Categorías tensoriales y grupos finitos

por César Neyit Galindo Martínez

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía y Física como parte de los requerimientos para la obtención del grado de Doctor en Matemática de la

Universidad Nacional de Córdoba

Julio de 2009

©FaMAF-UNC 2009

Director: Dra. Sonia Natale

Índice general

Resumen

La tesis trata sobre las álgebras de Hopf semisimples y las categorías tensoriales asociadas.

En la primera parte de la tesis mostramos dos familias de ejemplos de álgebras de Hopf semisimples que no son simples, pero que admiten deformaciones simples. La primera familia proviene de deformaciones por *twist* del grupo simétrico $\mathbb{S}_n$. Para probar esto damos una condición necesaria para que un elemento de tipo grupo en el dual de una deformación por *twist* de un grupo finito sea central. La segunda familia es una deformación por *twist* del producto directo de dos grupos diédricos generalizados cuyo orden es el producto de dos números primos. Para la demostración comparamos la categoría de (co)-representaciones de la deformación por *twist* con la categoría de representaciones de las posibles extensiones abelianas. Nuestros ejemplos contestan una serie de preguntas abiertas, sobre extensiones de álgebras de Hopf semisimples. Posteriormente, damos condiciones necesarias y suficientes para que una deformación por *twist* de un álgebra de grupo sea un álgebra de Hopf simple.

En la segunda parte de la tesis, introducimos y estudiamos la noción de categoría tensorial fuertemente graduada sobre un grupo G. Esto es, una categoría tensorial cuya categoría abeliana subyacente $\mathcal{C} = \bigoplus_{\sigma \in G} \mathcal{C}_\sigma$ está graduada por un grupo G, de forma tal que el bifuntor $\otimes$ envía $\mathcal{C}_\sigma \times \mathcal{C}_\tau$ a $\mathcal{C}_{\sigma\tau}$ para todo $\sigma, \tau \in G$, y además, toda componente homogénea posee un objeto invertible.

El resultado principal de la segunda parte es la descripción de las categorías módulo sobre una categoría fuertemente graduada por un grupo G, como categorías módulo inducidas desde subcategorías tensoriales asociadas con los subgrupos de G. Como aplicaciones del teorema principal generalizamos algunos resultados de clasificación de categorías módulo sobre categorías punteadas y describimos las categorías módulo simples para G-equivariantizaciones de categorías tensoriales, donde G es un grupo finito.

Palabras Claves: Álgebras de Hopf; categorías tensoriales; deformaciones de grupos finitos; teoría de Clifford.
1991 Mathematics Subject Classification: 16W30, 18D10.

Abstract

The thesis concerns semisimple Hopf algebras and the associated tensor categories.

In the first part of the thesis we show two families of examples of semisimple Hopf algebras which are not simple, but admit simple deformations. The first family comes from twisting deformations of the symmetric group $\mathbb{S}_n$. To prove this, we give a necessary condition for a group-like element in a dual of a twisting deformation of a finite group to be central. The second family is a twisting deformation of the direct product of two generalized dihedral groups whose orders are the product of two prime numbers. For the proof we compare the category of (co)-representations of the twisting deformation with the category of representations of the possible abelian extensions. Our examples answer a series of open questions concerning extensions of semisimple Hopf algebras. Subsequently, we give necessary and sufficient conditions for a twisting deformation of a group algebra to be a simple Hopf algebra.

In the second part of the thesis, we introduce and study the notion of strongly graded tensor category over a group G. This is a tensor category whose underlying abelian category $\mathcal{C} = \bigoplus_{\sigma \in G} \mathcal{C}_\sigma$ is graded by a group G, so that the bifunctor $\otimes$ maps $\mathcal{C}_\sigma \times \mathcal{C}_\tau$ to $\mathcal{C}_{\sigma\tau}$, for all $\sigma, \tau \in G$, and in addition, every homogeneous component has an invertible object.

The main result of the second part is the description of the module categories over a strongly graded tensor category by a group G, as induced from module categories over tensor subcategories associated with subgroups of G. As applications of the main theorem we generalize some results of classification of module categories over pointed tensor categories and describe the module categories over G-equivariantizations of tensor categories where G is a finite group.

Key words: Hopf algebras; tensor categories; deformation of finite groups; Clifford theory.
1991 Mathematics Subject Classification: 16W30, 18D10.

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a Sonia, mi directora. A ella quiero agradecerle su sincero interés en mi formación como matemático, así como su paciencia y guía durante estos años.

En segundo lugar quiero agradecer a Nicolás, por sus valiosos concejos no solo académicos sino personales. A él quiero agradecerle también por creer y apoyarnos a todos los *Colombianos de Famaf*.

Un especial agradecimiento a los profesores del Famaf. En especial a Esther Galina, Jorge Vargas, Juan Pablo Rossetti, Roberto Miatello, Isabel Dotti, Paulo Tirao, Karina Boyalian, Alejandro Tiraboschi. Deseo agradecer a todos mis compañeros del Famaf, en especial a Jesús Alonso O., Pablo R., Martín M., Gastón G., Iván A., Julia P..

Agradezco al CONICET por el apoyo financiero en todo mi doctorado.

Quiero agradecer a mi madre y mi hermana por su apoyo incondicional por estar pendientes a la distancia de todo lo mío.

Finalmente quiero agradecer a Mónica por su apoyo, cariño, concejos, amor y compañía a la distancia.

Introducción

Recientemente, la teoría de categorías tensoriales se ha convertido en una herramienta importante en el estudio de numerosos problemas de matemática y física. La relación entre los grupos cuánticos con los invariantes de nudos y variedades de baja dimensión, así como también con la teoría de subfactores, puede ser explicada adecuadamente usando este tipo de categorías.

La terminología *categoría tensorial* sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k, es usada como sinónimo de categoría monoidal, abeliana k-lineal, rígida, y con objeto unidad simple.

A menudo las categorías tensoriales son realizadas como categorías de comódulos de dimensión finita de álgebras de Hopf, o más generalmente, de cuasi-álgebras de Hopf. Las categorías tensoriales de este tipo tienen la particularidad de estar munidas de un funtor fiel, monoidal (respectivamente, cuasi-monoidal) y exacto en la categoría de espacios vectoriales de dimensión finita. Este tipo de funtores son llamados *funtores de fibra* (respectivamente, *cuasi funtores de fibra*). La implicación recíproca también es cierta. Es decir, si una categoría tensorial admite un funtor de fibra (respectivamente, un cuasi funtor de fibra), entonces, usando una generalización de la teoría de reconstrucción de Tannaka-Krein para álgebras Hopf (respectivamente, cuasi-álgebras de Hopf), es posible construir un álgebra de Hopf (respectivamente, una cuasi-álgebra de Hopf) cuya categoría de comódulos es tensorialmente equivalente a la categoría tensorial inicial.

En general, es posible que una categoría tensorial no admita funtores de fibra, o ni siquiera cuasi funtores de fibra. Además, si admite un funtor de fibra, salvo isomorfismos monoidales naturales, éste no es necesariamente único, y por lo tanto, las álgebras de Hopf reconstruidas no son isomorfas entre sí. Sin embargo, las álgebras de Hopf con categorías de comódulos tensorialmente equivalentes, son obtenidas una a partir de la otra usando extensiones galoisianas del cuerpo de base. En el caso en que el álgebra de Hopf tenga dimensión finita, las álgebras de Hopf con categorías de representaciones tensorialmente equivalentes, son obtenidas una a partir de la otra mediante deformaciones por *twist*.

Las categorías tensoriales pueden ser divididas en dos tipos: las semisimples y las no semisimples. Desde luego, el estudio de cada una de estas familias se subdivide en diversos tipos. Dentro de las categorías tensoriales semisimples, aquéllas que poseen un número finito de objetos simples salvo isomorfismo, son llamadas *categorías de fusión* y son de especial interés en la física matemática y en la teoría de subfactores. Éstas se relacionan con las (cuasi)-álgebras de Hopf semisimples.

Un invariante importante de una categoría de fusión $\mathcal{C}$ es el anillo de Grothendieck $\mathcal{G}(\mathcal{C})$. Muchas propiedades esenciales de las categorías de fusión pueden deducirse de su anillo de Grothendieck: por ejemplo, $\mathcal{C}$ es la categoría de representaciones de una cuasi-álgebra de Hopf, si y sólo si, la dimensión de Frobenius-Perron de cada clase de equivalencia de objetos simples es un número entero. Recientemente, las cuasi-álgebras de Hopf semisimples de dimensión p^n, donde p es un número primo, y las cuasi-álgebras de Hopf de dimensión menor que 60 han sido caracterizadas, haciendo un uso metódico de las categorías de fusión.

Una herramienta importante para el estudio de las categorías de fusión, son las categorías módulo. Así como una categoría tensorial puede pensarse como una categorificación de la noción de anillo, las categorías módulo sobre una categoría tensorial corresponden a una categorificación de la noción de módulo o representación. En forma más precisa, si $\mathcal{C}$ una categoría tensorial y $\mathcal{M}$ una categoría abeliana k-lineal, una estructura de categoría $\mathcal{C}$-módulo a izquierda sobre $\mathcal{M}$ es un funtor k-lineal fiel y exacto $F : \mathcal{C} \to \operatorname{End}(\mathcal{M})$, donde $\operatorname{End}(\mathcal{M})$ es la categoría monoidal de endofuntores k-lineales exactos de $\mathcal{M}$, análogamente una estructura de categoría $\mathcal{C}$-módulo a derecha sobre $\mathcal{M}$ es una funtor k-lineal fiel y exacto $F : \mathcal{C} \to \operatorname{End}^{op}(\mathcal{M})$.

Esta noción se remonta a los años sesenta en los trabajos de Benabou [5]. Sin embargo, su interés ha sido renovado por los trabajos [51], [22] de Etingof y Ostrik.

La existencia de categorías módulo especiales nos da información adicional sobre la categoría tensorial. Por ejemplo, se tiene que una categoría k-lineal semisimple, donde k es algebraicamente cerrado, con un único objeto simple, es equivalente a la categoría de espacios vectoriales, y la categoría tensorial de endofuntores exactos es equivalente a la categoría tensorial de los espacios vectoriales de dimensión finita. Por lo tanto, los funtores de fibra están en correspondencia con categorías módulo semisimples que poseen, salvo isomorfismos, un único objeto simple.

Otro tipo de categorías módulo muy importantes en la clasificación de álgebras de Hopf semisimples son las categorías módulo punteadas. Una categoría módulo indescomponible sobre una categoría de fusión es llamada punteada, si todos los objetos simples de la categoría de los endofuntores $\mathcal{C}$-módulo son invertibles. Las categorías de fusión que admiten una categoría módulo punteada son llamadas de *tipo grupo*. Éstas pueden describirse explícitamente en términos de grupos finitos y sus cohomologías. Las categorías de tipo grupo han sido muy estudiadas en los últimos años, por ejemplo en los trabajos [17], [18], [39], [52], [34], [37], [16].

Muchos de los ejemplos explícitos de álgebras de Hopf semisimples son de tipo grupo. Éstos incluyen a las categorías semisimples triangulares, las extensiones abelianas, las álgebras de Hopf de dimensión p^n, pq, pq^2. Un problema importante planteado en [17], fue la construcción de álgebras de Hopf semisimples complejas, cuya categoría de representaciones no fuese de tipo grupo. Recientemente, Nikshych [39] mostró ejemplos de álgebras de Hopf semisimples que no son de tipo grupo, usando una acción de un grupo finito en la categoría de representaciones de una álgebra de Hopf semisimple de tipo grupo. La construcción de estos ejemplos usa un proceso conocido como equivariantización: dada un acción por autoequivalencias tensoriales, de un grupo sobre una categoría monoidal, se construye una nueva categoría tensorial $\mathcal{C}^G$ llamada la *equivariantización*.

Los resultados de esta tesis se encuentran en los artículos [25], [26], [24], estando los dos primeros ya publicados.

En [25] mostramos que las nociones de simplicidad y semi-solubilidad de álgebras de Hopf (semisimples) no son nociones categóricas. Para ello mostramos dos familias de grupos no simples que admiten un *twist*, para el cual las álgebras de Hopf asociadas son simples. Nuestros resultados responden una seria de preguntas abiertas sobre extensiones de álgebras de Hopf semisimples.

En [26] mostramos condiciones necesarias y suficientes para que una deformación por *twist* de un álgebra de grupo, sea un álgebra de Hopf simple. Asimismo, generalizamos y damos demostraciones alternativas a los principales resultados de [25].

En [24], introducimos y estudiamos la noción de categoría tensorial fuertemente graduada sobre un grupo G, desarrollando un análogo de la teoría de Clifford para anillos fuertemente graduados. Ésto nos permite describir las categorías módulo sobre una categoría fuertemente graduada por un grupo G, como categorías módulo inducidas desde subcategorías tensoriales asociadas a los subgrupos de G. Como aplicaciones del teorema principal, generalizamos algunos resultados de clasificación de categorías modulo sobre categorías punteadas, y describimos las categorías módulo simples para G-*equivariantizaciones* de categorías tensoriales, donde G es un grupo finito.

En el Capítulo 1 introducimos las definiciones y nociones básicas que se usarán a lo largo de la tesis. Ésto, con el fin de que sea lo más autocontenida posible.

El segundo capítulo comienza con las definiciones de las nociones básicas de la teoría de categorías monoidales. En la Sección 2.3 recordamos las definiciones de bicategorías y categorías módulo sobre categorías monoidales, las cuales son de gran importancia en la tesis. En la sección 2.5 damos la definición de categoría tensorial y esbozamos la teoría de reconstrucción Tannakiana, que explica como recuperar un álgebra de Hopf a partir de su categoría de comódulos. Posteriormente, estudiamos categorías módulo estrictas sobre categorías monoidales.

El Capítulo 3 está dedicado a la teoría de extensiones galoisianas para álgebras de Hopf, la cual resulta de gran importancia en las demostraciones de los resultados de la tesis.

El cuarto capítulo contiene los resultados de [25]. Mostramos que ciertas deformaciones por *twist* del grupo simétrico $\mathbb{S}_n$, en n letras, son simples como álgebras de Hopf, para $n \geq 5$. Ver Teorema 4.3.6. Para probar esto, damos una condición necesaria para que un elemento de tipo grupo en el dual de una deformación por *twist* de un grupo finito sea central, en el caso en que el *twist* sea “levantado”de un subgrupo abeliano.

Sean p, r y q números primos, tales que q divide a $p-1$ y a $r-1$. Mostramos que una familia de grupos supersolubles G, de orden prq^2, puede deformase a través de un *twist* en un álgebra de Hopf simple. Ver Teorema 4.4.5. Estos *twist* son levantados de subgrupos abelianos de G. La demostración depende de la comparación de la teoría de (co)representaciones de las deformaciones por *twist* de G dada en [20] con la de un producto cruzado. También hacemos uso de la clasificación de las álgebras de Hopf semisimples en dimensión p y pq [81, 46, 21, **?**].

Se sabe que un álgebra de Hopf semisimple de dimensión p^n siempre es semisoluble [45, 49]. Por otro lado, probamos que si el grupo G es nilpotente, entonces toda deformación por *twist* de kG es semisoluble.

Nuestros resultados implican:

(a) Existe un álgebra de Hopf semisimple simple, la cual no es la deformación por twist *del álgebra de grupo de un grupo finito simple o de su dual.*

Esto responde en forma negativa la Pregunta 2.3 en [1].

(b) Existe una álgebra de Hopf semisimple de dimensión p^2q^2, la cual es simple como álgebra de Hopf.

Por lo tanto el análogo del Teorema de Burnside para grupos de orden p^aq^b no es válido para la noción de semisolubilidad de álgebras de Hopf semisimples. Esto concierne a una pregunta realizada por S. Montgomery. Ver [1, Question 4.17].

(c) Existe un álgebra de Hopf no trivial de dimensión 36*, la cual es simple.*

Este ejemplo da una respuesta negativa a la pregunta [48, Question, pp. 269]. En dimensión < 60, ésta es la única álgebra de Hopf no semisoluble, por [35].

(d) Existe un álgebra de Hopf semisimple, la cual es una bozonización pero no una extensión.

Esto responde la Pregunta 2.13 de [1].

Mostramos que existen exactamente dos deformaciones por *twist* de grupos de orden 60 que son simples como álgebras de Hopf: la deformación por *twist* de $\mathbb{A}_5$, construida en [40], y la deformación (auto-dual) de $D_3 \times D_5$, discutida en la sección 4.4. Ésto contribuye al problema [1, Question 2.4].

El Capítulo 5 contiene los resultados de [26]. Determinamos condiciones necesarias y suficientes, en términos de teoría de grupos y sus cohomologías, para que un cociente de una deformación por *twist* de un grupo finito sea conormal. Para ello usamos la clasificación de los objetos galoisianos de k^G debida a Movshev y Davydov [50, 11] y los resultados de Schauenburg sobre correspondencias de Galois [66]. Ambos temas son tratados en el Capítulo 3. Como aplicaciones del teorema principal, generalizamos y damos demostraciones alternativas de los principales resultados y teoremas del capítulo anterior.

Como se muestra en el Capítulo 4, existen álgebras de Hopf simples de dimensión p^2q^2, donde p y q son números primos distintos. Por lo tanto, en el contexto de álgebras de Hopf semisimples, un resultado análogo al Teorema de Burnside para grupos de orden p^aq^b, no es válido con la noción de solubilidad dada en [49].

Una noción más adecuada de solubilidad para categorías de fusión es propuesta en [18]. Entre los resultados más relevantes de [18], se tiene que toda categoría de fusión de dimensión de Frobenius-Perron $p^a q^b$ es soluble. Asimismo, toda categoría de fusión de dimensión entera menor que 60 es soluble.

Los Capítulos 6 y 7 están dedicados a exponer los resultados de [24].

En el Capítulo 6 estudiamos las acciones de un grupo sobre una categoría tensorial. Una acción de un grupo G sobre una categoría tensorial $(\mathcal{C}, \otimes, a, l, r)$ induce un morfismo de grupos de G en el grupo $\mathrm{Aut}_{\otimes}(\mathcal{C})$ de clases de isomorfismo monoidales de autoequivalencias tensoriales de $\mathcal{C}$.

El grupo $\mathrm{Aut}_{\otimes}(\mathcal{C})$ posee una acción natural sobre el grupo abeliano $\mathrm{Aut}_{\otimes}(\mathrm{id}_{\mathcal{C}})$ de isomorfismo naturales monoidales del funtor identidad. Mostramos que, dados un grupo G y un morfismo de grupos $f : G \to \mathrm{Aut}_{\otimes}(\mathcal{C})$, queda inducido un 3-cociclo $a \in Z^3(G, \mathrm{Aut}_{\otimes}(\mathrm{id}_C))$, con coeficientes en el G-módulo $\mathrm{Aut}_{\otimes}(\mathrm{id}_C)$ con acción inducida por f. En la Sección 6.2 mostramos que f es realizado por una acción de G sobre $\mathcal{C}$, si y sólo si, la clase de cohomología de a es trivial. Además, el conjunto de clase de equivalencia de las posibles realizaciones de f está en correspondencia con los elementos de $H^2(G, \mathrm{Aut}_{\otimes}(\mathrm{id}_C))$. Con ayuda de este resultado, describimos las acciones de un grupo cíclico sobre una categoría tensorial. Las acciones de grupos cíclicos sobre categorías tensoriales son de gran importancia, en la reciente definición de *categoría de fusión soluble*, dada en [18].

En el Capítulo 7 definimos y estudiamos las categorías tensoriales fuertemente graduadas sobre un grupo G.

Una categoría tensorial está graduada por un grupo G, si existe una descomposición en suma directa $\mathcal{C} = \bigoplus_{\sigma \in G} \mathcal{C}_\sigma$ de subcategorías abelianas plenas de $\mathcal{C}$, tal que el bifuntor $\otimes$ envía $\mathcal{C}_\sigma \times \mathcal{C}_\tau$ a $\mathcal{C}_{\sigma\tau}$, para todo $\sigma, \tau \in G$. Una categoría tensorial G-graduada está *fuertemente* graduada, si cada componente homogénea $\mathcal{C}_\sigma$, $\sigma \in G$, posee un objeto invertible.

En la Sección 7.1 estudiamos algunas propiedades básicas del producto tensorial de categorías k-lineales, introducido por Tambara en [74]. En la Sección 7.2 mostramos dos de los ejemplos más importantes de categorías fuertemente graduadas, que son: las categorías semisimples punteadas, es decir aquéllas en las que todo elemento simple es invertible, y la categoría tensorial producto cruzado $\mathcal{C} \rtimes G$, asociada a una acción de un grupo G sobre $\mathcal{C}$.

Para una categoría tensorial G-graduada $\mathcal{C}$, definimos la noción de categoría módulo graduada sobre un G-conjunto. Para categorías tensoriales fuertemente graduadas, damos un teorema de estructura para las categorías módulo graduadas sobre un G-conjunto. En la Sección 7.3 demostramos el resultado principal. Mostramos que toda categoría módulo simple sobre una categoría fuertemente graduada $\mathcal{C}$, es inducida de categoría módulo sobre una subcategoría tensorial de $\mathcal{C}$. Como aplicación, clasificamos las categorías módulo simples sobre una categoría semisimple punteada y sobre las categorías tensoriales $\mathcal{C} \rtimes G$.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo recordaremos algunas definiciones y resultados básicos sobre álgebras semisimples, álgebras de Hopf, teoría de categorías, cohomología de grupos y representaciones monomiales, que serán necesarios para demostrar los principales resultados de esta tesis.

Nuestras referencias son las siguientes: para la teoría general de álgebras asociativas [10], álgebras de Hopf [47], teoría de categorías [43], álgebra homológica y cohomología de grupos [79].

1.1. El Teorema de Artin-Wedderburn para álgebras semisimples

Denotaremos por k un cuerpo arbitrario. Si V es un espacio vectorial sobre k, el espacio vectorial dual lo denotaremos por $V^* := \mathrm{Hom}_k(V, k)$, y la evaluación $V^* \otimes V \to V, \alpha \otimes v \mapsto \alpha(v)$, por $\langle\ ,\ \rangle$.

Por *k-álgebra* entenderemos un álgebra sobre k asociativa con unidad. Si A es una k-álgebra, denotaremos por ${}_A\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_A$ y ${}_A\mathcal{M}_A$ la categoría de A-módulos a izquierda, la categoría de A-módulos a derecha y la categoría de A-bimódulos, respectivamente. Si no hacemos referencia explícita por A-módulo entenderemos un A-módulo a izquierda.

Recordemos que un A-módulo no nulo M es llamado *indescomponible*, si M no admite una descomposición $M \cong N \oplus N'$ donde N y N' son A-módulos no nulos.

Un A-módulo no nulo S es llamado *simple*, si todo A-submódulo de S es nulo o S. Un A-módulo es llamado semisimple si es suma directa de A-módulos simples.

Lema 1.1.1 (Lema de Schur). *Sea A una k-álgebra y $f : S \to S'$ un morfismo no nulo de A-módulos. Entonces*

a *Si S es simple, f es un monomorfismo.*

b *Si S' es simple, f es un epimorfismo.*

c *Si S y S' son simples, f es un isomorfismo.*

Demostración. Puesto que f es un morfismo de A-módulos, $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ son A-submódulos de S y S' respectivamente. Dado que $f \neq 0$, entonces $\mathrm{Ker}(f) = 0$, si S es simple, e $\mathrm{Im}(f) = S'$ si S' es simple. Esto prueba el lema. $\square$

Corolario 1.1.2. *Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado y A una k-álgebra de dimensión finita. Entonces un A-módulo S es simple si y sólo si $\mathrm{End}_A(S) \cong k$.*

Demostración. Se sigue del Lema 1.1.1 que $\mathrm{End}_A(S)$ es un álgebra de división. Puesto que S es simple, S es un A-módulo cíclico, luego $\dim_k S$ es finita, y por lo tanto $\dim_k \mathrm{End}_A(S)$ también es finita. Entonces para cualquier elemento no nulo $\phi \in \mathrm{End}_A(S)$, los elementos $1_S, \phi, \phi^2, \ldots$ son linealmente dependientes sobre k. Por lo tanto existe un polinomio irreducible $f \in k[t]$, tal que $f(\phi) = 0$. Puesto que k es algebraicamente cerrado, f es de grado 1. Luego ϕ actúa sobre S por multiplicación por un escalar $\lambda_\phi \in k$. La correspondencia $\phi \mapsto \lambda_\phi$ establece un isomorfismo de k-álgebras $\mathrm{End}_A(S) \cong k$. $\square$

Sea A un álgebra, el *radical de Jacobson* de A, denotado por $J(A)$, es el ideal bilateral definido de las siguientes formas equivalentes:

- la intersección de todos los ideales a derecha maximales,
- la intersección de todos los ideales a izquierda maximales.

Diremos que un álgebra A es semisimple, si $J(A) = 0$ y A es Artiniana. En este caso todo A-módulo es semisimple.

Teorema 1.1.3 (Teorema de Artin-Wedderburn)**.** *Toda k-álgebra semisimple A es isomorfa a un producto directo finito de álgebras de matrices sobre k-álgebras de división.*

De manera más precisa, si $A = L_1^{\oplus n_1} \oplus \cdots \oplus L_t^{\oplus n_t}$ es la descomposición de A como suma de componentes simples, entonces

$$L_i^{\oplus n_i} \cong M_{n_i}(D_i^{op}), \quad y\ A \cong \prod_{i=1}^{t} M_{n_i}(D_i^{op}),$$

donde $D_i = \mathrm{End}_A(L_i)$.

Demostración. Ver [10, Theorem 3.22]. $\square$

Sean G un grupo con unidad e y $\alpha \in Z^2(G, k^*)$ un 2-cociclo normalizado, es decir, una aplicación $\alpha : G \times G \to k^*$ tal que

$$\alpha(xy, z)\alpha(x, y) = \alpha(x, yz)\alpha(y, z), \quad \alpha(x, e) = \alpha(e, x) = 1,$$

para todo $x, y, z \in G$. Se define el *álgebra de grupo torcida* $k_\alpha G$ como:

- el espacio vectorial con base $\{x_\sigma\}_{\sigma\in G}$,
- producto $x_\sigma x_\tau = \alpha(\sigma,\tau)x_{\sigma\tau}$ $\sigma,\tau \in G$,
- unidad x_e.

Teorema 1.1.4 (Teorema de Maschke)**.** *Sea G un grupo finito y sea k un cuerpo cuya característica no divide al orden de G. Entonces el álgebra de grupo torcida $k_\alpha G$ es semisimple.*

Demostración. Ver [31, Theorem 2.10 pag. 85]. □

Observación 1.1.5. En contraste con las álgebras de grupo, el recíproco del teorema anterior no es cierto en general (ver [31, section 5.8]).

1.2. Álgebras de Hopf

Por coálgebra entenderemos una k-coálgebra coasociativa con counidad. Dada una coálgebra C, usaremos la notación de Sweedler para la comultiplicación $\Delta : C \to C\otimes C$ (suprimiendo el símbolo de sumatoria). Es decir, para $x \in C$, $\Delta(x) = x_{(1)} \otimes x_{(2)}$.

Análogamente, si V es un C-comódulo a izquierda (respectivamente, a derecha) vía $\lambda_V : V \to C \otimes V$ (respectivamente, $\rho_V : V \to V \otimes C$) usaremos la notación $\lambda_V(v) = v_{(-1)} \otimes v_{(0)}$ (respectivamente, $\rho_V(v) = v_{(0)} \otimes v_{(1)}$). Denotaremos por $\mathcal{M}^C$, ${}^C\mathcal{M}$ y ${}^C\mathcal{M}^C$ la categoría de C-comódulos a derecha, la categoría de C-comódulo a izquierda y la categoría de C-bicomódulos, respectivamente.

Un subespacio vectorial $I \subseteq C$ es llamado un *coideal* de la coálgebra $(C, \Delta, \varepsilon_C)$, si $\Delta_C(I) \subseteq I\otimes C + C\otimes I$ y $\varepsilon_C(I) = 0$. Notemos que para un subespacio vectorial $I \subseteq C$, el espacio vectorial C/I es una coálgebra con comultiplicación y counidad inducidas por Δ_C y ε_C si y sólo si I es un coideal.

Si $V \subseteq C$ es un subespacio vectorial, denotaremos por $V^+ := \mathrm{Ker}(\varepsilon_C) \cap V$. Notemos que dado que ε_C es un morfismo de coálgebras, C^+ es un coideal.

La notación para álgebras de Hopf que usaremos es la estándar: Δ, ε, S denota la comultiplicación, la counidad y la antípoda, respectivamente.

Un subespacio vectorial $I \subseteq H$ es llamado un *ideal de Hopf* del álgebra de Hopf H, si I es un coideal, un ideal bilateral y $S(I) \subseteq I$. Claramente, I es un ideal de Hopf si y sólo si el espacio vectorial cociente H/I es un álgebra de Hopf.

Denotaremos por $G(H) = \{0 \neq x \in H | \Delta(x) = x \otimes x\}$ al grupo de los *elementos de tipo grupo* en un álgebra de Hopf H.

Ejemplo 1.2.1. Sea G un grupo finito con unidad e. Sea k^G el álgebra de funciones sobre G con valores en k. Esta álgebra tiene una estructura de álgebra de Hopf con:

$$\Delta(\phi)(u,v) = \phi(uv), \quad \varepsilon(\phi) = \phi(e), \quad S(\phi)(u) = \phi(u^{-1}),$$

para todo $u, v \in G$, $\phi \in k^G$.

Sea kG el álgebra de grupo. Esta álgebra tiene estructura de álgebra de Hopf con:

$$\Delta(x_\sigma) = x_\sigma \otimes x_\sigma, \quad S(x_\sigma) = x_{\sigma^{-1}}.$$

En general, si H es un álgebra de Hopf de dimensión finita, el espacio vectorial dual H^* es un álgebra de Hopf con estructura

$$\langle \alpha\beta, h\rangle = \langle \alpha \otimes \beta, h_1 \otimes h_2\rangle, \quad \langle 1, h\rangle = \varepsilon(h),$$
$$\langle \Delta(\alpha), h \otimes g\rangle = \langle \alpha, hg\rangle, \quad \varepsilon(\alpha) = \alpha(1), \quad \langle S(\alpha), h\rangle = \langle \alpha, S(h)\rangle.$$

para todo $\alpha, \beta \in H^*$, $h, g \in H$.

Por ejemplo, si G es un grupo finito, el dual del álgebra de Hopf kG es el álgebra de Hopf k^G.

Un álgebra de Hopf H es llamada semisimple si H es semisimple como álgebra. Como aplicación del Teorema Fundamental para módulos de Hopf [47, 1.9.4], toda álgebra de Hopf semisimple tiene dimensión finita (ver [72, página 107].

Uno de los resultados más importantes concernientes a la teoría de álgebras de Hopf de dimensión finita es el siguiente:

Teorema 1.2.2 ([38])**.** *Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita. Si K es una subálgebra de Hopf de H, entonces H es libre como K-módulo con la multiplicación. En particular,* $\dim_k H$ *divide* $\dim_k K$. □

1.3. Categorías abelianas

Todas las categorías que consideraremos serán categorías pequeñas, es decir categorías tales que la clase $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ de objetos es un conjunto.

Definición 1.3.1. Una categoría $\mathcal{C}$ es una *categoría aditiva sobre* k si las siguientes condiciones se satisfacen:

(i) Los conjuntos de morfismos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) = Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$ son espacios vectoriales sobre k y las composiciones

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V,W) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U,V) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U,W), \quad (\phi,\psi) \mapsto \phi \circ \psi$$

son k-bilineales para todo $U, V, W \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{C}$.

(ii) Existe un objeto cero $0 \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{C}$ tal que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U,0) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(0,U) = 0$ es el espacio vectorial cero, para todo $U \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{C}$.

(iii) Existen sumas directas finitas en $\mathcal{C}$.

Una categoría aditiva sobre k es llamada abeliana k-lineal, si satisface las siguientes condiciones:

(iv) Todo morfismo $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U,V)$ tiene un núcleo $\mathrm{Ker}\,\psi \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$ y un conúcleo Coker $\psi \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$. Todo morfismo es una composición de un epimorfismo seguido de un monomorfismo. Si $\mathrm{Ker}\,\psi = 0$, entonces $\psi =$Ker (Coker ψ); si Coker $\psi = 0$, entonces $\psi =$ Coker (Ker ψ).

Todos los funtores entre categorías aditivas k-lineales que consideraremos serán supuestos aditivos k-lineales. Asimismo, las transformaciones naturales serán transformaciones naturales k-lineales.

Un objeto U de una categoría abeliana $\mathcal{C}$ es llamado *simple* si todo monomorfismo $V \to U$ en $\mathcal{C}$, es cero o es un isomorfismo. Una categoría abeliana es llamada semisimple si todo objeto es suma directa de objetos simples. Un objeto V en una categoría abeliana $\mathcal{C}$ es llamado *muy simple* si $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(V) \cong k$, claramente un objeto muy simple es simple. Si k es un cuerpo algebraicamente cerrado, todo objeto simple es muy simple.

Si $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ son categorías abelianas, denotaremos por $\mathcal{F}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ la categoría de funtores *aditivos y exactos* de $\mathcal{C}_1$ a $\mathcal{C}_2$, donde las flechas son las transformaciones naturales k-lineales entre funtores.

Sean M y N objetos de $\mathcal{C}$. Diremos que N es un subobjeto de M, si existe un monomorfismo $U \to M$, tal que U es isomorfo a N. Análogamente, N es un cociente M, si existe un epimorfismo $M \to U$, tal que U es isomorfo a N. Diremos que N es un subcociente de M, si N es un cociente de un subobjeto de M.

Para cada objeto $X \in \mathcal{C}$, denotaremos por $[X]$ la clase de isomorfismo de X en $\mathcal{C}$. El grupo de Grothendieck de $\mathcal{C}$, denotado por $\mathcal{G}(\mathcal{C})$, es el grupo abeliano generado por las clases de isomorfismo de objetos en $\mathcal{C}$, sujetos a las relaciones: $[X] = [Y] + [Z]$, $X, Y, Z \in \mathcal{C}$, si existe una sucesión exacta

$$0 \to Y \to X \to Z \to 0.$$

Si $\mathcal{C}$ es una categoría semisimple, el grupo de Grothendieck $\mathcal{G}(\mathcal{C})$ es el grupo abeliano libre con base dada por las clases de isomorfismos de objetos simples. Con más generalidad, sí todos los objetos de una categoría abeliana $\mathcal{C}$ tienen longitud finita (serie de Jordan-Hölder finita), el grupo de Grothendieck $\mathcal{G}(\mathcal{C})$ es un grupo abeliano libre generado por las clases de isomorfismos de los objetos simples de $\mathcal{C}$.

Un funtor exacto $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ induce un morfismo de grupos abelianos $\mathcal{G}(\mathcal{C}_1) \to \mathcal{G}(\mathcal{C}_2)$ entre los anillos de Grothendieck.

1.4. Cohomología de grupos

Sea G un grupo. Como es usual, por G-módulo entenderemos un $\mathbb{Z}G$-módulo. Asimismo, un morfismo de G-módulos será un morfismo de $\mathbb{Z}G$-módulos. Si A es un G-módulo y $g \in G$, $a \in A$, denotaremos por ga la acción de g sobre a.

Un G-módulo trivial es un G-módulo A, en el cual G actúa trivialmente, es decir $ga = a$ para todo $g \in G, a \in A$.

Sea

$$\cdots \xrightarrow{\partial} D_1 \xrightarrow{\partial} D_0 \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

una resolución proyectiva del G-módulo trivial $\mathbb{Z}$. Para un G-módulo A, los grupos de cohomología de G con coeficientes en A están definidos por

$$H^n(G, A) := H^n(\mathrm{Hom}_G(D., A)).$$

Éstos son independientes de la elección de la resolución elegida.

Ejemplo 1.4.1. Sea C_m el grupo cíclico de orden m generado por σ. El C_m-módulo trivial $\mathbb{Z}$ tiene una resolución libre periódica de periodo 2

$$\cdots \xrightarrow{N} \mathbb{Z}C_m \xrightarrow{\sigma-1} \mathbb{Z}C_m \xrightarrow{N} \mathbb{Z}C_m \xrightarrow{\sigma-1} \mathbb{Z}C_m \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$$

donde $N = 1 + \sigma + \sigma^2 + \cdots + \sigma^{m-1}$ y $\varepsilon(\sigma) = 1$. Usando esta resolución, es fácil ver que

$$H^n(C_m; A) = \begin{cases} A^{C_m} & \text{si } n = 0 \\ \{a \in A : Na = 0\}/(\sigma - 1)A, & \text{si } n = 1, 3, 5, \ldots \\ A^{C_m}/NA, & \text{si } n = 2, 4, 6, \ldots. \end{cases} \tag{1.4.1}$$

Para un grupo discreto arbitrario, comúnmente es usada la resolución libre bar. Aquí,

$$B_n = \bigoplus_{g_0,\ldots,g_n \in G} \mathbb{Z}(g_0, \ldots, g_n),$$

como grupo abeliano libre, la G-acción esta dada por

$$g \cdot (g_0, \ldots, g_n) = (gg_0, \ldots, gg_n).$$

El diferencial ∂ y una homotopía de contracción están dados por

$$\partial(g_0, \ldots, g_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (g_0, \ldots, \widehat{g_i}, \ldots, g_n)$$
$$s(g_0, \ldots, g_n) = (1, g_0, \ldots, g_n).$$

Una $\mathbb{Z}G$-base de B_n está dada por

$$|g_1|g_2|\dots|g_n| = (1, g_1, g_1g_2, \dots, g_1\dots g_n),$$

y el diferencial en términos de ésta base está dado por

$$\partial(|g_1|g_2|\dots|g_n|) = g_1|g_2|\dots|g_n| + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i|g_1\dots|g_ig_{i+1}|\dots|g_n| \\ +(-1)^n|g_1|\dots|g_n|.$$

Ahora es claro que el grupo $\mathrm{Hom}_G(B_n, A)$ se identifica con el grupo de aplicaciones $f : G^n = G\times\cdots\times G \to A$ y la correspondencia está dada por $f(g_1,\dots,g_n) = F(|g_1|\cdots|g_n|)$.

Describimos ahora otra resolución libre, llamada la resolución cuña (*wedge resolution*). Ver [80, Appendix A.]. Para $g_0,\dots,g_n \in G$, el producto cuña se define por

$$g_0\wedge\dots\wedge g_n = P_{n+1}(g_0,\dots,g_n) = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_n}\epsilon(\sigma)(g_{\sigma(0)},\dots,g_{\sigma(n)}),$$

el cual es un elemento en $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} B_n$. Sea D_n la imagen en $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} B_n$, de la proyección P_{n+1}. Una $\mathbb{Z}$-base de D_n está parametrizada por las $(n+1)$-uplas no orientadas $\{g_0,\dots,g_n\}$. Entonces

$$D_n = \sum \mathbb{Z}g_0\wedge\dots\wedge g_n,$$

es un G-submódulo libre de $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} B_n$. Se define el diferencial $d : D_n \to D_{n-1}$ por

$$d(g_0\wedge\dots\wedge g_n) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i g_0\wedge\dots\wedge g_n,$$

y la homotopía de contracción

$$c(g_0\wedge\dots\wedge g_n) = 1\wedge g_0\wedge\dots\wedge g_n.$$

La proyección $P_{n+1} : B_n \to D_n$ define un homomorfismo de cadena $P : (B,\partial)\to(D,d)$, de forma tal que la inclusión de complejos de cadena

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_G(D_n, A) \arrow[r, "d^*"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_G(D_{n+1}, A) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_G(B_n) \arrow[r, "\partial^*"] & \mathrm{Hom}_G(B_{n+1}, A)
\end{tikzcd}$$

induce los isomorfismos.

Como consecuencia, tenemos que en cada clase cohomología podemos elegir un cociclo representante tal que

$$F(g_0, \dots, g_n) = \epsilon(\sigma) F(g_{\sigma(0)}, \dots, g_{\sigma(n)}), \tag{1.4.2}$$

para todo $\sigma \in \mathbb{S}_{n+1}$ y donde $\epsilon : \mathbb{S}_n \to k^*$ es la representación signo. Estos cociclos serán llamados *cociclos cíclicos.*

Corolario 1.4.2. *Sea A un G-módulo. Entonces todo $f \in Z^2(G, A)$ es cohomólogo a un 2-cociclo tal que*

$$f(g, h) = f(gh, h^{-1}) = -gf(g^{-1}, gh),$$

para todo $g, h \in G$. En particular, si A es un G-módulo trivial, podemos elegir un 2-cociclo tal que $f(g, h) = -f(h^{-1}, g^{-1})$ y $f(g, g^{-1}) = 0$, para todo $g, h \in G$.

Demostración. Tomando $f \in Z^2(G, A)$, la ecuación $f(g, h) = f(gh, h^{-1}) = -f(g^{-1}, gh)$ es equivalente a la ecuación (1.4.2), para $F(1, g_1, g_1g_2) = f(g_1, g_2)$. □

Observación 1.4.3. Si $\alpha \in Z^2(G, k^*)$ es un 2-cociclo cíclico, entonces en el álgebra de grupo torcida $k_\alpha G$ tenemos que

$$(x_g x_h)^{-1} = x_{h^{-1}} x_{g^{-1}}, \quad \forall g, h \in G.$$

En particular, $(x_g)^{-1} = x_{g^{-1}}$, para todo $g \in G$.

En todo lo que sigue, asumiremos, sin pérdida de generalidad, que los cociclos son cíclicos.

1.5. Representaciones monomiales

Recordamos la noción de representación monomial, presentada en [31, Chapter 7, Section 9].

Sea F un grupo finito. Un *espacio monomial* sobre k es una terna

$$(V, X, (V_x)_{x \in X}),$$

donde V es un espacio vectorial sobre k, X es un conjunto finito, y $(V_x)_{x \in X}$ es una familia de subespacios de V de dimensión 1, indexados por X, tales que $V = \oplus_{x \in X} V_x$.

Por *representación monomial* de F sobre $(V, X, (V_x)_{x \in X})$, entenderemos un homomorfismo de grupos

$$\Gamma : F \to GL(V),$$

tal que para cada $\sigma \in F$, $\Gamma(\sigma)$ permuta los subespacios V_x. Es decir, la acción sobre V induce una acción por permutaciones de F sobre X.

Para cada $x \in X$, denotaremos por $F(x)$ el estalizador de x. Diremos que un elemento $x \in X$ es *regular* bajo la acción monomial de F, si para todo $\sigma \in F(x)$, $\Gamma(\sigma)$ es el mapa identidad sobre V_x.

Lema 1.5.1. *[31, Lemma 9.1]. Sea $(V, X, (V_x)_{x\in X})$ un espacio monomial, y sea $\Gamma : F \to GL(V)$ una representación monomial de F sobre $(V, X, (V_x)_{x\in X})$.*

1. *Si $x \in X$ es un elemento regular bajo la acción monomial de F, entonces también lo son todos los elementos en la F-órbita de x.*

2. *Sea T un conjunto de representantes de las órbitas regulares de X. Para cada $t \in T$, sea w_t un vector no nulo de V_t. Sea*

$$v_t = \sum_{\sigma\in Y_t} \Gamma(\sigma)w_t,$$

   donde Y_t es un conjunto de representantes del conjunto de coclases a izquierda de $F(t)$ en F. Entonces $(v_t)_{t\in T}$ es una base del subespacio V^F de F-invariantes en V.

□

Observación 1.5.2. La dimensión de V^F es igual al número de F-órbitas regulares bajo la acción monomial de F sobre X.

Notemos también que el conjunto $\{\Gamma(\sigma)w_t\}_{t\in T,\sigma\in Y_t}$ es linealmente independiente en V. En efecto, $\Gamma(\sigma)w_t$ pertenece $V_{\sigma.t}$. Puesto que elementos en T no son conjugados bajo la acción de F, y σ recorre un conjunto de representantes de las coclases a izquierda de $F(t)$, todos estos elementos tienen grados de homogeneidad distintos dos a dos y por tanto son linealmente independientes.

Ejemplo 1.5.3. Sean G un grupo finito y $\alpha \in Z^2(G, k^*)$ un 2-cociclo sobre el G-módulo trivial k^*. Como aplicación del Lema 1.5.1, calcularemos el centro del álgebra de grupo torcida $k_\alpha G$, con base x_σ $\sigma \in G$.

La terna $(k_\alpha G, G, (kx_\sigma)_{\sigma\in G})$ es un espacio monomial, y la acción de G sobre $k_\alpha G$ dada por

$$\sigma \cdot x_\tau = x_\sigma x_\tau x_{g^{-1}}, \tag{1.5.1}$$

es una representación monomial de G. Es claro que la subálgebra $(k_\alpha G)^G$ de invariantes bajo la acción monomial, coincide con el centro $Z(k_\alpha G)$ del álgebra de grupo torcida $k_\alpha G$.

Definición 1.5.4. Sean G un grupo finito y $\alpha \in Z^2(G, k^*)$. Un elemento $g \in G$ es llamado α-regular si $\alpha(g, x) = \alpha(x, g)$, para todo $x \in C_G(g)$ (el centralizador de g en G).

Observación 1.5.5.
- Si g es α-regular, también es β-regular para todo $\beta \in Z^2(G, k^*)$ cohomólogo a α.

- Un elemento $g \in G$ es α-regular si y sólo si $g \in G$ es regular con respecto a la acción monomial dada en (1.5.1). En efecto, el estabilizador de $g \in G$ es $C_G(g)$ y, para todo $x \in C_G(g)$, tenemos

$$\begin{aligned} x \cdot u_g &= u_x u_g u_{x^{-1}} \\ &= \alpha(x,g)\alpha(xg,g^{-1})u_g \\ &= \alpha(x,g)\alpha(gx,g^{-1})u_g \\ &= \alpha(x,g)\alpha(g,x)\alpha(g,g^{-1})u_g \\ &= \alpha(x,g)\alpha(g,x)u_g. \end{aligned}$$

- Por el Lema 1.5.1, si g es α-regular todo elemento en la clase de conjugación lo es. En este caso, diremos que ésta es una clase de conjugación α-regular.

Proposición 1.5.6. *La dimensión del centro de $k_\alpha G$ es igual a la cantidad de clases de conjugación α-regulares.* □

Capítulo 2

Categorías tensoriales y categorías módulo

En este capítulo recordaremos las definiciones de categoría monoidal, bicategoría y categoría módulo sobre una categoría monoidal, así como también su relación con álgebras de Hopf y la teoría de reconstrucción tannakiana. Nuestras referencias son las siguientes: para categorías monoidales y categorías trenzadas [4], bicategorías [5], categorías módulo [51].

2.1. Categorías monoidales

Definición 2.1.1. Una categoría monoidal consiste de los siguientes datos: una categoría $\mathcal{C}$, un bifuntor $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, un isomorfismo funtorial $a : (\otimes \times \mathrm{id})\otimes \to \otimes(\mathrm{id} \times \otimes)$, un objeto unidad $\mathbf{1} \in \mathcal{C}$, e isomorfismos funtoriales $r_X : \_\_ \otimes \mathbf{1} \to \mathrm{id}$, $l_X : \mathbf{1} \otimes \_\_ \to \mathrm{id}$ sujetos a los siguientes axiomas:

1) Axioma del pentágono : el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes T \arrow[dl, "a_{X,Y,Z}\otimes id"'] \arrow[dr, "a_{X\otimes Y,Z,T}"] & \\
(X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes T \arrow[d, "a_{X,Y\otimes Z,T}"] & & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes T) \arrow[d, "a_{X,Y,Z\otimes T}"'] \\
X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes T) \arrow[rr, "id\otimes a_{Y,Z,T}"] & & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes T))
\end{tikzcd}$$

conmuta, para todo $X, Y, Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.

2) Axioma del triángulo: el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes \mathbf{1}) \otimes Y \arrow[rr, "a_{X,\mathbf{1},Y}"] \arrow[dr, "r_X\otimes id"'] & & X \otimes (\mathbf{1} \otimes Y) \arrow[dl, "id\otimes l_Y"] \\
 & X \otimes Y &
\end{tikzcd}$$

conmuta, para todo $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.

Los axiomas del pentágono y el triángulo, equivalen a la coherencia de los isomorfismos naturales a, l, r, es decir todos los morfismos entre el mismo par de objetos que pueden construirse usando a, l y r coinciden.

Una categoría monoidal, es llamada *estricta* si los isomorfismos naturales a, l y r son las identidades. Una categoría monoidal *abeliana* es una categoría monoidal, cuya categoría subyacente es abeliana y el producto tensorial es un funtor biaditivo. Si $\otimes$ es exacto, la categoría monoidal se suele llamar *monoidal abeliana exacta*.

En general, si no hay lugar a confusión, para referirnos a una categoría monoidal arbitraria, sólo diremos "categoría monoidal $\mathcal{C}$", sin hacer referencia a los isomorfismos a, l, r.

Un ejemplo sencillo de categoría monoidal abeliana es la categoría Vec_k de espacios vectoriales sobre k, con el producto tensorial usual de espacios vectoriales y objeto unidad $\mathbf{1} = k$. Esta categoría no es estricta, puesto que el producto tensorial está definido en forma abstracta por una propiedad universal, lo cual lo define salvo isomorfismo. Además, si uno elige una de las construcciones estándar, es claro que este producto no es asociativo.

Definición 2.1.2. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ categorías monoidales. Un *funtor monoidal* es una terna (F, b, u) que consiste de un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, un isomorfismo funtorial $b = \{b_{X,Y}\}$, $b_{X,Y} : F(X \otimes Y) \to F(X) \otimes F(Y)$, y un isomorfismo $u : F(\mathbf{1}) \to \mathbf{1}$, tales que los diagramas

$$\begin{tikzcd}
F((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[r, "b_{X\otimes Y,Z}"] \arrow[d, "Fa_{X,Y,Z}"'] & F(X \otimes Y) \otimes F(Z) \arrow[d, "b_{X,Y}\otimes \mathrm{id}"] \\
F(X \otimes (Y \otimes Z)) \arrow[d, "b_{X,Y\otimes Z}"'] & (F(X) \otimes F(Y)) \otimes F(Z) \arrow[d, "a'_{F(X),F(Y),F(Z)}"] \\
F(X) \otimes F(Y \otimes Z) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes b_{Y,Z}"] & F(X) \otimes (F(Y) \otimes F(Z))
\end{tikzcd} \tag{2.1.1}$$

y

$$\begin{tikzcd}
F(\mathbf{1} \otimes X) \arrow[r, "b_{\mathbf{1},X}"] \arrow[d, "F(l_X)"'] & F(\mathbf{1}) \otimes F(X) \arrow[d, "u\otimes id"] \\
F(X) & \mathbf{1} \otimes F(X) \arrow[l, "l'_{F(X)}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(X \otimes \mathbf{1}) \arrow[r, "b_{X,\mathbf{1}}"] \arrow[d, "F(r_X)"'] & F(X) \otimes F(\mathbf{1}) \arrow[d, "id\otimes u"] \\
F(X) & F(X) \otimes \mathbf{1} \arrow[l, "r'_{F(X)}"']
\end{tikzcd} \tag{2.1.2}$$

son conmutativos, para todo $X, Y, Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.

La composición de funtores monoidales (F, b, u) y (G, b', u') es monoidal, con la composición definida en la forma $(F \circ G, b \circ F(b'), u \circ F(u'))$.

Sean $(F, b, u), (G, b', u') : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ funtores monoidales. Una trasformación natural $\sigma : F \to F'$ se dice *monoidal*, si el diagrama

$$\begin{tikzcd}
F(X \otimes Y) \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\sigma"'] & F(X) \otimes F(Y) \arrow[d, "\sigma\otimes\sigma"] \\
G(X \otimes Y) \arrow[r, "b'"] & G(X) \otimes G(Y)
\end{tikzcd}$$

conmuta, para todo $X, Y \in \mathcal{C}$.

Un funtor monoidal $(F, b, u) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ es llamado una *equivalencia monoidal* si el funtor F es una equivalencia de categorías. Esta definición está justificada por [57, Proposition 4.4.2].

Un forma conveniente de expresar la coherencia de una categoría monoidal, es a través del teorema de coherencia de MacLance, que dice que toda categoría monoidal es monoidalmente equivalente a una categoría monoidal estricta. Ver [33, Theorem 1.5.3]. El teorema nos dice que cualquier resultado que se demuestre para categorías monoidales estrictas, es válido también en el caso general. Sin embargo, si se está interesado en una categoría concreta, el teorema nos obliga a abandonar la categoría y reemplazarla por una abstracta, la cual es estricta.

El siguiente lema nos proporciona una forma de cambiar el producto tensorial sin alterar la categoría, de forma tal que los isomorfismos l, r sean identidades. Además, este lema será usado más adelante.

Lema 2.1.3. *Sea $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$ una categoría monoidal. Supongamos que para cada par de objetos $X, Y \in \mathcal{C}$, elegimos un isomorfismo $\sigma_{X,Y} : X \otimes Y \to X \odot Y$, para algún objeto $X \odot Y$ en $\mathcal{C}$, y un isomorfismo $u : \mathbf{1} \to \mathbf{1}^{\odot}$. Entonces, existe una única forma de hacer de la categoría $\mathcal{C}$ una categoría monoidal $(\mathcal{C}, \odot, \mathbf{1}^{\odot}, a^{\odot}, l^{\odot}, r^{\odot})$, de forma tal que el funtor*

$$(\mathrm{id}_{\mathcal{C}}, \sigma, u) : (\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r) \to (\mathcal{C}, \odot, \mathbf{1}^{\odot}, a^{\odot}, l^{\odot}, r^{\odot}),$$

sea un funtor monoidal.

Demostración. El producto tensorial de objetos es definido por $\odot : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}, X \times Y \mapsto X \odot Y$. Por la naturalidad que debe tener σ, el producto de $f : X \to Y, g : X' \to Y'$, está unívocamente definido por la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \odot Y \arrow[d, "f\odot g"'] & X \otimes Y \arrow[l, "\sigma_{X,Y}"'] \arrow[d, "f\otimes g"] \\
X' \odot Y & X' \otimes Y' \arrow[l, "\sigma_{X',Y'}"']
\end{tikzcd}$$

Los isomorfismos naturales de asociatividad y unidad están dados por:

$$\begin{tikzcd}
(X \odot Y) \odot Z \arrow[r, "a^{\odot}_{X,Y,Z}"] & X \odot (Y \odot Z) \\
(X \odot Y) \otimes Z \arrow[u, "\sigma_{X\odot Y,Z}"] & X \otimes (Y \odot Z) \arrow[u, "\sigma_{X,Y\odot Z}"'] \\
(X \otimes Y) \otimes Z \arrow[u, "\sigma_{X,Y}\otimes Z"] \arrow[r, "a_{X,Y,Z}"] & X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[u, "\mathrm{id}_X\otimes\sigma_{Y,Z}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1}^{\odot} \odot X \arrow[r, "l^{\odot}"] & X & X \odot \mathbf{1}^{\odot} \arrow[r, "r^{\odot}"] & X \\
\mathbf{1}^{\odot} \otimes X \arrow[u, "\sigma_{\mathbf{1}^{\odot},X}"] & \mathbf{1} \otimes X \arrow[l, "u\otimes \mathrm{id}_X"] \arrow[u, "l"'] & X \otimes \mathbf{1}^{\odot} \arrow[u, "\sigma_{\mathbf{1}^{\odot},X}"] & X \otimes \mathbf{1} \arrow[l, "\mathrm{id}_X\otimes u"] \arrow[u, "r"']
\end{tikzcd}$$

Un cálculo tedioso muestra que los isomorfismos naturales $a^{\odot}$, $l^{\odot}$ y $r^{\odot}$ definidos anteriormente, satisfacen los axiomas del pentágono y del triángulo, respectivamente. $\square$

Proposición 2.1.4. *Sea $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$ una categoría monoidal. Entonces existe una estructura de categoría monoidal $(\odot, \mathbf{1}, a^{\odot}, l^{\odot}, r^{\odot})$ sobre $\mathcal{C}$, equivalente a la anterior estructura, y en la cual $l^{\odot}$ y $r^{\odot}$ son identidades.*

Demostración. La proposición resulta de aplicar el Lema 2.1.3, con las siguientes elecciones:

$$X \odot Y := \begin{cases} X \otimes Y, & \text{si } X \neq \mathbf{1} \neq Y \\ X, & \text{si } Y = \mathbf{1} \\ Y, & \text{si } X = \mathbf{1}, \end{cases} \tag{2.1.3}$$

e isomorfismos definidos como $\sigma_{X,Y} : X \otimes Y \to X \odot Y$ la identidad, si $X \neq \mathbf{1} \neq Y$, $\sigma_{X,\mathbf{1}} = r_X$, y $\sigma_{\mathbf{1},Y} = l_Y$ (estos morfismos están bien definidos pues $l_{\mathbf{1}} = r_{\mathbf{1}}$). Por el Lema 2.1.3 existe una nueva estructura $(\mathcal{C}, \mathbf{1}, \odot, a^{\odot}, l^{\odot}, r^{\odot})$ monoidalmente equivalente a la anterior, y con estas elecciones, $l^{\odot}$ y $r^{\odot}$ son identidades. $\square$

Lema 2.1.5. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal. Entonces $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1})$ es un monoide conmutativo. Se tiene además $h \circ h' = h \otimes h'$, para todo $h, h' \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1})$.*

Demostración. La demostración sigue por el argumento de Eckmann-Hilton: Si un conjunto tiene dos estructuras de monoide $\star_1$ y $\star_2$ con la misma unidad, tales que $(a \star_2 b) \star_1 (c \star_2 d) = (a \star_1 c) \star_2 (b \star_1 d)$, entonces los dos productos coinciden y son conmutativos. En este caso, se tiene

$$\begin{aligned} h\otimes h' =&(h\mathrm{id}_{\mathbf{1}})\otimes(\mathrm{id}_{\mathbf{1}}h')\\ =&(h\otimes \mathrm{id}_{\mathbf{1}})(\mathrm{id}_{\mathbf{1}}\otimes h')\\ =&hh'\\ =&(\mathrm{id}_{\mathbf{1}}\otimes h)(h'\otimes \mathrm{id}_{\mathbf{1}})\\ =&(\mathrm{id}_{\mathbf{1}}h')(h\mathrm{id}_{\mathbf{1}})\\ =&h'\otimes h, \end{aligned}$$

para todo $h, h' \in \operatorname{End}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1})$. $\square$

Proposición 2.1.6. *Sean $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a)$ y $(\mathcal{C}', \otimes, \mathbf{1}', a')$ categorías monoidales y sea $(F, b, u) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un funtor monoidal. Entonces (F, b, u) es isomorfo a un funtor monoidal $(F', b, \mathrm{id}_{\mathbf{1}})$.*

Demostración. Definimos el funtor monoidal $(F', b') : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, en objetos por

$$F'(X) = \begin{cases} F(X), & X \neq \mathbf{1}; \\ \mathbf{1}', & \text{X} = \mathbf{1}. \end{cases}$$

si $f : X \to Y$ es un morfismo en $\mathcal{C}$, entonces

$$F'(f) = \begin{cases} F(f), & \text{si } X \neq \mathbf{1} \neq Y, \\ F(f) \circ u^{-1}, & \text{si X} = \mathbf{1}, \\ u \circ F(f), & \text{si Y} = \mathbf{1}, \\ u \circ F(f) \circ u^{-1}, & \text{si } X = \mathbf{1} = Y. \end{cases}$$

y los isomorfismo naturales

$$b'_{X,Y} = \begin{cases} b_{X,Y}, & X \neq \mathbf{1}, Y \neq \mathbf{1}; \\ \mathrm{id}_X, & \text{si } Y = \mathbf{1}; \\ \mathrm{id}_Y, & \text{si } X = \mathbf{1}. \end{cases}$$

Definimos el isomorfismo natural $\sigma : F \to F'$, por $\sigma(X) = \mathrm{id}_X$ si $X \neq \mathbf{1}$, y $\sigma(\mathbf{1}) = u$. Puesto que los isomorfismos de la unidad son igualdades, tenemos que $b_{X,\mathbf{1}} = \mathrm{id}_{F(X)} \otimes u^{-1}$, $b_{\mathbf{1},Y} = u^{-1} \otimes \mathrm{id}_{F(Y)}$ con lo cual es fácil ver que $\sigma : F \to F'$ es un isomorfismo natural monoidal. $\square$

Observación 2.1.7. Basados en las Proposiciones 2.1.4 y 2.1.6, de ahora en más todas las categorías monoidales que consideraremos tendrán los isomorfismos de unidad como identidades y todo los funtores monoidales entre ellas enviaran el objeto identidad en el objeto identidad.

2.2. Categorías trenzadas

Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal estricta. Una *trenza* en $\mathcal{C}$ es un isomorfismo natural $\sigma_{X,Y} : X \otimes Y \to Y \otimes X$, tal que

$$\begin{aligned}
\sigma_{X,Y\otimes Z} &= (\mathrm{id}_Y \otimes \sigma_{X,Z})(\sigma_{X,Y} \otimes \mathrm{id}_Z)\\
\sigma_{X\otimes Y,Z} &= (\sigma_{X,Z} \otimes \mathrm{id}_Y)(\mathrm{id}_X \otimes \sigma_{Y,Z})\\
\sigma_{X,\mathbf{1}} &= \mathrm{id}_X = \sigma_{\mathbf{1},X}.
\end{aligned}$$

Una trenza σ se dice *simétrica*, si $\sigma_{X,Y} = \sigma^{-1}_{Y,X}$, para todo $X, Y \in \mathcal{C}$.

Definición 2.2.1. Una categoría trenzada (estricta) $(\mathcal{C}, \sigma)$, es una categoría monoidal $\mathcal{C}$ con una trenza σ.

Una categoría simétrica $(\mathcal{C}, \tau)$, es una categoría monoidal $\mathcal{C}$ con una trenza simétrica τ.

Dada una categoría monoidal $\mathcal{C}$, existe una categoría trenzada asociada $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$, llamada el *centro* de $\mathcal{C}$: Los objetos de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ son pares $(X, \sigma_{X,-})$, donde X es un objeto de $\mathcal{C}$ y donde $\sigma_{X,-}$ es un isomorfismo natural $\sigma_{X,Y} : X \otimes Y \to Y \otimes X$ tal que

$$\sigma_{X,Y\otimes Z} = (\mathrm{id}_Y \otimes \sigma_{X,Z})(\sigma_{X,Y} \otimes \mathrm{id}_Z), \quad \sigma_{X,\mathbf{1}} = \mathrm{id}_X$$

para todo $Y, Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. Un morfismo $\phi : (X, \sigma_{X,-}) \to (Y, \sigma_{Y,-})$ en $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$, es un morfismo $\phi : X \to Y$ en $\mathcal{C}$ tal que

$$(\mathrm{id} \otimes \phi)\sigma_{X,Z} = \sigma_{Y,Z}(\phi \otimes \mathrm{id}),$$

para todo $Z \in \mathcal{C}$. El centro es una categoría monoidal con el producto tensorial $(X, \sigma_{X,-}) \otimes (Y, \sigma_{Y,-}) = (X \otimes Y, \sigma_{X\otimes Y,-})$, donde $\sigma_{X\otimes Y,Z} = (\sigma_{X,Z} \otimes \mathrm{id}_Y)(\mathrm{id}_X \otimes \sigma_{Y,Z})$, para todo $Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, y objeto unidad $(\mathbf{1}, \mathrm{id})$. El centro es una categoría trenzada con la trenza dada por $\sigma_{X,Y} : (X, \sigma_{X,-}) \otimes (Y, \sigma_{Y,-}) \to (Y, \sigma_{Y,-}) \otimes (X, \sigma_{X,-})$.

Sea H un álgebra de Hopf con antípoda biyectiva. Uno de los principales ejemplos de categoría trenzada que usaremos en esta tesis es el centro de la categoría monoidal $\mathcal{M}^H$. La categoría $\mathcal{Z}(\mathcal{M}^H)$ es equivalente a la categoría $\mathcal{YD}^H_H$ de módulos de Yetter-Drinfeld a derecha. Un objeto de $\mathcal{YD}^H_H$ es un H-módulo a derecha V, munido de una estructura de H-comódulo a derecha $v \mapsto v_{(0)} \otimes v_{(1)}$, tal que

$$(v \leftharpoonup h)_{(0)} \otimes (v \leftharpoonup h)_{(1)} = v_{(0)} \leftharpoonup h_{(2)} \otimes S(h_{(1)})v_{(1)}h_{(3)},$$

para todo $v \in V$, $h \in H$. Un módulo de Yetter-Drinfeld es un objeto en el centro de $\mathcal{M}^H$, con

$$\sigma_{V,W}(v \otimes w) = w_{(0)} \otimes v \leftharpoonup w_{(1)},$$

para todo $v \in V, w \in W$, $V, W \in \mathcal{M}^H$. El isomorfismo inverso está dado por $\sigma^{-1}_{V,W}(w \otimes v) = v \leftharpoonup S^{-1}(w_{(1)}) \otimes w_{(0)}$.

Análogamente, se define la categoría de módulos de Yetter-Drinfeld a izquierda ${}^H_H\mathcal{YD}$. En este caso, un objeto $V \in {}^H_H\mathcal{YD}$ es un H-comódulo a izquierda y un H-módulo a izquierda, tal que

$$(hv)_{(-1)} \otimes (hv)_{(0)} = h_{(1)} v_{(-1)} S(h_{(3)}) \otimes h_{(2)} \rightharpoonup v_{(0)},$$

para todo $h \in H$, $v \in V$.

Álgebras en categorías monoidales

Sea $(\mathcal{C}, \mathbf{1}, \otimes, a)$ una categoría monoidal. Un álgebra $A = (A, m)$ en $\mathcal{C}$ consiste de un objeto $A \in \mathcal{C}$, un morfismo $m : A \otimes A \to A$ en $\mathcal{C}$, tal que

$$m(m \otimes \mathrm{id}_A) = m(\mathrm{id}_A \otimes m) a_{A,A,A} : A \otimes A \otimes A \to A,$$

y un morfismo llamado unidad $\eta : \mathbf{1} \to A$, tal que $m(\eta \otimes \mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_A = m(\mathrm{id}_A \otimes m)$.

Sea A un álgebra en $\mathcal{C}$. Un A-módulo a izquierda (M, μ) en $\mathcal{C}$, consiste de un objeto $M \in \mathcal{C}$, un morfismo $\mu : A \otimes M \to M$, tal que

$$\mu(m \otimes \mathrm{id}_M) = \mu(\mathrm{id}_A \otimes \mu) a_{A,A,M} : (A \otimes A) \otimes M \to M,$$

y $\mu(\eta \otimes \mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_M$. Un morfismo de A-módulos $f : (M, \mu) \to (M', \mu')$ es un morfismo $f : M \to M'$ en $\mathcal{C}$, tal que $f \circ \mu = \mu' \circ (\mathrm{id}_A \otimes f)$. Denotaremos por $\mathrm{Hom}_A(M, M')$ el subconjunto de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, M')$ formado por todos los morfismos de A-módulos en $\mathcal{C}$ $M \to M'$.

Denotaremos la categoría de A-módulos a izquierda en $\mathcal{C}$ por ${}_A\mathcal{C}$. En forma análoga, definimos las categorías $\mathcal{C}_A$ y ${}_A\mathcal{C}_A$, de A-módulos a derecha, y A-bimódulos en $\mathcal{C}$, respectivamente.

2.3. Bicategorías y categorías módulo

Definición 2.3.1. Una bicategoría $\mathcal{B}$ consiste de los siguientes datos:

- Un conjunto $\mathrm{Obj}(\mathcal{B})$ (cuyos elementos son llamados 0-células).
- Para cada $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{B})$, una categoría $\mathcal{B}(A, B)$ (cuyos objetos son llamados 1-células y cuyos morfismos son llamados 2-células).
- Para cada $A, B, C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{B})$, un bifuntor
$$\otimes^{ABC} : \mathcal{B}(A, B) \times \mathcal{B}(B, C) \to \mathcal{B}(A, C).$$
- Para cada $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{B})$, un objeto $I_A \in \mathcal{B}(A, A)$.
- Para cada $A, B, C, D \in \mathrm{Obj}(\mathcal{B})$, un isomorfismo natural (isomorfismo de asociatividad)
$$\alpha^{A,B,C,D} : (- \otimes^{ABC} -) \otimes^{ACD} - \to - \otimes^{ABD} (- \otimes^{BCD} -) :$$
$$\mathcal{B}(A, B) \times \mathcal{B}(B, C) \times \mathcal{B}(C, D) \to \mathcal{B}(A, D).$$

- Para cada $A, B \in Ob(\mathcal{B})$ un isomorfismo natural (isomorfismo de unidad)

$$\rho^{AB} : - \otimes^{ABB} I_B \to - : \mathcal{B}(A,B) \to \mathcal{B}(A,B).$$

- Para cada $A, B \in Ob(\mathcal{B})$ un isomorfismo natural (isomorfismo de unidad)

$$\lambda^{AB} : I_A \otimes^{AAB} - \to - : \mathcal{B}(A,B) \to \mathcal{B}(A,B).$$

Sujetos a los siguientes axiomas:

- Coherencia de la asociatividad: Si (S, T, U, V) es un objeto en $\mathcal{B}(A,B) \times \mathcal{B}(B,C) \times \mathcal{B}(C,D) \times \mathcal{B}(D,E)$, los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
 & (S\otimes T)\otimes(U\otimes V) \arrow[dr, "\alpha_{S,T,U\otimes V}"] & \\
((S\otimes T)\otimes U)\otimes V \arrow[ur, "\alpha_{S\otimes T,U,V}"] \arrow[d, "\alpha_{S,T,U}\otimes \mathrm{id}"'] & & S\otimes(T\otimes(U\otimes V)) \\
(S\otimes(T\otimes U))\otimes V \arrow[rr, "\alpha_{S,T\otimes U,V}"'] & & S\otimes((T\otimes U)\otimes V) \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\alpha_{T,U,V}"']
\end{tikzcd}$$

- coherencia de las unidades

$$\begin{tikzcd}
(S\otimes I_B)\otimes T \arrow[rr, "\alpha_{S,I_B,T}"] \arrow[dr, "\rho_S\otimes \mathrm{id}_T"'] & & S\otimes(I_B\otimes T) \arrow[dl, "\mathrm{id}_S\otimes\lambda_T"] \\
 & S\otimes T &
\end{tikzcd}$$

Definición 2.3.2. Una bicategoría $\mathcal{B}$ en la que los isomorfismo de unidad son identidades, será llamada unitaria. Una bicategoría $\mathcal{B}$ en la que los isomorfismos de asociatividad y los isomorfismo de unidad son la identidad, es llamada una 2-categoría.

Observación 2.3.3. Usando un argumento análogo al hecho en la Proposición 2.1.4, es fácil mostrar que modificando en forma adecuada el producto tensorial, toda bicategoría es equivalente a una unitaria, por lo tanto todas las bicategorías que consideraremos serán unitarias.

Ejemplo 2.3.4. Una categoría monoidal es una bicategoría con una única 0-célula.

Definición 2.3.5. [5, Example 2.3] Una *categoría módulo a izquierda* sobre una categoría monoidal $\mathcal{C}$, o simplemente una categoría $\mathcal{C}$-módulo es una categoría $\mathcal{M}$, junto con un funtor $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, y un isomorfismo natural

$$m_{X,Y,M} : (X \otimes Y) \otimes M \to X \otimes (Y \otimes M),$$

tal que

$$\begin{aligned}(a_{X,Y,Z} \otimes \mathrm{id}_M) m_{X,Y\otimes Z,M}(\mathrm{id}_X \otimes m_{Y,Z,M}) &= m_{X\otimes Y,Z,M} m_{X,Y,Z\otimes M},\\ \mathbf{1} \otimes M &= M,\end{aligned}$$

para todo $X, Y, Z \in \mathcal{C}$, $M \in \mathcal{M}$.

En [51, Definition 6] se considera la noción de categoría módulo sobre una categoría monoidal semisimple, para la cual se pide, adicionalmente, que la categoría módulo sea semisimple y que el bifuntor que da lugar a la acción sea aditivo.

Observación 2.3.6. Sea $\mathcal{M}$ una categoría. La categoría de endofuntores $\mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$ es una categoría monoidal estricta, con la composición de funtores como producto tensorial. Dada una categoría tensorial $\mathcal{C}$, las estructuras de categoría $\mathcal{C}$-módulo $(\mathcal{M}, \otimes, m)$ sobre $\mathcal{M}$, están en correspondencia biyectiva con los funtores monoidales $(F, \zeta) : \mathcal{C} \to \mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$. La biyección está dada por la ecuación $V \otimes M = F(V)(M)$, identificando

$$(\zeta_{V,W})_M : (F(V) \circ F(W))(M) \to F(V \otimes W)(M),$$

con

$$m^{-1}_{X,Y,M} : V \otimes (W \otimes M) \to (V \otimes W) \otimes M.$$

Denotemos por $\emptyset$ la categoría donde el conjunto de objetos es el conjunto vacío, y $1 = (\{*\}, \times)$ la categoría monoidal con un objeto y una flecha. Entonces la categoría monoidal $\mathcal{C}$ y la categoría módulo $(\mathcal{M}, m)$ se pueden identificar con la bicategoría $\mathcal{B}$ descrita como sigue.

- $\mathrm{Obj}(\mathcal{B}) = \{0, 1\}$,
- $\mathcal{B}(0, 0) = \mathcal{C}$, $\mathcal{B}(1, 1) = 1$ y los datos están dados por las respectivas estructuras de categoría monoidal.
- Tomemos $\mathcal{B}(0, 1) = \mathcal{M}$, $\mathcal{B}(1, 0) = \emptyset$,
- $\otimes^{001} = \otimes$, $\otimes^{110} = \mathrm{id}_{\mathcal{M}}$, $\otimes^{110} = \otimes^{010} = \otimes^{100} = \otimes^{101} = \emptyset$
- $\alpha^{001} = m$, los demás son identidades o vacíos.

Recíprocamente, si $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{B})$, entonces la categoría $\mathcal{B}(B, A)$ hereda una estructura de categoría módulo a derecha sobre la categoría monoidal $\mathcal{B}(A, A)$.

Dadas dos categorías monoidales $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$, podemos definir la noción de *categoría* $(\mathcal{C}-\mathcal{C}')$-*bimódulo*. Esto es, una categoría $\mathcal{M}$ con estructura de categoría $\mathcal{C}$-módulo a derecha, categoría $\mathcal{C}'$-módulo a izquierda, tal que estas acciones *conmutan salvo isomorfismos* en forma coherente. Todos estos axiomas se reducen a dar una bicategoría $\mathcal{B}$ con dos 0-células, digamos 0 y 1, tal que $\mathcal{B}(1,0)=\emptyset$.

Definición 2.3.7. Sean $\mathcal{C},\mathcal{C}'$ categorías monoidales. Una categoría $\mathcal{C}-\mathcal{C}'$-bimódulo $\mathcal{M}$ es una bicategoría $\mathcal{B}$ con dos elementos, tal que $\mathcal{B}(0,0)=\mathcal{C}$ y $\mathcal{B}(1,1)=\mathcal{C}'$ como categorías monoidales, $\mathcal{B}(0,1)=\mathcal{M}$ y $\mathcal{B}(1,0)=\emptyset$.

Observación 2.3.8. Tener una categoría módulo a izquierda $\mathcal{M}$ sobre una categoría monoidal $\mathcal{C}$ es equivalente a tener una categoría $\mathcal{C}-1$-bimódulo, es decir una bicategoría $\mathcal{B}$ con dos objetos tal que $\mathcal{B}(0,0)=\mathcal{C}$ como categoría monoidal, $\mathcal{B}(1,1)=1$, $\mathcal{B}(0,1)=\mathcal{M}$ y $\mathcal{B}(0,1)=\emptyset$. Análogamente, para categorías módulo a derecha. Llamaremos a estas bicategorías, las bicategorías asociadas a las categorías módulo.

Pseudo-funtores y funtores módulo

Definición 2.3.9. Sean $\mathcal{B}=(\otimes,I,\alpha,\rho,\lambda)$ y $\mathcal{B}'=(\otimes,I',\alpha',\rho',\lambda')$ bicategorías (unitarias). Un pseudo-funtor $\Phi=(F,\phi)$ de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ consiste de los siguientes datos:

- Una función $F:\mathrm{Obj}(\mathcal{B})\to\mathrm{Obj}(\mathcal{B}')$, $A\mapsto F(A)$.
- Para cada par $A,B\in\mathrm{Obj}(\mathcal{B})$, funtores

$$F_{AB}:\mathcal{B}(A,B)\to\mathcal{B}'(F(A),F(B)),\quad S\mapsto F(S),\ f\mapsto F(f).$$

- Para cada $A,B,C\in\mathrm{Obj}(\mathcal{B})$, un isomorfismo natural

$$\phi^{ABC}:F_{AB}(-)\otimes^{F(A)F(B)F(C)}F_{BC}(-)\to F_{AC}(-\otimes^{ABC}-)$$

Sujetos a los siguientes axiomas:

(i) $F_{AA}(I_A)=I'_{F(A)}$,

(ii) Si (S,T,U) es un objeto de $\mathcal{B}(A,B)\times\mathcal{B}(B,C)\times\mathcal{B}(C,D)$, el siguiente diagrama es conmutativo (donde los índices han sido omitidos):

$$
\begin{tikzcd}
(FS \otimes FT) \otimes FU \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\phi \otimes id"'] & FS \otimes (FT \otimes FU) \arrow[d, "id \otimes \phi"] \\
F(S \otimes T) \otimes FU \arrow[d, "\phi"'] & FS \otimes F(T \otimes U) \arrow[d, "\phi"] \\
F((S \otimes T) \otimes U) \arrow[r, "F(\alpha)"] & F(S \otimes (T \otimes U))
\end{tikzcd},
$$

(iii) Si S es un objeto de $\mathcal{B}(A, B)$, entonces $\phi_{S,I_B} = \mathrm{id}_{F(S)}$, y $\phi_{I_A,S} = F(S)$, para todo par de 0-células $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{B})$.

Ejemplo 2.3.10. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ categorías monoidales. Un funtor monoidal (F, ϕ), es un pseudo-funtor entre las bicategorías asociadas a $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$.

Definición 2.3.11 ([51])**.** Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ categorías $\mathcal{C}$-módulo a izquierda. Un *funtor módulo* $(F, \phi) : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ consiste de un funtor $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, e isomorfismos naturales

$$\phi_{X,M} : F(X \otimes M) \to X \otimes F(M),$$

que satisfacen

$$\phi_{X \otimes Y,M} F(m_{X,Y,M}) = m_{X,Y,F(M)}(id_X \otimes \phi_{Y,M})\phi_{X,Y \otimes M},$$

para todo $X, Y \in \mathcal{C}$, $M \in \mathcal{M}$.

Sean $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ categorías módulo a derecha sobre $\mathcal{C}$, con bicategorías asociadas $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$. Un funtor módulo (F, ϕ) define un pseudo-funtor $\widetilde{F} : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$ de la siguiente manera:

- $\widetilde{F} : \mathrm{Obj}(\mathcal{B}_1) \to \mathrm{Obj}(\mathcal{B}_2)$ $\widetilde{F}(0) = 0$, $\widetilde{F}(1) = 1$.
- $\widetilde{F}_{00} = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$, $\widetilde{F}_{01} = F$
- $\phi^{000} = \mathrm{id}$, $\phi^{001} = \phi$.

Recíprocamente, todo pseudo-funtor $\widetilde{F} : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$, tal que $\widetilde{F}(0) = 0$, $\widetilde{F}(1) = 1$ y ($F^{00} = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}, \phi^{000} = \mathrm{id}$), define un funtor $\mathcal{C}$-módulo (F^{01}, ϕ_{01}).

Definición 2.3.12. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ categorías monoidales. Sean $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ categorías $\mathcal{C}$-$\mathcal{C}'$-bimódulo, con bicategorías asociadas $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$. Un *funtor $\mathcal{C}$-$\mathcal{C}'$-bimódulo* $\mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ es un pseudo-funtor $\Phi = (F, \phi) : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$ tal que $F(0) = 0, F(1) = 1$, y los funtores monoidales (F^{00}, ϕ^{000}), (F^{11}, ϕ^{111}), son los funtores identidad.

Transformaciones pseudo-naturales unitarias y transformaciones módulo

Definición 2.3.13. Sean $F, G : \mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_1$ pseudo-funtores entre bicategorías $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1$, tales que $F(A) = G(A)$, para toda 0-célula A de $\mathcal{B}_0$. Una *transformación pseudo-natural* (unitaria) $\sigma : F \to G$, consiste de los siguientes datos:

- Para cada par $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{B}_0)$, un isomorfismo natural $\sigma : F^{AB}(-) \to G^{AB}(-)$,

tal que, para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{B}_0(A, B))$, $Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{B}_0(B, C))$, los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd} F(X) \otimes F(Y) \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "\sigma\otimes\sigma"'] & F(X \otimes Y) \arrow[d, "\sigma"] \\ G(X) \otimes G(Y) \arrow[r, "\xi'"] & G(X \otimes Y) \end{tikzcd}$$

Definición 2.3.14. [51] Sean $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, categorías módulo a izquierda. Una *transformación módulo* entre funtores módulo $(F, \phi), (G, \psi) : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, es una transformación natural $\sigma : F \to G$, tal que

$$\psi_{X,M}^{-1} \circ \sigma_{X \otimes M} \circ \phi_{X,M} = \mathrm{id}_X \otimes \sigma_M,$$

para todo $X \in \mathcal{C}, M \in \mathcal{M}$.

Si $\sigma : F \to G$ es un transformación módulo, ésta define una transformación pseudo-natural unitaria entre los pseudo-funtores asociados, definiendo $\sigma^{00} = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$. Recíprocamente, toda transformación pseudo-natural unitaria, tal que $\sigma^{00} = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$, define una transformación módulo.

Definición 2.3.15. Sean $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ categoría $\mathcal{C} - \mathcal{C}'$-bimódulo y $F, G : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ funtores $(\mathcal{C} - \mathcal{C}')$-bimódulo. Una transformación $(\mathcal{C} - \mathcal{C}')$-bimódulo, es una transformación pseudo-natural unitaria tal que $\sigma^{00} = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$, $\sigma^{11} = \mathrm{id}_{\mathcal{C}'}$.

Denotaremos la categoría de funtores $\mathcal{C}$-lineales y transformaciones $\mathcal{C}$-lineales entre $\mathcal{C}$-módulos $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ por $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$. Para funtores $\mathcal{C}$-lineales $(G, \psi) : \mathcal{D} \to \mathcal{M}$ y $(F, \phi) : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, la composición es un funtor $\mathcal{C}$-lineal $(F \circ G, \theta) : \mathcal{D} \to \mathcal{N}$, donde

$$\theta_{X,L} = \phi_{X,G(L)} F(\psi_{X,L}),$$

para $X \in \mathcal{C}$, $L \in \mathcal{D}$.

Entonces, tenemos un funtor

$$\mathcal{F}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \times \mathcal{F}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}, \mathcal{M}) \to \mathcal{F}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}, \mathcal{N})$$
$$((F, \phi), (G, \psi)) \to (F, \phi) \circ (G, \psi).$$

Éste define una estructura de 2-categoría, pues la composición es estrictamente asociativa.

2.4. Rigidez en categorías monoidales

Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal y sea X un objeto de $\mathcal{C}$. Un *dual a derecha* de X (si existe) es un objeto $X^* \in \mathcal{C}$, munido de morfismos $e_X : X^* \otimes X \to \mathbf{1}$, $\mathrm{coev}_X : \mathbf{1} \to X \otimes X^*$, tales que las composiciones

$$X \xrightarrow{\mathrm{coev}_X \otimes \mathrm{id}_X} (X \otimes X^*) \otimes X \xrightarrow{\alpha} X \otimes (X^* \otimes X) \xrightarrow{\mathrm{id}_X \otimes ev_X} X$$

$$X^* \xrightarrow{\mathrm{id}_{X^*} \otimes \mathrm{coev}_X} X^* \otimes (X \otimes X^*) \xrightarrow{\alpha^{-1}} (X^* \otimes X) \otimes X^* \xrightarrow{ev_X \otimes \mathrm{id}_{X^*}} X^*$$

son identidades.

Análogamente, un dual a izquierda es un objeto ${}^*X \in \mathcal{C}$, munido de morfismos

$$e'_X : X \otimes {}^*X \to \mathbf{1}, \quad \mathrm{coev}'_X : \mathbf{1} \to {}^*X \otimes X,$$

tales que las composiciones

$$X \xrightarrow{\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{coev}'_X} X \otimes ({}^*X \otimes X) \xrightarrow{\alpha^{-1}} (X \otimes {}^*X) \otimes X \xrightarrow{ev'_X \otimes \mathrm{id}_X} X$$

$${}^*X \xrightarrow{\mathrm{coev}'_X \otimes \mathrm{id}_X} ({}^*X \otimes X) \otimes {}^*X \xrightarrow{\alpha} {}^*X \otimes (X \otimes {}^*X) \xrightarrow{\mathrm{id}_{{}^*X} \otimes ev'_X} {}^*X$$

son identidades.

Se puede mostrar fácilmente que si los duales existen, entonces éstos son únicos, salvo un isomorfismo compatible con la evaluación y la coevaluación.

Ejemplo 2.4.1. La categoría monoidal Vec_k de los espacios vectoriales de *dimensión finita* posee duales a derecha. Dado $V \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Vec}_k)$, el espacio vectorial dual $V^* := \mathrm{Hom}_k(V.k)$ con el morfismo de evaluación $e_V : V^* \otimes V \to k$ y el morfismo de coevaluación $\mathrm{coev}_V : k \to V \otimes V^*$, $\mathrm{coev}(1) = \sum_i v_i \otimes v_i^*$, donde $\{v_i\}$ es una base de V (el morfismo coev_V no depende de la elección de la base) definen un dual a derecha de V. Note que un espacio vectorial de dimensión infinita no posee un dual ni a derecha ni a izquierda.

Definición 2.4.2. Una categoría monoidal $\mathcal{C}$ es llamada *rígida*, si todo objeto posee un dual a derecha y un dual a izquierda.

2.5. Categorías tensoriales y resultados de reconstrucción Tannakiana

Definición 2.5.1. Una *categoría tensorial* es una categoría monoidal abeliana k-lineal rígida, en la cual el objeto unidad es muy simple y todo objeto tiene longitud finita.

Sea H un álgebra de Hopf. Entonces la categoría ${}_H\mathcal{M}$ de H-módulos a izquierda es una categoría monoidal.

El producto tensorial $\otimes$ es el producto tensorial usual de espacios vectoriales, y el objeto unidad $\mathbf{1}$ es el cuerpo de base k. Las H-acciones están dadas por $h(v \otimes w) = \Delta(h)(v \otimes w) = h_1 v \otimes h_{(2)} w$, $h \cdot c = \varepsilon(h)c$, para todo $c \in k$, $h \in H$, $V, W \in {}_H\mathcal{M}$.

La categoría de H-módulos de dimensión finita es una categoría tensorial. Si V es H-módulo de dimensión finita, entonces V^* es un H-módulo con acción $(h \cdot \alpha)(v) = \alpha(S(h)v)$, para todo $v \in V, \alpha \in V^*, h \in H$, y las aplicaciones lineales evaluación $e_V : V^* \otimes V \to k$ y coevaluación $\mathrm{coev}_V : k \to V \otimes V^*$, son morfismos de H-módulos.

Análogamente, la categoría de H-comódulos de dimensión finita es una categoría tensorial. El objeto unidad $\mathbf{1}$ es en este caso el cuerpo de base k, con la coacción dada por la unidad de H. Para cada par de H-comódulos V, W, la coacción en $V \otimes W$ está dada por $\rho_{V\otimes W} : V \otimes W \to V \otimes W \otimes H$, $\rho_{V\otimes W}(v \otimes w) = v_0 \otimes w_0 \otimes v_1 w_1$.

Definición 2.5.2. Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial sobre un cuerpo k. Un cuasi-funtor de fibra $\mathcal{C} \to \mathrm{Vec}_k$ es un par (F, ϕ), donde $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Vec}_k$ es un funtor k-lineal exacto y fiel, y $\phi_{V,W} : F(V \otimes W) \to F(V) \otimes F(W)$ es un isomorfismo natural para todo $V, W \in \mathcal{C}$. El par (F, ϕ) es llamado un funtor de fibra si además es un funtor tensorial.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial, la cual posee un funtor de fibra $(F, \phi) : \mathcal{C} \to \mathrm{Vec}_k$. El funtor F se puede considerar como un funtor monoidal $F : \mathcal{C} \to \overline{\mathrm{Vec}_k}$, donde $\overline{\mathrm{Vec}_k}$ es la categoría de todos espacios vectoriales sobre k.

Dado un objeto B en $\overline{\mathrm{Vec}_k}$, definimos el funtor $F \otimes B : C \to \overline{\mathrm{Vec}_k}$, por $F \otimes B(V) = F(V) \otimes_k B$ y $F \otimes B(f) = F(f) \otimes_k \mathrm{id}_B$, para todo objeto V y para toda flecha f en $\mathcal{C}$.

En [76] se define una k-coálgebra A, como la solución al problema universal para las transformaciones naturales $F \to F \otimes B$. Una solución al problema universal consiste de un espacio vectorial A, junto con una transformación natural $\rho : F \to F \otimes A$, tal que dado un espacio vectorial B y una transformación lineal $\sigma : F \to F \otimes B$, existe una única transformación lineal $\varphi : A \to B$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& F(X) \otimes A \arrow[dd, "\mathrm{id}_{F(X)\otimes\varphi}"] \\
F(X) \arrow[ur, "\rho_X"] \arrow[dr, "\sigma_X"'] & \\
& F(X) \otimes B
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, para todo $X \in V$.

El coproducto $\Delta : A \to A \otimes A$ y la counidad $\varepsilon : A \to k$ están dados por la conmutatividad de los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd}
 & F(X) \otimes A \arrow[dd, "\mathrm{id}_{F(X)\otimes\Delta}"] \\
F(X) \arrow[ur, "\rho_X"] \arrow[dr, "\rho_X \otimes \mathrm{id}_A \circ \rho_X"'] & \\
 & F(X) \otimes A \otimes A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & F(X) \otimes A \arrow[dd, "\mathrm{id}_{F(X)\otimes\varepsilon}"] \\
F(X) \arrow[ur, "\rho_X"] \arrow[dr, "\sim"'] & \\
 & F(X) \otimes k
\end{tikzcd}$$

La coálgebra A posee estructura de biálgebra, con producto $m : A \otimes A \to A$, definido por la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
F(X) \otimes F(Y) \arrow[r, "\rho_{X\otimes Y}"] \arrow[d, "\phi_{X,Y}"'] & F(X \otimes Y) \otimes A \arrow[r, "\phi_{X\otimes Y} \otimes \mathrm{id}_A"] & F(X) \otimes F(Y) \otimes A \\
F(X) \otimes F(Y) \arrow[r, "\rho_X \otimes \rho_Y"'] & F(X) \otimes A \otimes F(Y) \otimes A \arrow[r, "flip"'] & F(X) \otimes F(Y) \otimes A \otimes A \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes m"']
\end{tikzcd}$$

y la unidad $1_A \in A$ esta dada por la relación $\rho_I(1) = 1 \otimes 1_A$, pues $F(I) = k$ y $\rho_I : k \to k \otimes A$.

El principal resultado de [76] asegura que la biálgebra A es un álgebra de Hopf y existe una equivalencia de categorías tensoriales entre ${}^A\mathcal{M}$ y $\mathcal{C}$.

2.6. Álgebras de Hopf cuasi-triangulares

En esta sección recordaremos la noción de álgebra cuasi-triangular debida a Drinfeld [15].

Definición 2.6.1. Un álgebra de Hopf cuasi-triangular es un par (A, R), donde A es un álgebra de Hopf y $R = R^{(1)} \otimes R^{(2)} \in A \otimes A$ es un elemento invertible, que satisface los siguientes axiomas ($R = r$):

(QT. 1) $\Delta(R^{(1)}) \otimes R^{(2)} = R^{(1)} \otimes r^{(1)} \otimes R^{(2)} r^{(2)}$,

(QT. 2) $\varepsilon(R^{(1)}) R^{(2)} = 1$,

(QT. 3) $R^{(1)} \otimes \Delta(R^{(2)}) = R^{(1)} r^{(1)} \otimes r^{(2)} \otimes R^{(2)}$,

(QT. 4) $R^{(1)} \varepsilon(R^{(2)}) = 1$,

(QT. 5) $(\Delta^{cop}(a))R = R(\Delta(a))$ para todo $a \in H$.

Un álgebra de Hopf cuasi-triangular (A, R) es llamada triangular si $R^{(2)} \otimes R^{(1)} = R^{-1}$.

Supongamos que A es de dimensión finita. Entonces, las condiciones (QT.1) - (QT.4) pueden interpretarse en términos de homomorfismos, como sigue.

Definamos el mapa lineal $f : A^* \to A$ por $f(p) = p(R^{(1)})R^{(2)}$, para todo $p \in A^*$. Las condiciones (QT.1) - (QT.2) son equivalentes a que f sea un morfismo de álgebras y (QT.3) - (QT.4) equivalen a que f sea un anti-morfismo de coálgebras.

La condición (QT.5) se interpreta en términos de la categoría monoidal de representaciones de A. En efecto, se tiene una correspondencia biyectiva entre elementos invertibles $R \in A \otimes A$ y los isomorfismos naturales (como espacios vectoriales) $\sigma_{V,W} : V \otimes W \to W \otimes V$, $V, W \in {}_A\mathcal{M}$.

Dado un isomorfismo natural $\sigma_{V,W} : V \otimes W \to W \otimes V$, entonces $\sigma_{A,A} : A \otimes A \to A \otimes A$ define un elemento $\gamma(1 \otimes 1) \in A \otimes A$, y dado $R \in A \otimes A$, el isomorfismo natural es

$$\sigma^R_{V,W} : (v \otimes w) = \tau_{V,W}(R(v \otimes w)),$$

donde $\tau_{V,W}(v \otimes w) = w \otimes v$. La condición (QT.5) se satisface si y sólo si el isomorfismo natural asociado es un isomorfismo de A-módulos.

Sea (A, R) un álgebra de Hopf cuasi-triangular. Sea $R = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i$ con n el menor entero posible. Sea A_m la subálgebra de Hopf generada por los elementos a_i, b_i, $i = 1, \ldots, n$. La subálgebra de Hopf A_m es llamada la subálgebra de Hopf minimal [55].

Notemos que $R \in A_m \otimes A_m$. Luego, A_m es cuasi-triangular.

Recordaremos la siguiente proposición para futuros usos.

Proposición 2.6.2. *Sea (A, R) un álgebra de Hopf cuasi-triangular de dimensión finita.*

- *El mapa $f : G(A^*) \to G(A)$, definido por $f(\eta) = R^{(1)}\eta^{-1}(R^{(2)})$, es un homomorfismo de grupos.*
- *$\eta \in G(A^*) \cap Z(A)$, si y sólo si, $f(\eta) \in G(A) \cap Z(A)$.*
- *Si A^* admite una estructura cuasi-triangular, entonces $G(A) \cap Z(A) \cong G(A^*) \cap Z(A^*)$.*

Demostración. Ver [54, Proposition 3] y [55, Proposition 4]. □

2.7. El anillo de Grothendieck de una categoría tensorial

Lema 2.7.1. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal rígida. Entonces existen isomorfismos naturales*

$$Hom_{\mathcal{C}}(U \otimes V, W) \cong Hom_{\mathcal{C}}(U, W \otimes V^*), \quad Hom_{\mathcal{C}}(U, V \otimes W) \cong Hom_{\mathcal{C}}(V^* \otimes U, W), \tag{2.7.1}$$

$$Hom_{\mathcal{C}}(U \otimes V, W) \cong Hom_{\mathcal{C}}(U, {}^*V \otimes W), \quad Hom_{\mathcal{C}}(U, V \otimes W) \cong Hom_{\mathcal{C}}(V \otimes {}^*W, V). \tag{2.7.2}$$

para todo $U, V, W \in Obj(\mathcal{C})$.

Demostración. Si $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U \otimes V, W)$, asociamos la composición

$$U \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes \mathrm{coev}_V} U \otimes V \otimes V^* \xrightarrow{\phi\otimes \mathrm{id}_{V^*}} W \otimes V^* \ .$$

De modo similar, a $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, W \otimes V^*)$, le asociamos la composición

$$U \otimes V \xrightarrow{\psi\otimes \mathrm{id}} W \otimes V^* \otimes V \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes e_V} W \ .$$

Es fácil verificar que estos mapas son mutuamente inversos. En forma análoga se demuestra la existencia de los otros isomorfismos naturales. $\square$

Proposición 2.7.2. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial. Entonces el funtor $\otimes$ es (bi)exacto. Es decir que, si*

$$0 \to U \to V \to W \to 0$$

una sucesión exacta en $\mathcal{C}$, entonces las sucesiones

$$0 \to U \otimes X \to V \otimes X \to W \otimes X \to 0,$$

y

$$0 \to Y \otimes U \to Y \otimes V \to Y \otimes W \to 0,$$

son exactas, para todo $X, Y \in \mathcal{C}$.

Demostración. La sucesión

$$0 \to U \otimes X \to V \otimes X \to W \otimes X \to 0$$

es exacta si la sucesión

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, U \otimes X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, V \otimes X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, W \otimes X) \to 0$$

es exacta para todo $Y \in C$, ver [79, Yoneda Lemma 1.6.11] . Usando los isomorfismos naturales 2.7.1 del Lema 2.7.1, tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, U \otimes X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y \otimes X^*, U)$. Dado que el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, -)$ es exacto a izquierda, el funtor $- \otimes X$ es exacto. De manera análoga usando los isomorfismos naturales 2.7.2 del Lema 2.7.1, se demuestra que el funtor $X \otimes -$ es exacto. $\square$

Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial. Dado que $\otimes$ es exacto, el grupo de Grothendieck $\mathcal{G}(\mathcal{C})$ posee estructura de anillo, con producto $[X][Y] = [X \otimes Y]$ y unidad $[\mathbf{1}]$, este anillo es llamado el anillo de Grothendieck de la categoría tensorial y lo denotaremos por $\mathcal{G}(\mathcal{C})$.

Proposición 2.7.3. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial semisimple. Entonces, para todo objeto simple $V \in Obj(\mathcal{C})$, $V^* \cong {}^*V$. En particular, $V^{**} \cong V$.*

Demostración. La coevaluación $\mathrm{coev}_V : \mathbf{1} \to V \otimes V^*$ es un monomorfismo pues $\mathbf{1}$ es simple. Entonces existe $W \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ tal que $V \otimes V^* \cong W \oplus \mathbf{1}$, por tanto existe una proyección $p : V \otimes V^* \to \mathbf{1}$. Pero en una categoría rígida el único objeto simple Y tal que $V \otimes Y$ se proyecta a $\mathbf{1}$ es ${}^*V$. $\square$

Luego, en el caso en que $\mathcal{C}$ es semisimple, el anillo de Grothendieck $\mathcal{G}(\mathcal{C})$ está munido de una involución $* : \mathcal{G}(\mathcal{C}) \to \mathcal{G}(\mathcal{C})$, definida en la forma $[V]^* := [V^*]$, para todo objeto V de $\mathcal{C}$.

2.8. Categorías módulo sobre categorías tensoriales

Definición 2.8.1. [51, Definition 6.] Una categoría módulo a izquierda sobre una categoría tensorial $\mathcal{C}$, es una categoría $\mathcal{C}$-módulo $(\mathcal{M}, \phi)$, tal que $\mathcal{M}$ es abeliana y el bifuntor $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ es biexacto.

Un funtor $\mathcal{C}$-módulo es un funtor $\mathcal{C}$-módulos (F, α) tal que F es exacto.

Denotaremos la categoría de funtores $\mathcal{C}$-lineales y transformaciones naturales $\mathcal{C}$-lineales entre categorías $\mathcal{C}$-módulos $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ por $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$.

Ejemplo 2.8.2. Sea Vec_k la categoría de espacios vectoriales de dimensión finita sobre k. Está es una categoría tensorial con un único objeto simple. Para una categoría abeliana k-lineal $\mathcal{M}$, existe una única estructura de categoría Vec_k-módulo con acción $k^{\oplus n} \otimes X := X^{\oplus n}$. Ver [63, Lemma 2.2.2].

Ejemplo 2.8.3 (Álgebra en una categoría monoidal)**.** Sea (A, m, e) un álgebra en $\mathcal{C}$. Sea $\mathcal{C}_A$ la categoría de A-módulos a derecha en $\mathcal{C}$. Esta es una categoría $\mathcal{C}$-módulo a izquierda con acción $V \otimes (M, \eta) = (V \otimes M, (\mathrm{id}_V \otimes \eta) a_{V,M,A})$ e isomorfismo de asociatividad $a_{X,Y,M}$, para $X, Y \in \mathcal{C}, M \in \mathcal{C}_A$. Ver [51, sec. 3.1].

Si $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ son categoría abelianas k-lineales, entonces $\mathcal{F}_{\mathrm{Vec}_f}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ es la categoría de funtores k-lineales exactos, luego $\mathcal{F}_{\mathrm{Vec}_f}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$.

Una transformación natural $\mathcal{C}$-lineal entre funtores $\mathcal{C}$-lineales $(F, \phi), (F', \phi') : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, es una transformación natural k-lineal $\sigma : F \to F'$ tal que

$$\phi'_{X,M} \sigma_{X \otimes M} = (X \otimes \sigma_M) \phi_{X,M},$$

para todo $X \in \mathcal{C}, M \in \mathcal{M}$.

Definición 2.8.4. Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial y sea $\mathcal{M}$ una categoría $\mathcal{C}$-módulo. Una *categoría $\mathcal{C}$-submódulo* de $\mathcal{M}$ es una subcategoría abeliana plena $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ de $\mathcal{M}$, tal que $\mathcal{N}$ es una categoría $\mathcal{C}$-módulo con respecto a $\otimes$.

Una categoría $\mathcal{C}$-módulo será llamada *simple*, si esta no contiene subcategorías $\mathcal{C}$-módulos no triviales.

Proposición 2.8.5. *Sea $\mathcal{M}$ una categoría abeliana k-lineal. Entonces $\mathcal{M}$ es simple como categoría Vec_f-módulo, si y sólo si $\mathcal{M}$ es semisimple y posee un único objeto simple, salvo isomorfismos.*

Además, toda categoría Vec_f-módulo simple es equivalente a la categoría de módulos sobre un álgebra de división R, donde $k \subset Z(R)$ es una extensión finita de cuerpos.

Demostración. Sea $M \in \mathcal{M}$ un objeto simple, y sea $\langle M \rangle \subset \mathcal{M}$ la subcategoría plena k-lineal donde los objetos son sumas directas finitas de copias de M. Dado que M es simple, $\langle M \rangle$ es abeliana. Entonces $\langle M \rangle$ es una categoría Vec_f-submódulo simple de $\mathcal{M}$, luego $\mathcal{M} = \langle M \rangle$, pues $\mathcal{M}$ es simple como categoría Vec_f-módulo.

Supongamos que $\mathcal{M}$ es una categoría semisimple y posee un único objeto simple, salvo isomorfismos. Sea $M \in \mathcal{M}$ un objeto simple. Por el Lema de Schur 1.1.1, la k-álgebra $R = \operatorname{End}_{\mathcal{M}}(M)$ es un álgebra de división de dimensión finita y $k \subset Z(R)$ es una extensión de cuerpos finita, donde $R = \operatorname{End}_{\mathcal{M}}(M)$. Sea Vec_R la categoría de espacios vectoriales de dimensión finita sobre R. Entonces, el funtor $F : \mathrm{Vec}_R \to \mathcal{M}, R \mapsto M$ es exacto, esencialmente sobreyectivo y fielmente pleno. Luego, F es una equivalencia de categorías k-lineales abelianas. □

Dadas dos categorías $\mathcal{C}$-módulo $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$, su *suma directa* es la categoría $\mathcal{M} \bigoplus \mathcal{N}$ con estructura $\mathcal{C}$-módulo "componente a componente".

Definición 2.8.6. Una categoría $\mathcal{C}$-módulo $\mathcal{M}$ se dice indescomponible si no es equivalente a una suma directa de subcategorías módulo no triviales.

2.9. Categorías módulo estrictas

Recordemos que una categoría monoidal $(\mathcal{C}, \otimes, \alpha, \mathbf{1})$ es llamada *estricta* si el isomorfismo natural de asociatividad es la identidad.

De forma análoga, diremos que una categoría módulo $(\mathcal{M}, \otimes, \alpha)$ sobre una categoría monoidal estricta $\mathcal{C}$ es *estricta*, si α es la identidad.

El principal resultado de esta subsección establece que toda categoría monoidal $\mathcal{C}$ es monoidalmente equivalente a una categoría monoidal estricta $\mathcal{C}'$, tal que toda categoría módulo sobre $\mathcal{C}'$ es equivalente a una categoría módulo estricta.

Lema 2.9.1. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal. Entonces $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{C}) \cong \mathcal{C}$, donde $\mathcal{C}$ es una categoría $\mathcal{C}$-módulo a izquierda con el producto tensorial y el isomorfismo de asociatividad. Más aún, $\mathcal{C}^{op} \cong \mathcal{F}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$, como categorías monoidales.*

Demostración. Definimos el funtor $\widehat{(-)} : \mathcal{C} \to \mathcal{F}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ como sigue: dado $V \in \mathcal{C}$, el funtor $(\widehat{V}, \alpha_{-,-V}) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}, W \mapsto W \otimes V$, $\alpha_{X,Y,V} : \widehat{V}(X \otimes Y) \to X \otimes \widehat{V}(Y)$ es un funtor $\mathcal{C}$-módulo. Si $\phi : V \to V'$ es un morfismo en $\mathcal{C}$, definimos la transformación natural $\widehat{\phi} : \widehat{V} \to \widehat{V'}$, como $\widehat{\phi}_W = \mathrm{id}_W \otimes \phi : \widehat{V}(W) = W \otimes V \to \widehat{V'}(W) = W \otimes V'$.

El isomorfismo natural

$$\alpha_{-,W,V} : \widehat{V} \circ \widehat{W} \to \widehat{V \otimes^{op} W},$$

proporciona estructura de funtor monoidal a $\widehat{(-)}$.

Sea $(F, \psi) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ un funtor módulo. Entonces tenemos un isomorfismo natural

$$\sigma_X = \psi_{X,1} : F(X) = F(X \otimes 1) \to X \otimes F(1) = \widehat{F(1)}(X),$$

tal que

$$\begin{aligned}\alpha_{X,Y,F(1)}\sigma_{X\otimes Y} &= \alpha_{X,Y,F(1)}\psi_{X\otimes Y,1}\\ &= \mathrm{id}_X\otimes\psi_{Y,1}\circ\psi_{X,Y}\\ &= \mathrm{id}_X\otimes\sigma_Y\circ\psi_{X,Y}.\end{aligned}$$

Es decir, σ_X es un isomorfismo natural módulo entre (F,ψ) y $(F(1),\alpha_{-,-,F(1)})$. Por tanto, el funtor es esencialmente sobreyectivo.

Sea $\phi:\widehat{V}\to\widehat{V'}$ una transformación natural $\mathcal{C}$-lineal. Entonces $\alpha_{X,1,V}\phi_X=\mathrm{id}_X\otimes\phi_1\alpha_{X,1,V'}$, luego $\phi_X=\mathrm{id}_X\otimes\phi_1$, esto implica que el funtor monoidal $\widehat{(-)}$ es fiel y pleno. Entonces, por [43, Theorem 1, p. 91] y [57, Proposition 4.4.2], el funtor es una equivalencia de categorías monoidales. □

Observación 2.9.2. Dado que la categoría monoidal $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C},\mathcal{C})$ es estricta, el Lema 2.9.1 implica que cada categoría monoidal es tensorialmente equivalente a una categoría monoidal estricta, (compare con la demostración en [33, Theorem 1.5.3]).

Proposición 2.9.3. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal, entonces existe una categoría monoidal estricta $\overline{\mathcal{C}}$, tal que toda categoría módulo sobre $\overline{\mathcal{C}}$ es equivalente a una categoría $\overline{\mathcal{C}}$-módulo estricta y $\overline{\mathcal{C}}$ es monoidalmente equivalente a $\mathcal{C}$.*

Demostración. Sea $\overline{\mathcal{C}}=\mathcal{F}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C},\mathcal{C})^{op}$. Por el Lema 2.9.1, $\overline{\mathcal{C}}$ es monoidalmente equivalente a $\mathcal{C}$. Sea $(\mathcal{M},\otimes,m)$ una categoría $\mathcal{C}$-módulo a izquierda. La categoría $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C},\mathcal{M})$ es una categoría $\overline{\mathcal{C}}$-módulo estricta a izquierda con la composición de funtores $\mathcal{C}$-lineales. Recíprocamente, si $\mathcal{M}'$ es una categoría $\overline{\mathcal{C}}$-módulo, entonces $\mathcal{M}'$ es una categoría módulo sobre $\mathcal{C}$, usando la equivalencia de monoidal $\widehat{(-)}:\mathcal{C}\to\mathcal{F}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C},\mathcal{C})$.

En forma similar a la demostración del Lema 2.9.1, el funtor

$$\begin{aligned}\mathcal{M}&\to\mathcal{F}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C},\mathcal{M})\\ M&\mapsto(\widehat{M},m_{-,-,M}),\end{aligned}$$

es una equivalencia de categorías $\mathcal{C}$-módulo. Entonces, toda categoría módulo sobre $\overline{\mathcal{C}}$ es equivalente a una estricta. □

Módulos en categorías módulo

Sean $\mathcal{C}$ una categoría tensorial, $(\mathcal{D},\Phi)$ una categoría $\mathcal{C}$-módulo a izquierda y (A,m,η) un álgebra en $\mathcal{C}$. Un A-módulo (M,μ) en $\mathcal{D}$ consiste de un objeto $M\in\mathcal{D}$ junto con un morfismo $\mu:A\otimes M\to M$ en $\mathcal{D}$, el cual es asociativo en el siguiente sentido:

$$\mu(m\otimes\mathrm{id}_A)=\mu(\mathrm{id}_A\otimes\mu)\Phi_{A,A,M}:(A\otimes A)\otimes M\to M$$

y satisface $\mu(\eta\otimes\mathrm{id}_M)=\mathrm{id}_M$. Un morfismo $f:(M,\mu)\to(M',\mu')$ de A-módulos en $\mathcal{D}$ es un morfismo $f:M\to M'$ en $\mathcal{D}$ tal que $f\mu=\mu' f$.

Denotaremos por ${}_A\mathcal{D}$ la categoría de A-módulos en $\mathcal{D}$.

Sean $\mathcal{C}$ una categoría tensorial, A un álgebra en $\mathcal{C}$, $M \in \mathcal{C}_A$, $N \in_A \mathcal{D}$, donde $\mathcal{D}$ es una categoría $\mathcal{C}$-módulo. El producto tensorial $M \otimes_A N \in \mathcal{D}$ se define como el coecualizador

$$(M \otimes A) \otimes N \underset{(\mathrm{id}_M \otimes \mu)\Phi}{\overset{\mu \otimes \mathrm{id}_N}{\rightrightarrows}} M \otimes N \longrightarrow M \otimes_A N \ .$$

En particular, la categoría ${}_A\mathcal{D}$ es una categoría módulo sobre la categoría monoidal $({}_A\mathcal{C}_A, \otimes_A, A)$.

Capítulo 3

Extensiones galosianas para álgebras de Hopf

En este capítulo recordaremos las definiciones y teoremas básicos de la teoría de extensiones galoisianas y extensiones bigaloisianas para álgebras de Hopf. Para ello, seguiremos [60], [50] y [12].

3.1. Extensiones galoisianas

En este capítulo, H denotará una álgebra de Hopf sobre k con antípoda biyectiva.

Definición 3.1.1. Un H-comódulo álgebra (a derecha) es un álgebra A en la categoría $\mathcal{M}^H$. Es decir que (A, ρ) es un H-comódulo a derecha, con una estructura $(A, m, 1_A)$ de k-álgebra, tal que $\delta(xy) = x_{(0)}y_{(0)} \otimes x_{(1)}y_{(1)}$ y $\delta(1_A) = 1 \otimes 1_A$.

Un H-módulo álgebra (a derecha) es un álgebra A en la categoría $\mathcal{M}_H$. En este caso, A es un H-módulo a derecha, con una estructura $(A, m, 1_A)$ de k-álgebra, tal que $h \cdot (xy) = (h_{(1)} \cdot x)(h_{(2)} \cdot y)$ y $h \cdot 1_A = \varepsilon(h)1_A$.

Dado un H-comódulo $M \in \mathcal{M}^H$, denotaremos por $M^{\mathrm{co}\,H} = \{m \in M : \rho(m) = m \otimes 1\}$ al subespacio de los H-coinvariantes. Es fácil ver que si A es un H-comódulo álgebra, entonces $A^{\mathrm{co}\,H}$ es una subálgebra de A.

Análogamente, si $V \in {}_H\mathcal{M}$ es un H-módulo, denotaremos por $V^H = \{v \in V : h \cdot v = \varepsilon(h)v, \forall h \in H\}$ al espacio de H-invariantes. De nuevo, si A es un H-módulo álgebra, entonces A^H es una subálgebra de A.

Ejemplos 3.1.2. Sea G un grupo y sea A una kG-comódulo álgebra. Entonces A tiene una descomposición: $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$, donde $\rho(a_g) = a_g \otimes g$, para todo $a_g \in A$.

La condición de compatibilidad nos dice que $\rho(a_g b_h) = a_g b_h \otimes gh$, para todo $a_g \in A_g$, $a_h \in A_h$. Es decir que $a_g b_h \in A_{gh}$, para todo $a_g \in A_g$, $a_h \in A_h$. Por lo tanto, $A_g A_h \subseteq A_{gh}$, para todo $g, h \in G$ y además $1_A \in A_e$. Luego A es un álgebra G-graduada.

Recíprocamente, una estructura de álgebra G-graduada sobre A hace de A una kG-comódulo álgebra.

Sea A una kG-módulo álgebra. Dado que $\Delta(g) = g \otimes g$, entonces la condición de compatibilidad dice que $g \cdot (ab) = (g \cdot a)(g \cdot b)$ para todo $a, b \in A$. Luego, g define un endomorfismo de álgebras de A. Además, dado que e actúa como la identidad y $gg^{-1} = e$, cada g es un automorfismo de A. Entonces tenemos un morfismo de grupos $G \to \mathrm{Aut}(A)$, donde $\mathrm{Aut}(A)$ es el grupo de automorfismo de álgebras de A.

Recíprocamente, todo morfismo de grupos de este tipo define una estructura de kG-módulo álgebra.

Definición 3.1.3. Una H-comódulo álgebra a derecha A es llamada una *extensión H-galoisiana* a derecha de $B := A^{\mathrm{co}\,H}$, o simplemente una *extensión galoisiana* de B, si el mapa canónico

$$\mathrm{can} : A \otimes_B A \to A \otimes H, \quad x \otimes y \mapsto xy_{(0)} \otimes y_{(1)},$$

es una biyección.

Una extensión H-galoisiana a derecha del cuerpo base k será llamada un *objeto galoisiano* de H. Las extensiones galosianas a izquierda y los objetos H-galoisianos a izquierda son definidos análogamente.

Ejemplo 3.1.4. Sean G un grupo y A una kG-comódulo álgebra. Es decir, $A = \oplus_{g \in G} A_g$, es un álgebra G-graduada. Entonces $A_e \subset A$ es una extensión galoisiana, si y sólo si, $A_g A_{g^{-1}} = A_1$, para todo $g \in G$.

Demostración. El mapa $\mathrm{can} : A \otimes_{A_e} A \to A \otimes kG$ está dado por $a \otimes b \mapsto \sum_{g \in G} ab_g \otimes g$, para todo $a, b \in A$. Entonces can es sobreyectivo, si y sólo si, $1 \otimes g \in \mathrm{Im}(\mathrm{can})$, para todo $g \in G$. La última condición equivale a que existan $a_i, b_i \in A$, tales que $1 \otimes g = \sum_{h \in G, i} a_i (b_i)_h \otimes h$, para todo $g \in G$, lo cual a su vez, equivale a que $\sum_i a_i (b_i)_g = 1$ y $\sum_i a_i (b_i)_h = 0$, para todo $h \neq g$. Ésto vale, para todo $g \in G$, si y sólo si, $A_g A_{g^{-1}} = A_e$, para todo $g \in G$.

Veamos que si $A_g A_{g^{-1}} = A_e$, para todo $g \in G$, entonces can es inyectivo. La condición nos dice que, para cada $g \in G$, podemos encontrar $c_{g^{-1},i} \in A_{g^{-1}}$, $d_{g,i} \in A_g$, tales que $1 = \sum_i c_{g^{-1},i} d_{g,i}$. Definamos

$$\begin{aligned} \alpha : A \otimes kG &\to A \otimes_{A_e} A \\ a \otimes g &\mapsto ac_{g^{-1},i} \otimes d_{g,i}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\alpha\,\mathrm{can}(a \otimes b) = \alpha(\sum_g ab_g \otimes g) = \sum_{g,i} a \otimes b_g c_{g^{-1},i} d_{g,i} = a \otimes b.$$

Es decir, $\alpha\,\mathrm{can} = \mathrm{id}$, y por tanto can es una biyección. □

Observación 3.1.5. Un anillo G-graduado $A = \bigoplus_{g\in G}$ es llamado *fuertemente graduado* si $A_x A_y = A_{xy}$, para todo $x, y \in G$.

La condición $A_g A_{g^{-1}} = A_e$, para todo $g \in G$, es equivalente a ser fuertemente graduado, pues

$$A_{xy} = A_{xy}A_e = A_{xy}(A_{y^{-1}}A_y) \subseteq (A_{xy}A_{y^{-1}})A_y \subseteq A_x A_y \subseteq A_{xy},$$

para todo $x, y \in G$.

Ejemplo 3.1.6. Sea H un álgebra de Hopf coactuando sobre si misma a través de la comultiplicación Δ. Entonces el mapa canónico $H \otimes H \to H \otimes H,\ x \otimes y \mapsto xy_{(1)} \otimes y_{(2)}$ es biyectivo con inverso $a \otimes h \mapsto aS(h_{(1)}) \otimes h_{(2)}$.

Más generalmente, sea $\pi : H \to Q$ un epimorfismo de álgebras de Hopf de dimensión finita. Entonces H es un Q-comódulo álgebra a derecha con mapa de estructura $\rho = (\mathrm{id} \otimes \pi) \circ \Delta$. Por [47, Theorem 8.2.4 and Proposition 8.4.4] $H^{\mathrm{co}\,Q} \subseteq H$ es una extensión Q-galoisiana.

Ejemplo 3.1.7. Sea $k \subseteq K$ una extensión de Galois de cuerpos, con grupo de Galois finito G. Sea $H = k^G$, el dual del álgebra de grupo de G. Entonces K es un extensión H-galoisiana de k (ver [47, Subsection 8.1.2]).

El inverso del isomorfismo canónico $A \otimes_B A \to A \otimes H$ de una extensión H-galoisiana generalmente no puede calcularse en forma canónica, por ello se suele usar la siguiente notación para el inverso.

Definición 3.1.8. Sea H un álgebra de Hopf, y sea $B \subseteq A$ una extensión H-galoisiana. Definimos un mapa $H \to A \otimes_B A,\ h \mapsto h^{[1]} \otimes h^{[2]} : \mathrm{can}^{-1}(1 \otimes h)$.

Lema 3.1.9. *Sea A una extensión H-galoisiana de B. Para todo $g, h \in H, b \in B$ y $a \in A$ tenemos:*

$$bh^{[1]} \otimes \otimes h^{[2]} = h^{[1]} \otimes h^{[2]}b, \tag{3.1.1}$$

$$a_{(0)}{a_{(1)}}^{[1]} \otimes {a_{(1)}}^{[2]} = 1 \otimes a, \tag{3.1.2}$$

$$h^{[1]}h^{[2]} = \varepsilon(h), \tag{3.1.3}$$

$$h^{[1]} \otimes {h^{[2]}}_{(0)} \otimes {h^{[2]}}_{(1)} = {h_{(1)}}^{[1]} \otimes {h_{(1)}}^{[2]} \otimes h_{(2)} \ \textit{en } A \otimes_B A \otimes H, \tag{3.1.4}$$

$${h^{[1]}}_{(0)} \otimes h^{[2]} \otimes {h^{[1]}}_{(1)} = {h_{(2)}}^{[1]} \otimes {h_{(2)}}^{[2]} \otimes S(h_{(1)}) \ \textit{en } A \otimes_B A \otimes H, \tag{3.1.5}$$

$$(gh)^{[1]} \otimes (gh)^{[2]} = h^{[1]}g^{[1]} \otimes h^{[2]}g^{[2]}, \tag{3.1.6}$$

$${h_{(1)}}^{[1]} \otimes {h_{(1)}}^{[2]}{h_{(2)}}^{[1]} \otimes {h_{(2)}}^{[2]} = h^{[1]} \otimes 1 \otimes h^{[2]} \ \textit{en } A \otimes_B A \otimes_B A. \tag{3.1.7}$$

Demostración. Ver [58, 3.4]. □

Definición 3.1.10. Sean H un álgebra de Hopf y A una extensión H-galoisiana de B. La *acción de Miyashita-Ulbrich*, $\leftharpoonup : A^B \otimes H \to A^B$, de H sobre el centralizador A^B de B en A está dada por

$$x \leftharpoonup h = h^{[1]}xh^{[2]},$$

para todo $x \in A^B$ y $h \in H$.

Observación 3.1.11. El elemento $h^{[1]}xh^{[2]}$ está bien definido, pues $x \in A^B$. Además, $h^{[1]}xh^{[2]} \in A^B$, ya que $h^{[1]} \otimes h^{[2]} \in (A \otimes_B A)^B$.

La siguiente caracterización de la acción de Miyashita-Ulbrich será usada más adelante.

Lema 3.1.12. *Sean H un álgebra de Hopf y A una extensión H-galoisiana de B. La acción de Miyashita-Ulbrich es el único mapa lineal $\leftharpoonup: A^B \otimes H \to A^B$, que cumple que*

$$xy = y_{(0)}(x \leftharpoonup y_{(1)}), \tag{3.1.8}$$

para todo $x \in A^B, y \in A$. La subálgebra de invariantes de A^B bajo la acción de Miyashita-Ulbrich coincide con el centro de A.

Demostración. Ver [60, pp. 15]. $\square$

Ejemplo 3.1.13. Consideremos el objeto H-galoisiano $A = H$, como en el Ejemplo 3.1.7. En este caso, la acción de Miyashita-Ulbrich coincide con la acción adjunta a derecha de H sobre si misma: $x \leftharpoonup h = S(h_{(1)})xh_{(2)}$.

Extensiones galoisianas fielmente planas

Definición 3.1.14. Sea A una H-comódulo álgebra. Un módulo de Hopf $M \in \mathcal{M}_A^H$ es un A-módulo a derecha en la categoría de H-comódulos a derecha.

Esto es, $\rho : M \to M \otimes H$ es un H-comódulo a derecha y M es un A-módulo a derecha, tal que la estructura de A-módulo es un morfismo de H-comódulos, es decir, $\rho(ma) = m_{(0)}a_{(0)} \otimes m_{(1)}a_{(1)}$, para todo $m \in M$, $a \in A$.

Para toda comódulo álgebra se tiene un par de funtores adjuntos entre la categoría de módulos de Hopf y la categoría de módulos sobre la subálgebra de coinvariantes.

Lema 3.1.15. *Sean H un álgebra de Hopf, A un H-comódulo álgebra y $B = A^{\operatorname{co} H}$. Entonces el funtor*

$$\mathcal{M}_A^H \to \mathcal{M}_B, \quad M \mapsto M^{\operatorname{co} H},$$

es adjunto a derecha del funtor

$$\mathcal{M}_B \to \mathcal{M}_A^H, \quad N \mapsto N \otimes_B A.$$

Las estructuras de A-módulo y H-comódulo de $N \otimes_B A$ son inducidas por las de A. La unidad y la counidad de la adjunción son:

$$N \to (N \otimes_B A)^{\operatorname{co} H}, \quad n \mapsto n \otimes 1,$$
$$M^{\operatorname{co} H} \otimes_B A \to M, \quad m \otimes a \to ma.$$

$\square$

Si la adjunción en el Lema 3.1.15 da lugar a una equivalencia, entonces diremos que se tiene el *Teorema de Estructura para Módulos de Hopf* para la extensión.

Definición 3.1.16. Sea R una k-álgebra. Un R-módulo a izquierda V es llamado *plano* (respectivamente *fielmente plano*) si el funtor $\mathcal{M}_R \to \mathrm{Vec}_k, U \mapsto U \otimes_R V$ es exacto (respectivamente es exacto y fiel).

El siguiente teorema, debido a H.-J. Schneider, caracteriza la extensiones galoisianas fielmente planas como aquellas comódulo álgebras para las cuales vale el Teorema de Estructura para Módulos de Hopf.

Teorema 3.1.17. *Sea A una H-comódulo álgebra y sea $B = A^{\mathrm{co}\,H}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- *$B \subseteq A$ es una extensión H-galoisiana y A es un B-módulo fielmente plano.*
- *El funtor $\mathcal{M}_B \to \mathcal{M}_A^H$, $N \mapsto N \otimes_B A$, es una equivalencia de categorías.*

Demostración. Ver [69]. □

3.2. Extensiones hendidas y productos cruzados

Definición 3.2.1. Sea B una k-álgebra. Una transformación lineal $\rightharpoonup: H \otimes B \to B$ es llamada una **medida** si

$$h \rightharpoonup (bc) = (h_{(1)} \rightharpoonup b)(h_{(2)} \rightharpoonup c), \quad h \rightharpoonup 1 = \varepsilon(h)1,$$

para todo $h \in H, b, c, \in B$.

Sean H un álgebra de Hopf y B una k-álgebra. Un producto cruzado $B\#_\sigma H$ es una estructura de álgebra asociativa con unidad $1\#1$ sobre el espacio vectorial $B\#_\sigma H := B \otimes H$, con multiplicación dada por

$$(b\#g)(c\#h) = b(g_{(1)} \rightharpoonup c)\sigma(g_{(2)} \otimes h_{(1)})\#g_{(3)}h_{(2)},$$

para alguna medida $\rightharpoonup: H \otimes B \to B$ y algún mapa lineal $\sigma : H \otimes H \to B$.

Proposición 3.2.2. *Sean H una biálgebra, $\rightharpoonup: H \otimes B \to B$ una medida, y $\sigma : H \otimes H \to B$ una transformación k-lineal. Son equivalentes:*

1. *$A = B\#_\sigma H := B \otimes H$ es un álgebra asociativa con unidad y multiplicación*

$$(b\#g)(c\#h) = b(g_{(1)} \rightharpoonup c)\sigma(g_{(2)} \otimes h_{(1)})\#g_{(3)}h_{(2)}.$$

2. - *$\rightharpoonup$ es una acción torcida, esto es:*

$$(g_{(1)} \rightharpoonup (h_{(1)} \rightharpoonup b))\sigma(g_{(2)} \otimes h_{(2)}) = \sigma(g_{(1)} \otimes h_{(1)})(g_{(2)}h_{(2)} \rightharpoonup b), \quad 1 \rightharpoonup b = b,$$

para todo $g, h \in H, b \in B$.

- *σ es un 2-cociclo normalizado, esto es:*

$$\begin{aligned}&(f_{(1)} \rightharpoonup \sigma(g_{(1)} \otimes h_{(1)}))\sigma(f_2 \otimes g_{(2)}h_{(2)}) = \sigma(f_{(1)} \otimes g_{(1)})\sigma(f_{(2)}g_{(2)} \otimes h),\\ &\sigma(h \otimes 1) = 1 = \sigma(1 \otimes h),\end{aligned}$$

para todo $f, g, h \in H$.

Demostración. Ver [47, Lemma 7.1.2]. □

Ejemplo 3.2.3. Sean G un grupo y R una k-álgebra. Los datos que definen una estructura de un producto cruzado $R\#_\alpha kG$, sobre kG, son dos mapas $\phi : G \to \mathrm{Aut}_k(R)$, $\phi(x) : a \mapsto {}^x a$, $x \in G$, y $\alpha : G \times G \to R^\times$, donde $R^\times$ son las unidades de R, tales que

1. ${}^x({}^y a) = \alpha(x, y){}^{xy}\alpha(x, y)^{-1}$,
2. $\alpha(x, y)\alpha(xy, z) = {}^x\alpha(y, z)\alpha(x, yz)$,
3. $\alpha(x, 1) = \alpha(1, x) = 1$

para todo $x, y, z \in G$, $a \in R$

Definición 3.2.4. Sean H un álgebra de Hopf y A una H-comódulo álgebra, con $B = A^{\mathrm{co}\, H}$.

- La extensión $B \subset A$ es llamada *hendida* si existe un morfismo de H-comódulos $j : H \to A$, el cual es invertible con respecto al producto convolución.
- Se dice que la extensión $B \subset A$ *tiene una base normal* si existe un isomorfismo de H-comódulos a derecha y B-módulos a izquierda $B \otimes H \to A$.

Teorema 3.2.5. *Sean H un álgebra de Hopf y A un H-comódulo álgebra a derecha con $B := A^{\mathrm{co}\, H}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *A es hendida.*
2. *A es una extensión H-galoisiana con una base normal.*
3. *A es isomorfo a un producto cruzado, tal que el cociclo $\sigma : H \otimes H \to B$ es invertible con respecto al producto convolución.*

Demostración. Ver [47, Theorems 7.2.2 and 8.2.4]. □

Sean A una extensión H-hendida, vía $\gamma : H \to A$, con $\gamma(1) = 1$, y $B = A^{\mathrm{co}\, H}$. Entonces,

$$B\#_\sigma H \cong A, \quad b\#h \mapsto b\gamma(h),$$

es el isomorfismo de H-comódulo álgebras del teorema anterior.

Claramente, el producto cruzado $B\#_\sigma H$ es un H-comódulo álgebra, con respecto a la coacción $\rho(b\#h) = b\#h_{(1)} \otimes h_{(2)}$. Por lo tanto, tiene una base normal.

Interpretación categórica del Producto cruzado

La siguiente proposición muestra la estrecha relación entre extensiones galoissianas de un álgebras de Hopf H y categorías módulo sobre $\mathcal{M}^H$.

Proposición 3.2.6. *Sea H un álgebra de Hopf con antípoda biyectiva y sea B una k-álgebra. Entonces existe una correspondencia biyectiva entre extensiones H-galoisianas fielmente planas de B y estructuras de categorías $\mathcal{M}^H$-módulo a izquierda sobre $\mathcal{M}_B$, tal que el bifuntor de acción conmuta con colímites arbitrarios*

Demostración. Por un teorema de Watts [78], existe una equivalencia monoidal entre la categoría de endofuntores exactos de $\mathcal{M}_B$ que conmutan con colímites arbitrarios y la categoría de B-bimódulos. Por la Observación 2.3.6, una estructura de categoría $\mathcal{M}^H$-módulo sobre ${}_B\mathcal{M}$ es lo mismo que un funtor monoidal $\mathcal{M}^H \to {}_B\mathcal{M}_B$, y por [61, Theorem 2.4.2] estos están caracterizados por extensiones H-galoisianas a izquierda $B \subseteq A$ tal que A es un B-módulo a izquierda fielmente plano. $\square$

Sean H un álgebra de Hopf y $B \subseteq A$ una extensión de H-galoisiana a izquierda, tal que A es fielmente plana como B-módulo. Como vimos en la Proposición 3.2.6, la categoría $\mathcal{M}_B$ es una categoría módulo sobre $\mathcal{M}^H$. Veamos esto en detalle. El bifuntor que da la acción de $\mathcal{M}^H$, está dado por:

$$\odot : \mathcal{M}^H \times \mathcal{M}_B \to \mathcal{M}_B, \quad V \odot N := (V \otimes N \otimes_B A)^{\mathrm{co}\, H},$$

donde la estructura de B-módulo a izquierda en $V \odot N$ es la inducida por la estructura de B-módulo a izquierda de A.

El isomorfismo $\Phi : V \odot (W \odot N) \to (V \otimes W) \odot N$ es el inducido por la counidad de la equivalencia $\mathcal{M}_B \cong \mathcal{M}_A^H$. Ver Lema 3.1.15 y Teorema 3.1.17.

$$(V \otimes (Y \otimes N \otimes_B A)^{\mathrm{co}\, H} \otimes_B A)^{\mathrm{co}\, H} \to (V \otimes W \otimes N \otimes_B A)^{\mathrm{co}\, H},$$
$$x \otimes y \otimes n \otimes a \otimes a' \mapsto x \otimes y \otimes n \otimes aa'.$$

En el caso de extensiones galoisianas con base normal, la estructura de categoría módulo se puede describir en términos de la acción débil y el 2-cociclo, en la siguiente forma:

Proposición 3.2.7. *Sean H un álgebra de Hopf y B una k-álgebra. Sean además $\rightharpoonup: H \otimes B \to B$ y $\sigma : H \otimes H \to B$ transformaciones k-lineales.*

1. *El mapa $\cdot : V \otimes X \otimes B \to V \otimes X$,*

$$v \otimes x \otimes b \mapsto v(x_{(-1)} \rightharpoonup b) \otimes x_{(0)}, \tag{3.2.1}$$

define una estructura de B-módulo sobre $V \otimes X$, para todo $X \in {}^H\mathcal{M}$, $V \in \mathcal{M}_B$, si y sólo si, $\rightharpoonup: H \otimes B \to H$ es una medida.

2. *El mapa* $\Phi_{M,V,W} : (M \otimes V) \otimes W \to M \otimes (V \otimes W)$,

$$m \otimes v \otimes w \mapsto m\sigma(v_{(-1)} \otimes w_{(1)}) \otimes v_{(0)} \otimes w_{(0)},$$

es de B*-módulos, si y sólo si,* $(\rightharpoonup, \sigma)$ *es una acción torcida. Es un isomorfismo, si y sólo si,* σ *es invertible con respecto al producto convolución.*

3. *Asumiendo lo anterior, el par* $(\Phi, \otimes) : \mathcal{M}_B \times {}^H\mathcal{M} \to \mathcal{M}_B$ *es una estructura de categoría* ${}^H\mathcal{M}$*-módulo, si y sólo si,* σ *es un* 2*-cociclo.*

Demostración. Ver [65, Example 4.9] □

El álgebra H es una H-comódulo álgebra con la comultiplicación. Entonces podemos definir la categoría $(\mathcal{M}_B)_H$. Sea (V, μ) un H-módulo en $\mathcal{M}_B$, es decir $V \in \mathcal{M}_B$ y $\mu : V \otimes H \to V$ es un morfismo de B-módulos tal que

$$\mu(\mu \otimes \mathrm{id}_A) = \mu(\mathrm{id}_V \otimes m)\Phi_{M,A,A}.$$

En otras palabras, tenemos que

$$\mu(v \otimes h)b = \mu(v(h_{(1)} \rightharpoonup b) \otimes h_{(2)}), \tag{3.2.2}$$
$$\mu(\mu(v \otimes g) \otimes h) = \mu(v\sigma(g_{(1)} \otimes h_{(1)}) \otimes g_{(2)}h_{(2)}). \tag{3.2.3}$$

Si definimos una acción de $B\#_\sigma H$ por $v(b \otimes h) = \mu(vb)$, es fácil ver que las formulas (3.2.3), (3.2.2) implican que V es un $B\#_\sigma H$-módulo a derecha. Asimismo, es fácil ver que un morfismo en $(\mathcal{M}_B)_H$ induce un morfismo en $\mathcal{M}_{B\#_\sigma H}$. Por tanto, hemos definido un funtor $F : (\mathcal{M}_B)_H \to \mathcal{M}_{B\#_\sigma H}$.

La siguiente proposición es un caso particular de [65, Corollary 3.6].

Proposición 3.2.8. *El funtor* $F : (\mathcal{M}_B)_H \to \mathcal{M}_{B\#_\sigma H}$*, define una equivalencia de categorías.*

Demostración. Si V es un $B\#_\sigma H$-módulo, entonces V es un B-módulo a derecha por restricción, y el mapa $\mu : V \otimes H \to V, \mu(v \otimes v) = v(1\#h)$ cumple con las ecuaciones (3.2.3), (3.2.2). Esta asignación define un funtor $G : \mathcal{M}_{B\#_\sigma H} \to (\mathcal{M}_B)_H$. Es claro que F y G determinan una equivalencia. Esto termina la demostración de la proposición. □

Productos G-cruzados sobre álgebras conmutativas

Sean G un grupo y R un álgebra conmutativa. En este caso, una medida $\rightharpoonup : G \times R \to R$ es una acción de G por automorfismos de álgebras. El 2-cociclo $\sigma : G \times G \to R^*$ es un 2-cociclo normalizado con respecto a esta acción, donde R^* son las unidades de R:

$$[x \rightharpoonup \sigma(y, z)]\sigma(x, yz) = \sigma(xy, z)\sigma(x, y) \tag{3.2.4}$$
$$\sigma(x, 1) = \sigma(1, x) = 1, \tag{3.2.5}$$

para todo $x, y, z \in G$.

Supongamos que $R = k^X$ es el álgebra de funciones sobre un conjunto X. Entonces, una acción por automorfismos de álgebras $\rightharpoonup: G \times k^X \to k^X$, induce una acción de G por permutaciones sobre el conjunto X:

$$X \times G \to X, \quad (x, g) \mapsto x \triangleleft g,$$

tal que

$$g \rightharpoonup e_s = e_{x \triangleleft g}, \quad s \in X, g \in G.$$

Un 2-cociclo $\sigma : G \times G \to (k^X)^* = \mathrm{Map}(X, k^*)$, se puede ver como una función

$$\sigma : X \times G \times G \to k^*, \quad (x, g, h) \mapsto \sigma(x; g, h).$$

La condición de 2-cociclo normalizada es descrita por

$$\begin{aligned} \sigma(s \triangleleft x; y, z)\sigma(s, x, yz) &= \sigma(s; xy, z)\sigma(s; x, y), \\ \sigma(s, x, 1) &= \sigma(s, 1, x) = 1, \end{aligned}$$

para todo $x, y, z \in G$ y $s \in X$. El producto en $k^X \#_\sigma kG$ está dado por

$$\begin{aligned} (e_s \# g)(e_t \# h) &= e_s(g \rightharpoonup e_t)\sigma(g, h)\# gh = e_s \delta_{s, t \triangleleft g^{-1}} \sigma(g, h) \# gh \\ &= \delta_{s \triangleleft g, t} \sigma(s; g, h) e_s \# gh. \end{aligned}$$

Dado $x \in X$, denotaremos por $\mathcal{O}(x)$ la G-órbita de x.

Sea $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ un conjunto de representantes de las órbitas de G en X. Entonces, es fácil ver que

$$k^X \# G = \bigoplus_{i=1}^{n} k^{\mathcal{O}(x_i)} \#_\sigma G,$$

donde $k^{\mathcal{O}(x_i)} \#_\sigma G$ son ideales biláteros mutuamente ortogonales.

Por tanto, si queremos describir los $k^X \#_\sigma G$-módulos indescomponibles, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que el grupo G actúa transitivamente sobre X.

Supongamos que la acción de G en X es transitiva. Sea F el subgrupo estabilizador de un elemento $x \in X$. El mapa $\sigma_x : F \times F \to k$, definido por $\sigma_x(h, t) = \sigma(x; h, t)$, es un 2-cociclo de F con coeficientes en el F-módulo trivial k^*. Además, por el Lema de Shapiro, tenemos un isomorfismo $H^2(G, k^X) \cong H^2(F, k^*)$.

Teorema 3.2.9. *Sea $k^X \#_\sigma G$ un producto cruzado, tal que la acción inducida de G sobre X es transitiva. Entonces, existe una equivalencia de categorías entre $\mathcal{M}_{k_{\sigma_x} F}$ y $\mathcal{M}_{k^X \#_\sigma G}$, donde F es el subgrupo estabilizador $x \in X$. Si U es una representación de $k_{\sigma_x} F$ el $k^X \#_\sigma G$-módulo asociado es el módulo inducido $\mathrm{Ind}_{k^X \#_{\sigma_x} F}^{k^X \#_\sigma G}(U)$.*

Demostración. Ver [49, Theorem 1.3] □

Corolario 3.2.10. *Sea $V \in \mathcal{M}_{k_{\sigma_x} H}$ y V_0 el $\mathcal{M}_{k_{\sigma_x} H}$-módulo asociado en el teorema anterior. Entonces,* $\dim V = \frac{|G|}{|F|} \dim V_x$. □

3.3. Extensiones galoisianas para álgebras de Hopf de dimensión finita

En esta sección asumiremos que H es de dimensión finita.

Si A es una H-comódulo álgebra a derecha, entonces A es una H^*-módulo álgebra a izquierda con la acción $H^* \otimes A \to A$,

$$f \cdot h = h_{(0)} f(h_{(1)}),$$

para todo $f \in H^*, a \in A$. Recíprocamente, si A es una H^*-módulo álgebra a izquierda, A es una H-comódulo álgebra con la coacción $\rho : A \to A \otimes H$, $\rho(a) = \sum_{i=1}^n e_i^* \cdot a \otimes e_i$, para todo $a \in A$, donde $\{e_i^*\}$ es una base dual a la base $\{e_i\}$ de H. Además, es fácil ver que $A^{\operatorname{co} H} = A^{H^*}$.

Sea A una H-módulo álgebra. Entonces A es un $A\#H$-módulo a derecha vía $(a\#h) \cdot b = a(h \cdot b)$. Esta acción determina un morfismo de álgebras

$$\pi : A\#H \to \operatorname{End}_{A^H}(A),$$

donde A es un A^H-módulo vía la multiplicación a derecha.

Teorema 3.3.1. *Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita y A una H-módulo álgebra a izquierda. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- *La extensión $A^H \subset A$ es una extensión H^*-galoisiana a derecha.*
- *El morfismo de álgebras $\pi : A\#H \to \operatorname{End}_{A^H}(A)$ es un isomorfismo y A es un A^H-módulo a derecha finitamente generado y proyectivo.*

Demostración. Ver [47, Theorem 8.3.3]. □

Corolario 3.3.2. *Sea A una H-módulo álgebra a izquierda. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- *A es un H^*-objeto galoisiano.*
- *A es de dimensión finita y $\pi : A\#H \to \operatorname{End}_k(A)$ es un isomorfismo.*

Además, existe un 2-cociclo invertible $\sigma : H \otimes H \to k$, tal que $A \cong k\#_\sigma H^*$ como H^*-comódulo álgebras. Si H es semisimple, entonces A es semisimple.

Demostración. Las equivalencias son inmediatas por el Teorema 3.3.1.

Por [47, Proposition 8.3.6], $A \simeq k\#_\sigma H^*$, donde $\sigma : H \otimes H \to k$ es un 2-cociclo invertible, pues $A\#H \simeq \operatorname{End} A$ es artiniana simple. Ahora, por [47, Theorem 7.4.2] si H es semisimple y de dimensión finita, $A \simeq k\#_\sigma H$ es semisimple. □

Corolario 3.3.3. *Sea G un grupo finito. Entonces, todo objeto galoisiano de kG es isomorfo a $k_\alpha G$, para algún 2-cociclo $\alpha \in Z^2(G, k^*)$.* □

Observación 3.3.4. Con mayor generalidad, si A es un anillo fuertemente graduado tal que A_e es un cuerpo, es inmediato ver que A es un producto cruzado.

3.4. Objetos galoisianos de k^G

En esta sección k denotará un cuerpo algebraicamente cerrado y G será un grupo finito. Recordaremos la clasificación de Movshev-Davydov de los objetos galoisianos de k^G.

Un concepto importante en la clasificación es un grupo con un 2-cociclo no degenerado.

Definición 3.4.1. Sea G un grupo finito. Un 2-cociclo $\alpha \in Z^2(G, k^*)$ es llamado no degenerado si la condición $\alpha(g,h) = \alpha(h,g)$, para todo $h \in C_G(g)$, implica que $g = 1$ (aquí, $C_G(s)$ es el centralizador de g en G).

Notemos que un 2-cociclo cohomólogo a un 2-cociclo no degenerado también es no degenerado. Existe una correspondencia biyectiva entre grupos con 2-cociclos no degenerados y los llamados *grupos de tipo central*. Un grupo es de tipo central si posee una representación irreducible de dimensión igual al índice de su centro (la mayor posible). El cociente por el centro de un grupo de tipo central es un grupo con 2-cociclo no degenerado. Recíprocamente un grupo con un 2-cociclo no degenerado tiene una extensión central, la cual es un grupo de tipo central. Usando la clasificación de los grupo finitos simples, Howlett e Isaacs [28] probaron que los grupos de tipo central son solubles y por tanto los grupos que poseen un 2-cociclo no degenerado, también lo son.

Teorema 3.4.2 ([11], [50])**.** *Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado. Las clases de isomorfismo de objetos k^G-galoisianos están en correspondencia 1-1 con clases de conjugación de pares (S, α), donde S es un subgrupo de G, tal que $char(k) \nmid |S|$ y $\alpha \in Z^2(S, k^*)$ es un 2-cociclo no degenerado.*

El objeto k^G-galoisiano correspondiente al par (S, α) puede realizarse como el álgebra $A = Hom_S(kG, k_\alpha S)$, con acción $s \triangleright x_t = x_s x_t x_s^{-1}$, $s, t \in S$, y la G-acción sobre A por $(g.f)(h) = f(hg^{-1})$. $\square$

Observación 3.4.3. Una versión equivalente al Teorema 3.4.2 en el caso que k es el cuerpo de los números complejos, fue demostrado en [50] usando el lenguaje de deformaciones por *twist*. Ver Sección 4.2. Posteriormente, Davydov en [11] interpretó los resultados de Movshev en el lenguaje de objetos galoisianos y notó que *mutatis mutandis*, todos los argumentos usados en [50] son válidos en cuerpos algebraicamente cerrados de característica arbitraria.

3.5. Extensiones bigaloisianas

Definición 3.5.1. Sean H y L álgebras de Hopf. Un objeto L-H-bigaloisiano es una L-H-bicomódulo álgebra A, la cual es simultáneamente un objeto L-galoisiano a izquierda y un objeto H-galoisiano a derecha.

Definición 3.5.2. Sea H un álgebra de Hopf y A un objeto H-galoisiano derecha. Se define $L(A, H) = (A \otimes A)^{\mathrm{co}\, H}$, donde la estructura de H-comódulo sobre $A \otimes A$ es la codiagonal.

Teorema 3.5.3. *Sean H un álgebra de Hopf y A un objeto H-galoisiano a derecha. Entonces $L := L(A, H)$ es una subálgebra de $A \otimes A^{op}$. El álgebra L es un álgebra de Hopf con la comultiplicación, counidad y antípoda dadas por*

$$\begin{aligned}\Delta(\sum x_i \otimes y_i) &= \sum x_{i(0)} \otimes x_{i(1)}^{[1]} \otimes x_{i(1)}^{[2]} \otimes y_i,\\ \varepsilon(\sum x_i \otimes y_i) &= \sum x_i y_i \in A^{\operatorname{co} H} = k\\ S(\sum x_i \otimes y_i) &= \sum y_{i(0)} \otimes x_i \leftharpoondown y_{i(1)},\end{aligned}$$

donde $\leftharpoondown$ es la acción de Miyashita-Ulbrich. El álgebra A es un objeto L-H-bigaloisiano.

Para toda álgebra de Hopf B y estructura de B-comódulo ϕ sobre A, la cual hace a A un objeto B-H-bigaloisiano, existe un único isomorfismo de álgebras $f : L \to B$, tal que $\phi = (f \otimes \mathrm{id}_A)\delta$.

Demostración. Ver [64, Theorem 3.5]. □

Sea A un objeto H-galoisiano hendido. Entonces, $A \cong k\#_\sigma H$, para un cociclo invertible $\sigma : H \otimes H \to k$. Podemos construir una nueva álgebra de Hopf H^σ, manteniendo la estructura de coálgebra y deformando el producto por

$$h \cdot_\sigma g = \sigma(h_{(1)\otimes g_{(1)}})h_{(2)}g_{(2)}\sigma^{-1}(h_{(3)} \otimes g_{(3)}),$$

para todo $h, g \in H$.

Observación 3.5.4. Sea $\gamma : H \to k$ un funcional invertible con respecto al producto convolución. Si $\sigma : H \otimes H \to k$ es un 2-cociclo, entonces $\sigma^\gamma = \sigma(x, y)\gamma(x_{(1)})\gamma(y_{(1)})\gamma^{-1}(x_{(2)}y_{(2)})$, es de nuevo un 2-cociclo. A los 2-cociclos σ^γ y σ los llamaremos Hopf-cohomólogos.

Proposición 3.5.5. *Sean H un álgebra de Hopf y A un objeto H-galoisiano a derecha hendido. Entonces A es un objeto $L(A, H)$-galoisiano a izquierda hendido. Si $A \cong k\#_\sigma H$, entonces $L \cong H^\sigma$ y $A \cong H^\sigma\#_\sigma k$, como H^σ-comódulo álgebra a izquierda.*

Demostración. El álgebra $k\#_\sigma H$ es una H-comódulo álgebra a izquierda vía $\delta_l(1\#h) = h_{(1)} \otimes 1\#h_{(2)}$. Asimismo, es una H^σ-comódulo álgebra a izquierda pues

$$\begin{aligned}\delta_l((1\#g)(1\#h)) &= \delta_l(\sigma(g_{(1)}, h_{(1)})\#g_{(2)}h_{(2)})\\ &= \sigma(g_{(1)}, h_{(1)})g_{(2)}h_{(2)} \otimes 1\#g_{(3)}h_{(3)}\\ &= g_{(1)} \cdot h_{(1)} \otimes (1\#g_{(2)})(1\#h_{(2)}).\end{aligned}$$

El isomorfismo de H-comódulos a izquierda $\phi : H^\sigma\#_\sigma k \to k\#_\sigma H$, $g\#1 \mapsto g\#1$, es un isomorfismo de álgebras:

$$\begin{aligned}\phi((g\#1)(h\#1)) = (1\#g)(1\#h) &= \sigma(\sigma_{(1)}, h_{(1)})\#g_{(2)}h_{(2)}\\ &=\phi(\sigma_{(1)}, h_{(1)}g_{(2)}h_{(2)}\#1)\\ &=g_{(1)} \cdot h_{(1)}\#\sigma(g_{(2)}, h_{(2)}).\end{aligned}$$

Ahora, dado que el producto cruzado $H^\sigma\#_\sigma k$ es un objeto H^σ-galoisiano, la demostración sigue de la propiedad universal de $L(A, H)$. □

Capítulo 4

Deformaciones simples de álgebras de Hopf

En este capítulo trabajaremos sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado de característica cero. Mostraremos ejemplos de grupos finitos no simples, cuyas álgebras de grupo admiten deformaciones por *twist* que son simples como álgebras de Hopf.

4.1. Normalidad y conormalidad

Definición 4.1.1. Sea H un álgebra de Hopf. Una subálgebra de Hopf $K \subseteq H$ es llamada normal a derecha (respectivamente, a izquierda) si

$$x_{(1)}yS(x_{(2)}) \in K, \quad \text{(respectivamente, } S(x_{(1)})yx_{(2)} \in K),$$

para todo $x \in H, y \in K$. Diremos que K es una subálgebra de Hopf *normal* si K es normal a derecha e izquierda.

Análogamente, si $\pi : H \to Q$ es un epimorfismo de álgebras de Hopf e $I \subseteq H$ es el coideal de Hopf asociado, entonces π es llamado conormal a derecha (respectivamente conormal a izquierda), si

$$x_{(1)}S(x_{(3)}) \otimes x_{(2)} \in H \otimes I \quad (\text{ respectivamente } x_{(2)} \otimes S(x_{(1)})x_{(3)} \in I \otimes H),$$

para todo $x \in I$. Diremos que π es un cociente *conormal* si π es conormal a derecha e izquierda.

Para un subespacio vectorial $V \subseteq H$, denotaremos por $V^+ : \mathrm{Ker}(\varepsilon) \cap V$.

Lema 4.1.2. *Sea H un álgebra de Hopf.*

(i) Sea $K \subseteq H$ una subálgebra de Hopf normal a izquierda. Entonces, H/K^+H es un cociente de álgebras de Hopf.

(ii) Sea $\pi : H \to Q$ un cociente conormal a derecha. Entonces, $K := H^{\operatorname{co} Q}$ es una subálgebra de Hopf.

Demostración. Ver [60, Lemma 3.2.2]. □

Luego, si $K \subseteq H$ es una subálgebra de Hopf normal a izquierda, tenemos una sucesión de álgebras de Hopf

$$k \to K \hookrightarrow H \twoheadrightarrow H/K^+H \to k.$$

Análogamente, si $H \to Q$ es un epimorfismo de álgebras de Hopf normal a derecha, tenemos asociada la sucesión de álgebras de Hopf

$$k \to H^{\operatorname{co} H/I} \hookrightarrow H \twoheadrightarrow Q \to k.$$

Definición 4.1.3. Una sucesión de álgebras de Hopf $K \overset{\iota}{\hookrightarrow} H \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} Q$ es llamada *exacta* si

(i) $\operatorname{Ker} \pi = HK^+$,

(ii) $B = {}^{\operatorname{co} Q}H$.

Lema 4.1.4. *Sea $K \overset{\iota}{\hookrightarrow} H \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} Q$ una sucesión de álgebras de Hopf de dimensión finita. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $H/K^+H = H$,

(ii) A/HK^+,

(iii) $K = A^{\operatorname{co} Q}$,

(iv) $K = {}^{\operatorname{co} Q}A$.

Demostración. Ver [44, Lemma 3.1]. □

Se sigue que si H es un álgebra de Hopf de dimensión finita, entonces toda subálgebra de Hopf normal a derecha es normal a izquierda, y por lo tanto, normal. Análogamente para cocientes conormales a derecha o izquierda.

Teorema 4.1.5. *Para toda sucesión exacta $K \overset{\iota}{\hookrightarrow} H \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} Q$ de álgebras de Hopf de dimensión finita, la Q-extensión $K \subseteq H$ es una extensión Q-galoisiana con base normal.*

Demostración. Ver [68, Theorem 2.4]. □

Observación 4.1.6. Se sigue del Teorema 3.2.5, que H es isomorfa a un producto cruzado $K\#_\sigma Q$.

Ejemplo 4.1.7. Una subálgebra de Hopf $K \subset H$ es llamada *central* si K está contenida en el centro de H. Es claro que en este caso K es normal. En forma dual un epimorfismo de álgebras de Hopf $\pi : H \to Q$ es llamado *cocentral* si $\pi(h_{(1)}) \otimes h_{(2)} = \pi(h_{(2)}) \otimes h_{(1)}$, para todo $h \in H$.

Recordaremos la siguiente proposición para futuros usos:

Proposición 4.1.8. *Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita y sea $K \subseteq H$ una subálgebra de Hopf normal, tal que $\dim_k K$ es el menor primo que divide $\dim_k A$. Entonces K es central.*

Demostración. Ver [35, Corollary 1.4.3]. □

4.2. *Twist* de álgebras de Hopf

Definición 4.2.1. Sea H un álgebra de Hopf. Un elemento invertible $J \in H \otimes H$ es llamado un *twist* si:

$$(\Delta \otimes \mathrm{id})(J)(J \otimes 1) = (\mathrm{id} \otimes \Delta)(J)(1 \otimes J), \tag{4.2.1}$$

$$(\varepsilon \otimes \mathrm{id})(J) = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(J) = 1. \tag{4.2.2}$$

Ejemplo 4.2.2. Sean G un grupo abeliano y k un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero. En este caso, $k\widehat{G} \cong (kG)^*$, entonces dado un 2-cociclo $\omega \in Z^2(\widehat{G}, k^*)$ el *twist* asociado es

$$J = \sum_{\alpha,\beta} \omega(\alpha, \beta) e_\alpha \otimes e_\beta, \tag{4.2.3}$$

donde $e_\xi = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \xi(h^{-1})h$, $\xi \in \widehat{G}$, es la base de kG de idempotentes centrales ortogonales.

Si $J \in H \otimes H$ es un *twist* para H, podemos definir una nueva estructura de álgebra de Hopf (A^J, m, Δ^J) sobre el álgebra $(A, m, 1)$, llamado un *twisting* de A.

El coproducto esta dado por la fórmula

$$\Delta^J(x) = J^{-1}\Delta(x)J.$$

Si (H, R) es cuasi-triangular entonces H^J también es cuasi-triangular con $R^J = J_{21}^{-1} R J$.

Si H es un álgebra de Hopf de dimensión finita, entonces el funtor de olvido $U : {}_H\mathcal{M} \to k$ es un funtor de fibra.

Dado un *twist* $J \in H \otimes H$, podemos definir un nuevo funtor de fibra $(U, \xi) : {}_H\mathcal{M} \to \mathrm{Vec}_k$, donde U es el funtor de olvido y $\xi_{V,W} : V \otimes W \to V \otimes W$, $\xi_{V,W}(v \otimes w) = J(v \otimes w)$.

En efecto, la ecuación (4.2.1) es equivalente a (2.1.1) y la ecuación (4.2.2) es equivalente a (2.1.2). El álgebra de Hopf H^J es obtenida aplicando a este nuevo funtor la reconstrucción Tannakiana.

Lema 4.2.3. *Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita. Existe una correspondencia biyectiva entre* twists *de H y objetos galoisianos de H^*.*

Demostración. Sean H un álgebra de Hopf de dimensión finita y $J \in H \otimes H$ un elemento invertible. Si definimos un nuevo coproducto en H por la fórmula

$$\Delta_J(x) = J\Delta(x), \quad x \in H,$$

éste es coasociativo, si sólo si, $(\Delta \otimes \mathrm{id})(J)(J \otimes 1) = (\mathrm{id} \otimes \Delta)(J)(1 \otimes J)$ y $\varepsilon : H \to k$ es la counidad, si y sólo si, $(\varepsilon \otimes \mathrm{id})(J) = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(J) = 1$.

Notemos que esta es la construcción dual del producto cruzado $k\#_\sigma H$ para un 2-cociclo $\sigma : H \otimes H \to k$. Entonces, cada *twist* define un objeto H^*-galoisiano hendido. Recíprocamente, dado que todo objeto galoisiano para un álgebra de Hopf de dimensión finita es hendido, éste define un 2-cociclo, el cual define a su vez un único *twist* para H. $\square$

Si $J \in K \otimes K$ es un *twist* para una subálgebra de Hopf $K \subseteq H$, entonces $J \otimes J \in H$ es un *twist*. Diremos que J es *levantado* de la subálgebra de Hopf K.

Corolario 4.2.4. *Sean G un grupo finito y k un cuerpo algebraicamente cerrado. Los* twists *del álgebra de Hopf kG están en correspondencia biyectiva con pares (F, α), donde F es un subgrupo de G tal que $char(k) \nmid |F|$ y $\alpha \in Z^2(F, k^*)$ es un 2-cociclo no degenerado.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata del Teorema 3.3.3 y el Lema 4.2.3. $\square$

El siguiente lema se sigue de [20]. Ver también [40, Lemma 2.11].

Lema 4.2.5. *Sea $J \in kG \otimes kG$ un* twist *asociado a un par (F, ω). Entonces $(kG)^J$ es coconmutativa si y solo si $F \trianglelefteq G$, F es abeliano y ω es $\mathrm{ad}\, G$-invariante en $H^2(F, k^*)$.* $\square$

Proposición 4.2.6. *Sean H un álgebra de Hopf y $J \in H \otimes H$ un* twist. *Entonces existe una correspondencia biyectiva entre cocientes de H y cocientes de H^J. En forma dual, si $\sigma : H \otimes H \to k$ es un 2-cociclo invertible, entonces existe una correspondencia biyectiva entre subálgebras de Hopf de H y subálgebras de Hopf H^σ*

Demostración. Si $\pi : H \to Q$ es un epimorfismo de álgebras de Hopf, y $J \in H \otimes H$ es un *twist*, entonces $J' := (\pi \otimes \pi)(J) \in Q \otimes Q$ es un *twist*, y el morfismo de álgebras $\pi : H^J \to Q^{J'}$, es un morfismo de álgebras de Hopf.

Notemos que $J^{-1} \in H \otimes H$ es un *twist* para H^J y $(H^J)^{J^{-1}} = H$. Además, $(\pi \otimes \pi)(J^{-1})(\pi \otimes \pi)(J) = (\pi \otimes \pi)(J^{-1}J) = 1 \otimes 1$. Es decir que $(\pi \otimes \pi)(J)^{-1} = (\pi \otimes \pi)(J^{-1})$. Por lo tanto, si $p : H^J \to W$ es un epimorfismo de álgebra de Hopf, el *twist* J^{-1} induce $\pi : H \to W^{p \otimes p(J^{-1})}$. Es claro que estas construcciones inducen una biyección entre los cocientes de H y H^J.

La segunda parte se demuestra en forma análoga. $\square$

Álgebras de Hopf semisolubles y *twisting* de grupos nilpotentes

Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita sobre k.

Definición 4.2.7. [49]. Una *serie normal inferior* para H es una serie de subálgebras de Hopf propias $H_n = k \subset H_{n-1} \subset \cdots \subset H_1 \subset H_0 = H$, donde H_{i+1} es normal en H_i, para todo i. Los *factores* de la serie son los cocientes $\overline{H}_i = H_i/H_iH_{i+1}^+$.

Una *serie normal superior* para H se define en forma inductiva como sigue. Sea $H_{(0)} = H$. Sean H_i un subálgebra de Hopf normal de H_{i-1} y $H_{(i)} := H_{(i)}/H_{(i)}H_i^+$. Asumamos que $H_n = H_{(n-1)}$, para algún entero positivo n, tal que $H_{(n)} = k$. Los *factores* de la serie son las subálgebras de Hopf H_i de los cocientes $H_{(i)}$.

Sean G un grupo finito y sea $A = (kG)^J$ una deformación por *twist*, con *twist* levantado de un subgrupo F.

Lema 4.2.8. *Sea $Z \subset G$ un subgrupo central. Entonces $kZ \subset A$ es una subálgebra de Hopf central y $A/A(kZ)^+ \cong (kG/Z)^{\overline{J}}$.*

Demostración. Dado que $A = kG$ como álgebras, kZ es central y $\Delta^J(a) = a \otimes a$ para todo $a \in kZ$. Sea $\pi : kG^J \to k(G/Z)^{\overline{J}}$ el morfismo de álgebra de Hopf inducido por la proyección $G \to G/Z$. Dado que $kZ \subset A^{\mathrm{co}\,\pi}$ y $\dim A = \dim A^{\mathrm{co}\,\pi} \dim \pi(A)$, $kZ = A^{\mathrm{co}\,\pi}$. □

Teorema 4.2.9. *Supongamos que G es un grupo finito nilpotente. Entonces*

1. *A tiene una serie normal superior con factores $k\mathbb{Z}_p$, $p | \dim A$, un número primo.*

2. *A tiene una serie normal inferior cuyos factores son conmutativos.*

En particular, A es semisoluble en el sentido [49].

Demostración. (1) Dado que G es nilpotente, $Z(G) \neq 1$. Sea $Z \subset Z(G)$ un subgrupo de orden p, p primo. Sea $H_1 = kZ \cong k\mathbb{Z}_p$ y $H_{(1)} = A/AH_1^+$. Por el Lema 4.2.8, $H_{(1)} \cong k(G/Z)^{\overline{J}}$. Dado que G/Z es nilpotente, (1) sigue por inducción en $|G|$.

(2) Sea $F \subset G$ un subgrupo, tal que $J \in kF \otimes kF$ es minimal. Dado que todo subgrupo de un grupo nilpotente es subnormal [56], tenemos $F_0 = F \lhd F_1 \lhd \cdots \lhd F_n = G$. Entonces,

$$H_0 = kF^J \lhd H_1 = kF_1^J \lhd \cdots \lhd H_n = kF_n^J = kF^J, \tag{4.2.4}$$

es parte de una serie normal inferior de A con factores $k[F_{i+1}/F_i]$, pues $J \in kF_i$, para todo i. Dado que F es soluble, existe una serie normal superior $H_{(0)} = kF^J \twoheadrightarrow H_{(1)} \cdots \twoheadrightarrow H_{(s)} = k$. Además, $kF^J \cong (kF^J)^*$ puesto que kF^J es minimal. Luego el dual de esta serie, esto es, $k \hookrightarrow H_{(1)}^* \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow (kF^J)^* \cong kF^J$, es una serie normal inferior para kF^J que completa la serie (4.2.4). □

4.3. Deformaciones simples del grupo simétrico

En esta sección G denotará un grupo finito y $F \subseteq G$ un subgrupo abeliano. Sea $A = (kG)^J$, donde $J \in kG \otimes kG$ es un *twist* (no necesariamente minimal) levantado de kF. Ver Ejemplo 4.2.2.

Observación 4.3.1. Si H es un álgebra de Hopf de dimensión finita, $G(H^*)$ es el conjunto de morfismos de álgebras $H \to k$ con el producto convolución. En particular, para $A = (kG)^J$, $G(A^*) = \widehat{G}$.

Teorema 4.3.2. *Supongamos que $Z(G) = 1$. Sea $\eta \in \widehat{G}$. Entonces $\eta \in G(A^*) \cap Z(A^*)$ si y sólo si $\eta|_H$ es ω-regular.*

Si ω es no degenerado, $\eta \in G(A^*) \cap Z(A^*)$ si y sólo si $\eta|_F = 1$.

Aquí, $\eta|_F$ denota la restricción de η a F.

Demostración. El álgebra de Hopf A es triangular con R-matriz

$$R = J_{21}^{-1} J = \sum_{\alpha,\beta \in \widehat{F}} \omega(\alpha, \beta)\omega^{-1}(\beta, \alpha) e_\alpha \otimes e_\beta.$$

Dado que $Z(G) = 1$, tenemos que $Z(A) \cap G(A) = 1$. Por la parte 2 de la Proposición 2.6.2, $\eta \in G(A^*) \cap Z(A^*)$ si y sólo si $f(\eta) = 1$. Sea $\eta \in G(A^*)$. Por las relaciones de ortogonalidad, $\eta(e_\chi) = \delta_{\chi,\eta|_F}$, para todo $\chi \in \widehat{F}$. Entonces,

$$f(\eta) = \sum_{\alpha,\beta \in \widehat{F}} \omega(\alpha, \beta)\omega^{-1}(\beta, \alpha) e_\alpha \eta(e_\beta) = \sum_{\alpha \in \widehat{F}} \omega(\alpha, \eta|_F)\omega^{-1}(\eta|_F, \alpha) e_\alpha.$$

Luego, $f(\eta) = 1$ si y sólo si $\omega(\chi, \eta|_F)\omega^{-1}(\eta|_F, \chi) = 1$, $\forall \chi \in \widehat{F}$. □

Corolario 4.3.3. *Supongamos que ω es no degenerado. Entonces el orden de F divide a $[A^* : G(A^*) \cap Z(A^*)]$.*

Demostración. En este caso, $\eta|_F = 1$, para todo $\eta \in G(A^*) \cap Z(A^*)$, por el Teorema 4.3.2. Entonces la proyección $A \to k(G(A^*) \cap Z(A^*))^*$ se restringe trivialmente a F. El corolario sigue del Teorema de Nichols-Zoeller [38]. □

Sea $\pi : A \to kS$ un cociente de álgebras de Hopf con S un grupo abeliano. Entonces el grupo $\widehat{S} \cong S$ puede identificarse con un subgrupo de $G(A^*)$.

Teorema 4.3.4. *Supongamos que $Z(G) = 1$. Sea $\pi : A \to kS$ un cociente de álgebras de Hopf, donde $S \cong \mathbb{Z}_p$ y p es el menor primo que divide a $|G|$. Entonces, π es normal si y sólo si $\mu|_F$ es ω-regular, para todo $\mu \in \widehat{S}$. Supongamos que ω es no degenerado. Entonces, π es normal si y sólo si $\mu|_F = 1$, para todo $\mu \in \widehat{S}$.*

Demostración. Por el Teorema 4.3.2, la condición $\omega(\chi, \mu|_F) = \omega(\mu|_F, \chi)$, para todo $\chi \in \widehat{S}$, $\mu \in \widehat{S}$, es equivalente a $\widehat{S} \subset Z(A^*) \cap G(A^*)$. En vista de la Proposición 4.1.8 esto es equivalente a que π sea normal. $\square$

Sea $\pi : \mathbb{S}_n \to \mathbb{Z}_2$ $(n \geq 5)$ el único epimorfismo de grupos no trivial, es decir $\operatorname{Ker} \pi = \mathbb{A}_n$. Sea $F \subseteq \mathbb{S}_n$ un subgrupo abeliano, y sea $A = (k\mathbb{S}_n)^J$ un *twisting* con $J \in kF \otimes kF$ dado por (4.2.3). Por la proposición 4.2.6, el mapa $\pi : A \to k\mathbb{Z}_2$ es un epimorfismo de álgebras de Hopf.

Denotaremos por $\sigma : \mathbb{S}_n \to k^*$ la representación signo.

Corolario 4.3.5. *$\pi : A \to k\mathbb{Z}_2$ es normal si y sólo si $\sigma|_F$ es ω-regular.*

Supongamos que ω es no degenerado. Entonces π es normal si y sólo si $F \subseteq \mathbb{A}_n$. $\square$

Sea $n \geq 4$. Consideremos el subgrupo abeliano $F =< t_1, t_2 >\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ de $\mathbb{S}_n$, generado por las transposiciones $t_1 = (12)$, $t_2 = (34)$.

Tenemos que $\widehat{F} =< a_1, a_2 >$, donde $a_i(t_j) = 1$ si $i \neq j$, y $a_i(t_i) = -1$.

Sea ω el único 2-cociclo no trivial de $\widehat{F}$, salvo cobordes. Entonces, ω es no degenerado. Sea $J \in kF^{\otimes 2}$ el *twist* correspondiente.

Teorema 4.3.6. *Supongamos que $n \geq 5$. Entonces $(k\mathbb{S}_n)^J$ es simple.*

Demostración. En este caso $\pi : \mathbb{S}_n \to \mathbb{Z}_2$ es el único cociente no trivial de $\mathbb{S}_n$. Dado que las deformaciones por *twist* preservan los cocientes de álgebras de Hopf, $A = (k\mathbb{S}_n)^J$ tiene un único cociente no trivial $\pi : A \to k\mathbb{Z}_2$. Puesto que $F \nsubseteq \mathbb{A}_n$, por el Corolario 4.3.5, π no es normal. Entonces $(k\mathbb{S}_n)^J$ es simple, como se había afirmado. $\square$

Observación 4.3.7. Sea $A = (k\mathbb{S}_n)^J$ como en el teorema 4.3.6. Entonces A^* es simple y no es una deformación por *twist* de ningún grupo. De lo contrario A^* y A serían cuasi-triangulares y simples, luego $G(A) \cong G(A^*)$ [55, Proposition 4]. Pero este no es el caso, dado que $F \subseteq G(A)$ y $|G(A^*)| = 2$.

Otra familia de ejemplos proviene de la construcción en [6]. Denotemos por t_i la transposición $(2i-1, 2i) \in \mathbb{S}_{2n}$, $1 \leq i \leq n$. Consideremos el subgrupo abeliano $F =< t_i, 1 \leq i \leq n >\cong (\mathbb{Z}_2)^n$ de $\mathbb{S}_{2n}$.

Tenemos que $\widehat{F} =< a_i : 1 \leq i \leq n >$, donde $a_i(t_j) = 1$ si $i \neq j$, y $a_i(t_i) = -1$. Notemos que $\sigma|_F = a_1 a_2 \cdots a_n$.

Consideremos el bicarácter $\omega : \widehat{F} \times \widehat{F} \to k^*$, $\omega(a_i, a_j) = -1$, $i < j$, $\omega(a_i, a_j) = 1$, $i \geq j$. Este ejemplo no cumple las condiciones de la Proposición 4.3.5, para $n \geq 2$ par y $a = a_1$, dado que $\omega(\sigma|_F, a_1) = (-1)^{n-1} = -1$, mientras que $\omega(a_1, \sigma|_F) = 1$. Sea J el *twist* correspondiente.

Teorema 4.3.8. *Supongamos que $n \geq 3$, n es par. Entonces $(k\mathbb{S}_{2n})^J$ es simple.*

Demostración. De nuevo, en este caso, $\pi : \mathbb{S}_n \to \mathbb{Z}_2$ es el único cociente no trivial de $\mathbb{S}_n$. Luego, $A = (k\mathbb{S}_n)^J$ sólo tiene un cociente no trivial $\pi : A \to k\mathbb{Z}_2$. Por el Teorema 4.3.6 π no es normal. Entonces $(k\mathbb{S}_n)^J$ es simple. $\square$

Observación 4.3.9. Veamos que para todo *twist* $J \in k\mathbb{S}_4 \otimes k\mathbb{S}_4$, $(k\mathbb{S}_4)^J$ no es simple; ver [35, Chapter 6]. Sabemos, por el Corolario 4.2.4, que todo subgrupo minimal F para J es un subgrupo cuyo orden es un cuadrado y admite un 2-cociclo no degenerado. Entonces, para $k\mathbb{S}_4$, un *twist* debe ser un levantamiento desde un subgrupo F de orden 4 isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Afirmación 4.3.10. *Sea $A = (k\mathbb{S}_4)^J$, donde J es un* twist *levantado desde un subgrupo $F \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, el cual no es normal y $\omega \neq 1$. Entonces $G(A) \cong D_4$.*

Demostración. Sea $D \cong D_4$ el 2-subgrupo de Sylow de $\mathbb{S}_4$ que contiene a F. Entonces existe una inclusión de álgebras de Hopf $kF \cong (kF)^J \hookrightarrow (kD)^J \hookrightarrow (k\mathbb{S}_4)^J$.

Dado que $(kD)^J$ no es conmutativo y de dimensión 8, $(kD)^J \cong kD$ como álgebra de Hopf [73]. Entonces 8 divide $|G((k\mathbb{S}_4)^J)|$.

Como H no contiene subgrupos que sean normales en $\mathbb{S}_4$, por [20], $(k\mathbb{S}_4)^J$ no es conmutativa ni coconmutativa. Entonces $|G((k\mathbb{S}_4)^J)| = 8$ y $G(A) \cong D \cong D_4$. $\square$

Sea $B = \mathbb{S}_4/K \cong \mathbb{S}_3$, y $\zeta : (k\mathbb{S}_4)^J \to (k\mathbb{S}_3)^{\zeta(J)} \cong k\mathbb{S}_3$. Afirmamos que ζ es normal.

En efecto, tenemos que $\dim A^{\operatorname{co} B} = 4$. Entonces, $\dim A^{\operatorname{co} B} \cap kG(A) = \dim kG(A)^{\operatorname{co} B} = 1, 2, 4$, pues $|kG(A)| = 8$. Además, $\dim kG(A)^{\operatorname{co} B} \dim \zeta(kG(A)) = 8$. Si $\dim kG(A)^{\operatorname{co} B} = 1, 2$, entonces $\dim \zeta(kG(A)) = 8, 4$, lo cual es imposible. Entonces $\dim A^{\operatorname{co} B} \cap kG(A) = 4$. Esto es, $A^{\operatorname{co} B} \subset kG(A)$. Por lo tanto $A^{\operatorname{co} B}$ es una subálgebra de Hopf normal.

4.4. Deformaciones de una familia de grupos supersolubles

Grupos no abelianos de orden pq

Sea G un grupo de orden pq con p y q números primos, tales que $q > p$. Denotaremos por $\mathbb{Z}_m$ un grupo cíclico de orden m.

Por el teorema de Sylow, G posee un subgrupo normal P de orden p. Si Q es un q-subgrupo de Sylow, entonces $PQ = G$ y $P \cap Q = \{e\}$. Por lo tanto, $G \cong P \rtimes Q$ es un producto semidirecto de P por Q.

Veamos ahora cuales son las posibles acciones de $Q = \mathbb{Z}_q$ en $P = \mathbb{Z}_p$. Recordemos que $\operatorname{Aut}(Q) \cong \mathbb{Z}_{q-1}$. Si p no divide a $q-1$, la única acción posible de P sobre Q es trivial y por tanto G es isomorfo al producto directo de P y Q. Si p divide a $q-1$, entonces $\operatorname{Aut}(Q)$ tiene un único subgrupo P' de orden p, y por tanto un único producto semidirecto salvo isomorfismo.

Supongamos ahora que G es el único grupo no abeliano de orden pq. Veamos como es la estructura del álgebra de grupo kG.

Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado cuya característica no divide a pq. Entonces como una aplicación del *método de grupos pequeños de Mackey*, ver [10, Proposition 11.8], todo kG-módulo irreducible es el inducido de un $k\mathbb{Z}_q$-módulo irreducible, donde $\mathbb{Z}_q \subseteq G$ es el subgrupo normal de orden q.

Dado que cada $k\mathbb{Z}_q$-módulo irreducible tiene dimensión uno entonces, como álgebras,

$$kG \cong k^{(q)} \times \underbrace{M_q(k) \times \cdots \times M_q(k)}_{p-1\,\text{copias}}. \tag{4.4.1}$$

Deformación simple

Recordemos que un grupo F es llamado *supersoluble* si posee una serie normal

$$1 = S_0 \trianglelefteq S_2 \trianglelefteq \dots S_n = F,$$

tal que cada cociente S_{i+1}/S_i es cíclico y cada S_i es normal en F.

Sean p, q y r números primos tal que q divide a $p-1$ y $r-1$. Sean $G_1 = \mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_q$ y $G_2 = \mathbb{Z}_r \rtimes \mathbb{Z}_q$ los únicos grupos abelianos de orden pq y rq, respectivamente.

Sea $G = G_1 \times G_2$ y sea $\mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_q \cong F \subseteq G$ un subgrupo de orden q^2. En particular, G es supersoluble y $Z(G) = 1$.

Sea $1 \neq \omega \in H^2(\widehat{F}, k^*)$, $J \in kG \otimes kG$, el *twist* levantado desde H correspondiente a ω. Sea $A = (kG)^J$. Notemos que el 2-cociclo ω es no degenerado. Además, A es un álgebra de Hopf no trivial de dimensión prq^2.

Lema 4.4.1. *$A \cong k^{(q^2)} \times \underbrace{M_q(k) \times \cdots \times M_q(k)}_{p+r-2\ copias} \times \underbrace{M_{q^2}(k) \times \cdots \times M_{q^2}(k)}_{\frac{(p-1)(r-1)}{q^2}\ copias}$ como un álgebra.*

Demostración. Como álgebra, $A = kG \simeq kG_1 \otimes kG_2$, entonces cada G-módulo irreducible es de la forma $V_1 \otimes V_2$, donde V_i es un kG_i-módulo irreducible, $i = 1, 2$ y la acción esta dada por $(g, h)v \otimes w = gv \otimes hw$. El lema se sigue de (4.4.1). $\square$

La estructura de coálgebra de A sigue de [20], en particular se tiene:

Lema 4.4.2. *$G(A) \cong F$ tiene orden q^2.* $\square$

Demostración. Para cada $g \in G$, sea $F_g := F \cap gFg^{-1}$, y sea ω_g el 2-cociclo sobre F_g dado por $\omega_g(x, y) = \omega^{-1}(g^{-1}xg, g^{-1}yg)\omega(x, y)$.

Por [20], las representaciones irreducibles de A^* están clasificadas por pares $(\bar{g}, X)$, donde $\bar{g} \in F\backslash G/F$ es una coclase doble módulo F y X es una representación irreducible de el álgebra de grupo torcida $k_{\omega_g}F_g$. La dimensión de la representación $W_{\bar{g},X}$ correspondiente a $(\bar{g}, X)$ es $\dim W_{\bar{g},X} = [F : F_g] \dim X$.

Notemos que $\omega_e = 1$ sobre $F_e = F$. Entonces, $\dim W_{\bar{1},X} = 1$, para todas las posibles elecciones de X, dando $|F|$ representaciones de distintas de dimensión uno.

Además, $\dim W_{\bar{g},X} = 1$ si y sólo si $F_g = F$ y $\dim X = 1$. Esto es, si y sólo si, $g \in N_G(F)$ y $\dim X = 1$. En nuestro ejemplo, $N_G(F) = F$. Luego, si $\dim W_{\bar{g},X} = 1$, entonces $\bar{g} = \bar{1}$ y no hay más representaciones de dimensión 1. $\square$

Lema 4.4.3. *Supongamos que A no es simple y sea $K \subseteq A$ una subálgebra de Hopf normal propia. Entonces* $\dim K = pq$ *o* rq.

Además, K es necesariamente conmutativa y no coconmutativa y existe una sucesión exacta de una de las siguientes formas

$$k \to k^{G_1} \to A \to kG_2 \to k, \quad k \to k^{G_2} \to A \to kG_1 \to k.$$

Demostración. Sea $B = A/AK^+$. Entonces existe una inclusión de álgebras de Hopf $B^* \subseteq A^*$ y B^* es normal en A^*. Dado que $Z(G) = 1$, tenemos que $G(A) \cap Z(A) = 1$. En particular, $\dim K \neq q$ [81]. Supongamos que $\dim B^* = q$. Entonces $B^* = kG(B^*)$ y $G(B^*) \subseteq G(A^*) \cap Z(A^*)$. Dado que ω es no degenerado, el Corolario 4.3.3 implica que $q^2 | [A^* : B^*] = prq$, lo cual es imposible. Entonces $\dim B \neq q$.

Si $\dim B = q^2p, q^2r, q^2$, entonces $\dim K = r, p, pr$ y K es un álgebra de grupo o el dual de un álgebra de grupo [81, 46, 21, **?**]. Luego, A tiene elementos de tipo grupo de orden p o r, contradiciendo el hecho de que $|G(A)| = q^2$.

Entonces, $\dim K = pq, rq$. Dado que $|G(A)| = q^2$, $K \cong k^{G_1}$ o k^{G_2}. Análogamente, estas son las únicas posibilidades para B^*. □

Observación 4.4.4. Los resultados de [20] implican que $A^* \cong A$ como álgebras. Una vez establecida la simplicidad de A, mostraremos en la Subsección 4.4 que $A^{*\,\mathrm{cop}} \cong A$ como álgebras de Hopf.

Teorema 4.4.5. *A es simple como álgebra de Hopf.*

Demostración. Supongamos que no. Calcularemos las dimensiones de los A-módulos irreducibles para obtener una contradicción. Por el Lema 4.4.3, sin perdida de generalidad, podemos asumir que A es un producto cruzado $A \cong k^{G_1} \#_\sigma kG_2$.

Por el Teorema 3.2.9, los A-módulos irreducibles están clasificados por pares (x, U), donde x es un representante de una órbita de la acción de G_2 sobre G_1 y U es una representación proyectiva irreducible del estabilizador $(G_2)_x$ de x.

Por el Corolario 3.2.10, el módulo irreducible $W_{(x,U)}$ correspondiente a (x, U) tiene dimensión $\dim W_{(x,U)} = [G_2 : (G_2)_x] \dim U$.

Entonces, la dimensión de un A-módulo irreducible no puede ser q^2. Lo cual contradice el Lema 4.4.1. Esto concluye la demostración del teorema. □

Tomando $p = r$ en el Teorema 4.4.5 obtenemos:

Teorema 4.4.6. *Sean p, q, números primos, tales que $q | p - 1$. Entonces existe un álgebra de Hopf semisimple de dimensión p^2q^2 la cual es simple como álgebra de Hopf.* □

Este teorema niega la conjeturada “versión cuántica” del Teorema de Burnside para grupos de orden p^aq^b en el contexto de álgebras de Hopf semisimples. Este teorema da una respuesta negativa a [1, Question 2.3].

Auto dualidad

Si G es un grupo finito y J es un *twist* minimal en G, entonces la deformación por *twist* $A = (kG)^J$ satisface $A \cong A^{*cop}$ [19].

En esta sección mostraremos que esto también es cierto bajo otras restricciones sobre J y G.

Proposición 4.4.7. *Sea G un grupo finito soluble y sea $J \in kG \otimes kG$ un* twist*. Supongamos que $A = (kG)^J$ es simple. Entonces $A \cong A^{*cop}$.*

Comparando la descripción de las teorías de representaciones de G y $(kG^J)^*$, vemos que esta proposición impone varias restricciones sobre los posibles grupos G que satisfacen está condición.

Demostración. Dado que A es simple, entonces $Z(G) = 1$. Supongamos que $F \trianglelefteq G$. Entonces G actúa sobre k^F por la acción adjunta y el producto smash $k^F \# kG$ es un cociente del doble de Drinfeld $D(G)$. Notar que $D(G)$ corresponde a $F = G$.

Para el álgebra de Hopf $D_F(G) = k^F \# kG$, tenemos $G(D_F(G)) \cap Z(D_F(G)) = \widehat{F} \times Z(G) = \widehat{F}$ y

$$D_F(G)/D_F(G)(k\widehat{F})^+ \cong k^{[F,F]} \# kG = D_{[F,F]}(G).$$

Denotemos $G = G^{(0)}$, $G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}]$, $i \geq 0$. Dado que G es soluble, existe $m \geq 1$ tal que $G^{(m)} = 1$.

Iterando la construcción anterior, obtenemos una sucesión

$$D(G) \xrightarrow{\pi_1} D_{G^{(1)}}(G) \xrightarrow{\pi_2} D_{G^{(2)}}(G) \xrightarrow{\pi_3} \cdots \xrightarrow{\pi_m} D_{G^{(m)}}(G) = kG,$$

donde todo π_i tiene núcleo central.

Dado que A es equivalente por *twist* a kG entonces $D(A)$ es equivalente por *twist* a $D(G)$. En vista del Lema 4.2.8, obtenemos otra sucesión de álgebras de Hopf con núcleos centrales

$$D(A) \xrightarrow{\pi_1} K_1 \xrightarrow{\pi_2} K_2 \xrightarrow{\pi_3} \cdots \xrightarrow{\pi_m} K_m = (kG)^{J'}.$$

Puesto que los epimorfismo π_i son normales y A y $A^{*\,\mathrm{cop}}$ son simples no triviales, podemos asumir que la composición $\pi_1 \circ \cdots \circ \pi_m : D(A) \to (kG)^{J'}$ es inyectiva, cuando se restringe a A y a $A^{*\,\mathrm{cop}}$. Por dimensión, $A \cong (kG)^{J'} \cong A^{*cop}$. $\square$

Deformaciones por *twist* de un grupo de orden 36

La construcción principal de esta sección nos muestra un ejemplo de un álgebra de Hopf semisimple no trivial A de dimensión 36 que es simple como álgebra de Hopf. Esta es la menor álgebra de Hopf semisimple la cual no es semisoluble y la única simple en dimensión 36. Ver [35].

El álgebra de Hopf A es equivalente por *twist* al grupo $D_3 \times D_3$, y tenemos que $A \cong A^{*\,\mathrm{cop}} \cong k^{(4)} \oplus M_2(k)^{(4)} \oplus M_4(k)$ como álgebras.

Teorema 4.4.8. *Sea G un grupo de orden 36 y sea $J \in kG \otimes kG$ un* twist *tal que $(kG)^J$ es simple. Entonces, $G \cong D_3 \times D_3$ y $(kG)^J \cong A$.*

Demostración. Podemos suponer que $Z(G) = 1$. Si J es un *twist* minimal de G, entonces necesariamente $G = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{A}_4$ o $G = \mathbb{Z}_2 \ltimes (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6)$. Esto contradice la suposición $Z(G) = 1$. Luego, podemos suponer que J no es minimal.

Además, el subgrupo minimal H de G tiene orden 4 o 9, y no es un grupo cíclico. Más aun, H no está contenido en ningún subgrupo normal. Esto conduce a considerar el caso $H \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ y $G \cong D_3 \times D_3$. Además, todos los subgrupo de orden 4 son conjugados y la acción por conjugación preserva los *twist* no triviales. □

Deformaciones por *twist* de grupos de orden 60

En esta subsección mostraremos los posibles ejemplos de deformaciones simples de grupos de orden 60.

Notemos que si un álgebra de Hopf no tiene subálgebras o cocientes de Hopf, entonces es simple. En particular, si G es un grupo finito simple no abeliano, toda deformación por *twist* de kG es un álgebra de Hopf simple.

Ejemplo 4.4.9. [40]. Sea $\mathbb{A}_n$ el grupo alternante en n elementos. Consideremos el subgrupo $F \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, generado por $a = (12)(34)$ y $b = (13)(24)$. Sea ω un 2-cociclo cuya clase de cohomología es no trivial.

Dado que ω es no degenerado y F no es normal por Lema 4.2.5, $A = (k\mathbb{A}_n)^J$ es un álgebra de Hopf no conmutativa ni coconmutativa simple como álgebra de Hopf para $n \geq 5$.

Como álgebra, $(k\mathbb{A}_5)^J \cong k \times M_3(k)^{(2)} \times M_4(k) \times M_5(k)$. Ver [10, página 365].

Como vimos en el Ejemplo 4.4.9, existe un álgebra de Hopf simple de dimensión 60, obtenida como una deformación por *twist* del grupo alternante $\mathbb{A}_5$.

Otro ejemplo proviene de la deformación por *twist* del grupo $D_3 \times D_5$, por el Teorema 4.4.5. Para este ejemplo, $A \cong A^{*\,\mathrm{cop}} \cong k^{(4)} \oplus M_2(k)^{(6)} \oplus M_4(k)^{(2)}$ como álgebras.

Luego, A no es una deformación por *twist* de $k\mathbb{A}_5$. Probaremos que estas son las únicas álgebras de Hopf simple que pueden construirse como deformaciones por *twist* de un grupo de orden 60.

Por el resto de esta Subsección, G será un grupo de orden 60, $J \in kG \otimes kG$ un *twist* minimal, y $A = (kG)^J$ una deformación no trivial. Dado que A no es trivial, el subgrupo minimal F asociado a J debe ser de orden 4.

Entonces, necesariamente $F \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ y J corresponde al único 2-cociclo no trivial de H.

Asumiremos primero que G no es simple.

Lema 4.4.10. *Supongamos que A es simple. Entonces $G \cong D_3 \times D_5$.*

Demostración. En primer lugar, dado que G no es simple, entonces G contiene un único subgrupo de orden 5.

En segundo lugar, el subgrupo F no puede estar contenido en un subgrupo normal P de G, dado que de lo contrario, la subálgebra de Hopf $kP^J \subset (kG)^J$ debería ser normal. Análogamente, podemos suponer que $Z(G) = 1$.

Sea $S \trianglelefteq G$ de orden 5. Podemos asumir que $G' = G/S$ tiene un subgrupo normal T de orden 3, de lo contrario G debería contener un subgrupo normal de orden 20, y este contiene a F.

Entonces $N = \pi^{-1}(T) \trianglelefteq G$ es de orden 15. Luego, G es un producto semi-directo $N \rtimes H$. Finalmente, dado que $Z(G) = 1$, $G \cong D_3 \times D_5$. □

Teorema 4.4.11. *Sea $|G| = 60$ y sea $J \in kG \otimes kG$ un* twist*, tal que $A = (kG)^J$ no es coconmutativo y es simple. Entonces, se tienen:*

(i) *$G = \mathbb{A}_5$ y A es isomorfa al álgebra de Hopf del Ejemplo 4.4.9; o*

(ii) *$G = D_3 \times D_5$ y A es isomorfa al álgebra de Hopf autodual en el Teorema 4.4.5.*

Dado que el álgebra de Hopf en (i) no es auto-dual, se tienen tres ejemplos de álgebras de Hopf semisimples simples en dimensión 60.

Demostración. Usaremos el Lema 4.4.10. Notemos que los subgrupos de orden 4 en G son conjugados, y $|H^2(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, k^*)| = 2$. Entonces, todo par de *twist* no triviales en G producen álgebras de Hopf isomorfas. □

Álgebras de Hopf simple obtenidas por bosonización

En esta sección responderemos la pregunta [1, Question 2.13].

Recordemos primero la construcción de *bosonización*, también llamada *biproducto*, debida a Radford y Majid.

Definición 4.4.12. Sea $(\mathcal{C}, \sigma)$ una categoría trenzada. Una biálgebra en $\mathcal{C}$ es una terna $(R, m, u, \Delta, \varepsilon)$, donde (R, m, u) es un álgebra en $\mathcal{C}$, (R, Δ, ε) es una coálgebra en $\mathcal{C}$, tal que $\varepsilon : R \to \mathbf{1}$ es un morfismo de álgebras y

$$\Delta m = (m \otimes m) \circ (\mathrm{id}_R \otimes \sigma_{R,R} \otimes \mathrm{id}_R) \circ (\Delta \otimes \Delta).$$

Si además existe un morfismo $S : R \to R$ tal que

$$m(S \otimes \mathrm{id})\Delta = u\varepsilon = m(\mathrm{id} \otimes S)\Delta : R \to R,$$

entonces $(R, m, u, \Delta, \varepsilon, S)$ será llamada un *álgebra de Hopf trenzada* en $\mathcal{C}$.

Sea H un k-álgebra de Hopf con antípoda biyectiva. Existe una correspondencia biyectiva entre álgebras de Hopf trenzadas en ${}^H_H\mathcal{YD}$ y k-álgebras de Hopf A munidas de morfismos de álgebras de Hopf

$$A \underset{p}{\overset{\iota}{\leftrightarrows}} H,$$

tales que $p\iota = \mathrm{id}_H$. Esta correspondencia fue descrita por Radford en [53], y explicada en estos términos por Majid en [42].

Sea $A \overset{\iota}{\underset{p}{\leftrightarrows}} H$ como antes y sea $R = A^{\mathrm{co}\,H} = \{a \in A \mid (\mathrm{id} \otimes p)\Delta(a) = a \otimes 1\}$. Ésta es una subálgebra coideal a izquierda de A.

La counidad de R es la restricción de la de A. Se definen la comultiplicación, la antípoda, la coacción y la acción por

$$\begin{aligned}\Delta_R(r) &= r_{(1)}(\iota S_H(pr_{(2)})) \otimes r_{(3)},\\ S_R(r) &= (\iota p(r_{(1)}))S_A(r_{(2)}),\\ h \rightharpoonup r &= h_{(1)} r S(h_{(2)}),\\ \delta(r) &= (p \otimes \mathrm{id})\Delta(r).\end{aligned}$$

Estos morfismos hacen de R un álgebra de Hopf trenzada en ${}^H_H\mathcal{YD}$.

Recíprocamente, si R es un álgebra de Hopf en ${}^H_H\mathcal{YD}$, sea $A = R\#H$ el producto cruzado dado por la acción de H sobre R, y sea

$$\begin{aligned}&\Delta_A(r\#h) = (r_{(1)}\#r_{(2)(-1)}h_{(1)}) \otimes (r_{(2)(0)}\#h_{(2)}),\\ &\iota(h) = 1\#h, \qquad p(r\#h) = \varepsilon(r)h,\\ &S_A(r\#1) = \iota(S(r_{(-1)}))(S_R(r_{(0)})\#1) = (S(r_{(1)}) \rightharpoonup S_R(r_0)\#S(r_{(2)})).\end{aligned}$$

Estos morfismos proporcionan una estructura de álgebra de Hopf en $R\#H$, y las construcciones son inversas mutuamente. Esta construcción es llamada la *bosonización* de R por H.

Ejemplo 4.4.13. Sea $G = N \rtimes Q$ un producto semidirecto de grupos finitos. Entonces tenemos un morfismo de grupos $\pi : N \to Q, n \mapsto (n, 1)$ tal que $\iota\pi = \mathrm{id}_N$ donde $\iota : N \to G$ es la inclusión. En este caso tanto k^G como kG son bozonizaciones.

Definición 4.4.14. Un álgebra de Hopf, se dice *muy simple* si es simple (es decir, no posee subálgebras de Hopf normales), y no puede presentarse como una bosonización en una forma no trivial.

En [1, Question 2.13] se plantea la siguiente pregunta: ¿Existe un álgebra de Hopf semisimple, la cual es simple pero no muy simple?

Sea $\sigma : H \otimes H \to k$ un 2-cociclo. Entonces el funtor identidad $(\mathrm{id}, b) : {}^H\mathcal{M} \to {}^{H^\sigma}\mathcal{M}$ es un funtor monoidal con el isomorfismo natural $b_{V,W} : V \otimes W \to V \otimes W, \quad v \otimes w \mapsto \sigma(v_{-1}, w_{-1})v_{(0)} \otimes w_{(0)}$. Denotaremos la imagen de este funtor por V^σ.

Puesto que ${}^H_H\mathcal{YD}$ es el centro de la categoría monoidal ${}^H\mathcal{M}$ la equivalencia (id, b) induce una equivalencia de categorías trenzadas entre ${}^H_H\mathcal{YD}$ y ${}^{H^\sigma}_{H^\sigma}\mathcal{YD}$.

Supongamos que R es un álgebra de Hopf trenzada en ${}_H^H\mathcal{YD}$. Usando la equivalencia de categorías entre ${}_H^H\mathcal{YD}$ y ${}_{H^\sigma}^{H^\sigma}\mathcal{YD}$, R^σ es un álgebra de Hopf trenzada en ${}_{H^\sigma}^{H^\sigma}\mathcal{YD}$, con multiplicación y comultiplicación

$$
\begin{aligned}
a \cdot b &= \sigma(a_{(-1)}, b_{(-1)})a_{(0)}b_{(0)} \\
\Delta(a) &= \sigma^{-1}(a_{(1)(-1)}, a_{(1)(-1)})a_{(1)(0)} \otimes a_{(2)(0)}
\end{aligned}
$$

donde $a, b \in R$.

El 2-cociclo σ induce un 2-cociclo $\sigma : R \rtimes H \otimes R \rtimes H \to k$ a través de la proyección $R \rtimes H \to H$, y podemos construir la deformación por el 2-cociclo $(R \rtimes H)^\sigma$.

Es fácil ver que el mapa $a \otimes h \mapsto \sigma(a_{(-1)}, h_{(-1)})a_{(0)} \otimes h_{(0)}$ es un isomorfismo de álgebras de Hopf entre $(R \rtimes H)^\sigma$ y $R^\sigma \rtimes H^\sigma$.

Consideremos el producto semidirecto $G = N \rtimes Q$ de la sección anterior. En este caso, $N = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_r$, $Q = \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_q$ y $\sigma : \widehat{Q} \times \widehat{Q} \to k^*$ un 2-cociclo no trivial. Entonces por el Teorema 4.4.5 la familia de álgebras de Hopf construidas en la sección anterior, son ejemplos de álgebras de Hopf semisimples, las cuales son bosonizaciones y son simples como álgebras de Hopf. Esto contesta la pregunta [1, Question 2.13].

Capítulo 5

Subálgebras de Hopf normales en deformaciones por cociclo

En este capítulo mostraremos condiciones necesarias y suficientes para que una subálgebra de Hopf $K \subseteq (k^G)^\sigma$, en una deformación por cociclo del álgebra de Hopf k^G, sea normal.

De ahora en más G será un grupo finito, $S \subseteq G$ será un subgrupo, y $\alpha \in Z^2(S, k^*)$ un 2-cociclo no degenerado. Denotaremos por $A = \mathrm{Ind}_S^G(k_\alpha S)$ el objeto galoisiano de k^G asociado.

Denotaremos también por $J \in kS \otimes kS \subseteq kG \otimes kG$, el *twist* correspondiente a A. Luego $(kG)^J \simeq L^*$, donde $L = L(A, H)$.

5.1. Correspondencia de Galois

Sea C una k-coálgebra. Recodemos que el producto cotensorial de un C-comódulo a derecha V y un C-comódulo a izquierda W es definido como el ecualizador

$$V \square_C W \rightrightarrows V \otimes W \to V \otimes C \otimes W$$

donde las dos flechas paralelas están dadas por la estructura de comódulo a derecha de V y de comódulo a izquierda de W respectivamente.

Teorema 5.1.1. *Sean H y L álgebras de Hopf con antípoda biyectiva y sea A un objeto H-L-bigaloisiano.*

Existe una correspondencia biyectiva entre:

- *Coidelaes ideales a izquierda $I \subseteq L$, tales que L es un L/I-comódulo fielmente coplano a izquierda (respectivamente, a derecha), y*
- *H-subcomódulo álgebras $B \subseteq A$, tales que A es un B-módulo fielmente plano a izquierda (respectivamente, a derecha).*

La correspondencia está definida como sigue. A un coideal ideal a izquierda $I \subseteq L$, le asignamos la subálgebra $B := {}^{\operatorname{co} L/I}A$. A un H-subcomódulo álgebra $B \subseteq A$ le asignamos el coideal ideal a izquierda $I \subseteq L \cong (A \otimes A)^{\operatorname{co} H}$, tal que $L/I \cong (A \otimes_B A)^{\operatorname{co} H}$.

Sean $I \subseteq L$ y $B \subseteq A$ en correspondencia bajo esta biyección. Entonces, se tienen:

1. *I es un ideal de Hopf, si y sólo si, B es estable por la acción de Miyashita-Ulbrich de H sobre A.*

2. *I es un ideal de Hopf conormal, si y sólo si, B es estable bajo la acción de Miyashita-Ulbrich y la coacción de L sobre A*

Demostración. Ver [66, Theorem 3.6, Theorem 3.8]. □

Diremos que una subálgebra de coidel $L' \subseteq L$ es *admisible* si L es fielmente plano como L'-módulo a derecha.

Teorema 5.1.2. *Sean H y L álgebras de Hopf con antípoda biyectiva, y sea A un objeto H-L-bigaloisiano. Existe una biyección entre subálgebras coideales a izquierda $L' \subseteq L$ admisibles a derecha y H-subcomódulo álgebras de A admisibles a derecha. La correspondencia está dada por $L' \mapsto L' \square_H A$.*

Supongamos que L' es una subálgebra de Hopf de L admisible a derecha y $A(L') = L' \square_L A$. Entonces, la estructura de L-comódulo a izquierda de A se restringe a un mapa $\delta : A(L') \to L' \otimes A(L')$, que hace de $A(L')$ un objeto L'-galoisiano a izquierda.

Demostración. Ver [66, Theorem 3.11]. □

Observación 5.1.3. La demostración del teorema principal de este capítulo está basada en el siguiente argumento:

Sean H y L álgebras de Hopf de dimensión finita, y sea A un objeto H-L-bigaloisiano. Por la Proposición 4.2.6, existe una correspondencia biyectiva entre subálgebras de Hopf de H y L.

Sea $H' \subseteq H$ una subálgebra de Hopf. Entonces, por el Teorema 5.1.2, $A(H') = A \square_H H' \subseteq A \square_H H \simeq A$, es un objeto H'-galoisiano a derecha.

Sea $L' = L(A(H'), H')$. Entonces, $L' \subseteq L$ es una subálgebra de Hopf de manera única, tal que $A(H') \subseteq A$ es un (L, H)-bicomódulo subálgebra. En este caso, tenemos que $A(H')$ es un objeto (L', H')-bigaloisiano, y $A(H') = {}^{\operatorname{co} \overline{L}}A$, donde $L' = {}^{\operatorname{co} \overline{L}}L$, $\overline{L} = L/L(L')^+$.

La subálgebra de Hopf correspondiente $L' \subseteq L$ da lugar, a su vez, a un coideal ideal a izquierda $I = L(L')^+ \subseteq L$, el cual corresponde bajo el Teorema 5.1.1, a la subálgebra H-comódulo ${}^{\operatorname{co} L/I}A = A(H')$.

Por el Teorema 5.1.1, $I = L(L')^+ \subseteq L$ es un ideal de Hopf, o en otras palabras, $L' \subseteq L$ es una subálgebra de Hopf normal, si y sólo si, $A(H') \subseteq A$ es un H-submódulo bajo la acción de Miyashita-Ulbrich.

Consideremos el cociente de H-módulo coálgebras a izquierda $p : H \to H''$, donde $H'' = H/H(H')^+$. La coálgebra H'' coactúa sobre A vía

$$(\mathrm{id} \otimes p)\rho : A \to A \otimes H''.$$

El siguiente lema describe la subálgebra $A(H')$.

Lema 5.1.4. *Tenemos que* $A(H') = \rho^{-1}(A \otimes H') = A^{\mathrm{co}\, H''}$.

Aquí estamos identificando $A(H')$ con una subálgebra de A a través del isomorfismo canónico $\rho : A \to A \square_H H$, inducido por la coacción a derecha de H en A.

Demostración. Es claro que bajo el isomorfismo $\rho : A \to A\square_H H$, $A\square_H H'$ se identifica con $\rho^{-1}(A \otimes H') \subseteq A$. La inclusión $A(H') \subseteq A^{\mathrm{co}\, H''}$ es consecuencia de que $p|_{H'} = \epsilon$. La otra inclusión se sigue del hecho que $H' = H^{\mathrm{co}\, H''}$. Esto demuestra el lema. $\square$

Observación 5.1.5. Recordemos que la coacción $\rho : A \to A \otimes H$, proporciona una acción a izquierda $H^* \otimes A \to A$, tal que $f.a = f(a_{(1)})a_{(0)}$, para todo $f \in H^*$, $a \in A$.

Consideremos la subálgebra coideal a derecha $R = (H'')^* \subseteq H^*$. Entonces, tenemos que $A(H') = A^{\mathrm{co}\, H''} = A^R$, donde A^R es la subálgebra de invariantes de A bajo la acción de R.

Sea $\pi : G \to G'$ un epimorfismo de grupos. Éste corresponde a un epimorfismo de álgebras de Hopf $kG \to kG'$.

Sea $F \subseteq G$ el núcleo de π. De modo que F es un subgrupo normal de G.

Dualizando el epimorfismo $\pi : kG \to kG'$, obtenemos una inclusión de álgebras de Hopf $H' = k^{G'} \subseteq H = k^G$. Esta inclusión es necesariamente normal, pues k^G es conmutativa.

Usando el Lema 5.1.4, tenemos que $A(k^{G'}) = A^{\mathrm{co}\, k^F} = A^F$, es la subálgebra de F-invariantes.

5.2. La acción de Miyashita-Ulbrich en $A(G, S, \alpha)$

La siguiente proposición da una descripción concreta y alternativa de los objetos galoisianos $A(G, S, \alpha)$. Ésta será conveniente para nuestros propósitos.

Proposición 5.2.1. *Existe un isomorfismo de G-álgebras*

$$A(G, S, \alpha) \simeq Ind_S^G k_\alpha S = kG \otimes_{kS} k_\alpha S,$$

donde la acción de G a izquierda y la multiplicación están dadas, respectivamente por

$$g'.g \otimes x = g'g \otimes x, \tag{5.2.1}$$

$$(g \otimes x)(h \otimes y) = \begin{cases} 0, & h^{-1}g \notin S, \\ h \otimes (h^{-1}g.x)y, & h^{-1}g \in S. \end{cases} \tag{5.2.2}$$

Demostración. Sea $A = A(G, S, \alpha)$. Por definición, $A = \mathrm{Hom}_{kS}(kG, k_\alpha S)$. Usando la versión de la reciprocidad de Frobenius en [10, Proposition (10.21)], tenemos un isomorfismo $\mathrm{Hom}_{kS}(kG, k_\alpha S) \simeq \mathrm{Hom}_{kG}(kG, kG \otimes_{kS} k_\alpha S) \simeq kG \otimes_{kS} k_\alpha S$.

Tomando $G = \cup_{i=1}^{r} g_i S$, donde g_i, $1 \leq i \leq r$, es un conjunto de representantes de las coclases a izquierda de S en G. Un isomorfismo $\phi : A(G, S, \alpha) \to kG \otimes_{kS} k_\alpha S$ esta definido explícitamente por

$$\phi(f) = \sum_i g_i \otimes f(g_i^{-1}).$$

Su inverso $\psi : kG \otimes_{kS} k_\alpha S \to A(G, S, \alpha)$ esta determinado

$$\psi(g \otimes x)(b) = \lambda(bg)x,$$

donde $\lambda : G \to kS$ es el mapa $\lambda(g) = g$, si $g \in S$, y $\lambda(g) = 0$, en otro caso. Claramente, estos isomorfismos no dependen de la elección de los representantes de las coclases a izquierda. Además, estos isomorfismo transforman la estructura de G-álgebra sobre Aa la estructura de G-álgebra sobre $kG \otimes_{kS} k_\alpha S$ dada por las formulas (5.2.1) and (5.2.2). Esto prueba la proposición. □

De ahora en más usaremos la identificación $A = A(G, S, \alpha) \simeq kG \otimes_{kS} k_\alpha S$, dada por la Proposición 5.2.1.

Ahora describiremos la acción de Miyashita-Ulbrich $\leftharpoonup: A \otimes k^G \to A$ en términos de esta identificación.

Notemos primero que en nuestro contexto, esta acción corresponde a una G-graduación sobre A: $A = \oplus_{g \in G} A_g$, tal que $A_g = A \leftharpoonup e_g$, $g \in G$. Llamaremos a ésta la *graduación de Miyashita-Ulbrich*.

Dado un elemento homogéneo $a \in A_g$, g se dirá el *grado de homogeneidad* de a, y se denotará $g = |a|$.

Lema 5.2.2. *La graduación de Miyashita-Ulbrich sobre A está determinada por*

$$|g \otimes x_s| := gsg^{-1},$$

para todo $g \in G$, $s \in S$.

Demostración. De acuerdo con la caracterización de la acción de Miyashita-Ulbrich dada por el Lema 3.1.12, tenemos que $A_g = \{a \in A|\, ax = (g \cdot x)a, \text{ para todo } x \in A\}$.

Sean $g, h \in G$, $s, t \in S$. Entonces,

$$\begin{aligned}\left((gsg^{-1}).(h \otimes x_t)\right)(g \otimes x_s) &= (gsg^{-1}h \otimes x_t)(g \otimes x_s) \\ &= \begin{cases} 0, & sg^{-1}h \notin S, \\ g \otimes (sg^{-1}h.x_t)x_s, & sg^{-1}h \in S. \end{cases}\end{aligned}$$

Claramente, $sg^{-1}h \in S$ si y sólo si $h^{-1}g \in S$, y en este caso,

$$g \otimes (sg^{-1}h.x_t)x_s = g \otimes x_s(g^{-1}h.x_t) = h \otimes (h^{-1}g.x_s)x_t.$$

La primera igualdad sigue de que x_s es homogéneo de grado s, con respecto a la S-graduación de Miyashita-Ulbrich en $k_\alpha S$.

Luego,

$$\left((gsg^{-1}).(h \otimes x_t)\right)(g \otimes x_s) = (g \otimes x_s)(h \otimes x_t).$$

Dado que esto se tiene para todo $g, h \in G$, $s, t \in S$, entonces $g \otimes x_s$ es homogéneo de grado gsg^{-1}, como fue afirmado. Esto finaliza la demostración del lema. $\square$

5.3. La subálgebra A^F de F-invariantes bajo la acción de un subgrupo F

Sea $I = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ un conjunto de representantes de las coclases a derecha de S en G. Entonces, el conjunto $\{g_i \otimes_{kS} x_s\}_{s\in S, i\in I}$ es una base de $kG \otimes_{kS} k_\alpha S$.

Es claro que $(A, I \times S, k(g \otimes x_s))$ es un espacio monomial. Ver Sección 1.5.

El conjunto I tiene una acción natural de G, definida por $g.g_i = g_j$, si y sólo si,

$$gg_i = g_j t, \quad \text{para algún } t \in S.$$

En términos de la base $\{g_i \otimes_{kS} x_s\}_{s\in S, i\in I}$, la acción de G sobre A tiene la forma

$$g.(g_i \otimes_{kS} x_s) = gg_i \otimes_{kS} x_s = (g.g_i)t \otimes_{kS} x_s = \alpha(t,s)\alpha(ts, t^{-1})(g.g_i) \otimes_{kS} x_{tst^{-1}}.$$

Entonces, para cada $g \in G$, la acción de g permuta los espacios vectoriales $k(g_i \otimes_{kS} x_s)$. En otras palabras, $(A, I \times S, k(g_i \otimes x_s))$ es una representación monomial de G.

La acción inducida de G sobre $I \times S$ esta dada por

$$g.(g_i, s) = (g_j, tst^{-1}) = (g.g_i, tst^{-1}),$$

con $g_j \in I$, $t \in S$, como antes.

Sea $F \subseteq G$ un subgrupo. En lo que sigue, consideramos la representación monomial de F sobre A obtenida por restricción.

Podemos considerar a S como un S-conjunto a izquierda y a G como un S-conjunto a derecha, con acciones dada por conjugación y multiplicación a derecha, respectivamente; esto es, $s.t = sts^{-1}$, $g.s = gs$ para $s, t \in S$, $g \in G$.

Tenemos entonces, el conjunto cociente $G \times_S S$, bajo la relación de equivalencia: $(g, s) \sim (g', s')$, si y sólo si, existe $t \in S$ tal que $(g', s') = (g.t^{-1}, t.s) = (gt^{-1}, tst^{-1})$.

El conjunto $G \times_S S$ está equipado con una G-acción a izquierda dada por la multiplicación a izquierda en la primera componente.

Lema 5.3.1. *El mapa $I \times S \to G \times_S S$ que envía el elemento (g_i, s) a la clase del par (g_i, s), es un isomorfismo de G-conjuntos.*

Demostración. Todo $g \in G$, se escribe en forma única como $g = g_i s'$, para algún $g_i \in I$, y $s' \in S$. El mapa que envía la clase del par (g, s) al par $(g_i, s'ss'^{-1}) \in I \times S$, está bien definido. Este mapa es de G-conjuntos y define un inverso del mapa del lema. $\square$

Podemos así identificar la representación monomial $(A, I \times S, k(g_i \otimes x_s))$ de F con $(A, G \times_S S, k(g \otimes x_s))$.

Definición 5.3.2. Diremos que la clase $(g, s) \in G \times_S S$ es (α, F)-*regular*, si $\alpha(s, t) = \alpha(t, s)$, para todo $t \in C_S(s) \cap g^{-1}Fg$.

Supongamos que F es normal en G. Diremos que $s \in S$ es (α, F)-*regular*, si $\alpha(s, t) = \alpha(t, s)$, para todo $t \in C_S(s) \cap F$.

Observación 5.3.3. En vista del Lema 5.3.4, la noción de (α, F)-regularidad esta bien definida, es decir, sólo depende de $(g, s) \in G \times_S S$.

Además, bajo la hipótesis de que F es normal en G, la definición de elemento (α, F)-regular $s \in S$ depende sólo de la clase de conjugación de s en S.

En este caso, para todo $g \in G$, la clase (g, s) es (α, F)-regular en $G \times_S S$, si y sólo si, $s \in S$ es (α, F)-regular.

Lema 5.3.4. *La clase $(g, s) \in G \times_S S$ es regular bajo la acción de F, si y sólo si, ésta es (α, F)-regular.*

Demostración. El estabilizador de (g, s) en F es el subgrupo $F(g, s) = gC_S(s)g^{-1} \cap F$. Sea $r \in gC_S(s)g^{-1} \cap F$, $\ r = gtg^{-1}$, $\ t \in C_S(s)$. Entonces

$$\begin{aligned} gtg^{-1} \triangleright g \otimes_{kS} x_s &= \alpha(t, s)\alpha(ts, t^{-1}) g \otimes_{kS} x_s \\ &= \alpha^{-1}(s, t)\alpha(t, s) g \otimes_{kS} x_s \\ &= \alpha^{-1}(s, g^{-1}rg)\alpha(g^{-1}rg, s) g \otimes_{kS} x_s, \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad sigue de que $\alpha(g, g^{-1}) = 1$, para todo $g \in G$.

Entonces, la clase (g, s) es regular bajo la acción de F, si y sólo si,

$$\alpha^{-1}(s, g^{-1}rg)\alpha(g^{-1}rg, s) = 1,$$

para todo $r \in g^{-1}C_S(s)g \cap F$. Es decir, si y sólo si (g, s) es (α, F)-regular. $\square$

Proposición 5.3.5. *Sea T un conjunto de representantes de las F-órbitas regulares de $G \times_S S$.*

Para cada $(g, t) \in T$, sea

$$v_{(g,t)} = \sum_{h \in Y_{(g,t)}} hg \otimes_{kS} x_t, \qquad (g, t) \in T,$$

donde $Y_{(g,t)}$ es un conjunto de representantes de coclases a izquierda de $gC_S(s)g^{-1} \cap F$ en F.

Entonces, el conjunto $\{v_{(g,t)} : (g, t) \in T\}$ es una base de la subálgebra A^F de F-invariantes de A.

Demostración. Tenemos que $(A, G \times_S S, k(g \otimes_{kS} x_s))$ es una representación monomial de F. Por el Lema 5.3.4, los estabilizadores son los subgrupos $gC_S(s)g^{-1} \cap F$. Por el Lema 1.5.1, $\{v_{(g,t)} : (g,t) \in T\}$ es una base de A^F, como se afirmó. □

Observación 5.3.6. El objeto k^G-galoisiano $A(G, S, \alpha)$ es isomorfo a la representación regular kG como un G-módulo. Entonces, $\dim A(G, S, \alpha)^F = [G : F]$.

En vista de la Proposición 5.3.5, para todo 2-cociclo no degenerado α, el número de órbitas (α, F)-regulares en $G \times_S S$ es igual a $[G : F]$.

5.4. Subálgebras de Hopf normales de $L(A, k^G)$

En primer lugar, tenemos el siguiente resultado, válido para todo subgrupo F de G:

Teorema 5.4.1. *La subálgebra A^F es un k^G-submódulo de A con respecto a la acción de Miyashita-Ulbrich, si y sólo si, para todo elemento (α, F)-regular $(g, s) \in G \times_S S$, se tiene que $g^{-1}Fg \subseteq C_G(s)$.*

Demostración. Continuamos con la notación de la Proposición 5.3.5. Notemos que la condición $g^{-1}Fg \subseteq C_G(s)$ equivale a que $C_F(gsg^{-1}) = F$.

Supongamos primero que $C_F(gsg^{-1}) = F$, para todo $(g, s) \in T$. Sea $\sigma \in G$. Por Lema 5.2.2, tenemos

$$\begin{aligned} v_{(g,s)} \leftharpoondown e_\sigma &= \sum_{h \in Y_{(g,s)}} hg \otimes_{kS} x_s \leftharpoondown e_\sigma \\ &= \sum_{h \in Y_{(g,s)}} \delta_{\sigma,(hg)s(hg)^{-1}} hg \otimes_{kS} x_s \\ &= \delta_{\sigma, gsg^{-1}} v_{(g,s)}. \end{aligned}$$

Dado que ésto vale para todo $\sigma \in G$, entonces A^F es un k^G-submódulo con respecto a la acción de Miyashita-Ulbrich.

Recíprocamente, supongamos que A^F es un k^G-submódulo bajo la acción de Miyashita-Ulbrich. Sea $\{v_{(g_0,t_0)}, v_{(g_1,t_1)}, \dots, v_{(g_r,t_r)}\}$ la base de A^F dada por la Proposición 5.3.5.

Recordemos que $\{hg_i \otimes_{kS} x_{t_i}\}_{h \in Y_{(g_i,t_i)}, (g_i,t_i) \in T}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes en A. Ver Observación 1.5.2.

Tenemos $v_{(g_0,t_0)} = \sum_{i=1}^k v_{(g_0,t_0)}^{\sigma_i}$, donde $v_{(g_0,t_0)}^{\sigma_i}$ es la componente homogénea de grado $\sigma_i \in G$, con respecto a la graduación de Miyashita-Ulbrich:

$$v_{(g_0,t_0)}^{\sigma_i} = \sum_{h \in Y_{(g_0,t_0)},\, hg_0t_0g_0^{-1}h^{-1} = \sigma_i} hg_0 \otimes_{kS} x_{t_0}.$$

Dado que, por hipótesis, A^F es estable por la acción de Miyashita-Ulbrich de k^G, cada una de las componentes homogéneas $v_{(g_0,t_0)}^{\sigma_i}$ está en A^F.

Si $v^{\sigma_1}_{(g_0,t_0)}, \dots, v^{\sigma_l}_{(g_0,t_0)}$ son las componentes homogéneas de $v_{(g_0,t_0)}$, entonces

$$\{v^{\sigma_1}_{(g_0,t_0)}, \dots, v^{\sigma_l}_{(g_0,t_0)}, v_{(g_1,t_1)}, \dots, v_{(g_r,t_r)}\}$$

es un conjunto de $l + r$ vectores linealmente independientes de A^F. Pero $v_{(g_0,t_0)}$, $v_{(g_1,t_1)}$, $\dots, v_{(g_r,t_r)}$ forman un a base de A^F. Por lo tanto $l = 1$.

Luego, $v^{\sigma_1}_{(g_0,t_0)} = v_{(g_0,t_0)}$, y $v^{\sigma_i}_{(g_0,t_0)} = 0$, para todo $i > 1$. Esto implica que $v_{(g,s)}$ es homogéneo para toda clase (α, F)-regular (g, s).

Sea (g, s) una clase (α, F)-regular. Tenemos que $v_{(g,s)} \leftharpoonup e_u = v_{(g,s)}$, para algún $u \in G$. Luego,

$$v_{(g,s)} = \sum_{h \in Y_{(g,s)}} hg \otimes_{kS} x_s \leftharpoonup e_u = \sum_{h \in Y_{(g,s)}} \delta_{u,(hg)s(hg)^{-1}} hg \otimes_{kS} x_s.$$

Podemos asumir que $e \in Y_{(g,s)}$, donde $e \in F$ es el elemento identidad. Entonces, por la independencia lineal del conjunto $\{hg \otimes_{kS} x_t\}_{h \in Y_{(g,t)},(g,t) \in T}$, obtenemos $gsg^{-1} = u$, y además $gsg^{-1} = hgsg^{-1}h^{-1}$, para todo $h \in Y_{(g,s)}$.

Pero (g, s) es un elemento arbitrario en la F-órbita (α, F)-regular y $Y_{(g,s)}$ es un conjunto cualquiera de representantes de la coclases a izquierda para $gC_S(s)g^{-1} \cap F$ en F. Entonces, $gsg^{-1} = hgsg^{-1}h^{-1}$ para todo $h \in F$. Es decir que $F = C_F(gsg^{-1})$. Esto termina la demostración del teorema. $\square$

Como aplicación del Teorema 5.4.1, daremos una demostración del resultado principal de este capítulo.

Recordemos que por la Proposición 4.2.6, a toda subálgebra de Hopf $H' \subseteq k^G$, le corresponde una única subálgebra $L' \subseteq L$ y toda subálgebra de k^G es de la forma $k^{G/F}$ para algún subgrupo normal $F \trianglelefteq G$.

Teorema 5.4.2. *La subálgebra de Hopf $L' \subseteq L$ correspondiente a un subgrupo normal $F \trianglelefteq G$ es normal en L, si y sólo si, $F \subseteq C_G(s)$, para todo elemento (α, F)-regular $s \in S$.*

Demostración. Por el Lema 5.1.4 y los resultados en la Observación 5.1.3, es suficiente con determinar las condiciones bajo las cuales la subálgebra de invariantes A^F es estable bajo la acción de Miyashita-Ulbrich. Esto es un caso especial del Teorema 5.4.1, para el caso en que F es un subgrupo normal G. $\square$

5.5. Ejemplos

Una primera aplicación del Teorema 5.4.2, está dada por el siguiente lema. Su interpretación en términos de *twist* es bien conocida. Ver [35, Lemma 5.4.1].

Lema 5.5.1. *Sea F un subgrupo normal de G. Si $S \subseteq F$, entonces A^F es un k^G-submódulo de A con respecto a la acción de Miyashita-Ulbrich.*

En otras palabras, si $J \subseteq kF \otimes kF$, entonces $(kF)^J \subseteq (kG)^J$ es una subálgebra de Hopf normal.

Demostración. Sea (g, s) una clase (α, F)-regular. Entonces, $\alpha(s, t) = \alpha(t, s)$, para todo $t \in C_S(s) \cap g^{-1}Fg = C_S(s)$. Dado que α es no degenerado, entonces $s = 1$.

Por el Teorema 5.4.1, A^F es un k^G-submódulo de A con respecto a la acción de Miyashita-Ulbrich. □

El siguiente teorema es una generalización del Teorema 4.3.4 al caso en que S no es necesariamente abeliano.

Teorema 5.5.2. *Supongamos que $Z(G) = 1$. Sea F un subgrupo normal de G, tal que $[G : F]$ es un número primo. Entonces, A^F es un k^G-submódulo de A con respecto a la acción de Miyashita-Ulbrich, si y sólo si, $S \subseteq F$.*

Esto significa que el cociente correspondiente $(kG)^J \to k(G/F)^{\overline{J}}$ es conormal si y sólo si $J \in kF \otimes kF$.

Demostración. Supongamos que $S \subseteq F$. Por el Lema 5.5.1, A^F es un k^G-submódulo de A con respecto a la acción de Miyashita-Ulbrich.

Recíprocamente, supongamos que A^F es un k^G-submódulo de A con respecto a la acción de Miyashita-Ulbrich. Sea $s \in S$ un elemento (α, F)-regular. Entonces $F \subseteq C_G(s)$.

Si $F \subsetneq C_G(s)$, entonces $C_G(s) = G$, pues $[G : F]$ es primo. Dado que $Z(G) = 1$, tenemos que $s = 1$. Si $F = C_G(s)$, entonces $\alpha(s, t) = \alpha(t, s)$, para todo $t \in C_S(s) \cap F = C_S(s)$. Puesto que α es no degenerado, entonces también $s = 1$.

Luego, toda clase (α, F)-regular es de la forma $(g, 1)$. Recordemos que $\dim A^F$ es igual al número de órbitas (α, F)-regulares en $G \times_S S$.

Notemos que $(g, 1) \sim (\sigma, 1)$, si y sólo si, $g \in \sigma S$. Entonces $(g, 1)$ es conjugado a $(\sigma, 1)$, bajo la acción de F, si y sólo si, $g \in F\sigma S = \sigma F S$. Por lo tanto, el número de órbitas (α, F)-regulares es $[G : FS]$.

Por otro lado, la dimensión de A^F es $[G : F]$. Ver Observación 5.3.6. Entonces debe ser $[G : FS] = [G : F]$. Por lo tanto, se deduce que $S \subseteq F$. Esto concluye la prueba del Teorema. □

Deformaciones simples de una familia de grupos no solubles

Sea F un grupo finito simple no abeliano, y sea $x \in F$ un elemento de orden primo p.

Consideremos el producto semidirecto $G = F \rtimes \mathbb{Z}_p$, con respecto a la acción de $\mathbb{Z}_p$ en F, dada por la conjugación por x. Notemos que $Z(G) = 1$.

Proposición 5.5.3. *El álgebra de Hopf $(kG)^J$ es simple, si y sólo si, $S \nsubseteq F$.*

Demostración. El único subgrupo normal no trivial de G es F. Por el Teorema 5.5.2, tenemos que el cociente $(kG)^J \to k\mathbb{Z}_p$ es conormal, si y sólo si, $S \subseteq F$. $\square$

Observación 5.5.4. Sea S el subgrupo dado por $S = \langle x \rangle \rtimes \mathbb{Z}_p$. Tenemos que $S \simeq \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.

En particular, todo $1 \neq \alpha \in H^2(S, k^*) \simeq \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ es no degenerado. Entonces, el álgebra de Hopf k^G tiene la menos $p-1$ objetos galoisianos no triviales $A(G, S, \alpha)$ para los cuales $S \subsetneq F$.

En vista de la Proposición 5.5.3, todas las deformaciones por *twist* correspondientes son álgebras de Hopf simples.

Lo que sigue da una generalización de los resultados de la Sección 4.3 para los grupos simétricos $\mathbb{S}_n$.

Corolario 5.5.5. *Sea $n \geq 5$ y sean $G = \mathbb{S}_n$, $F = \mathbb{A}_n$, el grupo simétrico y el grupo alternante en n letras, respectivamente. Sean $S \subseteq \mathbb{S}_n$ un subgrupo, y α un 2-cociclo no degenerado en S. Entonces, la deformación asociada $(k\mathbb{S}_n)^J$ es simple, si y sólo si, $S \subsetneq \mathbb{A}_n$.*

Demostración. Tenemos que $G = \mathbb{A}_n \rtimes \mathbb{Z}_2 = \mathbb{S}_n$. El enunciado se sigue de 5.5.3. $\square$

Demostración alternativa del Teorema 4.4.5

Como aplicación del Teorema 5.4.2, daremos una demostración alternativa del Teorema 4.4.5. Esta demostración es válida para un cuerpo arbitrario.

Demostración Teorema 4.4.5. Notemos que los grupos G_i solamente tienen un subgrupo normal. El subgrupo S es conjugado a un subgrupo de la forma $S = S_1 \times S_2$, donde $S_i \subseteq G_i$, $S_i \simeq \mathbb{Z}_q$. Si $s = (s_1, s_2) \in S$, entonces $C_G(s) = C_{G_1}(s_1) \times C_{G_2}(s_2)$.

Consideremos un subgrupo normal N de G, tal que A^N es un k^G-submódulo de A con respecto a la acción de Miyashita-Ulbrich.

Sea $s \in S$ un elemento (α, N)-regular. Luego, $N \subseteq C_G(s)$ y $\alpha(s,t) = \alpha(t,s)$, para todo $t \in C_G(s) \cap N$.

Si $s_1 \neq 1$ y $s_2 \neq 1$, entonces $C_G(s) = S$. Pero S no contiene subgrupo normales de G. Entonces $s_1 = 1$ o $s_2 = 1$.

Supongamos que $s_1 = 1$ y $s_2 \neq 1$. Entonces, $C_G(s) = S_1 \times G_2 \supseteq N$. Luego, $\alpha(s,t) = \alpha(t,s)$, para todo $t \in S$. Pero α es no degenerado, por lo tanto $s = 1$, lo cual es una contradicción.

En conclusión, toda clase (α, F)-regular es de la forma $(g, 1)$. El mismo argumento de la prueba del Teorema 5.5.2 muestra que $[G : NS] = [G : N]$, y entonces $S \subseteq N$.

Esto implica que $N = G$. Por lo tanto $(kG)^J$ no contiene subálgebras de Hopf normales propias. Esto prueba el teorema. $\square$

Capítulo 6

Acción de un grupo sobre una categoría tensorial

En este capitulo definimos una acción de un grupo sobre una categoría tensorial $\mathcal{C}$. Mostramos que existe una teoría de obstrucción análoga a la de teoría de extensiones de grupos, y que las acciones están parametrizadas por grupos de cohomología abeliana.

6.1. Acciones de un grupo sobre una categoría tensorial

Sea G un grupo. Denotaremos por $\underline{G}$ la categoría monoidal discreta asociada a G. Los objetos de $\underline{G}$ son los elementos de G, las flechas son las identidades y el producto tensorial es el producto del grupo.

Sea $\mathcal{M}$ una categoría abeliana. Sea $\underline{\mathrm{Aut}(\mathcal{M})}$ la categoría monoidal donde los objetos son las auto-equivalencias exactas de $\mathcal{C}$, las flechas son isomorfismo naturales y el producto tensorial está dado por la composición de funtores.

Una *acción* de G sobre $\mathcal{M}$, es un funtor monoidal $* : \underline{G} \to \underline{\mathrm{Aut}(\mathcal{M})}$.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal. Denotaremos por $\underline{\mathrm{Aut}_{\otimes}(\mathcal{C})}$ la categoría de auto-equivalencias monoidales. Las flechas de esta categoría son los isomorfismos naturales entre transformaciones monoidales.

Definición 6.1.1. Una $\otimes$-acción de G en la categoría monoidal $\mathcal{C}$, o simplemente una acción de G en $\mathcal{C}$, es un funtor monoidal $* : \underline{G} \to \mathrm{Aut}_{\otimes}(\mathcal{C})$.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial. Denotaremos por $\mathrm{Aut}_{\otimes}(\mathcal{C})$ el grupo de auto-equivalencias tensoriales. Esto es, $\mathrm{Aut}_{\otimes}(\mathcal{C})$ es el conjunto de clases de isomorfismo de auto-equivalencias monoidales de $\mathcal{C}$, con multiplicación inducida por la composición de funtores monoidales: $[F][F'] = [F \circ F']$.

Toda G-acción sobre una categoría monoidal induce un homomorfismo de grupos $\psi : G \to \mathrm{Aut}_{\otimes}(\mathcal{C})$. Diremos que un homomorfismo $\psi : G \to \mathrm{Aut}_{\otimes}(\mathcal{C})$ es realizable si existe alguna G-acción tal que el homomorfismo de grupos inducido coincide con ψ.

El objetivo de esta subsección es mostrar que para todo homomorfismo $\psi : G \to \mathrm{Aut}_{\otimes}(\mathcal{C})$, existe un 3-cociclo asociado, el cual tiene clase de cohomología trivial, si y sólo si, la acción es realizable.

Más aún, toda realización está en correspondencia con un elemento de un segundo grupo de cohomología.

2-grupos

Definición 6.1.2. Un *2-grupo coherente* es una categoría monoidal rígida $\mathcal{C}$ tal que todo morfismo es un isomorfismo.

Observación 6.1.3. Dado que $\mathcal{C}$ es rígida, para cada objeto X de $\mathcal{C}$, existe $X^* \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, tal que $X \otimes X^* \cong \mathbf{1}$.

Ejemplo 6.1.4. Sea G un grupo. Sean A un G-módulo y $\omega \in Z^3(G, A)$ un 3-cociclo normalizado. Sea además $\mathcal{C}(G, A, \omega)$ la siguiente categoría:

1. $\mathrm{Obj}(\mathcal{C}(G, A, \omega)) = G$,
2. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(G,A,\omega)}(g, h) = \begin{cases} A, & \text{si } g = h \\ \emptyset, & \text{si } g \neq h. \end{cases}$

Definimos una estructura de categoría monoidal en $\mathcal{C}(G, A, \omega)$ como sigue.

Sean $g \in \mathrm{End}\,(a)$ y $h \in \mathrm{End}\,(b)$, $a, b \in A$, $g, h \in G$. Entonces, $a \otimes b = a + {}^{g}b$ y $g \otimes h = gh$. Definimos el asociador como $\Phi_{g,h,k} = \omega(g, h, k)$.

La condición de 3-cociclo es equivalente al axioma del pentágono, y la condición de normalidad implica que e es el objeto unidad para esta categoría.

Si $\omega(g, g^{-1}, g) = \omega(g^{-1}, g, g^{-1}) = 1$, la categoría monoidal es rígida, con $g^* = {}^*g = g^{-1}$ y morfismos de evaluación y coevaluación dados por id_e.

Otro ejemplo de 2-grupo coherente está dado por la categoría $\underline{\mathrm{Aut}_{\otimes}(\mathcal{C})}$ de autoequivalencias monoidales.

Definición 6.1.5. Sea $\mathcal{C}$ una categoría arbitraría. Diremos que $\mathcal{C}$ es *esquelética*, si para cada par de objetos $X, Y \in \mathcal{C}$, tales que $X \cong Y$, se tiene que $X = Y$.

Un *esqueleto* de una categoría es una subcategoría plena $\overline{\mathcal{C}}$, tal que cada objeto de $\mathcal{C}$ es isomorfo un objeto de $\overline{\mathcal{C}}$ y $\overline{\mathcal{C}}$ es esquelética.

Toda categoría es equivalente a cualquiera de sus esqueletos. Recordemos la construcción de un esqueleto monoidal $\overline{\mathcal{C}}$ para una categoría monoidal $\mathcal{C}$:

Sea Ω un conjunto de representantes de las clases de isomorfismo de objetos de $\mathcal{C}$, tal que $\mathbf{1} \in \Omega$. Si X es un objeto de $\mathcal{C}$, denotaremos por $\overline{X}$ el objeto en Ω que representa a X.

Definimos una categoría monoidal $(\overline{\mathcal{C}}, \odot)$ como sigue.

La categoría subyacente $\overline{\mathcal{C}}$ está dada por $\mathrm{Obj}(\overline{\mathcal{C}}) = \Omega$, y $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, para todo $X, Y \in \Omega$.

El producto tensorial $\odot$ está definido, en los objetos, por $X \odot Y = \overline{X \otimes Y}$. Elijamos un isomorfismo $\sigma_{X,Y} : X \odot Y \to X \otimes Y$ en $\mathcal{C}$, con $\sigma_{\mathbf{1},X} = \sigma_{X,\mathbf{1}} = \mathrm{id}_X$, para todo par $X, Y \in \mathcal{C}$. Dados $f \in \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(X, Y)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(X', Y')$, definimos $f \odot g$ en la forma

$$f \odot g = \sigma^{-1}_{X',Y'} \circ (f \otimes g) \circ \sigma_{X,Y}.$$

El asociador $\overline{a}$, en $\overline{\mathcal{C}}$, está definido por

$$\begin{tikzcd}
(X \odot Y) \odot Z \arrow[r, "\overline{a}_{X,Y,Z}"] \arrow[d, "\sigma_{X \odot Y, Z}"'] & X \odot (Y \odot Z) \\
(X \odot Y) \otimes Z \arrow[d, "\sigma_{X,Y} \otimes \mathrm{id}_Z"'] & X \otimes (Y \odot Z) \arrow[u, "\sigma^{-1}_{X, Y \odot Z}"'] \\
(X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "a_{X,Y,Z}"] & X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[u, "\mathrm{id}_X \otimes \sigma^{-1}_{Y,Z}"']
\end{tikzcd}$$

La categoría $\mathcal{C}$ es monoidalmente equivalente a la categoría $\overline{\mathcal{C}}$.

Definición 6.1.6. Un 2-grupo coherente $\mathcal{C}$ es llamado 2-grupo *especial*, si $\mathcal{C}$ es una categoría esquelética y los morfismo de evaluación y coevaluación son las identidades.

Proposición 6.1.7. *Todo 2-grupo es equivalente a un 2-grupo especial.*

Demostración. Sea $\mathcal{C}$ un 2-grupo coherente. Sea $(\overline{\mathcal{C}}, \odot)$ el esqueleto de $\mathcal{C}$ construido anteriormente, con la condición adicional de que $\sigma_{X^*,X} = \mathrm{coev}_X^{-1}$, $\sigma_{X,X^*} = e_X$, para todo $X \in \mathrm{Obj}(\overline{C})$.

Con esta elección, tenemos que $\overline{\alpha}_{X,X^*,X} = \mathrm{id}_X$ $\overline{\alpha}_{X^*,X,X^*} = \mathrm{id}_{X^*}$. Por lo tanto, $(X^*, \mathrm{id}_{\mathbf{1}}, \mathrm{id}_{\mathbf{1}})$ es el dual de X. $\square$

Corolario 6.1.8. *Sean G un grupo y A un G-módulo. Entonces cada elemento del tercer grupo de cohomología $H^3(G, A)$ tiene un representante $\omega \in Z^3(G, A)$, tal que $\alpha(g, g^{-1}, g) = \alpha(g^{-1}, g, g^{-1}) = 1$ para todo $g \in G$.* $\square$

Teorema 6.1.9. *[3]. Todo 2-grupo categórico es equivalente a uno de la forma $\mathcal{C}(G, A, \omega)$. Un isomorfismo de $\mathcal{C}(G, A, \omega)$ en $\mathcal{C}(G', A', \omega')$ consiste de un isomorfismo de G en G' y un isomorfismo de A en A', el cual envía ω en ω' y la clase cohomología $[\omega] \in H^3(G, A)$ en $[\omega'] \in H^3(G', A')$.*

Existe una correspondencia uno a uno entre funtores monoidales

$$F\colon \mathcal{C}(G,A,\omega) \to \mathcal{C}(G',A',\omega')$$

y ternas (ϕ,ψ,k) *que consisten de:*

- *un homomorfismo de grupos* $\phi\colon G \to G'$,
- *un homomorfismo de módulos* $\psi\colon A \to A'$,
- *una 2-cocadena normalizada* $k\colon G^2 \to A'$, *tales que* $dk = \psi\omega - \omega'\phi^3$.

Dados funtores monoidales $F, F'\colon \mathcal{C}(G,A,\omega) \to \mathcal{C}(G',A',\omega')$, *existe una correspondencia uno a uno entre isomorfismos naturales monoidales* $\theta\colon F \to F'$ *y 1-cocadenas normalizadas* $p\colon G \to A'$, *con* $dp = k - k'$.

Demostración. Sólo demostraremos la primera parte. La segunda parte sigue directamente de las definiciones de funtor monoidal y transformación natural entre categorías monoidales.

Sea $\mathcal{C}$ un grupo categórico. Por la Proposición 6.1, podemos suponer que $\mathcal{C}$ es un 2-grupo especial.

Ahora describamos cómo obtener la terna (G,A,ω) asociada a un 2-grupo especial C. En un 2-grupo especial, los objetos isomorfos son iguales, luego el conjunto de objetos forma un grupo. Sea G este grupo.

Los endomorfismos del objeto unidad en cualquier categoría monoidal forman un monoide conmutativo con el producto tensorial. Aplicado al 2-grupo, esto implica que los automorfismos del objeto unidad $\mathbf{1}$ forman un grupo abeliano. Sea A este grupo abeliano.

Existe una acción por automorfismos α de G en A, dada por

$$\alpha(g,h) = (1_g \otimes h) \otimes 1_{\overline{g}},$$

para todo $g \in G$, $h \in A$.

Finalmente, dado que el 2-grupo es esquelético, no necesitamos paréntesis para el producto tensorial de los objetos, y el asociador proporciona un automorfismo

$$a_{g_1,g_2,g_3}\colon g_1 \otimes g_2 \otimes g_3 \to g_1 \otimes g_2 \otimes g_3.$$

Para todo objeto $x \in G$, identificamos $\mathrm{Aut}(x)$ con $\mathrm{Aut}(1) = A$, tensorizando con $\bar{x}$ a la derecha: si $f\colon x \to x$, entonces $f \otimes \bar{x}\colon 1 \to 1$, puesto que $x \otimes \bar{x} = 1$.

El asociador puede verse como un mapa de G^3 a A. Por abuso de notación, indicaremos este mapa por:

$$\begin{aligned} a\colon G^3 &\to A, \\ (g_1,g_2,g_3) &\mapsto a(g_1,g_2,g_3) := a_{g_1,g_2,g_3} \otimes \overline{g_1 \otimes g_2 \otimes g_3}. \end{aligned}$$

La identidad del pentágono implica que este mapa satisface

$$g_0a(g_1,g_2,g_3)-a(g_0g_1,g_2,g_3)+a(g_0,g_1g_2,g_3)-a(g_0,g_1,g_2g_3)+a(g_0,g_1,g_2)=0,$$

para todo $g_0,g_1,g_2,g_3\in G$, donde el primer término está definido usando la acción de G en A, y tomando ventaja del hecho que A es abeliano, para escribir la operación de grupo en forma aditiva.

Por definición de objeto unidad en una categoría monoidal, tenemos que a es 3-cociclo normalizado, es decir $a(g_1,g_2,g_3)=1$, si g_1,g_2 son g_3 iguales a $\mathbf{1}$. $\square$

Definición 6.1.10. Un 2-grupo coherente $\mathcal{C}$ es llamado un 2-grupo *estricto* si $\mathcal{C}$ es una categoría monoidal estricta y los morfismos de evaluación y coevaluación son las identidades.

Definición 6.1.11. Un módulo cruzado de grupos es un homomorfismo de grupos $\partial : G_2\to G_1$, junto con una acción de G_1 sobre G_2 (la cual denotaremos por $(e,n)\mapsto {}^en$), los cuales satisfacen las siguientes condiciones:

(i) ${}^{\partial(m)}n=mnm^{-1}$, para todo $m,n\in G_2$,

(ii) $\partial({}^en)=e\alpha(n)e^{-1}$, para todo $e\in G_1, n\in G_2$.

Proposición 6.1.12. *Existe una correspondencia biyectiva entre 2-grupos estrictos y módulos cruzados.*

Demostración. Sea $\mathcal{C}$ un 2-grupo estricto. El módulo cruzado asociado consiste del grupo de objetos de $\mathcal{C}$, que será el grupo G_1, el grupo de morfismos de la forma $X\to\mathbf{1}$, donde $\mathbf{1}$ es el objeto unidad de $\mathcal{C}$, con producto dado por

$$(X\xrightarrow{a}\mathbf{1}).(Y\xrightarrow{b}\mathbf{1})=X\otimes Y\xrightarrow{a\otimes b}\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}=\mathbf{1},$$

es el grupo G_2, con acción dada por

$${}^{Y}(X\xrightarrow{a}\mathbf{1})=Y\otimes X\otimes Y^*\xrightarrow{Y\otimes a\otimes Y^*}Y\otimes\mathbf{1}\otimes Y^*=\mathbf{1},$$

y el homomorfismo $\partial : G_2\to G_1$, envía $X\to\mathbf{1}$ a X.

Recíprocamente, si (G_1,G_2,∂) es un módulo cruzado, el 2-grupo asociado tiene como objetos G_1, el conjunto de flechas $G_1\rtimes G_2$. El inicio de una flecha está dado por $S(g,\alpha)=g$, y el final por $T(g,\alpha)=g\partial(\alpha)$. $\square$

6.2. La obstrucción a una G-acción sobre una categoría tensorial

Sea $\underline{\mathrm{Aut}_\otimes(\mathcal{C})}$ la categoría monoidal de auto-equivalencias tensoriales de $\mathcal{C}$, donde las flechas son isomorfismos naturales tensoriales y el producto está dado por la composición de funtores. Entonces, $\underline{\mathrm{Aut}_\otimes(\mathcal{C})}$ es un 2-grupo.

Sean $(\Gamma, H, [a])$ los datos asociados a $\underline{\mathrm{Aut}_\otimes(\mathcal{C})}$ en el Teorema 6.1.9. Entonces, $\Gamma \cong \mathrm{Aut}_\otimes(\mathcal{C})$, y $H = \mathrm{Aut}_\otimes(\mathrm{id}_\mathcal{C})$, es el grupo abeliano de isomorfismos naturales monoidales del funtor identidad.

Teorema 6.2.1. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial y sea G un grupo. Consideremos los datos $(Aut_\otimes(\mathcal{C}), Aut_\otimes(id_\mathcal{C}), [a])$ asociados al 2-grupo $\underline{Aut_\otimes(\mathcal{C})}$. Entonces,*

- *Un homomorfismo de grupos $\psi : G \to Aut_\otimes(\mathcal{C})$ es realizable como una G-acción sobre $\mathcal{C}$ si y soló si $0 = [a\psi^3] \in H^3(G, Aut_\otimes(id_\mathcal{C}))$.*
- *Si el homomorfismo de grupos $\psi : G \to Aut_\otimes(\mathcal{C})$ es realizable, entonces el conjunto de realizaciones de ψ está en correspondencia uno a uno con $Z^2(G, Aut_\otimes(id_\mathcal{C}))$. Además, el conjunto de clases de equivalencias de realizaciones de ψ está en correspondencia uno a uno con $H^2(G, Aut_\otimes(id_\mathcal{C}))$.*

Demostración. La categoría monoidal $\underline{G}$ tiene asociado los datos $(G, 0, 0)$, donde 0 es el grupo abeliano con un elemento. La demostración es una consecuencia inmediata del Teorema 6.1.9. □

Recordemos que si A es un módulo para el grupo cíclico C_m de orden m, entonces se tienen:

$$H^n(C_m; A) = \begin{cases} \{a \in A : Na = 0\}/(\sigma - 1)A, & \text{si } n = 1, 3, 5, \ldots \\ A^{C_m}/NA, & \text{si } n = 2, 4, 6, \ldots, \end{cases} \tag{6.2.1}$$

donde $N = 1 + \sigma + \sigma^2 + \cdots + \sigma^{m-1}$. Ver [79, Theorem 6.2.2].

Dado un elemento $a \in A^{C_m}$, el 2-cociclo asociado puede construirse como sigue.

$$\gamma_a(\sigma^i, \sigma^j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i + j < m, \\ a^{i+j-m}, & \text{si } i + j \geq m. \end{cases} \tag{6.2.2}$$

Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ una equivalencia monoidal, tal que existe una isomorfismo natural monoidal $\alpha : F^m \to \mathrm{id}_\mathcal{C}$.

Por el Teorema 6.2.1 y (6.2.1), el homomorfismo inducido $\psi : C_m \to \mathrm{Aut}_\otimes(\mathcal{C})$ es realizable, si y sólo si, $\mathrm{id}_F \otimes \alpha \otimes \mathrm{id}_{F^{-1}} = \alpha$. En este caso, dos isomorfismos naturales $\alpha_1, \alpha_2 : F^m \to \mathrm{id}_\mathcal{C}$ realizan acciones de C_m equivalentes, si y sólo si, existe un isomorfismo natural monoidal $\theta : F_1 \to F_2$, tal que $\theta^m F_1 = F_2$.

Corolario 6.2.2. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial. Entonces, el conjunto de C_m-acciones sobre $\mathcal{C}$ está en correspondencia uno a uno con pares (F, α), donde $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es una equivalencia monoidal, $\alpha : F^m \to id_\mathcal{C}$ es un isomorfismo natural monoidal, tales que $id_F \otimes \alpha = \alpha \otimes id_F$.*

Dos pares (F_1, α_1) y (F_2, α_2) inducen C_m-acciones equivalentes, si y sólo si, existe un isomorfismo natural monoidal $\theta : F_1 \to F_2$ tal que $\theta^m F_1 = F_2$. □

Siguiendo la demostración del Teorema 6.1.9 y la descripción de el 2-cociclo asociado a un elemento C_m-invariante (6.2.2), podemos describir la C_m-acción $\psi : C_m \to \underline{\mathrm{Aut}_\otimes(\mathcal{C})}$ asociada al par (F, α) como: $\psi(1) = \mathrm{id}_\mathcal{C}$, $\psi(\sigma^i) = F^i$, $i = 1, \dots m-1$, y el isomorfismo natural monoidal $\phi_\alpha(\sigma^i, \sigma^j) : F^i \circ F^j \to F^{i+j}$

$$\phi_\alpha(\sigma^i, \sigma^j) = \begin{cases} \mathrm{id}_\mathcal{C}, & \text{si } i+j < m, \\ \mathrm{id}_F \otimes \alpha^{i+j-m} = \alpha^{i+j-m} \otimes \mathrm{id}_F, & \text{si } i+j \geq m. \end{cases} \tag{6.2.3}$$

El grupo de bigalois de un álgebra de Hopf

Sea H un álgebra de Hopf. Por [64, Corollary 5.7], las siguientes categorías son equivalentes:

- La categoría monoidal $\underline{\mathrm{BiGal}(H)}$, donde objetos son objetos H-bigaloisianos, morfismos son morfismos de A-bicomódulo álgebra, y producto tensorial $A\square_H B$, el producto cotensorial sobre H.
- La categoría monoidal $\underline{\mathrm{Aut}_\otimes(\,{}^H\mathcal{M})}$.

Schauenburg definió el grupo $\mathrm{BiGal}(H)$ como el conjunto de clases de equivalencia de clases de isomorfismo de objetos H-bigaloisianos con multiplicación inducida por el producto cotensorial. Este grupo coincide con $\mathrm{Aut}_\otimes({}^H\mathcal{M})$.

Es fácil ver que para el álgebra de Hopf kG de un grupo G, $\mathrm{BiGal}(kG) = \mathrm{Aut}(G) \ltimes H^2(G, k^*)$. Sin embargo, es difícil encontrar una descripción explícita en en general. El grupo $\mathrm{BiGal}(H)$ ha sido calculado para algunas álgebras de Hopf, por ejemplo: para el álgebra de Taft [59], para álgebras de Hopf monomiales no semisimples [7], para el álgebra de funciones sobre un grupo finito cuyo orden es coprimo con 6 [12].

El grupo abeliano $\mathrm{Aut}_\otimes(\mathrm{id}_\mathcal{C})$ para álgebras de Hopf

Proposición 6.2.3. *Sea H un álgebra de Hopf. Entonces $Aut_\otimes(id_{{}_H\mathcal{M}}) \cong G(H) \cap Z(H)$.*

Demostración. Los mapas $H \otimes_k (M \otimes_k N) \to (H \otimes_H N) \otimes_k (H \otimes_H N), h \otimes m \otimes n \mapsto (h_{(1)} \otimes m) \otimes (h_{(2)} \otimes n)$, y $H \otimes_k k \to k, h \otimes 1 \mapsto \epsilon(h)$, inducen morfismos naturales de H-módulos

$$F_{M,N} : H \otimes_H (M \otimes N) \to (H \otimes_H M) \otimes (H \otimes_H N)$$
$$F^0 : H \otimes_H k \to k.$$

El funtor identidad es naturalmente isomorfo al funtor monoidal $(.H. \otimes_H (-), F, F^0)$, y es bien conocido que todo endomorfismo de H-bimódulos de H es de la forma $\psi_c : H \to H, h \mapsto ch$, para algún $c \in Z(H)$. La transformación natural asociada a ψ_c es monoidal, si y sólo si, ψ_c es un morfismo de bicomódulo álgebras. Es decir, si y sólo si, c es un elemento de tipo grupo. $\square$

Para el álgebra de grupo kG, tenemos $\mathrm{Aut}_\otimes(\mathrm{id}_{{}_{kG}\mathcal{M}}) \cong Z(G)$. Para el álgebra de Hopf $\mathbb{C}^G$, donde G es un grupo finito, tenemos $\mathrm{Aut}_\otimes(\mathrm{id}_{{}_{kG}\mathcal{M}}) \cong G/[G, G]$.

6.3. La categoría de los objetos equivariantes

Sea G un grupo munido de una acción en una categoría abeliana $\mathcal{M}$. Explícitamente, una G-acción sobre $\mathcal{M}$, consiste de los siguientes datos:

- funtores $\sigma_* : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ para todo $\sigma \in G$, donde $e_* = \mathrm{id}_{\mathcal{M}}$.
- isomorfismos naturales $\phi(\sigma, \tau) : (\sigma\tau)_* \to \sigma_* \circ \tau_*$ para todo $\sigma, \tau \in G$,

tal que para todo $\sigma, \tau, \rho \in G$ el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(\sigma\tau\rho)_* X \arrow[r, "\phi(\sigma,\tau\rho)"] \arrow[d, "\phi(\sigma,\tau\rho)_X"'] & (\sigma\tau)_*\rho_* X \arrow[d, "\phi(\sigma,\tau)_{\rho_* X}"] \\
\sigma_*(\tau\rho)_* X \arrow[r, "\sigma_*(\phi(\tau,\rho)_X)"] & \sigma_*\tau_*\rho_* X
\end{tikzcd}$$

conmuta y $\phi(\sigma, e) = \phi(e, \sigma) = \mathrm{id}_\sigma$, para todo $\sigma \in G$.

La G-equivariantización de $\mathcal{M}$, denotada por $\mathcal{M}^G$, es la categoría definida como sigue. Un objeto de $\mathcal{M}^G$ es un par (X, f), donde X es un objeto de $\mathcal{M}$ y f es una familia de isomorfismos $f(\sigma) : \sigma_* X \to X$, para todo $\sigma \in G$, tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(\sigma\tau)_* X \arrow[r, "f_{\sigma\tau}"] \arrow[d, "\phi(\sigma,\tau)_X"'] & X \\
\sigma_*\tau_* X \arrow[r, "\sigma_*(f_\tau)"] & \sigma_* X \arrow[u, "f_\sigma"']
\end{tikzcd}$$

conmuta para todo $\sigma, \tau \in G$. Un morfismo $(X, f) \to (X', f')$ en $\mathcal{M}^G$, es un morfismo $u : X \to X'$ en $\mathcal{C}$, tal que

$$f'(\sigma) \circ \sigma_* u = u \circ f(\sigma),$$

para todo $\sigma \in G$.

Ejemplo 6.3.1. Sea $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ un producto cruzado. Es decir, A es una extensión kG-galoisiana hendida. Como vimos en la sección 3.2, $\mathcal{M}_A \cong (\mathcal{M}_{A_e})_{kG}$. Pero es fácil ver que un objeto en $(\mathcal{M}_{A_e})_{kG}$ es exactamente un objeto en $(\mathcal{M}_{A_e})^G$. En otras palabras, tenemos $(\mathcal{M}_{A_e})^G = (\mathcal{M}_{A_e})_{kG} \cong \mathcal{M}_A$.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal y $* : \underline{G} \to \mathrm{Aut}_\otimes(\mathcal{C})$ una acción de G sobre $\mathcal{C}$. Tenemos isomorfismos naturales

$$\psi_{A,B} : \sigma_* A \otimes \sigma_* B \to \sigma_*(A \otimes B)$$

para todo $A, B \in \mathcal{C}$, tal que los siguientes diagramas conmutan, para todo $\sigma, \tau \in G$ $A, B, C \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$.:

$$
\begin{tikzcd}
\sigma_*((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[r, "\psi(\sigma)_{X \otimes Y, Z}"] \arrow[d, "\sigma_* a_{X,Y,Z}"'] & \sigma_*(X \otimes Y) \otimes \sigma_*(Z) \arrow[d, "\psi(\sigma)_{X,Y} \otimes \mathrm{id}"] \\
\sigma_*(X \otimes (Y \otimes Z)) \arrow[d, "\psi(\sigma)_{X, Y \otimes Z}"'] & (\sigma_*(X) \otimes \sigma_*(Y)) \otimes \sigma_*(Z) \arrow[d, "a_{\sigma_*(X), \sigma_*(Y), \sigma_*(Z)}"] \\
\sigma_*(X) \otimes \sigma_*(Y \otimes Z) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \psi(\sigma)_{Y,Z}"] & \sigma_*(X) \otimes (\sigma_*(Y) \otimes \sigma_*(Z))
\end{tikzcd}
\tag{6.3.1}
$$

$$
\begin{tikzcd}
((\sigma\tau)_* A) \otimes ((\sigma\tau)_* B) \arrow[r, "\phi(\sigma,\tau)_A \otimes \phi(\sigma,\tau)_B"] \arrow[dd, "\phi(\sigma\tau)_{A,B}"'] & (\sigma_*(\tau_* A)) \otimes (\sigma_*(\tau_* B)) \arrow[d, "\phi(\sigma)_{\tau_* A, \tau_* B}"] \\
 & \sigma_*((\tau_* A) \otimes (\tau_* B)) \arrow[d, "\mathrm{id}_{\sigma_*} \psi(\tau)_{A,B}"'] \\
(\sigma\tau)_*(A \otimes B) \arrow[r, "\phi(\sigma,\tau)_{A,B}"] & \sigma_*(\tau_*(A \otimes B))
\end{tikzcd}
$$

Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial con una acción del grupo G por automorfismos tensoriales. La categoría $\mathcal{C}^G$ posee una estructura de categoría tensorial, definida como sigue:

$$(A, f) \otimes (B, g) = (A \otimes B, h)$$

donde $h(\sigma) = (f(\sigma) \otimes g(\sigma)) \circ \psi(\sigma)^{-1}_{A,B}$. El objeto unidad es $(\mathbf{1}, \mathrm{id}_{\mathbf{1}})$, y los isomorfismos de asociatividad son los heredados de $\mathcal{C}$.

Capítulo 7

Teoría de Clifford para categoría tensoriales

Sea G un grupo y sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial. Diremos que $\mathcal{C}$ es una categoría tensorial G-*graduada*, si existe una descomposición

$$\mathcal{C} = \oplus_{x\in G}\mathcal{C}_x,$$

de $\mathcal{C}$ en suma directa de subcategorías abelianas plenas, tal que para todo $\sigma, x \in G$, el bifuntor $\otimes$ envía $\mathcal{C}_\sigma \times \mathcal{C}_x$ a $\mathcal{C}_{\sigma x}$.

Recordemos que un anillo graduado $A = \oplus_{\sigma\in G}A_\sigma$ es llamado *fuertemente graduado*, si $A_xA_y = A_{xy}$ para todo $x, y \in G$.

Sea $\mathcal{C}_\sigma \cdot \mathcal{C}_\tau$ **la subcategoría k-lineal plena** de $\mathcal{C}_{\sigma\tau}$ cuyos objetos son sumas directas de objetos de la forma $V_\sigma \otimes W_\tau$, para $V_\sigma \in \mathcal{C}_\sigma$, $W_\tau \in \mathcal{C}_\tau$, $\sigma, \tau \in G$.

Definición 7.0.2. Sea $\mathcal{C} = \oplus_{\sigma\in G}\mathcal{C}_\sigma$ una categoría tensorial graduada sobre un grupo G. Diremos que $\mathcal{C}$ es *fuertemente graduada*, si el funtor $\mathcal{C}_\sigma \cdot \mathcal{C}_\tau \to \mathcal{C}_{\sigma\tau}$ es una equivalencia de categorías, para todo $\sigma, \tau \in G$.

El resultado principal de este capítulo, es la descripción de las categorías módulo sobre una categoría fuertemente graduada por un grupo G, como categorías módulo inducidas desde subcategorías tensoriales asociada con los subgrupos de G. Como aplicaciones del teorema principal generalizamos algunos resultados de clasificación de categorías módulo sobre categorías punteadas y describimos las categorías módulo simples para G-equivariantizaciones de categorías tensorial, donde G es un grupo finito.

7.1. Producto tensorial de categorías módulo.

Definición 7.1.1. [74, pp. 518] Sean $(\mathcal{M}, m)$ y $(\mathcal{N}, n)$ categorías $\mathcal{C}$-módulo, a derecha e izquierda, respectivamente. Un funtor $\mathcal{C}$-bilineal $(F, \zeta) : \mathcal{M} \times \mathcal{N} \to \mathcal{D}$ es un bifuntor F :

$\mathcal{M} \times \mathcal{N} \to \mathcal{D}$, junto con isomorfismos naturales

$$\zeta_{M,X,N} : F(M \otimes X, N) \to F(M, X \otimes N),$$

tales que

$$F(m_{M,X,Y}, N)\zeta_{M,X\otimes Y,N}F(M, n_{X,Y,N}) = \zeta_{M\otimes X,Y,N}\zeta_{M,X,Y\otimes N},$$

para todo $M \in \mathcal{M}$, $N \in \mathcal{N}$, $X, Y \in \mathcal{C}$.

Una transformación natural $\omega : (F, \zeta) \to (F', \zeta')$ entre funtores $\mathcal{C}$-bilineales, es una transformación natural $\omega_{M,N} : F(M, N) \to F'(M, N)$, tal que

$$\omega_{M,X\otimes N}\zeta_{M,X,N} = \alpha'_{M,X,N}\omega_{M\otimes X,N},$$

para todo $M \in \mathcal{M}$, $N \in \mathcal{N}$, $X \in \mathcal{C}$.

Ejemplo 7.1.2. Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial y sea $\mathcal{D}$ una subcategoría tensorial de $\mathcal{C}$. Sea $(\mathcal{M}, m)$ una categoría $\mathcal{C}$-módulo y sea $\mathcal{N}$ una subcategoría $\mathcal{D}$-módulo de la categoría $\mathcal{D}$-módulo $\mathcal{M}$. Entonces, el funtor $\mathcal{C} \times \mathcal{N} \to \mathcal{M}$, $(V, N) \to V \otimes M$, tiene una estructura $\mathcal{D}$-bilineal canónica. Aquí, $\mathcal{C}$ es una categoría $\mathcal{D}$-módulo en la forma obvia, y el isomorfismo $\mathcal{D}$-bilineal está dado por m.

Denotaremos por $\mathrm{Bil}(\mathcal{M}, \mathcal{N}; \mathcal{D})$ la categoría de funtores $\mathcal{C}$-bilineales. En [74] se construye una categoría k-lineal $\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N}$, no necesariamente abeliana, por relaciones y generadores, junto con un funtor $\mathcal{C}$-bilineal $T : \mathcal{M} \times \mathcal{N} \to \mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N}$, que induce una equivalencia de categoría k-lineales $\mathcal{F}(\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N}, \mathcal{D}) \to \mathrm{Bil}(\mathcal{M}, \mathcal{N}; \mathcal{D})$, para toda categoría k-lineal $\mathcal{D}$.

Los objetos de $\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N}$ son sumas finitas de los símbolos $[X, Y]$, para objetos $X \in \mathcal{M}$, $Y \in \mathcal{N}$. Los morfismos son sumas de composiciones de símbolos

$$[f, g] : [X, Y] \to [X', Y'],$$

para $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$, símbolos

$$\alpha_{X,V,Y} : [X \otimes V, Y] \to [X, V \otimes Y],$$

para $X \in \mathcal{M}$, $V \in \mathcal{C}$, $N \in \mathcal{N}$, y símbolos para los inversos formales de $\alpha_{X,V,Y}$. Los morfismos generadores satisfacen las siguientes relaciones:

(i) Linealidad:

$$[f + f', g] = [f, g] + [f', g], \quad [f, g + g'] = [f, g] + [f, g'],$$
$$[af, g] = [f, ag] = a[f, g],$$

para todos los morfismos $f, f' : M \to M'$ en $\mathcal{M}$, $g, g' : N \to N'$ en $\mathcal{N}$, y $a \in k$.

(ii) Funtorialidad:

$$[ff', gg'] = [f', g'][f, g], \quad [\mathrm{id}_M, \mathrm{id}_N] = \mathrm{id}_{[M,N]},$$

para todo $f : M \to M'$, $f' : M' \to M''$ en $\mathcal{M}$, y $g : N \to N'$, $g' : N' \to N''$ en $\mathcal{N}$.

(iii) Naturalidad:

$$\alpha_{M',V',N'}[f \otimes u, g] = [f, u \otimes g]\alpha_{M,V,N},$$

para morfismo $f : M \to M'$ en $\mathcal{M}$, $u : V \to V'$ en $\mathcal{C}$, y $g : N \to N'$ en $\mathcal{N}$.

(iv) Coherencia:

$$[\alpha_{M,V,W}, \mathrm{id}_N]\alpha_{M,V\otimes W,N}[\mathrm{id}_M, \alpha_{V,W,N}] = \alpha_{M\otimes V,Y,N}\alpha_{M,X,Y\otimes N},$$

para todo $M \in \mathcal{M}, N \in \mathcal{N}, V, W \in \mathcal{C}$.

Sean $\mathcal{M}$, y $\mathcal{N}$ categoría k-lineales. Entonces, la categoría $\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N} := \mathcal{M} \boxtimes_{\mathrm{Vec}_f} \mathcal{N}$, es el producto tensorial de categorías tensoriales k-lineales. Ver [4, Definition 1.1.15]. Si $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son categorías semisimples, éste es el producto tensorial de categorías tensoriales de categorías abeliana (semisimples) de Deligne [13].

Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ categorías tensoriales. Si $\mathcal{M}$ es una categoría $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$-bimódulo y $\mathcal{N}$ es una categoría $\mathcal{C}_2$-módulo a derecha, entonces la categoría $\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}_2} \mathcal{N}$ tiene una estructura de categoría $\mathcal{C}_1$-módulo a izquierda.

La acción de un objeto $X \in \mathcal{C}_1$ sobre un objeto $[M, N] \in \mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}_2} \mathcal{N}$ está dada por

$$X \otimes [M, N] = [X \otimes M, N].$$

La acción sobre un morfismo $\alpha_{M,Y,N}$ está dada por $\mathrm{id}_X \otimes \alpha_{M,Y,N} = \alpha_{X\otimes M,X,Y,N} \circ [\alpha^{-1}_{X,M,Y}, N]$, y la asociatividad es

$$[\alpha_{X,Y,M}, N] : [(X \otimes Y) \otimes M, N] \to [X \otimes (Y \otimes M), N].$$

Proposición 7.1.3. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial. Sean $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ categorías $\mathcal{C}$-bimódulo, y sea $\mathcal{M}_3$ una categoría $\mathcal{C}$-módulo a derecha. Entonces*

1. *$\mathcal{C} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M}_3 \cong \mathcal{M}_3$, como categoría $\mathcal{C}$-módulo a izquierda.*
2. *$(\mathcal{M}_1 \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M}_2) \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M}_3 \cong \mathcal{M}_1 \boxtimes_{\mathcal{C}} (\mathcal{M}_2 \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M}_3)$, como categorías $\mathcal{C}$-módulo a izquierda.*
3. *si $\mathcal{M} = \oplus_i^n \mathcal{M}^i$, $\mathcal{N} = \oplus_j^m \mathcal{N}^j$, como categorías $\mathcal{C}$-módulo a derecha e izquierda, entonces $\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N} = \oplus_{i,j}\mathcal{M}_i \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N}_j$, como categorías k-lineales.*

Demostración. Por la Proposición 2.9.3, podemos suponer que todas la categorías módulo son estrictas.

(1) El funtor $F : \mathcal{M} \to \mathcal{C} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M}$ $M \mapsto [1, M]$, es una equivalencia de categorías. En efecto, usando el isomorfismo $\alpha_{1,X,M}$, podemos ver que F es esencialmente sobreyectivo, y todo morfismo entre $[1, M]$ y $[1, N]$ es de la forma $[1, f]$, para $f : M \to N$. Entonces F es fiel

y pleno. Además, con el isomorfismo natural $\eta_{V,M} = \alpha_{1,V,M} : F(V \otimes N) \to V \otimes F(N)$, el par (F, η) es un funtor $\mathcal{C}$-lineal, puesto que

$$\begin{aligned}\eta_{V\otimes W,M} = \alpha_{1,V\otimes W,M} =& \alpha_{V,W,M} \circ \alpha_{1,V,W\otimes M}\\ =& \mathrm{id}_V \otimes \alpha_{1,W,M} \circ \eta_{V,W\otimes M}\\ =& \mathrm{id}_V \otimes \eta_{W,M} \circ \eta_{V,W\otimes M}.\end{aligned}$$

(2) Para todo objeto $M_1 \in \mathcal{M}_1$, el funtor $\lambda_{M_1} : \mathcal{M}_2 \times \mathcal{M}_3 \to (\mathcal{M}_1 \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M}_2) \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M}_3$, donde

$$\lambda_{M_1}(M_2, M_3) = [[M_1, M_2], M_3], \quad \lambda_{M_1}(f, g) = [[\mathrm{id}_{M_1}, f], g],$$

con transformaciones naturales $\eta^1_{M_2,V,M_3} := \alpha_{[M_1,M_2],V,M_3}$, es un funtor $\mathcal{C}$-bilineal. Luego tenemos una familia de funtores $\overline{\lambda_{M_1}} : \mathcal{M}_2 \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M}_3 \to (\mathcal{M}_1 \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M}_2) \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M}_3$, $\overline{\lambda_{M_1}}([M_2, M_3]) = [[M_1, M_2], M_3]$. Ahora, el funtor

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1 \times (\mathcal{M}_2 \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M}_3) &\to (\mathcal{M}_1 \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M}_2) \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M}_3,\\ (M_1, [M_2, M_3]) &\mapsto \overline{\lambda_{M_1}}([M_2, M_3]),\end{aligned}$$

con la transformación natural $\eta^2_{M_1,V,[M_2,M_3]} = \alpha_{M_1,V,[M_2,M_3]}$, es un funtor $\mathcal{C}$-bilineal. Por lo tanto tenemos un funtor $\pi : \mathcal{M}_1 \boxtimes_{\mathcal{C}} (\mathcal{M}_2 \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M}_3) \to (\mathcal{M}_1 \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M}_2) \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M}_3$, $[M_1, [M_2, M_3]] \mapsto [[M_1, M_2], M_3]$. El funtor π es esencialmente sobreyectivo y

$$\begin{aligned}\pi([f, [g, h]]) &= [[f, g], h]\\ \pi([\mathrm{id}_{M_1} \alpha_{M_2,V,M_3}]) &= \alpha_{[M_1,M_2],V,M_3}\\ \pi(\alpha_{M_1,V,[M_2,M_3]}) &= [\alpha_{M_1,V,M_2}, \mathrm{id}_{M_3}].\end{aligned}$$

Luego π es fiel y pleno, entonces por [43, Theorem 1, pp. 91], el funtor π es una equivalencia de categorías. Finalmente, notemos que el funtor π es $\mathcal{C}$-lineal.

(3) Sigue directamente de la construcción de $\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N}$. □

Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial G-graduada. Notemos que si $H \subseteq G$ es un subgrupo de G, entonces la categoría $\mathcal{C}_H = \oplus_{\tau\in H}\mathcal{C}_\tau$ es una subcategoría de $\mathcal{C}$.

Diremos que un objeto $U \in \mathcal{C}$ es *invertible*, si el funtor $U \otimes (-) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}, V \mapsto U \otimes V$ es una equivalencia de categorías, o, equivalentemente, si existe un objeto $U^* \in \mathcal{C}$, tal que $U^* \otimes U \cong U \otimes U^* \cong 1$.

Proposición 7.1.4. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría G-graduada y sea $H \subseteq G$ un subgrupo de G. Supongamos que cada categoría $\mathcal{C}_\sigma$ posee al menos un objeto invertible, para cada $\sigma \in G$. Sea $\mathcal{M}$ una categoría módulo sobre $\mathcal{C}_H = \oplus_{h\in H}\mathcal{C}_h$. Entonces la categoría k-lineal $\mathcal{C} \boxtimes_{\mathcal{C}_H} \mathcal{M}$ tiene una estructura abeliana. Además, puesto que $\mathcal{C}$ es una categoría $\mathcal{C}$-$\mathcal{C}_H$-bimódulo entonces $\mathcal{C} \boxtimes_{\mathcal{C}_H} \mathcal{M}$ es una categoría módulo a izquierda sobre la categoría tensorial $\mathcal{C}$.*

Demostración. Supondremos que la categoría tensorial $\mathcal{C}$ es estricta. Sea $\Sigma = \{e, \sigma_1, \ldots\}$ un conjunto de representantes de las coclases G/H. Dado $\mathcal{C} = \bigoplus_{\sigma\in\Sigma} \mathcal{C}_{\sigma H}$ como categoría $\mathcal{C}_H$-módulo a derecha, $\mathcal{C} \boxtimes_{\mathcal{C}_H} \mathcal{M} = \bigoplus_{\sigma\in\Sigma} \mathcal{C}_{\sigma H} \boxtimes_{\mathcal{C}_H} \mathcal{M}$, como categoría k-lineal, por la Proposición 7.1.3.

Para toda coclase σH en G, sea $U_\sigma \in \mathcal{C}_\sigma$ un objeto invertible. El funtor $U_\sigma : \mathcal{C}_H \to \mathcal{C}_{\sigma H}$, $V \mapsto U_\sigma \otimes V$ es una equivalencia de categorías con cuasi-inverso $U_\sigma^* : \mathcal{C}_{\sigma H} \to \mathcal{C}_H$, $W \to U_\sigma^* \otimes W$. Entonces podemos asumir, salvo isomorfismos, que cada objeto de $\mathcal{C}_{\sigma H}$ es de la forma $U_\sigma \otimes V$, donde $V \in \mathcal{C}_H$.

Sea $\bigoplus_i [V_i, M_i] \in \mathcal{C}_{\sigma H} \boxtimes_{\mathcal{C}_H} \mathcal{M}$. Para todo V_i existe V_i' tal que $V_i \cong U_\sigma \otimes V_i'$. Entonces $\bigoplus_i [V_i, M_i] \cong [U_\sigma, \bigoplus_i V_i' \otimes M_i]$, es decir, podemos asumir salvo isomorfismos, que cada objeto de $\mathcal{C}_{\sigma H} \boxtimes_{\mathcal{C}_H} \mathcal{M}$ es de la forma $[U_\sigma, M]$.

Si $U_\sigma \otimes V \cong U_\sigma$ entonces $V \cong 1$; luego todo morfismo $[U_\sigma, M] \to [U_\sigma, M']$ es de la forma $[\mathrm{id}_{U_\sigma}, f]$, donde $f : M \to M'$. Entonces el funtor : $\mathcal{M} \to \mathcal{C}_{\sigma H} \boxtimes_{\mathcal{C}_H} \mathcal{M}, f \mapsto [\mathrm{id}_{U_\sigma}, f]$ es una equivalencia de categorías k-lineales. Definimos la estructura de categoría abeliana sobre $\mathcal{C}_{\sigma H} \boxtimes_{\mathcal{C}_H} \mathcal{M}$ como la inducida por esta equivalencia.

Para la segunda parte, note que

$$\mathcal{C} \boxtimes_{\mathcal{C}_H} \mathcal{M} = \bigoplus_{\sigma\in\Sigma} \mathcal{C}_{\sigma H} \boxtimes_{\mathcal{C}_H} \mathcal{M}$$

como categoría abeliana, luego necesitamos probar que si

$$0 \to [U_\sigma, S] \to [U_\sigma, T] \to [U_\sigma, W] \to 0 \tag{7.1.1}$$

es una sucesión exacta en $\mathcal{C}_{\sigma H} \boxtimes_{\mathcal{C}_H} \mathcal{M}$, entonces la sucesión

$$0 \to [X \otimes U_\sigma, S] \to [X \otimes U_\sigma, T] \to [X \otimes U_\sigma, W] \to 0 \tag{7.1.2}$$

es exacta para todo $X \in \mathcal{C}$. Puesto que $\mathcal{C} = \bigoplus_{\sigma\in G} \mathcal{C}_\sigma$ podemos suponer que $X \in \mathcal{C}_\tau$, entonces $[X \otimes U_\sigma, S], [X \otimes U_\sigma, T], [X \otimes U_\sigma, W] \in \mathcal{C}_{\tau\sigma H} \boxtimes_{\mathcal{C}_H} \mathcal{M}$.

Sea $U_{\tau\sigma} \in \mathcal{C}_{\tau\sigma}$ con inverso $U_{\tau\sigma}^* \in \mathcal{C}_{(\tau\sigma)^{-1}}$, luego tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \to [XU_\sigma, S] \arrow[r, "{[\mathrm{id}, f]}"] \arrow[d] & {[XU_\sigma, T]} \arrow[r, "{[\mathrm{id}, g]}"] \arrow[d] & {[XU_\sigma, W] \to 0} \arrow[d] \\
0 \to [U_{\tau\sigma}U_{\tau\sigma}^* XU_\sigma, S] \arrow[r, "{[\mathrm{id}, f]}"] \arrow[d, "\alpha_{U_{\tau\sigma}, U_{\tau\sigma}^* XU_\sigma, S}"'] & {[U_{\tau\sigma}U_{\tau\sigma}^* XU_\sigma, T]} \arrow[r, "{[\mathrm{id}, g]}"] \arrow[d, "\alpha_{U_{\tau\sigma}, U_{\tau\sigma}^* XU_\sigma, T}"'] & {[U_{\tau\sigma}U_{\tau\sigma}^* XU_\sigma, W] \to 0} \arrow[d, "\alpha_{U_{\tau\sigma}, U_{\tau\sigma}^* XU_\sigma, W}"'] \\
0 \to [U_{\tau\sigma}, (U_{\tau\sigma}^* XU_\sigma)S] \arrow[r, "{[\mathrm{id}, \mathrm{id}_{U_{\tau\sigma}^* XU_\sigma} f]}"] & {[U_{\tau\sigma}, (U_{\tau\sigma}^* XU_\sigma)T]} \arrow[r, "{[\mathrm{id}, \mathrm{id}_{U_{\tau\sigma}^* XU_\sigma} g]}"] & {[U_{\tau\sigma}, (U_{\tau\sigma}^* XU_\sigma)W] \to 0}
\end{tikzcd}$$

donde hemos suprimido los símbolos de producto tensorial por motivos de espacio.

Entonces la sucesión (7.1.2) es exacta si y solo si la sucesión

$$0 \to [U_{\tau\sigma}, (U^*_{\tau\sigma} \otimes X \otimes U_\sigma) \otimes S] \to [U_{\tau\sigma}, (U^*_{\tau\sigma} \otimes X \otimes U_\sigma) \otimes T] \to [U_{\tau\sigma}, (U^*_{\tau\sigma} \otimes X \otimes U_\sigma) \otimes W] \to 0 \tag{7.1.3}$$

es exacta. Por definición la secesión (7.1.3) es exacta si y solo si la sucesión

$$0 \to (U^*_{\tau\sigma} \otimes X \otimes U_\sigma) \otimes S \to (U^*_{\tau\sigma} \otimes X \otimes U_\sigma) \otimes T \to (U^*_{\tau\sigma} \otimes X \otimes U_\sigma) \otimes W \to 0$$

en $\mathcal{M}$ es exacta, pero dado que $\mathcal{M}$ es una categoría módulo sobre la categoría tensorial $\mathcal{C}_H$ esta es exacta. □

7.2. Categorías tensoriales fuertemente graduadas

Lema 7.2.1. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial G-graduada. Entonces $\mathcal{C}$ es fuertemente graduada, si y sólo si, la categoría $\mathcal{C}_\sigma$ tiene al menos un objeto invertible, para todo $\sigma \in G$. Además, en este caso, el anillo de Grothendieck de $\mathcal{C}$ es un G-producto cruzado.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{C}$ es fuertemente graduada. Entonces, existen objetos

$$V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{C}_\sigma, W_1, \ldots, W_t \in \mathcal{C}_{\sigma^{-1}},$$

tales que $1 \cong \bigoplus_{i,j} V_i \otimes W_j$. Luego, $\operatorname{End}_{\mathcal{C}}(\bigoplus_{i,j} V_i \otimes W_j) \cong \operatorname{End}_{\mathcal{C}}(1) \cong k$. Por lo tanto, $n = 1, t = 1$. Esto es, existen objetos $V \in \mathcal{C}_\sigma, W \in \mathcal{C}_{\sigma^{-1}}$, tales que $V \otimes W \cong 1$.

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{C}_\sigma$ tiene al menos un objeto invertible para todo $\sigma \in G$. Sea $U_\sigma \in \mathcal{C}_\sigma$ un objeto invertible con objeto dual $U^*_\sigma \in \mathcal{C}_{\sigma^{-1}}$. Luego, $V \cong U_\sigma \otimes (U^*_\sigma \otimes V)$, para todo $V \in \mathcal{C}_{\sigma\tau}$. Entonces, el funtor $\otimes : \mathcal{C}_\sigma \times \mathcal{C}_\tau \to \mathcal{C}_{\sigma\tau}$ es esencialmente sobreyectivo, y por lo tanto una equivalencia.

Recordemos que un anillo graduado $A = \oplus_{\sigma \in G} A_\sigma$ es un producto cruzado sobre G, si para todo $\sigma \in G$ el grupo abeliano A_σ tiene al menos un elemento invertible. Si $\mathcal{C}$ es fuertemente graduada, por la primera parte del lema, resulta que el anillo de Grothendieck de $\mathcal{C}$ es un G-producto cruzado. □

Ejemplo 7.2.2. Sea $\operatorname{Vec}^G_\omega$ la categoría semisimple de espacios vectoriales de dimensión finita G-graduados, con isomorfismo de asociatividad $\omega(a,b,c)\mathrm{id}_{abc}$ para todo $a, b, c \in G$, donde $\omega \in Z^3(G, k^*)$ es un 3-cociclo con valores en G-módulo trivial k^*. Entonces $\operatorname{Vec}^G_\omega$ es una categoría tensorial fuertemente G-graduada.

Ejemplo 7.2.3. Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial y G un grupo. Dada un $\otimes$-acción de G sobre $\mathcal{C}$, $* : \underline{G} \to \underline{\operatorname{Aut}_\otimes(\mathcal{C})}$, el la categoría tensorial producto G-cruzado, denotada por $\mathcal{C} \rtimes G$ es definida como sigue: como categoría abeliana $\mathcal{C} \rtimes G = \bigoplus_{\sigma \in G} \mathcal{C}_\sigma$, donde $\mathcal{C}_\sigma = \mathcal{C}$ como una categoría abeliana, el producto tensorial es

$$[X, \sigma] \otimes [Y, \tau] := [X \otimes \sigma_*(Y), \sigma\tau], \quad X, Y \in \mathcal{C}, \quad \sigma, \tau \in G,$$

y el objeto unidad es $[1, e]$. Ver [75] para el isomorfismo de asociatividad y una demostración de la identidad del pentágono.

La categoría $\mathcal{C} \rtimes G$ es G-graduada vía

$$\mathcal{C} \rtimes G = \bigoplus_{\sigma \in G} (\mathcal{C} \rtimes G)_\sigma, \quad \text{where} \;\; (\mathcal{C} \rtimes G)_\sigma = \mathcal{C}_\sigma.$$

Los objetos $[1, \sigma] \in (\mathcal{C} \rtimes G)_\sigma$ son invertibles, con inverso $[1, \sigma^{-1}] \in (\mathcal{C} \rtimes G)_{\sigma^{-1}}$.

Categorías módulo graduadas sobre un G-conjunto

Definición 7.2.4. Sea $\mathcal{C} = \oplus_{\sigma \in G} \mathcal{C}_\sigma$ una categoría tensorial graduada y sea X un G-conjunto a izquierda. Una *categoría $\mathcal{C}$-módulo a izquierda X-graduada* es una categoría $\mathcal{C}$-módulo a izquierda $\mathcal{M}$ con una descomposición

$$\mathcal{M} = \oplus_{x \in X} \mathcal{M}_x,$$

en una suma directa de subcategorías abelianas plenas, tal que para todo $\sigma \in G$, $x \in X$, el bifuntor $\otimes$ envía $\mathcal{C}_\sigma \times \mathcal{M}_x$ en $\mathcal{M}_{\sigma x}$.

Un funtor *$\mathcal{C}$-módulo X-graduado* $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ es un funtor $\mathcal{C}$-módulo F, tal que $F(\mathcal{M}_x)$ es es un objeto de $\mathcal{N}_x$, para todo $x \in X$.

Definición 7.2.5. Una categoría $\mathcal{C}$-submódulo a izquierda X-graduada de $\mathcal{M}$ es una subcategoría abeliana plena $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$, tal que $\mathcal{N}$ es una categoría $\mathcal{C}$-módulo X-graduada con respecto a $\otimes$, y la graduación satisface $\mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{M}_x$, $x \in X$.

Una categoría $\mathcal{C}$-módulo X-graduada será llamada *simple* si no contiene subcategorías $\mathcal{C}$-submódulo X-graduadas no triviales.

Lema 7.2.6. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría G-graduada y sea $H \subseteq G$ un subgrupo de G. Si $\mathcal{N}$ es una categoría $\mathcal{C}_H$-módulo a izquierda, entonces la categoría $\mathcal{C} \boxtimes_{\mathcal{C}_H} \mathcal{N}$ es una categoría $\mathcal{C}$-módulo G/H-graduada con respecto a la graduación $(\mathcal{C} \boxtimes_{\mathcal{C}_H} \mathcal{N})_{\sigma H} = (\oplus_{\tau \in \sigma H} \mathcal{C}_\tau) \boxtimes_{\mathcal{C}_H} \mathcal{N}$.*

Demostración. Sea $\Sigma = \{e, \sigma_1, \ldots\}$ un conjunto de representantes de las coclases de G módulo H. Por la Proposición 7.1.3, $\mathcal{C} \boxtimes_{\mathcal{C}_H} \mathcal{M} = \bigoplus_{\sigma \in \Sigma} \mathcal{C}_{\sigma H} \boxtimes_{\mathcal{C}_H} \mathcal{M}$ como categoría k-lineales. Por la definición de la acción de $\mathcal{C}$, la categoría módulo $\mathcal{C} \boxtimes_{\mathcal{C}_H} \mathcal{M}$ es G/H-graduada. □

Proposición 7.2.7. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial fuertemente G-graduada, y sea (A, m, e) una álgebra en $\mathcal{C}_H$. Entonces $\mathcal{C} \boxtimes_{\mathcal{C}_H} (\mathcal{C}_H)_A \cong \mathcal{C}_A$, como categorías $\mathcal{C}$-módulo G/H-graduadas.*

Demostración. Sea $\Sigma = \{e, \sigma_1, \ldots\}$ un conjunto de representantes de las coclases de G módulo H. La categoría $\mathcal{C}$-módulo $\mathcal{C}_A$ tiene una G/H-graduación: si (M, ρ) es un A-módulo, entonces

$$(M, \rho) = \bigoplus_{\sigma \in \Sigma} (M_{\sigma H}, \rho_{\sigma H}),$$

donde $M_{\sigma H} = \bigoplus_{h \in H} \mathcal{M}_{\sigma h}$, $\rho_{\sigma H} = \bigoplus_{h \in H} \rho_{\sigma h}$.

Consideremos el funtor $\mathcal{C}$-lineal canónico $F : \mathcal{C} \boxtimes_{\mathcal{C}_H} (\mathcal{C}_H)_A \to \mathcal{C}_A$,

$$[V, (M, \rho)] \mapsto (V \otimes M, \mathrm{id}_V \otimes \rho).$$

Mostraremos que F es una equivalencia de categorías.

Sea $U_\sigma \in \mathcal{C}_{\sigma H}$ un objeto invertible para cada coclase de H en G. Sea $(M, \rho) \in \mathcal{C}_A$ un A-módulo homogéneo de grado $\sigma^{-1}H$. Entonces el A-módulo $(U_\sigma \otimes M, \mathrm{id}_{U_\sigma} \otimes \rho)$ es también un A-módulo en $\mathcal{C}_H$ y $F([U_{\sigma^{-1}}, (U_\sigma \otimes M, \mathrm{id}_{U_\sigma} \otimes \rho)]) \cong (M, \rho) \in \mathcal{C}_A$. Luego F es un funtor esencialmente sobreyectivo.

Podemos suponer, salvo isomorfismos, que todo objeto de $\mathcal{C}_{\sigma H} \boxtimes_{\mathcal{C}_H} (\mathcal{C}_H)_A$ es de la forma $[U_\sigma, (M, \rho)]$. Entonces $F([U_g, (M, \rho)]) = (U_g \otimes M, \mathrm{id}_{U_g} \otimes \rho)$. Es claro que el funtor F es fiel y pleno, luego por [43, Theorem 1, p. 91] el funtor F es una equivalencia de categorías. $\square$

Teorema 7.2.8. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial fuertemente graduada por un grupo G y sea X un G-conjunto transitivo. Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ categorías X-graduadas no nulas. Entonces*

1. *$\mathcal{M} \cong \mathcal{C} \boxtimes_{\mathcal{C}_H} \mathcal{M}_x$, como categorías $\mathcal{C}$-módulos X-graduadas, donde para $x \in X$, $H = \mathrm{st}(x)$ es el subgrupo estabilizador de $x \in X$.*

2. *Existe una correspondencia biyectiva entre clases de isomorfismo de funtores $\mathcal{C}$-módulo X-graduados $(F, \eta) : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ y funtores $\mathcal{C}_H$-módulo $(T, \rho) : \mathcal{M}_e \to \mathcal{N}_e$.*

Demostración. (1) Elijamos $x \in X$, y sea $H = \mathrm{st}(x)$. En forma similar a la demostración de la Proposición 7.2.7, el funtor canónico $\mu : \mathcal{C} \boxtimes_{\mathcal{C}_H} \mathcal{M}_x \to \mathcal{M}$

$$[V, M] \to V \otimes M,$$

es una equivalencia de categorías y respecta la graduación.

La demostración de la parte (1) del teorema se completa mostrando que el funtor μ es un funtor $\mathcal{C}$-módulo. En efecto, por la Proposición 2.9.3, podemos suponer que las categorías módulo son estrictas. Entonces

$$\begin{aligned}
\mu(V \otimes [W, M_x]) &= \mu([V \otimes W, M_x]) \\
&= (V \otimes W) \otimes M_x = V \otimes (W \otimes M_x) \\
&= V \otimes \mu([W, M_x]),
\end{aligned}$$

es decir que μ es un funtor $\mathcal{C}$-módulo.

(2) Por la primera parte podemos suponer $\mathcal{N} = \mathcal{C} \boxtimes_H \mathcal{N}_x$. Sea $(F, \mu) : \mathcal{N}_x \to \mathcal{M}_x$ un funtor $\mathcal{C}_H$-módulo, el funtor

$$\begin{aligned}
I(F) : \mathcal{C} \times \mathcal{N}_x &\to \mathcal{M} \\
(S, N) &\mapsto S \otimes F(N)
\end{aligned}$$

con transformación natural $\mathrm{id}_S \otimes \mu_{V,N} : I(F)(S, V \otimes N) \to I(S \otimes V, N)$ es un funtor $\mathcal{C}_H$-bilineal. Luego tenemos un funtor

$$\begin{aligned}
I(F) : \mathcal{C} \boxtimes_{\mathcal{C}_H} \mathcal{N}_x &\to M \\
[S, N] &\mapsto V \otimes F(N) \\
\alpha_{S,V,N} &\mapsto \mathrm{id}_S \otimes \mu_{V,S},
\end{aligned}$$

y éste es un funtor $\mathcal{C}$-módulo X-graduado en la forma obvia.

Sea $(F = \oplus_{s\in X} F_s, \eta) : \mathcal{C} \boxtimes_{\mathcal{C}_H} \mathcal{N}_x \to M$ un funtor $\mathcal{C}$-módulo X-graduado. Consideremos el isomorfismo natural

$$\sigma_{[V,N]} := \eta_{V,[1,N]} : F([V,N]) \to V \otimes F_x([1,N]) = I(F_x)([V,N]),$$

$$\begin{aligned} \sigma_{X\otimes[V,N]} = \eta_{X\otimes V,[1,N]} &= \mathrm{id}_X \otimes \eta_{V,[1,N]} \circ \eta_{X,[V,N]} \\ &= \mathrm{id}_X \otimes \sigma_{[V,N]} \circ \eta_{X,[V,N]}. \end{aligned}$$

Luego, σ es un isomorfismo natural de funtores módulo. □

Corolario 7.2.9. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial fuertemente G-graduada. Existe una correspondencia biyectiva entre categorías módulo sobre $\mathcal{C}_e$ y categorías $\mathcal{C}$-módulo G-graduadas.*

Demostración. Esto es un caso particular del Teorema 7.2.8, con $X = G$. □

Proposición 7.2.10. *Para todo $\sigma, \tau \in G$, el funtor canónico*

$$f_{\sigma,\tau} : \mathcal{C}_\sigma \boxtimes_{\mathcal{C}_e} \mathcal{C}_\tau \to \mathcal{C}_{\sigma\tau}, \quad f_{\sigma,\tau}([X,Y]) = X \otimes Y,$$

es una equivalencia de categorías $\mathcal{C}_e$-bimódulo.

Demostración. Consideremos la categoría $\mathcal{C}$-módulo G-graduada $\mathcal{C}(\tau)$, donde $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\tau)$ como categorías $\mathcal{C}$-módulo, pero con graduación $(\mathcal{C}(\tau))_g = \mathcal{C}_{\tau g}$, para $\tau \in G$.

Dado que $\mathcal{C}(\tau)_e = \mathcal{C}_\tau$, por el Teorema 7.2.8, el functor canónico $\mu(\mathcal{C}(\tau)_e) : \mathcal{C} \boxtimes_{\mathcal{C}_e} \mathcal{C}_\tau \to \mathcal{C}(\tau)$,

$$[X,Y] \mapsto X \otimes Y$$

es una equivalencia de categoría $\mathcal{C}$-módulo G-graduadas. Entonces la restricción $\mu(\mathcal{C}(\tau))_\sigma$: $\mathcal{C}_\sigma \boxtimes_{\mathcal{C}_e} \mathcal{C}_\tau \to \mathcal{C}(\tau)_\sigma = \mathcal{C}_{\tau\sigma}$ es una equivalencia de categorías $\mathcal{C}_e$-módulo. Pero por definición $\mu(\mathcal{C}(\tau))_\sigma = f_{\sigma,\tau}$. Es claro que $f_{\sigma,\tau}$ es un funtor de categorías $\mathcal{C}_e$-bimódulo. Esto concluye la demostración. □

7.3. Teoría de Clifford

En esta sección supondremos que $\mathcal{C}$ es una categoría tensorial fuertemente graduada sobre un grupo G.

Denotaremos por $\Omega_{\mathcal{C}_e}$ el conjunto de clases de equivalencias de categorías $\mathcal{C}_e$-módulo simples. Dada una categoría $\mathcal{C}_e$-módulo $\mathcal{M}$, denotaremos por $\Omega_{\mathcal{C}_e}(\mathcal{M})$ el conjunto de clases de equivalencia de categorías $\mathcal{C}_e$-submódulo simples de $\mathcal{M}$.

Lema 7.3.1. *Sea $\mathcal{M}$ una categoría $\mathcal{C}_e$-módulo. Entonces, para todo $\sigma \in G$, la categoría $\mathcal{C}_\sigma \boxtimes_{\mathcal{C}_e} \mathcal{M}$ es simple como categoría $\mathcal{C}_e$-módulo, si y sólo si, $\mathcal{M}$ lo es.*

Demostración. Si $\mathcal{N}$ es una categoría $\mathcal{C}_e$-submódulo propia de $\mathcal{M}$, entonces la categoría $\mathcal{C}_\sigma \boxtimes_{\mathcal{C}_e} \mathcal{N}$ es una categoría $\mathcal{C}_e$-submódulo de $\mathcal{C}_\sigma \boxtimes_{\mathcal{C}_e} \mathcal{M}$. Por lo tanto, la categoría $\mathcal{C}_e$-módulo $\mathcal{C}_\sigma \boxtimes_{\mathcal{C}_e} \mathcal{M}$ no es simple.

Por la Proposición 7.2.10, tenemos que $\mathcal{M} \cong \mathcal{C}_{g^{-1}} \boxtimes_{\mathcal{C}_e} (\mathcal{C}_g \boxtimes_{\mathcal{C}_e} \mathcal{M})$. Luego, si $\mathcal{C}_g \boxtimes_{\mathcal{C}_e} \mathcal{M}$ no es simple, entonces $\mathcal{M}$ tampoco es simple. $\square$

Por el Lema 7.3.1 y la Proposición 7.2.10, el grupo G actúa sobre $\Omega_{\mathcal{C}_e}$ por

$$G \times \Omega_{\mathcal{C}_e} \to \Omega_{\mathcal{C}_e}, \quad (g, [X]) \mapsto [\mathcal{C}_g \boxtimes_{\mathcal{C}_e} X].$$

Sea $\mathcal{M}$ una categoría $\mathcal{C}$-módulo, y sea $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ una subcategoría abeliana plena. Denotaremos por $\mathcal{C}_\sigma \overline{\otimes} \mathcal{N}$ la subcategoría abeliana plena dada por $\mathrm{Obj}(\mathcal{C}_\sigma \overline{\otimes} \mathcal{N}) = \{$subcocientes de $V \otimes N : V \in \mathcal{C}_\sigma, N \in \mathcal{N}\}$. Recordemos que un subcociente es un subobjeto de un objeto cociente.

Proposición 7.3.2. *Sea $\mathcal{M}$ una categoría $\mathcal{C}$-módulo y sea $\mathcal{N}$ una categoría $\mathcal{C}_e$-submódulo de $\mathcal{M}$. Entonces $\mathcal{C}_\sigma \boxtimes_{\mathcal{C}_e} \mathcal{N} \cong \mathcal{C}_\sigma \overline{\otimes} \mathcal{N}$, como categorías $\mathcal{C}_e$-módulo, para todo $\sigma \in G$.*

Demostración. Definamos una categoría $\mathcal{C}$-módulo G-graduada por $gr\text{-}\mathcal{N} = \bigoplus_{\sigma \in G} \mathcal{C}_\sigma \overline{\otimes} \mathcal{N}$, con acción

$$\begin{aligned} \otimes : \mathcal{C}_\sigma \times \mathcal{C}_g \overline{\otimes} \mathcal{N} &\to \mathcal{C}_{\sigma g} \overline{\otimes} \mathcal{N} \\ V_\sigma \times T &\mapsto V_\sigma \otimes T. \end{aligned}$$

Dado que $\mathcal{C}_e \overline{\otimes} \mathcal{N} = \mathcal{N}$ como categoría $\mathcal{C}_e$-módulo, por el Teorema 7.2.8, el funtor canónico $\mu(\mathcal{N}) : \mathcal{C} \boxtimes_{\mathcal{C}_e} \mathcal{N} \to gr - \mathcal{N}$ es una equivalencia de categorías $\mathcal{C}$-módulo G-graduadas, y la restricción $\mu_\sigma : \mathcal{C}_\sigma \boxtimes_{\mathcal{C}_e} \mathcal{N} \to \mathcal{C}_\sigma \overline{\otimes} \mathcal{N}$ es una equivalencia de categorías $\mathcal{C}_e$-módulo. $\square$

Corolario 7.3.3. *Sea $\mathcal{M}$ una categoría $\mathcal{C}$-módulo fuertemente graduada. La acción de G sobre $\Omega_{\mathcal{C}_e}$ induce una acción de G sobre $\Omega_{\mathcal{C}_e}(\mathcal{M})$.*

Demostración. Sea $\mathcal{N}$ una categoría $\mathcal{C}_e$-submódulo simple de $\mathcal{M}$. Por la Proposición 7.3.2, el funtor

$$\begin{aligned} \mu_\sigma : \mathcal{C}_\sigma \boxtimes_{\mathcal{C}_e} \mathcal{N} &\to \mathcal{C}_\sigma \overline{\otimes} \mathcal{N} \\ [V, N] &\mapsto V \otimes N, \end{aligned}$$

es una equivalencia de categorías $\mathcal{C}_e$-módulo. Luego, $\mathcal{C}_\sigma \boxtimes_{\mathcal{C}_e} \mathcal{N}$ es equivalente a una categoría $\mathcal{C}_e$-submódulo de $\mathcal{M}$. $\square$

Sea $\mathcal{M}$ una categoría abeliana y sean $\mathcal{N}, \mathcal{N}'$ subcategorías abelianas plenas de $\mathcal{M}$. Denotaremos por $\mathcal{N} + \mathcal{N}'$ la subcategoría abeliana plena de $\mathcal{M}$, cuyos objetos son los subcocientes de $N \oplus N'$, con $N \in \mathcal{N}$, $N' \in \mathcal{N}'$. Ésta será llamada la suma de las categorías $\mathcal{N}$ y $\mathcal{N}'$.

Ahora estamos listo para enunciar y demostrar nuestro resultado principal.

Teorema 7.3.4 (Teorema de Clifford para categorías módulo)**.** *Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial fuertemente G-graduada y sea $\mathcal{M}$ una categoría $\mathcal{C}$-módulo simple abeliana. Entonces:*

1. *La acción de G sobre $\Omega_{\mathcal{C}_e}(\mathcal{M})$ es transitiva.*

2. *Sea $\mathcal{N}$ una subcategoría $\mathcal{C}$-submódulo simple de $\mathcal{M}$. Sea $H = \mathrm{st}([\mathcal{N}])$ el subgrupo estabilizador de $[\mathcal{N}] \in \Omega_{\mathcal{C}_e}(\mathcal{M})$, y sea*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{N}} = \sum_{h \in H} \mathcal{C}_h \overline{\otimes} \mathcal{N}.$$

   Entonces, $\mathcal{M}_{\mathcal{N}}$ es una categoría $\mathcal{C}_H$-módulo simple y $\mathcal{M} \cong \mathcal{C} \boxtimes_{\mathcal{C}_H} \mathcal{M}_{\mathcal{N}}$, como categorías $\mathcal{C}$-módulo.

Demostración. 1. Sea $\mathcal{N}$ una categoría $\mathcal{C}_e$-submódulo simple de $\mathcal{M}$. El funtor canónico

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{C} \boxtimes_{\mathcal{C}_e} \mathcal{N} &\to \mathcal{M} \\ [V, N] &\mapsto V \otimes N, \end{aligned}$$

es un funtor $\mathcal{C}$-módulo y $\mu = \oplus_{\sigma \in G} \mu_\sigma$, donde $\mu_\sigma = \mu|_{\mathcal{C}_\sigma}$. Por la Proposición 7.3.2, cada μ_σ es una equivalencia de categorías $\mathcal{C}_e$-módulo, con $\mathcal{C}_\sigma \overline{\otimes} \mathcal{N}$.

Dado que $\mathcal{M}$ es simple, todo objeto $M \in \mathcal{M}$ es isomorfo a algún subcociente de $\mu(X)$, para algún objeto $X \in \mathcal{C} \boxtimes_{\mathcal{C}_e} \mathcal{N}$. Entonces, $\mathcal{M} = \sum_{\sigma \in G} \mathcal{C}_\sigma \overline{\otimes} \mathcal{N}$ y cada $\mathcal{C}_\sigma \overline{\otimes} \mathcal{N}$ es una categoría $\mathcal{C}_e$-submódulo abeliana simple.

Sean S, S' categorías $\mathcal{C}_e$-submódulo abelianas simples de $\mathcal{M}$. Entonces, existen $\sigma, \tau \in G$, tales que $\mathcal{C}_\sigma \boxtimes_{\mathcal{C}_e} \mathcal{N} \cong S$, $\mathcal{C}_\tau \boxtimes_{\mathcal{C}_e} \mathcal{N} \cong S'$. Por la Proposición 7.2.10, $S' \cong \mathcal{C}_{\tau\sigma^{-1}} \boxtimes_{\mathcal{C}_e} S$. Luego, la acción es transitiva.

2. Sea $H = \mathrm{st}([\mathcal{N}])$ el subgrupo estabilizador de $[\mathcal{N}] \in \Omega_{\mathcal{C}_e}(\mathcal{M})$ y sea

$$\mathcal{M}_{\mathcal{N}} = \sum_{h \in H} \mathcal{C}_h \overline{\otimes} \mathcal{N}.$$

Dado que H actúa transitivamente sobre $\Omega_{\mathcal{C}_e}(\mathcal{M}_{\mathcal{N}})$, la categoría $\mathcal{C}_H$-módulo $\mathcal{M}_{\mathcal{N}}$ es simple. Sea $\Sigma = \{e, \sigma_1, \ldots\}$ un conjunto de representantes de las coclases de G módulo H.

El mapa $\phi : G/H \to \Omega_{\mathcal{C}_H}(M)$, $\phi(\sigma H) = [\mathcal{C}_\sigma \overline{\otimes} \mathcal{M}_{\mathcal{N}}]$ es un isomorfismo de G-conjuntos. Entonces, $\mathcal{M}$ tienes una estructura de categoría $\mathcal{C}$-módulo G/H-graduada, donde $\mathcal{M} = \oplus_{\sigma \in \Sigma} \mathcal{C}_\sigma \overline{\otimes} M_{\mathcal{N}}$. Por la Proposición 7.2.8, $\mathcal{M} \cong \mathcal{C} \boxtimes_{\mathcal{C}_H} \mathcal{M}_{\mathcal{N}}$ como categorías $\mathcal{C}$-módulo. □

Ejemplo 7.3.5. Categorías tensoriales punteadas. Recordemos que una categoría tensorial semisimple es llamada *punteada* si todo objeto simple es invertible. Es fácil ver que este tipo de categorías son equivalentes a las categorías Vec_ω^G del Ejemplo 7.2.2. Las clases de equivalencia de categorías punteadas con un grupo fijo de objetos invertibles, G, están en correspondencia biyectiva con elementos de $H^3(G, k^*)$, donde k^* es el G-módulo trivial.

Lema 7.3.6. *Sea R una k-álgebra central simple. Existe una equivalencia de categorías entre la categoría ${}_R\mathcal{M}_R$ de R-bimódulos y la categoría Vec_k.*

Demostración. La categoría de R-bimódulos es lo mismo que la categoría de $R\otimes R^{op}$-módulos. Pero $R \otimes R^{op} \cong M_n(k)$, donde n es la dimensión de R sobre k. Entonces, $R \otimes R^{op}$ es Morita equivalente a la categoría de espacios vectoriales sobre k.

La equivalencia envía $M \in {}_R\mathcal{M}_R$ al centralizador de M^R de R en M. La equivalencia inversa envía $V \in \mathrm{Vec}_k$ a $V \otimes R$ con la estructura de R-bimódulo obvia. Es fácil ver que este funtor es monoidal. □

Proposición 7.3.7. *La categoría tensorial Vec_ω^G tiene un categoría módulo de rango uno, si y sólo si, existe una extensión finita de cuerpos $k \subset K$, tal que $0 = [\omega] \in H^3(G, K^*)$, donde K^* el s G-módulo trivial.*

Las clases de equivalencia de categorías módulo de rango uno sobre Vec_ω^G están en correspondencia biyectiva con pares (R, η), donde R es un anillo de división tal que $k \subseteq Z(R)$ es una extensión de cuerpos finita y η es un elemento de $H^2(G, K^*)$.

Demostración. Sea $\mathcal{M}$ una categoría Vec_ω^G-módulo semisimple de rango uno. Por la Proposición 2.8.5, $\mathcal{M}$ es equivalente a la categoría de módulos sobre un anillo de división R. Luego, R es un álgebra central simple sobre $K = Z(R)$.

Por la observación 2.3.6 y Lema 7.3.6, esto es lo mismo que un funtor monoidal $\mathrm{Vec}_\omega^G \to \mathrm{Vec}_K$. Por lo tanto, este está descrito por una función $\gamma : G \times G \to K^*$, tal que $\gamma(e, \sigma) = \gamma(\sigma, e) = 1$, y

$$\omega(\sigma, \tau, \rho) = \frac{\gamma(\sigma\tau, \rho)\gamma(\sigma, \tau)}{\gamma(\sigma, \tau)\gamma(\sigma, \tau\rho)},$$

para todo $\sigma, \tau, \rho \in G$. Entonces, $\omega \in B^3(G, K^*)$. Por lo tanto, $0 = [\omega] \in H^3(G, K^*)$. El recíproco es obvio.

Sean $\gamma_1, \gamma_2 : G \times G \to K^*$, los mapas que determinan las estructuras de categoría Vec_ω^G-módulo sobre ${}_R\mathcal{M}$. Una equivalencia Vec_ω^G-módulo esta determinado por una función $\theta : G \to K^*$, tal que $\theta(\sigma\tau)\gamma_2(\sigma, \tau) = \gamma_1(\sigma, \tau)\theta(\tau)\theta(\sigma)$, luego $[\gamma_1] = [\gamma_2] \in H^2(G, K^*)$. □

El siguiente resultado aparece en [52], para grupos finitos y k un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero.

Teorema 7.3.8. *Las clases de equivalencias de categorías módulo simple semisimples sobre Vec_ω^G están en correspondencia biyectiva con ternas (R, H, η), donde R es un álgebra de división, tal que $k \subset Z(R)$, es una extensión de cuerpos finita, H es un subgrupo de G, tal que $0 = [\omega|_H] \in H^3(H, K^*)$ y $\eta \in H^2(H, K^*)$. Además, $\mathcal{M} \cong Vec_G^\omega \boxtimes_{Vec^H_{\omega|_H}} {}_R\mathcal{M}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{M}$ una categoría Vec_ω^G-módulo semisimple simple. Dado que $(\mathrm{Vec}_\omega^G)_e = \mathrm{Vec}_f$, una categoría $(\mathrm{Vec}_\omega^G)_e$-submódulo semisimple simple de $\mathcal{M}$ es una subcategoría semisimple plena de rango uno.

Sea $\mathcal{D}$ una subcategoría semisimple plena de rango uno de $\mathcal{M}$. Por la Proposición 2.8.5, podemos suponer que $\mathcal{D} = {}_R\mathcal{M}$, donde R es una k-álgebra de división. Sea H el subgrupo estabilizador, entonces ${}_R\mathcal{M}$ es una categoría $\mathrm{Vec}_H^{\omega_H}$-módulo. Por la Proposición 7.3.7, la restricción de ω a H es un coborde sobre $K = Z(R)$, y la clase de equivalencia de una categoría $\mathrm{Vec}_{\omega_H}^H$-módulo $\mathcal{D}$, está en correspondencia con un elemento de $\eta \in H^2(H, K^*)$.

Por el Teorema 7.3.4, $\mathcal{M} \cong \mathrm{Vec}_G^{\omega} \boxtimes_{\mathrm{Vec}^H_{\omega|_H}} {}_R\mathcal{M}$. Esto finaliza la prueba de la Proposición. $\square$

Observación 7.3.9. Si el grupo estabilizador H es finito, entonces el álgebra de grupo torcida $R_\eta H$ es un álgebra en Vec_ω^G, y por la Proposición 7.2.7, $\mathcal{M} \cong (\mathrm{Vec}_G^\omega)_{R_\eta H}$.

7.4. Categorías módulo sobre $\mathcal{C}^G$ y $\mathcal{C} \rtimes G$

Una categoría módulo indescomponible sobre una categoría de fusión es llamada *punteada*, si la categoría tensorial $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ es punteada semisimple. En [39] se describen las categorías módulo punteadas de $\mathcal{C}^G$ y $\mathcal{C} \rtimes G$, en términos de las categorías módulo punteadas de $\mathcal{C}$, y la acción de G sobre $\mathcal{C}$. Este criterio es importante en la construcción de álgebras de Hopf semisimples cuyas categorías de representaciones no son de tipo grupo.

Posteriormente, se describieron en [18] las categorías módulo indescomponibles de una equivariantización de una categoría de fusión.

El objetivo de esta sección es describir las categorías módulo para $\mathcal{C} \rtimes G$, donde $\mathcal{C}$ y G son arbitrarios. Si el grupo es finito y $\mathcal{C}$ es de fusión, usando la dualidad entre $\mathcal{C}^G$ y $\mathcal{C} \rtimes G$ [39, Proposition 3.2], describimos las categorías módulo sobre $\mathcal{C}^G$. Para el caso general, usamos [75, Theorem 4.1].

Acciones G-invariantes sobre categorías módulo

Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial y sea $(\sigma, \psi) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ un funtor monoidal. Si $(\mathcal{M}, \otimes, \alpha)$ es una categoría $\mathcal{C}$-módulo a derecha, la *categoría $\mathcal{C}$-módulo torcida* $(\mathcal{M}^\sigma, \otimes^\sigma, \alpha^\sigma)$ está definida por: $\mathcal{M} = \mathcal{M}^\sigma$ como categorías, con $M \otimes^\sigma V = M \otimes \sigma(V)$, y $\alpha^\sigma_{M,V,W} = \mathrm{id}_M \otimes \psi_{V,W} \circ \alpha_{M,V,W}$.

Definición 7.4.1. Sean $\mathcal{C}$ una categoría tensorial, $\mathcal{M}$ una categoría $\mathcal{C}$-módulo a izquierda y $\sigma : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ un funtor monoidal. Diremos que el funtor $(T, \eta) : M \to M^\sigma$ es un funtor *σ-equivariante* si es un funtor $\mathcal{C}$-módulo.

Dada una acción de un grupo G sobre $\mathcal{C}$, la categoría módulo $\mathcal{M}$ es llamada *G-invariante* si, para cada $\sigma \in G$, existe un funtor σ-equivariante $\mathcal{M}^\sigma \to \mathcal{M}$.

Sea $\sigma, \tau : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ funtores monoidales. Sean $(T, \eta) : M \to M^\sigma$ un funtor σ-equivariante, y $(T', \eta') : M \to M^\tau$ un funtor τ-equivariante. Definimos su composición por

$$(T'T, T'(\eta)(\eta'(T \times T))) : \mathcal{M} \to \mathcal{M}.$$

Esto define un funtor $\sigma \circ \tau$-equivariante de $\mathcal{M}$.

Dadas una acción de G sobre una categoría monoidal $\mathcal{C}$ y una categoría módulo G-invariante $\mathcal{M}$, denotaremos por $\underline{\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}^{G}(\mathcal{M})}$ la siguiente categoría: los objetos son funtores σ_*-equivariantes, para todo $\sigma \in G$, y los morfismos son isomorfismos naturales de funtores módulo. El producto tensorial es la composición de funtores $\mathcal{C}$-módulo y el objeto unidad es el funtor identidad de $\mathcal{M}$.

Definición 7.4.2. Sea $(\sigma_*, \phi(\sigma,\tau), \psi(\sigma)) : \underline{G} \to \underline{\mathrm{Aut}_{\otimes}(\mathcal{C})}$ una acción de G sobre una categoría tensorial $\mathcal{C}$, y sea $\mathcal{M}$ una categoría $\mathcal{C}$-módulo G-invariante. Un funtor G-invariante sobre $\mathcal{M}$ es un funtor monoidal $(\sigma^*, \phi, \psi) : \underline{G} \to \underline{\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}^{G}(\mathcal{M})}$, tal que σ^* es un funtor σ_*-invariante, para todo $\sigma \in G$.

Observación 7.4.3. (1) Una categoría $\mathcal{C}$-módulo $\mathcal{M}$ con un funtor G-invariante es llamada una *categoría $\mathcal{C}$-módulo G-equivariante* en [18, definition 5.2].

(2) Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal G-invariante. La categoría monoidal $\underline{\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}^{G}(\mathcal{M})}$ es un 2-grupo graduado y el grupo $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}^{G}(\mathcal{M})$ tiene un epimorfismo de grupos $\pi : \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}^{G}(\mathcal{M}) \to G$. Entonces, si un homomorfismo de grupos $\psi : G \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}^{G}(\mathcal{M})$ es realizable, entonces $\pi\psi = \mathrm{id}_G$. Un homomorfismo de esta forma será llamado un homomorfismo hendido.

(3) Sea $\psi : G \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}^{G}(\mathcal{M})$ un homomorfismo de grupos hendido. Si $a \in H^3\left(\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}^{G}(\mathcal{M}), H\right)$ es el 3-cociclo asociado al 2-grupo $\underline{\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}^{G}(\mathcal{M})}$, entonces como en el Teorema 6.2.1, ψ es realizable si y sólo si el 3-cociclo $a\psi^3$ es un 3-coborde, y el conjunto de realizaciones de ψ están en correspondencia con elementos de un segundo grupo de cohomología.

El siguiente resultado aparece en [75, Sec. 2].

Proposición 7.4.4. *Sea $\mathcal{C} \rtimes G$ una categoría tensorial producto cruzado. Entonces existe una correspondencia biyectiva entre estructuras de categoría $\mathcal{C} \rtimes G$-módulo y funtores G-invariantes sobre la categoría $\mathcal{C}$-módulo $\mathcal{M}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{M}$ una categoría $\mathcal{C} \rtimes G$-módulo. Cada objeto $[1,\sigma]$, $\sigma \in G$, define una equivalencia $\sigma_* : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, $M \mapsto [1,\sigma] \otimes M$. Si $\phi(\sigma,\tau)_M = \alpha_{(1,\sigma),(1,\tau),M}$ es el isomorfismo de asociatividad, este define un funtor monoidal $\underline{G} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$.

La categoría $\mathcal{M}$ es una categoría $\mathcal{C}$-módulo con $V \otimes M = [V,e] \otimes V$ y dado que $[1,\sigma] \otimes [V,e] = [\sigma_*(V), e] \otimes [1,\sigma]$, tenemos isomorfismos naturales $\psi(\sigma)_{V,M} : \sigma_*(V) \otimes \sigma(M) \to \sigma(V \otimes M)$, dados por $\psi(\sigma)_{V,M} = \alpha^{-1}_{(1,\sigma),(V,e),M} \circ \alpha_{(\sigma_*(V),e),(1,\sigma),M}$. Esto define un funtor G-invariante.

Recíprocamente, si $\underline{G} \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}^{G}(\mathcal{M})$ es un funtor G-invariante, tenemos un isomorfismo natural $\phi(\sigma,\tau)_M : \sigma_*\tau_*(M) \to \sigma\tau_*(M)$, $\psi(\sigma)_{V,M} : \sigma(V) \otimes \sigma(M) \to \sigma(V \otimes M)$. Entonces, podemos definir una acción sobre $\mathcal{M}$ por

$$(V,\sigma) \otimes M := V \otimes \sigma_*(M),$$

e isomorfismo de asociatividad

$$\alpha_{(V,\sigma),(W,\tau),M} = \mathrm{id}_{V \otimes \sigma_*(W)} \otimes \phi(\sigma,\tau)_M \circ \alpha_{V,\sigma_*(W),\sigma_*(\tau_*(M))} \circ \mathrm{id}_V \otimes \psi(\sigma)^{-1}_{W,M}.$$

□

Supongamos que el grupo G es finito y la categoría tensorial $\mathcal{C}$ es una categoría de fusión. Entonces, las categorías módulo sobre $\mathcal{C} \rtimes G$ y $\mathcal{C}^G$ están en correspondencia biyectiva por [39, Proposition 3.2]. Si $\mathcal{M}$ es una categoría $\mathcal{C} \rtimes G$-módulo, entonces, por la Proposición 7.4.4, existe una G-acción sobre $\mathcal{M}$, y la categoría $\mathcal{M}^G$ es una categoría $\mathcal{C}^G$-módulo con

$$(V, f) \otimes (M, g) := (V \otimes M, h),$$

donde

$$h_\sigma = g_\sigma h_\sigma \psi(\sigma)^{-1}_{V,M}.$$

Para una categoría monoidal k-lineal $\mathcal{C}$ y un grupo finito G, tal que $\mathrm{char}(k) \nmid |G|$, el Teorema [75, Theorem 4.1] dice que toda categoría $\mathcal{C}^G$-módulo es de la forma $\mathcal{M}^G$ para una categoría $\mathcal{C} \rtimes G$-módulo. El siguiente resultado aparece en [18] para categorías de fusión.

Teorema 7.4.5. *Las categorías módulo simples sobre $\mathcal{C} \rtimes G$ están en correspondencia biyectiva entre los siguientes dados:*

- *un subgrupo $H \subseteq G$,*
- *una categoría $\mathcal{C}$-módulo simple H-invariante $\mathcal{M}$,*
- *un funtor monoidal $\underline{H} \to Aut^H_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$.*

Si el grupo es finito, entonces las categorías módulo sobre $\mathcal{C}^G$ están en biyección con los mismos datos.

Demostración. Por el Teorema 7.3.4, si $\mathcal{N}$ es una categoría $\mathcal{C} \rtimes G$-módulo simple, entonces $\mathcal{N}$ es equivalente a $\mathcal{C} \boxtimes_{\mathcal{C} \rtimes H} \mathcal{M}$, para algún subgrupo $H \subseteq G$ y alguna categoría $\mathcal{C} \rtimes H$-módulo simple $\mathcal{M}$, tales que $\mathcal{M}$ es H-invariante.

En particular, se sigue que la restricción de $\mathcal{M}$ a $\mathcal{C}$ es simple. Ahora la correspondencia se sigue de la Proposición 7.4.4.

Si el grupo G es finito, entonces la correspondencia se sigue de [75, Theorem 4.1] o [39, Proposition 3.2]. □

Supongamos que G es un grupo finito y $H \cong A^\tau \#_\sigma kG$ es un producto bicruzado con coacción trivial. Entonces las categorías módulo sobre ${}_H\mathcal{M}$ son de la forma $\mathcal{N}^G$, para alguna categoría ${}_A\mathcal{M}$-módulo G-equivariante $\mathcal{N}$. Además, la categoría módulo es simple si y sólo si $\mathcal{N}$ es simple.

Ejemplo 7.4.6. Sea $N \geq 2$ un entero y sea $q \in \mathbb{C}$ una N-ésima raíz primitiva de la unidad. El *álgebra de Taft* $T(q)$ es la $\mathbb{C}$-álgebra presentada por generadores g y x con relaciones $g^N = 1$, $x^N = 0$ y $gx = qxg$. El álgebra $T(q)$ posee una estructura de álgebra de Hopf, determinada por

$$\Delta g = g \otimes g, \qquad \Delta x = x \otimes 1 + g \otimes x.$$

Entonces $\varepsilon(g) = 1,\ \varepsilon(x) = 0,\ \mathcal{S}(g) = g^{-1}$, y $\mathcal{S}(x) = -g^{-1}x$. es bien conocido que

1. $T(q)$ es una álgebra de Hopf no semismple punteada (es decir todo comódulo simple tiene dimensión uno),

2. el grupo de los elementos de tipo-grupo de $T(q)$ es $G(T(q)) = \langle g \rangle \simeq \mathbb{Z}/(N)$,

3. $T(q) \simeq T(q)^*$,

4. $T(q) \simeq T(q')$ si y sólo si $q = q'$.

Proposición 7.4.7. *Sea G un grupo, entonces el conjunto de G-acciones sobre la categoría tensorial ${}^{T(q)}\mathcal{M}$, de $T(q)$-comódulos, están en correspondencia uno a uno con el conjunto morfismos de grupos de G en $\mathbb{C}^* \ltimes \mathbb{C}$, donde $\mathbb{C}^*$ actúa sobre $\mathbb{C}$ por $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, (s,t) \mapsto st$.*

Demostración. Por la Proposición 6.2.3, el grupo abeliano $\mathrm{Aut}_{\otimes}(\mathrm{id}_{\mathcal{C}})$ es trivial. Por [59, Theorem 5], $\mathrm{Aut}_{\otimes}({}^{T(q)}\mathcal{M}) = \mathrm{BiGal}(T(q)) \cong \mathbb{C}^* \rtimes \mathbb{C}$. Entonces, por el Teorema 6.2.1, el conjunto de clases de isomorfismo de G-acciones está dado por el conjunto de homomorfismos de grupos de G a $\mathbb{C}^* \ltimes \mathbb{C}$. $\square$

Sea $G = C_N$ el grupo cíclico de orden N. Entonces, por la Proposición 7.4.7, las posibles G-acciones están parametrizadas por pares (r, μ), donde r es una N-ésima raíz primitiva de la unidad y $\mu \in \mathbb{C}$.

Denotaremos por $A_{(\alpha,\gamma)}$ el objeto $T(q)$-bigaloisiano asociado al par $(r, \mu) \in \mathbb{C}^* \ltimes \mathbb{C} \cong \mathrm{BiGal}(T(q))$. Ver [59, Theorem 5].

Las categorías ${}^{T(q)}\mathcal{M}$-módulo de rango uno están en correspondencia con funtores de fibra sobre ${}^{T(q)}\mathcal{M}$, y éstos están en correspondencia biyectiva con los objetos $T(q)$-galoisianos.

Por el Teorema 2 en *loc. cit.*, todo objeto $T(q)$-galoisiano es isomorfo a $A_{(1,\beta)}$, $\beta \in \mathbb{C}$. Más aún, dos objetos $T(q)$-galoisianos $A_{(1,\beta)}$, $A_{(1,\mu)}$ son isomorfos, si y sólo si, $\beta = \mu$.

Por el Teorema 7.4.5, si existe una categoría módulo semisimple de rango uno sobre $\mathcal{C} = {}^{T(q)}\mathcal{M} \rtimes \mathbb{Z}/(N)$, ésta debe ser una categoría ${}^{T(q)}\mathcal{M}$-módulo C_N-invariante.

Supongamos que $A_{(1,\beta)}$ es C_N-invariante. Dado que $A_{(r,\mu)} \square_{T(q)} A_{(1,\beta)} \cong A_{(r,\mu+\beta)}$, tenemos que $\mu = 0$. Entonces, si la acción está asociada a un par (r, μ), donde $\mu \neq 0$, la categoría $\mathcal{C}$ no admite un funtor de fibra, *i.e.*, ésta no es la categoría de comódulo de ningún álgebra de Hopf.

Sin embargo, dado que todo objeto simple es invertible, la dimensión de Frobenius-Perron de los objetos simples es uno. Por [22, Proposition 2.7], la categoría tensorial ${}^{T(q)}\mathcal{M} \rtimes C_N$ es equivalente a la categoría de representaciones de una cuasi-álgebra de Hopf.

Notemos que la categoría tensorial $({}^{T(q)}\mathcal{M})^G$ tiene al menos un funtor de fibra, para todo grupo G y para toda acción. En efecto, dado que el funtor de olvido $U : {}^{T(q)}\mathcal{M}^G \to {}^{T(q)}\mathcal{M}$ es monoidal, la composición con el funtor de fibra de ${}^{T(q)}\mathcal{M}$ es un funtor de fibra para $({}^{T(q)}\mathcal{M})^G$.

Bibliografía

[1] N. Andruskiewitsch, *About finite dimensional Hopf algebras*, Contemp. Math. **294** (2002), 1–57.

[2] N. Andruskiewitsch and J. Devoto, *Extensions of Hopf algebra*, Algebra i Analiz **7** (1995), 22–61.

[3] J. Baez and A. D. Lauda, *Higher-dimensional algebra V: 2-groups*, Theor. and Appl. Cat. **12** No. 14 (2004), 423–491.

[4] B. Bakalov and A. Kirrilov Jr., *Lectures on Tensor categories and modular functors*, AMS, (2001).

[5] J. Bénabou, *Introduction to bicategories*, Reports of the Midwest Category Seminar (1967), Lecture notes in Math. **47**, pp. 1–77, Springer, Berlin.

[6] J. Bichon, *Quelques nouvelles déformations du groupe symétrique*, C. R. Acad. Sci. Paris **330** (2000), 761–764.

[7] J. Bichon, *Galois and biGalois objects over monomial non-semisimple Hopf Algebras*, J. Pure Appl. Algebra **5** No. 5 (2006), 653–480.

[8] N. P. Byott, *Cleft extensions of Hopf algebras*, J. Algebra **157** (1993), 405–429.

[9] M. Cohen, D. Fischman and S. Montgomery *Hopf Galois extensions, smash product, and Morita equivalence*, J. Algebra **133** (1990), 351–372.

[10] C. Curtis and I. Reiner, *Methods of representation theory, I*, Wiley Interscience Publications, New York (1990).

[Da] E. C. Dade, *Compounding Clifford's theory*, Ann. Math., **91** (1970), 236–290.

[11] A. Davydov, *Galois Algebras and Monoidal Functors between Categories of Representations of Finite Groups*, J. Algebra **244** (2001), 273–301.

[12] A. Davydov, *Twisted automorphisms of group algebras.* Preprint arXiv:0708.2758.

[13] P. DELIGNE, *Catégories tannakiennes*, in : *The Grothendieck Festschrift*, Vol. II, Progr. Math., **87**, Birkhäuser, Boston, MA, 1990, 111-195.

[14] Y. DOI, *Braided bialgebras and quadratic bialgebras*, Commun. Algebra **21** (1993), 1731–1749.

[15] V. DRINFELD, *Quantum groups*, Proceeding of the International congress of Mathematics, Berkely (1987), 798–820.

[16] V. DRINFELD, S. GELAKI, D. NIKSHYCH, y V. OSTRIK, *Group-theoretical properties of nilpotent modular categories*, eprint arXiv:0704.0195v2 [math.QA].

[17] P. ETINGOF, D. NIKSHYCH y V. OSTRIK, *On fusion categories*, Ann. Math. **162** (2005), 581–642.

[18] P. ETINGOF, D. NIKSHYCH y V. OSTRIK, *Weakly group-theoretical and solvable fusion categories*, preprint arXiv:0809.3031.

[19] P. ETINGOF y S. GELAKI, *The classification of finite dimensional triangular Hopf algebras over an algebraically closed field of char 0*, Mosc. Math. J. **3** (2003), 37–43.

[20] P. ETINGOF y S. GELAKI, *The representation theory of cotriangular semisimple Hopf algebras*, Int. Math. Res. Not. **1999** (1999) 387–394.

[21] P. ETINGOF y S. GELAKI, *Semisimple Hopf algebras of dimension pq are trivial*, J. Algebra **210** (1998), 664–669.

[22] P. ETINGOF y V. OSTRIK, *Finite tensor categories*, Mosc. Math. J. **4** (2004), 627–654, 782–783.

[23] P. ETINGOF y V. OSTRIK, *Module categories over representations of* $SL_q(2)$ *and graphs*, Math. Res. Lett. **11** (2004), 103–114.

[24] C. GALINDO, *Cliford theory for tensor categories*, enviado. Preprint arXiv:0902.1088.

[25] C. GALINDO y S. NATALE, *Simple Hopf algebras and deformations of finite groups*, Math. Res. Lett. **14** (2007), 943–954.

[26] C. GALINDO y S. NATALE, *Normal Hopf subalgebras in cocycle deformation of finite groups*, Manuscripta Math, **125** (2008), 501–514.

[27] I. HOFSTETTER, *Extensiones of Hopf algebras and their cohomological description*, J. Algebra **164** (1994), 264-298.

[28] R. B. HOWLETT y I. M. ISAACS, *On groups of central type*, Math. Z. **179** (1982), 555–2569.

[29] I. Isaacs, *Character theory of finite groups*, Academic Press, 1976.

[30] G. I. Kac, *Extensions of groups to ring groups*, Math. USSR Sbornic **5** (1968), 451–474.

[31] G. Karpilovsky, *Proyective Representation of Finite Groups*, Pure and Applied Mathematics **94**, Marcel Dekker, New York-Basel (1985).

[32] Y. Kashina, *Clasificacion of semisimple Hopf algebras of dimension 16*, J. Algebra **232** (2000), 617–663.

[33] C. Kassel, *Quantum Groups*, Graduate Texts in Math. **155**, Springer (1995).

[34] D. Naidu y D. Nikshych, *Lagrangian subcategories and braided tensor equivalences of twisted quantum doubles of finite groups*, to appear in Comm. Math. Phys., eprint arXiv:0705.0665v2 [math.QA].

[35] S. Natale, *Semisolvability of semisimple Hopf algebras of low dimension*, Memoirs Amer. Math. Soc. **186** (2007).

[36] S. Natale, *On semisimple Hopf algebras of dimension pq^2, II*, Algebr. Represent. Theory **4** (2001), 277–291.

[37] S. Natale, *On group theoretical Hopf algebras and exact factorizations of finite groups*, J. Algebra **270** (2003), no. 1, 199–211.

[38] W. Nichols y M. Zoeller, *A Hopf algebra freeness theorem*, Am. J. Math. **111** (1989), 381–385.

[39] D. Nikshych, *Non group-theoretical semisimple Hopf algebras from group actions on fusion categories.* Preprint `arXiv:0712.0585v1` (2007).

[40] D. Nikshych, *K_0-rings and twisting of finite dimensional semisimple Hopf algebras*, Commun. Algebra **26** (1998), 321–342; Commun. Algebra **26** (1998), 2019.

[41] S. Majid, *More examples of bicrossedproduct and double cross product Hopf algebras*, Israel J. Math. **72** (1990), 133–148.

[42] S. Majid, *Crossed products by braded groups and bosonization*, J. Algebra **163** (1994), 165–190.

[43] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, 2nd edition. Springer Verlarg 1997.

[44] A. Masuoka, *Extensions of Hopf algebras*,Trabajos de Matemática 41/99. FaMAF.

[45] A. Masuoka, *The p^n-th Theorem for Hopf algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 187–195.

[46] A. Masuoka, *Self dual Hopf algebras of dimension p^3 obtained by extension*, J. Algebra **178** (1995), 791–806.

[47] S. Montgomery, *Hopf Algebras and Their Action on Rings*, CBMS **82**, Am. Math. Soc., Providence, Rhode Island (1993).

[48] S. Montgomery, *Classifying finite dimensional semisimple Hopf algebras*, Contemp. Math. **229** (1998), 265–279.

[49] S. Montgomery y S. Whiterspoon, *Irreducible representations of crossed products*, J. Pure Appl. Algebra **129** (1998), 315–326.

[50] M. Movshev, *Twisting in group algebras of finite groups*, Func. Anal. Appl. **27** (1994), 240–244.

[51] V. Ostrik, *Module categories, weak Hopf algebras and modular invariants*, Transform. Groups, **8** (2003), 177-206.

[52] V. Ostrik, *Module categories over the Drinfeld double of a finite group*, Int. Math. Res. Not. (2003) no. 27, 1507-1520.

[53] D. Radford, *Hopf algebras with a proyection*, J. Algebra **92** (1985), 322–347.

[54] D. Radford, *On the antipode of a quasitriangular Hopf algebra*, J. Algebra **151** (1992), 1–11.

[55] D. Radford, *Minimal quasitriangular Hopf algebras*, J. Algebra **157** (1993), 285–315.

[56] J. Robinson, *A course in the theory of groups*, Springer–Verlag, 1995.

[57] N. Saavedra Rivano, *Catégories Tannakiennes*, Lecture notes in mathematics **265**. Springer Verlag, 1972.

[58] H.-J. Schneider, *Representation theory of Hopf-Galois extensions.*, Israel J. of Math. **72** (1990), 193–231.

[59] P. Schauenburg, *Bigalois objects over the Taft algebras*, Israel J. Math. **115** (2000), 101–123.

[60] P. Schauenburg y H.-J. Schneider, *Galois Type extensions and Hopf algebras*, preprint (2004).

[61] P. Schauenburg, *Hopf-Galois and bi-Galois extensions*, Fields Inst. Commun. **43**, AMS 2004, 469–515.

[62] P. Schauenburg, *On the braiding on a Hopf algebra in a braided category*, New York Journal of Math. **4**, (1998), 259–263.

[63] P. Schauenburg, *Tannaka duality for arbitrary Hopf algebras*, Algebra Berichte **66** (1992), Verlag Reinhard Fischer, München.

[64] P. Schauenburg, *Hopf bi-Galois extensions*, Comm. Algebra **24** (1996), 3797–3825.

[65] P. Schauenburg, *Actions of monoidal categories, and generalized Hopf smash products*, J. Algebra **270** (2003), 521–563.

[66] P. Schauenburg, *Galois correspondence for Hopf Bigalois extensions*, J. Algebra **201** (1990), 53–70.

[67] P. Schauenburg, *Galois objects over generalized Drinfeld doubles, with an application to $u_q(sl_2)$*, J. Algebra **217** (1999), 584–598.

[68] H.-J. Schneider, *A normal basis and transitivity of crossed products of Hopf algebras.*, J. of Algebra. **152** (1992), 289–312.

[69] H.-J. Schneider, *Principal homogeneous spaces for arbitrary Hopf algebras.*, Israel J. of Math. **72** (1990), 167–195.

[70] W. Singer, *Extension theory for connected Hopf algebras*, J. Algebra **21** (1972), 1–16.

[71] S. Skryabin, *Projectivity and freeness over comodule algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007), 2597–2623.

[72] M. E. Sweedler, *Hopf algebras*, Benajmin, New York, 1969.

[73] D. Tambara y S. Yamagami, *Tensor categories with fusion rules of self-duality for finite abelian groups*, J. Algebra **209** (1998), 692–707.

[74] D. Tambara, *A Duality for Modules over Monoidal Categories of Representations of Semisimple Hopf Algebras*, J. Algebra **296** (2006), 301–322.

[75] D. Tambara, *Invariants and semi-direct products for finite group actions on tensor categories*, J. Math. Soc. Japan **53** (2001), 429–456.

[76] K-H Ulbrich, *Fiber functor of finite dimensional comodules*, Manuscripta Math. **65** (1989), 39–46.

[77] K.-H Ulbrich, *Galoiserweiterungen von nitcht-kommutative Ringen*, Comm. Algebra. **10** (1982), 655–672.

[78] C. E. Watts, *Intrinsic characterizations of some additive funtors*, Proc. Amer. Math. Soc. **11** (1960), 5–8.

[79] A. Wibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge studies in advanced mathematics **38**, (1994). 39–46.

[80] S. Yamagami, *Polygonal presentations of semisimple tensor categories*, J. Math. Soc. Japan Vol. **54**, No. 1, (2002), 61–88 .

[81] Y. Zhu, *Hopf algebras of prime dimension*, Int. Math. Res. Not. **1** (1994), 53–59.