Restricción de representaciones de cuadrado integrable

Sebastián Ricardo Simondi

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía y Física como parte de los requerimientos para la obtención de grado de Doctor en Matemática de la Universidad Nacional de Córdoba.

Marzo de 2007

Director de Tesis: **Jorge Antonio Vargas**

TABLA DE CONTENIDOS

Introducción

Sea G un grupo de Lie simple de tipo no compacto, conexo y con centro finito. Fijemos un subgrupo compacto maximal K de G.

Sea π una representación unitaria e irreducible de G. Sea H un subgrupo reductivo cerrado de G y sea $\widehat{H}$ el conjunto de clases de equivalencias de representaciones unitarias e irreducibles de H. Por la teoría de álgebras de Von Neumann existe una medida μ en $\widehat{H}$ y una aplicación medible $i \to N_i$ de $\widehat{H} \to [0, \infty]$ tal que si (π_i, V_i) denota un representante conveniente de $i \in \widehat{H}$ entonces

$$\pi_{|H} = \sum_{\{i:\ \mu(i)>0\}} N_i V_i + \int_I N_i V_i \ d\mu(i)$$

donde $I = \{i : \ \mu(i) = 0\}$. Por definición, la restricción de la representación π al subgrupo H es **discretamente descomponible** si $\int_I N_i V_i \ d\mu(i) = 0$ y es **admisible** si es discretamente descomponible y además $0 \leq N_i < \infty$, para todo i.

Sea $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$ la descomposición de Cartan del álgebra de Lie de G, con $\mathfrak{k}_0$ el álgebra de Lie del subgrupo compacto K y sea θ la involución de Cartan asociada a dicha descomposición. Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ la complexificación del álgebra $\mathfrak{g}_0$ y $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ su descomposición de Cartan.

Sea (G, H) un par simétrico generalizado con H conexo, sea σ la involución de G asociada al subgrupo H y sea $\mathfrak{h}_0$ el álgebra de Lie de H. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\sigma\theta = \theta\sigma$, por lo tanto $L = (K \cap H)$ es un subgrupo maximal compacto de H y (K, L) es un par simétrico.

Toshiyuki Kobayashi [**Ko**] y H. Jakobsen, M. Vergne [**JV**], han obtenido criterios que aseguran cuando la restricción de una represesentación π unitaria, irreducible y de cuadrado integrable de G a H es admisible. En base a estos criterios demostramos los siguientes resultados.

TEOREMA 1. *Sea* (π, V) *una representación de cuadrado integrable e irreducible de* G. *Si* $\mathfrak{k}$ *es simple y* $\mathfrak{k} \neq \mathfrak{h}$, *entonces* π *restricta a* H *no es discretamente descomponible.*

Si L' es un subgrupo maximal de K tal que el $rango(L') = rango(K)$ demostramos el siguiente

TEOREMA 2. *Si* (π, V) *es una representación de cuadrado integrable e irreducible de* G *y* K *es simple, entonces* π *restricta a* L' *no es admisible.*

Por otra parte si el subgrupo compacto maximal K de G no es simple, para cada par simétrico generalizado (G, H) tal que $rango(H) = rango(K)$, caracterizamos las representaciones (π, V) unitarias, irreducible y de cuadrado integrable de G tales que π restricta a H no es admisible. Para ello clasificamos los pares simétricos generalizados (G, H) en tres tipos, Tipo I, II y III, (ver Tabla 3) y probamos el siguiente

TEOREMA 3. *(i) Si* (G, H) *es un par simétrico generalizado de Tipo I, entonces las únicas representaciones de cuadrado integrable e irreducible de* G *que admiten restricción admisible a* H *son las asociadas al sistema de raíces positivas holomorfo y al antiholomorfo.*
(ii) Si (G, H) *es un par simétrico generalizado de Tipo II entonces ninguna representación de cuadrado integrable e irreducible de* G *admite restricción admisible a* H.
(iii) Si (G, H) *es un par simétrico generalizado de Tipo III entonces existe una familia de representaciones de cuadrado integrable de* G *que admite restricción admisible a* H. *Dicha familia de representaciones esta asociada a un sistema de raíces positivas de* $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ *que no es holomorfo ni antiholomorfo.*

Además para cada par simétrico Hermitiano simple (G, K), determinamos condiciones suficientes sobre los conjuntos de raíces positivas de $\mathfrak{g}$, de modo que las representaciones de cuadrado integrable e irreducibles de G asociadas a dichos sistemas de raíces no admitan restricción admisible al factor semisimple K_{ss} de K. Para ello en cada caso establecimos subconjuntos de raíces no compactas I e $\tilde{I}$, que se detallan en la Tabla 4, y demostramos el siguiente

TEOREMA 4. *Las representaciones de cuadrado integrable e irreducibles de* G *asociadas a un sistema de raíces positivas de* $\mathfrak{g}$ *que contiene al conjunto de raíces no compactas* I *o al conjunto de raíces no compactas* $\tilde{I}$ *no admiten restricción admisible al factor semisimple* K_{ss} *de* K.

Notación y Preliminares

1. Notación y Definiciones

1.1. Sea G un grupo de Lie simple de tipo no compacto, conexo y con centro finito y sea K un subgrupo compacto maximal de G.

Sea (G, H) un par simétrico generalizado con H conexo, sea σ la involución de G asociada al subgrupo H y sea $\mathfrak{h}_0$ el álgebra de Lie de H. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\sigma\theta = \theta\sigma$, por lo tanto $L = (K \cap H)$ es un subgrupo maximal compacto de H y (K, L) es un par simétrico.

De ahora en más denotamos el álgebra de Lie de un grupo de Lie con la misma letra que este en minúscula y germana, con el subíndice cero si es real y a su complexificación sin subíndice.

Sea B un toro maximal de L, y sea $\Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{b})$ el conjunto de raíces asociado al par $(\mathfrak{l}, \mathfrak{b})$. Definimos T como el centralizador de B en K, por ser (K, L) un par simétrico, $\mathfrak{t}$ es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{k}$. Supongamos que

$$rango(G) = rango(K), \tag{1}$$

por lo tanto, $\mathfrak{t}$ también es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$. Si $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ denota el sistema de raíces de $\mathfrak{g}$ con respecto a $\mathfrak{t}$ y $\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ denota el sistema de raíces de $\mathfrak{k}$ con respecto a $\mathfrak{t}$ tenemos que

$$\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) \subset \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}).$$

Decimos que una raíz $\alpha \in \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ es **compacta** si el espacio raíz $\mathfrak{g}_\alpha$ correspondiente a α está contenido en $\mathfrak{k}$, y decimos que la raíz es **no compacta** si el espacio raíz $\mathfrak{g}_\alpha$ correspondiente a α está contenido en $\mathfrak{p}$. Al conjunto de raíces compactas los denotaremos $\Phi_c(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ y al conjunto de raíces no compactas $\Phi_n(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$.

Sea $\Delta = \Delta(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ un sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ que mantendremos fijo sujeto a condiciones que se destacarán. Se elige un subconjunto de raíces no compactas Ψ_n de modo que

$$\Psi = \Psi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) := \Delta \cup \Psi_n$$

es un sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$. La elección del subconjunto Ψ_n no es única, hay exactamente $\frac{|W_G|}{|W_K|}$, posibles elecciones, donde $|W_G|$ es el cardinal del grupo de Weyl de $\mathfrak{g}$ y $|W_K|$ es el cardinal del grupo de Weyl de $\mathfrak{k}$.

Dos raíces α, β ortogonales de un sistema de raíces abstracto Φ se dicen **fuertemente ortogonales** si son no proporcionales, y además $\alpha \pm \beta \notin \Phi$.

Sea S un subconjunto de un espacio vectorial, denotamos por $\langle S \rangle$ el subespacio lineal generado por S.

2. Criterio de Admisibilidad de Kobayashi

En esta sección presentamos un resumen de las nociones principales necesarias para enunciar el criterio de admisibilidad de Kobayashi **[Ko]** utilizado para demostrar los resultados enunciados en la Introducción.

2.1. Subálgebras Parabólicas. Sea $\mathfrak{t}$ una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$, sea $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ el sistema de raíces asociado al par $(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ y sea $\Psi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ un sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$.

Una **subálgebra de Borel** de $\mathfrak{g}$ es una subálgebra

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{n}, \quad \text{donde} \tag{2}$$

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in \Psi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})} \mathfrak{g}_\alpha \tag{3}$$

Cualquier subálgebra $\mathfrak{q}$ de $\mathfrak{g}$ que contiene una subálgebra de Borel se la denomina **Subálgebra Parabólica** de $\mathfrak{g}$.

Como $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{q}$ y los subespacios raíces son unidimensionales, $\mathfrak{q}$ es necesariamente de la forma

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} \mathfrak{g}_\alpha,$$

donde el subconjunto de raíces Γ satisface

$$\Psi(\mathfrak{g},\mathfrak{t}) \subseteq \Gamma \subseteq \Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t}).$$

Sea $-\Gamma$ el conjunto de los negativos de los elementos de Γ; definimos

$$\mathfrak{l} := \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Gamma \cap -\Gamma} \mathfrak{g}_\alpha \tag{4}$$

$$\mathfrak{u} := \bigoplus_{\alpha \in \Gamma,\, \alpha \notin -\Gamma} \mathfrak{g}_\alpha, \tag{5}$$

entonces

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}. \tag{6}$$

En esta descomposición de $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{l}$ es el *factor de Levi* y $\mathfrak{u}$ el *radical nilpotente.* Definimos el subconjunto de raíces

$$\Delta(\mathfrak{u}) := \{\alpha \in \Gamma : -\alpha \notin \Gamma\}$$

y sea

$$\delta(\mathfrak{u}) := \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{u})} \alpha.$$

Si B es la forma de Killing de $\mathfrak{g}$, sea $W_{\delta(\mathfrak{u})} \in \mathfrak{t}$ el elemento tal que

$$\delta(\mathfrak{u})(W) = B(W, W_{\delta(\mathfrak{u})})$$

para todo $W \in \mathfrak{t}$. Una demostración del siguiente hecho se encuentra en [**Knapp**].

Proposición 1. *Sea* $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$ *una subálgebra parabólica que contiene a* $\mathfrak{b}$. *Entonces el elemento* $W := W_{\delta(\mathfrak{u})}$ *de* $\mathfrak{t}$ *tiene la propiedad que todas las raíces toman valores reales en* W. *Además* $\mathfrak{u}$ *es la suma de los autoespacios de* $ad(W)$ *correspondientes a los autovalores positivos,* $\mathfrak{l} = Z_{\mathfrak{g}}(W)$ *es el autoespacio de* $ad(W)$ *correspondiente al autovalor nulo.*

2.2. $(\mathfrak{g}, K)-$**módulos.**

Definición 2. *(Lepowsky) Un* $(\mathfrak{g}, K)$*-módulo es un par* (π, V) *con* V *un espacio vectorial complejo y* π *una aplicación*

$$\pi : \mathfrak{g} \cup K \to End(V)$$

que satisface:

(a) $\pi|_{\mathfrak{g}}$ *es una representación de álgebra de Lie y* $\pi|_K$ *es una representación de grupo.*
(b) $\pi(k)\pi(X)v = \pi(Ad(k)X)\pi(k)v$ *para todo* $v \in V$, $k \in K$, $X \in \mathfrak{g}$.
(c) Si $v \in V$ *entonces* $\dim(\langle \pi(K)v \rangle_{\mathbb{C}})$ *es finita.*
(d) Si $Y \in \mathfrak{k}$ *y* $v \in V$ *entonces*

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\, \pi(\exp(tY))v = \pi(Y)v.$$

Denotamos por $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, K)$ a la categoría de los $(\mathfrak{g}, K)$-módulos. Si V, $W \in \mathcal{C}(\mathfrak{g}, K)$ denotamos por $Hom_{\mathfrak{g},K}(V, W)$ al espacio de todos los $\mathfrak{g}$-homomorfismos que además son K-homomorfismo de V en W.

2.3. Los módulos $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$**.** Sea M un subgrupo cerrado de K. Si V es un $(\mathfrak{g}, M)$-módulo, sea

$$C^j(\mathfrak{g}, M, V) := Hom_M(\Lambda^j(\mathfrak{g}/\mathfrak{m}); V), \quad \text{y} \tag{7}$$

$$d : C^j(\mathfrak{g}, M, V) \longrightarrow C^{j+1}(\mathfrak{g}, M, V) \tag{8}$$

definida por:

$$\begin{aligned} d\beta(\overline{X_0}, ..., \overline{X_j}) := \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \overline{X_0}\, \beta(\overline{X_0}, ..., \widehat{\overline{X_k}}, ..., \overline{X_j}) \\ + \sum_{r<s} (-1)^{r+s} \beta(\overline{[X_r, X_s]}, ..., \widehat{\overline{X_r}}, ..., \widehat{\overline{X_s}}, ..., \overline{X_j}), \end{aligned} \tag{8.1}$$

para $\beta \in C^j(\mathfrak{g}, M, V)$ y $\overline{X_k} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{m}$, $1 \le k \le j$.

Denotemos por

$$H^j(\mathfrak{g}, M, V) := \frac{\ker(d : C^j(\mathfrak{g}, M, V) \to C^{j+1}(\mathfrak{g}, M, V))}{Im(d : C^{j-1}(\mathfrak{g}, M, V) \to C^j(\mathfrak{g}, M, V))} \tag{9}$$

a la cohomología de este complejo.

Sean $U, V \in \mathcal{C}(\mathfrak{g}, M)$ y supongamos que $T \in Hom_{\mathfrak{g},M}(U, V)$, entonces T induce a una aplicación lineal

$$T : C^j(\mathfrak{g}, M, U) \longrightarrow C^j(\mathfrak{g}, M, V)$$

definida por $T(\beta) := T \circ \beta$. De (8.1) se deduce que $d \circ T = T \circ d$. Por lo tanto T induce una aplicación lineal

$$H^j[T] : H^j(\mathfrak{g}, M, U) \longrightarrow H^j(\mathfrak{g}, M, V). \tag{10}$$

Sea K un subgrupo compacto maximal de G, y sea

$$\begin{aligned} H(K) : &= \{f \in C^\infty(K) : dim_{\mathbb{C}}\langle L_K f\rangle < \infty\} \\ &= \{f \in C^\infty(K) : dim_{\mathbb{C}}\langle R_K f\rangle < \infty\} \end{aligned}$$

donde $L_k f(x) = f(k^{-1}x)$ y $R_k f(x) = f(xk)$, para $k, x \in K$, son las traslaciones a izquierda y a derecha respectivamente, las cuales le dan al conjunto $H(K)$ dos estructuras diferente de K-módulo.

Sea V es un espacio vectorial complejo, denotemos

$$C^\infty(K; V) := \{f : K \to V : \langle f(K)\rangle_{\mathbb{C}} \subset W, dim(W) < \infty \text{ y } f : K \to W \text{ suave}\}.$$

En $C^\infty(K; V)$, K también actúa mediante las acciones, L_k y R_k definidas anteriormente. Sea $H(K, V)$ el subconjunto de $C^\infty(K; V)$ definido por

$$H(K, V) := \{f \in C^\infty(K; V) : dim_{\mathbb{C}}(\langle L_K f\rangle) < \infty \text{ y } dim_{\mathbb{C}}(\langle R_K f\rangle) < \infty\}.$$

Sea $(\pi, V) \in \mathcal{C}(\mathfrak{k}, M)$, para $v \in V$ y $f \in H(K)$ definimos

$$L_V : V \otimes H(K) \longrightarrow H(K; V), \text{ dada por}$$

$$L_V(v \otimes f)(k) = f(k)\pi(k^{-1})v.$$

Podemos pensar a $V \otimes H(K)$ como $(\mathfrak{k}, M)$-módulo mediante la acción $(\pi \otimes L)$ definida por

$$\begin{aligned} (\pi \otimes L)(m)(v \otimes f) &:= \pi(m)v \otimes L_m f, \ \ m \in M, \\ (\pi \otimes L)(X)(v \otimes f) &:= \pi(X)v \otimes f + v \otimes L_X f, \ \ X \in \mathfrak{k}. \end{aligned}$$

La aplicación $(I \otimes R_X) : V \otimes H(K) \to V \otimes H(K)$ conmuta con la estructura de $(\mathfrak{k}, M)$-módulo dada por $(\pi \otimes L)$. Por lo tanto $(I \otimes R_X)$ induce una aplicación

$$H^i[I \otimes R_X] : H^i(\mathfrak{k}, M, V \otimes H(K)) \to H^i(\mathfrak{k}, M, V \otimes H(K)).$$

La aplicación $X \to H^i[I \otimes R_X]$, es una representación de $\mathfrak{k}$ en $H^i(\mathfrak{k}, M, V \otimes H(K))$. Por lo tanto

$$(H^i[I \otimes R_*], H^i(\mathfrak{k}, M, V \otimes H(K)))$$

es un K-módulo.

Supongamos ahora que (π_V, V) es un $(\mathfrak{g}, M)$-módulo, a través de esta estructura definimos la siguiente estructura de $\mathfrak{g}$-módulo en $C^i(\mathfrak{g}, M, V \otimes H(K))$

$$(X * w)(z)(k) := \pi_V(Ad(k)X)(w(z)(k)),$$

donde $X \in \mathfrak{g}$, $w \in Hom_M(\Lambda^i(\mathfrak{k}/\mathfrak{m}), V \otimes H(K))$, $z \in \Lambda^i(\mathfrak{k}/\mathfrak{m})$ y $k \in K$.

El siguiente resultado se puede encontrar en [**Wall**]

Teorema 5 (Duflo - Vergne).

$$X * \beta = (I \otimes R_X)(\beta) + d\varphi_\beta$$

Lo cual implica que en la cohomología

$$[X * \beta] = H^i[I \otimes R_X]([\beta]).$$

Por lo tanto $(H^i[I \otimes R], H^i(\mathfrak{k}, M, V \otimes H(K)))$ es un $(\mathfrak{g}, K)$-módulo.

2.4. Dada (τ, V) una representación de $\mathfrak{l}$, podemos construir un $\mathfrak{g}-$módulo de la siguiente manera: Extendemos la representación τ a una representación de $\mathfrak{q}$ en V, haciendo actuar a τ trivialmente en $\mathfrak{u}$; es decir

$$\tau(X + Y)v = \tau(X)v, \ \forall X \in \mathfrak{l}, \ Y \in \mathfrak{u}.$$

Pensamos a $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} V$ como $\mathfrak{g}$-módulo con la siguiente estructura

$$X(D \otimes v) = XD \otimes v, \ X \in \mathfrak{g}, D \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}), v \in V,$$

sea $\mathcal{A}$ el $\mathfrak{g}$-submódulo dado por

$$\mathcal{A} := \langle \{DY \otimes v - D \otimes \tau(Y)v, \ D \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}), \ v \in V, \ Y \in \mathfrak{q}\} \rangle_{\mathbb{C}}.$$

Definimos

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{q})} V := \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} V/\mathcal{A}, \tag{11}$$

como $\mathcal{A}$ es un $\mathfrak{g}$-submódulo, $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{q})} V$ es un $\mathfrak{g}$-módulo con la estructura cociente.

Dado $(\lambda, V) \in \mathcal{C}(\mathfrak{l}, L \cap K)$, el $\mathfrak{g}$-módulo $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{q})} V$ tiene una estructura de $(\mathfrak{g}, L \cap K)$-módulo dada por las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned} \pi(X)(\overline{D \otimes v}) &= \overline{XD \otimes v} \ \text{ si } X \in \mathfrak{g}, \\ \pi(l)(\overline{D \otimes v}) &= \overline{Ad(l)D \otimes \lambda(l)v} \ \text{ si } l \in L \cap K. \end{aligned}$$

2.5. Si $(\lambda, \mathbb{C}_\lambda)$ es una representación unidimensional de L, de acuerdo con la contrucción anterior, $(\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{q})} \mathbb{C}_\lambda, \pi)$ es un $(\mathfrak{g}, L \cap K)$-módulo, y

$$\Gamma^i(\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{q})} \mathbb{C}_\lambda) := H^i(\mathfrak{k}, L \cap K, (H(K) \otimes (\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{q})} \mathbb{C}_\lambda)),$$

es un $(\mathfrak{g}, K)$-módulo. Si $S = \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{k})$ y $n \neq S$ por Corolario 11.219 de **[K-V]**

$$\Gamma^n(\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{q})} \mathbb{C}_\lambda) = 0$$

y si $n = S$ definimos

$$A_{\mathfrak{q}}(\lambda) := \Gamma^S(\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{q})} \mathbb{C}_\lambda). \tag{12}$$

Tomemos una subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}^c \subset \mathfrak{l}$. Entonces $\mathfrak{h}^c$ contiene el centro $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{l}$ y $\mathfrak{t}^c := \mathfrak{h}^c \cap \mathfrak{k}$ es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{k}$. $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ tiene carácter $Z(\mathfrak{g})$ infinitesimal $\gamma := \lambda + \rho \in (\mathfrak{h}^c)^*$ en la parametrización de Harish Chandra, donde $\rho := \rho(\mathfrak{u}) + \rho_{\mathfrak{l}}$ y $\rho_{\mathfrak{l}}$ es la semisuma de raíces positivas de $\mathfrak{l}$.

Definición 3. *Diremos que λ está* **bien clasificada (o “in good range”)** *si*

$$Re\langle \gamma, \alpha \rangle > 0 \ \ \textit{para toda } \alpha \in \Phi(\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}^c_{\mathbb{C}}), \tag{13}$$

y **justamente clasificada (o “in fair range”)** *si*

$$Re\langle \gamma|_{\mathfrak{z}_{\mathbb{C}}}, \alpha \rangle > 0 \ \ \textit{para toda } \alpha \in \Phi(\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}^c_{\mathbb{C}}). \tag{14}$$

Y diremos débilmente bien clasificada (o débilmente justamente clasificada respectivamente) si las desigualdades débiles se mantienen.

Los siguientes resultados sobre el $(\mathfrak{g}, K)-$módulo $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ son importantes, las demostraciones de ellos se encuentran en **[K-V]**

Teorema 6. *Si λ está bien clasificada, entonces el $(\mathfrak{g}, K)$-módulo $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ es irreducible.*

Denotamos $\overline{A_{\mathfrak{q}}(\lambda)}$ a la representación de G obtenida de la completación de Hilbert de $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ con respecto a la estructura pre Hilbert de (12).

Teorema 7. *El subgrupo L es compacto si y sólo si $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ es una serie discreta. Más aún toda serie discreta es equivalente a $A_{\mathfrak{b}}(\lambda)$ con λ en good range y variando $\mathfrak{b}$ en el conjunto de subconjuntos de Borel que contienen a $\mathfrak{t}$.*

2.6. Restricción con respecto a un par simétrico. Estamos en condiciones de enunciar el criterio de admisibilidad de Kobayashi de las restricciones de $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ con respecto a un subgrupo conexo H tal que (G, H) es un par simétrico generalizado.

Sea σ el automorfismo del grupo G asociado par simétrico (G, H). Denotemos a la diferencial del automorfismo σ y a su complexificación nuevamente con la letra σ. Sea

$$\mathfrak{g}_0^{-\sigma} := \{X \in \mathfrak{g}_0 : \sigma X = -X\}, \ \text{ y} \tag{15}$$

$$\mathfrak{k}_0^{-\sigma} := \mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{g}_0^{-\sigma}. \tag{16}$$

Fijemos una subálgebra de Cartan ${\mathfrak{t}^{\mathfrak{c}}}_0$ de $\mathfrak{k}$ tal que satisface la siguiente condición:

$$(\mathfrak{t}^{\mathfrak{c}})_0^{-\sigma} := {\mathfrak{t}^{\mathfrak{c}}}_0 \cap \mathfrak{k}_0^{-\sigma} \tag{17}$$

es un subespacio abeliano maximal de $\mathfrak{k}_0^{-\sigma}$.

Fijemos sistemas de raíces positivas compatibles $\Delta(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}^{\mathfrak{c}})$ y $\Sigma^+(\mathfrak{k}, (\mathfrak{t}^{\mathfrak{c}})^{-\sigma})$, de $\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}^c)$ y $\Phi(\mathfrak{k}, (\mathfrak{t}^c)^{-\sigma})$, es decir

$$\{\alpha_{|(\mathfrak{t}^{\mathfrak{c}})^{-\sigma}} : \alpha \in \Delta^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}^{\mathfrak{c}})\} - \{0\} \supseteq \Sigma^+(\mathfrak{k}, (\mathfrak{t}^{\mathfrak{c}})^{-\sigma}).$$

Sea $\mathfrak{q}$ una subálgebra parabólica estable por la involución de Cartan θ asociada al par (G, K), por Proposición 1

$$\mathfrak{q} \equiv \mathfrak{q}_W = \mathfrak{l}_W \oplus \mathfrak{u}_W,$$

donde $W \in i(\mathfrak{t} \cap \mathfrak{p})$, $\mathfrak{l}_W$ es el autoespacio de $ad(W)$ corespondiente al autovalor cero y $\mathfrak{u}_W$ es la suma de los autoespacios de $ad(W)$ correspondientes a los autovalores positivos. Sea $L := Z_G(W) \subseteq G$, subgrupo analítico, θ-estable, con álgebra de Lie $(\mathfrak{l}_W)_0 := \mathfrak{l}_W \cap \mathfrak{g}$. Entonces el subgrupo $L \cap K$ es un subgrupo compacto maximal de L.

Por último definamos el cono cerrado en $i(\mathfrak{t}^{\mathfrak{c}})^*$ dado por **[Ko]**

$$\mathbb{R}^+\langle \mathfrak{u} \cap \mathfrak{p} \rangle := \left\{ \sum_{\beta \in \Phi(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}, \mathfrak{t}^c)} n_\beta \beta : n_\beta \geq 0 \right\}.$$

TEOREMA 8. **Criterio de Kobayashi** *Supongamos que* (G, H) *es un par simétrico reductivo y que* $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} + \mathfrak{u}$ *es una subálgebra parabólica* θ*-estable definida por un elemento dominante de* $i(\mathfrak{t}^c)^*$. *Sea* $\mathbb{C}_\lambda$ *un carácter infinitesimal de* L *y* $\overline{A_{\mathfrak{q}}(\lambda)}$ *la representación unitaria de* G *obtenida por la completación de Hilbert de un* $(\mathfrak{g}, K)$*-módulo* $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$. *Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\overline{A_{\mathfrak{q}}(\lambda)}|_{H \cap K}$ *es* $H \cap K$*-admisible para cualquier* $\mathbb{C}_\lambda$ *débilmente bien clasificada.*

(ii) $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ *es discretamente descomponible como* $(\mathfrak{h}, H \cap K)$*-módulo para cualquier* $\mathbb{C}_\lambda$ *débilmente bien clasificada.*

(iii) $\mathbb{R}^+\langle \mathfrak{u} \cap \mathfrak{p} \rangle \cap i((\mathfrak{t}^{\mathfrak{c}})^{-\sigma})^* = 0$.

Demostración del Teorema 1 y del Teorema 2.

En este capítulo utilizamos el criterio de Kobayashi enunciado en el Teorema 8 para demostrar el Teorema 1 a través de la siguiente

Proposición 4. *Si G y K son grupos simples y rango$(\mathfrak{l})$ = rango$(\mathfrak{k})$, entonces existe un subconjunto $S \subset [(\Phi(\mathfrak{k},\mathfrak{t}) - \Phi(\mathfrak{l},\mathfrak{t})) \cap \Delta]$ fuertemente ortogonal cuyo cardinal es rango(K/L) tal que*
(i)$\{\alpha_{|\langle S\rangle} \neq 0 : \alpha \in \Delta\}$ es un sistema de raíces restringidas positivas en $\Phi(\mathfrak{k},\langle S\rangle)$.
(ii) $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle \neq 0$ para todo sistema de raíces positivas Ψ de $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ que contiene Δ.

Para utilizar la Proposición 4 para demostrar el Teorema 1 necesitamos recordar nociones básicas de la transformación de Cayley. Las demostraciones de los hechos que se utilizarán se encuentran en **[Knapp]**.

2.7. Supongamos que *rango*$(\mathfrak{l})$ = *rango*$(\mathfrak{k})$. Sea $\mathfrak{t}_0 \subset \mathfrak{l}_0$ una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{k}_0$. A partir de $\mathfrak{t}_0$ construimos otra subálgebra de Cartan $\mathfrak{t}_0^c$ de $\mathfrak{k}_0$, invariante por σ la involución asociada al par (G,H), de modo que $(\mathfrak{t}_0^c)^{-\sigma} := \mathfrak{t}_0^c \cap \mathfrak{k}_0^{-\sigma}$ es un subespacio abeliano maximal de $\mathfrak{k}_0^{-\sigma}$. Es decir una subálgebra de Cartan que satisfase (17).

Denotemos la conjugación en $\mathfrak{g}$ con respecto a $\mathfrak{g}_0$ por $X \to \overline{X}$, dicha conjugación y la involución σ asociada a H conmutan.

Como θ es una involución de Cartan de $\mathfrak{g}_0$, por definición

$$B_\theta(X,Y) = -B(X,\theta Y)$$

es una forma bilineal simétrica definida positiva. Extendemos el producto interno B_θ a un producto interno Hermitiano sobre $\mathfrak{g}$ definido por

$$B_\theta(Z_1,Z_2) = -B(Z_1,\overline{\theta Z_2}).$$

Para cada raíz $\alpha \in \Phi(\mathfrak{k},\mathfrak{t})$ sea $E_\alpha \in \mathfrak{k}_\alpha$, un vector raíz no nulo. Como $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{l}$ tenemos que

$$\begin{aligned} [H,\theta E_\alpha] &= \alpha(H)\,\theta E_\alpha, \\ [H,\sigma E_\alpha] &= \alpha(H)\,\sigma E_\alpha. \end{aligned}$$

Por tanto $\mathfrak{k}_\alpha$ es θ-estable y σ-estable. Como $\dim(\mathfrak{k}_\alpha) = 1$ entonces $\mathfrak{k}_\alpha \subseteq \mathfrak{l}$ o $\mathfrak{k}_\alpha \subseteq \mathfrak{l}^\perp$. Diremos que una raíz $\alpha \in \Phi(\mathfrak{k},\mathfrak{t})$ es $\mathfrak{l}-$**compacta** si $\mathfrak{k}_\alpha \subseteq \mathfrak{l}$ y $\mathfrak{l}-$**no compacta** si $\mathfrak{k}_\alpha \subseteq \mathfrak{l}^\perp$.

A partir de la subálgebra de Cartan $\mathfrak{t}_0$ y una raíz $\mathfrak{l}-$no compacta β construimos una subálgebra de Cartan $(\mathfrak{t}_1)_0$ tal que $\dim((\mathfrak{t}_1)_0 \cap \mathfrak{k}_0^{-\sigma}) = 1$. Sea $E_\beta \in \mathfrak{k}_\beta$ un vector raíz no nulo, entonces $\overline{E_\beta} \in \mathfrak{k}_{-\beta}$.

Como B_θ es un producto interno tenemos que

$$0 < B_\theta(E_\beta, E_\beta) = -B(E_\beta, \overline{\theta E_\beta}) = B(E_\beta, -\overline{E_\beta}).$$

Entonces normalizamos el vector E_β y fijamos $H_\beta \in i\mathfrak{t}_0$ de manera que

$$[E_\beta, -\overline{E_\beta}] = H_\beta \quad [H_\beta, E_\beta] = 2E_\beta, \quad [H_\beta, -\overline{E_\beta}] = 2\overline{E_\beta}.$$

Cada terna $\{E_\beta, -\overline{E_\beta}, H_\beta\}$ genera una subalgebra de Lie de $\mathfrak{k}$, isomorfa $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ la cual es la complexificacion de una subalgebra $s_\beta \subseteq \mathfrak{k}_0$, isomorfa a $\mathfrak{su}(2)$.

Notemos que el elemento $(-E_\beta - \overline{E_\beta})$ es fijado por la conjugación y por lo tanto pertenece a $\mathfrak{k}_0$. Definimos la transformada de Cayley correspondiente a una raíz $\mathfrak{l}-$no compacta β, como el automorfismo

$$c_\beta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \text{ dado por} \tag{18}$$

$$c_\beta = Ad(\exp \frac{\pi}{4}(-\overline{E_\beta} - E_\beta)) \tag{19}$$

Como consecuencia directa de la definición tenemos las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
\overline{c_\beta} &= c_\beta^{-1}, \\
c_\beta(X) &= X, \text{ para } \{X \in \mathfrak{t}_\mathbb{C} : \beta(X) = 0\}, \\
c_\beta(\mathfrak{k}_\mathbb{C}) &= \mathfrak{k}_\mathbb{C}, \\
c_\beta(\mathfrak{p}_\mathbb{C}) &= \mathfrak{p}_\mathbb{C},
\end{aligned}$$

pues $(-E_\beta - \overline{E_\beta}) \in \mathfrak{k}$ y además

$$\begin{aligned}
c_\beta(H_\beta) &= E_\beta - \overline{E_\beta} \\
c_\beta(E_\beta + \overline{E_\beta}) &= E_\beta + \overline{E_\beta} \\
c_\beta(E_\beta - \overline{E_\beta}) &= H_\beta
\end{aligned}$$

Si definimos

$$\mathfrak{t}_1 := c_\beta(\mathfrak{t}) \text{ entonces}$$

$$(\mathfrak{t}_1)_0 = c_\beta(\mathfrak{t}) \cap \mathfrak{g}_0 = \ker \beta_{|\mathfrak{t}_0} \oplus i\mathbb{R}(E_\beta - \overline{E_\beta})$$

es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{k}_0$ cuya intersección con $\mathfrak{k}_0^{-\sigma}$ a aumentado en una dimensión con respecto a $\mathfrak{t}_0$.

Si α, β son dos raíces fuertemente ortogonales entonces $[s_\alpha, s_\beta] = 0$, por lo tanto

$$c_\alpha c_\beta = c_\beta c_\alpha. \tag{20}$$

Si S es un conjunto formado por raíces $\mathfrak{l}$-no compactas fuertemente ortogonales dos a dos, entonces

$$c_S = \prod_{\alpha \in S} c_\alpha \tag{21}$$

esta bien definido por (20). La subálgebra de Cartan

$$\mathfrak{t}_S := c_S \mathfrak{t}$$

de $\mathfrak{k}$ es preservada por la conjugación y además

$$\begin{aligned}(\mathfrak{t}_{S0})_+ &= \{X \in \mathfrak{k} : \alpha(X) = 0 \text{ para toda } \alpha \in S\} \\ &= \bigcap_{\alpha \in S} \ker \alpha, \\ (\mathfrak{t}_{S0})_- &= \bigoplus_{\alpha \in S} i\mathbb{R}(E_\alpha - \overline{E_\alpha}) = i\, c_S(\langle S \rangle),\end{aligned}$$

lo cual implica

$$\dim((\mathfrak{t}_S)_0 \cap \mathfrak{k}_0^{-\sigma}) = |S|.$$

Por lo tanto a partir de una subálgebra de Cartan $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{l}$ de $\mathfrak{k}$ y un conjunto S de raíces $\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}-$no compactas fuertemente ortogonales dos a dos, y de cardinal igual al $rango(K/L)$ hemos construido una subálgebra de Cartan $\mathfrak{t}^{\mathfrak{c}} := \mathfrak{t}_S$ tal que $(\mathfrak{t}^{\mathfrak{c}})^{-\sigma}$ es un subespacio abeliano maximal de $\mathfrak{k}^{-\sigma}$, es decir que satisface (17).

2.8. De la lista de los pares simétricos (G, K) y los pares simétricos generalizados (G, H) tales que G y K son simples, y G y H admiten representaciones de cuadrado integrable y de la lista de los pares (L, K) tal que L es un subgrupo maximal de K (ver lista de pares simétricos **[HE]** Tabla V, página 518), surge que

$$rango\, \mathfrak{l} = rango\, \mathfrak{k}.$$

Es decir si $\mathfrak{t}$ es una subálgera de Cartan de $\mathfrak{l}$, bajo estas hipótesis $\mathfrak{t}$ es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{k}$, y también de $\mathfrak{g}$ por (1). Por lo tanto tenemos

$$\Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{t}) \subset \Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) \subset \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}).$$

La Proposición 4 implica que existe $S \subset (\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) - \Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{t})) \cap \Delta$ fuertemente ortogonal cuyo cardinal es el $rango(K/L)$, por lo tanto la subálgebra de Cartan

$$(\mathfrak{t}^c) = \mathfrak{t}_S = c_\beta(\mathfrak{t})$$

es σ-invariante y además $(\mathfrak{t}_S)_{\mathbb{C}}^{-\sigma}$ es un subespacio abeliano maximal de $\mathfrak{k}^{-\sigma}$. En esta subálgebra de Cartan podemos aplicar el criterio de admisibilidad de Kobayashi (Teorema 8).

Para ello fijamos $\Delta(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ un sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ y definimos

$$\Delta(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}^{\mathfrak{c}}) := c_S(\Delta(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})) \text{ y}$$
$$\Sigma^+(\mathfrak{k}, (\mathfrak{t}^{\mathfrak{c}})^{-\sigma}) := c_S(\{\alpha \in \Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) : \alpha|_{\langle S \rangle} \neq 0\}).$$

Por (i) de la Proposición 4, los sistemas de raíces $\Delta(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}^{\mathfrak{c}})$ y $\Sigma^+(\mathfrak{k}, (\mathfrak{t}^{\mathfrak{c}})^{-\sigma})$ son sistema de raíces compatibles de $\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}^{\mathfrak{c}})$y $\Phi(\mathfrak{k}, (\mathfrak{t}^{\mathfrak{c}})^{-\sigma})$ respectivamente. Cada sistema raíces positivas $\Psi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}^c)$ de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}^c)$ que contiene a $\Delta(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}^c)$ es de la forma $c_S(\Psi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}))$, donde $\Psi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ es un sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ que contiene a $\Delta(\mathfrak{k},\mathfrak{t})$. Entonces por (ii) de la Proposición 4

$$\mathbb{R}^+\langle \mathfrak{u}\cap\mathfrak{p}\rangle \cap i((\mathfrak{t}^c)^{-\sigma})^* = \mathbb{R}^+\Psi_n(\mathfrak{g},\mathfrak{t}^{\mathfrak{c}})\cap i((\mathfrak{t}^c)^{-\sigma})^* = c_S(\mathbb{R}^+\Psi_n(\mathfrak{g},\mathfrak{t})\cap\langle S\rangle)\neq 0$$

para todo $\mathfrak{u}$, esto concluye la demostración del Teorema 1 a partir de la Proposición 4.

Demostración del Teorema 2 y de la Proposición 4

En este Capítulo demostramos la Proposición 4 y además verificamos que la misma es válida también para L subgrupo maximal de K tal que $rango(L) = rango(K)$.

De la lista de los pares (L, K) tal que K es un subgrupo compacto simple, clásico y L es un subgrupo maximal de K y de igual rango, surge que el par (L, K) es un par simétrico, entonces por el criterio de Kobayashi, verificar que la Proposición 4 es válida en estos casos, es equivalente a demostrar el Teorema 2.

Para la demostración de la Proposición 4 recurrimos a la clasificación de los pares simétricos (G, K) dada por Cartan, a la clasificación de los pares simétricos generalizados (G, H) obtenida por Berger y a la clasifición de los pares (K, L) tal que L es un subgrupo maximal de K y de igual rango. Referencias de dichas clasificaciones son **[HE]** y **[HU]**. Los casos que se desprenden de estas clasificaciones son los siguientes:

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{k}$	$\mathfrak{h}$	$\mathfrak{l} = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}$
$\mathfrak{so}(2n, 1)$	$\mathfrak{so}(2n)$	$\mathfrak{so}(2r) \oplus \mathfrak{so}(2n-2r, 1)$	$\mathfrak{so}(2r) \oplus \mathfrak{so}(2n-2r)$
$\mathfrak{f}_{4(-20)}$	$\mathfrak{so}(9)$	$\mathfrak{so}(8, 1)$	$\mathfrak{so}(8)$
		$\mathfrak{sp}(2, 1) \oplus \mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{so}(5) \oplus \mathfrak{so}(4)$
$\mathfrak{e}_{7(7)}$	$\mathfrak{su}(8)$	$\mathfrak{so}(6, 6) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(6) \oplus \mathfrak{so}(6) \oplus \mathbb{R}$
		$\mathfrak{su}(4, 4)$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(4) \oplus \mathfrak{u}(4))$
		$\mathfrak{so}^*(12) \oplus \mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{su}(6) \oplus \mathfrak{su}(2)$
		$\mathfrak{e}_{6(2)} \oplus \mathbb{R}$	$\mathfrak{su}(6) \oplus \mathfrak{su}(2)) \oplus \mathbb{R}$
$\mathfrak{e}_{8(8)}$	$\mathfrak{so}(16)$	$\mathfrak{so}(8, 8)$	$\mathfrak{so}(8) \oplus \mathfrak{so}(8)$
		$\mathfrak{so}^*(16)$	$\mathfrak{u}(8)$
		$\mathfrak{e}_{7(7)} \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$	$\mathfrak{u}(8)$
		$\mathfrak{e}_{7(-5)} \oplus \mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{so}(12) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$

Tabla 1

Y los pares (K, L) tal que L es un subgrupo maximal de K no contemplados en los casos anteriores tal que $rango(L) = rango(K)$ son

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{k}$	$\mathfrak{l}$
$\mathfrak{so}(2n,1)$	$\mathfrak{so}(2n)$	$\mathfrak{u}(n)$
$\mathfrak{f}_{4(-20)}$	$\mathfrak{so}(9)$	$\mathfrak{so}(7)\oplus\mathfrak{so}(2)$ $\mathfrak{so}(6)\oplus\mathfrak{so}(3)$
$\mathfrak{e}_{7(7)}$	$\mathfrak{su}(8)$	$\mathfrak{su}(5)\oplus\mathfrak{su}(3)$ $\mathfrak{su}(7)\oplus\mathfrak{su}(1)$

Tabla 2

En cada uno de los casos que figuran en las tablas anteriores procedemos de la siguiente manera: Determinados los sistemas de raíces

$$\Phi(\mathfrak{l},\mathfrak{t})\subset\Phi(\mathfrak{k},\mathfrak{t})\subset\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t}),$$

y fijamos un sistema de raíces positivas $\Delta(\mathfrak{k},\mathfrak{t})$ de $\Phi(\mathfrak{k},\mathfrak{t})$. Por un lado construimos un subconjunto $S\subset(\Phi(\mathfrak{k},\mathfrak{t})-\Phi(\mathfrak{l},\mathfrak{t})\cap\Delta$ de raíces fuertemente ortogonales dos a dos, cuyo cardinal es *rango*(K/L), de manera que exista un elemento $v\in\langle S\rangle$ tal que $\langle\alpha,v\rangle\geq 0$ para toda raíz $\alpha\in\Delta$, lo cual equivale a la condición (i) en la Proposición 4, a saber $\{\alpha|_{\langle S\rangle}:\alpha\in\Delta\}$ es un sistema de raíces positivas para $\Phi(\mathfrak{k},\langle S\rangle)$. Por otro lado, determinamos explícitamente raíces no compactas de $\Phi(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$ que son combinaciones lineales de elementos de $\Delta(\mathfrak{k},\mathfrak{t})$ con coeficientes racionales positivos, tales que el cono cerrado generado por las mismas tenga intesección no nula con el subespacio $\langle S\rangle$ de $i\mathfrak{t}^*$ generado por S. Por Observación 4 dichas raíces no compactas pertenecen a $\Psi_n(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ para todo sistema de raíces positivas de $\Psi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ de $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ que contiene a $\Delta(\mathfrak{k},\mathfrak{t})$.

Observación 5. *Sea $\Psi\subset\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ un sistema de raíces positivas y $\Pi=\{\alpha_1,...,\alpha_l\}\subseteq\Psi$ su sistema de raíces simples. Si $\beta\in\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ entonces $\beta\in\Psi$ si y sólo si $\beta=\sum_{i=1}^{l}n_i\alpha_i$ y $n_i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, para todo i.*

Observación 6. *Sean $\gamma_1,...,\gamma_r$ raíces positivas y $n_1,...,n_r$ numeros reales positivos, de modo que $\gamma=\sum_{i=1}^{r}n_i\gamma_i\in\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$, entonces γ es una raíz positiva.*

Como γ_i es una raíz positiva para todo i entonces existen enteros $m_{ik}\geq 0$ tal que $\gamma_i=\sum_{k=1}^{l}m_{ik}\alpha_k$, como

$$\gamma=\sum_{i=1}^{r}n_i\gamma_i=\sum_{i=1}^{r}n_i(\sum_{k=1}^{l}m_{ik}\alpha_k)=\sum_{k=1}^{l}(\sum_{i=1}^{r}n_im_{ik})\alpha_k.$$

Entonces por Teorema 2.49 del libro de [**Knapp**] $a_k:=(\sum_{i=1}^{r}n_im_{ik})$ es entero para todo k, y además todos los a_k tiene el mismo signo. Como por hipótesis n_j son positivos resulta que $\sum_{i=1}^{r}n_im_{ik}\geq 0$ para todo k, entonces γ es una raíz positiva.

Comencemos a analizar cada uno de los casos.

Caso $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n, 1)$.

Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n, 1)$, entonces $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(2n)$. Los sistemas de raíces de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{k}$ con respecto a $\mathfrak{t}$ son

$$\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) = \{\pm e_i \pm e_j,\ 1 \leq i < j \leq n\ \} \cup \{\pm e_i,\ 1 \leq i \leq n\},$$
$$\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) = \{\pm e_i \pm e_j,\ 1 \leq i < j \leq n\}.$$

respectivamente.

Por lo tanto el conjunto de las raíces no compactas de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ es

$$\Phi_n(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) = \{\pm e_i,\ 1 \leq i \leq n\}.$$

Fijemos Δ el sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$, definido por

$$\Delta = \{e_i \pm e_j,\ 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Si $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(2r) \oplus \mathfrak{so}(2(n-r), 1)$ entonces $\mathfrak{l} = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{so}(2r) \oplus \mathfrak{so}(2(n-r))$ para $1 \leq r \leq n$, y su sistema de raíces con respecto a $\mathfrak{t}$ es:

$$\Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{t}) = \{\pm e_i \pm e_j,\ 1 \leq i < j \leq r\} \cup \{\pm e_k \pm e_l,\ r+1 \leq k < l \leq n\}.$$

Definimos el conjunto S de raíces fuertemente ortogonales contenido en

$$(\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) - \Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{t})) \cap \Delta = \{e_i \pm e_k,\ 1 \leq i \leq r,\ r+1 \leq k \leq n\}$$

por:

$$(i)\ S = \{e_1 \pm e_n, e_2 \pm e_{n-1}, ..., e_r \pm e_{n-r+1}\}\ \text{ si } 2r \leq n, \text{ y}$$
$$(ii)\ S = \{e_1 \pm e_n, e_2 \pm e_{n-1}, ..., e_{n-r} \pm e_{r+1}\}\ \text{ si } n < 2r.$$

En ambos casos tenemos que

$$e_1 = \frac{1}{2}(e_1 + e_n) + \frac{1}{2}(e_1 - e_n) \in \langle S \rangle. \tag{22}$$

Notemos que $\langle e_1, \alpha \rangle \geq 0$ para toda raíz $\alpha \in \Delta$, por lo tanto se satisface la condición (i) de la Proposición 4.

Además como las raíces compactas $e_1 + e_n$, $e_1 - e_n \in \Delta$, por la Observación 6, la ecuación (22) implica que la raíz no compacta e_1 pertenece a todos los sistemas de raíces positivas Ψ de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ que contiene a Δ.

Por otro lado las raíces compactas $\{e_1 \pm e_n\} \subset \Delta$, por la Observación 6, la raíz no compacta $e_1 \in \Psi$ para todo sistema de raíces $\Psi = \Psi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ que contine a Δ. Por lo tanto

$$e_1 \in \mathbb{R}^+ \Psi_n \cap \langle S \rangle.$$

Como queríamos probar.

Si $L = SU(n)$, entonces L es un subgrupo maximal de K y del mismo rango. Además $\mathfrak{l} = \mathfrak{su}(n)$ y su sistema de raíces con respecto a $\mathfrak{t}$ esta dado por

$$\Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{t}) = \{\pm(e_i - e_j),\ 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Definamos el conjunto

$$S \subset (\Phi(\mathfrak{k},\mathfrak{t}) - \Phi(\mathfrak{l},\mathfrak{t})) \cap \Delta = \{(e_i + e_j),\ 1 \le i < j \le n\},$$

por

$$S = \left\{ e_1 + e_n, e_2 + e_{n-1}, ..., e_{[\frac{1}{2}n]} + e_{n-[\frac{1}{2}n]+1} \right\}.$$

Notemos que el cardinal de S es $\left[\frac{n}{2}\right]$, además

$$\gamma := e_1 + e_2 + ... + e_{[\frac{n}{2}]} + e_{n-[\frac{n}{2}]+1} + ... + e_{n-1} + e_n \in \langle S \rangle$$

y $\langle \gamma, \alpha \rangle \ge 0$ para toda raíz $\alpha \in \Delta$, por lo tanto se satisface la condición (i) de la Proposición 4.

Como $\{e_{[\frac{n}{2}]} \pm e_n,\ e_{n-[\frac{n}{2}]+1} \pm e_n\} \subset \Delta$, por Observación 6, las raíces no compactas

$$\begin{aligned} e_{[\frac{n}{2}]} &= \frac{1}{2}(e_{[\frac{n}{2}]} + e_n) + \frac{1}{2}(e_{[\frac{n}{2}]} - e_n), \\ e_{n-[\frac{n}{2}]+1} &= \frac{1}{2}(e_{n-[\frac{n}{2}]+1} + e_n) + \frac{1}{2}(e_{n-[\frac{n}{2}]+1} - e_n). \end{aligned}$$

pertenecen a todos los sistemas de raíces positivas $\Psi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ de $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ que contiene a Δ. Por lo tanto

$$\left(e_{[\frac{n}{2}]} + e_{n-[\frac{n}{2}]+1} \right) \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S \rangle.$$

Caso $\mathfrak{g} = \mathfrak{f}_{4(-20)}$.

Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{f}_{4(-20)}$, entonces $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(9)$. Los sistemas de raíces de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{k}$ con respecto a $\mathfrak{t}$ son

$$\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t}) = \{\pm e_i \pm e_j,\ 1 \le i < j \le 4\} \cup \{\pm e_i,\ 1 \le i \le 4\} \cup \{\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)\},\ \text{y}$$
$$\Phi(\mathfrak{k},\mathfrak{t}) = \{\pm e_i \pm e_j\ 1 \le i < j \le 4\} \cup \{\pm e_i,\ 1 \le i \le 4\},$$

respectivamente.

Por lo tanto el conjunto de las raíces no compactas de $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ es

$$\Phi_n(\mathfrak{g},\mathfrak{t}) = \{\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)\}.$$

Fijemos Δ el sistema de raíces positivas en $\Phi(\mathfrak{k},\mathfrak{t})$ definido por

$$\Delta = \{(e_i \pm e_j),\ 1 \le i < j \le 4\} \cup \{e_i,\ 1 \le i \le 4\}.$$

Si $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(8,1)$ entonces $\mathfrak{l} = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{so}(8)$, y su sistema de raíces con respecto a $\mathfrak{t}$ es

$$\Phi(\mathfrak{l},\mathfrak{t}) = \{\pm e_i \pm e_j,\ 1 \le i < j \le 4\}.$$

Definamos el conjunto $S \subset (\Phi(\mathfrak{k},\mathfrak{t}) - \Phi(\mathfrak{l},\mathfrak{t})) \cap \Delta = \{e_i,\ 1 \le i \le 4\}$ por

$$S = \{e_1\}.$$

Notemos que el cardinal de S es igual al $rango(K/L)$ y además $\langle e_1, \alpha\rangle \geq 0$ para toda raíz $\alpha \in \Delta$, se decir satisface el inciso (i) de la Proposición 4.

Como el conjunto $\{e_1 - e_2,\, e_1 - e_3,\, e_3 - e_4,\, e_2 + e_4\} \subset \Delta$, por Observación 6, las raíces no compactas

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{2}(e_1 - e_2) + \frac{1}{2}(e_3 - e_4) = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3 - e_4), \\ \gamma_2 &= \frac{1}{2}(e_1 - e_3) + \frac{1}{2}(e_2 + e_4) = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3 + e_4) \end{aligned}$$

pertenecen a todos los sistemas de raíces positivas Ψ, de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ que contiene a Δ. Por lo tanto

$$e_1 = \gamma_1 + \gamma_2 \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle\,.$$

Si $\mathfrak{l} = \mathfrak{so}(7) \oplus \mathfrak{so}(2)$, entonces L es un subgrupo maximal de K. El sistema de raíces de $\mathfrak{l}$ con respecto a $\mathfrak{t}$ es

$$\Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{t}) = \{\pm e_i \pm e_j,\, 2 \leq i < j \leq 4\} \cup \{\pm e_i,\, 2 \leq i \leq 4\}.$$

Definamos el conjunto

$$S \subset (\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) - \Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{t})) \cap \Delta = \{e_1 \pm e_i,\, 2 \leq i \leq 4\} \cup \{e_1\},$$

por

$$S = \{e_1 + e_4, e_1 - e_4\}\,.$$

Notemos que el cardinal de S es igual al $rango(K/L)$, que $e_1 = \frac{1}{2}(e_1 + e_4) + \frac{1}{2}(e_1 - e_4) \in \langle S\rangle$ y que $\langle e_1, \alpha\rangle \geq 0$ para toda raíz $\alpha \in \Delta$, es decir se satisface la condición (i) de la Proposición 4.

Como $\{e_1 - e_2, e_1 - e_3, e_2 + e_4, e_3 + e_4\} \subset \Delta$ por Observación 6 las raíces no compacta

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{2}(e_1 - e_3) + \frac{1}{2}(e_2 + e_4) \\ &= \frac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3 + e_4) \\ \gamma_2 &= \frac{1}{2}(e_1 - e_2) + \frac{1}{2}(e_3 + e_4) \\ &= \frac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3 + e_4) \end{aligned}$$

pertenecen a todos los sistemas de raíces positivas Ψ de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ que contienen a Δ. Por lo tanto

$$e_1 + e_4 = \gamma_1 + \gamma_2 \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle\,.$$

Como queríamos ver.

Si $\mathfrak{l} = \mathfrak{so}(6) \oplus \mathfrak{so}(3)$, entonces L es un subgrupo maximal de K y el sistema de raíces de $\mathfrak{l}$ con respecto a $\mathfrak{t}$ esta dado por

$$\Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{t}) = \{\pm e_i \pm e_j, 1 \leq i < j \leq 3\} \cup \{\pm e_4\}.$$

Definamos el conjunto

$$S \subset (\Phi(\mathfrak{k},\mathfrak{t}) - \Phi(\mathfrak{l},\mathfrak{t})) \cap \Delta = \{e_i \pm e_4,\ 1 \leq i \leq 3\} \cup \{e_i,\ 1 \leq i \leq 3\}$$

por

$$S = \{e_1, e_2 + e_4, e_2 - e_4\}$$

Notemos que el cardinal de S es igual al $rango(K/L)$, que $e_1 \in \langle S \rangle$ y que $\langle e_1, \alpha \rangle \geq 0$ para toda $\alpha \in \Delta$, es decir se satisface la condición (i) de la Proposición 4.

Como $\{e_1 + e_2, e_1 + e_4, e_2 - e_3, e_3 + e_4\} \subset \Delta$, por Observación 6 las raíces no compacta

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{2}(e_1 + e_2) + \frac{1}{2}(e_3 + e_4) \\ &= \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) \\ \gamma_2 &= \frac{1}{2}(e_1 + e_4) + \frac{1}{2}(e_2 - e_3) \\ &= \frac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3 + e_4) \end{aligned}$$

pertenecen a todo Ψ sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ que contiene a Δ. Por lo tanto

$$e_1 + e_2 + e_4 = \gamma_1 + \gamma_2 \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S \rangle .$$

Si $\mathfrak{h} = \mathfrak{sp}(2,1) \oplus \mathfrak{su}(2)$, entonces $\mathfrak{l} = \mathfrak{so}(5) \oplus \mathfrak{so}(4)$, y su sistema de raíces con respecto a $\mathfrak{t}$ es

$$\Phi(\mathfrak{l},\mathfrak{t}) = \{\pm e_1 \pm e_2\} \cup \{\pm e_3 \pm e_4\} \cup \{\pm e_i,\ 1 \leq i \leq 2\}.$$

Definimos el conjunto

$$\begin{aligned} S \subset (\Phi(\mathfrak{k},\mathfrak{t}) - \Phi(\mathfrak{l},\mathfrak{t})) \cap \Delta = \{e_i \pm e_j,\ 1 \leq i \leq 2,\ \text{y } 3 \leq j \leq 4\} \\ \cup \{e_i,\ 3 \leq i \leq 4\}. \end{aligned}$$

Notemos que el cardinal de S es igual al $rango(K/L)$, además

$$e_1 = \frac{1}{2}(e_1 + e_4) + \frac{1}{2}(e_1 - e_4) \in \langle S \rangle$$

y $\langle e_1, \alpha \rangle \geq 0$, para toda raíz $\alpha \in \Delta$, es decir, se satisface (i) de la Proposición 4.

Como $\{e_1 + e_4, e_2 + e_3\} \subset \Delta$ por Observación 6 la raíz no compacta

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{2}(e_1 + e_4) + \frac{1}{2}(e_2 + e_3) \\ &= \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) \end{aligned}$$

pertenece a todos los sistemas de raíces positivas Ψ de $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ que contienen a Δ. Por lo tanto

$$\gamma \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S \rangle$$

como queríamos demostrar.

Caso $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_{7(7)}$.

Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_{7(7)}$ entonces $\mathfrak{k} = \mathfrak{su}(8)$. Los sistemas de raíces de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{l}$ con respecto a $\mathfrak{t}$ son

$$\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t}) = \{\pm e_i \pm e_j, 1 \leq i < j \leq 6\} \cup \{\pm(e_7 - e_8)\}$$
$$\cup \{\pm\frac{1}{2}((-e_7 + e_8) + \sum_{i=1}^{6}(-1)^{v_i}e_i), | \sum_{i=1}^{6} v_i \text{ es impar}\}.$$

$$\Phi(\mathfrak{k},\mathfrak{t}) = \{\pm e_i - e_j,\ 1 \leq i < j \leq 6\} \cup \{\pm(-e_7 + e_8)\} \cup \{\pm\alpha_i,\ 1 \leq i \leq 12\}$$

donde

$\alpha_1 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8)$
$\alpha_2 = \frac{1}{2}(-e_1 + e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8)$
$\alpha_3 = \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 + e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8)$
$\alpha_4 = \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 - e_3 + e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8)$
$\alpha_5 = \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 - e_3 - e_4 + e_5 - e_6 - e_7 + e_8)$
$\alpha_6 = \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5 + e_6 - e_7 + e_8)$
$\alpha_7 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 - e_6 - e_7 + e_8)$
$\alpha_8 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 - e_5 + e_6 - e_7 + e_8)$
$\alpha_9 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 - e_4 + e_5 + e_6 - e_7 + e_8)$
$\alpha_{10} = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3 + e_4 + e_5 + e_6 - e_7 + e_8)$
$\alpha_{11} = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6 - e_7 + e_8)$
$\alpha_{12} = \frac{1}{2}(-e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6 - e_7 + e_8)$

Por lo tanto el conjunto de raíces no compactas de $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ es

$$\Phi_n(\mathfrak{g},\mathfrak{t}) = \{\pm(e_i + e_j) 1 \leq i < j \leq 6\}$$
$$\cup \{\pm\frac{1}{2}((-e_7 + e_8) + \sum_{i=1}^{6}(-1)^{v_i}e_i),\ v_i \in \{0,1\}, | \sum_{i=1}^{6} v_i = 3\}.$$

Fijemos el sistema de raíces positivas Δ en $\Phi(\mathfrak{k},\mathfrak{t})$ definido por

$$\Delta = \{(e_i - e_j), 1 \leq i < j \leq 5\} \cup \{(-e_l + e_6), 1 \leq l \leq 5\}$$
$$\cup \{(-e_7 + e_8)\} \cup \{\alpha_i,\ 1 \leq i \leq 12\}.$$

Si $\mathfrak{h} = \mathfrak{su}(4,4)$, o $\mathfrak{so}(6,6) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, $\mathfrak{l} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$ es isomorfa a $\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(4) \oplus \mathfrak{u}(4))$, y su sistema de raíces con respecto a $\mathfrak{t}$ es

$$\Phi(\mathfrak{l},\mathfrak{t}) = \{\pm(e_i - e_j),\ 1 \leq i < j \leq 3\} \cup \{\pm(e_k - e_l),\ 4 \leq k < l \leq 6\}$$
$$\cup \{\pm\alpha_i,\ i \in \{1,2,3,7,8,9\}\}.$$

Definamos el conjunto $S \subset (\Phi(\mathfrak{k},\mathfrak{t}) - \Phi(\mathfrak{l},\mathfrak{t})) \cap \Delta$ por

$$S = \{e_1 - e_4, e_2 - e_5, -e_3 + e_6, -e_7 + e_8\}.$$

Notemos que el cardinal de S es igual que al $rango(K/L)$, además $\langle -e_7+e_8,\alpha\rangle \geq 0$ para toda raíz $\alpha\in\Delta$, osea se satisface (i) de la Proposición 4. Como $S\subset\Delta$ entonces por el Observación 6 la raíz no compacta

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{1}{2}(e_1-e_4)+\frac{1}{2}(e_2-e_5)+\frac{1}{2}(-e_3+e_6)+\frac{1}{2}(-e_7+e_8)\\ &= \frac{1}{2}(e_1+e_2-e_3-e_4-e_5+e_6-e_7+e_8)\end{aligned}$$

pertenece a todo Ψ sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$, que contiene a Δ. Por lo tanto

$$\gamma\in\mathbb{R}^+\Psi_n\cap\langle S\rangle\,.$$

Si $\mathfrak{h}=\mathfrak{so}^*(12)\oplus\mathfrak{su}(2)$ o $\mathfrak{h}=\mathfrak{e}_6(2)\oplus\mathbb{R}$ tenemos que $\mathfrak{l}=\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(6)\oplus\mathfrak{u}(2))$, y su sistema de raíces con respecto a $\mathfrak{t}$ es

$$\Phi(\mathfrak{l},\mathfrak{t})=\{\pm(e_i-e_j),\,1\leq i<j\leq 5\}\cup\{\pm\alpha_i,\,i\in\{1,2,3,4,5,7\}\}.$$

Definimos el conjunto $S\subset(\Phi(\mathfrak{k},\mathfrak{t})-\Phi(\mathfrak{l},\mathfrak{t}))\cap\Delta$ por

$$S=\{-e_5+e_6,-e_7+e_8\}$$

Observemos que al igual que el caso anterior, $\langle -e_7+e_8,\alpha\rangle\geq 0$ para toda raíz $\alpha\in\Delta$, y el cardinal de S es igual al $rango(K/L)$.

Por otra parte por Observación 6 las raíces no compactas

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \frac{1}{2}(e_1-e_2)+\frac{1}{2}(e_3-e_4)+\frac{1}{2}(-e_5+e_6)+\frac{1}{2}(-e_7+e_8)\\ &= \frac{1}{2}(e_1-e_2+e_3-e_4-e_5+e_6-e_7+e_8)\\ \gamma_2 &= \frac{1}{2}(-e_1+e_6)+\frac{1}{2}(e_2-e_3)+\frac{1}{2}(e_4-e_5)+\frac{1}{2}(-e_7+e_8)\\ &= \frac{1}{2}(-e_1+e_2-e_3+e_4-e_5+e_6-e_7+e_8)\end{aligned}$$

pertenecen a todo Ψ sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$, que contiene a Δ. Por lo tanto

$$-e_5+e_6-e_7+e_8=\gamma_1+\gamma_2\in\mathbb{R}^+\Psi_n\cap\langle S\rangle\,.$$

Si $\mathfrak{l}=\mathfrak{su}(5)\oplus\mathfrak{su}(3)$, entonces L es un subgrupo maximal de K, y el sistema de raíces de $\mathfrak{l}$ con repecto a $\mathfrak{t}$ es

$$\Phi(\mathfrak{l},\mathfrak{t})=\{\pm(e_i-e_j),\,1\leq i<j\leq 4\}\cup\{\pm(e_5-e_6)\}\cup\{\pm\alpha_i,\,i\in\{1,2,3,4,7,8\}\}.$$

Definimos el conjunto

$$\begin{aligned}S\subset(\Phi(\mathfrak{k},\mathfrak{t})-\Phi(\mathfrak{l},\mathfrak{t}))\cap\Delta &=\{e_i-e_5,\,1\leq i\leq 4\}\cup\{-e_7+e_8\}\\ &\quad\cup\{-e_i+e_6,\,1\leq i\leq 4\}\cup\{\alpha_i,\,i\in\{5,6,9,10,11,13\}\},\end{aligned}$$

por

$$S = \{e_1 - e_5, -e_2 + e_6, -e_7 + e_8\}.$$

Observemos que al igual que los casos anteriores, $\langle -e_7 + e_8, \alpha\rangle \geq 0$ para toda raíz $\alpha \in \Delta$, y el cardinal de S es igual al $rango(K/L)$.

Por otra parte por Observación 6 las raíces no compactas

$$\begin{aligned}\gamma_1 =& \frac{1}{2}(e_1 - e_2) + \frac{1}{2}(e_3 - e_4) + \frac{1}{2}(-e_5 + e_6) + \frac{1}{2}(-e_7 + e_8)\\ =& \frac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3 - e_4 - e_5 + e_6 - e_7 + e_8),\\ \gamma_2 =& \frac{1}{2}(e_1 - e_3) + \frac{1}{2}(e_4 - e_5) + \frac{1}{2}(-e_2 + e_6) + \frac{1}{2}(-e_7 + e_8)\\ =& \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 + e_4 - e_5 + e_6 - e_7 + e_8),\end{aligned}$$

perteneces a todo sistema de raíces positivas Ψ de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ que contine a Δ. Por lo tanto

$$e_1 - e_2 - e_5 + e_6 - e_7 + e_8 = \gamma_1 + \gamma_2 \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle.$$

Si $\mathfrak{l} = \mathfrak{su}(7) \oplus \mathfrak{su}(1)$, entonces L es un subgrupo maximal de K, y el sistema de raíces de $\mathfrak{l}$ con repecto a $\mathfrak{t}$ es

$$\Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{t}) = \{\pm(e_i - e_j),\, 1 \leq i < j \leq 6\} \cup \{\pm\alpha_i,\, i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}.$$

Definimos el conjunto

$$S \subset (\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) - \Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{t})) \cap \Delta = \{-e_7 + e_8\} \cup \{\alpha_i,\, i \in \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}\}$$

por

$$S = \{-e_7 + e_8\}$$

Observemos que al igual que los casos anteriores, $\langle -e_7 + e_8, \alpha\rangle \geq 0$ para toda raíz $\alpha \in \Delta$, y el cardinal de S es igual al $rango(K/L)$.

Como $\pm(e_2 + e_4)$ son raíces no compactas entonces tenemos dos posibilidades, (i) $e_2 + e_4 \in \Psi$ o (ii)$-e_2 - e_4 \in \Psi$.

(i) Si $e_2 + e_4 \in \Psi$ entonces por Observación 6 la raíz no compacta

$$\begin{aligned}\gamma =& \frac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3 - e_4 + e_5 - e_6 - e_7 + e_8)\\ =& (e_2 + e_4) + (e_1 - e_2) + (e_3 - e_4) + \alpha_5 \in \Psi\end{aligned}$$

para todo Ψ sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ que contiene a Δ.

(ii) Si $-e_2 - e_4 \in \Psi$ entonces nuevamente por Observación 6 la raíz no compacta

$$\begin{aligned}\gamma =& \frac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3 - e_4 + e_5 - e_6 - e_7 + e_8)\\ =& (-e_2 - e_4) + \alpha_7 \in \Psi\end{aligned}$$

para todo Ψ sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ que contiene a Δ.

Por lo tanto la raíz no compacta γ pertenece a todos los sistemas de raíces positivas Ψ de $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ que contienen a Δ. Lo mismo para las raíces no compactas

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 + e_3 - e_4 + e_5 + e_6 - e_7 + e_8) = \gamma + (-e_1 + e_6),$$
$$\gamma_2 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3 + e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8) = \gamma + (e_2 - e_3) + (e_4 - e_5)$$

pertenecen a todo sistema de raíces positivas Ψ de $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ que contine a Δ. Por lo tanto

$$-e_7 + e_8 = \gamma_1 + \gamma_2 \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle,$$

como queríamos probar.

Caso $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_{8(8)}$.

Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_{8(8)}$, entonces $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(16)$, y su sitema de raíces con respecto a $\mathfrak{t}$ son

$$\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t}) = \{\pm e_i \pm e_j,\ 1 \le i < j \le 8\} \cup \left\{ \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{8}(-1)^{v(i)}e_i\right) \mid \sum_{i=1}^{8} v(i) \text{ es par} \right\}$$
$$\Phi(\mathfrak{k},\mathfrak{t}) = \{\pm e_i \pm e_j,\ 1 \le i < j \le 8\}$$

Entonces el conjunto de raíces no compactas de $\Phi(\mathfrak{e}_{8(8)},\mathfrak{b})$ es

$$\Phi_n(\mathfrak{g},\mathfrak{t}) = \left\{ \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{8}(-1)^{v(i)}e_i\right) \text{ tal que } \sum_{i=1}^{8} v(i) \text{ es par} \right\}$$

Fijemos el sistema de raíces positivas Δ de $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ definido por

$$\Delta = \{e_i \pm e_j,\ 1 \le i < j \le 8\}.$$

Si $\mathfrak{h} = \mathfrak{e}_{7(-5)} \oplus \mathfrak{su}(2)$, entonces $\mathfrak{l} = \mathfrak{so}(8) \oplus \mathfrak{so}(8)$ y su sistema de raíces con respecto a $\mathfrak{t}$ es

$$\Phi(\mathfrak{l},\mathfrak{t}) = \{\pm e_i \pm e_j,\ 1 \le i < j \le 4\} \cup \{\pm e_k \pm e_l,\ 5 \le k < l \le 8\}.$$

Definamos el conjunto

$$S \subset (\Phi(\mathfrak{k},\mathfrak{t}) - \Phi(\mathfrak{l},\mathfrak{t})) \cap \Delta = \{\pm e_i \pm e_k,\ 1 \le i \le 4,\ 5 \le k \le 8\}$$

de raíces fuertemente ortogonales dos a dos por

$$S = \{e_1 \pm e_5, e_2 \pm e_6, e_3 \pm e_7, e_4 \pm e_8\}.$$

Notemos que el cardinal del S es igual al $rango(K/L)$, y que

$$e_1 = \frac{1}{2}(e_1 + e_5) + \frac{1}{2}(e_1 - e_5) \in \langle S\rangle,$$

entonces se satisface la condición (i) de la Proposición 4 pues $\langle e_1, \alpha\rangle \ge 0$ para todo $\alpha \in \Delta$.

Como $\{e_1+e_5, e_2+e_6, e_3+e_7, e_4+e_8\} \subset \Delta$, por Observación 6 la raíz no compacta

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{1}{2}(e_1+e_5)+\frac{1}{2}(e_2+e_6)+\frac{1}{2}(e_3+e_7)+\frac{1}{2}(e_4+e_8)\\ &= \frac{1}{2}(e_1+e_2+e_3+e_4+e_5+e_6+e_7+e_8)\end{aligned}$$

pertenece a todos los sistemas de raíces positivas Ψ de $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ que contienen a Δ. Por lo tanto

$$\gamma \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle\,.$$

Si $\mathfrak{h}=\mathfrak{so}^*(16)$ o $\mathfrak{h}=\mathfrak{e}_{7(7)}\oplus\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, en ambos casos tenemos que $\mathfrak{l}=\mathfrak{u}(8)$, y su sistema de raíces con respecto a $\mathfrak{t}$ es

$$\Phi(\mathfrak{l},\mathfrak{t}) = \{\pm(e_i-e_j),\, 1\le i<j\le 8\}\,.$$

Definamos el conjunto

$$S \subset (\Phi(\mathfrak{k},\mathfrak{t})-\Phi(\mathfrak{l},\mathfrak{t}))\cap\Delta = \{(e_i+e_j), 1\le i<j\le 8\},$$

de raíces fuertemente ortogonales dos a dos por

$$S=\{e_1+e_8, e_2+e_7, e_3+e_6, e_4+e_5\}.$$

Notemos que, el cardinal de S es igual al $rango(K/L)$, además

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{1}{2}(e_1+e_8)+\frac{1}{2}(e_2+e_7)+\frac{1}{2}(e_3+e_6)+\frac{1}{2}(e_4+e_5)\\ &= \frac{1}{2}(e_1+e_2+e_3+e_4+e_5+e_6+e_7+e_8)\in\langle S\rangle\end{aligned}$$

y $\langle\gamma,\alpha\rangle\ge 0$ para toda raíz $\alpha\in\Delta$. Como $S\subset\Delta$ por la Observación 6, la raíz no compacta γ pertenece a todo sistema Ψ de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ que contiene a Δ. Por lo tanto

$$\gamma \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle\,.$$

Si $\mathfrak{h}=\mathfrak{e}_{7(-5)}\oplus\mathfrak{su}(2)$ entonces $\mathfrak{l}=\mathfrak{so}(12)\oplus\mathfrak{su}(2)\oplus\mathfrak{su}(2)$ y su sistema de raíces con respecto a $\mathfrak{t}$ es

$$\Phi(\mathfrak{l},\mathfrak{t}) = \{\pm e_i\pm e_j,\, 2\le i<j\le 7\}\cup\{\pm(e_1+e_8)\}\cup\{\pm(e_1-e_8)\}.$$

Definamos el conjunto

$$S \subset (\Phi(\mathfrak{k},\mathfrak{t})-\Phi(\mathfrak{l},\mathfrak{t}))\cap\Delta = \{e_1\pm e_i,\, 2\le i\le 7\}\cup\{e_j\pm e_8,\, 2\le j\le 7\},$$

de raíces fuertemente ortogonales dos a dos por

$$S=\{e_1\pm e_7, e_6\pm e_8\}.$$

Notemos que, el cardinal de S es igual al $rango(K/L)$, además

$$e_1=\frac{1}{2}(e_1+e_7)+\frac{1}{2}(e_1-e_7)\in\langle S\rangle,$$

por lo tanto se satisface la condición (i) de la Proposición 4 pues $\langle e_1,\alpha\rangle\ge 0$ para todo $\alpha\in\Delta$.

Como $\{e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_3 - e_4, e_4 - e_5, e_1 + e_6, e_5 + e_6, e_7 + e_8\} \subset \Delta$, las raíces no compactas

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{2}(e_1 + e_6) + \frac{1}{2}(e_2 - e_3) + \frac{1}{2}(e_4 - e_5) + \frac{1}{2}(e_7 + e_8) \\ &= \frac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3 + e_4 - e_5 + e_6 + e_7 + e_8) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \frac{1}{2}(e_1 - e_2) + \frac{1}{2}(e_3 - e_4) + \frac{1}{2}(e_5 + e_6) + \frac{1}{2}(e_7 + e_8) \\ &= \frac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3 - e_4 + e_5 + e_6 + e_7 + e_8) \end{aligned}$$

pertenecen a todo sistema de raíces positivos Ψ de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ que contiene a Δ. Por lo tanto

$$\gamma = e_1 + e_7 + e_6 + e_8 = \gamma_1 + \gamma_2 \in \mathbb{R}^+ \Psi_n \cap \langle S \rangle \, .$$

Esto concluye la verificación de la Proposición 4.

Demostración del Teorema 3

Sea (G, K) un par simétrico Hermitiano tal que el factor semisimple K_{ss} de K es simple. Sea (G, H) un par simétrico generalizado tal que $rango(H) = rango(K)$.

Por los resultados obtenidos en la Sección 3.2. utilizando el criterio de Kobayashi enunciado en el Teorema 8, demostrar el Teorema 3 es equivalente a demostrar la siguiente

PROPOSICIÓN 7. *Si Δ un sistema de raíces compactas positivas de $\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$, entonces existe un subconjunto $S \subset (\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) - \Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{t})) \cap \Delta$ de raíces fuertemente ortogonales con cardinal $rango(K/L)$, tal que el conjunto $\{\alpha|_{\langle S\rangle} \neq 0 : \alpha \in \Delta\}$ es un sistema de raíces restrigida positivas en $\Phi(\mathfrak{k}, \langle S\rangle)$, y además*
(i) Si (G, H) es un par simétrico generalizado de Tipo I entonces $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle = 0$ si y sólo si $\Psi = \Delta \cup \Psi_n$ es el sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ holomorfo o antiholomorfo.
(ii) Si (G, H) es un par simétrico generalizado de Tipo II entonces $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle \neq 0$ para todo sistema de raíces positivas $\Psi = \Delta \cup \Psi_n$ de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$.
(iii) Si (G, H) es un par simétrico generalizado de Tipo III entonces $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle = 0$ para un único sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ que contiene a Δ. Además dicho sistema de raíces positivas no es holomorfo ni antiholomorfo.

La demostración de esta Proposición es desarrollada caso por caso en el resto de esta Sección, desde el Lema 1 al Lema 27. Para ello utilizamos la clasificación de los pares simétricos generalizados (G, H) establecida a continuación, en Tipo I, Tipo II y Tipo III.

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{k}$	$\mathfrak{h}$	TIPO
$\mathfrak{su}(1,p)$	$\mathfrak{su}(p)\oplus\mathbb{R}$	$\mathfrak{su}(p-r,1)\oplus\mathfrak{su}(r)$ $\mathfrak{so}(p,1)$ p par	I I
$\mathfrak{so}(2p,2)$	$\mathfrak{so}(2p)\oplus\mathbb{R}$	$\mathfrak{u}(p,1)$ $\mathfrak{so}(2r,1)\oplus\mathfrak{so}(2(p-r),1)$ $\mathfrak{so}(2r,0)\oplus\mathfrak{so}(2(p-r),2)$ $\mathfrak{so}(2r,2)\oplus\mathfrak{so}(2(p-r),0)$	I I I I I
$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$	$\mathfrak{u}(n)$	$\mathfrak{sp}(p,\mathbb{R})\oplus\mathfrak{sp}(q,\mathbb{R})$ $\mathfrak{u}(p,q)$	I I
$\mathfrak{so}^*(2n)$	$\mathfrak{u}(n)$	$\mathfrak{so}^*(2p)\oplus\mathfrak{so}^*(2(n-p))$ $\mathfrak{u}(p,n-p)$	I I
$\mathfrak{e}_{6(2)}$	$\mathfrak{su}(6)\oplus\mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{so}^*(10)\oplus\mathfrak{so}(2)$ $\mathfrak{so}(6,4)\oplus\mathfrak{so}(2)$ $\mathfrak{su}(3,3)\oplus\mathfrak{sl}_2$ $\mathfrak{su}(4,2)\oplus\mathfrak{su}(2)$	II III II III
$\mathfrak{e}_{6(-14)}$	$\mathfrak{so}(10)\oplus\mathbb{R}$	$\mathfrak{su}(5,1)\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ $\mathfrak{su}(4,2)\oplus\mathfrak{su}(2)$ $\mathfrak{so}(8,2)\oplus\mathfrak{so}(2)$ $\mathfrak{so}^*(10)\oplus\mathfrak{so}(2)$	I I I I
$\mathfrak{e}_{7(-5)}$	$\mathfrak{so}(12)\oplus\mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{e}_{6(-14)}\oplus\mathfrak{so}(2)$ $\mathfrak{e}_{6(2)}\oplus\mathfrak{so}(2)$ $\mathfrak{so}^*(12)\oplus\mathfrak{sl}_2$ $\mathfrak{su}(6,2)$ $\mathfrak{so}(8,2)\oplus\mathfrak{su}(2)$	II II II III II
$\mathfrak{e}_{7(-25)}$	$\mathfrak{e}_6\oplus\mathfrak{so}(2)$	$\mathfrak{su}(6,2)$ $\mathfrak{so}^*(12)\oplus\mathfrak{su}(2)$ $\mathfrak{e}_{6(-14)}\oplus\mathbb{R}$ $\mathfrak{so}(10,2)\oplus\mathfrak{sl}_2$	I I I I
$\mathfrak{e}_{8(-24)}$	$\mathfrak{e}_7\oplus\mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{e}_{7(-24)}\oplus\mathfrak{sl}_2$ $\mathfrak{e}_{7(-5)}\oplus\mathfrak{su}(2)$ $\mathfrak{so}(4,12)\oplus\mathfrak{so}(2)$	II II III

Tabla 3

CASO $\mathfrak{g}=\mathfrak{su}(1,p)$

Sea $\mathfrak{g}=\mathfrak{su}(1,p)$ entonces $\mathfrak{k}=\mathfrak{su}(1)\oplus\mathfrak{su}(p)$, sus sistemas de raíces con respecto a $\mathfrak{t}$ son

$$\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})=\{\pm(e_i-e_j),\ 1\leq i<j\leq p+1\},$$
$$\Phi(\mathfrak{k},\mathfrak{t})=\{\pm(e_i-e_j),\ 2\leq i<j\leq p+1\}$$

respectivmente.

Por lo tanto el conjunto de la raíces no compactas de $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ es

$$\Phi_n(\mathfrak{g},\mathfrak{t})=\{\pm(e_1-e_j),\ 1\leq j\leq p+1\}.$$

Fijemos el sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{k},\mathfrak{t})$ dado por

$$\Delta = \{(e_i - e_j),\ 2 \le i < j \le p+1\}.$$

Si $\mathfrak{h} = \mathfrak{su}(1,p-r) \oplus \mathfrak{su}(r)$ entonces $\mathfrak{l} = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(p-r)+\mathfrak{u}(r))$ y su sistema de raíces con respecto a $\mathfrak{t}$ esta dado por

$$\Phi(\mathfrak{l},\mathfrak{t}) = \{\pm(e_i - e_j),\ 2 \le i < j \le p-r+1\} \cup \{\pm(e_k - e_l),\ p-r+2 \le k < l \le p+1\}.$$

Definamos el conjunto

$$S \subset (\Phi(\mathfrak{k},\mathfrak{t}) - \Phi(\mathfrak{l},\mathfrak{t})) \cap \Delta = \{(e_i - e_k),\ 2 \le i \le p-r+1,\ p-r \le k \le p+1\}$$

de raíces fuertemente ortogonales dos a dos por

(i) $S = \{(e_2 - e_{p+1}), (e_3 - e_p), ..., (e_{r+1} - e_{p-r+2})\}$ si $r \le p-r$ y

(ii) $S = \{(e_2 - e_{p+1}), (e_3 - e_p), ..., (e_{p-r+1} - e_{r+2})\}$ si $p-r < r$.

Notemos que en ambos casos, para toda $\alpha \in \Delta$, $\langle \alpha, e_2 - e_{p+1}\rangle \ge 0$.

Lema 1. *Sea $\Psi = \Psi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ un sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ que contiene a Δ. Entonces $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle = 0$ si y sólo si $\Psi = \Delta \cup \Psi_n$ con*

$$\pm\Psi_n = \{e_1 - e_j,\ 2 \le j \le p+1\}.$$

Es decir $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle = 0$ si y sólo si Ψ es el sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ holomorfo o el antiholomorfo.

Demostración: Si $\pm\Psi_n = \{e_1 - e_j,\ 2 \le j \le p+1\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}^+\Psi_n$ entonces $\langle \alpha, e_1\rangle = 0$ si y sólo si $\alpha = 0$. Por lo tanto en ambos casos

$$\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle = 0.$$

Reciprocamente, si Ψ no es el sistema de raíces positivas holomorfo o el antiholomorfo entonces las raíces no compactas

$$(-e_1 + e_2), (e_1 - e_{p+1}) \in \Psi, \tag{23}$$

ya que si $(e_1 - e_2) \in \Psi$ entonces $\Psi = \Delta \cup \{e_1 - e_i,\ 2 \le i \le p+1\}$, pues como $(e_2 - e_i) \in \Delta \subset \Psi$ para $3 \le i \le p+1$,

$$e_1 - e_i = (e_1 - e_2) + (e_2 - e_i) \in \Psi,\ 3 \le i \le p+1.$$

Y si $(-e_1 + e_{p+1}) \in \Psi$, implica que

$$(-e_1 + e_i) = (-e_1 + e_{p+1}) + (e_i - e_{p+1}) \in \Psi \text{ para } 2 \le i \le p,$$

por lo tanto $\Psi = \Delta \cup \{-e_1 + e_i,\ 2 \le i \le p+1\}$.

Por lo tanto por (23)

$$e_2 - e_{p+1} = (-e_1 + e_2) + (e_1 - e_{p+1}) \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle,$$

como queríamos probar. $\square$

Caso $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2, 2p)$.

Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2, 2p)$ entonces $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(2p)$. Los sistemas de raíces de $\mathfrak{g}$, y $\mathfrak{k}$ con respecto a $\mathfrak{t}$ son

$$\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) = \{\pm e_i \pm e_j,\ 1 \leq i < j \leq p+1\},$$
$$\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) = \{\pm e_i \pm e_j,\ 2 \leq i < j \leq p+1\}.$$

Entonces el conjunto de la raíces no compactas de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ esta dado por

$$\Phi_n(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) = \{\pm e_1 \pm e_j,\, 2 \leq j \leq p+1\}.$$

Fijemos el sistema de raíces positivas Δ de $\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ definido por

$$\Delta = \{(e_i \pm e_j),\, 2 \leq i < j \leq p+1\}.$$

Si $\mathfrak{h} = \mathfrak{u}(1, p)$, entonces $\mathfrak{l} = \mathfrak{u}(p)$, y su sistema de raíces con respecto a $\mathfrak{t}$ es

$$\Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{t}) = \{\pm(e_i - e_j),\, 2 \leq i < j \leq p+1\}$$

Definamos el conjunto

$$S \subset (\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) - \Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{t})) \cap \Delta = \{(e_i + e_j),\ 2 \leq i \leq p+1\}$$

raíces fuertemente ortogonales dos a dos de la siguiente manera

$$S = \{(e_2 + e_3), (e_4 + e_5), ..., (e_{p-1} + e_p)\}.$$

Notemos que para toda raíz $\alpha \in \Delta$ $\langle \alpha, e_2 + e_3 \rangle \geq 0$. Además el cardinal de S es igual al $rango(K/L)$.

Si Ψ un sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ que contiene a Δ entonces se satisfacen las siguientes

Propiedades 1. *(i) Si $(e_1 + e_j) \in \Psi$ entonces $(e_1 + e_i) \in \Psi$ para $2 \leq i \leq j$.*
(ii) Si $(e_1 - e_i) \in \Psi$ entonces $(e_1 - e_j) \in \Psi$ para $i \leq j \leq p+1$.
(iii) Si $(-e_1 - e_j) \in \Psi$ entonces $(-e_1 + e_i) \in \Psi$ para $2 \leq i \leq p+1$.
(iv) Si $(-e_1 - e_j) \in \Psi$ entonces $(-e_1 - e_i) \in \Psi$ para $j \leq i \leq p+1$.
(v) Si $(-e_1 + e_j) \in \Psi$ entonces $(-e_1 + e_i) \in \Psi$ para $2 \leq i \leq j$.

Pues $(e_i \pm e_j) \in \Delta$ si $i < j$ y
(i) $(e_1 + e_i) = (e_1 + e_j) + (e_i - e_j)$, si $2 \leq i < j$,
(ii) $(e_1 - e_j) = (e_1 - e_i) + (e_i - e_j)$, si $i \leq j \leq p+1$,
(iii) $(-e_1 + e_i) = (-e_1 - e_j) + (e_j + e_i)$ $j \neq i$,
(iv) $(-e_1 - e_i) = (-e_1 - e_j) + (e_j - e_i)$ $j < i$,
(v) $(-e_1 + e_i) = (-e_1 + e_j) + (e_i - e_j)$ $i < j$.

Lema 2. *Sea $\Psi = \Psi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ un sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ que contiene a Δ. Entonces $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S \rangle = 0$ si y sólo si $\Psi = \Delta \cup \Psi_n$ con*

$$\pm\Psi_n = \{e_1 \pm e_j,\, 2 \leq j \leq p+1\}.$$

Es decir $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S \rangle = 0$ si y sólo si Ψ es el sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ holomorfo o el antiholomorfo.

Demostración: Si $\pm\Psi_n = \{e_1 \pm e_j,\, 2 \leq j \leq p+1\}$, y $\alpha \in \mathbb{R}^+\Psi_n$, entonces $\langle \alpha, e_1\rangle = 0$ si y sólo si $\alpha = 0$. Por otra parte si $\alpha \in \langle S\rangle$, $\langle \alpha, e_1\rangle = 0$. Por lo tanto $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle = 0$.

Reciprocamente, si Ψ no es el sistema holomorfo o antiholomorfo entonces

$$(-e_1 + e_2) \in \Psi,$$

pues si $(e_1 - e_2) \in \Psi$ por las propiedades (i) y (ii) las raíces no compactas $(e_1 \pm e_i) \in \Psi$ para $2 \leq i \leq p+1$.

Como las raíces $\pm(e_1+e_3)$ son no compactas tenemos dos posibilidades, (i) $(e_1+e_3) \in \Psi$ o (ii) $-e_1 - e_3 \in \Psi$.
(i) Si $(e_1 + e_3) \in \Psi$ entonces

$$e_2 + e_3 = (-e_1 + e_2) + (e_1 + e_3) \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle.$$

(ii) Si $-e_1 - e_3 \in \Psi$ por las propiedades (iii) y (iv) las raíces no compactas $(-e_1 \pm e_i) \in \Psi$ para $3 \leq i \leq p+1$. Como por hipótesis Ψ no es el sistema holomorfo o el antiholomorfo, $(e_1 + e_2) \in \Psi$. Por lo tanto

$$e_2 + e_3 = (e_1 + e_2) + (-e_1 + e_3) \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle. \quad \square$$

Si $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(2r, 1) \oplus \mathfrak{so}(2(p-r), 1)$, entonces $\mathfrak{l} = \mathfrak{so}(2r) \oplus \mathfrak{so}(2(p-r))$ y su sistema de raíces con respecto a $\mathfrak{t}$es dado por

$$\Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{t}) = \{\pm e_i \pm e_j,\, 2 \leq i < j \leq r+1\} \cup \{\pm e_k \pm e_l,\, r+2 \leq k < l \leq p+1\}.$$

Fijemos el subconjunto

$$S \subset \Phi(\mathfrak{k}/\mathfrak{l}) = \{\pm e_i \pm e_k,\ 2 \leq i \leq r+1,\ r+2 \leq k \leq n+1,\}$$

de raíces fuertemente ortogonales dos a dos, de cardinal $min(r, p-r)$ definido de la siguiente manera, si $r \leq p - r$,

$$S = \{(e_2 \pm e_{p+1}), (e_3 \pm e_p), ..., (e_{r+1} \pm e_{p-r+2})\}$$

y si $p - r < r$

$$S = \{(e_2 \pm e_{p+1}), (e_3 \pm e_p), ..., (e_{p-r+1} \pm e_{r+2})\}.$$

Notemos que en ambos casos $e_2 = \frac{1}{2}(e_2 + e_{n+1}) + \frac{1}{2}(e_2 - e_{n+1}) \in \langle S\rangle$, y para toda raíz $\alpha \in \Delta$, $\langle \alpha, e_2\rangle \geq 0$.

Lema 3. *Sea $\Psi = \Psi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ un sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ que contiene a Δ. Entonces $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle = 0$ si y sólo si $\Psi = \Delta \cup \Psi_n$ con*

$$\Psi_n = \pm\{e_1 \pm e_j,\, 2 \leq j \leq p+1\}.$$

Es decir $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle = 0$ si y sólo si Ψ es el sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ holomorfo o el antiholomorfo.

Demostración: Si $\Psi_n = \pm\{e_1 \pm e_j,\, 2 \leq j \leq p+1\}$ razonando de manera análoga al en Lema 2 podemos demostrar que $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle = 0$.

Reciprocamente, si Ψ contiene a Δ y no es el sistema holomorfo o antiholomorfo entonces las raíces no compactas

$$(-e_1 + e_2), (e_1 + e_2) \in \Psi. \tag{24}$$

Pues si $(e_1 - e_2) \in \Psi$ por las propiedades (i) y (ii) las raíces no compactas $(e_1 \pm e_i) \in \Psi$ para $2 \leq i \leq p+1$. Y si $(-e_1 - e_2) \in \Psi$ por las propiedades (iii) y (iv) las raíces no compactas $(-e_1 \pm e_j) \in \Psi$ para $2 \leq j \leq p+1$.

Por (24)

$$2e_2 = (-e_1 + e_2) + (e_1 + e_2) \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle. \quad \square$$

Caso $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$.

Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ entonces $\mathfrak{k} = \mathfrak{u}(n)$, y sus sistemas de raíces con respecto a $\mathfrak{t}$ son

$$\begin{aligned}\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) &= \{\pm e_i \pm e_j,\ 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\pm 2e_i\ 1 \leq i \leq n\},\\ \Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) &= \{\pm(e_i - e_j),\ 1 \leq i < j \leq n\}\end{aligned}$$

respectivamente. Por lo tanto el conjunto de raíces no compactas de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ queda definido por

$$\Phi_n(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) = \{\pm(e_i + e_j),\ 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\pm 2e_i\ 1 \leq i \leq n\}.$$

Fijemos el sistema de raíces positivas Δ de $\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ definido por

$$\Delta = \{(e_i - e_j),\ 1 \leq i < j \leq n\}$$

Si $\mathfrak{h} = \mathfrak{u}(p, q)$ con $p + q = n$, entonces $\mathfrak{l} = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{u}(p) \oplus \mathfrak{u}(q)$ y su sistema de raíces con respecto a $\mathfrak{t}$ es

$$\Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{t}) = \{\pm(e_i - e_j),\, 1 \leq i < j \leq p\} \cup \{\pm(e_k - e_l),\, p+1 \leq k < l \leq n\}$$

Definamos el conjunto

$$S \subset (\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) - \Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{t})) \cap \Delta = \{(e_i - e_l),\, 1 \leq i \leq p,\, p+1 \leq l \leq n\}$$

de raíces fuertemente ortogonales dos a dos, definido de la siguiente manera,

$$S = \{e_1 - e_n, e_2 - e_{n-1}, ..., e_p - e_{q+1}\}$$

si $p \leq q$ y

$$S = \{e_1 - e_n, e_2 - e_{n-1}, ..., e_q - e_{p+1}\}$$

si $q \leq p$.

Notemos que en ambos casos $\langle \alpha, e_1 - e_n\rangle \geq 0$ para toda raíz $\alpha \in \Delta$.

LEMA 4. *Sea* $\Psi = \Psi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ *un sistema de raíces positivas de* $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ *que contiene a* Δ. *Entonces* $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S \rangle = 0$ *si y sólo si* $\Psi = \Delta \cup \Psi_n$ *con*

$$\pm\Psi_n = \{e_i + e_j,\, 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{2e_i,\, 1 \leq i \leq n\}.$$

Es decir $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S \rangle = 0$ *si y sólo si* Ψ *es el sistema de raíces positivas de* $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ *holomorfo o el antiholomorfo.*

Demostración: Si $\pm\Psi_n = \{e_i + e_j,\, 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{2e_i,\, 1 \leq i \leq n\}$, y $\alpha \in \Psi_n$ entonces $\langle \alpha, e_1 \rangle \langle \alpha, e_n \rangle \geq 0$ y es igual a cero si y sólo si $\alpha = 0$. Por otra parte si $\alpha \in \langle S \rangle$ entonces $\langle \alpha, e_1 \rangle \langle \alpha, e_n \rangle \leq 0$. Por lo tanto $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S \rangle = 0$.

Reciporcamente, sea Ψ un sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ que contiene Δ no holomorfo o antiholomorfo. Como $\pm(e_1 + e_n)$ son raíces no compactas tenemos dos posibilidades, (i) $(-e_1 - e_n) \in \Psi_n$ o (ii) $(e_1 + e_n) \in \Psi_n$.

(i) Si $(-e_1 - e_n) \in \Psi$, entonces $2e_1 \in \Psi$, pues de lo contrario $\Psi_n = \{-e_i - e_j,\, 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{-2e_i,\, 1 \leq i \leq n\}$ pues como $(e_k - e_l) \in \Delta \subset \Psi$ si $k < l$ entonces

$$\begin{aligned} -e_1 - e_l &= (e_1 - e_l) + (-2e_1) \in \Psi, \text{ para } 2 \leq l \leq n, \\ -2e_l &= (e_1 - e_l) + (-e_1 - e_l) \in \Psi,\ 2 \leq l \leq n \ \text{ y} \\ -e_k - e_l &= (e_k - e_l) + (-2e_k) \in \Psi. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$e_1 - e_n = (-e_1 - e_n) + (2e_1) \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S \rangle.$$

(ii) Si $e_1 + e_n \in \Psi$, entonces $-2e_n \in \Psi$ pues de lo contrario $\Psi_n = \{e_i + e_j,\, 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{2e_i,\, 1 \leq i \leq n\}$ pues

$$\begin{aligned} e_k + e_n &= (e_k - e_n) + (2e_n) \in \Psi, \text{ para } 1 \leq k < n - 1 \text{ y} \\ 2e_k &= (e_k + e_n) + (e_k - e_n) \in \Psi, \text{ para } 1 \leq k \leq n - 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$e_1 - e_n = (e_1 + e_n) + (-2e_1) \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S \rangle. \quad \square$$

CASO $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}^*(2n)$.

Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}^*(2n)$ entonces $\mathfrak{k} = \mathfrak{u}(n)$, y sus sistemas de raíces con respecto a $\mathfrak{t}$ son

$$\begin{gathered} \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) = \{\pm e_i \pm e_j,\, 1 \leq i < j \leq n\}, \text{ y} \\ \Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) = \{\pm(e_i - e_j),\, 1 \leq i < j \leq n\} \end{gathered}$$

respectivamente. Por lo tanto el conjunto de raíces no compactas de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ es

$$\Phi_n(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) = \{\pm(e_i + e_j),\, 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Fijemos el sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ dado por

$$\Delta = \{(e_i - e_j),\ 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Si $\mathfrak{h} = \mathfrak{u}(p,q)$ donde $p+q=n$ entonces $\mathfrak{l} = \mathfrak{u}(p) \oplus \mathfrak{u}(q)$, y su sistema de raíces con respecto a $\mathfrak{t}$ es

$$\Phi(\mathfrak{l},\mathfrak{t}) = \{\pm(e_i - e_j),\, 1 \leq i < j \leq p\} \cup \{\pm(e_k - e_l)\ p+1 \leq k < l \leq n\}.$$

El conjunto de raíces no compactas de $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ es

$$\Phi_n(\mathfrak{g},\mathfrak{t}) = \{\pm(e_i + e_j)\ 1 \leq i < j \leq n\}$$

Fijemos el sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{k},\mathfrak{t})$ dado por

$$\Delta = \{(e_i - e_j),\ 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Definimos el conjunto

$$S \subset (\Phi(\mathfrak{k},\mathfrak{t}) - \Phi(\mathfrak{k},\mathfrak{t})) \cap \Delta = \{(e_i - e_l),\, 1 \leq i \leq p,\ p+1 \leq l \leq n\}$$

de raíces fuertemente ortogonales definido por de la siguiente manera

$$S = \{e_1 - e_n, e_2 - e_{n-1}, ..., e_p - e_{q+1}\}$$

si $p \leq q$ y

$$S = \{e_1 - e_n, e_2 - e_{n-1}, ..., e_q - e_{p+1}\}$$

si $q \leq p$. Notemos que para toda raíz $\alpha \in \Delta$ tenemos $\langle \alpha, e_1 - e_n \rangle \geq 0$.

Lema 5. *Sea $\Psi = \Psi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ un sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ que contiene a Δ. Entonces $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S \rangle = 0$ si y sólo si $\Psi = \Delta \cup \Psi_n$ con*

$$\pm\Psi_n = \{(e_i + e_j),\, 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Es decir $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S \rangle = 0$ si y sólo si Ψ es el sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ holomorfo o el antiholomorfo.

Demostración: Si $\pm\Psi_n = \{(e_i + e_j),\, 1 \leq i < j \leq n\}$, y $\alpha \in \Psi_n$ entonces $\langle \alpha, e_1 \rangle \langle \alpha, e_n \rangle \geq 0$ y es igual a cero si y sólo si $\alpha = 0$. Por otra parte si $\alpha \in \langle S \rangle$ entonces $\langle \alpha, e_1 \rangle \langle \alpha, e_n \rangle \leq 0$. Por lo tanto $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S \rangle = 0$.

Reciporcamente si Ψ no el sistema holomorfo o antiholomorfo entonces las raíces no comactas

$$(e_1 + e_2), (-e_{n-1} - e_n) \in \Psi. \tag{25}$$

De lo contrario, si $(-e_1 - e_2) \in \Psi$, entonces

$$-e_1 - e_k = (-e_1 - e_2) + (e_2 - e_k) \in \Psi,\ \text{para } 2 \leq k \leq n,$$
$$-e_k - e_l = (-e_1 - e_k) + (e_1 - e_l),\ \text{para } 1 \leq k < l \leq n.$$

Por lo tanto $\Psi_n = \{(-e_i - e_j),\, 1 \leq k < l \leq n\}$.

Y si $(e_{n-1} + e_n) \in \Psi$, entonces

$$e_k + e_n = (e_{n-1} + e_n) + (e_2 - e_k) \in \Psi,\ \text{para } 3 \leq k \leq n, \text{ y}$$
$$e_k + e_l = (e_k + e_n) + (e_l - e_n) \in \Psi \text{ para } 1 \leq k < l \leq n.$$

Por lo tanto $\Psi_n = \{(e_i + e_j),\, 1 \leq k < l \leq n\}$.

Como las raíces $\pm(e_1+e_{n-1})$ son no compactas, tenemos dos posibilidades, (i) $(e_1+e_{n-1})\in\Psi$ o (ii) $(-e_1-e_{n-1})\in\Psi$.

(i) Si $(e_1+e_{n-1})\in\Psi$, por (25)

$$e_1-e_n=(e_1+e_{n-1})+(-e_{n-1}-e_n)\in\mathbb{R}^+\Psi_n\cap\langle S\rangle.$$

(ii) Si $(-e_1-e_{n-1})\in\Psi$, por Observación (??) la raíz no compacta

$$-e_2-e_n=(-e_1-e_{n-1})+(e_1-e_2)+(e_{n-1}-e_n)\in\Psi$$

y por (25)

$$e_1-e_n=(e_1+e_2)+(-e_2-e_n)\in\mathbb{R}^+\Psi_n\cap\langle S\rangle. \quad \square$$

Caso $\mathfrak{g}=\mathfrak{e}_{6(2)}$.

Sea $\mathfrak{g}=\mathfrak{e}_{6(2)}$, entonces $\mathfrak{k}=\mathfrak{su}(6)\oplus\mathfrak{su}(2)$.

Los sistemas de raíces de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{k}$ con respecto a $\mathfrak{t}$ son

$$\begin{aligned}\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})&=\{\pm e_i\pm e_j,\ 1\le i<j\le 5\}\\&\qquad\cup\left\{\pm\left(\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{5}(-1)^{n_i}e_i-e_6-e_7+e_8\right)\right);\ |\sum_{i=1}^{5}n_i\,\text{par}\right\}\\ \Phi(\mathfrak{k},\mathfrak{t})&=\{\pm(e_i-e_j),\ 1\le i<j\le 5\}\cup\{\pm w_i, 1\le i\le 6\}\end{aligned}$$

respectivamente, donde

$w_1=\frac{1}{2}(e_1-e_2-e_3-e_4-e_5-e_6-e_7+e_8)$,
$w_2=\frac{1}{2}(-e_1+e_2-e_3-e_4-e_5-e_6-e_7+e_8)$,
$w_3=\frac{1}{2}(-e_1-e_2+e_3-e_4-e_5-e_6-e_7+e_8)$,
$w_4=\frac{1}{2}(-e_1-e_2-e_3+e_4-e_5-e_6-e_7+e_8)$,
$w_5=\frac{1}{2}(-e_1-e_2-e_3-e_4+e_5-e_6-e_7+e_8)$,
$w_6=\frac{1}{2}(e_1+e_2+e_3+e_4+e_5-e_6-e_7+e_8)$.

Por lo tanto el conjunto de las raíces no compactas de $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ es

$$\Phi_n(\mathfrak{g},\mathfrak{t})=\{\pm(e_i+e_j),\ 1\le i<j\le 5\}\cup\{\pm v_j, 1\le j\le 10\},$$

en el cual

$v_1=\frac{1}{2}(e_1+e_2+e_3-e_4-e_5-e_6-e_7+e_8)$,
$v_2=\frac{1}{2}(e_1+e_2-e_3+e_4-e_5-e_6-e_7+e_8)$,
$v_3=\frac{1}{2}(e_1+e_2-e_3-e_4+e_5-e_6-e_7+e_8)$,
$v_4=\frac{1}{2}(e_1-e_2+e_3+e_4-e_5-e_6-e_7+e_8)$,
$v_5=\frac{1}{2}(e_1-e_2+e_3-e_4+e_5-e_6-e_7+e_8)$,
$v_6=\frac{1}{2}(e_1-e_2-e_3+e_4+e_5-e_6-e_7+e_8)$,
$v_7=\frac{1}{2}(-e_1+e_2+e_3+e_4-e_5-e_6-e_7+e_8)$,
$v_8=\frac{1}{2}(-e_1+e_2+e_3-e_4+e_5-e_6-e_7+e_8)$,
$v_9=\frac{1}{2}(-e_1+e_2-e_3+e_4+e_5-e_6-e_7+e_8)$,
$v_{10}=\frac{1}{2}(-e_1-e_2+e_3+e_4+e_5-e_6-e_7+e_8)$.

Fijemos Δ el sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{k},\mathfrak{t})$, definido por

$$\Delta = \{e_i - e_j, 1 \leq i < j \leq 5\} \cup \{w_k, 1 \leq k \leq 6\}.$$

LEMA 6. *Sea $\Psi = \Psi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ un sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ que contiene a Δ. Entonces $v_i \in \Psi_n$ para $1 \leq i \leq 5$.*

Demostración: (i) Si $(e_4 + e_5) \in \Psi_n$ entonces

$$v_1 = (e_4 + e_5) + w_3 + (e_1 - e_4) + (e_2 - e_5) \in \Psi_n,$$

y si $(-e_4 - e_5) \in \Psi_n$ tenemos que

$$v_1 = w_6 + (-e_4 - e_5) \in \Psi_n.$$

(ii) Si $(e_3 + e_5) \in \Psi_n$ entonces

$$v_2 = (e_3 + e_5) + w_4 + (e_1 - e_3) + (e_2 - e_5) \in \Psi_n,$$

y si $(-e_3 - e_5) \in \Psi_n$ tenemos que

$$v_2 = w_6 + (-e_3 - e_5) \in \Psi_n.$$

(iii) Si $(e_3 + e_4) \in \Psi_n$ entonces

$$v_3 = (e_3 + e_4) + w_5 + (e_1 - e_3) + (e_2 - e_4) \in \Psi_n,$$

y si $(-e_3 - e_4) \in \Psi_n$ tenemos que

$$v_3 = w_6 + (-e_3 - e_4) \in \Psi_n.$$

(iv) Si $(e_2 + e_5) \in \Psi_n$ entonces

$$v_4 = (e_2 + e_5) + w_4 + (e_1 - e_2) + (e_3 - e_5) \in \Psi_n,$$

y si $(-e_2 - e_5) \in \Psi_n$ tenemos que

$$v_4 = w_6 + (-e_2 - e_5) \in \Psi_n.$$

(v) Si $(e_2 + e_4) \in \Psi_n$ entonces

$$v_5 = (e_2 + e_4) + w_5 + (e_1 - e_2) + (e_3 - e_4) \in \Psi_n,$$

y si $(-e_2 - e_4) \in \Psi_n$ tenemos que

$$v_5 = w_6 + (-e_2 - e_4) \in \Psi_n.$$

Por lo tanto $\{v_i\}_{i=1}^5 \subset \Psi_n$ para todo sistema de raíces positivas Ψ de $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ que contiene a Δ. $\square$

LEMA 7. *(i) Si $k < l$ y $e_k + e_l \in \Psi$ entonces $e_i + e_j \in \Psi$ para $1 \leq i \leq k$ y $i+1 \leq j \leq l$. (ii) Si $k < l$ y $-e_k - e_l \in \Psi$ entonces $-e_i - e_j \in \Psi$ para $l \leq j \leq n$ y $k \leq i \leq j-1$.*

Demostración: (i) Si $s < t$, $(e_s - e_t) \in \Delta \subset \Psi$ entonces

$$\begin{aligned} e_i + e_l &= e_k + e_l + (e_i - e_k) \in \Psi \text{ si } 1 \leq i < k; \text{ lo cual implica} \\ e_i + e_j &= e_i + e_l + (e_j - e_l) \in \Psi \text{ si } i+1 \leq j < l. \end{aligned}$$

Por lo tanto $(e_i + e_j) \in \Psi_n$ si $1 \leq i \leq k$ y $i+1 \leq j \leq l$.

(ii) Análogamente

$$\begin{aligned} -e_k - e_j &= -e_k - e_l + (e_l - e_j) \in \Psi \text{ si } l < j \leq n; \text{ lo cual implica} \\ -e_i - e_j &= -e_k - e_j + (e_k - e_i) \in \Psi \text{ si } k < i \leq j-1. \end{aligned}$$

Por lo tanto $-e_i - e_j \in \Psi_n$ si $l \leq j \leq n$ y $k \leq i \leq j-1$. □

Sea $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}^*(10) \oplus \mathfrak{so}(2)$ entonces $\mathfrak{l} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$ es isomorfa a A_4 y su sistema de raíces con respecto a $\mathfrak{t}$ es

$$\Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{t}) = \{\pm(e_i - e_j),\ 1 \leq i < j \leq 5\}.$$

Definamos el conjunto S de raíces fuertemente ortogonales dos a dos,

$$S \subset (\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) - \Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{t})) \cap \Delta = \{w_i, 1 \leq i \leq 6\},$$

por

$$S = \{w_1, w_6\}.$$

Sea $\beta = w_1 + w_6 \in \langle S \rangle$ observemos que $\langle \beta, \alpha \rangle \geq 0$ para toda raíz $\alpha \in \Delta$.

Lema 8. *Para todo sistema de raíces positivas $\Psi = \Psi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ que contiene a Δ, $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S \rangle \neq 0$.*

Demostración: Como las raíces $\pm(e_2+e_4)$ son no compactas, tenemos dos posibilidades, (i) $e_2 + e_4 \in \Psi_n$ o (ii) $-e_2 - e_4 \in \Psi_n$.

(i) Si $e_2 + e_4 \in \Psi_n$ por Lema 6

$$w_6 = v_5 + (e_2 + e_4) \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S \rangle.$$

(ii) Si $-e_2 - e_4 \in \Psi_n$ entonces nuevamente por Lema 6

$$w_1 = v_2 + (-e_2 - e_4) \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S \rangle.$$

Por lo tanto $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S \rangle \neq 0$ para todo sistema de raíces positiva Ψ de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ que contiene a Δ.

Sea $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(6,4) \oplus \mathfrak{so}(2)$, entonces $\mathfrak{l}$ es isomorfa a $A_2 \oplus A_1 \oplus A_1$ y su sistema de raíces con respecto a $\mathfrak{t}$ es

$$\Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{t}) = \{\pm w_6\} \cup \{\pm(e_1 - e_2)\} \cup \{\pm(e_i - e_j),\ 3 \leq i < j \leq 5\}$$

Definamos el conjunto S de raíces fuertemente ortogonales contenido en el conjunto

$$\begin{aligned} (\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) - \Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{t})) \cap \Delta = \{w_i, 1 \leq i \leq 5\} \cup \{(e_k - e_5),\ 3 \leq k \leq 4\} \\ \cup \{(e_i - e_j),\ 1 \leq i \leq 2,\ 3 \leq j \leq 5\}, \end{aligned}$$

por

$$S = \{w_1, (e_1 - e_4), (e_2 - e_5)\}.$$

Sea $\beta = 2w_1 + (e_2 - e_5) \in \langle S \rangle$ observemos que $\langle \beta, \alpha \rangle \geq 0$ para toda raíz $\alpha \in \Delta$.

Lema 9. *Sea Ψ un sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ que contiene a Δ. Entonces $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S \rangle = 0$ si y sólo si $\Psi = \Delta \cup \Psi_n$ con*

$$\Psi_n = \{e_i + e_j,\ 1 \leq i < j \leq 5\} \cup \{v_k,\ 1 \leq k \leq 10\}. \tag{26}$$

Observación: El sistema de raíces positivas $\Psi = \Delta \cup \Psi_n$ con Ψ_n definido en (26) no es un sistema holomorfo pues $v_{10}, (e_1+e_2) \in \Psi_n$ y $w_6 = v_{10} + (e_1+e_2) \in \Delta$.

Demostración: Como las raíces $\pm(-e_3-e_5)$ son no compactas tenemos dos posibilidades, (i) $-e_3-e_5 \in \Psi_n$ o (ii) $e_3+e_5 \in \Psi_n$.

(i) Si $-e_3-e_5 \in \Psi_n$, por Lema 26

$$w_1 = v_5 + (-e_3-e_5) \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S \rangle.$$

(ii) Si $e_3+e_5 \in \Psi_n$ entonces $(e_i+e_j) \in \Psi_n$ para $1 \leq i \leq 3$ y $i < j \leq 5$, por Lema (7) y $v_k \in \Psi_n$ para $1 \leq k \leq 10$, pues por Lema 6 $\{v_k\}_{k=1}^5 \subset \Psi_n$ y

$$\begin{array}{lll} v_6 = (e_1+e_4)+w_5 & v_7 = (e_2+e_3)+w_4 & v_8 = (e_2+e_3)+w_5 \\ v_9 = (e_2+e_4)+w_5 & v_{10} = (e_3+e_4)+w_5. & \end{array}$$

Como $\pm(e_4+e_5)$ son también raíces no compactas tenemos nuevamente dos posibilidades: (a) $-e_4-e_5 \in \Psi_n$ o (b) $(e_4+e_5) \in \Psi_n$.

(a) Si $-e_4-e_5 \in \Psi_n$ entonces

$$w_1 = v_6 + (-e_4-e_5) \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S \rangle,$$

(b) Si $(e_4+e_5) \in \Psi$ entonces

$$\Psi_n = \{e_i+e_j,\ 1 \leq i < j \leq 5\} \cup \{v_k,\ 1 \leq k \leq 10\}$$

y $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S \rangle = 0$. Pues supongamos que $\gamma \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S \rangle$, entonces existen escalares tales que

$$\begin{aligned} \gamma &= c_1 w_1 + c_2(e_1-e_4) + c_3(e_2-e_5) \\ \gamma &= \sum_{i=1}^{10} m_i v_i + \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=i+1}^{5} n_{4(i-1)-\frac{(i-2)(i-1)}{2}+j-i}(e_i+e_j) \end{aligned}$$

donde $m_i, n_i \geq 0$ para $1 \leq i \leq 10$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{c_1}{2} + c_2 = \langle \gamma, e_1 \rangle = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + \frac{1}{2}(&m_1 + m_2 + m_3 + m_4 \\ &+ m_5 + m_6 - m_7 - m_8 - m_9 - m_{10}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{c_1}{2} + c_3 = \langle \gamma, e_2 \rangle = n_1 + n_5 + n_6 + n_7 + \frac{1}{2}(&m_1 + m_2 + m_3 \\ &- m_4 - m_5 - m_6 + m_7 + m_8 + m_9 - m_{10}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{c_1}{2} = \langle \gamma, e_3 \rangle = n_2 + n_5 + n_8 + n_9 + \frac{1}{2}(&m_1 - m_2 - m_3 + m_4 \\ &+ m_5 - m_6 + m_7 + m_8 - m_9 + m_{10}), \end{aligned}$$

$$-\frac{c_1}{2}-c_2=\langle\gamma,e_4\rangle=n_3+n_6+n_8+n_{10}+\frac{1}{2}(-m_1+m_2-m_3 \\ +m_4-m_5+m_6+m_7-m_8+m_9+m_{10}),$$

$$-\frac{c_1}{2}+c_3=\langle\gamma,e_5\rangle=n_4+n_7+n_9+n_{10}+\frac{1}{2}(-m_1-m_2+m_3 \\ -m_4+m_5+m_6-m_7+m_8+m_9+m_{10}),$$

$$\frac{c_1}{2}=\langle\gamma,e_8\rangle=\frac{1}{2}(m_1+m_+m_3+m_4+m_5+m_6+m_7+m_8+m_9+m_{10}).$$

Como $m_i, n_i \geq 0$ para todo i entonces la última ecuación implica que $c_1 \geq 0$. Operando tenemos

$$0=\langle\gamma,e_3+e_8\rangle=n_2+n_5+n_8+n_9+m_1+m_4+m_5+m_7+m_8+m_{10}$$

lo que implica $n_i=0$ para $i\in\{2,5,8,9\}$ y $m_j=0$ para $j\in\{1,4,5,7,8,10\}$ y

$$0=\langle\gamma,e_1+e_4\rangle=n_1+2n_3+n_4+n_6+n_{10}+m_2+m_6$$

lo que implica $n_i=0$ para $i\in\{1,3,4,6,10\}$ y $m_j=0$ para $j\in\{2,6\}$.

Por último tenemos

$$0\geq -c_1=\langle\gamma,e_2+e_5\rangle=2n_7+m_3+m_5+m_9\geq 0$$

por lo tanto $c_1=0$, $n_7=0$ y $m_j=0$ para $j\in\{5,9\}$. Consecuentemente $n_i=m_i=0$ para todo i y

$$\gamma=0.$$

Como queríamos probar. □

Si $\mathfrak{h}=\mathfrak{su}(3,3)\oplus\mathfrak{sl}_2$ entonces $\mathfrak{l}=\mathfrak{h}\cap\mathfrak{k}$ es isomorfa a $A_2\oplus A_2$ y su sistema de raíces con respecto a $\mathfrak{t}$ es

$$\Phi(\mathfrak{l},\mathfrak{t})=\{\pm(e_1-e_2)\}\cup\{\pm(e_i-e_j),\ 3\leq i<j\leq 5\}\cup\{\pm w_i,\ i=1,2\}.$$

Definamos el conjunto S de raíces fuertemente ortogonales contenido en conjunto

$$(\Phi(\mathfrak{k},\mathfrak{t})-\Phi(\mathfrak{l},\mathfrak{t}))\cap\Delta=\{(e_i-e_j),\ 1\leq i\leq 2,\ 3\leq j\leq 5\}\cup\{w_i, 3\leq i\leq 6\}$$

por

$$S=\{w_3,w_6,(e_1-e_4),(e_2-e_5)\}.$$

Observemos que para toda raíz $\alpha\in\Delta$, $\langle w_6,\alpha\rangle\geq 0$.

Lema 10. *Para todo sistema de raíces positivas Ψ de $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ que contiene a Δ,*

$$\mathbb{R}^+\Psi_n\cap\langle S\rangle\neq 0.$$

Demostración: Como las raíces $\pm(e_2+e_4)$ son no compactas, entonces tenemos dos posibilidades, (i) $e_2+e_4 \in \Psi_n$ o (ii) $-e_2-e_4 \in \Psi_n$.

(i) Si $e_2+e_4 \in \Psi_n$, por Lema 26

$$w_6 = v_5 + (e_2+e_4) \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle.$$

(ii) Si $-e_2-e_4 \in \Psi_n$ tenemos nuevamente dos posibilidades (a) $v_7 \in \Psi_n$ o (b) $-v_7 \in \Psi_n$.

(a) Si $v_7 \in \Psi_n$ entonces

$$w_3 = v_7 + (-e_2-e_4) \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle.$$

(b) Si $-v_7 \in \Psi_n$ entonces

$$e_1 - e_4 = -v_7 + v_1 \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle.$$

Por lo tanto

$$\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle \neq 0$$

para todo sistema de raíces positivas Ψ de $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ que contiene a Δ.

Si $\mathfrak{h} = \mathfrak{su}(4,2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ entonces $\mathfrak{l} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$ es isomorfa a $A_3 \oplus A_1 \oplus A_1$ y su sistema de raíces con respecto a $\mathfrak{t}$ es

$$\Phi(\mathfrak{l},\mathfrak{t}) = \{\pm(e_i - e_j),\ 2 \leq i < j \leq 5\} \cup \{\pm w_1, \pm w_6\}$$

Definamos el conjunto S de raíces fuertemente ortogonales contenido en

$$(\Phi(\mathfrak{k},\mathfrak{t}) - \Phi(\mathfrak{l},\mathfrak{t})) \cap \Delta = \{w_i, 2 \leq i \leq 5\} \cup \{(e_1 - e_j),\ 2 \leq j \leq 5\}$$

por

$$S = \{w_2, e_1 - e_5\}.$$

Observemos que $\langle \alpha, e_2 + (e_1 - e_5)\rangle \geq 0$ para toda raíz positiva $\alpha \in \Delta$.

Lema 11. *Sea $\Psi = \Psi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ un sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ que contiene a Δ. Entonces $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle = 0$ si y sólo si $\Psi = \Delta \cup \Psi_n$ con*

$$\Psi_n = \{(e_i + e_j),\ 1 \leq i < j \leq 5\} \cup \{v_k,\ 1 \leq k \leq 10\}. \tag{27}$$

Demosración: Como $\pm(e_1+e_5)$ son raíces no compactas entonces tenemos dos posibilidades, (i) $-e_1-e_5 \in \Psi$ o (ii)$e_1+e_5 \in \Psi$.

(i) Si $-e_1-e_5 \in \Psi$ entonces

$$w_2 = -e_1 - e_5 + v_3 \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle.$$

(ii) Si $e_1+e_5 \in \Psi_n$ entonces por Lema 7, las raíces $e_1+e_j \in \Psi_n$ para $2 \leq j \leq 5$. Si $-v_{10} \in \Psi_n$ entonces

$$-v_{10} + v_4 = e_1 - e_5 \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle,$$

y si $v_{10} \in \Psi_n$ entonces $v_i \in \Psi_n$ para $i = \{6,7,8,9\}$ pues

$v_6 = v_{10} + (e_1 - e_3)$, $v_7 = v_{10} + (e_2 - e_5)$, $v_8 = v_{10} + (e_2 - e_4)$,

$v_9 = v_{10} + (e_2 - e_3)$.

Por último tenemos nuevamente dos opsiones (a) $-e_4-e_5 \in \Psi_n$ o (b) $e_4+e_5 \in \Psi_n$.

(a) Si $-e_4 - e_5 \in \Psi_n$ entonces

$$w_2 = v_9 + (-e_4 - e_5) \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S \rangle.$$

(b) Si $e_4 + e_5 \in \Psi_n$ por Lema 7,

$$\Psi_n = \{(e_i + e_j),\ 1 \le i < j \le 5\} \cup \{v_k,\ 1 \le k \le 10\}.$$

Probemos que $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S \rangle = 0$. Supongamos que $\gamma \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S \rangle$, entonces existen escalares tales que

$$\gamma = c_1 w_2 + c_2(e_1 - e_5) \quad \text{y}$$
$$\gamma = \sum_{i=1}^{10} m_i v_i + \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=i+1}^{5} n_{4(i-1)-\frac{(i-2)(i-1)}{2}+j-i}(e_i + e_j)$$

donde $m_i, n_i \ge 0$ para $1 \le i \le 10$.

$$0 = \langle \gamma, e_2 + e_8 \rangle = n_1 + n_5 + n_7 + m_1 + m_2 + m_3 + m_7 + m_8 + m_9$$

entonces $n_i = 0$ para $i \in \{1, 5, 6, 7\}$ y $m_j = 0$ para $j \in \{1, 2, 3, 7, 8, 9\}$.

$$0 = \langle \gamma, e_3 + e_8 \rangle = n_2 + n_8 + n_9 + m_4 + m_5 + m_{10} \tag{28}$$

entonces $n_i = 0$ para $i \in \{2, 8, 9\}$ y $m_j = 0$ para $j \in \{4, 5, 10\}$.

$$0 = \langle \gamma, e_4 + e_8 \rangle = n_3 + n_{10} + m_6 \tag{29}$$

entonces $n_i = 0$ para $i \in \{1, 10\}$ y $m_6 = 0$.

$$0 = \langle \gamma, e_1 + e_5 \rangle = 2n_4 \tag{30}$$

entonces $n_4 = 0$.

Las ecuaciones (28), (29) y (30) implican que

$$\gamma = 0$$

como queríamos probar. □

Caso $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_{6(-14)}$

Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_{6(-14)}$, entonces $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(10) \oplus \mathfrak{so}(2)$. Los sistemas de raíces de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{k}$ con respecto a $\mathfrak{t}$ son

$$\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) = \{\pm e_i \pm e_j,\ 1 \le i < j \le 5\}$$
$$\cup \left\{ \pm\Big(\frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{5} (-1)^{n_i} e_i - e_6 - e_7 - e_8\Big)\Big);\ | \sum_{i=1}^{8} n_i \,\text{par} \right\}$$

$\Phi(\mathfrak{k},\mathfrak{t}) = \{\pm e_i \pm e_j,\, 1 \le i < j \le 4\} \cup \{\pm w_i, 1 \le i \le 4\} \cup \{\pm v_j,\, j \in \{1,2,4,7\}\}$ respectivamente

Por lo tanto el conjunto de raíces no compactas de $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ es

$$\Phi_n(\mathfrak{g},\mathfrak{t}) = \{\pm e_i \pm e_5,\, 1 \le i \le 4\} \cup \{\pm w_j,\, 5 \le j \le 6\} \cup \{\pm v_k,\, k \in \{3,5,6,8,9,10\}\}.$$

Fijemos el conjunto de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{k},\mathfrak{t})$ definido por

$$\Delta = \{e_i \pm e_j,\, 1 \le i < j \le 4\} \cup \{w_i,\, 1 \le i \le 4\} \cup \{v_k,\, k \in \{1,2,4,7\}\}.$$

Si $\mathfrak{h} = \mathfrak{su}(5,1) \oplus \mathfrak{sl}_2$, entonces $\mathfrak{l} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$ es isomorfa a A_4 y su sistema de raíces con respecto a $\mathfrak{t}$ esta dado por

$$\Phi(\mathfrak{l},\mathfrak{t}) = \{\pm(e_i - e_j),\, 1 \le i < j \le 4\} \cup \{\pm w_k,\, 1 \le k \le 4\}.$$

Sea S el conjunto de raíces fuertemente ortogonales contenido en

$$(\Phi(\mathfrak{k},\mathfrak{t}) - \Phi(\mathfrak{l},\mathfrak{t})) \cap \Delta = \{(e_i + e_j),\, 1 \le i < j \le 4\} \cup \{v_k,\, k \in \{1,2,4,7\}\}$$

definido por

$$S = \{v_1, e_1 + e_4\}.$$

Observemos que para toda raíz $\alpha \in \Delta$, $\langle v_1, \alpha\rangle \ge 0$.

Lema 12. *Sea $\Psi = \Psi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ un sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ que contiene a Δ. Entonces $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle = 0$ si y sólo si $\Psi = \Delta \cup \Psi_n$ con*

$$\pm\Psi_n = \{\pm e_i + e_5,\, 1 \le i \le 4\} \cup \{w_5, w_6\} \cup \{v_k,\, k \in \{3,5,6,8,9,10\}\}.$$

Es decir $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle = 0$ si y sólo si Ψ es el sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ holomorfo o el antiholomorfo.

Demostración: Como $\pm(e_4 + e_5)$ son raíces no compactas, tenemos dos posibilidades, (i) $e_4 + e_5 \in \Psi_n$ o (ii) $-e_4 - e_5 \in \Psi_n$.

(i) Supongamos que $e_4 + e_5 \in \Psi_n$, por Lema 6 $e_i + e_5 \in \Psi_n$ para $1 \le i \le 4$.

Si $e_1 - e_5 \in \Psi_n$ entonces

$$e_1 + e_4 = (e_1 - e_5) + (e_4 + e_5) \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle,$$

y si $(-e_1 + e_5) \in \Psi_n$, Ψ es el sistema holomorfo dado por $\Psi = \Psi_n \cup \Delta$ donde

$$\Psi_n = \{\pm e_i + e_5,\, 1 \le i \le 4\} \cup \{w_5, w_6\} \cup \{v_k,\, k \in \{3,5,6,8,9,10\}\},$$

pues $(-e_i + e_5) = -e_1 + e_5 + e_1 - e_i$ para $2 \le i \le 4$, y

$$\begin{array}{lll} v_3 = w_1 + (e_2 + e_5) & v_5 = w_1 + (e_3 + e_5) & v_6 = w_1 + (e_4 + e_5) \\ v_8 = w_2 + (e_3 + e_5) & v_9 = w_4 + (e_2 + e_5) & v_{10} = w_2 + (e_4 + e_5) \\ w_5 = w_1 + (-e_1 + e_5) & w_6 = v_1 + (e_4 + e_5). & \end{array}$$

Si $\gamma \in \mathbb{R}^+\Psi_n$, $\langle \gamma, e_5\rangle\langle \gamma, e_8\rangle \ge 0$ y $\langle \gamma, e_5\rangle = 0$ si y sólo si $\gamma = 0$. Si $\gamma \in \langle S\rangle$ entonces $\langle \gamma, e_5\rangle\langle \gamma, e_8\rangle \le 0$. Por lo tanto si $\gamma \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle$ tenemos que $\langle \gamma, e_5\rangle\langle \gamma, e_8\rangle = 0$. Si

$\langle\gamma, e_5\rangle = 0$ por lo observado anteriormente $\gamma = 0$, y si $\langle\gamma, e_8\rangle = 0$ entonces $\gamma = c(e_1 + e_4)$ lo cual implica que $\langle\gamma, e_5\rangle = 0$, y que $\gamma = 0$, es decir $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle = 0$ como queríamos ver.

(ii) Si $(-e_4 - e_5) \in \Psi_n$ entonces $e_i - e_5 = (-e_4 - e_5) + (e_i + e_4) \in \Psi_n$ para $1 \le i \le 3$.
Si $w_6 \in \Psi_n$ entonces

$$v_1 = w_6 + (-e_4 - e_5) \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle,$$

y si $-w_6 \in \Psi_n$, Ψ es el sistema antiholomorfo dado por $\Psi = \Psi_n \cup \Delta$ donde

$$\Psi_n = \{\pm e_i - e_5,\ 1 \le i \le 4\} \cup \{-w_5, -w_6\} \cup \{-v_k,\ k \in \{3, 5, 6, 8, 9, 10\}\},$$

pues

$$\begin{array}{ll} -e_1 - e_5 = -w_6 + v_7 & -e_2 - e_5 = -w_6 + v_4 \\ -e_3 - e_5 = -w_6 + v_2 & -e_4 - e_5 = -w_6 + v_1 \\ -v_3 = -w_6 + (e_3 + e_4) & -v_5 = -w_6 + (e_2 + e_4) \\ -v_6 = -w_6 + (e_2 + e_3) & -v_8 = -w_6 + (e_1 + e_4) \\ -v_9 = -w_6 + (e_1 + e_3) & -v_{10} = -w_6 + (e_1 + e_2) \end{array}$$

y $-w_5 = -w_6 + (e_1 + e_2) + (e_3 + e_4)$.

Nuevamente, si $\gamma \in \langle S\rangle$ entonces $\langle\gamma, e_5\rangle\langle\gamma, e_8\rangle \le 0$; y si $\gamma \in \mathbb{R}^+\Psi_n$ entonces $\langle\gamma, e_5\rangle\langle\gamma, e_8\rangle \ge 0$ y $\langle\gamma, e_5\rangle = 0$ si y sólo si $\gamma = 0$. Razonando de manera análoga al caso Ψ holomorfo tenemos que $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle = 0$. Como queríamos demostrar. $\Box$

Si $\mathfrak{h} = \mathfrak{su}(4, 2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ entonces $\mathfrak{l}$ es isomorfa a $A_3 \oplus A_1 \oplus A_1$ y su sistema de raíces con respecto a $\mathfrak{t}$ es

$$\begin{aligned} \Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{t}) = \{\pm(e_1 - e_j),\ 2 \le j \le 4\} &\cup \{\pm(e_i + e_j),\ 2 \le i < j \le 4\} \\ &\cup \{\pm w_k,\ 2 \le k \le 4\} \cup \{\pm v_m,\ m \in \{1, 2, 4\}\}. \end{aligned}$$

Definamos el conjunto $S \subset (\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) - \Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{t})) \cap \Delta$ por

$$S = \{v_1, w_4, e_2 + e_4, e_1 - e_3\}.$$

Observemos que para toda raíz $\alpha \in \Delta$, $\langle v_1, \alpha\rangle \ge 0$.

Lema 13. *Sea Ψ un sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ que contiene a Δ. Entonces $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle = 0$ si y sólo si Ψ es el sistema holomorfo o el antiholomorfo.*

Demostración: Como $\pm(e_4 + e_5)$ son raíces no compactas, tenemos dos posibilidades, (i) $e_4 + e_5 \in \Psi_n$ o (ii) $-e_4 - e_5 \in \Psi_n$,

(i) Si $e_4 + e_5 \in \Psi_n$, por Lema 6 $e_i + e_5 \in \Psi_n$ para $1 \le i \le 4$ y $w_6, v_i \in \Psi_n$ para $i \in \{3, 5, 6, 8\}$ pues

$$\begin{array}{lll} w_6 = v_1 + (e_4 + e_5) & v_3 = w_1 + (e_2 + e_5) & v_5 = w_1 + (e_3 + e_5) \\ v_6 = w_1 + (e_2 + e_5) & v_8 = w_2 + (e_3 + e_5) & v_9 = w_4 + (e_2 + e_5) \\ v_{10} = w_3 + (e_4 + e_5) & & \end{array}$$

Si $e_1 - e_5 \in \Psi_n$ entonces

$$v_1 = (e_1 - e_5) + v_8 \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle.$$

y si $(-e_1+e_5)\in\Psi_n$ entonces Ψ es el sistema holomorfo dado por $\Psi=\Psi_n\cup\Delta$ donde

$$\Psi_n=\{\pm e_i+e_5,\,1\le i\le 4\}\cup\{w_5,w_6\}\cup\{v_k,\,k\in\{3,5,6,8,9,10\}\},$$

pues $(-e_i+e_5)=(-e_1+e_5)+(e_1-e_i)$, con $2\le i\le 4$, y
$w_5=w_1+(-e_1+e_5)$.

Probemos que $\mathbb{R}^+\Psi_n\cap\langle S\rangle=0$. Si $\gamma\in\langle S\rangle$ entonces $\langle\gamma,e_5\rangle\langle\gamma,e_8\rangle\le 0$; y si $\gamma\in\mathbb{R}^+\Psi_n$ entonces $\langle\gamma,e_5\rangle\langle\gamma,e_8\rangle\ge 0$ y $\langle\gamma,e_5\rangle=0$ si y sólo si $\gamma=0$. Entonces si $\gamma\in\mathbb{R}^+\Psi_n\cap\langle S\rangle$ tenemos que $\langle\gamma,e_5\rangle\langle\gamma,e_8\rangle=0$, si $\langle\gamma,e_5\rangle=0$ entonces $\gamma=0$ y si $\langle\gamma,e_8\rangle=0$ entonces $\gamma=c_1(e_1-e_3)+c_2(e_2+e_4)$ lo que implica $\langle\gamma,e_5\rangle=0$, es decir que $\gamma=0$. Por lo tanto $\mathbb{R}^+\Psi_n\cap\langle S\rangle=0$ como queríamos ver.

(ii) Si $-e_4-e_5\in\Psi_n$ entonces $e_i-e_5\in\Psi_n$ con $1\le i\le 3$ pues $e_i-e_5=(-e_4-e_5)+(e_i+e_4)$.

Si $w_6\in\Psi_n$ entonces

$$v_1=(-e_4-e_5)+w_6\in\mathbb{R}^+\Psi_n\cap\langle S\rangle,$$

y si $-w_6\in\Psi_n$ entonces el sistema de raíces positivas $\Psi=\Delta\cup\Psi_n$ es el sistema de raíces positivas antiholomorfo donde

$$\Psi_n=\{\pm e_i-e_5,\,1\le i\le 4\}\cup\{-w_5,-w_6\}\cup\{-v_k,\,k\in\{3,5,6,8,9,10\}\},$$

pues

$$\begin{array}{ll}
-v_3=-w_6+(e_3+e_4) & -v_5=-w_6+(e_2+e_4)\\
-v_6=-w_6+(e_2+e_3) & -v_8=-w_6+(e_1+e_4)\\
-v_9=-w_6+(e_1+e_3) & -v_{10}=-w_6+(e_1+e_2)\\
-e_1-e_5=-w_6+v_7 & -e_2-e_5=-w_6+v_4\\
-e_3-e_5=-w_6+v_2 & -e_4-e_5=-w_6+v_1\\
e_4-e_5=v_2+(-v_3). &
\end{array}$$

Probemos que $\mathbb{R}^+\Psi_n\cap\langle S\rangle=0$. Analogamente al caso holomorfo tenemos que si $\gamma\in\langle S\rangle$ entonces $\langle\gamma,e_5\rangle\langle\gamma,e_8\rangle\le 0$; y si $\gamma\in\mathbb{R}^+\Psi_n$ entonces $\langle\gamma,e_5\rangle\langle\gamma,e_8\rangle\ge 0$ y $\langle\gamma,e_5\rangle=0$ si y sólo si $\gamma=0$. Entonces si $\gamma\in\mathbb{R}^+\Psi_n\cap\langle S\rangle$ tenemos que $\langle\gamma,e_5\rangle\langle\gamma,e_8\rangle=0$, si $\langle\gamma,e_5\rangle=0$ entonces $\gamma=0$ y si $\langle\gamma,e_8\rangle=0$ entonces $\gamma=c_1(e_1-e_3)+c_2(e_2+e_4)$ lo que implica $\langle\gamma,e_5\rangle=0$, es decir que $\gamma=0$. Por lo tanto $\mathbb{R}^+\Psi_n\cap\langle S\rangle=0$, como habiamos afirmado.

Si $\mathfrak{h}=\mathfrak{so}(2,8)$ entonces $\mathfrak{l}$ es isomorfa a D_4 y su sistema de raíces con respecto a $\mathfrak{t}$ es

$$\Phi(\mathfrak{l},\mathfrak{t})=\{\pm e_i\pm e_j,\,1\le i<j\le 4\}\cup\{\pm w_k,\,1\le k\le 4\}\cup\{\pm v_j,\,j\in\{1,2,4,7\}\}.$$

Definamos el conjunto

$$S\subset(\Phi(\mathfrak{k},\mathfrak{t})-\Phi(\mathfrak{l},\mathfrak{t}))\cap\Delta=\{w_i,\,1\le i\le 4\}\cup\{v_j,\,j\in\{1,2,4,7\}\}.$$

de raíces fuertemente ortogonales dos a dos por

$$S=\{v_1,w_4\}$$

Notemos que para toda raíz $\alpha\in\Delta$, $\langle v_1,\alpha\rangle\ge 0$.

Lema 14. *Sea Ψ un sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ que contiene a Δ. Entonces $\mathbb{R}^+\Psi_n\cap\langle S\rangle=0$ si y sólo si Ψ es el sistema holomorfo o el antiholomorfo.*

Demostración: Como las raíces $\pm(e_4+e_5)$ son no compactas, tenemos dos posibilidades, (i) $(-e_4-e_5)\in\Psi$ o (ii) $(e_4+e_5)\in\Psi$.

(i) Supongamos que $(-e_4-e_5)\in\Psi$, si $w_6\in\Psi$, entonces

$$v_1 = w_6 + (-e_4-e_5) \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle.$$

Si $-w_6\in\Psi$ entonces Ψ es el sistema de raíces holomorfo dado por $\Psi=\Psi_n\cup\Delta$ donde

$$\Psi_n = \{\pm e_i - e_5,\ 1\le i\le 4\}\cup\{-w_k,\ 5\le k\le 6\}\cup\{-v_j,\ j\in\{3,6,7,8,9,10\}\},$$

pues

$$\begin{aligned} -e_1-e_5 &= -w_6+v_5,\\ \pm e_i - e_5 &= (-e_1-e_5)+(e_1-e_i),\ 2\le i\le 4 \text{ y}\\ e_1-e_5 &= (-e_1-e_5)+(e_1-e_2)+(e_1+e_2). \end{aligned}$$

Además

$$\begin{array}{ll} -v_3 = -w_6+(e_3+e_4) & -v_5 = -w_6+(e_2+e_4)\\ -v_6 = -w_6+(e_2+e_3) & -v_8 = -w_6+(e_1+e_4)\\ -v_9 = -w_6+(e_1+e_3) & -v_{10} = -w_6+(e_1+e_2) \end{array}$$

y $-w_5 = -w_6+(e_1+e_2)+(e_3+e_4)$.

Si $\gamma\in\mathbb{R}^+\Psi_n$, entonces $\langle\gamma,e_5\rangle\langle\gamma,e_6\rangle\ge 0$ y es cero si y sólo si $\gamma=0$. Y si $\gamma\in\langle S\rangle$ entonces $\langle\gamma,e_5\rangle\langle\gamma,e_6\rangle\le 0$, por lo tanto $\mathbb{R}^+\Psi_n\cap\langle S\rangle = 0$.

(ii) Si $(e_4+e_5)\in\Psi$ entonces

$$\begin{aligned} e_i+e_5 &= (e_4+e_5)+(e_i-e_4)\in\Psi,\ 1\le i\le 3 \text{ y}\\ v_8 &= w_2+(e_3+e_5)\in\Psi. \end{aligned}$$

Si $(e_1-e_5)\in\Psi$ entonces

$$v_1 = v_8+(e_1-e_5)\in\mathbb{R}^+\Psi_n\cap\langle S\rangle,$$

y si $(-e_1+e_5)\in\Psi$ razonando de manera análoga a Lema 12 (i) demostramos que Ψ es el sistema antiholomorfo dado por $\Psi=\Psi_n\cup\Delta$ donde

$$\Psi_n = \{\pm e_i + e_5,\ 1\le i\le 4\}\cup\{w_5,w_6\}\cup\{v_k,\ k\in\{3,5,6,8,9,10\}\}$$

y

$$\mathbb{R}^+\Psi_n\cap\langle S\rangle = 0.$$

Si $\mathfrak{h}=\mathfrak{so}^*(10)\oplus\mathfrak{so}(2)$ entonces $\mathfrak{l}$ es isomorfa a A_4 y su sistema de raíces con respecto a $\mathfrak{t}$ es

$$\Phi(\mathfrak{l},\mathfrak{t}) = \{\pm e_i\pm e_j,\ 1\le i<j\le 3\}\cup\{\pm w_k,\ 1\le k\le 3\}\cup\{\pm v_1\}.$$

Fijemos el sistema de raíces positivas compacta dado por

$$\begin{aligned} \Delta = \{e_i\pm e_j,\ 1\le i<j\le 3\}&\\ \cup\{\pm e_i - e_4,\ 1\le i\le 3\}\cup\{w_k,\ 1\le k\le 3\}&\\ \cup\{-w_4\}\cup\{v_i,\ i\in\{1,2,4\}\}\cup\{-v_7\}.& \end{aligned}$$

Definamos el conjunto

$$S \subset \{\pm e_i \pm e_4,\ 1 \leq i \leq 3\} \cup \{\pm v_k,\ k \in \{2,4,7\}\} \cup \{\pm w_k,\ k \in \{2,4\}\}$$

por

$$S = \{v_2, e_1 - e_4\}.$$

Observemos que $S \subset \Delta$ y que para toda raíz $\alpha \in \Delta$, $\langle e_1 - e_4, \alpha\rangle \geq 0$.

Lema 15. *Sea Ψ un sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ que contiene a Δ. Entonces $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle = 0$ si y sólo si Ψ_n es un sistema holomorfo o antiholomorfo.*

Demostración: Como $\pm(e_4 - e_5)$ son raíces no compactas, tenemos dos posibilidades, (i) $e_4 - e_5 \in \Psi_n$ o (ii) $-e_4 + e_5 \in \Psi_n$,

(i) Si $e_4 - e_5 \in \Psi_n$, entonces

$$\begin{aligned} -e_i - e_5 &= (e_4 - e_5) + (-e_i - e_4) \in \Psi_n \text{ para } 1 \leq i \leq 3,\\ e_i - e_5 &= (e_4 - e_5) + (e_i - e_4) \in \Psi_n \text{ para } 1 \leq i \leq 3 \text{ y}\\ -e_4 - e_5 &= (e_4 - e_5) + (e_1 - e_4) + (-e_1 - e_4) \in \Psi_n. \end{aligned}$$

Además

$$\begin{array}{ll} -w_5 = -w_4 + (e_4 - e_5) & -w_6 = -v_7 + (-e_1 - e_5)\\ -v_6 = -w_4 + (-e_1 - e_5) & -v_9 = -w_4 + (-e_2 - e_5)\\ -v_8 = -v_7 + (e_4 - e_5) & -v_{10} = -w_4 + (-e_3 - e_5) \end{array}$$

Si $v_3 \in \Psi_n$ entonces

$$e_1 - e_4 = v_3 + (-v_9) \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle$$

y si $-v_3 \in \Psi_n$ entones

$$\Psi_n = \{\pm e_i - e_5,\ 1 \leq i \leq 4\} \cup \{-w_j,\ 5 \leq j \leq 6\} \cup \{-v_k,\ k \in \{3,5,6,8,9,10\}\}.$$

pues $-v_5 = -v_3 + (e_2 - e_3)$. Por lo tanto $\Psi = \Psi_n \cup \Delta$ es el sistema holomorfo. Veamos que en este caso $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle = 0$.

Si $\gamma \in \mathbb{R}^+\Psi_n$ entonces $\langle \gamma, e_5\rangle\langle \gamma, e_8\rangle \geq 0$ y $\langle \gamma, e_5\rangle = 0$ si y sólo si $\gamma = 0$. Y si $\gamma \in \langle S\rangle$, tenemos que $\langle \gamma, e_5\rangle\langle \gamma, e_8\rangle \leq 0$. Por lo tanto $\langle \gamma, e_5\rangle\langle \gamma, e_8\rangle = 0$. Si $\langle \gamma, e_5\rangle = 0$ entonces $\gamma = 0$ y si $\langle \gamma, e_8\rangle = 0$ entonces $\gamma = c(e_1 - e_4)$ y $\langle \gamma, e_5\rangle = 0$ lo cual implica que $\gamma = 0$ como queríamos demostrar.

(ii) Si $(-e_4 + e_5) \in \Psi_n$ entones $v_3, v_5 \in \Psi_n$ pues

$$\begin{aligned} v_3 &= v_2 + (-e_4 + e_5) \text{ y}\\ v_5 &= v_4 + (-e_4 + e_5). \end{aligned}$$

Si $e_1 - e_5 \in \Psi_n$ entonces

$$e_1 - e_4 = e_1 - e_5 + (-e_4 + e_5) \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle.$$

Y si $-e_1 + e_5 \in \Psi_n$ entonces

$e_2 + e_5 = (-e_1 + e_5) + (e_1 + e_2)$ $\quad$ $e_3 + e_5 = (-e_1 + e_5) + (e_1 + e_3)$
$e_1 + e_5 = (e_2 + e_5) + (e_1 - e_2)$ $\quad$ $-e_2 + e_5 = (-e_1 + e_5) + (e_1 - e_2)$
$-e_3 + e_5 = (-e_1 + e_5) + (e_1 - e_3)$ $\quad$ $-e_4 + e_5 = (-e_1 + e_5) + (e_1 - e_4)$
$w_5 = w_1 + (-e_1 + e_5)$ $\quad$ $v_6 = v_2 + (-e_2 + e_5)$
$v_8 = v_1 + (-e_1 + e_5)$ $\quad$ $v_9 = v_2 + (-e_1 + e_5)$

Si $(-e_4 - e_5) \in \Psi_n$ entonces

$$e_1 - e_4 = (e_1 + e_5) + (-e_4 - e_5) \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle$$

y si $(e_4 + e_5)$ entonces $v_{10} = w_3 + (e_4 + e_5) \in \Psi_n$ y

$$\Psi_n = \{\pm e_i + e_5,\ 1 \leq i \leq 4\} \cup \{w_j,\ 5 \leq j \leq 6\} \cup \{v_k,\ k \in \{3, 5, 6, 8, 9, 10\}\}.$$

Por lo tanto $\Psi = \Psi_n \cup \Delta$ es el sistema antiholomorfo. Razonando analogamente al caso holomorfo si $\gamma \in \mathbb{R}^+\Psi_n$ entonces $\langle\gamma, e_5\rangle\langle\gamma, e_8\rangle \geq 0$ y $\langle\gamma, e_5\rangle = 0$ si y sólo si $\gamma = 0$. Y si $\gamma \in \langle S\rangle$, tenemos que $\langle\gamma, e_5\rangle\langle\gamma, e_8\rangle \leq 0$. Por lo tanto $\langle\gamma, e_5\rangle\langle\gamma, e_8\rangle = 0$. Si $\langle\gamma, e_5\rangle = 0$ entonces $\gamma = 0$ y si $\langle\gamma, e_8\rangle = 0$ entonces $\gamma = c(e_1 - e_4)$ y $\langle\gamma, e_5\rangle = 0$ lo cual implica que $\gamma = 0$ como queríamos demostrar. □

Caso $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_{7(-5)}$

Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_{7(-5)}$, entonces $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(12) \oplus \mathfrak{su}(2)$.
Entonces los sistemas de raíces de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{k}$ con respecto a $\mathfrak{t}$ son

$$\begin{aligned}\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) = \{&\pm e_i \pm e_j,\ 1 \leq i < j \leq 6\}\\ &\cup \{\pm(-e_7 + e_8)\} \cup \{\pm(\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{6}(-1)^{n_i} e_i - e_7 + e_8));\ |\sum_{i=1}^{6} n_i \,\text{impar}\}\\ \Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) = \{&\pm e_i \pm e_j,\ 1 \leq i < j \leq 6\} \cup \{\pm(-e_7 + e_8)\}\end{aligned}$$

Por lo tanto el conjunto de las raíces no compactas de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ es

$$\Phi_n(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) = \{\pm w_k,\ 1 \leq k \leq 32\},$$

en el cual
$w_1 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 - e_6 - e_7 + e_8)$,
$w_2 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 - e_5 + e_6 - e_7 + e_8)$,
$w_3 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 - e_4 + e_5 + e_6 - e_7 + e_8)$,
$w_4 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3 + e_4 + e_5 + e_6 - e_7 + e_8)$,
$w_5 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6 - e_7 + e_8)$,
$w_6 = \frac{1}{2}(-e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6 - e_7 + e_8)$,
$w_7 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8)$,
$w_8 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3 + e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8)$,
$w_9 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3 - e_4 + e_5 - e_6 - e_7 + e_8)$,
$w_{10} = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3 - e_4 - e_5 + e_6 - e_7 + e_8)$,

$w_{11} = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3 + e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8),$
$w_{12} = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3 - e_4 + e_5 - e_6 - e_7 + e_8),$
$w_{13} = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3 - e_4 - e_5 + e_6 - e_7 + e_8),$
$w_{14} = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 + e_4 + e_5 - e_6 - e_7 + e_8),$
$w_{15} = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 + e_4 - e_5 + e_6 - e_7 + e_8),$
$w_{16} = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4 + e_5 + e_6 - e_7 + e_8),$
$w_{17} = \frac{1}{2}(-e_1 + e_2 + e_3 + e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8),$
$w_{18} = \frac{1}{2}(-e_1 + e_2 + e_3 - e_4 + e_5 - e_6 - e_7 + e_8),$
$w_{19} = \frac{1}{2}(-e_1 + e_2 + e_3 - e_4 - e_5 + e_6 - e_7 + e_8),$
$w_{20} = \frac{1}{2}(-e_1 + e_2 - e_3 + e_4 + e_5 - e_6 - e_7 + e_8),$
$w_{21} = \frac{1}{2}(-e_1 + e_2 - e_3 + e_4 - e_5 + e_6 - e_7 + e_8),$
$w_{22} = \frac{1}{2}(-e_1 + e_2 - e_3 - e_4 + e_5 + e_6 - e_7 + e_8),$
$w_{23} = \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 + e_3 + e_4 + e_5 - e_6 - e_7 + e_8),$
$w_{24} = \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 + e_3 + e_4 - e_5 + e_6 - e_7 + e_8),$
$w_{25} = \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 + e_3 - e_4 + e_5 + e_6 - e_7 + e_8),$
$w_{26} = \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 - e_3 + e_4 + e_5 + e_6 - e_7 + e_8),$
$w_{27} = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8),$
$w_{28} = \frac{1}{2}(-e_1 + e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8),$
$w_{29} = \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 + e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8),$
$w_{30} = \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 - e_3 + e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8),$
$w_{31} = \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 - e_3 - e_4 + e_5 - e_6 - e_7 + e_8),$
$w_{32} = \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5 + e_6 - e_7 + e_8),$

Fijemos el sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ definido por

$$\Delta = \{e_i \pm e_j,\, 1 \leq i < j \leq 6\} \cup \{(-e_7 + e_8)\}$$

LEMA 16. *Sea $\Psi = \Psi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ un sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$. Si Ψ contiene a Δ, entonces contiene a las raíces no compactas w_k con $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12\}$.*

Demostración:

1) Si $w_{32} \in \Psi_n$ entonces

$$w_1 = w_{32} + (e_1 - e_6) + (e_2 + e_3) + (e_4 + e_5) \in \Psi_n,$$

y si $-w_{32} \in \Psi$ entonces

$$w_1 = -w_{32} + (-e_7 + e_8) \in \Psi_n.$$

2)Si $w_{31} \in \Psi_n$ entonces

$$w_2 = w_{31} + (e_1 + e_2) + (e_3 + e_4) \in \Psi_n,$$

y si $-w_{31} \in \Psi$ entonces

$$w_2 = -w_{31} + (-e_7 + e_8) \in \Psi_n.$$

3)Si $w_{30} \in \Psi_n$ entonces

$$w_3 = w_{30} + (e_1 - e_4) + (e_2 + e_3) + (e_5 + e_6) \in \Psi_n,$$

y si $-w_{30} \in \Psi$ entonces
$$w_3 = -w_{30} + (-e_7 + e_8) \in \Psi_n.$$
4) Si $w_{29} \in \Psi_n$ entonces
$$w_4 = w_{29} + (e_1 - e_3) + (e_2 + e_4) + (e_5 + e_6) \in \Psi_n,$$
y si $-w_{29} \in \Psi$ entonces
$$w_4 = -w_{29} + (-e_7 + e_8) \in \Psi_n.$$
5) Si $w_{28} \in \Psi_n$ entonces
$$w_5 = w_{28} + (e_1 - e_2) + (e_3 + e_4) + (e_5 + e_6) \in \Psi_n,$$
y si $-w_{28} \in \Psi$ entonces
$$w_5 = -w_{28} + (-e_7 + e_8) \in \Psi_n.$$
6) Si $w_{26} \in \Psi_n$ entonces
$$w_7 = w_{26} + (e_1 - e_4) + (e_2 - e_5) + (e_3 - e_6) \in \Psi_n,$$
y si $-w_{26} \in \Psi$ entonces
$$w_7 = -w_{26} + (-e_7 + e_8) \in \Psi_n.$$
7) Si $w_{25} \in \Psi_n$ entonces
$$w_8 = w_{25} + (e_1 - e_3) + (e_2 - e_6) + (e_4 - e_5) \in \Psi_n,$$
y si $-w_{25} \in \Psi$ entonces
$$w_8 = -w_{25} + (-e_7 + e_8) \in \Psi_n.$$
8) Si $w_{24} \in \Psi_n$ entonces
$$w_9 = w_{24} + (e_1 - e_3) + (e_2 - e_4) + (e_5 - e_6) \in \Psi_n,$$
y si $-w_{24} \in \Psi$ entonces
$$w_9 = -w_{24} + (-e_7 + e_8) \in \Psi_n.$$
9) Si $w_{22} \in \Psi_n$ entonces
$$w_{11} = w_{22} + (e_1 - e_2) + (e_3 - e_5) + (e_4 - e_6) \in \Psi_n,$$
y si $-w_{22} \in \Psi$ entonces
$$w_{11} = -w_{22} + (-e_7 + e_8) \in \Psi_n.$$
10) Si $w_{21} \in \Psi_n$ entonces
$$w_{12} = w_{21} + (e_1 - e_2) + (e_3 - e_4) + (e_5 - e_6) \in \Psi_n,$$
y si $-w_{21} \in \Psi$ entonces
$$w_{12} = -w_{21} + (-e_7 + e_8) \in \Psi_n.$$
Como queríamos demostrar. $\square$

Si $\mathfrak{h} = \mathfrak{e}_{6(-14)} \oplus \mathfrak{so}(2)$ entonces $\mathfrak{l} = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}$ es isomorfa a D_5, y su sistema de raíces con respecto a $\mathfrak{t}$ es

$$\Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{t}) = \{\pm e_i \pm e_j,\ 1 \leq i < j \leq 5\}$$

Definamos el conjunto

$$S \subset \Phi(\mathfrak{k},\mathfrak{t}) - \Phi(\mathfrak{l},\mathfrak{t}) = \{\pm e_i \pm e_6,\ 1 \leq i \leq 5\} \cup \{\pm(-e_7+e_8)\}$$

por

$$S = \{-e_7+e_8, e_1-e_6, e_1+e_6\}$$

observemos que para toda raíz $\alpha \in \Delta$, $\langle \alpha, e_1 - e_6\rangle \geq 0$.

Lema 17. *Para todo sistema raíces positivas $\Psi = \Psi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ de $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ que contiene a Δ,*

$$\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle \neq 0.$$

Demostración: Como $\pm w_{16}$ son raíces no compactas tenemos dos posibilidades, (i) $w_{16} \in \Psi_n$ o (ii) $-w_{16} \in \Psi_n$.

(i) Supongamos que $w_{16} \in \Psi_n$, si $w_{17} \in \Psi_n$ entonces

$$-e_7+e_8 = w_{16}+w_{17} \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle,$$

y si $-w_{17} \in \Psi_n$ entonces

$$e_1+e_6 = -w_{17}+w_2 \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle.$$

(ii) Si $-w_{16} \in \Psi_n$ entonces $-w_{22} \in \Psi_n$ pues $-w_{22} = -w_{16} + (e_1 - e_2)$ y

$$e_1-e_6 = -w_{22}+w_9 \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle.$$

Por lo tanto $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle \neq 0$ para todo sistema de raíces positivas Ψ que contiene a Δ. $\square$

Sea $\mathfrak{h} = \mathfrak{e}_{6(2)} \oplus \mathfrak{so}(2)$, entonces $\mathfrak{l} = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}$ es isomorfa a A_5 y su sistema de raíces con respecto a $\mathfrak{t}$ es

$$\Phi(\mathfrak{l},\mathfrak{t}) = \{\pm(e_i - e_j),\ 1 \leq i < j \leq 6\}.$$

Definamos el conjunto

$$S \subset \Phi(\mathfrak{k},\mathfrak{t}) - \Phi(\mathfrak{l},\mathfrak{t}) = \{\pm(e_i + e_j),\ 1 \leq i < j \leq 6\} \cup \{\pm(-e_7+e_8)\},$$

dado por

$$S = \{-e_7+e_8, e_1+e_2, e_3+e_4, e_5+e_6\}.$$

Lema 18. *Para todo sistema de raíces positivas Ψ de $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ que contiene a Δ tenemos*

$$\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle \neq 0.$$

Demostración: Como $\pm w_{15}$ son raíces no compactas entonces tenemos dos posibilidades, (i) $w_{15} \in \Psi_n$ o (ii) $-w_{15} \in \Psi_n$.

(i) Supongamos que $w_{15} \in \Psi_n$. Si $w_{18} \in \Psi_n$ entonces

$$-e_7+e_8 = w_{15}+w_{18} \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle,$$

y si $-w_{18} \in \Psi_n$ entonces $-w_{24} \in \Psi_n$ pues

$$-w_{24} = -w_{18} + (e_2 - e_4) + (e_5 - e_6) \in \Psi_n$$

y

$$e_1 + e_2 = -w_{24} + w_2 \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle.$$

(ii) Si $-w_{15} \in \Psi_n$ entonces $-w_{16} = -w_{15} + (e_4 - e_5) \in \Psi_n$ y

$$e_3 + e_4 = -w_{16} + w_5 \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle.$$

Por lo tanto $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle \neq 0$ para todo Ψ que contiene a Δ como queríamos demostrar. □

Sea $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}^*(12) \oplus \mathfrak{sl}_2$, entonces $\mathfrak{l} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$ es isomorfa a A_5 y su sistema de raíces con respecto a $\mathfrak{t}$ es

$$\Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{t}) = \{e_1 + e_j,\, 2 \leq j \leq 6\} \cup \{e_i - e_j,\, 2 \leq i < j \leq 6\}.$$

Definamos el conjunto de raíces fuertemente ortogonales

$$S \subset \Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) - \Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{t}) = \{e_1 - e_j,\, 2 \leq j \leq 6\} \cup \{e_i + e_j,\, 2 \leq i < j \leq 6\} \cup \{-e_7 + e_8\}.$$

dado por

$$S = \{e_1 - e_6, e_2 + e_3, e_4 + e_5, -e_7 + e_8\}.$$

Observemos que para toda raíz $\alpha \in \Delta$, $\langle \alpha, -e_7 + e_8\rangle \geq 0$.

Lema 19. *Para todo Ψ sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ que contenda a Δ,*

$$\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle \neq 0.$$

Demostración: Como $\pm w_{32}$ son raíces no compactas entonces tenemos dos opciones, (i) $-w_{32} \in \Psi_n$ o (ii) $w_{32} \in \Psi_n$.

(i) Supongamos que $-w_{32} \in \Psi_n$, si $w_6 \in \Psi_n$ entonces

$$e_2 + e_3 + e_4 + e_5 = -w_{32} + w_6 \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle,$$

y si $-w_{16}$ por Lema 16

$$e_1 - e_6 = -w_6 + w_1 \in \Psi_n \cap \langle S\rangle.$$

(ii) Si $w_{32} \in \Psi_n$, por Lema 16

$$-e_7 + e_8 = w_{32} + w_1 \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle.$$

Por lo tanto $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle \neq 0$ para todo sistema de raíces positivas Ψ que contiene a Δ como queríamos demostrar. □

Si $\mathfrak{h} = \mathfrak{su}(6, 2)$ la subálgebra $\mathfrak{l} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$ es isomorfa a $A_5 \oplus A_1$ y su sistema de raíces con respecto a $\mathfrak{t}$ es

$$\Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{t}) = \{\pm(e_i - e_j),\, 1 \leq i < j \leq 6\} \cup \{\pm(-e_7 + e_8)\}.$$

Definamos el conjunto de raíces fuertemente ortogonales contenido en $\Phi(\mathfrak{k}/\mathfrak{l})$ dado por

$$S = \{e_1 + e_2, e_3 + e_4, e_5 + e_6\}$$

Lema 20. *Sea $\Psi = \Delta \cup \Psi_n$ un sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$.*
Entonces $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle = 0$ si y sólo si $\Psi_n = \{w_k,\, 1 \leq k \leq 32\}$.

Demostración: Como $\pm w_{32}$ son raíces no compactas entonces tenemos dos posibilidades, (i) $-w_{32} \in \Psi_n$ o (ii) $w_{32} \in \Psi_n$.

(i) Si $-w_{32} \in \Psi_n$ por Lema 16

$$e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = -w_{32} + w_2 \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S \rangle.$$

(ii) Si $w_{32} \in \Psi_n$ entonces $\Psi_n = \{w_k,\ 1 \leq k \leq 32\}$, pues

$$\begin{array}{ll}
w_6 = w_{32} + (e_2 + e_3) + (e_4 + e_5) & w_{10} = w_{32} + (e_1 + e_2) \\
w_{13} = w_{32} + (e_1 + e_3) & w_{14} = w_{32} + (e_1 + e_4) + (e_5 - e_6) \\
w_{15} = w_{32} + (e_1 + e_4) & w_{16} = w_{32} + (e_1 + e_5) \\
w_{17} = w_{32} + (e_2 + e_3) + (e_4 - e_6) & w_{18} = w_{32} + (e_2 + e_3) + (e_5 - e_6) \\
w_{19} = w_{32} + (e_2 + e_3) & w_{20} = w_{32} + (e_2 + e_4) + (e_5 - e_6) \\
w_{21} = w_{32} + (e_2 + e_4) & w_{22} = w_{32} + (e_2 + e_5) \\
w_{23} = w_{32} + (e_3 + e_4) + (e_5 - e_6) & w_{24} = w_{32} + (e_3 + e_4) \\
w_{25} = w_{32} + (e_3 + e_5) & w_{26} = w_{32} + (e_4 + e_5) \\
w_{27} = w_{32} + (e_1 - e_6) & w_{28} = w_{32} + (e_2 - e_6) \\
w_{29} = w_{32} + (e_3 - e_6) & w_{30} = w_{32} + (e_4 - e_6) \\
w_{31} = w_{32} + (e_5 - e_6) &
\end{array}$$

Claramente $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S \rangle = 0$ pues si $\gamma \in \mathbb{R}^+\Psi_n$, entonces $\langle \gamma, e_8 \rangle \geq 0$ y es cero si y sólo si $\gamma = 0$ y si $\gamma \in \langle S \rangle$, $\langle \gamma, e_8 \rangle = 0$. Por lo tanto $\gamma = 0$. $\square$

Si $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(8,2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ entonces l subálgebra $\mathfrak{l} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$ es isomorfa a $D_4 \oplus A_1$ y su sistema de raíces con respecto a $\mathfrak{t}$ es

$$\Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{t}) = \{\pm e_i \pm e_j),\ 1 \leq i < j \leq 4\} \cup \{\pm(e_5 - e_6)\}.$$

Definamos el conjunto de raíces fuertemente ortogonales contenido en $\Phi(\mathfrak{k}/\mathfrak{l})$ dado por

$$S = \{e_1 + e_6, e_1 - e_6, -e_7 + e_8\},$$

observemos que para toda raíz positiva compacta α tenemos
$\langle \alpha, 2e_1 - e_7 + e_8 \rangle \geq 0$.

Lema 21. *Sea $\Psi = \Delta \cup \Psi_n$ un sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$. Entonces*

$$\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S \rangle \neq 0.$$

Demostración: Como $\pm w_{16}$ son dos raíces no compactas, entonces tenemos dos opciones, (i) $w_{16} \in \Psi_n$ o (ii) $-w_{16} \in \Psi_n$.

(i) Supongamos que $w_{16} \in \Psi_n$, si $w_{17} \in \Psi_n$ entonces

$$-e_7 + e_8 = w_{16} + w_{17} \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S \rangle$$

y si $-w_{17} \in \Psi_n$ entonces por Lema 16

$$e_1 + e_6 = -w_{17} + w_2 \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S \rangle.$$

(ii) Si $-w_{16} \in \Psi_n$ entonces $-w_{22} \in \Psi_n$ pues $-w_{22} = -w_{16} + (e_1 - e_2)$ y nuevamente por Lema 16

$$e_1 - e_6 = -w_{22} + w_9 \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S \rangle.$$

Por lo tanto $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle \neq 0$ para todo sitema de raíces postivas Ψ de $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ que contiene a Δ como queríamos probar. $\square$

Caso $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_{7(-25)}$.

Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_{7(-25)}$, entonces $\mathfrak{k} = \mathfrak{e}_6 \oplus \mathfrak{so}(2)$. Los sistemas de raíces de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{k}$ con respecto a $\mathfrak{t}$ son

$$\begin{aligned}\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t}) = \{\pm e_i \pm e_j,\ 1 \leq i < j \leq 6\} \cup \{\pm(-e_7+e_8)\} \\ \cup \left\{\pm\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{6}(-1)^{n_i}e_i - e_7 + e_8);\ |\sum_{i=1}^{6} n_i \,\text{impar}\right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi(\mathfrak{k},\mathfrak{t}) = \{\pm e_i \pm e_j,\ 1 \leq i < j \leq 5\} \\ \cup \left\{\pm\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{5}(-1)^{m_i}e_i - e_6 - e_7 + e_8);\ |\sum_{i=1}^{5} m_i \,\text{par}\right\}\end{aligned}$$

respectivamente.

Por lo tanto el conjunto de las raíces no compactas de $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ es

$$\Phi_n(\mathfrak{g},\mathfrak{t}) = \{\pm e_i \pm e_6,\ 1 \leq i \leq 5\} \cup \{\pm(-e_7+e_8)\} \cup \{\pm\delta_k,\ 1 \leq k \leq 16\},$$

donde

$\delta_1 = \frac{1}{2}(e_1+e_2+e_3+e_4-e_5+e_6-e_7+e_8)$
$\delta_2 = \frac{1}{2}(e_1+e_2+e_3-e_4+e_5+e_6-e_7+e_8)$
$\delta_3 = \frac{1}{2}(e_1+e_2-e_3+e_4+e_5+e_6-e_7+e_8)$
$\delta_4 = \frac{1}{2}(e_1-e_2+e_3+e_4+e_5+e_6-e_7+e_8)$
$\delta_5 = \frac{1}{2}(-e_1+e_2+e_3+e_4+e_5+e_6-e_7+e_8)$
$\delta_6 = \frac{1}{2}(e_1+e_2-e_3-e_4-e_5+e_6-e_7+e_8)$
$\delta_7 = \frac{1}{2}(e_1-e_2+e_3-e_4-e_5+e_6-e_7+e_8)$
$\delta_8 = \frac{1}{2}(e_1-e_2-e_3+e_4-e_5+e_6-e_7+e_8)$
$\delta_9 = \frac{1}{2}(e_1-e_2-e_3-e_4+e_5+e_6-e_7+e_8)$
$\delta_{10} = \frac{1}{2}(-e_1+e_2+e_3-e_4-e_5+e_6-e_7+e_8)$
$\delta_{11} = \frac{1}{2}(-e_1+e_2-e_3+e_4-e_5+e_6-e_7+e_8)$
$\delta_{12} = \frac{1}{2}(-e_1+e_2-e_3-e_4+e_5+e_6-e_7+e_8)$
$\delta_{13} = \frac{1}{2}(-e_1-e_2+e_3+e_4-e_5+e_6-e_7+e_8)$
$\delta_{14} = \frac{1}{2}(-e_1-e_2+e_3-e_4+e_5+e_6-e_7+e_8)$
$\delta_{15} = \frac{1}{2}(-e_1-e_2-e_3+e_4+e_5+e_6-e_7+e_8)$
$\delta_{16} = \frac{1}{2}(-e_1-e_2-e_3-e_4-e_5+e_6-e_7+e_8)$

Fijemos el sistema de raíces positivas compactas

$$\Delta = \{(e_i \pm e_j),\ 1 \leq i < j \leq 5\} \cup \{\tau_k,\ 1 \leq k \leq 16\}$$

en el cual

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \tfrac{1}{2}(e_1+e_2+e_3+e_4+e_5-e_6-e_7+e_8)\\
\tau_2 &= \tfrac{1}{2}(e_1+e_2+e_3-e_4-e_5-e_6-e_7+e_8)\\
\tau_3 &= \tfrac{1}{2}(e_1+e_2-e_3+e_4-e_5-e_6-e_7+e_8)\\
\tau_4 &= \tfrac{1}{2}(e_1+e_2-e_3-e_4+e_5-e_6-e_7+e_8)\\
\tau_5 &= \tfrac{1}{2}(e_1-e_2+e_3+e_4-e_5-e_6-e_7+e_8)\\
\tau_6 &= \tfrac{1}{2}(e_1-e_2+e_3-e_4+e_5-e_6-e_7+e_8)\\
\tau_7 &= \tfrac{1}{2}(e_1-e_2-e_3+e_4+e_5-e_6-e_7+e_8)\\
\tau_8 &= \tfrac{1}{2}(e_1-e_2-e_3-e_4+e_5+e_6+e_7-e_8)\\
\tau_9 &= \tfrac{1}{2}(e_1-e_2-e_3+e_4-e_5+e_6+e_7-e_8)\\
\tau_{10} &= \tfrac{1}{2}(e_1-e_2+e_3-e_4-e_5+e_6+e_7-e_8)\\
\tau_{11} &= \tfrac{1}{2}(e_1+e_2-e_3-e_4-e_5+e_6+e_7-e_8)\\
\tau_{12} &= \tfrac{1}{2}(e_1-e_2-e_3-e_4-e_5-e_6-e_7+e_8)\\
\tau_{13} &= \tfrac{1}{2}(e_1-e_2+e_3+e_4+e_5+e_6+e_7-e_8)\\
\tau_{14} &= \tfrac{1}{2}(e_1+e_2-e_3+e_4+e_5+e_6+e_7-e_8)\\
\tau_{15} &= \tfrac{1}{2}(e_1+e_2+e_3-e_4+e_5+e_6+e_7-e_8)\\
\tau_{16} &= \tfrac{1}{2}(e_1+e_2+e_3+e_4-e_5+e_6+e_7-e_8)
\end{aligned}$$

Si $\mathfrak{h} = \mathfrak{su}(6,2)$ entonces la subálgebra $\mathfrak{l} = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}$ es isomorfa a $A_5 \oplus A_1$ y su sitema de raíces con respecto a $\mathfrak{t}$ es

$$\Phi(\mathfrak{l},\mathfrak{t}) = \{\pm e_i \pm e_j,\ 1 \leq i < j \leq 3\} \cup \{\pm e_4 \pm e_5\} \cup \{\pm \tau_i,\ i \in \{1,2,7,10,11,12,13,14\}\}.$$

Sea S el conjunto de raíces fuertemente ortogonales contenido en $\Phi(\mathfrak{k},\mathfrak{t}) - \Phi(\mathfrak{l},\mathfrak{t})$ definido por

$$S = \{e_1 \pm e_4, e_2 \pm e_5\}.$$

Observemos que $2e_1 = (e_1+e_2) + (e_1-e_2) \in \langle S \rangle$ y además para toda raíz $\alpha \in \Delta$, $\langle \alpha, 2e_1 \rangle > 0$.

Lema 22. *Sea Ψ un sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ que contiene a Δ. Entonces $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S \rangle = 0$ si y sólo si*

$$\pm\Psi_n = \{\pm e_i + e_6,\ 1 \leq i \leq 5\} \cup \{-e_7 + e_8\} \cup \{\delta_j,\ 1 \leq j \leq 16\}$$

Demostración: Como $\pm(e_1+e_6)$ son dos raíces no compactas, entonces tenemos dos posibilidades, (i) $(e_1+e_6) \in \Psi_n$ o (ii) $-(e_1+e_6) \in \Psi_n$.

(i) Supongamos que $e_1+e_6 \in \Psi_n$. Las raíces $\pm(e_1-e_6)$ son no compactas, entonces tenemos nuevamente dos posibilidades,
(1) $e_1 - e_6 \in \Psi_n$ o (2) $-e_1+e_6 \in \Psi_n$.

(1) Si $e_1 - e_6 \in \Psi_n$ entonces

$$2e_1 = (e_1+e_6) + (e_1-e_6) \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S \rangle.$$

(2) Si $-e_1+e_6 \in \Psi_n$, entonces $\Psi = \Psi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ es el sistema holomorfo dado por $\Psi = \Delta \cup \Psi_n$ donde

$$\Psi_n = \{\pm e_i + e_6,\, 1 \leq i \leq 5\} \cup \{-e_7 + e_8\} \cup \{\delta_j,\, 1 \leq j \leq 16\}$$

pues

$$\pm e_i + e_6 = (-e_1 + e_6) + (e_1 \pm e_i), \;\; 2 \leq i \leq 5, \tag{31}$$

y

$$\begin{array}{lll}
\delta_1 = \tau_1 + (-e_5 + e_6) & \delta_2 = \tau_1 + (-e_4 + e_6) & \delta_3 = \tau_1 + (-e_3 + e_6) \\
\delta_4 = \tau_1 + (-e_2 + e_6) & \delta_5 = \tau_1 + (-e_1 + e_6) & \delta_6 = \tau_{12} + (e_2 + e_6) \\
\delta_7 = \tau_{12} + (e_3 + e_6) & \delta_8 = \tau_{12} + (e_4 + e_6) & \delta_9 = \tau_1 + (e_5 + e_6) \\
\delta_{10} = \tau_2 + (-e_1 + e_6) & \delta_{11} = \tau_3 + (-e_1 + e_6) & \delta_{12} = \tau_4 + (-e_1 + e_6) \\
\delta_{13} = \tau_5 + (-e_1 + e_6) & \delta_{14} = \tau_6 + (-e_1 + e_6) & \delta_{15} = \tau_7 + (-e_1 + e_6) \\
\delta_{16} = \tau_{12} + (-e_1 + e_6) & -e_7 + e_8 = \tau_1 + \delta_{16} &
\end{array}$$

Si $\gamma \in \mathbb{R}^+\Psi_n$ entonces $\langle \gamma, e_6 \rangle \geq 0$ y es igual a cero si y sólo si $\gamma = c(-e_7 + e_8)$ con $c \geq 0$. Si $\gamma \in \langle S \rangle$ entonces $\langle \gamma, e_6 \rangle = \langle \gamma, e_8 \rangle = 0$. Por lo tanto $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S \rangle = 0$.

(ii) Si $-e_1 - e_6 \in \Psi_n$ entonces Ψ es el sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ antiholomorfo dado por $\Psi = \Delta \cup \Psi_n$ donde

$$\Psi_n = \{\pm e_i - e_6,\, 1 \leq i \leq 5\} \cup \{e_7 - e_8\} \cup \{-\delta_j,\, 1 \leq j \leq 16\}$$

pues

$$\pm e_i - e_6 = (-e_1 - e_6) + (e_1 \pm e_i), \;\; 2 \leq i \leq 5, \tag{32}$$

y

$$\begin{array}{lll}
-\delta_1 = \tau_8 + (-e_1 - e_6) & -\delta_2 = \tau_9 + (-e_1 - e_6) & -\delta_3 = \tau_{10} + (-e_1 - e_6) \\
-\delta_4 = \tau_{11} + (-e_1 - e_6) & -\delta_5 = \tau_8 + (-e_5 - e_6) & -\delta_6 = \tau_{13} + (-e_1 - e_6) \\
-\delta_7 = \tau_{14} + (-e_1 - e_6) & -\delta_8 = \tau_{15} + (-e_1 - e_6) & -\delta_9 = \tau_{16} + (-e_1 - e_6) \\
-\delta_{10} = \tau_8 + (e_4 - e_6) & -\delta_{11} = \tau_8 + (e_3 - e_6) & -\delta_{12} = \tau_{16} + (-e_2 - e_6) \\
-\delta_{13} = \tau_8 + (e_2 - e_6) & -\delta_{14} = \tau_{16} + (-e_3 - e_6) & -\delta_{15} = \tau_{16} + (-e_4 - e_6) \\
-\delta_{16} = \tau_{13} + (e_2 - e_6) & e_7 - e_8 = \tau_8 + (-\delta_9) &
\end{array}$$

Razonando de manera análoga al caso holomorfo si $\gamma \in \mathbb{R}^+\Psi_n$ entonces $\langle \gamma, e_6 \rangle \leq 0$, y es igual a cero si y sólo si $\gamma = c(e_7 - e_8)$ con $c \geq 0$. Y si $\gamma \in \langle S \rangle$ entonces $\langle \gamma, e_6 \rangle = \langle \gamma, e_8 \rangle = 0$. Por lo tanto $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S \rangle = 0$. Como queríamos demostrar. $\square$

Si $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}^*(12) \oplus \mathfrak{su}(2)$ entonces $\mathfrak{l} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$ es isomorfa a A_5 y sus sistema de raíces con respecto a $\mathfrak{t}$ es

$$\Phi(\mathfrak{l},\mathfrak{t}) = \{\pm(e_i - e_j),\ 1 \leq i < j \leq 5\} \cup \{\pm\tau_k,\ k \in \{1, 12, 13, 14, 15, 16\}\}.$$

Definamos el conjunto de raíces fuertemente ortogonales

$$S \subset \Phi(\mathfrak{k},\mathfrak{t}) - \Phi(\mathfrak{l},\mathfrak{t}) = \{\pm(e_i + e_j), 1 \leq i < j \leq 5\} \cup \{\pm\tau_k,\ 2 \leq k \leq 11\}$$

por

$$S = \{e_1 + e_2, e_3 + e_4, \tau_6, \tau_{10}\}.$$

Observemos que $\langle \alpha, e_1 + e_2 \rangle \geq 0$ para toda raíz $\alpha \in \Delta$.

LEMA 23. *Sea Ψ un sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ que conitiene a Δ. Entonces $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S \rangle = 0$ si y sólo si*

$$\pm\Psi_n = \{\pm e_i + e_6,\ 1 \leq i \leq 5\} \cup \{-e_7 + e_8\} \cup \{\delta_j,\ 1 \leq j \leq 16\}.$$

Demostración: Como $\pm(e_1 + e_6)$ son dos raíces no compactas, entonces tenemos dos opsiones, (i) $(e_1 + e_6) \in \Psi_n$ o (ii) $-(e_1 + e_6) \in \Psi_n$.

(i) Supongamos que $e_1 + e_6 \in \Psi_n$. Si $e_2 - e_6 \in \Psi_n$ entonces

$$e_1 + e_2 = (e_1 + e_6)(e_2 - e_6) \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S \rangle.$$

Y si $-e_2 + e_6\Psi_n$ entonces

$$\begin{aligned} e_1 + e_6 &= (-e_2 + e_6) + (e_1 + e_2) \in \Psi_n \\ e_2 + e_6 &= (-e_2 + e_6) + (e_2 + e_3) + (e_2 - e_3) \in \Psi_n \\ \pm e_i + e_6 &= (-e_2 + e_6) + (e_2 \pm e_i) \in \Psi_n,\ \ 3 \leq i \leq 5. \end{aligned}$$

Las raíces $\pm(e_1 - e_6)$ son no compactas, nuevamente tenemos dos posibilidades, (1) $e_1 - e_6 \in \Psi_n$ o (2) $-e_1 + e_6 \in \Psi_n$.

(1) Si $e_1 - e_6 \in \Psi_n$ entonces

$$e_1 + e_2 = (e_1 - e_6) + (e_2 + e_6) \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S \rangle.$$

(2) Si $-e_1 + e_6 \in \Psi_n$, por Lema(22)(i)(2)

$\Psi = \Psi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ es el sistema holomorfo dado por $\Psi = \Delta \cup \Psi_n$ donde

$$\Psi_n = \{\pm e_i + e_6,\ 1 \leq i \leq 5\} \cup \{-e_7 + e_8\} \cup \{\delta_j,\ 1 \leq j \leq 16\},$$

y $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S \rangle = 0$.

(ii) Si $-e_1 - e_6 \in \Psi_n$ por Lema (22)(ii) Ψ es el sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ antiholomorfo dado por $\Psi = \Delta \cup \Psi_n$ donde

$$\Psi_n = \{\pm e_i - e_6,\ 1 \leq i \leq 5\} \cup \{e_7 - e_8\} \cup \{-\delta_j,\ 1 \leq j \leq 16\}$$

y $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S \rangle = 0$. Como queríamos ver. $\square$

Sea $\mathfrak{h} = \mathfrak{e}_{6(-14)} \oplus \mathbb{R}$, entonces $\mathfrak{l} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$ es isomorfa a D_5 y su sistema de raíces con respecto a $\mathfrak{t}$ es

$$\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) = \{\pm e_i \pm e_j,\ 1 \leq i < j \leq 4\} \cup \{\pm \tau_k,\ 12 \leq k \leq 15\}.$$

Fijemos el conjunto de raíces fuertemente ortogonales

$$S \subset \Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) - \Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{t}) = \{\pm(e_i \pm e_5),\ 1 \leq i \leq 4\} \cup \{\pm \tau_k,\ 1 \leq k \leq 11\}$$

definido por

$$S = \{e_1 + e_5, e_1 - e_5\}.$$

Observemos que para toda raíz $\alpha \in \Delta$, $\langle \alpha, 2e_1 \rangle \geq 0$.

Lema 24. *Sea Ψ un sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ que a Δ. Entonces $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S \rangle = 0$ si y sólo si $\Psi = \Delta \cup \Psi_n$ es el sistema holomorfo o antiholomorfo donde*

$$\pm\Psi_n = \{\pm e_i + e_6,\ 1 \leq i \leq 5\} \cup \{-e_7 + e_8\} \cup \{\delta_j,\ 1 \leq j \leq 16\}$$

La demostración es similar al la demostración del Lema (22).

Para el siguiente caso fijemos otro sistema Δ' de raíces positiva compacta de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ dado por

$$\Delta' = \{e_i \pm e_j,\ 1 \leq i < j \leq 5\} \cup \{\tau_k,\ k \in \{1,2,3,4,5,6,7,12\}\} \\ \cup \{-\tau_l,\ l \in \{8,9,10,11,13,14,15,16\}\}.$$

Sea $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(10,2) \oplus \mathfrak{sl}_2$, entonces $\mathfrak{l} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$ es isomorfa a D_6 y su sistema de raíces con respecto a $\mathfrak{t}$ es

$$\Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{t}) = \{\pm e_i \pm e_j,\ 1 \leq i < j \leq 5\}.$$

Fijemos el conjunto de raíces fuertemente ortogonales

$$S \subset \Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) - \Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{t}) = \{\pm \tau_k,\ 1 \leq k \leq 16\},$$

dado por

$$S = \{\tau_1, \tau_{12}\}.$$

Observemos que $\langle \alpha, \tau_1 + \tau_{12} \rangle \geq 0$ para toda raíz $\alpha \in \Delta'$.

Lema 25. *Sea Ψ un sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ que contiene a Δ'. Entonces $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S \rangle = 0$ si y sólo si $\Psi = \Delta' \cup \Psi_n$ es el sistema holomorfo o antiholomorfo donde*

$$\pm\Psi_n = \{\pm e_i + e_6,\ 1 \leq i \leq 5\} \cup \{-e_7 + e_8\} \cup \{\delta_j,\ 1 \leq j \leq 16\}$$

Demosración: Como $\pm\delta_{16}$ son raíces no compactas, tenemos dos posibilidades, (i) $\delta_{16} \in \Psi_n$ o (ii) $-\delta_{16} \in \Psi_n$.

(i) Supongamos que $\delta_{16}\Psi_n$, si $e_1 - e_6 \in \Psi_n$ entonces

$$\tau_{12} = \delta_{16} + (e_1 - e_6) \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S \rangle.$$

Si $-e_1+e_6 \in \Psi_n$ entonces el sistema de raíces positiva $\Psi = \Psi(\mathfrak{k},\mathfrak{t})$ de $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ es el sistema holomorfo $\Psi = \Delta' \cup \Psi_n$ donde

$$\Psi_n = \{\pm e_i + e_6,\ 1 \leq i \leq 5\} \cup \{-e_7+e_8\} \cup \{\delta_k,\ 1 \leq k \leq 16\},$$

pues

$$e_1+e_6 = (-e_1+e_6)+(e_1+e_2)+(e_1-e_2) \in \Psi_n,$$
$$\pm e_i + e_6 = (-e_1+e_6)+(e_1 \pm e_i) \in \Psi_n,\ 1 \leq i \leq 5.$$

Y

$$\begin{array}{lll}
\delta_1 = \delta_{16}+(e_1+e_2)+(e_3+e_4) & \delta_2 = \delta_{16}+(e_1+e_2)+(e_3+e_5) & \\
\delta_3 = \delta_{16}+(e_1+e_2)+(e_4+e_5) & \delta_4 = \delta_{16}+(e_1+e_3)+(e_4+e_5) & \\
\delta_5 = \delta_{16}+(e_2+e_3)+(e_4+e_5) & \delta_6 = \delta_{16}+(e_1+e_2) & \\
\delta_7 = \delta_{16}+(e_1+e_3) & \delta_8 = \delta_{16}+(e_1+e_4) & \delta_9 = \delta_{16}+(e_1+e_5) \\
\delta_{10} = \delta_{16}+(e_2+e_3) & \delta_{11} = \delta_{16}+(e_2+e_4) & \delta_{12} = \delta_{16}+(e_2+e_5) \\
\delta_{13} = \delta_{16}+(e_3+e_4) & \delta_{14} = \delta_{16}+(e_3+e_5) & \delta_{15} = \delta_{16}+(e_4+e_5) \\
-e_7+e_8 = \delta_{16}+\delta_1 & &
\end{array}$$

Si $\gamma \in \mathbb{R}^+\Psi_n$ entonces $\langle \gamma, e_6\rangle\langle\gamma, e_8\rangle \geq 0$ y $\langle\gamma, e_6\rangle = \langle\gamma, e_8\rangle = 0$ si y sólo si $\gamma = 0$. Si $\gamma \in \langle S\rangle$ entonces $\langle\gamma, e_6\rangle\langle\gamma, e_8\rangle \leq 0$. Sea $\gamma \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle$ entonces $\langle\gamma, e_6\rangle\langle\gamma, e_8\rangle = 0$, lo que implica que $\gamma = c(\tau_1 - \tau_{12}) = c(e_2+e_3+e_4+e_5)$. Por lo tanto $\langle\gamma, e_6\rangle = \langle\gamma, e_8\rangle = 0$ y $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle$.

(ii) Supongamos que $-\delta_{16} \in \Psi_n$. Si $-e_7+e_8 \in \Psi_n$, entonces

$$\tau_1 = -\delta_{16} + (-e_7+e_8) \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle.$$

Si $e_7 - e_8 \in \Psi_n$ entonces el sistema de raíces positiva $\Psi = \Psi(\mathfrak{k},\mathfrak{t})$ de $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ es el sistema antiholomorfo $\Psi = \Delta' \cup \Psi_n$ donde

$$\Psi_n = \{\pm e_i - e_6,\ 1 \leq i \leq 5\} \cup \{e_7 - e_8\} \cup \{-\delta_k,\ 1 \leq k \leq 16\},$$

pues

$$\begin{array}{ll}
e_1 - e_6 = -\delta_{16} + \tau_{12} & e_2 - e_6 = -\delta_{16} + (-\tau_{13}) \\
e_3 - e_6 = -\delta_{16} + (-\tau_{14}) & e_4 - e_6 = -\delta_{16} + (-\tau_{15}) \\
e_5 - e_6 = -\delta_{16} + (-\tau_{16}) &
\end{array}$$

$$-\delta_{17-i} = \tau_i + (e_7 - e_8) \in \Psi_n,\ \ 1 \leq i \leq 16$$

y

$$\begin{array}{ll}
-e_1 - e_6 = -\delta_1 + (-\tau_8) & -e_2 - e_6 = -\delta_1 + \tau_5 \\
-e_3 - e_6 = -\delta_1 + \tau_3 & -e_4 - e_6 = -\delta_{15} + (-\tau_{16}) \\
-e_5 - e_6 = -\delta_{15} + (-\tau_{15}) &
\end{array}$$

Razonando de manera análoga al caso holomorfo demostramos

$$\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle = 0. \square$$

CASO $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_{8(-24)}$.

Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_{8(-24)}$ y $\mathfrak{k} = \mathfrak{e}_7 \oplus \mathfrak{su}(2)$, los sistema de raíces de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{k}$ con respecto a $\mathfrak{t}$ son

$$\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t}) = \{\pm e_i \pm e_j,\, 1 \leq i < j \leq 8\} \cup \left\{ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}(-1)^{n_i} e_i;\, \text{con} \sum_{i=1}^{8} n_i \,\text{par} \right\}$$

$$\begin{aligned}\Phi(\mathfrak{k},\mathfrak{t}) = \{\pm e_i \pm e_j,\, 1 \leq i < j \leq 6\} \cup \{\pm e_7 \pm e_8\}& \\ \cup \left\{ \pm\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{6}(-1)^{m_i} e_i + (e_7 - e_8));\, \text{con} \sum_{i=1}^{6} m_i \,\text{impar} \right\}&\end{aligned}$$

respectivamente. Por lo tanto el conjunto de las raíces no compactas de $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ es

$$\Phi_n(\mathfrak{g},\mathfrak{t}) = \{\pm e_i \pm e_j,\, 1 \leq i \leq 6,\, 7 \leq j \leq 8\} \cup \{\pm\delta_k,\, 1 \leq k \leq 32\},$$

donde

$\delta_1 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6 + e_7 + e_8)$
$\delta_2 = \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6 + e_7 + e_8)$
$\delta_3 = \frac{1}{2}(-e_1 + e_2 - e_3 + e_4 + e_5 + e_6 + e_7 + e_8)$
$\delta_4 = \frac{1}{2}(-e_1 + e_2 + e_3 - e_4 + e_5 + e_6 + e_7 + e_8)$
$\delta_5 = \frac{1}{2}(-e_1 + e_2 + e_3 + e_4 - e_5 + e_6 + e_7 + e_8)$
$\delta_6 = \frac{1}{2}(-e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 - e_6 + e_7 + e_8)$
$\delta_7 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 + e_4 + e_5 + e_6 + e_7 + e_8)$
$\delta_8 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3 - e_4 + e_5 + e_6 + e_7 + e_8)$
$\delta_9 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3 + e_4 - e_5 + e_6 + e_7 + e_8)$
$\delta_{10} = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3 + e_4 + e_5 - e_6 + e_7 + e_8)$
$\delta_{11} = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3 - e_4 + e_5 + e_6 + e_7 + e_8)$
$\delta_{12} = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3 + e_4 - e_5 + e_6 + e_7 + e_8)$
$\delta_{13} = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3 + e_4 + e_5 - e_6 + e_7 + e_8)$
$\delta_{14} = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 - e_4 - e_5 + e_6 + e_7 + e_8)$
$\delta_{15} = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 - e_4 + e_5 - e_6 + e_7 + e_8)$
$\delta_{16} = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 - e_5 - e_6 + e_7 + e_8)$
$\delta_{17} = \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6 + e_7 + e_8)$
$\delta_{18} = \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 - e_3 - e_4 + e_5 + e_6 + e_7 + e_8)$
$\delta_{19} = \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 - e_3 + e_4 - e_5 + e_6 + e_7 + e_8)$
$\delta_{20} = \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 - e_3 + e_4 + e_5 - e_6 + e_7 + e_8)$
$\delta_{21} = \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 + e_3 - e_4 + e_5 - e_6 + e_7 + e_8)$
$\delta_{22} = \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 + e_3 + e_4 - e_5 - e_6 + e_7 + e_8)$
$\delta_{23} = \frac{1}{2}(-e_1 + e_2 - e_3 + e_4 - e_5 - e_6 + e_7 + e_8)$
$\delta_{24} = \frac{1}{2}(-e_1 + e_2 + e_3 - e_4 - e_5 - e_6 + e_7 + e_8)$
$\delta_{25} = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3 - e_4 - e_5 - e_6 + e_7 + e_8)$
$\delta_{26} = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6 + e_7 + e_8)$

$$
\begin{aligned}
\delta_{27} &= \tfrac{1}{2}(-e_1 - e_2 + e_3 - e_4 - e_5 + e_6 + e_7 + e_8)\\
\delta_{28} &= \tfrac{1}{2}(-e_1 + e_2 - e_3 - e_4 - e_5 + e_6 + e_7 + e_8)\\
\delta_{29} &= \tfrac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5 + e_6 + e_7 + e_8)\\
\delta_{30} &= \tfrac{1}{2}(-e_1 + e_2 - e_3 - e_4 + e_5 - e_6 + e_7 + e_8)\\
\delta_{31} &= \tfrac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4 + e_5 - e_6 + e_7 + e_8)\\
\delta_{32} &= \tfrac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 + e_4 - e_5 - e_6 + e_7 + e_8)
\end{aligned}
$$

Sea Δ el conjunto de raíces positivas compactas definido por

$$\Delta = \{e_i \pm e_j,\, 1 \leq i < j \leq 6\} \cup \{\pm e_7 + e_8\} \cup \{w_k,\, 1 \leq k \leq 32\},$$

donde

$$
\begin{aligned}
w_1 &= \tfrac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 - e_6 - e_7 + e_8)\\
w_2 &= \tfrac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 - e_5 + e_6 - e_7 + e_8)\\
w_3 &= \tfrac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 - e_4 + e_5 + e_6 - e_7 + e_8)\\
w_4 &= \tfrac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3 + e_4 + e_5 + e_6 - e_7 + e_8)\\
w_5 &= \tfrac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6 - e_7 + e_8)\\
w_6 &= \tfrac{1}{2}(-e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6 - e_7 + e_8)\\
w_7 &= \tfrac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8)\\
w_8 &= \tfrac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3 + e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8)\\
w_9 &= \tfrac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3 - e_4 + e_5 - e_6 - e_7 + e_8)\\
w_{10} &= \tfrac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3 - e_4 - e_5 + e_6 - e_7 + e_8)\\
w_{11} &= \tfrac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3 + e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8)\\
w_{12} &= \tfrac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3 - e_4 + e_5 - e_6 - e_7 + e_8)\\
w_{13} &= \tfrac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3 - e_4 - e_5 + e_6 - e_7 + e_8)\\
w_{14} &= \tfrac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 + e_4 + e_5 - e_6 - e_7 + e_8)\\
w_{15} &= \tfrac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 + e_4 - e_5 + e_6 - e_7 + e_8)\\
w_{16} &= \tfrac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4 + e_5 + e_6 - e_7 + e_8)\\
w_{17} &= \tfrac{1}{2}(-e_1 + e_2 + e_3 + e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8)\\
w_{18} &= \tfrac{1}{2}(-e_1 + e_2 + e_3 - e_4 + e_5 - e_6 - e_7 + e_8)\\
w_{19} &= \tfrac{1}{2}(-e_1 + e_2 + e_3 - e_4 - e_5 + e_6 - e_7 + e_8)\\
w_{20} &= \tfrac{1}{2}(-e_1 + e_2 - e_3 + e_4 + e_5 - e_6 - e_7 + e_8)\\
w_{21} &= \tfrac{1}{2}(-e_1 + e_2 - e_3 + e_4 - e_5 + e_6 - e_7 + e_8)\\
w_{22} &= \tfrac{1}{2}(-e_1 + e_2 - e_3 - e_4 + e_5 + e_6 - e_7 + e_8)\\
w_{23} &= \tfrac{1}{2}(-e_1 - e_2 + e_3 + e_4 + e_5 - e_6 - e_7 + e_8)\\
w_{24} &= \tfrac{1}{2}(-e_1 - e_2 + e_3 + e_4 - e_5 + e_6 - e_7 + e_8)\\
w_{25} &= \tfrac{1}{2}(-e_1 - e_2 + e_3 - e_4 + e_5 + e_6 - e_7 + e_8)\\
w_{26} &= \tfrac{1}{2}(-e_1 - e_2 - e_3 + e_4 + e_5 + e_6 - e_7 + e_8)\\
w_{27} &= \tfrac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8)\\
w_{28} &= \tfrac{1}{2}(-e_1 + e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8)\\
w_{29} &= \tfrac{1}{2}(-e_1 - e_2 + e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8)
\end{aligned}
$$

$w_{30} = \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 - e_3 + e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8)$
$w_{31} = \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 - e_3 - e_4 + e_5 - e_6 - e_7 + e_8)$
$w_{32} = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 - e_6 + e_7 - e_8)$

OBSERVACIÓN 8. *Todo sistema de raíces positivas Ψ de $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ que contiene a Δ contiene a la raíz no compacta δ_1*

Supongamos que $-\delta_1 \in \Psi_n$, como las raíces compactas $(e_1+e_2), (e_3+e_4), (e_5+e_6)$, y $(e_7+e_8) \in \Delta \subset \Psi$

$$\delta_1 = -\delta_1 + (e_1+e_2) + (e_3+e_4) + (e_5+e_6) + (e_7+e_8) \in \Psi_n$$

lo cual es absurdo por lo tanto $\delta_1 \in \Psi$ para todo Ψ sistema de raíces positivas que contiene a Δ.

Sea $\mathfrak{h} = \mathfrak{e}_{7(-25)} \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, entonces $\mathfrak{l} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$ es isomorfa a D_7 y su sistema de raíces con respecto a $\mathfrak{t}$ es

$$\Phi(\mathfrak{l},\mathfrak{t}) = \{\pm e_i \pm e_j,\ 1 \leq i < j \leq 5\} \cup \{\pm w_k,\ k \in J\},$$

con $J = \{1, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 17, 18, 20, 23, 27, 28, 29, 30, 31\}$.

Fijemos S el conjunto de raíces fuertemente ortogonales contenido en

$$\Phi(\mathfrak{k},\mathfrak{t}) - \Phi(\mathfrak{l},\mathfrak{t}) = \{\pm e_7 \pm e_8\} \cup \{\pm w_k,\ k \in I\}$$

con $I = \{2, 3, 4, 5, 6, 10, 13, 15, 16, 19, 21, 22, 24, 25, 26, 32\}$ definido por

$$S = \{e_1 + e_6, e_1 - e_6, e_7 + e_8, -e_7 + e_8\}.$$

Observemos que para toda raíz $\alpha \in \Delta$, $\langle \alpha, -e_7 + e_8 \rangle \geq 0$.

LEMA 26. *Para todo sistema de raíces positivas $\Psi = \Psi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ de $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ que contiene a Δ, $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S \rangle \neq 0$.*

Demostración: Como las raíces $\pm(e_1+e_7)$ son no compactas tenemos dos posibilidades, (i) $e_1 + e_7 \in \Psi_n$ o (ii) $-e_1 - e_7 \in \Psi_n$.

(i) Supongamos que $(e_1 + e_7) \in \Psi_n$. Si $e_1 - e_7 \in \Psi_n$ entonces

$$2e_1 = (e_1 + e_7) + (e_1 - e_7) \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S \rangle.$$

Y si $-e_1 + e_7 \in \Psi_n$ entonces $\pm e_1 + e_8 \in \Psi_n$ pues
$(-e_7 + e_8), (e_1 \pm e_2) \in \Delta \subset \Psi$ y

$$-e_1 + e_8 = (-e_1 + e_7) + (-e_7 + e_8),$$
$$e_1 + e_8 = (-e_1 + e_8) + (e_1 + e_2) + (e_1 - e_2).$$

Por lo tanto

$$e_7 + e_8 = (e_1 + e_8) + (-e_1 + e_7) \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S \rangle.$$

(ii) Si $-e_1 - e_7 \in \Psi_n$, como $(e_1 + e_6), (e_7 + e_8) \in \Delta \subset \Psi$,

$$e_6 + e_8 = (-e_1 - e_7) + (e_1 + e_6) + (e_7 + e_8) \in \Psi_n, \text{ y}$$
$$e_1 - e_7 = (-e_1 - e_7) + (e_1 + e_2) + (e_1 - e_2) \in \Psi_n.$$

Lo que implica

$$(e_1 - e_7) + (e_6 + e_8) = (e_1 + e_6) + (-e_7 + e_8) \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle.$$

Por lo tanto $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle \neq 0$ para todo sistema de raíces positiva Ψ que contiene a Δ como queríamos demostrar. □

Si $\mathfrak{h} = \mathfrak{e}_{7(-5)} \oplus \mathfrak{su}(2)$ entonces $\mathfrak{l} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$ es isomorfa a $D_6 \oplus A_1$ y su sistema de raíces con respecto a $\mathfrak{t}$ es

$$\Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{t}) = \{\pm e_i \pm e_j,\ 1 \leq i < j < 6\} \cup \{\pm(e_7 - e_8)\}.$$

Sea S el conjunto de raíces fuertemente ortogonales contenido en

$$\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) - \Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{t}) = \{\pm(e_7 + e_8)\} \cup \{\pm w_k,\ 1 \leq k \leq 32\}$$

definido por

$$S = \{w_1, w_{10}, w_{24}, w_{31}, e_7 + e_8\}$$

Observemos que para toda raíz compacta $\alpha \in \Delta$, $\langle w_1, \alpha\rangle \geq 0$.

Lema 27. *Para todo sistema de raíces positiva $\Psi = \Psi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ que contiene a Δ, $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle \neq 0$*

Demostración: Como las raíces $\pm(-e_6 - e_7)$ son raíces no compactas entonces tenemos dos posibilidades, (i) $-e_6 - e_7 \in \Psi_n$ o (ii) $e_6 + e_7 \in \Psi_n$.

(i) Si $-e_6 - e_7 \in \Psi_n$, por Observación 8

$$w_1 = \delta_1 + (-e_6 - e_7) \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle.$$

(ii) Suponamos que $e_6 + e_7 \in \Psi_n$ entonces $\delta_k \in \Psi_n$ con $k = 2, 26$, pues

$$\delta_2 = (e_6 + e_7) + w_{23} \text{ y}$$
$$\delta_{26} = (e_6 + e_7) + (e_1 - e_6) + w_{28}.$$

Lo que implica

$$e_7 + e_8 = \delta_2 + \delta_{26} \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle.$$

Por lo tanto hemos demostrado el Lema. □

Si $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(4, 12)$ entonces $\mathfrak{l} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$ es isomorfa a $D_6 \oplus A_1$ y sus sistema de raíces con respecto a $\mathfrak{t}$ es

$$\Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{t}) = \{\pm e_i \pm e_j,\ 1 \leq i < j \leq 6\} \cup \{\pm(e_7 + e_8)\}.$$

Sea S el conjunto de raíces fuertemente ortogonales contenido en

$$\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) - \Phi(\mathfrak{l}, \mathfrak{t}) = \{\pm w_k,\ 1 \leq k \leq 32\} \cup \{\pm(-e_7 + e_8)\},$$

definido por

$$S = \{w_1, w_{10}, w_{24}, w_{31}\}.$$

Observemos que para toda raíz compacta $\alpha \in \Delta$ tenemos $\langle \alpha, w_1\rangle \geq 0$.

LEMA 28. *Sea* Ψ *un sistema de raíces positivas de* $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ *que contiene a* Δ*. Entonces* $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle = 0$ *si y sólo si*

$$\Psi_n = \{\pm e_i + e_j,\ 1 \leq i \leq 6,\ 7 \leq j \leq 8\} \cup \{\delta_k,\ 1 \leq k \leq 32\}.$$

Demostración: Como las raíces $\pm(-e_6 - e_7)$ son no compactas, tenemos entonces dos posibilidades, (i) $(-e_6 - e_7) \in \Psi_n$ o (ii) $(e_6 + e_7) \in \Psi_n$.

(i) Si $(-e_6 - e_7) \in \Psi_n$ por Observación 8

$$w_1 = \delta_1 + (-e_6 - e_7) \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle.$$

(ii) Si $(e_6 + e_7) \in \Psi_n$ entonces $e_i + e_j \in \Psi_n$, $1 \leq i \leq 6$ y $7 \leq j \leq 8$, y $\delta_k \in \Psi_n$ para todo $k \neq 17$, pues

$$\begin{aligned} e_i + e_7 &= (e_6 + e_7) + (e_i - e_6),\ 1 \leq i \leq 5,\\ e_k + e_8 &= (e_6 + e_7) + (-e_7 + e_8) + (e_k - e_6),\ 1 \leq i \leq 5 \text{ y}\\ e_6 + e_8 &= (e_6 + e_7) + (-e_7 + e_8). \end{aligned}$$

Además

$$\begin{array}{lll} \delta_2 = w_{23} + (e_6 + e_7) & \delta_3 = w_{20} + (e_6 + e_7) & \delta_4 = w_{18} + (e_6 + e_7)\\ \delta_5 = w_{17} + (e_6 + e_7) & \delta_6 = w_{17} + (e_5 + e_7) & \delta_7 = w_{14} + (e_6 + e_7)\\ \delta_8 = w_{12} + (e_6 + e_7) & \delta_9 = w_{11} + (e_6 + e_7) & \delta_{10} = w_{11} + (e_5 + e_7)\\ \delta_{11} = w_9 + (e_6 + e_7) & \delta_{12} = w_8 + (e_6 + e_7) & \delta_{13} = w_8 + (e_5 + e_7)\\ \delta_{14} = w_7 + (e_6 + e_7) & \delta_{15} = w_7 + (e_5 + e_7) & \delta_{16} = w_7 + (e_4 + e_7)\\ \delta_{18} = w_{31} + (e_6 + e_7) & \delta_{19} = w_{30} + (e_6 + e_7) & \delta_{20} = w_{31} + (e_4 + e_7)\\ \delta_{21} = w_{31} + (e_3 + e_7) & \delta_{22} = w_{30} + (e_3 + e_7) & \delta_{23} = w_{30} + (e_2 + e_7)\\ \delta_{24} = w_{29} + (e_2 + e_7) & \delta_{25} = w_{29} + (e_1 + e_7) & \delta_{26} = w_{28} + (e_1 + e_7)\\ \delta_{27} = w_{29} + (e_6 + e_7) & \delta_{28} = w_{28} + (e_6 + e_7) & \delta_{29} = w_{27} + (e_6 + e_7)\\ \delta_{30} = w_{31} + (e_2 + e_7) & \delta_{31} = w_{31} + (e_1 + e_7) & \delta_{32} = w_{30} + (e_1 + e_7) \end{array}$$

Como las raíces $\pm\delta_{17}$ son no compactas, tenemos nuevamente dos posibilidades, (a) $-\delta_{17} \in \Psi_n$ o (b) $\delta_{17} \in \Psi_n$.

(a) Si $-\delta_{17} \in \Psi_n$ entonces

$$w_1 = -\delta_{17} + (-e_6 + e_8) \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle.$$

(b) Si $\delta_{17} \in \Psi_n$ entonces

$$\Psi_n = \{\pm e_i + e_j,\ 1 \leq i \leq 6,\ 7 \leq j \leq 8\} \cup \{\delta_k,\ 1 \leq k \leq 32\},$$

y $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \langle S\rangle = 0$, pues si $\alpha \in \mathbb{R}^+\Psi_n$, entonces $\langle \alpha, e_7\rangle \geq 0$ y $\langle \alpha, e_8\rangle \geq 0$ y son iguales a ceros si y sólo si $\alpha = 0$. Por otra parte si $\alpha \in \langle S\rangle$, $\langle \alpha, e_7\rangle\langle \alpha, e_8\rangle \leq 0$. Por lo tanto si $\alpha \in R^+\Psi_n \cap \langle S\rangle$, $\alpha = 0$. $\square$

Esto concluye la verificación de la Proposición 7.

Restrición al factor semisimple de K

Sea G un grupo de Lie simple de tipo no compacto, conexo y con centro finito y sea K un subgrupo compacto maximal G tal que (G, K) sea un par simétrico de igual rango.

En esta sección estudiamos condiciones suficientes para la admisibilidad de una serie discreta restricta a K_{ss} el factor semisimple del subgrupo compacto K.

Sea $\mathfrak{t}$ una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{k}$, por la condición sobre los rangos $\mathfrak{t}$ también es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$. Sean $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ y $\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ los sistemas de raíces de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{k}$ con respecto a $\mathfrak{t}$ respectivamente. Fijemos $\Delta = \Delta(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ un sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ y sea $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}$ el **centro de $\mathfrak{k}$.**

Por el Criterio de Kobayashi, una condición suficiente para la admisibilidad de la serie discreta es determinar todos los subconjuntos de raíces no compactas Ψ_n tales que $\Psi = \Psi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) = \Delta \cup \Psi_n$ es un sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ y que

$$\mathbb{R}^+\Psi_n \cap i\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}} = 0. \tag{33}$$

Para cada uno de los pares simétricos Hermitianos (G, K) determinamos subconjuntos de raíces no compactas I e $\tilde{I}$, detallados en la Tabla 4 y demostramos

Teorema 9. *Sea $\Psi = \Psi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ es un sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ que contiene a Δ. Entonces*

$$\mathbb{R}^+\Psi_n \cap i\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}} \neq 0$$

si y sólo si $I \subset \Psi_n$ o $\tilde{I} \subset \Psi_n$.

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{k}$	
$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$	$\mathfrak{u}(n)$	$I = \{(e_k + e_{n-k+1})\}_{k=1}^{l}$, si $n = 2l$ $\tilde{I} = -I$ $I = \{2e_{l+1}\} \cup \{(e_k + e_{n-k+1})\}_{k=1}^{l}$, si $n = 2l+1$ $\tilde{I} = -I$
$\mathfrak{so}^*(2n)$	$\mathfrak{u}(n)$	$I = \{(e_k + e_{n-k+1})\}_{k=1}^{l}$, si $n = 2l$ $\tilde{I} = -I$ $I = \{(e_k + e_{n-k+1})\}_{k=1}^{l} \cup \{e_{l+1} + e_{l+2}\}$, si $n = 2l+1$ $\tilde{I} = \{(-e_k - e_{n-k+1})\}_{k=1}^{l} \cup \{-e_l - e_{l+1}\}$,

$\mathfrak{su}(p,q)$	$\mathfrak{u}(n)$	$I = \{e_i - e_{\gamma_i}\}_{i=1}^{p}$ $\tilde{I} = \{-e_i + e_{b_i}\}_{i=1}^{p}$
$\mathfrak{e}_{6(-14)}$	$\mathfrak{so}(10) \oplus \mathfrak{so}(2)$	$I = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, e_1 + e_5, e_2 + e_5\}$ $\tilde{I} = -I$
$\mathfrak{e}_{7(-25)}$	$\mathfrak{e}_6 \oplus \mathfrak{so}(2)$	$I = \{\eta_1, \eta_2, e_1 + e_6\}$ $\tilde{I} = -I$

Tabla 4

donde

$\gamma_i = i + \left[\frac{(i-1)(q-p)}{p}\right] + p$, para $1 \leq i \leq p$,

$$b_i = \begin{cases} i + 1 + [\frac{i(q-p)}{p}] + p & si\ \frac{i(q-p)}{p} \notin \mathbb{Z}, \\ i + \frac{i(q-p)}{p} + p & si\ \frac{i(q-p)}{p} \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad \text{para } 1 \leq i \leq p,$$

$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 - e_3 - e_4 + e_5 - e_6 - e_7 + e_8)$,

$\varepsilon_2 = \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 + e_3 + e_4 + e_5 - e_6 - e_7 + e_8)$,

$\eta_1 = \frac{1}{2}(-e_1 + e_2 - e_3 - e_4 + e_5 + e_6 - e_7 + e_8)$

$\eta_2 = \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 + e_3 + e_4 - e_5 + e_6 - e_7 + e_8)$

La demostración del Teorema se desarrollará en el resto de la sección caso por caso.

Caso $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$.

Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ entonces $\mathfrak{k} = \mathfrak{u}(n)$, y sus sistemas de raíces con respecto a $\mathfrak{t}$ son

$$\begin{aligned} \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) &= \{\pm e_i \pm e_j,\ 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\pm 2e_i,\ 1 \leq i \leq n\}, \\ \Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) &= \{\pm(e_i - e_j),\ 1 \leq i < j \leq n\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto de las raíces no compactas de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ es

$$\Phi_n(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) = \{\pm(e_i + e_j),\ 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\pm 2e_i,\ 1 \leq i \leq n\}.$$

Y el centro $\mathfrak{k}$ es

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}} = i\langle \sum_{j=1}^{n} e_j \rangle_{\mathbb{R}}$$

Fijemos el sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ dado por

$$\Delta = \{(e_i - e_j),\ 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Todos los subconjuntos de raíces no compactas Ψ_n tales que $\Psi = \Delta \cup \Psi_n$ es un sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ se pueden representar de la siguiente manera:

$$\Psi_n = \{(-1)^{a_{i,j}}\,(e_i+e_j),\ 1\le i<j\le n\}\cup\{(-1)^{b_s}\,2\,e_s,\ 1\le s\le n\} \tag{34}$$

con $a_{i,j},\ b_i \in \{0,1\}$.

Lema 29. *(i) Si $a_{i,j}=1$ entonces $a_{s,t}=1$ para $s\ge i$, $t\ge j$, y $b_r=1$ para $r\ge j$. (ii) Si $a_{i,j}=0$, entonces $a_{s,t}=0$ para $s\le i$, $t\le j$ y $b_r=0$ para $r\le i$.*

Demostración: (i) Como las raíces compactas $(e_k-e_l)\in\Delta\subset\Psi$ si $k<l$, entonces

$$\begin{aligned}
-(e_s+e_j) &= (e_i-e_s)+(-e_i-e_j)\in\Psi_n,\ \text{para } s>i,\\
-(e_i+e_t) &= (e_j-e_t)+(-e_i-e_j)\in\Psi_n,\ \text{para } t>j,\\
-(e_s+e_t) &= (-e_s-e_j)+(e_j-e_t)\in\Psi_n \text{ para } s>i \text{ y } t>j.\\
-2e_j &= (-e_i-e_j)+(e_i-e_j)\in\Psi_n,\\
-2e_r &= (e_i-e_r)+(-e_i-e_r)\in\Psi_n,\ \text{para } r>j
\end{aligned}$$

(ii) Razonando de manera análoga a (i) tenemos que

$$\begin{aligned}
(e_s+e_j) &= (e_s-e_i)+(e_i+e_j)\in\Psi_n,\ \text{para } s<i,\\
(e_i+e_t) &= (e_t-e_j)+(e_i+e_j)\in\Psi_n,\ \text{para } t<j,\\
(e_s+e_t) &= (e_s+e_j)+(e_t-e_j)\in\Psi_n,\ \text{para } s<i \ y\ \ t<j,\\
2e_i &= (e_i-e_j)+(e_i+e_j)\in\Psi_n,\ \text{es decir } b_i=0,\\
2e_r &= (e_r+e_j)+(e_r-e_j)\in\Psi_n.\ \text{para } r<i.\quad\square
\end{aligned}$$

Definamos el subconjunto I de raíces no compactas dado por

$$I := \{(e_1+e_n),(e_2+e_{n-1}),...,(e_k+e_{n-k+1}),...,(e_l+e_{l+1})\},$$

si $n=2l$ y

$$I := \{(e_1+e_n),(e_2+e_{n-1}),...,(e_k+e_{n-k+1}),...,(e_l+e_{l+2}),2e_{l+1}\},$$

si $n=2l+1$.

Teorema 10. *Si $\Psi=\Psi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$, un sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ que contiene a Δ. Entonces $\mathbb{R}^+\Psi_n\cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k}\neq 0$ si y sólo si $I\subset\Psi_n$ o $-I\subset\Psi_n$.*

Demostración:
(a) Sea n es par. Si $I\subset\Psi_n$ o $-I\subset\Psi_n$, entonces $\mathbb{R}^+\Psi_n\cap\mathfrak{z}_\mathfrak{k}\neq 0$, pues si $I\subset\Psi_n$ tenemos

$$e_1+e_2+...+e_n\in\mathbb{R}^+\Psi_n\cap\mathfrak{z}_\mathfrak{k},$$

y si $-I\subset\Psi_n$ tenemos

$$-(e_1+e_2+...+e_n)\in\mathbb{R}^+\Psi_n\cap\mathfrak{z}_\mathfrak{k}.$$

Recíprocamente, supongamos que $I \not\subset \Psi_n$ y que $-I \not\subset \Psi_n$ queremos ver que $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k} = 0$. Si $\alpha \in \mathbb{R}^+\Psi_n$ por (34) existen escalares $m_t \geq 0$ tales que

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} (-1)^{a_{i,j}} \ m_{in-\frac{i(i+1)}{2}-(n-j)} \ (e_i + e_j) + 2\sum_{i=1}^{n} (-1)^{b_i} \, m_{\frac{(n-1)n}{2}+i} \, e_i.$$

Además notemos que si $\alpha \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \mathfrak{z}_\mathfrak{k}$, entonces

$$\langle \alpha, e_j \rangle = N \ \text{ para } 1 \leq j \leq n. \tag{35}$$

Como $\pm(e_1 + e_n)$ son raíces no compactas entonces tenemos dos posibilidades: (i) $(e_1 + e_n) \in \Psi_n$ o (ii) $(-e_1 - e_n) \in \Psi_n$.

(i) Si $(e_1 + e_n) \in \Psi_n$, como $I \not\subset \Psi_n$ existe al menos un i tal que $-(e_i + e_{n-i+1}) \in \Psi_n$, con $2 \leq i \leq l$. Sea k el menor i que satisface esta condición.

Si $\alpha \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \mathfrak{z}_\mathfrak{k}$, por (35) tenemos que

$$N = \langle \alpha, e_1 \rangle = \sum_{s=1}^{n-1} m_s + 2 \, m_{\frac{(n-1)n}{2}+1} \geq 0, \tag{36}$$

si $2 \leq j \leq k-1$, tenemos

$$\begin{aligned} N = \langle \alpha, e_j \rangle = {} & \sum_{r=1}^{j-1} m_{(r-1)n-\frac{r(r+1)}{2}+j} + \sum_{s=1}^{n-2j+1} m_{(j-1)n-\frac{(j-1)j}{2}+s} \\ & + \sum_{s=n-2j+2}^{n-j} (-1)^{a_{j,(j+s)}} \ m_{(j-1)n-\frac{(j-1)j}{2}+s} + 2 \, m_{\frac{(n-1)n}{2}+j} \ . \end{aligned} \tag{37}$$

Para $1 \leq j \leq k-3$, tenemos

$$\begin{aligned} \langle \alpha, e_{n-j} \rangle = {} & \sum_{r=1}^{j+1} m_{rn-\frac{r(r+1)}{2}-j} + \sum_{r=j+2}^{k-1} (-1)^{a_{r,(n-j)}} \, m_{rn-\frac{r(r+1)}{2}-j} \\ & - \sum_{r=k}^{n-j-1} m_{rn-\frac{r(r+1)}{2}-j} - \sum_{s=1}^{j} m_{(n-j-1)n-\frac{(n-j-1)(n-j)}{2}+s} \\ & - 2m_{\frac{(n-1)n}{2}+(n-j)} \ , \end{aligned} \tag{38}$$

para $k-2 \leq j \leq k-1$,

$$\begin{aligned} \langle \alpha, e_{n-j} \rangle = {} & \sum_{r=1}^{k-1} m_{rn-\frac{r(r+1)}{2}-j} - \sum_{r=k}^{n-j-1} m_{rn-\frac{r(r+1)}{2}-j} \\ & - \sum_{s=1}^{j} m_{(n-j-1)n-\frac{(n-j-1)(n-j)}{2}+s} - 2m_{\frac{(n-1)n}{2}+(n-j)}. \end{aligned} \tag{39}$$

Y

$$\langle \alpha, e_n \rangle = m_{n-1} + \sum_{r=2}^{k-1} (-1)^{a_{r,n}} \; m_{rn-\frac{r(r+1)}{2}} - \sum_{r=k}^{n-1} m_{rn-\frac{r(r+1)}{2}} - 2\, m_{\frac{(n-1)n}{2}+n}. \tag{40}$$

Sea

$$\begin{aligned} A := \sum_{j=1}^{k-1} \langle \alpha, e_j \rangle \\ &= \sum_{s=1}^{n-1} m_s + \sum_{j=2}^{k-1} \{ \sum_{r=1}^{j-1} m_{(r-1)n-\frac{r(r+1)}{2}+j} + \sum_{s=1}^{n-2j+1} m_{(j-1)n-\frac{(j-1)j}{2}+s} \\ &\qquad + \sum_{s=n-2j+2}^{n-j} (-1)^{a_{j,(j+s)}} \; m_{(j-1)n-\frac{(j-1)j}{2}+s} \} + \sum_{j=1}^{k-1} 2\, m_{\frac{(n-1)n}{2}+j} \end{aligned}$$

Si definimos $a_{j,(j+s)} = 0$ para $1 \leq s \leq n-2j+1$ y reemplazamos el índice s por $(n-j)-s$ tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{n-2j+1} m_{(j-1)n-\frac{(j-1)j}{2}+s} + \sum_{s=n-2j+2}^{n-j} (-1)^{a_{j,(j+s)}} \; m_{(j-1)n-\frac{(j-1)j}{2}+s} \\ = \sum_{s=1}^{n-j} (-1)^{a_{j,(j+s)}} \; m_{(j-1)n-\frac{(j-1)j}{2}+s} = \sum_{s=0}^{n-j-1} (-1)^{a_{j,(n-s)}} \; m_{jn-\frac{j(j+1)}{2}-s} \end{aligned}$$

donde $a_{j,(n-s)} = 0$ para $j-1 \leq s \leq n-j-1$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned} A = \sum_{s=1}^{n-k} m_s + \sum_{s=n-k+1}^{n-1} m_s + \sum_{j=2}^{k-1} \sum_{r=1}^{j-1} m_{(r-1)n-\frac{r(r+1)}{2}+j} \\ + \sum_{r=2}^{k-1} \sum_{j=0}^{n-r-1} (-1)^{a_{r,(n-j)}} \; m_{rn-\frac{r(r+1)}{2}-j} + \sum_{j=1}^{k-1} 2\, m_{\frac{(n-1)n}{2}+j} \end{aligned}$$

donde $a_{r,(n-j)} = 0$ para $r-1 \leq j \leq n-r-1$.

Sea

$$\begin{aligned}
B_1 := \sum_{j=0}^{k-2}\langle\alpha, e_{n-j}\rangle = m_{n-1} + \sum_{r=2}^{k-1}(-1)^{a_{r,n}}\ m_{rn-\frac{r(r+1)}{2}} - \sum_{r=k}^{n-1} m_{rn-\frac{r(r+1)}{2}} \\
+ \sum_{j=1}^{k-2}\sum_{r=1}^{k-1}(-1)^{a_{r,(n-j)}}\ m_{rn-\frac{r(r+1)}{2}-j} - \sum_{j=1}^{k-2}\sum_{r=k}^{n-j-1} m_{rn-\frac{r(r+1)}{2}-j} \\
- \sum_{j=1}^{k-2}\sum_{s=1}^{j} m_{(n-j-1)n-\frac{(n-j-1)(n-j)}{2}+s} - 2\sum_{j=0}^{k-2} m_{\frac{(n-1)n}{2}+(n-j)}\ ,
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
0 = A - B_1 = \sum_{s=1}^{n-k} m_s + \sum_{j=2}^{k-1}\sum_{r=1}^{j-1} m_{(r-1)n-\frac{r(r+1)}{2}+j} + \sum_{r=2}^{k-1}\sum_{j=k-1}^{n-r-1} m_{rn-\frac{r(r+1)}{2}-j} \\
+ \sum_{j=1}^{k-1} 2\ m_{\frac{(n-1)n}{2}+j} + \sum_{r=k}^{n-1} m_{rn-\frac{r(r+1)}{2}} + \sum_{j=1}^{k-2}\sum_{r=k}^{n-j-1} m_{rn-\frac{r(r+1)}{2}-j} \\
+ \sum_{j=1}^{k-2}\sum_{s=1}^{j} m_{(n-j-1)n-\frac{(n-j-1)(n-j)}{2}+s} + 2\sum_{j=0}^{k-2} m_{\frac{(n-1)n}{2}+(n-j)}\ .
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
\sum_{r=2}^{k-1}\sum_{j=k-1}^{n-r-1} m_{rn-\frac{r(r+1)}{2}-j} &= \sum_{r=2}^{k-1}\sum_{j=1}^{n-k-r+1} m_{rn-\frac{r(r+1)}{2}-(n-r-j)} \\
&= \sum_{r=2}^{k-1}\sum_{s=1}^{n-k-r+1} m_{(r-1)n-\frac{(r-1)r}{2}+s} \\
&= \sum_{j=2}^{k-1}\sum_{s=1}^{n-k-j+1} m_{(j-1)n-\frac{(j-1)j}{2}+s},
\end{aligned}$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
0 = \sum_{s=1}^{n-k} m_s + \sum_{j=2}^{k-1}\{\sum_{r=1}^{j-1} m_{(r-1)n-\frac{r(r+1)}{2}+j} + \sum_{s=1}^{n-k-j+1} m_{(j-1)n-\frac{(j-1)j}{2}+s}\} \\
+ \sum_{j=1}^{k-1} 2\ m_{\frac{(n-1)n}{2}+j} + \sum_{r=k}^{n-1} m_{rn-\frac{r(r+1)}{2}} + \sum_{j=1}^{k-2}\sum_{r=k}^{n-j-1} m_{rn-\frac{r(r+1)}{2}-j} \\
+ \sum_{j=1}^{k-2}\sum_{s=1}^{j} m_{(n-j-1)n-\frac{(n-j-1)(n-j)}{2}+s} + 2\sum_{j=0}^{k-2} m_{\frac{(n-1)n}{2}+(n-j)},
\end{aligned}$$

como por hipótesis $m_t \geq 0$ para todo t, la ecuación anterior implica que $m_i = 0$ para

$$i \in \left\{ (j-1)n - \frac{(j-1)j}{2} + s,\ 1 \leq j \leq k-1,\ 1 \leq s \leq n-k-j+1 \right\}.$$

En particular, si $s = n-k-j+1$

$$m_{jn-\frac{j(j+1)}{2}-k+1} = m_{(j-1)n-\frac{(j-1)j}{2}+n-k-j+1} = 0 \tag{41}$$

para $1 \leq j \leq k-1$, es decir

$$\begin{aligned} 0 \leq N &= \langle \alpha, e_{n-k+1} \rangle \\ &= -\sum_{r=k}^{n-k} m_{rn-\frac{r(r+1)}{2}-k+1} - \sum_{s=1}^{k-1} m_{(n-k)n-\frac{(n-k)(n-k+1)}{2}+s} \\ &\qquad - 2m_{\frac{(n-1)n}{2}+(n-k+1)} \leq 0, \end{aligned}$$

Lo cual implica que $N = 0$, por lo tanto

$$\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \mathfrak{z}_\mathfrak{k} = 0.$$

(ii) Si $-(e_1+e_n) \in \Psi$ como por hipótesis $-I \not\subset \Psi_n$, entonces existe al menos un i tal que $(e_i + e_{n-i+1}) \in \Psi_n$, con $2 \leq i \leq l$. Sea k el menor i que satisface dicha condición.

Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \mathfrak{k}_\mathfrak{z}$, como en el caso (i) se tiene que $\langle \alpha, e_j \rangle = N$, para $1 \leq j \leq n$. Calculando explísitamente $\langle \alpha, e_j \rangle$ obtenemos que

$$\langle \alpha, e_1 \rangle = \sum_{s=1}^{n-k} m_s + \sum_{s=n-k+1}^{n-2} (-1)^{a_{1,(1+s)}}\, m_s - m_{n-1} + 2m_{\frac{(n-1)n}{2}+1}, \tag{42}$$

para $2 \leq j \leq k-3$ que

$$\begin{aligned} \langle \alpha, e_j \rangle = \sum_{r=1}^{j-1} m_{(r-1)n-\frac{r(r+1)}{2}+j} &+ \sum_{s=1}^{n-(k+j)+1} m_{(j-1)n-\frac{(j-1)j}{2}+s} \\ &+ \sum_{s=n-(k+j)+2}^{n-j} (-1)^{a_{j,(j+s)}}\, m_{(j-1)n-\frac{(j-1)j}{2}+s} + 2\, m_{\frac{(n-1)n}{2}+j}, \end{aligned} \tag{43}$$

con $a_{j,(s+j)} = 1$ si $s \geq n-2j+1$. Y para $k-2 \leq j \leq k-1$,

$$\begin{aligned} \langle \alpha, e_j \rangle = \sum_{r=1}^{j-1} m_{(r-1)n-\frac{r(r+1)}{2}+j} &+ \sum_{s=1}^{n-(k+j)+1} m_{(j-1)n-\frac{(j-1)j}{2}+s} \\ &- \sum_{s=n-2j+1}^{n-j} m_{(j-1)n-\frac{(j-1)j}{2}+s} + 2m_{\frac{(n-1)n}{2}+j}. \end{aligned} \tag{44}$$

Para $1 \leq j \leq k-2$ tenemos que

$$\langle \alpha, e_{n-j}\rangle = \sum_{r=1}^{k-1}(-1)^{a_{r,(n-j)}} m_{rn-\frac{r(r+1)}{2}-j} - \sum_{r=k}^{n-j-1} m_{rn-\frac{r(r+1)}{2}-j} - \sum_{s=1}^{j} m_{(n-j-1)n-\frac{(n-j-1)(n-j)}{2}+s} - 2m_{\frac{(n-1)n}{2}+(n-j)}, \tag{45}$$

con $a_{r,(n-j)} = 1$ para $j+1 \leq r \leq k-1$. Y que

$$N = \langle \alpha, e_n\rangle = -\sum_{r=1}^{n-1} m_{rn-\frac{r(r+1)}{2}} - 2m_{\frac{(n-1)n}{2}+n} \tag{46}$$

Como por definición $m_t \geq 0$ para todo t, la ecuación anterior implica que

$$N \leq 0.$$

Como en el caso anterior definimos

$$\begin{aligned} A := \sum_{j=1}^{k-1}\langle \alpha, e_j\rangle = \sum_{s=1}^{n-k} m_s + \sum_{s=n-k+1}^{n-2}(-1)^{a_{1,(1+s)}} - m_{n-1} + \sum_{j=2}^{k-2}\{\sum_{r=1}^{j-1} m_{(r-1)n-\frac{r(r+1)}{2}+j} \\ + \sum_{s=1}^{n-(k+j)+1} m_{(j-1)n-\frac{(j-1)j}{2}+s}\} + \sum_{j=2}^{k-2}\sum_{s=n-(k+j)+2}^{n-j}(-1)^{a_{j,(j+s)}} m_{(j-1)n-\frac{(j-1)j}{2}+s} \\ + \sum_{r=1}^{k-2} m_{(r-1)n-\frac{r(r+1)}{2}+(k-1)} + \sum_{s=1}^{n-2(k-1)} m_{(k-2)n-\frac{(k-2)(k-1)}{2}+s} \\ \sum_{s=n-2k-1}^{n-(k-1)} m_{(k-2)n-\frac{(k-2)(k-1)}{2}+s} + \sum_{j=1}^{k-1} 2m_{\frac{(n-1)n}{2}+j}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} B := \sum_{j=0}^{k-2}\langle \alpha, e_{n-j}\rangle = \sum_{j=0}^{k-2}\sum_{r=1}^{k-1}(-1)^{a_{r,(n-j)}} m_{rn-\frac{r(r+1)}{2}-j} \\ - \sum_{j=0}^{k-2}\{\sum_{r=k}^{n-j-1} m_{rn-\frac{r(r+1)}{2}-j} + \sum_{s=1}^{j} m_{(n-j-1)n-\frac{(n-j-1)(n-j)}{2}+s}\} \\ - \sum_{j=0}^{k-2} 2m_{\frac{(n-1)n}{2}+(n-j)}, \end{aligned}$$

Intercambiando subíndices obtenemos

$$\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{s=n-(k+j)+2}^{n-j}(-1)^{a_{j,(j+s)}}\, m_{(j-1)n-\frac{(j-1)j}{2}+s}$$
$$=\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=0}^{k-2}(-1)^{a_{j,(n-i)}}\, m_{(j-1)n-\frac{(j-1)j}{2}+n-j-i}$$

$$=\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=0}^{k-2}(-1)^{a_{j,(n-i)}}\, m_{jn-\frac{j(j+1)}{2}-i}=\sum_{i=0}^{k-2}\sum_{r=1}^{k-1}(-1)^{a_{r,(n-i)}}\, m_{rn-\frac{r(r+1)}{2}-i}$$
$$=\sum_{j=0}^{k-2}\sum_{r=1}^{k-1}(-1)^{a_{r,(n-i)}}\, m_{rn-\frac{r(r+1)}{2}-j}.$$

Lo cual implica que

$$0=A-B=\sum_{s=1}^{n-k}m_s+\sum_{j=2}^{k-1}\{\sum_{r=1}^{j-1}m_{(r-1)n-\frac{r(r+1)}{2}+j}+\sum_{s=1}^{n-(k+j)+1}m_{(j-1)n-\frac{(j-1)j}{2}+s}\}$$
$$+\sum_{j=1}^{k-1}2m_{\frac{(n-1)n}{2}+j}+\sum_{j=0}^{k-2}\{\sum_{r=k}^{n-j-1}m_{rn-\frac{r(r+1)}{2}-j}$$
$$+\sum_{s=1}^{j}m_{(n-j-1)n-\frac{(n-j-1)(n-j)}{2}+s}\}+\sum_{j=0}^{k-2}2m_{\frac{(n-1)n}{2}+(n-j)}.$$

Como por hipótesis los escalares $m_t\geq 0$,para todo t la ecuación anterior implica que $m_i=0$ para

$$i\in\left\{rn-\frac{r(r+1)}{2}-j,\quad \text{para }\ k\leq r\leq n-j-1,\, 0\leq j\leq k-2\right\}$$

en particular, si $r=k$ tenemos

$$m_{kn-\frac{k(k+1)}{2}-j}=m_{(k-1)n-\frac{(k-1)k}{2}+n-k-j}=0 \text{ para } 0\leq j\leq k-2.$$

Cambiando los índices $n-k-j$ por s obtenemos

$$0=m_{(k-1)n-\frac{(k-1)k}{2}+n-k-j}=m_{(k-1)n-\frac{(k-1)k}{2}+s} \tag{47}$$

para $n-2k+2 \leq s \leq n-k$. Como

$$0 \geq N = \langle \alpha, e_k \rangle = \sum_{r=1}^{k-1} m_{(r-1)n-\frac{r(r+1)}{2}+k} + \sum_{s=1}^{n-2k+1} m_{(k-1)n-\frac{(k-1)k}{2}+s} - \sum_{s=n-2k+2}^{n-k} m_{(k-1)n-\frac{(k-1)k}{2}+s} + 2m_{\frac{(n-1)n}{2}+k},$$

por (47) tenemos que

$$0 \geq N = \langle \alpha, e_k \rangle = \sum_{r=1}^{k-1} m_{(r-1)n-\frac{r(r+1)}{2}+k} + \sum_{s=1}^{n-2k+1} m_{(k-1)n-\frac{(k-1)k}{2}+s} + 2m_{\frac{(n-1)n}{2}+k} \geq 0,$$

lo cual implica que $N = \langle \alpha, e_k \rangle = 0$ y por lo tanto

$$\alpha = 0.$$

(b) Si n es un número impar y $I \subset \Psi_n$ o $-I \subset \Psi_n$ entonces

$$\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \mathfrak{z}_\mathfrak{k} \neq 0,$$

pues si $I \subset \Psi_n$

$$e_1 + e_2 + ... + e_n \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \mathfrak{z}_\mathfrak{k}$$

y si $-I \subset \Psi_n$

$$-(e_1 + e_2 + ... + e_n) \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \mathfrak{z}_\mathfrak{k}$$

Recíprocamente supongamos que los conjuntos I y $-I$ no estan contenidos en Ψ_n. Como $\pm(e_1+e_n)$ son raíces no compactas entonces se tiene dos posibilidades: (i) $(e_1+e_n) \in \Psi_n$ o (ii) $(-e_1-e_n) \in \Psi_n$.

(i) Si $(e_1+e_n) \in \Psi_n$ como I no esta contenido en Ψ_n se tiene nuevamente dos posibilidades: (1) que exista al menos un i tal que $-(e_i+e_{n-i+1}) \in \Psi_n$, con $2 \leq i \leq l$ o (2) que la raíz $-2e_{l+1} \in \Psi_n$.

(1) Si existe al menos un i tal que $-(e_i+e_{n-i+1}) \in \Psi_n$, sea k el menor i que satisfaga esta condición. Razonando y procediendo de manera análoga al caso (i) para n par obtenemos que

$$\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \mathfrak{z}_\mathfrak{k} = 0$$

(2) Si $(e_i+e_{n-i+1}) \in \Psi$, para $1 \leq i \leq l$ como I no esta contenido Ψ_n entonces $-2e_{l+1} \in \Psi_n$. Por Lema 29 tenemos que

$$\begin{aligned} e_i + e_j &\in \Psi_n \text{ para } 1 \leq i \leq l \text{ y } i < j \leq n. \\ 2e_k &\in \Psi_n \text{ para } 1 \leq k \leq l\ . \\ -e_i - e_j &\in \Psi_n \text{ para } l+1 \leq i \leq n-1 \text{ y } i < j \leq n. \\ -2e_k &\in \Psi_n \text{ para } l+1 \leq k \leq n\ . \end{aligned}$$

Para todo $\alpha \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \mathfrak{z}_\mathfrak{k}$ tenemos que $\langle \alpha, e_j \rangle = N$, para $1 \leq j \leq n$. Calculando explísitamente $\langle \alpha, e_j \rangle$ obtenemos

$$N = \langle \alpha, e_1 \rangle \;\; = \;\; \sum_{s=1}^{n-1} m_s + 2\, m_{\frac{(n-1)n}{2}+1} \geq 0,$$

para $2 \leq j \leq l$,

$$\begin{aligned}\langle \alpha, e_j \rangle = \sum_{r=1}^{j-1} m_{(r-1)n-\frac{r(r+1)}{2}+j} + \sum_{s=1}^{n-2j+1} m_{(j-1)n-\frac{(j-1)j}{2}+s} \\ + \sum_{s=n-2j+2}^{n-j} (-1)^{a_{j,(j+s)}}\, m_{(j-1)n-\frac{(j-1)j}{2}+s} + 2\, m_{\frac{(n-1)n}{2}+j},\end{aligned}$$

y

$$\langle \alpha, e_{l+1} \rangle = \langle \alpha, e_{n-l} \rangle = \sum_{r=1}^{l} m_{rn-\frac{r(r+1)}{2}-l} - \sum_{s=1}^{l} m_{ln-\frac{l(l+1)}{2}+s} - 2m_{\frac{(n-1)n}{2}+l+1}.$$

Para $1 \leq j \leq l-2$ tenemos

$$\begin{aligned}\langle \alpha, e_{n-j} \rangle = \sum_{r=1}^{j+1} m_{rn-\frac{r(r+1)}{2}-j} + \sum_{r=j+2}^{l} (-1)^{a_{r,(n-j)}}\, m_{rn-\frac{r(r+1)}{2}-j} - \sum_{r=l+1}^{n-j-1} m_{rn-\frac{r(r+1)}{2}-j} \\ - \sum_{s=1}^{j} m_{(n-j-1)n-\frac{(n-j-1)(n-j)}{2}+s} - 2m_{\frac{(n-1)n}{2}+(n-j)},\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\langle \alpha, e_{n-(l-1)} \rangle = \langle \alpha, e_{l+2} \rangle = \sum_{r=1}^{l} m_{rn-\frac{r(r+1)}{2}-(l-1)} - m_{(l+1)n-\frac{(l+1)(l+2)}{2}-(l-1)} \\ - \sum_{s=1}^{l-1} m_{(l+1)n-\frac{(l+1)(l+2)}{2}+s} - 2m_{\frac{(n-1)n}{2}+(l+2)},\end{aligned}$$

y por último

$$\langle \alpha, e_n \rangle = m_{n-1} + \sum_{r=2}^{l} (-1)^{a_{r,n}}\, m_{rn-\frac{r(r+1)}{2}} - \sum_{r=l+1}^{n-1} m_{rn-\frac{r(r+1)}{2}} - 2\, m_{\frac{(n-1)n}{2}+n}.$$

Procediendo de manera análoga al caso (i) definamos

$$A := \sum_{j=1}^{l} \langle \alpha, e_j \rangle \;\; \text{y} \;\; B_1 := \sum_{j=0}^{l-1} \langle \alpha, e_{n-j} \rangle$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}0 = A - B_1 = &\sum_{s=1}^{l} m_s + \sum_{j=2}^{l} \{\sum_{r=1}^{j-1} m_{(r-1)n-\frac{r(r+1)}{2}+j} + \sum_{s=1}^{l-j+1} m_{(j-1)n-\frac{(j-1)j}{2}+s}\}\\ &+ \sum_{j=1}^{l} 2\, m_{\frac{(n-1)n}{2}+j} + \sum_{r=l+1}^{n-1} m_{rn-\frac{r(r+1)}{2}} + \sum_{j=1}^{l-1}\sum_{r=l+1}^{n-j-1} m_{rn-\frac{r(r+1)}{2}-j}\\ &+ \sum_{j=1}^{l-1}\sum_{s=1}^{j} m_{(n-j-1)n-\frac{(n-j-1)(n-j)}{2}+s} + 2\sum_{j=0}^{l-1} m_{\frac{(n-1)n}{2}+(n-j)}.\end{aligned}$$

Como por hipótesis los coeficientes $m_t \geq 0$ para todo t, la ecuación anterior implica que $m_i = 0$ para

$$i \in \left\{(j-1)n - \frac{(j-1)j}{2} + s,\ 1 \leq j \leq l \ \text{ y } 1 \leq s \leq n-(l+1)-j+1\right\}$$

En particular si $s = n-(l+1)-j+1$

$$m_{jn-\frac{j(j+1)}{2}-l} = m_{(j-1)n-\frac{(j-1)j}{2}+n-(l+1)-j+1} = 0 \tag{48}$$

para $1 \leq j \leq l$, entonces

$$\begin{aligned}0 \leq N = \langle \alpha, e_{n-l}\rangle &= \langle \alpha, e_{l+1}\rangle\\ &= \sum_{r=1}^{l} m_{rn-\frac{r(r+1)}{2}-l} \sum_{s=1}^{l} m_{ln-\frac{l(l+1)}{2}+s} - 2m_{\frac{(n-1)n}{2}+(l+1)}\\ &= -\sum_{s=1}^{l} m_{ln-\frac{l(l+1)}{2}+s} - 2m_{\frac{(n-1)n}{2}+(l+1)} \leq 0\end{aligned}$$

lo cual implica que $N = \langle \alpha, e_{l+1}\rangle = 0$ y por lo tanto

$$\alpha = 0.$$

(ii) Si $(-e_1 - e_n) \in \Psi_n$ como $-I$ no esta contenido en Ψ_n tenemos dos posibilidades: (1) que exista al menos un i tal que $(e_i + e_{n-i+1}) \in \Psi_n$ con $2 \leq i \leq l$ o (2) que la raíz $2e_{l+1} \in \Psi_n$.

(1) Si existe al menos un i tal que $(e_i + e_{n-i+1}) \in \Psi_n$, sea k el menor i que satisfaga esta propiedad. Razonando y procediendo de manera análoga al caso (ii) para n par obtenemos que

$$\mathbb{R}^{+}\Psi_n \cap \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}} = 0$$

(2) Si $(-e_i - e_{n-i+1}) \in \Psi$ para $1 \leq i \leq l$ como $-I$ no esta contenido Ψ_n entonces $2e_{l+1} \in \Psi_n$. Por Lema 29

$$\begin{aligned} e_i + e_j &\in \Psi_n \text{ para } 1 \leq i \leq l \text{ y } i < j \leq n. \\ 2e_k &\in \Psi_n \text{ para } 1 \leq k \leq l\ . \\ -e_i - e_j &\in \Psi_n \text{ para } l+1 \leq i \leq n-1 \text{ y } i < j \leq n. \\ -2e_k &\in \Psi_n \text{ para } l+1 \leq k \leq n\ . \end{aligned}$$

Para todo $\alpha \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \mathfrak{z}_\mathfrak{k}$, $\langle \alpha, e_j \rangle = N$ para $1 \leq j \leq n$. Calculando explísitamente $\langle \alpha, e_j \rangle$ tenemos que

$$\langle \alpha, e_1 \rangle = \sum_{s=1}^{l} m_s + \sum_{s=l+1}^{n-2} (-1)^{a_{1,(1+s)}}\ m_s - m_{n-1} + 2\ m_{\frac{(n-1)n}{2}+1},$$

para $2 \leq j \leq l-1$,

$$\begin{aligned} \langle \alpha, e_j \rangle = \sum_{r=1}^{j-1} m_{(r-1)n - \frac{r(r+1)}{2}+j} &+ \sum_{s=1}^{l-j-1} m_{(j-1)n - \frac{(j-1)j}{2}+s} \\ &+ \sum_{s=n-j}^{n-2j} (-1)^{a_{j,(j+s)}}\ m_{(j-1)n - \frac{(j-1)j}{2}+s} \\ &- \sum_{s=n-2j+1}^{n-j} m_{(j-1)n - \frac{(j-1)j}{2}+s} + 2\ m_{\frac{(n-1)n}{2}+j}, \end{aligned}$$

y

$$\langle \alpha, e_l \rangle = \sum_{r=1}^{l-1} m_{rn - \frac{r(r+1)}{2}+l} + m_{(l-1)n - \frac{(l-1)l)}{2}+1} - \sum_{s=2}^{l+1} m_{(l-1)n - \frac{(l-1)l}{2}+s} + 2m_{\frac{(n-1)n}{2}+l}$$

$$\langle \alpha, e_{l+1} \rangle = \langle \alpha, e_{n-l} \rangle = \sum_{r=1}^{l} m_{(r-1)n - \frac{r(r+1)}{2}+l+1} - \sum_{s=1}^{l} m_{ln - \frac{l(l+1)}{2}+s} + 2m_{\frac{(n-1)n}{2}+l+1}.$$

Para $1 \leq j \leq l-1$ tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \alpha, e_{n-j} \rangle = \sum_{r=1}^{j} (-1)^{a_{r,(r-j)}}\ m_{rn - \frac{r(r+1)}{2}-j} &- \sum_{r=j+1}^{n-j-1} m_{rn - \frac{r(r+1)}{2}-j} \\ &- \sum_{s=1}^{j} m_{(n-j-1)n - \frac{(n-j-1)(n-j)}{2}+s} - 2m_{\frac{(n-1)n}{2}+(n-j)}. \end{aligned}$$

Por último

$$N = \langle \alpha, e_n \rangle = -\sum_{r=1}^{n-1} m_{rn - \frac{r(r+1)}{2}} - 2m_{\frac{(n-1)n}{2}+n} \leq 0. \tag{49}$$

Definimos

$$A := \sum_{j=1}^{l} \langle \alpha, e_j \rangle \ \text{ y } \ B_1 := \sum_{j=0}^{l-1} \langle \alpha, e_{n-j} \rangle$$

Y obtenemos

$$\begin{aligned} 0 = A - B = \sum_{s=1}^{l} m_s + \sum_{j=2}^{l} \{ \sum_{r=1}^{j-1} m_{(r-1)n - \frac{r(r+1)}{2} + j} + \sum_{s=1}^{n-(l+1+j)+1} m_{(j-1)n - \frac{(j-1)j}{2} + s} \} \\ + \sum_{j=1}^{l} 2m_{\frac{(n-1)n}{2} + j} + \sum_{j=0}^{l-1} \{ \sum_{r=l+1}^{n-j-1} m_{rn - \frac{r(r+1)}{2} - j} \\ + \sum_{s=1}^{j} m_{(n-j-1)n - \frac{(n-j-1)(n-j)}{2} + s} \} + \sum_{j=0}^{l-1} 2m_{\frac{(n-1)n}{2} + (n-j)} \end{aligned}$$

Por hipótesis los coeficientes $m_t \geq 0$ para todo t, la ecuación anterior implica que $m_i = 0$ para

$$i \in \left\{ rn - \frac{r(r+1)}{2} - j, l+1 \leq r \leq n-j-1, \ 0 \leq j \leq l-1 \right\}$$

en particular si $r = l+1$ tenemos que

$$m_{(l+1)n - \frac{(l+1)(l+2)}{2} - j} = m_{ln - \frac{l(l+1)}{2} + n - (l+1) - j} = 0, \tag{50}$$

para $0 \leq j \leq l-1$.

Cambiando los subíndices en (50) $n-(l+1)-j$ por s tenemos que

$$0 = m_{ln - \frac{l(l+1)}{2} + n - (l+1) - j} = m_{ln - \frac{l(l+1)}{2} + s} \tag{51}$$

para $1 \leq s \leq l$, por lo tanto

$$\begin{aligned} 0 \geq N = \langle \alpha, e_{l+1} \rangle = \langle \alpha, e_{n-l} \rangle \\ = \sum_{r=1}^{l} m_{(r-1)n - \frac{r(r+1)}{2} + l + 1} - \sum_{s=1}^{l} m_{ln - \frac{l(l+1)}{2} + s} + 2m_{\frac{(n-1)n}{2} + l + 1} \\ = \sum_{r=1}^{l} m_{(r-1)n - \frac{r(r+1)}{2} + l + 1} + 2m_{\frac{(n-1)n}{2} + l + 1} \geq 0 \end{aligned}$$

lo cual implica que $N = \langle \alpha, e_{l+1} \rangle = 0$ y por lo tanto

$$\alpha = 0.$$

Como queríamos demostrar. $\square$

CASO $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}^*(2n)$.

Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}^*(2n)$, entonces $\mathfrak{k} = \mathfrak{u}(n)$, y sus sistemas de raíces con respecto a $\mathfrak{t}$ son

$$\begin{aligned}\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t}) &= \{\pm e_i \pm e_j,\ 1 \leq i < j \leq n\},\\ \Phi(\mathfrak{k},\mathfrak{t}) &= \{\pm(e_i - e_j),\ 1 \leq i < j \leq n\}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto de las raíces no compactas de $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ es

$$\Phi_n(\mathfrak{g},\mathfrak{t}) = \{\pm(e_i + e_j),\ 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Y el centro de $\mathfrak{k}$ es

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}} = \langle \sum_{i=1}^{n} e_i \rangle_{\mathbb{R}} \tag{52}$$

Fijemos el sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{k},\mathfrak{t})$ dado por

$$\Delta = \{(e_i - e_j),\ 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Todos los los conjuntos de raíces no compactas Ψ_n tal que $\Psi = \Delta \cup \Psi_n$ es un sistema de raíces positivas se pueden representar de la siguiente manera:

$$\Psi_n = \{(-1)^{a_{i,j}}\,(e_i + e_j),\ 1 \leq i < j \leq n\}$$

con $a_{i,j} \in \{0, 1\}$.

Definamos los siguientes subconjuntos de raíces no compactas dado por

$$I := \{(e_1 + e_n), (e_2 + e_{n-1}), ..., (e_k + e_{n-k+1}), ..., (e_l + e_{l+1})\}$$

si n es par.

$$\begin{aligned}J &:= \{(e_1 + e_n), (e_2 + e_{n-1}), ..., (e_k + e_{n-k+1}), ..., (e_l + e_{l+2}), (e_{l+1} + e_{l+2})\},\\ J' &:= \{(e_1 + e_n), (e_2 + e_{n-1}), ..., (e_k + e_{n-k+1}), ..., (e_l + e_{l+2}), (e_l + e_{l+1})\},\end{aligned}$$

si n es impar.

TEOREMA 11. *(a) Si n es un número par, entonces $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}} \neq 0$ si y sólo si $I \subset \Psi_n$ o $-I \subset \Psi_n$.*
(b) Si n es un número impar, entonces $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}} \neq 0$ si y sólo si $J \subset \Psi_n$ o $-J' \subset \Psi_n$.

Demostración: (a) Si n es un número par y $I \subset \Psi_n$ o $-I \subset \Psi_n$ entonces $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}} \neq 0$, pues

$$e_1 + e_2 + ... + e_n \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}$$

si $I \subset \Psi_n$ y

$$-(e_1 + e_2 + ... + e_n) \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}$$

si $-I \subset \Psi_n$.

Recíprocamente supongamos que $I \not\subset \Psi_n$ y que $-I \not\subset \Psi_n$.

Si $\alpha \in \mathbb{R}^+\Psi_n$ entonces existen escalares $m_t \geq 0$ para todo t tales que

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} (-1)^{a_{i,j}}\, m_{in-\frac{i(i+1)}{2}-(n-j)}\ (e_i + e_j).$$

Si $\alpha \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \mathfrak{z}_\mathfrak{k}$, entonces

$$N = \langle \alpha, e_j \rangle \tag{53}$$

para $1 \leq j \leq n$. Si razonamos análogamente al caso $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ y calculamos explícitamente las ecuaciones de (53) obtenemos nuevamente las ecuaciones (36), (37), (38), (39) y (40) tomando $b_i = 0$ para $1 \leq i \leq n$. Siguiendo los mismos pasos de la demostración del Teorema 1 para n par obtenemos

$$\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \mathfrak{z}_\mathfrak{k} = 0,$$

si $I \not\subset \Psi_n$ y $-I \not\subset \Psi_n$.

(b) Si n es un número impar y $J \subset \Psi_n$ entonces

$$\begin{aligned}(e_1 + e_n) + (e_2 + e_{n-1}) + ... + (e_{l-1} + e_{l+3}) \\ + \frac{1}{2}[(e_l + e_{l+2}) + (e_l + e_{l+1}) + (e_{l+1} + e_{l+2})] \\ = (e_1 + e_2 + ... + e_n) \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \mathfrak{z}_\mathfrak{k}.\end{aligned}$$

Y si $-J' \subset \Psi_n$ entonces

$$\begin{aligned}(-e_1 - e_n) + (-e_2 - e_{n-1}) + ... + (-e_{l-1} - e_{l+3}) \\ + \frac{1}{2}[(-e_l - e_{l+2}) + (-e_l - e_{l+1}) + (-e_{l+1} - e_{l+2})] \\ = -(e_1 + e_2 + ... + e_n) \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap \mathfrak{z}_\mathfrak{k}.\end{aligned}$$

Recíprocamente supongamos que $J \not\subset \Psi_n$ y que $-J' \not\subset \Psi_n$. Como las raíces $\pm(e_1 + e_n)$ son no compactas entonces tenemos dos posibilidades, (i) $(e_1 + e_n) \in \Psi_n$ o (ii) $(-e_1 - e_n) \in \Psi_n$.

(i) Si $(e_1 + e_n) \in \Psi_n$, como $J \not\subset \Psi_n$ existe al menos un i tal que $(-e_i - e_{n-i+1}) \in \Psi_n$. Sea k el menor i que satisface esta condición. Si razonamos análogamente al caso $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ para n impar y calculamos explícitamente las ecuaciones $\langle \alpha, e_j \rangle$ de (53) obtenemos nuevamente las ecuaciones (36), (37), (38), (39) y (40) tomando $b_i = 0$ para $1 \leq i \leq n$. Siguiendo los mismos pasos de la demostración del Teorema 1 bajo las hipótesis n impar e $I \not\subset \Psi_n$, obtenemos

$$\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \mathfrak{z}_\mathfrak{k} = 0.$$

(ii) Si $(-e_1 - e_n) \in \Psi_n$, como $-J' \not\subset \Psi_n$ existe al menos un i tal que $(e_i + e_{n-i+1}) \in \Psi_n$. Sea k el menor i que satisface esta condición. Nuevamente razonando análogamente al caso $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ para n impar y calculamos explícitamente las ecuaciones $\langle \alpha, e_j \rangle$ de (53) obtenemos las ecuaciones (10), (11), (12), (13) y (14) tomando $b_i = 0$ para $1 \leq i \leq n$.

Siguiendo los mismos pasos de la demostración del Teorema 1 bajo las hipótesis n impar e $-I \not\subset \Psi_n$, obtenemos

$$\mathbb{R}^+\Psi_n \cap \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}} = 0.$$

CASO $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(p,q)$.

Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(p,q)$, con $p \leq q$, entonces $\mathfrak{k} = \mathfrak{u}(p+q)$, y sus sistemas de raíces con respecto a $\mathfrak{t}$ son

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t}) &= \{\pm(e_i - e_j),\ 1 \leq i < j \leq p+q\} \subseteq \{\sum_{i=1}^{p+q} n_i e_i : \sum_{i=1}^{p+q} n_i = 0\},\\
\Phi(\mathfrak{k},\mathfrak{t}) &= \{\pm(e_i - e_j),\ 1 \leq i < j \leq p\}\\
&\qquad\qquad\qquad \cup \{\pm(e_k - e_l),\ p+1 \leq k < l \leq p+q\}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto de las raíces no compactas de $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ es

$$\Phi_n(\mathfrak{g},\mathfrak{t}) = \{\pm(e_i - e_k),\ 1 \leq i \leq p,\ p+1 \leq k \leq p+q\}.$$

Y el centro de $\mathfrak{k}$ es

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}} = \langle q(e_1 + e_2 + ... + e_p) - p(e_{p+1} + e_{p+2} ... + e_{p+q})\rangle$$

Fijemos el sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{k},\mathfrak{t})$ dado por

$$\Delta = \{(e_i - e_j),\ 1 \leq i < j \leq p\} \cup \{(e_k - e_l)\, p+1 \leq k < l \leq p+q\}.$$

LEMA 30. *(i) Si $(e_i - e_j) \in \Psi_n$ para $1 \leq i \leq p$ y $p+1 \leq j \leq p+q$, entonces $(e_s - e_t) \in \Psi_n$ para $1 \leq s \leq i$ y $j \leq t \leq p+q$.*
(ii) Si $(-e_i + e_j) \in \Psi_n$ para $1 \leq i \leq p$ y $p+1 \leq j \leq p+q$, entonces $(-e_s + e_t) \in \Psi_n$ para $i \leq s \leq p$ y $p+1 \leq t \leq j$.

Demostración: (i) Si $(e_i - e_j) \in \Psi_n$ para $1 \leq i \leq p$ y $p+1 \leq j \leq p+q$, entonces

$$\begin{aligned}
e_i - e_t &= (e_i - e_j) + (e_j - e_t), \text{ para } j \leq t \leq p+q,\\
e_s - e_j &= (e_i - e_j) + (e_s - e_i), \text{ para } 1 \leq s \leq i-1,\\
e_s - e_t &= (e_s - e_j) + (e_j - e_t), \text{ para } 1 \leq i \leq p \text{ y } p+1 \leq j \leq p+q.
\end{aligned}$$

(ii) Si $(-e_i + e_j \in \Psi_n)$ para $1 \leq i \leq p$ y $p+1 \leq j \leq p+q$, entonces

$$\begin{aligned}
-e_s + e_j &= (-e_i + e_j) + (e_i - e_k), \text{ para } i+1 \leq k \leq p,\\
-e_i + e_t &= (-e_i + e_j) + (e_t - e_j), \text{ para } p+1 \leq t \leq (j-1),\\
-e_s + e_t &= (-e_s + e_j) + (e_t - e_j), \text{ para } i \leq s \leq p \text{ y } p+1 \leq t \leq j. \quad \square
\end{aligned}$$

Definamos los siguientes conjuntos

$$I := \{e_i - e_{\gamma_i}\}_{i=1}^{p}$$

donde
$$\gamma_i = i + \left[\frac{(i-1)(q-p)}{p}\right] + p,$$
y
$$\tilde{I} := \{-e_i + e_{b_i}\}_{i=1}^{p}$$
donde
$$b_i = \begin{cases} i+1+[\frac{i(q-p)}{p}]+p & si\ \frac{i(q-p)}{p} \notin \mathbb{Z}, \\ i+\frac{i(q-p)}{p}+p & si\ \frac{i(q-p)}{p} \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$
y $[\frac{i(q-p)}{p}]$ es la parte entera de $\frac{i(q-p)}{p}$.

Lema 31. *(i) Si $1 \leq l \leq p$ entonces*
$$(l-1)q - \left(l + \left[\frac{(l-1)(q-p)}{p}\right]p\right) < 0.$$
(ii) Si $1 \leq l \leq p$ entonces
$$(p-l)q - (p+q-b_l+1) < 0.$$

Demostración: (i) Si $1 \leq l \leq p$,
$$\begin{aligned} (l-1)q - \left(l + \left[\frac{(l-1)(q-p)}{p}\right]\right)p \\ &= (l-1)(q-p+p) - lp - \left[\frac{(l-1)(q-p)}{p}\right]p \\ &= (l-1)(q-p) - p - \left[\frac{(l-1)(q-p)}{p}\right]p \\ &= \left(\frac{(l-1)(q-p)}{p} - \left[\frac{(l-1)(q-p)}{p}\right] - 1\right)p < 0 \end{aligned}$$
pues para todo a entero no negativo, $[a] = a - \epsilon$ con $0 \leq \epsilon < 1$, por lo tanto $a - [a] - 1 < 0$.

(ii) (a) Si $\frac{l(q-p)}{p} \notin \mathbb{Z}$ entones $b_l = l + \left[\frac{l(q-p)}{p}\right] + 1 + p$, y
$$\begin{aligned} (p-l)q - (p+q-b_l+1)p &= p\,b_l - p - p^2 - lq \\ &= p\left(l + \left[\frac{l(q-p)}{p}\right] + 1 + p\right) - p - p^2 - lq \\ &= p\left[\frac{l(q-p)}{p}\right] - l(q-p) \\ &= p\left(\left[\frac{l(q-p)}{p}\right] - \frac{l(q-p)}{p}\right) < 0. \end{aligned}$$

(b) Si $\frac{l(q-p)}{p} \in \mathbb{Z}$ entonces $b_l = l + \frac{l(q-p)}{p} + p$, y

$$\begin{aligned}(p-l)q - (p+q-b_l+1)p &= p\, b_l - p - p^2 - lq \\ &= p\left(l + \frac{l(q-p)}{p} + p\right) - p - p^2 - lq \\ &= pl - lq + l(q-p) - p \\ &= -l(q-p) + l(q-p) - p = -p < 0 \quad \square\end{aligned}$$

Definición 9. *Dado un número entero a, definimos $[a]_{\mathbb{Z}_p}$ como el menor entero no negativo congruente a a módulo p. Es decir*

$$[a]_{\mathbb{Z}_p} \equiv a \quad mod(p) \qquad y \quad 0 \leq [a]_{\mathbb{Z}_p} \leq p-1.$$

Por otra parte sea

$$[a]_p := \begin{cases} [a]_{\mathbb{Z}_p} & si\ [a]_{\mathbb{Z}_p} \neq 0, \\ p & si\ [a]_{\mathbb{Z}_p} = 0. \end{cases}$$

Lema 32. *Si $k = [q]_{\mathbb{Z}_p}$ entonces*

$$k = p\left(\frac{q-p}{p} - \left[\frac{q-p}{p}\right]\right)$$

Demostración:

$$\begin{aligned}k = p\left(\frac{q}{p} - \left[\frac{q}{p}\right]\right) &= p\left(\frac{q}{p} - 1 + 1 - \left[\frac{q}{p}\right]\right) \\ &= p\left(\frac{q-p}{p} - \left[\frac{q}{p} - 1\right]\right) = p\left(\frac{q-p}{p} - \left[\frac{q-p}{p}\right]\right)\end{aligned}$$

$\square$

Lema 33. *(i) Si $\left(\frac{(i-1)(q-p)}{p}\right) \in \mathbb{Z}$ entonces $[(p-i+1)k]_p = p$.*
(ii) Si $\left(\frac{(i-1)(q-p)}{p}\right) \notin \mathbb{Z}$ entonces

$$\begin{aligned}&[(p-i+1)k]_p \\ &\qquad = (p-i+1)(q-p) - p(q-p) + p\left[\frac{(i-1)(q-p)}{p}\right] + p.\end{aligned}$$

(iii) Si $\left(\frac{i(q-p)}{p}\right) \in \mathbb{Z}$ entonces $[ik]_p = p$.
(iv) Si $\frac{i(q-p)}{p} \notin \mathbb{Z}$ entonces

$$[ik]_p = i(q-p) - p\left[\frac{i(q-p)}{p}\right].$$

Demostración: (i) Notemos que $\left(\frac{(i-1)(q-p)}{p}\right) \in \mathbb{Z}$ si y sólo si $p|(i-1)(q-p)$, lo que implica que $p|(i-1)q$. Como $k = [q]_{\mathbb{Z}_p}$ entonces existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $k = q - mp$ y

$$(p-i+1)k = pq - p^2m - (i-1)q + (i-1)mp$$

por lo tanto $p|(p-i+1)k$ lo que implica que $[(p-i+1)k]_{\mathbb{Z}_p} = 0$. Entonces por definición

$$[(p-i+1)k]_p = p.$$

(ii) Si $\frac{(i-1)(q-p)}{p} \notin \mathbb{Z}$ entonces

$$\begin{aligned}
[(p-i+1)k]_p &= p\left(\frac{(p-i+1)k}{p} - \left[\frac{(p-i+1)k}{p}\right]\right) \\
&= (p-i+1)(q-p) - (p-i+1)p\left[\frac{q-p}{p}\right] \\
&\qquad - p\left[(p-i+1)\left(\frac{(q-p)}{p} - \left[\frac{q-p}{p}\right]\right)\right] \\
&= (p-i+1)(q-p) - (p-i+1)p\left[\frac{q-p}{p}\right] \\
&\qquad - p\left[\frac{(p-i+1)(q-p)}{p}\right] + p(p-i+1)\left[\frac{q-p}{p}\right] \\
&= (p-i+1)(q-p) - p\left[\frac{(p-i+1)(q-p)}{p}\right] \\
&= (p-i+1)(q-p) - p\left[(q-p) - \frac{(i-1)(q-p)}{p}\right] \\
&= (p-i+1)(q-p) - p(q-p) + p\left[\frac{(i-1)(q-p)}{p}\right] + p.
\end{aligned}$$

(iii) $\frac{i(q-p)}{p} \in \mathbb{Z}$ si y sólo si $p|i(q-p)$ lo que implica que $p|iq$,

$$ik = i(q-mp) = iq - imp$$

por lo tanto $p|ik$, lo que implica que $[ik]_{\mathbb{Z}_p} = 0$. Entonces por definición

$$[ik]_p = p.$$

(iv) Si $\frac{i(q-p)}{p} \notin \mathbb{Z}$ entonces

$$\begin{aligned}
[ik]_p =& p\left(\frac{ik}{p} - \left[\frac{ik}{p}\right]\right) \\
=& ip\left(\frac{q-p}{p} - \left[\frac{q-p}{p}\right]\right) - p\left[i\left(\frac{q-p}{p} - \left[\frac{q-p}{p}\right]\right)\right] \\
=& i(q-p) - ip\left[\frac{q-p}{p}\right] - p\left[\frac{i(q-p)}{p}\right] + ip\left[\frac{q-p}{p}\right] \\
=& i(q-p) - p\left[\frac{i(q-p)}{p}\right].
\end{aligned}$$

□

Teorema 12. *Sea $\Psi = \Psi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ un sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ que contiene a Δ. Entonces $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k} \neq 0$ si y sólo si $I \subset \Psi_n$ o $\tilde{I} \subset \Psi_n$.*

Demostración:

Si $I \subset \Psi_n$, por Lema (30) las raíces no compactas $(e_i - e_j) \in \Psi_n$ para $\gamma_i \leq j \leq p+q$. Sea

$$\alpha = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=\gamma_i}^{b_i} c_{i,j}(e_i - e_j),$$

con

$$c_{i,j} = \begin{cases} [(p-i+1)k]_p & \text{si } j = \gamma_i, \\ p & \text{si } \gamma_i < j < b_i, \\ [ik]_p & \text{si } j = b_i, \end{cases} \tag{54}$$

Por definición $\alpha \in \mathbb{R}^+\Psi_n$, demostremos que

$$\alpha \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k}.$$

Si $p = q$ entonces

$$\alpha = \sum_{i=1}^{p} p(e_i - e_{p+i}).$$

Si $1 \leq i \leq p$, y si $1 \leq j \leq p$

$$\langle \alpha, e_i \rangle = p$$
$$\langle \alpha, e_{p+j} \rangle = p.$$

Por lo tanto

$$\alpha \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k}.$$

Supongamos que $p < q$. Si $1 \leq i \leq p$ entonces

$$\langle \alpha, e_i \rangle = [(p-i+1)k]_p + [ik]_p + p(b_i - \gamma_i - 1). \tag{55}$$

Tenemos cuatro posibilidades

A. $\frac{(i-1)(q-p)}{p} \notin \mathbb{Z}$ y $\frac{i(q-p)}{p} \notin \mathbb{Z}$ B. $\frac{(i-1)(q-p)}{p} \in \mathbb{Z}$ y $\frac{i(q-p)}{p} \notin \mathbb{Z}$
C. $\frac{(i-1)(q-p)}{p} \notin \mathbb{Z}$ y $\frac{i(q-p)}{p} \in \mathbb{Z}$ D. $\frac{(i-1)(q-p)}{p} \in \mathbb{Z}$ y $\frac{i(q-p)}{p} \in \mathbb{Z}$.

A. Si $\frac{(i-1)(q-p)}{p} \notin \mathbb{Z}$ y $\frac{i(q-p)}{p} \notin \mathbb{Z}$ entonces

$$p(b_i - \gamma_i - 1) = p\left(\left[\frac{i(q-p)}{p}\right] - \left[\frac{(i-1)(q-p)}{p}\right]\right)$$

y por Lema (33) la ecuación (55) nos queda

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, e_i \rangle &= [(p-i+1)k]_p + [ik]_p + p(b_i - \gamma_i - 1) \\
&= (p-i+1)(q-p) - p(q-p) + p\left[\frac{(i-1)(q-p)}{p}\right] + p \\
&\quad + i(q-p) - p\left[\frac{i(q-p)}{p}\right] + p\left(\left[\frac{i(q-p)}{p}\right] - \left[\frac{(i-1)(q-p)}{p}\right]\right) \\
&= (q-p)(p-i+1-p+i) + p \\
&= q.
\end{aligned}$$

B. Si $\frac{(i-1)(q-p)}{p} \in \mathbb{Z}$ y $\frac{i(q-p)}{p} \notin \mathbb{Z}$, entonces

$$p(b_i - \gamma_i - 1) = p\left(\left[\frac{i(q-p)}{p}\right] - \frac{(i-1)(q-p)}{p}\right)$$

y por Lema (33) la ecuación (55) nos queda

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, e_i \rangle &= [(p-i+1)k]_p + [ik]_p + p(b_i - \gamma_i - 1) \\
&= p + i(q-p) - p\left[\frac{i(q-p)}{p}\right] + p\left[\frac{i(q-p)}{p}\right] - (i-1)(q-p) \\
&= p + (q-p) \\
&= q.
\end{aligned}$$

C. Si $\frac{(i-1)(q-p)}{p} \notin \mathbb{Z}$ y $\frac{i(q-p)}{p} \in \mathbb{Z}$, entonces

$$p(b_i - \gamma_i - 1) = p\left(\frac{i(q-p)}{p} - \left[\frac{(i-1)(q-p)}{p}\right] - 1\right)$$

y por Lema (33) la ecuación (55) nos queda

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, e_i \rangle &= [(p-i+1)k]_p + [ik]_p + p(b_i - \gamma_i - 1) \\
&= (p-i+1)(q-p) - p(q-p) + p\left[\frac{(i-1)(q-p)}{p}\right] + p \\
&\qquad + p + i(q-p) - p\left[\frac{(i-1)(q-p)}{p}\right] - p \\
&= (p-i+1)(q-p) - p(q-p) + p + i(q-p) \\
&= (q-p)(p-i+1-p+i) + p \\
&= q.
\end{aligned}$$

D. Si $\frac{(i-1)(q-p)}{p} \in \mathbb{Z}$ y $\frac{i(q-p)}{p} \in \mathbb{Z}$ entonces

$$p(b_i - \gamma_i - 1) = p\left(\frac{i(q-p)}{p} - \frac{(i-1)(q-p)}{p} - 1\right)$$

y por Lema (33) la ecuación (55) nos queda

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, e_i \rangle &= [(p-i+1)k]_p + [ik]_p + p(b_i - \gamma_i - 1) \\
&= 2p - (i(q-p) - (i-1)(q-p) - p) = 2p + (q-p) - p \\
&= q.
\end{aligned}$$

Si $1 \le j \le q$ para calcular $\langle \alpha, e_{p+j} \rangle$ debemos analizar estas cuatro posibilidades

A. $p + j = \gamma_i = b_{i-1}$ para algún i,
B. $p + j = \gamma_i > b_{i-1}$ para algún i,
C. $p + j = b_i < \gamma_{i+1}$ para algún i,
D. $b_{i-1} < p + j < \gamma_i$ para algún i.

A. Si $p + j = \gamma_i = b_{i-1}$ para algún i, entonces $\frac{(i-1)(q-p)}{p} \notin \mathbb{Z}$ pues de lo contrario la hipótesis $\gamma_i = b_{i-1}$ implicaría que

$$i + \frac{(i-1)(q-p)}{p} + p = (i-1) + \frac{(i-1)(q-p)}{p} + p$$

lo cual es absurdo. Entonces (54) y el Lema 33 implican que

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, e_{p+j} \rangle &= [(p-i+1)k]_p + [(i-1)k]_p \\
&= \left((p-i+1)(q-p) - p(q-p) + p\left[\frac{(i-1)(q-p)}{p}\right] + p\right) \\
&\qquad + \left((i-1)(q-p) - p\left[\frac{(i-1)(q-p)}{p}\right]\right) \\
&= (q-p)(p-i+1-p+i-1) + p \\
&= p.
\end{aligned}$$

B. Si $p + j = \gamma_i > b_{i-1}$ para algún i, entonces $\frac{(i-1)(q-p)}{p} \in \mathbb{Z}$ pues de lo contrario

$$i + \left[\frac{(i-1)(q-p)}{p}\right] + p > (i-1) + 1 + \left[\frac{(i-1)(q-p)}{p}\right] + p$$

lo cual es absurdo. Entonces (54) y el Lema 33 implican que

$$\langle \alpha, e_{p+j} \rangle = [(p-i+1)k]_p = p.$$

C. Si $p + j = b_i < \gamma_{i+1}$ para algún i, entonces $\frac{i(q-p)}{p} \in \mathbb{Z}$ pues de lo contrario

$$i + 1 + \left[\frac{i(q-p)}{p}\right] + p > (i+1) + \left[\frac{i(q-p)}{p}\right] + p$$

lo cual es absurdo. Entonces (54) y el Lema 33 implican que

$$\langle \alpha, e_{p+j} \rangle = [ik]_p = p.$$

D. Si $b_{i-1} < p + j < \gamma_i$ para algún i, (54) implica que

$$\langle \alpha, e_{p+j} \rangle = p.$$

Por lo tanto hemos demostrado que

$$\alpha \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k}$$

como queríamos demostrar.

Si $\tilde{I} \subset \Psi_n$ por Lema 30 las raíces no compactas $(-e_i + e_{b_j}) \in \Psi_n$ para $1 \leq i \leq b_j$. Sea

$$\alpha = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=\gamma_i}^{b_i} c_{i,j}(-e_i + e_j),$$

donde $c_{i,j}$ son los coeficientes definidos en (54). Procediendo de manera análoga al caso en que $I \subset \Psi_n$ obtenemos que

$$\alpha \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k},$$

como queríamos demostrar.

Recíprocamente supongamos que $I \not\subset \Psi_n$ e $\tilde{I} \not\subset \Psi_n$.

Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k}$ entonces existen escalares N, $a_k \in \{0,1\}$ y $m_k \geq 0$ para $1 \leq k \leq pq$ tales que

$$\begin{aligned}\alpha &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=p+1}^{p+q}(-1)^{a_{q(i-1)+(j-p)}}\ m_{q(i-1)+(j-p)}\ (e_i - e_j)\\ &= N(q\sum_{i=1}^{p} e_i - p\sum_{i=p+1}^{p+q} e_i)\end{aligned}$$

Como $\pm(e_1 - e_{p+1})$ son raíces no compactas, tenemos dos posibilidades, (i) $(e_1 - e_{p+1}) \in \Psi_n$ o (ii) $-(e_1 - e_{p+1}) \in \Psi_n$.

(i) Si $(e_1 - e_{p+1}) \in \Psi_n$, por Lema 30

$$(e_1 - e_j) \in \Psi_n \text{ para } p+1 \leq j \leq p+q,$$

entonces

$$Nq = \langle \alpha, e_1\rangle = \sum_{i=1}^{q} m_i \geq 0$$

por lo tanto $N \geq 0$.

Como $I \not\subset \Psi_n$ existe al menos un j tal que

$$\left(-e_j + e_{j+\left[\frac{(j-1)(q-p)}{p}\right]+p}\right) \in \Psi_n,$$

sea l el menor j que satisface esta condición y sea

$$\delta = l + \left[\frac{(l-1)(q-p)}{p}\right].$$

Si $2 \leq t \leq l-1$, entonces $\alpha \in \mathbb{R}^{+}\Psi_n \cap i\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}$ satisface

$$qN = \langle \alpha, e_t\rangle = \sum_{i=(t-1)q+1}^{(t-1)(q+1)+\left[\frac{(t-1)(q-p)}{p}\right]} (-1)^{a_i}\, m_i + \sum_{i=(t-1)(q+1)+\left[\frac{(t-1)(q-p)}{p}\right]+1}^{tq} m_i.$$

Por otra parte, para cada $1 \leq k \leq \delta - 1$, existe un entero no negativo j_k tal que

$$j_k + \left[\frac{(j_k-1)(q-p)}{p}\right] \leq k < j_k + 1 + \left[\frac{j_k(q-p)}{p}\right],$$

y $\alpha \in \mathbb{R}^{+}\Psi_n \cap i\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}$ satisface

$$-pN = \langle \alpha, e_{p+k}\rangle = -\sum_{i=1}^{j_k} m_{(i-1)q+k} + \sum_{i=j_k+1}^{l-1}(-1)^{a_i+1}\ m_{(i-1)q+k} + \sum_{i=l}^{p} m_{(i-1)q+k},$$

y

$$-pN = \langle \alpha, e_{p+\delta}\rangle = -\sum_{i=1}^{l-1} m_{(i-1)q+k} + \sum_{i=l}^{p} m_{(i-1)q+k}.$$

Por Lema 31

$$0 \geq \{(l-1)q - \delta p\} N = \langle \alpha, \sum_{i=1}^{l-1} e_i + \sum_{i=1}^{\delta} e_{p+i} \rangle$$
$$= \sum_{j=1}^{l-1} \sum_{i=1}^{q-\delta} m_{\delta+(j-1)q+i} + \sum_{j=l}^{p} \sum_{i=1}^{\delta} m_{(j-1)q+i} \geq 0,$$

pues los escalares $m_t \geq 0$ para todo t, por lo tanto $N = 0$ lo que implica que

$$\mathbb{R}^+ \Psi_n \cap i\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}} = 0$$

como queríamos demostrar.

(ii) Si $(-e_1 + e_{p+1}) \in \Psi_n$, por Lema 30 $(-e_j + e_{p+1}) \in \Psi_n$, para $1 \leq j \leq p$ lo que implica que

$$-pN = \langle \alpha, e_{p+1} \rangle \sum_{i=1}^{p} m_{(i-1)q+1} \geq 0,$$

como los escalares m_t son no negativos, la ecuación anterior implica que $N \leq 0$.

Como $\tilde{I} \not\subset \Psi_n$, existe al menos un j tal que

$$\left(e_j - e_{b_j}\right) \in \Psi_n.$$

Sea l el mayor j que satisface esta condición.

Si $l+1 \leq j \leq p$, entonces $\alpha \in \mathbb{R}^+ \Psi_n \cap i\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}$ satisface

$$qN = \langle \alpha, e_j \rangle = -\sum_{i=(j-1)q+1}^{(j-1)+b_j-p} m_i + \sum_{i=(j-1)+b_j-p+1}^{jq} (-1)^{a_i} m_i$$

Por otra parte

$$-pN = \langle \alpha, e_{b_l} \rangle = -\sum_{i=1}^{l} m_{(i-1)q+l} + \sum_{i=l+1}^{p} m_{(i-1)q+l},$$

y para $b_l - p \leq k \leq q$ existe un entero no negativo j_k tal que

$$b_{j_k} - 1 < k \leq b_{j_k}$$

y α satisface

$$-pN = \langle \alpha, e_{p+k} \rangle = -\sum_{i=1}^{l} n_{(i-1)q+k} + \sum_{i=l+1}^{j_k-1} (-1)^{a_i+1} m_{(i-1)q+k} + \sum_{i=j_k}^{p} m_{(i-1)q+k}.$$

Por Lema 31

$$0 \leq N((p-l)q - p(p+q-b_l+1)) = \langle \alpha, \sum_{j=l+1}^{p} e_j + \sum_{j=b_l}^{p+q} e_j \rangle$$

$$= -\left(\sum_{j=l+1}^{p} \sum_{i=(j-1)q+1}^{(j-1)q+b_l-p-1} m_i + \sum_{j=b_l}^{p+q} \sum_{i=1}^{l} m_{(i-1)q+(j-p)} \right) \leq 0,$$

pues los escalares $m_t \geq 0$ para todo t. Por lo tanto $N = 0$, lo que implica que

$$\mathbb{R}^+ \Psi_n \cap i\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}} = 0.$$

Esto termina con la demostración del Teorema $\square$.

CASO $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_{7(-25)}$.

Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_{7(-25)}$, entonces $\mathfrak{k} = \mathfrak{e}_6 \oplus \mathfrak{so}(2)$. Los sistemas de raíces de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{k}$ con respecto a $\mathfrak{t}$ son

$$\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) = \{\pm e_i \pm e_j,\ 1 \leq i < j \leq 6\} \cup \{\pm(-e_7 + e_8)\}$$
$$\cup \left\{ \pm(\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{6} (-1)^{n_i} e_i - e_7 + e_8));\ |\sum_{i=1}^{6} n_i \text{ impar} \right\},$$

$$\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) = \{\pm e_i \pm e_j,\ 1 \leq i < j \leq 5\}$$
$$\cup \left\{ \pm(\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{5} (-1)^{m_i} e_i - e_6 - e_7 + e_8));\ |\sum_{i=1}^{5} m_i \text{ par} \right\}$$

respectivamente.

Por lo tanto el conjunto de las raíces no compactas de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ es

$$\Phi_n(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) = \{\pm e_i \pm e_6,\ 1 \leq i \leq 5\} \cup \{\pm(-e_7 + e_8)\} \cup \{\pm \theta_k,\ 1 \leq k \leq 16\},$$

donde

$\theta_1 = \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5 + e_6 - e_7 + e_8)$
$\theta_2 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3 - e_4 - e_5 + e_6 - e_7 + e_8)$
$\theta_3 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3 - e_4 - e_5 + e_6 - e_7 + e_8)$
$\theta_4 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 + e_4 - e_5 + e_6 - e_7 + e_8)$
$\theta_5 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4 + e_5 + e_6 - e_7 + e_8)$
$\theta_6 = \frac{1}{2}(-e_1 + e_2 + e_3 - e_4 - e_5 + e_6 - e_7 + e_8)$
$\theta_7 = \frac{1}{2}(-e_1 + e_2 - e_3 + e_4 - e_5 + e_6 - e_7 + e_8)$
$\theta_8 = \frac{1}{2}(-e_1 + e_2 - e_3 - e_4 + e_5 + e_6 - e_7 + e_8)$
$\theta_9 = \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 + e_3 + e_4 - e_5 + e_6 - e_7 + e_8)$
$\theta_{10} = \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 + e_3 - e_4 + e_5 + e_6 - e_7 + e_8)$
$\theta_{11} = \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 - e_3 + e_4 + e_5 + e_6 - e_7 + e_8)$
$\theta_{12} = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 - e_5 + e_6 - e_7 + e_8)$

$\theta_{13} = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 - e_4 + e_5 + e_6 - e_7 + e_8)$
$\theta_{14} = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3 + e_4 + e_5 + e_6 - e_7 + e_8)$
$\theta_{15} = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6 - e_7 + e_8)$
$\theta_{16} = \frac{1}{2}(-e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6 - e_7 + e_8)$

Y el centro de $\mathfrak{k}$ es

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}} = \langle 2e_6 - e_7 + e_8 \rangle.$$

Fijemos el sistema de raíces positivas compactas

$$\Delta = \{(e_i \pm e_j),\, 1 \leq i < j \leq 5\} \cup \{\beta_k,\, 1 \leq k \leq 16\}$$

en el cual

$\beta_1 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8)$
$\beta_2 = \frac{1}{2}(-e_1 + e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8)$
$\beta_3 = \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 + e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8)$
$\beta_4 = \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 - e_3 + e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8)$
$\beta_5 = \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 - e_3 - e_4 + e_5 - e_6 - e_7 + e_8)$
$\beta_6 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8)$
$\beta_7 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3 + e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8)$
$\beta_8 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3 - e_4 + e_5 - e_6 - e_7 + e_8)$
$\beta_9 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3 + e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8)$
$\beta_{10} = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3 - e_4 + e_5 - e_6 - e_7 + e_8)$
$\beta_{11} = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 + e_4 + e_5 - e_6 - e_7 + e_8)$
$\beta_{12} = \frac{1}{2}(-e_1 + e_2 + e_3 + e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8)$
$\beta_{13} = \frac{1}{2}(-e_1 + e_2 + e_3 - e_4 + e_5 - e_6 - e_7 + e_8)$
$\beta_{14} = \frac{1}{2}(-e_1 + e_2 - e_3 + e_4 + e_5 - e_6 - e_7 + e_8)$
$\beta_{15} = \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 + e_3 + e_4 + e_5 - e_6 - e_7 + e_8)$
$\beta_{16} = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 - e_6 - e_7 + e_8)$

LEMA 34. *(i) Supongamos que $\theta_8 \in \Psi_n$, entonces $(-e_7 + e_8)$ y $\theta_j \in \Psi_n$ para $j \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 15, 16\}$.*
(ii) Supongamos que $\theta_9 \in \Psi_n$, entonces $(-e_7 + e_8)$ y $\theta_k \in \Psi_n$ para $k \in \{2, 3, 4, 6, 7, 9, 12, 13, 14, 15, 16\}$.
(iii) Supongamos que $e_1 + e_6 \in \Psi_n$, entonces $(-e_7 + e_8)$ y $\theta_i \in \Psi_n$, para $i \in \{2, 3, 4, 5, 12, 13, 14, 15\}$.
(iv) Si $-e_1 - e_6 \in \Psi_n$, entonces $\pm e_i - e_6 \in \Psi_n$ con $1 \leq i \leq 5$.
(v) Si $-\theta_8 \in \Psi_n$, entonces $-\theta_j \in \Psi_n$ para $j \in \{1, 10, 11\}$.
(vi) Si $-\theta_9 \in \Psi_n$, entonces $-\theta_k \in \Psi_n$ para $k \in \{1, 10, 11\}$.

Demostración: (i) Si $\theta_8 \in \Psi_n$, entonces $(-e_7 + e_8)$, $\theta_j \in \Psi_n$ para $j \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 15, 16\}$, pues las raices $(e_i \pm e_j) \subset \Delta \subset \Psi$ si $i < j$ y

$\theta_2 = \theta_8 + (e_1 - e_5)$ $\qquad \theta_3 = \theta_8 + (e_1 - e_2) + (e_3 - e_5)$
$\theta_4 = \theta_8 + (e_1 - e_2) + (e_4 - e_5)$ $\qquad \theta_5 = \theta_8 + (e_1 - e_2)$
$\theta_6 = \theta_8 + (e_3 - e_5)$ $\qquad \theta_7 = \theta_8 + (e_4 - e_5)$
$\theta_{12} = \theta_8 + (e_1 - e_5) + (e_3 + e_4)$ $\qquad \theta_{13} = \theta_8 + (e_1 + e_3)$
$\theta_{14} = \theta_8 + (e_1 + e_4)$ $\qquad \theta_{15} = \theta_8 + (e_1 - e_2) + (e_3 + e_4)$
$\theta_{16} = \theta_8 + (e_2 + e_4)$ $\qquad -e_7 + e_8 = \theta_{16} + \beta_1$

(ii) Si $\theta_9 \in \Psi_n$ entonces $(-e_7 + e_8)$, $\theta_k \in \Psi_n$ para $k \in \{2, 3, 4, 6, 7, 9, 12, 13, 14, 15, 16\}$ pues

$$\begin{array}{ll} \theta_2 = \theta_9 + (e_1 - e_3) + (e_2 - e_4) & \theta_3 = \theta_9 + (e_1 - e_4) \\ \theta_4 = \theta_9 + (e_1 - e_3) & \theta_6 = \theta_9 + (e_2 - e_4) \\ \theta_7 = \theta_9 + (e_2 - e_3) & \theta_{12} = \theta_9 + (e_1 + e_2) \\ \theta_{13} = \theta_9 + (e_2 - e_4) + (e_1 + e_5) & \theta_{14} = \theta_9 + (e_2 - e_3) + (e_1 + e_5) \\ \theta_{15} = \theta_9 + (e_1 + e_5) & \theta_{16} = \theta_9 + (e_2 + e_5) \\ -e_7 + e_8 = \theta_{16} + \beta_1 & \end{array}$$

(iii) Si $e_1 + e_6 \in \Psi_n$ como $\beta_i \in \Delta \subset \Psi$ para $1 \leq i \leq 16$, entonces

$$\theta_k = (e_1 + e_6) + \beta_k \in \Psi_n$$

para $k \in \{2, 3, 4, 5, 12, 13, 14, 15\}$, y $(-e_7 + e_8) = \theta_2 + \beta_{15}$.

(iv) Si $-e_1 - e_6 \in \Psi_n$, entonces $\pm e_i - e_6 \in \Psi_n$ para $1 \leq i \leq 5$ pues

$$\pm e_j - e_6 = (-e_1 - e_6) + (e_1 \pm e_j),\ 2 \leq j \leq 5 \text{ y}$$
$$e_1 - e_6 = (-e_1 - e_6) + (e_1 + e_2) + (e_1 - e_2).$$

(v) Si $-\theta_8 \in \Psi_n$ entonces $-\theta_i \in \Psi_n$ para $i \in \{1, 10, 11\}$ pues

$$\begin{array}{ll} -\theta_1 = -\theta_8 + (e_2 + e_5) & -\theta_{10} = -\theta_8 + (e_2 - e_3) \\ -\theta_{11} = -\theta_8 + (e_2 - e_4) & \end{array}$$

(vi) Si $-\theta_9 \in \Psi_n$ entonces $-\theta_i \in \Psi_n$ para $i \in \{1, 10, 11\}$ pues

$$\begin{array}{ll} -\theta_1 = -\theta_9 + (e_3 + e_4) & -\theta_{10} = -\theta_9 + (e_4 - e_5) \\ -\theta_{11} = -\theta_9 + (e_3 - e_5) & \square \end{array}$$

Sea I el subconjunto de raíces no compactas definido por

$$I = \{\theta_8, \theta_9, e_1 + e_6\}$$

Teorema 13. *Sea $\Psi = \Psi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ un sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ que contiene a Δ. Entonces $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k} \neq 0$ si y sólo si $I \subset \Psi_n$ o $-I \subset \Psi_n$.*

Demostración: Si $I \subset \Psi_n$ entonces

$$2e_6 - e_7 + e_8 = \theta_8 + \theta_9 + (e_1 + e_6) \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k}.$$

Análogamente si $-I \subset \Psi_n$ entonces

$$-2e_6 + e_7 - e_8 = -\theta_8 + (-\theta_9) + (-e_1 - e_6) \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k}.$$

Recíprocamente si $I \not\subset \Psi_n$ e $-I \not\subset \Psi_n$, entonces ocurre alguno de los siguientes casos:

$$\begin{array}{ll} \text{(A) } \{\theta_8, \theta_9, -e_1 - e_6\} \subset \Psi_n & \text{(B) } \{\theta_8, -\theta_9, e_1 + e_6\} \subset \Psi_n \\ \text{(C) } \{-\theta_8, \theta_9, e_1 + e_6\} \subset \Psi_n & \text{(D) } \{-\theta_8, -\theta_9, e_1 + e_6\} \subset \Psi_n \\ \text{(E) } \{-\theta_8, \theta_9, -e_1 - e_6\} \subset \Psi_n & \text{(F) } \{\theta_8, -\theta_9, -e_1 - e_6\} \subset \Psi_n \end{array}$$

En cada caso clasificamos todos los subconjuntos de raíces no compactas Ψ_n que contienen al subconjunto dado, tales que $\Psi = \Delta \cup \Psi_n$ es un sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$. Y demostramos que
$\mathbb{R}^+\Psi_n \cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k} = 0$, para cada uno de ellos.

(A) Supongamos que $\{\theta_8, \theta_9, -e_1 - e_6\} \subset \Psi_n$. Por Lema 34

$$\theta_i \in \Psi_n, \ \text{ para } 1 \leq i \leq 11 \ \text{ y}$$
$$\pm e_j - e_6 \in \Psi_n, \ \text{ para } 1 \leq j \leq 5.$$

Existen cuatro subconjuntos de raíces no compactas $(\Psi_i)_n$, $1 \leq i \leq 4$ que contienen al subconjunto $\{\theta_8, \theta_9, -e_1 - e_6\}$ tales que $\Psi = \Delta \cup (\Psi_i)_n$ es un sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$. Ellos son

$$(\Psi_1)_n = \{\theta_i, \, i \in I_1\} \cup \{-\theta_i, \, i \in J_1\} \cup \{-e_7 + e_8\} \cup \{\pm e_i - e_6, \, 1 \leq i \leq 5\},$$

donde $I_1 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 13, 14, 15, 16\}$ y $J_1 = \{1, 10, 11\}$.

$$(\Psi_2)_n = \{\theta_i, \, i \in I_2\} \cup \{-\theta_i, \, i \in J_2\} \cup \{-e_7 + e_8\} \cup \{\pm e_i - e_6, \, 1 \leq i \leq 5\}$$

donde $I_2 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16\}$ y $J_2 = \{1, 11\}$.

$$(\Psi_3)n = \{-\theta_1\} \cup \{\theta_j, \, 2 \leq j \leq 16\} \cup \{-e_7 + e_8\} \cup \{\pm e_i - e_6, \, 1 \leq i \leq 5\}.$$

Y

$$(\Psi_4)_n = \{\theta_j, \, 1 \leq j \leq 16\} \cup \{-e_7 + e_8\} \cup \{\pm e_i - e_6, \, 1 \leq i \leq 5\}.$$

(a) Si $\alpha \in \mathbb{R}^+(\Psi_1)_n \cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k}$, entonces existen escalares $N \in \mathbb{R}$ y $n_i \geq 0$ para $1 \leq i \leq 27$ tales que

$$\begin{aligned}\alpha = \sum_{i \in I_1} n_i \theta_i - \sum_{i \in J_1} n_i \theta_i + \sum_{i=1}^{5} n_{16+i}(e_i - e_6) + \sum_{i=1}^{5} n_{21+i}(-e_i - e_6) \\ + n_{27}(-e_7 + e_8) = N(2e_6 - e_7 + e_8),\end{aligned}$$

y satisface las siguientes ecuaciones

$$(1) \ 0 = \langle \alpha, \sum_{i=1}^{5} e_i \rangle = \frac{1}{2}\left(5n_1 - \sum_{i=2}^{9} n_i + \sum_{i=10}^{11} n_i\right) + \frac{3}{2}\sum_{i=12}^{16} n_i + \sum_{i=17}^{21} n_i - \sum_{i=22}^{26} n_i,$$

$$(2) \ N = \langle \alpha, e_6 - e_8 \rangle = -\sum_{i=17}^{27} n_i,$$

$$(3) \ N = \langle \alpha, e_8 \rangle = \frac{1}{2}\left(-n_1 + \sum_{i=2}^{9} n_i - \sum_{i=10}^{11} n_i + \sum_{i=12}^{16} n_i\right) + n_{27}$$

De (3) tenemos que

$$(4)\ \frac{1}{2}\left(n_1-\sum_{i=2}^{9}n_i+\sum_{i=10}^{11}n_i\right)=\frac{1}{2}\sum_{i=12}^{16}n_i+n_{27}-N.$$

Combinando la ecuación (4) con las ecuaciones (1) y (2) obtenemos que

$$0=2\left(n_1+n_{27}+\sum_{i=12}^{21}n_i\right).$$

Como por hipótesis los escalares $n_i\geq 0$ para todo i, la última ecuación implica que

$$n_i=0,\ \ i\in\{1,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,27\}.$$

Por otro lado

$$0=\langle\alpha,e_1-e_6+2e_8\rangle=\sum_{i=2}^{5}n_i+\sum_{i=23}^{26}n_i$$

lo que implica $n_i=0$, para $i\in\{2,3,4,5,23,24,25,26\}$, y

$$0=\langle\alpha,2e_2+e_3+e_4\rangle=n_6+n_7+n_{10}+n_{11}$$

lo que implica $n_i=0$, para $i\in\{6,7,10,11\}$.

Por último tenemos que

$$0=\langle\alpha,e_1\rangle=\frac{1}{2}(-n_8-n_9)-n_{22}$$

lo que implica $n_i=0$, para $i\in\{8,9,22\}$. Por lo tanto $\alpha=0$ y

$$\mathbb{R}^+(\Psi_1)_n\cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k}=0$$

como queríamos demostrar.

(b) Si $\alpha\in\mathbb{R}^+(\Psi_2)_n\cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k}$ entonces existen escalares $N\in\mathbb{R}$ y $n_i\geq 0$ para $1\leq i\leq 27$ tales que

$$\alpha=-\sum_{i\in I_2}n_i\theta_i+\sum_{i\in J_2}n_i\theta_i+\sum_{i=17}^{21}n_i(e_i-e_6)$$
$$-\sum_{i=22}^{26}n_i(-e_i-e_6)+n_{27}(-e_7+e_8)=N(2e_6-e_7+e_8),$$

y satisface las siguientes ecuaciones

$$
\begin{aligned}
&(1)\, 0 = \langle \alpha, \sum_{i=1}^{5} e_i \rangle = 2n_1 + \frac{1}{2}\left(n_1 - \sum_{i=2}^{10} n_i + n_{11} + 3\sum_{i=12}^{16} n_i\right) + \sum_{i=17}^{21} n_i - \sum_{i=22}^{26} n_i \\
&(2)\, N = \langle \alpha, e_6 - e_8 \rangle = -\sum_{i=17}^{27} n_i \\
&(3)\, N = \langle \alpha, e_8 \rangle = \frac{1}{2}(-n_1 + \sum_{i=2}^{10} n_i - n_{11} + \sum_{i=12}^{16} n_i) + n_{27}.
\end{aligned}
$$

De (3) obtenemos

$$
(4)\, \frac{1}{2}\left(n_1 - \sum_{i=2}^{10} n_i + n_{11}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=12}^{16} n_i - N + n_{27}\right).
$$

Combinando la ecuación (4) con las ecuaciones (1) y (2) tenemos que

$$
0 = \left(2n_1 + n_{27} + \sum_{i=12}^{21} n_i\right),
$$

como por hipótesis $n_j \geq 0$ para todo j, la ecuación anterior implica que $n_i = 0$, para $i \in \{1, 12, 13, ..., 21, 27\}$. Por otra parte

$$
N = \langle \alpha, e_1 + e_8 \rangle = n_2 + n_3 + n_4 + n_5 - n_{22} = \langle \alpha, e_6 - e_8 \rangle = -\sum_{i=22}^{26} n_i,
$$

es decir que

$$
0 = \sum_{i=2}^{5} n_i + \sum_{i=23}^{26} n_i
$$

por lo tanto $n_i = 0$ para $i \in \{2, 3, 4, 5, 23, 24, 25, 26\}$. Además

$$
\begin{aligned}
0 &= \langle \alpha, e_1 - e_2 \rangle = -n_6 - n_7 - n_{22}, \text{ entonces } n_i = 0 \text{ para } i \in \{6, 7, 22\}, \\
0 &= \langle \alpha, e_2 - e_3 \rangle = -n_9 - n_{10}, \text{ entonces } n_i = 0 \text{ para } i \in \{9, 10\}, \\
0 &= \langle \alpha, e_3 - e_4 \rangle = n_{11}, \text{ entonces } n_{11} = 0 \\
0 &= \langle \alpha, e_1 \rangle = \frac{1}{2}(-n_8), \text{entonces } n_8 = 0, \\
N &= \langle \alpha, e_8 \rangle = 0
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\alpha = 0$ lo que implica

$$
\mathbb{R}^+(\Psi_2)_n \cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k} = 0
$$

como queríamos demostrar.

(c) Si $\alpha \in \mathbb{R}^+(\Psi_3)_n \cap i\mathfrak{z}$ entonces existen escalares $N \in \mathbb{R}$ y $n_i \geq 0$, $1 \leq i \leq 27$ tales que

$$\alpha = -n_1\theta_1 + \sum_{i=2}^{16} n_i\theta_1 + \sum_{i=1}^{5} n_{16+i}(e_i - e_6) + \sum_{i=1}^{5} n_{21+i}(-e_i - e_6) + n_{27}(-e_7 + e_8) = N(2e_6 - e_7 + e_8),$$

y satisface las siguientes ecuaciones

$$(1)\ 0 = \langle \alpha, \sum_{i=1}^{5} e_i \rangle = 2n_1 + \frac{1}{2}\left(n_1 - \sum_{i=2}^{11} n_i\right) + \frac{3}{2}\sum_{i=12}^{16} n_i + \sum_{i=17}^{21} n_i - \sum_{i=22}^{26} n_i$$

$$(2)\ N = \langle \alpha, e_6 - e_8 \rangle = -\sum_{i=17}^{27} n_i$$

$$(3)\ N = \langle \alpha, e_8 \rangle = \frac{1}{2}\left(-n_1 + \sum_{i=2}^{11} n_i + \sum_{i=12}^{16} n_i\right) + n_{27}$$

Combinando estas ecuaciones obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= 2n_1 + 2n_{27} + 2\sum_{i=12}^{16} n_i + \sum_{i=17}^{26} n_i + \sum_{i=17}^{21} n_i - \sum_{i=22}^{26} n_i \\ &= 2\left(n_1 + n_{27} + \sum_{i=12}^{21} n_i\right), \end{aligned}$$

lo que implica $n_i = 0$ para $i \in \{1, 12, 13, ..., 20, 21, 27\}$. Además

$$N = \langle \alpha, e_1 + e_8 \rangle = \sum_{i=2}^{5} n_i - n_{22} = \langle \alpha, e_6 - e_8 \rangle = -\sum_{i=22}^{27} n_i, \text{ es decir}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=2}^{5} n_i + \sum_{i=23}^{26} n_i \text{ y} \\ 0 &= \langle \alpha, e_1 \rangle = \frac{1}{2}(-n_6 - n_7 - n_8 - n_9 - n_{10} - n_{11}) - n_{22} \end{aligned}$$

por lo tanto $n_i = 0$ para $i \in \{2, 3, ..., 10, 11, 22, 23, ..., 26\}$, $\alpha = 0$ y

$$\mathbb{R}^+(\Psi_3)_n \cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k} = 0.$$

(d) Si $\alpha \in \mathbb{R}^+(\Psi_4)_n \cap i\mathfrak{z}$ entonces existen escalares $N \in \mathbb{R}$ y $n_i \geq 0$ para $1 \leq i \leq 27$ tales que

$$\begin{aligned}\alpha &= \sum_{i=1}^{16} n_i + \sum_{i=1}^{5} n_{16+i}(e_i - e_6) + \sum_{s=1}^{5} n_{21+i}(-e_i - e_6) + n_{27}(-e_7 + e_8)\\ &= N(2e_6 - e_7 + e_8).\end{aligned}$$

Entonces tenemos que

$$N = \langle \alpha, e_8 \rangle = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{16} n_i + n_{27} \geq 0,$$

$$N = \langle \alpha, e_6 - e_8 \rangle = -\sum_{i=17}^{26} n_i - n_{27} \leq 0.$$

Por lo tanto $N = 0$ y

$$\mathbb{R}^+(\Psi_4)_n \cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k} = 0.$$

(B) Supongamos que $\{\theta_8, -\theta_9, (e_1 + e_6)\} \subset \Psi_n$, por Lema 34

$$\begin{aligned}\theta_i &\in \Psi_n \text{ para } i \in \{2,3,4,5,6,7,8,12,13,15,16\},\\ -\theta_i &\in \Psi_n \;\text{ para } i \in \{1,10,11\}.\end{aligned}$$

Además $(e_i - e_6) \in \Psi_n$ para $1 \leq i \leq 5$ y $(-e_i - e_6) \in \Psi_n$ para $3 \leq i \leq 5$ pues

$$\begin{aligned}e_i - e_6 &= -\theta_9 + \beta_{15} + (e_i - e_5), \text{ para } 1 \leq i \leq 4 \text{ y}\\ e_5 - e_6 &= -\theta_9 + \beta_{15},\\ -e_i - e_6 &= -\theta_9 + \beta_4 + (e_3 - e_i), \text{ para } 4 \leq i \leq 5 \text{ y}\\ -e_3 - e_6 &= -\theta_9 + \beta_4.\end{aligned}$$

Existen tres subconjuntos de raíces no compactas $(\Psi_i)_n$, $1 \leq i \leq 3$ que contienen al subconjunto $\{\theta_8, -\theta_9, e_1 + e_6\}$ tales que $\Psi = \Delta \cup (\Psi_i)_n$ es un sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$. Ellos son

$$\begin{aligned}(\Psi_1)_n = \{\theta_i,\, i \in I_3\} &\cup \{-\theta_i,\, i \in J_3\} \cup \{-e_7 + e_8\} \cup \{e_i - e_6,\, 1 \leq i \leq 5\}\\ &\cup \{e_i + e_6,\, 1 \leq i \leq 2\} \cup \{-e_i - e_6,\, 3 \leq i \leq 5\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\Psi_2)_n = \{\theta_i,\, i \in I_3\} &\cup \{-\theta_i,\, i \in J_3\} \cup \{-e_7 + e_8\} \cup \{e_i - e_6,\, 1 \leq i \leq 5\}\\ &\cup \{e_1 + e_6\} \cup \{-e_i - e_6,\, 2 \leq i \leq 5\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\Psi_3)_n = \{\theta_i,\, i \in I_3\} &\cup \{-\theta_i,\, i \in J_3\} \cup \{-e_7 + e_8\}\\ &\cup \{e_i - e_6,\, 1 \leq i \leq 5\} \cup \{-e_i - e_6,\, 1 \leq i \leq 5\},\end{aligned}$$

donde $I_3 = \{2,3,4,5,6,7,8,12,13,14,15,16\}$ y $J_3 = \{1,9,10,11\}$.

(a) Si $\alpha \in \mathbb{R}^+(\Psi_1)_n \cap i\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}$ entonces existen escalares $N \in \mathbb{R}$ y $n_i \geq 0$ para $1 \leq i \leq 27$ tales que

$$\alpha = \sum_{i\in I_3} n_i\theta_i - \sum_{i\in J_3} n_i\theta_i + \sum_{i=1}^{5} n_{16+i}(e_i - e_6) + \sum_{i=1}^{2} n_{21+i}(e_i + e_6)$$
$$+ \sum_{i=3}^{5} n_{21+i}(-e_i - e_6) + n_{27}(-e_7 + e_8) = N(2e_6 - e_7 + e_8),$$

y satisface las siguientes ecuaciones

$$(1)\, 0 = \langle \alpha, \sum_{i=1}^{5} e_i \rangle = \frac{1}{2}\left(5n_1 - \sum_{i=2}^{8} n_i + \sum_{i=9}^{11} n_i + 3\sum_{i=12}^{16} n_i\right) + \sum_{i=17}^{23} n_i - \sum_{i=24}^{26} n_i,$$
$$(2)\, N = \langle \alpha, e_6 - e_8 \rangle = n_{22} + n_{23} - \sum_{i=17}^{21} n_i - \sum_{i=24}^{27} n_i,$$
$$(3)\, N = \langle \alpha, e_8 \rangle = \frac{1}{2}(-n_1 + \sum_{i=2}^{8} n_i - \sum_{i=9}^{11} n_i + \sum_{i=12}^{16} n_i) + n_{27}.$$

De (3) obtenemos

$$(4)\, \frac{1}{2}\left(n_1 - \sum_{i=2}^{8} n_i + \sum_{i=9}^{11}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=12}^{16} n_i - N + n_{27}.$$

Combinando la ecuación (4) con las ecuaciones (1) y (2) tenemos

$$0 = 2n_1 + n_{27} - N + 2\sum_{i=12}^{16} n_i + \sum_{i=17}^{23} n_i - \sum_{i=24}^{26} n_i$$
$$= 2n_1 + n_{27} - (n_{22} + n_{23} - \sum_{i=17}^{21} n_i - \sum_{i=24}^{27} n_i) + 2\sum_{i=12}^{16} n_i$$
$$+ \sum_{i=17}^{23} n_i - \sum_{i=24}^{26} n_i = 2\left(n_1 + n_{27} + \sum_{i=12}^{21} n_i\right),$$

como por hipótesis $n_j \geq 0$ para todo j, la ecuación anterior implica que $n_i = 0$, con $i \in \{1, 12, 13, ..., 21, 27\}$. Por otra parte

$$(56) \qquad 0 = \langle \alpha, e_1 + e_2 \rangle = n_2 + \sum_{i=9}^{11} n_i + \sum_{i=22}^{23} n_i,$$

es decir $n_i = 0$, para $i \in \{2, 9, 10, 11, 22, 23\}$ y

$$N = \langle \alpha, e_1 + e_8 \rangle = n_3 + n_4 + n_5 \geq 0$$
$$N = \langle \alpha, e_6 - e_8 \rangle = -n_{24} - n_{25} - n_{26} \leq 0$$

por lo tanto $N=0$ lo cual implica que

$$\mathbb{R}^+(\Psi_1)_n \cap i\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}} = 0$$

(b) Si $\alpha \in \mathbb{R}^+(\Psi_2)_n \cap i\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}$ entonces existen escalares $N \in \mathbb{R}$ y $n_i \geq 0$ para $1 \leq i \leq 27$ tales que

$$\begin{aligned}\alpha = \sum_{i\in I_1} n_i\theta_i - \sum_{i\in J_1} n_i\theta_i + \sum_{i=1}^{5} n_{16+i}(e_i - e_6) + n_{22}(e_1+e_6)\\ + \sum_{i=2}^{5} n_{21+i}(-e_i - e_6) + n_{27}(-e_7+e_8) = N(2e_6 - e_7 + e_8),\end{aligned}$$

y satisface las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}&(1)\, 0 = \langle \alpha, \sum_{i=1}^{5} e_i \rangle = \frac{1}{2}\left(5n_1 - \sum_{i=2}^{8} n_i + \sum_{i=9}^{11} n_i + 3\sum_{i=12}^{16} n_i\right) + \sum_{i=17}^{22} n_i - \sum_{i=23}^{26} n_i,\\ &(2)\, N = \langle \alpha, e_6 - e_8\rangle = n_{22} - \sum_{i=17}^{21} n_i - \sum_{i=23}^{27} n_i\\ &(3)\, N = \langle \alpha, e_8 \rangle = \frac{1}{2}(-n_1 + \sum_{i=2}^{8} n_i - \sum_{i=9}^{11} n_i + \sum_{i=12}^{16} n_i) + n_{27}.\end{aligned}$$

Combiando estas ecuaciones de manera análoga al caso anterior obtenemos

$$0 = 2\left(n_1 + n_{27} + \sum_{i=12}^{21} n_i\right),$$

lo cual implica que $n_i = 0$ $i \in \{1, 12, 13, ..., 20, 21, 27\}$. Por otra parte tenemos

$$\begin{aligned}N &= \langle \alpha, e_1 + e_8 \rangle = n_2 + n_3 + n_5 + n_{22}\\ &= \langle \alpha, e_6 - e_8\rangle = n_{22} - \sum_{i=23}^{26} n_i\end{aligned}$$

lo que implica $n_i = 0$ para $i \in \{2, 3, 4, 5, 23, 24, 25, 26\}$ y además

$$\begin{aligned}0 &= \langle \alpha, e_2 + e_3\rangle = n_6 + n_{11}, \text{ entonces } n_6 = n_{11} = 0,\\ 0 &= \langle \alpha, e_2 + e_4\rangle = n_7 + n_{10}, \text{ entonces } n_7 = n_{10} = 0,\\ 0 &= \langle \alpha, e_2 + e_5\rangle = n_8 + n_9, \text{ entonces } n_8 = n_9 = 0,\\ 0 &= \langle \alpha, e_1\rangle = n_{22}, \text{ entonces } n_{22} = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto $N=0$ y

$$\mathbb{R}^+(\Psi_2)_n \cap i\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}} = 0$$

como queríamos probar.

(c) Si $\alpha \in \mathbb{R}^+(\Psi_3)_n \cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k}$, razonando análogamente al caso anterior, existen escalares $N \in \mathbb{R}$ y $n_i \geq 0$ para $1 \leq i \leq 27$ tales que

$$\alpha = \sum_{i\in I_1} n_i\theta_i - \sum_{i\in J_1} n_i\theta_i + \sum_{i=1}^{5} n_{16+i}(e_i - e_6) + \sum_{i=1}^{5} n_{21+i}(-e_i - e_6)$$
$$+ n_{27}(-e_7 + e_8) = N(2e_6 - e_7 + e_8),$$

y satisface las siguientes ecuaciones

$$(1)\, 0 = \langle \alpha, \sum_{i=1}^{5} e_i \rangle = \frac{1}{2}\left(5n_1 - \sum_{i=2}^{8} n_i + \sum_{i=9}^{11} n_i + 3\sum_{i=12}^{16} n_i\right) + \sum_{i=17}^{21} n_i - \sum_{i=22}^{26} n_i$$
$$(2)\, N = \langle \alpha, e_6 - e_8 \rangle = -\sum_{i=17}^{27} n_i$$
$$(3)\, N = \langle \alpha, e_8 \rangle = \frac{1}{2}(-n_1 + \sum_{i=2}^{8} n_i - \sum_{i=9}^{11} n_i + \sum_{i=12}^{16} n_i) + n_{27}.$$

Combiando estas ecuaciones de manera obtenemos

$$0 = 2\left(n_1 + n_{27} + \sum_{i=12}^{21} n_i\right),$$

lo cual implica que $n_i = 0$ $i \in \{1, 12, 13, ..., 20, 21, 27\}$. Por otra parte tenemos

$$N = \langle \alpha, e_1 + e_8 \rangle = n_2 + n_3 + n_4 + n_5 - n_{22}$$
$$= \langle \alpha, e_6 - e_8 \rangle = -\sum_{i=22}^{26} n_i$$

lo que implica $n_i = 0$ para $i \in \{2, 3, 4, 5, 23, 24, 25, 26\}$ y además

$$0 = \langle \alpha, e_2 + e_3 \rangle = n_6 + n_{11}, \text{ entonces } n_6 = n_{11} = 0,$$
$$0 = \langle \alpha, e_2 + e_4 \rangle = n_7 + n_{10}, \text{ entonces } n_7 = n_{10} = 0,$$
$$0 = \langle \alpha, e_2 + e_5 \rangle = n_8 + n_9, \text{ entonces } n_8 = n_9 = 0,$$
$$0 = \langle \alpha, e_1 \rangle = -n_{22}, \text{ entonces } n_{22} = 0.$$

Por lo tanto $N = 0$ y

$$\mathbb{R}^+(\Psi_3)_n \cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k} = 0$$

como queríamos probar.

(D) Existe un único subconjunto de raíces no compactas Ψ_n que contiene al subconjunto $\{-\theta_8, \theta_9, (e_1 + e_6)\}$ tal que $\Psi = \Delta \cup \Psi_n$ es un sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ y esta dado por

$$\Psi_n = \{\theta_i,\, i \in I_4\} \cup \{-\theta_i,\, i \in J_4\} \cup \{e_1 \pm e_6\} \cup \{\pm e_i - e_6,\, 2 \leq i \leq 5\}$$

donde $I_4 := \{2,3,4,5,6,9,12,13,15,16\}$ y $J_4 := \{1,8,10,11\}$, pues por Lema 34 $\theta_i \in \Psi_n$ para $i \in I_4$, $-\theta_i \in \Psi_n$ para $i \in J_4$, y $(-e_7+e_8) \in \Psi_n$ Además

$$\begin{aligned}
-e_2 - e_6 &= -\theta_8 + \beta_5 \\
-e_i - e_6 &= (-e_2 - e_6) + (e_2 - e_i) \text{ para } 3 \le i \le 5, \\
e_1 - e_6 &= (-e_2 - e_6) + (e_1 + e_2) \\
e_2 - e_6 &= (-e_2 - e_6) + (e_2 + e_3) + (e_2 - e_3) \\
e_i - e_6 &= (-e_2 - e_6) + (e_2 - e_i), \text{ para } 3 \le i \le 5.
\end{aligned}$$

Supongamos que $\alpha \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap i\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}$ entonces existen escalares $N \in \mathbb{R}$ y $n_i \ge 0$ para $1 \le i \le 27$ tales que

$$\begin{aligned}
\alpha = \sum_{i\in I_4} n_i\theta_i - \sum_{i\in J_4} n_i\theta_i + \sum_{i=1}^{5} n_{16+i}(e_i - e_6)& \\
+ n_{22}(e_1 + e_6) + \sum_{i=2}^{5} n_{21+i}(-e_i - e_6) &= N(2e_6 - e_7 + e_8),
\end{aligned}$$

y satisface las siguientes ecuaciones

$$(1)\ 0 = \langle \alpha, \sum_{i=1}^{5} e_i \rangle = \frac{1}{2}\left(5n_1 - \sum_{i=2}^{7} n_i + n_8 - n_9 + \sum_{i=10}^{11} n_i + 3\sum_{i=12}^{16} n_i\right) + \sum_{i=17}^{22} n_i - \sum_{i=23}^{26} n_i$$

$$(2)\ N = \langle \alpha, e_6 - e_8 \rangle = n_{22} - \sum_{i=17}^{21} n_i - \sum_{i=23}^{27} n_i$$

$$(3)\ N = \langle \alpha, e_8 \rangle = \frac{1}{2}(-n_1 + \sum_{i=2}^{7} n_i - n_8 + n_9 - \sum_{i=10}^{11} n_i + \sum_{i=12}^{16} n_i) + n_{27}.$$

De (3) obtenemos

$$(4)\ \frac{1}{2}\left(n_1 - \sum_{i=2}^{7} n_i + n_8 - n_9 + \sum_{i=10}^{11}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=12}^{16} n_i - N + n_{27}.$$

Combinando la ecuación (4) con las ecuaciones (1) y (2) tenemos

$$0 = 2\left(n_1 + n_{27} + \sum_{i=12}^{21} n_i\right),$$

como por hipótesis $n_j \geq 0$ para todo j, la ecuación anterior implica que $n_i = 0$, para $i \in \{1, 12, 13, ..., 21, 27\}$. Además

$$\begin{aligned} N &= \langle \alpha, e_1 + e_8 \rangle = n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_{22} \\ &= \langle \alpha, e_6 - e_8 \rangle = n_{22} - \sum_{i=23}^{26} n_i \quad \text{es decir} \\ 0 &= \sum_{i=2}^{5} n_i + \sum_{i=23}^{26} n_i \end{aligned}$$

por lo tanto $n_i = 0$ para $i \in \{2, 3, 4, 5, 23, 24, 25, 26\}$. Por otra parte tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \alpha, e_2 + e_3 \rangle = n_6 + n_{11}, \text{ entonces } n_6 = n_{11} = 0, \\ 0 &= \langle \alpha, e_2 + e_4 \rangle = n_7 + n_{10}, \text{ entonces } n_7 = n_{10} = 0, \\ 0 &= \langle \alpha, e_2 + e_5 \rangle = n_8 + n_9, \text{ entonces } n_8 = n_9 = 0, \\ 0 &= \langle \alpha, e_1 \rangle = n_{22}, \text{ entonces } n_{22} = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $N = 0$ y

$$\mathbb{R}^+ \Psi_n \cap i\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}} = 0$$

como queríamos probar.

(D) Supongamos que $\{-\theta_8, -\theta_9, e_1 + e_6\} \subset \Psi_n$. Por Lema 34

$$\begin{aligned} \theta_i &\in \Psi_n, \text{ para } i \in \{2, 3, 4, 5, 12, 13, 14, 15\}, \\ -\theta_i &\in \Psi_n, \text{ para } i \in \{1, 8, 9, 10, 11\}. \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} -e_2 - e_6 &= -\theta_8 + \beta_5 \\ -e_i - e_6 &= (-e_2 - e_6) + (e_2 - e_i) \text{ para } 3 \leq i \leq 5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_1 - e_6 &= (-e_2 - e_6) + (e_1 + e_2) \\ e_2 - e_6 &= (-e_2 - e_6) + (e_2 + e_3) + (e_2 - e_3) \\ e_i - e_6 &= (-e_2 - e_6) + (e_2 - e_i), \text{ para } 3 \leq i \leq 5 \text{ y} \\ -e_7 + e_8 &= \theta_2 + \beta_{15}. \end{aligned}$$

Existen cuatro subconjuntos de raíces no compactas $(\Psi_i)_n$, $1 \leq i \leq 4$ que contienen al subconjunto $\{-\theta_8, -\theta_9, e_1 + e_6\}$ tales que
$\Psi = \Delta \cup (\Psi_i)_n$ es un sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$. Ellos son

$$(\Psi_1)_n = \{\theta_i,\, i \in I_5\} \cup \{-\theta_i,\, i \in J_5\} \cup \{-e_7 + e_8\} \cup \{e_1 \pm e_6\} \\ \cup \{\pm e_i - e_6,\, 2 \leq i \leq 5\},$$

donde $I_5 = \{2,3,4,5,12,13,14,15\}$ y $J_5 = \{1,6,7,8,9,10,11,16\}$.

$$(\Psi_2)_n = \{\theta_i,\, i \in I_6\} \cup \{-\theta_i,\, i \in J_6\} \cup \{-e_7 + e_8\} \cup \{e_1 \pm e_6\} \\ \cup \{\pm e_i - e_6,\, 2 \leq i \leq 5\},$$

donde $I_6 = \{2,3,4,5,12,13,14,15,16\}$ y $J_6 = \{1,6,7,8,9,10,11\}$.

$$(\Psi_3)_n = \{\theta_i,\, i \in I_7\} \cup \{-\theta_i,\, i \in J_7\} \cup \{-e_7 + e_8\} \cup \{e_1 \pm e_6\} \\ \cup \{\pm e_i - e_6,\, 2 \leq i \leq 5\},$$

donde $I_7 = \{2,3,4,5,6,12,13,14,15,16\}$ y $J_7 = \{1,7,8,9,10,11\}$.

$$(\Psi_4)_n = \{\theta_i,\, i \in I_8\} \cup \{-\theta_i,\, i \in J_8\} \cup \{-e_7 + e_8\} \cup \{e_1 \pm e_6\} \\ \cup \{\pm e_i - e_6,\, 2 \leq i \leq 5\},$$

donde $I_8 = \{2,3,4,5,6,7,12,13,14,15,16\}$ y $J_8 = \{1,8,9,10,11\}$.

(a) Si $\alpha \in \mathbb{R}^+(\Psi_1)_n \cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k}$ entonces existen $N \in \mathbb{R}$ y $n_i \geq 0$ para $1 \leq i \leq 27$ tales que

$$\alpha = \sum_{i \in I_5} n_i\theta_i - \sum_{i \in J_5} n_i\theta_i + \sum_{i=1}^{5} n_{16+i}(e_i - e_6) + n_{22}(e_1 + e_6) \\ + \sum_{i=2}^{5} n_{21+i}(-e_i - e_6) + n_{27}(-e_7 + e_8) = N(2e_6 - e_7 + e_8),$$

y satisface las siguientes ecuaciones

$$(1)\, 0 = \langle \alpha, e_1 \rangle = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{16} + n_{17} + n_{22},$$

lo cual implica que $n_i = 0$ para $i \in \{1,2,...,16,17,22\}$. Además

$$(2)\, 2N = \langle \alpha, e_6 \rangle = -\sum_{i=17}^{21} n_i - \sum_{i=23}^{26} n_i \leq 0 \;\text{ y}$$
$$(3)\, N = \langle \alpha, e_8 \rangle = n_{27} \geq 0.$$

Entones (2) y (3) implican que $N = 0$. Por lo tanto

$$\mathbb{R}^+(\Psi_1)_n \cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k} = 0$$

como queríamos probar.

(b) Si $\alpha \in \mathbb{R}^+(\Psi_2)_n \cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k}$ entonces existen $N \in \mathbb{R}$ y $n_i \geq 0$ para $1 \leq i \leq 27$ tales que

$$\alpha = \sum_{i \in I_6} n_i\theta_i - \sum_{i \in J_6} n_i\theta_i + \sum_{i=1}^{5} n_{16+i}(e_i - e_6) + n_{22}(e_1 + e_6)$$
$$+ \sum_{i=2}^{5} n_{21+i}(-e_i - e_6) + n_{27}(-e_7 + e_8) = N(2e_6 - e_7 + e_8),$$

y satisface las siguientes ecuaciones

$$(1)\, 0 = \langle \alpha, \sum_{i=1}^{5} e_i \rangle = \frac{1}{2}\left(5n_1 - \sum_{i=2}^{5} n_i + \sum_{i=6}^{11} n_i + 3\sum_{i=12}^{16} n_i\right) + \sum_{i=17}^{22} n_i - \sum_{i=23}^{26} n_i$$

$$(2)\, N = \langle \alpha, e_6 - e_8 \rangle = n_{22} - \sum_{i=17}^{21} n_i - \sum_{i=23}^{27} n_i$$

$$(3)\, N = \langle \alpha, e_8 \rangle = \frac{1}{2}(-n_1 + \sum_{i=2}^{5} n_i - \sum_{i=6}^{11} n_i + \sum_{i=12}^{16} n_i) + n_{27}.$$

De (3) obtenemos

$$(4)\, \frac{1}{2}\left(n_1 - \sum_{i=2}^{5} n_i + \sum_{i=6}^{11}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=12}^{16} n_i - N + n_{27}.$$

Combinando la ecuación (4) con las ecuaciones (1) y (2) tenemos

$$0 = 2\left(n_1 + n_{27} + \sum_{i=12}^{21} n_i\right).$$

Como por hipótesis $n_j \geq 0$ para todo j, la ecuación anterior implica que $n_i = 0$, para $i \in \{1, 12, 13, ..., 21, 27\}$. Además

$$0 = \langle \alpha, e_1 \rangle = \sum_{i=2}^{11} n_i + n_{22}$$

entones $n_i = 0$ para $i \in \{2, 3, ..., 11, 22\}$. Por otra parte

$$N = \langle \alpha, e_8 \rangle = 0,$$

por lo tanto

$$\mathbb{R}^+(\Psi_2)_n \cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k} = 0.$$

(c) Si $\alpha \in \mathbb{R}^+(\Psi_3)_n \cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k}$ entonces existen $N \in \mathbb{R}$ y $n_i \geq 0$ para $1 \leq i \leq 27$ tales que

$$\begin{aligned}\alpha = \sum_{i \in I_7} n_i\theta_i - \sum_{i \in J_7} n_i\theta_i + \sum_{i=1}^{5} n_{16+i}(e_i - e_6) + n_{22}(e_1 + e_6)\\ + \sum_{i=2}^{5} n_{21+i}(-e_i - e_6) + n_{27}(-e_7 + e_8) = N(2e_6 - e_7 + e_8),\end{aligned}$$

y satisface las siguientes ecuaciones

$$(1)\, 0 = \langle \alpha, \sum_{i=1}^{5} e_i \rangle = \frac{1}{2}\left(5n_1 - \sum_{i=2}^{6} n_i + \sum_{i=7}^{11} n_i + 3\sum_{i=12}^{16} n_i\right) + \sum_{i=17}^{22} n_i - \sum_{i=23}^{26} n_i$$

$$(2)\, N = \langle \alpha, e_6 - e_8 \rangle = n_{22} - \sum_{i=17}^{21} n_i - \sum_{i=23}^{27} n_i$$

$$(3)\, N = \langle \alpha, e_8 \rangle = \frac{1}{2}(-n_1 + \sum_{i=2}^{5} n_i - \sum_{i=6}^{11} n_i + \sum_{i=12}^{16} n_i) + n_{27}.$$

procediendo de manera análoga al caso anterior tenemos que

$$0 = 2\left(n_1 + n_{27} + \sum_{i=12}^{21} n_i\right).$$

Como por hipótesis $n_j \geq 0$ para todo j, la ecuación anterior implica que $n_i = 0$, para $i \in \{1, 12, 13, ..., 21, 27\}$. Además

$$\begin{aligned}N &= \langle \alpha, e_1 + e_8 \rangle = n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_{22}\\ &= \langle \alpha, e_6 - e_8 \rangle = n_{22} - \sum_{i=23}^{26} n_i\end{aligned}$$

por lo tanto $n_i = 0$ para $i \in \{2, 3, 4, 5, 23, 24, 25, 26\}$. Por otra parte

$$0 = \langle \alpha, e_2 + e_3 \rangle = n_6 + n_{11}, \text{ entonces } n_6 = n_{11} = 0,$$

$$0 = \langle \alpha, e_1 \rangle = \frac{1}{2}\sum_{i=7}^{11} n_i + n_{22}, \text{ entonces } n_i = 0 \text{ para } i \in \{7, ..., 11, 22\}.$$

Por lo tanto $N = 0$ y

$$\mathbb{R}^+(\Psi_3)_n \cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k} = 0.$$

(d) Si $\alpha \in \mathbb{R}^+(\Psi_4)_n \cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k}$ entonces existen $N \in \mathbb{R}$ y $n_i \geq 0$ para $1 \leq i \leq 27$ tales que

$$\alpha = \sum_{i \in I_8} n_i\theta_i - \sum_{i \in J_8} n_i\theta_i + \sum_{i=1}^{5} n_{16+i}(e_i - e_6) + n_{22}(e_1 + e_6)$$
$$+ \sum_{i=2}^{5} n_{21+i}(-e_i - e_6) + n_{27}(-e_7 + e_8) = N(2e_6 - e_7 + e_8),$$

y satisface las siguientes ecuaciones

$$(1)\, 0 = \langle \alpha, \sum_{i=1}^{5} e_i \rangle = \frac{1}{2}\left(5n_1 - \sum_{i=2}^{7} n_i + \sum_{i=8}^{11} n_i + 3\sum_{i=12}^{16} n_i\right) + \sum_{i=17}^{22} n_i - \sum_{i=23}^{26} n_i$$
$$(2)\, N = \langle \alpha, e_6 - e_8 \rangle = n_{22} - \sum_{i=17}^{21} n_i - \sum_{i=23}^{27} n_i$$
$$(3)\, N = \langle \alpha, e_8 \rangle = \frac{1}{2}(-n_1 + \sum_{i=2}^{5} n_i - \sum_{i=6}^{11} n_i + \sum_{i=12}^{16} n_i) + n_{27}.$$

procediendo de manera análoga al caso anterior tenemos que

$$0 = 2\left(n_1 + n_{27} + \sum_{i=12}^{21} n_i\right).$$

Como por hipótesis $n_j \geq 0$ para todo j, la ecuación anterior implica que $n_i = 0$, para $i \in \{1, 12, 13, ..., 21, 27\}$. Además

$$N = \langle \alpha, e_1 + e_8 \rangle = n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_{22}$$
$$= \langle \alpha, e_6 - e_8 \rangle = n_{22} - \sum_{i=23}^{26} n_i$$

por lo tanto $n_i = 0$ para $i \in \{2, 3, 4, 5, 23, 24, 25, 26\}$. Por otra parte

$$0 = \langle \alpha, e_2 + e_3 \rangle = n_6 + n_{11}, \text{ entonces } n_6 = n_{11} = 0,$$
$$0 = \langle \alpha, e_2 + e_4 \rangle = n_7 + n_{10}, \text{ entonces } n_7 = n_{10} = 0,$$
$$0 = \langle \alpha, e_1 \rangle = \frac{1}{2}\sum_{i=8}^{11} n_i + n_{22}, \text{ entonces } n_i = 0 \text{ para } i \in \{7, ..., 11, 22\}.$$

Por lo tanto $N = 0$ y

$$\mathbb{R}^+(\Psi_4)_n \cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k} = 0,$$

como queríamos demostrar.

(E) Supongamos que $\{-\theta_8, \theta_9, -e_1 - e_6\} \subset \Psi_n$. Por Lema 34 y

$$\begin{aligned}(-e_7 + e_8) &\in \Psi_n \\ \theta_i &\in \Psi_n, \quad \text{para } i \in \{2,3,4,6,7,9,12,13,14,15,16\}, \\ -\theta_i &\in \Psi_n, \quad \text{para } i \in \{1,8,10,11\}. \\ (\pm e_i - e_6) &\in \Psi_n, \quad \text{para } 1 \le i \le 5.\end{aligned}$$

Existen dos subconjuntos de raíces no compactas $(\Psi_i)_n$, $1 \le i \le 2$ que contienen al subconjunto $\{-\theta_8, \theta_9, -e_1 - e_6\}$ y tales que
$\Psi = \Delta \cup (\Psi_i)_n$ es un sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$. Ellos son

$$(\Psi_1)_n = \{\pm e_i - e_6,\ 1 \le i \le 5\} \cup \{-e_7 + e_8\} \cup \{\theta_i,\ i \in I_9\} \cup \{-\theta_i,\ i \in J_9\}$$

donde $I_9 = \{2,3,4,6,7,9,12,13,14,15\}$ y $J_9 = \{1,5,8,10,11\}$.

$$(\Psi_2)_n = \{\pm e_i - e_6,\ 1 \le i \le 5\} \cup \{-e_7 + e_8\} \cup \{\theta_i,\ i \in I_{10}\} \cup \{-\theta_i,\ i \in J_{10}\}$$

donde $I_{10} = \{2,3,4,5,6,7,9,12,13,14,15\}$ y $J_{10} = \{1,8,10,11\}$.

(a) Si $\alpha \in \mathbb{R}^+(\Psi_1)_n \cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k}$ entonces existen $N \in \mathbb{R}$ y $n_i \ge 0$ para $1 \le i \le 27$ tales que

$$\begin{aligned}\alpha = \sum_{i\in I_{10}} n_i\theta_i - \sum_{i \in J_{10}} n_i\theta_i + \sum_{i=1}^{5} n_{16+i}(e_i - e_6) \\ + \sum_{i=1}^{5} n_{21+i}(-e_i - e_6) + n_{27}(-e_7 + e_8) = N(2e_6 - e_7 + e_8),\end{aligned}$$

y satisface las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}(1)\, 0 = \langle \alpha, \sum_{i=1}^{5} e_i \rangle = \frac{1}{2}(5n_1 - n_2 - n_3 - n_4 + n_5 - n_6 - n_7 \\ + n_8 - n_9 + n_{10} + n_{11} + 3\sum_{i=12}^{16} n_i) + \sum_{i=17}^{21} n_i - \sum_{i=22}^{26} n_i\end{aligned}$$

$$(2)\, N = \langle \alpha, e_6 - e_8 \rangle = -\sum_{i=17}^{27} n_i$$

$$\begin{aligned}(3)\, N = \langle \alpha, e_8 \rangle = \frac{1}{2}(-n_1 + n_2 + n_3 + n_4 - n_5 + n_6 + n_7 - n_8 \\ + n_9 - n_{10} - n_{11} + \sum_{12}^{16} n_i) + n_{27}.\end{aligned}$$

De (3) obtenemos

$$(4)\ \frac{1}{2}(n_1 - n_2 - n_3 - n_4 + n_5 - n_6 - n_7 + n_8 - n_9 + n_{10} + n_{11}) = \frac{1}{2}\sum_{i=12}^{16} n_i - N + n_{27}.$$

Combinando la ecuación (4) con las ecuaciones (1) y (2) tenemos

$$0 = 2\left(n_1 + n_{27} + \sum_{i=12}^{21} n_i\right).$$

Como por hipótesis $n_j \geq 0$ para todo j, la ecuación anterior implica que $n_i = 0$, para $i \in \{1, 12, 13, ..., 21, 27\}$. Además

$$0 = \langle \alpha, e_1 + e_5 \rangle = -n_5 - n_6 - n_7 - n_9 - n_{22} - n_{26}$$

por lo tanto $n_i = 0$ para $i \in \{5, 6, 7, 9, 22, 26\}$. Y

$$0 = 2\langle \alpha, e_1 \rangle = n_2 + n_3 + n_4 + n_8 + n_{10} + n_{11}$$

por lo tanto $n_i = 0$ para $i \in \{2, 3, 4, 8, 10, 11\}$. Lo que implica

$$N = \langle \alpha, e_8 \rangle = 0,$$

y por lo tanto

$$\mathbb{R}^+(\Psi_1)_n \cap i\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}} = 0.$$

(b) Si $\alpha \in \mathbb{R}^+(\Psi_2)_n \cap i\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}$ entonces existen $N \in \mathbb{R}$ y $n_i \geq 0$ para $1 \leq i \leq 27$ tales que

$$\alpha = \sum_{i \in I_{11}} n_i\theta_i - \sum_{i \in J_{11}} n_i\theta_i + \sum_{i=1}^{5} n_{16+i}(e_i - e_6)$$
$$+ \sum_{i=1}^{5} n_{21+i}(-e_i - e_6) + n_{27}(-e_7 + e_8) = N(2e_6 - e_7 + e_8),$$

y se satisfacen las siguientes ecuaciones

$$(1)\, 0 = \langle \alpha, \sum_{i=1}^{5} e_i \rangle = \frac{1}{2}(5n_1 - n_2 - n_3 - n_4 - n_5 - n_6 - n_7$$
$$+ n_8 - n_9 + n_{10} + n_{11} + 3\sum_{i=12}^{16} n_i) + \sum_{i=17}^{21} n_i - \sum_{i=22}^{26} n_i$$

$$(2)\, N = \langle \alpha, e_6 - e_8 \rangle = -\sum_{i=17}^{27} n_i$$

$$(3)\, N = \langle \alpha, e_8 \rangle = \frac{1}{2}(-n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 - n_8$$
$$+ n_9 - n_{10} - n_{11} + \sum_{12}^{16} n_i) + n_{27}.$$

Combinando estas ecuaciones de manera análoga al caso anterior, tenemos

$$0 = 2\left(n_1 + n_{27} + \sum_{i=12}^{21} n_i\right).$$

Como por hipótesis $n_j \geq 0$ para todo j, la ecuación anterior implica que $n_i = 0$, para $i \in \{1, 12, 13, ..., 21, 27\}$. Además

$$\begin{aligned} N &= \langle \alpha, e_1 + e_8 \rangle = n_2 + n_3 + n_4 + n_5 - n_{22} \\ &= \langle \alpha, e_6 - e_8 \rangle = -\sum_{i=22}^{26} n_i \end{aligned}$$

por lo tanto $n_i = 0$ para $i \in \{2, 3, 4, 5, 23, 24, 25, 26\}$. Y

$$0 = \langle \alpha, e_5 \rangle = \frac{1}{2}(-n_6 - n_7 - n_8 - n_9 - n_{10} - n_{11})$$

por lo tanto $n_i = 0$ para $i \in \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. Lo que implica

$$N = \langle \alpha, e_8 \rangle = 0,$$

por lo tanto

$$\mathbb{R}^+(\Psi_2)_n \cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k} = 0.$$

Como queríamos probar.

(F) Supongamos que $\{\theta_8, -\theta_9, -e_1 - e_6\} \subset \Psi_n$. Por Lema 34

$$\begin{aligned} &(-e_7 + e_8) \in \Psi_n \\ &\qquad\qquad \theta_i \in \Psi_n, \;\; \text{para } i \in I_{11} := \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 15, 16\}, \\ &\qquad\quad -\theta_i \in \Psi_n, \;\; \text{para } i \in J_{11} := \{1, 9, 10, 11\}. \\ &(\pm e_i - e_6) \in \Psi_n, \text{ para } 1 \leq i \leq 5. \end{aligned}$$

Entonces el único subconjunto de raíces no compactas Ψ_n, que contiene al subconjunto $\{-\theta_8, \theta_9, -e_1 - e_6\}$ tal que $\Psi = \Delta \cup \Psi n$ es un sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ es

$$\begin{aligned} \Psi_n = \{\pm e_i - e_6,\, 1 \leq i \leq 5\} \cup \{-e_7 + e_8\} \\ \cup \{\theta_i,\, i \in I_{11}\} \cup \{-\theta_i,\, i \in J_{11}\}. \end{aligned}$$

Si $\alpha \in \mathbb{R}^+(\Psi_2)_n \cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k}$ entonces existen escalares $N \in \mathbb{R}$ y $n_i \geq 0$ para $1 \leq i \leq 27$ tales que

$$\begin{aligned} \alpha = \sum_{i \in I_{12}} n_i \theta_i - \sum_{i \in J_{12}} n_i \theta_i + \sum_{i=1}^{5} n_{16+i}(e_i - e_6) \\ + \sum_{i=1}^{5} n_{21+i}(-e_i - e_6) + n_{27}(-e_7 + e_8) = N(2e_6 - e_7 + e_8), \end{aligned}$$

y satisface las siguientes ecuaciones

$$(1)\, 0 = \langle \alpha, \sum_{i=1}^{5} e_i \rangle = \frac{1}{2}(5n_1 - \sum_{i=2}^{8} n_i + \sum_{i=9}^{11} n_i + 3\sum_{i=12}^{16} n_i) + \sum_{i=17}^{21} n_i - \sum_{i=22}^{26} n_i$$

$$(2)\, N = \langle \alpha, e_6 - e_8 \rangle = -\sum_{i=17}^{27} n_i$$

$$(3)\, N = \langle \alpha, e_8 \rangle = \frac{1}{2}(-n_1 + \sum_{i=2}^{8} n_i - \sum_{i=9}^{11} n_i + \sum_{12}^{16} n_i) + n_{27}.$$

Combinando estas ecuaciones de manera análoga al caso anterior, tenemos

$$0 = 2\left(n_1 + n_{27} + \sum_{i=12}^{21} n_i \right).$$

Como por hipótesis $n_j \geq 0$ para todo j, la ecuación anterior implica que $n_i = 0$, para $i \in \{1, 12, 13, ..., 21, 27\}$. Además

$$\begin{aligned} N &= \langle \alpha, e_1 + e_8 \rangle = n_2 + n_3 + n_4 + n_5 - n_{22} \\ &= \langle \alpha, e_6 - e_8 \rangle = -\sum_{i=22}^{26} n_i \end{aligned}$$

por lo tanto $n_i = 0$ para $i \in \{2, 3, 4, 5, 23, 24, 25, 26\}$. Y

$$0 = \langle \alpha, e_2 \rangle = \frac{1}{2}(n_6 + n_7 + n_8 + n_9 + n_{10} + n_{11})$$

es decir $n_i = 0$ para $i \in \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. Lo que implica

$$N = \langle \alpha, e_8 \rangle = 0,$$

y por lo tanto

$$\mathbb{R}^+ \Psi_n \cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k} = 0.$$

Como queríamos probar. Esto finaliza la demostración del Teorema $\square$

CASO $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_{6(-14)}$.

Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_{6(-14)}$, entonces $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(10) \oplus \mathfrak{so}(2)$, y sus sistemas de raíces con respecto a $\mathfrak{t}$ son

$$\begin{aligned} \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) = \{&\pm e_i \pm e_j,\ 1 \leq i < j \leq 5\} \\ &\cup \left\{ \pm(\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{5} (-1)^{n_i} e_i - e_6 - e_7 + e_8));\ |\sum_{i=1}^{8} n_i \text{ par} \right\} \end{aligned}$$

$$\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) = \{\pm e_i \pm e_j,\ 1 \leq i < j \leq 4\} \cup \{\pm \beta_i, 1 \leq i \leq 8\}$$

respectivamente, donde

$\beta_1 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8),$
$\beta_2 = \frac{1}{2}(-e_1 + e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8),$
$\beta_3 = \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 + e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8),$
$\beta_4 = \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 - e_3 + e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8),$
$\beta_5 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8),$
$\beta_6 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3 + e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8),$
$\beta_7 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3 + e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8),$
$\beta_8 = \frac{1}{2}(-e_1 + e_2 + e_3 + e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8).$

Por lo tanto el conjunto de raíces no compactas de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ es

$$\Phi_n(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) = \{\pm e_i \pm e_5,\ 1 \leq i \leq 4\} \cup \{\pm\theta_j,\ 1 \leq j \leq 8\},$$

donde
$\theta_1 = \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 - e_3 - e_4 + e_5 - e_6 - e_7 + e_8),$
$\theta_2 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3 - e_4 + e_5 - e_6 - e_7 + e_8),$
$\theta_3 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3 - e_4 + e_5 - e_6 - e_7 + e_8),$
$\theta_4 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 + e_4 + e_5 - e_6 - e_7 + e_8),$
$\theta_5 = \frac{1}{2}(-e_1 + e_2 + e_3 - e_4 + e_5 - e_6 - e_7 + e_8),$
$\theta_6 = \frac{1}{2}(-e_1 + e_2 - e_3 + e_4 + e_5 - e_6 - e_7 + e_8),$
$\theta_7 = \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 + e_3 + e_4 + e_5 - e_6 - e_7 + e_8),$
$\theta_8 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 - e_6 - e_7 + e_8).$

Entones centro de $\mathfrak{k}$ es

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}} = \langle 3e_5 - e_6 - e_7 + e_8 \rangle.$$

Fijemos el conjunto de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ definido por

$$\Delta = \{e_i \pm e_j,\ 1 \leq i < j \leq 4\} \cup \{\beta_i,\ 1 \leq i \leq 8\}.$$

Lema 35. *(i) Si $\theta_1 \in \Psi_n$ entonces $\theta_i \in \Psi_n$ para $1 \leq i \leq 8$.*
(ii) Si $\theta_7 \in \Psi_n$ entonces $\theta_i \in \Psi_n$ para $2 \leq i \leq 8$.
(iii) Si $-\theta_7 \in \Psi_n$ entonces $-\theta_1 \in \Psi_n$, $(e_i - e_5) \in \Psi_n$ para $1 \leq i \leq 4$ y $(-e_i - e_5) \in \Psi_n$ para $3 \leq i \leq 4$.
(iv) Si $-\theta_1 \in \Psi_n$ entonces $(e_i - e_5) \in \Psi_n$ para $1 \leq i \leq 4$.
(v) Si $(e_1 + e_5) \in \Psi_n$ entonces $\theta_i \in \Psi_n$ para $i \in \{2, 3, 4, 8\}$.
(vi) Si $(e_2 + e_5) \in \Psi_n$ entonces $(e_1 + e_5)$, $\theta_i \in \Psi_n$ para $i \in \{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$.
(vii) Si $-e_1 - e_5 \in \Psi_n$ entonces $(\pm e_i - e_5) \in \Psi_n$ para $1 \leq i \leq 4$.
(viii) Si $-e_2 - e_5 \in \Psi_n$ entonces $(-e_i - e_5) \in \Psi_n$ para $2 \leq i \leq 4$, y $(e_i - e_5) \in \Psi_n$ para $1 \leq i \leq 4$.

Demostración: (i) Si $\theta_1 \in \Psi_n$ entonces $\theta_i \in \Psi_n$ para $1 \leq i \leq 8$ pues
$\theta_2 = \theta_1 + (e_1 + e_2)$ $\quad$ $\theta_3 = \theta_1 + (e_1 + e_3)$ $\quad$ $\theta_4 = \theta_1 + (e_1 + e_4)$
$\theta_5 = \theta_1 + (e_2 + e_3)$ $\quad$ $\theta_6 = \theta_1 + (e_2 + e_4)$ $\quad$ $\theta_7 = \theta_1 + (e_3 + e_4)$
$\theta_8 = (e_1 + e_2) + (e_3 + e_4)$.

(ii) Si $\theta_7 \in \Psi_n$ entonces $\theta_i \in \Psi_n$ para $2 \leq i \leq 8$ pues

$\theta_2 = \theta_7 + (e_1 - e_3) + (e_2 - e_4)$ $\quad \theta_3 = \theta_7 + (e_1 - e_4)$
$\theta_4 = \theta_7 + (e_1 - e_3)$ $\quad \theta_5 = \theta_7 + (e_2 - e_4)$
$\theta_6 = \theta_7 + (e_2 - e_3)$ $\quad \theta_8 = \theta_7 + (e_1 + e_2)$

(iii) y (iv) Si $-\theta_7 \in \Psi_n$ entonces $-\theta_1 \in \Psi_n$, $(e_i - e_5) \in \Psi_n$ para $1 \leq i \leq 4$ y $(-e_i - e_5) \in \Psi_n$ para $3 \leq i \leq 4$, pues

$$\begin{aligned}
-\theta_1 &= -\theta_7 + (e_3 + e_4), \\
e_4 - e_5 &= -\theta_1 + \beta_4, \\
e_i - e_5 &= (e_4 - e_5) + (e_i - e_4), \text{ para } 1 \leq i \leq 3, \\
-e_3 - e_5 &= -\theta_7 + \beta_3, \\
-e_4 - e_5 &= -\theta_7 + \beta_4.
\end{aligned}$$

(v) Si $(e_1 + e_5) \in \Psi_n$ entonces $\theta_i \in \Psi_n$ para $i \in \{2, 3, 4, 8\}$, pues
$\theta_2 = (e_1 + e_5) + \beta_2$ $\quad \theta_3 = (e_1 + e_5) + \beta_3$ $\quad \theta_4 = (e_1 + e_5) + \beta_4$
$\theta_8 = (e_1 + e_5) + \beta_8$.

(vi) Si $(e_2 + e_5) \in \Psi_n$ entonces $(e_1 + e_5)$, $\theta_i \in \Psi_n$ para $i \in \{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ pues
$e_1 + e_5 = (e_2 + e_5) + (e_1 - e_2)$ $\quad \theta_5 = (e_2 + e_5) + \beta_3$
$\theta_6 = (e_2 + e_5) + \beta_4$.

(vii) Si $-e_1 - e_5 \in \Psi_n$ entonces $(\pm e_i - e_5) \in \Psi_n$ para $1 \leq i \leq 4$, pues

$$\begin{aligned}
e_1 - e_5 &= (-e_1 - e_5) + (e_1 + e_2) + (e_1 - e_2) \\
e_i - e_5 &= (-e_1 - e_5) + (e_1 - e_i), \;\text{ para } 2 \leq i \leq 4, \\
-e_i - e_5 &= (-e_1 - e_5) + (e_1 - e_i), \;\text{ para } 2 \leq i \leq 4.
\end{aligned}$$

(viii) Si $-e_2 - e_5 \in \Psi_n$ entonces $(-e_i - e_5) \in \Psi_n$ para $2 \leq i \leq 4$, y $(e_i - e_5) \in \Psi_n$ para $1 \leq i \leq 4$, pues

$$\begin{aligned}
-e_i - e_5 &= (-e_2 - e_5) + (e_2 - e_i), \;\text{ para } 3 \leq i \leq 4, \\
e_2 - e_5 &= (-e_2 - e_5) + (e_2 + e_3) + (e_2 - e_3), \\
e_i - e_5 &= (-e_2 - e_5) + (e_2 + e_i), \;\text{ para } i \neq 2. \quad \square
\end{aligned}$$

Sea I el subconjunto de raíces no compactas definido por

$$I := \{\theta_1, \theta_7, (e_1 + e_5), (e_2 + e_5)\}.$$

TEOREMA 14. *Sea $\Psi = \Psi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ un sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ que contiene a Δ. Entonces $\mathbb{R}^+\Psi_n \cap i\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}} \neq 0$ si y sólo si $I \subset \Psi_n$ o $-I \subset \Psi_n$.*

Demostración: Si $I \subset \Psi_n$ entonces

$$3e_5 - e_6 - e_7 + e_8 = \theta_1 + \theta_7 + (e_1 + e_5) + (e_2 + e_5) \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap i\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}.$$

Análogamene si $-I \subset \Psi_n$

$$-3e_5 + e_6 + e_7 - e_8 = -\theta_1 - \theta_7 - (e_1 + e_5) - (e_2 + e_5) \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap i\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}.$$

Recíprocamente si $I \not\subset \Psi_n$ e $-I \not\subset \Psi_n$, entonces ocurre alguno de los siguientes casos:
(A) $\{\theta_1, \theta_7, e_1 + e_5, -e_2 - e_5\} \subset \Psi_n$,
(B) $\{\theta_1, \theta_7, -e_1 - e_5, -e_2 - e_5\} \subset \Psi_n$,
(C) $\{-\theta_1, \theta_7, e_1 + e_5, e_2 + e_5\} \subset \Psi_n$,
(D)$\{-\theta_1, \theta_7, e_1 + e_5, -e_2 - e_5\} \subset \Psi_n$,
(E) $\{-\theta_1, \theta_7, -e_1 - e_5, -e_2 - e_5\} \subset \Psi_n$,
(F) $\{-\theta_1, -\theta_7, e_1 + e_5, e_2 + e_5\} \subset \Psi_n$,
(G) $\{-\theta_1, -\theta_7, e_1 + e_5, -e_2 - e_5\} \subset \Psi_n$.

En cada caso clasificamos todos los subconjuntos de raíces no compactas Ψ_n que contienen al subconjunto dado, tales que $\Psi = \Delta \cup \Psi_n$ es un sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$. Y demostramos que
$\mathbb{R}^+\Psi_n \cap i\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}} = 0$, para cada uno de ellos.

(A) Supongamos que $\{\theta_1, \theta_7, e_1 + e_5, -e_2 - e_5\} \subset \Psi_n$. Por el Lema 35

$$\Psi_n = \{\theta_i,\ 1 \leq i \leq 8\} \cup \{e_1 \pm e_5\} \cup \{\pm e_i - e_i,\ 2 \leq i \leq 4\}.$$

Si $\alpha \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap i\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}$, entonces existen escalares $N \in \mathbb{R}$ y $n_i \geq 0$, para $1 \leq i \leq 16$ tales que

$$\alpha = \sum_{i=1}^{8} n_i + n_9(e_1 + e_5) - \sum_{i=2}^{4} n_{8+i}(-e_i - e_5) + \sum_{i=1}^{4} n_{12+i}(e_i - e_5)$$
$$= N(3e_5 - e_6 - e_7 + e_8)$$

y satisface las siguientes ecuaciones

$$(1)\ 0 = \langle \alpha, \sum_{i=1}^{4} e_i \rangle = -2n_1 + 2n_8 + n_9 - \sum_{i=10}^{12} n_i + \sum_{i=13}^{16} n_i$$

$$(2)\ 2N = \langle \alpha, e_5 - e_8 \rangle = n_9 - \sum_{i=10}^{16} n_i$$

$$(3)\ N = \langle \alpha, e_8 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{8} n_i$$

Combinando las ecuaciones (2) y (3) tenemos que

$$(4)\ n_9 = 2N + \sum_{i=10}^{16} n_i = \sum_{i=1}^{8} n_i + \sum_{i=10}^{16} n_i.$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \alpha, e_1 \rangle \\ &= \frac{1}{2}(-n_1 + n_2 + n_3 + n_4 - n_5 - n_6 - n_7 + n_8) + n_9 + n_{13} \\ &= \frac{1}{2}(-n_1 + n_2 + n_3 + n_4 - n_5 - n_6 - n_7 + n_8) + \sum_{i=1}^{8} n_i + \sum_{i=10}^{16} n_i + n_{13} \\ &= \frac{1}{2}(n_1 + 3n_2 + 3n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + 3n_8) + \sum_{i=10}^{16} n_i + n_{13}. \end{aligned}$$

Como por hipótesis $n_i \geq 0$ para todo i la última ecuación implica que

$$n_i = 0, \ \text{para}\, i \in \{1, ..., 8, 10, ..., 16\}.$$

Entonces la ecuación (3) implica que $N = 0$ por lo tanto

$$\mathbb{R}^+\Psi_n \cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k} = 0.$$

(B) Supongamos que $\{\theta_1, \theta_7, -e_1 - e_5, -e_2 - e_5\} \subset \Psi_n$. Por Lema 35

$$\Psi_n = \{\theta_i,\ 1 \leq i \leq 8\} \cup \{\pm e_i - e_i,\, 1 \leq i \leq 4\}.$$

Si $\alpha \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k}$, entonces existen escalares $N \in \mathbb{R}$ y $n_i \geq 0$, para $1 \leq i \leq 16$ tales que

$$\alpha = \sum_{i=1}^{8} n_i - \sum_{i=1}^{4} n_{8+i}(-e_i - e_5) + \sum_{i=1}^{4} n_{12+i}(e_i - e_5) = N(3e_5 - e_6 - e_7 + e_8)$$

y satisface las siguientes ecuaciones

$$(1)\ 2N = \langle \alpha, e_5 - e_8 \rangle = -\sum_{i=9}^{16} n_i \leq 0,$$

$$(2)\ N = \langle \alpha, e_8 \rangle = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} n_i \geq 0.$$

Las ecuaciones (1) y (2) implica que $N = 0$, por lo tanto

$$\mathbb{R}^+\Psi_n \cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k} = 0.$$

(C) Supongamos que $\{-\theta_1, \theta_7, e_1+e_5, e_2+e_5\} \subset \Psi_n$. Por el Lema 35

$$\theta_i \in \Psi_n, \text{ para } 2 \leq i \leq 8, \text{ y}$$
$$(e_i - e_5) \in \Psi_n, \text{ para } 1 \leq i \leq 4.$$

Existen tres subconjuntos de raíces no compactas $(\Psi_i)_n$, $1 \leq i \leq 3$ que contienen al subconjunto $\{-\theta_1, \theta_7, e_1+e_5, e_2+e_5\}$ tales que
$\Psi = \Delta \cup (\Psi_i)_n$ es un sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$. Ellos son

$$(\Psi_1)_n = \{-\theta_1\} \cup \{\theta_i, \, 2 \leq i \leq 8\} \cup \{e_i \pm e_5, \, 1 \leq i \leq 2\} \cup \{\pm e_i - e_5, \, 3 \leq i \leq 4\},$$
$$(\Psi_2)_n = \{-\theta_1\} \cup \{\theta_i, \, 2 \leq i \leq 8\} \cup \{e_i \pm e_5, \, 1 \leq i \leq 3\} \cup \{\pm e_4 - e_5\},$$
$$(\Psi_3)_n = \{-\theta_1\} \cup \{\theta_i, \, 2 \leq i \leq 8\} \cup \{e_i \pm e_5, \, 1 \leq i \leq 4\}.$$

(a) Si $\alpha \in \mathbb{R}^+(\Psi_1)_n \cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k}$ entonces existen escalares $N \in \mathbb{R}$ y $n_i \geq 0$ para $1 \leq i \leq 16$ tales que

$$\alpha = -n_1\theta_1 + \sum_{i=2}^{8} n_i\theta_i + \sum_{i=1}^{2} n_{8+i}(e_i + e_5) + \sum_{i=3}^{4} n_{8+i}(-e_i - e_5) + \sum_{i=1}^{4} n_{12+i}(e_i - e_5) = N(3e_5 - e_6 - e_7 + e_8),$$

y satisface las siguientes ecuaciones

$$(1)\, 0 = \langle \alpha, \sum_{i=1}^{4} e_i \rangle = 2(n_1 + n_8) + n_9 + n_{10} - n_{11} - n_{12} + \sum_{i=13}^{16} n_i$$

$$(2)\, 2N = \langle \alpha, e_5 - e_8 \rangle = n_9 + n_{10} - \sum_{i=11}^{16} n_i,$$

$$(3)\, N = \langle \alpha, e_8 \rangle = \frac{1}{2}(-n_1 + \sum_{i=2}^{8} n_i).$$

Combinando estas ecuaciones obtenemos que

$$n_9 + n_{10} - n_{11} - n_{12} = 2N + \sum_{i=13}^{16} n_i = -n_1 + \sum_{i=2}^{8} n_i + \sum_{i=13}^{16} n_i,$$

Y que

$$0 = n_1 + 2n_8 + \sum_{i=2}^{8} n_i + 2\sum_{i=13}^{16} n_i.$$

Como por hipótesis los estalares n_i son no negativos, la última ecuación implica que $n_i = 0$ para $i \in \{1, 2, ..., 8, 13, ..., 16\}$, por lo tanto la ecuación (3) implica que $N = 0$ y

$$\mathbb{R}^+(\Psi_1)_n \cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k} = 0.$$

(b) Si $\alpha \in \mathbb{R}^+(\Psi_2)_n \cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k}$ entonces existen escalares $N \in \mathbb{R}$ y $n_i \geq 0$ para $1 \leq i \leq 16$ tales que

$$\alpha = -n_1\theta_1 + \sum_{i=2}^{8} n_i\theta_i + \sum_{i=1}^{3} n_{8+i}(e_i + e_5) + n_{12}(-e_4 - e_5)$$
$$+ \sum_{i=1}^{4} n_{12+i}(e_i - e_5) = N(3e_5 - e_6 - e_7 + e_8),$$

y satisface las siguientes ecuaciones

$$(1)\, 0 = \langle \alpha, \sum_{i=1}^{4} e_i \rangle = 2(n_1 + n_8) + n_9 + n_{10} + n_{11} - n_{12} + \sum_{i=13}^{16} n_i$$

$$(2)\, 2N = \langle \alpha, e_5 - e_8 \rangle = n_9 + n_{10} + n_{11} - \sum_{i=12}^{16} n_i,$$

$$(3)\, N = \langle \alpha, e_8 \rangle = \frac{1}{2}(-n_1 + \sum_{i=2}^{8} n_i).$$

Combinando estas ecuaciones de manera análoga al caso anterior obtenemos que

$$0 = n_1 + 2n_8 + \sum_{i=2}^{8} n_i + 2\sum_{i=13}^{16} n_i.$$

Como por hipótesis los estalares n_i son no negativos, la última ecuación implica que $n_i = 0$ para $i \in \{1, 2, ..., 8, 13, ..., 16\}$, por lo tanto la ecuación (3) implica que $N = 0$ y

$$\mathbb{R}^+(\Psi_2)_n \cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k} = 0.$$

(c) Si $\alpha \in \mathbb{R}^+(\Psi_3)_n \cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k}$ entonces existen escalares $N \in \mathbb{R}$ y $n_i \geq 0$ para $1 \leq i \leq 16$ tales que

$$\alpha = -n_1\theta_1 + \sum_{i=2}^{8} n_i\theta_i + \sum_{i=1}^{4} n_{8+i}(e_i + e_5) + \sum_{i=1}^{4} n_{12+i}(e_i - e_5) = N(3e_5 - e_6 - e_7 + e_8),$$

y satisface las siguientes ecuaciones

$$(1)\, 0 = \langle \alpha, \sum_{i=1}^{4} e_i \rangle = 2(n_1 + n_8) + \sum_{i=9}^{16} n_i$$

$$(2)\, 2N = \langle \alpha, e_5 - e_8 \rangle = \sum_{i=9}^{16} n_i.$$

La ecuación (1) implica que $n_i = 0$ para $i \in \{1, 8, ..., 16\}$. Por lo tanto la ecuación (2) implica que $N = 0$ y

$$\mathbb{R}^+(\Psi_3)_n \cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k} = 0.$$

(D) Supongamos que $\{-\theta_1, \theta_7, e_1+e_5, -e_2-e_5\} \subset \Psi_n$. Por Lema 35

$$\Psi_n = \{-\theta_1\} \cup \{\theta_i,\, 2 \leq i \leq 8\} \cup \{e_1 \pm e_5\} \cup \{\pm e_i - e_5,\, 2 \leq i \leq 4\}.$$

Si $\alpha \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap i\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}$ entonces existen escalares $N \in \mathbb{R}$ y $n_i \geq 0$ para $1 \leq i \leq 16$ tales que

$$\alpha = -n_1\theta_1 + \sum_{i=2}^{8} n_i\theta_i + n_9(e_1+e_5) + \sum_{i=2}^{4} n_{8+i}(-e_i-e_5) + \sum_{i=1}^{4} n_{12+i}(e_i-e_5) = N(3e_5-e_6-e_7+e_8),$$

y satisface las siguientes ecuaciones

$$(1)\, 0 = \langle \alpha, \sum_{i=1}^{4} e_i \rangle = 2(n_1+n_8) + n_9 - \sum_{i=10}^{12} n_i + \sum_{i=13}^{16} n_i$$

$$(2)\, 2N = \langle \alpha, e_5 - e_8 \rangle = n_9 - \sum_{i=10}^{16} n_i,$$

$$(3)\, N = \langle \alpha, e_8 \rangle = \frac{1}{2}(-n_1 + \sum_{i=2}^{8} n_i).$$

Combinando estas ecuaciones obtenemos que

$$n_9 - n_{10} - n_{11} - n_{12} = 2N + \sum_{i=13}^{16} n_i = -n_1 + \sum_{i=2}^{8} n_i + \sum_{i=13}^{16} n_i,$$

Y que

$$0 = n_1 + 2n_8 + \sum_{i=2}^{8} n_i + 2\sum_{i=13}^{16} n_i.$$

Como por hipótesis los estalares n_i son no negativos, la última ecuación implica que $n_i = 0$ para $i \in \{1, 2, ..., 8, 13, ..., 16\}$. Por lo tanto la ecuación (3) implica que $N = 0$ y

$$\mathbb{R}^+\Psi_n \cap i\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}} = 0,$$

como queríamos demostar.

(E) Supongamos que $\{-\theta_1, \theta_7, -e_1-e_5, -e_2-e_5\} \subset \Psi_n$. Por Lema 35

$$\Psi_n = \{-\theta_1\} \cup \{\theta_i,\, 2 \leq i \leq 8\} \cup \{\pm e_i - e_5,\, 1 \leq i \leq 4\}.$$

Si $\alpha \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k}$ entonces existen escalares $N \in \mathbb{R}$ y $n_i \geq 0$ para $1 \leq i \leq 16$ tales que

$$\begin{aligned}\alpha &= -n_1\theta_1 + \sum_{i=2}^{8} n_i\theta_i + \sum_{i=1}^{4} n_{8+i}(-e_i - e_5) + \sum_{i=1}^{4} n_{12+i}(e_i - e_5)\\ &= N(3e_5 - e_6 - e_7 + e_8),\end{aligned}$$

y satisface las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}&(1)\, 0 = \langle \alpha, \sum_{i=1}^{4} e_i\rangle = 2(n_1 + n_8) - \sum_{i=9}^{12} n_i + \sum_{i=13}^{16} n_i\\ &(2)\, 2N = \langle \alpha, e_5 - e_8\rangle = -\sum_{i=9}^{16} n_i,\\ &(3)\, N = \langle \alpha, e_8\rangle = \frac{1}{2}(-n_1 + \sum_{i=2}^{8} n_i).\end{aligned}$$

Combinando estas ecuaciones obtenemos que

$$-\sum_{i=9}^{12} n_i = 2N + \sum_{i=13}^{16} n_i = -n_1 + \sum_{i=2}^{8} n_i + \sum_{i=13}^{16} n_i,$$

Y que

$$0 = n_1 + 2n_8 + \sum_{i=2}^{8} n_i + 2\sum_{i=13}^{16} n_i.$$

Como por hipótesis los estalares n_i son no negativos, la última ecuación implica que $n_i = 0$ para $i \in \{1, 2, ..., 8, 13, ..., 16\}$. Por lo tanto la ecuación (3) implica que $N = 0$ y

$$\mathbb{R}^+\Psi_n \cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k} = 0,$$

como queríamos demostar.

(F) Supongamos que $\{-\theta_1, -\theta_7, e_1 + e_5, e_2 + e_5\} \subset \Psi_n$. Por Lema 35

$$\Psi_n = \{-\theta_i,\, i \in J_1\} \cup \{\theta_i,\, i \in I_1\} \cup \{e_i \pm e_5,\, 1 \leq i \leq 2\} \cup \{\pm e_i - e_5,\, 3 \leq i \leq 4\},$$

donde $I_1 = \{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ y $J_1 = \{1, 7\}$.

Si $\alpha \in \mathbb{R}^+\Psi_n \cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k}$ entonces existen escalares $N \in \mathbb{R}$ y $n_i \geq 0$ para $1 \leq i \leq 16$ tales que

$$\begin{aligned}\alpha = -\sum_{i\in J_1} n_i\theta_i + \sum_{i\in I_1} n_i\theta_i + \sum_{i=1}^{2} n_{8+i}(e_i + e_5) + \sum_{i=3}^{4} n_{8+i}(-e_i - e_5)\\ + \sum_{i=1}^{4} n_{12+i}(e_i - e_5) = N(3e_5 - e_6 - e_7 + e_8),\end{aligned}$$

y satisface la siguiente ecuación

$$(1)\, 0 = \langle \alpha, e_1 + e_2 \rangle = n_1 + n_2 + n_7 + n_8 + n_9 + n_{10} + n_{13} + n_{14}.$$

Como por hipótesis los estalares n_i son no negativos, la ecuación (1) implica que $n_i = 0$ para $i \in \{1, 2, 7, 8, 9, 10, 13, 14\}$.

Además α satisface

$$2N = \langle \alpha, e_5 - e_8 \rangle = -\sum_{i=11}^{16} n_i \leq 0,$$
$$N = \langle \alpha, e_8 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=3}^{6} n_i \geq 0.$$

Lo que implica que $N = 0$ y

$$\mathbb{R}^+ \Psi_n \cap i\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}} = 0,$$

como queríamos demostrar.

(G) Supongamos que $\{-\theta_1, -\theta_7, e_1 + e_5, -e_2 - e_5\} \subset \Psi_n$.

Por Lema 35

$$\begin{aligned} \theta_i \in & \Psi_n, \text{ para } i \in \{2,3,4,8\}, \\ -\theta_i \in & \Psi_n, \text{ para } i \in \{1,7\}, \\ e_i - e_5 \in & \Psi_n, \text{ para } 1 \leq i \leq 4, \\ -e_i - e_5 \in & \Psi_n, \text{ para } 2 \leq i \leq 4, \end{aligned}$$

Existen tres subconjuntos de raíces no compactas $(\Psi_i)_n$, $1 \leq i \leq 3$ que contienen al subconjunto $\{-\theta_1, -\theta_7, e_1 + e_5, -e_2 - e_5\}$ tales que $\Psi = \Delta \cup (\Psi_i)_n$ es un sistema de raíces positivas de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$. Ellos son

$$(\Psi_1)_n = \{\theta_i,\, i \in I_2\} \cup \{-\theta_i,\, i \in J_2\} \cup \{e_1 \pm e_5\} \cup \{\pm e_i - e_5,\, 2 \leq i \leq 4\},$$

donde $I_2 = \{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ y $J_2 = \{1, 7\}$.

$$(\Psi_2)_n = \{\theta_i,\, i \in I_3\} \cup \{-\theta_i,\, i \in J_3\} \cup \{e_1 \pm e_5\} \cup \{\pm e_i - e_5,\, 2 \leq i \leq 4\},$$

donde $I_3 = \{2, 3, 4, 5, 8\}$ y $J_2 = \{1, 6, 7\}$.

$$(\Psi_3)_n \{\theta_i,\, i \in I_4\} \cup \{-\theta_i,\, i \in J_4\} \cup \{e_1 \pm e_5\} \cup \{\pm e_i - e_5,\, 2 \leq i \leq 4\},$$

donde $I_4 = \{2, 3, 4, 8\}$ y $J_4 = \{1, 5, 6, 7\}$.

(a) Si $\alpha \in \mathbb{R}^+(\Psi_1)_n \cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k}$ entonces existen escalares $N \in \mathbb{R}$ y $n_i \geq 0$ para $1 \leq i \leq 16$ tales que

$$\alpha = \sum_{i \in I_2} n_i\theta_i - \sum_{i \in J_2} n_i\theta_i + n_9(e_1 + e_5) + \sum_{i=2}^{4} n_{8+i}(-e_i - e_5)$$
$$+ \sum_{i=1}^{4} n_{12+i}(e_i - e_5) = N(3e_5 - e_6 - e_7 + e_8),$$

y satisface las siguientes ecuaciones

$$(1)\, N = \langle \alpha, e_1 + e_8 \rangle = n_2 + n_3 + n_8 + n_9 + n_{11} + n_{13}$$
$$(2)\, 2N = \langle \alpha, e_5 - e_8 \rangle = n_9 - \sum_{i=10}^{16} n_i.$$

Combinando estas ecuaciones obtenemos que

$$0 = n_2 + n_3 + n_4 + n_{13} + \frac{1}{2}(n_9 + \sum_{i=10}^{16} n_i)$$

Como por hipótesis los estalares n_i son no negativos, la última ecuación implica que $n_i = 0$ para $i \in \{2, 3, 4, 9, 10, ...16\}$, por lo tanto la ecuación (2) implica que $N = 0$ y

$$\mathbb{R}^+(\Psi_1)_n \cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k} = 0.$$

(b) Si $\alpha \in \mathbb{R}^+(\Psi_2)_n \cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k}$ entonces existen escalares $N \in \mathbb{R}$ y $n_i \geq 0$ para $1 \leq i \leq 16$ tales que

$$\alpha = \sum_{i \in I_3} n_i\theta_i - \sum_{i \in J_3} n_i\theta_i + n_9(e_1 + e_5) + \sum_{i=2}^{4} n_{8+i}(-e_i - e_5)$$
$$+ \sum_{i=1}^{4} n_{12+i}(e_i - e_5) = N(3e_5 - e_6 - e_7 + e_8),$$

y satisface las siguientes ecuaciones

$$(1)\, N = \langle \alpha, e_1 + e_8 \rangle = n_2 + n_3 + n_8 + n_9 + n_{11} + n_{13}$$
$$(2)\, 2N = \langle \alpha, e_5 - e_8 \rangle = n_9 - \sum_{i=10}^{16} n_i.$$

Combinando estas ecuaciones de manera análoga al caso anterior obtenemos que

$$0 = n_2 + n_3 + n_4 + n_{13} + \frac{1}{2}(n_9 + \sum_{i=10}^{16} n_i)$$

Como por hipótesis los estalares n_i son no negativos, la última ecuación implica que $n_i = 0$ para $i \in \{2, 3, 4, 9, 10, ...16\}$, por lo tanto la ecuación (2) implica que $N = 0$ y

$$\mathbb{R}^+(\Psi_2)_n \cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k} = 0.$$

(c) Si $\alpha \in \mathbb{R}^+(\Psi_3)_n \cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k}$ entonces existen escalares $N \in \mathbb{R}$ y $n_i \geq 0$ para $1 \leq i \leq 16$ tales que

$$\alpha = \sum_{i \in I_4} n_i\theta_i - \sum_{i \in J_4} n_i\theta_i + n_9(e_1 + e_5) + \sum_{i=2}^{4} n_{8+i}(-e_i - e_5)$$
$$+ \sum_{i=1}^{4} n_{12+i}(e_i - e_5) = N(3e_5 - e_6 - e_7 + e_8),$$

y satisface las siguientes ecuaciones

$$(1)\, 0 = \langle \alpha, e_1 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{8} n_i + n_9 + n_{13}$$
$$(2) N = \langle \alpha, e_8 \rangle = \frac{1}{2} \left(-n_1 + n_2 + n_3 + n_4 - n_5 - n_6 - n_7 + n_8 \right).$$

La ecuación (1) implica que $n_i = 0$ para $i \in \{2, 3, ..., 9, 13\}$. Por lo tanto la ecuación (2) implica que $N = 0$ y

$$\mathbb{R}^+(\Psi_3)_n \cap i\mathfrak{z}_\mathfrak{k} = 0.$$

Como queríamos demostrar.

Esto concluye la demostación del Teorema $\square$

BIBLIOGRAFÍA

[Ko] KOBAYASHI TOSHIYUKI. *Discrete decomposability of the restriction of $A_q(\lambda)$ with respect to reductive subgroups.* Invent. math 131, 229-256. 1997.

[JV] H. P. JAKOSEN, M VERGNE. *Restrictions and expansions of holomorphic representations,* Functions and Analysis. 34, 29 - 53 (1979).

[Knapp] KNAPP ANTONY. *Lie Groups Beyond an Intruduction.* Progress in Mathematics Vol. 140.

[Kn] KNAPP ANTONY. *Representation Theory of Real Reductive Groups* Pricenton University Press.

[K-V] KANPP A. AND VOGAN D. *Cohomological Induction and Unitary Representations.* Pricenton.

[HE] HELGASON SIGURDUR. *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces* Academic Press. 1978.

[HU] HUANG JING SONG. *Admissible Square Quadruplets and Semisimple Symmetric Spaces*

[Wall] WALLACH N. *Harmonic analysis on homogeneous spaces,* Dekker, 1973.