Resumen

En esta tesis discutimos algunos resultados generales referentes al problema de clasificación de álgebras de Hopf de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k de característica cero. Dichos resultados son parte de tres trabajos [G], [AG], [AG2], estando el primero ya publicado.

Después de recordar en el Capítulo 1 definiciones básicas y algunos hechos conocidos, presentamos en el Capítulo 2 varios resultados sobre extensiones de álgebra de Hopf de dimensión finita que serán necesarios en los capítulos subsiguientes. Explícitamente, primero probamos que un álgebra de Hopf que es una extensión de un álgebra de Taft $T(q)$ de dimensión p^2 por un álgebra de grupo de dimensión p, con p un número primo impar y q una raíz de p-ésima de la unidad, es necesariamente punteada. Luego estudiamos extensiones centrales de álgebras de Hopf y mostramos cómo construir extensiones centrales de álgebras de Hopf a partir de una extensión central $B \hookrightarrow A \twoheadrightarrow H$ y dos epimorfismos $p : B \to K$ y $r : H \to L$. Más aún, describimos bajo ciertas hipótesis adicionales las clases de isomorfismos de este tipo de extensiones.

En el Capítulo 3 aplicamos los resultados obtenidos a las álgebras de Hopf H de dimensión p^3 sobre k. Según los grupos de elementos de tipo grupo de H y H^*, hay 10 casos posibles. Demostramos que en 8 de los 10 casos, se puede determinar la estructura del álgebra de Hopf. Además damos una clasificación parcial de las álgebras de Hopf cuasitriangulares de dimensión p^3 sobre k. En particular, probamos que toda álgebra de Hopf de cintas de dimensión p^3 sobre k es, o bien un álgebra de grupo, o bien un núcleo de Frobenius-Lusztig. Usando algunos resultados de [AN] y [BD] sobre cotas para la dimensión del primer término H_1 de la filtración corradical de H, finalizamos el capítulo dando la clasificación completa de las álgebras de Hopf cuasitriangulares de dimensión 27.

En el Capítulo 4 utilizamos la construcción de extensiones centrales para producir nuevos ejemplos de álgebras de Hopf de la misma dimensión no isomorfas entre sí, que forman parte de otro contraejemplo de la ya negada décima conjetura de Kaplansky: sea G un grupo de Lie conexo, simplemente conexo y semisimple sobre $\mathbb{C}$ con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, matriz de Cartan C y matriz simetrizada de Cartan CD. Sea $\ell \geq 3$ un número entero impar, coprimo con $\det CD$. Dada una inclusión σ de un grupo finito Γ en G y una raíz primitiva ℓ-ésima de la unidad ϵ, construimos una extensión central A_σ del álgebra de funciones $\mathbb{C}^\Gamma$ de Γ por el dual del núcleo de Frobenius-Lusztig $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$; A_σ es un cociente del álgebra de coordenadas cuantizada $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ y $\dim A_\sigma = |\Gamma|\ell^{\dim \mathfrak{g}}$. Si G es simple y $\sigma(\Gamma)$ no es central en G, obtenemos una familia infinita de álgebra de Hopf no isomorfas entre sí que son no semisimples, no punteadas y sus duales tampoco son punteados. Esto generaliza el resultado obtenido por E. Müller [Mu2] para $SL_2(\mathbb{C})$. Sin embargo, se sigue de resultados en [Mk5] que estas álgebras de Hopf son deformaciones por cociclos unas de otras. Cabe destacar que la construcción de tal familia requiere algunas preparaciones técnicas en la cohomología de Γ en un cierto subgrupo

$\mathbf{T}^{f\sigma}$ de un toro maximal fijo $\mathbf{T}$ de G, y la desigualdad

$$\dim G > \operatorname{rg} G + \dim M$$

para cualquier subgrupo reductivo maximal M de G. Como las subálgebras maximales de las álgebra de Lie simples fueron clasificadas por Dynkin, hemos probado esta desigualdad por inspección en las listas de [D1, D2]. Ver el Apéndice para más detalles.

Finalmente, usando algunas herramientas desarrolladas anteriormente, determinamos en el Capítulo 5 todos los subgrupos finitos de un grupo cuántico simple cuyo parámetro es una raíz de 1, generalizando así la clasificación de E. Müller para el caso de tipo A_n. Específicamente, primero mostramos cómo construir cocientes de $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ de dimensión finita y luego probamos que esta construcción es exhaustiva, es decir, todos los cocientes de $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ de dimensión finita se pueden construir de esta forma. Sean $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ una subálgebra de Cartan fija, Π la base del sistema de raíces $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ de $\mathfrak{g}$ con respecto a $\mathfrak{h}$ y $n = \operatorname{rg} \mathfrak{g}$. Brevemente, los cocientes están determinados por una colección de datos $\mathcal{D} = (I_+, I_-, N, \Gamma, \sigma, \delta)$ a la cual llamaremos *dato de subgrupo finito* donde

- $I_+ \subseteq \Pi$ e $I_- \subseteq -\Pi$. Estos conjuntos definen una subálgebra algebraica de Lie $\mathfrak{l}$ con subgrupo de Lie conexo L de G tal que $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{l}_-$ y $\mathfrak{l}_\pm = \sum_{\alpha \in \Psi_\pm} \mathfrak{g}_\alpha$ con $\Psi_\pm = \{\alpha \in \Phi : \operatorname{Sup} \alpha = I_\pm\}$. Sea $s = n - |I_+ \cup -I_-|$.
- N es un subgrupo de $(\mathbb{Z}/(\ell))^s$.
- Γ es un grupo finito.
- $\sigma : \Gamma \to L$ es un morfismo inyectivo de grupos.
- $\delta : N \to \widehat{\Gamma}$ es un morfismo de grupos.

Abstract

In this thesis we discuss some general results concerning the classification problem of finite dimensional Hopf algebras over an algebraically closed field k of characteristic zero. They are based on three articles [G], [AG], [AG2], being the first one already published.

After recalling the basic definitions and some known facts in Chapter 1, we present in Chapter 2 several results on extensions of finite-dimensional Hopf algebras which will be needed in the chapters thereafter. Explicitly, we prove first that a Hopf algebra which is an extension of a Taft algebra $T(q)$ of dimension p^2 by a group algebra of dimension p, with p an odd prime number and q a p-th root of unity, is necessarily pointed. Then we study central extensions of Hopf algebras and show how to construct central extensions of finite-dimensional Hopf algebras from a central extension $B \hookrightarrow A \twoheadrightarrow H$ and two epimorphisms $p : B \to K$ and $r : H \to L$. Moreover, we describe under certain conditions the classes of isomorphisms of this type of extensions.

Next we apply in Chapter 3 the obtained results to Hopf algebras H of dimension p^3 over k. There are 10 cases according to the group-like elements of H and H^*. We show that in 8 of the 10 cases, it is possible to determine the structure of the Hopf algebra. We also give a partial classification of the quasitriangular Hopf algebras of dimension p^3 over k. In particular, we prove that every ribbon Hopf algebra of dimension p^3 over k is either a group algebra or a Frobenius-Lusztig kernel. Using some results from [AN] and [BD] on bounds for the dimension of the first term H_1 in the coradical filtration of H, we end Chapter 3 by giving the complete classification of the quasitriangular Hopf algebras of dimension 27.

In Chapter 4 we use the construction of central extensions of finite-dimensional Hopf algebras to produce new examples of non-isomorphic Hopf algebras of the same dimension, which are another counter-example of the already negated Kaplansky 10-th conjecture: let G be a connected, simply connected complex semisimple Lie group with Lie algebra $\mathfrak{g}$, Cartan matrix C and symmetrized Cartan matrix CD. Let $\ell \geq 3$ be an odd integer, relatively prime to $\det CD$. Given an embedding σ of a finite group Γ on G and a primitive ℓ-th root of unity ϵ, we construct a central extension A_σ of the function algebra $\mathbb{C}^\Gamma$ by the dual of the Frobenius-Lusztig kernel $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$; A_σ is a quotient of the quantized coordinate algebra $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ and $\dim A_\sigma = |\Gamma|\ell^{\dim \mathfrak{g}}$. If G is simple and $\sigma(\Gamma)$ is not central in G, then we obtain an infinite family of pairwise non-isomorphic Hopf algebras which are non-semisimple, non-pointed and their duals are also non-pointed. This generalizes the result obtained by E. Müller [Mu2] for $SL_2(\mathbb{C})$. Nevertheless, it follows from results in [Mk5] that these Hopf algebras are cocycle deformations of each other. We notice that the construction of such a family requires some technical preparations on the cohomology of Γ in a certain subgroup $\mathbf{T}^{f_\sigma}$ of a fixed maximal torus $\mathbf{T}$ of G, and the inequality

$$\dim G > \operatorname{rg} G + \dim M$$

for any maximal reductive subgroup M of G. As the maximal subalgebras of the simple Lie algebras were classified by Dynkin, we have proved this by inspection in the lists of [D1, D2]. See the Appendix for details.

Finally, using the machinery developed in the previous chapters, we determine in Chapter 5 all finite subgroups of a simple quantum group at roots of 1, generalizing in this way the classification of E. Müller for the case of type A_n. Specifically, we show first how to construct finite-dimensional quotients of $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ and then we prove that this construction is exhaustive, that is, all finite-dimensional quotients of $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ can be constructed in such a way. Let $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ be a fixed Cartan subalgebra, Π the basis of the root system $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ of $\mathfrak{g}$ with respect to $\mathfrak{h}$ and $n = \operatorname{rg} \mathfrak{g}$. Briefly, every quotient is determined by a 6-tuple $\mathcal{D} = (I_+, I_-, N, \Gamma, \sigma, \delta)$ which will be called *finite subgroup datum* where

- $I_+ \subseteq \Pi$ and $I_- \subseteq -\Pi$. This sets define an algebraic Lie subalgebra $\mathfrak{l}$ with connected Lie subgroup L of G such that $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{l}_-$ and $\mathfrak{l}_\pm = \sum_{\alpha \in \Psi_\pm} \mathfrak{g}_\alpha$ with $\Psi_\pm = \{\alpha \in \Phi : \operatorname{Sup} \alpha = I_\pm\}$. Let $s = n - |I_+ \cup -I_-|$
- N is a subgroup of $(\mathbb{Z}/(\ell))^s$.
- Γ is a finite group.
- $\sigma : \Gamma \to L$ is an injective group homomorphism.
- $\delta : N \to \widehat{\Gamma}$ is a group homomorphism.

Bibliografía

[AG] N. ANDRUSKIEWITSCH y G. A. GARCÍA, 'Extensions of finite quantum groups by finite groups'. Enviado. Preprint: ArXiv: math.QA/0608647, 34 pp.

[AG2] N. ANDRUSKIEWITSCH y G. A. GARCÍA, 'Finite subgroups of a simple quantum group'. Preprint.

[AN] N. ANDRUSKIEWITSCH y S. NATALE, 'Counting arguments for Hopf algebras of low dimension', *Tsukuba J. Math* 25 (2001), no. 1, 178–201.

[BD] M. BEATTIE y S. DASCALESCU, 'Hopf algebras of dimension 14', *J. Lond. Math. Soc.* (2) 69 (2004), no. 1, 65–78.

[D1] E. B. DYNKIN, 'Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras', *Am. Math. Soc., Transl.*, II. Ser. 6 (1957), 111-243.

[D2] E. B. DYNKIN, 'Maximal subgroups of the classical groups', *Am. Math. Soc., Transl.*, II. Ser. 6 (1957), 245-378.

[G] G. A. GARCÍA, 'On Hopf algebras of dimension p^3', *Tsukuba J. Math.* 29 (2005), no. 1, 259–284.

[Mk5] A. MASUOKA, 'Defending the negated Kaplansky conjecture', *Proc. Am. Math. Soc.* 129 (2001), no. 11, 3185–3192.

[Mu2] E. MÜLLER, 'Finite subgroups of the quantum general linear group', *Proc. London Math. Soc.* (3) 81 (2000), no. 1, 190–210.