Categorías de fusión y grupoides cuánticos

Juan Martín Mombelli

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía y Física como parte de los requerimientos para la obtención de grado de Doctor en Matemática de la Universidad Nacional de Córdoba.

17 de marzo de 2006

Director de Tesis: ***Nicolás Andruskiewitsch***

Índice general

Agradecimientos

A mi profesor Nicolás Andruskiewitsch por la profunda educación que me ha brindado en todos estos años, educación que va más alla de los contenidos de este trabajo.

Introducción

Una categoría tensorial es un categoría abeliana munida de un "*producto tensorial*" y de un objeto unidad sujetos a isomorfismos naturales de asociatividad y unidad. Este concepto, introducido por MacLane y Benabou [**Be**] en la década de los 60, engloba a las categorías de representaciones de grupos, de álgebras de Lie y más generalmente, de álgebras de Hopf.

Las *categorías de fusión* son categorías tensoriales semisimples que satisfacen ciertas condiciones de finitud, siendo ejemplos básicos las categorías de representaciones de grupos finitos. Las categorías de fusión aparecen codificando las simetrías de diversas estructuras matemáticas. Sus aplicaciones llegan a diversas áreas de matemática y física teórica: topología de variedades de dimensión baja, teoría de álgebras de Hopf, teoría de subfactores, teoría de campos racional, mecánica estadística, etc. Estas interrelaciones hacen que el estudio de las categorías de fusión haya despertado un gran interés tanto en matemáticos como en físicos teóricos.

Una fuente principal de ejemplos de categorías de fusión provienen de la teoría de álgebras de Hopf; para cada álgebra de Hopf H, la categoría $\mathrm{Rep}(H)$ de representaciones posee naturalmente una estructura tensorial. La categoría $\mathrm{Rep}(H)$ es de fusión exactamente cuando H es semisimple. Más generalmente la categoría de representaciones de una cuasi-álgebra de Hopf, noción introducida por Drinfeld que generaliza la noción de álgebra de Hopf, es una categoría tensorial.

La familia de categorías tensoriales que aparecen como categorías de representaciones de alguna cuasi-álgebra de Hopf tienen la particularidad que ciertos invariantes (las llamadas dimensiones de Frobenius-Perron) son números enteros. Sin embargo, esta familia, a pesar de ser rica, está lejos de ser exhaustiva; existen importantes ejemplos de categorías tensoriales que no provienen de la categoría de representaciones de ninguna cuasi-álgebra de Hopf. Más precisamente existen categorías tensoriales cuyas dimensiones de Frobenius-Perron de objetos simples no son enteras.

Años atrás Ocneanu propuso la noción de *paragrupo* para comprender esta clase de ejemplos. En esta dirección Hayashi introdujo las álgebras de faz en 1991 [**H**]. Uno de los resultados principales obtenidos por Hayashi es que bajos ciertas condiciones toda categoría tensorial semisimple es la categoría de representaciones de un álgebra de faz, usando como herramienta principal lo que se conoce como reconstrucción Tannakiana.

En vista del Teorema de Hayashi el estudio de las categorías tensoriales semisimples puede llevarse a cabo mediante el estudio de las álgebras de faz.

Más tarde, alrededor de 1998, en una serie de trabajos, Böhm, Nill y Szlachányi introducen, en conexión con la teoría de subfactores, las *álgebras de Hopf débiles*, ver [**BSz**] y [**BNS**], también llamadas *grupoides cuánticos*, estudiadas luego en profundidad por Nikshych y Vainerman [**NV**].

Las álgebras de faz de Hayashi son ejemplos particulares de grupoides cuánticos; precisamente cuando las subálgebras final y fuente son conmutativas.

En el estudio de las categorías tensoriales resulta importante la noción de módulo sobre dicha categoría, [**Be**]. Esta noción fue recientemente estudiada en profundidad por Ostrik [**O1**], [**O2**] en el caso semisimple y por Etingof y Ostrik [**EO**] en casos más generales.

En pocas palabras si $\mathcal{C}$ es una categoría tensorial una *categoría módulo sobre* $\mathcal{C}$ es una categoría abeliana $\mathcal{M}$ munida de un funtor tensorial $F : \mathcal{C} \to \operatorname{End}(\mathcal{M})$. Uno de los problemas centrales de la teoría es la clasificación de las categorías módulo sobre una categoría tensorial fija. Hasta el momento pocos resultados se conocen en este sentido.

Para las siguientes categorías tensoriales se conoce la clasificación completa de dichos módulos sobre ellas:

(i) $\operatorname{Rep}(\Bbbk G)$ y $\operatorname{Rep}(\Bbbk G)^*$, G un grupo finito, [**O1**], [**O2**].
(ii) La categoría de representaciones en super espacios vectoriales del super grupo $G \ltimes W$, $\operatorname{Rep}(G \ltimes W, u)$, donde G es un grupo finito, W un G-espacio vectorial y $u \in G$ un elemento central de orden 2, [**EO**].
(iii) $\operatorname{Rep}(T(q))$, donde $T(q)$ es el álgebra de Taft, $q \in \Bbbk^\times$ una raíz primitiva de la unidad, [**EO**].
(iv) Las categorías de tipo grupo $\mathcal{C}(G, \omega, F, \psi)$ introducidas independientemente por Ocneanu y Ostrik. Ver [**O2**].

La clasificación de las categorías módulo para las familias de categorías tensoriales (i) se encuentra en la secciones 3.3 y 6.4, y para la familia (iii) en la sección 6.5.

Una de las principales motivaciones para el estudio de los módulos sobre categorías tensoriales reside en la interrelación de los siguientes conceptos:

- Módulos sobre la categoría $\operatorname{Rep}(H)$, H un álgebra de Hopf.
- Torcimientos dinámicos de H.
- Extensiones Hopf-Galois sobre H.

En el capítulo 1 se introduce toda la notación y nociones básicas que se usarán a lo largo del trabajo, con el espíritu de que el mismo sea lo más autocontenido posible.

El capítulo 2 está dedicado a la definición de categoría tensorial. También se muestran propiedades generales y algunos ejemplos importantes.

El capítulo 3 sigue de cerca los trabajos [**O2**] y [**EO**]. En la sección 3.1 introducimos la definición de categoría módulo sobre una categoría tensorial, enunciamos propiedades generales y presentamos los ejemplos más significativos. También se introduce una de las definiciones más importantes de [**EO**], la de *categoría módulo exacta*.

En la sección 3.2 se introduce la noción de Hom interno, una de las herramientas fundamentales del estudio de las categorías módulo. Si $\mathcal{C}$ es una categoría tensorial y $\mathcal{M}$ es una categoría módulo sobre $\mathcal{C}$ entonces para cada $M \in \mathcal{M}$ el Hom interno $\underline{\operatorname{Hom}}(M, M)$

resulta un álgebra en $\mathcal{C}$. En esta sección se enuncia uno de los resultados principales de [**EO**]: *Toda categoría módulo exacta sobre una categoría tensorial es la categoría de módulos a derecha en $\mathcal{C}$ de un álgebra en $\mathcal{C}$.* La prueba de este teorema usa fuertemente las propiedades del Hom interno. Ver Teorema 3.2.8.

En la sección 3.3 se muestra cómo usando las técnicas desarrolladas en la sección 3.2 se clasifican las categorías módulo sobre la categoría de representaciones de un álgebra de grupo de un grupo finito. Dicha clasificación fue obtenida por Ostrik en [**O1**].

En la sección 3.4 se introduce otro concepto fundamental, el de *categoría dual*. Se muestra el cálculo de ciertos ejemplos y algunas de sus propiedades básicas.

En el capítulo 4 se introduce la definición de grupoide cuántico y ciertas propiedades generales. Mostramos algunos ejemplos explícitos y ciertas nociones importantes como módulo y comódulo álgebras, módulos de Hopf. En la sección 4.4 se define la cohomología sobre grupoides cuánticos. Esta herramienta se utiliza para demostrar en el capítulo 7 la sucesión exacta de Kac.

En el capítulo 5 se recuerda la definición de estabilizador para comódulo álgebras sobre álgebras de Hopf. Para cada H-comódulo álgebra K y V una representación de K el estabilizador $\mathrm{Stab}_K(V)$ resulta un H-módulo álgebra a izquierda.

Este objeto fue introducido por Yan y Zhu [**YZ**] con el propósito de estudiar acciones de álgebras de Hopf, generalizando la noción de establizador para acciones de grupos.

Algunos cálculos explícitos del estabilizador de Yan-Zhu se incluyen en la sección 5.3. La sección 5.4 está dedicada a probar la dualidad de Yan-Zhu:

Si K es un álgebra cuasi-Frobenius entonces $\mathrm{Stab}_{\mathrm{Stab}_K(V)}(V) \simeq K$.

Ver Teorema 5.4.5. Este resultado depende fuertemente en la propiedad del doble centralizador para álgebras cuasi-Frobenius. Cabe notar que este resultado extiende los resultados obtenidos en [**YZ**] donde se requiere que K sea semisimple.

La sección 5.5 contiene resultados nuevos sobre el estabilizador de Yan-Zhu para el caso donde K es una extensión Hopf-Galois de un álgebra de Hopf.

En el capítulo 6 nos concentramos en el estudio de las categorías módulo sobre la categoría de representaciones de un álgebra de Hopf H de dimensión finita. Mostramos como para cada H-comódulo álgebra, la categoría de representaciones es una categoría módulo sobre $\mathrm{Rep}(H)$. La recíproca también es cierta. Más especificamente en la Proposición 6.1.1 de la sección 6.1 se prueba lo siguiente:

Si $\mathcal{M}$ es una categoría módulo exacta sobre $\mathrm{Rep}(H)$ *entonces*
$$\mathcal{M} \simeq {}_K\mathfrak{m}$$
para cierta H-comódulo álgebra K.

Luego, en la sección 6.2 probamos que el Hom interno de la categoría módulo ${}_K\mathfrak{m}$ coincide con el estabilizador de Yan-Zhu para K. En las siguientes dos secciones se clasifican las categorías módulo sobre el dual de un álgebra de grupo de un grupo finito y sobre las álgebras de Taft.

Los resultados de los capítulos 5 y 6 forman parte del trabajo en preparación [**AM2**].

Los siguientes 4 capítulos están dedicados al estudio de una familia especial de categorías tensoriales.

En una serie de trabajos Andruskiewitsch y Natale, [**AN1**], [**AN2**], introducen una familia de grupoides cuánticos semisimples $\Bbbk\mathcal{T}$ construidos a partir de una clase general de grupoides dobles $\mathcal{T}$ y ciertos datos de perturbación ϑ, y dando *a fortiori* una clase de categorías tensoriales semisimples.

En este trabajo nos concentramos en el caso particular cuando $\mathcal{T}$ es un grupoide doble vacante. Un grupoide doble vacante esencialmente proviene de un par de grupoides apareados $(\mathcal{V}, \mathcal{H}, \triangleright, \triangleleft)$. El dato de perturbación es un elemento en $\operatorname{Opext}(\mathcal{V}, \mathcal{H})$.

En el capítulo 7 nos dedicamos primero a recordar la teoría de grupoides y mostrar que la cohomología de grupoides coincide con la cohomología de grupoides cuánticos definida en la sección 4.4 para el caso de un álgebra de grupoide. Luego se define el concepto de grupoide doble vacante y se muestra como las nociones *pares de grupoides apareados* y *grupoides dobles vacantes* son equivalentes.

Se muestra además que si $(\mathcal{V}, \mathcal{H}, \triangleright, \triangleleft)$ es un par de grupoides apareados entonces existe un grupoide $\mathcal{D}$ y una factorización exacta $\mathcal{D} = \mathcal{V}\mathcal{H}$; es decir que todo elemento de $\mathcal{D}$ se escribe como producto de un elemento de $\mathcal{V}$ y un elemento de $\mathcal{H}$ de manera única. Recíprocamente toda factorización exacta induce un par de grupoides apareados.

Al final de capítulo en la sección 7.8 definimos y probamos la sucesión exacta de Kac para pares de grupoides apareados introducida en [**AN1**].

En vista de los resultados del capítulo 7, el estudio de los grupoides dobles vacantes puede llevarse a cabo mediante el estudio de las factorizaciones exactas de grupoides. Dicha tarea la realizamos en el capítulo 8 donde se muestran ejemplos explícitos de factorizaciones exactas. También mostramos como usando la sucesión exacta de Kac es posible calcular el $\operatorname{Opext}(\mathcal{V}, \mathcal{H})$ para ciertos casos, ver los ejemplos 8.1.2 y 8.2.3.

Los resultados de los capítulos 8 y 9 forman parte del trabajo [**AM1**].

En el capítulo 9 se muestra la construcción de un grupoide cuántico $\Bbbk_\tau^\sigma\mathcal{T}$ a partir de un grupoide doble vacante $\mathcal{T}$ asociado a un par de grupoide apareados $(\mathcal{V}, \mathcal{H}, \triangleright, \triangleleft)$. Dicha construcción fue definida en [**AN1**].

Uno de los resultados principales de este capítulo es que si la categoría $\operatorname{Rep}(\Bbbk_\tau^\sigma\mathcal{T})$ es de fusión entonces es de tipo grupo, es decir equivalente a una categoría de la forma $\mathcal{C}(D, \omega, V, \psi)$, donde D es un grupo finito, $V \subseteq D$ es un subgrupo, $\omega \in H^3(D, \Bbbk^\times)$ y ψ una 2-cocadena para V tal que $\omega = d\psi$. Ver Teorema 9.5.5.

La idea de la prueba es generalizar ciertas equivalencias de categorías validas para el caso de grupos finitos al caso de grupoides. Uno de los puntos claves es la determinación del 3-cociclo ω. Probamos que el mismo proviene de la sucesión exacta de Kac para grupoides.

Los resultados del capítulo 9 forman parte del trabajo [**MN**].

Finalmente en el capítulo 10 nos dedicamos al estudio de los grupoide trenzados.
Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo y $R : V \otimes V \to V \otimes V$ un operador lineal inversible. Se dice que R es una solución de la Ecuación Cuántica de Yang-Baxter (QYBE,

por brevedad, por sus siglas en inglés) si

$$R^{12}R^{13}R^{23} = R^{23}R^{13}R^{12},$$

donde, como es usual, $R^{12} = R\otimes \mathrm{id}$, $R^{23} = 1\otimes R$ y $R^{13} = \sum_i r_i\otimes 1\otimes r^i$ si $R = \sum_i r_i\otimes r^i$.

El estudio de las soluciones de la QYBE, motivado por problemas en mecánica estadística y topología en dimensiones bajas, ha sido un tema central en álgebra en los últimos 25 años. Si R es una solución de la QYBE y $\tau : V\otimes V \to V\otimes V$ denota la transposición usual, entonces $c := R\tau$ es una solución de la *ecuación de trenzas*, es decir

$$(c\otimes \mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes c)(c\otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id}\otimes c)(c\otimes \mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes c). \tag{0.0.1}$$

Por lo tanto, existe una correspondencia biyectiva entre soluciones de la QYBE y soluciones de la ecuación de trenzas.

Drinfeld observó en [**D**] que tanto la QYBE como la ecuación de trenzas tienen sentido si el espacio vectorial V es simplemente un conjunto y $R : V \times V \to V \times V$ es una función; nuevamente, existe una correspondencia biyectiva entre soluciones de uno y otro tipo. Él llamó esta ecuación la QYBE conjuntista y propuso su estudio como un problema significativo. Notar que cualquier solución de la QYBE conjuntista da lugar, por linearización, a una solución de la QYBE es la categoría de espacios vectoriales.

El problema de Drinfeld fue atacado por dos grupos de matemáticos: Etingof-Schedler-Soloviev, ver [**ESS, S**], y Lu-Yan-Zhu, ver [**LYZ1, LYZ2**]. Ver también [**EGS**], donde las soluciones indescomponibles en conjuntos con p elementos, p un número primo, son clasificadas. En otro trabajo, Takeuchi da una presentación alternativa de los resultados de Etingof-Schedler-Soloviev y Lu-Yan-Zhu, con grupos trenzados jugando un papel central. Ver [**T1**].

La ecuación de trenzas (0.0.1) tiene sentido en cualquier categoría monoidal. Otra categoría monoidal natural a considerar es la categoría $\mathrm{Quiv}(\mathcal{P})$ de carcajes sobre un conjunto fijo $\mathcal{P}$. La ecuación de trenzas en $\mathrm{Quiv}(\mathcal{P})$ es llamada la *QYBE en el contexto de carcajes*, por abuso de notación. Una solución de la ecuación de trenzas en $\mathrm{Quiv}(\mathcal{P})$ es llamada un *carcaj trenzado*. Notar que cualquier solución finita de la QYBE en el contexto de carcajes da lugar, por linearización, a una solución de la QYBE en la categoría de bimódulos sobre un álgebra conmutativa separable.

El problema de caracterizar soluciones de la ecuación de trenzas en $\mathrm{Quiv}(\mathcal{P})$ fue atacado por Andruskiewitsch, ver [**A**]. En particular el Teorema 3.10 en *loc. cit.* muestra que hay una correspondencia biyectiva entre

- *Carcajes trenzados no degenerados $\mathcal{A}$,*
- *pares $(\mathcal{G}, \mathcal{A})$, donde $\mathcal{G}$ es un grupoide trenzado y $\mathcal{A}$ es una representación de $\mathcal{G}$ con ciertas propiedades.*

En otras palabras, los grupoides trenzados son una pieza fundamental de información en la clasificación de las soluciones de la QYBE en el contexto de los carcajes. De esta consideración surge naturalmente el problema de clasificar (o al menos caracterizar) los grupoides trenzados.

En este capítulo describimos la estructura de los grupoides trenzados. La estratégia es reducir el problema al caso de un grupoide conexo y luego notar que todo grupoide trenzado da lugar a una factorización exacta para luego usar los resultados del capítulo 8. Específicamente en el Teorema 10.0.16 obtenemos que las siguientes nociones son equivalentes:

- *Grupoides trenzados conexos.*
- *Colecciones* (D, V, H, γ, ϕ) *donde* D *es un grupo finito,* V *y* H *son subgrupos de* D *isomorfos vía* $\phi : G \xrightarrow{\simeq} H$, $\gamma : V \diagdown D \diagup H \to D$ *es una sección de la proyección canónica tales que:*

  $$D = \coprod_{P \in V \diagdown D \diagup H} V\gamma_P H, \quad \text{y} \quad V \bigcap zHz^{-1} = \{1\} \quad \text{para todo } z \in D,$$

  y ciertas compatibilidades.

Cabe mencionar que en ciertos trabajos se relaciona los grupos trenzados con deformaciones de álgebras de Hopf semisimples triangulares. Ver [**G**], por ejemplo. Se espera que el papel de los grupoides trenzados sea de igual importancia en el estudio de ciertas deformaciones de los grupoides cuánticos.

Los resultados del capítulo 10 forman parte del trabajo [**MM**].

CAPíTULO 1

Notación y preliminares

Denotaremos por $\mathbb{K}$ un anillo conmutativo arbitrario y por $\Bbbk$ un cuerpo algebraícamente cerrado de característica cero. Usaremos el símbolo $\coprod$ para denotar la unión disjunta de conjuntos.

Si V es un espacio vectorial de dimensión finita, identificamos $(V\otimes V)^*$ con $V^*\otimes V^*$ via

$$\langle \alpha\otimes\beta, v\otimes w\rangle = \langle\alpha, v\rangle\langle\beta, w\rangle,$$

$\alpha,\beta\in V^*$, $v,w\in V$. Si $\mathcal{X}$ es un conjunto, denotamos por $\mathbb{K}\,\mathcal{X}$ el $\mathbb{K}$-módulo libre con base $(X)_{X\in\mathcal{X}}$. A la categoría de espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\Bbbk$ la denotaremos por $vect_{\Bbbk}$.

Si G es un grupo finito y $\sigma\in Z^2(G,\Bbbk^\times)$ es un 2-cociclo normalizado, es decir que

$$\sigma(gh,f)\sigma(g,h)=\sigma(g,hf)\sigma(h,f),\quad \sigma(g,1)=\sigma(1,g)=1$$

para todo $g,h,f\in G$, el *álgebra de grupo torcida* $\Bbbk_\sigma G$ es el álgebra cuyo espacio vectorial subyacente es $\Bbbk G$ con multiplicación dada por

$$g.h=\sigma(g,h)\,gh,\qquad g,h\in G.$$

Para cualquier anillo A denotaremos por $A^\times$ el grupo de elementos inversibles en A. Por *álgebra* entenderemos a un álgebra asociativa y con unidad. Si $B\subseteq A$ es una subálgebra de A y M es un B-módulo, se denotará $\operatorname{Ind}_B^A M = A\otimes_B M$ el A-módulo inducido.

Si A es un álgebra, denotaremos por ${}_A\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_A$ y ${}_A\mathcal{M}_A$ la categoría de A-módulos a izquierda, a derecha y la categoría de A-bimódulos, respectivamente. Análogamente se denotará por ${}_A\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}_A$ y ${}_A\mathfrak{m}_A$ la categoría de A-módulos a izquierda, derecha y bimódulos de dimensión finita sobre $\Bbbk$. Denotaremos por $L: A\to\operatorname{End}A$ y por $R: A\to\operatorname{End}A$ la representación regular a izquierda, resp. a derecha, es decir $L_a(b)=ab$, $R_a(b)=ba$ para $a,b\in A$.

Recordemos que un álgebra A de dimensión finita sobre $\Bbbk$ se dice *cuasi-Frobenius* si A es un objeto inyectivo con la representación regular (a derecha o a izquierda). Ver [**CR**].

Todo módulo finitamente generado sobre un álgebra cuasi-Frobenius es proyectivo si y sólo si es inyectivo. Ver [**CR**, Theorem. 58.14].

Un álgebra A sobre un cuerpo E se dice *separable* si el álgebra $A^F = A\otimes_E F$ es semisimple sobre F para cualquier cuerpo F que sea una extensión de E. Equivalentemente, un álgebra A es separable si existe un elemento $e\in A\otimes A$ llamado el *elemento de separabilidad* que verifica

$$m(e)=1,\quad (a\otimes 1)e=e(1\otimes a),$$

para todo $a \in A$, donde $m : A \otimes A \to A$ es el producto de A. Para más detalles ver [**CR**].

Para coálgebras usaremos la notación de Sweedler pero omitiendo el símbolo de sumatoria: $\Delta(x) = x_{(1)} \otimes x_{(2)}$, si Δ es la comultiplicación de la coálgebra C, $x \in C$. Si M es un C-comódulo a derecha (respectivamente a izquierda) con estructura dada por $\rho : M \to M \otimes C$ (resp. $\lambda : M \to C \otimes M$) usaremos la notación: $\rho(m) = m_{(0)} \otimes m_{(1)}$ (resp. $\lambda(m) = m_{(-1)} \otimes m_{(0)}$) para todo $m \in M$.

Para la teoría general de álgebras de Hopf usamos como referencia principal [**Mo**]. Recordemos algunas nociones y definiciones básicas.

Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita con comultiplicación Δ, counidad ε y antípoda $\mathcal{S}$.

Recordemos que H^{op}, respectivamente H^{cop}, es el álgebra de Hopf con multiplicación opuesta, respectivamente con comultiplicación opuesta. La antípoda de H^{op} y de H^{cop} es $\mathcal{S}^{-1}$. Claramente existen isomorfismos de álgebras de Hopf: $H^{*\,\text{op}} \simeq H^{\text{cop}\,*}$.

Las aplicaciones $\rightharpoonup : H \otimes H^* \to H^*$, $\leftharpoonup : H^* \otimes H \to H^*$ denotan las acciones obtenidas por transposición de la multiplicación a derecha y a izquierda, y por $\leftharpoondown : H^* \otimes H \to H^*$ y $\rightharpoondown : H \otimes H^* \to H^*$ las correspondientes composiciones con la inversa de la antípoda. Es decir,

$$\langle a \rightharpoonup \alpha, b \rangle = \langle \alpha, ba \rangle = \langle \alpha \leftharpoonup b, a \rangle, \tag{1.0.2}$$

$$\langle b \rightharpoondown \alpha, a \rangle = \langle \alpha, \mathcal{S}^{-1}(b) a \rangle, \qquad \langle \alpha \leftharpoondown a, b \rangle = \langle \alpha, b \mathcal{S}^{-1}(a) \rangle, \tag{1.0.3}$$

$a, b \in H$, $\alpha \in H^*$. Denotaremos por $\underline{L} : H \to \operatorname{End}(H^*)$ la representacion dada por $\rightharpoonup$ y por $\underline{R} : H^* \to \operatorname{End}(H)$ la representacion a derecha dada por $\leftharpoonup$. Las acciones análogas de H^* en H son denotadas por los mismos símbolos. Notar que

$$\begin{aligned} &\alpha \rightharpoonup h = \langle \alpha, h_{(2)} \rangle \, h_{(1)}, \quad h \leftharpoonup \alpha = \langle \alpha, h_{(1)} \rangle \, h_{(2)}, \\ &\alpha \rightharpoondown h = \langle \alpha, \mathcal{S}^{-1}(h_{(1)}) \rangle \, h_{(2)} \quad h \leftharpoondown \alpha = \langle \alpha, \mathcal{S}(h_{(2)}) \rangle \, h_{(1)}, \end{aligned}$$

$\alpha \in H^*$, $h \in H$.

Notar que para todo $\alpha \in H^*$, $h, t \in H$

$$(ht) \leftharpoondown \alpha = (h \leftharpoondown \alpha_{(2)})(t \leftharpoondown \alpha_{(1)}). \tag{1.0.4}$$

Si $X, Y \in \operatorname{Rep}(H)$ entonces $\operatorname{Hom}(X, Y)$ es también un H-módulo a izquierda vía

$$(h \cdot T)(x) = h_{(1)} \cdot T(\mathcal{S}(h_{(2)}) \cdot x), \qquad x \in X,\ h \in H,\ T \in \operatorname{Hom}(X, Y). \tag{1.0.5}$$

Similarmente, si $W, Z \in \mathcal{M}_H$ entonces $\operatorname{Hom}(W, Z)$ es también un H-módulo a derecha vía

$$(T \cdot h)(w) = T(w \cdot \mathcal{S}^{-1}(h_{(2)})) \cdot h_{(1)}, \qquad w \in W,\ h \in H,\ T \in \operatorname{Hom}(W, Z). \tag{1.0.6}$$

1.1. Módulo y comódulo álgebras sobre álgebras de Hopf

En esta sección H denotará un álgebra de Hopf de dimensión finita sobre $\Bbbk$.

DEFINICIÓN 1.1.1. Un H-*módulo álgebra a izquierda* es un álgebra A munida de una acción a izquierda $\cdot : H\otimes A \to A$ y se verifica lo siguiente. Para todo $a, b \in A, h \in H$

$$h \cdot 1 = \varepsilon(h)1, \qquad h \cdot (ab) = (h_{(1)} \cdot a)(h_{(2)} \cdot b).$$

Similarmente se definen H-*módulo álgebras a derecha.*

DEFINICIÓN 1.1.2. Un H-*comódulo álgebra a izquierda* es un álgebra K munida de una coacción a izquierda $\lambda_K : K \to H\otimes K$ tal que para todo $k, t \in K$

$$\lambda_K(1) = 1\otimes 1, \qquad \lambda_K(kt) = \lambda_K(k)\, \lambda_K(t).$$

Análogamente se definen H-*comódulo álgebra a derecha*. Es fácil ver que las nociones de H-módulo álgebra a izquierda (resp. a derecha) y H^*-comódulo álgebra a derecha (resp. a izquierda) son equivalentes.

Si A es un H-módulo el *espacio de invariantes* es $A^H = \{a \in A : h{\cdot}a = \varepsilon(h)a$ para todo $h \in H\}$. Similarmente si K es un H-comódulo el *espacio de coinvariantes* se define como $K^{\operatorname{co} H} = \{k \in K : \lambda(k) = k\otimes 1\}$.

EJEMPLO 1.1.3.

- Si H es un álgebra de Hopf entonces H^* es un H-módulo álgebra con acción dada por $\rightharpoonup$.
- Si V es un H-módulo entonces $\operatorname{End}(V)$ es un H-módulo álgebra con las acciones descriptas en (1.0.5), (1.0.6).
- Si K es una subálgebra coideal de H entonces K es un H-comódulo álgebra vía Δ.

DEFINICIÓN 1.1.4. Si A es un H-módulo álgebra un ideal I de A se dirá H-*estable* si $h \cdot I \subseteq I$ para todo $h \in H$. De la misma manera si K es un H-comódulo álgebra vía $\delta : K \to H\otimes K$, un ideal I de K se dirá H-*coestable* si $\delta(I) \subseteq H\otimes I$.

Será conveniente considerar la aplicación lineal

$$\mathcal{L} = L\otimes \operatorname{id} : H^*\otimes \operatorname{Hom}(U, W) \to \operatorname{Hom}(H^*\otimes U, H^*\otimes W) \simeq \operatorname{End}(H^*)\otimes \operatorname{Hom}(U, W),$$

es decir

$$\mathcal{L}(\alpha\otimes f)(\beta\otimes u) = \alpha\beta\otimes f(u),$$

para todo $\alpha, \beta \in H^*$, $f \in \operatorname{Hom}(U, W), u \in U$.

Consideramos las acciones a izquierda de H en $H^*\otimes \operatorname{Hom}(U, W)$, $H^*\otimes U$ y $H^*\otimes W$ inducidas por la acción $\rightharpoonup$ de H en H^* (y trivial en el segundo tensorando). En particular, $\operatorname{Hom}(H^*\otimes U, H^*\otimes W)$ es un H-módulo.

LEMA 1.1.5. *La función $\mathcal{L}$ tiene las siguientes propiedades:*

(i) *es compatible con las composiciones,* i. e. *el siguiente diagrama es conmutativo:*

(1.1.1)
$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Hom}(H^*\otimes U, H^*\otimes W)\times \operatorname{Hom}(H^*\otimes W, H^*\otimes Z) & \xrightarrow{\text{composición}} & \operatorname{Hom}(H^*\otimes U, H^*\otimes Z) \\
\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}\Big\uparrow & & \Big\uparrow\mathcal{L} \\
H^*\otimes\operatorname{Hom}(U,W)\times H^*\otimes\operatorname{Hom}(W,Z) & \xrightarrow{\mu\otimes\text{composición}} & H^*\otimes\operatorname{Hom}(U,Z).
\end{array}$$

(ii) $\mathcal{L} : H^*\otimes\operatorname{End} W \to \operatorname{End}(H^*\otimes W)$ *es un morfismo de álgebras.*

(iii) $\mathcal{L}$ *es un homomorfismo de H-módulos injectivo.*

Demostración. (i) y (ii) son inmediatos. Claramente $\mathcal{L}$ es inyectivo; preserva la acción de H ya que L lo hace:

$$\begin{aligned}(h \rightharpoonup L_\alpha)(\beta) &= h_{(1)} \rightharpoonup (L_\alpha(\mathcal{S}(h_{(2)}) \rightharpoonup \beta)) = h_{(1)} \rightharpoonup (\alpha(\mathcal{S}(h_{(2)}) \rightharpoonup \beta)) \\ &= (h_{(1)} \rightharpoonup \alpha)(h_{(2)}\mathcal{S}(h_{(3)}) \rightharpoonup \beta) = L_{h\rightharpoonup\alpha}(\beta),\end{aligned}$$

si $h \in H$, $\alpha, \beta \in H^*$. □

La discusión anterior puede llevarse sobre la representación regular a derecha. Consideremos la aplicación

$$\mathcal{R} = \mathrm{id}\otimes R : \operatorname{Hom}(U,W)\otimes H \to \operatorname{Hom}(U\otimes H, W\otimes H) \cong \operatorname{Hom}(U,W)\otimes\operatorname{End}(H)$$

definida por

$$\mathcal{R}(f\otimes h)(u\otimes t) = f(u)\otimes th,$$

donde $h, t \in H$, $f \in \operatorname{Hom}(U,W), u \in U$.

Consideremos la acción de H^* en $\operatorname{Hom}(U,W)\otimes H$, $U\otimes H$, $W\otimes H$ inducida por la acción a derecha $\leftharpoonup$ de H^* en H (y trivial en el primer tensorando), cf. (1.0.6).

También $\operatorname{Hom}(U\otimes H, W\otimes H)$ es un H^*-módulo a derecha.

Lema 1.1.6. *La función $\mathcal{R}$ tiene las siguientes propiedades:*

(i) $\mathcal{R}$ *es compatible con las composiciones,*
(ii) $\mathcal{R} : \operatorname{Hom}(U,W)\otimes H^{\mathrm{op}} \to \operatorname{Hom}(U\otimes H, W\otimes H)$ *es un morfismo de álgebras, y*
(iii) $\mathcal{R}$ *es un homomorfismo inyectivo de H^*-módulos.*

Demostración. Como antes, (i) y (ii) son claros. La función $\mathcal{R}$ preserva la acción de H^* ya que R lo hace:

$$\begin{aligned}(R_h \leftharpoonup \alpha)(t) &= (R_h(t \leftharpoonup \mathcal{S}^{-1}(\alpha_{(2)})) \leftharpoonup \alpha_{(1)} = ((t \leftharpoonup \mathcal{S}^{-1}(\alpha_{(2)}))h) \leftharpoonup \alpha_{(1)} \\ &= (t \leftharpoonup \mathcal{S}^{-1}(\alpha_{(3)})\alpha_{(2)})(h \leftharpoonup \alpha_{(1)}) = t(h \leftharpoonup \alpha) = R_{h\leftharpoonup\alpha}(t),\end{aligned}$$

si $h, t \in H$, $\alpha \in H^*$. Aquí hemos usado (1.0.4). □

1.2. Extensiones β-Frobenius

En esta sección recordaremos la noción de extensiones β-Frobenius de álgebras.

Sea A una $\Bbbk$-álgebra de dimensión finita. Si $\beta : A \to A$ es un isomorfismo de álgebras y V es un A-módulo a izquierda (o a derecha), denotaremos por ${}_\beta V$ (o V_β) el A-módulo a izquierda cuyo espacio vectorial subyacente es V con acción de H dada por $a \cdot_\beta v = \beta(a)v$, para todo $a \in A$, $v \in V$.

Una inclusión de álgebras $B \subseteq A$ se llama una *extension β-Frobenius* si existe un isomorfismo ${}_A A_B \to {}_B \mathrm{Hom}_B({}_B A, {}_B B)_\beta$. Si este es el caso entonces existe una función $fr : A \to B$ llamada el *homomorfismo de Frobenius* y colecciones $(l_i, r_i)_{i=1,\dots,n} \subseteq H$ llamadas *bases duales* tales que

$$a = \sum_{i=1}^{n} fr(al_i)r_i = \sum_{i=1}^{n} l_i \beta^{-1}(fr(r_i a)), \qquad a \in A, \tag{1.2.1}$$

y se tiene la siguiente identidad en $A \otimes_{B\beta} A$

$$\sum_{i=1}^{n} l_i \otimes r_i a = \sum_{i=1}^{n} al_i \otimes r_i, \qquad a \in A. \tag{1.2.2}$$

Se sabe que para cualquier inclusión de álgebras $B \hookrightarrow A$ el funtor inducción es adjunto a izquierda del funtor restricción. Es decir que si W es un B-módulo y V es un A-módulo entonces existen isomorfismos naturales

$$\mathrm{Hom}_B(W, \mathrm{Res}_B^A V) \simeq \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Ind}_B^A W, V).$$

Este resultado usualmente se lo conoce como *reciprocidad de Frobenius*. En el caso de las extensiones β-Frobenius el funtor restricción posee un adjunto a derecha. En el siguiente lema establecemos este resultado.

LEMA 1.2.1. [**AN3**, Lemma 3.4] *Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *$B \hookrightarrow A$ es una extensión β-Frobenius a derecha.*
2. *Para todo B-módulo W y todo A-módulo X existen isomorfismos naturales*

$$\zeta^X : \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Res}_B^A X, W) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_A(X, \mathrm{Ind}_B^A {}_\beta W).$$

DEMOSTRACIÓN. Para la prueba nos remitimos a [**AN3**, Lemma 3.4]. Sólo daremos la fórmula de ζ^X y la de su inversa ya que nos será útil más adelante.

Para cada $\alpha \in \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Res}_B^A X, W)$, $x \in X$

$$\zeta^X(\alpha)(x) = \sum_i l_i \otimes \alpha(r_i \cdot x). \tag{1.2.3}$$

Su inversa $\sigma^X : \mathrm{Hom}_A(X, \mathrm{Ind}_B^A {}_\beta W) \to \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Res}_B^A X, W)$ está definida por

$$\sigma^X(u)(x) = (fr \otimes \mathrm{id})u(x), \tag{1.2.4}$$

para todo $u \in \mathrm{Hom}_A(X, \mathrm{Ind}_B^A {}_\beta W)$. $\square$

Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita y sea K una subálgebra de Hopf de H. Entonces $K \subseteq H$ es una extensión β-Frobenius, [**FMS**]. El homomorfismo de Frobenius en este caso es

$$fr : H \to K, \ fr(h) = \lambda(h_{(1)}\mathcal{S}^{-1}(\Lambda))h_{(2)},$$

donde $\lambda \in H^*, \Lambda \in K$ son integrales no nulas. Para la definición del isomorfismo β ver [**FMS**] o [**AN3**, Lemma 3.7].

Una consecuencia de que la extensión $K \subseteq H$ sea β-Frobenius es la siguiente.

Proposición 1.2.2. *Si P es un H-módulo proyectivo entonces $\operatorname{Res}_K^H(P)$ es un K-módulo proyectivo.*

Demostración. Sean P un H-módulo proyectivo, M, N K-módulos y $\pi : M \to N$, $\alpha : P \to N$ morfismos de K-módulos donde π es suryectivo.

Consideremos los morfismos de H-módulos $\zeta(\alpha) : P \to \operatorname{Ind}_K^H(N)$ y $\operatorname{Ind}_K^H(\pi) : \operatorname{Ind}_K^H {}_\beta M \to \operatorname{Ind}_K^H {}_\beta N$ donde este último es suryectivo. Por ser P un H-módulo proyectivo entonces existe un morfismo de H-módulos $\gamma : P \to \operatorname{Ind}_K^H(M)$ tal que $\zeta(\alpha) = \operatorname{Ind}_K^H(\pi)\gamma$. Por la naturalidad de σ y por ser el inverso a ζ implica que $\alpha = \pi\sigma(\gamma)$. Luego $\operatorname{Res}_K^H(P)$ es un K-módulo proyectivo.

□

1.3. Deformaciones de álgebras de Hopf

En esta sección introduciremos una noción de deformación de un álgebra de Hopf debida a Drinfeld.

Definición 1.3.1. Un *torcimiento* para H es un elemento inversible $J \in (H \otimes H)^\times$ que satisface

$$(\Delta \otimes \mathrm{id}_H)(J)(J \otimes 1) = (\mathrm{id}_H \otimes \Delta)(J)(1 \otimes J), \tag{1.3.1}$$

$$(\varepsilon \otimes \mathrm{id})(J) = 1 = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(J). \tag{1.3.2}$$

Se usará la siguiente notación: $J = J^1 \otimes J^2$, $J^{-1} = J^{-1} \otimes J^{-2}$.

Si $x \in H^\times$ es un elemento tal que $\varepsilon(x) = 1$ y J es un torcimiento entonces

$$J^x = \Delta(x)J(x^{-1} \otimes x^{-1}), \tag{1.3.3}$$

es también un torcimiento. Los torcimientos J y J^x se dicen *equivalentes por calibre.*

Si J es un torcimiento para H entonces existe una nueva álgebra de Hopf H^J con la misma estructura de álgebra y la misma counidad que H, pero con comultiplicación y antípoda determinadas por

$$\Delta^J(H) = J^{-1}\Delta(h)J, \quad \mathcal{S}^J(h) = Q_J^{-1}\mathcal{S}(h)Q_J,$$

para todo $h \in H$. Donde $Q_J = \mathcal{S}(J^1)J^2$ es un elemento inversible de H con inverso $Q_J^{-1} = J^{-1}\mathcal{S}(J^{-2})$.

Si J y J' son torcimientos equivalentes por calibre entonces las álgebras de Hopf H^J, $H^{J'}$ son isomorfas vía

$$\phi : H^J \to H^{J'}, \quad \phi(h) = xhx^{-1},$$

para todo $h \in H$.

1.4. Categorías abelianas

Recordemos ciertas definiciones básicas.

Si $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ son dos categorías abelianas, denotaremos por $\mathrm{Fun}\,(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ a la categoría de funtores *aditivos* y *exactos* de $\mathcal{C}_1$ a $\mathcal{C}_2$, cuyas flechas son las transformaciones naturales. Además denotaremos $\mathrm{End}\,(\mathcal{C}_1) = \mathrm{Fun}\,(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_1)$.

Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y M, N objetos en $\mathcal{C}$. Un morfismo en la categoría $f : M \to N$ se dice *esencial* si es suryectivo y para todo morfismo $g : L \to M$ tal que $f \circ g$ es suryectivo entonces g es suryectivo.

Un ***cubrimiento proyectivo*** de un objeto M de $\mathcal{C}$ es un par (P, f) donde $f : P \to M$ es esencial y P es un objeto proyectivo.

Denotaremos por $(P(M), f)$ al cubrimiento proyectivo de M. A veces se dejará implícita la función f. Cabe notar que no en toda categoría abeliana existe el cubrimiento proyectivo. Sin embargo si la categoría posee suficientes proyectivos, es decir que para todo objeto X existe un objeto proyectivo P y un epimorfismo $p : P \to X$, entonces existen los cubrimientos poyectivos.

Un objeto ***simple*** es un objeto $0 \neq S \in \mathcal{C}$ tal que todo monomorfismo $N \to S$ es nulo o es un isomorfismo. Si $\mathcal{C}$ es una categoría abeliana denotaremos por $\mathrm{Irr}(\mathcal{C})$ al conjunto de clases de isomorfismo de objetos simples de $\mathcal{C}$.

Llamemos a los objetos simples de $\mathcal{C}$ *objetos de longitud 1*, y definamos inductivamente los *objetos de longitud* n como a aquellos objetos $M \in \mathcal{C}$ para los cuales existe una sucesión exacta en $\mathcal{C}$

$$0 \to U \to M \to V \to 0,$$

donde U es de longitud $n-1$ y V es un objeto simple. La definición de longitud está bien definida por Jordan-Holder.

Sean M, N objetos de una categoría. Se dice que N es un *subcociente* de M si existe otro objeto U munido de un epimorfismo $M \twoheadrightarrow U$ y un monomorfismo $N \hookrightarrow U$. Un *subcociente simple* es un subcociente que además es simple como objeto de la categoría.

Para cada objeto $X \in \mathcal{C}$ denotaremos por $[X]$ la clase de ismorfismo de X en $\mathcal{C}$. Recordemos que el ***grupo de Grothendieck*** de $\mathcal{C}$, denotado por $K_0(\mathcal{C})$, es el grupo abeliano libre generado por las clases de isomorfismos de objetos de $\mathcal{C}$ sujetos a las relaciones:

$$[X] = [Y] + [Z]$$

si existe una sucesión exacta $0 \to Y \to X \to Z \to 0$ en $\mathcal{C}$.

El ***rango*** de $\mathcal{C}$, que a veces denotaremos por $rnk(\mathcal{C})$, es el rango del grupo de Grothendieck.

El siguiente teorema será de frecuente uso durante esta exposición.

TEOREMA 1.4.1. *Sean $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ categorías abelianas. Un funtor $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ es exacto si y sólo si posee adjuntos a derecha y a izquierda.*

Recordemos los siguientes resultados debidos a Watts que nos serán útiles a lo largo del trabajo.

TEOREMA 1.4.2. *Si A y B son $\Bbbk$-álgebras de dimensión finita y $F \in \operatorname{Fun}({}_A\mathcal{M}, {}_B\mathcal{M})$ entonces existe un objeto $C \in {}_B\mathcal{M}_A$ y un isomorfismo natural $F \simeq C \otimes_A$.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [**Wa**, Thm 2]. $\square$

TEOREMA 1.4.3. *Sea $F : {}_A\mathcal{M} \to {}_B\mathcal{M}$ un funtor contravariante exacto a izquierda tal que convierte sumas directas en productos directos. Entonces existe un (A, B)-bimódulo C y una equivalencia natural $F \simeq \operatorname{Hom}_A(?, C)$.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [**Wa**, Thm 3]. $\square$

CAPíTULO 2

Categorías tensoriales

Recordemos la definición de categoría tensorial. Referencias sobre este tema pueden encontrarse, por ejemplo, en [**BK**], [**K**].

Una ***categoría monoidal*** es una colección $(\mathcal{C}, \otimes, a, r, l, \mathbf{1})$, donde $\mathcal{C}$ es una categoría, $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es un bifuntor, $\mathbf{1}$ es un objeto de $\mathcal{C}$, $\{a_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z)\}$, $\{r_X : X \otimes \mathbf{1} \to X : X \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})\}$, y $\{l_X : \mathbf{1} \otimes X \to X : X \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})\}$ son isomorfismos naturales, sujetos al *axioma del pentágono*, esto es

$$a_{X,Y,Z\otimes W}\ a_{X\otimes Y,Z,W} = (\mathrm{id}_X \otimes a_{Y,Z,W})\ a_{X,Y\otimes Z,W}\ (a_{X,Y,Z} \otimes \mathrm{id}_W),$$

para todo objeto X, Y, Z, W en $\mathcal{C}$, y sujetos al *axioma del triángulo*:

$$(\mathrm{id}_X \otimes l_Y)\ a_{X,\mathbf{1},Y} = r_X \otimes \mathrm{id}_Y,$$

para todo objeto X, Y en $\mathcal{C}$. Es decir que los diagramas

$$\begin{tikzcd}
 & ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W \arrow[dl, "a_{X,Y,Z}\otimes id"'] \arrow[dr, "a_{X\otimes Y,Z,W}"] & \\
(X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W \arrow[d, "a_{X,Y\otimes Z,W}"] & & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W) \arrow[d, "a_{X,Y,Z\otimes M}"'] \\
X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes W) \arrow[rr, "id\otimes a_{Y,Z,W}"] & & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W))
\end{tikzcd}$$

y

(2.0.1)
$$\begin{tikzcd}
(X \otimes \mathbf{1}) \otimes W \arrow[rr, "a_{X,\mathbf{1},Y}"] \arrow[dr, "r_X\otimes id"'] & & X \otimes (\mathbf{1} \otimes W) \arrow[dl, "id\otimes l_W"] \\
 & X \otimes W &
\end{tikzcd}$$

son conmutativos para todo objeto X, Y, Z, W en $\mathcal{C}$.

Dadas dos categorías monoidales $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$, un ***funtor monoidal*** entre dichas categorías es una terna (F, ζ, ϕ), donde $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ es un funtor, $\zeta_{X,Y} : F(X) \otimes F(Y) \to F(X \otimes Y)$, es una familia de isomorfismos naturales para todo $X, Y \in \mathcal{C}_1$, y $\phi : \mathbf{1} \to F(\mathbf{1})$ es un isomorfismo, tales que:

(2.0.2)
$$\zeta_{X,Y\otimes Z}(\mathrm{id}_{F(X)} \otimes \zeta_{Y,Z}) a_{F(X),F(Y),F(Z)} = F(a_{X,Y,Z}) \zeta_{X\otimes Y,Z}(\zeta_{X,Y} \otimes \mathrm{id}_{F(Z)}),$$

$$l_{F(X)} = F(l_X)\zeta_{\mathbf{1},X}(\phi \otimes \mathrm{id}_{F(X)}), \tag{2.0.3}$$

$$r_{F(X)} = F(r_X)\zeta_{X,\mathbf{1}}(\mathrm{id}_{F(X)} \otimes \phi), \tag{2.0.4}$$

para todo objeto $X, Y, Z \in \mathcal{C}_1$.

Si $(F, \zeta, \phi), (F', \zeta', \phi')$ son funtores monoidales entre las categorías monoidales $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$, una *transformacion natural monoidal* $\theta : (F, \zeta, \phi) \to (F', \zeta', \phi')$ es una transformación natural $\theta : F \to F'$ tal que para cualquier $X, Y \in \mathcal{C}_1$

$$\theta_{\mathbf{1}}\phi = \phi', \quad \theta_{X\otimes Y}\zeta_{X,Y} = \zeta'_{X,Y}(\theta_X \otimes \theta_Y). \tag{2.0.5}$$

Un *isomorfismo monoidal natural* es una transformación monoidal natural que es un isomorfismo natural.

Una *equivalencia monoidal* entre dos categorías monoidales $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ es un funtor monoidal $(F, \zeta, \phi) : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ tal que existe otro funtor monoidal $(F', \zeta', \phi') : \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1$ e isomorfismos naturales monoidales $\theta_1 : F \circ F' \to \mathrm{id}_{\mathcal{C}_2}$, $\theta_2 : F' \circ F \to \mathrm{id}_{\mathcal{C}_1}$.

Si $(\mathcal{C}, \otimes, a, r, l, \mathbf{1})$ es una categoría monoidal, entonces la categoría $(\mathcal{C}, \otimes^{\mathrm{op}}, a^{\mathrm{op}}, l, r, \mathbf{1})$ es monoidal, donde a^{op} y $\otimes^{\mathrm{op}} : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ se definen por

$$X \otimes^{\mathrm{op}} Y = Y \otimes X, \quad a^{\mathrm{op}}_{X,Y,Z} = a^{-1}_{Z,Y,X},$$

para todo $X, Y, Z \in \mathcal{C}$. Esta categoría es llamada la *categoría opuesta* de $\mathcal{C}$ y usualmente se la denota por $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.

LEMA 2.0.4. *Si $\mathcal{C}$ es una categoría monoidal entonces el conjunto* $\mathrm{End}(\mathbf{1})$ *es un anillo conmutativo con la composición.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [**K**, Prop. XI.2.4]. □

Dado un objeto X en una categoría monoidal $\mathcal{C}$ un dual a derecha de X es un objeto X^* munido de morfismos

$$ev_X : X^* \otimes X \to \mathbf{1}, \quad coev_X : \mathbf{1} \to X \otimes X^*,$$

tal que las composiciones

(2.0.6)
$$X \xrightarrow{l_X^{-1}} \mathbf{1} \otimes X \xrightarrow{coev_X \otimes \mathrm{id}} (X \otimes X^*) \otimes X \xrightarrow{a_{X,X^*,X}} X \otimes (X^* \otimes X) \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes ev_X} X \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{r_X} X,$$
(2.0.7)
$$X^* \xrightarrow{r_{X^*}^{-1}} X^* \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes coev_X} X^* \otimes (X \otimes X^*) \xrightarrow{a^{-1}_{X^*,X,X^*}} (X^* \otimes X) \otimes X^* \xrightarrow{ev_X \otimes \mathrm{id}} \mathbf{1} \otimes X^* \xrightarrow{l_{X^*}} X^*$$

son las identidades de X y de X^* respectivamente.

Los morfismos ev_X y $coev_X$ son llamados la *evaluación* y *coevaluación* respectivamente. Análogamente se puede definir el dual a izquierda de un objeto $X \in \mathcal{C}$ como un objeto ${}^*X$ munido de morfismos

$$ev_X : X \otimes {}^*X \to \mathbf{1}, \quad coev_X : \mathbf{1} \to {}^*X \otimes X,$$

tal que las composiciones

$$X \xrightarrow{r_X^{-1}} X \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes coev_X} X \otimes ({}^*X \otimes X) \xrightarrow{a^{-1}_{X,{}^*X,X}} (X \otimes {}^*X) \otimes X \xrightarrow{ev_X} \mathbf{1} \otimes X \xrightarrow{l_X} X, \tag{2.0.8}$$

$${}^*X \xrightarrow{l^{-1}_{{}^*X}} \mathbf{1} \otimes {}^*X \xrightarrow{coev_X} ({}^*X \otimes X) \otimes {}^*X \xrightarrow{a_{{}^*X,X,{}^*X}} {}^*X \otimes (X \otimes {}^*X) \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes ev_X} {}^*X \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{r_{{}^*X}} {}^*X, \tag{2.0.9}$$

son las identidades.

Definición 2.0.5. Una categoría monoidal $\mathcal{C}$ se dice ***rígida*** si todo objeto de $\mathcal{C}$ posee duales a derecha e izquierda.

Es fácil comprobar que los duales de un objeto (si existen) son únicos salvo isomorfismo.

Proposición 2.0.6. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal rígida. Las siguientes afirmaciones se verifican.*

1. *El funtor $(\ )^* : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es exacto.*
2. *El producto tensorial. $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ resulta exacto en ambos argumentos*
3. $\mathbf{1}^* = \mathbf{1} = {}^*\mathbf{1}$.
4. *Existen biyecciones naturales*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes Y, Z) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z \otimes Y^*), \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y \otimes Z) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y^* \otimes X, Z), \tag{2.0.10}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes Y, Z) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, {}^*X \otimes Z), \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y \otimes Z) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes {}^*Z, Y) \tag{2.0.11}$$

para todo $X, Y, Z \in \mathcal{C}$.

Demostración. Ver [**BK**], [**K**]. □

Definición 2.0.7. Una ***categoría tensorial*** es una categoría abeliana $\Bbbk$-lineal monoidal y rígida, donde los funtores involucrados en la estructura monoidal y rígida (producto tensorial, asociatividad, dualidad, etc.) son $\Bbbk$-lineales.

Definición 2.0.8. Un *funtor tensorial* entre dos categorías tensoriales es un funtor monoidal $\Bbbk$-lineal. Una *transformación natural tensorial* entre dos funtores tensoriales es una transformación natural $\Bbbk$-lineal.

Ejemplo 2.0.9. (1) La categoría de espacios vectoriales de dimensión finita $\mathrm{vect}_{\Bbbk}$ es una categoría tensorial con producto tensorial dado por $\otimes_{\Bbbk}$, objecto unidad $\Bbbk$, asociatividad, isomorfismos de unidad a derecha y a izquierda están dados por las identidades respectivas. El dual de un espacio V es el espacio $V^* =$

$\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V\,\Bbbk)$, la evaluación y coevaluación $coev_V : \Bbbk \to V\otimes V^*$, $ev_V : V^*\otimes V \to \Bbbk$ están determinadas por

$$coev_V(1) = \sum_i v_i\otimes v^i, \quad ev_V(f\otimes v) = f(v),$$

donde (v_i), (v^i) son bases duales de V, $f \in V^*, v \in V$.

(2) Si R es cualquier álgebra, la categoría de R-bimódulos ${}_R\mathcal{M}_R$ es una categoría monoidal. El producto tensorial está dado por $\otimes_R$ y el objecto unidad es R. Los morfismos de asociatividad isomorfismos de unidad a derecha y a izquierda están dados por las identidades.

No es difícil probar que un objeto $M \in {}_R\mathcal{M}_R$ posee dual a derecha (respectivamente a izquierda) si y sólo si M es finitamente generado y proyectivo como R-módulo a derecha (resp. a izquierda).

Si R es una $\Bbbk$-álgebra semisimple, la categoría ${}_R\mathfrak{m}_R$ resulta tensorial.

(3) Si $\mathcal{A}$ es una categoría abeliana $\Bbbk$-lineal, la categoría de endofuntores exactos $\mathrm{End}\,(\mathcal{A})$ es una categoría monoidal con producto tensorial dado por la composición de funtores. El objeto unidad es el funtor identidad. Los duales a derecha e izquierda de un funtor vienen dados por los adjuntos a derecha e izquierda. Como todo funtor exacto posee adjuntos a derecha e izquierda $\mathrm{End}\,(\mathcal{A})$ es una categoría tensorial.

Una fuente principal de ejemplos de categorías tensoriales provienen de la categoría de representaciones de un álgebra de Hopf, como se explica en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2.0.10. Sea H un álgebra de Hopf sobre $\Bbbk$. La categoría de H-módulos a izquierda de dimensión finita ${}_H\mathfrak{m}$ posee una estructura tensorial como sigue. El producto tensorial de dos objetos $V, W \in {}_H\mathfrak{m}$ es

$$V\otimes W := V\otimes_{\Bbbk} W,$$

donde la acción de H sobre $V\otimes W$ está dada vía la comultiplicación de H, es decir

$$h.(v\otimes w) = h_{(1)} \cdot v\otimes h_{(2)} \cdot w,$$

para todo $h \in H, v \in V, w \in W$. El objecto unidad es $\Bbbk$ con acción de H dada vía ε. Los morfismos de asociatividad y unidad a derecha e izquierda son los mismos que para la categoría de espacios vectoriales. El dual de un espacio V es el espacio vectorial dual V^* con acción de H determinada por

$$(h \cdot f)(v) = f(\mathcal{S}(h) \cdot v),$$

para todo $h \in H$, $v \in V, f \in V^*$.

De ahora en más, si H es un álgebra de Hopf, denotaremos por $\mathrm{Rep}(H)$ en vez de ${}_H\mathfrak{m}$ a la categoría de H-módulos a izquierda de dimensión finita para enfatizar la presencia de la estructura tensorial.

LEMA 2.0.11. *Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita y J un torcimiento para H. Entonces el funtor $(\mathcal{F}, \zeta) : \operatorname{Rep}(H) \to vect_{\Bbbk}$ es tensorial. Donde $\mathcal{F}$ es el funtor de olvido y $\zeta_{X,Y} : X \otimes Y \to X \otimes Y$ está definida por*

$$\zeta_{X,Y}(x \otimes y) = J^1 \cdot x \otimes J^2 \cdot y,$$

$x \in X, y \in Y$.

DEMOSTRACIÓN. La identidad (2.0.2) es equivalente a (1.3.1). Las identidades (2.0.3) y (2.0.4) son equivalentes a la condición de normalización del torcimiento (1.3.2). $\square$

DEFINICIÓN 2.0.12. Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial. Un *funtor de fibra* para $\mathcal{C}$ es un funtor tensorial fiel y exacto $F : \mathcal{C} \to vect_{\Bbbk}$. Si R es un álgebra separable, un *R-funtor de fibra* para $\mathcal{C}$ es un funtor tensorial fiel y exacto $F : \mathcal{C} \to {}_R\mathcal{M}_R$.

El Lema 2.0.11 nos dice que por cada torcimiento para un álgebra de Hopf H existe un funtor de fibra. También vale la recíproca.

No toda categoría tensorial proviene de la categoría de representaciones de un álgebra de Hopf. El siguiente ejemplo proviene de la teoría de cuasi-álgebras de Hopf, tema que no tocaremos en este trabajo.

EJEMPLO 2.0.13. Sea G un grupo finito y sea $\omega \in Z^3(G, \Bbbk^\times)$ un 3-cociclo normalizado. Denotaremos por $\mathcal{C}(G, \omega)$ la categoría de espacios vectoriales G-graduados. Esta categoría tiene estructura tensorial como sigue. Si $V = \bigoplus_{g\in G} V_g$, y $W = \bigoplus_{g \in G} W_g$ son objetos en $\mathcal{C}(G, \omega)$, entonces

$$V \otimes W := \bigoplus_{g \in G} (V \otimes W)_g,$$

donde $(V \otimes W)_g = \bigoplus_{xy=g} V_x \otimes_{\Bbbk} W_y$. El objeto unidad es $\Bbbk$ concentrado en grado 1 (la identidad del grupo). El morfismo de asociatividad esta dado por el 3-cociclo ω, es decir $a_{UVW} : (U \otimes V) \otimes W \to U \otimes (V \otimes W)$ esta definido como

$$a_{UVW}((u \otimes v) \otimes w) = \omega(g, h, f)\; u \otimes (v \otimes w),$$

donde $u \in U_g, v \in V_h, w \in W_f$, $g, h, f \in G$.

Se puede probar que $\mathcal{C}(G, \omega)$ no depende (salvo equivalencia tensorial) de la clase de representante de ω en $H^3(G, \Bbbk^\times)$.

Para elecciones apropiadas de G y ω **no existe** ninguna álgebra de Hopf H tal que la categoría $\mathcal{C}(G, \omega)$ es equivalente tensorialmente a $\operatorname{Rep}(H)$. Esto se demuestra notando que para ciertos pares (G, ω), la categoría $\mathcal{C}(G, \omega)$ no posee funtores de fibra. Ver observación 6.4.3.

DEFINICIÓN 2.0.14. Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial. Un *álgebra* en $\mathcal{C}$ es un objecto A de la categoría munido de morfismos $m : A \otimes A \to A$, $u : \mathbf{1} \to A$ que satisfacen los axiomas de asociatividad y unidad, es decir

$$m(m \otimes \operatorname{id}_A) = m(\operatorname{id}_A \otimes m) a_{A,A,A},\; m(u \otimes \operatorname{id}_A) = l_A,\; m(\operatorname{id}_A \otimes u) = r_A.$$

Si A es un álgebra en una categoría tensorial $\mathcal{C}$ denotaremos por $\mathcal{C}_A$, ${}_A\mathcal{C}$, ${}_A\mathcal{C}_A$ a la categoría de A-módulos a derecha, izquierda y bimódulos, respectivamente. Para ser más precisos la categoría $\mathcal{C}_A$ consiste de objetos $V \in \mathcal{C}$ munidos de una flecha $\rho_V : V\otimes A \to V$ en $\mathcal{C}$ tal que

$$\rho_V(\rho_V\otimes \mathrm{id}_A) = \rho_V(\mathrm{id}_V \otimes m)a_{V,A,A}, \quad \rho_V(\mathrm{id}_A \otimes u) = r_V. \tag{2.0.12}$$

La primera igualdad dice que la acción a derecha es asociativa y la segunda que es unitaria. Análogamente la categoría ${}_A\mathcal{C}$ consta de objetos $W \in \mathcal{C}$ munidos de una flecha $\lambda_W : A\otimes W \to W$ en $\mathcal{C}$ tal que

$$\lambda_W(m\otimes \mathrm{id}_W) = \lambda_W(\mathrm{id}_A \otimes\lambda_W)a_{A,A,W}, \quad \lambda_W(u\otimes \mathrm{id}_V) = l_V. \tag{2.0.13}$$

La categoría ${}_A\mathcal{C}_A$ consiste de ternas (V, ρ_V, λ_V) donde $(V, \rho_V) \in \mathcal{C}_A$ y $(V, \lambda_V) \in {}_A\mathcal{C}$, es decir se satisfacen las identidades (2.0.12) y (2.0.13) respectivamente y además

$$\lambda_V(\mathrm{id}_A \otimes\rho_V)a_{A,V,A} = \rho_V(\lambda_V\otimes \mathrm{id}_A).$$

Las categorías $\mathcal{C}_A$, ${}_A\mathcal{C}$ y ${}_A\mathcal{C}_A$ son nuevamente categorías abelianas $\Bbbk$-lineales.

Lema 2.0.15. *Si A es un álgebra en una categoría tensorial $\mathcal{C}$ entonces la categoría ${}_A\mathcal{C}_A$ es una categoría monoidal.*

Demostración. Para cada par de objetos $V, W \in {}_A\mathcal{C}_A$ el producto tensorial $V\otimes_A W$, se define como el coigualador de las flechas

$$(\rho_V\otimes \mathrm{id}), (\mathrm{id}_V \otimes\lambda_W)a_{V,A,W} : (V\otimes A)\otimes W \rightrightarrows V\otimes W.$$

El objeto unidad de ${}_A\mathcal{C}_A$ es A. Para cada $V \in {}_A\mathcal{C}_A$ las acciones $\lambda_V : A\otimes V \to V$, $\rho_V : V\otimes A \to V$ inducen morfismos de unidad a izquierda y a derecha $A\otimes_A V \to V$, $V\otimes_A A \to V$. Los detalles quedan para el lector. □

No es cierto que la categoría ${}_A\mathcal{C}_A$ sea siempre un categoría tensorial, no siempre se puede definir los objetos duales. Más adelante probaremos que si ${}_A\mathcal{C}_A$ es tensorial entonces A es un objeto inyectivo como A-módulo a derecha, es decir $A \in \mathcal{C}$ es un álgebra *cuasi-Frobenius*. Sería interesante saber si vale la recíproca.

Proposición 2.0.16. *Si $\mathcal{C}$ es una categoría tensorial entonces con el producto*

$$[V][W] = [V\otimes W],$$

para todo objeto $V, W \in \mathcal{C}$, $K_0(\mathcal{C})$ es un anillo con unidad.

Demostración. La buena definición del producto sigue la exactitud del producto tensorial $\otimes$ en ambos argumentos, Proposición 2.0.6. □

Definición 2.0.17. [**EO**] Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana $\Bbbk$-lineal. Diremos que $\mathcal{C}$ es ***finita*** si

- posee una cantidad finita de clases de isomorfismo de objetos simples;
- todo objeto simple X posee un cubrimiento proyectivo $P(X)$;
- Los espacios Hom son de dimensión finita;
- cada objeto es de longitud finita.

Si $\mathcal{C}$ es una categoría finita entonces $\mathcal{C} \simeq \operatorname{Rep}(A)$ como categorías abelianas para alguna álgebra A de dimensión finita.

Una ***categoría tensorial finita*** es una categoría tensorial cuya categoría subyacente es finita y el objeto unidad $\mathbf{1}$ es suma directa de objetos simples.

La siguiente definición parece ser parte del folklore del tema.

Definición 2.0.18. Una ***categoría de multifusión*** es una categoría tensorial finita $\mathcal{C}$ cuya categoría abeliana subyacente es semisimple.

Una ***categoría de fusión*** es una categoría de multifusión cuyo objeto unidad $\mathbf{1}$ es un objeto simple.

Si H es un álgebra de Hopf de dimensión finita entonces la categoría tensorial $\operatorname{Rep}(H)$ de representaciones de dimensión finita de H es una categoría finita; $\operatorname{Rep}(H)$ es una categoría de fusión exactamente cuando H es semisimple.

En el siguiente ejemplo se muestra una familia fundamental de categorías tensoriales introducidas por Ocneanu, ver también [**O1, O2**], [**ENO**].

Ejemplo 2.0.19. **Categorías tensoriales de tipo grupo.** Sean G un grupo finito, F un subgrupo y sean $\omega \in Z^3(G, \Bbbk^\times)$ un 3-cociclo normalizado, $\psi \in C^2(F, \Bbbk^\times)$ una 2-cocadena normalizada tal que $\omega|_{F\times F\times F} = d\psi$. El álgebra de grupo torcida $\Bbbk_\psi F$ es el espacio vectorial $\Bbbk F$ con multiplicación dada por

$$g.h = \psi(g,h)\; gh,$$

para todo $g, h \in F$. Si ψ no es un 2-cociclo, este producto no es asociativo, sin embargo $\Bbbk_\psi F$ es un álgebra en la categoría $\mathcal{C}(G,\omega)$. La graduación de $\Bbbk_\psi F$ está dada de la siguiente manera:

$$(\Bbbk_\psi F)_g = \Bbbk\, g \text{ si } g \in F, \quad (\Bbbk_\psi F)_g = 0 \text{ si } g \notin F.$$

La categoría $\mathcal{C}(G, F, \omega, \psi)$ es definida como la categoría de $\Bbbk_\psi F$ bimódulos en $\mathcal{C}(G,\omega)$. El objeto unidad de esta categoría es $\Bbbk_\psi F$. Dicho objeto es irreducible ya que las componentes homogéneas son de dimensión 1. Las categorías $\mathcal{C}(G, F, \omega, \psi)$ son categorías de fusión.

Una categoría tensorial $\mathcal{C}$ se dice de ***tipo grupo*** si existe una equivalencia tensorial $\mathcal{C} \simeq \mathcal{C}(G, F, \omega, \psi)$.

En [**ENO**] se conjetura que *toda categoría de representaciones de un álgebra de Hopf semisimple es de tipo grupo.* Esta conjetura establece una estrecha relación entre la teoría de grupos finitos y la teoría de álgebras de Hopf.

Si $\mathcal{C}$ es una categoría tensorial finita usaremos repetidas veces el hecho de que $P \in \mathcal{C}$ es un objeto proyectivo (respectivamente inyectivo) si y sólo si el funtor $\operatorname{Hom}(P, ?)$ (resp. $\operatorname{Hom}(?, P)$) es un funtor exacto.

Veamos algunas propiedades de las categorías tensoriales finitas que necesitaremos en la siguiente sección.

Proposición 2.0.20. [**EO**, Prop. 2.1, 2.3] *Sean $\mathcal{C}$ un categoría tensorial finita y $X \in \mathcal{C}$ un objeto cualquiera. Si $P \in \mathcal{C}$ un objeto proyectivo entonces P^* y $P \otimes X$ son ambos proyectivos.*

Demostración. Como P es proyectivo el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, ?)$ es exacto. Además el funtor $? \otimes X^*$ es exacto, y como composición de funtores exactos es exacto, resulta que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, ? \otimes X^*) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P \otimes X, ?)$$

es exacto y así $P \otimes X$ es proyectivo.

Como $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P^*, ?) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}, P \otimes ?)$, tenemos que probar que este último funtor es exacto. Si

$$0 \to U \to V \to W \to 0$$

es una sucesión exacta entonces

$$0 \to P \otimes U \to P \otimes V \to P \otimes W \to 0$$

es una sucesión exacta que se parte, ya que $P \otimes W$ es proyectivo, por lo anterior. Por lo tanto al aplicarle el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}, ?)$ vuelve a ser exacta, pues el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}, ?)$ es aditivo. $\square$

Hasta el final de esta sección $\mathcal{C}$ denotará una categoría de multifusión.

Lema 2.0.21. *Denotemos por $\mathbf{1} = \bigoplus_i \mathbf{1}_i$ la descomposición del objeto unidad en objetos simples. Si $i \neq j$ entonces $\mathbf{1}_i \ncong \mathbf{1}_j$.*

Es decir que las multiplicidades de los objetos simples que aparecen en en el objeto unidad son 1.

Demostración. Por el Lema 2.0.4 el anillo $\mathrm{End}(\mathbf{1})$ es conmutativo, luego ningún sumando en la descomposición de $\mathbf{1}$ por objetos simples puede aparecer más de una vez. $\square$

Lema 2.0.22. *Para todo objeto simple $X \in \mathcal{C}$ existen únicos i, j tales que*

$$\mathbf{1}_i \otimes X = X, \quad X \otimes \mathbf{1}_j = X.$$

Demostración. Como $X \simeq \mathbf{1} \otimes X \simeq \oplus_i \mathbf{1}_i \otimes X$ entonces existe un único i tal que $\mathbf{1}_i \otimes X \neq 0$ y en tal caso $X \simeq \mathbf{1}_i \otimes X$. La otra identidad se prueba de manera análoga. $\square$

Definición 2.0.23. [**ENO**] Sea $\mathcal{C}$ una categoría de multifusión. Se denotará por $\mathcal{C}_{ij}$ a la subcategoría abeliana plena de $\mathcal{C}$ cuyos objetos simples $X \in \mathcal{C}$ verifican que

$$\mathbf{1}_i \otimes X \neq 0, \quad X \otimes \mathbf{1}_j \neq 0.$$

Entonces hay una descomposición $\mathcal{C} = \bigoplus_{ij} \mathcal{C}_{ij}$. El producto tensorial de $\mathcal{C}$ restringido a estas subcategorías induce un funtor

$$\otimes : \mathcal{C}_{ij} \times \mathcal{C}_{jk} \to \mathcal{C}_{ik}.$$

En [**ENO**] se observa que las categorías $\mathcal{C}_{ii}$ son categorías tensoriales de fusión y son llamadas las *componentes de fusión* de $\mathcal{C}$.

CAPíTULO 3

Categorías módulo sobre categorías tensoriales

3.1. Generalidades

Así como la noción de categoría tensorial es una *categorificación* de la noción de anillo, las categorías módulos son una categorificación de la noción de módulo sobre un anillo.

Para el resto de la sección fijamos una categoría monoidal $(\mathcal{C}, \otimes, a, r, l, \mathbf{1})$. Por brevedad a veces la denotaremos simplemente por $\mathcal{C}$.

Definición 3.1.1. Una ***categoría módulo*** sobre $\mathcal{C}$ es una colección $(\mathcal{M}, \otimes, m, l)$ donde $\mathcal{M}$ es una categoría abeliana $\Bbbk$-lineal, $\otimes$ es un funtor biexacto $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, $\{m_{X,Y,M} : (X \otimes Y) \otimes M \to X \otimes (Y \otimes M) : X, Y \in \mathcal{C}, M \in \mathcal{M}\}$, y $\{l_M : \mathbf{1} \otimes M \to M : M \in \mathcal{M}\}$ son isomorfismos naturales tales que para todo $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ y $M \in \mathcal{M}$

$$m_{X,Y,Z\otimes M}\, m_{X\otimes Y,Z,M} = (\mathrm{id}_X \otimes m_{Y,Z,M})\, m_{X,Y\otimes Z,M}\, (a_{X,Y,Z} \otimes \mathrm{id}_M), \tag{3.1.1}$$

$$(\mathrm{id}_X \otimes l_M) m_{X,\mathbf{1},M} = r_X \otimes \mathrm{id}_M\, . \tag{3.1.2}$$

Es decir que los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
 & ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes M \arrow[dl, "a_{X,Y,Z}\otimes id"'] \arrow[dr, "m_{X\otimes Y,Z,M}"] & \\
(X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes M \arrow[d, "m_{X,Y\otimes Z,M}"] & & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes M) \arrow[d, "m_{X,Y,Z\otimes M}"'] \\
X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes M) \arrow[rr, "id\otimes m_{Y,Z,M}"] & & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes M))
\end{tikzcd} \tag{3.1.3}$$

y

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes \mathbf{1}) \otimes M \arrow[rr, "m_{X,\mathbf{1},Y}"] \arrow[dr, "r_X\otimes id"'] & & X \otimes (\mathbf{1} \otimes M) \arrow[dl, "id\otimes l_M"] \\
 & X \otimes M. &
\end{tikzcd} \tag{3.1.4}$$

para todo $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ y $M \in \mathcal{M}$.

Observar que hay un abuso de notación al denotar por $\otimes$ tanto el producto tensorial en $\mathcal{C}$ como la “acción”de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{M}$.

Ejemplo 3.1.2. Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana $\Bbbk$-lineal, entonces $\mathcal{A}$ es una categoría módulo sobre $\operatorname{Fun}(\mathcal{A},\mathcal{A})$ vía la evaluación; $F\otimes V = F(V)$, $V\in\mathcal{A}, F\in\operatorname{Fun}(\mathcal{A},\mathcal{A})$.

Definición 3.1.3. Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ categorías módulo sobre $\mathcal{C}$. Un ***funtor de categorías módulo*** o ***funtor de entrelazamiento*** entre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ es un par (F,c), donde $F:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ es un funtor $\Bbbk$-lineal y $c_{X,M}: F(X\otimes M)\to X\otimes F(M)$ es una familia de isomorfismos naturales tales que

$$m_{X,Y,F(M)}c_{X\otimes Y,M} = (\mathrm{id}_X\otimes c_{Y,M})c_{X,Y\otimes M}F(m_{X,Y,M}), \tag{3.1.5}$$

$$l_{F(M)}c_{\mathbf{1},M} = F(l_M), \tag{3.1.6}$$

para todo $X,Y\in\mathcal{C}$ y para todo $M\in\mathcal{M}$. El conjunto de todos los funtores de entrelazamiento entre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ es denotado por $\operatorname{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{N})$.

Si $(F,c):\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ y $(G,d):\mathcal{N}\to\mathcal{R}$ son funtores de entrelazamiento entonces $(G\circ F,b):\mathcal{M}\to\mathcal{R}$ es un funtor de entrelazamiento, donde $b_{X,M} := d_{X,F(M)}G(c_{X,M})$, $X\in\mathcal{C}, M\in\mathcal{M}$.

Definición 3.1.4. Sean $(F,c),(G,d):\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ dos funtores de entrelazamiento. Diremos que los funtores (F,c) y (G,d) son *equivalentes como funtores de entrelazamiento*, y se denotará $(F,c)\simeq(G,d)$, si existe un isomorfismo natural $\theta: F\to G$ que hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd} F(X\otimes M) \arrow[r, "\theta_{X\otimes M}"] \arrow[d, "c_{X,M}"'] & G(X\otimes M) \arrow[d, "d_{X,M}"] \\ X\otimes F(M) \arrow[r, "\mathrm{id}_X\otimes\theta_M"'] & X\otimes G(M), \end{tikzcd} \tag{3.1.7}$$

sea conmutativo para todo $X\in\mathcal{C}, M\in\mathcal{M}$.

La definición anterior no aparece en los trabajos de Ostrik ni en [**EO**]. Sin embargo parece razonable y va en concordancia con la definición de transformación natural monoidal.

Dos categorías módulo $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ sobre $\mathcal{C}$ se dicen *equivalentes* si existen dos funtores de entrelazamiento $(F,c):\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ y $(G,d):\mathcal{N}\to\mathcal{M}$ tales que $F\circ G\simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{N}}$ y $G\circ F\simeq\mathrm{Id}_{\mathcal{M}}$ como funtores de entrelazamiento.

Sea $\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2$ dos categorías módulo sobre $\mathcal{C}$. La suma directa de categorías $\mathcal{M}_1\bigoplus\mathcal{M}_2$ es nuevamente una categoría módulo sobre $\mathcal{C}$ donde la acción es

$$\mathcal{C}\times\mathcal{M}_1\oplus\mathcal{M}_2\to\mathcal{M}_1\oplus\mathcal{M}_2,\quad X\otimes(M,N) = (X\otimes M, X\otimes N).$$

Una categoría módulo $\mathcal{M}$ es *indescomponible* si no es equivalente a la suma directa de dos categorías módulo no nulas.

Lema 3.1.5. *Las siguientes nociones son equivalentes.*

(i) *Estructuras de categoría módulo* $(\mathcal{M},\otimes,m,l)$ *sobre* $\mathcal{C}$.
(ii) *Funtores tensoriales* $(F,\zeta,\phi):\mathcal{C}\to\operatorname{End}(\mathcal{M})$ *exactos y fieles.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $(\mathcal{M}, \otimes, m, l)$ una categoría módulo sobre $\mathcal{C}$. Definamos $F : \mathcal{C} \to \mathrm{End}\,(\mathcal{M})$ por $F(X)(M) = X \otimes M$ para todo $X \in \mathcal{C}, M \in \mathcal{M}$. El funtor $F(X)$ es exacto para todo $X \in \mathcal{C}$ debido a la exactitud de $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ en el segundo argumento y F es exacto por la exactitud de $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ en el primer argumento. Para todo $X, Y \in \mathcal{C}$ sea

$$\zeta_{X,Y} : F(X) \circ F(Y) \to F(X \otimes Y),$$

definida por $(\zeta_{X,Y})_M = m^{-1}_{X,Y,M}$ para todo $M \in \mathcal{M}$. Definamos $\phi : F(\mathbf{1}) \to \mathrm{Id}$ por $\phi_M = l_M$. La identidad (2.0.2) es equivalente a (3.1.1) y la identidad (2.0.3) es equivalente a (3.1.2). Luego $(F, \zeta, \phi) : \mathcal{C} \to \mathrm{End}\,(\mathcal{M})$ es tensorial. La construcción recíproca es ahora bastante clara. ☐

Combinando el Lema 3.1.5 con el Teorema 1.4.2 tenemos el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 3.1.6. *Sea R un álgebra semisimple de dimensión finita. Las siguientes nociones son equivalentes.*

(i) *Estructuras de categoría módulo de ${}_R\mathcal{M}$ sobre $\mathcal{C}$,*
(ii) *R-funtores de fibra para $\mathcal{C}$.*

☐

EJEMPLO 3.1.7. i) Toda categoría tensorial $\mathcal{C}$ es una categoría módulo sobre sí misma.

Más generalmente, si $\mathcal{D}$ es una categoría tensorial y $(\Psi, \zeta, \phi) : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un funtor tensorial entonces $\mathcal{D}$ es una categoría módulo sobre $\mathcal{C}$ de la siguiente manera. La acción $\overline{\otimes} : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ está definida por $X \overline{\otimes} V := \Psi(X) \otimes V$, para todo $X \in \mathcal{C}$, $V \in \mathcal{D}$, y $m_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \overline{\otimes} Z \to X \overline{\otimes} (Y \overline{\otimes} Z)$ está determinado por

$$m_{X,Y,Z} = a_{\Psi(X),\Psi(Y),Z}(\zeta^{-1}_{X,Y} \otimes \mathrm{id}_Z).$$

ii) Si $\mathcal{C}$ es una categoría tensorial y A es un álgebra en $\mathcal{C}$, entonces la categoría $\mathcal{C}_A$ de A-módulos a derecha en $\mathcal{C}$ es una categoría módulo sobre $\mathcal{C}$ vía:

$$\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C}_A \to \mathcal{C}_A$$
$$(V, M) \mapsto V \otimes M,$$

donde la acción a derecha de A sobre $V \otimes M$ está dada sobre el segundo tensorando, es decir $\rho_{V \otimes M} = (\mathrm{id}_V \otimes \rho_M) a_{V,M,A}$. En este caso $m_{X,Y,M} = a_{X,Y,M}$, para todo $X, Y\mathcal{C}$, $M \in \mathcal{C}_A$.

iii) Si $\mathrm{Rep}(H)$ es la categoría de representaciones de dimensión finita de un álgebra de Hopf H y K es un H-comódulo álgebra a izquierda vía $\lambda : K \to H \otimes K$, entonces la categoría de representaciones de K de dimensión finita, ${}_K\mathfrak{m}$, es una categoría módulo sobre $\mathrm{Rep}(H)$ como sigue:

$$\otimes : \mathcal{C} \times {}_K\mathfrak{m} \to {}_K\mathfrak{m},$$
$$(X, V) \mapsto X \otimes_{\Bbbk} V,$$

y la acción de K sobre $X \otimes_{\Bbbk} V$ es $k \cdot (x \otimes v) := k_{(-1)} \cdot x \otimes k_{(0)} \cdot v$.

iv) Si $\mathcal{C}$ es una categoría de multifusión, recordemos la descomposición $\mathcal{C} = \bigoplus_{i,j} \mathcal{C}_{ij}$ descripta en lo último del capítulo 2. Sea $\mathcal{M}_k = \bigoplus_j \mathcal{C}_{jk}$. Entonces el producto tensorial de $\mathcal{C}$ induce una estructura de categoría módulo en $\mathcal{M}_k$.

Sean H un álgebra de Hopf y K un H-comódulo álgebra. En las siguiente proposición explicamos cuando la categoría módulo ${}_K\mathfrak{m}$ es indescomponible.

Proposición 3.1.8. *${}_K\mathfrak{m}$ es una categoría módulo indescomponible si y sólo si no existen ideales biláteros I, J H-coestables tales que $K = I \oplus J$.*

Demostración. Asumamos que K posee ideales biláteros I, J H-coestables tales que $K = I \oplus J$. Como I, J son ideales H-subcomódulos, las álgebras cociente K/I y K/J son H-comódulos álgebras a izquierda. Las categorías módulo ${}_{K/I}\mathfrak{m}$ y ${}_{K/J}\mathfrak{m}$ son subcategorías módulo de ${}_K\mathfrak{m}$. Dado $M \in {}_K\mathfrak{m}$, sean $M_1 = \{m \in M : I.m = 0\}$, $M_2 = \{m \in M : J.m = 0\}$; claramente, $M_1 \in {}_{K/I}\mathfrak{m}$ y $M_2 \in {}_{K/J}\mathfrak{m}$. Descomponemos $1 = i + j$, $i \in I$, $j \in J$. Sea $m \in M$; entonces $m = im + jm$. Ya que $IJ \subset I \cap J = 0$, $jm \in M_1$, y similarmente $im \in M_2$, por lo tanto $M = M_1 + M_2$. También, si $m \in M_1 \cap M_2$, $m = 0$. Esto muestra que $M = M_1 \oplus M_2$, por lo tanto ${}_K\mathfrak{m} \simeq {}_{K/I}\mathfrak{m} \times {}_{K/J}\mathfrak{m}$.

Asumamos que ${}_K\mathfrak{m} \simeq \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$, donde $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ son subcategorías módulo de ${}_K\mathcal{M}$. Para todo $M \in {}_K\mathfrak{m}$ existen $M_1 \in \mathcal{M}_1$ y $M_2 \in \mathcal{M}_2$ tales que $M = M_1 \oplus M_2$. Si $\varphi : M \to N$ es un morfismo en ${}_K\mathfrak{m}$ entonces $\varphi(M_1) \subseteq N_1$, $\varphi(M_2) \subseteq N_2$.

Considerando $K \in {}_K\mathfrak{m}$, existen $J \in \mathcal{M}_1$, $I \in \mathcal{M}_2$ tales que $K = J \oplus I$. Claramente I y J son H-subcomódulo ideales a izquierda de K. Sea $j \in J$ y sea $\eta_j : K \to K$ la expansión de j, es decir $\eta_j(x) = xj$, $x \in K$. Como η_j es un morfismo de K-módulos, $\eta_j(I) \subseteq I$. Luego, $IJ \subseteq I$ y I son ideales biláteros. Similarmente, J es un ideal bilátero.

Notar que estas construcciones son una la inversa de la otra.

□

A continuación mostraremos algunos ejemplos más concretos de categorías módulo.

Ejemplo 3.1.9. Sea H un álgebra de Hopf y J un torcimiento para H. Por el Lema 2.0.11 existe un funtor tensorial $\mathcal{F} : \mathrm{Rep}(H) \to Vect_{\Bbbk}$. De acuerdo al ejemplo 3.1.7 (i) existe una categoría módulo, que denotaremos por $\mathcal{M}_J$, sobre $\mathrm{Rep}(H)$ cuya categoría abeliana subyacente es la categoría de espacios vectoriales, en particular es de rango 1.

Si J^x es un torcimiento equivalente por calibre a J entonces las categorías módulos $\mathcal{M}_J, \mathcal{M}_{J^x}$ son equivalentes. La equivalencia la da el funtor de entrelazamiento $(F, c) : \mathcal{M}_J \to \mathcal{M}_{J^x}$, donde $F(M) = M$ y para todo $V \in \mathrm{Rep}(H), M \in \mathcal{M}_J$, los isomorfismos $c_{V,M} : V \otimes_{\Bbbk} M \to V \otimes_{\Bbbk} M$ están definidos por

$$c_{V,M}(v \otimes m) = x^{-1} \cdot v \otimes m,$$

$v \in V, m \in M$. En este caso la identidad (3.1.1) es equivalente a (1.3.3).

Ejemplo 3.1.10. [O1] Sea G un grupo finito y $\mathcal{C} := \mathrm{Rep}(G)$ la categoría tensorial de representaciones lineales de dimensión finita sobre $\Bbbk$ de G.

Para cada par (F, ψ), donde $F \subseteq G$ es un subgrupo y $\psi \in Z^2(F, \Bbbk^\times)$ es un 2-cociclo normalizado, existe asociado una categoría módulo $\mathcal{M}(F, \psi)$ sobre $\mathcal{C}$. Como categoría abeliana $\mathcal{M}(F, \psi) = {}_{\Bbbk_\psi F}\mathfrak{m}$.

Como $\Bbbk_\psi F$ es un $\Bbbk G$-comódulo álgebra vía $\lambda : \Bbbk_\psi F \to \Bbbk G \otimes \Bbbk_\psi F$, $\lambda(f) = f \otimes f$ para todo $f \in F$, la estructura de categoría módulo en $\mathcal{M}(F, \psi)$ es la del ejemplo 3.1.7 (iii).

La categoría módulo $\mathcal{M}(F, \psi)$ es indescomponible y no depende de la clase de representante $\psi \in H^2(F, \Bbbk^\times)$.

Demostración. Que la categoría $\mathcal{M}(F, \psi)$ es indescomponible es consecuencia de la Proposición 3.1.8; ya que el álgebra $\Bbbk_\psi F$ no posee ideales no triviales $\Bbbk G$-coestables. De hecho si $0 \neq I \subseteq \Bbbk_\psi F$ es un ideal G-graduado, como la multiplicación por los elementos de F son isomorfismos y las componentes homogéneas de $\Bbbk_\psi F$ son de dimensión 1 entonces necesariamente $I = \Bbbk_\psi F$.

Ahora probemos que $\mathcal{M}(F, \psi)$ no depende de la clase de representante de ψ en $H^2(F, \Bbbk^\times)$. Sea $\chi : G \to \Bbbk^\times$ una 1-cocadena, y sea $\psi' = \psi\, d\chi$. Definamos el funtor $\Omega : \mathcal{M}(F, \psi) \to \mathcal{M}(F, \psi')$ de la siguiente forma. Si $M \in \mathcal{M}(F, \psi)$, $\Omega(M) = M$ como espacios vectoriales, pero la acción de F está dada como sigue. Si $m \in M, x \in F$ ponemos

$$x \triangleright m = \chi(x) x \cdot m.$$

Es fácil probar que con esta acción M es un $\Bbbk_{\psi'} F$-módulo. El funtor Ω da la equivalencia de categorías módulo que buscabamos.

□

Ostrik probó que toda categoría módulo semisimple indescomponible sobre $\mathrm{Rep}(G)$ es equivalente a una de éstas. Esto último se demostrará en la sección 3.3.

Supongamos que $\mathcal{M}$ es una categoría módulo sobre $\mathcal{C}$.

Lema 3.1.11. *EL grupo de Grothendieck $K_0(\mathcal{M})$ es un $K_0(\mathcal{C})$-módulo vía:*

$$K_0(\mathcal{C}) \times K_0(\mathcal{M}) \to K_0(\mathcal{M}), \quad [X] \cdot [M] = [X \otimes M],$$

para todo $X \in \mathcal{C}, M \in \mathcal{M}$.

Demostración. La buena definición se deduce de la exactitud del funtor $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$. □

Antes de continuar probemos el siguiente resultado que será utilizado más adelante.

Lema 3.1.12. *Sean A, B álgebras en $\mathcal{C}$ y $(F, c) : \mathcal{C}_A \to \mathcal{C}_B$ un funtor de entrelazamiento. El objeto $F(A)$ posee una estructura natural de A-módulo a izquierda en $\mathcal{C}$ que hace de $F(A)$ un objeto en ${}_A\mathcal{C}_B$*

Demostración. La estructura A-módulo a izquierda en $F(A)$ está dada por

$$\rightharpoonup : A \otimes F(A) \to F(A), \quad \rightharpoonup = F(m)\, c^{-1}_{A,A}, \tag{3.1.8}$$

donde $m : A \otimes A \to A$ es la multiplicación de A. Probemos que esta acción es asociativa, esto equivale a probar la siguiente identidad:

$$F(m)\, c^{-1}_{A,A}\, (m \otimes \mathrm{id}) = F(m)\, c^{-1}_{A,A}\, (\mathrm{id}_A \otimes F(m) c^{-1}_{A,A})\, a_{A,A,F(A)}.$$

Como m es un morfismo en $\mathcal{C}$, la naturalidad de c en el primer argumento implica que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
F((A\otimes A)\otimes A) \arrow[r, "c_{A\otimes A,A}"] \arrow[d, "F(m\otimes \mathrm{id})"'] & (A\otimes A)\otimes F(A) \arrow[d, "m\otimes \mathrm{id}"] \\
F(A\otimes A) \arrow[r, "c_{A,A}"'] & A\otimes F(A),
\end{tikzcd}$$

conmuta. Similarmente, como $F(m)$ es un morfismo en $\mathcal{C}_A$, la naturalidad de c en el segundo argumento implica que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
F(A\otimes(A\otimes A)) \arrow[r, "c_{A,A\otimes A}"] \arrow[d, "F(\mathrm{id}\otimes m)"'] & A\otimes F(A\otimes A) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes F(m)"] \\
F(A\otimes A) \arrow[r, "c_{A,A}"'] & A\otimes F(A),
\end{tikzcd}$$

conmuta. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
F(m)\, c^{-1}_{A,A}\,(m\otimes \mathrm{id}) &= F(m)\, F(m\otimes \mathrm{id})\, c^{-1}_{A\otimes A,A} \\
&= F(m)\, F(\mathrm{id}\otimes m)\, F(a_{A,A,A})\, c^{-1}_{A\otimes A,A} \\
&= F(m)\, F(\mathrm{id}\otimes m)\, c^{-1}_{A,A\otimes A}\,(\mathrm{id}_A\otimes c^{-1}_{A,A})\, a_{A,A,F(A)} \\
&= F(m)\, c^{-1}_{A,A}\,(\mathrm{id}_A\otimes F(m) c^{-1}_{A,A})\, a_{A,A,F(A)}.
\end{aligned}$$

La primera igualdad por el primer diagrama, la segunda por la asociatividad del producto de A, la tercera por (3.1.5) y finalmente la cuarta por la conmutatividad del segundo diagrama. Como $\rightharpoonup$ es un morfismo en $\mathcal{C}_B$, ya que es composición de dos morfismos de B-módulos, $F(A)$ es un (A,B)-bimódulo.

La acción $\rightharpoonup$ es unitaria es consecuencia de la naturalidad de c y de que del producto de A posee unidad. $\square$

Como consecuencia del Lema anterior tenemos el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 3.1.13. *Dadas dos álgebras $A, B \in \mathcal{C}$ existe una equivalencia de categorías*

$${}_A\mathcal{C}_B \simeq \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}_A, \mathcal{C}_B).$$

DEMOSTRACIÓN. Definamos los funtores

$$\Psi : \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}_A, \mathcal{C}_B) \to {}_A\mathcal{C}_B \text{ y } \Phi : {}_A\mathcal{C}_B \to \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}_A, \mathcal{C}_B)$$

de la siguiente manera. Sea $(F, c) \in \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}_A, \mathcal{C}_B)$, entonces $\Psi(F, c) = F(A)$ con estructura de A-módulo a izquierda como en (3.1.8).

Sea $W \in {}_A\mathcal{C}_B$, definamos $\Phi(W) : \mathcal{C}_A \to \mathcal{C}_B$, $\Phi(W)(M) := M\otimes_A W$ para todo $M \in \mathcal{C}_A$, con acción a derecha de B en el segundo tensorando. Para cada bimódulo W y para cada $X \in \mathcal{C}, M \in \mathcal{C}_A$ definamos

$$c^W_{X,M} : (X \otimes M)\otimes_A W \to X \otimes (M\otimes_A W), \;\; c^W_{X,M}((x\otimes m)\otimes b) := x\otimes(m\otimes b),$$

para todo $x \in X, m \in M, b \in W$. Estos mapas son isomorfismos naturales que hacen de $\Phi(W)$ un funtor de entrelazamiento. Claramente este par de funtores da una equivalencia de categorías.

□

Uno de los principales objectivos de la teoría es clasificar las categorías módulo. Sin embargo, este propósito es demasiado amplio ya que, en particular, contiene al problema de clasificar las álgebras sobre $\Bbbk$, pues toda álgebra determina una categoría módulo sobre $\mathrm{Vect}_{\Bbbk}$. Por esta razón solo se tomará en cuenta una clase fundamental de categorías módulo introducidas por Etingof y Ostrik, las llamadas *exactas*.

DEFINICIÓN 3.1.14 ([**EO**]). Una categoría módulo $\mathcal{M}$ sobre $\mathcal{C}$ se dice *exacta* si para todo objecto proyectivo $P \in \mathcal{C}$ y todo objecto $M \in \mathcal{M}$, $P \otimes M$ es proyectivo.

LEMA 3.1.15. *Toda categoría tensorial finita $\mathcal{C}$ considerada como categoría módulo sobre sí misma es exacta.*

DEMOSTRACIÓN. Sigue de la Proposición 2.0.20. □

LEMA 3.1.16. *Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita y sea $K \subseteq H$ una subálgebra de Hopf. Entonces la categoría módulo ${}_K\mathfrak{m}$ (como en el ejemplo 3.1.7 (iii)) es exacta sobre* $\mathrm{Rep}(H)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $P \in \mathrm{Rep}(H)$ un objeto proyectivo y sea $M \in {}_K\mathfrak{m}$. Un resultado de Larson y Sweedler nos dice que toda álgebra de Hopf de dimensión finita es un álgebra de Frobenius, ver [**Mo**, Thm. 2.1.3], y por lo tanto, cuasi-Frobenius. En vista de este hecho bastará con probar que $P \otimes_{\Bbbk} M$ es un objeto inyectivo en ${}_K\mathfrak{m}$.

Sean U, V objetos en ${}_K\mathfrak{m}$ y $\iota : U \to V$, $f : U \to P \otimes_{\Bbbk} M$ morfismos de K-módulos, donde ι es inyectivo. Definamos $\widehat{f} : U \otimes M^* \to P$ por

$$\widehat{f} = (\mathrm{id}_P \otimes ev_M)(f \otimes \mathrm{id}),$$

donde $ev_M : M \otimes M^* \to \Bbbk$ es la evaluación. Es inmediato comprobar que $\widehat{f}$ es un morfismo de K-módulos, donde aquí la estructura de K-módulo sobre M^* es vía la inversa de la antípoda, es decir: $\langle k \cdot \alpha, m \rangle = \langle \alpha, \mathcal{S}^{-1}(k) \cdot m \rangle$, para todo $k \in K$, $\alpha \in M^*$, $m \in M$.

Como P es proyectivo como H-módulo, lo es también como K-módulo, Proposición 1.2.2, y por lo tanto es inyectivo. Luego existe un morfismo de K-módulos g que hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd} U \otimes M^* \arrow[rr, "\iota \otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr, "\widehat{f}"'] & & V \otimes M^* \arrow[dl, "g"] \\ & P & \end{tikzcd} \tag{3.1.9}$$

sea conmutativo. Luego, pongamos $\widetilde{g} : V \to P \otimes M$ el morfismo definido por

$$\widetilde{g}(v) = \sum_i g(v \otimes m^i) \otimes m_i,$$

para todo $v \in V$, donde (m_i), (m^i) son bases duales de M y M^* respectivamente. Nuevamente no es difícil comprobar que $\widetilde{g}$ es un morfismo de K-módulos y que $\widetilde{g}\,\iota = f$. Así $P\otimes_{\Bbbk} M$ es un objeto inyectivo en ${}_K\mathfrak{m}$.

$\square$

Observar que toda categoría módulo semisimple es exacta. Si $\mathbf{1} \in \mathcal{C}$ es un objeto proyectivo entonces toda categoría módulo exacta sobre $\mathcal{C}$ es semisimple. Si $\mathcal{C}$ es finita y el objeto unidad $\mathbf{1}$ es suma de objetos simples, sigue que $\mathbf{1} \in \mathcal{C}$ es un objeto proyectivo si y sólo si $\mathcal{C}$ es una categoría de multifusión.

Para el resto de la sección asumiremos que $\mathcal{C}$ es una categoría tensorial finita y asumiremos que las categoría módulos en consideración poseen una cantidad finita de clases de isomorfismos de objetos simples, los espacios Hom son de dimensión finita y que todo objeto es de longitud finita.

En la siguiente Proposición se enumeran ciertas propiedades de las categorías módulos exactas sobre categorías tensoriales finitas. Primero fijemos una notación. Si $(P(\mathbf{1}), f)$ es el cubrimiento proyectivo del objeto unidad y $M \in \mathcal{M}$, denotamos

$$p_M : P(\mathbf{1})\otimes M \xrightarrow{f\otimes \mathrm{id}_M} \mathbf{1}\otimes M \xrightarrow{\simeq} M. \tag{3.1.10}$$

Notar que para todo M el morfismo p_M es suryectivo por la exactitud de la acción $\otimes$.

Proposición 3.1.17. [**EO**, Lemma 3.4, 3.5] *Sea $\mathcal{M}$ una categoría módulo sobre $\mathcal{C}$ exacta. Entonces:*

(i) *La categoría $\mathcal{M}$ posee suficientes proyectivos, en particular es finita.*
(ii) *Todo objecto proyectivo de $\mathcal{M}$ es inyectivo y viceversa.*

Demostración. (i) Sea $M \in \mathcal{M}$ un objeto arbitrario. Como $\mathcal{M}$ es exacta y $P(\mathbf{1})$ un objeto proyectivo, $P(\mathbf{1})\otimes M$ es proyectivo y el mapa $p_M : P(\mathbf{1})\otimes M \to M$ es suryectivo.

(ii) Comencemos probando la siguiente afirmación.

Afirmación 3.1.17.1. *Si $P \in \mathcal{C}$ es proyectivo y $M \in \mathcal{M}$ entonces $P\otimes M$ es inyectivo.*

Demostración de la afirmación. Sean $U, V \in \mathcal{M}$, $\iota : V \hookrightarrow U$ un morfismo inyectivo y $f : V \to P\otimes M$ un morfismo cualquiera. Por la Proposición 2.0.20 P^* es proyectivo y por lo tanto la sucesión exacta

$$0 \to P^*\otimes V \overset{\mathrm{id}\otimes\iota}{\hookrightarrow} P^*\otimes U \to P^*\otimes Coker(\iota) \to 0$$

se parte, ya que $\mathcal{M}$ es exacta. Entonces existe un epimorfismo $\pi : P^*\otimes U \to P^*\otimes V$ tal que $\pi \circ (\mathrm{id}\otimes\iota) = \mathrm{id}_{P^*\otimes V}$. Sea $g : U \to P\otimes M$ la aplicación definida como la composición

$$U \simeq \mathbf{1}\otimes U \xrightarrow{coev_P\otimes \mathrm{id}_U} (P\otimes P^*)\otimes U \xrightarrow{a_{P,P^*,U}} P\otimes(P^*\otimes U) \xrightarrow{\mathrm{id}_P\otimes\pi} P\otimes(P^*\otimes V) \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes f}$$
$$\xrightarrow{\mathrm{id}\otimes f} P\otimes(P^*\otimes P\otimes M) \xrightarrow{\mathrm{id}_P\otimes ev_P\otimes \mathrm{id}_M} P\otimes(\mathbf{1}\otimes M) \simeq P\otimes M$$

donde $ev_P : P^*\otimes P \to \mathbf{1}$ es la evaluación y $coev_P : \mathbf{1} \to P\otimes P^*$ la coevaluación. Es decir que

$$g = (\mathrm{id}_P\otimes l_M)(\mathrm{id}_P\otimes ev_P\otimes \mathrm{id}_M)(\mathrm{id}_{P\otimes P^*}\otimes f)(\mathrm{id}_P\otimes\pi)a_{P,P^*,U}(coev_P\otimes \mathrm{id}_U)l_U^{-1}.$$

Es inmediato comprobar, usando los axiomas de rigidez y la naturalidad de l, que $g \circ \iota = f$. □

Ahora, sea $M \in \mathcal{M}$ un objeto proyectivo entonces existe $\iota_M : M \to P(\mathbf{1})\otimes M$ monomorfismo tal que $p_M \circ \iota_M = \mathrm{id}_M$. Por la afirmación 3.1.17.1 $P(\mathbf{1})\otimes M$ es inyectivo y por lo tanto M lo es.

Ahora sea $Q \in \mathcal{M}$ un objeto inyectivo. Probemos que es proyectivo. La transpuesta de $f : P(\mathbf{1}) \twoheadrightarrow \mathbf{1}$ es un morfismo inyectivo

$$\mathbf{1} \simeq \mathbf{1}^* \hookrightarrow P(\mathbf{1})^*,$$

pues el funtor de dualidad es exacto, Proposición 2.0.6 (1).

Por lo tanto $Q \simeq \mathbf{1}\otimes Q \hookrightarrow P(\mathbf{1})^*\otimes Q$, y como Q es inyectivo Q es un sumando directo de $P(\mathbf{1})^*\otimes Q$ que es proyectivo pues $\mathcal{M}$ es exacta. Luego Q es proyectivo, y esto concluye la prueba de la Proposición.

□

Observación 3.1.18. La parte (ii) de la Proposición 3.1.17 implica que si para alguna álgebra de dimensión finita K, la categoría ${}_K\mathcal{M}$ es una categoría módulo exacta sobre alguna categoría tensorial finita, entonces K es un álgebra cuasi-Frobenius, ya que con la representación regular a izquierda es un objeto proyectivo.

Corolario 3.1.19. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial finita, si $\mathcal{C}_A$ es una categoría módulo exacta entonces A es un objeto inyectivo como A-módulo a derecha.*

Demostración. El corolario sigue de la Proposición 3.1.17 (ii) ya que $A \in \mathcal{C}_A$ es claramente un objeto proyectivo.

□

Proposición 3.1.20. [**EO**, Prop. 3.9] *Sea $\mathcal{M}$ una categoría módulo sobre $\mathcal{C}$. Entonces $\mathcal{M}$ es suma directa de categorías módulo exactas indescomponibles.*

Solo daremos el esquema de la demostración siguiendo de cerca la idea de Etingof y Ostrik.

En el conjunto $\mathrm{Irr}(\mathcal{M})$ introducimos la siguiente relación: dos objetos $U, V \in \mathrm{Irr}(\mathcal{M})$ están relacionados, y se denotará $U \sim V$ si existe una función no nula (y por lo tanto suryectiva) $X\otimes U \twoheadrightarrow V$ para algún $X \in \mathcal{C}$.

En [**EO**] se introduce otra relación. Sin embargo la definida por los autores coincide con la nuestra, ambas son conciliadas en el siguiente Lema.

Lema 3.1.21. *$U \sim V$ si y solo sí V aparece como un subcociente de $X\otimes U$ para algún $X \in \mathcal{C}$.*

Demostración. Ver [**EO**, Lemma 3.8].

□

Lema 3.1.22. *La relación $\sim$ es una relación de equivalencia.*

Demostración. *Reflexividad*: $\mathbf{1}\otimes U \simeq U$.

Simetría: Asumamos que $U \sim V$, y sea $f : X \otimes U \twoheadrightarrow V$ un morfismo no nulo. f induce un monomorfismo $\hat{f} : U \hookrightarrow {}^*X \otimes V$ y como $\mathcal{M}$ es exacta el morfismo

$$\mathrm{id} \otimes \hat{f} : P(\mathbf{1}) \otimes U \to P(\mathbf{1}) \otimes ({}^*X \otimes V)$$

es inyectivo. Por la Proposición 3.1.17 (ii) $P(\mathbf{1}) \otimes U$ es inyectivo y por lo tanto existe un epimorfismo $\pi : P(\mathbf{1}) \otimes ({}^*X \otimes V) \to P(\mathbf{1}) \otimes U$ tal que $\pi\,(\mathrm{id} \otimes \hat{f}) = \mathrm{id}$. Esto implica que la aplicación

$$P(\mathbf{1})^* \otimes P(\mathbf{1}) \otimes ({}^*X \otimes V) \xrightarrow{\mathrm{id}_{P(\mathbf{1})^*} \otimes \pi} P(\mathbf{1})^* \otimes P(\mathbf{1}) \otimes U \xrightarrow{ev_{P(\mathbf{1})} \otimes \mathrm{id}} U$$

es suryectiva y por lo tanto no nula. Luego $V \sim U$.

Transitividad: Asumamos que $U \sim V$, $V \sim W$, y sean $f : X \otimes U \to V$, $g : Y \otimes V \to W$ no nulas, entonces

$$(Y \otimes X) \otimes U \xrightarrow{m_{Y,X,U}} Y \otimes (X \otimes U) \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes f} Y \otimes V \xrightarrow{g} W,$$

es no nula, pues es composición de epimorfismos por la exactitud de la acción. Luego $U \sim W$.

$\square$

Entonces nos queda el conjunto $\mathrm{Irr}(\mathcal{M})$ particionado en calses de equivalencia:

$$\mathrm{Irr}(\mathcal{M}) = \coprod_i \mathcal{R}_i.$$

Para cada i definamos $\mathcal{M}_i$ como la subcategoría plena de $\mathcal{M}$ que consiste de objetos M cuyos subcocientes simples U pertenecen a $\mathcal{R}_i$. Claramente la clase de equivalencia de los objetos simples de $\mathcal{M}_i$ es $\mathcal{R}_i$.

LEMA 3.1.23. *Para todo i la categoría $\mathcal{M}_i$ es una categoría módulo exacta sobre $\mathcal{C}$.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [**EO**, pag. 11]. $\square$

IDEA DE LA DEMOSTRACIÓN DE LA PROPOSICIÓN 3.1.20. Se prueba que $\mathcal{M} = \oplus_i \mathcal{M}_i$. Para más detalles ver [**EO**, Proposition 3.9].

$\square$

La siguiente proposición da una caracterización de las categorías módulo exactas.

PROPOSICIÓN 3.1.24. *Sean $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ dos categorías módulo sobre $\mathcal{C}$. Entonces $\mathcal{M}$ es exacta si y sólo si todo funtor de entrelazamiento $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ es exacto.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [**EO**, Prop.3.11] y [**EO**, Prop.3.16]. $\square$

3.2. El Hom interno

Una de las herramientas principales en el estudio de categorías módulo es la noción del Hom interno. A lo largo de esta sección se asumirá que $\mathcal{C}$ es una categoría tensorial finita y que $\mathcal{M}$ es una categoría módulo exacta sobre $\mathcal{C}$.

DEFINICIÓN 3.2.1. Para cada par de objectos $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ el funtor

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{M}}(?\otimes M_1, M_2) : \mathcal{C} \to Vect_{\Bbbk}$$

es exacto a izquierda y por lo tanto representable, Teorema 1.4.3. Se define a $\underline{\operatorname{Hom}}(M_1, M_2) \in \mathcal{C}$ como el objecto representando dicho funtor, es decir que para todo $X \in \mathcal{C}$ existen isomorfismos naturales

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \underline{\operatorname{Hom}}(M_1, M_2)) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{M}}(X\otimes M_1, M_2).$$

EJEMPLO 3.2.2. Ya vimos que toda categoría tensorial $\mathcal{C}$ es una categoría módulo sobre sí misma. En este caso el Hom interno es $\underline{\operatorname{Hom}}(X, Y) = Y\otimes X^*$ para todo $X, Y \in \mathcal{C}$. En particular si $\mathcal{C} = \operatorname{Rep}(H)$ es la categoría de representaciones de dimensión finita de un álgebra de Hopf H entonces para todo $X, Y \in \operatorname{Rep}(H)$ $\underline{\operatorname{Hom}}(X, Y) = \operatorname{Hom}_{\Bbbk}(X, Y)$, como H-módulos. Se puede verificar directamente que $\operatorname{Hom}_{\Bbbk}$ satisface los axiomas de Hom interno.

Para cada par de objectos $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ existe una "evaluación"

$$ev_{M_1M_2} : \underline{\operatorname{Hom}}(M_1, M_2)\otimes M_1 \to M_2, \tag{3.2.1}$$

que se obtiene como la imagén de la identidad bajo el isomorfismo

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\underline{\operatorname{Hom}}(M_1, M_2), \underline{\operatorname{Hom}}(M_1, M_2)) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{M}}(\underline{\operatorname{Hom}}(M_1, M_2)\otimes M_1, M_2).$$

Gracias a esta evaluación, para tres objetos $M_1, M_2, M_3 \in \mathcal{M}$ podemos definir una composición

$$\mu_{M_1,M_2,M_3} : \underline{\operatorname{Hom}}(M_2, M_3)\otimes\underline{\operatorname{Hom}}(M_1, M_2) \to \underline{\operatorname{Hom}}(M_1, M_3), \tag{3.2.2}$$

que se obtiene como imagen de la aplicación

$$ev_{M_2M_3}(\operatorname{id}\otimes ev_{M_1M_2})m_{\underline{\operatorname{Hom}}(M_2,M_3),\underline{\operatorname{Hom}}(M_1,M_2),M_1}$$

bajo el isomorfismo

$$\begin{aligned}&\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\underline{\operatorname{Hom}}(M_2, M_3)\otimes\underline{\operatorname{Hom}}(M_1, M_2), \underline{\operatorname{Hom}}(M_1, M_3))\\ &\simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{M}}((\underline{\operatorname{Hom}}(M_2, M_3)\otimes\underline{\operatorname{Hom}}(M_1, M_2))\otimes M_1, M_3).\end{aligned}$$

LEMA 3.2.3. [**EO**, pag. 13] *Para cada objeto $0 \neq M \in \mathcal{M}$ el Hom interno $A = \underline{\operatorname{Hom}}(M, M)$ es un álgebra en $\mathcal{C}$ con producto dado por $\mu_{M,M,M}$. Además el funtor*

$$\underline{\operatorname{Hom}}(M, ?) : \mathcal{M} \to \mathcal{C}_A$$

posee una estructura natural de funtor de entrelazamiento entre ambas categorías módulo.

□

En particular, como consecuencia de la Proposición 3.1.24 el funtor $\underline{\operatorname{Hom}}(M, ?) : \mathcal{M} \to \mathcal{C}_A$ es exacto.

En los siguientes ejemplos calcularemos el álgebra $\underline{\operatorname{Hom}}(M, M)$ para dos categorías módulo específicas sobre $\operatorname{Rep}(H)$, H un álgebra de Hopf de dimensión finita.

Ejemplo 3.2.4. Sea $J \in (H \otimes H)^{\times}$ un torcimiento para H. Recordemos la estructura de categoría módulo de $\mathcal{M}_J$ sobre $\mathrm{Rep}(H)$ del ejemplo 3.1.9. Sobre el espacio vectorial H tenemos otra estructura de coálgebra, que denotaremos por $H_{(J)}$, con comultiplicación dada por

$$\Delta_J : H \to H \otimes H, \quad \Delta_J(h) = J^{-1}\Delta(h),$$

para todo $h \in H$ y con counidad dada por ε. Resulta además que $H_{(J)}$ es un H-módulo coálgebra con la acción regular a izquierda y por lo tanto $(H_{(J)})^*$ es un H-módulo álgebra a izquierda. Resulta que

$$\underline{\mathrm{Hom}}\,(\Bbbk, \Bbbk) \simeq (H_{(J)})^* \tag{3.2.3}$$

como H-módulo álgebras.

La coálgebra $H_{(J)}$ fue considerada por Movshev [**Mov**] para clasificar torcimientos en álgebras de grupo. Ver también [**AEGN**], [**G**].

Demostración. Para cada $X \in \mathrm{Rep}(H)$ definamos las funciones

$$\phi_X : \mathrm{Hom}_H(X, (H_{(J)})^*) \to \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(X, \Bbbk), \quad \psi_X : \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(X, \Bbbk) \to \mathrm{Hom}_H(X, H^*)$$

por

$$\phi_X(\alpha)(x) = \alpha(x)(1), \quad \psi_X(\beta)(x)(t) = \beta(t \cdot x),$$

$x \in X, t \in H$. Estas transformaciones lineales son una la inversa de la otra. Esto prueba que $\underline{\mathrm{Hom}}\,(\Bbbk, \Bbbk) \simeq (H_{(J)})^*$ como H-módulos. Veamos que vía este isomorfismo la multiplicación μ de $(H_{(J)})^*$ del Lema 3.2.3 coincide con la dual de la coálgebra $H_{(J)}$.

En este caso la aplicación evaluación $ev : (H_{(J)})^* \to \Bbbk$ esta dada por $ev = \phi_{(H_{(J)})^*}(\mathrm{id})$. Por lo tanto $ev(\alpha) = \alpha(1)$. Luego $\mu = \psi_{(H_{(J)})^* \otimes (H_{(J)})^*}(ev(\mathrm{id} \otimes ev))$. Entonces si $\alpha, \beta \in (H_{(J)})^*$, $t \in H$

$$\begin{aligned} \mu(\alpha \otimes \beta)(t) &= \psi_{(H_{(J)})^* \otimes (H_{(J)})^*}(ev(\mathrm{id} \otimes ev))(\alpha \otimes \beta)(t) \\ &= ev(\mathrm{id} \otimes ev)(J^{-1}t_{(1)} \rightharpoonup \alpha \otimes J^{-2}t_{(2)} \rightharpoonup \beta) = \alpha(J^{-1}t_{(1)})\beta(J^{-2}t_{(2)}), \end{aligned}$$

que es el producto dual de la estructura de coálgebra de $H_{(J)}$. □

El siguiente ejemplo muestra como el Hom interno puede ser un objeto difícil de calcular incluso cuando la categoría módulo es fácil de describir.

Ejemplo 3.2.5. Sea $K \subseteq H$ una subálgebra de Hopf de H y por lo tanto $K \subseteq H$ es una extensión β-Frobenius, ver sección 1.2.

Como K es una subálgebra coideal de H, la categoría ${}_K\mathfrak{m}$ es una categoría módulo sobre $\mathrm{Rep}(H)$ como en el ejemplo 3.1.7 (iii), y es exacta por el Lema 3.1.16.

Sea $M \in {}_K\mathfrak{m}$, entonces existe un isomorfismo de H-módulo álgebras

$$\underline{\mathrm{Hom}}\,(M, M) \simeq \mathrm{Ind}\,^H_{K\beta}\mathrm{End}\,(M). \tag{3.2.4}$$

Donde la acción a izquierda de H en $\mathrm{Ind}\,^H_{K\beta}\mathrm{End}\,(M)$ es vía la regular en el primer tensorando. Si a la clase de $h \otimes U$, con $h \in H$, $T \in \mathrm{End}\,(M)$, en $\mathrm{Ind}\,^H_{K\beta}\mathrm{End}\,(M)$ la denotamos por $\overline{h\otimes U}$, entonces la estructura de álgebra es la siguiente:

$$(\overline{h\otimes T})(\overline{g\otimes U}) = \sum_i \overline{l_i\otimes(\beta(fr(r_{i(1)}h))\cdot T)(\beta(fr(r_{i(2)}g))\cdot U)}, \tag{3.2.5}$$

para todo $h,g\in H$, $T,U\in \mathrm{End}\,(M)$. Aquí la aplicación $fr : H\to K$ es el homomorfismo de Frobenius, y el isomorfismo $\beta : K\to K$ son como en la sección 1.2 del capítulo 1. La acción de K en $\mathrm{End}\,(M)$ es como en (1.0.5).

Demostración. Para cada $X\in \mathrm{Rep}(H)$ vamos a denotar por

$$\phi^X : \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Res}\,^H_K X, \mathrm{End}\,(M))\to \mathrm{Hom}_K(X\otimes M, M),$$

al isomorfismo definido por

$$\phi(\alpha)(x\otimes m) = \alpha(x)(m),$$

para todo $\alpha\in \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Res}\,^H_K X, \mathrm{End}\,(M))$, $x\in X$, $m\in M$. La aplicación ϕ^X está bien definida, es decir que $\phi(\alpha)\in \mathrm{Hom}_K(X\otimes M, M)$ si $\alpha\in \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Res}\,^H_K X, \mathrm{End}\,(M))$. De hecho, si $k\in K$, $x\in X$, $m\in M$, entonces

$$\begin{aligned}\phi^X(\alpha)(k\cdot(x\otimes m)) &= \phi(\alpha)(k_{(1)}\cdot x\otimes k_{(2)}\cdot m) = \alpha(k_{(1)}\cdot x)(k_{(2)}\cdot m)\\ &= (k_{(1)}\cdot\alpha(x))(k_{(2)}\cdot m) = k_{(1)}\cdot\alpha(x)(\mathcal{S}(k_{(2)})k_{(3)}\cdot m)\\ &= k\cdot\alpha(x)(m) = k\cdot\phi^X(\alpha)(x\otimes m).\end{aligned}$$

La tercera igualdad es debida a que α es un morfismo de K-módulos. La inversa de ϕ^X es el morfismo $\psi^X : \mathrm{Hom}_K(X\otimes M, M)\to \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Res}\,^H_K X, \mathrm{End}\,(M))$ definido por

$$\psi^X(\gamma)(x)(m) = \gamma(x\otimes m),$$

para todo $\gamma\in \mathrm{Hom}_K(X\otimes M, M)$, $x\in X$, $m\in M$. Por lo tanto tenemos isomorfismos

$$\theta^X : \mathrm{Hom}_H(X, \mathrm{Ind}\,^H_{K\beta}\mathrm{End}\,(M)) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_K(X\otimes M, M), \tag{3.2.6}$$

dados por $\theta^X = \phi^X\sigma^X$, cuya inversa es $(\theta^X)^{-1} = \zeta^X\psi^X$. Recordemos que los mapas ζ^X y σ^X están definidos por (1.2.3) y (1.2.4). La existencia de los isomorfismos (3.2.6) implican, por el lema de Yoneda, que

$$\underline{\mathrm{Hom}}\,(M,M)\simeq \mathrm{Ind}\,^H_{K\beta}\mathrm{End}\,(M) \tag{3.2.7}$$

como H-módulos. Ahora, probemos que la estructura de álgebra en $\mathrm{Ind}\,^H_{K\beta}\mathrm{End}\,(M)$ coincide, vía el isomorfismo (3.2.7), con la estructura de álgebra en $\underline{\mathrm{Hom}}\,(M,M)$ dada en el Lema 3.2.3. Para esto calculemos el morfismo de evaluación introducido en (3.2.1). Por brevedad denotaremos $A = \mathrm{Ind}\,^H_{K\beta}\mathrm{End}\,(M)$.

Afirmación 3.2.5.1. *El morfismo de evaluación $ev_M : A\otimes M\to M$ está determinado por*

$$ev_M(\overline{h\otimes T}\otimes m) = (\beta(fr(h))\cdot T)(m),$$

para todo $\overline{h\otimes T}\in A$, $m\in M$.

Demostración. Por definición $ev_M = \theta^A(\mathrm{id}_A) = \phi^A(\sigma^A(\mathrm{id}_A))$. Luego si $\overline{h\otimes T} \in A$, $m \in M$, entonces

$$\begin{aligned} ev_M(\overline{h\otimes T}\otimes m) &= \phi^A(\sigma^A(\mathrm{id}_A))(\overline{h\otimes T}\otimes m) = \sigma^A(\mathrm{id}_A)(\overline{h\otimes T})(m) \\ &= (fr\otimes \mathrm{id})(\overline{h\otimes T})(m) = (\beta(fr(h))\cdot T)(m). \end{aligned}$$

□

La multiplicación de $\underline{\mathrm{Hom}}(M,M)$ descripta en el Lema 3.2.3 está definida por

$$\mu = (\theta^{A\otimes A})^{-1}(ev_M(\mathrm{id}\otimes ev_M)) = \zeta^{A\otimes A}(\psi^{A\otimes A}(ev_M(\mathrm{id}\otimes ev_M))).$$

Por lo tanto si $\overline{h\otimes T}, \overline{g\otimes U} \in A$ entonces

$$\begin{aligned} (\overline{h\otimes T})(\overline{g\otimes U}) &= \zeta^{A\otimes A}(\psi^{A\otimes A}(ev_M(\mathrm{id}\otimes ev_M)))(\overline{h\otimes T}\otimes\overline{g\otimes U}) \\ &= \sum_i \overline{l_i\otimes \psi^{A\otimes A}(ev_M(\mathrm{id}\otimes ev_M))(r_i\cdot(\overline{h\otimes T}\otimes\overline{g\otimes U}))} \\ &= \sum_i \overline{l_i\otimes \psi^{A\otimes A}(ev_M(\mathrm{id}\otimes ev_M))(\overline{r_{i(1)}h\otimes T}\otimes\overline{r_{i(2)}g\otimes U})} \\ &= \sum_i \overline{l_i\otimes (ev_M(\mathrm{id}\otimes ev_M))(\overline{r_{i(1)}h\otimes T}\otimes\overline{r_{i(2)}g\otimes U})} \\ &= \sum_i \overline{l_i\otimes \big(\beta(fr(r_{i(1)}h)\cdot T\big)\big(\beta(fr(r_{i(2)}g)\cdot U\big)}. \end{aligned}$$

□

Definición 3.2.6. Decimos que un objeto $M \in \mathcal{M}$ genera a $\mathcal{M}$ si para todo $N \in \mathcal{M}$ no nulo existe $X \in \mathcal{C}$ tal que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X\otimes M, N) \neq 0$.

Lema 3.2.7. *Todo objeto simple de una categoría módulo exacta indescomponible $\mathcal{M}$ es un generador.*

Demostración. Sea U un objeto simple de $\mathcal{M}$ y $M \in \mathcal{M}$ un objeto arbitrario. Como todo objeto de $\mathcal{M}$ es de longitud finita, entonces existe $V \in \mathcal{M}$ simple y un epimorfismo $f : M \twoheadrightarrow V$. Por ser $\mathcal{M}$ indescomponible todos los objetos en $\mathrm{Irr}(\mathcal{M})$ están relacionados y por lo tanto $U \sim V$; es decir que existe un objeto $Y \in \mathcal{C}$ y una suryección $\pi : Y\otimes U \twoheadrightarrow V$.

Luego, por ser $P(\mathbf{1})\otimes Y\otimes U$ proyectivo, existe un morfismo $\alpha : P(\mathbf{1})\otimes Y\otimes U \to M$ tal que $f\circ\alpha = \pi\circ p_{Y\otimes U}$. Como $\pi\circ p_{Y\otimes U}$ es suryectivo, y por lo tanto no nulo, el morfismo α es no nulo. Luego $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X\otimes U, M) \neq 0$ con $X = P(\mathbf{1})\otimes Y$.

□

El siguiente Teorema es debido a Etingof y a Ostrik, ver [**EO**, Thm. 3.17].

Teorema 3.2.8. *Sea $\mathcal{M}$ una categoría módulo exacta sobre $\mathcal{C}$, y sea $M \in \mathcal{M}$ un generador. Entonces el funtor $\underline{\mathrm{Hom}}(M, ?) : \mathcal{M} \to \mathcal{C}_A$ es una equivalencia de categorías, donde $A = \underline{\mathrm{Hom}}(M,M)$.*

Demostración. La idea de la demostración es probar que el funtor $\underline{\mathrm{Hom}}(M,?) : \mathcal{M} \to \mathcal{C}_A$ es fiel, pleno y que para cada objeto $V \in \mathcal{C}_A$ existe $N \in \mathcal{M}$ tal que $\underline{\mathrm{Hom}}(M,N) \simeq V$. Para los detalles de la demostración nos remitimos a [**EO**], solo expliquemos porque se requiere que M sea un generador de $\mathcal{M}$.

Para probar que el funtor $\underline{\mathrm{Hom}}(M,?)$ es fiel Etingof y Ostrik usan que $\underline{\mathrm{Hom}}(M,N) \neq 0$ para todo $0 \neq N \in \mathcal{M}$. Esto es cierto pues si $\underline{\mathrm{Hom}}(M,N) = 0$ entonces $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X\otimes M,N) = 0$ para todo $X \in \mathcal{C}$ y esto contradice la definición de que M sea un generador para $\mathcal{M}$.

□

En la siguiente sección se mostrará como este Teorema nos permite clasificar las categorías módulo exactas sobre ciertas categorías tensoriales particulares.

Corolario 3.2.9. *Sea $\mathcal{M}$ una categoría módulo exacta sobre $\mathcal{C}$, y sea $M \in \mathcal{M}$ un generador. Entonces todo ideal a derecha en $\mathcal{C}$ de $A = \underline{\mathrm{Hom}}(M,M)$ es de la forma $\underline{\mathrm{Hom}}(M,N)$ donde N es un subobjeto de M.*

Demostración. Cuando $\mathcal{M}$ es exacta y M es un generador, bajo la equivalencia de categorías módulo $\mathcal{M} \simeq \mathcal{C}_A$ del Teorema 3.2.8 los ideales de A a derecha corresponden a subobjetos de M. □

Corolario 3.2.10. [**EO**, Lemma 4.2] *Si $\mathcal{M}$ una categoría módulo exacta indescomponible y M es un objeto simple de $\mathcal{M}$ entonces $\underline{\mathrm{Hom}}(M,M)$ es un álgebra sin ideales a derecha (en la categoría) no triviales.*

Demostración. Como $\mathcal{M}$ es indescomponible y M es simple por el Lema 3.2.7 M genera a $\mathcal{M}$ y de acuerdo con el Corolario 3.2.9 $\underline{\mathrm{Hom}}(M,M)$ no posee ideales a derecha en $\mathcal{C}$.

□

3.3. Categorías módulo sobre un álgebra de grupo.

Sea G un grupo finito. Denotemos por H el álgebra de grupo $\Bbbk G$.

Si $F \subseteq G$ es un subgrupo y $\sigma \in Z^2(F,\Bbbk^\times)$ un 2-cociclo normalizado consideremos la categoría módulo $\mathcal{M}(F,\sigma)$ del ejemplo 3.1.10.

Recordemos que $\mathcal{M}(F,\sigma)$ como categoría abeliana es la categoría de $\Bbbk_\sigma F$-módulos a izquierda y la estructura de categoría módulo sobre $\mathrm{Rep}(H)$ es la siguiente:

$$\overline{\otimes} : \mathrm{Rep}(H) \times {}_{\Bbbk_\sigma F}\mathfrak{m} \to {}_{\Bbbk_\sigma F}\mathfrak{m}, \quad X\overline{\otimes}V = X\otimes_{\Bbbk}V,$$

$X \in \mathrm{Rep}(H)$, $V \in {}_{\Bbbk_\sigma F}\mathfrak{m}$, donde la acción de F sobre $X\otimes_{\Bbbk}V$ está dada por $g\cdot(x\otimes v) = g\cdot x\otimes g\cdot v$; $g \in F, x \in X, v \in V$.

Lema 3.3.1. *Sea $V \neq 0$ un objeto en $\mathcal{M}(F,\sigma)$ entonces $\Bbbk G\otimes_F \mathrm{End}\,(V)$ es un $\Bbbk G$-módulo álgebra y existe un isomorfismo*

$$\underline{\mathrm{Hom}}(V,V) \simeq \Bbbk G\otimes_F \mathrm{End}\,(V),$$

donde la acción de F en $\mathrm{End}\,(V)$ esta dada como sigue: $(h\cdot T)(v) = h\cdot T(h^{-1}\cdot v)$, para todo $T \in \mathrm{End}\,(V), v \in V, h \in F$.

En particular si V es un generador de $\mathcal{M}(F,\sigma)$ existe una equivalencia de categorías módulo

$$\mathcal{M}(F,\sigma) \simeq \mathrm{Rep}(H)_{\Bbbk G\otimes_F \mathrm{End}(V)}.$$

Demostración. Si $g \in G, T \in \mathrm{End}\,(V)$ vamos a denotar por $\overline{g\otimes T}$ a la clase de $g\otimes T$ en $\Bbbk G\otimes_F \mathrm{End}\,(V)$. Sea $\{x_i\}$ un conjunto de representantes de coclases a izquierda de F.

La estructura de $\Bbbk G$-módulo álgebra en $\Bbbk G\otimes_F \mathrm{End}\,(V)$ es como sigue; la acción de G es sobre el primer tensorando y el producto es

$$(\overline{x_i\otimes T})(\overline{x_j\otimes U}) = \delta_{i,j}\,(\overline{x_i\otimes T\circ U}),$$

donde $T, U \in \mathrm{End}\,(V)$.

Sean $X \in \mathrm{Rep}(H)$ y $V \in \mathcal{M}(F,\sigma)$. Notemos que

$$\mathrm{Hom}_F(X\overline{\otimes}V, V) \simeq \mathrm{Hom}_F(X, \mathrm{End}\,(V)),$$

para esto basta con comprobar que las aplicaciones definidas por

$$\phi : \mathrm{Hom}_F(X\overline{\otimes}V, V) \to \mathrm{Hom}_F(X, \mathrm{End}\,(V)), \quad \phi(\alpha)(x)(v) = \alpha(x\otimes v),$$
$$\psi : \mathrm{Hom}_F(X, \mathrm{End}\,(V)) \to \mathrm{Hom}_F(X\overline{\otimes}V, V), \quad \psi(\beta)(x\otimes v) = \beta(x)(v),$$

para todo $x \in X, v \in V$, están bien definidas y son una la inversa de la otra. Además la reciprocidad de Frobenius, [**CR2**, Prop. 10.21], nos dice que

$$\mathrm{Hom}_H(X, \Bbbk G\otimes_F \mathrm{End}\,(V)) \simeq \mathrm{Hom}_F(X, \mathrm{End}\,(V)),$$

por lo tanto obtenemos isomorfismos

$$\mathrm{Hom}_H(X, \Bbbk G\otimes_F \mathrm{End}\,(V)) \simeq \mathrm{Hom}_F(X\overline{\otimes}V, V)$$

para cualquier $X \in \mathrm{Rep}(H)$. Por definición del Hom interno y por el Lema de Yoneda se sigue que

$$\underline{\mathrm{Hom}}\,(V,V) \simeq \Bbbk G\otimes_F \mathrm{End}\,(V),$$

como $\Bbbk_\sigma F$-módulos. El producto de $\Bbbk G\otimes_F \mathrm{End}\,(V)$ vía este isomorfismo, coincide con el producto de $\underline{\mathrm{Hom}}\,(V,V)$ dado en el Lema 3.2.3. ☐

El siguiente teorema es debido a Ostrik, ver [**O2**, Thm.2]. Reproducimos la demostración por completitud.

Teorema 3.3.2. *Si $\mathcal{M}$ es una categoría módulo exacta indescomponible sobre* $\mathrm{Rep}(H)$ *entonces existe un subgrupo F de G y un 2-cociclo normalizado $\sigma \in Z^2(F, \Bbbk^\times)$ tal que*

$$\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}(F,\sigma)$$

como categorías módulo. Las categorías módulo $\mathcal{M}(F,\sigma)$, $\mathcal{M}(F',\sigma')$ son equivalentes si y sólo si los pares (σ, F), (σ', F') son conjugados vía la acción adjunta de G.

Demostración. Por el Teorema 3.2.8 existe un H-módulo algebra A de dimensión finita tal que

$$\mathcal{M} \simeq \mathrm{Rep}(H)_A$$

como categorías módulo. Por el Corolario 3.2.10 se puede elegir a A de tal manera que no posea ideales a derecha H-estables. Como H es semisimple el radical de Jacobson $\mathcal{J}(A)$ es un ideal H-estable, [**Li**, Theorem 3.1], y por lo tanto A es semisimple.

Afirmación 3.3.2.1. *Toda H-módulo álgebra semisimple sin ideales a derecha H-estables es isomorfa a $\Bbbk G \otimes_F \mathrm{End}\,(V)$ para algún subgrupo F de G, algún 2-cociclo normalizado σ y una representación V de $\Bbbk_\sigma F$.*

Esta afirmación junto al Lema 3.3.1 concluyen la prueba del teorema.

Demostración de la afirmación. Sea A un H-módulo álgebra semisimple sin ideales H-estables. Sea I el conjunto de idempotentes centrales primitivos de A, entonces G actúa transitivamente en I ya que A no posee ideales H-estables.

Elijamos $e \in A$ un idempotente central primitivo. Sea $F = \{g \in G : g \cdot e = e\}$. Claramente F es un subgrupo de G. Entonces $\Bbbk G \otimes_F eA \simeq A$. Las aplicaciones

$$\psi : \Bbbk G \otimes_F eA \to A, \quad \phi : A \to \Bbbk G \otimes_F eA,$$

definidas por

$$\psi(g \otimes ea) = (g \cdot e)(g \cdot a), \quad \phi((g \cdot e)a) = g \otimes g^{-1}a,$$

están bien definidas, una la inversa de la otra.

Como eA es un álgebra de matrices, digamos $eA = \mathrm{End}\,(V)$ para cierto espacio vectorial V, invariante por la acción de F, por Skolem-Noether, esta acción es interior. Entonces existe una función $\pi : F \to \mathrm{End}\,(V)$ definida por

$$f \cdot T = \pi(f) \circ T \circ \pi(f^{-1}),$$

para todo $F \in F$, $T \in \mathrm{End}\,(V)$. Como la acción de F es asociativa se puede demostrar que $\pi(f)\pi(g)\pi(g^{-1}f^{-1})$ esta en el centro de $\mathrm{End}\,(V)$ para todo $f, g \in F$ y por lo tanto

$$\pi(f)\,\pi(g)\,\pi(g^{-1}f^{-1}) = \sigma(f,g)\ \mathrm{id}_V$$

para cierta función $\sigma : F \times F \to \Bbbk^\times$. Fácilmente se puede demostrar que σ es un 2-cociclo normalizado. Lo cual termina la demostración de la afirmación. $\square$

$\square$

3.4. La categoría módulo dual

Otra herramienta fundamental en el estudio de las categorías módulo es la *categoría dual*. En cierto sentido, la noción de categoría dual es la categorificación de la noción de centralizador de un álgebra.

La noción de categoría dual ha sido fructífera en [**O2**], donde se usa esta herramienta para calcular categorías módulo sobre el doble de Drinfeld de un grupo finito.

Definición 3.4.1 ([**O1**],[**O2**]). Sea $\mathcal{M}$ una categoría módulo exacta sobre $\mathcal{C}$. La categoría tensorial dual es $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}} := \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$, donde el producto tensorial esta dado por la composición de funtores módulo y el objeto unidad es el funtor identidad.

Esta categoría es de hecho tensorial, es decir que existen objetos duales a derecha e izquierda, ya que, por la Proposición 3.1.24, todo funtor de entrelazamiento $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ es exacto y por el Teorema 1.4.1 posee adjuntos a derecha y a izquierda.

Calculemos la categoría dual para un caso particular.

Recordemos que si H es álgebra de Hopf de dimensión finita entonces la categoría de espacios vectoriales es una categoría módulo exacta sobre $\mathrm{Rep}(H)$ vía el funtor de olvido $\mathrm{Rep}(H) \to vect_{\Bbbk}$.

Proposición 3.4.2. *Se tiene una equivalencia tensorial*

$$\mathrm{Rep}(H)^*_{vect_{\Bbbk}} \simeq \mathrm{Rep}(H^{*\,\mathrm{op}}).$$

En realidad verificaremos que $\mathrm{Rep}(H)^*_{vect_{\Bbbk}} \simeq {}^H\mathcal{M}$. Primero, probemos el siguiente resultado. Si V es un H-comódulo a izquierda definimos $(\Phi(V), c) : vect_{\Bbbk} \to vect_{\Bbbk}$ de la siguiente forma. Para todo $X \in \mathrm{Rep}(H)$, $M \in vect_{\Bbbk}$, $\Phi(V)(M) = V \otimes_{\Bbbk} M$ y los isomorfismos $c_{X,M} : V \otimes_{\Bbbk} X \otimes_{\Bbbk} M \to X \otimes_{\Bbbk} V \otimes_{\Bbbk} M$ se definen por

$$c_{X,M}(v \otimes x \otimes m) = v_{(-1)} \cdot x \otimes v_{(0)} \otimes m,$$

para todo $x \in X, v \in V, m \in M$.

Lema 3.4.3. *El funtor $(\Phi(V), c)$ es un funtor de entrelazamiento.*

Demostración. Tenemos que probar que se verifica

$$c_{X \otimes Y,M} = (\mathrm{id}_X \otimes c_{Y,M}) c_{X,Y \otimes M},$$

para todo $X, Y \in \mathrm{Rep}(H)$, $M \in vect_{\Bbbk}$. Sean $x \in X, y \in Y, v \in V, m \in M$, entonces

$$\begin{aligned}
(\mathrm{id}_X \otimes c_{Y,M}) c_{X,Y \otimes M}(v \otimes x \otimes y \otimes m) &= (\mathrm{id}_X \otimes c_{Y,M})(v_{(-1)} \cdot x \otimes v_{(0)} \otimes y \otimes m \\
&= v_{(-1)} \cdot x \otimes v_{(0)(-1)} \cdot y \otimes v_{(0)(0)} \otimes m \\
&= v_{(-1)(1)} \cdot x \otimes v_{(-1)(2)} \cdot y \otimes v_{(0)} \otimes m \\
&= v_{(-1)} \cdot (x \otimes y) \otimes v_{(0)} \otimes m = c_{X \otimes Y,M}(v \otimes x \otimes y \otimes m).
\end{aligned}$$

□

Demostración de la Proposición 3.4.2. Sea $(F, c) : vect_{\Bbbk} \to vect_{\Bbbk}$ un funtor de entrelazamiento. Por el Teorema 1.4.2 existe un espacio vectorial V tal que $F(M) = V \otimes_{\Bbbk} M$. Probemos que V es un H-comódulo a izquierda. Sea $\lambda : V \to H \otimes_{\Bbbk} V$ definida por

$$\lambda(v) = c_{H,\Bbbk}(v \otimes 1).$$

La naturalidad de c implica que

$$(\varepsilon \otimes \mathrm{id}\, V \otimes \Bbbk) c_{H,\Bbbk} = c_{\Bbbk,\Bbbk}(\mathrm{id}_V \otimes \varepsilon \otimes \mathrm{id}_{\Bbbk}).$$

Esto implica que $(\varepsilon \otimes \mathrm{id})\lambda = \mathrm{id}_V$. Si $u : \Bbbk \to H$ denota la unidad y $\Delta : H \to H \otimes_{\Bbbk} H$ el coproducto de H, de nuevo usando la naturalidad de c obtenemos que

$$(\mathrm{id}_H \otimes \mathrm{id}_V \otimes u)\, c_{H,\Bbbk} = c_{H,H}\, (\mathrm{id}_V \otimes \mathrm{id}_H \otimes u), \tag{3.4.1}$$

$$c_{H \otimes H,\Bbbk}\, (\mathrm{id}_V \otimes \Delta) = (\Delta \otimes \mathrm{id}_V)\, c_{H,\Bbbk}. \tag{3.4.2}$$

Entonces

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}_H \otimes \lambda)\,\lambda &= (\mathrm{id}_H \otimes c_{H,\Bbbk}(\mathrm{id}_V \otimes u))\, c_{H,\Bbbk}\,(\mathrm{id}_V \otimes u) = (\mathrm{id}_H \otimes c_{H,\Bbbk})(\mathrm{id}_H \otimes \mathrm{id}_V \otimes u) c_{H,\Bbbk}(\mathrm{id}_V \otimes u)\\ &= (\mathrm{id}_H \otimes c_{H,\Bbbk})\, c_{H,H}\,(\mathrm{id}_V \otimes u \otimes u)\\ &= c_{H\otimes H,\Bbbk}\,(\mathrm{id}_V \otimes u \otimes u) = (\Delta \otimes \mathrm{id}_V)\, c_{H,\Bbbk}(\mathrm{id}_V \otimes u) = (\Delta \otimes \mathrm{id}_V)\,\lambda.\end{aligned}$$

La primera igualdad por definición de λ, la tercera por (3.4.1), la cuarta por (3.1.5) y la quinta por (3.4.2) (ya que $\Delta(1) = 1 \otimes 1$). Es inmediato comprobar que las construcciones anteriores son recíprocas y dan una equivalencia de categorías tensoriales.

□

EJEMPLO 3.4.4. Sea R un álgebra semisimple y sea $\mathcal{C} = {}_R\mathfrak{m}_R$. Entonces $\mathcal{M} = {}_R\mathfrak{m}$ es una categoría módulo exacta sobre $\mathcal{C}$ y se tiene que $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}} \simeq \mathcal{C}$.

PROPOSICIÓN 3.4.5. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial. Sea A un álgebra en $\mathcal{C}$ y $\mathcal{M} = \mathcal{C}_A$ la categoría módulo como en el ejemplo 3.1.7 (ii). Asumamos que $\mathcal{M}$ es exacta, entonces las categorías $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$, $({}_A\mathcal{C}_A)^{op}$ son tensorialmente equivalentes.*

DEMOSTRACIÓN. Sigue de la Proposición 3.1.13. □

EJEMPLO 3.4.6. Por el Lema 3.1.15 $\mathcal{C}$ es una categoría módulo exacta sobre $\mathcal{C}$ y se tiene que $\mathcal{C}^*_{\mathcal{C}} \simeq \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que $\mathcal{C} \simeq \mathcal{C}_{\mathbf{1}}$ como categorías módulo sobre $\mathcal{C}$, por lo tanto por la Proposición 3.4.5 tenemos que

$$\mathcal{C}^*_{\mathcal{C}} \simeq ({}_{\mathbf{1}}\mathcal{C}_{\mathbf{1}})^{\mathrm{op}} \simeq \mathcal{C}^{\mathrm{op}}.$$

□

Fijemos $\mathcal{C}$ una categoría tensorial finita y $\mathcal{M}$ una categoría módulo exacta sobre $\mathcal{C}$. Asumamos que $\mathcal{M} = \bigoplus_i \mathcal{M}_i$ donde cada $\mathcal{M}_i$ es una categoría módulo exacta indescomponible sobre $\mathcal{C}$. Para cada i denotamos por $P_i : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ el funtor de entrelazamiento que proyecta $\mathcal{M}$ en $\mathcal{M}_i$.

La siguiente Proposición reúne resultados obtenidos por Etingof y Ostrik. Más precisamente, ver [**EO**, Lemma 3.24], [**EO**, Lemma 3.25], [**EO**, Thm. 3.27] y [**EO**, Lemma 3.30].

PROPOSICIÓN 3.4.7. *La siguientes propiedades se verifican.*

(i) *Cada $P_i \in \mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$ es un objeto simple y el objeto unidad* Id $\in \mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$ *es suma directa de los P_i.*
(ii) *La categoría $\mathcal{M}$ es categoría módulo exacta sobre $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$.*
(iii) *Si $\mathcal{N}$ es una categoría módulo exacta sobre $\mathcal{C}$ entonces* $\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ *es una categoría módulo exacta sobre $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$.*
(iv) *Existe una equivalencia tensorial canónica entre $\mathcal{C}$ y $(\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}})^*_{\mathcal{M}}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sólo explicaremos la idea de la demostración para los puntos (ii), (iii).

La estructura de categoría módulo de $\mathcal{M}$ sobre $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$ es la siguiente. La acción $\otimes : \mathcal{C}^*_{\mathcal{M}} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ está dada por la evaluación: $F \otimes M = F(M)$, para todo $F \in \mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}, M \in \mathcal{M}$. En otras palabras, la acción de $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$ es simplemente la restricción de la acción de $\operatorname{Fun}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$.

Si $\mathcal{N}$ es una categoría módulo sobre $\mathcal{C}$ la estructura de categoría módulo de $\operatorname{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ sobre $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$ viene dada por la composición, es decir $F \otimes G = F \circ G$ donde $F \in \operatorname{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{M}), G \in \operatorname{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{N}, \mathcal{M})$.

□

En particular la parte (i) del Lema 3.4.7 implica que si $\mathcal{M}$ es una categoría módulo exacta indescomponible entonces el objeto unidad de $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$ es simple.

TEOREMA 3.4.8. *Sea $\mathcal{M}$ una categoría módulo exacta sobre $\mathcal{C}$. Entonces*

1. *Las aplicaciones $\mathcal{N} \to \operatorname{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ y $\mathcal{N} \to \operatorname{Fun}_{\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}}(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ son biyecciones entre las clases de equivalencia de categorías módulo exactas sobre $\mathcal{C}$ y sobre $\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}}$. Estas funciones son una la inversa de la otra.*
2. *Sea $\mathcal{M} = \mathcal{C}_A$ para algún álgebra $A \in \mathcal{C}$. La aplicación $\mathcal{C}_B \to {}_B\mathcal{C}_A$, donde $B \in \mathcal{C}$ es un álgebra, es una biyección entre las clases de equivalencia de categorías módulo exactas sobre $\mathcal{C}$ y sobre $({}_A\mathcal{C}_A)^{\mathrm{op}}$.*

DEMOSTRACIÓN. (1) Ver [**EO**, Thm 3.31]. (2) Se deduce de la parte (1) usando las identificaciones de la Proposición 3.4.5 y de la Proposición 3.1.13. □

Como consecuencia de el Teorema 3.4.8 y la Proposición 3.4.2 tenemos el siguiente resultado.

COROLARIO 3.4.9. *Existe una biyección entre el conjunto de clases de equivalencia de categorías módulo exactas sobre* $\operatorname{Rep}(H)$ *y sobre* $\operatorname{Rep}(H^*)$.

DEMOSTRACIÓN. En vista de la Proposición 3.4.2 el Teorema 3.4.8 implica que existe una biyección entre el conjunto de clases de equivalencia de categorías módulo exactas sobre $\operatorname{Rep}(H)$ y sobre $\operatorname{Rep}(H)^*_{vect_{\Bbbk}} \simeq \operatorname{Rep}(H^{*\,\mathrm{op}})$. Por el ejemplo 3.4.6 y nuevamente el Teorema 3.4.8 existe una biyección entre el conjunto de clases de equivalencia de categorías módulo exactas sobre $\operatorname{Rep}(H^*)$ y $\operatorname{Rep}(H^*)^{\mathrm{op}} \simeq \operatorname{Rep}(H^{*\,\mathrm{op}})$.

□

CAPíTULO 4

Grupoides Cuánticos

4.1. Propiedades generales de los Grupoides Cuánticos

Las álgebras de Hopf débiles, o grupoides cuánticos fueron introducidos en [**BNS, BSz**] sin embargo en este trabajo utilizaremos las notaciones y convenciones de [**NV**]. Álgebras de Hopf débiles sobre anillos conmutativos, como las álgebras de grupoides, son consideradas en [**BW**].

Una *biálgebra débil* sobre $\mathbb{K}$ es una colección (H, m, Δ), donde (H, m) es una $\mathbb{K}$-álgebra asociativa con unidad y (H, Δ) es una $\mathbb{K}$-coálgebra coasociativa con counidad ε, tal que se satisfacen los siguientes axiomas:

$$\Delta(ab) = \Delta(a)\Delta(b), \qquad \forall a, b \in H. \tag{4.1.1}$$

$$\Delta^{(2)}(1) = (\Delta(1) \otimes 1)(1 \otimes \Delta(1)) = (1 \otimes \Delta(1))(\Delta(1) \otimes 1). \tag{4.1.2}$$

$$\varepsilon(abc) = \varepsilon(ab_{(1)})\varepsilon(b_{(2)}c) = \varepsilon(ab_{(2)})\varepsilon(b_{(1)}c), \qquad \forall a, b, c \in H. \tag{4.1.3}$$

Una bialgebra débil H es un *álgebra de Hopf débil* o un *grupoide cuántico* si existe un operador lineal $\mathcal{S} : H \to H$ que verifica

$$m(\mathrm{id} \otimes \mathcal{S})\Delta(h) = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})(\Delta(1)(h \otimes 1)) =: \varepsilon_t(h), \tag{4.1.4}$$

$$m(\mathcal{S} \otimes \mathrm{id})\Delta(h) = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)((1 \otimes h)\Delta(1)) =: \varepsilon_s(h), \tag{4.1.5}$$

$$m^{(2)}(\mathcal{S} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathcal{S})\Delta^{(2)} = \mathcal{S}, \tag{4.1.6}$$

para todo $h \in H$. Las aplicaciones ε_s, ε_t son llamadas, respectivamente, la fuente y el final; sus imágenes son llamadas las subálgebras fuente y final, y se denotan respectivamente por H_s y H_t.

En general trabajaremos bajo la hipótesis que H es proyectivo sobre $\mathbb{K}$.

Un grupoide cuántico es un álgebra de Hopf en el sentido usual si y sólo si $\Delta(1) = 1 \otimes 1$, si y sólo si ε es un morfismo de álgebras. En tal caso las subalgebras fuente y final coinciden con $\mathbb{K}1$.

Ejemplo 4.1.1. Sea $\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{P}$ un grupoide. El álgebra de grupoide $\mathbb{K}\mathcal{G}$ posee una estructura de álgebra de Hopf débil vía: $\Delta(g) = g \otimes g$, $\epsilon(g) = 1$, $S(g) = g^{-1}$, para todo $g \in \mathcal{G}$. La subálgebra final de esta álgebra de Hopf débil coincide con la subálgebra fuente y es $\mathbb{K}\mathcal{P} := \oplus_{P \in \mathcal{P}} \Bbbk \, \mathrm{id}_P$.

Ejemplo 4.1.2. Sea R un álgebra separable y sea $e \in R \otimes R$ el elemento de separabilidad simétrico de R. Sea $\omega \in R^*$ el elemento definido unívocamente por

$$(\omega \otimes \mathrm{id})e = (\mathrm{id} \otimes \omega)e = 1.$$

Se puede chequear que ω es la traza de la representación regular a izquierda de R. Para el elemento e usaremos la notación estándar $e = e^{(1)} \otimes e^{(2)}$.

Sea $H = R^{\mathrm{op}} \otimes R$. La estructura de álgebra sobre H es la del producto tensorial de álgebras, la comultiplicación, counidad y antípoda están dadas por

$$\Delta(x \otimes y) = (x \otimes e^{(1)}) \otimes (e^{(2)} \otimes y), \tag{4.1.7}$$

$$\varepsilon(x \otimes y) = \omega(xy), \tag{4.1.8}$$

$$\mathcal{S}(x \otimes y) = y \otimes x, \tag{4.1.9}$$

para todo $x, y \in R$. Con esta estructura resulta que H es un álgebra de Hopf débil.

En los siguientes lemas se enumeran ciertas propiedades técnicas que verifican los grupoides cuánticos.

Lema 4.1.3. *Sea H un grupoide cuántico, y sean $h, h' \in H$, $z \in H_t$, $w \in H_s$, entonces*

$$\varepsilon_t(z) = z, \quad \varepsilon_s(w) = w, \tag{4.1.10}$$

$$\Delta(z) = 1_{(1)} z \otimes 1_{(2)}, \quad \Delta(w) = 1_{(1)} \otimes w 1_{(2)}, \tag{4.1.11}$$

$$\varepsilon_t(h \varepsilon_t(h')) = \varepsilon_t(hh'). \tag{4.1.12}$$

Demostración. Ver [**NV**, Prop. 2.2.1]. □

Lema 4.1.4. *Sea H un grupoide cuántico de dimensión finita sobre $\Bbbk$. Entonces;*

(i) *Las subalgebras final y fuente son subalgebras coideales de H que conmutan entre sí.*
(ii) *La antípoda es única y biyectiva, también es un antimorfismo de álgebras y de coalgebras.*
(iii) *Se tiene que $\mathcal{S} \circ \varepsilon_s = \varepsilon_t \circ \mathcal{S}$, y $\mathcal{S} \circ \varepsilon_t = \varepsilon_s \circ \mathcal{S}$. La restricción de $\mathcal{S}|_{H_t}\colon H_t \to H_s$ es un anti-isomorfismo de álgebras.*

Demostración. [**NV**, Prop 2.2.2], [**NV**, Prop 2.3.1], [**NV**, Prop 2.3.2]. □

Si H es un grupoide cuántico entonces H posee una estructura de H_t-bimódulo vía $z.h.w := zhw$ para $h \in H$, $z, w \in H_t$ y la subálgebra final H_t posee una estructura de H-módulo a izquierda con estructura dada por:

$$h.w = \epsilon_t(hw), \tag{4.1.13}$$

para todo $h \in H$, y $w \in H_t$. Las ecuaciones (4.1.10), (4.1.12) implican que esta acción restringida a H_t es la representación regular a izquierda. El siguiente Lema será útil más adelante.

LEMA 4.1.5. *Sea H un grupoide cuántico, H_t su subálgebra final, M un H_t-módulo a izquierda y N un H-módulo a izquierda. Entonces $H \otimes_{H_t} M$ posee una estructura de H-módulo a izquierda vía multiplicación en el primer tensorando y existen isomorfismos naturales*

$$\operatorname{Hom}_H(H \otimes_{H_t} M, N) \simeq \operatorname{Hom}_{H_t}(M, \operatorname{Res}^H_{H_t} N).$$

Para cualquier H_t-módulo proyectivo M, el H-módulo $H \otimes_{H_t} M$ es proyectivo.

DEMOSTRACIÓN. Los isomorfismos naturales deseados están definidos por

$$\phi : \operatorname{Hom}_H(H \otimes_{H_t} M, N) \to \operatorname{Hom}_{H_t}(M, \operatorname{Res}^H_{H_t} N), \quad \phi(f)(m) = f(1 \otimes m),$$
$$\psi : \operatorname{Hom}_{H_t}(M, \operatorname{Res}^H_{H_t} N) \to \operatorname{Hom}_H(H \otimes_{H_t} M, N), \quad \psi(g)(h \otimes m) = hg(m),$$

para todo $h \in H$, $m \in M$. La última afirmación sigue de la primera. □

OBSERVACIÓN 4.1.6. Si $\mathbb{K} = \Bbbk$ es un cuerpo entonces por [**NV**, Prop. 2.3.4] la subálgebra final es separable con elemento de separabilidad dado por

$$e_t = \mathcal{S}(1_{(1)}) \otimes 1_{(2)}.$$

Por lo tanto H_t es semisimple y luego todo H_t-módulo es proyectivo. En este caso, si H_t es conmutativa H es un *álgebra de faz* en el sentido de Hayashi [**H**].

DEFINICIÓN 4.1.7. ([**ENO**]) Un álgebra de Hopf débil se dice *regular* si el cuadrado de la antipoda S^2 es la identidad en las subalgebras final y fuente de H.

Una de las propiedades fundamentales de las álgebras de Hopf débiles es que proveen ejemplos de categorías tensoriales.

PROPOSICIÓN 4.1.8. *Sea H un grupoide cuántico sobre $\Bbbk$. Entonces la categoría de representaciones de dimensión finita de H, $\operatorname{Rep}(H)$ es una categoría tensorial rígida.*

DEMOSTRACIÓN. Solo daremos un esquema de la demostración. Para más detalles ver [**BNS**], [**NV**]. Si $V, W \in \operatorname{Rep}(H)$ el producto tensorial se define como

$$V \otimes W = \{x \in V \otimes_{\Bbbk} W : \Delta(1)x = x\}.$$

Como $\Delta(1)$ es un idempotente, $V \otimes W = \Delta(1)(V \otimes_{\Bbbk} W)$. Los isomorfismos de asociatividad son las identidades. La subálgebra final H_t es el objeto unidad con estructura de H-módulo dada en (4.1.13).

Usando la antípoda se puede proveer a cada objeto en $\operatorname{Rep}(H)$ de un dual. Dado $V \in \operatorname{Rep}(H)$ el espacio dual $V^* = \operatorname{Hom}_{\Bbbk}(V, \Bbbk)$ donde la acción de H sobre V^* está determinada por

$$(h \cdot \alpha)(v) = \alpha(\mathcal{S}(h) \cdot v),$$

para todo $v \in V, h \in H, \alpha \in V^*$. Los morfismos de evaluación y coevaluación son

$$ev_V : V^* \otimes V \to H_t, \quad coev_V : H_t \to V \otimes V^*,$$

$ev_V(\sum_i \alpha_i \otimes w_i) = \sum_i \alpha_i(1_{(1)} \cdot v_i) 1_{(2)}$, y $coev_V(z) = z \cdot (\sum_j v_j \otimes v^j)$. Donde $\sum_i \alpha_i \otimes w_i \in V^* \otimes V$, $z \in H_t$ y $(v_j), (v^j)$ son bases duales de V y V^* respectivamente. □

Definición 4.1.9. Un grupoide cuántico H se dice *conexo* si $\mathcal{Z}(H) \cap H_t = \Bbbk 1$, se dice *coconexo* si el grupoide cuántico H^* es conexo, y se dice *biconexo* si H es conexo y coconexo.

La proposición [**BNS**, Prop.2.15] implica que H es conexa si y sólo si H_t es irreducible como H-módulo. Por ejemplo, el álgebra de un grupoide $\Bbbk\mathcal{G}$ es un grupoide cuántico conexo si y sólo si el grupoide $\mathcal{G}$ es conexo; y es coconexa sólo cuando $\mathcal{G}$ es un grupo.

Notar que:

- si H es de dimensión finita $\mathrm{Rep}(H)$ es una categoría tensorial finita,
- $\mathrm{Rep}(H)$ es de multifusión si y sólo si H es semisimple, y
- $\mathrm{Rep}(H)$ es de fusión si y sólo si H es semisimple y conexa.

Si H es un álgebra de Hopf débil, entonces todo H-módulo M es un $H_t \otimes H_s$-módulo, ya que por el Lema 4.1.4 (i) H_t conmuta con H_s. Como la antípoda $\mathcal{S}^{-1} : H_t \to H_s$ es un anti-isomorfismo de álgebras todo H-módulo M es un H_t-bimódulo. Más explícitamente la estructura de H_t-bimodulo esta dada por

$$x \cdot m \cdot y := x\mathcal{S}(y) \cdot m,$$

para todo $x, y \in H_t$, $m \in M$. Entonces tenemos definido un funtor *de olvido*

$$\mathcal{F} : \mathrm{Rep}(H) \longrightarrow {}_{H_t}\mathcal{M}_{H_t}.$$

El siguiente lema es bien conocido, aparece en [**CE**] sin demostración.

Lema 4.1.10. *Si H es un álgebra de Hopf débil regular el funtor $\mathcal{F}$ definido anteriormente posee una estructura de funtor tensorial.*

Demostración. A lo largo de la demostración se usará que $\mathcal{S} = \mathcal{S}^{-1}$ en H_t (regularidad). Primero probemos que la identidad $\mathcal{F}(H_t) \to H_t$ es un morfismo de H_t-bimódulos. Esto ocurre si y sólo si

$$\epsilon_t(S(y)x) = xy, \tag{4.1.14}$$

para todo $x, y \in H_t$. Observar que (4.1.14) sigue de $\mathcal{S}(x) = \epsilon_s(x)$ para todo $x \in H_t$, ya que:

$$\mathcal{S}(y)\mathcal{S}(x) = \epsilon_s(x)\epsilon_s(y) = \epsilon_s(\epsilon_s(x)y). \tag{4.1.15}$$

La segunda igualdad por [**BNS**, eq. 2.5b]. Por lo tanto, aplicando la antípoda en ambos miembros de la igualdad tenemos que:

$$\begin{aligned} xy &= \mathcal{S}(\mathcal{S}(y)\mathcal{S}(x)) = (\mathcal{S} \circ \epsilon_s)(\epsilon_s(x)y) = (\epsilon_t \circ \mathcal{S})(\epsilon_s(x)y) \\ &= \epsilon_t(\mathcal{S}(y)\mathcal{S}(\epsilon_s(x))) = \epsilon_t(\mathcal{S}(y)\epsilon_t(x)) = \epsilon_t(\mathcal{S}(y)x). \end{aligned}$$

La primera igualdad se debe a que $\mathcal{S}$ es un antimorfismo de algebras [**BNS**, Thm. 2.10] y a que $\mathcal{S}^2 |_{H_t} = \mathrm{id}_{H_t}$, la segunda a (4.1.15) y la tercera igualdad se debe a que $S \circ \epsilon_s = \epsilon_t \circ S$ [**BNS**, Lemma 2.9]. Ahora probemos que $\mathcal{S}(x) = \epsilon_s(x)$ para todo $x \in H_t$. Por [**BNS**, eq. 2.7a] si $x \in H_t$ entonces $\Delta(x) = 1_{(1)}x \otimes 1_{(2)}$ luego

$$\begin{aligned} \epsilon_s(x) &= \mathcal{S}(x_{(1)})x_{(2)} = \mathcal{S}(1_{(1)}x)1_{(2)} \\ &= \mathcal{S}(x)\mathcal{S}(1_{(1)})1_{(2)} = \mathcal{S}(x). \end{aligned}$$

Sean $V, W \in \operatorname{Rep}(H)$. Para cada $m \in V, n \in W$ denotaremos por $\overline{m\otimes n}$ la clase de $m\otimes n$ en $V\otimes_{H_t}W$. Los isomorfismos naturales

$$\zeta_{V,W} : V\otimes W \to V\otimes_{H_t}W, \quad \zeta(\Delta(1)m\otimes n) = \overline{m\otimes n}$$

proveen a $\mathcal{F}$ de una estructura tensorial. Las aplicaciones $\zeta_{V,W}$ son biyecciones cuyas inversas están dadas por $\zeta^{-1}_{V,W}(\overline{m\otimes n}) = 1_{(1)} \cdot m\otimes 1_{(2)} \cdot n$, para todo $m \in V, n \in W$. Estas aplicaciones están bien definidas, es decir que no dependen de los representantes de la clase $\overline{m\otimes n}$. Sea $x \in H_t$ entonces

$$\begin{aligned}\zeta^{-1}_{V,W}(\overline{m \cdot x\otimes n}) &= 1_{(1)}\mathcal{S}(x) \cdot m\otimes 1_{(2)} \cdot n = 1_{(1)}\mathcal{S}^{-1}(x) \cdot m\otimes 1_{(2)} \cdot n \\ &= (\mathcal{S}^{-1}\otimes \mathrm{id})((x\otimes 1)e_t).(m\otimes n) = (\mathcal{S}^{-1}\otimes \mathrm{id})(e_t(1\otimes x)).(m\otimes n) \\ &= 1_{(1)} \cdot m\otimes 1_{(2)}x \cdot n = \zeta^{-1}_{V,W}(\overline{m\otimes x \cdot n}).\end{aligned}$$

La cuarta igualdad se debe a que e_t es el elemento de separabilidad de H_t, ver Observación 4.1.6.

Las funciones $\zeta_{V,W}$ son morfismos de H_t-bimódulos. De hecho si $x \in H_t$ y $m \in V, n \in W$, entonces

$$\begin{aligned}\zeta_{V,W}(x \cdot \Delta(1)m\otimes n) &= \zeta_{V,W}(\Delta(x) \cdot (m\otimes n)) = \zeta_{V,W}(1_{(1)}x \cdot m\otimes 1_{(2)} \cdot n) \\ &= \overline{x \cdot m\otimes n} = x \cdot \zeta_{V,W}(\Delta(1)m\otimes n).\end{aligned}$$

La segunda igualdad por (4.1.11). Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned}\zeta_{V,W}((\Delta(1)m\otimes n) \cdot x) &= \zeta_{V,W}(\Delta(\mathcal{S}(x))(m\otimes n)) = \zeta_{V,W}(1_{(1)} \cdot m\otimes \mathcal{S}(x)1_{(2)} \cdot n) \\ &= \zeta_{V,W}(\Delta(1)(m\otimes n \cdot x)) = \overline{m\otimes n \cdot x} = \zeta_{V,W}((\Delta(1)m\otimes n)) \cdot x.\end{aligned}$$

La segunda igualdad usando, nuevamente (4.1.11). Es fácil comprobar que (2.0.2), (2.0.3) y (2.0.4) se verifican.

□

La siguiente proposición muestra una categoría módulo destacada para cada álgebra de Hopf débil.

Proposición 4.1.11. *Sea H un álgebra de Hopf débil regular, entonces la categoría ${}_{H_t}\mathcal{M}_{H_t}$ es una categoría módulo sobre* $\operatorname{Rep}(H)$.

Demostración. La estructura de categoría módulo se da a través del funtor $\mathcal{F}$: $\operatorname{Rep}(H) \to {}_{H_t}\mathcal{M}_{H_t}$ de la Proposición 4.1.10 combinada con la Proposición 3.1.6. □

El siguiente Teorema muestra una recíproca de la proposición anterior y una justificación de la importancia de la noción de grupoide cuántico. Es un resultado debido a Hayashi, ver [**H**], demostrado luego con métodos de categorías módulo por Ostrik, ver [**O2**].

Teorema 4.1.12. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de multifusión, entonces existe un álgebra de Hopf débil H y una equivalencia tensorial $\mathcal{C} \cong$* $\operatorname{Rep}(H)$.

El grupoide cuántico H del teorema no está unívocamente determinado. Más aún, Hayashi mostró que siempre se puede encontrar un tal grupoide cuántico tal que su subálgebra final es conmutativa. Tales grupoides cuánticos son llamados *álgebras de faz.*

4.2. Módulo y comódulo álgebras

En esta sección supondremos que H es un grupoide cuántico de dimensión finita sobre $\Bbbk$.

DEFINICIÓN 4.2.1. [**NV**, Def. 4.1.2] Una *H-comódulo álgebra a izquierda* es un álgebra K que también es un H-comódulo a izquierda con coacción $\lambda : K \to H \otimes K$ tal que para todo $x, y \in K$

$$\lambda(xy) = \lambda(x)\lambda(y), \tag{4.2.1}$$

$$\lambda(1) = (\epsilon_s \otimes \mathrm{id}_K)\lambda(1). \tag{4.2.2}$$

Usaremos la notación $\lambda(x) = x_{(-1)} \otimes x_{(0)}$ y $\lambda(1) = 1_{(-1)} \otimes 1_{(0)} = 1'_{(-1)} \otimes 1'_{(0)}$.

EJEMPLO 4.2.2. Para cualquier álgebra de Hopf débil H

- H es un H-comódulo álgebra a izquierda vía Δ,
- H_t es un H-comódulo álgebra a izquierda vía Δ.

Los siguientes lemas técnicos serán de utilidad para definir ciertas categorías módulo sobre $\mathrm{Rep}(H)$.

LEMA 4.2.3. *Sea K un H-comódulo álgebra a izquierda, entonces*

$$1_{(-1)(1)} \otimes 1_{(-1)(2)} \otimes 1_{(0)} = 1_{(1)} \otimes 1_{(-1)} 1_{(2)} \otimes 1_{(0)} = 1_{(1)} \otimes 1_{(2)} 1_{(-1)} \otimes 1_{(0)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sigue de (4.1.11) y (4.2.2). □

Notar que en Lema anterior se están denotando las unidades de H y de K con el mismo símbolo.

LEMA 4.2.4. *Sea K un H-comódulo álgebra a izquierda. Entonces para todo $x \in K$ y para todo $z \in H_t$ las siguientes identidades en $H \otimes K$ se verifican:*

$$\epsilon_s(x_{(-1)}) \otimes x_{(0)} = 1_{(-1)} \otimes x 1_{(0)}, \tag{4.2.3}$$

$$\mathcal{S}(z) 1_{(-1)} \otimes 1_{(0)} = 1'_{(-1)} \otimes \epsilon(1_{(-1)} z) 1_{(0)} 1'_{(0)}. \tag{4.2.4}$$

DEMOSTRACIÓN. Por definición de la aplicación fuente se tiene que

$$\begin{aligned}
\epsilon_s(x_{(-1)}) \otimes x_{(0)} &= \epsilon(x_{(-1)} 1_{(2)}) 1_{(1)} \otimes x_{(0)} \\
&= \epsilon(x_{(-1)} 1_{(-1)} 1_{(2)}) 1_{(1)} \otimes x_{(0)} 1_{(0)} \\
&= \epsilon(x_{(-1)} 1_{(-1)(2)}) 1_{(-1)(1)} \otimes x_{(0)} 1_{(0)} \\
&= 1_{(-1)} \otimes \epsilon(x_{(-1)} 1_{(0)(-1)}) x_{(0)} 1_{(0)} \\
&= 1_{(-1)} \otimes x 1_{(0)}.
\end{aligned}$$

La segunda ecuación se debe a que $\lambda(x) = \lambda(x)\lambda(1)$, la tercera al lema 4.2.3 y la cuarta por coasociatividad.

Afirmamos que

$$1_{(1)} \otimes \epsilon(z 1_{(-1)} 1_{(2)}) 1_{(0)} = 1'_{(-1)} \otimes \epsilon(1_{(-1)} z) 1_{(0)} 1'_{(0)}. \tag{4.2.5}$$

De hecho, la ecuación (4.2.3) implica que

$$1_{(-1)}z\otimes\epsilon_s(1_{(0)(-1)})\otimes 1_{(0)(0)} = 1_{(-1)}z\otimes 1'_{(-1)}\otimes 1_{(0)}1'_{(0)}.$$

Aplicando $\epsilon\otimes \mathrm{id}\otimes \mathrm{id}$ en ambos lados de esta igualdad se obtiene que

$$\begin{aligned} 1'_{(-1)}\otimes\epsilon(1_{(-1)}z)1_{(0)}1'_{(0)} &= \epsilon(1_{(-1)}z)\epsilon_s(1_{(0)(-1)})\otimes 1_{(0)(0)} \\ &= \epsilon(1_{(1)}z)\epsilon_s(1_{(-1)}1_{(2)})\otimes 1_{(0)} \\ &= \epsilon(1_{(-1)}1_{(2)}1'_{(2)})1'_{(1)}\otimes\epsilon(1_{(1)}z)1_{(0)} \\ &= 1'_{(1)}\otimes\epsilon(1_{(1)}z)\epsilon(1_{(-1)}1_{(2)}1'_{(2)})1_{(0)} \\ &= 1'_{(1)}\otimes\epsilon(1_{(-1)}z1'_{(2)})1_{(0)}. \end{aligned}$$

Esto prueba la afirmación. Por la ecuación [**BNS**, 2.31b] tenemos que $1_{(1)}\otimes z1_{(2)} = \mathcal{S}(z)1_{(1)}\otimes 1_{(2)}$ para todo $z\in H_t$. Esta ecuación implica que para todo $z\in H_t$

$$1_{(1)}\otimes 1_{(-1)}z1_{(2)}\otimes 1_{(0)} = \mathcal{S}(z)1_{(1)}\otimes 1_{(-1)}1_{(2)}\otimes 1_{(0)}.$$

aplicando $\mathrm{id}_H\otimes\epsilon\otimes \mathrm{id}_K$ tenemos que

$$1_{(1)}\otimes\epsilon(1_{(-1)}z1_{(2)})1_{(0)} = \epsilon(1_{(-1)}1_{(2)})\mathcal{S}(z)1_{(1)}\otimes 1_{(0)}, \tag{4.2.6}$$

(4.2.7)

la segunda igualdad por el Lema 4.2.3. Entonces (4.2.5) y (4.2.6) implican (4.2.4). □

En lo siguiente, si K es una H-comódulo álgebra a izquierda, X un H-módulo a izquierda y M es un K-módulo a izquierda, denotaremos por

$$X\overline{\otimes}M := \lambda(1)(X\otimes_{\Bbbk}M) = \{w\in X\otimes_{\Bbbk}M : \lambda(1)w = w\}.$$

Sea K una H-comódulo álgebra a izquierda. Entonces tenemos un funtor $\overline{\otimes} : \mathrm{Rep}(H)\times {}_K\mathcal{M}\to {}_K\mathcal{M}$, donde la acción de K en $X\overline{\otimes}M$ es

$$k.(x\otimes m) = k_{(-1)}\cdot x\otimes k_{(0)}\cdot m,$$

para todo $k\in K, x\in X, m\in M$. Definamos $m_{X,Y,M} : (X\otimes Y)\overline{\otimes}M \to X\overline{\otimes}(Y\overline{\otimes}M)$, $u_M : H_t\overline{\otimes}M\to M$, $X,Y\in\mathrm{Rep}(H), M\in {}_K\mathcal{M}$ por

$$\begin{aligned} m_{X,Y,M}((x\otimes y)\otimes m) &= x\otimes(y\otimes m), \\ u_M(z\otimes m) &= \epsilon(1_{(-1)}z)1_{(0)}\cdot m, \end{aligned}$$

para todo $x,y\in H$, $z\in H_t$, $m\in M$.

Proposición 4.2.5. *Con la notación anterior la categoría ${}_K\mathcal{M}$ es una categoría módulo sobre* $\mathrm{Rep}(H)$.

Demostración. Verificaremos solamente que (3.1.6) se cumple. Los otros axiomas son inmediatos. Probaremos que para todo $X\in\mathrm{Rep}(H), M\in {}_K\mathcal{M}$ la ecuación

$$r_X\otimes \mathrm{id}_M = (\mathrm{id}_x\otimes u_M)m_{X,H_t,M}$$

se verifica, donde $r_X : X\otimes H_t\to X$ está definido por $r_X(x\otimes z) = \mathcal{S}(z)\cdot x$ para todo $x\in X, z\in H_t$.

Sean $z \in H_t, x \in X, m \in M$ entonces

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}_x \otimes u_M)m_{X,H_t,M}((x\otimes z)\otimes m) &= x\otimes\epsilon(1_{(-1)}z)1_{(0)}\cdot m\\ &= 1'_{(-1)}\cdot x\otimes\epsilon(1_{(-1)}z)1'_{(0)}1_{(0)}\cdot m\\ &= \mathcal{S}(z)1_{(-1)}\cdot x\otimes 1_{(0)}\cdot m = (r_X\otimes \mathrm{id}_M)(x\otimes z\otimes m).\end{aligned}$$

La tercera igualdad por (4.2.4). □

4.3. Módulos de Hopf

Ya que todo grupoide cuántico H es a la vez un álgebra y una coálgebra, al igual que para álgebras de Hopf usuales, se pueden considerar módulos y comódulos sobre H que cumplen cierta compatibilidad entre ambas estructuras.

Definición 4.3.1. Un *módulo de Hopf* a derecha sobre un grupoide cuántico H es un espacio vectorial V munido de aplicaciones $\cdot : V\otimes H \to V$, $\rho : V \to V\otimes H$ que hacen de V un H-módulo a derecha, un H-comódulo a derecha respectivamente y se cumple que

$$\rho(v\cdot h) = v_{(0)}\cdot h_{(1)}\otimes v_{(1)}h_{(2)},$$

para todo $h \in H$, $v \in V$.

Ejemplo 4.3.2. H es un módulo de Hopf con acción regular a derecha y coacción dada por Δ.

Ejemplo 4.3.3. El espacio vectorial dual H^* es un módulo de Hopf sobre H vía:

$$\alpha\cdot h = \mathcal{S}(h) \rightharpoonup \alpha, \quad \alpha_{(0)}\langle\beta,\alpha_{(1)}\rangle = \beta\alpha,$$

para todo $h \in H$, $\alpha, \beta \in H^*$.

- Sea M es un módulo de Hopf. Se define
$$M^{\mathrm{co}\,H} = \{m \in M : \rho(m) = m\cdot 1_{(1)}\otimes 1_{(2)}\}.$$
- Si V es un espacio vectorial, entonces $V\otimes_{\Bbbk}M$ es un módulo de Hopf con acciones concentradas en el segundo tensorando, claramente $(V\otimes M)^{\mathrm{co}\,H} \simeq V\otimes M^{\mathrm{co}\,H}$.
- Asumamos que H es de dimensión finita. Entonces un módulo de Hopf a derecha es lo mismo que un espacio vectorial M munido de una acción a derecha de H y una acción a izquierda de H^* tales que

$$\alpha\cdot(m\cdot h) = (\alpha_{(1)}\cdot m)\cdot(\alpha_{(2)} \rightharpoonup h), \tag{4.3.1}$$

  $h \in H$, $\alpha \in H^*$, $m \in M$.
- Si M es un módulo de Hopf a derecha entonces la acción de H induce un isomorfismo $M \simeq M^{\mathrm{co}\,H}\otimes H$ por el Teorema Fundamental de módulos de Hopf, [**BNS**, Thm.3.9].

4.4. Cohomología de álgebras de Hopf débiles

Sea H un álgebra de Hopf débil con subálgebra final H_t. Definimos los grupos de cohomología de H con coeficientes en $M \in {}_H\mathcal{M}$ por

$$\mathrm{H}^n(H, M) := \mathrm{Ext}\,^n_H(H_t, M).$$

Estos grupos de cohomología pueden ser calculados a través de la "resolución barra normalizada". Sea $\overline{H}$ el H_t-bimódulo H/H_t; y sea $\overline{h}$ la clase en $\overline{H}$ de $h \in H$. Notar que $H \simeq H_t \oplus \overline{H}$ como H_t-módulos a izquierda, ya que H_t es la imagen de una proyección H_t-lineal, *cf.* [**BW**, Ch. 6].

*De ahora en más asumiremos que que H (o equivalentemente $\overline{H}$) es un H_t-módulo proyec*tivo.

Si $N \in {}_H\mathcal{M}$ y $n \in \mathbb{N}_0$, definimos

$$B_n(H, N) := H \otimes_{H_t} \underbrace{\overline{H} \otimes_{H_t} ... \otimes_{H_t} \overline{H}}_{n-veces} \otimes_{H_t} N.$$

Luego $B_n(H, N)$ es un H-módulo a izquierda vía multiplicación en el primer tensorando, y si N es H_t-módulo proyectivo entonces $B_n(H, N)$ es un H-módulo proyectivo gracias al Lema 4.1.5. Definamos los mapas $\epsilon : B_0(H, N) \to N$, $\partial_n : B_n(H, N) \to B_{n-1}(H, N)$, $n > 0$, y $s_n : B_n(H, N) \to B_{n+1}(H, N)$, $n \geq 0$, por

$$\epsilon(h \otimes m) = h.m,$$

$$\partial_n(h \otimes \overline{h_1} \otimes ... \otimes \overline{h_n} \otimes m) = hh_1 \otimes \overline{h_2} \otimes ... \otimes \overline{h_n} \otimes m$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i h \otimes \overline{h_1} \otimes ... \otimes \overline{h_i h_{i+1}} \otimes ... \otimes \overline{h_n} \otimes m + (-1)^n h \otimes \overline{h_1} \otimes ... \otimes \overline{h_{n-1}} \otimes h_n.m,$$

y

$$s_n(h \otimes \overline{h_1} \otimes ... \otimes \overline{h_n} \otimes m) = 1 \otimes \overline{h} \otimes \overline{h_1} \otimes ... \otimes \overline{h_n} \otimes m,$$

para todo $h, h_1, \ldots, h_n \in H$ y para todo $m \in N$.

LEMA 4.4.1. *Para cualquier $n > 0$, se tiene que*

i) *los mapas ∂_n están bien definidos y son morfismos de H-módulo,*
ii) $\partial_{n-1}\partial_n = 0$, *y*
iii) $\partial_{n+1}s_n + s_{n-1}\partial_n = \mathrm{id}_{B_n(H,N)}$.

DEMOSTRACIÓN. Verifiquemos i). Asumamos que $h_i \in H_t$ para $1 < i < n$ luego

$$\begin{aligned}
\partial_n(h \otimes \overline{h_1} \otimes ... \otimes \overline{h_n} \otimes m) &= (-1)^{i-1} h \otimes ... \otimes \overline{h_{i-1} h_i} \otimes ... \otimes m + \\
&+ (-1)^i h \otimes ... \otimes \overline{h_i h_{i+1}} \otimes ... \otimes m \\
&= (-1)^{i-1} h \otimes ... \otimes \overline{h_{i-1}} \otimes h_i \overline{h_{i+1}} ... \otimes m + (-1)^i h \otimes ... \otimes \overline{h_i h_{i+1}} \otimes ... \otimes m \\
&= 0.
\end{aligned}$$

La segunda igualdad se verifica pues estamos tomando producto tensorial sobre H_t. Para $i = 1, n$ la prueba es similar. Esto implica que ∂_n está bien definido, y es claramente morfismo de H-módulo. La prueba de ii) es estándar y iii) se sigue de un cálculo directo. $\square$

El Lema 4.4.1 dice que el complejo

$$\dots B_n(H,N) \xrightarrow{\partial_n} B_{n-1}(H,N)\dots \longrightarrow B_2(H,N) \xrightarrow{\partial_2} B_1(H,N) \xrightarrow{\partial_1} B_0(H,N) \xrightarrow{\epsilon} N$$

es acíclico. Por lo tanto, tenemos una resolución proyectiva del H-módulo N y podemos calcular los grupos $\operatorname{Ext}^n_H(N,M)$ para cualquier $M \in {}_H\mathcal{M}$, como los grupos de cohomología $\operatorname{Ext}^n_H(N,M) := \operatorname{Ker}(\partial^n)/\operatorname{Im}(\partial^{n-1})$ del complejo

$$0 \longrightarrow C^0(N,M) \xrightarrow{\partial^0} C^1(N,M) \xrightarrow{\partial^2} \dots \longrightarrow C^n(N,M) \xrightarrow{\partial^n} C^{n+1}(N,M) \longrightarrow \dots$$

donde $C^n(N,M) := \operatorname{Hom}_H(B_n(H,N),M)$.

CAPíTULO 5

Estabilizadores de Yan-Zhu para álgebras de Hopf

En este capítulo asumiremos que H es un álgebra de Hopf de dimensión finita sobre $\Bbbk$.

Lema 5.0.2. $\operatorname{End}(H^*)$ *es un módulo de Hopf a derecha sobre* H *con acciones*

$$(\alpha \cdot f)(\beta) = f(\beta\alpha_{(2)})\mathcal{S}^{-1}(\alpha_{(1)}), \tag{5.0.1}$$

$$(f \cdot h)(\beta) = f(h \rightharpoonup \beta), \tag{5.0.2}$$

$h \in H$, $\alpha, \beta \in H^*$, $f \in \operatorname{End}(H^*)$. *Más aún el espacio de coinvariantes* $\operatorname{End}(H^*)^{\operatorname{co} H}$ *es la imagen de la representación regular a izquierda* $L : H^* \to \operatorname{End}(H^*)$.

Demostración. Claramente, (5.0.1) y (5.0.2) son, respectivamente, acciones a izquierda y a derecha; verifiquemos (4.3.1):

$$\begin{aligned}
\big((\alpha_{(1)} \cdot f) \cdot (\alpha_{(2)} \rightharpoonup h)\big)(\beta) &= (\alpha_{(1)} \cdot f)((\alpha_{(2)} \rightharpoonup h) \rightharpoonup \beta) \\
&= f\left(\left(h_{(1)} \rightharpoonup \beta\right) \langle \alpha_{(3)}, h_{(2)} \rangle \alpha_{(2)}\right) \mathcal{S}^{-1}(\alpha_{(1)}) \\
&= f\left(\left(h_{(1)} \rightharpoonup \beta\right) \left(h_{(1)} \rightharpoonup \alpha_{(2)}\right)\right) \mathcal{S}^{-1}(\alpha_{(1)}) \\
&= f(h \rightharpoonup (\beta\alpha_{(2)}))\mathcal{S}^{-1}(\alpha_{(1)}) \\
&= (f \cdot h)(\beta\alpha_{(2)})\mathcal{S}^{-1}(\alpha_{(1)}) \\
&= (\alpha \cdot (f \cdot h))(\beta)
\end{aligned}$$

Probemos la última afirmación: dado $f \in \operatorname{End}(H^*)$, $f \in \operatorname{End}(H^*)^{\operatorname{co} H}$ es equivalente a que $\alpha \cdot f = \alpha(1) f$ para todo $\alpha \in H^*$ y esto ocurre si y sólo si $f(\beta\alpha) = f(\beta)\alpha$ para todo $\alpha, \beta \in H^*$, si y sólo si $f = L_\gamma$ para $\gamma = f(1) \in H^*$. □

Se tiene una versión dual del Lema anterior.

Lema 5.0.3. $\operatorname{End}(H)$ *es un módulo de Hopf a derecha sobre* $H^{*\operatorname{cop}}$ *con acciones*

$$(h \cdot f)(t) = \mathcal{S}(h_{(1)})f(h_{(2)}t), \tag{5.0.3}$$

$$(f \cdot \alpha)(t) = \alpha(t_{(2)})f(t_{(1)}), \tag{5.0.4}$$

$h, t \in H$, $\alpha \in H^*$, $f \in \operatorname{End}(H)$. *El espacio de coinvariantes* $\operatorname{End}(H)^{\operatorname{co} H^*}$ *es la imágen de la representación regular a derecha* $R : H \to \operatorname{End}(H)$.

5.1. El doble de Heisenberg

Más adelante necesitaremos el doble de Heisenberg del álgebra de Hopf H^*, denotado aquí por $\mathcal{H}(H)$. Recordemos que $\mathcal{H}(H)$ es el espacio vectorial $H^*\otimes H$ con multiplicación

$$(\beta\otimes h)(\alpha\otimes t) = \beta(h_{(1)} \rightharpoonup \alpha)\otimes h_{(2)}t,$$

$h, t \in H$, $\alpha, \beta \in H^*$. Existe un isomorfismo de álgebras $\Psi : \operatorname{End} H \to \operatorname{End}(H^*)$ dado por la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{End} H \arrow[rr, "\Psi"] & & \operatorname{End}(H^*) \\
& \mathcal{H}(H) \arrow[ul, "\Psi_1"] \arrow[ur, "\Psi_2"'] &
\end{tikzcd} \tag{5.1.1}$$

Aquí $\Psi_1(\alpha\otimes h)(t) = \alpha \rightharpoondown (ht)$, y $\Psi_2(\alpha\otimes h)(\beta) = \alpha(h \rightharpoonup \beta)$ $h, t \in H$, $\alpha, \beta \in H^*$.

5.2. Estabilizadores de Yan-Zhu

Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita. Sea K una H-comódulo álgebra a izquierda vía la coacción $\lambda : K \to H \otimes K$.

En esta sección definiremos los estabilizadores de Yan-Zhu introducidos en [**YZ**]. Consideremos H^* como un H-módulo vía $\rightharpoondown$, ver (1.0.3); y correspondientemente $H^*\otimes W$ como un K-módulo vía λ. Esto es,

$$k \cdot (\beta\otimes w) = k_{(-1)} \rightharpoondown \beta \otimes k_{(0)} \cdot w, \tag{5.2.1}$$

$k \in K$, $\beta \in H^*$, $w \in W$.

Recordemos la definición de la aplicación lineal $\mathcal{L} : H^*\otimes\operatorname{Hom}(U, W) \to \operatorname{Hom}(H^*\otimes U, H^*\otimes W)$ introducida en el capítulo 1.

Definición 5.2.1. [**YZ**] El *estabilizador de Yan-Zhu* de los K-módulos W y U es

$$\operatorname{Stab}_K(U, W) := \operatorname{Hom}_K(H^*\otimes U, H^*\otimes W) \cap \mathcal{L}\big(H^*\otimes\operatorname{Hom}(U, W)\big) \subset \operatorname{Hom}(H^*\otimes U, H^*\otimes W).$$

En particular, el *estabilizador de Yan-Zhu* del K-módulo W es

$$\operatorname{Stab}_K(W) := \operatorname{End}_K(H^*\otimes W) \cap \mathcal{L}(H^*\otimes\operatorname{End} W).$$

Proposición 5.2.2. $\operatorname{Stab}_K(W)$ *es un H^*-comódulo álgebra a derecha y W es un $\operatorname{Stab}_K(W)$-módulo a izquierda.*

Demostración. Por (1.1.1), la composición induce una aplicación

$$\operatorname{Stab}_K(W, U) \times \operatorname{Stab}_K(Z, W) \longrightarrow \operatorname{Stab}_K(Z, U). \tag{5.2.2}$$

En particular, $\mathrm{Stab}_K(W)$ es una subálgebra de $\mathrm{End}\,(H^*\otimes W)$. Como $\mathrm{End}\,(H^*\otimes W)$ es un H-módulo álgebra a izquierda y $\mathcal{L}(H^*\otimes \mathrm{End}\, W)$ es un H-submódulo, basta con mostrar que $\mathrm{End}_K(H^*\otimes W)$ es también un H-submódulo. Pero, más generalmente, $\mathrm{Hom}_K(H^*\otimes U, H^*\otimes W)$ es un H-submódulo de $\mathrm{Hom}\,(H^*\otimes U, H^*\otimes W)$ porque $\rightharpoonup$ y $\rightharpoondown$ conmutan. Luego $\mathrm{Stab}_K(W)$ es un H-módulo álgebra a izquierda.

Notar que $\mathrm{Stab}_K(W)$ puede ser identificada como una subálgebra de $H^*\otimes \mathrm{End}\,(W)$, ya que $\mathcal{L}$ es inyectiva.

El espacio vectorial W es un $\mathrm{Stab}_K(W)$-módulo a izquierda, con representación dada por la composición

$$\mathrm{Stab}_K(W) \longrightarrow H^*\otimes \mathrm{End}\,(W) \xrightarrow{\varepsilon\otimes \mathrm{id}} \Bbbk\otimes \mathrm{End}\,(W) = \mathrm{End}\,(W).$$

□

El siguiente lema sera útil más adelante.

Lema 5.2.3. *Sea* $L_{\alpha_i}\otimes f_i \in \mathcal{L}\,(H^*\otimes \mathrm{Hom}\,(U, W))$*; omitimos el símbolo de sumatoria. Entonces* $L_{\alpha_i}\otimes f_i \in \mathrm{Hom}_K(H^*\otimes U, H^*\otimes W)$ *si y sólo si para todo* $t \in H$, $w \in W$, $k \in K$

$$\sum_i \langle \alpha_i, t\rangle\, f_i(k\cdot w) = \sum_i \langle \alpha_i, \mathcal{S}^{-1}(k_{(-1)})t\rangle\; k_{(0)}\cdot f_i(w). \tag{5.2.3}$$

En otras palabras, (5.2.3) caracteriza cuando $L_{\alpha_i}\otimes f_i \in \mathrm{Stab}(U, W)$.

Demostración. Si $L_{\alpha_i}\otimes f_i \in \mathrm{Hom}_K(H^*\otimes U, H^*\otimes W)$ entonces tenemos que

$$(L_{\alpha_i}\otimes f_i)(k\cdot(\beta\otimes w)) = k\cdot(L_{\alpha_i}\otimes f_i)(\beta\otimes w) \tag{5.2.4}$$

para todo $\beta \in H^*, k \in K, w \in W$. La igualdad (5.2.4) se traduce en

$$\alpha_i(k_{(-1)} \rightharpoondown \beta)\otimes f_i(k_{(0)}\cdot w) = k_{(-1)} \rightharpoondown (\alpha_i\beta)\otimes k_{(0)}\cdot f_i(w).$$

Evaluando en $t \in H$ y tomando $\beta = \epsilon$ tenemos lo que queremos. La recíproca es inmediata. □

Como consecuencia de la caracterización anterior de elementos del estabilizador, se tiene el siguiente resultado.

Corolario 5.2.4. *Existe un isomorfismo* $\mathrm{Stab}_K(W)^{\mathrm{co}\, H^*} \cong \mathrm{End}_K(W)$*. En particular el estabilizador posee coinvariantes triviales si* W *es una representación irreducible de* K*.*

Demostración. Las funciones

$$\phi : \mathrm{Stab}_K(W)^{\mathrm{co}\, H^*} \to \mathrm{End}_K(W), \psi : \mathrm{End}_K(W) \to \mathrm{Stab}_K(W)^{coH^*}$$

dadas por

$$\phi(\alpha_i\otimes f_i) = \alpha_i(1) f_i, \quad \psi(f) = \epsilon\otimes f,$$

son los isomorfismos inversos deseados. □

Ahora podemos dar otra caracterización del estabilizador $\mathrm{Stab}_K(U,W)$ dada en [**YZ**] en términos de módulos de Hopf. Consideramos $\mathrm{End}\,(H^*)\otimes\mathrm{Hom}\,(U,W)$ como un módulo de Hopf a derecha sobre H con estructura concentrada en el primer tensorando, *cf.* Lema 5.0.2.

Proposición 5.2.5. *Mantengamos la notación anterior.*

1. $\mathrm{Hom}_K(H^*\otimes U, H^*\otimes W)$ *es un submódulo de Hopf de* $\mathrm{End}\,(H^*)\otimes\mathrm{Hom}\,(U,W)$,
2. $\mathrm{Hom}_K(H^*\otimes U, H^*\otimes W)^{\mathrm{co}\,H} = \mathrm{Stab}_K(U,W)$ *y*
$$\mathrm{Hom}_K(H^*\otimes U, H^*\otimes W) = \mathrm{Stab}_K(U,W)\circ(\underline{L}(H)\otimes\mathrm{id}) \simeq \mathrm{Stab}_K(U,W)\otimes H.$$
En particular,
$$\mathrm{End}_K(H^*\otimes W) = \mathrm{Stab}_K(W)\circ(\underline{L}(H)\otimes\mathrm{id}). \tag{5.2.5}$$
Aquí $\circ$ *significa la composición.*

Demostración. (1). Tenemos que chequear que $\mathrm{Hom}_K(U,W)$ es estable bajo las acciones inducidas por (5.0.1), (5.0.2). Sean $k\in K$, $\alpha,\beta\in H^*$, $u\in U$, $h\in H$, $\sum_i f_i\otimes T_i\in \mathrm{Hom}_K(H^*\otimes U,H^*\otimes W)$, donde $f_i\in\mathrm{End}\,(H^*)$, $T_i\in\mathrm{Hom}\,(W,U)$; por simplicidad omitimos el símbolo de sumatoria en lo siguiente. Entonces

$$\begin{aligned}
\big(\alpha\cdot(f_i\otimes T_i)\big)\big(k\cdot(\beta\otimes w)\big) &= (\alpha\cdot f_i)(k_{(-1)}\rightharpoondown\beta)\otimes T_i(k_{(0)}\cdot u)\\
&= f_i((k_{(-1)}\rightharpoondown\beta)\alpha_{(2)})\mathcal{S}^{-1}(\alpha_{(1)})\otimes T_i(k_{(0)}\cdot u)\\
&= f_i((k_{(-1)}\leftharpoonup\alpha_{(2)})\rightharpoondown\beta\alpha_{(3)})\mathcal{S}^{-1}(\alpha_{(1)})\otimes T_i(k_{(0)}\cdot u)\\
&= f_i(\langle k_{(-2)},\alpha_{(2)}\rangle k_{(-1)}\rightharpoondown\beta\alpha_{(3)})\mathcal{S}^{-1}(\alpha_{(1)})\otimes T_i(k_{(0)}\cdot u)\\
&= \big((k_{(-1)}\leftharpoonup\alpha_{(2)})\rightharpoondown f_i(\beta\alpha_{(3)})\big)\mathcal{S}^{-1}(\alpha_{(1)})\otimes k_{(0)}\cdot T_i(u)\\
&= \big((k_{(-1)}\leftharpoonup\alpha_{(3)})\leftharpoonup\mathcal{S}^{-1}(\alpha_{(2)})\big)\rightharpoondown\big(f_i(\beta\alpha_{(4)})\mathcal{S}^{-1}(\alpha_{(1)})\big)\otimes k_{(0)}\cdot T_i(u)\\
&= k_{(-1)}\rightharpoondown\big(f_i(\beta\alpha_{(2)})\mathcal{S}^{-1}(\alpha_{(1)})\big)\otimes k_{(0)}\cdot T_i(u)\\
&= k\cdot\Big(\big(\alpha\cdot(f_i\otimes T_i)\big)(\beta\otimes w)\Big).
\end{aligned}$$

Aquí las dos primeras igualdades y la última son por definición; la tercera y la quinta se deben a (1.0.4); la cuarta, porque $\sum_i f_i\otimes T_i\in\mathrm{Hom}_K(H^*\otimes U,H^*\otimes W)$; la sexta, por propiedades elementales de la antípoda. Ahora, $(f_i\otimes T_i)\cdot h$ preserva la acción de K ya que $\rightharpoondown$ y $\rightharpoonup$ conmutan. Por lo tanto, (1) se verifica.

(2). Tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_K(H^*\otimes U,H^*\otimes W)^{\mathrm{co}\,H} &= \mathrm{Hom}_K(H^*\otimes U,H^*\otimes W)\cap\big(\mathrm{End}\,(H^*)\otimes\mathrm{Hom}\,(U,W)\big)^{\mathrm{co}\,H}\\
&= \mathrm{Hom}_K(H^*\otimes U,H^*\otimes W)\cap\mathrm{End}\,(H^*)^{\mathrm{co}\,H}\otimes\mathrm{Hom}\,(U,W)\\
&= \mathrm{Hom}_K(H^*\otimes U,H^*\otimes W)\cap L(H^*)\otimes\mathrm{Hom}\,(U,W)\\
&= \mathrm{Stab}_K(U,W).
\end{aligned}$$

La última afirmación se sigue del teorema fundamental para módulos de Hopf. $\square$

5.3. Cálculo explícito de algunos estabilizadores

En esta sección mostraremos explícitamente ciertos estabilizadores. El primer ejemplo aparece en [**YZ**, pag. 3892] y muestra como el estabilizador para álgebras de Hopf es una generalización de la noción de estabilizadores para acciones de grupos finitos.

Ejemplo 5.3.1. Sean G un grupo finito y X un conjunto finito munido de una acción $\cdot : G \times X \to X$. Entonces el álgebra de funciones sobre X, $\Bbbk(X) = \{f : X \to \Bbbk\}$, es una $\Bbbk^G$-módulo álgebra a izquierda con coacción determinada por:

$$\lambda : \Bbbk(X) \to \Bbbk^G \otimes_{\Bbbk} \Bbbk(X), \quad \lambda(f) = f_{(-1)} \otimes f_{(0)}, \quad f \in \Bbbk(X),$$

donde, para todo $g \in G$, $x \in X$

$$f_{(-1)}(g) f_{(0)}(x) = f(g \cdot x). \tag{5.3.1}$$

Si $y \in X$, denotamos por $\Bbbk_y$ a la representación de dimensión 1 dada por la evaluación: $E_y : \Bbbk(X) \to \Bbbk$ $E_y(f) = f(y)$. Entonces

$$\operatorname{Stab}_{\Bbbk(X)}(\Bbbk_y) \simeq \Bbbk G_y, \tag{5.3.2}$$

donde G_y es el estabilizador de y en G.

Demostración. Comprobar que λ hace de $\Bbbk(X)$ una $\Bbbk^G$-módulo álgebra a izquierda es inmediato; basta con observar que esta coacción es la transpuesta de la acción a derecha de G en $\Bbbk(X)$ dada por $(f \cdot g)(x) = f(g \cdot x)$ para todo $g \in G$, $x \in X$, $f \in \Bbbk(X)$. Probemos ahora (5.3.2). Como $\Bbbk_y$ es de dimensión 1 entonces usaremos la identificación $\operatorname{End}(\Bbbk_y) \simeq \Bbbk$ y por lo tanto $\operatorname{Stab}_{\Bbbk(X)}(\Bbbk_y) \subseteq \Bbbk G$. Es fácil verificar, usando (5.2.3) que $h \in \operatorname{Stab}_{\Bbbk(X)}(\Bbbk_y)$ para todo $h \in G_y$. Ahora sea $\sum_i \mu_i h_i \in \operatorname{Stab}_{\Bbbk(X)}(\Bbbk_y)$ un elemento arbitrario, con $h_i \in G$, $\mu_i \in \Bbbk$. Nuevamente, usando (5.2.3) se tiene que

$$\sum_i \mu_i \langle \delta_g, h_i \rangle f(y) = \sum_i \mu_i \langle \mathcal{S}^{-1}(f_{(-1)})\delta_g, h_i \rangle f_{(0)}(y), \tag{5.3.3}$$

para todo $g \in G$, $f \in \Bbbk(X)$. Tomando $g = h_j$ para algún j obtenemos que el lado izquierdo de (5.3.3) es

$$\sum_i \mu_i \langle \delta_g, h_i \rangle f(y) = \mu_j f(y).$$

Y el lado derecho de (5.3.3) es

$$\sum_i \mu_i \langle \mathcal{S}^{-1}(f_{(-1)})\delta_g, h_i \rangle f_{(0)}(y) = \mu_j f_{(-1)}(h_j) f_{(0)}(y) = \mu_j f(h_j \cdot y),$$

la segunda igualdad por (5.3.1). De esta manera, si $\mu_j \neq 0$, $f(h_j \cdot y) = f(y)$ para todo $f \in \Bbbk(X)$ y por lo tanto $h_j \cdot y = y$. Luego $h_j \in G_y$ para todo j.

$\square$

Ejemplo 5.3.2. Sea G un grupo finito y sea H el álgebra de grupo de G. Sea F un subgrupo de G y $\sigma \in Z^2(F, \Bbbk^\times)$ un 2-cociclo normalizado. El álgebra de grupo torcida (ver capítulo 1) $\Bbbk_\sigma F$ es un H-comódulo álgebra a izquierda vía $\delta : \Bbbk_\sigma F \to H \otimes \Bbbk_\sigma F$, $\delta(f) = f \otimes f$, para todo $f \in F$.

Para cualquier $\Bbbk_\sigma F$-módulo V el espacio $\operatorname{End}(V)$ es un $\Bbbk F$-módulo a izquierda vía

$$(f \cdot T)(v) = f \cdot T(f^{-1} \cdot v),$$

$T \in \operatorname{End}(V)$, $f \in F$, $v \in V$. El espacio $\Bbbk G \otimes_{\Bbbk F} \operatorname{End}(V)$ es un H-módulo álgebra a izquierda y hay un isomorfismo de módulo álgebras $\operatorname{Stab}_{\Bbbk_\sigma F}(V) \cong \Bbbk G \otimes_{\Bbbk F} \operatorname{End}(V)$.

Demostración. Para cada $g \in G, T \in \operatorname{End}(V)$ la clase de $g \otimes T$ en $\Bbbk G \otimes_{\Bbbk F} \operatorname{End}(V)$ se denotará por $\overline{g \otimes T}$. Sea $\{x_i\}_{i \in I}$ un conjunto de representantes de las coclases a derecha de F.

La estructura de H-módulo álgebra en $\Bbbk G \otimes_{\Bbbk F} \operatorname{End}(V)$ es como sigue; la acción de G es sobre el primer tensorando, y el producto está dado por

$$(\overline{x_i \otimes T})(\overline{x_j \otimes U}) = \delta_{i,j}(\overline{x_i \otimes T \circ U}),$$

para todo $i, j \in I, T, U \in \operatorname{End}(V)$. Afirmamos que las aplicaciones

$$\psi : \operatorname{Stab}_{\Bbbk_\sigma F}(V) \to \Bbbk G \otimes_{\Bbbk F} \operatorname{End}(V), \quad \theta : \Bbbk G \otimes_{\Bbbk F} \operatorname{End}(V) \to \operatorname{Stab}_{\Bbbk_\sigma F}(V)$$

definidas por

$$\psi(\alpha_j \otimes T_j) = \sum_i \alpha_j(x_i^{-1})\, \overline{x_i \otimes T_j}, \quad \theta(\overline{g \otimes T}) = \sum_{f \in F} \delta_{fg^{-1}} \otimes f \cdot T,$$

son isomorfismos de álgebras bien definidos, uno inverso del otro. De hecho, si $h \in F$ entonces

$$\theta(\overline{gh \otimes T}) = \sum_{f \in F} \delta_{fh^{-1}g^{-1}} \otimes f \cdot T = \sum_{f \in F} \delta_{fg^{-1}} \otimes fh \cdot T = \theta(\overline{g \otimes h \cdot T}).$$

Esto prueba que θ esta bien definida. Sean $T, U \in \operatorname{End}(V)$ y $\alpha_j \otimes T_j, \beta_k \otimes U_k \in \operatorname{Stab}_{\Bbbk_\sigma F}(V)$ entonces

$$\begin{aligned}\theta(x_i \otimes T)\theta(x_j \otimes U) &= \sum_{f,h \in F} (\delta_{fx_i^{-1}} \otimes f \cdot T)(\delta_{hx_j^{-1}} \otimes h \cdot U) \\ &= \delta_{i,j} \sum_{f \in F} \delta_{fx_i^{-1}} \otimes (f \cdot T)(f \cdot U) = \theta((x_i \otimes T)(x_j \otimes U)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi(\alpha_j \otimes T_j)\psi(\beta_k \otimes U_k) &= \sum_{i,l} \alpha_j(x_i^{-1})\beta_k(x_l^{-1})\, (\overline{x_i \otimes T_j})(\overline{x_l \otimes U_k}) \\ &= \sum_i \alpha_j(x_i^{-1})\beta_k(x_i^{-1})\, (\overline{x_i \otimes T_j U_k}) \\ &= \psi((\alpha_j \otimes T_j)(\beta_k \otimes U_k)),\end{aligned}$$

por lo tanto θ y ψ son morfismos de álgebras. Ahora calculemos $\theta \circ \psi$ y $\psi \circ \theta$:

$$\begin{aligned}\theta(\psi(\alpha_j \otimes T_j)) &= \sum_i \alpha_j(x_i^{-1})\, \theta(\overline{x_i \otimes T_j}) = \sum_{i, f \in F} \alpha_j(x_i^{-1})\, (\delta_{fx_i^{-1}} \otimes f \cdot T_j) \\ &= \sum_{i, f \in F} \alpha_j(fx_i^{-1})\, (\delta_{fx_i^{-1}} \otimes T_j) = \sum_{g \in G} \alpha_j(g)\, (\delta_g \otimes T_j) = \alpha_j \otimes T_j.\end{aligned}$$

La tercera igualdad por (5.2.3). Por otro lado si $g = x_j h, h \in F$ entonces

$$\psi(\theta(\overline{g\otimes T})) = \sum_{f\in F} \psi(\delta_{fg^{-1}}\otimes f\cdot T) = \sum_{i,f\in F} \delta_{fg^{-1}}(x_i^{-1})\,\overline{x_i\otimes f\cdot T}$$
$$= \overline{x_j\otimes h\cdot T} = \overline{g\otimes T}.$$

□

Ejemplo 5.3.3. Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita y $K\subseteq H$ una subálgebra coideal a izquierda, y por lo tanto K es un H-comódulo álgebra vía la comultiplicación.

Denotemos $\overline{K} = H/K^+H$. La proyección canónica $\pi : H \to \overline{K}$ es un morfismo suryectivo de H-módulos y de coalgebras. La transpuesta de π es un homomorfismo inyectivo de álgebras $\pi^* : \overline{K}^* \hookrightarrow H^*$; vía π^* el espacio $\overline{K}^*$ puede ser identificado con la subálgebra de H^* que consiste de elementos $\alpha\in H^*$ tales que $\alpha(x) = 0$ para todo $x\in K^+H$; claramente esto es una subálgebra coideal a derecha de H^*.

Sea $V = \Bbbk$ el K-módulo trivial. Entonces $\mathrm{Stab}_K(\Bbbk)\cong \overline{K}^*$ como H^*-comódulo álgebras a derecha.

Demostración. Como $\mathrm{End}\,(V)\simeq \Bbbk$ vamos a identificar a $\mathrm{Stab}_K(\Bbbk)$ con una subálgebra de H^*. Si $\alpha\in \mathrm{Stab}_K(\Bbbk)$ la identidad (5.2.3) implica que

$$\varepsilon(k)\langle\alpha, t\rangle = \langle\alpha, \mathcal{S}^{-1}(k)t\rangle,$$

para todo $t\in H, k\in K$. Por lo tanto si $\varepsilon(k) = 0$ entonces $\langle\alpha,\mathcal{S}^{-1}(k)t\rangle = 0$, luego $\alpha\in (H/\mathcal{S}^{-1}(K^+)H)^*$. Recíprocamente, si $\alpha\in (H/\mathcal{S}^{-1}(K^+)H)^*$ entonces $\alpha(\mathcal{S}^{-1}(k)t - \varepsilon(k)t) = 0$, ya que $\mathcal{S}^{-1}(k)t-\varepsilon(k)t\in \mathcal{S}^{-1}(K^+)H$, y la ecuación (5.2.3) es satisfecha. Esto implica que $\alpha\in\mathrm{Stab}_K(\Bbbk)$ y así $\mathrm{Stab}_K(\Bbbk)\cong (H/\mathcal{S}^{-1}(K^+)H)^*$. Por [**SchM**, Lemma 1.4] $\mathcal{S}^{-1}(K^+)H = K^+H$, luego $\mathrm{Stab}_K(\Bbbk)\cong\overline{K}^*$. □

5.4. Dualidad de Yan-Zhu

Sea ahora S un H^*-comódulo álgebra a *derecha*. Sean V, X, Y S-módulos a izquierda. Adaptaremos la construcción del estabilizador de Yan-Zhu en este nuevo contexto. Consideremos H como un H^*-módulo a izquierda vía $\rightharpoonup$ y $V\otimes H$ como un S-módulo vía la coacción a derecha, es decir

$$s\cdot(v\otimes h) = s_{(0)}\cdot v\otimes s_{(1)}\rightharpoonup h, \tag{5.4.1}$$

donde $s\in S, v\in V$ y $\delta : S\to S\otimes H$, $\delta(s) = s_{(0)}\otimes s_{(1)}$.

Recordemos la aplicación $\mathcal{R}$ considerada en el Lema 1.1.6. Entonces el *estabilizador de Yan-Zhu* de los S-módulos V y Y es

$$\mathrm{Stab}_S(V,Y) := \mathrm{Hom}_S(V\otimes H, Y\otimes H)\cap \mathcal{R}(\mathrm{Hom}\,(V,Y)\otimes H).$$

En particular, el *estabilizador de Yan-Zhu* del S-módulo V es

$$\mathrm{Stab}_S(V) := \mathrm{End}_S(V\otimes H)\cap\mathcal{R}(\mathrm{End}\,(V)\otimes H).$$

Consideremos a $\mathrm{Hom}\,(V,Y)\otimes\mathrm{End}\,(H)$ como un módulo de Hopf a derecha sobre $H^{*\mathrm{cop}}$ con estructura concentrada en el segundo tensorando, *cf.* Lema 5.0.3. Adaptando las demostraciones de las Proposiciones 5.2.2 y 5.2.5, se tiene que:

Proposición 5.4.1.

1. $\mathrm{Hom}_S(V\otimes H, Y\otimes H)$ *es un submódulo de Hopf de* $\mathrm{Hom}\,(V,Y)\otimes\mathrm{End}\,(H)$,
2. $\mathrm{Hom}_S(V\otimes H, Y\otimes H)^{\mathrm{co}\,H^{*\mathrm{cop}}} = \mathrm{Stab}_S(V,Y)$,
3. $\mathrm{Hom}_S(V\otimes H, Y\otimes H) = \mathrm{Stab}_S(V,Y)\circ(\mathrm{id}\otimes\underline{L}(H^*)) \simeq \mathrm{Stab}_S(V,Y)\otimes H^*$.

Demostración. (1). Tenemos que verificar que $\mathrm{Hom}_S(V\otimes H, Y\otimes H)$ es estable bajo las acciones inducidas por (5.0.3), (5.0.4). Sean $s\in S$, $\alpha\in H^*$, $v\in V$, $h,t\in H$; y sea $\sum_j T_j\otimes f_j\in\mathrm{Hom}_S(V\otimes H, Y\otimes H)$, donde $f_j\in\mathrm{End}\,(H)$, $T_j\in\mathrm{Hom}\,(V,Y)$; por simplicidad omitimos el símbolo de sumatoria en lo siguiente. Primero, $(T_j\otimes f_j)\cdot\alpha$ preserva la acción de S ya que $\rightharpoondown$ y $\rightharpoonup$ conmutan. Ahora,

$$\begin{aligned}
s\cdot((T_j\otimes f_j)\cdot h)(v\otimes t) &= s_{(0)}\cdot T_j(v)\otimes s_{(1)}\rightharpoondown (f_j\cdot h)(t)\\
&= s_{(0)}\cdot T_j(v)\otimes s_{(1)}\rightharpoondown \big(\mathcal{S}(h_{(1)})f_j(h_{(2)}t)\big)\\
&= s_{(0)}\cdot T_j(v)\otimes\big(s_{(2)}\rightharpoondown\mathcal{S}(h_{(1)})\big)\big(s_{(1)}\rightharpoondown f_j(h_{(2)}t)\big)\\
&= T_j(s_{(0)}\cdot v)\otimes\big(s_{(2)}\rightharpoondown\mathcal{S}(h_{(1)})\big)f_j(s_{(1)}\rightharpoondown (h_{(2)}t))\\
&= T_j(s_{(0)}\cdot v)\otimes\big(s_{(3)}\rightharpoondown\mathcal{S}(h_{(1)})\big)f_j((s_{(2)}\rightharpoondown h_{(2)})(s_{(1)}\rightharpoondown t))\\
&= T_j(s_{(0)}\cdot v)\otimes\mathcal{S}(h_{(1)})f_j(h_{(2)}(s_{(1)}\rightharpoondown t))\\
&= T_j(s_{(0)}\cdot v)\otimes(f_j\cdot h)(s_{(1)}\rightharpoondown t)\\
&= \big((T_j\otimes f_j)\cdot h\big)\big(s\cdot(v\otimes t)\big).
\end{aligned}$$

Aquí la única igualdad que necesita explicación es la sexta, que se basa en la siguiente identidad:

$$\begin{aligned}
\alpha_{(2)}\rightharpoondown\mathcal{S}(h_{(1)})\otimes\alpha_{(1)}\rightharpoondown h_{(2)} &= \langle\alpha_{(2)},\mathcal{S}^{-1}(\mathcal{S}(h_{(2)}))\rangle\mathcal{S}(h_{(1)})\otimes\langle\alpha_{(1)},\mathcal{S}^{-1}(h_{(3)})\rangle\mathcal{S}(h_{(4)})\\
&= \langle\alpha,1\rangle\,\mathcal{S}(h_{(1)})\otimes h_{(2)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, (1) se verifica. La prueba de (2) es similar a la prueba de la parte (2) de la Proposición 5.2.5, y (3) sigue de (2) y el Teorema fundamental de módulos de Hopf. □

Para enunciar el próximo resultado (la dualidad de Yan-Zhu), usaremos la siguiente notación: si A es un subespacio de $\mathrm{End}\,(W)$ entonces $A' = \mathrm{Cent}_{\mathrm{End}\,(W)}(A)$ es el centralizador de A en $\mathrm{End}\,(W)$. Claramente:

$$\text{Si } A = B\circ C \text{ y } 1\in B\cap C \text{ entonces } A' = B'\cap C'. \tag{5.4.2}$$

Si $\phi:\mathrm{End}\,(W)\to\mathrm{End}\,(V)$ es un isomorfismo de álgebras, entonces $\phi(A') = \phi(A)'$. Si A es un álgebra y $\rho: A\to\mathrm{End}\,(W)$ es una representación entonces $\rho(A)'$ no es más que $\mathrm{End}_A(W)$.

Fijemos un H-coḿodulo álgebra a izquierda K y un K-módulo a izquierda W; por lo tanto W es un $\mathrm{Stab}_K(W)$-módulo a izquierda por lo Proposición 5.2.2.

PROPOSICIÓN 5.4.2. *Hay un isomorfismo de H-comódulo álgebras a izquierda*

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{Stab}_K(W)}(W) \simeq \big(\rho_{H^*\otimes W}(K)\big)'',$$

donde $\rho_{H^*\otimes W}$ es la representación de K explicada en (5.2.1).

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 5.2.2 $\mathrm{Stab}_K(W)$ es una H^*-comódulo álgebra a derecha y W es un $\mathrm{Stab}_K(W)$-módulo, luego hay una representación $\rho_{W\otimes H} : \mathrm{Stab}_K(W) \to \mathrm{End}\,(W\otimes H)$, dada por (5.4.1). Sea $\rho_{H\otimes W} : \mathrm{Stab}_K(W) \to \mathrm{End}\,(H\otimes W)$ el morfismo de álgebras dada por la composición de $\rho_{W\otimes H}$ con la transposición $\mathrm{End}\,(W)\otimes\mathrm{End}\,(H) \to \mathrm{End}\,(H)\otimes\mathrm{End}\,(W)$. Recordemos el isomorfismo de álgebras $\Psi : \mathrm{End}\,H \to \mathrm{End}\,(H^*)$ mostrado en (5.1.1), que verifica

$$\Psi(\overline{L}_\alpha) = L_\alpha, \tag{5.4.3}$$

$$\Psi(L(H)) = \underline{L}(H). \tag{5.4.4}$$

Afirmamos que

$$(\Psi\otimes\mathrm{id})(\rho_{H\otimes W}\,\mathrm{Stab}_K(W)) = \mathrm{Stab}_K(W). \tag{5.4.5}$$

Esto es fácil de probar usando las definiciones y la identidad (5.4.3).

Ahora, sea $\Upsilon = (\Psi\otimes\mathrm{id})\tau : \mathrm{End}\,(W\otimes H) \to \mathrm{End}\,(H^*\otimes W)$, donde $\tau : \mathrm{End}\,(W\otimes H) \to \mathrm{End}\,(H\otimes W)$ es la transposición usual. Entonces

$$\begin{aligned}
\big(\rho_{H^*\otimes W}(K)\big)'' &= (\mathrm{End}\,_K(H^*\otimes W))' \\
&= \big(\mathrm{Stab}_K(W) \circ (\underline{L}(H)\otimes\mathrm{id})\big)' \\
&= \mathrm{Stab}_K(W)' \cap (\underline{L}(H)\otimes\mathrm{id})' \\
&= \Upsilon\Upsilon^{-1}\,(\mathrm{Stab}_K(W)') \cap \Upsilon\Upsilon^{-1}\,((\underline{L}(H)\otimes\mathrm{id})') \\
&= \Upsilon\,\Big(\mathrm{Cent}_{\mathrm{End}\,(W\otimes H)}\,\Upsilon^{-1}\,\mathrm{Stab}_K(W)\Big) \cap \Upsilon\,\big(\Upsilon^{-1}(\underline{L}(H)\otimes\mathrm{id})\big)' \\
&= \Upsilon\,\big(\mathrm{End}\,_{\Upsilon^{-1}\,\mathrm{Stab}_K(W)}(W\otimes H)\big) \cap \Upsilon\,(\mathrm{id}\otimes L(H))') \\
&= \Upsilon\,\big(\mathrm{End}\,_{\mathrm{Stab}_K(W)}(W\otimes H) \cap \mathcal{R}(\mathrm{End}\,(W)\otimes H)\big) \\
&= \Upsilon\,\big(\mathrm{Stab}_{\mathrm{Stab}_K(W)}(W)\big)\,.
\end{aligned}$$

Aquí la segunda igualdad se verifica por (5.2.5); la tercera por (5.4.2); la cuarta se debe a que Υ es un isomorfismo de álgebras; la sexta es por (5.4.4); la séptima sigue de (5.4.5) y la última es por definición. Luego, la restricción de Υ a $\mathrm{Stab}_{\mathrm{Stab}_K(W)}(W)$ es el isomorfismo que buscabamos. □

Recordemos que si A es un álgebra cuasi-Frobenius y M es un A-módulo fiel finitamente generado entonces $(A; M)$ tiene la propiedad del doble centralizador, ver [**CR**, Th. 15.6]. En vista de este hecho, y como consecuencia de la Proposición 5.4.2, tenemos que:

COROLARIO 5.4.3. *Supongamos que*

1. *K es un álgebra cuasi-Frobenius, y*
2. *$\rho_{H^*\otimes W}: K \to \mathrm{End}\,(H^*\otimes W)$ es inyectiva.*

Entonces $\mathrm{Stab}_{\mathrm{Stab}_K(W)}(W)$ *es isomorfo a K como H-comódulo álgebras.* □

En general la condición de que la representación $\rho_{H^*\otimes W}$ sea fiel es difícil de verificar. El siguiente Lema nos da una condición suficiente para que esto suceda.

LEMA 5.4.4. *Sea K un H-comódulo álgebra sin ideales biláteros H-coestables no triviales y sea $W \neq 0$ un K-módulo a izquierda. Entonces la representación*

$$\rho: K \to \mathrm{End}\,(H^*\otimes W), \quad \rho(k)(\alpha\otimes w) = k_{(-1)} \rightharpoondown \alpha\otimes k_{(0)} \cdot w, \tag{5.4.6}$$

es fiel.

DEMOSTRACIÓN. Sea $I = \mathrm{Ker}\,(\rho)$. Claramente I es un ideal bilátero. Probaremos que I es un ideal de K H-coestable. Primero, observemos que si $k \in I$ entonces

$$< \gamma, \mathcal{S}^{-1}(k_{(-1)}) > \ k_{(0)} \cdot w = 0, \tag{5.4.7}$$

para todo $\gamma \in H^*, w \in W$

Sea $k \in I$. Entonces $\lambda(k) \in H\otimes I$ si y sólo si $(\mathrm{id}\otimes\rho)\lambda(k) = 0$ si y sólo si $(\mathcal{S}^{-1}\otimes\rho)\lambda(k) = 0$. Sean $\alpha, \beta \in H^*, w \in W$. Evaluando $(\mathcal{S}^{-1}\otimes\rho)\lambda(k)$ en $(\alpha\otimes w)$ y aplicando $\beta\otimes\mathrm{id}$ obtenemos

$$\begin{aligned} < \beta, \mathcal{S}^{-1}(k_{(-1)}) > \rho(k_{(0)})(\alpha\otimes w) &=< \beta, \mathcal{S}^{-1}(k_{(-2)}) >< \alpha_{(1)}, \mathcal{S}^{-1}(k_{(-1)}) > \alpha_{(2)}\otimes k_{(0)} \cdot w \\ &=< \mathcal{S}^{-1}(\alpha_{(1)}\beta), k_{(-1)} > \ \alpha_{(2)}\otimes k_{(0)} \cdot w \end{aligned}$$

Evaluando esta última expresión en $h\otimes\mathrm{id}$, $h \in H$ obtenemos que

$$\begin{aligned} < \mathcal{S}^{-1}(\alpha_{(1)}\beta), k_{(-1)} >< \alpha_{(2)}, h > k_{(0)} \cdot w &=< \mathcal{S}^{-1}((h \rightharpoonup \alpha)\beta), k_{(-1)} > k_{(0)} \cdot w \\ &=< (h \rightharpoonup \alpha)\beta, \mathcal{S}^{-1}(k_{(-1)}) > k_{(0)} \cdot w. \end{aligned}$$

La última expresión es cero por (5.4.7). Como α, β, w y h son arbitrarios, $(\mathcal{S}^{-1}\otimes\rho)\lambda(k) = 0$.

□

El siguiente teorema generaliza los resultados de Yan-Zhu, [**YZ**, Theorem 5.1] y [**YZ**, Theorem 5.2]. También responde a la cuestión planteada en [**YZ**, pag. 3897] sobre las hipótesis que se le piden al álgebra K para que valga la propiedad del doble estabilizador.

TEOREMA 5.4.5. *Sea K un H-comódulo álgebra sin ideales a derecha coestables no triviales tal que como álgebra es cuasi-Frobenius. Entonces si $W \neq 0$ un K-módulo a izquierda*

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{Stab}_K(W)}(W) \simeq K$$

como H-comódulo álgebras.

DEMOSTRACIÓN. Es consecuencia inmediata del Corolario 5.4.3 y el Lema 5.4.4. □

5.5. Estabilizadores de Yan-Zhu para extensiones Hopf-Galois

En esta sección daremos otra expresión para el estabilizador de Yan-Zhu en el caso que K es una extensión de Hopf-Galois sobre una subálgebra de Hopf H' de H. Primero recordemos la noción de extensión de Hopf-Galois.

Sea H' un álgebra de Hopf de dimensión finita.

Definición 5.5.1. Sea K una H'-comódulo álgebra a izquierda. Pongamos $R = K^{\mathrm{co}H'}$. La aplicación canónica $\beta : K\otimes_R K \to H'\otimes K$ está definida por $\beta(x\otimes y) = x_{(-1)}\otimes x_{(0)}y$, para todos $x, y \in K$. K es llamada una *extensión Hopf-Galois de* R sobre H' si β es biyectiva.

Siguiendo [**Sch1**] si $K \supseteq R$ es una extensión Hopf-Galois denotemos

$$\beta^{-1}(h\otimes 1) := h^{[1]}\otimes h^{[2]} \in K\otimes_R K,$$

para todo $h \in H'$. El siguiente resultado es debido a H.-J. Schneider, ver [**Sch1**, Rmk 3.4].

Lema 5.5.2. *Sea $K \supseteq R$ una extensión Hopf-Galois, entonces para todo $h, t \in H'$, $k \in K$, $r \in R$ se tiene que*

$$rh^{[1]}\otimes h^{[2]} = h^{[1]}\otimes h^{[2]}r, \tag{5.5.1}$$

$$(th)^{[1]}\otimes(th)^{[2]} = t^{[1]}h^{[1]}\otimes h^{[2]}t^{[2]}, \tag{5.5.2}$$

$$h^{[1]}h^{[2]} = \epsilon(h)1_K, \tag{5.5.3}$$

$$h^{[1]}\otimes 1\otimes h^{[2]} = {h_{(1)}}^{[1]}\otimes {h_{(1)}}^{[2]}{h_{(2)}}^{[1]}\otimes {h_{(2)}}^{[2]}, \tag{5.5.4}$$

$$k\otimes 1 = {k_{(-1)}}^{[1]}\otimes {k_{(-1)}}^{[2]}k_{(0)}, \tag{5.5.5}$$

$$1\otimes k = k_{(0)}\mathcal{S}^{-1}(k_{(-1)})^{[1]}\otimes\mathcal{S}^{-1}(k_{(-1)})^{[2]}, \tag{5.5.6}$$

$$h_{(2)}\otimes {h_{(1)}}^{[1]}\otimes {h_{(1)}}^{[2]} = \mathcal{S}^{-1}({h^{[2]}}_{(-1)})\otimes h^{[1]}\otimes {h^{[2]}}_{(0)}. \tag{5.5.7}$$

Demostración. Las identidades (5.5.1), (5.5.2), (5.5.5) and (5.5.6) siguen de aplicar β. Como $(\epsilon\otimes \mathrm{id})\beta = m$, la identidad (5.5.3) es verificada.

Para obtener (5.5.4) apliquemos $(\mathrm{id}\otimes\beta)(\beta\otimes \mathrm{id})$ en ambos lados. Finalmente, la identidad (5.5.7) es implicada por la colinealidad de β. Más precisamente,

$$\delta\beta = (\mathrm{id}_H\otimes\beta)\widetilde{\delta},$$

donde $\delta : H\otimes K \to H\otimes K\otimes H$, $\widetilde{\delta} : K\otimes_R K \to K\otimes_R K\otimes H$ están definidos por

$$\delta(h\otimes y) = h_{(1)}\otimes y_{(0)}\otimes\mathcal{S}^{-1}(y_{(-1)})h_{(2)}, \quad \widetilde{\delta}(x\otimes y) = x\otimes y_{(0)}\otimes\mathcal{S}^{-1}(y_{(-1)}),$$

para todos $x, y \in K, h \in H$. □

Sea W un K-módulo a izquierda. Para cada $T \in \mathrm{End}_R(W)$, $h \in H'$, $w \in W$ definamos

$$(h\cdot T)(w) := h^{[1]}T(h^{[2]}w). \tag{5.5.8}$$

El siguiente resultado es [**Sch1**, Corolario 3.5].

LEMA 5.5.3. $\operatorname{End}_R(W)$ *es un H'-módulo álgebra a izquierda con respecto a la acción definida por* (5.5.8). *Además* $\operatorname{End}_R(W)^{H'} = \operatorname{End}_K(W)$.

DEMOSTRACIÓN. Sigue de (5.5.1) que $h \cdot T$ es un morfismo de R-módulos para todo $h \in H'$, $T \in \operatorname{End}_R(W)$. La identidad (5.5.2) implica que (5.5.1) define de hecho una acción.

Para todo $h \in H$, $T, U \in \operatorname{End}_R(W)$ las identidades

$$h \cdot \mathrm{Id} = \varepsilon(h)\, \mathrm{Id}, \quad h \cdot (TU) = (h_{(1)} \cdot T)(h_{(2)} \cdot U),$$

siguen de (5.5.3) y (5.5.4) respectivamente. Esto implica que $\operatorname{End}_K(W)$ es un módulo álgebra sobre H'. Usando (5.5.5) se puede probar fácilmente que el espacio de invariantes de $\operatorname{End}_K(W)$ está formado por aquellos endomorfismos que preservan la acción de K. $\square$

Sea H' una subálgebra de Hopf de H. Consideremos a H como un H'-módulo a izquierda vía la representación regular. Sean $(x_j)_j \subseteq H$, $(\beta_j)_j \subseteq H^*$ un par de bases duales.

TEOREMA 5.5.4. *Sea $K \supseteq R$ una extensión de Hopf-Galois sobre H' y W un K-módulo. Entonces*

1. $\operatorname{Hom}_{H'}(H, \operatorname{End}_R(W))$ *es una H^*-comódulo álgebra a derecha, y*
2. $\operatorname{Stab}_K(W) \cong \operatorname{Hom}_{H'}(H, \operatorname{End}_R(W))$ *como H^*-comódulo álgebras.*

DEMOSTRACIÓN. (1) La multiplicación está dada por el producto de convolución, esto es si $T, U \in \operatorname{Hom}_{H'}(H, \operatorname{End}_R(W))$ entonces

$$(TU)(h) = T(h_{(1)})U(h_{(2)}),$$

para todo $h \in H$. La identidad está dada por ϵ. La estructura de H-módulo a izquierda, dada por

$$(h \cdot T)(x) = T(xh),$$

$h, x \in H$, $T \in \operatorname{Hom}_{H'}(H, \operatorname{End}_R(W))$, induce una estructura de H^*-comódulo a derecha que lo hace un H^*-comódulo álgebra.

(2) Sean $\phi : \operatorname{Stab}_K(W) \to \operatorname{Hom}_{H'}(H, \operatorname{End}_R(W))$, $\psi : \operatorname{Hom}_{H'}(H, \operatorname{End}_R(W)) \to \operatorname{Stab}_K(W)$ definidos por

$$\phi(L_{\alpha_i} \otimes f_i)(h)(w) = \langle \alpha_i, h \rangle\, f_i(w), \quad \psi(T) = \sum_j \beta_j \otimes T(x_j),$$

para todo $L_{\alpha_i} \otimes f_i \in \operatorname{Stab}_K(W)$, $h \in H, w \in W$. Verifiquemos que estas aplicaciones están bien definidas. Sean $r \in R$, $t \in H'$, $h \in H$ y $w \in W$. Luego

$$\begin{aligned}\phi(L_{\alpha_i} \otimes f_i)(h)(r \cdot w) &= \langle \alpha_i, h \rangle\, f_i(r \cdot w) = \langle \alpha_i, \mathcal{S}^{-1}(r_{(-1)})h \rangle\, r_{(0)} \cdot f_i(w) \\ &= \langle \alpha_i, h \rangle\, r \cdot f_i(w),\end{aligned}$$

la segunda igualdad por (5.2.3) y la última pues $r \in R = K^{\operatorname{co} H'}$. Esto prueba que $\phi(L_{\alpha_i} \otimes f_i)(h)$ es un morfismo de R-módulos. Tenemos también que

$$\begin{aligned} t\cdot\phi(L_{\alpha_i}\otimes f_i)(h)(w) &= t^{[1]}\phi(L_{\alpha_i}\otimes f_i)(h)(t^{[2]}\cdot w) = \langle\alpha_i, h\rangle\, t^{[1]}\cdot f_i(t^{[2]}\cdot w)\\ &= \langle\alpha_i, \mathcal{S}^{-1}({t^{[2]}}_{(-1)})h\rangle\, t^{[1]}{t^{[2]}}_{(0)}\cdot f_i(w)\\ &= \langle\alpha_i, t_{(2)}h\rangle\, {t_{(1)}}^{[1]}{t_{(1)}}^{[2]}\cdot f_i(w) = \langle\alpha_i, th\rangle\, f_i(w). \end{aligned}$$

La tercera igualdad por (5.2.3), la cuarta por (5.5.7) y la quinta por (5.5.3). Esto demuestra que $\phi(L_{\alpha_i}\otimes f_i)$ es un morfismo de H'-módulos y por lo tanto ϕ está bien definida. La prueba que $\psi(T)\in \mathrm{Stab}_K(W)$ sigue de (5.5.6) y (5.2.3). Que ϕ es un morfismo de álgebras y de H^*-comódulos es un cálculo directo. Las identidades $\psi\phi = \mathrm{id}, \phi\psi = \mathrm{id}$ se demuestran fácilmente. □

En el siguiente ejemplo se muestra como el Teorema 5.5.4 nos permite generalizar el cálculo del estabilizador realizado en el ejemplo 5.3.2.

Ejemplo 5.5.5. Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita y sea $K\subseteq H$ una subálgebra de Hopf. Sea $\sigma : K\otimes_{\Bbbk}K\to \Bbbk^{\times}$ un 2-cociclo normalizado invertible con respecto a la convolución, es decir que σ es una función que verifica que para todo $x,y,z\in K$

$$\sigma(x_{(2)},y_{(2)})\,\sigma(x_{(1)}y_{(1)},z) = \sigma(x,y_{(1)}z_{(1)})\,\sigma(y_{(2)},z_{(2)}),\qquad \sigma(x,1)=\varepsilon(x)=\sigma(1,x).$$

El álgebra K_σ se define como el espacio vectorial K con producto dado por

$$x.y = \sigma(x_{(2)},y_{(2)})\; x_{(1)}y_{(1)},$$

para todo $x,y\in K$. Con la coacción $\lambda : K_\sigma\to H\otimes_{\Bbbk}K_\sigma$, $\lambda(x) = x_{(1)}\otimes x_{(2)}$, $x\in K$, resulta que K_σ es una H-comódulo álgebra a izquierda. Además si W es una representación de dimensión finita de K_σ entonces existe un isomorfismo de H-módulo álgebras

$$\mathrm{Stab}_{K_\sigma}(W)\simeq \mathrm{Hom}_{\,K}(H,\mathrm{End}_{\,\Bbbk}(W)). \tag{5.5.9}$$

Demostración. Es inmediato comprobar que los coinvariantes son triviales: $K_\sigma^{\mathrm{co}\,H} = \Bbbk$. Por un resultado de Doi y Takeuchi, [**Mo**, Theorem 8.2.4], K_σ es una extensión Hopf-Galois de $\Bbbk$ sobre K.

Luego, aplicando el Teorema 5.5.4 a esta situación, se obtiene el isomorfismo deseado. □

CAPíTULO 6

Módulos sobre la categoría de representaciones de álgebras de Hopf

Durante este capítulo H denotará un álgebra de Hopf de dimensión finita. El objetivo principal es estudiar las clases de equivalencia de las categorías módulo sobre $\mathrm{Rep}(H)$.

6.1. Categorías módulo que provienen de comódulo álgebras

En el ejemplo 3.1.7 (iii) mostramos que para cada H-comódulo álgebra K la categoría ${}_K\mathfrak{m}$ posee una estructura de categoría módulo sobre $\mathrm{Rep}(H)$. En lo que sigue veremos como el Teorema 3.2.8 implica que de hecho toda categoría módulo exacta sobre $\mathrm{Rep}(H)$ se construye de esta manera.

Proposición 6.1.1. *Sea $\mathcal{M}$ una categoría módulo exacta sobre $\mathrm{Rep}(H)$. Entonces existe una H-comódulo álgebra a izquierda K tal que $\mathcal{M} \simeq {}_K\mathfrak{m}$ como categorías módulos.*

Demostración. Por el Teorema 3.2.8 $\mathcal{M} \simeq \mathrm{Rep}(H)_R$ para alguna H-módulo álgebra R. Sea $K = H\#R^{\mathrm{op}}$; esto es una H-comódulo álgebra a izquierda. Explícitamente la multiplicación y la coacción están, respectivamente, dadas por

$$(h\#r)(h'\#r') = hh'_{(1)}\#r'(\mathcal{S}(h'_{(2)}) \cdot r), \quad \lambda(h\#r) = h_{(1)}\otimes h_{(2)}\#r,$$

para todo $r, r' \in R$, $h, h' \in H$. Entonces

$$\begin{aligned} \lambda((h\#r)(h'\#r')) &= \lambda(hh'_{(1)}\#r'(\mathcal{S}(h'_{(2)}) \cdot r)) = h_{(1)}h'_{(1)}\otimes h_{(2)}h'_{(2)}\#r'(\mathcal{S}(h'_{(3)}) \cdot r) \\ &= (h_{(1)}\otimes h_{(2)}\#r)(h'_{(1)}\otimes h'_{(2)}\#r') = \lambda(h\#r)\lambda(h'\#r'). \end{aligned}$$

Sea $\mathcal{F} : \mathrm{Rep}(H)_R \to {}_K\mathfrak{m}$ el funtor dado por $\mathcal{F}(M) = M$, con acción $(h\#r) \cdot m = h \cdot (m \cdot r)$. Esta acción está bien definida pues la acción $M\otimes R \to M$ es un morfismo de H-módulos. Claramente $\mathcal{F}$ es una equivalencia de categorías abelianas. Afirmamos que $(\mathcal{F}, c)$ es una equivalencia de categorías módulo donde $c_{X,M} : \mathcal{F}(X\otimes M) \to X\otimes\mathcal{F}(M)$ es la identidad. El único punto que requiere alguna verificación es que $c_{X,M}$ es un morfismo de K-módulos. Así que si $X \in \mathrm{Rep}(H)$, $N \in \mathrm{Rep}(H)_R$, $x \in X$, $m \in M$, $h \in H$, $r \in R$ entonces

$$\begin{aligned} c_{X,M}((h\#r) \cdot (x\otimes m)) &= h \cdot ((x\otimes m) \cdot r) = h \cdot (x\otimes m \cdot r) = h_{(1)} \cdot x\otimes h_{(2)} \cdot (m \cdot r); \\ (h\#r) \cdot c_{X,M}(x\otimes m) &= h_{(1)} \cdot x\otimes(h_{(2)}\#r) \cdot m = h_{(1)} \cdot x\otimes h_{(2)} \cdot (m \cdot r). \end{aligned}$$

□

6.2. El Hom interno

Fijemos K una H-comódulo álgebra a izquierda y recordemos la estructura de categoría módulo de ${}_K\mathfrak{m}$ sobre $\mathrm{Rep}(H)$ dada en el ejemplo 3.1.7 (iii).

En lo que sigue mostraremos como el Hom interno de la categoría módulo ${}_K\mathfrak{m}$ coincide con el estabilizador de Yan-Zhu.

Proposición 6.2.1. *$\underline{\mathrm{Hom}}(U,W) = \mathrm{Stab}_K(U,W)$, y la función bilineal*

$$\underline{\mathrm{Hom}}(W,U) \times \underline{\mathrm{Hom}}(Z,W) \to \underline{\mathrm{Hom}}(Z,U)$$

definida por (3.2.2) *coincide con la composición* (5.2.2).

Demostración. Identifiquemos $H^*\otimes\mathrm{Hom}\,(U,W)$ con $\mathrm{Hom}\,(H\otimes U,W)$ de la manera natural. Sea $X \in \mathrm{Rep}\,H$. Existen isomorfismos naturales, uno el inverso del otro

$$G : \mathrm{Hom}_H(X, H^*\otimes\mathrm{Hom}\,(U,W)) \to \mathrm{Hom}\,(X\otimes U, W),$$
$$F : \mathrm{Hom}\,(X\otimes U, W) \to \mathrm{Hom}_H(X, H^*\otimes\mathrm{Hom}\,(U,W)),$$

determinados por

$$\begin{aligned} G(\psi)(x\otimes u) &= \psi(x)(1\otimes u),\\ F(\phi)(x)(a\otimes u) &= \phi(a\cdot x\otimes u). \end{aligned}$$

Aquí y en el resto de la demostración, $\psi \in \mathrm{Hom}_H(X, H^*\otimes\mathrm{Hom}\,(U,W))$, $\phi \in \mathrm{Hom}\,(X\otimes U,W)$, $x\in X$, $a\in H$, $u \in U$; y también $\alpha\in H^*$, $k\in K$.

Dado ψ y x, escribimos simbólicamente $\psi(x) = \psi(x)_{(1)}\otimes\psi(x)_{(2)}$, con $\psi(x)_{(1)} \in \mathrm{End}\,(H^*)$, $\psi(x)_{(2)} \in \mathrm{Hom}\,(U,W)$. Notar que

$$\mathcal{L}(\psi(x))(\alpha\otimes u)(a) = \langle\alpha, a_{(2)}\rangle\psi(x)(a_{(1)}\otimes u).$$

Afirmamos que $F(\mathrm{Hom}_K(X\otimes U,W)) = \mathrm{Hom}_H(X, \mathrm{Stab}_K(U,W))$, salvo identificación vía $\mathcal{L}$.

De hecho, $\phi\in\mathrm{Hom}_K(X\otimes U,W)$ si y sólo si $\psi = G(\phi)$ satisface

$$k\cdot(\psi(x)(a\otimes u)) = \psi(x)(k_{(-1)}a\otimes k_{(0)}\cdot u). \tag{6.2.1}$$

En lo siguiente las aplicaciones $\rho_{H^*\otimes W} : K \to \mathrm{End}\,H^*\otimes\mathrm{End}\,W \simeq \mathrm{End}\,(H^*\otimes W)$ o $\rho_{H^*\otimes U}$ se denotaran con el mismo símbolo: ρ. Calculemos por un lado

$$\begin{aligned} [\psi(x)\rho(k)(\alpha\otimes u)]\,(a) &= \left[\psi(x)(k_{(-1)}\rightharpoondown\alpha\otimes k_{(0)}\cdot u)\right](a)\\ &= \langle k_{(-1)}\rightharpoondown\alpha, a_{(2)}\rangle\psi(x)(a_{(1)}\otimes k_{(0)}\cdot u)\\ &= \langle\alpha, \mathcal{S}^{-1}(k_{(-1)})a_{(2)}\rangle\psi(x)(a_{(1)}\otimes k_{(0)}\cdot u),\\ &= \boxtimes_1, \end{aligned}$$

y por el otro

$$\begin{aligned}
[\rho(k)\psi(x)(\alpha\otimes u)](a) &= \left[k_{(-1)} \rightharpoonup \psi(x)_{(1)}(\alpha)\otimes k_{(0)}\cdot\psi(x)_{(2)}(u)\right](a)\\
&= \left[\psi(x)_{(1)}(\alpha)\otimes k_{(0)}\cdot\psi(x)_{(2)}(u)\right](\mathcal{S}^{-1}(k_{(-1)})a)\\
&= \langle\alpha,\mathcal{S}^{-1}(k_{(-2)})a_{(2)}\rangle\, k_{(0)}\cdot\left[\psi(x)(\mathcal{S}^{-1}(k_{(-1)})a_{(1)}\otimes u)\right]\\
&= \boxtimes_2.
\end{aligned}$$

Si $\boxtimes_1 = \boxtimes_2$ entonces tomando $\alpha = \varepsilon$ obtenemos (6.2.1). Recíprocamente, no es difícil ver que (6.2.1) implica $\boxtimes_1 = \boxtimes_2$.

Ahora la afirmación dice que $\operatorname{Hom}_K(X \otimes U, W) \simeq \operatorname{Hom}_H(X, \operatorname{Stab}_K(U,W))$; así el funtor $X \mapsto \operatorname{Hom}_K(X\otimes U, W)$ está representado por $\operatorname{Stab}_K(U,W)$.

□

Observación 6.2.2. Si W es un K-módulo simple, el Corolario 3.2.10 en combinación con la Proposición 6.2.1 implican que $\operatorname{Stab}_K(W)$ no posee ideales a derecha H-estables.

Proposición 6.2.3. *Sea K una H-comódulo álgebra tal que ${}_K\mathfrak{m}$ es exacta sobre* $\operatorname{Rep}(H)$ *y sea V un generador de ${}_K\mathfrak{m}$. Entonces*

$${}_K\mathfrak{m} \simeq \operatorname{Rep}(H)_{\operatorname{Stab}_K(V)},$$

como categorías módulo sobre $\operatorname{Rep}(H)$.

Demostración. Inmediato de la Proposición 6.2.1 y el Teorema 3.2.8.

□

Otra consecuencia inmediata de la Proposición 6.2.1 es el siguiente resultado.

Corolario 6.2.4. *Si $K \subseteq H$ es una subálgebra de Hopf de H y W es un K-módulo, entonces*

$$\operatorname{Stab}_K(W) \simeq \operatorname{Ind}_K^H{}_\beta\operatorname{End}(W),$$

como H-módulo álgebras.

Demostración. Sigue usando la Proposición 6.2.1 y el isomorfismo (3.2.4). □

6.3. Equivalencias de categorías módulo

En lo que sigue estudiaremos los funtores de entrelazamiento entre las categorías módulo ${}_R\mathfrak{m}$ y ${}_S\mathfrak{m}$, donde R y S son dos H-comódulos álgebras a izquierda sobre H. Denotaremos las estructuras de comódulos en R y S por $\lambda_R : R \to H\otimes_{\Bbbk}R$ y $\lambda_S : S \to H\otimes_{\Bbbk}S$ respectivamente.

Sea P un (S,R)-bimódulo y también un H-comódulo a izquierda vía $\lambda : P \to H\otimes_{\Bbbk}P$. Diremos que P es un *bimódulo equivariante* si λ es un morfismo de R-módulos a derecha y de S-módulos a izquierda, donde la acción de R y S sobre $H\otimes_{\Bbbk}P$ vienen dadas vía λ_R y λ_S respectivamente.

Definamos el funtor $\mathcal{F} : {}_R\mathfrak{m} \to {}_S\mathfrak{m}$ por $\mathcal{F}(V) = P\otimes_R V$ con estructura de S-módulo sobre el primer tensorando. Además para cada $X \in \mathrm{Rep}(H)$, $V \in {}_R\mathfrak{m}$ sea $c_{X,V}$: $P\otimes_R(X\otimes_{\Bbbk}V) \to X\otimes_{\Bbbk}(P\otimes_R V)$ el isomorfismo dado por

$$c_{X,V}(m\otimes x\otimes v) = m_{(-1)} \cdot x\otimes m_{(0)}\otimes v, \tag{6.3.1}$$

para todo $m \in P, x \in X, v \in V$. Se tiene el siguiente resultado.

Lema 6.3.1. *Si P es un bimódulo equivariante entonces el funtor $(\mathcal{F}, c)$ es un funtor de entrelazamiento.*

Demostración. La buena definición del isomorfismo natural c es consecuencia de que λ es de R-módulos a derecha. Además para todo $X \in \mathrm{Rep}(H), V \in {}_R\mathfrak{m}$ el morfismo $c_{X,V}$ es un morfismo en ${}_S\mathfrak{m}$ ya que λ es un morfismo de S-módulos a izquierda. Las identidades (3.1.5) y (3.1.6) son inmediatas.

□

En la siguiente propopsición probaremos que todo funtor de entrelazamiento de categorías módulo $(\mathcal{F}, c) : {}_R\mathfrak{m} \to {}_S\mathfrak{m}$ se construye de la manera como se explicó antes.

Sea $(\mathcal{F}, c) : {}_R\mathfrak{m} \to {}_S\mathfrak{m}$ un funtor de entrelazamiento. Por el Teorema 1.4.2 existe un objeto $P \in {}_S\mathfrak{m}_R$ tal que $\mathcal{F}(V) = P\otimes_R V$ para todo $V \in {}_R\mathfrak{m}$.

Definamos $\lambda : P \to H\otimes_{\Bbbk}P$ la aplicación determinada por

$$\lambda(m) = c_{H,R}(m\otimes 1\otimes 1).$$

Lema 6.3.2. *(P, λ) es un H-comódulo a izquierda y es un bimódulo equivariante.*

Demostración. Tenemos que probar que se cumplen las siguientes identidades:

$$(\varepsilon\otimes \mathrm{id}_P)\lambda = \mathrm{id}_P \tag{6.3.2}$$

$$(\mathrm{id}_H \otimes\lambda)\lambda = (\Delta\otimes \mathrm{id}_P)\lambda. \tag{6.3.3}$$

La naturalidad de c en la primera variable implica que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} P\otimes_R(H\otimes_{\Bbbk}R) & \xrightarrow{c_{H,R}} & H\otimes_{\Bbbk}(P\otimes_R R) \\ {\scriptstyle(\mathrm{id}_P \otimes\varepsilon\otimes \mathrm{id})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle(\varepsilon\otimes \mathrm{id}\otimes \mathrm{id})} \\ P\otimes_R(\Bbbk\otimes_{\Bbbk}R) & \xrightarrow[c_{\Bbbk,R}]{} & \Bbbk\otimes_{\Bbbk}(P\otimes_R R) \end{array}$$

es conmutativo. Esto implica que $(\varepsilon\otimes \mathrm{id}_P)c_{H,R} = (\mathrm{id}_P \otimes\varepsilon)$ ya que $c_{\Bbbk,R} = \mathrm{id}_P$. Entonces para todo $m \in P$,

$$(\varepsilon\otimes \mathrm{id}_P)\lambda(m) = (\varepsilon\otimes \mathrm{id}_P)c_{H,R}(m\otimes 1\otimes 1) = (\mathrm{id}_P \otimes\varepsilon)(m\otimes 1\otimes 1) = m.$$

Lo cual prueba (6.3.2). Nuevamente usando la naturalidad de c en la primer variable implica que el diagrama

(6.3.4)
$$\begin{tikzcd}
P\otimes_R(H\otimes_{\Bbbk}R) \arrow[r, "c_{H,R}"] \arrow[d, "(\mathrm{id}_P\otimes\Delta\otimes\mathrm{id})"'] & H\otimes_{\Bbbk}(P\otimes_R R) \arrow[d, "(\Delta\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"] \\
P\otimes_R(H\otimes_{\Bbbk}H\otimes_{\Bbbk}R) \arrow[r, "c_{H\otimes H,R}"'] & (H\otimes_{\Bbbk}H)\otimes_{\Bbbk}(P\otimes_R R),
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Fijemos $X\in \mathrm{Rep}(H), V\in {}_R\mathfrak{m}$ y $x\in X, v\in V$ y denotemos

$$\phi^X_x : H\to X,\quad \psi^V_v : R\to V,$$

las funciones definidas por $\phi^X_x(h)=h\cdot x,\ \psi^V_v(r)=r\cdot v$, para todo $h\in H, r\in R$. Es fácil comprobar que ϕ^X_x es un morfismo de H-módulos y que ψ^V_v es un morfismo de R-módulos. Ahora la naturalidad de c implica que los diagramas

$$\begin{tikzcd}
P\otimes_R(H\otimes_{\Bbbk}R) \arrow[r, "c_{H,R}"] \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\psi^V_v)"'] & H\otimes_{\Bbbk}(P\otimes_R R) \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\psi^V_v)"] \\
P\otimes_R(H\otimes_{\Bbbk}V) \arrow[r, "c_{H,V}"'] & H\otimes_{\Bbbk}(P\otimes_R V)
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
P\otimes_R(H\otimes_{\Bbbk}V) \arrow[r, "c_{H,V}"] \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes\phi^X_x\otimes\mathrm{id})"'] & H\otimes_{\Bbbk}(P\otimes_R V) \arrow[d, "(\phi^X_x\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"] \\
P\otimes_R(X\otimes_{\Bbbk}V) \arrow[r, "c_{X,V}"'] & X\otimes_{\Bbbk}(P\otimes_R V),
\end{tikzcd}$$

son conmutativos. Se deduce de la conmutatividad de estos dos diagramas que

(6.3.5)
$$c_{X,V}(m\otimes x\otimes v)=(\phi^X_x\otimes\mathrm{id}_P\otimes\psi^V_v)\, c_{H,R}(m\otimes 1\otimes 1),$$

para todo $m\in P$. En particular tomando $V=H\otimes R$, $X=H$ y $v=1\otimes 1$, $x=1$ la ecuación (6.3.5) implica que

(6.3.6)
$$c_{H,H\otimes R}(m\otimes 1\otimes 1\otimes 1)=(\mathrm{id}_H\otimes\mathrm{id}_P\otimes\lambda_R)\, c_{H,R}(m\otimes 1\otimes 1)=\lambda(m)\otimes 1\otimes 1,$$

para todo $m\in P$.

Probemos (6.3.3). Sea $m\in P$ entonces

$$\begin{aligned}(\Delta\otimes\mathrm{id}_P)\lambda(m)&=(\Delta\otimes\mathrm{id}_P)\, c_{H,R}(m\otimes 1\otimes 1)=c_{H\otimes H,R}(\mathrm{id}_P\otimes\Delta\otimes\mathrm{id}_R)(m\otimes 1\otimes 1)\\&=(\mathrm{id}_H\otimes c_{H,R})c_{H,H\otimes R}(m\otimes 1\otimes 1\otimes 1)=(\mathrm{id}_H\otimes c_{H,R})\delta(m)\otimes 1\otimes 1=(\mathrm{id}_H\otimes\lambda)\lambda(m).\end{aligned}$$

La primera igualdad por la definición de λ, la segunda por la conmutatividad del diagrama (6.3.4), la tercera por (3.1.5) y la cuarta por (6.3.6).

Falta probar que λ es un morfismo de R-módulos a derecha. Sean $p \in P, r \in R$, entonces

$$\begin{aligned}\lambda(p \cdot r) &= c_{H,R}(p \cdot r \otimes 1 \otimes 1) = c_{H,R}(p \otimes r_{(-1)} \otimes r_{(0)}) \\ &= (\phi^H_{r_{(-1)}} \otimes \mathrm{id}_P \otimes \psi^R_{r_{(0)}})\lambda(p).\end{aligned}$$

La última igualdad proviene de la identidad (6.3.5).

□

Como consecuencia de estos resultados podemos describir las equivalencias de categorías módulo entre ${}_R\mathfrak{m}$ y ${}_S\mathfrak{m}$.

Recordemos que un *contexto de Morita* para R y S, es una colección (P, Q, f, g) donde $P \in {}_S\mathcal{M}_R$, $Q \in {}_R\mathcal{M}_S$ y $f : P \otimes_R Q \xrightarrow{\simeq} S$ es un isomorfismo de S-bimódulos y $g : Q \otimes_S P \xrightarrow{\simeq} R$ es un isomorfismo de R-bimódulos y los diagramas

$$\begin{tikzcd} P\otimes_R Q\otimes_S P \arrow[r, "f\otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes g"'] & S\otimes_S P \arrow[d, "\simeq"] \\ P\otimes_R R \arrow[r, "\simeq"] & P \end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd} Q\otimes_S P\otimes_R Q \arrow[r, "g\otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes f"'] & R\otimes_R Q \arrow[d, "\simeq"] \\ Q\otimes_S S \arrow[r, "\simeq"] & Q \end{tikzcd}$$

son conmutativos. Un *contexto de Morita equivariante* para R y S es un contexto de Morita (P, Q, f, g) para R y S donde P es un bimódulo equivariante. En tal caso diremos que R y S son equivalentes Morita equivariante.

En los siguientes Lemas mostraremos que si (P, Q, f, g) es un contexto de Morita equivariante entonces Q es un bimódulo equivariante y que los isomorfismos f y g son morfismos de H-comódulos.

LEMA 6.3.3. *Sea (P, Q, f, g) un contexto de Morita equivariante. Entonces Q es un (R, S)-bimódulo equivariante.*

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que si (P, Q, f, g) es un contexto de Morita entonces

$$Q \simeq \mathrm{Hom}_R(P, R), \quad P \simeq \mathrm{Hom}_S(Q, S),$$

donde los isomorfismos son $\phi : Q \to \mathrm{Hom}_R(P, R)$, $\psi : P \to \mathrm{Hom}_S(Q, S)$ determinados por

$$\phi(q)(p) = g(q \otimes p), \quad \psi(p)(q) = f(p \otimes q),$$

para todo $q \in Q$, $p \in P$. Usaremos estas identificaciónes sin ninguna mención especial.

La coacción de H en Q es la correspondiente a la acción de H^* dada por

$$(q \leftharpoonup \gamma)(p) = q(\otimes\, p \leftharpoonup \mathcal{S}^{-1}(\gamma_{(2)})) \leftharpoonup \gamma_{(1)}, \qquad q \in Q,\, p \in P,\, \gamma \in H^*. \tag{6.3.7}$$

Afirmamos que con dicha coacción Q es un (R,S)-bimódulo equivariante, esto equivale a probar que para todo $q \in Q$, $r \in R, s \in S, \gamma \in H^*$

$$(rqs) \leftharpoonup \gamma = (r \leftharpoonup \gamma_{(1)})(q \leftharpoonup \gamma_{(2)})(s \leftharpoonup \gamma_{(3)}). \tag{6.3.8}$$

Evaluando ambos miembros en $p \in P$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\text{Lado izquierdo de } (6.3.8)(p) &= (rqs)(p \leftharpoonup \mathcal{S}^{-1}(\gamma_{(2)})) \leftharpoonup \gamma_{(1)} = [rq(s(p \leftharpoonup \mathcal{S}^{-1}(\gamma_{(2)})))] \leftharpoonup \gamma_{(1)}\\
&= (r \leftharpoonup \gamma_{(1)})[q(s(p \leftharpoonup \mathcal{S}^{-1}(\gamma_{(3)}))) \leftharpoonup \gamma_{(2)}].\\
\text{Lado derecho de } (6.3.8)(p) &= (r \leftharpoonup \gamma_{(1)})(q \leftharpoonup \gamma_{(2)})((s \leftharpoonup \gamma_{(3)})p)\\
&= (r \leftharpoonup \gamma_{(1)})[q(((s \leftharpoonup \gamma_{(4)})p) \leftharpoonup \mathcal{S}^{-1}(\gamma_{(3)})) \leftharpoonup \gamma_{(2)}]\\
&= (r \leftharpoonup \gamma_{(1)})[q((s \leftharpoonup \gamma_{(5)}\mathcal{S}^{-1}(\gamma_{(4)}))(p \leftharpoonup \mathcal{S}^{-1}(\gamma_{(3)}))) \leftharpoonup \gamma_{(2)}].
\end{aligned}$$

Por lo tanto (6.3.8) se satisface.

□

Sea (P, Q, f, g) un contexto de Morita equivariante entonces $P \otimes_R Q$ es un H-comódulo a izquierda vía las coacciones de P y Q, es decir que la estructura de H-comódulo está dada por

$$\delta : P \otimes_R Q \to H \otimes_{\Bbbk} P \otimes_R Q, \quad \delta(p \otimes q) = p_{(-1)} q_{(-1)} \otimes p_{(0)} \otimes q_{(0)},$$

para todo $p \otimes q \in P \otimes_R Q$. Es inmediato comprobar que δ está bien definida y que es coasociativa y counitaria.

Lema 6.3.4. *Sea (P, Q, f, g) un contexto de Morita equivariante entonces f y g son morfismos de H-comódulos.*

Demostración. Es inmediata usando (6.3.7). □

Ahora estamos listos para probar el siguiente resultado.

Proposición 6.3.5. *Las equivalencias de categorías módulo entre ${}_R\mathfrak{m}$ y ${}_S\mathfrak{m}$ están en biyección con contextos de Morita (P, Q, f, g) equivariantes.*

Demostración. Supongamos que $(F, c) : {}_R\mathfrak{m} \to {}_S\mathfrak{m}$ y $(G, d) : {}_S\mathfrak{m} \to {}_R\mathfrak{m}$ son los funtores de entrelazamiento que dan una equivalencia de categorías módulo. Sabemos que los funtores que dan la equivalencia de categorías $F : {}_R\mathfrak{m} \to {}_S\mathfrak{m}$ y $G : {}_S\mathfrak{m} \to {}_R\mathfrak{m}$ están determinados por

$$F(M) = P \otimes_R M, \quad G(N) = Q \otimes_S N$$

para todo $M \in {}_R\mathfrak{m}$, $N \in {}_S\mathfrak{m}$.

También sabemos que los isomorfismos naturales $\theta : F \circ G \to \mathrm{Id}$, $\eta : G \circ F \to \mathrm{Id}$ están dados por

$$\theta_N(p \otimes q \otimes n) = f(p \otimes q) \cdot n, \quad \eta_M(q \otimes p \otimes m) = g(p \otimes p) \cdot m,$$

para todo $p \in P$, $q \in Q$, $n \in N, m \in M$, donde $M \in {}_R\mathfrak{m}$, $N \in {}_S\mathfrak{m}$. Para que $F \circ G \simeq \mathrm{Id}$ como funtores de entrelazamiento, debe ocurrir que para todo $X \in \mathrm{Rep}(H)$, $N \in {}_S\mathfrak{m}$

$$(\mathrm{id}_X \otimes \theta_N)\, c_{X,G(N)}\, F(d_{X,N}) = \theta_{X\otimes N}.$$

Esto ocurre si y sólo si f es un morfismo de H-comódulos. Análogamente $G \circ F \simeq \mathrm{Id}$ como funtores de entrelazamiento si y sólo si g es un morfismo de H-comódulos.

□

LEMA 6.3.6. *Mantengamos la notación anterior. El espacio* $\mathrm{End}_R(P_R)$ *posee una estructura de* H*-comódulo álgebra a izquierda,* $\lambda : \mathrm{End}_R(P_R) \to H \otimes_{\Bbbk} \mathrm{End}_R(P_R)$, $T \mapsto T_{(-1)} \otimes T_{(0)}$, *determinada por la identidad*

$$\langle \alpha, T_{(-1)}\rangle\, T_0(m) = \langle \alpha, T(m_{(0)})_{(-1)}\mathcal{S}^{-1}(m_{(-1)})\rangle\, T(m_{(0)})_{(0)}, \tag{6.3.9}$$

para todo $T \in \mathrm{End}_R(P_R)$, $m \in P, \alpha \in H^*$. *Más aún* P *es un* $(\mathrm{End}_R(P_R), R)$*-bimódulo equivariante.*

DEMOSTRACIÓN. Verifiquemos que λ está bien definida, es decir que en efecto $T_{(-1)} \otimes T_{(0)} \in H \otimes_{\Bbbk} \mathrm{End}_R(P_R)$. Sean $\alpha \in H^*$, $r \in R$, $p \in P$. Entonces

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, T_{(-1)}\rangle\, T_0(p\cdot r) &= \langle \alpha, T((p\cdot r)_{(0)})_{(-1)}\mathcal{S}^{-1}((p\cdot r)_{(-1)})\rangle\, T((p\cdot r)_{(0)})_{(0)}\\
&= \langle \alpha, T(p_{(0)}\cdot r_{(0)})_{(-1)}\mathcal{S}^{-1}(m_{(-1)}r_{(-1)})\rangle\, T(p_{(0)}\cdot r_{(0)})_{(0)}\\
&= \langle \alpha, T(p_{(0)})_{(-1)}r_{(-2)}\mathcal{S}^{-1}(p_{(-1)}r_{(-1)})\rangle\, T(p_{(0)})_{(0)}\cdot r_{(0)}\\
&= \langle \alpha, T(p_{(0)})_{(-1)}\mathcal{S}^{-1}(p_{(-1)})\rangle\, T(p_{(0)})_{(0)}\cdot r\\
&= \langle \alpha, T_{(-1)}\rangle\, T_0(p)\cdot r
\end{aligned}$$

La primera igualdad por la identidad (6.3.9), la segunda es debida a que λ_P es un morfismo de R-módulos, la tercera pues T es un morfismo de R-módulos a derecha, y la cuarta por propiedades de $\mathcal{S}^{-1}$. Es inmediato comprobar que λ es coasociativa y counitaria.

□

LEMA 6.3.7. *Sea* (P, Q, f, g) *un contexto de Morita equivariante. Entonces la aplicación* $\rho : S \to \mathrm{End}_R(P_R)$ *es un isomorfismo de* H*-comódulos.*

DEMOSTRACIÓN. Por la teoría de Morita se sabe que la aplicación $\rho : S \to \mathrm{End}_R(P_R)$ definida por $\rho(s)(v) = s \cdot p$, para todo $s \in S, p \in P$, es un isomorfismo.

Probemos que ρ es un morfismo de H-comódulos. Sean $s \in S, p \in P$ y $\alpha \in H^*$. Entonces

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, \rho(s)(p)_{(-1)}\rangle\, \rho(s)(p)_{(0)} &= \langle \alpha, \rho(s)(p_{(0)})_{(-1)}\mathcal{S}^{-1}(p_{(-1)})\rangle\, \rho(s)(p_{(0)})_{(0)}\\
&= \langle \alpha, s_{(-1)}p_{(-2)}\mathcal{S}^{-1}(p_{(-1)})\rangle\, s_{(0)}\cdot p_{(0)}\\
&= \langle \alpha, s_{(-1)}\rangle\, s_{(0)}\cdot p.
\end{aligned}$$

La primera igualdad por (6.3.9), la segunda pues λ es un morfismo de S-módulos. Lo cual prueba que

$$(\mathrm{id} \otimes \rho)\lambda_S = \delta\rho.$$

□

Como consecuancia de la Proposición 6.3.5 y la Proposición 6.1.1 tenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 6.3.8. *Las clases de equivalencia de categorías módulo exactas sobre* $\mathrm{Rep}(H)$ *están parametrizadas por clases de equivalencia Morita equivariantes de H-comódulo álgebras.*

□

6.4. Categorías módulo sobre el dual de un álgebra de grupo

Las categorías módulo sobre el dual de un álgebra de grupo de un grupo finito fueron clasificadas por V. Ostrik usando categorías duales. Este mismo resultado fue demostrado luego por Etingof y Calaque, [**CE**]. En está sección usaremos las herramientas desarrolladas previamente para dar una demostración alternativa a los resultados de Ostrik.

Sea G un grupo finito y sea $H = \Bbbk G$ el álgebra de grupo de G.

TEOREMA 6.4.1. *[Ostrik] Sea $\mathcal{M}$ una categoría modulo exacta indescomponible sobre* $\mathrm{Rep}(H^*)$. *Entonces existen un subgrupo $F \subseteq G$ y un 2-cociclo normalizado $\sigma \in Z^2(F, \Bbbk^\times)$ y una equivalencia de categorías módulo*

$$\mathcal{M} \simeq \mathrm{Rep}(H^*)_{\Bbbk_\sigma F}.$$

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 3.2.8 y el Corolario 3.2.10 existe un H^*-módulo álgebra A sin ideales H^*-estables y existe una equivalencia de categorías módulo

$$\mathcal{M} \simeq \mathrm{Rep}(H^*)_A.$$

Como A es un H^*-módulo álgebra a izquierda entonces es un H-comódulo álgebra a derecha y por lo tanto, a izquierda, ya que H es coconmutativa. Luego, en este contexto podemos utilizar el estabilizador de Yan-Zhu.

Sea V una representación irreducible de A. La Observación 6.2.2 implica que el estabilizador $\mathrm{Stab}_A(V)$ es un H-módulo álgebra sin ideales a derecha H-estables. Por lo tanto $\mathrm{Stab}_A(V)$ es un álgebra semisimple [**Li**, Theorema 3.1].

Por (la demostración del) Teorema 3.3.2 existe un subgrupo $F \subseteq G$ y un 2-cociclo normalizado $\sigma \in Z^2(F, \Bbbk^\times)$ tal que

$$\mathrm{Stab}_A(V) \simeq \Bbbk G \otimes_F \mathrm{End}\,(V).$$

Recordemos que en el Ejemplo 5.3.2 mostramos que $\Bbbk G \otimes_F \mathrm{End}\,(V) \simeq \mathrm{Stab}_{\Bbbk_\sigma F}(V)$ como $\Bbbk G$-módulo álgebras.

Entonces tenemos que

$$A \simeq \mathrm{Stab}_{\mathrm{Stab}_A(V)}(V) \simeq \mathrm{Stab}_{\Bbbk G \otimes_F \mathrm{End}\,(V)}(V) \simeq \mathrm{Stab}_{\mathrm{Stab}_{\Bbbk_\sigma F}(V)}(V) \simeq \Bbbk_\sigma F.$$

El primer y el último isomorfismo son consecuencia del Teorema 5.4.5. Esto termina la prueba del Teorema. □

OBSERVACIÓN 6.4.2. Como se notó en [**EO**], el Teorema 6.4.1 es válido incluso cuando la característica del cuerpo $\Bbbk$ es positiva.

OBSERVACIÓN 6.4.3. En [**O1**] se prueba algo más general y es que las categorías módulo semisimples indescomponibles sobre $\mathcal{C}(G,\omega)$ (ver ejemplo 2.0.13), están parametrizadas por subgrupos F de G y 2-cocadenas $\sigma : F \times F \to \Bbbk^\times$ tales que $\omega|_{F\times F\times F} = d\sigma$. También en *loc. cit.* se calcula explícitamente los rangos de dichas categorías módulo.

De estos cálculos se deduce que si elegimos G un grupo de orden no divisible por ningún cuadrado perfecto y ω es no trivial, entonces la categoría $\mathcal{C}(G,\omega)$ no posee funtores de fibra, es decir no posee categorías módulo de rango 1.

6.5. Categorías módulo sobre las álgebras de Taft

En esta sección clasificaremos las categorías módulo exactas sobre las álgebras de Taft. Dicha clasificación aparece en [**EO**].

Sean $n \in \mathbb{N}$ y q una raiz n-ésima primitiva de la unidad. Recordemos que el álgebra de Taft $T(q)$ es el álgebra generada por x, g sujetos a las relaciones $x^n = 0$, $g^n = 1$, $gx = q\, xg$. Esta álgebra posee estructura de álgebra de Hopf con comultiplicación, counidad y antípoda dadas por

$$\Delta(g) = g\otimes g,\ \ \Delta(x) = 1\otimes x + x\otimes g,\ \ \varepsilon(g) = 1,\ \ \varepsilon(x) = 0,$$

$$\mathcal{S}(g) = g^{-1},\ \ \mathcal{S}(x) = -xg^{-1}.$$

Las álgebras de Taft son álgebras de Hopf autoduales, con dualidad dada por

$$< G, g >= q^{-1} \quad < G, x >= 0 \quad < X, g >= 0 \quad < X, x >= 1,$$

donde $T(q)^* =< G, X : G^n = \varepsilon, X^n = 0, GX = qXG >$.

En lo que sigue introduciremos una familia de módulo álgebras sobre las algebras de Taft.

Sea $d \in \mathbb{N}$ un divisor de n y pongamos $n = dm$. Denotemos por B_d al espacio vectorial sobre $\Bbbk$ generado por $\{e_i\}_{i=0}^{d-1}$. B_d es un álgebra declarando a los e_i como idempotentes ortogonales, es decir

$$e_i\, e_j = \delta_{i,j} e_i. \tag{6.5.1}$$

LEMA 6.5.1. *El álgebra B_d es un módulo álgebra sobre $T(q)$ de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned} &g \cdot e_i = e_{i+1},\ \ \textit{para } i = 0, \dots, d-2,\\ &g \cdot e_{d-1} = e_0,\\ &x \cdot e_i = 0 \ \textit{para } i = 0, \dots, d-1. \end{aligned}$$

La siguiente observación, a pesar de ser bastante clara, será crucial para lo que sigue más adelante.

OBSERVACIÓN 6.5.2. Los isomorfismos lineales $g\cdot : B_d \to B_d$ son diagonalizables. Los autoespacios son de dimensión 1 y los correspondientes autovalores son q^{mi}, $i = 0, \dots, d-1$.

Demostración. Los operadores $g\cdot : B_d \to B_d$ diagonalizan ya que $g^n = 1$. Para cualquier $j = 0, \dots, d-1$ definamos $h_j = \sum_{i=0}^{d-1} q^{-mij}\, e_i$. Entonces $g \cdot h_j = q^{mj}\, h_j$, y como $\dim_{\Bbbk} B_d = d$ el conjunto $(h_j)_{j=0}^{d-1}$ son todos los posibles autovectores de la aplicación $g\cdot$. $\square$

Sea $\lambda \in \Bbbk$. Denotemos por $\mathcal{A}(d,\lambda)$ el álgebra generada por B_d y un elemento y_λ sujeto a las relaciones

$$y_\lambda^n = \lambda 1, \tag{6.5.2}$$

$$e_0\, y_\lambda = y_\lambda\, e_{d-1}, \quad e_{j+1}\, y_\lambda = y_\lambda\, e_j \text{ para } j = 0, \dots, d-2 \tag{6.5.3}$$

Observación 6.5.3. Las identidades (6.5.3) son equivalentes a la identidad

$$y_\lambda = \sum_{i=0}^{d-2} e_{i+1}\, y_\lambda\, e_i + e_0\, y_\lambda\, e_{d-1}. \tag{6.5.4}$$

Demostración. Supongamos que (6.5.3) se verifica. Entonces

$$\sum_{i=0}^{d-2} e_{i+1}\, y_\lambda\, e_i + e_0\, y_\lambda\, e_{d-1} = \sum_{i=0}^{d-1} e_i^2\, y_\lambda = \sum_{i=0}^{d-1} e_i\, y_\lambda = y_\lambda.$$

Ahora si (6.5.4) se verifica, entonces las identidades (6.5.3) se obtienen multiplicando (6.5.4) a ambos lados por e_j gracias a (6.5.1). $\square$

Además se puede comprobar fácilmente que

$$h_j\, y_\lambda = q^{mj}\, y_\lambda h_j$$

para todo $j = 0, \dots, d-1$. El conjunto $\{e_i y^j\}$ con $i = 0, \dots d-1, j = 0, \dots, n-1$ es una base de $\mathcal{A}(d,\lambda)$. En particular $\dim \mathcal{A}(d,\lambda) = dn$.

Lema 6.5.4. *Para cualquier $\lambda \in \Bbbk$, $\mathcal{A}(d,\lambda)$ es una módulo álgebra sobre $T(q)$ como sigue. La acción de $T(q)$ sobre B_d es como antes y la acción sobre y_λ esta determinada por*

$$g \cdot y_\lambda = q^{-1}\, y_\lambda, \quad x \cdot y_\lambda = 1.$$

Observación 6.5.5. Las álgebras $\mathcal{A}(d,\lambda)$ fueron consideradas en [**MS**] en el estudio de derivaciones torcidas del álgebra de Taft.

Usando que $T(q) \simeq T(q)^*$ se obtiene que $\mathcal{A}(d,\lambda)$ es una $T(q)$-módulo álgebra a derecha. Explícitamente la coacción está determinada por:

$$\delta : \mathcal{A}(d,\lambda) \to \mathcal{A}(d,\lambda) \otimes T(q), \quad \delta(h_j) = h_j \otimes g^j,\ j = 0 \dots d-1,\ \ \delta(y_\lambda) = y_\lambda \otimes g + 1 \otimes x.$$

El siguiente es teorema es debido a Etingof y Ostrik, ver [**EO**, Thm.4.10].

Teorema 6.5.6. *La clasificación de las categorías módulo exactas indescomponibles sobre* $\operatorname{Rep}(T(q))$ *salvo equivalencia de categorías módulo es la siguiente:*

1. $\operatorname{Rep}(T(q))_{B_d}$ *es la única no semisimple,*
2. *para todo* $\lambda \in \Bbbk$ $\operatorname{Rep}(T(q))_{\mathcal{A}(d,\lambda)}$ *es semisimple.*

Antes de dar una demostración a este teorema necesitaremos algunos resultados previos.

LEMA 6.5.7. *Para cualquier divisor d de n el álgebra $\mathcal{A}(d,\lambda)$ es semisimple si y sólo si $\lambda \neq 0$. Si $\lambda \neq 0$ el rango de la categoría ${}_{\mathcal{A}(d,\lambda)}\mathcal{M}$ es m y cualquier $\mathcal{A}(d,\lambda)$-módulo simple es de dimensión d.*

DEMOSTRACIÓN. El álgebra $\mathcal{A}(d,0)$ no es semisimple ya que el elemento y_0 pertenece al radical de Jacobson. Asumamos que $\lambda \neq 0$. Introduciremos una familia de $\mathcal{A}(d,\lambda)$-módulos simples y probaremos que todo módulo es suma directa de dichos objetos simples.

Sea μ una raíz m-ésima de λ. Definamos el espacio vectorial $S_\mu = \bigoplus_{i=0}^{d-1} \Bbbk w_i$. La acción de $\mathcal{A}(d,\lambda)$ está determinada por

$$e_j \cdot w_i = \delta_{i,j}\, w_i, \quad y_\lambda \cdot w_i = w_{i+1} \ \text{ for } i = 1...d-1, \quad y_\lambda \cdot w_{d-1} = \mu\, w_0.$$

Es fácil comprobar que esta acción está bien definida y que el espacio S_μ es un $\mathcal{A}(d,\lambda)$-módulo a izquierda irreducible. Más aún $S_\mu \simeq S_{\mu'}$ si y sólo si $\mu = \mu'$, y $\dim_\Bbbk S_\mu = d$.

Sea M cualquier $\mathcal{A}(d,\lambda)$-módulo a izquierda de dimensión finita. Pongamos $M_i = e_i \cdot M$, entonces $M = \bigoplus_{i=0}^{d-1} M_i$. Las ecuaciones (6.5.3) implican que $y_\lambda \cdot M_i \subseteq M_{i+1}$. Por lo tanto y_λ^d define un isomorfismo lineal en M_0 tal que $(y_\lambda^d)^m = \lambda 1$. Por lo tanto M_0 se descompone en suma directa de autospacios de y_λ^d de autovalores raíces m-ésima de λ. No es difícil probar ahora que M es suma directa de algunos S_μ. $\square$

Sea A una $T(q)$-módulo álgebra a izquierda sin ideales a derecha $T(q)$-estables. La acción de x induce una filtración de la siguiente manera. Definamos $A_i = \{a \in A : x^{i+1} \cdot a = 0\}$, entonces $A_i \subseteq A_{i+1}$ y $A = A_{n-1}$.

LEMA 6.5.8. *Las siguientes afirmaciones se verifican.*

(i) *$x \cdot A_i \subseteq A_{i-1}$ y $g \cdot A_i \subseteq A_i$.*
(ii) *$A_i A_j \subseteq A_{i+j}$.*
(iii) *$g \cdot (A_i - A_{i-1}) \subseteq A_i - A_{i-1}$ para $i = 1..n$.*
(iv) *A_0 es una subálgebra de A sin ideales a derecha $T(q)$-estables.*
(v) *Existe un divisor d de n tal que $A_0 \simeq B_d$ como módulo álgebras.*
(vi) *Si $A \neq A_0$ entonces existe un $z \in A_1 - A_0$ y un $r \in \mathbb{N}_0$ tal que*

$$g \cdot z = q^{mr-1}\, z. \tag{6.5.5}$$

(vii) *Si $A \neq A_0$ entonces existe un único $y \in A$ tal que*

$$x \cdot y = 1, \quad g \cdot y = q^{-1}\, y. \tag{6.5.6}$$

DEMOSTRACIÓN. Los ítemes (i), (ii) y (iii) son inmediatos. Sea $I \subseteq A_0$ un ideal a derecha no nulo estable bajo la acción de $T(q)$. Entonces IA es un ideal a derecha de A estable bajo la acción de $T(q)$. Como $I \subseteq IA$ entonces $IA \neq 0$, por lo tanto $IA = A$. Por (ii) esto implica que $I = A_0$. Lo cual prueba (iv).

Probemos (v). El radical de Jacobson de A_0, [**Li**], es un ideal estable, por lo tanto A_0 es semisimple. Sea e_0 un idempotente central primitivo de A_0, y definamos $H = \{g^a : g^a \cdot e_0 = e_0\}$. Como H es un subgrupo de $< g >$ entonces H es cíclico y por lo tanto generado por g^m para algún divisor m de n. Ahora, es claro que $A_0 \simeq B_d$, donde $d = \frac{n}{m}$.

Ahora probemos (vi). Como $A \neq A_0$ y el operador $g\cdot : A \to A$ es diagonalizable, existe un elemento $z' \in A - A_0$ autovector de $g\cdot$. Podemos asumir que $z' \in A_j - A_{j-1}$. Por lo tanto $x^j \cdot z' \in A_1 - A_0$ y este elemento sigue siendo un autovector de $g\cdot$. Ahora pongamos $z = x^j \cdot z'$, entonces $g \cdot z = q^a\, z$ para algún $a \in \mathbb{N}$. Como $x \cdot z \in A_0$ es un autovector de $g\cdot$ de autovalor q^{a+1}, sigue de la observación 6.5.2 que $a + 1 = mr$ para algún $r \in \mathbb{N}$. Esto finaliza la demostración de (vi).

Ahora probemos (vii). Sea $z \in A_1 - A_0$ como en el ítem (vi). Pongamos $w = x^{d-1} \cdot z^d$. Notar que $g \cdot w = q^{-1}\, w$, de hecho

$$\begin{aligned} g \cdot w &= g x^{d-1} \cdot z^d = q^{d-1}\, x^{d-1} g \cdot z^d = q^{d-1} x^{d-1} \cdot (g \cdot z)^d \\ &= q^{d-1} q^{mrd-d} x^{d-1} \cdot z^d = q^{-1}\, x^{d-1} \cdot z^d. \end{aligned}$$

Por (ii) $z^d \in A_d$, luego $x^{d+1} \cdot z^d = 0$, y por lo tanto $x \cdot w \in A_0$. Como $z \notin A_0$ entonces $x \cdot w \neq 0$. Además $g \cdot (x \cdot w) = (x \cdot w)$, luego nuevamente por la observación 6.5.2 $x \cdot w = \mu\, 1$ para algún $\mu \in \Bbbk^\times$. Entonces, el elemento $y = \mu^{-1} w$ satisface (6.5.6).

Si existiran $y, y' \in A$ elementos que verifican (6.5.6) entonces $y - y' \in A_0$ y $g \cdot (y - y') = q^{-1}\,(y - y')$, pero esto es imposible por la observación 6.5.2 a menos que $(y - y') = 0$. □

Lema 6.5.9. *Sea A un $T(q)$-módulo algebra a izquierda sin ideales a derecha no triviales $T(q)$-estables. Entonces, para algún divisor d de n, $A \simeq B_d$ o $A \simeq \mathcal{A}(d, \lambda)$, como módulo álgebras, para $\lambda \in \Bbbk$*

Demostración. Consideremos las filtración (A_i) en A como antes. Si $A = A_0$, por el Lema 6.5.8 (v) no hay nada que probar. Asi que, asumamos que $A \neq A_0$. Por el Lema 6.5.8 (v) se puede asumir que $A_0 = B_d$ para algún divisor d de n. Sea $y \in A_1 - A_0$ el (único) elemento tal que (6.5.6) es verificada. Afirmamos que

$$y^n = \lambda\, 1, \quad e_{i+1}\, y = y\, e_i,$$

para todo $i = 0..d-1$ y para algún $\lambda \in \Bbbk$. Por inducción se prueba que $x \cdot y^r = \left(\sum_{i=0}^{r-1} q^{-i}\right) y^{r-1}$, en particular $x \cdot y^n = 0$, por lo tanto $y^n \in A_0$ y como $g \cdot y^n = q^{-n} y^n = y^n$ entonces, por la observación 6.5.2, $y^n = \lambda\, 1$ para algún $\lambda \in \Bbbk$. Definamos

$$w = \sum_{i=0}^{d-2} e_{i+1}\, y\, e_i + e_0\, y\, e_{d-1},$$

entonces, es inmediato comprobar que $g \cdot w = q^{-1}\, w$ y $x \cdot w = 1$. El Lema 6.5.8 (vii) implica que $w = y$. La observación 6.5.3 finaliza la prueba de la afirmación.

El espacio $\bigoplus_{i=0}^{n-1} A_0 y^i$ es un ideal a derecha estable bajo la acción de $T(q)$. Por lo tanto A es generada por y y A_0 sujetos a las relaciones (6.5.2), (6.5.3), luego $A \simeq \mathcal{A}(d, \lambda)$. □

Prueba del Teorema 6.5.6. Sea $\mathcal{M}$ una categoría módulo exacta sobre $\operatorname{Rep}(T(q))$. Por el Teorema 3.2.8 existe una $T(q)$-módulo álgebra R tal que $\mathcal{M} \simeq \operatorname{Rep}(T(q))_R$ como categorías módulo. Por el Corolario 3.2.10 se puede elegir a R de manera que no posea ideales a derecha $T(q)$-coestables. . Entonces los Lemas 6.5.7, 6.5.9 concluyen la demostración. □

CAPíTULO 7

Grupoides dobles

7.1. Grupoides

Recordemos que un *grupoide* (finito) es una categoría pequeña (con cantidad finita de flechas), tal que todo morfismo posee inverso. Denotaremos a un grupoide por $\mathfrak{e}, \mathfrak{s} : \mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{P}$, o simplemente por $\mathcal{G}$, donde $\mathcal{G}$ es el conjunto de flechas, $\mathcal{P}$ es el conjunto de objetos y $\mathfrak{e}, \mathfrak{s}$ son las aplicaciones final y fuente. El conjunto de flechas entre dos objetos P y Q es denotado por $\mathcal{G}(P, Q)$, también denotaremos por $\mathcal{G}(P) := \mathcal{G}(P, P)$. Dadas dos flechas $g, h \in \mathcal{G}$ diremos que son *componibles* y se denotará $g|h$ si $\mathfrak{e}(g) = \mathfrak{s}(h)$. La composición será denotada por $m : \mathcal{G}\,{}_{\mathfrak{e}}\!\times_{\mathfrak{s}} \mathcal{G} \to \mathcal{G}$, y para dos flechas componibles g y h la composición será denotada por yuxtaposición: $m(g, h) = gh$.

Un *morfismo* entre dos grupoides es un funtor entre las categorías subyacentes. Si $\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{P}$, y $\mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{Q}$ son grupoides, y $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ es un morfismo de grupoides entonces para cualquier $Q \in \mathcal{P}$, $\phi(\mathrm{id}_Q) = \mathrm{id}_{\mathfrak{e}(\phi(\mathrm{id}_Q))}$, y ϕ induce una función $\phi^0 : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$, $\phi^0(Q) := \mathfrak{e}(\phi(\mathrm{id}_Q))$. Esto implica que $\mathfrak{e}(\phi(g)) = \phi^0(\mathfrak{e}(g))$, para cualquier $g \in \mathcal{G}$. Si ϕ y ψ son dos morfismos de grupoides entonces $(\phi\psi)^0 = \phi^0\psi^0$.

Recordemos una definición conocida.

Definición 7.1.1. Dos morfismos de grupoides $\phi, \psi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ son *similares*, y denotaremos $\phi \sim \psi$, si existe una transformación natural entre ellos; esto es, si existe una función $\tau : \mathcal{P} \to \mathcal{H}$ tal que

$$\phi(g)\tau(\mathfrak{e}(g)) = \tau(\mathfrak{s}(g))\psi(g), \qquad g \in \mathcal{G}.$$

Observar que la “similaridad”es una relación de equivalencia ya que cualquier transformación natural entre dos morfismos de grupoides es necesariamente un isomorfismo natural.

Dos grupoides $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ son *similares*, y escribimos $\mathcal{G} \sim \mathcal{H}$, si existe una equivalencia de categorías entre ellos. En otras palabras, si existen morfismos $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, $\psi : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ tal que $\phi \circ \psi$ y $\psi \circ \phi$ son similares a las correspondientes identidades.

Una operación básica entre grupoides es la unión disjunta. Es decir, si $\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{P}$, $\mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{Q}$ son dos grupoides, la unión disjunta es el grupoide cuyo conjunto de flechas es $\mathcal{G} \coprod \mathcal{H}$, y cuya base es la unión disjunta de las bases: $\mathcal{P} \coprod \mathcal{Q}$. Si $\mathcal{G} \sim \mathcal{G}'$ y $\mathcal{H} \sim \mathcal{H}'$ entonces $\mathcal{G} \coprod \mathcal{G}' \sim \mathcal{H} \coprod \mathcal{H}'$.

Definamos una relación de equivalencia sobre la base $\mathcal{P}$ de un grupoide $\mathcal{G}$ por $P \approx Q$ if $\mathcal{G}(P, Q) \neq \emptyset$. Un grupoide $\mathfrak{e}, \mathfrak{s} : \mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{P}$ se dice *conexo* si $P \approx Q$ para todo $P, Q \in \mathcal{P}$.

Sea S una clase de equivalencia en $\mathcal{P}$ y por $\mathcal{G}_S$ denotaremos el grupoide conexo correspondiente con base S; esto es, $\mathcal{G}_S(P,Q) = \mathcal{G}(P,Q)$ para cualquier $P,Q \in S$. Entonces el grupoide $\mathcal{G}$ es isomorfo a la union disjunta de los grupoides $\mathcal{G}_S$: $\mathcal{G} \sim \coprod_{S\in\mathcal{P}/\approx} \mathcal{G}_S$.

Un subgrupoide $\mathcal{H}$ de un grupoide $\mathcal{G}$ se dice *amplio* si $\mathcal{H}$ posee la misma base $\mathcal{P}$ de $\mathcal{G}$.

LEMA 7.1.2. *Sea $\mathcal{G}$ un grupoide.*
(i). Si $\mathcal{G}$ es conexo, entonces $\mathcal{G} \sim \mathcal{G}(P)$ para cualquier $P \in \mathcal{P}$.
(ii). Si $\mathcal{S}$ es un sistema de representantes de $\mathcal{P}/\approx$ entonces

$$\mathcal{G} \sim \coprod_{P\in\mathcal{S}} \mathcal{G}(P). \tag{7.1.1}$$

DEMOSTRACIÓN. (i). Fijemos $P \in \mathcal{P}$. Para cualquier $Q \in \mathcal{P}$, denotamos τ_Q un elemento en $\mathcal{G}(P,Q)$ tal que $\tau_P = \mathrm{id}_P$. De esta manera tenemos definida una aplicación $\tau : \mathcal{P} \to \mathcal{G}$. Definamos las siguientes funciones $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{G}(P)$, $\psi : \mathcal{G}(p) \to \mathcal{G}$ por $\phi(g) = \tau_{\mathfrak{s}(g)}\, g\, \tau_{\mathfrak{e}(g)}^{-1}$, $\psi(h) = h$. De hecho estas funciones son morfismos de grupoides. Como requerimos que $\tau_P = \mathrm{id}_P$ entonces $\phi \circ \psi$ es la identidad. Por definición de ϕ se tiene que $(\psi \circ \phi)(g)\tau_{\mathfrak{e}(g)} = \tau_{\mathfrak{s}(g)} g$, y luego $\psi \circ \phi \sim \mathrm{id}$. La parte (ii) se sigue de (i). □

Así como en la teoría de grupos es importante la noción de acciones de estos sobre conjuntos, en la teoría de grupoides la noción que aparece es la de acción sobre una flecha.

DEFINICIÓN 7.1.3. Dado un grupoide $\mathcal{G}$ y una función $p : \mathcal{E} \to \mathcal{P}$, una *acción a izquierda* de $\mathcal{G}$ sobre p es una aplicación $\triangleright : \mathcal{G}\,{}_{\mathfrak{e}}\!\times_p \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ tal que

$$p(g \triangleright x) = \mathfrak{s}(g), \qquad g \triangleright (h \triangleright x) = gh \triangleright x, \qquad \mathrm{id}_{p(x)} \triangleright x = x, \tag{7.1.2}$$

para elementos componibles $g, h \in \mathcal{G}$, $x \in \mathcal{E}$. Diremos en este caso que $(\mathcal{E}, p)$, o $\mathcal{E}$, es un *$\mathcal{G}$-fibrado.*

Una *acción a derecha* de $\mathcal{G}$ sobre $\mathcal{E}$ es un mapa $\triangleleft : \mathcal{E}\,{}_p\!\times_{\mathfrak{s}} \mathcal{G} \to \mathcal{E}$ tal que

$$p(x \triangleleft g) = \mathfrak{e}(g), \qquad (x \triangleleft g) \triangleleft h = x \triangleleft gh, \qquad x \triangleleft \mathrm{id}_{p(x)} = x, \tag{7.1.3}$$

para elementos componibles $g, h \in \mathcal{G}$, $x \in \mathcal{E}$.

7.2. El álgebra de grupoide

En lo siguiente se mostrarán ciertas propiedades básicas de las álgebras de grupoides. Primero recordemos que si $\mathcal{G}$ es un grupoide, el *álgebra de grupoide* sobre $\mathbb{K}$ es el álgebra cuyo $\mathbb{K}$-módulo subyacente es $\mathbb{K}\mathcal{G}$ y multiplicación determinada por:

$$g.h = \begin{cases} gh & \text{si } g|h \\ 0 & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

Un $\mathcal{G}$-fibrado en módulos es un $\mathcal{G}$-fibrado $(\mathcal{E}, p)$ tal que $\mathcal{E}_Q := p^{-1}(Q)$ es un $\mathbb{K}$-módulo para cualquier $Q \in \mathcal{P}$ y el mapa $g \triangleright\ : \mathcal{E}_{\mathfrak{e}(g)} \to \mathcal{E}_{\mathfrak{s}(g)}$ es un isomorfismo lineal para cualquier $g \in \mathcal{G}$.

Hay una equivalencia de categorías entre la categoría de $\mathcal{G}$-fibrados en módulos y ${}_{\mathbb{K}\mathcal{G}}\mathcal{M}$.

El $\mathbb{K}\mathcal{G}$-módulo a izquierda asociado al $\mathcal{G}$-fibrado módulo $(\mathcal{E}, p)$ esta dado por $M := \bigoplus_{Q\in\mathcal{P}} \mathcal{E}_Q$, y la acción de $\mathcal{G}$ en M esta dada por $g.m = g\triangleright m$ si $m \in \mathcal{E}_{\mathfrak{e}(g)}$ y $g.m = 0$ en caso contrario. Notar que la fibra $\mathcal{E}_Q$ puede ser cero para algún $Q \in \mathcal{P}$.

Recíprocamente, sea M un $\mathbb{K}\mathcal{G}$-módulo a izquierda, definamos $M_P = \mathrm{id}_P\, M$, $P \in \mathcal{P}$; entonces $M = \bigoplus_{P\in\mathcal{P}} M_P$. Sean

$$\mathcal{E} := \{(Q, m) \in \mathcal{P} \times M \ \text{ tal que } \ m \in M_Q\},$$

$p : \mathcal{E} \to \mathcal{P}$ definido por $p(Q, m) = Q$, y sea $\triangleright : \mathcal{G}\ {}_{\mathfrak{e}}\times_p \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ definido por $g\triangleright(\mathfrak{e}(g), m) = (\mathfrak{s}(g), g.m)$. Entonces $(\mathcal{E}, p)$ es un $\mathcal{G}$-fibrado módulo.

Proposición 7.2.1. *Si $\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{P}$ y $\mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{Q}$ grupoides similares, las categorías ${}_{\mathbb{K}\mathcal{G}}\mathcal{M}$ y ${}_{\Bbbk\mathcal{H}}\mathcal{M}$ son tensorialmente equivalentes. En particular las álgebras de grupoides $\mathbb{K}\mathcal{G}$, $\mathbb{K}\mathcal{H}$ son Morita equivalentes.*

Demostración. Por hipótesis, existen morfismos de grupoides $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ y $\psi : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ que satisfacen $\phi\psi \sim \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$ y $\psi\phi \sim \mathrm{id}_{\mathcal{G}}$; esto es, existen funciones $\theta : \mathcal{P} \to \mathcal{G}$ y $\eta : \mathcal{Q} \to \mathcal{H}$ tales que

$$\psi\phi(g)\theta(\mathfrak{e}(g)) = \theta(\mathfrak{s}(g))g, \tag{7.2.1}$$

$$\phi\psi(h)\eta(\mathfrak{e}(h)) = \eta(\mathfrak{s}(h))h, \tag{7.2.2}$$

para todo $g \in \mathcal{G}$ y $h \in \mathcal{H}$.

Definamos los funtores $\Psi : {}_{\mathbb{K}\mathcal{G}}\mathcal{M} \to {}_{\Bbbk\mathcal{H}}\mathcal{M}$, $\Phi : {}_{\Bbbk\mathcal{H}}\mathcal{M} \to {}_{\mathbb{K}\mathcal{G}}\mathcal{M}$ por

$$\Psi(M)_Q := M_{\psi^0(Q)}, \qquad \text{and} \qquad \Phi(V)_P := V_{\phi^0(P)},$$

para todo objeto $M \in {}_{\mathbb{K}\mathcal{G}}\mathcal{M}$, $V \in {}_{\Bbbk\mathcal{H}}\mathcal{M}$ y para todo $P \in \mathcal{P}$, $Q \in \mathcal{Q}$. La acción de $\mathcal{H}$ en $\Psi(M)$ esta definida como sigue: si $x \in \mathcal{H}$ y $m \in \Psi(M)_Q$ entonces

$$x \cdot m = \begin{cases} \psi(x)m & \text{if } \mathfrak{e}(x) = Q, \\ 0 & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

La acción de $\mathcal{G}$ en $\Phi(V)$ está definida como sigue: si $g \in \mathcal{G}$ y $v \in \Phi(V)_P$ entonces

$$g \cdot v = \begin{cases} \phi(g)v & \text{if } \mathfrak{e}(g) = P, \\ 0 & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

Claramente, éstas son de hecho acciones de los correspondientes grupoides. Definimos los isomorfismos naturales $\xi : \mathrm{Id} \to \Psi\Phi$ y $\zeta : \Psi\Phi \to \mathrm{Id}$ por

$$\xi_{V_Q} : V_Q \to V_{(\psi\phi)^0(Q)}, \quad \xi_{V_Q}(v) = \theta(Q)v \quad \text{y} \quad \zeta_{M_P} : M_P \to M_{(\phi\psi)^0(P)}, \quad \zeta_{M_P}(m) = \eta(P)m$$

para todo $V \in {}_{\Bbbk\mathcal{H}}\mathcal{M}$ y $M \in {}_{\mathbb{K}\mathcal{G}}\mathcal{M}$. Las ecuaciones (7.2.1), (7.2.2) implican que ξ y ζ son morfismos; luego los funtores Φ y Ψ definen una equivalencia entre ${}_{\mathbb{K}\mathcal{G}}\mathcal{M}$ y ${}_{\Bbbk\mathcal{H}}\mathcal{M}$. Por una verificación directa se prueba que estos funtores son funtores tensoriales estrictos. $\square$

Combinando el Lema 7.1.2 y la Proposición 7.2.1 se tiene que

Corolario 7.2.2. *Si $\mathcal{G}$ es un grupoide conexo entonces las categorías tensoriales ${}_{\Bbbk\mathcal{G}}\mathcal{M}$ y ${}_{\Bbbk\,\mathcal{G}(P)}\mathcal{M}$ son equivalentes tensorialmentes para cualquier $P \in \mathcal{P}$. En particular el álgebra de grupoide $\Bbbk\mathcal{G}$ es Morita equivalente al álgebra de grupo $\Bbbk\,\mathcal{G}(P)$.* $\square$

7.3. Cohomología de grupoides

Brevemente recordaremos la conocida cohomología de grupoides.

Fijemos un grupoide $\mathfrak{e}, \mathfrak{s} : \mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{P}$. Definamos $\mathcal{G}^{(0)} := \{\mathrm{id}_Q\}_{Q\in\mathcal{P}}$, $\mathcal{G}^{(1)} = \mathcal{G}$, y para $n \geq 2$

$$\mathcal{G}^{(n)} = \{(g_1, \dots, g_n) \in \mathcal{G}^n : g_1|g_2| \dots |g_{n-1}|g_n\}.$$

Sea $(\mathcal{E}, p)$ un $\mathcal{G}$-fibrado módulo, y sea

$$\begin{aligned} C^0(\mathcal{G}, \mathcal{E}) &= \{f : \mathcal{P} \to \mathcal{E} : p(f(Q)) = Q \quad \forall\, Q \in \mathcal{P}\}, \\ C^n(\mathcal{G}, \mathcal{E}) &= \{f : \mathcal{G}^{(n)} \to \mathcal{E} : f(g_1, \dots, g_n) = 0, \text{ si algun } g_i \in \mathcal{G}^{(0)}, \\ &\qquad\qquad \text{y } p(f(g_1, \dots, g_n)) = \mathfrak{s}(g_1) \quad \forall\, (g_1, \dots, g_n) \in \mathcal{G}^{(n)}\}. \end{aligned}$$

Los grupos de cohomología $H^n(\mathcal{G}, \mathcal{E})$ de $\mathcal{G}$ con coeficientes en el $\mathcal{G}$-fibrado módulo $(\mathcal{E}, p)$ son los grupos de cohomología del complejo

$$0 \longrightarrow C^0(\mathcal{G}, \mathcal{E}) \xrightarrow{d_0} C^1(\mathcal{G}, \mathcal{E}) \xrightarrow{d_1} C^2(\mathcal{G}, \mathcal{E}) \xrightarrow{d_2} \dots C^n(\mathcal{G}, \mathcal{E}) \xrightarrow{d_n} C^{n+1}(\mathcal{G}, \mathcal{E}) \longrightarrow \dots \tag{7.3.1}$$

donde

$$\begin{aligned} d^0 f(g) &= g \triangleright f(\mathfrak{e}(g)) - f(\mathfrak{s}(g)), \\ d^n f(g_0, \dots, g_n) &= g_0 \triangleright f(g_1, \dots, g_n) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(g_0, \dots, g_{i-1}g_i, \dots, g_n) \\ &\quad + (-1)^{n+1} f(g_0, \dots, g_{n-1}). \end{aligned} \tag{7.3.2}$$

Denotemos, como es usual, $Z^n(\mathcal{G}, M) := \mathrm{Ker}\,(d^n)$, $B^n(\mathcal{G}, M) := \mathrm{Im}\,(d^{n-1})$, $n \geq 0$. Mostraremos ahora que esta cohomología de grupoide coincide con la cohomología del álgebra de Hopf débil $\Bbbk\mathcal{G}$ definida en la sección 4.4 del capítulo 4.

Proposición 7.3.1. *Si $\mathcal{E}$ es un $\mathcal{G}$-fibrado módulo y M es el $\Bbbk\mathcal{G}$-módulo asociado, entonces los grupos $H^n(\mathcal{G}, \mathcal{E})$ y $H^n(\Bbbk\mathcal{G}, M)$ son naturalmente isomorfos.*

Demostración. Sea $C^n(\Bbbk\,\mathcal{P}, M) := \mathrm{Hom}_{\Bbbk\mathcal{G}}(B_n(\Bbbk\mathcal{G}, \Bbbk\,\mathcal{P}), M)$ como en la sección 4.4 del capítulo 4. Definamos $F_n : C^n(\Bbbk\,\mathcal{P}, M) \to C^n(\mathcal{G}, \mathcal{E})$ por

$$\begin{aligned} F_0(f)(P) &= f(\mathrm{id}_P), & P &\in \mathcal{P}, \\ F_n(f)(g_1, \dots, g_n) &= f(\mathrm{id}_{\mathfrak{s}(g_1)} \otimes \overline{g_1} \otimes \dots \otimes \overline{g_n}), & (g_1, \dots, g_n) &\in \mathcal{G}^{(n)}. \end{aligned}$$

Entonces los F_n son isomorfismos cuyos inversos son los mapas $G_n : C^n(\mathcal{G}, \mathcal{E}) \to C^n(\mathbb{K}\,\mathcal{P}, M)$ dados por

$$G_0(f)(g) = g \triangleright f(\mathfrak{e}(g)),$$
$$G_n(f)(g_o \otimes \overline{g_1} \otimes \cdots \otimes \overline{g_n}) = g_0 \triangleright f(g_1, \ldots, g_n).$$

Se sigue de la definición de los mapas d^n que $d^n F_n = F_n \partial^n$ para cualquier $n \geq 0$. Luego, los mapas F_n inducen isomorfismos $H^n(\mathcal{G}, \mathcal{E}) \to H^n(\mathbb{K}\mathcal{G}, M)$. $\square$

Como consecuencia, mostramos que la cohomología de grupoides puede ser calculada a través de la cohomología de grupos.

Proposición 7.3.2. *(i). Sea $\mathcal{E}$ un $\mathcal{G}$-fibrado módulo y sea S un conjunto de clases de representantes de clases de equivalencias en $\mathcal{P}$. Existen isomorfismos naturales– inducidos por las respectivas inclusiones*

$$H^n(\mathcal{G}, \mathcal{E}) \;\simeq\; \bigoplus_{P \in S} H^n(\mathcal{G}(P), \mathcal{E}_P).$$

(ii). Asumamos que $\mathcal{G}$ es conexo y que fijamos $O \in \mathcal{P}$. Sea $\mathcal{E}$ un $\mathcal{G}$-fibrado módulo y sea $\mathcal{H}$ un subgrupoide amplio conexo de $\mathcal{G}$. Ponemos $G = \mathcal{G}(O)$, $H = \mathcal{H}(O)$. Entonces los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} H^n(\mathcal{G}, \mathcal{E}) \arrow[r, "res"] \arrow[d] & H^n(\mathcal{H}, \operatorname{Res}^{\mathcal{G}}_{\mathcal{H}}(\mathcal{E})) \arrow[d] \\ H^n(G, \mathcal{E}_O) \arrow[r, "res"] & H^n(H, \operatorname{Res}^{G}_{H}(\mathcal{E}_O)), \end{tikzcd}$$

donde las flechas verticales son los isomorfismos de la parte (i).

Demostración. (i). Combinar (7.1.1), Proposición 7.3.1, y el hecho que los grupos Ext son Morita invariantes. Aquí los bien conocidos isomorfismos naturales $\operatorname{Ext}^n_{A\times B}(M \oplus N, U \oplus V) \simeq \operatorname{Ext}^n_A(M,U) \oplus \operatorname{Ext}^n_B(N,V)$, $n \in \mathbb{N}$, están presentes, donde A y B son anillos, M y U son A-módulos y N y V son B-módulos.
(ii). Es inmediato. $\square$

Definición 7.3.3. Sea A un $\mathbb{K}$-módulo. Denotaremos por $\underline{A}$ el $\mathcal{G}$-fibrado módulo tal que $\underline{A}_P := A$, $P \in \mathcal{P}$, con acción trivial de $\mathcal{G}$. Es decir, $\underline{A}$ es el $\mathcal{G}$-fibrado módulo correspondiente al $\mathbb{K}\mathcal{G}$-módulo $\mathbb{K}\,\mathcal{P} \otimes_{\mathbb{K}} A$. Por la Proposición 7.3.2 (i), $H^n(\mathcal{G}, \underline{A}) \simeq \bigoplus_{P \in S} H^n(\mathcal{G}(P), A)$.

Observar que si A es un $\mathbb{K}$-módulo entonces el conjunto $Z^2(\mathcal{G}, \underline{A})$ se identifica con el conjunto de mapas $\sigma : \mathcal{G}\,{}_{\mathfrak{e}}\!\times_{\mathfrak{s}} \mathcal{G} \to A$ tales que

$$\sigma(g, hf)\sigma(h, f) = \sigma(gh, f)\sigma(g, h),$$

para elementos componibles $g, h, f \in \mathcal{G}$.

7.4. Grupoides dobles vacantes

En esta sección trabajaremos con las notaciones y convenciones de [**AN1**, Section 2].

De acuerdo con la definición dada por Ehresmann [**Eh**], un *grupoide doble* es un objeto grupoide en la categoría de grupoides. Expliquemos esta definición con más detalle en una forma equivalente. Un doble grupoide puede ser representado por cuatro grupoides relacionados

$$\mathcal{T}: \begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \rightrightarrows & \mathcal{V} \\ \downdownarrows & & \downdownarrows \\ \mathcal{H} & \rightrightarrows & \mathcal{P} \end{array}$$

sujetos a un cierto conjunto de axiomas. Es decir que tenemos dos grupoides con la misma base $\mathcal{V} \rightrightarrows \mathcal{P}$, $\mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{P}$, y dos grupoides con el mismo conjunto de flechas $\mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{V}$, $\mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{H}$, sujetos a ciertas compatibilidades.

El grupoide $\mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{V}$ es llamado el *grupoide horizontal* y $\mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{H}$ el *grupoide vertical*.

Los grupoides dobles admiten una descripción pictórica como conjuntos de '*cajas*' que pueden ser compuestas en dos direcciones: horizontal y vertical.

Un elemento $A \in \mathcal{B}$ se representa como una caja

$$A = l \underset{b}{\overset{t}{\square}} r,$$

donde $t = t(A), b = b(A) \in \mathcal{H}$ son respectivamente la fuente y el final de A con respecto a la composición vertical, y similarmente por $l = l(A), r = r(A) \in \mathcal{V}$ con respecto a la composición horizontal.

Las composiciones horizontal y vertical de las cajas serán escritas de izquierda a derecha y de arriba a abajo, respectivamente. La notación AB (respectivamente, $\frac{A}{B}$) indicará la composición horizontal (vertical, respectivamente); esta notación asumirá implícitamente que A y B son componibles en los apropiados sentidos.

Un grupoide doble $\mathcal{T}$ es llamado *vacante* si para cualquier $g \in \mathcal{V}$, $x \in \mathcal{H}$ tales que el final de x coincide con la fuente de g, existe una única caja $X \in \mathcal{B}$ tal que $X = \overset{x}{\square}\, g$.

En particular, en un grupoide doble vacante, toda caja está determinada por cualquier par de lados adyacentes.

7.5. Grupoides apareados

Recordemos brevemente la definición de grupoides apareados, y las formulaciones equivalentes en términos de factorizaciones exactas, o grupoides dobles vacantes, ver [**Mac**] o [**AN1**] para mayores detalles.

Un *par de grupoides apareados* es una colección $(\mathcal{H},\mathcal{V},\triangleright,\triangleleft)$, donde $b,t:\mathcal{V}\rightrightarrows\mathcal{P}$ y $r,l:\mathcal{H}\rightrightarrows\mathcal{P}$ son dos grupoides sobre la misma base $\mathcal{P}$, $\triangleright:\mathcal{H}\,{}_r\!\times_t\mathcal{V}\to\mathcal{V}$ es una acción a izquierda de $\mathcal{H}$ on $(\mathcal{V},t)$, $\triangleleft:\mathcal{H}\,{}_r\!\times_t\mathcal{V}\to\mathcal{H}$ es una acción a derecha de $\mathcal{V}$ en $(\mathcal{H},r)$ tales que

$$b(x\triangleright g)=l(x\triangleleft g),\quad x\triangleright gh=(x\triangleright g)((x\triangleleft g)\triangleright h),\quad xy\triangleleft g=(x\triangleleft(y\triangleright g))(y\triangleleft g),\tag{7.5.1}$$

para elementos componibles $x,y\in\mathcal{H}$ y $g,h\in\mathcal{V}$. Aquí y de ahora en más usaremos la notación "horizontal y vertical": la fuente y el final de $\mathcal{H}$, resp. $\mathcal{V}$, son denotados l y r ("left " y "right", izquierda y derecha en inglés), resp. t y b ("top" y "bottom", arriba y abajo en inglés).

Sea $(\mathcal{H},\mathcal{V},\triangleleft,\triangleright)$ un par de grupoides apareados. Asociado a este par está el *grupoide diagonal* $\mathcal{V}\bowtie\mathcal{H}$ con conjunto de flechas $\mathcal{V}\,{}_b\!\times_l\mathcal{H}$, base $\mathcal{P}$, principio, final, composición e identidad dados por

$$\mathfrak{s}(g,x)=t(g),\quad \mathfrak{e}(g,x)=r(x),\quad (g,x)(h,y)=(g(x\triangleright h),(x\triangleleft h)y),\quad \mathrm{id}_P=(\mathrm{id}_P,\mathrm{id}_P),$$

$g,h\in\mathcal{V}$, $x,y\in\mathcal{H}$, $P\in\mathcal{P}$. Luego, tenemos una factorización exacta de grupoides $\mathcal{V}\bowtie\mathcal{H}=\mathcal{V}\mathcal{H}$, es decir que todo elemento de $\mathcal{V}\bowtie\mathcal{H}$ se puede escribir de manera única como un una composición de un elemento de $\mathcal{V}$ y un elemento de $\mathcal{H}$. Recíprocamente, si $\mathcal{D}=\mathcal{V}\mathcal{H}$ es una factorización exacta de grupoides, entonces existen acciones $\triangleleft,\triangleright$ tales que $(\mathcal{H},\mathcal{V},\triangleleft,\triangleright)$ son grupoides apareados, y $\mathcal{D}\simeq\mathcal{V}\bowtie\mathcal{H}$.

Existe también un grupoide doble asociado al par de grupoides $(\mathcal{H},\mathcal{V})$. En términos simples, esto es una colección $\begin{matrix}\mathcal{B} & \rightrightarrows & \mathcal{H}\\ \downdownarrows & & \downdownarrows\\ \mathcal{V} & \rightrightarrows & \mathcal{P}\end{matrix}$ con el siguiente significado.

El conjunto de cajas es $\mathcal{B}:=\mathcal{H}\,{}_r\!\times_t\mathcal{V}$, y un elemento $(x,g)\in\mathcal{B}$ es representado por una caja $h\begin{matrix}x\\ \square\\ y\end{matrix}g$ donde $h=x\triangleright g$, $y=x\triangleleft g$.

El grupoide horizontal $r,l:\mathcal{B}\rightrightarrows\mathcal{V}$ posee principio, final, composición e identidad dados por

$$r(x,g)=g,\quad l(x,g)=x\triangleright g,\quad (x,g)(y,h)=(xy,h),\quad \mathrm{id}(g)=(\mathrm{id}_{t(g)},g)$$

$x,y\in\mathcal{H}$, $g,h\in\mathcal{V}$. El grupoide vertical $t,b:\mathcal{B}\rightrightarrows\mathcal{H}$ posee principio, final, composición e identidad dados por

$$b(x,g)=x\triangleleft g,\quad t(x,g)=x,\quad (x,g)(y,h)=(x,gh),\quad \mathrm{id}(x)=(x,\mathrm{id}_{r(x)}),$$

$x,y\in\mathcal{H}$, $g,h\in\mathcal{V}$. Si A,B son dos cajas, denotamos $A\mid B$ si son horizontalmente componibles, y $\dfrac{A}{B}$ si son verticalmente componibles, esto es si $A=h\begin{matrix}x\\ \square\\ y\end{matrix}g$ y $B=f\begin{matrix}z\\ \square\\ w\end{matrix}k$, entonces $A\mid B$ si y sólo si $g=f$, y $\dfrac{A}{B}$ si y sólo si $y=z$.

Mencionamos un resultado debido a Mackenzie, ver [**AN1**, Prop.2.9].

Teorema 7.5.1. *Las siguientes nociones son equivalentes.*

(i) *Dobles grupoides vacantes,*
(ii) *pares de grupoides apareados, y*
(iii) *factorizaciones exactas de grupoides.*

7.6. La sucesión exacta de Kac para grupoides apareados

En esta sección revisaremos y completaremos los detalles de la prueba de la sucesión exacta de Kac para grupoides dobles vacantes introducida en [**AN1**]. Sea $(\mathcal{H}, \mathcal{V}, \triangleleft, \triangleright)$ un par de grupoides apareados. Comenzaremos con una resolución no estándar del grupoide diagonal, adaptando ideas de [**M1**] al caso de los grupoides. Si $r, s \in \mathbb{N}$, denotaremos por $\mathcal{B}^{[r,s]}$ al conjunto de matrices

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{r1} & A_{r2} & \dots & A_{rs} \end{pmatrix} \in \mathcal{B}^{r\times s}$$

tales que

- Para todo i, j, $A_{ij} \mid A_{i,j+1}$, $\dfrac{A_{ij}}{A_{i+1,j}}$. Esta condición es resumida en la siguiente notación:
$$\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1s} \\ \hline A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2s} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline A_{r1} & A_{r2} & \dots & A_{rs}. \end{array}$$
- Si $j < s$ entonces A_{ij} no es una identidad horizontal.
- Si $i > 1$ entonces A_{ij} no es una identidad vertical.

Observar que si $A = (A_{ij})$ es un elemento en $\mathcal{B}^{[r,s]}$ entonces A esta determinada por s elementos componibles $x_1, \dots, x_s$ en $\mathcal{H}$–aquellos en la parte de arriba de la caja– y r elementos componibles $g_1, \dots, g_r$ en $\mathcal{V}$–aquellos en la parte derecha de la caja, con $r(x_s) = t(g_1)$. Denotaremos tal elemento por

$$A =: \overset{x_1, \dots, x_s}{\boxed{}}\ g_1, \dots, g_r.$$

Sean $s_V^{r,s} : \mathbb{K}\mathcal{B}^{[r,s]} \to \mathbb{K}\mathcal{B}^{[r+1,s]}$ (mapas de homotopía vertical), $\partial_V^{r,s} : \mathbb{K}\mathcal{B}^{[r,s]} \to \mathbb{K}\mathcal{B}^{[r-1,s]}$ y $\partial_H^{r,s} : \mathbb{K}\mathcal{B}^{[r,s]} \to \mathbb{K}\mathcal{B}^{[r,s-1]}$ (mapas de coborde verticales y horizontales) definidos por

$$s_V^{r,s}\left(\overset{x_1, \dots, x_s}{\boxed{}}\ g_1, \dots, g_r\right) := \overset{x_1, \dots, x_s}{\boxed{}}\ \mathrm{id}_{t(g_1)}, g_1, \dots, g_r;$$

$$\partial_H^{r,s}\left(\overset{x_1,\dots,x_s}{\boxed{}}\quad g_1,\dots,g_r\right)=\sum_{j=1}^{s-1}(-1)^{s-j-1}\overset{x_1,..,x_jx_{j+1},..,x_s}{\boxed{}}\quad g_1,\dots,g_r$$
$$+(-1)^{s-1}\overset{x_2,\dots,x_s}{\boxed{}}\quad g_1,\dots,g_r;$$

$$\partial_V^{r,s}\left(\overset{x_1,\dots,x_s}{\boxed{}}\quad g_1,\dots,g_r\right)=\sum_{i=1}^{r-1}(-1)^{i-1}\overset{x_1,\dots,x_s}{\boxed{}}\quad g_1,\dots,g_ig_{i+1},\dots,g_r$$
$$+(-1)^{r-1}\overset{x_1,\dots,x_s}{\boxed{}}\quad g_1,\dots,g_{r-1}.$$

Por un cálculo directo se puede mostrar que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}\mathcal{B}^{[r,s]} \arrow[r, "\partial_H^{r,s}"] \arrow[d, "\partial_V^{r,s}"'] & \mathbb{K}\mathcal{B}^{[r,s-1]} \arrow[d, "\partial_V^{r,s-1}"] \\
\mathbb{K}\mathcal{B}^{[r-1,s]} \arrow[r, "\partial_H^{r-1,s}"] & \mathbb{K}\mathcal{B}^{[r-1,s-1]}.
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, hemos construido un doble complejo de cadenas $\mathfrak{B}^{\bullet,\bullet}$:

$$\mathfrak{B}^{\bullet,\bullet}=\quad\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & & \\
\mathbb{K}\mathcal{B}^{[3,1]} \arrow[d, "\partial_V"] & \vdots\ \cdots \arrow[l, "\partial_H"'] \arrow[d, "-\partial_V"] & \\
\mathbb{K}\mathcal{B}^{[2,1]} \arrow[d, "\partial_V"] & \mathbb{K}\mathcal{B}^{[2,2]} \arrow[l, "\partial_H"'] \arrow[d, "-\partial_V"] & \vdots\ \cdots \arrow[l, "\partial_H"'] \arrow[d] \\
\mathbb{K}\mathcal{B}^{[1,1]} & \mathbb{K}\mathcal{B}^{[1,2]} \arrow[l, "\partial_H"'] & \mathbb{K}\mathcal{B}^{[1,3]} \arrow[l, "\partial_H"'] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Notar que $\mathcal{B}^{[r,s]}$ es un subconjunto del conjunto $\mathcal{B}^{(r,s)}$ definido en [**AN1**]; y el doble complejo presentado aquí es diferente del doble complejo presentado en [**AN1**]. Sin embargo estas diferencias serán reconciliadas en la observación 7.6.5 más abajo.

Definamos ahora una acción del grupoide diagonal $\mathcal{V}\bowtie\mathcal{H}$ en $\mathbb{K}\mathcal{B}^{[r,s]}$, $r,s>0$. La $\mathcal{P}$-graduación en $\mathbb{K}\mathcal{B}^{[r,s]}$ esta dada por:

$$p\left(\overset{x_1,\dots,x_s}{\boxed{}}\quad g_1,\dots,g_r\right):=t(g_1)=r(x_s).$$

Si $h \in \mathcal{V}$, $y \in \mathcal{H}$ son tales que $r(y) = r(x_s) = t(g_1) = b(h)$, entonces escribimos

(7.6.1)
$$y.\left(\overset{x_1, \dots, x_s}{\boxed{}} \quad g_1, \dots, g_r \right) := \overset{x_1, \dots, x_s y^{-1}}{\boxed{}} \quad y \triangleright g_1, (y \triangleleft g_1) \triangleright g_2, \dots, (y \triangleleft g_1 \dots g_{r-1}) \triangleright g_r,$$

(7.6.2)
$$h.\left(\overset{x_1, \dots, x_s}{\boxed{}} \quad g_1, \dots, g_r \right) := \overset{x_1 \triangleleft (x_2 \dots x_s \triangleright h^{-1}), \dots, x_s \triangleleft h^{-1}}{\boxed{}} \quad h g_1, g_2, \dots, g_r.$$

Lema 7.6.1. (i) *Las reglas* (7.6.1) *y* (7.6.2) *inducen una estructura de* $\mathbb{K}\mathcal{V} \bowtie \mathcal{H}$-*módulo sobre* $\mathbb{K}\mathcal{B}^{[r,s]}$.

(ii) *Existen* $\mathbb{K}\mathcal{V} \bowtie \mathcal{H}$-*isomorfismos:*
- $\mathbb{K}\mathcal{B}^{[r,s]} \simeq \mathbb{K}\mathcal{V} \bowtie \mathcal{H} \otimes_{\mathbb{K}\mathcal{P}} \mathbb{K}\mathcal{B}^{[r-1,s-1]}$ *para todo* $r, s > 1$,
- $\mathbb{K}\mathcal{B}^{[r,1]} \simeq \mathbb{K}\mathcal{V} \bowtie \mathcal{H} \otimes_{\mathbb{K}\mathcal{P}} \mathbb{K}\mathcal{V}^{(r-1)}$ *para todo* $r > 0$,
- $\mathbb{K}\mathcal{B}^{[1,s]} \simeq \mathbb{K}\mathcal{V} \bowtie \mathcal{H} \otimes_{\mathbb{K}\mathcal{P}} \mathbb{K}\mathcal{H}^{(s-1)}$ *para todo* $s > 0$,

donde la acción de $\mathbb{K}\mathcal{V} \bowtie \mathcal{H}$ *sobre* $\mathbb{K}\mathcal{V} \bowtie \mathcal{H} \otimes_{\mathbb{K}\mathcal{P}} L$ *está dada en el primer tensorando, para cualquier* $L \in {}_{\mathbb{K}\mathcal{P}}\mathcal{M}$.

(iii) $\mathbb{K}\mathcal{B}^{[r,s]}$ *es un* $\mathbb{K}\mathcal{V} \bowtie \mathcal{H}$-*módulo proyectivo para cualquier* $r, s > 0$.

(iv) *Los mapas de coborde* $\partial_V^{r,s}, \partial_H^{r,s}$ *son morfismos de* $\mathbb{K}\mathcal{V} \bowtie \mathcal{H}$-*módulos.*

(v) $\partial_V^{r+1,s} s_V^{r,s} + s_V^{r-1,s} \partial_V^{r,s} = \mathrm{id}_{\mathbb{K}\mathcal{B}^{[r,s]}}$.

Demostración. (i) Sean $A = \overset{x_1, \dots, x_s}{\boxed{}} \quad g_1, \dots, g_r \in \mathcal{B}^{[r,s]}$; sean $h \in \mathcal{V}, y \in \mathcal{H}$, tales que $r(y) = t(h)$ y $b(h) = p(A)$. Afirmamos que $y.(h.A) = (y \triangleright h).((y \triangleleft h).A)$. Se tiene que

$$y.(h.A) = \overset{x_1 \triangleleft (x_2 \dots x_s \triangleright h^{-1}), \dots, (x_s \triangleleft h^{-1}) y^{-1}}{\boxed{}} \quad y \triangleright h g_1, (y \triangleleft h g_1) \triangleright g_2, \dots, (y \triangleleft h g_1 \dots g_{r-1}) \triangleright g_r;$$

y $(y \triangleright h).((y \triangleleft h).A) =$

$$\overset{x_1 \triangleleft ((x_2 \dots x_s (y \triangleleft h)^{-1}) \triangleright (y \triangleright h)^{-1}), \dots, (x_s (y \triangleleft h)^{-1}) \triangleleft (y \triangleright h)^{-1}}{\boxed{}} \quad (y \triangleright h)((y \triangleleft h) \triangleright g_1), \dots, ((y \triangleleft h g_1 \dots g_{r-1}) \triangleright g_r.$$

Entonces $y.(h.A) = (y \triangleright h).((y \triangleleft h).A)$ por (7.5.1) y las identidades

$$(y \triangleright h)^{-1} = (y \triangleleft h) \triangleright h^{-1}, \quad (y \triangleleft h)^{-1} = y^{-1} \triangleleft (y \triangleright h).$$

(ii) Asumamos que $r, s > 1$. Definamos los mapas $\phi : \mathbb{K}\mathcal{B}^{[r,s]} \to \mathbb{K}\mathcal{V} \bowtie \mathcal{H} \otimes_{\mathbb{K}\mathcal{P}} \mathbb{K}\mathcal{B}^{[r-1,s-1]}$, $\psi : \mathbb{K}\mathcal{V} \bowtie \mathcal{H} \otimes_{\mathbb{K}\mathcal{P}} \mathbb{K}\mathcal{B}^{[r-1,s-1]} \to \mathbb{K}\mathcal{B}^{[r,s]}$ por las fórmulas

$$\phi\left(\overset{x_1,\dots,x_s}{\boxed{}}\quad g_1,\dots,g_r\right) := (x_s^{-1}, x_s \triangleright g_1) \otimes$$

$$\overset{x_1\triangleleft(x_2 \dots x_s \triangleright g_1),\dots,x_{s-1}\triangleleft(x_s\triangleright g_1)}{\boxed{}}\quad (x_s\triangleleft g_1)\triangleright g_2,\dots,(x_s\triangleleft g_1 \dots g_{r-1})\triangleright g_r,$$

$$\psi((y,h)\otimes \overset{x_1,\dots,x_{s-1}}{\boxed{}}\quad g_1,\dots,g_{r-1}) := (y,h).\left(\overset{x_1,\dots,x_{s-1},\mathrm{id}_{r(x_{s-1})}}{\boxed{}}\quad \mathrm{id}_{t(g_1)}, g_1,\dots,g_{r-1}\right).$$

Estos mapas son morfismos de $\mathbb{K}\mathcal{V} \bowtie \mathcal{H}$-módulos y uno es el inverso del otro. La prueba de los casos $r = 1$ o $s = 1$ se sigue de manera similar. La parte (iii) se deduce de (ii) y el lema 4.1.5. La prueba de (iv) y (v) son inmediatas. $\square$

Sea $\mathcal{A}^{\bullet,\bullet}$ el doble complejo obtenido de $\mathfrak{B}^{\bullet,\bullet}$ al remover los bordes; es decir $\mathcal{A}^{r,s} := \mathfrak{B}^{r+1,s+1}$. Sea M un $\mathbb{K}\mathcal{V} \bowtie \mathcal{H}$-módulo a izquierda y por lo tanto un $\mathbb{K}\mathcal{H}$-módulo a izquierda y también un $\mathbb{K}\mathcal{V}$-módulo a izquierda. Definamos los complejos dobles de cadenas $\mathfrak{B}^{\bullet,\bullet}(M), \mathcal{E}^{\bullet,\bullet}(M)$ y $\mathcal{A}^{\bullet,\bullet}(M)$ por

$$\mathfrak{B}^{r,s}(M) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}\mathcal{V}\bowtie\mathcal{H}}(\mathbb{K}\mathcal{B}^{[r,s]}, M), \qquad \mathcal{A}^{r,s}(M) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}\mathcal{V}\bowtie\mathcal{H}}(\mathbb{K}\mathcal{B}^{[r+1,s+1]}, M),$$

y $\mathcal{E}^{r,s}(M)$ consiste solo en los bordes de $\mathfrak{B}(M)$.

Observación 7.6.2. Sea M un $\mathbb{K}\mathcal{V} \bowtie \mathcal{H}$-módulo. Lema 7.6.1 (ii) implica que existen isomorfismos $\mathbb{K}$-lineales naturales: $\mathfrak{B}^{r,s}(M) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}\mathcal{B}^{[r-1,s-1]}, M)$ para cualquier $r, s > 1$, y biyecciones naturales: $\mathfrak{B}^{r,1}(M) \simeq C^{(r-1)}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$, $\mathfrak{B}^{1,s}(M) \simeq C^{(s-1)}(\mathcal{H}, \mathcal{E})$ para cualquier $r, s > 0$, donde $\mathcal{E}$ es el fibrado módulo correspondiente a M.

Observación 7.6.3. Sea $\mathcal{B}^{(r,s)}$ como en [**AN1**]. Supongamos que $r, s > 1$. Extendemos cualquier $\mu \in \mathfrak{B}^{r,s}(M) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}\mathcal{B}^{[r-1,s-1]}, M)$ a $\widetilde{\mu} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}\mathcal{B}^{(r-1,s-1)}, M)$ por 0 en $\mathcal{B}^{(r-1,s-1)} - \mathcal{B}^{[r-1,s-1]}$. En otras palabras, los elementos de $\mathfrak{B}^{r,s}(M)$ están normalizados por definición.

Ahora podemos formular la sucesión exacta de Kac para grupoides.

Teorema 7.6.4. [**AN1**, Prop 3.14] *Denotemos $\mathcal{D} = \mathcal{V} \bowtie \mathcal{H}$. Sea M un $\mathbb{K}\mathcal{D}$-módulo. Entonces, existe una sucesión exacta larga*

$$\begin{aligned}
&0 \longrightarrow H^1(\mathcal{D}, M) \xrightarrow{res} H^1(\mathcal{H}, M) \oplus H^1(\mathcal{V}, M) \longrightarrow H^0(\mathrm{Tot}\,\mathcal{A}^{\bullet,\bullet}(M)) \\
&\longrightarrow H^2(\mathcal{D}, M) \xrightarrow{res} H^2(\mathcal{H}, M) \oplus H^2(\mathcal{V}, M) \longrightarrow H^1(\mathrm{Tot}\,\mathcal{A}^{\bullet,\bullet}(M)) \\
&\longrightarrow H^3(\mathcal{D}, M) \xrightarrow{res} H^3(\mathcal{H}, M) \oplus H^3(\mathcal{V}, M) \longrightarrow \dots
\end{aligned} \tag{7.6.3}$$

Las funciones denotadas por res en la sucesión exacta anterior proviene de las restricciones usuales.

Demostración. La sucesión exacta corta de dobles complejos $0 \to \mathcal{A}^{\bullet,\bullet}(M) \to \mathfrak{B}^{\bullet,\bullet}(M) \to \mathcal{E}^{\bullet,\bullet}(M) \to 0$ induce una sucesión exacta larga de cohomología. Por la observación 7.6.2 es fácil ver que

$$H^n(\operatorname{Tot}\mathcal{E}^{\bullet,\bullet}(M)) \simeq H^n(\mathcal{H}, M) \bigoplus H^n(\mathcal{V}, M)$$

para cualquier $n \in \mathbb{N}_0$. Por el Lema 7.6.1 (v) cada columna de $\mathfrak{B}^{\bullet,\bullet}$ es acíclica. Luego el complejo total asociado

$$\longrightarrow \operatorname{Tot}(\mathfrak{B})_n \xrightarrow{\partial_n} \operatorname{Tot}(\mathfrak{B})_{n-1} \dots \longrightarrow \operatorname{Tot}(\mathfrak{B})_3 \xrightarrow{\partial_1} \operatorname{Tot}(\mathfrak{B})_2 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{K}\mathcal{P}, \tag{7.6.4}$$

donde $\epsilon : \operatorname{Tot}(\mathfrak{B})_1 \to \mathbb{K}\mathcal{P}$ esta dado por el grado: $\epsilon\left(\begin{smallmatrix} x \\ \square\, g \end{smallmatrix} \right) = l(x)$, es una resolución proyectiva del $\mathbb{K}\mathcal{V} \bowtie \mathcal{H}$-módulo trivial. Ver, por ejemplo, [**W**, Ex. 1.2.5]. Esto implica que $H^n(\operatorname{Tot}\mathfrak{B}(M)) \simeq H^n(\mathcal{V} \bowtie \mathcal{H}, M)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}_0$, lo cual termina la demostración. $\square$

Observación 7.6.5. Tomaremos ahora $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$ y $A = \Bbbk^\times$ y recordemos el significado de $\underline{\Bbbk^\times}$ en la definición 7.3.3. Denotemos

$$\operatorname{Aut}(\Bbbk\mathcal{T}) := H^0(\operatorname{Tot}\mathcal{A}^{\bullet,\bullet}(\underline{\Bbbk^\times})), \qquad \operatorname{Opext}(\mathcal{V},\mathcal{H}) := H^1(\operatorname{Tot}\mathcal{A}^{\bullet,\bullet}(\underline{\Bbbk^\times})).$$

El grupo $Z^2(\operatorname{Tot}\mathcal{A}^{\bullet,\bullet}(\underline{\Bbbk^\times}))$ puede ser identificado con el conjunto de pares (σ,τ) tal que σ es un 2-cociclo normalizado con valores en $\underline{\Bbbk^\times}$ para el grupoide vertical $\mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{H}$, τ es un 2-cociclo normalizado con valores en $\underline{\Bbbk^\times}$ para el grupoide horizontal $\mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{V}$ y se cumple que

$$\sigma(AB, CD)\tau\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \tau(A,B)\tau(C,D)\sigma(A,C)\sigma(B,D), \tag{7.6.5}$$

para cualquier A, B, C, D tal que $\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{array}$. Por lo tanto, $\operatorname{Opext}(\mathcal{V},\mathcal{H})$ coincide con el grupo considerado en [**AN1**]. Se tiene la expresión familiar

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^1(\mathcal{D}, \underline{\Bbbk^\times}) \xrightarrow{\text{res}} H^1(\mathcal{H}, \underline{\Bbbk^\times}) \oplus H^1(\mathcal{V}, \underline{\Bbbk^\times}) \longrightarrow \operatorname{Aut}(\Bbbk\mathcal{T}) \\ &\longrightarrow H^2(\mathcal{D}, \underline{\Bbbk^\times}) \xrightarrow{\text{res}} H^2(\mathcal{H}, \underline{\Bbbk^\times}) \oplus H^2(\mathcal{V}, \underline{\Bbbk^\times}) \longrightarrow \operatorname{Opext}(\mathcal{V},\mathcal{H}) \\ &\longrightarrow H^3(\mathcal{D}, \underline{\mathbb{K}^\times}) \xrightarrow{\text{res}} H^3(\mathcal{H}, \underline{\Bbbk^\times}) \oplus H^3(\mathcal{V}, \underline{\Bbbk^\times}) \longrightarrow \dots \end{aligned} \tag{7.6.6}$$

Notar que, si $(\sigma,\tau) \in Z^2(\operatorname{Tot}\mathcal{A}^{\bullet,\bullet}(\underline{\Bbbk^\times}))$, luego se sigue de la ecuación (7.6.5) que

$$\sigma((\mathrm{id}_{\mathfrak{s}(g)}, g), (\mathrm{id}_{\mathfrak{s}(h)}, h)) = 1, \quad \tau((x, \mathrm{id}_{\mathfrak{e}(x)}), (y, \mathrm{id}_{\mathfrak{e}(y)})) = 1, \qquad g,h \in \mathcal{V}, \quad x,y \in \mathcal{H}. \tag{7.6.7}$$

CAPíTULO 8

Estructura de las factorizaciones exactas

Este capítulo esta dedicado al estudio de grupoides $\mathcal{D}$ munidos de una factorización exacta. También daremos ejemplos concretos y mostraremos el cálculo explícito de ciertos Opext usando como herramiento principal la suseción exacta de Kac descripta en el capítulo anterior.

Sea $\mathcal{D} \rightrightarrows \mathcal{P}$ un grupoide conexo. Fijamos $O \in \mathcal{P}$ y $\tau_P \in \mathcal{D}(O, P)$, $P \in \mathcal{P}$, $\tau_O = \mathrm{id}_O$. Denotamos por D al grupo $\mathcal{D}(O)$; por lo tanto $\mathcal{D} \simeq D \times \mathcal{P}^2$, con isomorfismo dado por

$$\mathcal{D}(P, Q) \ni x \mapsto (\tau_P x \tau_Q^{-1}, (P, Q)).$$

En otras palabras, llevamos hacia atrás a x a una flecha desde O hasta O vía los τ's:

$$\begin{tikzcd} O \arrow[r, bend left, "\tau_P"] \arrow[d, bend right] & P \arrow[d, bend left, "x"] \\ O \arrow[r, bend left, "\tau_Q"'] & Q \end{tikzcd}$$

Elecciones distintas de las familias $\tau_P \in \mathcal{D}(O, P)$, $P \in \mathcal{P}$, dan lugar, solamente, a diferentes isomorfismos de grupoides $\mathcal{D} \simeq D \times \mathcal{P}^2$.

Fijemos una relacion de equivalencia $\approx_H$ en $\mathcal{P}$ y una sección $\sigma : \mathcal{P}/\approx_H \to \mathcal{P}$ de la proyección canónica. Entonces, existe una biyección entre

(a) el conjunto de subgrupoides amplios $\mathcal{H}$ de $\mathcal{D}$ con relación de equivalencia $\approx_H$, y

(b) el conjunto de colecciones $((H_{\mathfrak{U}})_{\mathfrak{U} \in \mathcal{P}/\approx_H}, (\overline{\lambda_P})_{P \in \mathcal{P}})$, donde $H_{\mathfrak{U}}$ es un subgrupo de D, $\mathfrak{U} \in \mathcal{P}/\approx_H$, y $\overline{\lambda_P} \in H_{\mathfrak{U}} \backslash D$, $P \in \mathfrak{U}$, con $\lambda_{\sigma(\mathfrak{U})} \in H_{\mathfrak{U}}$ para cualquier $\mathfrak{U} \in \mathcal{P}/\approx_H$.

Más precisamente, desde (a) hasta (b), si $\mathfrak{U} \in \mathcal{P}/\approx_H$ y $P \in \mathfrak{U}$, elegimos $g_P \in \mathcal{H}(\sigma(\mathfrak{U}), P)$ y ponemos

$$H_{\mathfrak{U}} = \tau_{\sigma(\mathfrak{U})} \mathcal{H}(\sigma(\mathfrak{U})) \tau_{\sigma(\mathfrak{U})}^{-1}, \qquad \lambda_P = \tau_{\sigma(\mathfrak{U})} g_P \tau_P^{-1}.$$

La elección de g_P no afecta la clase de λ_P en $H_{\mathfrak{U}} \backslash D$. Por definición, $\lambda_{\sigma(\mathfrak{U})} \in H_{\mathfrak{U}}$.

Recíprocamente, si la colección $((H_{\mathfrak{U}})_{\mathfrak{U} \in \mathcal{P}/\approx_H}, (\overline{\lambda_P})_{P \in \mathcal{P}})$ satisface las condiciones descriptas anteriormente entonces el subgrupoide amplio $\mathcal{H}$ que esta colección determina está dado por

$$\mathcal{H}(P, Q) = \begin{cases} \tau_P^{-1} \lambda_P^{-1} H_{\mathfrak{U}} \lambda_Q \tau_Q, & \text{if} \quad P \approx_H Q, P, Q \in \mathfrak{U}; \\ \emptyset & \text{if} \quad P \not\approx_H Q. \end{cases}$$

En otras palabras $\lambda_P\tau_P = \tau_{\sigma(\mathfrak{U})}g_P$, flechas x en $\mathcal{H}$ desde P hasta Q corresponden a flechas $\widetilde{x} \in H_{\mathfrak{U}}$ como en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
O \arrow[r, bend left, "\tau_{\sigma(\mathfrak{U})}"] \arrow[d, "\widetilde{x}"'] & \sigma(\mathfrak{U}) \arrow[r, bend left, "g_P"] \arrow[d] & P \arrow[d, "x"] \\
O \arrow[r, bend left, "\tau_{\sigma(\mathfrak{U})}"'] & \sigma(\mathfrak{U}) \arrow[r, bend left, "g_Q"'] & Q
\end{tikzcd}$$

Por abuso de la notación, diremos que $\mathcal{H}$ es asociado a $((H_{\mathfrak{U}})_{\mathfrak{U}\in\mathcal{P}/\approx_H}, (\overline{\lambda_P})_{P\in\mathcal{P}})$.

Reformularemos la descripción de factorizaciones exactas de grupoides conexos dada en [**AN1**, Th. 2.15] en términos de la discusión precedente. Fijemos relaciones de equivalencia $\approx_V$ y $\approx_H$ sobre $\mathcal{P}$ y secciones $\rho : \mathcal{P}/\approx_V \to \mathcal{P}$, $\sigma : \mathcal{P}/\approx_H \to \mathcal{P}$ de las proyecciones canónicas.

TEOREMA 8.0.6. *Sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{V}$ subgrupoides amplios de $\mathcal{D}$ asociados respectivamente a las colecciones $((H_{\mathfrak{U}})_{\mathfrak{U}\in\mathcal{P}/\approx_H}, (\lambda_P)_{P\in\mathcal{P}})$, $((V_{\mathfrak{R}})_{\mathfrak{R}\in\mathcal{P}/\approx_V}, (\mu_P)_{P\in\mathcal{P}})$ como fue explicado anteriormente. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *$\mathcal{D} = \mathcal{V}\mathcal{H}$ es una factorización exacta.*

(ii) *$(\mathcal{H}, \mathcal{V})$ es un par de grupoides apareados y $\mathcal{D} \simeq \mathcal{V} \bowtie \mathcal{H}$.*

(iii) *Las siguientes condiciones se verifican:*

$$D = \coprod_{R\in\,\mathfrak{U}\cap\mathfrak{R}} V_{\mathfrak{R}}\,\mu_R\lambda_R^{-1}\,H_{\mathfrak{U}}, \qquad \text{para todo } \mathfrak{U}\in\mathcal{P}/\approx_H, \mathfrak{R}\in\mathcal{P}/\approx_V; \tag{8.0.8}$$

$$\mu_P^{-1}V_{\mathfrak{R}}\mu_P \cap \lambda_P^{-1}H_{\mathfrak{U}}\lambda_P = \{1\}, \qquad \text{para todo } \mathfrak{U}\in\mathcal{P}/\approx_H,\ \mathfrak{R}\in\mathcal{P}/\approx_V, P\in\mathfrak{U}\cap\mathfrak{R}. \tag{8.0.9}$$

□

En lo que queda de esta sección estudiaremos pares de grupoides apareados cuyo grupoide vertical es conexo. Estos son exactamente aquéllos para que la categoría tensorial $\operatorname{Rep}\Bbbk_\sigma^\tau\mathcal{T}$ sea de fusión.

Fijemos un subgrupoide vertical $\mathcal{V}$ de $\mathcal{D}$ determinado por un subgrupo V de D y $\overline{\mu_P} \in V\backslash D$, $P \in \mathcal{P}$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $\mu_P = 1$ para todo $P \in \mathcal{P}$; simplemente basta con cambiar la familia (τ_P) por $(\mu_P\tau_P)$.

Diremos que $\mathcal{H}$ es un *factor exacto* del subgrupoide $\mathcal{V}$ de $\mathcal{D}$ si $\mathcal{D} = \mathcal{V}\mathcal{H}$ es una factorización exacta.

COROLARIO 8.0.7. *Sea $\mathcal{H}$ un subgrupoide amplio de $\mathcal{D}$ asociado a $((H_{\mathfrak{U}})_{\mathfrak{U}\in\mathcal{P}/\approx_H}, (\lambda_P)_{P\in\mathcal{P}})$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *$\mathcal{H}$ es un factor exacto de $\mathcal{V}$.*

(ii) *Las siguientes condiciones se verifican:*

$$D = \coprod_{R \in \mathfrak{U}} V\, \lambda_R^{-1}\, H_{\mathfrak{U}}, \qquad \textit{para toda } \mathfrak{U} \in \mathcal{P}/\approx_H; \tag{8.0.10}$$

$$V \cap gH_{\mathfrak{U}}g^{-1} = \{1\}, \qquad \textit{para todo } g \in D. \tag{8.0.11}$$

Demostración. La condición (8.0.9) se lee ahora $V \cap \lambda_P^{-1} H_{\mathfrak{U}} \lambda_P = \{1\}$, para toda clase $\mathfrak{U} \in \mathcal{P}/\approx_H$, $P \in s$. En presencia de (8.0.10), esto es equivalente a (8.0.11). □

Sumario 8.0.8. Para construir ejemplos explícitos de una factorización exacta $\mathcal{D} = \mathcal{V}\mathcal{H}$ con $\mathcal{V}$ conexo, necesitamos:

- Un grupo finito D, un subgrupo V de D y un conjunto finito no vacío $\mathcal{P}$.

  Fijemos $O \in \mathcal{P}$ y definamos $\mathcal{D}$ y $\mathcal{V}$ como fue explicado anteriormente.
- Una relación de equivalencia $\approx_H$ in $\mathcal{P}$.
- Una familia $(H_{\mathfrak{U}})_{\mathfrak{U} \in \mathcal{P}/\approx_H}$ de subgrupos de D tales que
  - (a) V interseca trivialmente los conjugados de $H_{\mathfrak{U}}$ para toda $\mathfrak{U} \in \mathcal{P}/\approx_H$.
  - (b) Existen biyecciones $\varphi_{\mathfrak{U}} : V\backslash D/H_{\mathfrak{U}} \simeq \mathfrak{U}$ para toda $\mathfrak{U} \in \mathcal{P}/\approx_H$.

    Denotamos $\sigma(\mathfrak{U}) = \varphi_{\mathfrak{U}}(VH_{\mathfrak{U}}) \in \mathfrak{U}$.
- Una sección $\zeta : \mathfrak{U} \to D$ de la proyección canónica $D \to V\backslash D/H_{\mathfrak{U}}$ compuesta con $\varphi_{\mathfrak{U}}$, tal que $\zeta_{\sigma(\mathfrak{U})} \in H_{\mathfrak{U}}$.

Pongamos $\lambda_P = \zeta_P^{-1}$ para cualquier $P \in \mathcal{P}$; y claramente $\lambda_{\sigma(\mathfrak{U})} = \zeta_{\sigma(\mathfrak{U})}^{-1} \in H_{\mathfrak{U}}$. Entonces $\mathcal{H}$ es el subgrupoide amplio asociado a $((H_{\mathfrak{U}})_{\mathfrak{U} \in \mathcal{P}/\approx_H}, (\lambda_P)_{P \in \mathcal{P}})$; es un factor exacto de $\mathcal{V}$ por (a) y (b).

Observación 8.0.9. Si D es un grupo finito, V y H son subgrupos de D con una descomposición en coclases dobles $D = \coprod_{P \in \mathfrak{U}} V\zeta_P H$, entonces

$$[D : H] = \sum_{P \in \mathfrak{U}} [V : V \bigcap \zeta_P H \zeta_P^{-1}];$$

si además $V \bigcap gHg^{-1} = \{1\}$ para todo $g \in D$ se tiene que $|D| = \#\mathfrak{U}|V|\,|H|$. Ver [**AdM**, p. 76].

En lo que sigue analizaremos ejemplos explícitos de factores exactos $\mathcal{H}$ de $\mathcal{V}$ de acuerdo con la relación de equivalencia $\approx_H$.

8.1. Caso donde La relación de equivalencia $\approx_H$ es totalmente disconexa

Aquí $\approx_H$ es la relación identidad: si $P \approx_H Q$ entonces $P = Q$ para cualquier $P, Q \in \mathcal{P}$. Subgrupoides amplios $\mathcal{H}$ con esta relación de equivalencia corresponden a familias $(H_P)_{P \in \mathcal{P}}$ de subgrupos de D.

Sumario 8.1.1. Sea $\mathcal{H}$ como arriba. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $\mathcal{D} = \mathcal{V}\mathcal{H}$ es una factorización exacta.

(ii) $D = VH_P$ es una factorización exacta para todo $P \in \mathcal{P}$.

Para construir ejemplos explicitos de factorizaciones exactas $\mathcal{D} = \mathcal{V}\mathcal{H}$ con $\mathcal{V}$ conexo y $\approx_H = \mathrm{id}$, necesitamos un grupo finito D, un subgrupo V y una familia $(H_P)_{P\in\mathcal{P}}$ de subgrupos de D (luego el conjunto de índices $\mathcal{P}$ es la base del grupoide) tal que H_P es un factor exacto de V para todo $P \in \mathcal{P}$.

Dado un grupo finito D y un subgrupo V, nos enfrentamos al problema de encontrar todos los factores exactos H de V. Observemos que:

(0). Cualquier conjugado de un factor exacto de V es nuevamente un factor exacto de V.

(1). Existen un grupo finito D, un subgrupo V y factores exactos H y H' tales que $H \not\cong H'$. Por ejemplo, $D = \mathbb{S}_4$, $V = \mathbb{S}_3$ (el subgrupo que fija la letra 4), $H = \langle(1234)\rangle \simeq \mathbb{Z}/(4)$, $H' = \langle(24)(13), (34)(12)\rangle \simeq \mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(2)$.

(2). Existen un grupo finito D, un subgrupo V y factores exactos H y H' con $H \simeq H'$ pero H no es conjugado a H'. Por ejemplo, $D = \mathbb{S}_n$, $n \geq 6$, $V = A_n$, $H = \langle(12)\rangle$, $H' = \langle(12)(34)(56)\rangle$.

(3). (Teorema de Schur-Zassenhaus). Si D es un grupo finito y $V \lhd D$ es un subgrupo normal tal que $(|V|, [D : V]) = 1$, entonces V admite factores exactos, los cuales son todos conjugados entre sí. La única prueba conocida de la conjugación de los factores exactos es basada en el teorema de Feit-Thompson (cualquier grupo de orden impar es soluble).

(4). La lista de todas las factorizaciones exactas de $\mathbb{S}_n$ y $\mathbb{A}_n$ están dadas en [**WW**].

Sea $\mathcal{D} = \mathcal{V}\mathcal{H}$ una factorización exacta con $\mathcal{V}$ conexo y $\approx_H = \mathrm{id}$. Entonces, por la Proposición 7.3.2 (i), la sucesión exacta de Kac (7.6.6) tiene la forma

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^1(D,\Bbbk^\times) \xrightarrow{\text{res}} \oplus_{P\in\mathcal{P}} H^1(H_P,\Bbbk^\times) \oplus H^1(V,\Bbbk^\times) \longrightarrow \mathrm{Aut}\,(\Bbbk\,\mathcal{T}) \\ &\longrightarrow H^2(D,\Bbbk^\times) \xrightarrow{\text{res}} \oplus_{P\in\mathcal{P}} H^2(H_P,\Bbbk^\times) \oplus H^2(V,\Bbbk^\times) \longrightarrow \mathrm{Opext}(\mathcal{V},\mathcal{H}) \\ &\longrightarrow H^3(D,\Bbbk^\times) \xrightarrow{\text{res}} \oplus_{P\in\mathcal{P}} H^3(H_P,\Bbbk^\times) \oplus H^3(V,\Bbbk^\times) \longrightarrow \dots \end{aligned} \tag{8.1.1}$$

Ejemplo 8.1.2. Sea $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 5$. Sean $D := \mathbb{S}_m$, $V := C_m = \langle(1\dots m)\rangle$, $\mathcal{P} := \{1\dots m\}$, $H_i := \mathbb{S}_m^{(i)} := \{\sigma \in \mathbb{S}_m : \sigma(i) = i\}$, $1 \leq i \leq m$. Los grupos $\mathbb{S}_m^{(i)}$ son conjugados entre sí, de hecho si $\tau_{ij} = (ij)$ entonces $\tau_{ij}\mathbb{S}_m^{(i)}\tau_{ij}^{-1} = \mathbb{S}_m^{(j)}$. Se tienen factorizaciones exactas $\mathbb{S}_m = C_m\mathbb{S}_m^{(i)}$ para todo $1 \leq i \leq m$, luego se tiene una factorización exacta de grupoides $\mathcal{D} = \mathcal{V}\mathcal{H}$.

Asumamos ahora que $\Bbbk = \mathbb{C}$. Nos basamos en cálculos hechos en [**M2**]. Afirmamos que

$$\mathrm{Opext}(\mathcal{V},\mathcal{H}) = \mathbb{Z}_2^{m-1}.$$

Es sabido que $H^2(C_m,\Bbbk^\times) = 0$ y $H^2(\mathbb{S}_m,\Bbbk^\times) = \mathbb{Z}_2$; y que el mapa de restricción

$$\text{res}\ : H^2(\mathbb{S}_m,\Bbbk^\times) \to H^2(\mathbb{S}_{m-1},\Bbbk^\times)$$

es biyectivo; y que

$$\text{res } : H^3(\mathbb{S}_m, \Bbbk^\times) \to H^3(\mathbb{S}_{m-1}, \Bbbk^\times) \oplus H^3(C_m, \Bbbk^\times)$$

es inyectivo, [**M2**, p. 579]. Luego la sucesión exacta de Kac (8.1.1) da

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2^m \longrightarrow \operatorname{Opext}(\mathcal{V}, \mathcal{H}) \longrightarrow 0,$$

con lo que queda demostrada la afirmación.

8.2. Caso donde La relación de equivalencia $\approx_H$ es conexa

Aquí ambas relaciones $\approx_V$ y $\approx_H$ son conexas. Un subgrupoide amplio $\mathcal{H}$ en este caso corresponde a un subgrupo H de D y elementos $(\lambda_P)_{P\in\mathcal{P}} \in H\backslash D$, tal que $\lambda_O \in H$.

Sumario 8.2.1. Sea $\mathcal{H}$ un grupoide como está explicado arriba. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(i) $\mathcal{D} = \mathcal{V}\mathcal{H}$ es una factorización exacta.
(ii) $D = \coprod_{r\in\mathcal{P}} V\lambda_r^{-1}H$ (y por lo tanto $\#(V\backslash D/H) = \#\mathcal{P}$) y $V \bigcap gHg^{-1} = \{1\}$ para cualquier $g \in D$.

Para construir ejemplos explícitos de factorizaciones $\mathcal{D} = \mathcal{V}\mathcal{H}$ con $\mathcal{V}$ y $\mathcal{H}$ conexos, necesitamos un grupo finito D, dos subgrupos V y H tal que $V \cap gHg^{-1} = \{1\}$ para todo $g \in D$, y una sección $\zeta : V\backslash D/H \to D$ de la proyección canónica $D \to V\backslash D/H$ tal que $\zeta(VH) \in H$. La base de los grupoides $\mathcal{D}$, $\mathcal{V}$ y $\mathcal{H}$ es $\mathcal{P} := V\backslash D/H$, y $\zeta_P = \lambda_P^{-1}$ para todo $P \in \mathcal{P}$.

Dado un grupo finito D y un subgrupo V, tenemos que encontrar subgrupos H de D tal que V interseca trivialmente todos los conjugados de H. Observemos que:

(1). Si los ordenes $|V|$, $|H|$ son coprimos, esta condición se cumple automaticamente.

(2). Si V admite un factor exacto K y H es cualquier subgrupo de K entonces V interseca trivialmente todos los conjugados de H.

Sea $\mathcal{D} = \mathcal{V}\mathcal{H}$ una factorización exacta con $\mathcal{V}$ y $\mathcal{H}$ conexos. Entonces, la Proposición 7.3.2 (i) implica que la sucesión exacta de Kac (7.6.6) tiene la forma

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^1(D, \Bbbk^\times) \xrightarrow{\text{res}} H^1(H, \Bbbk^\times) \oplus H^1(V, \Bbbk^\times) \longrightarrow \operatorname{Aut}(\Bbbk\mathcal{T}) \\ &\longrightarrow H^2(D, \Bbbk^\times) \xrightarrow{\text{res}} H^2(H, \Bbbk^\times) \oplus H^2(V, \Bbbk^\times) \longrightarrow \operatorname{Opext}(\mathcal{V}, \mathcal{H}) \\ &\longrightarrow H^3(D, \Bbbk^\times) \xrightarrow{\text{res}} H^3(H, \Bbbk^\times) \oplus H^3(V, \Bbbk^\times) \longrightarrow \dots \end{aligned} \tag{8.2.1}$$

Ejemplo 8.2.2. Sean $m, k, r \in \mathbb{N}$ tales que $k, r \leq m$ y $k > m - r$. Sea $X \subseteq \{1, ..., m\}$ un subconjunto de cardinal r. Sean $D := \mathbb{S}_m$, $V := C_k = \langle(12\dots k)\rangle$, $H := \mathbb{S}_m^X := \{\sigma \in \mathbb{S}_m : \sigma(x) = x \text{ for all } x \in X\} \simeq \mathbb{S}_{m-r}$. Como $\sigma\mathbb{S}_m^X\sigma^{-1} = \mathbb{S}_m^{\sigma(X)}$ para todo $\sigma \in \mathbb{S}_m$, entonces $C_k \bigcap \sigma\mathbb{S}_m^X\sigma^{-1} = \{e\}$ para todo $\sigma \in \mathbb{S}_m$. En este ejemplo $\#\mathcal{P} = \dfrac{n(n-1)...(n-r+1)}{k}$.

Asumamos que estamos en las condiciones del sumario 8.2.1. El conjunto $VH \subseteq D$ es un subgrupo de D si y sólo si $VH = HV$. En dicho caso, se tiene una factorización exacta de grupos que permite considerar el grupo $\operatorname{Opext}(V, H)$. El siguiente ejemplo muestra que el isomorfismo $\operatorname{Opext}(V, H) \simeq \operatorname{Opext}(\mathcal{V}, \mathcal{H})$ no se cumple necesariamente.

Ejemplo 8.2.3. En este ejemplo $\Bbbk = \mathbb{C}$. Sean $p, q, n \in \mathbb{N}$, donde p y q son coprimos, y sea $m = pqn$. Sean $D := \mathbb{Z}/(m)$, $V := \mathbb{Z}/(p)$, $H := \mathbb{Z}/(q)$. Sean $\mathcal{D}, \mathcal{V}$ y $\mathcal{H}$ los correspondientes grupoides conexos asociados a D, V y H respectivamente, con $\mathcal{P} = V \backslash D / H$ de cardinal n.

Afirmamos que $\operatorname{Opext}(\mathcal{V}, \mathcal{H}) \simeq \mathbb{Z}/(n)$. De hecho, como $H^2(\mathbb{Z}/(p), \mathbb{C}^\times) = H^2(\mathbb{Z}/(q), \mathbb{C}^\times) = 0$ entonces $\operatorname{Opext}(\mathcal{V}, \mathcal{H}) \simeq \operatorname{Ker}(\operatorname{res} : H^3(\mathbb{Z}/(m), \mathbb{C}^\times) \to H^3(\mathbb{Z}/(p), \mathbb{C}^\times) \oplus H^3(\mathbb{Z}/(q), \mathbb{C}^\times))$ por (8.2.1). Ahora, es sabido que $H^3(\mathbb{Z}/(r), \mathbb{C}^\times) \simeq \mathbb{Z}/(r)$ para cualquier $r \in \mathbb{N}$ [**AdM**, p. 61]. Y no es difícil ver que el mapa de restricción $\operatorname{res} : \mathbb{Z}/(m) \to \mathbb{Z}/(p) \oplus \mathbb{Z}/(q)$ vía estos isomorfismos es la proyección canónica, y por lo tanto $\operatorname{Opext}(\mathcal{V}, \mathcal{H}) \simeq \mathbb{Z}/(n) \not\simeq \operatorname{Opext}(V, H)$ a menos que $n = 1$.

CAPíTULO 9

Algebras de Hopf débiles construidas apartir de grupoides dobles

En esta sección recordaremos la construcción de un álgebra de Hopf débil– más propiamente un álgebra de faz en el sentido de Hayashi [**H**]– partiendo de un par de grupoides apareados y un elemento en el correspondiente Opext, dada en [**AN1**]. Esto motiva la discusión y los cálculos realizados en el capítulo anterior.

También dedicaremos este capítulo al estudio de la categoría tensorial de representaciones de dichas álgebras de Hopf débiles; $\mathrm{Rep}(\Bbbk_\tau^\sigma \mathcal{T})$ donde $\mathcal{T}$ es un grupoide doble vacante y (σ, τ) es un elemento de $\mathrm{Opext}(\mathcal{V}, \mathcal{H})$.

Uno de los resultados principales que se mostraran es que dicha categoría es de tipo grupo (ver ejemplo 2.0.19) cuando el grupoide vertical $\mathcal{V}$ es conexo.

9.1. La construcción

Sea $(\mathcal{H}, \mathcal{V}, \triangleleft, \triangleright)$ un par de grupoides apareados y sea $\mathcal{T} := \begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \rightrightarrows & \mathcal{H} \\ \downdownarrows & & \downdownarrows \\ \mathcal{V} & \rightrightarrows & \mathcal{P} \end{array}$ el grupoide doble vacante asociado a $(\mathcal{H}, \mathcal{V})$. Sea $(\sigma, \tau) \in Z^2(\mathrm{Tot}\, \mathcal{A}^{\bullet,\bullet}(\underline{\Bbbk^\times}))$. Sea $\Bbbk_\sigma^\tau \mathcal{T}$ el espacio vectorial cuya base es $\mathcal{B}$ y multiplicación, comultiplicación definidas en la base $\mathcal{B}$, respectivamente por

- $A.B = \sigma(A, B) \dfrac{A}{B}$, si $\dfrac{A}{B}$, y 0 en caso contrario.
- $\Delta(A) = \sum \tau(B, C) B \otimes C$, donde la sumatoria es sobre todos los pares (B, C) con $B|C$ y $A = BC$.

La unidad y counidad estan dadas por

$$1 = \sum_{x \in \mathcal{H}} \mathrm{id}_x, \qquad \epsilon(A) = \begin{cases} 1, & \text{si } A = \mathrm{id}_{l(A)} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

De ahora en más usaremos la siguiente notación:

$$_P1 = \sum_{x \in \mathcal{H}: l(x) = P} \mathrm{id}_x, \quad 1_P = \sum_{x \in \mathcal{H}: r(x) = P} \mathrm{id}_x \,.$$

TEOREMA 9.1.1. [**AN1**, Th. 3.8]. *(i) $\Bbbk_\sigma^\tau \mathcal{T}$ es un álgebra de Hopf débil con antípoda definida por $\mathcal{S}(A) = \tau(A, A^h)^{-1} \sigma(A^{-1}, A^h)^{-1} A^{-1}$, $A \in \mathcal{B}$. Las subálgebras fuente y final son conmutativas de dimensión $|\mathcal{P}|$, por lo tanto $\Bbbk_\sigma^\tau \mathcal{T}$ es un álgebra de caras.*

(ii) Sea (ν, η) otro par de 2-cociclos normalizados en $\mathcal{T}$ con valores en $\Bbbk^\times$. Sea $\psi : \mathcal{T} \to \Bbbk^\times$ un mapa y sea $\Psi : \Bbbk^\tau_\sigma \mathcal{T} \to \Bbbk^\eta_\nu \mathcal{T}$ el mapa lineal dado por $\Psi(B) = \psi(B)B$, $B \in \mathcal{B}$. Entonces Ψ es un isomorfismo de grupoides cuanticos si y sólo si

$$\psi\left(\frac{A}{B}\right)\sigma(A,B) = \psi(A)\psi(B)\nu(A,B), \quad \textit{para todo } A, B \in \mathcal{B} \textit{ tal que } \frac{A}{B}; \tag{9.1.1}$$

$$\psi(CD)\eta(C,D) = \psi(C)\psi(D)\tau(C,D), \quad \textit{para todo } C, D \in \mathcal{B} \textit{ tal que } C|D. \tag{9.1.2}$$

□

Proposición 9.1.2. [**AN1**, Prop. 3.11]. *Con la notación anterior, la categoría* $\operatorname{Rep}(\Bbbk^\tau_\sigma \mathcal{T})$ *de $\Bbbk^\tau_\sigma \mathcal{T}$-modulos de dimensión finita es una categoría de multifusión. Es de fusión si y sólo si $\mathcal{V} \rightrightarrows \mathcal{P}$ es conexo.* □

La siguiente observación será utilizada en secciones posteriores para entender la estructura tensorial de las categorías $\operatorname{Rep}(\Bbbk^\tau_\sigma \mathcal{T})$ en el caso de que sean de fusión.

Denotemos por $\omega : \operatorname{Opext}(\Bbbk\mathcal{T}) \to H^3(\mathcal{V} \bowtie \mathcal{H}, \Bbbk^\times)$ a la función que proviene de la sucesión exacta de Kac.

Observación 9.1.3. Sea (σ, τ) un representante de una clase de $\operatorname{Opext}(\Bbbk\mathcal{T})$. La aplicación $\omega : \operatorname{Opext}(\Bbbk\mathcal{T}) \to H^3(\mathcal{V} \bowtie \mathcal{H}, \Bbbk^\times)$ lleva la clase de (σ, τ) a la clase del 3-cociclo $\omega = \omega(\sigma, \tau)$ definido por

$$\omega((g,x),(h,y),(f,z)) = \tau\Big(\overset{x\triangleleft h}{\boxed{}}\, y\triangleright f, \overset{y}{\boxed{}}\, f\Big)\ \sigma\Big(\overset{x}{\boxed{}}\, h, \overset{x\triangleleft h}{\boxed{}}\, y\triangleright f\Big), \tag{9.1.3}$$

para elementos componibles $(g,x),(h,y),(f,z) \in \mathcal{V} \bowtie \mathcal{H}$.

Demostración. Sólo daremos una idea de la prueba. Sabemos que la sucesión exacta de Kac (7.6.6) proviene de una sucesión exacta corta de complejos dobles

$$0 \to \mathcal{A}^{\bullet,\bullet}(\Bbbk^\times) \to \mathfrak{B}^{\bullet,\bullet}(\Bbbk^\times) \to \mathcal{E}^{\bullet,\bullet}(\Bbbk^\times) \to 0.$$

El complejo total asociado al complejo doble $\mathfrak{B}^{\bullet,\bullet}(\Bbbk^\times)$ es una resolución proyectiva no estándar del $\Bbbk\mathcal{V} \bowtie \mathcal{H}$-módulo trivial, por lo tanto hay isomorfismos $\zeta_n : H^n(\operatorname{Tot}\mathfrak{B}(\Bbbk^\times)) \xrightarrow{\simeq} H^n(\mathcal{V} \bowtie \mathcal{H}, \Bbbk^\times)$ para todo $n \geq 0$, que pueden ser calculados explícitamente. La aplicación $\omega : \operatorname{Opext}(\mathcal{V}, \mathcal{H}) \to H^3(\mathcal{D}, \Bbbk^\times)$ se obtiene como la composición de la función $\operatorname{Opext}(\mathcal{V}, \mathcal{H}) = H^2(\operatorname{Tot}\mathcal{A}^{\bullet,\bullet}(\Bbbk^\times)) \to H^3(\operatorname{Tot}\mathfrak{B}^{\bullet,\bullet}(\Bbbk^\times))$ asociada a la inclusión $\mathcal{A}^{\bullet,\bullet}(\Bbbk^\times) \to \mathfrak{B}^{\bullet,\bullet}(\Bbbk^\times)$ con ζ_3. □

Para uso futuro notamos las siguientes propiedades del 3-cociclo de Kac $\omega = \omega(\sigma, \tau)$:

(9.1.4) $\omega|_{\mathcal{V}\times\mathcal{V}\bowtie\mathcal{H}\times\mathcal{V}\bowtie\mathcal{H}} = 1$,

(9.1.5) $\omega((g,x),(h,y),(f,z)) = \omega((\operatorname{id}_{\mathfrak{s}(x)}, x),(h,y),(f, \operatorname{id}_{\mathfrak{e}(f)}))$,

(9.1.6) $\omega((\operatorname{id}_{\mathfrak{s}(x)}, x),(h, \operatorname{id}_{\mathfrak{e}(h)}),(f, \operatorname{id}_{\mathfrak{e}(f)})) = \sigma\Big(\overset{x}{\boxed{}}\, h\ ,\ \overset{x\triangleleft h}{\boxed{}}\, f\Big)$,

para elecciones apropiadas de $(g,x),(h,y),(f,z) \in \mathcal{V} \bowtie \mathcal{H}$.

Las fórmulas (9.1.5) y (9.1.6) son consecuencia de (9.1.3), y (9.1.4) sigue de [**AN1**, Rmk 3.7].

9.2. Las categorías $\mathcal{C}(\mathcal{D},\omega,\mathcal{V},\psi)$

Sean $\mathcal{D} \rightrightarrows \mathcal{P}$ un grupoide, $\omega \in Z^3(\mathcal{D},\Bbbk^\times)$ un 3-cociclo normalizado y $\mathcal{V} \rightrightarrows \widetilde{\mathcal{P}}$ un subgrupoide (no necesariamente amplio) de $\mathcal{D}$ con base $\widetilde{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{P}$. Sea también $\psi : \mathcal{V}_{\mathfrak{e}}\times_{\mathfrak{s}}\mathcal{V} \to \Bbbk^\times$ una 2-cocadena normalizada tal que

$$\omega \mid_{\mathcal{V}_{\mathfrak{e}}\times_{\mathfrak{s}}\mathcal{V}_{\mathfrak{e}}\times_{\mathfrak{s}}\mathcal{V}} = d\psi. \tag{9.2.1}$$

Denotaremos por $\Bbbk_\psi\mathcal{V}$ el álgebra de grupoide torcida, cuyo espacio vectorial subyacente es $\Bbbk\mathcal{V}$ y multiplicación dada por

$$g.h = \begin{cases} \psi(g,h)\, gh & \text{si } g|h, \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Por (9.2.1) el álgebra $\Bbbk_\psi\mathcal{V}$ es un álgebra en $\mathcal{C}(\mathcal{D},\omega)$. La graduación en dicha álgebra es $(\Bbbk_\psi\mathcal{V})_\alpha = \Bbbk\alpha$ si $\alpha \in \mathcal{V}$ y es 0 de otra manera.

Observación 9.2.1. La categoría $\mathcal{C}(\mathcal{D},\omega)_{\Bbbk_\psi\mathcal{V}}$ de $\Bbbk_\psi\mathcal{V}$-módulos a derecha en $\mathcal{C}(\mathcal{D},\omega)$ es naturalmente una categoría módulo sobre $\mathcal{C}(\mathcal{D},\omega)$. Un objeto $M \in \mathcal{C}(\mathcal{D},\omega)_{\Bbbk_\psi\mathcal{V}}$ es un espacio vectorial graduado por elementos de $\mathcal{D}$, $M = \bigoplus_{\alpha\in\mathcal{D}} M_\alpha$ munido de una acción de $\leftharpoonup : M\, {}_{\mathfrak{e}(|\,|)}\times_{\mathfrak{s}} \mathcal{V} \to M$ tal que se verifica

$$(m \leftharpoonup g) \leftharpoonup h = \omega(|m|,g,h)\,\psi(g,h)\, m \leftharpoonup gh, \tag{9.2.2}$$

$$\sum_{p\in\widetilde{\mathcal{P}}} m \leftharpoonup \mathrm{id}_P = m, \tag{9.2.3}$$

para todo $m \in M$, $g,h \in \mathcal{V}$ donde $\mathfrak{e}(|m|) = \mathfrak{s}(g)$ y $\mathfrak{e}(g) = \mathfrak{s}(h)$. En particular la identidad (9.2.3) implica que si $\alpha \in \mathcal{D}$ es una flecha tal que $\mathfrak{e}(\alpha) \notin \widetilde{\mathcal{P}}$ entonces $M_\alpha = 0$.

Por lo anterior se deduce que hay una descomposición

$$\mathcal{C}(\mathcal{D},\omega)_{\Bbbk_\psi\mathcal{V}} = \bigoplus_{P\in\widetilde{\mathcal{P}}} {}_{(P)}\mathcal{C}(\mathcal{D},\omega)_{\Bbbk_\psi\mathcal{V}},$$

donde la categoría módulo ${}_{(P)}\mathcal{C}(\mathcal{D},\omega)_{\Bbbk_\psi\mathcal{V}}$ es la subcategoría plena de $\mathcal{C}(\mathcal{D},\omega)_{\Bbbk_\psi\mathcal{V}}$ cuyos objetos son espacios vectoriales graduados con flechas cuyo final es P. Las categorías ${}_{(P)}\mathcal{C}(\mathcal{D},\omega)_{\Bbbk_\psi\mathcal{V}}$ son categorías módulo y por lo tanto $\mathcal{C}(\mathcal{D},\omega)_{\Bbbk_\psi\mathcal{V}}$ no es indescomponible.

Además, la categoría módulo ${}_{(P)}\mathcal{C}(\mathcal{D},\omega)_{\Bbbk_\psi\mathcal{V}}$ es indescomponible si y sólo si el grupoide $\mathcal{V} \rightrightarrows \widetilde{\mathcal{P}}$ es conexo.

Denotemos por $\mathcal{C}(\mathcal{D},\omega,\mathcal{V},\psi)$ a la categoría tensorial de $\Bbbk_\psi\mathcal{V}$-bimódulos en $\mathcal{C}(\mathcal{D},\omega)$. La categoría $\mathcal{C}(\mathcal{D},\omega,\mathcal{V},\psi)$ es la categoría dual de la categoría $\mathcal{C}(\mathcal{D},\omega)$ con respecto a la categoría módulo $\mathcal{C}(\mathcal{D},\omega)_{\Bbbk_\psi\mathcal{V}}$, ver Proposición 3.4.5. Por construcción, las categorías $\mathcal{C}(\mathcal{D},\omega,\mathcal{V},\psi)$ son una versión multi-fusión de las categorías de tipo grupo.

OBSERVACIÓN 9.2.2. Sean $\eta : \mathcal{D}_{\mathfrak{e}} \times_{\mathfrak{s}} \mathcal{D} \to \Bbbk^\times$, $\chi : \mathcal{V} \to \Bbbk^\times$ cocadenas normalizadas. Como en [**ENO**, Remark 8.39], existen equivalencias tensoriales

$$\mathcal{C}(\mathcal{D}, \omega, \mathcal{V}, \psi) \simeq \mathcal{C}(\mathcal{D}, \omega', \mathcal{V}, \psi'),$$

donde $\omega' = \omega(d\eta)$, $\psi' = \psi\, \eta|_{\mathcal{V}}\, (d\chi)$.

LEMA 9.2.3. *Supongamos que $\mathcal{V}$ es un subgrupoide amplio. Entonces $\mathcal{C}(\mathcal{D}, \omega, \mathcal{V}, \psi)$ es una categoría de fusión si y sólo si $\mathcal{V} \rightrightarrows \mathcal{P}$ es conexo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{P} = \coprod_{S \in \mathcal{P}/\backsim_{\mathcal{V}}} S$ la descomposición de $\mathcal{P}$ en clases de equivalencia con respecto a la relación $\backsim_{\mathcal{V}}$. Entonces $\Bbbk_\psi \mathcal{V} = \bigoplus_S \Bbbk_{\psi^S} \mathcal{V}_S$, donde $\mathcal{V}_S$ es el grupoide conexo de base S y ψ^S es la restricción de ψ a $\mathcal{V}_S$. Las componentes $\Bbbk_{\psi^S} \mathcal{V}_S$ son subobjetos de $\Bbbk_\psi \mathcal{V}$ y es inmediato comprobar que $\Bbbk_{\psi^S} \mathcal{V}_S$ es irreducible como objeto en $\mathcal{C}(\mathcal{D}, \omega, \mathcal{V}, \psi)$. Esto implica el Lema. $\square$

Supongamos que el 3-cociclo ω satisface

$$\omega\, |_{\mathcal{V}_{\mathfrak{e}} \times_{\mathfrak{s}} \mathcal{V}_{\mathfrak{e}} \times_{\mathfrak{s}} \mathcal{V}} = 1.$$

De ahora en más usaremos la siguiente notación: $\mathcal{C}(\mathcal{D}, \omega, \mathcal{V}) = \mathcal{C}(\mathcal{D}, \omega, \mathcal{V}, 1)$.

Los objetos de $\mathcal{C}(\mathcal{D}, \omega, \mathcal{V})$ pueden ser descriptos explícitamente como sigue: son espacios vectoriales graduados por flechas en $\mathcal{D}$,

$$M = \oplus_{\alpha \in \mathcal{D}} M_\alpha,$$

munido de acciones de $\mathcal{V}$ por isomorfismos lineales:

$$g \rightharpoonup\ : M_\alpha \to M_{g\alpha}, \quad \leftharpoonup h : M_\alpha \to M_{\alpha h},$$

$g, h \in \mathcal{V}$, $\alpha \in \mathcal{D}$, tales que $\mathfrak{e}(g) = \mathfrak{s}(\alpha)$, $\mathfrak{s}(h) = \mathfrak{e}(\alpha)$.

Denotaremos con $|m| \in \mathcal{D}$ al grado de homogeneidad de un elemnto homogéneo $m \in M$, las siguientes relaciones se verifican:

$$|m \leftharpoonup h| = |m|h, \ \ |g \rightharpoonup m| = g|m|, \tag{9.2.4}$$

$$gh \rightharpoonup m = \omega(g, h, |m|) g \rightharpoonup (h \rightharpoonup m), \tag{9.2.5}$$

$$\sum_{P \in \widetilde{\mathcal{P}}} \mathrm{id}_P \rightharpoonup m = m = \sum_{P \in \widetilde{\mathcal{P}}} m \leftharpoonup \mathrm{id}_P, \tag{9.2.6}$$

$$\mathrm{id}_p \rightharpoonup m = \begin{cases} m & \text{si } p = \mathfrak{s}(|m|), \\ 0 & \text{de otro modo,} \end{cases} \tag{9.2.7}$$

$$(m \leftharpoonup g) \leftharpoonup h = \omega(|m|, g, h)\, m \leftharpoonup gh, \tag{9.2.8}$$

$$m \leftharpoonup \mathrm{id}_p = \begin{cases} m & \text{si } p = \mathfrak{e}(|m|), \\ 0 & \text{de otro modo,} \end{cases} \tag{9.2.9}$$

$$(g \rightharpoonup m) \leftharpoonup h = \omega(g, |m|, h) g \rightharpoonup (m \leftharpoonup h), \tag{9.2.10}$$

para cualquier elemento homogéneo $m \in M$, $g, h \in \mathcal{V}$, tal que los elementos $g, |m|, h$ son componibles en $\mathcal{D}$.

La estructura tensorial en la categoría $\mathcal{C}(\mathcal{D},\omega,\mathcal{V})$ puede ser descripta de la siguiente manera. Si $M,N\in\mathcal{C}(\mathcal{D},\omega,\mathcal{V})$ denotemos por $V(M,N)$ el subespacio (graduado) de $M\otimes N$ generado por

$$(m\leftharpoonup g)\otimes n-\omega(|m|,g,|n|)m\otimes(g\rightharpoonup n), \tag{9.2.11}$$

donde $m\in M$, $n\in N$, son elementos homogéneos tales que $|m|,g,|n|$ son componibles en $\mathcal{D}$.

El producto tensorial $\overline{\otimes}$ en $\mathcal{C}(\mathcal{D},\omega,\mathcal{V})$ esta definido por $M\overline{\otimes}N=(M\otimes N)/V(M,N)$, con $\mathcal{D}$-graduación heredada de $M\otimes N$. Las acciones a izquierda y a derecha de $\Bbbk\mathcal{V}$ sobre $M\overline{\otimes}N$ son las siguientes. La clase de $m\otimes n$ será denotada por $m\overline{\otimes}n$. Asumamos que $m\in M,n\in N$ son elementos homogéneos tales que $\mathfrak{e}(|m|)=\mathfrak{s}(|n|)$. Sean $g,h\in\mathcal{V}$ tales que $\mathfrak{e}(g)=\mathfrak{s}(|m|),\mathfrak{e}(|n|)=\mathfrak{s}(h)$, entonces

$$\begin{aligned}&g\rightharpoonup(m\overline{\otimes}n)=\omega^{-1}(g,|m|,|n|)(g\rightharpoonup m)\overline{\otimes}n,\\&(m\overline{\otimes}n)\leftharpoonup h=\omega(|m|,|n|,h)m\overline{\otimes}(n\leftharpoonup h).\end{aligned} \tag{9.2.12}$$

Observación 9.2.4. La identidad (9.2.6) implica que si $M\in\mathcal{C}(\mathcal{D},\omega,\mathcal{V})$ entonces para todo $m\in M$ tenemos que $\mathfrak{s}(|m|),\mathfrak{e}(|m|)\in\widetilde{\mathcal{P}}$.

Demostración. Sea $0\neq m\in M$ y asumamos que $\mathfrak{s}(|m|)=Q\notin\widetilde{\mathcal{P}}$. Entonces

$$m=\sum_{P\in\widetilde{\mathcal{P}}}\mathrm{id}_P\rightharpoonup m=0.$$

La primera igualdad por (9.2.6) y la segunda por (9.2.7). □

La Observación 9.2.4 nos dice que los objetos de $\mathcal{C}(\mathcal{D},\omega,\mathcal{V})$ estan graduados por flechas de $\mathcal{D}$ cuyo final y fuente pertencen a $\widetilde{\mathcal{P}}$.

Ejemplo 9.2.5. De acuerdo con la descripción anterior y con la observación 9.2.4, para todo $P\in\mathcal{P}$, existe una identificación natural

$$\mathcal{C}(\mathcal{D},\omega,\mathcal{V}(P))=\mathcal{C}(\mathcal{D}(P),\widehat{\omega},\mathcal{V}(P));$$

por lo tanto $\mathcal{C}(\mathcal{D},\omega,\mathcal{V}(P))$ es una categoría de fusión de tipo grupo.

Ejemplo 9.2.6. Sea $P\in\mathcal{P}$, y consideremos el subgrupoide

$$\{\mathrm{id}_P\}=\mathcal{V}_{(P)}\rightrightarrows\widetilde{\mathcal{P}}=\{P\}.$$

En este caso, la categoría $\mathcal{C}(\mathcal{D},\omega)_{\Bbbk\mathcal{V}_{(P)}}$ de $\Bbbk\mathcal{V}_{(P)}$-módulos a derecha en $\mathcal{C}(\mathcal{D},\omega)$ es la subcategoría plena cuyos objetos están graduados por flechas α con $\mathfrak{e}(\alpha)=P$.

Esto coincide con la categoría módulo $\mathcal{M}_{(P)}=\oplus_{Q\in\mathcal{P}}\mathcal{C}_{QP}$ [**ENO**, 2.4], presentada en el ejemplo 3.1.7 (iv).

Supongamos que el grupoide $\mathcal{D}\rightrightarrows\mathcal{P}$ es conexo. Sea $D=\mathcal{D}(P)$, y $\widehat{\omega}$ el 3-cociclo en D obtenido por restricción. Como fue notado anteriormente, por los resultados en la prueba de la Proposición 2.17 en [**ENO**, 5.5], $\mathcal{M}_{(P)}$ es una categoría módulo indescomponible y existen isomorfismos

$$\mathcal{C}^*_{\mathcal{M}_{(P)}}\simeq\mathcal{C}(\mathcal{D},\omega,\mathcal{V}_{(P)})\simeq\mathcal{C}(D,\widehat{\omega})^{\mathrm{op}}.$$

El último isomorfismo puede ser visto como una consecuencia de la descripción de $\mathcal{C}(\mathcal{D},\omega,\mathcal{V}_{(P)})$ dada anteriormente.

En particular, la categoría $\mathcal{C}(\mathcal{D},\omega,\mathcal{V}_{(P)})$ es una categoría de fusión de tipo grupo, incluso cuando el grupoide $\mathcal{V}_{(P)}$ no sea un subgrupoide amplio, es decir, aunque $\widetilde{\mathcal{P}} \neq \mathcal{P}$.

9.3. El caso conexo

De ahora en más asumiremos que $\mathcal{V} \rightrightarrows \widetilde{\mathcal{P}}$ es un subgrupoide conexo amplio (luego $\widetilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$). Por lo tanto $\mathcal{D} \rightrightarrows \mathcal{P}$ es también conexo. También fijaremos un 3-cociclo ω en $\mathcal{D}$ tal que

$$\omega \mid \mathcal{V}_{\mathfrak{e}} \times_{\mathfrak{s}} \mathcal{V}_{\mathfrak{e}} \times_{\mathfrak{s}} \mathcal{V} = 1.$$

La hipótesis de conexidad en $\mathcal{V}$ implica que el objeto unidad $\Bbbk\mathcal{V}$ en la categoría $\mathcal{C}(\mathcal{D},\omega,\mathcal{V})$ es irreducible. Por lo tanto, $\mathcal{C}(\mathcal{D},\omega,\mathcal{V})$ es de fusión en este caso. En lo que sigue daremos una equivalencia explícita que mostrará que la categoría $\mathcal{C}(\mathcal{D},\omega,\mathcal{V})$ es de tipo grupo.

Fijemos un elemento $O \in \mathcal{P}$. Como $\mathcal{V}$ es conexo, para cualquier $P \in \mathcal{P}$, se puede elegir un elemento $\tau_P \in \mathcal{V}(O,P)$. Se puede asumir sin pérdida de generalidad que $\tau_O = \mathrm{id}_O$.

Pongamos $V = \mathcal{V}(O), D = \mathcal{D}(O)$. Para todo $P,Q \in \mathcal{P}$ tenemos que

$$\mathcal{D}(P,Q) = \tau_P^{-1} D \tau_Q, \quad \mathcal{V}(P,Q) = \tau_P^{-1} V \tau_Q.$$

Sea $\widehat{\omega}$ la restricción de ω a D; de esta manera $\widehat{\omega}$ es un 3-cociclo bien definido sobre D. Por la Proposición 7.3.2 (i), la aplicación restricción determina un isomorfismo de grupos

$$H^3(\mathcal{D},\Bbbk^\times) \to H^3(D,\Bbbk^\times), \quad \omega \mapsto \widehat{\omega}.$$

Sea $\widetilde{\omega} \in Z^3(\mathcal{D},\Bbbk^\times)$ el 3-cociclo definido por la fórmula

$$\widetilde{\omega}(g,h,t) = \widehat{\omega}(\tau_P g \tau_Q^{-1}, \tau_Q h \tau_R^{-1}, \tau_R t \tau_S^{-1}), \tag{9.3.1}$$

para $g \in \mathcal{V} \bowtie \mathcal{H}(P,Q)$, $h \in \mathcal{V} \bowtie \mathcal{H}(Q,R)$, $t \in \mathcal{V} \bowtie \mathcal{H}(R,S)$.

Notar que, como $\tau_P \in \mathcal{V}$, para todo $P \in \mathcal{P}$, tenemos también que $\widetilde{\omega}|\mathcal{V}_{\mathfrak{e}} \times_{\mathfrak{s}} \mathcal{V}_{\mathfrak{e}} \times_{\mathfrak{s}} \mathcal{V} = 1$.

Por construcción, $\widetilde{\omega}|_D = \widehat{\omega}$. Por lo tanto $\widetilde{\omega}$ es cohomólogo a ω, digamos

$$\widetilde{\omega} = \omega(d\psi), \tag{9.3.2}$$

para alguna 2-cocadena normalizada $\psi : \mathcal{D}_{\mathfrak{e}} \times_{\mathfrak{s}} \mathcal{D} \to \Bbbk^\times$.

En particular, las categorías tensoriales $\mathcal{C}(\mathcal{D},\omega)$ y $\mathcal{C}(\mathcal{D},\widetilde{\omega})$ son equivalentes.

Más aún, como las restricciones $\omega|_{\mathcal{V}}$ y $\widetilde{\omega}|_{\mathcal{V}}$ son triviales, la relación (9.3.2) implica que la restricción $\psi : \mathcal{V}_{\mathfrak{e}} \times_{\mathfrak{s}} \mathcal{V} \to \Bbbk^\times$ es un 2-cociclo, y por la observación 9.2.2 hay una equivalencia tensorial

$$\mathcal{C}(\mathcal{D},\omega,\mathcal{V}) \simeq \mathcal{C}(\mathcal{D},\widetilde{\omega},\mathcal{V},\psi). \tag{9.3.3}$$

Sea $\widehat{\psi} = \psi|_V : V \times V \to \Bbbk^\times$ el 2-cociclo correspondiente en V, y sea $\widetilde{\psi} : \mathcal{V}_{\mathfrak{e}} \times_{\mathfrak{s}} \mathcal{V} \to \Bbbk^\times$ el 2-cociclo definido por la fórmula

$$\widetilde{\psi}(g,h) := \widehat{\psi}(\tau_P g \tau_Q^{-1}, \tau_Q h \tau_R^{-1}), \tag{9.3.4}$$

para todo $g \in \mathcal{V}(P,Q)$, $h \in \mathcal{V}(Q,R)$. Repitiendo el argumento anterior para ω, la Proposición 7.3.2 implica que ψ y $\widetilde{\psi}$ difieren en una 2-cocadena, es decir,

$$\widetilde{\psi} = \psi(d\chi),$$

en la componente conexa del subgrupoide $\mathcal{V}$, donde $\chi : \mathcal{V} \to \Bbbk^{\times}$ es una 1-cocadena normalizada.

Combinando este hecho con la equivalencia (9.3.3) y la observación 9.2.2 obtenemos equivalencias tensoriales

$$\mathcal{C}(\mathcal{D},\omega,\mathcal{V}) \simeq \mathcal{C}(\mathcal{D},\widetilde{\omega},\mathcal{V},\psi) \simeq \mathcal{C}(\mathcal{D},\widetilde{\omega},\mathcal{V},\widetilde{\psi}). \tag{9.3.5}$$

Sea $M \in \mathcal{C}(\mathcal{D},\widetilde{\omega},\mathcal{V},\widetilde{\psi})$. Definamos $F(M) \in \mathcal{C}(D,\widehat{\omega},V,\widehat{\psi})$ por

$$F(M) = \bigoplus_{z\in D} M_z.$$

Esto nos da un funtor bien definido $F : \mathcal{C}(\mathcal{D},\widetilde{\omega},\mathcal{V},\widetilde{\psi}) \to \mathcal{C}(D,\widehat{\omega},V,\widehat{\psi})$.

Notar que, para $M \in \mathcal{C}(\mathcal{D},\widetilde{\omega},\mathcal{V},\widetilde{\psi})$,

$$M = \bigoplus_{P,Q\in\mathcal{P}} \tau_P^{-1} \rightharpoonup F(M) \leftharpoonup \tau_Q. \tag{9.3.6}$$

Proposición 9.3.1. *El funtor F induce una equivalencia de categorías tensoriales*

$$F : \mathcal{C}(\mathcal{D},\widetilde{\omega},\mathcal{V},\widetilde{\psi}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{C}(D,\widehat{\omega},V,\widehat{\psi}).$$

Demostración. Definamos el funtor $G : \mathcal{C}(D,\widehat{\omega},V,\widehat{\psi}) \to \mathcal{C}(\mathcal{D},\widetilde{\omega},\mathcal{V},\widetilde{\psi})$ por la fórmula

$$G(W) = \bigoplus_{P,Q\in\mathcal{P}} \bigoplus_{z\in D} W_{(P,z,Q)} \simeq \Bbbk\mathcal{P} \otimes_{\Bbbk} W \otimes_{\Bbbk} \Bbbk\mathcal{P},$$

para todo $P,Q \in \mathcal{P}$, $z \in D$, donde

$$W_{(P,z,Q)} = \Bbbk\tau_P^{-1} \otimes_{\Bbbk} W_z \otimes_{\Bbbk} \Bbbk\tau_Q,$$

es un objeto en la categoría $\mathcal{C}(\mathcal{D},\widetilde{\omega},\mathcal{V},\widetilde{\psi})$ como sigue: todos los elementos de $W_{(P,z,Q)}$ son homogéneos de grado $\tau_P^{-1} z \tau_Q$. Si $v \in W_z$ y $g \in \mathcal{V}(R,P), h \in \mathcal{V}(Q,S)$ entonces las acciones a derecha y a izquierda están definidas por

$$g \rightharpoonup \tau_P^{-1} \otimes w \otimes \tau_Q = \tau_R^{-1} \otimes (\tau_R g \tau_P^{-1}) \cdot w \otimes \tau_Q \in W_{(R,z,Q)},$$
$$\tau_P^{-1} \otimes w \otimes \tau_Q \leftharpoonup h = \tau_P^{-1} \otimes w \cdot (\tau_Q h \tau_S^{-1}) \otimes \tau_S \in W_{(P,z,S)}.$$

Las fórmulas (9.3.1) y (9.3.4) implican que G está bien definido.

Afirmamos que los funtores F y G dan una equivalencia de categorías.

Como $\widetilde{\omega}|_D = \widehat{\omega}$ y $\widetilde{\psi}|_V = \widehat{\psi}$, tenemos que $F(G(W)) \simeq W$, para todo $W \in \mathcal{C}(D,\widehat{\omega},V,\widehat{\psi})$.

La prueba de la proposición se completará una vez que hemos probado la siguiente afirmación. Su prueba usa fuertemente el hecho de que el grupoide $\mathcal{V} \rightrightarrows \mathcal{P}$ sea conexo.

AFIRMACIÓN 9.3.1.1. *La función*

$$f : (\Bbbk\tau_P^{-1}\otimes_\Bbbk U\otimes_\Bbbk \Bbbk\tau_Q)\otimes_\Bbbk (\Bbbk\tau_Q^{-1}\otimes_\Bbbk W\otimes_\Bbbk \Bbbk\tau_S) \to \Bbbk\tau_P^{-1}\otimes_\Bbbk (U\overline{\otimes}W)\otimes_\Bbbk \Bbbk\tau_S,$$

determinada por

$$\tau_P^{-1}\otimes_\Bbbk u\otimes_\Bbbk \tau_Q\otimes_\Bbbk \tau_Q^{-1}\otimes_\Bbbk w\otimes_\Bbbk \tau_S \mapsto \tau_P^{-1}\otimes_\Bbbk (u\overline{\otimes}w)\otimes_\Bbbk \tau_S,$$

induce un isomorfismo natural $\zeta_{U,W} : G(U)\overline{\otimes}G(W) \to G(U\overline{\otimes}W)$. *Este isomorfismo da al funtor* G *estructura de funtor tensorial.*

PRUEBA DE LA AFIRMACIÓN. Primero notemos que f define una aplicación del espacio

$$(\Bbbk\mathcal{P}\otimes_\Bbbk U\otimes_\Bbbk \Bbbk\mathcal{P})\otimes(\Bbbk\mathcal{P}\otimes_\Bbbk W\otimes_\Bbbk \Bbbk\mathcal{P}) = \bigoplus_{P,Q,S} \Bbbk\tau_P^{-1}\otimes_\Bbbk U\otimes_\Bbbk \Bbbk\tau_Q\otimes_\Bbbk \Bbbk\tau_Q^{-1}\otimes_\Bbbk W\otimes_\Bbbk \Bbbk\tau_S$$

al espacio

$$G(U\overline{\otimes}W) = \bigoplus_{P,S} \Bbbk\tau_P^{-1}\otimes_\Bbbk (U\overline{\otimes}W)\otimes_\Bbbk \Bbbk\tau_S.$$

Sea ahora $g\in\mathcal{V}$ con $\mathfrak{s}(g)=Q$, $\mathfrak{e}(g)=Q'$. Luego se tiene que

$$\begin{aligned}
&f\left((\tau_P^{-1}\otimes_\Bbbk u\otimes_\Bbbk \tau_Q)\leftharpoonup g\otimes_\Bbbk \tau_{Q'}^{-1}\otimes_\Bbbk w\otimes_\Bbbk \tau_S\right)\\
&= f(\tau_P^{-1}\otimes_\Bbbk u.(\tau_Q g\tau_{Q'}^{-1})\otimes_\Bbbk \tau_{Q'}\otimes_\Bbbk \tau_{Q'}^{-1}\otimes_\Bbbk w\otimes_\Bbbk \tau_S)\\
&= \tau_P^{-1}\otimes_\Bbbk \overline{u.(\tau_Q g\tau_{Q'}^{-1})\otimes_\Bbbk w}\otimes_\Bbbk \tau_S\\
&= \widehat{\omega}(|u|,\tau_Q g\tau_{Q'}^{-1},|w|)\,\tau_P^{-1}\otimes_\Bbbk \overline{u\otimes_\Bbbk(\tau_Q g\tau_{Q'}^{-1}).w}\otimes_\Bbbk \tau_S\\
&= \widetilde{\omega}(\tau_P|u|\tau_Q^{-1},g,\tau_{Q'}|w|\tau_S^{-1})\, f\left(\tau_P^{-1}\otimes_\Bbbk u\otimes_\Bbbk \tau_Q\otimes_\Bbbk g\rightharpoonup(\tau_{Q'}^{-1}\otimes_\Bbbk w\otimes_\Bbbk \tau_S)\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto f induce una aplicación $\zeta_{U,W} : G(U)\overline{\otimes}G(W)\to G(U\overline{\otimes}W)$. Usando (9.2.12) y (9.3.1) se puede ver que $\zeta_{U,W}$ es una función en $\mathcal{C}(\mathcal{D},\widetilde{\omega},\mathcal{V},\widetilde{\psi})$.

Sea $\overline{f} : \Bbbk\mathcal{P}\otimes_\Bbbk U\otimes_\Bbbk W\otimes_\Bbbk \Bbbk\mathcal{P}\to G(U)\overline{\otimes}G(W)$ la aplicación determinada por

$$\overline{f}(\tau_P^{-1}\otimes_\Bbbk u\otimes_\Bbbk w\otimes_\Bbbk \tau_S) = \tau_P^{-1}\otimes_\Bbbk u\otimes_\Bbbk \tau_O\otimes\tau_O\otimes_\Bbbk w\otimes_\Bbbk \tau_S.$$

Recordemos que $\tau_O = \mathrm{id}_O$. Un cálculo similar al que hemos hecho antes muestra que $\overline{f}$ induce una aplicación $\xi_{U,W} : G(U\overline{\otimes}W)\to G(U)\overline{\otimes}G(W)$. Claramente $\zeta_{U,V}\xi_{U,V} = \mathrm{id}$. Por otro lado, para todo $P,Q,S\in\mathcal{P}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\tau_P^{-1}&\otimes_\Bbbk u\otimes_\Bbbk \tau_Q\overline{\otimes}\tau_Q^{-1}\otimes_\Bbbk w\otimes_\Bbbk \tau_S\\
&= \left(\tau_P^{-1}\otimes_\Bbbk u\otimes_\Bbbk \tau_O\right)\leftharpoonup \tau_Q\overline{\otimes}\tau_Q^{-1}\rightharpoonup(\tau_O\otimes_\Bbbk w\otimes_\Bbbk \tau_S)\\
&= \tau_P^{-1}\otimes_\Bbbk u\otimes_\Bbbk \tau_O\overline{\otimes}\tau_O\otimes_\Bbbk w\otimes_\Bbbk \tau_S,
\end{aligned}$$

pues $\widetilde{\omega}$ y $\widetilde{\psi}$ son triviales cuando alguno de los argumentos es un τ_Q. Esto implica que $\xi_{U,V}\zeta_{U,V} = \mathrm{id}$. Luego $\xi_{U,V}$ es la inversa de $\zeta_{U,W}$, luego ζ es un isomorfismo.

La definición de $\widetilde{\omega}$ también implica que ζ es compatible con las aplicaciones de asociatividad y de unidad. Esto finaliza la prueba de la afirmación. □

□

Corolario 9.3.2. *Existe una equivalencia tensorial* $\mathcal{C}(\mathcal{D}, \omega, \mathcal{V}) \simeq \mathcal{C}(D, \widehat{\omega}, V, \widehat{\psi})$. *En particular, la categoría* $\mathcal{C}(\mathcal{D}, \omega, \mathcal{V})$ *es de tipo grupo.*

Demostración. Sigue de (9.3.5) y la Proposición 9.3.1. □

9.4. La categoría $\mathrm{Rep}(\Bbbk_\tau^\sigma \mathcal{T})$

En esta sección buscamos una descripción combinatoria de $\mathrm{Rep}(\Bbbk_\tau^\sigma \mathcal{T})$ en términos del par de grupoides apareados $(\mathcal{H}, \mathcal{V})$ asociados al doble grupoide $\mathcal{T}$.

Definamos la categoría $\mathrm{Vect}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{H}}(\sigma, \tau)$ de la siguiente forma. Los objetos en $\mathrm{Vect}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{H}}(\sigma, \tau)$ son espacios vectoriales $\mathcal{H}$-graduados $M = \oplus_{x \in \mathcal{H}} M_x$, munidos de una acción a derecha de $\mathcal{V}$ por isomorfismos lineales

$$g : M_x \to M_{x \triangleleft g},$$

para todo $x \in \mathcal{H}$ tales que $r(x) = t(g)$.

Es decir, para todo elemento homogéneo $m \in M$ y para todo par de elementos componibles $g, h \in \mathcal{V}$ tales que $r(|m|) = t(g)$, y para cualquier $P \in \mathcal{P}$

$$m \leftharpoonup \mathrm{id}_P = \begin{cases} m & \text{if } P = r(|m|) \\ 0 & \text{de otro modo,} \end{cases} \tag{9.4.1}$$

$$(m \leftharpoonup g) \leftharpoonup h = \sigma\left(\overset{|m|}{\boxed{}}\, g\ ,\ \overset{|m|\triangleleft g}{\boxed{}}\, h \right)\ m \leftharpoonup (gh), \tag{9.4.2}$$

$$|m \leftharpoonup g| = |m| \triangleleft g. \tag{9.4.3}$$

El producto tensorial de dos objetos $M = \oplus_{x \in \mathcal{H}} M_x$, $N = \oplus_{y \in \mathcal{H}} N_y$ está dado por

$$(M \otimes N)_z = \oplus_{xy = z} M_x \otimes N_y,$$

con acción a derecha de $\mathcal{V}$ en elementos homogéneos dada por

$$(m \otimes n) \leftharpoonup g = \tau\left(\overset{|m|}{\boxed{}}\, |n| \triangleright g,\ \ \overset{|n|}{\boxed{}}\, g \right)\ \ m \leftharpoonup (|n| \triangleright g) \otimes\ n \leftharpoonup g. \tag{9.4.4}$$

El objeto unidad es $\Bbbk\mathcal{P}$ con $\mathcal{H}$-graduación determinada por $|P| = \mathrm{id}_P$, $P \in \mathcal{P}$, y acción a derecha de $\mathcal{V}$ dada por $P \leftharpoonup g = b(g)$, para todo $P \in \mathcal{P}$, $g \in \mathcal{V}$ tales que $t(g) = P$.

Proposición 9.4.1. *Sean* $(\mathcal{H}, \mathcal{V})$ *un par de grupoides apareados y* $(\sigma, \tau) \in \mathrm{Opext}(\Bbbk\mathcal{T})$. *Entonces existe una equivalencia tensorial natural*

$$\mathrm{Vect}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{H}}(\sigma, \tau) \cong \mathrm{Rep}(\Bbbk_\tau^\sigma \mathcal{T}^{op}).$$

Demostración. Probaremos que $\mathrm{Vect}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{H}}(\sigma, \tau)$ es equivalente tensorialmente a la categoría de $\Bbbk_\tau^\sigma \mathcal{T}$-módulos a derecha.

Sea M un $\Bbbk_\tau^\sigma\mathcal{T}$-módulo a derecha. La $\mathcal{H}$-graduación en M se define por

$$M_x := M \cdot \begin{array}{c} x \\ \boxed{\boxed{}} \\ x \end{array}, \tag{9.4.5}$$

para cualquier $x \in \mathcal{H}$. Si $x \in \mathcal{H}$, $h \in \mathcal{V}$ son elementos tales que $r(x) = t(h)$, entonces la acción de h en $m \in M_x$ está determinada por

$$m \leftharpoondown h := m \cdot \begin{array}{c} x \\ \boxed{} \end{array} h\,.$$

Es fácil probar que las ecuaciones (9.4.1), (9.4.2), (9.4.3) y (9.4.4) se verifican.

Recíprocamente, asumamos que $N = \oplus_{y\in\mathcal{H}} N_y$ es un objeto en $\operatorname{Vect}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{H}}(\sigma,\tau)$. Definamos

$$n \cdot \begin{array}{c} x \\ \boxed{} \end{array} g := \begin{cases} n \leftharpoondown g & \text{if } y = x \\ 0 & \text{de otro modo,} \end{cases} \qquad \forall n \in N_y, \quad \begin{array}{c} x \\ \boxed{} \end{array} g \quad \in \mathcal{B}.$$

Esto define una acción a derecha de $\Bbbk_\tau^\sigma\mathcal{T}$ y la acción en el producto tensorial está dada por la comultiplicación de $\Bbbk_\tau^\sigma\mathcal{T}$. Más aún, los funtores anteriores son funtores tensoriales y definen una equivalencia de categorías. Omitimos los detalles. $\square$

9.5. $\operatorname{Rep}(\Bbbk_\tau^\sigma\mathcal{T})$ como una categoría de bimódulos

El principal resultado de esta sección es que bajo ciertas hipótesis la categoría $\operatorname{Rep}(\Bbbk_\tau^\sigma\mathcal{T})$ es de tipo grupo. Para lograr esto usaremos una categoría auxiliar, la categoría $\mathcal{C}(\mathcal{D},\omega,\mathcal{V})$ introducida en la sección 9.2 de este capítulo.

A lo largo de esta sección $\mathcal{D} \rightrightarrows \mathcal{P}$ denotará el grupoide diagonal $\mathcal{D} = \mathcal{V} \bowtie \mathcal{H}$ asociado a un par de grupoides apareados $(\mathcal{V},\mathcal{H})$, como en la sección 7.5 del capítulo 7. Sin embargo no asumiremos que el grupoide $\mathcal{V} \rightrightarrows \mathcal{P}$ sea conexo.

Comenzaremos con el siguiente lema técnico. Para cualquier $P \in \mathcal{P}$ sea

$$\theta(P) = \#\{g \in \mathcal{V} : \mathfrak{s}(g) = P\} = \#\{g \in \mathcal{V} : \mathfrak{e}(g) = P\}.$$

Observar que $\theta(P)$ es constante en las componentes conexas de $\mathcal{P}$ respecto de $\mathcal{V}$.

Definamos los elementos $\Lambda_P, \widetilde{\Lambda}_P, \Lambda$ en el álgebra de grupoide $\Bbbk\mathcal{V}$ como sigue

$$\Lambda_P = \frac{1}{\theta(P)} \sum_{g\in\mathcal{V}:\mathfrak{s}(g)=P} g, \quad \widetilde{\Lambda}_P = \frac{1}{\theta(P)} \sum_{g\in\mathcal{V}:\mathfrak{e}(g)=P} g, \quad \Lambda = \sum_{P\in\mathcal{P}} \Lambda_P. \tag{9.5.1}$$

Notar también que $\Lambda = \sum_{P\in\mathcal{P}} \widetilde{\Lambda}_P$.

Lema 9.5.1. *Las siguientes identidades se verifican, para todo $h \in \mathcal{V}$:*

(i) $h\,\Lambda_P = \begin{cases} \Lambda_{\mathfrak{s}(h)} & si\ \mathfrak{e}(h) = P \\ 0 & de\ otra\ manera, \end{cases}$ *y* $\widetilde{\Lambda}_P\, h = \begin{cases} \widetilde{\Lambda}_{\mathfrak{e}(h)} & si\ \mathfrak{s}(h) = P \\ 0 & de\ otra\ manera, \end{cases}$

(ii) $h\,\Lambda = \mathrm{id}_{\mathfrak{s}(h)}\ \Lambda$,

(iii) $\Lambda\, h = \Lambda\, \mathrm{id}_{\mathfrak{e}(h)}$.

Demostración. Es inmediata. $\square$

En otras palabras Λ es una integral a derecha y a izquierda para el grupoide cuántico $\Bbbk\mathcal{V}$.

Para cualquier $\Bbbk\mathcal{V}$-módulo a izquierda M denotamos

$$^{\mathcal{V}}M := \{m \in M : g \rightharpoonup m = \mathrm{id}_{\mathfrak{s}(g)} \rightharpoonup m \text{ para todo } g \in \mathcal{V}\}.$$

Observación 9.5.2. Notar que si $M \in \mathcal{C}(\mathcal{D}, \omega, \mathcal{V})$, tenemos que $^{\mathcal{V}}M = \Lambda \rightharpoonup M$. De hecho $\Lambda \rightharpoonup M \subseteq^{\mathcal{V}} M$ sigue del Lema 9.5.1 (ii), y si $m \in {}^{\mathcal{V}}M$ entonces

$$\Lambda \rightharpoonup m = \sum_{P\in\mathcal{P}} \frac{1}{\theta(P)} \sum_{\mathfrak{s}(g)=P} g \rightharpoonup m = \sum_{P\in\mathcal{P}} \mathrm{id}_P \rightharpoonup m = m.$$

Ahora enunciamos el resultado principal de esta sección.

Teorema 9.5.3. *Sea* $(\sigma,\tau) \in \mathrm{Opext}(\Bbbk\mathcal{T})$ *y sea* $\omega = \omega(\sigma,\tau)$ *el 3-cociclo definido por* (9.1.3). *Entonces, las categorías* $\mathrm{Rep}(\Bbbk_\tau^\sigma\mathcal{T})$ *and* $\mathcal{C}(\mathcal{D}, \omega, \mathcal{V})$ *son tensorialmente equivalentes.*

Demostración. Sean $p : \mathcal{D} \to \mathcal{H}$, $p(g,x) = x$ y $\pi : \mathcal{D} \to \mathcal{V}$, $\pi(g,x) = g$. Definamos los funtores $\Phi : \mathrm{Vect}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{H}}(\sigma,\tau) \to \mathcal{C}(\mathcal{D}, \omega, \mathcal{V})$, y $\Psi : \mathcal{C}(\mathcal{D}, \omega, \mathcal{V}) \to \mathrm{Vect}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{H}}(\sigma,\tau)$ por: $\Phi(W) := \Bbbk\mathcal{V} \otimes W$, donde el producto tensorial es el producto tensorial en $\mathcal{C}(\mathcal{D}, \omega)$.

Las acciones de $\mathcal{V}$ y la $\mathcal{D}$-graduación están determinadas por

$$g \rightharpoonup (h \otimes w) := gh \otimes w, \;\; (h \otimes w) \leftharpoonup g := h(|w|\triangleright g) \otimes w \leftharpoonup g,$$

$$|h \otimes w| := h|w|,$$

para cualquier elemento homogéneo $w \in W$ y $g, h \in \mathcal{V}$ apropiadamente componibles.

Dado $M \in \mathcal{C}(\mathcal{D}, \omega, \mathcal{V})$ definamos $\Psi(M) :=^{\mathcal{V}} M$. LA $\mathcal{H}$-graduación en $\Psi(M)$ está dada por

$$||m|| := p(|m|), \tag{9.5.2}$$

y la acción a derecha de $\mathcal{V}$ es la acción en M como objeto en $\mathcal{C}(\mathcal{D}, \omega, \mathcal{V})$. Probemos que estos funtores están bien definidos. Sea $W \in \mathrm{Vect}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{H}}(\sigma,\tau)$. Las identidades (9.2.4), (9.2.5), (9.2.7), (9.2.9) y (9.2.10) son fáciles de chequear. Sean $w \in W$, $h, g, f \in \mathcal{V}$ apropiadamente componibles, entonces

$$\begin{aligned}((h\otimes w) \leftharpoonup g) \leftharpoonup f &= h|w|\triangleright g\otimes (w \leftharpoonup g) \leftharpoonup f \\ &= h(|w|\triangleright g)\,(|w|\triangleleft g)\triangleright f\otimes (w \leftharpoonup g) \leftharpoonup f \\ &= \omega(|w|, g, f)\;\; h(|w|\triangleright gf)\otimes w \leftharpoonup gf,\end{aligned}$$

la última igualdad por (9.4.2) y (9.1.6). Esto prueba (9.2.8), por lo tanto Φ está bien definido.

Afirmamos que los funtores Φ, Ψ dan una equivalencia de categorías.

Sea Λ el elemento definido por (9.5.1). Definamos la aplicación

$$\gamma_M : M \to \Phi(\Psi(M)),\ \ \gamma_M(m) = \pi(|m|)\otimes \Lambda \rightharpoonup m$$

para cualquier elemento homogéneo $m \in M$.

La función γ_M es un homomorfismo de $\Bbbk\mathcal{V}$-bimódulos: de hecho, si $g \in \mathcal{V}$ y $m \in M$ es un elemento homogéneo de grado $(h,x) \in \mathcal{D}$ entonces

$$\begin{aligned}\gamma_M(g \rightharpoonup m) &= \pi(g|m|)\otimes \Lambda \rightharpoonup (g \rightharpoonup m) = g\pi(|m|)\otimes \Lambda\, g \rightharpoonup m\\ &= g\pi(|m|)\otimes \Lambda\ \mathrm{id}_{\mathfrak{e}(g)} \rightharpoonup m = g \rightharpoonup \gamma_M(m).\end{aligned}$$

La tercera igualdad por el Lema 9.5.1 (iii). Por otro lado

$$\begin{aligned}\gamma_M(m \leftharpoonup g) &= \pi(|m|g)\otimes \Lambda \rightharpoonup (m \leftharpoonup g)\\ &= h(|m|\triangleright g)\otimes (\Lambda \rightharpoonup m) \leftharpoonup g = \gamma_M(m) \leftharpoonup g.\end{aligned}$$

La inversa de γ_M está dada por $\overline{\gamma}_M(g\otimes\Lambda \rightharpoonup m) = gh^{-1} \rightharpoonup m$, si $m \in M$ es homogéneo de grado (h,x).

Afirmación 9.5.3.1. *La aplicación $\overline{\gamma}_M$ está bien definida.*

Demostración. Primero notemos que si $m \in M$ es un elemento homogéneo de grado (h,x) entonces la componente homogénea de grado (id,x) de $\Lambda_{\mathfrak{s}(h)} \rightharpoonup m$ es $h^{-1} \rightharpoonup m$.

Ahora, sean $m,n \in M$ elementos homogéneos de grado (h,x) y (h',x') respectivamente, tales que $\Lambda \rightharpoonup m = \Lambda \rightharpoonup n$. La ecuación (9.2.7) implica que $\Lambda_{\mathfrak{s}(h)} \rightharpoonup m = \Lambda_{\mathfrak{s}(h')} \rightharpoonup n$. Cualquier componente homogénea de $\Lambda_{\mathfrak{s}(h)} \rightharpoonup m$, respectivamente de $\Lambda_{\mathfrak{s}(h')} \rightharpoonup n$, es de grado (gh,x), resp. (gh',x'), para algún $g \in \mathcal{V}$. Esto implica que $x = x'$. Por la observación previa $h^{-1} \rightharpoonup m = h'^{-1} \rightharpoonup n$. $\square$

Si $W \in \mathrm{Vect}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{H}}(\sigma,\tau)$ entonces $\Psi(\Phi(W)) =^{\mathcal{V}} (\Bbbk\mathcal{V}\otimes W) \cong W$, el isomorfismo $\phi_W : W \longrightarrow {}^{\mathcal{V}}(\Bbbk\mathcal{V} \otimes W)$, está dado por $\phi(w) := \Lambda\ \mathrm{id}_{\mathfrak{e}(|w|)} \otimes w$, para cualquier elemento homogéneo $w \in W$.

Finalmente, probaremos que Φ es un funtor tensorial. Sean $W,U \in \mathrm{Vect}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{H}}(\sigma,\tau)$ y definamos $\xi_{WU} : \Phi(W \otimes U) \to \Phi(W)\,\overline{\otimes}\,\Phi(U)$ de la forma

$$\xi_{WU}(g \otimes (w \otimes u)) := (g \otimes w)\overline{\otimes}(\mathfrak{e}(|w|) \otimes u),$$

para una elección apropiada de $g \in \mathcal{V}$, y elementos homogéneos $w \in W$, $u \in U$.

La aplicación natural ξ_{WU} es un isomorfismo, su inversa $\overline{\xi}_{WU} : \Phi(W)\,\overline{\otimes}\,\Phi(U) \to \Phi(W \otimes U)$ está dada por

$$\overline{\xi}_{WU}((h \otimes z) \otimes (f \otimes y)) = h(|z|\triangleright f) \otimes z \leftharpoonup f \otimes y.$$

Probaremos que ξ_{WU} es un morfismo de $\mathcal{V}$-bimódulos.

Sean $h, g \in \mathcal{V}$, $w \in W$, $U \in U$. Para probar la $\mathcal{V}$-linealidad a derecha calculamos

$$\begin{aligned}
&\xi_{WU}((g \otimes (w \otimes u)) \leftharpoondown h) = \xi_{WU}(g(|w||u|\triangleright h) \otimes (w \otimes u) \leftharpoondown h) \\
&= \tau(\square^{|w|}_{|u|\triangleright h}, \square^{|u|}_{h})\ \xi_{WU}(g(|w||u|\triangleright h) \otimes (w \leftharpoondown (|u|\triangleright h) \otimes u \leftharpoondown h)) \\
&= \tau(\square^{|w|}_{|u|\triangleright h}, \square^{|u|}_{h})\ (g(|w||u|\triangleright h) \otimes w \leftharpoondown (|u|\triangleright h))\overline{\otimes}\, (\mathfrak{s}(|u|) \otimes u \leftharpoondown h) \\
&= \tau(\square^{|w|}_{|u|\triangleright h}, \square^{|u|}_{h})\ ((g \otimes w) \leftharpoondown (|u|\triangleright h))\overline{\otimes}\, (\mathfrak{s}(|u|) \otimes u \leftharpoondown h) \\
&= \tau(\square^{|w|}_{|u|\triangleright h}, \square^{|u|}_{h})\ (g \otimes w)\overline{\otimes}\, (|u|\triangleright h \otimes u \leftharpoondown h) \\
&= \omega(g|w|, |u|, h)\ (g \otimes w)\overline{\otimes}\, (|u|\triangleright h \otimes u \leftharpoondown h) \\
&= \xi_{WU}(g \otimes (w \otimes u)) \leftharpoondown h.
\end{aligned}$$

La quinta igualdad por (9.2.11), la sexta sigue de la definición de ω, y la última sigue de la ecuación (9.2.12). La $\mathcal{V}$-linealidad a izquierda se prueba de manera similar.

Afirmación 9.5.3.2. *Para todos $U, V, W \in \mathrm{Vect}^{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}}(\sigma, \tau)$, tenemos que*

$$a_{\Phi(U),\Phi(V),\Phi(W)}\,(\xi_{U,V} \otimes \mathrm{id})\,\xi_{U\otimes V,W} = (\mathrm{id} \otimes \xi_{V,W})\,\xi_{U,V\otimes W}\,\Phi(a_{U,V,W}).$$

Demostración. Sean $U, V, W \in \mathrm{Vect}^{\mathcal{H}}_{\mathcal{V}}(\sigma, \tau)$, $g \in \mathcal{V}$ y sean $u \in U, v \in V, w \in W$ elementos homogéneos de grados componibles. El lado izquierdo de esta ecuación evaluado en $g \otimes u \otimes v \otimes w$ da

$$\begin{aligned}
a\,(\xi_{U,V} \otimes \mathrm{id})(g \otimes (u \otimes v)\overline{\otimes}\,\mathfrak{s}(|w|) \otimes w) &= a((g \otimes u \overline{\otimes}\,\mathfrak{s}(|v|) \otimes v)\overline{\otimes}\,\mathfrak{s}(|w|) \otimes w) \\
&= \omega(g|u|, |v|, |w|)\ g \otimes u \overline{\otimes}\,(\mathfrak{s}(|v|) \otimes v \overline{\otimes}\,\mathfrak{s}(|w|) \otimes w) \\
&= g \otimes u \overline{\otimes}\,(\mathfrak{s}(|v|) \otimes v \overline{\otimes}\,\mathfrak{s}(|w|) \otimes w).
\end{aligned}$$

La última igualdad por (9.1.5). El lado derecho de (9.5.3.2) evaluado en $g \otimes u \otimes v \otimes w$ da

$$\begin{aligned}
(\mathrm{id} \otimes \xi_{V,W})\xi_{U,V\otimes W}(g \otimes u \otimes (v \otimes w)) &= (\mathrm{id} \otimes \xi_{V,W})(g \otimes u \overline{\otimes}\,\mathfrak{s}(|v|) \otimes (v \otimes w)) \\
&= g \otimes u \overline{\otimes}\,(\mathfrak{s}(|v|) \otimes v \overline{\otimes}\,\mathfrak{s}(|w|) \otimes w).
\end{aligned}$$

$\square$

Lo que concluye la prueba del teorema. $\square$

La siguiente observación es [**N1**, Remark 3.2]. Por completitud incluimos la demostración dada en *loc. cit.*

Observación 9.5.4. Si ω es un 3-cociclo para el grupo D y $\psi : V \times V \to \Bbbk^\times$ es una 2-cocadena para V tal que $\omega|_{V\times V\times V} = d\psi$, entonces las categorías $\mathcal{C}(D, \omega, V, \psi)$ y $\mathcal{C}(D, \omega', V, 1)$ son tensorialmente equivalentes, para algún 3-cociclo ω' en D cohomólogo a ω.

Demostración. Sea Q una clase de representantes de coclases a izquierda de V en D tal que $1 \in Q$. Luego, todo elemento $z \in D$ se escribe de manera única $z = vq$ con $v \in V$ y $q \in Q$. Definimos la 2-cocadena $\alpha : D \times D \to \Bbbk^{\times}$ por

$$\alpha(vq, bp) = \psi^{-1}(v, b),$$

para todo $v, b \in V, p, q \in Q$. Ponemos $\omega' = \omega\, d\alpha$ entonces la observación 9.2.2 finaliza la demostración.

$\square$

Ahora establecemos el principal resultado de esta sección.

Teorema 9.5.5. *Supongamos que* $\operatorname{Rep}(\Bbbk^{\sigma}_{\tau}\mathcal{T})$ *es una categoría de fusión. Sea* $\mathcal{D}$ *el grupoide diagonal asociado a* $\mathcal{T}$*, y sea* $\omega = \omega(\sigma, \tau) \in H^3(\mathcal{D}, \Bbbk^{\times})$ *el 3-cociclo dado por* (9.1.3)*. Entonces hay una equivalencia tensorial*

$$\operatorname{Rep}(\Bbbk^{\sigma}_{\tau}\mathcal{T}) \simeq \mathcal{C}(D, \overline{\omega}, V),$$

donde $\overline{\omega}$ *es un 3-cociclo normalizado en* D *cohomólogo a la restricción* $\widehat{\omega}$*.*

En particular, la categoría $\operatorname{Rep}(\Bbbk^{\sigma}_{\tau}\mathcal{T})$ *es de tipo grupo.* $\square$

Demostración. Por [**AN1**, Proposition 3.11], las hipótesis implican que $\mathcal{V} \rightrightarrows \mathcal{P}$ es conexo. Combinando el Corolario 9.3.2 y el Teorema 9.5.3, obtenemos equivalencias tensoriales

$$\operatorname{Rep}(\Bbbk^{\sigma}_{\tau}\mathcal{T}) \simeq \mathcal{C}(\mathcal{D}, \omega, \mathcal{V}) \simeq \mathcal{C}(D, \widehat{\omega}, V, \widehat{\psi}),$$

donde $\psi \in H^2(\mathcal{V}, \Bbbk^{\times})$ está determinado por (9.3.2), y $\widehat{\psi}$ es el 2-cociclo en V obtenido por restricción. Por la observación 9.5.4, existe un 3-cociclo $\overline{\omega}$ en D que es cohomólogo a $\widehat{\omega}$ y tal que $\mathcal{C}(D, \widehat{\omega}, V, \widehat{\psi}) \simeq \mathcal{C}(D, \overline{\omega}, V)$. Esto finaliza la prueba del teorema. $\square$

Se sigue que $\operatorname{Rep}(\Bbbk^{\sigma}_{\tau}\mathcal{T})$ es la categoría de representaciones de una cierta cuasi-álgebra de Hopf semisimple única salvo equivalencia de calibre.

Recordemos que uno de los resultados principales de [**O1**] es la clasificación de las categorías módulo semisimples indescomponibles sobre las categorías de tipo grupo. Este resultado en conjunto con el Teorema 9.5.5 permiten clasificar las categorías módulo sobre $\operatorname{Rep}(\Bbbk^{\sigma}_{\tau}\mathcal{T})$.

Otro resultado importante en [**O1**] es la clasificación de las categorías módulo sobre el doble de Drinfeld, siendo las herramientas fundamentales para tal clasificación las categorías duales, y el centro de una categoría tensorial. Como el Doble de Drinfeld es un caso especial de las álgebras $\Bbbk^{\sigma}_{\tau}\mathcal{T}$, el Teorema 9.5.5 nos da una forma diferente de obtener los resultados de Ostrik.

CAPíTULO 10

Grupoides trenzados

En el capítulo 8 se mostró como los grupoides apareados pueden ser descriptos en términos de grupos y relaciones. La idea principal de este capítulo es usar dicha descripción para encontrar ejemplos y describir la estructura de los grupoides trenzados.

Por el resto de esta sección fijemos un grupoide conexo $\mathcal{D} \rightrightarrows \mathcal{P}$ y un punto $O \in \mathcal{P}$. Escribamos $D = \mathcal{D}(O)$. Para cada $P \in \mathcal{P}$ fijamos $\tau_P \in \mathcal{D}(O, P)$.

En lo siguiente estudiaremos factorizaciones $\mathcal{D} = \mathcal{V}\mathcal{H}$ donde $\mathcal{V}$ y $\mathcal{H}$ son subgrupoides amplios conexos de $\mathcal{D}$. En tal caso asumiremos que $\tau_P \in \mathcal{V}(O, P)$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $\tau_O = 1$. Denotaremos $V = \mathcal{V}(O), H = \mathcal{H}(O)$.

El siguiente Lemma será útil para describir grupoides trenzados en términos de de la tería de grupos.

Lema 10.0.6. *Bajo las consideraciones anteriores existe una biyección entre los siguientes datos.*

i) *Factorizaciones exactas $\mathcal{D} = \mathcal{V}\mathcal{H}$, donde $\mathcal{V}, \mathcal{H}$ son subgrupoides conexos amplios de $\mathcal{D}$,*
ii) *pares de grupoides apareados $(\mathcal{V}, \mathcal{H}, \rightharpoonup, \leftharpoonup)$ con $\mathcal{V}$, $\mathcal{H}$ conexos, tales que $\mathcal{D} \cong \mathcal{V} \bowtie \mathcal{H}$ y*
iii) *colecciones (V, H, γ) donde G, H son subgrupos de D, $\gamma : \mathcal{P} \to D$ es una función (necesariamente) inyectiva, y se verifica que*

$$D = \coprod_{P \in \mathcal{P}} V\gamma_P H, \tag{10.0.3}$$

$$V \bigcap zHz^{-1} = \{1\} \tag{10.0.4}$$

para todo $z \in D$.

Diremos que la colección (D, V, H, γ) que satisface las condiciones del Lema 10.0.6 (iii) está asociada al par de grupoides apareados $(\mathcal{V}, \mathcal{H}, \rightharpoonup, \leftharpoonup)$ o, equivalentemente, a la factorización exacta $\mathcal{D} = \mathcal{V}\mathcal{H}$.

Demostración. Es un caso particular del Teorema 8.0.6 cuando ambos grupoides $\mathcal{V}$ y $\mathcal{H}$ son conexos. □

Observación 10.0.7. Observar que siempre se puede asumir que $\gamma_O = 1$.

Observación 10.0.8. Bajo las condiciones del Lema 10.0.6 (iii) existe una biyección $\mathcal{P} \cong V\backslash D/H$ y vía esta identificación el mapa γ es una sección de la proyección canónica. Las condiciones (10.0.3), (10.0.4) implican que $\mid D \mid = \mid V \mid\mid H \mid \#\mathcal{P}$.

La siguiente observación básica será utilizada repetidas veces.

LEMA 10.0.9. *Asumamos que (D, V, H, γ) es una colección que satisface las condiciones del Lema 10.0.6 (iii), entonces para cualquier $z \in D$ existen $g \in V, x \in H$ y $P \in \mathcal{P}$ unívocamente determinados tales que $z = g\gamma_P x$.*

DEMOSTRACIÓN. La existencia es clara. Si $g^{'}\gamma_Q x^{'} = g\gamma_P x$, entonces $P = Q$ y $g^{-1}g^{'} = \gamma_P x x^{'-1}\gamma_P^{-1} \in V \bigcap \gamma_P H \gamma_P^{-1}$, y por lo tanto $g = g^{'}$ y $x = x^{'}$. □

Asumamos que (D, V, H, γ) es asociada al par de grupoides apareados $(\mathcal{V}, \mathcal{H}, \rightharpoonup, \leftharpoonup)$. Gracias al Lema 10.0.9 introduciremos una familia de mapas. En la siguiente sección estos mapas serán usados para escribir condiciones para que un grupoide sea trenzado. Concretamente, estos mapas son

$$\triangleright : H \times V \to V,$$
$$\triangleleft : H \times V \to H,$$
$$(\ ;\ ) : H \times V \to \mathcal{P},$$

definidos por

$$xg = (x \triangleright g)\gamma_{(x;g)}(x \triangleleft g), \tag{10.0.5}$$

for all $x \in H, g \in V$. Definamos también los mapas

$$\lambda_V : \mathcal{P} \times V \times \mathcal{P} \to V, \ \ \rho_V : \mathcal{P} \times V \times \mathcal{P} \to H,$$
$$(\ ;\ \ ;\ ) : \mathcal{P} \times V \times \mathcal{P} \to \mathcal{P},$$

y

$$\lambda_H : \mathcal{P} \times H \times \mathcal{P} \to V, \ \ \rho_H : \mathcal{P} \times H \times \mathcal{P} \to H,$$
$$<;\ \ ;>: \mathcal{P} \times H \times \mathcal{P} \to \mathcal{P},$$

determinados por

$$\gamma_P g \gamma_Q = \lambda_V(P, g, Q)\gamma_{(P;g;Q)}\rho_V(P, g, Q), \tag{10.0.6}$$

$$\gamma_P x \gamma_Q = \lambda_H(P, x, Q)\gamma_{<P;x;Q>}\rho_H(P, x, Q), \tag{10.0.7}$$

para todo $P, Q \in \mathcal{P}$, $g \in V, x \in H$.

En lo que sigue estudiaremos factorizaciones exactas $\mathcal{D} = \mathcal{V}\mathcal{H}$ con $\mathcal{V} \cong \mathcal{H}$. En tal caso los grupos V, H son isomorfos.

Si (D, V, H, γ) es asociado a la factorización exacta $\mathcal{D} = \mathcal{V}\mathcal{H}$, y $\phi : H \to V$ es un isomorfismo denotaremos también por ϕ el isomorfismo $\phi : \mathcal{H} \to \mathcal{V}$ dado por

$$\phi(\tau_P^{-1}\gamma_P g \gamma_Q^{-1}\tau_Q) = \tau_P^{-1}\phi(g)\tau_Q.$$

Dado un isomorfismo ϕ, definimos el mapa $m : \mathcal{D} \to \mathcal{V}$ como la composición

$$\mathcal{D} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{V} \bowtie \mathcal{H} \xrightarrow{\mathrm{id} \times \phi} \mathcal{V}\ {}_{\mathfrak{e}}\times_{\mathfrak{s}} \mathcal{V} \xrightarrow{\mu} \mathcal{V}, \tag{10.0.8}$$

donde $\mu : \mathcal{V}\ {}_{\mathfrak{e}}\times_{\mathfrak{s}} \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ es la composición.

Usando el Lema 10.0.6 el mapa $m : \mathcal{D} \to \mathcal{V}$ puede ser escrito explícitamente como sigue.

LEMA 10.0.10. *Sea $\alpha \in \mathcal{D}(P,Q)$, si $\alpha = \tau_P^{-1} g \gamma_R x \tau_Q$ para algún $g \in V, x \in H, R \in \mathcal{P}$ entonces*

$$m(\alpha) = \tau_P^{-1} g \lambda_H(R,x,Q)\phi(\rho_H(R,x,Q))\tau_Q.$$

En particular si $\alpha \in \mathcal{D}(O,O)$, $\alpha = g\gamma_R x$ entonces $m(\alpha) = g\phi(x)$.

DEMOSTRACIÓN. Si tenemos una descomposición $\alpha = \beta_1\beta_2$ donde $\beta_1 \in \mathcal{V}, \beta_2 \in \mathcal{H}$ entonces, por definición, $m(\alpha) = \beta_1\phi(\beta_2)$. Notar que si $\alpha = \tau_P^{-1} g\gamma_R x\tau_Q$ entonces

$$\begin{aligned}\alpha &= \tau_P^{-1} g\gamma_R x\gamma_Q\gamma_Q^{-1}\tau_Q = \tau_P^{-1} g\lambda_H(R,x,Q)\gamma_{<R;x;Q>}\rho_H(R,x,Q)\gamma_Q^{-1}\tau_Q\\ &= \tau_P^{-1} g\lambda_H(R,x,Q)\tau_{<R;x;Q>}\tau_{<R;x;Q>}^{-1}\gamma_{<R;x;Q>}\rho_H(R,x,Q)\gamma_Q^{-1}\tau_Q\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\tau_P^{-1} g\rho_H(R,x,Q)\tau_{<R;x;Q>} &\in \mathcal{V}(P, <R;x;Q>),\\ \tau_{<R;x;Q>}^{-1}\gamma_{<R;x;Q>}\lambda_H(R,x,Q)\gamma_Q^{-1}\tau_Q &\in \mathcal{H}(<R;x;Q>, Q).\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}m(\alpha) &= \tau_P^{-1} g\lambda_H(R,x,Q)\tau_{<R;x;Q>}\phi(\tau_{<R;x;Q>}^{-1}\gamma_{<R;x;Q>}\rho_H(R,x,Q)\gamma_Q^{-1}\tau_Q)\\ &= \tau_P^{-1} g\lambda_H(R,x,Q)\phi(\rho_H(R,x,Q))\tau_Q.\end{aligned}$$

Como para todo $R \in \mathcal{P}$, $x \in H$ $\lambda_H(R,x,O) = 1$, y $\rho_H(R,x,O) = x$ la segunda afirmación sigue de la primera. $\square$

DEFINICIÓN 10.0.11 ([**A**]). Un *grupoide trenzado* es una colección $(\mathcal{V}, \rightharpoonup, \leftharpoonup)$ donde $\mathcal{V} \rightrightarrows \mathcal{P}$ es un grupoide, $(\mathcal{V}, \mathcal{V}, \rightharpoonup, \leftharpoonup)$ son grupoides apareados y para cada par de elementos $(f,g) \in \mathcal{V}\,{}_{\mathfrak{e}}\!\times_{\mathfrak{s}} \mathcal{V}$ la siguiente ecuación se verifica:

$$fg = (f \rightharpoonup g)(f \leftharpoonup g). \tag{10.0.9}$$

Si $(\mathcal{V}, \rightharpoonup, \leftharpoonup)$ es un grupoide trenzado el mapa $c : \mathcal{V}\,{}_{\mathfrak{e}}\!\times_{\mathfrak{s}} \mathcal{V} \to \mathcal{V}\,{}_{\mathfrak{e}}\!\times_{\mathfrak{s}} \mathcal{V}$ definido por

$$c(\alpha,\beta) = (\alpha \rightharpoonup \beta, \alpha \leftharpoonup \beta) \tag{10.0.10}$$

satisface la ecuación de trenzas.

Sea $(\mathcal{V}, \mathcal{H}, \rightharpoonup, \leftharpoonup)$ un par de grupoides apareados, y $\phi : \mathcal{H} \to \mathcal{V}$ un isomorfismo de grupoides, recordemos el grupoide diagonal $\mathcal{D}$ y el mapa $m : \mathcal{D} \to \mathcal{V}$ como antes.

Asociado a este par de grupoides apareados existe un nuevo par de acciones (que denotaremos con el mismo símbolo) $\rightharpoonup, \leftharpoonup : \mathcal{V}\,{}_{\mathfrak{e}}\!\times_{\mathfrak{s}} \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, y que están definidas por

$$g \rightharpoonup h := \phi^{-1}(g) \rightharpoonup h, \quad g \leftharpoonup h := \phi\left(\phi^{-1}(g) \leftharpoonup h\right),$$

para todo par de elementos componibles $g, h \in G$. Como ϕ es un morfismo de grupoides, la colección $(\mathcal{V}, \mathcal{V}, \rightharpoonup, \leftharpoonup)$ es un par de grupoides apareados.

LEMA 10.0.12. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

i) $(\mathcal{V}, \rightharpoonup, \leftharpoonup)$ *es un grupoide trenzado,*
ii) *el mapa $m : \mathcal{D} \to \mathcal{V}$ es un morfismo de grupoides.*

Demostración. Denotemos por $\mu : \mathcal{V}\,{}_{\mathfrak{e}}\times_{\mathfrak{s}} \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ la composición. Como $m = \zeta(\mathrm{id}_{\mathcal{V}} \otimes \phi)\mu$, donde $\zeta : \mathcal{D} \xrightarrow{\cong} \mathcal{V} \bowtie \mathcal{H}$, y $(\mathrm{id}_{\mathcal{V}} \otimes \phi)$ es un morfismo de grupoides, entonces m es un morfismo de grupoides si y sólo si μ es un morfismo de grupoides. Entonces la demostración sigue de [**A**, Lemma 2.9], donde está probado que $(\mathcal{V}, \rightharpoonup, \leftharpoonup)$ es trenzado si y sólo si la composición μ es un morfismo de grupoides. $\square$

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que el grupoide $\mathcal{V}$ es conexo. Si $\mathcal{V}$ no es conexo entonces $\mathcal{V}$ es isomorfo a la union disjunta de grupoides conexos

$$\mathcal{V} \cong \coprod_{S \in \mathcal{P}/\approx} \mathcal{V}_S.$$

Lema 10.0.13. *Con la notación anterior $\mathcal{V}$ es trenzado si y sólo si para cualquier $S \in \mathcal{P}/\approx$ $\mathcal{V}_S$ es un grupoide trenzado.*

Demostración. La suficiencia es clara. Asumamos que $\mathcal{V}$ es trenzado. Necesitamos mostrar solamente que, para cualquier $S \in \mathcal{P}/\approx$, $\mathcal{V}_S$ es estable bajo las acciones $\rightharpoonup, \leftharpoonup$.

Sean $f, g \in \mathcal{V}_S$. Usando (7.1.2), (7.1.3) sabemos que

$$\mathfrak{s}(f \rightharpoonup g) = \mathfrak{s}(f), \quad \mathfrak{e}(f \leftharpoonup g) = \mathfrak{e}(g).$$

Como $\mathfrak{s}(f), \mathfrak{e}(g) \in S$ luego $f \rightharpoonup g, f \leftharpoonup g \in \mathcal{V}_S$. $\square$

Definición 10.0.14. Diremos que (D, V, H, γ) es un *dato de grupoide trenzado* si el grupoide conexo asociado $\mathcal{V}$ es trenzado, o, equivalentemente si el mapa $m : \mathcal{D} \to \mathcal{V}$ es un morfismo de grupoides.

Observación 10.0.15. El par de grupoides apareados $(\mathcal{V}, \mathcal{V}, \rightharpoonup, \leftharpoonup)$ y la aplicación $m : \mathcal{D} \to \mathcal{V}$ ambos dependen de la elección del isomorfismo ϕ. A veces el isomorfismo ϕ será claro del contexto. Denotaremos (D, V, H, γ, ϕ) cuando se necesite énfasis especial.

El siguiente resultado da condiciones necesarias y suficientes sobre la colección (D, V, H, γ, ϕ) para que sea un dato de grupoide trenzado.

Teorema 10.0.16. *La colección (D, V, H, γ, ϕ) es un dato de grupoide trenzado si y sólo si*

$$g = \lambda_V(P, g, Q)\, \phi(\rho_V(P, g, Q)), \tag{10.0.11}$$

$$\phi(x) = \lambda_H(P, x, Q)\, \phi(\rho_H(P, x, Q)), \tag{10.0.12}$$

$$\phi(x)g = (x \triangleright g)\, \phi(x \triangleleft g), \tag{10.0.13}$$

para todo $P, Q \in \mathcal{P}$, $g \in V$, $x \in H$.

Demostración. Asumamos que (D, V, H, γ) es un dato de grupoide trenzado. Escribamos $\alpha = \gamma_P g \gamma_Q = \lambda_V(P, g, Q)\ \gamma_{(P;g;Q)}\rho_V(P, g, Q)$, entonces usando el Lema 10.0.10 tenemos que $m(\alpha) = \lambda_V(P, g, Q)\ \phi(\rho_V(P, g, Q))$. Ya que m es un morfismo de grupoides entonces $m(\alpha) = m(\gamma_P)m(g)\ m(\gamma_Q) = g$, luego hemos demostrado la ecuación (10.0.11). Las ecuaciones (10.0.12), (10.0.13) se prueban de manera similar usando (10.0.5), (10.0.7).

Supongamos ahora que las ecuaciones (10.0.11), (10.0.12), (10.0.13) se verifican. Sean $\alpha,\ \beta \in \mathcal{D}$ dos elementos componibles, entonces $\alpha = \tau_P^{-1} g\gamma_R x\tau_Q$, $\beta = \tau_Q^{-1} h\gamma_S y\tau_M$ para algunos $g, h \in V$, $x, y \in H$ y $P, Q, M, R, S \in \mathcal{P}$. Probaremos que $m(\alpha\beta) = m(\alpha)m(\beta)$.

Lema 10.0.10 junto a la ecuación (10.0.12) implican que

$$m(\alpha) = \tau_P^{-1} g\phi(x)\tau_Q, \quad m(\beta) = \tau_Q^{-1} h\phi(y)\tau_M.$$

Calculemos $\alpha\beta$. Definamos los elementos $X, Y \in \mathcal{P}$ por

$$X := (R; (x \triangleright h); (x; h)), \quad Y :=< X; \rho_V(R, (x \triangleright h), (x; h))(x \triangleleft h); S >,$$

entonces

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= \tau_P^{-1} g\gamma_R xh\gamma_S y\tau_M = \tau_P^{-1} g\gamma_R(x \triangleright h)\gamma_{(x;h)}(x \triangleleft h)\gamma_S y\tau_M \\ &= \tau_P^{-1} g\lambda_V(R, (x \triangleright h), (x; h))\gamma_X\rho_V(R, (x \triangleright h), (x; h))(x \triangleleft h)\gamma_S y\tau_M \\ &= \tau_P^{-1} g\lambda_V(R, (x \triangleright h), (x; h))\lambda_H(X, \rho_V(R, (x \triangleright h), (x; h))(x \triangleleft h), S)\gamma_Y \\ &\rho_H(X, \rho_V(R, (x \triangleright h), (x; h))(x \triangleleft h), S)y\tau_M.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}m(\alpha\beta) &= \tau_P^{-1} g\lambda_V(R, (x \triangleright h), (x; h))\lambda_H(X, \rho_V(R, (x \triangleright h), (x; h))(x \triangleleft h), S) \\ &\quad \phi\left(\rho_H(X, \rho_V(R, (x \triangleright h), (x; h))(x \triangleleft h), S)\right)\phi\left(y\right)\tau_M \\ &= \tau_P^{-1} g\rho_V(R, (x \triangleright h), (x; h))\phi\left(\rho_V(R, (x \triangleright h), (x; h))\right)\phi\left(x \triangleleft h\right)\phi\left(y\right)\tau_M \\ &= \tau_P^{-1} g(x \triangleright h)\phi\left(x \triangleleft h\right)\phi\left(y\right)\tau_M \\ &= \tau_P^{-1} g\phi\left(x\right)h\phi\left(y\right)\tau_M = m(\alpha)m(\beta).\end{aligned}$$

La segunda igualdad por (10.0.12), la tercera por (10.0.11) y la cuarta por (10.0.13). □

En las siguientes dos secciones mostraremos dos familias de ejemplos.

10.1. Grupoides trenzados manejables

En esta sección estudiaremos datos de grupoides trenzados con las siguentes propiedades:

(10.1.1) • $VH = HV$,

(10.1.2) • $\gamma(\mathcal{P})H = H\gamma(\mathcal{P})$, y

(10.1.3) • $\gamma(\mathcal{P})V = V\gamma(\mathcal{P})$.

Esta clase de grupoides trenzados es una de las más simples de tratar. Un grupoide trenzado $\mathcal{V}$ cuyo dato de grupoide trenzado asociado a (D, V, H, γ) satisface las ecuaciones (10.1.1), (10.1.2), (10.1.3) será llamado un *grupoide trenzado manejable*.

Sea F un grupo, y $\triangleright, \triangleleft$: $F \times F \to F$ una acción a izquierda (respectivamente a derecha) sobre el conjunto F. Sea $\mathcal{P}$ un conjunto munido de una operación $\mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $(P, Q) \mapsto PQ$, no necesariamente asociativa, tal que

(i) existe $O \in \mathcal{P}$ que verifica $PO = OP = P$, para todo $P \in \mathcal{P}$,
(ii) para cualquier $P \in \mathcal{P}$ existe un único $Q \in \mathcal{P}$ tal que $PQ = QP = O$. Este elemento sera denotado por P^{-1}.

Sea $\rightharpoondown$: $F \times \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ una acción de grupos y $\sigma : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to F$ una función tal que

$$\sigma(P, O) = \sigma(O, P) = 1, \tag{10.1.4}$$

$$g \rightharpoondown O = O, \tag{10.1.5}$$

$$\sigma(P, P^{-1}) = 1, \tag{10.1.6}$$

para todo $g \in F$, $P \in \mathcal{P}$.

Denotemos por $F \bowtie_\sigma \mathcal{P}_\sigma \bowtie F$ al conjunto $F \times \mathcal{P} \times F$ con multiplicación dada por

$$(g, P, x)(h, Q, y) := (g(x \triangleright h)\sigma(X, Y), XY, \sigma(X, Y)^{-1}(x \triangleleft h)y),$$

para todo $g, h, x, y \in F, P, Q \in \mathcal{P}$, donde

$$X = (x \triangleright h)^{-1} \rightharpoondown P, \quad Y = (x \triangleleft h) \rightharpoondown Q.$$

Las ecuaciones (10.1.4), (10.1.5) implican que $(1, O, 1)$ es una unidad para este producto.

Bajo ciertas compatibilidades sobre las aplicaciones $\sigma, \triangleright, \triangleleft, \rightharpoondown$ esta multiplicación hace de $F \bowtie_\sigma \mathcal{P}_\sigma \bowtie F$ un grupo. Esto es el contenido del siguiente lema.

Lema 10.1.1. *Mantengamos la notación anterior. El conjunto $F \bowtie_\sigma \mathcal{P}_\sigma \bowtie F$ es un grupo con unidad $(1, O, 1)$ si y sólo si las siguientes condiciones se verifican.*

$$(F, F, \triangleright, \triangleleft) \ \text{ es un par de grupoides apareados,} \tag{10.1.7}$$

$$(PQ)(\sigma(P, Q)^{-1} \rightharpoondown R) = (\sigma(Q, R)^{-1} \rightharpoondown P)(QR), \tag{10.1.8}$$

$$\sigma(Q, R)\, \sigma\big(\sigma(Q, R)^{-1} \rightharpoondown P, QR\big) = \sigma(P, Q)\, \sigma\big(PQ, \sigma(P, Q)^{-1} \rightharpoondown R\big) \tag{10.1.9}$$

$$(g \rightharpoondown P)(g \rightharpoondown Q) = (g \triangleleft \sigma(P, Q)) \rightharpoondown PQ, \tag{10.1.10}$$

$$g \triangleright \sigma(P, Q) = \sigma(g \rightharpoondown P, g \rightharpoondown Q), \tag{10.1.11}$$

$$(g \triangleright \sigma(P, Q))\, (g \triangleleft \sigma(P, Q)) = g\, \sigma(P, Q), \tag{10.1.12}$$

para todo $g \in F$, $P, Q, R \in \mathcal{P}$.

Demostración. Asumamos que $F \bowtie_\sigma \mathcal{P}_\sigma \bowtie F$ es un grupo. De las igualdades

$$(1, O, x)\, ((1, O, y)(g, O, 1)) = ((1, O, x)(1, O, y))\, (g, O, 1),$$
$$(1, O, x)\, ((g, O, 1)(h, O, 1)) = ((1, O, x)(g, O, 1))\, (h, O, 1),$$

se sigue que $(F, F, \triangleright, \triangleleft)$ es un par de grupos apareados. Las ecuaciones (10.1.8), (10.1.9) siguen de la ecuación

$$(1, P, 1)\, ((1, Q, 1)(1, R, 1)) = ((1, P, 1)(1, Q, 1))\, (1, R, 1).$$

Las ecuaciones (10.1.10), (10.1.11), (10.1.12) se pueden deducir de la igualdad

$$(1, O, g)\left((1, P, 1)(1, Q, 1)\right) = \left((1, O, g)(1, P, 1)\right)(1, Q, 1).$$

Asumamos que las ecuaciones desde (10.1.7) hasta la (10.1.12) son verificadas. Primero verificaremos que el producto en $F \bowtie_\sigma \mathcal{P}_\sigma \bowtie F$ es asociativo. Afirmamos que es suficiente con probar que

$$((g, P, 1)(1, O, x))\,(h, q, y) = (g, P, 1)\,((1, O, x)(h, q, y))\,, \tag{10.1.13}$$

$$((1, O, x)(h, Q, y))\,(f, R, z) = (1, O, x)\,((h, Q, y)(f, R, z))\,, \tag{10.1.14}$$

$$((g, P, 1)(h, Q, y))\,(f, R, z) = (g, P, 1)\,((h, Q, y)(f, R, z))\,, \tag{10.1.15}$$

para todo $P, Q, R \in \mathcal{P}$, $x, y, z, h, f, g \in F$. De hecho, sean $P, Q, R \in \mathcal{P}$, $x, y, z, h, f, g \in F$ luego

$$\begin{aligned}
(g, P, x)\,((h, Q, y)(f, R, z)) &= ((g, P, 1)(1, O, x))\,((h, Q, y)(f, R, z)) \\
&= (g, P, 1)\,((1, O, x)((h, Q, y)(f, R, z))) \\
&= (g, P, 1)\,(((1, O, x)(h, Q, y))(f, R, z)) \\
&= ((g, P, 1)((1, O, x)(h, Q, y)))\,(f, R, z) \\
&= (((g, P, 1)(1, O, x))(h, Q, y))\,(f, R, z) \\
&= ((g, P, x)(h, Q, y))\,(f, R, z).
\end{aligned}$$

La segunda igualdad por (10.1.13), la tercera por (10.1.14), la cuarta por (10.1.15) y la quinta de vuelta por (10.1.13).

La identidad (10.1.13) sigue de un cálculo directo. La identidad (10.1.14) se deduce de (10.1.7), (10.1.11) y (10.1.12). La identidad (10.1.15) se deduce de (10.1.8),(10.1.9) (10.1.10) y (10.1.11). El inverso de un elemento es

$$(g, P, x)^{-1} = (x^{-1} \triangleright g^{-1}, (x^{-1} \triangleleft g^{-1})g \rightharpoondown P^{-1}), x^{-1} \triangleleft g^{-1}).$$

□

Cuando la aplicación σ o la acción $\rightharpoondown$ son triviales, es decir que $\sigma(P, Q) = 1$ para todo $P, Q \in \mathcal{P}$ o $g \rightharpoondown P = P$ para todo $g \in F$, $P \in \mathcal{P}$, las condiciones en el lema 10.1.1 son fáciles de manejar, como el siguiente corolario muestra.

Corolario 10.1.2. *Aumamos que $(F, F, \triangleright, \triangleleft)$ es un par de grupoides apareados, $\mathcal{P}$ es un grupo con identidad O, y $\sigma : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to F$ un mapa tal que*

- $\sigma(P, O) = \sigma(O, P) = 1,$
- $\sigma(P, P^{-1}) = 1$
- $\sigma(Q, R)\sigma(P, QR) = \sigma(P, Q)\sigma(PQ, R),$

para todo $P, Q, R \in \mathcal{P}$. Si además tenemos que

- $g \triangleright \sigma(P, Q) = \sigma(P, Q), \quad g \triangleleft \sigma(P, Q) = \sigma(P, Q)^{-1} g \sigma(P, Q),$

para todo $g \in V$, $P, Q \in \mathcal{P}$, entonces $F_\sigma \bowtie \mathcal{P}_\sigma \bowtie F$ es un grupo, donde $\rightharpoondown$ es trivial. □

COROLARIO 10.1.3. *Asumamos que* $(F, F, \triangleright, \triangleleft)$ *es un par de grupos apareados,* $\mathcal{P}$ *es un grupo con identidad* O *y* $\rightharpoondown$ *es una acción a izquierda de* F *en* $\mathcal{P}$ *dada por automorfismos de grupo. Entonces* $F \bowtie \mathcal{P} \bowtie F$ *es un grupo, aquí el mapa* σ *es trivial.* $\square$

Asumamos que $F \bowtie_\sigma \mathcal{P}_\sigma \bowtie F$ es un grupo, o, equivalentemente, que las propiedades (10.1.7), (10.1.8), (10.1.9), (10.1.10), (10.1.11), (10.1.12) se satisfacen.

Definamos los subgrupos V, H de $F \bowtie_\sigma \mathcal{P}_\sigma \bowtie F$ por $V := F \times O \times 1$, $H := 1 \times O \times F$. La función $\gamma : \mathcal{P} \to F \bowtie_\sigma \mathcal{P}_\sigma \bowtie F$, es la inclusión; $\gamma(P) = (1, P, 1)$.

Entonces la colección $(F \bowtie_\sigma \mathcal{P}_\sigma \bowtie F, V, H, \gamma)$ satisface las condiciones del Lema 10.0.6 (iii).

TEOREMA 10.1.4. *Si* $(F, \triangleright, \triangleleft)$ *es un grupo trenzado, entonces* $(F \bowtie_\sigma \mathcal{P}_\sigma \bowtie F, V, H, \gamma)$ *es un dato de grupoide trenzado y el grupoide trenzado asociado es manejable.*

Recíprocamente si (D, V, H, γ, ϕ) *es un dato de grupoide trenzado y el grupoide trenzado asociado es manejable, entonces* $(V, \triangleright, \triangleleft)$ *es un grupo trenzado,* $\mathcal{P}$ *posee una operación tal que se verifican (i), (ii), existen funciones* $\sigma : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to V$, $\rightharpoondown : V \times \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ *tales que* $D \cong V \bowtie_\sigma \mathcal{P}_\sigma \bowtie V$ *y* γ *es la inclusión vía este isomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN. Si $h, y \in F$, $P, Q \in \mathcal{P}$ entonces

$$\begin{aligned}
\lambda_V(P, (h, 1, 1), Q) &= (h\sigma(h^{-1} \rightharpoondown P, Q), 1, 1), \\
\rho_V(P, (h, 1, 1), Q) &= (1, 1, \sigma(h^{-1} \rightharpoondown P, Q)^{-1}), \\
\lambda_H(P, (1, 1, y), Q) &= (\sigma(P, y \rightharpoondown Q), O, 1), \\
\rho_H(P, (1, 1, y), Q) &= (1, O, \sigma(P, y \rightharpoondown Q)^{-1} y), \\
(1, 1, y) \triangleright (h, 1, 1) &= (y \triangleright h, 1, 1), \\
(1, 1, y) \triangleleft (h, 1, 1) &= (1, 1, y \triangleleft h).
\end{aligned}$$

Por lo tanto la primera afirmación se sigue del Teorema 10.0.16.

Sea (D, V, H, γ) un dato de grupoide trenzado tal que las ecuaciones (10.1.1), (10.1.2), (10.1.3) se satisfacen. Abusando de la notación definimos $\triangleright, \triangleleft : V \times V \to V$ por

$$g \triangleright h := \phi^{-1}(g) \triangleright h, \quad g \triangleleft h := \phi\left(\phi^{-1}(g) \triangleleft h\right),$$

para todo $g, h \in V$. Como $VH = HV$ entonces $(x; g) = O$ para todo $x \in H, g \in V$. La asociatividad del grupo D implica que $(V, V, \triangleright, \triangleleft)$ es un par de grupoides apareados. La ecuación (10.0.13) implica que $(V, \triangleright, \triangleleft)$ es un grupo trenzado.

Definamos la siguiente operación $\mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $PQ := (P; 1; Q)$. Claramente O es una unidad para esta operación. La existencia de inverso en D se traslada a la existencia de inverso en $\mathcal{P}$.

Definimos las aplicaciones $\sigma : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to V$, $\rightharpoondown : V \times \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ por

$$\sigma(P, Q) := \lambda_V(P, 1, Q), \quad g\, \gamma_P := \gamma_{g \rightharpoondown P}\, g'$$

para todo $P, Q \in \mathcal{P}$, $g \in V$, donde g' es algún elemento de G que depende de g y P. Como la función m es un morfismo de grupoides entonces $m(g\, \gamma_P) = m(g) = g$, y por lo tanto

$g = g'$. Luego $\rightharpoondown$ está definido por la ecuación

$$g\,\gamma_P := \gamma_{g \rightharpoondown P}\, g.$$

La ecuación (10.0.11) implica $\rho_V(P,1,Q) = \phi^{-1}(\sigma(P,Q)^{-1})$.

Definamos $f : D \to V \bowtie_\sigma \mathcal{P}_\sigma \bowtie V$ por

$$f(g\gamma_P x) = (g, P, \phi(x)),$$

para todo $g \in V, P \in \mathcal{P}, x \in H$. Éste es un isomorfismo de grupos bien definido. Esto concluye la prueba del teorema. $\square$

En particular, el teorema 10.1.4, en presencia de los corolarios 10.1.2, 10.1.3, muestra que existen muchas maneras de producir ejemplos de datos de grupoides trenzados. Por ejemplo, tomemos $(F, \triangleright, \triangleleft)$ cualquier grupo trenzado, $\mathcal{P}$ un grupo tal que F actue en $\mathcal{P}$ por automorfismos de grupo; o tomemos $F, \mathcal{P}$ dos grupos con un 2-cociclo normalizado $\sigma : F \times F \to \mathcal{P}$, $\triangleright : F \times F \to F$ la acción trivial y $\triangleleft : F \times F \to F$ la acción adjunta.

Corolario 10.1.5. *Sea (D, V, H, γ) un dato de grupoide trenzado, donde V y H son subgrupos normales de D. Entonces el grupoide trenzado asociado $\mathcal{V}$ es manejable, más aún, la acción $\rightharpoondown$ es trivial.*

Demostración. Como V es normal $\gamma_P g \gamma_P^{-1} \in V$, para todo $P \in \mathcal{P}$, $g \in V$. Luego, $\gamma_P g = g^{'} \gamma_P$ para algun $g^{'} \in V$. Como (D, V, H, γ) es un dato de grupoide trenzado entonces $g = g^{'}$. Análogamente podemos probar que $\gamma_P x = x \gamma_P$ y $gx = xg$ para todo $x \in H$, $g \in V$, $P \in \mathcal{P}$. $\square$

10.2. Ejemplos no manejables

Sea $(A, A, \triangleright, \triangleleft)$ un par de grupos apareados. Sea $\mathcal{P}$ un grupo, y sea $\psi : A \times A \to \mathcal{Z}(\mathcal{P})$, $\mathcal{Z}(\mathcal{P})$ el centro de $\mathcal{P}$, una función tal que para todo $a, b, c \in A$

$$\psi(a, bc) = \psi(a, b)\psi(a \triangleleft b, c), \tag{10.2.1}$$

$$\psi(ab, c) = \psi(a, b \triangleright c)\psi(b, c). \tag{10.2.2}$$

Definamos el grupo D cuyo conjunto subyacente es $A \times \mathcal{P} \times A$ y multiplicación dada por

$$(a, P, c)(x, Q, z) = (a(c \triangleright x), P\psi(c, x)Q, (c \triangleleft x)z),$$

para cualquier $a, c, x, z \in A$, $P, Q \in \mathcal{P}$. Un cálculo directo muestra que esta operación es asociativa.

Sean $V = A \times 1 \times 1$, $H = 1 \times 1 \times A$ y $\gamma : \mathcal{P} \to D$, $\gamma_P = (1, P, 1)$,

Lema 10.2.1. *Si $(A, \triangleright, \triangleleft)$ es un grupo trenzado entonces la colección (D, V, H, γ) es un dato de grupoide trenzado.*

Demostración. Para cualquier $P, Q \in \mathcal{P}$, $a, b \in A$ tenemos que

$$\lambda_V(P, (a,1,1), Q) = (a,1,1), \quad \rho_V(P, (a,1,1), Q) = 1$$
$$\lambda_H(P, (1,1,a), Q) = 1, \quad \rho_H(P, (1,1,a), Q) = (1,1,a),$$
$$(1,1,a) \triangleright (b,1,1) = (a \triangleright b, 1, 1), \quad (1,1,a) \triangleleft (b,1,1) = (1,1,a \triangleleft b).$$

Luego la prueba del lema sigue aplicando el Teorema 10.0.16. $\square$

Si $a, z \in A$ entonces

$$(a,1,1)(1,1,z) = (a,1,z), \quad (1,1,z)(a,1,1) = (z \triangleright a, \psi(z,a), z \triangleleft a).$$

Por lo tanto, $VH = HV$ si y sólo si $\psi = 1$.

Observación 10.2.2. Existen muchas colecciones $(A, \triangleright, \triangleleft, \psi)$, donde $(A, \triangleright, \triangleleft)$ es un grupo trenzado y ψ una funcion que satisface (10.2.1), (10.2.2). Por ejemplo tomar A cualquier grupo, $\triangleright$ la acción adjunta, $\triangleleft$ la acción trivial y ψ un bicaracter, esto es una función $\psi : A \times A \to \mathcal{Z}(\mathcal{P})$ tal que

$$\psi(a, bc) = \psi(a,b)\psi(a,c),$$
$$\psi(ab, c) = \psi(a,c)\psi(b,c),$$

par todo $a, c, x, z \in A$.

Observación 10.2.3. Esta clase de ejemplos proviene de la siguiente observación general. Sea (D, V, H, γ, ϕ) un dato de grupoide trenzado. Recordemos la función $(;) : V \times H \to \mathcal{P}$ definida por la ecuación (10.0.5). Si asumimos que para todo $P \in \mathcal{P}, g \in G, x \in H$

$$\gamma_P g = g \gamma_P, \quad \gamma_P x = x \gamma_P,$$

entonces el mapa $\psi : V \times V \to \mathcal{P}$ definido por

$$\psi(g, h) = (g; \phi^{-1}(h)),$$

para todo $g, h \in V$, satisfce las ecuaciones (10.2.1) y (10.2.2). Consideremos la siguiente operación en $\mathcal{P}$; $P.Q = (P; 1; Q)$. Como $xg\gamma_P = \gamma_P xg$ para todo $x \in H, g \in V, P \in \mathcal{P}$ entonces

$$(x \triangleright g)\gamma_{(x;g)}\gamma_P(x \triangleleft g) = (x \triangleright g)\gamma_P\gamma_{(x;g)}(x \triangleleft g),$$

y por lo tanto, $(x; g) \in \mathcal{Z}(\mathcal{P})$ para todo $x \in H, g \in V$.

En las siguientes secciones calcularemos explícitamente la trenza para los datos de grupoide trenzado mostrados en las secciones previas. Primero mostremos cómo se calcula la trenza para un ejemplo general.

Sea (D, V, H, γ, ϕ) un dato de grupoide trenzado y sea $\mathcal{D} = \mathcal{V}\mathcal{H}$ la factorización exacta de grupoides asociada. Sea $\alpha \in \mathcal{H}, \beta \in \mathcal{V}$ entonces

$$\alpha = \tau_P^{-1}\, \gamma_P x \gamma_Q^{-1}\, \tau_Q, \quad \beta = \tau_Q^{-1}\, g\, \tau_R,$$

para algunos $P, Q, R \in \mathcal{P}, g \in V, x \in H$. Luego

$$\alpha\beta = \tau_P^{-1}\, \gamma_P x \gamma_Q^{-1} g\, \tau_R.$$

Como $\alpha\beta = (\alpha \rightharpoonup \beta)(\alpha \leftharpoonup \beta)$, la determinación de las acciones $\rightharpoonup, \leftharpoonup$ recae en el cálculo explícito de $\gamma_P x \gamma_Q^{-1} g$. Esto se hará en lo que sigue para los ejemplos mostrados anteriormente.

10.3. La trenza para los grupoides trenzados manejables

Sea $\mathcal{V}$ un grupoide trenzado manejable y $(F \bowtie_\sigma \mathcal{P}_\sigma \bowtie F, V, H, \gamma)$ su dato de grupoide trenzado. Sea también $\mathcal{D} = \mathcal{V}\mathcal{H}$ la factorización exacta asociada a la colección $(F \bowtie_\sigma \mathcal{P}_\sigma \bowtie F, V, H, \gamma)$.

Lema 10.3.1. *Si $P, Q, R \in \mathcal{P}$, $x, y \in F$ entonces*

$$\begin{aligned}\gamma_P(1, O, x)\gamma_Q^{-1}(y, O, 1)\gamma_R =& (\sigma(P, Q^{-1})(\sigma(P, Q^{-1})^{-1}x \triangleright y)\sigma(S, T), O, 1)\gamma_{ST}\\ &(1, O, \sigma(P, Q^{-1})^{-1}x \triangleleft y),\end{aligned}$$

donde

$$S = (\sigma(P, Q^{-1})^{-1} \triangleright y)^{-1} \rightharpoondown (PQ^{-1}), \tag{10.3.1}$$

$$T = (\sigma(P, Q^{-1})^{-1} \triangleright y) \rightharpoondown R. \tag{10.3.2}$$

Demostración. Es inmediato. □

Sean $(\alpha, \beta) \in \mathcal{V}_\mathfrak{e} \times_\mathfrak{s} \mathcal{V}$. Entonces existen $P, Q, R \in \mathcal{P}$, $x, y \in F$ tales que

$$\alpha = \tau_P^{-1}(x, O, 1)\tau_Q, \quad \beta = \tau_Q^{-1}(y, O, 1)\tau_R.$$

Luego

$$\begin{aligned}\phi^{-1}(\alpha)\beta &= \tau_P^{-1}\gamma_P(1, O, x)\gamma_Q^{-1}(y, O, 1)\tau_R\\ &= \tau_P^{-1}\gamma_P(1, O, x)\gamma_Q^{-1}(y, O, 1)\gamma_R\gamma_R^{-1}\tau_R\\ &= \tau_P^{-1}(\sigma(P, Q^{-1})(\sigma(P, Q^{-1})^{-1}x \triangleright y)\sigma(S, T), O, 1)\tau_{ST}\\ &\quad \tau_{ST}^{-1}\gamma_{ST}(1, O, \sigma(P, Q^{-1})^{-1}x \triangleleft y)\iota_R^{-1}\tau_R,\end{aligned}$$

donde $S, T \in \mathcal{P}$ son como en el lema 10.3.1. Ya que

$$\tau_P^{-1}\,(\sigma(P, Q^{-1})(\sigma(P, Q^{-1})^{-1}x \triangleright y)\sigma(S, T), O, 1)\,\tau_{ST} \in \mathcal{V}(P, ST),$$

$$\tau_{ST}^{-1}\,\gamma_{ST}(1, O, \sigma(P, Q^{-1})^{-1}x \triangleleft y)\gamma_R^{-1}\,\tau_R \in \mathcal{H}(ST, R),$$

entonces

$$\begin{aligned}\alpha \rightharpoonup \beta &= \tau_P^{-1}\,(\sigma(P, Q^{-1})(\sigma(P, Q^{-1})^{-1}x \triangleright y)\sigma(S, T), O, 1)\,\tau_{ST}\\ \alpha \leftharpoonup \beta &= \tau_{ST}^{-1}\,(1, O, \sigma(P, Q^{-1})^{-1}x \triangleleft y)\,\tau_R\end{aligned}$$

Como consecuencia de estos cálculos se tiene el siguiente resultado.

Proposición 10.3.2. *La trenza para el grupoide trenzado manejable $\mathcal{V}$ está dada por la fórmula*

$c(\alpha,\beta) =$

$$(\tau_P^{-1}(\sigma(P,Q^{-1})(\sigma(P,Q^{-1})^{-1}x \triangleright y)\sigma(S,T),O,1)\,\tau_{ST},\tau_{ST}^{-1}(1,O,\sigma(P,Q^{-1})^{-1}x \triangleleft y)\,\tau_R)$$

donde $\alpha = \tau_P^{-1}(x,O,1)\tau_Q, \beta = \tau_Q^{-1}(y,O,1)\tau_R$ *y* S,T *están dadas por las ecuaciones* (10.3.1)*,* (10.3.2) $\square$.

Observación 10.3.3. Cuando $\#\mathcal{P} = 1$ la fórmula en la Proposición 10.3.2 es $c(x,y) = (x \triangleright y, x \triangleleft y)$, que es la formula de la trenza del grupo trenzado $(F,\triangleright,\triangleleft)$.

10.4. La trenza para la familia de ejemplos 10.2

Sea $(A,\triangleright,\triangleleft)$ un grupo trenzado, $\mathcal{P}$ un grupo. Sea también $\psi : A\times A \to \mathcal{Z}(\mathcal{P})$ una aplicación que satisface (10.2.1), (10.2.2). Sea (D,V,H,γ) el dato de grupoide trenzado como en 10.2. Sea $\mathcal{D} = \mathcal{V}\mathcal{H}$ la factorización exacta asociada a (D,V,H,γ).

Lema 10.4.1. *Sean* $a,b\in A$*,* $P,Q,R\in\mathcal{P}$ *entonces*

$$\gamma_P(1,1,a)\gamma_Q^{-1}(b,1,1)\gamma_R = (a\triangleright b, \psi(a,b)PQ^{-1}R, a\triangleleft b). \quad \square$$

Sean $(\alpha,\beta)\in\mathcal{V}\,{}_{\mathfrak{e}}\!\times_{\mathfrak{s}}\mathcal{V}$. Entonces existen $P,Q,R\in\mathcal{P}$, $a,b\in A$ tales que

$$\alpha = \tau_P^{-1}(a,1,1)\tau_Q, \quad \beta = \tau_Q^{-1}(b,1,1)\tau_R,$$

Luego

$$\begin{aligned}\phi^{-1}(\alpha)\beta &= \tau_P^{-1}\gamma_P(1,1,a)\gamma_Q^{-1}(b,1,1)\tau_R\\ &= \tau_P^{-1}\gamma_P(1,1,a)\gamma_Q^{-1}(b,1,1)\gamma_R\gamma_R^{-1}\tau_R\\ &= \tau_P^{-1}(a\triangleright b,\psi(a,b)PQ^{-1}R,a\triangleleft b)\gamma_R^{-1}\tau_R\\ &= \tau_P^{-1}(a\triangleright b,1,1)\,\tau_S\;\tau_S^{-1}\gamma_S(1,1,a\triangleleft b)\gamma_R^{-1}\tau_R,\end{aligned}$$

donde $S = \psi(a,b)PQ^{-1}R\in\mathcal{P}$. Como

$$\tau_P^{-1}(a\triangleright b,1,1)\,\tau_S \in \mathcal{V}(P,S),$$
$$\tau_S^{-1}\gamma_S(1,1,a\triangleleft b)\gamma_R^{-1}\tau_R \in \mathcal{H}(S,R),$$

entonces

$$\alpha \rightharpoonup \beta = \tau_P^{-1}(a\triangleright b,1,1)\,\tau_S$$
$$\alpha \leftharpoonup \beta = \tau_S^{-1}(1,1,a\triangleleft b)\,\tau_R.$$

Proposición 10.4.2. *Si* $\alpha = \tau_P^{-1}(a,1,1)\tau_Q$*,* $\beta = \tau_Q^{-1}(b,1,1)\tau_R$ *entonces la trenza para los ejemplos de la sección 10.2 está dada por la fórmula*

$$c(\alpha,\beta) = (\tau_P^{-1}(a\triangleright b,1,1)\,\tau_S, \tau_S^{-1}(1,1,a\triangleleft b)\,\tau_R),$$

donde $S = \psi(a,b)PQ^{-1}R$. $\square$

Bibliografía

[A] N. ANDRUSKIEWITSCH, *On the quiver-theoretical quantum Yang-Baxter equation*, Selecta Math.(N.S.) **11** (2005), 203–246, preprint `math.QA/0402269`.

[AA] M. AGUIAR y N. ANDRUSKIEWITSCH, *Representations of matched pairs of groupoids and applications to weak Hopf algebras*, Contemp. Math **376** (2005), 127–173, preprint `math.QA/0402118`.

[AEGN] E. ALJADEFF, P. ETINGOF, S. GELAKI y D. NIKSHYCH, *On twisting of finite-dimensional Hopf algebras*, J. Algebra **256** (2002), 484–501.

[AdM] A. ADEM y R. J. MILGRAM, *Cohomology of Finite Groups*, Springer-Verlag (1994).

[AM1] N. ANDRUSKIEWITSCH y J.M. MOMBELLI, *Examples of weak Hopf algebras arising from vacant double groupoids*, Nagoya Math. J. por aparecer, preprint `math.QA/0405374`.

[AM2] N. ANDRUSKIEWITSCH y J.M. MOMBELLI, *On module categories over finite-dimensional Hopf algebras*, en preparación.

[AN1] N. ANDRUSKIEWITSCH y S. NATALE, *Double categories and quantum groupoids*, `math.QA/0308228`, Publ. Mat. Urug. **10** 11–51 (2005), preprint `math.QA/0308228`.

[AN2] N. ANDRUSKIEWITSCH and S. NATALE, *Tensor categories attached to double groupoids*, Adv. Math. **200** (2006) 539–583.

[AN3] N. ANDRUSKIEWITSCH AND S. NATALE, *Harmoic Analysis on Semisimple Hopf Algebras*, St. Petersburg Math. J. **12** (2001), 713–732.

[B] E. BEGGS, *Making non-trivially associated tensor categories from left coset representatives*, J. Pure Appl. Alg. **177** (2003), 5–41.

[BaSV] S. BAAJ, G. SKANDALIS y S. VAES, *Measurable Kac cohomology for Bicrossed Products*, Trans. Amer. Math. Soc. **357** (2005), 1497–1524, preprint `math.OA/0307172`.

[Be] BÉNABOU, J., *Introduction to bicategories*, Reports of the Midwest Category Seminar (1967), Lecture notes in Math. **47**, pp. 1–77, Springer, Berlin.

[BK] B. BAKALOV y A. JR. KIRILLOV , *Lectures on Tensor categories and Modular Functors* University Lecture Series **21**, AMS Providence, RI (2001).

[BNS] G. BÖHM, F. NILL y K. SZLACHÁNYI, *Weak Hopf algebras I. Integral theory and C^*-structure*, J. Algebra **221** (1999), 385–438.

[BS] R. BROWN and C. SPENCER, *Double groupoids and crossed modules*, Cahiers Topo. et Géo. Diff. **XVII**, 343–364.

[BSz] G. BÖHM y K. SZLACHÁNYI, *A coassociative C^*-quantum group with nonintegral dimensions*, Lett. Math. Phys. **35** (1996), 437–456.

[BW] T. BRZEZINSKI y R. WISBAUER, *Corings and Comodules*, Cambridge University Press, (2003).

[CE] D. CALAQUE AND P. ETINGOF, *Lectures on Tensor Categories,* preprint math.QA/0401246.

[CaE] H. CARTAN y S. EILENBERG, *Homological Algebra*, Princeton University Press, (1956).

[CR] C. W. CURTIS AND I. REINER, *Representation theory of finite groups and associative algebras*, Wiley Classics Library Edition (1988) (original from 1962).

[CR2] C. W. CURTIS AND I. REINER, *Methods of Representation Theory-with aplications to finite groups and orders*, Wiley Classics Library Edition (1981).

[D] V.G. DRINFELD, *On some unsolved problems in quantum group theory*, Lect. Notes Math. **1510**, Springer-Verlag, Berlin (1992).

[Eh] C. Ehresmann, *Categories doubles et categories structures*, C.R. Acad. Sci. Paris **256** (1963) 1198–1201.

[EGS] P. Etingof, R. Guralnik and A. Soloviev, *Indecomposable set-theoretical solutions to the quantum Yang-Baxter equation on a set with prime number of elements*, J. Algebra **242** 2 (2001), 709–719.

[ENO] P. Etingof, D. Nikshych y V. Ostrik, *On fusion categories*, preprint math.QA/0203060, Annals of Math. **162**, 581–642 (2005).

[EO] P. Etingof y V. Ostrik, *Finite tensor categories*, Mosc. Math. J. **4** (2004), no. 3, 627–654, 782–783. `math.QA/0301027`.

[ESS] P. Etingof, T. Schedler and A. Soloviev, *Set-theoretical solutions to the quantum Yang-Baxter equation*, Duke Math. J. **100** (1999), 169–209.

[FMS] D. Fischman, S. Montgomery y H.-J. Schneider, *Frobenius extensions of subalgebras of Hopf algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **349** (1997), 4857–4895.

[G] S. Gelaki, *On the clasification of finite-dimensional triangular Hopf algebras*, in "Recent developments in Hopf álgebra Theory", Math. Sci. Res. Inst. Publ. **43**, 69–116 (2002), Cambridge Univ. Press.

[H] T. Hayashi, *A brief introduction to face algebras,* in "New trends in Hopf Algebra Theory"; Contemp. Math. **267** (2000), 161–176.

[HN] F. Hausser and F. Nill, *Integral theory for Quasi-Hopf algebras*, math.QA/9904164.

[K] C. Kassel, *Quantum groups*, Graduate Texts in Math., Springer-Verlag (1995).

[Li] V. Linchenko, *Nilpotent subsets of Hopf module algebras*, Groups, Rings, Lie, and Hopf Algebras (Yu. Bahturin, Editor), Proceedings of the 2001 St. Johns Conference, Kluwer, 2003, 121-127.

[LYZ1] J. Lu, M. Yan y Y. Zhu, *On the set-theoretical Yang-Baxter equation*, Duke Math. J. **104** (2000), 1–18.

[LYZ2] J. Lu, M. Yan y Y. Zhu, *Quasi-triangular structures on Hopf algebras with positive bases*, in "New trends in Hopf Algebra Theory"; Contemp. Math. **267** (2000), 339–356.

[Mac] K. Mackenzie, *Double Lie algebroides and second-order geometry I*, Adv. Math. **94** (1992), pp. 180–239.

[M1] A. Masuoka, *Hopf algebra extensions and cohomology*, in "Recent developments in Hopf álgebra Theory", Math. Sci. Res. Inst. Publ. **43**, 167–209 (2002), Cambridge Univ. Press.

[M2] A. Masuoka, *Calculations of Some Groups of Hopf Algebra Extensions*, J. Algebra **191**, 568–588 (1997).

[M3] A. Masuoka, *Freeness of Hopf algebras over coideal subalgebras*, Comm. in Algebra 20 **5** (1992), 1353–1373.

[Mo] S. Montgomery, *Hopf Algebras and their Actions on Rings*, CBMS REg. Conf. Ser. Math. 82, Am. Math. Soc. (1993).

[Mov] M. Movshev, *Twisting in group algebras of finite groups*, Func. Anal. Appl. **27** (1994), 240–244.

[MM] C. Maldonado y J.M. Mombelli, *On braided grupoids*, preprint math.QA/0504108.

[MN] J.M. Mombelli y S. Natale, *Tensor categories and vacant double grupoids*, preprint math.QA/0509052.

[MS] S. Montgomery and H.-J. Schneider, *Skew derivations of finite-dimensional algebras and actions of the double of the Taft Hopf algebra*, Tsukuba J. Math. 25 **2** (2001), 337–358.

[N1] S. Natale, *Frobenius-Schur indicators for a class of fusion categories*, Pacific J. Math. **221** (2005), 353–378, preprint math.QA/0312466.

[N2] S. Natale, *On Group Theoretical Hopf Algebras and Exact Factorizations of Finite Groups*, J. Algebra **270** 199–211 (2003), preprint math.QA/0208054.

[N3] S. Natale, *Categorías tensoriales*, Curso de postgrado dictado en la Fa.M.A.F. en el segundo semestre de 2005.

[NV] D. Nikshych y L. Vainerman, *Finite quantum groupoids and their applications*, in "Recent developments in Hopf álgebra Theory", Math. Sci. Res. Inst. Publ. **43**, 211–262 (2002), Cambridge Univ. Press.

[O1] V. Ostrik, *Module categories over the Drinfeld double of a Finite Group*, Int. Math. Res. Not. 27, 1507–1520 (2003).

[O2] V. Ostrik, *Module categories, Weak Hopf Algebras and Modular invariants*, Transform. Groups, 2 **8**, 177–206 (2003).

[R] J. Renault, *A groupoid approach to C^*-algebras*, Lect. Notes Math. **793**, Springer-Verlag, Berlin (1980).

[Sch1] H-J. Schneider, *Representation theory of Hopf Galois extensions*, Israel J. of Math **72** (1990), 196–231.

[Sch2] H-J. Schneider, *Normal basis and transitivity of crossed products for Hopf algebras*, J. Algebra 2 **152**, 289–312 (1992).

[SchM] H-J. Schneider y E. F. Müller, *Quantum homogeneous spaces with faithfully flat module structures*,

[Sk] S. Skryabin, *Projectivity and freeness over comodule algebras*, preprint (2004).

[S] A.Soloviev, *Non-unitary set-theoretical solutions to the quantum Yang-Baxter equation*, Math. Res. Lett. **7** (2000), no. 5-6, pp.577–596.

[T1] M. Takeuchi, *Survey on matched pairs of groups. An elementary approach to the ESS-LYZ theory,* Banach Center Publ. **61** (2003), 305–331.

[T2] M. Takeuchi, *Relative Hopf Modules–Equivalences and freeness criteria*, J. Algebra 2 **60**, 452–471 (1979).

[T3] M. Takeuchi, $\sqrt{Morita}$ *theory*, J. Math. Soc. Japan, **39** (1987) 301–336.

[Wa] C. E. Watts, *Intrinsic characterizations of some additive functors*, Proc. AMS **11** (1969), 5–8.

[W] C. Weibel, *An introduction to homological álgebra*, Cambridge University Press (1994).

[WW] J. Wiegold y A.G. Williamson, *The Factorizations of the Alternating and Symmetric Groups*, Math. Z. **175**, 171–179 (1980).

[YZ] M. Yan and Y. Zhu, *Stabilizer for Hopf algebra actions*, Comm. in Algebra 26 **12**, 3885–3898 (1998).

[Z] Y. Zhu, *The dimension of irreducible modules for transitive module algebras*, Comm. in Algebra 29 **7**, 2877–2886 (2001).