrows \mathcal{P}$ , definido en la proposición (2.17), es llamado el *grupoide medular* asociado a  $\mathcal{T}$ .

**2.2. Acción Medular.** La siguiente proposición y su demostración, aunque aparece ya en el trabajo [BM], son tomadas de [AN3].

PROPOSICIÓN 2.19. Sea  $(\mathcal{B}; \mathcal{V}, \mathcal{H}; \mathcal{P})$  un grupoide doble. Definamos  $\gamma : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{P}$ ,  $\gamma(A) = lb(A)$ .

(a). Existe una acción del grupoide medular  $\mathbf{E}(\mathcal{B})$  sobre  $\gamma : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{P}$  dada por

$$(2.3) \quad E \rightarrow A := \left\{ \begin{array}{cc} \mathbf{id}l(A) & A \\ E & \mathbf{id}b(A) \end{array} \right\}, \quad A \in \mathcal{B}, E \in \mathbf{E}.$$

(b). Sea  $B \in \mathcal{B}$ . El estabilizador  $\mathbf{E}(\mathcal{B})^B$  es trivial y la órbita de  $B$  es  $O_B = \{A \in \mathcal{B} : t(A) = t(B), r(A) = r(B)\}$ .

DEMOSTRACIÓN. (a): La prueba es directa, basta verificar que la acción está bien definida y que se satisfacen los axiomas de la definición de acción de un grupoide.

(b): Como consecuencia inmediata de la ecuación (4.15) se tiene que  $O_B \subseteq \mathcal{U}\mathcal{R}(B)$ . Ahora, para todo  $C \in \mathcal{U}\mathcal{R}(B)$ , si definimos  $E = \left\{ \begin{array}{c} B^v \\ C \end{array} \right\} \mathbf{id}b(B)^{-1}$ , se puede observar que  $E$  es el único elemento de  $\mathbf{E}$  que satisface  $E \rightarrow B = C$ ; lo cual demuestra las dos afirmaciones en (b).  $\square$



## Capítulo 3

### Algunas propiedades de los Grupos dobles

En este capítulo presentaremos algunos de los resultados del trabajo [AN3], los cuales son necesarios en el capítulo siguiente para hacer un poco de teoría de Lie de estas estructuras dobles. Durante este capítulo,

$$(0.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \rightrightarrows & \mathcal{V} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \mathcal{H} & \rightrightarrows & \mathcal{P} \end{array}$$

denotará un grupoide doble y todas las afirmaciones y definiciones se realizarán respecto del mismo.

#### 1. Fibrado canónico de grupos abelianos

LEMA 3.1. *Sea*

$$\mathbf{K} := \{K \in \mathcal{B} : t(K), b(K), l(K), r(K) \in \mathcal{P}\};$$

*La aplicación  $p : \mathbf{K} \rightarrow \mathcal{P}$ ,  $p(K) \mapsto lb(K)$ , es un fibrado de grupos abelianos bajo composición vertical, la cual a su vez coincide con la composición horizontal.*

DEMOSTRACIÓN. Para todo  $P \in \mathbf{K}$  denotemos por  $\mathbf{K}(P)$  la fibra de  $p$  en  $P \in \mathbf{K}$ . Claramente  $\mathbf{K}(P)$  es un grupo bajo composición vertical.

De otro lado, aplicando la ley de intercambio para  $K, L, M, N \in \mathbf{K}(P)$

$$(1.1) \quad \begin{array}{c} (KL) \\ (MN) \end{array} = \begin{pmatrix} K \\ M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L \\ N \end{pmatrix}$$

Luego, si  $L = M = \Theta_P$ , se sigue que  $\frac{K}{N} = KN$ . Por tanto las dos operaciones coinciden. Ahora, si en la ecuación (1.1) tomamos  $K = N = \Theta_P$ , obtenemos  $\frac{L}{M} = ML$ . Como consecuencia la composición es abeliana.

Luego,  $\mathbf{K}$  es un fibrado de grupos abelianos sobre  $\mathcal{P}$ . □

DEFINICIÓN 3.2. El *fibrado canónico de grupos abelianos* asociado a  $\mathcal{B}$  es la aplicación  $p : \mathbf{K} \rightarrow \mathcal{P}$ ,  $p(K) \mapsto lb(K)$ , dotada de la estructura de fibrado del lema (3.1).

OBSERVACIÓN 3.3. Una caja esta en  $\mathbf{K}$  si y solo si es de la forma  $\square$ .

Para todo  $P \in \mathbf{K}$  denotaremos por  $\mathbf{K}(P)$  la fibra de  $p$  en  $P$ .

Los grupoides vertical y horizontal  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{H}$  actúan sobre  $\mathbf{K}$  por conjugación vertical, respectivamente horizontal:

$$(1.2) \text{ Si } g \in \mathcal{V}(Q, P) \text{ y } K \in \mathbf{K}(P) \text{ entonces } g \cdot K := \begin{array}{c} \text{id } g \\ K \\ \text{id } g^{-1} \end{array} \in \mathbf{K}(Q).$$

$$(1.3) \text{ si } x \in \mathcal{H}(Q, P) \text{ y } K \in \mathbf{K}(P) \text{ entonces } x \cdot K = \text{id } x K \text{id } x^{-1} \in \mathbf{K}(Q);$$

ambas acciones son por automorfismos de fibrados de grupos.

## 2. Grupoide doble de Marcos asociado a un grupoide doble

DEFINICIÓN 3.4. Sean  $\mathcal{V}, \mathcal{H}$  grupoides sobre una base común  $\mathcal{P}$ . Sea  $\square(\mathcal{V}, \mathcal{H})$  el conjunto de todos los arreglos  $\begin{pmatrix} x \\ f & g \\ y \end{pmatrix}$  con  $x, y \in \mathcal{H}, f, g \in \mathcal{V}$  y tal que

$$l(x) = t(f), \quad r(x) = t(g), \quad l(y) = b(f), \quad r(y) = b(g).$$

La colección  $\begin{array}{ccc} \square(\mathcal{V}, \mathcal{H}) & \rightrightarrows & \mathcal{V} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \mathcal{H} & \rightrightarrows & \mathcal{P} \end{array}$  forma un grupoide doble, llamado el *grupoide doble de cuadrados* con lados en  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{V}$ , donde la composiciones horizontal y vertical están dadas por

$$h \begin{array}{c} x \\ \square \\ y \end{array} g g \begin{array}{c} x' \\ \square \\ y' \end{array} g' = h \begin{array}{c} xx' \\ \square \\ yy' \end{array} g', \quad h \begin{array}{c} x \\ \square \\ y \end{array} g = h h' \begin{array}{c} x \\ \square \\ y' \end{array} g g',$$

para todo  $x, y, x', y' \in \mathcal{H}, g, h, g', h' \in \mathcal{V}$  adecuados.

OBSERVACIÓN 3.5. Si no hay riesgo de confusión, un arreglo como  $\begin{pmatrix} x \\ f & g \\ y \end{pmatrix}$  con  $x, y \in \mathcal{H}, f, g \in \mathcal{V}$ , lo denotaremos también por  $h \begin{array}{c} x \\ \square \\ y \end{array} g$ .

DEFINICIÓN 3.6. Sea  $(\mathcal{B}; \mathcal{V}, \mathcal{H}; \mathcal{P})$  un grupoide doble. El morfismo de grupoides dobles discretos  $\Pi_{\mathcal{B}}: \mathcal{B} \rightarrow \square(\mathcal{V}, \mathcal{H})$  dado por

$$\Pi \left( f \begin{array}{c} x \\ \boxed{A} \\ y \end{array} g \right) = \left( \begin{array}{cc} x & \\ f & g \\ & y \end{array} \right), \quad f \begin{array}{c} x \\ \boxed{A} \\ y \end{array} g \in \mathcal{B},$$

es llamado *aplicación doble ancla* de  $\mathcal{B}$ .

DEFINICIÓN 3.7. Sea  $(\mathcal{B}; \mathcal{V}, \mathcal{H}; \mathcal{P})$  un grupoide doble. El *grupoide doble de marcos*  $\mathcal{F}$  asociado a  $\mathcal{B}$  se define como el subgrupoide doble de  $\square(\mathcal{V}, \mathcal{H})$ ,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathcal{B}) & \rightrightarrows & \mathcal{V} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \mathcal{H} & \rightrightarrows & \mathcal{P} \end{array}$$

donde  $\mathcal{F}(\mathcal{B})$  es la imagen de la aplicación  $\Pi_{\mathcal{B}}$ .

OBSERVACIÓN 3.8. Sea  $(\mathcal{B}; \mathcal{V}, \mathcal{H}; \mathcal{P})$  un grupoide doble.  $\mathcal{B}$  satisface la condición de llenado (2.5) si y solo si  $\mathcal{F}(\mathcal{B})$  la satisface.

OBSERVACIÓN 3.9. Si  $(x, g) \in \mathcal{H}_r \times_t \mathcal{V}$  y  $B \in \mathcal{B}$  entonces usaremos la siguiente notación para los conjuntos de cajas con bordes *superior* y *derecho* fijos.

$$(2.1) \quad \mathfrak{LR}(x, g) = \left\{ U \in \mathcal{B} : U = \begin{array}{c} x \\ \boxed{\phantom{A}} \\ g \end{array} \right\}, \quad \mathfrak{LR}(B) = \mathfrak{LR}(t(B), r(B)).$$

A continuación enunciamos y demostraremos el primer resultado básico obtenido por Andruskiewisch y Natale en [AN3]. Fijemos una sección  $\mu : \mathcal{F}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B}$  de  $\Pi_{\mathcal{B}}$ .

LEMA 3.10. La aplicación  $\Psi : \mathbf{K}_p \times_{\gamma} \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{B}$  dada por  $\Psi(K, F) = K \rightarrow_{\mu}(F)$  es una biyección. Donde  $\rightarrow$  denota la acción medular introducida en (2.19)

DEMOSTRACIÓN. Veamos primero que  $\Psi$  es uno a uno. Consideremos  $K, K' \in \mathbf{K}$ ,  $F, F' \in \mathcal{F}(\mathcal{B})$  y supongamos  $K \rightarrow_{\mu}(F) = K' \rightarrow_{\mu}(F')$ . Luego,  $F = \Pi_{\mathcal{B}}(K \rightarrow_{\mu}(F)) = \Pi_{\mathcal{B}}(K' \rightarrow_{\mu}(F')) = F'$ . Resta probar que  $K = K'$ , pero esto es inmediato a partir de 2.19, pues  $K \rightarrow_{\mu}(F) = K' \rightarrow_{\mu}(F)$  y como el estabilizador de  $\mu(F)$  es trivial, entonces  $K = K'$ .

Veamos ahora que  $\Psi$  es sobreyectiva. Sean  $B \in \mathcal{B}$  y  $F = \Pi(B)$ ; dado que  $B$  y  $\mu(F)$  poseen los mismos lados, usando 2.19, existe  $K \in \mathbf{E}$  tal que  $B = K \rightarrow_{\mu}(F)$ . Pero es claro que  $K \in \mathbf{K}$ .  $\square$

### 3. Grupoide diagonal asociado a un grupoide doble delgado

En esta sección recordaremos una construcción realizada en [AN3] mediante la cual a un grupoide doble se le asocia un grupoide llamado *grupoide diagonal*. También introduciremos una nueva caracterización del grupoide diagonal haciendo uso del grupoide medular asociado al grupoide doble original (ver [AOT]).

**3.1. Grupoide Diagonal.** Sea  $\mathcal{B}$  un grupoide doble que satisface la condición de llenado (2.5) y sea  $\mathcal{V} \circledast \mathcal{H}$  el producto libre sobre  $\mathcal{P}$  de los grupoides vertical y horizontal (ver [AN3]

y [H]). Si  $h \begin{array}{c} x \\ \boxed{A} \\ y \end{array} g \in \mathcal{B}$  usaremos la notación  $[A] := xgy^{-1}h^{-1} \in \mathcal{V} \circledast \mathcal{H}$ . Definimos el grupoide

$J_{\circledast}(\mathcal{B}) \rightrightarrows \mathcal{P}$ , como el subgrupoide de  $\mathcal{V} \circledast \mathcal{H}$  generado por  $\{[A] | A \in \mathcal{B}\}$ . Como  $s_{\circledast}([A]) = e_{\circledast}([A]) = tl(A)$  entonces,  $J_{\circledast}(\mathcal{B}) \rightrightarrows \mathcal{P}$  es de hecho un fibrado de grupos y a su vez subgrupoide normal de  $\mathcal{V} \circledast \mathcal{H}$  [AN3, lemma 3.5].

DEFINICIÓN 3.11. [AN3] Sea  $(\mathcal{B}; \mathcal{V}, \mathcal{H}; \mathcal{P})$  un grupoide doble delgado; el *grupoide diagonal* asociado a  $\mathcal{B}$  se define como  $\mathcal{D}(\mathcal{B}) = \mathcal{V} \circledast \mathcal{H} / J_{\circledast}(\mathcal{B})$ .

OBSERVACIÓN 3.12. Si componemos las inclusiones naturales de  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{H}$  en  $\mathcal{V} \circledast \mathcal{H}$  con las proyecciones sobre  $\mathcal{D}(\mathcal{B})$ , obtenemos dos morfismos de grupoides:

$$i: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{B}) \quad \text{and} \quad j: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{B}).$$

Luego  $(\mathcal{D}(\mathcal{B}), i, j)$  es un diagrama de grupoides.

Nuestro próximo objetivo es dar otra presentación del grupoide diagonal como un cociente de  $\mathcal{V} \times_l \mathcal{H}$ .

PROPOSICIÓN 3.13. [AOT] Sea  $(\mathcal{B}; \mathcal{V}, \mathcal{H}; \mathcal{P})$  un grupoide doble delgado que satisface la condición de llenado. Definamos sobre  $\mathcal{V} \times_l \mathcal{H}$  la siguiente relación  $\sim_{\mathcal{B}}$ :

$$(v_1, h_1) \sim_{\mathcal{B}} (v_2, h_2) \text{ si y solo si } r(h_1) = r(h_2), t(v_1) = t(v_2) \text{ y } v_1 h_1 h_2^{-1} v_2^{-1} \in J_{\circledast}(\mathcal{B}).$$

Entonces  $\sim_{\mathcal{B}}$  es una relación de equivalencia y la aplicación

$$\phi: \mathcal{V} \times_l \mathcal{H} / \sim_{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{B}), \quad [v, h] \mapsto j(v)i(h)$$

esta bien definida y es una biyección (de carcajs sobre  $\mathcal{P}$ ).

DEMOSTRACIÓN. Claramente  $\sim_{\mathcal{B}}$  es una relación de equivalencia. Consideremos  $\mathcal{G} := (\mathcal{V} \times_l \mathcal{H}) / \sim_{\mathcal{B}}$  y sea  $[f_1, x_1] = [f_2, x_2]$  en  $\mathcal{G}$ . Luego, por definición,  $f_1 x_1 x_2^{-1} f_2^{-1} \in J_{\circledast}(\mathcal{B})$ . De aquí  $\overline{f_1} \overline{x_1} = \overline{f_2} \overline{x_2}$  en  $\mathcal{D}(\mathcal{B})$ , donde  $\overline{w}$  denota la imagen de  $w$  bajo  $i$  si  $w \in \mathcal{H}$  o bajo  $j$  si  $w \in \mathcal{V}$ . Esto demuestra que  $\phi$  esta bien definida.

Supongamos ahora que  $g, g' \in \mathcal{V}$ ,  $x, x' \in \mathcal{H}$  satisfacen  $\overline{gx} = \overline{g'x'}$ . Entonces  $g'x'x^{-1}g^{-1} \in J_{\circledast}(\mathcal{B})$ , luego  $[g', x'] = [g, x]$ . Así  $\phi$  es uno a uno.

Veamos que  $\phi$  es sobreyectiva. Sea  $d \in \mathcal{D}(\mathcal{B})$ , luego  $d = \overline{d_1} \overline{d_2} \dots \overline{d_n}$  con  $d_i$  un elemento de  $\mathcal{V}$  o de  $\mathcal{H}$ . Supongamos  $d_i \in \mathcal{H}$ ,  $d_{i+1} \in \mathcal{V}$  con  $r(d_i) = t(d_{i+1})$ . Dado que  $\mathcal{B}$  satisface la condición de llenado, la esquina

$$(3.1) \quad \overline{\begin{array}{c} d_i \\ \boxed{\phantom{A}} \\ d_{i+1} \end{array}}$$

puede completarse a una caja in  $\mathcal{B}$ ; esto es, existe  $B \in \mathcal{B}$  tal que

$$B = f \begin{array}{c} d_i \\ \square \\ y \end{array} d_{i+1}.$$

Luego,  $d_i d_{i+1} y^{-1} f^{-1} \in J_{\otimes}(\mathcal{D})$  y  $\overline{d_i} \overline{d_{i+1}} = \overline{f} \overline{y}$ . Como consecuencia, podemos conmutar los  $d_i$ 's en  $d = \overline{d_1} \overline{d_2} \dots \overline{d_n}$  para obtener  $d = \overline{g} \overline{x}$  con  $g \in \mathcal{V}$ ,  $x \in \mathcal{H}$  y  $b(g) = l(x)$ . Esto demuestra que  $\phi$  es sobreyectiva.  $\square$

OBSERVACIÓN 3.14.  $\phi$  induce una estructura de grupoide sobre  $\mathcal{G} = \mathcal{V}_{b \times l} \mathcal{H} / \sim_{\mathcal{B}}$  dada por:

- Las aplicaciones origen y final son

$$s : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{P}, \quad [v, h] \mapsto t(v); \quad e : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{P}, \quad [v, h] \mapsto r(h).$$

- La aplicación identidad es  $\text{id} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{G}$ ,  $p \mapsto \text{id}_p = [\text{id}_p, \text{id}_p]$ .

- La composición parcial es  $[v_1, h_1][v_2, h_2] = [v_1 f, z h_2]$  where  $f \begin{array}{c} h_1 \\ \square \\ z \end{array} v_2 \in \mathcal{B}$ .

- La aplicación de inversión es  $[v, h]^{-1} = [f^{-1}, z^{-1}]$  where  $v \begin{array}{c} z \\ \square \\ h \end{array} f \in \mathcal{B}$ .

Si  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{H}$  son grupoide de Lie, entonces  $b$  y  $l$  son submersions sobreyectivas, luego  $\mathcal{V}_{b \times l} \mathcal{H}$  es una subvariedad embebida de  $\mathcal{V} \times \mathcal{H}$ . Demostraremos mas adelante que, bajo cierta condiciones *naturales*,  $\mathcal{V}_{b \times l} \mathcal{H} / \sim_{\mathcal{B}}$  es un grupoide de Lie.

A continuaci3n recordaremos el principal lema t3cnico demostrado por *Andruskiewtisch y Natale* en [AN3].

LEMA 3.15. [AN3, Lemma 3.8] *Sea  $(\mathcal{B}; \mathcal{V}, \mathcal{H}; \mathcal{P})$  un grupoide doble delgado que satisface la condici3n de llenado. Sean  $f \in \mathcal{V}$  y  $x \in \mathcal{H}$  tal que:*

- $l(x) = b(f)$  y  $t(f) = r(x)$ ,
- $f x \in J_{\otimes}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{V} \otimes \mathcal{H}$ .

Entonces existe  $E \in \mathbf{E}(\mathcal{B})$  tal que  $E = f \begin{array}{c} \square \\ \square \\ x \end{array}$ .  $\square$

Haciendo uso del lema (3.15), presentaremos a continuaci3n una descripci3n alternativa de la relaci3n  $\sim_{\mathcal{B}}$ . En efecto,  $(f_1, x_1) \sim_{\mathcal{B}} (f_2, x_2)$  si y solo si  $f_1 x_1 x_2^{-1} f_2^{-1} \in J_{\otimes}(\mathcal{B})$ . Dado que  $J_{\otimes}(\mathcal{B})$  es un subgrupoide normal, tenemos que  $(f_1, x_1) \sim_{\mathcal{B}} (f_2, x_2)$  si y solo si  $f_2^{-1} f_1 x_1 x_2^{-1} \in J_{\otimes}(\mathcal{B})$ . De aqu3

$$(3.2) \quad (f_1, x_1) \sim_{\mathcal{B}} (f_2, x_2) \iff \text{existe } E = f_2^{-1} f_1 \begin{array}{c} \square \\ \square \\ x_1 x_2^{-1} \end{array} \in \mathcal{B}.$$

Luego, el grafo de la relación  $\sim_{\mathcal{B}}$  es

$$R = \left\{ (f_1, x_1, f_2, x_2) \in (\mathcal{V}_{b \times l} \mathcal{H})_{\eta \times \eta} (\mathcal{V}_{b \times l} \mathcal{H}) \mid \exists E \in \mathbf{E}(\mathcal{B}), E = f_2^{-1} f_1 \begin{array}{c} \square \\ x_1 x_2^{-1} \end{array} \right\}$$

donde

$$\eta : \mathcal{V}_{b \times l} \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{P} \times \mathcal{P}, \quad (f, x) \mapsto (t(f), r(x)).$$

Concluimos entonces que la relación  $\sim_{\mathcal{B}}$  esta determinada por el grupoide medular asociado a  $\mathcal{B}$ .

LEMA 3.16. *Sea  $(\mathcal{B}; \mathcal{V}, \mathcal{H}; \mathcal{P})$  un grupoide doble delgado que satisface la condición de llenado. Si  $(f_1, x_1), (f_2, x_2) \in \mathcal{V}_{b \times l} \mathcal{H}$ , entonces  $(f_1, x_1) \sim_{\mathcal{B}} (f_2, x_2)$  si y solo si existen  $A, B \in \mathcal{B}$  tal que*

$$A = f_1 \begin{array}{c} x \\ \square \\ x_1 \end{array} g, \quad \text{and} \quad B = f_2 \begin{array}{c} x \\ \square \\ x_2 \end{array} g.$$

DEMOSTRACIÓN. En efecto, si

$$A = f_1 \begin{array}{c} x \\ \square \\ x_1 \end{array} g, \quad \text{and} \quad B = f_2 \begin{array}{c} x \\ \square \\ x_2 \end{array} g \quad \text{are in } \mathcal{B},$$

entonces  $xg x_1^{-1} f_1^{-1} \in J_{\otimes}(\mathcal{B})$  y  $xg x_2^{-1} f_2^{-1} \in J_{\otimes}(\mathcal{B})$ , tomando el inverso del primero y componiendo luego, se sigue que  $f_1 x_1 x_2^{-1} f_2^{-1} \in J_{\otimes}(\mathcal{B})$ , i. e.  $(f_1, x_1) \sim_{\mathcal{B}} (f_2, x_2)$ .

Recíprocamente, si  $(f_1, x_1) \sim_{\mathcal{B}} (f_2, x_2)$  entonces por (3.2), existe  $E \in \mathbf{E}(\mathcal{B})$  tal que  $E = f_2^{-1} f_1 \begin{array}{c} \square \\ x_1 x_2^{-1} \end{array}$ . La condición de llenado garantiza que dados  $x_2 \in \mathcal{H}$  y  $f_2 \in \mathcal{V}$  con  $l(x_2) =$

$b(f_2)$ , existe una caja  $B' \in \mathcal{B}$  con  $t(B') = x_2$  y  $l(B') = f_2^{-1}$ . Sean  $B' = f_2^{-1} \begin{array}{c} x_2 \\ \square \\ x \end{array} g^{-1}$  y  $A' :=$

$\left\{ \begin{array}{cc} E^v & \mathbf{id}(x_2) \\ \mathbf{id}(f_2) & B' \end{array} \right\} = f_1^{-1} \begin{array}{c} x_1 \\ \square \\ x \end{array} g^{-1}$  y sean  $A, B$  los inversos verticales de  $A'$  y  $B'$  respectivamente.

Luego  $A = f_1 \begin{array}{c} x \\ \square \\ x_1 \end{array} g$  y  $B = f_2 \begin{array}{c} x \\ \square \\ x_2 \end{array} g$  estan en  $\mathcal{B}$ , obteniendo así el resultado deseado.  $\square$

## Grupoides dobles de Lie

En este capítulo comenzaremos el estudio de la *teoría de Lie* de los grupoides dobles. Introduciremos la noción de grupoide doble de Lie, definiremos una clase especial de grupoides dobles de Lie introducidos en [AN3], los *grupoides dobles delgados* y extenderemos al contexto diferencial, de una manera no trivial, una caracterización dada en *loc.cit* de los grupoides dobles delgados en terminos de estructuras de grupoides. Demostraremos que bajo ciertas condiciones razonables, todo grupoide doble de Lie delgado, se puede obtener a partir de ciertos datos de grupoides de Lie. Así obtenemos una descripción de una clase de grupoides dobles de Lie en terminos de estructuras de *primer orden*.

### 1. Grupoides dobles de Lie delgados

DEFINICIÓN 4.1. [M1, Mackenzie] Un grupoide doble  $(\mathcal{B}; \mathcal{V}, \mathcal{H}; \mathcal{P})$  es un *grupoide doble de Lie* si los cuatro grupoides involucrados son grupoides de Lie y si además, la aplicación *origen-final*

$$(1.1) \quad \mathbf{S} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{H} \times_t \mathcal{V}, \quad A \mapsto \mathbf{S}(A) = (t(A), r(A)),$$

es una submersión sobreyectiva.

OBSERVACIÓN 4.2. Diremos que un grupoide doble es *discreto* si no estamos considerando estructura topologica o diferenciable alguna.

OBSERVACIÓN 4.3. Diremos que un grupoide doble discreto satisface la *condición de llenado* cuando la aplicación origen-final (1.1) es sobreyectiva.

El siguiente resultado, aunque bien conocido, no aparece en la literatura, así que por razones de completos lo incluimos en este trabajo.

LEMA 4.4. Sean  $\mathcal{V} \begin{smallmatrix} t \\ \rightrightarrows \\ b \end{smallmatrix} \mathcal{P}$  y  $\mathcal{H} \begin{smallmatrix} l \\ \rightrightarrows \\ r \end{smallmatrix} \mathcal{P}$  dos grupoides de Lie. El conjunto

$$\mathbb{I} = \{(Id_{\mathcal{H}}(p), Id_{\mathcal{V}}(p)) \mid p \in \mathcal{P}\}$$

es una subvariedad embebida del producto fibrado  $\mathcal{H} \times_t \mathcal{V}$ .

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{P} & \xrightarrow{\Delta} & \mathcal{P} \times \mathcal{P} & \xrightarrow{Id \times Id} & \mathcal{H} \times \mathcal{V} \\
 & \searrow & \downarrow I_1 & & \uparrow \iota \\
 & & \mathcal{H} \wr_t \mathcal{V} & & 
 \end{array}$$

donde  $\Delta$  es la aplicación diagonal,  $\iota$  es el embedding natural,  $I_1$  es la aplicación  $Id_{\mathcal{H}} \times Id_{\mathcal{V}}$  con el rango restringido e  $I_2$  es la composición  $I_1 \circ \Delta$ . Ahora, como  $\iota$  es un embebimiento entonces  $I_1$  es suave y por lo tanto  $I_2$  es suave. Dado que  $(l \circ p_1 \circ \iota) \circ I_2$  es la aplicación identidad en  $\mathcal{P}$ , donde  $p_1$  es la proyección en la primera componente, entonces  $I_2$  es una inmersión uno a uno.

Veamos ahora que  $I_2$  es un homeomorfismo sobre su imagen. Sea  $U$  un subconjunto abierto de  $\mathcal{P}$ ; dado que  $l$  y  $t$  son submersiones  $(l^{-1}(U) \times t^{-1}(U))$  es un subconjunto abierto de  $\mathcal{H} \times \mathcal{V}$ , pero

$$(Id_{\mathcal{H}} \times Id_{\mathcal{V}})(U) = (Id_{\mathcal{H}} \times Id_{\mathcal{V}})(\mathcal{P}) \cap (l^{-1}(U) \times t^{-1}(U)) \cap (\mathcal{H} \wr_t \mathcal{V}),$$

luego  $I_2$  es una aplicación abierta.

De todo lo anterior, concluimos que  $I_2$  es un embebimiento.  $\square$

LEMA 4.5. [BM] Sea  $(\mathcal{B}; \mathcal{V}, \mathcal{H}; \mathcal{P})$  un grupoide doble de Lie. El grupoide medular (2.18) asociado a  $\mathcal{B}$  es un grupoide de Lie.

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar que  $\mathbf{E}(\mathcal{B})$  es un grupoide de Lie, por la proposición (2.17), basta demostrar que  $\mathbf{E}(\mathcal{B})$  es una variedad diferenciable y que sus aplicaciones origen y final son submersiones sobreyectivas.

Dado que la aplicación origen-final de  $\mathcal{B}$  es una submersion sobreyectiva y que por lemma (4.4), el conjunto  $\mathbb{I}$  es una subvariedad embebida de  $\mathcal{H} \wr_t \mathcal{V}$ , entonces  $\mathbf{E}(\mathcal{B}) = \mathbf{S}^{-1}(\mathbb{I})$  es una subvariedad embebida de  $\mathcal{B}$ .

Ahora, si  $p \in \mathcal{P}$  y  $E \in \mathbf{E}(\mathcal{B})$  con  $\mathbf{S}(E) = (Id_p, Id_p)$ , entonces

$$T_E \mathbf{E}(\mathcal{B}) = (T_E \mathbf{S})^{-1}(T_{(Id_p, Id_p)} \mathcal{H} \wr_t \mathcal{V}) = T_E \mathcal{B},$$

luego  $lb$  y  $tr$  restringidas a  $\mathbf{E}(\mathcal{B})$  son submersiones suryectivas.  $\square$

DEFINICIÓN 4.6. [AN3] Un grupoide doble  $(\mathcal{B}; \mathcal{V}, \mathcal{H}; \mathcal{P})$  se dice *delgado* si la aplicación doble ancla  $\Pi_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \rightarrow \square(\mathcal{V}, \mathcal{H})$  es uno a uno.

A continuación daremos algunos ejemplos de grupoides dobles de Lie.

EJEMPLO 4.7. Sea  $\mathcal{G} \begin{smallmatrix} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow[e]{e} \end{smallmatrix} \mathcal{P}$  un grupoide de Lie. Entonces,

$$(1.2) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{G} \times \mathcal{G} & \begin{smallmatrix} \xrightarrow{s \times s} \\ \xrightarrow[e \times e]{e \times e} \end{smallmatrix} & \mathcal{P} \times \mathcal{P} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \mathcal{G} & \begin{smallmatrix} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow[e]{e} \end{smallmatrix} & \mathcal{P}, \end{array}$$

donde  $\mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{G}$  y  $\mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightrightarrows \mathcal{P}$  denotan los grupoides pares asociados a  $\mathcal{G}$  y  $\mathcal{P}$ , respectivamente, es un grupoide doble de Lie.

OBSERVACIÓN 4.8. La noción de par de grupos apareados 2.8 puede ser llevada al contexto diferenciable fácilmente, basta pedir las condiciones de suavidad necesarias para las estructuras involucradas.

EJEMPLO 4.9. Sea  $G$  un grupo de Lie-Poisson [LW1] y consideremos su grupo de Lie dual  $G^*$ . Usando las acciones revestidoras <sup>1</sup>, el par  $(G, G^*)$  es un par de grupos de Lie apareados. Usando la misma construcción que en 2.16, se tiene que

$$(1.3) \quad \begin{array}{ccc} G \times G^* & \rightrightarrows & G \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ G^* & \rightrightarrows & \{*\}, \end{array}$$

es un grupoide doble de Lie.

## 2. Diagramas de grupoides

DEFINICIÓN 4.10. [AN3] Sean  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{H}$  grupoides sobre la misma base  $\mathcal{P}$ . Un *diagrama* sobre  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{V}$  es un triple  $(\mathcal{D}, j, i)$  donde  $\mathcal{D}$  es un grupoide sobre  $\mathcal{P}$  y  $i: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{D}$ ,  $j: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{D}$  son morfismos de grupoides sobre  $\mathcal{P}$ .

Si  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{H}$  son grupoides de Lie, entonces un *diagrama de grupoides de Lie* sobre  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{V}$  es un diagrama de grupoides, tal que  $\mathcal{D}$  es un grupoide de Lie y las aplicaciones  $i$  y  $j$  son suaves.

DEFINICIÓN 4.11. [AN3] Un diagrama de grupoides  $(\mathcal{D}, j, i)$ , sobre  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{H}$  es llamado una  $(\mathcal{V}, \mathcal{H})$ -factorización de  $\mathcal{D}$ , si  $\mathcal{D} = j(\mathcal{V})i(\mathcal{H})$ .

Con cada diagrama de grupoides podemos asociar un grupoide doble discreto, denotado  $\square(\mathcal{D}, j, i)$  y definido como sigue:

Las cajas en  $\square(\mathcal{D}, j, i)$  son de la forma

$$A = h \begin{array}{c} x \\ \square \\ y \end{array} g \in \square(\mathcal{V}, \mathcal{H}),$$

con  $x, y \in \mathcal{H}$ ,  $g, h \in \mathcal{V}$ , tal que

$$i(x)j(g) = j(h)i(y) \quad \text{en } \mathcal{D}.$$

Nuestro proposito es determinar bajo que condiciones  $\square(\mathcal{D}, j, i)$  es un grupoide doble de Lie.

<sup>1</sup>Traducción no estandar del inglés *dressing actions*.

Definamos dos aplicaciones. La primera es la composición  $\mathcal{H}_{r \times t} \mathcal{V} \xrightarrow{i \times j} \mathcal{D}_{e \times s} \mathcal{D} \xrightarrow{m} \mathcal{D}$ , esto es,

$$\Phi : \mathcal{H}_{r \times t} \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{D}, \quad (x, g) \mapsto i(x)j(g),$$

donde  $s, e, m$  denotan aplicaciones origen, final y composición de  $\mathcal{D}$ . La segunda es

$$\Psi : \mathcal{V}_{b \times l} \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{D}, \quad (f, y) \mapsto j(f)i(y).$$

Dado que  $t, b, l$  y  $r$  son submersiones sobreyectivas, los productos fibrados involucrados en las aplicaciones anteriores,  $\mathcal{V}_{b \times l} \mathcal{H}$  y  $\mathcal{H}_{r \times t} \mathcal{V}$ , son subvariedades embebidas de  $\mathcal{V} \times \mathcal{H}$  y  $\mathcal{H} \times \mathcal{V}$  respectivamente; además, dado que  $i$  y  $j$  son suaves, entonces  $\Phi$  y  $\Psi$  también lo son, usando las aplicaciones anteriores

$$\square(\mathcal{D}, j, i) = (\mathcal{V}_{b \times l} \mathcal{H})_{\Psi \times \Phi} (\mathcal{H}_{r \times t} \mathcal{V}),$$

y usando la teoría general de transversalidad [L, Prop. 2.5], si  $\Phi$  y  $\Psi$  son transversales, entonces  $\square(\mathcal{D}, j, i)$  es una subvariedad embebida de  $(\mathcal{V}_{b \times l} \mathcal{H}) \times (\mathcal{H}_{r \times t} \mathcal{V})$ .

LEMA 4.12. *Sea  $(\mathcal{D}, j, i)$  un diagrama de grupoides de Lie. Si las aplicaciones  $i$  y  $j$  son transversales en las identidades, entonces  $\Psi$  y  $\Phi$  definidos arriba son submersiones.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos  $((f, y), (x, g)) \in (\mathcal{V}_{b \times l} \mathcal{H}) \times (\mathcal{H}_{r \times t} \mathcal{V})$  tal que  $\Psi(f, y) = \Phi(x, g)$ , esto es,  $j(f)i(y) = i(x)j(g)$ . Ahora, por [L, Prop. 2.5], tenemos

$$T_{(x, g)}(\mathcal{H}_{r \times t} \mathcal{V}) = \{(Y, X) \in (T_x \mathcal{H}) \times (T_g \mathcal{V}) / (T_x r)(Y) = (T_g t)(X)\}.$$

Sea  $W \in T_{(x, g)}(\mathcal{H}_{r \times t} \mathcal{V})$ . Necesitamos demostrar que existe  $(X_1, Y_1) \in T_{(f, y)}(\mathcal{V}_{b \times l} \mathcal{H})$  tal que

$$\begin{aligned} T_{(f, y)}\Psi(X_1, Y_1) &= (T_{(j(f), i(y))}m)(T_{(f, y)}j \times i)(X_1, Y_1) \\ &= (T_{(j(f), i(y))}m)((T_f j)(X_1), (T_y i)(Y_1)). \end{aligned}$$

Por lema (1.37) existe una bisección local  $\tau : U \rightarrow \mathcal{H}$  en  $\mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{P}$  con  $r(y) \in U \subseteq \mathcal{P}$  abierto y  $\tau(r(y)) = y$ . Ahora, usando la observación (1.36),  $\tau$  induce traslaciones a izquierda y a derecha definidas a continuación. Tomemos  $V = (l \circ \tau)(U)$  abierto en  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{H}^U = l^{-1}(U)$  y  $\mathcal{H}_U = r^{-1}(U)$  (lo mismo para  $V$ ) y sean

$$L_\tau : \mathcal{H}^U \rightarrow \mathcal{H}^V, \quad z \mapsto \tau(l(z))z \quad \text{y} \quad R_\tau : \mathcal{H}_V \rightarrow \mathcal{H}_U, \quad z \mapsto z\tau((l \circ \tau)^{-1}r(z)).$$

Definamos  $\tau_{\mathcal{D}} : U \rightarrow \mathcal{D}$  como  $i \circ \tau$  y usando que  $i$  es un morfismo de grupoides, podemos ver que  $\tau_{\mathcal{D}}$  es una bisección local de  $\mathcal{D}$ . También notemos que  $\tau_{\mathcal{D}}(e(i(y))) = (i \circ \tau)(r(y)) = i(y)$ .

De la misma manera, existe una bisección local  $\sigma : U' \rightarrow \mathcal{V}$  tal que  $\sigma_{\mathcal{V}}(b(f)) = f$  con  $U' \subseteq \mathcal{D}$  abierto y  $b(f) \in U'$ . Nuevamente, esta induce una bisección local  $\sigma_{\mathcal{D}} : U' \rightarrow \mathcal{D}$  en  $\mathcal{D}$ , tal que  $\sigma_{\mathcal{D}}(e(j(f))) = j(f)$ . Ahora, sea  $(X_1, Y_1) \in T_{(f, y)}(\mathcal{V}_{b \times l} \mathcal{H})$ . Entonces, usando la

formula de Xu para el producto en el grupoide tangente [M5, Theorem 1.4.14], obtenemos:

$$\begin{aligned} T_{(f,y)}\Psi(X_1, Y_1) &= (T_{(j(f),i(y))}m)((T_f j)(X_1), (T_y i)(Y_1)) \\ &= (T_{i(y)}L_{\sigma_{\mathcal{D}}})(T_y i)(Y_1) + (T_{j(f)}R_{\tau_{\mathcal{D}}})(T_f j)(X_1) \\ &\quad - (T_{i(y)}L_{\sigma_{\mathcal{D}}})(T_{\text{id}_{\mathcal{D}}l(y)}R_{\tau_{\mathcal{D}}})(T_{l(y)}\text{id}_{\mathcal{D}})(z), \end{aligned}$$

donde hemos escrito  $z = (T_{j(f)}e)(T_f j)(X_1) = (T_{i(y)}s)(T_y i)(Y_1)$ .

Ahora  $(T_{j(f)i(y)}L_{\sigma_{\mathcal{D}}}^{-1})(W) \in T_{i(y)}\mathcal{D}$  dado que

$$\begin{aligned} L_{\sigma_{\mathcal{D}}}^{-1}(j(f)i(y)) &= \sigma_{\mathcal{D}}^{-1}(s(j(f)i(y)))j(f)i(y) \\ &= \sigma_{\mathcal{D}}((s \circ \sigma_{\mathcal{D}})^{-1}(s(j(f)i(y))))^{-1}j(f)i(y) \\ &= \sigma_{\mathcal{D}}((s \circ \sigma_{\mathcal{D}})^{-1}s(j(f)))^{-1}j(f)i(y) \\ &= \sigma_{\mathcal{D}}(e(j(f)))^{-1}j(f)i(y) \\ &= j(f)^{-1}j(f)i(y) = i(y). \end{aligned}$$

De manera análoga, tenemos que  $(T_{i(y)}R_{\tau_{\mathcal{D}}}^{-1})(T_{j(f)i(y)}L_{\sigma_{\mathcal{D}}}^{-1})(W) \in T_{\text{id}_{\mathcal{D}}l(y)}\mathcal{D}$  dado que

$$\begin{aligned} R_{\tau_{\mathcal{D}}}^{-1}(i(y)) &= i(y)\tau_{\mathcal{D}}^{-1}((s \circ \tau_{\mathcal{D}}^{-1})^{-1}e(i(y))) \\ &= i(y)\tau_{\mathcal{D}}((s \circ \tau_{\mathcal{D}})^{-1}((s \circ \tau_{\mathcal{D}}^{-1})^{-1}e(i(y))))^{-1} \\ &= i(y)\tau_{\mathcal{D}}((s \circ \tau_{\mathcal{D}})^{-1}((s \circ \tau_{\mathcal{D}})e(i(y))))^{-1} \\ &= i(y)\tau_{\mathcal{D}}(e(i(y)))^{-1} = i(y)^{-1}i(y) = \text{Id}_{\mathcal{D}}s(i(y)) = \text{Id}_{\mathcal{D}}(l(y)). \end{aligned}$$

Denotemos  $p = l(y)$ , dado que  $i$  y  $j$  son transversales en  $\text{Id}_{\mathcal{D}}(p)$  entonces

$$T_{\text{Id}_p}\mathcal{D} = (T_{\text{Id}_p}i)(T_{\text{Id}_p}\mathcal{H}) + (T_{\text{Id}_p}j)(T_{\text{Id}_p}\mathcal{V})$$

y como consecuencia podemos encontrar  $X \in T_{\text{Id}_p}\mathcal{H}$ ,  $Y \in T_{\text{Id}_p}\mathcal{V}$  tal que

$$(T_{i(y)}R_{\tau_{\mathcal{D}}}^{-1})(T_{j(f)i(y)}L_{\sigma_{\mathcal{D}}}^{-1})(W) = (T_{\text{Id}_p}i)(X) + (T_{\text{Id}_p}j)(Y).$$

De aquí, si consideramos los vectores

$$X' = X + (T_p\text{Id}_{\mathcal{H}})(T_{\text{Id}_p}t)(Y), \quad Y' = Y + (T_p\text{Id}_{\mathcal{V}})(T_{\text{Id}_p}l)(X),$$

un calculo directo nos muestra que

$$(2.1) \quad (T_{i(y)}R_{\tau_{\mathcal{D}}}^{-1})(T_{j(f)i(y)}L_{\sigma_{\mathcal{D}}}^{-1})(W) = (T_{\text{Id}_p}i)(X') + (T_{\text{Id}_p}j)(Y') - (T_p\text{Id}_{\mathcal{D}})(Z);$$

donde  $Z = (T_{\text{Id}_p}b)(Y) + (T_{\text{Id}_p}l)(X)$ . Ahora, dado que

$$(L_{\sigma_{\mathcal{D}}} \circ R_{\tau_{\mathcal{D}}} \circ i) = (L_{\sigma_{\mathcal{D}}} \circ i \circ R_{\tau}), \quad (L_{\sigma_{\mathcal{D}}} \circ R_{\tau_{\mathcal{D}}} \circ j) = (R_{\tau_{\mathcal{D}}} \circ j \circ L_{\sigma_{\mathcal{V}}}),$$

podemos aplicar  $(T_{i(y)}L_{\sigma_{\mathcal{D}}})(T_{\text{Id}_p}R_{\tau_{\mathcal{D}}})$  a ambos lados de (2.1), para obtener

$$W = (T_{i(y)}L_{\sigma_{\mathcal{D}}})(T_y i)(Y_1) + (T_{j(f)}R_{\tau_{\mathcal{D}}})(T_f j)(X_1) - (T_{i(y)}L_{\sigma_{\mathcal{D}}})(T_{\text{Id}_p}R_{\tau_{\mathcal{D}}})(T_p\text{Id}_{\mathcal{D}})(Z),$$

donde  $X_1 = (T_{\text{Id}_p}L_{\sigma_{\mathcal{V}}})(Y')$  y  $Y_1 = (T_{\text{Id}_p}R_{\tau})(X')$ . Es claro que  $(T_f b)(X_1) = Z = (T_y l)(Y_1)$ , de aquí  $T_{(f,y)}\Psi(X_1, Y_1) = W$ .

De manera totalmente análoga se demuestra que  $\Phi$  es una submersión.  $\square$

A partir del lema 4.12, obtenemos de forma automática la siguiente consecuencia.

**TEOREMA 4.13.** *Sea  $(\mathcal{D}, j, i)$  una  $(\mathcal{V}, \mathcal{H})$ -factorización del grupoide de Lie  $\mathcal{D}$ . Si las aplicaciones  $i$  y  $j$  son transversales en las identidades, entonces  $\square(\mathcal{D}, j, i)$  es un grupoide doble de Lie delgado.*

**DEMOSTRACIÓN.** Por lemma ( 4.12) tenemos que  $\Phi$  y  $\Psi$  son transversales, luego  $\square(\mathcal{D}, j, i)$  es una subvariedad embebida de  $(\mathcal{V}_{b \times l} \mathcal{H}) \times (\mathcal{H}_{r \times t} \mathcal{V})$ . Dado que  $\Phi$  y  $\Psi$  son submersiones suryectivas, ambas proyecciones  $\square(\mathcal{D}, j, i) = (\mathcal{V}_{b \times l} \mathcal{H})_{\Psi \times \Phi} (\mathcal{H}_{r \times t} \mathcal{V})$ , en su primera y segunda componentes son submersiones sobreyectivas y lo mismo es cierto para las proyecciones desde el producto fibrado  $\mathcal{V}_{b \times l} \mathcal{H}$  y  $\mathcal{H}_{r \times t} \mathcal{V}$ . Como consecuencia, las aplicaciones *top*, *bottom*, *left* y *right* desde  $\square(\mathcal{D}, j, i)$  son submersiones sobreyectivas al igual que la aplicación *origen-final* (1.1). Es claro que las composiciones, identidades y aplicaciones de inversion, son suaves.  $\square$

**OBSERVACIÓN 4.14.** El grupoide doble  $\square(\mathcal{D}, j, i)$ , es un grupoide doble delgado.

### 3. Una equivalencia de Categorías

En la sección (3), introdujimos un *invariante* asociado a un grupoide doble delgado discreto, el *grupoide diagonal*. En esta sección estudiaremos esta estructura y sus consecuencias en el contexto diferencial.

**LEMA 4.15.** *Sea  $(\mathcal{B}; \mathcal{V}, \mathcal{H}; \mathcal{P})$  un grupoide doble delgado (discreto). Definamos la aplicación  $\eta : \mathcal{V}_{b \times l} \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{P}$  por  $\eta(f, x) = b(f) = l(x)$ . Entonces  $\mathbf{E}(\mathcal{B})$  actúa sobre  $\eta$  por*

$$(3.1) \quad E \triangleright (f, x) = (f l(E), b(E) x), \quad \text{when } \eta(f, x) = e_{\mathbf{E}(\mathcal{B})}(E).$$

*El espacio cociente  $\mathcal{V}_{b \times l} \mathcal{H} / \mathbf{E}(\mathcal{B})$  coincide con  $\mathcal{D}(\mathcal{B})$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Dado que  $b(f l(E)) = bl(E) = s_{\mathbf{E}(\mathcal{B})}(E)$  y  $l(b(E) x) = lb(E) = s_{\mathbf{E}(\mathcal{B})}(E)$ , la aplicación  $\triangleright : \mathbf{E}(\mathcal{B})_{e_{\mathbf{E}(\mathcal{B})} \times \eta} (\mathcal{V}_{b \times l} \mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{V}_{b \times l} \mathcal{H}$  esta bien definida. Un calculo directo demuestra que  $\triangleright$  define una acción, en efecto,

$$\begin{aligned} (E \circ F) \triangleright (f, x) &= (f l(E \circ F), b(E \circ F) x) = (f l(F) l(E), b(E) b(F) x) \\ &= E \triangleright (f l(F), b(F) x) = E \triangleright (F \triangleright (f, x)). \end{aligned}$$

Tambien,  $\eta(E \triangleright (f, x)) = \eta(f l(E), b(E) x) = l(b(E) x) = lb(E) = e_{\mathbf{E}(\mathcal{B})}(E)$ .

Para la segunda parte, si  $(f, x) \sim_{\mathcal{B}} (g, y)$ , entonces existen  $A, B \in \mathcal{B}$  tal que  $f \begin{array}{c} z \\ \square \\ A \\ x \end{array} h$  y

$g \begin{array}{c} z \\ \square \\ B \\ y \end{array} h$  (ver Lema 3.16). Entonces por proposición 2.19, existe una caja  $E \in \mathbf{E}(\mathcal{B})$  tal que

$A = E \rightarrow B$ , en consecuencia,  $x = b(E)y$  y  $f = gl(E)$ .

Recíprocamente, si  $A, B \in \mathcal{B}$  y existe  $E \in \mathbf{E}(\mathcal{B})$  con  $b(A) = b(E)b(B)$  y  $l(A) = l(B)l(E)$ , entonces las cajas  $E \rightarrow B$  y  $B$  tienen los mismos bordes superior y derecho. Luego, por lema (3.16), tenemos que  $(l(E \rightarrow B), b(E \rightarrow B)) \sim_{\mathcal{B}} (l(B), b(B))$ , esto es  $(l(A), b(A)) \sim_{\mathcal{B}} (l(B), b(B))$ . De aquí, concluimos que  $(f, x), (g, y) \in \mathcal{V}_{b \times l} \mathcal{H}$ ,  $(f, x) \sim_{\mathcal{B}} (g, y)$  si y solo si  $\exists E \in \mathbf{E}(\mathcal{B})$  con  $f = g l(E)$  y  $x = b(E)y$ . De aquí, el cociente coincide con el grupoide diagonal.  $\square$

DEFINICIÓN 4.16. La acción (3.1) será llamada la *acción medular* de  $\mathbf{E}(\mathcal{B})$  sobre  $\mathcal{V}_{b \times l} \mathcal{H}$ .

Sea  $\pi: \mathcal{V}_{b \times l} \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{V}_{b \times l} \mathcal{H}/\mathbf{E}(\mathcal{B})$  la proyección determinada por (3.1).

TEOREMA 4.17. Sea  $(\mathcal{B}; \mathcal{V}, \mathcal{H}; \mathcal{P})$  un grupoide doble de Lie delgado. Si la acción medular es propia, entonces  $\mathcal{D}(\mathcal{B})$  es un grupoide de Lie sobre  $\mathcal{P}$ .

DEMOSTRACIÓN. Dado que  $\mathcal{B}$  es delgado, la acción (3.1) es libre. De aquí, si la acción es propia, entonces el cociente  $\mathcal{V}_{b \times l} \mathcal{H}/\mathbf{E}(\mathcal{B})$  tiene una única estructura de variedad diferenciable tal que la proyección canónica  $\pi: \mathcal{V}_{b \times l} \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{V}_{b \times l} \mathcal{H}/\mathbf{E}(\mathcal{B})$  es submersión sobreyectiva ([D, Theorem 3.3.1]). De aquí,  $\mathcal{D}(\mathcal{B})$  es un grupoide de Lie sobre  $\mathcal{P}$ . En efecto, las aplicaciones estructurales están descritas en la observación 3.14; usando secciones locales de  $\pi$ , es claro que las aplicaciones origen y final son submersiones sobreyectivas y que las demás aplicaciones estructurales son suaves.  $\square$

Sea  $(\mathcal{B}, \mathcal{V}, \mathcal{H}, \mathcal{P})$  un grupoide doble de Lie delgado. Sean

$$\begin{aligned} \tilde{i}: \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{V}_{b \times l} \mathcal{H} & x &\mapsto (\text{id}(l(x)), x) \\ \tilde{j}: \mathcal{V} &\rightarrow \mathcal{V}_{b \times l} \mathcal{H} & f &\mapsto (f, \text{id}(b(f))), \end{aligned}$$

las inclusiones canónicas de  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{H}$  y sean

$$(3.2) \quad i = \pi \circ \tilde{i} \quad \text{y} \quad j = \pi \circ \tilde{j}.$$

LEMA 4.18. Las aplicaciones  $i$  y  $j$  definidas arriba son transversales en las identidades.

DEMOSTRACIÓN. Sea  $p \in \mathcal{P}$ . Consideremos un vector tangente  $Z \in T_{[\text{id}_p, \text{id}_p]} \mathcal{D}(\mathcal{B})$ , donde  $[\text{id}_p, \text{id}_p] = \pi(\text{id}_p, \text{id}_p)$ . Dado que  $\pi$  es una submersión sobreyectiva, existe  $(U, W) \in T_{(\text{id}_p, \text{id}_p)}(\mathcal{V}_{b \times l} \mathcal{H})$  tal que  $T_{(\text{id}_p, \text{id}_p)} \pi(U, W) = Z$ . Elijamos

$$Y = U \in T_{\text{id}_p} \mathcal{V}, \quad X = W - (T_p \text{id}_{\mathcal{H}})(T_{\text{id}_p} b)(U) \in T_{\text{id}_p} \mathcal{H}.$$

Es claro que

$$(T_{\text{id}_p} \tilde{j})(Y) = (U, (T_p \text{id}_{\mathcal{H}})(T_{\text{id}_p} b)(U)) \quad \text{and} \quad (T_{\text{id}_p} \tilde{i})(X) = ((T_p \text{id}_{\mathcal{V}})(T_{\text{id}_p} l)(X), X).$$

Luego,

$$\begin{aligned} (T_p \text{id}_{\mathcal{V}})(T_{\text{id}_p} l)(X) &= (T_p \text{id}_{\mathcal{V}})(T_{\text{id}_p} l)(W) - (T_p \text{id}_{\mathcal{V}})(T_{\text{id}_p} l)(T_p \text{id}_{\mathcal{H}})(T_{\text{id}_p} b)(U) \\ &= (T_p \text{id}_{\mathcal{V}})(T_{\text{id}_p} l)(W) - (T_p \text{id}_{\mathcal{V}})(T_{\text{id}_p} b)(U) = 0; \end{aligned}$$

entonces  $(T_{\text{id}_p} \tilde{i})(X) = (0, X)$ . Como consecuencia tenemos

$$\begin{aligned} (T_{\text{id}_p} \tilde{j})(Y) + (T_{\text{id}_p} \tilde{i})(X) &= (U, (T_p \text{id}_{\mathcal{H}})(T_{\text{id}_p} b)(U)) + (0, X) \\ &= (U, (T_p \text{id}_{\mathcal{H}})(T_{\text{id}_p} b)(U) + W - (T_p \text{id}_{\mathcal{H}})(T_{\text{id}_p} b)(U)) \\ &= (U, W). \end{aligned}$$

Entonces, si aplicamos  $T_{(\text{id}_p, \text{id}_p)} \pi$  a ambos lados de la anterior ecuación, obtenemos

$$(T_{\text{id}_p} j)(Y) + (T_{\text{id}_p} i)(X) = Z,$$

esto es, las aplicaciones  $i$  y  $j$  son transversales en las identidades.  $\square$

Sea  $(\mathcal{D}, j, i)$  una  $(\mathcal{V}, \mathcal{H})$ -factorización. La variedad subyacente al grupoide medular de  $\mathcal{B} = \square(\mathcal{D}, j, i)$  es  $\mathcal{V}^{op} \times_{j \times i} \mathcal{H} = \{(h, y) \mid j(h^{-1}) = i(y)\}$ . La acción medular sobre  $\mathcal{V}_{b \times l} \mathcal{H}$  esta dada por

$$(3.3) \quad (h, y) \triangleright (f, x) = (fh, yx) \quad \text{when} \quad \eta(f, x) = t(h) = r(y);$$

la prueba de ((3.3)) sigue directamente de la definición (3.1).

LEMA 4.19. *La acción medular (3.3) es propia.*

DEMOSTRACIÓN. Dado que la acción (3.3) es libre, con el fin de demostrar que es propia, solo necesitamos probar que la aplicación *ancla* del correspondiente grupoide acción

$$(s, t) : (\mathcal{V}^{op} \times_{j \times i} \mathcal{H}) \times (\mathcal{V}_{b \times l} \mathcal{H}) \rightarrow (\mathcal{V}_{b \times l} \mathcal{H}) \times (\mathcal{V}_{b \times l} \mathcal{H})$$

es cerrada (ver Prop. 1.54). Sea  $A \subseteq (\mathcal{V}_{j \times i} \mathcal{H}) \times (\mathcal{V}_{b \times l} \mathcal{H})$  un conjunto cerrado y consideremos una sucesión  $\{(f_n, x_n, g_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $A$  tal que la sucesión

$$\{(s, t)(f_n, x_n, g_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}} = \{(g_n f_n, x_n y_n, g_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$$

converge a  $(a, b, g, y) \in (\mathcal{V}_{b \times l} \mathcal{H}) \times (\mathcal{V}_{b \times l} \mathcal{H})$ . Debemos mostrar que  $(a, b, g, y) \in (s, t)(A)$ . Claramente,  $g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$ ,  $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$ ,  $g_n f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$  y  $x_n y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$ .

De aquí  $(f_n, x_n, g_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (g^{-1} a, b y^{-1}, g, y)$ ; dado que  $A$  es cerrado, concluimos que  $((g^{-1} a, b y^{-1}, g, y) \in A$ . Ahora, mediante un calculo directo vemos que  $(a, b, g, y) = (s, t)(g^{-1} a, b y^{-1}, g, y) \in (s, t)(A)$ , luego  $(s, t)(A)$  es cerrado.  $\square$

Finalmente llegamos a nuestro principal resultado.

TEOREMA 4.20. *Fijemos  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{H}$ . Las asignaciones  $\mathcal{B} \mapsto \mathcal{D}(\mathcal{B})$  y  $(\mathcal{D}, j, i) \mapsto \square(\mathcal{D}, j, i)$  determinan una equivalencia de categorías entre*

- (a) *La categoría de grupoides dobles de Lie delgados  $(\mathcal{B}; \mathcal{V}, \mathcal{H}; \mathcal{P})$  con acción medular propia y*
- (b) *La categoría de  $(\mathcal{V}, \mathcal{H})$ -factorizaciones de grupoides de Lie  $(\mathcal{D}, j, i)$  tal que las aplicaciones  $i$  y  $j$  son transversales en las identidades.*

DEMOSTRACIÓN. La equivalencia de Categorías a nivel discreto fue demostrada en [AN3].

Ahora, si  $\mathcal{B}$  es un grupoide doble de Lie como en (a), entonces, por el Teorema (4.17) y el Lema (4.18), la  $(\mathcal{V}, \mathcal{H})$ -factorización asociada  $(\mathcal{D}(\mathcal{B}), j, i)$  es un grupoide de Lie con  $i$  y  $j$  transversales en las identidades.

Recíprocamente, si comenzamos con una  $(\mathcal{V}, \mathcal{H})$ -factorización de grupoides de Lie como en (b) entonces, por el Teorema (4.13) y el Lema (4.19) el grupoide doble de Lie asociado, es un grupoide doble de Lie delgado como es requerido en (a).  $\square$

**3.1. Extensiones de grupoides dobles de Lie por fibrados de grupos de Lie abelianos.** Uno de los principales problemas de la teoría de grupoides dobles de Lie es la falta de ejemplos. Siguiendo las líneas de [AN3], adaptamos parte de este trabajo con el fin de obtener una manera sistemática de construir ejemplos a partir de otros ya existentes y de algunos datos cohomológicos adicionales.

DEFINICIÓN 4.21. [M5, Def. 1.1.19] Un fibrado de grupos de Lie es grupoide de Lie donde la aplicación origen y final coinciden.

$$\mathcal{F} \rightrightarrows \mathcal{H}$$

Sea  $\Downarrow$   $\Downarrow$  un grupoide doble de Lie y sea  $\gamma: \mathbf{K} \rightarrow \mathcal{P}$  un fibrado de grupos de Lie  $\mathcal{V} \rightrightarrows \mathcal{P}$

abelianos. Supongamos que  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{H}$  actúan sobre  $\mathbf{K}$  por isomorfismos de fibrados de grupos de Lie. Sean  $\tau: \mathcal{F}_{r \times l} \mathcal{F} \rightarrow \mathbf{K}$  y  $\sigma: \mathcal{F}_{b \times t} \mathcal{F} \rightarrow \mathbf{K}$  aplicaciones suaves tal que

$$(3.4) \quad \gamma(\sigma(F, G)) = bl(G), \quad \text{if } b(F) = t(G),$$

$$(3.5) \quad \gamma(\tau(F, G)) = bl(F), \quad \text{if } r(F) = l(G),$$

normalizadas por las condiciones

$$(3.6) \quad \tau(F, \text{id}r(F)) = \Theta_{bl(F)} = \tau(\text{id}l(F), F),$$

$$(3.7) \quad \sigma(F, \text{id}b(F)) = \Theta_{bl(F)} = \sigma(\text{id}t(F), F),$$

donde  $\Theta: \mathcal{P} \rightarrow \mathbf{K}$  denota la sección identidad de  $\gamma: \mathbf{K} \rightarrow \mathcal{P}$ .

Consideremos la colección  $\mathbf{K}_p \times_\gamma \mathcal{F} \rightrightarrows \mathcal{H}$   
 $\Downarrow$   $\Downarrow$ , donde:  
 $\mathcal{V} \rightrightarrows \mathcal{P}$

- Las aplicaciones  $t, b, l, r$  on  $\mathbf{K}_p \times_\gamma \mathcal{F}$  están definidas a partir de las de  $\mathcal{F}: t(K, F) = t(F)$  y así sucesivamente.

- Los productos horizontales y verticales en  $\mathbf{K}_p \times_\gamma \mathcal{F}$  estan dados por

$$(3.8) \quad (K, F)(L, G) = (K(b(F) \cdot L) \tau(F, G), FG), \quad \text{si } F|G,$$

$$(3.9) \quad \begin{pmatrix} K, F \\ L, G \end{pmatrix} = \left( (l(G)^{-1} \cdot K) L \sigma(F, G), \frac{F}{G} \right), \quad \text{si } \frac{F}{G}.$$

- Las aplicaciones identidad  $\text{id} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbf{K}_p \times_\gamma \mathcal{F}$ ,  $\text{id} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbf{K}_p \times_\gamma \mathcal{F}$  estan dadas por  $\text{id}g = (\Theta_{b(g)}, \text{id}g)$ ,  $\text{id}x = (\Theta_{l(x)}, \text{id}x)$ ,  $g \in \mathcal{V}$ ,  $x \in \mathcal{H}$ .
- Los inversos de  $(K, F)$  con respecto a los productos horizontal y vertical esta dados por

$$(3.10) \quad (K, F)^h = \left( b(F)^{-1} \cdot \left( K^{-1} \tau(F, F^h)^{-1} \right), F^h \right),$$

$$(3.11) \quad (K, F)^v = \left( (l(F) \cdot K)^{-1} \sigma(F, F^v)^{-1}, F^v \right),$$

respectivamente.

PROPOSICIÓN 4.22.  $\mathbf{K}_p \times_\gamma \mathcal{F}$  es un grupoide doble de Lie si y solo si, para todo  $F, G, H \in \mathcal{F}$ ,

$$(3.12) \quad \tau(F, G) \tau(FG, H) = \tau(F, GH) (b(F) \cdot \tau(G, H)), \quad F|G|H;$$

$$(3.13) \quad \sigma(G, H) \sigma \left( F, \frac{G}{H} \right) = (l(H)^{-1} \cdot \sigma(F, G)) \sigma \left( \frac{F}{G}, H \right), \quad \frac{F}{\frac{G}{H}};$$

$$(3.14) \quad l(H)^{-1} \cdot (t(H) \cdot L) = b(H) \cdot (r(H)^{-1} \cdot L), \quad L \in \mathbf{K}(\text{tr}(H));$$

$$(3.15) \quad \begin{aligned} & (l(H)^{-1} \cdot \tau(F, G)) \tau(H, J) \sigma(FG, HJ) \\ &= (b(H) \cdot \sigma(G, J)) \sigma(F, H) \tau \left( \frac{F}{H}, \frac{G}{J} \right), \quad \frac{F}{H} \Big| \frac{G}{J}. \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 4.23. Si las condiciones en la proposición 4.22 se cumplen, decimos que el grupoide doble  $\mathbf{K}_p \times_\gamma \mathcal{F}$  es una *extensión abeliana* del fibrado de grupos abelianos  $\mathbf{K}$  por  $\mathcal{F}$ .

DEMOSTRACIÓN. Primero, demostraremos las condiciones algebraicas de la definición de grupoide doble, luego discutiremos los aspectos diferenciables de las construcciones involucradas. La asociatividad de las composiciones horizontal y vertical son equivalentes a (3.12) y (3.13).

Basta probar que se satisfacen los axiomas que definen grupoides dobles tal como en [BS]; seguiremos [AN1, Lemma 1.2]. Todos los axiomas son consecuencia de las definiciones (dado que los axiomas se satisfacen para  $\mathcal{F}$ ) excepto la ley de intercambio, la cual es equivalente a (3.14) y (3.15). En efecto, sea  $H \in \mathcal{F}$  y  $L \in \mathbf{K}(\text{tr}(H))$ . Computando  $\left\{ \begin{array}{cc} \text{id}t(H) & L \\ H & \text{id}r(H) \end{array} \right\}$  de

dos formas diferentes, podemos observar que (3.14) es equivalente a la ley de intercambio. Ahora, consideremos

$$(K, F), (L, G), (M, H), (N, J) \in \mathbf{K}_{p \times \gamma} \mathcal{F} \text{ tal que } \frac{F}{H} \Big| \frac{G}{J}.$$

Computemos  $\left\{ \begin{matrix} (K, F) & (L, G) \\ (M, H) & (N, J) \end{matrix} \right\}$  y  $\left\{ \begin{matrix} (K, F) \\ (M, H) \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} (L, G) \\ (N, J) \end{matrix} \right\}$ . Las expresiones resultantes son iguales si y solo si

$$\begin{aligned} l(H)^{-1} \cdot (b(F) \cdot L) l(H)^{-1} \cdot \tau(F, G) \tau(H, J) \sigma(FG, HJ) \\ = b(H) \cdot (l(J)^{-1} \cdot L) b(H) \cdot \sigma(G, J) \sigma(F, H) \tau \left( \begin{matrix} F & G \\ H & J \end{matrix} \right) \end{aligned}$$

No es difícil ver que esto es equivalente a (3.14) y (3.15).

Ahora procedemos a completar las pequeñas tecnicidades diferenciables de las construcciones anteriores. Dado que  $\gamma$  y  $p$  son submersiones suryectivas entonces  $\mathbf{K}_{\gamma \times p} \mathcal{F}$  es una variedad diferenciable y la proyección obvia  $q: \mathbf{K}_{\gamma \times p} \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  es una submersión sobreyectiva. Las aplicaciones *top*, *botom*, *left* y *right* desde  $\mathbf{K}_{\gamma \times p} \mathcal{F}$  son iguales a  $t' \circ q$ ,  $b' \circ q$ ,  $l' \circ q$  y  $r' \circ q$  respectivamente, las cuales son submersiones sobreyectivas y donde  $t', b', l'$  y  $r'$  son las aplicaciones respectivas desde  $\mathcal{F}$ . La aplicación *top-right* es igual a  $\top \circ q$  la cual también es una submersión sobreyectiva. De otro lado, dado que  $\sigma$  y  $\tau$  son suaves entonces es claro que las composiciones vertical y horizontal, junto con las aplicaciones de inversión dadas por las fórmulas (3.8), (3.9), (3.10) y (3.11) son suaves. Para las identidades vertical y horizontal tenemos que  $Id: \mathcal{V} \rightarrow \mathbf{K} \times \mathcal{F}$  y  $Id: \mathcal{H} \rightarrow \mathbf{K} \times \mathcal{F}$  son suaves, pero  $\mathbf{K}_{\gamma \times p} \mathcal{F}$  es una subvariedad incrustada de  $\mathbf{K} \times \mathcal{F}$  tal que  $Id(\mathcal{V}) \subset \mathbf{K}_{\gamma \times p} \mathcal{F}$  y  $Id(\mathcal{H}) \subset \mathbf{K}_{\gamma \times p} \mathcal{F}$ , entonces, usando factorización, ambas identidades son suaves.  $\square$

**OBSERVACIÓN 4.24.** Las condiciones (3.12) y (3.13) son condiciones de cociclo sobre las composiciones horizontal y vertical. Estas, junto con (3.15) dan una condición de cociclo en el complejo doble asociado con el groupoide doble  $\mathcal{F}$  como fue considerado en [AN1, AM].

**DEFINICIÓN 4.25.** [AN3] Sea  $(\mathcal{B}; \mathcal{V}, \mathcal{H}; \mathcal{P})$  un groupoide doble de Lie. El *fibrado de grupos abelianos asociado con  $\mathcal{B}$*  es la intersección  $\mathbf{K}$  de todos los cuatro groupoides medulares asociados con  $\mathcal{B}$ :

$$\mathbf{K} := \{K \in \mathcal{B} : t(K), b(K), l(K), r(K) \in \mathcal{P}\},$$

junto con la aplicación  $p: \mathbf{K} \rightarrow \mathcal{P}$ ,  $K \mapsto p(K) = lb(K)$ , la función “vértice común”.

Para cualquier  $P \in \mathcal{P}$ , sea  $\mathbf{K}(P)$  la fibra de  $\gamma$  en  $P$ ; es claro que  $\mathbf{K}(P)$  es un grupo abeliano bajo composición vertical, la cual coincide con la composición horizontal (ver [AN3]).

**OBSERVACIÓN 4.26.** Notemos que la composición en  $\mathbf{K}$  coincide con la composición en la medula (2.1).

PROPOSICIÓN 4.27. Sea  $(\mathcal{B}; \mathcal{V}, \mathcal{H}; \mathcal{P})$  un grupoide doble de Lie. Supongamos que el fibrado de grupos abeliano asociado con  $\mathcal{B}$  es, de hecho, un fibrado de grupos de Lie y restringimos la acción medular sobre  $\mathcal{B}$  a  $\mathbf{K}(\mathcal{B})$ . Si esta acción es propia, entonces el conjunto  $\mathcal{F}(\mathcal{B}) := \mathcal{B}/\mathbf{K}(\mathcal{B})$  es una variedad diferenciable la cual admite una estructura de grupoide doble de Lie

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathcal{B}) & \rightrightarrows & \mathcal{H} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \mathcal{V} & \rightrightarrows & \mathcal{P} \end{array}$$

con lados  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{H}$ .

DEMOSTRACIÓN. Dado que por hipótesis, la acción de  $\mathbf{K}(\mathcal{B})$  es propia y además es libre, entonces se sigue que el cociente  $\mathcal{F}(\mathcal{B}) := \mathcal{B}/\mathbf{K}(\mathcal{B})$  es una variedad suave tal que la proyección canónica  $\pi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{B})$  es una submersión subyectiva.

Ahora consideremos la configuración

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathcal{B}) & \rightrightarrows & \mathcal{H} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \mathcal{V} & \rightrightarrows & \mathcal{P}, \end{array}$$

donde las aplicaciones top, botom, left y right están definidas por

$$(3.16) \quad \tilde{t}, \tilde{b} : \mathcal{F}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{H} \quad \tilde{t}([B]) = t(B), \tilde{b}([B]) = b(B),$$

$$(3.17) \quad \tilde{l}, \tilde{r} : \mathcal{F}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{V} \quad \tilde{l}([B]) = l(B), \tilde{r}([B]) = r(B);$$

donde  $[B]$  denota la clase de equivalencia de  $B \in \mathcal{B}$  y las demás aplicaciones estructurales están definidas de manera obvia. Es claro que  $\mathcal{F}(\mathcal{B})$  es un grupoide doble discreto, probaremos que es un grupoide doble de Lie. Que las aplicaciones top, botom, left y right son submersiones sobreyectivas se sigue usando secciones locales de  $\pi$ . En efecto, sean  $[B] \in \mathcal{F}(\mathcal{B})$  y  $U \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{B})$  un conjunto abierto que contiene a  $[B]$  y tal que existe una sección local  $s_B : U \rightarrow \mathcal{B}$  de  $\pi$ ; entonces  $\tilde{t}|_U = t \circ s$  y dado que  $t$  también tiene secciones locales (pues también es submersión sobreyectiva) entonces  $T_{[B]}\tilde{t}$  es sobreyectiva. Lo mismo se cumple para  $\tilde{b}, \tilde{l}$  y  $\tilde{r}$ .

Ahora, sean  $A, B \in \mathcal{B}$  tal que  $A|B$ , entonces  $[A]|[B]$ . Sean  $s_A : U \rightarrow \mathcal{B}$  y  $s_B : V \rightarrow \mathcal{B}$  secciones locales de  $\pi$  tal que  $U$  y  $V$  son subconjuntos abiertos de  $\mathcal{F}(\mathcal{B})$  que contiene a  $A$  y  $B$ , respectivamente. Entonces  $[A][B] = [AB] = \pi \circ m \circ s_A \times s_B(A, B)$  y se sigue por tanto que la composición es suave. Un razonamiento análogo muestra que las aplicaciones de inversión e identidad son suaves.

La aplicación *top-right* es suave dado que en una vecindad  $U$  de  $[A]$  esta es igual a  $\top \circ s_A$  y por la misma razón resulta que su aplicación tangente es sobreyectiva en  $[A]$ .  $\square$

COROLARIO 4.28. Sea  $(\mathcal{B}; \mathcal{V}, \mathcal{H}; \mathcal{P})$  un grupoide doble de Lie. Supongamos que el fibrado de grupos abelianos asociado a  $\mathcal{B}$  es, de hecho, un fibrado de grupos de Lie y restringimos la acción medular sobre  $\mathcal{B}$  a  $\mathbf{K}(\mathcal{B})$ . Si la acción resultante es propia, entonces el conjunto  $\mathcal{F}(\mathcal{B}) := \mathcal{B}/\mathbf{K}(\mathcal{B})$  es un grupoide doble de Lie delgado.

DEMOSTRACIÓN. Es claro a partir de la definición de grupoide doble delgado y por la proposición (4.27).  $\square$

OBSERVACIÓN 4.29. Sea  $(\mathcal{B}; \mathcal{V}, \mathcal{H}; \mathcal{P})$  un grupoide doble de Lie. La condición de que el fibrado de grupos abelianos asociado a  $\mathcal{B}$  sea un grupo de Lie, impuesta en el teorema (4.27) no es tan extraña como podría parecer y como es demostrado en el siguiente lema.

LEMA 4.30. Sea  $(\mathcal{B}; \mathcal{V}, \mathcal{H}; \mathcal{P})$  un grupoide doble de Lie localmente trivial. El fibrado de grupos abelianos asociado a  $\mathcal{B}$  es un fibrado de grupo de Lie

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el diagrama medular localmente trivial asociado a  $\mathcal{B}$ ,

$$(3.18) \quad \begin{array}{ccc} M^{\mathcal{V}} & & \mathcal{V} \\ & \searrow \iota & \nearrow \partial_{\mathcal{V}} \\ & \mathbf{E}(\mathcal{B}) & \\ & \nearrow \iota & \searrow \partial_{\mathcal{H}} \\ M^{\mathcal{H}} & & \mathcal{H}. \end{array}$$

Dado que  $M^{\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{P}$  es un fibrado de grupos de Lie,  $\mathcal{V}$  es un grupoide localmente trivial y  $\iota \circ \partial_{\mathcal{V}}$  es un morfismo de grupoides, entonces por [M5, Prop. 2.2.7] se sigue que  $\mathbf{K}(\mathcal{B}) = \text{Ker}(\iota \circ \partial_{\mathcal{V}})$  es un fibrado de grupos de Lie sobre  $\mathcal{P}$ .  $\square$

OBSERVACIÓN 4.31. Referimos al lector a [BM] para la teoría general de grupoides dobles de Lie localmente triviales.

LEMA 4.32. Sea  $(\mathcal{B}; \mathcal{V}, \mathcal{H}; \mathcal{P})$  un grupoide doble de Lie. Supongamos que el fibrado de grupos abelianos asociado a  $\mathcal{B}$  es, de hecho, un fibrado de grupos de Lie. Los grupoides de Lie horizontales y verticales  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{H}$  actúan sobre  $\mathbf{K}$  por conjugación vertical, respectivamente horizontal:

$$(3.19) \quad \text{si } g \in \mathcal{V}(Q, P) \text{ y } K \in \mathbf{K}(P) \text{ entonces } g \cdot K := \begin{array}{c} \text{id } g \\ K \\ \text{id } g^{-1} \end{array} \in \mathbf{K}(Q).$$

$$(3.20) \quad \text{si } x \in \mathcal{H}(Q, P) \text{ y } K \in \mathbf{K}(P) \text{ entonces } x \cdot K = \text{id } x K \text{id } x^{-1} \in \mathbf{K}(Q).$$

Ambas acciones son por automorfismos de fibrados de grupos de Lie.

DEMOSTRACIÓN. Es claro que (3.19) y (3.20) son acciones suaves, luego la conclusión es inmediata.  $\square$

A partir de todo el anterior trabajo obtenemos, bajo algunas condiciones, *un poco restrictivas*, el siguiente resultado,

TEOREMA 4.33. Sea  $(\mathcal{B}; \mathcal{V}, \mathcal{H}; \mathcal{P})$  un grupoide doble de Lie. Supongamos que el fibrado de grupos abelianos asociado a  $\mathcal{B}$  es, de hecho, un fibrado de grupos de Lie y que la acción

medular sobre  $\mathcal{B}$  restringida a  $\mathbf{K}(\mathcal{B})$  es propia. Denotemos por  $\Pi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{B})$  la proyección canónica. Supongamos también que existe una sección global de  $\Pi$ . Entonces  $\mathcal{B}$  es una extensión abeliana de su fibrado de grupos de Lie abelianos asociado por su marco.

Antes de demostrar esto necesitamos la versión diferenciable de un lema de [AN3].

LEMA 4.34. La aplicación  $\Psi : \mathbf{K}_p \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{B}$  dada por  $\Psi(K, F) = K \rightarrow \mu(F)$  es un difeomorfismo.

DEMOSTRACIÓN. Ver [AN3, Lemma 1.4].  $\square$

Ahora, procedemos a demostrar el teorema (4.33). Con este fin reproducimos la prueba de [AN3, The. 1.9] y completaremos los aspectos diferenciables.

DEMOSTRACIÓN. A continuación introducimos cociclos verticales y horizontales con el fin de controlar la falta de multiplicatividad de la sección  $\mu$ . Definimos  $\tau : \mathcal{F}_r \times_l \mathcal{F} \rightarrow \mathbf{K}$  y  $\sigma : \mathcal{F}_b \times_t \mathcal{F} \rightarrow \mathbf{K}$  por

$$(3.21) \quad \mu(F)\mu(G) = \tau(F, G) \rightarrow \mu(FG), \quad r(F) = l(G),$$

$$(3.22) \quad \begin{matrix} \mu(F) \\ \mu(G) \end{matrix} = \sigma(F, G) \rightarrow \mu \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}, \quad b(F) = t(G).$$

esto es,

$$(3.23) \quad \mu(F)\mu(G) = \begin{Bmatrix} \text{id}l(F) & \mu(FG) \\ \tau(F, G) & \text{id}b(FG) \end{Bmatrix}, \quad \begin{matrix} \mu(F) \\ \mu(G) \end{matrix} = \begin{Bmatrix} \text{id}l(F)l(G) & \mu \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} \\ \sigma(F, G) & \text{id}b(G) \end{Bmatrix},$$

para  $F, G \in \mathcal{F}$  adecuados. Los cociclos  $\sigma$  y  $\tau$  están bien definidos en virtud del lema 4.34 y apartir de las expresiones (3.23) se sigue que son suaves. Si asumimos que  $\mu(\text{id}x) = \text{id}x$  y  $\mu(\text{id}g) = \text{id}g$  para cualquier  $x \in \mathcal{H}$  y  $g \in \mathcal{V}$  entonces  $\sigma$  y  $\tau$  están normalizados:

$$(3.24) \quad \tau(F, \text{id}r(F)) = \Theta_{bl(F)} = \tau(\text{id}l(F), F),$$

$$(3.25) \quad \sigma(F, \text{id}b(F)) = \Theta_{bl(F)} = \sigma(\text{id}t(F), F).$$

Ahora podemos reconstruir los productos en  $\mathcal{B}$  en términos del fibrado de grupos de Lie asociado  $\mathbf{K}$ , el grupoide de marcos  $\mathcal{F}$ , las acciones (3.20), (3.19) y los cociclos  $\sigma$  y  $\tau$ . Si  $K, L \in \mathbf{K}, F, G \in \mathcal{F}$  entonces

$$(3.26) \quad (K \rightarrow \mu(F)) (L \rightarrow \mu(G)) = (K(b(F) \cdot L) \tau(F, G)) \rightarrow \mu(FG),$$

si  $r(F) = l(G)$  y

$$(3.27) \quad \begin{Bmatrix} K \rightarrow \mu(F) \\ L \rightarrow \mu(G) \end{Bmatrix} = ((l(g)^{-1} \cdot K) L \sigma(F, G)) \rightarrow \mu \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}$$

si  $b(F) = t(G)$ .  $\square$

## Breve introducción a los algebroides de Lie

### 1. Algebroides de Lie

La referencia básica para esta sección será [M5].

**DEFINICIÓN 5.1** (*Algebroides de Lie*). Sea  $M$  una variedad diferenciable. Un *algebroides de Lie* sobre  $M$  es una colección de datos  $(A, \pi, [\cdot, \cdot], \rho)$ , donde  $A$  es una variedad diferenciable,  $\pi : A \rightarrow M$  es un fibrado vectorial,  $\rho : A \rightarrow TM$  es un morfismo de fibrados vectoriales y  $[\cdot, \cdot] : \Gamma(A) \times \Gamma(A) \rightarrow \Gamma(A)$  es una aplicación  $\mathbb{R}$ -bilineal. Estos datos están sujetos a los siguientes axiomas,

- I.  $(\Gamma(A), [\cdot, \cdot])$  es un álgebra de Lie,
- II. La aplicación  $\Gamma(\rho) : \Gamma(A) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ , inducida por  $\rho$ , es un morfismo de álgebras de Lie,
- III. Para cualquier  $f \in C^\infty(M)$ ,  $X, Y \in \Gamma(A)$  se satisface,

$$(1.1) \quad [X, fY] = f[X, Y] + \rho(X)(f)Y \quad (\text{Regla de Leibniz}).$$

Por abuso de notación  $\Gamma(\rho)$  se denotará simplemente por  $\rho$  y ambas aplicaciones serán llamadas *ancla* de  $A$ .

**EJEMPLO 5.2.** *Álgebras de Lie*. Toda álgebra de Lie puede ser considerada como un algebroides de Lie sobre un punto.

**EJEMPLO 5.3.** *Algebroides tangente*. Si  $M$  es una variedad diferenciable, entonces el fibrado tangente  $TM \xrightarrow{\pi} M$  es un algebroides de Lie. El corchete de Lie es el corchete usual de campos vectoriales y la aplicación *ancla* es la identidad.

**EJEMPLO 5.4.** *Foliaciones Regulares*. Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $\mathcal{F}$  una foliación regular (y por tanto integrable) en  $M$ . El *algebroides tangente a  $\mathcal{F}$*  es el subfibrado vectorial de  $TM$  que consta de todos los espacios tangentes a  $\mathcal{F}$ , con el corchete usual de campos vectoriales tangentes a  $\mathcal{F}$  y donde la aplicación *ancla* es la inclusión.

**OBSERVACIÓN 5.5.** Cualquier algebroides de Lie cuya *ancla* es uno a uno, es isomorfo a un algebroides de Lie tangente a una foliación regular definida sobre la variedad base.

**EJEMPLO 5.6.** *Algebroides acción*. Sean  $M$  una variedad diferenciable y  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie. Sea  $\lambda : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  una acción de  $\mathfrak{g}$  sobre  $M$  (i.e. un morfismo de álgebras de Lie). Sea  $\pi : M \times \mathfrak{g} \rightarrow M$  el fibrado vectorial trivial con fibra  $\mathfrak{g}$ , definamos  $\rho : M \times \mathfrak{g} \rightarrow TM$  como  $\rho(x, m) =$

$\lambda(x)(m)$  para todo  $x \in \mathfrak{g}$  y  $m \in M$ . Dadas dos secciones  $X, Y \in \Gamma(M, M \times \mathfrak{g})$ , definimos su corchete

$$[X, Y](m) = [X(m), Y(m)] + \lambda(X(m))_m(Y) - (\lambda(Y)(m))_m(X).$$

Donde, dado un campo vectorial  $V$  sobre  $M$  y  $X \in \Gamma(M, M \times \mathfrak{g})$ ,  $V_m(X)$  denota la derivada de  $X$  en  $m$ , en la dirección de  $V$  (Observar que  $\Gamma(M, M \times \mathfrak{g}) \simeq C^\infty(M, \mathfrak{g})$ ).

Con esta estructura, el triple  $(M \times \mathfrak{g}, \rho, [\cdot, \cdot])$  es un algebroide de Lie llamado *algebroide acción*.

El siguiente resultado sigue inmediatamente de los axiomas de la definición de algebroide de Lie.

**LEMA 5.7.** *Sea  $M$  una variedad diferenciable. Consideremos  $\pi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$  el fibrado vectorial de línea trivial. Entonces, las estructuras de algebroide de Lie sobre  $\pi$  están parametrizadas por los campos vectoriales de  $M$ . Mas exactamente, si  $(M \times \mathbb{R}, \rho, [\cdot, \cdot])$  es un algebroide de Lie, entonces existe un campo vectorial  $X \in \mathcal{X}(M)$  tal que:*

- I.  $\rho(f) = Xf$ , para todo  $f \in C^\infty(M)$ ,
- II.  $[f, g] = f \cdot Xg - g \cdot Xf$ , para todo  $f, g \in C^\infty(M)$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Primero, observemos que  $\Gamma(M, M \times \mathbb{R}) \simeq C^\infty(M)$ . Dado que el ancla  $\rho$ , a nivel de secciones, es  $C^\infty(M)$ -lineal (pues es inducida por un morfismo de fibrados vectoriales), entonces  $\rho(f) = \rho(f \cdot 1) = f\rho(1)$ . Denotando  $X = \rho(1)$ , se sigue  $\rho(f) = fX$ .

Usando la regla de Leibniz (1.1), para todo  $f, g, h \in C^\infty(M)$ ,

$$(1.2) \quad [f, gh] = g[f, h] + \rho(f)(g)h = g[f, h] + fXg h.$$

Así mismo,  $[f, 1] = -[1, f] = -f[1, 1] - Xf = -Xf$ . Luego, con  $h = 1$  en (1.2), obtenemos  $[f, g] = f \cdot Xg - g \cdot Xf$ .  $\square$

**EJEMPLO 5.8.** Sea  $M$  una variedad diferenciable y sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie. Sea  $A = TM \oplus (M \times \mathfrak{g})$  la suma de Whitney del fibrado vectorial trivial  $M \times \mathfrak{g} \rightarrow M$  y el fibrado tangente  $TM \rightarrow M$  de  $M$ . Definamos  $\rho : A \rightarrow TM$  por  $\rho(X, m, a) = X$  y definamos el siguiente corchete de Lie sobre  $\Gamma(M, A)$ . Si  $\tilde{X} = (X, Id, V)$  and  $\tilde{Y} = (Y, Id, W)$  en  $\Gamma(M, A)$ , donde  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$  y  $V, W \in C^\infty(M, \mathfrak{g})$ , entonces

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}] := ([X, Y], Id, X(V) - Y(V) + [V, W]);$$

el triple  $(TM \oplus (M \times \mathfrak{g}), \rho, [\cdot, \cdot])$  es un algebroide de Lie.

**OBSERVACIÓN 5.9.** Si identificamos  $C^\infty(M, \mathfrak{g})$  con  $C^\infty(M) \otimes \mathfrak{g}$  y  $V = \sum f_i \otimes a_i$  entonces  $X(V) = \sum Xf_i \otimes a_i$ .

**OBSERVACIÓN 5.10.** a partir de ahora, los elementos  $\tilde{X} = (X, Id, V) \in \Gamma(M, A)$  serán denotados por  $X \oplus V$ .

OBSERVACIÓN 5.11. La construcción de un algebroide de Lie trivial puede realizarse en terminos puramente algebraicos como ilustraremos a continuación. Sean  $R$  un anillo conmutativo con unidad,  $A$  una  $R$ -álgebra conmutativa con unidad y  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie sobre  $R$ . Definamos sobre el  $A$ -modulo  $Der(A) \oplus (A \otimes \mathfrak{g})$  la siguiente estructura de  $R$ -álgebra de Lie,

$$[X \oplus (a \otimes u), Y \oplus (b \otimes v)] = [X, Y] \oplus (ab \otimes [u, v] + Xb \otimes v - Ya \otimes u),$$

para todo  $X, Y \in Der(A)$ ,  $a, b \in A$  y  $u, v \in \mathfrak{g}$ . Sea  $\rho : Der(A) \oplus (A \otimes \mathfrak{g}) \rightarrow Der(A)$  la proyección sobre la primer componente. Entonces, la colección  $(Der(A) \oplus (A \otimes \mathfrak{g}), [\cdot, \cdot], \rho)$  es un álgebra de Lie-Rinehart.

DEFINICIÓN 5.12. Sean  $(\pi : A \rightarrow M, [\cdot, \cdot], \rho)$  y  $(\sigma : B \rightarrow N, [\cdot, \cdot], \rho)$  algebroides de Lie. Sea  $(\varphi, f) : A \rightarrow B$  un morfismo de fibrados vectoriales. Decimos que  $(\varphi, f)$  es un morfismo de algebroides de Lie si se cumplen las dos siguientes condiciones

- I.  $\rho \circ \varphi = T f \circ \rho$ ,
- II. Si  $X, Y \in \Gamma(M, A)$  son tal que  $\varphi \circ X = \sum_i u_i (X_i \circ f)$  y  $\varphi \circ Y = \sum_i v_i (Y_i \circ f)$ , donde  $u_i, v_j \in C^\infty(M)$  y  $X_i, Y_j \in \Gamma(N, B)$ , entonces

$$(1.3) \quad \varphi \circ [X, Y] = \sum_{i,j} u_i v_j ([X_i, Y_j] \circ f) + \sum_j \rho(X)(v_j)(Y_j \circ f) + \sum_i \rho(Y)(u_i)(X_i \circ f).$$

OBSERVACIÓN 5.13. Se puede demostrar que la expresión en el lado derecho de (1.3), es independiente de la descomposición de  $\varphi \circ X$  y  $\varphi \circ Y$ .

## 2. Bialgebroides de Lie

Las referencias estandar para esta sección son [K1], [MX] y [X]; referimos al lector a ellas para los detalles y las pruebas de los resultados acá enunciados.

Sea  $(A, \rho, [\cdot, \cdot])$  un algebroide de Lie sobre  $M$ . Denotemos por  $\wedge^k(A^*)$  el fibrado vectorial "k-ésima potencia exterior" de  $A$ . Explicitamente,  $\pi : \wedge^k(A^*) \rightarrow M$  es un fibrado vectorial con fibra  $\wedge_m^k(A^*) = \wedge^k(A_m^*)$ , el cual a su vez puede ser identificado con el espacio vectorial de todas las aplicaciones  $k$ -multilineales alternantes de  $A_m$  en  $\mathbb{R}$ . Definimos un *operador de coborde*  $d : \wedge^k(A^*) \rightarrow \wedge^{k+1}(A^*)$  tal que para todo  $\varphi \in \Gamma(\wedge^k(A^*))$ , se tiene  $d(\varphi) \in \Gamma(\wedge^{k+1}(A^*))$  definido por

$$(2.1) \quad d\varphi(X_1, \dots, X_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} \rho(X_i) \varphi(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1}) \\ + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \varphi([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{k+1})$$

DEFINICIÓN 5.14. Dado  $X \in \Gamma(A)$  definimos  $L_X : \Gamma \wedge^k(A^*) \rightarrow \Gamma \wedge^k(A^*)$ , La derivada de Lie en la dirección de  $X$ , por

$$(2.2) \quad L_X(\varphi)(X_1, \dots, X_k) = \rho(X)(\varphi(X_1, \dots, X_k)) - \sum_{i=1}^k \varphi(X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_k),$$

para todo  $\varphi \in \Gamma \wedge^k(A^*)$ .

DEFINICIÓN 5.15. Sea  $X \in \Gamma(A)$ . La *contracción* o *multiplicación interior* por  $X$  es la aplicación  $\iota_X : \Gamma \wedge^{k+1}(A^*) \rightarrow \Gamma \wedge^k(A^*)$  definida por:

$$(2.3) \quad (\iota_X \varphi)(X_1, \dots, X_k) = \varphi(X, X_1, \dots, X_k),$$

donde  $\varphi \in \Gamma \wedge^{k+1}(A^*)$  y  $X_1, \dots, X_k \in \Gamma(A)$ .

LEMA 5.16. La derivada de Lie, el operador de coborde y la multiplicación interior satisfacen las siguientes propiedades:

- I.  $d(\varphi \wedge \psi) = d\varphi \wedge \psi + (-1)^{\deg \varphi} \varphi \wedge d\psi$
- II.  $d^2 = 0$
- III.  $L_{[X,Y]} = L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X$
- IV.  $\iota_{[X,Y]} = L_X \circ \iota_Y - \iota_Y \circ L_X$
- V.  $L_X = d \circ \iota_X + \iota_X \circ d$
- VI.  $L_{fX}(\varphi) = f(L_X(\varphi)) + df \wedge \iota_X(\varphi)$

Donde  $X, Y \in \Gamma(A)$ ,  $f \in C^\infty(M)$  y  $\varphi, \psi \in \Gamma \wedge(A^*)$ .

OBSERVACIÓN 5.17. En la fórmula (6) del lema anterior,  $d$  denota el operador de coborde para el algebroide de Lie, luego si  $X \in \Gamma(A)$  entonces  $df(X) = \rho(X)f$ .

**2.1. Corchete de Shouten generalizado.** Sea  $(A, \rho, [\cdot, \cdot])$  un algebroide de Lie sobre  $M$ . Si  $D \in \Gamma \wedge^k(A)$  entonces, para todo  $m \in M$ , podemos considerar a  $D(m)$  como una aplicación multilineal altermante  $D_m : \underbrace{A_m^* \times \dots \times A_m^*}_{k\text{-veces}} \rightarrow \mathbb{R}$ . Los elementos de  $\Gamma \wedge^k(A)$  se

llamarán *k-multisecciones* de  $A$ .

En el espacio de todas las multisecciones de  $A$ , existe un corchete

$$[\cdot, \cdot] : \Gamma \wedge^k(A) \times \Gamma \wedge^m(A) \rightarrow \Gamma \wedge^{k+m-1}(A),$$

llamado *corchete de Shouten*, que esta caracterizado por las siguientes propiedades.

- I.  $[\cdot, \cdot] : \Gamma \wedge^1(A) \times \Gamma \wedge^1(A) \rightarrow \Gamma \wedge^1(A)$  coincide con el corchete de Lie del algebroide de Lie. Notar que  $\Gamma \wedge^1(A) \simeq \Gamma(A)$ .
- II.  $[\cdot, \cdot] : \Gamma(A) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  es tal que para todo  $X \in \Gamma(A)$  y  $f \in C^\infty(M)$  se tiene que  $[X, f] = \rho(X)f$ .
- III.  $[D_1, D_2] = -(-1)^{(k-1)(m-1)}[D_2, D_1]$ .
- IV.

$$\begin{aligned} & (-1)^{(k-1)(n-1)}[[D_1, D_2], D_3] + (-1)^{(m-1)(k-1)}[[D_2, D_3], D_1] \\ & \quad + (-1)^{(n-1)(m-1)}[[D_3, D_1], D_2] = 0 \end{aligned}$$

$$V. [D_1, D_2 \wedge D_3] = [D_1, D_2] \wedge D_3 + (-1)^{k(n-1)} D_1 \wedge [D_2, D_3].$$

Para todo  $D_1 \in \Gamma \wedge^k(A)$ ,  $D_2 \in \Gamma \wedge^m(A)$  y  $D_3 \in \Gamma \wedge^n(A)$ .

OBSERVACIÓN 5.18. El apareamiento natural entre una  $k$ -sección  $\varphi$  y una  $k$ -multisección  $D$  lo denotaremos por  $\varphi \cdot D$  o por  $\langle D, \varphi \rangle$ .

DEFINICIÓN 5.19. Sea  $\varphi \in \Gamma \wedge^k(A^*)$ . La *contracción* por  $\varphi$  es el operador

$$\iota_\varphi : \Gamma \wedge^m(A^*) \rightarrow \Gamma \wedge^{m-k}(A^*) \quad \text{tal que} \quad (\iota_\varphi(D))\psi \mapsto (\varphi \wedge \psi) \cdot D,$$

para todo  $m \geq k$ .

DEFINICIÓN 5.20. Sea  $X \in \Gamma(A)$ . La *derivada de Lie de multisecciones* respecto a  $X$  se define como  $L_X(D) = [X, D]$ , para todo  $D \in \Gamma \wedge^k(A)$ .

LEMA 5.21. *La derivada de Lie de multisecciones satisface las siguientes propiedades:*

- I.  $L_X(D_1 \wedge D_2) = L_X(D_1) \wedge D_2 + D_1 \wedge L_X(D_2)$ ,
- II.  $[L_X, L_Y] = L_{[X, Y]}$ ,
- III.  $L_X(fD) = fL_X(D) + \rho(X)(f)D$ ,
- IV.  $L_{fX}(D) = fL_X(D) - X \wedge \iota_{df}(D)$ ,
- V.  $L_X(\varphi \cdot D) = L_X(\varphi) \cdot D + \varphi \cdot L_X(D)$ ,
- VI.  $L_X(Y_1, \dots, Y_k) = \sum_{i=1}^k Y_1 \wedge \dots \wedge [X, Y_i] \wedge \dots \wedge Y_k$ ,

donde  $X, Y, Y_1, \dots, Y_k \in \Gamma(A)$ ;  $D, D_1, \dots, D_k \in \Gamma \wedge^k(A)$ ;  $D_2 \in \Gamma \wedge^m(A)$  y  $f \in C^\infty(M)$ .

DEFINICIÓN 5.22 (*Bialgebroides de Lie*). Consideremos  $(A, \rho, [\cdot, \cdot])$  un algebroides de Lie sobre  $M$ . Supongamos que el fibrado vectorial dual  $A^*$  también posee una estructura de algebroides de Lie. Decimos que el par  $(A, A^*)$  es un *bialgebroides de Lie* si para cualquier  $X, Y \in \Gamma(A)$  se cumple

$$(2.4) \quad d_*[X, Y] = L_X d_* Y - L_Y d_* X,$$

donde  $d_* : \Gamma \wedge^k(A) \rightarrow \Gamma \wedge^{k+1}(A)$  es el operador de coborde asociado a  $A^*$ .

OBSERVACIÓN 5.23. La ecuación (2.4) es equivalente a suponer que la aplicación de coborde  $d_* : \Gamma(A) \rightarrow \Gamma \wedge^2(A)$  es un *1-cociclo* para el álgebra de Lie  $\Gamma(A)$ .

**2.2. Propiedades básicas de los bialgebroides de Lie.** A continuación enunciaremos, sin demostración, algunas de las propiedades básicas de los bialgebroides de Lie.

PROPOSICIÓN 5.24. *Supongamos que  $(A, A^*)$  es un bialgebroides de Lie. Entonces, para cualquier  $X \in \Gamma(A)$  y  $f \in C^\infty(M)$ ,*

$$(2.5) \quad L_{df}X = -[d_*f, X].$$

COROLARIO 5.25. *Denotemos por  $\pi_M^\sharp$  la composición  $\rho \circ \rho_*^* : T^*M \rightarrow TM$ . Entonces tenemos que*

$$(2.6) \quad [d_*f, d_*g] = d_*(\pi_M^\sharp(\delta g)f),$$

donde  $\delta g$  denota el diferencial de  $g$ .

PROPOSICIÓN 5.26. *Supongamos que  $(A, A^*)$  es un bialgebroid de Lie. Entonces  $\pi_M^\sharp : T^*M \rightarrow TM$  define una estructura de Poisson sobre  $M$  y también lo hace  $\bar{\pi}_M^\sharp = \rho_* \circ \rho^* : T^*M \rightarrow TM$ . Mas aún,  $\bar{\pi}_M^\sharp$  y  $\pi_M^\sharp$  son opuestas.*

PROPOSICIÓN 5.27. *Asumamos que  $(A, A^*)$  es un bialgebroid de Lie. Para cualquier  $\varphi \in \Gamma(A^*)$  y  $f \in C^\infty(M)$*

$$(2.7) \quad L_{df}\varphi = -[df, \varphi]$$

TEOREMA 5.28. *Si  $(A, A^*)$  es un bialgebroid de Lie, entonces  $(A, A^*)$  también lo es.*

LEMA 5.29. *Para cualquier  $X \in \gamma(A)$ ,  $\varphi \in \Gamma(A^*)$  y  $f \in C^\infty(M)$*

$$(2.8) \quad L_{L_\varphi X}f = L_\varphi L_X f - X \cdot [\varphi, df].$$

### 2.3. Álgebras de Gerstenhaber.

DEFINICIÓN 5.30 (*Álgebra de Gerstenhaber*). Sea  $R$  un anillo conmutativo con 1. Un *álgebra de Gerstenhaber* sobre  $R$  es un triple  $(A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A_i, \wedge, [\cdot, \cdot])$  que se satisface las siguientes condiciones

- $(A, \wedge)$  es una  $R$ -álgebra asociativa  $\mathbb{Z}$ -graduada,  $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A_i$ , conmutativa (en el sentido graduado), esto es:

$$(2.9) \quad a_i \wedge a_j = (-1)^{ij} a_j \wedge a_i \quad \text{para todo } a_i \in A_i, a_j \in A_j,$$

- El par  $(A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A^{(i)}, [\cdot, \cdot])$  es un álgebra de Lie graduada, esto es, el corchete satisface:
  - I.  $[a_i, a_j] = -(-1)^{(i-1)(j-1)} [a_j, a_i]$ , para todo  $a_i \in A_i, a_j \in A_j$ ,
  - II.

$$\begin{aligned} & (-1)^{(i-1)(k-1)} [[a_i, a_j], a_k] + (-1)^{(j-1)(i-1)} [[a_j, a_k], a_i] \\ & \quad + (-1)^{(k-1)(j-1)} [[a_k, a_i], a_j] = 0, \end{aligned}$$

para todo  $a_i \in A_i, a_j \in A_j$  y  $a_k \in A_k$ .

- Además, el corchete satisface una *condición de Leibniz*, dada por

$$(2.10) \quad [a_i \wedge a_j, a_k] = [a_i, a_k] \wedge a_j + (-1)^{i(k-1)} a_i \wedge [a_j, a_k]$$

para todo  $a_i \in A_i, a_j \in A_j$  y  $a_k \in A_k$ .

PROPOSICIÓN 5.31. *Sea  $\pi : A \rightarrow M$  un fibrado vectorial, entonces  $A$  es un algebroid de Lie si y solo si  $\mathcal{A} = \Gamma \wedge(A)$  es un álgebra de Gerstenhaber con la estructura definida en la sección (2.1).*

### 3. Estructuras de Poisson Lineales

DEFINICIÓN 5.32. Sea  $\pi : E \rightarrow M$  un fibrado vectorial. Una función realvaluada  $g \circ \pi$ , donde  $g \in C^\infty(M)$ , es llamada *función básica*.

Una función realvaluada  $f \in C^\infty(E)$  es llamada *lineal fibra a fibra* si su restricción a cada fibra de  $E$  es lineal.

DEFINICIÓN 5.33 (*Estructuras de Poisson lineales*). Sea  $\pi : E \rightarrow M$  un fibrado vectorial. Una estructura de Poisson  $\Pi$  sobre  $E$  se dice *estructura de Poisson lineal* si se satisfacen las siguientes tres condiciones:

- I. El corchete de Poisson de dos funciones básicas es idénticamente cero,
- II. El corchete de Poisson de una función básica y una función lineal fibra a fibra es una función básica.
- III. El corchete de dos funciones lineales fibra a fibra es de nuevo una función lineal fibra a fibra.

TEOREMA 5.34. *Existe una correspondencia uno a uno entre estructuras de algebroides de Lie sobre un fibrado vectorial  $\pi : A \rightarrow M$  y estructuras de Poisson lineales sobre  $\pi^* : A^* \rightarrow M$ .*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $(A, \rho, [\cdot, \cdot])$  una estructura de algebroides de Lie sobre  $\pi : A \rightarrow M$ .

Dada  $\alpha \in \Gamma(M, A)$  definimos la aplicación  $\tilde{\alpha} : A^* \rightarrow \mathbb{R}$  mediante la fórmula  $\tilde{\alpha}(\varphi) = \langle \varphi, \alpha(\pi^*(\varphi)) \rangle$ . Si  $\varphi$  y  $\psi$  pertenecen a la misma fibra de  $A^*$ , entonces

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(\varphi + \psi) &= \langle \varphi + \psi, \alpha(\pi^*(\varphi + \psi)) \rangle = \langle \varphi, \alpha(\pi^*(\varphi + \psi)) \rangle + \langle \psi, \alpha(\pi^*(\varphi + \psi)) \rangle \\ &= \langle \varphi, \alpha(\pi^*(\varphi)) \rangle + \langle \psi, \alpha(\pi^*(\psi)) \rangle = \tilde{\alpha}(\varphi) + \tilde{\alpha}(\psi). \end{aligned}$$

Dado  $t \in \mathbb{R}$ , se tiene  $\tilde{\alpha}(t\varphi) = \langle t\varphi, \alpha(\pi^*(t\varphi)) \rangle = t\langle \varphi, \alpha(\pi^*(\varphi)) \rangle = t\tilde{\alpha}(\varphi)$ . Como consecuencia,  $\tilde{\alpha}$  es una aplicación lineal fibra a fibra.

Recíprocamente, dada  $f : A^* \rightarrow \mathbb{R}$  función suave, lineal fibra a fibra, definimos  $\alpha : M \rightarrow A$  de la siguiente forma. Dado  $m \in M$ ,  $\alpha(m)$  es el elemento de  $A_m$  tal que para todo  $\varphi \in A_m$  se cumple que  $\langle \varphi, \alpha(m) \rangle = f(\varphi)$ .

Observemos que si  $\varphi \in A^*$  entonces  $\tilde{\alpha}(\varphi) = \langle \varphi, \alpha(\pi^*(\varphi)) \rangle = f(\varphi)$ , esto es,  $\tilde{\alpha} = f$ . Luego, todas las funciones lineales fibra a fibra son de esta forma.

Definamos el siguiente corchete:

- I. Si  $f, g$  son funciones suaves definidas sobre  $M$ , entonces  $\{f \circ \pi^*, g \circ \pi^*\} = 0$ .
- II. Si  $f \in C^\infty(M)$  y  $\alpha \in \Gamma(M, A)$ , entonces  $\{f \circ \pi^*, \tilde{\alpha}\} = \rho(\alpha)(f) \circ \pi^*$ .
- III. Si  $\alpha, \beta \in \Gamma(M, A)$ , entonces  $\{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\} = \widetilde{[\alpha, \beta]}$

Usando la regla de Leibniz, este corchete se puede extender a otras funciones suaves definidas sobre  $A^*$ . En un sistema de coordenadas  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n, x_1, \dots, x_m)$  sobre  $A^*$ , donde  $(x_1, \dots, x_m)$  es un sistema de coordenadas locales para  $M$  y  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  es una base de secciones locales para  $A$ , el *2-campo vectorial* sobre  $A^*$  correspondiente a la estructura de Poisson inducida, puede

escribirse como

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i,j} [\alpha_i, \alpha_j] \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \wedge \frac{\partial}{\partial \alpha_j} + \sum_{i,j} \rho(\alpha_i)(x_j) \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Recíprocamente, dada una estructura de Poisson lineal  $\Pi$  sobre  $A^*$ , las fórmulas en (2) y (3), definen una estructura de algebroide de Lie sobre  $\pi : A \rightarrow M$ .  $\square$

#### 4. Algebroide de Lie asociado a un grupoide de Lie

Una de las fuentes de ejemplos de algebroides de Lie más importantes son los grupoides de Lie. A continuación, describiremos el proceso para obtener un algebroide de Lie a partir de un grupoide de Lie. Este proceso, aunque bien conocido, no hemos encontrado una referencia bibliográfica que desarrolle completa y satisfactoriamente dicho procedimiento, por dicha razón lo incluimos aquí.

Sea  $\mathcal{G} \begin{smallmatrix} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{smallmatrix} \mathcal{P}$  un grupoide de Lie. Como  $t$  es submersión suryectiva entonces  $Tt : T\mathcal{G} \rightarrow T\mathcal{P}$  es sobreyectiva fibra a fibra; la variedad  $T^t\mathcal{G} = \text{Ker}Tt = \bigcup_{g \in \mathcal{G}} \text{Ker}T_g t$  es un fibrado vectorial sobre  $\mathcal{G}$ .

Sea  $A(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{P}$  el fibrado vectorial (pullback) definido en el diagrama (4.1)

$$(4.1) \quad \begin{array}{ccc} A(\mathcal{G}) & \xrightarrow{p} & T^t\mathcal{G} \\ q \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathcal{P} & \xrightarrow{Id} & \mathcal{G}, \end{array}$$

Esto es,  $A(\mathcal{G}) = \mathcal{P} \times_{Id \times \pi} T^t\mathcal{G}$  como variedad diferenciable. Luego,  $(m, X) \in A(\mathcal{G})$  si y solo si  $\pi(X) = Id_m$  para algún  $m \in \mathcal{P}$ ,  $X \in T_{Id(m)}\mathcal{G}$  y  $T_{Id(m)}(t)(X) = 0$ . Abusando de la notación,

$$X \in A(\mathcal{G}) \text{ si y solo si } \exists m \in \mathcal{P} \text{ tal que } X \in T_{Id(m)}\mathcal{G}_m.$$

**OBSERVACIÓN 5.35.**  $A(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{P}$  es un fibrado vectorial cuya fibra en  $m \in \mathcal{P}$  puede ser identificada con  $T_{Id(m)}\mathcal{G}_m$ .

**OBSERVACIÓN 5.36.** Como  $Id : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{G}$  es una incrustación entonces  $A(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{P}$  puede pensarse como un subfibrado vectorial de  $T^t\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ .

**DEFINICIÓN 5.37. Campo Vertical.**

Un campo vectorial  $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{G})$  se dice *vertical* si para todo  $\forall g \in \mathcal{G}$  se tiene  $X(g) \in T_g\mathcal{G}_{t(g)}$ .

**DEFINICIÓN 5.38. Campo vectorial invariante a derecha.**

Un campo vectorial  $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{G})$  se dice invariante a derecha si

- I.  $X$  es vertical.
- II.  $\forall g, h \in \mathcal{G}$  con  $t(g) = s(h)$  se tiene  $X(gh) = T_g R_h(X(g))$ ; donde  $R_h : \mathcal{G}_{s(h)} \rightarrow \mathcal{G}_{t(h)}$ , esta dada por  $g \mapsto gh$ .

OBSERVACIÓN 5.39. Si  $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{G})$ , entonces  $X$  es invariante a derecha si y solo si  $X(g) = (T_{Id_{s(g)}}R_g)(X(Id_{s(g)}))$ .

PROPOSICIÓN 5.40. Si definimos  $\mathbf{R} : T^\alpha \mathcal{G} \rightarrow A(\mathcal{G})$  en cada fibra por  $\mathbf{R}_g = T_g(R_{g^{-1}}) : T_g^t \mathcal{G} \rightarrow A_g(\mathcal{G})$ , entonces  $\mathbf{R}$  es un morfismo de fibrados vectoriales el cual es un isomorfismo fibra a fibra.

DEMOSTRACIÓN. Demostremos primero que  $\mathbf{R}$  es suave. Sea  $\delta : \mathcal{G} \times_t \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ ,  $\delta(g, h) \mapsto gh^{-1}$ , la aplicación división. Si  $(h, g) \in G_{\alpha \times \alpha} \mathcal{G}$  y  $(Y_h, 0_g) \in T_{(g, h)} \mathcal{G} \times_t \mathcal{G}$  entonces  $(T_h t)(Y) = 0$  y usando la fórmula (1.1.5),

$$(T_{(h, g)} \delta)(Y_h, 0_g) = T_h(R_{g^{-1}})(Y_h) + T_g(L_h)(0_g).$$

Como consecuencia  $T_{(h, g)} \delta(Y_h, 0_g) = T_h(R_{g^{-1}})(Y_h)$ .

Definamos ahora  $\iota : T^t \mathcal{G} \rightarrow T \mathcal{G} \times_{T_t} T \mathcal{G}$ , tal que  $\iota(Y_g) = (Y_g, 0_g)$  para todo  $Y_g \in T_g^t \mathcal{G}$  y sea  $\gamma = T \delta \circ \iota : T^\alpha \mathcal{G} \rightarrow T \mathcal{G}$ . Ahora,  $\gamma(Y_g) \in T_{Id_{s(g)}} \mathcal{G}$  para todo  $g \in \mathcal{G}$  y

$$\begin{aligned} (T_{Id_{s(g)}} t)(T \gamma)(Y_g) &= (T_{Id_{s(g)}} t)(T_g R_{g^{-1}})(Y_g) \\ &= T_g(t \circ R_{g^{-1}}) = 0 \end{aligned}$$

pues  $\alpha \circ R_{g^{-1}}$  es constante. En consecuencia  $Im \gamma \subseteq T^t \mathcal{G}$  y por tanto, podemos factorizar a una aplicación suave  $\gamma : T^t \mathcal{G} \rightarrow A(\mathcal{G})$  la cual es un morfismo de fibrados vectoriales sobre  $s : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{P}$ .

$$(4.2) \quad \begin{array}{ccc} T^t \mathcal{G} & \xrightarrow{\mathbf{R}} & A(\mathcal{G}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{G} & \xrightarrow{s} & \mathcal{P} \end{array}$$

Es claro que  $\mathbf{R}$  es un isomorfismo fibra a fibra pues por definición  $\mathbf{R}_g = T_g R_{g^{-1}}$ . □

COROLARIO 5.41. Dado  $X \in \Gamma(A(\mathcal{G}))$  definimos  $\vec{X}(g) = (T_{Id_{s(g)}} R_g)X(s(g))$ . Entonces  $\vec{X} : \mathcal{G} \rightarrow T^t \mathcal{G}$  es un campo vectorial invariante a derecha.

DEMOSTRACIÓN. Es claro que para todo  $X \in \Gamma(A(\mathcal{G}))$ , el campo vectorial  $\vec{X}$  es vertical. Además,

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \vec{X}(Id_{s(g)}) &= (T_{Id_{s(Id_{s(g)})}} R_{Id_{s(g)}})X(s(Id_{s(g)})) \\ &= (T_{Id_{s(g)}} R_{Id_{s(g)}})X(s(g)) = X(s(g)). \end{aligned}$$

Como consecuencia  $\vec{X}(g) = (T_{Id_{s(g)}} R_g) \vec{X}(Id_{s(g)})$  y así podemos concluir que  $\vec{X}$  es un campo invariante a derecha. □

OBSERVACIÓN 5.42. La aplicación  $\Gamma(A(\mathcal{G})) \rightarrow \Gamma(T^t \mathcal{G})$  tal que  $X \mapsto \vec{X}$  nos permite definir un isomorfismo de  $C^\infty(\mathcal{G})$  modulos

$$(4.4) \quad C^\infty(\mathcal{G}) \otimes_{C^\infty(\mathcal{P})} \Gamma(A\mathcal{G}) \rightarrow \Gamma(T^t \mathcal{G}), \quad f \otimes X \mapsto f\vec{X}.$$

OBSERVACIÓN 5.43. En el diagrama conmutativo (4.5), cada cuadrado corresponde a un pullback

$$(4.5) \quad \begin{array}{ccccc} A\mathcal{G} & \longrightarrow & T^t \mathcal{G} & \longrightarrow & A\mathcal{G} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{P} & \xrightarrow{Id} & \mathcal{G} & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{P} \end{array}$$

Luego  $T^t \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  es trivializable si y solo si  $A\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{P}$  lo es.

NOTACIÓN. El conjunto de campos invariantes a derecha sobre  $\mathcal{G}$ , lo denotaremos por  $\Gamma^{RI}(T^t \mathcal{G})$ .

El isomorfismo (4.4) implica que para todo  $X \in \Gamma(T^t \mathcal{G})$  existen  $X_i \in A\mathcal{G}$  y  $f \in C^\infty(\mathcal{G})$  tal que  $X = \sum_{i=1}^n f_i X_i$ .

OBSERVACIÓN 5.44. El  $C^\infty(\mathcal{P})$ -modulo  $\Gamma(A\mathcal{G})$  es proyectivo pero no es libre.

LEMA 5.45. Para todo  $f \in C^\infty(\mathcal{P})$  y  $X \in \Gamma^{RI}(T^t \mathcal{G})$ , la operación  $fX = (f \circ \beta)X$ , dota a  $\Gamma^{RI}(T^t \mathcal{G})$  de una estructura de  $C^\infty(\mathcal{P})$ -módulo, para la cual las aplicaciones

$$(4.6) \quad \begin{array}{ccc} \Gamma^{RI}(T^t \mathcal{G}) & \rightarrow & \Gamma(A\mathcal{G}); \quad \Gamma(A\mathcal{G}) \rightarrow \Gamma^{RI}(T^t \mathcal{G}) \\ X & \mapsto & X \circ 1; \quad X \mapsto \vec{X}. \end{array}$$

Son isomorfismos (inversos) de  $C^\infty(\mathcal{P})$ -módulos.

OBSERVACIÓN 5.46. Como consecuencia del lema (5.45), las secciones del fibrado vectorial  $A\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{P}$  pueden ser identificadas con los campos invariantes a izquierda sobre  $\mathcal{G}$ .

LEMA 5.47. El  $C^\infty(\mathcal{P})$ -módulo  $\Gamma^{RI}(T^t \mathcal{G})$  es cerrado bajo el corchete de campos vectoriales.

DEMOSTRACIÓN. Si  $X$  e  $Y$  son verticales  $X \stackrel{t}{\sim} 0$  y  $Y \stackrel{t}{\sim} 0$ , por tanto  $[X, Y] \stackrel{t}{\sim} 0$ , lo cual implica que  $[X, Y]$  es vertical.

Si  $X \in \Gamma(T^t \mathcal{G})$  es invariante a derecha:

$$\forall g, h \text{ tal que } (h, g) \in \mathcal{G}_s \times_t \mathcal{G}, \quad X(hg) = (T_h R_g)(X(h)),$$

lo cual puede ser interpretado de la siguiente forma. Dados  $x, y \in \mathcal{P}$ ,  $g \in \mathcal{G}_x^y$  se tiene  $X|_{\mathcal{G}_y} \stackrel{R_g}{\sim} X|_{\mathcal{G}_x}$ . Como consecuencia, si  $X, Y$  satisfacen lo anterior, se tiene que

$$\forall x, y \in \mathcal{P}, \forall g \in \mathcal{G}_x^y \quad [X|_{\mathcal{G}_y}, Y|_{\mathcal{G}_y}] \stackrel{R_g}{\sim} [X|_{\mathcal{G}_x}, Y|_{\mathcal{G}_x}]$$

y es claro que  $[X, Y] |_{\mathcal{G}_y} = [X |_{\mathcal{G}_y}, Y |_{\mathcal{G}_y}]$ .

Luego para todo  $x, y \in \mathcal{P}, g \in \mathcal{G}_x^y$  se tiene  $[X, Y] |_{\mathcal{G}_y} \stackrel{R_g}{\sim} [X, Y] |_{\mathcal{G}_x}$ , lo cual significa que  $[X, Y]$  es invariante a derecha.  $\square$

OBSERVACIÓN 5.48. El corchete del lema (5.47) puede ser trasladado a  $\Gamma(A\mathcal{G})$  de la siguiente forma. Dados  $X, Y \in \Gamma(A\mathcal{G})$ , por el lema 5.47,  $[\vec{X}, \vec{Y}] \in \Gamma^{RI}(T^t\mathcal{G})$ . Definimos por tanto

$$(4.7) \quad [X, Y] = [\vec{X}, \vec{Y}] \circ Id.$$

DEFINICIÓN 5.49. El ancla  $a_{\mathcal{G}} : A\mathcal{G} \rightarrow T\mathcal{P}$  de  $A\mathcal{G}$  esta definido por

$$(4.8) \quad \begin{array}{ccccccc} A\mathcal{G} & \longrightarrow & T^t\mathcal{G} & \xrightarrow{\quad} & T\mathcal{G} & \xrightarrow{T_s} & T\mathcal{P} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{Id} & \mathcal{G} & \xrightarrow{=} & \mathcal{G} & \xrightarrow{s} & \mathcal{P} \end{array}$$

OBSERVACIÓN 5.50. Para todo  $X \in \Gamma(A\mathcal{G})$  se tiene  $a(X) = (Ts) \circ \vec{X} \circ Id$ .

LEMA 5.51. Si  $X \in \Gamma(A\mathcal{G})$  entonces  $\vec{X}$  esta  $s$ -relacionado con  $a(X)$ .

DEMOSTRACIÓN. Dado  $g \in \mathcal{G}$ ,

$$(4.9) \quad (Ts)(\vec{X})(g) = (T_g s)(\vec{X})(g) = (T_g s)(T_{Id(s(g))} R_g)(X(s(g))) = (T_{Id(s(g))} s)(X(s(g)))$$

También

$$(4.10) \quad (a(X) \circ s)(g) = a(X)(s(g)) = (T_{Id(s(g))} s)X(s(g)).$$

de donde obtenemos la conclusión deseada.  $\square$

LEMA 5.52. El corchete definido en (4.7) sobre  $\Gamma(A\mathcal{G})$  y el ancla definida en (5.49) satisfacen la regla de Leibniz (1.1).

DEMOSTRACIÓN. Si  $f \in C^\infty(\mathcal{P})$  y  $X \in \Gamma(A\mathcal{G})$ , entonces para todo  $m \in \mathcal{G}$  y  $\varphi \in C^\infty(\mathcal{G})$ ,

$$\begin{aligned} \vec{fY}(\varphi)(m) &= \vec{fY}_m(\varphi) = (T_{Id(s(m))} R_m)((fY)(s(m)))(\varphi) \\ &= (T_{Id(s(m))} R_m)((f \circ s)(m)Y(s(m)))(\varphi) = ((f \circ s)Y)(\varphi)(m). \end{aligned}$$

Como consecuencia  $\vec{fY} = (f \circ s)\vec{Y}$ . Si además  $X \in \Gamma(A\mathcal{G})$ ,

$$\begin{aligned}
[X, fY] &= [\vec{X}, \vec{fY}] \circ Id = [\vec{X}, (f \circ s)\vec{Y}] \circ Id = ((f \circ s)[\vec{X}, \vec{Y}] + \vec{X}(f \circ s)\vec{Y}) \circ Id \\
&= ((f \circ s)[\vec{X}, \vec{Y}]) \circ Id + (\vec{X}(f \circ s)\vec{Y}) \circ Id \\
&= (f \circ s \circ Id)([\vec{X}, \vec{Y}] \circ Id) + (\vec{X}(f \circ s) \circ Id)(\vec{Y} \circ Id) \\
&= f[X, Y] + (\vec{X} \circ Id)(f \circ s)(\vec{Y} \circ Id) \\
&= f[X, Y] + X(f \circ s)Y = f[X, Y] + ((Ts)Xf)Y \\
&= f[X, Y] + (a(X)f)Y.
\end{aligned}$$

□

DEFINICIÓN 5.53. Sea  $\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{P}$  un grupoide de Lie, la colección  $(A\mathcal{G}, [\cdot, \cdot], a_{\mathcal{G}})$ , con  $a_{\mathcal{G}}$  y  $[\cdot, \cdot]$  definidos en (5.49) y (5.48), es llamado *algebra de Lie de  $\mathcal{G}$* .

## Algebroides de Lie dobles

En este capítulo continuaremos con el estudio de estructuras algebraicas multiples de tipo Lie. En esta ocasión comenzaremos introduciendo el concepto de fibrado vectorial doble y a continuación presentamos dos ejemplos concretos que nos serán de utilidad en la discusión subsiguiente. El concepto de *Algebroides de Lie doble* se introduce en la sección (5) y a continuación nos concentramos en algebroides dobles de Lie con base total un punto y procedemos a la construcción del ejemplo cero de esta estructura a partir de cualquier par de álgebras de Lie, el llamado *algebroides doble trivial*. En la sección final damos una manera sistemática de construir ejemplos de álgebroides dobles de Lie a partir de cualquier diagrama de álgebras de Lie, que satisface una variante de la *condición de llenado* para grupoides dobles de Lie.

### 1. Fibrados vectoriales dobles

DEFINICIÓN 6.1. Un fibrado vectorial doble  $\mathcal{B}$  consta de los siguientes datos:

- I. Cuatro variedades diferenciables  $\mathcal{B}, \mathcal{V}, \mathcal{H}, \mathcal{P}$ .
- II. Cuatro submersiones suryectivas:

$$(1.1) \quad \lambda: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{V}, \quad \tau: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{H}, \quad l: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{P}, \quad t: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{P};$$

- III. Cuatro incrustaciones (*las secciones cero*):

$$(1.2) \quad 0_{\mathcal{V}}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{V}, \quad 0_{\mathcal{H}}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{H}, \quad \mathbf{0}_h: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{B}, \quad \mathbf{0}_v: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{B};$$

- IV. Cuatro aplicaciones suma,

$$\begin{aligned} +_h: \mathcal{B} \times_{\lambda} \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}, \quad (\text{suma horizontal}) \quad +_v: \mathcal{B} \times_{\tau} \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}, \quad (\text{suma vertical}) \\ +: \mathcal{V} \times_t \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}, \quad +: \mathcal{H} \times_l \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \end{aligned}$$

tal que los siguientes axiomas se satisfacen.

**Axioma 0.**  $(\mathcal{B}, \mathcal{V}, \lambda, \mathbf{0}_h, +_h)$ ,  $(\mathcal{B}, \mathcal{H}, \tau, \mathbf{0}_v, +_v)$ ,  $(\mathcal{V}, \mathcal{P}, t, \mathbf{0}, +)$  y  $(\mathcal{H}, \mathcal{P}, l, +)$  son fibrados vectoriales.

OBSERVACIÓN 6.2. De ahora en adelante, la fibra de  $(\mathcal{B}, \mathcal{V}, \lambda, \mathbf{0}_h, +_h)$  en  $v \in \mathcal{V}$ , la denotaremos por  $\mathcal{B}_v := \lambda^{-1}(v)$ . Así mismo, la fibra de  $(\mathcal{B}, \mathcal{H}, \tau, \mathbf{0}_v, +_v)$  en  $h \in \mathcal{H}$ , la denotaremos por  ${}_h\mathcal{B} := \tau^{-1}(h)$ .

OBSERVACIÓN 6.3. Dado  $r \in \mathbb{R}$  y  $A \in \mathcal{B}$ , el producto por escalar de  $r$  con  $A$  respecto del *fibrado vectorial vertical*  $(\mathcal{B}, \mathcal{H}, \tau, \mathbf{0}_v, +_v)$  lo denotaremos por  $Ar$ . El producto por escalar de  $r$  con  $A$  respecto del fibrado vectorial  $(\mathcal{B}, \mathcal{H}, \tau, \mathbf{0}_v, +_v)$  lo denotaremos por  $rA$ .

**Axioma 1.** Las aplicaciones estructurales en cada estructura de fibrado vectorial sobre  $\mathcal{B}$  (la proyección, adición, producto por escalar y sección cero) es un morfismo de fibrados vectoriales respecto al morfismo correspondiente en la otra estructura de fibrado vectorial sobre  $\mathcal{B}$ . A continuación escribiremos de forma explícita el significado de este axioma para algunas de las operaciones estructurales.

De ahora en adelante, usaremos la notación  $AB$  (respectivamente  $\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}$ ) para la suma horizontal (respectivamente vertical).

**Axioma 1.1**  $\lambda : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{V}$  es un morfismo de fibrados vectoriales sobre  $l : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{P}$ , esto es,

$$\lambda(A) \in \mathcal{V}_{l(h)}, \lambda \left\{ \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right\} = \lambda(A) + \lambda(B) \text{ y } \lambda(rA) = r\lambda(A);$$

para todo  $h \in \mathcal{H}; A, B \in {}_h\mathcal{B}$  y  $r \in \mathbb{R}$ .

**Axioma 1.2**  $\tau : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{H}$  es un morfismo de fibrados vectoriales sobre  $t : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{P}$ , esto es,

$$\tau(A) \in \mathcal{H}_{t(u)}, \tau(AB) = \tau(A) + \tau(B) \text{ y } \tau(rA) = r\tau(A);$$

para todo  $u \in \mathcal{V}; A, B \in \mathcal{B}_u$  y  $r \in \mathbb{R}$ .

**Axioma 1.3** La *sección cero horizontal*  $\mathbf{0}_h : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{B}$  es un morfismo de fibrados vectoriales sobre  $0 : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{H}$ , esto es:

$$\lambda(\mathbf{0}_h(v)) = 0_p, \mathbf{0}_h(u+w) = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{0}_h(u) \\ \mathbf{0}_h(w) \end{matrix} \right\} \text{ y } \mathbf{0}_h(ru) = \mathbf{0}_h(u)r;$$

para todo  $r \in \mathbb{R}, p \in \mathcal{P}$  y  $u, w \in \mathcal{V}_p$ .

**Axioma 1.4** La *sección cero vertical*  $\mathbf{0}_v : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{B}$  es un morfismo de fibrados vectoriales sobre  $0 : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{V}$ , esto es,

$$\tau(\mathbf{0}_v(f)) = 0_p, \mathbf{0}_v(f+g) = \{\mathbf{0}_v(f) \mathbf{0}_v(g)\} \text{ y } \mathbf{0}_v(rf) = r\mathbf{0}_v(f);$$

para todo  $r \in \mathbb{R}, p \in \mathcal{P}$  y  $f, g \in \mathcal{H}_p$ .

Con el fin de hacer explicitos los demás axiomas realizaremos algunas construcciones auxiliares. Consideremos el *fibrado vectorial vertical*  $\tau : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{H}$  y tomemos el siguiente pullback en la categoría de fibrados vectoriales,

$$(1.3) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{B} \oplus_{\mathcal{V}} \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{B} \\ \downarrow & & \downarrow \lambda \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{\lambda} & \mathcal{V}. \end{array}$$

El fibrado en la esquina superior izquierda del diagrama (1.3) corresponde a  $\mathcal{B} \oplus_{\mathcal{V}} \mathcal{B} \xrightarrow{\tau \times \tau} \mathcal{H} \oplus_{\mathcal{P}} \mathcal{H}$ , donde estamos usando la notación  $\mathcal{B} \oplus_{\mathcal{V}} \mathcal{B}$  para  $\mathcal{B} \lambda \times \lambda \mathcal{B}$  y  $\mathcal{H} \oplus_{\mathcal{P}} \mathcal{H}$  para  $\mathcal{H} l \times l \mathcal{H}$ .

Analogamente, considerando el *fibrado vectorial horizontal*  $\lambda : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{V}$ , podemos construir otro fibrado vectorial  $\mathcal{B} \oplus_{\mathcal{H}} \mathcal{B} \xrightarrow{\lambda \times \lambda} \mathcal{V} \oplus_{\mathcal{P}} \mathcal{V}$ , (ver fig. 1.4), donde  $\mathcal{B} \oplus_{\mathcal{H}} \mathcal{B} = \mathcal{B} \tau \times \tau \mathcal{B}$  y  $\mathcal{V} \oplus_{\mathcal{P}} \mathcal{V}$

$$\mathcal{V} = \mathcal{V} \times_t \mathcal{V}.$$

$$(1.4) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{B} \oplus_{\mathcal{H}} \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{B} \\ \downarrow & & \downarrow t \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{t} & \mathcal{V} \end{array}$$

Denotemos por  $p : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  la proyección sobre  $\mathbb{R}$  y consideremos el fibrado vectorial  $Id_{\mathbb{R}} \times t : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathcal{P}$ . Entonces, el diagrama pullback

$$(1.5) \quad \begin{array}{ccc} (\mathbb{R} \times \mathcal{V}) \oplus_{\mathcal{V}} \mathcal{B} & \longrightarrow & (\mathbb{R} \times \mathcal{V}) \\ \downarrow & & \downarrow p_1 \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{\lambda} & \mathcal{V}, \end{array}$$

define un fibrado vectorial  $(\mathbb{R} \times \mathcal{V}) \oplus_{\mathcal{V}} \mathcal{B} \xrightarrow{q} (\mathbb{R} \times \mathcal{P}) \oplus_{\mathcal{P}} \mathcal{H}$ ; con proyección  $q$  dada por  $q(s, v, A) = (s, t(v), \tau(A))$  y suma  $(s, u, A) + (s, w, B) = (s, u + w, \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix})$ , donde este definida.

**OBSERVACIÓN 6.4.**  $(\mathbb{R} \times \mathcal{V}) \oplus_{\mathcal{V}} \mathcal{B}$  y  $(\mathbb{R} \times \mathcal{M}) \oplus_{\mathcal{M}} \mathcal{H}$  denotan las variedades  $(\mathbb{R} \times \mathcal{V}) \times_{p \times \lambda} \mathcal{B}$  y  $(\mathbb{R} \times \mathcal{P}) \oplus_{\mathcal{P}} \mathcal{H}$  respectivamente, donde  $p$  es la proyección sobre  $\mathcal{P}$ .

En base a las construcciones 1.4 y 1.5, la suma y el producto por escalar horizontal, son aplicaciones  $\mathcal{B} \oplus_{\mathcal{V}} \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$  y  $(\mathbb{R} \times \mathcal{V}) \oplus_{\mathcal{V}} \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ , respectivamente.

**Axioma 1.5** Ley de intercambio para la suma

La suma horizontal  $\{ \cdot \cdot \} : \mathcal{B} \oplus_{\mathcal{V}} \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$  es un morfismo de fibrados vectoriales sobre  $+$  :  $\mathcal{H} \oplus_{\mathcal{P}} \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ . Explícitamente,

$$(1.6) \quad \begin{Bmatrix} A \\ C \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} B \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A & B \\ C & D \end{Bmatrix}$$

cuando estén definidas las operaciones indicadas.

**Axioma 1.6** El producto por escalar horizontal  $(\mathbb{R} \times \mathcal{V}) \oplus_{\mathcal{V}} \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$  es un morfismo de fibrados vectoriales sobre  $\cdot$  :  $(\mathbb{R} \times \mathcal{M}) \oplus_{\mathcal{M}} \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ . Explícitamente,

$$(1.7) \quad \tau(rA) = r\tau(A), \quad r \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} rA \\ rB \end{Bmatrix} \quad \text{y} \quad r(As) = (rA)s;$$

para todo  $r, s \in \mathbb{R}$  y  $A, B \in \mathcal{B}$ .

**OBSERVACIÓN 6.5.** La última ecuación en 1.7 es conocida como *Ley de intercambio para el producto por escalar*.

**DEFINICIÓN 6.6.** Morfismos entre fibrados vectoriales dobles, se definen de forma natural. Es claro que todo fibrado vectorial doble posee un grupoide doble subyacente, en el cual

las aplicaciones *top* y *botom* coinciden, al igual que las aplicaciones *left* y *right*. Como consecuencia, tenemos un funtor de olvido

$$F : \mathcal{D}\mathcal{V}\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}\mathcal{G}$$

de la categoría de fibrados vectoriales dobles en la categoría de grupoides dobles.

DEFINICIÓN 6.7. Sea  $(\mathcal{B}; \mathcal{V}, \mathcal{H}; \mathcal{P})$  un fibrado vectorial doble. Definimos  $\mathbf{E}(\mathcal{B})$ , la *medula* de  $\mathcal{B}$ , como  $\mathbf{E}(F(\mathcal{B}))$ , la medula del grupode doble suyacente.

LEMA 6.8. Sea  $(\mathcal{B}; \mathcal{V}, \mathcal{H}; \mathcal{P})$  un fibrado vectorial doble.  $\mathbf{E}(\mathcal{B})$  es un fibrado vectorial sobre  $\mathcal{P}$ .

OBSERVACIÓN 6.9. Sea  $(\mathcal{B}; \mathcal{V}, \mathcal{H}; \mathcal{P})$  un fibrado vectorial doble. Algebraicamente,  $\mathbf{E}(\mathcal{B})$  puede ser definido como el equalizador del diagrama

$$(1.8) \quad \mathbf{E}(\mathcal{B}) \longrightarrow \mathcal{B} \begin{array}{c} \xrightarrow{\tau \times \lambda} \\ \xrightarrow{0 \times 0} \end{array} \mathcal{V} \times_l \mathcal{H}.$$

PROPOSICIÓN 6.10. [M5, Teo. 9.1.6] Dado un fibrado vectorial doble  $(\mathcal{B}; \mathcal{V}, \mathcal{H}; \mathcal{P})$ , existen sucesiones exactas de fibrados vectoriales

$$(1.9) \quad 0 \longrightarrow t^*(\mathbf{E}(\mathcal{B})) \xrightarrow{\chi} \mathcal{B} \xrightarrow{\tau^*} t^*(\mathcal{H}) \longrightarrow 0$$

de fibrados vectoriales sobre  $\mathcal{V}$ , donde  $\chi(V, E) = \left\{ \begin{array}{c} 0_h(V) \\ E \end{array} \right\}$  y  $\tau^*$  denota la aplicación inducida por  $\tau$  en el diagrama pullback,

$$(1.10) \quad \begin{array}{ccccc} \mathcal{B} & & & & \\ & \searrow \tau & & & \\ & & t^*(\mathcal{H}) & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ & \searrow \tau^* & \downarrow & & \downarrow \\ & & \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ & \searrow \lambda & & & \\ & & & & \end{array}$$

Así mismo, tenemos una sucesión exacta

$$(1.11) \quad 0 \longrightarrow l^*(\mathbf{E}(\mathcal{B})) \xrightarrow{\nu} \mathcal{B} \xrightarrow{\lambda^*} l^*(\mathcal{V}) \longrightarrow 0$$

de fibrados vectoriales sobre  $\mathcal{H}$ , donde  $\nu(H, E) = \{0_v(H) E\}$  y  $\lambda^*$  denota la aplicación inducida por  $\lambda$ .

DEMOSTRACIÓN. Ver [M5, Teo. 9.1.6]. □

## 2. Dualidad en fibrados vectoriales dobles

Consideremos  $(\mathcal{B}; \mathcal{V}, \mathcal{H}; \mathcal{P})$  un fibrado vectorial doble

$$(2.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{\lambda} & \mathcal{V} \\ \tau \downarrow & & \downarrow t \\ \mathcal{H} & \xrightarrow{i} & \mathcal{P} \end{array}$$

Denotaremos por  $\kappa : \mathbf{E}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{P}$  la medula de  $\mathcal{B}$  y por  $\tau^v : \mathcal{B}^v \rightarrow \mathcal{H}$ ,  $\lambda^h : \mathcal{B}^h \rightarrow \mathcal{V}$  los duales de las estructuras de fibrado vectorial vertical y horizontal sobre  $\mathcal{B}$ , respectivamente.

DEFINICIÓN 6.11. La *proyección medular horizontal* asociada a  $\mathcal{B}$ , es la aplicación

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \kappa^h : \mathcal{B}^h &\rightarrow \mathbf{E}^*, & \Phi &\mapsto \kappa^h(\Phi) : \mathbf{E}_{t(g)} \rightarrow \mathbb{R} \\ E &\mapsto \langle \kappa^h(\Phi), E \rangle = \langle \Phi, \begin{Bmatrix} 0_g \\ E \end{Bmatrix} \rangle; \end{aligned}$$

para todo  $\Phi \in \mathcal{B}^h$  tal que  $\lambda^h(\Phi) = g$ .

OBSERVACIÓN 6.12. Si  $\Phi \in \mathcal{B}^h$  tal que  $\lambda^h(\Phi) = g$ , entonces dado  $E \in \mathbf{E}_{t(g)}$  se cumple  $\lambda\left(\begin{Bmatrix} 0_g \\ E \end{Bmatrix}\right) = \lambda(0_g) + \lambda(E) = g + 0 = g$ ; por lo tanto  $\kappa^h(\Phi)$  esta bien definida.

Definiremos a continuación una estructura de fibrado vectorial sobre  $\kappa^h : \mathcal{B}^h \rightarrow \mathbf{E}^*$ .

LEMA 6.13. Si  $f, g \in \mathcal{V}$  y  $r \in \mathbb{R}$ , entonces  $\mathcal{B}_{f+g} = \begin{Bmatrix} \mathcal{B}_f \\ \mathcal{B}_g \end{Bmatrix}$  y  $\mathcal{B}_{rf} = r \mathcal{B}_f$ .

DEMOSTRACIÓN. Basta usar coordenadas locales para  $\mathcal{B}$ . □

PROPOSICIÓN 6.14. Sean  $\Phi, \Psi \in \mathcal{B}^h$  con  $\lambda(\Phi) = f$ ,  $\lambda(\Psi) = g$  y  $\kappa^h(\Phi) = \kappa^h(\Psi)$ , las siguientes aplicaciones de suma

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \Phi + \Psi &: \mathcal{B}_{f+g} \rightarrow \mathbb{R}, \\ \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} &\mapsto \langle \Phi + \Psi, \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} \rangle = \langle \Phi, A \rangle + \langle \Psi, B \rangle; \end{aligned}$$

*producto por escalar*

$$(2.4) \quad \begin{aligned} r \Phi &: \mathcal{B}_f \rightarrow \mathbb{R}, \\ rB &\mapsto \langle r \Phi, rB \rangle = r \langle \Phi, B \rangle; \end{aligned}$$

y sección cero

$$(2.5) \quad 0 : \mathbf{E}^* \rightarrow \mathcal{B}^h, \quad \alpha \mapsto 0(\alpha) : \mathcal{B}_p \rightarrow \mathbb{R},$$

$$(2.6) \quad B \mapsto \langle 0(\alpha), B \rangle = \langle \alpha, \{B 0_{\tau(B)}^v\} \rangle$$

para todo  $\alpha \in \mathbf{E}_p^*$ . Constituyen las aplicaciones estructurales de una estructura de fibrado vectorial sobre la proyección medular horizontal asociada a  $\mathcal{B}$ .

DEMOSTRACIÓN. Ver [KU, Teo. 11]. □

TEOREMA 6.15. *El diagrama conmutativo*

$$(2.7) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{B}^h & \xrightarrow{\kappa^h} & \mathbf{E}^* \\ \lambda^h \downarrow & & \downarrow \kappa^* \\ \mathcal{V} & \xrightarrow{t} & \mathcal{P} \end{array}$$

es un fibrado vectorial doble con medula  $l^* : \mathcal{H}^* \rightarrow \mathcal{P}$ .

DEMOSTRACIÓN. Ver [KU, Teo. 11]. □

Existen enunciados analogos para el dual vertical de  $\mathcal{B}$  los cuales sintetizaremos en el siguiente teorema.

TEOREMA 6.16. *El diagrama conmutativo*

$$(2.8) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{B}^v & \xrightarrow{\tau^v} & \mathcal{H} \\ \kappa^v \downarrow & & \downarrow l \\ \mathbf{E}^* & \xrightarrow{\kappa^*} & \mathcal{P} \end{array}$$

es un fibrado vectorial doble con medula  $t^* : \mathcal{V}^* \rightarrow \mathcal{P}$ .

DEMOSTRACIÓN. Ver [KU, Teo. 11]. □

DEFINICIÓN 6.17. Los fibrados vectoriales dobles (2.7) y (2.8) son llamadas *dual horizontal* y *dual vertical* de  $\mathcal{B}$ , respectivamente.

TEOREMA 6.18. *Sea  $(\mathcal{B}; \mathcal{V}, \mathcal{H}; \mathcal{P})$  un fibrado vectorial doble. Existe un apareamiento natural no degenerado,*

$$(2.9) \quad \begin{array}{ccccc} \langle \Phi, \Psi \rangle : & \mathcal{B}^h & \xrightarrow{\kappa^h \times \kappa^v} & \mathcal{B}^v & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \searrow \kappa^h & & \swarrow \kappa^v & & \\ & & \mathbf{E}^* & & & \end{array}$$

entre las proyecciones medular horizontal y vertical, tal que si  $(\Phi, \Psi) \in \mathcal{B}^h \times_{\kappa^h \times \kappa^v} \mathcal{B}^v$  y  $B \in \mathcal{B}$ , con  $\lambda(B) = \lambda^h(\Phi)$  y  $\tau(B) = \tau^v(\Psi)$  entonces

$$(2.10) \quad \langle \Phi, \Psi \rangle = \langle \Phi, B \rangle - \langle B, \Psi \rangle.$$

DEMOSTRACIÓN. Ver [M3, 3.1].  $\square$

COROLARIO 6.19. *Dado un fibrado vectorial doble  $(\mathcal{B}; \mathcal{V}, \mathcal{H}; \mathcal{P})$ , el apareamiento (2.9) induce un isomorfismo de fibrados vectoriales entre las proyecciones medulares horizontal y vertical asociadas a  $\mathcal{B}$ .*

DEMOSTRACIÓN. Inmediato a partir del teorema (6.18).  $\square$

NOTACIÓN. Dado un fibrado vectorial doble  $(\mathcal{B}; \mathcal{V}, \mathcal{H}; \mathcal{P})$ , denotaremos por  $Z_v : (\mathcal{B}^h)^* \rightarrow \mathcal{B}^v$  y  $Z_h : (\mathcal{B}^v)^* \rightarrow \mathcal{B}^h$  los isomorfismos de fibrados vectoriales inducidos en el corolario (6.19) por el apareamiento natural entre las proyecciones medulares asociadas a  $\mathcal{B}$ .

### 3. Ejemplos de fibrados vectoriales dobles

**3.1. Tangente de un fibrado vectorial.** Sea  $\pi : A \rightarrow M$  un fibrado vectorial con fibra estandar  $\mathbb{V}$  y  $T\pi : TA \rightarrow TM$  su diferencial. Denotemos por  $\pi_A : TA \rightarrow A$  y  $\pi_M : TM \rightarrow M$  los fibrados tangentes de  $A$  y  $M$ , respectivamente. El diagrama conmutativo

$$(3.1) \quad \begin{array}{ccc} TA & \xrightarrow{T\pi} & TM \\ \pi_E \downarrow & & \downarrow \pi_M \\ A & \xrightarrow{\pi} & M, \end{array}$$

posee una estructura de fibrado vectorial doble que describiremos a continuación. Para esto, extenderemos la estructura de fibrado vectorial sobre  $\pi : A \rightarrow M$  a  $T\pi : TA \rightarrow TM$ .

LEMA 6.20. *Sean  $\xi, \eta \in TA$  tal que  $T\pi(\xi) = T\pi(\eta)$ . Existen caminos  $\xi_t$  y  $\eta_t$  en  $A$  definidos en una vecindad de cero, tal que  $\pi(\xi_t) = \pi(\eta_t)$ ,  $\frac{d}{dt}|_0 \xi_t = \xi$  y  $\frac{d}{dt}|_0 \eta_t = \eta$ .*

DEMOSTRACIÓN. Sean  $m = \dim M$  y  $a = \pi_M(T\pi(\xi)) = \pi_M(T\pi(\eta))$ . Consideremos  $(U, \varphi)$  un sistema local de coordenadas de  $M$ , adaptado en  $\pi : A \rightarrow M$  tal que  $a \in U$ . Localmente el diagrama (3.1) se expresa como

$$(3.2) \quad \begin{array}{ccc} U \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{V} \times \mathbb{V} & \longrightarrow & U \times \mathbb{R}^m \\ \downarrow & & \downarrow \\ U \times \mathbb{V} & \longrightarrow & U \end{array}$$

Si en coordenadas locales  $\xi = (a, x, u_1, u_2)$  y  $\eta = (a, y, w_3, w_4)$ , entonces  $x = y$ . Sea  $\alpha(t)$  un camino en  $U$  tal que  $\alpha'(0) = (a, x)$ . Entonces, los caminos  $\xi_t = (\alpha(t), u_1 + tu_2)$  y  $\eta_t = (\alpha(t), y_1 + ty_2)$  cumplen las propiedades desadas.  $\square$

Sean  $r \in \mathbb{R}$  y  $\xi, \eta \in TA$  tal que  $T\pi(\xi) = T\pi(\eta)$ . Por el lema (6.20), existen caminos  $\xi_t$  y  $\eta_t$  en  $A$ , tal que  $\pi(\xi_t) = \pi(\eta_t)$ ,  $\frac{d}{dt}|_0 \xi_t = \xi$  y  $\frac{d}{dt}|_0 \eta_t = \eta$ . Definimos

$$\{\xi \eta\} = \frac{d}{dt}|_0 (\xi_t + \eta_t) \quad \text{y} \quad \xi r = \frac{d}{dt}|_0 r \xi_t.$$

Con estas operaciones  $(TA, T\pi, TM)$  es un fibrado vectorial con sección cero dada por  $T0 : TM \rightarrow TA$ , donde  $0 : M \rightarrow A$  es la sección cero de  $\pi : A \rightarrow M$ . Es fácil demostrar que (3.1) es un fibrado vectorial doble.

LEMA 6.21. *El fibrado vectorial  $\mathbf{E}(TA) \rightarrow M$  es isomorfo al fibrado vectorial  $A \rightarrow M$ .*

DEMOSTRACIÓN. A continuación solo daremos un bosquejo de la prueba. Sea  $X \in \mathbf{E}(TA)$ , entonces  $X \in TA$  es tal que  $\pi_E(X) = 0_m$  y  $T_{0_m}\pi(X) = 0_m$ , para algún  $m \in M$ . Ahora, dado que  $\pi$  es una submersión suryectiva,  $A_m$  es una subvariedad incrustada de  $A$  y  $T_{0_m}A_m = \text{Ker}T_{0_m}\pi$ . Como consecuencia,  $X \in T_{0_m}A_m$  y como  $A_m$  es un espacio vectorial,  $T_{0_m}A_m$  se identifica canónicamente con  $A_m$ , luego  $X \in A_m$ . Lo anterior nos permite identificar  $\mathbf{E}(TA) \rightarrow M$  con  $\pi : A \rightarrow M$ .  $\square$

A continuación estudiaremos algunas propiedades de las *secciones verticales y horizontales* de  $TA$ , las cuales serán de utilidad en la construcción de la prolongación tangente de un algebroide de Lie.

NOTACIÓN. Usaremos  $0^A : M \rightarrow A$ ,  $0^T : M \rightarrow TM$  y  $\tilde{0} : A \rightarrow TA$  para denotar las secciones cero de los fibrados vectoriales  $M \rightarrow A$ ,  $TM \rightarrow M$  y  $TA \rightarrow A$  respectivamente.

Por la proposición (6.10) y lema (6.21), existe una sucesión exacta de fibrados vectoriales sobre  $A$

$$(3.3) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \pi^*(A) & \xrightarrow{\nu} & TA & \xrightarrow{T\pi^*} & T\pi^*(TM) \longrightarrow 0 \\ & & \searrow & & \downarrow & \swarrow & \\ & & & & A & & \end{array}$$

y una sucesión exacta de fibrados vectoriales sobre  $TM$

$$(3.4) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \pi_M^*(A) & \xrightarrow{\chi} & TA & \xrightarrow{\pi_A^*} & \pi_M^*(A) \longrightarrow 0 \\ & & \searrow & & \downarrow & \swarrow & \\ & & & & TM & & \end{array}$$

LEMA 6.22. *Si dados  $X \in \Gamma(M, A)$  y  $\varphi \in \Gamma(M, A^*)$  definimos*

$$\check{X} : A \rightarrow TA, \quad Y \mapsto \check{X}(Y) = \chi(Y, X(\pi(Y))) = \{\tilde{0}_Y X(\pi(Y))\}.$$

y

$$l_\varphi : A \rightarrow \mathbb{R} \quad X \mapsto l_\varphi(X) = \langle \varphi(\pi(X)), X \rangle.$$

Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- I.  $\check{X}(f \circ \pi) = 0$ ;
- II.  $(fX)^\check{X} = (f \circ \pi)\check{X}$ ;
- III.  $[\check{X}, \check{Y}] = 0$ ;

Para todo  $f \in C^\infty(M)$  y  $X, Y \in \Gamma(M, A)$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $F \in C^\infty(A)$  y consideremos  $Y(t) = Y$  y  $X(t) = tX(\pi(Y))$  curvas en  $A$  tal que  $\pi(Y(t)) = \pi(X(t))$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Luego para todo  $Y \in A$ ,

$$\check{X}(Y)F = \{\tilde{0}_Y X(\pi(Y))\}F = \frac{d}{dt}|_0(Y(t) + X(t))F = \frac{d}{dt}|_0F(Y + tX(\pi(Y))).$$

Por lo tanto si  $f \in C^\infty(M)$ , entonces

$$\check{X}(f \circ \pi)(Y) = \check{X}(Y)(f \circ \pi) = \frac{d}{dt}|_0(f \circ \pi)(Y + tX(\pi(Y))) = \frac{d}{dt}|_0(f \circ \pi)(Y) = 0,$$

lo que implica  $\check{X}(f \circ \pi) = 0$ .

De otro lado,

$$(f\check{X})(Y) = \chi(Y, (fX)(\pi(Y))) = \chi(Y, f(\pi(Y)X(\pi(Y)))) = (f \circ \pi)(Y)\chi(Y, X(\pi(Y))),$$

de donde  $(f\check{X}) = (f \circ \pi)\check{X}$ .

Dados  $X, Y \in \Gamma(M, A)$ ,

$$\begin{aligned} [\check{X}, \check{Y}](F)(Z) &= [\check{X}, \check{Y}](Z)F \\ &= \check{X}(Z)(\check{Y}(F)) - \check{Y}(Z)(\check{X}(F)) \\ &= \frac{d}{dt}|_0\check{Y}(F)(Z + tX(\pi(Z))) - \frac{d}{dt}|_0\check{X}(F)(Z + tY(\pi(Z))) \\ &= \frac{d}{dt}|_0\frac{d}{ds}|_0F(Z + tX(\pi(Z)) + sY(\pi(Z))) - \frac{d}{dt}|_0\frac{d}{ds}|_0F(Z + tY(\pi(Z)) + sX(\pi(Z))) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como consecuencia  $[\check{X}, \check{Y}] = 0$ .

Ahora,

$$\begin{aligned} \check{X}(l_\varphi)(Y) &= \frac{d}{dt}|_0l_\varphi(Y + tX(\pi(Y))) \\ &= \frac{d}{dt}|_0\langle \varphi(\pi(Y + tX(\pi(Y)))) \rangle, Y + tX(\pi(Y)) \\ &= \frac{d}{dt}|_0\langle \varphi(\pi(Y)) \rangle, X(\pi(Y)) \\ &= (\langle \varphi, X \rangle \circ \pi)(Y), \end{aligned}$$

y por lo tanto  $\check{X}(l_\varphi) = \langle \varphi, X \rangle \circ \pi$ . □

LEMA 6.23. Si dado  $X \in \Gamma(M, A)$  definimos una sección sobre  $T\pi : TA \rightarrow TM$  por,

$$\hat{X} : TM \rightarrow TA, \quad x \mapsto v(x, X(\pi_P(x))) = \left\{ \begin{array}{l} T0(x) \\ X(\pi_M(x)) \end{array} \right\}.$$

Entonces

- I.  $\{\hat{X} \hat{Y}\} = \{X Y\}$ ;
- II.  $(fX)\hat{\ } = (f \circ \pi_M) \cdot \hat{X}$ ;

DEMOSTRACIÓN. Dados  $X, Y \in \Gamma(M, A)$ ,

$$\begin{aligned} \{\hat{X}\hat{Y}\}(x) &= \{\hat{X}(x)\hat{Y}(x)\} = \left\{ \begin{array}{c} T0(x) \\ X(\pi_M(x)) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} T0(x) \\ Y(\pi_M(x)) \end{array} \right\} \\ &= (T0)(x) + (X(\pi_M(x)) + Y(\pi_M(x))). \end{aligned}$$

Como consecuencia  $\{\hat{X}\hat{Y}\} = \{\hat{XY}\}$ .

Si  $f \in C^\infty(M)$  entonces

$$(f\hat{X})(x) = v(x, (fX)(\pi_M(x))) = f(\pi_M(x)) \cdot v(x, X(\pi_M(x))) = (f \circ \pi_M)(x) \cdot \hat{X}(x),$$

por lo tanto  $(f\hat{X}) = (f \circ \pi_M) \cdot \hat{X}$ .  $\square$

**3.2. Fibrado Tangente Doble.** Dada una variedad diferenciable  $M$ , como caso particular de la construcción de la sección anterior tenemos el fibrado tangente doble

$$(3.5) \quad \begin{array}{ccc} T(TM) & \xrightarrow{T\pi_M} & TM \\ \pi_{TM} \downarrow & & \downarrow \pi_M \\ TM & \xrightarrow{\pi_M} & M. \end{array}$$

Dado  $\xi \in T(TM)$  existe una curva  $X_t$  en  $TM$ , definida en un entorno del 0, tal que  $\frac{d}{dt}|_0 X_t = \xi$ . Como cada  $X_t$  pertenece a  $TM$ , entonces existe una curva  $c(s, t)$  en  $M$ , definida en un entorno de 0, tal que  $\frac{d}{ds}|_0 c(s, t) = X_t$ . Como consecuencia, tenemos una aplicación suave  $c : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  tal que  $(0, 0) \in U$ ,  $U$  es abierto y  $\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}|_{(0,0)} = \xi$ . Además  $\xi \in T_{X_0}TM$ ,  $X_t \in T_{c(0,t)}M$  y  $X_0 \in T_{c(0,0)}M$ .

Observemos que

$$T\pi_M(\xi) = T\pi_M\left(\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}|_{(0,0)} c(s, t)\right) = \frac{\partial}{\partial s}|_0 \pi_M\left(\frac{\partial}{\partial s}|_0 c(s, t)\right) = \frac{\partial}{\partial s}|_0 c(s, 0)$$

y

$$\pi_{TM}(\xi) = \left(\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}|_{(0,0)} c(s, t)\right) = \frac{\partial}{\partial t}|_0 c(0, t).$$

DEFINICIÓN 6.24. Sea  $M$  una variedad diferenciable. Definimos la *involución canónica* asociada a  $M$  como la aplicación

$$(3.6) \quad J : TTM \rightarrow TTM, \quad \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}|_{(0,0)} c(s, t) \mapsto \frac{\partial^2}{\partial t \partial s}|_{(0,0)} c(s, t).$$

OBSERVACIÓN 6.25. Si  $(x_1, \dots, x_m)$  es un sistema de coordenadas locales para  $M$ , entonces  $(x_1, \dots, x_m, dx_1, \dots, dx_m)$  es un sistema local de coordenadas para  $TM$  y si denotamos  $X_i = dx_i$ , entonces  $(x_1, \dots, x_m, dx_1, \dots, dx_m, X_1, \dots, X_m, dX_1, \dots, dX_m)$  es un sistema local de coordenadas para  $TTM$ . Usando estas coordenadas locales,

$$\begin{aligned} &J(x_1, \dots, x_m, dx_1, \dots, dx_m, X_1, \dots, X_m, dX_1, \dots, dX_m) \\ &= (x_1, \dots, x_m, X_1, \dots, X_m, dx_1, \dots, dx_m, dX_1, \dots, dX_m). \end{aligned}$$

En otras palabras, si  $c : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  es una aplicación suave y si en coordenadas locales  $c(s,t) = (c^1(s,t), \dots, c^m(s,t))$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \Big|_{(0,0)} c(s,t) &= (c^1(0,0), \dots, c^m(0,0), \frac{\partial}{\partial t} \Big|_0 c^1(0,t), \dots, \frac{\partial}{\partial t} \Big|_0 c^m(0,t), \\ &\quad \frac{\partial}{\partial s} \Big|_0 c^1(s,0), \dots, \frac{\partial}{\partial s} \Big|_0 c^m(s,0), \frac{\partial^2}{\partial t \partial t} \Big|_{(0,0)} c^1(s,t), \dots, \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \Big|_{(0,0)} c^m(s,t)), \end{aligned}$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} J(\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \Big|_{(0,0)} c(s,t)) &= (c^1(0,0), \dots, c^m(0,0), \frac{\partial}{\partial s} \Big|_0 c^1(s,0), \dots, \frac{\partial}{\partial s} \Big|_0 c^m(s,0) \\ &\quad \frac{\partial}{\partial t} \Big|_0 c^1(0,t), \dots, \frac{\partial}{\partial t} \Big|_0 c^m(0,t), \frac{\partial^2}{\partial t \partial t} \Big|_{(0,0)} c^1(s,t), \dots, \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \Big|_{(0,0)} c^m(s,t)). \end{aligned}$$

#### 4. Prolongación tangente de un algebroide de Lie

Sea  $\pi : A \rightarrow M$  un algebroide de Lie. En la subsección 3.1 dotamos a  $T\pi : TA \rightarrow TM$  de una estructura de fibrado vectorial, a continuación lo dotaremos de una estructura de algebroide de Lie.

LEMA 6.26. *Las secciones de  $T\pi : TA \rightarrow TM$  están generadas sobre  $C^\infty(TM)$  por los conjuntos  $\{\hat{Y} / Y \in \Gamma(M,A)\}$  y  $\{T(X) / X \in \Gamma(M,A)\}$ .*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el siguiente diagrama pullback

$$(4.1) \quad \begin{array}{ccc} TA & & A \\ & \searrow \pi_A & \downarrow \pi_A \\ & & A \\ & \swarrow \pi_A^* & \downarrow \pi_A \\ & & M \\ & \swarrow T\pi & \downarrow \pi_M \\ & & M \end{array}$$

Si  $\xi \in \Gamma(TM, TA)$  entonces  $\pi_A^*(\xi)$  es una sección de  $\pi^*(A) \rightarrow TM$ . Luego, dado que  $\Gamma(TM, \pi^*(A)) \cong C^\infty(TM) \otimes_{C^\infty(M)} \Gamma(M,A)$ , existen  $F_i \in C^\infty(TM)$  y  $X_i \in \Gamma(M,A)$  tal que  $\pi_A^*(\xi) = \sum_i F_i \otimes X_i$ , lo que implica que  $\pi_A \circ \xi = \sum_i F_i(X_i \circ \pi_P)$ .

Definamos  $\eta := \left\{ \begin{array}{c} \xi \\ (\sum F_i T(X_i))^h \end{array} \right\}$ , luego

$$\begin{aligned} \pi_A(\eta) &= \pi_A(\left\{ \xi \quad (\sum F_i T(X_i))^h \right\}) = \pi_A(\xi) - \pi_A(\sum F_i T(X_i)) \\ &= \pi \circ \xi - \sum_i F_i(\pi_A \circ T(X_i)) = \pi_A \circ \xi - \sum_i (X_i \circ \pi_P) = 0, \end{aligned}$$

esto es  $\eta$  es vertical. Ahora,  $\pi_A(\left\{ \begin{smallmatrix} \eta \\ T0 \end{smallmatrix} \right\}) = 0$  y  $T\pi(\left\{ \begin{smallmatrix} \eta \\ T0 \end{smallmatrix} \right\}) = T\pi(\eta) - T\pi(T0) = Id_{TM} - Id_{TM} = 0$ . Como consecuencia  $\left\{ \begin{smallmatrix} \eta \\ T0 \end{smallmatrix} \right\}$  es una sección con valores en la médula y por tanto existe  $Y \in \Gamma(M, A)$  tal que  $\eta = \left\{ \begin{smallmatrix} T0 \\ Y(\pi_M) \end{smallmatrix} \right\} = \hat{Y}$ , luego  $\xi = \{\hat{Y} \quad \sum_i F_i T(X_i)\}$ .  $\square$

**COROLARIO 6.27.** *Sea  $\pi : A \rightarrow M$  un algebroid de Lie con ancla  $\rho$ . Existe sobre  $T\pi : TA \rightarrow TM$  una estructura de algebroid de Lie tal que*

$$(4.2) \quad [TX, TY] = T([X, Y]), \quad [TX, \hat{Y}] = [X, Y]^\uparrow, \quad \text{y} \quad [\hat{X}, \hat{Y}] = 0;$$

para todo  $X, Y \in \Gamma(M, A)$  y cuya ancla esta dada por  $\rho_T := J \circ T(\rho)$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Para definir un corchete de Lie para  $T\pi : TA \rightarrow TM$ , Por el lema (6.26), basta usar las formulas 4.2 y extender usando la regla de Leibniz. Por lo tanto, basta demostrar que  $\rho_T$  es un morfismo de álgebras de Lie, lo cual es inmediato.  $\square$

**4.1. Prolongación tangente de un álgebra de Lie.** Como aplicación del corolario (6.27), tenemos la siguiente proposición.

**PROPOSICIÓN 6.28.** *Sea  $\mathfrak{h}$  un álgebra de Lie, la prolongación tangente de  $\mathfrak{h}$  coincide con el producto semidirecto de  $\mathfrak{h}$  consigo mismo, considerando uno de los factores como algebra de Lie abeliana.*

**DEMOSTRACIÓN.** La prueba de esta proposición consiste esencialmente en llevar a cabo las construcciones descritas para la defición de la prolongación tangente de un algebroid de Lie en el caso concreto en el que nuestro algebroid se reduce a un álgebra de Lie.

Es claro que  $T\mathfrak{h} = \mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$  y  $\mathbf{E}(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}) = \{0\} \times \mathfrak{h}$ . Ahora, dados  $r \in \mathbb{R}; (x, X), (y, Y) \in \mathfrak{h} \times \mathfrak{h}; \alpha(t) = x + tX$  y  $\beta(t) = y + tY$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  entonces , por defición,

$$\{(x, X) \quad (y, Y)\} = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (\alpha(t) + \beta(t)) = (x + y, X + Y) \text{ y } (x, X)r = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (r\alpha(t)) = (rx, rX).$$

Ahora, si  $X \in \mathfrak{h}$  entonces  $TX = (X, 0)$  y para todo  $x \in \mathfrak{h}$  se tiene  $\hat{X}(x) = T0(x) + X(\pi_{\mathfrak{h}}(x)) = (0, X)$ . Luego, por corolario (6.27),

$$\begin{aligned} [(X, 0), (Y, 0)] &= [TX, TY] = T[X, Y] = ([X, Y], 0), \\ [(X, 0), (0, Y)] &= [TX, \hat{Y}] = [X, Y]^\uparrow = (0, [X, Y]) \\ [(0, X), (0, Y)] &= [\hat{X}, \hat{Y}] = 0 \end{aligned}$$

Por último, dado que  $\rho_{\mathfrak{h}} = 0$ , entonces  $\rho_{T\mathfrak{h}} = 0$ .  $\square$

## 5. Algebroides de Lie dobles

Consideremos  $(\mathcal{B}; \mathcal{V}, \mathcal{H}; \mathcal{P})$  un fibrado vectorial doble

$$(5.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{\lambda} & \mathcal{V} \\ \tau \downarrow & & \downarrow t \\ \mathcal{H} & \xrightarrow{l} & \mathcal{P} \end{array}$$

TEOREMA 6.29. *La estructura de Poisson Lineal sobre  $\tau^v : \mathcal{B}^v \rightarrow \mathcal{H}$ , inducida por la estructura de algebroide de Lie sobre  $\tau : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{H}$ , es lineal respecto a la estructura de fibrado vectorial  $\kappa^v : \mathcal{B}^v \rightarrow \mathbf{E}^*$ .*

*Asi mismo, la estructura de Poisson lineal sobre  $\lambda^h : \mathcal{B}^h \rightarrow \mathcal{V}$ , inducida por la estructura de algebroide de Lie sobre  $\lambda : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{V}$ , es lineal respecto a la estructura de fibrado vectorial  $\kappa^h : \mathcal{B}^h \rightarrow \mathbf{E}^*$ .*

COROLARIO 6.30. *Existen estructuras de algebroide de Lie sobre los fibrados vectoriales  $\kappa^v : \mathcal{B}^v \rightarrow \mathbf{E}^*$  y  $\kappa^h : \mathcal{B}^h \rightarrow \mathbf{E}^*$ .*

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema 5.34, existen estructuras de algebroide de Lie sobre los fibrados vectoriales  $\kappa^{v*} : (\mathcal{B}^v)^* \rightarrow \mathbf{E}^*$  y  $\kappa^{h*} : (\mathcal{B}^h)^* \rightarrow \mathbf{E}^*$ , las cuales, a través de los isomorfismos  $Z_h$  y  $Z_v$  (ver 6.18) inducen estructuras de algebroide de Lie sobre los fibrados vectoriales  $\kappa^v : \mathcal{B}^v \rightarrow \mathbf{E}^*$  y  $\kappa^h : \mathcal{B}^h \rightarrow \mathbf{E}^*$ .  $\square$

DEFINICIÓN 6.31 (*Algebroide de Lie doble*). Un algebroide de Lie doble es un fibrado vectorial doble  $(\mathcal{B}; \mathcal{V}, \mathcal{H}; \mathcal{P})$ ,

$$(5.2) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{\lambda} & \mathcal{V} \\ \tau \downarrow & & \downarrow t \\ \mathcal{H} & \xrightarrow{l} & \mathcal{P}, \end{array}$$

tal que,

- I. Los fibrados vectoriales laterales en (5.2) poseen estructura de algebroides de Lie.
- II. Las aplicaciones estructurales de (5.2) son morfismos de algebroides de Lie.
- III. Si denotamos por  $\rho_h$  y  $\rho_v$  las anclas de las estructuras de algebroide horizontal y vertical en  $\mathcal{B}$ , respectivamente, entonces  $(\rho_v, \rho)$  es un morfismo de algebroides de Lie entre  $\lambda : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{V}$  y  $Tl : T\mathcal{H} \rightarrow T\mathcal{P}$ . Análogamente para  $(\rho_h, \rho)$ .
- IV. El par  $(\mathcal{B}^v, \mathcal{B}^h)$  de algebroides de Lie sobre  $\mathbf{E}^*$  es un bialgebroide de Lie.

OBSERVACIÓN 6.32. Observar que estamos usando la misma notación  $\rho$  para las anclas de los algebroides de Lie  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{H}$ .

## 6. Algebroides de Lie dobles contruidos a partir de álgebras de Lie

En esta sección construiremos un algebroid de Lie doble a partir de cualquier par de álgebras de Lie.

### 6.1. Algebroid de Lie doble trivial.

6.1.1. *Dos algebroides de Lie triviales.* Sean  $\mathfrak{h}$  y  $\mathfrak{v}$  álgebras de Lie de dimensión finita. Sea  $T\mathfrak{h} \oplus (\mathfrak{h} \times (\mathfrak{v} \ltimes \mathfrak{v})) \xrightarrow{t} \mathfrak{h}$  el algebroid de Lie trivial construido en el ejemplo (5.8), donde  $\mathfrak{v} \ltimes \mathfrak{v}$  denota el producto semidirecto del álgebra de Lie  $\mathfrak{v}$  consigo misma. Por teorema (5.34) tenemos asociada una estructura de Poisson lineal sobre el fibrado vectorial dual  $T^*\mathfrak{h} \oplus (\mathfrak{h} \times (\mathfrak{v} \ltimes \mathfrak{v})^*) \xrightarrow{t^v} \mathfrak{h}$  (la notación  $t^v$  será clara mas adelante).

La variedad diferenciable  $T^*\mathfrak{h} \oplus (\mathfrak{h} \times (\mathfrak{v} \ltimes \mathfrak{v})^*)$  es difeomorfa a la variedad  $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{v}^* \times \mathfrak{v}^*$ . Luego, un sistema global de coordenadas para la misma esta dado por  $\{(e_i^*, e_i, f_j, f_k) / i = 1, n \text{ y } j, k = 1, m\}$ . Donde  $\{e_i\}_{i=1}^n$  es una base de  $\mathfrak{h}$  con base dual  $\{e_i^*\}_{i=1}^n$  y  $\{f_j\}_{j=1}^m$  es una base de  $\mathfrak{v}$  con base dual  $\{f_j^*\}_{j=1}^m$ .

Usando el teorema 5.34, el corchete de poisson sobre  $T^*\mathfrak{h} \oplus (\mathfrak{h} \times (\mathfrak{v} \ltimes \mathfrak{v})^*)$  satisface

- I.  $\{e_i^*, e_j^*\} = 0$ ,
- II.  $\{\tilde{\alpha}, e_i^* \circ t^v\} = (\rho_v(\alpha)e_i^*) \circ t^v$ , para toda sección  $\alpha$ .

La misma observación aplica para el algebroid de Lie trivial  $T\mathfrak{v} \oplus (\mathfrak{v} \times (\mathfrak{h} \ltimes \mathfrak{h})) \rightarrow \mathfrak{v}$  con fibrado vectorial dual  $T^*\mathfrak{v} \oplus (\mathfrak{v} \times (\mathfrak{h} \ltimes \mathfrak{h})^*) \xrightarrow{t^h} \mathfrak{v}$ .

Es importante notar que los dos algebroides de Lie triviales considerados tienen el mismo espacio total subyacente, la variedad diferenciable  $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \times \mathfrak{v} \times \mathfrak{v} \simeq T\mathfrak{h} \times T\mathfrak{v}$ .

6.1.2. *El fibrado vectorial doble.* Usaremos los mismos datos y notación de la anterior subsección. Denotemos por  $\mathcal{A}(\mathfrak{h}, \mathfrak{v})$  la variedad diferenciable  $T\mathfrak{h} \times T\mathfrak{v}$  y consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$(6.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{A}(\mathfrak{h}, \mathfrak{v}) & \xrightarrow{l} & \mathfrak{v} \\ \downarrow t & & \downarrow \\ \mathfrak{h} & \longrightarrow & \{*\}. \end{array}$$

Es claro que (6.1) es un fibrado vectorial doble, tal que sus fibrados vectoriales laterales poseen estructura de algebroid de Lie. La *medula*  $\mathbb{E}(\mathcal{A}(\mathfrak{h}, \mathfrak{v}))$  of (6.1) es el espacio vectorial  $\mathfrak{h} \times \mathfrak{v}$ .

Asociado con (6.1) tenemos otro par de fibrados vectoriales

$$(6.2) \quad \begin{array}{ccc} T^*\mathfrak{h} \oplus (\mathfrak{h} \times (\mathfrak{v} \ltimes \mathfrak{v})^*) & \xrightarrow{\rho_h} & \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{v}^* \\ \downarrow t^v & & \downarrow \\ \mathfrak{h} & \longrightarrow & \{*\}, \end{array}$$

donde  $\rho_h(\alpha \oplus (h, \beta, \lambda)) := (\alpha, \lambda)$  y

$$(6.3) \quad \begin{array}{ccc} (\mathfrak{v} \times (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h})^*) \oplus T^*\mathfrak{v} & \xrightarrow{l^h} & \mathfrak{v} \\ \rho_v \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{v}^* & \longrightarrow & \{*\}, \end{array}$$

donde  $\rho_v((v, \beta, \lambda) \oplus \alpha) := (\lambda, \alpha)$ .

Asociado con (6.2) and (6.3) tenemos el siguiente apareamiento (esto es, un forma bilineal suave no degenerada fibra a fibra),

$$(6.4) \quad \begin{array}{ccc} \langle \cdot, \cdot \rangle : T^*\mathfrak{h} \oplus (\mathfrak{h} \times (\mathfrak{v} \times \mathfrak{v})^*) & \xrightarrow{\rho_h \times \rho_v} & (\mathfrak{v} \times (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h})^*) \oplus T^*\mathfrak{v} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \searrow \rho_h \quad \swarrow \rho_v & \\ & \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{v}^*, & \end{array}$$

tal que  $\langle \alpha \oplus (h, \beta, \lambda), (v, \delta, \gamma) \oplus \theta \rangle = \langle \delta, h \rangle - \langle \beta, v \rangle$ .

El apareamiento (6.4) induce isomorfismos de fibrados vectoriales

$$(6.5) \quad \begin{array}{ccc} T^*\mathfrak{h} \oplus (\mathfrak{h} \times (\mathfrak{v} \times \mathfrak{v})^*) & \xrightarrow{Z_h} & ((\mathfrak{v} \times (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h})^*) \oplus T^*\mathfrak{v})^* \\ & \searrow \rho_h \quad \swarrow \rho_v^* & \\ & \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{v}^*, & \end{array}$$

y

$$(6.6) \quad \begin{array}{ccc} (\mathfrak{v} \times (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h})^*) \oplus T^*\mathfrak{v} & \xrightarrow{Z_v} & (T^*\mathfrak{h} \oplus (\mathfrak{h} \times (\mathfrak{v} \times \mathfrak{v})^*))^* \\ & \searrow \rho_v \quad \swarrow \rho_h^* & \\ & \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{v}^*, & \end{array}$$

donde  $Z_h(h, \alpha, \beta, \lambda) := (h, \alpha, -\beta, \lambda)$  y  $Z_v(\delta, \gamma, v, \theta) := (\delta, \gamma, -v, \theta)$ . Aquí, hemos usado los isomorfismos obvios de fibrados vectoriales  $T^*\mathfrak{h} \oplus (\mathfrak{h} \times (\mathfrak{v} \times \mathfrak{v})^*) \simeq (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{v}^* \times \mathfrak{v}^*)$  y  $((\mathfrak{v} \times (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h})^*) \oplus T^*\mathfrak{v})^* \simeq (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{v}^* \times \mathfrak{v}^*)$ ; y también  $(\mathfrak{v} \times (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h})^*) \oplus T^*\mathfrak{v} \simeq (\mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{v} \times \mathfrak{v}^*)$  y  $(T^*\mathfrak{h} \oplus (\mathfrak{h} \times (\mathfrak{v} \times \mathfrak{v})^*))^* \simeq (\mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{v} \times \mathfrak{v}^*)$ .

**6.1.3. Estructura de Poisson lineal sobre  $T^*\mathfrak{h} \oplus (\mathfrak{h} \times (\mathfrak{v} \times \mathfrak{v})^*)$ .** Sea  $\{e_i\}_{i=1}^n$  una base de  $\mathfrak{h}$  con base dual  $\{e_i^*\}_{i=1}^n$  y sea  $\{f_j\}_{j=1}^m$  una base de  $\mathfrak{v}$  con base dual  $\{f_j^*\}_{j=1}^m$ . Un sistema global de coordenadas para la variedad suave  $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{v}^* \times \mathfrak{v}^*$  esta dado por  $\{(e_i^*, e_i, f_j, f_k) / i = 1, n \text{ and } j, k = 1, m\}$ .

PROPOSICIÓN 6.33. Existe una estructura de Poisson lineal  $\{\{\cdot, \cdot\}\}$  sobre el fibrado vectorial  $((\mathfrak{v} \times (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}))^* \oplus T^*\mathfrak{v})^* \rightarrow \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{v}^*$  tal que,

$$(6.7) \quad \begin{aligned} \{\{x_i, x_j\}\} &= 0 & \{\{y_i, y_j\}\} &= 0 & \{\{w_i, w_j\}\}(h, \delta, \beta, \lambda) &= -\langle \beta, [f_i, f_j] \rangle & \{\{z_i, z_j\}\} &= 0 \\ \{\{x_i, y_j\}\} &= y_j & \{\{y_i, w_j\}\} &= 0 & \{\{w_i, z_j\}\}(h, \delta, \beta, \lambda) &= \langle \beta, [f_i, f_j] \rangle \\ \{\{x_i, w_j\}\} &= 0 & \{\{y_i, z_j\}\} &= 0 \\ \{\{x_i, z_j\}\} &= 0, \end{aligned}$$

donde estamos usando la notación  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, w_1, \dots, w_m, z_1, \dots, z_m)$  para el sistema global de coordenadas  $(e_1^*, \dots, e_n^*, e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_m, f_1, \dots, f_m)$ .

DEMOSTRACIÓN. En lugar de demostrar directamente que las relaciones (6.7) definen un corchete de Poisson lineal, describiremos la forma en la cual obtenemos el corchete de Poisson, a partir de la estructura de algebroide de Lie definida en el fibrado vectorial original. Denotemos por  $\{\cdot, \cdot\}$  la estructura lineal de Poisson del fibrado vectorial  $T^*\mathfrak{h} \oplus (\mathfrak{h} \times (\mathfrak{v} \times \mathfrak{v}))^* \xrightarrow{t^v} \mathfrak{h}$ .

Es claro que  $\{\{x_i, x_j\}\} = \{e_i^* \circ Z_h, e_j^* \circ Z_h\} \circ Z_h^{-1}$ ; pero  $e_i^* \circ Z_h(h, \delta, h, \beta, \lambda) = e_i^*(h, -\beta, h, \delta, \lambda) = h_i$ . En consecuencia  $\{\{e_i^*, e_j^*\}\} = \{e_i^*, e_j^*\} \circ Z_h = 0 \circ Z_h^{-1} = 0$ .

Ahora,  $\{\{x_i, w_j\}\} = \{e_i^* \circ Z_h, f_j \circ Z_h\} \circ Z_h^{-1}$ . Pero  $f_j \circ Z_h(h, \delta, \beta, \lambda) = f_j(h, \delta, -\beta, \lambda) = -\beta_j$ . Definamos  $s_j : \mathfrak{h} \rightarrow T\mathfrak{h} \oplus (\mathfrak{h} \times (\mathfrak{v} \times \mathfrak{v}))$  tal que  $h \mapsto (h, 0, h, -f_j, 0)$ . En consecuencia, la aplicación inducida en el fibrado vectorial dual esta dada por  $\tilde{s}_j : T^*\mathfrak{h} \oplus (\mathfrak{g} \times (\mathfrak{v} \times \mathfrak{v})) \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $\tilde{s}_j(h, \delta, h, \beta, \lambda) = \langle (h, \delta, h, \beta, \lambda), (h, 0, h, -f_j, 0) \rangle = -\beta_j$ . Luego,

$$\{e_i^* \circ Z_h, f_j \circ Z_h\} = \{e_i^* \circ t^v, \tilde{s}_j\} = -\{\tilde{s}_j, e_i^* \circ t^v\} = -a_v(s_j)e_i^* \circ t^v = 0,$$

esto es  $\{\{x_i, w_j\}\} = 0$ . De la misma manera se prueba que  $\{\{x_i, z_j\}\} = 0$ .

De otro lado, definiendo  $r_j : \mathfrak{h} \rightarrow T\mathfrak{h} \oplus (\mathfrak{h} \times (\mathfrak{v} \times \mathfrak{v}))$  tal que  $r_j(h) = (h, e_j, h, 0, 0)$ , tenemos que

$$\tilde{r}_j(h, \delta, h, \beta, \lambda) = \langle (h, \delta, h, \beta, \lambda), (h, e_j, h, 0, 0) \rangle = \delta_j,$$

así  $\{\{x_i, y_j\}\} = \{e_i^* \circ Z_h, e_j \circ Z_h\} \circ Z_h^{-1} = y_j$ .

Calculemos ahora  $\{\{y_i, y_j\}\}$ . En efecto

$$\{\{y_i, y_j\}\} = \{e_i \circ Z_h, e_j \circ Z_h\} = \{\tilde{r}_i, \tilde{r}_j\} = \widetilde{[r_i, r_j]}.$$

Pero  $[r_i, r_j] = [(\cdot, e_i) \oplus (\cdot, 0, 0), (\cdot, e_j) \oplus (\cdot, 0, 0)] = [(\cdot, e_i), (\cdot, e_j)] \oplus (\cdot, 0, 0)$ . De otro lado,

$$(6.8) \quad \begin{aligned} [(\cdot, e_i), (\cdot, e_j)]f(h) &= (h, e_i)((\cdot, e_j)f) - (\cdot, e_j)((\cdot, e_i)f) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_0 (\cdot, e_i)f(h + te_j) - \frac{d}{dt}\Big|_0 (\cdot, e_j)f(h + te_i) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t \partial s}\Big|_{(0,0)} f(h + te_j + se_i) - \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\Big|_{(0,0)} f(h + te_i + se_j) \\ &= 0, \end{aligned}$$

de aqui  $\{\{y_i, y_j\}\} = 0$ .

Para calcular  $\{\{y_i, w_j\}\}$ , tenemos lo siguiente,  $\{\{y_i, w_j\}\} = \{e_i \circ Z_h, f_j \circ Z_h\} \circ Z_h^{-1}$ . Pero  $f_j \circ Z_h(h, \delta, \beta, \lambda) = f_j(h, \delta, -\beta, \lambda) = -\beta_j$ . Ahora, con  $s_j(h) = (h, 0, h, -f_j, 0)$  tenemos  $\{e_i \circ Z_h, f_j \circ Z_h\} = \{\tilde{s}_i, \tilde{s}_j\} = [s_i, s_j]$ . Pero

$$(6.9) \quad [s_i, s_j] = [(\cdot, e_i) \oplus (\cdot, 0, 0), (\cdot, 0) \oplus (\cdot, f_j, 0)] \\ = [(\cdot, e_i), (\cdot, 0)] \oplus L_{(\cdot, e_i)}(\cdot, f_j, 0)$$

$$(6.10) \quad = (\cdot, 0) \oplus (\cdot, L_{(0, e_i)} f_j, 0) = (\cdot, 0) \oplus (\cdot, 0, 0).$$

como consecuencia  $\{\{y_i, w_j\}\} = 0$ . De igual forma probamos que  $\{\{y_i, z_j\}\} = 0$ .

Dado que  $\{\{w_i, w_j\}\} = \{f_i \circ Z_h, f_j \circ Z_h\} \circ Z_h^{-1}$  entonces

$$(6.11) \quad [s_i, s_j] = [(\cdot, 0) \oplus (\cdot, -f_i, 0), (\cdot, 0) \oplus (\cdot, -f_j, 0)] \\ = [(\cdot, 0), (\cdot, 0)] \oplus [(\cdot, -f_i, 0), (\cdot, -f_j, 0)] \\ = (\cdot, 0) \oplus (\cdot, [f_i, f_j], 0).$$

pero

$$(6.12) \quad \{f_i \circ Z_h, f_j \circ Z_h\} \circ Z_h^{-1}(h, \delta, h, \beta, \lambda) = \{f_i \circ Z_h, f_j \circ Z_h\}(h, \delta, h, -\beta, \lambda) \\ = \widetilde{[s_i, s_j]}(h, \delta, h, \beta, \lambda) \\ = \langle (h, \delta, h, -\beta, \lambda), (h, 0, h, [f_i, f_j], 0) \rangle \\ = -\langle \beta, [f_i, f_j] \rangle;$$

como consecuencia  $\{\{w_i, w_j\}\}(h, \delta, h, \beta, \lambda) = -\langle \beta, [f_i, f_j] \rangle$ .

Para  $\{\{w_i, z_j\}\}$ . Usando  $t_j(h) = (h, 0, h, 0, f_j)$  se tiene  $\{f_i \circ Z_h, f_j \circ Z_h\} = \widetilde{[s_i, t_j]}$ , pero dado que

$$(6.13) \quad [s_i, t_j] = [(\cdot, 0) \oplus (\cdot, -f_j, 0), (\cdot, 0) \oplus (\cdot, 0, f_j)] \\ = (\cdot, 0) \oplus (\cdot, -[f_i, f_j], 0) = (\cdot, 0) \oplus (\cdot, [f_j, f_i], 0)$$

entonces

$$(6.14) \quad \{\{w_i, z_j\}\}(h, \delta, h, \beta, \lambda) = \{f_i \circ Z_h, f_j \circ Z_h\} \circ Z_h^{-1}(h, \delta, h, \beta, \lambda) \\ = \widetilde{[s_i, s_j]}(h, \delta, h, -\beta, \lambda) = \langle (h, \delta, h, -\beta, \lambda), (h, 0, h, [f_j, f_i], 0) \rangle \\ = \langle \beta, [f_i, f_j] \rangle,$$

en conclusión  $\{\{w_i, z_j\}\}(h, \delta, h, \beta, \lambda) = \langle \beta, [f_i, f_j] \rangle$ .

Para finalizar,

$$(6.15) \quad \{\{z_i, z_j\}\} = \{f_i \circ Z_h, f_j \circ Z_h\} \circ Z_h^{-1} = [(\cdot, 0) \oplus (\cdot, 0, df_i), (\cdot, 0) \oplus (\cdot, 0, f_j)]$$

$$(6.16) \quad = (\cdot, 0) \cdot [(\cdot, 0, f_i), (\cdot, 0, f_j)] = (\cdot, 0) \oplus (\cdot, 0),$$

esto es  $\{\{z_i, z_j\}\} = 0$ . □

COROLARIO 6.34. *El fibrado vectorial  $(\mathfrak{v} \times (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h})^*) \oplus T^*\mathfrak{v} \rightarrow \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{v}^*$  es un algebroid de Lie con la estructura inducida por el corchete  $\{\{\cdot, \cdot\}\}$  de la proposición (6.33).*

DEMOSTRACIÓN. Es una consecuencia directa del teorema 5.34. A continuación escribiremos la forma explícita del corchete y el ancla en las secciones. El fibrado vectorial  $(\mathfrak{v} \times (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h})^*) \oplus T^*\mathfrak{v} \rightarrow \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{v}^*$  puede identificarse con el fibrado vectorial  $(\mathfrak{h}^* \times \mathfrak{v}) \times (\mathfrak{h}^* \times \mathfrak{v}^*) \rightarrow \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{v}^*$ . Definamos las secciones  $S_i = (e_i^*, 0, \cdot, \cdot)$  y  $R_j(0, f_j, \cdot, \cdot)$ . Luego  $\tilde{S}_j = x_j$  y  $\tilde{R}_j = w_j$ ; por lo tanto

- I.  $\widetilde{[S_i, S_j]} = \{\{\tilde{S}_i, \tilde{S}_j\}\} = \{\{x_i, x_j\}\} = 0$ ;
- II.  $\widetilde{[R_i, R_j]}(h, \beta, \delta, \lambda) = \{\{\tilde{R}_i, \tilde{R}_j\}\}(h, \beta, \delta, \lambda) = \{\{w_i, w_j\}\}(h, \beta, \delta, \lambda) = -\langle \beta, [f_i, f_j] \rangle$ ;
- III.  $\widetilde{[S_i, R_j]} = \{\{\tilde{S}_i, \tilde{R}_j\}\} = \{\{x_i, w_j\}\} = 0$ ;

Como consecuencia, si  $[f_i, f_j] = \sum_k c_{ij}^k f_k$  entonces  $[S_i, S_j] = 0$ ;  $[S_i, R_j] = 0$  y  $[R_i, R_j] = -\sum_k c_{ij}^k R_k$ . Ahora, para calcular el ancla notemos que, para cada  $i$ , se tiene que  $\rho(S_i)f$  es tal que  $\{\{\tilde{S}_i, f \circ \rho_v^*\}\} = \rho(S_i)f \circ \rho_v^*$ , luego

$$\{\{\tilde{S}_i, f \circ \rho_v^*\}\} = \{\{x_i, f \circ \rho_v^*\}\} = \sum_{r,t} \frac{\partial x_i}{\partial x_r} \frac{\partial (f \circ \rho_v^*)}{\partial y_t} = \sum_t \{\{x_i, y_t\}\} \frac{\partial (f \circ \rho_v^*)}{\partial y_t} = \sum_t y_t \frac{\partial (f \circ \rho_v^*)}{\partial y_t};$$

como consecuencia  $\rho(S_i) = \sum_t y_t \frac{\partial}{\partial y_t}$ .

De otro lado,

$$\begin{aligned} \rho(R_j)(f) \circ \rho_v^* &= \{\{\tilde{R}_j, f \circ \rho_v^*\}\} = \{\{w_j, f \circ \rho_v^*\}\} = \sum_{r,t} \{\{w_r, w_t\}\} \frac{\partial w_j}{\partial w_r} \frac{\partial (f \circ \rho_v^*)}{\partial w_t} \\ &= \sum_t \{\{w_j, w_t\}\} \frac{\partial (f \circ \rho_v^*)}{\partial w_t} = -\sum_{j,t} c_{jt}^k w_k \frac{\partial (f \circ \rho_v^*)}{\partial w_t}. \end{aligned}$$

De aquí que  $\rho(R_j)f = -\sum_{j,t} c_{jt}^k w_k \frac{\partial f}{\partial w_t}$ , de donde podemos concluir que  $\rho(R_j) = -X_{w_j}$ , con  $X_{w_j}$  es el campo vectorial Hamiltoniano asociado a  $w_j$ .  $\square$

OBSERVACIÓN 6.35. Es claro que el anterior procedimiento también aplica a  $(T^*\mathfrak{h} \oplus (\mathfrak{h} \times (\mathfrak{v} \times \mathfrak{v})^*)) \rightarrow \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{v}^*$  con el fin de obtener sobre este fibrado vectorial una estructura de algebroid de Lie.

6.1.4. *El bialgebroid de Lie.* Usaremos la misma notación de (3.1.3). Sabemos que  $Z_h$  es un isomorfismo de fibrados vectoriales. Basado en este hecho obtenemos lo siguiente.

PROPOSICIÓN 6.36. *El par de algebroides de Lie  $(T^*\mathfrak{h} \oplus (\mathfrak{h} \times (\mathfrak{v} \times \mathfrak{v})^*)) \rightarrow \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{v}^*$  y  $(\mathfrak{v} \times (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h})^*) \oplus T^*\mathfrak{v} \rightarrow \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{v}^*$  forman un bialgebroid de Lie.*

DEMOSTRACIÓN. Es una consecuencia directa del corolario 6.50.  $\square$

DEFINICIÓN 6.37. El fibrado vectorial doble

$$(6.17) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{A}(\mathfrak{h}, \mathfrak{v}) & \xrightarrow{l} & \mathfrak{v} \\ t \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{h} & \longrightarrow & \{*\}, \end{array}$$

junto con la estructura inducida en esta sección, es llamada el *algebroides de Lie doble trivial* con bases  $\mathfrak{v}$  y  $\mathfrak{h}$ , cuya *medula* es la suma directa de álgebras de Lie  $\mathfrak{v} \oplus \mathfrak{h}$  y cuyo bialgebroides de Lie asociado está dado por el par  $(T^*\mathfrak{h} \oplus (\mathfrak{h} \times (\mathfrak{v} \times \mathfrak{v})^*) \rightarrow \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{v}^*$  and  $(\mathfrak{v} \times (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h})^*) \oplus T^*\mathfrak{v} \rightarrow \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{v}^*$ .

OBSERVACIÓN 6.38. El algebroides de Lie doble trivial de la definición 6.37 es el *análogo* al grupoide doble de marcos con bases  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{H}$ , los cuales son los grupos de Lie conexos, simplemente conexos y localmente simplemente conexos que integran las álgebras de Lie  $\mathfrak{v}$  y  $\mathfrak{h}$  respectivamente.

## 7. Algebroides de Lie doble asociado a un grupoide doble de Lie

DEFINICIÓN 6.39. [M1] Un  $\mathcal{LA}$ -grupoide consta de los siguientes datos.

- I. Cuatro variedades diferenciables  $\Omega$ ,  $A$ ,  $\mathcal{G}$  y  $\mathcal{P}$ ,
- II. Ocho aplicaciones suaves,

$$r, l : \Omega \rightarrow A ; r, l : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{P} ; \tau : \Omega \rightarrow \mathcal{G} ; t : A \rightarrow \mathcal{P} ; \rho_v : \Omega \rightarrow T\mathcal{G} \text{ y } \rho : A \rightarrow \mathcal{P}.$$

Estos datos sujetos a los siguientes axiomas

- I.  $\tau : \Omega \rightarrow \mathcal{G}$  es un algebroides de Lie con ancla  $\rho_v$ ;
- II.  $t : A \rightarrow \mathcal{P}$  es un algebroides de Lie con ancla  $\rho$ ;
- III.  $\Omega \begin{array}{c} \xrightarrow{r} \\ \xrightarrow{l} \end{array} A$  es un grupoide de Lie;
- IV.  $\mathcal{G} \begin{array}{c} \xrightarrow{r} \\ \xrightarrow{l} \end{array} \mathcal{P}$  es un grupoide de Lie;
- V. Las aplicaciones estructurales (Origen, final, producto e identidad) de los grupoides de Lie  $\Omega$  y  $\mathcal{G}$  son morfismos de algebroides de Lie;
- VI. La aplicación  $\Gamma : \Omega \rightarrow \mathcal{G} \times_{r \times t} A$  tal que  $B \mapsto (\tau(B), r(A))$  es una submersión.

OBSERVACIÓN 6.40. En la definición original en [M1] se pedía además que la aplicación  $\Gamma$  fuera sobreyectiva. Sin embargo para los propósitos de este trabajo, tal hipótesis no es necesaria.

OBSERVACIÓN 6.41. Un  $\mathcal{LA}$ -grupoide como el de la definición 6.39, se representará gráficamente como

$$(7.1) \quad \begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow[r]{l} & A \\ \downarrow \tau & \searrow \rho_v & \downarrow \rho \\ & T\mathcal{G} & \xrightarrow[Tl]{Tr} T\mathcal{P} \\ \downarrow \pi_{\mathcal{G}} & \swarrow & \downarrow \pi_{\mathcal{P}} \\ \mathcal{G} & \xrightarrow[l]{r} & \mathcal{P} \end{array}$$

La siguiente discusión esta basada en las referencias [M1] y [M6]. Para los detalles y las pruebas de las construcciones y los resultados enunciados, ver las referencias citadas.

Consideremos un grupoide doble de Lie

$$(7.2) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \rightrightarrows & \mathcal{V} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \mathcal{H} & \rightrightarrows & \mathcal{P} \end{array}$$

que no necesariamente satisface la condición de llenado. Esto es, la *aplicación esquina* es una submersión no necesariamente sobreyectiva. Aplicando el funtor de Lie (esto es, tomando el algebroid asociado) a la estructura vertical de grupoide  $\mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{H}$ , obtenemos un algebroid de Lie  $A_v\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{H}$ ; dado que el funtor de Lie preserva *pullbacks*, la estructura horizontal de grupoide  $\mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{V}$ , prolonga a una estructura de grupoide  $A_v\mathcal{B} \rightrightarrows A\mathcal{V}$ , obteniendo por tanto un  $\mathcal{LA}$ -grupoide

$$(7.3) \quad \begin{array}{ccc} A_v\mathcal{B} & \xrightarrow[lA]{Ar} & A\mathcal{V} \\ \downarrow \tau & \searrow \rho_v & \downarrow \rho \\ & T\mathcal{H} & \xrightarrow[Tl]{Tr} T\mathcal{P} \\ \downarrow \pi_{\mathcal{H}} & \swarrow & \downarrow \pi_{\mathcal{P}} \\ \mathcal{H} & \xrightarrow[l]{r} & \mathcal{P} \end{array}$$

Ahora, si denotamos por  $A^2(\mathcal{B}) \rightarrow A\mathcal{V}$  al algebroid de Lie de  $A_v\mathcal{B} \rightrightarrows A\mathcal{V}$ , tenemos una estructura de fibrado vectorial doble

$$(7.4) \quad \begin{array}{ccc} A^2(\mathcal{B}) & \longrightarrow & A\mathcal{V} \\ \downarrow & & \downarrow \\ A\mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{P} \end{array}$$

donde  $A^2(\mathcal{B}) \rightarrow A\mathcal{V}$  y  $A\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{P}$  poseen estructura de algebroid de Lie.

Invirtiendo del orden de aplicación del functor de Lie, definimos primero el  $\mathcal{LA}$ -grupoide

$$(7.5) \quad \begin{array}{ccc} A_h \mathcal{B} & \xrightarrow{\lambda} & A \mathcal{V} \\ \downarrow \text{Ab} & \searrow \rho_h & \swarrow \pi_{\mathcal{V}} \\ & T \mathcal{V} & \\ \downarrow \text{At} & & \downarrow \text{Ab} \\ A \mathcal{H} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{P} \\ \downarrow \rho & & \swarrow \pi_{\mathcal{P}} \\ & T \mathcal{P} & \end{array}$$

y luego tomando el algebroide de Lie  $A_2(\mathcal{B}) := A(A_h \mathcal{B})$  obtenemos otro fibrado vectorial doble

$$(7.6) \quad \begin{array}{ccc} A_2(\mathcal{B}) & \longrightarrow & A \mathcal{V} \\ \downarrow & & \downarrow \\ A \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{P} \end{array}$$

donde  $A_2(\mathcal{B}) \rightarrow A \mathcal{H}$  y  $A \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{P}$  poseen estructura de algebroide de Lie.

La involución canónica  $J : TT\mathcal{B} \rightarrow TT\mathcal{B}$ , se puede restringir a un isomorfismo de fibrados vectoriales dobles  $\tilde{J} : A^2(\mathcal{B}) \rightarrow A_2(\mathcal{B})$  y nos permite transportar la estructura de algebroide de Lie sobre  $A^2(\mathcal{B}) \rightarrow A \mathcal{V}$  al fibrado vectorial  $A_2(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{V}$ . Como consecuencia, el fibrado vectorial doble (7.6), es tal que sus cuatro fibrados vectoriales laterales son algebroides de Lie

**TEOREMA 6.42.** *Con la estructura definida  $(A_2(\mathcal{B}); A \mathcal{V}, A \mathcal{H}; \mathcal{P})$  es un algebroide doble de Lie.*

**DEMOSTRACIÓN.** Ver [M6, Teo. 6.2]. □

### 7.1. Algebroides de Lie dobles asociados a diagramas de álgebras de Lie.

**DEFINICIÓN 6.43.** Sean  $\mathfrak{h}$  y  $\mathfrak{v}$  álgebras de Lie. Un diagrama de álgebras de Lie sobre  $\mathfrak{v}$  y  $\mathfrak{h}$ , es un triple  $(\mathfrak{d}, i, j)$  donde  $\mathfrak{d}$  es un álgebra de Lie,  $i : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{d}$  y  $j : \mathfrak{v} \rightarrow \mathfrak{d}$  son morfismos de álgebras de Lie. Un diagrama de álgebras de Lie como el anterior lo denotaremos por

$$\mathfrak{h} \xrightarrow{i} \mathfrak{d} \xleftarrow{j} \mathfrak{v}$$

**DEFINICIÓN 6.44.** Sean  $\mathfrak{d}$ ,  $\mathfrak{h}$  y  $\mathfrak{v}$  álgebras de Lie. Una  $(\mathfrak{v}, \mathfrak{h})$ -factorización de  $\mathfrak{d}$ , es un diagrama  $(\mathfrak{d}, i, j)$  de álgebras de Lie sobre  $\mathfrak{v}$  y  $\mathfrak{h}$  tal que  $\mathfrak{d} = i(\mathfrak{h}) + j(\mathfrak{v})$  (no necesariamente suma directa).

**TEOREMA 6.45.** *Sean  $\mathfrak{h}$ ,  $\mathfrak{v}$  álgebras de Lie y sea  $(\mathfrak{d}, i, j)$  una  $(\mathfrak{v}, \mathfrak{h})$ -factorización de  $\mathfrak{d}$ . Sea  $\mathcal{H}$  el grupo de Lie conexo, simplemente conexo y localmente simplemente conexo que integra*

a  $\mathfrak{h}$ . Existe un LA-grupoide asociado

$$(7.7) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{AG}(\mathfrak{d}, j, i) & \begin{array}{c} \xrightarrow{l} \\ \xrightarrow{r} \end{array} & \mathfrak{v} \\ \tau \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H} & \longrightarrow & \{*\}, \end{array}$$

donde  $\mathcal{AG}(\mathfrak{d}, j, i)$  es la variedad diferenciable compuesta por todos los arreglos de la forma  $\begin{pmatrix} (x, X) \\ U & V \\ 0 \end{pmatrix}$ , donde  $U, V \in \mathfrak{v}$ ,  $x \in \mathcal{H}$  y  $X \in \mathfrak{h}$ , tal que  $j(U) = i(X) + Ad_{i(x)}j(V)$ .

La estructura de grupoide esta dada por:

■ *Aplicaciones origen y final*

$$r \begin{pmatrix} (x, X) \\ U & V \\ 0 \end{pmatrix} = V, \quad l \begin{pmatrix} (x, X) \\ U & V \\ 0 \end{pmatrix} = U$$

■ *Composición*

$$\begin{pmatrix} (x, X) \\ U & V \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (y, Y) \\ W & Z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (xy, X + (Ad_x)(Y)) \\ U & Z \\ 0 \end{pmatrix}$$

■ *Identidad*

$$Id(U) = \begin{pmatrix} (e, 0) \\ U & U \\ 0 \end{pmatrix}$$

■ *Inverso*

$$\begin{pmatrix} (x, X) \\ U & V \\ 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (x^{-1}, -Ad_{x^{-1}}X) \\ V & U \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La estructura de algebroide de Lie esta dada por

■ *Proyección del fibrado*

$$\tau \begin{pmatrix} (x, X) \\ U & V \\ 0 \end{pmatrix} = x,$$

■ *Suma del fibrado vectorial*

$$\begin{pmatrix} (x, X) \\ U & V \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (x, Y) \\ W & Z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x, X+Y) \\ U+W & V+Z \\ 0 \end{pmatrix}$$

- *Ancla*

$$\rho \begin{pmatrix} (x, X) & \\ U & V \\ & 0 \end{pmatrix} = (x, X)$$

- *Corchete de secciones.* Si  $X_i = \begin{pmatrix} (Id, \tau_{X_i}) & \\ \lambda_{X_i} & \rho_{X_i} \\ & 0 \end{pmatrix}$  con  $i = 1, 2$ ; entonces

(7.8)

$$[X_1, X_2] = \begin{pmatrix} [\widetilde{\tau}_{X_1}, \widetilde{\tau}_{X_2}] & \\ [\lambda_{X_1}, \lambda_{X_2}] + L_{\tau_{X_1}}(\lambda_{X_2}) - L_{\tau_{X_2}}(\lambda_{X_1}) & [\rho_{X_1}, \rho_{X_2}] + L_{\tau_{X_1}}(\rho_{X_2}) - L_{\tau_{X_2}}(\rho_{X_1}) \\ & 0 \end{pmatrix},$$

donde  $\widetilde{\tau}_{X_i}$  es el campo vectorial invariante a derecha asociado a  $\tau_{X_i}$ .

DEMOSTRACIÓN. Consideremos  $\mathcal{D}, \mathcal{H}$  y  $\mathcal{V}$  los grupos de Lie conexos, simplemente conexos y localmente simplemente conexos que integran a  $\mathfrak{d}, \mathfrak{h}$  y  $\mathfrak{v}$  respectivamente. Integrando los morfismos de álgebras de Lie  $i$  y  $j$ , obtenemos un diagrama de grupos de Lie asociado

$$\mathcal{H} \xrightarrow{i} \mathcal{D} \xleftarrow{j} \mathcal{V}.$$

Ahora, construyamos el grupoide doble de Lie delgado asociado

$$\begin{array}{ccc} \square(\mathcal{D}, j, i) & \begin{array}{c} \xrightarrow{l} \\ \xrightarrow{r} \end{array} & \mathcal{V} \\ \begin{array}{c} \Downarrow t \\ \Downarrow b \end{array} & & \Downarrow \\ \mathcal{H} & \xrightarrow{\quad} & \{*\}. \end{array}$$

Donde, recordamos que  $\square(\mathcal{D}, j, i)$  denota la variedad diferenciable que consta de las 4-uplas

$\begin{pmatrix} x & \\ f & g \\ & y \end{pmatrix}$  tal que  $i(x)j(g) = j(f)i(y)$ . El cual se puede expresar como  $(\mathcal{V} \times \mathcal{H})_{\Phi \times \Psi} (\mathcal{H} \times \mathcal{V})$ , donde

$$\Phi : \mathcal{V} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{D}, \text{ tal que } \Phi(v, h) = j(v)i(h) \quad y$$

$$\Psi : \mathcal{H} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{D}, \text{ tal que } \Psi(v, h) = i(h)j(v).$$

Como  $i$  y  $j$  son transversales en la identidad entonces por teorema 4.12, las aplicaciones  $\Phi$  y  $\Psi$  son submersiones suryectivas. Describamos el algebroide de Lie doble correspondiente a este grupoide doble de Lie. Con esta finalidad, construyamos el algebroide de Lie del grupoide de

Lie  $\square(\mathcal{D}, j, i) \xrightarrow[t]{b} \mathcal{H}$  (ver sección 4). Consideremos el diagrama pullback

$$(7.9) \quad \begin{array}{ccc} A_v(\square(\mathcal{D}, j, i)) & \longrightarrow & T^b \square(\mathcal{D}, j, i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H} & \longrightarrow & \square(\mathcal{D}, j, i) \end{array}$$

Ahora  $X \in A_v(\square(\mathcal{D}, j, i))$  si y solo si

- I.  $X \in T_{Id(x)}\square(\mathcal{D}, j, i)$  y
- II.  $(T_{Id(x)}b)(X) = 0$

para algún  $x \in \mathcal{H}$ . Notemos que

$$T_{Id(x)}\square(\mathcal{D}, j, i) = T_{Id(x)}((\mathcal{V} \times \mathcal{H})_{\Phi \times \Psi} (\mathcal{H} \times \mathcal{V})) = (\mathfrak{v} \times T_x \mathcal{H})_{T_{(e,x)}\Phi \times T_{(x,e)}\Psi} (T_x \mathcal{H} \times \mathfrak{v}).$$

Si  $X \in \mathfrak{v}$  e  $Y \in T_x \mathcal{H}$ , entonces

$$\begin{aligned} (T_{Id(x)}\Phi)(X, Y) &= T_{(e,x)}(m \circ (j \times i))(X, Y) \\ &= (T_{(e,x)}m)((T_e j)(X), (T_x i)(Y)) \\ &= (T_e R_{i(x)})((T_e j)(X)) + (T_{i(x)}L_e)((T_x i)(Y)) \\ &= (T_e R_{i(x)})(T_e j)(X) + (T_x i)(Y) \end{aligned}$$

De igual forma

$$\begin{aligned} (T_{(x,e)}\Psi)(Y, X) &= T_{(x,e)}(m \circ (i \times j))(Y, X) \\ &= (T_{(i(x),e)}m)(T_x i(Y), T_e j(X)) \\ &= (T_{i(x)}R_e)((T_x i)(Y)) + (T_e L_{i(x)})((T_e j)(X)) \\ &= (T_x i)(Y) + (T_e L_{i(x)})(T_e j)(X). \end{aligned}$$

Así,  $T_{Id(x)}\square(\mathcal{D}, j, i)$  es el conjunto de las 4-tuplas  $\begin{pmatrix} Y \\ U & V \\ Z \end{pmatrix}$  donde  $U, V \in \mathfrak{v}$  e  $Y, Z \in T_x \mathcal{H}$

tal que

$$(7.10) \quad (T_e R_{i(x)})(T_e j)(U) + (T_x i)(Z) = (T_x i)(Y) + (T_e L_{i(x)})(T_e j)(V).$$

De otro lado, la condicion 2 asegura que  $(T_{Id(x)}b)(X) = 0$ , de donde se sigue que  $Z = 0$ . Usando las identificaciones  $T\mathcal{H} \cong \mathcal{H} \times \mathfrak{h}$  y  $T\mathcal{D} \cong \mathcal{D} \times \mathfrak{d}$  junto con el lema 1.19, tenemos

que  $T_{Id(x)}\square(\mathcal{D}, j, i)$  se puede identificar con el conjunto de arreglos  $\begin{pmatrix} (x, X) \\ U & V \\ 0 \end{pmatrix}$  tal que

$U, V \in \mathfrak{v}$ ,  $y \in H$ ,  $Y \in \mathfrak{h}$  y se satisface

$$(7.11) \quad j(U) = i(X) + Ad_{i(x)}j(V).$$

Por tanto, si definimos los morfismos de fibrados vectoriales sobre  $\mathcal{H}$  dados por

$$(7.12) \quad \varphi : \mathcal{H} \times \mathfrak{v} \rightarrow TD, \quad (x, U) \mapsto (i(x), j(U)) \quad y$$

$$(7.13) \quad \psi : TH \times \mathfrak{v} \rightarrow TD, \quad (x, X, V) \mapsto (i(x), i(X) + Ad_{i(x)}j(V)),$$

se tiene que

$$(7.14) \quad \mathcal{AG}(\mathfrak{d}, j, i) = A_{\mathfrak{v}}\square(\mathcal{D}, j, i) = (\mathcal{H} \times \mathfrak{v})_{(p, \varphi) \times (q, \psi)} (TH \times \mathfrak{v})$$

el pullback de  $(p, \varphi)$  y  $(q, \psi)$  en la categoría de fibrados vectoriales sobre  $\mathcal{H}$ , donde  $p$  es la proyección en la primera coordenada y  $q$  es la proyección del fibrado tangente de  $\mathcal{H}$ .

Las formas de las aplicaciones origen y final del grupoide, la composición, la identidad y la inversión se derivan fácilmente a partir de las operaciones correspondientes en el grupoide doble de Lie delgado  $\square(\mathcal{D}, j, i)$ .

Las formas de la proyección del fibrado vectorial  $\mathcal{A}(\mathfrak{d}, j, i)$  y la suma del mismo, son consecuencia de (7.9).

Basta entonces calcular el corchete de secciones y el ancla de la estructura de algebroide de Lie. Notemos que si  $X$  es una seccion del fibrado  $\mathcal{A}(\mathfrak{d}, j, i) \rightarrow \mathcal{H}$  entonces  $X$  tiene la forma

$$X = \begin{pmatrix} (Id, \tau_X) & & \\ \lambda_X & & \rho_X \\ & 0 & \end{pmatrix},$$

donde  $\lambda_X, \rho_X : \mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{v}$  y  $\tau_X : \mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{h}$  son aplicaciones suaves. La formula expuesta para el ancla

en el enunciado del teorema es inmediata. Ahora, si consideremos  $X_i = \begin{pmatrix} (Id, \tau_{X_i}) & & \\ \lambda_{X_i} & & \rho_{X_i} \\ & 0 & \end{pmatrix}$

con  $i = 1, 2$ ; entonces dado que  $l$  y  $r$  son morfismos de algebroides de Lie, tenemos que  $l \circ [X_1, X_2] = [\lambda_{X_1}, \lambda_{X_2}] + L_{\tau_{X_1}}(\lambda_{X_2}) - L_{\tau_{X_2}}(\lambda_{X_1})$ , al igual que  $r \circ [X_1, X_2] = [\rho_{X_1}, \rho_{X_2}] + L_{\tau_{X_1}}(\rho_{X_2}) - L_{\tau_{X_2}}(\rho_{X_1})$ . De otro lado, dado que, a nivel de secciones,  $\rho$  es un morfismo de álgebras de Lie,

entonces si denotamos por  $\widetilde{\tau_{X_i}(h)}$  (el campo vectorial invariante a derecha definida por  $\tau_{X_i}(h)$ , para todo  $h \in \mathcal{H}$ , se tiene que  $\rho \circ [X_1, X_2] = [\widetilde{\tau_{X_1}}, \widetilde{\tau_{X_2}}]$ . Como consecuencia,

$$(7.15) \quad [X_1, X_2] = \begin{pmatrix} [\widetilde{\tau_{X_1}}, \widetilde{\tau_{X_2}}] & & \\ [\lambda_{X_1}, \lambda_{X_2}] + L_{\tau_{X_1}}(\lambda_{X_2}) - L_{\tau_{X_2}}(\lambda_{X_1}) & & [\rho_{X_1}, \rho_{X_2}] + L_{\tau_{X_1}}(\rho_{X_2}) - L_{\tau_{X_2}}(\rho_{X_1}) \\ & 0 & \end{pmatrix},$$

Para calcular el corchete del algebroide de Lie  $\mathcal{A}(\mathfrak{d}, j, i) \rightarrow \mathfrak{v}$  notemos que el grupoide de Lie  $\mathcal{AG}(\mathfrak{d}, j, i)$

□

**OBSERVACIÓN 6.46.** En la prueba del teorema 6.45 usamos la misma notación para un morfismo de álgebras de Lie y su respectiva integración en la categoría de grupos de Lie.

OBSERVACIÓN 6.47. El grupoide doble de Lie construido en la prueba del teorema 6.45, es un grupoide doble de Lie que no satisface la condición de llenado. Sin embargo esta condición no interviene a la hora de construir el algebroide doble de Lie asociado al grupoide doble de Lie.

Construiremos ahora un algebroide doble de Lie asociado a diagrama de álgebras de Lie, derivando la estructura construida en el teorema 6.45.

TEOREMA 6.48. Sean  $\mathfrak{h}$ ,  $\mathfrak{v}$  álgebras de Lie y sea  $(\mathfrak{d}, i, j)$  una  $(\mathfrak{v}, \mathfrak{h})$ -factorización de  $\mathfrak{d}$ . Existe un algebroide doble de Lie asociado

$$(7.16) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{A}(\mathfrak{d}, j, i) & \xrightarrow{\lambda} & \mathfrak{v} \\ \tau \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{h} & \longrightarrow & \{*\}, \end{array}$$

donde los elementos de  $\mathcal{A}(\mathfrak{d}, j, i)$  son de la forma  $(X, V, U, X, Y, U)$ , con  $X, Y \in \mathfrak{h}$ ;  $U, V \in \mathfrak{v}$  y se satisface la ecuación

$$j(V) = i(Y) + [i(X), j(U)].$$

Las proyecciones  $\tau$  y  $\lambda$  están definidas por  $\lambda(X, V, U, X, Y, U) = U$  y  $\tau(X, V, U, X, Y, U) = X$  y donde los algebroides de Lie laterales  $\mathcal{A}(\mathfrak{d}, j, i) \rightarrow \mathfrak{v}$  y  $\mathcal{A}(\mathfrak{d}, j, i) \rightarrow \mathfrak{h}$  son subalgebroides de Lie de los algebroides de Lie triviales  $T\mathfrak{v} \oplus (\mathfrak{v} \times (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h})) \rightarrow \mathfrak{v}$  y  $T\mathfrak{h} \oplus (\mathfrak{h} \times (\mathfrak{v} \times \mathfrak{v})) \rightarrow \mathfrak{h}$ .

DEMOSTRACIÓN. Podríamos probar directamente el teorema, demostrando que se satisfacen todos los axiomas que definen un algebroide doble de Lie. Sin embargo, tomaremos de nuevo un camino indirecto y derivaremos la estructura construida en el teorema 6.45. La estructura resultante es la descrita en el enunciado del teorema a demostrar.

Primero construyamos el algebroide de Lie asociado con el grupoide  $\mathcal{AG}(\mathfrak{d}, j, i) \rightrightarrows \mathfrak{v}$ . En el siguiente diagrama pullback

$$\begin{array}{ccc} A(\mathcal{AG}(\mathfrak{d}, j, i)) & \longrightarrow & T^r(\mathcal{AG}(\mathfrak{d}, j, i)) \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{v} & \longrightarrow & \mathcal{AG}(\mathfrak{d}, j, i), \end{array}$$

tenemos que  $X \in A(\mathcal{AG}(\mathfrak{d}, j, i))$  si y solo si

- $X \in T_{Id(U)}\mathcal{AG}(\mathfrak{d}, j, i)$  para algún  $U \in \mathfrak{v}$ ,
- $T_{Id(U)}r(X) = 0$ .

Es claro que  $Id(U) = (e, U, e, 0, U)$ , para todo  $U \in \mathfrak{v}$ . Ahora,

$$\begin{aligned}
(7.17) \quad T_{Id(U)} \mathcal{AG}(\mathfrak{d}, j, i) &= T_{(e, U, e, 0, U)}(\mathcal{H} \times \mathfrak{v})_{(p, \varphi) \times (q, \psi)}(TH \times \mathfrak{v}) \\
&= T_{(e, U)}(\mathcal{H} \times \mathfrak{v})_{T_{(e, U)}(p, \varphi) \times T_{(e, 0, U)}(q, \psi)} T_{(e, 0, U)}(\mathcal{H} \times \mathfrak{h} \times \mathfrak{v}) \\
&= (T_e \mathcal{H} \times T_U \mathfrak{v})_{T_{(e, U)}(p, \varphi) \times T_{(e, 0, U)}(q, \psi)}(T_e \mathcal{H} \times T_0 \mathfrak{h} \times T_U \mathfrak{v}) \\
&= (\mathfrak{h} \times T_U \mathfrak{v})_{T_{(e, U)}(p, \varphi) \times T_{(e, 0, U)}(q, \psi)}(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \times T_U \mathfrak{v}).
\end{aligned}$$

Recordemos que  $\varphi : \mathcal{H} \times \mathfrak{v} \rightarrow \mathcal{D} \times \mathfrak{d}$  esta definida por  $\varphi(x, U) = (i(x), j(U))$ , de aquí que  $T_{(e, U)}\varphi : \mathfrak{h} \times T_U \mathfrak{v} \rightarrow \mathfrak{d} \times T_{j(U)}\mathfrak{d}$  esta dada por la fórmula  $T_{(e, U)}\varphi(X, V) = (i(X), j(V))$ . En efecto, si definimos  $\gamma(t) = (\exp tX, U + tV)$  para todo  $(X, V) \in \mathfrak{h} \times T_U \mathfrak{v}$ , entonces  $\gamma$  es un camino en  $\mathcal{H} \times \mathfrak{v}$  tal que  $\gamma(0) = (e, U)$  y  $\frac{d}{dt}|_0 \gamma(t) = (X, V)$ , luego

$$(7.18) \quad T_{(e, U)}\varphi(X, V) = T_{(e, U)}\varphi\left(\frac{d}{dt}\Big|_0 \gamma(t)\right) = \frac{d}{dt}\Big|_0 \varphi(\gamma(t)) = \frac{d}{dt}\Big|_0 (i(\exp tX), j(U + tV)) = (i(X), j(V)).$$

Recordemos ahora que  $\psi : \mathcal{H} \times \mathfrak{h} \times \mathfrak{v} \rightarrow \mathcal{D} \times \mathfrak{d}$  esta definida por  $\psi(x, X, V) = (i(x), i(X) + Ad_{i(x)}j(V))$ . Sea  $(X, Y, V) \in T_{(e, 0, U)}(\mathcal{H} \times \mathfrak{h} \times \mathfrak{v})$  y definamos  $f(t) = (\exp tX, tY, U + tV)$  en una vecindad de  $0 \in \mathbb{R}$ . Luego  $f$  es un camino en  $\mathcal{H} \times \mathfrak{h} \times \mathfrak{v}$  tal que  $f(0) = (e, 0, U)$  y  $\frac{d}{dt}\Big|_0 f(t) = (X, Y, V)$ . Ahora,

$$\begin{aligned}
(7.19) \quad T_{(e, 0, U)}\psi(X, Y, V) &= T_{(e, 0, U)}\psi\left(\frac{d}{dt}\Big|_0 f(t)\right) = \frac{d}{dt}\Big|_0 \psi(f(t)) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_0 \psi(\exp tX, tY, U + tV) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_0 (i(\exp tX), i(tY) + Ad_{i(\exp tX)}j(U + tV)) \\
&= (i(X), i(Y) + \frac{d}{dt}\Big|_0 Ad_{i(\exp tX)}j(U + tV)) \\
&= (i(X), i(Y) + [i(X), j(U)] + j(V)),
\end{aligned}$$

En consecuencia, de las igualdades (7.17), (7.18) y (7.19), tenemos que si  $(X, V, X, Z, W) \in T_{Id(U)}\mathcal{AG}(\mathfrak{d}, j, i)$  entonces  $X, Z \in \mathfrak{h}$ ,  $V, W \in \mathfrak{v}$  y se satisface

$$j(V) = i(Z) + [i(X), j(U)] + j(W).$$

Si además suponemos que  $T_{Id(U)}r(X, V, Y, Z, W) = 0$  entonces  $W = 0$ .

Considerando los fibrados vectoriales  $\pi : \mathfrak{h} \times \mathfrak{v} \times \mathfrak{v} \rightarrow \mathfrak{v}$ ,  $\rho : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \times \mathfrak{v} \rightarrow \mathfrak{v}$  y  $\theta : \mathfrak{d} \times \mathfrak{d} \times \mathfrak{d} \rightarrow \mathfrak{d}$  con  $\pi, \rho$  y  $\theta$  la proyección en la tercera coordenada y definiendo los siguientes morfismos de fibrados vectoriales  $(\omega, j)$  y  $(\sigma, j)$  con

$$\omega : \mathfrak{h} \times \mathfrak{v} \times \mathfrak{v} \rightarrow \mathfrak{d} \times \mathfrak{d} \times \mathfrak{d}, \quad (X, V, U) \mapsto (i(X), j(V), j(U))$$

y

$$\sigma : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \times \mathfrak{v} \rightarrow \mathfrak{d} \times \mathfrak{d} \times \mathfrak{d}, \quad (Y, Z, W) \mapsto (i(Y), i(Z) + [i(Y), j(W)], j(W));$$

se sigue fácilmente que  $\mathcal{A}(\mathfrak{d}, j, i)$  es el subfibrado vectorial sobre  $\mathfrak{v}$  de la suma de Whitney  $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{v} \times \mathfrak{v}) \oplus (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \times \mathfrak{v}) \rightarrow \mathfrak{v}$ , dado por

$$\mathcal{A}(\mathfrak{d}, j, i) = A(\mathcal{AG}(\mathfrak{d}, j, i)) = (\mathfrak{h} \times \mathfrak{v} \times \mathfrak{v})_{(\zeta, \omega, \pi)} \times_{(\xi, \sigma, \rho)} (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \times \mathfrak{v}),$$

donde  $\xi$  y  $\zeta$  es la proyección sobre  $\mathfrak{h}$  en la primera coordenada. Por tanto, hemos construido un fibrado vectorial doble

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(\mathfrak{d}, j, i) & \xrightarrow{\lambda} & \mathfrak{v} \\ \tau \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{h} & \longrightarrow & \{*\} \end{array}$$

donde los elementos  $(X, V, U, X, Y, U) \in \mathcal{A}(\mathfrak{d}, j, i)$  son tal que  $X, Y \in \mathfrak{h}$ ;  $U, V \in \mathfrak{v}$  y se satisface la ecuación

$$j(V) = i(Y) + [i(X), j(U)].$$

Las proyecciones estan definidas por  $\lambda(X, V, U, X, Y, U) = U$  y  $\tau(X, V, U, X, Y, U) = X$ .

Observemos ahora que el grupoide de Lie  $\mathcal{AG}(\mathfrak{d}, j, i) \rightrightarrows \mathfrak{v}$  es un subgrupoide de Lie del grupoide de Lie trivial  $\mathfrak{v} \times (\mathcal{H} \times \mathfrak{h}) \times \mathfrak{v} \rightrightarrows \mathfrak{v}$ . Luego, el algebroid de Lie  $\mathcal{A}(\mathfrak{d}, j, i) \rightarrow \mathfrak{v}$  es un subalgebroid del algebroid de Lie trivial  $T\mathfrak{v} \oplus (\mathfrak{v} \times (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h})) \rightarrow \mathfrak{v}$  (ver 6.1.1).

Dado que la construcción del grupoide doble  $\square(\mathcal{D}, j, i)$  es *simétrica* podemos concluir que el álgebroid de Lie  $\mathcal{A}(\mathfrak{d}, j, i)$  es un subalgebroid del algebroid de Lie trivial  $T\mathfrak{h} \oplus (\mathfrak{h} \times (\mathfrak{v} \times \mathfrak{v})) \rightarrow \mathfrak{h}$ . □

**OBSERVACIÓN 6.49.** Una forma memotécnica de ver los objetos del algebroid doble construido en el teorema 6.48, es la siguiente. Dado un elemento  $(X, V, U, X, Y, U) \in \mathcal{A}(\mathfrak{d}, j, i)$ , podemos representarlo como un arreglo

$$(7.20) \quad \begin{pmatrix} & (X, Y) & \\ (V, U) & & U \\ & X & \end{pmatrix}$$

donde la parte superior corespone al ancla vertical, la parte derecha al ancla horizontal, la parte izquierda es la proyección horizontal y la parte inferior la proyección vertical.

**COROLARIO 6.50.** Sean  $\mathfrak{h}$  y  $\mathfrak{v}$  álgebras de Lie. Existe un algebroid doble de Lie,

$$(7.21) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{A}(\mathfrak{v}, \mathfrak{h}) & \xrightarrow{\lambda} & \mathfrak{v} \\ \tau \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{h} & \longrightarrow & \{*\} \end{array}$$

tal que  $\mathcal{A}(\mathfrak{v}, \mathfrak{h}) \rightarrow \mathfrak{v}$  es isomorfo al algebroid de Lie trivial  $T\mathfrak{v} \oplus (\mathfrak{v} \times (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h})) \rightarrow \mathfrak{v}$  y el algebroid de Lie  $\mathcal{A}(\mathfrak{v}, \mathfrak{h}) \rightarrow \mathfrak{h}$  es isomorfo al algebroid de Lie trivial  $T\mathfrak{h} \oplus (\mathfrak{h} \times (\mathfrak{v} \times \mathfrak{v}))$ .

DEMOSTRACIÓN. En el teorema 6.48 tomaremos  $\mathfrak{d} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{v}$  y los morfismos  $j$  e  $i$  las inclusiones canónicas de  $\mathfrak{v}$  y  $\mathfrak{h}$  en  $\mathfrak{d}$ .  $\square$



## Biálgebras infinitesimales de multiplicadores

### 1. Álgebras de Multiplicadores

Sea  $k$  un cuerpo y  $A$  una  $k$ -álgebra asociativa. En esta sección introducimos los preliminares sobre álgebras de multiplicadores necesarios para el resto de nuestro trabajo. Los resultados aquí consignados aparecen en [VD1, Ap.]

DEFINICIÓN 7.1. Un multiplicador a izquierda de  $A$  es una aplicación  $k$ -lineal  $L : A \rightarrow A$  tal que  $L(xy) = L(x)y$ , para todo  $x, y \in A$ . Un multiplicador a derecha de  $A$  es una aplicación  $k$ -lineal  $R : A \rightarrow A$  tal que  $R(xy) = xR(y)$  para todo  $x, y \in A$ . Un multiplicador de  $A$  es un par  $(L, R)$ , donde  $L$  y  $R$  son multiplicadores a izquierda y a derecha respectivamente, tales que  $xL(y) = R(x)y$ , para todo  $x, y \in A$ .

Denotaremos por  $\mathbb{L}(A)$ ,  $\mathbb{R}(A)$  los conjuntos de multiplicadores a izquierda y a derecha de  $A$ , respectivamente. También denotaremos por  $\mathbb{M}(A)$  el conjunto de multiplicadores de  $A$ .

DEFINICIÓN 7.2. Decimos que  $A$  es no degenerada a izquierda si satisface la siguiente propiedad,

dado  $a \in A$  tal que para todo  $b \in A$  se cumple  $ab = 0$ , entonces  $a = 0$ .

Decimos que  $A$  es no degenerada a derecha si satisface que,

dado  $a \in A$  tal que para todo  $b \in A$  se cumple  $ba = 0$ , entonces  $a = 0$ .

Decimos que  $A$  es no degenerada, si es no degenerada a izquierda y a derecha.

OBSERVACIÓN 7.3. Dada un álgebra  $A$ , los  $k$ -espacios vectoriales  $L(A)$  y  $R(A)$ , admiten una estructura de álgebra bajo composición. El  $k$ -espacio vectorial  $M(A)$  admite una estructura de  $k$ -álgebra con el producto definido como

$$(L_1, R_1)(L_2, R_2) = (L_1L_2, R_2R_1).$$

LEMA 7.4. Sea  $A$  una  $k$ -álgebra. Denotemos por  $\lambda_a : A \rightarrow A$  y  $\rho_a : A \rightarrow A$  las aplicaciones de multiplicar a izquierda y a derecha por  $a$ , respectivamente. Si  $A$  es no degenerada, entonces las aplicaciones  $L : A \rightarrow L(A)$ ,  $a \mapsto \lambda_a$ ;  $R : A \rightarrow R(A)$ ,  $a \mapsto \rho_a$  y  $M : A \rightarrow M(A)$ ,  $a \mapsto (\lambda_a, \rho_a)$  son morfismos de álgebras inyectivos.

DEMOSTRACIÓN. Inmediato a partir de la definición 7.2. □

OBSERVACIÓN 7.5. Si  $A$  tiene identidad es claro que  $A$  es no degenerada y además  $L(A) = R(A) = M(A)$ .

EJEMPLO 7.6. Sea  $G$  un grupo infinito discreto y sea  $A = k(G)$  el álgebra de funciones con soporte finito del grupo  $G$  con valores en  $k$ . Claramente  $A$  es una  $k$ -álgebra asociativa no unital. No es difícil ver que  $L(A) = R(A) = M(A)$  y más aún,  $M(A) = k^G$  es toda el álgebra de funciones del grupo  $G$  con valores en  $k$  [VD1].

LEMA 7.7. Sean  $A$  y  $B$  son  $k$ -álgebras no degeneradas, entonces su producto tensorial  $A \otimes_k B$  es una  $k$ -álgebra no degenerada.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos  $x = \sum_i a_i \otimes b_i \in A \otimes B$  y supongamos que el conjunto de los  $a_i$  es linealmente independiente. Supongamos que  $(c \otimes d)x = 0$  para todo  $c \in A$  y  $d \in B$ ; luego, para todo  $\varphi \in B^*$  tenemos  $c \sum_i a_i \varphi(db_i) = 0$  y como el producto de  $A$  es no degenerado entonces  $\sum_i a_i \varphi(db_i) = 0$ . De aquí que  $\varphi(db_i) = 0$  para todo  $i$ , lo cual implica que  $db_i = 0$  para todo  $i$  y como el producto de  $A$  es no degenerado, entonces  $b_i = 0$  para todo  $i$ . Luego,  $A \otimes B$  es no degenerada a derecha.

De la misma manera demostramos que  $A \otimes B$  es no degenerado a izquierda.  $\square$

OBSERVACIÓN 7.8. Dado un multiplicador  $x = (L, R) \in \mathbb{M}(A)$  y un elemento  $a \in A$ , escribiremos  $xa$  para  $L(a)$  y  $ax$  para  $R(a)$ .

DEFINICIÓN 7.9. Sean  $A$  y  $B$  álgebras. Decimos que un morfismo de álgebras  $\varphi : A \rightarrow \mathbb{M}(B)$  es no degenerado si y solo si  $B = \varphi(A)B = B\varphi(A)$ .

PROPOSICIÓN 7.10. Si  $\varphi : A \rightarrow \mathbb{M}(A)$  es un morfismo no degenerado, entonces  $\varphi$  posee una única extensión a un morfismo de álgebras  $\mathbb{M}(A) \rightarrow \mathbb{M}(B)$ .

DEMOSTRACIÓN. Definamos

$$\Phi : \mathbb{M}(A) \rightarrow \mathbb{M}(B), \quad x \mapsto \Phi(x);$$

tal que  $\Phi(x)(\varphi(a)b) = \varphi(xa)b$  y  $(a\varphi(b))\Phi(x) = a\varphi(bx)$ . Para probar que  $\Phi$  está bien definida, supongamos que  $\sum_i \varphi(a_i)b_i = 0$ , luego para todo  $x \in \mathbb{M}(A)$ ,  $d \in A$  y  $e \in B$  tenemos

$$e\varphi(d) \sum_i \varphi(xa_i)b_i = e \sum_i \varphi(dxa_i)b_i = e\varphi(dx) \sum_i \varphi(a_i)b_i = 0,$$

y como  $\varphi$  y  $A$  son no degenerados, entonces  $\sum_i \varphi(xa_i)b_i = 0$ . En conclusión,  $\Phi$  está bien definida. El resto de la prueba es directa.  $\square$

## 2. Biálgebras infinitesimales de multiplicadores

DEFINICIÓN 7.11. Una biálgebra infinitesimal (o  $\varepsilon$ -biálgebra) es un triple  $(A, m, \Delta)$  donde  $(A, m)$  es un álgebra asociativa (no necesariamente unital),  $(A, \Delta)$  es una coálgebra coasociativa (no necesariamente counital) y para todo  $a, b \in A$ ,

$$\Delta(ab) = (a \otimes 1)\Delta(b) + \Delta(a)(1 \otimes b).$$

Esta última igualdad nos indica que  $\Delta$  es una derivación de  $(A, m)$  con valores en el  $A$ -bimodulo  $A \otimes A$ .

DEFINICIÓN 7.12. Una aplicación lineal  $\Delta : A \rightarrow \mathbb{M}(A \otimes A)$  es un *coproducto* si

- (a)  $T_3(a \otimes b) = \Delta(b)(a \otimes 1)$  y  $T_4(a \otimes b) = (1 \otimes b)\Delta(a)$  son elementos de  $A \otimes A$  para todo  $a, b \in A$ ,
- (b) la aplicación  $\Delta$  es coasociativa en el siguiente sentido

$$(2.1) \quad (\mathbf{1} \otimes T_4) \circ (T_3 \otimes \mathbf{1}) = (T_3 \otimes \mathbf{1}) \circ (\mathbf{1} \otimes T_4).$$

OBSERVACIÓN 7.13. Usando la notación de Sweedler, introducida por Van Daele para álgebras de multiplicadores, la identidad (2.1) puede reescribirse como

$$(2.2) \quad b_1 a \otimes b_{21} \otimes c b_{22} = b_{11} a \otimes b_{12} \otimes c b_2.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} (\mathbf{1} \otimes T_4) \circ (T_3 \otimes \mathbf{1})(a \otimes b \otimes c) &= (\mathbf{1} \otimes T_4)(\Delta(b)(a \otimes 1) \otimes c) \\ &= (\mathbf{1} \otimes T_4)(b_1 a \otimes b_2 \otimes c) \\ &= b_1 a \otimes (1 \otimes c)\Delta(b_2) \\ &= b_1 a \otimes b_{21} \otimes c b_{22}. \\ (T_3 \otimes \mathbf{1}) \circ (\mathbf{1} \otimes T_4)(a \otimes b \otimes c) &= (T_3 \otimes \mathbf{1})(a \otimes (1 \otimes c)\Delta(b)) \\ &= (T_3 \otimes \mathbf{1})(a \otimes b_1 \otimes c b_2) \\ &= \Delta(b_1)(a \otimes 1) \otimes c b_2 \\ &= b_{11} a \otimes b_{12} \otimes c b_2. \end{aligned}$$

El valor comun en (2.2) será denotado por  $b_1 a \otimes b_2 \otimes c b_3$ .

DEFINICIÓN 7.14. Una *bialgebra infinitesimal de multiplicadores* (abreviada  $\varepsilon$ -bialgebra de multiplicadores) es un triple  $(A, m, \Delta)$  donde

- I.  $(A, m)$  es una álgebra asociativa con producto no degenerado,
- II.  $\Delta : A \rightarrow \mathbb{M}(A \otimes A)$  es un coproducto sobre  $A$ , y
- III.  $\Delta(ab) = \Delta(a)(1 \otimes b) + (a \otimes 1)\Delta(b)$ .

## 2.1. Ejemplos de $\varepsilon$ -Bialgebras de multiplicadores.

EJEMPLO 7.15. **Conjuntos parcialmente ordenados.**

Sea  $L$  un conjunto parcialmente ordenado (abreviado “poset”). Sea  $\mathcal{P}$  el conjunto de todos los subposets de  $L$  con supremo e ínfimo. Si  $P \in \mathcal{P}$  denotaremos por  $1_P$  y  $0_P$  el supremo y el ínfimo de  $P$  respectivamente.

Denotemos por  $A_{\mathcal{P}}$  el  $k$ -espacio vectorial con base  $\mathcal{P}$  dotado con el siguiente producto:

$$P * Q = \begin{cases} P \cup Q & \text{si } 1_P = 0_Q \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

para todo  $P, Q \in \mathcal{P}$  y extendemos este producto linealmente a todo  $A_{\mathcal{P}}$ .

OBSERVACIÓN 7.16.  $A_{\mathcal{P}}$  es un álgebra no unital, pero posee unidades locales. En efecto, si  $P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathcal{P}$  escribamos  $S = \{x : x = 0_{P_i}\}$  y  $T = \{x : x = 1_{P_i}\}$ . Es claro que  $\sum_{u \in S} \{u\}$  y  $\sum_{v \in T} \{v\}$  son unidades locales a izquierda y a derecha, respectivamente, para cualquier combinación lineal de  $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ . Como consecuencia  $A_{\mathcal{P}}$  es idempotente, su producto es no degenerado y las aplicaciones canónicas de  $A_{\mathcal{P}}$  (o  $A_{\mathcal{P}} \otimes A_{\mathcal{P}}$ ) en sus multiplicadores es inyectiva. También es cierto que  $(A_{\mathcal{P}})^2 = A_{\mathcal{P}}$ .

*Notación:* Si  $P \in \mathcal{P}$  denotaremos por  $P_0 = P - \{1_P\}$ . Para todo  $P \in \mathcal{P}$  y  $x \in P_0$  escribiremos  $(-\infty, x]_P := \{y \in P : y \leq x\}$  y  $[x, +\infty)_P := \{y \in P : x \leq y\}$ . Si  $x \notin P_0$  y  $x \neq 1_P$  entonces  $(-\infty, x]_P := 0$  and  $[x, +\infty)_P := 0$ .

Sea  $\Delta : A_{\mathcal{P}} \rightarrow M(A_{\mathcal{P}} \otimes A_{\mathcal{P}})$  la aplicación definida por

$$\Delta_{\lambda}(P)(Q \otimes R) = \sum_{x \in P_0} (-\infty, x] * Q \otimes [x, +\infty) * R$$

y

$$\Delta_{\rho}(P)(Q \otimes R) = \sum_{x \in P_0} Q * (-\infty, x] \otimes R * [x, +\infty).$$

Es claro que  $\Delta_{\lambda}(P)$  y  $\Delta_{\rho}(P)$  son multiplicadores a izquierda y a derecha, respectivamente, para  $A_{\mathcal{P}} \otimes A_{\mathcal{P}}$ . Es claro que  $(P \otimes Q)\Delta_{\lambda}(T)(R \otimes S) = \Delta_{\rho}(T)(P \otimes Q)(R \otimes S)$ .

LEMA 7.17. Sean  $P, S \in \mathcal{P}$ . Entonces,

$$\Delta(P)(S \otimes 1) \in A_{\mathcal{P}} \otimes A_{\mathcal{P}} \quad \text{y} \quad (1 \otimes S)\Delta(P) \in A_{\mathcal{P}} \otimes A_{\mathcal{P}}.$$

DEMOSTRACIÓN. Probaremos primero que si  $P, S \in \mathcal{P}$  y  $0_S \in P_0$  entonces

$$(\Delta_{\lambda}(P) \circ (S \otimes 1), (S \otimes 1) \circ \Delta_{\rho}(P)) = (\lambda_U, \rho_U),$$

donde  $U = (-\infty, 0_S]_P * S \otimes [0_S, +\infty)_P$ . En efecto,

$$\begin{aligned} \Delta_{\lambda}(P) \circ (S \otimes 1)(X \otimes Y) &= \sum_{x \in P_0} (-\infty, x] * (S * X) \otimes [x, +\infty) * Y \\ &= (-\infty, 0_S] * S * X \otimes [0_S, +\infty) * Y, \quad (*) \\ (S \otimes 1) \circ \Delta_{\rho}(P)(X \otimes Y) &= \sum_{x \in P_0} (X * (-\infty, x]) * S \otimes Y * [x, +\infty) \\ &= X * (-\infty, 0_S] * S \otimes Y * [0_S, +\infty), \quad (**) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \lambda_U(X \otimes Y) &= (-\infty, 0_{S * X}] * S * X \otimes [0_{S * X}, +\infty) * Y, \\ \rho_U(X \otimes Y) &= X * (-\infty, 0_S] * S \otimes Y * [0_S, +\infty). \end{aligned}$$

Los multiplicadores a izquierda y a derecha determinados por  $U$  son identicos a  $(*)$  y  $(**)$ , respectivamente. Si  $0_S$  no pertenece a  $P_0$ , entonces es claro que  $\Delta(P)(S \otimes 1) = 0$ .

De la misma manera demostramos que  $(1 \otimes S)\Delta(P) \in A_{\mathcal{P}} \otimes A_{\mathcal{P}}$ .  $\square$

LEMA 7.18. Usando la notación anterior, el triple  $(A_P, *, \Delta)$  es una  $\varepsilon$ -bialgebra de multiplicadores.

DEMOSTRACIÓN. Facilmente se prueba que  $\Delta$  es coasociativa; luego por (7.17)  $\Delta$  es un coproducto para  $A_P$ . Demostremos entonces que  $\Delta$  es una derivación. Si  $P * Q = 0$ , entonces  $1_P \neq 0_Q$  y por tanto  $0 = \Delta(P)(1 \otimes Q) = (P \otimes 1)\Delta(Q)$ . Si  $P * Q \neq 0$  entonces  $(P * Q)_0 = P_0 \cup Q_0$ , luego

$$\begin{aligned}
\Delta(P * Q) &= \sum_{x \in (P * Q)_0} (-\infty, x]_{P * Q} \otimes [x, +\infty)_{P * Q} \\
&= \sum_{x \in P_0} (-\infty, x]_{P * Q} \otimes [x, +\infty)_{P * Q} + \sum_{x \in Q_0} (-\infty, x]_{P * Q} \otimes [x, \infty)_{P * Q} \\
&= \sum_{x \in P_0} (-\infty, x]_P \otimes [x, +\infty)_{P * Q} + \sum_{x \in Q_0} (-\infty, x]_{P * Q} \otimes [x, +\infty)_Q \\
&= \sum_{x \in P_0} (-\infty, x]_P \otimes [x, +\infty)_{P * Q} + \sum_{x \in Q_0} P * (-\infty, x]_Q \otimes [x, +\infty)_Q \\
&= \Delta(P)(1 \otimes Q) + (P \otimes 1)\Delta(Q).
\end{aligned}$$

□

**Ejemplo.** Un caso particular del ejemplo anterior es  $L = \mathbb{N}$  y  $k \leq t$  iff  $k|t$ .

EJEMPLO 7.19. **Carcajs.** Sea  $(Q, s, t)$  un carcaj infinito<sup>1</sup>, donde  $s$  y  $t$  denotan la aplicación origen y final.

Sean  $A(Q)$  y  $V(Q)$  el conjunto de flechas y vértices de  $Q$  respectivamente. Denotemos

$$\Gamma = \{\gamma : I \rightarrow A(Q) : \text{donde } I \subseteq \mathbb{Z} \text{ es un intervalo y } t(\gamma(i)) = s(\gamma(i+1))\}.$$

el conjunto de *caminos de Q* y sea  $I_\gamma = \gamma^{-1}(A(Q))$  el dominio de  $\gamma$ . Si  $I_\gamma = (-\infty, \cdot)$  o  $I_\gamma = (\cdot, +\infty)$ , escribimos  $s(\gamma) = -\infty$  o  $t(\gamma) = +\infty$ , respectivamente. La *longitud de un camino*  $\gamma$ , denotada por  $|\gamma|$ , se define como el cardinal del conjunto  $I_\gamma$ .

Sea  $\Gamma' = \{\gamma \in \Gamma : |\gamma^{-1}(e)| < \infty \text{ para todo } e \in V(Q)\} \cup \{-\infty, +\infty\}$ . Luego  $\Gamma'$  es el conjunto de caminos  $\gamma \in \Gamma$ , que pasan a través de cada vértice una cantidad finita de veces, en conjunción con dos elementos  $\{-\infty, +\infty\}$  que no pertenecen a  $A(Q)$ , para los cuales definimos  $s(\pm\infty) = t(\pm\infty) = \pm\infty$ .

DEFINICIÓN 7.20. El *álgebra de caminos generalizada de Q* es el espacio vectorial  $k_\infty Q$  con base  $\Gamma'$  dotado del producto dado por concatenación de caminos cuando sea posible y cero en otro caso.

<sup>1</sup>Por ejemplo la versión  $\mathbb{Z}$  de  $A_n$ , donde  $A_n$  es el diagrama de Dinkin usual pero orientado, con todas las flechas de izquierda a derecha.

Para todo  $\gamma \in \Gamma'$  definamos  $\Delta(\gamma) = (\Delta_\lambda(\gamma), \Delta_\rho(\gamma)) \in M(k_\infty Q \otimes k_\infty Q)$  dado por:

$$\Delta_\lambda(\gamma)(\gamma' \otimes \gamma'') = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (\cdots \gamma_{i-2} \gamma_{i-1}) * \gamma' \otimes (\gamma_{i+1} \gamma_{i+2} \cdots) * \gamma'' \cdot (*)$$

$$\Delta_\rho(\gamma)(\gamma' \otimes \gamma'') = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \gamma' * (\cdots \gamma_{i-2} \gamma_{i-1}) \otimes \gamma'' * (\gamma_{i+1} \gamma_{i+2} \cdots) \cdot (**)$$

Formalmente,  $\Delta(\gamma)$  es multiplicar a derecha o a izquierda, depende del multiplicador que queramos definir, por la serie

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \cdots \gamma_{i-2} \gamma_{i-1} \otimes \gamma_{i+1} \gamma_{i+2} \cdots,$$

Dado que, por las características de los carcajs que estamos considerando,  $\{i : e_{i-1} = s(\gamma')\}$  y  $\{i : t(\gamma'') = e_i\}$  son conjuntos finitos, entonces las sumas en (\*) y (\*\*) están bien definidas. Definamos  $\Delta(\pm\infty) = 0$  y extendamos  $\Delta$  linealmente a todo  $k_\infty Q$ . Con estas definiciones, es claro que  $\Delta(\gamma)$  define un multiplicador de  $k_\infty Q \otimes k_\infty Q$ .

LEMA 7.21. *Sea  $(Q, s, t)$  un carcaj infinito. Con la notación introducida,  $(k_\infty Q, *, \Delta)$  es una  $\varepsilon$ -bialgebra de multiplicadores.*

DEMOSTRACIÓN. Es fácil probar que  $\Delta(\gamma)(\gamma' \otimes 1) \in A \otimes A$ ,  $(1 \otimes \gamma)\Delta(\gamma') \in A \otimes A$  y que  $\Delta$  es coasociativa. Veamos por tanto que para todo  $\gamma, \gamma' \in \Gamma'$  se tiene que

$$\Delta(\gamma \cdot \gamma') = (\gamma \otimes 1)\Delta(\gamma') + \Delta(\gamma)(1 \otimes \gamma') \quad (***)$$

En efecto, si  $t(\gamma_n) \neq s(\gamma'_0)$  ambos lados de (\*\*\*) son idénticamente cero. Ahora,  $t(\gamma_n) = s(\gamma'_0)$ , entonces

$$\Delta(\gamma \cdot \gamma') = \sum_{i \leq n} (\cdots \gamma_{i-1} \otimes \gamma_{i+1} \cdots \gamma_n \gamma'_0 \gamma'_1 \cdots) + \sum_{1 \leq i} (\cdots \gamma_n \gamma'_0 \gamma'_1 \cdots \gamma'_{i-2} \gamma'_{i-1} \otimes \gamma'_{i+1} \gamma'_{i+2} \cdots).$$

De otro lado

$$\begin{aligned} (\gamma \otimes 1)\Delta(\gamma') &= (\gamma \otimes \gamma'_1 \cdots) + (\gamma \otimes 1) \sum_{1 \leq i} (\gamma'_0 \cdots \gamma'_{i-1} \otimes \gamma'_{i+1} \gamma'_{i+2} \cdots) \\ &= (\gamma \otimes \gamma'_1 \cdots) + \sum_{1 \leq i} (\cdots \gamma_{n-1} \gamma_n \gamma'_0 \cdots \gamma'_{i-1} \otimes \gamma'_{i+1} \gamma'_{i+2} \cdots), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \Delta(\gamma)(1 \otimes \gamma') &= \sum_{i \leq n} (\cdots \gamma_{i-1} \otimes \gamma_{i+1} \cdots \gamma_n)(1 \otimes \gamma') \\ &= \sum_{i \leq n} (\cdots \gamma_{i-1} \otimes \gamma_{i+1} \cdots \gamma_n \gamma'_1 \cdots), \end{aligned}$$

lo cual nos permite concluir que en este casos

$$\Delta(\gamma \cdot \gamma') = (\gamma \otimes 1)\Delta(\gamma') + \Delta(\gamma)(1 \otimes \gamma') \quad (***)$$

Para otros casos se usa un cálculo directo similar al anterior . □

### 3. Carcaj dobles y álgebras de Hopf infinitesimales

DEFINICIÓN 7.22. Un *carcaj doble* es un carcaj interno en la categoría de carcajs. Esto es, una colección  $(\mathcal{A}, O, s, e)$ , donde  $\mathcal{A}$  y  $O$  son carcaj y  $s, e : \mathcal{A} \rightarrow O$  son morfismos de carcaj.

La anterior definición puede darse en forma explícita de la siguiente manera. Un carcaj doble consta de los siguientes datos.

- Cuatro conjuntos  $\mathcal{B}, \mathcal{V}, \mathcal{H}$  y  $\mathcal{P}$ .
- Ocho aplicaciones

$$t, b : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{H}, l, r : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{V}, t, b : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{P} \text{ y } l, r : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{P}.$$

Estos datos satisfacen,

$$tl = lt, bl = lb, tr = rt \text{ y } br = rb.$$

Graficamente tenemos la siguiente configuración

$$(3.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \begin{array}{c} \xrightarrow{l} \\ \xrightarrow{r} \end{array} & \mathcal{V} \\ \begin{array}{c} \downarrow t \\ \downarrow b \end{array} & & \begin{array}{c} \downarrow t \\ \downarrow b \end{array} \\ \mathcal{H} & \begin{array}{c} \xrightarrow{l} \\ \xrightarrow{r} \end{array} & \mathcal{P} \end{array}$$

*Notación.* Por abuso de notación, un carcaj doble como en (3.1) lo denotaremos por  $(\mathcal{B}, \mathcal{V}, \mathcal{H}, \mathcal{P})$ , omitiendo las aplicaciones  $t, b$ .

DEFINICIÓN 7.23. Dado un carcaj doble  $(\mathcal{B}, \mathcal{V}, \mathcal{H}, \mathcal{P})$ , todo elemento  $A \in \mathcal{B}$  lo llamaremos *caja orientada* y usaremos la siguiente notación gráfica para el mismo

$$\begin{array}{ccc} & t(A) & \\ & \cdot \xrightarrow{\quad} \cdot & \\ l(A) \downarrow & A & \downarrow r(A) \\ & \cdot \xrightarrow{\quad} \cdot & \\ & b(A) & \end{array}$$

OBSERVACIÓN 7.24. Es claro que la colección de todos los carcaj dobles, con morfismos entre carcaj dobles definidos de manera obvia, forman un categoría.

#### 3.1. Álgebra de un Carcaj doble.

DEFINICIÓN 7.25. Sea  $(\mathcal{B}, \mathcal{V}, \mathcal{H}, \mathcal{P})$  un carcaj doble. Llamaremos *tableros básicos* para  $\mathcal{B}$ , a las aplicaciones  $A : [m] \times [n] \rightarrow \mathcal{B}$ , con  $m, n \in \mathbb{N}$ . tal que  $rf(i, j) = lf(i, j + 1)$  y  $tf(i + 1, j) = bf(i, j)$ , para  $i : 1, \dots, m - 1$  y  $j = 1, \dots, n - 1$ . Donde, dado un numero natural  $n$  escribimos  $[n]$  para denotar el conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

A la colección de todos los tableros básicos para  $\mathcal{B}$  la denotaremos por  $\mathcal{T}\mathcal{B}$ .

OBSERVACIÓN 7.26. Cada una de los elementos de  $A \in \mathcal{T}\mathcal{B}$  se puede expresar graficamente mediante arreglos de *cajas dirigidas* de la forma,

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdot & \longrightarrow & \cdot & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \cdot \\
 \downarrow & A_{11} & \downarrow & A_{12} & \downarrow & \cdots & \downarrow & A_{1n} & \downarrow \\
 \cdot & \longrightarrow & \cdot & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \cdot \\
 \downarrow & A_{21} & \downarrow & A_{22} & \downarrow & \cdots & \downarrow & A_{2n} & \downarrow \\
 \cdot & \longrightarrow & \cdot & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \cdot \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \cdot & \longrightarrow & \cdot & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \cdot \\
 \downarrow & A_{m1} & \downarrow & A_{m2} & \downarrow & \cdots & \downarrow & A_{mn} & \downarrow \\
 \cdot & \longrightarrow & \cdot & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \cdot
 \end{array}$$

Donde  $A_{ij} \in \mathcal{B}$  y las cajas adyacentes satisfacen las compatibilidades obvias.

NOTACIÓN. Sea  $k$  un cuerpo y sea  $(\mathcal{B}, \mathcal{V}, \mathcal{H}, \mathcal{P})$  un carcaj doble. Denotemos por  $k\mathcal{V}$  y  $k\mathcal{H}$  las álgebras de carcaj de  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{H}$ . Denotamos por  $\hat{l}$  y  $\hat{r}$  a las extensiones de  $l$  y  $r$  definidas como sigue,

$$\hat{l} : k\mathcal{T}\mathcal{B} \rightarrow k\mathcal{V}, \quad A \mapsto l(A_{11})l(A_{21}) \cdots l(A_{m1}).$$

$$\hat{r} : k\mathcal{T}\mathcal{B} \rightarrow k\mathcal{H}, \quad A \mapsto r(A_{1n})r(A_{2n}) \cdots r(A_{mn}),$$

para todo  $A \in \mathcal{T}\mathcal{B}$  y donde  $k\mathcal{T}\mathcal{B}$  denota el espacio vectorial con base  $\mathcal{T}\mathcal{B}$ .

DEFINICIÓN 7.27. Sea  $(\mathcal{B}, \mathcal{V}, \mathcal{H}, \mathcal{P})$  un carcaj doble. El *álgebra de carcaj doble* de  $\mathcal{B}$ , es el álgebra que tiene como espacio vectorial subyacente  $k\mathcal{T}\mathcal{B}$  y cuyo producto  $*$  esta definido de la siguiente forma. Si  $A : [m] \times [n] \rightarrow \mathcal{B}$  y  $B : [p] \times [q] \rightarrow \mathcal{B}$  son tableros  $\text{bi}_{\frac{1}{2}}$ sicos con  $\hat{r}(A) = \hat{l}(B)$ , definimos  $A * B = C$  donde  $C : [m] \times [n+q] \rightarrow \mathcal{B}$  es tal que  $C(i, j) = A(i, j)$  para  $j = 1, \dots, n$  y  $C(i, j) = B(i, j)$  para  $j = n+1, \dots, n+m$ . Definimos  $A * B = 0$  en otro caso. Esto es,  $*$  es *concatenación de tableros* ( cuando sea posible).

DEFINICIÓN 7.28. Sea  $(\mathcal{B}, \mathcal{V}, \mathcal{H}, \mathcal{P})$  un carcaj doble. La *función altura* asociada a  $\mathcal{B}$ , es la aplicación  $h : \mathcal{T}\mathcal{B} \rightarrow \mathbb{N}$  tal que para todo  $A : [m] \times [n] \rightarrow \mathcal{B}$ ,  $h(A) := m$ .

OBSERVACIÓN 7.29. Si para todo  $n \in \mathbb{N}$  definimos  $\mathcal{B}_n = \{A \in \mathcal{T}\mathcal{B} / h(A) = n\}$ , es claro que  $k\mathcal{B}_n$  es subálgebra de  $k\mathcal{T}\mathcal{B}$  y mas aún,  $k\mathcal{T}\mathcal{B} = \bigoplus_{n \geq 1} k\mathcal{B}_n$  como álgebra.

DEFINICIÓN 7.30. Sea  $(\mathcal{B}, \mathcal{V}, \mathcal{H}, \mathcal{P})$  un carcaj doble. Definamos  $\Delta : k\mathcal{T}\mathcal{B} \rightarrow k\mathcal{T}\mathcal{B} \otimes k\mathcal{T}\mathcal{B}$  de la siguiente forma,

- I. Para todo  $A \in \mathcal{B}$ ,  $\Delta(A) = 0$
- II. Para *bandas verticales*,

$$\Delta \left( \begin{array}{c} \cdot \rightarrow \cdot \\ \downarrow A_1 \downarrow \\ \cdot \rightarrow \cdot \\ \vdots \\ \downarrow A_n \downarrow \\ \cdot \rightarrow \cdot \end{array} \right) = A_1 \otimes \begin{array}{c} \cdot \rightarrow \cdot \\ \downarrow A_2 \downarrow \\ \cdot \rightarrow \cdot \\ \vdots \\ \downarrow A_n \downarrow \\ \cdot \rightarrow \cdot \end{array} + \begin{array}{c} \cdot \rightarrow \cdot \\ \downarrow A_1 \downarrow \\ \cdot \rightarrow \cdot \\ \vdots \\ \downarrow A_2 \downarrow \\ \cdot \rightarrow \cdot \end{array} \otimes \begin{array}{c} \cdot \rightarrow \cdot \\ \downarrow A_3 \downarrow \\ \cdot \rightarrow \cdot \\ \vdots \\ \downarrow A_n \downarrow \\ \cdot \rightarrow \cdot \end{array} + \cdots + \begin{array}{c} \cdot \rightarrow \cdot \\ \downarrow A_1 \downarrow \\ \cdot \rightarrow \cdot \\ \vdots \\ \downarrow A_{n-1} \downarrow \\ \cdot \rightarrow \cdot \end{array} \otimes A_n$$

III. Para  $A : [m] \times [n] \rightarrow \mathcal{B}$  con  $n > 1$ , definimos  $\Delta(A) = 0$ .

LEMA 7.31. Sea  $(\mathcal{B}, \mathcal{V}, \mathcal{H}, \mathcal{P})$  un carcaj doble. El triple  $(k\mathcal{T}\mathcal{B}, *, \Delta)$ , con  $\Delta$  definida en (7.30), constituye una biálgebra infinitesimal.

DEMOSTRACIÓN. Basta demostrar que  $\Delta$  definida en (7.30) es una derivación coasociativa, lo cual es inmediato a partir de la definición.  $\square$

### 3.2. Una bialgebra infinitesimal de multiplicadores asociada a un carcaj doble.

DEFINICIÓN 7.32. Sea  $(\mathcal{B}, \mathcal{V}, \mathcal{H}, \mathcal{P})$  un carcaj doble. Un tablero generalizado en  $\mathcal{B}$ , es una aplicación  $A : I \times J \rightarrow \mathcal{B}$ , donde  $I, J \subseteq \mathbb{Z}$  son intervalos de números enteros, que satisface  $rA(i, j) = lA(i, j+1)$  cuando  $i \in I, j, j+1 \in J$  y  $tA(i+1, j) = bA(i, j)$  cuando  $i, i+1 \in I$  y  $j \in J$ .

El conjunto formado por todos los tableros generalizados lo denotaremos por  $\mathcal{T}_\infty \mathcal{B}$ .

OBSERVACIÓN 7.33. La definición (7.32) es similar a la definición dada en (7.25), la única diferencia es que ahora estamos admitiendo tableros infinitos en *todas las direcciones*.

DEFINICIÓN 7.34. Sea  $k$  un cuerpo y sea  $(\mathcal{B}, \mathcal{V}, \mathcal{H}, \mathcal{P})$  un carcaj doble. Supongamos que el carcaj  $(\mathcal{V}, \mathcal{P}, t, b)$  no posee lazos. El álgebra de tableros generalizados sobre  $k$ , es el álgebra cuyo espacio vectorial subyacente es  $k\mathcal{T}_\infty \mathcal{B}$  y cuyo producto  $\star$  está definido como concatenación horizontal de tableros, cuando sea posible y cero en otro caso.

Formalmente, tenemos la siguiente descripción. Sean

$$\hat{l} : k\mathcal{T}_\infty \mathcal{B} \rightarrow k_\infty \mathcal{V}, \quad A : I \times \{j, j+1, \dots\} \rightarrow \mathcal{B} \mapsto \cdots l(A_{i-1, j})l(A_{i, j})l(A_{i+1, j}) \cdots \quad \text{y cero en otro caso.}$$

y

$$\hat{r} : k\mathcal{T}_\infty \mathcal{B} \rightarrow k_\infty \mathcal{V}, \quad A : I \times \{\dots, j-1, j\} \rightarrow \mathcal{B} \mapsto \cdots r(A_{i-1, j})r(A_{i, j})r(A_{i, j+1}) \cdots \quad \text{y cero en otro caso.}$$

Donde  $k_\infty \mathcal{V}$  denota el álgebra de caminos generalizada de  $\mathcal{V}$ .

Sean  $A : I_1 \times J_1 \rightarrow \mathcal{B}, B : I_2 \times J_2 \rightarrow \mathcal{B} \in \mathcal{T}_\infty \mathcal{B}$ . Si  $\hat{r}(A) \neq \hat{l}(B)$  o ambos iguales a cero, definimos  $A \star B = 0$ .

Ahora, si  $\hat{r}(A) = \hat{l}(B) \neq 0$ , los cardinales de  $I_1$  e  $I_2$  son los iguales. Consideremos  $\varphi : I_1 \rightarrow I_2$  una biyección creciente, tal que  $r(A_{ij}) = l(B_{\varphi(i)l})$  (aquí estamos considerando  $J_1 = \{\dots, j\}$  y  $J_2 = \{l, \dots\}$ ). Definimos  $A \star B = C$ , donde  $C : I_1 \times \{\dots, j-1, j, j+1, \dots\}$  está definida por

- $C(m, n) = A(m, n)$  si  $m \in I_1, n \in \{\dots, j-1, j\}$ ;
- $C(m, n) = B(\varphi(m), l + (n - j) - 1)$ , si  $m \in I_1$  y  $n \in \{j+1, \dots\}$ .

Es claro que  $(k\mathcal{T}_\infty\mathcal{B}, \star)$  es un álgebra asociativa no unital.

PROPOSICIÓN 7.35. *Sea  $(\mathcal{B}, \mathcal{V}, \mathcal{H}, \mathcal{P})$  un carcaj doble. Consideremos  $(k\mathcal{T}_\infty\mathcal{B}, \star)$ , el álgebra de tableros generalizados de  $\mathcal{B}$ . Definamos  $\Delta : k\mathcal{T}_\infty\mathcal{B} \rightarrow \mathbb{M}(k\mathcal{T}_\infty\mathcal{B} \otimes k\mathcal{T}_\infty\mathcal{B})$ , como  $\Delta(A) = (\Delta_\lambda(A), \Delta_\rho(A))$ , donde*

- I. Si  $A : I \times J \rightarrow \mathcal{B}$ , donde el cardinal de  $J$  es mayor que 1 entonces  $\Delta_\lambda(A), \Delta_\rho(A) = 0$ .
- II. Si  $A : I \times J \rightarrow \mathcal{B}$  y el cardinal de  $J$  igual 1, entonces

$$\Delta_\lambda(A), \Delta_\rho(A) : k\mathcal{T}_\infty\mathcal{B} \otimes k\mathcal{T}_\infty\mathcal{B} \rightarrow k\mathcal{T}_\infty\mathcal{B} \otimes k\mathcal{T}_\infty\mathcal{B},$$

donde, para todo  $X \otimes Y \in k\mathcal{T}_\infty\mathcal{B} \otimes k\mathcal{T}_\infty\mathcal{B}$ ,

$$\Delta_\lambda(A)(X \otimes Y) = \sum_{i \in I \subset \mathbb{Z}} \begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \longrightarrow \cdot \\ \downarrow & \vdots \downarrow & \downarrow A_{i+1} \downarrow \\ \cdot & \rightarrow \cdot \star X \otimes \cdot & \longrightarrow \cdot \star Y \\ \downarrow A_i \downarrow & & \downarrow \vdots \downarrow \\ \cdot & \rightarrow \cdot & \cdot \end{array}$$

y

$$\Delta_\rho(A)(X \otimes Y) = \sum_{i \in I \subset \mathbb{Z}} \begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \longrightarrow \cdot \\ \downarrow & \vdots \downarrow & \downarrow A_{i+1} \downarrow \\ \cdot & \rightarrow X \star \cdot \otimes Y \star \cdot & \longrightarrow \cdot \\ \downarrow A_i \downarrow & & \downarrow \vdots \downarrow \\ \cdot & \rightarrow \cdot & \cdot \end{array}$$

Entonces el triple  $(\mathcal{T}_\infty\mathcal{B}, \star, \Delta)$  constituye una biálgebra infinitesimal de multiplicadores.

DEMOSTRACIÓN. Basta chequear, mediante un calculo directo, cada uno de los axiomas de la definición.  $\square$

#### 4. $\varepsilon$ -Biálgebras de Multiplicadores y categorías monoidales

A continuación recordaremos la definición de categoría monoidal y la de comonoide interno a una categoría monoidal. Para la teoría general de categorías monoidales ver [MI] y [K].

DEFINICIÓN 7.36. Una categoría monoidal es una colección  $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, \alpha, \lambda, \rho)$ , donde  $\mathcal{C}$  es una categoría,  $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  es un bifunctor (“producto tensorial”),  $\mathbf{1}$  es un objeto de  $\mathcal{C}$  (“objeto neutro” para el producto tensorial) y  $\alpha : \otimes(\otimes \times Id) \xrightarrow{\sim} \otimes(Id \times \otimes)$  (restricción de asociatividad),  $\lambda : \otimes(\mathbf{1} \times Id) \xrightarrow{\sim} Id$  y  $\rho : \otimes(Id \times \mathbf{1}) \xrightarrow{\sim} Id$  (restricciones de unidad) son isomorfismos naturales. Todos estos datos sujetos a los siguientes axiomas

I. *Axioma del pentágono.* Para todo  $A, B, C, D$  objetos de  $\mathcal{C}$ , el siguiente diagrama es conmutativo

$$(4.1) \quad \begin{array}{ccc} & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) & & ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \\ \downarrow & & \uparrow \\ A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) & \xrightarrow{\quad} & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \end{array}$$

II. *Axioma del triángulo.* Para todo par de objetos  $A, B$  en  $\mathcal{C}$ , el siguiente diagrama es conmutativo

$$(4.2) \quad \begin{array}{ccc} (A \otimes \mathbf{1}) \otimes B & \xrightarrow{\alpha_{A, \mathbf{1}, B}} & A \otimes (\mathbf{1} \otimes B) \\ & \searrow \rho_A \otimes Id_B & \swarrow Id_A \otimes \lambda_A \\ & A \otimes B & \end{array}$$

OBSERVACIÓN 7.37. De ahora en adelante, si no hay riesgo de confusión, una categoría monoidal  $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, \alpha, \lambda, \rho)$ , será denotada simplemente por  $(\mathcal{C}, \otimes)$ .

DEFINICIÓN 7.38. Sea  $(\mathcal{C}, \otimes)$  una categoría monoidal. Un comonoide en  $\mathcal{C}$  es un triple  $(C, \Delta, \varepsilon)$  donde  $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$  (coproducto) y  $\varepsilon : C \rightarrow \mathbf{1}$  (counidad) son morfismos de  $\mathcal{C}$ , tal que los siguientes diagramas son conmutativos

$$(4.3) \quad \begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\Delta} & C \otimes C \\ \Delta \downarrow & & \downarrow Id_C \otimes \Delta \\ C \otimes C & \xrightarrow{\Delta \otimes Id_C} & C \otimes C \otimes C \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} \mathbf{1} \otimes C & \xleftarrow{\varepsilon \otimes Id_C} & C \otimes C & \xrightarrow{Id_C \otimes \varepsilon} & C \otimes \mathbf{1} \\ & \swarrow \lambda_C & \uparrow \Delta & \searrow \rho_C & \\ & & C & & \end{array}$$

El diagrama de la izquierda recibe el nombre de *axioma de coasociatividad* y el de la derecha *axioma de counidad*.

A continuación daremos algunos ejemplos de categorías monoidales.

EJEMPLO 7.39. La categoría **Sets** de todos los conjuntos, es un categoría monoidal, donde el producto tensorial esta dado por el producto cartesiano y el objeto unidad es un conjunto con un solo elemento.

EJEMPLO 7.40. Sea  $k$ -un cuerpo cualquiera. La categoría  $Vect_k$  de todos los  $k$ -espacios vectoriales es una categoría monoidal donde  $\otimes = \otimes_k$  y  $\mathbf{1} = k$ . Lo mismo se puede afirmar de la categoría de  $k$ -espacios vectoriales de dimensión finita.

En general, dado un anillo conmutativo y unital  $R$ , la categoría de  $R$ -modulos  $\mathcal{M}_R$ , es una categoría monoidal donde  $\otimes = \otimes_R$  y  $\mathbf{1} = R$ .

**EJEMPLO 7.41.** Sea  $G$  un grupo finito y sea  $\omega \in Z^3(G, k^\times)$  un 3-cociclo normalizado. Denotaremos por  $Vec(G, \omega)$  la categoría de  $k$ -espacios vectoriales  $G$ -graduados. Podemos dotar a esta categoría de una estructura de categoría monoidal como sigue. Si  $V = \bigoplus_{g \in G} V_g$  y  $W = \bigoplus_{g \in G} W_g$  son objetos en  $C(G, \omega)$ , entonces  $V \otimes W := \bigoplus_{g \in G} (V \otimes W)_g$ , donde  $(V \otimes W)_g = \bigoplus_{xy=g} V_x \otimes_k W_y$ . El objeto unidad es  $k$  concentrado en grado 1 (la identidad del grupo). El morfismo de asociatividad está dado por el 3-cociclo  $\omega$ , es decir  $a_{UVW} : (U \otimes V) \otimes W \rightarrow U \otimes (V \otimes W)$  está definido como  $a_{UVW}((u \otimes v) \otimes w) = \omega(g, h, f)(u \otimes (v \otimes w))$ , donde  $u \in U_g$ ,  $v \in V_h$ ,  $w \in W_f$  y  $g, h, f \in G$ . Se puede probar que  $Vec(G, \omega)$  no depende (salvo equivalencia tensorial) de la clase de representante de  $\omega \in H^3(G, k^\times)$ .

**4.1. Categorías monoidales y biálgebras de multiplicadores.** De ahora en adelante  $k$  denotará un cuerpo. Dada una  $k$ -álgebra asociativa  $A$  (no necesariamente unital) denotaremos por  $\mu_A : A \otimes A \rightarrow A$  el producto de  $A$ . El material de esta subsección es tomado de [JV]. Referiremos al lector a dicha referencia para los detalles y las pruebas de los resultados enunciados.

**DEFINICIÓN 7.42.** Sea  $A$  una  $k$ -álgebra. Diremos que  $A$  es *idempotente* si  $A = A^2 = \{\sum_i a_i b_i \mid a_i, b_i \in A\}$ .

Diremos que  $A$  es *no degenerada* si dado  $a \in A$  se cumple que, si  $ab = 0$  para todo  $b \in A$  entonces  $a = 0$  y, así mismo, si  $ba = 0$  para todo  $b \in A$  entonces  $a = 0$ .

**DEFINICIÓN 7.43.** Sea  $A$  una  $k$ -álgebra, decimos que  $A$  posee *unidades locales a izquierda* (resp. a derecha), si para cualquier colección finita  $\{a_1, \dots, a_n\}$  de elementos de  $A$ , existe  $e \in A$  tal que  $ea_i = a_i$  (resp.  $a_i e = a_i$ ) para todo  $i = 1, \dots, n$ .

Decimos que  $A$  posee *unidades locales*, si posee unidades locales a izquierda y a derecha.

**OBSERVACIÓN 7.44.** Es claro que si  $A$  es una  $k$ -álgebra con unidades locales, entonces es idempotente y no degenerada.

**DEFINICIÓN 7.45.** Sea  $A$  una  $k$ -álgebra y  $M$  un  $A$ -módulo a izquierda. Decimos que  $M$  es *idempotente* si  $M = AM = \{\sum_i a_i m_i \mid a_i \in A, m_i \in M\}$ .

Diremos que  $M$  es *no degenerado*, si para todo  $m \in M$  se cumple que, si  $am = 0$  para todo  $a \in A$  entonces  $m = 0$ .

**OBSERVACIÓN 7.46.** Si  $M$  es un  $A$ -módulo a derecha, modificamos de manera obvia la definición (7.45).

**DEFINICIÓN 7.47.** Consideremos  $A$  y  $B$  dos  $k$ -álgebras. Decimos que  $B$  es una *extensión* de  $A$  si  $B$  es un  $A$ -bimodulo balanceado y el producto de  $B$  es  $A$ -bilineal; esto es,  $(a_1 \triangleright b) \triangleleft a_2 = a_1 \triangleright (b \triangleleft a_2)$ ,  $\mu_B((a \triangleright b_1) \otimes b_2) = a \triangleright \mu_B(b_1 \otimes b_2)$  y  $\mu_B(b_1 \otimes (b_2 \triangleleft a)) = \mu_B(b_1 \otimes b_2) \triangleleft a$ . Donde  $\triangleright$  y  $\triangleleft$  denotan la acción a izquierda y la acción a derecha de  $A$  sobre  $B$ , respectivamente.

Decimos que  $B$  es una *extensión idempotente* (no degenerada) de  $A$ , si  $B$  es una extensión de  $A$  la cual es idempotente (resp. no degenerada) como  $A$ -bimodulo.

La siguiente proposición, aunque bien conocida, aparece por primer vez de forma explícita en [JV].

PROPOSICIÓN 7.48. Sean  $A$  y  $B$  dos  $k$ -álgebras.

- I. Existe una correspondencia biyectiva entre morfismos de álgebras  $\lambda : B \rightarrow L(A)$  y estructuras de  $B$ -módulo a izquierda sobre  $A$  tal que  $\mu_A : A \otimes A \rightarrow A$  es  $B$ -lineal a izquierda (i.e.  $\mu_A(ba \otimes a') = b\mu_A(a \otimes a')$ , para todo  $a, a' \in A$  y  $b \in B$ ).
- II. Existe una correspondencia biyectiva entre morfismos de álgebras  $\rho : B \rightarrow R(A)^{op}$  y estructuras de  $B$ -módulo a derecha sobre  $A$  tal que  $\mu_A : A \otimes A \rightarrow A$  es  $B$ -lineal a derecha (i.e.  $\mu_A(a \otimes a'b) = \mu_A(a \otimes a')b$ , para todo  $a, a' \in A$  y  $b \in B$ ).
- III. Existe una correspondencia biyectiva entre morfismos de álgebras  $f : B \rightarrow \mathbb{M}(A)$  y estructuras de  $B$ -extensiones sobre  $A$ .

DEMOSTRACIÓN. Ver [JV]. □

OBSERVACIÓN 7.49. Dado un par de  $k$ -álgebras idempotentes no degeneradas, es claro que su producto tensorial  $A \otimes B$  es idempotente y no degenerado. Mas aún, dado  $M$  un  $A$ -módulo a izquierda y  $N$  un  $B$ -módulo a izquierda, ambos idempotentes no degenerados, entonces su producto tensorial  $M \otimes N$  es un  $A \otimes B$ -módulo a izquierda bajo la acción  $(m \otimes n)(a \otimes b) = ma \otimes nb$ , el cual resulta ser idempotente y no degenerado. Lo mismo es cierto para módulos a derecha.

LEMA 7.50. [JV] La colección de  $k$ -álgebras idempotentes no degeneradas, admite una estructura de categoría monoidal, en la cual las extensiones idempotentes no degeneradas son los morfismos y cuyo producto tensorial es el producto tensorial usual de  $k$ -álgebras y  $k$ -módulos (7.49). Denotaremos dicha categoría por  $\mathcal{D}_k$ .

DEMOSTRACIÓN. Ver [JV, Teo. 1.12]. □

DEFINICIÓN 7.51. [JV] Una *biálgebra de multiplicadores* es un comonoide interno en la categoría  $\mathcal{D}_k$ .

De forma directa, pero no trivial, se puede demostrar la siguiente proposición;

PROPOSICIÓN 7.52. [JV] Un álgebra de Hopf de multiplicadores es una biálgebra de multiplicadores.

DEMOSTRACIÓN. Ver [JV, Prop. 3.1]. □

**4.2. Categorías monoidales y  $\varepsilon$ -bialgebras.** A continuación enunciaremos sin demostración un par de resultados de [A2], los cuales nos proveen de una interpretación categórica de las biálgebras infinitesimales.

DEFINICIÓN 7.53. El *producto tensorial circular* de dos  $k$ -espacios vectoriales  $V$  y  $W$  se define como el  $k$ -espacio vectorial

$$V \odot W = V \oplus W \oplus (V \otimes W).$$

El producto tensorial circular de dos morfismos lineales  $f : V \rightarrow X$  y  $g : W \rightarrow Y$  es el morfismo lineal

$$f \odot g : V \odot W \rightarrow X \odot Y, \quad (v, w, x \otimes y) \mapsto (f(v), g(w), f(x) \otimes g(y)).$$

El siguiente lema, a pesar de ser un resultado obvio, lo incluimos para futura referencia.

LEMA 7.54. *Dados  $k$ -espacios vectoriales  $U, V$  y  $W$ , la aplicación lineal*

$$(4.4) \quad \alpha : (U \odot V) \odot W \rightarrow U \oplus V \oplus W \oplus (U \otimes V) \oplus (U \otimes W) \oplus (V \otimes W) \oplus (U \otimes V \otimes W),$$

tal que

$$((u_1, v_1, x_1 \otimes y_1), w_1, (u_2, v_2, x_2 \otimes y_2) \otimes w_2) \mapsto (u_1, v_1, w_1, x_1 \otimes y_1, u_2 \otimes y_2, v_2 \otimes y_2, x_2 \otimes y_2 \otimes w_2);$$

es un isomorfismo lineal, con inverso

$$(4.5) \quad \alpha^{-1} : U \oplus V \oplus W \oplus (U \otimes V) \oplus (U \otimes W) \oplus (V \otimes W) \oplus (U \otimes V \otimes W) \rightarrow (U \odot V) \odot W,$$

tal que  $(u_1, v_1, w_1, u_2 \otimes v_2, u_3 \otimes w_2, v_3 \otimes w_3, u_4 \otimes v_4 \otimes w_4) \mapsto ((u_1, v_1, u_2 \otimes w_2), w_1, (u_3, 0, 0) \otimes w_2 + (0, v_3, 0) \otimes w_3 + (0, 0, u_4 \otimes v_4) \otimes w_4)$ .

De la misma manera, la aplicación lineal

$$(4.6) \quad \beta : U \odot (V \odot W) \rightarrow U \oplus V \oplus W \oplus (U \otimes V) \oplus (U \otimes W) \oplus (V \otimes W) \oplus (U \otimes V \otimes W),$$

tal que

$$(u_1, (v_1, w_1, x_1 \otimes y_1), u_2 \otimes (v_2, w_2, x_2 \otimes y_2)) \mapsto (u_1, v_1, w_1, u_2 \otimes v_2, u_2 \otimes w_2, x_1 \otimes y_1, u_2 \otimes x_2 \otimes y_2);$$

es un isomorfismo lineal, con inverso

$$(4.7) \quad \beta^{-1} : U \oplus V \oplus W \oplus (U \otimes V) \oplus (U \otimes W) \oplus (V \otimes W) \oplus (U \otimes V \otimes W) \rightarrow U \odot (V \odot W),$$

tal que  $(u_1, v_1, w_1, u_2 \otimes v_2, u_3 \otimes w_2, v_3 \otimes w_3, u_4 \otimes v_4 \otimes w_4) \mapsto (u_1, (v_1, w_1, v_3 \otimes w_3), u_2 \otimes (v_2, 0, 0) + u_3 \otimes (0, w_3, 0) + u_4 \otimes (0, 0, v_4 \otimes w_4))$ .

DEMOSTRACIÓN. Verificación directa. □

OBSERVACIÓN 7.55. Los isomorfismos presentados en el lema (7.54) son *naturales* y satisfacen la identidad del pentágono (4.1), dando lugar así a una estructura de categoría monoidal sobre  $\text{Vect}_k$  (la colección de todos los  $k$ -espacios vectoriales) para la cual el objeto neutro es 0. Denotaremos esta categoría monoidal por  $(\text{Vect}_k, \odot, 0)$ .

LEMA 7.56. *Dado un  $k$ -espacio vectorial  $V$ , se le puede asociar un álgebra asociativa unitaria  $V' = V \oplus k$  con producto definido por,*

$$(v_1, \lambda_1)(v_2, \lambda_2) = (\lambda_2 v_1 + \lambda_1 v_2, \lambda_1 \lambda_2).$$

Entonces, la asignación

$$' : (\text{Vect}_k, \odot, 0) \rightarrow (\text{Alg}_k, \otimes, k)$$

$$V \mapsto V'$$

$$f : V \rightarrow W \mapsto f' = (f, \text{Id});$$

define un funtor monoidal entre la categoría monoidal de  $k$ -espacios vectoriales con el producto tensorial circular y la categoría de  $k$ -álgebras asociativas unitalas.

DEMOSTRACIÓN. Basta observar que si  $V$  y  $W$  son  $k$ -espacios vectoriales entonces el producto circular entre  $V$  y  $W$  satisface que  $(V \odot W)' = V' \otimes W'$ . Luego, el lema se sigue por verificación directa de los axiomas que definen un funtor monoidal.  $\square$

LEMA 7.57. Dada una  $k$ -álgebra asociativa  $A$  (no necesariamente unital), se le puede asociar un álgebra asociativa unital (aumentada)  $A' = A \oplus k$  con producto definido por,

$$(a_1, \lambda_1)(a_2, \lambda_2) = (a_1 a_2 + \lambda_2 a_1 + \lambda_1 a_2, \lambda_1 \lambda_2).$$

Entonces, existe una estructura de categoría monoidal  $\odot$  en  $\text{Alg}_k$ , cuyo elemento neutro es  $0$  y tal que la asignación

$$\begin{aligned} ' : (\text{Alg}_k, \odot, 0) &\rightarrow (\text{AAlg}_k, \otimes, k) \\ A &\mapsto A' \\ f : A \rightarrow B &\mapsto f' = (f, \text{Id}); \end{aligned}$$

define un funtor monoidal entre la categoría monoidal de  $(\text{Alg}_k, \odot, 0)$  y la categoría de  $k$ -álgebras asociativas aumentadas y unitalas  $(\text{AAlg}_k, \otimes, k)$ . Mas aún, el funtor  $'$  es un isomorfismo monoidal con inverso dado por el nucleo de la aumentación.

DEMOSTRACIÓN. Basta verificar directamente los axiomas que definen una categoría y funtor monoidal.  $\square$

COROLARIO 7.58. [A2] Sean  $A$  y  $B$  álgebras asociativas, no necesariamente unitalas. Entonces  $A \odot B$  es un álgebra asociativa via

$$(a, b, x \otimes y)(a', b', x' \otimes y') = (aa', bb', ax' \otimes y' + x \otimes yb').$$

DEMOSTRACIÓN. Se sigue del lema 7.57.  $\square$

PROPOSICIÓN 7.59. [A2] Un objeto comonoide counital en la categoría monoidal  $(\text{Alg}_k, \odot, 0)$  es precisamente una  $\varepsilon$ -bialgebra.

DEMOSTRACIÓN. Ver [A2].  $\square$

### 4.3. Categorías monoidales y $\varepsilon$ -bialgebras de multiplicadores.

OBSERVACIÓN 7.60. Dados dos objetos  $A$  y  $B$  en  $\mathcal{D}_k$ , su producto tensorial circular esta bien definido. Mas aún, resulta ser de nuevo un objeto de  $\mathcal{D}_k$ .

DEFINICIÓN 7.61. Sean  $A$  y  $B$  objetos de  $\mathcal{D}_k$ , dados  $M$  un  $A$ -módulo a izquierda y  $N$  un  $B$ -módulo a izquierda, definimos el  $A \odot B$ -módulo  $M \odot N$  como el  $k$ -espacio vectorial  $M \oplus N \oplus (M \otimes N)$  dotado de la acción izquierda

$$(a, b, x \otimes y) \cdot (m, n, u \otimes v) = (a \cdot m, b \cdot n, x \cdot u \otimes y \cdot v).$$

Analogamente, si  $M$  y  $N$  son módulos a derecha, el producto tensorial circular,  $M \odot N$ , es un  $A \odot B$ -módulo a derecha, via la acción

$$(m, n, u \otimes v) \cdot (a, b, x \otimes y) = (m \cdot a, n \cdot b, u \cdot x \otimes v \cdot y).$$

OBSERVACIÓN 7.62. El  $A \odot B$ -módulo  $M \odot N$ , resultante en (7.61), es idempotente y no degenerado.

PROPOSICIÓN 7.63. El producto tensorial circular (7.61), provee a  $\mathcal{D}_k$  de una estructura de categoría monoidal para la cual  $0$  es el objeto neutro.

NOTACIÓN. La categoría monoidal en (7.63) la denotaremos por  $(\mathcal{DA}, \odot, 0)$ .

A causa de las proposiciones (7.52) y (7.59) surge de manera natural la siguiente ¿Se pueden extender estas interpretaciones categóricas a las álgebras infinitesimales de multiplicadores? De manera mas precisa, ¿Una biálgebra de multiplicadores es un comonoide en la categoría  $(\mathcal{DA}, \odot, 0)$ ?

OBSERVACIÓN 7.64. Sea  $A$  un  $k$ -espacio vectorial, si  $L : A \odot A \rightarrow A \odot A$  es una aplicación lineal, entonces  $L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & | & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & | & L_{23} \\ \text{---} & \text{---} & | & \text{---} \\ L_{31} & L_{32} & | & L_{33} \end{pmatrix}$ , donde  $L_{11}, L_{12}, L_{21}, L_{22} : A \rightarrow A$ ,  $L_{13}, L_{23} : A \otimes A \rightarrow A$ ,  $L_{31}, L_{32} : A \rightarrow A \otimes A$  y  $L_{33} : A \otimes A \rightarrow A \otimes A$  son aplicaciones lineales.

LEMA 7.65. Sea  $A$  una  $k$ -álgebra idempotente. Si  $\lambda \in L(A \odot A)$ , entonces

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{22} & 0 \\ 0 & \lambda_{32} & \lambda_{11} \otimes 1 \end{pmatrix},$$

donde  $\lambda_{11}, \lambda_{22} \in L(A)$  y  $\lambda_{32} \in \text{Hom}_A(A, A \otimes A)$ .

DEMOSTRACIÓN. Si  $\lambda$  es un multiplicador a izquierda para  $A \odot A$ , entonces dados  $(x, y, u \otimes v), (x', y', u' \otimes v') \in A \odot A$  se cumple  $\lambda((x, y, u \otimes v)(x', y', u' \otimes v')) = \lambda(x, y, u \otimes v)(x', y', u' \otimes v')$ . Como consecuencia de esta igualdad obtenemos las siguientes tres ecuaciones,

$$(4.8) \quad \lambda_{11}(xx') + \lambda_{12}(yy') + \lambda_{13}(xu' \otimes v' + u \otimes vy') = (\lambda_{11}(x) + \lambda_{12}(y) + \lambda_{13}(u \otimes v))x,$$

$$(4.9) \quad \lambda_{21}(xx') + \lambda_{22}(yy') + \lambda_{23}(xu' \otimes v' + u \otimes vy') = (\lambda_{21}(x) + \lambda_{22}(y) + \lambda_{23}(u \otimes v))y',$$

$$(4.10)$$

$$\lambda_{31}(xx') + \lambda_{32}(yy') + \lambda_{33}(xu' \otimes v' + u \otimes vy') = (\lambda_{31}(x) + \lambda_{32}(y) + \lambda_{33}(u \otimes v))(1 \otimes y')$$

$$(4.11) \quad + ((\lambda_{11}(x) + \lambda_{12}(y) + \lambda_{13}(u \otimes v)) \otimes 1)(u' \otimes v').$$

Considerando  $x = x' = 0$  y  $u \otimes v = u' \otimes v' = 0$ , las ecuaciones (4.8), (4.9) y (4.10) se transforman en  $\lambda_{12}(yy') = 0$ ,  $\lambda_{22}(yy') = \lambda_{22}(y)y'$  y  $\lambda_{32}(yy') = \lambda_{32}(y)(1 \otimes y')$ , respectivamente. Luego, dado

que  $A$  es idempotente, podemos concluir que  $\lambda_{12} = 0$ ,  $\lambda_{22} \in L(A)$  y  $\lambda_{32}$  es de  $A$ -módulos a derecha.

Ahora, si consideramos  $y = y' = 0$  y  $u \otimes v = u' \otimes v' = 0$ , obtenemos de las ecuaciones (4.8), (4.9) y (4.10) que  $\lambda_{11}(xx') = \lambda_{11}(x)x'$ ,  $\lambda_{21}(xx') = 0$  y  $\lambda_{31} = 0$  respectivamente. De donde concluimos que  $\lambda_{11} \in L(A)$ ,  $\lambda_{21} = \lambda_{31} = 0$ .

Si tomamos  $x = y = 0$  entonces la ecuación (4.8) se transforma en  $\lambda_{13}(u \otimes v y') = 0$ , de donde concluimos, por la idempotencia de  $A$ , que  $\lambda_{13} = 0$ .

Analogamente, si tomamos  $x' = y' = 0$  la ecuación (4.10) nos permite concluir que  $\lambda_{23} = 0$ .

Ahora, tomando  $x' = y = u = 0$  en (4.10), se deduce que  $\lambda_{33}(x u' \otimes v') = \lambda_{11}(x) u' \otimes v'$ . Como consecuencia  $\lambda_{33} = \lambda_{11} \otimes 1$ .  $\square$

LEMA 7.66. *Sea  $A$  una  $k$ -álgebra idempotente. Si  $\rho \in R(A \odot A)$ , entonces*

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{22} & 0 \\ \rho_{31} & 0 & 1 \otimes \rho_{22} \end{pmatrix},$$

donde  $\rho_{11}, \rho_{22} \in R(A)$  y  $\rho_{31} \in {}_A \text{Hom}(A, A \otimes A)$ .

DEMOSTRACIÓN. Análoga a la demostración de (7.65).  $\square$

COROLARIO 7.67. *Sea  $A$  una  $k$ -álgebra idempotente. Si  $(\lambda, \rho) \in \mathbb{M}(A \odot A)$  entonces*

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{22} & 0 \\ 0 & \lambda_{32} & \lambda_{11} \otimes 1 \end{pmatrix} \text{ y } \rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{22} & 0 \\ \rho_{31} & 0 & 1 \otimes \rho_{22} \end{pmatrix},$$

donde  $(\lambda_{11}, \rho_{11}), (\lambda_{22}, \rho_{22}) \in \mathbb{M}(A)$  y  $(\lambda_{32}, \rho_{31}) \in \mathbb{M}_0(A \otimes A)$ .

DEMOSTRACIÓN. Sean  $(x, y, u \otimes v), (x', y', u' \otimes v') \in A \odot A$ . Como  $(\lambda, \rho) \in \mathbb{M}(A \odot A)$ , entonces  $(x, y, u \otimes v)\lambda(x', y', u' \otimes v') = \rho(x, y, u \otimes v)(x', y', u' \otimes v')$ . Luego, por los lemas (7.65) y (7.66) obtenemos las siguientes ecuaciones  $x\lambda_{11}(x') = \rho_{11}(x)x'$ ,  $y\lambda_{22}(y') = \rho_{22}(y)y'$  y además  $(x \otimes 1)\lambda_{32}(y') + (x \otimes 1)(\lambda_{11}(u') \otimes v') + u \otimes v\lambda_{22}(y') = \rho_{11}(x)u' \otimes v' + \rho_{31}(x)(1 \otimes y') + u \otimes \rho_{22}(v)y'$ ; de aquí obtenemos las conclusiones deseadas.  $\square$

LEMA 7.68. *Sea  $A \in \text{Obj}(\mathcal{D}_k)$ . Dado un par de endomorfismos lineal  $\lambda : A \odot A \rightarrow A \odot A$  y  $L : A \rightarrow A$ , los endomorfismos lineales inducidos en  $A \odot A \odot A$  estan dados por*

$$(4.12) \quad \lambda \odot L = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & 0 & \lambda_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & 0 & \lambda_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & 0 & \lambda_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{11} \otimes L & \lambda_{12} \otimes L & \lambda_{13} \otimes L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{21} \otimes L & \lambda_{22} \otimes L & \lambda_{23} \otimes L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{31} \otimes L & \lambda_{32} \otimes L & \lambda_{33} \otimes L \end{pmatrix}$$

y

$$(4.13) \quad L \odot \lambda = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{11} & \lambda_{12} & 0 & 0 & \lambda_{13} & 0 \\ 0 & \lambda_{11} & \lambda_{11} & 0 & 0 & \lambda_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \otimes \lambda_{11} & L \otimes \lambda_{12} & 0 & L \otimes \lambda_{13} \\ 0 & 0 & 0 & L \otimes \lambda_{21} & L \otimes \lambda_{22} & 0 & L \otimes \lambda_{23} \\ 0 & \lambda_{21} & \lambda_{22} & 0 & 0 & \lambda_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L \otimes \lambda_{31} & L \otimes \lambda_{32} & 0 & L \otimes \lambda_{33} \end{pmatrix}.$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos  $X = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_1^1 \otimes x_2^1, x_1^2 \otimes x_2^2, x_1^3 \otimes x_2^3, x_1^4 \otimes x_2^4 \otimes x_3^4) \in A \odot A \odot A$ . Considerando las identificaciones de los lemas (4.4) y (4.6), se sigue que

$$\lambda \odot L(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_1^1 \otimes x_2^1, x_1^2 \otimes x_2^2, x_1^3 \otimes x_2^3, x_1^4 \otimes x_2^4 \otimes x_3^4) = \lambda \odot L(X_1) + \lambda \odot L(X_2) + \lambda \odot L(X_3)$$

donde  $X_1 = ((x_1^0, x_2^0, x_1^1 \otimes x_2^1), x_3^0, (x_1^2, 0, 0) \otimes x_2^2)$ ,  $X_2 = ((0, 0, 0), 0, (0, x_1^3, 0) \otimes x_2^3)$  y  $X_3 = ((0, 0, 0), 0, (0, 0, x_1^4 \otimes x_2^4) \otimes x_3^4)$ .

Ahora,

$$\begin{aligned} \lambda \odot L(X_1) &= ((x_1^0, x_2^0, x_1^1 \otimes x_2^1), x_3^0, (x_1^2, 0, 0) \otimes x_2^2) \\ &= (\lambda(x_1^0, x_2^0, x_1^1 \otimes x_2^1), L(x_3^0), \lambda(x_1^2, 0, 0) \otimes L(x_2^2)) \\ &= (\lambda_{11}(x_1^0) + \lambda_{12}(x_2^0) + \lambda_{13}(x_1^1 \otimes x_2^1), \lambda_{21}(x_1^2) + \lambda_{22}(x_2^2) + \lambda_{23}(x_1^1 \otimes x_2^1), \\ &\quad I(x_3^0), (\lambda_{11}(x_1^2) + \lambda_{21}(x_1^2) + \lambda_{31}(x_1^2)) \otimes I(x_2^2)), \end{aligned}$$

también

$$\begin{aligned} \lambda \odot L(X_2) &= \lambda \odot L((0, 0, 0), 0, (0, x_1^3, 0) \otimes x_2^3) \\ &= (0, 0, (\lambda_{12}(x_1^3) + \lambda_{22}(x_1^3) + \lambda_{32}(x_1^3)) \otimes L(x_2^3)) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \lambda \odot L(X_3) &= \lambda \odot L((0, 0, 0), 0, (0, 0, x_1^4 \otimes x_2^4) \otimes x_3^4) \\ &= (0, 0, (\lambda_{13}(x_1^4 \otimes x_2^4) + \lambda_{23}(x_1^4 \otimes x_2^4) + \lambda_{33}(x_1^4 \otimes x_2^4)) \otimes L(x_3^4)). \end{aligned}$$

Sumando obtenemos, nuevamente por las identificaciones de los lemas (4.4) y (4.6), que

$$\lambda \odot L(X) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & 0 & \lambda_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & 0 & \lambda_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & 0 & \lambda_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{11} \otimes L & \lambda_{12} \otimes L & \lambda_{13} \otimes L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{21} \otimes L & \lambda_{22} \otimes L & \lambda_{23} \otimes L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{31} \otimes L & \lambda_{32} \otimes L & \lambda_{33} \otimes L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \\ x_1^1 \otimes x_2^1 \\ x_1^2 \otimes x_2^2 \\ x_1^3 \otimes x_2^3 \\ x_1^4 \otimes x_2^4 \otimes x_3^4 \end{pmatrix};$$

que era la identidad buscada.

Para encontrar la representación matricial de  $L \odot \lambda$  realizamos un procedimiento similar.  $\square$

PROPOSICIÓN 7.69. *Los comonoides en  $\mathcal{DA}$  son triviales.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $(A, \Delta, \varepsilon)$  un comonoide en  $\mathcal{DA}$ . Luego,  $A$  es una  $k$ -álgebra idempotente no degenerada,  $\Delta : A \dashrightarrow A \odot A$  y  $\varepsilon : A \dashrightarrow 0$  son morfismos en  $\mathcal{DA}$  y los siguientes diagramas son conmutativos

$$(4.14) \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Delta} & A \odot A \\ \Delta \downarrow & & \downarrow I_A \odot \Delta \\ A \odot A & \xrightarrow{\Delta \odot I_A} & A \odot A \odot A \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & & \varepsilon \odot I_A & & I_A \odot \varepsilon \\ & & \leftarrow & & \rightarrow \\ & & 0 \odot A & \leftarrow & A \odot A & \rightarrow & A \odot 0 \\ & & \swarrow & & \uparrow & & \searrow \\ & & \sim & & \Delta & & \sim \\ & & & & A & & \end{array}$$

Por proposición (7.48) tener los morfismos  $\Delta$  y  $\varepsilon$  en  $\mathcal{DA}$ , equivale a tener morfismos de álgebras  $\tilde{\Delta} : A \rightarrow \mathbb{M}(A \odot A)$  y  $\tilde{\varepsilon} : A \rightarrow 0$ . Como consecuencia, para todo  $a \in A$  tenemos un par de morfismos lineales  $\Delta_\lambda(a), \Delta_\rho(a) : A \odot A \rightarrow A \odot A$  que satisfacen las compatibilidades de un multiplicador.

Por el corolario (7.67) para todo  $a \in A$ ,

$$\Delta_\lambda(a) = \begin{pmatrix} \Delta_\lambda^{11}(a) & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_\lambda^{22}(a) & 0 \\ 0 & \Delta_\lambda^{32}(a) & \Delta_\lambda^{11}(a) \otimes 1 \end{pmatrix} \text{ y } \Delta_\rho(a) = \begin{pmatrix} \Delta_\rho^{11}(a) & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_\rho^{22}(a) & 0 \\ \Delta_\rho^{31}(a) & 0 & 1 \otimes \Delta_\rho^{22}(a) \end{pmatrix},$$

donde  $(\Delta_\lambda^{11}(a), \Delta_\rho^{11}(a)), (\Delta_\lambda^{22}(a), \Delta_\rho^{22}(a)) \in \mathbb{M}(A)$  y  $(\Delta_\lambda^{32}(a), \Delta_\rho^{31}(a)) \in \mathbb{M}_0(A \otimes A)$ .

A continuación analizaremos las implicaciones de la conmutatividad de los diagramas (4.14). Por definición, el morfismo  $\varepsilon \odot I_A : A \odot A \dashrightarrow 0 \odot A$  es la estructura de  $A \odot A$ -extensión sobre  $0 \odot A$  determinada por  $(a, b, x \otimes y) \triangleright (0, c, 0) = (0, bc, 0)$  y  $(0, c, 0) \triangleleft (a, b, x \otimes y) = (0, cb, 0)$ . Por la proposición (7.48), esto equivale a tener un morfismo de álgebras  $\widetilde{\varepsilon \odot I_A} : A \odot A \rightarrow \mathbb{M}(0 \odot A)$  el cual puede extenderse a un morfismo de álgebras  $\overline{\varepsilon \odot I_A} : \mathbb{M}(A \odot A) \rightarrow \mathbb{M}(0 \odot A)$  de la siguiente manera. Si  $(\lambda, \rho) \in \mathbb{M}(A \odot A)$  y  $a = \sum a_i a^i \in A$ , entonces

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon \odot I_A}(\lambda)(0, a, 0) &= \overline{\varepsilon \odot I_A}(\lambda) \sum (0, a_i, 0)(0, a^i, 0) \\ &= \sum \widetilde{\varepsilon \odot I_A}(\lambda(0, a_i, 0))(0, a^i, 0) \\ &= \sum \widetilde{\varepsilon \odot I_A}(\lambda_{12}(a_i), \lambda_{22}(a_i), \lambda_{32}(a_i))(0, a^i, 0) \\ &= (0, \sum \lambda_{22}(a_i) a^i, 0) = (0, \lambda_{22}(a), 0). \end{aligned}$$

Luego  $\overline{\varepsilon \odot I_C}(\Delta_\lambda(a))(0, b, 0) = (0, \Delta_\lambda^{22}(a)(b), 0)$  y como consecuencia de la conmutatividad de (4.14) se tiene que  $\Delta_\lambda^{22}(a)(b) = ab$ .

Analogamente, usando que  $(I_A \odot \varepsilon) \circ \Delta_\lambda$  corresponde a la representación regular de  $A$  (conmutatividad del lado derecho del diagrama para la counidad en (4.14)), se puede concluir que  $\Delta_\lambda^{11}(a)(b) = ab$  para todo  $a, b \in A$ .

Un análisis similar nos permite deducir la misma conclusión para  $\Delta_\rho$ . Como consecuencia para todo  $a \in A$ ,

$$\Delta_\lambda(a) = \begin{pmatrix} \lambda_a & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_a & 0 \\ 0 & \Delta_\lambda^{32}(a) & \lambda_a \otimes 1 \end{pmatrix} \text{ y } \Delta_\rho(a) = \begin{pmatrix} \rho_a & 0 & 0 \\ 0 & \rho_a & 0 \\ \Delta_\rho^{31}(a) & 0 & 1 \otimes \rho_a \end{pmatrix},$$

donde  $\lambda_a$  y  $\rho_a$  denotan la multiplicación a izquierda y a derecha por  $a$ , respectivamente.

Sea  $a \in A$  y denotemos  $X = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_1^1 \otimes x_2^1, x_1^2 \otimes x_2^2, x_1^3 \otimes x_2^3, x_1^4 \otimes x_2^4 \otimes x_3^4) \in A \odot A \odot A$ ; si  $X$  se puede expresar como

$$(4.15) \quad (\Delta \odot I)(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3 \otimes \bar{x}_4)(\underline{x}_1^0, \underline{x}_2^0, \underline{x}_3^0, \underline{x}_1^1 \otimes \underline{x}_2^1, \underline{x}_1^2 \otimes \underline{x}_2^2, \underline{x}_1^3 \otimes \underline{x}_2^3, \underline{x}_1^4 \otimes \underline{x}_2^4 \otimes \underline{x}_3^4),$$

entonces de (4.12) tenemos las siguientes igualdades

$$(4.16) \quad \bar{x}_1 \underline{x}_1^0 = x_1^0,$$

$$(4.17) \quad \bar{x}_1 \underline{x}_2^0 = x_2^0,$$

$$(4.18) \quad \bar{x}_2 \underline{x}_3^0 = x_3^0,$$

$$(4.19) \quad \Delta_\lambda^{32}(\bar{x}_1)(\underline{x}_2^0) + \Delta_\lambda^{33}(\bar{x}_1)(\underline{x}_1^1 \otimes \underline{x}_2^1) = x_1^1 \otimes x_2^1,$$

$$(4.20) \quad (\Delta_\lambda^{11} \otimes I)(\bar{x}_3 \otimes \bar{x}_4)(\underline{x}_1^1 \otimes \underline{x}_2^1) = x_1^2 \otimes x_2^2,$$

$$(4.21) \quad (\Delta_\lambda^{22} \otimes I)(\bar{x}_3 \otimes \bar{x}_4)(\underline{x}_1^3 \otimes \underline{x}_2^3) = x_1^3 \otimes x_2^3,$$

$$(4.22) \quad (\Delta_\lambda^{32} \otimes I)(\bar{x}_3 \otimes \bar{x}_4)(\underline{x}_1^3 \otimes \underline{x}_2^3) + (\Delta_\lambda^{33} \otimes I)(\bar{x}_3 \otimes \bar{x}_4)(\underline{x}_1^4 \otimes \underline{x}_2^4 \otimes \underline{x}_3^4) = x_1^4 \otimes x_2^4 \otimes x_3^4.$$

de la misma forma, si

$$(4.23) \quad X = (I \odot \Delta)(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3 \otimes \underline{x}_4)(\bar{x}_1^0, \bar{x}_2^0, \bar{x}_3^0, \bar{x}_1^1 \otimes \bar{x}_2^1, \bar{x}_1^2 \otimes \bar{x}_2^2, \bar{x}_1^3 \otimes \bar{x}_2^3, \bar{x}_1^4 \otimes \bar{x}_2^4 \otimes \bar{x}_3^4),$$

entonces

$$(4.24) \quad \underline{x}_1 \bar{x}_1^0 = x_1^0,$$

$$(4.25) \quad \underline{x}_2 \bar{x}_2^0 = x_2^0,$$

$$(4.26) \quad \underline{x}_2 \bar{x}_3^0 = x_3^0,$$

$$(4.27) \quad (I \otimes \Delta_\lambda^{11})(\underline{x}_3 \otimes \underline{x}_4)(\bar{x}_1^1 \otimes \bar{x}_2^1) = x_1^1 \otimes x_2^1,$$

$$(4.28) \quad (I \otimes \Delta_\lambda^{22})(\underline{x}_3 \otimes \underline{x}_4)(\bar{x}_1^2 \otimes \bar{x}_2^2) = x_1^2 \otimes x_2^2,$$

$$(4.29) \quad \Delta_\lambda^{32}(\underline{x}_2)(\bar{x}_3^0) + \Delta_\lambda^{33}(\underline{x}_2)(\bar{x}_1^3 \otimes \bar{x}_2^3) = x_1^3 \otimes x_2^3,$$

$$(4.30) \quad (I \otimes \Delta_\lambda^{32})(\underline{x}_3 \otimes \underline{x}_4)(\bar{x}_1^3 \otimes \bar{x}_2^3) + (I \otimes \Delta_\lambda^{33})(\underline{x}_3 \otimes \underline{x}_4)(\bar{x}_1^4 \otimes \bar{x}_2^4 \otimes \bar{x}_3^4) = x_1^4 \otimes x_2^4 \otimes x_3^4.$$

Ahora,

$$(\Delta \odot I)(\Delta(a))X = (\Delta \odot I)(\Delta(a)(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3 \otimes \bar{x}_4))(\underline{x}_1^0, \underline{x}_2^0, \underline{x}_3^0, \underline{x}_1^1 \otimes \underline{x}_2^1, \underline{x}_1^2 \otimes \underline{x}_2^2, \underline{x}_1^3 \otimes \underline{x}_2^3, \underline{x}_1^4 \otimes \underline{x}_2^4 \otimes \underline{x}_3^4),$$

y

$$(I \odot \Delta)(\Delta(a))(X) = (I \odot \Delta)(\Delta(a)(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3 \otimes \underline{x}_4))(\bar{x}_1^0, \bar{x}_2^0, \bar{x}_3^0, \bar{x}_1^1 \otimes \bar{x}_2^1, \bar{x}_1^2 \otimes \bar{x}_2^2, \bar{x}_1^3 \otimes \bar{x}_2^3, \bar{x}_1^4 \otimes \bar{x}_2^4 \otimes \bar{x}_3^4).$$

Como consecuencia, por (4.12) y (4.13), dado que  $(\Delta \odot I)(\Delta(a)) = (I \odot \Delta)(\Delta(a))$ , obtenemos

$$(4.31) \quad a\underline{x}_1\bar{x}_1^0 = a\bar{x}_1\underline{x}_1^0,$$

$$(4.32) \quad a\underline{x}_2\bar{x}_2^0 = a\bar{x}_1\underline{x}_2^0,$$

$$(4.33) \quad a\underline{x}_2\bar{x}_3^0 = a\bar{x}_2\underline{x}_3^0,$$

$$(4.34) \quad (I \otimes \Delta_\lambda^{11})(\Delta_\lambda^{32}(a)\underline{x}_2 + \Delta_\lambda^{33}(\underline{x}_3 \otimes \underline{x}_4))(\bar{x}_1^1 \otimes \bar{x}_2^1) = \Delta_\lambda^{32}(a\bar{x}_1)\underline{x}_2^0 + \Delta_\lambda^{33}(a\bar{x}_1)(\underline{x}_1^1 \otimes \underline{x}_2^1),$$

$$(4.35) \quad (I \otimes \Delta_\lambda^{22})(\Delta_\lambda^{32}(a)\underline{x}_2 + \Delta_\lambda^{33}(\underline{x}_3 \otimes \underline{x}_4)) = (\Delta_\lambda^{11} \otimes I)(\Delta_\lambda^{32}(a)\bar{x}_2 + \Delta_\lambda^{33}(\bar{x}_3 \otimes \bar{x}_4))(\underline{x}_1^2 \otimes \underline{x}_2^2)$$

$$(4.36) \quad \Delta_\lambda^{32}(a\underline{x}_2)\bar{x}_3^0 + \Delta_\lambda^{33}(a\underline{x}_2)(\bar{x}_1^3 \otimes \bar{x}_2^3) = (\Delta_\lambda^{22} \otimes I)(\Delta_\lambda^{32}(a)\bar{x}_2 + \Delta_\lambda^{33}(a)(\bar{x}_3 \otimes \bar{x}_4))(\underline{x}_1^3 \otimes \underline{x}_2^3)$$

y por último

$$(4.37) \quad \begin{aligned} & (I \otimes \Delta_\lambda^{32})(\Delta_\lambda^{32}(a)\underline{x}_2 + \Delta_\lambda^{33}(a)(\underline{x}_3 \otimes \underline{x}_4))(\bar{x}_1^2 \otimes \bar{x}_2^2) \\ & + (I \otimes \Delta_\lambda^{33})(\Delta_\lambda^{32}(a)\underline{x}_2 + \Delta_\lambda^{33}(a)(\underline{x}_3 \otimes \underline{x}_4))(\bar{x}_1^4 \otimes \bar{x}_2^4 \otimes \bar{x}_3^4) \\ & = (\Delta_\lambda^{32} \otimes I)(\Delta_\lambda^{32}(a)\bar{x}_2 + \Delta_\lambda^{33}(a)(\bar{x}_3 \otimes \bar{x}_4))(\underline{x}_1^3 \otimes \underline{x}_2^3) \\ (4.38) \quad & + (\Delta_\lambda^{33} \otimes I)(\Delta_\lambda^{32}(a)\bar{x}_2 + \Delta_\lambda^{33}(a)(\bar{x}_3 \otimes \bar{x}_4))(\underline{x}_1^4 \otimes \underline{x}_2^4 \otimes \underline{x}_3^4). \end{aligned}$$

Oservemos que

$$(4.39) \quad \begin{aligned} & (\Delta_\lambda^{32} \otimes I)(\Delta_\lambda^{33}(a)(\bar{x}_3 \otimes \bar{x}_4)) + (\Delta_\lambda^{33} \otimes I)(\Delta_\lambda^{33}(a)(\bar{x}_3 \otimes \bar{x}_4))(\underline{x}_1^4 \otimes \underline{x}_2^4 \otimes \underline{x}_3^4) \\ & = (\Delta_\lambda^{32} \otimes I)(a\bar{x}_3 \otimes \bar{x}_4)(\underline{x}_1^3 \otimes \underline{x}_2^3) + (\Delta_\lambda^{33} \otimes I)(a\bar{x}_3 \otimes \bar{x}_4)(\underline{x}_1^4 \otimes \underline{x}_2^4 \otimes \underline{x}_3^4) \\ & = ((a \otimes 1)\Delta_\lambda^{32}(\bar{x}_3) \otimes \bar{x}_4)(\underline{x}_1^3 \otimes \underline{x}_2^3) + (\Delta_\lambda^{32}(a) \otimes I)(\bar{x}_3 \otimes \bar{x}_4)(\underline{x}_1^3 \otimes \underline{x}_2^3) + a\bar{x}_3\underline{x}_1^4 \otimes \underline{x}_2^4 \otimes \bar{x}_4\underline{x}_3^4 \\ & = ((a \otimes 1 \otimes 1)(\Delta_\lambda^{32} \otimes I)(\bar{x}_3 \otimes \bar{x}_4)(\underline{x}_1^3 \otimes \underline{x}_2^3) + \Delta_\lambda^{33}(\bar{x}_3 \otimes \bar{x}_4)(\underline{x}_1^4 \otimes \underline{x}_2^4 \otimes \underline{x}_3^4)) \\ & + (\Delta_\lambda^{32}(a) \otimes I)(\bar{x}_3 \otimes \bar{x}_4)(\underline{x}_1^3 \otimes \underline{x}_2^3) \\ & = (a \otimes 1 \otimes 1)(\underline{x}_1^4 \otimes \underline{x}_2^4 \otimes \underline{x}_3^4) + (\Delta_\lambda^{32}(a) \otimes I)(\underline{x}_1^3 \otimes \underline{x}_2^3) \quad \text{por (4.22)}. \end{aligned}$$

Además,

$$(4.40) \quad \begin{aligned} & (I \otimes \Delta_\lambda^{32})(\Delta_\lambda^{33}(a)(\underline{x}_3 \otimes \underline{x}_4))(\bar{x}_1^2 \otimes \bar{x}_2^2) + (I \otimes \Delta_\lambda^{33})(\Delta_\lambda^{33}(a)(\underline{x}_3 \otimes \underline{x}_4))(\bar{x}_1^4 \otimes \bar{x}_2^4 \otimes \bar{x}_3^4) \\ & = (a \otimes 1 \otimes 1)(I \otimes \Delta_\lambda^{32})(\underline{x}_3 \otimes \underline{x}_4)(\bar{x}_1^2 \otimes \bar{x}_2^2) + (I \otimes \Delta_\lambda^{33})(\underline{x}_3 \otimes \underline{x}_4)(\bar{x}_1^4 \otimes \bar{x}_2^4 \otimes \bar{x}_3^4) \\ & = (a \otimes 1 \otimes 1)(\underline{x}_1^4 \otimes \underline{x}_2^4 \otimes \underline{x}_3^4) \quad \text{por (4.30)} \end{aligned}$$

De aquí, por (4.37), (4.39) y (4.40), podemos concluir que

$$(4.41) \quad \begin{aligned} & (I \otimes \Delta_\lambda^{32})(\Delta_\lambda^{32}(a)\underline{x}_2)(\bar{x}_1^2 \otimes \bar{x}_2^2) + (I \otimes \Delta_\lambda^{33})(\Delta_\lambda^{32}(a)\underline{x}_2)(\bar{x}_1^4 \otimes \bar{x}_2^4 \otimes \bar{x}_3^4) \\ & = (\Delta_\lambda^{32} \otimes I)(\Delta_\lambda^{32}(a)\bar{x}_2)(\underline{x}_1^3 \otimes \underline{x}_2^3) + (\Delta_\lambda^{33} \otimes I)(\Delta_\lambda^{33}(a)\bar{x}_2)(\underline{x}_1^4 \otimes \underline{x}_2^4 \otimes \underline{x}_3^4) + (\Delta_\lambda^{32}(a) \otimes I)(\underline{x}_1^3 \otimes \underline{x}_2^3). \end{aligned}$$

Observemos que si consideramos nulas todas las componentes de  $X$ , salvo  $x_1^3 \otimes x_2^3$ , podemos concluir de (4.41) que,  $(\Delta_\lambda^{32}(a) \otimes I)(x_1^3 \otimes x_2^3) = 0$ , lo cual nos permite concluir que  $\Delta_\lambda^{32}(a) = 0$  para todo  $a \in A$ .

De manera totalmente análoga demostramos que  $\Delta_\rho^{31} = 0$ , lo cual concluye la prueba.  $\square$

En vista de la proposición (7.69), no es posible dar una interpretación categórica directa para las  $\varepsilon$ -bialgebras de multiplicadores, de forma analoga a la ya existente para las  $\varepsilon$ -biálgebras. Queda así abierto el problema de encontrar una caracterización categórica de las  $\varepsilon$ -bialgebras de multiplicadores, problema que será explorado en un trabajos posteriores.

## Biálgebras de Lie de derivadores

En este capítulo proponemos el concepto de *biálgebra de Lie de derivadores*, la cual es una generalización de la noción de biálgebra de Lie y presentamos una relación entre  $\varepsilon$ -bialgebras de multiplicadores y bialgebras de Lie de derivadores.

Sea  $k$  un cuerpo arbitrario, todos los espacios vectoriales y productos tensoriales considerados en este capítulo son sobre  $k$ .

### 1. Biálgebras de Lie de derivadores

DEFINICIÓN 8.1. Una *biálgebra de Lie de derivadores* es una colección de datos  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot], \delta, \zeta, T_1, T_2)$  donde:

- $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$  es un álgebra de Lie,
- $\delta, \zeta : \mathfrak{g} \rightarrow \text{Der}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})$  son derivaciones y
- $T_1, T_2 : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$  son aplicaciones lineales;

Estos datos sujetos a las siguientes condiciones:

- **Antisimetría.** Las aplicaciones lineales  $\delta, \zeta$  son *antisimétricas*, esto es, para todo  $x \in \mathfrak{g}$

$$\tau \circ \delta_a = -\delta_a \text{ y } \tau \circ \zeta^b = -\zeta^b.$$

- **CoJacobi generalizada.** Para todo  $a, b, x \in \mathfrak{g}$ ,

$$(1.1) \quad (Id + \sigma + \sigma^2)(\zeta^b \otimes Id)(T_1(a \otimes x)) = (Id + \sigma + \sigma^2)(\delta_a \otimes Id)(\tau(T_2(x \otimes b))).$$

Donde  $\zeta^a$  y  $\delta_b$  denotan  $\zeta(a)$  y  $\delta(b)$  respectivamente,  $\tau : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$  denota el flip y  $\sigma = (Id \otimes \tau)(\tau \otimes Id)$  la permutación cíclica.

El par  $(\delta, \zeta)$  será llamado el *co-corchete* de  $\mathfrak{g}$  y las aplicaciones  $T_1, T_2$  *operadores de entrelazamiento*.

Recordemos la definición de biálgebra de Lie,

DEFINICIÓN 8.2. Una biálgebra de Lie sobre  $k$ , es un triple  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot], \delta)$  donde  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$  es una  $k$ -álgebra de Lie,  $\delta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$  es una derivación y se satisfacen las siguientes condiciones,

- **(Antisimetría)**  $\tau \circ \delta = -\delta$  y
- **(CoJacobi)**  $(Id + \sigma + \sigma^2)(\delta \otimes Id)\delta = 0$ .

EJEMPLO 8.3. Si  $\mathfrak{g}$  es una álgebra de Lie unidimensional todas las estructuras de biálgebra de Lie son triviales, esto es, nulas.

EJEMPLO 8.4. Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie simple,  $\Delta$  un sistema de raíces. Definamos  $r = \sum_{\alpha \in \Delta^+} e_\alpha \wedge e_{-\alpha}$ . La derivación interna determinada por  $r$  es una estructura de bialgebra de Lie sobre  $\mathfrak{g}$ .

EJEMPLO 8.5. Sea  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot], \beta)$  una biálgebra de Lie y consideremos  $\alpha : \mathfrak{g} \rightarrow k$  un funcional lineal no nulo. Definamos

$$\delta, \zeta : \mathfrak{g} \rightarrow \text{Der}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}) \text{ por } \delta(x) = \zeta(x) = \alpha(x)\beta$$

y

$$T_1, T_2 : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \text{ por } T_1(a \otimes x) = \alpha(a)\beta(x) \text{ y } T_2(x \otimes b) = \alpha(b)\beta(x).$$

La colección  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot], \delta, \zeta, T_1, T_2)$  es una biálgebra de Lie de derivadores.

EJEMPLO 8.6. Consideremos  $\mathfrak{g}$  un algebra de Lie de dimensión 2. Sea  $\{X, Y\}$  base de  $\mathfrak{g}$  tal que  $[X, Y] = X$ . Consideremos la derivación  $\beta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$  definida por  $\beta(X) = X \wedge Y$  y  $\beta(Y) = 0$ . Definamos el par de operadores  $\iota_X : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$  y  $\iota_Y : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$  por  $\iota_X(Z) = Z \wedge X$  y  $\iota_Y(Z) = Z \wedge Y$ , respectivamente. Definamos  $\delta = \zeta$  como  $\delta(X) = \iota_Y$  y  $\delta(Y) = X$ , luego extendemos por linealidad. Claramente  $\delta$  es una derivación de  $\mathfrak{g}$  con valores en  $\text{Der}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})$ . Si consideramos  $T_1 = T_2 = Id : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ , entonces  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot], \delta, \delta, Id, Id)$  forman una bialgebra de Lie de derivadores. La verificación se deja al lector, basta observar que cada uno de los lados de la igualdad (1.1) se anulan.

Más ejemplos de *biálgebras de Lie de derivadores* se darán en la próxima sección usando el teorema 8.9.

## 2. Biálgebras infinitesimales de multiplicadores y biálgebras de Lie de derivadores

En esta sección describiremos una forma de obtener biálgebras de Lie de multiplicadores en una manera similar a la cual en [A2] se obtienen biálgebras de Lie a partir de bialgebras infinitesimales.

DEFINICIÓN 8.7. Sea  $(A, \mu, \Delta)$  una biálgebra infinitesimal de multiplicadores. El *bibalanceador* de  $A$  es la aplicación lineal  $\mathbb{B} : A \rightarrow \text{End}(A \otimes A)^2$  tal que  $\mathbb{B}(a) = (\underline{\mathbb{B}}(a), \overline{\mathbb{B}}(a))$ , donde

$$(2.1) \quad \underline{\mathbb{B}}(a)(x \otimes y) = (x \otimes 1)\tau\Delta(y)(1 \otimes a) - \tau\Delta(y)(1 \otimes ax) + (1 \otimes y)\Delta(x)(a \otimes 1) - \Delta(x)(ay \otimes 1),$$

y

$$(2.2) \quad \overline{\mathbb{B}}(a)(x \otimes y) = (xa \otimes 1)\tau\Delta(y) - (a \otimes 1)\tau\Delta(y)(1 \otimes x) + (1 \otimes ya)\Delta(y) - (1 \otimes a)\Delta(x)(y \otimes 1).$$

Decimos que  $\mathbb{B}$  es *simétrica* si, para todo  $a \in A$ , se cumple  $\underline{\mathbb{B}}(a) = \underline{\mathbb{B}}(a) \circ \tau$  y  $\overline{\mathbb{B}}(a) = \overline{\mathbb{B}}(a) \circ \tau$ . Decimos que  $A$  es *bibalanceada* si su bibalanceador es nulo.

PROPOSICIÓN 8.8. Sea  $(A, \mu, \Delta)$  una biálgebra infinitesimal de multiplicadores. Definamos las siguientes aplicaciones lineales

$$(2.3) \quad \delta : A \rightarrow \text{Hom}_k(A, A \otimes A), \quad x \mapsto \delta_a(x) := \Delta(x)(a \otimes 1) - \tau(\Delta(x)(a \otimes 1)),$$

$$(2.4) \quad \zeta : A \rightarrow \text{Hom}_k(A, A \otimes A), \quad x \mapsto \zeta^a(x) := (1 \otimes a)\Delta(x) - \tau((1 \otimes a)\Delta(x)).$$

Entonces,

$$(2.5) \quad \delta_a[x, y] = x \cdot \delta_a(y) - y \cdot \delta_a(x) + \underline{\mathbb{B}}(a)(y \otimes x) - \underline{\mathbb{B}}(a)(x \otimes y),$$

y

$$(2.6) \quad \zeta^a[x, y] = x \cdot \zeta^a(y) - y \cdot \zeta^a(x) + \overline{\mathbb{B}}(a)(y \otimes x) - \overline{\mathbb{B}}(a)(x \otimes y).$$

DEMOSTRACIÓN. Si  $a, x, y \in A$  entonces

$$\begin{aligned} \delta_a[x, y] &= \Delta([x, y])(a \otimes 1) - \tau\Delta([x, y](a \otimes 1)) \\ &= \Delta(xy - yx)(a \otimes 1) - \tau(\Delta(xy - yx)(a \otimes 1)), \quad \text{and since } \Delta \text{ is a derivation,} \\ &= (x \otimes 1)\Delta(y)(a \otimes 1) + \Delta(x)(a \otimes y) - (y \otimes 1)\Delta(x)(a \otimes 1) - \Delta(y)(a \otimes x) \\ &\quad - \tau((x \otimes 1)\Delta(y)(a \otimes 1)) - \tau(\Delta(x)(a \otimes y)) + \tau((y \otimes 1)\Delta(x)(a \otimes 1)) + \tau(\Delta(y)(a \otimes x)). \end{aligned}$$

De otro lado,

$$\begin{aligned} x \cdot \delta_a(y) &= (ad_x \otimes 1 + 1 \otimes ad_x)\delta_a(y) \\ &= (x \otimes 1)\delta_a(y) - \delta_a(y)(x \otimes 1) + (1 \otimes x)\delta_a(y) - \delta_a(y)(1 \otimes x) \\ &= (x \otimes 1)\Delta(y)(a \otimes 1) - \tau((1 \otimes x)\Delta(y)(a \otimes 1)) - \Delta(y)(ax \otimes 1) + \tau(\Delta(y)(a \otimes x)) \\ &\quad + (1 \otimes x)\Delta(y)(a \otimes 1) - \tau((x \otimes 1)\Delta(y)(a \otimes 1)) - \Delta(y)(a \otimes x) + \tau(\Delta(y)(ax \otimes 1)). \end{aligned}$$

También tenemos que,

$$\begin{aligned} y \cdot \delta_a(x) &= (y \otimes 1)\Delta(x)(a \otimes 1) - \tau((1 \otimes y)\Delta(x)(a \otimes 1)) - \Delta(x)(ay \otimes 1) + \tau(\Delta(x)(a \otimes y)) \\ &\quad + (1 \otimes y)\Delta(x)(a \otimes 1) - \tau((y \otimes 1)\Delta(x)(a \otimes 1)) - \Delta(x)(a \otimes y) + \tau(\Delta(x)(ay \otimes 1)), \end{aligned}$$

entonces, por definición del bibalanceador, obtenemos (2.5). De la misma manera obtenemos la ecuación (2.6).  $\square$

TEOREMA 8.9. *Sea  $(A, \mu, \Delta)$  una biálgebra infinitesimal de multiplicadores. Si el bibalanceador de  $A$  es simétrico, entonces las aplicaciones lineales*

$$(2.7) \quad \delta : A \rightarrow \text{Der}(A, A \otimes A), \quad x \mapsto \delta_a(x) := (1 \otimes a)\Delta(x) - \tau((1 \otimes a)\Delta(x)),$$

$$(2.8) \quad \zeta : A \rightarrow \text{Der}(A, A \otimes A), \quad x \mapsto \zeta^a(x) := \Delta(x)(a \otimes 1) - \tau(\Delta(x)(a \otimes 1)),$$

están bien definidas, donde  $\delta_a := \delta(a)$  y  $\zeta^a := \zeta(a)$ . Mas aún, si definimos

$T_1, T_2 : A^{\text{Lie}} \otimes A^{\text{Lie}} \rightarrow A^{\text{Lie}} \otimes A^{\text{Lie}}$  por  $T_1(u \otimes v) = (1 \otimes u)\Delta(v)$  y  $T_2(u \otimes v) = \Delta(u)(v \otimes 1)$ , entonces la colección  $(A, m - m \circ \tau, \delta, \zeta, T_1, T_2)$  es una biálgebra de Lie de derivadores.

DEMOSTRACIÓN. Dado que el bibalanceador de  $A$  es simétrico, por la proposición 8.8, las aplicaciones  $\delta$  y  $\zeta$  son derivaciones que toman valores en el espacio de derivaciones de  $A^{\text{Lie}}$

con valores en el  $A^{Lie}$ -módulo  $A \otimes A$ . Basta demostrar entonces que se satisface coJacobi generalizada. En efecto, sean  $a, b, x \in A$ , usando la notación de Sweedler

$$\begin{aligned}
(2.9) \quad (\zeta^b \otimes Id)(T_1(a \otimes x)) &= (\Delta \otimes Id)((1 \otimes a)\Delta(x))(b \otimes 1 \otimes 1) \\
&\quad - (\tau \otimes id)((\Delta \otimes Id)((1 \otimes a)\Delta(x))(b \otimes 1 \otimes 1)) \\
&= x_{(1)(1)}b \otimes x_{(1)(2)} \otimes ax_{(2)} - x_{(1)(2)} \otimes x_{(1)(1)}b \otimes ax_{(2)}.
\end{aligned}$$

De otro lado,

$$\begin{aligned}
(2.10) \quad (\delta_a \otimes Id)(\tau(T_2(x \otimes b))) &= (1 \otimes a \otimes 1)(\Delta \otimes Id)(\tau(\Delta(x)(b \otimes 1))) \\
&\quad - (\tau \otimes id)((1 \otimes a \otimes 1)(\Delta \otimes Id)(\tau(\Delta(x)(b \otimes 1)))) \\
&= x_{(2)(1)} \otimes ax_{(2)(2)} \otimes x_{(1)}b - ax_{(2)(2)} \otimes x_{(2)(1)} \otimes x_{(1)}b.
\end{aligned}$$

Luego, dado que  $\Delta$  es coasociativa (2.1), entonces  $x_{(1)(1)}b \otimes x_{(1)(2)} \otimes ax_{(2)} = x_{(1)}b \otimes x_{(1)(2)} \otimes ax_{(2)}$ . De aquí, se sigue fácilmente que  $(Id + \sigma + \sigma^2)(\zeta^b \otimes Id)(T_1(a \otimes x)) = (Id + \sigma + \sigma^2)(\delta_a \otimes Id)(\tau(T_2(x \otimes b)))$ .  $\square$

## Bibliografía

- [A1] M. AGUIAR, *Infinitesimal Hopf algebras*, Contemporary Mathematics **267**, 1 - 30 (2000).
- [A2] M. AGUIAR, *On the associative analog of Lie bialgebras*, J. Algebra **244**, 492–532 (2001).
- [A3] M. AGUIAR, *Infinitesimal bialgebras, pre-Lie and dendriform algebras*. "Hopf Algebras", Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics **237**, 1-33 (2004).
- [AM] N. ANDRUSKIEWITSCH and J. M. MOMBELLI, *Examples of weak Hopf algebras arising from vacant double groupoids*, Nagoya Math. J. **181** (2006).
- [AN1] N. ANDRUSKIEWITSCH and S. NATALE, *Double categories and quantum groupoids*, Publ. Mat. Urug. **10**, 11-51 (2005).
- [AN2] N. ANDRUSKIEWITSCH and S. NATALE, *Tensor categories attached to double groupoids*, Adv. Math. **200**, 539-583 (2006).
- [AN3] N. ANDRUSKIEWITSCH and S. NATALE, *The structure of double groupoids*, J. Pure Appl. Algebra **213**, 1031–1045 (2009).
- [AOT] N. ANDRUSKIEWITSCH, J. A. OCHOA and A. Tiraboschi, *On slim double Lie groupoids*, arXiv:0808.3147v1 [math.DG].
- [B] N. BOURBAKI, *Topologie Générale*, Masson, Paris (1990).
- [B] R. BROWN, *Crossed complexes and homotopy groupoids as non commutative tools for higher dimensional local-to-global problems*, Fields Inst. Commun. **43**, 101–130, Amer. Math. Soc. (2004).
- [BJ] R. BROWN and G. JANELIDZE, *Galois theory and a new homotopy double groupoid of a map of spaces*, Appl. Categ. Structures **12**, 63–80 (2004).
- [BM] R. BROWN and K. MACKENZIE, *Determination of a double Lie groupoid by its core diagram*, J. Pure Appl. Algebra **80**, 237–272 (1992).
- [BS] R. BROWN and C. SPENCER, *Double groupoids and crossed modules*, Cahiers Topo. et Géo. Diff. **XVII**, 343–364 (1976).
- [D] DRAGULETE, OANA MIHAELA Some applications of symmetries in differential geometry and dynamical systems, Ph.D Theses, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne EPFL, no 3937 (2007).
- [Eh] C. EHRESMANN, *Catégories doubles et catégories structurées*, C. R. Acad. Sci. Paris **256**, 1198–1201 (1963). *Catégories structurées* Ann. Sci. École Norm. Sup. **80**, 349–426 (1963).
- [H] P. J. HIGGINS, *Categories and groupoids*, Repr. Theory Appl. Categ. **7** 1–178 (2005). Reprint of the 1971 *Notes on categories and groupoids*, Van Nostrand Reinhold, London.
- [JV] K. JANSSEN and J. VERCRUYSE, *Multiplier Hopf and Bi-algebras*, arXiv:0901.3103v2[RA].
- [K] C. KASSEL, *Quantum groups*, Grad. Texts in Math., vol. 155, Springer, New York, 1995.
- [KN1] S. KOBAYASHI and K. Nomizu, *Foundations of differential geometry. Vol. I*. Reprint of the 1963 original. Wiley Classics Library. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996.
- [KN2] S. KOBAYASHI and K. Nomizu, *Foundations of differential geometry. Vol. II*. Reprint of the 1969 original. Wiley Classics Library. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996.
- [K1] Y. KOSSMANN-SCHWARZBACH, *exact Gerstenhaber algebras and Lie bialgebroids*, Acta Appl. Math, **41**, 153-165, 1995.

- [KU] K. KONIECZNA, P. URBANSKI, *Double vector bundles and Duality*, Archivum Mathematicum (BRNO), Tomus 34 (1998), 59 - 95.
- [L] S. LANG, *Introduction to differentiable manifolds*, Springer-Verlag New York (2002).
- [LM] P. LIBERMANN AND C-M. MARLE, *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics*, D. Reidel Publishing Company, 1987.
- [LW1] J.H. LU and A. WEINSTEIN, *Poisson Lie groups, dressing transformations, and Bruhat decompositions*. J. Differential Geom. **31**, no. 2, 501–526 (1990).
- [LW2] J.-H. LU AND A. WEINSTEIN, *Groupoïdes symplectiques doubles des groupes de Lie-Poisson*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **309**, 951–954 (1989).
- [M1] K. MACKENZIE, *Double Lie algebroids and Second-order Geometry, I*, Adv. Math. **94**, 180–239 (1992).
- [M2] K. MACKENZIE, *On symplectic double groupoids and the duality of Poisson groupoids*, Internat. J. Math. **10**, 435–456 (1999).
- [M3] K. MACKENZIE, *On symplectic double groupoids and the duality of Poisson groupoids*, Int. Journal of Math. **10**, 435 - 456, 1999.
- [M4] K. MACKENZIE, *Double Lie algebroids and Second-order Geometry, II*, Adv. Math. **154**, 46–75 (2000).
- [M5] K. MACKENZIE, *General Theory of Lie Groupoids and Algebroids*, London Mathematical Society Lecture Note 213, Cambridge University Press (2005).
- [M6] K. MACKENZIE, *Ehresman doubles and Drinfle'd doubles for Lie algebroids and Lie bialgebroids*, arXiv:math/0611799v2 [math.DG].
- [MX] K. Mackenzie and P. Xu, *Lie Bialgebroids and Poisson Groupoids*, Duke Math J., **73**, 415-452, 1994.
- [MI] S. MAC LANE, *Categories for the working mathematician*, 2nd ed., Grad. Texts in Math., vol. 5, Springer, New York, 1998.
- [M] S. MAJID, *Foundations of quantum group theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1995).
- [MM] I. MOERDIJK AND J. MRČUN, *Introduction to foliations and Lie groupoids*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 91, Cambridge University Press (2003).
- [Pa] A. PATERSON, *Groupoids, inverse semigroups, and their operator algebras*, Progress in Mathematics, 170. Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 1999.
- [P] J. PRADINES, *Fibrés vectoriels doubles et calcul des jets non holonomes*, Esquisses Math. **29**, Université d'Amiens, Amiens, (1977).
- [Re] J. RENAULT, *A groupoid approach to C\*-algebras*, Springer, LNM no. 793, (1980).
- [Ri] G. S. RINEHART, *Differential forms on general commutative algebras*. Trans. Amer. Math. Soc. **108**, 195–222 (1963).
- [T] J. L. TU, *Non-Hausdorff groupoids, proper actions and K-theory*, Documenta Math. **9**, 565–597 (2004).
- [VD1] A. VAN DAELE, *Multiplier Hopf algebras*, Transactions of AMS, **342**, 917–932 (1994).
- [VD2] A. VAN DAELE, *An algebraic framework for group duality*, **140**, 323 - 366 (1998).
- [WW] J. WIEGOLD and A.G. WILLIAMSON, *The Factorizations of the Alternating and Symmetric Groups*, Math. Z. **175**, 171–179 (1980).
- [X] P. XU, *Gerstenhaber Algebras and BV-Algebras in Poisson Geometry*, Commun. Math. Phys., **200**, 545-560, 1999.