

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA EL PROBLEMA DE BINGHAM

TRABAJO DE TESIS PRESENTADO ANTE LA
FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA Y
FÍSICA, PARA OPTAR POR EL GRADO DE
DOCTOR EN MATEMÁTICA

Por: Germán Ariel Torres
Director: Cristina Turner
Diciembre 2002

Resumen

En este trabajo se estudian modelos para un fluido de Bingham en geometría plana y cilíndrica. Un fluido de Bingham es un fluido cuyas propiedades viscosas hacen que se formen: una zona de flujo viscoso, una zona rígida y una frontera libre que las separa. El comportamiento de la frontera se estudia de manera teórica y se proponen diversos métodos numéricos para resolverla de manera práctica. Se analizan propiedades de monotonía y de convergencia a la solución estacionaria, y los resultados numéricos son contrastados con los teóricos.

Abstract

In this work, models in two geometries (cylindrical and plane) for a Bingham fluid are studied. A Bingham fluid is a fluid whose viscous properties produce: a rigid core, a viscous zone, and a free boundary that separates these two regions. The behaviour of the free boundary is studied theoretically and several numerical methods are proposed to solve the problem in a practical way. Properties of monotony and convergence to the stationary solution are analyzed, and the numerical results are compared with the theory.

Índice

1. Preliminares físicos.	1
1.1. Masa.	1
1.2. Densidad.	1
1.3. Esfuerzos y deformaciones.	1
1.4. Fluidos.	2
1.5. Presión.	3
1.6. Ecuación fundamental de la hidrostática.	3
1.7. La presión en un punto.	4
1.8. El principio de Pascal.	5
1.9. El principio de los vasos comunicantes.	5
1.10. Ecuación de la continuidad.	6
1.11. Ecuación de Bernoulli.	7
1.12. Viscosidad.	8
1.13. Fluidos newtonianos y no newtonianos.	9
1.14. Ecuaciones de Navier-Stokes.	10
1.15. Forma adimensional de las ecuaciones de Navier-Stokes.	13
1.16. El petróleo: un ejemplo de fluido de Bingham.	14
1.16.1. La parafina en el petróleo.	15
1.16.2. Características reológicas de los “waxy crude oils”.	17
1.17. Modelo físico matemático del flujo de petróleo con parafina.	17
1.17.1. Modelo reológico.	18
1.17.2. Viscosidad.	19
1.17.3. Yield stress.	19
1.17.4. Evolución de β	19
1.17.5. Evolución de α	20
1.18. Modelo simplificado.	20
2. Planteo del problema.	22
2.1. Geometría plana.	22
2.2. Geometría plana - Tensión umbral variable.	25
2.3. Geometría cilíndrica.	26
3. Resultados conocidos - Generalizaciones.	29
3.1. Geometría plana.	29
3.2. Geometría plana - Tensión umbral variable.	32
4. Métodos aproximados.	35
4.1. Método de Goodman o del balance integral.	35
4.1.1. Geometría plana.	35
4.1.2. Geometría plana - Tensión umbral variable.	36
4.1.3. Geometría cilíndrica.	37
4.2. Método cuasiestacionario.	38
4.2.1. Geometría plana.	38
4.2.2. Geometría plana - Tensión umbral variable.	39
4.2.3. Geometría cilíndrica.	40

5. Método de diferencias finitas con paso variable.	41
6. Método de líneas.	47
6.1. Geometría plana.	47
6.2. Geometría plana - Tensión umbral variable.	58
6.3. Geometría cilíndrica.	64
6.3.1. Preliminares.	64
6.3.2. Aplicación del método.	71
7. Resultados numéricos.	77
7.1. Método de Goodman.	77
7.1.1. Geometría plana.	77
7.1.2. Geometría plana - Tensión umbral variable.	78
7.1.3. Geometría cilíndrica.	79
7.2. Método cuasiestacionario.	80
7.2.1. Geometría plana.	80
7.2.2. Geometría plana - Tensión umbral variable.	81
7.2.3. Geometría cilíndrica.	82
7.3. Método de diferencias finitas.	83
7.4. Método de líneas.	84
7.4.1. Geometría plana.	84
7.4.2. Geometría plana - Tensión umbral variable.	85
7.4.3. Geometría cilíndrica.	86
8. Comparación de resultados.	87
8.1. Geometría plana.	87
8.2. Geometría plana - Tensión umbral variable.	88
8.3. Geometría cilíndrica.	89
9. Conclusiones.	90
Referencias.	94

1. Preliminares físicos.

1.1. Masa.

La **masa** es una magnitud física que expresa la cantidad de materia que contiene un cuerpo. Su unidad en el Sistema Internacional es el kilogramo (Kg.).

La masa es medida determinando el límite al cual una partícula u objeto resiste un cambio en su dirección o velocidad cuando una fuerza es aplicada. Issac Newton estableció: “Una masa estacionaria permanece estacionaria, y una masa en movimiento a una velocidad constante y en una dirección constante mantiene su estado de movimiento, a menos que se ejerza una fuerza externa”. Para una fuerza aplicada dada, se tiene la siguiente fórmula:

$$F = ma, \quad (1.1)$$

donde F es una fuerza aplicada en newtons, m es la masa del objeto o partícula en kilogramos, y a es la aceleración resultante en metros por segundo al cuadrado. La masa de un objeto puede ser calculada si la fuerza y la aceleración son conocidas.

La masa no es lo mismo que el peso. El peso tiene sentido sólo cuando un objeto, teniendo una masa específica, es colocada en un campo de aceleración, tal como el campo gravitacional de la Tierra.

1.2. Densidad.

La **densidad** se define como la masa de un material dividido el volumen que ocupa. Es una medida que nos permite comparar varios materiales. Se establece al agua pura como unidad de medida.

1.3. Esfuerzos y deformaciones.

El **esfuerzo** o **tensión** se define como la fuerza perpendicular por unidad de área aplicada a un objeto, de tal forma que éste se comprima (esfuerzo compresivo) o se estire (esfuerzo de estiramiento). Ver figura 1.

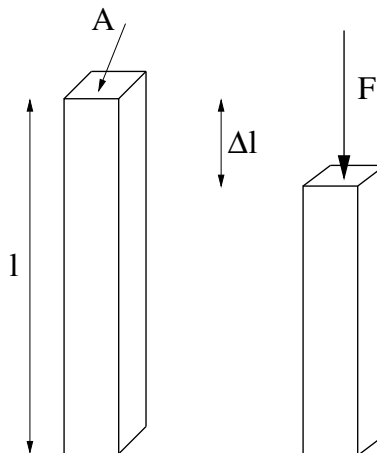


Figura 1: Esfuerzo compresivo.

El cambio relativo en la longitud, definido como el cambio Δl dividido por la longitud original l , es llamado la **deformación**. Si no excedemos el límite elástico, el cociente entre el esfuerzo y la deformación es una constante llamada el **módulo del material**. Como la deformación no tiene unidades, las unidades para el módulo elástico son las mismas que para la presión.

$$\text{Módulo elástico} = E = \frac{\text{esfuerzo}}{\text{deformación}} = \frac{F/A}{\Delta l/l}. \quad (1.2)$$

El **esfuerzo de corte** es similar al esfuerzo, excepto que la fuerza es aplicada de tal forma que el material es retorcido (Ver figura 2). El bloque está adherido a la base y una fuerza F es aplicada a la cara superior paralela a la base. (Notar que la base está aplicando una fuerza $-F$ para que el bloque permanezca en reposo). El bloque se deforma, la parte superior se mueve una distancia Δl . Si h es la altura del bloque y A es el área de la cara superior, entonces el **módulo de esfuerzo** se define como:

$$\text{Módulo de esfuerzo} = S = \frac{\text{esfuerzo de corte}}{\text{deformación}} = \frac{F/A}{\Delta l/h}. \quad (1.3)$$

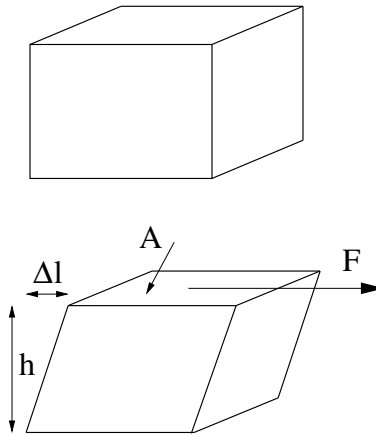


Figura 2: Esfuerzo de corte.

1.4. Fluidos.

Un **fluido** es un cuerpo cuyas moléculas tienen escasa conexión entre sí y adoptan la forma del recipiente que los contiene, por ejemplo, líquidos y gases. Típicamente, los líquidos son considerados incompresibles, mientras que los gases son considerados compresibles.

La principal diferencia en el comportamiento mecánico de fluidos comparado con el de los sólidos es que cuando un esfuerzo de corte es aplicado al fluido, éste experimenta una deformación permanente y continua.

De esta manera, un fluido puede ser definido de manera precisa como un material que se deforma continua y permanentemente bajo la aplicación de un esfuerzo de corte, no importa cuán pequeño sea.

Esta definición no toma en cuenta el asunto de cuán rápidamente ocurre la deformación y, como veremos más adelante, esta velocidad depende de varios factores incluyendo las propiedades

del propio fluido. La imposibilidad de los fluidos de resistir el esfuerzo de corte les da la habilidad característica para cambiar su forma o **fluir**. Durante el flujo de fluidos reales, los esfuerzos de corte asumen un rol muy importante, y su predicción es una parte vital del trabajo de ingeniería. Sin embargo, si no hay flujo, los esfuerzos de corte no pueden existir, y el único esfuerzo presente es el esfuerzo compresivo, o **presión**.

1.5. Presión.

Cuando se ejerce una fuerza sobre un cuerpo deformable, los efectos que provoca dependen no sólo de su intensidad, sino también de cómo esté repartida sobre la superficie del cuerpo. Así, un golpe de martillo sobre un clavo bien afilado hace que penetre más en la pared de lo que lo haría otro clavo sin punta que recibiera el mismo impacto. Un individuo situado de puntillas sobre una capa de nieve blanda se hunde, en tanto que otro de igual peso que calce raquetas, al repartir la fuerza sobre una mayor superficie, puede caminar sin dificultad.

El cociente entre la intensidad F de la fuerza aplicada perpendicularmente sobre una superficie dada y el área A de dicha superficie se denomina presión. Debido a esta definición, la presión es simplemente un esfuerzo:

$$\text{presión} = p = \frac{F}{A}. \quad (1.4)$$

La presión representa la intensidad de la fuerza que se ejerce sobre cada unidad de área de la superficie considerada. Cuanto mayor sea la fuerza que actúa sobre una superficie dada, mayor será la presión, y cuanto menor sea la superficie para una fuerza dada, mayor será entonces la presión resultante.

El concepto de presión es muy general y por ello puede emplearse siempre que exista una fuerza actuando sobre una superficie. Sin embargo, su empleo resulta especialmente útil cuando el cuerpo o sistema sobre el que se ejercen las fuerzas es deformable. Los fluidos no tienen forma propia y constituyen el principal ejemplo de aquellos casos en los que es más adecuado utilizar el concepto de presión que el de fuerza.

Cuando un fluido está contenido en un recipiente, ejerce una fuerza sobre sus paredes y, por tanto, puede hablarse también de presión. Si el fluido está en equilibrio las fuerzas sobre las paredes son perpendiculares a cada porción de superficie del recipiente, ya que de no serlo existirían componentes paralelas que provocarían el desplazamiento de la masa de fluido en contra de la hipótesis de equilibrio. La orientación de la superficie determina la dirección de la fuerza de presión, por lo que el cociente de ambas, que es precisamente la presión, resulta independiente de la dirección; se trata entonces de una magnitud escalar.

1.6. Ecuación fundamental de la hidrostática.

Todos los líquidos pesan, por ello cuando están contenidos en un recipiente las capas superiores oprimen a las inferiores, generándose una presión debida al peso. La presión en un punto determinado del líquido deberá depender entonces de la altura de la columna de líquido que tenga por encima suyo.

Considérese un punto cualquiera del líquido que diste una altura h de la superficie libre de dicho líquido. La fuerza del peso debido a una columna cilíndrica de líquido de base A situada sobre él puede expresarse en la forma:

$$F_{\text{peso}} = mg = \rho Vg = \rho Ahg, \quad (1.5)$$

siendo V el volumen de la columna y ρ la densidad del líquido. Luego, la presión debida al peso vendrá dada por:

$$P_{\text{peso}} = \frac{F_{\text{peso}}}{A} = \frac{\rho Ahg}{A} = \rho hg. \quad (1.6)$$

Si sobre la superficie libre se ejerciera una presión exterior adicional p_0 , como la atmosférica por ejemplo, la presión total p en el punto de altura h sería:

$$p = p_0 + p_{\text{peso}} = p_0 + \rho gh. \quad (1.7)$$

Esta ecuación puede generalizarse al caso de que se trate de calcular la diferencia de presiones Δp entre dos puntos cualesquiera del interior del líquido situados a diferentes alturas, resultando:

$$\Delta p = \rho g \Delta h, \quad (1.8)$$

es decir:

$$p_2 - p_1 = \rho g(h_2 - h_1), \quad (1.9)$$

que constituye la llamada **ecuación fundamental de la hidrostática**.

Esta ecuación indica que para un líquido dado y para una presión exterior constante la presión en el interior depende únicamente de la altura. Por tanto, todos los puntos del líquido que se encuentren al mismo nivel soportan igual presión. Ello implica que ni la forma de un recipiente ni la cantidad de líquido que contiene influyen en la presión que se ejerce sobre su fondo, tan sólo la altura del líquido. Esto es lo que se conoce como paradoja hidrostática, cuya explicación se deduce como consecuencia de la ecuación fundamental.

1.7. La presión en un punto.

La definición de la presión como cociente entre la fuerza y la superficie se refiere a una fuerza constante que actúa perpendicularmente sobre una superficie plana. En los líquidos en equilibrio las fuerzas asociadas a la presión son en cada punto perpendiculares a la superficie del recipiente, de ahí que la presión sea considerada como una magnitud escalar cociente de dos magnitudes vectoriales de igual dirección: la fuerza y el vector normal a la superficie. Dicho vector tiene por módulo el área y por dirección la perpendicular a la superficie.

Cuando la fuerza no es constante, sino que varía de un punto a otro de la superficie A considerada, tiene sentido hablar de la presión en un punto dado. Para definirla se considera un elemento de superficie ΔA que rodea al punto; si dicho elemento reduce considerablemente su extensión, la fuerza ΔF que actúa sobre él puede considerarse constante. En tal caso, la presión en el punto considerado se definirá en la forma matemática:

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA}. \quad (1.10)$$

Esta expresión, que es la derivada de F respecto de A , proporciona el valor de la presión en un punto. Si la fuerza es variable y F representa la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre la superficie A la fórmula:

$$p = \frac{F}{A}, \quad (1.11)$$

define, en este caso, la presión media.

1.8. El principio de Pascal.

La presión aplicada en un punto de un líquido contenido en un recipiente se transmite con el mismo valor a cada una de las partes del mismo.

Este enunciado, obtenido a partir de observaciones y experimentos del físico y matemático francés Blas Pascal (1623-1662), se conoce como **principio de Pascal**.

El principio de Pascal puede ser interpretado como una consecuencia de la ecuación fundamental de la hidrostática (1.9) y del carácter incompresible de los líquidos. En esta clase de fluidos la densidad es constante, de modo que de acuerdo con la ecuación $p = p_0 + \rho gh$ si se aumenta la presión en la superficie libre, por ejemplo, la presión en el fondo ha de aumentar en la misma medida, ya que ρgh no varía al no hacerlo h .

La prensa hidráulica constituye la aplicación fundamental del principio de Pascal y también un dispositivo que permite entender mejor su significado. Consiste, en esencia, de dos cilindros de diferente sección comunicados entre sí, y cuyo interior está completamente lleno de un líquido que puede ser agua o aceite. Dos émbolos de secciones diferentes se ajustan, respectivamente, en cada uno de los dos cilindros, de modo que estén en contacto con el líquido. Cuando sobre el émbolo de menor sección s_1 se ejerce una fuerza F_1 la presión p_1 que se origina en el líquido en contacto con él se transmite íntegramente y de forma instantánea a todo el resto del líquido; por tanto, será igual a la presión p_2 que ejerce el líquido sobre el émbolo de mayor sección s_2 , es decir:

$$p_1 = p_2, \quad (1.12)$$

con lo que:

$$\frac{F_1}{s_1} = \frac{F_2}{s_2} \implies F_2 = \frac{s_2}{s_1} F_1. \quad (1.13)$$

Si la sección s_2 es veinte veces mayor que la sección s_1 , la fuerza F_1 aplicada sobre el émbolo pequeño se ve multiplicada por veinte en el émbolo grande.

La prensa hidráulica es una máquina simple semejante a la palanca de Arquímedes, que permite amplificar la intensidad de las fuerzas y constituye el fundamento de elevadores, prensas, frenos y muchos otros dispositivos hidráulicos de maquinaria industrial.

1.9. El principio de los vasos comunicantes.

Si se tienen dos recipientes comunicados y se vierte un líquido en uno de ellos, éste se distribuirá entre ambos de tal modo que, independientemente de sus capacidades, el nivel de líquido en uno y otro recipiente sea el mismo. Este es el llamado **principio de los vasos comunicantes**, que es una consecuencia de la ecuación fundamental de la hidrostática.

Si se toman dos puntos A y B situados en el mismo nivel, sus presiones hidrostáticas han de ser las mismas, es decir:

$$\begin{aligned} p_A &= p_0 + \rho gh_A, \\ p_B &= p_0 + \rho gh_B, \end{aligned} \quad (1.14)$$

luego si $p_A = p_B$ necesariamente las alturas h_A y h_B de las respectivas superficies libres han de ser idénticas $h_A = h_B$.

Si se emplean dos líquidos de diferentes densidades y no miscibles, entonces las alturas serán inversamente proporcionales a las respectivas densidades. En efecto, si $p_A = p_B$, se tendrá:

$$\rho_A gh_A = \rho_B gh_B \implies \frac{h_A}{h_B} = \frac{\rho_B}{\rho_A}. \quad (1.15)$$

Esta ecuación permite, a partir de la medida de las alturas, la determinación experimental de la densidad relativa de un líquido respecto de otro y constituye, por tanto, un modo de medir densidades de líquidos no miscibles si la de uno de ellos es conocida.

1.10. Ecuación de la continuidad.

Consideremos un tubo de corriente de sección recta variable; la masa del líquido que fluye debe ser la misma en todas las posiciones del tubo; si la sección recta disminuye, la velocidad de evacuación debe aumentar, y viceversa (ver figura 3).

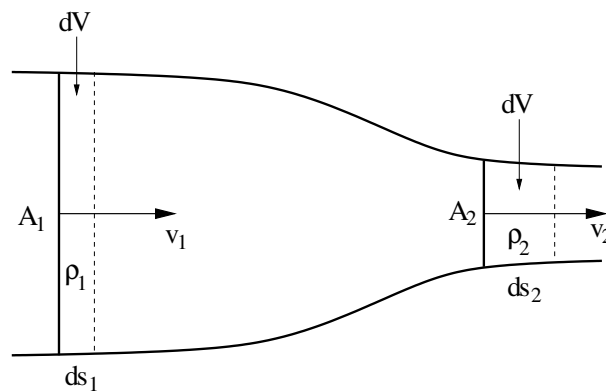


Figura 3: La masa debe conservarse.

Cuando el líquido se mueve una distancia ds_1 , con relación a la sección de área A_1 , una masa $A_1\rho_1 ds_1$ atraviesa A_1 y penetra en la región comprendida entre A_1 y A_2 . Las cantidades ρ_1 y ρ_2 son las densidades en A_1 y A_2 .

La masa que penetra por unidad de tiempo es:

$$A_1\rho_1 \frac{ds_1}{dt} = A_1\rho_1 v_1. \quad (1.16)$$

Si nada de fluido se pierde, la misma masa debe salir a través de A_2 .

$$A_1\rho_1 v_1 = A_2\rho_2 v_2 = \text{constante}. \quad (1.17)$$

Esta es la **ecuación de la continuidad**. Si la densidad del líquido es constante, se tiene que:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2. \quad (1.18)$$

Las velocidades a lo largo del tubo de corriente son inversamente proporcionales a la sección recta del tubo.

Si definimos la función **evacuación** o **flujo de líquido** como:

$$\phi = Av = A \frac{ds}{dt} = \frac{dV}{dt}, \quad (1.19)$$

donde ϕ es el volumen que pasa por una superficie por unidad de tiempo, el teorema anterior nos dice que para fluidos incompresibles $\phi = \text{constante}$.

1.11. Ecuación de Bernoulli.

Consideremos un fluido que se encuentra inicialmente entre dos caras transversales a y c (ver figura 4). En un instante Δt el fluido que estaba en a se desplaza hasta b una distancia $\Delta s_1 = v_1 \Delta t$, donde v_1 es la velocidad en la cara a . Análogamente, en el intervalo Δt , el fluido que estaba en c se desplaza hasta d , una distancia $\Delta s_2 = v_2 \Delta t$ donde v_2 es la velocidad en c . Pensemos que A_1 y A_2 son las áreas de las caras transversales. Por la ecuación de continuidad, el volumen de fluido que pasa por cualquier cara transversal es:

$$\Delta V = A_1 \Delta s_1 = A_2 \Delta s_2. \quad (1.20)$$

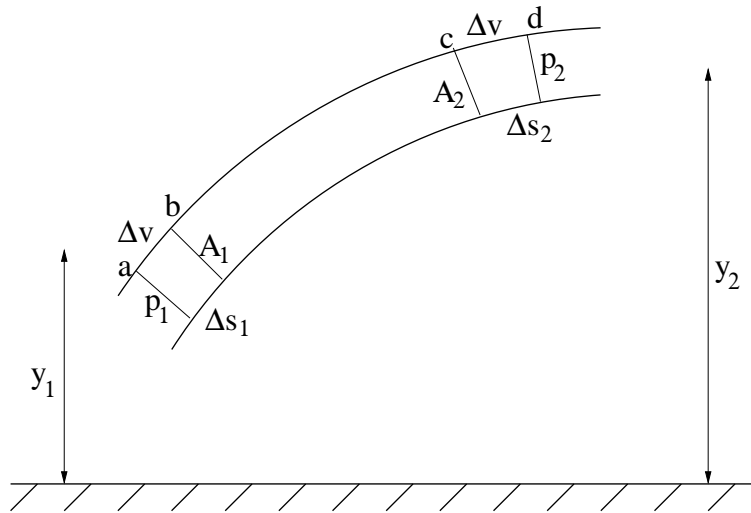


Figura 4: La ecuación de Bernoulli se obtiene haciendo un balance de energía.

Calcularemos el trabajo realizado sobre el fluido durante el tiempo Δt . La fuerza en la cara inferior es $p_1 A_1$, y en la cara superior es $p_2 A_2$ (opuesta a la dirección del desplazamiento). Por lo tanto:

$$\text{Trabajo} = W = p_1 A_1 \Delta s_1 - p_2 A_2 \Delta s_2 = (p_1 - p_2) \Delta V. \quad (1.21)$$

Al principio de este tubo, el fluido entre a y b tiene volumen $A_1 \Delta s_1$, masa $\rho A_1 \Delta s_1$, y energía cinética $\frac{1}{2} \rho A_1 \Delta s_1 v_1^2$. Similarmente, el fluido entre c y d tiene energía cinética $\frac{1}{2} \rho A_2 \Delta s_2 v_2^2$. Luego, el cambio de energía cinética es:

$$\Delta K = \frac{1}{2}\rho\Delta V (v_2^2 - v_1^2). \quad (1.22)$$

La energía potencial de la masa entrante en a es $(\Delta m)gy_1 = \rho\Delta V gy_1$, y la energía potencial de la masa saliente en c es $(\Delta m)gy_2 = \rho\Delta V gy_2$.

Luego, el cambio en energía potencial es:

$$\Delta U = \rho\Delta V g (y_2 - y_1). \quad (1.23)$$

Se sabe que el trabajo es igual a la suma de las variaciones de la energía cinética y potencial, es decir, $W = \Delta K + \Delta U$. Reuniendo (1.21), (1.22) y (1.23), es sencillo llegar a la expresión siguiente:

$$p_1 + \rho gy_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho gy_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2,$$

que es equivalente a:

$$p + \rho gy + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{constante}. \quad (1.24)$$

Esta última fórmula es la **ecuación de Bernoulli**.

1.12. Viscosidad.

La **viscosidad** puede pensarse como la fricción interna de un fluido. Supongamos que tenemos dos placas paralelas en cuyo interior tenemos un fluido (ver figura 5).

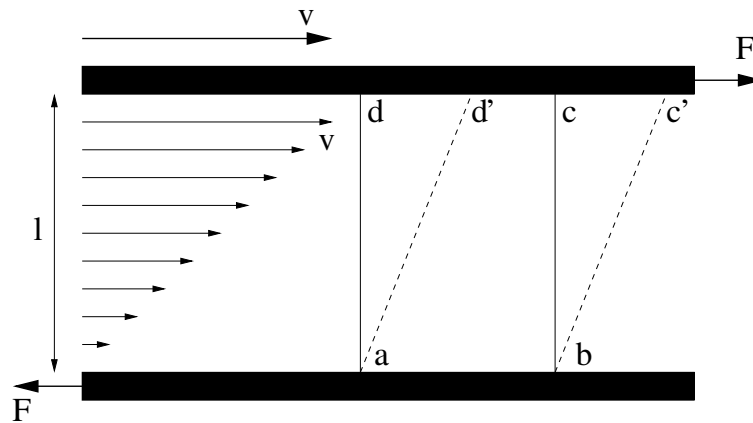


Figura 5: Placas paralelas por donde circula un fluido viscoso.

La placa inferior está fija, mientras que la superior se desplaza a una velocidad v . Se observa experimentalmente que el fluido en contacto con cada superficie tiene la misma velocidad que cada superficie. De esta manera, el fluido inmediatamente debajo de la placa superior tiene velocidad v , y el fluido inmediatamente arriba de la placa inferior tiene velocidad cero. Las velocidades de las capas intermedias de fluido crecen uniformemente de una superficie a otra. Flujos de este tipo se llaman laminares.

Como consecuencia de este movimiento, una porción de líquido en el instante inicial tiene forma $abcd$. Instantes después, esa zona del fluido tomará la forma $abc'd'$, y se distorsionará continuamente a medida que el esfuerzo de corte F , continúe. De esta forma el líquido está en un estado creciente de deformación.

Para mantener el movimiento, una fuerza debe ser aplicada a la placa superior hacia la derecha. Esta fuerza se transmite indirectamente a la superficie superior del líquido. Además la fuerza tiende a arrastrar a todo el fluido, inclusive la placa inferior, por lo que resulta necesario aplicar una fuerza igual y de sentido contrario en la placa inferior, para que permanezca quieta.

Si A es el área del fluido sobre el cual estas fuerzas se aplican, el cociente F/A es el esfuerzo o tensión de corte ejercida sobre el fluido.

En este caso, la deformación crece indefinidamente mientras el esfuerzo se aplica, y experimentalmente se comprueba que la tensión no depende de la deformación sino de su velocidad de cambio.

En la figura 5 se deduce que en el instante cuando el volumen del fluido tiene la forma $abc'd'$ la deformación es dd'/l ; y la velocidad de cambio de la deformación es $1/l$ veces la velocidad de cambio del punto d' , que es simplemente v . Luego la velocidad de cambio de la deformación es v/l

El **coeficiente de viscosidad dinámica** η se define como el cociente entre el esfuerzo de corte y la velocidad de deformación. Para el caso que estamos considerando se tiene que:

$$\eta = \frac{F/A}{v/l} \implies F/A = \eta \frac{v}{l}. \quad (1.25)$$

Si pensamos esta situación puntualmente, es claro que la velocidad de deformación del fluido es $\partial v/\partial y$, donde y es la dirección vertical.

Existen fluidos para los cuales el coeficiente de viscosidad no es constante, como por ejemplo, la sangre. Este comportamiento puede ser comprendido a escala microscópica, puesto que la sangre no es un fluido homogéneo, sino que tiene partículas en suspensión. A pequeñas velocidades, estas partículas están aleatoriamente orientadas, pero al incrementar la velocidad las partículas se orientan de tal forma que facilitan la circulación del fluido.

La **viscosidad cinemática** se define como el cociente entre la viscosidad dinámica y la densidad del fluido.

1.13. Fluidos newtonianos y no newtonianos.

Simbolicemos con τ al esfuerzo de corte y por σ a la velocidad de deformación. Si se cumple que:

$$\tau = \eta\sigma, \quad (1.26)$$

se dice que el fluido es **newtoniano**. La viscosidad es una función sólo de la condición del fluido, particularmente de su temperatura. Los fluidos newtonianos más comunes son: agua, gasolina, alcohol, kerosene, benceno y glicerina.

Por otra parte, un fluido que no se comporte según la relación (1.26) se denomina fluido **no newtoniano**.

Dentro de los fluidos no newtonianos tenemos:

- Fluidos dependientes del tiempo: la viscosidad es dependiente del tiempo. Ejemplos de esta clase de fluidos son: aceites crudos a bajas temperaturas, tinta de impresoras, nylon, algunas soluciones de polímeros.
- Fluidos independientes del tiempo: la viscosidad es independiente del tiempo.

Dentro de estos últimos se puede hacer una subclasificación:

- Pseudoplásticos: Necesitan un gran esfuerzo de corte para que las capas de fluido se desplacen entre sí, lo que indica una alta viscosidad. A medida que la velocidad de deformación aumenta, se necesita menos esfuerzo de corte para mantener el movimiento, lo que indica una disminución de la viscosidad. Ejemplos: plasma de la sangre y polietileno fundido.
- Dilatantes: Para comenzar el movimiento no se necesita mucho esfuerzo de corte, pero a medida que la velocidad de deformación aumenta, esta situación cambia. Ejemplo: dióxido de titanio.
- De Bingham: Requieren un nivel significativo de esfuerzo antes de que el fluido comience a fluir. Una vez que comienza a fluir, la viscosidad permanece constante. Ejemplos: chocolate, salsa de tomate, mostaza, mayonesa, pasta dental, petróleo y aguas cloacales. La relación entre el esfuerzo de corte y la deformación viene dada por:

$$\tau = \tau_0 + \eta\sigma, \quad (1.27)$$

donde τ_0 es la tensión o esfuerzo umbral a partir del cual las capas de fluido comienzan a desplazarse entre sí.

La diferencia entre estos tres últimos grupos puede observarse en los gráficos siguientes (figuras 6 y 7).

1.14. Ecuaciones de Navier-Stokes.

Los fluidos obedecen las leyes generales de la mecánica del continuo: conservación de masa, de la energía, y del momento lineal. Ellas pueden escribirse como ecuaciones matemáticas una vez que una representación para el estado del fluido es elegida. En el contexto de la matemática, existen dos representaciones clásicas. Una es la llamada **representación lagrangiana** donde el estado de una partícula de fluido en un tiempo dado se describe con referencia a su posición inicial. La otra representación es la llamada **representación euleriana**, donde en cada tiempo t y posición \mathbf{x} en el espacio, se describe el estado de la partícula, en particular, la velocidad $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$.

En la representación euleriana del flujo, también simbolizamos la densidad $\rho(\mathbf{x}, t)$ como una función de la posición \mathbf{x} y del tiempo t . La conservación de masa es expresada mediante la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (1.28)$$

La conservación de momento es expresada en términos de la aceleración $\boldsymbol{\gamma}$ y el tensor de tensiones de Cauchy $\boldsymbol{\tau}$:

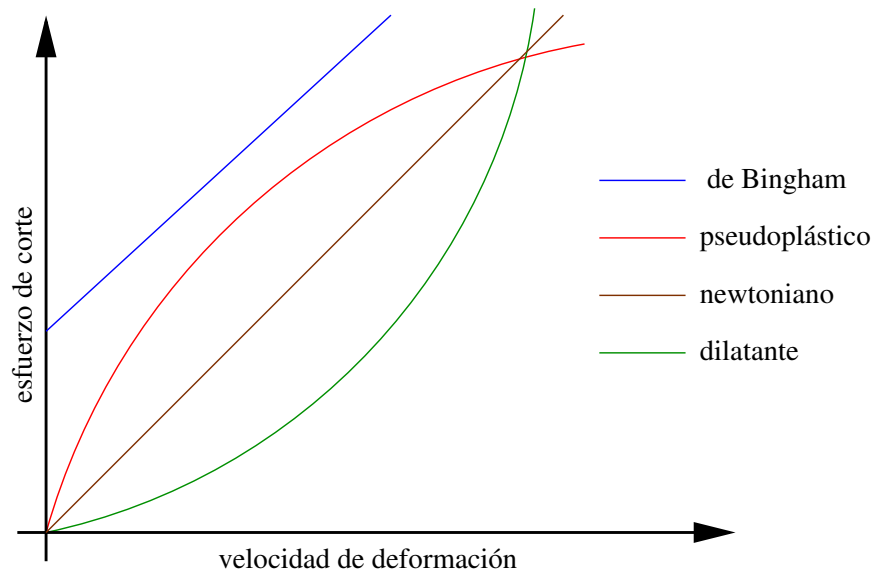


Figura 6: Clasificación de fluidos.

$$\rho\gamma_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j} + f_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.29)$$

Aquí $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ y $\boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij})_{i,j=1,2,3}$, en el caso de considerar tres dimensiones (ver figura 8). El vector $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ representa las fuerzas aplicadas al fluido.

El vector aceleración $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}, t)$ del fluido en la posición \mathbf{x} y tiempo t puede ser expresado, usando argumentos puramente cinemáticos, por la llamada **derivada material**:

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}, \quad (1.30)$$

o en componentes,

$$\gamma_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.31)$$

Insertando esta expresión en el lado derecho de la ecuación (1.29) se obtiene el término $\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$, que es el único término no lineal en las ecuaciones de Navier-Stokes; este término es también llamado el **término inercial**. Las ecuaciones de Navier-Stokes están entre las pocas ecuaciones de la física matemática para las cuales la no linealidad no surge de los atributos físicos del sistema, sino más bien de los aspectos cinemáticos del problema.

Es también necesario agregar hipótesis y argumentos físicos. La teoría de la reología¹ relaciona el esfuerzo de corte con el campo de velocidades para diferentes materiales a través de la ley esfuerzo-deformación y de otras ecuaciones constitutivas.

Si suponemos que el fluido es newtoniano, la relación esfuerzo-deformación es lineal. Más precisamente, para fluidos newtonianos el tensor de tensiones es expresado en términos del campo de velocidades por la fórmula:

¹La reología es el estudio de los principios físicos que regulan el movimiento de los fluidos.

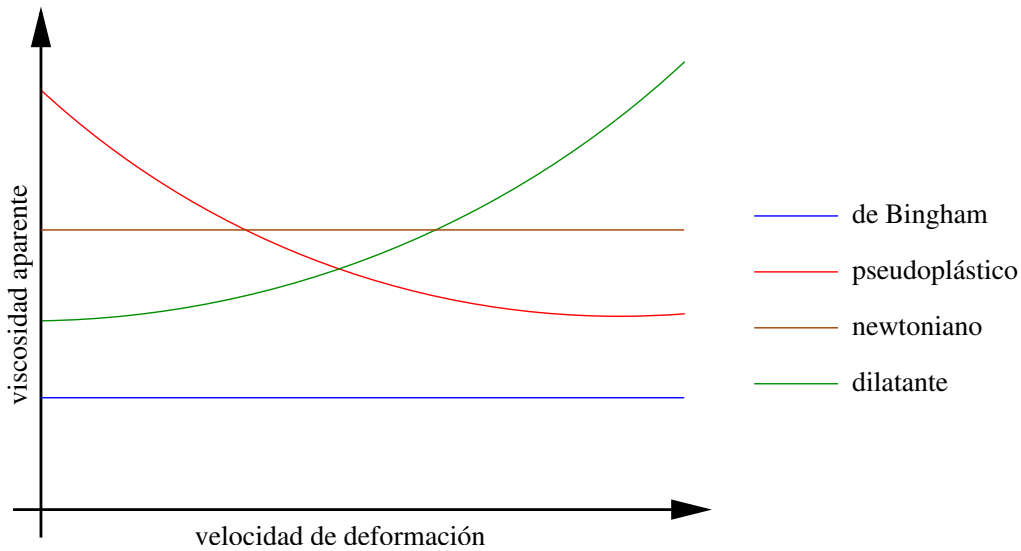


Figura 7: Derivada de la función viscosidad.

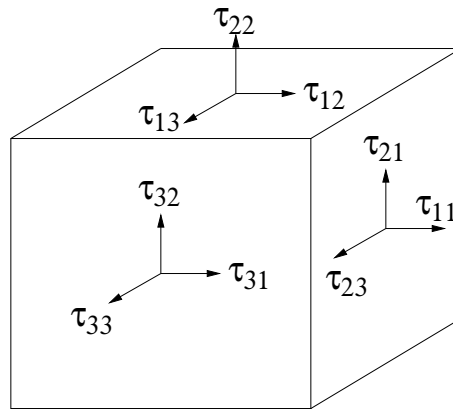


Figura 8: Tensiones en un elemento de volumen.

$$\tau_{ij} = \eta \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\} + (\lambda \operatorname{div} \mathbf{u} - p) \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1.32)$$

donde $p = p(\mathbf{x}, t)$ es la presión. Aquí, δ_{ij} es el símbolo de Kronecker y η, λ son constantes. La constante η es llamada el coeficiente de viscosidad, y $3\lambda + 2\eta$ es el coeficiente de dilatación. Por razones termodinámicas, $\eta > 0$ y $3\lambda + 2\eta \geq 0$. Introduciendo la ley de esfuerzo-deformación (1.32) en la ecuación de momentos (1.29), obtenemos:

$$\rho \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right\} = \eta \Delta \mathbf{u} + (\eta + \lambda) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} - \nabla \mathbf{p} + \mathbf{f}. \quad (1.33)$$

Las ecuaciones (1.28) y (1.33) gobiernan el movimiento de fluidos newtonianos compresibles tales como el aire a altas velocidades (número Mach mayor que 0,5). Si asumimos que el fluido es incompresible y homogéneo, entonces la densidad es constante en el espacio y el tiempo: $\rho(\mathbf{x}, t) \equiv \rho_0$. En este caso, la ecuación de continuidad se reduce a la condición:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (1.34)$$

Debido a que la densidad es constante, es posible dividir la ecuación de momentos (1.33) por ρ y considerar el coeficiente de viscosidad cinemática $\nu = \eta/\rho_0$; también podemos reemplazar la presión p y la fuerza \mathbf{f} por la presión cinética p/ρ_0 y la densidad de fuerzas \mathbf{f}/ρ_0 , respectivamente. Haciendo esto, y teniendo en cuenta la condición de incompresibilidad (1.34), obtenemos las **ecuaciones de Navier-Stokes** para un fluido newtoniano, homogéneo e incompresible:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad (1.35)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.36)$$

donde, por simplicidad, representamos la divergencia de \mathbf{u} por $\nabla \cdot \mathbf{u}$. Para los propósitos prácticos, la densidad ha sido realmente normalizada a la unidad; sin embargo, podemos reemplazar (1.35) por (1.33), recordando que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ y que ρ es constante.

En el caso de tener un fluido no newtoniano las ecuaciones constitutivas son diferentes, y variarán según la naturaleza del fluido.

1.15. Forma adimensional de las ecuaciones de Navier-Stokes.

A veces es conveniente, por discusiones físicas y transparencia matemática, considerar una forma adimensional de la ecuación de conservación de momento. Para este propósito introducimos una longitud de referencia L_* y un tiempo de referencia T_* para el flujo, y definimos:

$$\mathbf{x} = L_* \mathbf{x}', \quad t = T_* t', \quad p = P_* p', \quad \mathbf{u} = U_* \mathbf{u}', \quad \mathbf{f} = \frac{L_*}{T_*^2} \mathbf{f}', \quad (1.37)$$

donde $P_* = U_*^2$ y $U_* = L_*/T_*$ son una presión de referencia y una velocidad de referencia, respectivamente. Sustituyendo estas cantidades en (1.35) y (1.36) obtenemos para \mathbf{u}' , p' , \mathbf{f}' la misma ecuación pero con ν reemplazado por Re^{-1} , donde Re es un número adimensional llamado el **número de Reynolds**:

$$Re = \frac{L_* U_*}{\nu}. \quad (1.38)$$

El valor del número de Reynolds depende de la elección de la velocidad y longitud de referencia. Si Ω (el dominio ocupado por el fluido) es acotado, entonces L_* puede ser tomado como el diámetro de Ω o como alguna otra longitud de gran escala relacionada a Ω , tal como el ancho de un canal. La elección de U_* (y por lo tanto de T_*) depende del tipo de fuerzas sobre el flujo; puede estar relacionada a las fuerzas aplicadas en la frontera de Ω o al gradiente de presión, for ejemplo. Varias elecciones de L_* y U_* pueden ser apropiadas para un flujo dado, llevando a diferentes definiciones del número de Reynolds, pero cuando Re es grande estamos ante la presencia de un flujo turbulento. La forma del dominio ocupado por el fluido es uno de los factores que determina la magnitud de este parámetro. Una vez que la forma del dominio Ω es fijada, reescalamientos en longitud (L_*) y velocidad (U_*) y cambios en la viscosidad (ν) afectan las ecuaciones sólo a través del número Re .

Por lo tanto, diferentes experimentos pueden llevar a las mismas ecuaciones adimensionales. Por ejemplo, multiplicando la velocidad por 2 y dividiendo el diámetro del dominio por 2 conduce al mismo número de Reynolds, de esta manera podemos pasar de un experimento

a otro; ésta es la hipótesis de similaridad de Reynolds constantemente usada en ingeniería mecánica.

Un argumento heurístico ilustrando el significado del número de Reynolds surge comparando los términos inercial y de disipación de las ecuaciones de Navier-Stokes. El término inercial $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ tiene dimensión:

$$\frac{U_*^2}{L_*},$$

mientras que el término de disipación tiene dimensión:

$$\nu \frac{U_*}{L_*^2}.$$

El término inercial domina cuando:

$$Re = \frac{L_* U_*}{\nu} \gg 1. \quad (1.39)$$

Poniendo $Re = \infty$, es decir $\nu = 0$, obtenemos el caso de fluidos no viscosos. En este caso, la condición de incompresibilidad se mantiene, pero la ecuación de momento cambia, dando origen a las llamadas ecuaciones de Euler para fluidos perfectos no viscosos:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla \mathbf{p} = \mathbf{f}, \quad (1.40)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.41)$$

1.16. El petróleo: un ejemplo de fluido de Bingham.

Se dice que el **petróleo** es el recurso energético no renovable más importante en la historia de la humanidad. Aporta el mayor porcentaje del total de la energía que se consume en el mundo. Aunque se conoce de su existencia y utilización desde épocas milenarias, la historia del petróleo como elemento vital y estratégico de desarrollo es relativamente reciente, de menos de doscientos años. En 1850 Samuel Kier, un boticario residente de Pittsburg (Pennsylvania) lo comercializó por primera vez bajo el nombre de “aceite de roca” o “petróleo”. A partir de entonces se puede decir que comenzó el desarrollo de la industria del petróleo y el verdadero aprovechamiento de un recurso que indudablemente ha contribuido a la formación del mundo actual.

El petróleo es una sustancia aceitosa de color oscuro a la que, por sus compuestos de hidrógeno y carbono, se le denomina hidrocarburo.

La composición elemental del petróleo normalmente está comprendida dentro de los siguientes intervalos:

Carbón	→	84 % - 87 %
Hidrógeno	→	11 % - 14 %
Azufre	→	0 % - 2 %
Nitrógeno	→	0.2 %

Este hidrocarburo puede estar en estado líquido o en estado gaseoso. En el primer caso es un aceite al que también se le dice **crudo**. En el segundo se le conoce como gas natural

Según la teoría más aceptada, el origen del petróleo y del gas natural es de tipo orgánico y sedimentario. Esta teoría enseña que el petróleo es el resultado de un complejo proceso físico-químico en el interior de la tierra, en el que, debido a la presión y las altas temperaturas, se produce la descomposición de enormes cantidades de materia orgánica que se convierten en aceite y gas. Esa materia orgánica está compuesta fundamentalmente por el fitoplancton y el zooplancton marinos, al igual que por materia vegetal y animal, todo lo cual se depositó en el pasado en el fondo de los grandes lagos y en el lecho de los mares.

El petróleo se encuentra ocupando los espacios de las rocas porosas, principalmente de rocas como areniscas y calizas. Es algo así como el agua que empapa una esponja. En ningún caso hay lagos de petróleo. Por consiguiente, no es cierto que cuando se extrae el petróleo quedan enormes espacios vacíos en el interior de la tierra, sino que los poros que se van desocupando son llenados de inmediato por el mismo petróleo que no alcanza a extraerse y por agua subterránea.

Algunos de sus derivados más importantes son: gasolinas (para todo tipo de vehículos), kerosene, gas propano, bencina industrial, disolventes alifáticos, asfalto, bases lubricantes, ceras parafínicas, polietileno, alquitrán aromático, benceno, tolueno, etc..

El petróleo crudo ceroso, conocido como “waxy crude oil” es petróleo mineral con alta concentración de **parafina** (una mezcla de hidrocarburos pesados) que a baja temperatura puede precipitar formando una fase cerosa. Este tipo de fluidos es conocido por causar dificultades en su manejo y entubamiento, especialmente cuando son transportados a través de regiones árticas y océanos fríos. A altas temperaturas se comportan como fluidos newtonianos, pero si la temperatura desciende debajo de un valor crítico sus propiedades de flujo se vuelven notoriamente no newtonianas. Como se describe en [1], la parafina comienza a cristalizarse cuando se llega a un equilibrio entre presión y temperatura (“cloud point”), mientras que a una temperatura más baja (“pour point”), los cristales empiezan a aglomerarse en una estructura semejante a un gel, cambiando radicalmente los parámetros reológicos del flujo. Debajo del “cloud point” se puede detectar la presencia de una tensión umbral, y por ello consideramos este tipo de petróleo como un fluido de Bingham incompresible (aunque con parámetros variables).

1.16.1. La parafina en el petróleo.

Los constituyentes esenciales del petróleo son los hidrocarburos junto a una cantidad más o menos relevante de componentes orgánicos conteniendo carbono, hidrógeno, azufre, oxígeno y nitrógeno, junto a una cantidad muy pequeña de compuestos que contienen diversos elementos como níquel, hierro y cobre. No todas las clases de hidrocarburos (compuestos conteniendo solamente carbono e hidrógeno) están presentes en el petróleo crudo. Se han identificado en el petróleo cuatro grupos principales de hidrocarburos: alcanos, cicloalcanos, aromáticos y no saturados (ver [2]). La parafina pertenece al grupo de los alcanos, los cuales, con la vieja nomenclatura, eran llamados hidrocarburos parafínicos. Los alcanos tienen la fórmula general C_nH_{2n+2} (el metano, CH_4 , es el alcano más simple). Éstos pueden estar subdivididos, en primera aproximación, en dos clases: n-alcanos e isoalcanos. Los n-alcanos están constituidos de una cadena lineal de átomos de carbono. Los isoalcanos en cambio contienen los mismos átomos y en igual cantidad que los n-alcanos, pero los átomos están ligados unos a otros de modos diferentes. Los isoalcanos están en efecto constituidos de una cadena ramificada de átomos de carbono.

Como en el caso del metano la molécula de un alcano comprende solamente lazos covalentes.

Ellos unen carbono-carbono o carbono-hidrógeno. En el primer caso son lazos no polares, en el segundo caso los lazos están dispuestos de modo más simétrico tal que la leve polaridad del enlace C-H viene anulada. Por lo tanto la molécula de un alcano resulta apolar o débilmente polar. Esto explica, entre otras cosas, la razón por la cual los alcanos son insolubles en agua o en otros solventes fuertemente polares. En cambio, los alcanos son solubles en solventes apolares como el benceno, el éter o el cloroformo.

La **parafina**, comúnmente llamada cera, consiste de alcanos a cadena larga (lineal o ramificada) extendida de C_{18} hasta aproximadamente C_{40} .

La cantidad de parafina en el petróleo crudo es extremadamente variable. Se pasa de contenidos del 30-40% (petróleo en Utah) a contenidos del 1% (South Louisiana).

El crudo con elevado contenido de parafina es llamado “waxy crude oil” o crudo ceroso. Por eso los problemas causados por los depósitos de parafina, interesando todo el ciclo productivo (extracción, transporte y refinación) son extremadamente caros y onerosos. En particular el transporte de los “waxy crudes” a través de regiones frías, como la zona ártica o los océanos, resulta muy difícil. Las técnicas para el control de la parafina toman gran importancia debido a esta causa. Típicamente los métodos que son utilizados proveen un tratamiento térmico o mecánico o bien el uso de solventes químicos que inhiben la agregación.

Los depósitos bituminosos pueden causar problemas similares y tal vez aún más serios que aquellos debidos a la parafina. Supondremos que las singulares características reológicas de los “waxy crudes” están exclusivamente debidos a su presencia.

El fenómeno de solidificación de la parafina es extremadamente complejo. Sin embargo, el proceso se puede esquematizar en tres fases sucesivas: nucleación, crecimiento y agregación.

- **Nucleación:** Una solución de parafina en un solvente puede ser descripta como un medio isótropo con interacciones entre la parafina y las moléculas del solvente. Con el decrecimiento de la temperatura aumenta la interacción entre los varios tipos de moléculas que constituyen la parafina. Cuando las fuerzas intermoleculares de atracción llegan a un punto en que son mayores que las interacciones solvente parafina, las moléculas de parafina se unen para formar un núcleo cristalino. El fenómeno es muy complicado cuando cristalizan también más n-alcanos. Se tiene por lo tanto la formación de cristales mixtos. La temperatura a la cual aparecen los primeros cristales en el fluido se llama “cloud point”, o temperatura de cristalización, o de enturbiamiento, y depende fuertemente de la composición del crudo.
- **Crecimiento:** Cuando las moléculas de parafina se separan de la solución donde estaban disueltas se acomodan en diferentes estructuras ordenadas de modo que forman capas mono o multimoleculares en las cuales las moléculas mismas son paralelas las unas a las otras y perpendiculares al plano de las capas. El crecimiento sucede sobre todo en los sitios donde es mayor la interacción entre el cristal y las moléculas libres. Esta es rápida sobre las caras laterales donde el cristal se expande rápidamente en largo y ancho. El crecimiento en espesor, que es más lento, sucede esencialmente por dos causas:
 - uno o más núcleos de cristal se depositan sobre la cara plana de un cristal ya formado y dan origen a una segunda cara extendida sobre la primera.
 - se crean defectos en una capa, debidos a moléculas emergentes de la misma capa, que constituirán nuevos sitios donde otras moléculas pueden posarse. El cristal crece en espesor formando espirales.

- **Agregación:** Si la temperatura es inferior al “cloud point” en pocos grados, se llega a una situación de equilibrio entre la parafina todavía disuelta en la solución y la que está cristalizada, tal que ésta última es solamente una pequeña fracción de la parafina total. Los cristales formados son relativamente pocos y teniendo pequeñas dimensiones no provocan grandes cambios de las características reológicas del fluido. Por otro lado, cuando la temperatura desciende muchos grados (típicamente 10-20%) bajo el “cloud point” aumenta notablemente la cantidad de parafina cristalizada. En consecuencia los cristales tienden a crecer y a agregarse. Estamos entonces en presencia del fenómeno que hemos llamado agregación. En la práctica se forma un entretrejido de cristales que dan origen a una estructura gelatinosa más o menos consistente. Esto provoca un cambio brusco y radical de las características reológicas del fluido. Este deja de comportarse como un fluido, puesto que a medida que la temperatura decrece, comienza a haber un comportamiento cada vez más similar a un sólido. La temperatura a la que sucede tal transición se llama “pour point” o punto de fluidez. El “pour point”, inferior al “cloud point” depende fuertemente del tipo de crudo. Hay sustancias que tienden a mejorar las características del fluido (son llamadas “flow improvers” o “pour point depressants”). La acción de tales productos sucede en la fase de crecimiento y agregación de los cristales de parafina. Tales sustancias se enlazan a los núcleos cristalinos formados creando una barrera de potencial de naturaleza eléctrica que impide a los microcristales el crecer y agregarse. De esta manera, el petróleo permanece siempre fluido y puede ser transportado.

1.16.2. Características reológicas de los “waxy crude oils”.

La viscosidad del petróleo crudo es quizás la propiedad más importante. Para la mayor parte de estos fluidos, a temperatura suficientemente alta (superior al “cloud point”) la viscosidad, fijada la temperatura, es constante, y son simplemente fluidos newtonianos. Cuando la temperatura se reduce cerca del “cloud point”, se observa un aumento progresivo de la viscosidad, sin embargo, el fluido todavía sigue siendo newtoniano. Una disminución adicional de la temperatura cerca de los valores del “pour point” provoca en cambio, una transición en el comportamiento del fluido: se pasa de un fluido newtoniano a un fluido no newtoniano.

A temperaturas inferiores o vecinas al punto de fluidez el fluido comienza a sufrir, por ejemplo, un esfuerzo umbral o “yield stress”; es decir, es necesario que el esfuerzo de corte (“shear stress”) que se ejerce entre las diferentes capas del fluido sea superior a un cierto nivel (llamado “yield stress”) a partir del cual existe desplazamiento entre las capas de fluido.

1.17. Modelo físico matemático del flujo de petróleo con parafina.

Especificamos las hipótesis físicas preliminares.

F1: Baja temperatura.

Si el campo de velocidad está indicado con $T(\vec{x}, t)$, definido en un dominio V contenido en \mathbb{R}^2 , donde se encuentra el fluido, se asume que:

$$T(\vec{x}, t) \leq T_{pp}, \quad \vec{x} \in V, \quad t \geq 0, \quad (1.42)$$

donde T_{pp} es el “pour point”.

F2: Densidad constante.

Indicando por ρ la densidad del medio se asume que:

$$\rho = \text{constante.} \quad (1.43)$$

Si $\vec{v}(\vec{x}, t)$ es el campo de velocidades del fluido, en virtud de la ecuación de la continuidad, la fórmula (1.43) nos dice que $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ en V .

F3: Movimiento laminar.

Supondremos que el movimiento del fluido es siempre laminar. Tal hipótesis es justificada por el hecho de que, para bajas temperaturas, el número de Reynolds es tal que garantiza este tipo de movimientos.

Hemos visto que los petróleos con elevado contenido de parafina evidencian la presencia de un “yield stress” cuando se está cerca del “pour point”. Resulta evidente por lo tanto que el modelo reológico más simple para describir tales fluidos es un modelo a dos parámetros: “yield stress” τ_0 y viscosidad η .

1.17.1. Modelo reológico.

Si se indica con τ el esfuerzo de corte por unidad de superficie, σ la velocidad de deformación o gradiente del campo de velocidad y con τ_0 la tensión umbral (teniendo las mismas dimensiones que τ) se asume que el fluido tiene el siguiente comportamiento:

- si $\tau < \tau_0$ el medio se comporta como un sólido en el cual no hay desplazamiento de las capas entre sí;
- si $\tau > \tau_0$ el medio se comporta como un fluido y la relación entre τ y σ es lineal.

El “yield stress” τ_0 es el umbral que debe ser superado para que el movimiento fluido tenga lugar. Es claro que tales fluidos son de tipo **Bingham**.

El modelo más simple de fluido de Bingham es el que considera τ_0 y η constantes. Sin embargo, se ha demostrado (ver [3] y [4]) que tales parámetros pueden depender de la historia térmica y de la historia mecánica del fluido. Se introducen por lo tanto dos nuevos parámetros α y β , llamados respectivamente la cantidad de parafina cristalizada y su estado de agregación, y se asume que son los únicos responsables de la variación de η y de τ_0 . En la práctica, esto implicará que la reología particular del fluido estará unívocamente determinada por la dinámica de β y de α .

Definición 1.1 *Se define fracción de parafina cristalizada y se indica con β , al cociente entre la masa de parafina cristalizada presente en la unidad de volumen y la masa total de parafina presente en todo el fluido.*

En general $\beta = \beta(\vec{x}, t)$ y además $0 \leq \beta(\vec{x}, t) \leq 1$ para $\vec{x} \in V$ y $t > 0$.

Definición 1.2 *Se define grado de agregación de la parafina y se indica con α , al cociente entre la masa de parafina sólida agregada presente en la unidad de volumen y la masa total de la parafina sólida presente en todo el fluido.*

Como antes, $\alpha = \alpha(\vec{x}, t)$ y además:

$$\begin{cases} \alpha(\vec{x}, t) \in [0, 1], & \text{si } \beta(\vec{x}, t) \neq 0, \\ \alpha(\vec{x}, t) = 0, & \text{si } \beta(\vec{x}, t) = 0. \end{cases} \quad (1.44)$$

La definición de α presupone la introducción de un diámetro de referencia (que dependerá de las dimensiones de los microcristales), de modo de especificar lo que se entiende por parafina agregada.

Será considerada agregada toda aquella parafina sólida organizada en estructuras cuyas dimensiones medias son mayores que las de referencia.

1.17.2. Viscosidad.

Se asume que la viscosidad depende exclusivamente de α y de β :

$$\eta = \eta(\alpha, \beta), \quad (1.45)$$

con η tal que:

V1: $\eta : ([0, 1] \times [0, 1]) \rightarrow [\eta_m, \eta_M]$ donde $0 < \eta_m < \eta_M < +\infty$.

V2: η monótona creciente en α y β .

V3: $\eta \in C^1([0, 1] \times [0, 1])$.

1.17.3. Yield stress.

Se asume que el “yield stress” es una función de un solo parámetro α .

$$\tau_0 = \tau_0(\alpha), \quad (1.46)$$

con τ_0 tal que:

Y1: $\tau_0 : [0, 1] \rightarrow [\tau_m, \tau_M]$, donde $0 \leq \tau_m < \tau_M < +\infty$.

Y2: τ_0 es monótona creciente.

Y3: $\tau_0 \in C^1([0, 1])$.

Evidentemente la forma analítica explícita de (1.45) y (1.46) vendrá determinada experimentalmente. Inclusive se puede pensar, como primera aproximación, en una dependencia lineal.

1.17.4. Evolución de β .

En primera aproximación se puede suponer que β está completamente determinada por la temperatura $T(\vec{x}, t)$ y por el campo de presiones $P(\vec{x}, t)$. Escribimos por lo tanto:

$$\beta = \beta(T(\vec{x}, t), P(\vec{x}, t)). \quad (1.47)$$

La fórmula (1.47) puede ser considerada una buena aproximación si la parafina disuelta en solución se mantiene siempre uniformemente distribuida en el fluido. Si tal hipótesis no se verifica (debido por ejemplo a grandes gradientes térmicos) la evolución de β estará determinada por una ecuación de difusión acoplada a una ecuación de evolución para la densidad de parafina disuelta en solución.

1.17.5. Evolución de α .

En la búsqueda de determinar una correcta ecuación de evolución para α necesitamos tener presente que:

- la tendencia de la parafina cristalizada a agregarse es influenciada por la historia térmica del fluido;
- la reducción del grado de agregación de la parafina sólida se debe a la historia mecánica.

En la dinámica de α deben por lo tanto aparecer estos dos efectos contrastantes, pesados con términos que tengan en cuenta la historia térmica y mecánica. Consideremos un elemento de volumen del fluido que en el tiempo t se encuentra en el punto de coordenadas \vec{x} . Se puede asumir que la variación del grado de agregación de la parafina contenida en tal volumen es dada por:

$$\alpha' = K_1(1 - \alpha)J_1[T] - K_2\alpha J_2[W], \quad (1.48)$$

donde:

- α' es la derivada de α respecto de t .
- W es la densidad de potencia disipada por la fuerza viscosa.
- K_1, K_2 son dos constantes determinadas de manera experimental (K_2 puede eventualmente depender de la temperatura).
- J_1, J_2 son dos funcionales dependiendo respectivamente de T y W . Se puede suponer que estos funcionales son lineales (la forma exacta deberá ser determinada experimentalmente).

1.18. Modelo simplificado.

Las hipótesis simplificativas que haremos son las siguientes:

S1: Temperatura uniforme y constante.

$$T(\vec{x}, t) = \text{constante}, \quad \vec{x} \in V, \quad t > 0. \quad (1.49)$$

S2: Fracción de parafina cristalizada uniforme y constante.

$$\beta(\vec{x}, t) = \text{constante}, \quad \vec{x} \in V, \quad t > 0. \quad (1.50)$$

S3: Grado de agregación de la parafina independiente de \vec{x} .

$$\alpha = \alpha(t) \quad (1.51)$$

La uniformidad de α se produce si en el fluido hay una mezcla en una escala de tiempo inferior a aquel tiempo de evolución de α , de modo que éste último sea casi lo mismo en todas partes. En la práctica es como si en lugar de α utilizáramos el valor medio espacial.

Obviamente tal posición será físicamente posible solamente si el fluido es puesto en un dispositivo que lo mezcle antes que se genere una significativa falta de homogeneidad espacial en el grado de agregación de α . En la práctica esta situación se encuentra en los “loop” experimentales.

S4: Ecuación de evolución de α en los cuales no aparecen los efectos históricos.

$$\begin{cases} \alpha'(t) &= K_1(1 - \alpha(t)) - K_2\alpha(t) |\overline{W}(t)|, \\ \alpha(0) &= \alpha_0. \end{cases} \quad (1.52)$$

donde:

- $\overline{W}(t) = \frac{1}{V} \int_V W(\vec{x}, t) d\vec{x}$ es la potencia media disipada por la fuerza viscosa que, siendo negativa, debe ser considerada con valor absoluto.
- K_1, K_2 son constantes a determinar experimentalmente.

S5: Modelo reológico tipo Bingham en los cuales:

$$\begin{aligned} \eta &= \text{constante}, \\ \tau_0 &= \tau_0(\alpha), \end{aligned} \quad (1.53)$$

donde para τ_0 valen las hipótesis (Y1), (Y2) e (Y3).

El problema resultante de estas hipótesis simplificadoras puede adaptarse también a crudos con elevado contenido de bitumen (por bitumen se entiende el residuo de la destilación efectuada en la refinería).

2. Planteo del problema.

En esta sección consideraremos el planteo del problema de Bingham en geometría plana y geometría cilíndrica.

2.1. Geometría plana.

Consideremos dos placas paralelas infinitas, separadas a una distancia $2L$ entre sí, dentro de las cuales circula un fluido de Bingham homogéneo (con densidad constante) e incompresible ($\text{div } \mathbf{u} = 0$). Ver figura 9.

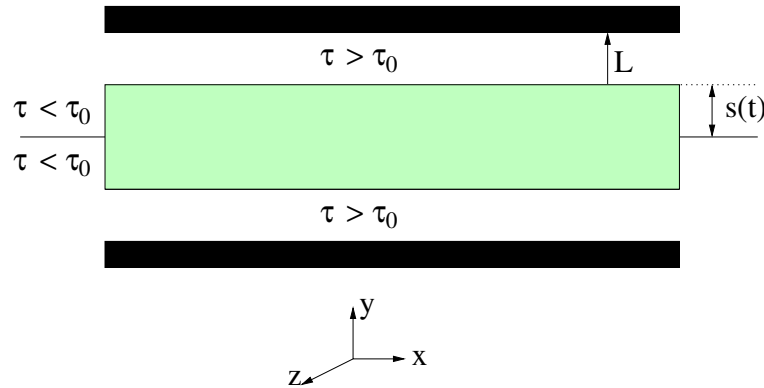


Figura 9: Placas paralelas por donde circula un fluido de Bingham.

El movimiento se produce debido a la acción de un gradiente de presión, que supondremos que está sólo en la dirección x , es decir, $p_y = p_z = 0$.

Además consideraremos que el fluido es laminar. Debido a la dirección del gradiente de presión, el único desplazamiento posible se da en la dirección de x , es decir, $v = w = 0$, donde $\mathbf{u} = (u, v, w)$.

Tendremos también como hipótesis que la velocidad u dependerá sólo de t y de y , es decir, $u_x = u_z = 0$.

En el caso de fluidos de Bingham podemos pensar que el tensor de tensiones tiene la forma:

$$\tau_{ij} = \eta \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\} + (\lambda \text{div } \mathbf{u} - p) \delta_{ij} + (\tau_0)_{ij}. \quad (2.1)$$

Notar que los únicos tensores no nulos son τ_{12} y τ_{21} . Y además:

$$\tau_{12} = \eta \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + (\tau_0)_{12}, \quad (2.2)$$

lo que coincide con (1.27).

Debido a las propiedades de viscosidad, se forman dos regiones en el conducto: una zona de flujo viscoso, en contacto con las placas, donde el esfuerzo de corte es superior a la tensión umbral; y una zona rígida, donde las placas de fluido viajan todas a la misma velocidad, ya que el esfuerzo de corte no es suficiente para separarlas (ver figura 9).

En la zona de flujo viscoso, como el fluido es unidimensional, la única ecuación de momento (1.29) que tenemos es la que corresponde a la primer componente:

$$\rho\gamma_1 = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{1j}}{\partial x_j} + f_1 = \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} + f_1. \quad (2.3)$$

Notar que las ecuaciones constitutivas quedan igual que para un fluido newtoniano (ver (1.29)), puesto que la derivada anula el término umbral de la tensión. Por lo tanto, si consideramos que no hay fuerzas externas:

$$\rho u_t = \eta u_{yy} - p_x. \quad (2.4)$$

El gradiente de presión p_x es sólo función de t (es un simple ejercicio de derivación usando las hipótesis). Luego:

$$\rho u_t - \eta u_{yy} = f(t), \quad (2.5)$$

donde $f(t)$ representa $-\partial p/\partial x$.

Para la zona del núcleo rígido, usamos la segunda ley de Newton. Las fuerzas sobre la zona rígida provienen de $f(t)$ y la producida por el esfuerzo de corte (ver figura 10).

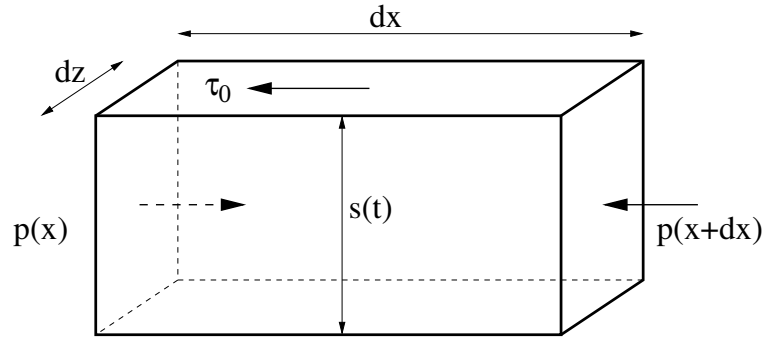


Figura 10: Balance de fuerzas.

Por lo tanto, la ecuación del núcleo rígido se reduce a:

$$u_t|_{x=\pm s(t)} = \frac{1}{\rho} \left(f(t) - \frac{\tau_0}{s(t)} \right). \quad (2.6)$$

Debido al efecto producido por la viscosidad, el fluido se adhiere a las placas paralelas, teniendo allí velocidad cero:

$$u|_{x=\pm L} = 0. \quad (2.7)$$

Supondremos también que el núcleo rígido no se deforma, es decir:

$$u_y|_{x=\pm s(t)} = 0. \quad (2.8)$$

Se imponen condiciones iniciales tanto para la velocidad, como para la posición inicial de la frontera que separa las dos regiones. Reuniendo todas las ecuaciones obtenemos el siguiente sistema, donde por simetría consideraremos sólo la parte superior del conducto.

$$(P) \begin{cases} \rho u_t - \eta u_{yy} = f(t), & t > 0, & s(t) < y < L, \\ u_y(s(t), t) = 0, & t > 0, \\ u_t(s(t), t) = \frac{1}{\rho} \left(f(t) - \frac{\tau_0}{s(t)} \right), & t > 0, \\ u(L, t) = 0, & t > 0, \\ u(y, 0) = u_0(y), & s(0) = s_0, \quad 0 < s_0 < y < L. \end{cases} \quad (2.9)$$

Consideremos el siguiente cambio de variables:

$$\begin{cases} \tilde{y} = \frac{y}{L}, & \tilde{t} = \frac{\eta}{\rho L^2} t, & \tilde{u}(\tilde{y}, \tilde{t}) = \frac{\rho L}{\eta} u(y, t), & \tilde{f}(\tilde{t}) = \frac{\rho L^3}{\eta^2} f(t), \\ \tilde{\tau}_0 = \frac{\rho L^2}{\eta^2} \tau_0, & \tilde{s}(\tilde{t}) = \frac{1}{L} s(t), & \tilde{u}_0(\tilde{y}) = \frac{\rho L}{\eta} u_0(y), & \tilde{s}_0 = \frac{1}{L} s_0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Las cantidades con tilde cumplen el siguiente sistema adimensional (los tildes se han quitado para facilitar la lectura):

$$u_t - u_{yy} = f(t), \quad t > 0, \quad s(t) < y < 1, \quad (2.11)$$

$$u_y(s(t), t) = 0, \quad t > 0, \quad (2.12)$$

$$u_t(s(t), t) = f(t) - \frac{\tau_0}{s(t)}, \quad t > 0, \quad (2.13)$$

$$u(1, t) = 0, \quad t > 0, \quad (2.14)$$

$$u(y, 0) = u_0(y), \quad s(0) = s_0, \quad 0 < s_0 < y < 1. \quad (2.15)$$

Este es el problema (P) adimensionalizado. Las incógnitas son la velocidad u y la frontera $s(t)$ que separa las dos regiones. A este tipo de problemas, donde una de las incógnitas es el dominio, se los denomina problemas de **frontera libre**.

Los problemas derivados nos serán de utilidad. Si $w = u_y$, entonces se cumple el problema (P_y):

$$w_t - w_{yy} = 0, \quad t > 0, \quad s(t) < y < 1, \quad (2.16)$$

$$w(s(t), t) = 0, \quad t > 0, \quad (2.17)$$

$$w_y(s(t), t) = -\frac{\tau_0}{s(t)}, \quad t > 0, \quad (2.18)$$

$$w_y(1, t) = -f(t), \quad t > 0, \quad (2.19)$$

$$w(y, 0) = u'_0(y), \quad s(0) = s_0, \quad 0 < s_0 < y < 1. \quad (2.20)$$

Notar que si conocemos la función w , entonces podemos recuperar la función u calculando la integral:

$$u(y, t) = - \int_y^1 w(\xi, t) d\xi. \quad (2.21)$$

Si $z = u_t$, entonces (P_t):

$$z_t - z_{yy} = f'(t), \quad t > 0, \quad s(t) < y < 1, \quad (2.22)$$

$$z(s(t), t) = f(t) - \frac{\tau_0}{s(t)}, \quad t > 0, \quad (2.23)$$

$$z_y(s(t), t) = \frac{\tau_0 s'(t)}{s(t)}, \quad t > 0, \quad (2.24)$$

$$z(1, t) = 0, \quad t > 0, \quad (2.25)$$

$$z(y, 0) = u_0''(y) + f(0), \quad s(0) = s_0, \quad 0 < s_0 < y < 1. \quad (2.26)$$

Notar que si conocemos la función z , entonces podemos recuperar la función u calculando:

$$u(y, t) = u_0(y) + \int_0^t z(y, \theta) d\theta. \quad (2.27)$$

2.2. Geometría plana - Tensión umbral variable.

El planteo del problema en este caso es el mismo que en la sección anterior, salvo que debemos agregar la ecuación (1.52) para la evolución de α .

En nuestro caso, la potencia disipada viene dada por:

$$W(t) = \frac{\eta}{L} \int_{s(t)}^L u_y^2(y, t) dy + \frac{\tau_0(\alpha(t))}{L} u(s(t), t). \quad (2.28)$$

Por lo tanto, la ecuación de evolución para α es:

$$\alpha'(t) = K_1(1 - \alpha(t)) - \alpha(t) \frac{K_2}{L} \left| \eta \int_{s(t)}^L u_y^2(y, t) dy + \tau_0(\alpha(t)) u(s(t), t) \right|, \quad (2.29)$$

con la condición inicial:

$$\alpha(0) = \alpha_0. \quad (2.30)$$

A esta altura estamos en condiciones de plantear el sistema de ecuaciones que modela el problema. Usando la propiedad (2.21) se tiene el problema (P^α):

$$\rho u_t - \eta u_{yy} = f(t), \quad s(t) < y < L, \quad t > 0, \quad (2.31)$$

$$u(L, t) = 0, \quad t > 0, \quad (2.32)$$

$$u_y(s(t), t) = 0, \quad t > 0, \quad (2.33)$$

$$u_t(s(t), t) = \frac{1}{\rho} \left(f(t) - \frac{\tau_0(\alpha)}{s(t)} \right), \quad t > 0, \quad (2.34)$$

$$s(0) = s_0, \quad (2.35)$$

$$u(y, 0) = u_0(y), \quad s_0 \leq y \leq L, \quad (2.36)$$

$$\alpha'(t) = K_1(1 - \alpha(t)) - \frac{\alpha(t)K_2}{L} \left| \eta \int_{s(t)}^L u_y^2 dy - \tau_0(\alpha(t)) \int_{s(t)}^L u_y dy \right|, \quad t > 0, \quad (2.37)$$

$$\alpha(0) = \alpha_0. \quad (2.38)$$

Los problemas derivados nos serán de utilidad. Si $w = u_y$ entonces w satisface el problema (P_y^α) :

$$\rho w_t - \eta w_{yy} = 0, \quad s(t) < y < L, \quad t > 0, \quad (2.39)$$

$$w_y(L, t) = -f(t)/\eta, \quad t > 0, \quad (2.40)$$

$$w(s(t), t) = 0, \quad t > 0, \quad (2.41)$$

$$w_y(s(t), t) = -\tau_0(\alpha)/\eta s(t), \quad t > 0, \quad (2.42)$$

$$s(0) = s_0, \quad (2.43)$$

$$w(y, 0) = u'_0(y), \quad 0 < s_0 \leq y \leq L, \quad (2.44)$$

$$\alpha'(t) = K_1(1 - \alpha(t)) - \frac{\alpha(t)K_2}{L} \left| \eta \int_{s(t)}^L w^2 dy - \tau_0(\alpha(t)) \int_{s(t)}^L w dy \right|, \quad t > 0, \quad (2.45)$$

$$\alpha(0) = \alpha_0. \quad (2.46)$$

La función u puede recuperarse de la función w usando la ecuación (2.21). Si $z = u_t$ entonces la función z satisface el problema (P_t^α) :

$$\rho z_t - \eta z_{yy} = f'(t), \quad s(t) < y < L, \quad t > 0, \quad (2.47)$$

$$z(L, t) = 0, \quad t > 0, \quad (2.48)$$

$$z(s(t), t) = \frac{1}{\rho} \left(f(t) - \frac{\tau_0(\alpha)}{s(t)} \right), \quad t > 0, \quad (2.49)$$

$$z_y(s(t), t) = \frac{\tau_0(\alpha)s'(t)}{\eta s(t)}, \quad t > 0, \quad (2.50)$$

$$s(0) = s_0, \quad (2.51)$$

$$z(y, 0) = \frac{\eta}{\rho} u_0''(y) + \frac{f(0)}{\rho}, \quad 0 < s_0 \leq y \leq L, \quad (2.52)$$

$$\alpha'(t) = K_1(1 - \alpha(t)) - \frac{\alpha(t)K_2}{L} \left| \eta \int_{s(t)}^L w^2 dy - \tau_0(\alpha(t)) \int_{s(t)}^L w dy \right|, \quad t > 0, \quad (2.53)$$

$$\alpha(0) = \alpha_0. \quad (2.54)$$

La función u puede recuperarse usando la ecuación (2.27).

2.3. Geometría cilíndrica.

Consideremos un conducto cilíndrico como muestra la figura 11, por donde circula un fluido de Bingham. Debido a las propiedades viscosas aparecen dos regiones: una de fluido y otra de un núcleo rígido.

De manera similar al planteo en geometría plana, la ecuación para la región de fluido viene dada por la segunda ley de Newton. Las condiciones de contorno son: condición de adherencia en las paredes del conducto, no deformación del núcleo rígido, y velocidad inicial en $t = 0$. Para la parte rígida se usa también la ley de Newton. De esta manera se obtiene el problema:

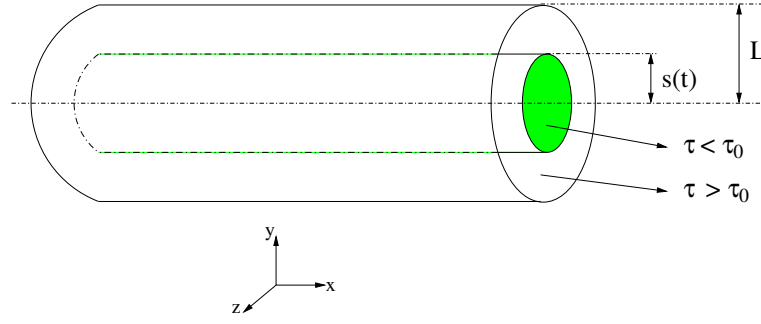


Figura 11: Conducto cilíndrico por donde circula un fluido de Bingham.

$$\rho u_t - \eta u_{rr} - \frac{\eta}{r} u_r + \frac{\tau_0}{r} = f(t), \quad s(t) < r < L, t > 0, \quad (2.55)$$

$$u(L, t) = 0, t > 0, \quad (2.56)$$

$$u_r(s(t), t) = 0, \quad t > 0, \quad (2.57)$$

$$u_t(s(t), t) = \frac{1}{\rho} \left(f(t) - \frac{2\tau_0}{s(t)} \right), \quad t > 0, \quad (2.58)$$

$$s(0) = s_0, \quad (2.59)$$

$$u(r, 0) = u_0(r), \quad 0 < s_0 < r < L. \quad (2.60)$$

Consideremos el siguiente cambio de variables:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{r} = \frac{r}{L}, \quad \tilde{t} = \frac{\eta}{\rho L^2} t, \\ \tilde{\tau}_0 = \frac{\rho L^2}{\eta^2} \tau_0, \quad \tilde{u}(\tilde{r}, \tilde{t}) = \frac{\rho L}{\eta} u(r, t), \\ \tilde{s}(\tilde{t}) = \frac{1}{L} s(t), \quad \tilde{u}_0(\tilde{r}) = \frac{\rho L}{\eta} u_0(r), \\ \tilde{s}_0 = \frac{1}{L} s_0, \quad \tilde{f}(\tilde{t}) = \frac{\rho L^3}{\eta^2} f(t). \end{array} \right. \quad (2.61)$$

De esta manera el problema adimensionalizado, que llamaremos (P^c), es:

$$u_t - u_{rr} - \frac{1}{r} u_r + \frac{\tau_0}{r} = f(t), \quad s(t) < r < 1, t > 0, \quad (2.62)$$

$$u(1, t) = 0, \quad t > 0, \quad (2.63)$$

$$u_r(s(t), t) = 0, \quad t > 0, \quad (2.64)$$

$$u_t(s(t), t) = f(t) - \frac{2\tau_0}{s(t)}, \quad t > 0, \quad (2.65)$$

$$s(0) = s_0, \quad (2.66)$$

$$u(r, 0) = u_0(r), \quad 0 < s_0 < r < 1. \quad (2.67)$$

Los problemas derivados nos serán de utilidad. Si $w = u_r$ obtenemos el problema (P_r^c):

$$w_t - w_{rr} - \frac{1}{r}w_r + \frac{1}{r^2}w - \frac{\tau_0}{r^2} = 0, \quad s(t) < r < 1, t > 0, \quad (2.68)$$

$$w_r(1, t) + w(1, t) = -(f(t) - \tau_0), \quad t > 0, \quad (2.69)$$

$$w(s(t), t) = 0, \quad t > 0, \quad (2.70)$$

$$w_r(s(t), t) = 0, \quad t > 0, \quad (2.71)$$

$$s(0) = s_0, \quad (2.72)$$

$$w(r, 0) = u'_0(r), \quad 0 < s_0 < r < 1. \quad (2.73)$$

Si $z = u_t$ entonces obtenemos el problema (P_t^c):

$$z_t - z_{rr} - \frac{1}{r}z_r = f'(t), \quad s(t) < r < 1, t > 0, \quad (2.74)$$

$$z(1, t) = 0, \quad t > 0, \quad (2.75)$$

$$z_r(s(t), t) = \frac{\tau_0 s'(t)}{s(t)}, \quad t > 0, \quad (2.76)$$

$$z(s(t), t) = f(t) - \frac{2\tau_0}{s(t)}, \quad t > 0, \quad (2.77)$$

$$s(0) = s_0, \quad (2.78)$$

$$z(r, 0) = f(0) + u''_0(r) + \frac{1}{r}u'_0(r) - \frac{\tau_0}{r}, \quad 0 < s_0 < r < 1. \quad (2.79)$$

La función u puede recuperarse a partir de w mediante la relación (2.21), y también a partir de z usando la ecuación (2.27).

3. Resultados conocidos - Generalizaciones.

3.1. Geometría plana.

En [5] se establece la existencia y unicidad del problema (P) y algunas propiedades de la frontera libre en función de las condiciones iniciales.

Observación 3.1 *La solución estacionaria del problema (P) adimensionalizado (2.11)-(2.15) es:*

$$\begin{cases} u_{\infty}(y) = -\frac{f_{\infty}}{2}(y^2 - 1) + f_{\infty}s_{\infty}(y - 1), & y \in [s_0, 1], \\ s_{\infty} = \frac{\tau_0}{f_{\infty}}. \end{cases} \quad (3.1)$$

La solución estacionaria del problema (P_y) expresado en las ecuaciones (2.16)-(2.20) es:

$$\begin{cases} w_{\infty}(y) = -f_{\infty}(y - s_{\infty}), & y \in [s_0, 1], \\ s_{\infty} = \frac{\tau_0}{f_{\infty}}. \end{cases} \quad (3.2)$$

A continuación daremos algunas hipótesis sobre los datos y condiciones iniciales.

► **Hipótesis A1:**

La velocidad inicial u_0 es una función continua con derivadas continuas hasta el tercer orden en $[s_0, 1]$ y se cumple:

$$u_0(1) = 0, \quad u'_0(y) \leq 0, \quad u''_0(y) \leq 0, \quad (3.3)$$

de donde se deduce que $u_0(y) \geq 0$.

► **Hipótesis A2:**

En $[s_0, 1]$ el dato inicial u_0 satisface:

$$\begin{aligned} u'_0(y) &\geq -f_{\infty}\left(y - \frac{\tau_0}{f_{\infty}}\right), \\ u''_0(y) &\geq -f_{\infty}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

► **Hipótesis A3:**

En $[s_0, 1]$ el dato inicial u_0 satisface:

$$\begin{aligned} u'_0(y) &\leq \min\left\{0, -f_{\infty}\left(y - \frac{\tau_0}{f_{\infty}}\right)\right\}, \\ u''_0(y) &\leq -f_{\infty}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

► **Condición de operabilidad:** El gradiente de presión debe satisfacer que $f(t) > \tau_0 \forall t > 0$.

El siguiente teorema nos habla acerca de la existencia local (hasta algún tiempo T_0), y de la unicidad del problema (P). La demostración puede consultarse en [5].

Teorema 3.1 *Bajo las condiciones (A1), el problema (2.11)-(2.15) tiene una única solución clásica $(u(y, t), s(t), T_0)$.*

Las siguientes dos proposiciones tratan acerca del comportamiento de la frontera libre. Sus demostraciones pueden consultarse en [5].

Teorema 3.2 *Si $s_0 > s_\infty$, $f'(t) \geq 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f_\infty$, f cumple la condición de operabilidad, u_0 satisface las hipótesis (A1) y (A2), y $u_0'''(y) \leq 0$, entonces el problema (2.11)-(2.15) tiene solución única para todo tiempo. Además:*

$$s'(t) < 0, \quad t > 0, \quad (3.6)$$

$$s_\infty \leq s(t) < 1, \quad t > 0, \quad (3.7)$$

$$0 \leq u(y, t) \leq u_\infty(y), \quad s(t) < y < 1, t > 0, \quad (3.8)$$

$$w_\infty(y) \leq w(y, t) \leq 0, \quad s(t) < y < 1, t > 0, \quad (3.9)$$

$$f(t) - f_\infty \leq u_t(y, t) \leq f(t), \quad s(t) < y < 1, t > 0, \quad (\text{es decir, } w_y(y, t) \leq 0), \quad (3.10)$$

$$w_{yy}(y, t) \leq 0, \quad s(t) < y < 1, t > 0, \quad (3.11)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = s_\infty. \quad (3.12)$$

Teorema 3.3 *Si $s_0 < s_\infty$, $f'(t) \leq 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f_\infty$, f cumple la condición de operabilidad, u_0 satisface las hipótesis (A1) y (A3), $u_0'''(y) \geq 0$, y $u_0''(y) \leq -\tau_0/y$, entonces el problema (2.11)-(2.15) tiene solución única para todo tiempo. Además:*

$$s'(t) > 0, \quad t > 0, \quad (3.13)$$

$$s_0 < s(t) < s_\infty, \quad t > 0, \quad (3.14)$$

$$w(y, t) \leq \min \left\{ 0, -f_\infty \left(y - \frac{\tau_0}{f_\infty} \right) \right\}, \quad s(t) < y < 1, t > 0, \quad (3.15)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = s_\infty. \quad (3.16)$$

A continuación se probará un teorema que generaliza los resultados presentados, y que servirá para validar el método numérico.

Teorema 3.4 *Si $s_0 > 0$, f cumple la condición de operabilidad, $f'(t) \geq 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty$, u_0 satisface las hipótesis (A1) y (A2), $u_0'''(y) \leq 0$, entonces el problema (P_y) admite única solución para todo tiempo y se cumple:*

$$s(t) > \tau_0/f(t), \quad t > 0, \quad (3.17)$$

$$u(y, t) \geq 0, \quad s(t) < y < 1, t > 0, \quad (3.18)$$

$$w(y, t) \leq 0, \quad s(t) < y < 1, t > 0, \quad (3.19)$$

$$s'(t) > 0, \quad t > 0, \quad (3.20)$$

$$w_y(y, t) \leq 0, \quad s(t) < y < 1, t > 0, \quad (3.21)$$

$$w_{yy}(y, t) \leq 0, \quad s(t) < y < 1, t > 0, \quad (3.22)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = 0. \quad (3.23)$$

Demostración: Elijamos ϵ positivo. Llamamos problema (P_y^n) al sistema (P_y) , expresado en las ecuaciones (2.16)-(2.20), salvo que el término $f(t)$ es reemplazado por la función $f_n(t)$ definida por:

$$f_n(t) = \begin{cases} f(t), & t \leq n, \\ \text{polinomio que empalme a } f \text{ en forma diferenciable,} & n < t < n + \epsilon, \\ f(n + \epsilon), & n + \epsilon \leq t. \end{cases} \quad (3.24)$$

Como la función f tiene límite infinito, existe un número natural N tal que si $n \geq N$ entonces se cumplen las hipótesis de existencia y unicidad del teorema 3.2, lo cual nos dice que cada problema (P_y^n) , con $n \geq N$, tiene solución única para t arbitrariamente grande, cumpliéndose también que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s^n(t) = \frac{\tau_0}{f(n + \epsilon)}, \quad s^n(t) > \frac{\tau_0}{f(n + \epsilon)}. \quad (3.25)$$

Llamaremos $\{w^n, s^n\}$ a la solución del problema (P_y^n) . Sea ahora T un número positivo arbitrario. Tomamos n tal que $n \geq N$ y $n \geq T$. Con esta elección el problema (P_y) coincide con el problema (P_y^n) en el intervalo $[0, T]$. Luego, de acuerdo al párrafo anterior, el problema (P_y) tiene única solución en el intervalo $[0, T]$ para todo T arbitrario. Esto nos dice que el problema (P_y) admite solución única $\{w, s\}$ para t arbitrariamente grande.

A partir de ahora consideraremos que $n \geq N$ para que se cumplan las hipótesis de existencia y unicidad. Por unicidad de la solución, y debido a que $f_n(t) = f(t)$ para $t \leq n$, se tiene que:

$$\begin{cases} s^n(t) = s(t), & t \leq n, \\ w^n(y, t) = w(y, t), & s(t) \leq y \leq 1, \quad t \leq n. \end{cases} \quad (3.26)$$

Esto dice que $\lim_{n \rightarrow \infty} s^n(t) = s(t)$. Por un teorema de monotonía de la solución respecto de los datos (ver [5]) se sabe que si $f_n < f_{n+1}$ entonces $s^n > s^{n+1}$. También sabemos que $\lim_{t \rightarrow \infty} s^n(t) = \tau_0/f(n + \epsilon)$ para todo n .

Sea ahora $\epsilon_1 > 0$. Por hipótesis existe $N_1 \geq N$ tal que si $n \geq N_1$ entonces $\tau_0/f(n + \epsilon) < \epsilon_1$. Luego existe M tal que si $t \geq M$, entonces $s^{N_1}(t) < \epsilon_1$. Por monotonía $s^n(t) < s^{N_1}(t) < \epsilon_1$ para $n \geq N_1$ y $t \geq M$. Dado $t \geq M$, tomo $n \geq t$, luego $s^n(t) = s(t)$, que da como resultado $s(t) < \epsilon_1$. Esto demuestra (3.23). Notar que la función $s(t)$ es positiva para todo tiempo.

La función $v = w_{yy}$ resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$v_t - v_{yy} = 0, \quad s(t) < y < 1, t > 0, \quad (3.27)$$

$$v_y(1, t) = -f'(t) \leq 0, \quad t > 0, \quad (3.28)$$

$$v(y, 0) = u_0'''(y) \leq 0, \quad 0 < s_0 < y < 1, \quad (3.29)$$

$$v(s(t), t) = \tau_0 s'(t)/s(t), \quad t > 0. \quad (3.30)$$

Por el lema de Hopf la solución no tiene máximo en $y = 1$. Por el principio del máximo es fácil ver que $v \leq 0$, lo cual nos dice que $w_{yy} \leq 0$. Esto da como consecuencia que $w_y(y, t)$ sea una función no creciente respecto de y para cada t . Luego el máximo de w_y está en la frontera libre. Como $w_y(s(t), t) = -\tau_0/s(t) \leq 0$, entonces $w_y \leq 0$. Por lo tanto, $w_y(s(t), t) \geq w_y(1, t)$. Reemplazando sus respectivos valores obtenemos que $s(t) > \tau_0/f(t)$.

Las desigualdades (3.18) y (3.20) son una consecuencia del principio del máximo aplicado a las funciones u , w y z respectivamente. Esto concluye la demostración. ■

3.2. Geometría plana - Tensión umbral variable.

Pediremos las siguientes hipótesis sobre los datos.

A - Hipótesis sobre τ_0 :

A1: $\tau_0 : [0, 1] \rightarrow [\tau_m, \tau_M]$, con $0 < \tau_m < \tau_M < \infty$.

A2: $\tau_0 \in C^1([0, 1])$.

A3: τ_0 es monótona no decreciente.

A4: $\tau_m \leq \tau_0(\alpha_0) \leq \tau_M$.

A5: τ_0 es Lipschitz con constante N , es decir,

$$|\tau_0(\alpha_1) - \tau_0(\alpha_2)| \leq N |\alpha_1 - \alpha_2|.$$

B - Hipótesis sobre f :

B1: $0 < f_m < f(t) < f_M$ para todo $t > 0$.

B2: Condición de operabilidad: $f_m > \tau_M/L$.

El método que se propondrá más adelante está definido para funciones f que satisfacen las propiedades arriba enunciadas, sin embargo, los teoremas de existencia y unicidad se han probado solamente para funciones f constantes.

C - Hipótesis sobre α_0 y s_0 :

C1: $s_m < s_0 < s_M$ con $s_m = \tau_m/f_M$ y $s_M = \tau_M/f_m$.

C2: $0 \leq \alpha_0 \leq 1$.

D - Hipótesis sobre $u_0(y)$:

D1: $u_0(y) \in C^3([s_0, L])$.

D2: $u_0(y) \geq 0$ para $s_0 \leq y \leq L$; $u_0(L) = 0$.

D3: $u'_0(y) \leq 0$ para $s_0 \leq y \leq L$; $u'_0(s_0) = 0$.

$u'_m(y) \leq u'_0(y) \leq u'_M(y)$ para $s_0 \leq y \leq L$ donde:

$$u'_m(y) = \begin{cases} 0, & 0 \leq y \leq s_m, \\ -\frac{f_M}{\eta}(y - s_m), & s_m \leq y \leq L, \end{cases} \quad (3.31)$$

$$u'_M(y) = \begin{cases} 0, & 0 \leq y \leq s_M, \\ -\frac{f_m}{\eta}(y - s_M), & s_M \leq y \leq L. \end{cases} \quad (3.32)$$

D4: $u''_0(y) < 0$ para $s_0 < y < L$; $u''_0(s_0) = -\tau_0(\alpha_0)/s_0$.

Se tiene un teorema de existencia y unicidad local:

Teorema 3.5 *Bajo las hipótesis mencionadas anteriormente, se cumple que existe un tiempo T_0 tal que el problema (P_t^α) admite una única solución en $(0, T_0)$.*

Como en la sección anterior, como una consecuencia del principio del máximo y el lema de Hopf, el campo de velocidades presenta las siguientes características:

$$u(y, t) \geq 0, \quad s(t) < y < L, \quad 0 < t < T_0, \quad (3.33)$$

$$u_y(y, t) \leq 0, \quad s(t) < y < L, \quad 0 < t < T_0, \quad (3.34)$$

$$u_{yy}(y, t) \leq 0, \quad s(t) < y < L, \quad 0 < t < T_0. \quad (3.35)$$

donde T_0 es el tiempo máximo de existencia. Además se pueden probar resultados sobre las propiedades de la frontera libre y la relación del campo de velocidades respecto de las condiciones iniciales:

$$s_m < s(t) < s_M < L, \quad (3.36)$$

$$u'_m(y) \leq u_y(y, t) \leq u'_M(y), \quad (3.37)$$

$$u_M(y) \leq u(y, t) \leq u_m(y), \quad (3.38)$$

donde:

$$u_M(y) = -\frac{f_m}{2\eta}(y^2 - L^2) + \frac{f_m s_M}{\eta}(y - L), \quad s_M < y < L, \quad (3.39)$$

$$u_m(y) = -\frac{f_M}{2\eta}(y^2 - L^2) + \frac{f_M s_m}{\eta}(y - L), \quad s_m < y < L. \quad (3.40)$$

Supongamos ahora que el problema (P^α) admite solución para todo tiempo y que para t suficientemente grande, la solución tiende asintóticamente hacia una solución estacionaria, solución que no tendrá más una dependencia temporal. Por lo tanto se tiene el problema estacionario (P_E^α) :

$$u''_{\infty}(y) = -f_{\infty}/\eta, \quad y \in [s_{\infty}, L], \quad (3.41)$$

$$u_{\infty}(L) = 0, \quad (3.42)$$

$$u'_{\infty}(s_{\infty}) = 0, \quad (3.43)$$

$$f_{\infty} - \tau_0(\alpha_{\infty})/s_{\infty} = 0, \quad (3.44)$$

$$K_1(1 - \alpha_{\infty}) - \frac{K_2}{L}\alpha_{\infty} \left| \eta \int_{s_{\infty}}^L u'^2_{\infty} dy + \tau_0(\alpha_{\infty})u_{\infty}(s_{\infty}) \right| = 0. \quad (3.45)$$

Las incógnitas son u_{∞} , s_{∞} y α_{∞} . De las ecuaciones (3.41)-(3.43) se puede obtener que:

$$u_{\infty}(y) = \frac{f_{\infty}}{2\eta}(L^2 - y^2) + \frac{f_{\infty}}{\eta}s_{\infty}(y - L), \quad s_{\infty} \leq y \leq L. \quad (3.46)$$

Usaremos las dos ecuaciones restantes para conseguir los valores de α_{∞} y s_{∞} . Operando algebraicamente se llega a:

$$1 - \alpha_{\infty} \left[1 + \frac{K_2 f_{\infty}^2}{6K_1 \eta L} (L - s_{\infty})^2 (2L + s_{\infty}) \right] = 0. \quad (3.47)$$

A partir de ahora es necesario conocer la forma de la función τ_0 . Como primera aproximación podemos suponer que se tiene una relación lineal:

$$\tau_0(\alpha) = \tau_m + \alpha(\tau_M - \tau_m). \quad (3.48)$$

Usando esta información y combinando las ecuaciones (3.44) y (3.47) se obtiene la siguiente relación:

$$(s_{\infty} f_{\infty} - \tau_m) \left[1 + \frac{K_2 f_{\infty}^2}{6K_1 \eta L} (L - s_{\infty})^2 (2L + s_{\infty}) \right] = \tau_M - \tau_m. \quad (3.49)$$

Definimos la función $g(s)$ por:

$$g(s) = (s f_{\infty} - \tau_m) \left[1 + \frac{K_2 f_{\infty}^2}{6K_1 \eta L} (L - s)^2 (2L + s) \right]. \quad (3.50)$$

Si pedimos que:

$$\frac{\tau_M}{L} < f_{\infty} < \frac{\sqrt{6}}{L} \sqrt{\frac{\eta K_1}{K_2}}, \quad (3.51)$$

entonces existe una única solución estacionaria s_{∞} y α_{∞} , donde s_{∞} puede calcularse como la única raíz de g en el intervalo $[0, L]$ y α_{∞} se obtiene calculando:

$$\alpha_{\infty} = \frac{s_{\infty} f_{\infty} - \tau_m}{\tau_M - \tau_m}. \quad (3.52)$$

Esto es posible debido a que la función g satisface que $g(0) < 0$, $g(L) > 0$ y $g'(s) > 0$ para $s \in [0, L]$.

4. Métodos aproximados.

4.1. Método de Goodman o del balance integral.

Este método es comúnmente usado para problemas de transferencia de calor, o de difusión donde hay cambios de fase ([6]-[18]).

El método del balance integral consiste en integrar la ecuación principal respecto de la variable espacial, agregar las condiciones de contorno, y producir una ecuación integral que exprese el balance global del sistema. Los pasos son los siguientes:

1. Asumir una forma particular para la dependencia de la solución respecto de la variable espacial que sea consistente con las condiciones de contorno, por ejemplo, una relación polinómica.
2. Integrar la ecuación diferencial con respecto a la variable espacial sobre un intervalo apropiado y sustituir la solución propuesta para obtener el balance integral.
3. Resolver la ecuación integral para obtener el movimiento de la frontera donde ocurre un cambio de fase y la dependencia temporal de la solución.

4.1.1. Geometría plana.

Como la ecuación de Navier-Stokes (2.16) es una ecuación del calor, el método de Goodman puede aplicarse sin problemas.

Asumimos que la solución tiene la siguiente relación polinómica en la variable espacial:

$$w(y, t) = a_0(t) + a_1(t)y + a_2(t)y^2. \quad (4.1)$$

Elegimos un polinomio de grado dos debido a la cantidad de condiciones de contorno que se tienen, puesto que el sistema quedará completamente determinado. Reemplazando la función propuesta w en las condiciones de contorno (2.17)-(2.19), obtenemos un sistema lineal para a_0 , a_1 y a_2 .

$$\begin{pmatrix} 1 & s(t) & s^2(t) \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2s(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ a_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -f(t) \\ -\tau_0/s(t) \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Resolviendo el sistema lineal obtenemos los valores de los coeficientes:

$$a_0(t) = -\frac{(s^2(t)f(t) - 2\tau_0 + \tau_0s(t))}{2(1 - s(t))}, \quad (4.3)$$

$$a_1(t) = \frac{s^2(t)f(t) - \tau_0}{s(t)(1 - s(t))}, \quad (4.4)$$

$$a_2(t) = -\frac{(s(t)f(t) - \tau_0)}{2s(t)(1 - s(t))}. \quad (4.5)$$

Integrando la ecuación principal (2.16) y usando las condiciones de contorno se tiene que:

$$\begin{aligned}
\int_{s(t)}^1 w_t(y, t) dy &= \int_{s(t)}^1 w_{yy}(y, t) dy \\
&= w_y(1, t) - w_y(s(t), t) \\
&= -f(t) + \frac{\tau_0}{s(t)}.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Si derivamos la integral de la ecuación principal y usamos otra vez las condiciones de contorno se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{s(t)}^1 w(y, t) dy &= \int_{s(t)}^1 w_t(y, t) dy - w(s(t), t) s'(t) \\
&= \int_{s(t)}^1 w_t(y, t) dy.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Juntando (4.6) y (4.7) y reemplazando por la fórmula (4.1) de w , obtenemos una ecuación para la frontera libre $s(t)$, a saber:

$$\frac{d}{dt} \int_{s(t)}^1 w(y, t) dy = -f(t) + \frac{\tau_0}{s(t)}, \tag{4.8}$$

donde, procediendo algebraicamente, puede obtenerse una expresión para $s'(t)$:

$$s'(t) = \frac{6s(t)(\tau_0 - f(t)s(t)) + f'(t)s^2(t)(1 - s(t))^2}{2\tau_0(1 - s^2(t)) + 2f(t)s^2(t)(1 - s(t))}. \tag{4.9}$$

Esta ecuación puede ser resuelta con un método numérico, por ejemplo, el conocido método Runge-Kutta de orden cuatro [19], usando como condición inicial la expresada en (2.20).

4.1.2. Geometría plana - Tensión umbral variable.

Como en el caso anterior, el método de Goodman puede aplicarse sin problemas. Proponemos una relación polinómica en la variable espacial para la función w :

$$w(y, t) = a_0(t) + a_1(t)y + a_2(t)y^2. \tag{4.10}$$

Nuevamente elegimos un polinomio de grado dos debido a la cantidad de condiciones de contorno que se poseen. Reemplazando esta expresión en las condiciones de contorno (2.40)-(2.42) se obtiene un sistema lineal para a_0 , a_1 y a_2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & s(t) & s^2(t) \\ 0 & 1 & 2L \\ 0 & 1 & 2s(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ a_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -f(t)/\eta \\ -\tau_0/\eta s(t) \end{pmatrix}. \tag{4.11}$$

Resolviendo el sistema lineal obtenemos los coeficientes:

$$a_0(t) = -\frac{s^2(t)f(t) - 2\tau_0L + \tau_0s(t)}{2\eta(L - s(t))}, \quad (4.12)$$

$$a_1(t) = \frac{s^2(t)f(t) - \tau_0L}{\eta s(t)(L - s(t))}, \quad (4.13)$$

$$a_2(t) = -\frac{s(t)f(t) - \tau_0}{2\eta s(t)(L - s(t))}. \quad (4.14)$$

Procediendo de manera similar a la sección anterior se llega a que:

$$\frac{d}{dt} \int_{s(t)}^L w(y, t) dy = -\frac{1}{\rho} \left(f(t) + \frac{\tau_0}{s(t)} \right), \quad (4.15)$$

Procediendo algebraicamente llegamos a una ecuación de evolución para la frontera libre:

$$s'(t) = \frac{6\eta s(t)(\tau_0 - f(t)s(t)) + \rho f'(t)s^2(t)(L - s(t))^2}{2\rho\tau_0(L^2 - s^2(t)) + 2\rho f(t)s^2(t)(L - s(t))}, \quad (4.16)$$

donde la condición inicial está dada por $s(0) = s_0$. A esta expresión le adjuntamos la evolución de $\alpha(t)$ quedando:

$$\begin{aligned} \alpha'(t) = & K_1(1 - \alpha(t)) - \frac{\alpha(t)K_2}{L} \left| \eta \int_{s(t)}^L (a_0(t) + a_1(t)y + a_2(t)y^2)^2 dy - \right. \\ & \left. - \tau_0(\alpha(t)) \left(a_0(t)(L - s(t)) + \frac{a_1(t)}{2}(L^2 - s^2(t)) + \frac{a_2(t)}{3}(L^3 - s^3(t)) \right) \right|, \quad (4.17) \end{aligned}$$

donde la condición inicial está dada por $\alpha(0) = \alpha_0$. Este sistema ((4.16) y (4.17)) puede ser resuelto de manera numérica por un método Runge-Kutta.

4.1.3. Geometría cilíndrica.

Proponemos una relación polinómica para w , es decir,

$$w(r, t) = a_0(t) + a_1(t)r + a_2(t)r^2. \quad (4.18)$$

Reemplazando esta función propuesta en las condiciones de contorno (2.69)-(2.71) obtenemos un sistema lineal para a_0 , a_1 y a_2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & s(t) & s^2(t) \\ 0 & 1 & 2s(t) \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ a_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\tau_0/s(t) \\ -(f(t) - \tau_0) \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Resolviendo el sistema lineal tenemos que:

$$a_0(t) = \frac{3\tau_0 - 2\tau_0s(t) - s^2(t)f(t) + s^2(t)\tau_0}{3 - 4s(t) + s^2(t)}, \quad (4.20)$$

$$a_1(t) = \frac{-3\tau_0 - s^2(t)\tau_0 + 2s^2(t)f(t)}{(3 - 4s(t) + s^2(t))s(t)}, \quad (4.21)$$

$$a_2(t) = \frac{2\tau_0 - s(t)f(t)}{(3 - 4s(t) + s^2(t))s(t)}. \quad (4.22)$$

Integrando la ecuación principal (2.68) y usando las condiciones de contorno, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 \int_{s(t)}^1 w_t(y, t) dy &= \int_{s(t)}^1 \left(w_{rr} + \frac{1}{r} w_r - \frac{1}{r^2} w + \frac{\tau_0}{r^2} \right) dr \\
 &= \left(w_r + \frac{1}{r} w - \frac{\tau_0}{r} \right) (1) - \left(w_r + \frac{1}{r} w - \frac{\tau_0}{r} \right) (s(t)) \\
 &= - \left(f(t) - \frac{2\tau_0}{s(t)} \right). \tag{4.23}
 \end{aligned}$$

Si derivamos la integral de la ecuación principal (4.23) y usamos otra vez las condiciones de contorno obtenemos lo mismo que en (4.7), es decir,

$$\frac{d}{dt} \int_{s(t)}^1 w(r, t) dr = \int_{s(t)}^1 w_t(r, t) dy. \tag{4.24}$$

Juntando lo hecho hasta el momento:

$$\frac{d}{dt} \int_{s(t)}^1 w(r, t) dr = - \left(f(t) - \frac{2\tau_0}{s(t)} \right). \tag{4.25}$$

y conociendo la forma de w se tiene que:

$$s'(t) = -2s(t)(s(t) - 3) \left((3s(t)f(t) - 3\tau_0)(s(t) - 3) + s(t)f'(t)(s(t) - 1)^2 \right) / A(t), \tag{4.26}$$

donde:

$$A(t) = 2s^2(t)f(t)(s^2(t) - 6s(t) + 5) + 2\tau_0s(t)(9s^2(t) - 10s(t) - 5) + 3\tau_0(5 - s^4(t)). \tag{4.27}$$

La ecuación (4.26) junto con la condición inicial $s(0) = s_0$ puede ser resuelta con un método Runge-Kutta.

4.2. Método cuasiestacionario.

El método cuasiestacionario consiste en eliminar la parte temporal en la ecuación diferencial de un sistema del tipo de la ecuación del calor, pero no de las condiciones de contorno. Por ejemplo, en la ecuación del calor, al anular la parte del tiempo, quedará una relación polinómica para la temperatura, y la frontera libre se podrá conocer a través de las condiciones de contorno.

4.2.1. Geometría plana.

Usaremos en este caso el problema (P_t) . Anulando la parte temporal en la ecuación (2.22) obtenemos una forma cuadrática en la variable espacial:

$$z_{yy} = -f'(t) \implies z(y, t) = -\frac{f(t)}{2}y^2 + B(t)y + C(t). \tag{4.28}$$

Para conocer los coeficientes $B(t)$ y $C(t)$ basta reemplazar la función z en las condiciones de contorno (2.23) y (2.25). Se obtiene un sistema lineal:

$$\begin{cases} 0 = z(1, t) = -f'(t)/2 + B(t) + C(t), \\ f(t) - \tau_0/s(t) = z(s(t), t) = -f'(t)s^2(t)/2 + B(t)s(t) + C(t). \end{cases}$$

Luego:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ s(t) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B(t) \\ C(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'(t)/2 \\ f'(t)s^2(t)/2 + f(t) - \tau_0/s(t) \end{pmatrix}. \quad (4.29)$$

Resolviendo el sistema obtenemos:

$$B(t) = \frac{1}{1-s(t)} \left[\frac{f'(t)}{2}(1-s^2(t)) - \left(f(t) - \frac{\tau_0}{s(t)} \right) \right], \quad (4.30)$$

$$C(t) = \frac{1}{1-s(t)} \left[-\frac{f'(t)s(t)}{2}(1-s(t)) + \left(f(t) - \frac{\tau_0}{s(t)} \right) \right]. \quad (4.31)$$

Conociendo la forma de la función w , usamos la condición de contorno (2.24) que hasta ahora no hemos utilizado, lo cual nos proporciona una ecuación para $s'(t)$:

$$s'(t) = -\frac{f'(t)s^2(t)}{\tau_0} + \frac{s(t)}{1-s(t)} \left[\frac{f'(t)}{2\tau_0}(1-s^2(t)) - \frac{1}{\tau_0} \left(f(t) - \frac{\tau_0}{s(t)} \right) \right]. \quad (4.32)$$

Como en el caso del método de Goodman, esta ecuación puede ser resuelta numéricamente con, por ejemplo, el método Runge-Kutta de orden cuatro [19], usando como condición inicial la expresada en (2.26).

4.2.2. Geometría plana - Tensión umbral variable.

Como en la sección anterior, es mejor utilizar el problema (P_t^α) expresado en las ecuaciones (2.47)-(2.54), puesto que de otro modo llegamos a ecuaciones triviales para la frontera libre.

Anulando la parte temporal en la ecuación (2.47) obtenemos una forma cuadrática en la variable espacial:

$$z(y, t) = -\frac{f'(t)}{2\eta}y^2 + B(t)y + C(t). \quad (4.33)$$

Los coeficientes $B(t)$ y $C(t)$ pueden ser despejados utilizando las condiciones de contorno (2.48) y (2.49). Procediendo de manera similar a la sección anterior, obtenemos que:

$$B(t) = \frac{1}{L-s(t)} \left(\frac{f'(t)}{2\eta}(L^2 - s^2(t)) - \frac{f(t)}{\rho} + \frac{\tau_0(\alpha(t))}{\rho s(t)} \right), \quad (4.34)$$

$$C(t) = \frac{1}{L-s(t)} \left(\frac{f'(t)}{2\eta}s(t)L(s(t) - L) + \frac{L}{\rho} \left(f(t) - \frac{\tau_0(\alpha(t))}{s(t)} \right) \right). \quad (4.35)$$

Utilizando ahora (2.50) obtenemos la relación para la derivada de la frontera libre que necesitábamos:

$$s'(t) = -\frac{f'(t)s^2(t)}{\tau_0(\alpha(t))} + \frac{s(t)}{L-s(t)} \left(\frac{f'(t)}{2\tau_0(\alpha(t))}(L^2 - s^2(t)) - \frac{\eta}{\rho\tau_0(\alpha(t))} \left(f(t) - \frac{\tau_0(\alpha(t))}{s(t)} \right) \right), \quad (4.36)$$

donde la condición inicial está dada por $s(0) = s_0$. Por otro lado, la ecuación de evolución de $\alpha(t)$ tiene en su expresión a la función w , que puede ser obtenida de:

$$u(y, t) = - \int_y^1 w(\xi, t) d\xi.$$

derivando respecto de y . De esta manera, la ecuación (4.36) queda acoplada a la ecuación (2.45) donde:

$$w(y, t) = u'_0(y) + \int_0^t \left(-\frac{f'(\theta)y}{\eta} + B(\theta) \right) d\theta. \quad (4.37)$$

En el procedimiento numérico las integraciones se realizan mediante el método Runge-Kutta, y splines lineales para realizar la integración. La condición inicial está dada por $\alpha(0) = \alpha_0$.

4.2.3. Geometría cilíndrica.

Utilizando el problema (P_t^c) eliminamos la parte temporal en la ecuación (2.74), quedando:

$$-z_{rr} - \frac{1}{r}z_r = f'(t) \Rightarrow z = -\frac{r^2}{4}f'(t) + C(t) \ln r + D(t). \quad (4.38)$$

Para conocer los coeficientes $C(t)$ y $D(t)$ basta reemplazar z en las condiciones de contorno. De esta manera:

$$C(t) = \frac{1}{\ln(s(t))} \left(f(t) - \frac{2\tau_0}{s(t)} + \frac{s^2(t)f'(t)}{4} - \frac{f'(t)}{4} \right), \quad (4.39)$$

$$D(t) = \frac{f'(t)}{4}. \quad (4.40)$$

Reemplazando ahora z en la única condición de contorno que no hemos usado (2.76), obtenemos:

$$s'(t) = -\frac{s^2(t)f'(t)}{2\tau_0} + \frac{1}{\tau_0 \ln(s(t))} \left(f(t) - \frac{2\tau_0}{s(t)} - (1 - s^2(t))\frac{f'(t)}{4} \right). \quad (4.41)$$

Esta ecuación puede ser resuelta numéricamente mediante el método Runge-Kutta utilizando la condición inicial $s(0) = s_0$.

5. Método de diferencias finitas con paso variable.

El método de diferencias finitas consiste en reemplazar las derivadas por cocientes incrementales. El tipo de esquema puede variar según los puntos que se elijan para aproximar las derivadas, y también según la naturaleza de las condiciones de contorno. Estos procedimientos tienen una extensa aplicación y se hallan numerosas publicaciones en la literatura. Ver [20]-[46]. Los resultados de esta sección han sido publicados en [47].

El método consiste en discretizar la variable temporal con un paso fijo, mientras que en la variable espacial se elige un paso variable, de modo tal que la grilla se vaya adaptando a la frontera libre a medida que el tiempo transcurre. Se verá más adelante que se requerirá el uso de una iteración interna para disminuir la cantidad de operaciones.

Utilizaremos el problema (P_y) para la discretización. Fijado un paso de tiempo Δt , se construye una grilla de tal forma que la frontera libre pase por los nodos de ésta. El algoritmo se ha construido para el caso cuando la frontera libre es decreciente. Se puede hacer un algoritmo similar cuando la frontera libre resulta creciente. Definimos entonces Δt positivo, y

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= 1 - (\Delta y_1 + \dots + \Delta y_i), \quad i \geq 1, \quad y_1 = 1, \\ t_n &= (n-1)\Delta t, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Dividimos el intervalo $[s_0, 1]$ en $m-1$ partes iguales, donde m es un número natural arbitrario mayor o igual que tres. Definimos:

$$\Delta y_i = \frac{1 - s_0}{m-1}, \quad i = 1, \dots, m-1. \quad (5.2)$$

Con esta elección los puntos y_1, \dots, y_m constituyen una partición de $[s_0, 1]$ igualmente distribuida. Se ve claramente que $y_m = s_0$. De aquí en adelante construiremos $\Delta y_m, \Delta y_{m+1}, \dots$, de manera tal que (y_{n+m-1}, t_n) sea un punto de la frontera libre, es decir, $s(t_n) = y_{n+m-1}$. Ver figura 12 para visualizar la situación.

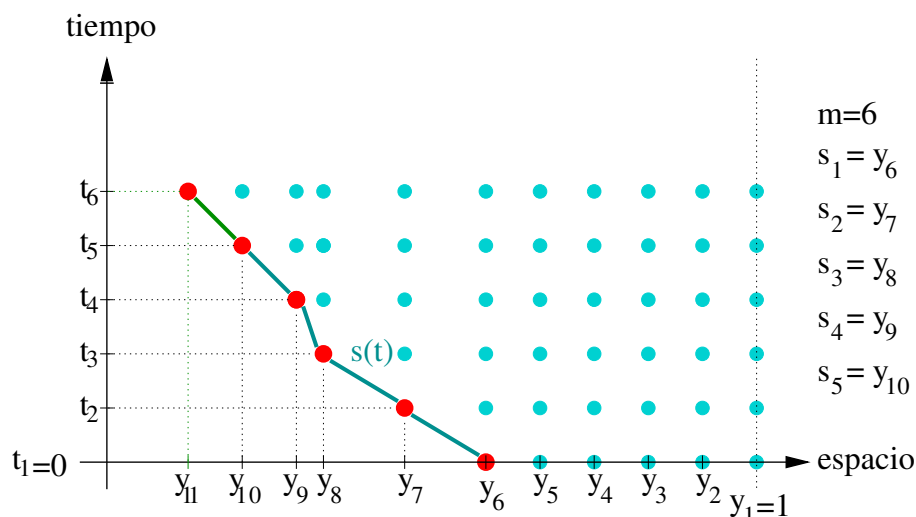


Figura 12: Formación de la grilla.

Denotamos $w_{i,n} = w(y_i, t_n)$ y $f_n = f(t_n)$. Recordando las ecuaciones (2.16)-(2.20):

$$\begin{aligned}
w_t - w_{yy} &= 0, & t > 0, \quad s(t) < y < 1, \\
w(s(t), t) &= 0, & t > 0, \\
w_y(s(t), t) &= -\frac{\tau_0}{s(t)}, & t > 0, \\
w_y(1, t) &= -f(t), & t > 0, \\
w(y, 0) &= u'_0(y), & s(0) = s_0. \quad 0 < s_0 < y < 1.
\end{aligned}$$

realizamos aproximaciones mediante diferencias finitas. De esta manera obtenemos el problema (P_d):

$$w_{1,n+1} - w_{2,n+1} = -\Delta y_1 f_{n+1}, \quad n \geq 1, \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta t}{\Delta y_{i-1}} w_{i-1,n+1} - \left(\frac{\Delta t}{\Delta y_{i-1}} + \frac{\Delta t}{\Delta y_i} + \Delta y_i \right) w_{i,n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta y_i} w_{i+1,n+1} = -\Delta y_i w_{i,n}, \\
i = 2, \dots, n+m-1. \quad n \geq 1, \quad (5.4)
\end{aligned}$$

$$w_{n+m,n+1} = 0, \quad n \geq 1, \quad (5.5)$$

$$w_{i,1} = u'_0(y_i), \quad i = 1, \dots, m, \quad (5.6)$$

$$\Delta y_{n+m-1} = \left(\frac{w_{n+m-1,n+1}}{w_{n+m-1,n+1} - \tau_0} \right) y_{n+m-1}, \quad n \geq 1. \quad (5.7)$$

La idea del proceso es la siguiente:

1. Elegidos y_1, \dots, y_m , se puede calcular $\{w_{i,1}\}_{i=1}^m$ mediante la ecuación (5.6). De este modo el primer paso quedaría resuelto.
2. Hasta el momento sólo disponemos de $\Delta y_1, \dots, \Delta y_{m-1}$. Si pudiéramos conocer el valor de Δy_m , entonces conoceríamos el valor de y_{m+1} , y por lo tanto, podríamos calcular $\{w_{i,2}\}_{i=1}^{m+1}$ resolviendo el sistema lineal (5.3)-(5.5) para $n = 1$. Luego nos dedicaremos a calcular Δy_m .
3. Esto nos permite realizar un paso inductivo. Supongamos conocidos los valores $\{w_{i,n}\}_{i=1}^{n+m-1}$ y $\Delta y_1, \dots, \Delta y_{n+m-2}$. Si supiéramos cuánto vale Δy_{n+m-1} , entonces sería posible obtener $\{w_{i,n+1}\}_{i=1}^{m+n}$ de (5.3)-(5.5) en la etapa $n + 1$.

Lo único que nos hace falta es una forma de definir Δy_{n+m-1} de modo que se satisfaga el sistema discreto (P_d). La ecuación que nos falta usar es (5.7). La dificultad radica en que Δy_{n+m-1} viene dado en función de $w_{n+m-1,n+1}$ que también es una incógnita. Lo que proponemos es lo siguiente:

1. Dar un valor inicial $\Delta y_{n+m-1}^{(1)}$ tal que $0 < \Delta y_{n+m-1}^{(1)} < y_{n+m-1}$. La última desigualdad se refiere a que el paso espacial debe ser lo suficientemente pequeño para permanecer dentro del dominio.

2. Calcular una iteración interna en r determinada por la ecuación (5.7), es decir:

$$\Delta y_{n+m-1}^{(r+1)} = \left(\frac{w_{n+m-1,n+1}^{(r)}}{w_{n+m-1,n+1}^{(r)} - \tau_0} \right) y_{n+m-1}, \quad n \geq 1. \quad (5.8)$$

donde $w_{n+m-1,n+1}^{(r)}$ se calcula resolviendo el sistema lineal (5.3)-(5.5) usando $\Delta y_1, \dots, \Delta y_{n+m-2}$ y $\Delta y_{n+m-1}^{(r)}$.

3. Si la sucesión $\left\{ \Delta y_{n+m-1}^{(r)} \right\}$ fuera convergente a un número positivo que llamaremos Δy_{n+m-1} , podríamos conocer $\{w_{i,n+1}\}_{i=1}^{m+n}$ resolviendo (5.3)-(5.5) usando $\Delta y_1, \dots, \Delta y_{n+m-2}, \Delta y_{n+m-1}$. Con esto quedaría resuelto el problema para la etapa $n + 1$.

Observación 5.1 *La matriz del sistema (5.3)-(5.5) es tridiagonal, y los elementos de la diagonal principal y las dos adyacentes son no nulos. Luego la matriz es irreducible, es decir, el sistema no puede desacoplarse. Como esta matriz resulta diagonalmente dominante en sentido fuerte por filas, el segundo teorema de Gershgorin nos asegura que la matriz es invertible.*

El sistema (5.3)-(5.5), mediante pasos algebraicos, puede ser reformulado como:

$$w_{1,n+1} = w_{2,n+1} - \Delta y_1 f_{n+1}, \quad (5.9)$$

$$w_{i,n+1} = a_{i,n+1} + b_i w_{i+1,n+1}, \quad i = 2, \dots, n + m - 2, \quad (5.10)$$

$$w_{n+m-1,n+1} = a_{n+m-1,n+1}, \quad (5.11)$$

$$w_{n+m,n+1} = 0, \quad (5.12)$$

donde los coeficientes $a_{i,n+1}$ y b_i están dados por:

$$a_{2,n+1} = \frac{-\Delta t \Delta y_2 f_{n+1} + \Delta y_2^2 w_{2,n}}{\Delta t + \Delta y_2^2}, \quad (5.13)$$

$$a_{i,n+1} = \frac{\Delta t \Delta y_i a_{i-1,n+1} + \Delta y_{i-1} \Delta y_i^2 w_{i,n}}{\Delta y_{i-1} \Delta y_i^2 + \Delta t \Delta y_i (1 - b_{i-1}) + \Delta t \Delta y_{i-1}}, \quad i = 3, \dots, n + m - 1, \quad (5.14)$$

$$b_2 = \frac{\Delta t}{\Delta t + \Delta y_2^2}, \quad (5.15)$$

$$b_i = \frac{\Delta t \Delta y_{i-1}}{\Delta y_{i-1} \Delta y_i^2 + \Delta t \Delta y_i (1 - b_{i-1}) + \Delta t \Delta y_{i-1}}, \quad i = 3, \dots, n + m - 2. \quad (5.16)$$

Además se puede ver que los coeficientes son funciones de las siguientes variables:

$$a_{i,n+1} = a_{i,n+1}(\Delta t, \Delta y_2, \dots, \Delta y_i, f_{n+1}, w_{2,n}, \dots, w_{i,n}), \quad i = 2, \dots, n + m - 1, \quad (5.17)$$

$$b_i = b_i(\Delta t, \Delta y_2, \dots, \Delta y_i), \quad i = 2, \dots, n + m - 2, \quad (5.18)$$

$$0 < b_i < 1, \quad i = 2, \dots, n + m - 2. \quad (5.19)$$

Proposición 5.1 *Supongamos que $f(t) > 0 \forall t$, y que $\Delta t, \Delta y_1, \dots, \Delta y_{n+m-1}$ son números positivos, es decir, el método está bien definido hasta el nivel n . Asumiendo que $w_{i,n} \leq 0$, $i = 1, \dots, n + m - 1$, entonces $w_{i,n+1} < 0$, $i = 1, \dots, n + m - 1$.*

Demostración: Primero determinaremos el signo de los coeficientes $a_{i,n+1}$. De la ecuación (5.13) y de la hipótesis se observa que $a_{2,n+1} < 0$. Si suponemos que $a_{i-1,n+1} < 0$, usando (5.14) y (5.19) podemos deducir que $a_{i,n+1} < 0$, donde $i = 3, \dots, n + m - 1$.

Por la fórmula (5.11) y usando lo demostrado en el párrafo anterior se ve que $w_{n+m-1,n+1} < 0$. Supongamos que $w_{i+1,n+1} < 0$, entonces, por (5.10) resulta que $w_{i,n+1} < 0$. Esto concluye la demostración. ■

Observación 5.2 *Si se satisfacen las hipótesis del teorema 3.2 o 3.4 entonces la discretización $\{w_{i,n}\}$ satisface las mismas propiedades de la función w , coincidiendo con el resultado teórico. (Ver (3.9) y (3.19)).*

Proposición 5.2 *Supongamos que $f(t) > 0 \forall t$, y que $\Delta t, \Delta y_1, \dots, \Delta y_{n+m-1}$ son números positivos, es decir, el método está bien definido hasta el nivel n . Asumiendo que $w_{i,n} \leq 0$, $i = 1, \dots, n + m - 1$, que y_{n+m-1} es un número en el intervalo $(0, 1)$, y si comenzamos la iteración propuesta en (5.8) con un valor inicial $\Delta y_{n+m-1}^{(1)}$ que cumpla $0 < \Delta y_{n+m-1}^{(1)} < y_{n+m-1}$, entonces se genera una sucesión en r bien definida.*

Demostración: Observando el resultado de la proposición (5.1) y la ecuación (5.8) resulta que $0 < \Delta y_{n+m-1}^{(r)} < y_{n+m-1} \forall r$. ■

Observación 5.3 *Las hipótesis sobre y_{n+m-1} en la proposición anterior hacen referencia a que la frontera libre no desapareció en esa instancia del cálculo, y por lo tanto es posible realizar una etapa más.*

Definición 5.1 *Definimos los siguientes números:*

$$A_{i,n} = \frac{w_{i,n} - w_{i+1,n}}{\Delta y_i}, \quad i = 1, \dots, n + m - 2, n \geq 1, \quad (5.20)$$

$$B_{i,n} = \frac{w_{i,n} - w_{i,n-1}}{\Delta t}, \quad i = 1, \dots, n + m - 2, n \geq 1. \quad (5.21)$$

Proposición 5.3 *Supongamos que $f(t) > 0 \forall t$, y que $\Delta t, \Delta y_1, \dots, \Delta y_{n+m-1}$ son números positivos, es decir, el método está bien definido hasta el nivel n . Asumamos también que $w_{i,n} \leq 0$, $i = 1, \dots, n + m - 1$, y que y_{n+m-1} es un número en el intervalo $(0, 1)$.*

(A) *Si $A_{i,n} \leq 0$, $i = 1, \dots, n + m - 2$, entonces $A_{i,n+1} < 0$, $i = 1, \dots, n + m - 1$.*

(B) *Si $B_{i,n} \leq 0$, $i = 1, \dots, n + m - 2$, entonces $B_{i,n+1} < 0$, $i = 1, \dots, n + m - 1$.*

Demostración:

(A) Mediante la ayuda del sistema (5.3)-(5.5) y usando la definición (5.20), las cantidades $\{A_{i,n+1}\}_{i=1}^{n+m-1}$ satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$A_{1,n+1} = -f_{n+1}, \quad (5.22)$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta y_i^2} A_{i-1,n+1} - \left(1 + \frac{\Delta t}{\Delta y_i^2} + \frac{\Delta t}{\Delta y_i \Delta y_{i+1}} \right) A_{i,n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta y_i \Delta y_{i+1}} A_{i+1,n+1} = -A_{i,n},$$

$$i = 2, \dots, n + m - 2, \quad (5.23)$$

$$A_{n+m-1,n+1} = \frac{w_{n+m-1,n+1}}{\Delta y_{n+m-1}}. \quad (5.24)$$

El sistema (5.22)-(5.24) puede reescribirse de la siguiente forma:

$$A_{1,n+1} = -f_{n+1}, \quad (5.25)$$

$$A_{i,n+1} = Q_{i,n+1} + R_i A_{i+1,n+1}, \quad i = 2, \dots, n + m - 2, \quad (5.26)$$

donde:

$$R_2 = \frac{\Delta t \Delta y_2}{\Delta y_2^2 \Delta y_3 + \Delta t \Delta y_3 + \Delta t \Delta y_2}, \quad (5.27)$$

$$Q_{2,n+1} = \frac{-\Delta t \Delta y_2 \Delta y_3 f_{n+1} + \Delta y_2^2 \Delta y_3 A_{2,n}}{\Delta y_2^2 \Delta y_3 + \Delta t \Delta y_3 + \Delta t \Delta y_2}, \quad (5.28)$$

$$R_i = \frac{\Delta t \Delta y_i}{\Delta y_i^2 \Delta y_{i+1} + \Delta t \Delta y_{i+1} (1 - R_{i-1}) + \Delta t \Delta y_i}, \quad i = 3, \dots, n + m - 2, \quad (5.29)$$

$$Q_{i,n+1} = \frac{\Delta t \Delta y_{i+1} Q_{i-1,n+1} + \Delta y_i^2 \Delta y_{i+1} A_{i,n}}{\Delta y_i^2 \Delta y_{i+1} + \Delta t \Delta y_{i+1} (1 - R_{i-1}) + \Delta t \Delta y_i}, \quad i = 3, \dots, n + m - 2. \quad (5.30)$$

Por razones de comodidad en la enumeración no hemos definido ni R_1 ni Q_1 . Notar que $Q_{2,n+1} < 0$ y $0 < R_2 < 1$. Supongamos que $Q_{i-1,n+1} < 0$ y $0 < R_{i-1} < 1$. Si observamos (5.29) y (5.30) es fácil deducir que $Q_{i,n+1} < 0$ y $0 < R_i < 1$. Luego, como estamos haciendo un paso inductivo se comprueba que $Q_{i,n+1} < 0$ y $0 < R_i < 1$, para $i = 2, \dots, n + m - 2$.

De (5.24) se deduce que $A_{n+m-1,n+1} < 0$. Supongamos que $A_{i+1,n+1} < 0$. Luego, de (5.26) y del párrafo anterior resulta que $A_{i,n+1} < 0$. Luego, como estamos en un paso inductivo, tenemos que $A_{i,n+1} < 0$, $i = 2, \dots, n + m - 2$. Además de (5.22) se ve que $A_{1,n+1} < 0$.

(B) La demostración es análoga al ítem (A). ■

Observación 5.4 Si se satisfacen las hipótesis del teorema 3.2 o 3.4, entonces las aproximaciones $\{A_{i,n}\}$ (aproximaciones de w_y) y $\{B_{i,n}\}$ (aproximaciones de w_t) satisfacen las mismas propiedades que w_y y w_t . (Ver (3.10), (3.11), (3.21) y (3.22)).

Hasta este punto la iteración interna propuesta es muy cara computacionalmente, puesto que cada iteración interna involucra la resolución de un sistema lineal de tamaño considerable a medida que el tiempo transcurre. Lo que haremos será escribir las cosas de una manera más adecuada.

Supongamos que tenemos el algoritmo definido hasta el tiempo t_n . Sabemos que:

$$\Delta y_{n+m-1}^{(r+1)} = \left(\frac{w_{n+m-1,n+1}^{(r)}}{w_{n+m-1,n+1}^{(r)} - \tau_0} \right) y_{n+m-1}, \quad (5.31)$$

$$w_{n+m-1,n+1}^{(r)} = \frac{\Delta t \Delta y_{n+m-1}^{(r)} a_{n+m-2,n+1} + \Delta y_{n+m-2} \Delta y_{n+m-1}^{(r)2} w_{n+m-1,n}}{\Delta t \Delta y_{n+m-2} + \Delta t \Delta y_{n+m-1}^{(r)} (1 - b_{n+m-2}) + \Delta y_{n+m-2} \Delta y_{n+m-1}^{(r)2}}. \quad (5.32)$$

Es claro que $w_{n+m-1,n} = 0$ ya que así se requirió en el nivel anterior o bien porque las condiciones iniciales son compatibles. Por simplicidad renombramos algunas cantidades.

$$\mathbf{a} = \Delta t a_{n+m-2,n+1} y_{n+m-1} < 0, \quad (5.33)$$

$$\mathbf{b} = -\tau_0 \Delta t \Delta y_{n+m-2} < 0, \quad (5.34)$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} - \tau_0 (1 - b_{n+m-2}) < 0, \quad (5.35)$$

$$\mathbf{d} = -\tau_0 \Delta y_{n+m-2} < 0. \quad (5.36)$$

Reemplazando (5.32) en (5.31) obtenemos:

$$\Delta y_{n+m-1}^{(r+1)} = \frac{\mathbf{a} \Delta y_{n+m-1}^{(r)}}{\mathbf{b} + \mathbf{c} \Delta y_{n+m-1}^{(r)} + \mathbf{d} \Delta y_{n+m-1}^{(r)2}}. \quad (5.37)$$

Estas últimas fórmulas nos dicen que Δy_{n+m-1} debe ser un punto fijo de la función:

$$F(x) = \frac{\mathbf{a}x}{\mathbf{b} + \mathbf{c}x + \mathbf{d}x^2}. \quad (5.38)$$

El denominador de F nunca se anula, y su gráfico (ver figura 13) nos muestra que tiene a lo sumo dos puntos fijos, $x = 0$ y/o un punto fijo positivo. Un cálculo sencillo nos muestra que la función F tiene un punto fijo positivo si y sólo si $\mathbf{b} > \mathbf{a}$. Luego, el algoritmo se reformula, de tal forma que mediante el cálculo recursivo de algunos coeficientes se pueda trabajar directamente sobre la función F sin tener que resolver sistemas lineales. El número de operaciones se reduce notablemente. Si ese punto fijo positivo existe, es claro que satisface (5.7), con lo cual el método queda bien definido. Hay que destacar el hecho de que en los experimentos numéricos realizados el punto fijo positivo siempre existe y además resulta contractivo.

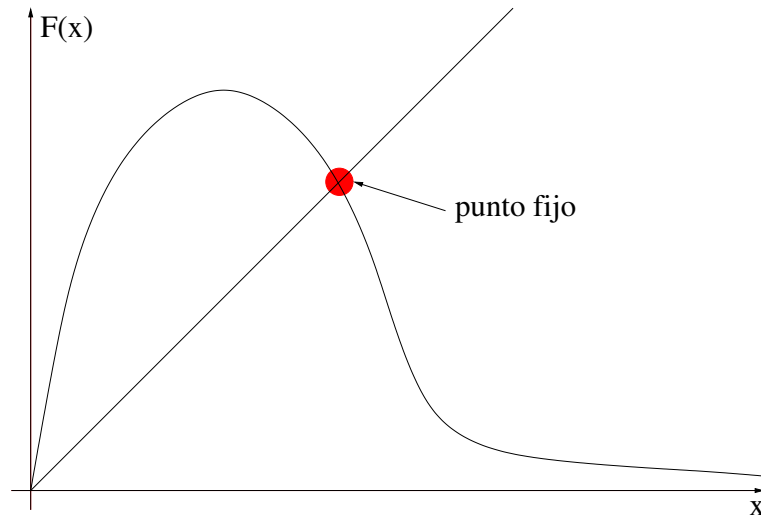


Figura 13: Gráfico esquemático de F .

6. Método de líneas.

El método de líneas se distingue del método de diferencias finitas en que sólo discretizamos una de las variables, el tiempo. Como consecuencia se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Ejemplos de la aplicación de este método pueden encontrarse en [48]-[52]. La mayoría de los resultados presentados en esta sección han sido publicados en [53].

La aplicación de este método no será directa puesto que necesitaremos una ecuación adicional para determinar el avance o retroceso de la frontera libre.

Al igual que en el método de diferencias finitas, aplicaremos el método de líneas al problema (P_y) .

6.1. Geometría plana.

Definimos $\Delta t > 0$ arbitrario por el momento. Llamamos:

$$t_n = (n-1)\Delta t, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (6.1)$$

$$s_n = s(t_n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (6.2)$$

$$f_n = f(t_n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (6.3)$$

$$w_n(y) = w(y, t_n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (6.4)$$

$$q = \sqrt{\frac{1}{\Delta t}}. \quad (6.5)$$

Con esta notación $w_1(y) = u'_0(y)$ y $s_1 = s_0$. Aproximamos la derivada temporal mediante el cociente incremental:

$$w_t(y, t_{n+1}) \approx \frac{w_{n+1}(y) - w_n(y)}{\Delta t}. \quad (6.6)$$

De esta manera el sistema (P_y) se transforma en el sistema (P_{yd}) :

$$w''_{n+1} - q^2 w_{n+1} = -q^2 w_n, \quad s_{n+1} < y < 1, n \in \mathbb{N}, \quad (6.7)$$

$$w_{n+1}(s_{n+1}) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (6.8)$$

$$w'_{n+1}(s_{n+1}) = -\tau_0/s_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (6.9)$$

$$w'_{n+1}(1) = -f_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (6.10)$$

$$s_1 = s_0, \quad (6.11)$$

$$w_1(y) = u'_0(y), \quad 0 < s_1 < y < 1. \quad (6.12)$$

Como w_{n+1} es considerada en $[s_{n+1}, 1]$ podemos extender esta función a $[0, 1]$ por cero. Debido a (6.8) w_{n+1} queda continua, pero no derivable en s_{n+1} por (6.9).

A continuación demostraremos un lema que necesitaremos para conocer la forma explícita de las soluciones w_n en el intervalo $(0, 1)$, valiéndonos de la información suministrada por (6.7)-(6.9).

Lema 6.1 *Sea el sistema de ecuaciones:*

$$\begin{cases} w'' - q^2 w = g, & s < y < 1, \\ w(s) = 0, \\ w'(s) = -\tau_0/s. \end{cases} \quad (6.13)$$

donde q , s y τ_0 son números positivos, y g es una función continua. Entonces:

$$w(y) = -\frac{\tau_0}{qs} \sinh(q(y-s)) + \int_s^y \frac{g(\xi)}{q} \sinh(q(y-\xi)) d\xi, \quad s < y < 1, \quad (6.14)$$

$$w'(y) = -\frac{\tau_0}{s} \cosh(q(y-s)) + \int_s^y g(\xi) \cosh(q(y-\xi)) d\xi, \quad s < y < 1. \quad (6.15)$$

Demostración: Transformamos esta ecuación de segundo orden en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, tomando una variable auxiliar $v = w'$. De esta manera obtenemos:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} w' \\ v' \end{pmatrix} (y) &= A \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} (y) + \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}, \quad s < y < 1, \\ \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} (s) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\tau_0/s \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q^2 & 0 \end{pmatrix}$. La matriz A es diagonalizable. De hecho, si $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ q & -q \end{pmatrix}$ entonces $PAP^{-1} = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & -q \end{pmatrix}$. De esta manera, si $V = P^{-1} \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix}$ entonces el sistema se desacopla:

$$\begin{aligned} V'(y) &= \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & -q \end{pmatrix} V(y) + \begin{pmatrix} g/(2q) \\ -g/(2q) \end{pmatrix}, \quad s < y < 1, \\ V(s) &= \begin{pmatrix} -\tau_0/(2qs) \\ \tau_0/(2qs) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Resolviendo este último sistema de ecuaciones, obtenemos el resultado del lema. ■

Con la ayuda del lema 6.1 es fácil deducir que las ecuaciones (6.7)-(6.9) tienen como solución a:

$$w_{n+1}(y) = -\frac{\tau_0}{qs_{n+1}} \sinh(q(y-s_{n+1})) - \int_{s_{n+1}}^y qw_n(\xi) \sinh(q(y-\xi)) d\xi, \quad (6.17)$$

$$w'_{n+1}(y) = -\frac{\tau_0}{s_{n+1}} \cosh(q(y-s_{n+1})) - \int_{s_{n+1}}^y q^2 w_n(\xi) \cosh(q(y-\xi)) d\xi. \quad (6.18)$$

Hasta ahora el valor de s_{n+1} es desconocido, sin embargo podemos obtener su valor de (6.10). Reemplazando en (6.18) obtenemos:

$$-f_{n+1} = w'_{n+1}(1) = -\frac{\tau_0}{s_{n+1}} \cosh(q(1-s_{n+1})) - \int_{s_{n+1}}^1 q^2 w_n(\xi) \cosh(q(1-\xi)) d\xi.$$

Definimos:

$$F_{n+1}(s) = f_{n+1} - \frac{\tau_0}{s} \cosh(q(1-s)) - \int_s^1 q^2 w_n(\xi) \cosh(q(1-\xi)) d\xi. \quad (6.19)$$

De esta manera s_{n+1} debe ser una raíz de F_{n+1} en el intervalo $(0, 1)$.

El siguiente lema suministra detalles técnicos que utilizaremos para demostrar que la función F_{n+1} tiene una única raíz en el intervalo $(0, 1)$, condición necesaria para la buena definición del método.

Lema 6.2 *La función $h(s) = 1 + sq \tanh(q(1-s))$ es cóncava y estrictamente positiva en $[0, 1]$.*

Demostración: El resultado es una consecuencia de observar que $h(0) = 1 = h(1)$ y del hecho de que para todo $s \in [0, 1]$ se cumple:

$$h''(s) = -2q^2 [1 - \tanh^2(q(1-s))] - 2sq^3 \tanh(q(1-s)) [1 - \tanh^2(q(1-s))] < 0. \quad (6.20)$$

■

Los próximos dos lemas servirán para probar que las funciones w_n y w'_n son no positivas. Estas propiedades coinciden con los resultados teóricos y las propiedades físicas, y serán usadas para demostrar la existencia del método de líneas.

Lema 6.3 *Sea A la solución de:*

$$\begin{cases} A'' - q^2 A \geq 0, & s < y < 1, \\ A(s) \leq 0, \\ A'(1) \leq 0, \end{cases} \quad (6.21)$$

donde s es un número positivo. Entonces $A \leq 0$ en $[s, 1]$.

Demostración: La función A no puede tener máximos locales en el intervalo $(s, 1)$, pues de ser así, existiría $y_0 \in (s, 1)$ tal que $A(y_0) > 0$, $A'(y_0) = 0$ y $A''(y_0) \leq 0$. Reemplazando en la ecuación se tiene $0 \leq A''(y_0) - q^2 A(y_0) < 0$ lo cual es una contradicción.

Supongamos que existe $y_1 \in (s, 1)$ tal que $A(y_1) > 0$. Si $A(1) \leq 0$ entonces se tiene un máximo local positivo en $(s, 1)$ lo cual provoca un absurdo. Luego $A(1) > 0$. Como $A(s) \leq 0$ entonces tiene que haber un punto $y_2 \in (s, 1)$ tal que $A(y_2) > 0$ y $A'(y_2) > 0$. En $(y_2, 1)$ no puede haber cambio de signo de A' porque en ese caso se tendría un máximo local en $(s, 1)$. Luego $A > 0$ en $(y_2, 1)$. Luego $A'' > 0$ en $(y_2, 1)$, lo que dice que A' es creciente en $(y_2, 1)$. Esto nos dice que $A'(1) > 0$, lo cual es una contradicción.

■

Lema 6.4 *Sea A la solución de:*

$$\begin{cases} A'' - q^2 A \geq 0, & s < y < 1, \\ A(s) < 0, \\ A(1) < 0, \end{cases} \quad (6.22)$$

donde s es un número positivo. Entonces $A \leq 0$ en $[s, 1]$.

Demostración: Supongamos que existe y_0 en $(s, 1)$ tal que $A(y_0) > 0$. Podemos elegir y_0 tal que $A(y_0) > 0$, $A'(y_0) = 0$ y $A''(y_0) \leq 0$. Esto es una contradicción puesto que $A''(y_0) - q^2 A(y_0) < 0$. Esto concluye la prueba. ■

La siguiente proposición nos ayudará al demostrar propiedades de monotonía de la solución discreta del sistema (6.7)-(6.12)

Lema 6.5 *Sea A solución de:*

$$\begin{cases} A'' \leq 0, & s < y < 1, \\ A(s) \geq 0, \\ A'(s) \geq 0, \\ A'(1) \geq 0, \end{cases} \quad (6.23)$$

donde s es un número positivo. Entonces $A \geq 0$ en $[s, 1]$.

Demostración: Supongamos que existe $y_0 \in (s, 1)$ tal que $A(y_0) < 0$. Por la condición de contorno en s , existe un punto $y_1 \in (s, 1)$ tal que $A(y_1) < 0$ y $A'(y_1) < 0$. Como A es no convexa, entonces A' es no creciente, por lo tanto $A'(1) < 0$, lo cual es una contradicción. Esto concluye la demostración. ■

Ahora probaremos la existencia y unicidad del método de líneas.

Teorema 6.1 *Si el dato inicial u_0 cumple la hipótesis (A1) y se cumple la condición de operabilidad, entonces el sistema (6.7)-(6.12) tiene una única solución para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración: La prueba se hará por inducción. Para $n = 1$ tenemos solución w_1 y s_1 provenientes de (6.11) y (6.12), donde $w_1 \leq 0$, $w_1' \leq 0$, $w_1 = 0$ en $[0, s_1]$, y $s_1 \in (0, 1)$.

Supongamos que tenemos w_n y s_n donde $s_n \in (0, 1)$, $w_n \leq 0$, $w_n' \leq 0$, y $w_n = 0$ en $[0, s_n]$.

► *Existe al menos una raíz de F_{n+1} en $(0, 1)$.*

La función F_{n+1} es claramente una aplicación continua en el intervalo $(0, 1]$. Además:

$$\begin{aligned} F_{n+1}(1) &= f_{n+1} - \tau_0 > 0, & \text{debido a la condición de operabilidad,} \\ \lim_{s \rightarrow 0^+} F_{n+1}(s) &= -\infty, & \text{debido a que la integral está acotada.} \end{aligned}$$

Por continuidad, existe una raíz de F_{n+1} en el intervalo $(0, 1)$.

► *F_{n+1} tiene a lo sumo un punto crítico en el intervalo $(0, 1)$.*

De (6.19) obtenemos que:

$$F_{n+1}'(s) = \frac{\tau_0}{s^2} \cosh(q(1-s)) + \frac{\tau_0 q}{s} \sinh(q(1-s)) + q^2 w_n(s) \cosh(q(1-s)). \quad (6.24)$$

Si F_{n+1} no tiene puntos críticos, el ítem está probado. Por el contrario, supongamos que existe al menos un s_* tal que $F_{n+1}'(s_*) = 0$, es decir:

$$\frac{\tau_0}{s_*^2} \cosh(q(1-s_*)) + \frac{\tau_0 q}{s_*} \sinh(q(1-s_*)) + q^2 w_n(s_*) \cosh(q(1-s_*)) = 0. \quad (6.25)$$

Claramente $s_* \neq 0$ porque $w_n = 0$ en $[0, s_n]$. Multiplicando por $\frac{s_*^2}{\tau_0 \cosh(q(1-s_*))}$ en (6.25) se tiene que s_* es un cero de la función:

$$h(s) + \frac{s^2 q^2 w_n(s)}{\tau_0}. \quad (6.26)$$

donde h es la función definida en el lema 6.2. Claramente la función de arriba tiene una única raíz debido a que h es cóncava y positiva, y debido a que la función $s^2 q^2 w_n(s)/\tau_0$ es negativa y decreciente en $(s_n, 1)$. Esto concluye la afirmación.

- F_{n+1} tiene una única raíz en $(0, 1)$.

Sabemos que F_{n+1} tiene al menos una raíz. Si F_{n+1} no tiene puntos críticos, entonces F_{n+1} resulta creciente en $(0, 1)$, lo que nos dice que F_{n+1} tiene una única raíz. Por el contrario, si existe un único punto crítico \tilde{s} , éste no puede ser un mínimo puesto que la función F_{n+1} es creciente en un entorno del cero. Las posibilidades que quedan entonces son que el punto crítico sea o un punto de inflexión o un máximo. En el caso de que sea un punto de inflexión, la función F_{n+1} resulta creciente, y en caso de ser un máximo, las raíces de F_{n+1} están en $(0, \tilde{s})$ puesto que $F_{n+1}(1) > 0$. Pero en $(0, \tilde{s})$ la función es creciente, por lo tanto, existe una única raíz de F_{n+1} .

Llamamos s_{n+1} a la única raíz de F_{n+1} en $(0, 1)$. Luego podemos resolver w_{n+1} como la solución de (6.7)-(6.9). Hasta aquí encontramos una solución para el paso $n+1$, pero necesitamos que w_{n+1} satisfaga ciertas condiciones para poder continuar con el paso inductivo.

- $w_{n+1} = 0$ en $[0, s_{n+1}]$.

Extendemos w_{n+1} por cero en $[0, s_{n+1}]$ y debido a (6.8) tal extensión resulta continua, sin embargo la derivada no existe en s_{n+1} por (6.9).

- $w_{n+1} \leq 0$ en $[0, 1]$.

Sabemos ya que $w_{n+1} = 0$ en $[0, s_{n+1}]$. Llamando a w_{n+1} por A y a s_{n+1} por s , es claro que w_{n+1} satisface (6.21) usando (6.7), (6.8), (6.10) y la hipótesis inductiva. Por lema 6.3 se obtiene que $w_{n+1} \leq 0$ en $[s_{n+1}, 1]$. Esto concluye la afirmación.

- $w'_{n+1} \leq 0$ en $[0, 1]$.

En $[0, s_{n+1})$ es claro que $w'_{n+1} = 0$. En $[s_{n+1}, 1]$ se satisface:

$$\begin{cases} w'''_{n+1} - q^2 w'_{n+1} &= -q^2 w'_n, & s_{n+1} < y < 1, \\ w'_{n+1}(s_{n+1}) &= -\tau_0/s_{n+1}, \\ w'_{n+1}(1) &= -f_{n+1}. \end{cases} \quad (6.27)$$

Llamando a w'_{n+1} por A y a s_{n+1} por s , se cumple que w'_{n+1} satisface (6.22). Luego, por el lema 6.4, resulta $w'_{n+1} \leq 0$ en $[s_{n+1}, 1]$. Esto concluye la afirmación.

Esto completa la demostración del teorema. ■

Como corolario tenemos las propiedades sobre w_n y su derivada.

Corolario 6.1 Si el dato inicial u_0 satisface (A1) y se cumple la hipótesis de operabilidad, entonces:

- $w_n \leq 0$ en $[0, 1]$ para todo $n \in \mathbb{N}$,
- $w'_n \leq 0$ en $[0, 1]$ para todo $n \in \mathbb{N}$,
- $w_n < 0$ en $(s_n, 1]$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Los primeros dos ítems surgen del teorema anterior. Veamos el último: Como $w_n(s_n) = 0$ y $w'_n(s_n) = -\tau_0/s_n < 0$, entonces $w_n(y) < 0$ en un entorno de s_n . Como $w'_n \leq 0$ entonces w_n es no creciente. Luego obtenemos que $w_n < 0$ en $(s_n, 1]$. ■

De ahora en adelante estudiaremos el comportamiento de la solución con respecto a los datos iniciales. Comenzaremos calculando la solución estacionaria del problema discreto.

Proposición 6.1 La solución estacionaria del problema discreto (6.7)-(6.12) es:

$$s_\infty = \frac{\tau_0}{f_\infty}, \quad w_\infty(y) = \begin{cases} 0, & \text{si } y \in [0, s_\infty), \\ -f_\infty(y - s_\infty), & \text{si } y \in [s_\infty, 1], \end{cases} \quad (6.28)$$

donde $s_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, $w_\infty(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n(y)$ y $f_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$, si los límites existen.

Demostración: Si tomamos $\lim_{n \rightarrow \infty}$ en (6.7)-(6.12) obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} w''_\infty & = & 0, & \text{en } [s_\infty, 1], \\ w_\infty(s_\infty) & = & 0, \\ w'_\infty(s_\infty) & = & -\tau_0/s_\infty, \\ w'_\infty(1) & = & -f_\infty. \end{cases} \quad (6.29)$$

Como w'_∞ es constante, entonces $w'_\infty(s_\infty) = w'_\infty(1)$. Esto implica que $s_\infty = \tau_0/f_\infty$. Como w_∞ es una línea recta con pendiente $-f_\infty$ y raíz s_∞ , tenemos que $w_\infty(y) = -f_\infty(y - s_\infty)$ en el intervalo $[s_\infty, 1]$. Si $y \in [0, s_\infty)$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $y \in [0, s_n]$ para todo $n \geq N$. Esto dice que $w_n(y) = 0$ para todo $n \geq N$, que es equivalente a $w_\infty(y) = 0$ en $[0, s_\infty]$. ■

Observación 6.1 Notar que la solución estacionaria del problema discreto (P_{y_d}) coincide con la solución estacionaria del problema continuo (P_y).

Probaremos ahora las propiedades de monotonía: si el término f correspondiente al gradiente de presión tiende a un valor estacionario y se satisfacen ciertas propiedades, entonces las soluciones discretas $\{s_n\}$ y $\{w_n\}$ son monótonas decrecientes (crecientes) si f es creciente (decreciente).

Teorema 6.2 Asumamos que $f' \geq 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f_\infty$, $s_\infty = \tau_0/f_\infty$, $s_0 > s_\infty$, u_0 satisface (A1), (A2) y $u''_0 \leq 0$. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\Delta t < \epsilon$ se cumple:

(A) $s_{n+1} \leq s_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(B) $w_{n+1} \leq w_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(C) $s_\infty \leq s_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(D) $w_\infty \leq w_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(E) $s_{n+1} \geq \tau_0/f_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración: La prueba se hará casi por completo por inducción. Demostramos primero el paso inductivo $n = 1$ de (A).

► $s_2 \leq s_1$.

Integrando por partes dos veces, se ve que:

$$\begin{aligned} F_2(s) &= f_2 + u_0''(1) - (u_0''(s) + \tau_0/s) \cosh(q(1-s)) - qu_0'(s) \sinh(q(1-s)) - \\ &\quad - \int_s^1 u_0'''(\xi) \cosh(q(1-\xi)) d\xi. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Sabemos, por compatibilidad, que $u_0''(1) = -f_1$ y $u_0''(s_1) = -\tau_0/s_1$. Evaluando (6.30) en s_1 se tiene que:

$$F_2(s_1) = (f_2 - f_1) - qu_0'(s_1) \sinh(q(1-s_1)) - \int_{s_1}^1 u_0'''(\xi) \cosh(q(1-\xi)) d\xi \geq 0, \quad (6.31)$$

puesto que $f_1 \leq f_2$, $u_0' \leq 0$ y $u_0''' \leq 0$. Esto nos dice que $s_2 \leq s_1$. Notar que:

- $s_2 < s_1 \Leftrightarrow f_2 > f_1$ ó $u_0''' \neq 0$,
- $s_2 = s_1 \Leftrightarrow f_2 = f_1$ y $u_0''' = 0$, debido a que F_2 tiene una única raíz y a que, por (6.31), $F_2(s_1) = 0$.

Notar que por la hipótesis sobre el dato inicial se tiene que $s_1 \geq s_\infty$. El ítem a continuación demuestra el paso $n = 2$ de la inducción de (C), que es puesto aparte debido a que se usan argumentos diferentes a los utilizados en los pasos subsiguientes.

► $s_2 \geq s_\infty$.

Usando la hipótesis (A2) se tiene que:

$$F_2(s) \leq f_2 - \frac{\tau_0}{s} \cosh(q(1-s)) + \int_s^1 q^2 f_\infty(\xi - s_\infty) \cosh(q(1-\xi)) d\xi, \quad s \in [s_\infty, 1]. \quad (6.32)$$

Integramos por partes y obtenemos que F_2 está acotada por una función G_2 :

$$F_2(s) \leq (f_2 - f_\infty) + \left(f_\infty - \frac{\tau_0}{s}\right) \cosh(q(1-s)) + qf_\infty(s - s_\infty) \sinh(q(1-s)) = G_2(s). \quad (6.33)$$

Esta última desigualdad es válida en $[s_\infty, 1]$. Como $G_2(s_\infty) \leq 0$ debido a la fórmula de la solución estacionaria y al hecho de que f es creciente, entonces el cero de F_2 debe ser mayor que s_∞ . Esto demuestra la afirmación.

El paso $n = 1$ de la inducción en (B) es:

► $w_2 \leq w_1$.

Si $y \in [0, s_2]$ entonces $(w_2 - w_1)(y) = 0$. Si $y \in (s_2, s_1]$ entonces $(w_2 - w_1)(y) = w_2(y) \leq 0$. Si pruebo que $(w_2 - w_1)$ es decreciente en $[s_1, 1]$ entonces la función diferencia será no positiva en $[s_1, 1]$ y la afirmación quedará demostrada.

Derivando e integrando por partes dos veces se tiene que:

$$\begin{aligned} (w_2 - w_1)'(y) &= -qu_0'(s_2) \sinh(q(y - s_2)) - \left(u_0''(s_2) + \frac{\tau_0}{s_2} \right) \cosh(q(y - s_2)) - \\ &- \int_{s_2}^y u_0'''(\xi) \cosh(q(y - \xi)) d\xi. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Si $s_2 = s_1$ entonces los dos primeros términos se anulan y la integral es cero (ver comentario en ítem anterior en el caso de que se de la igualdad de s_2 y s_1).

Si $s_2 < s_1$ entonces los términos con las derivadas del dato inicial evaluado en s_2 se anulan quedando:

$$(w_2 - w_1)'(y) = -\frac{\tau_0}{s_2} \cosh(q(y - s_2)) - \int_{s_2}^y u_0'''(\xi) \cosh(q(y - \xi)) d\xi. \quad (6.35)$$

Llamando $M = \max_{\xi \in [s_1, 1]} (-u_0'''(\xi)) \geq 0$, integrando y operando algebraicamente se tiene que:

$$(w_2 - w_1)'(y) \leq \cosh(q(y - s_2)) \left(-\frac{\tau_0}{s_2} + \frac{M}{q} \tanh(q(y - s_2)) \right). \quad (6.36)$$

Usando que $s_\infty \leq s_2 < s_1$ se tiene que:

$$(w_2 - w_1)'(y) \leq \cosh(q(y - s_2)) \left(-\frac{\tau_0}{s_1} + \frac{M}{q} \tanh(q(1 - s_\infty)) \right). \quad (6.37)$$

El miembro derecho de (6.37) es negativo si la suma entre paréntesis es negativa. Esto nos determina una condición sobre el parámetro q . Por lo tanto, la condición para que $w_2 \leq w_1$ es que q satisfaga:

$$-\frac{\tau_0}{s_1} + \frac{M}{q} \tanh(q(1 - s_\infty)) < 0, \quad (6.38)$$

lo cual es posible puesto que $\tanh(\cdot)$ es una función acotada. De ahora en más pensaremos que q satisface la condición (6.38).

Ahora quedarán demostrados los ítems (A) y (B):

► $w_{n+1} \leq w_n$ y $s_{n+1} \leq s_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 1$ ya está probado. Supongamos que $w_n \leq w_{n-1}$ y $s_n \leq s_{n-1}$. Veamos qué ocurre para $n + 1$.

Usando (6.19) se tiene que:

$$F_{n+1}(s) - F_n(s) = (f_{n+1} - f_n) - \int_s^1 q^2(w_n(\xi) - w_{n-1}(\xi)) \cosh(q(1 - \xi)) \geq 0, \quad (6.39)$$

lo que nos dice que $s_{n+1} \leq s_n$.

Sea $W = w_{n+1} - w_n$. Si $y \in [0, s_{n+1}]$ entonces $W(y) = 0$. Si $y \in [s_{n+1}, s_n]$ entonces $W(y) = w_{n+1}(y) \leq 0$. Por último, si $y \in [s_n, 1]$ la función W satisface:

$$\begin{cases} W'' - q^2W = -q^2(w_n - w_{n+1}) \geq 0, & y \in (s_n, 1), \\ W(s_n) \leq 0, \\ W'(1) \leq 0. \end{cases} \quad (6.40)$$

Por lema 6.3 resulta que $W \leq 0$ en $[s_n, 1]$. Esto concluye la afirmación.

La prueba de (E) es la siguiente:

- $s_{n+1} \geq \tau_0/f_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Integrando la ecuación (6.7) y utilizando las condiciones de contorno (6.9) y (6.10) obtenemos que:

$$-f_{n+1} + \frac{\tau_0}{s_{n+1}} = \int_{s_{n+1}}^{s_n} q^2 w_{n+1}(\xi) d\xi + \int_{s_n}^1 q^2 (w_{n+1} - w_n)(\xi) d\xi \leq 0. \quad (6.41)$$

Esto concluye la afirmación.

Las próximas afirmaciones concluyen la prueba de (C) y (D).

- $s_\infty \leq s_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ya hemos probado que $s_\infty \leq s_1$ y $s_\infty \leq s_2$. Ahora para $n > 2$:

$$s_{n+1} \geq \frac{\tau_0}{f_{n+1}} \geq \frac{\tau_0}{f_\infty} = s_\infty. \quad (6.42)$$

- $w_\infty \leq w_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por la hipótesis (A2) se tiene que $w_1 \geq w_\infty$. Sea $n > 1$, definimos $W = w_{n+1} - w_\infty$. Si $y \in [0, s_{n+1}]$ entonces $W(y) = 0$. Si $y \in [s_{n+1}, 1]$ la función W satisface un sistema igual a (6.23). Entonces por lema 6.5 tenemos que $W \geq 0$ en $[s_{n+1}, 1]$.

Esto concluye la demostración. ■

Corolario 6.2 *El parámetro Δt queda determinado en el primer paso del método y satisface:*

$$-\frac{\tau_0}{s_0} + \frac{M}{q} \tanh(q(1 - s_\infty)) < 0, \quad (6.43)$$

donde $M = \max_{y \in [s_0, 1]} (-u_0'''(y))$ y $q = \sqrt{1/\Delta t}$.

Se tiene un teorema similar al anterior, donde ahora la solución discreta crecerá monótonamente hacia la solución estacionaria.

Teorema 6.3 *Asumamos que $f' \leq 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f_\infty$, $f(0) > \tau_0/s_0$, $s_\infty = \tau_0/f_\infty$. $s_0 < s_\infty$, u_0 satisface (A1), (A3), $u_0''' \geq 0$ y $u_0'' \leq -\tau_0/y$ en $[s_0, 1]$. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\Delta t < \epsilon$ se cumple que:*

- (A) $s_{n+1} \geq s_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (B) $w_{n+1} \geq w_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (C) $s_\infty \geq s_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (D) $w_\infty \geq w_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (E) $s_{n+1} \leq \tau_0/f_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Como en el teorema anterior, la prueba se realizará por inducción. Los primeros tres ítems hacen referencia a los primeros pasos de la inducción.

- $s_2 \geq s_1$.

Usando (6.31) y la hipótesis se ve claramente que $F_2(s_1) \leq 0$, lo que nos dice que $s_2 \geq s_1$. Además vale la misma afirmación que se hizo en el teorema 6.2: $s_2 = s_1$ si y sólo si $f_2 = f_1$ y $u_0''' = 0$ en $[s_0, 1]$.

- $s_1 \leq s_\infty$ y $s_2 \leq s_\infty$.

Por la hipótesis sobre la condición inicial tenemos que $s_1 \leq s_\infty$. Ahora, evaluamos (6.30) en s_∞ y usando la hipótesis sobre u_0'' obtenemos:

$$F_2(s_\infty) \geq (f_2 - f_1) - qu_0'(s_\infty) \sinh(q(1 - s_\infty)) - \int_{s_\infty}^1 u_0'''(\xi) \cosh(q(1 - \xi)) d\xi. \quad (6.44)$$

Definimos $M = \min_{\xi \in [s_0, 1]} (-u_0'''(\xi)) \leq 0$. Integrando y usando que f es una función no creciente se tiene:

$$F_2(s_\infty) \geq (f_\infty - f_1) + \sinh(q(1 - s_\infty)) \left[-qu_0'(s_\infty) + \frac{M}{q} \right]. \quad (6.45)$$

Como $u_0''(y) \leq -\tau_0/y$ entonces u_0'' es estrictamente negativa. Debido a que $u_0'(s_1) = 0$ se tiene que u_0' es estrictamente negativa en $(s_1, 1]$. Como $s_1 < s_\infty$ tenemos que $u_0'(s_\infty) < 0$. Esto permite la existencia de un q a partir del cual el miembro derecho de (6.45) sea positivo. Esto concluye la afirmación.

- $w_2 \geq w_1$ en $[0, 1]$.

Si $y \in [0, s_1]$ entonces $(w_2 - w_1)(y) = 0$, puesto que $s_1 \leq s_2$ y $w_1(y) = w_2(y) = 0$ en el intervalo $[0, s_1]$. Si $y \in [s_1, s_2]$ entonces $(w_2 - w_1)(y) = -w_1(y) \geq 0$. Veamos qué ocurre cuando $y \in [s_2, 1]$. Integrando por partes se tiene que:

$$(w_2 - w_1)(y) = -\frac{\tau_0}{qs_2} \sinh(q(y - s_2)) - u_0'(s_2) \cosh(q(y - s_2)) - \int_{s_2}^y u_0''(\xi) \cosh(q(y - \xi)) d\xi. \quad (6.46)$$

Definimos $M = \min_{\xi \in [s_1, 1]} (-u_0''(\xi)) \geq 0$. Integrando y operando algebraicamente obtenemos:

$$(w_2 - w_1)(y) \geq \left[-u_0'(s_2) + \frac{1}{q} \left(-\frac{\tau_0}{s_2} + M \right) \tanh(q(y - s_2)) \right] \cosh(q(y - s_2)). \quad (6.47)$$

Como $u_0''' \geq 0$ se tiene que u_0'' es creciente. Luego $M = -u_0''(1)$. Por compatibilidad se tiene que $M = f_1$. Como $s_2 \geq s_1$ resulta:

$$(w_2 - w_1)(y) \geq \left[-u_0'(s_2) + \frac{1}{q} \left(-\frac{\tau_0}{s_1} + f_1 \right) \tanh(q(y - s_2)) \right] \cosh(q(y - s_2)). \quad (6.48)$$

El lado derecho de la desigualdad es positivo por la hipótesis. Esto concluye la afirmación.

- ▶ $w_{n+1} \geq w_n$ y $s_{n+1} \geq s_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- ▶ $s_{n+1} \leq \tau_0/f_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- ▶ $s_n \leq s_\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- ▶ $w_n \leq w_\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Las demostraciones de estos ítems son similares a las esbozadas en las mismas secciones del teorema 6.2, sólo hay que invertir los signos de las desigualdades. Esto concluye la demostración. ■

Corolario 6.3 *El parámetro Δt queda determinado en el primer paso del método y satisface:*

$$(f_\infty - f_1) + \sinh(q(1 - s_\infty)) \left[-qu_0'(s_\infty) + \frac{M}{q} \right] > 0. \quad (6.49)$$

donde $M = \min_{y \in [s_0, 1]} (-u_0'''(y))$ y $q = \sqrt{1/\Delta t}$.

Teorema 6.4 *Si se cumple alguna de las dos condiciones:*

- $f' \geq 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f_\infty$, $s_\infty = \tau_0/f_\infty$, $s_0 > s_\infty$, u_0 satisface (A1), (A2) y $u_0''' \leq 0$, con q que satisface (6.43).
- $f' \leq 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f_\infty$, $s_\infty = \tau_0/f_\infty$, u_0 satisface (A1), (A3), $u_0''' \geq 0$ y $u_0''(y) \leq -\tau_0/y$ en $[s_0, 1]$, con q de tal modo que se satisface (6.49).

Entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s_\infty$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w_\infty$.

Demostración: Debido a los teoremas 6.2 y 6.3, en ambos casos las sucesiones $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{w_n\}_{n=1}^\infty$ son convergentes, digamos, a s_* y w_* respectivamente.

Tomando $\lim_{n \rightarrow \infty}$ en (6.17) obtenemos:

$$w_*(y) = -\frac{\tau_0}{qs_*} \sinh(q(y - s_*)) - \int_{s_*}^y qw_*(\xi) \sinh(q(y - \xi)) d\xi. \quad (6.50)$$

Calculando las derivadas de la función w_* se tiene que:

$$w_*''(y) = 0, \quad y \in [s_*, 1], \quad w_*'(s_*) = -\frac{\tau_0}{s_*}, \quad w_*(s_*) = 0. \quad (6.51)$$

Por otra parte, tomando $\lim_{n \rightarrow \infty}$ en (6.18) obtenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w'_{n+1}(y) = -\frac{\tau_0}{s_*} \cosh(q(y - s_*)) - \int_{s_*}^1 q^2 w_*(\xi) \cosh(q(y - \xi)) d\xi. \quad (6.52)$$

De (6.50) y (6.52) podemos deducir que $\lim_{n \rightarrow \infty} w'_n(y) = w'_*(y)$. Luego:

$$w'_*(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} w'_{n+1}(1) = -\lim_{n \rightarrow \infty} f_{n+1} = -f_\infty.$$

Como w'_* es constante, resulta que $w'_*(1) = w'_*(s_*)$. Entonces:

$$s_* = \frac{\tau_0}{f_\infty}, \quad w_* = -\frac{\tau_0}{s_*}(y - s_*). \quad (6.53)$$

Luego $s_* = s_\infty$ y $w_* = w_\infty$. Esto concluye la demostración. ■

6.2. Geometría plana - Tensión umbral variable.

Elegimos $\Delta t > 0$ y realizamos la misma discretización que en (6.1)-(6.6). Con esta notación $w_1(y) = u'_0(y)$, $s_1 = s_0$ y $\alpha_1 = \alpha_0$. La ecuación de evolución es discretizada mediante el método de Euler. De esta manera, el problema (P_y^α) expresada en las ecuaciones (2.39)-(2.46) se transforma en el siguiente problema (P_{yd}^α) :

$$w''_{n+1} - \frac{\rho}{\eta} q^2 w_{n+1} = -\frac{\rho}{\eta} q^2 w_n, \quad s_{n+1} < y < L, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (6.54)$$

$$w_{n+1}(s_{n+1}) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (6.55)$$

$$w'_{n+1}(s_{n+1}) = -\tau_0(\alpha_{n+1})/\eta s_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (6.56)$$

$$w'_{n+1}(L) = -f_{n+1}/\eta, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (6.57)$$

$$s_1 = s_0, \quad (6.58)$$

$$w_1(y) = u'_0(y), \quad s_0 \leq y \leq L, \quad (6.59)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \frac{1}{q^2} \left(K_1(1 - \alpha_n) - \alpha_n \frac{K_2}{L} \cdot \left| \eta \int_{s_n}^L w_n^2 dy - \tau_0(\alpha_n) \int_{s_n}^L w_n dy \right| \right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6.60)$$

$$\alpha_1 = \alpha_0. \quad (6.61)$$

Despejaremos la función w_{n+1} explícitamente de las primeras tres ecuaciones (6.54)-(6.56)

Lema 6.6 *Sea el sistema de ecuaciones:*

$$\begin{cases} w'' - \frac{\rho}{\eta} q^2 w = g, & s < y < L, \\ w(s) = 0, \\ w'(s) = -T/\eta s. \end{cases} \quad (6.62)$$

donde ρ , η , q , s , L y T son números positivos, y g es una función continua. Entonces:

$$w(y) = -\frac{T}{\sqrt{\rho\eta}sq} \sinh\left(\sqrt{\frac{\rho}{\eta}}q(y-s)\right) + \int_s^y \frac{g(\xi)}{\sqrt{\rho/\eta}q} \sinh\left(\sqrt{\frac{\rho}{\eta}}q(y-\xi)\right) d\xi, \quad (6.63)$$

$$w'(y) = -\frac{T}{\eta s} \cosh\left(\sqrt{\frac{\rho}{\eta}}q(y-s)\right) + \int_s^y g(\xi) \cosh\left(\sqrt{\frac{\rho}{\eta}}q(y-\xi)\right) d\xi. \quad (6.64)$$

La demostración de este lema es similar a la del lema 6.1. Con esto deducimos que la solución de las ecuaciones (6.54)-(6.56) es:

$$w_{n+1}(y) = -\frac{\tau_0(\alpha_{n+1})}{\sqrt{\rho\eta}s_{n+1}q} \sinh\left(\sqrt{\frac{\rho}{\eta}}q(y-s_{n+1})\right) - \int_{s_{n+1}}^y \sqrt{\frac{\rho}{\eta}}q w_n(\xi) \sinh\left(\sqrt{\frac{\rho}{\eta}}q(y-\xi)\right) d\xi, \quad (6.65)$$

$$w'_{n+1}(y) = -\frac{\tau_0(\alpha_{n+1})}{\eta s_{n+1}} \cosh\left(\sqrt{\frac{\rho}{\eta}}q(y-s_{n+1})\right) - \int_{s_{n+1}}^y \frac{\rho}{\eta} q^2 w_n(\xi) \cosh\left(\sqrt{\frac{\rho}{\eta}}q(y-\xi)\right) d\xi. \quad (6.66)$$

Hasta ahora falta conocer el valor de s_{n+1} , que puede ser despejado de la ecuación (6.57). Reemplazando tenemos que:

$$-\frac{f_{n+1}}{\eta} = w'_{n+1}(L) = -\frac{\tau_0(\alpha_{n+1})}{\eta s_{n+1}} \cosh\left(\sqrt{\frac{\rho}{\eta}}q(L-s_{n+1})\right) - \int_{s_{n+1}}^L \frac{\rho}{\eta} q^2 w_n(\xi) \cosh\left(\sqrt{\frac{\rho}{\eta}}q(L-\xi)\right) d\xi.$$

Definimos:

$$F_{n+1}(s) = \frac{f_{n+1}}{\eta} - \frac{\tau_0(\alpha_{n+1})}{\eta s} \cosh\left(\sqrt{\frac{\rho}{\eta}}q(L-s)\right) - \int_s^L \frac{\rho}{\eta} q^2 w_n(\xi) \cosh\left(\sqrt{\frac{\rho}{\eta}}q(L-\xi)\right) d\xi. \quad (6.67)$$

De esta manera, s_{n+1} debe ser una raíz de F_{n+1} en el intervalo $(0, L)$. Veamos el teorema de existencia y unicidad de la solución discreta.

Teorema 6.5 *Si se cumplen las hipótesis expresadas en (A1)-(A5), (B1)-(B2), (C1)-(C2), (D1)-(D4), y además tenemos la siguiente condición sobre el parámetro de discretización:*

$$\max\left(K_1, \frac{K_2}{L}\eta \int_{s_m}^L u_m'^2 dy - \frac{K_2}{L}\tau_M \int_{s_m}^L u_m' dy\right) \leq q^2, \quad (6.68)$$

entonces existe solución única del problema (P_{yd}^α) .

Demostración: La demostración se realizará por inducción. Para $n = 1$, las cantidades α_1 , s_1 y w_1 están definidas debido a las condiciones iniciales. Además se satisface:

$$0 \leq \alpha_1 \leq 1, \quad (6.69)$$

$$w_1 \equiv 0, \text{ en } [0, s_1], \quad (6.70)$$

$$w_1 \leq 0, \quad (6.71)$$

$$w'_1 \leq 0, \quad (6.72)$$

$$s_1 \in (0, L). \quad (6.73)$$

$$u'_m \leq w_1 \leq u'_M \quad (6.74)$$

$$s_m \leq s_1 \leq s_M \quad (6.75)$$

Notar que (6.70) es satisfecha porque se puede realizar una extensión continua por cero de la función u'_0 en el intervalo $[0, s_0]$. Supongamos que existe solución única hasta el paso n con las siguientes propiedades: $0 \leq \alpha_n \leq 1$, $w_n \equiv 0$ en $[0, s_n]$, $w_n \leq 0$, $w'_n \leq 0$ y $s_n \in (0, L)$, $u'_m \leq w_n \leq u'_M$ y $s_m \leq s_n \leq s_M$. Veamos el paso $n + 1$:

► $0 \leq \alpha_{n+1} \leq 1$.

Usando la hipótesis inductiva se tiene que:

$$\alpha_{n+1} \geq \frac{\alpha_n}{q^2} \left[q^2 - \frac{K_2}{L} \eta \int_{s_n}^L w_n^2 dy + \frac{K_2}{L} \tau_0(\alpha_n) \int_{s_n}^L w_n dy \right]. \quad (6.76)$$

Debido a las cotas de w_n y a su signo, y a las cotas de s_n obtenemos:

$$\alpha_{n+1} \geq \frac{\alpha_n}{q^2} \left[q^2 - \frac{K_2}{L} \eta \int_{s_m}^L u'^2_m dy + \frac{K_2}{L} \tau_0(\alpha_n) \int_{s_m}^L u'_m dy \right]. \quad (6.77)$$

Por las cotas de τ_0 y la condición sobre q :

$$\alpha_{n+1} \geq \frac{\alpha_n}{q^2} \left[q^2 - \frac{K_2}{L} \eta \int_{s_m}^L u'^2_m dy + \frac{K_2}{L} \tau_M \int_{s_m}^L u'_m dy \right] \geq 0. \quad (6.78)$$

Por otro lado, usando los signos de w_n :

$$\alpha_{n+1} \leq \frac{1}{q^2} (\alpha_n q^2 + K_1(1 - \alpha_n)). \quad (6.79)$$

Debido a la condición sobre q obtenemos:

$$\alpha_{n+1} \leq \frac{1}{q^2} (\alpha_n q^2 + q^2(1 - \alpha_n)) = \alpha_n \leq 1. \quad (6.80)$$

Esto nos dice que $\tau_0(\alpha_{n+1})$ es ahora un número bien definido.

► *Existe al menos una raíz de F_{n+1} en $(0, L)$.*

La función F_{n+1} es claramente una aplicación continua en el intervalo $(0, L]$. Además:

$$\begin{aligned} F_{n+1}(L) &= \frac{1}{\eta} \left(f_{n+1} - \frac{\tau_M}{L} \right) > 0, & \text{debido a la condición de operabilidad,} \\ \lim_{s \rightarrow 0^+} F_{n+1}(s) &= -\infty, & \text{debido a que la integral está acotada.} \end{aligned}$$

Por continuidad, existe una raíz de F_{n+1} en el intervalo $(0, L)$.

- F_{n+1} tiene a lo sumo un punto crítico en $(0, L)$.

De (6.67) se obtiene:

$$\begin{aligned} F'_{n+1}(s) &= \frac{\tau_0(\alpha_{n+1})}{\eta s^2} \cosh\left(\sqrt{\frac{\rho}{\eta}}q(L-s)\right) + \frac{\tau_0(\alpha_{n+1})}{\eta s} \sqrt{\frac{\rho}{\eta}}q \sinh\left(\sqrt{\frac{\rho}{\eta}}q(L-s)\right) + \\ &+ \frac{\rho}{\eta}q^2 w_n(s) \cosh\left(\sqrt{\frac{\rho}{\eta}}q(L-s)\right). \end{aligned} \quad (6.81)$$

Si F_{n+1} no tiene puntos críticos el ítem está probado. Por el contrario, supongamos que existe al menos un s_* tal que $F_{n+1}(s_*) = 0$, es decir,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\tau_0(\alpha_{n+1})}{\eta s_*^2} \cosh\left(\sqrt{\frac{\rho}{\eta}}q(L-s_*)\right) + \frac{\tau_0(\alpha_{n+1})}{\eta s_*} \sqrt{\frac{\rho}{\eta}}q \sinh\left(\sqrt{\frac{\rho}{\eta}}q(L-s_*)\right) + \\ &+ \frac{\rho}{\eta}q^2 w_n(s_*) \cosh\left(\sqrt{\frac{\rho}{\eta}}q(L-s_*)\right). \end{aligned} \quad (6.82)$$

Claramente $s_* \neq 0$ porque $w_n \equiv 0$ en $[0, s_n]$. Multiplicando (6.82) por el inverso del primer sumando, se tiene que s_* es un cero de la función:

$$h(s) + \frac{\rho q^2 s^2 w_n(s)}{\tau_0(\alpha_{n+1})}, \quad (6.83)$$

donde

$$h(s) = 1 + s \sqrt{\frac{\rho}{\eta}}q \tanh\left(\sqrt{\frac{\rho}{\eta}}q(L-s)\right). \quad (6.84)$$

Como en el lema 6.2 se puede probar que h es cóncava y positiva en $(0, L)$. Claramente la función expresada en (6.83) tiene una única raíz debido a que h es cóncava y positiva, y debido a que la función $\rho q^2 s^2 w_n(s)/\tau_0(\alpha_{n+1})$ es negativa y decreciente en $(s_n, 1)$. Esto concluye la afirmación.

- F_{n+1} tiene una única raíz en $(0, L)$.

Sabemos que F_{n+1} tiene al menos una raíz. Si F_{n+1} no tiene puntos críticos, entonces F_{n+1} resulta creciente en $(0, L)$, lo que nos dice que F_{n+1} tiene una única raíz. Por el contrario, si existe un único punto crítico \tilde{s} , éste no puede ser un mínimo puesto que la función F_{n+1} es creciente en un entorno del cero. Las posibilidades que quedan entonces son que el punto crítico sea o un punto de inflexión o un máximo. En el caso de que sea un punto de inflexión, la función F_{n+1} resulta creciente, y en caso de ser un máximo, las raíces de F_{n+1} están en $(0, \tilde{s})$ puesto que $F_{n+1}(L) > 0$. Pero en $(0, \tilde{s})$ la función es creciente, por lo tanto, existe una única raíz de F_{n+1} .

Llamamos s_{n+1} a la única raíz de F_{n+1} en $(0, L)$. Luego podemos resolver w_{n+1} usando (6.65) y (6.66). Hasta aquí hemos resuelto la etapa $n+1$, pero necesitamos las propiedades sobre w_{n+1} y s_{n+1} para continuar la inducción.

- $w_{n+1} \equiv 0$ en $[0, s_{n+1}]$.

Extendemos w_{n+1} por cero en $[0, s_{n+1}]$ y debido a (6.55) tal extensión resulta continua, sin embargo la derivada no existe en s_{n+1} por (6.56).

- $w_{n+1} \leq 0$ en $[0, L]$.

Sabemos ya que $w_{n+1} = 0$ en $[0, s_{n+1}]$. Si llamamos a w_{n+1} por A , a s_{n+1} por s , y a $\rho q^2/\eta$ por γ^2 , es claro que w_{n+1} satisface un sistema similar a (6.21) usando (6.54), (6.55) y (6.57) y la hipótesis inductiva. Similarmente al lema 6.3 se obtiene que $w_{n+1} \leq 0$ en $[s_{n+1}, L]$. Esto concluye la afirmación.

- $w'_{n+1} \leq 0$ en $[0, L]$.

En $[0, s_{n+1})$ es claro que $w'_{n+1} = 0$. En $[s_{n+1}, L]$ se satisface:

$$\begin{cases} w'''_{n+1} - \frac{\rho}{\eta} q^2 w'_{n+1} = -\frac{\rho}{\eta} q^2 w'_{n+1}, & s_{n+1} < y < L, \\ w'_{n+1}(s_{n+1}) = -\tau_0(\alpha_{n+1})/\eta s_{n+1}, \\ w'_{n+1}(L) = -f_{n+1}/\eta. \end{cases} \quad (6.85)$$

Llamando a w'_{n+1} por A , a s_{n+1} por s y a $\rho q^2/\eta$ por γ^2 , entonces w'_{n+1} satisface un sistema similar a (6.22). Luego, por el lema 6.4, resulta $w'_{n+1} \leq 0$ en $[s_{n+1}, L]$. Esto concluye la afirmación.

- $s_m < s_{n+1} < s_M$.

Usando que $\tau_0 \geq \tau_m$ y $w_n \geq u'_m$ se tiene que:

$$\begin{aligned} F_{n+1}(s_m) &\leq \frac{f_{n+1}}{\eta} - \frac{\tau_m}{\eta s_m} \cosh\left(\sqrt{\frac{\rho}{\eta}} q(L - s_m)\right) + \\ &+ \int_{s_m}^L \frac{\rho}{\eta} q^2 \frac{f_M}{\eta} (\xi - s_m) \cosh\left(\sqrt{\frac{\rho}{\eta}} q(L - \xi)\right) d\xi. \end{aligned} \quad (6.86)$$

Usando integración por partes en la integral del segundo miembro de la desigualdad (6.86) se obtiene:

$$F_{n+1}(s_m) \leq \frac{1}{\eta} (f_{n+1} - f_M) < 0. \quad (6.87)$$

Por lo tanto $s_m < s_{n+1}$. Similarmente, utilizando $\tau_0 \leq \tau_M$, $w_n \leq u'_M$ e integración por partes se llega a que:

$$F_{n+1}(s_M) \geq \frac{1}{\eta} (f_{n+1} - f_m) > 0. \quad (6.88)$$

Esto último nos dice que $s_{n+1} < s_M$, lo que concluye la afirmación.

- $w_{n+1} \leq u'_M$.

Sea $B_{n+1} = w_{n+1} - u'_M$. Si $y \in [0, s_{n+1}]$ entonces $B_{n+1}(y) = 0$. Si $y \in [s_{n+1}, s_M]$ entonces $B_{n+1}(y) = w_{n+1}(y) \leq 0$. Si $y \in [s_M, L]$ se satisface:

$$\begin{cases} B''_{n+1} - \frac{\rho}{\eta} q^2 B_{n+1} \geq 0, & s_M < y < L, \\ B_{n+1}(s_M) \leq 0, \\ B'_{n+1}(L) \leq 0. \end{cases} \quad (6.89)$$

Usando una adaptación del lema 6.3 se prueba que $B_{n+1} \leq 0$, con lo que se concluye la afirmación.

► $u'_m \leq w_{n+1}$.

Es un razonamiento similar al párrafo anterior.

De esta manera se ha demostrado el paso inductivo para $n + 1$ y el teorema está finalizado. ■

Corolario 6.4 *Si se satisfacen las hipótesis del teorema 6.5 entonces:*

- $w_n \leq 0$, en $[0, L]$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- $w'_n \leq 0$, en $[0, L]$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- $w_n < 0$, en $(s_n, L]$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- $s_m < s_n < s_M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- $u'_m \leq w_n \leq u'_M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Notar que las propiedades de la solución discreta coinciden con las propiedades teóricas de la solución clásica.

Proposición 6.2 *La solución estacionaria del problema (P_y^α) expresado en las ecuaciones (2.39)-(2.46) es:*

$$s_\infty = \frac{\tau_0(\alpha_\infty)}{f_\infty}, \quad w_\infty(y) = \begin{cases} 0, & \text{si } y \in [0, s_\infty), \\ -f_\infty(y - s_\infty), & \text{si } y \in [s_\infty, L], \end{cases} \quad (6.90)$$

donde α_∞ y s_∞ satisfacen:

$$K_1(1 - \alpha_\infty) - \frac{K_2}{L}\alpha_\infty \left| \eta \int_{s_\infty}^L w_\infty^2 dy - \tau_0(\alpha_\infty) \int_{s_\infty}^L w_\infty dy \right| = 0. \quad (6.91)$$

Demostración: Tomando el sistema (2.39)-(2.46) se observa que la solución estacionaria satisface el siguiente sistema:

$$\begin{cases} w_\infty'' = 0, & s_\infty < y < L, \\ w_\infty'(L) = -f_\infty/\eta, \\ w_\infty(s_\infty) = 0, \\ w_\infty'(s_\infty) = -\tau_0(\alpha_\infty)/\eta s_\infty, \end{cases} \quad (6.92)$$

acoplado a la igualdad (6.91). Claramente la solución del sistema (6.92) es la solución que buscamos, y la proposición queda demostrada. ■

Teorema 6.6 *Si se satisfacen las hipótesis del teorema 6.5 y hay solamente una única solución estacionaria, y además:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha_*, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s_*, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w_*, \quad (6.93)$$

entonces $\alpha_* = \alpha_\infty$, $s_* = s_\infty$ y $w_* = w_\infty$.

Demostración: Tomando $\lim_{n \rightarrow \infty}$ en (6.65) obtenemos:

$$w_*(y) = -\frac{\tau_0(\alpha_*)}{\sqrt{\rho\eta}s_*q} \sinh\left(\sqrt{\frac{\rho}{\eta}}q(y-s_*)\right) - \int_{s_*}^y \sqrt{\frac{\rho}{\eta}}q w_*(\xi) \sinh\left(\sqrt{\frac{\rho}{\eta}}q(y-\xi)\right) d\xi. \quad (6.94)$$

Calculando las derivadas de la función w_* se tiene que:

$$w_*'' = 0, \quad y \in [s_*, L], \quad w_*(s_*) = 0, \quad w_*'(s_*) = -\frac{\tau_0(s_*)}{\eta s_*}. \quad (6.95)$$

Por otra parte, tomando $\lim_{n \rightarrow \infty}$ en (6.66) obtenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w'_{n+1}(y) = -\frac{\tau_0(\alpha_*)}{\eta s_*} \cosh\left(\sqrt{\frac{\rho}{\eta}}q(y-s_*)\right) - \int_{s_*}^y \frac{\rho}{\eta} q^2 w_*(\xi) \cosh\left(\sqrt{\frac{\rho}{\eta}}q(y-\xi)\right) d\xi. \quad (6.96)$$

De (6.94) y (6.96) podemos deducir que $\lim_{n \rightarrow \infty} w'_n(y) = w'_*(y)$. Luego:

$$w'_*(L) = \lim_{n \rightarrow \infty} w'_{n+1}(L) = -f_{n+1}/\eta = -f_\infty/\eta.$$

Tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$ a (6.60) obtenemos (6.91).

Hemos demostrado entonces que w_* , s_* y α_* satisfacen el sistema (6.92) acoplado a (6.91). Esto nos dice que $w_* = w_\infty$, $s_* = s_\infty$ y $\alpha_* = \alpha_\infty$, debido a que existe sólo una solución estacionaria. Esto concluye la prueba. ■

6.3. Geometría cilíndrica.

En la subsección que sigue se demostrarán una serie de lemas técnicos que nos servirán para plantear el método de líneas para geometría cilíndrica. Mayormente estos lemas tratan acerca de la solución estacionaria, funciones de Bessel y algunas de sus propiedades, y principios del máximo para ecuaciones diferenciales ordinarias con diversas condiciones de contorno.

6.3.1. Preliminares.

Lema 6.7 *Sea Z la solución de:*

$$\begin{cases} Z'' + Z'/r - Z/r^2 + \tau_0/r^2 = 0, & s < r < 1, \\ Z'(1) + Z(1) = -(f - \tau_0), \\ Z(s) = 0, \\ Z'(s) = -\tau_0/s, \end{cases} \quad (6.97)$$

donde s , τ_0 y f son números positivos. Entonces:

$$s = \frac{2\tau_0}{f}, \quad Z(r) = \tau_0 - \frac{rf}{2}, \quad \text{en } (s, 1). \quad (6.98)$$

Demostración: Llamemos $Y = Z' + Z/r$ se tiene que el sistema (6.97) puede reescribirse como:

$$\begin{cases} Y' = -\tau_0/r^2, & s < r < 1, \\ Y(1) = -(f - \tau_0), \\ Y(s) = -\tau_0/s. \end{cases} \quad (6.99)$$

De la primera ecuación es claro que $Y = \tau_0/r + \text{const}$. Utilizando las condiciones de borde tenemos:

$$\left. \begin{aligned} -\tau_0/s &= Y(s) = \tau_0/s + \text{const} \Rightarrow \text{const} = -2\tau_0/s \\ -(f - \tau_0) &= Y(1) = \tau_0 + \text{const} \Rightarrow \text{const} = -f \end{aligned} \right\} \Rightarrow s = 2\tau_0/f.$$

Con esto queda demostrado la primera parte del lema. Ahora:

$$\begin{aligned} Y = \tau_0/r - f &\Rightarrow Z' + Z/r = \tau_0/r - f \Rightarrow \\ &\Rightarrow (rZ)' = \tau_0 - rf \\ &\Rightarrow Z = \tau_0 - rf/2. \end{aligned} \tag{6.100}$$

Esto concluye la demostración. ■

Observación 6.2 *Notar que el lema previo determina la solución estacionaria de (2.68)-(2.73). Llamaremos a esta solución s_∞ y w_∞ :*

$$s_\infty = \frac{2\tau_0}{f_\infty}, \quad w_\infty(r) = \tau_0 - \frac{rf_\infty}{2}, \quad r \in [s_\infty, 1]. \tag{6.101}$$

El siguiente lema nos provee de las soluciones fundamentales de una ecuación diferencial ordinaria tipo Bessel. Estas soluciones nos serán de mucha utilidad en los teoremas que siguen.

Lema 6.8 *La ecuación diferencial ordinaria:*

$$x^2 y'' + xy' - (1 + x^2)y = 0, \tag{6.102}$$

tiene dos soluciones analíticas e independientes y_1 y y_2 , que convergen para $x > 0$.

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}, \tag{6.103}$$

$$y_2(x) = -\frac{1}{4}y_1(x) \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n-1}, \tag{6.104}$$

donde:

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_1 = 0, \\ a_n = \frac{a_{n-2}}{n(n+2)}, \quad n \geq 2. \end{cases} \tag{6.105}$$

$$\begin{cases} c_0 = -1/2, \\ c_1 = 0, \\ c_2 = -1/16, \\ c_{n+2} = \frac{[c_n + \frac{1}{2}(n+1)a_n]}{n(n+2)}, \quad n \geq 1. \end{cases} \tag{6.106}$$

Demostración: Ver [19]. ■

Lema 6.9 *La ecuación diferencial ordinaria:*

$$x^2 y'' + xy' - (1 + x^2)y = h, \quad (6.107)$$

tiene una solución general dada por:

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) - y_1(x) \int \frac{y_2(x)h(x)}{x^2(y_1 y_2' - y_1' y_2)(x)} dx + \\ &+ y_2(x) \int \frac{y_1(x)h(x)}{x^2(y_1 y_2' - y_1' y_2)(x)} dx \end{aligned} \quad (6.108)$$

donde $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son las soluciones fundamentales de (6.102) mencionadas en el lema 6.8.

Demostración: Es un hecho bien conocido que la solución general de (6.107) es una combinación lineal de las soluciones fundamentales de la ecuación homogénea más una solución particular. Los últimos dos términos en (6.108) corresponden a la solución particular, que se encuentra por el método de variación de los parámetros. ■

El lema 6.10 será usado para encontrar explícitamente la solución discreta w_{n+1} .

Lema 6.10 *Sea U una función que satisfice:*

$$\begin{cases} U'' + \frac{1}{r}U' - \left(\frac{1}{r^2} + q^2\right)U = g, & s < r, \\ U(s) = -\tau_0, \\ U'(s) = -\tau_0/s. \end{cases} \quad (6.109)$$

donde g es una función, y , s , q , y τ_0 son números positivos. La solución de (6.109) es:

$$\begin{aligned} U(r) &= c_1 y_1(rq) + c_2 y_2(rq) + y_2(rq) \int_s^r \frac{y_1(\mu q)g(\mu)}{q(y_1 y_2' - y_1' y_2)(\mu q)} d\mu - \\ &- y_1(rq) \int_s^r \frac{y_2(\mu q)g(\mu)}{q(y_1 y_2' - y_1' y_2)(\mu q)} d\mu, \end{aligned} \quad (6.110)$$

$$\begin{aligned} U'(r) &= c_1 q y_1'(rq) + c_2 q y_2'(rq) + q y_2'(rq) \int_s^r \frac{y_1(\mu q)g(\mu)}{q(y_1 y_2' - y_1' y_2)(\mu q)} d\mu - \\ &- q y_1'(rq) \int_s^r \frac{y_2(\mu q)g(\mu)}{q(y_1 y_2' - y_1' y_2)(\mu q)} d\mu. \end{aligned} \quad (6.111)$$

donde y_1 e y_2 son las soluciones fundamentales de (6.102), y además:

$$c_1 = \frac{-\tau_0 q y_2'(sq) + \tau_0 y_2(sq)/s}{q(y_1 y_2' - y_1' y_2)(sq)}, \quad (6.112)$$

$$c_2 = \frac{\tau_0 q y_1'(sq) - \tau_0 y_1(sq)/s}{q(y_1 y_2' - y_1' y_2)(sq)}. \quad (6.113)$$

Demostración: Haciendo un cambio de variables ($x = rq$) obtenemos una ecuación semejante a la (6.107), y esta ecuación puede ser resuelta usando el lema 6.9. Los coeficientes c_1 y c_2 en (6.108) son obtenidos usando las condiciones de contorno y resolviendo un sistema lineal. ■

A continuación se prueba un principio del máximo que será útil para conocer el signo del wronskiano de las soluciones y_1 e y_2 y de otras cantidades que se definirán más adelante.

Lema 6.11 *Sea Z una función que satisfice:*

$$\begin{cases} s^2 Z'' + sZ' - gZ \leq 0, & s \in (0, 1), \\ \lim_{s \rightarrow \infty} Z(s) = \infty, \\ Z(1) > 0. \end{cases} \quad (6.114)$$

donde g es una función positiva en $(0, 1)$. Entonces $Z \geq 0$ en $[0, 1]$. Además, si reemplazamos el signo \leq por el signo $<$ en la inecuación diferencial, se cumple que $Z > 0$ en $[0, 1]$.

Demostración: Supongamos que existe $\tilde{s} \in [0, 1]$ tal que $Z(\tilde{s}) < 0$. Entonces $\tilde{s} \neq 0$ y $\tilde{s} \neq 1$. Consecuentemente, existe $\bar{s} \in (0, 1)$ un mínimo local en $(0, 1)$, esto es, $Z(\bar{s}) < 0$, $Z'(\bar{s}) = 0$ y $Z''(\bar{s}) \geq 0$. Evaluando en la ecuación diferencial tenemos:

$$0 \geq \bar{s}^2 Z''(\bar{s}) + \bar{s}Z'(\bar{s}) - g(\bar{s})Z(\bar{s}) > 0, \quad (6.115)$$

que es una contradicción. Si consideramos una desigualdad estricta en la ecuación diferencial, suponer que existe $\tilde{s} \in [0, 1]$ tal que $Z(\tilde{s}) \leq 0$ y repetir los pasos previos. Esto concluye la prueba. ■

Definición 6.1 *Sean y_1 e y_2 soluciones fundamentales de (6.102) y q un número positivo. Definimos,*

- $W(s) = (y_1 y_2' - y_1' y_2)(s)$. Es llamado el Wronskiano de y_1 and y_2 .
- $\alpha = qy_2'(q) + y_2(q)$.
- $\beta = -(qy_1'(q) + y_1(q))$.
- $A(s) = \alpha y_1(sq) + \beta y_2(sq)$.

Lema 6.12 *Si las funciones A y W son las mencionadas en la definición 6.1, se cumplen las siguientes propiedades:*

(A) $\beta < 0$.

(B) $W(s) > 0, \forall s \in [0, 1]$.

(C) $A(s) > 0, \forall s \in [0, 1]$.

(D) $A'(s) < 0, \forall s \in [0, 1]$.

Demostración:

(A) Es una consecuencia de (6.103) y (6.105).

(B) El teorema de Abel dice que el Wronskiano es una función que nunca se anula (Ver [19]). Puede probarse que:

$$W(x) = \frac{1}{x} + O(x) + O(x) \ln x. \quad (6.116)$$

Es claro que W es una función positiva:

(C) La función A satisface:

$$\begin{cases} s^2 A'' + sA' - (1 + s^2 q^2)A = 0, & 0 < s < 1, \\ \lim_{s \rightarrow 0^+} A(s) = +\infty, \\ A(1) = qW(q) > 0. \end{cases} \quad (6.117)$$

La ecuación diferencial es verdadera porque A es una combinación lineal de las soluciones fundamentales. Las últimas dos ecuaciones son obtenidas de la definición de A , el comportamiento asintótico de y_1 e y_2 , y de (6.116). Por lema 6.11 deducimos que $A \geq 0$ en $[0, 1]$.

Supongamos ahora que existe \bar{s} en $[0, 1]$ tal que $A(\bar{s}) = 0$. Las condiciones de contorno nos dicen que \bar{s} está en $(0, 1)$. Deducimos que \bar{s} es un mínimo local, por lo tanto se cumple que $A(\bar{s}) = A'(\bar{s}) = 0$. El punto \bar{s} tiene que ser una raíz aislada de A . Si así no fuera, $A = 0$ en un entorno I de \bar{s} , y esto no puede suceder puesto que y_1 e y_2 son soluciones independientes. Por lo tanto, existe $n \geq 2$ tal que:

$$A^{(n)}(\bar{s}) \neq 0, \quad A^{(j)}(\bar{s}) = 0, \quad j = 0, \dots, n-1. \quad (6.118)$$

Derivando la primera ecuación de (6.117) obtenemos:

$$\bar{s}^2 A^{(n)}(\bar{s}) + \sum_{j=0}^{n-1} (\text{coeficientes})_j A^{(j)}(\bar{s}) = 0. \quad (6.119)$$

Concluimos que $A^{(n)}(\bar{s}) = 0$ y esto es una contradicción debido a (6.118). Finalmente, $A(s) > 0$ para todo s en $[0, 1]$.

(D) La función $B = A'$ satisface:

$$\begin{cases} s^2 B'' + 3sB' - s^2 q^2 B > 0, & s \in (0, 1), \\ \lim_{s \rightarrow 0^+} B(s) = -\infty, \\ B(1) = -qW(q) < 0. \end{cases} \quad (6.120)$$

Esta ecuación se obtiene derivando (6.117) y analizando el comportamiento asintótico de y_1' e y_2' cuando s tiende a 0^+ . Por lema 6.11 aplicado a $-B$ y usando la desigualdad estricta en el lema, concluimos que $B < 0$ en $[0, 1]$, que es equivalente a $A' < 0$ en $[0, 1]$. ■

Definición 6.2 Sean A y W las funciones mencionadas en la definición 6.1. Si q es un número positivo, definimos:

$$H(s) = -\frac{A'(s)}{A(s)}, \quad (6.121)$$

$$K(s) = \frac{A(s)}{qW(sq)}, \quad (6.122)$$

$$J(s) = sH(s). \quad (6.123)$$

Lema 6.13 Sean A y W las funciones de la definición 6.1, y H , K y J las funciones de la definición 6.2. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

(A) $K > 0$.

(B) $H > 0$.

(C) $K(1) = 1$.

(D) $H(1) = 1$.

(E) $\lim_{s \rightarrow 0^+} K(s)/s = \infty$.

(F) $\frac{K'}{K} - \frac{1}{s} = \frac{A'}{A}$.

(G) $J(1) = 1$.

(H) $\lim_{s \rightarrow 0^+} J(s) = 1$.

(I) J tiene exactamente un punto crítico en $(0, 1)$ y es un máximo local.

(J) $J \geq 1$ en $[0, 1]$.

(K) $\lim_{s \rightarrow 0^+} K(s) < \infty$. Luego, K es una función continua en $[0, 1]$.

Demostración:

► (A) y (B) son una consecuencia del lema 6.12. (C) y (D) se deducen de (6.117) y (6.120).

► Analizando el comportamiento asintótico de $K(s)/s$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s}K(s) &= \alpha \frac{sq + O(s^3q^3)}{1 + O(s^2q^2) + O(s^2q^2) \ln(sq)} - \\ &- \beta \frac{1 + O(s^2q^2) + O(s^2q^2) \ln(sq)}{2sq + O(s^3q^3) + O(s^3q^3) \ln(sq)}. \end{aligned} \quad (6.124)$$

Es claro que (E) se sigue.

► Sabemos que $W' + \frac{1}{s}W = 0$ (Teorema de Abel). Derivemos K :

$$K'(s) = \frac{A'(s)}{A(s)}K(s) - \frac{A(s)}{W(sq)} \left(-\frac{1}{sq} \right) = K(s) \left(\frac{A'(s)}{A(s)} + \frac{1}{s} \right). \quad (6.125)$$

Dividiendo por K se obtiene (F).

- (G) se obtiene de (D) y la definición de J .
- El comportamiento asintótico de sH es:

$$sH(s) = \frac{1 + O(s^2q^2) + O(s^2q^2) \ln(sq)}{1 + O(s^2q^3) + O(s^2q^3) \ln(sq)}. \quad (6.126)$$

Es claro que (H) se deduce tomando límite cuando $s \rightarrow 0^+$.

- De (6.117) tenemos que:

$$-\frac{A''}{A} = \frac{1}{s} \frac{A'}{A} - \left(\frac{1}{s^2} + q^2 \right) = -\frac{1}{s} H - \left(\frac{1}{s^2} + q^2 \right). \quad (6.127)$$

Ahora,

$$H' = -\frac{A''}{A} + \left(\frac{A'}{A} \right)^2 = -\frac{1}{s} H + H^2 - \left(\frac{1}{s^2} + q^2 \right). \quad (6.128)$$

Teniendo en cuenta que $J' = H + sH'$ y (6.128) tenemos que:

$$J^2 = sJ' + (1 + s^2q^2). \quad (6.129)$$

Manipulando (6.129) y derivando se tiene que,

$$s^2 J'' = -J^2 + 2sJJ' + 1 - s^2q^2. \quad (6.130)$$

- *Cada punto crítico $\bar{s} \in (0, 1)$ de J satisface $J''(\bar{s}) < 0$.*

Supongamos que $J'(\bar{s}) = 0$ y $J''(\bar{s}) \geq 0$. Usando (6.129) vemos que $J^2(\bar{s}) = 1 + \bar{s}^2q^2$. Por (6.130):

$$0 \leq \bar{s}^2 J''(\bar{s}) = -J^2(\bar{s}) + 1 - s^2q^2 = -2\bar{s}^2q^2 < 0. \quad (6.131)$$

Y esto es una contradicción. Además, si existe un punto crítico (de hecho, existe al menos un punto crítico debido a que $J(0) = J(1) = 1$), entonces tiene que ser un máximo local aislado.

- *Existe exactamente un punto crítico (que es un máximo local).*

Tomemos $s_1 < s_2$ dos puntos críticos consecutivos. Ambos s_1 y s_2 son máximos locales. Luego $J''(s_1) < 0$ y $J''(s_2) < 0$. Tomemos δ positivo y suficientemente pequeño tal que $J'(s_1 + \delta) < 0$ y $J'(s_2 - \delta) > 0$. Entonces, existe $s_3 \in (s_1, s_2)$ un punto crítico de J . Pero esto es una contradicción debido a que s_1 y s_2 eran consecutivos.

Esto demuestra (I).

- Usando (I) y la propiedad $J(0) = J(1) = 1$, la desigualdad (J) queda demostrada.
- (K) se obtiene haciendo un análisis asintótico como en (E).

Los próximos dos lemas nos dan detalles técnicos para poder demostrar el teorema de existencia y unicidad del método de líneas. ■

Lema 6.14 *Sea Z una función que satisface:*

$$\begin{cases} Z'' + \frac{1}{r}Z' - gZ \geq 0, & s < r < 1, \\ Z(1) < 0, \\ Z(s) < 0, \end{cases} \quad (6.132)$$

donde g es una función positiva y s es un número positivo. Entonces $Z \leq 0$ en $[s, 1]$.

Demostración: Supongamos que existe un punto $\tilde{s} \in [s, 1]$ tal que $Z(\tilde{s}) > 0$ ($\tilde{s} \neq s$ y $\tilde{s} \neq 1$ debido a las condiciones de contorno). Entonces existe $\bar{s} \in (s, 1)$ un máximo local positivo, esto es, $Z(\bar{s}) > 0$, $Z'(\bar{s}) = 0$ y $Z''(\bar{s}) \leq 0$. Evaluando en la ecuación diferencial tenemos:

$$0 \leq Z''(\bar{s}) + \frac{1}{\bar{s}}Z'(\bar{s}) - g(\bar{s})Z(\bar{s}) < 0, \quad (6.133)$$

y esto es una contradicción. ■

Lema 6.15 *Sea Z una función que satisface:*

$$\begin{cases} Z'' + \frac{1}{r}Z' - gZ \geq 0, & s < r < 1, \\ Z(s) \leq 0, \\ Z'(1) + Z(1) \leq 0, \end{cases} \quad (6.134)$$

donde g es una función positiva y s es un número positivo. Entonces $Z \leq 0$ en $[s, 1]$.

Demostración: Supongamos que existe \tilde{s} en $[s, 1]$ tal que $Z(\tilde{s}) > 0$. Es claro que $\tilde{s} \neq s$. También puede probarse que $Z(1) > 0$. Si $Z(1) \leq 0$, entonces existe \bar{s} en $(s, 1)$ tal que \bar{s} es un máximo positivo. Si evaluamos la ecuación diferencial en \bar{s} llegamos a una contradicción. Debido a las condiciones de contorno en $s = 1$ concluimos que $Z'(1) < 0$, y esto implica que el máximo de Z está en $(s, 1)$. Usando la ecuación principal del sistema es claro que se llega a un absurdo, y la prueba queda finalizada. ■

6.3.2. Aplicación del método.

Discretizamos el tiempo y elegimos un paso de tiempo fijo $\Delta t > 0$. Definimos:

$$t_n = (n - 1)\Delta t, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (6.135)$$

$$s_n = s(t_n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (6.136)$$

$$f_n = f(t_n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (6.137)$$

$$w_n(r) = w(r, t_n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (6.138)$$

$$q = \sqrt{1/\Delta t}. \quad (6.139)$$

Aproximando las derivadas temporales usando el cociente incremental, el sistema (P_r^c) se transforma en otro sistema, llamado (P_{rd}^c) . Para todo n en \mathbb{N} :

$$w''_{n+1} + \frac{1}{r}w'_{n+1} - \left(q^2 + \frac{1}{r^2}\right)w_{n+1} + \frac{\tau_0}{r^2} = -q^2w_n, \quad s_{n+1} < r < 1, n \in \mathbb{N}, \quad (6.140)$$

$$w_{n+1}(s_{n+1}) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (6.141)$$

$$w'_{n+1}(s_{n+1}) = -\tau_0/s_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (6.142)$$

$$w'_{n+1}(1) + w_{n+1}(1) = -f_{n+1} + \tau_0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (6.143)$$

$$s_1 = s_0, \quad (6.144)$$

$$w_1(r) = u'_0(r), \quad 0 < s_1 < r < 1. \quad (6.145)$$

Para demostrar la existencia del problema enunciado arriba, llamaremos:

$$U_n = w_n - \tau_0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6.146)$$

Transformando (6.140)-(6.145), se tiene que:

$$U''_{n+1} + \frac{1}{r}U'_{n+1} - \left(q^2 + \frac{1}{r^2}\right)U_{n+1} = -q^2U_n, \quad s_{n+1} < r < 1, n \in \mathbb{N}, \quad (6.147)$$

$$U_{n+1}(s_{n+1}) = -\tau_0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (6.148)$$

$$U'_{n+1}(s_{n+1}) = -\tau_0/s_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (6.149)$$

$$U'_{n+1}(1) + U_{n+1}(1) = -f_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (6.150)$$

$$s_1 = s_0, \quad (6.151)$$

$$U_1(r) = u'_0(r) - \tau_0, \quad 0 < s_1 < r < 1. \quad (6.152)$$

Reuniendo (6.147)-(6.149) y mediante la ayuda del lema 6.10 llegamos a las siguientes soluciones:

$$\begin{aligned} U_{n+1}(r) &= \tau_0 \left(\frac{-qy'_2(s_{n+1}q) + \frac{y_2(s_{n+1}q)}{s_{n+1}}}{qW(s_{n+1}q)} \right) y_1(rq) + \tau_0 \left(\frac{qy'_1(s_{n+1}q) - \frac{y_1(s_{n+1}q)}{s_{n+1}}}{qW(s_{n+1}q)} \right) y_2(rq) - \\ &- y_2(rq) \int_{s_{n+1}}^r \frac{y_1(\mu q)q^2U_n(\mu)}{qW(\mu q)} d\mu + y_1(rq) \int_{s_{n+1}}^r \frac{y_2(\mu q)q^2U_n(\mu)}{qW(\mu q)} d\mu, \end{aligned} \quad (6.153)$$

$$\begin{aligned} U'_{n+1}(r) &= \tau_0 \left(\frac{-qy'_2(s_{n+1}q) + \frac{y_2(s_{n+1}q)}{s_{n+1}}}{W(s_{n+1}q)} \right) y'_1(rq) + \tau_0 \left(\frac{qy'_1(s_{n+1}q) - \frac{y_1(s_{n+1}q)}{s_{n+1}}}{W(s_{n+1}q)} \right) y'_2(rq) - \\ &- y'_2(rq) \int_{s_{n+1}}^r \frac{y_1(\mu q)q^2U_n(\mu)}{W(\mu q)} d\mu + y'_1(rq) \int_{s_{n+1}}^r \frac{y_2(\mu q)q^2U_n(\mu)}{W(\mu q)} d\mu. \end{aligned} \quad (6.154)$$

Teorema 6.7 Si el dato inicial u_0 satisface:

$$\begin{cases} u_0'(r) \leq \tau_0, & \text{en } [s_0, 1], \\ u_0'' + u_0'/r \leq \tau_0/r, & \text{en } [s_0, 1] \end{cases} \quad (6.155)$$

y también se cumple la condición de operabilidad:

$$f(t) > 2\tau_0, \quad \forall t > 0, \quad (6.156)$$

entonces:

1. El sistema (6.147)-(6.152) admite una única solución para todo n en \mathbb{N} .
2. $U_n \leq 0$, en $[0, 1]$, para todo n en \mathbb{N} .
3. $U_n' + \frac{1}{r}U_n \leq 0$, en $[s_n, 1]$, para todo n en \mathbb{N} .

Demostración: Probaremos (1), (2) y (3) al mismo tiempo por inducción sobre n . Extendemos u_0 por cero en el intervalo $[0, s_1]$. De esta forma U_1 es continua en el intervalo $[0, 1]$ debido a que $u_0'(s_0) = 0$ (compatibilidad del dato inicial). Ahora, (2) y (3) se cumplen debido a la hipótesis (6.155). Luego, el paso $n = 1$ de la inducción está completado.

Supongamos ahora que tenemos s_n y U_n tal que $s_n \in (0, 1)$, y que U_n satisface (2) y (3). También suponemos que U_n se extiende por la constante $-\tau_0$ en $[0, s_n]$ (que equivale a decir que w_n se extiende por cero en $[0, s_n]$).

Las ecuaciones (6.147)-(6.149) tienen solución U_{n+1} y es expresada en (6.153), dado que s_{n+1} es conocido. Introducimos esta expresión en (6.150) para obtener una ecuación para s_{n+1} . Haciendo operaciones algebraicas, y usando las definiciones previas, tenemos que:

$$0 = f_{n+1} - \frac{\tau_0}{s_{n+1}}(1 + J(s_{n+1}))K(s_{n+1}) - \int_{s_{n+1}}^1 q^2 U_n(\mu) K(\mu) d\mu. \quad (6.157)$$

Por lo tanto s_{n+1} tiene que ser una raíz de una función F_{n+1} definida por:

$$F_{n+1}(s) = f_{n+1} - \frac{\tau_0}{s}(1 + J(s))K(s) - \int_s^1 q^2 U_n(\mu) K(\mu) d\mu \quad (6.158)$$

- Existe al menos una raíz de F_{n+1} en $(0, 1)$.

Es claro que F_{n+1} es continua en $(0, 1)$. Además, $F_{n+1}(1) = f_{n+1} - 2\tau_0 > 0$, debido a la condición de operabilidad. Por lema 6.13 y la continuidad de K en $[0, 1]$ deducimos que $\lim_{s \rightarrow 0^+} F_{n+1}(s) = -\infty$. Por lo tanto, existe una raíz en $(0, 1)$.

- F_{n+1} tiene a lo sumo un punto crítico en $(0, 1)$.

Puede probarse que:

$$F_{n+1}'(s) = -\frac{\tau_0}{s^2} K(s) \left[1 + s^2 q^2 + J(s) + \frac{q^2 s^2 U_n(s)}{\tau_0} \right]. \quad (6.159)$$

Definimos:

$$B(s) = 1 + s^2 q^2 + J(s), \quad (6.160)$$

$$C_n(s) = \frac{q^2 s^2 U_n(s)}{\tau_0}, \quad (6.161)$$

$$G_n(s) = B_n(s) + C_n(s). \quad (6.162)$$

La función B satisface:

$$B(0) = 1 + J(0) = 1, \quad \text{por la definición de } J, \quad (6.163)$$

$$B(1) = 1 + q^2 + J(1) = 2 + q^2, \quad \text{por lema 6.13.} \quad (6.164)$$

Usando la ecuación (6.129) se tiene que:

$$sB'(s) = J^2(s) - 1 + s^2 q^2 \geq s^2 q^2 \geq 0, \quad (6.165)$$

debido a (J) del lema 6.13. Esto nos dice que B es una función creciente en $(0, 1)$. Por otra parte C_n es una función negativa y decreciente, puesto que:

$$C'_n(s) = \frac{s^2 q^2}{\tau_0} \left(U'_n(s) + \frac{1}{s} U_n(s) \right) + \frac{s q^2}{\tau_0} U_n(s) \leq 0. \quad (6.166)$$

Si $F'_{n+1}(s) \neq 0$ para todo $s \in (0, 1)$, entonces F_{n+1} no tiene puntos críticos. Supongamos ahora que existe un punto \bar{s} raíz de F'_{n+1} . Usando (A) del lema 6.13, deducimos que \bar{s} es una raíz de G_n . Los puntos críticos de F_{n+1} son raíces de G_n . Pero por lo anterior, la función B es creciente, y el hecho de que C_n sea una función negativa y decreciente implica que G_n tiene a lo sumo una única raíz. Por lo tanto, existe a lo sumo un punto crítico de F_{n+1} .

- F_{n+1} tiene una única raíz en $(0, 1)$.

Sabemos que F_{n+1} tiene al menos una raíz. Si F_{n+1} no tiene puntos críticos, entonces F_{n+1} resulta creciente en $(0, 1)$, lo que nos dice que F_{n+1} tiene una única raíz. Por el contrario, si existe un único punto crítico \tilde{s} , éste no puede ser un mínimo puesto que la función F_{n+1} es creciente en un entorno del cero. Las posibilidades que quedan entonces son que el punto crítico sea o un punto de inflexión o un máximo. En el caso de que sea un punto de inflexión, la función F_{n+1} resulta creciente, y en caso de ser un máximo, las raíces de F_{n+1} están en $(0, \tilde{s})$ puesto que $F_{n+1}(1) > 0$. Pero en $(0, \tilde{s})$ la función es creciente, por lo tanto, existe una única raíz de F_{n+1} .

Ahora, definimos s_{n+1} como la única raíz de F_{n+1} , y $s_{n+1} \in (0, 1)$.

- $U_{n+1} \leq 0$ en $[0, 1]$.

Extendemos continuamente U_{n+1} por la constante $-\tau_0$ en $[0, s_{n+1}]$ (equivale a extender w_{n+1} por cero). La función U_{n+1} satisface (6.147)-(6.150), y usando el lema 6.15 probamos que U_{n+1} es una función no positiva en el intervalo $[0, 1]$.

► $U'_{n+1} + \frac{1}{r}U_{n+1} \leq 0$ en $[s_{n+1}, 1]$.

Definimos $Z_{n+1} = U'_{n+1} + \frac{1}{r}U_{n+1}$. Con la ayuda de (6.147) deducimos que:

$$Z'_{n+1} = -q^2(U_n - U_{n+1}). \quad (6.167)$$

Derivando (6.147) y usando (6.167) y la hipótesis inductiva, es claro que:

$$Z''_{n+1} + \frac{1}{r}Z'_{n+1} - q^2Z_{n+1} = -q^2Z_n \geq 0. \quad (6.168)$$

Finalmente, Z_{n+1} satisface el siguiente sistema:

$$\begin{cases} Z''_{n+1} + \frac{1}{r}Z'_{n+1} - q^2Z_{n+1} \geq 0, & r \in (s_{n+1}, 1), \\ Z_{n+1}(1) < 0, \\ Z_{n+1}(s_{n+1}) < -2\tau_0/s_{n+1}. \end{cases} \quad (6.169)$$

Por lema 6.14 se ve que $Z_{n+1} \leq 0$ en $[s_{n+1}, 1]$.

Este último paso completa la etapa inductiva, y la prueba está completada. ■

Una vez demostrada la existencia y unicidad del problema (P_{rd}^c) , el algoritmo está perfectamente definido.

Teorema 6.8 *Supongamos que el dato inicial satisface (6.155) y que se cumple la condición de operabilidad. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s_*$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w_*$, entonces $s_* = s_\infty$ y $w_* = w_\infty$.*

Demostración: Tomando límite en (6.153) cuando n tiende a infinito tenemos que:

$$\begin{aligned} U_*(r) &= \tau_0 \left(\frac{-qy'_2(s_*q) + \frac{y_2(s_*q)}{s_*}}{qW(s_*q)} \right) y_1(rq) + \tau_0 \left(\frac{qy'_1(s_*q) - \frac{y_1(s_*q)}{s_*}}{qW(s_*q)} \right) y_2(rq) - \\ &- y_2(rq) \int_{s_*}^r \frac{y_1(\mu q)q^2U_*(\mu)}{qW(\mu q)} d\mu + y_1(rq) \int_{s_*}^r \frac{y_2(\mu q)q^2U_*(\mu)}{qW(\mu q)} d\mu. \end{aligned} \quad (6.170)$$

Derivando (6.170) obtenemos:

$$\begin{aligned} U'_*(r) &= \tau_0 \left(\frac{-qy'_2(s_*q) + \frac{y_2(s_*q)}{s_*}}{W(s_*q)} \right) y'_1(rq) + \tau_0 \left(\frac{qy'_1(s_*q) - \frac{y_1(s_*q)}{s_*}}{W(s_*q)} \right) y'_2(rq) - \\ &- y'_2(rq) \int_{s_*}^r \frac{y_1(\mu q)q^2U_*(\mu)}{qW(\mu q)} d\mu + y'_1(rq) \int_{s_*}^r \frac{y_2(\mu q)q^2U_*(\mu)}{qW(\mu q)} d\mu. \end{aligned} \quad (6.171)$$

Derivando una vez más, se puede probar que $U_*'' + \frac{1}{r}U_*' - \frac{1}{r^2}U_* = 0$. También es obvio que $U_*(s_*) = -\tau_0$ y que $U'_*(s_*) = -\tau_0/s_*$.

Tomando límite en (6.154) cuando n tiende a infinito obtenemos (6.171). Por lo tanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} U'_{n+1} = U'_*$. Ahora, $U'_*(1) + U_*(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} (U'_{n+1}(1) + U_{n+1}(1)) = \lim_{n \rightarrow \infty} -f_{n+1} = -f_\infty$. De esta manera, reuniendo todas las ecuaciones se tiene que:

$$\begin{cases} U''_* + \frac{1}{r}U'_* - \frac{1}{r^2}U_* = 0, & r \in (s_*, 1), \\ U_*(s_*) = -\tau_0, \\ U'_*(s_*) = -\tau_0/s_*, \\ U'_*(1) + U_*(1) = -f_\infty. \end{cases} \quad (6.172)$$

Reescribimos el sistema (6.172) escribiendo $w_* = U_* + \tau_0$. Entonces obtenemos un sistema similar a (6.97). Por lema 6.7 el sistema tiene única solución:

$$s_* = 2\tau_0/f_\infty \Rightarrow s_* = s_\infty, \quad (6.173)$$

$$w_*(r) = \tau_0 - \frac{rf_\infty}{2} = w_\infty(r), \quad \forall r \in [s_\infty, 1]. \quad (6.174)$$

Esto concluye la demostración.

Observación 6.3 *El método funciona aún para funciones f que no sean necesariamente constantes. Además, el comportamiento esperado se manifiesta en los experimentos numéricos, a saber, que el comportamiento asintótico de la frontera libre es $2\tau_0/f(t)$.*

7. Resultados numéricos.

En esta sección presentaremos los resultados numéricos de los algoritmos presentados anteriormente. Los programas fueron hechos en el lenguaje Fortran.

7.1. Método de Goodman.

7.1.1. Geometría plana.

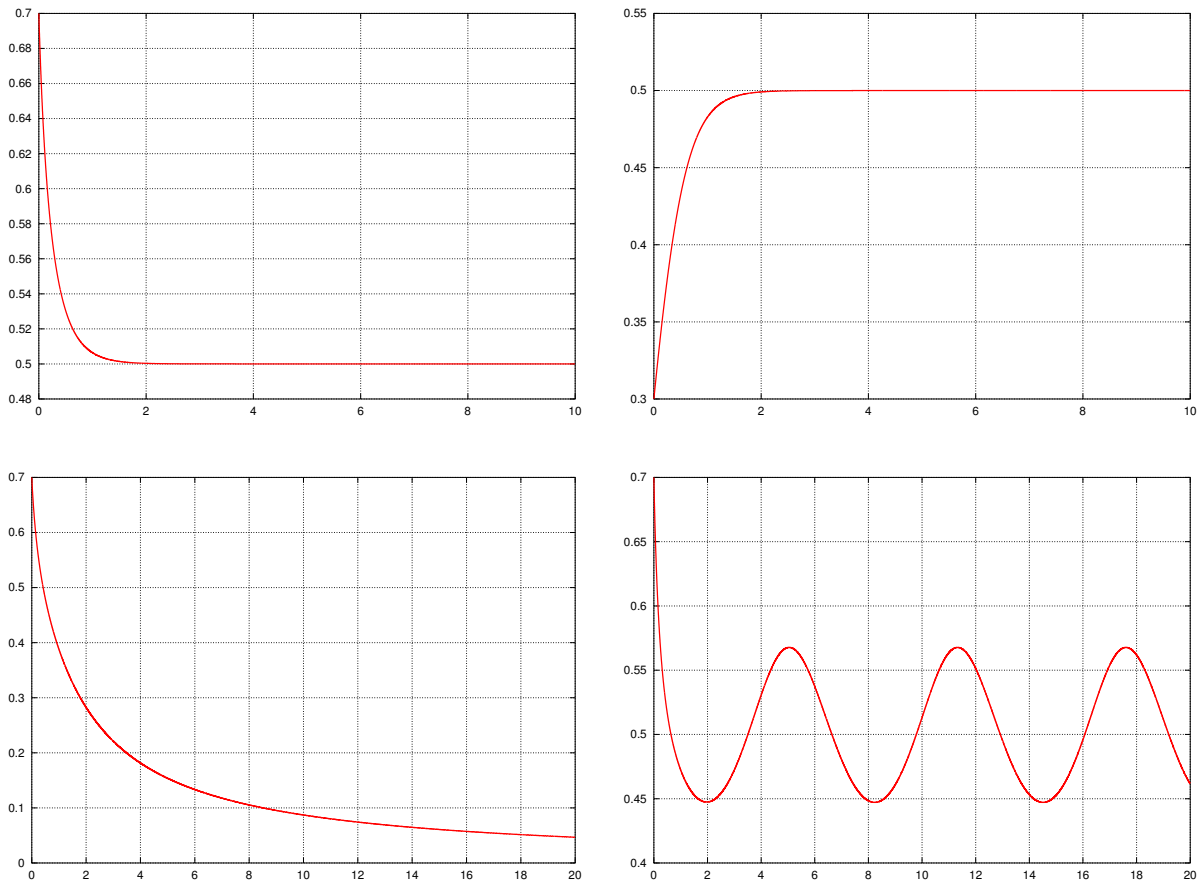


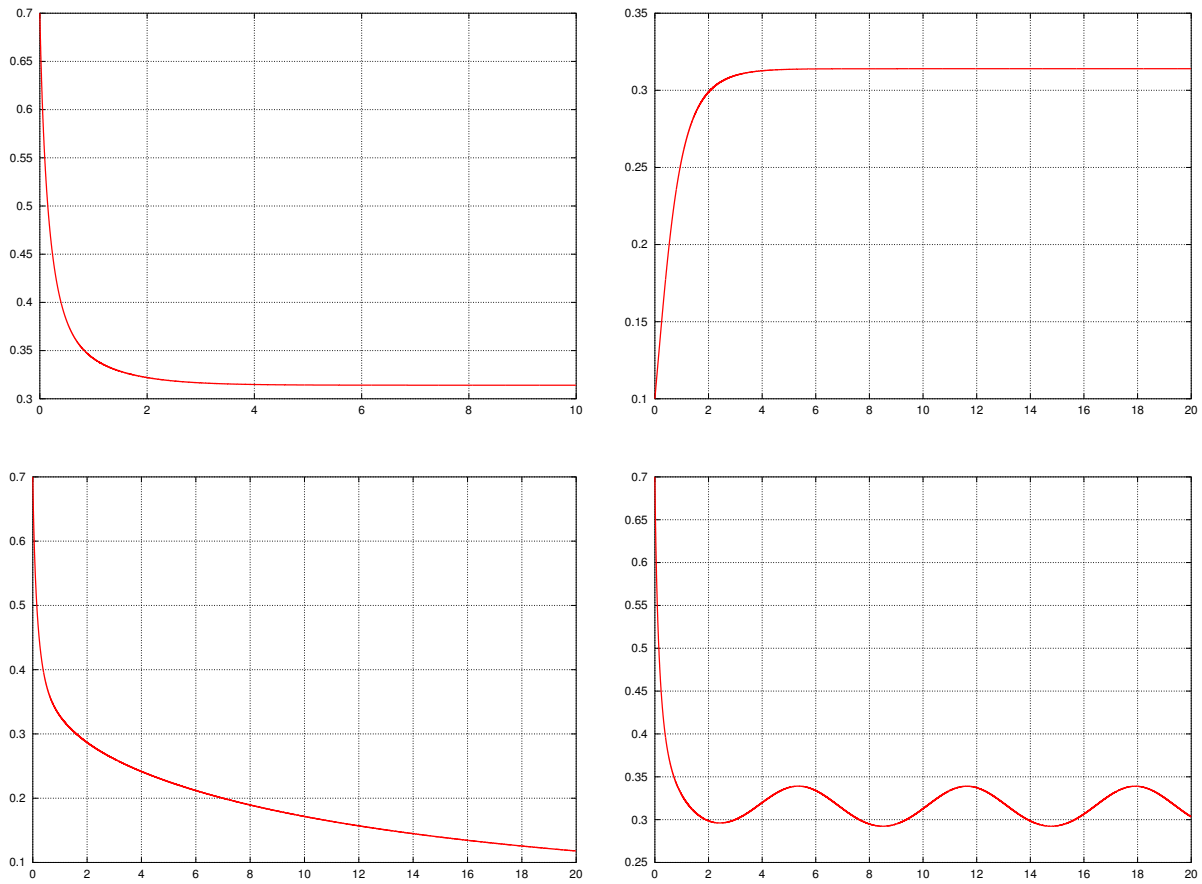
Figura 14: Método de Goodman - Geometría plana

De izquierda a derecha y de arriba hacia abajo se tienen los siguientes datos:

- $s_0 = 0.7, f(t) = 2.$
- $s_0 = 0.3, f(t) = 2.$
- $s_0 = 0.7, f(t) = 2 + t.$
- $s_0 = 0.7, f(t) = 2 + \sin(t)/4.$

El método se comporta bien para tiempos grandes, respetando el comportamiento asintótico de la solución teórica. En los primeros dos casos la solución converge a 0,5, en el tercero la solución converge a 0, y en el último caso la frontera libre queda oscilando. Los resultados son similares en los siguientes dos casos.

7.1.2. Geometría plana - Tensión umbral variable.

Figura 15: Método de Goodman - Geometría plana - τ_0 variable.

De izquierda a derecha y de arriba hacia abajo se tienen los siguientes datos:

- $s_0 = 0.7, \alpha_0 = 0.25, f(t) = 4.$
- $s_0 = 0.1, \alpha_0 = 0.25, f(t) = 4.$
- $s_0 = 0.7, \alpha_0 = 0.25, f(t) = 4 + 0.25t.$
- $s_0 = 0.7, \alpha_0 = 0.25, f(t) = 4 + \sin(t)/4.$

7.1.3. Geometría cilíndrica.

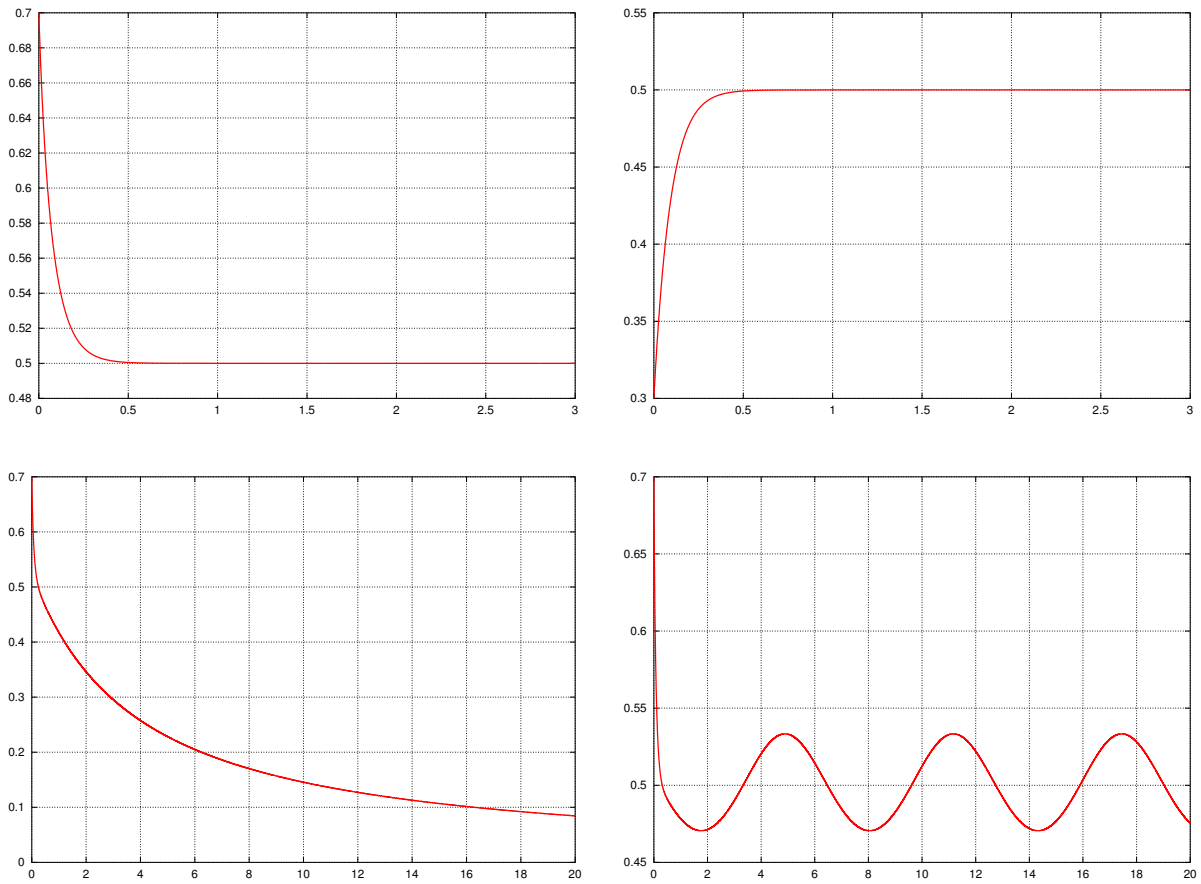


Figura 16: Método de Goodman - Geometría cilíndrica.

De izquierda a derecha y de arriba hacia abajo se tienen los siguientes datos:

- $s_0 = 0.7, f(t) = 4.$
- $s_0 = 0.3, f(t) = 4.$
- $s_0 = 0.7, f(t) = 4 + t.$
- $s_0 = 0.7, f(t) = 4 + \sin(t)/4.$

7.2. Método cuasiestacionario.

7.2.1. Geometría plana.

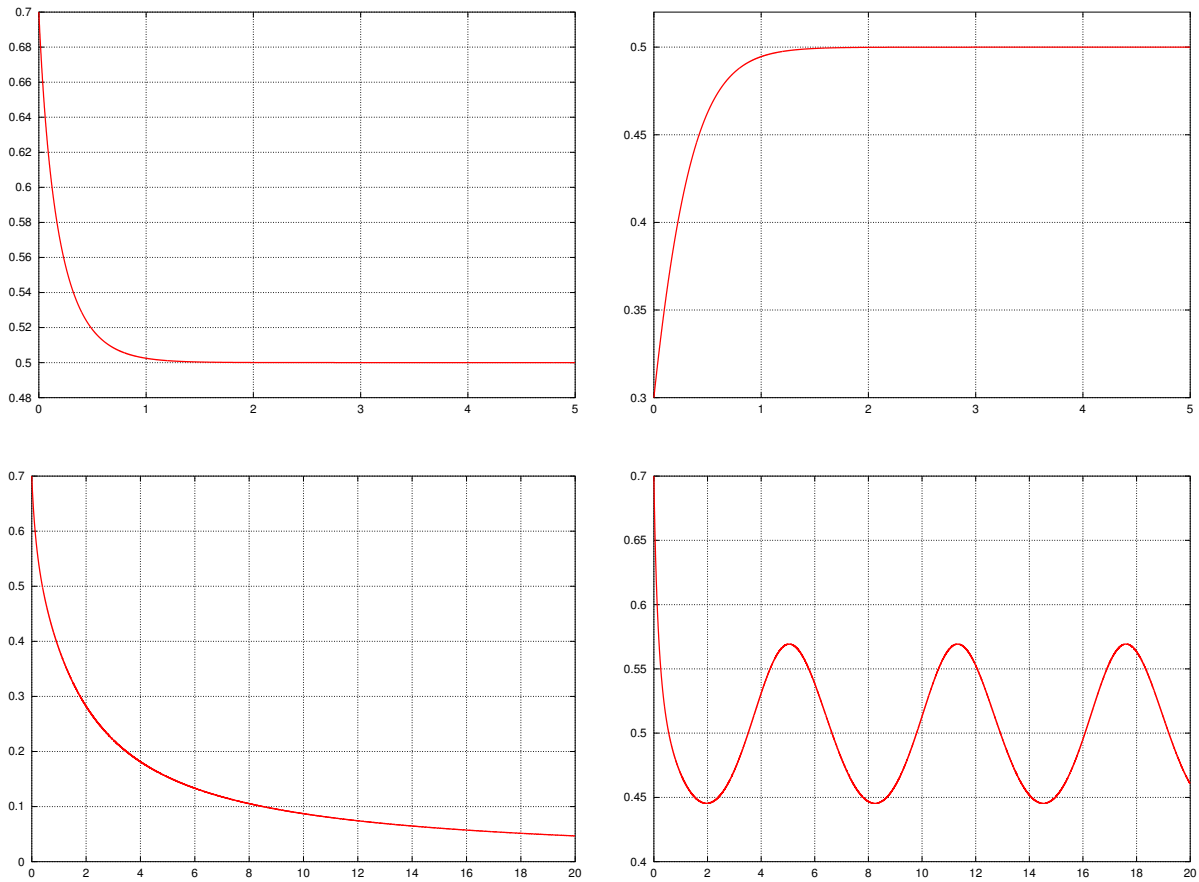


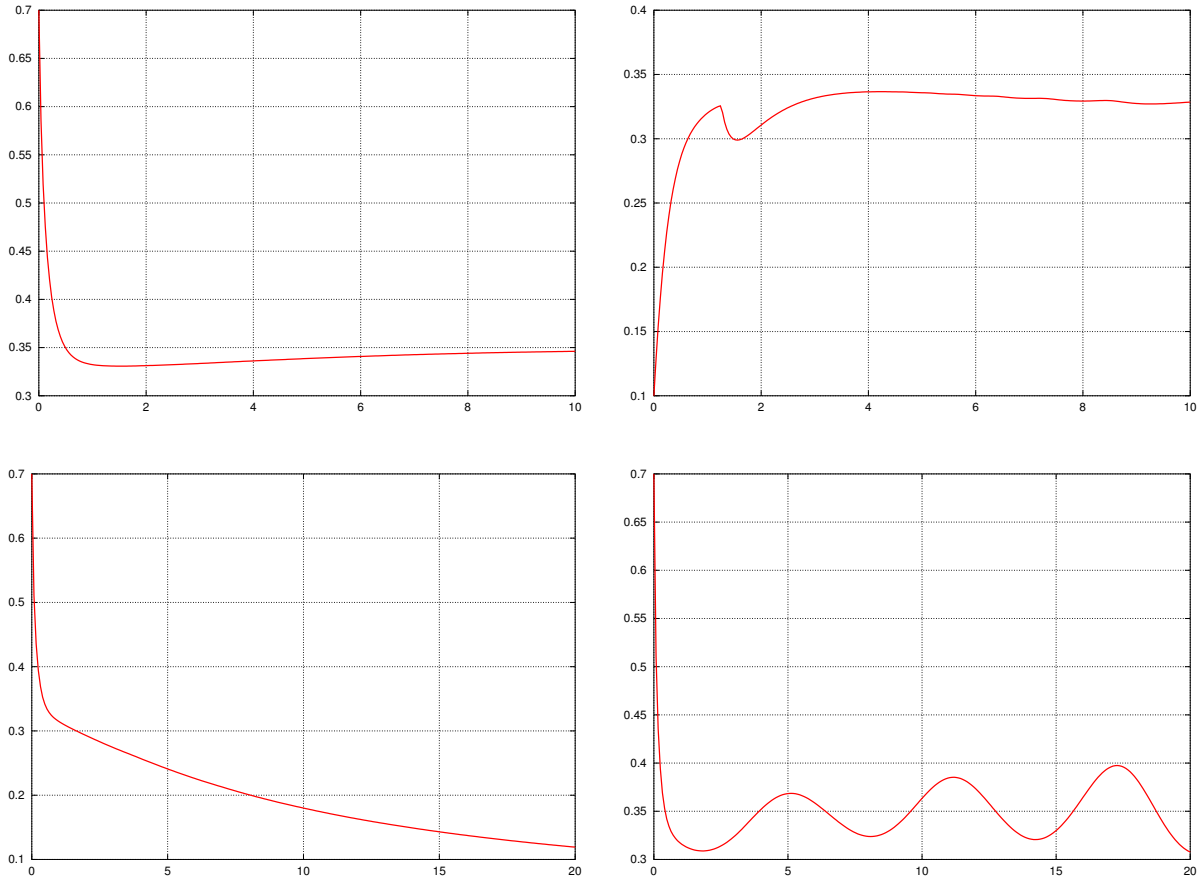
Figura 17: Método cuasiestacionario - Geometría plana.

De izquierda a derecha y de arriba hacia abajo se tienen los siguientes datos:

- $s_0 = 0.7, f(t) = 2.$
- $s_0 = 0.3, f(t) = 2.$
- $s_0 = 0.7, f(t) = 2 + t.$
- $s_0 = 0.7, f(t) = 2 + \sin(t)/4.$

Al igual que en el método de Goodman, la solución numérica converge a la solución estacionaria. Más adelante se hará una comparación de todos los resultados.

7.2.2. Geometría plana - Tensión umbral variable.

Figura 18: Método cuasiestacionario - Geometría plana - τ_0 variable.

De izquierda a derecha y de arriba hacia abajo se tienen los siguientes datos:

- $s_0 = 0.7$, $\alpha_0 = 0.25$, $f(t) = 4$, $u'_0(y) = -4(y - 0.7)$.
- $s_0 = 0.1$, $\alpha_0 = 0.25$, $f(t) = 4$, $u'_0(y) = -4(y - 0.1)$.
- $s_0 = 0.7$, $\alpha_0 = 0.25$, $f(t) = 4 + 0.25t$, $u'_0(y) = -4(y - 0.7)$.
- $s_0 = 0.7$, $\alpha_0 = 0.25$, $f(t) = 4 + \sin(t)/4$, $u'_0(y) = -4(y - 0.7)$.

Notar que hay ciertas irregularidades en la solución, por ejemplo, una tendencia leve a crecer por encima del valor estacionario en el primer caso, o la pérdida de monotonía en el segundo caso, o el aumento de la amplitud de la oscilación en el último caso. Este efecto no deseable puede deberse a errores numéricos de aproximación.

7.2.3. Geometría cilíndrica.

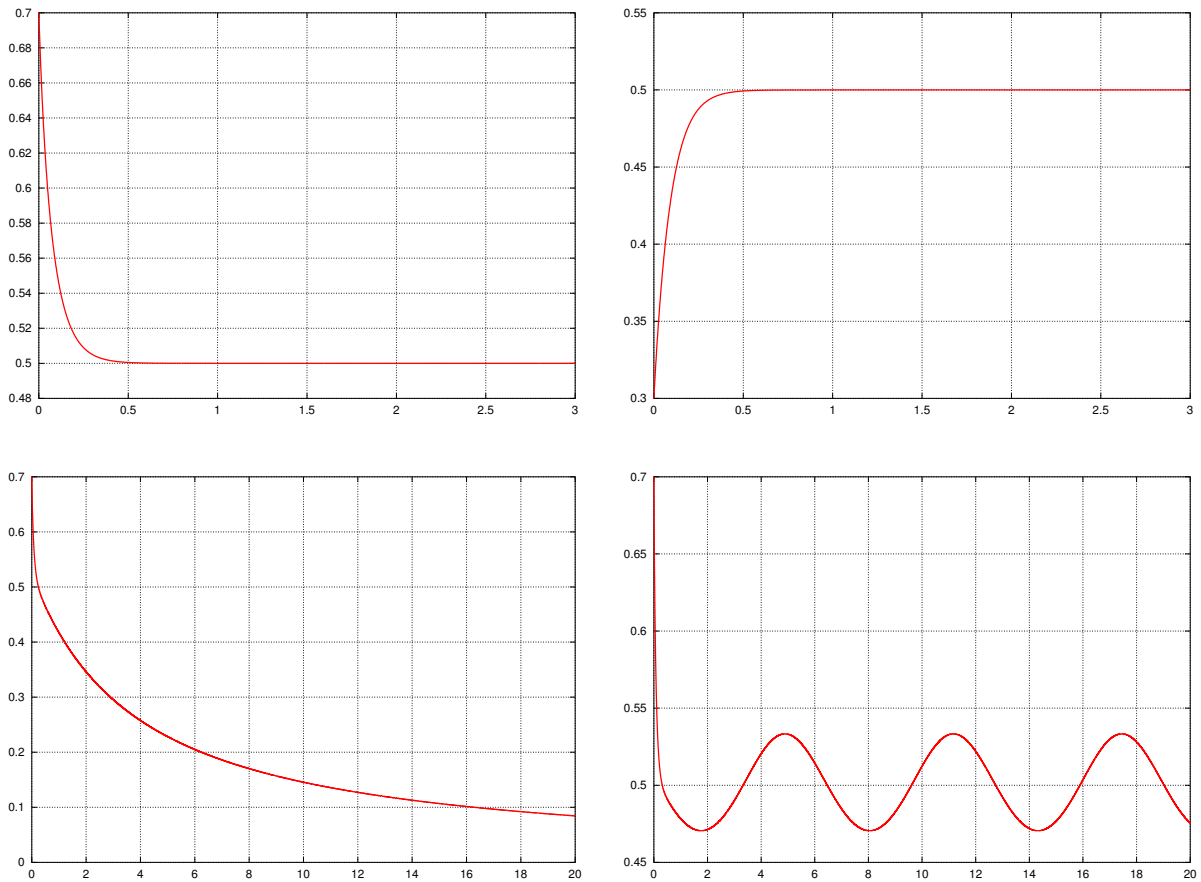


Figura 19: Método cuasiestacionario - Geometría cilíndrica.

De izquierda a derecha y de arriba hacia abajo se tienen los siguientes datos:

- $s_0 = 0.7, f(t) = 4.$
- $s_0 = 0.3, f(t) = 4.$
- $s_0 = 0.7, f(t) = 4 + t.$
- $s_0 = 0.7, f(t) = 4 + \sin(t)/4.$

En este método volvemos nuevamente a recuperar el comportamiento esperado.

7.3. Método de diferencias finitas.

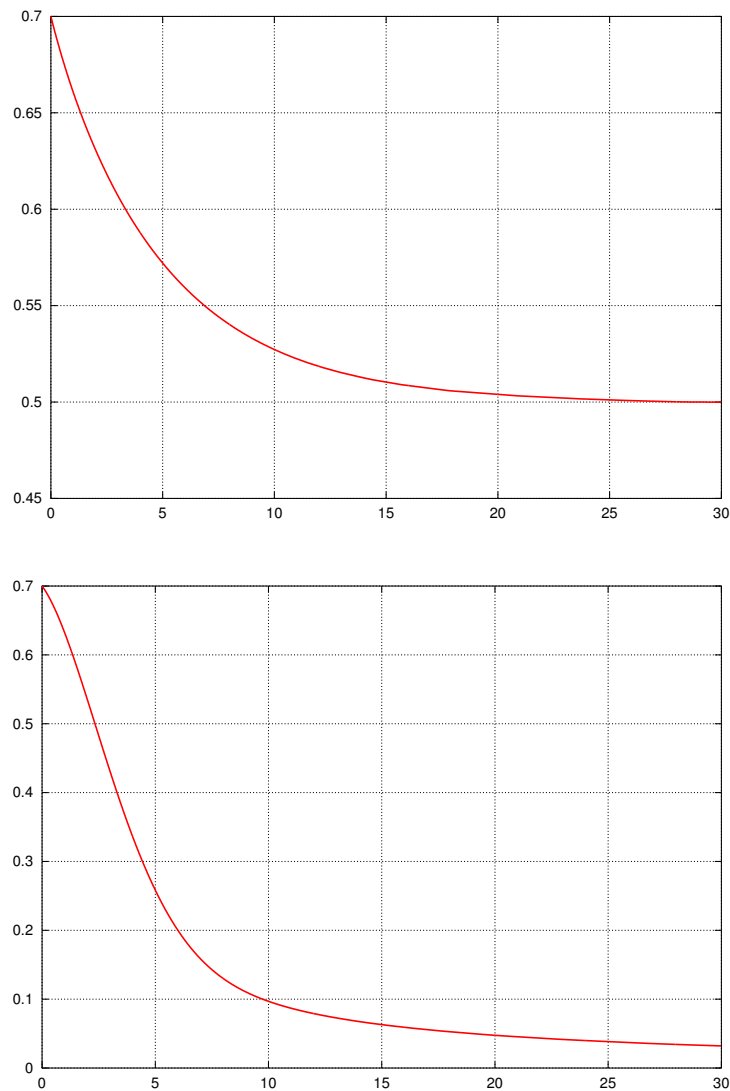


Figura 20: Método de diferencias finitas.

De arriba hacia abajo se tienen los siguientes datos:

- $s_0 = 0.7, f(t) = 4.$
- $s_0 = 0.7, f(t) = 4 + t.$

Se puede apreciar que la solución converge más lentamente al valor estacionario que en los casos anteriores (ver por ejemplo el primero cuadro de la figura 14). Esta diferencia quedará de manifiesto en la siguiente sección.

7.4. Método de líneas.

7.4.1. Geometría plana.

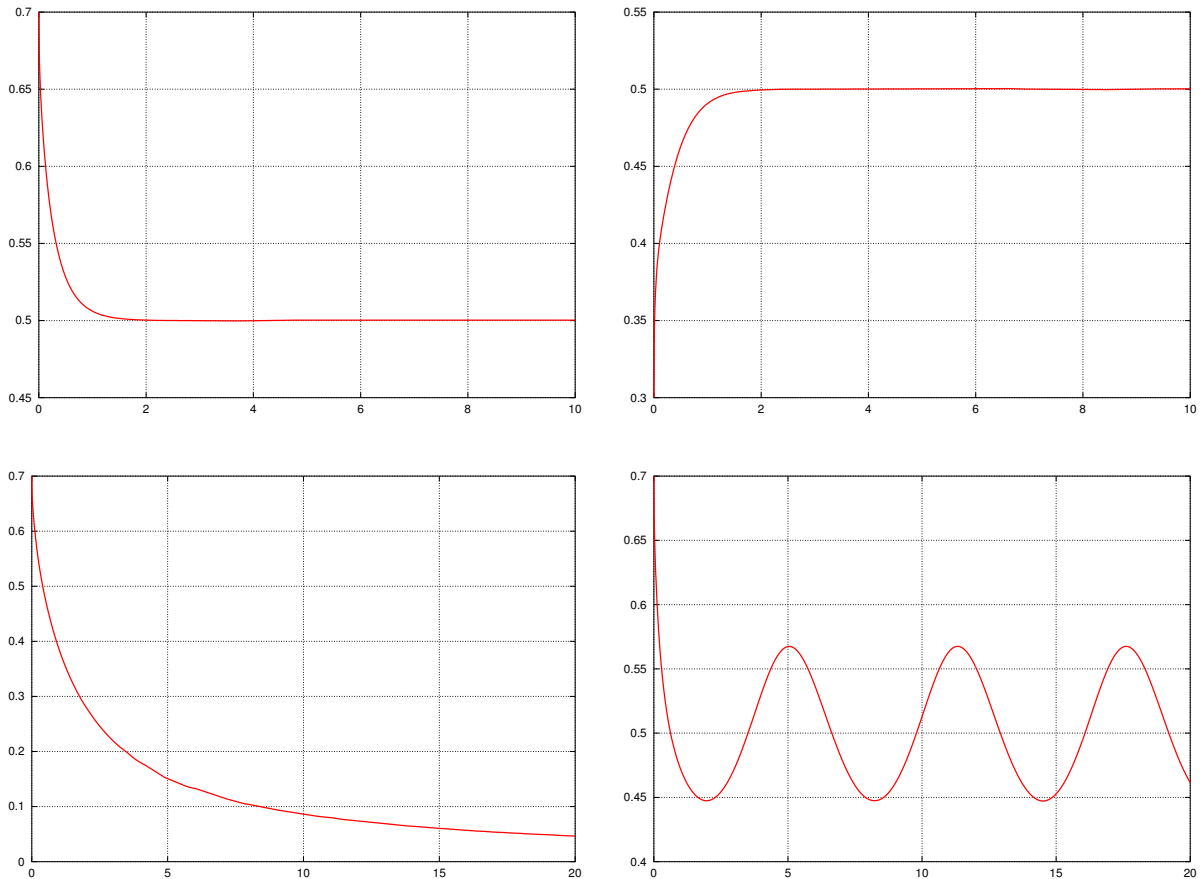


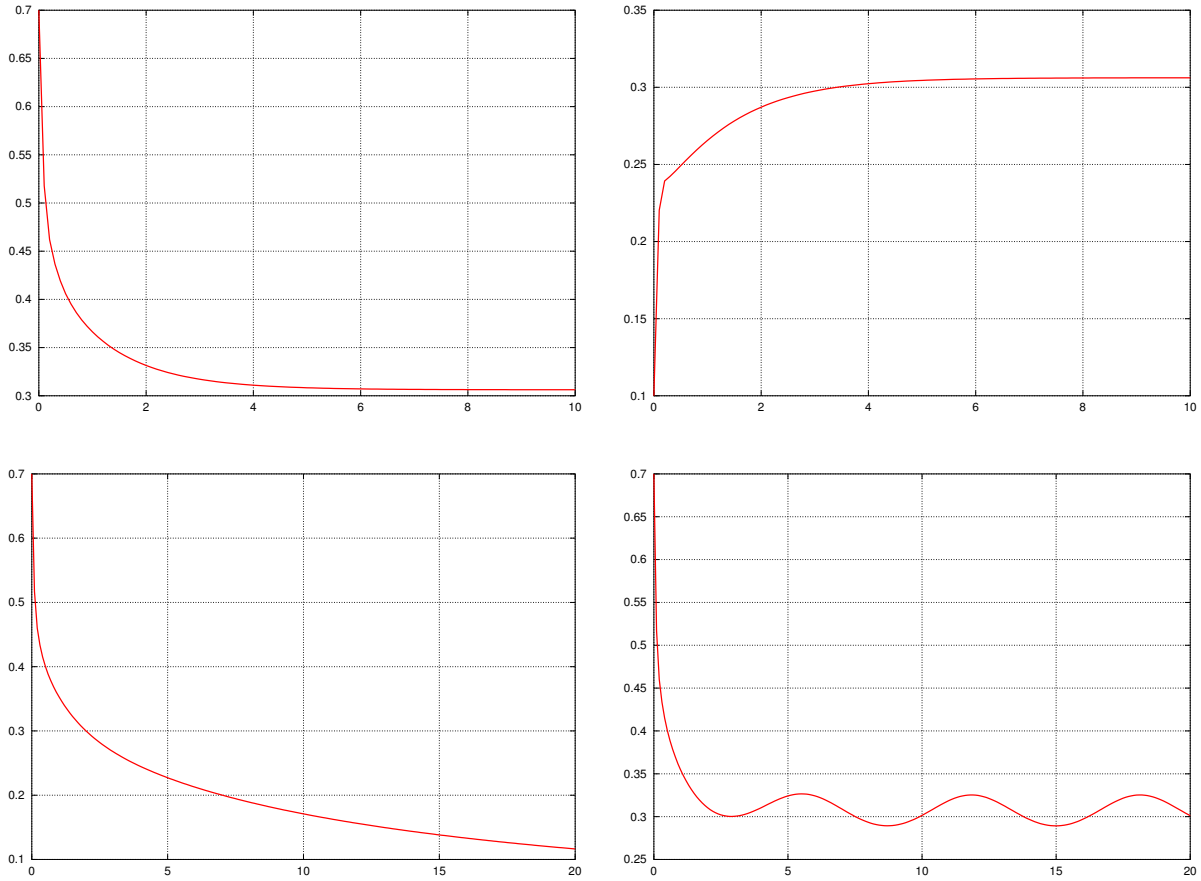
Figura 21: Método de líneas - Geometría plana.

De izquierda a derecha y de arriba hacia abajo se tienen los siguientes datos:

- $s_0 = 0.7, f(t) = 2, u'_0(y) = -2(y - 0.7).$
- $s_0 = 0.3, f(t) = 2, u'_0(y) = -2(y - 0.3).$
- $s_0 = 0.7, f(t) = 2 + t, u'_0(y) = -2(y - 0.7).$
- $s_0 = 0.7, f(t) = 2 + \sin(t)/4, u'_0(y) = -2(y - 0.7).$

Se nota el mismo comportamiento que en los algoritmos anteriores. Es de destacar que este algoritmo es el más confiable de todos puesto que se ha demostrado convergencia y además contempla todos los aspectos de la ecuación sin discretizar.

7.4.2. Geometría plana - Tensión umbral variable.

Figura 22: Método de líneas - Geometría plana - τ_0 variable.

De izquierda a derecha y de arriba hacia abajo se tienen los siguientes datos:

- $s_0 = 0.7$, $\alpha_0 = 0.25$, $f(t) = 4$, $u'_0(y) = -4(y - 0.7)$.
- $s_0 = 0.1$, $\alpha_0 = 0.25$, $f(t) = 4$, $u'_0(y) = -4(y - 0.1)$.
- $s_0 = 0.7$, $\alpha_0 = 0.25$, $f(t) = 4 + 0.25t$, $u'_0(y) = -4(y - 0.7)$.
- $s_0 = 0.7$, $\alpha_0 = 0.25$, $f(t) = 4 + \sin(t)/4$, $u'_0(y) = -4(y - 0.7)$.

El mismo comentario para el caso del método de líneas en geometría plana vale en este caso. Este algoritmo es el más completo puesto que hace intervenir la parte temporal de la ecuación.

7.4.3. Geometría cilíndrica.

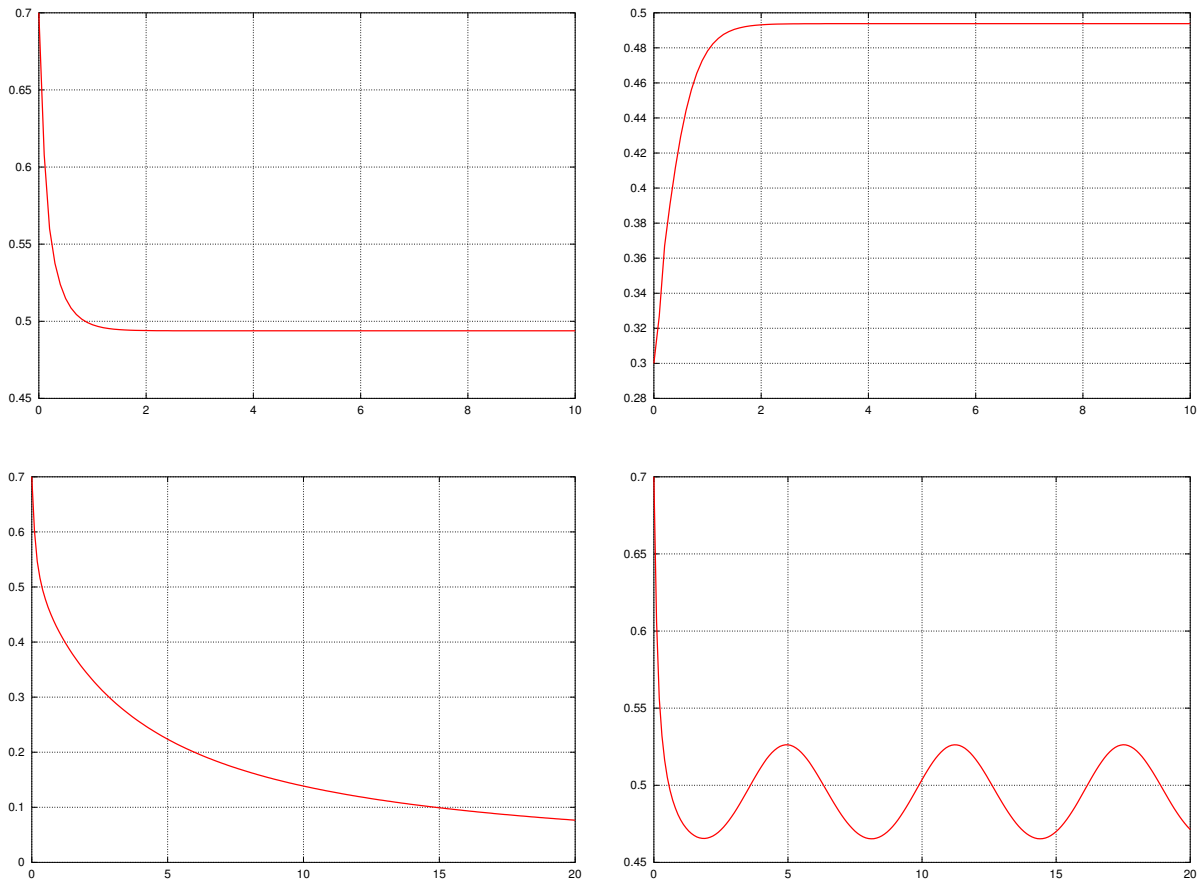


Figura 23: Método de líneas - Geometría cilíndrica.

De izquierda a derecha y de arriba hacia abajo se tienen los siguientes datos:

- $s_0 = 0.7$, $f(t) = 4$, $u'_0(r) = 1 - (10/7)r$.
- $s_0 = 0.3$, $f(t) = 4$, $u'_0(r) = 1 - (10/3)r$.
- $s_0 = 0.7$, $f(t) = 4 + t$, $u'_0(r) = 1 - (10/7)r$.
- $s_0 = 0.7$, $f(t) = 4 + \sin(t)/4$, $u'_0(r) = 1 - (10/7)r$.

A pesar de la complejidad de este algoritmo, puesto que intervienen soluciones de Bessel en serie, es posible ver que el método responde bien ante diferentes tipos de gradientes de presión f , y además satisface las propiedades de convergencia a la solución estacionaria.

8. Comparación de resultados.

En esta sección compararemos los resultados numéricos para las distintas geometrías, utilizando los ejemplos presentados en la sección anterior.

8.1. Geometría plana.

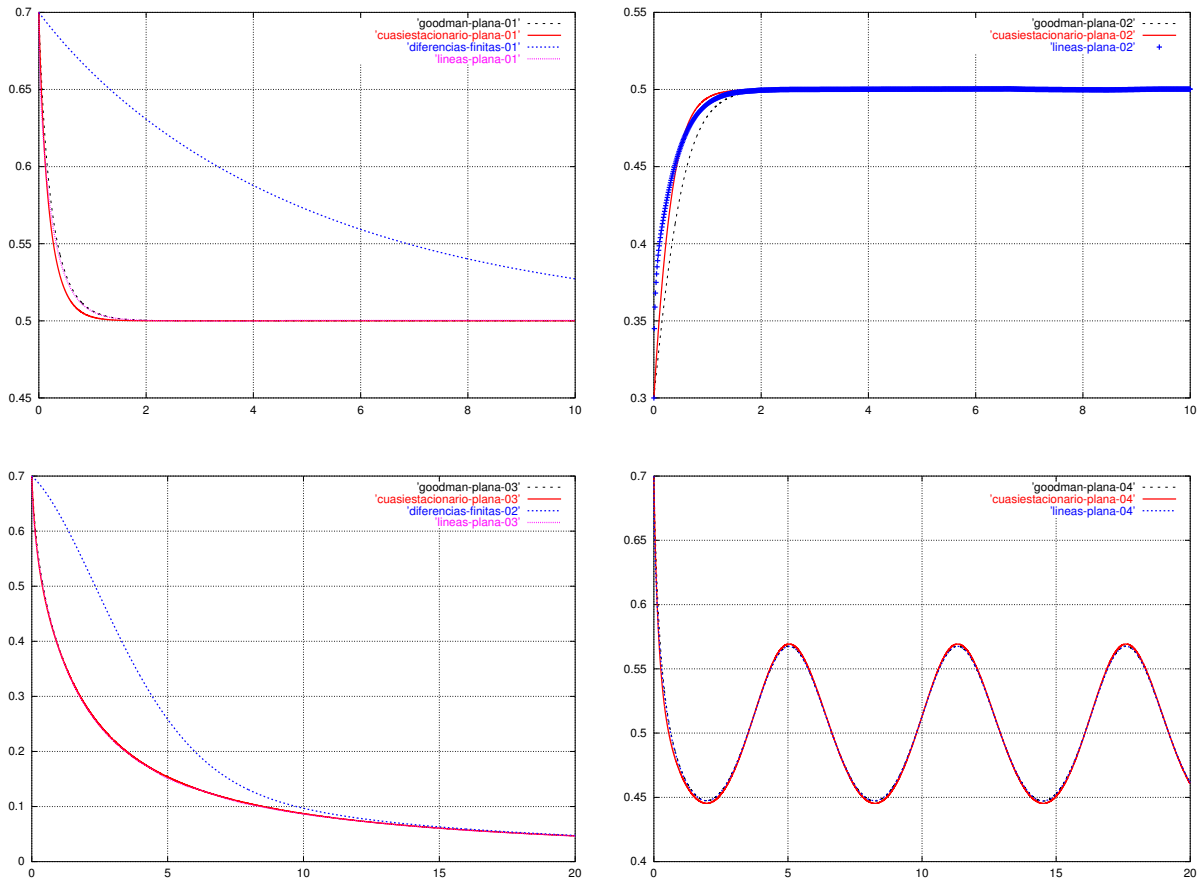


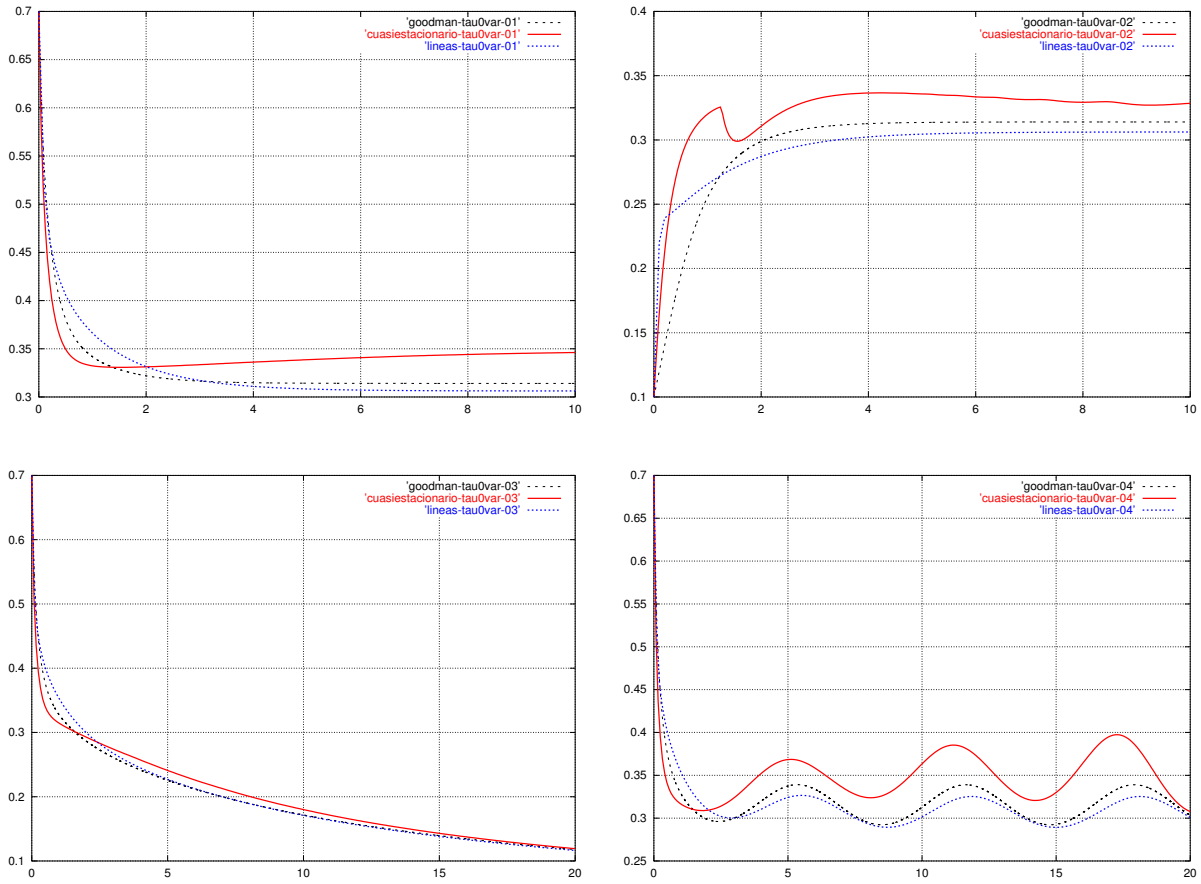
Figura 24: Comparación de resultados - Geometría plana.

De izquierda a derecha y de arriba hacia abajo, se tienen los siguientes casos:

- $s_0 = 0.7, f(t) = 2$.
- $s_0 = 0.3, f(t) = 2$.
- $s_0 = 0.7, f(t) = 2 + t$.
- $s_0 = 0.7, f(t) = 2 + \sin(t)/4$.

Como habíamos notado anteriormente, hay una similitud entre el método de Goodman, el método cuasiestacionario y el método de líneas, sin embargo hay una discrepancia con el método de diferencias finitas.

8.2. Geometría plana - Tensión umbral variable.

Figura 25: Comparación de resultados - Geometría plana - τ_0 variable.

De izquierda a derecha y de arriba hacia abajo, se tienen los siguientes casos:

- $s_0 = 0.7, \alpha_0 = 0.25, f(t) = 4.$
- $s_0 = 0.1, \alpha_0 = 0.25, f(t) = 4.$
- $s_0 = 0.7, \alpha_0 = 0.25, f(t) = 4 + 0.25t.$
- $s_0 = 0.7, \alpha_0 = 0.25, f(t) = 4 + \sin(t)/4.$

Aquí la discrepancia la presenta el método cuasiestacionario. Esto puede deberse a que las aproximaciones numéricas afectan las propiedades intrínsecas del problema; sin embargo, notar que las diferencias entre todos los métodos no son significativas.

8.3. Geometría cilíndrica.

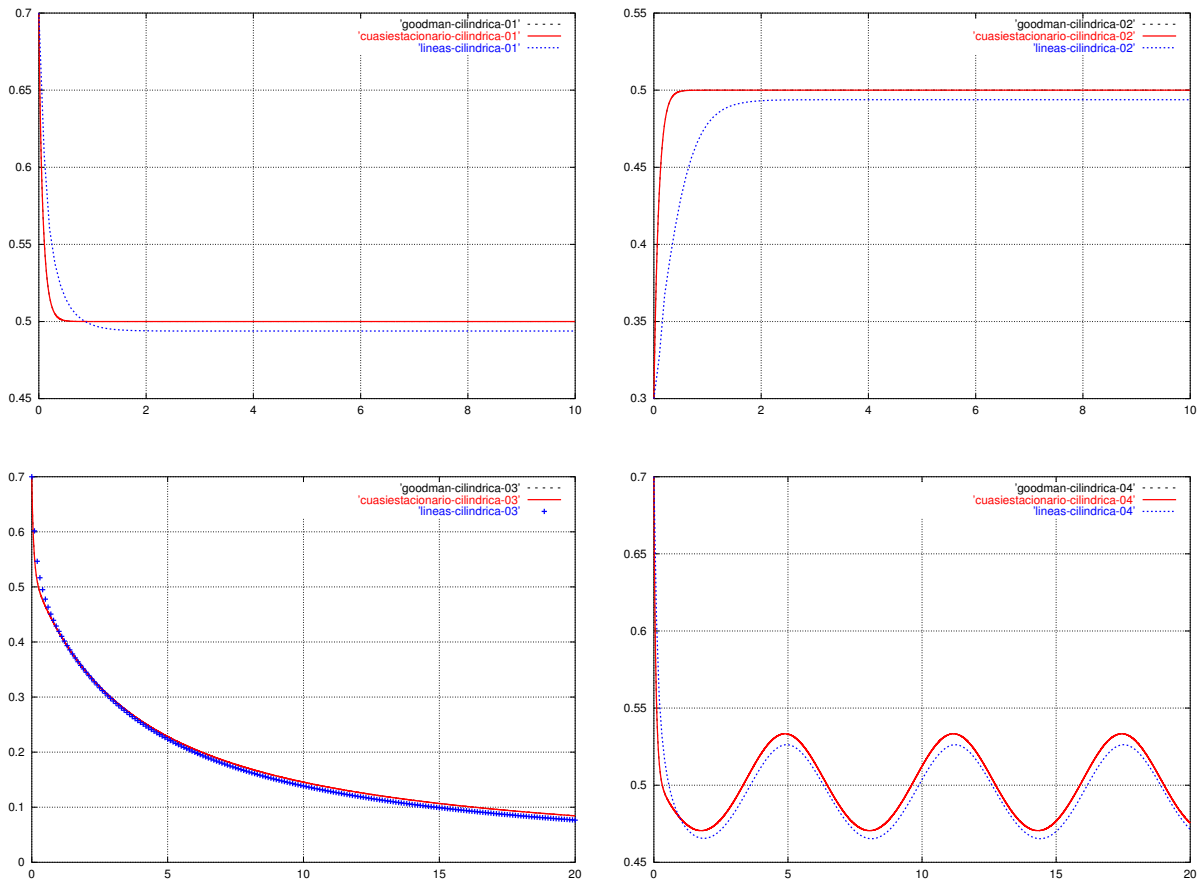


Figura 26: Comparación de resultados - Geometría cilíndrica.

De izquierda a derecha y de arriba hacia abajo, se tienen los siguientes casos:

- $s_0 = 0.7, f(t) = 4.$
- $s_0 = 0.3, f(t) = 4.$
- $s_0 = 0.7, f(t) = 4 + t.$
- $s_0 = 0.7, f(t) = 4 + \sin(t)/4.$

Se presentan leves diferencias entre el método de líneas y los métodos de Goodman y cuasiestacionario. Esto es algo que debíamos esperar, puesto que los métodos de Goodman y cuasiestacionario no resuelven de manera directa la ecuación diferencial.

9. Conclusiones.

Referencias

- [1] J. Denis and J. P. Durand. Modification of wax crystallization in petroleum products. *Revue de l'Institute Française du Pétrole*, 46:637–649, 1991.
- [2] A. Girelli. *Petrolio: grezzo raffinazione prodotti*. Tamborini Editore, Milano, 1969.
- [3] L. T. Wardhaugh and D. V. Boger. *Chem. Eng. Res. Des.*, (65):74–83, 1987.
- [4] L. T. Wardhaugh and D. V. Boger. *AIChE*, (37):871–885, 1991.
- [5] E. Comparini. A one-dimensional Bingham flow. *Journal of Mathematical Analysis and Application*, 169(1):127–139, 1992.
- [6] G. E. Bell. A refinement of the heat balance integral method applied to a melting problem. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 21:1357–1362, 1978.
- [7] P. W. Duck and D. S. Riley. An extension of existing solidification results obtained from the heat-balance integral method. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 20:297–297, 1977.
- [8] G. G. Garguichevich. A note on the heat balance integral method applied to the resolution of a one-phase Stefan problem with an increasing prescribed flux on the fixed face. *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, 10:349–355, 1983.
- [9] T. R. Goodman. The heat-balance integral and its applications to problems involving a change of phase. *Trans. of the ASME*, 80:335–342, 1958.
- [10] D. Langford. The heat balance integral method. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 16:2424–2428, 1973.
- [11] T. J. Lardner and F. V. Pohle. Application of the heat balance integral to problems of cylindrical geometry. *J. Appl. Mech.*, 28E:310–312, 1961.
- [12] J. C. Reginato and D. A. Tarzia. The balance integral method applied to root growth of crops. *Int. J. Eng. Sci.*, 31:61–70, 1993.
- [13] D. S. Riley and P. W. Duck. Application of the heat-balance integral method to the freezing of a cuboid. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 20:294–296, 1977.
- [14] K. Schwerdtfeger. The application of the heat-balance integral for calculating the solidification rate of iron-carbon alloys. *Arch. Eisenhüttenwes*, 44:411–418, 1973.
- [15] D. A. Tarzia. A variant of the heat balance integral method and a new proof of exponentially fast asymptotic behaviour of the solutions in heat conduction. *Int. J. Eng. Sci.*, 28:1253–1259, 1990.
- [16] D. S. Tsai and W. Strieder. Application of heat balance integral in melting with initial subfreezing. *Int Comm. Heat Mass Transfer*, 13:265–280, 1986.
- [17] V. R. Voller. A heat balance integral method for estimating practical solidification parameters. *IMA J. Appl. Math.*, 35:223–232, 1985.

- [18] W. W. Yuen. Application of the heat-balance integral to melting problems with initial subcooling. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 23:1157–1160, 1980.
- [19] Boyce W. and Di Prima R. *Elementary differential equations and boundary value problems*. Wiley.
- [20] A. R. Mitchell and D. F. Griffiths. *The finite difference method in partial difference equations*. Wiley, 1980.
- [21] H. Kawarada and M. Natori. On numerical methods for the Stefan problem by means of the finite difference and the penalty. *Functional Analysis and Numerical Analysis, Fujita, H. (Ed.), Tokyo and Kyoto*, pages 183–201, 1976.
- [22] G. D. Akrivis and V. A. Dougalis. Finite difference discretizations of some initial and boundary value problems with interface. *Math. Comput.*, 56:505–522, 1991.
- [23] D. R. Atthey. A finite difference scheme for melting problems. *J. Inst. Math. Appl.*, 13:353–366, 1974.
- [24] B. M. Budak, N. L. Goldman, and A. B. Uspenskii. Difference schemes involving the rectification of fronts for the solution of many-front problems of Stefan type. *Soviet Math. Dokl.*, 7:454–458, 1966.
- [25] B. M. Budak and A. B. Uspenskii. A difference method with front straightening for solving Stefan-type problems. *USSR Comput. Math. Phys.*, 9:83–103, 1969.
- [26] L. A. Campañone, V. O. Salvadori, and R. H. Mascheroni. A finite-difference method to solve coupled heat and mass balances with simultaneous surface dehydration during freezing. *Latin Amer. Appl. Res.*, 28:83–88, 1998.
- [27] F. B. Cheung and S. W. Cha. Finite-difference analysis of growth and decay of a freeze coat on a continuous moving cylinder. *Numer. Heat Transfer*, 12:41–56, 1987.
- [28] A. N. Gaipova. A homogeneous implicit difference scheme for the solution of an evolutionary equation with phase variation. *USSR Comput. Math. Phys.*, 8:40–53, 1968.
- [29] C. F. Hsu, E. M. Sparrow, and S. V. Patankar. Numerical solution of moving boundary problems by boundary immobilization and a control-volume-based finite difference scheme. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 24:1335–1343, 1981.
- [30] J. D. Hunt and D. G. McCartney. Numerical finite difference model for steady state array growth. *Appl. Sci. Res.*, 44:9–26, 1987.
- [31] P.C. Meek and J. Norbury. A two-stage, two-level finite difference scheme for moving boundary problems. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 46:137–149, 1984.
- [32] T. Nogi. A difference scheme for solving the Stefan problem. *Publ. RIMS Kyoto Univ.*, 9:543–575, 1974.
- [33] T. Nogi. A difference scheme for solving two phase Stefan problem of heat equation. *Publ. RIMS Kyoto Univ.*, 16:313–341, 1980.

- [34] I. Pawlow. Finite difference approximations to parabolic free boundary value problems arising in modelling of underground gas reservoir. part i: Algorithms. *Control Cybernet.*, 8:101–120, 1979.
- [35] Q. T. Pham. A note on some finite-difference methods for heat conduction with phase change. *Numer. Heat Transfer*, 11:353–359, 1987.
- [36] C. Popovici and E. Popovici. A finite difference scheme and the computer program for solving Stefan’s problem with two phases of the heat equation. *Bul. Inst. Polit. Din Iasi Matem.*, pages 183–186, 1985.
- [37] G. E. Schneider and Raw M. J. An implicit solution procedure for finite difference modeling of the Stefan problem. *AIAA Journal*, 22:1685–1690, 1984.
- [38] S. Sheen and K. I. Hayakawa. Finite difference simulation for heat conduction with phase change in an irregular food domain with volumetric change. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 34:1337–1346, 1991.
- [39] T. C. Smith. A finite difference method for a Stefan problem. *Calcolo*, 18:131–151, 1981.
- [40] M. Sokolov and Y. Keizman. Solutions of some axisymmetric low Stefan number melting problems by an improved finite differences method. *Int. J. Num. Meth. Heat Fluid Flow*, 2:215–226, 1992.
- [41] U. Streit. Error estimates for the explicit finite difference method solving the Stefan problem. *Z. Anal. Anw.*, 8:57–68, 1989.
- [42] F. P. Vasil’ev. The method of finite differences for solving Stefan’s single-phase problem for a quasilinear equation. *Soviet Math. Dokl.*, 4:1392–1396, 1963.
- [43] V. R. Voller. Implicit finite-difference solutions of the enthalpy formulation of Stefan problems. *IMA J. Numer. Anal.*, 5:201–214, 1985.
- [44] S. Wang and Y. Lin. A finite-difference solution to an inverse problem for determining a control function in a parabolic partial differential equation. *Inverse Problems*, 5:631–640, 1989.
- [45] G. Windisch and U. Streit. A heat conduction problem involving phase change and its numerical solution by finite difference methods. *Comput. Math. Banach Center Pub.*, 13:141–148, 1984.
- [46] W. W. Yuen and A. M. Kleinman. Application of a variable-time-step finite-difference method for the one-dimensional melting problem including the effect of subcooling. *A. I. Ch. E. Symp. Series*, 75(189):120–126, 1979.
- [47] G. A. Torres and C. V. Turner. Métodos de diferencias finitas para un problema de Bingham unidimensional. *MAT*, Serie A(5):11–26, 2001.
- [48] R. D. Bachelis, V. G. Melamed, and D. B. Shlyaifer. Solution of Stefan’s problem by the method of straight lines. *USSR Comput. Math. Phys.*, 9:113–126, 1969.

- [49] M. Davis and P. Kapadia. Solution of a Stefan problem in the theory of laser welding by the method of lines. *J. Comput. Phys.*, 60:534–548, 1985.
- [50] G. H. Meyer. An application of the method of lines to multidimensional free boundary problems. *J. Inst. Math. Appl.*, 20:317–329, 1977.
- [51] G. H. Meyer. The method of lines and invariant embedding for elliptic and parabolic free boundary problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 18:150–164, 1981.
- [52] F. P. Vasil’ev. The method of straight lines for the solution of a one-phase problem of the Stefan type. *USSR Comput. Math. Phys.*, 8:81–101, 1968.
- [53] G. A. Torres and C. V. Turner. Method of straight lines for a Bingham problem. *Electron. J. Diff. Eqns.*, 2002(60):1–13, 2002.