Propiedades L^p-Improving de Algunos Operadores de Convolución con Medidas Singulares en $\mathbb{R}^n$ y en $\mathbb{H}^n$.

Pablo Alejandro Rocha

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía y Física como parte de los requerimientos para la obtención del grado de Doctor en Matemática de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Julio de 2009

Director: Dr. Tomás Godoy.

Resumen.

En este trabajo estudiamos algunos operadores de convolución con medidas singulares tanto en el contexto euclídeo como en el grupo de Heisenberg $\mathbb{H}^n$. Mediante técnicas de interpolación compleja y el análisis de la transformada de Fourier (la euclídea o bien la inherente al grupo de Heisenberg según el caso) de estas medidas, obtenemos propiedades L^p-improving para tales operadores. En algunos casos se caracteriza exactamente el conjunto tipo correspondiente. Esto es logrado via la obtención de estimaciones sharp para ciertas integrales oscilantes asociadas a las transformadas de Fourier mencionadas. Como subproducto de estas estimaciones se obtiene además, en el caso euclídeo estudiado, un teorema de restricción $L^p - L^2$ para la transformada de Fourier.

Abstract

In this work we study some convolution operators with singular measures in the context of the euclidean space as well as in the Heisenberg group $\mathbb{H}^n$. By means of techniques of complex interpolation and the analysis of the Fourier transform of these measures (the euclidean or the inherent in the Heisenberg group depending on case) we obtain L^p-improving properties for such operators. In some cases we get a complete description of the corresponding type set. This is achieved via the obtaining of sharp estimates for certain oscillatory integrals associated to the mentioned Fourier transform. From these estimates we also obtain, in the euclidean case, a restriction theorem for the Fourier transform.

PALABRAS CLAVE: Análisis de Fourier. Operadores de convolución. Medidas singulares. Análisis armónico no conmutativo. El grupo de Heisenberg. Funciones esféricas.

CÓDIGO DE CLASIFICACIÓN: 42B10, 47B38, 43A80, 43A90.

A mi padre y a mis hermanos.

AGRADECIMIENTOS

A mi Director Tomás Godoy por su generosidad, sus enseñanzas, guía en este trabajo y por esas agradables conversaciones, café de por medio, en las cuales la matemática se revelaba de singular manera, fueron y son de apreciable valor para mi.

A las personas que integran el grupo de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Armónico por ser tan dispuestas.

A la FaMAF, al CIEM y al CONICET por haber contribuido en mi formación académica.

A mi Padre cuya constancia, esfuerzo y comprensión han hecho posible este logro.

A mis hermanos.

A mis amigos y compañeros.

Índice

1. Introducción

1.1. Transformada de Fourier y operadores de convolución en $\mathbb{R}^n$.

Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ la transformada de Fourier de f es la función $\widehat{f}$ definida por

$$\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-2\pi i x\cdot y}dy$$

la cual converge absolutamente para cada $x \in \mathbb{R}^n$, más aún $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$ con

$$\left\|\widehat{f}\right\|_\infty \leq \|f\|_1 ,$$

siendo $C_o(\mathbb{R}^n)$ el espacio de Banach de las funciones continuas que se desvanecen en el infinito.

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$\left\|\widehat{f}\right\|_2 = \|f\|_2 .$$

Por lo tanto la transformada de Fourier se extiende a todo $L^2(\mathbb{R}^n)$, por el teorema de convexidad de Riesz-Thorin obtenemos

$$\left\|\widehat{f}\right\|_{p'} \leq \|f\|_p$$

para $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 \leq p \leq 2$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, esto permite extender la noción de $\widehat{f}$ a tales $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Otra consecuencia del teorema de convexidad de Riesz, aunque no relacionada directamente con la transformada de Fourier es la desigualdad de Young, la cual será útil más adelante.

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

cuando $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$.

La definición de la transformada de Fourier se extiende a medidas de Borel finitas, i.e.: $|\mu|(\mathbb{R}^n) < \infty$, donde para cada conjunto E de Borel se define

$$|\mu|(E) := \sup\{\sum_{j=1}^{\infty} |\mu(E_j)| : E_j \textit{ es una partición de } E\},$$

si μ es una tal medida sobre $\mathbb{R}^n$ definimos $\widehat{\mu}$ por

$$\widehat{\mu}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot y}d\mu(y)$$

resultando $\widehat{\mu}$ una función continua y acotada en todo $\mathbb{R}^n$.

1.1.1. Problemas A y B.

Sea U un conjunto abierto y acotado en $\mathbb{R}^n$ y $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ una función continua. Sea μ_U la medida de Borel sobre $\mathbb{R}^{n+m}$ soportada sobre el gráfico de φ , definida por

$$\mu_U(E) = \int_U \chi_E(x, \varphi(x))dx \tag{1.1}$$

donde dx denota la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^n$. Sea

$$\Sigma = \{(x, \varphi(x)) : x \in U\} \tag{1.2}$$

Consideramos los siguientes problemas:

Problema A. Sea Σ una subvariedad suave de $\mathbb{R}^n$ y sea μ una medida sobre Σ. Se entiende por operador de restricción de la transformada de Fourier a una superficie Σ de $\mathbb{R}^n$, a la aplicación $\mathcal{R} : f \to \widehat{f}\,|_\Sigma$, donde

$$\mathcal{R}f(\xi) = \widehat{f}\,|_\Sigma\,(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx,\ \forall \xi \in \Sigma.$$

En este caso el operador está bien definido para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, pero no tiene sentido para $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ genérica. En general, para $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq 2$, la restricción $\widehat{f}\,|_\Sigma$ no tiene sentido, pues $\widehat{f}$ está definida para casi todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Sean Σ y $\mathcal{R}$ como antes, se dice que Σ tiene la propiedad de restricción si para algún par (p, q) con $p > 1$ y para cada $f \in S(\mathbb{R}^n)$ se tiene

$$\|\mathcal{R}f\|_{L^q(\Sigma_0, d\mu)} \leq A_{p,q}(\Sigma_0)\, \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

para todo conjunto Σ_0 de clausura compacta contenido en Σ. Si este es el caso, $\mathcal{R}$ se extiende al $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Como $|\mathcal{R}f| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$, esta estimación resulta obvia si $p = 1$ y $q = \infty$. Por eso se excluye el caso $p = 1$ de la definición.

Además, si $1 \leq q \leq \infty$,

$$\|\mathcal{R}f\|_{L^q(\Sigma_0)} = \left[\int_{\Sigma_0} \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx \right|^q d\mu(\xi) \right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \left[\int_{\Sigma_0} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx \right)^q d\mu(\xi) \right]^{\frac{1}{q}} = \mu(\Sigma_0)^{\frac{1}{q}}\, \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Estamos interesados en determinar propiedades de restricción L^p para la subvariedad $\Sigma \subset \mathbb{R}^4$ dada por (1.2) donde la función $\varphi : \mathbb{R}^2 - \{0\} \to \mathbb{R}^2$ es homogénea no isotrópica y además satisface otras condiciones técnicas adicionales (ver sección 3). En este trabajo, obtenemos estimaciones $L^p\,(\mathbb{R}^4) - L^2(\Sigma, d\mu)$ óptimas en p para el operador $\mathcal{R}$.

Problema B. Consideremos una medida de Borel finita μ sobre $\mathbb{R}^n$, ie:

$$\|\mu\|_1 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} d\,|\mu| < \infty$$

y sea T_μ el operador

$$T_\mu f(x) = \mu * f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)d\mu(y)$$

El problema es determinar para cuales pares (p,q) el operador T_μ es acotado de $L^p(\mathbb{R}^n)$ en $L^q(\mathbb{R}^n)$.

Por la desigualdad integral de Minkowski se tiene que

$$\|T_\mu f\|_p \leq \|\mu\|_1 \|f\|_p$$

para, $1 \leq p = q \leq \infty$.

En general, indicamos

$$E_\mu = \left\{ \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q} \right) : \|T_\mu\|_{p,q} < \infty, 1 \leq p, q \leq \infty \right\}$$

E_μ es un subconjunto del cuadrado unidad, que por lo anterior contiene la diagonal principal. Nosotros estamos interesados en el estudio del conjunto E_μ para $\mu = \mu_U$ dada por (1.1) donde φ satisface ciertas condiciones. Decimos que la medida μ es L^p-*improving* si el conjunto E_μ no se reduce a la diagonal $\frac{1}{p} = \frac{1}{q}$. Para este caso nosotros obtenemos propiedades L^p-improving para la medida μ.

El problema A ha sido ampliamente estudiado, en diferentes casos, por varios autores. Para $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ por C. Fefferman en [5], para $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ por P. Tomas y E. Stein en [23] y [17] respectivamente, para superficies cuadráticas con curvatura gaussiana nunca nula, por R. Strichartz en [20] . El caso de variedades $\Sigma \subset \mathbb{R}^{2n}$ compactas de dimensión n, fue estudiado por E. Prestini en [12] bajo la suposición que para cada $x \in \Sigma$ existe una carta local $X(x_1, ..., x_n)$ alrededor de x satisfaciendo que los vectores $\left\{ \frac{\partial X}{\partial x_i} \right\}_{i=1}^n$ y $\left\{ \frac{\partial^2 X}{\partial x_i x_j} \right\}_{i,j=1}^n$ generan $\mathbb{R}^{2n}$. El caso de variedades bidimensionales, $\Sigma = \{(x, \varphi(x)) : x \in U \subset \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^4$, fue estudiado por M. Christ en [1] donde un teorema de restricción es dado bajo la siguiente suposición:

Para cada $x \in \mathbb{R}^2$ y $\theta \in \mathbb{R}$, si $\det(\langle \varphi^{(2)}(x), (\cos\theta, \sin\theta) \rangle) = 0$ (donde $\langle . \rangle$ denota el producto interno en $\mathbb{R}^2$) entonces

$$\frac{d}{d\theta} \det(\langle \varphi^{(2)}(x), (\cos\theta, \sin\theta) \rangle) \neq 0.$$

Más teoremas de restricción para subvariedades homogéneas de $\mathbb{R}^n$ pueden ser encontradas en [2] y también en [3].

El problema B, considerando allí $\mu = \mu_U$, ha recibido considerable atención. Descripciones explícitas del conjunto E_μ son conocidas en varios casos (ver e.g., [13] y las referencias que allí aparecen). En particular, el caso $n = m$ fue estudiado en [4] donde, para φ suficientemente regular en un entorno de $\overline{U}$, es probado que si cada punto en $\overline{U}$

es elíptico para φ entonces E_μ es el triángulo cerrado con vertices $(0,0)$, $(1,1)$ y $(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$. Punto elíptico puede ser definido como sigue: para $x \in \overline{U}$, considerar la forma cuadrática Q_x sobre $\mathbb{R}^n$ definida por

$$Q_x(\xi) = \det\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j \varphi_j^{(2)}(x)\right), \quad \xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n \tag{1.3}$$

Decimos que $x \in \overline{U}$ es elíptico si $\min_{\xi \in S^{n-1}} |Q_x(\xi)| > 0$, i.e., si para todo $\xi \in S^{n-1}$ la superficie $\Sigma_\xi = \{(y, \langle \varphi(y), \xi \rangle) : y \in U\}$ tiene curvatura gaussiana nunca nula en x (aunque la definición de punto elíptico usada en [4] es diferente de la dada arriba, ellas son equivalentes). Similares resultados acerca del conjunto tipo E_μ están dados en [6] para el caso cuando φ es una función homogénea no isotrópica, en la cual el origen es el único punto no elíptico.

En este trabajo abordamos ambos problemas considerando, para una clase de funciones $\varphi : \mathbb{R}^2 - \{0\} \to \mathbb{R}^2$ satisfaciendo una condición de homogeneidad no isotrópica $\varphi(t^{\alpha_1}x_1, t^{\alpha_2}x_2) = t^m \varphi(x_1, x_2)$, la transformada de Fourier $\widehat{\mu}$ de la medida de Borel sobre $\mathbb{R}^4$ definida por

$$\mu(E) = \int_Q \chi_E(x, \varphi(x)) dx \tag{1.4}$$

donde $Q = \{(t^{\alpha_1}, t^{\alpha_2}s) : 0 < t \leq 1, 0 \leq s_1 < s < s_2 \leq 1\}$. Dando, bajo ciertas hipótesis adicionales sobre φ, una estimación para $\widehat{\mu}$ y de este hecho obtenemos un teorema de restricción para la transformada de Fourier usual al gráfico de $\varphi\,|_Q$, y propiedades L^p- *improving* para el operador $T_\mu f = \mu * f$.

1.2. El problema B en el grupo de Heisenberg

Sea $n \in \mathbb{N}$, el grupo de Heisenberg $\mathbb{H}^n$ es $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ dotado con la ley de grupo

$$(z,t) \cdot (w,s) = (z + w, t + s + \langle z, w \rangle),$$

donde la forma simpléctica $\langle .,. \rangle$ esta definida por

$$\langle z, w \rangle = \frac{1}{2} Im(z \cdot \overline{w}) = \frac{1}{2} Im(\sum_{j=1}^{n} z_j \cdot \overline{w_j}),$$

con el origen como la identidad y el inverso dado por $(z,t)^{-1} = (-z, -t)$. Es claro que $\mathbb{H}^n$ es un grupo no conmutativo. Ahora, damos a $\mathbb{H}^n$ la topología que hereda del producto cartesiano, resultando de esta manera un grupo topológico localmente compacto. La medida de Haar en $\mathbb{H}^n$ es la medida de Lebesgue $dzdt$, luego, para $1 \leq p \leq \infty$ tenemos los conocidos espacios $L^p(\mathbb{H}^n) = L^p(\mathbb{R}^{2n+1})$.

La convolución de dos funciones integrables f y g, sobre $\mathbb{H}^n$, esta definida por

$$f * g(z,t) = \int_{\mathbb{H}^n} f\left((z,t) \cdot (w,s)^{-1}\right) g(w,s) dw ds$$

La convolución da al $L^1(\mathbb{H}^n)$ una estructura de álgebra de Banach, ya que $\mathbb{H}^n$ es no conmutativo dicha álgebra resulta no conmutativa.

En este contexto también vale la desigualdad de Young: sean $f \in L^p(\mathbb{H}^n)$ y $g \in L^q(\mathbb{H}^n)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r} > 1$ entonces $f * g \in L^r(\mathbb{H}^n)$ y

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{H}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{H}^n)} \|g\|_{L^q(\mathbb{H}^n)} .$$

Ahora nos planteamos el siguiente problema:

(C) Dada una distribución K sobre $\mathbb{H}^n$, sea T_K el operador

$$T_K f(z,t) = f * K(z,t)$$

donde la convolución es tomada con respecto a la estructura de grupo en $\mathbb{H}^n$. Considerese ahora estudiar propiedades de acotación L^p o $L^p - \textit{improving}$ del operador en cuestión.

En este contexto se han estudiado operadores análogos a los que se estudian en el caso Euclídeo, por ejemplo, las integrales singulares de tipo Calderón-Zygmund, obteniéndose propiedades de acotación L^p para $1 < p < \infty$, para algunos de estos resultados remitirse al capítulo XII, δ,5 en [18]. También es de interés [10] por las técnicas utilizadas, allí se estudian operadores cuyos núcleos son demasiado singulares para ser del tipo Calderón-Zygmund, pero se compensan convenientemente al introducir una oscilación. Utilizando la transformada de Fourier en $\mathbb{H}^n$ y formas asintóticas uniformes para funciones de Laguerre se obtienen propiedades de acotación $L^2(\mathbb{H}^n)$. Ver también en [10] las referencias que allí aparecen de este problema para el caso Euclídeo.

Nuestro principal interés es considerar el problema análogo al planteado en (B), i.e.:cuando $K = \nu$ es cierta medida de Borel finita sobre $\mathbb{H}^n$. Para tal fin, en la sección 5 damos algunos hechos concernientes con el análisis de Fourier en $\mathbb{H}^n$. En [15] se obtienen propiedades L^p- *improving* de medidas soportadas sobre curvas en $\mathbb{H}^1$, obteniéndose descripciones explícitas del conjunto tipo E_ν, bajo las siguientes condiciones

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \phi_1^{(2)} & \phi_2^{(2)} \\ \phi_1^{(3)} & \phi_2^{(3)} \end{vmatrix}(s) &\neq -\frac{(\phi_1^{(2)}(s))^2}{2}, \qquad \forall s \in I \\
\begin{vmatrix} \phi_1^{(2)} & \phi_2^{(2)} \\ \phi_1^{(3)} & \phi_2^{(3)} \end{vmatrix}(s) &\neq \frac{(\phi_1^{(2)}(s))^2}{2}, \qquad \forall s \in I
\end{aligned}$$

Siendo $\Phi(s) = (s, \phi_1(s), \phi_2(s))$ la curva en la cual ν se soporta.

En este trabajo abordamos este problema considerando una medida ν sobre $\mathbb{H}^n$ soportada sobre el gráfico de una función $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ la cual es radial Lipschitz. Nosotros obtenemos propiedades L^p-improving para ν.

En los siguientes preliminares recopilamos algunos hechos concernientes a la integración fraccionaria, lemas de Van der Corput y al método de interpolación compleja y real, todas técnicas que utilizaremos en este trabajo.

2. Preliminares

2.1. Integración fraccionaria

Consideramos la función x_+^z definida por

$$x_+^z = x^z \chi_{(0,\infty)}(x)$$

Para $Re(z) > -1$, x_+^z es localmente integrable y de crecimiento polinomial, por lo tanto se puede definir la función distribución

$$(x_+^z, f) = \int_0^\infty x^z f(x)dx, \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \tag{2.1}$$

es claro que $z \to (x_+^z, f)$ es analítica para $Re(z) > -1$, pues su derivada con respecto a z es

$$\int_0^\infty x^z \ln(x) f(x)dx.$$

El lado derecho de (2.1) se puede expresar en la forma

$$\int_0^1 x^z (f(x) - f(0))dx + \int_1^\infty x^z f(x)dx + \frac{f(0)}{z+1}$$

El primer término esta definido para $Re(z) > -2$, el segundo para todo z y el tercero para $z \neq -1$. Por lo tanto la funcional (2.1) puede ser continuada analíticamente a $Re(z) > -2$, $z \neq -1$. Podemos proceder similarmente y continuar x_+^z en la región $Re(z) > -(n+1)$, $z \neq -1, -2, ..., -n$, por medio de la siguiente expresión

$$\int_0^\infty x^z f(x)dx = \int_0^1 x^z \left[f(x) - f(0) - xf'(0) - ... - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) \right] dx$$

$$+ \int_1^\infty x^z f(x)dx + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k-1)}(0)}{(k-1)!(z+k)} \tag{2.2}$$

Esta ecuación muestra que cuando tratamos a (x_+^z, f) como una función de la variable z, esta posee polos simples en $z = -1, -2, ...,$ y su residuo en $z = -k$ es $\frac{f^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}$. Siendo $f^{(k-1)}(0) = (-1)^{(k-1)}(\delta^{(k-1)}, f)$, podemos decir que la funcional x_+^z tiene un polo simple en $z = -k$, y su residuo es $\frac{(-1)^{(k-1)}\delta^{(k-1)}}{(k-1)!}$ $(k = 1, 2, ...)$.

Ahora consideramos la funcional correspondiente a $x_-^z = |x|^z \chi_{(-\infty,0)}(x)$, esta función define, para $Re(z) > -1$, una funcional dada por

$$(x_-^z, f) = \int_{-\infty}^0 |x|^z f(x)dx$$

Esta funcional puede ser continuada al semiplano $Re(z) < -1$ de la misma manera que lo fue x_+^z. Simplemente reemplazando x por $-x$, escribimos (x_-^z, f) en la forma

$$(x_-^z, f(x)) = \int_0^\infty x^z f(-x)dx = (x_+^z, f(-x))$$

con esta ecuación, podemos transferir los resultados obtenidos para x_+^z a esta nueva funcional x_-^z reemplazando $f(x)$ por $f(-x)$ en la expresión apropiada. Entonces la funcional x_-^z esta bien definida y es analítica en el plano entero excepto para $z = -1, -2, ...,$ y que en $z = -k$ esta posee un polo simple con residuo $\frac{\delta^{(k-1)}}{(k-1)!}$ $(k = 1, 2, ...)$.

Con x_+^z y x_-^z construimos la siguiente funcional

$$|x|^z = x_+^z + x_-^z$$

ya que en $z = -k$ ambas x_+^z y x_-^z tienen polos con residuos $\frac{(-1)^{(k-1)}}{(k-1)!}\delta^{(k-1)}$ y $\frac{\delta^{(k-1)}}{(k-1)!}$ respectivamente, de esto se sigue que $|x|^z$ posee polos solo en $z = -1, -3, -5, ...,$ el residuo de este funcional en $z = -(2m+1)$ es $\frac{2\delta^{(2m)}}{(2m)!}$.Estas singularidades se pueden eliminar al dividir tales funcionales por una función ordinaria de z con polos simples en los mismos puntos. Tal función se obtiene aplicando a la funcional en cuestión una función $f_0 \in S$.

Para x_+^z la función f_0 debe ser tal que (x_+^z, f_0) tiene residuo no nulo en los mismos puntos. De la ecuación (2.2) se sigue que todas las derivadas de f_0 deben ser no nulas en $x = 0$.

Tomando e^{-x} da

$$(x_+^z, e^{-x}) = \int_0^\infty x^z e^{-x}dx = \Gamma(z+1)$$

la cual converge para $Re(z) > -1$, por medio de (2.2) extendemos $\Gamma((\cdot)+1)$ a todo el plano complejo excepto para $z = -1, -2, -3, ...,$ manteniendo la notación para tal extensión.

Para x_-^z es conveniente tomar e^x obteniendose $(x_-^z, e^x) = \int_{-\infty}^0 |x|^z e^x dx = \int_0^\infty x^z e^{-x}dx = \Gamma(z+1)$.

Los polos de $|x|^z$ ocurren en $-1, -3, -5, ...,$ y el residuo en $z = -(2m+1)$ es $\frac{2\delta^{(2m)}}{(2m)!}$. Por lo tanto f_0 debe ser escogida de tal manera que sus derivadas de orden par son no nulas. Tomando e^{-x^2} obtenemos el factor normalizador $(|x|^z, e^{-x^2}) = \Gamma(\frac{z+1}{2})$. Normalizamos y obtenemos las siguientes funciones enteras de z:

$$\frac{x_+^z}{\Gamma(z+1)}, \frac{x_+^z}{\Gamma(z+1)}, \frac{|x|^z}{\Gamma(\frac{z+1}{2})}$$

Los valores de estas funcionales en los puntos singulares del numerador y del denominador se obtienen calculando el cociente de los respectivos residuos. Haciendo esto, se obtiene que

$$\begin{aligned} \left.\frac{x_+^z}{\Gamma(z+1)}\right|_{z=-k} &= \frac{res_{z=-k}x_+^z}{res_{z=-k}(x_+^z, e^{-x})} = \frac{(-1)^{k-1}\delta^{(k-1)}/(k-1)!}{(-1)^{k-1}(\delta^{(k-1)}, e^{-x})/(k-1)!} = \delta^{(k-1)} \\ \left.\frac{x_-^z}{\Gamma(z+1)}\right|_{z=-k} &= \frac{res_{z=-k}x_-^z}{res_{z=-k}(x_-^z, e^{x})} = \frac{\delta^{(k-1)}/(k-1)!}{(\delta^{(k-1)}, e^{-x})/(k-1)!} = (-1)^{k-1}\delta^{(k-1)} \end{aligned}$$

$$\left.\frac{|x|^z}{\Gamma(\frac{z+1}{2})}\right|_{z=-(2m+1)} = \frac{res_{z=-(2m+1)}\,|x|^z}{res_{z=-(2m+1)}(|x|^z\,, e^{-x^2})} = \frac{2\delta^{(2m)}/(2m)!}{2(\delta^{(2m)}, e^{-x^2})/(2m)!}$$
$$= \frac{(-1)^m\delta^{(2m)}m!}{(2m)!}$$

A continuación calcularemos la transformada de Fourier de la funcional $\frac{|x|^z}{\Gamma(\frac{z+1}{2})}$. Para ello necesitamos introducir las funciones generalizadas $(x+i0)^z$ y $(x-i0)^z$. Estas resultarán ser funciones enteras de z.

Como es sabido la expresión $(x+iy)^z$ es definida por

$$(x+iy)^z = \exp(z\log(x+iy)) = \exp\left\{z\left[\ln|x+iy| + iArg(x+iy)\right]\right\}$$

escogemos $Arg(x+iy) = \arg(x+iy)$, donde -$\pi < \arg w < \pi$. Entonces $(x+iy)^z$ es una función analítica de la variable $w = x+iy$ en el semiplano superior ($y>0$). De la misma manera $(x+iy)^z$ es analítica en el semiplano inferior ($y<0$). Estamos interesados en los límites de aquellas funciones cuando $y\to 0^+$ e $y\to 0^-$. Estos se calculan fácilmente; en efecto,

$$(x+i0)^z = \lim_{y\to 0^+}(x^2+y^2)^{\frac{z}{2}}\exp\left[iz\arg(x+iy)\right] = \left\{\begin{array}{ll} e^{iz\pi}\,|x|^z\,, & x<0 \\ x^z, & x>0 \end{array}\right\} \tag{2.3}$$

$$(x-i0)^z = \lim_{y\to 0^-}(x^2+y^2)^{\frac{z}{2}}\exp\left[iz\arg(x+iy)\right] = \left\{\begin{array}{ll} e^{-iz\pi}\,|x|^z\,, & x<0 \\ x^z, & x>0 \end{array}\right\} \tag{2.4}$$

Estas funciones están definidas para todo número complejo z.

El problema ahora es encontrar las funciones generalizadas correspondientes a estas funciones ordinarias. Denotaremos estas funciones generalizadas también por $(x+i0)^z$ y $(x-i0)^z$.

En términos de las funciones ya familiares x_+^z y x_-^z, para $Re(z) > -1$, podemos escribir

$$(x+i0)^z = x_+^z + e^{iz\pi}x_-^z \tag{2.5}$$

$$(x-i0)^z = x_+^z + e^{-iz\pi}x_-^z \tag{2.6}$$

Estas ecuaciones nos permiten asociar a $(x+i0)^z$ y $(x-i0)^z$ sus correspondientes funciones generalizadas. Por lo tanto las funciones generalizadas $(x+i0)^z$ y $(x-i0)^z$ están definidas para $z \neq -1, -2, ...$

Si comparamos los residuos de x_+^z y x_-^z en $z=-k$, vemos inmediatamente que las singularidades de (2.5) y (2.6) se cancelan. Por lo tanto nuestras nuevas funciones son enteras.

2.1.1. La transformada de Fourier de x_+^z, x_-^z y $|x|^z$.

Nos proponemos calcular la transformada de Fourier de x_+^z para ello, primero nos restringimos a los valores de z tal que $-1 < Re(z) < 0$.

Consideramos la expresión

$$\mathcal{F}\left[x_+^z e^{-\tau x}\right] = \int_0^\infty x^z e^{i\sigma x}e^{-\tau x}dx = \int_0^\infty x^z e^{isx}dx \tag{2.7}$$

donde $s = \sigma + i\tau$ y $\tau > 0$, por lo que $0 < \arg s < \pi$. Es claro que la integral converge absolutamente. Cuando $\tau \to 0^+$, se ve que $x_+^z e^{-\tau x}$ converge en el sentido de las distribuciones a x_+^z, por lo tanto su transformada de Fourier converge a la transformada de Fourier de x_+^z.

Realizando el siguiente cambio de variable en (2.7)

$$isx = -\xi, \qquad isdx = -d\xi$$

obtenemos

$$\mathcal{F}\left[x_+^z e^{-\tau x}\right] = \left(\frac{e^{i(\pi/2)}}{s}\right)^{z+1} \int\limits_L \xi^z e^{-\xi} d\xi,$$

donde el contorno $L = \{\xi = (\tau - i\sigma)x : x \in [0, \infty)\}$ con $0 < \tau$ y $\sigma \in \mathbb{R}$ fijos. De esto se sigue que $-\frac{\pi}{2} < \arg \xi < \frac{\pi}{2}$, notando que $e^{-\xi}$ decae rápidamente en dicha región, entonces por el teorema de Cauchy podemos reemplazar el contorno L por $(0, \infty)$, ie:

$$\int\limits_L \xi^z e^{-\xi} d\xi = \int\limits_0^\infty \xi^z e^{-\xi} d\xi = \Gamma(z+1)$$

por lo tanto

$$\mathcal{F}\left[x_+^z e^{-\tau x}\right] = ie^{iz(\pi/2)}(\sigma + i\tau)^{-z-1}\Gamma(z+1)$$

ya que $-1 < Re(z) < 0$, tenemos que $-1 < Re(-z-1) < 0$. Pasando al limite cuando $\tau \to 0^+$, arribamos a

$$\mathcal{F}\left[x_+^z\right] = ie^{iz(\pi/2)}\Gamma(z+1)(\sigma + i0)^{-z-1} \tag{2.8}$$

Ahora por continuación analítica esta fórmula será valida para todo $z \neq -1, -2, ...$ Dividiendo ambos lados de (2.8) por $\Gamma(z+1)$, obtenemos funciones enteras de z sobre ambos lados de la ecuación, por lo que, para todo z podemos escribir

$$\mathcal{F}\left[\frac{x_+^z}{\Gamma(z+1)}\right] = ie^{iz(\pi/2)}(\sigma + i0)^{-z-1}$$

Insertando la expresión explícita para $(\sigma + i0)^{-z-1}$ dada por (2.5), se tiene que para $z \neq 0, \pm 1, \pm 2, ...$vale la expresión

$$\mathcal{F}\left[x_+^z\right] = i\Gamma(z+1)\left[e^{iz(\pi/2)}\sigma_+^{-z-1} - e^{-iz(\pi/2)}\sigma_-^{-z-1}\right] \tag{2.9}$$

La transformada de Fourier de x_-^z se calcula similarmente. Consideramos primero $-1 < Re(z) < 0$, y calculamos $\mathcal{F}\left[x_-^z e^{-\tau x}\right]$ para $\tau < 0$. Haciendo $\tau \to 0^-$, resulta para $z \neq -1, -2, ...$

$$\mathcal{F}\left[x_-^z\right] = -ie^{-iz(\pi/2)}\Gamma(z+1)(\sigma - i0)^{-z-1}$$

y para todo z tenemos

$$\mathcal{F}\left[\frac{x_-^z}{\Gamma(z+1)}\right] = -ie^{-iz(\pi/2)}(\sigma - i0)^{-z-1}$$

Utilizando la expresión de $(\sigma - i0)^{-z-1}$ dada por (2.6), se sigue que para $z \neq 0, \pm 1, \pm 2, ...$

$$\mathcal{F}\left[x_-^z\right] = i\Gamma(z+1)\left[e^{iz(\pi/2)}\sigma_-^{-z-1} - e^{-iz(\pi/2)}\sigma_+^{-z-1}\right] \tag{2.10}$$

Sumando las ecuaciones (2.9) y (2.10) obtenemos que para $z \neq 0, \pm1, \pm2, ...$

$$\mathcal{F}\left[|x|^z\right] = \mathcal{F}\left[x_+^z\right] + \mathcal{F}\left[x_-^z\right] = -2\Gamma(z+1)\sin(\frac{z\pi}{2})\left|\sigma\right|^{-z-1} \tag{2.11}$$

Dividiendo ambos lados de (2.11) por $\Gamma(\frac{z+1}{2})$ y usando la fórmula de duplicación para la función Γ. Obtenemos una elegante fórmula para la transformada de Fourier de la función entera

$$I_z(x) = 2^{-\frac{1}{2}z}\frac{|x|^z}{\Gamma(\frac{z+1}{2})}$$

a saber

$$\mathcal{F}\left[I_z(x)\right] = (2\pi)^{\frac{1}{2}}\frac{2^{\frac{1}{2}(z+1)}\left|\sigma\right|^{-z-1}}{\Gamma(-\frac{z}{2})} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} I_{-z-1}(\sigma) \tag{2.12}$$

Lo hecho hasta aquí admite una extensión a $\mathbb{R}^n$, nos limitamos a enunciar los resultados, para más detalles consultar [7].

Para $Re(z) > -n$ consideramos la función localmente integrable y de crecimiento polinomial $|x|^z$,con $x \in \mathbb{R}^n$. La funcional definida por $z \to (|x|^z, f)$, con $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, resulta analítica en la región $Re(z) > -n.$, extendiendo por continuación analítica, obtenemos la funcional analítica en $z \in \mathbb{C}$

$$\frac{2^{-\frac{z}{2}}\,|x|^z}{\Omega_n\Gamma\left(\frac{z+n}{2}\right)}$$

la cual satisface

$$\left.\frac{2^{-\frac{z}{2}}\,|x|^z}{\Omega_n\Gamma\left(\frac{z+n}{2}\right)}\right|_{z=-n} = \delta_{\mathbb{R}^n}$$

donde Ω_n es el área superficial de la esfera unidad $(n-1)$ −dimensional, y su transformada de Fourier viene dada por

$$\mathcal{F}\left[\frac{2^{-\frac{z}{2}}\,|x|^z}{\Omega_n\Gamma\left(\frac{z+n}{2}\right)}\right] = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\,2^{\frac{z+n}{2}}\frac{|\sigma|^{-z-n}}{\Gamma\left(-\frac{z}{2}\right)}, \qquad \sigma \in \mathbb{R}^n.$$

2.2. Integrales oscilantes

Se dará una breve exposición de la teoría de integrales oscilantes de una variable. Esta teoría estudia el comportamiento de integrales de la forma

$$I(\lambda) = \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)dx, \quad \lambda > 0$$

cuando $\lambda \to \infty$, donde ϕ y ψ son suaves. El comportamiento de $I(\lambda)$ esta gobernado por tres principios básicos: localización, scaling y asintótico. Por medio de tres proposiciones se presentarán dichos principios: el primero de ellos puede ser pensado como un principio de fase no estacionaria, el segundo es uno de los lemas de Van der Corput, y el tercero es una formulación del método de fase estacionaria; para las pruebas remitirse a [18].

Proposición 2.1 *Sea ψ una función suave con soporte compacto en el intervalo (a,b) y $\acute{\phi}$ es nunca nula, entonces para todo $N \geq 0$ se tiene*

$$|I(\lambda)| \leq C_{N,\phi,\psi}\lambda^{-N}$$

Proposición 2.2 *Supongamos que ϕ es a valores reales y $\left|\phi^k(x)\right| \geq 1$ para todo $x \in (a,b)$, entonces*

$$\left|\int\limits_a^b e^{i\lambda\phi(x)}dx\right| \leq C_k\lambda^{-\frac{1}{k}}$$

donde (i) $k = 1$ y $\acute{\phi}(x)$ es monótona, o (ii) $k \geq 2$. La constante C_k es independiente de ϕ.

Corolary 2.1 *Bajo las suposiciones sobre ϕ en la proposicón 2.2, se puede concluir que*

$$|I(\lambda)| \leq C_k\lambda^{-\frac{1}{k}}\left[|\psi(b)| + \int\limits_a^b |\acute{\psi}(x)|\,dx\right]$$

Proposición 2.3 *Supongamos que ϕ es a valores reales, $\acute{\phi}(x_0) = 0$ y $\phi^{(2)}(x_0) \neq 0$. Si ψ esta soportada en un entorno lo suficientemente pequeño de x_0, entonces*

$$|I(\lambda)| \leq e^{i\lambda\phi(x_0)}\sigma(\lambda)$$

donde σ es un símbolo de orden $-\frac{1}{2}$, esto es $\left|\sigma^{(\ell)}(\lambda)\right| \leq c_\ell(1+\lambda)^{-\frac{1}{2}-\ell}$. La constante c_ℓ depende de la norma $C^{\ell+1}$ de ϕ y ψ.

El siguiente lema es uno de los primeros resultados obtenidos en este trabajo.

Lema 2.4 *Sean $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, con $\alpha_1 \neq \alpha_2$, $m \geq 3(\alpha_1+\alpha_2)$ y $A_j \in \mathbb{R}$, $j = 1,2,3$ con $A_3 \neq 0$, entonces existe una constante positiva c independiente de los parámetros A_j, $j = 1,2,3$, tal que*

$$\left|\int_0^1 e^{-i(A_1t^{\alpha_1}+A_2t^{\alpha_2}+A_3t^m)}t^{\alpha_1+\alpha_2-1}dt\right| \leq c\,|A_3|^{-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{m}} \tag{2.13}$$

Prueba. Sin perdida de generalidad, asumimos que $A_3 > 0$. El cambio de variable $\tau = A_3^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{m}}t^{\alpha_1+\alpha_2}$ permite expresar la integral en (2.13) como

$$\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)\,A_3^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{m}}}\int_0^{A_3^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{m}}} e^{-i(a\tau^{\gamma_1}+b\tau^{\gamma_2}+\tau^{\gamma_3})}d\tau,$$

con $a := A_1A_3^{-\frac{\alpha_1}{m}}$, $b := A_2A_3^{-\frac{\alpha_2}{m}}$, $\gamma_j := \frac{\alpha_j}{\alpha_1+\alpha_2}$ para $j = 1,2$ y $\gamma_3 := \frac{m}{\alpha_1+\alpha_2}$. Let $\Phi(\tau) = a\tau^{\gamma_1}+b\tau^{\gamma_2}+\tau^{\gamma_3}$. Para probar el lema es suficiente ver que existe una constante positiva c independiente de a, b y A_3 tal que para toda $B > 1$

$$\left|\int_1^B e^{-i\Phi(\tau)}d\tau\right| \leq c. \tag{2.14}$$

Para $\gamma \in \mathbb{R}$ y $j \in \mathbb{N}$ definimos $\gamma(j) = \gamma(\gamma-1)\ldots(\gamma-j+1)$. Observamos que $\tau^j \Phi^{(j)}(\tau) = \gamma_1(j)\, a\tau^{\gamma_1} + \gamma_2(j)\, b\tau^{\gamma_2} + \gamma_3(j)\,\tau^{\gamma_3}$ $j = 1,2,3$ y que el sistema lineal

$$\begin{bmatrix} \gamma_1(1) & \gamma_1(2) & \gamma_1(3) \\ \gamma_2(1) & \gamma_2(2) & \gamma_2(3) \\ \gamma_3(1) & \gamma_3(2) & \gamma_3(3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

posee una única solución (c_1, c_2, c_3) (pues $\det[\gamma_i(j)] = \gamma_1\gamma_2\gamma_3(\gamma_2-\gamma_1)(\gamma_3-\gamma_1)(\gamma_3-\gamma_2) \neq 0$). Por lo que $\tau^{\gamma_3} = \sum_{j=1}^{3} c_j \tau^j \Phi^{(j)}(\tau)$ y en consecuencia $\tau^{\gamma_3} \leq \Sigma_{j=1}^{3} |c_j \tau^j \Phi^{(j)}(\tau)|$, para cada $\tau \geq 1$. Por lo tanto $(1, B) \subset \bigcup_{j=1}^{3} I_j$ donde $I_j = \{\tau \in (1,B) : |\Phi^{(j)}(\tau)| \geq 1/(3c_j)\}$. Siendo $\frac{d}{d\tau}\left(\tau^{\gamma_1-\gamma_2+1} \frac{d}{d\tau}\left(\tau^{-\gamma_1+j+1} \frac{d\Phi^{(j)}}{d\tau}\right)\right)$ nunca nulo, el teorema de Rolle, aplicado dos veces, implica que para cada $c \in \mathbb{R}$ la ecuación $\Phi^{(j)}(\tau) = c$ tiene a lo más tres soluciones. Por lo tanto cada I_j posee a lo sumo seis componentes conexas. Siendo $m \geq 3(\alpha_1 + \alpha_2)$ tenemos que $\gamma_3 \geq 3$, luego (2.13) se sigue de la proposición 2.2.∎

2.3. Teoremas de interpolación

Finalizamos estos preliminares con dos teoremas clásicos de interpolación, el de Riesz-Thorin y el teorema de interpolación compleja de Stein.

Teorema de interpolación de M. Riesz-Thorin. *Sean $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ y para $0 < \theta < 1$, definimos p y q como*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

Si T es un operador lineal de $L^{p_0} + L^{p_1}$ en $L^{q_0} + L^{q_1}$ tal que

$$\|Tf\|_{q_0} \leq M_0 \|f\|_{p_0}, \ \textit{para } f \in L^{p_0}$$

$$\|Tf\|_{q_1} \leq M_1 \|f\|_{p_1}, \ \textit{para } f \in L^{p_1}$$

entonces,

$$\|Tf\|_{q} \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_{p}, \ \textit{para } f \in L^{p}.$$

La demostración de este teorema utiliza el teorema de las tres lineas para funciones analíticas y se puede ver, por ejemplo, en [16].

Ahora damos una generalización del teorema de Riesz-Thorin en el cual el simple operador T es reemplazado por una familia de operadores T_z que dependen analíticamente sobre la variable compleja z. Para ello comenzamos con la definición de familias analíticas de crecimiento admisible.

Sea

$$\Omega = \{z = x + iy : 0 < x < 1\}$$

Definición. Sean (R, μ) y (N, ν) espacios de medidas totalmente σ-finitos. Supongamos que cada z en la franja $\overline{\Omega}$ tiene asociado un operador lineal T_z definido sobre el espacio de las funciones μ-simples f sobre R y tomando valores en las funciones ν-simples

g sobre N, tal que $(T_z f)g$ es ν-integrable sobre N cuando f y g son simples. Entonces $\{T_z\}_{z\in\overline{\Omega}}$ se dice una familia analítica si $z \to \int\limits_M (T_z f) g d\nu$ es analítica en Ω y continua sobre $\overline{\Omega}$ cuando f y g son simples.

La familia analítica $\{T_z\}$ se dice de crecimiento admisible si existe una constante $a < \pi$ tal que, para cada f y g simples, la función

$$z \to e^{-a|Imz|} \log \left| \int\limits_N (T_z f) g d\nu \right|$$

es cotada sobre $\overline{\Omega}$.

Teorema de interpolación compleja de Stein. *Sea $\{T_z\}_{z\in\overline{\Omega}}$ una familia de operadores analítica de crecimiento admisible. Sean $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ y supongamos que*

$$\|T_{iy} f\|_{q_0} \leq M_0(y) \|f\|_{p_0}$$

$$\|T_{1+iy} f\|_{q_1} \leq M_1(y) \|f\|_{p_1}$$

para todo y, $-\infty < y < \infty$, y toda f simple, donde $M_0(y)$ y $M_1(y)$ son independientes de f y satisfacen

$$\sup_{-\infty<y<\infty} e^{-b|y|} \log M_j(y) < \infty, \qquad (j = 0, 1)$$

para alguna constante $b < \pi$. Suponemos que $0 \leq \theta \leq 1$ y sea

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

Entonces

$$\|T_\theta f\|_{q_\theta} \leq M_\theta \|f\|_{p_\theta}$$

para toda función simple f, donde

$$M_\theta = \exp\left\{ \frac{\sin \pi\theta}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\log M_0(y)}{\cosh \pi y - \cos \pi\theta} + \frac{\log M_1(y)}{\cosh \pi y + \cos \pi\theta} \right] dy \right\}.$$

La demostración de este teorema utiliza una versión más general del principio del máximo, la cual se puede ver en [16].

3. Sobre los problemas A y B: una estimación para $\widehat{\mu}$.

3.1. Elipticidad

Esta sección esta dedicada al estudio de la transformada de Fourier de la medida μ correspondiente al problema B, para el caso en que la función $\varphi : \mathbb{R}^2 - \{0\} \to \mathbb{R}^2$ asociada tiene homogeneidad no isotrópica, satisface la así llamada condición de elipticidad y algunos requerimientos técnicos adicionales. Comenzamos con la definición de elipticidad, luego damos unos resultados auxiliares que sumados al Lema 2.4 se sigue el Teorema 3.1, el cual establece una estimación para $\widehat{\mu}$.

Sean $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ con $\alpha_1 \neq \alpha_2$, y para $t > 0$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, sea

$$t \bullet x = (t^{\alpha_1} x_1, t^{\alpha_2} x_2) \tag{3.1}$$

Para $a, b \in \mathbb{R}$ definimos

$$V^{a,b} := \{t \bullet (1, s) : s \in (a, b), 0 < t < 1\}. \tag{3.2}$$

Sean σ_1, $\sigma_2 \in \mathbb{R}$ con $\sigma_1 < \sigma_2$ y sea $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : V^{\sigma_1,\sigma_2} \to \mathbb{R}^2$, para $x \in V^{\sigma_1,\sigma_2}$ sea Q_x la forma cuadrática sobre $\mathbb{R}^2$ definida por

$$Q_x(\zeta) = \det(\zeta_1 \varphi_1''(x) + \zeta_2 \varphi_2''(x)), \qquad \zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{3.3}$$

y sea $K(x) = (k_{ij}(x))$ su matriz simétrica, i.e., satisfaciendo

$$Q_x(\zeta) = \langle K(x) \zeta, \zeta \rangle \tag{3.4}$$

para $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{R}^2$.

Definición: Decimos que $x \in V^{\sigma_1,\sigma_2}$ es elíptico si $\min_{\zeta \in S^1} |Q_x(\zeta)| > 0$.

Asumimos las siguientes hipótesis:

H1) φ es analítica real sobre V^{σ_1,σ_2}.
H2) $\varphi(t \bullet x) = t^m \varphi(x)$ para algún $m \geq 3(\alpha_1 + \alpha_2)$ y para todo $x \in V^{\sigma_1,\sigma_2}$, $t > 0$.
H3) Para algún $\sigma \in (\sigma_1, \sigma_2)$ el conjunto de puntos no elípticos de φ en V^{σ_1,σ_2} es la curva $\{t \bullet (1, \sigma) : t > 0\}$.

Bajo estas asunciones, por los Lemas 3.1 y 3.2 siguientes, existen enteros positivos n_1, n_2 y una constante positiva D tal que para $\delta > 0$ y suficientemente pequeño, se tiene que

$$\min_{\zeta \in S^1} \left| Q_{t \bullet (1,s)}(\zeta) \right| \geq D t^d |s - \sigma|^{n_1} \quad \textit{para } s \in (\sigma - \delta, \sigma), t > 0 \tag{3.5}$$

$$\min_{\zeta \in S^1} \left| Q_{t \bullet (1,s)}(\zeta) \right| \geq D t^d |s - \sigma|^{n_2} \quad \textit{para } s \in (\sigma, \sigma + \delta), t > 0 \tag{3.6}$$

donde $d = 2(m - \alpha_1 - \alpha_2)$. Teniendo en cuenta la definición de punto elíptico, (3.5) y (3.6) sugieren usar el número $\max(n_1, n_2)$ como una medida de la degeneración de elipticidad a lo largo de la curva $\{t \bullet (1, \sigma) : t > 0\}$. Asumimos, en adición a H1-H3 que

H4) $\max(n_1, n_2) < \frac{2m}{\alpha_1+\alpha_2} - 3$

Sean s_1, s_2 tal que $s_1 < s_2$ y $\sigma \in [s_1, s_2] \subset (\sigma_1, \sigma_2)$, y sea μ la medida, fijada de aquí en más, definida por (1.1) tomando allí $U = V^{s_1,s_2}$. Sea $\widehat{\mu}$ su transformada de Fourier dada, para ξ' y $\xi'' \in \mathbb{R}^2$, por

$$\widehat{\mu}(\xi', \xi'') = \int_{V^{s_1,s_2}} e^{-i(\langle x,\xi'\rangle + \langle \varphi(x),\xi''\rangle)} dx.$$

Al final de esta sección (cf. Teorema 3.1), probamos que $\widehat{\mu}$ satisface, para alguna $c > 0$, la estimación

$$|\widehat{\mu}(\xi', \xi'')| \leq c\,|\xi''|^{-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{m}} \qquad \textit{para todo} \qquad \xi' \in \mathbb{R}^2, \xi'' \in \mathbb{R}^2 - \{0\}. \tag{3.7}$$

En la sección 4 consideramos el operador de restricción $\mathcal{R}f = \widehat{f}_{|\Sigma}$, con Σ dada por (1.2) (con $U = V^{s_1,s_2}$). Siguiendo ideas de [20], usando (3.7) e interpolación compleja para una familia analítica de operadores conveniente, probamos que existe una constante c tal que $\|\mathcal{R}f\|_{L^2(\Sigma)} \leq c\,\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^4)}$, $f \in S(\mathbb{R}^4)$ si y solo si $\frac{\alpha_1+\alpha_2+4m}{2(\alpha_1+\alpha_2+2m)} \leq \frac{1}{p} \leq 1$. Finalmente, usando una vez más (3.7), estudiamos el operador de convolución $T_\mu f := \mu * f$, $f \in S(\mathbb{R}^4)$. El Teorema 4.2 establece que para $p = \frac{2m+\alpha_1+\alpha_2}{m+\alpha_1+\alpha_2}$, el triángulo cerrado con vertices $(0,0)$, $(1,1)$ y $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p'}\right)$ esta contenido en E_μ y que $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p'}\right) \in \partial E_\mu$.

Comenzamos con el siguiente

Lema 3.1. *Si x es un punto elíptico entonces los autovalores de $K(x)$ son ambos positivos o ambos negativos y*

$$\min_{\zeta \in S^1} |Q_x(\zeta)| = \min\{|\Lambda| : \Lambda \textit{ es un autovalor de } K(x)\}.$$

Prueba. Se sigue inmediatamente de (3.4).∎

Una definición de punto elíptico, diferente de la establecida anteriormente, esta dada en [4]. Reescribimos ésta. Para $x \in V^{\sigma_1,\sigma_2}$, $h \in \mathbb{R}^2$, sea $\varphi''(x)\,h$ una matriz 2×2 cuya $j-th$ columna es $\varphi_j''(x)\,h$, donde $\varphi_j''(x)$ denota la matriz Hessiana de φ_j en x. Un punto x se dice elíptico en [4] si $\det(\varphi''(x)\,h) \neq 0$ para todo $h \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Esta definición es equivalente a la nuestra. Ciertamente, considerar la matriz simétrica $B(x)$ definida por $\langle B(x)\,\zeta, \zeta\rangle = \det(\varphi''(x)\,\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{R}^2$. Un cálculo explícito muestra que $\det B(x) = \det K(x)$ y por lo tanto las dos definiciones concuerdan.

Lema 3.2. *i) Existen funciones analíticas reales Λ_1, Λ_2 sobre V^{σ_1,σ_2} las cuales dan los autovalores de $K(x)$.*
ii) Para δ positivo y lo suficientemente pequeño se tiene que
para algún i, $\min\{|\Lambda_k(x)| : k = 1, 2\} = |\Lambda_i(x)|$ para todo $x \in V^{\sigma-\delta,\sigma}$,
para algún j, $\min\{|\Lambda_k(x)| : k = 1, 2\} = |\Lambda_j(x)|$ para todo $x \in V^{\sigma,\sigma+\delta}$,
donde $(1, \sigma)$ es un punto que genera la curva $\{t \bullet (1, \sigma) : 0 < t < 1\}$ de los puntos no elípticos en V^{σ_1,σ_2}.
iii) Λ_1 y Λ_2 son homogéneas de grado $d = 2(m - \alpha_1 - \alpha_2)$ respecto a las dilataciones (3.1).

iv) Existen enteros positivos n_1, n_2 y una constante positiva D tal que para δ positiva y suficientemente pequeño

$$\text{mín}\left\{\left|\Lambda_i\left(t\cdot(1,s)\right)\right| : i=1,2\right\} > Dt^d\left|s-\sigma\right|^{n_1} \text{ para } s\in(\sigma-\delta,\sigma)\,,\ y\ t>0,$$

$$\text{mín}\left\{\left|\Lambda_i\left(t\cdot(1,s)\right)\right| : i=1,2\right\} > Dt^d\left|s-\sigma\right|^{n_2} \text{ para } s\in(\sigma,\sigma+\delta)\ \ y\ t>0$$

con $d=2\left(m-\alpha_1-\alpha_2\right)$

v) Si $I\subset(\sigma_1,\sigma_2)$ es un intervalo cerrado tal que $\sigma\notin I$ entonces existe una constante positiva D' tal que

$\text{mín}\left\{\left|\Lambda_i\left(t\cdot(1,s)\right)\right| : i=1,2\right\} > D't^d$ *para $s\in I$ y $t>0$.*

Prueba. Un computo muestra que las entradas $k_{ij}\left(x\right)$ de $K\left(x\right)$ estan dadas por

$$k_{11}\left(x\right)=\det\varphi_1''\left(x\right), \qquad k_{22}\left(x\right)=\det\varphi_2''\left(x\right),$$

$$k_{12}\left(x\right)=k_{21}\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_1^2}-2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_1\partial x_2}\right)\left(x\right).$$

Son analíticas reales en V^{σ_1,σ_2} y satisfacen $k_{ij}\left(t\cdot x\right)=t^dk_{ij}\left(x\right)$ para $x\in V^{\sigma_1,\sigma_2}$ y $t>0$. Los autovalores $\Lambda_1\left(x\right)$ y $\Lambda_2\left(x\right)$ de $K\left(x\right)$ estan dados por

$$\Lambda_1\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(k_{11}\left(x\right)+k_{22}\left(x\right)-\sqrt{4k_{12}^2\left(x\right)+\left(k_{11}\left(x\right)-k_{22}\left(x\right)\right)^2}\right),$$

$$\Lambda_2\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(k_{11}\left(x\right)+k_{22}\left(x\right)+\sqrt{4k_{12}^2\left(x\right)+\left(k_{11}\left(x\right)-k_{22}\left(x\right)\right)^2}\right).$$

Observar que para δ positivo y suficientemente pequeño cada $\Lambda_i\left(1,.\right)$ es analítica real en $(\sigma-\delta,\sigma+\delta)$. Ciertamente, esto es claro si $k_{12}\left(1,\sigma\right)\neq 0$ o $k_{11}\left(1,\sigma\right)\neq k_{22}\left(1,\sigma\right)$. Si $k_{12}\left(1,\sigma\right)=0$ y $k_{11}\left(1,\sigma\right)-k_{22}\left(1,\sigma\right)=0$ considerar la función

$$f\left(s\right):=4k_{12}^2\left(1,s\right)+\left(k_{11}\left(1,s\right)-k_{22}\left(1,s\right)\right)^2. \tag{3.8}$$

Si f es identicamente cero entonces

$$\Lambda_1\left(1,s\right)=\Lambda_2\left(1,s\right)=k_{11}\left(1,s\right)$$

por lo tanto cada $\Lambda_i\left(1,.\right)\in C^\infty\left(\sigma_1,\sigma_2\right)$. Si f no es identicamente cero, ya que f es no negativa y $f\left(\sigma\right)=0$, de H1 se sigue que existen un entero positivo q y una función analítica real no negativa h con $h\left(\sigma\right)>0$ tal que $f\left(s\right)=\left(s-\sigma\right)^{2q}h\left(s\right)^2$ para $s\in\left(\sigma-\delta,\sigma+\delta\right)$. Ahora, para $i=1,2$, sea $\widetilde{\Lambda}_i\left(1,s\right)=\frac{1}{2}\left(k_{11}\left(1,s\right)+k_{22}\left(1,s\right)+\left(-1\right)^i\left(s-s_0\right)^q h\left(s\right)\right)$. Si q es par entonces, para $i=1,2$, $\widetilde{\Lambda}_i\left(1,s\right)=\Lambda_i\left(1,s\right)$ en el intervalo $\left(\sigma-\delta,\sigma+\delta\right)$. Si q es impar resulta $\widetilde{\Lambda}_1\left(1,s\right)=\Lambda_1\left(1,s\right)$ en el intervalo $[\sigma,\sigma-\delta)$ y $\widetilde{\Lambda}_1\left(1,s\right)=\Lambda_2\left(1,s\right)$ en el intervalo $\left(\sigma-\delta,\sigma\right)$ (similares identidades se obtienen para $\widetilde{\Lambda}_2$). Por lo tanto $\widetilde{\Lambda}_i$, con $i=1,2$, dan los autovalores de $K(x)$ y cada $\widetilde{\Lambda}_i$ es analítica real en $\left(\sigma-\delta,\sigma+\delta\right)$. Ahora (i) se sigue del hecho que cada Λ_i es homogénea de grado $2\left(m-\alpha_1-\alpha_2\right)$ respecto a las dilataciones (3.1).

Para ver (ii), observamos que cada punto en $V^{\sigma_1,\sigma}$ (respectivamente en V^{σ,σ_2}) es elíptico y por lo tanto, por Lema 3.1, Λ_1 y Λ_2 poseen el mismo signo en $V^{\sigma_1,\sigma}$ (resp. en V^{σ,σ_2}) ahora (ii) se sigue del hecho que $\Lambda_1\leq\Lambda_2$ sobre $V^{\sigma_1,\sigma}$ (resp. sobre V^{σ,σ_2}).

(iii) es consecuencia de la homogeneidad de las entradas k_{ij}. Finalmente, (iv) y (v) se siguen del Lema 3.1, (ii), (iii) y la analiticidad de Λ_1 y Λ_2.∎

3.2. Resultados auxiliares

Sea $G : S^1 \times (\sigma_1, \sigma_2) \to \mathbb{R}$ definida por $G(\zeta, s) = \langle \varphi(1, s), \zeta \rangle$. Se tiene el siguiente

Lema 3.3. *Para* $(\zeta, s) \in S^1 \times (\sigma_1, \sigma_2)$

$$\alpha_1^2 \det\left(\zeta_1 \varphi_1''(1, s) + \zeta_2 \varphi_2''(1, s)\right) = \tag{3.9}$$

$$m(m - \alpha_1)(GG_{ss})(\zeta, s) + \alpha_2(\alpha_1 - \alpha_2) s (G_s G_{ss})(\zeta, s) - (m - \alpha_2)^2 G_s^2(\zeta, s)$$

Prueba. Para $\zeta \in S^1$ fijo sea $\Psi(x) = \langle \varphi(x), \zeta \rangle$. Ψ es homogénea de grado m respecto a las dilataciones (3.1) por lo cual, de las ecuaciones de Euler,

$$m\Psi(x) = \alpha_1 x_1 \Psi_{x_1}(x) + \alpha_2 x_2 \Psi_{x_2}(x)$$

$$(m - \alpha_1)\Psi_{x_1}(x) = \alpha_1 x_1 \Psi_{x_1 x_1}(x) + \alpha_2 x_2 \Psi_{x_1 x_2}(x)$$
$$(m - \alpha_2)\Psi_{x_2}(x) = \alpha_1 x_1 \Psi_{x_1 x_2}(x) + \alpha_2 x_2 \Psi_{x_2 x_2}(x).$$

Por lo tanto

$$mG(\zeta, s) = \alpha_1 \Psi_{x_1}(1, s) + s\alpha_2 \Psi_{x_2}(1, s) = \tag{3.10}$$
$$\frac{\alpha_1^2}{m - \alpha_1}\Psi_{x_1 x_1}(1, s) + \frac{\alpha_2^2 s^2}{m - \alpha_2}\Psi_{x_2 x_2}(1, s) + \left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{m - \alpha_1} + \frac{\alpha_1\alpha_2}{m - \alpha_2}\right) s\Psi_{x_1 x_2}(1, s)$$

también,

$$\Psi_{x_2}(1, s) = G_s(\zeta, s), \tag{3.11}$$

$$\Psi_{x_2 x_2}(1, s) = G_{ss}(\zeta, s) \tag{3.12}$$

Por lo cual

$$(m - \alpha_2) G_s(\zeta, s) = \alpha_1 \Psi_{x_1 x_2}(1, s) + \alpha_2 s \Psi_{x_2 x_2}(1, s)$$
$$= \alpha_1 \Psi_{x_1 x_2}(1, s) + \alpha_2 s G_{ss}(\zeta, s).$$

Entonces

$$\Psi_{x_1 x_2}(1, s) = \frac{m - \alpha_2}{\alpha_1} G_s(\zeta, s) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} s G_{ss}(\zeta, s), \tag{3.13}$$

de (3.10), usando (3.11) (3.12) y (3.13) podemos escribir $\Psi_{x_1 x_1}(1, s)$ en términos de $G(\zeta, s)$, $G_s(\zeta, s)$ y $G_{ss}(\zeta, s)$. Usando esta expresión, y también (3.12) y (3.13), un cálculo de $\det(\Psi''(1, s))$ da (3.9).∎

Observación 3.4. Sean n_1, n_2 y D como en el Lema 2.2, $d = 2(m - \alpha_1 - \alpha_2)$ y, para $(\zeta, s) \in S^1 \times (\sigma_1, \sigma_2)$, sea

$$H(\zeta, s)$$
$$= m(m - \alpha_1)(GG_{ss})(\zeta, s) + \alpha_2(\alpha_1 - \alpha_2) s (G_s G_{ss})(\zeta, s) - (m - \alpha_2)^2 G_s^2(\zeta, s).$$

Teniendo en cuenta (3.3) y los Lemas 3.1, 3.2 y 3.3 tenemos

i) Para δ positivo y suficientemente pequeño $|H(\zeta, s)| > D|s - \sigma|^{n_1}$ para todo $s \in (\sigma - \delta, \sigma)$ y $\zeta \in S^1$.

ii) Para δ positivo y suficientemente pequeño $|H(\zeta, s)| > D|s - \sigma|^{n_2}$ para todo $s \in (\sigma, \sigma + \delta)$ y $\zeta \in S^1$.

iii) Si $I \subset (\sigma_1, \sigma_2)$ es un intervalo cerrado y $\sigma \notin I$ entonces existe una constante $D' > 0$ tal que $|H(\zeta, s)| > D'$ para todo $s \in I$ y $\zeta \in S^1$.

Para $0 < \delta < \sigma - \sigma_1$, $\zeta \in S^1$ y $c > 0$ Sean

$$\begin{cases} I_1^{\delta,\zeta,c} = \left\{ s \in (\sigma - \delta, \sigma) : m (m - \alpha_1) G (\zeta, s) G_{ss} (\zeta, s) > \frac{c}{4} |s - \sigma|^{n_1} \right\}, \\ I_2^{\delta,\zeta,c} = \left\{ s \in (\sigma - \delta, \sigma) : m (m - \alpha_1) G (\zeta, s) G_{ss} (\zeta, s) < -\frac{c}{4} |s - \sigma|^{n_1} \right\}, \\ I_3^{\delta,\zeta,c} = \left\{ s \in (\sigma - \delta, \sigma) : (m - \alpha_2)^2 G_s^2 (\zeta, s) > \frac{c}{4} |s - \sigma|^{n_1} \right\}, \\ I_4^{\delta,\zeta,c} = \left\{ s \in (\sigma - \delta, \sigma) : \alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_2) s G_s (\zeta, s) G_{ss} (\zeta, s) > \frac{c}{4} |s - \sigma|^{n_1} \right\}, \\ I_5^{\delta,\zeta,c} = \left\{ s \in (\sigma - \delta, \sigma) : \alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_2) s G_s (\zeta, s) G_{ss} (\zeta, s) < -\frac{c}{4} |s - \sigma|^{n_1} \right\}. \end{cases} \tag{3.14}$$

Para $0 < \delta < \sigma_2 - \sigma$ se definen los conjuntos $J_i^{\delta,\zeta,c}$ de manera similar, otra vez por (3.14) pero reemplazando $(\sigma - \delta, \sigma)$ y n_1 por $(\sigma, \sigma + \delta)$ y n_2 respectivamente. Finalmente, para $\tau \in (\sigma_1, \sigma_2) - \{\sigma\}$ y $\delta > 0$ tal que $(\tau - \delta, \tau + \delta) \subset (\sigma_1, \sigma) \cup (\sigma, \sigma_2)$ sean $K_i^{\tau,\delta,\zeta,c}$ los conjuntos abiertos definidos por (3.14), pero reemplazando $(\sigma - \delta, \sigma)$ y $\frac{c}{4} |s - \sigma|^{n_1}$ por $(\tau - \delta, \tau + \delta)$ y $\frac{c}{4}$ respectivamente.

Lema 3.5. *i) Para $\eta \in S^1$ existen constantes positivas C_η, ε_η y un entorno W_η de η en S^1 tal que para cada $\zeta \in W_\eta$ y $j = 1, ..., 5$ los conjuntos $I_j^{\varepsilon_\eta,\zeta,C_\eta}$ y $J_j^{\varepsilon_\eta,\zeta,C_\eta}$ poseen a lo más n_1 y n_2 componentes conexas respectivamente.*

ii) Para $\tau \in (\sigma_1, \sigma_2) - \{\sigma\}$ y $\eta \in S^1$ existen constantes positivas $C_{\eta,\tau}$, $\varepsilon_{\eta,\tau}$ y un entorno $W_{\eta,\tau}$ de η en S^1 tal que para todo $\zeta \in W_{\eta,\tau}$ y $j = 1, ..., 5$ se tiene que $K_j^{\tau,\varepsilon_{\eta,\tau},\zeta,C_{\eta,\tau}} = \emptyset$ o $K_j^{\tau,\varepsilon_{\eta,\tau},\zeta,C_{\eta,\tau}} = (\tau - \varepsilon_{\eta,\tau}, \tau + \varepsilon_{\eta,\tau})$.

Prueba. Para ver i),procedemos como sigue. Para $f \in C^\infty (\sigma_1, \sigma_2)$ sea m_f definida por $m_f := \text{mín} \left\{ l \geq 0 : f^{(l)} (\sigma) \neq 0 \right\}$ si $f^{(l)} (\sigma) \neq 0$ para algún l, y por $m_f = +\infty$ caso contrario. Para $(\zeta, s) \in S^1 \times (\sigma_1, \sigma_2)$ sea

$$f_1 (\zeta, s) = m (m - \alpha_1) (G G_{ss}) (\zeta, s),$$

$$f_2 (\zeta, s) = (m - \alpha_2)^2 G_s^2 (\zeta, s),$$

$$f_3 (\zeta, s) = \alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_2) s (G_s G_{ss}) (\zeta, s).$$

y para $i = 1, 2, 3$ sea $k_i := m_{f_i(\eta,.)}$. Sea $\eta \in S^1$, por la observación 3.4 (i) tenemos que $m_{(f_1+f_2+f_3)(\eta,.)} \leq n_1$ por lo tanto $k_i \leq n_1$ para algún i. Sean $A = \{i \in \{1, 2, 3\} : k_i \leq n_1\}$ y $C_\eta = \text{mín} \left\{ \{D\} \cup \left\{ \left| \frac{1}{k_i!} \partial_s^{k_i} f_i (\eta, \sigma) \right| : i \in A \right\} \right\}$, donde D es la constante que aparece en la observación 3.4 y ∂_s denota la derivada respecto de s. Para $(\zeta, s) \in S^1 \times (\sigma - \delta, \sigma + \delta)$ sea

$$F_i (\zeta, s) = f_i (\zeta, s) - \frac{C_\eta}{4} (s - \sigma)^{n_1} \qquad i = 1, 2, 3. \tag{3.15}$$

Consideramos primero el caso $i \in A$: Tenemos que $\partial_s^{k_i} F_i (\eta, \sigma) \neq 0$ entonces existen $\varepsilon_{\eta,i} > 0$ y un entorno $W_{\eta,i}$ de η en S^1 tal que cada $\partial_s^{k_i} F_i (\zeta, s) \neq 0$ para todo $(\zeta, s) \in W_{\eta,i} \times (\sigma - \varepsilon_{\eta,i}, \sigma)$. Por lo tanto, por el teorema de Rolle, para $\zeta \in W_{\eta,i}$ y $i \in A$ la ecuación $f_i (\zeta, s) = \frac{1}{4} C_\eta (s - \sigma)^{n_1}$ posee a lo sumo $k_i \leq n_1$ raíces en $(\sigma - \varepsilon_{\eta,i}, \sigma)$. Considerar ahora el caso $i \notin A$. En este caso $\partial_s^{n_1} F_i (\eta, \sigma) \neq 0$ y, procediendo como antes, encontramos también en este caso $0 < \varepsilon_{\eta,i}$ y $W_{\eta,i}$ tal que para $\zeta \in W_{\eta,i}$, $f_i(\zeta, s.) = \frac{1}{4}C_\eta (s-\sigma)^{n_1}$ posee a lo sumo n_1 raíces en $(\sigma - \varepsilon_{\eta,i}, \sigma)$. Similarmente, considerando $\widetilde{F}_i(\zeta, s) := f_i(\zeta, s) + \frac{C_\eta}{4}(s-\sigma)^{n_1}$ en lugar de F_i, y disminuyendo $W_{\eta,i}$ y $\varepsilon_{\eta,i}$ si es necesario, obtenemos que para $\zeta \in W_{\eta,i}$ $f_i(\zeta, s) = -\frac{1}{4}C_\eta (s-\sigma)^{n_1}$ tiene a lo sumo n_1 raíces en $(\sigma - \varepsilon_{\eta,i}, \sigma)$. De estos hechos es claro que la aserción en i) para los conjuntos $I_j^{\varepsilon_\eta, \zeta, C_\eta}$ vale si tomamos $\varepsilon_\eta = \text{mín}\{\varepsilon_{\eta,i} : i = 1,2,3\}$ y $W_\eta = \cap_{i=1}^3 W_{\eta,i}$. La prueba de la afirmación de los conjuntos $J_j^{\varepsilon_\eta,\zeta,C_\eta}$ es similar.

Para ver ii) considerar las funciones f_i definidas anteriormente. Por observación 3.4 iii), existe $D' > 0$ tal que

$$|f_1(\zeta,\tau) + f_2(\zeta,\tau) + f_3(\zeta,\tau)| > D'$$

para todo $\zeta \in S^1$. Para $\eta \in S^1$ definimos $A = \{i \in \{1,2,3\} : f_i(\eta,\tau) \neq 0\}$ y $C_{\eta,\tau} = \text{mín}\{D'\} \cup \{|f_i(\eta,\tau)| : i \in A\}$. Para $(\zeta, s) \in S^1 \times (\sigma_1, \sigma_2)$ y $i = 1,2,3$ sean $F_i(\zeta, s) = f_i(\zeta, s) - \frac{1}{4}C_\eta$ y $\widetilde{F}_i(\zeta, s) = f_i(\zeta, s) + \frac{1}{4}C_{\eta,\tau}$. Por lo tanto $F_i(\eta,\tau) \neq 0$ y $\widetilde{F}_i(\eta,\tau) \neq 0$ para $i = 1,2,3$ luego existen $\varepsilon_{\eta,i,\tau} > 0$ y un entorno $W_{\eta,i,\tau}$ de η en S^1 tal que $F_i(\zeta, s) \neq 0$ y $\widetilde{F}_i(\zeta, s) \neq 0$ para todo $\zeta \in W_{\eta,i,\tau}$ y $s \in (\tau - \varepsilon_{\eta,i,\tau}, \tau + \varepsilon_{\eta,i})$. Consideramos $W_{\eta,\tau} = \cap_{i=1}^3 W_{\eta,i,\tau}$ y $\varepsilon_{\eta,\tau} = \text{mín}\, \varepsilon_{\eta,i,\tau} : i = 1,2,3$. Ya que para cada $\zeta \in W_{\eta,\tau}$ y $i = 1,2,3$ las ecuaciones $f_i(\zeta, s) = \pm\frac{C_{\eta,\tau}}{4}$ no tienen raíces en $(\tau - \varepsilon_{\eta,\tau}, \tau + \varepsilon_{\eta,\tau})$ se sigue que para cada j resulta $K_j^{\tau,\varepsilon_\eta,\zeta,C_\eta} = \emptyset$ o $K_j^{\tau,\varepsilon_\eta,\zeta,C_\eta} = (\tau - \varepsilon_{\eta,\tau}, \tau + \varepsilon_{\eta,\tau})$. ∎

Necesitaremos los siguientes lemas auxiliares.

Lema 3.6. Sean $[\theta,\tau]$ *un intervalo cerrado,* $f \in C^1([\theta,\tau])$, $\gamma > 1$ *y* $[a,b] \subset [\theta,\tau]$. *Si una de las siguientes condiciones vale*

$$(f'(s))^2 \geq A(s-\theta)^\alpha \ \ \textit{para } s \in [a,b] \tag{3.16}$$

$$(f'(s))^2 \geq A(\tau - s)^\alpha\,, \ \ \textit{para } s \in [a,b] \tag{3.17}$$

para constantes no negativa*s* A *y* α *con* $\alpha < 2\gamma - 2$, *entonces existe una constante* c *dependiendo solo de* A, α, θ, τ *y* γ *tal que*

$$\int_{[a,b]} |f(s)|^{-\frac{1}{\gamma}} ds < c. \tag{3.18}$$

Prueba. Sea $I = [a,b]$. Asumimos que (3.16) ocurre. Ya que $f'(s)$ es continua tenemos que i): $f'(s) \geq 0$ para todo $s \in I$ o ii): $f'(s) \leq 0$ para todo $s \in I$. Consideramos el caso (i). En este caso ocurre

a) f es positiva en todo $I - \{\theta\}$

o

b) $f(s)$ se anula exactamente en un punto $\widetilde{s} \in I$.

Si a) ocurre, entonces para $s \in I$

$$|f(s)| \geq \int_a^s f'(t)\,dt \geq \frac{A}{1+\frac{\alpha}{2}}\left((s-\theta)^{1+\frac{\alpha}{2}} - (a-\theta)^{1+\frac{\alpha}{2}}\right) \geq \frac{A}{1+\frac{\alpha}{2}}(s-a)^{1+\frac{\alpha}{2}}$$

lo cual, teniendo en cuenta que $\alpha < 2\gamma - 2$, implica *(*3.18) con una constante como la requerida.

Si b) ocurre, tenemos para $a \leq s \leq \widetilde{s}$

$$|f(s)| = \int_s^{\widetilde{s}} f'(t)\,dt \geq \frac{A}{1+\frac{\alpha}{2}}\left((\widetilde{s}-\theta)^{1+\frac{\alpha}{2}} - (s-\theta)^{1+\frac{\alpha}{2}}\right) \geq \frac{A}{1+\frac{\alpha}{2}}(\widetilde{s}-s)^{1+\frac{\alpha}{2}}$$

y, para tal α , se tiene que $\int_a^{\widetilde{s}} |f(t)|^{-\frac{1}{\gamma}}\,dt \leq c'$ para algún $c' = c'(A,\alpha,\theta,\tau,\gamma)$. Una estimación de la misma clase es obtenida similarmente para $\int_{\widetilde{s}}^{b} |f(t)|^{-\frac{1}{\gamma}}\,dt$, por lo que (3.18) ocurre también en el caso b). El caso ii) se reduce al i) considerando allí $-f$ en lugar de f.∎

Lema 3.7. *Sean* $[\theta,\tau]$ *un intervalo cerrado,* $f \in C^2([\theta,\tau])$, $\gamma > 1$ *y* $[a,b] \subset [\theta,\tau]$. *Si una de las siguientes condiciones ocurre*

$$|f'(s)\,f''(s)| \geq A\,|s-\theta|^{\alpha} \textit{ for } s \in [a,b] \tag{3.19}$$

$$|f'(s)\,f''(s)| \geq A\,|\tau-s|^{\alpha} \textit{ for } s \in [a,b] \tag{3.20}$$

para constantes no negativas A *y* α *con* $\alpha < 2\gamma-3$ entonces (3.18) vale para alguna c *dependiendo solo de* $A,\alpha,\theta,\tau,$ y γ.

Prueba. Sea $I = [a,b]$. Si (3.19) ocurre, tenemos i): $\left((f')^2\right)'(s) \geq 2A(s-\theta)^{\alpha}$ para $s \in I$ o ii): $\left((f')^2\right)'(s) \leq -2A(s-\theta)^{\alpha}$ para $s \in I$. Si i) ocurre, una integración sobre (a,s) da, para una constante positiva c_1 (dependiendo sobre A y α) y para todo $s \in I$

$$(f')^2(s) \geq (f')^2(a) + c_1\left((s-\theta)^{\alpha+1} - (a-\theta)^{\alpha+1}\right) \geq c_1(s-a)^{\alpha+1}.$$

Si ii) ocurre, tenemos $\left((f')^2\right)'(s) \leq -2A(s-\theta)^{\alpha}$ e integrando sobre (s,b) conseguimos, similarmente como antes que $(f')^2(s) \geq c_2(b-s)^{\alpha+1}$ para $s \in I$, con $c_2 = c_2(A,\alpha)$. Por lo tanto, ya que $\alpha+1 < 2\gamma-2$, el lema se sigue, en ambos casos i) y ii), del Lema 3.6. El caso cuando (3.20) ocurre es similar.∎

Lema 3.8. Sean $[\theta,\tau]$ *un intervalo cerrado,* $f \in C^2([\theta,\tau])$, $\gamma > 1$ *y* $[a,b] \subset [\theta,\tau]$. *Si una de las siguientes condiciones ocurre*

$$f(s)\,f''(s) \geq A(s-\theta)^{\alpha} \textit{ para } s \in [a,b] \tag{3.21}$$

$$f(s)\,f''(s) \geq A(\tau-s)^{\alpha} \textit{ para } s \in [a,b] \tag{3.22}$$

para constantes no negativas A *y* α *con* $\alpha < 2\gamma-2$, *entonces (3.18) vale con* $c = c(A,\alpha,\theta,\tau,\gamma)$.

Prueba. Sea $I = [a,b]$. Ya que el otro caso es análogo, damos la prueba solo para el caso cuando (3.21) ocurre. En este caso ocurre

i): $f(s)$ y $f''(s)$ son ambas no negativas para $s \in I$

o

ii): $f(s)$ y $f''(s)$ son ambas no positivas para $s \in I$.

Si i) ocurre, considerar el punto s_1 donde el mínimo de f sobre I es alcanzado. Si $s_1 = a$, entonces $f(a) \geq 0$ y $f'(a) \geq 0$ luego integrando por partes y usando (3.21) obtenemos

$$\frac{1}{2}\left(f^2\right)'(s) \geq f(s) f'(s) - f(a) f'(a) - \int_a^s \left(f'\right)^2(t)\,dt = \int_a^s f(t) f''(t)\,dt$$

$$\geq c_1\left((s-\theta)^{\alpha+1} - (a-\theta)^{\alpha+1}\right) \geq c_1 (s-a)^{\alpha+1}$$

para una constante positiva $c = c(A, \alpha)$ y para todo $s \in I$. Una nueva integración sobre (a, s) da, para alguna constante positiva $c_2 = c_2(A, \alpha)$,

$$f^2(s) \geq c_2 (s-a)^{\alpha+2}, s \in I,$$

la cual, y ya que $\alpha < 2\gamma - 2$, da (3.18) con una constante c como la requerida. En el caso $s_1 = b$ tenemos $f'(b) \leq 0$ y $f(b) > 0$. Usando (3.22), e integrando por partes sobre (s, b) obtenemos, similarmente como antes, que $\left(f^2\right)'(s) \geq c_1 (b-s)^{\alpha+1}$ para una constante positiva $c_2 = c_2(A, \alpha)$ y la prueba se sigue como antes.

Consideramos ahora el caso $a < s_1 < b$. Repetimos el argumento utilizado en el caso $s_1 = a$ (respectivamente $s_1 = b$) pero tomando allí s_1 en lugar de a (respectivamente en lugar b) para obtener que $\int_{s_1}^b [f(s)]^{-\frac{1}{\gamma}} ds < c_1$ (respectivamente $\int_a^{s_1} [f(s)]^{-\frac{1}{\gamma}} ds < c_1$) para alguna constante positiva c_1 dependiendo solo sobre los parámetros requeridos por el lema. Por lo tanto (3.18) vale también en el caso i). El caso ii) se sigue de i) aplicado a $-f$.∎

Lema 3.9. Sean $[\theta, \tau]$ *un intervalo cerrado,* $f \in C^2([\theta, \tau])$, $\gamma > 1$ *y* $[a, b] \subset [\theta, \tau]$. *Si una de las siguientes condiciones ocurre*

$$f(s) f''(s) \leq -A(s-\sigma)^\alpha \text{ para } s \in [a, b] \tag{3.23}$$

$$f(s) f''(s) \leq -A(\tau - s)^\alpha \text{ para } s \in [a, b] \tag{3.24}$$

para constantes no negativas A *y* α *con* $\alpha < 2\gamma - 2$, *entonces (3.18) vale con* $c = c(A, \alpha, \theta, \tau, \gamma)$.

Prueba. Ya que el otro caso es similar, consideramos solo el caso cuando (3.23) ocurre. Sea $I = [a, b]$. De (3.23) tenemos que ocurre i): $f(s) > 0$ y $f''(s) < 0$ para $s \in I - \{\theta\}$ o ii): $f(s) < 0$ y $f''(s) > 0$ para $s \in I - \{\theta\}$. Consideramos el caso i). Sean Φ y K las funciones definidas sobre $[a, b]$ por $\Phi(s) = \sin\left(\frac{\pi(s-a)}{b-a}\right)$ y $K(s) = A(b-a)^\alpha \pi^{-\alpha} \Phi^\alpha(s)$ respectivamente. De (3.23) se sigue que $-f''(s) \geq K(s)/f(s)$ para $s \in (a, b)$. También $f(a) \geq 0$, $f(b) > 0$. Sean $\widetilde{u}$ y $\widetilde{K}$ las funciones definidas sobre $[a, b]$ por

$$\widetilde{u}(s) := \Phi^{1+\frac{\alpha}{2}}(s),$$

$$\widetilde{K}(s) = \frac{\pi^2\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)}{(b-a)^2}\left[\Phi^{\alpha+2}(s) - \frac{\alpha}{2}\cos^2\left(\frac{\pi(s-a)}{b-a}\right)\Phi^\alpha(s)\right]$$

Un computo muestra que $\widetilde{u}$ satisface $-\widetilde{u}'' = \widetilde{K}/\widetilde{u}$ sobre (a, b) y $\widetilde{u}(a) = \widetilde{u}(b) = 0$. También, $\widetilde{K} \leq \beta K$ sobre (a, b), con $\beta = \pi^{\alpha+2} A^{-1} (b-a)^{-(\alpha+2)} \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)^2$. Afirmamos que

$$\widetilde{u} \leq \beta^{1/2} f \qquad \text{sobre } (a, b). \tag{3.25}$$

Ciertamente, tenemos $-\widetilde{u}'' \leq \beta K/\widetilde{u}$ y $-\left(\beta^{1/2}f\right)'' \geq \beta K\left(\beta^{1/2}f\right)^{-1}$ sobre (a,b). Entonces

$$-\left(\beta^{1/2}f-\widetilde{u}\right)'' \geq -\beta K\frac{\beta^{1/2}f-\widetilde{u}}{\beta^{1/2}f\widetilde{u}} on\,(a,b)\,. \tag{3.26}$$

Sea $I^* = \left\{s \in (a,b) : \beta^{1/2}f(s) < \widetilde{u}(s)\right\}$ suponemos que $I^* \neq \emptyset$. Sea J una componente conexa de I^*. Siendo $\beta^{1/2}f-\widetilde{u}$ continua sobre I^* y $\beta^{1/2}f-\widetilde{u}$ es no negativa en a y en b se sigue que $\beta^{1/2}f-\widetilde{u}$ se anula en ∂J, pero $K>0$ sobre (a,b) por lo que (3.26) implica que $\beta^{1/2}f-\widetilde{u}$ es estrictamente concava sobre J. Ya que ésta es negativa sobre J arribamos a una contradicción. Por lo tanto (3.25) vale. Entonces

$$\int_I |f(s)|^{-\frac{1}{\gamma}}\,ds \leq \beta^{\frac{1}{2\gamma}}\int_I \widetilde{u}(s)^{-\frac{1}{\gamma}}\,ds$$

$$= \beta^{\frac{1}{2\gamma}}(b-a)\pi^{-1}\int_0^{\pi}(\sin\theta)^{-\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\frac{1}{\gamma}}\,d\theta < \infty.$$

Finalmente el caso ii) se sigue de lo hecho aplicado a $-f$.∎

Teorema 3.1. $|\widehat{\mu}(\xi',\xi'')| \leq c\,|\xi''|^{-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{m}}$ *para alguna constante positiva* c *y para todo* $\xi' \in \mathbb{R}^2, \xi'' \in \mathbb{R}^2-\{0\}$.

Prueba. Para un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ denotamos μ_U a la medida definida por (1.1). Sea $[a,b] \subset (\sigma_1,\sigma_2)$ y $V^{a,b}$ dados por (3.2). El cambio de variable $x_1 = t^{\alpha_1}$, $x_2 = st^{\alpha_2}$ da para $\xi' = (\xi_1,\xi_2)$ y $\xi'' = (\xi_3,\xi_4) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left(\mu_{V^{a,b}}\right)^{\wedge}(\xi',\xi'') = \alpha_1\int_a^b\left(\int_0^1 e^{-i\left(\xi_1 t^{\alpha_1}+\xi_2 st^{\alpha_2}+t^m\langle\varphi(1,s),\xi''\rangle\right)}t^{\alpha_1+\alpha_2-1}dt\right)ds.$$

Por el Lema 2.4 tenemos para una constante positiva c y para todo $\xi' \in \mathbb{R}^2$, $\xi'' \in \mathbb{R}^2-\{0\}$

$$\left|\left(\mu_{V^{a,b}}\right)^{\wedge}(\xi',\xi'')\right| \leq c\,|\xi''|^{-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{m}}\int_a^b |G(\zeta,s)|^{-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{m}}\,ds \tag{3.27}$$

donde $\zeta = \frac{\xi''}{|\xi''|}$. Para $\eta \in S^1$, sean C_η, ε_η y W_η como en el Lemma 3.5 i) . De la compacidad de S^1 existe un conjunto finito $\{\eta_k\}_{k=1}^N \subset S^1$ tal que $S^1 = \cup_{k=1}^N W_{\eta_k}$. Por i) y ii) en observación 3.4, existe una constante $D>0$ tal que, para δ positivo y lo suficientemente pequeño,

$$(\sigma-\delta,\sigma) \subset \cup_{j=1}^5 I_j^{\delta,\zeta,D} \;\; y \;\; (\sigma,\sigma+\delta) \subset \cup_{j=1}^5 J_j^{\delta,\zeta,D} \;\; para\ todo\ \zeta \in S^1. \tag{3.28}$$

Teniendo en cuenta (3.28) escogemos ε satisfaciendo que $0 < \varepsilon < \min\{\varepsilon_{\eta_k} : 1 \leq k \leq N\}$ y tal que $(\sigma-\varepsilon,\sigma)\cup(\sigma,\sigma+\varepsilon) \subset \cup_{j=1}^5\left(I_j^{\varepsilon,\zeta,D}\cup J_j^{\varepsilon,\zeta,D}\right)$ para todo $\zeta \in S^1$.

Sea $\zeta \in S^1$, por lo que $\zeta \in W_{\eta_k}$ para algún $k = k(\zeta)$, y ya que $C_{\eta_{k(\zeta)}} \leq D$ tenemos que $I_j^{\varepsilon,\zeta,D} \subset I_j^{\varepsilon_{\eta_{k(\zeta)}},\zeta,C_{\eta_{k(\zeta)}}}$ y $J_j^{\varepsilon,\zeta,D} \subset J_j^{\varepsilon_{\eta_{k(\zeta)}},\zeta,C_{\eta_{k(\zeta)}}}$ para $j = 1,..,5$. Entonces

$$(\sigma-\varepsilon,\sigma)\cup(\sigma,\sigma+\varepsilon) \subset \cup_{j=1}^5\left(I_j^{\varepsilon_{\eta_{k(\zeta)}},\zeta,C_{\eta_{k(\zeta)}}}\cup J_j^{\varepsilon_{\eta_{k(\zeta)}},\zeta,C_{\eta_{k(\zeta)}}}\right).$$

Por lo tanto $\int_{\sigma-\varepsilon}^{\sigma+\varepsilon} |G(\zeta,s)|^{-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{m}}\, ds$

$$\leq \sum_{j=1}^{5} \left[\int_{I_j^{\varepsilon_{\eta_{k(\zeta)}},\zeta,C_{\eta_{k(\zeta)}}}} |G(\zeta,s)|^{-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{m}}\, ds + \int_{J_j^{\varepsilon_{\eta_{k(\zeta)}},\zeta,C_{\eta_{k(\zeta)}}}} |G(\zeta,s)|^{-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{m}}\, ds \right]$$

Teniendo en cuenta la definición de los conjuntos $I_j^{\varepsilon_{\eta_{k(\zeta)}},\zeta,C_{\eta_{k(\zeta)}}}$ y ya que ellos tienen a lo sumo n_1 componentes conexas, podemos acotar, uniformemente sobre ζ, las integrales $\int_{I_j^{\varepsilon_{\eta_{k(\zeta)}},\zeta,C_{\eta_{k(\zeta)}}}} |G(\zeta,s)|^{-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{m}}\, ds$ usando los Lemas 3.6, 3.7, 3.8 y 3.9 aplicados a la función $f(s) = G(\zeta,s)$ con $\gamma = \frac{m}{\alpha_1+\alpha_2}$ y $\alpha = n_1$. Las integrales sobre los conjuntos $J_j^{\varepsilon_{\eta_{k(\zeta)}},\zeta,C_{\eta_{k(\zeta)}}}$ pueden ser acotadas similarmente.

Sea $F = [s_1,s_2] - (\sigma-\varepsilon,\sigma+\varepsilon)$ y sea D' tal que

$$\left| m(m-\alpha_1)(GG_{ss})(\zeta,s) + \alpha_2(\alpha_1-\alpha_2)s(G_sG_{ss})(\zeta,s) - (m-\alpha_2)^2 G_s^2(\zeta,s) \right| > D' \tag{3.29}$$

para todo $s \in F$ y $\zeta \in S^1$ (cf. observación 3.4 iii)). Para $\tau \in F$ y $\eta \in S^1$, sean $C_{\eta,\tau}$, $\varepsilon_{\eta,\tau}$ y $W_{\eta,\tau}$ la constante y el entorno dados en el Lema 3.5 ii). Como antes, tomamos un conjunto finito $\{\eta_k\}_{k=1}^N$ tal que $S^1 = \cup_{k=1}^N W_{\eta_k,\tau}$. Para $\zeta \in S^1$ sea $k = k(\zeta)$ tal que $\zeta \in W_{\eta_{k(\zeta)}}$. Sea $\varepsilon_\tau = \text{mín}(\varepsilon_{\eta_k,\tau} : k = 1,...,N)$, ahora tomamos $\varepsilon \in (0,\varepsilon_\tau)$ tal que $[\tau-\varepsilon,\tau+\varepsilon] \subset F$. De (3.29) tenemos que $(\tau-\varepsilon,\tau+\varepsilon) \subset \cup_{j=1}^5 K_j^{\tau,\varepsilon,\zeta,D'} \subset \cup_{j=1}^5 K_j^{\tau,\varepsilon_{\eta_{k(\zeta)}},\zeta,C_{\eta_{k(\zeta)}}}$ para todo $\zeta \in S^1$. Entonces

$$\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} |G(\zeta,s)|^{-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{m}}\, ds \leq \sum_{j=1}^{5} \int_{K_j^{\tau,\varepsilon_{\eta_{k(\zeta)}},\zeta,C_{\eta_{k(\zeta)}}}} |G(\zeta,s)|^{-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{m}}\, ds$$

Por el Lema 3.5 ii), cada $K_j^{\tau,\varepsilon_{\eta_{k(\zeta)}},\zeta,C_{\eta_{k(\zeta)}}}$ es vacío o conexo, por lo tanto la integral $\int_{K_j^{\tau,\varepsilon_{\eta_{k(\zeta)}},\zeta,C_{\eta_{k(\zeta)}}}} |G(\zeta,s)|^{-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{m}}\, ds$ puede ser acotada, como antes, usando los Lemas 3.6, 3.7, 3.8 y 3.9. Ya que F esta cubierto por un número finito de intervalos de la forma $(\tau-\varepsilon,\tau+\varepsilon)$ obtenemos una estimación, uniforme sobre ζ, para la integral $\int_F |G(\zeta,s)|^{-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{m}}\, ds$ y la prueba del teorema esta completa.$\blacksquare$

4. Resultados sobre los problemas A y B.

4.1. Condiciones necesarias y suficientes para el problema de restricción a la superficie Σ.

Aquí consideramos una función φ que satisface las hipótesis H1-H4 dadas en la sección 3. Sea ahora $\Sigma = \{(x, \varphi(x)) : x \in Q\}$ y, para $f \in L^1(\mathbb{R}^4)$, sea $\mathcal{R}f = \widehat{f}_{|\Sigma}$ donde $\widehat{f}$ denota la transformada de Fourier usual. El siguiente lema da una condición necesaria para la acotación $L^p(\mathbb{R}^4) - L^q(\Sigma)$ del operador de restricción $\mathcal{R}$ .La prueba del lema consiste en una adaptación, a nuestro problema, de un argumento de homogeneidad bien conocido debido a Knapp.

Lema 4.1. Si existe una constante positiva c *tal que*

$$\|\mathcal{R}f\|_{L^q(\Sigma,d\mu)} \leq c\,\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^4)}\,, f \in S\left(\mathbb{R}^4\right) \tag{4.1}$$

entonces $\frac{1}{q} \geq \frac{(\alpha_1+\alpha_2+2m)}{(\alpha_1+\alpha_2)}(1-\frac{1}{p})$.

Prueba. Observemos que si (4.1) ocurre para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ entoces vale también para $f \in L^1(\mathbb{R}^4) \cap L^p(\mathbb{R}^4)$. Sea $Q^{s_1,s_2} = \left\{t\cdot(1,s) : s \in (s_1,s_2)\, y \frac{1}{2} < t < 1\right\}$. Fijamos $0 < \eta < 1$ tal que $|\varphi(x)| < 1$ para $x \in \eta \bullet Q^{s_1,s_2}$. Para $\xi', \xi'' \in \mathbb{R}^2$ y $t > 0$, sea $t\odot(\xi',\xi'') = (t\bullet\xi', t^m\xi'')$ y para $0 < \varepsilon < 1$ definimos $E_\varepsilon = \varepsilon^{-1} \odot \left((0,1)^4\right)$ y $f_\varepsilon = \chi_{E_\varepsilon}$.

Para $x = (x_1, x_2) \in Q^{s_1,s_2}$, un cambio de variable da

$$\widehat{f_\epsilon}(x, \varphi(x)) = \int_{E_\varepsilon} e^{-i(x_1\xi_1+x_2\xi_2+\xi_3\varphi_1(x)+\xi_4\varphi_2(x))}d\xi$$

$$= \varepsilon^{-(\alpha_1+\alpha_2+2m)} \int_{[0,1]^4} e^{-i\left(\varepsilon^{-\alpha_1}x_1\xi_1+\varepsilon^{-\alpha_2}x_2\xi_2+\varepsilon^{-m}\xi_3\varphi_1(x)+\varepsilon^{-m}\xi_4\varphi_2(x)\right)}d\xi$$

donde $\xi = (\xi_1, ..., \xi_4)$. Sean $F_\varepsilon = (\varepsilon\eta) \bullet Q^{s_1,s_2}$ y $\Sigma_\varepsilon = \left\{(x,\varphi(x)) : x \in (\varepsilon\eta)\cdot Q^{s_1,s_2}\right\}$. Tenemos,

$$\|\mathcal{R}f_\varepsilon\|^q_{L^q(\Sigma,d\mu)} \geq \|\mathcal{R}f_\varepsilon\|^q_{L^q(\Sigma_\varepsilon,d\mu)}$$

$$\geq \int_{F_\varepsilon} \left| \varepsilon^{-(\alpha_1+\alpha_2+2m)} \int_{[0,1]^4} e^{-i\left(\varepsilon^{-\alpha_1}x_1\xi_1+\varepsilon^{-\alpha_2}x_2\xi_2+\varepsilon^{-m}\xi_3\varphi_1(x)+\varepsilon^{-m}\xi_4\varphi_2(x)\right)}d\xi\right|^q dx.$$

También

$$\int_{[0,1]^4} e^{-i\left(\varepsilon^{-\alpha_1}x_1\xi_1+\varepsilon^{-\alpha_2}x_2\xi_2+\varepsilon^{-m}\xi_3\varphi_1(x)+\varepsilon^{-m}\xi_4\varphi_2(x)\right)}d\xi$$

$$= \int_0^1 e^{-i\varepsilon^{-\alpha_1}x_1\xi_1}d\xi_1 \int_0^1 e^{-i\varepsilon^{-\alpha_2}x_2\xi_2}d\xi_2 \int_0^1 e^{-i\varepsilon^{-m}\xi_3\varphi_1(x)}d\xi_3 \int_0^1 e^{-i\varepsilon^{-m}\xi_4\varphi_2(x)}d\xi_4$$

Para $x \in F_\varepsilon$, la última integral puede ser estimada como sigue

$$\left|\int_0^1 e^{-i\varepsilon^{-m}\xi_4\varphi_2(x)}d\xi_4\right| = \left|\frac{e^{-i\varepsilon^{-m}\varphi_2(x)}-1}{\varepsilon^{-m}\varphi_2(x)}\right| = \left|\frac{e^{-i\varphi_2\left(\varepsilon^{-1}\bullet x\right)}-1}{\varphi_2\left(\varepsilon^{-1}\bullet x\right)}\right|$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\varphi_2\left(\varepsilon^{-1}\bullet x\right)}{2}\right)}{\frac{\varphi_2(\varepsilon^{-1}\bullet x)}{2}} \geq 2\sin\left(\frac{1}{2}\right),$$

la última desigualdad se debe a que $|\varphi_2(\varepsilon^{-1} \bullet x)| \leq 1$ para $x \in F_\varepsilon$. Las demás integraleshe se calculan similarmente Por lo tanto

$$\|\mathcal{R} f_\varepsilon\|_{L^q(\Sigma)} \geq c\varepsilon^{-(\alpha_1+\alpha_2+2m)+\frac{\alpha_1+\alpha_2}{q}}. \tag{4.2}$$

con c independiente de ε. Ahora, ya que $\|f_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^4)} = \varepsilon^{-\frac{\alpha_1+\alpha_2+2m}{p}}$, (4.1) y (4.2) da

$$c\varepsilon^{-(\alpha_1+\alpha_2+2m)+\frac{\alpha_1+\alpha_2}{q}} \leq \varepsilon^{-\frac{\alpha_1+\alpha_2+2m}{p}},$$

lo cual implica, tomando ε suficientemente pequeño, que $\frac{1}{q} \geq \frac{(\alpha_1+\alpha_2+2m)}{(\alpha_1+\alpha_2)}(1-\frac{1}{p})$ y se sigue el lema.∎

El Teorema 4.1 siguiente da una respuesta óptima en p a nuestro problema de restricción. La solución se sigue del Lema 4.1, de la utilización del teorema de interpolación compleja y de la siguiente observación debida a P. Tomas (ver [23] o el Lemma 1 en [20]), la cual reescribimos en el siguiente:

Lema 4.2 *Si tenemos que* $\|\widehat{\mu} * g\|_{p'} \leq c_p^2 \|g\|_p$ *para toda* $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ *y para algún* $1 \leq p < 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, *entonces* $\left\|\widehat{f}\right\|_{L^2(\Sigma,d\mu)} \leq c_p \|f\|_p$ *para toda* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ *y para tal* p.

Prueba. Notemos que $\int \overline{\widehat{f}}\widehat{f} d\mu = \int \overline{f}^{\vee} \widehat{f} d\mu = \left((\widehat{f}\mu)^{\vee}, \overline{f}\right) = \left((\mu^{\vee} * f), \overline{f}\right) = \left((\widehat{\mu} * \widetilde{f}), \overline{\widetilde{f}}\right)$, (donde $\vee$ denota la inversa de la transformada de Fourier y $\widetilde{f}(x) = f(-x)$ las cuales estan relacionadas simbolicamente por $\vee = \widetilde{\widehat{\ }}$). Por lo tanto

$$\int \left|\widehat{f}\right|^2 d\mu \leq \|f\|_p \|\widehat{\mu} * f\|_{p'} \leq c_p^2 \|f\|^2.$$ ∎

Teorema 4.1. *Existe una constante positiva c tal que*

$$\|\mathcal{R} f\|_{L^2(\Sigma,d\mu)} \leq c\, \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^4)}, f \in S\left(\mathbb{R}^4\right) \tag{4.3}$$

si y solo si $\frac{\alpha_1+\alpha_2+4m}{2(\alpha_1+\alpha_2+2m)} \leq \frac{1}{p} \leq 1$.

Prueba. Consideramos, para z en la franja $-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{m} \leq Re(z) \leq 2$, la familia de distribuciones analíticas I_z sobre $\mathbb{R}^2$ definida por $I_z(t) = \frac{2^{z-1}}{\Gamma(z/2)} |t|^{z-2}$ para $Re(z) > 0$, y su extensión analítica para $Re(z) \leq 0$. Para tales z, sea $J_z = \delta \otimes I_z$, donde δ es la distribución de Dirac sobre $\mathbb{R}^2$ soportada en el origen y para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$, sea $T_z f = (J_z * \mu)^\wedge * f$. Un computo da que $||J_z * \mu||_{L^\infty(\mathbb{R}^4)} \leq \left|\frac{2^{z-1}}{\Gamma(z/2)}\right|$ para $Re(z) = 2$ y por lo tanto, para tales z, $||T_z f||_{L^2(\mathbb{R}^4)} = ||(T_z f)^\wedge||_{L^2(\mathbb{R}^4)} \leq c_z ||\widehat{f}||_{L^2(\mathbb{R}^4)} = c_z ||f||_{L^2(\mathbb{R}^4)}$. También, ya que $|(J_z)^\wedge(\xi)| \leq c|\xi''|^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{m}}$ para $Re(z) = -\frac{\alpha_1+\alpha_2}{m}$, la desigualdad de Young y el teorema 3.1 da, para tales z, $||T_z f||_{L^\infty(\mathbb{R}^4)} = ||(\widehat{J_z}\widehat{\mu}) * f||_{L^\infty(\mathbb{R}^4)} \leq c\left|\frac{2^{1-z}}{\Gamma(1-z/2)}\right| ||f||_{L^1(\mathbb{R}^4)}$ con c independiente de z. Más aún, es fácil verificar, usando la fórmula de Stirling, que la familia $\{T_z\}$ satisface las hipótesis del teorema de interpolación compleja de Stein (ver en [16], p.205).por lo tanto $||T_0||_{L^p(\mathbb{R}^4),L^{p'}(\mathbb{R}^4)}$ es finita para $p = 2(\alpha_1+\alpha_2+2m)/(\alpha_1+\alpha_2+4m)$. Ahora por el Lema 4.2 se sigue (4.3) para tal p. Por otra parte, es inmediato que $\mathcal{R} : L^1(\mathbb{R}^4) \to L^2(\Sigma, d\mu)$ es acotado, y por lo tanto el teorema se sigue del teorema de Riesz Thorin y el Lema 4.1.∎

4.2. Propiedades L^p- improving de μ

Sea T_μ el operador de convolución dada por $T_\mu f = \mu * f$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ y sea E_μ el conjunto de pares $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \in [0,1] \times [0,1]$ tal que $\|T_\mu f\|_q \leq c\,\|f\|_p$ para alguna constante positiva c y para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$. El siguiente lema da una condición necesaria para la acotación $L^p(\mathbb{R}^4) - L^{p'}(\mathbb{R}^4)$ del operador T_μ.

Lema 4.3. *Si* $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \in E_\mu$ *entonces* $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2m+\alpha_1+\alpha_2}$.

Prueba. Al fin de probar el lema, consideramos $Q_{\frac{1}{2}} = \left\{(t^{\alpha_1}, t^{\alpha_2}s) : \frac{1}{2} \leq t \leq 1, s_1 < s < s_2\right\}$ y $M = \sup\left\{|\varphi(x)| : x \in Q_{\frac{1}{2}}\right\}$. Para $0 < \delta < 1$, definimos

$$R_\delta = (-2\delta^{\alpha_1}, 2\delta^{\alpha_1}) \times \left(-2\delta^{\alpha_2}, 2\delta^{\alpha 2}\right) \times (-(2M+1)\delta^m, (2M+1)\delta^m)^2$$

$f = \chi_{R_\delta}$, $E_\delta = \delta \cdot Q_{\frac{1}{2}}$ y

$$A_\delta = \left\{(x', x'') \in E_\delta \times \mathbb{R}^2 : \|x'' - \varphi(x')\|_{\mathbb{R}^2} \leq \delta^m\right\}.$$

Mostraremos que existe una constante $c > 0$ (independiente de δ) tal que $|\mu * f(x', x'')| \geq c\delta^{\alpha_1+\alpha_2}$, para todo $(x', x'') \in A_\delta$ y $0 < \delta < 1$. Ciertamente

$$\mu * f(x', x'') = \int_Q \chi_{R_\delta}\left(x' - y, x'' - \varphi(y)\right) dy$$

Para estimar $|\mu * f(x', x'')|$ debemos medir los puntos $y \in Q$ que satisfacen

$$(y, \varphi(y)) \in (x', x'') + R_\delta$$

Para $y \in E_\delta$ y $(x', x'') \in A_\delta$ fijo, la homogeneidad de φ implica que

$$(x' - y, x'' - \varphi(y)) \in R_\delta$$

Por lo tanto

$$|\mu * f(x', x'')| \geq |E_\delta| = \delta^{\alpha_1+\alpha_2}\left|Q_{\frac{1}{2}}\right|, \ \textit{para } (x', x'') \in A_\delta.$$

Ahora,

$$\|\mu * f\|_q \geq \left(\int_{A_\delta} |\mu * f|^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq c\delta^{\alpha_1+\alpha_2}\,|A_\delta|^{\frac{1}{q}} = c\delta^{\alpha_1+\alpha_2}\delta^{\frac{1}{q}(\alpha_1+\alpha_2+2m)}$$

Por otro lado, $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \in E_\mu$ implica $\|\mu * f\|_q \leq c_{p,q}\,\|f\|_p \leq c\delta^{\frac{1}{p}(\alpha_1+\alpha_2+2m)}$, por lo tanto $\delta^{\alpha_1+\alpha_2}\delta^{\frac{1}{q}(\alpha_1+\alpha_2+2m)} \leq c\delta^{\frac{1}{p}(\alpha_1+\alpha_2+2m)}$, para todo $0 < \delta < 1$, entonces $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2m+\alpha_1+\alpha_2}$. ∎

Teorema 4.2. *Para* $p = \frac{2m+\alpha_1+\alpha_2}{m+\alpha_1+\alpha_2}$, *el triángulo cerrado con vértices* $(0,0)$, $(1,1)$ y $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p'}\right)$ *esta contenido en* E_μ y $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p'}\right) \in \partial E_\mu$.

Prueba. Es conocido que si $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \in E_\mu$ entonces $\frac{1}{q} \leq \frac{1}{p}$ y $\frac{1}{q} \geq \frac{2}{p} - 1$ (cf. [11], Th. 1 y [16], p. 33).En particular, estos hechos y el lema 4.3 implican que si $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p'}\right) \in E_\mu$

entonces $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{p} \leq \frac{m+\alpha_1+\alpha_2}{2m+\alpha_1+\alpha_2}$. Por otra parte, por el teorema de Riesz Thorin, E_μ es un conjunto convexo, ya que μ es una medida finita, $(0,0)$ y $(1,1)$ pertenecen a E_μ. Por lo tanto, para probar el teorema, es suficiente ver que $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p'}\right) \in E_\mu$ para $p = (2m+\alpha_1+\alpha_2)/(m+\alpha_1+\alpha_2)$. Consideramos ahora, para $z \in \mathbb{C}$, la familia analítica de distribuciones J_z sobre $\mathbb{R}^2$ definida como en la prueba del teorema 4.1 y consideramos, para z en la franja $-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{m} \leq Re\,(z) \leq 2$, la familia analítica de operadores $S_z f := \mu * J_z * f$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$. Por el teorema.3.1 tenemos que $\left|(\mu)^\wedge(\xi', \xi'')\right| \leq c\,|\xi''|^{-(\alpha_1+\alpha_2)/m}$, y ya que $\widehat{J_z} = 1 \otimes I_{2-z}$ obtenemos $\|S_z\|_{2,2} \leq \left\|\widehat{\mu}\widehat{J_z}\right\|_\infty \leq c\left|\frac{2^{1-z}}{\Gamma(1-z/2)}\right|$ para $Re\,(z) = -\frac{\alpha_1+\alpha_2}{m}$. Por otro lado $(\mu * J_z)(x', x'') = \frac{2^{z-1}}{\Gamma(z/2)}\,|x'' - \varphi(x')|^{z-2}$ para $x', x'' \in \mathbb{R}^2$ por lo cual $\|S_z\|_{1,\infty} = \|\mu * J_z\|_\infty \leq \left|\frac{2^{z-1}}{\Gamma(z/2)}\right|$ para $Re\,(z) = 2$. Como en el Teorema 4.1, la familia $\left\{S_z : -\frac{\alpha_1+\alpha_2}{m} \leq Re\,(z) \leq 2\right\}$ satisface las hipótesis del teorema de interpolación compleja de Stein, y ya que $-t\frac{\alpha_1+\alpha_2}{m} + (1-t)\,2 = 0$ para $t = \frac{2m}{\alpha_1+\alpha_2+2m}$, S_0 es un operador acotado de L^p en $L^{p'}$ para $\frac{1}{p} = t\frac{1}{2} + (1-t) = \frac{m+\alpha_1+\alpha_2}{2m+\alpha_1+\alpha_2}$. Siendo T_μ un múltiplo de S_0, se sigue el teorema.∎

Ejemplo. Damos un ejemplo de una función φ satisfaciendo las hipótesis H1-H4. Sea

$$\varphi(x_1, x_2) = \left(\tfrac{-4}{132}x_1^{12} + \tfrac{1}{30}x_2^6, \tfrac{-3}{132}x_1^{12} + \tfrac{1}{30}x_2^6 + \tfrac{5}{90}x_1^6 x_2^3\right)$$

En este caso $\varphi(t \bullet x) = t^m \varphi(x)$ con $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = 1$ y $m = 6$, por lo que H1 y H2 se satisfacen. Un computo muestra que el discriminante de la forma cuadrática

$$h \to det\,(\varphi''(1, x_2)h) = \langle K(1, x_2)h, h\rangle,$$

donde $K(1, x_2)$ es la matriz simétrica asociada a la forma cuadrática $det\,(\varphi''(1, x_2)h)$ con $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$, es

$$-det[K(1, x_2)] = \tfrac{1}{4}\left(-4x_2^4 - \tfrac{4}{3}x_2 + x_2^4\left(-3 + \tfrac{5}{3}x_2^3\right)\right)^2 + 4x_2^4\left(-3 + \tfrac{5}{3}x_2^3\right)\left(x_2^4 + \tfrac{1}{3}x_2\right) - 4x_2^8$$

el cual es negativo para $x_2 \in \left(\frac{1}{5}10^{\frac{2}{3}}, 1\right)$ y con ceros simples para $x_2 = \frac{1}{5}10^{\frac{2}{3}}, 1$. Ya que $\Lambda_1(1,1)\Lambda_2(1,1) = det[K(1,1)] = 0$ y $\frac{d}{ds}_{|s=1} det[K(1,s)] \neq 0$ se sigue que $\Lambda_1(1,1) \neq 0$ y $\frac{d}{ds}_{|s=1}\Lambda_2(1,s) \neq 0$ o $\Lambda_2(1,1) \neq 0$ y $\frac{d}{ds}_{|s=1}\Lambda_1(1,s) \neq 0$, similarmente se obtiene para el punto no elíptico $\frac{1}{5}10^{\frac{2}{3}}$, por lo tanto H4 también se satisface.

Finalmente H1-H4 ocurren para $Q = \left\{(t^{\alpha_1}, t^{\alpha_2}x_2) : 0 < t \leq 1, \frac{1}{5}10^{\frac{2}{3}} < x_2 < 1\right\}$ y φ.

Observación 4.3. Si consideramos $\varphi \in C^\infty(Q)$ con alguna hipótesis adicional en el lema 3.2., los teoremas 4.1 y 4.2 son aún ciertos. Consideramos un punto no elíptico $x_0 \in \partial Q$ y suponemos primero que $x_0 = (1, \sigma)$ para algún σ, sea $K(x) = (k_{ij}(x))$ la matriz simétrica de la forma cuadrática 1.3, asumimos que $\frac{d^l}{ds^l}_{|s=\sigma} k_{ij}(1,s) \neq 0$ y $\frac{d^r}{ds^r}_{|s=\sigma} \det K(1,s) \neq 0$ para algún l y r, se sigue que la función f apareciendo en 3.8 es tal que $\frac{d^m}{ds^m}_{|s=\sigma} f(s) \neq 0$ para algún $m \geq 1$, en efecto, tenemos que $f = g^2 + h^2$ con $\frac{d^n}{ds^n}_{|s=\sigma} g(s) \neq 0$ o $\frac{d^m}{ds^m}_{|s=\sigma} h(s) \neq 0$ donde n y m son los menores naturales con esta propieded, sin perdida de generalidad podemos asumir $f = g^2$, aplicando la fórmula de Leibniz obtenemos $\frac{d^{2n}}{ds^{2n}}_{|s=\sigma} g^2(s) = C(2n,n)\left(\frac{d^n}{ds^n}_{|s=\sigma} g(s)\right)^2$, donde $C(2n,n)$ es un número combinatorio y $2n$ es el menor natural con esta propiedad, luego el lema 3.2. vale reemplazando la condición de analiticidad por la de suavidad. Finalmente, observamos que los demás lemas valen considerando sólo $\varphi \in C^\infty(Q)$.

5. Resultados en $\mathbb{H}^n$.

A continuación daremos descripciones completas sobre el conjunto tipo de ciertos operadores de convolución con medidas singulares en $\mathbb{H}^n$ soportadas sobre el gráfico de ciertas funciones radiales y poliradiales. También caracterizamos el interior del conjunto tipo de operadores de convolución con medidas singulares fraccionarias. Antes comenzamos con el análisis armónico asociado al grupo de Heisenberg necesario para tratar tales problemas.

5.1. Análisis armónico sobre el grupo de Heisenberg.

Ahora prestamos atención al grupo de Heisenberg $\mathbb{H}^n$, ver también [18] y [21].

5.1.1. Representaciones del grupo de Heisenberg.

El grupo de Heisenberg $\mathbb{H}^n$ es $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ dotado con la ley de grupo

$$(z,t)\cdot(w,s) = (z+w, t+s+\langle z,w\rangle),$$

donde la forma simpléctica $\langle .,.\rangle$ esta definida por

$$\langle z,w\rangle = \frac{1}{2}Im(z\cdot\overline{w}) = \frac{1}{2}Im(\sum_{j=1}^{n} z_j\cdot\overline{w_j}), \tag{5.1}$$

con el origen como la identidad y el inverso dado por $(z,t)^{-1} = (-z,-t)$.

La teoría de representaciones del grupo de Heisenberg es bien entendida, usando el teorema de Stone-von Neumann se da una clasificación completa de todas las representaciones unitarias irreducibles de $\mathbb{H}^n$. Sea $\mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}^n))$ el grupo de operadores unitarios actuando sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$, y para cada $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$ definimos el mapeo

$$\pi_\lambda : \mathbb{H}^n \to \mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}^n))$$

como sigue: para cada $(z,t)\in\mathbb{H}^n$, $z = x+iy$, y $\phi\in L^2(\mathbb{R}^n)$, hacemos

$$\pi_\lambda(z,t)\phi(\xi) = e^{i\lambda(x\cdot\xi+\frac{1}{2}x\cdot y+t)}\phi(\xi+y).$$

Es fácil verificar que $\pi_\lambda(z,t)$ es un homomorfismo de $\mathbb{H}^n$ en $\mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}^n))$, esto es

$$\pi_\lambda(z,t)\pi_\lambda(w,s) = \pi_\lambda(z+w, t+s+\langle z,w\rangle),$$

y que $\pi_\lambda(z,t)$ es unitaria. Más aún, es continua en el sentido que para $\phi\in L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\|\pi_\lambda(z,t)\phi-\phi\|_{L^2} \to 0 \qquad cuando \qquad (z,t)\to 0.$$

Para ver que tales representaciones son irreducibles, se puede consultar [21]. El teorema de Stone-von Neumann, afirma que, salvo equivalencia unitaria estas son todas las representaciones unitarias irreducibles de dimensión infinita de $\mathbb{H}^n$.

Para $\lambda\neq 0$ escribimos $\pi_\lambda(z,t) = e^{i\lambda t}\pi_\lambda(z)$, donde $\pi_\lambda(z) = \pi_\lambda(z,0)$. Por lo tanto

$$\pi_\lambda(z)\varphi(\xi) = e^{i\lambda(x\cdot\xi+\frac{1}{2}x\cdot y)}\phi(\xi+y)$$

Ahora, dadas φ, $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, consideramos la función

$$V_\varphi^\lambda(\psi)(z) = (\pi_\lambda(z)\varphi, \psi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda x\cdot\xi}\varphi\left(\xi + \frac{y}{2}\right)\overline{\psi}\left(\xi - \frac{y}{2}\right)d\xi \tag{5.2}$$

Aplicando el teorema de Plancherel para la transformada de Fourier en la variable x da

$$\int\limits_{\mathbb{C}^n} \left|V_\varphi^\lambda(\psi)(z)\right|^2 dz = \left(\frac{2\pi}{|\lambda|}\right)^n \int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \left|\varphi\left(\xi + \frac{y}{2}\right)\right|^2 \left|\overline{\psi}\left(\xi - \frac{y}{2}\right)\right|^2 d\xi dy$$

luego de realizar un cambio de variable se obtiene

$$\left\|V_\varphi^\lambda(\psi)\right\|_{L^2(\mathbb{C}^n)} = \left(\frac{2\pi}{|\lambda|}\right)^{\frac{n}{2}} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

de esto y utilizando polarización, se tiene para φ, ψ, g y h pertenecientes al $L^2(\mathbb{R}^n)$ que

$$\left(V_\varphi^\lambda(\psi), V_g^\lambda(h)\right) = \left(\frac{2\pi}{|\lambda|}\right)^n (\varphi, g)\,(h, \psi) \tag{5.3}$$

Observación 5.1: Notemos que de este resultado se tiene la siguiente consecuencia inmediata.

Supongase que $\{\varphi_j\}$ es un sistema ortonormal en $L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces las funciones φ_{ij} definidas por

$$\varphi_{ij} = \left(\frac{|\lambda|}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} (\pi_\lambda(z)\varphi_i, \varphi_j)$$

forman un sistema ortonormal en $L^2(\mathbb{C}^n)$. Más aún, usando propiedades de la transformada de Fourier en $\mathbb{H}^n$, concepto que a continuación definiremos, se ve que $\{\varphi_{ij}\}$ es una base ortonormal si $\{\varphi_j\}$ lo es.

5.1.2. Transformada de Fourier en $\mathbb{H}^n$.

Dada $f \in L^1(\mathbb{H}^n)$ y $\lambda \neq 0$ definimos la transformada de Fourier $\widehat{f}(\lambda)$ como el operador actuando sobre el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$ dado por

$$\widehat{f}(\lambda)\phi(\xi) = \int\limits_{\mathbb{H}^n} f(z,t)\pi_\lambda(z,t)\phi(\xi)dzdt.$$

Si ψ es otra función en $L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$(\widehat{f}(\lambda)\phi, \psi) = \int\limits_{\mathbb{H}^n} f(z,t)(\pi_\lambda(z,t)\phi, \psi)dzdt.$$

Siendo $\pi_\lambda(z,t)$ un operador unitario, tenemos

$$|(\pi_\lambda(z,t)\phi, \psi)| \leq \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

y por lo cual

$$\left|(\widehat{f}(\lambda)\phi,\psi)\right| \leq \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^1(\mathbb{H}^n)}.$$

Por lo tanto $\widehat{f}(\lambda)$ es un operador acotado sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$, más aún

$$\left\|\widehat{f}(\lambda)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{H}^n)} \tag{5.4}$$

Si definimos

$$f^\lambda(z) = \int_{\mathbb{R}} f(z,t)e^{i\lambda t}dt$$

entonces se sigue que

$$\widehat{f}(\lambda)\phi(\xi) = \int_{\mathbb{C}^n} f^\lambda(z)\pi_\lambda(z)\phi(\xi)dz$$

esto nos induce a considerar operadores de la forma

$$W_\lambda(g) = \int_{\mathbb{C}^n} g(z)\pi_\lambda(z)dz \tag{5.5}$$

para funciones definidas sobre $\mathbb{C}^n$. Es claro que

$$\widehat{f}(\lambda) = W_\lambda(f^\lambda) \tag{5.6}$$

Explícitamente

$$\begin{aligned} W_\lambda(g)\phi(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} g(x,y)e^{i\lambda(x\cdot\xi+\frac{1}{2}x\cdot y)}\phi(\xi+y)dxdy \qquad (5.7)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} K_{g,\lambda}(\xi,\eta)\phi(\eta)d\eta, \end{aligned}$$

donde

$$K_{g,\lambda}(\xi,\eta) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x,\eta-\xi)e^{i\lambda(\frac{x}{2}\cdot(\xi+\eta))}dx$$

Por lo tanto si $g\in L^1(\mathbb{C}^n)\cap L^2(\mathbb{C}^n)$, el núcleo $K_{g,\lambda}$ pertenece al $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ y por la teoría de operadores integrales, se sigue que $W_\lambda(g)$ es un operador de Hilbert-Schmidt, cuya norma esta dada por

$$\|W_\lambda(g)\|_{HS}^2 = \int_{\mathbb{R}^{2n}} |K_{g,\lambda}(\xi,\eta)|^2 d\xi d\eta = \left(\frac{2\pi}{|\lambda|}\right)^n \int_{\mathbb{R}^{2n}} |g(x,y)|^2 dxdy \tag{5.8}$$

Ahora se tiene que para $f\in L^1\cap L^2(\mathbb{H}^n)$, $\widehat{f}(\lambda)$ es un operador de Hilbert-Schmidt, de (5.6), (5.8) y aplicando el teorema de Plancherel para la transformada de Fourier en la variable λ, se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\|\widehat{f}(\lambda)\right\|_{HS}^2 |\lambda|^n d\lambda = (2\pi)^{n+1}\int_{\mathbb{H}^n} |f(z,t)|^2 dzdt.$$

Esta fórmula se puede extender a todo el $L^2(\mathbb{H}^n)$. Para este fin, sea $HS\,(L^2(\mathbb{R}^n))$ el espacio de Hilbert de operadores Hilbert-Schmidt sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$, con producto interno $(T,S) = tr(TS^*)$; con $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^*)$ denotamos el espacio de Hilbert de funciones $\Phi : \mathbb{R}^* \to HS\,(L^2(\mathbb{R}^n))$ tal que

$$(i)\ \lambda \to (\Phi(\lambda)\phi, \psi)\ \ \textit{es medible para cada } \phi, \psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

$$(ii)\ \int_{-\infty}^{\infty} \|\Phi(\lambda)\|_{HS}^2 \, |\lambda|^n \, d\lambda < \infty$$

Ya que los operadores de Hilbert-Schmidt se identifican con L^2-núcleos, podemos pensar a $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^*)$ como el espacio de funciones medibles $K(\xi,\eta;\lambda)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} |K(\xi,\eta;\lambda)|^2 \, d\xi d\eta d\lambda < \infty$$

Ahora se tiene el

Teorema de Plancherel en $\mathbb{H}^n$. *La transformada de Fourier $f \to \widehat{f}(\lambda)$ se extiende a una isometría de $L^2(\mathbb{H}^n)$ sobre $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^*, (2\pi)^{-(n+1)}\, |\lambda|^n \, d\lambda)$.*

5.1.3. Convolución y convolución twisted.

Sean f y g dos funciones integrables sobre $\mathbb{H}^n$, entonces su convolución esta definida por

$$(f * g)\,(z,t) = \int_{\mathbb{H}^n} f((z.t)\cdot(w,s)^{-1})g(w,s)dwds$$

Entonces se sigue de la definición de la transformada de Fourier que

$$\widehat{(f * g)}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda)\widehat{g}(\lambda) \tag{5.9}$$

Supongamos que queremos mostrar que el operador $f \to f * K$ es acotado sobre $L^2(\mathbb{H}^n)$. Via (5.9) nuestro operador se puede realizar como un operador multiplicación, a saber

$$\widehat{f * K}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda)\widehat{K}(\lambda)$$

Del teorema de Plancherel para la transformada de Fourier en $\mathbb{H}^n$ se sigue que la acotación de nuestro operador sobre $L^2(\mathbb{H}^n)$ es equivalente a la acotación uniforme de la norma del operador $\widehat{K}(\lambda)$ sobre $\lambda \neq 0$.

Alternativamente, en vista del teorema de Plancherel para la transformada de Fourier sobre $\mathbb{R}$, la acotación de nuestro operador sobre $L^2(\mathbb{H}^n)$ es equivalente también a la estimación

$$\int_{\mathbb{C}^n} \left|(f * K)^\lambda\,(z)\right|^2 dz \leq C \int_{\mathbb{C}^n} \left|f^\lambda(z)\right|^2 dz$$

donde la constante C es independiente de λ. Siendo

$$(f * K)^\lambda\,(z) = \int_{\mathbb{C}^n} f^\lambda(z-w)K^\lambda(w)e^{i\frac{\lambda}{2}Im(z\cdot\overline{w})}dw$$

esto nos induce naturalmente a tratar con la llamada convolución twisted

$$(f *_\lambda g)(z) = \int_{\mathbb{C}^n} f(z-w)g(w)e^{i\frac{\lambda}{2}Im(z\cdot\overline{w})}dw$$

De esto se sigue que la acotación de nuestro operador sobre $L^2(\mathbb{H}^n)$ es equivalente a la del operador convolución twisted $f \to f *_\lambda K^\lambda$ sobre $L^2(\mathbb{C}^n)$.

Se ve fácilmente que el operador W_λ actúa sobre la convolución twisted de la misma manera que la transformada de Fourier sobre la convolución, esto es

$$W_\lambda(f *_\lambda g) = W_\lambda(f)W_\lambda(g)$$

Si nuestro núcleo es escogido radial sobre $\mathbb{H}^n$, i.e. $K(z,t) = K_0(|z|, t)$, para alguna función K_0, entonces por un resultado de Geller ([8]) tenemos que los operadores $\widehat{K}(\lambda)$ son diagonalizables respecto a una base de Hermite para el $L^2(\mathbb{R}^n)$, y las entradas diagonales pueden expresarse explícitamente en términos de funciones de Laguerre. Por lo tanto, para una función radial K, el estudio de la acotación del operador de convolución sobre $L^2(\mathbb{H}^n)$ se reduce al estudio del comportamiento uniforme de estas entradas diagonales.

En lo que sigue formularemos y probaremos este resultado, comenzaremos introduciendo las funciones de Hermite y Laguerre.

5.1.4. Funciones de Hermite y Laguerre.

La teoría de Hermite y las expansiones de Hermite en $\mathbb{R}^n$ están íntimamente conectadas con el análisis armónico sobre el grupo de Heisenberg.

Polinomios de Hermite. Los polinomios de Hermite estan definidos, para $t \in \mathbb{R}$, por

$$H_k(t) = (-1)^k e^{t^2} \frac{d^k}{dt^k}\left(e^{-t^2}\right)$$

con $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Las funciones de Hermite rescaladas y normalizadas se definen por

$$h_k^\lambda(t) = (2^k k!)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{|\lambda|}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} h_k\left(|\lambda|^{\frac{1}{2}}\, t\right)$$

donde $h_k(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2} H_k(t)$. Estas funciones forman una base ortonormal para $L^2(\mathbb{R})$.

Sea ahora $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ un multi-índice y $x \in \mathbb{R}^n$, definimos

$$\Phi_\alpha^\lambda(x) = \prod_{j=1}^n h_{\alpha_j}^\lambda(x_j) \tag{5.10}$$

estas funciones constituyen una base ortonormal para $L^2(\mathbb{R}^n)$, cuando α varía sobre todos los multi-índices.

Polinomios de Laguerre.

Los polinomios de Laguerre de tipo $\delta > -1$ estan definidos, para $x \in (0, \infty) = \mathbb{R}^+$, por

$$L_k^\delta(x) = e^x x^{-\delta} \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k} \left(e^{-x} x^{k+\delta} \right) \tag{5.11}$$

Un computo da

$$L_k^\delta(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{(k+\delta)!}{(\delta+j)!(k-j)!} \frac{(-x)^j}{j!}$$

de esto se sigue que

$$\frac{d}{dx} L_k^\delta(x) = -L_{k-1}^{\delta+1}(x)$$

Las funciones de Laguerre de tipo $\delta > -1$ estan dadas por

$$\Lambda_k^\delta(x) = \left(\frac{k!}{(k+\delta)!} \right)^{\frac{1}{2}} L_k^\delta(x) e^{-\frac{1}{2}x} x^{\frac{\delta}{2}}$$

se ve que forman una base ortonormal para el $L^2(\mathbb{R}^+)$.

Observación 5.2: En particular, tenemos que para cada $\lambda \neq 0$, las funciones

$$\left(\frac{k! 2^{1-n}}{(k+n-1)!} \right)^{\frac{1}{2}} (2\pi)^n \psi_k^\lambda$$

constituyen una base ortonormal para el $L^2(\mathbb{R}^+, |\lambda|^{-n} r^{2n-1} dr)$, donde

$$\psi_k^\lambda(r) = \left(\frac{|\lambda|}{2\pi} \right)^n L_k^{n-1}(\frac{1}{2} |\lambda| r^2) e^{-\frac{1}{4}|\lambda| r^2}. \tag{5.12}$$

Funciones especiales de Hermite.

Para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ y $z \in \mathbb{C}^n$, definimos las funciones especiales de Hermite $\Phi_{\alpha,\beta}^\lambda$ por

$$\Phi_{\alpha,\beta}^\lambda(z) = \left(\frac{|\lambda|}{2\pi} \right)^{\frac{n}{2}} \left(\pi_\lambda(z) \Phi_\alpha^\lambda, \Phi_\beta^\lambda \right)$$

de (5.2) se tiene que

$$\Phi_{\alpha,\beta}^\lambda(z) = \left(\frac{|\lambda|}{2\pi} \right)^{\frac{n}{2}} V_{\Phi_\alpha^\lambda}^\lambda \left(\Phi_\beta^\lambda \right)(z) \tag{5.13}$$

y además es una base ortonormal para $L^2(\mathbb{C}^n)$ (ver observación 5.1). Ahora, para $f \in L^2(\mathbb{C}^n)$ tenemos la siguiente expansión

$$f = \sum_\beta \sum_\alpha \left(f, \Phi_{\alpha,\beta}^\lambda \right) \Phi_{\alpha,\beta}^\lambda \tag{5.14}$$

que es la denominada expansión de Hermite.

Las funciones especiales de Hermite pueden ser expresadas en términos de las funciones de Laguerre, por ejemplo

$$\Phi^{\lambda}_{\alpha,\alpha}(z) = \left(\frac{|\lambda|}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \prod_{j=1}^{\infty} L^{0}_{\alpha_j}\left(\frac{1}{2}|\lambda|\,|z_j|^2\right) e^{-\frac{1}{4}|\lambda||z_j|^2} \tag{5.15}$$

A su vez las funciones de Laguerre satisfacen la siguiente identidad generatriz (ver [21])

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k L^{\delta}_k(t) e^{-\frac{1}{2}t} = (1-r)^{-\delta-1} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1+r}{1-r}\right)t} \tag{5.16}$$

De esto y la fórmula (5.15) se tiene la siguiente igualdad

$$\sum_{|\beta|=k} \Phi^{\lambda}_{\beta,\beta}(z) = \left(\frac{|\lambda|}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} L^{n-1}_k\left(\frac{1}{2}|\lambda|\,|z|^2\right) e^{-\frac{1}{4}|\lambda||z|^2} = \left(\frac{2\pi}{|\lambda|}\right)^{\frac{n}{2}} \psi^{\lambda}_k(z) \tag{5.17}$$

Ahora, la serie que aparece en (5.14) puede ser expresada de manera compacta en términos de las funciones ψ^{λ}_k. Precisamos esto en la siguiente proposición.

Proposición 5.1. *Para* $f \in L^2(\mathbb{C}^n)$ *tenemos*

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} f *_{\lambda} \psi^{\lambda}_k$$

donde $\psi^{\lambda}_k(z) = \left(\frac{|\lambda|}{2\pi}\right)^n L^{n-1}_k(\frac{1}{2}|\lambda|\,|z|^2) e^{-\frac{1}{4}|\lambda||z|^2}$ *y la serie converge en la norma* $L^2(\mathbb{C}^n)$.

Esto se sigue inmediatamente de la relación (5.17) y el siguiente lema.

Lema.5.1

$$\Phi^{\lambda}_{\alpha,\beta} *_{\lambda} \Phi^{\lambda}_{\mu,\upsilon} = \left(\frac{2\pi}{|\lambda|}\right)^{\frac{n}{2}} \delta_{\beta,\mu} \Phi^{\lambda}_{\alpha,\upsilon}$$

Prueba. Si $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces de (5.5), (5.13), (5.2) y (5.3) se sigue que

$$\left(W_{\lambda}\left(\overline{\Phi^{\lambda}_{\alpha,\beta}}\right)\varphi, \psi\right) = \left(\frac{2\pi}{|\lambda|}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\varphi, \Phi^{\lambda}_{\alpha}\right)\left(\Phi^{\lambda}_{\beta}, \psi\right) \tag{5.18}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\left(W_{\lambda}\left(\overline{\Phi^{\lambda}_{\alpha,\beta}} *_{\lambda} \overline{\Phi^{\lambda}_{\mu,\upsilon}}\right)\varphi, \psi\right) &= \left(W_{\lambda}\left(\overline{\Phi^{\lambda}_{\alpha,\beta}}\right) W_{\lambda}\left(\overline{\Phi^{\lambda}_{\mu,\upsilon}}\right)\varphi, \psi\right) && (5.19)\\
&= \left(\frac{2\pi}{|\lambda|}\right)^{\frac{n}{2}} \left(W_{\lambda}\left(\overline{\Phi^{\lambda}_{\mu,\upsilon}}\right)\varphi, \Phi^{\lambda}_{\alpha}\right)\left(\Phi^{\lambda}_{\beta}, \psi\right) && (5.20)\\
&= \left(\frac{2\pi}{|\lambda|}\right)^{n} \delta_{\alpha,\upsilon}\left(\varphi, \Phi^{\lambda}_{\mu}\right)\left(\Phi^{\lambda}_{\beta}, \psi\right)
\end{aligned}$$

entonces

$$\overline{\Phi^{\lambda}_{\alpha,\beta}} *_{\lambda} \overline{\Phi^{\lambda}_{\mu,\upsilon}} = \left(\frac{2\pi}{|\lambda|}\right)^{\frac{n}{2}} \delta_{\alpha,\upsilon} \overline{\Phi^{\lambda}_{\mu,\beta}}$$

siendo $\overline{f *_\lambda g} = \overline{g} *_\lambda \overline{f}$, se sigue el lema.∎

Prueba de la proposición 5.1. Para $f \in L^2(\mathbb{C}^n)$ tenemos que

$$f = \sum_\beta \sum_\alpha \left(f, \Phi^\lambda_{\alpha,\beta}\right) \Phi^\lambda_{\alpha,\beta}$$

del lema 5.1 se sigue que

$$f *_\lambda \Phi^\lambda_{\mu,\mu} = \sum_\beta \sum_\alpha \left(f, \Phi^\lambda_{\alpha,\beta}\right) \left(\Phi^\lambda_{\alpha,\beta} *_\lambda \Phi^\lambda_{\mu,\mu}\right) = \left(\frac{2\pi}{|\lambda|}\right)^{\frac{n}{2}} \sum_\alpha \left(f, \Phi^\lambda_{\alpha,\mu}\right) \Phi^\lambda_{\alpha,\mu}$$

en consecuencia

$$f = \left(\frac{|\lambda|}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\beta|=k} f *_\lambda \Phi^\lambda_{\beta,\beta}$$

y la proposición se sigue de (5.17) ∎

Sea P^λ_k la proyección de $L^2(\mathbb{R}^n)$ sobre el subespacio generado por $\left\{\Phi^\lambda_\alpha : |\alpha| = k\right\}$. Concluimos esta sección con el siguiente lema.

Lema 5.2.

$$W_\lambda\left(\psi^\lambda_k\right) = P^\lambda_k \text{ y por lo tanto } \psi^\lambda_k *_\lambda \psi^\lambda_j = \delta_{kj}\psi^\lambda_k$$

Prueba. De (5.18) se sigue que

$$W_\lambda\left(\Phi^\lambda_{\alpha,\alpha}\right)\varphi = \left(\frac{2\pi}{|\lambda|}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\varphi, \Phi^\lambda_\alpha\right) \Phi^\lambda_\alpha$$

por (5.17) se tiene $W_\lambda\left(\psi^\lambda_k\right) = P^\lambda_k$. La segunda parte de la afirmación se sigue inmediatamente de esta última igualdad.∎

5.1.5. Transformada de Fourier de funciones radiales sobre el grupo de Heisenberg.

La transformada de Fourier de una función integrable f sobre $\mathbb{H}^n$ es, para $\lambda \neq 0$, un operador definido sobre el espacio $L^2(\mathbb{R}^n)$ dado por

$$\widehat{f}(\lambda)\phi(\xi) = W_\lambda(f^\lambda)\phi(\xi),$$

donde

$$W_\lambda(f^\lambda)\phi(\xi) = \int_{\mathbb{C}^n} f^\lambda(z)\pi_\lambda(z)\phi(\xi)dz \text{ y } f^\lambda(z) = \int_{\mathbb{R}} f(z,t)e^{i\lambda t}dt$$

Ahora si f es una función radial sobre $\mathbb{H}^n$, esto significa que $f(z,t) = f_0(|z|, t)$ para alguna función f_0, tenemos el siguiente

Teorema 5.1. *Si $f \in L^1(\mathbb{H}^n)$ y además es una función radial, entonces*

$$\widehat{f}(\lambda)\Phi_\alpha^\lambda(x) = C_n \mu(|\alpha|, \lambda)\Phi_\alpha^\lambda(x)$$

donde

$$\mu(k,\lambda) = \left(\frac{k!}{(k+n-1)!}\right)\int_0^\infty f_0^\lambda(s)(2\pi)^n \psi_k^\lambda(s)\,|\lambda|^{-n}\,s^{2n-1}ds$$

y $C_n = (2\pi)^n 2^{1-n}$.

Prueba. Sea $f \in L^1(\mathbb{H}^n) \cap L^2(\mathbb{H}^n)$, es claro que $f^\lambda(z) = f_0^\lambda(|z|)$. Ahora, teniendo en cuenta la observación 5.2, podemos escribir

$$f_0^\lambda(r) = C_n \sum_{k=0}^\infty \left(\left(\frac{k!}{(k+n-1)!}\right)\int_0^\infty f_0^\lambda(s)(2\pi)^n \psi_k^\lambda(s)\,|\lambda|^{-n}\,s^{2n-1}ds\right)\psi_k^\lambda(r)$$

y la convergencia se entiende en la norma $L^2(\mathbb{R}^+, |\lambda|^{-n}\,r^{2n-1}dr)$. De esto se sigue que

$$f^\lambda(z) = C_n \sum_{k=0}^\infty \mu(k,\lambda)\psi_k^\lambda(z) \tag{5.21}$$

donde la convergencia se entiende en la norma $L^2(\mathbb{C}^n)$. Ahora ya que $\widehat{f}(\lambda) = W_\lambda(f^\lambda)$ el teorema se sigue para $f \in L^1(\mathbb{H}^n) \cap L^2(\mathbb{H}^n)$ de (5.21) y el lema 5.2. Para una función radial e integrable f arbitraria, consideramos una sucesión de funciones radiales $\{f_j\} \subset L^1(\mathbb{H}^n) \cap L^2(\mathbb{H}^n)$ tal que $f_j \to f$ en el $L^1(\mathbb{H}^n)$, ahora el teorema se sigue para $f \in L^1(\mathbb{H}^n)$ de (5.4) y el hecho que $\mu_j(k,\lambda) \to \mu(k,\lambda)$.∎

5.1.6. Transformada de Fourier de funciones poliradiales sobre el grupo de Heisenberg.

En esta sección formularemos y probaremos un resultado análogo a del teorema 5.1, en el cual, la función involucrada es poliradial e integrable. Decimos que una función f es poliradial si $f(z', z'', t) = f_0(|z'|, |z''|, t)$, para alguna función f_0, con $z' \in \mathbb{C}^p$, $z'' \in \mathbb{C}^q$ y $p + q = n$.

Veamos esto, sean $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^p$ y $\gamma, \delta' \in \mathbb{N}_0^q$ consideramos las siguientes bases ortonormales para $L^2(\mathbb{R}^p)$ y $L^2(\mathbb{R}^q)$ respectivamente:

$$\left\{\Phi_\alpha^{\lambda,p}\right\} \ y \left\{\Phi_\gamma^{\lambda,q}\right\}$$

donde las funciones $\Phi_\alpha^{\lambda,p}$ y $\Phi_\gamma^{\lambda,q}$ son las definidas por (5.10) reemplazando allí n por p y q respectivamente. Una vez más, por (5.10) se sigue que $\Phi_\alpha^{\lambda,p}(x')\Phi_\gamma^{\lambda,q}(x'') = \Phi_{(\alpha,\gamma)}^\lambda(x', x'')$ donde $(x', x'') \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q = \mathbb{R}^n$ y $(\alpha, \gamma) = (\alpha_1, ..., \alpha_p, \gamma_1, ..., \gamma_q) \in \mathbb{N}_0^n$.

A su vez tenemos que

$$\left\{\Phi_{\alpha,\beta}^{\lambda,p}\right\} y \left\{\Phi_{\gamma,\delta'}^{\lambda,q}\right\}$$

son bases ortonormales para $L^2(\mathbb{C}^p)$ y $L^2(\mathbb{C}^q)$ respectivamente, de esto se sigue que $\left\{\Phi_{\alpha,\beta}^{\lambda,p}(z')\Phi_{\gamma,\delta}^{\lambda,q}(z'')\right\}$ es una base ortonormal para $L^2(\mathbb{C}^n)$.

Ahora es claro de (5.13) y (5.2) que

$$\Phi^{\lambda,p}_{\alpha,\beta}(z')\Phi^{\lambda,q}_{\gamma,\delta'}(z'') = \Phi^{\lambda}_{(\alpha,\gamma),(\beta,\delta')}(z',z'')$$

De esta igualdad se obtienen los siguientes lemas análogos a los lemas 5.1 y 5.2.

Lema 5.3.

$$\left(\left[\Phi^{\lambda,p}_{\alpha,\beta}(\cdot)\Phi^{\lambda,q}_{\gamma,\delta'}(\cdot)\right] *_\lambda \left[\Phi^{\lambda,p}_{\mu,\upsilon}(\cdot)\Phi^{\lambda,q}_{s,t}(\cdot)\right]\right)(z',z'') = \left(\frac{2\pi}{|\lambda|}\right)^{\frac{p+q}{2}} \delta_{\beta,\mu}\delta_{\delta',s}\Phi^{\lambda,p}_{\alpha,\upsilon}(z')\Phi^{\lambda,q}_{\gamma,t}(z'')$$

Prueba. Esto se sigue de la siguiente igualdad

$$\Phi^{\lambda,p}_{\alpha,\beta}(\cdot)\Phi^{\lambda,q}_{\gamma,\delta'}(\cdot) *_\lambda \Phi^{\lambda,p}_{\mu,\upsilon}(\cdot)\Phi^{\lambda,q}_{s,t}(\cdot) = \Phi^{\lambda}_{(\alpha,\gamma),(\beta,\delta')} *_\lambda \Phi^{\lambda}_{(\mu,s),(\upsilon,t)}$$

y del lema 5.1 aplicado a $\Phi^{\lambda}_{(\alpha,\gamma),(\beta,\delta')} *_\lambda \Phi^{\lambda}_{(\mu,s),(\upsilon,t)}$.∎

Sea $\psi^{\lambda,p}_k(r)$ la función dada en (5.12) reemplazando allí n por p, de manera similar para la función $\psi^{\lambda,q}_l(s)$, ahora ponemos $\psi^{\lambda}_{k,l}(z',z'') = \psi^{\lambda,p}_k(z')\psi^{\lambda,q}_l(z'')$ y sea $P^{\lambda}_{k,l}$ la proyección de $L^2(\mathbb{R}^n)$ sobre el subespacio generado por el conjunto $\left\{\Phi^{\lambda,p}_{\alpha}(\cdot)\Phi^{\lambda,q}_{\gamma}(\cdot) : |\alpha| = k \;\; y \;\; |\gamma| = l\right\}$.

Observación 5.3: De la observación 5.2, se sigue que el conjunto

$$\left\{\left(\frac{k!2^{1-p}}{(k+p-1)!}\right)^{\frac{1}{2}}(2\pi)^{p+q}\psi^{\lambda,p}_k(r)\left(\frac{l!2^{1-q}}{(l+q-1)!}\right)^{\frac{1}{2}}\psi^{\lambda,q}_l(s) : k,l \in \mathbb{N}_0\right\}$$

resulta una base ortonormal para $L^2\left(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, |\lambda|^{-(p+q)}\, r^{2p-1}s^{2q-1}drds\right)$.

Ahora tenemos el siguiente lema.

Lema 5.4.

$$W_\lambda\left(\psi^{\lambda}_{k,l}\right) = P^{\lambda}_{k,l} \;\; \textit{y por lo tanto} \;\; \psi^{\lambda}_{k,l} *_\lambda \psi^{\lambda}_{j,m} = \delta_{kj}\delta_{l,m}\psi^{\lambda}_{k,l}$$

Prueba. De (5.18) aplicada en este contexto resulta

$$W_\lambda\left(\Phi^{\lambda,p}_{\alpha,\alpha}(\cdot)\Phi^{\lambda,q}_{\gamma,\gamma}(\cdot)\right)\varphi = \left(\frac{2\pi}{|\lambda|}\right)^{\frac{p+q}{2}}\left(\varphi, \Phi^{\lambda,p}_{\alpha}(\cdot)\Phi^{\lambda,q}_{\gamma}(\cdot)\right)\Phi^{\lambda,p}_{\alpha}(\cdot)\Phi^{\lambda,q}_{\gamma}(\cdot)$$

de (5.17) y sumando sobre α y γ con $|\alpha| = k$ y $|\gamma| = l$ se sigue que

$$W_\lambda\left(\psi^{\lambda}_{k,l}\right) = W_\lambda\left(\psi^{\lambda,p}_k(\cdot)\psi^{\lambda,q}_l(\cdot)\right) = P^{\lambda}_{k,l}$$

y con ello la segunda parte del lema.∎

Finalmente se tiene el siguiente

Teorema 5.2. *Si $f \in L^1(\mathbb{H}^n)$ y además es una función poliradial, entonces*

$$\widehat{f}(\lambda)\Phi_{\alpha}^{\lambda,p}(x')\Phi_{\gamma}^{\lambda,q}(x'') = C_n\mu(|\alpha|, |\gamma|, \lambda)\Phi_{\alpha}^{\lambda,p}(x')\Phi_{\gamma}^{\lambda,q}(x'')$$

donde

$$\begin{aligned}\mu(k,l,\lambda) &= \left(\frac{k!}{(k+p-1)!}\right)\left(\frac{l!}{(l+q-1)!}\right)\times \\ &\int_0^\infty\int_0^\infty f_0^\lambda(r,s)(2\pi)^n\psi_k^{\lambda,p}(r)\psi_l^{\lambda,q}(s)\,|\lambda|^{-(p+q)}\,r^{2p-1}s^{2q-1}drds\end{aligned}$$

$C_n = (2\pi)^n 2^{2-n}$ y $p+q=n$.

Prueba. Teniendo en cuenta la observación 5.3 y el lema 5.4, la prueba se sigue de manera similar a la del teorema 5.1.∎

5.2. Propiedades L^p- improving de ν.

5.2.1. Operadores de convolución con medidas singulares 1.

Recordamos que el grupo de Heisenberg $\mathbb{H}^n$ es $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ con la ley de grupo

$$(z,t)\cdot(w,s) = (z+w, t+s+\langle z,w\rangle)$$

donde $\langle z,w\rangle = \frac{1}{2}Im(\sum_{j=1}^{n} z_j \cdot \overline{w_j})$. Para $x = (x_1,...,x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$ escribimos $x = (x', x'')$ con $x', x'' \in \mathbb{R}^n$. Por lo que, $\mathbb{R}^{2n}$ puede ser identificado con $\mathbb{C}^n$ via el mapeo $\Psi(x',x'') = x'+ix''$. En este contexto la forma $\langle z,w\rangle$ concuerda con la forma simpléctica estándar sobre $\mathbb{R}^{2n}$. Ahora, el grupo de Heisenberg $\mathbb{H}^n$ es $\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}$ dotado con la ley de grupo

$$(x,t)\cdot(y,s) = \left(x+y, t+s+\frac{1}{2}B(x,y)\right)$$

donde la forma simpléctica B esta dada por

$$B(x,y) = \sum_{j=1}^{n}\left(y_{n+j}x_j - y_j x_{n+j}\right),$$

con $x = (x_1,...,x_{2n})$ e $y = (y_1,...,y_{2n})$, el origen como la identidad y el inverso dado por $(x,t)^{-1} = (-x,-t)$.

Consideramos una función $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ suave y la medida singular ν sobre $\mathbb{H}^n$ soportada sobre el gráfico de φ, dada por

$$\langle \upsilon, f\rangle = \int_{\mathbb{R}^{2n}} f\left(w,\varphi\left(w\right)\right)\eta\left(w\right)dw \qquad (5.22)$$

con $\eta(w) = \eta_0\left(|w|^2\right)$, donde η_0 es una función en $C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $0 \le \eta_0 \le 1$, $\eta_0(t) \equiv 1$ si $t \in [-1,1]$ y $sop(\eta_0) \subset (-2,2)$.

Sea T_ν el operador definido por convolución a derecha con ν:

$$T_\nu f(x,t) = (f * \nu)(x,t) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} f\left((x,t)\cdot(w,\varphi(w))^{-1}\right)\eta(w)\,dw \tag{5.23}$$

Estamos interesados en el estudio del conjunto tipo

$$E_\nu = \left\{\left(\frac{1}{p},\frac{1}{q}\right) \in [0,1]\times[0,1] : \|T_\nu\|_{L^pL^q} < \infty\right\}$$

Donde los espacios L^p son tomados con respecto a la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^{2n+1}$. El teorema de interpolación de Riesz-Thorin se aplica en este contexto, por lo tanto el conjunto tipo E_ν es convexo. En los lemas 5.5 y 5.6 obtenemos las siguientes restricciones sobre los pares $\left(\frac{1}{p},\frac{1}{q}\right) \in E_\nu$:

$$\begin{array}{rcl} p & \leq & q \\ \dfrac{1}{q} & \geq & \dfrac{2n+1}{p} - 2n \\ \dfrac{1}{q} & \geq & \dfrac{1}{(2n+1)p} \end{array}$$

Por lo tanto E_ν esta contenido en el triángulo cerrado con vertices $(0,0)$; $(1,1)$; $\left(\frac{2n+1}{2n+2},\frac{1}{2n+2}\right)$. Decimos que ν es L^p-*improving* si E_ν no se reduce a la diagonal $\frac{1}{p}=\frac{1}{q}$.

Es bien conocido que si en (5.23) reemplazamos la convolución con respecto a la operación de grupo en $\mathbb{H}^n$ por la convolución usual en $\mathbb{R}^{2n+1}$, entonces las propiedades L^p-*improving* están relacionadas con propiedades de curvatura de φ. En efecto, si el gráfico de φ tiene curvatura Gaussiana no nula en cada punto, un teorema de Littman (ver [9]) implica que E_ν es el triángulo cerrado con vértices $(0,0)$; $(1,1)$;$\left(\frac{2n+1}{2n+2},\frac{1}{2n+2}\right)$. Ahora, si la curvatura se anula en algún punto, E_ν puede estar contenido estrictamente en el triángulo anterior (ver [6]).

Volviendo a nuestro escenario $\mathbb{H}^n$, nuestro primer resultado es el siguiente:

Teorema 5.3 *Si ν esta soportada sobre el gráfico de la función $\varphi(y) = |y|^2$, con $y \in \mathbb{R}^{2n}$, entonces el conjunto tipo E_ν es el triángulo cerrado con vertices*

$$A = (0,0), \qquad B = (1,1), \qquad C = \left(\frac{2n+1}{2n+2},\frac{1}{2n+2}\right)$$

con $n \in \mathbb{N}$.

Comenzamos con los siguientes dos lemas:

Lema 5.5. *Si $\left(\frac{1}{p},\frac{1}{q}\right) \in E_\nu$ entonces $p \leq q$.*

Prueba. Si $q = \infty$ no hay nada que probar, en lo que sigue consideramos $1 \leq p, q < \infty$.

Sea $D = \{x \in \mathbb{R}^{2n} : \|x\| \leq 1\}$, dado $\delta > 0$, ponemos $Q_\delta = [-\delta, \delta]^{2n+1}$ y $\widetilde{Q}_\delta = B\left(0, \left(2(2n+1)^{\frac{1}{2}} + 2n\right)\delta\right)$ es la bola $(2n+1)-$dimensional con centro en el origen y radio $\left(2(2n+1)^{\frac{1}{2}} + 2n\right)\delta$, ahora escogemos δ positivo de tal manera que

$$\{(x, \varphi(x)) : x \in D\} \subset Q_\delta.$$

Sea $(x,t) \in Q_\delta$ fijo e $y \in D$, entonces $\frac{1}{2}|B(x,y)| < 2n\delta$ y
$$\|(x,t)\cdot(y,\varphi(y))^{-1}\|_{\mathbb{R}^{2n+1}} \leq \|(x,t) - (y,\varphi(y))\|_{\mathbb{R}^{2n+1}} + \frac{1}{2}|B(x,y)|$$
$$< 2(2n+1)^{\frac{1}{2}}\delta + 2n\delta = \left(2(2n+1)^{\frac{1}{2}} + 2n\right)\delta.$$

Por lo tanto para cada $(x,t) \in Q_\delta$ fijo se tiene que

$$(x,t)\cdot(y,\varphi(y))^{-1} \in \widetilde{Q}_\delta, \qquad \forall y \in D$$

Si $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \in E_\nu$, al tomar $f_\delta = \chi_{\widetilde{Q}_\delta}$ resulta

$$\begin{aligned} T_\nu f_\delta(x,t) &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} \chi_{\widetilde{Q}_\delta}\left((x,t)\cdot(y,\varphi(y))^{-1}\right)\eta(y)dy \\ &\geq \int_D \chi_{\widetilde{Q}_\delta}\left((x,t)\cdot(y,\varphi(y))^{-1}\right)\eta(y)dy \\ &= \int_D \eta(y)dy \geq 1 \end{aligned}$$

Ahora

$$(2\delta)^{\frac{2n+1}{q}} = |Q_\delta|^{\frac{1}{q}} \leq |\{(x,t) : (T_\nu f_\delta)(x,t) \geq 1\}|^{\frac{1}{q}} \leq$$
$$\|T_\nu f_\delta\|_q \leq c_{p,q}\|f_\delta\|_p = c_{p,q}\left|\widetilde{Q}_\delta\right|^{\frac{1}{p}} = c_{p,q}\delta^{\frac{2n+1}{p}}$$

Al hacer $\delta \to \infty$ y siendo $c_{p,q}$ una constante independiente de δ se sigue que $p \leq q$. Finalmente, por el teorema de convexidad de Riesz-Thorin se excluye el caso $1 \leq q < p = \infty$, luego se sigue el lema.∎

Lema 5.6. *Sea ν la medida singular soportada sobre el gráfico de una función suave* φ, entonces E_ν *esta contenido en el triángulo con vértices* $(0,0), (1,1), (\frac{2n+1}{2n+2}, \frac{1}{2n+2})$.

Prueba. A continuación probamos que si $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \in E_\nu$ entonces $\frac{1}{q} \geq \frac{2n+1}{p} - 2n$ y $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{(2n+1)p}$.

Sea $f_\delta = \chi_{Q_\delta}$, donde $Q_\delta = B(0, 2\delta)$ es la bola $(2n+1)-$dimensional con centro en el origen y radio 2δ. Sea $D = \{x \in \mathbb{R}^{2n} : \|x\| \leq 1\}$ y A_δ el conjunto definido por

$$A_\delta = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R} : x \in D \wedge |t - \varphi(x)| \leq \frac{\delta}{4}\right\}$$

Para $(x,t) \in A_\delta$ sea $F_{\delta,x}$ definido por

$$F_{\delta,x} = \left\{y \in D : \|x - y\|_{\mathbb{R}^{2n}} \leq \frac{\delta}{4n(1 + \left\|\nabla\varphi\,|_{sop(\eta)}\right\|_\infty)}\right\}$$

Ahora para cada $(x,t) \in A_\delta$ fijo, se tiene que

$$(x,t)\cdot(y,\varphi(y))^{-1} \in Q_\delta, \qquad \forall y \in F_{\delta,x} \tag{5.24}$$

en efecto

$$\left\|(x,t)\cdot(y,\varphi(y))^{-1}\right\|_{\mathbb{R}^{2n+1}} \leq \|x-y\|_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}$$
$$+\,|t-\varphi(x)| + |\varphi(x)-\varphi(y)| + \frac{1}{2}\,|B(x,y)|$$

y ya que

$$\frac{1}{2}\,|B(x,y)| \leq n\,\|x\|_{\mathbb{R}^{2n}}\,\|x-y\|_{\mathbb{R}^{2n}}$$

se sigue (5.24). Entonces para $(x,t) \in A_\delta$

$$T_\nu f_\delta(x,t) \geq \int\limits_{F_{\delta,x}} \eta(y)dy \geq c\delta^{2n}$$

siendo c independiente de δ y x. Si $(\frac{1}{p},\frac{1}{q}) \in E_\nu$ resulta

$$c\delta^{\frac{1}{q}+2n} = c\delta^{2n}\,|A_\delta|^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int\limits_{A_\delta} |T_\nu f_\delta(x,t)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|T_\nu f_\delta\|_q \leq c_{p,q}\,\|f_\delta\|_p = c\delta^{\frac{2n+1}{p}}$$

por lo tanto $\delta^{2n+\frac{1}{q}} \leq C\delta^{\frac{2n+1}{p}}$, para todo $\delta < 1$. Esto implica que

$$\frac{1}{q} \geq \frac{2n+1}{p} - 2n$$

Por dualidad también es necesario que

$$\frac{1}{q} \geq \frac{1}{(2n+1)p}$$

Por lo tanto E_ν esta contenido en la región determinada por estas dos condiciones y por la condición $p \leq q$, que es el triángulo con vértices $(0,0),(1,1),(\frac{2n+1}{2n+2},\frac{1}{2n+2})$. ▮

Observación 5.4: el Lema 5.6, aún es válido si se reemplaza la condición de suavidad por Lipschitz.

La idea principal en la demostración del teorema 5.3, es considerar para cada $N \in \mathbb{N}$ fijo, un operador auxiliar T_N, el cual será embebido en una familia analítica de operadores $\{T_{N,z}\}$ en la franja $-n \leq Re(z) \leq 1$ tal que

$$\begin{cases} \|T_{N,z}(f)\|_{L^\infty(\mathbb{H}^n)} \leq c_z\,\|f\|_{L^1(\mathbb{H}^n)} & Re(z)=1 \\ \|T_{N,z}(f)\|_{L^2(\mathbb{H}^n)} \leq c_z\,\|f\|_{L^2(\mathbb{H}^n)} & Re(z)=-n \end{cases} \tag{5.25}$$

donde c_z dependerán admisiblemente en la variable z y no dependerán de N, mientras $T_N = T_{N,0}$, luego por el teorema de interpolación compleja de Stein resultará T_N acotado de $L^{\frac{2n+2}{2n+1}}(\mathbb{H}^n)$ en $L^{2n+2}(\mathbb{H}^n)$ con cota independiente de N, si probamos que $T_N f\,(x,t) \to T_\nu f\,(x,t)$ puntualmente cuando $N \to \infty$, por el lema de Fatou y los lemas 5.5 y 5.6 se siguirá el teorema 5.3. Para establecer la segunda deigualdad en (5.25) veremos que tal familia admitirá la siguiente expresión $T_{N,z}(f)(x,t) = (f * K_{N,z})\,(x,t)$, donde $K_{N,z} \in L^1(\mathbb{H}^n)$ y además es una función radial. Ahora nuestro operador se puede realizar como una multiplicación de operadores, via la transformada de Fourier (sobre $\mathbb{H}^n$), a saber:

$$\widehat{T_{N,z}(f)}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda)\widehat{K_{N,z}}(\lambda)$$

donde, para $\lambda \neq 0$, $\widehat{K_{N,z}}(\lambda)$ es un operador sobre el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$ dado por

$$\widehat{K_{N,z}}(\lambda)g(\xi) = \int\limits_{\mathbb{H}^n} K_{N,z}(\varsigma,t)\pi_\lambda(\varsigma,t)g(\xi)d\varsigma dt$$

Entonces se sigue del teorema de Plancherel para la transformada de Fourier sobre $\mathbb{H}^n$ que

$$\begin{aligned} \|T_{N,z}f\|_{L^2(\mathbb{H}^n)} &\leq A_z \|f\|_{L^2(\mathbb{H}^n)} \qquad \textit{si y solo si} \\ \left\|\widehat{K_{N,z}}(\lambda)\right\|_{op} &\leq A_z \qquad \textit{uniformemente en } N \textit{ y } \lambda \neq 0 \end{aligned} \tag{5.26}$$

Ya que $K_{N,z}$ es una función radial, por el teorema 5.1, el operador $\widehat{K_{N,z}}(\lambda) : L^2(\mathbb{H}^n) \to L^2(\mathbb{H}^n)$ se diagonaliza respecto de una base de Hermite para $L^2(\mathbb{R}^n)$. Más precisamente

$$\widehat{K_{N,z}}(\lambda) = C_n\left(\delta_{\gamma,\alpha}\mu_{N,z}(|\alpha|\,,\lambda)\right)_{\gamma,\alpha\in\mathbb{N}_0^n}$$

donde $C_n = (2\pi)^n 2^{1-n}$ y las entradas diagonales $\mu_{N,z}(k,\lambda)$, con $k = |\alpha|$, estan dadas por

$$\mu_{N,z}(k,\lambda) = \left(\frac{k!}{(k+n-1)!}\right)\int\limits_0^\infty K_{N,z}^\lambda(s)(2\pi)^n\psi_k^\lambda(s)\,|\lambda|^{-n}\,s^{2n-1}ds$$

donde

$$\psi_k^\lambda(s) = \left(\frac{|\lambda|}{2\pi}\right)^n L_k^{n-1}(\frac{1}{2}\,|\lambda|\,s^2)e^{-\frac{1}{4}|\lambda|s^2}$$

y

$$K_{N,z}^\lambda(\varsigma) = \int\limits_{\mathbb{R}} K_{N,z}(\varsigma,t)e^{i\lambda t}dt$$

.

Ahora (5.26) es equivalente a

$$\begin{aligned} \|T_{N,z}f\|_{L^2(\mathbb{H}^n)} &\leq A_z \|f\|_{L^2(\mathbb{H}^n)} \qquad \textit{si y solo si} \\ |\mu_{N,z}(k,\lambda)| &\leq A_z \qquad \textit{uniformemente en } N,k \textit{ y } \lambda \neq 0 \end{aligned} \tag{5.27}$$

Probando para $Re(z) = -n$ que $|\mu_{N,z}(k,\lambda)| \leq A_z$, con A_z independiente de N, $\lambda \neq 0$ y k, se obtiene la acotación de $L^2(\mathbb{H}^n)$ en $L^2(\mathbb{H}^n)$ que aparece en (5.25).

Para $Re(z) > 0$ y $s \in \mathbb{R}$, consideramos el núcleo integral fraccionario

$$I_z(s) = \frac{2^{-\frac{z}{2}}}{\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)}\,|s|^{z-1} \tag{5.28}$$

y su extensión analítica a todo $\mathbb{C}$.

Sea $H \in S(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{sop}(\widehat{H}) \subseteq (-1,1)$ y $\int \widehat{H}(t)dt = 1$. Ahora hacemos $\phi_N(t) = H(\frac{t}{N})$ por lo tanto $\widehat{\phi_N}(\xi) = N\widehat{H}(N\xi)$ y $\widehat{\phi_N} \to \delta$ en el sentido de las distribuciones, cuando $N \to \infty$.

Para $z \in \mathbb{C}$ y $N \in \mathbb{N}$, definimos la distribución $J_{N,z}$ sobre $\mathbb{H}^n$ por

$$J_{N,z} = \delta \otimes \left(I_z *_{\mathbb{R}} \widehat{\phi_N} \right) \tag{5.29}$$

donde δ es la delta de Dirac en el origen, la cual se entiende en la variable $x \in \mathbb{R}^{2n}$, con $*_{\mathbb{R}}$ denotamos la convolución usual en $\mathbb{R}$ y I_z es el núcleo integral fraccionario dado por (5.28). Para $z \in \mathbb{C}$ y $N \in \mathbb{N}$ fijos, definimos el siguiente operador

$$T_{N,z}f(x,t) = \left(f * \nu * J_{N,z}\right)(x,t) \tag{5.30}$$

Es claro que $T_{N,0}f(x,t) \to T_\nu f(x,t)$ puntualmente cuando $N \to \infty$, pues $J_{N,0} = \delta \otimes \widehat{\phi_N} \to \delta \otimes \delta$, cuando $N \to \infty$.

Antes de demostrar el teorema 5.3, necesitamos el siguiente:

Lema 5.7: *Si* $Re(z) \leq -1$ *entonces* $\nu * J_{N,z} \in L^p(\mathbb{H}^n)$, $\forall p \geq 1$.

Prueba. En lo que sigue analizaremos los casos $Re(z) < -1$ y $Re(z) = -1$ por separado. Un simple computo da

$$\left(\nu * J_{N,z}\right)(x,\sigma) = \eta(x) \left(I_z *_{\mathbb{R}} \widehat{\phi_N} \right) \left(\sigma - \varphi_0\left(|x|\right)\right)$$

si hacemos $F_{N,z}(s) = \left(I_z * \widehat{\phi_N} \right)(s)$, vemos que es suficiente probar que $F_{N,z} \in L^p(\mathbb{R})$, si $Re(z) \leq -1$.

Ahora $F_{N,z}$ admite la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
F_{N,z}(s) &= I_z \left(\tau_s \left(\widehat{\phi_N} \right)^{\vee} \right) \\
&= \widehat{I_z} \left(\left(\widehat{\tau_s \left(\widehat{\phi_N} \right)^{\vee}} \right)^{\vee} \right) \\
&= I_{1-z} \left((\phi_N)^{\vee}(\cdot) e^{is(\cdot)} \right) \\
&= \frac{2^{-\frac{1-z}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)} \left(\int_{\mathbb{R}} |t|^{-z} \left(\phi_N\right)^{\vee}(t) e^{ist} dt \right)
\end{aligned}$$

(donde $\phi^{\vee}(x) = \phi(-x)$). La integral que aparece en la última igualdad converge absolutamente, para $Re(z) < 0$.

Para $Re(z) < -1$, sin perdida de generalidad, consideramos

$$F_{N,z}(s) = 2^{-\frac{1-z}{2}} \left(\Gamma \left(\frac{1-z}{2} \right) \right)^{-1} \int_0^{\infty} |t|^{-z} (\phi_N)^{\vee} (t) e^{ist} dt,$$

al integrar por partes obtenemos para $s \neq 0$

$$\begin{aligned} F_{N,z}(s) &= c_z (is)^{-1} \left[\int_0^{\infty} z t^{-z-1} (\phi_N)^{\vee} (t) e^{ist} dt + \right. \\ & \left. N^{-1} \int_0^{\infty} t^{-z} \left(\frac{d}{dt} \phi_N \right)^{\vee} (t) e^{ist} dt \right] \end{aligned} \tag{5.31}$$

luego, una nueva integración por partes da

$$\begin{aligned} F_{N,z}(s) &= c_z (is)^{-2} \left[\int_0^{\infty} (-z)(z+1) t^{-z-2} (\phi_N)^{\vee} (t) e^{ist} dt + \right. \\ & N^{-1} \int_0^{\infty} (-z) t^{-z-1} \left(\frac{d}{dt} \phi_N \right)^{\vee} (t) e^{ist} dt + \\ & N^{-1} \int_0^{\infty} (-z) t^{-z-1} \left(\frac{d}{dt} \phi_N \right)^{\vee} (t) e^{ist} dt - \\ & \left. N^{-2} \int_0^{\infty} t^{-z} \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_N \right)^{\vee} (t) e^{ist} dt \right] \end{aligned}$$

estas cuatro integrales convergen absolutamente, para $Re(z) < -1$, por lo tanto $(1+s^2) F_{N,z}(s) \in L^{\infty}(\mathbb{R})$, entonces $F_{N,z}(s) \in L^p(\mathbb{R})$.

Para el caso $Re(z) = -1$, tenemos que estudiar con más detalle el primer sumando que aparece en la igualdad (5.31), para el segundo sumando se considera lo hecho anteriormente, ya que tiene sentido para $Re(z) = -1$.Ahora consideramos

$$\int_{\mathbb{R}} |t|^{i\beta} (\phi_N)^{\vee} (t) e^{ist} dt = \left(\int_{|t| \leq \frac{2|\beta|}{|s|}} + \int_{|t| \geq \frac{2|\beta|}{|s|}} \right) |t|^{i\beta} (\phi_N)^{\vee} (t) e^{ist} dt$$

es suficiente estimar la segunda integral, en efecto para M grande tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\frac{2|\beta|}{|s|} \leq |t| \leq M} |t|^{i\beta} (\phi_N)^{\vee} (t) e^{ist} dt \right| &= \left| \int_{\frac{2|\beta|}{|s|} \leq |t| \leq M} (\phi_N)^{\vee} (t) e^{i(\beta \ln(|t|) + st)} dt \right| \\ &\leq \frac{C_{\phi_N}}{|s|} \end{aligned}$$

esta estimación se sigue del corolario 2.1 (ver preliminares) aplicada a la función $h(t) = \beta\ln(|t|) + st$. En efecto, $h'(t) = \frac{\beta}{|t|} + s$ entonces $|h'(t)| = \left|\frac{\beta}{|t|} + s\right| \geq |s| - \left|\frac{\beta}{t}\right| \geq \frac{|s|}{2}$, para $\frac{2|\beta|}{|s|} \leq |t| \leq M$, y ya que la constante C_{ϕ_N} es independiente de M, se sigue el caso para $Re(z) = -1$ y se concluye el lema.∎

Prueba del Teorema 5.3: Para $Re(z) = 1$ tenemos

$$\begin{aligned} \|T_{N,z}f\|_\infty &= \|(f * \nu * J_{N,z})\|_\infty \\ &\leq \|f\|_1 \|\nu * J_{N,z}\|_\infty \end{aligned}$$

Ahora $\nu * J_{N,z}$ esta dada por la función

$$(\nu * J_{N,z})(x,\sigma) = \eta(x)\left(I_z *_{\mathbb{R}} \widehat{\phi_N}\right)(\sigma - \varphi_0(|x|))$$

por lo tanto $\|\nu * J_{N,z}\|_\infty \leq c\left|\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\right|^{-1}$. Entonces para $Re(z) = 1$ obtenemos $\|T_{N,z}\|_{1,\infty} \leq c\left|\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\right|^{-1}$.

Por el lema 5.7, en particular para $Re(z) = -n$, tenemos que $\nu * J_{N,z} \in L^1(\mathbb{H}^n) \cap L^2(\mathbb{H}^n)$, y además es una función radial. Por lo tanto el operador $(\nu * J_{N,z})\widehat{\ }(\lambda)$ se diagonaliza respecto de una base rescalada de Hermite de $L^2(\mathbb{R}^n)$, y sus entradas diagonales $\mu_{N,z}(k,\lambda)$ estan dadas por

$$\begin{aligned} \mu_{N,z}(k,\lambda) &= \frac{k!}{(k+n-1)!}\int_0^\infty (\nu * J_{N,z})(s, \widehat{-\lambda})\psi_k^\lambda(s)|\lambda|^{-n}s^{2n-1}ds \\ &= \frac{k!}{(k+n-1)!}\int_0^\infty \eta_0(s^2)e^{i\lambda\varphi_0(s)}\left(I_z *_{\mathbb{R}} \widehat{\phi_N}\right)\widehat{\ }(-\lambda)\psi_k^\lambda(s) \times \\ &\qquad |\lambda|^{-n}s^{2n-1}ds \\ &= \frac{k!}{(k+n-1)!}I_{1-z}(-\lambda)\phi_N(\lambda)\int_0^\infty \eta_0(s^2)\psi_k^\lambda(s)|\lambda|^{-n}e^{i\lambda\varphi_0(s)}s^{2n-1}ds \end{aligned}$$

Siendo

$$\int_0^\infty \eta_0(s^2)\psi_k^\lambda(s)|\lambda|^{-n}e^{i\lambda s^2}s^{2n-1}ds \tag{5.32}$$

$$= \int_0^\infty \eta_0(s^2)L_k^{n-1}\left(\frac{|\lambda|s^2}{2}\right)e^{-\frac{|\lambda|s^2}{4}}e^{i\lambda s^2}s^{2n-1}ds$$

realizando el cambio de variable $\sigma = \frac{|\lambda|s^2}{2}$, $(\sigma \longleftrightarrow s)$ en la última integral, obtenemos

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \eta_0(s^2)L_k^{n-1}\left(\frac{|\lambda|s^2}{2}\right)e^{-\frac{|\lambda|s^2}{4}}e^{i\lambda s^2}s^{2n-1}ds \\ &= 2^{n-1}|\lambda|^{-n}\int_0^\infty \eta_0\left(\frac{2\sigma}{|\lambda|}\right)L_k^{n-1}(\sigma)e^{-\frac{\sigma}{2}}e^{i2sgn(\lambda)\sigma}\sigma^{n-1}d\sigma \\ &= 2^{n-1}|\lambda|^{-n}(F_kG_\lambda)\widehat{\ }(-2sgn(\lambda)) = 2^{n-1}|\lambda|^{-n}(\widehat{F_k} * \widehat{G_\lambda})(-2sgn(\lambda)) \end{aligned}$$

donde

$$F_k(\sigma) := \chi_{(0,\infty)}(\sigma) L_k^{n-1}(\sigma)\, e^{-\frac{\sigma}{2}} \sigma^{n-1} \tag{5.33}$$

y

$$G_\lambda(\sigma) := \eta_0 \left(\frac{2\sigma}{|\lambda|}\right) \tag{5.34}$$

Ahora

$$\left|(\widehat{F_k} * \widehat{G_\lambda})(-2sgn(\lambda))\right| \leq \left\|\widehat{F_k} * \widehat{G_\lambda}\right\|_\infty \leq \left\|\widehat{F_k}\right\|_\infty \left\|\widehat{G_\lambda}\right\|_1 = \left\|\widehat{F_k}\right\|_\infty \|\widehat{\eta_0}\|_1 .$$

Por lo tanto es suficiente estimar $\left\|\widehat{F_k}\right\|_\infty$. Para ello calculamos explícitamente $\widehat{F_k}$,

$$\widehat{F_k}(\xi) = \int_0^\infty L_k^{n-1}(\sigma)\, \sigma^{n-1} e^{-\sigma\left(\frac{1}{2}+i\xi\right)} d\sigma \tag{5.35}$$

por la fórmula de Rodrigues [ver (5.11)] se tiene que

$$L_k^{n-1}(\sigma)\, \sigma^{n-1} = \frac{e^\sigma}{k!} \left(\frac{d}{d\sigma}\right)^k \left(e^{-\sigma} \sigma^{k+n-1}\right)$$

reemplazando en (5.35) obtenemos

$$\begin{aligned}
\widehat{F_k}(\xi) &= \int_0^\infty \frac{e^\sigma}{k!} \left(\frac{d}{d\sigma}\right)^k \left(e^{-\sigma}\sigma^{k+n-1}\right) e^{-\sigma\left(\frac{1}{2}+i\xi\right)} d\sigma \\
&= \frac{1}{k!} \int_0^\infty \left(\frac{d}{d\sigma}\right)^k \left(e^{-\sigma}\sigma^{k+n-1}\right) e^{-\sigma\left(-\frac{1}{2}+i\xi\right)} d\sigma \\
&= \frac{1}{k!} \int_0^\infty \left(-\frac{1}{2}+i\xi\right)^k e^{-\sigma}\sigma^{k+n-1} e^{-\sigma\left(-\frac{1}{2}+i\xi\right)} d\sigma \\
&= \frac{\left(-\frac{1}{2}+i\xi\right)^k}{k!} \int_0^\infty \sigma^{k+n-1} e^{-\sigma\left(\frac{1}{2}+i\xi\right)} d\sigma \\
&= \frac{\left(-\frac{1}{2}+i\xi\right)^k}{k!} \int_0^\infty \frac{s^{k+n-1}}{\left(\frac{1}{2}+i\xi\right)^{k+n-1}} e^{-s} \frac{ds}{\left(\frac{1}{2}+i\xi\right)} \\
&= \frac{1}{k!} \frac{\left(-\frac{1}{2}+i\xi\right)^k}{\left(\frac{1}{2}+i\xi\right)^{k+n}} \int_0^\infty s^{k+n-1} e^{-s} ds \\
&= \frac{(k+n-1)!}{k!} \frac{\left(-\frac{1}{2}+i\xi\right)^k}{\left(\frac{1}{2}+i\xi\right)^{k+n}}
\end{aligned}$$

la quinta igualdad se sigue del hecho que la función analítica e^{-z} decae rápidamente en la región $\{z : Re(z) > 0\}$, luego se sigue por el teorema de Cauchy. Ahora se tiene que

$$\left|\widehat{F_k}(\xi)\right| = \frac{(k+n-1)!}{k! \left|\frac{1}{2} + i\xi\right|^n} \tag{5.36}$$

Para $Re(z) = -n$, obtenemos

$$\begin{aligned}
|\mu_{N,z}(k,\lambda)| &\leq \frac{k!}{(k+n-1)!} |I_{1-z}(-\lambda)\phi_N(\lambda)| \, 2^{n-1} |\lambda|^{-n} \frac{(k+n-1)!}{k!} 2^n \\
&\leq 2^{2n-1} \left|\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\right|^{-1} \left|H(\frac{\lambda}{N})\right| \\
&\leq 2^{2n-1} \left|\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\right|^{-1} \|H\|_\infty
\end{aligned}$$

Por (5.27) se tiene, para $Re(z) = -n$, que

$$\|T_{N,z}f\|_{L^2(\mathbb{H}^n)} \leq \frac{(2\pi)^n 2^n}{\left|\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\right|} \|f\|_{L^2(\mathbb{H}^n)}$$

se ve fácilmente, utilizando la fórmula de Stirling (ver pág. 326 en [19]), que la familia $\{T_{N,z}\}$ satisface, sobre la franja $-n \leq Re(z) \leq 1$, las hipótesis del teorema de interpolación compleja (ver [16] p.205). Por lo tanto $T_{N,0}$ es acotado del $L^{\frac{2n+2}{2n+1}}(\mathbb{H}^n)$ en el $L^{2n+2}(\mathbb{H}^n)$ con cota uniforme en N, al hacer $N \to \infty$, se obtiene que el operador T_ν es acotado del $L^{\frac{2n+2}{2n+1}}(\mathbb{H}^n)$ en el $L^{2n+2}(\mathbb{H}^n)$ con $n \in \mathbb{N}$.∎

Observación 5.5: Notamos que, si consideramos la medida ν_m dada por (5.22) con $\varphi(y) = |y|^{2m}$, donde $y \in \mathbb{R}^{2n}$ y $m, n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, tenemos que la medida resultante es L^p- improving, pues el conjunto tipo E_ν contiene al triángulo cerrado con vértices $(0,0)$, $(1,1)$, $\left(\frac{2(1+mn)-m}{2(1+mn)}, \frac{m}{2(1+mn)}\right)$. Sin embargo, no podemos asegurar que el punto $\left(\frac{2(1+mn)-m}{2(1+mn)}, \frac{m}{2(1+mn)}\right)$ sea sharp.

Para ver esto consideramos, para cada $N \in \mathbb{N}$ fijo, la familia analítica de operadores $\{U_{N,z}\}$ en la franja $-\left(n + \frac{1-m}{m}\right) \leq Re(z) \leq 1$, definida por $U_{N,z}f = f * \nu_m * J_{N,z}$, donde $J_{N,z}$ esta dado por (5.29) y $U_{N,0}f \to U_{\nu_m}f = f * \nu_m$ cuando $N \to \infty$. Como en la demostración del teorema 5.3, se obtiene similarmente, para $Re(z) = 1$, que $\|U_{N,z}\|_{1,\infty} \leq c\left|\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\right|^{-1}$. También es claro que, para $Re(z) = -\left(n + \frac{1-m}{m}\right)$, el núcleo $\nu_m * J_{N,z} \in L^1(\mathbb{H}^n) \cap L^2(\mathbb{H}^n)$ y además es una función radial. Ahora, por el teorema 5.1, el operador $(\nu_m * J_{N,z})\widehat{\ }(\lambda)$ se diagonaliza, con entradas diagonales $\upsilon_{N,z}(k,\lambda)$ dadas por

$$\begin{aligned}
\upsilon_{N,z}(k,\lambda) &= \frac{k!}{(k+n-1)!} \int_0^\infty (\nu_m * J_{N,z})\,\widehat{(s,-\lambda)}\psi_k^\lambda(s) |\lambda|^{-n} s^{2n-1} ds \\
&= \frac{k!}{(k+n-1)!} I_{1-z}(-\lambda)\phi_N(\lambda) \int_0^\infty \eta_0(s^2)\psi_k^\lambda(s) |\lambda|^{-n} e^{i\lambda s^{2m}} s^{2n-1} ds
\end{aligned}$$

siendo

$$\int_0^\infty \eta_0(s^2)\psi_k^\lambda(s)\left|\lambda\right|^{-n} e^{i\lambda s^{2m}} s^{2n-1}ds$$

$$= \int_0^\infty \eta_0(s^2)L_k^{n-1}\left(\frac{\left|\lambda\right| s^2}{2}\right) e^{-\frac{|\lambda|s^2}{4}} e^{i\lambda s^{2m}} s^{2n-1}ds$$

realizando el cambio de variable $\sigma = \frac{|\lambda|s^2}{2}$, $(\sigma \longleftrightarrow s)$ en la última integral, obtenemos

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \eta_0(s^2)L_k^{n-1}\left(\frac{\left|\lambda\right| s^2}{2}\right) e^{-\frac{|\lambda|s^2}{4}} e^{i\lambda s^{2m}} s^{2n-1}ds \\
&= 2^{n-1}\left|\lambda\right|^{-n} \int_0^\infty \eta_0\left(\frac{2\sigma}{|\lambda|}\right) L_k^{n-1}(\sigma)\, e^{-\frac{\sigma}{2}} e^{i2^m sgn(\lambda)|\lambda|^{1-m}\sigma^m} \sigma^{n-1}d\sigma \\
&= 2^{n-1}\left|\lambda\right|^{-n} (F_k G_\lambda R_\lambda)\widehat{}(0) = 2^{n-1}\left|\lambda\right|^{-n} (\widehat{F_k} * \widehat{G_\lambda R_\lambda})(0) \\
&= 2^{n-1}\left|\lambda\right|^{-n} \left(\widehat{F_k} * \left(\widehat{G_\lambda} * \widehat{R_\lambda}\right)\right)(0)
\end{aligned}$$

donde F_k es la función dada por (5.33), G_λ la función dada por (5.34) y $R_\lambda(\sigma) = \chi_{(0,|\lambda|)}(\sigma)e^{i2^m sgn(\lambda)|\lambda|^{1-m}\sigma^m}$, recordamos que $sop(\eta_0) \subset (-2,2)$. Si $n \geq 2$, de (5.36) se sigue que

$$\begin{aligned}
\left\|\widehat{F_k} * \left(\widehat{G_\lambda} * \widehat{R_\lambda}\right)\right\|_\infty &\leq \left\|\widehat{F_k}\right\|_1 \left\|\widehat{G_\lambda}\right\|_1 \left\|\widehat{R_\lambda}\right\|_\infty \\
&= \frac{(k+n-1)!}{k!}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{\left(\frac{1}{4}+\xi^2\right)^{\frac{n}{2}}}\right) \|\widehat{\eta_0}\|_1 \left\|\widehat{R_\lambda}\right\|_\infty
\end{aligned}$$

Ahora estimamos $\left\|\widehat{R_\lambda}\right\|_\infty$. De la proposición 2.2 se sigue que

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{R_\lambda}(\xi)\right| &= \left|\int_0^{|\lambda|} e^{i(2^m sgn(\lambda)|\lambda|^{1-m}\sigma^m - \xi\sigma)}d\sigma\right| \\
&\leq \frac{C_m}{|\lambda|^{\frac{1-m}{m}}}
\end{aligned}$$

donde la constante C_m es independiente de λ.

Para $Re(z) = -(n + \frac{1-m}{m})$, se tiene que

$$\begin{aligned}
|\upsilon_{N,z}(k,\lambda)| &\leq \frac{k!}{(k+n-1)!}\left|I_{1-z}(-\lambda)\phi_N(\lambda)\right| 2^{n-1}\left|\lambda\right|^{-n} \left\|\widehat{F_k} * \left(\widehat{G_\lambda} * \widehat{R_\lambda}\right)\right\|_\infty \\
&\leq \left|I_{1-z}(-\lambda)\right|\left|\phi_N(\lambda)\right| 2^{n-1}\left|\lambda\right|^{-n}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{\left(\frac{1}{4}+\xi^2\right)^{\frac{n}{2}}}\right) \|\widehat{\eta_0}\|_1 \frac{C_m}{|\lambda|^{\frac{1-m}{m}}} \\
&\leq C_m 2^{n-1}\left|\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\right|^{-1} \|H\|_\infty \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{\left(\frac{1}{4}+\xi^2\right)^{\frac{n}{2}}}\right) \|\widehat{\eta_0}\|_1
\end{aligned}$$

Finalmente por (5.27) se tiene, para $Re(z) = -\left(n + \frac{1-m}{m}\right)$, que

$$\|U_{N,z}f\|_{L^2(\mathbb{H}^n)} \leq \frac{C_{n,m}}{\left|\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\right|}\|f\|_{L^2(\mathbb{H}^n)}$$

es claro que la familia $\{U_{N,z}\}$ satisface, sobre la franja $-\left(n + \frac{1-m}{m}\right) \leq Re(z) \leq 1$, las hipótesis del teorema de interpolación compleja. Por lo tanto $U_{N,0}$ es acotado del $L^{\frac{2(1+nm)}{2(1+mn)-m}}(\mathbb{H}^n)$ en el $L^{\frac{2(1+nm)}{m}}(\mathbb{H}^n)$ con cota uniforme en N, al hacer $N \to \infty$, se obtiene que el operador U_{ν_m} es acotado del $L^{\frac{2(1+nm)}{2(1+mn)-m}}(\mathbb{H}^n)$ en el $L^{\frac{2(1+nm)}{m}}(\mathbb{H}^n)$, con $m, n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

En lo que sigue denotaremos con p y q números naturales tales que $p + q = n$. Ahora, consideramos la medida ν definida por (5.22) soportada sobre el gráfico de la función $\varphi(w) = a\sum\limits_{j=1}^{p}|w_j|^2 + b\sum\limits_{j=p+1}^{n}|w_j|^2 = a\varphi_p(w') + b\varphi_q(w'')$, donde $a, b \in \mathbb{R}-\{0\}$ y $w = (w', w'') \in \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q$. La función de corte η involucrada en (5.22) esta dada ahora por $\eta(w', w'') = \eta_p(w')\eta_q(w'')$, donde $\eta_p(w') = \eta_{0,p}(|w'|^2)$ y $\eta_q(w'') = \eta_{0,q}(|w''|^2)$ para ciertas funciones $\eta_{0,p}$ y $\eta_{0,q}$. Observamos que el teorema 5.3, es válido para esta medida ν. Como en la prueba del teorema 5.3, y haciendo abuso de notación, consideramos la familia analítica de operadores $\{T_{N,z}\}$ en la franja $-n \leq Re(z) \leq 1$, dada por $T_{N,z}f = f * \nu * J_{N,z}$, donde $J_{N,z}$ esta definida por (5.29) y $T_{N,0}f \to T_\nu f$ cuando $N \to \infty$. Ahora, la estimación $\|T_{N,z}\|_{1,\infty} \leq c\left|\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\right|^{-1}$ para $Re(z) = 1$ se obtiene de igual manera que en el teorema 5.3. Para obtener la acotación sobre $L^2(\mathbb{H}^n)$ del operador $T_{N,z}$ con $Re(z) = -n$, notamos que el lema 5.7 incluye este caso, por lo tanto, para $Re(z) = -n$ tenemos que $\nu * J_{N,z} \in L^1 \cap L^2(\mathbb{H}^n)$ y además es una función poliradial. Por el teorema 5.2, tenemos que el operador $(\nu * J_{N,z})\widehat{\ }(\lambda)$ se diagonaliza, con entradas diagonales $\mu_{N,z}(k, l, \lambda)$ dadas por

$$\begin{aligned}\mu_{N,z}(k,l,\lambda) \quad = \quad & \left(\frac{k!}{(k+p-1)!}\right)\left(\frac{l!}{(l+q-1)!}\right) \times \\ & \int_0^\infty\int_0^\infty \left(\nu * J_{N,z}\right)(r,s,\widehat{-\lambda})(2\pi)^n\psi_k^{\lambda,p}(r)\psi_l^{\lambda,q}(s)\,|\lambda|^{-(p+q)} \times \\ & r^{2p-1}s^{2q-1}drds\end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty\int_0^\infty \left(\nu * J_{N,z}\right)(r,s,\widehat{-\lambda})(2\pi)^n\psi_k^{\lambda,p}(r)\psi_l^{\lambda,q}(s)\,|\lambda|^{-(p+q)}\,r^{2p-1}s^{2q-1}drds \\ = \quad & I_{1-z}(-\lambda)\phi_N(\lambda)\left(\int_0^\infty \eta_{0,p}(r^2)\psi_k^{\lambda,p}(r)e^{i\lambda\varphi_p(r)}\,|\lambda|^{-p}\,r^{2p-1}dr\right) \times \\ & \left(\int_0^\infty \eta_{0,q}(s^2)\psi_l^{\lambda,q}(s)e^{i\lambda\varphi_q(s)}\,|\lambda|^{-q}\,s^{2q-1}ds\right)\end{aligned}$$

observamos que las integrales entre paréntesis se corresponden con la integral (5.32) que aparece en la prueba del teorema 5.3, reemplazando alli n por p y q respectivamente, efectuando cuentas análogas a las realizadas en la demostración del teorema 5.3 obtenemos, para $Re(z) = -n$, que

$$\|T_{N,z}f\|_{L^2(\mathbb{H}^n)} \leq \frac{C_n}{\left|\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\right|} \|f\|_{L^2(\mathbb{H}^n)}$$

Una vez más es claro que, la familia $\{T_{N,z}\}$ satisface, sobre la franja $-n \leq Re(z) \leq 1$, las hipótesis del teorema de interpolación compleja. Por lo tanto $T_{N,0}$ es acotado del $L^{\frac{2n+2}{2n+1}}(\mathbb{H}^n)$ en el $L^{2n+2}(\mathbb{H}^n)$ con cota uniforme en N, al hacer $N \to \infty$, se obtiene que el operador T_ν es acotado del $L^{\frac{2n+2}{2n+1}}(\mathbb{H}^n)$ en el $L^{2n+2}(\mathbb{H}^n)$ con $n \in \mathbb{N}$. Finalmente por los lemas 5.5 y 5.6 se tiene el siguiente:

Teorema 5.4 *Si ν esta soportada sobre el gráfico de la función $\varphi(w) = a\sum_{j=1}^{p} |w_j|^2 + b\sum_{j=p+1}^{n} |w_j|^2$, con $w = (w_1, ..., w_n) \in \mathbb{C}^n$ y $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$, entonces el conjunto tipo E_ν es el triángulo cerrado con vértices*

$$A = (0,0), \qquad B = (1,1), \qquad C = \left(\frac{2n+1}{2n+2}, \frac{1}{2n+2}\right)$$

con $n \in \mathbb{N}$.

Los resultados obtenidos en la sección 5.1 para funciones poliradiales de la forma $f(z', z'', t) = f_0(|z'|, |z''|, t)$, con $z' \in \mathbb{C}^p$, $z'' \in \mathbb{C}^q$ y $p + q = n$, se extienden fácilmente a funciones poliradiales de la forma $g(z_1, ..., z_n, t) = g_0(|z_1|, ..., |z_n|, t)$, donde $(z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$. Por lo tanto tenemos un resultado más general, a saber:

Teorema 5.5 *Si ν esta soportada sobre el gráfico de la función $\varphi(w_1, ..., w_n) = \sum_{j=1}^{n} a_j |w_j|^2$, con $(w_1, ..., w_n) \in \mathbb{C}^n$ y $a_j \in \mathbb{R} - \{0\}$, entonces el conjunto tipo E_ν es el triángulo cerrado con vértices A, B y C.*

5.2.2. Operadores de convolución con medidas singulares 2. Caso: fraccionarias.

Sea $0 < \gamma < 2n$ y sea μ la medida de Borel sobre $\mathbb{H}^n = \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$ dada por

$$\langle \mu, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(w, \varphi(w))\, \eta(w)\, |w|^{-\gamma}\, dw \tag{5.37}$$

donde $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ es una función suave y $\eta(w) = \eta_0\left(|w|^2\right)$, siendo η_0 una función en $C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $0 \leq \eta_0 \leq 1$, $\eta_0(t) \equiv 1$ si $t \in [-1,1]$ y $sop(\eta_0) \subset (-2,2)$.

Sea T_μ el operador de convolución a derecha con la medida fraccionaria μ definido inicialmente sobre $\mathcal{S}(\mathbb{H}^n)$ por $T_\mu f = f * \mu$, donde la convolución es tomada con respecto a la operación de grupo en $\mathbb{H}^n$.

Nuestro propósito es caracterizar el interior del conjunto tipo

$$E_\mu = \left\{\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) : \|T_\mu\|_{L^pL^q} < \infty, 1 \leq p, q \leq \infty\right\}$$

para el caso poliradial cuadrático, i.e. cuando $\varphi(w) = \sum_{i=1}^{n} a_i |w_i|^2$ con $a_i \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $w = (w_1, ..., w_2)$. También obtenemos una estimación óptima de tipo (p, p') para T_μ.

Comenzamos observando que, si $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \in E_\mu$ entonces $p \leq q$, $\frac{1}{q} \geq \frac{2n+1}{p} - 2n$ y $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{(2n+1)p}$. Esto se sigue del hecho que los lemas 5.5 y 5.6 aún son ciertos, con ligeras modificaciones en sus respectivas pruebas, por ejemplo si consideramos en (5.22) la función $w \to \eta(w)\,|w|^{-\gamma}$ en lugar de la función $w \to \eta(w)$ y reemplazamos en la prueba del lema 5.6 los conjuntos A_δ y $F_{\delta,x}$ que allí aparecen por los conjuntos

$$A'_\delta = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R} : x \in D' \wedge |t - \varphi(x)| \leq \frac{\delta}{4}\right\}$$

y

$$F'_{\delta,x} = \left\{y \in D' : \|x - y\|_{\mathbb{R}^{2n}} \leq \frac{\delta}{4n(1 + \left\|\nabla\varphi\mid_{sop(\eta)}\right\|_\infty)}\right\}$$

donde D' es un disco cerrado contenido en el disco unidad y no interseca al origen, luego la demostración se sigue como la del lema 5.6.
En el lema 5.8 siguiente, daremos una restricción más sobre el conjunto tipo E_μ, a saber: si $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \in E_\mu$ entonces $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \frac{2n-\gamma}{2n+2}$.

Sea D el punto de intersección de la recta $\frac{1}{q} = \frac{2n+1}{p} - 2n$ con la recta $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{2n-\gamma}{2n+2}$ y sea D' el punto simétrico de D con respecto a la diagonal no principal, entonces

$$D = \left(\frac{4n^2 + 2n + \gamma}{2n(2n+2)}, \frac{2n + (2n+1)\gamma}{2n(2n+2)}\right) = \left(\frac{1}{p_D}, \frac{1}{q_D}\right) y\ D' = \left(1 - \frac{1}{q_D}, 1 - \frac{1}{p_D}\right).$$

Por lo tanto el conjunto E_μ esta contenido en el trapecio cerrado con vértices $(0,0)$, $(1,1)$, D y D'. Finalmente, sea $C_\gamma = \left(\frac{4n+2-\gamma}{2(2n+2)}, \frac{2+\gamma}{2(2n+2)}\right)$ que es el punto de intersección entre las rectas $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{2n-\gamma}{2n+2}$.

Nuestros resultados son los siguientes

Teorema 5.6 *Sea μ la medida de Borel fraccionaria dada por (5.37) con $\varphi(w) = |w|^2$. Entonces el interior del conjunto tipo E_μ es el interior del trapecio con vértices $(0,0)$, $(1,1)$, D y D'.*

Teorema 5.7 *Sea μ la medida de Borel fraccionaria dada por (5.37) con $\varphi(w) = |w|^2$. Entonces $C_\gamma \in E_\mu$.*

Comenzamos con el siguiente:

Lema 5.8 *Si $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \in E_\mu$ entonces $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \frac{2n-\gamma}{2n+2}$.*

Prueba. Sea $0 < \delta \leq 1$, consideramos $f = \chi_{Q_\delta}$, donde $Q_\delta = D_\delta \times [-(2M+n)\delta^2, (2M+n)\delta^2]$ siendo $D_\delta = \{x \in \mathbb{R}^{2n} : \|x\| \leq \delta\}$ y $M = 2\,\text{máx}\,\{|\varphi(y)| : y \in D_1\}$. Definimos

$$A_\delta = \left\{(x,t) \in D_{\frac{\delta}{2}} \times \mathbb{R} : |t - \varphi(x)| \leq M\delta^2\right\}.$$

Primero mostraremos que $|(f * \mu)(x,t)| \geq c\delta^{2n-\gamma}$ para todo $(x,t) \in A_\delta$ y para alguna constante $c > 0$ e independiente de δ. En efecto

$$(f * \mu)(x,t) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} f\left((x,t) \cdot (y, \varphi(y))^{-1}\right) \eta(y) \, |y|^{-\gamma} \, dy$$

Si $(x,t) \in A_\delta$, entonces

$$(x,t) \cdot (y, \varphi(y))^{-1} \in Q_\delta \text{ para todo } y \in D_{\frac{\delta}{2}} \tag{5.38}$$

Ya que $(x,t) \cdot (y,\varphi(y))^{-1} = \left(x - y, t - \varphi(y) - \frac{1}{2}B(x,y)\right)$, entonces (5.38) se sigue de la homogeneidad de φ y del hecho que $\frac{1}{2}|B(x,y)| \leq n \|x\|_{\mathbb{R}^{2n}} \|x-y\|_{\mathbb{R}^{2n}}$. Por lo tanto

$$|(f * \mu)(x,t)| \geq \int_{D_{\frac{\delta}{2}}} \eta(y) \, |y|^{-\gamma} \, dy = \int_{D_{\frac{\delta}{2}}} |y|^{-\gamma} \, dy = c\delta^{2n-\gamma}$$

para $(x,t) \in A_\delta$ y δ positivo y pequeño. Ahora,

$$\|f * \mu\|_q \geq \left(\int_{A_\delta} |f * \mu|^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq c\delta^{2n-\gamma} \, |A_\delta|^{\frac{1}{q}} = c\delta^{2n-\gamma+\frac{1}{q}(2n+2)}.$$

Por otro lado, $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \in E_\mu$ implica

$$\|f * \mu\|_q \leq c \, \|f\|_p = c\delta^{\frac{1}{p}(2n+2)}$$

por lo tanto $\delta^{2n-\gamma+\frac{1}{q}(2n+2)} \leq c\delta^{\frac{1}{p}(2n+2)}$ para todo δ positivo y pequeño, entonces $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \frac{2n-\gamma}{2n+2}$.∎

La idea para demostrar el teorema 5.6 es la siguiente: construiremos una familia de operadores $\{T_{\mu_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que nuestro operador inicial T_μ se puede expresar en la forma $T_\mu = \sum_{j\in\mathbb{N}} T_{\mu_j}$, con los operadores $T_{\mu_j} : L^p(\mathbb{H}^n) \to L^q(\mathbb{H}^n)$ satisfaciendo que $\left\|T_{\mu_j}\right\|_{1,1} \sim 2^{-j(2n-\gamma)}$ y $\left\|T_{\mu_j}\right\|_{p,q} \sim 2^{j\gamma} \|T_\nu\|_{p,q}$ donde T_ν es el operador dado por la formula (5.23), tomando allí $\varphi(w) = |w|^2$. El teorema 5.6 seguira ahora de aplicar los resultados de la sección 5.2.1, y de utilizar interpolación compleja y el Lema 5.8. Veamos la prueba en detalle.

Prueba del teorema 5.6 Para cada $j \in \mathbb{N}$ definimos

$$A_j = \left\{y \in \mathbb{R}^{2n} : 2^{-j} < |y| \leq 2^{-j+1}\right\}$$

Sea μ_j la medida de Borel dada por

$$\mu_j(E) = \int_{A_j} \chi_E\left(y, |y|^2\right) \eta(y) \, |y|^{-\gamma} \, dy$$

y su correspondiente operador de convolución $T_{\mu_j}f = f * \mu_j$. Ahora, es claro que, $\mu = \sum_j \mu_j$ y $\|T_\mu\|_{p,q} \leq \sum_j \|T_{\mu_j}\|_{p,q}$. Para $f \geq 0$ tenemos que cada $\int f(y,s)d\mu_j(y,s)$ esta mayorada por

$$2^{j\gamma} \int_{\mathbb{R}^{2n}} f\left(y, |y|^2\right) \eta(y) dy.$$

Por lo tanto $\|T_{\mu_j}\|_{p,q} \leq c2^{j\gamma} \|T_\nu\|_{p,q}$, en particular, por el teorema 5.3, tenemos que $\|T_{\mu_j}\|_{\frac{2n+2}{2n+1},2n+2} \leq c2^{j\gamma}$. Es fácil ver que $\|T_{\mu_j}\|_{1,1} \leq |\mu_j(\mathbb{R}^{2n+1})| \sim \int_{A_j} |y|^{-\gamma} dy = c2^{-j(2n-\gamma)}$. Para $0 < \theta < 1$, definimos

$$\left(\frac{1}{p_\theta}, \frac{1}{q_\theta}\right) = \left(\frac{2n+1}{2n+2}, \frac{1}{2n+2}\right)(1-\theta) + (1,1)\theta$$

por el teorema de interpolación de Riesz se tiene que

$$\|T_{\mu_j}\|_{p_\theta,q_\theta} \leq c2^{j\gamma(1-\theta)-j(2n-\gamma)\theta}$$

escogiendo θ tal que $j\gamma(1-\theta) - j(2n-\gamma)\theta = 0$ resulta $\sup_{j\in\mathbb{N}} \|T_{\mu_j}\|_{p_\theta,q_\theta} \leq c < \infty$. Un simple computo da $\theta = \frac{2n-\gamma}{2n}$, para tal θ, se obtiene que $\left(\frac{1}{p_\theta}, \frac{1}{q_\theta}\right) = \left(\frac{1}{p_D}, \frac{1}{q_D}\right)$, por lo tanto $\|T_{\mu_j}\|_{p_D,q_D} \leq c$, siendo c una constante independiente de j . Interpolando nuevamente, pero esta vez, entre los puntos $\left(\frac{1}{p_D}, \frac{1}{q_D}\right)$ y $(1,1)$ se tiene, para cada $0 < \tau < 1$ fijo, que

$$\|T_{\mu_j}\|_{p_\tau,q_\tau} \leq c2^{-j(2n-\gamma)\tau},$$

ya que $\|T_\mu\|_{p,q} \leq \sum_j \|T_{\mu_j}\|_{p,q}$ y $0 < \gamma < 2n$, se sigue que

$$\|T_\mu\|_{p_\tau,q_\tau} \leq c \sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{-j(2n-\gamma)\tau} < \infty$$

por dualidad se tiene que

$$\|T_\mu\|_{\frac{q_\tau}{q_\tau-1},\frac{p_\tau}{p_\tau-1}} \leq c_\tau < \infty.$$

Ahora el teorema se sigue de aplicar el teorema de convexidad de Riesz. ▮

Observación 5.6: En la prueba del teorema 5.6 también hemos probado que los segmentos semiabiertos $\left[(1,1);(p_D^{-1},q_D^{-1})\right)$ y $\left[(0,0);(1-q_D^{-1},1-p_D^{-1})\right)$ forman parte del conjunto tipo E_μ.

La Prueba del teorema 5.7 sigue argumentos similares a los utilizados en la demostración del teorema 5.3. Aquí, consideraremos una familia analítica de operadores $T_{z,N}$ en la franja $-\frac{2n-\gamma}{2+\gamma} \leq Re(z) \leq 1$ tal que satisfacerán

$$\begin{cases} \|T_{z,N}(f)\|_{L^\infty(\mathbb{H}^n)} \leq A_z \|f\|_{L^1(\mathbb{H}^n)} & Re(z) = 1 \\ \|T_{z,N}(f)\|_{L^2(\mathbb{H}^n)} \leq A_z \|f\|_{L^2(\mathbb{H}^n)} & Re(z) = -\frac{2n-\gamma}{2+\gamma} \end{cases} \tag{5.39}$$

donde A_z dependerán admisiblemente en la variable z y no dependerán de N, luego por el teorema de interpolación compleja resultará $T_{0,N}$ acotado de $L^{p_\gamma}(\mathbb{H}^n)$ en $L^{p'_\gamma}(\mathbb{H}^n)$, donde

$\left(\frac{1}{p_\gamma}, \frac{1}{p'_\gamma}\right) = C_\gamma$, con cota independiente en N, ya que nuestro operador satisfacerá que $T_{0,N}f(x,t) \to T_\mu f(x,t)$ puntualmente, cuando $N \to \infty$, por el lema 5.8 se seguirá el teorema 5.7. La primera desigualdad que aparece en (5.39) no presentará dificultad, para establecer la segunda desigualdad, veremos que nuestra familia de operdores admitirá, para $Re(z) = -\frac{2n-\gamma}{2+\gamma}$, la siguiente expresión $T_{z,N}f = f * K_{z,N}$ donde $K_{z,N}$ será una función integrable y radial, por lo tanto el operador $\widehat{K_{z,N}}(\lambda)$ se diagonaliza, cuyas entradas diagonales simbolizaremos por $\upsilon_{z,N}(k,\lambda)$. Por lo tanto la segunda desigualdad en (5.39) es equivalente a probar que $|\upsilon_{z,N}(k,\lambda)| \leq A_z$ uniformemente en N, k y $\lambda \neq 0$ (conferir con (5.27)).

Prueba del teorema 5.7. Demostraremos que $C_\gamma \in E_\mu$, para ello consideramos la familia analítica de operadores $\{T_{z,N}\}$, en la franja $-\frac{2n-\gamma}{2+\gamma} \leq Re(z) \leq 1$, dada por $T_{z,N}f = f * \mu_z * J_{N,z}$, donde $J_{N,z}$ esta dada por (5.29) y μ_z por

$$\mu_z(E) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \chi_E\left(w, |w|^2\right) \eta\left(w\right) |w|^{z\gamma-\gamma}\, dw. \tag{5.40}$$

Es claro que $T_{0,N}f(x,t) \to T_\mu f(x,t)$ cuando $N \to \infty$.

Ahora, para $Re(z) = 1$ tenemos que

$$\mu_z * J_{N,z}(x,t) = \eta\left(x\right) |x|^{iIm(z)\gamma} \left(I_z *_{\mathbb{R}} \widehat{\phi_N}\right)\left(t - |x|^2\right)$$

por lo tanto $\left\|\mu_z * J_{N,z}\right\|_\infty \leq c\left|\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\right|^{-1}$ de esto se sigue que

$$\left\|T_{z,N}f\right\|_\infty \leq \left\|f * \mu_z * J_{N,z}\right\|_\infty \leq \|f\|_1 \left\|\mu_z * J_{N,z}\right\|_\infty \leq c\left|\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\right|^{-1} \|f\|_1$$

siendo c una constante positiva independiente de N y z.

Para $Re(z) = -\frac{2n-\gamma}{2+\gamma}$ tenemos que

$$\begin{aligned} K_{z,N}(x,t) &= \mu_z * J_{N,z}(x,t) \\ &= \eta\left(x\right) |x|^{(z-1)\gamma} \left(I_z *_{\mathbb{R}} \widehat{\phi_N}\right)\left(t - |x|^2\right) \end{aligned}$$

aquí $\eta\left(x\right)|x|^{(z-1)\gamma} \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$ pues $0 < \gamma < 2n$ implica $2n + Re((z-1)\gamma)) = 2n - \frac{2n+2}{2+\gamma}\gamma > 0$, además en la prueba del lema 5.7 vimos que $\left(I_z *_{\mathbb{R}} \widehat{\phi_N}\right) \in L^1(\mathbb{R})$, luego $K_{z,N} \in L^1(\mathbb{H}^n)$. Siendo $K_{z,N}$ radial, por el teorema 5.1 tenemos que $\widehat{K_{z,N}}(\lambda)$ se diagonaliza con entradas diagonales dadas por

$$\upsilon_{z,N}(k,\lambda) = \frac{k!}{(k+n-1)!} I_{1-z}(-\lambda)\phi_N(\lambda) \int_0^\infty \eta_0(s^2)\psi_k^\lambda(s)\, |\lambda|^{-n}\, e^{i\lambda s^2} s^{2n-1+z\gamma-\gamma} ds \tag{5.41}$$

siendo

$$\int_0^\infty \eta_0(s^2)\psi_k^\lambda(s)\,|\lambda|^{-n}\,e^{i\lambda s^2}s^{2n-1+z\gamma-\gamma}ds$$

$$= \int_0^\infty \eta_0(s^2)L_k^{n-1}\left(\frac{|\lambda|\,s^2}{2}\right)e^{-\frac{|\lambda|s^2}{4}}e^{i\lambda s^2}s^{2n-1+z\gamma-\gamma}ds$$

realizando el cambio de variable $\sigma = \frac{|\lambda|s^2}{2}$, $(\sigma \longleftrightarrow s)$ en la última integral, obtenemos

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \eta_0(s^2)L_k^{n-1}\left(\frac{|\lambda|\,s^2}{2}\right)e^{-\frac{|\lambda|s^2}{4}}e^{i\lambda s^2}s^{2n-1+z\gamma-\gamma}ds \\ =\;& 2^{n-1}\,|\lambda|^{-\left(n+\frac{z\gamma-\gamma}{2}\right)}\int_0^\infty \eta_0\left(\frac{2\sigma}{|\lambda|}\right)L_k^{n-1}(\sigma)\,e^{-\frac{\sigma}{2}}e^{i2sgn(\lambda)\sigma}\sigma^{n-1+\frac{z\gamma-\gamma}{2}}d\sigma \\ =\;& 2^{n-1}\,|\lambda|^{-\left(n+\frac{z\gamma-\gamma}{2}\right)}(F_{k,\beta}G_\lambda)\widehat{\;}(-2sgn(\lambda)) = 2^{n-1}\,|\lambda|^{-\left(n+\frac{z\gamma-\gamma}{2}\right)}(\widehat{F_{k,\beta}}*\widehat{G_\lambda})(-2sgn(\lambda))\end{aligned} \tag{5.42}$$

donde

$$F_{k,\beta}(\sigma) := \chi_{(0,\infty)}(\sigma)L_k^{n-1}(\sigma)\,e^{-\frac{\sigma}{2}}\sigma^\beta,$$

con $\beta = n-1+\frac{z\gamma-\gamma}{2}$, y

$$G_\lambda(\sigma) := \eta_0\left(\frac{2\sigma}{|\lambda|}\right).$$

Ahora

$$\left|(\widehat{F_{k,\beta}}*\widehat{G_\lambda})(-2sgn(\lambda))\right| \le \left\|\widehat{F_{k,\beta}}*\widehat{G_\lambda}\right\|_\infty \le \left\|\widehat{F_{k,\beta}}\right\|_\infty \left\|\widehat{G_\lambda}\right\|_1 = \left\|\widehat{F_{k,\beta}}\right\|_\infty \|\widehat{\eta_0}\|_1. \tag{5.43}$$

Por lo tanto es suficiente estimar $\left\|\widehat{F_{k,\beta}}\right\|_\infty$. Para ello calculamos explicitamente

$$\widehat{F_{k,\beta}}(\xi) = \int_0^\infty \sigma^\beta L_k^{n-1}(\sigma)\,e^{-\sigma\left(\frac{1}{2}+i\xi\right)}d\sigma.$$

Para tal fin consideramos la siguiente expresión, establecida en el lema 5.9 abajo, el cual afirma que para $|r|<1$ vale la siguiente identidad

$$\int_0^\infty \sigma^\beta L_k^{n-1}(\sigma)\,e^{-\sigma\left(\frac{1}{2}+i\xi\right)}d\sigma = \frac{1}{k!}\left(\frac{d}{dr}\right)^k_{r=0}\left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{(1-r)^n\left(\frac{1}{2}+\frac{r}{1-r}+i\xi\right)^{\beta+1}}\right]. \tag{5.44}$$

A continuación obtendremos el desarrollo en serie de potencias de la función

$$Q(r) = \frac{1}{(1-r)^n\left(\frac{1}{2}+\frac{r}{1-r}+i\xi\right)^{\beta+1}}$$

el cual junto con la expresión (5.44) nos permitirá estimar el decaimiento de la función $\widehat{F_{k,\beta}}(\xi)$. Primero observamos que

$$Q(r) = \frac{1}{(1-r)^{n-\beta-1}\left((1-r)\frac{1}{2}+r+i(1-r)\xi\right)^{\beta+1}}$$
$$= \frac{1}{(1-r)^{n-\beta-1}\left(\frac{1}{2}+i\xi+r\left(\frac{1}{2}-i\xi\right)\right)^{\beta+1}}$$

haciendo $w = -\frac{\frac{1}{2}-i\xi}{\frac{1}{2}+i\xi}$ obtenemos

$$Q(r) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+i\xi\right)^{\beta+1}(1-r)^{n-1-\beta}(1-rw)^{\beta+1}.}$$

Ahora, un simple computo da

$$(1-r)^{-n+\beta+1} = 1+\sum_{j\geq 1}(n-1-\beta)(n-1-\beta+1)...(n-1-\beta+j-1)\frac{r^j}{j!}$$
$$= \sum_{j\geq 0}\frac{\Gamma(n-1-\beta+j)}{\Gamma(n-1-\beta)}\frac{r^j}{j!}$$

análogamente se obtiene

$$(1-rw)^{-\beta-1} = \sum_{j\geq 0}\frac{\Gamma(\beta+1+j)}{\Gamma(\beta+1)}\frac{(rw)^j}{j!}. \tag{5.45}$$

Por lo tanto

$$Q(r) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+i\xi\right)^{\beta+1}}\left(\sum_{j+l\geq 0}\frac{\Gamma(n-1-\beta+j)\Gamma(\beta+1+l)}{\Gamma(n-1-\beta)\Gamma(\beta+1)}\frac{r^{j+l}w^l}{j!l!}\right)$$

ahora, por (5.44) se sigue que

$$\int_0^\infty \sigma^\beta L_k^{n-1}(\sigma)\, e^{-\sigma\left(\frac{1}{2}+i\xi\right)}d\sigma = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\left(\frac{1}{2}+i\xi\right)^{\beta+1}}\sum_{j+l=k}\frac{\Gamma(n-1-\beta+j)\Gamma(\beta+1+l)}{\Gamma(n-1-\beta)\Gamma(\beta+1)}\frac{w^l}{j!l!}$$

tomando modulo en esta expresión y considerando que $|w|=1$ se tiene

$$\left|\int_0^\infty \sigma^\beta L_k^{n-1}(\sigma)\, e^{-\sigma\left(\frac{1}{2}+i\xi\right)}d\sigma\right| \leq \frac{\Gamma(n-1-Re(\beta))\Gamma(Re(\beta)+1)}{\left|\left(\frac{1}{2}+i\xi\right)^{\beta+1}\right||\Gamma(n-1-\beta)|}\times$$

$$\sum_{j+l=k}\frac{\Gamma(n-1-Re(\beta)+j))\Gamma(Re(\beta)+1+l)}{\Gamma(n-1-Re(\beta))\Gamma(Re(\beta)+1)}\frac{1}{j!l!}.$$

Notando que

$$\sum_{j+l=k} \frac{\Gamma(n-1-Re(\beta)+j))\Gamma(Re(\beta)+1+l)}{\Gamma(n-1-Re(\beta))\Gamma(Re(\beta)+1)} \frac{1}{j!l!}$$

$$= \frac{1}{k!} \left(\frac{d}{dr}\right)^k_{r=0} \left[(1-r)^{-n+Re(\beta)+1}(1-r)^{-Re(\beta)-1}\right]$$

$$= \frac{1}{k!} \left(\frac{d}{dr}\right)^k_{r=0} \left[(1-r)^{-n}\right]$$

y a su vez, de un cálculo similar al realizado para obtener (5.45), resulta

$$(1-r)^{-n} = \sum_{j\geq 0} \frac{\Gamma(n+j)}{\Gamma(n)} \frac{r^j}{j!} = \sum_{j\geq 0} \frac{(n+j-1)!}{(n-1)!j!} r^j$$

se sigue que

$$\sum_{j+l=k} \frac{\Gamma(n-1-Re(\beta)+j))\Gamma(Re(\beta)+1+l)}{\Gamma(n-1-Re(\beta))\Gamma(Re(\beta)+1)} \frac{1}{j!l!} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$$

por lo tanto

$$\left|\widehat{F_{k,\beta}}(\xi)\right| = \left|\int_0^\infty \sigma^\beta L_k^{n-1}(\sigma)\, e^{-\sigma\left(\frac{1}{2}+i\xi\right)} d\sigma\right| \leq \frac{\Gamma(n-1-Re(\beta))\Gamma(Re(\beta)+1)}{\left|\left(\frac{1}{2}+i\xi\right)^{\beta+1}\right| |\Gamma(n-1-\beta)|} \times \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$$

Ahora, teniendo en cuenta la expresión (5.41) de las entradas diagonales $\upsilon_{z,N}(k,\lambda)$, asi como también (5.42), (5.43) y que $\beta = n-1+\frac{z\gamma-\gamma}{2}$, para $Re(z) = -\frac{2n-\gamma}{2+\gamma}$, resulta

$$|\upsilon_{z,N}(k,\lambda)| \leq \frac{2^{\frac{2n-\gamma}{2+\gamma}} e^{\frac{|Im(z)|\pi\gamma}{4}} C_n \|H\|_\infty \|\widehat{\eta_0}\|_1}{\left|\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\right|} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2+\gamma}\gamma\right)\Gamma\left(\frac{2n-\gamma}{2+\gamma}\right)}{\left|\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\gamma\right)\right|}$$

Finalmente, utilizando la formula de Stirling (ver pág. 326 en [19]), se ve que la familia $\{T_{z,N}\}$ satisface, sobre la franja $-\frac{2n-\gamma}{2+\gamma} \leq Re(z) \leq 1$ las hipótesis del teorema de interpolación compleja. Ahora la prueba del teorema esta completa.∎

Lema 5.9 *Si* $|r| < 1$ *y* $Re(\beta) > -1$ *entonces*

$$\int_0^\infty \sigma^\beta L_k^{n-1}(\sigma)\, e^{-\sigma\left(\frac{1}{2}+i\xi\right)} d\sigma = \frac{1}{k!}\left(\frac{d}{dr}\right)^k_{r=0} \left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{(1-r)^n\left(\frac{1}{2}+\frac{r}{1-r}+i\xi\right)^{\beta+1}}\right].$$

Prueba. Fijamos $0<\epsilon<1$, de la identidad generatriz (5.16) tenemos, para $0<r<1$, que

$$\sum_{j\geq 0} \sigma^\beta L_j^{n-1}(\sigma)\, e^{-\sigma\left(\frac{1}{2}+i\xi\right)} r^j = \frac{1}{(1-r)^n} \sigma^\beta e^{-\sigma\left(\frac{1}{2}+\frac{r}{1-r}+i\xi\right)} \tag{5.46}$$

ya que $\left|L_j^{n-1}(\sigma)\, e^{-\sigma \frac{1}{2}}\right| \leq \frac{(j+n-1)!}{j!(n-1)!}$ para todo $\sigma > 0$ (ver proposición 4.2 en [22]) la serie en (5.46) converge uniformemente en el intervalo $\left[\epsilon, \frac{1}{\epsilon}\right]$, por lo tanto al integrar sobre dicho intervalo se obtiene

$$\sum_{j\geq 0}\left(\int_{\epsilon}^{\frac{1}{\epsilon}} \sigma^{\beta} L_j^{n-1}(\sigma)\, e^{-\sigma\left(\frac{1}{2}+i\xi\right)} d\sigma\right) r^j = \frac{1}{(1-r)^n}\int_{\epsilon}^{\frac{1}{\epsilon}} \sigma^{\beta} e^{-\sigma\left(\frac{1}{2}+\frac{r}{1-r}+i\xi\right)} d\sigma$$

de esto se sigue que

$$\int_{\epsilon}^{\frac{1}{\epsilon}} \sigma^{\beta} L_k^{n-1}(\sigma)\, e^{-\sigma\left(\frac{1}{2}+i\xi\right)} d\sigma = \frac{1}{k!}\left(\frac{d}{dr}\right)^k_{r=0}\left[\frac{1}{(1-r)^n}\int_{\epsilon}^{\frac{1}{\epsilon}} \sigma^{\beta} e^{-\sigma\left(\frac{1}{2}+\frac{r}{1-r}+i\xi\right)} d\sigma\right]. \tag{5.47}$$

A continuación calcularemos $\left(\frac{d}{dr}\right)^k_{r=0}\left[\int_{\epsilon}^{\frac{1}{\epsilon}} \sigma^{\beta} e^{-\sigma\left(\frac{1}{2}+\frac{r}{1-r}+i\xi\right)} d\sigma\right]$. Primero comenzaremos calculando las derivadas de la función $u \to \int_{\epsilon}^{\frac{1}{\epsilon}} \sigma^{\beta} e^{-\sigma u} d\sigma$, donde $u \in \mathbb{C}$. Para ello, sea $L_\epsilon = \left\{\sigma u : \sigma \in \left[\epsilon, \frac{1}{\epsilon}\right]\right\}$ utilizando la definición de integrales curvilineas y aplicando el teorema de Cauchy se tiene que

$$\int_{\epsilon}^{\frac{1}{\epsilon}} \sigma^{\beta} e^{-\sigma u} d\sigma = u^{-(\beta+1)}\int_{L_\epsilon} s^{\beta} e^{-s} ds$$

$$= u^{-(\beta+1)}\left[\int_{\epsilon}^{\frac{1}{\epsilon}} s^{\beta} e^{-s} ds + I_1(u,\epsilon) - I_2(u,\epsilon)\right] \tag{5.48}$$

donde

$$I_1(u,\epsilon) = \int_{\left[\frac{1}{\epsilon}, \frac{1}{\epsilon}u\right]} s^{\beta} e^{-s} ds$$

$$I_2(u,\epsilon) = \int_{[\epsilon, \epsilon u]} s^{\beta} e^{-s} ds$$

A continuación veremos que para cada $u_0 \in \mathbb{C}$ tal que $Re(u_0) > 0$ se tiene que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{d}{du}\right)^k_{u=u_0}\left[I_j(u,\epsilon)\right] = 0 \tag{5.49}$$

para $j = 1, 2$ y todo $k \geq 0$. En efecto, un cambio de variable da

$$I_2(u,\epsilon) = \epsilon^{\beta+1}\int_{[1,u]} s^{\beta} e^{-\epsilon s} ds$$

siendo $Re(\beta) > -1$ se sigue que $\lim_{\epsilon\to 0} I_2(u_0,\epsilon) = 0$. De la analiticidad de la función $s \to s^\beta e^{-\epsilon s}$ en la región $Re(s) > 0$ se sigue, para $k \geq 1$, que

$$\left(\frac{d}{du}\right)^k_{u=u_0} [I_2(u,\epsilon)] = \epsilon^{\beta+1}\left(\frac{d}{du}\right)^{k-1}_{u=u_0}\left[u^\beta e^{-\epsilon u}\right]$$

luego $\lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{d}{du}\right)^k_{u=u_0}[I_2(u,\epsilon)] = 0$ para todo $k \geq 0$.
Análoganente y teniendo en cuenta que la función $s \to e^{-s}$ decae rapidamente en la región $Re(s) > 0$ se obtiene $\lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{d}{du}\right)^k_{u=u_0}[I_1(u,\epsilon)] = 0$ para todo $k \geq 0$. Por lo tanto tenemos probada la igualdad en (5.49).
Ahora, derivando en (5.48), por la formula de Leibniz y (5.49) al hacer $\epsilon \to 0$ se sigue que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{d}{du}\right)^k_{u=u_0}\left[\int\limits_\epsilon^{\frac{1}{\epsilon}} \sigma^\beta e^{-\sigma u} d\sigma\right] = \Gamma(\beta+1)\left(\frac{d}{du}\right)^k_{u=u_0}\left[u^{-(\beta+1)}\right]. \tag{5.50}$$

Finalmente, al hacer $\epsilon \to 0$ en (5.47), se sigue por (5.50), la regla de la cadena aplicada a la función $r \to \int\limits_\epsilon^{\frac{1}{\epsilon}} \sigma^\beta e^{-\sigma u(r)} d\sigma$ donde $u(r) = \frac{1}{2} + \frac{r}{1-r} + i\xi$ y la formula de Leibniz que

$$\int\limits_0^\infty \sigma^\beta L_k^{n-1}(\sigma)\, e^{-\sigma\left(\frac{1}{2}+i\xi\right)} d\sigma = \lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_\epsilon^{\frac{1}{\epsilon}} \sigma^\beta L_k^{n-1}(\sigma)\, e^{-\sigma\left(\frac{1}{2}+i\xi\right)} d\sigma$$

$$= \frac{1}{k!}\left(\frac{d}{dr}\right)^k_{r=0}\left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{(1-r)^n\left(\frac{1}{2}+\frac{r}{1-r}+i\xi\right)^{\beta+1}}\right].$$

Probando así el lema. ∎

Los teoremas 5.6 y 5.7, junto con la obsevación 5.6, dan una descripción del conjunto tipo E_μ, la cual establecemos en el siguiente

Teorema 5.8 *Sea μ la medida de Borel fraccionaria dada por (5.37) con $\varphi(w) = |w|^2$. Entonces el conjunto tipo E_μ es el trapecio cerrado con vértices $(0,0)$, $(1,1)$, D y D', exceptuando quizas los puntos D, D' y los segmentos abiertos con vértices D, C_γ y C_γ, D'.*

Observación 5.7: El teorema 5.8 aún es válido si se considera allí a ν soportada sobre el gráfico de la función $\varphi(w_1,...,w_n) = \sum\limits_{j=1}^n a_j|w_j|^2$, con $(w_1,...,w_n) \in \mathbb{C}^n$ y $a_j \in \mathbb{R} - \{0\}$. Ahora la función fraccionaria de corte a tener en cuenta es $\prod \eta_j(w_j)|w_j|^{-\gamma_j}$ con $0 < \gamma_j < 2$. Los lemas 5.5 y 5.6 siguen valiendo, el lema 5.8 vale reemplazando allí γ por $\sum\gamma_j$. Para obtener el teorema 5.6, observamos que dicho teorema se sigue basicamente del teorema

5.3, por lo tanto realizando cuentas análogas y utilizando el resultado del teorema 5.5, se sigue el teorema 5.6 para este caso. Finalmente, para establecer el teorema 5.7 observamos que las entradas diagonales en este caso involucrarán el producto de n integrales como la que aparece en (5.42), estimandose estas de la misma manera, luego se sigue el teorema 5.7 y con ello la observación 5.7.

El resultado de la observación 5.5, puede ser notablemente mejorado si introducimos el factor $\eta(w)|w|^{-\gamma}$ donde $\gamma = \frac{2(1-m)}{(n+1)m}$ y m es cualquier número natural mayor o igual a 2, en lugar de considerar solamente $\eta(w)$ en (5.22), recordamos que alli obtuvimos una estimación fuerte (p, p') la cual no podiamos asegurar que sea sharp, al introducir el factor $|w|^{-\gamma}$ se produce una compensación, la cual nos permite caracterizar el conjunto tipo, obteniendo el siguiente

Teorema 5.9 *Sea μ la medida de Borel dada por (5.37) con $\varphi(w) = |w|^{2m}$ y $\gamma = \frac{2(1-m)}{(n+1)m}$, siendo m un natural mayor o igual a 2. Entonces el conjunto tipo E_μ es el triángulo cerrado con vertices*

$$A = (0,0)\,, \qquad B = (1,1)\,, \qquad C = \left(\frac{2n+1}{2n+2}, \frac{1}{2n+2}\right)$$

con $n \in \mathbb{N}$.

La Prueba que daremos a continuación sigue esencialmente las lineas de la demostración del teorema 5.7, por lo tanto nos limitaremos a dar las pricipales ideas que nos permitirán arribar a la conclusión del teorema.

Prueba. Sea $T_{z,N}f = f * \mu_z * J_{N,z}$ donde μ_z esta dada por (5.40) y $J_{N,z}$ por (5.29), ahora es claro que $T_{0,N}f(x,t) \to T_\mu f(x,t)$ puntualmente, y para $Re(z) = 1$ tenemos que

$$\|T_{z,N}\|_{1,\infty} \leq c \left|\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\right|^{-1}$$

donde c es una constante independiente de N. Para obtener la estimación fuerte $(2,2)$ del operador $T_{z,N}$, en $Re(z) = -n$, es suficiente obtener una estimación unifome en k, $\lambda \neq 0$, N y admisible en z de las entradas diagonales $\upsilon_{z,N}(k,\lambda)$ del operador $(\widehat{\mu * J_{N,z}})(\lambda)$. Las entradas diagonales estan dadas por

$$\upsilon_{z,N}(k,\lambda) = \frac{k!}{(k+n-1)!} I_{1-z}(-\lambda)\phi_N(\lambda) \int_0^\infty \eta_0(s^2)\psi_k^\lambda(s)\,|\lambda|^{-n}\, e^{i\lambda s^{2m}} s^{2n-1+z\gamma-\gamma} ds$$

cuentas similares a las realizadas en la prueba del teorema 5.7 sobre la integral (5.42) dan

$$\int_0^\infty \eta_0(s^2)\psi_k^\lambda(s)\,|\lambda|^{-n}\, e^{i\lambda s^{2m}} s^{2n-1+z\gamma-\gamma} ds = 2^{n-1}\,|\lambda|^{-\left(n+\frac{z\gamma-\gamma}{2}\right)} \left(\widehat{F_{k,\beta}} * \left(\widehat{G_\lambda} * \widehat{R_\lambda}\right)\right)(0).$$

Ahora

$$\left\|\widehat{F_{k,\beta}} * \left(\widehat{G_\lambda} * \widehat{R_\lambda}\right)\right\|_\infty \leq \left\|\widehat{F_{k,\beta}}\right\|_1 \left\|\widehat{G_\lambda}\right\|_1 \left\|\widehat{R_\lambda}\right\|_\infty \tag{5.51}$$

donde

$$F_{k,\beta}(\sigma) := \chi_{(0,\infty)}(\sigma) L_k^{n-1}(\sigma) e^{-\frac{\sigma}{2}} \sigma^{\beta},$$

con $\beta = n - 1 + \frac{z\gamma - \gamma}{2}$, y

$$G_\lambda(\sigma) := \eta_0 \left(\frac{2\sigma}{|\lambda|} \right)$$

y

$$R_\lambda(\sigma) = \chi_{(0,|\lambda|)}(\sigma) e^{i2^m sgn(\lambda)|\lambda|^{1-m}\sigma^m}$$

En la demostración del teorema 5.7 obtuvimos, para $Re(\beta) > -1$ que

$$\left| \widehat{F_{k,\beta}}(\xi) \right| = \left| \int_0^\infty \sigma^\beta L_k^{n-1}(\sigma) e^{-\sigma\left(\frac{1}{2}+i\xi\right)} d\sigma \right| \leq \frac{\Gamma(n-1-Re(\beta))\Gamma(Re(\beta)+1)}{\left|\left(\frac{1}{2}+i\xi\right)^{\beta+1}\right| |\Gamma(n-1-\beta)|} \times \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$$

siendo $Re(z) = -n$, $\gamma = \frac{2(1-m)}{(n+1)m}$ y $\beta = n - 1 + \frac{z\gamma-\gamma}{2}$ se sigue que $Re(\beta) = n - \frac{1}{m}$. Luego

$$\left\| \widehat{F_{k,\beta_z}} \right\|_1 \leq \frac{Ce^{\frac{|Im(z)|\pi}{4}}}{\left|\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\gamma\right)\right|} \times \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} \times \int_0^\infty \frac{1}{\left(\frac{1}{4}+\xi^2\right)^{\frac{1}{2}\left(n+1-\frac{1}{m}\right)}} d\xi \tag{5.52}$$

donde C no depende de z y la integral a la derecha de la desigualdad anterior es finita para todo $n \geq 1$ y $m \geq 2$. En la observación 5.5 obtuvimos que

$$\left| \widehat{R_\lambda}(\xi) \right| \leq \frac{C_m}{|\lambda|^{\frac{1-m}{m}}} \tag{5.53}$$

Por lo tanto de (5.51), (5.52), (5.53) y ya que $\left\| \widehat{G_\lambda} \right\|_1 = \|\widehat{\eta_0}\|_1$ se sigue que

$$\left| \int_0^\infty \eta_0(s^2) \psi_k^\lambda(s) |\lambda|^{-n} e^{i\lambda s^{2m}} s^{2n-1+z\gamma-\gamma} ds \right| \leq 2^{n-1} |\lambda|^{-n} \frac{Ce^{\frac{|Im(z)|\pi}{4}}}{\left|\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\gamma\right)\right|} \times \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} \|\widehat{\eta_0}\|_1 .$$

Ahora, para $Re(z) = -n$, obtenemos que

$$|v_{z,N}(k,\lambda)| \leq C_{n,m} \|H\|_\infty \|\widehat{\eta_0}\|_1 \frac{e^{\frac{|Im(z)|\pi}{4}}}{\left|\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\right| \left|\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\gamma\right)\right|}$$

siendo esta última estimación admisible en z. Por la fórmula de Stirling se ve que la familia $\{T_{z,N}\}$ satisface sobre la franja $-n \leq Re(z) \leq 1$ las hipótesis del teorema de interpolación compleja, por lo que el operador $T_{0,N}$ es acotado del $L^{\frac{2n+2}{2n+1}}(\mathbb{H}^n)$ en el $L^{2n+2}(\mathbb{H}^n)$ con cota uniforme en N, al hacer $N \to \infty$, se obtiene que el operador T_μ es acotado del $L^{\frac{2n+2}{2n+1}}(\mathbb{H}^n)$ en el $L^{2n+2}(\mathbb{H}^n)$ con $n \in \mathbb{N}$. Ahora la prueba del teorema esta completa.∎

Referencias

[1] M. Christ, *On the restriction of the Fourier to curves: Endpoint results and the degenerated case.* Trans. Amer. Math. Soc. Vol 287, No. 1 (1985) 223-238.

[2] L. De Carli, A. Iosevich, *Some sharp restriction theorems for homogeneous manifolds,* J. Fourier Anal. Appl. 4, N. 1, (1998), 105-128.

[3] M. Dellanegra, *Problemi di restrizione della trasformormata di Fourier ad alcune ipersuperfici di* $\mathbb{R}^n$. Ph. D. Thesis, Università di Torino (1998).

[4] S. W. Drury - K. Guo. *Convolution estimates related to surfaces of half the ambient dimension.* Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (1991), 110-151.

[5] C. Fefferman, *Inequalities for strongly singular convolution operators,* Acta. Math. 124 (1970), 9-35.

[6] E. Ferreyra - T. Godoy - M. Urciuolo. *Convolution operators with non isotropically homogeneous measures on* R^{2n} *with* n *dimensional support.* Coll. Math. 93, No.2, 285-293 (2002).

[7] I.M. Gelfand, G.E. Shilov. *Generalized Functions 1. Properties and operations,* Academic Press inc. New York and London (1964).

[8] D. Geller, *Fourier analysis on the Heisenberg group,* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 74 (1977), pp 1328-1331.

[9] W. Littman. $L^p - L^q$ *estimates for singular integral operators.* Proc. Symp. Pure Appl. Math. AMS. 23 479-481. (1973).

[10] N.Lyall, *Strongly singular convolution operators on the Heisenberg group,* Trans. Amer. Math. Soc. 359, N 9, 4467-4488 (2007)

[11] D. Oberlin. *Convolution estimates for some measures on curves.* Proc. Amer. Math. Soc. 99, 1. (1987). 56-60.

[12] E. Prestini, *Restriction theorems for the Fourier transform to some manifolds in* $\mathbb{R}^n$ Proc. of Symp. in pure Math., Vol XXXV, No.1, (1979), 101-109.

[13] F. Ricci. *Limitatezza* $L^p - L^q$ *per operatori di convoluzione definiti da misure singolari in* $\mathbb{R}^n$. Bollettino U.M.I. (7) 11-A (1997), 237-252.

[14] W. Rudin. *Real and complex analysis,* New York, N.Y. McGraw Hill, xiv, 3rd. edition, 1987.

[15] Secco S. L^p*-improving properties of measures supported on curves on the Heisenberg group.* Studia Mathematicata 132 (2) (1999).

[16] E. M. Stein - G. Weiss. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces.* Princeton University Press (1971).

[17] E. Stein, *Oscillatory integrals in Fourier Analysis*, Beijing Lectures in Harmonic Analysis, Annals of Math. Study N. 112, Princeton University Press, (1986), 307-355.

[18] E. M. Stein. *Harmonic Analysis. Real Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals.* Princeton University Press. Princeton, New Jersey (1993).

[19] E.M Stein. *Princeton Lectures in Analysis - Complex Analysis.* Princeton University Press. Princeton, New Jersey (2003).

[20] R. S. Strichartz, *Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations.* Duke Math. J. Vol 44, No. 1, (1977), 705-714.

[21] S. Thangavelu, *Harmonic Analysis on the Heisenberg Group,* Birkhauser, Boston, 1998.

[22] S. Thangavelu, *Spherical Means on the Heisenberg Group and a Restriction Theorem for the Symplectic Fourier Transform.* Revista Matemática Iberoamericana, Vol. 7, Núm 2, (1991).

[23] P. Tomas, *A restriction theorem for the Fourier transform,* Bull. Amer. Math. Soc. 81, (1975), 477-478 .