ANALISIS ARMONICO DE FUNCIONES MATRICIALES, EN EL PLANO HIPERBOLICO COMPLEJO

Por Pablo Manuel Román

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía y Física como parte de los requerimientos para la obtención del grado de Doctor en Matemática de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CORDOBA

Marzo de 2007

Director: Juan Tirao

Resumen

En este trabajo determinamos todas las funciones esféricas irreducibles Φ de cualquier K-tipo asociadas a los pares simétricos duales $(G, K) = (\mathrm{SU}(3), \mathrm{U}(2))$ y $(\mathrm{SU}(2,1), \mathrm{U}(2))$. Esto se logra asociando a Φ una función a valores vectoriales $H = H(u)$ de una variable real u, analítica en $u = 0$, que es autofunción simultánea de dos operadores diferenciales de segundo orden con coeficientes matriciales. Uno de ellos viene del operador de Casimir de G y probamos que es conjugado a un operador hipergeométrico matricial, lo que nos permite expresar la función H es términos de la función hipergeométrica matricial. Para el par compacto $(\mathrm{SU}(3), \mathrm{U}(2))$ este proyecto fue iniciado en [GPT02a].

Obtenemos la expresión explícita de una familia de polinomios ortogonales matriciales $\{P_n\}_n$, con respecto a un peso a un peso W, que son autofunciones de un operador diferencial de segundo orden D. El peso W y el operador diferencial D se encuentran en [PT06], usando algunos aspectos de la teoría de funciones esféricas asociadas a los espacios proyectivos comoplejos. También encontramos otro operador diferencial de segundo orden E simétrico con respecto a W y describimos el álgebra generada por D y E.

Estudiamos la transformada esférica para cualquier K-tipo de un grupo localmente compacto G. Esta generaliza la definición introducida por Camporesi en [Cam97]. Obtenemos la correspondiente fórmula de inversión a partir de la fórmula de Plancherel sobre G. Finalmente explicitamos los resultados obtenidos anteriormente para el grupo $G = \mathrm{SU}(2,1)$ y $K = U(2)$ en términos de las funciones hipergeométricas matriciales ${}_2H_1$.

Abstract

In this paper we determine all irreducible spherical functions Φ of any K-type associated to the dual Hermitian symmetric pairs $(G, K) = (\mathrm{SU}(3), \mathrm{U}(2))$ and $(\mathrm{SU}(2,1), \mathrm{U}(2))$. This is accomplished by associating to Φ a vector valued function $H = H(u)$ of a real variable u, analytic at $u = 0$, which is a simultaneous eigenfunction of two second order differential operators with matrix coefficients. One of them comes from the Casimir operator of G and we prove that it is conjugated to a hypergeometric operator, allowing us to express the function H in terms of a matrix valued hypergeometric function. For the compact pair $(\mathrm{SU}(3), \mathrm{U}(2))$ this project was started in [GPT02a].

We obtain an explicit expression of a family of matrix valued orthogonal polynomials $\{P_n\}_n$, with respect to a weight W, that are eigenfunctions of a second order differential operator D. The weight W and the differential operator D were found in [PT06], using some aspects of the theory of the spherical functions associated to the complex projective spaces. We also find other second order differential operator E symmetric with respect to W and we describe the algebra generated by D and E.

We introduce the spherical transform for any K-type of a locally compact group G. This generalizes the definition introduced by Camporesi in [Cam97]. We obtain the corresponding inversion formula from the Plancherel formula on G. Finally we give the explicit expressions of the spherical transform and the inversion formula for $G = \mathrm{SU}(2,1)$ and $K = U(2)$ in terms of the matrix valued hypergeometric functions ${}_2H_1$.

a Silvia

Indice

CAPITULO 1

Introducción

En los últimos dos siglos la teoría de funciones especiales ha dado herramientas que hicieron posible la aplicación de la matemática a las ciencias físicas: desde la teoría de la conducción del calor, pasando por el electromagnetismo y la mecánica cuántica hasta la reconstrucción de imágenes en la física médica, se han beneficiado con su desarrollo. Es conocido que casi todas las llamadas funciones especiales, que juegan un rol importante en las soluciones explícitas de problemas en física matemática, son o bien casos particulares de funciones hipergeométricas de Euler y Gauss o bien funciones de Bessel.

El estudio de las funciones especiales, comenzó durante el siglo XIX y de un modo mas bien caótico. Durante el último siglo, este conocimiento comenzó a ser unificado y organizado cuando se conectaron estas funciones con la teoría de representaciones de los grupos clásicos.

Fueron E. Cartan (1929) y H. Weyl (1934) quienes desarrollaron la teoría de funciones esféricas para espacios simétricos compactos y variedades riemannianas compactas, en particular probaron que los armónicos esféricos surgen de manera natural a partir del estudio de funciones en G/K, donde $G = \mathrm{SO}(n)$ y $K = \mathrm{SO}(n-1)$.

Las funciones esféricas asociadas con la representación trivial de K, dan origen a numerosos ejemplos, que incluyen funciones especiales tales como los polinomios de Jacobi, Hermite, Laguerre y las funciones de Bessel, Legendre, Jacobi, etc. Por ejemplo, los polinomios de Legendre son funciones esféricas asociadas al par (G, K) con G el grupo de rotaciones de $\mathbb{R}^3$ y K el grupo de rotaciones de $\mathbb{R}^2$. Las funciones de Bessel, surgen al considerar el plano de dimensión dos como el cociente del grupo de todos los movimientos rígidos del plano por el grupo de rotaciones.

I. Gelfand, R. Godement y Harish-Chandra, desarrollaron la teoría de funciones esféricas para espacios simétricos no compactos. La propiedad crucial que permitió unificar los diversos ejemplos de funciones especiales es el hecho que todas estas funciones satisfacen una ecuación integral. En general, dado un grupo G y K un subgrupo compacto de G, una función φ en G se dice esférica zonal si satisface

$$\varphi(x)\varphi(y) = \int_K \varphi(xky)\, dk \qquad \text{para todo } x, y \in G.$$

Partiendo de esta ecuación integral, las funciones esféricas se conectan con la teoría general de desarrollo en autofunciones asociadas con operadores diferenciales de segundo orden, la teoría general de representaciones de grupos y la teoría clásica de funciones especiales. Todos estos desarrollos son una parte importante de la teoría de grupos de Lie, área que se expandió y ahora alimenta otras áreas importantes de la matemática, como las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, el análisis armónico, la física matemática, la teoría de invariantes, la teoría de números y la geometría algebraica.

Tomando como punto de partida la ecuación integral de las funciones esféricas zonales uno puede obtener fácilmente, por ejemplo, las fórmulas integrales para las funciones de Bessel y para los polinomios de Legendre y Gegenbauer.

Esta interpretación de las funciones especiales permitió modernizar un gran número de hechos conocidos hasta ese momento. También mostró una manera de buscar otros ejemplos de estas situaciones, incluyendo grupos discretos, con interesantes aplicaciones en combinatoria. Estos desarrollos han tenido un importante impacto en la teoría de códigos y otras áreas no tradicionales donde los matemáticos pueden aún jugar un rol importante.

De manera independiente Tirao ([Tir77]) y Gangoli- Varadarajan ([GV88]) generalizaron la teoría clásica de funciones esféricas, poniendo en relieve la función matricial subyacente en el concepto de función esférica (escalar) desarrollada por Godement y Harish-Chandra. Este punto de vista matricial ha cobrado mucha importancia en los últimos años, por ejemplo en el desarrollo de la teoría de polinomios ortogonales matriciales.

Sea $\hat{K}$ el conjunto de todas las clases de equivalencia de representaciones irreducibles de dimensión finita de K; para cada $\delta \in \hat{K}$ sea ξ_δ el carácter de δ, $d(\delta)$ la dimensión de δ y $\chi_\delta = d(\delta)\xi_\delta$. Una función esférica de tipo δ es una función continua $\Phi : G \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ tal que $\Phi(e) = I$ y que satisface la siguiente ecuación integral.

$$\Phi(x)\Phi(y) = \int_K \chi_\delta(k^{-1})\Phi(xky)\, dk, \quad \text{para todo } x, y \in G.$$

Sea (π, V) una representación finita de K tal que $\pi = m\delta$, $\delta \in \hat{K}$. En este caso una función esférica de tipo δ está caracterizada por las siguientes propiedades:

i) $\Phi : G \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ es una función analítica.

ii) $\Phi(k_1 g k_2) = \pi(k_1)\Phi(g)\pi(k_2)$, para todo $k_1, k_2 \in K$, $g \in G$, y $\Phi(e) = I$.

iii) $[\Delta\Phi](g) = \Phi(g)[\Delta\Phi](e)$, para todo $g \in G$ y $\Delta \in D(G)^K$.

Donde $D(G)^K$ son los operadores diferenciales en G, que son invariantes por multiplicación a izquierda por G y a derecha por K.

Cuando uno considera representaciones de dimensión 1 del grupo K, las funciones esféricas son a valores escalares. En el caso general, que surge de considerar todas las representaciones de K, las funciones que se obtienen son a valores matriciales.

Si bien la teoría fue desarrollada hace tiempo, los ejemplos concretos de estas funciones no se conocían hasta hace pocos años, aun en los casos de dimensión uno (dados por Heckman y Opdam, en 1990). Tirao, Grünbaum y Pacharoni, en [GPT02a],describen las funciones esféricas asociadas al plano proyectivo complejo, que se identifica con $\mathrm{SU}(3)/\mathrm{U}(2)$ y en [GPT02b] consideran el par no compacto $(G, K) = (\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}), \mathrm{SU}(2))$.

El primer desafío que abordamos en este trabajo es determinar explícitamente todas las funciones esféricas de cualquier K-tipo asociadas al plano hiperbólico complejo, que podemos identificar con $\mathrm{SU}(2,1)/\mathrm{U}(2)$. Este par es el dual no compacto del par $(\mathrm{SU}(3), \mathrm{U}(2))$, considerado en [GPT02a].

El grupo $G = \mathrm{SU}(2, 1)$ actúa de manera natural en el plano proyectivo complejo $P_2(\mathbb{C})$. Esta acción es transitiva en el conjunto

$$B = \{(x, y, 1) \in P_2(\mathbb{C}) : |x|^2 + |y|^2 < 1\},$$

y $K = \mathrm{U}(2)$ es el subgrupo de isotropía del punto $(0,0,1) \in P_2(\mathbb{C})$. Por lo tanto $B = G/K$.

En el Capítulo 3 seguimos las técnicas y estrategias desarrolladas en [GPT02a]. Asociamos a cada función esférica $\Phi : G \longrightarrow \mathrm{End}(V_\pi)$ de tipo $\pi = \pi_{n,\ell}$, una función H definida por

$$H(g) = \Phi(g)\,\Phi_\pi(g)^{-1},$$

donde Φ_π es una función esférica de tipo π particular. Entonces H tiene las siguientes propiedades

i) $H(e) = I$.

ii) $H(gk) = H(g)$, para todo $g \in G, k \in K$.

iii) $H(kg) = \pi(k)H(g)\pi(k^{-1})$, para todo $g \in G, k \in K$.

La propiedad ii) indica que H se puede considerar como una función en B.

En este caso el álgebra $D(G)^K$ de operadores diferenciales en G, invariantes a izquierda por G y a derecha por K es un álgebra de polinomios en dos generadores algebraicamente independientes Δ_2 y Δ_3 (Δ_2 es el operador de Casimir de G). El hecho que Φ es una autofunción de Δ_2 y Δ_3, se traduce en el hecho que H sea autofunción de dos operadores diferenciales de segundo orden D y E en $\mathbb{C}^2$.

En la Sección 3.3 aprovechamos la estructura de K-órbitas de B combinada con la propiedad iii) de las funciones H. Las K-órbitas en el cociente G/K corresponden a las esferas

$$S_r = \left\{\, (x,y) \in \mathbb{C}^2 : |x|^2 + |y|^2 = r^2 \,\right\}, \quad 0 \le r < 1.$$

Por lo tanto podemos tomar los puntos $(r,0) \in S_r$ como representantes de S_r. Entonces el intervalo $[0,1)$ parametriza el conjunto de K-órbitas en B.

Por lo tanto existen operadores diferenciales ordinarios $\tilde D$ y $\tilde E$ en el intervalo abierto $(0,1)$ tal que

$$(D\,H)(r,0) = (\tilde D \tilde H)(r)\,, \quad (EH)(r,0) = (\tilde E \tilde H)(r),$$

donde $\tilde H(r) = H(r,0)$, $r \in (0,1)$. Los operadores $\tilde D$ y $\tilde E$ están dados explícitamente en los Teoremas 3.17 y 3.18. Estos teoremas están dados en términos de transformaciones lineales. Las funciones $\tilde H$ son diagonalizables (Proposición 3.26). Por lo tanto, en una base apropiada de V_π podemos escribir $\tilde H(r) = (h_0(r), \cdots, h_\ell(r))$. Luego, en los Corolarios 3.33 y 3.34 damos los enunciados correspondientes de los Teoremas 3.17 y 3.18 en términos de las funciones escalares h_i.

En la sección 3.5 relacionamos nuestro estudio de las funciones esféricas matriciales asociadas al plano hiperbólico complejo con el trabajo desarrollado en [GPT02a] para determinar todas las funciones esféricas matriciales asociadas al plano proyectivo complejo. Hacemos esto describiendo a las funciones esféricas de los dos casos como autofunciones simultáneas de los mismos operadores diferenciales. Este hecho es de gran importancia ya que, además de permitirnos estudiar en conjunto el caso compacto y el no compacto, nuestra caracterización de las funciones esféricas asociadas al plano hiperbólico complejo $H_2 = \mathrm{SU}(2,1)/\mathrm{U}(2)$ dada en el Capítulo 4 depende de información valiosa obtenida de la teoría de representaciones del grupo compacto $\mathrm{SU}(3)$.

Recientemente, Tirao en [Tir03] introdujo la ecuación hipergeométrica matricial de Gauss

$$z(1-z)F''(z) + (C - zU)F'(z) - VF(z).$$

En el caso clásico, las funciones esféricas de tipo trivial asociadas a espacios simétricos Riemannianos de rango uno, pueden ser identificadas con funciones hipergeométricas escalares, con una parametrización conveniente En [GPT02a] se prueban resultados similares para cualquier K-tipo cuando el espacio simétrico G/K es el plano proyectivo complejo. Las funciones H asociadas a las funciones esféricas en [GPT02a], dan un ejemplo de polinomios de Jacobi matriciales de parámetros $(\alpha, \beta) = (n, 1)$, donde n es un número natural. En el caso escalar, los polinomios de Jacobi $p_n^{(\alpha,\beta)}$ son solución de la ecuación diferencial

$$t(1-t)p_n''(t) + (\alpha + 1 - t(\alpha + \beta + 2))p_n'(t) - n(n + \alpha + \beta + 1)p_n(t) = 0.$$

Los resultados del Capítulo 4 forman parte del trabajo [RT06]. El punto inicial de este Capítulo 4 son los Teoremas 3.35 y 3.36, introducidos en el Capítulo 3. Mas allá de la importancia de estos teoremas, no alcanzan el objetivo de dar una representación explícita de las funciones esféricas. De hecho, en [GPT02a] ese objetivo solo se alcanzó para las funciones esféricas de tipo polinomial y dimensión menor o igual a tres, representando estas funciones esféricas en términos de las funciones hipergeométricas generalizadas ${}_{p+1}F_p$.

Las Secciones 3 y 4 son el corazón de este capítulo. Después del cambio de variables $u = 1 - t$, los operadores diferenciales D y E, mencionados en los Teoremas 3.35 y 3.36, se transforman en $\bar{D}$ y $\bar{E}$. Entonces en la Sección 4.1 encontramos una función polinomial matricial $\psi = \psi(u)$ que usamos para conjugar $\bar{D}$ en el operador hipergeométrico matricial $\widetilde{D} = \psi^{-1}\bar{D}\psi$, ver Teorema 4.5. Establecemos que esta conjugación lleva autofunciones de $\bar{D}$ analíticas en $u = 0$ en autofunciones de $\widetilde{D}$ analíticas en $u = 0$, ver Teorema 4.6. La prueba de este teorema depende de encontrar una matriz Ω (cuyas entradas están dadas en terminos de los polinomios ortogonales de Hahn) para diagonalizar una relación de recurrencia de dos términos. En particular esto nos permite probar que la función H asociada a una función esférica irreducible es polinomial, cuando $G = \mathrm{SU}(3)$ (Teorema 4.8). En la Sección 4 reducimos el problema de encontrar las autofunciones simultáneas de $\bar{D}$ y $\bar{E}$ a un problema de álgebra lineal, ver (4.17). Esta reducción no es la misma que la dada en [GPT02a] y resuelve el problema en todos los casos.

En la Sección 4.3 somos capaces de describir todas las funciones esféricas irreducibles asociadas al plano hiperbólico complejo y al plano proyectivo complejo, en términos de la función hipergeométrica matricial ${}_2H_1$ introducida en [Tir03], ver los Teoremas 4.20 and 4.21.

Es importante destacar que nuestra caracterización de todas las funciones esféricas irreducibles asociadas al plano hiperbólico complejo depende de información valiosa obtenida de la teoría de representaciones del grupo compacto SU(3), ver Teorema 4.17, y que existe una aplicación inyectiva $\Theta \mapsto \Phi$ del conjunto de clases de equivalencia de funciones esféricas irreducibles de SU(3) de tipo (n, ℓ) en el conjunto de todas las clases de equivalencia de funciones esféricas irreducibles de SU(2, 1) del mismo tipo. Esta aplicación está dada por la resticción de la función polinomial asociada H_Θ, a la función H_Φ definida en el intervalo $(-\infty, 0]$.

En 1929, Bochner planteó y resolvió el problema de determinar todas las familias de polinomios ortogonales a valores escalares que fueran autofunciones de un operador diferencial de segundo orden, arbitrario pero fijo. Las funciones esféricas zonales dan los ejemplos mas simples de tales funciones. Mas explícitamente los así llamados polinomios ortogonales de Jacobi, Hermite o Laguerre son los primeros ejemplos que surgen. La teoría de polinomios ortogonales matriciales, sin ninguna consideración de ecuaciones diferenciales se remonta a [Kre71] y [Kre49]. En [Dur97] se comienza el estudio de polinomios ortogonales matriciales que son autofunciones de ciertos operadores diferenciales de segundo orden. Los primeros ejemplos explícitos de tales polinomios fueron dados en [GPT01], [GPT03] y [DG04]. La clasificación de las familias de polinomios matriciales que son solución del problema de Bochner, aún en el caso 2×2 se presenta actualmente como un problema muy difícil.

En el Capítulo 5 damos expresiones explícitas de una sucesión de polinomios ortogonales asociada al peso W dado en el Teorema 5.1. Esto se logra estudiando el espacio vectorial $V(\lambda)$ de todas las soluciones polinomiales con valores vectoriales de la ecuación hipergeométrica $DF - \lambda F = 0$. Este espacio es no trivial si y sólo si

$$\lambda = \lambda_j(w) = -w(w + \alpha + \beta + \ell + j + 1) - j(\alpha + \beta - k + 1 + j),$$

para algún $w \in \mathbb{N}_0$ y $j = 0, 1, \ldots, \ell$. Si los autovalores $\lambda_j(w)$ son todos diferentes, entonces existe una única solución (salvo escalares) de $DF = \lambda F$. En la Proposición 5.17 calculamos, en el caso general, la dimensión del espacio $V(\lambda)$. Con este conocimiento en la mano, construimos una sucesión de polinomios $\{P_w\}$, eligiendo la j-ésima columna de P_w como un polinomio particular en $V(\lambda_j(w))$. En el Teorema 5.18 probamos que $\{P_w\}$ es una sucesión ortogonal de polinomios matriciales tal que $DP_w^* = P_w^* \Lambda_w(D)$, donde $\Lambda_n(D)$ es la matriz diagonal real

$$\Lambda_w(D) = \sum_{0 \leq j \leq \ell} \lambda_j(w) E_{jj}.$$

El contenido de este capítulo forma parte del trabajo [PR06]

El objetivo del Capítulo 6 es utilizar la teoría de funciones esféricas de tipo δ de un grupo G localmente compacto para definir una transformada esférica sobre el álgebra $C_{c,\delta}(G)$.

En la Sección 6.2 introducimos los conceptos de función esférica unitaria y función esférica definida positiva. En el caso escalar, las funciones definidas positivas están estrechamente relacionadas con las representaciones cíclicas de G. Esta relación es una pieza clave en la demostración del Teorema de Gelfand Raikov. En el caso matricial, utilizando las herramientas desarrolladas para el caso escalar, encontramos una biyección entre el conjunto de clases de equivalencia de funciones esféricas definidas positivas de tipo δ y el conjunto $\hat{G}(\delta)$ de aquellos $U \in \hat{G}$ que contienen al K-tipo δ al restringir a K.

En la Sección 6.3 utilizamos la la fórmula de inversión de Plancherel sobre el grupo G para derivar una fórmula de inversión para la transformada esférica sobre $C_{c,\delta}(G)$.

En las Sección 6.4 explicitamos la transformada esférica en el caso se $\mathrm{SU}(2,1)$. Para esto contamos con la descripción detallada de todas las funciones esféricas de cualquier K-tipo asociadas al plano hiperbólico complejo que obtuvimos en el Capítulo 4. Así la transformada esférica se escribe en términos de la función hipergeométrica matricial ${}_2H_1$. Finalmente completamos el Capítulo detallando la formula de inversión para la transformada esférica en el caso $\mathrm{SU}(2,1)$.

CAPITULO 2

Funciones esféricas

Sea G un grupo localmente compacto unimodular y sea K un subgrupo compacto de G. Sea $\hat{K}$ el conjunto de todas las clases de equivalencia de representaciones complejas irreducibles de dimensión finita de K; para cada $\delta \in \hat{K}$, sea ξ_δ el carácter de δ, $d(\delta)$ el grado de δ, i.e. la dimensión de cualquier representación en la clase δ y $\chi_\delta = d(\delta)\xi_\delta$. Elegimos de ahora en adelante la medida de Haar dk en K normalizada por $\int_K dk = 1$.

Denotaremos por V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de números complejos y por $\mathrm{End}(V)$ el espacio de todas las transformaciones lineales de V en V. Siempre que hagamos referencia a la topología de dicho espacio, estaremos hablando de la única topología Hausdorff lineal en él.

Por definición una función esférica zonal ([Hel84]) φ sobre G es una función continua a valores complejos que satisface $\varphi(e) = 1$ y

$$\varphi(x)\varphi(y) = \int_K \varphi(xky)\, dk \qquad\qquad x, y \in G. \tag{2.1}$$

Una fructífera generalización del concepto anterior está dada en la siguiente definición

Definición 2.1. *([Tir77],[GV88]) Una función esférica Φ sobre G de tipo $\delta \in \hat{K}$ es una función continua sobre G con valores en $\mathrm{End}(V)$ tal que*

i) $\Phi(e) = I$. *(I= transformación identidad).*

ii) $\Phi(x)\Phi(y) = \int_K \chi_\delta(k^{-1})\Phi(xky)\, dk$, *para todo $x, y \in G$.*

Proposición 2.2. *([Tir77],[GV88]) Si $\Phi : G \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ es una función esférica de tipo δ entonces*

i) $\Phi(kgk') = \Phi(k)\Phi(g)\Phi(k')$, *para todo $k, k' \in K$, $g \in G$.*

ii) $k \mapsto \Phi(k)$ *es una representación de K tal que cualquier subrepresentación pertenece a δ.*

Con respecto a la definición notemos que la función esférica Φ determina unívocamente su tipo (Proposición 2.2) y que el número de veces que δ ocurre en la representación $k \mapsto \Phi(k)$ se llama la *altura* de Φ.

Cuando K es un subgrupo central de G, (i.e. K está contenido en el centro de G) y Φ es una función esférica, tenemos

$$\Phi(x)\Phi(y) = \int_K \chi_\delta(k^{-1})\Phi(xky)dk = \int_K \chi_\delta(k^{-1})\Phi(k)\Phi(xy)dk = \Phi(xy),$$

para todo $x, y \in G$. En otras palabras, Φ es una representación de G. Por lo tanto si tomamos $K = \{e\}$, las funciones esféricas de G son precisamente las representaciones de dimensión finita de G, y si G es abeliano las funciones esféricas son las representaciones de dimensión finita de G tales que 2.2 (ii) se satisface.

Otro caso extremo ocurre cuando G es compacto y $K = G$. En este caso las funciones esféricas son también las representaciones de de dimensión finita de G, con todas sus subrepresentaciones equivalentes.

Sea φ una solución continua a valores complejos de la ecuación(2.1). Si φ no es idénticamente cero entonces $\varphi(e) = 1$. (cf. [Hel84], p. 399). Este resultado se generaliza de la siguiente forma: Diremos que una función $\Phi : G \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ es *irreducible* si $\Phi(g)$, $g \in G$, es una familia irreducible de transformaciones de V en V. Entonces tenemos

Proposición 2.3. *([Tir77]) Sea Φ una solución continua con valores en* $\mathrm{End}(V)$ *de la ecuación ii) en la Definición 2.1. Si Φ es irreducible entonces $\Phi(e) = I$.*

Las funciones esféricas de tipo δ aparecen de forma natural considerando representaciones de G. Si $g \mapsto U(g)$ es una representación continua de G, digamos en un espacio vectorial topológico E completo, localmente convexo y Hausdorff, entonces

$$P(\delta) = \int_K \chi_\delta(k^{-1})U(k)\, dk$$

es una proyección continua de E en $P(\delta)E = E(\delta)$; $E(\delta)$ consiste de aquellos vectores en E, para los cuales el espacio vectorial generado por su K-órbita es de dimensión finita y se descompone en subrepresentaciones irreducibles de K de tipo δ. Si $E(\delta)$ es de dimensión finita, la función $\Phi : G \longrightarrow \mathrm{End}(E(\delta))$ definida por $\Phi(g)a = P(\delta)U(g)a$, $g \in G, a \in E(\delta)$ es una función esférica de tipo δ. De hecho, si $a \in E(\delta)$ tenemos

$$\begin{aligned}\Phi(x)\Phi(y)a = P(\delta)U(x)P(\delta)U(y)a &= \int_K \chi_\delta(k^{-1})P(\delta)U(x)U(k)U(y)a\, dk\\ &= \left(\int_K \chi_\delta(k^{-1})\Phi(xky)\, dk\right) a.\end{aligned}$$

Si la representación $g \mapsto U(g)$ es topológicamente irreducible (i.e. E no tiene subespacios cerrados G-invariantes no triviales) entonces la función esférica asociada Φ es también irreducible.

Si una función esférica Φ es asociada a una representación Banach de G entonces es casi-acotada, en el sentido de que existe una seminorma ρ en G y $M \in \mathbb{R}$ tal que $\|\Phi(g)\| \leq M\rho(g)$ para todo $g \in G$. Por otro lado, si Φ es una función esférica irreducible casi-acotada en G, entonces es asociada a una representación Banach topológicamente irreducible de G (Godement, ver [Tir77]). Por lo tanto, si G es compacto cualquier función esférica irreducible en G es asociada a una representación Banach of G, que es de dimensión finita por el teorema de Peter-Weyl.

Denotaremos por $C_c(G)$ al álgebra, con respecto a la convolución "$*$", de funciones continuas sobre G con soporte compacto. Podemos considerar el conjunto $C_{c,\delta}(G)$ de aquellas $f \in C_c(G)$ que satisfacen $\bar{\chi}_\delta * f = f * \bar{\chi}_\delta = f$. Como $\chi_\delta * \chi_\delta = \chi_\delta$ (Relaciones de ortogonalidad), es claro que $C_{c,\delta}(G)$ es una subálgebra de $C_c(G)$ y que $f \mapsto \bar{\chi}_\delta * f * \bar{\chi}_\delta$ es una proyección continua de $C_c(G)$ en $C_{c,\delta}(G)$. Podemos considerar $C_{c,\delta}(G)$ como un subespacio topológico de $C_c(G)$.

Para toda $f \in C_c(G)$, sea $\check{f}$ la función definida por $\check{f}(g) = f(g^{-1})$, entonces

$$(f * g)\check{} = \check{g} * \check{f}.$$

Proposición 2.4. *Sea $\Phi : G \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ una función continua tal que $\chi_\delta * \Phi = \Phi * \chi_\delta = \Phi$. Entonces Φ satisface la ecuación integral ii) de la Definición 2.1 si y sólo si la aplicación*

$$\Phi : f \mapsto \int_G f(g)\Phi(g)dg,$$

es una representación de $C_{c,\delta}(G)$.

Demostración. Sean f, h dos funciones en $C_{c,\delta}(G)$, entonces

$$\Phi(f) = \int_G f(g)\Phi(g)dg = (\Phi * \check{f})(e).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \Phi(\overline{\chi}_\delta * f * \overline{\chi}_\delta) &= (\Phi * (\overline{\chi}_\delta * f * \overline{\chi}_\delta)\check{})(e) = (\Phi * \chi_\delta * \check{f} * \chi_\delta)(e) \\ &= (\Phi * \check{f} * \chi_\delta)(e) = (\chi_\delta * \Phi * \check{f})(e) = (\Phi * \check{f})(e) = \Phi(f). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Hemos usado que $\overline{\chi}_\delta = \check{\chi}_\delta$. Ahora

$$\begin{aligned} \Phi((\overline{\chi}_\delta * f * \overline{\chi}_\delta) * (\overline{\chi}_\delta * h * \overline{\chi}_\delta) = \Phi(f * \overline{\chi}_\delta * h) &= \int_G (f * \overline{\chi}_\delta * h)(y)\Phi(y)dy \\ &= \int_G \int_G (f * \overline{\chi}_\delta)(x)h(x^{-1}y)\Phi(y)dx\,dy \\ &= \int_G \int_G \int_K f(xk^{-1})\overline{\chi}_\delta(k)h(y)\Phi(xy)dk\,dx\,dy \\ &= \int_G \int_G f(x)h(y)(\int_K \chi_\delta(k^{-1})\Phi(xky)dk)dx\,dy. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Por otro lado

$$\Phi(\overline{\chi}_\delta * f * \overline{\chi}_\delta)\Phi(\overline{\chi}_\delta * h * \overline{\chi}_\delta) = \Phi(f)\Phi(h) = \int_G \int_G f(x)h(y)\Phi(x)\Phi(y)dx\,dy. \tag{2.4}$$

Teniendo en cuenta (2.3) y (2.4), la proposición sigue inmediatamente. □

Denotamos por $I_c(G)$ al conjunto de funciones $f \in C_c(G)$ que son K-centrales, i.e. invariantes por $g \mapsto kgk^{-1}$. Observemos que $I_c(G)$ es una subálgebra de $C_c(G)$ y que el operador

$$f \mapsto f^0(g) = \int_K f(kgk^{-1})dk,$$

es una proyección continua (en la topología inductiva) de $C_c(G)$ en $I_c(G)$. Podemos definir $I_{c,\delta}(G) = I_c(G) \cap C_{c,\delta}(G)$, i.e.

$$I_{c,\delta}(G) = \{f \in C_c(G) : \bar{\chi}_\delta * f = f, \text{ y } f(kxk^{-1}) \text{ para todo } x \in G, k \in K\}.$$

Esta es también una subálgebra de $C_c(G)$ y $f \mapsto f^0$ lleva $C_{c,\delta}(G)$ en $I_{c,\delta}(G)$. Si $f \in I_c(G)$ y $\bar{\chi}_\delta * f = f$, entonces también $f = f * \bar{\chi}_\delta$; esto significa que la aplicación $f \mapsto \bar{\chi}_\delta * f$ es una proyección continua de $I_c(G)$ en $I_{c,\delta}(G)$.

En [Tir77] se puede encontrar una demostración de la siguiente proposición.

Proposición 2.5. *Las siguientes propiedades son equivalentes:*

i $I_{c,\delta}(G)$ *es conmutativa.*

ii Toda función esférica irreducible de tipo δ *es de altura* 1.

iii $I_{c,\delta}(G)$ *es el centro de* $C_{c,\delta}(G)$.

De ahora en adelante asumimos que G es un grupo de Lie conexo. Se puede probar que cualquier función esférica $\Phi : G \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ es diferenciable (C^∞), y además es analítica. Sea $D(G)$ el álgebra de todos los operadores diferenciales invariantes a izquierda en G y sea $D(G)^K$ la subálgebra de todos los operadores en $D(G)$ que son invariantes por traslación a derecha por elementos de K.

En la siguiente proposición (V, π) será una representación de dimensión finita de K tal que cualquier subrepresentación pertenece a la misma clase $\delta \in \hat{K}$.

Proposición 2.6. *([Tir77],[GV88]) Una función* $\Phi : G \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ *es una función esférica de tipo* δ *si y sólo si*

i) Φ *es analítica.*

ii) $\Phi(k_1 g k_2) = \pi(k_1)\Phi(g)\pi(k_2)$, *para todo* $k_1, k_2 \in K$, $g \in G$, *y* $\Phi(e) = I$.

iii) $[D\Phi](g) = \Phi(g)[D\Phi](e)$, *para todo* $D \in D(G)^K$, $g \in G$.

Observemos que si $\Phi : G \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ es una función esférica entonces $\Phi : D \mapsto [D\Phi](e)$ transforma $D(G)^K$ en $\mathrm{End}_K(V)$ ($\mathrm{End}_K(V)$ denota el espacio de las transformaciones lineales de V en V que conmutan con $\pi(k)$ para todo $k \in K$) definiendo una representación de dimensión finita del álgebra asociativa $D(G)^K$. Además la función esférica es irreducible si y sólo si la representación $\Phi : D(G)^K \longrightarrow \mathrm{End}_K(V)$ es suryectiva. Como consecuencia de esto tenemos:

Proposición 2.7. *([Tir77],[GV88]) Las siguientes propiedades son equivalentes:*

i) $D(G)^K$ *es conmutativa.*

ii) Toda función esférica irreducible de (G, K) *es de altura uno.*

En este trabajo, el par (G, K) es $(\mathrm{SU}(2,1), \mathrm{S}(\mathrm{U}(2) \times \mathrm{U}(1)))$. En este caso es conocido que $D(G)^K$ es abeliana; en efecto

$$D(G)^K \cong D(G)^G \otimes D(K)^K$$

(cf. [Coo75], [Kno86]), donde $D(G)^G$ (resp. $D(K)^K$) denota la subálgebra de todos los operadores en $D(G)$ (resp. $D(K)$) que son invariantes por todas las traslaciones a derecha de G (resp. K). Ahora un famoso teorema de Harish-Chandra dice que $D(G)^G$ (resp. $D(K)^K$) es un álgebra de polinomios en dos generadores algebraicamente independientes Δ_2 y Δ_3 (resp. Z y Δ_K).

La primera consecuencia de ésto es que todas las funciones esféricas irreducibles de nuestro par (G, K) son de altura uno.

La segunda consecuencia es que encontrar todas las funciones esféricas de tipo $\delta \in \hat{K}$ es equivalente a tomar cualquier representación irreducible (V, π) de K en la clase δ y a determinar todas las funciones analíticas $\Phi : G \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ tal que

(1) $\Phi(k_1 g k_2) = \pi(k_1)\Phi(g)\pi(k_2)$, para todo $k_1, k_2 \in K$, $g \in G$.

(2) $[\Delta_j \Phi](g) = \Phi(g)[\Delta_j \Phi](e)$, $j = 2, 3$.

De hecho, como Z y Δ_K están en $D(K)^K$ y Φ satisface (1) tenemos

$$[Z\Phi](g) = \Phi(g)\,\dot{\pi}(Z) = \Phi(g)[Z\Phi](e)$$

y

$$[\Delta_K \Phi](g) = \Phi(g)\dot{\pi}(\Delta_K) = \Phi(g)[\Delta_K \Phi](e).$$

En este caso $\dot{\pi} : \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathrm{End}(V_\pi)$ denota la derivada de la representación π de K. También denotamos con $\dot{\pi}$ la representación de $D(K)$ en $\mathrm{End}(V_\pi)$ inducida por $\dot{\pi}$.

Por lo tanto una función analítica Φ que satisface (1) y (2) verifica las condiciones i), ii) y iii) de la Proposición 2.6, y por lo tanto es una función esférica.

CAPITULO 3

El par $(\mathrm{SU}(2,1),\, \mathrm{U}(2))$

En este capítulo detallamos los primeros pasos de la explicitación de las funciones esféricas asociadas al par plano hiperbólico complejo $H_2(\mathbb{C})$. El plano hiperbólico complejo se puede realizar como el espacio homogéneo G/K, donde $G = \mathrm{SU}(2,1)$ y $K = \mathrm{S}(\mathrm{U}(2) \times \mathrm{U}(1))$. Si (V, π) es una representación irreducible de dimensión finita de K en la clase de equivalencia $\delta \in \hat{K}$, una función esférica en G de tipo δ está caracterizada por

i) $\Phi : G \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ es analítica.

ii) $\Phi(k_1 g k_2) = \pi(k_1)\Phi(g)\pi(k_2)$, para todo $k_1, k_2 \in K$, $g \in G$, y $\Phi(e) = I$.

iii) $[\Delta_2\Phi](g) = \lambda\Phi(g)$, $[\Delta_3\Phi](g) = \mu\Phi(g)$ para todo $g \in G$ y para ciertos $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

En este caso Δ_2 y Δ_3 son dos generadores algebraicamente independientes del álgebra de polinomios $D(G)^G$ de todos los operadores diferenciales en G que son invariantes por multiplicación a izquierda y a derecha por elementos de G. Una elección particular de estos operadores está dada en la Proposición 3.5 de [GPT02a].

El conjunto $\hat{K}$ se puede identificar con el conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Si $k = \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$, con $A \in \mathrm{U}(2)$ y $a = (\det A)^{-1}$, entonces

$$\pi(k) = \pi_{n,\ell}(A) = (\det A)^n \; A^{\ell},$$

donde A^{ℓ} denota ℓ-ésima potencia simétrica de A, define una representación irreducible de K en la clase $(n, \ell) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Para $n \geq 0$, la representación $\pi_{n,\ell}$ de $\mathrm{U}(2)$ se extiende a una única función holomorfa multiplicativa de $\mathrm{M}(2, \mathbb{C})$ en $\mathrm{End}(V_\pi)$, que también denotaremos por $\pi_{n,\ell}$. Para cualquier $g \in \mathrm{M}(3, \mathbb{C})$, denotaremos por $A(g)$ el bloque superior izquierdo 2×2 de g, i.e.

$$A(g) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}.$$

Para cualquier $\pi = \pi_{n,\ell}$ con $n \geq 0$ sea $\Phi_\pi : G \longrightarrow \mathrm{End}(V_\pi)$ definida por

$$\Phi_\pi(g) = \Phi_{n,\ell}(g) = \pi_{n,\ell}(A(g)).$$

El grupo $G = \mathrm{SU}(2,1)$ actúa de manera natural en el plano proyectivo complejo $P_2(\mathbb{C})$. Esta acción es transitiva en el conjunto

$$B = \{(x, y, 1) \in P_2(\mathbb{C}) : |x|^2 + |y|^2 < 1\},$$

y K es el subgrupo de isotropía del punto $(0, 0, 1) \in P_2(\mathbb{C})$. Por lo tanto $B = G/K$. Identificamos el conjunto B con el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : |x|^2 + |y|^2 < 1\}$.

Para determinar todas las funciones esféricas $\Phi : G \longrightarrow \mathrm{End}(V_\pi)$ de tipo $\pi = \pi_{n,\ell}$, utilizamos la función Φ_π de la siguiente forma: en G definimos una función H por

$$H(g) = \Phi(g)\, \Phi_\pi(g)^{-1},$$

donde se supone que Φ es una función esférica de tipo π. Luego H satisface

i) $H(e) = I$.

ii) $H(gk) = H(g)$, para todo $g \in G, k \in K$.

iii) $H(kg) = \pi(k)H(g)\pi(k^{-1})$, para todo $g \in G, k \in K$.

La propiedad ii) indica que H se puede considerar como una función en $\mathbb{C}^2$.

El hecho de que Φ es una autofunción de Δ_2 y Δ_3, convierte a H en una autofunción de ciertos operadores diferenciales D y E en $\mathbb{C}^2$.

En la Sección 3.3 aprovechamos la estructura de K-órbitas de B combinada con la propiedad iii) de las funciones H. Las K-órbitas en el cociente G/K corresponden a las esferas

$$S_r = \left\{ (x, y) \in \mathbb{C}^2 : |x|^2 + |y|^2 = r^2 \right\}, \quad 0 \le r < 1.$$

Por lo tanto podemos tomar los puntos $(r, 0) \in S_r$ como representantes de S_r. Entonces el intervalo $[0, 1)$ parametriza el conjunto de K-órbitas en B.

Por lo tanto existen operadores diferenciales ordinarios $\tilde{D}$ y $\tilde{E}$ en el intervalo abierto $(0, 1)$ tal que

$$(D\, H)(r, 0) = (\tilde{D}\tilde{H})(r)\,, \quad (EH)(r, 0) = (\tilde{E}\tilde{H})(r),$$

donde $\tilde{H}(r) = H(r, 0)$, $r \in (0, 1)$. Los operadores $\tilde{D}$ y $\tilde{E}$ están dados explícitamente en los Teoremas 3.17 y 3.18. Estos teoremas están dados en términos de transformaciones lineales. Las funciones $\tilde{H}$ son diagonalizables (Proposición 3.26). Por lo tanto, en una base apropiada de V_π podemos escribir $\tilde{H}(r) = (h_0(r), \cdots, h_\ell(r))$. Luego, en los Corolarios 3.33 y 3.34 damos los enunciados correspondientes de los Teoremas 3.17 y 3.18 en términos de las funciones escalares h_i.

En la sección 3.5 relacionamos nuestro estudio de las funciones esféricas matriciales asociadas al plano hiperbólico complejo con el trabajo desarrollado en [GPT02a] para determinar todas las funciones esféricas matriciales asociadas al plano proyectivo complejo. Hacemos esto decribiendo a las funciones esféricas de los dos casos como autofunciones simultáneas de los mismos operadores diferenciales. Este hecho es de gran importancia ya que, además de permitirnos estudiar en conjunto el caso compacto y el no compacto, nuestra caracterización de las funciones esféricas asociadas al plano hiperbólico complejo $H_2 = \mathrm{SU}(2,1)/\mathrm{U}(2)$ dada en el capítulo 4 depende de información valiosa obtenida de la teoría de representaciones del grupo compacto SU(3).

3.1 El grupo

El grupo $G = \mathrm{SU}(2,1)$ consiste de todas las matrices 3×3 de determinante uno que preservan la forma $q(z) = z_1\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 - z_3\overline{z}_3$, es decir

$$G = \mathrm{SU}(2,1) = \{\, A \in SL(3,\mathbb{C}) : A^* J A = J \,\}\,, \text{ donde } J = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$$

Equivalentemente, $A \in G$ si y sólo si las columnas A_j de A son ortogonales con respecto a

$$\langle z, w \rangle = z_1\overline{w}_1 + z_2\overline{w}_2 - z_3\overline{w}_3,$$

y satisfacen $q(A_1) = q(A_2) = -q(A_3) = 1$.

El subgrupo $K = \mathrm{S}(\mathrm{U}(2) \times \mathrm{U}(1))$ consiste de todas las matrices unitarias de la forma

$$k = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

donde $A \in \mathrm{U}(2)$ y $a = (\det A)^{-1}$.

Claramente la función $k \mapsto A$ define un isomorfismo de grupos de Lie de K sobre $\mathrm{U}(2)$. Este isomorfismo será utilizado libremente en adelante. En particular $\hat{K}$ será identificado con $\hat{\mathrm{U}}(2)$. Recordemos que tanto la representación identidad π_1 de $\mathrm{U}(2)$ en $\mathbb{C}^2$, como la ℓ-ésima potencia simétrica de $\pi_\ell : A \mapsto A^\ell$ de dimensión $\ell + 1$ son irreducibles. Las representaciones $\pi_{n,\ell}$ de $\mathrm{U}(2)$ definidas por

$$\pi_{n,\ell}(A) = (\det A)^n \; A^\ell, \qquad n \in \mathbb{Z}, \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

forman un conjunto completo de representantes de los elementos $\hat{\mathrm{U}}(2)$. Por lo tanto $\hat{\mathrm{U}}(2)$ se puede identificar con el conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Además observemos que la representación $\pi_{n,\ell}$ se extiende a una única representación holomorfa de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$.

Lema 3.1. *Sea $g = (g_{ij}) \in \mathrm{SU}(2,1)$. Entonces tenemos las siguientes relaciones entre los elementos g_{ij} de g*

$$\begin{aligned}
\overline{g_{11}} &= g_{22}g_{33} - g_{32}g_{23}, & \overline{g_{12}} &= -(g_{21}g_{33} - g_{23}g_{31}),\\
\overline{g_{13}} &= -(g_{21}g_{32} - g_{31}g_{22}), & \overline{g_{21}} &= -(g_{12}g_{33} - g_{32}g_{13}),\\
\overline{g_{22}} &= g_{11}g_{33} - g_{31}g_{13}, & \overline{g_{23}} &= g_{11}g_{32} - g_{31}g_{12},\\
\overline{g_{31}} &= -(g_{12}g_{23} - g_{22}g_{13}), & \overline{g_{32}} &= g_{11}g_{23} - g_{13}g_{21},\\
\overline{g_{33}} &= g_{11}g_{22} - g_{21}g_{12}.
\end{aligned}$$

Demostración. Veremos la demostración para la relación

$$\overline{g_{33}} = g_{11}g_{22} - g_{21}g_{12}.$$

Como $\det(g) = 1$, desarrollando el determinante por la última fila tenemos

$$1 = g_{31}(g_{12}g_{23} - g_{13}g_{22}) - g_{32}(g_{11}g_{23} - g_{21}g_{13}) + g_{33}(g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\overline{g_{33}} &= g_{33}g_{31}(g_{12}g_{23} - g_{13}g_{22}) - g_{33}g_{32}(g_{11}g_{23} - g_{21}g_{13}) + |g_{33}|^2(g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}) \\
&= \overline{g_{13}}g_{11}g_{12}g_{23} - \overline{g_{13}}g_{11}g_{13}g_{22} - \overline{g_{23}}g_{21}g_{12}g_{23} - \overline{g_{23}}g_{21}g_{13}g_{22} - \overline{g_{13}}g_{12}g_{11}g_{23} \\
&\quad + \overline{g_{13}}g_{12}g_{21}g_{13} - \overline{g_{23}}g_{22}g_{11}g_{23} - \overline{g_{23}}g_{22}g_{21}g_{13} + |g_{33}|^2(g_{11}g_{22} - g_{21}g_{12}) \\
&= -|g_{13}|^2(g_{11}g_{22} - g_{21}g_{12}) - |g_{23}|^2(g_{11}g_{22} - g_{21}g_{12}) + |g_{33}|^2(g_{11}g_{22} - g_{21}g_{12}) \\
&= g_{11}g_{22} - g_{21}g_{12}.
\end{aligned}$$

Las relaciones restantes se pueden demostrar de manera análoga. □

Para cualquier $g \in \mathrm{M}(3, \mathbb{C})$, denotaremos por $A(g)$ el bloque superior izquierdo 2×2 de g, es decir

$$A(g) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}.$$

Lema 3.2. *Si $g \in \mathrm{SU}(2)$ entonces la matriz $A(g)$ es no singular para todo $g \in G$.*

Demostración. Si $g \in \mathrm{SU}(2,1)$, entonces satisface

$$|g_{13}|^2 + |g_{23}|^2 - |g_{33}|^2 = -1.$$

Por lo tanto $g_{33} \neq 0$. Por Lema 3.1 tenemos que $\overline{g_{33}} = \det A(g)$ con lo cual queda demostrado el lema. □

El grupo $G = \mathrm{SU}(2,1)$ actúa de manera natural en el espacio proyectivo complejo $P_2(\mathbb{C})$. Identificaremos el plano complejo $\mathbb{C}^2$ con el plano afín $\{ (x, y, 1) \in P_2(\mathbb{C}) : (x, y) \in \mathbb{C}^2 \}$ por la función $(x, y) \mapsto (x, y, 1)$.

La proyección $p : G \longrightarrow P_2(\mathbb{C})$ está definida de la siguiente forma

$$p(g) = g \cdot (0, 0, 1), \quad \text{para todo } g \in G$$

Lema 3.3. *La G-órbita del punto $(0, 0, 1)$ en $P_2(\mathbb{C})$ es el conjunto abierto $B = \{ (x, y) \in \mathbb{C}^2 : |x|^2 + |y|^2 < 1 \}$.*

Demostración. Notemos que $g \cdot (0, 0, 1) = \left(\frac{g_{13}}{g_{33}}, \frac{g_{23}}{g_{33}}, 1 \right)$. Si $g \in \mathrm{SU}(2,1)$, entonces satisface

$$\frac{|g_{13}|^2}{|g_{33}|^2} + \frac{|g_{23}|^2}{|g_{33}|^2} = 1 - \frac{1}{|g_{33}|^2} < 1.$$

Por lo tanto la G-órbita del punto $(0, 0, 1)$ en $P_2(\mathbb{C})$ está contenida en B, es decir

$$G \cdot (0, 0, 1) \subset \{(x, y) \in \mathbb{C} : |x|^2 + |y|^2 < 1\}.$$

Para probar la otra inclusión, definimos la matriz a_t de la siguiente forma

$$a_t = \begin{pmatrix} \cosh t & 0 & \sinh t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh t & 0 & \cosh t \end{pmatrix}.$$

Entonces $p(a_t) = a_t \cdot (0, 0, 1) = (\tanh t, 0, 1)$. Si hacemos $r = \tanh t$, tenemos que $p(a_t) = (r, 0, 1)$. Ahora, para cualquier $x, y \in B$, $\sqrt{|x|^2 + |y|^2} = r$, existe $k \in K$ tal que $k \cdot (r, 0, 1) = (x, y, 1)$. Por lo tanto tenemos que

$$G \cdot (0, 0, 1) \supset \{(x, y) \in \mathbb{C} : |x|^2 + |y|^2 < 1\},$$

y la demostración queda completa. □

Lema 3.4. *El subgrupo de isotropía de* $(0,0,1) \in B$ *es el subgrupo* $K = \mathrm{S}(\mathrm{U}(2) \times \mathrm{U}(1))$.

Demostración. Es fácil verificar que K fija el punto $(0,0,1)$. Por otra parte, si $g \in \mathrm{SU}(2,1)$, satisface

$$g \cdot (0,0,1) = \left(\tfrac{g_{13}}{g_{33}}, \tfrac{g_{23}}{g_{33}}, 1\right) = (0,0,1),$$

entonces $g_{13} = g_{23} = 0$. Pero como $g^* \, J \, g = J$, tenemos que

$$\begin{aligned} \overline{g_{13}}\, g_{11} + \overline{g_{23}}\, g_{21} + \overline{g_{33}}\, g_{31} &= 0, \\ \overline{g_{13}}\, g_{12} + \overline{g_{23}}\, g_{22} + \overline{g_{33}}\, g_{32} &= 0. \end{aligned}$$

como $g_{33} \neq 0$ vemos que $g_{31} = g_{32} = 0$, entonces $g \in K$, lo que completa la demostración del lema. $\square$

Por lo tanto podemos identificar

$$G/K \simeq \left\{ \, (x,y) \in \mathbb{C}^2 : |x|^2 + |y|^2 < 1 \, \right\} = B.$$

Además la acción del grupo G en B corresponde a la acción inducida por la multiplicación a izquierda en G/K.

Ahora damos la estructura del álgebra de Lie de G:

$$\mathfrak{g} = \left\{ X \in \mathfrak{g}l(3,\mathbb{C}) : JXJ = -\overline{X}^t, \, \mathrm{tr}\, X = 0 \right\}.$$

Su complexificación es $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{s}l(3,\mathbb{C})$. El álgebra de Lie $\mathfrak{k}$ de K puede identificarse con $\mathfrak{u}(2)$ y su complexificación $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ con $\mathfrak{g}l(2,\mathbb{C})$.

Las siguientes matrices forman una base de $\mathfrak{g}$.

$$H_1 = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{bmatrix}, \quad Y_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y_2 = \begin{bmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Y_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad Y_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathfrak{h}$ la subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ de todas las matrices diagonales. La correspondiente estructura de espacios raíces esta dada por

$$X_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X_{-\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$X_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X_{-\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$X_\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X_{-\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha(x_1E_{11} + x_2E_{22} + x_3E_{33}) &= x_1 - x_2, \\ \beta(x_1E_{11} + x_2E_{22} + x_3E_{33}) &= x_2 - x_3, \\ \gamma(x_1E_{11} + x_2E_{22} + x_3E_{33}) &= x_1 - x_3. \end{aligned}$$

Tenemos

$$X_\alpha = \tfrac{1}{2}(Y_1 - iY_2), \qquad X_\beta = \tfrac{1}{2}(Y_5 - iY_6), \qquad X_\gamma = \tfrac{1}{2}(Y_3 - iY_4),$$
$$X_{-\alpha} = -\tfrac{1}{2}(Y_1 + iY_2), \qquad X_{-\beta} = \tfrac{1}{2}(Y_5 + iY_6), \qquad X_{-\gamma} = \tfrac{1}{2}(Y_3 + iY_4).$$

Sea $Z = H_\alpha + 2H_\beta$, $\tilde{H}_1 = 2H_\alpha + H_\beta$ y $\tilde{H}_2 = H_\beta - H_\alpha$.

En [GPT02a] se probó la siguiente proposición:

Proposición 3.5. *$D(G)^G$ como álgebra de polinomios está generada por*

$$\Delta_2 = -H_\alpha^2 - \tfrac{1}{3}Z^2 - 2H_\alpha - 2Z - 4X_{-\alpha}X_\alpha - 4X_{-\beta}X_\beta - 4X_{-\gamma}X_\gamma$$

y

$$\begin{aligned}\Delta_3 = {} & \tfrac{8}{9}H_\alpha^3 - \tfrac{8}{9}H_\beta^3 + \tfrac{4}{3}H_\alpha^2 H_\beta - \tfrac{4}{3}H_\alpha H_\beta^2 + 8H_\alpha^2 + 4H_\alpha H_\beta + 16H_\alpha + 8H_\beta \\ & + 4X_{-\alpha}X_\alpha H_\alpha + 8X_{-\alpha}X_\alpha H_\beta + 24X_{-\alpha}X_\alpha + 12\,(X_{-\beta}X_\beta + X_{-\gamma}X_\gamma) \\ & - 4X_{-\beta}X_\beta\,\tilde{H}_1 - 4X_{-\gamma}X_\gamma\,\tilde{H}_2 + 12X_{-\beta}X_\gamma X_{-\alpha} + 12X_{-\gamma}X_\beta X_\alpha.\end{aligned}$$

Escribimos los operadores Δ_2 y Δ_3 de la forma

$$\Delta_2 = \Delta_{2,K} + \tilde{\Delta}_2, \qquad \Delta_3 = \Delta_{3,K} + \tilde{\Delta}_3,$$

donde

$$\begin{aligned}\Delta_{2,K} &= -H_\alpha^2 - \frac{1}{3}Z^2 - 2H_\alpha - 2Z - 4X_{-\alpha}X_\alpha \in D(K)^K, \\ \tilde{\Delta}_2 &= -4(X_{-\beta}X_\beta + X_{-\gamma}X_\gamma) \in D(G)^K, \\ \Delta_{3,K} &= \tfrac{8}{9}H_\alpha^3 - \tfrac{8}{9}H_\beta^3 + \tfrac{4}{3}H_\alpha^2 H_\beta - \tfrac{4}{3}H_\alpha H_\beta^2 + 8H_\alpha^2 + 4H_\alpha H_\beta + 16H_\alpha + 8H_\beta \\ &\quad + 4X_{-\alpha}X_\alpha H_\alpha + 8X_{-\alpha}X_\alpha H_\beta + 24X_{-\alpha}X_\alpha, \\ \tilde{\Delta}_3 &= 12\,(X_{-\beta}X_\beta + X_{-\gamma}X_\gamma) - 4X_{-\beta}X_\beta\,\tilde{H}_1 - 4X_{-\gamma}X_\gamma\,\tilde{H}_2 \\ &\quad + 12X_{-\beta}X_\gamma X_{-\alpha} + 12X_{-\gamma}X_\beta X_\alpha.\end{aligned}$$

3.2 Reducción a B

Consideremos en $\mathbb{C}^2$ las coordenadas lineales reales (x_1, x_2, y_1, y_2) definidas por: $x_1(x,y) + i\,x_2(x,y) = x$ y $y_1(x,y) + i\,y_2(x,y) = y$ para todo $x, y \in \mathbb{C}^2$. También introducimos la siguiente notación:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i\,\frac{\partial}{\partial x_2}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y_1} - i\,\frac{\partial}{\partial y_2}\right). \tag{3.1}$$

Proposición 3.6. *Dado $H \in C^\infty(B)$ denotemos también por $H \in C^\infty(G)$ la función definida por $H(g) = H(p(g))$, $g \in G$. También tenemos*

$$(X_\beta H)(g) = \frac{\overline{g}_{11}}{g_{33}^2}\,\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\overline{g}_{21}}{g_{33}^2}\,\frac{\partial H}{\partial x}, \qquad (X_\gamma H)(g) = -\frac{\overline{g}_{12}}{g_{33}^2}\,\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\overline{g}_{22}}{g_{33}^2}\,\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Demostración. $2X_\beta = Y_5 - iY_6$ y $2X_\gamma = Y_3 - iY_4$. Tenemos

$$\exp tY_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh t & \sinh t \\ 0 & \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}, \quad \exp tY_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh t & i\sinh t \\ 0 & -i\sinh t & \cosh t \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$p(g\exp tY_5) = \left(\frac{g_{12}\tanh t + g_{13}}{g_{32}\tanh t + g_{33}}, \frac{g_{22}\tanh t + g_{23}}{g_{32}\tanh t + g_{33}}, 1 \right)$$

$$= (u(t), v(t), 1) = (u_1(t) + iu_2(t), v_1(t) + iv_2(t), 1).$$

Si ponemos $\dot{u}_j = \left(\frac{du_j}{dt}\right)_{t=0}$ y $\dot{v}_j = \left(\frac{dv_j}{dt}\right)_{t=0}$ para $j = 1, 2$, resulta

$$Y_5(H)(g) = \left(\frac{d}{dt} H\left(p(g\exp tY_5)\right) \right)_{t=0} = H_{x_1}\dot{u}_1 + H_{x_2}\dot{u}_2 + H_{y_1}\dot{v}_1 + H_{y_2}\dot{v}_2.$$

Tenemos $\dot{u} = \dfrac{g_{33}g_{12} - g_{13}g_{32}}{g_{33}^2}$ y $\dot{v} = \dfrac{g_{33}g_{22} - g_{23}g_{32}}{g_{33}^2}$. Ahora por el Lema 3.1 obtenemos,

$$\dot{u} = -\frac{\overline{g}_{21}}{g_{33}^2}, \quad \dot{v} = \frac{\overline{g}_{11}}{g_{33}^2}.$$

Similarmente, para Y_6 sea

$$p(g\exp tY_6) = (\tilde{u}(t), \tilde{v}(t), 1) = (\tilde{u}_1(t) + i\tilde{u}_2(t), \tilde{v}_1(t) + i\tilde{v}_2(t), 1).$$

Entonces

$$Y_6(H)(g) = H_{x_1}\dot{\tilde{u}}_1 + H_{x_2}\dot{\tilde{u}}_2 + H_{y_1}\dot{\tilde{v}}_1 + H_{y_2}\dot{\tilde{v}}_2,$$

donde

$$\dot{\tilde{u}} = -\frac{i\,\overline{g}_{21}}{g_{33}^2}, \quad \dot{\tilde{v}} = \frac{i\,\overline{g}_{11}}{g_{33}^2}.$$

Si $u(t) = u_1(t) + iu_2(t)$ tenemos $\dot{u}_1 = \mathrm{Re}(\dot{u})$ y $\dot{u}_2 = \mathrm{Im}(\dot{u})$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} 2X_\beta(H)(g) &= H_{x_1}(\dot{u}_1 - i\dot{\tilde{u}}_1) + H_{x_2}(\dot{u}_2 - i\dot{\tilde{u}}_2) + H_{y_1}(\dot{v}_1 - i\dot{\tilde{v}}_1) + H_{y_2}(\dot{v}_2 - i\dot{\tilde{v}}_2) \\ &= -H_{x_1}\frac{\overline{g}_{21}}{g_{33}^2} + iH_{x_2}\frac{\overline{g}_{21}}{g_{33}^2} + H_{y_1}\frac{\overline{g}_{11}}{g_{33}^2} - iH_{y_2}\frac{\overline{g}_{11}}{g_{33}^2} \\ &= -2\frac{\overline{g}_{21}}{g_{33}^2}\frac{\partial H}{\partial x} + 2\frac{\overline{g}_{11}}{g_{33}^2}\frac{\partial H}{\partial y}. \end{aligned}$$

Procedemos de la misma forma con $(X_\gamma H)(g)$ y completamos la prueba de la proposición. □

Corolario 3.7. *Una función $H \in C^\infty(B)$ es antiholomorfa si y sólo si $(X_\beta H)(g) = (X_\gamma H)(g) = 0$ para todo $g \in G$.*

Demostración. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann indican que H es antiholomorfa precisamente cuando $\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial y} = 0$. Por lo tanto el corolario sigue del Lema 3.6 observando que para $g \in G$ la matriz

$$\frac{1}{g_{33}^2}\begin{pmatrix} \overline{g}_{11} & -\overline{g}_{21} \\ -\overline{g}_{12} & \overline{g}_{22} \end{pmatrix}$$

es no singular. □

Para cualquier representación $\pi = \pi_{n,\ell}$ de K, definimos la función $\Phi_\pi : G \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ de la siguiente forma:

$$\Phi_{n,\ell}(g) = \Phi_\pi(g) = \pi(A(g)).$$

Estas funciones jugarán un papel importante en este trabajo.

Lema 3.8. *La función Φ_π tiene las siguientes propiedades:*

i) $\Phi_\pi(k) = \pi(k)$*, para todo* $k \in K$*.*

ii) $\Phi_\pi(k_1 g k_2) = \Phi_\pi(k_1)\Phi_\pi(g)\Phi_\pi(k_2)$*, para todo* $k_1, k_2 \in K$*,* $g \in G$*.*

iii) $X_\beta(\Phi_\pi)(g) = X_\gamma(\Phi_\pi)(g) = 0$*, para todo* $g \in G$*.*

Demostración. i) Sigue directamente de la definición de Φ_π.

ii) Basta notar que $A(k_1\, g) = A(k_1)A(g)$ y $A(g\, k_2) = A(g)A(k_2)$ para todo $g \in G$ y $k \in K$.

iii) Tenemos que

$$X_\beta = \frac{1}{2}(Y_5 - i\, Y_6), \quad X_\gamma = \frac{1}{2}(Y_3 - i\, Y_4).$$

La función Φ_π se extiende a una única función holomorfa $\Phi_\pi : SL(3,\mathbb{C}) \to \mathrm{End}(V)$. Entonces para $g \in G$, tenemos

$$X_\beta(\Phi_\pi)(g) = \left(\frac{d}{dt}\Phi_\pi(g\, \exp t\, X_\beta)\right)_{t=0} = 0,$$

pues

$$A(g\, \exp\, t\, X_\beta) = A(g).$$

De manera similar vemos que $X_\gamma(\Phi_\pi) = 0$. $\square$

Teorema 3.9. *Para cualquier* $\pi = \pi_{n,\ell} \in \hat{K}$*, la función* Φ_π *es una función esférica irreducible de tipo* π*.*

Demostración. Probaremos que Φ_π satisface la ecuación integral

$$\Phi_\pi(g)\Phi_\pi(a) = \int_K \chi_\pi(k^{-1})\Phi_\pi(gka)\, dk,$$

para todo $g, a \in G$.

Fijamos $g \in G$ y consideramos la función $F : G \longrightarrow \mathrm{End}(V_\pi)$ definida por

$$F(a) = \left(\int_K \chi_\pi(k^{-1})\Phi_\pi(gka)\, dk\right)\Phi_\pi(a)^{-1}.$$

Entonces $F(ak) = F(a)$ para todo $k \in K$. Por lo tanto podemos considerar a F como una función definida en el plano hiperbólico complejo B. Por el Lema 3.8 iii) tenemos $X_\beta F = X_\gamma F = 0$. Luego $F : B \longrightarrow \mathrm{End}(V_\pi)$ es una función antiholomorfa (Corolario 3.7).

Fijamos $a \in G$ y sea $p(a) = (x, y, 1)$. Ahora consideremos la función $f(w) = F(\overline{w}x, \overline{w}y)$, definida para $w \in U_\varepsilon = \{\, w \in \mathbb{C} : \|w\| < 1 + \varepsilon\,\}$, para algún $\varepsilon > 0$ (que depende de (x, y)). Entonces f es una función holomorfa en U_ε con valores en $\mathrm{End}(V_\pi)$.

Sea $c(\vartheta) = \begin{pmatrix} e^{-i\vartheta/3} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\vartheta/3} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2i\vartheta/3} \end{pmatrix} \in K$. Luego $p(c(\vartheta)a) = \big(e^{-i\vartheta}x,\, e^{-i\vartheta}y,\, 1\big)$ y

$$f(e^{i\vartheta}) = F(e^{-i\vartheta}x, e^{-i\vartheta}y) = F(c(\vartheta)a).$$

Tenemos

$$\begin{aligned} F(c(\vartheta)a) &= \left(\int_K \chi_\pi(k^{-1})\Phi_\pi(gkc(\vartheta)a)\,dk\right)\Phi_\pi(c(\vartheta)a)^{-1} \\ &= \left(\int_K \chi_\pi(c(\vartheta)k^{-1})\Phi_\pi(gka)\,dk\right)\Phi_\pi(a)^{-1}\pi(c(\vartheta))^{-1}. \end{aligned}$$

Observemos que $c(\vartheta)$ está en el centro de K, de donde $\pi(c(\vartheta))$ es un escalar (Lema de Schur) y $\chi_\pi(c(\vartheta)k) = \pi(c(\vartheta))\chi_\pi(k)$. Por lo tanto

$$f(e^{i\vartheta}) = F(c(\vartheta)a) = F(a).$$

Es decir, la función f es constante en el conjunto $\left\{e^{i\vartheta}\right\}$ y por ser f holomorfa en U_ε, es constante en todo U_ε, en particular $f(0) = f(1)$. Entonces

$$F(x,y) = f(1) = f(0) = F(0,0),$$

para todo $(x,y) \in B$. Por lo tanto $F(a) = F(e)$ para todo $a \in G$, luego

$$\left(\int_K \chi_\pi(k^{-1})\Phi_\pi(gka)\,dk\right)\Phi_\pi(a)^{-1} = \int_K \chi_\pi(k^{-1})\Phi_\pi(gk)\,dk = \Phi_\pi(g)$$

pues $\int_K \chi_\pi(k^{-1})\pi(k)\,dk = I$ (relaciones de ortogonalidad). De esta forma, hemos probado que

$$\Phi_\pi(g)\Phi_\pi(a) = \int_K \chi_\pi(k^{-1})\Phi_\pi(gka)\,dk,$$

para todo $g, a \in G$. □

Si $\Phi : G \longrightarrow \mathrm{End}(V_\pi)$ es una función esférica de tipo $\pi = \pi_{n,\ell}$, definimos una función $H : G \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ asociada a la función Φ de la siguiente manera

$$H(g) = \Phi(g)\,\Phi_\pi(g)^{-1}.$$

Lema 3.10. *La función H tiene las siguientes propiedades*

i) $H(e) = I$.

ii) $H(g\,k) = H(g)$, *para todo* $g \in G, k \in K$.

iii) $H(k\,g) = \pi(k)H(g)\pi(k^{-1})$, *para todo* $g \in G, k \in K$.

Demostración. i)Es una consecuencia directa de la definición de H.

ii) Tenemos que

$$H(g\,k) = \Phi(g\,k)(\Phi_\pi(g\,k))^{-1} = \Phi(g)\,\pi(k)\,(\Phi_\pi(g)\,\pi(k))^{-1} = \Phi(g)\,(\Phi_\pi(g))^{-1} = H(g).$$

iii) Tenemos

$$\begin{aligned} H(k\,g) &= \Phi(k\,g)(\Phi_\pi(k\,g))^{-1} = \pi(k)\,\Phi(g)\,(\Phi_\pi(k)\,\Phi_\pi(g))^{-1} = \pi(k)\,\Phi(g)\,(\Phi_\pi(g))^{-1}\,(\Phi_\pi(k))^{-1} \\ &= \pi(k)\,H(g)\,(\Phi_\pi(k))^{-1}. \end{aligned}$$

□

La imagen del grupo G por la proyección $p : G \longrightarrow P_2(\mathbb{C})$ definida antes es el espacio hiperbólico complejo $B \subset \mathbb{C}^2$. Por lo tanto la propiedad ii) de la proposición anterior dice que H puede ser considerada como una función de dos variables complejas. El hecho que Φ es una autofunción de Δ_2 y Δ_3, convierte a H en una autofunción de ciertos operadores diferenciales en B, que determinaremos a continuación. Para $H \in C^\infty(G) \otimes \mathrm{End}(V_\pi)$ consideramos los siguientes operadores diferenciales:

$$D(H) = D_1(H) + D_2(H), \qquad E(H) = E_1(H) + E_2(H),$$

donde

$$\begin{aligned} D_1(H) =& - 4(X_{-\beta}X_\beta + X_{-\gamma}X_\gamma)(H), \\ D_2(H) =& - 4\left(X_\beta(H)X_{-\beta}(\Phi_\pi)\Phi_\pi^{-1} + X_\gamma(H)X_{-\gamma}(\Phi_\pi)\Phi_\pi^{-1}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_1(H) =& - 4\left(X_{-\beta}X_\beta(H)\right)\, \Phi_\pi\, \dot\pi(\tilde H_1)\Phi_\pi^{-1} - \left(X_{-\gamma}X_\gamma(H)\right)\, \Phi_\pi\, \dot\pi(\tilde H_2)\Phi_\pi^{-1}, \\ & +12\left(X_{-\beta}X_\gamma(H)\right)\Phi_\pi\dot\pi(X_{-\alpha})\Phi_\pi^{-1} + 12\left(X_{-\gamma}X_\beta(H)\right)\Phi_\pi\dot\pi\left(X_\alpha\right)\Phi_\pi^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_2(H) =& - 4X_\beta(H)X_{-\beta}(\Phi_\pi)\,\dot\pi(\tilde H_1)\Phi_\pi^{-1} - 4X_\gamma(H)X_{-\gamma}(\Phi_\pi)\,\dot\pi(\tilde H_2)\Phi_\pi^{-1} \\ & + 12X_\gamma(H)X_{-\beta}(\Phi_\pi)\dot\pi(X_{-\alpha})\Phi_\pi^{-1} + 12X_\beta(H)X_{-\gamma}(\Phi_\pi)\dot\pi(X_\alpha)\Phi_\pi^{-1}. \end{aligned}$$

En este caso $\dot\pi : \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathrm{End}(V_\pi)$ denota la derivada de la representación π de K. También denotaremos con $\dot\pi$ la representación de $D(K)$ en $\mathrm{End}(V_\pi)$ inducida por $\dot\pi$.

Lema 3.11. *Los operadores diferenciales D_j y E_j $(j = 1, 2)$ definen operadores diferenciales D_j y E_j actuando sobre $C^\infty(B) \otimes \mathrm{End}(V_\pi)$.*

Demostración. Ver Proposición 4.2 en [GPT02a]. □

Proposición 3.12. *Para cualquier $H \in C^\infty(G) \otimes \mathrm{End}(V_\pi)$ invariante a derecha por K, la función $\Phi = H\Phi_\pi$ es una autofunción de Δ_2 y Δ_3 sobre G si y sólo si H es una autofunción de D y E. Más aún, si $\tilde\lambda$, $\tilde\mu$, λ y μ denotan los autovalores correspondientes de Δ_2, Δ_3, D y E, respectivamente, entonces*

$$\lambda = \tilde\lambda - \dot\pi(\Delta_{2,K}), \quad \mu = \tilde\mu + 3\lambda - \dot\pi(\Delta_{3,K}).$$

Demostración. Si $X \in \mathfrak{k}$ tenemos $X(H) = 0$. Por lo tanto, $(XY)(H\Phi_\pi) = H\,(XY)(\Phi_\pi)$, para todo $X, Y \in \mathfrak{k}$. Más generalmente $\Delta(H\Phi_\pi) = H\,\Delta(\Phi_\pi) = H\Phi_\pi\,\dot\pi\,(\Delta)$, para todo $\Delta \in D(K)$. Como $X_\beta(\Phi_\pi) = X_\gamma(\Phi_\pi) = 0$ obtenemos

$$(X_{-\beta}X_\beta + X_{-\gamma}X_\gamma)(H\Phi_\pi) = (X_{-\beta}X_\beta + X_{-\gamma}X_\gamma)(H)\Phi_\pi + X_\beta(H)X_{-\beta}(\Phi_\pi) + X_\gamma(H)X_{-\gamma}(\Phi_\pi).$$

De esta forma

$$\Delta_2(H\Phi_\pi) = (H\Phi_\pi)\dot\pi\,(\Delta_{2,K}) + D(H)\Phi_\pi. \tag{3.2}$$

Similarmente para Δ_3 tenemos

$$\begin{aligned} \Delta_3(H\Phi_\pi) =& (H\Phi_\pi)\dot\pi\,(\Delta_{3,K}) - 4\left(X_{-\beta}X_\beta(H\Phi_\pi)\right)\,\dot\pi(\tilde H_1) \\ & - 4\left(X_{-\gamma}X_\gamma(H\Phi_\pi)\right)\,\dot\pi(\tilde H_2) \quad + 12\left(X_{-\beta}X_\gamma(H\Phi_\pi)\right)\,\dot\pi(X_{-\alpha}) \\ & + 12\left(X_{-\gamma}X_\beta(H\Phi_\pi)\right)\,\dot\pi(X_\alpha) + 12\left(X_{-\beta}X_\beta + X_{-\gamma}X_\gamma\right)(H\Phi_\pi) \\ =& (H\Phi_\pi)\dot\pi\,(\Delta_{3,K}) + E(H)\Phi_\pi - 3D(H)\Phi_\pi. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Por el Lema de Schur $\dot{\pi}\,(\Delta_{2,K})$ y $\dot{\pi}\,(\Delta_{3,K})$ son escalares pues $\Delta_{2,K}$ y $\Delta_{3,K} \in D(K)^K$. Ahora es claro que $\Delta_2(H\Phi_\pi) = \tilde{\lambda}(H\Phi_\pi)$ y $\Delta_3(H\Phi_\pi) = \tilde{\mu}(H\Phi_\pi)$ si y sólo si $D(H) = \lambda H$ y $E(H) = \mu H$ con

$$\lambda = \tilde{\lambda} - \dot{\pi}\,(\Delta_{2,K}) \qquad \text{y} \qquad \mu = \tilde{\mu} - \dot{\pi}\,(\Delta_{3,K}) + 3\lambda.$$

Esto completa la prueba de la proposición. $\square$

Dado $H \in C^\infty(B)$ denotamos con $H \in C^\infty(G)$ la función definida por $H(g) = H(p(g))$, $g \in G$. También para $g \in G$ ponemos $p(g) = (x, y, 1)$. Entonces

$$x = g_{13}g_{33}^{-1}, \qquad y = g_{23}g_{33}^{-1}, \qquad |g_{33}|^{-2} = 1 - |x|^2 - |y|^2. \tag{3.4}$$

Las demostraciones de las Proposiciones 3.13, 3.14, 3.15 y 3.16 requieren un simple pero tedioso cálculo. Las incluimos en un apéndice al final de este trabajo.

Proposición 3.13. *Para $H \in C^\infty(B) \otimes \mathrm{End}(V_\pi)$ tenemos*

$$\begin{aligned} D_1(H) = &-(1-|x|^2-|y|^2)\left((H_{x_1x_1}+H_{x_2x_2})(1-|x|^2)+(H_{y_1y_1}+H_{y_2y_2})(1-|y|^2)\right) \\ &+ 2(1-|x|^2-|y|^2)\left((H_{y_1x_1}+H_{y_2x_2})\,\mathrm{Re}(x\overline{y}) + (H_{y_1x_2}-H_{y_2x_1})\,\mathrm{Im}(x\overline{y})\right). \end{aligned}$$

Proposición 3.14. *Para $H \in C^\infty(B) \otimes \mathrm{End}(V_\pi)$ tenemos*

$$D_2(H) = 4\,\frac{\partial H}{\partial x}\,\dot{\pi}\begin{pmatrix} -x(1-|x|^2) & x^2\overline{y} \\ -y(1-|x|^2) & x|y|^2 \end{pmatrix} + 4\,\frac{\partial H}{\partial y}\,\dot{\pi}\begin{pmatrix} y|x|^2 & -x(1-|y|^2) \\ y^2\overline{x} & -y(1-|y|^2) \end{pmatrix}.$$

Proposición 3.15. *Para $H \in C^\infty(B) \otimes \mathrm{End}(V_\pi)$ tenemos*

$$\begin{aligned} -E_1(H) = &(1-|x|^2-|y|^2)\Bigg[(H_{x_1x_1}+H_{x_2x_2})\,\dot{\pi}\begin{pmatrix} -(1-|x|^2) & 3x\overline{y} \\ 0 & 2(1-|x|^2) \end{pmatrix} \\ &+(H_{y_1y_1}+H_{y_2y_2})\,\dot{\pi}\begin{pmatrix} 2(1-|y|^2) & 0 \\ 3\overline{x}y & -(1-|y|^2) \end{pmatrix} \\ &+(H_{y_1x_1}+H_{y_2x_2})\,\dot{\pi}\begin{pmatrix} -2x\overline{y}+\overline{x}y & -3(1-|y|^2) \\ -3(1-|x|^2) & -2\overline{x}y+x\overline{y} \end{pmatrix} \\ &+i\,(H_{x_2y_1}-H_{x_1y_2})\,\dot{\pi}\begin{pmatrix} 2x\overline{y}+\overline{x}y & -3\,(1-|y|^2) \\ 3\,(1-|x|^2) & -2\overline{x}y-x\overline{y} \end{pmatrix}\Bigg]. \end{aligned}$$

Proposición 3.16. *Para $H \in C^\infty(B) \otimes \mathrm{End}(V_\pi)$ tenemos*

$$\begin{aligned} E_2(H) = &4\frac{\partial H}{\partial x}\left(\dot{\pi}\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}\dot{\pi}\begin{pmatrix} 2x\overline{y} & 0 \\ 3(1-|x|^2) & -x\overline{y} \end{pmatrix}\right) \\ &+4\frac{\partial H}{\partial x}\left(\dot{\pi}\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}\dot{\pi}\begin{pmatrix} 1-|x|^2 & -3x\overline{y} \\ 0 & -2(1-|x|^2) \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

$$+ 4\frac{\partial H}{\partial y}\Big(\dot\pi\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y\end{pmatrix}\dot\pi\begin{pmatrix} -2(1-|y|^2) & 0 \\ -3y\overline{x} & 1-|y|^2\end{pmatrix}\Big)$$

$$+ 4\frac{\partial H}{\partial y}\left(\dot\pi\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0\end{pmatrix}\dot\pi\begin{pmatrix} -y\overline{x} & 3(1-|y|^2) \\ 0 & 2y\overline{x}\end{pmatrix}\right).$$

3.3 Reducción a una variable

Estamos interesados en considerar los operadores diferenciales D y E aplicados a una función $H \in C^\infty(B)\otimes \mathrm{End}(V_\pi)$ tales que

$$H(kp) = \pi(k)H(p)\pi(k)^{-1},$$

para todo $k \in K$ y p en la bola $B \subset \mathbb{C}^2$. Esta propiedad de H nos permite encontrar operadores diferenciales $\tilde D$ y $\tilde E$ definidos en el intervalo $(0,1)$ tal que

$$(D\,H)(r,0) = (\tilde D\tilde H)(r), \qquad (E\,H)(r,0) = (\tilde E\tilde H)(r),$$

donde $\tilde H(r) = H(r,0)$. También definimos operadores diferenciales $\tilde D_1$, $\tilde D_2$, $\tilde E_1$ y $\tilde E_2$ de la misma forma, esto es $(D_1H)(r,0) = (\tilde D_1\tilde H)(r)$, $(D_2H)(r,0) = (\tilde D_2\tilde H)(r)$, $(E_1H)(r,0) = (\tilde E_1\tilde H)(r)$, $(E_2H)(r,0) = (\tilde E_2\tilde H)(r)$.

El principal objetivo de esta sección es probar los siguientes resultados

Teorema 3.17.

$$\begin{aligned}\tilde D(\tilde H)(r) = &-(1-r^2)^2\frac{d^2\tilde H}{dr^2} - \frac{(1-r^2)}{r}\Big(3 - r^2 + 2r^2\dot\pi(H_\gamma)\Big)\frac{d\tilde H}{dr}\\ &- \frac{(1+r^2)}{r^2}\Big(\dot\pi(J)^2\,\tilde H(r) + \tilde H(r)\dot\pi(J)^2 - 2\dot\pi(J)\tilde H(r)\dot\pi(J)\Big)\\ &+ \frac{(1+r^2)}{r^2}\Big(\dot\pi(T)^2\,\tilde H(r) + \tilde H(r)\dot\pi(T)^2 - 2\dot\pi(T)\tilde H(r)\dot\pi(T)\Big)\\ &- 4\dot\pi(X_{-\alpha})\tilde H(r)\dot\pi(X_\alpha) + 4\tilde H(r)\dot\pi(X_{-\alpha})\dot\pi(X_\alpha).\end{aligned}$$

Teorema 3.18.

$$\begin{aligned}\tilde E(\tilde H)(r) = &-(1-r^2)^2\,\frac{d^2\tilde H}{d\,r^2}\dot\pi(\tilde H_2) - \frac{(1-r^2)^2}{r}\,\frac{d\tilde H}{dr}\,\dot\pi(\tilde H_2) - \frac{2(1-r^2)}{r}\frac{d\tilde H}{dr}\,\dot\pi(\tilde H_1)\\ &+ 2r(1-r^2)\,\frac{d\tilde H}{dr}\,\Big(3\,\dot\pi(X_\alpha)\dot\pi(X_{-\alpha}) - \dot\pi(H_\gamma)\dot\pi(\tilde H_2)\Big)\\ &- \frac{6(1-r^2)^2}{r}\left(\dot\pi(X_\alpha)\frac{d\tilde H}{d\,r} - \frac{d\tilde H}{dr}\dot\pi(X_\alpha)\right)\,\dot\pi(X_{-\alpha})\\ &+ \frac{6(1-r^2)}{r}\left(\dot\pi(X_{-\alpha})\frac{d\tilde H}{d\,r} - \frac{d\tilde H}{dr}\dot\pi(X_{-\alpha})\right)\,\dot\pi(X_\alpha)\\ &- \frac{(1-r^2)}{r^2}\Big(\dot\pi(J)^2\,\tilde H(r) + \tilde H(r)\,\dot\pi(J)^2 - 2\dot\pi(J)\tilde H(r)\,\dot\pi(J)\Big)\,\dot\pi(\tilde H_1)\\ &+ \frac{(1-r^2)}{r^2}\Big(\dot\pi(T)^2\,\tilde H(r) + \tilde H(r)\,\dot\pi(T)^2 - 2\dot\pi(T)\tilde H(r)\,\dot\pi(T)\Big)\,\dot\pi(\tilde H_1)\\ &+ 4\,\Big(\dot\pi(X_{-\alpha})\,\tilde H(r) - \tilde H(r)\,\dot\pi(X_{-\alpha})\Big)\,\Big(-\dot\pi(X_\alpha)\dot\pi(\tilde H_1) + 3\,\dot\pi(H_\gamma)\dot\pi(X_\alpha)\Big).\end{aligned}$$

La prueba de estos teoremas será una consecuencia directa de las Proposiciones 3.27, 3.28, 3.29 y 3.30.

Como estamos interesados en considerar una función H en $B \subseteq \mathbb{C}^2$ tal que $H(k\,p) = \pi(k)H(p)\pi(k)^{-1}$, para todo $k \in K$, $p \in B \subseteq \mathbb{C}^2$, necesitamos conocer la estructura de K-órbitas del cociente $G/K \equiv B$. Las K-órbitas en el cociente G/K corresponden a las esferas

$$S_r = \left\{ (x,y) \in \mathbb{C}^2 : |x|^2 + |y|^2 = r^2 \right\}, \qquad 0 \leq r < 1$$

En cada órbita podemos elegir como representante al punto $(r,0) \in \mathbb{C}^2$, con $0 \leq r < 1$. De hecho dado $(x,y) \in \mathbb{C}^2$, existe $k \in K$ tal que $k\,(r,0) = (x,y)$ donde $r^2 = |x|^2 + |y|^2$. Luego, el intervalo $[0,1)$ parametriza el conjunto de K-órbitas en la bola abierta B en $\mathbb{C}^2$.

Necesitamos calcular una serie de derivadas parciales de primer y segundo orden de la función H en el punto $(r,0) \in B$. Éstas están dadas en los Lemas 3.20, 3.21, 3.22, 3.23, 3.24 y 3.25 y sus demostraciones se encuentran en un apéndice al final de este trabajo.

Lema 3.19. *En $(r,0) \in B$ tenemos*

$$H_{x_1}(r,0) = \frac{d\tilde{H}}{dr}(r) \quad \text{ y } \quad H_{x_1x_1}(r,0) = \frac{d^2\tilde{H}}{dr^2}(r).$$

Lema 3.20. *En $(r,0) \in B$ tenemos*

$$H_{y_1}(r,0) = -\frac{1}{r}\Big(\dot{\pi}(J)\tilde{H}(r) - \tilde{H}(r)\dot{\pi}(J)\Big)$$

y

$$H_{y_1y_1}(r,0) = \frac{1}{r}\frac{d\tilde{H}}{dr} + \frac{1}{r^2}\Big(\dot{\pi}(J)^2\,\tilde{H}(r) + \tilde{H}(r)\,\dot{\pi}(J)^2\Big) - \frac{2}{r^2}\dot{\pi}(J)\tilde{H}(r)\,\dot{\pi}(J),$$

donde $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Lema 3.21. *En $(r,0) \in B$ tenemos*

$$H_{y_2}(r,0) = \frac{i}{r}\Big(\dot{\pi}(T)\tilde{H}(r) - \tilde{H}(r)\dot{\pi}(T)\Big)$$

y

$$H_{y_2y_2}(r,0) = \frac{1}{r}\frac{d\tilde{H}}{dr} - \frac{1}{r^2}\Big(\dot{\pi}(T)^2\,\tilde{H}(r) + \tilde{H}(r)\,\dot{\pi}(T)^2\Big) + \frac{2}{r^2}\dot{\pi}(T)\tilde{H}(r)\,\dot{\pi}(T),$$

donde $T = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Lema 3.22. *En $(r,0) \in B$ tenemos*

$$H_{x_2}(r,0) = \frac{i}{r}\Big(\dot{\pi}(H_\alpha)\tilde{H}(r) - \tilde{H}(r)\dot{\pi}(H_\alpha)\Big)$$

y

$$H_{x_2x_2}(r,0) = \frac{1}{r}\frac{d\tilde{H}}{dr} - \frac{1}{r^2}\Big(\dot{\pi}(H_\alpha)^2\,\tilde{H}(r) + \tilde{H}(r)\,\dot{\pi}(H_\alpha)^2\Big) + \frac{2}{r^2}\dot{\pi}(H_\alpha)\,\tilde{H}(r)\,\dot{\pi}(H_\alpha).$$

Lema 3.23. *En* $(r,0)\in B$ *tenemos*

$$H_{x_1y_1}(r,0) = \frac{-1}{r}\Big(\dot\pi(J)\frac{d\tilde H}{dr} - \frac{d\tilde H}{dr}\dot\pi(J)\Big) + \frac{1}{r^2}\left(\dot\pi(J)\tilde H(r) - \tilde H(r)\dot\pi(J)\right),$$

$$H_{x_1y_2}(r,0) = \frac{i}{r}\Big(\dot\pi(T)\frac{d\tilde H}{dr} - \frac{d\tilde H}{dr}\dot\pi(T)\Big) - \frac{i}{r^2}\left(\dot\pi(T)\tilde H(r) - \tilde H(r)\dot\pi(T)\right).$$

Lema 3.24. *En* $(r,0)\in B$ *tenemos*

$$\begin{aligned} H_{y_1x_2}(r,0) = &-\frac{i}{2r^2}\Big(\dot\pi(H_\alpha)\,\dot\pi(J) + \dot\pi(J)\,\dot\pi(H_\alpha)\Big)\tilde H(r) - \frac{i}{2r^2}\tilde H(r)\left(\dot\pi(H_\alpha)\,\dot\pi(J) + \dot\pi(J)\,\dot\pi(H_\alpha)\right) \\ &+ \frac{i}{r^2}\left(\dot\pi(H_\alpha)\,\tilde H(r)\,\dot\pi(J) + \dot\pi(J)\,\tilde H(r)\,\dot\pi(H_\alpha)\right). \end{aligned}$$

Lema 3.25. *En* $(r,0)\in B$ *tenemos*

$$\begin{aligned} H_{y_2x_2}(r,0) = &-\frac{1}{2r^2}\Big(\dot\pi(H_\alpha)\,\dot\pi(T) + \dot\pi(T)\,\dot\pi(H_\alpha)\Big)\tilde H(r) - \frac{1}{2r^2}\tilde H(r)\left(\dot\pi(H_\alpha)\,\dot\pi(T) + \dot\pi(T)\,\dot\pi(H_\alpha)\right) \\ &+ \frac{1}{r^2}\left(\dot\pi(H_\alpha)\,\tilde H(r)\,\dot\pi(T) + \dot\pi(T)\,\tilde H(r)\,\dot\pi(H_\alpha)\right). \end{aligned}$$

Proposición 3.26. *La función* $\tilde H$ *es diagonalizable.*

Demostración. Sea $M = \{\, m_a : |a| = 1 \,\}$ donde

$$m_a = \begin{pmatrix} a & & \\ & a^{-2} & \\ & & a \end{pmatrix}.$$

El subgrupo M fija los puntos $(x,0,1)$ en el plano hiperbólico complejo. Además $H(kg) = \pi(k)H(g)\pi(k^{-1})$, por lo tanto $\tilde H(r) = \pi(m_a)\tilde H(r)\pi(m_a^{-1})$. Ahora como todos los K-módulos irreducibles de dimensión finita son libres de multiplicidad como M-módulos, $\tilde H(r)$ con $0 \le r < 1$, y $\dot\pi(H_\alpha)$ se diagonalizan simultáneamente. □

Proposición 3.27. *Tenemos*

$$\begin{aligned} \tilde D_1(\tilde H)(r) = &-(1-r^2)^2\frac{d^2\tilde H}{dr^2} - (1-r^2)(3-r^2)\,\frac{1}{r}\frac{d\tilde H}{dr} \\ &- \frac{(1+r^2)}{r^2}\left(\dot\pi(J)^2\,\tilde H(r) + \tilde H(r)\dot\pi(J)^2 - 2\dot\pi(J)\tilde H(r)\dot\pi(J)\right) \\ &+ \frac{(1+r^2)}{r^2}\left(\dot\pi(T)^2\,\tilde H(r) + \tilde H(r)\dot\pi(T)^2 - 2\dot\pi(T)\tilde H(r)\dot\pi(T)\right). \end{aligned}$$

Demostración. Por la Proposición 3.13 tenemos

$$\begin{aligned} -D_1(H)(r,0) = &-\Big(H_{x_1x_1}(r,0,0,0) + H_{x_2x_2}(r,0,0,0)\Big)(1-r^2)^2 \\ &+ \Bigg(H_{y_1y_1}(r,0,0,0) + H_{y_2y_2}(r,0,0,0)\Bigg)(1+r^2). \end{aligned}$$

Usando los lemas dados anteriormente y el hecho que $\tilde H(r)$ y $\dot\pi(H_\alpha)$ conmutan porque son simultáneamente diagonalizables, la proposición queda probada. □

Proposición 3.28. *Tenemos*

$$\tilde{D}_2(\tilde{H})(r) = -2r(1-r^2)\frac{d\tilde{H}}{dr}\,\dot{\pi}(H_\gamma) - 4\dot{\pi}(X_{-\alpha})\tilde{H}(r)\dot{\pi}(X_\alpha) + 4\tilde{H}(r)\dot{\pi}(X_{-\alpha})\dot{\pi}(X_\alpha).$$

Demostración. Por la Proposición 3.14 tenemos

$$D_2(H)(r,0) = -4\left(\frac{\partial H}{\partial x}(r,0,0,0)\,\dot{\pi}\begin{pmatrix} r(1+r^2) & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} + \frac{\partial H}{\partial y}(r,0,0,0)\,\dot{\pi}\begin{pmatrix} 0 & r \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right).$$

También tenemos

$$\frac{\partial H}{\partial x}(r,0) = \frac{1}{2}\frac{d\tilde{H}}{dr}, \qquad \frac{\partial H}{\partial y}(r,0) = \frac{1}{r}\dot{\pi}(X_{-\alpha})\,\tilde{H}(r) - \frac{1}{r}\tilde{H}(r)\,\dot{\pi}(X_{-\alpha}). \tag{3.5}$$

Ahora la proposición queda probada. □

Proposición 3.29.

$$\begin{aligned}
-\tilde{E}_1(\tilde{H})(r) = (1-r^2)^2\,\frac{d^2\tilde{H}}{d\,r^2}\dot{\pi}(\tilde{H}_2) &+ \frac{(1-r^2)^2}{r}\,\frac{d\tilde{H}}{dr}\,\dot{\pi}(\tilde{H}_2) + \frac{2(1-r^2)}{r}\frac{d\tilde{H}}{dr}\,\dot{\pi}(\tilde{H}_1)\\
&+ \frac{6(1-r^2)^2}{r}\left(\dot{\pi}(X_\alpha)\frac{d\tilde{H}}{d\,r} - \frac{d\tilde{H}}{dr}\dot{\pi}(X_\alpha)\right)\,\dot{\pi}(X_{-\alpha})\\
&- \frac{6(1-r^2)}{r}\left(\dot{\pi}(X_{-\alpha})\frac{d\tilde{H}}{d\,r} - \frac{d\tilde{H}}{dr}\dot{\pi}(X_{-\alpha})\right)\,\dot{\pi}(X_\alpha)\\
&+ \frac{(1-r^2)}{r^2}\Big(\dot{\pi}(J)^2\,\tilde{H}(r) + \tilde{H}(r)\,\dot{\pi}(J)^2 - 2\dot{\pi}(J)\tilde{H}(r)\,\dot{\pi}(J)\Big)\,\dot{\pi}(\tilde{H}_1)\\
&- \frac{(1-r^2)}{r^2}\Big(\dot{\pi}(T)^2\,\tilde{H}(r) + \tilde{H}(r)\,\dot{\pi}(T)^2 - 2\dot{\pi}(T)\tilde{H}(r)\,\dot{\pi}(T)\Big)\,\dot{\pi}(\tilde{H}_1).
\end{aligned}$$

Demostración. Por la Proposición 3.15 tenemos

$$\begin{aligned}
-E_1(H) =&(1-r^2)^2\Big(H_{x_1x_1}(r,0,0,0) + H_{x_2x_2}(r,0,0,0)\Big)\,\dot{\pi}(\tilde{H}_2)\\
&(1-r^2)\Big(H_{y_1y_1}(r,0,0,0) + H_{y_2y_2}(r,0,0,0)\Big)\,\dot{\pi}(\tilde{H}_1)\\
&-3(1-r^2)(H_{y_1x_1}(r,0,0,0) + H_{y_2x_2}(r,0,0,0))\,\dot{\pi}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-r^2 & 0\end{pmatrix}\\
&+3i(1-r^2)(H_{x_2y_1}(r,0,0,0) - H_{x_1y_2}(r,0,0,0))\,\dot{\pi}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1-r^2 & 0\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Como $\tilde{H}(r)$ y $\dot{\pi}(H_\alpha)$ conmutan, por los lemas anteriores podemos deducir que

$$\begin{aligned}
H_{x_2y_1}(r,0) =&\frac{i}{2r^2}\Big(\dot{\pi}(J)\,\dot{\pi}(H_\alpha) - \dot{\pi}(H_\alpha)\,\dot{\pi}(J)\Big)\tilde{H}(r)\\
&-\frac{i}{2r^2}\tilde{H}(r)\,\Big(\dot{\pi}(J)\,\dot{\pi}(H_\alpha) - \dot{\pi}(H_\alpha)\,\dot{\pi}(J)\Big)\\
=&\frac{i}{r^2}\tilde{H}(r)\dot{\pi}(T) - \frac{i}{r^2}\dot{\pi}(T)\tilde{H}(r).
\end{aligned}$$

$$H_{y_2x_2}(r,0) = \frac{1}{2r^2}\Big(\dot{\pi}(T)\,\dot{\pi}(H_\alpha) - \dot{\pi}(H_\alpha)\,\dot{\pi}(T)\Big)\tilde{H}(r)$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{1}{2r^2}\tilde{H}(r)\Big(\dot\pi(T)\,\dot\pi(H_\alpha) - \dot\pi(H_\alpha)\,\dot\pi(T)\Big)\\
=&\frac{1}{r^2}\tilde{H}(r)\dot\pi(J) - \frac{1}{r^2}\dot\pi(J)\tilde{H}(r).
\end{aligned}
$$

De esta forma obtenemos

$$
\begin{aligned}
\tilde{E}_1(\tilde{H})(r) = {}& (1-r^2)^2\,\frac{d^2\tilde{H}}{d\,r^2}\dot\pi(\tilde{H}_2) + \frac{(1-r^2)^2}{r}\,\frac{d\tilde{H}}{dr}\,\dot\pi(\tilde{H}_2) + \frac{2(1-r^2)}{r}\frac{d\tilde{H}}{dr}\,\dot\pi(\tilde{H}_1)\\
&+ \frac{3(1-r^2)}{r}\Big(\dot\pi(J)\frac{d\tilde{H}}{d\,r} - \frac{d\tilde{H}}{dr}\dot\pi(J)\Big)\,\dot\pi\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1-r^2 & 0\end{smallmatrix}\right)\\
&+ \frac{3(1-r^2)}{r}\Big(\dot\pi(T)\frac{d\tilde{H}}{d\,r} - \frac{d\tilde{H}}{dr}\dot\pi(T)\Big)\,\dot\pi\left(\begin{smallmatrix}0 & -1\\ 1-r^2 & 0\end{smallmatrix}\right)\\
&+ \frac{(1-r^2)}{r^2}\,\Big(\dot\pi(J)^2\,\tilde{H}(r) + \tilde{H}(r)\,\dot\pi(J)^2 - 2\dot\pi(J)\tilde{H}(r)\,\dot\pi(J)\Big)\,\dot\pi(\tilde{H}_1)\\
&- \frac{(1-r^2)}{r^2}\,\Big(\dot\pi(T)^2\,\tilde{H}(r) + \tilde{H}(r)\,\dot\pi(T)^2 - 2\dot\pi(T)\tilde{H}(r)\,\dot\pi(T)\Big)\,\dot\pi(\tilde{H}_1).
\end{aligned}
$$

Notemos que

$$
\begin{aligned}
&\frac{3(1-r^2)}{r}\Big(\dot\pi(J)\frac{d\tilde{H}}{d\,r} - \frac{d\tilde{H}}{dr}\dot\pi(J)\Big)\,\dot\pi\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1-r^2 & 0\end{smallmatrix}\right)\\
&+ \frac{3(1-r^2)}{r}\Big(\dot\pi(T)\frac{d\tilde{H}}{d\,r} - \frac{d\tilde{H}}{dr}\dot\pi(T)\Big)\,\dot\pi\left(\begin{smallmatrix}0 & -1\\ 1-r^2 & 0\end{smallmatrix}\right)\\
&= \frac{3(1-r^2)^2}{r}\dot\pi(J+T)\frac{d\tilde{H}}{d\,r}\dot\pi(X_{-\alpha}) + \frac{3(1-r^2)}{r}\dot\pi(J-T)\frac{d\tilde{H}}{d\,r}\dot\pi(X_\alpha)\\
&\quad - \frac{3(1-r^2)^2}{r}\frac{d\tilde{H}}{d\,r}\dot\pi(J+T)\dot\pi(X_{-\alpha}) - \frac{3(1-r^2)}{r}\frac{d\tilde{H}}{d\,r}\dot\pi(J-T)\dot\pi(X_\alpha).
\end{aligned}
$$

Usando que $\dot\pi(T+J) = 2\dot\pi(X_\alpha)$ y $\dot\pi(T-J) = 2\dot\pi(X_{-\alpha})$ completamos la prueba de la proposición. $\square$

Proposición 3.30.

$$
\begin{aligned}
\tilde{E}_2(\tilde{H})(r) = {}& 2\,r(1-r^2)\,\frac{d\tilde{H}}{dr}\,\Big(3\,\dot\pi(X_\alpha)\dot\pi(X_{-\alpha}) - \dot\pi(H_\gamma)\dot\pi(\tilde{H}_2)\Big)\\
&+ 4\,\Big(\dot\pi(X_{-\alpha})\,\tilde{H}(r) - \tilde{H}(r)\,\dot\pi(X_{-\alpha})\Big)\,\Big(-\dot\pi(X_\alpha)\dot\pi(\tilde{H}_1) + 3\,\dot\pi(H_\gamma)\dot\pi(X_\alpha)\Big).
\end{aligned}
$$

Demostración. Por la Proposición 3.16 tenemos

$$
E_2(H)(r) = 4\frac{\partial H}{\partial x}(r,0)\left(\dot\pi\begin{pmatrix}0 & r\\ 0 & 0\end{pmatrix}\dot\pi\begin{pmatrix}0 & 0\\ 3(1+r^2) & 0\end{pmatrix} + \dot\pi\begin{pmatrix}r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\dot\pi\begin{pmatrix}1+r^2 & 0\\ 0 & -2(1+r^2)\end{pmatrix}\right)
$$

$$
4 + \frac{\partial H}{\partial y}(r,0)\left(\dot\pi\begin{pmatrix}0 & r\\ 0 & 0\end{pmatrix}\dot\pi\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \dot\pi\begin{pmatrix}r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\dot\pi\begin{pmatrix}0 & 3\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right).
$$

Usando (3.5) la proposición se prueba fácilmente. $\square$

Finalmente obtenemos

Teorema 3.31.

$$
\begin{aligned}
\tilde{D}(\tilde{H})(r) = &-(1-r^2)^2\frac{d^2\tilde{H}}{dr^2} - \frac{(1-r^2)}{r}\Big(3 - r^2 + 2r^2\dot{\pi}(H_\gamma)\Big)\frac{d\tilde{H}}{dr}\\
&- \frac{(1+r^2)}{r^2}\Big(\dot{\pi}(J)^2\,\tilde{H}(r)\, + \tilde{H}(r)\dot{\pi}(J)^2 - 2\dot{\pi}(J)\tilde{H}(r)\dot{\pi}(J)\Big)\\
&+ \frac{(1+r^2)}{r^2}\Big(\dot{\pi}(T)^2\,\tilde{H}(r)\, + \tilde{H}(r)\dot{\pi}(T)^2 - 2\dot{\pi}(T)\tilde{H}(r)\dot{\pi}(T)\Big)\\
&- 4\dot{\pi}(X_{-\alpha})\tilde{H}(r)\dot{\pi}(X_\alpha) + 4\tilde{H}(r)\dot{\pi}(X_{-\alpha})\dot{\pi}(X_\alpha).
\end{aligned}
$$

Teorema 3.32.

$$
\begin{aligned}
4\tilde{E}(\tilde{H})(r) = &-(1-r^2)^2\,\frac{d^2\tilde{H}}{d\,r^2}\dot{\pi}(\tilde{H}_2) - \frac{(1-r^2)^2}{r}\,\frac{d\tilde{H}}{dr}\,\dot{\pi}(\tilde{H}_2) - \frac{2(1-r^2)}{r}\frac{d\tilde{H}}{dr}\,\dot{\pi}(\tilde{H}_1)\\
&+ 2r(1-r^2)\,\frac{d\tilde{H}}{dr}\Big(3\,\dot{\pi}(X_\alpha)\dot{\pi}(X_{-\alpha}) - \dot{\pi}(H_\gamma)\dot{\pi}(\tilde{H}_2)\Big)\\
&- \frac{6(1-r^2)^2}{r}\left(\dot{\pi}(X_\alpha)\frac{d\tilde{H}}{d\,r} - \frac{d\tilde{H}}{dr}\dot{\pi}(X_\alpha)\right)\,\dot{\pi}(X_{-\alpha})\\
&+ \frac{6(1-r^2)}{r}\left(\dot{\pi}(X_{-\alpha})\frac{d\tilde{H}}{d\,r} - \frac{d\tilde{H}}{dr}\dot{\pi}(X_{-\alpha})\right)\,\dot{\pi}(X_\alpha)\\
&- \frac{(1-r^2)}{r^2}\Big(\dot{\pi}(J)^2\,\tilde{H}(r) + \tilde{H}(r)\,\dot{\pi}(J)^2 - 2\dot{\pi}(J)\tilde{H}(r)\,\dot{\pi}(J)\Big)\,\dot{\pi}(\tilde{H}_1)\\
&+ \frac{(1-r^2)}{r^2}\Big(\dot{\pi}(T)^2\,\tilde{H}(r) + \tilde{H}(r)\,\dot{\pi}(T)^2 - 2\dot{\pi}(T)\tilde{H}(r)\,\dot{\pi}(T)\Big)\,\dot{\pi}(\tilde{H}_1)\\
&+ 4\Big(\dot{\pi}(X_{-\alpha})\,\tilde{H}(r) - \tilde{H}(r)\,\dot{\pi}(X_{-\alpha})\Big)\,\Big(-\dot{\pi}(X_\alpha)\dot{\pi}(\tilde{H}_1) + 3\,\dot{\pi}(H_\gamma)\dot{\pi}(X_\alpha)\Big).
\end{aligned}
$$

Los Teoremas 3.17 y 3.18 están dados en términos de transformaciones lineales. Ahora daremos los enunciados correspondientes en términos de matrices eligiendo una base apropiada.

Si $\pi = \pi_{n,\ell}$, es conocido (ver [Hum72], p.32) que existe una base $\{v_i\}_{i=0}^{\ell}$ de V_π tal que

$$
\begin{aligned}
&\dot{\pi}(H_\alpha)v_i = (\ell - 2i)v_i,\\
&\dot{\pi}(X_\alpha)v_i = (\ell - i + 1)v_{i-1}, \quad (v_{-1} = 0),\\
&\dot{\pi}(X_{-\alpha})v_i = (i+1)v_{i+1}, \quad (v_{\ell+1} = 0).
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Como estamos trabajando con una representación de U(2) estas relaciones deben ser complementadas con

$$\dot{\pi}(Z)v_i = (2n+\ell)v_i.$$

Esto se sigue de

$$\dot{\pi}(Z) = \left(\frac{d}{dt}\pi\left(\begin{smallmatrix} e^t & 0\\ 0 & e^t\end{smallmatrix}\right)\right)_{t=0} = \left(\frac{d}{dt}e^{2nt}\pi_\ell\left(\begin{smallmatrix} e^t & 0\\ 0 & e^t\end{smallmatrix}\right)\right)_{t=0} = (2n+\ell)I.$$

Introducimos las funciones $h_i(r)$ por medio de las relaciones

$$\tilde{H}(r)v_i = h_i(r)v_i.$$

Corolario 3.33. *La función* $\tilde{H}(r) = (h_0(r), \cdots, h_\ell(r))$, $(0 < r < 1)$, *satisface* $(\tilde{D}\tilde{H})(r) = \lambda \tilde{H}(r)$ *si y sólo si*

$$\begin{aligned}
&- (1-r^2)^2 h_i'' - \tfrac{(1-r^2)}{r}\big(3 - r^2 + 2r^2(n+\ell-i)\big) h_i' - 4i(\ell-i+1)(h_{i-1}-h_i) \\
&- \tfrac{4(1-r^2)}{r^2}\Big((i+1)(\ell-i)(h_{i+1}-h_i) + i(\ell-i+1)(h_{i-1}-h_i)\Big) = \lambda h_i,
\end{aligned}$$

para todo $i = 0, \cdots, \ell$.

Demostración. Tenemos $J = X_\alpha - X_{-\alpha}$, $T = X_\alpha + X_{-\alpha}$ y $H_\gamma = \frac{1}{2}Z + \frac{1}{2}H_\alpha$. Luego

$$\begin{aligned}
\dot{\pi}(J)^2\tilde{H}(r)v_i &= (\ell-i+1)(\ell-i+2)h_i v_{i-2} \\
&\quad - \left((\ell-i+1)i + (i+1)(\ell-i)\right) h_i v_i + (i+1)(i+2)h_i v_{i+2}, \\
\tilde{H}(r)\dot{\pi}(J)^2 v_i &= (\ell-i+1)(\ell-i+2)h_{i-2}v_{i-2} \\
&\quad - ((\ell-i+1)i + (i+1)(\ell-i))h_i v_i + (i+1)(i+2)h_{i+2}v_{i+2}, \\
\dot{\pi}(J)\tilde{H}(r)\dot{\pi}(J)v_i &= (\ell-i+1)(\ell-i+2)h_{i-1}v_{i-2} + (i+1)(i+2)h_{i+1}v_{i+2} \\
&\quad - \left((\ell-i+1)ih_{i-1} + (i+1)(\ell-i)h_{i+1}\right) v_i, \\
\dot{\pi}(T)^2\tilde{H}(r)v_i &= (\ell-i+1)(\ell-i+2)h_i v_{i-2} \\
&\quad + \left((\ell-i+1)i + (i+1)(\ell-i)\right) h_i v_i + (i+1)(i+2)h_i v_{i+2}, \\
\tilde{H}(r)\dot{\pi}(T)^2 v_i &= (\ell-i+1)(\ell-i+2)h_{i-2}v_{i-2} \\
&\quad + ((\ell-i+1)i + (i+1)(\ell-i))h_i v_i + (i+1)(i+2)h_{i+2}v_{i+2}, \\
\dot{\pi}(T)\tilde{H}(r)\dot{\pi}(T)v_i &= (\ell-i+1)(\ell-i+2)h_{i-1}v_{i-2} + (i+1)(i+2)h_{i+1}v_{i+2} \\
&\quad + \left((\ell-i+1)ih_{i-1} + (i+1)(\ell-i)h_{i+1}\right) v_i, \\
\dot{\pi}(X_{-\alpha})\tilde{H}(r)\dot{\pi}(X_\alpha)v_i &= i(\ell-i+1)h_{i-1}v_i, \\
\tilde{H}(r)\dot{\pi}(X_{-\alpha})\dot{\pi}(X_\alpha)v_i &= i(\ell-i+1)h_i v_i
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\big(\tilde{D}\tilde{H}\big)(r)v_i = \Big(&-(1-r^2)^2 h_i'' - \tfrac{(1-r^2)}{r}\big(3 - r^2 + 2r^2(n+\ell-i)\big) h_i' \\
&- 4i(\ell-i+1)(h_{i-1}-h_i) - \tfrac{4(1-r^2)}{r^2}\Big((i+1)(\ell-i)(h_{i+1}-h_i) \\
&+ i(\ell-i+1)(h_{i-1}-h_i)\Big)\Big)v_i.
\end{aligned}$$

Esto completa la demostración. □

Corolario 3.34. *La función* $\tilde{H}(r) = (h_0(r), \cdots, h_\ell(r))$, $(0 < r < 1)$, *satisface* $(\tilde{E}\tilde{H})(r) = \mu \tilde{H}(r)$ *si y sólo si*

$$\begin{aligned}
&-(n-\ell+3i)(1-r^2)^2 h_i'' - 6(i+1)(\ell-i)\,\tfrac{(1-r^2)^2}{r}\,h_{i+1}' \\
&+ 6i(\ell-i+1)\,\tfrac{(1-r^2)}{r}\,h_{i-1}' - (n-\ell+3i)\tfrac{(1-r^2)}{r}\big(3 - r^2 + 2r^2(n+\ell-i)\big) h_i' \\
&- 4(n+2\ell-3i)\tfrac{(1-r^2)}{r^2}\Big((i+1)(\ell-i)(h_{i+1}-h_i) + i(\ell-i+1)(h_{i-1}-h_i)\Big) \\
&+ 4i(\ell-i+1)(2n+\ell+3)(h_{i-1}-h_i) = \tfrac{1}{4}\mu h_i
\end{aligned}$$

para todo $i = 0, \cdots, \ell$.

Demostración. Tenemos $\tilde{H}_2 = \frac{1}{2}Z - \frac{3}{2}H_\alpha$, $\tilde{H}_1 = \frac{1}{2}Z + \frac{3}{2}H_\alpha$, $\tilde{H}_\gamma = \frac{1}{2}Z + \frac{1}{2}H_\alpha$. Utilizando los cálculos hechos en la demostración del Corolario 3.33 obtenemos:

$$\begin{aligned}
\big(\tilde{E}\tilde{H}\big)(r)v_i = \Big(&-(n-\ell+3i)(1-r^2)^2 h_i'' - 6(i+1)(\ell-i)\,\tfrac{(1-r^2)^2}{r}\,h_{i+1}' \\
&+ 6i(\ell-i+1)\,\tfrac{(1-r^2)}{r}\,h_{i-1}' - (n-\ell+3i)\tfrac{(1-r^2)}{r}\big(3-r^2+2r^2(n+\ell-i)\big)\,h_i' \\
&- 4(n+2\ell-3i)\tfrac{(1-r^2)}{r^2}\Big((i+1)(\ell-i)(h_{i+1}-h_i) + i(\ell-i+1)(h_{i-1}-h_i)\Big) \\
&+ 4i(\ell-i+1)(2n+\ell+3)(h_{i-1}-h_i)\Big)v_i.
\end{aligned}$$

$\square$

A continuación realizamos el cambio de variables $t = (1-r^2)^{-1}$ y denotamos por D y H al operador $\tilde{D}$ y la función $\tilde{H}$ en la nueva variable t, respectivamente. Entonces el operador D, en coordenadas, se escribe de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
&4\,t^2\,(t-1)h_i'' + 4\,t\,((n+\ell-i-1)\,t - (n+\ell-i+1))\,h_i' \\
&\quad + 4\,\frac{t}{1-t}(\ell-i)(i+1)\,(h_{i+1}-h_i) + \frac{4}{1-t}\,i(\ell-i+1)\,(h_{i-1}-h_i) = -\lambda h_i.
\end{aligned}$$

Similarmente, para el operador E, tenemos:

$$\begin{aligned}
&-4(n-\ell+3i)t^2(1-t)h_i'' + 12(i+1)(\ell-i)t^2h_{i+1}' - 12i(\ell-i+1)th_{i-1}' \\
&+ 4(n-\ell+3i)t((n+\ell-i+1) - t(n+\ell-i-1))h_i' - 4(n+2\ell-3\,i)\frac{t}{1-t} \\
&((i+1)(\ell-i)(h_{i+1}-h_i) + i(\ell-i+1)(h_{i-1}-h_i)) \\
&+ 4i(\ell-i+1)(2n+\ell+3)(h_{i-1}-h_i) = \frac{1}{4}\mu h_i.
\end{aligned}$$

En notación matricial si H denota el vector columna $H(t) = (h_0(t), \ldots, h_\ell(t))$, entonces tenemos que H es una autofunción de los siguientes operadores diferenciales

$$\begin{aligned}
DH &= t(1-t)H'' + (A_0 - tA_1)H' + \frac{1}{1-t}(B_0 - tB_1)H. \\
EH &= t(1-t)MH'' + (C_0 - tC_1)H' + \frac{1}{1-t}(D_0 + tD_1)H.
\end{aligned}$$

para $t \in (1, \infty)$. Donde las matrices coeficientes $A_0, A_1, B_0, B_1, C_0, C_1, D_0, D_1$ y M están dadas explícitamente por

$$\begin{aligned}
A_0 &= \textstyle\sum_{i=0}^{\ell}(n+\ell-i+1)E_{ii}, \\
A_1 &= \textstyle\sum_{i=0}^{\ell}(n+\ell-i+3)E_{ii}, \\
B_0 &= \textstyle\sum_{i=0}^{\ell}(i+1)(\ell-i)(E_{i,i+1} - E_{i,i}), \\
B_1 &= \textstyle\sum_{i=0}^{\ell} i(\ell-i+1)(E_{ii} - E_{i,i-1}), \\
M &= \textstyle\sum_{i=0}^{\ell}(n-\ell+3i)E_{ii}, \\
C_0 &= \textstyle\sum_{i=0}^{\ell}(n-\ell+3i)(n+\ell-i+1)E_{ii} - 3\sum_{i=0}^{\ell}(i+1)(\ell-i)E_{i,i+1}, \\
C_1 &= \textstyle\sum_{i=0}^{\ell}(n-\ell+3i)(n+\ell-i+3)E_{ii} - 3\sum_{i=0}^{\ell} i(\ell-i+1)E_{i,i-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_0 &= \textstyle\sum_{i=0}^{\ell}(n+2\ell-3i)(i+1)(\ell-i)(E_{i,i+1}-E_{ii}) \\ &\quad - 3\textstyle\sum_{i=0}^{\ell}(n+\ell-i+1)i(\ell-i+1)(E_{ii}-E_{i,i-1}), \\ D_1 &= \textstyle\sum_{i=0}^{\ell}(2n+\ell+3)i(\ell-i+1)(E_{ii}-E_{i,i-1}). \end{aligned}$$

Observemos que $t=1$ corresponde al punto $p(e)$.

3.4 Extensión a G

Para cada función esférica Φ sobre G de tipo $\pi=\pi_{n,\ell}$ tenemos una función asociada $\tilde{H}(r)$, $0\le r<1$, con valores en $\mathrm{End}(V_\pi)$ que es una autofunción simultánea de los operadores $\tilde{D}$ y $\tilde{E}$ (Teoremas 3.17 y 3.18).

En esta sección vamos a demostrar que si $\tilde{H}=\tilde{H}(r)$ es una función C^∞ para $0<r<1$, $\lim_{r\to 0^+}\tilde{H}(r)=\tilde{H}(0)=(1,...,1)$ y $\tilde{H}$ es una autofunción del operador $\tilde{D}$, entonces existe una única autofunción Φ de Δ_2 en G que es C^∞ y satisface la condición ii) de la Proposición 2.6 a la cual $\tilde{H}$ está asociada. Además si $\tilde{H}$ es también una autofunción de $\tilde{E}$ entonces Φ es una función esférica de tipo (n,ℓ).

En primer lugar queremos extender $\tilde{H}$ a toda la bola $B\subset\mathbb{C}^2$, de tal forma que la función extendida H satisfaga $H(k\,q)=\pi(k)\,H(q)\,\pi(k^{-1})$ para todo $k\in K$ y para todo $q\in B$. Observemos que para $q=(x,y)\in B-\{(0,0)\}$ el elemento

$$k(q)=k(x,y)=(|x|^2+|y|^2)^{-\frac{1}{2}}\left(\begin{smallmatrix} x & -\overline{y} \\ y & \overline{x}\end{smallmatrix}\right),$$

pertenece a K y $q=k(q)(r,0)$ donde $r=(|x|^2+|y|^2)^{\frac{1}{2}}$. Definimos la función H por

$$H(q)=\pi(k(q))\,\tilde{H}(r)\pi(k(q)^{-1}).$$

Luego H es una función C^∞ en $B-\{(0,0)\}$. Ahora veremos que H se extiende a una función continua en B. De hecho si tomamos un producto interno en V_π de tal forma que $\pi(k)$ resulta un operador unitario para todo $k\in K$ y denotamos con $\|\ \|$ al operador norma correspondiente en $\mathrm{End}(V_\pi)$, entonces

$$\|H(q)-I\|=\|\pi(k(q))(\tilde{H}(r)-I)\pi(k(q)^{-1})\|=\|\tilde{H}(r)-I\|.$$

Como $\lim_{r\to 0^+}\tilde{H}(r)=I$ concluimos que H es continua en $q=(0,0)$. Ahora debemos verificar que

$$H(u\,q)=\pi(u)\,H(q)\,\pi(u^{-1})$$

para todo $u\in K$, $q\in B$. Podemos asumir que $q=(x,y)\neq(0,0)$. Entonces $k(u\,q)(r,0)=u\,q=u\,k(q)(r,0)$. Por lo tanto existe $m\in M$ tal que $k(u\,q)=u\,k(q)\,m$. Tenemos

$$\begin{aligned} H(uq)&=\pi(k(uq))\tilde{H}(r)\pi(k(uq)^{-1}=\pi(u)\pi(k(q))\pi(m)\tilde{H}(r)\pi(m^{-1})\pi(k(q)^{-1})\pi(u^{-1}) \\ &=\pi(u)H(q)\pi(u^{-1}), \end{aligned}$$

pues $\pi(m)$ y $\tilde{H}(r)$ conmutan (Proposición 3.26). Ahora levantamos la función H a una función continua $H=H\circ p$ en G con valores en $\mathrm{End}(V_\pi)$ que es C^∞ en $G\setminus K$. Luego la función $\Phi=H\,\Phi_\pi$ es una función continua en G que es una autofunción C^∞ de Δ_2 en $G\setminus K$, satisface $\Phi(e)=I$ y $\Phi(k_1\,g\,k_2)=\pi(k_1)\Phi(g)\pi(k_2)$ para $k_1,k_2\in K$, $g\in G$. Como Δ_3 es un operador elíptico, Φ es C^∞ en G.

Entonces tenemos una función Φ en G con valores en $\mathrm{End}(V_\pi)$ que satisface la condición ii) de la Proposición 2.6 y que es una autofunción C^∞ de Δ_2. Mas aún si $\tilde{H}$ es también autofunción de $\tilde{E}$ entonces Φ resulta una autofunción de Δ_3 y por lo tanto es una función esférica de tipo (n,ℓ).

3.5 El dual no compacto

En objetivo de esta sección es vincular los resultados obtenidos en este capítulo con el trabajo desarrollado en [GPT02a] para calcular las funciones esféricas asociadas al plano proyectivo complejo. El cambio de variables $t = 1/(1-r^2)$ al final de la Sección 3.3 nos permite describir las funciones esféricas asociadas al plano hiperbólico complejo como autofunciones de los mismos operadores diferenciales D y E que aparecen en [GPT02a]. Esto nos será de gran utilidad en el capítulo siguiente en el que logramos describir las funciones esféricas matriciales asociadas al plano proyectivo complejo y al plano hiperbólico complejo en términos de la función hipergeométrica matricial. Cabe destacar que la caracterización de las funciones esféricas matriciales asociadas al plano hiperbólico complejo depende de información obtenida de la teoría de representaciones del grupo compacto SU(3).

Tanto para el caso de SU(3) como para el caso SU(2,1) las álgebras $D(G)^K$ son isomorfas, y de hecho isomorfas a $D(G)^G \otimes D(K)^K$, donde $D(G)^G$ y $D(K)^K$ son álgebras de polinomios (Teorema de Harish-Chandra) en dos generadores algebraicamente independientes (ver [GPT02a]).

El grupo $U = \mathrm{SU}(3)$ actúa de manera natural en el plano proyectivo complejo $P_2(\mathbb{C})$. Esta acción es transitiva y $K = \mathrm{S}(\mathrm{U}(2) \times \mathrm{U}(1)) \equiv \mathrm{U}(2)$ es el subgrupo de isotropía del punto $(0,0,1) \in P_2(\mathbb{C})$. Por lo tanto $P_2(\mathbb{C}) = U/K$. Identificamos el plano complejo con el plano afín

$$\mathbb{C}^2 = \left\{ (x,y,1) \in P_2(\mathbb{C}) : (x,y) \in \mathbb{C}^2 \right\},$$

y tomamos ventaja de la estructura de K-órbitas de $P_2(\mathbb{C})$. El plano afín $\mathbb{C}^2$ es K-estable y la correspondiente recta en el infinito L es una K-órbita. Además las K-órbitas en $\mathbb{C}^2$ son las esferas

$$S_r = \left\{ (x,y) \in \mathbb{C}^2 : |x|^2 + |y|^2 = r^2 \right\}.$$

Por lo tanto podemos tomar los puntos $(r,0) \in S_r$ y $(1,0,0) \in L$ como representantes de S_r y L, respectivamente. Como $(M,0,1) = (1,0,\frac{1}{M}) \longrightarrow (1,0,0)$ cuando $M \to \infty$, el intervalo cerrado $[0,\infty]$ parametriza el conjunto de K-órbitas en $P_2(\mathbb{C})$.

El dual no compacto del par simétrico Riemanniano (U,K) es el par (G,K) donde $G = \mathrm{SU}(2,1)$. Como G también es un grupo de transformaciones lineales de $\mathbb{C}^3$, actúa naturalmente en $P_2(\mathbb{C})$. La G-órbita del punto $(0,0,1)$ es el conjunto

$$B = \{(x,y,1) \in P_2(\mathbb{C}) : |x|^2 + |y|^2 < 1\},$$

y el correspondiente subgrupo de isotropía es K. Por lo tanto $H_2(\mathbb{C}) = G/K$ se puede identificar con la bola abierta de radio uno centrada en el origen de $\mathbb{C}^2$.

El conjunto $\hat{K}$ se puede identificar con el conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Si $k = \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$, con $A \in \mathrm{U}(2)$ y $a = (\det A)^{-1}$, entonces

$$\pi(k) = \pi_{n,\ell}(A) = (\det A)^n \; A^\ell,$$

donde A^ℓ denota la ℓ-ésima potencia simétrica de A, define una representación irreducible de K en la clase $(n,\ell) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

La representación $\pi_{n,\ell}$ de U(2) se extiende a una única representación holomorfa de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ en $\mathrm{End}(V_\pi)$, que también denotaremos por $\pi_{n,\ell}$. Para cualquier $g \in \mathrm{M}(3,\mathbb{C})$, denotamos por $A(g)$ al bloque superior izquierdo 2×2 de g, es decir

$$A(g) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}.$$

Sea $\mathcal{A} = \{ g \in G : \det A(g) \neq 0 \}$. La proyección canónica $p : G \longrightarrow P_2(\mathbb{C})$ lleva el subconjunto denso $\mathcal{A} \subset G$ en el plano afín $\mathbb{C}^2$ cuando $G = \mathrm{SU}(3)$ y en la bola unidad B cuando $G = \mathrm{SU}(2,1)$, pues $\mathcal{A} = G$ en este caso.

Para cualquier $\pi = \pi_{(n,\ell)}$ sea $\Phi_\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{End}(V_\pi)$ definido por

$$\Phi_\pi(g) = \Phi_{n,\ell}(g) = \pi_{n,\ell}(A(g)).$$

Si $G = \mathrm{SU}(3)$ y $n \geq 0$ entonces Φ_π se extiende a una única función irreducible sobre G de tipo (n, ℓ) y cuando $G = \mathrm{SU}(2, 1)$, Φ_π es una función esférica irreducible sobre G de tipo (n, ℓ).

Para determinar todas las funciones esféricas irreducibles $\Phi : G \longrightarrow \mathrm{End}(V_\pi)$ de tipo $\pi = \pi_{n,\ell}$, usamos la función Φ_π de la siguiente forma: en el conjunto abierto $\mathcal{A} \subset G$ definimos una función H por

$$H(g) = \Phi(g)\, \Phi_\pi(g)^{-1}, \tag{3.7}$$

donde se supone que Φ es una función esférica de tipo π. Entonces H satisface

i) $H(e) = I$.

ii) $H(gk) = H(g)$, para todo $g \in \mathcal{A}, k \in K$.

iii) $H(kg) = \pi(k)H(g)\pi(k^{-1})$, para todo $g \in \mathcal{A}, k \in K$.

Entonces la propiedad ii) dice que H se puede considerar como una función sobre $\mathbb{C}^2$ o B, y además por iii) tenemos que H queda determinada por la función $r \mapsto H(r) = H(r, 0)$ en los intervalos $[0, +\infty)$ o $[0, 1)$ cuando $G = \mathrm{SU}(3)$ o $G = \mathrm{SU}(2, 1)$, respectivamente. Sea M el subgrupo cerrado de K de todas las matrices diagonales de la forma $\Delta(e^{i\theta}, e^{-2i\theta}, e^{i\theta})$, $\theta \in \mathbb{R}$. Entonces M fija todos los puntos $(r, 0) \in \mathbb{C}^2$. La propiedad iii) también implica que $H(r) = \pi(m)H(r)\pi(m^{-1})$ para todo $m \in M$. Como cualquier V_π como M-módulo es libre de multiplicidad, se sigue que existe una base de V_π tal que $H(r)$ está simultáneamente representada por una matriz diagonal para todo $r \geq 0$. En la Sección 5 de [GPT02a] y en la Sección 3.3 de este capítulo está dada una elección particular de tal base. Por lo tanto podemos identificar $H(r) \in \mathrm{End}(V_\pi)$ con un vector $H(r) = (h_0(r), \ldots, h_\ell(r)) \in \mathbb{C}^{\ell+1}$ si $\pi = \pi_{n,\ell}$.

Como dijimos anteriormente el álgebra $D(G)^G$, de todos los operadores diferenciales sobre G que son invariantes por multiplicación a izquierda y a derecha por elementos en G, es un álgebra de polinomios en dos generadores algebraicamente independientes Δ_2 y Δ_3.

Si hacemos el cambio de variables $t = 1/(1 + r^2)$ cuando $G = \mathrm{SU}(3)$ y $t = 1/(1 - r^2)$ cuando $G = \mathrm{SU}(2, 1)$, entonces el hecho de que Φ es una autofunción de Δ_2 y Δ_3, convierte a $H(t) = H(r)$ en una autofunción de los siguiente operadores diferenciales

$$\begin{aligned} DH &= t(1-t)H'' + (A_0 - tA_1)H' + \frac{1}{1-t}(B_0 - tB_1)H, \\ EH &= t(1-t)MH'' + (C_0 - tC_1)H' + \frac{1}{1-t}(D_0 + tD_1)H, \end{aligned} \tag{3.8}$$

para $t \in (0, 1)$ cuando $G = \mathrm{SU}(3)$ o $t \in (1, \infty)$ cuando $G = \mathrm{SU}(2, 1)$. Observemos que $t = 1$ corresponde en ambos casos al punto $p(e)$. La matrices coeficiente son

$$\begin{aligned} A_0 &= \textstyle\sum_{i=0}^{\ell} (n + \ell - i + 1)E_{i,i}, \\ A_1 &= \textstyle\sum_{i=0}^{\ell} (n + \ell - i + 3)E_{i,i}, \\ B_0 &= \textstyle\sum_{i=0}^{\ell} (i + 1)(\ell - i)(E_{i,i+1} - E_{i,i}), \\ B_1 &= \textstyle\sum_{i=0}^{\ell} i(\ell - i + 1)(E_{i,i} - E_{i,i-1}), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
M &= \textstyle\sum_{i=0}^{\ell}(n-\ell+3i)E_{i,i}, \\
C_0 &= \textstyle\sum_{i=0}^{\ell}(n-\ell+3i)(n+\ell-i+1)E_{i,i} - 3\sum_{i=0}^{\ell}(i+1)(\ell-i)E_{i,i+1}, \\
C_1 &= \textstyle\sum_{i=0}^{\ell}(n-\ell+3i)(n+\ell-i+3)E_{i,i} - 3\sum_{i=0}^{\ell} i(\ell-i+1)E_{i,i-1}, \\
D_0 &= \textstyle\sum_{i=0}^{\ell}(n+2\ell-3i)(i+1)(\ell-i)(E_{i,i+1}-E_{i,i}) \\
&\quad - 3\textstyle\sum_{i=0}^{\ell}(n+\ell-i+1)i(\ell-i+1)(E_{i,i}-E_{i,i-1}), \\
D_1 &= \textstyle\sum_{i=0}^{\ell}(2n+\ell+3)i(\ell-i+1)(E_{i,i}-E_{i,i-1}).
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

Los siguientes teoremas caracterizan todas las funciones esféricas asociadas a los pares simétricos $(\mathrm{SU}(3), \mathrm{S}(\mathrm{U}(2)\times\mathrm{U}(1)))$ y $(\mathrm{SU}(2,1), \mathrm{S}(\mathrm{U}(2)\times\mathrm{U}(1)))$. Estos Teoremas serán el punto de partida para dar una representación explícita de todas las funciones esféricas matriciales irreducibles asociadas a $\mathrm{SU}(3)$ y $\mathrm{SU}(2,1)$.

Teorema 3.35. *Las funciones esféricas irreducibles Φ de $\mathrm{SU}(3)$ de tipo (n,ℓ) corresponden precisamente a las autofunciones simultáneas H con valores en $\mathbb{C}^{\ell+1}$ de D y E que son analíticas en el intervalo $[0,1]$, tal que $h_i(t) = t^{i-n-\ell}g_i(t)$ para todo $n+\ell+1 \leq i \leq \ell$ con g_i analítica en $t=0$ y $H(1) = (1,\ldots,1)^t$.*

Una prueba de este Teorema se puede encontrar en [GPT02a] (ver la Proposición 6.1 y la discusión después del Corolario 10.4). El siguiente teorema es el contenido de este capítulo.

Teorema 3.36. *Las funciones esféricas irreducibles Φ de $\mathrm{SU}(2,1)$ de tipo (n,ℓ) corresponden precisamente a las autofunciones simultáneas H con valores en $\mathbb{C}^{\ell+1}$ de D y E que son analíticas en el intervalo $[1,\infty)$, tal que $H(1) = (1,\ldots,1)^t$.*

CAPITULO 4

Funciones esféricas y el operador hipergeométrico matricial

La analogía entre la geometría esférica y la hiperbólica es un caso especial de una dualidad para espacios simétricos. Esta analogia reaparece en la teoría de funciones sobre estos espacios, así como la analogía entre las funciones trigonométricas y las funciones hiperbólicas, o entre los polinomios de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}$ y las funciones de Jacobi $F_u^{(\alpha,\beta)}$. Estas analogías se ven claramente una vez que se dan las expresiones de la funciones trigonométricas e hiperbólicas en términos de la función exponencial, o las expresiones de los polinomios de Jacobi y las funciones de Jacobi en términos de la función hipergeométrica de Gauss. En particular esta última analogía, para $\alpha = n$ y $\beta = 1$, es una situación particular de otra mucho mas general que se encuentra al estudiar las funciones esféricas irreducibles de cualquier tipo asociadas al plano proyectivo complejo $P_2(\mathbb{C})$ o el plano hiperbolico complejo $H_2(\mathbb{C})$ (ver [GPT02a] y el Capítulo 3).

En ambos casos asociamos una función esférica irreducible Φ sobre G a una función $H = H(t)$ donde $t \in (0,1]$ o $t \in [1,\infty)$ cuando $G = \mathrm{SU}(3)$ o $G = \mathrm{SU}(2,1)$, respectivamente. Entonces una función H es analítica en $t = 1$ y es una autofunción simultánea de dos operadores diferenciales matriciales D y E, que son el mismo en los dos casos, ver (3.8).

Los resultados de este capítulo forman parte del trabajo [RT06]. El punto inicial son los Teoremas 3.35 y 3.36. Mas allá de la importancia de estos teoremas, no alcanzan el objetivo de dar una representación explícita de las funciones esféricas. De hecho, en [GPT02a] ese objetivo solo se alcanzó para las funciones esféricas de tipo polinomial y dimensión menor o igual a tres, representando estas funciones esféricas en terminos de las funciones hipergeométricas generalizadas ${}_{p+1}F_p$.

Las Secciones 3 y 4 son el corazón de este capítulo. Después del cambio de variables $u = 1 - t$, los operadores diferenciales D y E, mencionados en los Teoremas 3.35 y 3.36, se transforman en $\bar{D}$ y $\bar{E}$. Entonces en la Sección 4.1 encontramos una función polinomial matricial $\psi = \psi(u)$ que usamos para conjugar $\bar{D}$ en el operador hipergeométrico matricial $\widetilde{D} = \psi^{-1}\bar{D}\psi$, ver Teorema 4.5. Establecemos que esta conjugación lleva autofunciones de $\bar{D}$ analíticas en $u = 0$ en autofunciones de $\widetilde{D}$ analíticas en $u = 0$, ver Teorema 4.6. La prueba de este teorema depende de encontrar una matriz Ω (cuyas entradas están dadas en términos de los polinomios ortogonales de Hahn) para diagonalizar una relación de recurrencia de dos términos. En particular esto nos permite probar que la función H asociada a una función esférica irreducible es polinomial, cuando $G = \mathrm{SU}(3)$ (Teorema 4.8). En la Sección 4 reducimos el problema de encontrar las autofunciones simultáneas de $\bar{D}$ y $\bar{E}$ a un problema de álgebra lineal, ver (4.17). Esta reducción no es la misma que la dada en [GPT02a] y resuelve el problema en todos los casos.

En la Sección 5 somos capaces de describir todas las funciones esféricas irreducibles asociadas al plano hiperbólico complejo y al plano proyectivo complejo, en términos de la función hipergeométrica matricial ${}_2H_1$ introducida en [Tir03], ver los Teoremas 4.20 and 4.21.

Es importante destacar que nuestra caracterización de todas las funciones esféricas irreducibles asociadas al plano hiperbólico complejo depende de información valiosa obtenida de la teoría de representaciones del grupo compacto SU(3), ver Teorema 4.17, y que existe una aplicación inyectiva $\Theta \mapsto \Phi$ del conjunto de clases de equivalencia de funciones esféricas irreducibles de SU(3) de tipo (n, ℓ) en el conjunto de todas las clases de equivalencia de funciones esféricas irreducibles de $\mathrm{SU}(2,1)$ del mismo tipo. Esta aplicación está dada por la resticción de la función polinomial asociada H_Θ, a la función H_Φ definida en el intervalo $(-\infty, 0]$.

4.1 D como un operador hipergeométrico

En esta sección estudiamos las soluciones analíticas en $t = 1$ del operador diferencial D. Para esto encontramos conveniente hacer el cambio de variables $u = 1 - t$. De esta forma consideraremos funciones con valores en $\mathbb{C}^{\ell+1}$, analíticas en $u = 0$. Los operadores D y E se convierten, respectivamente, en los siguientes operadores diferenciales

$$\bar{D}H = u(1-u)H'' + (2 - uA_1)H' + \frac{1}{u}(B_0 - B_1 + uB_1)H, \tag{4.1}$$

$$\bar{E}H = u(1-u)MH'' + (C_1 - C_0 - uC_1)H' + \frac{1}{u}(D_0 + D_1 - uD_1)H. \tag{4.2}$$

El resultado clave de esta sección es la existencia de una función polinomial a valores matriciales ψ de grado ℓ que tiene la propiedad de que $\psi(u)^{-1}\bar{D}\psi(u) = \widetilde{D}$, donde $\widetilde{D}$ es el operador hipergeométrico matricial dado por

$$\widetilde{D}F = u(1-u)F'' + (C - uU)F' - (\lambda + V)F.$$

Observemos que si H es una autofunción del operador $\bar{D}$ de autovalor λ y si $F = \psi(u)^{-1}H(u)$, entonces

$$\widetilde{D}F = \widetilde{D}\psi(u)^{-1}H = \psi(u)^{-1}\bar{D}H = \lambda\psi(u)^{-1}H = \lambda F(u).$$

Por lo tanto las autofunciones H de (4.1) analíticas en $u = 0$ están en correspondencia uno a uno con las soluciones F analíticas en $u = 0$ de la ecuación hipergeométrica matricial

$$u(1-u)F'' + (C - uU)F' - (\lambda + V)F = 0,$$

donde C, U y V son matrices $(\ell + 1) \times (\ell + 1)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Esta ecuación hipergeométrica fue introducida en [Tir03].

Un difícil proceso de prueba y error nos llevó a la siguiente función

$$\psi = XT(u), \tag{4.3}$$

donde X es la matriz de Pascal dada por $X_{i,j} = \binom{i}{j}$ y $T(u)$ es la matriz diagonal tal que $T(u)_{i,i} = u^i$.

Para la función $F(u) = \psi^{-1}(u)H(u)$, el hecho que $H(u)$ es una autofunción del operador $\bar{D}$ convierte a F en una autofunción del operador

$$\begin{aligned}\widetilde{D}F = {} & u(1-u)F'' + \big(2u(1-u)\psi^{-1}\psi' + \psi^{-1}(2 - uA_1)\psi\big)F' \\ & + \big(u(1-u)\psi^{-1}\psi'' + \psi^{-1}(2 - uA_1)\psi' + \frac{1}{u}\psi^{-1}(B_0 - B_1 + uB_1)\psi\big)F.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Para probar que el coeficiente de la derivada de primer orden es un polinomio lineal en u y que el coeficiente de F en (4.4) es constante necesitamos algunos lemas previos.

Lema 4.1. *Sea R un anillo con identidad, $0 \neq f \in R[x]$ un polinomio de grado m, coeficiente director a_m, y s un entero no negativo. Entonces*

$$\sum_{i=0}^{s}(-1)^i\binom{s}{i}f(i) = \begin{cases} 0, & \textit{for } s > m \\ (-1)^m m! a_m, & \textit{for } s = m. \end{cases}$$

Demostración. Es una consecuencia directa de una formula de Euler (ver Lema 13 de [Tir03]). □

Lema 4.2. *Sea X la matriz de Pascal dada por $X_{i,j} = \binom{i}{j}$. Entonces X^{-1} es una matriz triangular inferior dada por $X^{-1}_{i,j} = (-1)^{i+j}\binom{i}{j}$.*

Lema 4.3. *Sea X la matriz de Pascal. Entonces*

$$\begin{aligned} X^{-1}B_1X &= \sum_{i=0}^{\ell} i\big((\ell-i+1)E_{i,i} - (i-1)E_{i,i-1}\big), \\ X^{-1}(B_0 - B_1)X &= \sum_{i=0}^{\ell}(i+1)\big(-iE_{i,i} + (\ell-i)E_{i,i+1}\big), \\ X^{-1}A_1X &= \sum_{i=0}^{\ell}\big((n+\ell-i+3)E_{i,i} - iE_{i,i-1}\big). \end{aligned}$$

Demostración. Como B_1 es una matriz bidiagonal inferior, tenemos que

$$(X^{-1}B_1)_{i,j} = (X^{-1})_{i,j}(B_1)_{j,j} + (X^{-1})_{i,j+1}(B_1)_{j+1,j}.$$

Entonces, por (3.9) tenemos

$$\begin{aligned} (X^{-1}B_1X)_{i,i} &= \sum_{k=0}^{\ell}(X^{-1}B_1)_{i,k}X_{k,i} = (X^{-1})_{i,i}(B_1)_{i,i}X_{i,i} = i(\ell-i+1), \\ (X^{-1}B_1X)_{i,i-1} &= \sum_{k=0}^{\ell}(X^{-1}B_1)_{i,k}X_{k,i-1} \\ &= (X^{-1})_{i,i-1}(B_1)_{i-1,i-1}X_{i-1,i-1} + (X^{-1})_{i,i}(B_1)_{i,i-1}X_{i-1,i-1} \\ &\quad + (X^{-1})_{i,i}(B_1)_{i,i}X_{i,i-1} + (X^{-1})_{i,i+1}(B_1)_{i+1,i}X_{i,i-1} \\ &= -i(i-1). \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
(X^{-1}B_1X)_{i+s,i} &= \sum_{k=0}^{\ell}(X^{-1}B_1)_{i+s,k}X_{k,i} \\
&= \sum_{k=0}^{s}(-1)^{k+s}\binom{i+s}{k+i}\binom{k+i}{i}(k+i)(\ell-k-i+1) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{s-1}(-1)^{k+s}\binom{i+s}{k+i+1}\binom{k+i}{i}(k+i+1)(\ell-k-i) \\
&= (-1)^s\frac{(i+s)!}{i!s!}\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{s}{k}(k+i)(\ell-k-i+1) \\
&\quad + (-1)^s\frac{(i+s)!}{i!(s-1)!}\sum_{k=0}^{s-1}(-1)^k\binom{s-1}{k}(\ell-k-i).
\end{aligned}$$

Por el Lema 4.1 se sigue que las últimas dos sumas son cero para $s > 2$, y que para $s = 2$ la suma de ambas es cero.

Las pruebas del segundo y tercer item son análogas. □

Lema 4.4. *Existe matrices C, U y V tales que*

$$2u(1-u)\psi'(u) + (2-uA_1)\psi(u) = \psi(u)(C-uU),$$

$$u(1-u)\psi''(u) + (2-uA_1)\psi'(u) + \frac{1}{u}(B_0 - B_1 + uB_1)\psi(u) = -\psi(u)V,$$

para todo $u \in \mathbb{C}$. De hecho las matrices C, U y V están dadas por

$$\begin{aligned}
C &= \textstyle\sum_{i=0}^{\ell} 2(i+1)E_{i,i} + \sum_{i=0}^{\ell} iE_{i,i-1}, \\
U &= \textstyle\sum_{i=0}^{\ell}(n+\ell+i+3)E_{i,i}, \\
V &= \textstyle\sum_{i=0}^{\ell} i(n+i+1)E_{i,i} - \sum_{i=0}^{\ell}(\ell-i)(i+1)E_{i,i+1}.
\end{aligned}$$

Demostración. En primer lugar vamos a mostrar que

$$\psi(u)^{-1}\left(2u(1-u)\psi'(u) + (2-uA_1)\psi(u)\right) = C - uU,$$

para todo $u \in \mathbb{C}$. Para esto calculamos

$$2u(1-u)\psi(u)^{-1}\psi'(u) = 2u(1-u)T(u)^{-1}T(u)' = 2(1-u)\sum_{i=1}^{\ell} iE_{i,i}. \tag{4.5}$$

Además tenemos que

$$\begin{aligned}
\psi(u)^{-1}(2-uA_1)\psi(u) &= 2 - uT(u)^{-1}X^{-1}A_1XT(u) \\
&= 2 - u\sum_{i=0}^{\ell}(n+\ell-i+3)E_{i,i} + \sum_{i=0}^{\ell} iE_{i,i-1}.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Sumando (4.5) y (4.6) obtenemos la primera afirmación del lema. Para probar la segunda afirmación, tenemos que mostrar que

$$\psi(u)^{-1}(u(1-u)\psi''(u) + (2-uA_1)\psi'(u) + \frac{1}{u}(B_0 - B_1 + uB_1)\psi(u)) = -V,$$

para todo $u \in \mathbb{C}$. Primero observemos que

$$u(1-u)\psi(u)^{-1}\psi''(u) = u(1-u)T(u)^{-1}T''(u) = (u^{-1}-1)\sum_{i=0}^{\ell} i(i-1)E_{i,i},$$

y

$$\begin{aligned}\psi(u)^{-1}(2-uA_1)\psi'(u) &= 2T(u)^{-1}T'(u) - uT(u)^{-1}X^{-1}A_1XT'(u)\\ &= u^{-1}\sum_{i=0}^{\ell} i(2E_{i,i}+(i-1)E_{i,i-1}) - \sum_{i=0}^{\ell} i(n+\ell-i+3)E_{i,i}.\end{aligned}$$

Además por el Lema 4.3 tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{u}\psi(u)^{-1}(B_0-B_1+uB_1)\psi(u) &= \sum_{i=0}^{\ell}(i(\ell-i+1)-u^{-1}i(i+1))E_{i,i}\\ &+ \sum_{i=0}^{\ell}(i+1)(\ell-i)E_{i,i+1} - u^{-1}\sum_{i=0}^{\ell} i(i-1)E_{i,i-1}.\end{aligned}$$

ahora sumando los resultados previos probamos el lema. □

Teorema 4.5. *Sea $\psi = XT$ la función polinomial introducida en* (4.3)*. Entonces el operador diferencial $\widetilde{D} = \psi^{-1}\bar{D}\psi$ es el operador hipergeométrico*

$$\widetilde{D}F(u) = u(1-u)F''(u) + (C-uU)F'(u) - VF(u),$$

donde las matrices C, U y V están dadas por

$$\begin{aligned}C &= \sum_{i=0}^{\ell} 2(i+1)E_{i,i} + \sum_{i=0}^{\ell} iE_{i,i-1},\\ U &= \sum_{i=0}^{\ell}(n+\ell+i+3)E_{i,i},\\ V &= \sum_{i=0}^{\ell} i(n+i+1)E_{i,i} - \sum_{i=0}^{\ell}(\ell-i)(i+1)E_{i,i+1}.\end{aligned}$$

Demostración. La prueba de este teorema es una consecuencia directa de (4.4) y del Lema 4.4. □

Encontrar las autofunciones del operador hipergeométrico matricial introducido en el teorema anterior es equivalente a conocer todas las autofunciones de la ecuación hipergeométrica matricial

$$u(1-u)F''(u) + (C-uU)F'(u) - VF(u) = \lambda F(u). \tag{4.7}$$

Esta ecuación fue estudiada por Tirao en [Tir03]. En el trabajo de Tirao también aparece la ecuación hipergeométrica matricial de la siguiente forma

$$u(1-u)F''(u) + (C-u(A+B+1)F'(u) - ABF(u) = \lambda F(u). \tag{4.8}$$

En el caso escalar, cualquier ecuación diferencial

$$z(1-z)f''(z) + (c - zu)f'(z) - vf(z) = 0,$$

con $u, v, c \in \mathbb{C}$, después de resolver una ecuación cuadrática, se convierte en

$$z(1-z)f''(z) + (c - z(1+a+b))f'(z) - abf(z).$$

Esto no es necesariamente cierto en el caso de matrices. En otras palabras una ecuación diferencial de la forma (4.7) no siempre se puede reducir a una ecuación del tipo (4.8) con $A, B, C \in \mathbb{C}^{(\ell+1)\times(\ell+1)}$ pues una ecuación cuadrática matricial puede no tener solución. De hecho la ecuación

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

no tiene soluciones para $X \in \mathbb{C}^{2\times 2}$. En nuestro caso particular es posible resolver la ecuación cuadrática matricial y expresar el operador hipergeométrico de la forma (4.8). Observemos que para poder expresar el operador $\widetilde{D}$ de esta forma, necesitamos encontrar matrices A y B tales que $U = A + B + 1$ y $V = AB$. Por lo tanto B debe ser una solución de la ecuación cuadrática matricial

$$B^2 + (1-U)B + V.$$

Observemos que si $\nu \in \mathbb{C}$, el determinante de la matriz $\nu^2 + (1-U)\nu + V$ es un polinomio en ν de grado $2(\ell+1)$ y por lo tanto tiene $2(\ell+1)$ raíces. Estas están dadas por las dos soluciones de la ecuación $\nu(\nu - n - \ell - i - 2) + i(n + i + 1) = 0$ para $0 \le i \le \ell$. Tomemos $\{(\nu_i, v_i)\}_{i=0}^{\ell}$ donde ν_i es una raíz de $\det(\nu^2 + (1-U)\nu + V)$, $v_i \in \ker(\nu_i^2 + (1-U)\nu_i + V)$ y $\nu_i \neq \nu_j$ si $i \neq j$. Entonces construimos la matriz W cuya i-ésima columna es v_i y la matriz diagonal Λ donde $\Lambda_{ii} = \nu_i$, entonces $B = W\Lambda W^{-1}$ es una solución de la ecuación cuadrática $B^2 + (1-U)B + V = 0$. Para verificar esto notemos que

$$W\Lambda^2 + (1-U)W\Lambda + VW = 0,$$

por la forma en que hemos construido las columnas de la matriz W en términos de los vectores v_i. Por lo tanto

$$W\Lambda^2 W^{-1} + (1-U)W\Lambda W^{-1} + V = 0.$$

Entonces tenemos que el operador $\widetilde{D}$ dado en el Teorema 4.5 es equivalente a

$$\widetilde{D}F = u(1-u)F'' + (C - u(A+B+1))F' - ABF = 0,$$

donde $B = W\Lambda W^{-1}$ y $A = U - B - 1$.

Ahora ponemos nuestra atención en los siguientes espacios vectoriales de funciones a valores en $\mathbb{C}^{\ell+1}$:

$$\begin{aligned} S_\lambda &= \{H = H(u) : \bar{D}H = \lambda H, H \text{ analítica en } u = 0\}, \\ W_\lambda &= \{F = F(u) : \widetilde{D}F = \lambda F, F \text{ analítica en } u = 0\}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Por el Teorema 4.5 sabemos que la correspondencia $F \mapsto \psi F$ es una aplicación lineal inyectiva de W_λ en S_λ. Ahora queremos probar que esta aplicación es suryectiva.

Una función a valores vectoriales $F(u)$ en W_λ es una solución de la ecuación hipergeométrica matricial

$$u(1-u)F'' + (C - uU)F' - (V + \lambda)F = 0.$$

Como los autovalores de C son distintos de $0, -1, -2, ...$, la función F está caracterizada por su valor en 0 y para $|u| < 1$ está dada por

$$F(u) = {}_2H_1\left(\begin{smallmatrix} U\,;\,V+\lambda \\ C \end{smallmatrix}; u\right) F(0) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{u^i}{i!}[C; U; V+\lambda]_i F(0), \tag{4.10}$$

donde el símbolo $[C; U; V+\lambda]_i$ está definido inductivamente por

$$\begin{aligned} [C; U; V+\lambda]_0 &= 1, \\ [C; U; V+\lambda]_{i+1} &= (C+i)^{-1}\left(i^2 + i(U-1) + V + \lambda\right)[C; U; V+\lambda]_i, \end{aligned}$$

para todo $i \geq 0$ (ver [Tir03]). El hecho de que la función F esté caracterizada por su valor en 0 implica que $\dim(W_\lambda) = \ell + 1$.

Si $H \in S_\lambda$ entonces los coeficientes H_i de $H(u) = \sum_{i=0}^{\infty} H_i u^i$ satisfacen la siguiente relación de recurrencia

$$(i(i+1) + B_0 - B_1)H_i + ((1-i)(A_0+i) + B_1 - \lambda)H_{i-1} = 0, \tag{4.11}$$

para todo $i \geq 0$, donde tomamos $H_{-1} = 0$.

La matriz $B_0 - B_1$ es simétrica y por lo tanto diagonalizable. Para diagonalizarla introducimos la matriz Ω definida por $\Omega = (\Omega_{i,j})$ donde $\Omega_{i,j} = {}_3F_2\left(\begin{smallmatrix} -j,\,-i,\,j+1 \\ 1,\,-\ell \end{smallmatrix}; 1\right)$, un caso particular de los polinomios ortogonales de Hahn. Entonces los coeficientes $\Omega_{i,j}$ satisfacen la siguiente relación de recurrencia de tres términos (ver la Proposición 5.1 de [GPT01])

$$i(\ell-i+1)\Omega_{i-1,j} - (i(\ell-i+1) + (i+1)(\ell-i))\Omega_{i,j} + (i+1)(\ell-i)\Omega_{i+1,j} = -j(j+1)\Omega_{i,j}.$$

Por lo tanto $\Omega_j = (\Omega_{0,j}, \ldots, \Omega_{\ell,j})^t$ es un autovector de la matriz $B_0 - B_1$, digamos

$$(B_0 - B_1)\Omega_j = -j(j+1)\Omega_j.$$

En otras palabras

$$\Omega^{-1}(B_0 - B_1)\Omega = -\sum_{j=0}^{\ell} j(j+1)E_{j,j}. \tag{4.12}$$

Si multiplicamos la relación de recurrencia (4.11) por Ω^{-1} a la izquierda y usamos (4.12), obtenemos

$$\Big(i(i+1) - \sum_{j=0}^{\ell} j(j+1)E_{jj}\Big)\Omega^{-1}H_i + \Omega^{-1}\big((1-i)(A_0+i) + B_1 - \lambda\big)\Omega(\Omega^{-1}H_{i-1}) = 0. \tag{4.13}$$

Teorema 4.6. *La aplicación lineal $F \mapsto \psi F$ es un isomorfismo de W_λ sobre S_λ.*

Demostración. Ya sabemos que $F \mapsto \psi F$ es una aplicación lineal inyectiva de W_λ en S_λ, de modo que es suficiente probar que $\dim(S_\lambda) \leq \ell + 1$.

Si $H \in S_\lambda$, de la ecuación de recurrencia (4.13) obtenemos que

$$\Omega^{-1}H_0 = (x, 0, \ldots, 0)^t,$$

para algún $x \in \mathbb{C}$. Además (4.13) determina sucesivamente las componentes j-esimas de $\Omega^{-1}H_s$ para $j \neq s$ y $1 \leq s \leq \ell$, y para $s > \ell$ los vectores H_s. Por lo tanto $\dim(S_\lambda) \leq \ell + 1$. $\square$

Corolario 4.7. *Sea $F(u) = \psi^{-1}(u)H(u)$, donde $H = (h_0(u), ..., h_\ell(u))^t \in S_\lambda$. Si $F(u) = (F_0(u), ..., F_\ell(u))^t$, entonces para todo $0 \leq k \leq \ell$ tenemos que*

$$F_k(0) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{j+k} \binom{k}{j} h_j^{(k)}(0).$$

Demostración. La componente k-ésima del vector columna $F(u) = T(u^{-1})X^{-1}H(u)$ está dada por

$$F_k(u) = u^{-k} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{j+k} \binom{k}{j} h_j(u).$$

Por lo tanto el corolario es una consecuencia directa del Teorema 4.6 pues F_k y h_j $(0 \leq j \leq \ell)$ son analíticas en $u = 0$. □

Como una consecuencia de los resultados obtenidos en esta sección, principalmente el Teorema 4.5, estamos en condiciones de dar una versión mas detallada del Teorema 3.35.

Teorema 4.8. *Las funciones esféricas irreducibles Φ de $\mathrm{SU}(3)$ de tipo (n, ℓ), se corresponden precisamente con las autofunciones simultáneas H con valores en $\mathbb{C}^{\ell+1}$, polinomiales, de los operadores diferenciales $\bar{D}$ y $\bar{E}$, introducidos en (4.1) y (4.2), tales que $h_i(u) = (1-u)^{i-n-\ell} g_i(u)$ para todo $n + \ell + 1 \leq i \leq \ell$ con g_i polinomial y $H(0) = (1, \ldots, 1)^t$.*

Como la función ψ definida en (4.3) es polinomial, para probar el teorema es suficiente probar el siguiente resultado.

Teorema 4.9. *Sea H la función a valores en $\mathbb{C}^{\ell+1}$ asociada a la función esférica irreducible Φ de tipo (n, ℓ) de $\mathrm{SU}(3)$. Si $F = \psi^{-1}H$, entonces F es un polinomio.*

Proof. En primer lugar consideraremos el caso $n \geq 0$.

La función $H = H(t)$ como función de una variable t fué introducida en la Sección 3.2 del Capítulo 1 y después, en el principio de la Sección 4.1, cambiamos la variable para obtener $H(u) = H(1 - u)$. Por los Teoremas 3.35 y 4.6 la función $F = \psi^{-1}H$ es una autofunción analítica de $\widetilde{D}$ en el intervalo cerrado $[0, 1]$.

Sea $V = V(u)$ la función matricial peso con soporte en el intervalo [0,1] definida por

$$V(u) = u(1-u)^n \sum_{i=0}^{\ell} (1-u)^{\ell-i} E_{i,i}.$$

Por (13) de [GPT02a] se sigue, haciendo el cambio de variables $u = 1-t$, que $\bar{D}$ es un operador simétrico con respecto a la forma bilineal matricial antisimétrica a valores matriciales definida en las funciones C^∞, en el intervalo $[0, 1]$ por

$$\langle P, Q \rangle_V = \int_0^1 Q^*(u)V(u)P(u)\, du.$$

Entonces $\widetilde{D} = \psi^{-1}\bar{D}\psi$ es un operador simétrico con respecto a

$$\langle P, Q \rangle_W = \int_0^1 Q^*(u)W(u)P(u)\, du,$$

donde $W = \psi^* V \psi$. En otras palabras $(W, \widetilde{D})$ es un par clásico en el sentido de [GPT01], ver también [Dur97]. Observemos que el peso W tiene momentos finitos pues hemos asumido que

$n \geq 0$. Por lo tanto existe una sucesión ortonormal $\{Q_r\}_{r\geq 0}$ de polinomios con valores en las matrices $(\ell+1)\times(\ell+1)$, tal que $\widetilde{D}Q_r = Q_r\Lambda_r$ donde Λ_r es una matriz diagonal con entradas reales. Estamos tomando $Q_r = P_r^*$ de [GPT01].

Ahora consideramos el espacio L^2 de todas las funciones F sobre el intervalo [0,1] a valores en $\mathbb{C}^{\ell+1}$ con el producto interno

$$(F_1, F_2)_W = \int_0^1 F_2^*(u)W(u)F_1(u)\,du. \tag{4.14}$$

Sea $\{e_i\}_{i=0}^{\ell}$ la base canónica de $\mathbb{C}^{\ell+1}$. Entonces

$$(Q_r e_j, Q_s e_i)_W = e_i^* \langle Q_r, Q_s\rangle_W e_j = \delta_{r,s}\delta_{i,j}.$$

Por lo tanto $\{Q_r e_j\}$ para $r \geq 0$, $0 \leq j \leq \ell$, es una familia ortonormal de polinomios con valores en $\mathbb{C}^{\ell+1}$ tal que

$$\widetilde{D}(Q_r e_j) = (\widetilde{D}Q_r)e_j = Q_r\Lambda_R e_j = \lambda_r^j(Q_r e_j),$$

donde $\Lambda_r = \Delta(\lambda_r^0, \ldots, \lambda_r^\ell)$.

Ahora escribimos nuestra función $F = \sum_{r,j} a_{r,j}Q_r e_j$, donde $a_{r,j} = (F, Q_r e_j)_W$. Entones la serie converge no solo en la norma L^2 sino también en la topología basada en la convergencia uniforme de funciones y sus derivadas sucesivas. Por lo tanto,

$$\lambda F = \widetilde{D}F = \sum_{r,j} a_{r,j}\lambda_r^j Q_r e_j.$$

Entonces $a_{r,j} = 0$ si $\lambda_{r,j} \neq \lambda$. Como $\dim W_\lambda < \infty$ se sigue que F es un polinomio.

Para considerar el caso $n < 0$ necesitamos algunos lemas.

Lema 4.10. *Si H es una función con valores en $\mathbb{C}^{\ell+1}$, analítica en $u = 1$ y satisface*

$$h_i(u) = (1-u)^{i-n-\ell}g_i(u), \quad n+\ell+1 \leq i \leq \ell,$$

con g_i analítica en $u = 1$, entonces $\bar{D}H$ es analítica en $u = 1$ y

$$(\bar{D}H)_i = (1-u)^{i-n-\ell}f_i(u), \quad n+\ell+1 \leq i \leq \ell,$$

con f_i analítica en $u = 1$.

Demostración. Por la definición de $\bar{D}$ tenemos que

$$\begin{aligned}(\bar{D}H)_i =& u(1-u)h_i'' + (2 - u(n+\ell-i+3))h_i' \\ &+ \frac{1}{u}(i+1)(\ell-i)(h_{i+1}-h_i) - \frac{1-u}{u}i(\ell-i+1)(h_i - h_{i-1}),\end{aligned} \tag{4.15}$$

por lo cual es claro que $(\bar{D}H)_i$ es analítica en $u = 1$ para $0 \leq i \leq \ell$. Para $n+\ell+1 \leq i \leq \ell$ reemplazamos $h_i = (1-u)^{i-n-\ell}g_i(u)$ en la ecuación (4.15) y obtenemos

$$\begin{aligned}(\bar{D}H)_i &= (1-u)^{i-n-\ell}(\bar{D}G)_i + u(1-u)^{i-n-\ell-1}(i-n-\ell)(i-n-\ell-1)g_i \\ &\quad - (1-u)^{i-n-\ell}\big(2u(i-n-\ell)g_i' - i(\ell-i+1)g_{i-1} + (i+1)(\ell-i)g_{i+1}\big) \\ &\quad - (1-u)^{i-n-\ell-1}(2 - u(n+\ell-i+3))(i-n-\ell)g_i \\ &= (1-u)^{i-n-\ell}\big((\bar{D}G)_i - 2u(i-n-\ell)g_i' - 2(i-n-\ell)g_i \\ &\quad + i(\ell-i+1)g_{i-1} - (i+1)(\ell-i)g_{i+1}\big).\end{aligned}$$

Esto completa la prueba del Lema. ☐

Sea

$$\mathcal{V} = \{P \in \mathbb{C}^{\ell+1}[u] : (\psi P)_i = (1-u)^{i-n-\ell} g_i,\ g_i \in \mathbb{C}[u], n+\ell+1 \le i \le \ell\}. \tag{4.16}$$

Lema 4.11. *El espacio lineal $\mathcal{V}$ es estable por el operador diferencial $\widetilde{D}$.*

Demostración. Sea $P \in \mathbb{C}^{\ell+1}[u]$. Entonces $\widetilde{D}P \in \mathbb{C}^{\ell+1}[u]$. Por lo tanto

$$(\psi(\widetilde{D}P))_i = (\bar{D}(\psi P))_i = (1-u)^{i-n-\ell} f_i(u),$$

con f_i analítica en $u=1$ por el Lema 4.10. Pero como $(\psi(\widetilde{D}P))_i$ es un polinomio, se sigue que f_i es un polinomio. Esto completa la prueba. □

Lema 4.12. *Si $P \in \mathcal{V}$, entonces $P \in L^2_W(0,1)$.*

Demostración. Sea $P \in \mathcal{V}$. Entonces

$$\|P\|^2_W = \int_0^1 P^*\psi^* V \psi P\, du = \int_0^1 (\psi P)^* V (\psi P)\, du = \sum_{i=0}^{\ell} \int_0^1 (\psi P)^*_i (\psi P)_i u(1-u)^{n+\ell-i}\, du$$

$$= \sum_{i=0}^{n+\ell} \int_0^1 (\psi P)^*_i (\psi P)_i u(1-u)^{n+\ell-i}\, du + \sum_{i=n+\ell+1}^{\ell} \int_0^1 u(1-u)^{i-n-\ell} |g_i(u)|^2\, du < \infty.$$

Por lo tanto $P \in L^2_W(0,1)$. □

Ahora consideramos la clausura $\bar{\mathcal{V}}$ en $L^2_W(0,1)$ del subespacio $\mathcal{V}$.

Proposición 4.13. *Sea H la función a valores en $\mathbb{C}^{\ell+1}$ asociada a una función esférica irreducible Φ de tipo (n,ℓ). Si $F = \psi^{-1}H$, entonces $F \in \bar{\mathcal{V}}$.*

Demostración. La función F es analítica en $u=1$ pues H y ψ^{-1} son analíticas en $u=1$. Entonces

$$F = \sum_{j\ge 0} (1-u)^j F_j.$$

Además podemos escribir $\psi(u) = \sum_{0\le k\le \ell} (1-u)^k \psi_k$, donde los coeficientes ψ_k son matrices $(\ell+1)\times(\ell+1)$. Entonces

$$(\psi F)_i = \sum_{j=0}^{\infty} (1-u)^j \sum_{k=0}^{\ell} (1-u)^k (\psi_k F_j)_i = \sum_{s=0}^{\infty} (1-u)^s \sum_{k=0}^{\min\{s,\ell\}} (\psi_k F_{s-k})_i.$$

Pero por el Teorema 3.35 tenemos que

$$\sum_{k=0}^{\min(s,\ell)} (\psi_k F_{s-k})_i = 0, \quad \text{for all } \ s < i-n-\ell.$$

Por lo tanto

$$\Big(\psi \sum_{j=0}^{N} (1-u)^j F_j\Big)_i = \sum_{s=i-n-\ell}^{N+\ell} (1-u)^s \sum_{k=0}^{\min\{s,\ell\}} (\psi_k F_{s-k})_i,$$

y entonces $\sum_{j=0}^{N} (1-u)^j F_j \in \mathcal{V}$. Ahora como F es analítica en el intervalo $[0,1]$ (Teorema 4.6) se sigue que $F \in \bar{\mathcal{V}}$. □

Prueba del Teorema 4.9 para $n < 0$. Sea $\mathcal{V} \subset L^2_W(0,1)$ el espacio lineal introducido en (4.16), y para $j \geq 0$ ponemos

$$\mathcal{V}_j = \{P \in \mathcal{V} : \deg P \leq j\}.$$

Como $\widetilde{D}$ es simétrico, $\mathcal{V}_j^\perp \cap \mathcal{V}_{j+1}$ es invariante por $\widetilde{D}$, y existe una base ortonormal de $\mathcal{V}_j^\perp \cap \mathcal{V}_{j+1}$ compuesta por autovectores de $\widetilde{D}$. También observamos que $\mathcal{V}_0 = \{0\}$ pues $n < 0$. Entonces por inducción en $j \geq 0$ tenemos que existe una base ortonormal $\{P_i\}$ de $\mathcal{V}$ tal que $\widetilde{D}P_i = \lambda_i P_i$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$.

Por la Proposición 4.13 $F \in \bar{\mathcal{V}}$. Entonces

$$F = \sum_{j=0}^{\infty} a_i P_i \qquad a_i = \langle F, P_i \rangle_W.$$

Como F es analítica en el intervalo $[0,1]$, la serie converge no solo en $L^2_W(0,1)$ sino también en la topología basada en la convergencia uniforme de sucesiones de funciones y sus sucesivas derivadas. Por lo tanto

$$\lambda F = \widetilde{D}F = \widetilde{D}\Big(\sum_{j=0}^{\infty} a_i P_i\Big) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \lambda_i P_i,$$

y entonces $a_i = 0$ salvo en el caso en que $\lambda = \lambda_i$. Entonces

$$F = \sum_{\lambda = \lambda_i} a_i P_i,$$

y como $\dim W_\lambda < \infty$, podemos concluir que la función F es un polinomio. □

Encontramos interesante recalcar el siguiente hecho que ya fue establecido en [GPT02a].

Corolario 4.14. *Sea H la función a valores en $\mathbb{C}^{\ell+1}$ asociada a una función esférica irreducible Φ de $\mathrm{SU}(3)$ de tipo (n,ℓ). Si λ es el autovalor de $\widetilde{D}$ correspondiente a la autofunción $F = \psi^{-1}H$, entonces*

$$\lambda = -w(w+n+\ell+k+2) - k(n+k+1),$$

para algún $0 \leq k \leq \ell$ y $w \geq 0$.

Demostración. En la sección anterior establecimos que toda función $F \in W_\lambda$ está dada por

$$F(u) = {}_2H_1\left({U; V+\lambda \atop C} ; u \right) F(0) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{u^i}{i!} [C; U; V+\lambda]_i F(0),$$

donde el símbolo $[C;U;V+\lambda]_i$ está definido inductivamente por

$$\begin{aligned} &[C;U;V+\lambda]_0 = 1 \\ &[C;U;V+\lambda]_{i+1} = (C+i)^{-1}(i^2 + i(U-1) + (V+\lambda))[C;U;V+\lambda]_i, \end{aligned}$$

para todo $i \geq 0$. El hecho que $F = \psi^{-1}H$ es un polinomio implica que el coeficiente $[C;U;V+\lambda]_i$ es singular para algún $i \in \mathbb{Z}$. Asumamos que $[C;U;V+\lambda]_{w+1}$ es singular y que $[C;U;V+\lambda]_w$ no es singular. Como la matriz $(C+w)$ es inversible, tenemos que $[C;U;V+\lambda]_{w+1}$ es singular si y sólo si $(w^2 + w(U-1) + V + \lambda)$ es singular. La matriz $(w^2 + w(U-1) + V + \lambda)$ es triangular superior y $(w^2 + w(U-1) + V + \lambda)_{k,k} = w^2 + w(n+\ell+k+2) + k(n+k+1) + \lambda$. Por lo tanto $[C;U;V+\lambda]_{w+1}$ es singular si y sólo si

$$\lambda = -w(w+n+\ell+k+2) - k(n+k+1),$$

para algún $0 \leq k \leq \ell$. □

4.2 Autofunciones de $\bar{D}$ y $\bar{E}$

El objetivo de esta sección es describir todas las autofunciones simultáneas con valores en $\mathbb{C}^{\ell+1}$, analíticas en $u=0$, de los operadores diferenciales $\bar{D}$ y $\bar{E}$ introducidos en (4.1) y (4.2). En la siguiente sección identificaremos entre éstas aquellas H's que correspondan precisamente a las funciones esféricas de $\mathrm{SU}(3)$ o de $\mathrm{SU}(2,1)$.

Sea $\psi=\psi(u)$ la función polinomial introducida en (4.3), que usamos para conjugar el operador $\bar{D}$ en el operador hipergeométrico $\widetilde{D}$, hecho que es la herramienta fundamental de este capítulo. Ahora, también nos interesa calcular el operador diferencial $\widetilde{E}=\psi^{-1}\bar{E}\psi$. Explicitamente $\widetilde{E}F=\psi^{-1}\bar{E}(\psi F)$, y por lo tanto

$$\begin{aligned}\widetilde{E}F&=u(1-u)\psi^{-1}M\psi F''+\psi^{-1}\big(2u(1-u)M\psi'+(C_1-C_0-uC_1)\psi\big)F'\\&\quad+\psi^{-1}\big(u(1-u)M\psi''+(C_1-C_0-uC_1)\psi'+\frac{1}{u}(D_0+D_1-uD_1)\psi\big)F.\end{aligned}$$

Lema 4.15. *Existen matrices únicas Q_0, Q_1, P_0, P_1 y R tales que*

$$u(1-u)\psi^{-1}M\psi=(1-u)(Q_0+uQ_1),$$

$$\psi^{-1}\big(2u(1-u)M\psi'+(C_1-C_0-uC_1)\psi\big)=P_0+uP_1,$$

y

$$\psi^{-1}\big(u(1-u)M\psi''+(C_1-C_0-uC_1)\psi'+\frac{1}{u}(D_0+D_1-uD_1)\psi\big)=R,$$

para todo $u\in\mathbb{C}$. De hecho, estas matrices matrices están dadas por

$$\begin{aligned}Q_0&=\textstyle\sum_{i=0}^{\ell}3iE_{i,i-1},\\Q_1&=\textstyle\sum_{i=0}^{\ell}(n-\ell+3i)E_{i,i},\\P_0&=\textstyle\sum_{i=0}^{\ell}\big(2(i+1)(n-\ell+3i)+3((i+1)^2(\ell-i)-i^2(\ell-i+1))\big)E_{i,i}\\&\quad-\textstyle\sum_{i=0}^{\ell}i(3i+3+\ell+2n)E_{i,i-1},\\P_1&=\textstyle\sum_{i=0}^{\ell}-(n-\ell+3i)(n+\ell+i+3)E_{i,i}+\sum_{i=0}^{\ell}3(i+1)(\ell-i)E_{i,i+1},\\R&=\textstyle\sum_{i=0}^{\ell}-i(3+n+2\ell)(n+i+1)E_{i,i}\\&\quad+\textstyle\sum_{i=0}^{\ell}(i+1)(\ell-i)(n+2\ell+3)E_{i,i+1}.\end{aligned}$$

Demostración. Primero tenemos que

$$\begin{aligned}u(1-u)\psi^{-1}M\psi&=u(1-u)T(u^{-1})X^{-1}MXT(u)\\&=u(1-u)T(u^{-1})\Big(\sum_{i=0}^{\ell}3iE_{i,i-1}+\sum_{i=0}^{\ell}(n-\ell+3i)E_{i,i}\Big)T(u)\\&=(1-u)(Q_0+uQ_1).\end{aligned}$$

Para probar la segunda afirmación, observamos que

$$\begin{aligned}2u(1-u)\psi^{-1}M\psi'&=2u(1-u)T(u^{-1})X^{-1}MXT'(u)\\&=2(1-u)\sum_{i=0}^{\ell}i(n-\ell+3i)E_{i,i}+6u^{-1}(1-u)\sum_{i=0}^{\ell}i(i-1)E_{i,i-1}.\end{aligned}$$

Además tenemos

$$
\begin{aligned}
\psi^{-1}(C_0 - C_1)\psi = &- 2\sum_{i=0}^{\ell}(n-\ell+3i)E_{i,i} - 3\sum_{i=0}^{\ell}\big((i+1)^2(\ell-i) - i^2(\ell-i+1)\big)E_{i,i} \\
&- 3u\sum_{i=0}^{\ell}(i+1)(\ell-i)E_{i,i+1} + 6u^{-1}\sum_{i=0}^{\ell}i(i-1)E_{i,i-1},
\end{aligned}
$$

y

$$
u\psi^{-1}C_1\psi = u\sum_{i=0}^{\ell}(n-\ell+3i)(n+\ell-i+3)E_{i,i} \quad + \sum_{i=0}^{\ell}i(\ell-3i+2n+9)E_{i,i-1}.
$$

Sumando los resultados anteriores obtenemos la segunda afirmación. Ahora calculamos

$$
\begin{aligned}
2u(1-u)\psi^{-1}M\psi'' = u^{-1}(1-u)&\sum_{i=0}^{\ell}i(i-1)(n-\ell+3i)E_{i,i} \\
&+ 3u^{-2}(1-u)\sum_{i=0}^{\ell}i(i-1)(i-2)E_{i,i-1}.
\end{aligned}
$$

Además, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\psi^{-1}(C_1 - C_0)\psi' = 2u^{-1}&\sum_{i=0}^{\ell}i(n-\ell+3i)E_{i,i} + 3\sum_{i=0}^{\ell}\big((i+1)^2(\ell-i) - i^2(\ell-i+1)\big)E_{i,i} \\
&+ 3\sum_{i=0}^{\ell}(i+1)^2(\ell-i)E_{i,i+1} - 6u^{-2}\sum_{i=0}^{\ell}i(i-1)^2E_{i,i-1},
\end{aligned}
$$

y

$$
u\psi^{-1}C_1\psi' = \sum_{i=0}^{\ell}i(n-\ell+3i)(n+\ell-i+3)E_{i,i} + u^{-1}\sum_{i=0}^{\ell}i(i-1)(\ell-3i+2n+9)E_{i,i-1}.
$$

También

$$
\begin{aligned}
u^{-1}\psi^{-1}(D_0 + D_1)\psi = -u^{-1}&\sum_{i=0}^{\ell}i\big(-6i^2 + n(i+1) + 5\ell i + 2\ell\big)E_{i,i} \\
&+ \sum_{i=0}^{\ell}(i+1)(\ell-i)(n+2\ell-3i)E_{i,i+1} + 3u^{-2}\sum_{i=0}^{\ell}i^2(i-1)E_{i,i-1},
\end{aligned}
$$

y

$$
\psi^{-1}D_1\psi = \sum_{i=0}^{\ell}i(\ell-i+1)(2n+\ell+3)E_{i,i} - u^{-1}\sum_{i=0}^{\ell}i(i-1)(2n+\ell+3)E_{i,i-1}.
$$

Sumando los resultados anteriores, queda probada la tercera afirmación. Esto completa la prueba del Lema. □

Entonces el operador diferencial $\widetilde{E} = \psi^{-1}\bar{E}\psi$ está dado explícitamente en el siguiente teorema.

Teorema 4.16. *Sea ψ la función polinomial introducida en* (4.3) *y sea $\bar{E}$ el operador diferencial dado en* (4.2). *Entonces el operador diferencial $\widetilde{E} = \psi^{-1}\bar{E}\psi$ es*

$$\widetilde{E}F(u) = (1-u)(Q_0 + uQ_1)F''(u) + (P_0 + uP_1)F'(u) + RF(u),$$

donde las matrices Q_0, Q_1, P_0, P_1 y R están dadas en el Lema 4.15.

Los operadores diferenciales D y E dados en (3.8) conmutan pues provienen, respectivamente, de los generadores algebraicamente independientes Δ_2 y Δ_3 de $D(G)^G$. Por lo tanto $\bar{D}$ y $\bar{E}$ (ver (4.1) y (4.2)) también conmutan, lo que a su vez implica que $\widetilde{D}\widetilde{E} = \widetilde{E}\widetilde{D}$. Ademas $\widetilde{E}$ lleva funciones analíticas en funciones analíticas, y por lo tanto $\widetilde{E}$ se restringe a una aplicación lineal de W_λ en si mismo. Como el valor inicial $F(0)$ determina $F \in W_\lambda$ (ver (4.10)), tenemos que la aplicación lineal $\nu : W_\lambda \longrightarrow \mathbb{C}^{\ell+1}$ definida por $\nu : F(u) \mapsto F(0)$ es un isomorfismo suryectivo. Además, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} W_\lambda & \xrightarrow{\widetilde{E}} & W_\lambda \\ {\scriptstyle\nu}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle\nu} \\ \mathbb{C}^{\ell+1} & \xrightarrow{M(\lambda)} & \mathbb{C}^{\ell+1} \end{array} \tag{4.17}$$

donde $M(\lambda)$ es la matriz $(\ell+1)\times(\ell+1)$ dada por

$$M(\lambda) = Q_0(C+1)^{-1}(U+V+\lambda)C^{-1}(V+\lambda) + P_0C^{-1}(V+\lambda) + R. \tag{4.18}$$

Ahora miramos el espacio S_λ de todas las autofunciones de autovalor λ de $\bar{D}$ que son analíticas en $u = 0$. El operador diferencial $\bar{E}$ lleva S_λ en S_λ, pues $\bar{D}$ y $\bar{E}$ conmutan y $\bar{E}(\psi F) = \psi\widetilde{E}(F) \in S_\lambda$ para todo $F \in W_\lambda$ por el Teorema 4.16.

Por la Sección 9 de [GPT02a], sabemos que para

$$\lambda = -w(w+n+\ell+k+2) - k(n+k+1) \tag{4.19}$$

con $0 \le w$, $0 \le k \le \ell$ and $0 \le w+n$, los autovalores de $\bar{E} : S_\lambda \longrightarrow S_\lambda$ son

$$\mu_k = \lambda(n-\ell+3k) - 3k(\ell-k+1)(n+k+1). \tag{4.20}$$

De los diagramas conmutativos (4.17) y el siguiente

$$\begin{array}{ccc} W_\lambda & \xrightarrow{\widetilde{E}} & W_\lambda \\ {\scriptstyle L_\psi}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle L_\psi} \\ S_\lambda & \xrightarrow{\bar{E}} & S_\lambda \end{array}$$

donde las flechas verticales corresponden a la aplicación lineal $L_\psi : F \mapsto \psi F$, se sigue que para todos los λ's de la forma (4.19), los autovalores $M(\lambda)$ son los dados en (4.20).

El siguiente resultado es el Teorema 10.3 de [GPT02a].

Teorema 4.17. *Para todo $(n,\ell) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{\ge 0}$ el polinomio característico de la matriz $M(\lambda)$ está dado por*

$$\det(\mu - M(\lambda)) = \prod_{k=0}^{\ell}(\mu - \mu_k(\lambda)),$$

donde $\mu_k(\lambda) = \lambda(n-\ell+3k) - 3k(\ell-k+1)(n+k+1)$. Además, todos los autovalores $\mu_k(\lambda)$ de $M(\lambda)$ tienen multiplicidad geométrica uno. En otras palabras, todos los autoespacios son unidimensionales.

Demostración. Consideremos el polinomio $p \in \mathbb{C}[\lambda, \mu]$ definido por $p(\lambda, \mu) = \det(\mu - M(\lambda))$. Para cada entero k tal que $0 \leq k \leq \ell$ sea $\lambda(w, k) = -w(w + n + \ell + k + 2) - k(n + k + 1)$ y sea $\mu_k(\lambda) = \lambda(n - \ell + 3k) - 3k(\ell - k + 1)(n + k + 1)$. Entonces por (4.19) y (4.20) tenemos que

$$p(\lambda(w, k), \mu_k(\lambda(w, k)) = 0,$$

para todo $w \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \leq w$ y $0 \leq w + n + k$. Como existen infinitos w que satisfacen esas condiciones, la función polinomial $w \mapsto p(\lambda(w, k), \mu_k(\lambda(w, k)))$ es identicamente cero sobre $\mathbb{C}$. Entonces, para un dado k, $(0 \leq k \leq \ell)$, tenemos que $p(\lambda, \mu_k(\lambda)) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

Ahora $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mu_k(\lambda) = \mu_{k'}(\lambda)$ para algún $0 \leq k < k' \leq \ell\}$ es un conjunto finito, de hecho $\mid \Lambda \mid \leq \ell(\ell + 1)/2$. Como para cualquier λ, $p(\lambda, \mu)$ es un polinomio mónico en μ de grado $\ell + 1$, se sigue que si $\lambda \in \mathbb{C} - \Lambda$ entonces

$$p(\lambda, \mu) = \prod_{k=0}^{\ell} (\mu - \mu_k(\lambda)) \tag{4.21}$$

para todo $\mu \in \mathbb{C}$.

Está claro que (4.21) se cumple para todo λ y todo μ, lo cual completa la prueba de la primera afirmación.

Para completar la demostración del Teorema observamos que la matriz $M(\lambda) = A + B$ donde A es una matriz triangular inferior y

$$B = \frac{3}{2} \sum_{j=0}^{\ell} \frac{(\ell - j)(j + 1)^2(\ell + j + 2)}{2j + 1} E_{j,j+1}.$$

Por lo tanto si $v = (v_0, ..., v_\ell)^t$ es un μ-autovalor de $M(\lambda)$ entonces v_0 determina v y esto implica que la multiplicidad geométrica es uno. $\square$

Observación 4.18. *Hemos visto que los autovalores de la matriz $M(\lambda)$ tienen multiplicidad geométrica uno. De todas formas, $M(\lambda)$ no es siempre diagonalizable. De hecho, $\mu_i = \mu_j$ para $i \neq j$ y $0 \leq i, j \leq \ell$ si y sólo si*

$$\lambda = -(i + j + n + 1)(i + j - \ell - 1) + ij.$$

Corolario 4.19. *Si $v = (v_0, ..., v_\ell)^t$ es un μ-autovector no nulo de $M(\lambda)$, entonces $v_0 \neq 0$.*

4.3 Funciones esféricas de SU(3) y SU(2, 1)

En esta última sección describimos todas las funciones esféricas irreducibles Φ de cualquier K-type de SU(3) y SU(2, 1), dando la función asociada $H_\Phi = H_\Phi(u)$ en una forma cerrada, usando la ecuación hipergeométrica matricial ${}_2H_1$.

Recalcamos que, haciendo el cambio de variables $u = 1 - t$, el Teorema 3.36 dice que todas las funciones esféricas irreducibles Φ de SU(2, 1) de tipo (n, ℓ) corresponden a las autofunciones simultáneas $H_\Phi = H_\Phi(u)$ de los operadores diferenciales $\bar{D}$ y $\bar{E}$, con valores en $\mathbb{C}^{\ell+1}$, que son analíticas en el intervalo $(-\infty, 0]$, y tales que $H_\Phi(0) = (1, ..., 1)^t$. En particular, una tal H_Φ pertenece al espacio vectorial S_λ de todas las autofunciones de $\bar{D}$ analíticas en $u = 0$, ver (4.9). Notemos que la función $F_\Phi = \psi^{-1} H_\Phi$ está en el espacio lineal W_λ de todas las autofunciones de $\widetilde{D}$ analíticas en $u = 0$, ver (4.9). El hecho de que H_Φ es un autovector de $\bar{E}$ se traduce en el hecho de que F_Φ es un autovector de $\widetilde{E}$. Además esto corresponde a que $F_\Phi(0)$ es un autovector de la matriz $M(\lambda)$, de acuerdo con el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} W_\lambda & \xrightarrow{\widetilde{E}} & W_\lambda \\ {\scriptstyle \nu}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \nu} \\ \mathbb{C}^{\ell+1} & \xrightarrow{M(\lambda)} & \mathbb{C}^{\ell+1} \end{array}$$

Por otro lado por el Corolario 4.7 tenemos que $F_\Phi(0) = (1, x_1, \ldots, x_\ell)^t$ para ciertos números complejos $x_1, \ldots, x_\ell \in \mathbb{C}$.

También observamos que cualquier $F_0 = (1, x_1, \ldots, x_\ell)^t \in \mathbb{C}^{\ell+1}$ tiene la propiedad de que $\psi(0)F_0 = (1, \ldots, 1)^t$. Además si $0 \neq F_0 \in \mathbb{C}^{\ell+1}$ es cualquier μ-autovalor de $M(\lambda)$ entonces, salvo un escalar, $F_0 = (1, x_1, \ldots, x_\ell)^t$ por el Corolario 4.19.

Recalcamos que las funciones $F \in W_\lambda$ están dadas en términos de la función hipergeométrica ${}_2H_1$, introducida en (4.10), y su valor inicial F_0. Por lo tanto las autofunciones simultáneas no triviales de $\widetilde{D}$ y $\widetilde{E}$ analíticas en $u = 0$ son las funciones

$$F(u) = {}_2H_1\left({U\,;\,V+\lambda \atop C}; u\right) F_0,$$

donde $F_0 = (1, x_1, \ldots, x_\ell)^t$ es un μ-autovector de $M(\lambda)$. Como F es una autofunción del operador hipergeométrico $\widetilde{D}$, ver Teorema 4.5, tiene una única continuación analítica a $\{u \in \mathbb{C} : u \notin [1, \infty)\}$. Entonces $H(u) = \psi(u)F(u)$, $-\infty < u \leq 0$, corresponde a una función esférica Φ_H de $\mathrm{SU}(2,1)$ de tipo (n, ℓ).

Resumimos todos estos resultados en el siguiente teorema.

Teorema 4.20. *Existe una correspondencia biyectiva entre las clases de equivalencia de todas las funciones esféricas irreducibles de* $\mathrm{SU}(2,1)$ *de tipo* (n, ℓ) *y los autovectores de* $M(\lambda)$ *de la forma* $F_0 = (1, x_1, \ldots, x_\ell)^t$*. Además, un representante matricial,* Φ*, de tal clase se obtiene explícitamente de*

$$H_\Phi(u) = \psi(u){}_2H_1\left({U\,;\,V+\lambda \atop C}; u\right) F_\Phi(0),$$

donde $F_\Phi(0)$ *es el único* μ*-autovector de* $M(\lambda)$ *normalizado por* $F_\Phi(0) = (1, x_1, \ldots, x_\ell)^t$*.*

A toda función esférica irreducible Θ de $\mathrm{SU}(3)$, le asociamos H_Θ, una autofunción simultánea de $\bar{D}$ y $\bar{E}$, analítica en $[0, 1]$ tal que $H_\Theta(0) = (1, \ldots, 1)^t$. En el Teorema 4.8 probamos que H_Θ es la restricción de una función polinomial, por lo tanto $H(u) = H_\Theta(u)$, $-\infty < u \leq 0$, es la función asociada a una función esférica Φ_H de $\mathrm{SU}(2,1)$. La aplicación $\Theta \mapsto \Phi_H$ da una correspondencia uno a uno entre el conjunto de todas las clases de equivalencia de funciones irreducibles de $\mathrm{SU}(3)$ de tipo (n, ℓ) en el conjunto de todas las clases de equivalencia de funciones esféricas irreducibles de $\mathrm{SU}(2,1)$ del mismo tipo. Mas explícitamente tenemos

Teorema 4.21. *Existe una correspondencia biyectiva entre las clases de equivalencias de todas las funciones esféricas irreducibles de* $\mathrm{SU}(3)$ *de tipo* (n, ℓ) *y el conjunto de pares* $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ *donde*

$$\lambda = -w(w + n + \ell + k + 2) - k(n + k + 1),$$
$$\mu = \lambda(n - \ell + 3k) - 3k(\ell - k + 1)(n + k + 1),$$

con $w, k \in \mathbb{Z}$ *y* $0 \leq w$*,* $0 \leq k \leq \ell$ *y* $0 \leq w + n$*.*

Un representante matricial Θ *de tal clase se obtiene explícitamente de*

$$H_\Theta(u) = \psi(u){}_2H_1\left({U\,;\,V+\lambda \atop C}; u\right) F_\Theta(0),$$

donde $F_\Theta(0)$ *es el único* μ*-autovector de* $M(\lambda)$ *normalizado por* $F_\Theta(0) = (1, x_1, \ldots, x_\ell)^t$*.*

Demostración. La primera afirmación es el contenido de los Corolarios 9.3 y 9.4 de [GPT02a].

Si Θ es una función esférica irreducible de SU(3) de tipo (n, ℓ) sea Φ la correspondiente función esférica de SU(2,1). Entonces $F_\Theta(0) = F_\Phi(0)$ y

$$H_\Theta(u) = H_\Phi(u) = \psi(u)_2H_1\left(\begin{smallmatrix} U\,;\,V+\lambda \\ C \end{smallmatrix};u\right)F_\Theta(0),$$

lo cual prueba este teorema. □

Sea $F = {}_2H_1\left(\begin{smallmatrix} U\,;\,V+\lambda \\ C \end{smallmatrix};u\right)F_0$, donde F_0 es el único μ-autovector de $M(\lambda)$ normalizado por $F_0 = (1, x_1, \dots, x_\ell)^t$. Si $F(u)$ es un polinomio de grado $w \geq -n$, entonces el Corolario 4.14 dice que la matriz $M_w = w(U + w - 1) + V + \lambda$ es singular y por lo tanto

$$\lambda = -w(w + n + \ell + k + 2) - k(n + k + 1),$$

para algún $0 \leq k \leq \ell$. Observemos que el hecho que $w + n \geq 0$ implica que el núcleo de M_w tiene dimensión uno pues

$$(M_w)_{ii} = (i - k)(w + i + k + n + 1),$$

y $k + i + 1 > 0$. Como F_0 es un autovector de $M(\lambda)$ de autovalor μ, la función $F(u) = {}_2H_1\left(\begin{smallmatrix} U\,;\,V+\lambda \\ C \end{smallmatrix};u\right)F_0$ es una autofunción de $\widetilde{E}$ de autovalor μ. El Teorema 4.17 dice que

$$\mu = \lambda(n - \ell + 3j) - 3j(\ell - j + 1)(n + j + 1),$$

para algún $0 \leq j \leq \ell$. Vamos a probar que $k = j$. Para probar esta afirmación necesitamos calcular el coeficiente director del polinomio $F(u)$. La matriz M_w es singular y el hecho que $F(u)$ sea un polinomio de grado w implica que

$$[C, U, V + \lambda]_w F_0 \in \ker(M_w).$$

El $\ker(M_w)$ está generado por el vector $(x_0, \dots, x_\ell)$, dado por

$$\begin{aligned} & x_i = (-1)^{i+j}\tbinom{\ell-i}{\ell-j}\tfrac{(\beta-k+1+i)_{j-i}}{(\alpha+\beta+j+i+w-k+1)_{j-i}} \qquad \text{si } i = 0, \dots, j-1 \\ & x_j = 1 \\ & x_{j+1} = x_{j+2} = \cdots = x_\ell = 0. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Por lo tanto $F(u) = {}_2H_1\left(\begin{smallmatrix} U\,;\,V+\lambda \\ C \end{smallmatrix};u\right)F_0$ es un polinomio de grado w con coeficiente director

$$v = (x_0, \dots, x_\ell) = \frac{1}{w!}[C, U, V + \lambda_j(w)]F_0 \in \ker(F_0).$$

Para calcular el autovalor μ comparamos los coeficientes directores de los polinomios $F(u)$ y $\widetilde{E}F(u)$. El coeficiente director de $\widetilde{E}F(u)$ es igual a

$$(-w(w - 1)Q_1 + wP_1 + (\alpha + 2\ell + 3)V)v.$$

Como $F(u)$ y $\widetilde{E}F(u)$ son a valores en $\mathbb{C}^{\ell+1}$, la j-ésima componente de la ecuación $F(u) = \mu\widetilde{E}F(u)$ está dada por

$$(-w(w-1)(n-\ell+3j) - w(n-\ell+3j)(n+\ell+j+3) + (n+2\ell+3)j(n+j+1))x_j = \mu x_j.$$

Por lo tanto $\mu = \lambda(n-\ell+3j)-3j(\ell-j+1)(n+j+1)$. El Teorema 4.21 da una correspondencia entre las clases de equivalencia de todas las funciones esféricas irreducibles de SU(3) y el conjunto de pares (λ, μ),

$$\lambda = -w(w+n+\ell+k+2) - k(n+k+1), \quad \mu = \lambda(n-\ell+3k) - 3k(\ell-k+1)(n+k+1),$$

con $w, k \in \mathbb{Z}$ y $0 \le w$, $0 \le k \le \ell$ y $0 \le w+n$. Por lo tanto hemos probado que $F(u)$ es exactamente el representante matricial dado en el Teorema 4.21. Resumimos todos estos resultados en el siguiente Teorema.

Teorema 4.22. *Sean $\lambda \in \mathbb{C}$ y $(n,\ell) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}$, y sea*

$$F = {}_2H_1\left({U\,;\,V+\lambda \atop C} ; u \right) F_0,$$

donde F_0 es el único μ-autovector de $M(\lambda)$ normalizado por $F_0 = (1, x_1, \ldots, x_\ell)^t$. Entonces $F(u)$ es un polinomio de grado mayor o igual a $-n$ si y sólo si existe una función esférica Θ de SU(3) *de tipo (n,ℓ) tal que $F(u) = F_\Theta(u)$ para todo $u \in \mathbb{R}$.*

4.4 Comportamiento asintótico

En esta sección estudiaremos el comportamiento asintótico de las autofunciones del operador diferencial D alrededor del punto $t = \infty$. Esto se logra descomponiendo el espacio $V(\lambda)$ de todas las autofunciones de D en una suma directa de ciertos espacios vectoriales $W_\lambda(p)$. Estos subespacios de $V(\lambda)$ resultan ser estables por el operador diferencial E, razón por la cual podemos identificar, dentro de $V(\lambda)$ aquellas autofunciones simultáneas de D y E

4.4.1 El espacio $V(\lambda)$

En primer lugar estudiamos el espacio vectorial de todas las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales $DH(t) = \lambda H(t)$ alrededor del punto $t = \infty$ (En este punto el lector puede encontrar conveniente revisar el Teorema (3.36)). Hacemos el cambio de variables $s = \frac{1}{t}$ y obtenemos la siguiente expresión del operador diferencial D.

$$DH = s^2(s-1)H'' + s(A_0 - s(A_0-2))H' + \frac{1}{s-1}(sB_0 - B_1)H. \tag{4.23}$$

Denotamos por $V(\lambda)$ al espacio vectorial de todas las soluciones del sistema $DH = \lambda H$, es decir

$$V(\lambda) = \{H = H(s) : DH = \lambda H,\ 0 < s < 1\}.$$

Si H es una función no nula en $V(\lambda)$ de la forma $H(s) = s^p G(s)$ con G analítica en $s = 0$ y $p \in \mathbb{C}$, observamos la relación entre λ y p.

Lema 4.23. *Si $H(s) = s^p G(s)$ con G analítica en $s = 0$ y $G(0) \neq 0$ satisface $DH = \lambda H$, entonces $\lambda = p(n+\ell-k+2-p) + k(\ell-k+1)$ para algún $0 \le k \le \ell$.*

Demostración. Sea $G(s) = \sum_{j=0}^{\infty} s^j G_j$; entonces $DH = \lambda H$ si y sólo si

$$\begin{aligned} &s^2(s-1)G'' + s(A_0 - 2p - s(A_0 - 2 - 2p))G' \\ &\quad + \Big(p(A_0 - p + 1 - s(A_0 - 1 - p)) + \frac{(sB_0 - B_1)}{s-1}\Big)G = \lambda G. \end{aligned}$$

Si multiplicamos la expresión anterior por $(s-1)$ y fijamos $s=0$, obtenemos $(p(p-1)-pA_0-B_1-\lambda)G(0)=0$. Entonces $G(0)$ está en el núcleo de la matriz triangular superior

$$\begin{aligned} p(p-1)-pA_0-B_1-\lambda &= \sum_{i=0}^{\ell}\big(p(n+\ell-i+2-p)+i(\ell-i+1)-\lambda\big)E_{ii} \\ &\quad+\sum_{i=0}^{\ell} i(\ell-i+1)E_{i,i-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto λ es igual a $p(n+\ell-k+2-p)+k(\ell-k+1)$ para algún $0\le k\le\ell$. Con esto completamos la demostración. □

Dado $\lambda\in\mathbb{C}$ y $0\le k\le\ell$, sea p_k una solución de la ecuación cuadrática

$$\lambda=\lambda_k(p)=p(n+\ell-k+2-p)+k(\ell-k+1). \tag{4.24}$$

Observación 4.24. *Si p_k es una solución de la ecuación cuadrática* (4.24)*, entonces la otra solución viene dada por $p_k'=n+\ell-k+2-p_k$, i.e. $\lambda=\lambda_k(p_k)=\lambda_k(p_k')$.*

De aquí en adelante, p_k y $p_k'=n+\ell-k+2-p_k$ denotarán las dos soluciones de la ecuación cuadrática (4.24). Ahora introducimos el siguiente espacio vectorial de funciones con valores en $\mathbb{C}^{\ell+1}$

$$W_\lambda(p)=\{H\in V_\lambda : H(s)=s^pG(s), G \text{ analítica en } s=0\}, \tag{4.25}$$

Si $H(s)=s^{p_k}G(s)\in W_\lambda(p_k)$, para alguna función $G(s)=\sum_{j=0}^{\infty}s^jG_j$, analítica en $s=0$, entonces los coeficientes vectoriales $G_j\in\mathbb{C}^{\ell+1}$ satisfacen la siguiente relación de recurrencia de tres términos

$$M_jG_j+N_jG_{j-1}+O_jG_{j-2}=0, \tag{4.26}$$

donde las matrices M_j, N_j y O_j están dadas por

$$\begin{aligned} N_j &= p_k(2A_0-2p_k-2)+(j-1)(A_0+A_1-4p_k-4-2(j-2))+B_0-\lambda,\\ O_j &= p_k(p_k-A_0+1)+(j-2)(j-A_0+2p_k-1),\\ M_j &= p_k(p_k+2j-A_0-1)+j(j-A_0-1)-B_1+\lambda\\ &= \sum_{i=0}^{\ell}\big(p_k(2j+i-k)-j(n+\ell+2-i-j)-i(\ell-i+1)\\ &\quad+k(\ell-k+1)\big)E_{ii}+i(\ell-i+1)E_{i,i-1}. \end{aligned}$$

A continuación definimos los siguientes subconjuntos de los números racionales

$$\begin{aligned} \Omega &= \left\{\tfrac{n+\ell-i+2}{2} : 0\le i\le\ell\right\},\\ \Omega_k &= \left\{\tfrac{j(n+\ell-i+2-j)+i(\ell-i+1)-k(\ell-k+1)}{2j+i-k} : 2j+i-k\ne 0, 0\le i\le\ell\,, 0\le j\right\}, \end{aligned}$$

Lema 4.25. *Sea p_k, $0\le k\le\ell$, una solución de la ecuación cuadrática*

$$\lambda=\lambda_k(p)=p(n+\ell-k+2-p)+k(\ell-k+1),$$

y sea p_i una solución de $\lambda=\lambda_i(p_i)$ para algún $0\le i\le\ell$. Si $p_i=p_k+j$ para algún $j\in\mathbb{Z}_{\ge0}$ y $2j+i-k\ne0$ entonces $p_k\in\Omega_k$.

Demostración. El hecho que $p_i = p_k + j$ implica que $\lambda = \lambda_k(p_k) = \lambda_i(p_k + j)$. Por lo tanto tenemos que

$$p_k(n + \ell - k + 2 - p_k) + i(\ell - k + 1) = (p_k + j)(n + \ell - i + 2 - p_k - j) + i(\ell - i + 1),$$

y como $2j + i - k \neq 0$ resulta

$$p_k = \frac{j(n + \ell - i + 2 - j) + i(\ell - i + 1) - k(\ell - k + 1)}{2j + i - k}.$$

Esto completa la demostración del lema. $\square$

Por otro lado sea Υ el subconjunto de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}$ dado por

$$\Upsilon = \{(n, \ell) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0} : n \equiv \ell \mod (3), \quad -2\ell < n < \ell\}.$$

Observación 4.26. *Si $p_k \notin \Omega_k \cup \Omega$ para todo $0 \leq k \leq \ell$ y $(n, \ell) \notin \Upsilon$ entonces la matriz M_j es inversible para todo $j > 0$. Por lo tanto la relación de recurrencia* (4.26) *determina completamente la serie $G = \sum_{j=0}^{\ell} s^j G_j$ una vez que hemos elegido el vector $G_0 = G(0) \in \ker(M_0)$.*

Observación 4.27. *Sea $\lambda \in \mathbb{C}$, y sea p_k una solución de la ecuación cuadrática* (4.24). *Si $p_k \notin \Omega_k \cup \Omega$ para todo $0 \leq k \leq \ell$ y $(n, \ell) \notin \Upsilon$ entonces el núcleo de la matriz*

$$M_0 = p_k(p_k - A_0 - 1) - B_1 + \lambda_k(p_k),$$

está generado por el vector $v \in \mathbb{C}^{\ell+1}$, dado por

$$\begin{aligned} v_0 &= v_1 = \ldots = v_k = 0, \\ v_{k+j} &= \frac{(k + j)(\ell - k - j + 1)}{j(\ell - p_k - 2k - j + 1)} v_{k+j-1}, \quad j = 1, \ldots, \ell - k. \end{aligned}$$

Lema 4.28. *Sean $p, q \in \mathbb{C}$ y sean $G_1(s)$ y $G_2(s)$ dos funciones con valores en $\mathbb{C}^{\ell+1}$, analíticas en $s = 0$. Si $G_1(0) \neq 0$ y $G_2(0) \neq 0$, entonces $s^p G_1(s) = s^q G_2(s)$ si y sólo si $p = q$.*

Demostración. Como $G_1(0) \neq 0$ y $G_2(0) \neq 0$, entonces existe $0 \leq i_0, j_0 \leq \ell$ tal que $G_1(0)_{i_0} \neq 0$ y $G_2(0)_{j_0} \neq 0$. Por lo tanto $s^p G_1(s) = s^q G_2(s)$ implica que $s^{p-q} = \frac{G_2(s)_{j_0}}{G_1(s)_{i_0}}$ y $s^{q-p} = \frac{G_1(s)_{i_0}}{G_2(s)_{j_0}}$ son analíticas en $s = 0$ y entonces $p = q$. $\square$

Teorema 4.29. *Sea $\lambda \in \mathbb{C}$, $0 \leq k \leq \ell$ y p_k, p_k' tales que $\lambda = \lambda_k(p_k) = \lambda_k(p_k')$. Si $p_k, p_k' \notin \Omega \cup \Omega_k$ y $(n, \ell) \notin \Upsilon$ entonces*

$$V(\lambda) = \bigoplus_{k=0}^{\ell} W_\lambda(p_k) \oplus W_\lambda(p_k').$$

Demostración. Como M_j es inversible para todo $j > 0$, entonces $H(s) = s^{p_k} G(s) \in W_\lambda(p_k)$ si y sólo si G_0 está en el núcleo de la matriz M_0. Como M_0 está dada por

$$M_0 = \sum_{i=0}^{\ell} \big(p_k(i - k) - i(\ell - i + 1) + k(\ell - k + 1)\big)E_{ii} + i(\ell - i + 1)E_{i,i-1},$$

el hecho que $p_k \notin \Omega_k$ implica que la dimensión del núcleo de M_0 es 1 y entonces $\dim(W_\lambda(p_k)) = 1$.

Para ver que la suma es directa, tomemos $H \in W_\lambda(p_k) \cap W_\lambda(p'_k)$. Si $H \neq 0$ entonces $H = s^{p_k} G_1(s) = s^{p'_k} G_2(s)$ con G_1 y G_2 analíticas en $s = 0$. La relación de recurrencia (4.26) dice que $G_1(0) \neq 0$ y $G_2(0) \neq 0$ porque de lo contrario $G_1 \equiv 0$ o $G_2 \equiv 0$. Por lo tanto el Lema 4.28 indica que $p_k = p'_k$, y contradice el hecho que $p_k \notin \Omega$. Por lo tanto $W_\lambda(p_k) \cap W_\lambda(p'_k) = 0$.

Sea $H \in W_\lambda(p_k) \cap W_\lambda(p_i)$ para $i \neq k$. Si $H \neq 0$ entonces $H = s^{p_k} G_1(s) = s^{p_i} G_2(s)$ con G_1 y G_2 analíticas en $s = 0$ con $G_1(0) \neq 0$ y $G_2(0) \neq 0$. El Lema 4.28 implica que $p_k = p_i$ y el Lema 4.25 dice $p_k \in \Omega_k$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $W_\lambda(p_k) \cap W_\lambda(p_i) = 0$. Como la dimensión de $W_\lambda(p_k)$ es uno y la dimensión de $V(\lambda)$ es $2(\ell + 1)$, el teorema queda probado. □

Lema 4.30. *Sea $p_k \notin \Omega_k$ y $(n, \ell) \in \Upsilon$ tal que $\ell - n = 3m$. Entonces las matrices M_j, $j \geq 1$, son inversibles salvo que $k \in \{i \in \mathbb{N} : \max\{0, 2m - \ell\} \leq i \leq \min\{\ell, 2m\}\}$. En tal caso $(M_j)_{ii} = 0$, donde $j = k - m$ y $i = 2m - k$.*

Demostración. Como $p_k \notin \Omega_k$, la matriz M_j es inversible salvo que

$$2j + i - k = 0, \text{ y } j(n + \ell + 2 - i - j) + i(\ell - i + 1) - k(\ell - k + 1) = 0.$$

esto dice que $i = 2m - k$ y $j = m - i$ para $\max\{0, 2m - \ell\} \leq k \leq \min\{\ell, 2m\}$ y $\max\{0, 2m - \ell\} \leq i \leq m - 1$. Esto completa la prueba del lema. □

Lema 4.31. *Sea $(n, \ell) \in \Upsilon$ tal que $\ell - n = 3m$ con $0 \leq n \leq \ell$. Supongamos que $k \in \{i \in \mathbb{N} :$ $\max\{0, 2m - \ell\} \leq i \leq \min\{\ell, 2m\}\}$, $i = 2m - k$ y $j = k - m$. Entonces $W_\lambda(p_i) \subset W_\lambda(p_k)$.*

Demostración. Observemos que

$$\begin{aligned}
\lambda_i(p_k + j) &= (p_k + j)(n + \ell - 2m + k + 2 - p_k - j) + (2m - k)(\ell - 2m + k + 1) \\
&= p_k(n + \ell - k + 2 - p_k) + k(\ell - k + 1) - k(\ell - k + 1) \\
&\quad + j(n + \ell - 2m + k + 2 - j) + (2m - k)(\ell - 2m + k + 1) \\
&= \lambda_k(p_k).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $p_i = p_k + j$; si $s^{p_i} G_1(s) \in W_\lambda(p_i)$ entonces $s^{p_i} G_1(s) = s^{p_k + j} G_1(s) = s^{p_k}(s^j G_1(s)) \in W_\lambda(p_k)$. □

Lema 4.32. *Sea $(n, \ell) \in \Upsilon$ tal que $\ell - n = 3m$ con $0 < m < \ell$. Si $k \in \{i \in \mathbb{N} : \max\{0, 2m - \ell\} \leq i \leq \min\{\ell, 2m\}\}$, entonces el espacio vectorial $W_\lambda(p_k)$ tiene dimensión dos y se descompone de la siguiente forma*

$$W_\lambda(p_k) = W_\lambda(p_i) \oplus \widetilde{W}_\lambda(p_k),$$

donde $\widetilde{W}_\lambda(p_k) = \mathbb{C}.\widetilde{G}$ para algún $\widetilde{G} \in W_\lambda(p_k)$ tal que $\widetilde{G}(0) \neq 0$.

Demostración. Sea $s^{p_k} G \in W_\lambda(p_k)$. Entonces vimos que G satisface la siguiente relación de recurrencia de tres términos

$$M_j G_j + N_j G_{j-1} + O_j G_{j-2} = 0. \tag{4.27}$$

Por lo tanto $G_0 \in \ker(M_0)$. Si hacemos una elección para G_0, entonces los vectores $G_1, \ldots, G_{j_0 - 1}$, $j_0 = k - m$, quedan determinados por la relación de recurrencia pues las matrices M_j son inversibles si $0 < j < j_0$. La matriz M_{j_0} no es inversible ya que $(M_{j_0})_{i,i} = 0$ (Ver Lema 4.30); sin embargo el vector $-N_{j_0} G_{j_0 - 1} - O_{j_0} G_{j_0 - 2}$ es de la forma $(0, \ldots, 0, x_{k + j_0}, \ldots, x_\ell)$ donde $k + j < i$ y por lo tanto el sistema de ecuaciones lineales

$$M_{j_0} G_{j_0} = -N_{j_0} G_{j_0 - 1} - O_{j_0} G_{j_0 - 2},$$

tiene una solución G_{j_0}. Una vez fijado G_{j_0}, los vectores G_j para y $j > j_0$ quedan determinados por la relación de recurrencia. Como el núcleo de M_{j_0} tiene dimensión uno, resulta que $W_\lambda(p_k)$ es un espacio vectorial de dimensión dos. $\square$

Teorema 4.33. *Sea $(n,\ell) \in \Upsilon$ tal que $\ell - n = 3m$ con $0 < m < \ell$. Para cualquier $\lambda \in \mathbb{C}$, y $0 \leq k \leq \ell$ sean p_k, p'_k tales que $\lambda = \lambda_k(p_k) = \lambda_k(p'_k)$. Si $p_k, p'_k \notin \Omega \cup \Omega_k$, entonces*

$$V(\lambda) = \bigoplus_{\substack{0 \leq k \leq \ell, \\ k \notin I}} W_\lambda(p_k) \oplus W_\lambda(p'_k), \tag{4.28}$$

donde $I = \{i : \max\{0, 2m - \ell\} \leq i \leq m - 1\}$.

Demostración. Primero observemos que $(M_0)_{ii} = 0$ si y sólo si $p_k(i-k) - i(\ell - i + 1) + k(\ell - k + 1) = 0$ y por lo tanto el hecho que $p_k \notin \Omega_k$ implica que $i = k$. Por lo tanto $\dim(\ker M_0) = 1$.

Como $p_k \notin \Omega_k$, la matriz M_j, $j \geq 1$, es inversible para todo $k \notin \{i \in \mathbb{N} : \max\{0, 2m - \ell\} \leq i \leq \min\{\ell, 2m\}\}$ (ver el Lema 4.30). Entonces para un tal k, $\dim(W_\lambda(p_k)) = 1$.

En el Lema 4.31 probamos que $W_\lambda(p_i) \subset W_\lambda(p_k)$ y en el Lema 4.32 que la dimensión de $W_\lambda(p_k)$ es igual a dos. Ahora queremos probar que la suma de los espacios involucrados en (4.28) es directa.

Si $0 \neq H \in W_\lambda(p_k) \cap W\lambda(p'_k)$, entonces $H(s) = s^{p_k} G_1(s) = s^{p'_k} G_2(s)$. Si $G_1(0) \neq 0$ y $G_2(0) \neq 0$ el Lema 4.30 dice que $p_k = p'_k$ lo cual contradice el hecho que $p_k \notin \Omega$. Si $G_1(0) = 0$ y $G_2(0) \neq 0$ entonces $H(s) = s^{p_k} s^{k-m} \tilde{G}_1(s) = s^{p'_k} G_2(s)$ para alguna función $\tilde{G}_1$ analítica en $s = 0$ y $\tilde{G}_1(0) \neq 0$. Entonces el Lemma 4.30 dice que $p'_k = p_i$ y contradice el hecho que $p'_k \in \Omega_k$. Si $G_1(0) = 0$ y $G_2(0) = 0$ entonces $p_k + k - m = p'_k + k - m$, y esto es nuevamente una contradicción. Por lo tanto debemos tener $W_k^\lambda(p_k) \cap W_k^\lambda(p'_k) = 0$.

Un argumento similar muestra que $W_\lambda(p_k) \cap W_\lambda(p_i)$ siempre que $i, k \notin \{i \in \mathbb{N} : \max\{0, 2m - \ell\} \leq i \leq \min\{\ell, 2m\}\}$

Si $\max\{m+1, 2m-\ell\} \leq k \leq \min\{2m, \ell\}$ entonces tenemos que $\dim W_k^\lambda(p_k) = 2$ y por lo tanto

$$\sum_{\substack{0 \leq k \leq \ell, \\ k \notin I}} \dim W_k^\lambda(p_k) \oplus W_k^\lambda(p_k) = 2(\ell + 1).$$

El hecho que $\dim V(\lambda) = 2(\ell + 1)$ completa la demostración del teorema. $\square$

4.4.2 Estabilidad de $W_\lambda(p)$

El objetivo de esta subsección es identificar dentro del espacio vectorial $V(\lambda)$ a todas las autofunciones simultáneas de los sistemas de ecuaciones diferenciales $DH = \lambda H$ y $EH = \mu H$. Para esto consideramos una función $H = s^p G$ con G analítica en $s = 0$. Entonces H es una solución del sistema $EH = \mu H$ si y sólo si

$$\begin{aligned} &s^2(s-1)MG'' + s\big(C_1 - 2(p+1)M + s(2(p+1)M - C_0)\big)G' \\ &+ \Big(-p((p+1)M - C_1) + s((p+1)M - C_0) + \frac{(sD_0 + D_1)}{s-1} - \mu\Big)G = 0. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Es importante destacar que es posible combinar los operadores diferenciales D y E de tal forma que el operador diferencial resultante es de primer orden. Este operador está dado por

$C = MD - E$; entonces $H = s^p G$ satisface $CH = (\lambda M - \mu)H$ si y sólo si

$$\begin{aligned}\big(sM(A_0 - s(A_0-2)) - s(C_1 - 2M - s(C_0 - 2M))\big)G' \\ + \big(pM(A_0 - s(A_0-2)) + \frac{M(sB_0 - B_1)}{s-1} \\ - p(C_1 - 2M - s(C_0-2M)) - \frac{(sD_0 + D_1)}{s-1}\big)G = (\lambda M - \mu)G.\end{aligned} \tag{4.30}$$

Si multiplicamos la expresión anterior por $(s-1)$ y fijamos $s = 0$, pbtenemos

$$(p(M(A_0+2) - C_1) + MB_1 + D_1 - (\lambda M - \mu))G(0) = 0.$$

Entonces G_0 está en el núcleo de la matriz $p(M(A_0+2) - C_1) + MB_1 + D_1 - (\lambda M - \mu)$ dada por

$$\sum_{0 \le i \le \ell} \big(2i(\ell - i + 1)(n + i + 1) - \lambda(n - \ell + 3i) + \mu\big)E_{ii} + \sum_{1 \le i \le \ell} -3i(\ell - i + 1)(n + i + 1)E_{i,i-1}$$

Entonces μ deberá ser

$$\mu = \mu_i(\lambda) = \lambda(n - \ell + 3i) - 3i(\ell - i + 1)(n + i + 1), \tag{4.31}$$

para algún $0 \le i \le \ell$.

Teorema 4.34. *Dado $\lambda \in \mathbb{C}$ y $0 \le k \le \ell$ sea $p_k \in \mathbb{C}$ una solución de la ecuación cuadrática $\lambda = \lambda_k(p_k)$. Entonces el espacio vectorial $W_k(p_k)$ es estable por el operador diferencial E.*

Demostración. Si $H = s^{p_k}G \in W_k(p_k)$, observemos que como los operadores diferenciales D y E conmutan, EH es una autofunción de D de autovalor λ. Además $EH = s^{p_k}\widetilde{G}$ donde $\widetilde{G}$ es una función analítica en $s = 0$ dada por

$$\begin{aligned}\widetilde{G} =& s^2(s-1)MF'' + s(2p_k(s-1)M + (C_1 - 2 - s(C_0 - 2)))G' \\ &+ (p_k(p_k - 1)(s-1)M + p_k(C_1 - 2 - s(C_0-2)) + \frac{(sD_0 - D_1)}{s-1})G.\end{aligned}$$

Por lo tanto EH es una autofunción de D y $EH = s^{p_k}\widetilde{G}$ para una cierta función $\widetilde{G}$ analítica en $s = 0$. Entonces $EH \in W_\lambda(p_k)$. □

Proposición 4.35. *Sea $\lambda \in \mathbb{C}$, $0 \le k \le \ell$ y p_k tales que $\lambda = \lambda(p_k)$. Si $v \in \ker(M_0)$, entonces*

$$(-p_k(p_k+1)M + p_kC_1 - D_1)v = \alpha v,$$

donde

$$\alpha = p_k(n - \ell + 3k)(-p_k + n + \ell + k - 2) - k(2n + \ell + 3)(\ell - k + 1).$$

Demostración. Recordemos que 4.27 dice que el núcleo de la matriz M_0 está generado por el vector $v \in \mathbb{C}^{\ell+1}$ dado por

$$\begin{aligned}v_0 &= v_1 = \ldots = v_k = 0, \\ v_{k+j} &= \frac{(k+j)(\ell - k - j + 1)}{j(\ell - p_k - 2k - j + 1)}v_{k+j-1}, \quad j = 1, \ldots, \ell - k.\end{aligned}$$

En lo que resta de la demostración llamaremos R a la matriz $-p_k(p_k+1)M + p_kC_1 - D_1$. Entonces R está dada explícitamente por

$$
\begin{aligned}
R = &\sum_{i=0}^{\ell} 4\,p\big((n-\ell+3\,i)(p_k-n-\ell+i-2)+4(2\,n+\ell+3)i(\ell-i+1)\big)E_{i,i}\\
&+4\,i(\ell-i+1)\big(3\,p_k-(2\,n+\ell+3)\big)E_{i,i-1}.
\end{aligned}
$$

Sea $\alpha_i = p_k(n-\ell+3i)(-p_k+n+\ell+i-2) - i(2n+\ell+3)(\ell-i+1)$. Ahora observemos que

$$
R_{k+j,k+j-1}\frac{j(-p_k+\ell-2k-j+1)}{(i+j)(\ell-k-j+1)} = -(\alpha_{k+j}-\alpha_k).
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
((Rv)_{k+j} &= R_{k+j,k+j}v_{k+j} + R_{k+j,k+j-1}v_{k+j-1}\\
&= \big(\alpha_{k+j} + R_{k+j,k+j-1}\frac{j(-p_k+\ell-2k-j+1)}{(k+j)(\ell-k-j+1)}\big)v_{k+j}\\
&= \alpha_k v_{k+j}.
\end{aligned}
$$

Esto muestra que v es un autovector de la matriz $-p_k(p_k+1)M + p_kC_1 - D_1$ de autovalor $\alpha_k = \alpha$ y completa la prueba de la proposición. $\square$

En lo que resta de la sección asumimos que p_k, $p'_k \notin \Omega\cup\Omega_k$, $(n,\ell)\notin \Upsilon$ y que los autovalores $\mu_j(\lambda)$ son todos distintos. Consideremos la función

$$
\eta_{p_k} : W_k^\lambda(p_k) \longrightarrow \mathbb{C}
$$

definida de la siguiente forma: Dada $H = s^{p_k}G \in W_\lambda(p_k)$, $\eta_{p_k}(H) = G_{0,\ell}$ si $G_0 = (G_{0,0}, ..., G_{0,\ell})$. Es fácil verificar que η_{p_k} es un isomorfismo lineal y por lo tanto el operador diferencial E induce un operador lineal de $\mathbb{C}$ en si mismo. A continuación probamos que el escalar correspondiente es $\mu_k(\lambda)$ introducido en (4.31). Si tomamos $H = s^{p_k}G \in W_\lambda(p_k)$, entonces G_0 pertenece al núcleo de M y entonces la Proposición 4.35 dice que G_0 es un autovector de la matriz $-p_k(p_k+1)M + p_kC_1 - D_1$ y que el autovalor correspondiente es

$$
\begin{aligned}
\alpha &= -p_k(n-\ell+3\,k)(p_k-n-\ell+k-2) - k(2\,n+\ell+3)(\ell-k+1)\\
&= \lambda_k(p_k)(n-\ell+3) - 3k(\ell-k+1)(n+k+1) = \mu_k(\lambda).
\end{aligned}
$$

Ahora por el Teorema 4.34, $E\,H = s^{p_k}\widetilde{G} \in W_\lambda(p_k)$, y por lo tanto $\eta_{p_k}(EH) = \widetilde{G}_{0,\ell}$. Como $\widetilde{G}_0 = (-p_k(p_k+1)M + p_kC_1 - D_1)G_0 = \mu_k(\lambda)G_0$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$
\begin{array}{ccc}
W_k^\lambda(p_k) & \xrightarrow{E} & W_k^\lambda(p_k)\\
{\scriptstyle\eta_{p_k}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\eta_{p_k}}\\
\mathbb{C} & \xrightarrow{\mu_k(\lambda)} & \mathbb{C}
\end{array}
$$

En $V_\lambda = \bigoplus_{k=0}^{\ell} W_k^\lambda(p_k)\oplus W_k^\lambda(p'_k)$ definimos el isomorfismo lineal $\eta : V_\lambda \longrightarrow \mathbb{C}^{2(\ell+1)}$ dado por la suma directa de los isomorfismos η_{p_k}.

Teorema 4.36. *La función $\eta : V(\lambda) \longrightarrow \mathbb{C}^{2(\ell+1)}$ es un isomorfismo lineal. Además, el siguiente es un diagrama conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} V(\lambda) & \xrightarrow{E} & V(\lambda) \\ \eta\big\downarrow & & \big\downarrow\eta \\ \mathbb{C}^{2(\ell+1)} & \xrightarrow{L} & \mathbb{C}^{2(\ell+1)} \end{array}$$

donde L es la matriz diagonal dada por

$$L = \begin{bmatrix} \mu_0(\lambda) & & & & \\ & \mu_0(\lambda) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \mu_\ell(\lambda) & \\ & & & & \mu_\ell(\lambda) \end{bmatrix}$$

Ahora $H \in V(\lambda)$ es una autofunción simultánea de los operadores diferenciales D y E si y sólo si $\eta(H)$ es un autovector de la matriz L de autovalor μ. La dimensión del autoespacio de L asociado a cada autovalor μ es 2 porque el operador E actúa en $W_k^\lambda(p_k)$ y en $W_k^\lambda(p_k')$ con autovalor $\mu_k(\lambda)$ y $\mu_j(\lambda) \neq \mu_k(\lambda)$.

Teorema 4.37. *Dado $\lambda \in \mathbb{C}$, $0 \leq k \leq \ell$, sean p_k y $p_k' = n+\ell+2-k-p_k$ las soluciones de la ecuación cuadrática $\lambda = \lambda_k(p_k)$. Una función $H(s)$, $0 < s < 1$ es una autofunción simultánea del sistema $DH = \lambda H$, $EH = \mu H$ si y sólo si*

$$H(s) = s^{p_k} F + s^{p_k'} G$$

donde F y G son las funciones definidas por la relación de recurrencia (4.26) *tales que*

$$J_0 = J(0) \in \ker(p_k(p_k - A_0 - 1) - B_1 + \lambda_k(p_k)),$$
$$G_0 = G(0) \in \ker(p_k'(p_k' - A_0 - 1) - B_1 + \lambda_k(p_k')).$$

El Teorema anterior describe el comportamiento asintótico alrededor del punto $t = \infty$ de las autofunciones del operador diferencial D. A continuación queremos refinar este resultado para identificar dentro de cada subespacio $W_\lambda(p)$ la función H asociada a una función esférica de tipo (n, ℓ).

El Teorema 4.20 establece una correspondencia biyectiva entre el conjunto de clases de equivalencia de funciones esféricas del grupo $\mathrm{SU}(2,1)$ de tipo (n,ℓ) y los autovectores de la matriz $M(\lambda)$ (Ver 4.18), que tienen la forma $(1, x_0, \ldots, x_\ell)^t$. Mas precisamente, dada una función esférica Φ, sea H_Φ su función asociada. Entonces H_Φ está dada explícitamente por

$$H(u) = \psi(u)\,{}_2H_1\left(\begin{smallmatrix} U, V+\lambda \\ C \end{smallmatrix}; u\right) H_{\lambda,\mu},$$

donde las matrices U, V y C están dadas en el Lema 4.4, y $H_{\lambda,\mu}$ es el único μ-autovector de la matriz $M(\lambda)$, normalizado por $(1, x_1, \ldots, x_\ell)$. La función $H(u)$ es analítica an $u = 0$ y $H(0) = (1, \ldots, 1)^t$. A continuación nos interesa conocer el comportamiento de $H(u)$ alrededor del punto $u = -\infty$ (i.e. $t = 1 - u = \infty$). Para esto hacemos el cambio de variables $u = \frac{s-1}{s}$ y obtenemos

$$H(s) = \psi\left(\frac{s-1}{s}\right) {}_2H_1\left(\begin{smallmatrix} U, V+\lambda \\ C \end{smallmatrix}; \frac{s-1}{s}\right) H_{\lambda,\mu},$$

Observemos que H_Φ es una autofunción simultánea de los operadores diferenciales D y E con autovalores

$$\lambda = -w(w+n+\ell+k+2) - k(n+k+1), \quad \mu_k(\lambda) = \lambda(n-\ell+3k) - 3k(\ell-k+1)(n+k+1),$$

respectivamente, para algún $0 \le i \le \ell$. Observemos que si tomamos $w = -p-k$, entonces el Teorema 4.37 dice que $H_\Phi(s) \in W_\lambda(p_k) \oplus W_\lambda(p'_k)$ y por lo tanto

$$H_\Phi(s) = \psi(\frac{s-1}{s})_2H_1\left(\begin{smallmatrix} U,V+\lambda \\ C \end{smallmatrix}; s\right) H_{\lambda,\mu_k} = s^{p_k}J(s) + s^{p'_k}G(s).$$

Asumamos que $\mathrm{Re}(p'_k - p_k) > 0$. Entonces tenemos que

$$s^{-p_k}\psi(\frac{s-1}{s})_2H_1\left(\begin{smallmatrix} U,V+\lambda \\ C \end{smallmatrix}; \frac{s-1}{s}\right) H_{\lambda,\mu_k} = J(s) + s^{p'_k-p_k}G(s),$$

y si tomamos límite para $s \longrightarrow 0$ obtenemos

$$\lim_{s\to 0} s^{-p_k}\psi(\frac{s-1}{s})_2H_1\left(\begin{smallmatrix} U,V+\lambda \\ C \end{smallmatrix}; \frac{s-1}{s}\right) F_0 = J(0).$$

Por lo tanto para determinar la función esférica dentro del espacio vectorial $W_\lambda(p_k)\oplus W_\lambda(p'_k)$ debemos elegir el autovector $J_0 = J(0)$ de la matriz M_0 como el límite anterior. Resumimos esta discusión en el siguiente Teorema que especializa el Teorema 4.37 al caso de las funciones esféricas

Teorema 4.38. *Dado $\lambda \in \mathbb{C}$, $0 \le k \le \ell$ sean p_k y $p'_k = n+\ell+2-k-p_k$ las dos soluviones de la ecuación cuadrática $\lambda = \lambda_k(p_k)$. Supongamos que la función $H(s)$, $0 < s < 1$, es una autofunción de los operadores diferenciales D y E con autovalores λ y μ_k respectivamente tal que $\lim_{s\to 1} H(s) = (1,\dots,1)^t$. Entonces*

$$H = s^{p_k}J(s) + s^{p'_k}G(s),$$

donde $J(s)$ es la función analítica dada por la relación de recurrencia (4.26) con el vector $J_0 = J(0) \in \ker(p_k(p_k - A_0 - 1) - B_1 + \lambda_k(p_k))$ normalizado por

$$J(0) = \lim_{s\to 0} s^{-p_k}\psi(\frac{s-1}{s})_2H_1\left(\begin{smallmatrix} U,V+\lambda \\ C \end{smallmatrix}; s\right) H_{\lambda,\mu_k},$$

y $G(s)$ está dada por la relación de recurrencia (4.26) con el vector $G_0 = G(0) \in \ker(p'_k(p'_k - A_0 - 1) - B_1 + \lambda_k(p'_k))$ normalizado por

$$G(0) = \lim_{s\to 0} s^{-p'_k}\psi(\frac{s-1}{s})_2H_1\left(\begin{smallmatrix} U,V+\lambda \\ C \end{smallmatrix}; s\right) H_{\lambda,\mu_k} - s^{p_k-p'_k}J(s).$$

4.5 Ejemplos

En esta sección daremos una descripción completa de las funciones esféricas asociadas al plano hiperbólico complejo para los casos $\ell = 0$ y $\ell = 1$. El objetivo es relacionar las expresiones matriciales explícitas obtenidas a lo largo de este capítulo (Secciones 4.3 y 4.4) con expresiones que involucren las funciones hipergeométricas generalizadas ${}_{p+1}F_p$ con valores escalares.

4.5.1 $\ell = 0$

En esta subsección expondremos los resultados obtenidos en este capítulo para el caso $\ell = 0$. En este caso las funciones esféricas toman valores complejos. Como mencionamos en el Capítulo 3, cada función esférica irreducible Φ de tipo $(n, 0)$ tiene asociada una función compleja h definida en el intervalo $(-\infty, 0]$ que es autofunción del operador diferencial $\bar{D}$ tal que $h(0) = 1$, es decir $\bar{D}h = \lambda h$. Observemos que en este caso el operador diferencial $\bar{E}$ es un múltiplo de $\bar{D}$. Además $\psi(u) = 1$, lo que implica que $\widetilde{D} = \psi^{-1}\bar{D}\psi = \bar{D}$. El Teorema 4.20 dice que la función h está dada por

$$h(u) = {}_2H_1\left(\begin{smallmatrix} U\,;\,V+\lambda \\ C \end{smallmatrix}; u\right),$$

donde $C = 2$, $U = n + 3$ y $V = 0$. Si w es una solución de la ecuación cuadrática $\lambda = -w(w + n + 2)$, entonces

$$h(u) = \psi(u){}_2H_1\left(\begin{smallmatrix} U\,;\,V+\lambda \\ C \end{smallmatrix}; u\right) = \sum_{i=0}^{\infty}[C; U; V - w(w + n + 2)]_i \frac{u^i}{i!},$$

donde

$$\begin{aligned}
[C; U; V + \lambda]_{i+1} &= (2 + i)^{-1}(i^2 + i(n + 2) + w(w + n + 2))[C; U; V + \lambda]_i \\
&= \frac{(-w + i)(w + n + 2 + i)}{(2 + i)}[C; U; V + \lambda]_i \\
&= \frac{(-w)_i(w + n + 2)_i}{(2)_i}[C; U; V + \lambda]_i.
\end{aligned}$$

Esto muestra que $h(u) = {}_2F_1\left(\begin{smallmatrix} -w\,,\,w+n+2 \\ 2 \end{smallmatrix}; u\right)$. Resumimos estos resultados en el siguiente teorema.

Teorema 4.39. *Las funciones h asociadas a las funciones esféricas de tipo $(n, 0)$ de $\mathrm{SU}(2, 1)$ están dadas por*

$$h(u) = {}_2F_1\left(\begin{smallmatrix} -w\,,\,w+n+2 \\ 2 \end{smallmatrix}; u\right),$$

donde $w \in \mathbb{C}$. Además, h satisface $\bar{D} = \lambda H$ para $\lambda = -w(w + n + 2)$.

Si hacemos el cambio de variables $u = \frac{s-1}{s}$, y cambiamos $w = -p$, tenemos

$$h(s) = {}_2F_1\left(\begin{smallmatrix} p,\,n+2-p \\ 2 \end{smallmatrix}; \frac{s-1}{s}\right) = s^p{}_2F_1\left(\begin{smallmatrix} p,\,p-n \\ 2 \end{smallmatrix}; 1 - s\right),$$

Es sabido que que podemos escribir la función h de la siguiente forma

$$h(s) = s^p{}_2F_1\left(\begin{smallmatrix} p,\,p-n \\ 2 \end{smallmatrix}; 1 - s\right) = s^p A\,{}_2F_1\left(\begin{smallmatrix} p\,,\,p-n \\ 2p-n-1 \end{smallmatrix}; s\right) + s^{n+2-p}B\,{}_2F_1\left(\begin{smallmatrix} 2-p\,,\,n+2-p \\ n+3-2p \end{smallmatrix}; s\right).$$

donde las constantes A y B están dadas por

$$A = \frac{\Gamma(n + 2 - 2p)}{\Gamma(2 - p)\Gamma(n + 2 - p)}, \quad B = \frac{\Gamma(2p - n - 2)}{\Gamma(p)\Gamma(p - n)}.$$

Esto nos da una descripción de la función h alrededor del punto $s = 0$, ya que las funciones hipergeométricas ${}_2F_1\left(\begin{smallmatrix} -w\,,\,w+n+2 \\ 2 \end{smallmatrix}; s\right)$ y ${}_2F_1\left(\begin{smallmatrix} -w\,,\,w+n+2 \\ 2 \end{smallmatrix}; s\right)$ son funciones analíticas en $s = 0$.

4.5.2 $\ell = 1$

Ahora estudiaremos en detalle las funciones esféricas para el caso $\ell = 1$. Como destacamos a lo largo de este trabajo, cada función esférica irreducible Φ de tipo (n, ℓ) tiene asociada una función H, que en este caso toma valores en $\mathbb{C}^2$, y que es una autofunción simultánea de los operadores diferenciales $\bar{D}$ y $\bar{E}$ con autovalores λ y μ respectivamente. Supongamos que tenemos $0 \leq k \leq \ell$ tal que

$$\mu = \mu_k = \lambda(n - 1 + 3k) - 3k(2 - k)(n + k + 1).$$

Entonces tomamos w como una solución de la ecuación cuadrática

$$\lambda = -w(w + n + k + 3) - k(n + k + 1).$$

Cuando $\ell = 1$ tenemos dos familias de funciones esféricas, cada una correspondiente a la elección $k = 0$ o $k = 1$.

Primera familia ($k = 0$)

Comenzamos considerando el caso $k = 0$. En este caso las expresiones de los autovalores λ y μ_0 están dadas por

$$\lambda = -w(w + n + 3), \quad \mu_0 = \lambda(n - 1).$$

Para dar expresiones explícitas de esta primera familia de funciones esféricas utilizamos los resultados del Teorema 4.20. Este teorema da una correspondencia biunívoca entre los autovectores de la matriz $M(\lambda)$ introducida en (4.18) normalizados por $(1, x_0, \ldots, x_\ell)$ y las funciones H asociadas a las funciones esféricas. En este caso la matriz $M(\lambda)$ es la siguiente matriz 2×2

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} -(n + \frac{1}{2})w(w + n + 3) & \frac{9}{2} \\ \frac{w(w+n+3)(2n+wn+4+3w+w^2)}{2} & -\frac{w(2n+1)(w+n+3)}{2} - 3n - 6 \end{pmatrix},$$

La matriz $M(\lambda)$ tiene dos autovectores; el autovector asociado al autovalor $\mu_0 = \lambda(n - 1)$ es

$$F_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{w(w+n+3)}{3} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto la función $F = \psi^{-1}H$ asociada a la función esférica es

$$F(u) = {}_2H_1 \left({U\,;\,V - w(w+n+3) \atop C} ; u \right) F_0,$$

donde

$${}_2H_1 \left({U\,;\,V - w(w+n+3) \atop C} ; u \right) = \sum_{i=0}^{\infty} [C; U; V - w(w + n + 3)]_i \frac{u^i}{i!} F_0$$

y ψ es la función polinomial (4.3), que utilizamos en la Sección 4.1 para hipergeometrizar el operador diferencial $\bar{D}$. En la Sección 4.1 indicamos que el símbolo $[C; U; V - w(w + n + 3)]_i$ se define inductivamente de la siguiente forma

$$\begin{aligned} [C; U; V - w(w + n + 3)]_{i+1} &= (C + i)^{-1}(i^2 + i(U - 1) + V + \lambda)[C; U; V + \lambda]_i \\ [C; U; V - w(w + n + 3)]_0 &= 1. \end{aligned}$$

La matriz $\Gamma_i = (C + i)^{-1}(i^2 + i(U - 1) + V + \lambda)$ está dada por

$$\Gamma_i = \begin{pmatrix} \frac{(i-w)(i+w+n+3)}{2+i} & -\frac{1}{2+i} \\ -\frac{i(n+3)+i^2-w(w+n+3)}{(2+i)^2(4+i)^2} & \frac{i(n+4)+n+2+i^2-w(w+n+3)}{4+i} \end{pmatrix}.$$

Proposición 4.40. *La función F se escribe en términos de funciones hipergeométricas escalares de la siguiente forma*

$$F(u) = {}_2H_1\left({U\,;\,V-w(w+n+3) \atop C};u\right)F_0 = \begin{pmatrix} {}_3F_2\left({2\,,\,-w\,,\,w+n+3 \atop 3\,,\,1};u\right) \\ {}_2F_1\left({1-w\,,\,w+n+4 \atop 4};u\right)\frac{w(w+n+3)}{3} \end{pmatrix}.$$

Demostración. Procedemos por inducción en i para probar que los coeficientes de Taylor de grado i alrededor de $u=0$ en ambos miembros son iguales. Para $i=0$ tenemos

$$\begin{pmatrix} {}_3F_2\left({2\,,\,-w\,,\,w+n+3 \atop 3\,,\,1};0\right) \\ {}_2F_1\left({1-w\,,\,w+n+4 \atop 4};0\right)\frac{w(w+n+3)}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{w(w+n+3)}{3} \end{pmatrix} = F_0.$$

Ahora asumamos este resultado cierto para i. Entonces es fácil verificar que

$$[C;U;V-w(w+n+3)]_{i+1} = \Gamma_i[C;U;V-w(w+n+3)]_i = \Gamma_i \begin{pmatrix} \frac{(2)_i(w)_i(w+n+3)_i}{(3)_i(1)_i} \\ \frac{(1-w)_i(w+n+4)_i}{(4)_i}\frac{w(w+n+3)}{3} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{(2)_{i+1}(w)_{i+1}(w+n+3)_{i+1}}{(3)_{i+1}(1)_{i+1}} \\ \frac{(1-w)_{i+1}(w+n+4)_{i+1}}{(4)_{i+1}}\frac{w(w+n+3)}{3} \end{pmatrix}$$

Esto completa la prueba de la proposición. □

Como señalamos anteriormente, $H(u) = \psi(u)F(u)$. Se puede verificar fácilmente que la función H viene dada por

$$H(u) = \psi(u){}_2H_1\left({U\,;\,V-w(w+n+3) \atop C};u\right)F_0 = \begin{pmatrix} {}_3F_2\left({2\,,\,-w\,,\,w+n+3 \atop 3\,,\,1};u\right) \\ {}_2F_1\left({-w\,,\,w+n+3 \atop 3};u\right) \end{pmatrix}.$$

Observemos que $H(u)$ es una autofunción de los operadores diferenciales $\bar{D}$ y $\bar{E}$ tal que $H(0) = (1,1)^t$. Ahora queremos describir esta función H alrededor del punto $u=-\infty$. Para esto hacemos el cambio de variables $u = \frac{s-1}{s}$ y hacemos la identificación $p=-w$. Con estos cambios, la función H se escribe de la siguiente forma

$$H\left(\frac{s-1}{s}\right) = s^p \begin{pmatrix} {}_3F_2\left({p\,,\,\frac{-2p+2n+3}{n-p+2}\,,\,-n-1+p \atop 3\,,\,\frac{n+1-p}{n+2-p}};1-s\right) \\ {}_2F_1\left({p\,,\,p-n \atop 3};1-s\right) \end{pmatrix}.$$

Para Completar esta descripción observemos que el Teorema 4.38 dice que

$$H\left(\frac{s-1}{s}\right) = s^pJ(s) + s^{n+3-p}G(s),$$

donde $J(s)$ y $G(s)$ son funciones analíticas alrededor de $s=0$. En este caso podemos explicitar completamente las funciones J y G, que vienen dadas por

$$J(s) = \frac{\Gamma(3)\Gamma(n+3-2p)}{\Gamma(3-p)\Gamma(n+3-p)} \begin{pmatrix} (1-p){}_3F_2\left({p,\,p(p-n-2)+n+2,\,p-n-1 \atop 2p-n-2,\,(p-1)(p-n-1)};s\right) \\ {}_2F_1\left({p\,,\,p-n \atop 2p-n-2};s\right) \end{pmatrix}$$
$$,G(s) = \frac{\Gamma(3)\Gamma(2p-n-3)}{\Gamma(p)\Gamma(p-n)} \begin{pmatrix} g_0(s) \\ {}_2F_1\left({n+3-p\,,\,n-p \atop 2n+4-2p};s\right) \end{pmatrix},$$

y la función $g_0(s)$ está dada por

$$g_0(s) = (1-p+sp){}_2F_1\left({n+3-p\,,\,3-p \atop 2n+4-2p};s\right) + (s-1)s\frac{(3-p)(n+3-p)}{2n+4-2p}{}_2F_1\left({n+4-p\,,\,4-p \atop 2n+5-2p};s\right).$$

Segunda familia ($k = 1$)

Ahora daremos la descripción de la segunda familia de funciones esféricas en el caso $\ell = 1$. Para esto fijamos $k = 1$; las expresiones de los autovalores λ y μ_0 están dadas por

$$\lambda = -w(w+n+4) - n - 2, \quad \mu = \lambda(n-2) - 3n - 6.$$

En este caso la matriz $M(\lambda)$ está dada por

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} -\frac{(2n+1)(w(w+n+4)+2+n)}{2} & \frac{9}{2} \\ \frac{(4w+2+n+w^2+wn)(4w+6+3n+w^2+wn)}{2} & -\frac{(2n+1)(4w+2+n+w^2+wn)}{2} - 3n - 6 \end{pmatrix},$$

La matriz $M(\lambda)$ tiene dos autovectores; el autovector asociado al autovalor $\mu_1 = \mu = \lambda(n-1) - 3n - 6$ es

$$F_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4w+2+1n+1w^2+1wn}{3} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto la función F asociada a la función esférica es

$$F(u) = {}_2H_1\left({U\,;\,V-w(w+n+4)-2-n \atop C} ; u \right) F_0,$$

donde

$${}_2H_1\left({U\,;\,V-w(w+n+4)-n-2 \atop C} ; u \right) = \sum_{i=0}^{\infty} [C; U; V - w(w+n+4) - n - 2]_i \frac{u^i}{i!} F_0.$$

Proposición 4.41. *La función F se escribe en términos de funciones hipergeométricas escalares de la siguiente forma*

$${}_2H_1\left({U\,;\,V-w(w+n+4)-2-n \atop C} ; u \right) F_0 = \begin{pmatrix} {}_2F_1\left({-w\,,\,w+n+4 \atop 3} ; u \right) \\ {}_3F_2\left({-w\,,\,w+n+4\,,\,s_w+1 \atop 4\,,\,s_w} ; u \right) \left(-\frac{s_w}{3}\right) \end{pmatrix},$$

donde $s_w = w(w+n+4) + 3(n+2)$.

Demostración. La demostración es equivalente a la de la Proposición 4.40 $\square$

La función $H(u) = \psi(u)F(u)$ está dada por

$$H(u) = \begin{pmatrix} {}_2F_1\left({-w\,,\,w+n+4 \atop 3} ; u \right) \\ {}_3F_2\left({-w-1\,,\,w+n+3\,,\,\frac{8w+6+2w^2+2nw+3n}{nw+2n+w^2+4w+3} \atop 3\,,\,\frac{(n+3+w)(-w-1)}{(-w-1)n-n-(-w-1)^2-2w-2}} ; u \right) \end{pmatrix},$$

Ahora hacemos el cambio de variables $u = \frac{s-1}{s}$ y obtenemos

$$H\left(\frac{s-1}{s}\right) = s^p \begin{pmatrix} s\,{}_2F_1\left({p+1\,,\,p-n \atop 3} ; 1-s \right) \\ {}_3F_2\left({p\,,\,\frac{-2p+-1}{p-1}\,,\,p-n \atop 3\,,\,\frac{p}{p-1}} ; 1-s \right) \end{pmatrix}.$$

Para Completar esta descripción detallada de las funciones esféricas asociadas al plano hiperbólico complejo para el caso $\ell = 1$, observemos que el Teorema 4.38 dice que

$$H\left(\frac{s-1}{s}\right) = s^p J(s) + s^{n+3-p} G(s),$$

donde

$$J(s)=\frac{\Gamma(3)\Gamma(2p-n-2)}{\Gamma(2-p)\Gamma(n+3-p)}\begin{pmatrix} {}_2F_1\left(\begin{smallmatrix} p+1\,,\,p-n\\ 2p-n-1\end{smallmatrix};s\right)\\ (n+1-p)\,{}_3F_2\left(\begin{smallmatrix} p-n,\,p(p-n-1),\,p\\ 2p-n-1,\,p(p-n-1)\end{smallmatrix};s\right)\end{pmatrix},$$

$$G(s)=\frac{\Gamma(3)\Gamma(n+2-2p)}{\Gamma(p+1)\Gamma(p-n)}\begin{pmatrix} {}_2F_1\left(\begin{smallmatrix} n+3-p\,,\,2-p\\ n+3-2p\end{smallmatrix};s\right)\\ g_1(s)\end{pmatrix},$$

y la función $g_1(s)$ está dada por

$$g_1(s)=((s-1)(p-n-1)+s)\,{}_2F_1\left(\begin{smallmatrix} n+3-p\,,\,2-p\\ n+3-2p\end{smallmatrix};s\right)+(s-1)s\frac{(2-p)(n+3-p)}{n+3-2p}\,{}_2F_1\left(\begin{smallmatrix} n+4-p\,,\,3-p\\ n+4-2p\end{smallmatrix};s\right).$$

Resultados

Finalmente, en el siguiente teorema resumimos los resultados obtenidos para el caso $\ell=1$

Teorema 4.42. *Para $\ell=1$ existen dos familias de funciones H asociadas a las funciones esféricas de* $\mathrm{SU}(2,1)$

i)Primera Familia: Las funciones H están dadas por

$$H(u)=\begin{pmatrix} {}_3F_2\left(\begin{smallmatrix} 2\,,\,-w\,,\,w+n+3\\ 3\,,\,1\end{smallmatrix};u\right)\\ {}_2F_1\left(\begin{smallmatrix} -w\,,\,w+n+3\\ 3\end{smallmatrix};u\right)\end{pmatrix},$$

donde $w\in\mathbb{C}$. Además H satisface $\bar{D}H=\lambda H$ y $\bar{E}H=\mu H$ para

$$\lambda=-w(w+n+3),\quad \mu_0=\lambda(n-1).$$

ii)Segunda Familia: Las funciones H están dadas por

$$H(u)=\begin{pmatrix} {}_2F_1\left(\begin{smallmatrix} -w\,,\,w+n+4\\ 3\end{smallmatrix};u\right)\\ {}_3F_2\left(\begin{smallmatrix} -w-1\,,\,w+n+3\,,\,\frac{8w+6+2w^2+2nw+3n}{nw+2n+w^2+4w+3}\\ 3\,,\,\frac{(n+3+w)(-w-1)}{(-w-1)n-n-(-w-1)^2-2w-2}\end{smallmatrix};u\right)\end{pmatrix},$$

donde $w\in\mathbb{C}$. Además H satisface $\bar{D}H=\lambda H$ y $\bar{E}H=\mu H$ para

$$\lambda=-w(w+n+4)-n-2,\quad \mu=\lambda(n-2)-3n-6.$$

CAPITULO 5

Una sucesión de polinomios ortogonales matriciales

La teoría del análisis armónico sobre espacios homogéneos está íntimamente relacionada con la teoría de funciones especiales. Esto es aparente, por ejemplo, sobre la esfera de dimensión dos $S^2 = \mathrm{SO}(3)/\mathrm{SO}(2)$, donde el análisis armónico con respecto a la acción del grupo ortogonal está contenido en la teoría clásica de armónicos esféricos. En coordenadas esféricas las funciones esféricas son los polinomios de Legendre $P_n(\cos\theta)$. También las funciones esféricas zonales de la esfera $S^n = \mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n)$ están dadas, en coordenadas esféricas, en términos de los polonomios de Jacobi $P_n^{(\alpha,\alpha)}(\cos\theta)$, con $\alpha = (n-2)/2$. Más generalmente las funciones esféricas zonales sobre un espacio Riemanniano simétrico de rango uno se pueden expresar siempre en términos de las funciones hipergeométricas de Gauss clásicas, en el caso de espacios compactos obtenemos polinomios de Jacobi.

Como en el caso escalar mencionado anteriormente, en el contexto matricial también tenemos estos tres ingredientes: la teoría de funciones esféricas matriciales de cualquier K-tipo, la función hipergeométrica matricial y la teoría de polinomios ortogonales matriciales. En este capítulo mostraremos la interacción de estos conceptos en el caso del espacio proyectivo complejo $P_n(\mathbb{C}) = \mathrm{SU}(n+1)/\mathrm{U}(n)$.

La teoría de funciones esféricas matriciales se remonta a [Tir77] y [GV88], basados en los trabajos fundamentales de Godement y Harish-Chandra. En el Capítulo 4, encontramos expresiones explícitas para todas las funciones esféricas, de cualquier K-tipo, asociadas al plano proyectivo complejo $P_2(\mathbb{C}) = \mathrm{SU}(3)/\mathrm{U}(2)$ y al plano hiperbólico complejo $H_2(\mathbb{C}) = \mathrm{SU}(2,1)/\mathrm{U}(2)$. Esto se logró asociando a cada función esférica Φ sobre G una función a valores vectoriales H definida en el plano complejo afín $\mathbb{C}^2$.

La función hipergeométrica matricial fue estudiada en [Tir03]. Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión d, y sean A, B y $C \in \mathrm{End}(V)$. La ecuación hipergeométrica es

$$z(1-z)F''(z) + (C - z(A+B+I))F'(z) - ABF(z) = 0. \tag{5.1}$$

Si los autovalores de C no pertenecen a $-\mathbb{N}_0$ definimos la función

$${}_2F_1\left({A\,;\,B \atop C} ; z \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!}(C; A; B)_m,$$

donde el símbolo $(C;A;B)_m$ está definido inductivamente por

$$\begin{aligned}(C;A;B)_0 &= 1,\\ (C;A;B)_{m+1} &= (C+m)^{-1}(A+m)(B+m)(C;A;B)_m, \quad m \geq 0.\end{aligned}$$

La función ${}_2F_1\left(\begin{smallmatrix}A\,;\,B\\ C\end{smallmatrix};z\right)$ es analítica sobre $|z|<1$ con valores en $\mathrm{End}(V)$. Además si $F_0 \in V$ entonces $F(z) = {}_2F_1\left(\begin{smallmatrix}A\,;\,B\\ C\end{smallmatrix};z\right)F_0$ es una solución de la ecuación hipergeométrica (5.1) tal que $F(0)=F_0$. Por otro lado cualquier solución F, analítica en $z=0$ es de esta forma.

La teoría de polinomios ortogonales matriciales, sin ninguna consideración de ecuaciones diferenciales se remonta a [Kre71] y [Kre49]. En [Dur97] se comienza el estudio de polinomios ortogonales matriciales que son autofunciones de ciertos operadores diferenciales de segundo orden. Los primeros ejemplos explícitos de tales polinomios fueron dados en [GPT01], [GPT03] y [DG04].

Dada una función peso $W=W(t)$ diferenciable a valores matriciales, autoadjunta definida positiva con momentos finitos, podemos considerar la forma bilineal hermítica definida para cualquier par de funciones polinomiales con valores en matrices cuadradas $P(t)$ y $Q(t)$ por la matriz numérica

$$(P,Q) = \int_{\mathbb{R}} P(t)W(t)Q^*(t)dt,$$

donde $Q^*(t)$ denota la conjugada transpuesta de $Q(t)$. Esto nos conduce a la existencia de una sucesión de polinomios ortogonales matriciales, es decir una sucesión $\{P_n(t)\}$, donde P_n es un polinomio de grado n con coeficiente director no singular y $(P_n,P_m)=0$ si $n\neq m$.

También consideraremos la forma bilineal hermítica

$$\langle P,Q\rangle = (P^*,Q^*)^*, \tag{5.2}$$

y diremos que un operador diferencial D es simétrico con respecto a W si

$$\langle DP,Q\rangle = \langle P,DQ\rangle, \tag{5.3}$$

para todas las funciones polinomiales a valores matriciales P y Q.

Sea D un operador diferencial lienal ordinario con coeficientes matriciales polinomiales de grado menor o igual al orden de derivación. Si D es simétrico con respecto a W entonces cualquier sucesión ortogonal $\{P_n\}$, con respecto a $(\cdot,\cdot)$, stisface

$$DP_n^* = P_n^*\Lambda_n, \tag{5.4}$$

para alguna matriz numérica Λ_n.

Asumamos que la función peso $W=W(t)$ tiene su soporte en el intervalo (a,b) y sea D un operador diferencial de segundo orden de la forma

$$D = A_2(t)\frac{d^2}{dt^2} + A_1(t)\frac{d}{dt} + A_0(t), \tag{5.5}$$

con coeficientes polinomiales matriciales $A_j(t)$ de grado menor o igual a j. En [GPT03] (ver también [DG04]) se probó que la condición de simetría para D es equivalente a las siguientes tres ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}A_2^*W &= WA_2,\\ A_1^*W &= -WA_1 + 2(WA_2)',\\ A_0^*W &= WA_0 - (WA_1)' + (WA_2)'',\end{aligned} \tag{5.6}$$

con las condiciones de borde

$$\lim_{t\to x} W(t)A_2(t) = 0 = \lim_{t\to x}\big(W(t)A_1(t) - A_1^*(t)W(t)\big), \text{ for } x = a, b. \tag{5.7}$$

Encontrar soluciones explícitas de estas ecuaciones es una tarea altamente no trivial. En [DG04] y [DG05] los autores dan algunas familias de ejemplos. En [PT06] se encuentra, para cada dimensión, una familia tri-paramétrica de pares $\{W, D\}$ que satisfacen (5.6) y (5.7). Estas familias surgen de la teoría de representaciones de grupos de Lie. Después del cambio de variables $u = 1 - t$, el resultado pricipal de [PT06] dice:

Teorema 5.1. *Sea $\alpha, \beta > -1$, $0 < k < \beta + 1$ y $\ell \in \mathbb{N}$. Sea D el operador diferencial definido por*

$$D = u(1-u)\frac{d^2}{du^2} + (C - uU)\frac{d}{du} - V,$$

con

$$C = \sum_{i=0}^{\ell}(\beta+1+2i)E_{ii} + \sum_{i=1}^{\ell} iE_{i,i-1}, \quad U = \sum_{i=0}^{\ell}(\alpha+\beta+\ell+i+2)E_{ii},$$
$$V = \sum_{i=0}^{\ell} i(\alpha+\beta+i-k+1)E_{ii} - \sum_{i=0}^{\ell-1}(\ell-i)(i+\beta-k+1)E_{i,i+1}.$$

Entonces el operador diferencial D es simétrico con respecto al peso matricial $W(u) = (1-u)^\alpha u^\beta Z(u)$ dado por

$$Z(u) = \sum_{i,j=0}^{\ell}\left(\sum_{r=0}^{\ell}\tbinom{r}{i}\tbinom{r}{j}\tbinom{\ell+k-r-1}{\ell-r}\tbinom{\beta-k+r}{r}(1-u)^{\ell-r}u^{i+j}\right)E_{ij}.$$

Este teorema se obtiene de los primeros pasos en la determinación explícita de todas las funciones esféricas a valores matriciales asociadas al espacio proyectivo n-dimensional $P_n(\mathbb{C}) = \mathrm{SU}(n+1)/\mathrm{U}(n)$. La idea, también usada en [GPT02a] y en el Capítulo 3, es construir a partir de una función esférica matricial, una función H que depende de una sola variable u. Usando que las funciones esféricas son autofunciones del operador de Casimir de $\mathrm{SU}(n+1)$ deducimos que, después de una conjugación apropiada, H es una autofunción de un operador diferencial ordinario de segundo orden con coeficientes matriciales polinomiales D. El hecho que este operador es simétrico con respecto al peso W es una consecuencia del hecho que el operador de Casimir es simétrico con respecto al producto interno L^2 entre funciones a valores matriciales sobre $\mathrm{SU}(n+1)$.

Uno de los principales propósitos de este capítulo es dar expresiones explícitas de una sucesión de polinomios ortogonales asociadas al peso W dado en el Teorema 5.1. Esto se logra estudiando el espacio vectorial $V(\lambda)$ de todas las soluciones polinomiales con valores vectoriales de la ecuación hipergeométrica $DF - \lambda F = 0$. Este espacio es no trivial si y solo si

$$\lambda = \lambda_j(w) = -w(w+\alpha+\beta+\ell+j+1) - j(\alpha+\beta-k+1+j),$$

para algún $w \in \mathbb{N}_0$ y $j = 0, 1, \ldots, \ell$. Si los autovalores $\lambda_j(w)$ son todos diferentes, entonces existe una única solución (salvo escalares) de $DF = \lambda F$. En la Proposición 5.17 calculamos, en el caso general, la dimensión del espacio $V(\lambda)$. Con este conocimiento en la mano, construimos una sucesión de polinomios $\{P_w\}$, eligiendo la j-ésima columna de P_w como un polinomio particular en $V(\lambda_j(w))$. En el Teorema 5.18 probamos que $\{P_w\}$ es una sucesión ortogonal de polinomios matriciales tal que $DP_w^* = P_w^*\Lambda_w(D)$, donde $\Lambda_n(D)$ es la matriz diagonal real

$$\Lambda_w(D) = \sum_{0\leq j\leq \ell} \lambda_j(w)E_{jj}.$$

Las funciones esféricas asociadas a $(G,K) = (\mathrm{SU}(n+1), \mathrm{U}(n))$ son autofunciones, no solo del operador de Casimir, sino también de cualquier elemento del álgebra $D(G)^G$ de todos los operadores diferenciales en G que son invariantes a izquierda y a derecha por multiplicación por elementos de G. En este caso esta álgebra es un álgebra polinomial en n generadores algebraicamente independientes, uno de ellos se puede tomar como el operador de Casimir de G. Para $n = 2$, en el Capítulo 1 están dadas las expresiones explícitas de los dos generadores y se obtuvieron dos operadores diferenciales D y E que conmutan. Para el caso n general no tenemos expresiones simples de otros generadores del álgebra $D(G)^G$ mas allá del operador de Casimir. De todas formas, somos capaces de encontrar otro operador diferencial de segundo orden E, que conmuta con D y tal que es simétrico con respecto a W (Ver Teorema 5.19). La forma en que obtenemos este operador es diferente a la utilizada en [PT06] y está inspirada en el operador $\tilde{E}$ dado en el Capítulo 4. Aquí solo sabemos que ese operador debe existir y después de un proceso de prueba y error lo encontramos y demostramos que es simétrico.

La sucesión de polinomios ortogonales matriciales construida en el Teorema 5.18 $\{P_w\}$ también satisface $EP_w^* = P_w^*\Lambda_w(E)$ con

$$\begin{aligned}\Lambda_w(E) = \sum_{j=0}^{\ell}(&-w(w+\alpha+\beta+\ell+j+1)(\alpha-\ell+3j) \\ &- j(j+\alpha+\beta-k+1)(\alpha+2\ell+3k))E_{jj}.\end{aligned}$$

Finalmente estudiamos el álgebra generada por los operadores diferenciales D y E. En el Teorema 5.22 probamos que es isomorfa al álgebra afín de la siguiente unión de líneas en $\mathbb{C}^2$:

$$\prod_{j=0}^{\ell}\left(y-(\alpha-\ell+3j)x+3j(\ell-j+k)(j+\alpha+\beta-k+1)\right).$$

Recientemente, en [DG06] esta situación es considerada en el caso $\ell = 2$. Los autores conjeturan que el álgebra generada por D y E coincide con el álgebra de todos los operadores diferenciales que tienen a los polinomios ortogonales P_w como autofunciones simultáneas.

5.1 Introducción

El objetivo de esta sección es dar algunos aspectos básicos de la teoría de polinomios ortogonales matriciales y vectoriales . Mostraremos que cada par $\{W, D\}$, donde $W(t)$ es una función peso con valores matriciales y D es cierto operador diferencial simétrico de segundo orden tiene asociada una sucesión de polinomios matriciales ortogonales con respecto al peso W que son autofunciones del operador diferencial D.

Sea la función peso $W = W(t)$ con valores en las matrices $L\times L$, diferenciable, autoadjunta, definida positiva y con momentos finitos. Consideramos la forma bilineal hermítica definida para cualquier par de funciones polinomiales con valores en matrices $L\times L$, $P(t)$ y $Q(t)$ por la matriz numérica

$$(P,Q) = \int_{\mathbb{R}} P(t)W(t)Q^*(t)dt,$$

Lema 5.2. *Sea $P = \sum_{j=0}^{n} x^j A_j$. Entonces (P,P) es no singular si A_j es no singular para algún j. Además, si $(P,P) = 0$ entonces $P = 0$.*

Demostración. Existen L funciones $e_i(x) \in \mathbb{C}^L$, $i = 1, \ldots, L$ y L funciones escalares $\alpha_i(x)$ tales que $\{e_i(x)\}_{i=1}^{L}$ es una base ortonormal de $\mathbb{C}^L$ y $W(x)e_i(x) = \alpha_i(x)e_i(x)$. Dado cualquier vector $e \in \mathbb{C}^L$, entonces

$$P^*(x)e = \sum_{i=1}^{L} a_i(x)e_i(x),$$

para ciertas funciones escalares $a_i(x)$. Si suponemos que $(P,P)e = 0$, entonces tenemos que

$$((P,P)e, e) = \int_{\mathbb{R}} (PWP^*e, e)dx. \tag{5.8}$$

Observemos además que

$$WP^*e = \sum_{i=1}^{L} a_i(x)\alpha_i(x)e_i(x),$$

y por lo tanto tenemos que $(WP^*e, P^*e) = \sum_{i=1}^{L} a_i(x)\alpha_i(x)\overline{\alpha_i}(x)$. Por lo tanto la ecuación (5.8) es igual a

$$\int_{\mathbb{R}} (WP^*e, P^*e)dx = \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{L} \alpha_i(x)\overline{\alpha_i}(x)dx.$$

Como $(P,P)e = 0$, las funciones $a_i(x)\alpha_i(x)\overline{a_i}(x)$ deben ser iguales a cero. Por lo tanto como $\alpha_i(x) > 0$, tenemos que $a_i(x) = 0$. Esto implica que $P(x)^*e = 0$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{L} x^j A_j^* e = 0,$$

para todo x y por lo tanto $A_j^*e = 0$ para todo j lo cual implica que A_j es singular. □

Corolario 5.3. *Los momentos pares de W*

$$M_{2n} = \int_{\mathbb{R}} (x^n I)W(x)(x^n I)^* dx = (x^n I, x^n I),$$

son no singulares.

Definición 5.4. *La sucesión $\{Q_n\}$ es una sucesión de polinomios ortogonales matriciales si $\deg(Q_n) = n$, el coeficiente director de Q_n es una matriz no singular y $(Q_m, Q_n) = 0$ si $m \neq n$. Decimos que la sucesión $\{Q_n\}$ es ortonormal si además $(Q_n, Q_n) = I$.*

Sea V_n el siguiente espacio vectorial

$$V_n = \{H \in M_{L\times L}[x] : \deg(L) \leq n\}.$$

Proposición 5.5.
(i) $V_n = V_{n-1} \oplus V_{n-1}^{\perp}$, donde $V_{n-1}^{\perp} = \{H \in V_n : (H,P) = 0$ para todo $P \in V_{n-1}$.
(ii) $\dim V_{n-1}^{\perp} = L^2$.
(iii) $V_{n-1}^{\perp}$ contiene un único polinomio mónico P_n de grado n.

Demostración. Procedemos por inducción en n. Por definición, $V_{-1} = 0$. Si $n = 0$, entonces $V_0 = 0^\perp$, $\dim V_0 = L^2$ y $I \in V_0$. Dado $n > 0$, asumimos que i), ii) y iii) son verdaderas para todo $0 \le j \le n-1$. Sea P_n un polinomio mónico de grado n en V_{n-1}. Entonces podemos escribir

$$P_n(x) = x^n I + A_{n-1}P_{n-1} + \cdots + A_0 P_0,$$

tal que $(P_n, H) = 0$ para todo $H \in V_{n-1}$. Observemos que

$$0 = (P_n, P_j) = (x^n I, P_j) + (A_j P_j, P_j) = (x^n I, P_j) + A_j(P_j, P_j).$$

Como (P_j, P_j) es no singular, la matriz A_j está completamente determinada y por lo tanto queda probado iii).

Sea $H \in V_n$, si $H \notin V_{n-1}$ entonces el grado de H es n y $H = x^n A_n + K$ con $K \in V_{n-1}$ para alguna matriz A_n. Observemos que $H - A_n P_n \in V_{n-1}$ y por lo tanto $H \in V_{n-1} \oplus V_{n-1}^\perp$, es decir $V_n = V_{n-1} + V_{n-1}^\perp$. Para probar que la suma es una suma directa tomamos $P \in V_{n-1} \cap V_{n-1}^\perp$. Entonces $(P, P) = 0$, lo cual implica que $P = 0$ por la Proposición 5.2. Esto completa la demostración de i).

Para probar ii) notemos que

$$V_n = V_{n-1} \oplus V_{n-1}^\perp = V_{n-2} \oplus V_{n-2}^\perp \oplus V_{n-1}^\perp = V_0 \oplus V_0^\perp \oplus \cdots \oplus V_{n-1}^\perp.$$

Es claro ahora que como la dimensión de $V_n = (n+1)L^2$, $\dim V_{n-1}^\perp = (n+1)L^2 - nL^2 = L^2$. Esto concluye la prueba de la proposición. $\square$

Corolario 5.6. *Dado el peso W, existe una única sucesión $\{Q_n\}$ de polinomios ortogonales mónicos. Además, toda sucesión de polinomios ortogonales es de la forma $P_n = A_n Q_n$ para ciertas matrices A_n.*

5.1.1 El álgebra de operadores diferenciales

Sea $W = W(x)$ una matriz peso $L \times L$ con momentos finitos y sea $\{P_n\}$ cualquier sucesión de polinomios ortogonales matriciales asociados a la función peso W.

Sea

$$V_n = \{F \in M_{L\times L}(\mathbb{C})[x] : \deg(F) \le n\}$$

el conjunto de todos los polinomios matriciales de grado menor o igual a n.

Proposición 5.7. *Tenemos la siguiente descomposición de V_n*

$$V_n = \bigoplus_{j=0}^{n} P_j^* M_{L\times L}(\mathbb{C}).$$

Demostración. Es claro que $\sum_{j=0}^n P_j^* M_{L\times L}(\mathbb{C})$ es un subespacio de V_n y que para $n = 0$ son el mismo. Denotemos por M_n al coeficiente director de P_n^*. Si $H = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_0$ es un polinomio en V_n entonces $H - P_n^* M_n^{-1} A_n$ es un polinomio de grado menor o igual a $n-1$. Por lo tanto, por inducción en n obtenemos que $H \in \sum_{j=0}^n P_j^* M_{L\times L}(\mathbb{C})$. Para probar que esta suma es una suma directa asumimos que $P_0^* A_0^* + \cdots + P_n^* A_n^* = 0$. Comparando inductivamente los coeficientes de $x^n, x^{n-1}, \ldots x^0$ obtenemos que $A_n = \cdots = A_0 = 0$. $\square$

Sea $\mathcal{D}$ el álgebra de todos los operadores diferenciales de la forma

$$D = F_s(x)\frac{d^s}{dx^s} + F_{s-1}(x)\frac{d^{s-1}}{dx^{s-1}} + \cdots + F_1(x)\frac{d}{dx} + F_0(x) \tag{5.9}$$

donde F_j es una función polinomial de grado menor o igual a j.

Teorema 5.8. *Sea $\{P_n\}$ cualquier sucesión de polinomios ortogonales matriciales asociada a W. Si $D \in \mathcal{D}$ es simétrico con respecto a W entonces $DP_n^* = P_n^*\Lambda_n$, para alguna matriz Λ_n.*

Observación 5.9. *Recalcamos que el operador D es simétrico con respecto a W si $\langle DP, Q\rangle = \langle P, DQ\rangle$, para todo par de polinomios P, Q. La sucesión $\{P_n\}$ es ortogonal con respecto a $(\,,)$. Las formas bilineales $\langle\,,\rangle$ y $(\,,)$ están relacionadas por $\langle P, Q\rangle = (P^*, Q^*)^*$.*

Demostración. Como $D \in \mathcal{D}$, el operador D preserva los espacios vectoriales V_n, para cada $n \geq 0$.

Para $n = 0$ tenemos que $DP_0^* \in V_0$, por lo tanto $DP_0^* = P_0^*\Lambda_0$. Por inducción asumimos que $DP_j^* = P_j^*\Lambda_j$, para cada $0 \leq j \leq n-1$. Por la Proposición 5.7 tenemos que $DP_n^* = \sum_{i=0}^n P_i^* A_i$. Por lo tanto, para cada $0 \leq j \leq n-1$ tenemos que

$$\langle DP_n^*, P_j^*\rangle = \textstyle\sum_{i=0}^j \langle P_i^* A_i, P_j^*\rangle = \sum_{i=1}^j (P_i, P_j)^* A_i = (P_j, P_j)^* A_j.$$

Por otro lado, como D es simétrico obtenemos

$$\langle DP_n^*, P_j^*\rangle = \langle P_n^*, DP_j^*\rangle = \langle P_n^*, P_j^*\Lambda_j\rangle = ((P_n, P_j)\Lambda_j)^* = 0.$$

Entonces $(P_j, P_j)^* A_j = 0$ para cada $0 \leq j \leq n-1$, lo cual implica que $A_j = 0$ pues la matriz (P_j, P_j) es no singular. Por lo tanto $DP_n^* = P_n^*\Lambda_n$ y esto concluye la prueba. □

Dada cualquier sucesión de polinomios ortogonales matriciales $\{P_n\}$ asociada al peso W, definimos

$$\mathcal{D}(W) = \{D \in \mathcal{D} : DP_n^* = P_n^*\Lambda_n(D), \forall n \geq 0, \text{ para alguna matriz } \Lambda_n(D)\}. \tag{5.10}$$

Proposición 5.10. *Tenemos que*

1. *$\mathcal{D}(W)$ es una subálgebra de $\mathcal{D}$ que no depende de la sucesión $\{P_n\}$.*
2. *Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, la función $\Lambda_n : \mathcal{D}(W) \longrightarrow M_{L\times L}(\mathbb{C})$ dada por $D \mapsto \Lambda_n(D)$ es una representación del álgebra $\mathcal{D}(W)$.*
3. *La familia $\{\Lambda_n\}_{n\geq 0}$ separa puntos de $\mathcal{D}(W)$. Es decir, si D_1 y D_2 son punto distintos de $\mathcal{D}(W)m$ entonces existe un $n_0 \geq 0$ tal que $\Lambda_{n_0}(D_1) \neq \Lambda_{n_0}(D_2)$.*

Demostración. Es fácil verificar que $D(W)$ es una subálgebra de $\mathcal{D}$. para probar que es independiente de la sucesión $\{P_n\}$ tomamos otra sucesión de polinomios ortogonales $\{Q_n\}$. Entonces $Q_n = A_n P_n$, para alguna matriz no singular A_n. Por lo tanto tenemos que $DQ_n^* = DP_n^* A_n^* = P_n^*\Lambda_n(D)A_n^* = Q_n^*\Upsilon_n(D)$, donde $\Upsilon_n(D) = (A_n^*)^{-1}\Lambda_n(D)A_n^*$.

Si D_1 y D_2 están en $D(W)$ entonces

$$D_1 D_2 P_n^* = D_1(P_n^*\Lambda_n(D_2)) = P_n^*\Lambda_n(D_1)\Lambda_n(D_2).$$

Por lo tanto $\Lambda_n(D_1D_2) = \Lambda_n(D_1)\Lambda_n(D_2)$.

Asumamos que existe un operador $D \in D(W)$ tal que $\Lambda_n(D) = 0$ para todo $n \geq 0$. Para probar (3) tenemos que verificar que $D = 0$. Por hipótesis tenemos que $D = \sum_{i=0}^s F_i(x)\frac{d^i}{dx^i}$ satisface $DP_n^* = 0$, para todo $n \geq 0$. Para $n = 0$ obtenemos $F_0 P_0^* = 0$, entonces $F_0 = 0$.
Por inducción, podemos asumir que $F_i = 0$ para $0 \leq i \leq j-1$, con $j \leq s$. Entonces $0 = DP_j^* = \sum_{i=1}^j F_i(x)\frac{d^i(P_j^*)}{dx^i} = F_j(x)j!M_j$, donde M_j es el coeficiente director de P_j, que es no singular. Por lo tanto $F_j = 0$. Esto concluye la prueba. □

Corolario 5.11. *Los operadores D_1 y D_2 en el álgebra $\mathcal{D}(W)$ conmutan si y solo si las matrices $\Lambda_n(D_1)$ y $\Lambda_n(D_2)$ conmutan para todo $n \in \mathbb{N}_0$.*

Demostración. Por la Proposición 5.10, (3) tenemos que $D_1D_2 = D_2D_1$ si y solo si $\Lambda_n(D_1D_2) = \Lambda_n(D_2D_1)$ para todo n. Por la Proposición 5.10, (2) tenemos $\Lambda_n(D_1D_2) = \Lambda_n(D_1)\Lambda(D_2)$. □

Proposición 5.12. *Sea $\{Q_n\}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos. Sea $D = \sum_{i=0}^{s} F_i(u)\frac{d^i}{du^i}$ tal que $DQ_n^* = Q_n^*\Gamma_n$. Entonces*

$$\Gamma_n = \sum_{0\le i\le s} [n]_i A_i^i \qquad \textit{para todo } n \ge 0,$$

donde A_i^i es el coeficiente de x^i en el polinomio F_i.

Observación 5.13. *Utilizamos la notación $[n]_i = n(n-1)\dots(n-i+1)$ para $n \ge 1$, y $[n]_0 = 1$, para $n \ge 0$.*

Demostración. De

$$\sum_{0\le i\le s} F_i(u)\tfrac{d^iQ_n^*}{du^i}(u) = Q_n^*(u)\Gamma_n,$$

comparando los monomios de grado n, obtenemos $\sum_{0\le i\le s}[n]_iA_i^i = \Gamma_n$. □

Observación 5.14. *Observemos que en particular, la Proposición 5.12 implica que el autovalor Γ_n es una función polinomial en n de grado menor o igual a* $\deg(D)$.

5.2 Polinomios ortogonales asociados al par $\{W, D\}$

El objetivo de esta sección es dar explícitamente una sucesión de polinomios ortogonales a valores matriciales asociados a la función peso W y al operador diferencial D introducidos en el Teorema 5.1, es decir construiremos una sucesión $\{P_w\}$ de polinomios ortogonales con respecto a W, tal que $DP_w^* = P_w^*\Lambda_w$, donde $\Lambda_w(D)$ es una matriz diagonal real.

Las columnas $\{P_w^j\}_{j=0,\dots\ell}$ de P_w^* son polinomios con valores en $\mathbb{C}^{\ell+1}$ tales que $DP_w^j = \lambda_j(w)P_w^j$ y $(P_w^j, P_{w'}^{j'}) = \delta_{w,w'}\delta_{j,j'}n_{w,j}$, para algún número real positivo $n_{w,j}$.

5.2.1 Soluciones polinomiales de $DF = \lambda F$

Empezamos estudiando soluciones polinomiales a valores en $\mathbb{C}^{\ell+1}$ de la ecuación $DF = \lambda F$. Encontraremos todos los polinomios $F(u)$ tales que

$$u(1-u)F''(u) + (C - uU)F'(u) - (V+\lambda)F(u) = 0, \tag{5.11}$$

donde las matrices C, U, V están dadas en el Teorema 5.1. Esta ecuación es un caso particular de la ecuación diferencial hipergeométrica estudiada en [Tir03]. Como los autovalores de la matriz C no están en $-\mathbb{N}_0$ la función F está caracterizada por $F_0 = F(0)$. Para $|u| < 1$ está dada por

$$F(u) = {}_2H_1\left({U\,;\,V+\lambda \atop C}\,;u\right)F_0 = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{u^i}{i!}[C;U;V+\lambda]_iF_0, \qquad F_0 \in \mathbb{C}^{\ell},$$

donde el símbolo $[C; U; V + \lambda]_i$ está definido inductivamente por

$$[C; U; V + \lambda]_0 = 1,$$
$$[C; U; V + \lambda]_{i+1} = (C + i)^{-1} \left(i(U + i - 1) + V + \lambda\right) [C; U; V + \lambda]_i,$$

para todo $i \geq 0$.

Existe una solución polinomial de (5.11) si y solo si el coeficiente $[C; U; V + \lambda]_i$ es singular para algún $i \in \mathbb{Z}$. Asumamos que $[C; U; V + \lambda]_{w+1}$ es singular y que $[C; U; V + \lambda]_w$ no es singular.

Como la matriz $(C + w)$ es inversible, tenemos que $[C; U; V + \lambda]_{w+1}$ es singular si y solo si $(w(U + w - 1) + V + \lambda)$ es singular. La matriz

$$M_w = (w(U + w - 1) + V + \lambda)$$

es triangular superior y

$$(M_w)_{j,j} = w(w + \alpha + \beta + \ell + j + 1) + j(\alpha + \beta - k + 1 + j) + \lambda.$$

Por lo tanto $[C; U; V + \lambda]_{w+1}$ es singular si y solo si

$$\lambda = \lambda_j(w) = -w(w + \alpha + \beta + \ell + j + 1) - j(\alpha + \beta - k + 1 + j), \tag{5.12}$$

para algún $0 \leq j \leq \ell$.

Vamos a distinguir los casos en que todos los autovalores $\lambda_j(w)$ son distintos (variando j o w) y el caso en el que están repetidos. Comenzamos estudiando las soluciones polinomiales de (5.11) en el primer caso.

Proposición 5.15. *Asumamos que todos los autovalores $\lambda_j(w)$ son distintos. Si $\lambda = \lambda_j(w)$, para algún $j = 0, \ldots, \ell$, entonces existe un único vector $F_0 \in \mathbb{C}^{\ell+1}$ (salvo escalares) tal que $F(u) = {}_2H_1\left(\begin{smallmatrix} U\,;\,V+\lambda \\ C \end{smallmatrix}; u\right) F_0$ es una función polinomial. Además este polinomio es de grado w.*

Demostración. Ya observamos que para $\lambda = \lambda_j(w) = -w(w+\alpha+\beta+\ell+j+1)-j(\alpha+\beta-k+1+j)$, la matriz $[C, U, V + \lambda]_{w+1}$ es singular. Entonces la función $F(u) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{u^i}{i!}[C; U; V + \lambda]_i F_0$ es un polinomio si y sólo si F_0 es un vector tal que

$$[C, U, V + \lambda]_w F_0 \in \ker(M_w); \tag{5.13}$$

donde $M_w = w(U + w - 1) + V + \lambda_j(w)$. La matriz $[C, U, V + \lambda]_w$ es inversible, por lo tanto F_0 está unívocamente determinado por un elemento en el núcleo de M_w. Tenemos que

$$M_w = \sum_{0 \leq i \leq \ell} \left((i - j)(\alpha + \beta - k + 1 + i + j + w)E_{ii} - (\ell - i)(\beta - k + 1 + i)E_{i,i+1}\right). \tag{5.14}$$

Como todos los autovalores $\lambda_j(w)$ son diferentes tenemos que $0 \neq \lambda_j(w) - \lambda_i(w) = (i - j)(\alpha + \beta - k + 1 + i + j + w)$ si $i \neq j$, entonces la dimensión del núcleo de M_w es uno. Explícitamente $(x_0, x_1, \ldots, x_\ell) \in \ker(M_w)$ si y solo si

$$\begin{aligned} x_i &= (-1)^{i+j} \tbinom{\ell-i}{\ell-j} \tfrac{(\beta-k+1+i)_{j-i}}{(\alpha+\beta+j+i+w-k+1)_{j-i}} x_j \qquad \text{for } i = 0, \ldots j, \\ x_{j+1} &= x_{j+2} = \cdots = x_\ell = 0, \end{aligned} \tag{5.15}$$

donde usamos $(z)_r = z(z + 1) \ldots (z + r - 1)$, $(z)_0 = 1$.

Por lo tanto, salvo un escalar, F_0 queda unívocamente determinado por (5.13) y está claro que $F(u) = {}_2H_1\left(\begin{smallmatrix} U\,;\,V+\lambda \\ C \end{smallmatrix}; u\right) F_0$ es un polinomio de grado w con coeficiente director $\frac{1}{w!}[C, U, V + \lambda_j(w)]_w F_0$. Esto completa la prueba de la proposición. $\square$

Ahora tenemos que estudiar el caso en que algunos autovalores están repetidos, esto es cuando existen $w, w' \in \mathbb{N}_0$ y $0 \leq j, j' \leq \ell$ tales que $\lambda_j(w) = \lambda_{j'}(w')$. Comenzamos observando los siguientes hechos.

Lema 5.16. *Si $\lambda_j(w) = \lambda_{j'}(w')$ para algún $w, w' \in \mathbb{N}_0$ y $0 \leq j, j' \leq \ell$ entonces*

i) Tenemos que $w = w'$ si y solo si $j = j'$.

ii) Si $w' > w$ entonces $j > j' + 1$.

Demostración. Si $\lambda_j(w) = \lambda_{j'}(w')$ entonces

$$(w' - w)(\alpha + \beta + \ell + 1 + w + w' + j') + (j' - j)(\alpha + \beta - k + 1 + j + j' + w) = 0.$$

En particular si $w' = w$, entonces $(j' - j)(\alpha + \beta - k + 1 + j + j' + w) = 0$. Observemos que $j \neq j'$ implica que $\alpha + \beta - k + 1 + j + j' + w > 0$, pues $\alpha > -1$, $\beta - k + 1 > 0$, $j + j' \geq 1$ y $w \geq 0$.
De manera similar si $j' = j$ tenemos que $(w' - w)(\alpha + \beta + \ell + 1 + w + w' + j) = 0$. Como $\alpha > -1$, $\beta + \ell + 1 > 0$ y $w + w' + j \geq 1$ obtenemos que $(\alpha + \beta + \ell + 1 + w + w' + j) > 0$ y por lo tanto $w = w'$. Esto completa la prueba de i).

Para ii) empezamos por

$$(w' - w)(\alpha + \beta + \ell + 1 + w + w' + j') = (j - j')(\alpha + \beta - k + 1 + j + j' + w),$$

y observamos que el miembro izquierdo de esta identidad, como también el factor $(\alpha+\beta-k+1+j+j'+w)$, son números positivos por hipótesis. Por lo tanto debemos tener $j > j'$. Finalmente supongamos que $j = j' + 1$. Entonces $(w' - w)(\alpha + \beta + \ell + w + w' + j) = (\alpha + \beta - k + w + 2j)$, es equivalente a

$$(w' - w - 1)(\alpha + \beta + \ell + w + w' + j) = -(w' + \ell - j + k).$$

El miembro izquierdo de esta identidad es no negativo mientras que el derecho es negativo porque $k > 0$, lo cual es una contradicción. □

Sea $V(\lambda)$ el espacio vectorial de todos los polinomios con valores en $\mathbb{C}^{\ell+1}$ tal que $DP = \lambda P$. Observemos que la Proposición 5.15 dice que si los autovalores $\lambda = \lambda_j(w)$ son todos distintos entonces la dimensión de $V(\lambda)$ es uno. La siguiente proposición generaliza este resultado al caso en el que los autovalores $\lambda_j(w)$ están repetidos.

Proposición 5.17. *Sea $\alpha, \beta > -1$, $0 < k < \beta + 1$ y sea $\lambda = \lambda_j(w)$, para algún $w \in \mathbb{N}_0$. Entonces*

$$\dim\{P \in V(\lambda) : \deg P \leq w\} = \textit{ card } \{w' : 0 \leq w' \leq w\,,\ \lambda = \lambda_{j'}(w'),\ \textit{para algún } 0 \leq j' \leq \ell\}. \tag{5.16}$$

En particular

$$\dim V(\lambda) = \textit{card } \{(w, j) : \lambda = \lambda_j(w)\}.$$

Demostración. Anteriormente observamos que para $\lambda = \lambda_j(w)$ la función $F = F(u)$ es una solución polinomial de $DF = \lambda F$ si y solo si $F(u) = {}_2H_1(C, U, V + \lambda)F_0$ con $F_0 \in \mathbb{C}^{\ell+1}$ ya que $[C, U, V + \lambda]_w F_0 \in \ker(M_{w,j})$, donde

$$M_{w,j} = \sum_{0 \leq i \leq \ell} \big((i - j)(\alpha + \beta - k + 1 + i + j + w)E_{ii} - (\ell - i)(\beta - k + 1 + i)E_{i,i+1}\big)$$

Tenemos que $(i-j)(\alpha+\beta-k+1+i+j+w) \neq 0$ si $i \neq j$. Por lo tanto la dimensión de $\ker(M_{w,j})$ es uno. Además está generado por $(x_0, \dots, x_\ell) \in \mathbb{C}^{\ell+1}$ tal que

$$\begin{aligned} x_i &= (-1)^{i+j}\tbinom{\ell-i}{\ell-j}\tfrac{(\beta-k+1+i)_{j-i}}{(\alpha+\beta+j+i+w-k+1)_{j-i}} \qquad \text{para } i = 0, \dots j = 1, \\ x_j &= 1 \\ x_{j+1} &= x_{j+2} = \cdots = x_\ell = 0, \end{aligned} \tag{5.17}$$

donde usamos $(z)_r = z(z+1)\dots(z+r-1)$, $(z)_0 = 1$.

Si el autovalor λ está reperido s veces y $w_1 = \min\{w \in \mathbb{N}_0 : \lambda = \lambda_j(w), 0 \leq j \leq \ell\}$, usando el Lema 5.16, podemos asumir que

$$\lambda = \lambda_{j_1}(w_1) = \cdots = \lambda_{j_s}(w_s)$$

con $w_1 < w_2 < \cdots < w_s$ y $j_1 > j_2 + 1$, $j_2 > j_3 + 1, \dots, j_{s-1} > j_s$.

Para $w = w_1$ y $j = j_1$ la matriz $[C, U, V + \lambda]_{w_1}$ es inversible y F_0 esá unívocamente determinado por un elemento en $\ker(M_{w_1,j_1})$, que es de dimensión uno, por lo tanto esto prueba (5.16) en este caso.

Entonces para probar la proposición para cualquier w_r procedemos por inducción en $1 \leq r \leq s$. Para esto asumamos que sabemos que

$$\{P \in V(\lambda) : \deg P \leq w_{r-1}\} = r - 1,$$

para $2 \leq r \leq s$.

Sea $M_r = M_{w_r,j_r}$. Como remarcamos $0 \neq P \in V(\lambda)$ es de grado w_r si y solo si $P_0 = P(0)$ satisface $0 \neq [C, U, V + \lambda]_{w_r} P_0 \in \ker(M_r)$.

Sea

$$[C, U, V + \lambda]_{w_r} = N_{w_r} M_{r-1} \dots N_1 M_1 N_0,$$

donde N_i son matrices inversibles. El coeficiente director P_r de tal P está unívocamente determinado, salvo un escalar, por la condición

$$M_r N_r M_{r-1} \dots N_1 M_1 N_0 P_0 = 0,$$

porque podemos asumir que

$$P_r = N_r M_{r-1} \dots N_1 M_1 N_0 P_0 = (x_0, \dots, x_{j_r-1}, 1, 0, \dots, 0).$$

Ahora probemos que existe $\tilde{P} \in V(\lambda)$ de grado w_r, construyendo uno por inducción descendente.

Sea $v_r = (x_0, \dots, x_{j_r-1}, 1, 0, \dots, 0) \in \ker(M_r)$ y sea $b_r = N_r^{-1} v_r$. La ecuación $b_r = M_{r-1} v_{r-1}$ tiene una solución única v_{r-1} de la forma $v_{r-1} = (z_0, \dots, z_{j_r+1}, 0, \dots, 0)$ pues $b_r = (y_0, \dots, y_{j_r+1}, 0, \dots, 0)$ con $y_{j_r+1} \neq 0$ y M_{r-1} es triangular superior con un único cero en la diagonal principal en la posición j_{r-1}. Similarmente sea $b_{r-1} = N_{r-1}^{-1} v_{r-1}$, entonces existe un único $v_{r-2} = (t_0, \dots, t_{j_r+2}, 0, \dots 0)$ tal que $M_{r-2} v_{r-2} = b_{r-1}$. De esta forma construimos la sucesión $v_r, v_{r-1}, \dots, v_0$ tal que

$$\begin{aligned} v_r &= N_r b_r = N_r M_{r-1} v_{r-1} = N_r M_{r-1} N_{r-1} M_{r-2} v_{r-2} = \cdots \\ &= N_r M_{r-1} \dots N_1 M_1 N_0 v_0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $\tilde{P} = {}_2H_1(C, U, V + \lambda) v_r$ es un polinomio en $V(\lambda)$ de grado w_r.

Ahora observemos que

$$\{P \in V(\lambda) : \deg P \leq w_r\} = \mathbb{C}\tilde{P} \oplus \{P \in V(\lambda) : \deg P \leq w_{r-1}\}.$$

De hecho está claro que el miembro derecho es una suma directa contenida en el miembro. Para probar la otra inclusión primero observamos que si $P \in V(\lambda)$ y $\deg P < w_r$ entonces, como dijimos, $\deg P \leq w_{r-1}$. Si $P \in V(\lambda)$ es de grado w_r entonces el coeficiente director de P es igual al coeficiente director de $t\tilde{P}$ para algún $t \in \mathbb{C}$. Por lo tanto $P - t\tilde{P} \in \{P \in V(\lambda) : \deg P \leq w_{r-1}\}$. Esto completa la prueba de la proposición. □

5.2.2 Polinomios ortogonales matriciales asociados a $\{W, D\}$.

Queremos construir una sucesión $\{P_w\}_{w\geq 0}$ de polinomios ortogonales matriciales con respecto a la función peso W, con grado de P_w igual a w, con coeficiente director no singular y tal que $DP_w^* = P_w^*\Lambda_w$, donde $\Lambda_w(D)$ es una matriz diagonal real.

Entonces las columnas $\{P_w^j\}_{j=0,\dots\ell}$ de P_w^* son polinomios con valores en $\mathbb{C}^{\ell+1}$ tales que P_w^j y $P_{w'}^{j'}$ son ortogonales entre si para $(j, w) \neq (j', w')$ y satisfacen $DP_w^j = \lambda_j(w)P_w^j$, donde

$$\lambda_j(w) = -w(w + \alpha + \beta + \ell + j + 1) - j(j + \alpha + \beta - k + 1),$$

para cada $w \in \mathbb{N}_0$, y $j = 0, \dots, \ell$.

Si un autovalor $\lambda = \lambda_j(w)$ no se repite, entonces elegimos el único $F_0 \in \mathbb{C}^{\ell+1}$ tal que

$$[C, U, V + \lambda_j(w)]_w F_0 = \sum_{0\leq i\leq j} (-1)^{i+j} \tbinom{\ell-i}{\ell-j} \tfrac{(\beta-k+1+i)_{j-i}}{(\alpha+\beta+j+i+w-k+1)_{j-i}}\, e_i \tag{5.18}$$

donde e_i denota el i-ésimo vector en la base canónica de $\mathbb{R}^{\ell+1}$. Entonces tomamos

$$P_w^j(u) = {}_2H_1\left(\begin{smallmatrix} U\,;\,V+\lambda_j(w) \\ C \end{smallmatrix}; u\right) F_0 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{u^i}{i!}[C; U; V + \lambda_j(w)]_i F_0$$

que es una función polinomial de grado w y satisface

$$DP_w^j(u) = \lambda_j(w)P_w^j(u).$$

(Ver Proposición 5.15).

Si un autovalor $\lambda = \lambda_j(w)$ está repetido, ya vimos que

$$\lambda = \lambda_{j_1}(w_1) = \lambda_{j_2}(w_2) = \cdots = \lambda_{j_s}(w_s),$$

con $w_1 < w_2 < \cdots < w_s$ y $j_r \geq j_{r+1} + 1$, para $1 \leq r \leq s - 1$.

Sea $V_r = \{P \in V(\lambda) : \deg P \leq w_r\}$, para $1 \leq r \leq s$. Entonces vimos, en la Proposición 5.17, que

$$0 \neq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_s$$

con $\dim V_s = s$. Ahora tomamos, para cada $1 \leq r \leq s$

$$0 \neq P_{w_r}^{j_r}(u) = {}_2H_1\left(\begin{smallmatrix} U\,;\,V+\lambda_j(w) \\ C \end{smallmatrix}; u\right) F_0^{j_r} \in V_r \text{ ortogonal a } V_{r-1}.$$

De esta forma, para cada $w \in \mathbb{N}_0$ hemos definido $\ell + 1$ funciones polinomiales ortogonales $P_w^0, P_w^1, \dots, P_w^\ell$ de grado w.

Teorema 5.18. *Sea $P_w(u)$ la matriz cuyas filas son los vectores $P_w^j(u)$. Entonces la sucesión $\{P_w(u)\}_{w\in\mathbb{N}_0}$ es una sucesión ortonormal de polinomios matriciales tal*

$$DP_w^*(u) = P_w^*(u)\Lambda_w,$$

donde $\Lambda_w = \sum_{j=0}^{\ell} \lambda_j(w)E_{jj}$.

Demostración. Sea $(w,j) \neq (w',j')$. Si $\lambda_j(w) \neq \lambda_{j'}(w')$ entonces $(P_w^j, P_{w'}^{j'}) = 0$ porque D is simétrico. Si $\lambda_j(w) = \lambda_{j'}(w')$ entonces $(P_w^j, P_{w'}^{j'}) = 0$ por construcción. Por lo tanto las matrices P_w satisfacen $(P_w, P_{w'}) = 0$ si $w \neq w'$.

Por otro lado tenemos que para cada $w = 0,1,2\dots$ el grado de $P_w(u)$ es w y el coeficiente director de P_w es la matriz triangular no singular

$$I + \sum_{s<r} (-1)^{r+s} \tbinom{\ell-s}{\ell-r} \tfrac{(\beta-k+1+s)_{r-s}}{(\alpha+\beta+r+s+w-k+1)_{r-s}} E_{rs}.$$

Esto completa la prueba del Teorema. □

5.3 La simetría del operador diferencial E

El objetivo de esta sección es exhibir otro operador diferencial de segundo orden que es simétrico con respecto al peso W.

Teorema 5.19. *Sean $\alpha,\beta > -1$, $0 < k < \beta+1$ y $\ell \in \mathbb{N}$. Sea E el operador diferencial definido por*

$$E = (1-u)(Q_0 + uQ_1)\frac{d^2}{du^2} + (P_0 + uP_1)\frac{d}{du} - (\alpha + 2\ell + 3k)V,$$

donde

$$\begin{aligned}
Q_0 &= \textstyle\sum_{i=0}^{\ell} 3iE_{i,i-1},\\
Q_1 &= \textstyle\sum_{i=0}^{\ell}(\alpha - \ell + 3i)E_{ii},\\
P_0 &= \textstyle\sum_{i=0}^{\ell} \big((\alpha+2\ell)(\beta+1+2i) - 3k(\ell-i) - 3i(\beta-k+i)\big)E_{ii}\\
&\quad - \textstyle\sum_{i=0}^{\ell} i(3i + 3\beta - 3k + 3 + \ell + 2\alpha)E_{i,i-1},\\
P_1 &= \textstyle\sum_{i=0}^{\ell} -(\alpha-\ell+3i)(\alpha+\beta+\ell+i+2)E_{ii}\\
&\quad + \textstyle\sum_{i=0}^{\ell} 3(\beta-k+1+i)(\ell-i)E_{i,i+1},\\
V &= \textstyle\sum_{i=0}^{\ell} i(\alpha+\beta-k+1+i)E_{ii} - \sum_{i=0}^{\ell-1}(\ell-i)(\beta-k+1+i)E_{i,i+1}.
\end{aligned}$$

Entonces E es simétrico con respecto al peso matricial $W(u) = (1-u)^{\alpha}u^{\beta}Z(u)$, donde $Z(u)$ está dado por

$$Z(u) = \sum_{i,j=0}^{\ell}\left(\sum_{r=0}^{\ell} \tbinom{r}{i}\tbinom{r}{j}\tbinom{\ell+k-1-r}{\ell-r}\tbinom{\beta-k+r}{r}(1-u)^{\ell-r}u^{i+j}\right)E_{ij}.$$

Demostración. Para demostrar el teorema necesitamos probar que se satisfacen las ecuaciones (5.6) y (5.7). Las ecuaciones dadas en (5.6) toman la forma

$$(Q_0^* + uQ_1^*)Z - Z(Q_0 + uQ_1) = 0, \tag{5.19}$$

$$\begin{aligned}(P_0^*+uP_1^*)Z+Z(P_0+uP_1)-2Z(Q_1-Q_0-2uZQ_1)\\ -2(1-u)Z'(Q_0+uQ_1)-\tfrac{(\beta(1-u)-\alpha u)}{u}2Z(Q_0+uQ_1)=0,\end{aligned} \tag{5.20}$$

$$\begin{aligned}P_1^*Z+(P_0^*+uP_1^*)Z'-Z'(P_0+uP_1)-ZP_1\\ +\left(\tfrac{\beta}{u}-\tfrac{\alpha}{1-u}\right)\big((P_0^*+uP_1^*)Z-Z(P_0+uP_1)\big)\\ -2(\alpha+2\ell+3k)(ZV-V^*Z)=0.\end{aligned} \tag{5.21}$$

La entrada ij en el miembro izquierdo de la ecuación (5.19) es

$$u(\alpha-\ell+3i)z_{ij}+3(i+1)z_{i+1,j}-u(\alpha-\ell+3j)z_{ij}+3(j+1)z_{i,j+1}=0,$$

porque es fácil verificar que

$$(i+1)z_{i+1,j}-(j+1)z_{i,j+1}=u(j-i)z_{ij}.$$

Para probar la identidad (5.20) debemos calcular la entrada ij de las matrices involucradas en ella:

$$\begin{aligned}((P_0^*+uP_1^*)Z)_{ij}&=u^{i+j}\sum_{r=\max(i,j)}^{\ell}\tbinom{r}{i}\tbinom{r}{j}\tbinom{\beta+r-1}{r}\tbinom{\ell+k-1-r}{\ell-r}(1-u)^{\ell-r}\Big((P_0)_{ii}\\ &-(r-i)(3i+3\beta+\ell+2\alpha-3k+6)-(\alpha-\ell+3i)(\alpha+\beta+\ell+i+2)\Big)\\ &+u^{i+j}\sum_{r=\max(i-1,j-1)}^{\ell}\tbinom{r+1}{i}\tbinom{r+1}{j}\tbinom{\beta+r}{r+1}\tbinom{\ell+k-2-r}{\ell-r-1}(1-u)^{\ell-r}\\ &\Big((r-i+1)(3i+3\beta+\ell+2\alpha-3k+6)+(\alpha-\ell+3i)(\alpha+\beta+\ell+i+2)\Big)\Big)\\ &+u^{i+j}\sum_{r=\max(i-1,j)}^{\ell}\tbinom{r}{i-1}\tbinom{r}{j}\tbinom{\beta+r-1}{r}\tbinom{\ell+k-1-r}{\ell-r}(1-u)^{\ell-r}3(\ell-i+1)(\beta+i-k),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(Z(P_0+uP_1))_{ij}&=u^{i+j}\sum_{r}\tbinom{r}{i}\tbinom{r}{j}\tbinom{\beta+r-1}{r}\tbinom{\ell+k-1-r}{\ell-r}(1-u)^{\ell-r}\Big((P_0)_{jj}\\ &-(r-j)(3j+3\beta+\ell+2\alpha-3k+6)-(\alpha-\ell+3j)(\alpha+\beta+\ell+j+2)\Big)\\ &+u^{i+j}\sum_{r}\tbinom{r+1}{i}\tbinom{r+1}{j}\tbinom{\beta+r}{r+1}\tbinom{\ell+k-2-r}{\ell-r-1}(1-u)^{\ell-r}\\ &\big((r-j+1)(3j+3\beta+\ell+2\alpha-3k+6)+(\alpha-\ell+3j)(\alpha+\beta+\ell+j+2)\big)\\ &+u^{i+j}\sum_{r}\tbinom{r}{i}\tbinom{r}{j-1}\tbinom{\beta+r-1}{r}\tbinom{\ell+k-1-r}{\ell-r}(1-u)^{\ell-r}3(\ell-j+1)(\beta+j-k),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(Z(Q_1-Q_0-2uQ_1))_{ij}\\ &=u^{i+j}\sum_{r}\tbinom{r}{i}\tbinom{r}{j}\tbinom{\beta+r-1}{r}\tbinom{\ell+k-1-r}{\ell-r}(1-u)^{\ell-r}(-\alpha+\ell-3r)\\ &\quad+u^{i+j}\sum_{r}\tbinom{r+1}{i}\tbinom{r+1}{j}\tbinom{\beta+r}{r+1}\tbinom{\ell+k-2-r}{\ell-r-1}(1-u)^{\ell-r}(3r+3j+2\alpha-2\ell+3),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Big(\tfrac{(\beta(1-u)-\alpha u)}{u}Z(Q_0+uQ_1)\Big)_{ij}\\
&\quad = u^{i+j}\sum_r \tbinom{r}{i}\tbinom{r}{j}\tbinom{\beta+r-1}{r}\tbinom{\ell+k-1-r}{\ell-r}(1-u)^{\ell-r}\alpha(\ell-\alpha-3r)\\
&\quad + u^{i+j}\sum_r \tbinom{r+1}{i}\tbinom{r+1}{j}\tbinom{\beta+r}{r+1}\tbinom{\ell+k-2-r}{\ell-r+1}(1-u)^{\ell-r}(\alpha+\beta)(3r+\alpha-\ell+3),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&((1-u)Z'(Q_1+uQ_0))_{i,j}\\
&= u^{i+j}\sum_r \tbinom{r}{i}\tbinom{r}{j}\tbinom{\beta+r-1}{r}\tbinom{\ell+k-2-r}{\ell-r+1}(1-u)^{\ell-r}(r-\ell)(\alpha-\ell+3r)\\
&+ u^{i+j}\sum_r \tbinom{r+1}{i}\tbinom{r+1}{j}\tbinom{\beta+r}{r+1}\tbinom{\ell+k-2-r}{\ell-r+1}(1-u)^{\ell-r}\Big(3(r-j+1)(\ell-r+i+j)\\
&\qquad + (\alpha-\ell+3j)(\ell-r+i+j-1)\Big).
\end{aligned}
$$

Usando los resultados previos obtenemos que la identidad (5.20) es equivalente a

$$
\begin{aligned}
&\sum_{r=j}^{\ell}\tbinom{r}{i}\tbinom{r}{j}\tbinom{\beta+r-1}{r}\tbinom{\ell+k-1-r}{\ell-r}(1-u)^{\ell-r}\tfrac{3(r+1)(r+\beta-k+1)(\ell-r)(2r+2-i-j)}{(r-i+1)(r-j+1)}\\
&+ (1-u)^{\ell-j+1}\tbinom{j}{i}\tbinom{\beta+j-1}{j}\tbinom{\ell+k-1-j}{\ell-j}3(\ell-j+k)(j-i)\\
&-\sum_{r=j-1}^{\ell-1}\tbinom{r+1}{i}\tbinom{r+1}{j}\tbinom{\beta+r}{r+1}\tbinom{\ell+k-2-r}{\ell-r-1}(1-u)^{\ell-r}3(\ell-r+k-1)(2r+2-i-j)\\
&= 0,
\end{aligned}
$$

lo cual se deduce facilmente.

Para probar la identidad (5.21) calculamos

$$
\begin{aligned}
&(ZV-V^*Z)_{ij}\\
&= (i-j)u^{i+j-1}\Big(-\sum_r \tbinom{r}{i}\tbinom{r}{j}\tbinom{\beta+r-1}{r}\tbinom{\ell+k-1-r}{\ell-r}(1-u)^{\ell-r}(\alpha+\ell-r+1)\\
&+\sum_r \tbinom{r}{i}\tbinom{r}{j}\tbinom{\beta+r-1}{r}\tbinom{\ell+k-1-r}{\ell-r}(1-u)^{\ell-r+1}(\alpha+\beta+i+j+\ell-r+1)\Big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(P_1^*Z-ZP_1)_{ij} &= (i-j)u^{i+j-1}\Big(\sum_r \tbinom{r}{i}\tbinom{r}{j}\tbinom{\beta+r-1}{r}\tbinom{\ell+k-1-r}{\ell-r}\\
&\quad (1-u)^{\ell-r+1}(3i+4\alpha+3\beta+3k+6-3r+5\ell+3j)\\
&\quad -\sum_r \tbinom{r}{i}\tbinom{r}{j}\tbinom{\beta+r-1}{r}\tbinom{\ell+k-1-r}{\ell-r}(1-u)^{\ell-r}(4\alpha+5\ell+3k+6-3r)\Big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Big(\big(\frac{\beta(1-u)-\alpha u}{u(1-u)}\big)((P_0^*+uP_1^*)Z-Z(P_0+uP_1))+(P_0^*+uP_1^*)Z'\\
&-Z'(P_0+uP_1)\Big)_{i,j} = u^{i+j-1}(i-j)\sum_r \tbinom{r}{i}\tbinom{r}{j}\tbinom{\beta+r-1}{r}\tbinom{\ell+k-1-r}{\ell-r}(1-u)^{\ell-r}\\
&\qquad \big(2(\alpha+2\ell+3k)(\alpha+\ell-r+2)+2\alpha+\ell+6-3k-3r\big)
\end{aligned}
$$

$$- u^{i+j-1}(i-j)\sum_r \tbinom{r}{i}\tbinom{r}{j}\tbinom{\beta+r-1}{r}\tbinom{\ell+k-1-r}{\ell-r}(1-u)^{\ell-r+1}\big($$
$$2(\alpha+2\ell+3k)(\alpha+\beta+\ell-r+i+j+3)+3(i+j+\beta-3k+2-r-\ell)\big).$$

Ahora es fácil verificar que se satisface (5.21).

Finalmente se pueden verificar directamente las condiciones de borde (5.7) y esto concluye la prueba del teorema. □

5.4 El operador E

5.4.1 D y E conmutan

En esta subsección utilizamos los resultados descriptos en la Sección 5.1.1 para dar una demostración elegante del hecho de que los operadores diferenciales D y E conmutan. Por supuesto que uno puede verificar este hecho haciendo los cálculos explícitos.

Teorema 5.20. *Los operadores diferenciales D y E, introducidos respectivamente en los Teoremas 5.1 y 5.19, conmutan.*

Demostración. Por el Teorema 5.19 el operador E es simétrico con respecto al peso W. Por lo tanto E pertenece al álgebra $\mathcal{D}(W)$ definida en (5.10) (Ver el Teorema 5.8). Para ver que D y E conmutan es suficiente con probar que los autovalores correspondientes conmutan. (Ver el Corolario 5.11).

Sea $\{Q_n\}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos. Entonces para cualquier $D \in \mathcal{D}(W)$, tenemos $DQ_n^* = Q_n^*\Gamma_n(D)$, donde el autovalor $\Gamma_n(D)$ está dado explícitamente en términos de los coeficientes del operador diferencial D (Ver la Proposición 5.12).

Para los operadores D y E introducidos respectivamente en los Teoremas 5.1 y 5.19, éstos autovalores son

$$\begin{aligned}\Gamma_n(D) &= -n(U+n-1)-V\\ \Gamma_n(E) &= -n(n-1)Q_1+nP_1-(\alpha+2\ell+3k)V,\end{aligned}$$

donde las matrices U, V, Q_1 y P_1 están dadas en los Teoremas 5.1 y 5.19. Explícitamente tenemos

$$\begin{aligned}\Gamma_n(D) &= -\textstyle\sum_{i=0}^{\ell}\big(n(n+\alpha+\beta+\ell+i+1)+i(i+\alpha+\beta-k+1)\big)E_{ii}\\ &\quad+\textstyle\sum_{i=0}^{\ell-1}(\ell-i)(\beta+i-k+1)E_{i,i+1}\\ \Gamma_n(E) &= -\textstyle\sum_{i=0}^{\ell}\big(n(\alpha-\ell+3i)(n+\alpha+\beta+\ell+i+1)\\ &\qquad\qquad+(\alpha+2\ell+3k)i(i+\alpha+\beta-k+1)\big)E_{ii}\\ &\quad+\textstyle\sum_{i=0}^{\ell-1}(\ell-i)(\beta+i-k+1)(\alpha+2\ell+3k+3n)E_{i,i+1}.\end{aligned}$$

Ahora es fácil verificar que

$$\Gamma_n(E) = (\alpha+2\ell+3k+3n)\Gamma_n(D)+3n(\ell+k+n)(n+\alpha+\beta+\ell+1)I. \tag{5.22}$$

Por lo tanto la matriz $\Gamma_n(E)$ conmuta con $\Gamma_n(D)$ y por el Corolario 5.11 tenemos que D y E conmutan. □

5.4.2 Las autofunciones de E.

En la Subsección 5.2.2 damos una sucesión $\{P_w\}_w$ de polinomios matriciales, que son ortogonales con respecto a W y autofunciones del operador diferencial D. Las files P_w^j de P_w son polinomios ortogonales de grado w y satisfacen $DP_w^j = \lambda_j(w)P_w^j$.

Como D y E conmutan, el operador E preserva los autoespacios de D. Por lo tanto si un autovalor $\lambda = \lambda_j(w)$ tiene multiplicidad uno, entonces el polinomio a vectorial P_w^j también es una autofunción del operador diferencial E. En el siguiente teorema, probamos que esto es cierto incluso en el caso en que la multiplicidad de un autovalor es mayor que uno.

Teorema 5.21. *La sucesión $\{P_w\}_w$ de polinomios ortogonales asociada al par $\{W, D\}$ satisface*

$$EP_w^*(u) = P_w^*(u)\Lambda_w(E),$$

donde $\Lambda_w(E) = \sum_{0\leq j\leq \ell} \mu_j(w)E_{jj}$, *y*

$$\mu_j(w) = -w(w+\alpha+\beta+\ell+j+1)(\alpha-\ell+3j) - j(j+\alpha+\beta-k+1)(\alpha+2\ell+3k).$$

Demostración. Sea $\{Q_w^*\}_{w\geq 0}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos. Como E es simétrico con respecto al peso W, el Teorema 5.8 dice que $EQ_w^* = Q_w^*\Gamma_w(E)$ para alguna matriz $\Gamma_w(E)$. Si $Q_w^* = P_w^*A_w^*$ entonces tenemos que $DP_w^*A_w^* = P_w^*A_w^*\Gamma_w(D)$ y $EP_w^*A_w^* = P_w^*A_w^*\Gamma_w(E)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\Lambda_w(D) &= A_w^*\Gamma_w(D)(A_w^*)^{-1},\\ \Lambda_w(E) &= A_w^*\Gamma_w(E)(A_w^*)^{-1}.\end{aligned}$$

Entonces por (5.22) obtenemos que

$$\Lambda_w(E) = (\alpha+2\ell+3k+3w)\Lambda_w(D) + 3w(\ell+k+w)(w+\alpha+\beta+\ell+1)I.$$

Observemos que el hecho de que $\Lambda_w(D)$ es una matriz diagonal implica que $\Lambda_w(E)$ es diagonal. Además el autovalor $\mu_j(w) = (\Lambda_w(E))_{jj}$ está dado por

$$\begin{aligned}\mu_j(w) &= (\alpha+2\ell+3k+3w)(-w(w+\alpha+\beta+\ell+j+1)\\ &\quad - j(j+\alpha+\beta-k+1)) + 3w(\ell+k+w)(w+\alpha+\beta+\ell+1)\\ &= -w(w+\alpha+\beta+\ell+j+1)(\alpha-\ell+3j)\\ &\quad - j(j+\alpha+\beta-k+1)(\alpha+2\ell+3k).\end{aligned}$$

Esto concluye la prueba del teorema. □

5.4.3 El álgebra de operadores generada por D y E

En esta subsección estudiaremos el álgebra generada por los operadores diferenciales D y E.

Teorema 5.22. *El álgebra de operadores diferenciales generada por D y E es isomorfa al álgebra cociente $\mathbb{C}[x,y]/\langle Q\rangle$, donde $\langle Q\rangle$ denota el ideal generado por el polinomio*

$$Q(x,y) = \prod_{j=0}^{\ell}\left(y - (\alpha-\ell+3j)x + 3j(\ell-j+k)(j+\alpha+\beta-k+1)\right).$$

Demostración. El álgebra de operadores diferenciales generada por D y E es isomorfa al álgebra cociente $\mathbb{C}[x,y]/I$ donde $I = \{p \in \mathbb{C}[x,y] : p(D,E) = 0\}$.

Como Λ_w es una representación que separa puntos de $\mathcal{D}(W)$ (Proposición 5.10), tenemos que $p(D,E) = 0$ si y solo si

$$\Lambda_w(p(D,E)) = p(\Lambda_w(D), \Lambda_w(E)) = 0, \text{ para todo } w.$$

Además, como $\Lambda_w(D)$ y $\Lambda_w(E)$ son matrices diagonales, tenemos que $p(\Lambda_w(D), \Lambda_w(E)) = 0$ si y solo si $p((\Lambda_w(D))_{jj}, (\Lambda_w(E))_{jj}) = 0$ para todo $0 \leq j \leq \ell$. Por lo tanto el ideal I es

$$I = \{p \in \mathbb{C}[x,y] : p(\lambda_j(w), \mu_j(w)) = 0, \text{para } j = 0, 1, \ldots \ell\}.$$

Sea $p_j(x,y)$ el polinomio

$$p_j(x,y) = y - (\alpha - \ell + 3j)x + 3j(\ell - j + k)(j + \alpha + \beta - k + 1).$$

Es fácil verificar que $p_j(\lambda_j(w), \mu_j(w)) = 0$, para todo $w \geq 0$. Entonces $Q(x,y) = \prod_{j=0}^{\ell} p_j(x,y)$ pertenece al ideal I.

Por otro lado tenemos que cualquier $f \in I$ se anula en todos los puntos de la forma (x,y) con $y = (\alpha - \ell + 3j)x + 3j(\ell - j + k)(j + \alpha + \beta - k + 1)$, para cada $j = 0, \ldots, \ell$. De hecho si hacemos,

$$a_j = \alpha - \ell + 3j \qquad b_j = -3j(\ell - j + k)(j + \alpha + \beta - k + 1) \quad (j = 0, 1, \ldots, \ell)$$

entonces observamos que $f(x, a_j x + b_j)$ es un polinomio que tiene infinitas raíces, porque $f(\lambda_j(w), \mu_j(w)) = 0$ y $\mu_j(w) = a_j \lambda_j(w) + b_j$.
Cualquier polinomio en $\mathbb{C}[x,y]$ es también un polinomio en x y $y - ax - b$. Entonces es claro que si $p(x,y) = 0$ en la línea $y = ax + b$ entonces p es divisible por $y - ax - b$.
Por lo tanto tenemos que si f pertenece al ideal I entonces $f \in \cap_{j=0}^{\ell} \langle p_j \rangle = \langle \prod_j p_j \rangle$. Por lo tanto tenemos que el ideal I está generado por el polinomio $Q(x,y)$, lo cual completa la prueba del Teorema. $\square$

CAPITULO 6

La transformada esférica

El objetivo de este capítulo es utilizar la teoría de funciones esféricas de tipo δ para un grupo G localmente compacto para definir una transformada esférica sobre el álgebra $C_{c,\delta}(G)$. Como en el Capítulo 2, sea G un grupo localmente compacto unimodular y sea K un subgrupo compacto de G. Sea $\hat{K}$ el conjunto de todas las clases de equivalencia de representaciones complejas irreducibles de dimensión finita de K; para cada $\delta \in \hat{K}$, sea ξ_δ el carácter de δ, $d(\delta)$ el grado de δ, i.e. la dimensión de cualquier representación en la clase δ y $\chi_\delta = d(\delta)\xi_\delta$. Elegimos de ahora en adelante la medida de Haar dk en K normalizada por $\int_K dk = 1$.

Denotaremos por V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de números complejos y por $\mathrm{End}(V)$ el espacio de todas las transformaciones lineales de V en V.

Una función esférica Φ sobre G de tipo $\delta \in \hat{K}$ es una función continua sobre G con valores en $\mathrm{End}(V)$ tal que $\Phi(e) = I$ y que satisface la siguiente ecuación integral

$$\Phi(x)\Phi(y) = \int_K \chi_\delta(k^{-1})\Phi(xky)\,dk,$$

para todo $x, y \in G$. Recordemos que el número de veces que δ ocurre en la representación $k \mapsto \Phi(k)$ se llama la *altura* de Φ.

Definición 6.1. *Denotaremos por $\Phi(\delta)$ al conjunto de todas las clases de equivalencia de funciones esféricas irreducibles de tipo δ.*

Las funciones esféricas de tipo δ aparecen de forma natural considerando representaciones de G. Si $g \mapsto U(g)$ es una representación continua de G, digamos en un espacio vectorial topológico E completo, localmente convexo y Hausdorff, entonces

$$P(\delta) = \int_K \chi_\delta(k^{-1})U(k)\,dk$$

es una proyección continua de E en $P(\delta)E = E(\delta)$; $E(\delta)$ consiste de aquellos vectores en E, para los cuales el espacio vectorial generado por su K-órbita es de dimensión finita y se descompone en subrepresentaciones irreducibles de K de tipo δ. Si $E(\delta)$ es de dimensión finita, la función $\Phi : G \longrightarrow \mathrm{End}(E(\delta))$ definida por

$$\Phi^U(g)a = P(\delta)U(g)a, \quad g \in G, a \in E(\delta), \tag{6.1}$$

es una función esférica de tipo δ.

Si la representación $g \mapsto U(g)$ es topológicamente irreducible (i.e. E no tiene subespacios cerrados G-invariantes no triviales) entonces la función esférica asociada Φ es también irreducible.

En la Sección 6.1 destacamos que el álgebra de funciones $I_{c,\delta}(G)$ es isomorfa a cierta álgebra $C_c(G,\delta,\delta)$ de funciones $F : G \longrightarrow \mathrm{End}(V_\delta)$. Esta identificación resultará de gran utilidad en la Sección 6.4. Además damos una definición para la transformada esférica de cualquier K-tipo sobre un grupo localmente compacto G. Esta generaliza la definición introducida por Camporesi en [Cam97] en la que asume que el álgebra $I_{c,\delta}(G)$ es conmutativa. Esta hipótesis simplifica el problema ya que en el caso conmutativo todas las funciones esféricas irreducibles de tipo δ son de altura uno y la transformada esférica resulta un escalar.

En la Sección 6.2 introducimos los conceptos de función esférica unitaria y función esférica definida positiva. En el caso escalar, las funciones definidas positivas están estrechamente relacionadas con las representaciones unitarias de G. Una de las consecuencias de esta conexión es el Teorema de Gelfand-Raikov donde la correspondencia entre funciones definidas positivas y representaciones unitarias es una pieza clave de su demostración. Nosotros aprovechamos estos resultados para conectar, en el caso matricial, las funciones esféricas irreducibles de tipo δ definidas positivas con las representaciones unitarias de G que contienen al K-tipo δ al restringir a K.

En la Sección 6.3 utilizamos la la fórmula de inversión de Plancherel sobre el grupo G para derivar una fórmula de inversión para la transformada esférica sobre $C_{c,\delta}(G)$.

En las Secciones 6.4 y 6.4.2 explicitamos los resultados obtenidos en este capítulo para el grupo $G = \mathrm{SU}(2,1)$. Para este caso contamos con la descripción detallada de las funciones irreducibles de cualquier K-tipo dada por el Teorema 4.20 en términos de las funciones hipergeométricas matriciales ${}_2H_1$.

6.1 La transformada esférica

Denotaremos por $C_c(G)$ al álgebra de todas las funciones continuas con soporte compacto sobre G con respecto al producto de convolución usual

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_G f_1(xy^{-1})f_2(y)dy = \int_G f_1(z)f_2(z^{-1}x)dz.$$

Si δ es una representación unitaria irreducible de K sobre el espacio vectorial V_δ, consideramos el conjunto $C_{c,\delta}(G)$ de aquellas $f \in C_c(G)$ que satisfacen $\overline{\chi}_\delta * f = f * \overline{\chi}_\delta = f$. Como $\overline{\chi}_\delta * \overline{\chi}_\delta = \overline{\chi}_\delta$, es claro que $C_{c,\delta}(G)$ es una subálgebra de $C_c(G)$.

Denotamos por $C_c(G,\delta,\delta)$ al siguiente conjunto de funciones continuas con soporte compacto sobre G con valores en $\mathrm{End}(V_\delta)$ definido por

$$C_c(G,\delta,\delta) = \{F : G \longrightarrow \mathrm{End}(V_\delta) : F(k_1gk_2) = \delta(k_2^{-1})F(g)\delta(k_1^{-1})\}.$$

Observemos que $C_c(G,\delta,\delta)$ se convierte en un álgebra con el producto de convolución

$$(F_1 * F_2)(x) = \int_G F_2(z^{-1}x)F_1(z)dz,$$

para cualquier F_1 y F_2 en $C_c(G,\delta,\delta)$. Es necesario tomar esta definición de producto de convolución para que $F_1 * F_2 \in C_c(G,\delta,\delta)$ como vemos a continuación

$$\begin{aligned}(F_1 * F_2)(k_1xk_2) &= \int_G F_2(z^{-1}k_1xk_2)F_1(z)dz = \int_G F_2(z^{-1}xk_2)F_1(k_1z)dz \\ &= \delta(k_2^{-1})(F_1 * F_2)(x)\delta(k_1^{-1}).\end{aligned}$$

Como en el Capítulo 2, sea $I_{c,\delta}(G)$ el álgebra de todas las funciones $f \in C_{c,\delta}(G)$ que satisfacen

$$f(kxk^{-1}) = f(x), \text{ para todo } x \in G, \text{ y para todo } k \in K,$$

es decir f es K-central

Lema 6.2. *Sea $A \in \mathrm{End}(V_\delta)$, entonces*

$$\int_K \delta(k)\,\mathrm{tr}(A\delta(k^{-1}))dk = \frac{1}{d(\delta)}A.$$

Demostración. Sea $\{E_j\}_{j=0}^d$ una base ortonormal de V_δ y sea $\delta_{ij}(k) = \langle\delta(k)E_i, E_j\rangle$. Entonces

$$\mathrm{tr}(A\delta(k^{-1})) = \sum_{r=0}^d \langle AE_r, \delta(k)E_r\rangle = \sum_{r=0}^d\sum_{s=0}^d \langle AE_r, \delta_{rs}(k)E_s\rangle = \sum_{r=0}^d\sum_{s=0}^d \overline{\delta_{rs}(k)}\langle AE_r, E_s\rangle.$$

Por lo tanto

$$\langle\int_K \delta(k)\,\mathrm{tr}(A\delta(k^{-1}))dkE_i, E_j\rangle = \sum_{r=0}^d\sum_{s=0}^d \int_K \delta_{ij}(k)\overline{\delta_{rs}(k)}dk\langle AE_r, E_s\rangle = \frac{1}{d(\delta)}\langle AE_i, E_j\rangle.$$

□

La siguiente proposición establece el isomorfismo entre las álgebras de funciones $I_{c,\delta}(G)$ y $C_c(G,\delta,\delta)$.

Proposición 6.3. *Dada $f \in I_{c,\delta}$ sea $F_f : G \longrightarrow \mathrm{End}(V_\delta)$ la función definida por*

$$F_f(x) = \int_K \delta(k)f(kx)dk.$$

Entonces $f \mapsto F_f$ es un isomorfismo de $I_{c,\delta}(G)$ en $C_c(G,\delta,\delta)$ cuya inversa está dada por $F \mapsto f_F$ donde $f_F = d(\delta)\,\mathrm{tr}(F)$.

Demostración. Si $f \in I_{c,\delta}(G)$, entonces $F_f \in C_c(G,\delta,\delta)$ porque

$$\begin{aligned}F_f(k_1xk_2) &= \int_K \delta(k)f(kk_1xk_2)dk) = \int_K \delta(k)f(k_2kk_1x)dk = \int_k \delta(k_2^{-1}kk_1^{-1})f(kx)dk \\ &= \delta(k_2^{-1})\int_K \delta(k)f(kx)dk\,\delta(k_1^{-1}) = \delta(k_2)^{-1}F_f(x)\delta(k_1)^{-1}.\end{aligned}$$

Para probar que $f \mapsto F_f$ es un homomorfismo de álgebras tomamos f y g en $I_{c,\delta}(G)$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}(F_f * F_g)(x) &= \int_G F_g(z^{-1}x)F_f(z)dz = \int_G\int_K\int_K \delta(k_1)\delta(k_2)g(k_1z^{-1}x)f(k_2z)dk_1dk_2dz \\ &= \int_K \delta(k)\int_G g(z^{-1}kx)f(z)dzdk = \int_K \delta(k)(f*g)(x)dk = F_{f*g}(x).\end{aligned}$$

Por otro lado

$$f_F(kxk^{-1}) = d(\delta)\operatorname{tr}(F(kxk^{-1})) = d(\delta)\operatorname{tr}(\delta(k)F(x)\delta(k^{-1})) = d(\delta)\operatorname{tr}(F(x)) = f_F(x),$$

para toda $F \in C_c(G,\delta,\delta)$ y

$$\begin{aligned}(\bar{\chi}_\delta * f_F)(x) &= \int_K \bar{\chi}_\delta(k)F_f(k^{-1}x)dk = d(\delta)\int_K \chi_\delta(k^{-1})\operatorname{tr}(F(x)\delta(k))dk \\ &= d(\delta)\operatorname{tr}(F(x)\int_K \chi_\delta(k^{-1})\delta(k)dk = d(\delta)\operatorname{tr}(F(x)) = f_F(x).\end{aligned}$$

La proposisión quedará probada si demostramos que las aplicaciónes $f \mapsto F_f$ y $F \mapsto f_F$ son una la inversa de la otra. Para esto observemos que

$$f_{F_f}(x) = d(\delta)\operatorname{tr}(\int_K \delta(k)f(kx)dk) = \int_K \bar{\chi}_\delta(k^{-1})f(kx)dk = (\bar{\chi}_\delta * f)(x) = f(x),$$

y que por el Lema 6.2 tenemos que

$$F_{f_F}(x) = d(\delta)\int_K \delta(k)\operatorname{tr}(F(kx))dk = \int_K \delta(k)d(\delta)\operatorname{tr}(F(x)\delta(k^{-1})) = F(x).$$

Por lo tanto hemos probado que $f \mapsto F_f$ es homomorfismo biyectivo y esto completa la prueba de la proposición. $\square$

Supongamos que G es un grupo de Lie semisimple conexo, no compacto y con centro finito y K un subgrupo compacto maximal de G. Si $I_{c,\delta}(G)$ es un álgebra conmutativa entonces todas las funciones esféricas irreducibles de tipo δ tienen altura 1 (Ver Teorema 2.5). En este contexto Camporesi introduce en [Cam97] la siguiente definición para la transformada esférica sobre el álgebra $C_c(G,\delta,\delta)$

$$\hat{F}(U) = \frac{1}{d(\delta)}\int_G \Phi^U(x)F(x)dx, \text{ donde } U \in \hat{G}(\delta),\ F \in C_c(G,\delta,\delta).$$

Observemos que el operador $\int_G \Phi^U(x)F(x)dx$ pertenece a $\operatorname{End}_K(V_\delta)$ y por lo tanto

$$\int_G \Phi^U(x)F(x)dx = \frac{1}{d(\delta)}\int_G \operatorname{tr}(\Phi^U(x)F(x))dx,$$

es decir que en el caso conmutativo, la transformada esférica es un escalar.

Esta definición de transformada esférica no es conveniente a la hora de buscar una generalización para el caso de un grupo localmente compacto unimodular arbitrario. El problema reside en que cuando las funciones esféricas no son todas de altura 1, una función $F \in C_c(G,\delta,\delta)$ y la función esférica Φ de tipo δ pueden no tomar sus valores en los mismos espacios vectoriales, por lo que no tendría sentido la composición $F(x)\Phi(x)$. Teniendo en cuenta estas consideraciones, nosotros nos inclinamos por definir la transformada esférica sobre el álgebra $C_{c,\delta}(G)$ de la siguiente forma

Definición 6.4. *La transformada esférica de $f \in C_{c,\delta}(G)$ es la función $\hat{f} : \Phi(\delta) \longrightarrow \operatorname{End} V_\delta$ definida por*

$$\hat{f}(\Phi) = \int_G f(x)\Phi(x)dx. \tag{6.2}$$

El siguiente teorema es una consecuencia directa de la Proposición 2.4

Proposición 6.5. *[Tir77] Sea Φ una función esférica de tipo δ sobre G y tomemos $f, g \in C_{c,\delta}(G)$. Entonces*

$$(f * g)\check{\ }(\Phi) = \hat{f}(\Phi)\hat{g}(\Phi).$$

Para el caso en que $I_{c,\delta}(G)$ es un álgebra conmutativa, es decir que toda función esférica irreducible tiene altura 1, tenemos el siguiente lema que relaciona las transformadas esféricas $\hat{f}$ y $\hat{F}$.

Lema 6.6. *Sean $f \in I_{c,\delta}(G)$ y $F \in C_c(G, \delta, \delta)$. Para toda función esférica irreducible Φ de tipo δ se cumple*

$$\hat{f}(\Phi) = \hat{F}_f(\Phi), \;\; y \;\; \hat{F}(\Phi) = \hat{f}_F(\Phi).$$

Demostración. Sea $f \in I_{c,\delta}(G)$. Entonces

$$\begin{aligned}\hat{F}_f(\Phi) &= \int_G F_f(g)\Phi(g)dg = \int_G \int_K \delta(k)f(kg)\Phi(g)dk\,dg \\ &= \int_K \int_G f(kg)\Phi(kg)dg\,dk = \int_G f(g)\Phi(g) \\ &= \hat{f}(\Phi).\end{aligned}$$

La prueba de que $F(\Phi) = \hat{f}_F(\Phi)$ es análoga. □

Observación 6.7. *Usando los resultados de la Proposición 6.5 y el Lema 6.6 probamos que la aplicación $F \mapsto \hat{F}(\Phi)$ es un homomorfismo continuo de $C_c(G, \delta, \delta)$ en* $\mathrm{End}(V_\delta)$*.*

Demostración.

$$(F_1 * F_2)\check{\ }(\Phi) = (f_{F_1 * F_2})\check{\ }(\Phi) = (f_{F_1} * f_{F_2})\check{\ }(\Phi) = \hat{f}_{F_1}(\Phi)\hat{f}_{F_2}(\Phi) = \hat{F}_1(\Phi)\hat{F}_2(\Phi).$$

□

6.2 Funciones esféricas definidas positivas

En esta sección introducimos los conceptos de función esférica unitaria y función esférica definida positiva. Utilizamos la conexión entre las representaciones unitarias y las funciones definidas positivas de un grupo localmente compacto G, pieza clave en la demostración del Teorema de Gelfand Raikov, para encontrar una biyección entre el conjunto de clases de equivalencia de funciones esféricas definidas positivas y el conjunto $\hat{G}(\delta)$ de aquellos $U \in \hat{G}$ que contienen al K-tipo δ al restringir a K.

6.2.1 Funciones esféricas unitarias

Dada una función $\Phi : G \longrightarrow \mathrm{End}(V)$, donde V es un espacio vectorial complejo de dimensión finita con un producto interno, definimos $\check{\Phi} : G \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ por $\check{\Phi}(g) = \Phi(g^{-1})^*$, donde $*$ denota la operación de tomar adjunta.

Proposición 6.8. *([GPT02b]) La función $\Phi : G \longrightarrow$* $\mathrm{End}(V)$ *es una función esférica de tipo δ si y sólo si $\check{\Phi}$ es una función esférica de tipo δ.*

Demostración. Asumamos que Φ es una función esférica de tipo δ. Entonces

$$\check{\Phi}(x)\check{\Phi}(y) = (\Phi(y^{-1})\Phi(x^{-1}))^* = (\int_K \chi_\delta(k^{-1})\Phi(y^{-1}kx^{-1})dk)^* = \int_K \chi_\delta(k)\check{\Phi}(xk^{-1}y)dk.$$

Además, $\check{\Phi}(e) = \Phi(e)^* = I$, y por lo tanto $\check{\Phi}$ es una función esférica de tipo δ. Por otro lado, como $\check{\check{\Phi}} = \Phi$, la proposición queda probada. □

Definición 6.9. *Una función $\Phi : G \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ se dice unitarizable si existe un producto interno en V tal que $\Phi(g)^* = \Phi(g^{-1})$ para todo $g \in G$. En tal caso también decimos que Φ es una función esférica unitaria. En otras palabras Φ es unitaria si y sólo si $\check{\Phi} = \Phi$.*

Proposición 6.10. *[GPT02b] Si $\Phi : G \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ es una función esférica unitaria irreducible entonces existe un único producto interno en V, salvo una constante multiplicativa, que la hace unitaria.*

Proposición 6.11. *Si U es una representación unitaria de G sobre un espacio de Hilbert E y $E(\delta)$ es de dimensión finita y no nulo, entonces la función esférica $\Phi^U = P(\delta)UP(\delta)$ es unitaria.*

Demostración. Sean $u, v \in E(\delta)$ y $g \in G$. Como $P(\delta)$ es autoadjunta, tenemos

$$\begin{aligned}(\Phi^U(g)u, v) &= (P(\delta)U(g)u, v) = (U(g)u, v) = (u, U(g^{-1})v) \\ &= (u, P(\delta)U(g^{-1})v) = (u, \Phi_\delta(g^{-1})v).\end{aligned}$$

Esto prueba que $\Phi(g)^* = \Phi(g^{-1})$ y por lo tanto que Φ es unitaria. □

Corolario 6.12. *Si G es un grupo compacto entonces cualquier función esférica irreducible sobre G es unitarizable.*

Proposición 6.13. *Sea $\Phi : G \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ una función esférica unitaria. Entonces Φ es suma directa de funciones esféricas unitarias irreducibles.*

Demostración. Sea U un subespacio invariante de V de dimensión mínima y sea $U^\perp$ su complemento ortogonal. Entonces si $u \in U^\perp$ y $u \in U$, tenemos

$$\langle \Phi(g)u^\perp, u\rangle = \langle u^\perp, \Phi(g^{-1})u\rangle = 0.$$

Por lo tanto $U^\perp$ es un subespacio invariante. Repitiendo el argumento para $U^\perp$ e iterando, obtenemos la descomposición requerida. □

6.2.2 Funciones esféricas definidas positivas

Una función $\phi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ se dice definida positiva si

$$\sum_{i,j=0}^{n} c_i\overline{c}_j\phi(x_j^{-1}x_i) \geq 0, \tag{6.3}$$

para todo $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ y $x_0, \ldots, x_n \in G$.

Las funciones definidas positivas no son necesariamente funciones continuas. Sin embargo una función ϕ sobre G, continua y acotada es definida positiva si y sólo si es de tipo positivo (cf. [Fol95]), es decir si y sólo si ϕ satisface

$$\int (f^* * f)\phi \geq 0, \text{ para toda } f \in L^1(G).$$

Definición 6.14. *Decimos que una función esférica $\Phi : G \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ es una función esférica definida positiva si $x \mapsto \langle \Phi(x)v, v\rangle$ es una función definida positiva para todo $v \in V$, es decir*

$$\sum_{i=0}^{n} c_i \overline{c}_j \langle \Phi(x_j^{-1} x_i)v, v\rangle,$$

para todo $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{C}$, $x_0, \dots, x_n \in G$ y para todo $v \in V$.

La primera consecuencia de esta definición es el siguiente lema que prueba que toda función esférica definida positiva es una función esférica unitaria.

Lema 6.15. *Sea Φ una función esférica definida positiva, entonces $\Phi(g) = \Phi(g^{-1})^*$.*

Demostración. Primero observemos que para cualquier vector v en el espacio vectorial V, la función $\xi : x \mapsto \langle \Phi(x)v, v\rangle$ es una función definida positiva. Por lo tanto si tomamos $n = 1$, $x_0 = 1$ y $x_1 = x$, la condición (6.3) dice que la matriz

$$\begin{pmatrix} \xi(1) & \xi(x) \\ \xi(x^{-1}) & \xi(1) \end{pmatrix} \tag{6.4}$$

es semi-definida positiva. Entonces tenemos que

$$\langle \Phi(x)v, v\rangle = \xi(x) = \overline{\xi}(x^{-1}) = \langle v, \Phi(x^{-1})v\rangle.$$

Por lo tanto

$$\langle (\Phi(x) - \Phi(x^{-1})^*)v, v\rangle = 0.$$

Para cualquier transformación lineal $A : V \longrightarrow V$, el hecho que $\langle Av, v\rangle = 0$ para todo $v \in V$ implica que $A = 0$. Entonces tenemos que $(\Phi(x) - \Phi(x^{-1})^*) = 0$ o equivalentemente $\Phi(x) = \Phi(x^{-1})^*$. esto completa la demostración del lema. □

Teorema 6.16. *Sea Φ una función esférica definida positiva. Entonces existe una representación unitaria π sobre un espacio de Hilbert H_π tal que Φ es equivalente a $\Phi^\pi = P(\delta)\pi P(\delta)$.*

Demostración. El hecho que Φ sea una una función esférica definida positiva implica que la aplicación $\xi : x \mapsto \langle \Phi(x)v, v\rangle$, $v \in V$, es una función definida positiva y continua, y por lo tanto es de tipo positivo. Entonces existe una representación unitaria π_ξ sobre un espacio de Hilbert H_π y un vector cíclico ϵ para π_ξ tal que $\langle \Phi(x)v, v\rangle = \xi(x) = \langle \pi_\Phi(x)\epsilon, \epsilon\rangle$. Por el Teorema 2.2 tenemos que $\Phi(k_1 x k_2) = \Phi(k_1)\Phi(x)\Phi(k_2)$ para todo $k_1, k_2 \in K$ y $x \in G$. Por lo tanto

$$\langle \Phi(k_1 x k_2)v, v\rangle = \langle \Phi(x)\Phi(k_2)v, \Phi(k_1^{-1})v\rangle = \langle \pi_\xi(x)\pi_\xi(k_2)v, \pi_\xi(k_1^{-1})v\rangle,$$

Si multiplicamos ambos lado de la ecuación por $\chi_\delta(k_1^{-1})\chi_\delta(k_2)$ e integramos sobre K, obtenemos

$$\begin{aligned}
\langle \Phi(x)v, v\rangle &= \langle \Phi(x) \int_K \chi_\delta(k_2^{-1})\Phi(k_2)dk_2\, v, \int_K \chi_\delta(k_1^{-1})(k_1^{-1})\Phi(k_1)dk_1\, v\rangle \\
&= \int_K \int_K \chi_\delta(k_1^{-1})\chi_\delta(k_2)\langle \Phi(k_1^{-1})\Phi(x)\Phi(k_2)v, v\rangle dk_1 dk_2 \\
&= \int_K \int_K \chi_\delta(k_1^{-1})\chi_\delta(k_2)\langle \Phi(k_1^{-1} x k_2)v, v\rangle dk_1 dk_2 \\
&= \int_K \int_K \chi_\delta(k_1^{-1})\chi_\delta(k_2)\langle \pi_\xi(k_1^{-1} x k_2)\epsilon, \epsilon\rangle dk_1 dk_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \langle \pi_\xi(x) \int_K \chi_\delta(k_2^{-1})\pi_\xi(k_2)\epsilon dk_2, \int_K \chi_\delta(k_1^{-1})\pi_\xi(k_1)\epsilon dk_1\rangle \\ &= \langle \pi_\xi(x)P(\delta)\epsilon, P(\delta)\epsilon\rangle.\end{aligned}$$

Por lo tanto podemos asumir que el vector cíclico ϵ pertenece a $H_\pi(\delta) = P(\delta)H_\pi$. Observemos que como $P(\delta)$ es autoadjunto tenemos que

$$\langle\Phi(x)v, v\rangle = \langle\pi_\xi(x)P(\delta)\epsilon, P(\delta)\epsilon\rangle = \langle P(\delta)\pi_\xi(x)P(\delta)\epsilon, \epsilon = \langle\Phi^\pi(x)\epsilon, \epsilon\rangle.$$

El Teorema quedará probado si verificamos que Φ es equivalente a Φ^π. Como la función esférica Φ es irreducible y el espacio vectorial V es de dimensión finita, cualquier vector $u \in V$ es una combinación lineal de $\Phi(x_1)v, \dots, \Phi(x_n)v$ para algunos $x_1, \dots, x_n \in G$. Para cualquier conjunto de elementos de G, $y_1, \dots, y_n$ y $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, definimos la transformación lineal $T : V \longrightarrow H_\delta$ de la siguiente forma

$$T\left(\sum_{i=1}^n a_i\Phi(y_i)v\right) = \sum_{i=1}^n \Phi^\pi(y_i)\epsilon.$$

Para probar que T está bien definida asumamos que $\sum_{i=0}^n a_i\Phi(x_i)v = 0$ para ciertos $x_0, \dots, x_n \in G$ y $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, entonces afirmamos que $\sum_{i=0}^n a_i\Phi^\pi(x_i)\epsilon = 0$.

La función esférica Φ^π está asociada a la representación unitaria π y por lo tanto es una función esférica unitaria (Proposición 6.11), es decir $\Phi^\pi(x)^* = \Phi^\pi(x)^{-1}$. Si integramos sobre K y aplicamos la ecuación integral en los dos miembros de la siguiente igualdad

$$\chi_\delta(k^{-1})\langle\Phi(xky)v, v\rangle = \chi_\delta(k^{-1})\langle\Phi^\pi(xky)\epsilon, \epsilon\rangle,$$

obtenemos

$$\langle\Phi(y)v, \Phi(x^{-1})v\rangle = \langle\Phi^\pi(y)\epsilon, \Phi^\pi(x^{-1})\epsilon\rangle,$$

para x, $y \in G$ arbitrarios. Por lo tanto

$$0 = \langle\sum_{i=0}^n a_i\Phi(y_i)v, \sum_{i=0}^m b_j\Phi(x_j)v\rangle = \langle\sum_{i=0}^n a_i\Phi'(y_i)\epsilon, \sum_{j=0}^m b_j\Phi'(x)\epsilon\rangle,$$

para cualquier colección de numeros complejos $b_0, \dots, b_m$ y $x_0, \dots, x_m \in G$, y esto implica que $\sum_{i=0}^n a_i\Phi'(y_i)\epsilon = 0$. Finalmente tomamos $\sum_{i=0}^n a_i\Phi(y_i)v$ como un elemento genérico de V. Entonces

$$\begin{aligned}T\Phi(g)(\sum_{i=0}^n a_i\Phi(y_i)v) &= \sum_{i=0}^n a_iT\Phi(g)\Phi(y_i)v = \sum_{i=0}^n a_iT\int_K \chi_\delta(k^{-1})\Phi(gky_i)dk\, v \\ &= \int_K \chi_\delta(k^{-1})T(\sum_{i=0}^n a_i\Phi(gky_i)v)dk = \int_K \chi_\delta(k^{-1})(\sum_{i=0}^n a_i\Phi'(gky_i)\epsilon dk) \\ &= \sum_{i=0}^n a_i\Phi'(g)\Phi'(y_i)\epsilon = \Phi'(g)(\sum_{i=0}^n a_i\Phi'(y_i)\epsilon) \\ &= \Phi'(g)T(\sum_{i=0}^n a_i\Phi(y_i)v).\end{aligned}$$

Esto completa la demostración del Teorema. □

Lema 6.17. *Sean Φ_1 y Φ_2 dos funciones esféricas irreducibles de tipo δ equivalentes. Entonces Φ_1 es definida positiva si y sólo si Φ_2 es definida positiva.*

Demostración. Si $\Phi_1 : G \longrightarrow \mathrm{End}(V_1)$ y $\Phi_2 : G \longrightarrow \mathrm{End}(V_2)$, podemos asumir que existe una transformación lineal $T : V_2 \longrightarrow V_1$ tal que

$$\Phi_1(g) = T\Phi_2(g)T^{-1}, \text{ para todo } g \in G.$$

Como Φ_1 y Φ_2 son funciones esféricas definidas positivas, tenemos que

$$T^{-1}\Phi_2(g)T = \Phi_1(g) = \Phi_1(g^{-1})^* = (T^{-1}\Phi_2(g^{-1})T)^* = T^*\Phi_2(g)(T^{-1})^*.$$

Por lo tanto

$$\Phi_2(g) = TT^*\Phi_2(g)(TT^*)^{-1}.$$

Entonces el núcleo y la imagen de la transformación lineal TT^* son estables por Φ_2. El hecho que Φ_2 sea una función esférica irreducible implica que TT^* es un múltiplo escalar de la transformación identidad. Podemos elegir esa constante como 1 y en tal caso T resulta una transformación lineal unitaria. Finalmente observemos que

$$\sum_{i,j=0} a_i\overline{a}_j\langle\Phi_1(x_j^{-1}x_i)v,v\rangle = \sum_{i,j=0} a_i\overline{a}_j\langle T^{-1}\Phi_2(x_j^{-1}x_i)Tv,v\rangle = \sum_{i,j=0} a_i\overline{a}_j\langle\Phi_2(x_j^{-1}x_i)Tv,Tv\rangle.$$

Esto completa la prueba del Lema. □

Definición 6.18. *Sea $\Phi(\delta)^+$ el conjunto de clases de equivalencia de funciones esféricas irreducibles definidas positivas de tipo δ, i.e.*

$$\Phi(\delta)^+ = \{[\Phi] \in \Phi(\delta) : \Phi \textit{ es definida positiva } \}, \tag{6.5}$$

Proposición 6.19. *Si U es una representación unitaria de G sobre un espacio de Hilbert E y $E(\delta)$ es de dimensión finita y no nulo, entonces la función esférica $\Phi^U = P(\delta)UP(\delta)$ es definida positiva.*

Demostración. Sean $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $y_1, \ldots, y_n \in G$ y $v \in V$. Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{i,j} a_i\overline{a}_j\langle\Phi(x_j^{-1}x_i)v,v\rangle &= \sum_{i,j} a_i\overline{a}_j\langle P(\delta)U(x_j-1x_i)P(\delta)v,v\rangle = \sum_{i,j} a_i\overline{a}_j\langle U(x_j^{-1}x_i)P(\delta)v,P(\delta)v\rangle \\ &= \langle\sum_i a_iU(x_i)v,\sum_j a_jU(x_j)v\rangle \geq 0.\end{aligned}$$

Esto completa la demostración. □

Para cualquier representación unitaria como en la proposición anterior, Φ^U es una función esférica definida positiva. La siguiente proposición establece que la aplicación $U \mapsto \Phi^U$ es una función bien definida de $\hat{G}(\delta)$ en $\Phi(\delta)$.

Proposición 6.20. *Sea $\Theta : \hat{G}(\delta) \longrightarrow \Phi(\delta)^+$ la función definida por*

$$\Theta(U) = P(\delta)UP(\delta).$$

Entonces Θ es una biyección.

Demostración. Si tomamos dos representaciones $(U_1, \mathcal{H}_1), (U_2, \mathcal{H}_2) \in \hat{G}(\delta)$ unitariamente equivalentes entonces denotamos

$$P_1(\delta) = \int_K \chi_\delta(k^{-1}) U_1(k) dk, \quad P_2(\delta) = \int_K \chi_\delta(k^{-1}) U_2(k) dk.$$

El hecho que U_1 y U_2 son unitariamente equivalentes implica que existe una transformación lineal unitaria $T : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ tal que $TU_1 = U_2 T$. Observemos que

$$P_1(\delta) = \int_K \chi_\delta(k^{-1}) U_1(k) = \int_K \chi_\delta(k^{-1}) T^{-1} U_2(k) T = T^{-1} P_2(\delta) T,$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}\Theta(U_1) = P_1(\delta) U_1 P_1(\delta) &= T^{-1} P_2(\delta) T T^{-1} U_2 T T^{-1} P_2(\delta) T \\ &= T^{-1} P_2(\delta) U_2 P_2(\delta) T = T^{-1} \Theta(U_2) T.\end{aligned}$$

Entonces Θ es una aplicación bien definida de $\hat{G}$ en $\Phi(\delta)^+$.

Ahora tomamos dos funciones esféricas irreducibles definidas positivas $\Phi_1 : G \longrightarrow \mathrm{End}(V_1)$ y $\Phi_2 : G \longrightarrow \mathrm{End}(V_2)$. Como Φ_1 y Φ_2 son equivalentes, el Lema 6.17 dice que existe una transformación lineal unitaria $T : V_2 \longrightarrow V_1$ tal que $\Phi_1 = T^{-1} \Phi_2 T$. Entonces tenemos que

$$\langle \Phi_1(x) v, v \rangle = \langle T^{-1} \Phi_2(x) T v, v \rangle = \langle \Phi_2(x) T v, T v \rangle.$$

Además, si fijamos un vector $v \in V_1$, como Φ_1 y Φ_2 son definidas positivas, recordamos del Teorema 6.3 que existen dos representaciones unitarias irreducibles de G, $(U_1, \mathcal{H}_1)$ y $(U_2, \mathcal{H}_2)$ y dos vectores cíclicos $\epsilon_1 \in \mathcal{H}_1$ y $\epsilon_2 \in \mathcal{H}_2$ tales que

$$\Phi_1 = P_1(\delta) U_1 P_1(\delta), \quad \Phi_2 = P_2(\delta) U_2 P_2(\delta),$$

y

$$\langle \Phi_1(x) v, v \rangle = \langle U_1(x) \epsilon_1, \epsilon_1 \rangle, \quad \langle \Phi_2(x) T v, T v \rangle = \langle U_2(x) \epsilon_2, \epsilon_2 \rangle.$$

Por lo tanto tenemos que

$$\langle U_1(x) \epsilon_1, \epsilon_1 \rangle = \langle \Phi_1(x) v, v \rangle = \langle \Phi_2(x) T v, T v \rangle = \langle U_2(x) \epsilon_2, \epsilon_2 \rangle,$$

para todo $x \in G$ y esto implica, por el Teorema 4.2 de [Fol95] que U_1 y U_2 son unitariamente equivalentes. □

6.3 Una fórmula de inversión para la transformada esférica

El objetivo de esta sección es dar una fórmula de inversión para la transformada esférica sobre $C_{c,\delta}(G)$. Para esto utilizaremos la fórmula de inversión de Plancherel sobre el grupo G. Además, el isomorfismo entre $I_{c,\delta}(G)$ y $C_c(G, \delta, \delta)$ nos permite explicitar la formula de inversión para la transformada esférica sobre $C_c(G, \delta, \delta)$.

En esta sección consideramos un grupo G unimodular, N_2 y de tipo I. Para cualquier $f \in L^1(G)$, la transformada de Fourier de f viene dada por

$$\hat{f}(U) = \int_G f(g) U(g) dg, \text{ donde } U \in \hat{G}.$$

Lema 6.21. *Sea $f \in C_{c,\delta}(G)$ y $U \in \hat{G}$, entonces*

$$\hat{f}(U) = P(\delta)\hat{f}(U)P(\delta).$$

Demostración. En primer lugar observemos que $f = \overline{\chi}_\delta * f * \overline{\chi}_\delta$ para toda f en el álgebra $C_{c,\delta}(G)$. Por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned}
\hat{f}(U) &= \int_G f(g)U(g)dg = \int_G (f * \overline{\chi}_\delta)(g)U(g) = \int_G \int_K f(gk^{-1})\overline{\chi}_\delta(k)U(g)dg \\
&= \int_G f(g)U(g) \int_K \overline{\chi}_\delta(k)U(k)dk\,dg = \int_G (\overline{\chi}_\delta * f)(g)U(g) \int_K \overline{\chi}_\delta(k)U(k)dk\,dg \\
&= \int_G \int_K \overline{\chi}_\delta(k')f(k'^{-1}g)dk'U(g) \int_K \overline{\chi}_\delta(k)U(k)dk\,dg \\
&= \int_K \overline{\chi}_\delta(k')U(k')dk' \int_G f(g)U(g) \int_K \overline{\chi}_\delta(k)U(k)dk\,dg = P(\delta)\hat{f}(U)P(\delta).
\end{aligned}$$

Esto completa la prueba. □

Dada una representación unitaria U del grupo G, tenemos asociada la función esférica $\Phi^U = P(\delta)UP(\delta)$. El siguiente lema establece la relación entre la transformada de Fourier y la transformada esférica cuando f pertenece a $C_{c,\delta}(G)$.

Lema 6.22. *Para cualquier $f \in C_{c,\delta}(G)$ y $U \in \hat{G}$, tenemos que*

$$\hat{f}(\Phi^U) = P(\delta)\hat{f}(U)P(\delta).$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
P(\delta)\hat{f}(U)P(\delta) = P(\delta)\int_G f(g)U(g)dg\,P(\delta) &= \int_G f(g)P(\delta)U(g)P(\delta) \\
&= \int_G f(g)\Phi^U(g)dg = \hat{f}(\Phi^U).
\end{aligned}$$

□

El siguiente teorema da la fórmula de inversión para la transformada esférica sobre el álgebra $C_{c,\delta}(G)$.

Teorema 6.23. *La transformada esférica se invierte por*

$$f(g) = \int_{\hat{G}} \operatorname{tr}(\Phi^U(g^{-1})\hat{f}(\Phi^U))dU, \quad f \in C_{c,\delta}(G), \tag{6.6}$$

donde dU denota la medida de Plancherel sobre $\hat{G}$.

Demostración. Usamos los lemas previos en la fórmula de inversión de Plancherel ([Fol95]) para $f \in C_{c,\delta}(G)$

$$\begin{aligned}
f(g) &= \int_{\hat{G}} \operatorname{tr}(U(g^{-1})\hat{f}(U))dU = \int_{\hat{G}} \operatorname{tr}(U(g^{-1})P(\delta)\hat{f}(U)P(\delta)) \\
&= \int_{\hat{G}} \operatorname{tr}(P(\delta)P(\delta)U(g^{-1})P(\delta)P(\delta)\hat{f}(U))dU = \int_{\hat{G}} \operatorname{tr}(\Phi^U(g^{-1})P(\delta)\hat{f}(U)P(\delta))dU \\
&= \int_{\hat{G}} \operatorname{tr}(\Phi^U(g^{-1})\hat{f}(\Phi^U))dU.
\end{aligned}$$

□

Observación 6.24. *Si $U \notin \hat{G}(\delta)$, entonces*

$$\hat{f}(\Phi^U) = \int_{\hat{G}} f(g)\Phi^U(g)dU = \int_{\hat{G}} f(g)P(\delta)U(g)P(\delta)dU = 0.$$

Lema 6.25. *$\hat{G}$ es un subconjunto medible de $\hat{G}$.*

Demostración. Por el Teorema de Plancherel sabemos que la función de $U \mapsto \operatorname{tr}(U(x^{-1})\hat{h}(U))$ de $\hat{G}$ en $\mathbb{C}$ es una función medible para todo $x \in G$ y $h \in C_c(G)$. En particular, si tomamos $x = e$, tenemos que la función $\Omega : \hat{G} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\Omega^h(U) = \operatorname{tr}(\hat{h}(U)),$$

es una función medible para toda $h \in C_c(G)$.

Sea $\{f_j\}_{j\geq 0}$ una partición de la unidad de G, entonces es sencillo verificar que $\hat{f}_j(U) \longrightarrow I$ cuando $j \longrightarrow \infty$. Sea

$$\widetilde{f_j}(x) = (\overline{\chi}_\delta * f_j * \overline{\chi}_\delta)(x).$$

Observemos que $\widetilde{f_j} \in C_{c,\delta}(G)$ y que

$$\hat{\widetilde{f_j}}(U) = P(\delta)\hat{f}_j(U)P(\delta),$$

para todo $U \in \hat{G}$. Supongamos que existe $U \in \hat{G}(\delta)$ tal que $\operatorname{tr} P(\delta)\hat{f}_j(U)P(\delta) = 0$ para todo j. Si tomamos límite en ambos miembros para j que tiende a infinito obtenemos que

$$\lim_{j\to\infty} \operatorname{tr} P(\delta)\hat{f}_j(U)P(\delta) = \operatorname{tr} P(\delta)P(\delta) = \operatorname{tr} P(\delta) = 0,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto existe algún j tal que $\hat{\widetilde{f_j}}(U) \neq 0$. Entonces tenemos que

$$\hat{G}(\delta) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(\Omega^{\widetilde{f_j}}\right)^{-1} (\mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Esto demuestra que $\hat{G}(\delta)$ es una unión numerable de conjuntos medibles y por lo tanto medible. □

La observación 6.24 muestra que el integrando $\operatorname{tr}(\Phi^U(g^{-1})\hat{f}(\Phi^U))$ de la fórmula de inversión para la transformada esférica es cero si $U \notin \hat{G}(\delta)$. Esto implica que en realidad la integral se toma sobre el conjunto $\hat{G}(\delta)$. Por el Lema 6.25 sabemos que $\hat{G}(\delta)$ es medible y por lo tanto podemos reescribir la fórmula de inversión de la siguiente forma

$$f(g) = \int_{\hat{G}(\delta)} \operatorname{tr}(\Phi^U(g^{-1})\hat{f}(\Phi^U))dU. \tag{6.7}$$

La aplicación $\Theta : U \mapsto P(\delta)UP(\delta)$ es una biyección entre $\hat{G}(\delta)$ y el conjunto de clases de equivalencia de funciones esféricas irreducibles de tipo δ definidas positivas $\Phi(\delta)^+$. Por lo tanto podemos trasladar la medida de $\hat{G}(\delta)$ a $\Phi(\delta)^+$ para convertirlo en un espacio de medida de la siguiente forma: $A \subset \Phi(\delta)^+$ es un conjunto medible si y sólo si $\Theta^{-1}A$ es medible en $\hat{G}(\delta)$ y la medida de A en $\Phi(\delta)^+$ es igual a la medida de $\Theta^{-1}A$ en $\hat{G}(\delta)$. Teniendo en cuenta estas consideraciones podemos reescribir la formula de inversión para la transformada esférica tomando ahora la integral sobre el espacio de medida $\Phi(\delta)^+$ de la siguiente forma

Teorema 6.26. *La transformada esférica se invierte por*

$$f(g) = \int_{\Phi(\delta)^+} \mathrm{tr}(\Phi(g^{-1})\hat{f}(\Phi))d\Phi, \quad f \in C_{c,\delta}(G).$$

En el caso en que el álgebra $I_{c,\delta}(G)$ es conmutativa, es decir que toda función esférica irreducible tiene altura uno, la Proposición 6.3 establece el isomorfismo entre las álgebras $I_{c,\delta}(G)$ y $C_c(G,\delta,\delta)$. Podemos aprovechar nuestra fórmula de inversión sobre el álgebra $C_{c,\delta}(G)$ para encontrar una fórmula de inversión para la transformada esférica sobre $C_c(G,\delta,\delta)$. En el siguiente Teorema utilizamos la notación de la Proposición 6.3.

Teorema 6.27. *Si $I_{c,\delta}(G)$ es conmutativa, entonces la transformada esférica sobre $C_c(G,\delta,\delta)$ se invierte por*

$$F(g) = \frac{1}{d(\delta)} \int_{\Phi(\delta)^+} \hat{F}(\Phi)\Phi(g^{-1})d\Phi.$$

Demostración. Aplicamos la Proposición 6.3 y la fórmula de inversión para la transformada esférica:

$$\begin{aligned} F(g) &= \int_K \delta(k) f_F(kg)dk = \int_K \int_{\Phi(\delta)^+} \mathrm{tr}(\Phi(k^{-1}g^{-1})\hat{f}_F(\Phi))d\Phi\, dk \\ &= \int_K \int_{\Phi(\delta)^+} \mathrm{tr}(\Phi(g^{-1}k^{-1}\hat{F}(\Phi))d\Phi\, dk) = \int_{\Phi(\delta)^+} \int_K \delta(k)\, \mathrm{tr}(\hat{F}(\Phi)\Phi(g^{-1})\delta(k))d\Phi\, dk \\ &= \frac{1}{d(\delta)} \int_{\Phi(\delta)^+} \hat{F}(\Phi)\Phi(g^{-1})dk. \end{aligned}$$

Esto completa la demostración del Teorema. □

6.4 La transformada esférica sobre $G = \mathrm{SU}(2,1)$

El objetivo de esta sección es explicitar la transformada esférica, y su correspondiente fórmula de inversión para el caso en que $G = \mathrm{SU}(2,1)$. Para esto utilizaremos la descripción, en términos de la función hipergeométrica matricial, de todas las funciones esféricas irreducibles de tipo δ, dada en el Capítulo 4.

Como señalamos en el Capítulo 3, el álgebra de Lie de $G = \mathrm{SU}(2,1)$ es

$$\mathfrak{g} = \left\{ X \in \mathfrak{g}l(3,\mathbb{C}) : JXJ = -\overline{X}^t,\, \mathrm{tr}\, X = 0 \right\}.$$

Las siguientes matrices forman una base de $\mathfrak{g}$.

$$H_1 = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{bmatrix}, \quad Y_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y_2 = \begin{bmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Y_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathfrak{h}_\mathbb{C}$ la subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ de todas las matrices diagonales. Sea ϵ_i el funcional lineal sobre $\mathfrak{h}_\mathbb{C}$ definido por $\epsilon_i(\mathrm{diag}(h_1,h_2,h_3)) = h_i$. Entonces los sistemas de raíces de los pares $(\mathfrak{g}^\mathbb{C},\mathfrak{h}^\mathbb{C})$ y $(\mathfrak{k}^\mathbb{C},\mathfrak{h}^\mathbb{C})$ están dadas por

$$\begin{aligned} \Delta_\mathfrak{g} &= \{\epsilon_i - \epsilon_j, 1 \le i \ne j \le 3\} \\ \Delta_\mathfrak{k} &= \{\epsilon_i - \epsilon_j, 1 \le i \ne j \le 2\}. \end{aligned}$$

Fijamos el siguiente sistema de raíces positivas para $\Delta_{\mathfrak{g}}$

$$\Delta_{\mathfrak{g}}^{+} = \{\alpha = \epsilon_1 - \epsilon_2,\, \beta = \epsilon_2 - \epsilon_3,\, \gamma = \epsilon_1 - \epsilon_3\}$$

La correspondiente estructura de espacios raíces esta dada por

$$X_\alpha = \begin{bmatrix} 0&1&0\\ 0&0&0\\ 0&0&0 \end{bmatrix}, \quad X_{-\alpha} = \begin{bmatrix} 0&0&0\\ 1&0&0\\ 0&0&0 \end{bmatrix}, \quad H_\alpha = \begin{bmatrix} 1&0&0\\ 0&-1&0\\ 0&0&0 \end{bmatrix}.$$

$$X_\beta = \begin{bmatrix} 0&0&0\\ 0&0&1\\ 0&0&0 \end{bmatrix}, \quad X_{-\beta} = \begin{bmatrix} 0&0&0\\ 0&0&0\\ 0&1&0 \end{bmatrix}, \quad H_\beta = \begin{bmatrix} 0&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&-1 \end{bmatrix}.$$

$$X_\gamma = \begin{bmatrix} 0&0&1\\ 0&0&0\\ 0&0&0 \end{bmatrix}, \quad X_{-\gamma} = \begin{bmatrix} 0&0&0\\ 0&0&0\\ 1&0&0 \end{bmatrix}, \quad H_\gamma = \begin{bmatrix} 1&0&0\\ 0&0&0\\ 0&0&-1 \end{bmatrix}.$$

Dado cualquier $t \in \mathbb{R}$ sea

$$a_t = \begin{pmatrix} \cosh t & 0 & \sinh t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh t & 0 & \cosh t \end{pmatrix}.$$

Tomamos la medida de Haar dg en G normalizada de tal forma que se verifique la siguiente fórmula integral para la descomposición de Cartan $G = KAK$: Para toda $f \in L^1(G)$,

$$\int_G f(g)dg = \int_K \int_0^\infty \int_K f(k_1 a_t k_2)(\sinh t)^2 (\sinh 2t) dk_1\, dt\, dk_2, \tag{6.8}$$

donde dt es la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R} \simeq \mathfrak{a}$, y dk es la medida de Haar sobre K normalizada por $\int_K dk = 1$. La transformada esférica para $f \in I_{c,\delta}(G)$ se escribe en términos de esta fórmula integral de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \hat{f}(\Phi) = \hat{F}_f(\Phi) &= \int_K \int_0^\infty \int_K F_f(k_1 a_t k_2)\Phi(k_1 a_t k_2)(\sinh t)^2 (\sinh 2t) dk_1\, dt\, dk_2 \\ &= \int_K \pi(k^{-1}) \left(\int_0^\infty F_f(a_t)\Phi(a_t)(\sinh t)^2(\sinh 2t)dt \right) \pi(k) dk. \end{aligned}$$

Observemos que la transformada esférica de la función f queda determinada por

$$\int_0^\infty F_f(a_t)\Phi(a_t)(\sinh t)^2 (\sinh 2t)dt. \tag{6.9}$$

Como en el Capítulo 3, para cualquier $g \in M(3,\mathbb{C})$, sea $A(g)$ el bloque superior izquierdo 2×2 e identifiquemos el conjunto $\hat{K}$ con $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Dado $\pi = \pi_{n,\ell}$, sea $\Phi_\pi : G \longrightarrow \mathrm{End}(V_\pi)$ definida por $\Phi_\pi(g) = \pi(A(g))$. A cada función esférica Φ sobre $G = \mathrm{SU}(2,1)$ de tipo $\pi = \pi_{n,\ell}$ le asociamos una función $H = \Phi\Phi_\pi^{-1}$ con valores en $\mathrm{End}(V_\pi)$. Las propiedades de H y la estructura de K-órbitas de G nos permiten expresarla como una función real $\widetilde{H}(r)$, con $r \geq 0$ con valores en $\mathrm{End}(V_\pi)$.

Entonces si denotamos $A(t) = A(a_t)$ para $-\infty < t < \infty$, tenemos

$$\Phi(a_t) = (\cosh t)^n H(a_t) A(t)^\ell = (\cosh t)^n \widetilde{H}(\tanh t) A(t)^\ell,$$

pues $p(a_t) = (\tanh t, 0, 1)$.

En la Proposición 3.26 del Capítulo 1 observamos que las funciones H eran diagonalizables. De hecho en (3.6) consideramos la base $\{v_i\}_{i=0}^{\ell}$ del espacio vectorial V_π que tiene la siguiente propiedad

$$\begin{aligned}\dot\pi(H_\alpha)v_i &= (\ell - 2i)v_i,\\ \dot\pi(X_\alpha)v_i &= (\ell - i + 1)v_{i-1}, \quad (v_{-1} = 0),\\ \dot\pi(X_{-\alpha})v_i &= (i+1)v_{i+1}, \quad (v_{\ell+1} = 0),\end{aligned}$$

y definimos las funciones escalares $h_i(t)$ por $H(a_t)v_i = h_i(t)v_i$. El hecho que

$$\dot\pi(H_\gamma)v_i = (n + \ell - i)v_i, \text{ y que } \exp tH_\gamma = \begin{pmatrix} \exp t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

implica que

$$\Phi(a_t)v_i = (\cosh t)^{(n+\ell-i)} h_i(t)v_i.$$

Recordemos que el centralizador de A en K es el subgrupo M de todos los elementos de la forma

$$m_\theta = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}.$$

para cualquier $\theta \in \mathbb{R}$. Ahora observemos que $\pi(m^{-1})F_f(a_t)\pi(m) = F_f(m^{-1}a_t m) = F_f(a_t)$ para todo $m \in M$ y por lo tanto $F(a_t)$ conmuta con $\pi(m)$ para todo $m \in M$. Por otro lado tenemos que $m_\theta v_k = e^{i\theta(\ell-n-3k)}v_k$, $k = 0, \ldots, \ell$. Esto dice que $F_f(a_t)$ diagonaliza en la base $\{v_i\}_{i=0}^{\ell}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Denotamos por f_i a la i-ésima entrada diagonal de la matriz $F_f(a_t)$, es decir

$$F_f(a_t)v_i = f_i(t)v_i.$$

Como $\Phi(a_t)$ y $F(a_t)$ son diagonalizables en la base $\{v_i\}_{i=0}^{\ell}$, la integral (6.9) resulta diagonalizable en esta misma base. Por lo tanto su i-ésimo elemento diagonal se escribe

$$\int_0^\infty f_i(t)h_i(t)(\cosh t)^{n+\ell-i}(\sinh t)^2(\sinh 2t)dt.$$

Ahora hacemos el cambio de variables $r = \tanh t$ y obtenemos

$$2\int_0^1 f_i(r)h_i(r)(1-r^2)^{-\frac{n+\ell-i}{2}-3}r^3 dr.$$

Finalmente hacemos el cambio de variables $r = \sqrt{1 - \frac{1}{t}}$ (Ver Capítulo 1, pag. 25) para obtener

$$\int_1^\infty f_i(t)h_i(t)t^{\frac{(n+\ell-i)}{2}}(t-1)dt. \tag{6.10}$$

Como hicimos en el Capítulo 3, identificamos H con la función con valores en $\mathbb{C}^{\ell+1}$ dada por $H(t) = (h_0(t), \ldots, h_\ell(t))$, y a $F_f(t)$ con la matriz diagonal cuya i-ésima entrada diagonal viene dada por $f_i(t)$. Teniendo en cuenta estas identificaciones introducimos la siguiente notación

$$\hat F_f(H) = \int_1^\infty F_f(t)H(t)t^{\frac{n+\ell-i}{2}}(t-1)dt.$$

Ahora queremos explicitar $\hat F_f(H)$ en términos de la función hipergeométrica matricial. Para esto fijemos una función esférica Φ; ésta función tiene asociada una función $H = \Phi\Phi_\pi^{-1}$ que es una autofunción de dos operadores diferenciales D y E con autovalores λ y μ, respectivamente. El Teorema 4.20 da una representación matricial de H de la siguiente forma

$$H(t) = \psi(1-t)\,{}_2H_1\left(\begin{smallmatrix} U\,;\,V+\lambda \\ C \end{smallmatrix}; 1-t\right) H_{\lambda,\mu},$$

donde $H_{\lambda,\mu}$ es el único autovector de la matriz $M(\lambda)$ (introducida en (4.18)) de autovalor μ, normalizado por $H_{\lambda,\mu} = (1, x_1, \dots, x_\ell)^t$ y $\psi(1-t)$ es la función polinomial que utilizamos para hipergeometrizar el operador diferencial D (Ver (4.3)). Sea $W(t)$ la matriz diagonal cuya i-ésima entrada diagonal está dada por $W(t)_{ii} = t^{\frac{n+\ell-i}{2}}(t-1)$. Entonces

$$\hat{F}_f(H) = \int_1^\infty F_f(t)\psi(1-t)W(t)\,{}_2H_1\left(\begin{smallmatrix} U\,;\,V+\lambda \\ C \end{smallmatrix}; 1-t\right) H_{\lambda,\mu}dt.$$

Esto nos permite expresar la transformada esférica de una función $f \in I_{c,\delta}(G)$ utilizando esta notación de la siguiente forma

$$\hat{f}(\Phi) = \hat{F}_f(\Phi) = \int_K \pi(k^{-1})\hat{F}_f(H)\pi(k)dk.$$

Observación 6.28. *Sea Φ una función esférica de tipo π y $F \in C_c(G,\pi,\pi)$. Entonces*

$$\pi(k)\hat{F}(\Phi) = \int_G F(gk^{-1})\Phi(g)dg = \int_G F(g)\Phi(gk)dg = \hat{F}(\Phi)\pi(k),$$

y por lo tanto $\hat{F} \in \mathrm{End}_K(V_\pi)$. Como π es una representación irreducible, $\hat{F}(\Phi) = cI$, donde I es la transformación identidad. Además el escalar c está dado por

$$c = \frac{1}{\dim \pi}\int_G \mathrm{tr}(F(g)\Phi(g))dg.$$

Por lo tanto podemos escribir la transformada esférica de f de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\hat{f}(\Phi) = \hat{F}_f(\Phi) &= \frac{1}{\dim \pi}\,\mathrm{tr}(\hat{F}_f(H)) \\ &= \frac{1}{\dim \pi}\int_1^\infty \mathrm{tr}\left(F_f(t)\psi(1-t)W(t)\,{}_2H_1\left(\begin{smallmatrix} U\,;\,V+\lambda \\ C \end{smallmatrix}; 1-t\right) H_{\lambda,\mu}\right) dt.\end{aligned}$$

El caso $\ell = 0$ y la transformada de Jacobi.

En este punto detallamos los resultados obtenidos para el caso $\ell = 0$. En este caso las funciones esféricas, que toman valores complejos, aparecen como funciones de Jacobi y la transformada esférica resulta ser un múltiplo de la Transformada de Jacobi. Sean α, β, $\lambda \in \mathbb{C}$ y $0 < s < \infty$. Entonces la función de Jacobi $\varphi_\lambda^{\alpha,\beta}$ está definida de la siguiente forma ([Koo75])

$$\varphi_\lambda^{\alpha,\beta}(s) = {}_2F_1\left(\begin{smallmatrix} \frac{1}{2}(\alpha+\beta+1+i\lambda)\,;\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta+1-i\lambda) \\ \alpha+1 \end{smallmatrix}; -\sinh^2(s)\right).$$

En este caso la función hipergeométrica ${}_2F_1\left(\begin{smallmatrix} a\,;\,b \\ c \end{smallmatrix}; z\right)$, denota la única continuación analítica para $z \notin [1,\infty)$ de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}, \text{ donde } |z| < 1.$$

Sea $f \in C_c(G)$ y $\mathrm{Re}(\alpha) > -1$; la transformada de Jacobi $\mathcal{J}^{\alpha,\beta}$ se define por

$$\mathcal{J}^{\alpha,\beta}(f)(\lambda) = \int_0^\infty f(s)\varphi_\lambda^{\alpha,\beta}(s)\Delta^{\alpha,\beta}(s)ds,$$

donde $\Delta^{\alpha,\beta}(s) = (2\sinh(s))^{2\alpha+1}(2\cosh(s))^{2\beta+1}$.

Para $\lambda \in \mathbb{C}$ sea $v \in \mathbb{C}$ una solución de la ecuación cuadrática $\frac{(2+v)(2-v)}{4}$. La función $h(t)$, autofunción del operador diferencial D de autovalor λ, asociada a una función esférica Φ de tipo $\pi_{n,0}$ viene dada por

$$h(t) = {}_2F_1\left(\begin{smallmatrix} \frac{n+2+v}{2}\,;\,\frac{n+2-v}{2} \\ 2 \end{smallmatrix};1-t\right),$$

y la correspondiente transformada esférica

$$\hat{f}(\Phi) = \hat{f}(h) = \int_1^\infty f(t)(t-1){}_2F_1\left(\begin{smallmatrix} \frac{n+2+v}{2}\,;\,\frac{n+2-v}{2} \\ 2 \end{smallmatrix};1-t\right)dt.$$

Si hacemos el cambio de variables $t = \cosh(s)^2$ y fijamos $\alpha = 1$ y $\beta = \frac{n}{2} - 1$, entonces h resulta la función de Jacobi de parámetros α y β en la variable s, es decir

$$h(s) = \varphi_{iv}^{1,\frac{n}{2}-1}(s).$$

La transformada esférica también se expresa en términos de la Transformada de Jacobi de la siguiente forma

$$\hat{f}(\Phi) = \frac{1}{8}\mathcal{J}^{1,\frac{n}{2}-1}(f)(iv).$$

6.4.1 Funciones esféricas unitarias asociadas a $H_2(\mathbb{C})$

En esta subsección estamos interesados en identificar, entre todas las funciones esféricas irreducibles $\Phi : \mathrm{SU}(2,1) \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ asociadas al plano hiperbólico complejo, aquellas que satisfacen $\Phi(g)^* = \Phi(g^{-1})$ para todo $g \in \mathrm{SU}(2,1)$, donde $*$ denota la operación de tomar adjunta con respecto a un producto interno $\langle , \rangle$ en V.

Comenzamos considerando un espacio vectorial V de dimensión finita con un producto interno $\langle , \rangle$. Sea $\Phi : \mathrm{SU}(2,1) \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ una función esférica de tipo $\pi = \pi_{n,\ell}$. Observemos que podemos suponer que el producto interno es K-invariante, es decir $\langle \pi(k)v_1, v_2\rangle = \langle v_1, \pi(k^{-1})v_2\rangle$ para todo $v_1, v_2 \in V$.

Proposición 6.29. *Sea $\Phi : \mathrm{SU}(2,1) \longrightarrow \mathrm{End}(V_\pi)$ una función esférica unitaria irreducible de tipo π con respecto al producto interno K-invariante $\langle , \rangle$. Sea $\{v_i\}_i$ la base de V_π introducida en* (3.6). *Entonces $\{v_i\}_i$ es una base ortogonal.*

Proof. El hecho que $\pi(k)^* = \pi(k^{-1})$ para todo $k \in K$ implica que $\dot{\pi}(Y)^* = -\dot{\pi}(Y)$ para todo $Y \in \mathfrak{g}$. Por lo tanto

$$\dot{\pi}(H_\alpha)^* = \dot{\pi}(-iH_1)^* = i\dot{\pi}(H_1)^* = -i\dot{\pi}(H_1) = \dot{\pi}(H_\alpha).$$

Como los vectores v_i son autovectores correspondientes a autovalores distintos de la transformación lineal autoadjunta $\dot{\pi}(H_\alpha)$, resultan ortogonales con respecto a $\langle , \rangle$. □

Ahora observemos que la función esférica Φ es unitaria si y solo si $\Phi : A \longrightarrow \mathrm{End}(V_\pi)$ es unitaria. Para verificar este hecho utilizamos la descomposición de Cartan $G = KAK$. Si Φ es una función esférica unitaria, entonces

$$\pi(k_2^{-1})\Phi(a^{-1})\pi(k_1^{-1}) = \Phi(k_2^{-1}a^{-1}k_1^{-1}) = (\pi(k_1)\Phi(a)\pi(k_2))^* = \pi(k_2^{-1})\Phi(a)^*\pi(k_1^{-1}),$$

lo cual prueba que $\Phi(a^{-1}) = \Phi(a)^*$. Por otro lado supongamos que Φ es una función esférica con la propiedad que $\Phi(a^{-1}) = \Phi(a)^*$ para todo $a \in A$. Entonces se verifica directamente que $\Phi((k_1 a k_2)^{-1}) = \Phi(k_1 a k_2)^*$.

Como en el Capítulo 3, sea $H : G \longrightarrow \mathrm{End}(V_\pi)$ la función definida por $H(g) = \Phi(g)\Phi_\pi(g)^{-1}$. Entonces la condición $\Phi(a^{-1}) = \Phi(a)^*$ para todo $a \in A$ se traduce en que $H(a)^* = H(a^{-1})$. Por lo tanto si denotamos $H(t) = H(a_t)$ (a_t definida en (6.4)) y hacemos los cambios de variable $r = \tanh(t)$ y luego $t = 1/(1-r^2)$, una condición equivalente a que Φ sea unitaria es: $\bar{H}^\Phi(t) = H^\Phi(t)$ para todo $t \in (1, \infty)$. Resumimos estos resultados en el siguiente lema.

Lema 6.30. *Sea H^Φ la función asociada a la función esférica $\Phi : \mathrm{SU}(2,1) \longrightarrow \mathrm{End}(V_\pi)$. Entonces Φ es una función esférica unitaria si y la función H^Φ satisface*

$$\bar{H}^\Phi(t) = H^\Phi(t), \ \textit{para todo } t \in (1, \infty).$$

El teorema 4.20 dice que la función H^Φ asociada a la función esférica Φ está caracterizada por los autovalores λ y μ de H^Φ como autofunción de los operadores diferenciales D y E respectivamente. Una representación matricial de H viene dada por

$$H^\Phi(t) = \psi(1-t)\,{}_2H_1\left({U\,;\,V+\lambda(\eta) \atop C}\,;1-t \right) H_{\lambda,\mu},$$

donde $H_{\lambda,\mu}$ es el único autovector de autovalor μ de la matriz $M(\lambda)$ introducida en (4.18).

Teorema 6.31. *Sea Φ una función esférica irreducible de tipo $\pi = \pi_{n,\ell}$ y asumamos que su función asociada H^Φ es una autofunción de los operadores diferenciales D y E con autovalores λ y μ respectivamente. Entonces Φ es unitaria si y sólo si $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Proof. Basta con reemplazar la expresión de la función H^Φ en términos de la función hipergeométrica matricial en la condición que establece el Lema 6.30. □

6.4.2 Funciones esféricas definidas positivas de $\mathrm{SU}(2,1)$

En esta subsección daremos una descripción de todas las funciones esféricas definidas positivas asociadas al plano hiperbólico complejo que provienen de la Serie Principal Unitaria de representaciones y de la Serie Discreta. Para esto utilizaremos la caracterización dada en el Capítulo 4 en términos de la función hipergeométrica matricial. Ésta descripción es necesaria para explicitar la fórmula de inversión de la transformada esférica para el par $(\mathrm{SU}(2,1), \mathrm{U}(2))$.

Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ la descomposición de $\mathfrak{g}$ asociada a la involución de Cartan $\theta(X) = -\overline{X}^t$. Entonces

$$\mathfrak{k} = \left\{ \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} : k \in \mathfrak{u}(2),\, y = -\operatorname{tr}(k) \right\} \text{ y } \mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ \overline{b}^t & 0 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

Sean

$$H_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ y } T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto $\mathfrak{a} = \mathbb{R}H_0$ es un subespacio abeliano maximal de $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{m} = \mathbb{R}iT$ es el centralizador de $\mathfrak{a}$ en $\mathfrak{k}$ y $\widetilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$ es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$. La descomposición en espacios raíces con respecto a $\mathfrak{h}_\mathbb{C}$ está dada por

$$\widetilde{\alpha}(H_0) = 1, \quad \widetilde{\beta}(H_0) = 1, \quad \widetilde{\gamma}(H_0) = 2,$$
$$\widetilde{\alpha}(T) = 3, \quad \widetilde{\beta}(T) = -3, \quad \widetilde{\gamma}(T) = 0,$$

y los vectores raíz son

$$
\begin{aligned}
X_{\tilde{\alpha}} &= E_{12} + E_{32}, & X_{-\tilde{\alpha}} &= E_{21} + E_{23}, \\
X_{\tilde{\beta}} &= E_{21} + E_{23}, & X_{-\tilde{\beta}} &= E_{12} - E_{32}, \\
X_{\tilde{\gamma}} &= E_{13} - E_{31} - E_{11} + E_{33}, & X_{-\tilde{\gamma}} &= E_{31} - E_{13} - E_{11} + E_{33}.
\end{aligned}
$$

En esta nueva base, los operadores diferenciales Δ_2 y Δ_3 introducidos en la Proposición 3.5 están dados por

$$
\begin{aligned}
\Delta_2 &= -(H_0^2 + \tfrac{1}{3}T^2 - 4\,H_0 + 2\,X_{\tilde{\alpha}}X_{-\tilde{\alpha}} + 2\,X_{\tilde{\beta}}X_{-\tilde{\beta}} + X_{\tilde{\gamma}}X_{-\tilde{\gamma}}), \\
\Delta_3 &= -\tfrac{1}{9}T^3 + T^2 + 4\,T + 3\,H_0^2 - 3\,H_0\,T - 12\,H_0 \\
&\quad - X_{\tilde{\alpha}}TX_{-\tilde{\alpha}} - X_{\tilde{\beta}}TX_{-\tilde{\beta}} + X_{\tilde{\gamma}}TX_{-\tilde{\gamma}} - 3\,X_{\tilde{\beta}}H_0X_{-\tilde{\beta}} \\
&\quad - 3\,X_{\tilde{\beta}}X_{\tilde{\alpha}}X_{-\tilde{\gamma}} - 3\,X_{\tilde{\gamma}}X_{-\tilde{\alpha}}X_{-\tilde{\beta}} + 12\,X_{\tilde{\beta}}X_{-\tilde{\beta}} + 6X_{\tilde{\gamma}}X_{-\tilde{\gamma}}.
\end{aligned}
$$

Sea $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ la raíz restringida definida por $\lambda(H_0) = 1$ y sea $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}_\lambda + \mathfrak{g}_{2\lambda}$ la suma de los correspondientes subespacios de raíces restringidas de $\mathfrak{g}$. Entonces $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ es una descomposición de Iwasawa de $\mathfrak{g}$.

Sean A y N los subgrupos analíticos de G con álgebras de Lie $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{n}$, respectivamente, y sea M el centralizador de A en K. Entonces MAN es un subgrupo parabólico minimal de G y

$$
M = \left\{ m_\theta = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \right\}, \quad A = \left\{ a_t = \begin{pmatrix} \cosh t & 0 & \sinh t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh t & 0 & \cosh t \end{pmatrix} \right\}.
$$

Para $r \in \mathbb{Z}$ y $v \in \mathbb{C}$ definimos $\sigma \in \hat{M}$ y $\nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ por

$$
\sigma(m_\theta) = e^{ir\theta}, \text{ and } \nu(tH_0) = vt. \tag{6.11}
$$

Entonces $man \mapsto e^{\nu(\log a)}\sigma(m)$ es una representación de dimensión uno de MAN, ésta es la representación que inducimos a G para construir su serie principal generalizada de representaciones . Utilizaremos la notación $U^{r,v} = U^{\sigma,\nu} = \mathrm{Ind}_{MAN}^{G}$.

Un subespacio denso del espacio de representación de $U^{r,v}$ es

$$
\{F : G \longrightarrow V_\sigma \text{ continua } : F(xman) = \mathrm{e}^{-(\nu+\rho)\log(a)}\,\sigma(m)F(x)\},
$$

con la norma

$$
\|F\|^2 = \int_K |F(k)|^2 dk.
$$

Por el Teorema de reciprocidad de Frobenius, el K-tipo (n,ℓ) ocurre en la representación $U^{r,v}$ si y sólo si $r = \ell - n - 3j$ para algún $j = 0, \dots, \ell$.

Proposición 6.32. *El carácter infinitesimal $\chi_{r,v}$ de la serie principal $U^{r,v}$ está dado por*

$$
\begin{aligned}
\chi_{r,v}(\Delta_2) &= -v^2 + 4 - \frac{1}{3}r^2 \\
\chi_{r,v}(\Delta_3) &= \frac{1}{4}(-\frac{1}{9}r^3 + r^2 + rv^2 + 3v^2 - 12).
\end{aligned}
$$

Observemos que $U^{r,v}$ y $U^{r,-v}$ tienen el mismo carácter infinitesimal. Este es un caso particular de la invariancia general del carácter infinitesimal de las representaciones de la serie principal por el grupo de Weyl restringido.

Denotaremos por $\Phi^{r,v}$ a la función esférica $\Phi^{U^{r,v}}$ de tipo (n,ℓ) asociada a la representación $U^{r,v}$.

Lema 6.33. *Sea* $H^{\ell-n-3j,v} = \Phi^{\ell-n-3j,v}\Phi_{(n,\ell)}$. *Entonces*

$$DH^{\ell-n-3j,v} = \lambda_j H^{\ell-n-3j,v},\ \lambda_j(v) = \frac{1}{4}(n+\ell+2-j+v)(n+\ell+2-j-v)+j(\ell-j+1), \tag{6.12}$$

$$EH^{\ell-n-3j,v} = \mu_j H^{\ell-n-3j,v},\ \mu_j = \lambda_j(v)(n-\ell+3j)-12j(\ell-j+1)(n+j+1). \tag{6.13}$$

Demostración. Por la Proposición 3.12 si la función esférica $\Phi^{\ell-n-3j}$ satisface $\Delta_2\Phi^{\ell-n-3j} = \tilde{\lambda}\Phi^{\ell-n-3j}$ y $\Delta_3\Phi^{\ell-n-3j} = \tilde{\mu}\Phi^{\ell-n-3j}$, entonces los autovalores λ y μ de la función $H^{\ell-n-3j}$ son

$$\lambda = \tilde{\lambda} - \dot{\pi}(\Delta_{2,K}),\ \text{y}\ \mu = \tilde{\mu} - \dot{\pi}(\Delta_{3,K}).$$

Para calcular $\Delta_{i,K}$, con $i = 2,3$, basta calcular $\Delta_{2,K}v_0$, donde $\{v_i\}_{i=0}^{\ell}$ es la base de $V_{\pi_{n,\ell}}$ introducida en el Capítulo 3. Entonces es sencillo verificar que

$$\dot{\pi}(\Delta_{2,K}) = -\frac{4}{3}(\ell^2+n^2+n\ell+3\ell+3n),$$

y

$$\dot{\pi}(\Delta_{3,K}) = \frac{8}{3}\ell^3 - \frac{8}{9}n^3 + \frac{4}{3}\ell^2 n - \frac{4}{3}\ell n^2 + 4\ell 2 - 4n^2 + 4\ell - 4n.$$

por lo tanto cambiando r por $\ell-n-3j$, el lema queda probado. □

Las representaciones $U^{r,v}$ asociadas a la serie principal unitaria están determinadas por la elección $v \in i\mathbb{R}$. En otras palabras, las siguientes funciones caracterizan las funciones esféricas definidas positivas que provienen de la serie principal unitaria

$$H^{\ell-n-3j,iv}(1-t) = \psi(1-t)\,{}_2H_1\left(\begin{smallmatrix} U\,;\,V+\lambda_j(iv) \\ C \end{smallmatrix};1-t\right)H_{\lambda_j(iv),\mu_j},\ \text{con}\ v\in\mathbb{R},$$

donde $H_{\lambda_j(iv),\mu_j}$ es el único autovector de la matriz $M(\lambda_j(iv))$ de autovalor μ_j normalizado por $H_{\lambda_j(iv),\mu_j} = (1,x_1,\ldots,x_\ell)^t$ para $j = 0,\ldots,\ell$ (Ver Teorema 4.20).

Dada una representación (π,H) de G sobre el espacio de Hilbert H, podemos suponer que $\pi(K)$ actúa por operadores unitarios. Por lo tanto

$$H = \bigoplus_{\tau\in\hat{K}} m(\tau)V_\tau,\ \text{donde}\ m(\tau)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\cap\{+\infty\}.$$

Decimos que (π,H) es admisible si $\pi(K)$ actúa por operadores unitarios y $m(\tau)$ es finito para todo $\tau\in\hat{K}$. Una representación admisible es una serie discreta si es irreducible y todos sus coeficientes matriciales $g\mapsto\langle\pi(g)v,w\rangle$ $(v,w\in V_K)$ son de cuadrado integrable. Las series discretas se pueden parametrizar por los pesos $\eta\in(i\mathfrak{h})^*$ tal que η es no singular ($(\eta,\alpha)\neq 0$ para toda raíz α) y $\eta+\rho$ es integral ($\eta(H)\in 2\pi i\mathbb{Z}$ para todo $H\in i\mathfrak{h}$ tal que $\exp H = 1$). La serie discreta de parámetro η tiene carácter infinitesimal χ_η.

Si $\eta\in(i\mathfrak{h})^*$ es un parámetro de Harish-Chandra entonces satisface $\eta = \eta_1\epsilon_1+\eta_2\epsilon_2+\eta_3\epsilon_3$ con $\eta_1+\eta_2+\eta_3 = 0$.

Proposición 6.34. *Supongamos que* $\eta = \eta_1\epsilon_1+\eta_2\epsilon_2-(\eta_1+\eta_2)\epsilon_3$ *es un parámetro de Harish-Chandra de una serie discreta del grupo* $\mathrm{SU}(2,1)$. *Entonces*

$$\chi_\eta(\Delta_2) = -4(\eta_1^2+\eta_2^2+\eta_1\eta_2-1),$$
$$\chi_\eta(\Delta_3) = -12\eta_1^2\eta_2 - 12\eta_1\eta_2^2 + 9\eta_1^2 + 9\eta_2^2 + 18\eta_1\eta_2 + 3\eta_1 - 3\eta_2 - 36.$$

Demostración. El carácter infinitesimal χ_η viene dado por $\chi_\eta(z) = \eta(\gamma(z))$ para todo $z \in Z(\mathfrak{g})$, donde γ es el isomorfismo de Harish-Chandra. Como $\gamma(\Delta_2) = -H_\alpha^2 - \frac{1}{3}Z^2 + 4$ ([GPT02a], Proposición 3.1), tenemos que

$$\chi_\eta(\Delta_2) = \eta(-H_\alpha^2 - \frac{1}{3}Z^2 + 4) = -4(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_1\eta_2 - 1).$$

de manera análoga probamos la segunda afirmación. □

Sea Φ^η, $\eta = \eta_1\epsilon_1 + \eta_2\epsilon_2 - (\eta_1 + \eta_2)\epsilon_3$, una función esférica asociada a una serie discreta de parámetro η. Vimos que la función $H^\eta = \Phi^\eta\Phi_{(n,\ell)}$ es una autofunción de los operadores diferenciales D y E; utilizando el mismo argumento que en la demostración del Lema 6.33 podemos identificar los autovalores λ y μ que vienen dados por

$$\begin{aligned}
\lambda_\eta &= -4(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_1\eta_2 - 1) - \frac{4}{3}(\ell^2 + n^2 + n\ell + 3\ell + 3n) \qquad (6.14)\\
\mu_\eta &= -12\eta_1^2\eta_2 - 12\eta_1\eta_2^2 + 9\eta_1^2 + 9\eta_2^2 + 18\eta_1\eta_2 + 3\eta_1 - 3\eta_2 - 36 + \frac{8}{3}\ell^3 - \frac{8}{9}n^3 + \frac{4}{3}\ell^2 n\\
&\quad - \frac{4}{3}\ell n^2 + 4\ell 2 - 4n^2 + 4\ell - 4n.
\end{aligned}$$

El grado formal d_η de una serie discreta con parámetro de Harish-Chandra $\eta = \eta_1\epsilon_1 + \eta_2\epsilon_2 - (\eta_1 + \eta_2)\epsilon_3$ ([War72]) está dado por

$$d_\eta = \frac{1}{4\pi^3}|(\eta_1 - \eta_2)(\eta_1 + 2\eta_2)(2\eta_1 + \eta_2)|.$$

A continuación fijado un K-tipo (n, ℓ), necesitamos determinar cuales son los parámetros de Harish-Chandra η para los cuales la serie discreta de parámetro η contiene el K-tipo (n, ℓ). Este cálculo se encuentra en la Sección 4 de [GV94] donde están determinados todos los K-tipos que ocurren en una serie discreta para el grupo $G = \mathrm{SU}(n, 1)$.

Fijemos el K-tipo $\pi_{(n,\ell)}$. Sea I el conjunto de todos los $\eta = \eta_1\epsilon_1 + \eta_2\epsilon_2 - (\eta_1 + \eta_2)\epsilon_3 \in (i\mathfrak{h})^*$ tal que $\eta_i = m_i + \frac{s}{2}$ con $m_i \in \mathbb{Z}$ y $1 \leq s \leq 3$. Entonces los parámetros de Harish-Chandra η tales que la serie discreta de parámetro η contiene al K tipo (n, ℓ) están dados por los siguientes tres subconjuntos disjuntos de $(i\mathfrak{h})^*$ (Ver la Proposición 4.1 de [GV94])

$$\begin{aligned}
I^1 &= \{\eta \in (i\mathfrak{h})^* : \eta_2 < \eta_1 < -(\eta_2 + \eta_1),\ \text{y } n \leq \eta_2 \leq n + \ell = \eta_1 - 1\} \cap I\\
I^2 &= \{\eta \in (i\mathfrak{h})^* : \eta_2 < -(\eta_2 + \eta_1) < \eta_1 \text{ y } n \leq \eta_2 - 1 < \eta_1 - 1 \leq n + \ell\} \cap I\\
I^3 &= \{\eta \in (i\mathfrak{h})^* : -(\eta_2 + \eta_1) < \eta_2 < \eta_1 \text{ y } n = \eta_2 \leq \eta_1 + 1 \leq n + \ell\} \cap I
\end{aligned}$$

6.4.3 Fórmula de inversión para $G = \mathrm{SU}(2, 1)$

En este capítulo final nos dedicamos a encontrar una expresión detallada para la fórmula de inversión para la transformada esférica para el grupo es $\mathrm{SU}(2, 1)$.

En lo que resta de la sección, fijamos un K-tipo (n, ℓ). Para dar la expresión explícita de la formula de inversión para la transformada esférica necesitamos una expresión para la medida de Plancherel. Esta medida fue calculada por Miatello en [Mia79] para los grupos de Lie lineales de rango uno. Nosotros tomamos los resultados de este trabajo para el caso del grupo $\mathrm{SU}(2, 1)$. Como en la sección anterior, identifiquemos $\sigma \in \hat{M}$ con $r = \ell - n - 3j$, $j = 0, \dots \ell$. Entonces la medida de Plancherel para el grupo $\mathrm{SU}(2, 1)$ viene dada por

$$\mu_\sigma(z) = \begin{cases} \frac{1}{\pi^2\Gamma(2)} z \left(z^2 + \frac{(n+3j-\ell)^2}{4}\right) \coth \pi z, & \text{si } \ell - n - 3j \text{ es impar,}\\ \frac{1}{\pi^2\Gamma(2)} z \left(z^2 + \frac{(n+3j-\ell)^2}{4}\right) \tanh \pi z, & \text{si } \ell - n - 3j \text{ es par.} \end{cases}$$

Sea $F \in C_c(G,\pi,\pi)$, entonces F está determinado por su valor en A. Esto nos indica que es suficiente explicitar la fórmula de inversión para la transformada esférica para $F(a_t)$, $a_t \in A$. Como vimos en el Teorema 4.20, toda función esférica irreducible de tipo (n,ℓ) asociada al plano hiperbólico complejo se puede identificar con los autovalores λ y μ de los operadores diferenciales D y E. Denotamos por $\Phi^{\lambda,\mu}$ a la función esférica irreducible te tipo (n,ℓ) tal que su función asociada $H^{\lambda,\mu}$ es una autofunción de los operadores D y E con autovalores λ y μ respectivamente. Entones la observación 6.28 dice que $\hat{F}(\Phi^{\lambda,\mu}) = \frac{1}{\ell+1}\operatorname{tr}(\hat{F}(H^{\lambda,\mu}))I$, donde I es la transformación identidad.

La función esférica $\Phi^{\lambda,\mu}(a_t)$ es diagonalizable en la base $\{v_i\}_{i=0}^{\ell}$ introducida en (3.6). De hecho

$$\Phi^{\lambda,\mu}(a_t)v_i = (\cosh t)^{n+\ell-i}H^{\lambda,\mu}(t)v_i.$$

Si hacemos el cambio de variables $r = \tanh t$ y luego $t = 1/(1-r^2)$, tenemos

$$\Phi^{\lambda,\mu}(a_t)v_i = t^{\frac{n+\ell-i}{2}}H^{\lambda,\mu}(t)v_i.$$

Además, hacemos la identificación $F(t) = F(a_t)$. Las clases de equivalencia de funciones esféricas irreducibles de tipo (n,ℓ) que hacen un aporte no nulo a la integral involucrada en la fórmula de inversión 6.27 son las funciones esféricas asociadas a la serie principal unitaria de representaciones y a la serie discreta. Sean

$$\begin{aligned}\lambda_j(v) &= (n+\ell+2-j+v)(n+\ell+2-j-v)+4j(\ell-j+1),\\ \mu_j &= \lambda_j(v)(n-\ell+3j)-12j(\ell-j+1)(n+j+1), \text{ para } j=0,\dots\ell,\end{aligned}$$

entonces $H^{\lambda_j(v)}$ denota la función H, autofunción de los operadores diferenciales D y E de autovalores $\lambda_j(v)$ y μ_j respectivamente, que es asociada a una función esférica irreducible de tipo (n,ℓ).

Por otro lado si $\eta \in (i\mathfrak{h})^*$ es un parámetro de Harish-Chandra, entonces la función H asociada a la función esférica irreducible que proviene de la serie discreta de parámetro η es una autofunción de los operadores diferenciales D y E con los autovalores $\lambda(\eta)$ y $\mu(\eta)$ respectivamente (Ver (6.14)).

Finalmente la fórmula de inversión viene dada por

$$\begin{aligned}F(t) = \sum_{j=0}^{\ell}\int_0^{\infty}\frac{1}{\ell+1}\operatorname{tr}(\hat{F}(H^{\lambda_j(iv)}))W(t){}_2H_1\left({U\,;\,V+\lambda_j(iv) \atop C};1-t\right)H_{\lambda_j(iv),\mu_j}\mu_{\ell-n-3j}(iv)dv+\\ \sum_{\eta\in I^1\cup I^2\cup I^3}\frac{d_\eta}{\ell+1}\operatorname{tr}(\hat{F}(H^{\lambda(\eta)}))W(t){}_2H_1\left({U\,;\,V+\lambda(\eta) \atop C};1-t\right)H_{\lambda(\eta),\mu(\eta)}.\end{aligned}$$

En la fórmula anterior, $H_{\lambda_j(iv),\mu_j}$ denota el único μ_j-autovector de la matriz $M(\lambda_j(iv))$ normalizado por $(1,x_0,\dots,x_\ell)$, $H_{\lambda(\eta),\mu(\eta)}$ es el único $\mu(\eta)$-autovector de la matriz $M(\lambda(\eta))$ normalizado de la misma forma y $W(t) = \psi(1-t)D(t)$ donde $D(t)$ es la matriz diagonal cuya i-ésima entrada diagonal es igual a $t^{\frac{-n+\ell-i}{2}}$.

CAPITULO 7

APENDICE

7.1 Demostraciones complementarias al Capítulo 3

7.1.1 Demostraciones de la Sección 3.2

En esta subsección completamos las pruebas de las Proposiciones 3.13, 3.14, 3.15 y 3.16 dadas en la Sección 3.2 del Capítulo 3.

Proposición 3.13 *Para* $H \in C^\infty(B) \otimes \mathrm{End}(V_\pi)$ *tenemos*

$$\begin{aligned}
&D_1(H) = \\
&-(1-|x|^2-|y|^2)\left((H_{x_1x_1}+H_{x_2x_2})(1-|x|^2)+(H_{y_1y_1}+H_{y_2y_2})(1-|y|^2)\right)\\
&+2(1-|x|^2-|y|^2)\left((H_{y_1x_1}+H_{y_2x_2})\,\mathrm{Re}(x\overline{y})+(H_{y_1x_2}-H_{y_2x_1})\,\mathrm{Im}(x\overline{y})\right).
\end{aligned}$$

Demostración. Tenemos

$$D_1(H) = -4(X_{-\beta}X_\beta + X_{-\gamma}X_\gamma)(H) = -\left(Y_3^2+Y_4^2+Y_5^2+Y_6^2\right)(H).$$

Comenzamos calculando $Y_5^2(H)(g)$, para todo $g \in G$. Entonces

$$Y_5^2(H)(g) = \left(\frac{d}{ds}\frac{d}{dt}H\left(p(g\exp(s+t)Y_5)\right)\right)_{s=t=0}.$$

Sea

$$u(s,t) = \frac{g_{12}\tanh(s+t)+g_{13}}{g_{32}\tanh(s+t)+g_{33}} \quad \text{y} \quad v(s,t) = \frac{g_{22}\tanh(s+t)+g_{23}}{g_{32}\tanh(s+t)+g_{33}}.$$

luego

$$p(g\exp(s+t)Y_5) = (u(s,t)\,,\, v(s,t)\,,\, 1).$$

Ahora usando el Lema 3.1 obtenemos

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_{s=0} = \frac{g_{12}g_{33}-g_{13}g_{32}}{(g_{32}\sinh t + g_{33}\cosh t)^2} = \frac{-\overline{g}_{21}}{(g_{32}\sinh t + g_{33}\cosh t)^2}$$

y

$$\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_{s=0} = \frac{g_{22}g_{33}-g_{23}g_{32}}{(g_{32}\sinh t + g_{33}\cosh t)^2} = \frac{\overline{g}_{11}}{(g_{32}\sinh t + g_{33}\cosh t)^2}.$$

Por lo tanto en $s=t=0$ tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\overline{g}_{21}}{g_{33}^2}\,,\quad \frac{\partial v}{\partial s}=\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\overline{g}_{11}}{g_{33}^2}$$

y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t}=\frac{2g_{32}\overline{g}_{21}}{g_{33}^3}\,,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial s\partial t}=\frac{-2g_{32}\overline{g}_{11}}{g_{33}^3}.$$

De manera similar sea

$$\tilde{u}(s,t)=\frac{i\,g_{12}\tanh(s+t)+g_{13}}{i\,g_{32}\tanh(s+t)+g_{33}}\quad \text{y}\quad \tilde{v}(s,t)=\frac{i\,g_{22}\tanh(s+t)+g_{23}}{i\,g_{32}\tanh(s+t)+g_{33}}.$$

Luego obtenemos $p(g\exp(s+t)Y_6)=(\tilde{u}(s,t)\,,\,\tilde{v}(s,t)\,,\,1)$. De esta manera, en $s=t=0$ tenemos

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial s}=\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}=-\frac{i\,\overline{g}_{21}}{g_{33}^2}\,,\quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial s}=\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}=\frac{i\,\overline{g}_{11}}{g_{33}^2}$$

y

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial s\partial t}=-\frac{2g_{32}\overline{g}_{21}}{g_{33}^3}\,,\quad \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial s\partial t}=\frac{2g_{32}\overline{g}_{11}}{g_{33}^3}.$$

Usando la regla de la cadena resulta

$$\begin{aligned}Y_5^2(H)(g)=&\sum_{i,j=1,2}H_{x_ix_j}\,\frac{\partial u_i}{\partial s}\,\frac{\partial u_j}{\partial t}+\sum_{i,j=1,2}H_{y_iy_j}\,\frac{\partial v_i}{\partial s}\,\frac{\partial v_j}{\partial t}\\&+\sum_{i,j=1,2}H_{x_iy_j}\,\left(\frac{\partial u_i}{\partial s}\,\frac{\partial v_j}{\partial t}+\frac{\partial u_i}{\partial t}\,\frac{\partial v_j}{\partial s}\right)+\sum_{i=1,2}H_{x_i}\frac{\partial^2 u_i}{\partial t\partial s}+H_{y_i}\frac{\partial^2 v_i}{\partial t\partial s}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}Y_6^2(H)(g)=&\sum_{i,j=1,2}H_{x_ix_j}\,\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial s}\,\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial t}+\sum_{i,j=1,2}H_{y_iy_j}\,\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial s}\,\frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial t}\\&+\sum_{i,j=1,2}H_{x_iy_j}\,\left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial s}\,\frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial t}+\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t}\,\frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial s}\right)+\sum_{i=1,2}H_{x_i}\frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial t\partial s}+H_{y_i}\frac{\partial^2 \tilde{v}_i}{\partial t\partial s}.\end{aligned}$$

Notemos que si $u(t)=u_1(t)+iu_2(t)$ entonces $\frac{du_1}{dt}=\mathrm{Re}(\frac{du}{dt})$ y $\frac{du_2}{dt}=\mathrm{Im}(\frac{du}{dt})$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}(Y_5^2+Y_6^2)(H)(g)=&(H_{x_1x_1}+H_{x_2x_2})\,\frac{|g_{21}|^2}{|g_{33}|^4}+(H_{y_1y_1}+H_{y_2y_2})\,\frac{|g_{11}|^2}{|g_{33}|^4}\\&-\frac{2\,\mathrm{Re}(g_{11}\overline{g}_{21})}{|g_{33}|^4}\,(H_{x_1y_1}+H_{x_2y_2})-\frac{2\,\mathrm{Im}(g_{11}\overline{g}_{21})}{|g_{33}|^4}\,(H_{x_2y_1}-H_{x_1y_2})\,.\end{aligned}\tag{7.1}$$

Procedemos de la misma forma con $Y_3^2+Y_4^2$ y obtenemos

$$\begin{aligned}(Y_3^2+Y_4^2)(H)(g)=&(H_{x_1x_1}+H_{x_2x_2})\,\frac{|g_{22}|^2}{|g_{33}|^4}+(H_{y_1y_1}+H_{y_2y_2})\,\frac{|g_{12}|^2}{|g_{33}|^4}\\&-\frac{2\,\mathrm{Re}(g_{12}\overline{g}_{22})}{|g_{33}|^4}\,(H_{x_1y_1}+H_{x_2y_2})-\frac{2\,\mathrm{Im}(g_{12}\overline{g}_{22})}{|g_{33}|^4}\,(H_{x_2y_1}-H_{x_1y_2})\,.\end{aligned}\tag{7.2}$$

Entonces

$$\begin{aligned}-D_1(H)(g) &= (Y_3^2+Y_4^2)(H)(g)+(Y_5^2+Y_6^2)(H)(g)\\ &= (H_{x_1x_1}+H_{x_2x_2})\,\frac{(1+|g_{23}|^2)}{|g_{33}|^4}+(H_{y_1y_1}+H_{y_2y_2})\,\frac{\left(1+|g_{13}|^2\right)}{|g_{33}|^4}\\ &\quad -2\,(H_{x_1y_1}+H_{x_2y_2})\,\frac{\operatorname{Re}(g_{13}\overline{g}_{23})}{|g_{33}|^4}-2\,(H_{x_2y_1}-H_{x_1y_2})\,\frac{\operatorname{Im}(g_{13}\overline{g}_{23})}{|g_{33}|^4}.\end{aligned}$$

Ahora, usando (3.4) queda probada la proposición. □

Lema 7.1. *Para cualquier $g\in G$ sea $B=\left(\begin{smallmatrix}0 & g_{13}\\ 0 & g_{23}\end{smallmatrix}\right)$ y $C=\left(\begin{smallmatrix}g_{13} & 0\\ g_{23} & 0\end{smallmatrix}\right)$. Entonces*

i) $(X_{-\beta}\Phi_\pi)(g)=\dot\pi(BA(g)^{-1})\,\pi(A(g))$.

ii) $(X_{-\gamma}\Phi_\pi)(g)=\dot\pi(CA(g)^{-1})\,\pi(A(g))$.

Demostración.

$$\Phi_\pi(g\,\exp\,t\,X_{-\beta})=\pi(A(g\,\exp\,t\,X_{-\beta})A(g)^{-1})\pi(A(g))$$

Si suponemos $|t|$ pequeño tenemos que

$$(X_{-\beta}\Phi_\pi)(g)=\left(\frac{d}{dt}\Phi_\pi(g\,exp\,t\,X_{-\beta})\right)_{t=0}$$

Luego

$$(X_{-\beta}\Phi_\pi)(g)=\dot\pi\left(\left(\frac{d}{dt}(A(g\,\exp\,t\,X_{-\beta}))\right)_{t=0}A(g)^{-1}\right)\pi(A(g))$$

Como $\left(\frac{d}{dt}A(g\,\exp\,t\,X_{-\beta})\right)_{t=0}=B$ tenemos i); la parte ii) se prueba de la misma manera. □

Proposición 3.14 *Para $H\in C^\infty(B)\otimes\operatorname{End}(V_\pi)$ tenemos*

$$D_2(H)=4\,\frac{\partial H}{\partial x}\,\dot\pi\begin{pmatrix}-x(1-|x|^2) & x^2\overline{y}\\ \\ -y(1-|x|^2) & x|y|^2\end{pmatrix}+4\,\frac{\partial H}{\partial y}\,\dot\pi\begin{pmatrix}y|x|^2 & -x(1-|y|^2)\\ \\ y^2\overline{x} & -y(1-|y|^2)\end{pmatrix}.$$

Demostración. Sabemos que

$$D_2(H)=-4\left(X_\beta(H)X_{-\beta}(\Phi_\pi)\Phi_\pi^{-1}+X_\gamma(H)X_{-\gamma}(\Phi_\pi)\Phi_\pi^{-1}\right).$$

Por el Lema 7.1

$$(X_{-\beta}\Phi_\pi)(g)\Phi_\pi(g)^{-1}=\frac{1}{g_{33}}\dot\pi\begin{pmatrix}-g_{13}g_{21} & g_{13}g_{11}\\ -g_{23}g_{21} & g_{23}g_{11}\end{pmatrix},$$

y

$$(X_{-\beta}\Phi_\pi)(g)\Phi_\pi(g)^{-1}=\frac{1}{g_{33}}\dot\pi\begin{pmatrix}g_{13}g_{22} & -g_{13}g_{12}\\ g_{23}g_{22} & -g_{23}g_{12}\end{pmatrix}.$$

Luego

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}D_2(H)(g) &= -\left(\frac{\overline{g}_{21}}{\overline{g}_{33}^2}\frac{\partial H}{\partial x}-\frac{\overline{g}_{11}}{\overline{g}_{33}^2}\frac{\partial H}{\partial y}\right)\frac{1}{g_{33}}\dot\pi\begin{pmatrix}g_{13}g_{22} & -g_{13}g_{12}\\ g_{23}g_{22} & -g_{23}g_{12}\end{pmatrix}\\ &\quad +-\left(\frac{\overline{g}_{22}}{\overline{g}_{33}^2}\frac{\partial H}{\partial x}-\frac{\overline{g}_{12}}{\overline{g}_{33}^2}\frac{\partial H}{\partial y}\right)\frac{1}{g_{33}}\dot\pi\begin{pmatrix}-g_{13}g_{21} & g_{13}g_{11}\\ -g_{23}g_{21} & g_{23}g_{11}\end{pmatrix}\\ &= -\frac{\partial H}{\partial x}\dot\pi(P)-\frac{\partial H}{\partial y}\dot\pi(Q),\end{aligned}$$

donde

$$P = \frac{\overline{g}_{21}}{g_{33}|g_{33}|^2}\begin{pmatrix} g_{13}g_{21} & -g_{13}g_{11} \\ g_{23}g_{21} & -g_{23}g_{11}\end{pmatrix} + \frac{\overline{g}_{22}}{g_{33}|g_{33}|^2}\begin{pmatrix} g_{13}g_{22} & -g_{13}g_{12} \\ g_{23}g_{22} & -g_{23}g_{12}\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{g_{33}|g_{33}|^2}\begin{pmatrix} (|g_{21}|^2+|g_{22}|^2)g_{13} & -(g_{11}\overline{g}_{21}+g_{12}\overline{g}_{22})g_{13} \\ (|g_{21}|^2+|g_{22}|^2)g_{23} & -(g_{11}\overline{g}_{21}+g_{12}\overline{g}_{22})g_{23}\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{g_{33}|g_{33}|^2}\begin{pmatrix} (1+|g_{23}|^2)g_{13} & -g_{13}^2\overline{g}_{23} \\ (1+|g_{23}|^2)g_{23} & -g_{13}|g_{23}|^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(1-|x|^2) & -x^2\overline{y} \\ y(1-|x|^2) & -x|y|^2\end{pmatrix}.$$

En los dos últimos pasos hemos usado que $g \in \mathrm{SU}(2,1)$ y que $x = g_{13}/g_{33}$, $y = g_{23}/g_{33}$. De manera similar, tenemos

$$Q = -\frac{\overline{g}_{11}}{g_{33}|g_{33}|^2}\begin{pmatrix} g_{13}g_{21} & -g_{13}g_{11} \\ g_{23}g_{21} & -g_{23}g_{11}\end{pmatrix} + \frac{\overline{g}_{12}}{g_{33}|g_{33}|^2}\begin{pmatrix} g_{13}g_{22} & -g_{13}g_{12} \\ g_{23}g_{22} & -g_{23}g_{12}\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{g_{33}|g_{33}|^2}\begin{pmatrix} -(g_{21}\overline{g}_{11}+g_{22}\overline{g}_{12})g_{13} & (|g_{11}|^2+|g_{12}|^2)g_{13} \\ -(g_{21}\overline{g}_{11}+g_{22}\overline{g}_{12})g_{23} & (|g_{11}|^2+|g_{12}|^2)g_{23}\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{g_{33}|g_{33}|^2}\begin{pmatrix} -|g_{13}|^2\overline{g}_{13} & (1+|g_{13}|^2)g_{13} \\ -g_{23}^2\overline{g}_{13} & (1+|g_{13}|^2)g_{23}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -|x|^2\overline{y} & x(1-|y|^2) \\ -\overline{x}y^2 & y(1-|x|^2)\end{pmatrix}.$$

Esto completa la prueba de la proposición. □

Proposición 3.15 *Para* $H \in C^\infty(B) \otimes \mathrm{End}(V_\pi)$,

$$\begin{aligned} -4\,E_1(H) =& (1-|x|^2-|y|^2)\Bigg[(H_{x_1x_1}+H_{x_2x_2})\,\dot{\pi}\begin{pmatrix} -(1-|x|^2) & 3x\overline{y} \\ 0 & 2(1-|x|^2)\end{pmatrix} \\ &+ (H_{y_1y_1}+H_{y_2y_2})\,\dot{\pi}\begin{pmatrix} 2(1-|y|^2) & 0 \\ 3\overline{x}y & -(1-|y|^2)\end{pmatrix} \\ &+ (H_{y_1x_1}+H_{y_2x_2})\,\dot{\pi}\begin{pmatrix} -2x\overline{y}+\overline{x}y & -3(1-|y|^2) \\ -3(1-|x|^2) & -2\overline{x}y+x\overline{y}\end{pmatrix} \\ &+ i\,(H_{x_2y_1}-H_{x_1y_2})\,\dot{\pi}\begin{pmatrix} 2x\overline{y}+\overline{x}y & -3\,(1-|y|^2) \\ 3\,(1-|x|^2) & -2\overline{x}y-x\overline{y}\end{pmatrix}\Bigg]. \end{aligned}$$

Demostración. Tenemos

$$\begin{aligned} E_1(H) =& -(X_{-\beta}X_\beta(H))\;\Phi_\pi\,\dot{\pi}(\tilde{H}_1)\Phi_\pi^{-1} - (X_{-\gamma}X_\gamma(H))\;\Phi_\pi\,\dot{\pi}(\tilde{H}_2)\Phi_\pi^{-1} \\ &+ 3\,(X_{-\beta}X_\gamma(H))\;\Phi_\pi\dot{\pi}(X_{-\alpha})\Phi_\pi^{-1} + 3\,(X_{-\gamma}X_\beta(H))\;\Phi_\pi\dot{\pi}(X_\alpha)\Phi_\pi^{-1}. \end{aligned} \tag{7.3}$$

En (7.1) y (7.2) hemos calculado $(X_{-\beta}X_\beta)(H)(g)$ y $(X_{-\gamma}X_\gamma)(H)(g)$. Ahora debemos calcular

$$4X_{-\beta}X_\gamma(H) = (Y_5Y_3 + Y_6Y_4)(H) + i\,(Y_6Y_3 - Y_5Y_4)(H). \tag{7.4}$$

Para $U, V \in \mathfrak{g}$ y $g \in G$ tenemos

$$UV(H)(g) = \left(\frac{d}{ds}\frac{d}{dt}H\left(p(g\exp sU\ \exp tV)\right)\right)_{s=t=0}.$$

Si $|s|, |t|$ son pequeños podemos escribir

$$p(g\exp sY_5\ \exp tY_3) = (x(s,t)\,,\, y(s,t)\,,\, 1).$$

También si hacemos $x_1 = \mathrm{Re}(x)$, $x_2 = \mathrm{Im}(x)$, $y_1 = \mathrm{Re}(y)$ y $y_2 = \mathrm{Im}(y)$, por la regla de la cadena

$$\begin{aligned} UV(H)(g) &= \sum_{i,j=1}^{2} H_{x_ix_j}\frac{\partial x_i}{\partial s}\frac{\partial x_j}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^{2} H_{y_iy_j}\frac{\partial x_i}{\partial s}\frac{\partial x_j}{\partial t} \\ &+ \sum_{i,j=1}^{2} H_{x_iy_j}\left(\frac{\partial x_i}{\partial s}\frac{\partial y_j}{\partial t} + \frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial y_j}{\partial s}\right) + \sum_{i=1}^{2} H_{x_i}\frac{\partial^2 x_i}{\partial t\partial s} + H_{y_i}\frac{\partial^2 y_i}{\partial t\partial s}. \end{aligned}$$

Para $U = Y_5$ y $V = Y_3$ tenemos

$$x(s,t) = \frac{g_{11}\tanh t + g_{12}\sinh s + g_{13}\cosh s}{g_{31}\tanh t + g_{32}\sinh s + g_{33}\cosh s}$$

y

$$y(s,t) = \frac{g_{21}\tanh t + g_{22}\sinh s + g_{23}\cosh s}{g_{31}\tanh t + g_{32}\sinh s + g_{33}\cosh s}.$$

Además en $s = t = 0$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = -\frac{\overline{g}_{21}}{g_{33}^2}\,, \qquad \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\overline{g}_{22}}{g_{33}^2}\,, \qquad \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\overline{g}_{11}}{g_{33}^2}\,, \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{\overline{g}_{12}}{g_{33}^2}.$$

Para $U = Y_6$ y $V = Y_4$ tenemos

$$x(s,t) = \frac{i\,g_{11}\tanh t + i\,g_{12}\sinh s + g_{13}\cosh s}{i\,g_{31}\tanh t + i\,g_{32}\sinh s + g_{33}\cosh s}$$

y

$$y(s,t) = \frac{i\,g_{21}\tanh t + i\,g_{22}\sinh s + g_{23}\cosh s}{i\,g_{31}\tanh t + i\,g_{32}\sinh s + g_{33}\cosh s}.$$

Por otra parte en $s = t = 0$ se verifiaca

$$\frac{\partial x}{\partial s} = -\frac{i\,\overline{g}_{21}}{g_{33}^2}\,, \qquad \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{i\,\overline{g}_{22}}{g_{33}^2}\,, \qquad \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{i\,\overline{g}_{11}}{g_{33}^2}\,, \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{i\,\overline{g}_{12}}{g_{33}^2}.$$

Para $U = Y_6$ y $V = Y_3$ tenemos

$$x(s,t) = \frac{g_{11}\tanh t + i\,g_{12}\sinh s + g_{13}\cosh s}{g_{31}\tanh t + i\,g_{32}\sinh s + g_{33}\cosh s}$$

y

$$y(s,t) = \frac{g_{21}\tanh t + i\,g_{22}\sinh s + g_{23}\cosh s}{g_{31}\tanh t + i\,g_{32}\sinh s + g_{33}\cosh s}.$$

Además en $s=t=0$

$$\frac{\partial x}{\partial s}=-\frac{i\,\overline{g}_{21}}{g_{33}^2}\,,\qquad \frac{\partial x}{\partial t}=\frac{\overline{g}_{22}}{g_{33}^2}\,,\qquad \frac{\partial y}{\partial s}=\frac{i\,\overline{g}_{11}}{g_{33}^2}\,,\qquad \frac{\partial y}{\partial t}=-\frac{\overline{g}_{12}}{g_{33}^2}.$$

Para $U=Y_5$ y $V=Y_4$ tenemos

$$x(s,t)=\frac{i\,g_{11}\tanh t+g_{12}\sinh s+g_{13}\cosh s}{i\,g_{31}\tanh t+g_{32}+\sinh s+g_{33}\cosh s}$$

y

$$y(s,t)=\frac{i\,g_{21}\tanh t+g_{22}\sinh s+g_{23}\cosh s}{i\,g_{31}\tanh t+g_{32}\sinh s+g_{33}\cosh s}.$$

Por otra parte en $s=t=0$ tenemos

$$\frac{\partial x}{\partial s}=-\frac{\overline{g}_{21}}{g_{33}^2}\,,\qquad \frac{\partial x}{\partial t}=\frac{i\,\overline{g}_{22}}{g_{33}^2}\,,\qquad \frac{\partial y}{\partial s}=\frac{\overline{g}_{11}}{g_{33}^2}\,,\qquad \frac{\partial y}{\partial t}=-\frac{i\,\overline{g}_{12}}{g_{33}^2}.$$

Ahora si sumamos los cuatro términos en (7.4) y observamos que tomar las partes real o imaginaria de una función a valores complejos conmuta con tomar una derivada, podemos obtener

$$\begin{aligned}4X_{-\beta}X_{\gamma}(H)(g)=&-\frac{g_{21}\overline{g}_{22}}{|g_{33}|^4}\left(H_{x_1x_1}+H_{x_2x_2}\right)-\frac{g_{11}\overline{g}_{12}}{|g_{33}|^4}\left(H_{y_1y_1}+H_{y_2y_2}\right)\\ &+\frac{(g_{11}\overline{g}_{22}+g_{21}\overline{g}_{12})}{|g_{33}|^4}\left(H_{x_1y_1}+H_{x_2y_2}\right)-\frac{i\,(g_{11}\overline{g}_{22}-g_{21}\overline{g}_{12})}{|g_{33}|^4}\left(H_{x_2y_1}-H_{x_1y_2}\right).\end{aligned}$$

Para calcular $X_{-\gamma}X_{\beta}$ observamos que

$$\begin{aligned}4X_{-\gamma}X_{\beta}(H)&=\left(Y_3Y_5+Y_4Y_6\right)(H)+i\,(Y_4Y_5-Y_3Y_6)(H)\\ &=\left(Y_5Y_3+Y_6Y_4\right)(H)-i\,(Y_6Y_3-Y_5Y_4)(H),\end{aligned}$$

pues si $X\in\mathfrak{k}$ entonces $X(H)=0$. Por lo tanto es fácil verificar que

$$\begin{aligned}4X_{-\gamma}X_{\beta}(H)(g)=&-\frac{g_{22}\overline{g}_{21}}{|g_{33}|^4}\left(H_{x_1x_1}+H_{x_2x_2}\right)-\frac{g_{12}\overline{g}_{11}}{|g_{33}|^4}\left(H_{y_1y_1}+H_{y_2y_2}\right)\\ &+\frac{(g_{22}\overline{g}_{11}+g_{12}\overline{g}_{21})}{|g_{33}|^4}\left(H_{x_1y_1}+H_{x_2y_2}\right)-\frac{i\,(g_{22}\overline{g}_{11}-g_{12}\overline{g}_{21})}{|g_{33}|^4}\left(H_{x_2y_1}-H_{x_1y_2}\right).\end{aligned}$$

Por otro lado tenemos

$$\begin{aligned}\Phi_\pi(g)\dot{\pi}(\tilde{H}_1)\Phi_\pi(g)^{-1}&=\dot{\pi}\left(A(g)\tilde{H}_1A(g)^{-1}\right)\\ &=\frac{1}{\overline{g}_{33}}\dot{\pi}\begin{pmatrix}2g_{11}g_{22}+g_{12}g_{21} & -3g_{11}g_{12}\\ 3g_{21}g_{22} & -g_{11}g_{22}-2g_{12}g_{21}\end{pmatrix},\\[2ex] \Phi_\pi(g)\dot{\pi}(\tilde{H}_2)\Phi_\pi(g)^{-1}&=\frac{1}{\overline{g}_{33}}\dot{\pi}\begin{pmatrix}-g_{11}g_{22}-2g_{12}g_{21} & 3g_{11}g_{12}\\ -3g_{21}g_{22} & 2g_{11}g_{22}+g_{12}g_{21}\end{pmatrix},\\[2ex] \Phi_\pi(g)\dot{\pi}(X_{-\alpha})\Phi_\pi(g)^{-1}&=\frac{1}{\overline{g}_{33}}\dot{\pi}\begin{pmatrix}g_{12}g_{22} & -g_{12}^2\\ g_{22}^2 & -g_{12}g_{22}\end{pmatrix},\\[2ex] \Phi_\pi(g)\dot{\pi}(X_{\alpha})\Phi_\pi(g)^{-1}&=\frac{1}{\overline{g}_{33}}\dot{\pi}\begin{pmatrix}-g_{11}g_{21} & g_{11}^2\\ -g_{21}^2 & g_{11}g_{21}\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{7.5}$$

Ahora, por (7.3), la función que multiplica a $H_{x_1x_1} + H_{x_2x_2}$ es una matriz $\dot\pi(A)$ donde A está dada por:

$$\begin{aligned} A = &- \frac{|g_{21}|^2}{|g_{33}|^4 \overline{g}_{33}} \begin{pmatrix} 2g_{11}g_{22} + g_{12}g_{21} & -3g_{11}g_{12} \\ 3g_{21}g_{22} & -g_{11}g_{22} - 2g_{12}g_{21} \end{pmatrix} \\ &- \frac{|g_{22}|^2}{|g_{33}|^4 \overline{g}_{33}} \begin{pmatrix} -g_{11}g_{22} - 2g_{12}g_{21} & 3g_{11}g_{12} \\ -3g_{21}g_{22} & 2g_{11}g_{22} + g_{12}g_{21} \end{pmatrix} \\ &- \frac{3g_{21}\overline{g}_{22}}{|g_{33}|^4 \overline{g}_{33}} \begin{pmatrix} g_{12}g_{22} & -g_{12}^2 \\ g_{22}^2 & -g_{12}g_{22} \end{pmatrix} + \frac{3\overline{g}_{21}g_{22}}{|g_{33}|^4 \overline{g}_{33}} \begin{pmatrix} -g_{11}g_{21} & g_{11}^2 \\ -g_{21}^2 & g_{11}g_{21} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Luego el coeficiente A_{11} de A puede se puede escribir de la siguiente forma,

$$A_{11} = \frac{-\left(|g_{21}|^2 + |g_{22}|^2\right)}{|g_{33}|^4} = \frac{-\left(1 + |g_{23}|^2\right)}{|g_{33}|^4} = -(1-|x|^2)(1-|x|^2-|y|^2).$$

Similarmente,

$$A_{22} = \frac{2\left(|g_{21}|^2 + |g_{22}|^2\right)}{|g_{33}|^4} = \frac{2\left(1 + |g_{23}|^2\right)}{|g_{33}|^4} = 2(1-|x|^2)(1-|x|^2-|y|^2).$$

También tenemos $A_{21} = 0$ y

$$A_{12} = \frac{3}{|g_{33}|^4} \left(g_{11}\overline{g}_{21} + g_{12}\overline{g}_{22}\right) = \frac{3g_{13}\overline{g}_{23}}{|g_{33}|^4} = -3x\overline{y}(1+|x|^2+|y|^2).$$

Análogamente calculamos las funciones que multiplican a $H_{y_1y_1} + H_{y_2y_2}$, $H_{y_1x_1} + H_{y_2x_2}$, $H_{x_2y_1} - H_{x_1y_2}$ y completamos la prueba de la proposición. □

Proposición 3.16 *Para* $H \in C^\infty(B) \otimes \operatorname{End}(V_\pi)$

$$E_2(H) = \frac{\partial H}{\partial x}\left(\dot\pi\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \dot\pi\begin{pmatrix} 2x\overline{y} & 0 \\ 3(1-|x|^2) & -x\overline{y} \end{pmatrix} + \dot\pi\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \dot\pi\begin{pmatrix} 1-|x|^2 & -3x\overline{y} \\ 0 & -2(1-|x|^2) \end{pmatrix}\right)$$

$$+ \frac{\partial H}{\partial y}\left(\dot\pi\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \dot\pi\begin{pmatrix} -2(1-|y|^2) & 0 \\ -3y\overline{x} & 1-|y|^2 \end{pmatrix} + \dot\pi\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \dot\pi\begin{pmatrix} -y\overline{x} & 3(1-|y|^2) \\ 0 & 2y\overline{x} \end{pmatrix}\right).$$

Demostración. Observemos que

$$E_2(H) = -X_\beta(H) X_{-\beta}(\Phi_\pi)\, \dot\pi(\tilde H_1) \Phi_\pi^{-1} - X_\gamma(H) X_{-\gamma}(\Phi_\pi)\, \dot\pi(\tilde H_2)\Phi_\pi^{-1},$$

Para cualquier g tenemos, por el Lema 3.6

$$(X_\beta H)(g) = -\frac{\overline{g}_{21}}{g_{33}^2}\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\overline{g}_{11}}{g_{33}^2}\frac{\partial H}{\partial y}, \qquad (X_\gamma H)(g) = \frac{\overline{g}_{22}}{g_{33}^2}\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\overline{g}_{12}}{g_{33}^2}\frac{\partial H}{\partial y},$$

y por el Lema 7.1

$$(X_{-\beta}\Phi_\pi)(g)\Phi_\pi(g)^{-1} = \frac{1}{\overline{g}_{33}}\,\dot\pi\begin{pmatrix} -g_{13}g_{21} & g_{13}g_{11} \\ -g_{23}g_{21} & g_{23}g_{11} \end{pmatrix},$$

$$(X_{-\gamma}\Phi_\pi)(g)\Phi_\pi(g)^{-1} = \frac{1}{\overline{g}_{33}}\,\dot\pi\begin{pmatrix} g_{13}g_{22} & -g_{13}g_{12} \\ g_{23}g_{22} & -g_{23}g_{12} \end{pmatrix}.$$

En (7.5) calculamos $\Phi_\pi(g)\dot\pi(A)\Phi_\pi(g)^{-1}$, para $A=\tilde H_1,\tilde H_2, X_{-\alpha}$ y X_α. Por lo tanto $E_2(H)=4\big(\frac{\partial H}{\partial x}P+\frac{\partial H}{\partial y}Q\big)$ donde

$$\begin{aligned}
P=&-\frac{\overline{g}_{21}}{|g_{33}|^4}\,\dot\pi\begin{pmatrix} g_{13}g_{21} & -g_{13}g_{11}\\ g_{23}g_{21} & -g_{23}g_{11}\end{pmatrix}\dot\pi\begin{pmatrix} 2g_{11}g_{22}+g_{12}g_{21} & -3g_{11}g_{12}\\ 3g_{21}g_{22} & -g_{11}g_{22}-2g_{12}g_{21}\end{pmatrix}\\
&+\frac{\overline{g}_{22}}{|g_{33}|^4}\,\dot\pi\begin{pmatrix} -g_{13}g_{22} & g_{13}g_{12}\\ -g_{23}g_{22} & g_{23}g_{12}\end{pmatrix}\dot\pi\begin{pmatrix} -g_{11}g_{22}-2g_{12}g_{21} & 3g_{11}g_{12}\\ -3g_{21}g_{22} & 2g_{11}g_{22}+g_{12}g_{21}\end{pmatrix}\\
&-\frac{3\overline{g}_{22}}{|g_{33}|^4}\,\dot\pi\begin{pmatrix} g_{13}g_{21} & -g_{13}g_{11}\\ g_{23}g_{21} & -g_{23}g_{11}\end{pmatrix}\dot\pi\begin{pmatrix} g_{12}g_{22} & -g_{12}^2\\ g_{22}^2 & -g_{12}g_{22}\end{pmatrix}\\
&+\frac{3\overline{g}_{21}}{|g_{33}|^4}\,\dot\pi\begin{pmatrix} -g_{13}g_{22} & g_{13}g_{12}\\ -g_{23}g_{22} & g_{23}g_{12}\end{pmatrix}\dot\pi\begin{pmatrix} -g_{11}g_{21} & g_{11}^2\\ -g_{21}^2 & g_{11}g_{21}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Si combinamos el primer y tercer término y el segundo y cuarto término, y usamos el Lema 3.1 obtenemos

$$\begin{aligned}
P=&-\frac{1}{|g_{33}|^4}\,\dot\pi\begin{pmatrix} g_{13}g_{21} & -g_{13}g_{11}\\ g_{23}g_{21} & -g_{23}g_{11}\end{pmatrix}\\
&\quad\times\dot\pi\begin{pmatrix} 2g_{22}g_{13}\overline{g}_{23}+g_{12}(1+|g_{23}|^2) & -3g_{12}g_{13}\overline{g}_{23}\\ 3g_{22}(1+|g_{23}|^2) & -2g_{12}(1+|g_{23}|^2)-g_{22}g_{13}\overline{g}_{23}\end{pmatrix}\\
&+\frac{1}{|g_{33}|^4}\,\dot\pi\begin{pmatrix} -g_{13}g_{22} & g_{13}g_{12}\\ -g_{23}g_{22} & g_{23}g_{12}\end{pmatrix}\\
&\quad\times\dot\pi\begin{pmatrix} -2g_{21}g_{13}\overline{g}_{23}-g_{11}(1+|g_{23}|^2) & 3g_{11}g_{13}\overline{g}_{23}\\ -g_{21}(1+|g_{23}|^2) & 2g_{11}(1+|g_{23}|^2)+g_{21}g_{13}\overline{g}_{23}\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Luego usando (3.4) obtenemos

$$\begin{aligned}
P=&\frac{1}{|g_{33}|^2}\,\dot\pi\begin{pmatrix} g_{13}g_{21} & -g_{13}g_{11}\\ g_{23}g_{21} & -g_{23}g_{11}\end{pmatrix}\\
&\times\left(\dot\pi\begin{pmatrix} -2g_{22}x\overline{y} & 0\\ -3g_{22}(1-|x|^2) & g_{22}x\overline{y}\end{pmatrix}+\dot\pi\begin{pmatrix} -g_{12}(1-|x|^2) & 3g_{12}x\overline{y}\\ 0 & 2g_{12}(1-|x|^2)\end{pmatrix}\right)\\
&+\frac{1}{|g_{33}|^2}\,\dot\pi\begin{pmatrix} -g_{13}g_{22} & g_{13}g_{12}\\ -g_{23}g_{22} & g_{23}g_{12}\end{pmatrix}\\
&\times\left(\dot\pi\begin{pmatrix} -2g_{21}x\overline{y} & 0\\ -3g_{21}(1-|x|^2) & g_{21}x\overline{y}\end{pmatrix}+\dot\pi\begin{pmatrix} g_{11}(1-|x|^2) & 3g_{11}x\overline{y}\\ 0 & 2g_{11}(1-|x|^2)\end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

Ahora, usando el Lema 3.1 resulta que

$$\begin{aligned}
P=&\frac{1}{|g_{33}|^2}\,\dot\pi\begin{pmatrix} 0 & g_{13}\overline{g}_{33}\\ 0 & g_{23}\overline{g}_{33}\end{pmatrix}\dot\pi\begin{pmatrix} 2x\overline{y} & 0\\ 3(1-|x|^2) & -x\overline{y}\end{pmatrix}\\
&+\frac{1}{|g_{33}|^2}\,\dot\pi\begin{pmatrix} g_{13}\overline{g}_{33} & 0\\ g_{23}\overline{g}_{33} & 0\end{pmatrix}\dot\pi\begin{pmatrix} (1-|x|^2) & -3x\overline{y}\\ 0 & -2(1-|x|^2)\end{pmatrix}\\
=&\,\dot\pi\begin{pmatrix} 0 & x\\ 0 & y\end{pmatrix}\dot\pi\begin{pmatrix} 2x\overline{y} & 0\\ 3(1-|x|^2) & -x\overline{y}\end{pmatrix}+\dot\pi\begin{pmatrix} x & 0\\ y & 0\end{pmatrix}\dot\pi\begin{pmatrix} 1-|x|^2 & -3x\overline{y}\\ 0 & -2(1-|x|^2)\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Si procedemos de la misma forma con Q obtenemos

$$\dot\pi\begin{pmatrix}0\,x\\0\,y\end{pmatrix}\dot\pi\begin{pmatrix}-2(1-|y|^2) & 0\\ -3y\overline{x} & 1-|y|^2\end{pmatrix}+\dot\pi\begin{pmatrix}x\,0\\y\,0\end{pmatrix}\dot\pi\begin{pmatrix}-y\overline{x} & 3(1-|y|^2)\\ 0 & 2y\overline{x}\end{pmatrix}.$$

Esto completa la prueba de la proposición. □

7.1.2 Demostraciones de la Sección 3.3

En esta subsección daremos las demostraciones de los lemas enunciados en la Sección 3.3 del Capítulo 3. Comenzamos con el siguiente resultado inmediato.
Lema 3.19 *En* $(r,0)\in B$ *tenemos*

$$H_{x_1}(r,0)=\frac{d\tilde H}{dr}(r)\quad \text{y}\quad H_{x_1x_1}(r,0)=\frac{d^2\tilde H}{dr^2}(r).$$

Como preparación para los otros cálculos, dado $(x,y)\in B$, $x=x_1+ix_2$ y $y=y_1+iy_2$ necesitamos elegir un elemento K que lleve el punto (x,y) al meridiano $\{(r,0)\,:\,r>0\}$. Tomamos

$$A(x,y)=\frac{1}{s(x,y)}\begin{pmatrix}x & -\overline{y}\\ y & \overline{x}\end{pmatrix}\in \mathrm{SU}(2)\ \ \text{donde}\ \ s(x,y)=\sqrt{|x|^2+|y|^2}.$$

Luego $(x,y)=A(x,y)\,(s(x,y),0)$ y

$$H(x,y)=\pi(A(x,y))\tilde H(s(x,y))\pi(A(x,y)^{-1}).$$

Para simplificar utilizaremos la notación $(u_1,u_2,u_3,u_4)=(x_1,x_2,y_1,y_2)$. Como siempre, denotamos $[A,B]=AB-BA$.

Proposición 7.2. *En* $(r,0)\in B$ *tenemos*

$$\frac{\partial H}{\partial u_j}(r,0)=\Big[\dot\pi\Big(\frac{\partial A}{\partial u_j}\Big),\tilde H(r)\Big]+\delta_{1j}\frac{d\tilde H}{dr}.$$

y

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 H}{\partial u_i\partial u_j}(r,0)=&\frac{\partial^2(\pi\circ A)}{\partial u_i\partial u_j}\tilde H(r)+\tilde H(r)\frac{\partial^2(\pi\circ A^{-1})}{\partial u_i\partial u_j}+\delta_{1i}\delta_{1j}\frac{d^2\tilde H}{dr^2}\\ &+\frac1r\delta_{ij}(1-\delta_{1j})\frac{d\tilde H}{dr}+\delta_{1j}\Big[\dot\pi\Big(\frac{\partial A}{\partial u_i}\Big),\frac{d\tilde H}{dr}\Big]+\delta_{1i}\Big[\dot\pi\Big(\frac{\partial A}{\partial u_j}\Big),\frac{d\tilde H}{dr}\Big]\\ &-\dot\pi\Big(\frac{\partial A}{\partial u_j}\Big)\tilde H(r)\dot\pi\Big(\frac{\partial A}{\partial u_i}\Big)-\dot\pi\Big(\frac{\partial A}{\partial u_i}\Big)\tilde H(r)\dot\pi\Big(\frac{\partial A}{\partial u_j}\Big).\end{aligned}$$

Demostración. Notemos que

$$H(x,y)=\pi(A(x,y))\tilde H(s(x,y))\pi(A(x,y)^{-1}),$$

luego

$$\frac{\partial H}{\partial u_j}=\frac{\partial(\pi\circ A)}{\partial u_j}\,(\tilde H\circ s)\,(\pi\circ A^{-1})+(\pi\circ A)\,\frac{\partial(\tilde H\circ s)}{\partial u_j}\,(\pi\circ A^{-1})+(\pi\circ A)\,(\tilde H\circ s)\,\frac{\partial(\pi\circ A^{-1})}{\partial u_j}. \tag{7.6}$$

Además
$$\frac{\partial(\tilde H\circ s)}{\partial u_j}=\Big(\frac{d\tilde H}{dr}\circ s\Big)\frac{\partial s}{\partial u_j}.$$
También notamos que $A(r,0)=I$ y que en $(r,0)$ tenemos
$$\frac{\partial s}{\partial u_j}=\delta_{1j}\,,\qquad \frac{\partial(\pi\circ A)}{\partial u_j}=\dot\pi\Big(\frac{\partial A}{\partial u_j}\Big)\,,\qquad \frac{\partial(\pi\circ A^{-1})}{\partial u_j}=-\dot\pi\Big(\frac{\partial A}{\partial u_j}\Big).$$
Ahora reemplazando en (7.6) probamos la primera parte de la Proposición. Para calcular la derivada de segundo orden comenzamos observando que en$(r,0)$ tenemos
$$\frac{\partial^2(\tilde H\circ s)}{\partial u_i\partial u_j}=\frac{d^2\tilde H}{dr^2}\frac{\partial s}{\partial u_i}\frac{\partial s}{\partial u_j}+\frac{d\tilde H}{dr}\frac{\partial^2 s}{\partial u_i\partial u_j}=\delta_{1i}\delta_{1j}\frac{d^2\tilde H}{dr^2}+\frac{1}{r}\delta_{ij}(1-\delta_{1j})\frac{d\tilde H}{dr}.$$
Ahora derivando la expresión dada en (7.6) con respecto a u_i y evaluando en $(r,0)\in B$ resulta.
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 H}{\partial u_i\partial u_j}(r,0)=&\frac{\partial^2(\pi\circ A)}{\partial u_i\partial u_j}\,\tilde H(r)+\delta_{1i}\dot\pi\Big(\frac{\partial A}{\partial u_j}\Big)\frac{d\tilde H}{dr}-\dot\pi\Big(\frac{\partial A}{\partial u_j}\Big)\tilde H(r)\dot\pi\Big(\frac{\partial A}{\partial u_i}\Big)\\&+\delta_{1j}\dot\pi\Big(\frac{\partial A}{\partial u_i}\Big)\frac{d\tilde H}{dr}+\delta_{1i}\delta_{1j}\frac{d^2\tilde H}{dr^2}+\frac{1}{r}\delta_{ij}(1-\delta_{1j})\frac{d\tilde H}{dr}\\&-\delta_{1j}\frac{d\tilde H}{dr}\dot\pi\Big(\frac{\partial A}{\partial u_i}\Big)-\dot\pi\Big(\frac{\partial A}{\partial u_i}\Big)\tilde H(r)\dot\pi\Big(\frac{\partial A}{\partial u_j}\Big)\\&-\delta_{1i}\frac{d\tilde H}{dr}\dot\pi\Big(\frac{\partial A}{\partial u_j}\Big)+\tilde H(r)\frac{\partial^2(\pi\circ A^{-1})}{\partial u_i\partial u_j}.\end{aligned}$$
Ahora reordenando el lado derecho de la expresión anterior completamos la prueba. □

Proposición 7.3. *En $(r,0)\in B$ tenemos*
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2(\pi\circ A)}{\partial u_i\partial u_j}=&\dot\pi\Big(\frac{\partial^2 A}{\partial u_i\partial u_j}\Big)-\tfrac12\dot\pi\Big(\frac{\partial A}{\partial u_i}\frac{\partial A}{\partial u_j}\Big)-\tfrac12\dot\pi\Big(\frac{\partial A}{\partial u_j}\frac{\partial A}{\partial u_i}\Big)\\&+\tfrac12\dot\pi\Big(\frac{\partial A}{\partial u_j}\Big)\dot\pi\Big(\frac{\partial A}{\partial u_i}\Big)+\tfrac12\dot\pi\Big(\frac{\partial A}{\partial u_i}\Big)\dot\pi\Big(\frac{\partial A}{\partial u_j}\Big),\end{aligned}\tag{7.7}$$
y
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2(\pi\circ A^{-1})}{\partial u_i\partial u_j}=&-\dot\pi\Big(\frac{\partial^2 A}{\partial u_i\partial u_j}\Big)+\tfrac12\dot\pi\Big(\frac{\partial A}{\partial u_i}\frac{\partial A}{\partial u_j}\Big)+\tfrac12\dot\pi\Big(\frac{\partial A}{\partial u_j}\frac{\partial A}{\partial u_i}\Big)\\&+\tfrac12\dot\pi\Big(\frac{\partial A}{\partial u_j}\Big)\dot\pi\Big(\frac{\partial A}{\partial u_i}\Big)+\tfrac12\dot\pi\Big(\frac{\partial A}{\partial u_i}\Big)\dot\pi\Big(\frac{\partial A}{\partial u_j}\Big).\end{aligned}\tag{7.8}$$

Demostración. Para $|x|$ y $|y|$ suficientemente pequeños consideramos
$$X(x,y)=\log(A(x,y))=B(x,y)-\frac{B(x,y)^2}{2}+\frac{B(x,y)^3}{3}-\cdots\,,\tag{7.9}$$
donde $B(x,y)=A(x,y)-I$. Luego
$$\pi(A(x,y))=\pi(\exp\,X(x,y))=\exp\,\dot\pi(X(x,y))=\sum_{j\geq0}\frac{\dot\pi(X(x,y))^j}{j!}.$$

Ahora derivamos con respecto a u_j para obtener

$$\begin{aligned}\frac{\partial\,(\pi\circ A)}{\partial u_j} =&\dot\pi\Big(\frac{\partial X}{\partial u_j}\Big)+\tfrac{1}{2!}\dot\pi\Big(\frac{\partial X}{\partial u_j}\Big)\dot\pi(X)+\tfrac{1}{2!}\dot\pi(X)\dot\pi\Big(\frac{\partial X}{\partial u_j}\Big)\\ &+\tfrac{1}{3!}\dot\pi\Big(\frac{\partial X}{\partial u_j}\Big)\dot\pi(X)^2+\tfrac{1}{3}\dot\pi(X)\dot\pi\Big(\frac{\partial X}{\partial u_j}\Big)\dot\pi\Big(X\Big)\\ &+\tfrac{1}{3!}\dot\pi(X)^2\dot\pi\Big(\frac{\partial X}{\partial u_j}\Big)+\cdots.\end{aligned}\tag{7.10}$$

Como $X(r,0)=0$, si derivamos (7.10) y evaluamos en $(r,0)$ obtenemos

$$\frac{\partial^2\,(\pi\circ A)}{\partial u_i\,\partial u_j}=\dot\pi\Big(\frac{\partial^2 X}{\partial u_i\partial u_j}\Big)+\tfrac12\dot\pi\Big(\frac{\partial X}{\partial u_j}\Big)\,\dot\pi\Big(\frac{\partial X}{\partial u_i}\Big)+\tfrac12\dot\pi\Big(\frac{\partial X}{\partial u_i}\Big)\dot\pi\Big(\frac{\partial X}{\partial u_j}\Big).\tag{7.11}$$

Para calcular $\dfrac{\partial X}{\partial u_j}$ y $\dfrac{\partial^2 X}{\partial u_i\partial u_j}$ derivamos (7.9) y obtenemos

$$\frac{\partial X}{\partial u_j}=\frac{\partial B}{\partial u_j}-\tfrac12\Big(\frac{\partial B}{\partial u_j}\Big)B-\tfrac12 B\Big(\frac{\partial B}{\partial u_j}\Big)+\tfrac13\Big(\frac{\partial B}{\partial u_j}\Big)B^2+\tfrac13 B\Big(\frac{\partial B}{\partial u_j}\Big)B+\tfrac13 B^2\Big(\frac{\partial B}{\partial u_j}\Big)+\cdots.$$

Como $B(r,0)=0$ tenemos

$$\frac{\partial X}{\partial u_j}(r,0)=\frac{\partial B}{\partial u_j}(r,0)=\frac{\partial A}{\partial u_j}(r,0).$$

También tenemos en $(r,0)\in B$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u_i\partial u_j}=\frac{\partial^2 A}{\partial u_i\partial u_j}-\tfrac12\frac{\partial A}{\partial u_j}\frac{\partial A}{\partial u_i}-\tfrac12\frac{\partial A}{\partial u_i}\frac{\partial A}{\partial u_j}.$$

Reemplazando en (7.11) probamos la primera afirmación de la proposición. A continuación calculamos $\dfrac{\partial^2(\pi\circ A^{-1})}{\partial u_i\partial u_j}$. Observemos que

$$\frac{\partial(\pi\circ A^{-1})}{\partial u_j}=-(\pi\circ A^{-1})\,\frac{\partial(\pi\circ A)}{\partial u_j}\,(\pi\circ A^{-1}).$$

Por lo tanto en $(r,0)\in\mathbb{C}^2$ tenemos,

$$\frac{\partial^2(\pi\circ A^{-1})}{\partial u_i\partial u_j}=-\;\frac{\partial(\pi\circ A^{-1})}{\partial u_i}\,\frac{\partial(\pi\circ A)}{\partial u_j}-\frac{\partial^2(\pi\circ A)}{\partial u_i\partial u_j}-\frac{\partial(\pi\circ A)}{\partial u_j}\frac{\partial(\pi\circ A^{-1})}{\partial u_i}.$$

Luego la afirmación (7.8) se sigue de de (7.7) y

$$\frac{\partial(\pi\circ A)}{\partial u_j}=\dot\pi\Big(\frac{\partial A}{\partial u_j}\Big),\qquad \frac{\partial(\pi\circ A^{-1})}{\partial u_j}=-\dot\pi\Big(\frac{\partial A}{\partial u_j}\Big).$$

Esto completa la prueba de la proposición. □

Lema 3.20 *En* $(r,0)\in B$ *tenemos*

$$H_{y_1}(r,0)=-\frac1r\Big(\dot\pi(J)\tilde H(r)-\tilde H(r)\dot\pi(J)\Big)$$

y

$$H_{y_1y_1}(r,0)=\frac1r\frac{d\tilde H}{dr}+\frac{1}{r^2}\Big(\dot\pi(J)^2\,\tilde H(r)+\tilde H(r)\,\dot\pi(J)^2\Big)-\frac{2}{r^2}\dot\pi(J)\tilde H(r)\,\dot\pi(J),$$

donde $J=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right)$.

Demostración. Para calcular $\partial A/\partial u_3$ en $(r, y_1) \in B$ consideramos

$$A(x,y) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + y_1^2}} \begin{pmatrix} r & -y_1 \\ y_1 & r \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial A}{\partial u_3}(r,0) = -\frac{1}{r} J \quad and \quad \frac{\partial^2 A}{\partial u_3^2}(r,0) = -\frac{1}{r^2} I.$$

Por la Proposición 7.3 en $(r, 0) \in B$ tenemos

$$\frac{\partial^2(\pi \circ A)}{\partial u_3^2} = \frac{\partial^2(\pi \circ A^{-1})}{\partial u_3^2} = \frac{1}{r^2}\dot{\pi}(J)^2.$$

Ahora por la Proposición 7.2 obtenemos

$$\frac{\partial H}{\partial y_1}(r,0) = -\frac{1}{r}\Big(\dot{\pi}(J)\tilde{H}(r) - \tilde{H}(r)\dot{\pi}(J)\Big),$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y_1^2}(r,0) = \frac{1}{r^2}\dot{\pi}(J)^2\tilde{H}(r) + \frac{1}{r^2}\tilde{H}(r)\dot{\pi}(J)^2 + \frac{1}{r}\frac{d\tilde{H}}{dr} - \frac{2}{r^2}\dot{\pi}(J)\tilde{H}(r)\dot{\pi}(J).$$

Esto completa la demostración del lema. □

Lema 3.21 *En* $(r, 0) \in B$ *tenemos*

$$H_{y_2}(r,0) = \frac{i}{r}\left(\dot{\pi}(T)\tilde{H}(r) - \tilde{H}(r)\dot{\pi}(T)\right)$$

y

$$H_{y_2 y_2}(r,0) = \frac{1}{r}\frac{d\tilde{H}}{dr} - \frac{1}{r^2}\left(\dot{\pi}(T)^2\,\tilde{H}(r) + \tilde{H}(r)\,\dot{\pi}(T)^2\right) + \frac{2}{r^2}\dot{\pi}(T)\tilde{H}(r)\,\dot{\pi}(T),$$

donde $T = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Demostración. En este caso tomamos $A(x,y) = \frac{1}{\sqrt{r^2+y_2^2}} \begin{pmatrix} r & iy_2 \\ iy_2 & r \end{pmatrix}$. Por lo tanto

$$\frac{\partial A}{\partial u_4}(r,0) = \frac{i}{r} T \quad and \quad \frac{\partial^2 A}{\partial u_4^2}(r,0) = -\frac{1}{r^2} I.$$

Por la Proposición 7.3 en $(r, 0) \in B$ tenemos

$$\frac{\partial^2(\pi \circ A)}{\partial u_4^2} = \frac{\partial^2(\pi \circ A^{-1})}{\partial u_4^2} = -\frac{1}{r^2}\dot{\pi}(T)^2.$$

Ahora por la Proposición 7.2 obtenemos

$$\frac{\partial H}{\partial y_2}(r,0) = \frac{i}{r}\left(\dot{\pi}(T)\tilde{H}(r) - \tilde{H}(r)\dot{\pi}(T)\right),$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y_2^2}(r,0) = -\frac{1}{r^2}\dot{\pi}(T)^2\tilde{H}(r) - \frac{1}{r^2}\tilde{H}(r)\dot{\pi}(T)^2 + \frac{1}{r}\frac{d\tilde{H}}{dr} + \frac{2}{r^2}\dot{\pi}(T)\tilde{H}(r)\dot{\pi}(T).$$

Con esto el lema queda demostrado. □

Lema 3.22 *En $(r, 0) \in B$ tenemos*

$$H_{x_2}(r,0) = \frac{i}{r}\left(\dot\pi(H_\alpha)\tilde H(r) - \tilde H(r)\dot\pi(H_\alpha)\right)$$

y

$$\begin{aligned} H_{x_2x_2}(r,0) = {} & \frac{1}{r}\frac{d\tilde H}{dr} - \frac{1}{r^2}\left(\dot\pi(H_\alpha)^2\,\tilde H(r) + \tilde H(r)\,\dot\pi(H_\alpha)^2\right) \\ & + \frac{2}{r^2}\dot\pi(H_\alpha)\,\tilde H(r)\,\dot\pi(H_\alpha). \end{aligned}$$

Demostración. En este caso tenemos $x = r + ix_2$, $y = 0$, y

$$A(x,y) = \frac{1}{\sqrt{r^2+y^2}}\begin{pmatrix} r+ix & 0 \\ 0 & r-ix \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial A}{\partial u_2}(r,0) = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \frac{i}{r}H_\alpha \quad y \quad \frac{\partial^2 A}{\partial u_2^2}(r,0) = -\frac{1}{r^2}I.$$

Por la Proposición 7.3 en $(r, 0) \in B$ tenemos

$$\frac{\partial^2(\pi\circ A)}{\partial u_2^2} = \frac{\partial^2(\pi\circ A^{-1})}{\partial u_2^2} = -\frac{1}{r^2}\dot\pi(H_\alpha)^2.$$

Ahora por la Proposición 7.2 tenemos

$$\frac{\partial H}{\partial x_2}(r,0) = \frac{i}{r}\left(\dot\pi(H_\alpha)\tilde H(r) - \tilde H(r)\dot\pi(H_\alpha)\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H}{\partial x_2^2}(r,0) = {} & \frac{1}{r^2}\dot\pi(H_\alpha)^2\tilde H(r) + \frac{1}{r^2}\tilde H(r)\dot\pi(H_\alpha)^2 + \frac{1}{r}\frac{d\tilde H}{dr} \\ & - \frac{2}{r^2}\dot\pi(H_\alpha)\tilde H(r)\dot\pi(H_\alpha). \end{aligned}$$

Esto completa la demostración del lema. □

Lema 3.23 *En $(r, 0) \in B$ tenemos*

$$H_{x_1y_1}(r,0) = \frac{-1}{r}\left(\dot\pi(J)\frac{d\tilde H}{dr} - \frac{d\tilde H}{dr}\dot\pi(J)\right) + \frac{1}{r^2}\left(\dot\pi(J)\tilde H(r) - \tilde H(r)\dot\pi(J)\right),$$

$$H_{x_1y_2}(r,0) = \frac{i}{r}\left(\dot\pi(T)\frac{d\tilde H}{dr} - \frac{d\tilde H}{dr}\dot\pi(T)\right) - \frac{i}{r^2}\left(\dot\pi(T)\tilde H(r) - \tilde H(r)\dot\pi(T)\right).$$

Demostración. Se sigue de los lemas 3.20 y 3.21 derivando con respecto a r. □

Lema 3.24 *En $(r, 0) \in B$ tenemos*

$$\begin{aligned} H_{y_1x_2}(r,0) = {} & -\frac{i}{2r^2}\left(\dot\pi(H_\alpha)\,\dot\pi(J) + \dot\pi(J)\,\dot\pi(H_\alpha)\right)\tilde H(r) \\ & - \frac{i}{2r^2}\tilde H(r)\left(\dot\pi(H_\alpha)\,\dot\pi(J) + \dot\pi(J)\,\dot\pi(H_\alpha)\right) \\ & + \frac{i}{r^2}\left(\dot\pi(H_\alpha)\,\tilde H(r)\,\dot\pi(J) + \dot\pi(J)\,\tilde H(r)\,\dot\pi(H_\alpha)\right). \end{aligned}$$

Demostración. En este caso tenemos $x = r + ix_2$, $y = y_1$, y

$$A(x,y) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} r + ix & -y_1 \\ y_1 & r - ix \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial A}{\partial u_2}(r,0) = \frac{i}{r} H_\alpha, \qquad \frac{\partial A}{\partial u_3}(r,0) = -\frac{1}{r} J, \qquad \frac{\partial^2 A}{\partial u_3 \partial u_2}(r,0) = 0.$$

Por la Proposición 7.3 tenemos en $(r,0) \in B$

$$\frac{\partial^2(\pi \circ A)}{\partial u_3 \partial u_2} = \frac{\partial^2(\pi \circ A^{-1})}{\partial u_3 \partial u_2} = -\frac{i}{2r^2} \Big(\dot{\pi}(H_\alpha) \dot{\pi}(J) + \dot{\pi}(J) \dot{\pi}(H_\alpha) \Big).$$

Ahora el lema sigue de la proposición 7.2. □

Lema 3.25 *En $(r,0) \in B$ tenemos*

$$\begin{aligned} H_{y_2 x_2}(r,0) = & -\frac{1}{2r^2} \Big(\dot{\pi}(H_\alpha)\, \dot{\pi}(T) + \dot{\pi}(T)\, \dot{\pi}(H_\alpha) \Big) \tilde{H}(r) \\ & -\frac{1}{2r^2} \tilde{H}(r) \left(\dot{\pi}(H_\alpha)\, \dot{\pi}(T) + \dot{\pi}(T)\, \dot{\pi}(H_\alpha) \right) \\ & + \frac{1}{r^2} \left(\dot{\pi}(H_\alpha)\, \tilde{H}(r)\, \dot{\pi}(T) + \dot{\pi}(T)\, \tilde{H}(r)\, \dot{\pi}(H_\alpha) \right). \end{aligned}$$

Demostración. En este caso tenemos $x = r + ix_2$, $y = y_2$, y

$$A(x,y) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} r + ix & iy_2 \\ y_2 & r - ix \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial A}{\partial u_2}(r,0) = \frac{i}{r} H_\alpha, \qquad \frac{\partial A}{\partial u_4}(r,0) = \frac{i}{r} T, \qquad \frac{\partial^2 A}{\partial u_4 \partial u_2}(r,0) = 0.$$

Por la Proposición 7.3 tenemos en $(r,0) \in B$

$$\frac{\partial^2(\pi \circ A)}{\partial u_4 \partial u_2} = \frac{\partial^2(\pi \circ A^{-1})}{\partial u_4 \partial u_2} = -\frac{1}{2r^2} \left(\dot{\pi}(H_\alpha) \dot{\pi}(T) + \dot{\pi}(T) \dot{\pi}(H_\alpha) \right).$$

Ahora el lema sigue de la Proposición 7.2. □

REFERENCIAS

[Cam97] Roberto Camporesi. The spherical transform for homogeneous vector bundles over riemannian symmetric spaces. *Journal of Lie Theory*, 7:29–60, 1997.

[Coo75] A. Cooper. *The classifying ring of groups whose classifying ring iscommutative.* PhD thesis, MIT, 1975.

[DG04] A. J. Duran and F. A. Grünbaum. Orthogonal matrix polynomials satisfying second order differential equations. *International Math. Research Notices*, 2004(10):461–484, 2004.

[DG05] A. J. Duran and F. A. Grünbaum. A characterization for a class of weight matrices with orthogonal matrix polynomials satisfying second order differentialequations. *International Math. Research Notices*, 2005(23):1371–1390, 2005.

[DG06] M. Dominguez de la Iglesia and F. A. Grünbaum. Matrix valued orthogonal polynomials related to $\mathrm{SU}(n+1)$, their algebras of differential operators and the corresponding curves. En proceso para publicación, 2006.

[Dur97] A. Duran. Matrix inner product having a matrix symmetric second order differential operators. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 27(2):585–600, 1997.

[Fol95] Gerald B. Folland. *A course in Abstract Harmonic Analysis.* CRC Press , London, New York, 1995.

[GPT01] F. A. Grünbaum, I. Pacharoni, and J. A. Tirao. A matrix valued solution to bochner's problem. *J. Physics A: Math. Gen.*, 34:10647–10656, 2001.

[GPT02a] F. A. Grünbaum, I. Pacharoni, and J. A. Tirao. Matrix valued spherical functions associated to the complex projective plane. *J. Functional Analysis*, 188:350–441, 2002.

[GPT02b] F. A. Grünbaum, I. Pacharoni, and J. A. Tirao. Matrix valued spherical functions associated to the three dimensional hyperbolic space. *Internat. J. Math.*, 13:727–784, 2002.

[GPT03] F. A. Grünbaum, I. Pacharoni, and J. A. Tirao. Matrix valued orthogonal polynomials of the jacobi type. *Indag. Mathem.*, 14:353–366, 2003.

[GV88] R. Gangolli and V.S. Varadarajan. *Harmonic analysis of spherical functions on real reductive groups*, volume 101 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete.* Springer-Verlag, Berlin, New York, 1988.

[GV94] Esther Galina and Jorge Vargas. Eigenvalues and eigenspaces for the twisted dirac operator over $\mathrm{SU}(n, 1)$ and $\mathrm{Spin}(n, 1)$. *Transactions of the American Mathematical Society*, 345(1):97–113, 1994.

[Hel84] S. Helgason. *Groups and geometric analysis.* Academic Press, New York, 1984.

[Hum72] J. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory.* Springer Verlag, New York, 1972.

[Kno86] F. Knop. Der zentralisator einer lie algebra in einer einhüllenden algebra. *J. Reiner Angew. Math.*, 406:5–9, 1986.

[Koo75] Tom Koornwinder. A new proof of a payley-wiener type theorem for the jacobi transform. *Arkiv för matematik*, 13:145–159, 1975.

[Kre49] M. G. Krein. Infinite j-matrices and a matrix moment problem. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 69(2):125–128, 1949.

[Kre71] M. G. Krein. Derfundamental aspects of the representation theory of hermitian operators with deficiency index (m, m). *AMS Translations, series 2*, 97:75–143, 1971.

[Mia79] Roberto Miatello. On the plancherel measure for linear lie groups of rank one. *Manuscripta Mathematica*, 29(2-4):249–276, 1979.

[PR06] Inés Pacharoni and Pablo Román. A sequence of matrix valued orthogonal polinomials associated to spherical functions. Aceptado en Constructive Approximation., 2006.

[PT06] I. Pacharoni and J. Tirao. Matrix valued orthogonal polynomials arising from the complex projective space. To appear in Constr. Approxim., 2006.

[RT06] Pablo Román and Juan Tirao. Spherical functions, the complex hyperbolic plane and the hypergeometric operator. *Internat. Journal of Math.*, 28:0–0, 2006.

[Tir77] Juan Tirao. Spherical functions. *Revista de la Unión Matemática Argentina*, 28:75–98, 1977.

[Tir03] J. Tirao. The matrix-valued hypergeometric equation. *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, 100(14):8138–8141, 2003.

[War72] G. Warner. *Harmonic analysis on Semi-Simple Lie Groups I, II.* Springer-Verlag, Berlin, 1972.

INDICE