Tesis para obtener el grado de
Doctora en Matemática.
Título: Cuadrángulos generalizados, esquemas de Johnson y álgebras de Terwilliger.
FaMAF-CIEM, U.N.C.

Autora: Carolina Maldonado
Director: Fernando Levstein

Agradecimientos:

Al Conicet y a FaMAF-CIEM
por financiar y brindar lugar de trabajo para la tesis.
A Fernando Levstein,
a Cristina Turner,
a Tomás Godoy,
a Daniel Penazzi,
a Uriel.

Índice general

nada

1. Introducción

1.1. Breve reseña. El concepto de "esquema de asociación" es quizás uno de los más importantes dentro del área del Álgebra Combinatoria. Dicho concepto ha servido de marco para el desarrollo de la teoría de códigos y la teoría de diseños entre otras. Esta línea de estudio fue iniciada en 1973 por Delsarte [**De**] ; sin embargo ya se tenían nociones similares dentro de un marco algebraico.
Los esquemas de asociación son objetos combinatorios a los cuales se les asocian diversos tipos de álgebras (álgebras de Bose-Mesner, de Terwilliger, etc).
En algunos casos ciertas características combinatorias tienen su contrapartida algebraica y viceversa.

Uno de los casos más estudiados de esquemas son aquellos que satisfacen la condición de ser P y/o Q polinomiales. Esta condiciones están dadas sobre dos diferentes bases del álgebra de Bose-Mesner. La condición de que el esquema (o de que su álgebra de Bose-Mesner) sea P polinomial tiene una caracterización combinatoria bien definida, no asi la condición de que el esquema sea Q polinomial.
Uno de los resultados más importantes dentro del área es el Teorema de Leonard (1982) que establece que las familias de polinomios ortortogonales asociadas a esquemas P y Q coinciden con los polinomios de Askey-Wilson.

En 1992 Terwilliger introdujo el álgebra subconstituyente de un esquema [**Te 1**] (o T-álgebra). Dicha álgebra es semisimple, contiene a la Bose-Mesner y de alguna manera se puede pensar que está ligada a "particiones o proyecciones del esquema" a los que llama subconstituyentes. También se introdujo el concepto de módulos de dicha álgebra considerando su acción sobre un espacio de tipo $\mathbb{C}^n$
Se han realizado varios trabajos estudiando dicha álgebra y sus módulos para casos particulares o para ciertas familias de esquemas.
Citamos entre ellos a [**B O**] [**B M**] , [**Ca**], [**Go**] , [**L P**] y [**T Y**].

1.2. Algunos problemas abiertos. Los problemas abiertos que existen dentro de la Combinatoria Algebraica y que involucran a esquemas de asociación son de variada índole. Citamos algunos:

- caracterización combinatoria de esquemas Q-polinomiales
- clasificación de esquemas con n vértices ($n > 24$),
- caracterización de esquemas a partir de álgebras de intersección,
- caracterización a partir de espectros de matrices de adyacencia,
- descomposición de Tálgebra para ciertas familias de esquemas
- caracterización de esquemas imprimitivos que admiten el mismo cociente

2. Resumen

En el trabajo de tesis analizamos la T-álgebra y sus módulos irreducibles para dos familias distintas de esquemas de asociación.
La primera es una familia de esquemas cuya estructura proviene de ciertas geometrías parciales, llamadas Cuadrángulos generalizados .
Estos esquemas son de tipo fuertemente regular (P-polinomiales de diámetro 2). Los principales resultados para esta familia son:

- La descomposición de T en suma directa de ideales simples, dada en el Teorema 2.21
- La descomposición de $\mathbb{C}^\nu$, (espacio en en cual T actúa) en suma directa T-módulos irreducibles y el cálculo de dimensiones y clases de isomorfismos de

dichos módulos, dados en las proposiciones 2.26, 2.27 , 2.29 y en corolario 2.30.

Para el primer resultado, en la proposición 2.15 y en el corolario 2.16 damos las matrices que generan T (como combinaciones lineales de ellas).
Luego en la sección 2 describimos en los lemas 2.17, 2.18, 2.19 y 2.20 la forma de encontrar los ideales simples de dicha álgebra de manera explícita. Finalmente, en el Teorema 2.21 damos la descomposición .

Para el segundo resultado, la descomposición explícita en ideales simples de la T-álgebra, nos permite identificar los T-módulos irreducibles que definimos en 2.25 y 2.28.
En la proposiciones 2.26, 2.27 y 2.29 calculamos las dimensiones de dichos módulos y en corolario 2.30 vemos que la suma directa de ellos descompone $\mathbb{C}^{\nu}$.

En la sección 3 obtenemos la dimensión de la T-álgebra de dos formas distintas. Por un lado; según nuestro trabajo; a partir de su descomposición en ideales simples y por otro lado mediante los resultados del trabajo [**T Y**] que determina la dimensión de T-álgebras de esquemas fuertemente regulares a partir de los espectros de ciertas matrices asociadas (que en esta tesis podemos calcular explícitamente).

El segundo ejemplo desarrollado en la tesis es una familia de esquemas de asociación parametrizada por $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con la hipótesis de $3k \leq n$.
Los resultados para esta familia son análogos a la anterior:

- La descomposición de T en suma directa de ideales simples, dada en el Teorema 3.31.
- La descomposición de $\mathbb{C}^{\binom{n}{k}}$, (espacio en en cual T actúa) en suma directa T-módulos irreducibles y el cálculo de dimensiones y clases de isomorfismos de dichos módulos, dado en la Proposición 3.35 y Teorema 3.36.

Para el cálculo de su T-álgebra, en la sección 1.2 describimos en detalle la primera matriz de adyacencia de un esquema $J(n, k)$. Las características de A_1 nos llevan a definir un álgebra $\mathcal{M}$. En 2.1 damos su definición y en 2.2 probamos que efectivamente es un álgebra.

Luego en la sección 3.24 probamos que el álgebra de Terwilliger de un $J(n, k)$ es en efecto $\mathcal{M}$.
La inclusión $T \subseteq \mathcal{M}$ es fácil de probar. Por el contrario la prueba de $T \supseteq \mathcal{M}$ es complicada. De hecho, en el comentario de la sección 3.3 desarrollamos un ejemplo que podría hacer pensar que la igualdad $T = \mathcal{M}$ no es cierta.

En la sección 3.1 desarrollamos una técnica que luego será de vital importancia para probar $T \supseteq \mathcal{M}$. A modo de ejemplo, describimos su uso el comentario de la sección 3.3. Finalmente en el Teorema 3.22 y en el corolario 3.23 probamos $T \supseteq \mathcal{M}$.

La sección 4 está dedicada a describir los ideales simples de T y a dar una descomposición de dicha álgebra en suma directa de tales ideales. Damos su definición en 3.27 y en el Teorema 3.31 la descomposición (parametrizada por $0 \leq r \leq \frac{k}{2}$ y $0 \leq s \leq k$).

Dicha descomposición nos permite establecer una correspondencia entre ideales y ciertos T-módulos que llamamos isotípicos.
En 3.34 definimos los T-sumódulos irreducibles y en la Proposición 3.35 y Teorema 3.36 damos una descomposición (también parametrizada) de $\mathbb{C}^{\binom{n}{k}}$ en submódulos irreducibles de T.
Como corolario ontenemos una igualdad combinatoria de $\binom{n}{k}$ que damos en 3.37.
Un corolario inesperado de la determinación de la T-álgebra (dado en 3.32), es que para $n \geq 3k$, las T-álgebras son todas isomorfas no importa el n que tome.

En el capítulo 4 estudiamos los hipercubos. Con los cálculos realizados en para los $J(n,k)$ podemos especificar y especializar los resultados del trabajo realizado en [**Go**] ya que observamos una estructura similar entre las T-álgebras de los esquemas de Johnson y de los Hipercubos.

CAPíTULO 1

Definiciones

1. Esquemas de asociación

Dado un conjunto finito X y relaciones $R_i \subseteq X \times X$ $(i = 0, 1...d)$, decimos que $\Gamma = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$ *es un esquema de asociación conmutativo con diámetro* d si las siguientes condiciones se satisfacen:

1. $R_0 = \{(x, x)/x \in X\}$
2. $X \times X = R_0 \cup R_1 \cup ... \cup R_d$ y $R_i \cap R_j = \emptyset$ si $i \neq j$
3. $R_i^t = R_{i\prime}$ para algún $i\prime \in \{0, 1...d\}$ donde $R_i^t = \{(y, x)|(x, y) \in R_i\}$
4. para $i, j, k \in \{0, 1...d\}$ la cantidad de $z \in X$ tal que $(x, z) \in R_i;\ (y, z) \in R_j$ es constante y sólo depende del k tal $(x, y) \in R_k$. Se denota dicha constante con p_{ij}^k
5. $p_{ij}^k = p_{ji}^k$

Al conjunto X se lo denomina vértices y a los $R_i \subseteq X \times X$ relaciones del esquema. El esquema se dice simétrico si $R_i^t = R_i$. Los ejemplos de esquemas a estudiar son de este tipo, por la tanto, de ahora en más llamaremos esquema de asociación (o simplemente esquemas) a un esquema de asociación conmutativo,simétrico con d clases

1.1. Álgebra de Bose Mesner.

Definición 1.1. *El álgebra de Bose-Mesner de un esquema de asociación* $\Gamma = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$ *es el álgebra de combinaciones lineales de matrices de adyacencia.*

$$M = \langle I, A_1, A_2, ...A_d\rangle$$

donde A_i $i = 0, 1, ...d$ *es la matriz indexada por* $x \in X$ *definida por:*

$$(A_i)_{xy} = \begin{cases} 1 & si\ (x, y) \in R_i \\ 0 & si\ (x, y) \notin R_i \end{cases} .$$

Las matrices $\{A_i\}$ son simétricas, conmutan dos a dos y por lo tanto existe una matriz ortogonal que las diagonaliza simultáneamente.
Es conocido el hecho de que

$$\mathbb{C}^{|X|} = V_0 \oplus V_1 \oplus \dots V_d$$

donde los V_i son autoespacios comunes para las A_j. (ver [**B I**])
Sea $E_i, i = 0, 1, 2 \dots d$ la proyección ortogonal

$$E_i : \mathbb{C}^{|X|} \to V_i$$

expresada en forma matricial con respecto a la base canónica $\{e_i\}$ $i = 1...d$.
Entonces,

$$E_0 = \frac{1}{|X|} J \ (J \text{ la matriz de todos 1,s}) \tag{1}$$

$$E_0 + E_1 + \cdots + E_d = I \tag{2}$$

$$E_i E_j = \delta_{ij} E_i \tag{3}$$

Los E_i's son llamados *idempotentes primitivos* del esquema Γ.

Por otro lado se observa que M es cerrada bajo el producto de Hadamard o producto punto a punto (denotado por "$\circ$"). Denotando M' al álgebra con este nuevo producto se tiene que $A_0, A_1, ...A_d$ son los idempotentes primitivos de M'. Satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$A_0 = I \tag{4}$$

$$A_0 + A_1 + \cdots + A_d = J \tag{5}$$

$$A_i \circ A_j = \delta_{ij} A_i \tag{6}$$

Si $p_i(j)$ es el autovalor de A_i en V_j entonces

$$A_i = \sum_{j=0}^{d} p_i(j) E_j.$$

A su vez si los $\{E_j\}$ se expresan en la base $\{A_i\}$ del siguiente modo

$$E_i = \tfrac{1}{|X|} \sum_{j=0}^{d} q_i(j) A_i,$$

tomando las matrices

$$P_{ji} = p_i(j)$$
$$Q_{ji} = q_i(j)$$

se tiene que P y Q son matrices de orden $d+1$; llamadas $1ra$ y $2da$ automatrices del esquema; que cumplen

$$PQ = |X|I$$

Considerando

$$M = (\{A_i\}, \cdot)\,,\ M' = (\{A_i\}, \circ)$$

tenemos las siguientes definiciones

Definición 1.2. *Un esquema se dice,*

P-polinomial: si para cada matriz de adyacencia A_i existe un polinomio p_i de grado i tal que, con respecto a la suma y multiplicación usual de matrices

$$A_i = P_i(A_1)$$

Q-polinomial: si para cada idempotente primitivo E_i existe un polinomio q_i de grado i tal que, con respecto a la suma usual y multiplicación de Hadamard (multiplicación punto a punto)

$$E_i = Q_i(E_1)$$

Como se observó en la introducción, los esquemas P y Q- polinomiales son muy estudiados en el área de Combinatoria Algebraica.

1.2. Álgebra de Bose Mesner Dual.

Definición 1.3. *El i-ésimo idempotente primitivo dual con respecto al vértice x denotado por $E_i^* = E_i^*(x)$ es la matriz diagonal definida por:*

$$(E_i^*)_{yy} = \begin{cases} 1 & si\ (x,y) \in R_i \\ 0 & si\ (x,y) \notin R_i \end{cases}$$

Los $\{E_i^*\}$ satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$E_0^* + E_1^* + \dots E_d^* = I \tag{7}$$
$$E_i^{*t} = E_i^* \tag{8}$$
$$E_i^* E_j^* = \delta_{ij} E_i^* \tag{9}$$

Observamos que los $\{E_i^*\}$ forman una base para una subálgebra conmutativa $M^*(x) = M^*$ de $Mat(C^d)$.

Definición 1.4. *El álgebra de Bose-Mesner dual de un esquema de asociación es el álgebra generada por los idempotentes primitivos duales.*

$$M^* = \langle E_0^*, E_1^* \dots E_d^* \rangle$$

1.3. Álgebra de Terwilliger.

Definición 1.5. *El álgebra subsconstituyente o álgebra de Terwilliger de un esquema de asociación con respecto al vértice x es álgebra de combinaciones lineales de matrices de M y M^*.*

Denotamos esta álgebra por $T(x) = T$

$$T \subseteq End(\mathbb{C}^X)$$

es un álgebra semisimple no conmutativa.

1.4. T-módulos irreducibles.

Definición 1.6. *Dado un esquema de asociación $\Gamma = (X, \{R_i\}_{0\le i\le d})$ y T su álgebra de Terwilliger asociada, decimos que*

$$W \subseteq \mathbb{C}^X$$

es un T-módulo (o T-submódulo) si

$$BW \subseteq W \ \forall\ B \in T.$$

Sea W, un T-módulo. Entonces W se dice irreducible si es no nulo y si dado

$$V \subseteq W$$

T-módulo entonces

$$V = 0 \ o \ V = W.$$

Dado W, un T-módulo usando (7), (8), (9) tenemos que

$$W = \sum_i E_i^* W$$

donde $E_i^* = E_i^*(x)$ son los idempotentes duales asociados a un esquema. Definimos los siguientes parámetros asociados a un T-módulo.(definidos en [**Te 1**])

Definición 1.7.

$$e_W = min\ \{i \ / \ 0 \le i \le d, E_i^* W \neq 0\} \tag{10}$$
$$d_W = \#\ \{i \ / \ 0 \le i \le d, E_i^* W \neq 0\} - 1 \tag{11}$$

2. Esquemas a estudiar: Cuadrángulos generalizados, esquemas de Johnson, Hipercubos

En esta sección describimos los ejemplos a desarrollar.

2.1. Cuadrángulos generalizados.

DEFINICIÓN 1.8. *Dados $2 < r, k$, un cuadrángulo generalizado $CG(k-1, r-1)$ es un sistema de líneas y puntos con una relación de incidencia que satisface los siguientes axiomas.*

Axiomas

1. *dos líneas se intersectan en a lo sumo 1 punto ,*
2. *por dos puntos cualesquiera pasa a lo sumo una línea ,*
3. *por cada punto pasan exactamente r líneas ,*
4. *cada línea contiene exactamente k puntos ,*
5. *si un punto p no está contenido en una línea l, existe exactamente 1 línea que pasa por p e intersecta a l*

Si dos puntos están contenidos en una línea en común decimos que son *colineares y que forman un lado* y lo denotamos $x \sim y$.
El esquema de asociación de un cuadrángulo generalizado (denotado por Γ_{CG}) es aquel que tiene como vértices X los puntos del cuadrángulo y cuyas relaciones son las siguientes:

$$\begin{aligned} R_0 &= \{(x,x) \ / \ x \in X\} \\ R_1 &= \{(x,y) \ / \ x \sim y\} \text{ (denotamos con el término “vecinos” los pares } (x,y) \in R_1 \text{)} \\ R_2 &= \{(x,y) \ / \ x \nsim y\} \text{ (denotamos con el término “no vecinos” los pares } (x,y) \in R_2\text{)} \end{aligned}$$

Es sabido por [**B**], que Γ_{CG} es un esquema de diámetro 2 P-polinomial con lo siguientes parámetros:

$$|X| = \nu = k\left(1 + (k-1)(r-1)\right), \tag{12}$$
$$p_{11}^0 = \kappa = r(k-1), \tag{13}$$
$$p_{11}^1 = \lambda = (k-2), \tag{14}$$
$$p_{11}^2 = \mu = r \tag{15}$$
$$p_{12}^1 = \kappa - \lambda - 1 = (r-1)(k-1) \tag{16}$$
$$p_{12}^2 = \kappa - \mu = r(k-2) \tag{17}$$

lo que nos dice que su primera matriz de adyacencia $A = A_1$ satisface:

$$AJ = \kappa J \tag{18}$$
$$A^2 + (\mu - \lambda)A + (\mu - \kappa)I = \mu J \tag{19}$$

2.2. Esquemas de Johnson.

DEFINICIÓN 1.9. *Sea V un conjunto de cardinalidad n y k un entero positivo ($2k \leq n$).*
Tomamos X el conjunto formado por todos los subconjuntos de V de cardinalidad k.

$$|X| = \tbinom{n}{k}.$$

Para $i = 0, 1, \ldots, n$ se definen en $X \times X$ las relaciones:

$$R_i = \{(x,y) \ / \ |x \cap y| = k - i\}$$

es decir dos subconjuntos de cardinalidad k están i-relacionados si difieren en i elementos. Es sabido que

$$J(n,k) = (X, \{R_i\}_{0\leq i\leq k})$$

es un esquema de asociación conmutativo simétrico con k clases.
Se denomina a $J(n,k)$ esquema de Johnson.

2.3. Hipercubos.

DEFINICIÓN 1.10. *Sea X el conjunto formado por las n-uplas de elementos en $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$.*

$$|X| = 2^n$$

La distancia de Hamming para dos puntos

$$x = (x_1, \ldots,\ x_n),\ y = (y_1, \ldots,\ y_n)\ \in X$$

se define

$$\partial(x,y) = \#\{i \mid x_i \neq y_i,\ 1 \leq i \leq n\}$$

Entonces para $i = 0, 1, \ldots, n$ se definen en $X \times X$ las relaciones:

$$R_i = \{(x,y)\ /\ \partial(x,y) = i\}.$$

Se tiene que $H(n,2) = (X, \{R_i\}_{0\leq i\leq n})$ es un esquema de asociación conmutativo, simétrico con n clases. Se denomina a $H(n,2)$ hipercubo.

2.4. Observaciones.

2.4.1. Observación 1: Los 3 ejemplos a analizar son de tipo P-polinomial.
(para cuadrángulos generalizados ver [**B**] , para $J(n,k)$ y $H(n,2)$ ver [**B I**])
En consecuencia

$$T(x) = T = \langle A, E_0^*, E_1^*, \ldots E_d^*\rangle$$

esto dice que el análisis de la primera matriz de adyacencia $A = A_1$ juega un papel muy importante en el estudio de T.

Fijado un vértice x_0 tomamos

$$\begin{aligned}\Omega_0 &= \{x_0\}\\ \Omega_i &= \{y \in X \mid (x_0, y) \in R_i\} \text{ (llamada } i\text{-órbita del esquema con respecto a } x_0)\end{aligned}$$

Para analizar A , miramos dicha matriz indexada por sus “bloques” $\Omega_i \times \Omega_j$.

2.4.2. Observación 2: En los ejemplos a desarrollar calculamos el álgebra $T = T(x_0)$ donde x_0 es el vértice elegido $\Omega_0 = \{x_0\}$.
Con respecto a este vértice los idempotentes primitivos $E_i^* = E_i^*(x_0)$ tienen la siguiente expresión en bloques:

$$E_i^* = \begin{cases} Id_{\Omega_i\times\Omega_i} & \text{en el bloque } \Omega_i \times \Omega_i \\ 0 & \text{en los restantes bloques}\end{cases}. \tag{20}$$

Esto nos dice por ejemplo que

$$E_i^* A_1 E_j^* = (A_1)_{\Omega_i\times\Omega_j}.$$

Cuando calculamos $T(x_0)$, la acción a izquierda y a derecha de los idempotentes primitivos en el álgebra de adyacencia, de algún modo “secciona”el álgebra en bloques (recordemos que T proviene de agregar a los generadores del algebra de adyacencia los idempotentes primitivos E_i^*).
Es por eso que al estudiar T analizamos los bloques del álgebra de adyacencia (más precisamente los bloques de A_1 ya que es P-polinomial).

2.4.3. Observación 3: Los esquemas $J(n,k)$, $H(n,2)$ son esquemas para los cuales existe una acción transitiva de un grupo finito G en el conjunto de vértices X ,

$$G \times X \longrightarrow X,$$

tal que dados

$$x, y \in X, \ \exists\, \sigma \in G$$
$$\text{que cumple } \sigma(x) = y,$$
$$(u,v) \in R_i \iff (\sigma(u), \sigma(v)) \in R_i$$

Si esto ocurre entonces

$$T(x) = T(y) \ \forall\ x, y \in X$$

y luego calculamos $T(x_0)$ que por lo visto en la observación anterior tiene una expresión " buena "(el i-ésimo idempotente primitivo E_i^* tiene una expresión muy conveniente dada por (20)).

Para el caso de los cuadrángulos generalizados, para cada $y \in X$ es posible encontrar un reordenamiento de vértices de $\Omega_1(y)$ tal que A_1 satisfaga propiedades convenientes. Esto permite tener

$$T(x) \simeq T(y) \ \forall\ x, y \in X$$

El reordenamiento asociado a cada vértice está explicado en el Capítulo 2.

2.4.4. Observación 4: Para esquemas de diámetro $d = 2$ decimos que el esquema es "no conexo" cuando

$$\begin{aligned} p_{11}^1 &= p_{11}^0 - 1 \text{ esto implica que todo vértice en } \Omega_1 \text{ no tiene vecinos en } \Omega_2 \\ p_{12}^2 &= p_{11}^0 \text{ esto implica que todo vértice en } \Omega_2 \text{ no tiene vecinos en } \Omega_1 \end{aligned}$$

Para los cuadrángulos generalizados observamos que ninguna de estas opciones es posible ya que por la definición de los parametros p_{1j}^i dada en (13), ... , (17)

$$\begin{aligned} p_{11}^1 &= p_{11}^0 - 1 \iff (k-1) = r(k-1) \\ p_{12}^2 &= p_{11}^0 \iff (k-2) = (k-1) \end{aligned}$$

CAPíTULO 2

T-álgebra de los cuadrángulos generalizados

En este capítulo analizamos en detalle el primero de los ejemplos propuestos. Definimos la familia de esquemas y su procedencia. Damos una descripción de su T-álgebra asociada y la descomponemos en ideales simples. Analizamos la acción de T en el espacio $\mathbb{C}^\nu$ (ν es la cantidad de vértices del esquema).
Por último descomponemos dicho espacio en T submódulos irreducibles.

1. Análisis de T "en bloques"

Para trabajar con A miramos sus bloques indexados por $\Omega_i \times \Omega_j$.
De este modo A tiene la forma:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \overbrace{\quad}^{\Omega_0} & \overbrace{\quad}^{\Omega_1} & \overbrace{\quad}^{\Omega_2} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} 0 & J_{01} & 0 \\ J_{10} & P & Q \\ 0 & Q^t & S \end{array}\right) \end{array} .$$

Los parámetros p^i_{1j} descriptos en (13) , ... , (17) describen la cantidad fija de $1s$ que aparecen en cada fila y columna de los bloques de A. (ver [**B**]) Asi, tenemos que:

- J_{01} es un vector fila $1's$
- $J_{10} = J^t_{01}$
- P es un bloque de tamaño $|\Omega_1| \times |\Omega_1|$ con $(k-2)$ $1's$ en cada fila y columna ,
- Q es un bloque de tamaño $|\Omega_1| \times |\Omega_2|$ con $(r-1)(k-1)$ $1's$ en cada fila y r $1's$ en cada columna y
- S tiene tamaño $|\Omega_2| \times |\Omega_2|$ con $r(k-2)$ $1's$ en cada fila y columna.

El álgebra de Terwilliger está generada por

$$\begin{pmatrix} 0 & J_{01} & 0 \\ J_{10} & P & Q \\ 0 & Q^t & S \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{22} \end{pmatrix}$$

En lo que sigue buscamos descomponer T en suma directa de ideales simples.
Describiremos ahora los productos entre las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q^t & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & J_{01} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ J_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Considerando un bloque $\Omega_i \times \Omega_j$ describiremos aquellos productos cuyo resultado es nulo entodos los bloques salvo en el bloque mencionado.

Por ejemplo si tenemos en cuenta el bloque $\Omega_1 \times \Omega_1$ analizaremos los productos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ J_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & J_{01} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q^t & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{12} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ J_{21} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por comodidad en lugar de escribirlos en forma matricial simplemente los denotaremos como los productos

$$P^n, J_{10}J_{01}, Q^tQ, J_{12}J_{21}.$$

Además cuando se deduzca del contexto denotaremos a J_{11} (la matriz de 1s de tamaño $\Omega_1 \times \Omega_1$) con J y lo mismo para I_{11}.
Analicemos entonces los distintos bloques:

1.1. Bloque $\Omega_1 \times \Omega_1$.

El primer paso es dar una expresión para los productos $P^n, QQ^t, J_{10}J_{01}$ y $J_{12}J_{21}$.

LEMA 2.1. *Existe un orden de los vértices de Ω_1 en el cual el $P-$bloque satisface*

$$P^2 = (k-3)P + (k-2)I_{11}.$$

Prueba:
El bloque P tiene tamaño $r(k-1) \times r(k-1)$ y tiene $(k-2)$ 1's en cada fila y columna. Está indexado por los vertices en $\Omega_1(x_0)$.
Tiene un 1 en el lugar ij si y solo si los vecinos comunes x_i, x_j de x_0 son vecinos en el esquema Γ.
De este modo si los vértices del grafo son vértices de la geometría, podemos nombrarlos del siguiente modo:

$$\Omega_0 = \{x_0\} \text{ y}$$

$$l_1,\ l_2 \ ...l_r$$

las r líneas que pasan a través del punto x_0.
Llamamos

$$x_{1,1}, x_{1,2}, ...x_{1,k-1}$$

a los $(k-1)$ puntos que caen en la línea l_1 (ademas de x_0),

$$x_{21}, x_{2,2}, ...x_{2,k-1}$$

a los puntos que caen en la línea l_1 y asi seguimos con los puntos de las restantes líneas.
Todos los puntos que caen en la misma línea son puntos colineares.
Entonces dos cualesquiera de ellos forman un lado en el esquema asociado al cuadrángulo. De manera que si ordenamos los vértices del $P-bloque$ (es decir de Ω_1) con el orden de las líneas, es decir

$$\overbrace{x_{1,1}, x_{1,2}, ...x_{1,k-1}}^{l_1};\quad \overbrace{x_{2,1}, x_{2,2}, ...x_{2,k-1}}^{l_2};\quad \overset{\cdots}{\cdots}\quad ;\overbrace{x_{r,1}, x_{r,2}, ...x_{r,k-1}}^{l_r}$$

tendrá la forma

$$P = \begin{pmatrix} \boxed{\text{J-I}} & \boxed{0} & \boxed{\cdots} & \boxed{\cdots} & \boxed{\cdots} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{\text{J-I}} & \boxed{\cdots} & \boxed{\cdots} & \boxed{\cdots} & \boxed{0} \\ \boxed{\cdots} & \boxed{\cdots} & \boxed{\cdots} & \boxed{\cdots} & \boxed{\cdots} & \boxed{\cdots} \\ \boxed{\cdots} & \boxed{\cdots} & \boxed{\cdots} & \boxed{\cdots} & \boxed{\cdots} & \boxed{\cdots} \\ \boxed{0} & \boxed{\cdots} & \boxed{\cdots} & \boxed{\cdots} & \boxed{\text{J-I}} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{\cdots} & \boxed{\cdots} & \boxed{\cdots} & \boxed{0} & \boxed{\text{J-I}} \end{pmatrix}$$

y no es difícil comprobar que

$$P^2 = (k-3)P + (k-2)I_{11}.$$

■

Corolario 2.2. *Las matrices P, I y J son independientes.*
P^2 depende de P e I.

Prueba:
P, I y J son independientes, pues si no fueran la única relación posible es

$$P = J - I$$

esto implica que

$$p_{11}^1 = p_{11}^0 - 1$$

lo que dice que el esquema no es conexo (ver observación en 2.4.3). Ya que dijimos que esto no es posible para esta familia de ejemplos , tenemos la primera afirmación. La segunda sale del lema anterior.

■

Lema 2.3. *Usando el orden de vértices en Ω_1 dado en el lema 2.1, el $Q-bloque$ satisface*

$$QQ^t = (r-1)(k-2)I_{11} - (r-1)P + (r-1)J_{11}.$$

Prueba:
Considerando el bloque $\Omega_1 \times \Omega_1$ de la ecuación (19) tenemos

$$J_{11} + P^2 + QQ^t = r(k-2)I_{11} + (k-2-r)P + rJ_{11},$$

reemplazando P^2 por el resultado del lema anterior tenemos la expresión para QQ^t.

■

El siguiente lema que no necesita demostración contiene las ecuaciones que faltan para describir los productos del $P-bloque$.

Lema 2.4.

$$\begin{aligned} J_{10}J_{01} &= |\Omega_1|J_{11} \\ &= r(k-1)J_{11} \\ PJ &= (k-2)J. \end{aligned}$$

Proposición 2.5. *Los productos $P^n, QQ^t, J_{10}J_{01}$ y PJ pueden ser expresados como combinación lineal de*

$$P, I, J.$$

Prueba:
Se tiene directamente de los lemas 2.1, 2.3 y 2.4 y del corolario 2.2.

■

1.2. Bloque $\Omega_1 \times \Omega_2$.

Ahora damos una expresión para los productos

$$PQ,\ QS,\ J_{11}Q,\ QJ_{22},\ J_{12}S.$$

LEMA 2.6. *Usando el orden de vértices de Ω_1 dado en el lema 2.1 se cumple la siguiente ecuación :*

$$PQ = J_{12} - Q.$$

Prueba:

El $Q - bloque$ tiene tamaño $r(k-1) \times (r-1)(k-1)^2$.
Las ecuaciones (15) y (16), $p^2_{11} = r$ y $p^1_{12} = (r-1)(k-1)$, dicen que el $Q - bloque$ tiene $(r-1)(k-1)$ 1's en cada fila y r 1's en cada columna.
Por hipótesis sus filas estan indexadas por los vértices de las líneas $l_1, l_2, ...l_r$ (con el mismo orden que P).
Sus columnas están indexadas por $\Omega_2(x_0)$ (los vértices que NO son vecinos de x_0).
Cada vértice de $\Omega_2(x_0)$ tiene exactamente un vecino en la línea l_i (axiom 4). Entonces los r $1s$ de cada columna de Q están distribuidos uno por cada línea l_j $(j = 1, \ldots r)$.
Con estos datos analicemos la entrada (x_{ij}, y) de PQ donde y es un vértice de $\Omega_2(x_0)$ y x_{ij} es el vértice j perteneciente a la línea i.
Tenemos la siguiente cuenta:

$$PQ_{(x_{ij},y)} = \sum_{l_m} \sum_{\substack{n \\ x_{mn} \in l_m}} P_{(x_{ij},x_{mn})} Q_{(x_{mn},y)}$$

ya que P es nulo en vértices que pertenecen a distintas líneas, la ecuación nos queda:

$$\begin{aligned} &= \sum_{\substack{n \\ x_{in} \in l_i}} P_{(x_{ij},x_{in})} Q_{(x_{in},y)} \\ &= P_{(x_{ij},x_{ip})} \text{ para algún } p = 1, ..., r-1 \end{aligned}$$

ya que cada vértice de $\Omega_2(x_0)$ es vecino de uno y solo un vértice de de la línea l_i y entonces se tiene que

$$Q_{(x_{in},y)} = \begin{cases} 1 \text{ para algún n=1, \ldots ,k-1} \\ 0 \text{ c.c.} \end{cases}.$$

Ahora bien por la estructura de la matriz P sabemos que dados (x_{ij}, x_{ip}) en la misma línea i

$$P_{(x_{ij},x_{ip})} = \begin{cases} 1 \ j \neq p \\ 0 \text{ c.c.} \end{cases}$$

con lo cual concluimos que

$$PQ_{(x_{ij},y)} = P_{(x_{ij},x_{ip})} = \begin{cases} 1 \ j \neq p \\ 0 \text{ c.c.} \end{cases}.$$

Como dijimos que la matriz satisface

$$Q_{(x_{ij},y)} = \begin{cases} 1 \ j = p \\ 0 \text{ c.c.} \end{cases}.$$

Entonces tenemos la conclusión

$$PQ = J_{12} - Q.$$

■

Siguiendo con la descripción de los productos de $\Omega_1 \times \Omega_2$ tenemos el siguiente

LEMA 2.7. *El $Q-$ bloque y el $S-$ bloque satisfacen:*

$$\begin{aligned} QS &= (r-1)J_{12} + (k-1-r)Q \\ J_{11}Q &= rJ_{12}, \\ QJ_{22} &= (r-1)(k-1)J_{12} \\ J_{12}S &= r(k-2)J_{12}. \end{aligned}$$

Prueba:
El bloque $\Omega_1 \times \Omega_2$ de la identidad (19) nos da la primera ecuación.
Para las dos siguientes usamos que la matriz Q tiene $(r-1)(k-1)$ $1's$ en cada fila y r $1's$ en cada columna y para la última que la matriz S tiene $r(k-2)$ $1's$ en cada fila y columna.

■

PROPOSICIÓN 2.8. *Los productos PQ, QS, $J_{11}Q$, QJ_{22}, $J_{12}S$ pueden ser expresados como combinación lineal de Q y J_{12}*

Prueba:
Sigue directamente de los lemas 2.6 y 2.7

1.3. Bloque $\Omega_2 \times \Omega_2$.

Resta dar una expresión para

$$S^n, Q^tQ, J_{22}S, J_{20}J_{02}, J_{21}J_{12}.$$

LEMA 2.9. *Las matrices Q y S satisfacen:*

$$Q^tQ = -S^2 + r(k-2)I_{22} + (k-2-r)S + rJ_{22} \tag{21}$$

$$SJ_{22} = r(k-2)J_{22}. \tag{22}$$

Prueba:
El bloque $\Omega_2 \times \Omega_2$ de la identidad (19) nos da la primera ecuación.
La segunda se deduce del hecho de que S tiene $r(k-2)$ $1's$ en cada fila y columna.

■

PROPOSICIÓN 2.10.

$$\begin{aligned} S^3 &= [(k-1-r)+(k-2-r)]\,S^2 + [r(k-2)-(k-1-r)(k-2-r)]\,S \\ &- [(k-1-r)+r(k-2)]\,I + [r(r-1)(k-2)]\,J. \end{aligned}$$

Equivalentemente denotando:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= r+1-k \\ \lambda_2 &= k-2 \\ \lambda_3 &= r, \end{aligned}$$

la matriz S satisface la ecuación

$$(S+\lambda_1 I)(S-\lambda_2 I)(S+\lambda_3 I) = r(r-1)J. \tag{23}$$

Prueba:
Multiplicando la ecuación (21) por S tenemos

$$Q^tQS = -S^3 + r(k-2)S + (k-2-r)S^2 + r^2(k-2)J_{22}$$

reemplazando QS por la expresión dada en el lema 2.7

$$Q^t\left[(k-1-r)Q + (r-1)J\right] = -S^3 + r(k-2)S + (k-2-r)S^2 + r^2(k-2)J_{22},$$

$$S^3 = -(k-1-r)Q^tQ - r(r-1)J + r(k-2)S + (k-2-r)S^2 + r^2(k-2)J_{22}.$$

Reemplazando Q^tQ por (21), se obtiene la primera ecuación, que es equivalente a

$$\begin{aligned} & S^3 - [(k-1-r)+(k-2-r)]\,S^2 - [r(k-2)-(k-1-r)(k-2-r)]\,S \\ + \quad & [(k-1-r)+r(k-2)]\,I = [r(r-1)(k-2)]\,J. \end{aligned}$$

Reagrupando el primer miembro se obtiene la segunda ecuación.

■

En esta etapa aún no podemos decidir si S^2, S I y J son o no independientes. En lo que sigue mostraremos que S^2 depende de S I y J si y solo si los parámetros del cudrángulo satisfacen $(r-1)=(k-1)^2$.
Con este resultado, completamos la expresión para S^n

LEMA 2.11. *Tomando*

$$\begin{aligned} \lambda_0 \quad & = r(k-2), \\ \lambda_i \quad & \quad i=1,2,3 \textit{ como en el lema anterior}, \end{aligned}$$

el $S-$*bloque satisface la ecuación*

$$(S-\lambda_0 I)\,(S+\lambda_1 I)\,(S-\lambda_2 I)\,(S+\lambda_3 I)=0.$$

Prueba:
El $S-$*bloque* tiene tamaño $(r-1)(k-1)^2 \times (r-1)(k-1)^2$.
El parámetro $p^2_{12} = r(k-2)$ nos dice que S , tiene $r(k-2)$ 1's en cada fila y en cada columna.
Por lo tanto tenemos que

$$SJ = r(k-2)J$$

De este modo si multiplicamos (23) por $(S-r(k-2)I)$ se obtiene la afirmación del lema.

■

PROPOSICIÓN 2.12. *S tiene a $(-\lambda_3 = -r)$ como autovalor si y solo si los parámetros k y r satisfacen:*

$$r-1 \neq (k-1)^2.$$

Prueba:
Primero probaremos que la condición es suficiente .
Supongamos que $-r$ es un autovalor de S, entonces existe un vector v tal que

$$Sv + rv = (S+\lambda_3 I)v = 0.$$

Definimos:

$$\begin{aligned} A &= (S+\lambda_3 I) \\ B &= (S-\lambda_0 I)\,(S+\lambda_1 I)\,(S-\lambda_2 I) \end{aligned}$$

Deduciremos la prueba del cálculo de la traza de B.
Las matrices A y B están indexadas por los vértices de Ω_2 . Son operadores lineales

$$A, B : \mathbb{C}^{|\Omega_2|} \to \mathbb{C}^{|\Omega_2|}$$

y conmutan entre sí. Entonces existe una base de $\mathbb{C}^{|\Omega_2|}$ en la cual diagonalizan simultánemamente, y es posible escribir

$$\mathbb{C}^{|\Omega_2|} = \mathbb{C}^{(r-1)(k-1)^2} = \oplus V_\lambda$$

como suma directa de autoespacios comunes de las matrices A y B.
Sea V_α el autoespacio asociado al autovalor α de la matriz A.
Por hipótesis sabemos que existe $v \in \mathbb{C}^{|\Omega_2|}$ tal que $Av=0$, es decir que mirando los autovalores respecto de la matriz A común V_0 es no nulo.

(dicho autoespacio correspondería al autovalor $(-r-\lambda_0)(-r+\lambda_1)(-r-\lambda_2)$ de B)
Del Corolario 3 tenemos que $AB = 0$ y entonces para $\alpha \neq 0$

$$B|_{V_\alpha} = 0 \quad \text{(ya que } A|_{V_\alpha} \text{ es invertible)}$$

Entonces la matriz B es nula en todos los autoespacios excepto (¿posiblemente?) en V_0.
En V_0 se cumple que

$$\begin{aligned} Av &= 0v\ \forall v \in V_0 \text{ lo que implica} \\ Sv &= -rv\ \forall v \in V_0 \\ Bv &= \left[(S-\lambda_0 I)(S+\lambda_1 I)(S-\lambda_2 I)\right] v \\ &= \left[(-r-\lambda_0)(-r+\lambda_1)(-r-\lambda_2)\right] v. \end{aligned}$$

Reemplazando por las definiciones dadas para λ_i, tenemos

$$c = (-r-\lambda_0)(-r+\lambda_1)(-r-\lambda_2) = r(k-1)^2(2-r-k)$$

($c \neq 0$ pues $r > 1, k > 1$).
Con estos datos calculemos la traza de B de dos modos distintos.
Por un lado tenemos

$$tr(B) = c \dim V_0,$$

por otro lado , desarrollando B

$$B = (S-\lambda_0 I)(S+\lambda_1 I)(S-\lambda_2 I) \tag{24}$$

y reemplazando S^3 por la expresión dada en el corolario 2.10 tenemos

$$B = r(1-k)S^2 + r(k-1)(2k-r-3)S + r(r+1-k)(k-2)(k-1)I + r(r-1)(k-2)J$$

entonces, considerando que

$$\begin{aligned} diag\ S^2 &= (r(k-2), r(k-2), \ldots, r(k-2)) \\ diag\ S &= (0, 0, \ldots, 0) \\ diag\ I &= diag J = (1, 1, \ldots, 1) \end{aligned}$$

tenemos

$$diag B = r(k-2)\left[(r-1)-(k-1)^2\right] \text{ y entonces} \tag{25}$$

$$tr(B) = \left[(r-1)(k-1)^2\right] r(k-2)\left[(r-1)-(k-1)^2\right] \tag{26}$$

De este modo:

$$c\ dim V_0 = r(k-1)^2(2-r-k) = \left[(r-1)(k-1)^2\right] r(k-2)\left[(r-1)-(k-1)^2\right]$$

Entonces si $-r$ es autovalor de S,

$$\begin{aligned} dim V_0 &\neq 0 \text{ entonces} \\ (r-1)-(k-1)^2 &\neq 0 \end{aligned}$$

Ahora probemos la condición necesaria.
Supongamos que $-r$ no está en el espectro S.
Tomando como recién las matrices A y B concluimos que

$$B = 0$$

y por un lado su traza es nula.
Por otra parte la ecuación 26 nos dice que

$$0 = tr(B) = \left[(r-1)(k-1)^2\right] r(k-2)\left[(r-1)-(k-1)^2\right]$$

con lo cual concluimos que

$$r - 1 = (k-1)^2$$

■

Corolario 2.13. *Las matrices S, I, J son independientes. Si $r-1=(k-1)^2$ entonces S^2 depende de dichas matrices.*

Prueba:
La unica relación de dependencia posible entre S, I y J es

$$S = J - I.$$

Esto implica que

$$p_{12}^2 = p_{11}^0 = r(k-1)$$

lo cual nos dice que el esquema no es conexo. Ya que ésto no es posible en el caso de los cuadrángulos generalizados, concluimos que no existe dependencia lineal entre dichas matrices.
Usando la proposición tenemos que si $r-1=(k-1)^2$ entonces la matriz B es nula.
Desarrollando la expresión (24) para B tenemos

$$\begin{aligned}
B &= S^3 + [(r+1-k)-(r+1)(k-2)]\,S^2 \\
&+ \left[r(k-2)^2-(r+1-k)(r+1)(k-2)\right]S + \left[r(r+1-k)(k-2)^2\right]I \\
&= 0 \\
&\quad \text{lo cual nos da otra expresión para } S^3 \\
S^3 &= [(r+1)(k-2)-(r+1-k)]\,S^2 + \left[(r+1-k)(r+1)(k-2)-r(k-2)^2\right]S - \left[r(r+1-k)(k-2)^2\right]I \\
&\quad \text{igualándola con la expresión para } S^3 \text{ dada en el corolario 2.10 y eliminado } S^3\text{, tenemos} \\
S^2 &= (2k-3-r)S + [(r+1-k)(k-2)]\,I + \left[\tfrac{(r-1)(k-2)}{(k-1)}\right]I
\end{aligned}$$

■

Proposición 2.14. *Si los parámetros k, r del cuadrángulo generalizado satisfacen $r-1=(k-1)^2$ los productos*

$$S^n, Q^tQ,\ J_{22}S$$

pueden ser expresados combinaciones lineales de S, I y J_{22}. De lo contrario dichos productos se expresan como combinaciones lineales de S^2, S, I y J_{22}

Prueba:
Se deduce directamente del lema 2.7 y del corolario 2.13.

■

1.4. Conclusiones.

Con las relaciones entre bloques dadas en resultados previos tenemos la siguiente:

Proposición 2.15.

- *el bloque $\Omega_1 \times \Omega_1$ de cualquier matriz de la T-álgebra se escribe como combinación lineal de las matrices P, I, J_{11}*
- *el bloque $\Omega_1 \times \Omega_2$ de cualquier matriz de la $T-$álgebra se escribe como combinación lineal de las matrices Q, J_{12}*
- *si $r-1=(k-1)^2$ el bloque $\Omega_2 \times \Omega_2$ de cualquier matriz de la $T-$álgebra se escribe como combinación lineal de las matrices S, I, J_{22}, de lo contrario S^2, S, I, J_{22} generan ese bloque.*

Prueba:
El bloque $\Omega_1 \times \Omega_1$ contiene los productos de matrices

$$\begin{array}{ccc}
(\Omega_1 \times \Omega_1) & \text{y} & (\Omega_1 \times \Omega_1) \\
(\Omega_1 \times \Omega_2) & \text{y} & (\Omega_2 \times \Omega_1)
\end{array}$$

El bloque $\Omega_1 \times \Omega_2$ contiene los productos entre

$$\begin{array}{ccc} (\Omega_1 \times \Omega_1) & \text{y} & (\Omega_1 \times \Omega_2) \\ (\Omega_1 \times \Omega_2) & \text{y} & (\Omega_2 \times \Omega_2) \end{array}$$

El bloque $\Omega_2 \times \Omega_2$ contiene los productos entre

$$\begin{array}{ccc} (\Omega_2 \times \Omega_1) & \text{y} & (\Omega_1 \times \Omega_2) \\ (\Omega_2 \times \Omega_2) & \text{y} & (\Omega_2 \times \Omega_2) \end{array}$$

■

Identificando bloques con matrices, como por ejemplo:

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ Q & \longrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ S & \longrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S \end{pmatrix} \text{ etc...} \end{array}$$

de las conclusiones deducimos el siguiente:

COROLARIO 2.16. *Si los parámetros de $CG(k-1, r-1)$ satisfacen $r-1 \neq (k-1)^2$ entonces*

$$T = \sum_{i,k=0}^{2} a_{J_{ik}} J_{ik} + \sum_{i,k=1}^{2} a_{I_{ik}} I_{ik} + a_P P + a_Q Q + a_S S + a_{S^2} S^2$$

donde los $a's \in \mathbb{C}$, de lo contrario

$$T = \sum_{i,k=0}^{2} a_{J_{ik}} J_{ik} + \sum_{i,k=1}^{2} a_{I_{ik}} I_{ik} + a_P P + a_Q Q + a_S S$$

2. Ideales simples de T

En esta sección descomponemos T en suma directa de ideales simples. Nos guiaremos por la expresión del corolario 2.16.
El primer ideal fácil de encontrar es aquel formado por los bloques J_{ik} (recordar que por simplicidad identificamos matrices con bloques)

Como siempre denotamos por

$$J_{ij} = \text{la matriz de } 1's \text{ de tamaño } \Omega_i \times \Omega_j$$

Definimos las siguientes matrices:

$$\begin{array}{llllll} M_{00} = 1 & M_{01} = \frac{1}{\sqrt{r(k-1)}} J_{01} & M_{02} = \frac{1}{(k-1)\sqrt{(r-1)}} J_{02} \\ M_{10} = M_{01}^t & M_{11} = \frac{1}{r(k-1)} J_{11} & M_{12} = \frac{1}{(k-1)\sqrt{r(r-1)(k-1)}} J_{12} \\ M_{20} = M_{02}^t & M_{21} = M_{12}^t & M_{22} = \frac{1}{(r-1)(k-1)^2} J_{22} \end{array}$$

Tenemos entonces el primer ideal:

LEMA 2.17. *Si tomamos $\boldsymbol{M} \subseteq T$*

$$\boldsymbol{M} = < \{M_{ik}\}_{i,k=0}^{2} >,$$

tenemos que M es un ideal simple de T y

$$\boldsymbol{M} \simeq End(\mathbb{C}^3).$$

Prueba:
Las M_{ik} satisfacen

$$M_{ik}M_{kl} = M_{il} \ \forall i,k,l = 0,1,2$$

luego, si tomamos las matrices canónicas

$$E_{ik} := \text{ la matriz de todos ceros excepto un 1 en el lugar } ik$$

el isomorfismo está dado por

$$\Phi_{\mathbf{M}} : M_{ik} \to E_{ik}.$$

El ideal es simple, ya que la acción de

$$\mathbf{M} \times M_{ij} \longrightarrow M_{ij}$$

es transitiva.

■

Los bloques $\Omega_0 \times \Omega_0,\ \Omega_0 \times \Omega_1,\ \Omega_0 \times \Omega_2$ y sus traspuestos, ya están generados con el ideal M puesto que las matrices de dichos bloques solo son múltiplos del J_{ik} respectivo.

El segundo ideal viene dado por la siguiente combinación lineal de matrices. Denotando

$$\begin{array}{rclrcl} N_{11} & = & \frac{1}{k-1}\left((k-2)I - P\right) & N_{12} & = & \frac{1}{(k-1)\sqrt{(k-1)(r-1)}}\left[(k-1)Q - J_{12}\right] \\ N_{21} & = & N_{12}^t & N_{22} & = & \frac{1}{(k-1)^2(r-1)}\left[(k-1)Q^tQ - rJ_{22}\right] \end{array}$$

tenemos el siguiente:

Lema 2.18. *Si tomamos* $\boldsymbol{N} \subseteq T$

$$\boldsymbol{N} = < \{N_{ik}\}_{i,k=1}^2 >,$$

tenemos que $\boldsymbol{N}$ *es un ideal simple de* T *y*

$$\boldsymbol{N} \simeq End(\mathbb{C}^2).$$

Además $\boldsymbol{MN} = 0$ *es decir*

$$\forall \mathcal{M} \in \boldsymbol{M},\ \mathcal{N} \in \boldsymbol{N}$$

se tiene

$$\mathcal{M}\ \mathcal{N} = 0.$$

Prueba:
Damos una idea de como encontramos el ideal $\mathbf{N}$. Buscamos combinaciones lineales:

$$\begin{array}{rcl} N_{11} & = & P + \alpha I + \beta J \in \Omega_1 \times \Omega_1 \\ N_{12} & = & Q + \gamma J \in \Omega_1 \times \Omega_2 \end{array}$$

que satisfagan las ecuaciones :

$$N_{11}^2 = a\ N_{11} \tag{27}$$

$$N_{11}N_{12} = b\ N_{12} \tag{28}$$

$$J_{11}N_{11} = 0 \tag{29}$$

$$J_{11}N_{12} = 0 \tag{30}$$

Ya que sabemos que P, I, J son independientes, igualando coeficientes de P y de I de la ecuación (27) obtenemos:

$$
\begin{aligned}
k-3+2\alpha &= a \\
k-2+\alpha^2 &= a\ \alpha \text{ que nos da la siguiente ecuación para } \alpha \\
\alpha^2+(k-3)\alpha-(k-2) &= 0
\end{aligned}
$$

es decir

$$\alpha = -(k-2), \alpha = 1$$

La ecuaciones (29) y (29) (que pide que los ideales sean ortogonales) nos dice que β satisface

$$(k-2)+\alpha+\beta\ r(k-1) = 0$$

Los cálculos anteriores nos dan entonces dos soluciones para la combinación lineal del bloque $\Omega_1 \times \Omega_1$:

$$
\begin{array}{lccc}
P-(k-2)I & \text{que satisface} & (P-(k-2)I)^2 = & -(k-1)\ (P-(k-2)I) \\
P+I-\frac{1}{r}\ J & \text{que satisface} & (P+I-\frac{1}{r}\ J)^2 = & (k-1)(P+I-\frac{1}{r}\ J)
\end{array}
$$

Para el bloque $\Omega_1 \times \Omega_2$, la ecuación (30) nos dice que

$$\gamma = \frac{1}{k-1}$$

con lo cual tenemos la combinación lineal

$$Q - \frac{1}{k-1}J.$$

Haciendo cálculos obtenemos que

$$
\begin{aligned}
-\left(P-(k-2)I\right)\left(Q-\frac{1}{k-1}J\right) &= (k-1)\left(Q-\frac{1}{k-1}J\right) \\
\left(P+I-\frac{1}{r}\ J\right)\left(Q-\frac{1}{k-1}J\right) &= 0.
\end{aligned}
$$

Luego para formar el ideal tenemos en cuenta las ecuaciones (27), (28), (29) y (30) y asi definimos las matrices N_{ik} de modo conveniente. Observamos que para la elección de N_{22} simplemente tomamos el producto

$$\left(Q-\frac{1}{k-1}J\right)^t\left(Q-\frac{1}{k-1}J\right)$$

y pedimos que sea idempotente.

La expresión de N_{22} en términos de $S^2, S, I,$ y J es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
N_{22} &= \frac{1}{(k-1)^2(r-1)}\left[(k-1)Q^tQ - rJ_{22}\right] \\
&= \frac{1}{(k-1)^2(r-1)}\left[(k-1)(-S^2+(k-2-r)+r(k-2)+rJ)-rJ\right] \\
&= \frac{1}{(k-1)^2(r-1)}\left[-(k-1)S^2+(k-1)(k-2-r)S+r(k-1)(k-2)I+r(k-2)J\right] \\
&= \frac{-1}{(k-1)(r-1)}\left[S^2-(k-2-r)S-r(k-2)I-\frac{r(k-2)}{k-1}J\right]
\end{aligned}
$$

Entonces las N_{ik} satisfacen

$$
\begin{array}{rclrcl}
N_{11}^2 &=& N_{11}, & N_{11}N_{12} &=& N_{12} \\
N_{12}N_{21} &=& N_{11}, & N_{12}N_{22} &=& N_{12} \\
N_{21}N_{12} &=& N_{22}, & N_{22}^2 &=& N_{22}
\end{array}
$$

luego, si tomamos las matrices canónicas E_{ik} el isomorfismo está dado por

$$\Phi_{\mathbf{N}} : N_{ik} \to E_{ik}.$$

El ideal es simple, ya que la acción de

$$\mathbf{N} \times N_{ij} \longrightarrow N_{ij}$$

es transitiva.

■

Con este segundo ideal observamos que el bloque $\Omega_1 \times \Omega_2$ está "cubierto".
Es decir, sabíamos que las matrices de este bloque se generan con combinaciones lineales de J_{12} y Q, luego con $M_{12} \in M$, $N_{12} \in N$ también lo generamos.

$$\Omega_1 \times \Omega_2 = \langle \{ \frac{1}{(k-1)\sqrt{r(r-1)(k-1)}} J_{12},\ \frac{1}{(k-1)\sqrt{(k-1)(r-1)}} [(k-1)Q - J_{12}] \} \rangle$$

Con respecto al bloque $\Omega_1 \times \Omega_1$ recordemos que era generado por combinaciones lineales de P, I, J_{11}.
Con los ideales $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ tenemos dos generadores. El que falta ya lo tenemos de las ecuaciones propuestas anteriormente. Enunciamos el resultado en el siguiente:

LEMA 2.19. *La matriz*

$$P_{11} = \frac{1}{k-1}(P + I - \frac{1}{r}J)$$

satisface

$$\begin{aligned} P_{11}^2 &= P_{11} \\ P_{11}M_{1k} &= M_{i1}P_{11} = 0 \ \forall \ i, k = 0, 1, 2 \\ P_{11}N_{1k} &= N_{i1}P_{11} = 0 \ \forall \ i, k = 1, 2. \end{aligned}$$

Luego

$$\boldsymbol{P} = < P_{11} >$$

es un ideal simple de T, ortogonal a $\boldsymbol{M}$ y a $\boldsymbol{N}$

Resta encontrar generadores del bloque $\Omega_2 \times \Omega_2$.
Si $r - 1 = (k-1)^2$ dicho bloque se genera con las matrices (bloques) S, I_{22}, J_{22} de lo contrario son necesarios S^2, S, I_{22}, J_{22}.
Con los ideales $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$ tenemos dos generadores:

$$\frac{1}{(r-1)(k-1)^2} J_{22}, \frac{1}{(k-1)^2(r-1)} \left[(k-1)Q^tQ - rJ_{22} \right] \in \Omega_2 \times \Omega_2$$

En el siguiente lema presentamos los restantes.

LEMA 2.20. *Las matrices*

$$\begin{aligned} R_{22} &= \frac{1}{(r-1)(k-2+r)} \left(S^2 - (k-1-2r)S - r(k-1-r)I - rJ \right) \\ S_{22} &= \frac{1}{(k-1)(k-2+r)} \left(S^2 - (2k-r-3)S + (k-1-r)(k-2)I - \frac{(k-2)(r-1)}{(k-1)}J \right) \end{aligned}$$

satisfacen

$$\begin{aligned} R_{22}^2 &= R_{22} \\ R_{22}M_{2k} &= M_{i2}R_{22} = 0 \ \forall \ i, k = 0, 1, 2 \\ R_{22}N_{2k} &= N_{i2}R_{22} = 0 \ \forall \ i, k = 1, 2 \end{aligned}$$

y lo mismo para S_{22}.
Si $(r-1) = (k-1)^2$

$$\begin{aligned} R_{22} &= \frac{1}{r-1} \left[S - (k-1-r)I - \frac{1}{k-1} \right] \\ S_{22} &= 0 \end{aligned}$$

De lo contrario R_{22} y S_{22} son linealmente independientes y ortogonales.
Luego

$$\boldsymbol{R} = \langle R_{22} \rangle,\ \boldsymbol{S} = \langle S_{22} \rangle$$

son ideales de T, ortogonales entre si y ortogonales a $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ y a $\boldsymbol{P}$.

Prueba:
Damos una idea de como encontramos las matrices del lema. Buscamos una combinación lineal:

$$S_{22} \;=\; S^2 + \alpha S + \beta I + \gamma J \;\in \Omega_2 \times \Omega_2$$

que satisfaga las ecuaciones :

$$S_{22}^2 \;=\; a\, S_{22} \tag{31}$$
$$J_{22} S_{22} \;=\; Q S_{22} = 0 \tag{32}$$

Si $(r-1) \neq (k-1)^2$, sabemos que S^2, S, I, J son independientes.
Entonces igualando coeficientes de S^2, S e I de la ecuación (31) obtenemos :

$$(2k-3-2r)^2 + r(k-2) - (k-1-r)(k-2-r) + 2\alpha(2k-3-2r) + 2\beta + \alpha^2 = a$$

$$r(k-2)(k-2-r) - (k-1-r)^2(k-2-r) + (k-2-r)^2(k-1-r) + 2\alpha\,(r(k-2) - (k-2-r)(k-1-r)) + 2\alpha\,\beta = a\,\alpha$$

de estas dos ecuaciones obtenemos la siguiente para α

$$\alpha^3 + 2(2k-3-2r)\alpha^2 + \{(2k-3-2r)^2 + (k-1-r)(k-2-r) - r(k-2)\}\,\alpha + (k-1-r)(k-2-r)(2k-3-2r) - r(k-2)(k-2-r) = 0$$

cuyas soluciones son

$$\alpha_1 = -(k-2-r), \alpha_2 = -(k-1-2r), \alpha_3 = -(2k-3-r)$$

La solución $\alpha_1 = -(k-2-r)$ pertenece a la combinación lineal del ideal $\mathbf{N}$. (es la usada para N_{22})
Teniendo en cuenta la ecuaciones en (32) (que piden que la matriz buscada S_{22} sea ortogonal a los ideales $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$) tenemos que β y γ deben satisfacer

$$\begin{aligned} \beta &= -(k-1-r)^2 - (k-1-r)\alpha \\ \gamma &= \tfrac{-1}{k-1}\left[(k-1-r) + r(k-2) + \alpha\right] \end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{array}{rclcrclcrcl} \text{si } \alpha_2 &=& -(k-1-2r) & \Longrightarrow & ,\beta &=& -r(k-1-r), & \gamma &=& -r \\ \text{para } \alpha_3 &=& -(2k-3-r) & \Longrightarrow & ,\beta &=& (k-2)(k-1-r), & \gamma &=& \frac{-(k-2)(r-1)}{k-1} \end{array}$$

La expresión final viene de pedir que la combinación lineal sea idempotente.
Asi tenemos entonces que las combinaciones lineales buscadas son

$$\begin{aligned} R_{22} &= \tfrac{1}{(r-1)(k-2+r)}\left(S^2 + (k-1-2r)S - r(k-1-r)I - rJ\right) \\ S_{22} &= \tfrac{1}{(k-1)(k-2+r)}\left(S^2 - (2k-r-3)S + (k-1-r)(k-2)I + \tfrac{(k-2)(r-1)}{(k-1)}J\right) \end{aligned}$$

Finalmente sabemos por el corolario 2.13 , que si $(r-1) = (k-1)^2$ entonces

$$S^2 = (2k-3-r)S + \left[(r+1-k)(k-2)\right] I + \left[\tfrac{(r-1)(k-2)}{(k-1)}\right] I$$

reemplazando obtenemos la expresión para R_{22} y S_{22}.

∎

Deducimos directamente el siguiente:

Teorema 2.21. *Sean*

$$\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{S} \subseteq T$$

los ideales simples descriptos anteriormente.
La T-álgebra de un $GQ(k-1,r-1)$ se descompone

$$\begin{aligned} T &= \boldsymbol{M} \oplus \boldsymbol{N} \oplus \boldsymbol{P} \oplus \boldsymbol{R} \oplus \boldsymbol{S} \\ &\simeq End(\mathbb{C}^3) \oplus End(\mathbb{C}^2) \ \oplus End(\mathbb{C}^1) \ \oplus End(\mathbb{C}^1) \ \oplus End(\mathbb{C}^1) \\ &\Longleftrightarrow r-1 \neq (k-1)^2 \\ T &= \boldsymbol{M} \oplus \boldsymbol{N} \oplus \boldsymbol{P} \oplus \boldsymbol{R} \\ &\simeq End(\mathbb{C}^3) \oplus End(\mathbb{C}^2) \ \oplus End(\mathbb{C}^1) \ \oplus End(\mathbb{C}^1) \\ &\Longleftrightarrow r-1 = (k-1)^2 \end{aligned}$$

3. Comentario acerca del trabajo [T Y]

En este trabajo se calculan dimensiones de T-álgebras de esquemas de asociación P-polinomiales con diámetro $d=2$ (también llamados grafos fuertemente regulares).

Dado $x \in X$, se consideran los subgrafos inducidos de Γ

$$\Gamma_i(x), i = 1, 2$$

que tienen como conjunto de vértices los conjuntos $X_i, i = 1, 2$ con

$$X_i = \{y \in X \ / \ (x,y) \in R_i\}, \ i = 1, 2$$

y que toman las relaciones heredadas de Γ.
Dos vértices son vecinos si están $1-$*relacionados* y no lo son si están $2-$*relacionados*.
Los Γ_i, no son necesariamente esquemas, pero son grafos regulares con valencias p_{11}^1 y $(p_{11}^0 - p_{11}^2)$ respectivamente.
Tomando B_i las primera matriz de adyacencia del grafo X_i, el principal resultado del trabajo es el siguiente:

Teorema 2.22. *Sea $\Gamma = (X, \{R_0, R_1, R_2\})$ un grafo fuertemente regular, A_1 la primera matriz de adyacencia y $p_1(0), p_1(1), p_1(2)$ los autovalores de A_1.*
Dado $x \in X$, sea $T(x)$ el álgebra de Terwilliger asociada a Γ con respecto al vértice x. Sean B_1 y B_2 las matrices de adyacencia de los subgrafos inducidos $\Gamma_1(x)$ y $\Gamma_2(x)$ respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned} dimT &= m_1 + m_1' + 4m_2 + 9 \\ &= m_1 + m_1' + 4m_2' + 9 \end{aligned}$$

donde m_1 (resp m_2) es la cantidad de autovalores distintos de B_1 contenidos (resp. no contenidos) en $\{p_1(1), p_1(2)\}$ con respecto a los autovectores que son ortogonales al autovector $(1, ..., 1)$, y donde donde m_1' (resp m_2') es la cantidad de autovalores distintos de B_2 contenidos (resp. no contenidos) en $\{p_1(1), p_1(2)\}$ con respecto a los autovectores que son ortogonales al autovector $(1, ..., 1)$.

Calculamos según nuestros resultados la $dim\ T$ para el caso de los cuadrángulos (que son una familia particular de grafos fuertemente regulares).

Por el teorema 2.21, vemos que

$$\begin{aligned} dim\ T &= 15 \Longleftrightarrow r-1 = (k-1)^2 \\ &= 16 \Longleftrightarrow r-1 \neq (k-1)^2 \end{aligned}$$

Comparemos el resultado obtenido con el trabajo de [**T Y**].
Analicemos los autovalores de A_1, B_1 y B_2. (para nosotros $B_1 = P$, $B_2 = S$)

Para encontrar los autovalores de A_1, es sabido por la teoría que considerando la siguiente matriz $d+1 \ \times \ d+1$,

$$(B_1)_{ij} = p_{1i}^j \ i, j = 0, ..., d$$

los autovalores de dicha matriz son los de A_1 (p_{1i}^j son las constantes definidas en la condición 4 de la sección 1) .
Para nuestro caso tenemos que

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ r(k-1) & (k-2) & r \\ 0 & (r-1)(k-1) & r(k-2) \end{pmatrix},$$

y luego los autovalores son

$$p_1(0) = r(k-1),\ p_1(1) = (k-2),\ p_1(2) = -r.$$

Para la matriz P, los resultados obtenidos dicen que

$$P^2 = (k-3)P + (k-2)I$$

y que

$$P, I, J \text{ son linealmente independientes.}$$

Es fácil comprobar que el polinomio minimal para P es

$$m_P = x^2 - (k-3)x - (k-2)$$

lo que dice que los autovalores de P son

$$\lambda_P^{(1)} = (k-2), \lambda_P^{(2)} = -1.$$

Las ecuaciones

$$\begin{aligned} J\left(P + I - \tfrac{1}{r}\ J\right) &= 0 \\ J\left(P - (k-2)I\right) &= 0 \\ J\left(Q - \tfrac{1}{k-1}J\right) &= 0 \\ \left(P + I - \tfrac{1}{r}\ J\right)\left(Q - \tfrac{1}{k-1}J\right) &= 0 \\ \left(P - (k-2)I\right)\left(P + I - \tfrac{1}{r}\ J\right) &= 0, \end{aligned}$$

dicen que las columnas de

$$\left(P + I - \tfrac{1}{r}\ J\right) \text{ y } \left(Q - \tfrac{1}{k-1}J\right)$$

son autovectores de P asociados a los autovector $k-2$ y -1 respectivamente y ortogonales al autovector $(1, ..., 1)$. Por lo tanto para P tenemos que

$$m_1 = m_2 = 1.$$

Para analizar la matriz S, tenemos los siguiente ecuación:

$$(S - \lambda_0 I)(S + \lambda_1 I)(S - \lambda_2 I)(S + \lambda_3 I) = 0,$$

donde

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= r(k-2) \\ \lambda_1 &= r + 1 - k \\ \lambda_2 &= k-2 \\ \lambda_3 &= r, \end{aligned}$$

Entonces, el polinomio minimal m_S de S divide

$$(x - \lambda_0)(x + \lambda_1)(x - \lambda_2)(x + \lambda_3).$$

También sabemos que si $(r-1) \neq (k-1)^2$ entonces S^2, S, I y J son linealmente independientes. La ecuación

$$\begin{aligned} S^3 &= [(k-1-r)+(k-2-r)]\, S^2 + [r(k-2)-(k-1-r)(k-2-r)]\, S \\ &- [(k-1-r)+r(k-2)]\, I + [r(r-1)(k-2)]\, J, \end{aligned}$$

nos dice que S^3, S^2, S e I son linealmente independientes, con lo cual

$$m_S = (x-\lambda_0)(x+\lambda_1)(x-\lambda_2)(x+\lambda_3).$$

Luego los autovalores de S son λ_i.

La ecuaciones

$$SJ = r(k-2)J \tag{33}$$

$$(S+\lambda_1 I)(S-\lambda_2 I)(S+\lambda_3 I) = r(r-1)J. \tag{34}$$

dicen que

- $-\lambda_0$ tiene asociado el autovector $(1, ..., 1)$
- λ_1 tiene como autovectores las columnas de $(x-\lambda_0)(x+\lambda_2)(x-\lambda_3)$ que son ortogonales a $(1, .., 1)$
- λ_2 tiene como autovectores las columnas de $(x-\lambda_0)(x+\lambda_1)(x-\lambda_3)$ que son ortogonales a $(1, .., 1)$
- $-\lambda_3$ tiene como autovectores las columnas de $(x-\lambda_0)(x+\lambda_1)(x-\lambda_2)$ que son ortogonales a $(1, .., 1)$

Por lo tanto para S, si $(r-1) \neq (k-1)^2$ tenemos que

$$m_1' = 2,\ m_2' = 1.$$

Del mismo modo se ve que si $(r-1) = (k-1)^2$ entonces

$$m_1' = m_2' = 1.$$

Con lo que se verifica lo el cálculo de la dimensión de T que surge como consecuencia del Teorema 2.21 .

4. Descomposición de C^ν en T-submódulos irreducibles

En esta sección consideramos la acción del álgebra T en C^ν (ν es la cantidad de vértices del cuadrángulo generalizado)

$$T \times C^\nu \longrightarrow C^\nu$$

y damos una descomposición de dicho espacio en submódulos irreducibles de T.
A cada ideal simple de T le podemos asociar de manera canónica un T-submódulo (no necesariamente irreducible), que llamaremos "isotípico". En lo que sigue damos una descripción de estos T-submódulos.

4.1. T-submódulos isotípicos.

Supongamos en general que tenemos un álgebra T que es suma directa de álgebras de matrices T_i,

$$T = \oplus T_i$$

y una acción

$$T \times \mathbb{C}^\nu \longrightarrow \mathbb{C}^\nu \text{ tal que } T\mathbb{C}^\nu = \mathbb{C}^\nu$$

Supongamos que posible escribir la identidad $I \in T$ como

$$I = \sum_i P_i$$

donde $P_i \in T_i$, satisfacen

$$
\begin{aligned}
P_i^2 &= P_i \\
P_iP_j &= \Delta_{ij}P_i \text{ donde} \Delta_{ij} = I \iff i = j
\end{aligned}
$$

Tenemos entonces que $P_iT = T_i$
Si ahora pensamos en la acción de T en $\mathbb{C}^\nu$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{C}^\nu &= T\mathbb{C}^\nu = \oplus T_i\mathbb{C}^\nu \text{ donde} \\
T_i\mathbb{C}^\nu &= P_iT(\mathbb{C}^\nu) = P_i(\mathbb{C}^\nu)
\end{aligned}
$$

Los $T_i\mathbb{C}^\nu$ son T-submódulos puesto que la descomposición de T nos dice que

$$T\ T_i \subseteq T_i$$

Llamamos a dichos submódulos isotípicos.
P_i son las proyecciones

$$P_i : \mathbb{C}^\nu \longrightarrow P_i\mathbb{C}^\nu = T_i\mathbb{C}^\nu$$

4.2. Proyecciones a los T-submódulos isotípicos.

En nuestro caso la descomposición en T-submódulos isotípicos es:

$$\mathbb{C}^\nu = \mathbf{M}\mathbb{C}^\nu \oplus \mathbf{N}\mathbb{C}^\nu \oplus \mathbf{P}\mathbb{C}^\nu \oplus \mathbf{R}\mathbb{C}^\nu \oplus \mathbf{S}\mathbb{C}^\nu$$

$$\mathbf{S}\mathbb{C}^\nu = 0 \iff r - 1 = (k-1)^2$$

En lo que sigue damos una descomposición de $I \in T$ en suma de proyecciones ortogonales a dichos T-submódulos.

Lema 2.23. *Dadas $M_{ii}, N_{ii}, P_{11}, R_{22}$ y S_{22} las matrices definidas anteriormente, consideramos*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M} &= \begin{pmatrix} M_{00} & 0 & 0 \\ 0 & M_{11} & 0 \\ 0 & 0 & M_{22} \end{pmatrix}, \mathcal{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{11} & 0 \\ 0 & 0 & N_{22} \end{pmatrix}, \\
\mathcal{P} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{22} \end{pmatrix}, \mathcal{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{22} \end{pmatrix} \\
& (\mathcal{S} = 0 \iff r - 1 = (k-1)^2)
\end{aligned}
$$

pertenecientes a los ideales $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{R}$ y $\boldsymbol{S}$ respectivamente. Se tiene entonces que

$$I = \mathcal{M} + \mathcal{N} + \mathcal{P} + \mathcal{R} + \mathcal{S}$$

Prueba: De las definiciones dadas se calcula fácilmente que

$$
\begin{aligned}
M_{11} + N_{11} + P_{11} &= I_{/\Omega_1 \times \Omega_1} \\
M_{22} + N_{22} + R_{22} + S_{22} &= I_{/\Omega_2 \times \Omega_2}
\end{aligned}
$$

y que las matrices definidas son idempotentes y mutuamente ortogonales.

■

4.3. T-submódulos irreducibles.

En la sección anterior describimos los T-submódulos isotípicos que aparecen en la descomposición de $\mathbb{C}^\nu$.
En esta sección queremos descomponer cada uno de ellos en T-submódulos irreducibles.

Enunciamos el siguiente lema que será de utilidad.

Lema 2.24. *Dada un álgebra de matrices* $T \subseteq End(\mathbb{C}^n)$ *y* $P \in T$ *tal que* $P^2 = P$ *podemos encontrar una base de* $\mathbb{C}^n$ *en donde*

$$\begin{aligned} P &= \sum P_i \ , \ P_i \ \ \textit{proyecciones de rango 1 que cumplen} \\ P_i P_j &= \Delta_{ij} P_j \end{aligned}$$

Prueba:
Para dichas hipótesis existe una matriz A_P tal que

$$P = A_P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A_P^{-1}$$

donde r es el rango de P. Entonces $\forall \ i = 1, \ldots, r$

$$P_i = A_P E_{ii} A_P^{-1}$$

donde E_{ii} es la matriz elemental con un 1 en el lugar i de la diagonal y el resto de las entradas nulas.

■

Consideremos el ideal simple $\mathbf{N}$ y los bloques (que identificamos con matrices)

$$N_{11}, N_{12}, N_{21} \text{ y } N_{22}$$

que forman una base para dicho ideal de T (y que resulta isomorfo a $End(\mathbb{C}^2)$).
Dichas matrices satisfacen

$$\begin{aligned} N_{ii}^2 &= N_{ii} \quad i = 1, 2 \\ N_{i2} N_{2j} &= N_{ij} \quad i, j = 1, 2 \\ N_{i1} N_{1j} &= N_{ij} \quad i, j = 1, 2 \end{aligned}$$

En particular, por el lema previo, N_{11} tiene una descomposición (no única) en proyecciones de rango 1

$$\begin{aligned} N_{11} &= \sum_j N_{11}^{(j)} \quad , \ N_{11}^{(j)} \text{ proyecciones de rango 1 que cumplen} \\ N_{11}^{(j)} N_{11}^{(k)} &= \Delta_{jk} N_{11}^{(j)} \qquad \text{y puesto que} \\ N_{21} &= N_{21} N_{11} \qquad \text{entonces} \\ N_{21} &= \sum_j N_{21} N_{11}^{(j)} \end{aligned}$$

Con estas observaciones definimos los siguientes subespacios de $\mathbf{N}\mathbb{C}^\nu$

Definición 2.25.

$$W_{N_{11}^{(i)}} = N_{11}^{(i)} \mathbb{C}^\nu + (N_{21} N_{11}^{(i)}) \mathbb{C}^\nu \subseteq \ N\mathbb{C}^\nu \ \ i = 1, , \ldots, rg(N_{11})$$

Tenemos entonces:

Proposición 2.26.
$W_{N_{11}^{(i)}}$ $\quad i = 1, , \ldots, rg(N_{11})$ *son* T*-submódulos irreducibles de dimensión 2 isomorfos entre si.*

Prueba:
La descomposición de T en ideales mutuamente ortogonales

$$T = \mathbf{M} \oplus \mathbf{N} \oplus \mathbf{P} \oplus \mathbf{R} \oplus \mathbf{S}$$

y el hecho de que los generadores de $\mathbf{N}$ satisfagan las ecuaciones (27),(28), (29) y (30) nos dicen que

$$\begin{array}{rcl} N_{11}W_{N_{11}^{(i)}} & = & N_{11}^{(i)}\mathbb{C}^{\nu} \\ N_{22}W_{N_{11}^{(i)}} & = & N_{21}N_{11}^{(i)}\mathbb{C}^{\nu} \\ N_{21}W_{N_{11}^{(i)}} & = & N_{21}N_{11}^{(i)}\mathbb{C}^{\nu} \\ N_{12}W_{N_{11}^{(i)}} & = & N_{11}^{(i)}\mathbb{C}^{\nu} \end{array}$$

lo que prueba que $W_{N_{11}^{(i)}} \subseteq \mathbf{N}\mathbb{C}^{\nu}$ con $i = 1, \dots rg(N_{11})$ es un T-submódulo y es claro que es de dimensión 2.
Es irreducible puesto que si quisiéramos considerar un subespacio de dimensión 1, debería ser de la forma

$$(\alpha N_{11}^{(i)} + \beta N_{21}N_{11}^{(i)})\mathbb{C}^{\nu},$$

pero las siguientes acciones de T implicarían

$$\begin{array}{rcl} N_{11}^{i}\ (\alpha N_{11}^{(i)} + \beta N_{21}N_{11}^{(i)})\mathbb{C}^{\nu} & \subseteq & \alpha N_{11}^{(i)} \Rightarrow\ \beta = 0 \\ N_{22}^{i}\ (\alpha N_{11}^{(i)} + \beta N_{21}N_{11}^{(i)})\mathbb{C}^{\nu} & \subseteq & \beta N_{21}N_{11}^{(i)} \Rightarrow\ \alpha = 0 \end{array}$$

(lo cual es un absurdo puesto que el subespacio era de dim 1.)
Es fácil verificar que los T-submódulos irreducibles $W_{N_{11}^{(j)}} \subseteq \mathbf{N}\mathbb{C}^{\nu}$ son isomorfos como T-submódulos por medio de

$$\begin{array}{rcl} \sigma_{\mathbf{N}} : N_{11}^{(i)}\mathbb{C}^{\nu} + N_{21}N_{11}^{(i)}\mathbb{C}^{\nu} & \longrightarrow & N_{11}^{(j)}\mathbb{C}^{\nu} + N_{21}N_{11}^{(j)}\mathbb{C}^{\nu} \\ N_{11}^{(i)}v + N_{21}N_{11}^{(i)}w & \longrightarrow & N_{11}^{(j)}v + N_{21}N_{11}^{(j)}w \end{array}$$

que preserva la acción de T.

■

Proposición 2.27.

$$\boldsymbol{N}\mathbb{C}^{\nu} = \oplus_j W_{N_{11}^{(j)}}$$

Prueba:
Tenemos que

$$\sum_j W_{N_{11}^{(j)}} \subseteq \mathbf{N}\mathbb{C}^{\nu}$$

Veamos que la suma es directa.
Probemos que para $i \neq j$

$$W_{N_{11}^{(i)}} \cap W_{N_{11}^{(j)}} = 0$$

Si esto no sucede existen $v, w, \tilde{v}, \tilde{w}$ tales que

$$N_{11}^{(i)}v + N_{21}N_{11}^{(i)}w = N_{11}^{(j)}\tilde{v} + N_{21}N_{11}^{(j)}\tilde{w}$$

haciendo actuar $N_{11}^{(i)} \in T$ en ambos miembros, tenemos

$$\begin{array}{rcl} N_{11}^{(i)}N_{11}^{(i)}v & = & N_{11}^{(i)}N_{11}^{(j)}\tilde{v} \\ N_{11}^{(i)}v & = & 0 \end{array}$$

Del mismo modo; haciendo actuar N_{22}; podemos ver que

$$N_{21}N_{11}^{(i)}w = 0$$

con lo cual concluimos que los subespacios tienen intersección nula dos a dos.
Entonces concluimos que

$$\oplus_j\ W_{N_{11}^{(j)}} \subseteq \mathbf{N}\mathbb{C}^{\nu}.$$

La igualdad se obtiene comparando dimensiones.
¿Cuantos subespacios hay?.
Por la forma de definirlos, para cada $N_{11}^{(i)}$ que aparezca en la descomposición de N_{11} tendremos un T-submódulo irreducible. Luego la cantidad está dada por el rango de N_{11} que es fácil comprobar que es $r(k-2)$. Como cada T-submódulo irreducible es de dimensión 2, entonces

$$dim\ (\oplus_j W_{N_{11}^{(j)}}) = 2r(k-2)$$

Por otro lado, la dimensión del T-submódulo isotípico $\mathbf{N}\mathbb{C}^\nu$, se obtiene calculando el rango de la proyección

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{11} & 0 \\ 0 & 0 & N_{22} \end{pmatrix} \qquad \mathcal{N} : \mathbb{C}^\nu \longrightarrow \mathbf{N}\mathbb{C}^\nu$$

Es fácil comprobar; de la definición de N_{11} y N_{22}; que

$$rg(\mathcal{N}) = traza(\mathcal{N}) = traza(N_{11}) + traza(N_{22}) = 2r(k-2)$$

■

El análisis realizado para descomponer el T-submódulo isotípico $\mathbf{N}\mathbb{C}^\nu$ es análogo para la descomposición de cualquier otro. Considerando las matrices $M_{ij}, P_{11}, R_{22}, S_{22}$ definidas anteriormente definimos (de mismo modo que para $W_{N_{11}^{(i)}}$) ,

Definición 2.28.

$$\begin{aligned} W_{M_{00}^{(i)}} &= M_{00}^{(i)}\mathbb{C}^\nu + M_{10}M_{00}^{(i)}\mathbb{C}^\nu + M_{20}M_{00}^{(i)}\mathbb{C}^\nu \ \ i = 1\ldots, rg(M_{00}) \\ W_{P_{11}^{(i)}} &= P_{11}^{(i)}\mathbb{C}^\nu \ \ i = 1\ldots, rg(P_{11}) \\ W_{R_{22}^{(i)}} &= R_{22}^{(i)}\mathbb{C}^\nu \ \ i = 1\ldots, rg(R_{22}) \\ W_{S_{22}^{(i)}} &= S_{22}^{(i)}\mathbb{C}^\nu \ \ i = 1\ldots, rg(S_{22}) \end{aligned}$$

Tenemos entonces la siguiente

Proposición 2.29.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}\mathbb{C}^\nu &= W_{M_{00}^{(1)}} \ \textit{donde}\ W_{M_{00}^{(1)}} \ \textit{es un}\ T\textit{-submódulo irreducible de dimensión 3} \\ \boldsymbol{P}\mathbb{C}^\nu &= \oplus_{j=1}^{r-1} W_{P_{11}^{(j)}} \ \textit{donde}\ W_{P_{11}^{j}} \ \textit{son}\ T\textit{-submódulos irreducibles de dimensión 1} \\ \boldsymbol{R}\mathbb{C}^\nu &= \oplus_{j=1}^{d_R} W_{R_{22}^{(j)}} \ \textit{donde}\ W_{R_{22}^{(j)}} \ \textit{son}\ T\textit{-submódulos irreducibles de dimensión 1} \\ \boldsymbol{S}\mathbb{C}^\nu &= \oplus_{j=1}^{d_S} W_{S_{22}^{(j)}} \ \textit{donde}\ W_{S_{22}^{(j)}} \ \textit{son}\ T\textit{-submódulos irreducibles de dimensión 1} \end{aligned}$$

donde

$$d_{\boldsymbol{R}} = \tfrac{r(r-2)(k-1)^2}{(k-2+r)}, \ d_{\boldsymbol{S}} = \tfrac{(r-1)(k-2)\left[(k-1)^2-(r-1)\right]}{(k-2+r)}$$

y

$$rg(M_{00}) = 1,\ rg(P_{11}) = (r-1),\ rg(R_{22}) = d_{\mathbf{R}}\ ,\ rg(S_{22}) = d_{\mathbf{S}}$$

Prueba:
La prueba es análoga a la descomposición de $\mathbf{N}\mathbb{C}^\nu$.
La cantidad de T-submódulos irreducibles que aparecen en cada descomposición depende del rango de los idempotentes $M_{00}, P_{11}, R_{22}, S_{22}$. De las definiciones de dichas matrices, calculando su traza, se deduce dicho rango.

■

El siguiente corolario es inmediato

Corolario 2.30. $\mathbb{C}^\nu$ *se descompone en T-submódulos irreducibles del siguiente modo:*

$$\mathbb{C}^\nu = W_{M_{00}^{(1)}} \oplus (r-1)W_{P_{11}^{(1)}} \oplus d_{\mathbf{R}}\ W_{R_{22}^{(1)}} \oplus\ d_{\mathbf{S}}\ W_{S_{22}^{(1)}}$$

Luego calculando las dimensiones tenemos

$$\begin{aligned}\nu &= \kappa(1+(r-1)(t-1)) \\ &= 3+2r(k-2)+(r-1) \\ &+ \frac{r(r-2)(k-1)^2}{(k-2+r)} + \frac{(r-1)(k-2)\left[(k-1)^2-(r-1)\right]}{(k-2+r)}\end{aligned}$$

CAPíTULO 3

T-álgebra de los esquemas de Johnson

En este capítulo estudiamos los esquemas de Johnson.
Analizamos los casos $J(n,k)$ para $3k \leq n$.

Descomponemos la T- álgebra en suma directa de ideales simples y considerando la acción

$$T \times \mathbb{C}^{\binom{n}{k}} \longrightarrow \mathbb{C}^{\binom{n}{k}}$$

damos una descomposición de $\mathbb{C}^{\binom{n}{k}}$ en suma directa de T-submódulos irreducibles.

Al igual que los esquemas estudiados en el capítulo anterior, los $J(n,k)$ son de tipo P-polinomial, entonces para calcular T estudiamos en detalle la matriz de adyacencia del esquema.

1. Matriz de adyacencia

En esta sección tomamos el ejemplo “guía” $J(12,4)$ y describimos su primera matriz de adyacencia A_1. De las características de este caso particular, describimos el caso general.

1.1. Matriz A_1 de $J(12,4)$.

Las matrices de adyacencia de un esquema de asociación, están indexadas por los elementos del esquema.
En particular podemos ver a los elementos de $J(12,4)$ en correspondencia con subconjuntos de 4 elementos elegidos del conjunto $\{1,2,3\ldots 12\}$
Fijamos un elemento $x_0 = \{1,2,3,4\} \in J(12,4)$ y consideramos

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= x_0 = \{1,2,3,4\} \\ \Omega_i &= \{\sigma \in J(12,4) \;/\; (x_0,\sigma) \in R_i\} \\ &= \{\sigma \in J(12,4) \;/\; |\{1,2,3,4\} \cap \sigma| = 4-i\}. \end{aligned}$$

Tenemos entonces la partición

$$J(12,4) = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4$$

donde la unión es disjunta.
Como siempre miramos A_1 indexada por “bloques” $\Omega_i \times \Omega_j$ $i,j = 0,1,2,3,4$ y describimos dichos bloques.
Supongamos que tenemos un elemento $\sigma \in \Omega_1$.
Entonces $|\sigma \cap \{1,2,3,4\}| = 3$.
Es decir que podemos mirar a σ como una yuxtaposición

$$\sigma = \alpha_3 \; \beta_1$$

donde α_3 es un subconjunto de 3 elementos elegido de $\{1,2,3,4\}$ y β_1 es un subconjunto de 1 elemento elegido de $\{5,6,\ldots,12\}$.
Es decir que α_3 esta en correspondencia con un elemento de $J(4,3)$ y β_1 con uno de $J(8,1)$.

Diremos que $\alpha_3 \in J(4,3)$ y $\beta_1 \in J(8,1)$.
Dados dos elementos por ejemplo

$$\begin{array}{rcl} \sigma \in \Omega_1 & , & \sigma' \in \Omega_2 \\ \sigma = \alpha_3\ \beta_1 & , & \sigma' = \alpha'_2\ \beta'_2 \\ \alpha_3\ \in\ J(4,3) & , & \beta_1\ \in\ J(8,1) \\ \alpha_2\ \in\ J(4,2) & , & \beta_2\ \in\ J(8,2) \\ \text{se tiene } |\sigma \cap \sigma'| & = & |\alpha_3 \cap \alpha'_2| + |\beta_1 \cap \beta'_2|. \end{array}$$

Es decir que la intersección entre ellos viene dada por las intersecciones:

$$\begin{array}{ccl} \alpha_3 & \cap & \alpha'_2 \in \{1,2,3,4\} \\ \beta_1 & \cap & \beta'_2 \in \{5,6,7,\ldots 12\}. \end{array}$$

En general un elemento $\sigma \in J(12,4)$ tal que $\sigma \in \Omega_i$ $(i = 0,1,2,3,4)$ se escribe como

$$\sigma = \alpha_{4-i}\ \beta_i$$

donde podemos ver a

$$\begin{array}{rcl} \alpha_{4-i} & \in & J(4,4-i) = \text{ subconjuntos de } 4-i \text{ elementos del conjunto } \{1,2,3,4\} \\ \beta_i & \in & J(8,i) = \text{ subconjuntos de } i \text{ elementos del conjunto } \{5,6,\ldots,12\}. \end{array}$$

y dados dos elementos

$$\sigma \in \Omega_i,\ \sigma' \in \Omega_j$$

$$\sigma = \alpha_{4-i}\ \beta_i,\ \sigma' = \alpha'_{4-j}\ \beta'_j,$$

la intersección entre ellos viene dada por:

$$\begin{array}{rcl} \alpha_{4-i} & \cap & \alpha'_{4-j} \in\ \{1,2,3,4\} \\ \beta_i & \cap & \beta'_j \in\ \{5,6,\ldots,12\} \end{array}$$

(Recordar que $J(4,4-i) \simeq J(4,i)$ cuando i es tal que $4 < 2(4-i)$). Denotemos con el supra índice $\binom{v}{d}$ a matrices indexadas por elementos de un esquema $J(v,d)$. Es fácil entonces comprobar que la matriz A_1 de un $J(12,4)$ es de la forma:

$$A = \left\{ \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \scriptstyle\Omega_1\times\Omega_1 & \scriptstyle\Omega_1\times\Omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & \scriptstyle\Omega_2\times\Omega_1 & \scriptstyle\Omega_2\times\Omega_2 & \scriptstyle\Omega_2\times\Omega_3 & 0 \\ 0 & 0 & \scriptstyle\Omega_3\times\Omega_2 & \scriptstyle\Omega_3\times\Omega_3 & \scriptstyle\Omega_3\times\Omega_4 \\ 0 & 0 & 0 & \scriptstyle\Omega_4\times\Omega_3 & \scriptstyle\Omega_4\times\Omega_4 \end{array} \right. ,$$

con

$$\Omega_1\times\Omega_1=\left\{\begin{array}{llll} (J-I)^{\binom{8}{1}} & I^{\binom{8}{1}} & I^{\binom{8}{1}} & I^{\binom{8}{1}}\\ I^{\binom{8}{1}} & (J-I)^{\binom{8}{1}} & I^{\binom{8}{1}} & I^{\binom{8}{1}}\\ I^{\binom{8}{1}} & I^{\binom{8}{1}} & (J-I)^{\binom{8}{1}} & I^{\binom{8}{1}}\\ I^{\binom{8}{1}} & I^{\binom{8}{1}} & I^{\binom{8}{1}} & (J-I)^{\binom{8}{1}} \end{array}\right. ,\quad \Omega_2\times\Omega_2=\left\{\begin{array}{llllll} A_1^{\binom{8}{2}} & I^{\binom{8}{2}} & I^{\binom{8}{2}} & I^{\binom{8}{2}} & I^{\binom{8}{2}} & 0^{\binom{8}{2}}\\ I^{\binom{8}{2}} & A_1^{\binom{8}{2}} & I^{\binom{8}{2}} & I^{\binom{8}{2}} & 0^{\binom{8}{2}} & I^{\binom{8}{2}}\\ I^{\binom{8}{2}} & I^{\binom{8}{2}} & A_1^{\binom{8}{2}} & 0^{\binom{8}{2}} & I^{\binom{8}{2}} & I^{\binom{8}{2}}\\ I^{\binom{8}{2}} & I^{\binom{8}{2}} & 0^{\binom{8}{2}} & A_1^{\binom{8}{2}} & I^{\binom{8}{2}} & I^{\binom{8}{2}}\\ I^{\binom{8}{2}} & 0^{\binom{8}{2}} & I^{\binom{8}{2}} & I^{\binom{8}{2}} & A_1^{\binom{8}{2}} & I^{\binom{8}{2}}\\ 0^{\binom{8}{2}} & I^{\binom{8}{2}} & I^{\binom{8}{2}} & I^{\binom{8}{2}} & I^{\binom{8}{2}} & A_1^{\binom{8}{2}} \end{array}\right.$$

$$\Omega_3\times\Omega_3=\left\{\begin{array}{llll} A_1^{\binom{8}{3}} & I^{\binom{8}{3}} & I^{\binom{8}{3}} & I^{\binom{8}{3}}\\ I^{\binom{8}{3}} & A_1^{\binom{8}{3}} & I^{\binom{8}{3}} & I^{\binom{8}{3}}\\ I^{\binom{8}{3}} & I^{\binom{8}{3}} & A_1^{\binom{8}{3}} & I^{\binom{8}{3}}\\ I^{\binom{8}{3}} & I^{\binom{8}{3}} & I^{\binom{8}{3}} & A_1^{\binom{8}{3}} \end{array}\right. ,\quad \Omega_4\times\Omega_4=A_1^{\binom{8}{4}}$$

$$\Omega_1\times\Omega_2=\left\{\begin{array}{llllll} \delta_{12} & \delta_{12} & 0 & \delta_{12} & 0 & 0\\ \delta_{12} & 0 & \delta_{12} & 0 & \delta_{12} & 0\\ 0 & \delta_{12} & \delta_{12} & 0 & 0 & \delta_{12}\\ 0 & 0 & 0 & \delta_{12} & \delta_{12} & \delta_{12} \end{array}\right. ,\quad \Omega_2\times\Omega_3=\left\{\begin{array}{llll} \delta_{23} & \delta_{23} & 0 & 0\\ \delta_{23} & 0 & \delta_{23} & 0\\ \delta_{23} & 0 & 0 & \delta_{23}\\ 0 & \delta_{23} & \delta_{23} & 0\\ 0 & \delta_{23} & 0 & \delta_{23}\\ 0 & 0 & \delta_{23} & \delta_{23} \end{array}\right.$$

$$\Omega_3\times\Omega_4=\delta_{34}$$

donde

$$\delta_{12}=\left\{\begin{array}{llllll} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right. ,\ \delta_{23}=\delta_{12}^t,\ \delta_{34}=J_{3\times 1}\ .$$

Comentario: producto de Kronecker

Podemos ver a $\Omega_1\times\Omega_1$ como una matriz 4×4, que en la diagonal tiene el sub-bloque $(J-I)^{\binom{8}{1}}$ y fuera de la diagonal, el sub-bloque $I^{\binom{8}{1}}$.

Para dar una expresión más precisa de $\Omega_1\times\Omega_1$, consideramos el producto de Kronecker de matrices (denotado por $\otimes$).
Está definido del siguiente modo:

$$\begin{array}{rcl} \otimes:(M^{p\times q},M^{r\times s}) & \longrightarrow & M^{p.r\times q.s}\\ \otimes:(A,B) & \longrightarrow & A\otimes B=\begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & ... & a_{1q}B\\ ... & & & \\ a_{p1}B & a_{p2}B & ... & a_{pq}B \end{pmatrix}. \end{array}$$

Considerando dicho producto podemos dar la siguiente expresión

$$\Omega_1\times\Omega_1=I_{4\times 4}\otimes(J-I)^{\binom{8}{1}}+(J-I)_{4\times 4}\otimes I^{\binom{8}{1}}.$$

Ahora bien podemos pensar que $I_{4\times 4}$ y $(J-I)_{4\times 4}$ son matrices de adyacencia de un $J(4,1)$.
Como también $I^{\binom{8}{1}}$ y $(J-I)^{\binom{8}{1}}$ lo son de un esquema $J(8,1)$; finalmente tenemos

$$\Omega_1\times\Omega_1=I^{\binom{4}{1}}\otimes A_1^{\binom{8}{1}}+A_1^{\binom{4}{1}}\otimes I^{\binom{8}{1}}$$

Considerando que la primera matriz de adyacencia de un $J(4,2)$ es de la forma:

$$A_1^{\binom{4}{2}}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

podemos expresar

$$\Omega_2 \times \Omega_2 = I^{\binom{4}{2}} \otimes A_1^{\binom{8}{2}} + A_1^{\binom{4}{2}} \otimes I^{\binom{8}{2}}.$$

Es fácil ver que en los restantes bloques diagonales podemos dar expresiones análogas, que involucran el producto de Kronecker de matrices de adyacencia de esquemas de Johnson.

$$\begin{aligned} \Omega_3 \times \Omega_3 &= I^{\binom{4}{1}} \otimes A_1^{\binom{8}{3}} + A_1^{\binom{4}{1}} \otimes I^{\binom{8}{3}} \\ \Omega_4 \times \Omega_4 &= I^{\binom{4}{0}} \otimes A_1^{\binom{8}{4}} + A_1^{\binom{4}{0}} \otimes I^{\binom{8}{4}}. \end{aligned}$$

1.2. Matriz A_1 de $J(n,k)$.

En esta sección analizamos la estructura de la primera matriz de adyacencia de un esquema de Johnson con parámetros n, k con $3k \leq n$.

Cada elemento del esquema $J(n,k)$ está en correspondencia con un subconjunto de tamaño k elegido del conjunto de n elementos $\{1, 2...n\}$.

Como siempre fijamos $x_0 = \{1, 2, \ldots, k\} \in J(n,k)$ y consideramos

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= x_0 = \{1, 2...k\} \\ \Omega_i &= \{\sigma \in J(n,k) \ / \ (x_0, \sigma_k) \in R_i\} \\ &= \{\sigma \in J(n,k) \ / \ |\{1, 2...k\} \cap \sigma_k| = k - i\}. \end{aligned}$$

Tenemos entonces la partición

$$J(n,k) = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2 \cdots \cup \Omega_k$$

donde la unión es disjunta.
Miramos entonces a A_1 indexada por "bloques" $\Omega_i \times \Omega_j$ $i, j = 0, 1, 2, \ldots, k$ y describimos dichos bloques.
Supongamos que tenemos un elemento $\sigma \in \Omega_1$. Entonces $|\sigma \cap \{1, 2, \ldots, k\}| = k - 1$.
Es decir que podemos mirar a σ como una yuxtaposición

$$\sigma = \alpha_{k-1} \ \beta_1$$

donde α_{k-1} es un subconjunto de $k-1$ elementos elegido de $\{1, 2, \ldots, k\}$ y β_1 es un subconjunto de 1 elemento elegido de $\{k+1, k+2, \ldots, n\}$.
Es decir que α_{k-1} esta en correspondencia con un elemento de $J(k, k-1)$ (que se identifica con $J(k,1)$ y β_1 con uno de $J(n-k, 1)$.
Diremos que $\alpha_{k-1} \in J(k, k-1)$ y $\beta_1 \in J(n-k, 1)$.
En general un elemento $\sigma \in J(n,k)$ tal que $\sigma \in \Omega_i$ se escribe como

$$\sigma = \alpha_{k-i} \ \beta_i$$

donde podemos ver a

$$\begin{aligned} \alpha_{k-i} &\in J(k, k-i) = \text{ subconjuntos de } k-i \text{ elementos del conjunto } \{1, 2, \ldots, 4\} \\ \beta_i &\in J(n-k, i) = \text{ subconjuntos de } i \text{ elementos del conjunto } \{k+1, k+2, \ldots, n\}. \end{aligned}$$

De esta manera dados dos elementos

$$\sigma \in \Omega_i, \ \sigma' \in \Omega_j$$

$$\sigma = \alpha_{k-i} \ \beta_i, \ \sigma' = \alpha'_{k-j} \ \beta'_j$$

$$\text{se tiene } |\sigma \cap \sigma'| = |\alpha_{k-i} \cap \alpha'_{k-j}| + |\beta_i \cap \beta'_j|.$$

Es decir que la distancia entre ellos viene dada por las intersecciones:

$$\begin{aligned} \alpha_{k-i} &\cap& \alpha'_{k-j} \in\ \{1,2,\ldots,k\} \\ \beta_i &\cap& \beta'_j \in\ \{k+1,k+2,\ldots n\}. \end{aligned}$$

Ahora entonces, consideramos A_1 la primera matriz de adyacencia, indexada por los bloques $\Omega_i \times \Omega_j$ y describimos dichos bloques.

1.2.1. Bloques $\Omega_i \times \Omega_i$.

En el siguiente lema describimos la diagonal de A_1.

LEMA 3.1. *Sea $I_{\binom{v}{d}}$ la matriz identidad de tamaño $\binom{v}{d}$ y $A_1^{\binom{v}{d}}$ la primera matriz de adyacencia de un esquema $J(v,d)$. Entonces, para $i = 0,1,...,k$ se tiene*

$$(A_1^{\binom{n}{k}})_{\Omega_i\times\Omega_i} = I_{\binom{k}{k-i}} \otimes A_1^{\binom{n-k}{i}} + A_1^{\binom{k}{k-i}} \otimes I_{\binom{n-k}{i}} \tag{35}$$

donde “ $\otimes$” representa el producto de Kronecker de matrices.

Prueba:

Una entrada del bloque $\Omega_i \times \Omega_i$,está indexada por elementos σ, σ', donde

$$\sigma = \alpha_{k-i}\ \beta_i,\ \ \sigma' = \alpha'_{k-i}\ \beta'_i$$

con

$$\alpha_{k-i}, \alpha'_{k-i} \in J(k,k-i) \text{ y } \beta_i, \beta'_i \in J(n-k,i).$$

La igualdad en (35) se deduce de los siguientes hechos:

$$\begin{aligned} |\sigma \cap \sigma'| &= |\alpha_{k-i} \cap \alpha'_{k-i}| + |\beta_i \cap \beta'_i| \\ |\alpha_{k-i} \cap \alpha'_{k-i}| &\leq k-i \\ |\beta_i \cap \beta'_i| &\leq i \end{aligned}$$

Si además queremos que $A_{\sigma,\sigma'} = 1$ entonces

$$|\sigma \cap \sigma'| = k-1 \text{ , lo que implica} \tag{36}$$

$$k-i-1 \leq |\alpha_{k-i} \cap \alpha'_{k-i}| \tag{37}$$

$$i-1 \leq |\beta_i \cap \beta'_i| \tag{38}$$

Por lo tanto

$$|\sigma \cap \sigma'| = k-1 \text{ si y solo si} \tag{39}$$

$$|\alpha_{k-i} \cap \alpha'_{k-i}| = k-i, \text{ y } |\beta_i \cap \beta'_i| = i-1 \text{ ó} \tag{40}$$

$$|\alpha_{k-i} \cap \alpha'_{k-i}| = k-i-1, \text{ y } |\beta_i \cap \beta'_i| = i \tag{41}$$

De la expresiones (40) y (41) obtenemos los términos

$$I_{\binom{k}{k-i}} \otimes A_1^{\binom{n-k}{i}} \text{y } A_1^{\binom{k}{k-i}} \otimes I_{\binom{n-k}{i}}$$

respectivamente y por lo tanto se prueba el lema.

■

Observación:

Para describir los bloques diagonales de $A_1 \in J(n,k)$ hemos usado álgebras de adyacencia de diferentes esquemas de Johnson.

Si $\mathcal{B}_{\binom{n}{k}}$ el álgebra de Bose-Mesner correspondiente a un esquema de tipo $J(n,k)$, hemos visto que

$$A_{\Omega_i\times\Omega_i} \in \mathcal{B}_{\binom{k}{k-i}} \otimes \mathcal{B}_{\binom{n-k}{i}}.$$

Para los bloques fuera de la diagonal necesitamos definir una especie de "generalización"de matrices de adyacencia.

1.2.2. Bloques $\Omega_i \times \Omega_{i+1}$. Las matrices que necesitaremos para describir A_1, están definidas en [**G**] como "matrices de incidencia".

En esta sección damos su definición y más adelante realizamos cálculos que involucran dichas matrices. Algunos de ellos están hechos en el libro citado. Evitamos omitirlos con el propósito de de tener a mano todos los cálculos necesarios.

Definición 3.2. ***Matrices de identidad generalizadas***

Supongamos que $m < n$. Sea $\delta_{m,n}$ la matriz indexada por elementos de $J(v,m) \times J(v,n)$ y definida por

$$(\delta_{m,n})_{\alpha_m\alpha_n} = \begin{cases} 1 & \alpha_m \subseteq \alpha_n \\ 0 & c.c \end{cases}.$$

Si $m > n$ la definición es análoga cambiando $\subseteq$ por $\supseteq$.

Observaciones:

- Si $m = n, \delta_{m,m} = I$ de tamaño $\binom{v}{m} \times \binom{v}{m}$
- $\delta_{v,n} = \delta_{0,n} = (1, ..., 1)$ vector fila de tamaño $\binom{v}{n}$
- $\delta_{m,v} = \delta_{v,0} = (1, ..., 1)^t$ vector columna de tamaño $\binom{v}{m}$
- $\delta_{v,v} = \delta_{0,0} = 1$

Lema 3.3. *Para $i = 0, 1...k-1$ se tiene*

$$(A_1)_{\Omega_i\times\Omega_{i+1}} = \delta_{k-i,k-i-1} \otimes \delta_{i,i+1}. \tag{42}$$

Prueba:

Una entrada del bloque $\Omega_i \times \Omega_{i+1}$ está indexada por σ, σ' donde

$$\sigma = \alpha_{k-i}\ \beta_i,\ \sigma' = \alpha'_{k-i-1}\ \beta'_{i+1}$$

con

$$\begin{array}{rcl} \alpha_{k-i} & \in & J(k,k-i),\ \alpha'_{k-i-1} \in J(k,k-i-1) \text{ y} \\ \beta_i & \in & J(n-k,i),\ \beta'_{i+1} \in J(n-k,i+1) \end{array}$$

La igualdad en (42) se deduce de los siguientes hechos:

$$\begin{array}{rcl} |\sigma\cap\sigma'| & = & |\alpha_{k-i}\cap\alpha'_{k-i-1}| + |\beta_i\cap\beta'_{i+1}| \\ |\alpha_{k-i}\cap\alpha'_{k-i-1}| & \leq & k-i-1 \\ |\beta_i\cap\beta'_{i+1}| & \leq & i. \end{array}$$

Si además queremos que $A_{\sigma,\sigma'} = 1$ entonces

$$|\sigma\cap\sigma'| = k-1 \text{ ,lo cual implica}$$

$$|\alpha_{k-i}\cap\alpha'_{k-i-1}| = k-i-1 \text{ y } |\beta_i\cap\beta'_{i+1}| = i.$$

Por lo tanto se prueba el lema

$\blacksquare$

1.2.3. Bloques $\Omega_i \times \Omega_{i+l}$ $l \geq 2$.

LEMA 3.4. *Para $i = 0, 1 \ldots k - l$ se tiene*

$$(A_1)_{\Omega_i \times \Omega_{i+l}} = 0. \tag{43}$$

Prueba:
Una entrada del bloque $\Omega_i \times \Omega_{i+l}$ está indexada por σ, σ' donde .

$$\sigma = \alpha_{k-i}\ \beta_i,\ \sigma' = \alpha'_{k-i-l}\ \beta'_{i+l}$$

con

$$\begin{array}{lll} \alpha_{k-i} & \in & J(k, k-i),\ \alpha'_{k-i-l} \quad \in \quad J(k, k-i-l) \text{ y} \\ \beta_i & \in & J(n-k, i),\ \beta'_{i+l} \quad\ \ \in \quad J(n-k, i+l) \end{array} .$$

La igualdad en (43) se deduce de los siguientes hechos:

$$\begin{aligned} |\sigma \cap \sigma'| &= |\alpha_{k-i} \cap \alpha'_{k-i-l}| + |\beta_i \cap \beta'_{i+l}| \\ |\alpha_{k-i} \cap \alpha'_{k-i-l}| &\leq k - i - l \\ |\beta_i \cap \beta'_{i+l}| &\leq i. \end{aligned}$$

Si $l \geq 2$, entonces

$$|\sigma \cap \sigma'| \leq k - 2 \text{ , y entonces}$$
$$\forall\ \sigma \in \Omega_i,\ \sigma' \in \Omega_{i+l}$$
$$(A_1)_{\sigma\sigma'} = 0$$

y por lo tanto se prueba el lema.

■

2. T-álgebra

Con la descripción de los bloques de A, y pensando que T contiene las potencias de A y las multiplicaciones AE_i^*, en esta sección describimos dicha álgebra.

Definiremos $\mathcal{M} \subseteq End(\mathbb{C}^{\binom{n}{k}})$, probaremos que es un álgebra y luego veremos que resultará ser isomorfa a T.

2.1. Definición del álgebra $\mathcal{M}$.

Con la definición dada en (3.2) consideramos las matrices:

$$\begin{array}{ll} \delta_{k-i,k-j} & \text{indexada por elementos en } J(k, k-i) \times J(k, k-j) \\ \delta_{i,j} & \text{indexada por elementos en } J(n-k, i) \times J(n-k, j). \end{array}$$

Sea $\mathcal{B}_{\binom{n}{k}}$ el álgebra de Bose-Mesner correspondiente a un esquema de tipo $J(n, k)$.
Recordemos que si $v < 2d$ consideramos

$$\mathcal{B}_{\binom{v}{d}} \simeq \mathcal{B}_{\binom{v}{v-d}} = \langle E_0, E_1 \ldots E_{v-d} \rangle.$$

Para $i = 0, 1 \ldots k,\ i < j\ 3k \leq n$ definimos:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{i,j} &= \mathcal{B}_{\binom{k}{k-i}}\ \delta_{k-i,k-j}\ \otimes \mathcal{B}_{\binom{n-k}{i}}\ \delta_{i,j} \quad i \leq j \\ \mathcal{M}_{i,j} &= \mathcal{M}_{ij}^t\ i > j. \end{aligned}$$

($\otimes$ producto de Kr.)

Observaciones:

- $\mathcal{M}_{i,i} = \mathcal{B}_{\binom{k}{k-i}} \otimes \mathcal{B}_{\binom{n-k}{i}}$ pues $\delta_{i,i} = I$

- $\mathcal{M}_{0,0} = \mathcal{B}_{\binom{k}{k}} \otimes \mathcal{B}_{\binom{n-k}{0}} = 1 \otimes 1 = 1$
- $\mathcal{M}_{0,j} = \mathcal{B}_{\binom{k}{k}}\ \delta_{k,k-j} \otimes \mathcal{B}_{\binom{n-k}{0}}\ \delta_{0,j} = \lambda(1,1,\ldots,1) \otimes (1,1,\ldots,1)$
- $\mathcal{M}_{k,k} = \mathcal{B}_{\binom{n-k}{k}}$
- $\mathcal{M}_{j,k} = \mathcal{B}_{\binom{k}{k-j}}\ \delta_{k-j,0}\ \otimes \mathcal{B}_{\binom{n-k}{i}}\ \delta_{i,k} = \lambda(1,1,\ldots,1)^t \otimes \mathcal{B}_{\binom{n-k}{j}} \delta_{j,k}$

En nuestro caso, como

$$3k \le n \text{ y } \quad 0 \le i \le k,$$
$$\text{entonces } \ 2i \le 2k \le n-k$$

lo que implica que para la primera y segunda coordenada del producto de $\mathcal{M}_{ii}$ se cumple que:

$$dim\ \mathcal{B}_{\binom{k}{k-i}} = \begin{cases} i & \text{si } i < \frac{k}{2} \\ k-i & \text{si } i \ge \frac{k}{2} \end{cases} \tag{44}$$

$$dim\ \mathcal{B}_{\binom{n-k}{i}} = i. \tag{45}$$

Es decir que

$$dim\ \mathcal{M}_{ii} \quad = \quad \mathcal{B}_{\binom{k}{k-i}} \otimes \mathcal{B}_{\binom{n-k}{i}} = min\ (k-i,i)\ i.$$

También usaremos la siguiente escritura:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{ii} &= \langle \{ E_m^{\binom{k}{k-i}} \otimes E_n^{\binom{n-k}{i}} \} \rangle \\ \mathcal{M}_{ij} &= \langle \{ E_m^{\binom{k}{k-i}}\ \delta_{k-i,k-j} \otimes E_n^{\binom{n-k}{i}}\ \delta_{i,j} \} \rangle \end{aligned}$$

donde el supraíndice de los proyectores, indica el álgebra a la que pertenecen.

Definición 3.5. $\mathcal{M} = \oplus_{ij}\mathcal{M}_{ij}$ *Un elemento* $m \in \mathcal{M}$ *se escribe unívocamente*

$$m = \sum_{ij} m_{ij} \ \textit{con}\ m_{ij} \in \mathcal{M}_{ij}$$

El producto $*$ *de dos elementos* m_{ij}, m_{kl} *se define :*

$$m_{ij} * m_{kl} = \begin{cases} \textit{el producto usual de matrices si } j = k \\ 0 \ \textit{si } j \ne k \end{cases}$$

y entonces dados $m, m' \in \mathcal{M}$

$$m * m' = (\sum_{ij} m_{ij})(\sum_{ij} m'_{ij}) = \sum_{i,j,l} (m_{ij} * m'_{jl})$$

2.2. $(\mathcal{M}, *)$ **es un álgebra.**

Los siguientes lemas servirán para probar la afirmación. Antes de enunciarlos definimos las siguientes matrices, que serán útiles para describir $\mathcal{M}_{ij}$ $i \ne j$, los bloques no diagonales de $\mathcal{M}$

Definición 3.6. ***Matrices de adyacencia generalizadas***
Sea $\delta^r_{i,j}$ *la matriz indexada por elementos de* $J(v,i) \times J(v,j)$ *y definida por*

$$(\delta^r_{i,j})_{\alpha_i\alpha_j} = \begin{cases} 1 \ \textit{si } |\alpha_i \cap \alpha_j| = r \\ 0 \ \textit{c.c.} \end{cases} .$$

Observaciones:

- Las matrices definidas en (3.2) son un caso particular de éstas.
  Si $i < j$

$$\begin{aligned} \delta_{k-i,k-j} &= \delta^{k-j}_{k-i,k-j} \\ \delta_{i,j} &= \delta^{i}_{i,j}. \end{aligned}$$

  (las matrices de identidad generalizadas son las A_0 generalizadas)
- Si $i = j \Rightarrow \delta^r_{i,i} = A_r$
  la r-ésima matriz de adyacencia indexada por elementos de $J(v,i) \times J(v,i)$.
- Fijados i, j es fácil ver que las posibles intersecciones entre

$$\alpha_i \in J(v,i), \alpha_j \in J(v,j)$$

  (y por lo tanto la cantidad de matrices $\delta^r_{i,j}$), varían

(46) $$max(0, i+j-v) \ \leq r \leq \ min(i,j)$$

  Para r fuera de tal rango definimos $\delta^r_{i,j} = 0$

En el siguiente lema realizamos cálculos que serán útiles para el resto del capítulo

Lema 3.7. *Sea $A^{\binom{v}{d}}_m$ la m-ésima matriz de adyacencia de $J(v,d)$ y $\delta^r_{d,d+l}$ las matrices de adyacencia generalizadas definidas en (3.6) . Entonces*

(47) $$A^{\binom{v}{d}}_m \delta_{d,d+l} = \sum_{j=0}^{min(l,m)} \tbinom{m+l-j}{m}\tbinom{d-m+j}{d-m}\delta^{d-m+j}_{d,d+l}$$

(48) $$\delta_{d,d+l} A^{\binom{v}{d+l}}_m = \sum_{j=max(0,l-m)}^{l} \tbinom{m+j}{j}\tbinom{v-d-m-j}{l-j}\delta^{d+l-m-j}_{d,d+l}.$$

Prueba:
Probaremos la primera afirmación. Dados

$$\alpha_d \ \in \ J(v,d), \ \alpha'_{d+l} \ \in \ J(v,d+l) \text{ tal que } |\alpha_d, \cap \alpha'_{d+l}| = d-m+j,$$

la entrada $(\alpha_d, \alpha'_{d+l})$ del producto $A^{\binom{v}{d}}_m \delta_{d,d+l}$ viene dada por el cálculo:

$$\begin{aligned} (A^{\binom{v}{d}}_m \delta_{d,d+l})(\alpha_d, \alpha'_{d+l}) &= \sum_{\beta_d \in J(v,d)} A^{\binom{v}{d}}_m(\alpha_d,\beta_d)\ \delta_{d,d+l}(\beta_d, \alpha'_{d+l}) \\ &= \#\{\ \beta_d \in\ J(v,d),\ \text{que satisfacen: } |\alpha_d \cap \beta_d| = d-m \ \text{ y } \ \beta_d \subseteq \alpha'_{d+l} \\ &\quad \text{dado que } |\alpha_d \cap \alpha'_{d+l}| = d-m+j\ \} \\ &= C_{d-m+j} \ (\text{coeficiente de } \delta^{d-m+j}_{d,d+l}). \end{aligned}$$

Probemos que el coeficiente es:

$$C_{d-m+j} = \tbinom{m+l-j}{m}\tbinom{d-m+j}{d-m}.$$

Si $|\alpha_d \cap \alpha_{d+l}| = d-m+j$ debemos contar la cantidad de β_d tal que

$$\begin{aligned} |\alpha_d \cap \beta_d| &= d-m \\ \beta_d &\subseteq \alpha'_{d+l}. \end{aligned}$$

La segunda condición dice que todos los elementos de β_d deben ser tomados de α'_{d+l}.
Elegimos $d-m$ elementos de entre los $d-m+j$ de la intersección $\alpha_d \cap \alpha'_{d+l}$ y los restantes m elementos de los $m+l-j$ que α'_{d+l} no comparte con α_d.
De este modo se cumplen las condiciones, y hemos probado la expresión para el coeficiente.

Observamos que si $|\alpha_d \cap \alpha'_{d+l}| < d-m$ no es posible encontrar β_d ya que entonces no podemos elegir $d-m$ elementos comunes a β_d y α'_{d+l} y entonces

$$|\alpha_d \cap \beta_d| < d-m.$$

Para probar la segunda afirmación, tomamos

$$\alpha_d \ \in \ J(v,d), \ \alpha^{'}_{d+l} \ \in \ J(v,d+l) \text{ tal que } |\alpha_d \cap \ \alpha^{'}_{d+l}| = d+l-m-j$$

y calculamos la entrada $(\alpha_d, \alpha^{'}_{d+l})$ del producto $(\delta_{d,d+l} A_m^{\binom{v}{d+l}})$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
(\delta_{d,d+l} A_m^{\binom{v}{d+l}})(\alpha_d, \alpha^{'}_{d+l}) &= \sum_{\beta_{d+l}} \delta_{d,d+l}(\alpha_d, \beta_{d+l}) A_m^{\binom{v}{d+l}}(\beta_{d+l}, \alpha^{'}_{d+l}) \\
&= \#\{\beta_{d+l}, \text{ que satisfacen:}, \ \alpha_d \subseteq \beta_{d+l} \text{ y } \ |\beta_{d+l} \cap \ \alpha^{'}_{d+l}| = d+l-m \\
&\quad \text{dado que } |\alpha_d \cap \alpha^{'}_{d+l}| = d+l-m-j\} \\
&= C_{d+l-m-j} \text{ (coeficiente de } \delta_{d,d+l}^{d+l-m+j}).
\end{aligned}$$

También es fácil ver que:

$$C_{d+l-m-j} = \tbinom{m+j}{j}\tbinom{v-d-m-j}{l-j}.$$

Si $|\beta_d \cap \alpha'_{d+l}| = d+l-m$ debemos contar la cantidad de β_{d+l} tal que

$$\begin{aligned}
|\beta_{d+l} \cap \alpha'_{d+l}| &= d+l-m \\
\beta_{d+l} &\supseteq \alpha_d.
\end{aligned}$$

La segunda condición dice que ya tenemos d elementos fijos. Para elegir los restantes l, y que se cumpla la primera condición tomamos j elementos de los $m+j$ que α_d y α'_{d+l} no comparten y los restantes $l-j$ en el complemento de $\alpha_d \cup \alpha'_{d+l}$. Es fácil chequear que

$$|\alpha_d \cup \alpha'_{d+l}| = d+m+j,$$

de lo que surge la expresión para el coeficiente.

■

Lema 3.8. *Consideremos las mismas hipótesis del lema anterior. Tomemos*

$$R = \{r, \ / \ \delta^r_{d,d+l} \neq 0\}.$$

Entonces las expresiones

$$\left\{\delta_{d,d+l}, \ A_1^{\binom{v}{d}}\delta_{d,d+l}, \ A_2^{\binom{v}{d}}\delta_{d,d+l} \ldots, A_m^{\binom{v}{d}}\delta_{d,d+l}, \ldots, \ A_{|R|-1}^{\binom{v}{d}}\delta_{d,d+l}\right\} \ \in \mathcal{B}_{\binom{v}{d}}\delta_{d,d+l}$$

son linealmente independientes entre sí y se expresan como combinación lineal de los $\delta^r_{d,d+l}$ $r \in R$.
Análogamente

$$\left\{\delta_{d,d+l}, \delta_{d,d+l}A_1^{\binom{v}{d+l}}, \ldots, \ \delta_{d,d+l}A_m^{\binom{v}{d+l}}, \ldots, \delta_{d,d+l}A_{|R|-1}^{\binom{v}{d+l}}\right\} \in \delta_{d,d+l}\mathcal{B}_{\binom{v}{d+l}}$$

son linealmente independientes y se expresan como combinación lineal de los $\delta^r_{d,d+l}$ $r \in R$.

Prueba:

Es claro que, por la forma de definir las matrices,

$$\{\delta^r_{d,d+l}\}_{r\in R}$$

éstas son linealmente independientes entre sí y además

$$\sum_{r\in R}\delta^r_{d,d+l}=J_{\binom{v}{d}\times\binom{v}{d+l}}.$$

(la matriz de todos $1s$ de tamaño $\binom{v}{d}\times\binom{v}{d+l}$)

Veamos que tanto las matrices de

$$A_m^{\binom{v}{d}}\delta_{d,d+l}\ m=0,1,\ldots,|R|-1,\ \text{como las de } \delta_{d,d+l}A_m^{\binom{v}{d+l}}\ m=0,1,\ldots,|R|-1$$

son linealmente independiente entre si.

Fijado un l, según las fórmulas dada por lema anterior tenemos que para $m\leq l$, tanto

$$A_m^{\binom{v}{d}}\delta_{d,d+l}\text{ como }\delta_{d,d+l}A_m^{\binom{v}{d+l}}$$

se escriben como combinación lineal de

$$\delta^{d-m}_{d,d+l},\ldots,\delta^{d}_{d,d+l}.$$

Para $d\geq m>l$, ambas expresiones se escriben como combinación lineal de

$$\delta^{d-m}_{d,d+l},\ldots,\delta^{d-m+l}_{d,d+l}$$

Con lo cual deducimos que fijado un $m=0,\ldots,d$ tanto

$$A_m^{\binom{v}{d}}\delta_{d,d+l}\text{ como }\delta_{d,d+l}A_m^{\binom{v}{d+l}}$$

"utilizan" los mismos $\delta^r_{d,d+l}$ (sean nulos o no).

Es decir que para $m=0,1,...,d$ la matriz de $A_m^{\binom{v}{d}}\delta_{d,d+l}$ en términos de $\delta^r_{d,d+l}$ es de la forma

$$\left(\begin{array}{ccccc|cccccc}
0 & & \cdots & & 0 & & & & & 0 & * \\
0 & & \cdots & & 0 & & & & & * & * \\
0 & & \cdots & & 0 & & & & * & * & * \\
0 & & \cdots & & 0 & & & * & * & * & 0 \\
0 & & \cdots & & 0 & & * & * & * & 0 & 0 \\
0 & & \cdots & & 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\
0 & & \cdots & & 0 & & & & & 0 & 0 \\
\cdots & & & & & & & & & & \\
\cdots & & & & & & & & & & \\
\cdots & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & \cdots & 0 & * & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & * & * & 0 & 0 & * & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & * & * & 0 & * & * & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & * & * & * & * & * & \cdots & 0 & 0 \\
0 & * & \cdots & * & * & * & * & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
* & * & \cdots & * & * & * & 0 & 0 & \cdots & 0 &
\end{array}\right)\qquad \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\}\text{ancho } l+1 \tag{49}$$

donde las * representan elementos no nulos.

Los coeficientes de la antidiagonal son $\binom{m+l}{m}\neq 0$ variando m.

Análogamente las matrices de $\delta_{d,d+l}A_m^{\binom{v}{d+l}}$ en términos de $\delta^r_{d,d+l}$ tiene la misma forma, donde los coeficientes de antidiagonal son $\binom{m+l}{l} \neq 0$ variando m.

Ahora bien, considerando la acción a izquierda (es decir mirando $A_m^{\binom{v}{d}}\delta_{d,d+l}$), ¿cuántas de estas expresiones son l.i.?. (la misma pregunta para la acción a derecha)

La matriz en (49) nos muestra que la respuesta depende del rango R tal que

$$\delta^r_{d,d+l} \neq 0 \ r \in R.$$

Por ejemplo si

$$R = \{0, 1, ..., d\},$$

entonces para todo $m = 0, 1, ..., d$ las matrices son l.i. (la antidiagonal es no nula !) Recordando las cotas para r dadas en (46) tenemos que

$$max(0, 2d + l - v) \leq r \leq d,$$

luego la forma de la matriz (49) nos dice que si $f = d - max(0, 2d + l - v)$, entonces

$$\left\{\delta_{d,d+l},\ A_1^{\binom{v}{d}}\delta_{d,d+l},\ A_2^{\binom{v}{d}}\delta_{d,d+l}\ldots, A_m^{\binom{v}{d}}\delta_{d,d+l},\ldots,\ A_f^{\binom{v}{d}}\delta_{d,d+l}\right\} \subseteq \mathcal{B}_{\binom{v}{d}}\delta_{d,d+l} \text{ son l. i.}$$

$$\left\{\delta_{d,d+l}, \delta_{d,d+l}A_1^{\binom{v}{d+l}}, \ldots,\ \delta_{d,d+l}A_m^{\binom{v}{d+l}}, \ldots, \delta_{d,d+l}A_f^{\binom{v}{d+l}}\right\} \subseteq \delta_{d,d+l}\mathcal{B}_{\binom{v}{d+l}} \text{ son l.i.}$$

(la submatriz con columnas $\delta_{d,d+l},\ A_1^{\binom{v}{d}}\delta_{d,d+l},\quad A_f^{\binom{v}{d}}\delta_{d,d+l}$ tiene determinante no nulo) Por último observamos que $f = |R| - 1$.

■

Corolario 3.9.

$$\mathcal{B}_{\binom{v}{d}}\ \delta_{d,d+l} = \delta_{d,d+l}\ \mathcal{B}_{\binom{v}{d+l}} = \langle\{\delta^r_{d,d+l}\}_{r\in R}\rangle.$$

Prueba:
Es inmediata de los dos lemas anteriores

■

Corolario 3.10.

$$\mathcal{M}_{ij} = \mathcal{B}_{\binom{k}{k-i}}\ \delta_{k-i,k-j}\ \mathcal{B}_{\binom{k}{k-j}} \otimes \mathcal{B}_{\binom{n-k}{i}}\ \delta_{i,j}\ \mathcal{B}_{\binom{n-k}{j}}\ \ i < j.$$

Prueba:
Por colorario anterior

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{\binom{k}{k-i}}\ \delta_{k-i,k-j}\ \mathcal{B}_{\binom{k}{k-j}} \otimes \mathcal{B}_{\binom{n-k}{i}}\ \delta_{i,j}\ \mathcal{B}_{\binom{n-k}{j}} &= \mathcal{B}_{\binom{k}{k-i}}\ \delta_{k-i,k-j}\ \otimes \mathcal{B}_{\binom{n-k}{i}}\ \delta_{i,j} \\
&= \mathcal{M}_{ij}
\end{aligned}$$

lo que prueba el Corolario.

■

Lema 3.11. *Dados*

$$\begin{aligned}
\delta_{k-i,k-j} \otimes \delta_{i,j} &\in \mathcal{M}_{ij} \\
\delta_{k-j,k-l} \otimes \delta_{j,l} &\in \mathcal{M}_{jl}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
(\delta_{k-i,k-j} \otimes \delta_{i,j})(\delta_{k-j,k-l} \otimes \delta_{j,l}) &\in \mathcal{B}_{\binom{k}{k-i}}\ \delta_{k-i,k-l}\ \mathcal{B}_{\binom{k}{k-l}}\ \otimes \mathcal{B}_{\binom{n-k}{i}}\ \delta_{i,l}\ \mathcal{B}_{\binom{n-k}{l}} \\
&= \mathcal{M}_{il}.
\end{aligned}$$

Prueba:
Para probar el lema basta hacer el cálculo general

$$\delta_{m,n}\ \delta_{n,p}\ ,$$

donde $\delta_{m,n}$ está indexado por elementos en $J(v,m)\times J(v,n)$.
Distinguimos tres casos:

Caso a:
Para $m\leq n\leq p=0,1,\ldots,k$

$$(\delta_{m,n}\delta_{n,p})=\tbinom{p-m}{p-n}\delta_{m,p}. \tag{50}$$

Prueba:

Si $m<n<p$

$$\begin{aligned}\delta_{m,n} &\in J(v,m)\times J(v,n)\\ \delta_{n,p} &\in J(v,n)\times J(v,p),\end{aligned}$$

luego, una entrada del producto

$$\delta_{m,n}\delta_{n,p}\ \text{ esta indexada por } (\beta_m,\beta_p)\in J(v,m)\times J(v,p)$$

y viene dada por el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned}(\delta_{m,n}\ \delta_{n,p})(\beta_m,\beta_p) &= \sum_{\beta_n\in J(v,n)}\delta_{m,n}(\beta_m,\beta_n)\delta_{n,p}(\beta_n,\beta_p)\\ &= \#\{\beta_n\ \text{ tal que } \beta_m\ \subseteq\beta_n\subseteq\beta_p\}\\ &= C^a_{m,p}\ .\end{aligned}$$

Es fácil ver que

$$C^a_{m,p}=\begin{cases}\binom{p-m}{p-n} & \text{si } \beta_m\ \subseteq\beta_p\\ 0 & \text{c.c. },\end{cases}$$

con lo cual hemos probado el **Caso a**.

Caso b:
Para $m\leq p\leq n,\ p=0,1,\ldots,k$.

$$(\delta_{m,n}\ \delta_{n,p}) = \sum_{j=0}\tbinom{v-p-j}{n-p-j}\delta^{m-j}_{m,p}\ \in\mathcal{M}_{m,p}\ . \tag{51}$$

Prueba:
Una entrada del producto

$$\delta_{m,n}\delta_{n,p} \text{ está indexada por } (\beta_m,\beta_p)\in J(v,m)\times J(v,p),$$

y viene dada por el siguiente cálculo :

$$(\delta_{m,n}\ \delta_{n,p})(\beta_m,\beta_p) = \sum_{\beta_n\in J(v,n)}\delta_{m,n}(\beta_m,\beta_n)\delta_{n,p}(\beta_n,\beta_p) \tag{52}$$

$$= \#\{\beta_n\ \text{ tal que } \beta_m\ \subseteq\beta_n \text{ y } \beta_p\subseteq\beta_n\} \tag{53}$$

$$= C^b_{m,p}\ . \tag{54}$$

A diferencia del Caso a, el coeficiente $C^b_{m,p}$ depende de la intersección entre β_m y β_p.
El término

$$\tbinom{v-p-j}{n-p-j}\delta^{m-j}_{m,p}$$

viene de calcular (53), cuando $|\beta_m \cap \beta_p| = m - j$
con lo cual hemos probado el **Caso b** .

Caso c:
Para $m \geq p \geq n,\ m = 0, 1, \ldots, k$

$$(55) \qquad (\delta_{m,n}\ \delta_{n,p}) \quad = \quad \sum_{j=0}^{p-n} \binom{p-j}{n} \delta_{m,p}^{p-j} \ \in \mathcal{M}_{m,p}.$$

Prueba:

$$
\begin{aligned}
(56) \qquad (\delta_{m,n}\ \delta_{n,p})(\beta_m, \beta_p^{'}) &= \sum_{\beta_n \in J(v,n)} \delta_{m,n}(\beta_m, \beta_n)\delta_{n,m}(\beta_n, \beta_p^{'}) \\
(57) \qquad &= \#\{\beta_n \ \text{ tal que } \beta_n \ \subseteq \beta_m \text{ y } \beta_n \subseteq \beta_p^{'}\} \\
(58) \qquad &= C_{m,p}^{c} \ .
\end{aligned}
$$

Al igual del Caso b, el coeficiente $C_{m,p}^{c}$ depende de la intersección entre β_m y $\beta_p^{'}$.
El término

$$\binom{p-j}{n} \delta_{m,p}^{p-j}$$

viene de calcular (57) , cuando $|\beta_m \cap \beta_p^{'}| = p - j$, con lo cual hemos probado el **Caso c**.

$\blacksquare$

COROLARIO 3.12.

$$\mathcal{M}_{ij}\mathcal{M}_{jl} \subseteq \mathcal{M}_{il} \quad \textit{y por lo tanto } \mathcal{M} \textit{ es un álgebra.}$$

Prueba:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_{ij}\mathcal{M}_{jl} &= \left(\mathcal{B}_{\binom{k}{k-i}}\ \delta_{k-i,k-j} \ \otimes \mathcal{B}_{\binom{n-k}{i}}\ \delta_{i,j} \right) \left(\delta_{k-j,k-l}\ \mathcal{B}_{\binom{k}{k-l}} \otimes\ \delta_{j,l}\ \mathcal{B}_{\binom{n-k}{l}} \right) \\
&= \mathcal{B}_{\binom{k}{k-i}}\ \delta_{k-i,k-j}\ \delta_{k-j,k-l}\ \mathcal{B}_{\binom{k}{k-l}} \ \otimes \mathcal{B}_{\binom{n-k}{i}}\ \delta_{i,j}\ \delta_{j,l}\ \mathcal{B}_{\binom{n-k}{l}} \\
&\subseteq \mathcal{B}_{\binom{k}{k-i}}\ \delta_{k-i,k-l}\ \mathcal{B}_{\binom{k}{k-l}} \ \otimes \mathcal{B}_{\binom{n-k}{i}}\ \delta_{i,l}\ \mathcal{B}_{\binom{n-k}{l}} \text{ por lema anterior} \\
&= \mathcal{M}_{il} \text{ por Corolario 3.10.}
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

2.3. Ejemplo: el álgebra $\mathcal{M}$ de $J(12, 4)$.

Tomemos $J(12, 4)$ y describamos parte del álgebra $\mathcal{M}$ (que luego probaremos será su T-álgebra asociada).

Por ejemplo tenemos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_{11} &= \mathcal{B}_{\binom{4}{3}} \otimes \mathcal{B}_{\binom{8}{1}} \\
\mathcal{M}_{22} &= \mathcal{B}_{\binom{4}{2}} \otimes \mathcal{B}_{\binom{8}{2}}
\end{aligned}
$$

donde debemos recordar que

$$\mathcal{B}_{\binom{4}{3}} \simeq \mathcal{B}_{\binom{4}{1}}$$

o también recordemos las distintas expresiones de

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_{12} &= \mathcal{B}_{\binom{4}{3}}\delta_{3,2}\otimes\mathcal{B}_{\binom{8}{1}}\delta_{1,2}\\
&= \delta_{3,2}\mathcal{B}_{\binom{4}{2}}\otimes\delta_{1,2}\mathcal{B}_{\binom{8}{2}}
\end{aligned}
$$

donde cada elemento puede ser escrito como combinación lineal de

$$
\mathcal{M}_{12} = \langle\{\delta_{3,2}^{r}\otimes\delta_{1,2}^{s}\}_{r=1,s=0}^{2,1}\rangle
$$

O por ejemplo

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_{3,4} &= \mathcal{B}_{\binom{4}{1}}\delta_{1,0}\otimes\mathcal{B}_{\binom{8}{3}}\delta_{3,4}\\
&= \mathcal{B}_{\binom{4}{1}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\otimes\mathcal{B}_{\binom{8}{3}}\delta_{3,4}\\
&= \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\mathcal{B}_{\binom{4}{0}}\otimes\delta_{3,4}\mathcal{B}_{\binom{8}{4}}\\
&= \left\langle\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\otimes\delta_{3,4}^{s}\right\}_{s=0}^{3}\right\rangle
\end{aligned}
$$

etc...

3. $T=\mathcal{M}$

En esta sección probaremos que T-álgebra asociada a un esquemas de Johnson $J(n,k)$ con $3k\leq n$ es el álgebra $\mathcal{M}$ definida anteriormente.
Para ello necesitaremos una técnica de "inclusión " de álgebras de adyacencia que describimos abajo.

3.1. Cadenas de álgebras de adyacencia.

El propósito de esta sección es mostrar que; dado un esquema $J(n,k)$ y el álgebra asociada $\mathcal{M}$; en "cierto sentido" (que definiremos luego) se tiene que:

$$
\mathcal{M}_{i,i}\subseteq\mathcal{M}_{i+1,i+1}
$$

Más concretamente recordemos que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_{i,i} &= \mathcal{B}_{\binom{k}{k-i}}\otimes\mathcal{B}_{\binom{n-k}{i}}\\
&= \{E_m^{\binom{k}{k-i}}\otimes E_n^{\binom{n-k}{i}}\}_{m,n=0}^{min\ (k-i,i)}
\end{aligned}
$$

Lo que queremos significar con la inclusión es que si $\mathcal{M}$ es un álgebra a cada idempotente no nulo

$E_m^{\binom{k}{k-i}}\otimes E_n^{\binom{n-k}{i}}\in\mathcal{M}_{i,i}$ podemos asociarle el correspondiente idempotente
$E_m^{\binom{k}{k-i-1}}\otimes E_n^{\binom{n-k}{i+1}}\in\mathcal{M}_{i+1,i+1}$

(Observación: si $E_m^{\binom{k}{k-i-1}}\otimes E_n^{\binom{n-k}{i+1}}=0\in\mathcal{M}_{i+1,i+1}$ le asociamos la matriz nula)

Recíprocamente a cada idempotente no nulo

$E_m^{\binom{k}{k-i-1}} \otimes E_n^{\binom{n-k}{i+1}} \in \mathcal{M}_{i+1,i+1}$ podemos asociarle el correspondiente idempotente
$E_m^{\binom{k}{k-i}} \otimes E_n^{\binom{n-k}{i}} \in \mathcal{M}_{i,i}$

(y análogamente si $E_m^{\binom{k}{k-i}} \otimes E_n^{\binom{n-k}{i}} = 0 \in \mathcal{M}_{i,i}$ le asociamos la matriz nula)

En lo que sigue definimos formalmente la forma de "subir" un proyector

$$E_m^{\binom{k}{k-i}} \otimes E_n^{\binom{n-k}{i}} \in \mathcal{M}_{i,i} \longrightarrow E_m^{\binom{k}{k-i-1}} \otimes E_n^{\binom{n-k}{i+1}} \in \mathcal{M}_{i+1,i+1}$$

o de "bajar"

$$E_m^{\binom{k}{k-i-1}} \otimes E_n^{\binom{n-k}{i+1}} \in \mathcal{M}_{i+1,i+1} \longrightarrow E_m^{\binom{k}{k-i}} \otimes E_n^{\binom{n-k}{i}} \in \mathcal{M}_{i,i}$$

Por simplicidad solo hacemos las cuentas sobre una coordenada del producto y consideramos un proyector general $E_r^{\binom{v}{d}} \in \mathcal{B}_{\binom{v}{d}}$

Definición 3.13. *Dado el idempotente* $E_r^{\binom{v}{d}} \in \mathcal{B}_{\binom{v}{d}}$ *definimos*

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{d,d+1} : \mathcal{B}_{\binom{v}{d}} &\longrightarrow \mathcal{B}_{\binom{v}{d+1}} \\
E_r^{\binom{v}{d}} &\longrightarrow \delta_{d+1,d}\; E_r^{\binom{v}{d}}\; \delta_{d,d+1} \\
\mathcal{I}_{d,d-1} : \mathcal{B}_{\binom{v}{d}} &\longrightarrow \mathcal{B}_{\binom{v}{d-1}} \\
E_r^{\binom{v}{d}} &\longrightarrow \delta_{d-1,d}\; E_r^{\binom{v}{d}}\; \delta_{d,d-1}
\end{aligned}$$

Tenemos el siguiente resultado:

Lema 3.14.

$$\mathcal{I}_{d,d+1}(E_r^{\binom{v}{d}}) \text{ es un múltiplo de } E_r^{\binom{v}{d+1}} \in \mathcal{B}_{\binom{v}{d+1}}$$

$$\mathcal{I}_{d,d-1}(E_r^{\binom{v}{d}}) \text{ es un múltiplo de } E_r^{\binom{v}{d-1}} \in \mathcal{B}_{\binom{v}{d-1}}.$$

Prueba:
Analicemos la primera afirmación:
Que $\mathcal{I}_{d,d+1}(E_r^{\binom{v}{d}}) \subseteq \mathcal{B}_{\binom{v}{d+1}}$ se deduce del hecho de que $\mathcal{M}$ definida en el capítulo anterior es un álgebra.
Veamos primero que $\mathcal{I}_{d,d+1}(E_r^{\binom{v}{d}})$ es múltiplo de un idempotente en $\mathcal{B}_{\binom{v}{d+1}}$ $\forall r = 0, 1 \ldots, d$.
Por la definición tenemos que

$$\mathcal{I}_{d,d+1}(E_r^{\binom{v}{d}})\; \mathcal{I}_{d,d+1}(E_s^{\binom{v}{d}}) = \delta_{d+1,d} E_r^{\binom{v}{d}} \delta_{d,d+1}\; \delta_{d+1,d} E_s^{\binom{v}{d}} \delta_{d,d+1}.$$

Ahora bien por (51) sabemos que

$$\delta_{d,d+1}\delta_{d+1,d} = (v-d) I^{\binom{v}{d}} + A_1^{\binom{v}{d}} \in \mathcal{B}^{\binom{v}{d}},$$

y entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{d,d+1}(E_r^{\binom{v}{d}})\ \mathcal{I}_{d,d+1}(E_s^{\binom{v}{d}}) &= \delta_{d+1,d}E_r^{\binom{v}{d}}\left((v-d)I^{\binom{v}{d}} + A_1^{\binom{v}{d}}\right)E_s^{\binom{v}{d}}\delta_{d,d+1} \\
&= \left((v-d) + p_1^{\binom{v}{d}}(s)\right)\delta_{d+1,d}E_r^{\binom{v}{d}}E_s^{\binom{v}{d}}\delta_{d,d+1},
\end{aligned}$$

Con estas expresiones concluimos que

$$\mathcal{I}_{d,d+1}(E_r^{\binom{v}{d}})\ \mathcal{I}_{d,d+1}(E_s^{\binom{v}{d}}) = \begin{cases} c\ \mathcal{I}_{d,d+1}(E_r^{\binom{v}{d}}) & \text{si } r = s \\ 0 & \text{si } r \neq s \end{cases},$$

donde la constante

$$c = (v-d) + p_1^{\binom{v}{d}}(r), \tag{59}$$

Analicemos dicha constante en relación a los parametros v y d.
Análisis de c:
Sabemos por la teoría que los autovalores de un $J(v,d)$ son de la forma

$$p_1^{\binom{v}{d}}(s) = d(v-d) - s(v+1-s),$$

y que son decrecientes con autovalor mínimo $p_1^{\binom{v}{d}}(d) = -d$.
Tenemos entonces que

$$(v-d) + p_1^{\binom{v}{d}}(s) \geq v - 2d$$

y luego

$$(v-d) + p_1^{\binom{v}{d}}(s) = 0 \iff s = d \text{ y } v = 2d.$$

Las anteriores desigualdades nos dicen que si $v > 2d$ todos los idempotentes de $\mathcal{B}^{\binom{v}{d}}$ pueden "subir" a uno no nulo de $\mathcal{B}^{\binom{v}{d+1}}$ (puesto que $c > 0$).
En cambio si $v = 2d$ todos los idempotentes de $\mathcal{B}^{\binom{v}{d}}$ salvo el último tendrán asociado uno no nulo en $\mathcal{B}^{\binom{v}{d+1}}$.
Esto ocurre porque si $v = 2d$ tenemos que

$$\mathcal{B}^{\binom{2d}{d+1}} \simeq \mathcal{B}^{\binom{2d}{d-1}} = \langle E_0, E_1, \ldots, E_{d-1}\rangle$$

y entonces

$$\mathcal{I}_{d,d+1} : \mathcal{B}^{\binom{v}{d}} \longrightarrow \mathcal{B}^{\binom{v}{d+1}} \simeq \mathcal{B}^{\binom{v}{d-1}}$$

sube todos los proyectores a los respectivos no nulos, salvo $E_d^{\binom{v}{d}}$.

Ahora bien, sabemos que si $c \neq 0$ entonces $\frac{1}{c}\mathcal{I}_{d,d+1}(E_r^{\binom{v}{d}})$ es un idempotente en $\mathcal{B}^{\binom{v}{d+1}}$.
¿Es necesariamente $E_r^{\binom{v}{d+1}}$?. Veamos que la respuesta es afirmativa.
Para ello basta el siguiente cálculo:

$$\mathcal{I}_{d,d+1}(E_r^{\binom{v}{d}})A_1^{\binom{v}{d+1}} = \left(\delta_{d+1,d}\ E_r^{\binom{v}{d}}\ \delta_{d,d+1}\right)A_1^{\binom{v}{d+1}}.$$

Por el lema 3.7 , sabemos que

$$\begin{aligned} A_1^{\binom{v}{d}}\ \delta_{d,d+1} &= 2\delta_{d,d+1}^{d-1} + d\delta_{d,d+1}^{d} \\ \delta_{d,d+1} A_1^{\binom{v}{d+1}} &= (v-d-1)\delta_{d,d+1}^{d} + 2\delta_{d,d+1}^{d-1}. \end{aligned}$$

Con lo cual reemplazando en $\delta_{d,d+1} A_1^{\binom{v}{d+1}}$ tenemos

$$\begin{aligned} \delta_{d+1,d}\ E_r^{\binom{v}{d}}\ \left((v-d-1)\delta_{d,d+1}^{d} + 2\delta_{d,d+1}^{d-1}\right) &= \delta_{d+1,d}\ E_r^{\binom{v}{d}}\ \left((v-d-1)\delta_{d,d+1}^{d} + A_1^{\binom{v}{d}}\ \delta_{d,d+1} - d\delta_{d,d+1}^{d}\right) \\ &= \left(v-2d-1+p_1^{\binom{v}{d}}(r)\right)\left(\delta_{d+1,d}\ E_r^{\binom{v}{d}}\ \delta_{d,d+1}\right), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} v-2d-1+p_1^{\binom{v}{d}}(r) &= v-2d-1+d(v-d)-r(v+1-r) \\ &= (d+1)(v-d-1)-r(v+1-r) \\ &= p_1^{\binom{v}{d+1}}(r), \end{aligned}$$

con lo cual concluimos que

$$\mathcal{I}_{d,d+1}(E_r^{\binom{v}{d}}) = c\ E_r^{\binom{v}{d+1}} \in\ \mathcal{B}^{\binom{v}{d+1}},$$

con c la constante definida en (59).
El cálculo es análogo para $\mathcal{I}_{d,d-1}(E_r^{\binom{v}{d}})$.

■

Observación:
La misma prueba sirve para ver que si $i < j$

$$\mathcal{I}_{i,j}(E_r^{\binom{v}{i}}) = n_r^{i,j}\ E_r^{\binom{v}{j}} \in\ \mathcal{B}^{\binom{v}{j}} \text{ donde } n_r^{i,j} = \sum_m \tbinom{v-i-m}{j-i-m} p_1^{\binom{v}{j}}(m).$$

Es decir

$$\tfrac{1}{n_r^{i,j}} \delta_{j,i} E_r^{\binom{v}{i}} \delta_{i,j} = E_r^{\binom{v}{j}}.$$

La técnica descripta anteriormente nos permite asociar un proyector

$$E_r^{\binom{k}{k-i}} \otimes E_s^{\binom{n-k}{i}} \in \mathcal{M}_{ii} \quad \xrightarrow{\mathcal{I}_{k-i,k-i-1} \otimes \mathcal{I}_{i,i+1}} \quad E_r^{\binom{k}{k-i-1}} \otimes E_s^{\binom{n-k}{i+1}} \in \mathcal{M}_{i+1,i+1}$$

o también

$$E_r^{\binom{k}{k-i+1}} \otimes E_s^{\binom{n-k}{i-1}} \in \mathcal{M}_{i-1,i-1} \quad \xleftarrow{\mathcal{I}_{k-i,k-i+1} \otimes \mathcal{I}_{i,i-1}} \quad E_r^{\binom{k}{k-i}} \otimes E_s^{\binom{n-k}{i}} \in \mathcal{M}_{i,i}$$

(hemos visto que si el proyector "no está" en el rango se le asocia la matriz nula.)
Para ilustrar, tomemos $n = 12, k = 4$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{0,0} &= \mathcal{B}_{\binom{4}{4}} \otimes \mathcal{B}_{\binom{8}{0}} = 1 \otimes 1 \\
\mathcal{M}_{1,1} &= \mathcal{B}_{\binom{4}{3}} \otimes \mathcal{B}_{\binom{8}{1}} = \{E_r^{\binom{4}{3}} \otimes E_s^{\binom{8}{1}}\}_{r=0,s=0}^{1,1} \\
\mathcal{M}_{2,2} &= \mathcal{B}_{\binom{4}{2}} \otimes \mathcal{B}_{\binom{8}{2}} = \{E_r^{\binom{4}{2}} \otimes E_s^{\binom{8}{2}}\}_{r=0,s=0}^{2,2} \\
\mathcal{M}_{3,3} &= \mathcal{B}_{\binom{4}{1}} \otimes \mathcal{B}_{\binom{8}{3}} = \{E_r^{\binom{4}{1}} \otimes E_s^{\binom{8}{3}}\}_{r=0,s=0}^{1,3} \\
\mathcal{M}_{4,4} &= \mathcal{B}_{\binom{4}{0}} \otimes \mathcal{B}_{\binom{8}{4}} = \{1 \otimes E_s^{\binom{8}{4}}\}_{s=0}^{4}
\end{aligned}$$

y el proyector

$$E_1^{\binom{4}{3}} \otimes E_0^{\binom{8}{1}} \in \mathcal{M}_{1,1}.$$

Tenemos que

$$\begin{array}{ll}
 & E_1^{\binom{4}{3}} \otimes E_0^{\binom{8}{1}} \in \mathcal{M}_{1,1} \longrightarrow E_1^{\binom{4}{2}} \otimes E_0^{\binom{8}{2}} \in \mathcal{M}_{2,2} \longrightarrow E_1^{\binom{4}{1}} \otimes E_0^{\binom{8}{3}} \in \mathcal{M}_{3,3} \longrightarrow 0 \in \mathcal{M}_{4,4} \\
0 \longleftarrow & E_1^{\binom{4}{3}} \otimes E_0^{\binom{8}{1}} \in \mathcal{M}_{1,1} \quad .
\end{array}$$

3.2. $T \subseteq \mathcal{M}$**.**

Para probar la afirmación basta probar el siguiente:

Proposición 3.15. *Sean $A_1, E_0^*, E_1^*, \ldots E_k^*$ la primera matriz de adyacencia y los idempotentes duales de un esquema de asociación de tipo $J(n,k)$. Sea $\mathcal{M}$ el álgebra definida anteriormente. Entonces*

$$\begin{aligned}
A_1 &\subseteq \mathcal{M} \\
E_i^* &\subseteq \mathcal{M} \ \forall\ i = 0, \ldots, k \\
\textit{y luego } T &\subseteq \mathcal{M}
\end{aligned}$$

Prueba:

$$\begin{aligned}
(A_1)_{\Omega_i \times \Omega_i} &= I_{\binom{k}{k-i}} \otimes A_1^{\binom{n-k}{i}} + A_1^{\binom{k}{k-i}} \otimes I_{\binom{n-k}{i}} \\
&\subseteq \mathcal{B}_{\binom{k}{k-i}} \otimes \mathcal{B}_{\binom{n-k}{i}} = \mathcal{M}_{ii} \\
(A_1)_{\Omega_i \times \Omega_{i+1}} &= \delta_{k-i,k-i-1} \otimes \delta_{i,i+1} \\
&\subseteq \mathcal{B}_{\binom{k}{k-i}}\ \delta_{k-i,k-i-1} \otimes \mathcal{B}_{\binom{n-k}{i+1}}\ \delta_{i,i+1} = \mathcal{M}_{ii+1} \\
(A_1)_{\Omega_i \times \Omega_{i+l}} &= 0 \ l \geq 2 \ .
\end{aligned}$$

Entonces cada bloque de A_1 esta identificado con un elemento de $\mathcal{M}$. Tomando la notación:

$$(A_1)_{\Omega_i \times \Omega_j} \simeq m_{ij} \ \in \mathcal{M}_{ij}$$

La primera matriz de adyacencia tiene la identificación

$$A_1 \simeq \oplus_{ij} m_{ij} \ \in \mathcal{M}.$$

Para los idempotentes duales tenemos

$$(E_m^*)_{\Omega_i \times \Omega_i} = \begin{cases} I & i = m \\ 0 & i \neq m \end{cases} \ .$$

Con lo cual es fácil ver que $E_m^* \subseteq \mathcal{M}$. Y entonces hemos probado el lema.

■

3.3. $T \supseteq \mathcal{M}$.

Probemos la siguiente :

Proposición 3.16. *Para $i < j$*

$$\delta_{k-i,k-j} \otimes \delta_{i,j} \subseteq T_{/\Omega_i \times \Omega_j}.$$

Prueba:

Dado que $i < j$ supongamos $j = i + l$.

Para todo i y $l = 1$ se cumple la afirmación del lema pues en la descripción de la matriz de adyacencia dada en (42) , tenemos:

$$(A_1)_{\Omega_i \times \Omega_{i+1}} = \delta_{k-i,k-i-1} \otimes \delta_{i,i+1} \subseteq T_{/\Omega_i \times \Omega_{i+1}}$$

Hacemos entonces, inducción en l. Suponemos que

$$\delta_{k-i,k-i-l} \otimes \delta_{i,i+l} \subseteq T_{/\Omega_i \times \Omega_{i+l}}$$

y queremos ver si

$$\delta_{k-i,k-i-l-1} \otimes \delta_{i,i+l+1} \subseteq T_{/\Omega_i \times \Omega_{i+l+1}}.$$

Como hemos hemos dicho que para todo i y $l = 1$ se cumple la afirmación del lema, enparticular tomando $i = i + l$ tenemos que

$$\delta_{k-i-l,k-i-l-1} \otimes \delta_{i+l,i+l+1} \subseteq T_{/\Omega_{i+l} \times \Omega_{i+l+1}}.$$

Premultiplicando ésta expresión por la de la hipotésis inductiva y recordando los cálculos del lema 3.11 , tenemos que el siguiente producto está en T:

$$\begin{aligned} & (\delta_{k-i,k-i-l} \otimes \delta_{i,i+l})\,(\delta_{k-i-l,k-i-l-1} \otimes \delta_{i+l,i+l+1}) \\ = \;& \delta_{k-i,k-i-l}\ \delta_{k-i-l,k-i-l-1} \otimes \delta_{i,i+l}\ \delta_{i+l,i+l+1} \\ = \;& \lambda\ \delta_{k-i,k-i-l-1} \otimes \delta_{i,i+l+1} \end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar.

■

Observaciones:

- Recordemos las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{ii} &= \mathcal{B}_{\binom{k}{k-i}} \otimes \mathcal{B}_{\binom{n-k}{i}} \\ \mathcal{M}_{ij} &= \mathcal{B}_{\binom{k}{k-i}}\ \delta_{k-i,k-j}\ \otimes \mathcal{B}_{\binom{n-k}{i}}\ \delta_{i,j}\quad i < j \\ \mathcal{M}_{ij} &= \mathcal{M}_{ij}^t\ i > j\ . \end{aligned}$$

  Si probamos que

$$\mathcal{M}_{ii} = \mathcal{B}_{\binom{k}{k-i}} \otimes \mathcal{B}_{\binom{n-k}{i}} \subseteq T_{/\Omega_i \times \Omega_i}$$

  entonces por el lema anterior tendremos que

$$\mathcal{M}_{ij} \subseteq T_{/\Omega_i \times \Omega_j} \forall\ i, j$$

  y por lo tanto

$$\mathcal{M} \subseteq T.$$

- Recordemos los operadores

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{I}_{d,d+1} : \mathcal{B}_{\binom{v}{d}} & \longrightarrow & \mathcal{B}_{\binom{v}{d+1}} \\
E_r^{\binom{v}{d}} & \longrightarrow & \delta_{d+1,d}\ E_r^{\binom{v}{d}}\ \delta_{d,d+1} \\
\mathcal{I}_{d,d-1} : \mathcal{B}_{\binom{v}{d}} & \longrightarrow & \mathcal{B}_{\binom{v}{d-1}} \\
E_r^{\binom{v}{d}} & \longrightarrow & \delta_{d-1,d}\ E_r^{\binom{v}{d}}\ \delta_{d,d-1}.
\end{array}$$

  El lema probado previamente dice que si partimos de un proyector que está en T , entonces la operción de subirlo a bajarlo vuelve a caer en T (ya que el lema dice que $\delta_{k-i,k-j} \otimes \delta_{i,j} \in T$).

Comentario:
Recordemos la descripción de la matriz de adyacencia de un $J(n,k)$ dada en (35):

$$(A_1)_{\Omega_i \times \Omega_i} = I_{\binom{k}{k-i}} \otimes A_1^{\binom{n-k}{i}} + A_1^{\binom{k}{k-i}} \otimes I_{\binom{n-k}{i}}$$

A su vez considerando la expresión de A_1 en términos de la base de proyectores E_j tenemos

$$\begin{array}{rcl}
A_1^{\binom{n-k}{i}} & = & \sum_r p_1(r) E_r^{\binom{n-k}{i}} \\
A_1^{\binom{k}{k-i}} & = & \sum_s p_1(s) E_s^{\binom{k}{k-i}}.
\end{array}$$

donde $p_1(m)$ es el autovalor de A_1 en el autoespacio V_m (ver sección 1.1).
Sabemos por [**B I**] que $p_1(m)$ correspondiente a un $J(v,d)$ está dado por la fórmula:

$$p_1(m) = d(v-d) - m(v+1-m)$$

Denotamos por simplicidad a $p_1(r)$ correspondiente a $J(n-k,i)$ con λ_r y a $p_1(s)$ correspondiente a un $J(k,k-i)$ con μ_s. Entonces

$$\begin{array}{rcl}
(A_1)_{\Omega_i \times \Omega_i} & = & I_{\binom{k}{k-i}} \otimes A_1^{\binom{n-k}{i}} + A_1^{\binom{k}{k-i}} \otimes I_{\binom{n-k}{i}} \\
& = & (\sum_{p'} E_{p'}^{\binom{k}{k-i}}) \otimes (\sum_p \lambda_p E_p^{\binom{n-k}{i}}) + (\sum_q \mu_q E_q^{\binom{k}{k-i}}) \otimes (\sum_{q'} E_{q'}^{\binom{k}{k-i}}) \\
& = & \sum_{p'} \sum_p \lambda_p E_{p'}^{\binom{k}{k-i}} \otimes E_p^{\binom{n-k}{i}} + \sum_q \sum_{q'} \mu_q E_q^{\binom{k}{k-i}} \otimes E_{q'}^{\binom{k}{k-i}} \\
& = & \sum_{p,q} (\lambda_p + \mu_q)\ E_q^{\binom{k}{k-i}} \otimes E_p^{\binom{n-k}{i}}.
\end{array}$$

Es decir:

$$\begin{array}{rcl}
(A_1)_{\Omega_i \times \Omega_i} & = & I_{\binom{k}{k-i}} \otimes A_1^{\binom{n-k}{i}} + A_1^{\binom{k}{k-i}} \otimes I_{\binom{n-k}{i}} \\
& \subseteq & \langle \{ E_q^{\binom{k}{k-i}} \otimes E_p^{\binom{n-k}{i}} \}_{p,q} \rangle
\end{array}$$

Es fácil ver que si se cumple la condición

$$(p,q) \neq (p',q') \;\Rightarrow (\lambda_p + \mu_q) \neq (\lambda_{p'} + \mu_{q'})$$

entonces se obtiene la igualdad y esto diría

$$\langle (A_1)_{\Omega_i \times \Omega_i} \rangle = \mathcal{B}_{\binom{k}{k-i}} \mathcal{B}_{\binom{n-k}{i}}.$$

Pero tal condición no siempre es cierta.
Consideremos el ejemplo $J(12,4)$. Para $(A_1)_{\Omega_2 \times \Omega_2}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \lambda_2^{\binom{8}{2}} + \mu_0^{\binom{4}{2}} &= -2+4 \\ \lambda_1^{\binom{8}{2}} + \mu_2^{\binom{4}{2}} &= 4-2 \end{aligned}$$

con lo cual los coeficientes de

$$E_0^{\binom{4}{2}} \otimes E_2^{\binom{8}{2}} \text{ y de } E_2^{\binom{4}{2}} \otimes E_1^{\binom{8}{2}} \text{ son iguales}$$

(diremos entonces que los proyectores están en resonancia o “resuenan ”)
¿Quiere decir que la inclusión es estricta

$$T/_{\Omega_2 \times \Omega_2} \subsetneq \mathcal{B}_{\binom{4}{2}} \otimes \mathcal{B}_{\binom{8}{2}}?$$

es decir tenemos que

$$\begin{aligned} & E_0^{\binom{4}{2}} \otimes E_2^{\binom{8}{2}} + E_2^{\binom{4}{2}} \otimes E_1^{\binom{8}{2}} \in T/_{\Omega_2 \times \Omega_2} \\ & \text{pero} \\ & E_0^{\binom{4}{2}} \otimes E_2^{\binom{8}{2}} \in T/_{\Omega_2 \times \Omega_2}? \\ & E_2^{\binom{4}{2}} \otimes E_1^{\binom{8}{2}} \in T/_{\Omega_2 \times \Omega_2}? \end{aligned}$$

Veamos que

$$T/_{\Omega_2 \times \Omega_2} = \mathcal{B}_{\binom{4}{2}} \otimes \mathcal{B}_{\binom{8}{2}} = \mathcal{M}_{2,2}. \tag{60}$$

La razón es que si bien

$$E_0 \otimes E_2 \text{ y } \; E_2 \otimes E_1$$

están en resonancia en $(A_1)_{\Omega_2 \times \Omega_2}$ no lo están en

$$\begin{aligned} (A_1)_{\Omega_4 \times \Omega_4} &= I^{\binom{4}{4}} \otimes A_1^{\binom{8}{4}} \\ &= 1 \otimes \left(16E_0^{\binom{8}{4}} + 8E_1^{\binom{8}{4}} + 2E_2^{\binom{8}{4}} - 2E_3^{\binom{8}{2}} - 4E_4^{\binom{8}{4}} \right) \\ &= E_0^{\binom{4}{4}} \otimes \left(16E_0^{\binom{8}{4}} + 8E_1^{\binom{8}{4}} + 2E_2^{\binom{8}{4}} - 2E_3^{\binom{8}{2}} - 4E_4^{\binom{8}{4}} \right) \end{aligned}$$

(los proyectores no resuenan por el sencillo hecho de que $E_2 \otimes E_1 = 0 \; \in \mathcal{B}_{\binom{4}{0}} \otimes \mathcal{B}_{\binom{8}{8}}$)
Entonces podemos “traer” $E_0 \otimes E_2$ de $\mathcal{M}_{4,4}$ a $\mathcal{M}_{2,2}$ mediante las técnicas descriptas en 3.1.
El punto es que

$$\mathcal{M}_{4,4} = T/_{\Omega_4 \times \Omega_4}$$

entonces, como observamos anteriormente todo lo que traigamos de $\mathcal{M}_{4,4}$ cae en el álgebra T. De este modo tenemos

$$E_0^{\binom{4}{2}} \otimes E_2^{\binom{8}{2}} \in T/_{\Omega_2 \times \Omega_2} \xleftarrow{\mathcal{I}_{1,2} \otimes \mathcal{I}_{3,2}} E_0^{\binom{4}{3}} \otimes E_2^{\binom{8}{3}} \in T/_{\Omega_3 \times \Omega_3} \xleftarrow{\mathcal{I}_{0,1} \otimes \mathcal{I}_{4,3}} E_0^{\binom{4}{4}} \otimes E_2^{\binom{8}{4}} \in T/_{\Omega_4 \times \Omega_4}$$

Luego

$$\begin{array}{l} E_0^{\binom{4}{2}} \otimes E_2^{\binom{8}{2}} \in T/_{\Omega_2\times\Omega_2} \text{ y} \\ E_0^{\binom{4}{2}} \otimes E_2^{\binom{8}{2}} + \; E_2^{\binom{4}{2}} \otimes E_1^{\binom{8}{2}} \in T/_{\Omega_2\times\Omega_2} \\ \text{y entonces también} \\ E_2^{\binom{4}{2}} \otimes E_1^{\binom{8}{2}} \in T/_{\Omega_2\times\Omega_2} \end{array}$$

con lo cual se tiene (60).

Veamos otro ejemplo. En $J(18,6)$ tenemos que para $(A_1)_{\Omega_2\times\Omega_2}$

$$\begin{array}{rcl} \lambda_2^{\binom{6}{2}} + \mu_0^{\binom{12}{2}} & = & 8-2 \\ \lambda_1^{\binom{6}{2}} + \mu_2^{\binom{12}{2}} & = & -2+8. \end{array}$$

Con lo cual los coeficientes de

$$E_0^{\binom{6}{2}} \otimes E_2^{\binom{12}{2}} \text{ y } E_2^{\binom{6}{2}} \otimes E_1^{\binom{12}{2}}$$

son los mismos en la descomposición de $(A_1)_{\Omega_2\times\Omega_2}$.
Pero esto tambien ocurre en $(A_1)_{\Omega_3\times\Omega_3}$ y de $(A_1)_{\Omega_4\times\Omega_4}$. Es decir

$$\begin{array}{c} \lambda_2^{\binom{6}{3}} + \mu_0^{\binom{12}{3}} = 5+9,\ \lambda_1^{\binom{6}{3}} + \mu_2^{\binom{12}{3}} = 15-1 \\ \lambda_2^{\binom{6}{2}} + \mu_0^{\binom{12}{4}} = 10+8,\ \lambda_1^{\binom{6}{2}} + \mu_2^{\binom{12}{4}} = 20-2. \end{array}$$

Es recién en

$$(A_1)_{\Omega_5\times\Omega_5}$$

donde se "separan", pues allí

$$\begin{array}{rcl} E_2^{\binom{6}{1}} \otimes E_1^{\binom{12}{5}} & = & 0 \\ E_0^{\binom{6}{1}} \otimes E_2^{\binom{12}{5}} & \neq & 0 \text{ y } \lambda_2^{\binom{6}{1}} + \mu_0^{\binom{12}{5}} = 13+5. \end{array}$$

Podríamos decir que en este ejemplo, $E_0 \otimes E_2$ y $E_2 \otimes E_1$ están en resonancia siempre que "existan" dichos proyectores. Es decir

$$E_0 \otimes E_2 \text{ y } E_2 \otimes E_1$$

- son ambos no nulos y resuenan en $\mathcal{B}_{\binom{6}{2}} \otimes \mathcal{B}_{\binom{12}{2}}$, $\mathcal{B}_{\binom{6}{3}} \otimes \mathcal{B}_{\binom{12}{3}}$, $\mathcal{B}_{\binom{6}{4}} \otimes \mathcal{B}_{\binom{12}{4}}$
- son ambos nulos en $\mathcal{B}_{\binom{6}{6}} \otimes \mathcal{B}_{\binom{12}{0}}$, $\mathcal{B}_{\binom{6}{5}} \otimes \mathcal{B}_{\binom{12}{1}}$
- $E_0 \otimes E_2 \neq 0, E_2 \otimes E_1 = 0$ en $\mathcal{B}_{\binom{6}{5}} \otimes \mathcal{B}_{\binom{12}{5}}$, $\mathcal{B}_{\binom{6}{0}} \otimes \mathcal{B}_{\binom{12}{6}}$.

Veamos que esta situación ocurre en general, es decir que si dos proyectores resuenan en la descomposición de $(A_1)_{\Omega_j\times\Omega_j}$ resonarán en todos los $(A_1)_{\Omega_i\times\Omega_i}$ tal que los proyectores sean no nulos en $\mathcal{M}_{i,i} = \mathcal{B}_{\binom{k}{k-i}} \otimes \mathcal{B}_{\binom{n-k}{i}}$.
Los proyectores podrán ser separados pues existirá un $\mathcal{M}_{q,q}$ donde allí uno será nulo y el otro no.

Definimos formalmente el término ya usado de "resonancia".

Definición 3.17. *Dados*

$$E_p^{\binom{k}{k-i}} \otimes E_q^{\binom{n-k}{i}}, E_r^{\binom{k}{k-i}} \otimes E_s^{\binom{n-k}{i}} \in \mathcal{B}_{\binom{k}{k-i}} \otimes \mathcal{B}_{\binom{n-k}{i}} = \mathcal{M}_{ii}$$

diremos que están en resonancia o resuenan en la descomposición de $(A_1)_{\Omega_i \times \Omega_i}$ *si*

$$\begin{aligned} \lambda_p^{\binom{k}{k-i}} + \mu_q^{\binom{n-k}{i}} &= \lambda_r^{\binom{k}{k-i}} + \mu_s^{\binom{n-k}{i}} \text{ o equivalentemente} \\ p(k+1-p) + q(n-k+1-q) &= r(k+1-r) + s(n-k+1-s) \end{aligned}$$

Si las ecuaciones anteriores no se cumplen o alguno de ellos es nulo y el otro no diremos que no resuenan en la descomposición de $(A_1)_{\Omega_i \times \Omega_i}$.

Probemos el siguiente lema:

Lema 3.18. *Supongamos que*

$$E_p^{\binom{k}{k-i}} \otimes E_q^{\binom{n-k}{i}}, E_r^{\binom{k}{k-i}} \otimes E_s^{\binom{n-k}{i}} \neq 0 \in \mathcal{M}_{i,i}$$

y que

$$\lambda_p^{\binom{k}{k-i}} + \mu_q^{\binom{n-k}{i}} = \lambda_r^{\binom{k}{k-i}} + \mu_s^{\binom{n-k}{i}}$$

(es decir que en la descomposición de $(A_1)_{\Omega_i \times \Omega_i}$ *los proyectores están en resonancia)*
Supongamos que

$$0 \neq E_p^{\binom{k}{k-j}} \otimes E_q^{\binom{n-k}{j}}, E_r^{\binom{k}{k-j}} \otimes E_s^{\binom{n-k}{j}} \in \mathcal{M}_{j,j}, \text{ entonces}$$

$$\lambda_p^{\binom{k}{k-j}} + \mu_q^{\binom{n-k}{j}} = \lambda_r^{\binom{k}{k-j}} + \mu_s^{\binom{n-k}{j}}$$

(es decir, también resuena en la descomposición de $(A_1)_{\Omega_j \times \Omega_j}$ *)*

Prueba:
Por hipótesis

$$\begin{aligned} \lambda_p^{\binom{k}{k-i}} + \mu_q^{\binom{n-k}{i}} &= \lambda_r^{\binom{k}{k-i}} + \mu_s^{\binom{n-k}{i}}, \\ p(k+1-p) + q(n-k+1-q) &= r(k+1-r) + s(n-k+1-s) \\ \text{esto implica que} & \\ \lambda_p^{\binom{k}{k-j}} + \mu_q^{\binom{n-k}{j}} &= \lambda_r^{\binom{k}{k-j}} + \mu_s^{\binom{n-k}{j}} \end{aligned}$$

y que el hecho de resonar no depende i, j.

■

Hemos visto entonces que si dos proyectores están en resonancia, lo están en todos los $\mathcal{M}_{j,j}$ donde son no nulos. En lo que sigue, veamos que para dos proyectores resonantes existe un j tal que uno de ellos es nulo en $\mathcal{M}_{j,j}$ y el otro no.
Para ello asociamos a cada proyector $E_p \otimes E_q$ los siguientes parámetros:

- $e_{p,q}$ que cuenta el mínimo i tal que el proyector es no nulo en $\mathcal{M}_{i,i}$
- $d_{p,q}$ donde $d_{p,q}+1$ cuenta la cantidad de i's tal que el proyector es no nulo en $\mathcal{M}_{i,i}$

(estos parámetros son esencialmente los definidos en la sección 1.4 para cada T-submódulo irreducible.Esto muestra algo que veremos en capítulos posteriores: la correspondencia que existe entre proyectores, ideales y T-submódulos irreducibles)

Ahora veamos que si dos proyectores "empiezan a resonar juntos"(tienen el mismo parámetro e) no pueden tener el mismo parámetro d y para algún j dejan de resonar en $\mathcal{M}_{j,j}$.

Definición 3.19. *Dado un proyector* $E_p^{\binom{k}{k-i}} \otimes E_q^{\binom{n-k}{i}} \in \mathcal{M}_{ii}$, *definimos*

$$e_{p,q} = min\{i \mid 0 \neq E_p^{\binom{k}{k-i}} \otimes E_q^{\binom{n-k}{i}} \in \mathcal{M}_{i,i}\} \tag{61}$$

$$d_{p,q} = \#\{i \mid 0 \neq E_p^{\binom{k}{k-i}} \otimes E_q^{\binom{n-k}{i}} \in \mathcal{M}_{i,i}\} - 1. \tag{62}$$

Lema 3.20. *Dado un proyector* $E_p^{\binom{k}{k-i}} \otimes E_q^{\binom{n-k}{i}} \in \mathcal{M}_{ii}$

$$e_{p,q} = \begin{cases} p \ si \ p \geq q \\ q \ si \ p < q \end{cases} \tag{63}$$

$$d_{p,q} + 1 = \begin{cases} k - 2p + 1 \ si \ p \geq q \\ k + 1 - q - p \ si \ p < q \end{cases} \tag{64}$$

Prueba:
Las fórmulas provienen de considerar que

$$0 \neq E_r \in \mathcal{B}_{\binom{k}{k-i}} \text{ para } \ i = r, ..., k - r \tag{65}$$

$$0 \neq E_s \in \mathcal{B}_{\binom{n-k}{j}} \text{ para } \ j = s, ..., k \tag{66}$$

y de que se pide que ambos sean no nulos dado un

$$\mathcal{M}_{i,i} = \mathcal{B}_{\binom{k}{k-i}} \otimes \mathcal{B}_{\binom{n-k}{i}}.$$

La afirmación (66) se cumple pues estamos considerando $3k \leq n$, y luego

$$2i \leq 2k \leq n - k.$$

■

Proposición 3.21. *Supongamos que tenemos dos proyectores resonantes*

$$E_p \otimes E_q, E_r \otimes E_s \ \textit{con} \ \ e_{p,q} = e_{r,s}$$

entonces

$$d_{p,q} \neq d_{r,s}$$

Prueba:
Si dos proyectores resuenan (no importa en cual $\mathcal{M}_{ii}$) , entonces

$$\begin{aligned} \lambda_p^{\binom{k}{k-j}} + \mu_q^{\binom{n-k}{j}} &= \lambda_r^{\binom{k}{k-j}} + \mu_s^{\binom{n-k}{j}} \\ \lambda_p^{\binom{k}{k-j}} - \lambda_r^{\binom{k}{k-j}} &= \mu_s^{\binom{n-k}{j}} - \mu_q^{\binom{n-k}{j}} \end{aligned}$$

como sabemos que λ_i, μ_j son estrictamente decrecientes, concluimos que

$$\begin{aligned} p = r &\iff q = s \\ p < r &\iff s < q \\ p > r &\iff s > q \end{aligned}$$

Si los proyectores son distintos supongamos que $p < r$ (luego $s < q$) y por hipótesis que $e_{p,q} = e_{r,s}$. Esto nos dice que

$$p < q \quad \text{y} \quad r > s \text{ ó} \tag{67}$$

$$p > q \quad \text{y} \quad r < s \tag{68}$$

Pues si tuviéramos por ejemplo

$$p < q, r < s$$

con la hipótesis $e_{p,q} = e_{r,s}$ entonces por el lema 3.20

$$e_{p,q} = p = e_{r,s} = r$$

lo cual es un absurdo pues dijimos que los proyectores son distintos entonces $p \neq r, q \neq s$.
(análogamente no podemos tener $p > q, r > s$).
Supongamos que ocurre (67) entonces

$$e_{p,q} = q = e_{r,s} = r$$

Calculando d tenemos que

$$\begin{aligned} d_{p,q} + 1 &= k - p - q + 1 \\ d_{r,s} + 1 &= k - 2r + 1 \end{aligned}$$

pero entonces

$$d_{r,s} + 1 = k - 2r + 1 = k - 2q + 1 > k - p - q + 1 = d_{p,q} + 1.$$

El cálculo es análogo si ocurre (68)

■

La anterior proposición nos asegura que nunca dos proyectores resuenan exactamente en los mismos $\mathcal{M}_{j,j}$'s. Esto nos permite probar el siguiente

Teorema 3.22. *Sea T el álgebra de Terwilliger de un esquema de tipo $J(n,k)$ con $3k \leq n$. Entonces*

$$T_{/\Omega_i \times \Omega_i} = \langle \{ E_r^{\binom{k}{k-i}} \otimes E_s^{\binom{n-k}{i}} \}_{r,s=0}^{min(k-i,i),i} \rangle.$$

Prueba:
Para $i = k$ tenemos que

$$\begin{aligned} (A_1)_{\Omega_k \times \Omega_k} &= A_1^{\binom{n-k}{k}} \subseteq T_{/\Omega_k \times \Omega_k} \\ \text{y por lo tanto} & \\ \mathcal{B}_{\binom{n-k}{k}} &= \langle \{ 1 \otimes E_q^{\binom{n-k}{k}} \}_{q=0}^{k} \rangle \\ &= \langle \{ E_0^{\binom{k}{0}} \otimes E_s^{\binom{n-k}{k}} \}_{s=0}^{k} \subseteq T_{/\Omega_k \times \Omega_k}. \end{aligned}$$

Con lo cual, hemos probado la afirmación del lema para $i = k$
Con las técnicas descriptas en la seccion 3.1 podemos llevar

$$\{ E_0^{\binom{k}{1}} \otimes E_s^{\binom{n-k}{k-1}} \}_{s=0}^{k-1} \in T/_{\Omega_{k-1} \times \Omega_{k-1}} \quad \longleftarrow \quad \{ E_0^{\binom{k}{0}} \otimes E_s^{\binom{n-k}{k}} \}_{s=0}^{k} \in T/_{\Omega_k \times \Omega_k}$$

(con operaciones que siempre caen en el álgebra.)
Como sabemos que

$$(A_1)_{\Omega_{k-1} \times \Omega_{k-1}} = \sum_{s=0}^{k-1} (\lambda_s + \mu_0) \left(E_0^{\binom{k}{1}} \otimes E_s^{\binom{n-k}{k-1}} \right) + \sum_{s=0}^{k-1} (\lambda_s + \mu_1) \left(E_1^{\binom{k}{1}} \otimes E_s^{\binom{n-k}{k-1}} \right) \in T_{/\Omega_{k-1} \times \Omega_{k-1}}$$

y por lo visto anteriormente tenemos

$$\{ E_0^{\binom{k}{1}} \otimes \ E_s^{\binom{n-k}{k-1}} \}_{s=0}^{k-1} \in T_{/\Omega_{k-1} \times \Omega_{k-1}}$$

Luego, como

$$(\lambda_p + \mu_1) \neq (\lambda_q + \mu_1) \text{ si p } \neq q$$

entonces los idempotentes

$$\{ E_1^{\binom{k}{1}} \otimes \ E_s^{\binom{n-k}{k-1}} \}_{s=0}^{k-1} \in T_{/\Omega_{k-1} \times \Omega_{k-1}}.$$

Hemos visto que

$$\left\{ E_0^{\binom{k}{0}} \otimes \; E_s^{\binom{n-k}{k}} s = 0, \ldots, k \right\} \qquad \in \; T_{/\Omega_k \times \Omega_k}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_0^{\binom{k}{1}} \otimes \; E_s^{\binom{n-k}{k-1}} \\ E_1^{\binom{k}{1}} \otimes \; E_s^{\binom{n-k}{k-1}} \end{array} s = 0, \ldots, k-1 \right\} \; \in T_{/\Omega_{k-1} \times \Omega_{k-1}}.$$

Hagamos ahora inducción en i (tomando i que decrece desde k hasta 0).
Separaremos la inducción en los casos $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor < i$, $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor \geq i$.
Tomemos $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor \leq i$ arbitrario.
En este caso $k - i \leq \frac{k}{2}$ y entonces para la primera coordenada de "$\otimes$"tenemos,

$$0 \neq E_r^{\binom{k}{k-i}} \text{ para } r = 0, ..., k-i$$

Con la hipótesis inductiva

$$\left\{ \begin{array}{l} \{E_0^{\binom{k}{k-i-1}} \otimes E_s^{\binom{n-k}{i+1}}\}_{s=0}^{i+1} \\ \{E_1^{\binom{k}{k-i-1}} \otimes E_s^{\binom{n-k}{i+1}}\}_{s=0}^{i+1} \\ \ldots \\ \{E_{k-i-1}^{\binom{k}{k-i-1}} \otimes E_s^{\binom{n-k}{i+1}}\}_{s=0}^{i+1} \end{array} \right\} \in T_{/\Omega_{i+1} \times \Omega_{i+1}},$$

queremos ver que

$$\left\{ \begin{array}{l} \{E_0^{\binom{k}{k-i}} \otimes E_s^{\binom{n-k}{i}}\}_{s=0}^{i} \\ \{E_1^{\binom{k}{k-i}} \otimes E_s^{\binom{n-k}{i}}\}_{s=0}^{i} \\ \ldots \\ \{E_{k-i}^{\binom{k}{k-i}} \otimes E_s^{\binom{n-k}{i}}\}_{s=0}^{i} \end{array} \right\} \in T_{/\Omega_i \times \Omega_i}.$$

Entonces para $r = 0, 1, ..., k-i-1$, traemos

$$\{E_r^{\binom{k}{k-i}} \otimes E_s^{\binom{n-k}{i}}\}_{s=0}^{i} \in T/_{\Omega_i \times \Omega_i} \quad \longleftarrow \quad \{E_r^{\binom{k}{k-i-1}} \otimes E_s^{\binom{n-k}{i+1}}\}_{s=0}^{i} \in T/_{\Omega_{i+1} \times \Omega_{i+1}} \quad .$$

Como sabemos que

$$(A_1)_{\Omega_i \times \Omega_i} = \sum_{r=0}^{k-i-1} \sum_{s=0}^{i} (\lambda_s + \mu_r) \left(E_r^{\binom{k}{k-i}} \otimes E_s^{\binom{n-k}{i}} \right) + \sum_{s=0}^{i} (\lambda_s + \mu_{k-i}) \left(E_{k-i}^{\binom{k}{k-i}} \otimes E_s^{\binom{n-k}{i}} \right) \in T_{/\Omega_i \times \Omega_i}$$

y además

$$(\lambda_p + \mu_{k-i}) \neq (\lambda_q + \mu_{k-i}) \text{ si p } \neq q,$$

entonces los idempotentes

$$\{E_{k-i}^{\binom{k}{k-i}} \otimes \; E_s^{\binom{n-k}{i}}\}_{s=0}^{i} \in T_{/\Omega_i \times \Omega_i}$$

y hemos probado la inducción cuando $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor \leq i$.

Probemos ahora la inducción cuando $i < \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$. La diferencia radica en que ahora, para la primera coordenada de "$\otimes$", tenemos la identificación

$$\mathcal{B}_{\binom{k}{k-i}} = \mathcal{B}_{\binom{k}{i}}.$$

Entonces la hipotesis inductiva dice que para $r = 0, ...i$

$$\left\{\begin{array}{l} \{E_0^{\binom{k}{k-i-1}} \otimes E_s^{\binom{n-k}{i+1}}\}_{s=0}^{i+1} \\ \{E_1^{\binom{k}{k-i-1}} \otimes E_s^{\binom{n-k}{i+1}}\}_{s=0}^{i+1} \\ \dots \\ \{E_i^{\binom{k}{k-i-1}} \otimes E_s^{\binom{n-k}{i+1}}\}_{s=0}^{i+1} \end{array}\right\} \in T_{/\Omega_{i+1}\times\Omega_{i+1}}.$$

y queremos ver que

$$\left\{\begin{array}{l} \{E_0^{\binom{k}{i}} \otimes E_s^{\binom{n-k}{i}}\}_{s=0}^{i} \\ \{E_1^{\binom{k}{i}} \otimes E_s^{\binom{n-k}{i}}\}_{s=0}^{i} \\ \dots \\ \{E_i^{\binom{k}{i}} \otimes E_s^{\binom{n-k}{i}}\}_{s=0}^{i} \end{array}\right\} \in T_{/\Omega_i\times\Omega_i}.$$

Para este caso, cuando $r = 0, 1, ...i$, simplemente traemos cualquiera de los proyectores de

$$\{E_r^{\binom{k}{i}} \otimes E_s^{\binom{n-k}{i}}\}_{s=0}^{i} \in T/_{\Omega_i\times\Omega_i} \quad\longleftarrow\quad \{E_r^{\binom{k}{i+1}} \otimes E_s^{\binom{n-k}{i+1}}\}_{s=0}^{i} \in T/_{\Omega_{i+1}\times\Omega_{i+1}} \quad .$$

y hemos probado la inducción cuando $i \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$, con lo cual hemos probado el corolario.

■

Corolario 3.23. *Sea T el álgebra de Terwilliger de $J(n,k)$ con $3k \leq n$ y $\mathcal{M}$ el álgebra definida en la sección 3.5. Entonces*

$$T \supseteq \mathcal{M}.$$

Prueba:
Es inmediato de la proposición 3.16 y del Teorema anterior.

■

Corolario 3.24.

Sea T el álgebra de Terwilliger de $J(n,k)$ con $3k \leq n$ y $\mathcal{M}$ el álgebra definida en la sección 3.5. Entonces

$$T = \mathcal{M},$$

es decir

$$T_{/\Omega_i\times\Omega_j} = \langle\{E_r^{\binom{k}{k-i}}\delta_{k-i,k-j} \otimes E_s^{\binom{n-k}{i}}\delta_{i,j}\}\rangle.$$

$$T_{/\Omega_i\times\Omega_j} = \langle\delta_{k-i,k-j}\{E_r^{\binom{k}{k-j}} \otimes \delta_{i,j}E_s^{\binom{n-k}{j}}\}\rangle.$$

Corolario 3.25.

Sean $3k < m,\ n$ y $T_{J(n,k)}$, $T_{J(m,k)}$ las T-álgebras de esquemas $J(m,k)$ y $J(n,k)$ respectivamente. Entonces

$$T_{J(m,k)} \simeq T_{J(n,k)}.$$

Prueba:
El isomorfismo esta dado por

$$\begin{array}{rcl} \tau_{m,n} : (T_{J(m,k)})_{/\Omega_i\times\Omega_i} & \longrightarrow & (T_{J(n,k)})_{/\Omega_i\times\Omega_i} \\ \tau_{m,n} : E_r^{\binom{k}{k-i}}\delta_{k-i,k-j} \otimes E_s^{\binom{m-k}{i}}\delta_{i,j} & \longrightarrow & E_r^{\binom{k}{k-i}}\delta_{k-i,k-j} \otimes E_s^{\binom{n-k}{i}}\delta_{i,j} \end{array}$$

■

4. Ideales simples de T

En esta sección descomponemos el álgebra T en ideales simples.
Hemos visto que si $i \leq j$

$$\begin{aligned}
T/_{\Omega_i \times \Omega_j} &= \mathcal{B}_{\binom{k}{k-i}} \ \delta_{k-i,k-j} \ \mathcal{B}_{\binom{k}{k-j}} \otimes \mathcal{B}_{\binom{n-k}{i}} \ \delta_{i,j} \ \mathcal{B}_{\binom{n-k}{j}} \\
&= \mathcal{B}_{\binom{k}{k-i}} \ \delta_{k-i,k-j} \ \otimes \mathcal{B}_{\binom{n-k}{i}} \ \delta_{i,j} \\
&= \delta_{k-i,k-j} \ \mathcal{B}_{\binom{k}{k-j}} \otimes \delta_{i,j} \ \mathcal{B}_{\binom{n-k}{j}} \\
T/_{\Omega_i \times \Omega_j} &= (T/_{\Omega_j \times \Omega_i})^t \text{ si } i > j
\end{aligned}$$

lo que nos dice que multiplicar izquierda o a derecha δ_{ij} (por las Bose Mesner correspondientes) generan los mismos T-submódulos. En lo que sigue queremos "afinar" más aún tal afirmación. Queremos ver que multiplicar izquierda o a derecha por el mismo proyector (de tamaño correspondiente) da lo mismo.
Más concretamente

Lema 3.26.

$$E_r^{\binom{k}{k-i}} \ \delta_{k-i,k-j} \ \otimes E_s^{\binom{n-k}{i}} \ \delta_{i,j} = \delta_{k-i,k-j} \ E_r^{\binom{k}{k-j}} \otimes \delta_{i,j} \ E_s^{\binom{n-k}{j}}$$

Prueba:
Para probar la afirmación del lema lo hacemos sólo sobre una de las coordenadas del producto.
Es decir fijando i, j, s veamos que

$$E_s^{\binom{n-k}{i}} \ \delta_{i,j} = \ m_s \ \delta_{i,j} \ E_s^{\binom{n-k}{j}} \text{ donde } \ m_s^2 = 1 \tag{69}$$

La observación realizada en al final de la sección 3.1 nos dice que $i < j$ y

$$E_s^{\binom{v}{i}} \delta_{i,j}, \ \ \delta_{i,j} E_s^{\binom{v}{j}} \quad \text{son no nulos, entonces}$$

$$\delta_{j,i} \ E_s^{\binom{v}{i}} \ \delta_{i,j} = n_s^{i,j} E_s^{\binom{v}{j}} \text{ con } n_s^{i,j} = \sum_m \binom{v-i-m}{j-i-m} p_1^{\binom{v}{i}}(m)$$

$$\delta_{i,j} \ E_s^{\binom{v}{j}} \ \delta_{j,i} = n_s^{j,i} E_s^{\binom{v}{i}} \text{ con } n_s^{j,i} = \sum_m \binom{j-m}{i} p_1^{\binom{v}{j}}(m)$$

Por lo tanto dado

$$E_s^{\binom{n-k}{i}} \ \delta_{i,j} \in \mathcal{B}_{\binom{n-k}{i}} \delta_{ij}.$$

Supongamos que

$$\begin{aligned}
E_s^{\binom{n-k}{i}} \delta_{ij} &= \sum_p m_p \ \delta_{ij} E_p^{\binom{n-k}{j}} \text{ multiplicando por la respectiva traspuesta, se tiene} \\
E_s^{\binom{n-k}{i}} \delta_{ij} \delta_{ji} E_s^{\binom{n-k}{i}} &= \left(\sum_p m_p \ \delta_{ij} E_p^{\binom{n-k}{j}} \right) \left(\sum_p m_p \ E_p^{\binom{n-k}{j}} \delta_{ji} \right) \ \text{ usando la expresión para } \delta_{ij}\delta_{ji} \\
n_s^{i,j} E_s^{\binom{n-k}{i}} &= \left(\sum_p m_p^2 \ \delta_{ij} E_p^{\binom{n-k}{j}} \delta_{ji} \right) \\
n_s^{i,j} E_s^{\binom{n-k}{i}} &= \left(\sum_p m_p^2 \ n_p^{i,j} E_p^{\binom{n-k}{i}} \right) \text{ con } \ n_p^{i,j} \neq 0 \\
&\Rightarrow \ m_p = 0 \ \forall \ p \neq s, \ \ m_s^2 = 1
\end{aligned}$$

con cual hemos probado la igualdad. Denotamos al múltiplo con $m = m_s$ ya que no depende de s.

La prueba para la otra coordenada del producto $\otimes$ es análoga, con lo cual tenemos

$$E_r^{\binom{k}{k-i}}\ \delta_{k-i,k-j} = m\ \delta_{k-i,k-j}\ E_r^{\binom{k}{k-j}}.$$

Es decir, que fijando pares $(i, j), (r, s)$

$$E_r^{\binom{k}{k-i}}\ \delta_{k-i,k-j}\ \otimes E_s^{\binom{n-k}{i}}\ \delta_{i,j} = m^2\ \delta_{k-i,k-j}\ E_r^{\binom{k}{k-j}} \otimes \delta_{i,j}\ E_s^{\binom{n-k}{j}}\ \text{ con } m^2 = 1.$$

■

El lema probado nos ayudará a definir los ideales simples. A cada par (r, s) asociaremos las matrices ${}^{rs}T_{ij}$ en el álgebra que serán base de un ideal simple. Dichas matrices se definen del siguiente modo:

Definición 3.27.

Fijado un par (r, s) para $i, j = 0, \ldots, k$ definimos ${}^{rs}T_{ij}$ como la siguiente matriz indexada por bloques

$${}^{rs}T_{ij} = \begin{cases} E_r^{\binom{k}{k-i}} \delta_{k-i,k-j} \otimes E_s^{\binom{n-k}{i}} \delta_{i,j} & \text{en el bloque } \Omega_i \times \Omega_j \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

y ${}^{rs}T \subseteq T$ como el subespacio de las combinaciones lineales de dichas matrices:

$${}^{rs}T \quad = \quad \langle \{{}^{rs}T_{ij}\}_{i,j} \rangle.$$

Observación:

$${}^{rs}T_{ij} \neq 0 \iff i, j = e_{r,s}, ..., e_{r,s} + d_{r,s},$$

donde $e_{r,s}, d_{r,s}$ son los parámetros definidos en 3.19.

Corolario 3.28.

$${}^{r,s}T \subseteq T \text{ es un ideal bilátero.}$$

Prueba:

Tomamos una matriz arbitraria de ${}^{r,s}T$ y una de T.

Por la descripción dada para T, un elemento cualquiera de $T_{/\Omega_i \times \Omega_j}$ es de la forma

$$E_p^{\binom{k}{k-i}}\ \delta_{k-i,k-j}\ \otimes E_q^{\binom{n-k}{i}}\ \delta_{i,j} \text{ si } i \leq j$$

$$\delta_{k-i,k-j}\ E_p^{\binom{k}{k-j}}\ \otimes \delta_{i,j}\ E_q^{\binom{n-k}{j}} \text{ si } i > j$$

Para ver que ${}^{r,s}T$ es un ideal bastará con ver los siguientes casos:

1. si $i \leq j, j \leq l$

$$\left(E_p^{\binom{k}{k-i}}\ \delta_{k-i,k-j}\ \otimes E_q^{\binom{n-k}{i}}\ \delta_{i,j}\right)\left(E_r^{\binom{k}{k-i}}\ \delta_{k-j,k-l}\ \otimes E_s^{\binom{n-k}{j}}\ \delta_{j,l}\right) \subseteq {}^{r,s}T$$

2. si $i \leq j, j \geq l$

$$\left(E_p^{\binom{k}{k-i}}\ \delta_{k-i,k-j}\ \otimes E_q^{\binom{n-k}{i}}\ \delta_{i,j}\right)\left(\delta_{k-j,k-l}\ E_r^{\binom{k}{k-l}}\ \otimes \delta_{j,l}\ E_s^{\binom{n-k}{l}}\right) \subseteq {}^{r,s}T$$

y los casos análogos

3. $i \geq j, j \leq l$
4. $i \geq j, j \geq l$

Como siempre hacemos la prueba sólo sobre una de las coordenadas del producto y entonces tenemos :

1. para el caso 1

$$E_s^{\binom{n-k}{i}}\delta_{i,j}E_s^{\binom{n-k}{j}}\delta_{j,l} = m\ E_s^{\binom{n-k}{i}}\delta_{i,j}\delta_{j,l} = m\ \binom{l-i}{l-j}E_s^{\binom{n-k}{i}}\delta_{i,l}$$

2. para el caso 2 basta recordar que

$$\delta_{i,j}\delta_{j,l} \subseteq T_{\Omega_i\times\Omega_l} = \mathcal{B}_{\binom{n-k}{i}}\delta_{il}$$

y entonces tiene una expresión

$$\delta_{i,j}\delta_{j,l} = \sum_p \alpha_p E_p^{\binom{n-k}{i}}\delta_{i,l} \text{ con } \alpha_p \text{ ciertos coeficientes}$$

reemplazando y usando

$$E_s^{\binom{n-k}{i}}\delta_{i,j} = m\ \delta_{i,j}\ E_s^{\binom{n-k}{j}} \quad \text{con } m^2 = 1$$

$$\begin{aligned}
E_r^{\binom{n-k}{i}}\delta_{i,j}\delta_{j,l}E_s^{\binom{n-k}{l}} &= E_r^{\binom{n-k}{i}}\left(\sum_p \alpha_p E_p^{\binom{n-k}{i}}\delta_{i,l}\right)E_s^{\binom{n-k}{l}} \\
&= \alpha_r\ E_s^{\binom{n-k}{i}}\delta_{i,l}\ E_s^{\binom{n-k}{l}} \\
&= m\ \alpha_r E_s^{\binom{n-k}{i}}\delta_{i,l}
\end{aligned}$$

Las cuentas para la otra coordenada de $\otimes$, son análogas con lo cual hemos probado el lema.

Para ir un poco mas allá y conocer exactamente el múltiplo que aparece en el caso 2 nos preguntamos ¿$\alpha_r =$?

Dada la última igualdad multiplicamos cada miembro por su respectiva traspuesta y obtenemos

$$\begin{aligned}
E_s^{\binom{n-k}{i}}\delta_{ij}\delta_{jl}E_s^{\binom{n-k}{l}}E_s^{\binom{n-k}{l}}\delta_{lj}\delta_{ji}E_s^{\binom{n-k}{i}} &= m^2\ \alpha_s^2 E_s^{\binom{n-k}{i}}\delta_{il}\delta_{li}E_s^{\binom{n-k}{i}} \\
n_s^{i,j}\ n_s^{j,l}E_s^{\binom{n-k}{i}} &= \alpha_s^2 n_s^{i,l}E_s^{\binom{n-k}{i}} \\
\Rightarrow\ \alpha_s^2 &= \frac{n_s^{i,j}\ n_s^{j,l}}{n_s^{i,l}}
\end{aligned}$$

Los casos 3 y 4 son análogos.

■

Hemos probado que dado un ideal ${}^{r,s}T$ mutiplicando dos matrices de la base

$${}^{rs}T_{ij}\ \ {}^{rs}T_{jl} \longrightarrow \text{ es un múltiplo de } {}^{rs}T_{il}$$

En lo que sigue agregamos múltiplos para conseguir la igualdad del siguiente lema:

Lema 3.29. *Dado el ideal simple ${}^{rs}T$ y las matrices que lo generan ${}^{rs}T_{ij}$, para $i \le j$ definimos*

(70) $$n_r^{ij} = \sum_{m=0}^{j-i}\binom{k-j-m}{k-i}p_m^{\binom{k}{k-i}}(r),\ \ n_s^{ij} = \sum_{m=0}^{j-i}\binom{n-k-i-m}{j-i-m}p_m^{\binom{n-k}{i}}(s)$$

y normalizamos las matrices dadas anteriormente del siguiente modo:

$${}^{rs}T_{ij} = \frac{1}{\sqrt{n_r^{ij}n_s^{ij}}}E_r^{\binom{k}{k-i}}\delta_{k-i,k-j}\otimes E_r^{\binom{n-k}{i}}\delta_{i,j}$$

Tenemos entonces que

$${}^{rs}T_{ij}\ {}^{rs}T_{jl} ={}^{rs} T_{il}$$

y por lo tanto

$$^{rs}T \simeq End(\mathbb{C}^{d_{rs}+1})$$

donde d_{rs} es el parámetro definido en 3.19 asociado a los proyectores $E_r \otimes E_s$

Prueba:
La elección de la constante surge de pedir

$$^{rs}T_{i,j}\ ^{rs}T_{j,i} =\ ^{rs}T_{ii} = E_r^{\binom{k}{k-i}} \otimes E_s^{\binom{n-k}{i}}.$$

Si pensamos la igualdad en una coordenada de $\otimes$, es pedir que $\lambda E_s^{\binom{n-k}{i}} \delta_{i,j}$ satisfaga:

$$\lambda^2 E_s^{\binom{n-k}{i}} \delta_{i,j}\ \delta_{j,i} E_s^{\binom{n-k}{i}} = E_s^{\binom{n-k}{i}}$$

el valor para λ se obtiene pues sabemos que

$$E_s^{\binom{n-k}{i}} \delta_{i,j}\ \delta_{j,i} E_s^{\binom{n-k}{i}} = n_s^{i,j} E_s^{\binom{n-k}{i}}.$$

El cálculo para la otra coordenada es análogo y de allí sale que la constante para la matriz $^{rs}T_{ij}$ es $\frac{1}{\sqrt{n_r^{ij} n_s^{ij}}}$.
Ahora bien, hemos probado que con dicha normalización, se tiene

$$^{rs}T_{ij}\ ^{rs}T_{ji} =^{rs} T_{ii},$$

falta probar el caso general

$$^{rs}T_{ij}\ ^{rs}T_{jl} =^{rs} T_{il}.$$

Distinguimos los casos

- C 1: $i \leq j \ \leq l$
- C 2: $i \leq j \geq l$

Para el caso 1 (trabajando sobre una de las coordenadas del producto) , deberíamos probar que:

$$\frac{1}{\sqrt{n_s^{ij} n_s^{jl}}} E_s^{\binom{n-k}{i}} \delta_{ij} E_s^{\binom{n-k}{j}} \delta_{jl} = \frac{1}{\sqrt{n_s^{il}}} E_s^{\binom{n-k}{i}} \delta_{il}$$

La igualdad se obtiene pues sabemos que ambos miembros son múltiplos uno de otro y por el hecho de que multiplicando cada uno por su respectiva trapuesta dan como resultado $E_r^{\binom{n-k}{i}}$.
Para el caso 2 debemos ver que

$$\frac{1}{\sqrt{n_s^{ij} n_s^{jl}}} E_s^{\binom{n-k}{i}} \delta_{ij} \delta_{jl} E_s^{\binom{n-k}{l}} = \frac{1}{\sqrt{n_s^{il}}} E_s^{\binom{n-k}{i}} \delta_{il}$$

Hemos probado que

$$E_s^{\binom{n-k}{i}} \delta_{ij} \delta_{jl} E_s^{\binom{n-k}{l}} = \alpha_s E_s^{\binom{n-k}{i}} \delta_{il}$$

con $\alpha_s^2 = \frac{n_s^{i,j}\ n_s^{j,l}}{n_s^{i,l}}$, lo que prueba el caso 2 y por lo tanto el lema.

∎

Corolario 3.30. *Los parámetros $n_s^{i,j}$ definidos en 3.29, satisfacen:*

$$n_s^{i,j}\ n_s^{j,l} = \binom{l-i}{l-j}\ n_s^{i,l}$$

es decir

$$\sum_{m=0}^{j-i} \binom{k-j-m}{k-i} p_m^{\binom{k}{k-i}}(s) \sum_{m=0}^{l-j} \binom{k-l-m}{k-j} p_m^{\binom{k}{k-j}}(s) = \sum_{m=0}^{l-i} \binom{k-l-m}{k-i} p_m^{\binom{k}{k-i}}(s)$$

Prueba:
Usando las cuentas del lema anterior tenemos que

$$\frac{1}{\sqrt{n_s^{ij} n_s^{jl}}} E_s^{\binom{n-k}{i}} \delta_{ij} E_s^{\binom{n-k}{j}} \delta_{jl} = \frac{\binom{l-i}{l-j}}{\sqrt{n_s^{ij} n_s^{jl}}} E_s^{\binom{n-k}{i}} \delta_{il}$$

esto nos dice que

$$\frac{\binom{l-i}{l-j}}{\sqrt{n_s^{ij} n_s^{jl}}} E_s^{\binom{n-k}{i}} \delta_{il} = \frac{1}{\sqrt{n_s^{il}}} E_s^{\binom{n-k}{i}} \delta_{il}$$

con lo cual probamos la igualdad.

■

Se tiene entonces la siguiente descomposición:

TEOREMA 3.31. *Sea T el álgebra de Terwilliger de un esquema $J(n,k)$ con $3k \leq n$. Entonces*

$$T = \oplus_{r,s=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor, k} \ {}^{r,s}T \simeq \oplus_{r,s=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor, k} \ End(\mathbb{C}^{d_{rs}+1})$$

donde

$${}^{r,s}T \subseteq T \text{ son ideales simples.}$$

Prueba:
La expresión

$$\begin{array}{rcl} T/_{\Omega_i \times \Omega_j} & = & \mathcal{B}_{\binom{k}{k-i}} \ \delta_{k-i,k-j} \ \mathcal{B}_{\binom{k}{k-j}} \otimes \mathcal{B}_{\binom{n-k}{i}} \ \delta_{i,j} \ \mathcal{B}_{\binom{n-k}{j}} \quad \text{si } i \leq j \\ & = & \mathcal{B}_{\binom{k}{k-i}} \ \delta_{k-i,k-j} \ \otimes \mathcal{B}_{\binom{n-k}{i}} \ \delta_{i,j} \\ & = & \delta_{k-i,k-j} \ \mathcal{B}_{\binom{k}{k-j}} \otimes \delta_{i,j} \ \mathcal{B}_{\binom{n-k}{j}} \\ T/_{\Omega_i \times \Omega_j} & = & (T/_{\Omega_j \times \Omega_i})^t \text{ si } i > j \end{array}$$

nos dice que

$$T = \sum_{r,s} {}^{r,s}T$$

y que ${}^{r,s}T$ son ideales de T.
Los ideales son simples puesto que dado un ideal ${}^{rs}T$ la acción de T es transitiva en la base de dicho ideal.
Es decir, dadas dos matrices de la base

$${}^{rs}T_{ij}, {}^{rs}T_{pq}$$

con la acción de T podemos pasar de una matriz a la otra.
Más explicítamente, con los cálculos relizados en la prueba del corolario anterior, es fácil comprobar que

$$\begin{array}{c} {}^{rs}T_{ij} \ {}^{rs}T_{jq} = {}^{rs}T_{iq} \\ {}^{rs}T_{pi} \ {}^{rs}T_{iq} = {}^{rs}T_{pq} \end{array}$$

y así vemos que la acción de T es transitiva en la base de cada ideal, lo que nos dice que no hay subespacio más chico que sea ideal en ${}^{rs}T$.
La suma es directa como consecuencia de:

$${}^{rs}T \ {}^{pq}T = 0 \iff (r,s) \neq (p,q)$$

y esto está demostrado en la prueba del corolario anterior.

■

El siguiente corolario prueba de otra forma el resultado enunciado en 3.25

Corolario 3.32. *Sea* $T_{J(n,k)}$ *el álgebra de Terwilliger de un esquema* $J(n,k)$ *con* $3k \leq n$. *Entonces para* $3k \leq m, n$

$$T_{J(n,k)} \simeq T_{J(m,k)}$$

Prueba:
Sale de considerar que los parámetros $d_{r,s}$ no dependen de n , cuando $3k \leq n$.

■

5. Descomposición de $\mathbb{C}^{\binom{n}{k}}$ en T-submódulos irreducibles

En esta sección consideramos la acción del álgebra T en $\mathbb{C}^{\binom{n}{k}}$

$$T \times \mathbb{C}^{\binom{n}{k}} \longrightarrow \mathbb{C}^{\binom{n}{k}}$$

y damos una descomposición de dicho espacio en submódulos irreducibles de T.

A cada ideal simple de T podemos asociarle de manera canónica un T-submódulo (no necesariamente irreducible), que llamaremos "isotípico". En lo que sigue damos una descripción de estos T-submódulos.

5.1. T-submódulos isotípicos: Supongamos que tenemos un álgebra T que es suma directa de álgebras de matrices T_i,

$$T = \oplus T_i$$

y una acción

$$T \times \mathbb{C}^{\binom{n}{k}} \longrightarrow \mathbb{C}^{\binom{n}{k}} \text{ tal que } T\mathbb{C}^{\binom{n}{k}} = \mathbb{C}^{\binom{n}{k}}.$$

Supongamos además, que es posible escribir la identidad $I \in T$ como

$$I = \sum_i P_i$$

donde $P_i \in T_i$, satisfacen

$$\begin{aligned} P_i^2 &= P_i \\ P_i P_j &= \Delta_{ij} P_i \ . \end{aligned}$$

Tenemos entonces que $P_i T = T_i$.

Si ahora pensamos en la acción de T en $\mathbb{C}^{\binom{n}{k}}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{\binom{n}{k}} &= T\mathbb{C}^{\binom{n}{k}} = \oplus T_i \mathbb{C}^{\binom{n}{k}} \text{ donde} \\ T_i \mathbb{C}^{\binom{n}{k}} &= P_i T \mathbb{C}^{\binom{n}{k}} = P_i \mathbb{C}^{\binom{n}{k}}. \end{aligned}$$

Los $T_i \mathbb{C}^{\binom{n}{k}}$ son T-submódulos puesto que la descomposición de T nos dice que

$$T \ T_i \subseteq T_i.$$

Llamamos a dichos submódulos isotípicos.
P_i son las proyecciones

$$P_i : \mathbb{C}^{\binom{n}{k}} \ \longrightarrow \ P_i \mathbb{C}^{\binom{n}{k}} = T_i \mathbb{C}^{\binom{n}{k}}.$$

5.2. Proyecciones a los T-submódulos isotípicos: En nuestro caso la descomposición en T-submódulos isotípicos es:

$$\mathbb{C}^{\binom{n}{k}} = \oplus_{rs} \ {}^{rs}T\mathbb{C}^{\binom{n}{k}}.$$

En lo que sigue damos una descomposición de $I \in T$ en suma de proyecciones ortogonales a dichos T-submódulos.

Definimos la matriz $M_{rs} \ \in \ {}^{rs}T$ como

$$M_{rs} = \sum_i \ {}^{rs}T_{ii}.$$

Es decir M_{rs} es la matriz que es nula en los bloques fuera de la diagonal y que se comporta en la diagonal del siguiente modo:

$$(M_{rs})_{/\Omega_i\times\Omega_i} = \begin{cases} E_r^{\binom{k}{k-i}} \otimes E_s^{\binom{n-k}{i}} \\ \qquad 0 \end{cases}$$

según $E_r \otimes E_s$ sea nulo o no en $\mathcal{B}_{\binom{k}{k-i}} \otimes \mathcal{B}_{\binom{n-k}{i}}$. Es fácil comprobar que

$$\begin{aligned} M_{rs}^2 &= M_{rs} \\ \sum_{rs} M_{rs} &= I \in T \end{aligned}$$

es decir que M_{rs} son los proyectores

$$M_{rs} : \mathbb{C}^{\binom{n}{k}} \longrightarrow \ {}^{rs}T\mathbb{C}^{\binom{n}{k}}.$$

5.3. T-submódulos irreducibles.

En la sección anterior describimos los T-submódulos isotípicos que aparecen en la descomposición de $\mathbb{C}^{\binom{n}{k}}$.

En esta sección queremos descomponer cada uno de ellos en T-submódulos irreducibles. La idea es la misma que usamos para encontrar T-submódulos irreducibles en el caso de los cuadrángulos generalizados. Dado un ideal de T encontramos las matrices que generan dicho ideal y tomando algunas de ella definimos subespacios que luego probaremos que son T-submódulos irreducibles.

Recordemos entonces, que cada ideal simple ${}^{rs}T$ está generado por las matrices ${}^{rs}T_{ij}$ Dichas matrices satisfacen

$${}^{rs}T_{ij} \ {}^{rs}T_{jl} ={}^{rs} T_{il} \quad i,j,l = e_{rs},\ldots,\ e_{rs}+d_{rs}.$$

En particular

$$({}^{rs}T_{ee})^2 = \ {}^{rs}T_{ee},$$

entonces tiene una descomposición en proyecciones de rango 1

$${}^{rs}T_{ee} = \sum_j \ {}^{rs}T_{ee}^{(j)}$$

donde

$${}^{rs}T_{ee}^{(m)} \ {}^{rs}T_{ee}^{(n)} \quad = \quad \Delta_{mn} \ {}^{rs}T_{ee}^{(m)}.$$

Además, para $i = 1,\ldots,d_{rs}$ se cumple

$${}^{rs}T_{e+i,e} \ {}^{rs}T_{e,e} = \ {}^{rs}T_{e+i,e},$$

luego podemos escribir

$${}^{rs}T_{e+i,e} = \sum_m \ {}^{rs}T_{e+i,e} \ {}^{rs}T_{e,e}^{(m)}.$$

Con estas observaciones para cada T-submódulo isotípico, definimos los siguientes subespacios

$$W_{{}^{rs}T_{ee}^{(m)}} \subseteq {}^{rs}T\mathbb{C}^{\binom{n}{k}}$$

Definición 3.33. *Para $m = 1,, \ldots, rg({}^{rs}T_{ee})$ sea*

$$W_{{}^{rs}T_{ee}^{(m)}} = {}^{rs}T_{ee}^{(m)}\mathbb{C}^{\binom{n}{k}} + {}^{rs}T_{e+1,e}\ {}^{rs}T_{ee}^{(m)}\mathbb{C}^{\binom{n}{k}} + \cdots + {}^{rs}T_{e+d,e}\ {}^{rs}T_{ee}^{(m)}\mathbb{C}^{\binom{n}{k}} \qquad .$$

Tenemos entonces:

Proposición 3.34. *$W_{{}^{rs}T_{ee}^{(m)}}$ son T-submódulos irreducibles de dimensión $d_{r,s}+1$ isomorfos entre si.*

Prueba:
La descomposición de T en ideales mutuamente ortogonales

$$T = \oplus\ {}^{rs}T$$

y el hecho de que los generadores de cada ideal simple ${}^{rs}T$ satisfagan

$${}^{rs}T_{ij}\ {}^{rs}T_{jl} = {}^{rs}T_{il},$$

nos dicen que

$${}^{rs}T_{ij}\ W_{{}^{rs}T_{ee}^{(m)}} = {}^{rs}T_{i,e}\ {}^{rs}T_{ee}^{(m)}\mathbb{C}^{\binom{n}{k}}$$

lo que prueba que $\forall\ m\ W_{{}^{rs}T_{ee}^{(m)}} \subseteq {}^{rs}T\mathbb{C}^{\binom{n}{k}}$ es un T-submódulo y es claro que es de dimensión $d_{rs}+1$.

Es irreducible, puesto que para $i = e, \ldots, e+d$ la acción de las siguientes matrices diagonales de T da como resultado

$${}^{rs}T_{ii}\ W_{{}^{rs}T_{ee}^{(m)}} = {}^{rs}T_{i,e}\ {}^{rs}T_{ee}^{(m)}\mathbb{C}^{\binom{n}{k}}$$

lo que dice que cualquier subespacio de $W_{{}^{rs}T_{ee}^{(m)}}$ no sería invariante bajo dicha acción.

Es fácil verificar que los T-submódulos irreducibles son isomorfos como T-submódulos por medio de

$$\begin{array}{rcl} \sigma_{rs} : W_{{}^{rs}T_{ee}^{(m)}} & \longrightarrow & W_{{}^{rs}T_{ee}^{(n)}} \\ {}^{rs}T_{ee}^{(m)}v_e + \cdots + {}^{rs}T_{e+d,e}^{(m)}\ v_{e+d} & \longrightarrow & {}^{rs}T_{ee}^{(n)}v_e + \cdots + {}^{rs}T_{e+d,e}^{(n)}\ v_{e+d} \end{array}$$

que preserva la acción de T.

■

Proposición 3.35.
Sean ${}^{rs}T\mathbb{C}^{\binom{n}{k}}$ los T-submd́ulos isotípicos descriptos en la sección 5.1 y $W_{{}^{rs}T_{ee}^{(m)}}$ los T-submd́ulos de la Proposición anterior. Entonces tenemos la siguiente descomposición:

$${}^{rs}T\mathbb{C}^{\binom{n}{k}} = \oplus_m W_{{}^{rs}T_{ee}^{(m)}}.$$

Prueba:
Veamos que para $m \neq n$

$$W_{{}^{rs}T_{ee}^{(m)}} \cap W_{{}^{rs}T_{ee}^{(n)}} = 0.$$

Si esto no sucede existen $v_e, \ldots, v_{e+d}, w_e, \ldots, w_{e+d}$ tales que

$${}^{rs}T_{ee}^{(m)}v_e + \cdots + {}^{rs}T_{e+d,e}\ {}^{rs}T_{ee}^{(m)}\ v_{e+d} = {}^{rs}T_{ee}^{(n)}w_e + \cdots + {}^{rs}T_{e+d,e}\ {}^{rs}T_{ee}^{(n)}\ w_{e+d}.$$

Pero dada esta igualdad haciendo actuar ${}^{rs}T_{e,e}^{(m)} \in T$ en ambos miembros tenemos

$$
\begin{aligned}
{}^{rs}T^{(m)}_{ee}\ {}^{rs}T^{(m)}_{ee} v_e &= {}^{rs}T^{(m)}_{ee}\ {}^{rs}T^{(n)}_{ee} w_e \\
{}^{rs}T^{(m)}_{ee} v_e &= 0
\end{aligned}
$$

Del mismo modo podemos ver que

$$
{}^{rs}T_{e+i,e}\ {}^{rs}T^{(m)}_{ee} v_{e+i,e} = 0
$$

con lo cual concluimos que los subespacios $W_{{}^{rs}T^{(m)}_{ee}}$ tienen intersección nula dos a dos. ¿Cuántos subespacios hay?.
Por la forma de definirlos, para cada ${}^{rs}T^{(m)}_{ee}$ que aparezca en la descomposición de ${}^{rs}T_{ee}$ tendremos un T-submódulo irreducible.
Luego la cantidad está dada por el rango de ${}^{rs}T_{ee}$ y

$$
\begin{aligned}
rg({}^{rs}T_{ee}) &= rg(E_r^{\binom{k}{k-e}} \otimes E_s^{\binom{n-k}{e}}) \\
&= rg(E_r^{\binom{k}{k-e}}) rg(E_s^{\binom{n-k}{e}}) \\
&= \tfrac{k-2r+1}{k-r+1}\tbinom{k}{r}\ \tfrac{n-k-2s+1}{n-k-s+1}\tbinom{n-k}{s}
\end{aligned}
$$

(notar que sólo depende de los parámetros (n,k) asociados a un $J(n,k)$ y de r,s asociados al ideal simple ${}^{rs}T \subseteq T$.

Tenemos entonces que

$$
\oplus_m W_{{}^{rs}T^{(m)}_{ee}} \subseteq^{rs} T\mathbb{C}^{\binom{n}{k}}.
$$

La igualdad se obtiene comparando dimensiones.
Dijimos que hay

$$
\tfrac{k-2r+1}{k-r+1}\tbinom{k}{r}\ \tfrac{n-k-2s+1}{n-k-s+1}\tbinom{n-k}{s}
$$

T-submódulos irreducibles cada uno de dimensión $d_{rs}+1$, luego

$$
dim\ (\oplus_m W_{{}^{rs}T^{(m)}_{ee}}) = \tfrac{k-2r+1}{k-r+1}\tbinom{k}{r}\ \tfrac{n-k-2s+1}{n-k-s+1}\tbinom{n-k}{s}(d_{rs}+1).
$$

Por otro lado, la dimensión del T-submódulo isotípico ${}^{rs}T\mathbb{C}^{\binom{n}{k}}$, se obtiene calculando el rango de la proyección

$$
M_{rs} = \sum_i {}^{rs}T_{ii}.
$$

Dicha proyección es una matriz diagonal en bloques

$$
(M_{rs})_{/\Omega_i\times\Omega_i} = \begin{cases} E_r^{\binom{k}{k-i}} \otimes E_s^{\binom{n-k}{i}} \\ 0 \end{cases}
$$

como observamos anteriormente el rango de $E_r^{\binom{k}{k-i}} \otimes E_s^{\binom{n-k}{i}}$ no depende de i, sólo de los parámetros (n,k) del esquema y de r,s que hacen referencia al ideal simple asociado.

$$
rg(E_r^{\binom{k}{k-i}} \otimes E_s^{\binom{n-k}{i}}) = \tfrac{k-2r+1}{k-r+1}\tbinom{k}{r}\ \tfrac{n-k-2s+1}{n-k-s+1}\tbinom{n-k}{s}
$$

Entonces; ¿cuántas veces aparece este rango?. La cantidad de bloques no nulos que es el parámetro $d_{rs}+1$, con lo cual tenemos la igualdad.

∎

Hemos probado la siguiente descomposición en T-submódulos irreducibles:

Teorema 3.36.

Sea T el álgebra de Terwilliger de un $J(n,k)$ con $3k \leq n$. Sean $W_{rs T_{ee}^{(m)}}$ los T-submdulos irreducibles definidos en 3.33 y $\mathbb{C}^{\binom{n}{k}}$ el espacio en el cual actúa T. Entonces, se tiene la siguiente descomposición:

$$\mathbb{C}^{\binom{n}{k}} = \oplus_{rs} \oplus_m W_{rs T_{ee}^{(m)}}.$$

El siguiente corolario surge de calcular las dimensiones de dicha descomposición.

Corolario 3.37.

$$\binom{n}{k} = \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \left(\sum_{s=0}^{r} (k-2r+1) \frac{k-2r+1}{k-r+1} \binom{k}{r} \; \frac{n-k-2s+1}{n-k-s+1} \binom{n-k}{s} + \right.$$
$$\left. \sum_{s=r+1}^{k-r} (k+1-s-r) \frac{k-2r+1}{k-r+1} \binom{k}{r} \; \frac{n-k-2s+1}{n-k-s+1} \binom{n-k}{s} \right).$$

Prueba:

La igualdad proviene de calcular

$$dim \; \mathbb{C}^{\binom{n}{k}} = \sum_{r,s} (d_{r,s}+1) rg(E_r) rg(E_s)$$

y de descomponer dicha suma en los casos $r \leq s$ y $r > s$.

■

CAPíTULO 4

T-álgebra de los hipercubos: Aplicación de T-álgebra de $J(n,k)$.

En este capítulo estudiamos el ejemplo de los hipercubos. Dicho ejemplo; la T-álgebra y sus T-módulos irreducibles; fue estudiado en el trabajo de [**Go**]. También en el trabajo de [**M P**] se da otro camino para describir la T-álgebra de los hipercubos. Aquí proponemos otra descripción que surge como aplicación del capítulo anterior, ya que observamos que las matrices definidas y los cálculos realizados para los esquemas de Johnson sirven para describir explícitamente la T-álgebra de un $H(n,2)$ y sus T-submódulos irreducibles.

1. Matriz de adyacencia

Sin pérdida de generalidad podemos considerar

$$\Omega_0 = \{(0,0,\dots,0)\}$$

y luego los elementos de Ω_i provienen de elegir i lugares para colocar $1's$. Es decir tenemos una biyección entre elementos de $\Omega_i \subseteq H(n,2)$ y $J(n,i)$. Con esta identificación tenemos el siguiente:

LEMA 4.1. *Sea A_1 la primera matriz de adyacencia de un $H(n,2)$ y δ_{ii+1} las matrices indexadas por $J(n,i)\times J(n,i+1)$ definidas en 3.6. Entonces*

$$(A_1)_{\Omega_p\times\Omega_q} = \begin{cases} \delta_{i,i+1} & si\ p=i, q=i+1 \\ \delta^t_{i,i+1} & si\ p=i+1, q=i \\ 0 & c.c \end{cases} .$$

Prueba:
Sabemos por la teoría que A_1 es nula en todos los bloques excepto en la primera subdiagonal (y por lo tanto en la primera supradiagonal).
Es claro que $\alpha_i \in \Omega_i,\ \alpha_{i+1}\in\Omega_{i+1}$ están en R_1 si y sólo si los lugares elegidos para los i $1's$ de α_i están contenidos en los lugares elegidos para los $i+1$ $1's$ de α_{i+1}.
Esa afirmación es equivalente a decir que dados

$$\alpha_i \in J(n,i),\ \alpha_{i+1}\in J(n,i+1)$$

$$(\alpha_i,\alpha_{i+1})\in R_1 \iff \alpha_i\subseteq\alpha_{i+1}$$

con lo cual se prueba el lema.

■

Observación:
Recordemos que en los esquemas de Johnson la primera matriz de adyacencia tenía el aspecto

$$(A_1)_{\Omega_i\times\Omega_{i+1}} = \delta_{k-i,k-i-1}\otimes\delta_{i,i+1}.$$

Miremos ahora la descripción de la matriz A_1 de $H(n,2)$. En los bloques de la primera supradiagonal (y por lo tanto en la primera subdiagonal) se comporta como la segunda coordenada del producto de $(A_1)_{J(n,k)}$. Los cálculos para este capítulo serán consecuencia directa de los realizados para $J(n,k)$.

2. $T_{H(n,2)}$

Ya que los esquemas de tipo $H(n,2)$ son P-polinomiales, entonces

$$T = \langle A_1, E_0^*, E_1^*, ...E_k^* \rangle$$

donde A_1 es la primera matriz de adyacencia del esquema y E_i^* es la matriz definida por

$$E_i^* = \begin{cases} I_{\Omega_i \times \Omega_i} & \text{en el bloque } \Omega_i \times \Omega_i \\ 0 & \text{en los demás bloques} \end{cases}$$

El objetivo de esta sección es definir un álgebra $\mathcal{M}$ que resultará ser isomorfa a T.

2.1. Definición del álgebra $\mathcal{M}$.

Con la definición dada en 3.2 consideramos las matrices:

$$\delta_{i,j} \qquad \text{indexada por elementos en } J(n,i) \times J(n,j)$$

Sea $\mathcal{B}_{\binom{n}{k}}$ el álgebra de Bose-Mesner correspondiente a un esquema de tipo $J(n,k)$.
Entonces , para $i = 0, 1...n,\ i < j$ definimos:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{i,j} &= \mathcal{B}_{\binom{n}{i}}\ \delta_{i,j} \quad i \leq j \\ \mathcal{M}_{i,j} &= \mathcal{M}_{ij}^t \ i > j \end{aligned}$$

Definición 4.2. $\mathcal{M} = \oplus_{ij} \mathcal{M}_{ij}$ *Un elemento $m \in \mathcal{M}$ se escribe unívocamente como*

$$m = \sum_{ij} m_{ij} \ \textit{con}\ m_{ij} \in \mathcal{M}_{ij}$$

El producto $*$ de dos elementos m_{ij}, m_{kl} se define como :

$$m_{ij} * m_{kl} = \begin{cases} \textit{el producto usual de matrices si } j = k \\ 0 \ \textit{si } j \neq k \end{cases}$$

y entonces dados $m, m' \in \mathcal{M}$

$$m * m' = (\sum_{ij} m_{ij})(\sum_{ij} m'_{ij}) = \sum_{i,j,l} (m_{ij} * m'_{jl})$$

Por los cálculos del capítulo anterior sabemos que

Proposición 4.3.
Sea T el álgebra de Terwilliger de los hipercubos y $\mathcal{M}$ el álgebra definida en la sección 2.1. Entonces $\mathcal{M}$ es un álgebra y $T \subseteq \mathcal{M}$.

Por otro lado, tenemos

Proposición 4.4. *Sea T el álgebra de Terwilliger de un esquema de tipo $H(n,2)$. Entonces*

$$\begin{aligned} T_{/\Omega_i \times \Omega_i} &\supseteq \mathcal{B}_{\binom{n}{i}} \ \textit{y por lo tanto} \\ T_{/\Omega_i \times \Omega_j} &\supseteq \mathcal{B}_{\binom{n}{i}} \delta_{ij} \end{aligned}$$

Prueba:
Por los cálculos realizados para la T-álgebra de un esquema de tipo $J(n,k)$, sabemos

que

$$
\begin{aligned}
\delta_{i,i+1}\ \delta_{i+1,i} &= (n-i)I_{\binom{n}{i}} + A_1^{\binom{n}{i}} \\
&= \sum_r \left((n-i)+p_1(r)^{\binom{n}{i}}\right) E_r^{\binom{n}{i}} \\
&\ \text{luego, las potencias} \\
(\delta_{i,i+1}\ \delta_{i+1,i})^m &= \sum_r \left((n-i)+p_1(r)^{\binom{n}{i}}\right)^m E_r^{\binom{n}{i}}
\end{aligned}
$$

como los $p_1(r)$ son todos distintos, la matriz de las potencias expresadas como combinación lineal de los E_r, es de tipo Vandermonde, luego es inversible, entonces

$(\delta_{i,i+1}\ \delta_{i+1,i})^m$ son l.i. están en T y generan a $E_r^{\binom{n}{i}}$,

De esta manera se tiene

$$T_{/\Omega_i\times\Omega_i} \supseteq \mathcal{B}_{\binom{n}{i}}.$$

Ya probamos que

$$\delta_{ij}\delta_{jl} = \lambda_{il}\delta_{il},$$

entonces

$$\delta_{il} \in T_{/\Omega_i\times\Omega_l},$$

con lo cual concluimos

$$T_{/\Omega_i\times\Omega_l} \supseteq \mathcal{B}_{\binom{n}{i}}\delta_{il}.$$

■

La proposición anterior nos da el siguiente

Corolario 4.5.
Sea T el álgebra de Terwilliger de los hipercubos y $\mathcal{M}$ el álgebra definida en la sección 2.1. Entonces $T \supseteq \mathcal{M}$.

Proposición 4.6. ***Descripción de** T*
Sea T el álgebra de Terwilliger de los hipercubos. Entonces

$$
\begin{aligned}
T_{/\Omega_i\times\Omega_i} &= \mathcal{B}_{\binom{n}{i}} \\
T_{/\Omega_i\times\Omega_j} &= \mathcal{B}_{\binom{n}{i}}\delta_{ij}
\end{aligned}
$$

3. Ideales simples de $T_{H(n,2)}$

Con la descripción de T dada en la Proposición 4.6, en esta sección descomponemos el álgebra $T = T_{H(n,2)}$ en ideales simples.
Para ello utilizamos la siguiente :

Definición 4.7. *Sean ${}^rT_{ij}$ las siguientes matrices indexadas por bloques $\Omega_i\times\Omega_j$*

$$
{}^rT_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n_r^{ij}}} E_r^{\binom{n}{i}}\delta_{i,j} & \textit{en el bloque } \Omega_i\times\Omega_j \\ 0 & \textit{c.c.} \end{cases} .
$$

donde

$$n_r^{ij} = \sum_{m=0}^{j-i} \binom{n-i-m}{j-i-m} p_m^{\binom{n}{i}}(r)$$

Definimos el subespacio ${}^rT \subseteq T$ como las combinaciones lineales de dichas matrices:

$${}^rT = \langle \{{}^rT_{ij}\}_{i,j} \rangle.$$

Observación:
Definimos los siguientes parámetros análogos a los dados en 3.19 del capítulo anterior.

DEFINICIÓN 4.8. *Dado un proyector $E_r^{\binom{n}{i}} \in \mathcal{M}_{ii}$, definimos*

$$e_r = min\{i \mid 0 \neq E_r^{\binom{n}{i}} \in \mathcal{M}_{i,i}\} \tag{71}$$

$$d_r = \#\{i \mid 0 \neq E_r^{\binom{n}{i}} \in \mathcal{M}_{i,i}\} - 1. \tag{72}$$

Tenemos entonces

$${}^rT_{ij} \neq 0 \iff i, j = e_r, ..., e_r + d_r$$

(el producto $E_r^{\binom{n}{i}} \delta_{i,j}$ es nulo cuando $j > e_r + d_r$).

Por cálculos realizaos en el capítulo anterior tenemos:

PROPOSICIÓN 4.9.
Las matrices ${}^rT_{ij}$ satisfacen

$${}^rT_{ij}\ {}^rT_{jl} = {}^r T_{il}$$

y por lo tanto

$${}^rT \simeq End(\mathbb{C}^{d_r+1})$$

donde d_r es el parámetro definido en 4.8

Se tiene la siguiente descomposición:

TEOREMA 4.10.
Sea T el álgebra de Terwilliger de un esquema $H(n,2)$. Entonces ${}^rT$ son ideales simples mutuamente ortogonales y T se descompone del siguiente modo:

$$T = \oplus_r^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}\ {}^rT \simeq \oplus_r^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}\ End(\mathbb{C}^{d_r+1}).$$

Prueba:
Es inmediata de los cálculos realizados para la descomposición de la T-álgebra de un esquema de tipo $J(n,k)$.

■

4. Descomposición de $\mathbb{C}^{2^n}$ en T- submódulos irreducibles

En esta sección consideramos la acción del álgebra T en $\mathbb{C}^{2^n}$

$$T \times \mathbb{C}^{2^n} \longrightarrow \mathbb{C}^{2^n}$$

y damos una descomposición de dicho espacio en submódulos irreducibles de T.
Los resultados surgen de los obtenidos en el capítulo de esquemas de Johnson.

4.1. T-submódulos isotípicos. Una vez que tenemos la descomposición de T en ideales simples

$$T = \oplus_r\ {}^rT,$$

sabemos que

$$\mathbb{C}^{2^n} = \oplus {}^rT\ \mathbb{C}^{2^n}$$

donde los ${}^rT\ \mathbb{C}^{2^n}$ son T-submódulos. Los denominamos T-submódulos isotípicos.

4.2. Proyecciones a los T-submódulos isotípicos. Las proyecciones a dichos T-submódulos son las matrices diagonales

$$ {}^{r}M = \sum_{i} {}^{r}T_{i,i} \text{ donde } {}^{r}T_{i,i} \in {}^{r}T. $$

Es fácil comprobar que satisfacen

$$ \begin{aligned} ({}^{r}M)^2 &= {}^{r}M \\ \sum_{r} {}^{r}M &= I \in T. \end{aligned} $$

4.3. T-submódulos irreducibles. En la sección anterior describimos los T-submódulos isotípicos que aparecen en la descomposición de $\mathbb{C}^{2^n}$.
En esta sección queremos descomponer cada uno de ellos en T-submódulos irreducibles. La idea es la misma que usamos para encontrar T-submódulos irreducibles en los ejemplos anteriormente analizados. Los parámetros e_r, d_r son los definidos en 4.8
.

Recordemos, que cada ideal simple ${}^{r}T$ está generado por las matrices ${}^{r}T_{ij}$. Dichas matrices satisfacen

$$ {}^{r}T_{ij}\ {}^{r}T_{jl} ={}^{r} T_{il} \quad i,j,l = e_r, \dots,\ (e_r + d_r). $$

En particular ${}^{r}T_{ee}^2 = {}^{r}T_{ee}$, entonces tiene una descomposición

$$ {}^{rs}T_e = \sum_{j} {}^{rs}T_e^{(j)} $$

donde

$$ {}^{rs}T_e^{(m)}\ {}^{rs}T_e^{(n)} \quad = \quad \Delta_{mn}\ {}^{rs}T_e^{(m)}. $$

Además, para $i = 1, \dots, d_r$ se cumple

$$ {}^{r}T_{e+i,e}\ {}^{r}T_{e,e} = {}^{r}T_{e+i,e}, $$

luego podemos escribir

$$ {}^{r}T_{e+i,e} = \sum_{m} {}^{r}T_{e+i,e}\ {}^{r}T_{e,e}^{(m)}. $$

Con estas observaciones para cada T-submódulo isotípico, definimos los siguientes subespacios

$$ W_{{}^{r}T_{ee}^{(m)}} \subseteq {}^{r}T\mathbb{C}^{2^n}. $$

Definición 4.11. *Para $m = 1, , \dots, rg({}^{rs}T_e)$ sea*

$$ W_{{}^{r}T_{ee}^{(m)}} ={}^{r} T_{ee}^{(m)}\mathbb{C}^{2^n} +{}^{r} T_{e+1,e}\ {}^{r}T_{ee}^{(m)}\mathbb{C}^{2^n} + \cdots +{}^{r} T_{e+d,e}\ {}^{r}T_{ee}^{(m)}\mathbb{C}^{2^n}. $$

Tenemos entonces:

Proposición 4.12. *$W_{{}^{r}T_{ee}^{(m)}}$ son T-submódulos irreducibles de dimensión $d_r + 1$ isomorfos entre si y cada T-submódulo isotípico se descompone como*

$$ {}^{r}T\mathbb{C}^{2^n} = \oplus_m W_{{}^{r}T_{ee}^{(m)}}. $$

Teorema 4.13. *Para $m = 1, 2, ..., rg({}^{rs}T_e)$, sean $W_{{}^{r}T_{ee}^{(m)}}$ los T-submódulos irreducibles definidos en 4.11 y sea $\mathbb{C}^{2^n}$ el espacio en el cual T actúa, se tiene la siguiente descomposición:*

$$ \mathbb{C}^{2^n} = \oplus_r \oplus_m W_{{}^{r}T_{ee}^{(m)}}. $$

Corolario 4.14.

$$2^n = \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (n-2s+1) \frac{n-2s+1}{n-s+1} \binom{n}{s}.$$

Prueba:

La igualdad se obtiene de considerar que para cada r hay $rg(\ {}^{rs}T_e)$ T-submódulos irreducibles, isomorfos entre si de domensión $d_r + 1$.

$\blacksquare$

Bibliografía

[**B**] Bose R.C. *Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs*. Pac. J. Math. Vol 13 1963.

[**B C**] Brower A. , Cohen A. and Neumaier A. *Distance-Regular Graphs* , Springer Verlag, Berlin, 1989.

[**B I**] Bannai E. and T.Ito *Algebraic Combinatorics I:Association Schemes*. Benjamin Cummings,London,1984.

[**B M**] Balmaceda P. and Munesama A. *The Terwilliger algebras of group association schemes.*, Kyushu J. Math. Vol 49 1995.

[**B O**] Balmaceda P. and Oura M. *The Terwilliger algebra of the group association schemes of A_5 and S_5*, Kyushu J. Math. Vol 48 Nro 2 1994.

[**Ca**] Caughman J.S. IV *The Terwilliger algebra of bipartite P- and Q- polynomial schemes*,Discrete Math. 196 1999.

[**De**] Delsarte *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*, Philihps Research Reports Supp, No 10 1973.

[**G**] Godsil, *Algebraic Combinatorics*, Chapman and Hall, New York 1993.

[**Go**] Go J. *The Terwilliger algebra of the hypercube* Europ. J. Comb. 23 No 4 2002.

[**Ko**] Koppinen M. *Algebras with two multiplications*. Journal of Algebra Vol 182 Nro 1 1996.

[**L P**] Levstein F. and Penazzi D. *The icosahedron as a P- and Q-polynomial association scheme.* Boletín de la Acad Nac Cs tomo 65 2000.

[**L W**] van Lint J. H.and Wilson R. *A course in combinatorics*. Cambridge U. P.

[**M P**] Marco J.M. and Parcet J. *On the natural representation of $S(\Omega)$ into $L^2(P(\Omega))$: Discrete harmonics and Fourier transform.* J. Comb. Theory, Ser A 100, No 1 (2002).

[**St**] Stanton D. *Orthogonal polynomials and Chevalley groups* Special Functions: Group theoretical aspects and applications. Reidel Publishing company 1984.

[**Te 1**] Terwilliger P. *The subsconstituent algebra of an association scheme I.* J. Alg. Combin. 1992.

[**Te 2**] Terwilliger P. *The subsconstituent algebra of an association scheme II.* J. Alg. Combin. 1993.

[**Te 3**] Terwilliger P. *The subsconstituent algebra of an association scheme I.* J. Alg. Combin. 1993.

[**T Y**] Tomiyama M. and Yamazaki N. *The subconstituent algebra of a strongly regular graph* Kyushu J. Math. 48 1994.