Chapter 1

Introducción

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio (abierto y conexo) acotado, sea L un operador parabólico con coeficientes T-periódicos, y sea $m : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función T-periódica. En la primera parte de este trabajo estudiaremos la existencia de autovalores principales (esto es, autovalores con autofunciones asociadas positivas) al problema con función de peso m (que puede cambiar de signo)

$$\begin{cases} Lu = \lambda m u & \text{en } \Omega \times \mathbb{R} \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \times \mathbb{R} \\ u \ T\text{-periódica} & \end{cases} \tag{1.1}$$

Este problema ha sido ampliamente tratado, y tiene interés no sólo teórico sino también por sus aplicaciones a problemas no lineales que aparecen en varios fenómenos físicos y biológicos como por ejemplo reacciones químicas, teoría de combustión, dinámica de poblaciones (interacciones presa-predador, competición, etc.), etc. Ver por ejemplo los libros de P. Hess [29] y de J. Smoller [44] y las referencias que allí figuran.

Quienes primero estudiaron el problema (1.1) fueron Hess y Beltramo en [7], en donde probaron que la condición $P(m) := \int_0^T \max_{x \in \overline{\Omega}} m(x,t)\, dt > 0$ es necesaria y suficiente para la existencia de un autovalor principal positivo. Más aún, demostraron que de existir, tal autovalor es único y algebraicamente simple. Luego, estos resultados fueron extendidos en varias direcciones, para pesos y dominios con menor regularidad así como para otras condiciones de frontera. Citamos aquí los trabajos [6], [11], [12], [21] [26], [40]. En una primera parte de la tesis, extendemos los resultados anteriores a una gama sustancialmente más amplia de pesos que los considerados hasta el presente (más aún, veremos que las condiciones impuestas al peso son en algún sentido optimales), adaptando las ideas y técnicas desarrolladas en los trabajos citados (más precisamente, usando como herramienta fundamental el teorema de Krein-Rutman, aplicado en este caso en la versión para conos positivos con interior vacío), y basándonos en un importante resultado de compacidad contenido en [10].

Por otro lado, y también con respecto al problema (1.1), estudiamos qué ocurre cuando el coeficiente independiente del operador diferencial L cambia de signo. Cabe señalar que en todos los trabajos citados anteriormente es consideró (1.1) con el coeficiente de orden cero no negativo. Cuando este coeficiente cambia de signo el problema se complica notablemente. Si bien no podremos decir exactamente qué ocurre para cada peso (esto ni siquiera parece ser posible en el caso elíptico, ver [17]), en algunos casos daremos condiciones necesarias y suficientes para la existencia de autovalor principal positivo, y en los otros casos condiciones suficientes. Mencionamos que cuando el coeficiente independiente de L cambia de signo, la condición $P(m) > 0$ en general resulta no ser ni siquiera necesaria, y puede ocurrir también que existan dos autovalores principales positivos.

En la segunda parte de este trabajo, consideramos la cuestión de existencia y unicidad de soluciones positivas a problemas semilineales (más precisamente, sublineales) de la forma

$$\begin{cases} Lu = \lambda g(x,t,u) & \text{en } \Omega \times \mathbb{R} \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \times \mathbb{R} \\ u \ T\text{-periódica} \end{cases} \tag{1.2}$$

y

$$\begin{cases} Lu = g(x,t,u) & \text{en } \Omega \times \mathbb{R} \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \times \mathbb{R} \\ u \ T\text{-periódica} \end{cases} \tag{1.3}$$

para una cierta función dada $g : \Omega \times \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$. Si bien obviamente (1.2) y (1.3) son "equivalentes" en el sentido que conocer existencia de soluciones de un problema implica conocer la existencia de soluciones del otro, en (1.2) uno puede estudiar la existencia de una curva de soluciones $\lambda \to u_\lambda$ (lo que usualmente se denomina rama de bifurcación de soluciones). Para esto utilizaremos una extensión del teorema de Peano de ecuaciones ordinarias a espacios de Banach sumado a varios resultados concernientes al problema lineal (1.1), sin tener que usar los resultados clásicos de bifurcación.

Con respecto a (1.2), daremos condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una curva diferenciable $\lambda \to u_\lambda$ de soluciones positivas asumiendo que g satisface ciertas condiciones de integrabilidad y positividad y que $\xi \to g(x,t,\xi) \in C^1[0,\infty)$ y $\xi \to g(x,t,\xi)/\xi$ es no creciente en

$(0, \infty)$. Asimismo probaremos que la solución positiva, de existir, es única. En cuanto al problema (1.3), daremos también condiciones necesarias y suficientes para la existencia de soluciones positivas, pero con menor regularidad sobre g y sin imponer condiciones de monotonía a g. Además cubriremos algunos casos en que $\lim_{\xi \to 0^+} \left(g\left(., \xi\right) / \xi \right) = \infty$. Estos últimos teoremas se obtendrán con el método de sub y supersoluciones combinado con algunos resultados sobre problemas con peso del tipo (1.1).

Estos problemas también han sido ampliamente tratados tanto en el caso parabólico (ver por ejemplo, [2], [3], [29], [30]) como en el caso elíptico (por ejemplo [1], [8], [15], [18], [27] [46], [43]). Nuestros resultados extienden varios teoremas de los trabajos arriba citados.

Por último, cabe señalar que todos los resultados que obtendremos son válidos para los correspondientes problemas elípticos (haciendo los cambios correspondientes) ya que las técnicas y los resultados utilizados se aplican en ese caso.

La tesis está organizada de la siguiente manera. En el próximo capítulo se enuncian los resultados principales, en el siguiente se prueban los concernientes al problema lineal así como otros resultados necesarios para estudiar los casos no lineales, en el cuarto se trata el problema (1.2), y en el penúltimo se demuestran los resultados sobre el problema (1.3). Finalmente, en el último capítulo se muestran algunos problemas abiertos relacionados.

Chapter 2

Resultados principales

2.1 Notaciones y preliminares.

Comenzamos precisando las hipótesis y notaciones para poder enunciar nuestros resultados.

Consideraremos siempre Ω un dominio en $\mathbb{R}^N$ acotado, con $N \geq 2$. Mientras no se diga lo contrario no asumiremos sobre Ω ninguna regularidad. Dado $T > 0$, diremos que una función $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es T-periódica si $f(x, t+T) = f(x,t)$ a.e. $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$.

Para $1 \leq p, q \leq \infty$, sea $L^p_T(\mathbb{R}, L^q(\Omega))$ (en breve $L^p(L^q)$) el espacio de funciones medibles y T-periódicas tales que

$$\|f\|_{L^p(L^q)} := \left\| \|f(x,t)\|_{L^q(\Omega,dx)} \right\|_{L^p((0,T),dt)} < \infty$$

Provisto con esta norma, $L^p(L^q)$ es un espacio de Banach. Similarmente, sea $L^p_T(\Omega \times \mathbb{R})$ (en breve L^p_T) el espacio de Banach de funciones medibles y T-periódicas f tales que $f_{|\Omega \times (0,T)} \in L^p(\Omega \times (0,T))$, equipado con su norma natural

$$\|f\|_{L^p_T} := \left\| f_{|\Omega \times (0,T)} \right\|_{L^p(\Omega \times (0,T))}.$$

y sea $C_T\left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}\right)$ (en breve C_T) el espacio de funciones continuas y T-periódicas sobre $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ provisto con la norma L^∞.

Sean $v, s \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tales que

$$\frac{N}{2v} + \frac{1}{s} < 1, \qquad s \geq 2. \tag{2.1}$$

Sean $\{a_{i,j}\}_{1\leq i,j\leq N}$, $\{b_j\}_{1\leq,j\leq N}$ dos familias de funciones tales que $a_{i,j}\in L^{\infty}_T$, $a_{i,j}=a_{j,i}$ para $1\leq i,j\leq N$ y $b_j\in L^{\infty}\left(L^{2v}\right)$, y asumamos que

$$\sum_{i,j} a_{i,j}\left(x,t\right)\xi_i\xi_j\geq \alpha_0\left|\xi\right|^2$$

para alguna constante $\alpha_0>0$ y todo $(x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}$, $\xi=(\xi_1,...,\xi_N)\in\mathbb{R}^N$. Sea A la matriz $N\times N$ cuya entrada i,j es $a_{i,j}$, sea $b=(b_1,...,b_N)$, sea

$$a_0\in L^s\left(L^v\right)$$

y sea L el operador parabólico definido por

$$Lu=u_t-div\left(A\nabla u\right)+\langle b,\nabla u\rangle+a_0u$$

donde $\langle,\rangle$ denota el producto interno en $\mathbb{R}^N$.

Para introducir la noción de solución débil necesitamos algunas definiciones más. Si E es un espacio de Banach y $1\leq p\leq\infty$, $L^p\left(\Omega,E\right)$ denotará el espacio de funciones medibles $f:\Omega\to E$ tales que $\int_\Omega\|f\|_E^p<\infty$. Como es usual, $H^1\left(\Omega\right)$, $H^1_0\left(\Omega\right)$ son los espacios de Sobolev de funciones en $L^2\left(\Omega\right)$ con primeras derivadas débiles en $L^2\left(\Omega\right)$ y la clausura de $C_c^{\infty}\left(\Omega\right)$ en $H^1\left(\Omega\right)$ respectivamente. Sea $H^1_T\left(\Omega\times\mathbb{R}\right)$ (in breve H^1_T) el espacio de funciones en L^2_T con primeras derivadas débiles en L^2_T. Así, H^1_T provisto con su norma natural

$$\|u\|_{H^1_T}:=\|u\|_{L^2_T}+\||\nabla_{x,t}u|\|_{L^2_T}$$

es un espacio de Hilbert. Sea $H^1_{T,0}\left(\Omega\times\mathbb{R}\right)$ (en breve $H^1_{T,0}$) la clausura en H^1_T del espacio de funciones $f\in C^{\infty}_T\left(\Omega\times\mathbb{R}\right)$ tales que la proyección sobre Ω de su soporte es un subconjunto compacto de Ω.

Sea $C\left(\left[0,T\right],H^1_0\left(\Omega\right)\right)$ el espacio de Banach de funciones continuas $u:\left[0,T\right]\to H^1_0\left(\Omega\right)$ provistas con la norma

$$\|u\|_{BC}=\sup_{t\in[0,T]}\|u\left(t\right)\|_{H^1_0(\Omega)}$$

Definimos

$$W=\left\{u\in L^2\left(\left(0,T\right),H^1_0\left(\Omega\right)\right):\frac{du}{dt}\in L^2\left(\left(0,T\right),H^{-1}\left(\Omega\right)\right)\right\}$$

donde $H^{-1}\left(\Omega\right)=H^1_0\left(\Omega\right)'$. Es conocido (por ejemplo [35]) que W tiene inclusión continua en $C\left(\left[0,T\right],H^1_0\left(\Omega\right)\right)$ y luego, para $u\in W$, $u\left(t\right)$ tiene sentido para cada $t \in [0,T]$. Mas aún, W equipado con la norma

$$\|u\|_W = \left(\int_0^T \|u(\tau)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \, d\tau + \int_0^T \left\| \frac{du}{dt}(\tau) \right\|^2_{H^{-1}(\Omega)} d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

es un espacio de Hilbert.

Definición. (*Solución débil*) Dada $f \in L^2(L^p)$ con $p > 2N/(N+2)$, decimos que u es solución (débil) del problema periódico

$$\begin{cases} Lu = f & \text{en } \Omega \times \mathbb{R} \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \times \mathbb{R} \\ u \ T\text{-periódica} \end{cases} \tag{2.2}$$

si u es T-periódica, $u_{|\Omega \times (0,T)} \in W$ y

$$\int\limits_{\Omega \times (0,T)} \left[-u \frac{\partial g}{\partial t} + \langle A \nabla u, \nabla g \rangle + \langle b, \nabla u \rangle g + a_0 u g \right] = \int\limits_{\Omega \times (0,T)} f g \tag{2.3}$$

para toda $g \in C_c^\infty(\Omega \times (0,T))$.

Es bien conocido (ver por ejemplo [35], [11]) que este problema tiene una única solución periódica con $u_{|\Omega \times (0,T)} \in L^2\left((0,T), H_0^1(\Omega)\right)$. Por otra parte, es fácil ver que si u es solución de (2.2), entonces (2.3) vale también para toda $g \in H^1_{T,0}$.

2.2 El caso lineal con $a_0 \geq 0$.

Sea

$$P(m) := \int_0^T \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} m(x,t) \; dt$$

Sea $\widetilde{m}(t) := \operatorname*{esssup}_{x \in \Omega} m(x,t)$. Notar que la situación $\|\widetilde{m}\|_{L^1(0,T)} = \infty$ es, a priori, posible. Sin embargo, como $\widetilde{m}(t) \geq m(x,t)$ a.e., tenemos $\widetilde{m}^-(t) \leq |m(x,t)|$, y así $\widetilde{m}^- \in L^s(0,T)$. Por tanto sigue que $P(m)$ está bien definido (el valor $+\infty$ permitido). Notar asimismo que lo anterior también dice que $P(m) > -\infty$.

Ya estamos en condiciones de enunciar nuestros primeros resultados.

Teorema 1. *Sea $m \in L^s(L^v)$ con s, v satisfaciendo (2.1). Entonces, $P(m) > 0$ es condición necesaria y suficiente para la existencia de autovalor principal positivo para (1.1). Más aún, este autovalor (denotado por $\lambda_1(L, m)$ o $\lambda_1(m)$ si no hay confusión) es único y algebraicamente simple.*

Para esta clase de pesos, siguen valiendo aún un principio del máximo asociado y la dependencia analítica con respecto al peso.

Teorema 2. *Supongamos existe $\lambda_1(m)$, y sea $h \in L^s(L^v)$ una función positiva (y no idénticamente cero). Entonces, si $0 < \lambda < \lambda_1(m)$, existe una única solución al problema*

$$\begin{cases} Lu = \lambda m u + h & \text{en } \Omega \times \mathbb{R} \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \times \mathbb{R} \\ u \ T\text{-periódica} \end{cases} \tag{2.4}$$

Más aún, $u(x,t) > 0$ a.e. $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$. Recíprocamente, si (2.4) tiene solución positiva para $h \geq 0$ y $\lambda > 0$, entonces $\lambda < \lambda_1(m)$.

Teorema 3. *La aplicación $m \to \lambda_1(m)$ es analítica real.*

Observaciones. i. Notar que las condiciones impuestas a s, v son optimales en el sentido que son necesarias para una buena teoría de soluciones al problema (1.1) (ver [33], Sección I.3).

ii. Como casos particulares se obtienen estos resultados para pesos

$$\begin{cases} m \in L^\infty(L^r) & r > \frac{N}{2} \\ m \in L^2(L^r) & r > N \\ m \in L^r_T & r > \frac{N}{2} + 1 \end{cases}$$

iii. Notar que el Teorema 2 es un poco más general que el Teorema 3.10 presentado en [22].

iv. Sin hipótesis de regularidad sobre Ω, las autofunciones no tienen por qué ser ni siquiera acotadas. Sin embargo, asumiendo alguna regularidad sobre Ω las autofunciones resultarán continuas en $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$. Esto jugará un papel importante en el problema no lineal.

2.3 El caso lineal cuando a_0 cambia de signo.

En esta sección asumimos las siguientes hipótesis sobre el peso m y el coeficiente a_0:

$$a_0^+, m^+ \in L^s\left(L^v\right), \qquad a_0^-, m^- \in L_T^\infty \tag{2.5}$$

donde, como es usual, escribimos $f = f^+ - f^-$.

Sea L_0 el operador definido por

$$L_0 = L + a_0^-$$

En forma similar a lo hecho en [17], consideramos tres casos separadamente

Caso I	$\lambda_1\left(L_0, a_0^-\right) > 1$
Caso II	$\lambda_1\left(L_0, a_0^-\right) = 1$
Caso III	$\lambda_1\left(L_0, a_0^-\right) < 1$

Los resultados principales son

Teorema 4. *(i) Supongamos $\lambda_1\left(L_0, a_0^-\right) > 1$. Entonces, la conclusión del Teorema 1 sigue siendo válida.*

(ii) Supongamos $\lambda_1\left(L_0, a_0^-\right) = 1$. Si $m = m(t)$, entonces (1.1) tiene autovalor principal positivo si y sólo si $\int_0^T m = 0$. En tal caso, todo $\lambda \in \mathbb{R}$ es autovalor principal.

(iii1) Supongamos $\lambda_1\left(L_0, a_0^-\right) = 1$ y $m \neq m(t)$. Entonces, $P(m) > 0$ es condición necesaria pero no suficiente para la existencia de autovalor principal positivo para (1.1).

(iii2) Las condiciones $P(m) > 0$ y

$$\frac{a_0^-}{\lambda_1\left(L_0, m^+\right)} \leq m^- \qquad a.e.\,(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R} \tag{2.6}$$

son suficientes para la existencia de autovalor principal positivo $\lambda_1(m)$ para (1.1). Más aún, $\lambda_1(m)$ es el único autovalor principal distinto de cero para (1.1), y se tiene

$$\lambda_1\left(L_0, m^+\right) \leq \lambda_1(m) < \lambda_1\left(L_0, m\right).$$

Observaciones. i. En todos los casos los autovalores principales resultan ser simples.

ii. Esta sería la versión correcta del Teorema 3.2 de [31].

En el Caso III, pueden haber uno, dos, o ningun autovalor principal positivo. Si bien como dijimos antes no podemos precisar una respuesta para cada m, tenemos el siguiente

Corolario. *Supongamos* $\lambda_1\left(L_0, a_0^-\right) < 1$.
(i) Si $P\left(m\right) < 0$*, entonces existe un autovalor principal positivo, y no hay otro autovalor principal para (1.1).*
(ii) Supongamos $P\left(m\right) \geq 0$*. Entonces (2.6) es suficiente para la existencia de autovalor principal positivo* $\lambda_1\left(m\right)$ *para (1.1). Más aún,*
(ii1) Si $P\left(m\right) = 0$*,* $\lambda_1\left(m\right)$ *es el único autovalor principal para (1.1) y se tiene*

$$\lambda_1\left(m\right) \leq \lambda_1\left(L_0, m^+\right).$$

(ii2) Si $P\left(m\right) > 0$ *y* $\frac{a_0^-}{\lambda_1(L_0,m^+)} < m^-$ *en un conjunto de medida positiva, entonces existen dos autovalores principales* $\lambda_1\left(m\right)$ *y* $\overline{\lambda}_1\left(m\right)$*. Estos son los únicos autovalores principales para (1.1) y se tiene*

$$\lambda_1\left(m\right) < \lambda_1\left(L_0, m^+\right) < \overline{\lambda}_1\left(m\right).$$

(ii3) Si $P\left(m\right) > 0$ *y* $\frac{a_0^-}{\lambda_1(L_0,m^+)} = m^-$ *a.e.* (x,t)*, entonces* $\lambda_1\left(L_0, m^+\right)$ *es un autovalor principal para (1.1).*

Analizamos por último el caso en que el peso es negativo. Sea

$$M_0 := \{(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R} : m\left(x,t\right) = 0\} \tag{2.7}$$

Complementando el Corolario (ii1) tenemos

Teorema 5. *Supongamos* $\lambda_1\left(L_0, a_0^-\right) < 1$*,* $m^+ \equiv 0$*. Asumamos que* $a_0^-\chi_{M_0} = 0$ *a.e. o bien* $\lambda_1\left(L_0, a_0^-\chi_{M_0}\right) \geq 1$*, y que* $a_0^-/m^- \in L^\infty\left(V - M_0\right)$ *para algun entorno* V *de* M_0*. Entonces existe un autovalor principal positivo para (1.1), y no hay otro autovalor principal para (1.1).*

Observaciones. i. En el caso elíptico, en [17] se obtiene una condición necesaria y suficiente en el caso análogo al Teorema 5, pero con regularidad sobre M_0. También está estudiado este problema (elíptico) en [36] para coeficientes más regulares, y también asumiendo regularidad sobre M_0.

ii. Notar que en el Caso III el peso $m \equiv -m^-$ posee autovalor principal positivo contrariamente a lo que ocurre en los casos I y II, y que en los casos

II y III el peso $m \equiv m^+$ no tiene autovalor principal positivo contrariamente a lo que ocurre en el Caso I.

2.4 El problema sublineal con parámetro λ

En esta Sección asumiremos que Ω satisface la siguiente condicion de regularidad:

Existe $\rho_0 > 0$ y $\delta_0 \in (0,1)$ tal que para todo $x \in \partial\Omega$ y todo $\rho \leq \rho_0$ se tiene

$$|B_\rho(x) \cap \Omega| \leq (1-\delta_0)|B_\rho(x)| \tag{2.8}$$

donde $B_\rho(x)$ denota la bola abierta en $\mathbb{R}^N$ centrada en x y con radio ρ, y $|B_\rho(x)|$ denota su medida de Lebesgue.

Volveremos también a asumir para a_0 lo mismo que en la Sección 2.1 de este capitulo, es decir

$$a_0 \in L^s(L^v), \qquad a_0 \geq 0$$

y para s, v asumiremos de ahora en adelante

$$\frac{N}{2v} + \frac{1}{s} < 1, \qquad s > 2.$$

Sea $g : \Omega \times \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ satisfaciendo las siguientes

H1) $(x,t) \to g(x,t,\xi)$ es medible para toda $\xi \in [0,\infty)$ y T-periódica en t, $g(x,t,.) \in C^1[0,\infty)$ a.e. $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$, y $\sup\limits_{0 \leq \xi \leq \rho} |g_\xi(x,t,\xi)| \in L^s(L^v)$ para todo $\rho > 0$

H2) $\xi \to g(x,t,\xi)/\xi$ es no creciente en $(0,\infty)$ a.e. $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$

H3) Existe $\delta > 0$ y $(x_0,t_0) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial}{\partial\xi}(g(x,t,\xi)/\xi) < 0$ para todo $\xi \in (0,\delta)$ a.e. $(x,t) \in B_\delta(x_0,t_0) \cap (\Omega \times \mathbb{R})$

H4) Las funciones

$$\overline{m}(x,t) := \sup_{\xi > 0} \frac{g(x,t,\xi)}{\xi}, \qquad \underline{m}(x,t) := \inf_{\xi > 0} \frac{g(x,t,\xi)}{\xi} \tag{2.9}$$

pertenecen a $L^s(L^v)$ (notar que en realidad H1 y H2 ya implican que $\overline{m} \in L^s(L^v)$)

H5) $P(\underline{m}) > 0$

Tenemos entonces el siguiente

Teorema 6. *Sea g satisfaciendo H1-H5. Entonces (1.2) tiene solución positiva $u_\lambda \in C_T$ si y sólo si $\lambda_1(\overline{m}) < \lambda < \lambda_1(\underline{m})$. Mas aún, u_λ puede ser elegida tal que $\lambda \to u_\lambda$ es una aplicación C^1 de $(\lambda_1(\overline{m}), \lambda_1(\underline{m}))$ en C_T y $u_\lambda(x,t) > 0$ para todo $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$. Además se tiene*

$$\lim_{\lambda \to \lambda_1(\overline{m})^+} \|u_\lambda\|_\infty = 0, \qquad \lim_{\lambda \to \lambda_1(\underline{m})^-} u_\lambda(x,t) = \infty$$

para todo $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$.

Obviamente, es inmediato el

Corolario. *Sea g satisfaciendo H1-H5. Entonces (1.3) tiene solución positiva $u \in C_T$ si y sólo si $\lambda_1(\overline{m}) < 1 < \lambda_1(\underline{m})$. Mas aún, $u(x,t) > 0$ para todo $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$.*

Probaremos también el siguiente principio del máximo

Teorema 7. *Sea g satisfaciendo H1-H5 y sea $h \in L^s(L^v)$ una función positiva (y no idénticamente cero). Entonces, para todo $0 < \lambda < \lambda_1(\overline{m})$, el problema*

$$\begin{cases} Lu = \lambda g(x,t,u) + h(x,t) & \text{en } \Omega \times \mathbb{R} \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \times \mathbb{R} \\ u \ T\text{-periódica} & \end{cases} \tag{2.10}$$

tiene solución positiva $u_\lambda \in C_T$ tal que $\lambda \to u_\lambda$ es una aplicación C^1 de $(0, \lambda_1(\overline{m}))$ en C_T y $u_\lambda(x,t) > 0$ a.e. $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$. Recíprocamente, si (2.10) tiene solución positiva para $h \geq 0$ y $\lambda > 0$, entonces $\lambda < \lambda_1(\underline{m})$.

El teorema anterior es ligeramente más general que el presentado en [23], Teorema 3.9.

Con las mismas notaciones que recién, sean ahora
H6) $P(\overline{m}) > 0$.
H7) O bien $\underline{m} \in L^s(L^v)$ y $P(\underline{m}) \leq 0$, o bien $\underline{m} \leq 0$.

Teorema 8. *Sea g satisfaciendo H1-H3, H6 y H7. Entonces (1.2) tiene solución positiva $u_\lambda \in C_T$ si y sólo si $\lambda_1(\overline{m}) < \lambda$. Mas aún, u_λ puede ser elegida tal que $\lambda \to u_\lambda$ es una aplicación C^1 de $(\lambda_1(\overline{m}), \infty)$ en C_T y*

$u_\lambda(x,t) > 0$ *para todo* $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$. *Además se tiene*

$$\lim_{\lambda \to \lambda_1(\overline{m})^+} \|u_\lambda\|_\infty = 0.$$

También en el caso del teorema anterior se tiene un corolario similar al del Teorema 6.

Veremos además en ambos casos que bajo las hipótesis H2 y H3 se puede probar la unicidad de la solución positiva.

Teorema 9. *En caso de existir solución positiva para algún* λ *en los Teoremas 6 y 8, tal solución positiva es única.*

Observaciones. i. En ([29], Sección 27) se prueban resultados similares con mayor regularidad sobre g y Ω, asumiendo que $\xi \to g(x,t,\xi)$ es una función cóncava y que $g(x,t,0) = 0$ (notar que esto implica que $\xi \to g(x,t,\xi)/\xi$ es no creciente, y que la recíproca no es cierta). En [29] estos teoremas siguen de resultados de bifurcación global debidos a P. Rabinowitz (ver [42]) y del teorema de la función implícita.

ii. Como $u \equiv 0$ es solución de (1.2) para todo λ, lo que nos dicen los teoremas anteriores es que hay una rama (diferenciable) de bifurcación de soluciones positivas (λ, u_λ), $\lambda \in (\lambda_1(\overline{m}), \lambda_1(\underline{m}))$, partiendo del punto $(\lambda_1(\overline{m}), 0)$; o sea, este es un punto de bifurcación de soluciones positivas para (1.2). Notar además que en caso del Teorema 6 la rama es no acotada cuando $\lambda \to \lambda_1(\underline{m})^-$ (a veces esto se denomina "bifurcación desde el infinito").

iii. Se dan aplicaciones y ejemplos de los anteriores resultados al final de la siguiente sección.

2.5 El problema sublineal: el caso general

En esta sección asumimos para Ω la misma regularidad que en [14]. Como es usual, para $\xi \in [0,\infty)$ y $u : \Omega \times \mathbb{R} \to [0,\infty)$ escribiremos $g(\xi)$ y $g(u)$ para las funciones $(x,t) \to g(x,t,\xi)$ y $(x,t) \to g(x,t,u(x,t))$, $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$.

Asumimos en esta sección que g es una función Caratheodory, esto es

$$\begin{array}{cc} (x,t) \to g(x,t,\xi) & \text{es medible para todo } \xi \in [0,\infty) \\ \xi \to g(x,t,\xi) & \text{es continua en } [0,\infty)\, a.e.\, (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R} \end{array} \tag{2.11}$$

Supondremos también que $\sup_{\sigma\geq\xi}\left(g\left(\sigma\right)/\sigma\right)$ y $\inf_{0<\sigma\leq\xi}\left(g\left(\sigma\right)/\sigma\right)$ son funciones medibles para todo $\xi>0$. Asumimos ademas que $\inf_{\xi>0}\left(g\left(\xi\right)/\xi\right)\neq\sup_{\xi>0}\left(g\left(\xi\right)/\xi\right)$, vale decir que (1.3) no es un problema lineal.

Para $(x,t,\xi)\in\Omega\times\mathbb{R}\times(0,\infty)$, sean

$$\overline{g}\left(x,t,\xi\right):=\xi\sup_{0<\xi\leq\sigma}\left(g\left(x,t,\sigma\right)/\sigma\right),\qquad \underline{g}\left(x,t,\xi\right):=\xi\inf_{0<\sigma\leq\xi}\left(g\left(x,t,\sigma\right)/\sigma\right)$$

(los valores $\pm\infty$ permitidos).

Definimos además

$$\begin{array}{ll}\underline{m}_{\infty}\left(x,t\right):=\inf_{\xi>0}\left(g\left(x,t,\xi\right)/\xi\right), & \overline{m}_{0}\left(x,t\right):=\sup_{\xi>0}\left(g\left(x,t,\xi\right)/\xi\right),\\ \underline{m}_{0}\left(x,t\right):=\underline{\lim}_{\xi\to0^{+}}\left(g\left(x,t,\xi\right)/\xi\right), & \overline{m}_{\infty}\left(x,t\right):=\overline{\lim}_{\xi\to\infty}\left(g\left(x,t,\xi\right)/\xi\right).\end{array}$$

Notar que las aplicaciones $\xi\to\underline{g}\left(\xi\right)/\xi$ y $\xi\to\overline{g}\left(\xi\right)/\xi$ son no crecientes y que además

$$\begin{array}{ll}\underline{m}_{\infty}=\lim_{\xi\to\infty}\left(\underline{g}\left(\xi\right)/\xi\right), & \overline{m}_{0}=\lim_{\xi\to0^{+}}\left(\overline{g}\left(\xi\right)/\xi\right),\\ \underline{m}_{0}=\lim_{\xi\to0^{+}}\left(\underline{g}\left(\xi\right)/\xi\right), & \overline{m}_{\infty}=\lim_{\xi\to\infty}\left(\overline{g}\left(\xi\right)/\xi\right).\end{array}$$

Con estas notaciones, tenemos los siguientes resultados

Teorema 10. *a) Asumamos*
1) $\underline{m}_{0},\overline{m}_{\infty}\in L^{s}\left(L^{v}\right)$, $P\left(\underline{m}_{0}\right)>0$ y $P\left(\overline{m}_{\infty}\right)>0$.
2) $\overline{g}\left(\xi_{0}\right)\in L^{s}\left(L^{v}\right)$ para algún $\xi_{0}>0$ y $\underline{g}\left(\xi_{1}\right)\in L^{s}\left(L^{v}\right)$ para algún $\xi_{1}>0$.

Entonces, si $\lambda_{1}\left(\underline{m}_{0}\right)<1<\lambda_{1}\left(\overline{m}_{\infty}\right)$ existe una solución $u\in L_{T}^{\infty}$ de (1.3) con $u\left(x,t\right)>0$ para todo $(x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}$.

b) Asumamos (1), $\overline{m}_{0}=\underline{m}_{0}$, $\overline{m}_{\infty}=\underline{m}_{\infty}$ y que para todo $\xi>0$

$$\overline{m}_{0}\neq\overline{g}\left(\xi\right)/\xi, \tag{2.12}$$

$$\underline{m}_{\infty}\neq\underline{g}\left(\xi\right)/\xi. \tag{2.13}$$

Entonces, existe una solución positiva $u\in L_{T}^{\infty}$ de (1.3) si y sólo si $\lambda_{1}\left(\underline{m}_{0}\right)<1<\lambda_{1}\left(\overline{m}_{\infty}\right)$.

Teorema 11. *a) Asumamos*
3) $\underline{m}_{0}\in L^{s}\left(L^{v}\right)$, $P\left(\underline{m}_{0}\right)>0$.
4) $\overline{g}\left(\xi_{0}\right)\in L^{s}\left(L^{v}\right)$ para algún $\xi_{0}>0$ y $\underline{g}\left(\xi\right)\in L^{s}\left(L^{v}\right)$ para todo $\xi>0$.
5) O bien $\overline{m}_{\infty}\in L^{s}\left(L^{v}\right)$ y $P\left(\overline{m}_{\infty}\right)\leq0$, o bien $\overline{m}_{\infty}\leq0$.

Entonces, si $\lambda_{1}\left(\underline{m}_{0}\right)<1$ existe una solución $u\in L_{T}^{\infty}$ de (1.3) con $u\left(x,t\right)>0$ para todo $(x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}$.

b) Asumamos además (2.12) y $\overline{m}_0 = \underline{m}_0$*. Entonces, existe una solución positiva* $u \in L_T^\infty$ *de (1.3) si y sólo si* $\lambda_1(\underline{m}_0) < 1$.

Teorema 12. *a) Asumamos (2) y*

6) $\overline{m}_\infty \in L^s(L^v)$, $P(\overline{m}_\infty) > 0$.

7) $P\left(\underline{g}(\xi)/\xi\right) > 0$ *para* $\xi > 0$ *pequeño y* $\lim_{\xi \to 0^+} \lambda_1\left(\underline{g}(\xi)/\xi\right) = 0$.

Entonces, si $\lambda_1(\overline{m}_\infty) > 1$ *existe una solución* $u \in L_T^\infty$ *de* (1.3) *con* $u(x,t) > 0$ *para todo* $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$.

b) Asumamos además (2.13) y $\overline{m}_\infty = \underline{m}_\infty$*. Entonces, existe una solución positiva* $u \in L_T^\infty$ *de (1.3) si y sólo si* $\lambda_1(\overline{m}_\infty) > 1$.

Teorema 13. *Asumamos (4), (5), y (7). Entonces* (1.3) *tiene una solución* $u \in L_T^\infty$ *con* $u(x,t) > 0$ *para todo* $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$.

Observaciones. i. En el Teorema 3.10 de [23] y en el Teorema 3.5 de [25] se prueban para ciertos casos particulares resultados similares a los Teoremas 10 y 11 utilizando los resultados vistos en la sección anterior y aproximando por funciones "buenas". Creemos sin embargo que las demostraciones de los Teoremas 10-13 que damos aquí son más simples y que las ideas se pueden aplicar a problemas más generales.

ii. En orden a relacionar los últimos teoremas con otros de la literatura, mencionamos que, para el caso $\xi \to g(.,\xi)/\xi$ no creciente, resultados similares al Teorema 10 para problemas elípticos han sido obtenidos por ejemplo en [8], [15], [46] asumiendo mayor regularidad en la función g. En el caso parabólico periódico, hay también resultados bien conocidos si $\xi \to g(.,\xi)/\xi$ es cóncava, Hölder-continua y $g(.,0) = 0$ (ver por ejemplo [2], [29])

Por otro lado, condiciones necesarias y suficientes para la existencia de soluciones positivas a ecuaciones del tipo $Lu = a(x)u - b(x)u^p$, $p > 1$, $b \geq 0$ (ecuación logística), son también bien conocidas (por ejemplo [27], [29]). Ecuaciones más generales de la forma $Lu = a(x)u - b(x)f(x,u)$ con $b \geq 0$ y f superlineal fueron estudiadas por ejemplo en [18] para $f \in C^{\mu,1+\mu}\left(\overline{\Omega} \times [0,\infty)\right)$, f estrictamente creciente y $b > 0$ y, para el Laplaciano, el caso $f = f(u)$ está tratado en [1] asumiendo $f \in C([0,\infty))$. El Teorema 11 generaliza los resultados anteriores, mientras que los Teoremas 12 y 13 también extienden resultados bien conocidos, por ejemplo, [2], [3], [29], [27]).

Ejemplos y aplicaciones.

a) Supongamos existe $\lim_{\xi \to 0^+}(g(\xi)/\xi)$ y $\lim_{\xi \to \infty}(g(\xi)/\xi)$, y asúmase que

$$\inf_{\xi>0}\left(g\left(\xi\right)/\xi\right)\in L^{s}\left(L^{v}\right), \qquad \sup_{\xi>0}\left(g\left(\xi\right)/\xi\right)\in L^{s}\left(L^{v}\right),$$

con $P\left(\inf_{\xi>0}\left(g\left(\xi\right)/\xi\right)\right)>0$. Si

$$\lim_{\xi\to 0^{+}}\left(g\left(\xi\right)/\xi\right)=\sup_{\xi>0}\left(g\left(\xi\right)/\xi\right), \qquad \lim_{\xi\to\infty}\left(g\left(\xi\right)/\xi\right)=\inf_{\xi>0}\left(g\left(\xi\right)/\xi\right),$$

del Teorema 10 concluimos que (1.3) tiene solución positiva $u\in L_T^{\infty}$ si y sólo si

$$\lambda_1\left(\lim_{\xi\to 0^{+}}\left(g\left(\xi\right)/\xi\right)\right)<1<\lambda_1\left(\lim_{\xi\to\infty}\left(g\left(\xi\right)/\xi\right)\right).$$

b) Consideremos el problema

$$\begin{cases} Lu=\sin u & \text{en } \Omega\times\mathbb{R} \\ u=0 & \text{en } \partial\Omega\times\mathbb{R} \\ u\ T\text{-periódica} & \end{cases}$$

El Teorema 11 dice que este problema tiene solución positiva si y sólo si $\lambda_1<1$, donde λ_1 es el autovalor principal positivo correspondiente al peso 1.

c1) Consideremos el problema

$$\begin{cases} Lu=a\left(x,t\right)u^{\gamma}-f\left(x,t,u\right)u & \text{en } \Omega\times\mathbb{R} \\ u=0 & \text{en } \partial\Omega\times\mathbb{R} \\ u\ T\text{-periódica} & \end{cases} \tag{2.14}$$

donde $0<\gamma\leq 1$ y f es una función Caratheodory tal que $f\left(\xi\right)\in L^{s}\left(L^{v}\right)$ para todo $\xi>0$ y $f\left(0\right)=0$. Asumamos primero que $\gamma=1$, $a\in L^{s}\left(L^{v}\right)$, $P\left(a\right)>0$, $a\leq\lim_{\xi\to\infty}f\left(\xi\right)\leq\infty$, $\inf_{\xi_0\leq\xi}f\left(\xi\right)\in L^{s}\left(L^{v}\right)$ para algun $\xi_0>0$ y $\inf_{0<\xi\leq\xi_0}f\left(\xi\right)\in L^{s}\left(L^{v}\right)$ para todo $\xi_0>0$. Del Teorema 11 sigue que (2.14) tiene solución positiva $u\in L_T^{\infty}$ si y sólo si $\lambda_1\left(a\right)<1$. Esto vale en particular para la ecuación logística $Lu=a\left(x,t\right)u-b\left(x,t\right)u^{p}$, $p>1$, $b\geq 0$, y también para otras más generales como $Lu=a\left(x,t\right)u^{q}-b\left(x,t\right)u^{p}$, $0<q<1<p$, $b\geq 0$.

c2) Supongamos ahora el caso $0<\gamma<1$, $a\left(x,t\right)\geq 0$ a.e. $\left(x,t\right)\in\Omega\times\mathbb{R}$. Si $f\left(\xi\right)=-b$ con $b\in L^{s}\left(L^{v}\right)$ y $P\left(b\right)>0$, entonces el Teorema 12 dice que (2.14) tiene solución positiva $u\in L_T^{\infty}$ si y sólo si $1<\lambda_1\left(b\right)$. Por otra parte, si asumimos $\lim_{\xi\to\infty}f\left(\xi\right)=\infty$, $\inf_{\xi_0\leq\xi}f\left(\xi\right)\in L^{s}\left(L^{v}\right)$ para algun $\xi_0>0$ y $\sup_{0<\xi\leq\xi_0}f\left(\xi\right)\in L^{s}\left(L^{v}\right)$ para todo $\xi_0>0$, entonces el Teorema 13 da una solución positiva $u\in L_T^{\infty}$ para (2.14). En el caso $f\left(\xi\right)=0$, el Teorema 13 también da una solución positiva $u\in L_T^{\infty}$ para (2.14).

Chapter 3

El problema lineal con función de peso

3.1 Operadores lineales positivos y el teorema de Krein-Rutman.

Daremos en esta sección las definiciones necesarias para poder enunciar el teorema de Krein-Rutman, que será de vital importancia en este trabajo. Las siguientes definiciones y resultados pueden ser encontrados por ejemplo en el libro [13], Capítulo 12, o en las referencias que allí figuran.

Definición. Decimos que un espacio vectorial E es un *espacio de Banach ordenado* (en breve, EBO) si E es un espacio normado y completo con esa norma y si además está equipado con una relación de orden $x \leq y$ (vale decir, transitiva, reflexiva y antisimétrica) que es lineal; es decir, se tienen:
i) Si $x \leq y$, entonces $x + z \leq y + z$ para todo $z \in E$
ii) Si $x \leq y$, entonces $\lambda x \leq \lambda y$ para todo $\lambda \geq 0$

En lo que sigue de esta sección, E será un EBO.

Definición. Decimos que un conjunto $P \subset E$ es un *cono* si se satisfacen las siguientes:
i) Si $x, y \in P$, entonces $x + y \in P$
ii) Si $x \in P$ y $\lambda \geq 0$, entonces $\lambda x \in P$
iii) $P \cap \{-P\} = \{0\}$
iv) P es cerrado

Dado $P \subset E$, P cono, se define una *relación de orden*

$$x \leq y \text{ si y sólo si } y - x \geq 0, \qquad x, y \in P$$

Sea

$$E_+ = \{x \in E : x \geq 0\}$$

el *cono positivo* de E. Decimos que E_+ es *generador* si $E = E_+ - E_+$.

Ejemplos de EBO.

1) $\mathbb{R}$ con cono positivo $\mathbb{R}_0^+$.

2) $L^p(\Omega)$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $1 \leq p < \infty$. Es un EBO, con cono positivo $L_+^p(\Omega)$ que es generador pero tiene interior vacío. El espacio $L^\infty(\Omega)$ es un EBO, con cono positivo $L_+^\infty(\Omega)$ que es generador y tiene interior no vacío.

3) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dominio acotado. El espacio $C^k\left(\overline{\Omega}\right)$ con su norma $\|f\| = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{C(\overline{\Omega})}$ es un EBO con cono con interior no vacío.

4) Los espacios de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ son EBOs con el interior del cono positivo vacío en general, a menos que valga el teorema de inmersión de Sobolev que dice que $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C\left(\overline{\Omega}\right)$ con inclusión continua.

Definición. Dado E, sea E' su dual topológico. Definimos

$$E'_+ = \{x' \in E' : \langle x', x\rangle > 0 \text{ para todo } x \in E_+\}$$

el *cono positivo dual* de E'.

Notar que si $(\overset{\circ}{E}_+)$ no es vacío, entonces se tiene que para todo $x \in (\overset{\circ}{E}_+)$, $\langle x', x\rangle > 0$ para todo $x \in E'_+$. Obviamente la recíproca no es cierta pues no tiene por qué ser $(\overset{\circ}{E}_+)$ distinto de vacío.

Definición. Decimos que $x \in E$ es un *punto interior* si $(\overset{\circ}{E}_+) \neq \varnothing$ y $x \in (\overset{\circ}{E}_+)$. Decimos que $x \in E$ es un *punto casi interior* si $\langle x', x\rangle > 0$ para todo $x' \in E'_+$.

De lo anterior sigue que un punto interior es un punto casi interior y que la recíproca no es válida. Se puede ver sin embargo que si $(\overset{\circ}{E}_+) \neq \varnothing$, entonces los puntos casi interiores coinciden los puntos interiores.

Decimos que $x < y$ si y sólo si $x \leq y$ y $x \neq y$. Decimos que $x << y$ si y sólo si $y - x >> 0$ si y sólo si o bien $y - x \in (\overset{\circ}{E}_+)$ si $(\overset{\circ}{E}_+) \neq \varnothing$ o bien $y - x$ es un punto casi interior si $(\overset{\circ}{E}_+) = \varnothing$.

Observación. Si X es un espacio de medida y $1 \leq p < \infty$, los puntos casi interiores en $L^p(X)$ son los funciones estrictamente positivas en casi todo punto. Más aún, la prueba dada en [49], p. 397, funciona también para mostrar que para $1 \leq r, p < \infty$ los puntos casi interiores en $L^r(L^p)$ son las funciones f con $f(x,t) > 0$ *a.e.* $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$. De hecho, la coincidencia de puntos casi interiores con las funciones estrictamente positivas a.e. es un caso particular de un fenómeno general en espacios de Banach con norma del orden continua.

Definición. Decimos que E es un *retículo vectorial* si para todo $x, y \in E$ existen $\sup\langle x, y\rangle$ e $\inf\langle x, y\rangle$. Decimos que E es un *retículo de Banach* si $\||x|\| = \|x\|$.

Ejemplos de retículos de Banach.

1) $\mathbb{R}$ con el orden inducido por cono positivo $\mathbb{R}_0^+$.

2) Los espacios $L^r(L^p)$, $1 \leq r, p \leq \infty$. Si bien el cono positivo tiene interior vacío para $1 \leq r, p < \infty$, como dijimos arriba, hay puntos casi interiores que son exactamente las funciones $f > 0$ a.e. $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$, $1 \leq r, p < \infty$.

Trabajaremos siempre sobre el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Si E es un espacio vectorial real, se trabaja en el complexificado de E, es decir, en el espacio vectorial $E + iE$ sobre $\mathbb{C}$.

Definición. Sea $T : E \to F$ un operador lineal, con E, F EBO. Decimos que T es *positivo* si $Tx \geq 0$ para todo $x \geq 0$. Decimos que T es *estrictamente positivo* si $Tx > 0$ para todo $x > 0$, y decimos que T es *fuertemente positivo* si $Tx >> 0$ para todo $x > 0$.

Sea $T : E \to E$ un operador lineal y continuo. Decimos que T es *irreducible* si existe $\lambda > \rho(T)$, $\rho(T)$ radio espectral de T, tal que $(\lambda I - T)^{-1} >> 0$. (esto en particular implica que E_+ tiene puntos casi interiores)

Observación. Sea S un operador acotado en $L^r(L^p)$, y sea E un conjunto medible en $\Omega \times (0,T)$. Decimos que E es *S-invariante* si $f = 0$ a.e. en E implica $Sf = 0$ a.e. en E, y decimos que E es *no trivial* si $0 < |E| < |\Omega| T$. Notamos que un operador lineal, positivo y continuo $S : L^r(L^p) \to L^r(L^p)$ es irreducible si y sólo si no existen subconjuntos invariantes no triviales de $\Omega \times (0,T)$. En efecto, con los cambios obvios, la prueba es la misma que en el caso $L^p(X)$, X espacio de medida (ver [49], Proposición 3, p. 409).

Para la teoría espectral de operadores compactos e irreducibles se puede consultar los libros [38] y [48], así como los trabajos de de Pagter y Zerner [41] y [49] respectivamente.

Recordemos que λ es autovalor algebraicamente simple de un operador T si

$$\dim \bigcup_{k=1}^{\infty} \ker (\lambda I - T)^k = 1$$

Ya estamos en condiciones de enunciar el teorema de Krein-Rutman.

Teorema (Krein-Rutman). *Sea $T : E \to E$ un operador lineal, continuo, positivo e irreducible tal que se satisface alguna de las siguientes*

i) T es compacto y $(\overset{\circ}{E_+}) \neq \varnothing$.

ii) T es compacto y E es retículo de Banach.

Entonces, $\rho(T) > 0$ es autovalor algebraicamente simple de T y la autofunción asociada en E es punto casi interior. Además, es el único autovalor con autofunción positiva asociada.

La prueba de este resultado se puede ver en [13], Teorema 12.3, mientras que la versión original corresponde a [32].

Enunciamos también un corolario del teorema anterior, que sera utilizado varias veces en este trabajo (ver Corolario 12.4 de [13]).

Corolario. *Sea T un operador lineal con las hipótesis del teorema de Krein-Rutman. Consideremos la ecuación*

$$\lambda x - Tx = y \tag{3.1}$$

con $y \geq 0$. Entonces,

(i) La ecuación (3.1) no tiene solución positiva para $\lambda < \rho(T)$.

(ii) La ecuación (3.1) no tiene solución para $\lambda = \rho(T)$.

3.2 Definición de μ.

La idea de la prueba del Teorema 1 es la siguiente. Se definirá una función $\mu_{m,L} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\mu_{m,L}(\lambda)$ sea el único número real tal que el problema

$$\begin{cases} Lu = \lambda m u + \mu_{m,L}(\lambda) u & \text{en } \Omega \times \mathbb{R} \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \times \mathbb{R} \\ u \ T\text{-periódica} \end{cases} \tag{3.2}$$

tenga solución positiva. Se probará luego que esta función $\mu_{m.L}$ tiene las siguientes propiedades

$$\begin{cases} \lambda \to \mu_{m,L}(\lambda) & \text{es continua y cóncava} \\ \lim_{\lambda\to\infty} \mu_{m,L}(\lambda) = -\infty & \text{si y sólo si } P(m) > 0 \\ \mu_{m,L}(0) > 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

y por tanto quedará demostrado el Teorema 1. Esta idea es esencialmente una adaptación de las ideas debidas a Hess y Beltramo. Señalamos que en la definición de la función μ es donde jugará un rol importante el teorema de Krein-Rutman.

Comenzamos formalmente la tesis con lo que bien podría ser un ejercicio de Análisis I (o competencia Paenza), pero sin el cual nada de lo que sigue sería posible.

Lema 1. *Existen números reales positivos p, q, r, w tales que*

$$\begin{array}{lll} r \le s, & p \le q, & p \le w, \\ 2 \le q < \infty, & 2 \le r < \infty, & \frac{1}{w} = \frac{1}{q} + \frac{1}{v}, \\ \frac{2N}{N+2} < p < \infty, & \frac{N}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) + \frac{1}{r} < 1. & \end{array} \tag{3.4}$$

Prueba. Para $1 \le p \le \infty$, sea p^* definido, como es usual, por $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$ si $p < N$ y como $p^* = \infty$ si $N \le p \le \infty$. Supongamos primero $N > 2$. Sea p tal que $\frac{2N}{N+2} < p < \frac{N}{2}$. Entonces $\frac{1}{p} < \frac{1}{2} + \frac{1}{N}$ y luego $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{2} - \theta$ para algún $\theta > 0$. Por otra parte, como $\frac{1}{s} + \frac{N}{2v} < 1$, podemos elegir δ suficientemente pequeño tal que $0 < \delta < \theta$ y $\frac{2}{Ns} + \delta < \frac{2}{N} - \frac{1}{v}$. Sean $\eta = \frac{2}{Ns} + \delta$ y $\beta = \frac{2}{N} - \frac{1}{v}$. Tenemos $0 < \eta < \beta$, y observemos además que

$$\frac{1}{p^{**}} + \eta < \frac{1}{p} - \frac{2}{N} + \beta < \frac{1}{p} - \frac{1}{v} < 1$$

Sea q definido por $\frac{1}{q} = \frac{1}{p^{**}} + \eta$, sea $r = s$ y sea w dado por $\frac{1}{w} = \frac{1}{q} + \frac{1}{v}$. Entonces $w \leq q$, y además,

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{p} - \frac{2}{N} + \eta + \frac{2}{N} - \beta = \frac{1}{p} + \eta - \beta < \frac{1}{p}$$

Luego $p < w$ y por tanto $p < q$. Ahora, como $s \geq 2$ tenemos

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p^*} - \frac{1}{N} + \eta = \frac{1}{2} - \theta - \frac{1}{N} + \eta \leq \frac{1}{2} - \theta + \frac{2}{Ns} + \delta - \frac{1}{N} \leq \frac{1}{2} + \delta - \theta < \frac{1}{2}$$

y entonces $q \geq 2$. Finalmente, como $r = s$,

$$\frac{N}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) + \frac{1}{r} = 1 - \eta\frac{N}{2} + \frac{1}{s} = 1 - \frac{N\delta}{2} < 1.$$

Supongamos ahora $N = 2$. Entonces $v > 1$ y luego $\frac{1}{v} = 1 - \beta$ para algún $\beta \in (0, 1]$. Elegimos η tal que $0 < \eta < \beta$ y $(\beta - \eta)^{-1} \geq 2$. Sea p definido por $\frac{1}{p} = 1 - \eta$, así $p > 1 = 2N(N+2)^{-1}$. Sea q dado por $\frac{1}{q} = \beta - \eta$, luego $q \geq 2$. Sea $w = p$ y $r = s$. Entonces $\frac{1}{q} + \frac{1}{v} = \frac{1}{p}$. Ahora, como $N = 2$, tenemos $s > \frac{v}{v-1}$ y entonces

$$\frac{N}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) + \frac{1}{r} = \frac{1}{v} + \frac{1}{s} < 1.$$

Por lo tanto el lema está probado en el caso $s < \infty$. Si $s = \infty$, entonces tenemos $\frac{N}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) < 1$ y elegimos r suficientemente grande en lugar de $r = s$ y el lema sigue. $\blacksquare$

Fijaremos por ahora p, q, r y w satisfaciendo las condiciones del lema anterior.

En orden a usar el teorema de Krein-Rutman y permitir que los pesos puedan ser "malos", necesitamos un resultado de compacidad del operador solución del problema (2.2) en el cual la f pueda ser "peor". Este resultado es de gran importancia y es debido a D. Daners (ver Corolario 5.2, [10]).

Lema 2 (Daners). *El operador solución del problema (2.2)* $L^{-1} : L^r(L^p) \to L^\infty(L^q)$ *es compacto, donde*

$$\frac{N}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) + \frac{1}{r} < 1$$

Si no hay lugar a confusión, en lo que sigue denotaremos por m, m^+ y m^- a los operadores multiplicar por m, m^+ y m^- respectivamente. Gracias al resultado de Daners sigue inmediatamente el

Lema 3. *Para $\lambda, k \in [0, \infty)$ y $m \in L^s(L^v)$, el operador*

$$\left(L + \lambda\left(k + m^-\right)\right)^{-1} : L^r(L^p) \to L^\infty(L^q)$$

es compacto y positivo, y el operador

$$\left(L + \lambda\left(k + m^-\right)\right)^{-1} m^+ : L^\infty(L^q) \to L^\infty(L^q)$$

es acotado y positivo.

Prueba. En efecto, la primera afirmación sigue del resultado de compacidad de Daners y del Remark 2.2 (b) en [11], y la segunda es consecuencia directa de la primera puesto que $m^+ : L^\infty(L^q) \to L^s(L^w)$ y la inclusión $i : L^s(L^w) \to L^r(L^p)$ son operadores continuos. ■

En lo que sigue, para $0 \le \tau \le t \le T$, $U(t, \tau)$ denotará el operador de evolución (débil) correspondiente al operador parabólico L, vale decir, para $u_0 \in L^w(\Omega)$, $U(t, \tau) u_0$ está definido como la solución (débil) u del problema abstracto de valores iniciales

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{en } \Omega \times (\tau, T] \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (\tau, T] \\ u(., \tau) = u_0 & \end{cases}$$

Otro resultado de Daners (Lema 4.1, [10]) dice que $U(t, \tau)$ manda $L^w(\Omega)$ en $L^q(\Omega)$ y que

$$\|U(t, \tau)\|_{L^w(\Omega), L^q(\Omega)} \le C(t - \tau)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{w} - \frac{1}{q}\right)} \tag{3.5}$$

donde C depende sólo de w, q, N, α_0 y las cotas superiores para las normas de los coeficientes de L.

Para $R > 0$, $B_R^{s,v}$ denotara la bola cerrada en $L^s(L^v)$ con centro en 0 y radio R.

Lema 4. *Si $\lambda \in (0, \infty)$ y $m \in L^s(L^v)$, entonces*

$$\lim_{k \to \infty} \left\| \left(L + \lambda\left(k + m^-\right)\right)^{-1} m^+ \right\|_{L^\infty(L^q), L^\infty(L^q)} = 0.$$

Más aún, para $R, \Lambda > 0$, la convergencia es uniforme en (λ, m) para $(\lambda, m) \in [\Lambda, \infty) \times B_R^{s,v}$.

Prueba. Por la desigualdad de Hölder basta probar que

$$\lim_{k\to\infty} \left\| (L+k)^{-1} \right\|_{L^s(L^w), L^\infty(L^q)} = 0.$$

Sea $g \in L^s(L^w)$. Usando las fórmulas (4.6) y (5.4) en [10] obtenemos $(L+k)^{-1} g = S_1(g) + S_2(g)$, donde

$$S_1(g)(t) = e^{-kt} \int_0^t U(t,\tau) e^{k\tau} g(\tau)\, d\tau$$

y

$$S_2(g)(t) = e^{-k(t+T)} U(t,0) \left(I - e^{-kT} U(T,0) \right) \int_0^t U(t,\tau) e^{k\tau} g(\tau)\, d\tau$$

Ahora,

$$\|S_1(g)(t)\|_{L^q(\Omega)} \leq \int_0^t \|U(t,\tau)\|_{L^w(\Omega), L^q(\Omega)} e^{-k(t-\tau)} \|g(\tau)\|_{L^w(\Omega)}\, d\tau$$

$$\leq C \int_0^t e^{-k(t-\tau)} (t-\tau)^{-\frac{N}{2v}} \|g(\tau)\|_{L^w(\Omega)}\, d\tau$$

donde hemos usado la estimación (3.5). Para $t \in \mathbb{R}$, sea $G_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $G_t(\sigma) = \|g(\sigma)\|_{L^s(\Omega)} \chi_{(0,t)}(\sigma)$, y sea $F_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $F_k(\sigma) = e^{-k\sigma} \sigma^{-\frac{N}{2v}} \chi_{(0,\infty)}(\sigma)$. Entonces, para $0 < t < T$ tenemos

$$\|S_1(g)(t)\|_{L^q(\Omega)} \leq \|(F_k * G_t)\|_\infty \leq \|F_k\|_{L^{s'}(\mathbb{R})} \|G_t\|_{L^s(\mathbb{R})}$$

$$\leq \|F_k\|_{L^{s'}(\mathbb{R})} \|g\|_{L^s(L^w)}$$

donde s' es el exponente conjugado de s, esto es, $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$. Ahora,

$$\|F_k\|_{L^{s'}(\mathbb{R})} = \int_0^\infty e^{-ks'\sigma} \sigma^{-\frac{N}{2v}s'}$$

y entonces, como $\frac{N}{2v}s' < 1$, el teorema de Lebesgue da $\lim_{k\to\infty} \|F_k\|_{L^{s'}(\mathbb{R})} = 0$. Así,

$$\|S_1(g)(t)\|_{L^q(\Omega)} \leq \varepsilon_k \|g\|_{L^s(L^w)}$$

con $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$. Aplicando (3.5) para $U(t,0)$ y $U(T,0)$ con $w = q$ y razonando como arriba, se obtiene una estimación similar para $\|S_2(g)(t)\|_{L^q(\Omega)}$ y esto concluye la prueba. ■

Los lemas 3 y 4 nos permiten probar la siguiente

Proposición 1. *Dados* $R > 0$, $0 < \Lambda_1 < \Lambda_2$, *existe* $k_0 = k_0(\Lambda_1, \Lambda_2, R)$ *tal que para todo* $(\lambda, m) \in [\Lambda_1, \Lambda_2] \times B_R^{s,v}$ *y* $k > k_0$ *el operador*

$$(L + \lambda (k - m))^{-1} : L^r(L^p) \to L^r(L^p)$$

es compacto y positivo.

Prueba. Notar que la ecuación $(L + \lambda(k - m))\, u = f$ puede ser escrita como

$$L_1 u := \left(L + \lambda\left(k + m^-\right)\right) u = f + \lambda m^+ u$$

y por tanto como $u = L_1^{-1}(f + \lambda m^+ u)$. Así, $u - \lambda L_1^{-1} m^+ u = L_1^{-1} f$ y entonces

$$u = \left(I - \lambda L_1^{-1} m^+\right)^{-1} L_1^{-1} f$$

Teniendo en cuenta el Lema 4 y que $m^+ : L^\infty(L^q) \to L^s(L^w)$ y la inclusión $i : L^s(L^w) \to L^r(L^p)$ son operadores acotados, sigue que para k suficientemente grande el inverso

$$\left(I - \lambda L_1^{-1} m^+\right)^{-1} : L^\infty(L^q) \to L^\infty(L^q)$$

está bien definido y es acotado para todo $(\lambda, m) \in [\Lambda_1, \Lambda_2] \times B_R^{s,v}$. Más aún, para tales k tenemos

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \left(L_1^{-1} m^+\right)^j L_1^{-1} f \tag{3.6}$$

y por tanto el Lema 3 da la compacidad de $(L + \lambda(k - m))^{-1} : L^r(L^p) \to L^\infty(L^q)$. Así, el lema sigue de la continuidad de $i : L^\infty(L^q) \to L^r(L^p)$. ■

Lema 5. *Para* $\lambda > 0$ *y* $m \in L^s(L^v)$, *sea* $k_0 = k_0\left(\lambda/2, 2\lambda, \|m\|_{L^s(L^v)}\right)$ *como en la proposición anterior, y sea* $k > k_0$. *Entonces*

$$(L + \lambda (k - m))^{-1} : L^r(L^p) \to L^r(L^p)$$

es un operador irreducible.

Prueba. Para $0 \le \widetilde{c}_0 \in L_T^\infty$, sea $\widetilde{L}$ el operador definido por

$$\widetilde{L}u = u_t - div\,(A\nabla u) + \langle b, \nabla u\rangle + \widetilde{c}_0 u$$

Veamos primero que $(L+\lambda(k+m^-))^{-1}: L^r(L^p) \to L^r(L^p)$ es irreducible. En efecto, si $E \subset \Omega \times (0,T)$ es un invariante para este operador, entonces también es invariante para $\left(\widetilde{L}+\lambda(k+a)\right)^{-1}$ para todos los pares $(\widetilde{c}_0, a)$ de funciones no negativas en L_T^∞ suficientemente cercanos a (c_0, m^-) (en la norma $L^s(L^v) \times L^s(L^v)$). De hecho,

$$\left(\widetilde{L}+\lambda(k+a)\right)^{-1} = L_1^{-1}\left(I-\left(c_0-\widetilde{c}_0+\lambda\left(m^- - a\right)\right)L_1^{-1}\right)^{-1}$$

donde $L_1 = L+\lambda(k+m^-)$, y entonces una expansión en serie similar a (3.6) muestra que E es $\left(\widetilde{L}+\lambda(k+a)\right)^{-1}$-invariante. Pero esto no es posible porque, teniendo en cuenta la periodicidad y la acotación local de las soluciones débiles del problema $\left(\widetilde{L}+\lambda(k+a)\right)u = f$ para $f \in L^r(L^p)$ (ver [5], Teorema 2), la desigualdad de Harnack débil para ecuaciones parabólicas (enunciadada como en [47], Teorema 1.3, y su extensión el Teorema 5.1) implica que $\left(\widetilde{L}+\lambda(k+a)\right)^{-1}$ es irreducible.

Ahora, como L_1^{-1} es irreducible, nuevamente la expansión en serie (3.6) da la irreducibilidad de $(L+\lambda(k-m))^{-1}$. ■

En vista del lema anterior y la Proposición 1, el teorema de Krein-Rutman nos permite ya definir la función μ_m.

Definición de μ. Notemos que el problema $Lu = \lambda m u + \mu_m(\lambda)u$ es equivalente al problema

$$L_k u := (L+\lambda(k-m))u = (\lambda k + \mu_m(\lambda))u$$

Por lo visto arriba, para k suficientemente grande tenemos

$$\frac{1}{\lambda k + \mu_m(\lambda)} u = L_k^{-1} u$$

donde el operador lineal $L_k^{-1}: L^r(L^p) \to L^r(L^p)$ es compacto, positivo e irreducible. Por lo tanto el teorema de Krein-Rutman nos dice que su radio espectral $\rho\left(L_k^{-1}\right)$ es positivo, es autovalor simple de L_k^{-1} y es el único autovalor con autofunción positiva asociada. Luego, para $\lambda > 0$ definimos $\mu_{m,L}(\lambda)$ como

$$\mu_{m,L}(\lambda) = \frac{1}{\rho\left(L_k^{-1}\right)} - \lambda k \tag{3.7}$$

(Cuando no haya lugar a confusión escribiremos $\mu_m(\lambda)$ o $\mu(\lambda)$ en lugar de $\mu_{m,L}(\lambda)$). Es fácil ver que $\mu_m(\lambda)$ no depende de la elección de k. Como L^{-1} es también irreducible (nuevamente por Harnack) podemos definir $\mu_m(0) = \rho_0^{-1}$, donde ρ_0 es el radio espectral de L^{-1}. Para $\lambda < 0$ definimos $\mu_m(\lambda) = \mu_{-m}(-\lambda)$. Notar que en cada caso, $\mu_m(\lambda)$ puede ser caracterizado como el único número real tal que (3.2) tiene solución positiva. Por último, como $\rho\left(L_k^{-1}\right)$ es un autovalor algebraicamente simple de L_k^{-1}, sigue de la misma manera que en [26], Remark 3.11, que $\mu_m(\lambda)$ es un autovalor algebraicamente simple de $L - \lambda m$.

3.3 Propiedades de μ.

La primer propiedad que probaremos será la monotononía de la μ con respecto al peso, que jugará un papel importante tanto en el caso lineal como en el no lineal y que será mencionada como "principio de comparación de autovalores" o simplemente "principio de comparación".

Proposición 2. *Sean $m_1, m_2 \in L^s(L^v)$ tales que $m_1 \leq m_2$. Entonces, $\mu_{m_1}(\lambda) \geq \mu_{m_2}(\lambda)$ para todo $\lambda \geq 0$. Si además $m_1 < m_2$ en un conjunto de medida positiva, entonces $\mu_{m_1}(\lambda) > \mu_{m_2}(\lambda)$ para todo $\lambda > 0$.*

Prueba. Para $\lambda > 0$, tomamos $k > 0$ suficientemente grande tal que los operadores $T_j := (L + \lambda(k - m_j))^{-1}$, $j = 1, 2$, sean positivos, compactos e irreducibles. Como en la Proposición 1 se prueba (ver la última parte de la demostración) que T_2 is un operador acotado de $L^r(L^p)$ en $L^\infty(L^q)$, sigue que $T_1(m_2 - m_1)T_2$ está bien definido y es un operador acotado de $L^r(L^p)$ en si mismo. Mas aún, como

$$T_1 - T_2 = T_1(m_2 - m_1)T_2$$

tenemos $T_1 \geq T_2$ y por tanto $\rho(T_1) \geq \rho(T_2)$. Luego, $\mu_{m_1}(\lambda) \geq \mu_{m_2}(\lambda)$. Para ver la segunda parte, supongamos ahora que $m_1 \neq m_2$ en un conjunto de medida positiva. Procedemos por contradicción. Si $\mu_{m_1}(\lambda) = \mu_{m_2}(\lambda)$, tenemos $\rho(T_1) = \rho(T_2)$. Sea $u_2 \in L^r(L^p)$ una autofunción positiva para T_2. Por Krein-Rutman tenemos $u_2(x,t) > 0$ *a.e.* $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$. Por lo tanto $T_1(m_2 - m_1)T_2 u_2$ es estrictamente positivo en casi todo punto en $\Omega \times \mathbb{R}$ y luego

$$\rho(T_1)u_2(x,t) = \rho(T_2)u_2(x,t) = (T_2 u_2)(x,t) < (T_1 u_2)(x,t)$$

a.e. $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$, pero esto no puede ser porque $\rho(T_1)$ es el radio espectral de T_1. ■

Como $\mu_m(\lambda) = \mu_{-m}(-\lambda)$, de lo anterior sigue que para $\lambda < 0$, si $m_1 \leq m_2$ entonces se tiene $\mu_{m_1}(\lambda) \leq \mu_{m_2}(\lambda)$ y la desigualdad es estricta si $m_1 < m_2$ en un conjunto de medida positiva.

La idea de la prueba del siguiente lema está tomada de [11].

Lema 6. *Sea $m \in L^s(L^v)$. Entonces μ_m es una función continua y cóncava en $\mathbb{R}$ y además $\mu_m(0) > 0$.*

Prueba. Elegimos, como en la prueba del Teorema 2.1 en [11], una sucesión de dominios regulares Ω_n cubriendo Ω y tales que $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset ... \subset \Omega$, una sucesión de pesos T-periódicos y acotados $m_n : \Omega_n \times \mathbb{R}$ tales que m_n converja a m en $L^s(L^v)$, y una sucesión de operadores parabólicos

$$L_n u = u_t - div\left(A^{(n)}\nabla u\right) + \left\langle b^{(n)}, \nabla u\right\rangle + a_0^{(n)} u$$

en $\Omega_n \times \mathbb{R}$ con coeficientes T-periódicos y regulares tales que se satisfagan las siguientes:

(1) Las constantes de elipticidad tienen una cota positiva por debajo independiente de n.

(2) Las sucesiones $a_{i,j}^{(n)}$, $b_j^{(n)}$ y $a_0^{(n)}$ convergen a $a_{i,j}$, b_j y a_0 en L_T^∞, $L^\infty\left(L^{2v}\right)$ y $L^s(L^v)$ respectivamente, con las respectivas normas uniformemente acotadas en n.

Sea $\lambda \geq 0$. Como la constante C en (3.5) depende sólo de las cantidades enumeradas allí, una inspección de las pruebas de la Proposición 1 y del Lema 5 muestran que se puede elegir k sufientemente grande tal que.los operadores $(L_n + \lambda(k - m_n))^{-1}$ satisfagan las hipótesis del teorema de Krein-Rutman. Sean u_n las soluciones positivas de los problemas

$$\begin{cases} (L_n + \lambda(k - m_n))^{-1} u_n = \frac{1}{\lambda k + \mu_{m_n}(\lambda)} u_n & \text{en } \Omega \times \mathbb{R} \\ u_n = 0 & \text{en } \partial\Omega \times \mathbb{R} \\ u_n \ T\text{-periódica} \end{cases} \tag{3.8}$$

normalizadas por $\|u_n\|_{L^r(L^p)} = 1$. Notemos que $\{\mu_{m_n}(\lambda)\}_{n=1}^\infty$ permanece acotada cuando n tiende a ∞. De hecho, dado $\varepsilon > 0$, de (3.8) y teniendo en cuenta el Teorema 5.3 de [10], sigue que para n suficientemente grande el radio espectral de

$$(L_n + \lambda(k - m_n))^{-1} : L^r(L^p) \to L^r(L^p)$$

es mayor que $(\lambda k + \mu_m(\lambda))^{-1} - \varepsilon$. Tenemos ademas $\mu_{m_n}(\lambda) > -\lambda k$ y por tanto $\{\mu_{m_n}(\lambda)\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión acotada. Luego, agrandando k si es necesario, podemos suponer que la sucesión $\{\lambda k + \mu_{m_n}(\lambda)\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada por abajo por una constante positiva. Sea $\left\{\mu_{m_{n_l}}(\lambda)\right\}_{l=1}^{\infty}$ una subsucesión convergente y sea α su límite. Como $\left\{\left(\lambda k + \mu_{m_{n_l}}(\lambda)\right)^{-1} u_{n_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$ está acotada en $L^r(L^p)$, por el Teorema 5.1 de [10] podemos asumir (pasando a otra subsucesión) que u_{n_l} converge en $L^r(L^p)$ a una solución positiva y (no nula) u del problema

$$\begin{cases} Lu = \lambda m u + \alpha u & \text{en } \Omega \times \mathbb{R} \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \times \mathbb{R} \\ u \ T\text{-periódica} & \end{cases} \tag{3.9}$$

Luego, por la última parte del teorema de Krein-Rutman debe ser $\alpha = \mu_m(\lambda)$.

Así, cada subsucesión convergente de $\mu_{m_j}(\lambda)$ tiene una subsucesión convergente a $\mu_m(\lambda)$ y por tanto la sucesión entera converge a $\mu_m(\lambda)$. Como cada $\mu_{m_n}(\lambda)$ es una función cóncava en λ (ver [26], Lema 3.10), resulta que μ_m es cóncava para $\lambda \geq 0$, y como $\mu_m(\lambda) = \mu_{-m}(-\lambda)$, lo mismo vale en toda la recta real. Además, como μ_m es cóncava (y finita) es también continua. Finalmente, el peso $m = 1$ es acotado y continuo y por tanto el Lema 2.4 de [11] dice que $\mu_m(0) > 0$. ■

Observación. Se puede ver de manera similar que $(\lambda, m) \to \mu_m(\lambda)$ es continua. En efecto, sea $\{(\lambda_j, m_j)\}$ una sucesión arbitraria que converja en $\mathbb{R} \times L^s(L^v)$ a algún (λ_0, m_0). Como en la prueba del lema anterior podemos ver que $\left\{\mu_{m_j}(\lambda_j)\right\}$ es acotada. Pasando a alguna subsucesión podemos suponer que $\mu_{m_j}(\lambda_j)$ converge a algún $\alpha \in \mathbb{R}$. Sea $\widetilde{u}_{\lambda_j, m_j}$ una solución positiva del problema (3.3) (tomando $\lambda = \lambda_j$, $m = m_j$) normalizada por $\left\|\widetilde{u}_{\lambda_j, m_j}\right\|_{L^r(L^p)} = 1$. Entonces la compacidad del operador solución (Lema 2) provee una subsucesión $\widetilde{u}_{\lambda_{j_k}, m_{j_k}}$ que converge a una u solución del problema (3.9). Más aún, $u > 0$ y por tanto $\alpha = \mu_m(\lambda)$. Luego, $\left\{\mu_{m_j}(\lambda_j)\right\}$ tiene una subsucesión que converge a $\mu_m(\lambda)$, y esto prueba que $(\lambda, m) \to \mu_m(\lambda)$ es continua.

Definición. Sea Ω_0 un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$ y sea $\Gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ una curva C^2 y T-periódica. Definimos la región tubular B_{Γ,Ω_0} como

$$B_{\Gamma,\Omega_0} = \{(x,t) : x \in \Gamma(t) + \Omega_0,\ t \in (0,T)\} \tag{3.10}$$

El próximo lema es una adaptación del Lema 3.6 en [21].

Lema 7. *Sea* $m \in L^s(L^v)$ *con* $P(m) > 0$ *y tal que* m *sea acotada por arriba. Entonces existe un tubo* B_{Γ,Ω_0} *como en (3.10), con* Ω_0 *de frontera suave y* $B_{\Gamma,\Omega_0} \subset \Omega \times (0,T)$*, tal que* $\int_{B_{\Gamma,\Omega_0}} m > 0$.

Prueba. Sea $\delta > 0$ tal que $\Omega_\delta \neq \emptyset$, donde

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \delta\} \tag{3.11}$$

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, y sea $\widetilde{m}(t) := \operatorname{esssup}_{x\in\Omega} m(x,t)$. Sea $c \in \mathbb{R}$ tal que $\int_0^T \widetilde{m}(t)\, dt > c > 0$ y denotemos con π a la proyección usual $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\pi(x,t) = t$.

El primer paso es la construcción de una familia finita $\{Q_n\}_{n=1}^k$ de cubos abiertos, congruentes, disjuntos de a dos, con lados de largo l y paralelos a los ejes coordenados, satisfaciendo las siguientes condiciones:

$l \leq \delta/2(N+1)$, $Q_n \subset \Omega_{\delta/2} \times [a,b]$ para $1 \leq n \leq k$ con proyecciones $\{\pi(Q_n)\}_{n=1}^k$ disjuntas de a dos tal que $\sum_{n=1}^k |\pi(Q_n)| = b - a$ y con $\{Q_n\}_{n=1}^k$ satisfaciendo además que $\int_{\cup_{n=1}^k Q_n} m > cl^n$. En orden a construir tal familia $\{Q_n\}_{n=1}^k$ procedemos como en la prueba del Lema 3.6 de [21]. Como hay algunos errores de tipografía allí, hacemos algunas precisiones. Tomamos allí, en el comienzo de la prueba, $\widetilde{m}_j = \min(j, \widetilde{m})$, y fijamos j, k suficientemente grandes tal que $\int_a^b \widetilde{m}_j(t)\, dt > c$, $|\Omega_k| \geq |\Omega|/2$ y $k \geq 1/\delta$. Para $0 < \theta < \delta < \eta$, sea $E(\eta,\theta)$ el conjunto de puntos $(x,t) \in \Omega_{1/k} \times [a,b]$ tales que $m(x,t) \geq \widetilde{m}(t) - \eta + \theta$, sea $E^d(\eta,\theta)$ el conjunto de puntos en $\Omega_{1/k}$ que son puntos de Lebesgue para la función $m(x,t) - (\widetilde{m}_k(t) - \eta)$ y, para $\rho > 0$, sea $E^{(\rho)}$ el conjunto de puntos $(x,t) \in E^d(\eta,\theta)$ tal que $|Q|^{-1} \int_Q (m - (\widetilde{m}_k - \eta)) \geq \theta/2$ para todos los cubos abiertos con lados paralelos a los ejes coordenados con diámetro menor que $1/\rho$ conteniendo (x,t). Con estas notaciones, la prueba sigue como el Lema 3.6 en [21], con las normas L^r reemplazadas ahora por las normas $L^s(L^v)$ y los obvios cambios siguientes en la desigualdad de Hölder. Construida tal familia $\{Q_n\}_{n=1}^k$, el lema sigue de consideraciones similares a las de los Remarks 4.2, 4.3 y el Lema 4.4 en [26]. ■

El siguiente lema es una ligera variación de la Proposición 3.3 en [12] y la Proposición 3.1 en [30].

Lema 8. *Sea* $m \in L^s(L^v)$ *tal que* $\int_{B_{\Gamma,\Omega_0}} m > 0$*, donde* $B_{\Gamma,\Omega_0} \subset \Omega \times (0,T)$ *es como en (3.10). Entonces* $\lim_{\lambda\to\infty} \mu_m(\lambda) = -\infty$.

Prueba. Sea $\Psi:\Omega\times\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^{N+1}$ definida por $\Psi(x,t)=(x-\Gamma(t),t)$, y sea $D_T=\Psi(\Omega\times(0,T))$. Para $f:\Omega\times\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ denotaremos por $\widetilde{f}$ a la función $f\circ\Psi^{-1}$. Como u es solución de

$$u_t-div\,(A\nabla u)+\langle b,\nabla u\rangle+a_0u=\lambda mu+\mu_m(\lambda)\,u \text{ en } \Omega\times\mathbb{R},$$

usando la sustitución de variables $(y,t)=\Psi(x,t)$, obtenemos que para $\varphi\in H^1_{T,0}$

$$\int_{D_T}\left[-\widetilde{u}\widetilde{\varphi}_t+\left\langle\widetilde{A}\nabla\widetilde{u},\nabla\widetilde{\varphi}\right\rangle+\left\langle\widetilde{b}-\Gamma'(t),\nabla\widetilde{u}\right\rangle\widetilde{\varphi}+\widetilde{c}_0\widetilde{u}\widetilde{\varphi}\right]$$

$$=\int_{D_T}(\lambda\widetilde{m}+\mu_m(\lambda))\,\widetilde{u}\widetilde{\varphi} \tag{3.12}$$

donde $\widetilde{A}$ es la matriz con entradas $\widetilde{a}_{i,j}$ y $\widetilde{b}=\left(\widetilde{b}_1,...,\widetilde{b}_N\right)$.

Sea $\varepsilon>0$. Es fácil ver que existe $G\in C^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ con sop $G\subset\Omega_{0,\frac{\varepsilon}{2}}$ y tal que $0\leq G\leq 1$, $G\equiv 1$ en $\Omega_{0,\varepsilon}$ y

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0\times(0,T)}\widetilde{m}\leq\int\limits_{\Omega_0\times(0,T)}\widetilde{m}G^2 \tag{3.13}$$

Notamos que por la desigualdad de Harnack, $\widetilde{u}(x,t)$ está acotada por abajo por una constante positiva para $x\in$ sop G, $t\in[0,T]$. Luego podemos tomar $\widetilde{\varphi}=G^2/\widetilde{u}$ como función de prueba en (3.12). Ahora, como G no depende de t y $\widetilde{u}$ es T-periódica, tenemos $\int\limits_{D_T}\widetilde{u}\left(G^2/\widetilde{u}\right)_t=0$. Sea $\widetilde{v}=-\log\widetilde{u}$. Un cálculo muestra que

$$\int\limits_{\Omega_0\times(0,T)}-\|G\nabla\widetilde{v}\|^2_{\widetilde{A}}-2\left\langle\widetilde{A}\,(G\nabla\widetilde{v}),\nabla\widetilde{v}+\frac{1}{2}\widetilde{A}^{-1}\left(G\left(\widetilde{b}-\Gamma'(t)\right)\right)+\widetilde{c}_0G^2\right\rangle$$

$$=\int\limits_{\Omega_0\times(0,T)}(\lambda\widetilde{m}+\mu_m(\lambda))\,G^2$$

donde $\|w\|_A=\langle Aw,w\rangle^{1/2}$ para $w\in\mathbb{R}^N$. Así,

$$\mu_m(\lambda)\leq\frac{\int\limits_{\Omega_0\times(0,T)}\left[\left\|\nabla G+\frac{1}{2}\widetilde{A}^{-1}\left(\widetilde{b}-\Gamma'(t)\right)\right\|^2_{\widetilde{A}}+\widetilde{c}_0G^2-\lambda\widetilde{m}G^2\right]}{\int\limits_{\Omega_0\times(0,T)}G^2}$$

y entonces el lema sigue de (3.13). ■

Concluimos esta sección con un resultado útil concerniente al caso $m = m(t)$ que es una extensión del caso regular.

Lema 9. *Sea $m \in L^s(L^v)$ con $m = m(t)$. Entonces, para todo $\lambda > 0$ se tiene*

$$\mu_m(\lambda) = \mu(0) - \frac{\lambda}{T}P(m) \tag{3.14}$$

Prueba. En principio, como dijimos antes, el caso $P(m) = +\infty$ es posible. Notar sin embargo que si $m = m(t)$, entonces como $m \in L^s(L^v)$, resulta en particular que $m \in L^1(0,T)$ y por tanto $P(m) < \infty$, y así (3.14) tiene sentido. La prueba del lema sigue inmediatamente del Lema 15.3 en [29] razonando como en el Lema 5.4 en [12]. ■

3.4 Prueba de los Teoremas 1 y 2.

Teorema 1. *Sea $m \in L^s(L^v)$ con s, v satisfaciendo (2.1). Entonces, $P(m) > 0$ es condición necesaria y suficiente para la existencia de autovalor principal positivo para (1.1). Más aún, este autovalor es único y algebraicamente simple.*

Prueba. Probamos primero que la condición es suficiente. Supongamos $P(m) > 0$. Sean

$$\begin{aligned} &m_j(x,t) = \min\{j, m(x,t)\}, \qquad \widetilde{m}_j(t) = \operatorname*{esssup}_{x\in\Omega} m_j(x,t), \\ &\widetilde{m}(t) = \operatorname*{esssup}_{x\in\Omega} m(x,t) \end{aligned} \tag{3.15}$$

Notar que $\widetilde{m}_j(t) = \min\{j, \widetilde{m}(t)\}$. Más aún, $\widetilde{m}_j$ es una sucesión creciente que converge a.e. a $\widetilde{m}$. Ahora, como $\widetilde{m}_j(t) \geq m_j(x,t)$ a.e., tenemos $\widetilde{m}_j^-(t) \leq |m_j(x,t)|$ y por tanto $\widetilde{m}_j^- \in L^s(0,T)$ (y en particular a $L^1(0,T)$). Además, $0 \leq \widetilde{m}_j + \widetilde{m}^- \leq \widetilde{m}_{j+1} + \widetilde{m}^-$, $j \in \mathbb{N}$. Luego, el teorema de la convergencia monótona dice que

$$\lim_{j\to\to\infty} \int_0^T \widetilde{m}_j + \widetilde{m}^- = \int_0^T \widetilde{m}^+$$

Así, $\lim\limits_{j\to\infty} P(m_j) = P(m)$ y entonces $P(m_{j_0}) > 0$ para algún j_0 suficientemente grande. Ahora, como m_{j_0} está acotado por arriba, por el Lema 7 tenemos $\int_{B_{\Gamma,\Omega_0}} m_{j_0} > 0$ para algún B_{Γ,Ω_0} como allí. Pero entonces, teniendo en cuenta el Lema 6, el Lema 8 da la existencia de un autovalor principal positivo $\lambda_1 (m_{j_0})$. Por lo tanto, como $m_j \leq m$, del principio de comparación de la Proposición 2 sigue la existencia de autovalor principal para m. La unicidad sigue de la concavidad y la simplicidad del comentario al final de la definición de μ.

Veamos que la condición es necesaria. Supongamos $P(m) \leq 0$. Entonces $P(m_j) \leq 0$ para todo j. Ahora, como $\widetilde{m}_j^-$ depende sólo de t, el Lema 9 nos dice que $\mu_{\widetilde{m}_j}(\lambda) = \mu(0) - \frac{\lambda}{T} P(\widetilde{m}_j)$ para todo $\lambda > 0$. Por tanto resulta $\mu_{\widetilde{m}_j}(\lambda) > \mu(0)$, y así la Proposición 2 implica que $\mu_{m_j}(\lambda) > \mu(0)$ para todo $\lambda > 0$. Luego, como m_j converge (crecientemente) a m en $L^s(L^v)$ y $m \to \mu_m$ es continua (ver Observación despues del Lema 6), sigue $\mu_m(\lambda) > 0$ para todo $\lambda > 0$ y por tanto no existe autovalor principal positivo para (1.1). ■

Observaciones. i. Notar que de la prueba del teorema (en realidad del Lema 7) sigue que la condición $P(m) > 0$ es equivalente a que exista un tubo $B_{\Gamma,\Omega_0} \subset \Omega \times \mathbb{R}$ como en (3.10) tal que $\int_{B_{\Gamma,\Omega_0}} m > 0$. En efecto, claramente la existencia de un tal B_{Γ,Ω_0} implica $P(m) > 0$. Supongamos ahora $P(m) > 0$. Para $j \in \mathbb{N}$, sea m_j definido por (3.15). Entonces $P(m_{j_0}) > 0$ para algún j_0 y así el Lema 7 da que $\int_{B_{\Gamma,\Omega_0}} m_{j_0} > 0$ para algún B_{Γ,Ω_0}. Luego, $\int_{B_{\Gamma,\Omega_0}} m > 0$.

ii. Como consecuencia inmediata del principio de comparación de la Proposición 2 tenemos que si $m_1, m_2 \in L^s(L^v)$ con $m_1 \leq m_2$ y $P(m_1) > 0$, entonces $\lambda_1(m_1) \geq \lambda_1(m_2)$. Si además $m_1 \neq m_2$ en un conjunto de medida positiva, entonces $\lambda_1(m_1) > \lambda_1(m_2)$.

iii. Sea

$$N(m) := \int_0^T \operatorname*{ess\,inf}_{x \in \Omega} m(x,t)\ dt. \tag{3.16}$$

Como $\mu_m(\lambda) = \mu_{-m}(-\lambda)$, sigue que $N(m) < 0$ es condición necesaria y suficiente para la existencia de un (único y simple) autovalor principal negativo $\lambda_{-1}(m)$ para (1.1).

Teorema 2. *Supongamos existe $\lambda_1(m)$, y sea $h \in L^s(L^v)$ una función positiva (y no idénticamente cero). Entonces, si $0 < \lambda < \lambda_1(m)$, existe una única solución u al problema (2.4). Más aún, $u(x,t) > 0$ a.e. $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$. Recíprocamente, si (2.4) tiene solución positiva para $h \geq 0$ y $\lambda > 0$, entonces $\lambda < \lambda_1(m)$.*

Prueba. Notar que $Lu = \lambda m u + h$ es equivalente al problema

$$u = (L + \lambda(k - m))^{-1}(h + \lambda k u) := T(h + \lambda k u)$$

donde (para k suficientemente grande) T es compacto, positivo e irreducible, y a su vez la ecuación anterior es equivalente a

$$\left(\frac{1}{\lambda k}I - T\right)u = \frac{1}{\lambda k}Th$$

Ahora, como $\lambda < \lambda_1(m)$, tenemos $\mu_m(\lambda) > 0$ y entonces sigue de (3.7) que $\frac{1}{\lambda k} > \rho(T)$ y por tanto $u = \left(\frac{1}{\lambda k}I - T\right)^{-1} Th$. Luego, la irreducibilidad de T da la primera parte del teorema.

Asumimos ahora que (2.4) tiene solución positiva u para una $h \geq 0$. Entonces $Lu > \lambda mu$, y razonando como arriba esto da

$$Tu < \frac{1}{\lambda k}u \tag{3.17}$$

con T satisfaciendo las hipótesis del teorema de Krein-Rutman.

Supongamos $\lambda = \lambda_1(m)$. De (3.7) resulta $\frac{1}{\lambda k} = \rho(T)$ y por tanto (3.17) nos dice que

$$v := \rho(T)u - Tu > 0$$

lo cual contradice el Corolario (ii) de Krein-Rutman (ver final de la sección 3.1). Supongamos ahora $\lambda > \lambda_1(m)$. Tenemos entonces que $\mu(\lambda) < 0$ y por tanto (3.7) implica

$$\lambda^* := \frac{1}{\lambda k} < \frac{1}{\lambda k + \mu(\lambda)} = \rho(T).$$

Luego, de (3.17) sigue que

$$w := \lambda^* u - Tu > 0$$

con $\lambda^* < \rho(T)$ y $u > 0$, lo cual contradice el Corolario (i) de Krein-Rutman, y esto termina la prueba. ■

3.5 Funciones analíticas reales y prueba del Teorema 3.

Antes de probar el Teorema 3, damos algunas definiciones y resultados concernientes a funciones analíticas reales (ver por ejemplo [19] y las referencias que allí figuran).

Definición. Sean X, Y espacios normados lineales y $M \subset X$ un abierto. Sea $F : M \to Y$, y sea $x_0 \in M$. Decimos que F es *diferenciable Frechet* en x_0 si existe un operador lineal acotado $F'(x_0) : X \to Y$ tal que para todo $h \in X$ con $x_0 + h \in M$ se tiene

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = F'(x_0)(h) + R(x_0, h)$$

donde

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|R(x_0, h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0$$

El operador $F'(x_0)$ está unívocamente definido y se llama *derivada de Frechet* de F en x_0. Si F es diferenciable Frechet en x_0 entonces es continua en x_0.

Supongamos F' existe en un entorno U de x_0. Si F', considerado como una aplicación de U en $(X \to Y)$ tiene derivada Frechet en x_0, denotamos esta derivada como F'' y la llamamos *derivada de Frechet de segundo orden* de F en x_0. Así, $F''(x_0)$ es un elemento del espacio $(X \to (X \to Y))$ que es isométricamente isomorfo a $((X \times X) \to Y)$. Hacemos esta identificación de estos dos espacios y pensamos

$$F''(x_0) \in ((X \times X) \to Y)$$

Si $F''(x)$ existe en M, entonces F'' aplica M a $((X \times X) \to Y)$. De manera análoga se definen las derivadas de Frechet de orden superior.

Definición. Sean X, Y dos espacios de Banach reales, y $D \subset X$ un abierto. Una aplicación $F : D \to Y$ se dice *analítica real* en D si las siguientes afirmaciones son válidas

i. Para cada $x \in D$ existen las derivadas de Frechet de todos los órdenes $D^n F(x, ...)$.

ii. Para cada $x \in D$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $h \in X$, $\|h\| < \delta$, se tiene

$$F(x + h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} D^n F(x, h^n)$$

donde $h^n = [h, ..., h]$ n veces.

Enunciamos a continuación el teorema de la función implícita (ver [19], Capítulo 4, Teorema 3.12) para aplicaciones analíticas reales.

Teorema. Sean X, Y, Z espacios de Banach reales, $G \subset X \times Y$ un abierto, y $(x_0, y_0) \in G$. Sea $F : G \to Z$ una aplicación analítica real tal que $[F'(x_0, y_0)]^{-1}$ existe y $F(x_0, y_0) = 0$.

Entonces existe un entorno $U(x_0)$ en X del punto x_0 y $U(y_0)$ en Y del punto y_0 (con $U(x_0) \times U(y_0) \subset G$) tal que existe una única aplicación $y : U(x_0) \to U(y_0)$ para la cual se tiene $F(x, y(x)) = 0$ en $U(x_0)$. Más aún, esta aplicación y es analítica real en $U(x_0)$.

Enunciamos también el siguiente resultado sobre perturbación de autovalores simples debido a Crandall y Rabinowitz (ver [9], Lema 1.3)

Lema 10 (Crandall-Rabinowitz). *Sea X un espacio de Banach real. Sea $T_0 : X \to X$ un operador acotado, y supongamos que r_0 es un autovalor algebraicamente simple de T_0. Entonces existe $\delta > 0$ tal que si $\|T - T_0\| < \delta$, existe un único $r(T) \in \mathbb{R}$ satisfaciendo $|r(T) - r_0| < \delta$ para el cual $r(T)I - T$ es singular. Más aún, la aplicación $T \to r(T)$ es analítica real y $r(T)$ es un autovalor algebraicamente simple de T. Finalmente, puede ser elegido un autovector asociado $v(T)$ tal que la aplicación $T \to v(T)$ es también analítica real.*

Ahora sí, la demostración del Teorema 3.

Teorema 3. *La aplicación $m \to \lambda_1(m)$ es analítica real.*

Prueba. Sea $(\lambda_0, m_0) \in \mathbb{R} \times L^s(L^v)$ y supongamos que $P(m_0) > 0$. Procediendo como en la prueba de la Proposición 1 se puede ver que para $\alpha, k \in \mathbb{R}$ suficientemente grande el operador $(L + \alpha + \lambda(k - m))^{-1} : L^r(L^p) \to L^\infty(L^q)$ está bien definido, es acotado, positivo e irreducible para (λ, m) en algún entorno de (λ_0, m_0). Sea $T = (L + \alpha + \lambda(k - m))^{-1}$ y sea $T_0 = (L + \alpha + \lambda_0(k - m_0))^{-1}$. Un cálculo muestra que $T = T_0 + T\delta T_0$, donde δ es el operador multiplicar por $(\lambda_0 - \lambda)k + \lambda m - \lambda_0 m_0$. Entonces

$$T = T_0 \sum_{j=1}^{n} (\delta T_0)^j + T(\delta T_0)^{n+1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora, T_0 es acotado de $L^r(L^p)$ en $L^\infty(L^q)$ y por tanto para (λ, m) suficientemente cercano a (λ_0, m_0) tenemos

$$\|\delta\|_{L^\infty(L^q), L^r(L^p)} \le c\,\|\delta\|_{L^\infty(L^q), L^s(L^w)} \le 1/\left(2\,\|T_0\|_{L^r(L^p), L^\infty(L^q)}\right)$$

Sigue que $T_0 \sum_{j=1}^{n} (\delta T_0)^j$ converge a T_0 en la topología de la norma de operadores. Así, $(\lambda, m) \to T_{\lambda,m}$ es un mapa analítico. Como $\mu_m(0) > 0$ y μ_m es cóncava, tenemos entonces $\mu_m'(\lambda_1(m)) < 0$. Luego, el teorema sigue del lema de Crandall-Rabinowitz y el teorema de la función implícita enunciado arriba. ■

3.6 Prueba de los Teoremas 4 y 5.

Supondremos en esta sección que m y a_0 satisfacen (2.5).

Observaciones. i. Veamos como podemos definir μ cuando a_0 cambia de signo en $\Omega \times \mathbb{R}$. Sea $\lambda \geq 0$. Sumando ku, k constante positiva suficientemente grande, a ambos miembros de (3.2), vemos que ese problema es equivalente a

$$\frac{1}{\mu(\lambda) + k} u = (L + (k - \lambda m))^{-1} u$$

donde $(L + (k - \lambda m))^{-1} : L^r(L^p) \to L^r(L^p)$ es compacto, positivo e irreducible y r, p son como en el Lema 1. Así, el teorema de Krein-Rutman nos permite definir μ como

$$\mu(\lambda) = \frac{1}{\rho\left((L + (k - \lambda m))^{-1}\right)} - k$$

Otra forma de pensar μ cuando a_0 cambia de signo es la siguiente. Sea $k \geq \left\|a_0^-\right\|_\infty$. Sumando ku, a ambos miembros de (3.2), tenemos que

$$L_k u := (L + k) u = \lambda m u + (k + \mu_{m,L}(\lambda)) u$$

y como L_k es un operador con coeficiente independiente positivo, por unicidad de la μ en ese caso, debe ser $\mu_{m,L_k}(\lambda) = k + \mu_{m,L}(\lambda)$. Luego, podemos definir

$$\mu_{m,L}(\lambda) := \mu_{m,L_k}(\lambda) - k$$

Al igual que antes, es fácil ver que la definición no depende de k.

ii. Notamos de lo anterior que siguen valiendo en este caso todas las propiedades de μ probadas antes para cuando $a_0 \geq 0$, salvo que ahora en general no tiene por qué ser $\mu(0) > 0$. De hecho, veremos que $\mu(0)$ puede ser positivo, cero o negativo, dependiendo de que tan "grande" sea a_0^-.

A riesgo de ser pesado, pero pensando en la comodidad del eventual lector, reiteramos los enunciados de los teoremas. Recordar que L_0 es el operador que viene dado por $L_0 = L + a_0^-$.

Teorema 4. *(i) Supongamos $\lambda_1\left(L_0, a_0^-\right) > 1$. Entonces, la conclusión del Teorema 1 sigue siendo válida.*

(ii) Supongamos $\lambda_1\left(L_0, a_0^-\right) = 1$. Si $m = m(t)$, entonces (1.1) tiene autovalor principal positivo si y sólo si $\int_0^T m = 0$. En tal caso, todo $\lambda \in \mathbb{R}$ es autovalor principal.

(iii1) Supongamos $\lambda_1\left(L_0, a_0^-\right) = 1$ y que $m \neq m(t)$. Entonces, $P(m) > 0$ es condición necesaria pero no suficiente para la existencia de autovalor principal positivo para (1.1).

(iii2) Las condiciones $P(m) > 0$ y

$$\frac{a_0^-}{\lambda_1\left(L_0, m^+\right)} \leq m^- \qquad a.e.\,(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R} \tag{3.18}$$

son suficientes para la existencia de autovalor principal positivo $\lambda_1(m)$ para (1.1).Más aún, $\lambda_1(m)$ es el único autovalor principal distinto de cero para (1.1), y se tiene

$$\lambda_1\left(L_0, m^+\right) \leq \lambda_1(m) < \lambda_1\left(L_0, m\right).$$

Prueba. Veremos primero que $\mu_{m,L}(0) > 0$ si y sólo si $\lambda_1\left(L_0, a_0^-\right) > 1$, y así quedará demostrado (i). Asumamos $\mu_{m,L}(0) > 0$. Tenemos $Lu = \lambda mu + \mu_{m,L}(\lambda)\,u$ para todo λ, con $u > 0$. En particular, para $\lambda = 0$ obtenemos $Lu = \mu_{m,L}(0)\,u > 0$. Luego, como $L_0 = L + a_0^-$, sumando ku a ambos miembros con k suficientemente grande sigue que

$$\frac{1}{k}u > \left(L_0 + 1.\left(k - a_0^-\right)\right)^{-1} u := Tu \tag{3.19}$$

donde T satisface las hipótesis del teorema de Krein-Rutman. Ahora, supongamos $1 = \lambda_1\left(L_0, a_0^-\right)$. Entonces, de (3.7) resulta $\rho(T) = \frac{1}{k}$ y así (3.19) implica que $\rho(T)\,u - Tu > 0$, lo cual contradice el Corolario (ii) de Krein-Rutman. Supongamos $1 > \lambda_1\left(L_0, a_0^-\right)$. Entonces se tiene $\mu_{a_0^-, L_0}(1) < 0$ y por tanto de (3.7) resulta

$$\lambda^* := \frac{1}{k} < \frac{1}{k + \mu_{a_0^-, L_0}(1)} = \rho(T)$$

Así, sigue de (3.19) que $\lambda^* u - Tu > 0$ con $\lambda^* < \rho(T)$ y $u > 0$, en contradicción con el Corolario (i) de Krein-Rutman. Por lo tanto debe ser $1 < \lambda_1\left(L_0, a_0^-\right)$.

Asumamos ahora que $\lambda_1\left(L_0, a_0^-\right) > 1$. Tenemos $Lu = \mu_{m,L}(0)\,u$ con $u > 0$. Si $\mu_{m,L}(0) = 0$, obtenemos $L_0 u = a_0^- u$, $u > 0$. Así, $1 = \lambda_1\left(L_0, a_0^-\right) > 1$. Contradicción. Supongamos $\mu_{m,L}(0) < 0$. Entonces nos queda $L_0 u - 1.a_0^- u < 0$. Pero si $1 < \lambda_1\left(L_0, a_0^-\right)$, el Teorema 2 dice que $u < 0$. Contradicción. Por tanto, $\mu_{m,L}(0) > 0$.

Veamos (ii). Observemos primero que $\lambda_1\left(L_0, a_0^-\right) = 1$ si y sólo si $\mu_{m,L}(0) = 0$. En efecto, supongamos $\lambda_1\left(L_0, a_0^-\right) = 1$. Entonces existe

$v > 0$ tal que $L_0 v = a_0^- v$ y por tanto $Lv = 0 = 0.v$. Pero $\mu_{m,L}(0)$ es el único número con esa propiedad, y así debemos tener $\mu_{m,L}(0) = 0$. Recíprocamente, si $\mu_{m,L}(0) = 0$ obtenemos $Lu = \mu_{m,L}(0)\, u = 0$ con u positiva y luego $L_0 u = a_0^- u$, $u > 0$. Así, $\lambda_1\left(L_0, a_0^-\right) = 1$. Por lo tanto, teniendo en cuenta la observación anterior y el Lema 9 queda probado (ii).

La prueba de la primera afirmación de (iii1) sigue inmediatamente de lo anterior y del hecho que $\lim_{\lambda\to\infty} \mu(\lambda) = -\infty$ si y sólo si $P(m) > 0$. Para ver la otra afirmación, consideremos el peso $m \equiv m^+$. Obviamente $P(m^+) > 0$. Supongamos existe $\lambda_1(m^+)$. Entonces $\mu_{m^+,L}(\lambda) > 0$ para todo $0 < \lambda < \lambda_1(m^+)$. Así, para tales λ tenemos $Lu > \lambda m^+ u > 0$ con $u > 0$, pero entonces como en el comienzo de la prueba de (i) obtenemos $\lambda_1\left(L_0, a_0^-\right) > 1$. Contradicción.

Probamos (iii2). Afirmamos que (3.18) implica $\mu_{m,L}(\lambda_1(L_0, m^+)) \geq 0$. En efecto, si no, entonces $Lu < \lambda_1(L_0, m^+)\, mu$ para alguna u positiva. Luego, resulta

$$L_0 u < \left(a_0^- - \lambda_1\left(L_0, m^+\right) m^-\right) u + \lambda_1\left(L_0, m^+\right) m^+ u$$

y por lo tanto (3.18) implica $L_0 u < \lambda_1(L_0, m^+)\, m^+ u$. Ahora, como en (i) obtenemos

$$\frac{1}{\lambda_1(L_0, m^+)\, k} u < \left(L_0 + \lambda_1\left(L_0, m^+\right)\left(k - m^+\right)\right)^{-1} u =: Tu$$

para algún k suficientemente grande y así (3.7) da $\rho(T)\, u < Tu$. Luego $\rho(T)(-u) - T(-u) > 0$, en contradicción con el Corolario (ii) de Krein-Rutman. Así, $\mu_{m,L}(\lambda_1(L_0, m^+)) \geq 0$ y entonces, como $P(m) > 0$, la continuidad de $\mu_{m,L}$ da algún $\lambda \geq \lambda_1(L_0, m^+)$ tal que $\mu_{m,L}(\lambda) = 0$. Más aún, como $\lambda = \lambda_1\left(L_0, m + \frac{a_0^-}{\lambda}\right)$, el principio de comparación de la Proposición 2 implica $\lambda < \lambda_1(L_0, m)$. La unicidad del autovalor principal sigue de la concavidad de $\mu_{m,L}$ y del hecho que $\mu_{m,L}(0) = 0$. ■

Observaciones. i. Notemos que en el caso $a_0 \geq 0$, (3.18) es siempre válida y la condición en (iii2) se reduce a $P(m) > 0$, que en tal caso es necesaria.

ii. Notemos además que 0 es autovalor principal para (1.1) si y sólo si $\lambda_1\left(L_0, a_0^-\right) = 1$.

iii. Sea $N(m)$ definido por (3.16) y supongamos $\lambda_1\left(L_0, a_0^-\right) > 1$. Como $\mu_m(\lambda) = \mu_{-m}(-\lambda)$, $N(m) < 0$ es necesaria y suficiente para la existencia de un (único) autovalor principal negativo $\lambda_{-1}(m)$ para (1.1). Por otro lado, si $\lambda_1\left(L_0, a_0^-\right) = 1$ y m depende no trivialmente de t, razonando como arriba vemos que $N(m) < 0$ es necesaria (pero no suficiente) para la existencia de un autovalor principal negativo. Más aún, si $\lambda < 0$, escribiendo $Lu = (-\lambda)(-m)u$ se puede probar que $\frac{a_0^-}{\lambda_1(L_0,m^-)} \leq m^+$ *a.e.* (x,t) implica $\mu_{m,L}(-\lambda_1(L_0,m^-)) \geq 0$ y por tanto $N(m) < 0$ y $\frac{a_0^-}{\lambda_1(L_0,m^-)} \leq m^+$ *a.e.* (x,t) son suficientes para la existencia de autovalor principal (único) negativo para (1.1).

Corolario. *Supongamos* $\lambda_1\left(L_0, a_0^-\right) < 1$.

(i) Si $P(m) < 0$*, entonces existe un autovalor principal positivo, y no hay otro autovalor principal para (1.1).*

(ii) Supongamos $P(m) \geq 0$*. Entonces (3.18) es suficiente para la existencia de autovalor principal positivo* $\lambda_1(m)$ *para (1.1). Más aún,*

(ii1) Si $P(m) = 0$, $\lambda_1(m)$ *es el único autovalor principal para (1.1) y se tiene*

$$\lambda_1(m) \leq \lambda_1\left(L_0, m^+\right).$$

(ii2) Si $P(m) > 0$ *y* $\frac{a_0^-}{\lambda_1(L_0,m^+)} < m^-$ *en un conjunto de medida positiva, entonces existen dos autovalores principales* $\lambda_1(m)$ *y* $\overline{\lambda}_1(m)$*. Estos son los únicos autovalores principales para (1.1) y se tiene*

$$\lambda_1(m) < \lambda_1\left(L_0, m^+\right) < \overline{\lambda}_1(m).$$

(ii3) Si $P(m) > 0$ *y* $\frac{a_0^-}{\lambda_1(L_0,m^+)} = m^-$ *a.e.* (x,t)*, entonces* $\lambda_1(L_0, m^+)$ *es un autovalor principal para (1.1).*

Prueba. Como consecuencia de la prueba del teorema anterior vemos que $\lambda_1\left(L_0, a_0^-\right) < 1$ si y sólo si $\mu_{m,L}(0) < 0$. Por lo tanto, (i) sigue de la Proposición 2 y el Lema 9. Por otra parte, como en el teorema anterior tenemos $\mu_{m,L}(\lambda_1(L_0, m^+)) \geq 0$. Más aún, es fácil ver que $\mu_{m,L}(\lambda_1(L_0, m^+)) = 0$ si sólo si $\frac{a_0^-}{\lambda_1(L_0,m^+)} \equiv m^-$ y por tanto en tal caso $\lambda_1(L_0, m^+)$ es autovalor principal positivo para (1.1). Luego, el Corolario sigue teniendo en cuenta las propiedades de μ. ■

Observación. Hemos tratado (infructuosamente) de poder decir algo más en el caso (ii3). Tenemos también las siguientes

Conjetura 1. Se puede reemplazar (3.18) por la condición más débil

$$\begin{cases} \frac{a_0^-}{\lambda_1(L_0,m^+)} \leq m^- & a.e.\,(x,t) \in M^- \\ \lambda_1\left(L_0, a_0^- \chi_{M^+}\right) \geq 1 & \end{cases}$$

donde $M^{+} := \{(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R} : m(x,t) \geq 0\}$ y $M^{-} := (\Omega \times \mathbb{R}) - M^{+}$.

Conjetura 2. En el caso $\lambda_1 \left(L_0, a_0^{-}\right) = 1$, la condición

$$\frac{a_0^{-}}{\lambda_1 \left(L_0, m^{+}\right)} \leq m^{-} \text{ en algún } E \subset \Omega \times \mathbb{R}, \text{ con } |E| > 0$$

es necesaria para la existencia de autovalor principal positivo.

Conjetura 3. Las conjeturas 1 y 2 son falsas.

Lamentablemente, aún después de sesudos análisis, no hemos podido resolver ninguna de las tres conjeturas.

Sea M_0 definido por (2.7). Concluimos esta sección probando el

Teorema 5. *Supongamos $\lambda_1 \left(L_0, a_0^{-}\right) < 1$, $m^{+} \equiv 0$. Asumamos que $a_0^{-} \chi_{M_0} = 0$ a.e. o bien $\lambda_1 \left(L_0, a_0^{-} \chi_{M_0}\right) \geq 1$, y que $a_0^{-}/m^{-} \in L^{\infty}(V - M_0)$ para algun entorno V de M_0. Entonces existe un autovalor principal positivo para (1.1), y no hay otro autovalor principal para (1.1).*

Prueba. Supongamos no existe $\lambda > 0$ tal que $\mu_{m,L}(\lambda) = 0$. Entonces, como $\mu_{m,L}(0) < 0$ tenemos $\mu_{m,L}(\lambda) < 0$ para todo $\lambda > 0$. Luego, $Lu < \lambda m u = -\lambda m^{-} u$ para alguna $u > 0$ y así

$$L_0 u < a_0^{-} \chi_{M_0} u + \left(a_0^{-} \chi_{\{m<0\}} - \lambda m^{-}\right) u \tag{3.20}$$

para todo $\lambda > 0$. Por otra parte, existe λ^{*} suficientemente grande (no dependiendo de (x,t)) tal que $a_0^{-} \chi_{\{m<0\}} - \lambda^{*} m^{-} \leq 0$ a.e. $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$ con desigualdad estricta en un conjunto de mediad positiva. Por tanto, (3.20) da $L_0 u < a_0^{-} \chi_{M_0} u$ con $u > 0$ y entonces razonando como en la prueba del Teorema 4 obtenemos $1 > \lambda_1 \left(L_0, a_0^{-} \chi_{M_0}\right)$, mientras que si $a_0^{-} \chi_{M_0} = 0$ a.e. se tiene una contradicción con la positividad de L_0^{-1}. Así, la existencia de autovalor principal positivo está probada. La unicidad del autovalor principal sigue de la concavidad de $\mu_{m,L}$ y del hecho que $P(m) \leq 0$. ■

Observación. Consideremos un operador parabólico en forma clásica, es decir

$$Lu = u_t - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u + \sum_{i=1}^{N} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u$$

Asumimos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ es un dominio acotado con frontera de clase de clase $C^{2+\theta}$, $0 < \theta < 1$, y que los coeficientes $a_{i,j}$, b_j, a_0 y el peso m pertenecen a $C_T^{\theta,\theta/2}\left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}\right)$. Con estas hipótesis, se puede probar de la misma manera que lo hemos hecho todos los resultados anteriores correspondientes a los tres casos considerados, trabajando en el contexto de soluciones clásicas, utilizando la versión clásica del teorema de Krein-Rutman (es decir, para conos con interior no vacío) ya que los resultados que hemos utilizado siguen siendo válidos con las hipótesis escritas arriba (ver por ejemplo [29]).

Por supuesto, sería agradable poder probar esto con menos hipótesis, en especial sobre el peso m. Sin embargo, hay un problema. La prueba que da Hess de el hecho que $P(m) > 0$ implica que $\mu(\lambda) \to -\infty$ cuando $\lambda \to \infty$ (y por tanto la existencia de un autovalor principal positivo en el caso $a_0^- \equiv 0$) depende de la continuidad de m y no puede ser extendida a una m no continua (ver [29], Lema 15.4, o también [7], [30]). Y la prueba alternativa conocida utiliza la forma débil de la ecuación con alguna función test conveniente y por tanto, o bien se pide que los coeficientes a_{ij} sean $C_T^1\left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}\right)$ y se puede pasar entonces a la forma de divergencia ([21], [26] por ejemplo), o bien se empieza directamente por un operador escrito en forma de divergencia (ver Lema 8, y también [11], [12]). Suponemos que la afirmación debe seguir siendo cierta para m no continua y un operador general, pero no conocemos la prueba. Por supuesto, esta observación se aplica también al caso $a_0 \geq 0$.

3.7 Preparando el caso no lineal.

En esta sección se prueban resultados sobre el caso lineal que serán necesarios para poder tratar luego el problema no lineal. Entre otras, veremos propiedades de regularidad de las autofuncionces principales de (1.1) y desigualdades de tipo Harnack para estas autofunciones.

Asumiremos en esta sección que Ω satisface la condición de regularidad (2.8).

Observaciones. i. Teniendo en cuenta que Ω satisface (2.8), $q = \infty$ está permitido en el Teorema 4.4 de [10] (ver [10], Remark 4.6 (b)) y por tanto también en el Teorema 5.1 (a) y en el Corolario 5.2. Por tanto, bajo la condición (2.8), sigue que todos los resultados de la sección 2 del presente capítulo siguen siendo válidos tomando

$$\begin{array}{lll} q = \infty, & w = q, & r < s, \\ 2 \leq r < \infty, & p < \infty, & p < v, \\ \frac{N}{2p} + \frac{1}{r} < 1. & & \end{array}$$

en lugar de la elección del Lema 1 (ver (3.4)). Fijamos por el resto del trabajo p, r satisfaciendo estas condiciones (notar que como $\frac{N}{2v} + \frac{1}{s} < 1$, tales p, r existen).

ii. Para $f \in L^r(L^p)$, la (única) solución u del problema (2.2) pertenece a C_T. Más aún, el operador,

$$L^{-1} : L^r(L^p) \to C_T \tag{3.21}$$

es compacto. En efecto, de lo anterior y el Remark 4.6 (b) en [10], tenemos que $u \in C_T$, y como dijimos arriba, el Teorema 5.1 (a) en [10] sigue siendo válido para $q = \infty$ y esto da la compacidad.

Si X, Y son espacios de Banach, denotamos con $B(X, Y)$ al espacio de Banach de operadores lineales y acotados de X en Y. Para $S \in B(X, Y)$ escribiremos $\|S\|_{X,Y}$ para su norma como operador, y si $S \in B(X, X)$ su norma será denotada por $\|S\|_X$. Recordar que para $R > 0$ y $f \in L^s(L^v)$ ó $f \in C_T$ escribimos $\overline{B}_R^{s,v}(f)$ ó $\overline{B}_R^{C_T}(f)$ respectivamente para denotar las bolas cerradas en f y con radio R en los respectivos espacios.

Sean $R, \Lambda \in (0, \infty)$. Tomando $q = \infty$ en la Proposición 2, se ve que con la misma prueba obtenemos que existe $k_0 = k_0(R, \Lambda)$ tal que para $k \geq k_0$ el operador

$$(L + \lambda(k - m))^{-1} : L^r(L^p) \to L_T^\infty$$

es compacto y positivo. Más aún, tenemos

Lema 11. *Sean $R, \Lambda \in (0, \infty)$ y sea $k \geq k_0$ con k_0 como arriba. Entonces, para todo $m \in \overline{B}_R^{s,v}(0)$, $\lambda \in [0, \Lambda]$ tenemos*

$$(L + \lambda(k - m))^{-1}(L^r(L^p)) \subset C_T \tag{3.22}$$

Más aún, el operador

$$(L + \lambda(k - m))_{|C_T}^{-1} : C_T \to C_T$$

es compacto.

Prueba. Al igual que en la Proposición 2, para $f \in L^r(L^p)$, la ecuación $(L + \lambda(k - m))u = f$ puede ser escrita como

$$\left(I - \lambda\left(L + \lambda\left(k + m^-\right)\right)^{-1} m^+\right) u = \left(L + \lambda\left(k + m^-\right)\right)^{-1} f \tag{3.23}$$

Ahora, teniendo en cuenta la segunda parte de la observación anterior (aplicada a $L + \lambda(k + m^-)$ en lugar de L) nos da que

$$\left(\left(L + \lambda\left(k + m^-\right)\right)^{-1} m^+\right)(L_T^\infty) \subset C_T.$$

Ademá, para k suficientemente grande, tenemos

$$\left\|\lambda\left(L+\lambda\left(k+m^{-}\right)\right)^{-1}m^{+}\right\|_{C_T}\leq\left\|\lambda\left(L+\lambda\left(k+m^{-}\right)\right)^{-1}m^{+}\right\|_{L_T^{\infty}}<1$$

donde la última desigualdad sigue del Lema 4 (tomando $q=\infty$). Así, para tales k resulta que

$$\left(I-\lambda\left(L+\lambda\left(k+m^{-}\right)\right)^{-1}m^{+}\right)^{-1}_{|C_T}:C_T\rightarrow C_T$$

está bien definido y es acotado y así (3.22) sigue de (3.23). Por último, como $(L+\lambda(k-m))^{-1}:L^r(L^p)\rightarrow L_T^{\infty}$ es compacto, (3.22) nos da la otra afirmación del lema. ■

Observaciones. i. Notar que (asumiendo (2.8), el lema anterior nos dice que las autofunciones principales de (1.1) (que en principio estaban en $L^{\infty}(L^q)$, $q<\infty$) pertenecen a C_T.

ii. Sean $R,\Lambda,k_0,k,\lambda,m$ como en el lema anterior. Entonces, el espectro de

$$(L+\lambda(k-m))^{-1}_{|C_T}:C_T\rightarrow C_T \tag{3.24}$$

coincide con el espectro de

$$(L+\lambda(k-m))^{-1}:L^r(L^p)\rightarrow L^r(L^p) \tag{3.25}$$

y además, para un autovalor dado, estos operadores tienen los mismos autoespacios generalizados En particular, tienen el mismo radio espectral. Más aun, como el radio espectral es un autovalor simple para (3.25) por el teorema de Krein-Rutman, lo mismo es cierto para (3.24).

iii. Notar que se puede elegir una autofunción positiva $u_{\lambda,m}$ de (1.1) tal que la aplicación $(\lambda,m)\rightarrow u_{\lambda,m}$ es analítica real de $\mathbb{R}\times L^s(L^v)$ en C_T. En efecto, sean $(\lambda_0,m_0)\in\mathbb{R}\times L^s(L^v)$, $V_{\lambda_0,m_0}=(\lambda_0-\delta,\lambda_0+\delta)\times B_R^{s,v}(0)$ con $\delta,R>0$ suficientemente pequeños, y sea $k>k_0(R,\lambda_0+\delta)$ con k_0 como en el lema anterior. Como ya sabemos que $(\lambda,m)\rightarrow\mu_m(\lambda)$ es continua (ver la observación después del Lema 6), lo mismo es cierto para $(\lambda,m)\rightarrow\rho_{\lambda,m}$ donde $\rho_{\lambda,m}$ es el radio espectral (y por tanto por el teorema de Krein-Rutman es autovalor principal positivo) de $(L+\lambda(k-m))^{-1}:C_T\rightarrow C_T$. Como además $(\lambda,m)\rightarrow T_{\lambda,m}$ es analítica real (ver la prueba del Teorema 3), el lema de Crandall-Rabinowitz da la afirmación.

iv. Sea

$$\mathcal{M}=\{m\in L^s(L^v):P(m)>0\} \tag{3.26}$$

Es claro por la observación (i) después del Teorema 1 que $\mathcal{M}$ es abierto en $L^s(L^v)$. Además, notar que para $m \in \mathcal{M}$ y $\lambda = \lambda_1(m)$, se puede elegir una autofunción positiva u_m del problema (1.1) tal que $m \to u_m$ es analítica real de $\mathcal{M}$ en C_T. En efecto, el Teorema 3 nos dice que $m \to \lambda_1(m)$ is analítica real, y por lo anterior también se puede elegir una autofunción positiva $u_{\lambda,m}$ de (1.1) tal que la aplicación $(\lambda, m) \to u_{\lambda,m}$ sea analítica real. Luego, tomando $u_m = u_{\lambda_1(m),m}$, la afirmación sigue.

Para $\lambda > 0$, sea

$$D_\lambda = \{m \in L^s(L^v) : \mu_m(\lambda) > 0\} \tag{3.27}$$

Como $(\lambda, m) \to \mu_m(\lambda)$ es continua (ver la observación que sigue al Lema 6), tenemos que D_λ es abierto en $L^s(L^v)$. Notemos que (por las propiedades de μ) para $\lambda > 0$ la condición $\mu_m(\lambda) > 0$ es equivalente a: $0 < \lambda < \lambda_1(m)$ si $\lambda_1(m)$ existe y $\lambda > 0$ si el peso no tiene autovalor principal positivo.

El siguiente resultado será necesario para la prueba del Teorema 7.

Lema 12. *Sea $\lambda \in (0, \infty)$ y sea $(m, h) \in D_\lambda \times L^r(L^p)$. Entonces el problema (2.4) tiene una única solución $u \in C_T$. Más aún,*

(a) Sea $S_\lambda(m, h)$ el operador solución para (2.4). Entonces

$$S_\lambda(m, .) : L^r(L^p) \to C_T$$

es compacto, y si $h \geq 0$, entonces $S_\lambda(m, h)(x, t) > 0$ a.e. $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$.

(b) El operador

$$S_\lambda(., h) : D_\lambda \to C_T$$

es compacto.

Prueba. Teniendo en cuenta el Lema 11 y la observación anterior, la parte (a) sigue con la misma demostración que la del Teorema 2. Para ver (b), sea $m \in D_\lambda$, sea $\{m_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una sucesión en D_λ que converge débilmente a m en $L^s(L^v)$ y sea $u_j = S_{\lambda,h}(m_j)$. Entonces $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ es acotada en C_T. En efecto, si para alguna subsucesión tenemos $\lim\limits_{k \to \infty} \|u_{j_k}\|_\infty = \infty$, yendo al límite en

$$L\left(\frac{u_{j_k}}{\|u_{j_k}\|_\infty}\right) = \lambda m \frac{u_{j_k}}{\|u_{j_k}\|_\infty} + \frac{h}{\|u_{j_k}\|_\infty}$$

y teniendo en cuenta la compacidad de $L^{-1} : L^r(L^p) \to C_T$ (ver el comienzo de esta sección), obtenemos $\lambda = \lambda_1(m)$ en contradicción con que $m \in D_\lambda$. Luego, como $\sup\limits_j \|u_j\|_\infty < \infty$, de la ecuación $Lu_j = \lambda m_j u_j + h$, el mismo argumento de compacidad da una subsucesión u_{j_k} que converge a la solución de (2.4), esto es, a $S_{\lambda,h}(m)$. Como $\{m_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ era arbitraria, esto termina la prueba. ■

Lema 13. *Sea $\mathcal{N}$ el conjunto de funciones $m \in L^s(L^v)$ tal que*

$$(L+m)^{-1} : L^r(L^p) \to C_T$$

es un operador bien definido y acotado. Entonces $\mathcal{N}$ es abierto en $L^s(L^v)$ y la aplicación $m \to (L+m)^{-1}$ es continua de $\mathcal{N}$ en $B(L^r(L^p), C_T)$.

Prueba. Sea $m_0 \in \mathcal{N}$ y $m \in L^s(L^v)$. Para $f \in L^r(L^p)$, la ecuación $Lu + mu = f$ es equivalente a

$$u = (L+m_0)^{-1}(m_0 - m)\,u + (L+m_0)^{-1} f$$

Ahora, como

$$\left\|(L+m_0)^{-1}(m_0-m)\right\|_{C_T} \leq \left\|(L+m_0)^{-1}\right\|_{L^r(L^p),C_T} \|m_0 - m\|_{L^s(L^v)}$$

sigue que para m suficientemente cerca a m_0 en $L^s(L^v)$,

$$\left(I - (L+m_0)^{-1}(m_0-m)\right)^{-1} : C_T \to C_T$$

está bien definido y es acotado. Luego, para tales m tenemos

$$u = \left(I - (L+m_0)^{-1}(m_0-m)\right)^{-1}(L+m_0)^{-1} f, \tag{3.28}$$

y, (3.28) implica que para m cerca a m_0, $(L+m)^{-1}$ está bien definido y es un operador acotado de $L^r(L^p)$ en C_T. Por lo tanto $\mathcal{N}$ es abierto. Más aún, $\left\|(L+m)^{-1}\right\|_{L^r(L^p),C_T}$ está acotado para m moviéndose en un entorno pequeño de m_0. Como además para tales m se tiene

$$(L+m)^{-1} - (L+m_0)^{-1} =$$

$$(L+m_0)^{-1}\left[\left(I - (m_0-m)(L+m_0)^{-1}\right)^{-1} - I\right]$$

el lema sigue. ■

Necesitaremos también la siguiente desigualdad de tipo Harnack para las autofunciones positivas de (1.1).

Proposición 3. *Sean* $R, \Lambda \in (0, \infty)$. *Entonces, para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $c > 0$ *tal que si* $m \in B_R^{s,v}$, $\lambda \in [0, \Lambda]$ *y* $u \in C_T$ *es una autofunción positiva de (1.1), entonces*

$$\|u\|_\infty \leq c \inf_{\Omega_\varepsilon \times (0,T)} u$$

donde Ω_ε viene dado por (3.11).

Prueba. Sean $1 < \widetilde{s}, \widetilde{v} < \infty$ definidas por $r^{-1} = s^{-1} + \widetilde{s}^{-1}$, $p^{-1} = v^{-1} + \widetilde{v}^{-1}$ y para $j = 1, 2$, sean $\theta_j \in (0,1)$ definidas por $\widetilde{s}^{-1} = (1 - \theta_1)$ y $\widetilde{v}^{-1} = 1 - \theta_2$. De (1.1) resulta

$$\|u\|_\infty \leq \lambda \left\|L^{-1}\right\|_{L^r(L^p), C_T} \|m\|_{L^s(L^v)} \|u\|_{L^{\widetilde{s}}\left(L^{\widetilde{v}}\right)} \leq c_1 \|u\|_{L^{\widetilde{s}}\left(L^{\widetilde{v}}\right)} \leq$$

$$c_1 \|u\|^{\theta_1}_{L^\infty\left(L^{\widetilde{v}}\right)} \|u\|^{1-\theta_1}_{L^1\left(L^{\widetilde{v}}\right)} \leq c_2 \|u\|^{\theta_1}_\infty \|u\|^{1-\theta_1}_{L^{\widetilde{v}}_T} \leq$$

$$c_2 \|u\|^{\theta_1}_\infty \left[\|u\|^{\theta_2}_\infty \|u\|^{1-\theta_2}_{L^1_T}\right]^{1-\theta_1} = c_2 \|u\|^{\theta_1+\theta_2-\theta_1\theta_2}_\infty \|u\|^{1-(\theta_1+\theta_2-\theta_1\theta_2)}_{L^1_T}$$

para algunos $c_1, c_2 > 0$. Como $1 - (\theta_1 + \theta_2 - \theta_1\theta_2) > 0$ tenemos

$$\|u\|_\infty \leq c_3 \|u\|_{L^1_T} \tag{3.29}$$

para algún $c_3 > 0$. Sea $A_\varepsilon = \Omega - \Omega_\varepsilon$. Entonces,

$$\|u\|_{L^1_T(A_\varepsilon \times (0,T))} \leq |A_\varepsilon| \, T \|u\|_\infty \leq c_3 T |A_\varepsilon| \|u\|_{L^1_T}$$

Así, si ε es suficientemente pequeño tal que $c_3 T |A_\varepsilon| < \frac{1}{2}$ obtenemos

$$\|u\|_{L^1_T(\Omega_\varepsilon \times (0,T))} \geq \frac{1}{2} \|u\|_{L^1_T} \tag{3.30}$$

De (3.29), (3.30), usando el Teorema 5.1 en [47], y teniendo en cuenta la periodicidad de u, sigue que $\|u\|_\infty \leq c \inf_{\Omega_\varepsilon \times (0,T)} u$ para algún $c > 0$, con c dependiendo de $\varepsilon, p, r, R, \Lambda$, Ω y L. ■

Corolario. *Sean* $R, \Lambda \in (0, \infty)$. *Entonces existe* $\Phi \in L^\infty_T$ *con* $\Phi(x,t) > 0$ *para todo* $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$ *tal que si* $m \in B_R^{s,v}$, $\lambda \in [0, \Lambda]$ *y* $u \in C_T$ *es una autofunción positiva de (1.1), entonces*

$$u(x,t) \geq \|u\|_\infty \Phi(x,t)$$

para todo $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$.

Prueba. Es claro que podemos asumir que $\|u\|_\infty = 1$. Para $j \in \mathbb{Z}$, sea

$$A_j = \left\{x \in \Omega : 2^{-j-1} < d\left(x, \partial\Omega\right) \leq 2^{-j}\right\}$$

Así, $\Omega = \bigcup\limits_{j \in \mathbb{Z}} A_j$. Para j tal que $A_j \neq \emptyset$, sea c_j la constante dada por la proposición anterior tomando $\varepsilon = 2^{-j-1}$. Definimos entonces $\Phi\left(x,t\right) = \frac{1}{c_j}$ para $\left(x,t\right) \in A_j \times \mathbb{R}$. Luego $\Phi\left(x,t\right) > 0$ para todo $\left(x,t\right)$. Además, la proposición implica

$$u\left(x,t\right) \geq \inf_{\Omega_{2^{-j-1}} \times (0,T)} u \geq \frac{1}{c_j} = \Phi\left(x,t\right)$$

para todo $\left(x,t\right) \in A_j \times \mathbb{R}$. ■

Observación. En principio las autofunciones positivas de (1.1) son puntos casi interiores y por tanto son positivas a.e. De lo anterior sigue que si Ω satisface la condición (2.8), estas autofunciones resultan ser estrictamente positivas en todo $\Omega \times \mathbb{R}$.

Chapter 4

El problema sublineal con condiciones de monotonía

4.1 Resultados auxiliares.

Daremos en esta sección algunos resultados necesarios para probar los Teoremas 6 y 7. Asumimos en esta sección que g es una función Caratheodory, esto es, que satisface (2.11).

Introducimos algunas notaciones más. Para $\rho > 0$, sean

$$\underline{m}_\rho := \inf_{0<\xi\le\rho} \frac{g(x,t,\xi)}{\xi}, \qquad \overline{m}_\rho := \sup_{0<\xi\le\rho} \frac{g(x,t,\xi)}{\xi}$$

y sean además

A. $\lim\limits_{\xi\to 0^+} \frac{g(x,t,\xi)}{\xi}$ existe a.e. $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$.

B. Para todo $\rho > 0$, $\underline{m}_\rho, \overline{m}_\rho \in L^s(L^v)$.

C. Para todo $\rho > 0$, $P\left(\underline{m}_\rho\right) > 0$.

Para $u : \Omega \times \mathbb{R} \to [0,\infty)$, definimos

$$m_u(x,t) = \begin{cases} \frac{g(x,t,u(x,t))}{u(x,t)} \text{ si } u(x,t) \neq 0 \\ \lim\limits_{\xi\to 0^+} \frac{g(x,t,\xi)}{\xi} \text{ si } u(x,t) = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

Notar que si $u \in \overline{B}_\rho^{C_T}(0)$, entonces

$$\underline{m}_\rho \le m_u \le \overline{m}_\rho \tag{4.2}$$

Sea $g(u)$ el operador de Nemytskii definido por $g(u)(x,t) = g(x,t,u(x,t))$. Si g satisface A, B y C, sigue fácilmente del teorema de converencia dominada de Lebesgue que $u \to g(u)$ y $u \to m_u$ son aplicaciones continuas de C_T en $L^s(L^v)$. Sea $\mathcal{M}$ definido por (3.26) y para $m \in \mathcal{M}$, sea $\Phi_1^{(m)}$ la autofunción principal positiva del problema (1.1) asociada a $\lambda_1(m)$, normalizada por $\left\|\Phi_1^{(m)}\right\|_\infty = 1$. Como la observación (iv) después del Lema 11 dice que la aplicación $m \to \Phi_1^{(m)}$ is continua de $\mathcal{M}$ en C_T, sigue que $u \to \Phi_1^{(m_u)}$ es continua de C_T en C_T.

El siguiente resultado (que consideramos de interés en sí mismo) es esencialmente consecuencia de la compacidad de L^{-1} y del teorema de Schauder.

Proposición 4. *Sea g satisfaciendo A, B y C. Entonces, para cada $\rho > 0$, (1.2) tiene un autovalor positivo con una autofunción asociada $u_\rho \in C_T$ positiva satisfaciendo $\|u_\rho\|_\infty = \rho$. Más aún, $u_\rho(x,t) > 0$ para todo $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$.*

Prueba. Extendemos la función $g(x,t,.)$ a toda la recta real definiendo $g(x,t,\xi) = -g(x,t,-\xi)$ para $\xi < 0$. Notar que A y B implican que $\frac{\partial g}{\partial \xi}_{|\xi=0} \in L^s(L^v)$. Sea $\rho > 0$. Ahora, de C y teniendo en cuenta la observación (i) que sigue a la prueba del Teorema 1, sigue que existe un tubo $B_{\Gamma,\Omega_0} \subset \Omega \times \mathbb{R}$ como en (3.10) tal que $\int_{B_{\Gamma,\Omega_0}} \underline{m}_\rho > 0$.

Para $w \in \overline{B}_\rho^{C_T}(0)$, sea m_w definida por (4.1). Luego, de (4.2) y B tenemos que $m_w \in L^s(L^v)$. Más aún, de C sigue que $\int_{B_{\Gamma,\Omega_0}} m_w > 0$ (y por tanto $P(m_w) > 0$). Luego, existe $\lambda_1(m_w)$.

Sea $T : \overline{B}_\rho^{C_T}(0) \to \overline{B}_\rho^{C_T}(0)$ el operador definido por $T(w) = \rho\Phi_1^{(m_w)}$. Afirmamos que T es compacto. En efecto, T es continuo. Sea ahora una sucesión $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ en $\overline{B}_\rho^{C_T}$. De (4.2) tenemos $\left\|m_{w_j}\right\|_{L^s(L^v)} \le c$ para algún $c > 0$ y todo j. Más aún, (4.2) y el principio de comparación de la Proposición 2 implican que $\left\{\lambda_1\left(m_{w_j}\right)\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada. Luego $\left\{\rho\lambda_1\left(m_{w_j}\right) m_{w_j}\Phi_1^{(m_{w_j})}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ es acotada en $L^r(L^p)$, y así la compacidad de T sigue de la compacidad del operador solución (ver (3.21)).

Ahora, el teorema de punto fijo de Schauder (ver por ejemplo [20], Corolario 11.2) da la existencia de un punto fijo $u_\rho \in \overline{B}_\rho^{C_T}$ para T. Como T es positivo sigue que u_ρ es positiva, y además $\|u_\rho\|_\infty = \rho$ y $Lu_\rho = \lambda_1\left(m_{u_\rho}\right) g(x,t,u_\rho)$. Finalmente, como u_ρ satisface $Lu_\rho = \lambda_1\left(m_{u_\rho}\right) m_{u_\rho} u_\rho$, el corolario de la Proposición 3 dice que $u_\rho(x,t) > 0$ para todo $(x,t) \in \Omega\times\mathbb{R}$

y esto concluye la prueba. ■

Necesitaremos también el siguiente resultado análogo para el problema (2.10).

Proposición 5. *Sea g satisfaciendo A, B y C. Supongamos además que $\overline{m} \in L^s(L^v)$, donde $\overline{m}$ viene dado por (2.9). Sea $h \geq 0$ una función en $L^r(L^p)$. Entonces, para todo $0 < \lambda < \lambda_1(\overline{m})$ el problema (2.10) tiene solución positiva $u_\lambda \in C_T$. Más aún, $u_\lambda(x,t) > 0$ a.e. $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$.*

Prueba. Extendemos g como en la prueba de la proposición anterior. Sea D_λ definido por (3.27) y para $m \in D_\lambda$, sea $S_{\lambda,h}(m)$ el operador solución de (2.4). Para $w \in C_T$, sea m_w definido por (4.1). Como $0 < \lambda < \lambda_1(\overline{m})$ y $m_w \leq \overline{m}$, el principio de comparación de la Proposición 2 dice que $0 < \lambda < \lambda_1(m_w)$ y por tanto $m_w \in D_\lambda$ para todo $w \in C_T$. Más aún, existe $R > 0$ tal que

$$\|S_{\lambda,h}(m_w)\|_\infty \leq R \tag{4.3}$$

para todo $w \in C_T$. En efecto, si no, sea $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión en C_T tal que $\lim\limits_{j\to\infty} \left\|S_{\lambda,h}\left(m_{w_j}\right)\right\|_\infty = \infty$ y sea $u_{w_j} = S_{\lambda,h}\left(m_{w_j}\right)$. Como $\left\{m_{w_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ es acotada en $L^s(L^v)$ podemos suponer (pasando a alguna subsucesión) que m_{w_j} converge débilmente en $L^s(L^v)$ a alguna m. Ahora, de

$$L\left(\frac{u_{w_j}}{\left\|u_{w_j}\right\|_\infty}\right) = \lambda m_{w_j} \frac{u_{w_j}}{\left\|u_{w_j}\right\|_\infty} + \frac{h}{\left\|u_{w_j}\right\|_\infty}$$

y la compacidad del operador solución (ver (3.21)), sigue que el problema lineal (1.1) tiene solución positiva. Pero $m \leq \overline{m}$ y por tanto usando nuevamente el principio de comparación obtenemos $\lambda < \lambda_1(\overline{m}) \leq \lambda_1(m)$. Contradicción.

Para $w \in C_T$ definimos $\widetilde{S}(w) = S_{\lambda,h}(m_w)$. Entonces, como $w \to m_w$ es continua de C_T en $L^s(L^v)$, sigue del Lema 12 (b) que $\widetilde{S} : C_T \to C_T$ es una aplicación compacta. Ahora, sea R satisfaciendo (4.3). Tenemos entonces $\widetilde{S}\left(\overline{B}_R^{C_T}(0)\right) \subset \overline{B}_R^{C_T}(0)$ y por tanto el teorema de Schauder da una solución positiva para (2.10). La última afirmación sigue del Lema 12 (a). ■

Recordamos que las condiciones H1-H5 están definidas al comienzo de la Sección 2.4.

Definición. Para g satisfaciendo H1, extendemos g a una función $\widetilde{g}$:

$\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\widetilde{g}(x,t,\xi) = \xi \lim_{\xi \to 0^+} \frac{g(x,t,\xi)}{\xi} \qquad \xi < 0 \tag{4.4}$$

Sea

$$D = \{(\lambda, u) \in (0,\infty) \times C_T : \widetilde{g}_\xi(u) \in D_\lambda\} \tag{4.5}$$

donde D_λ viene dado por (3.27). Recordamos que la condición $\widetilde{g}_\xi(u) \in D_\lambda$ es equivalente a: $0 < \lambda < \lambda_1(\widetilde{g}_\xi(u))$ si $\lambda_1(\widetilde{g}_\xi(u))$ existe y $\lambda > 0$ si $\lambda_1(\widetilde{g}_\xi(u))$ no existe.

Por último, sea $F : D \to C_T$ definida por

$$F(\lambda, u) = (L - \lambda \widetilde{g}_\xi(u))^{-1} \widetilde{g}(u)$$

Notar que por el Lema 12 la función F está bien definida.

Lema 14. *Supongamos que g satisface H1. Entonces D es abierto en $\mathbb{R} \times C_T$.*

Prueba. Procedemos por contradicción. Supongamos que $(\lambda, u) \in D$ y que $\{(\lambda_j, u_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathbb{R} \times C_T$ tal que $\lim_{j\to\infty} (\lambda_j, u_j) = (\lambda, u)$ y $(\lambda_j, u_j) \notin D$ para todo j. Claramente $u_j \in V$ para j suficientemente grande. Sea $R = 1 + \|u\|_\infty$. Luego, existe j_0 tal que $|u_j(x,t)| \leq R$ para todo $(x,t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, $j \geq j_0$.

Supongamos primero que $\lambda_1(\widetilde{g}_\xi(u))$ existe. Entonces $\int_{B_{\Gamma,\Omega_0}} \widetilde{g}_\xi(u) > 0$ para algún tubo B_{Γ,Ω_0} como en (3.10) (ver observación (i) después de la prueba del Teorema 1). Como $\widetilde{g}_\xi(u_j)$ converge a $\widetilde{g}_\xi(u)$ tenemos que, agrandando j_0 si es necesario, $\int_{B_{\Gamma,\Omega_0}} \widetilde{g}_\xi(u_j) > 0$ para $j \geq j_0$. Luego, existe $\lambda_1(\widetilde{g}_\xi(u_j))$ para tales j. Más aún, $\lim_{j\to\infty} \lambda_1(\widetilde{g}_\xi(u_j)) = \lambda_1(\widetilde{g}_\xi(u)) > \lambda$ (la desigualdad porque $(\lambda, u) \in D$). Ahora, como $\lambda_j \to \lambda$ tenemos $\lambda_j < \lambda_1(\widetilde{g}_\xi(u_j))$ y por tanto $(\lambda_j, u_j) \in D$ para j suficientemente grande. Contradicción.

Supongamos ahora que $\lambda_1(\widetilde{g}_\xi(u))$ no existe. Sea

$$J_e = \{j \in \mathbb{N} : \lambda_1(\widetilde{g}_\xi(u_j)) \text{ existe}\}$$

Si J_e es finito entonces $(\lambda_j, u_j) \in D$ para j suficientemente grande. Afirmamos que si J_e no es finito entonces el conjunto $\{\lambda_1(\widetilde{g}_\xi(u_j)) : j \in J_e\}$ es no acotado. Para ver esto razonamos por contradicción. Sea $w_j \in C_T$ una autofunción positiva asociada al peso $\widetilde{g}_\xi(u_j)$, normalizada por $\|w_j\|_\infty = 1$.

Como asumimos que $\lambda_1\left(\widetilde{g}_\xi\left(u_j\right)\right) \leq c$ para algún c y todo $j \in J_e$, H1 y la desigualdad de Hölder nos dan que

$$\left\|\lambda_1\left(\widetilde{g}_\xi\left(u_j\right)\right)\widetilde{g}_\xi\left(u_j\right) w_j\right\|_{L^r(L^p)} \leq c'$$

para algún c' y todo $j \in J_e$. Entonces existe una subsuseción $\lambda_1\left(\widetilde{g}_\xi\left(u_{j_k}\right)\right)\widetilde{g}_\xi\left(u_{j_k}\right) w_{j_k}$ convergente débilmente a alguna $f \in L^r\left(L^p\right)$ y por tanto el Teorema 5.1 (a) en [10] implica que w_{j_k} converge en la norma L^∞ a alguna w. Luego $w \in C_T$ y $f = \lambda_1\left(\widetilde{g}_\xi\left(u\right)\right)\widetilde{g}_\xi\left(u\right) w$. Más aún, $w > 0$ y $Lw = \lambda_1\left(\widetilde{g}_\xi\left(u\right)\right)\widetilde{g}_\xi\left(u\right) w$. Contradicción. Así queda probada la afirmación. Luego, para alguna subsucesión u_{j_k} con $j_k \in J_e$ tenemos

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_1\left(\widetilde{g}_\xi\left(u_{j_k}\right)\right) = \infty$$

Como λ_j converge, resulta $\lambda_j < \lambda_1\left(\widetilde{g}_\xi\left(u_{j_k}\right)\right)$ para k suficientemente grande y por lo tanto $\left(\lambda_{j_k}, u_{j_k}\right) \in D$ para tales k. Contradicción. ■

Lema 15. *Supongamos que g satisface H1. Entonces $F : D \to C_T$ es una aplicación continua. Más aún, para cada $(\lambda_0, u_0) \in D$ existe un entorno $U_\delta = (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta) \times B_\delta\left(u_0\right)$ tal que $F_{|U_\delta}$ es una aplicación compacta.*

Proof. Teniendo en cuenta H1, sigue que la aplicación $(\lambda, u) \to -\lambda\widetilde{g}_\xi\left(u\right)$ es continua de D en $L^s\left(L^v\right)$. Luego, por el Lema 13 se tiene que $(\lambda, u) \to \left(L - \lambda\widetilde{g}_\xi\left(u\right)\right)^{-1}$ es continua de D en $B\left(L^r\left(L^p\right), C_T\right)$. Entonces, para δ suficientemente pequeño, $\left\|\left(L - \lambda\widetilde{g}_\xi\left(u\right)\right)^{-1}\right\|_{L^r(L^p), C_T}$ permanece acotado para (λ, u) en un entorno U_δ. Ahora, como $(\lambda, u) \to \widetilde{g}\left(u\right)$ es también continua, obtenemos que F es continua y por tanto, para un δ más pequeño si es necesario, $F\left(U_\delta\right)$ está acotada en C_T. Para tales δ, sea $\left\{\left(\lambda_j, u_j\right)\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión en U_δ y sea $w_j = F\left(\lambda_j, u_j\right)$. Tenemos

$$Lw_j = \lambda_j\widetilde{g}_\xi\left(u_j\right) w_j + \widetilde{g}\left(u_j\right) \tag{4.6}$$

Como $F\left(U_\delta\right)$ es acotada en C_T se tiene $\left\|w_j\right\|_\infty \leq c$ y entonces, por H1, la sucesión de las normas $L^s\left(L^v\right)$ del miembro derecho de (4.6) permanece acotada. Así, lo mismo sigue para las normas $L^r\left(L^p\right)$ y por tanto la compacidad del operador solución da la segunda afirmación del lema. ■

Observación. El lema anterior nos permite aplicar una extensión a espacios de Banach del teorema de Peano sobre existencia local de soluciones para problemas de valores iniciales (como está enunciado en por ejemplo [37], Capítulo 6, Teorema 3.6) en orden a obtener que, para $(\lambda, u) \in D$, existe un entorno $U_{\lambda,u} = (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) \times \overline{B}_{\varepsilon}^{C_T}(u)$ y un $\delta > 0$ tales que para todo $\left(\widetilde{\lambda}, \widetilde{u}\right) \in U_{\lambda,u}$ está definida una solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \frac{du_\lambda}{d\lambda} = F(\lambda, u_\lambda) \\ u_{\widetilde{\lambda}} = \widetilde{u} \end{cases}$$

para todo $\lambda \in \left(\widetilde{\lambda} - \delta, \widetilde{\lambda} + \delta\right)$.

4.2 Prueba de los Teoremas 6 y 7.

Teorema 6. *Sea g satisfaciendo H1-H5. Entonces (1.2) tiene solución positiva $u_\lambda \in C_T$ si y sólo si $\lambda_1(\overline{m}) < \lambda < \lambda_1(\underline{m})$. Mas aún, u_λ puede ser elegida tal que $\lambda \to u_\lambda$ es una aplicación C^1 de $(\lambda_1(\overline{m}), \lambda_1(\underline{m}))$ en C_T y $u_\lambda(x,t) > 0$ para todo $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$. además se tiene*

$$\lim_{\lambda \to \lambda_1(\overline{m})^+} \|u_\lambda\|_\infty = 0, \qquad \lim_{\lambda \to \lambda_1(\underline{m})^-} u_\lambda(x,t) = \infty$$

para todo $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$.

Prueba. Supongamos primero que (λ, u_λ) son solución de (1.2) con $u_\lambda > 0$. Sea $m_{u_\lambda} : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido como en (4.1). Por H4 se tiene que $m_{u_\lambda} \in L^s(L^v)$. Además, como $Lu_\lambda = \lambda m_{u_\lambda} u_\lambda$, resulta $\lambda = \lambda_1(m_{u_\lambda})$. Ahora, $\underline{m} \le m_{u_\lambda} \le \overline{m}$, donde $\underline{m}$ y $\overline{m}$ están definidas en (2.9). Más aun, es fácil ver usando H3 que se tienen desigualdades estrictas en conjuntos de medida positiva y luego el principio de comparación de autovalores de la Proposición 2 nos da que $\lambda_1(\overline{m}) < \lambda < \lambda_1(\underline{m})$.

Para probar el resto del teorema, comenzamos por la solución (λ_0, u_0) de (1.2) provista por la Proposición 4. Afirmamos que $(\lambda_0, u_0) \in D$. En efecto, como $u_0(x,t) > 0$ para todo $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$, tenemos que $\lambda_0 = \lambda_1(g(u_0)/u_0)$. Por otra parte, H2 implica que $g_\xi(u_0) \le g(u_0)/u_0$. Más aún, si $\delta > 0$ y $(x_0, t_0) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}$ están dados por H3 tenemos desigualdad estricta a.e. $(x,t) \in B_\delta(x_0, t_0) \cap (\Omega \times \mathbb{R})$. Así, nuevamente el principio de comparación nos da $\lambda_0 < \lambda_1(g_\xi(u_0))$ (si $\lambda_1(g_\xi(u_0))$ existe) y por tanto $(\lambda_0, u_0) \in D$. Teniendo en cuenta entonces la observación anterior obtenemos una solución local para el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \frac{du_\lambda}{d\lambda} = F(\lambda, u_\lambda) \\ u_{\lambda_0} = u_0 \end{cases} \tag{4.7}$$

Consideremos una solución maximal (esto es, con dominio conexo maximal) para este problema, y sea $I = (\alpha, \beta)$ su dominio. Notar que como F

is continua sigue que $\lambda \to u_\lambda$ es continuamente diferenciable de I en C_T. Ahora, $\frac{du_\lambda}{d\lambda} = F(\lambda, u_\lambda)$ puede ser pensado como $(L - \lambda \widetilde{g}_\xi(u_\lambda)) \frac{du_\lambda}{d\lambda} = \widetilde{g}(u_\lambda)$ y entonces, en el sentido de las distribuciones, tenemos

$$L\left(\frac{du_\lambda}{d\lambda}\right) = \widetilde{g}(u_\lambda) + \lambda \widetilde{g}_\xi(u_\lambda) \frac{du_\lambda}{d\lambda}$$

esto es,

$$\frac{d}{d\lambda}(Lu_\lambda) = \frac{d}{d\lambda}(\lambda \widetilde{g}(u_\lambda))$$

Luego, $Lu_\lambda - \lambda \widetilde{g}(u_\lambda)$ no depende de λ, y como es cero para $\lambda = \lambda_0$, resulta $Lu_\lambda = \lambda \widetilde{g}(u_\lambda)$ para todo $\lambda \in I$.

Dividimos el resto de la prueba en tres pasos.

Paso 1. Existe un intervalo abierto $I_0 \subset I$ alrededor de λ_0 tal que $u_\lambda(x,t) > 0$ para todo $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$, $\lambda \in I_0$.

Sea $\widetilde{m}_{u_\lambda}$ definida como en (4.1) con $\widetilde{g}$ en lugar de g. Notemos que H5 implica que $P(\widetilde{m}_{u_\lambda}) > 0$ y por tanto $\lambda_1(\widetilde{m}_{u_\lambda})$ existe. Claramente se tiene $\lambda_0 = \lambda_1\left(\widetilde{m}_{u_{\lambda_0}}\right)$. Ahora, como $\lambda \to \widetilde{m}_{u_\lambda}$ es continua, también es continua la aplicación $\lambda \to \lambda_1(\widetilde{m}_{u_\lambda})$. Luego, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\lambda_1(\widetilde{m}_{u_\lambda})^{-1} \in \left(\frac{1}{\lambda_0} - \varepsilon, \frac{1}{\lambda_0} + \varepsilon\right)$ para $\lambda \in (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$. Por otro lado, $\lambda_1(\widetilde{m}_{u_\lambda})^{-1} \in \sigma\left(L^{-1}M_\lambda\right)$, donde M_λ denota el operador multiplicación por $\widetilde{m}_{u_\lambda}$ y donde $\sigma\left(L^{-1}M_\lambda\right)$ denota el espectro de $L^{-1}M_\lambda : C_T \to C_T$. Como $\lambda^{-1} \in \sigma\left(L^{-1}M_\lambda\right)$, tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, el lema Crandall-Rabinowitz implica que $\lambda = \lambda_1(\widetilde{m}_{u_\lambda})$ para λ cercano a λ_0 y por tanto $u_\lambda > 0$ para tales λ. Más aún, el corolario de la desigualdad tipo Harnack (final del tercer capítulo) dice que $u_\lambda(x,t) > 0$ para todo $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$.

Paso 2. $u_\lambda > 0$ para todo $\lambda \in I$ (es decir, $I_0 = I$).

Consideremos el intervalo abierto maximal $J \subset I$ conteniendo λ_0 y tal que $u_\lambda(x,t) > 0$ para todo $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}, \lambda \in J$. Veamos que $J = I$. Sean

$$\lambda^+ = \sup\{\lambda \in I : u_\eta(x,t) > 0 \text{ para } (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}, \eta \in [\lambda_0, \lambda)\}$$

$$\lambda^- = \inf\{\lambda \in I : u_\eta(x,t) > 0 \text{ para } (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}, \eta \in (\lambda, \lambda_0]\}$$

Basta probar que $\lambda^- = \alpha$, $\lambda^+ = \beta$. Veamos primero que $\lambda^+ = \beta$. Procedemos por contradicción. Supongamos que $\lambda^+ < \beta$. Sabemos que $\lambda^+ > \lambda_0$. Afirmamos que esto implica que $\lambda^+ \in J$. En efecto, sea Φ la función provista por el Corolario de Harnack (Proposición 3), tomando allí $\Lambda = \lambda^+$ and $R = \|\underline{m}\|_{L^s(L^v)} + \|\overline{m}\|_{L^s(L^v)}$. Como $Lu_\lambda = \lambda m_{u_\lambda} u_\lambda$ tenemos que

$u_\lambda \geq \|u_\lambda\|_\infty \Phi$ para todo $\lambda \in [\lambda_0, \lambda^+)$. Supongamos primero que $\|u_\lambda\|_\infty \geq c$ para algún $c > 0$ y todo $\lambda \in [\lambda_0, \lambda^+)$. Entonces $u_{\lambda^+} \geq c\Phi > 0$ y por tanto $\lambda^+ \in J$. Si no existe tal c, entonces tenemos $\lim_{j\to\infty} \left\|u_{\lambda_j}\right\|_\infty = 0$ para alguna sucesión $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset [\lambda_0, \lambda^+)$. Pasando a una subsucesión podemos suponer que $\lambda_j \to \widetilde{\lambda}$ para algún $\widetilde{\lambda} \in [\lambda_0, \lambda^+]$. Luego, $u_{\widetilde{\lambda}} = 0$ y por lo tanto $\widetilde{\lambda} = \lambda^+$. Por otra parte, las condiciones de monotonía de H2 implican que $m_{u_{\lambda_j}}$ converge a $\overline{m}$ en $L^s(L^v)$ y luego por continuidad $\lambda_1\left(m_{u_{\lambda_j}}\right) \to \lambda_1(\overline{m})$. Pero $Lu_{\lambda_j} = \lambda_j m_{u_{\lambda_j}} u_{\lambda_j}$ con $u_{\lambda j} > 0$ y luego se tiene $\lambda_j = \lambda_1\left(m_{u_{\lambda_j}}\right)$. Así, $\lambda_1(\overline{m}) = \lambda^+ < \lambda_0$. Contradicción. Por tanto hemos probado que $\lambda^+ \in J$. Razonando ahora como en la prueba de la existencia de I_0 pero ahora λ^+ y u_{λ^+} en lugar de λ_0 y u_0 respectivamente, encontramos un intervalo alrededor de λ^+ donde las u_λ son positivas, contradiciendo la definición de $\lambda^{+\cdot}$. Luego, $\lambda^+ = \beta$.

Por otro lado, claramente $\lambda^- < \lambda_0$. Como arriba, si $\|u_\lambda\|_\infty \geq c$ para algún $c > 0$ y todo $\lambda \in (\lambda^-, \lambda_0]$, tendríamos $\lambda^- \in J$ y esto llevaría a una contradicción con la definición de λ^-. Así, $\lim_{j\to\infty} \left\|u_{\lambda_j}\right\|_\infty = 0$ para alguna sucesión $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset (\lambda^-, \lambda_0]$. Ahora, el teorema de convergencia dominada implica que $m_{u_{\lambda_j}}$ converge en $L^s(L^v)$ e $\overline{m}$ y por tanto $\lambda_j = \lambda_1\left(m_{u_{\lambda_j}}\right) \to \lambda_1(\overline{m})$. Como $\alpha \leq \lambda^- \leq \lambda_j$ concluimos que $\lambda^- = \alpha$.

Paso 3. $I = (\lambda_1(\overline{m}), \lambda_1(\underline{m}))$.

Sea $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión en I tal que $\lambda_j \to \beta$. Entonces, como arriba, tenemos $\inf_j \left\|u_{\lambda_j}\right\|_\infty > 0$ (si no, resultaría $\lambda_1(\overline{m}) = \beta$ lo que contradice que $\lambda_1(\overline{m}) < \beta$). Supongamos primero que $c_1 \leq \left\|u_{\lambda_j}\right\|_\infty \leq c_2$ para ciertos $c_1, c_2 > 0$ y todo j. Entonces $\left\|\lambda_j m_{u_{\lambda_j}} u_{\lambda_j}\right\|_{L^r(L^p)} \leq c$ para todo j, y así la copacidad del operador solución nos da una subsucesión $u_{\lambda_{j_k}}$ convergente a algún $u > 0$ que satisface $Lu = \beta m_u u$. Luego, $\beta = \lambda_1(m_u)$. Más aún, $(\beta, u) \in D$. En efecto, esto es cierto si $g_\xi(u)$ no tiene autovalor principal positivo. Si $\lambda_1(g_\xi(u))$ existe, por H2 y H3 tenemos $g_\xi(u) \leq m_u$ con desigualdad estricta en un conjunto de medida positiva, y por tanto el principio de comparación implica $\beta < \lambda_1(g_\xi(u))$ y así $(\beta, u) \in D$. Luego, recordando la observación al final de la sección anterior, existe un entorno $U_{\beta,u} = (\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon) \times \overline{B}_\varepsilon^{C_T}(u)$ y un $\delta > 0$ tal que para todo $\left(\widetilde{\beta}, \widetilde{u}\right) \in U_{\beta,u}$ existe una curva local $\lambda \to u_\lambda$ definida para $\lambda \in (\beta - \delta, \beta + \delta)$ que es solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{du_\lambda}{d\lambda} = F(\lambda, u_\lambda) \\ u_{\widetilde{\beta}} = \widetilde{u} \end{cases}$$

Tomando $\left(\widetilde{\beta}, \widetilde{u}\right) = \left(\lambda_{j_k}, u_{\lambda_{j_k}}\right)$ con k suficientemente grande, obtenemos una contradicción con la maximalidad de I. Por lo tanto, hemos probado que $\lim_{j\to\infty} \left\|u_{\lambda_j}\right\|_\infty = \infty$ y luego, por el corolario de Harnack (Proposición 3) tenemos $\lim_{j\to\infty} u_{\lambda_j}(x,t) = \infty$ para todo $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$. Así, $\lim_{j\to\infty} m_{u_{\lambda_j}} = \underline{m}$ en $L^s(L^v)$ y por tanto $\beta = \lambda_1(\underline{m})$. Un argumento similar da que si $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión tal que $\lambda_j \to \alpha$, entonces necesariamente $\left\|u_{\lambda_j}\right\|_\infty \to 0$ y luego $\alpha = \lambda_1(\overline{m})$. ■

La demostración del Teorema 7 es similar, partiendo ahora de la Proposición 5.

Teorema 7. *Sea g satisfaciendo H1-H5 y sea $h \in L^s(L^v)$ una función positiva (y no idénticamente cero). Entonces, para todo $0 < \lambda < \lambda_1(\overline{m})$, el problema (2.10) tiene solución positiva $u_\lambda \in C_T$ tal que $\lambda \to u_\lambda$ es una aplicación C^1 de $(0, \lambda_1(\overline{m}))$ en C_T y $u_\lambda(x,t) > 0$ a.e. $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$. Recíprocamente, si (2.10) tiene solución positiva para $h \geq 0$ y $\lambda > 0$, entonces $\lambda < \lambda_1(\underline{m})$.*

Prueba. Comenzamos la prueba con la solución (λ_0, u_0) de (2.10) dada por la Proposición 5. Sea $\widetilde{g}$ definida por (4.4) y m_{u_0} dada por (4.1). Como $\overline{m} \geq m_{u_0} > g_\xi(u_0)$ tenemos por el principio de comparación de autovalores que $(\lambda_0, u_0) \in D$. Consideramos como antes una solución maximal $\lambda \to u_\lambda$ para for (2.10) definida en algún intervalo $I = (\alpha, \beta) \subset (0, \lambda_1(\overline{m}))$ con $\lambda_0 \in I$. Como en el teorema anterior, $\lambda \to u_\lambda$ is continuamente diferenciable de I en C_T y $Lu_\lambda = \lambda\widetilde{g}(x,t,u_\lambda) + h$ para todo $\lambda \in I$, esto es, $Lu_\lambda = \lambda\widetilde{m}_{u_\lambda}u_\lambda + h$, donde $\widetilde{m}_{u_\lambda}$ es definida por (4.1) con $\widetilde{g}$ en lugar de g. Como $0 < \lambda < \lambda_1(\overline{m})$ tenemos $0 < \lambda < \lambda_1(\widetilde{m}_{u_\lambda})$ y entonces el Lema 12 (a) implica que $u_\lambda(x,t) > 0$ a.e. $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$.

Para ver que $I = (0, \lambda_1(\overline{m}))$ procedemos por contradicción. Suppnagamos que $\beta < \lambda_1(\overline{m})$, y consideremos una sucesión $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset I$ tal que $\lambda_j \to \beta$. De la compacidad del operador solución y del hecho que $h \geq 0$ es fácil ver que $\inf_j \left\|u_{\lambda_j}\right\|_\infty > 0$. Ahora, si $\left\|u_{\lambda_j}\right\|_\infty \leq c$ para alguna $c > 0$ y todo j, el argumento usual de compacidad da una solución $u > 0$ del problema of $Lu = \beta m_u u + h$, esto es, de $Lu = \beta g(x,t,u) + h$. Pero $\lambda_1(m_u) \geq \lambda_1(\overline{m}) > \beta$

y entonces $(\beta, u) \in D$. Luego, razonando como al final de la prueba del teorema anterior obtenemos una contradicción con la maximalidad de I. Por lo tanto $\lim_{k\to\infty} \left\| u_{\lambda_{j_k}} \right\|_\infty = \infty$ para alguna subsucesión $u_{\lambda_{j_k}}$, pero, en tal caso, de

$$L\frac{u_\lambda}{\|u_\lambda\|} = \lambda m_{u_\lambda}\frac{u_\lambda}{\|u_\lambda\|} + \frac{h}{\|u_\lambda\|}$$

por compacidad obtenemos una solución positiva w de $Lw = \beta m w$ donde m es el límite débil de alguna suseción conveniente de $m_{u_{\lambda_j}}$. Luego, $\beta = \lambda_1(m) \geq \lambda_1(\overline{m})$, contradiciendo $\beta < \lambda_1(\overline{m})$. Por tanto $\beta = \lambda_1(\overline{m})$.

Supongamos ahora que $\alpha > 0$. Sea $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset I$ tal que $\lambda_j \to \alpha$. Procediendo como arriba, obtenemos que $\inf_j \left\| u_{\lambda_j} \right\|_\infty > 0$. Más aún, si $\left\| u_{\lambda_j} \right\|_\infty \leq c$ para algún $c > 0$, entonces $Lu = \alpha g(x,t,u) + h$ para cierta $u > 0$. Por tanto, comno $\alpha < \beta = \lambda_1(\overline{m}) \leq \lambda_1(m_u)$, tenemos que $(\alpha, u) \in D$ y esto lleva a una contradicción. Luego, $\lim_{k\to\infty} \left\| u_{\lambda_{j_k}} \right\|_\infty = \infty$ para alguna subsucesión $u_{\lambda_{j_k}}$. Pero entonces, razonando como arriba, nuevamente el argumento de compacidad da una solución positiva u de $Lu = \alpha m u$ donde m es el límite débil de alguna suseción conveniente de m_{j_k}. Así $\alpha = \lambda_1(m) \geq \lambda_1(\overline{m}) = \beta$, contradicción.

Supongamos ahora que (2.10) tiene solución positiva para $h \geq 0$ y $\lambda > 0$. En particular, resulta $Lu \geq \lambda g(x,t,u)$, o sea $Lu \geq \lambda m_u u$. Luego, razonando como en la segunda parte de la prueba del Teorema 2 tenemos $\lambda \leq \lambda_1(m_u)$ y entonces el principio de comparación de autovalores nos da $\lambda < \lambda_1(\underline{m})$ y esto concluye el teorema. ■

4.3 Prueba del Teorema 8.

Por una cuestión de comodidad, consideraremos aquí soluciones acotadas de (1.2). Recordamos nuevamente que las condiciones H1-H7 están definidas en la Sección 2.4. Sea g una función satisfaciendo H1 y H2. Para $0 \leq u \in L_T^\infty$, definimos

$$m_u(x,t) = \begin{cases} g(x,t,u(x,t))/u(x,t) & \text{si } u(x,t) > 0 \\ \overline{m}(x,t) & \text{si } u(x,t) = 0 \end{cases} \tag{4.8}$$

De H1, H2 y el teorema del valor medio sigue fácilmente que $m_u \in L^s(L^v)$.

Como la prueba del Teorema 8 es similar a la de los dos anteriores teoremas, necesitaremos resultados análogos a los del corolario de la Proposición 3 ("Harnack") y de la Proposición 4 ("Schauder").

Lema 16. *Supongamos que g satisface H1, H2 y H6. Entonces, para $\Lambda > 0$ existe $\Phi \in L^{\infty}_{T}$ satisfaciendo $\Phi(x,t) > 0$ para todo $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$ tal que $u \geq \|u\|_{\infty} \Phi$ para toda solución positiva de (1.2) con $|\lambda| \leq \Lambda$.*

Prueba. Supongamos que $|\lambda| \leq \Lambda$ y que u es solución positiva de (1.2). Entonces $Lu = \lambda m_u u$. Notemos primero que la ecuación anterior puede ser escrita como

$$u = \lambda \left(L + \lambda m_u^-\right)^{-1} m_u^+ u$$

Sean $1 < \widetilde{s}, \widetilde{v} < \infty$ definidos por $r^{-1} = s^{-1} + \widetilde{s}^{-1}$ y $p^{-1} = v^{-1} + \widetilde{v}^{-1}$ (observamos que como $N \geq 2$ las condiciones impuestas a p y q (ver el comienzo de la sección 3.7) implican que tal par $\widetilde{s}, \widetilde{v}$ existe. Además,

$$\|u\|_{\infty} \leq |\lambda| \left\|L^{-1}\right\|_{L^r(L^p), C_T} \left\|m_u^+ u\right\|_{L^r(L^p)} \leq$$

$$c_1 |\lambda| \left\|m_u^+\right\|_{L^s(L^v)} \|u\|_{L^{\widetilde{s}}\left(L^{\widetilde{v}}\right)} \leq c_2 |\lambda| \left\|\overline{m}^+\right\|_{L^s(L^v)} \|u\|_{L^{\widetilde{s}}\left(L^{\widetilde{v}}\right)}$$

con c_1, c_2 independiente de λ, m y u. Así

$$\|u\|_{\infty} \leq c_2 |\lambda| \left\|\overline{m}^+\right\|_{L^s(L^v)} \|u\|_{L^{\widetilde{s}}\left(L^{\widetilde{v}}\right)}$$

y entonces podemos proceder como en la prueba de la Proposición 3 en orden a ver que para cada $\varepsilon > 0$ existe $c = c_{\varepsilon,\Lambda} > 0$ tal que $\|u\|_{\infty} \leq c \inf\limits_{\Omega_\varepsilon \times (0,T)} u$, donde $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$. Luego el lema sigue de la misma manera que en el corolario de esa proposición. ■

Lema 17. *Sea g satisfaciendo H1,H2 y H6. Entonces, para $\rho > 0$ suficientemente pequeño existe $\lambda_0 > 0$ y una solución u_0 de (1.2) para $\lambda = \lambda_0$ con $\|u_0\|_{\infty} = \rho$ y $u_0(x,t) > 0$ para todo $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$.*

Prueba. Al igual que en la prueba de la Proposición 4, extendemos g a una función, denotada también por g, definida en $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ por $g(x,t,\xi) = -g(x,t,-\xi)$ para $\xi < 0$. Así, $g(x,t,.) \in C^1(\mathbb{R})$ a.e. $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$. Sea $\rho > 0$, y sea $\overline{B}_\rho^{C_T}(0)$ la bola cerrada en C_T centrada en 0 con radio ρ. Si $w \in \overline{B}_\rho^{C_T}(0)$, como $m_w = m_{|w|}$ tenemos $g(x,t,\rho)/\rho \leq m_w \leq \overline{m}(x,t)$ y por tanto $m_w \in L^s(L^v)$. Notar además que $P(m_w) > 0$ para todo $w \in \overline{B}_\rho^{C_T}(0)$ con ρ suficientemente pequeño. En efecto, $\lim_{\xi \to 0} g(x,t,\xi)/\xi = g_\xi(x,t,0) = \overline{m}(x,t)$ a.e. (x,t) y por el teorema de Lebesgue la convergencia es en $L^s(L^v)$. Como por H6 $P(\overline{m}) > 0$ tenemos $\int_{B_{\Gamma,\Omega_0}} \overline{m} > 0$ para algún tubo B_{Γ,Ω_0} como en (3.10) y por tanto $\int_{B_{\Gamma,\Omega_0}} m_w \geq \int_{B_{\Gamma,\Omega_0}} m_\rho > 0$.

Entonces $P(m_w) > 0$ y luego existe $\lambda_1(m_w)$. Más aún, el principio de comparación nos da $\lambda_1(m_w) \leq \lambda_1(m_\rho)$. Sea $\Phi_{(m_w)}$ la autofunción principal positiva correspondiendo a $\lambda_1(m_w)$ normalizada por $\left\|\Phi_{(m_w)}\right\|_\infty = 1$ y sea $T : \overline{B}_\rho^{C_T}(0) \to \overline{B}_\rho^{C_T}(0)$ definido por $T(w) = \rho\Phi_{(m_w)}$. Al igual que en la Proposición 3, T es compacto y el teorema de Schauder da el lema. ■

Observación. Sea g satisfaciendo H1, H2 y H3, sea $\lambda_0 > 0$, y sea u_0 una solución positiva de (1.2) para $\lambda = \lambda_0$. Entonces $(\lambda_0, u_0) \in D$, donde D viene dado por (4.5). En efecto, claramente $(\lambda_0, u_0) \in D$ si el peso $g_\xi(u_0)$ no posee autovalor principal positivo. Supongamos que existe $\lambda_1(g_\xi(u_0))$. Como H2 and H3 implican que $g_\xi(u_0) \leq g(u_0)/u_0$ con desigualdad estricta en un conjunto de mediad positiva, el principio de comparación de autovalores principales nos da $\lambda_1(g_\xi(u_0)) > \lambda_1(g(u_0)/u_0) = \lambda_0$. Por lo tanto $(\lambda_0, u_0) \in D$.

Teorema 8. *Sea g satisfaciendo H1-H3, H6 y H7. Entonces (1.2) tiene solución positiva $u_\lambda \in C_T$ si y sólo si $\lambda_1(\overline{m}) < \lambda$. Mas aún, u_λ puede ser elegida tal que $\lambda \to u_\lambda$ es una aplicación C^1 de $(\lambda_1(\overline{m}), \infty)$ en C_T y $u_\lambda(x,t) > 0$ para todo $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$. Además se tiene*

$$\lim_{\lambda \to \lambda_1(\overline{m})^+} \|u_\lambda\|_\infty = 0.$$

Prueba. Que la condición $\lambda_1(\overline{m}) < \lambda$ es necesaria sigue de la misma manera que en la primera parte del Teorema 6. En forma similar a allí, para probar el resto comenzamos ahora con el par (λ_0, u_0) dado por el Lema 17. Por la observación anterior $(\lambda_0, u_0) \in D$. Por lo tanto, de la misma forma que en la prueba de dicho teorema, obtenemos una curva $\lambda \to u_\lambda$ continuamente diferenciable con dominio maximal $I = (\alpha, \beta)$ y tal que $Lu_\lambda = \lambda\widetilde{g}(u_\lambda)$ para todo $\lambda \in I$, donde recordamos que $\widetilde{g}$ venía dada por (4.4).

El próximo paso es ver que existe un intervalo abierto I_0 tal que $\lambda_0 \in I_0 \subset I$ y $u_\lambda(x,t) > 0$ para todo $\lambda \in I_0$ y todo $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$. Para $\lambda \in I$, sea $\widetilde{m}_{u_\lambda}$ definida por $\widetilde{m}_{u_\lambda}(x,t) = g(x,t,u_\lambda(x,t))/u_\lambda(x,t)$ si $u_\lambda(x,t) > 0$ y $\widetilde{m}_{u_\lambda}(x,t) = \overline{m}(x,t)$ si $u_\lambda(x,t) \leq 0$. Tenemos $\lim_{\lambda \to \lambda_0} \widetilde{m}_{u_\lambda} = m_{u_{\lambda_0}}$ a.e. (x,t) y como antes por convergencia dominada la igualdad vale en $L^s(L^v)$. Luego, sigue que existe $\lambda_1(\widetilde{m}_{u_\lambda})$ para λ cercano a λ_0. Razonando ahora como en el Paso 1 de la prueba del Teorema 6 obtenemos un intervalo abierto I_0 alrededor de λ_0 tal que u_λ es positiva para todo $\lambda \in I_0$. Más aún, $u_\lambda(x,t) > 0$ para tales λ y todo $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$.

Sea $J = (\lambda_*, \lambda^*)$ el intervalo maximal abierto tal que $\lambda_0 \in J \subset I$ y $u_\lambda(x,t) > 0$ para todo $\lambda \in J$ y todo $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$.

Afirmamos que $\lambda_* = \lambda_1(\overline{m})$ y que $\lambda^* = \beta$. En efecto, supongamos primero que $\lambda^* < \beta$. Como $u_{\lambda^*} = \lim_{\lambda \to \lambda^{*+}} u_\lambda$ tenemos $u_{\lambda^*} \geq 0$. Si u_{λ^*} no es identicamente cero, como $Lu_{\lambda^*} = \lambda^* m_{u_{\lambda^*}} u_{\lambda^*}$, por continuidad tenemos que $u_{\lambda^*}(x,t)$ es positiva (y por tanto estrictamente positiva en todo punto) y entonces la observación anterior dice que $(\lambda^*, u_{\lambda^*}) \in D$. Luego, como en la construcción de I_0, obtenemos un intervalo alrededor de λ^* con $u_\lambda > 0$ contradiciendo la maximalidad de J. Si $u_{\lambda^*} \equiv 0$, como $u_\lambda(x,t) > 0$ para todo $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$ y $\lambda \in J$, para tales λ podemos escribir

$$L \frac{u_\lambda}{\|u_\lambda\|_\infty} = \lambda \frac{g(u_\lambda)}{u_\lambda} \frac{u_\lambda}{\|u_\lambda\|_\infty} \tag{4.9}$$

Por otro lado, para λ cercano a λ^* el teorema del valor medio da

$$-\sup_{\eta < \|u_{\lambda^*}\|_\infty + 1} |g_\xi(x,t,\eta)| \leq g(x,t,u_\lambda(x,t)) / u_\lambda(x,t) \leq \overline{m}(x,t) \tag{4.10}$$

y por tanto $\|g(u_\lambda)/u_\lambda\|_{L^s(L^v)}$ tiene una cota independiente de λ. Así, de (4.9) y la compacidad del operador solución obtenemos una solución positiva v de $Lv = \lambda^* \overline{m} v$ y luego $\lambda^* = \lambda_1(\overline{m}) < \lambda_0$. Contradicción. Luego, $\lambda^* = \beta$. Similarmente, suponer $\lambda_* > \lambda_1(\overline{m})$ lleva a una contradicción. Notar que como$\lambda_1(\overline{m}) \leq \alpha$ tenemos entonces $\alpha = \lambda_* = \lambda_1(\overline{m})$.

Conluimos la prueba viendo que $\beta = \infty$. Supongamos $\beta < \infty$ y sea $\{\lambda_j\}$ una sucesión creciente en I tal que $\lim_{j\to\infty} \lambda_j = \beta$ y sean u_j las correspondientes soluciones positivas de (1.2).

Si $\lim \|u_j\|_\infty = 0$, de (4.9) usada con u_j en lugar de u_λ y con el argumento usual de compacidad, obtenemos una solución positiva v de $Lv = \beta \overline{m} v$ y por tanto $\beta = \lambda_1(\overline{m})$, pero $\lambda_1(\overline{m}) = \alpha$. Contradicción. Por lo tanto $\limsup \|u_j\|_\infty > 0$. Pasando a alguna subsucesión podemos suponer que que $\|u_j\|_\infty > c$ para $c > 0$ y todo j.

Sea $l := \limsup \|u_j\|_\infty < \infty$. Pasando a otra subsucesión podemos asumir que $c \leq \|u_j\|_\infty \leq l+1$ para todo j. Ahora, de $Lu_j = \lambda_j \frac{g(u_j)}{u_j} u_j$, como $\frac{g(l+1)}{l+1} \leq \frac{g(u_j)}{u_j} \leq \overline{m}$, el argumento de compacidad da una solución positiva $v \in C_T$ de $Lv = \beta m_v v$ que además por la observación anterior satisface que $(\beta, v) \in D$. Teniendo en cuenta esto y razonando como en el Paso 3 de la prueba del Teorema 6 encontramos una contradicción con la maximalidad de I.

Consideremos finalmente el caso $\limsup_{j\to\infty} \|u_j\|_\infty = \infty$. Teniendo en cuenta el Lema 16 podemos asumir que $\lim_{j\to\infty} u_j(x,t) = \infty$ a.e. (x,t). Por tanto $\lim_{j\to\infty} m_{u_j}(x,t) = \underline{m}(x,t)$ a.e. (x,t). De acuerdo a H7, consideramos dos casos:

a) $\underline{m} \in L^s(L^v)$ y $P(\underline{m}) \leq 0$.

Como $\overline{m} \in L^s(L^v)$ y $\underline{m} \leq m_{u_j} \leq \overline{m}$, sigue por convergencia dominada que $\lim_{j\to\infty} m_{u_j} = \underline{m}$ en $L^s(L^v)$ y entonces por continuidad resulta $\lim_{j\to\infty} \mu_{m_{u_j}}(\lambda) = \mu_{\underline{m}}(\lambda)$ para todo λ. Pero $P(\underline{m}) \leq 0$ y entonces $\mu_{\underline{m}}(\lambda) > 0$ para todo $\lambda > 0$. Como $\mu_{\underline{m}}$ es cóncava y $\mu_{\underline{m}}(0) > 0$, resulta que $\mu_{m_{u_j}}(\beta) > 0$ para todo j suficientemente grande. Además $\mu_{m_{u_j}}(0) > 0$ y por tanto, para tales j, $\mu_{m_{u_j}}$ es estricamente positiva en $[0, \beta]$. Pero $\mu_{m_{u_j}}(\lambda_j) = 0$ y $0 < \lambda_j < \beta$. Contradicción.

b) $\underline{m} \leq 0$.

Como $0 \leq m_{u_j}^+ \leq \overline{m}^+ \in L^s(L^v)$ y $\lim_{j\to\infty} m_{u_j}^+ = \underline{m}^+$ a.e., tenemos $\lim_{j\to\infty} m_{u_j}^+ = 0$ en $L^s(L^v)$. Por otra parte, $\mu_m(\lambda) \equiv \frac{1}{\rho(L^{-1})} > 0$ para todo λ si $m \equiv 0$ y entonces $\lim_{j\to\infty} \mu_{m_{u_j^+}}(\lambda) = \frac{1}{\rho(L^{-1})}$. Luego $\mu_{m_{u_j}^+}(\beta) > 0$ para j suficientemente grande. Así, el principio de comparación de autovalores da $\mu_{m_{u_j}}(\beta) \geq \mu_{m_{u_j}^+}(\beta)$ que, como antes, lleva a una contradicción. Por tanto, $\beta = \infty$. ■

Notamos que si $\overline{m}$ no tiene autovalor principal positivo (esto es, si no se cumple H6), entonces (1.2) no tiene solución positiva para $\lambda > 0$.

4.4 Unicidad: prueba del Teorema 9.

Antes de ver la unicidad de la solución positiva, damos una prueba sencilla para el caso elíptico (ya que no la hemos visto escrita en ningún lado).

Supongamos que existen u, v soluciones positivas de los problemas $Lu = \lambda g(u)$ y $Lv = \lambda g(v)$. Sea $\widetilde{\Omega}$ una componente conexa del conjunto $\{x \in \Omega : u(x) > v(x)\}$. Podemos suponer que $\widetilde{\Omega} \neq \emptyset$. Teniendo en cuenta H2 y H3, resulta

$$L(u-v) = \lambda(g(u) - g(v)) = \lambda(u-v)g(u)/u + \lambda v(g(u)/u - g(v)/v) <$$
$$\lambda(u-v)g(u)/u \qquad \text{en } \widetilde{\Omega}$$

y esto implica (razonando por ejemplo como en la segunda parte del Teorema 2 o el Teorema 4) que $\lambda > \lambda_1\left(g(u)/u, \widetilde{\Omega}\right)$ (o sea el autovalor principal para el peso $g(u)/u$ en el dominio $\widetilde{\Omega}$). Pero por otra parte $\lambda = \lambda_1(g(u)/u, \Omega)$. Contradicción, puesto que $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$.

Lamentablemente, esta prueba no se puede adaptar (a priori) al caso parabólico ya que el conjunto $\{u > v\}$ no tiene por qué ser (o contener) un "cilindro" de la forma $\widetilde{\Omega} \times (0, T)$. Una verdadera lástima.

Teorema 9. *En caso de existir solución positiva para algún λ en los Teoremas 6 y 8, tal solución positiva es unica.*

Prueba. Hacemos la prueba para el caso del Teorema 8. Para el Teorema 6 la demostración es exactamente igual, haciendo los cambios correspondientes. Procedemos por contradicción. Asumamos que para algún $\lambda_0 > 0$ existen dos soluciones positivas u_0 y v_0 de (1.2) (que por tanto pertenecen a C_T). El Teorema 8 provee entonces dos curvas $\lambda \to u_\lambda$ y $\lambda \to v_\lambda$ en $C^1((\lambda_1(\overline{m}), \infty), C_T)$. Como $u_0 \neq v_0$ tenemos $u_\lambda \neq v_\lambda$ para todo λ en algún intervalo alrededor de λ_0. Sea $I_0 = (\lambda_*, \lambda^*)$ el intervalo abierto maximal satisfaciendo que $\lambda_0 \in I_0 \subset I$ y $u_\lambda \neq v_\lambda$ para todo $\lambda \in I_0$. Para $\lambda \in (\lambda_*, \lambda^*)$, sea $w_\lambda = (u_\lambda - v_\lambda) / \|u_\lambda - v_\lambda\|_\infty$ y sea n_λ definida por

$$n_\lambda(x,t) = \begin{cases} (g(u_\lambda) - g(v_\lambda)) / (u_\lambda - v_\lambda)(x,t) & \text{si } u_\lambda(x,t) \neq v_\lambda(x,t) \\ g_\xi(v_\lambda)(x,t) & \text{si } u_\lambda(x,t) = v_\lambda(x,t) \end{cases}$$

Afirmamos que $\lambda_* = \lambda_1(\overline{m})$. En efecto, supongamos $\lambda_* > \lambda_1(\overline{m})$. Tenemos $u_{\lambda_*} = v_{\lambda_*}$ y por tanto $n_{\lambda_*} = g_\xi(v_{\lambda_*})$. Además, el teorema del valor medio y H1 implican que $n_\lambda \in L^s(L^v)$ para cada $\lambda \in (\lambda_1(\overline{m}), \lambda^*)$, y se tiene $Lw_\lambda = \lambda n_\lambda w_\lambda$. Más aún, como $\|n_\lambda\|_{L^s(L^v)}$ permanece acotada para λ cercano a λ_* y $\lim_{\lambda \to \lambda_*} n_\lambda = n_{\lambda_*}$, la compacidad del operador solución da una solución no trivial w de $Lw = \lambda_* g_\xi(v_{\lambda_*}) w$ y por tanto $\lambda_* \geq \lambda_1(g_\xi(v_{\lambda_*}))$. Pero por otra parte, como $\lambda_1(g(v_{\lambda_*})/v_{\lambda_*}) = \lambda_*$, recordando H2, H3 y el principio comparación de autovalores sigue que $\lambda_1(g_\xi(v_{\lambda_*})) > \lambda_*$. Contradicción. Por lo tanto, $\lambda_* = \lambda_1(\overline{m})$.

Por otro lado, también sabemos que $\lim_{\lambda \to \lambda_1(\overline{m})} u_\lambda = \lim_{\lambda \to \lambda_1(\overline{m})} v_\lambda = 0$ y por tanto $\lim_{\lambda \to \lambda_1(\overline{m})} n_\lambda = \overline{m}$ en $L^s(L^v)$. Así, como $Lw_\lambda = \lambda n_\lambda w_\lambda$, el argumento de compacidad habitual nos da $Lw = \lambda_1(\overline{m}) \overline{m} w$ para algún $w \in C_T$ con $\|w\|_\infty = 1$. Por lo tanto w no cambia de signo. Podemos asumir que $w > 0$.

Por el resto de la prueba, tomamos λ suficientemente cercano a $\lambda_1(\overline{m})$. Queremos ver a continuación que $w_\lambda > 0$ parar tales λ. Sabemos (ver Sección 3.2 y la primer observación de la Sección 3.7) que para k suficientemente grande los operadores

$$S_\lambda := (L + \lambda(k - n_\lambda))^{-1}, \qquad S_{\lambda_1} := (L + \lambda_1(\overline{m})(k - \overline{m}))^{-1}$$

son positivos, compactos de $L^r(L^p)$ en C_T e irreducibles de $L^r(L^p)$ en sí mismo. Más aún, el Lema 13 (Sección 3.7) implica que S_λ converge a S_{λ_1} en la topología de la norma de operadores. Sean ρ_λ y ρ_{λ_1} los radios espectrales de S_λ y S_{λ_1} respectivamente. Afirmamos que $\rho_{\lambda_j} \to \rho_{\lambda_1}$ para alguna sucesión λ_j que tiende a $\lambda_1(\overline{m})$. En efecto, sean $\overline{v}_\lambda$ las correspondientes autofunciones positivas de S_λ, normalizadas por $\|\overline{v}_\lambda\|_\infty = 1$. Entonces $S_\lambda \overline{v}_\lambda = \rho_\lambda \overline{v}_\lambda$. Notar que ρ_λ es acotada ya que $\rho_\lambda \leq \|S_\lambda\| \leq \|S_{\lambda_1}\| + 1$. Ahora, un cálculo muestra que

$$\rho_\lambda \overline{v}_\lambda = S_{\lambda_1}\left(\lambda_1\left(\overline{m}\right)\left(k - \overline{m}\right)\rho_\lambda \overline{v}_\lambda - \lambda k \rho_\lambda \overline{v}_\lambda + \lambda n_\lambda \rho_\lambda \overline{v}_\lambda + \overline{v}_\lambda\right) \tag{4.11}$$

y por tanto la compacidad de S_{λ_1} da, para alguna sucesión λ_j convergente a $\lambda_1(\overline{m})$, que $\rho_{\lambda_j}\overline{v}_{\lambda_j}$ converge en C_T a alguna v no negativa. Como $\mu_{n_{\lambda_j}}(\lambda_j) = \frac{1}{\rho_{\lambda_j}} - \lambda_j k$ y $\mu_{n_{\lambda_j}}(\lambda_j)$ converge a $\mu_{\overline{m}}(\lambda_1(\overline{m}))$ sigue que $\inf_j \rho_{\lambda_j} > 0$ y por tanto v es positiva. Además (pasando a alguna subsucesión) tenemos que $S_{\lambda_1}\overline{v}_{\lambda_j} \to v_1$ para algún v_1. Dividiendo (4.11) (usada con λ_j) por ρ_{λ_j} y pasando al límite obtenemos $v_1 = v$. Luego, recordando que $S_{\lambda_j}\overline{v}_{\lambda_j} = \rho_{\lambda_j}\overline{v}_{\lambda_j}$ y yendo nuevamente al límite resulta $\rho_{\lambda_j} \to \rho_{\lambda_1}$. Por lo tanto, como $Lw_\lambda = \lambda n_\lambda w_\lambda$, el lema de perturbación de autovalores simples de Crandall-Rabinowitz (Lema 10) implica que $\frac{1}{\lambda k} = \rho_\lambda$ y por tanto $w_\lambda \geq 0$ para λ cercano a $\lambda_1(\overline{m})$ como queríamos ver. Más aún, por Harnack tenemos $w_\lambda(x,t) > 0$ para todo (x,t). Pero entonces $u_\lambda > v_\lambda$ en $\Omega \times \mathbb{R}$ y por tanto el principio de comparación nos da

$$\lambda = \lambda_1\left(g\left(u_\lambda\right)/u_\lambda\right) < \lambda_1\left(g\left(v_\lambda\right)/v_\lambda\right) = \lambda$$

Contradicción. ■

Chapter 5

El problema sublineal: el caso general

5.1 Dos lemas auxiliares.

En el presente capítulo probaremos los resultados de existencia de soluciones positivas correspondientes al problema (1.3). En nuestra opinión, los resultados de este capítulo son quizás los de mayor valor: mediante ideas muy sencillas (léase Lemas 18 y 19), podremos tratar varios casos generales (léase Teoremas 10-13).

Como ya dijimos, la técnica será la del método de sub y supersoluciones. Para precisar que entemos por sub y supersoluciones en el contexto débil, sea

$$\widetilde{W} = \left\{ u \in L^2\left((0,T), H^1(\Omega)\right) : u_t \in L^2\left((0,T), H^{-1}(\Omega)\right) \right\}$$

Siguiendo a [14], decimos que v es una supersolución de (2.2) si:

$v_{|\Omega\times(0,T)} \in \widetilde{W}$, $v_t \in L^2\left((0,T), H^{-1}(\Omega)\right) + L^{1+\eta}(\Omega\times(0,T))$ para $\eta > 0$ sufientemente pequeño, $v_{|\partial\Omega\times(0,T)} \geq 0$, $v(.,0) \geq v(.,T)$ a.e. en Ω y

$$\int\limits_{\Omega\times(0,T)} \left[-v\frac{\partial h}{\partial t} + \langle A\nabla v, \nabla h\rangle + \langle b, \nabla v\rangle h + c_0 v h \right] \geq \int\limits_{\Omega\times(0,T)} fh$$

para toda $0 \leq h \in C_c^\infty(\Omega\times(0,T))$. Una subsolución se define de manera similar dando vuelta las desigualdades escritas arriba.

Recordamos que tanto las hipótesis referidas a la función g como a la notación están en la Sección 2.5.

Lema 18. *Sea* $\xi_0 > 0$. *Asumamos que* $\overline{g}(\xi) \in L^s(L^v)$ *para todo* $\xi \geq \xi_0$ *y que o bien* $\overline{m}_\infty \in L^s(L^v)$ *con* $\lambda_1(\overline{m}_\infty) > 1$ (si $\lambda_1(\overline{m}_\infty)$ *existe*) *o bien* $\overline{m}_\infty \leq 0$. *Entonces, para todo* $c > 0$ *existe una supersolución* $w \in C_T$ *del problema* (1.3) *tal que* $w \geq c$.

Prueba. Consideramos primero el caso $\overline{m}_\infty \in L^s(L^v)$. Sea $c > 0$. Afirmamos que existe $\xi \geq c$ tal que $\mu_{\overline{g}(\xi)/\xi}(1) > 0$. En efecto, para $\xi \geq \xi_0$ tenemos $\overline{m}_\infty \leq \overline{g}(\xi)/\xi \leq \overline{g}(\xi_0)/\xi_0$ y por lo tanto $\lim_{\xi\to\infty}(\overline{g}(\xi)/\xi) = \overline{m}_\infty$ con convergencia a.e. Luego, por convergencia dominada resulta $\lim_{\xi\to\infty}(\overline{g}(\xi)/\xi) = \overline{m}_\infty$ en $L^s(L^v)$ y así por continuidad sigue que $\lim_{\xi\to\infty}\mu_{\overline{g}(\xi)/\xi}(\lambda) = \mu_{\overline{m}_\infty}(\lambda)$ para todo λ. Más aún, tanto si $P(\overline{m}_\infty) > 0$ y $\lambda_1(\overline{m}_\infty) > 1$ o bien si $P(\overline{m}_\infty) \leq 0$, recordando las propiedades de la función μ (ver (3.3), se tiene en ambos casos que $\mu_{\overline{m}_\infty}(1) > 0$. Por tanto sigue que $\mu_{\overline{g}(\xi)/\xi}(1) > 0$ para ξ suficientemente grande.

Fijamos $\xi^* \geq \max(\xi_0, c)$ tal que $\mu_{\overline{g}(\xi^*)/\xi^*}(1) > 0$. Sea k la función definida por

$$k(x,t) = \sup_{\xi\geq\xi^*}|\overline{g}(\xi)/\xi|$$

Como $\overline{m}_\infty \leq k \leq \overline{g}(\xi^*)/\xi^*$, tenemos $k \in L^s(L^v)$. Para $\xi \in [0,\infty)$, sea

$$g^*(x,t,\xi) = \overline{g}(x,t,\xi) + k(x,t)\,\xi$$

Entonces $g^*(x,t,\xi) \geq 0$ y $g^*(\xi)/\xi \in L^s(L^v)$ para $\xi \geq \xi^*$. Además, se tiene

$$\mu_{L+\lambda k, g^*(\xi^*)/\xi^*}(\lambda) = \mu_{L,\overline{g}(\xi^*)/\xi^*}(\lambda)$$

para todo λ. En particular $\mu_{L+k,g^*(\xi)/\xi^*}(1) = \mu_{L,\overline{g}(\xi^*)/\xi^*}(1) > 0$. Por lo tanto, el Teorema 2 da una solución positiva $\Phi \in C_T$ del problema

$$\begin{cases} (L + k - g^*(\xi^*)/\xi^*)\,\Phi = g^*(\xi^*) & \text{en } \Omega\times\mathbb{R} \\ \Phi = 0 & \text{en } \partial\Omega\times\mathbb{R} \\ \Phi\ T\text{-periódica} & \end{cases}$$

Ahora, recordando que $\xi \to \overline{g}(\xi)/\xi$ es no creciente,

$$\begin{aligned} g(\xi^*+\Phi) &\leq \overline{g}(\xi^*+\Phi) \leq (\overline{g}(\xi^*)/\xi^*)(\xi^*+\Phi) \\ &\leq \overline{g}(\xi^*) + k\xi^* + (\overline{g}(\xi^*)/\xi^*)\,\Phi \\ &= g^*(\xi^*) + (g^*(\xi^*)/\xi^*)\,\Phi - k\Phi = L\Phi \leq L(\xi^*+\Phi) \end{aligned}$$

y por tanto $\xi^* + \Phi$ es supersolución de (1.3).

Consideramos ahora el caso $\overline{m}_\infty \leq 0$. En este caso tenemos $\lim_{\xi\to\infty}(\overline{g}^+(\xi)/\xi) = 0$ a.e. en $\Omega\times\mathbb{R}$, donde, como siempre, escribimos $f = f^+ - f^-$. Además,

$0 \leq \overline{g}^{+}(\xi)/\xi \leq \overline{g}^{+}(\xi_0)/\xi_0$ para todo $\xi \geq \xi_0$ y así $\lim_{\xi\to\infty}(\overline{g}^{+}(\xi)/\xi) = 0$ en $L^s(L^v)$. Luego, $\lim_{\xi\to\infty}\mu_{\overline{g}^{+}(\xi)/\xi}(\lambda) = \lambda_1$ para todo λ, donde con λ_1 denotamos el autovalor principal positivo para L asociado al peso 1 (puesto que para $m \equiv 1$, $\mu_m \equiv \lambda_1$). Por lo tanto podemos elegir $\xi^* \geq \max(\xi_0, c)$ tal que $\mu_{\overline{g}^{+}(\xi^*)/\xi^*} > 0$, y entonces, como arriba, el problema

$$\begin{cases} \left(L - \overline{g}^{+}(\xi^*)/\xi^*\right)\Phi = \overline{g}^{+}(\xi^*) & \text{en } \Omega\times\mathbb{R} \\ \Phi = 0 & \text{en } \partial\Omega\times\mathbb{R} \\ \Phi \ T\text{-periódica} & \end{cases}$$

tiene solución $\Phi \in C_T$ satisfaciendo $\Phi(x,t) > 0$ a.e. (x,t). Además,

$$\begin{aligned} g(\xi^*+\Phi) &\leq \overline{g}^{+}(\xi^*+\Phi) \leq \left(\overline{g}^{+}(\xi^*)/\xi^*\right)(\xi^*+\Phi) \\ &= \overline{g}^{+}(\xi^*) + \left(\overline{g}^{+}(\xi^*)/\xi^*\right)\Phi = L\Phi \leq L(\Phi+\xi^*) \end{aligned}$$

y esto concluye la prueba. ■

Lema 19. *Sea $\xi_0 > 0$. Asumamos que $\underline{g}(\xi_0) \in L^s(L^v)$, $P\left(\underline{g}(\xi_0)/\xi_0\right) > 0$ y $\lambda_1\left(\underline{g}(\xi_0)/\xi_0\right) \leq 1$. Entonces existe una subsolución $v \in C_T$ de (1.3) tal que $v(x,t) > 0$ para todo $(x,t) \in \Omega\times\mathbb{R}$.*

Prueba. Sea Φ la autofunción positiva del problema

$$\begin{cases} \left(L + \underline{g}^{-}(\xi_0)/\xi_0\right)\Phi = \lambda_1\left(\underline{g}^{+}(\xi_0)/\xi_0\right)\left(\underline{g}^{+}(\xi_0)/\xi_0\right)\Phi & \text{en } \Omega\times\mathbb{R} \\ \Phi = 0 & \text{en } \partial\Omega\times\mathbb{R} \\ \Phi \ T\text{-periódica} & \end{cases}$$

Entonces $\Phi \in C_T$ y $\Phi(x,t) > 0$ para todo $(x,t) \in \Omega\times\mathbb{R}$.

Ahora, $\lambda_1\left(L, \underline{g}(\xi_0)/\xi_0\right) < 1$ implica $\mu_{L,\underline{g}(\xi_0)/\xi_0}(1) \leq 0$. Luego, como

$$\mu_{L,\underline{g}(\xi_0)/\xi_0}(1) = \mu_{L+\underline{g}^{-}(\xi_0)/\xi_0,\underline{g}^{+}(\xi_0)/\xi_0}(1)$$

resulta $\lambda_1\left(\underline{g}^{+}(\xi_0)/\xi_0\right) \leq 1$.

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \xi_0/\left\|\Phi\right\|_\infty$. Teniendo en cuenta los hechos mencionados arriba y recordando que $\xi \to \underline{g}(\xi)/\xi$ es no creciente tenemos

$$\begin{aligned} L(\varepsilon\Phi) + \underline{g}^{-}(\varepsilon\Phi) &\leq \left(L + \underline{g}^{-}(\varepsilon\|\Phi\|)/\varepsilon\|\Phi\|\right)\varepsilon\Phi \\ &\leq \left(L + \underline{g}^{-}(\xi_0)/\xi_0\right)\varepsilon\Phi \leq \left(\underline{g}^{+}(\xi_0)/\xi_0\right)\varepsilon\Phi \\ &\leq \left(\underline{g}^{+}(\varepsilon\|\Phi\|)/\varepsilon\|\Phi\|\right)\varepsilon\Phi \leq \underline{g}^{+}(\varepsilon\Phi) \end{aligned}$$

y el lema sigue. ■

5.2 Prueba de los Teoremas 10-13.

Teorema 10. *a) Asumamos*

1) $\underline{m}_0, \overline{m}_\infty \in L^s(L^v)$, $P(\underline{m}_0) > 0$ *y* $P(\overline{m}_\infty) > 0$.

2) $\overline{g}(\xi_0) \in L^s(L^v)$ *para algún* $\xi_0 > 0$ *y* $\underline{g}(\xi_1) \in L^s(L^v)$ *para algún* $\xi_1 > 0$.

Entonces, si $\lambda_1(\underline{m}_0) < 1 < \lambda_1(\overline{m}_\infty)$ *existe una solución* $u \in L_T^\infty$ *de (1.3) con* $u(x,t) > 0$ *para todo* $(x,t) \in \Omega \times R$.

b) Asumamos (1), $\overline{m}_0 = \underline{m}_0$, $\overline{m}_\infty = \underline{m}_\infty$ *y que para todo* $\xi > 0$ *se satisfacen (2.12) y (2.13). Entonces, existe una solución positiva* $u \in L_T^\infty$ *de (1.3) si y sólo si* $\lambda_1(\underline{m}_0) < 1 < \lambda_1(\overline{m}_\infty)$.

Prueba. Supongamos $\lambda_1(\underline{m}_0) < 1 < \lambda_1(\overline{m}_\infty)$. Como para $0 < \xi \leq \xi_1$ tenemos $\underline{g}(\xi_1)/\xi_1 \leq \underline{g}(\xi)/\xi \leq \underline{m}_0$ y $\lim_{\xi\to 0^+} \underline{g}(\xi)/\xi = \underline{m}_0$ a.e en $\Omega \times \mathbb{R}$, teniendo en cuenta (1) y (2) obtenemos $\underline{g}(\xi)/\xi \in L^s(L^v)$ para tales ξ y por lo tanto $\lim_{\xi\to 0^+} \underline{g}(\xi)/\xi = \underline{m}_0$ con convergencia en $L^s(L^v)$. Luego, recordando la Observación (i) después de la prueba del Teorema 1, sigue que $\lim_{\xi\to 0^+} P\left(\underline{g}(\xi)/\xi\right) = P(\underline{m}_0) > 0$ y así existe $\lambda_1\left(\underline{g}(\xi)/\xi\right)$ para $\xi > 0$ sufientemente pequeño. Más aún, por continuidad resulta $\lim_{\xi\to 0^+} \lambda_1\left(\underline{g}(\xi)/\xi\right) = \lambda_1(\underline{m}_0) < 1$ y entonces $\lambda_1\left(\underline{g}(\xi)/\xi\right) < 1$ para tales ξ. Luego, podemos aplicar el Lema 19 y encontrar una subsolución $v \in C_T$ de (1.3) con $v(x,t) > 0$ para todo $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$.

Por otro lado, para todo $\xi \geq \xi_0$ tenemos $\overline{m}_\infty \leq \overline{g}(\xi)/\xi \leq \overline{g}(\xi_0)/\xi_0$ y por tanto $\overline{g}(\xi)/\xi \in L^s(L^v)$. Tomando entonces $c = \|v\|_\infty$ en el Lema 18 obtenemos ahora una supersolución $w \in C_T$ de (1.1) con $w \geq c \geq v$, y entonces el Teorema 1 de [14] da una solución $u \in L_T^\infty$ tal que $v \leq u \leq w$ y por lo tanto $u(x,t) > 0$ para todo $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$. Así, (a) queda probado.

Para ver (b), supongamos que $u \in L_T^\infty$ es una solución positiva de (1.3). Por el corolario de la Proposición 3 (Harnack), tenemos $u(x,t) > 0$ para todo (x,t). Sea $m_u : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $m_u = g(u)/u$. Como m_u es medible y $\underline{m}_\infty \leq m_u \leq \overline{m}_0$ sigue que $m_u \in L^s(L^v)$. Más aún, tenemos $Lu = m_u u$ y por tanto $1 = \lambda_1(m_u)$. Ahora, el principio de comparación de autovalores nos da $1 = \lambda_1(m_u) \geq \lambda_1(\overline{m}_0) = \lambda_1(\underline{m}_0)$ y también $1 \leq \lambda_1(\underline{m}_\infty) = \lambda_1(\overline{m}_\infty)$. Supongamos $\lambda_1(\overline{m}_0) = 1$. Como $\lambda_1(m_u) = 1$ y $m_u \leq \overline{m}_0$, debemos tener $m_u(x,t) = \overline{m}_0(x,t)$ a.e. $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$, pero

$$\sup_{0<\xi\leq\|u\|_\infty} (g(\xi)/\xi) \geq g(u)/u = \overline{m}_0 \qquad \text{en } \Omega \times \mathbb{R}$$

contradiciendo (2.12). Luego, $\lambda_1(\overline{m}_0) < 1$. Supongamos ahora que $\lambda_1(\underline{m}_\infty) = 1$. Razonando como arriba obtenemos $1 = \lambda_1(m_u) \leq \lambda_1(\underline{m}_\infty) = 1$ y por tanto $m_u = \underline{m}_\infty$. Así,

$$\inf_{0<\xi\leq\|u\|_\infty} (g(\xi)/\xi) \leq g(u)/u = \inf_{\xi>0} (g(\xi)/\xi) \qquad \text{a.e.}$$

lo cual es otra vez una contradicción. Luego, $\lambda_1(\underline{m}_\infty) > 1$. ■

Teorema 11. *a) Asumamos*
3) $\underline{m}_0 \in L^s(L^v)$, $P(\underline{m}_0) > 0$.
4) $\overline{g}(\xi_0) \in L^s(L^v)$ para algún $\xi_0 > 0$ y $\underline{g}(\xi) \in L^s(L^v)$ para todo $\xi > 0$.
5) O bien $\overline{m}_\infty \in L^s(L^v)$ y $P(\overline{m}_\infty) \leq 0$, o bien $\overline{m}_\infty \leq 0$.

Entonces, si $\lambda_1(\underline{m}_0) < 1$ existe una solución $u \in L_T^\infty$ de (1.3) con $u(x,t) > 0$ para todo $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$.

b) Asumamos además (2.12) y $\overline{m}_0 = \underline{m}_0$. Entonces, existe una solución positiva $u \in L_T^\infty$ de (1.3) si y sólo si $\lambda_1(\underline{m}_0) < 1$.

Prueba. Como en la prueba del teorema anterior tenemos $\underline{g}(\xi)/\xi \in L^s(L^v)$ y $\lambda_1\left(\underline{g}(\xi)/\xi\right) < 1$ para $\xi > 0$ suficientemente pequeño y por tanto el Lema 19 nos da una subsolución $v \in C_T$ satisfaciendo $v(x,t) > 0$ para todo (x,t). Por otra parte, como $\underline{g}(\xi)/\xi \leq \overline{g}(\xi)/\xi \leq \overline{g}(\xi_0)/\xi_0$ para $\xi \geq \xi_0$, de (4) resulta $\overline{g}(\xi)/\xi \in L^s(L^v)$ para tales ξ. Luego (a) sigue como en el Teorema 10 tomando $c = \|v\|_\infty$ en el Lema 18. La prueba de (b) sigue también en forma similar a la parte (b) del teorema anterior. ■

Teorema 12. *a) Asumamos (2) y*
6) $\overline{m}_\infty \in L^s(L^v)$, $P(\overline{m}_\infty) > 0$.
7) $P\left(\underline{g}(\xi)/\xi\right) > 0$ para $\xi > 0$ pequeño y $\lim_{\xi\to 0^+} \lambda_1\left(\underline{g}(\xi)/\xi\right) = 0$.

Entonces, si $\lambda_1(\overline{m}_\infty) > 1$ existe una solución $u \in L_T^\infty$ de (1.3) *con $u(x,t) > 0$ para todo $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$.*

b) Asumamos además (2.13) y $\overline{m}_\infty = \underline{m}_\infty$. Entonces, existe una solución positiva $u \in L_T^\infty$ de (1.3) si y sólo si $\lambda_1(\overline{m}_\infty) > 1$.

Prueba. Razonando como arriba, (a) sigue de los Lemas 18 y 19 y el Teorema 1 de [14]. Supongamos ahora que $u \in L_T^\infty$ es una solución positiva de (1.3). Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \|u\|_\infty$. Sea $\underline{g}_\varepsilon$ definida por $\underline{g}_\varepsilon(\xi) = \underline{g}(\xi)$ si $\xi \geq \varepsilon$ y.$\underline{g}_\varepsilon(\xi) = \underline{g}(\varepsilon)$ si $\xi < \varepsilon$. Tnemos $Lu = g(u) \geq \underline{g}(u) \geq \underline{g}_\varepsilon(u)$ y además $\underline{g}_\varepsilon(u)/u \in L^s(L^v)$. Por lo tanto, razonando como en la segunda parte del Teorema 2 sigue que $1 \leq \lambda_1\left(\underline{g}_\varepsilon(u)/u\right)$. Más aún, como $\underline{g}_\varepsilon(u)/u \geq \underline{m}_\infty$, el principio de comparación de autovalores nos da $1 \leq \lambda_1(\underline{m}_\infty)$. Supongamos $1 = \lambda_1(\underline{m}_\infty)$. Entonces $\underline{g}_\varepsilon(u)/u = \underline{m}_\infty$. Pero

$$\underline{g}_\varepsilon(u)/u \geq \underline{g}_\varepsilon(\|u\|)/\|u\| = \underline{g}(\|u\|)/\|u\|$$

y por lo tanto $\underline{m}_\infty = \underline{g}\left(\|u\|\right) / \|u\|$ en contradicción con (2.13). ■

Teorema 13. *Asumamos (4), (5), y (7). Entonces* (1.3) *tiene una solución* $u \in L^\infty_T$ *con* $u\left(x,t\right) > 0$ *para todo* $\left(x,t\right) \in \Omega \times \mathbb{R}$.

Prueba. Sigue nuevamente de los Lemas 18 y 19 y el Teorema 1 de [14].
■

Chapter 6

Algunos problemas abiertos relacionados

Quisiéramos terminar este trabajo mostrando algunos problemas relacionados a los ya estudiados que consideramos de interés y que están aún sin resolver.

El primero es "equivalente" al problema lineal (1.1), pero con el operador de difusión asociado al p-laplaciano, es decir

$$\begin{cases} u_t - div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = \lambda m\,|u|^{p-2}\,u & \text{en } \Omega\times\mathbb{R} \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega\times\mathbb{R} \\ u \ T\text{-periódica} \end{cases} \tag{6.1}$$

donde $p > 2$ (es claro que para $p = 2$ queda el operador del calor). Es de esperar, guiándose por lo que ocurre en el caso elíptico (ver por ejemplo [4]), que (6.1) también admita un autovalor principal positivo, y único. El problema cuando uno quiere seguir la idea usada para resolver (1.1) (o sea, aplicar Krein-Rutman) es que las hipótesis en el caso de operadores no lineales son muy difíciles de verificar (ver por ejemplo, [39], [45]). De todas maneras, de alguna forma debería poder probarse algo.

Si uno pudiese resolver (6.1) y tener las "buenas propiedades" que teníamos antes para el caso lineal (continuidad, principio de comparación, principio del máximo, etc.), entonces uno podría luego pensar en problemas semilineales del tipo

$$\begin{cases} u_t - div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = g\,(x,t,u) & \text{en } \Omega\times\mathbb{R} \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega\times\mathbb{R} \\ u \ T\text{-periódica} \end{cases} \tag{6.2}$$

Nuevamente, sobre estos problemas hay varios resultados en el caso elíptico (ver por ejemplo [16] y las referencias que allí figuran), con lo cual es de esperar que algunos "pasen" al parabólico periódico.

Para terminar con (1.1), algo que sin duda queda pendiente es "decir algo más" en el caso que el coeficiente de orden cero a_0 cambia de signo, especialmente en el caso $\lambda_1\left(L_0, a_0^-\right) < 1$. Dos herramientas que parecen ser necesarias (y no hay) a tal efecto son: teoría sobre el problema (1.1) en dominios que no sean necesariamente "cilindros", y "buenas" cotas para el autovalor principal. Con respecto a lo primero, consideramos que de por sí es un problema interesante en sí mismo. También aquí creemos que hay buenas chances de poder probar algo, ya que hay teoría para problemas parabólicos periódicos en dominios "no cilíndricos" para el problema (2.2), esto es, existencia y unicidad, principio del máximo, etc. (ver por ejemplo [34]). Y con respecto a lo segundo, la cota de la recta (Lema 9, Sección 3.3) originalmente dada por Hess, en este caso no alcanza.

Con respecto a problemas no lineales, un problema que nos parece interesante es

$$\begin{cases} Lu = m\,(x,t)\,u^p & \text{en } \Omega\times\mathbb{R} \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega\times\mathbb{R} \\ u \ T\text{-periódica} \end{cases} \tag{6.3}$$

donde m cambia de signo y $0 < p < 1$. En el caso de $m \geq 0$, el problema queda resuelto por el Teorema 13 (siempre hay solución positiva). Sin embargo, cuando m cambia de signo no se puede aplicar el Lema 19 (existencia de subsolución) ya que la función $\underline{g}$ es idénticamente $-\infty$ en el conjunto donde m es negativa. En el caso elíptico, es conocida una condición suficiente para la existencia de solución positiva, pero no tiene por qué ser necesaria (ver [28]).

Bibliography

[1] S. Alama, G. Tarantello, *On the solvavility of a semilinear equation via an asssociated eigenvalue problem,* Math Z. **221** (1996), 467-493.

[2] H. Amann, *Existence and multiplicity theorems for semilinear elliptic boundary value problems,* Math. Z. **150** (1976), 281-295.

[3] H. Amann, *Periodic solutions of semilinear parabolic problems.* Inn L. Cesari, R. Kannan and H. Weinberger (eds.), Nonlinear Analysis, New York, Academic Press, 1978.

[4] A. Anane, *Simplicité et isolation de la premiere valeur propre de p-laplacien avec poids,* C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I **305** (1987), 725-728.

[5] D. Aronson, J. Serrin, *Local behavior of solutions of quasilinear parabolic equations*, Arch. Rat. Mech. Anal. **25** (1967), 81-123.

[6] A. Beltramo, Über den Hauptteigenwert von peridish-parabolischen Differiantialoperatoren, Ph. D. Thesis, Univ. of Zurich, 1984.

[7] A. Beltramo, P. Hess, *On the principal eigenvalue of a periodic-parabolic operator*, Comm. Partial Diff. Eqs. **9** (1984), 919-941.

[8] H. Brezis, L. Oswald, *Remarks on sublinear elliptic equations,* Nonlinear Analysis, TMA, **10** (1986), 55-64.

[9] M. Crandall, P. Rabinowitz, *Bifurcation, perturbation of simple eigenvalues and linearized stability*, Arch. Rat. Mech. Anal. **52** (1973), 161-180.

[10] D. Daners, *Domain perturbation for linear and nonlinear parabolic equations*, J. Diff. Eqs. **129** (1996), 358-402.

[11] D. Daners, *Periodic-parabolic eigenvalue problems with indefinite weight functions*, Arch. Math. **68** (1997), 388-397.

[12] D. Daners, *Existence and perturbation of principal eigenvalues for a periodic-parabolic problem*, Electr. J. Diff. Eqs. **2000** (2000), Conf. 05, 51-67.

[13] D. Daners, P. Koch-Medina, *Abstract evolution equations, periodic problems and applications*, Longman Research Notes **279,** 1992.

[14] J. Deuel, P. Hess, *Nonlinear parabolic boundary value problems with upper and lower solutions,* Israel J. Math. **29** (1978), 92-104.

[15] D. De Figueiredo, *Positive solutions of semilinear elliptic problems*, Lecture Notes in Math. **957**, Springer-Verlag, 1982, 34-87.

[16] P. Drabek, J. Hernández, *Existence and uniqueness of positive solutions for some quasilinear elliptic problems,* Nonlinear Anal., TMA, **44** (2001), 189-204.

[17] J. Fleckinger, J. Hernández, F. de Thélin, *Existence of multiple principal eigenvalues for some indefinite linear eigenvalue problems.* Preprint.

[18] J. Fraile, P. Koch-Medina, J. López-Gómez, S. Merino, *Elliptic eigenvalue problems and unbounded continua of positive solutions of a semilinear elliptic equation,* J. Diff. Eqs **127** (1996), 295-319.

[19] S. Fucik, J. Necas, J. Soucek, V. Soucek, Spectral analysis of nonlinear operators, Lecture Notes in Math. **346** (1973), Springer-Verlag.

[20] D. Gilbarg, N. Trudinger Elliptic partial differential equations of second order, 1983, Springer-Verlag.

[21] T. Godoy, A. Guerin, S. Paczka, *On positive solutions of some periodic parabolic eigenvalue problem with a weight function*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **101** (1999), 1-17.

[22] T. Godoy, U. Kaufmann, *On principal eigenvalues for periodic parabolic problems with optimal condition on the weight function,* J. Math. Anal. Appl. **262** (2001), 208-220.

[23] T. Godoy, U. Kaufmann, *On positive solutions for some semilinear periodic parabolic eigenvalue problems,* J. Math. Anal. Appl. **277** (2003), 164-179.

[24] T. Godoy, U. Kaufmann, *On the existence of positive solutions for periodic parabolic sublinear problems*, Abstr. Appl. Anal. **2003** (2003), 975-984.

[25] T. Godoy, U. Kaufmann, S. Paczka, *Positive solutions for sublinear periodic parabolic problems*, Nonlinear Anal., TMA, **55** (2003), 72-83.

[26] T. Godoy, E. Lami Dozo, S. Paczka, *The periodic parabolic eigenvalue problem with L^∞ weight*, Math. Scand. **81** (1997), 20-34.

[27] J. Hernández, *Positive solutions for the logistic equation with unbounded weights,* Lect. Notes Pure Appl. Math. **194** (1998), 183-197.

[28] J. Hernández, F. Mancebo, J. Vega, *Positive solutions for singular nonlinear elliptic equations*. Preprint.

[29] P. Hess, Periodic-parabolic Boundary Value Problems and Positivity, Pitman Research Notes **247,** 1991.

[30] P. Hess, *On positive solutions of semilinear periodic-parabolic problems*, Lecture Notes in Math. **1076** (1983), 101-114.

[31] U. Kaufmann, *Some results on principal eigenvalues for periodic parabolic problems with weight,* Bull. Austral. Math. Soc. **68** (2003), 177-184.

[32] M. G. Krein, M. A. Rutman, *Linear operators leaving invariant a cone in a Banach Space*, Uspehki Math. Nauk. (N.S.) **3** (1948), 3-95; AMS Transl. **26** (1950), 1-128.

[33] O. Ladysženkaja, V. Solonnikov, N. Ural'ceva, Linear and quasilinear equations of parabolic type, Transl. Math. Mono, Vol 23, Amer. Math. Soc., 1968.

[34] G. Lieberman, *Time-periodic solutions of linear parabolic differential equations*, Comm. Partial Differ. Equations **24** (1999), 631-663.

[35] J. L. Lions, E. Magenes, Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications, Vol I, Springer, Berlin, 1972.

[36] J. López Gómez, *The maximum principle and the existence of principal eigenvalues for some linear weighted boundary value problems*, J. Diff. Eqs. **127** (1996), 263-294.

[37] R. Martin Jr., Nonlinear Operators and Differential Equations in Banach Spaces, Wiley, New York, 1976.

[38] P. Meyer-Nieberg, Banach Lattices, Springer Verlag, 1991.

[39] R. Nussbaum, *Eigenvectors of nonlinear positive operators and the linear Krein-Rutman theorem*, Lecture Notes in Math. **886** (1981), 309-330.

[40] S. Paczka, *A Neumann-periodic parabolic eigenvalue problem with continuous weight,* Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino **54** (1996), 67-74.

[41] B. de Pagter, *Irreducible compact operators*, Math. Z. **192** (1986), 149-153.

[42] P. Rabinowitz, *Some global results for nonlinear eigenvalue problems*, J. Funct. Anal. **7** (1971), 487-513.

[43] M. Schechter, K. Tintarev, *Families of 'first eigenfunctions' for semilinear elliptic eigenvalue problems*, Duke Math. J. **62** (1991), 453 - 465.

[44] J. Smoller, Shock waves and reaction-diffusion equations, New York, Springer, 1983.

[45] P. Takác, *Convergence in the part metric for discrete dynamical systems in ordered topolological cones*, Nonlinear Anal. TMA, **26** (1996), 1753-1777.

[46] K. Taira, K. Umezu, *Positive solutions of sublinear elliptic boundary value problems*, Nonlinear Analysis, TMA, **29** (1997), 761-771.

[47] N. Trudinger, *Pointwise estimates and quasilinear parabolic equations*, Comm. Pure Appl. Math. **21** (1968), 205-226.

[48] A. C. Zaanen, Introduction to Operator Theory in Riesz Spaces, Springer Verlag, 1997.

[49] M. Zerner, *Quelques propriétés spectrales des opérateurs positifs*, J. Funct. Anal. **72** (1987), 381-417.