Facultad de Matemática, Astronomía y Física
Universidad Nacional de Córdoba

Continuación meromorfa de la resolvente del Laplaciano en espacios simétricos de curvatura negativa

Cynthia E Will[1]

Tesis presentada para optar al grado de Doctor en Matemática.

Director: Dr. Roberto J. Miatello

Julio de 2001.

[1]Con el apoyo de una Beca del CONICET y subsidios de CONICET, CONICOR y SeCyT UNC (Argentina)

Tribunal de Tesis:

Jan Felipe van Diejen
Tomás Godoy
Jorge Vargas

Resumen

En este trabajo estudiamos la continuación meromorfa del núcleo de la resolvente del Laplaciano en varias situaciones. En primer lugar se considera el caso de los espacios simétricos de curvatura negativa G/K y el Laplaciano actuando en funciones en $C^\infty(G)$, biinvariantes por K. En este caso, se prueba que esta continuación tiene polos simples localizados en un subconjunto de $-\frac{1}{2}\mathbb{N}$, en una parametrización adecuada. El operador residuo asociado a cada uno de estos polos tiene como imagen un $G_{\mathbb{C}}$-módulo irreducible de dimensión finita cuya dimensión es determinada por medio de la fórmula de Weyl.

En segundo término, como generalización, se estudia el caso de los espacios de Damek-Ricci. En este caso, el grupo de isometrías no es semisimple por lo cual no es posible usar la teoría de representaciones de G. Sin embargo, por un estudio explícito del residuo, se prueba que la imagen es un operador de rango finito.

Consideramos luego el caso del Laplaciano actuando en fibrados lineales sobre el espacio hiperbólico complejo $\mathbb{C}H^n \cong \mathrm{S}U(n,1)/\mathrm{S}(\mathrm{U}(n)\times \mathrm{U}(1))$. En este caso, los polos de la continuación meromorfa del núcleo de la resolvente también son simples, pero las imágenes de los residuos incluyen no sólo G-módulos de dimensión finita, sino también series discretas holomorfas y límites de series discretas.

2000 *Mathematics Subject Classification*:
Primaria: 22E30, 43A85
Secundaria: 22E46.

FaMAF-CIEM, Universidad Nacional de Córdoba,
5000 Córdoba, Argentina
e-mail: cwill@mate.uncor.edu

a Jorge

Contenidos

Introducción

El principal objetivo de esta tesis es el estudio de la continuación meromorfa del núcleo de la resolvente del Laplaciano en espacios simétricos de curvatura negativa.

En toda variedad pseudoriemanniana, M, se tiene un operador diferencial $L : C^\infty(M) \mapsto C^\infty(M)$ de particular interés llamado el operador de Laplace Beltrami, o simplemente Laplaciano. Una de las formas de definirlo es $Lf = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f))$, $f \in C^\infty(G)$, donde $\operatorname{div}(Y)$ es la divergencia del campo Y. L resulta ser un operador simétrico con respecto al producto interno en $C_c^\infty(M)$ naturalmente asociado a la medida riemanniana de M y esencialmente autoadjunto, esto es, su clausura, densamente definida en $\mathcal{H} = L^2(M)$, es autoadjunta. Identificaremos en adelante a L con su clausura autoadjunta.

Una de las formas más usadas para obtener información espectral es a través de la resolvente, que definiremos a continuación. Sea

$$\rho(L) = \{z \in \mathbb{C} : (L - zI)^{-1} \text{es un operador acotado}\}.$$

Llamamos a $\rho(L)$ el *conjunto resolvente* de L, y al operador $R(z) = (L - zI)^{-1}$ para $z \in \rho(L)$, la *resolvente* de L.

El estudio de la resolvente de un operador es útil para considerar funciones del operador, por ejemplo, por medio del llamado cálculo funcional. Con frecuencia la resolvente $R(z)$ aparece definida inicialmente en un semiplano y admite continuación analítica a un dominio mayor. Motivados entonces por algunos ejemplos, para estudiar esta continuación meromorfa resulta conveniente achicar el espacio de salida de $R(z)$, por ejemplo considerándolo como operador en $\mathcal{H}_c$, o mejor aún en $C_c^\infty(M)$. En los ejemplos que se han estudiado, como operador en $\mathcal{H}_c$, $R(z)$ resulta tener una continuación meromorfa de algún semiplano de $\mathbb{C}$ a todo $\mathbb{C}$ y los polos de esta continuación meromorfa son llamados *resonancias* (de L). Si se permiten perturbaciones, sumando a L una función de soporte compacto, los polos que se obtienen dan información sobre la vibración de la cuerda del correspondiente modelo. En algunos casos, la parte real de un polo corresponde al rango de oscilación, y la parte imaginaria al decaimiento de dicha oscilación (ver [**Z**]).

Este problema ha sido considerado por varios autores, por ejemplo Melrose [**M**], ha estudiado los polos de la resolvente para una perturbación de L en el caso de $\mathbb{R}^n$ para n impar. También interesa dar cotas para la cantidad $N(r)$ de resonancias (contando su multiplicidad, o sea el rango del residuo) en una bola de radio r cuando $r \mapsto \infty$. Guillopé-Zworski en [**GZ2**] tratan este problema en el caso de superficies de Riemann y en [**GZ1**], en el caso del espacio hiperbólico real, encuentran las resonancias de L probando que son de multiplicidad finita. También podemos mencionar [**MM**], en el que se estudia la continuación meromorfa de la resolvente en espacios completos con curvatura negativa asintóticamente constante.

En este trabajo estudiaremos la continuación meromorfa de la resolvente de L en varios casos. En primer lugar, en el Capítulo 2, consideraremos el caso en que M es un espacio simétrico de curvatura negativa, es decir, $M = G/K$ donde G es un grupo de Lie semisimple no compacto de rango real uno y K es un subgrupo compacto maximal de G. La resolvente de L ha sido estudiada en este caso por varios autores como por ejemplo en [**MW**] y [**A**], y en particular en [**MW**] se prueba que la resolvente es un operador a núcleo. Más precisamente, se sabe que la acción de L en funciones C^∞ invariantes a derecha por K en M, se corresponde a la acción del elemento Casimir del álgebra universal de $\mathfrak{g}$, C, en funciones $C^\infty(G)$ biinvariantes por K (denotado por $C^\infty(G//K)$). Se traslada así todo el análisis a G, en donde gracias a la llamada descomposición polar, $G = K\,\mathrm{Cl}(A^+)K$, se pueden caracterizar las funciones biinvariantes por K por su restricción a $A \simeq \mathbb{R}$. Una función f bi-invariante por K se dice *esférica*, si $f(e) = 1$ y si además es una autofunción de C. Estas funciones están completamente clasificadas, y en particular se sabe que para cada $\nu \in \mathbb{C}$, existe una función esférica φ_ν cuya restricción a A es la solución de cierta ecuación diferencial ordinaria, que depende de ν (ver (2.6)). Esta ecuación corresponde a lo que se llama la parte radial de C, y la solución que es continua en $t = 0$ es la que da origen a la función esférica φ_ν. Si en lugar de mirar en $t = 0$, buscamos funciones con buen comportamiento en el infinito, se obtienen dos soluciones, genéricamente linealmente independientes que llamaremos $Q_{\pm\nu}$ (para $2\nu \notin \mp\mathbb{N}$). Además $Q_\nu \in L^1(G)$, para $\mathrm{Re}(\nu) > \rho$ y si $\lambda(\nu) = \nu^2 - \rho^2$ y $c(\nu)$ denota la función c de Harish Chandra, se tiene

$$\int_G (C - \lambda(\nu)\mathrm{Id})f(y)Q_\nu(x^{-1}y)dy = -2\nu c(\nu)f(x) \tag{0.1}$$

para $f \in C_c^\infty(G/K)$.

Como $C\varphi_\nu = \lambda(\nu)\varphi_\nu$, resulta conveniente trabajar con el operador $R(\lambda(\nu))$. Notemos ahora que la fórmula (0.1) muestra que $-\frac{\check{Q}_\nu}{2\nu c(\nu)}$ es una solución fundamental de $(C - \lambda(\nu)\mathrm{Id})$, es decir que como distribuciones, se tiene que $-(C - \lambda(\nu)\mathrm{Id})\frac{\check{Q}_\nu}{2\nu c(\nu)} = \delta$.

Si denotamos por $\tilde{R}(\lambda(\nu))$ el operador con núcleo $K_\nu(x, y) = \frac{Q_\nu}{2\nu c(\nu)}(x^{-1}y)$, para $\nu \notin -\frac{1}{2}\mathbb{N}$ –actuando en $C_c^\infty(G/K)$– observamos que dicho operador coincide con la resolvente $R(\lambda(\nu))$ para $\mathrm{Re}(\nu) > \rho$. Análogamente, si se considera $\tilde{R}(\lambda(-\nu))$, se obtiene una expresión de $R(\lambda(\nu))$ para $\mathrm{Re}(\nu) < -\rho$.

En el Capítulo 2 de este trabajo se estudia la continuación meromorfa del núcleo $K_\nu(x, y) = \frac{Q_\nu}{2\nu c(\nu)}(x^{-1}y)$ y se prueba el siguiente resultado:

TEOREMA 0.1. *Sea $M = G/K$ un espacio simétrico de tipo no compacto de rango real uno, y sea $\nu_k = -\rho - k$ con $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

(a) *$K_\nu(x, y)$ tiene polos simples en $\nu = \nu_k$.*
(b) $\mathrm{Res}_{\nu=\nu_k} \tilde{R}(\lambda(\nu))(f) = (2\pi\nu_k)^{-1}\, p(\nu_k)\, f * \check{\varphi}_\nu$, *es un operador de rango finito para cada valor de k.*
(c) *Si $\tilde{\alpha}$ es la raíz real de G, la imagen de* $\mathrm{Res}_{\nu=\nu_k} \tilde{R}(\lambda(\nu))$ *es un $\mathfrak{g}_c$-módulo irreducible de peso máximo $k\tilde{\alpha}$.*
(d) *Si p y q denotan las multiplicidades de las raíces restringidas $\frac{1}{2}\alpha$ y α respectivamente, se tiene que*

$$\dim \operatorname{Im}(\operatorname{Res}_{\nu=\nu_k} \tilde{R}(\lambda(\nu))) = \binom{k+\frac{p}{2}+q-1}{k}\binom{k+\frac{p+q-1}{2}}{k}\frac{2k+\frac{p}{2}+q}{\frac{p}{2}+q}\prod_{j=1}^{\frac{q+1}{2}-1}\frac{j}{k+j}.$$

Esto generaliza el resultado de Guillopé y Zworski en el caso del espacio hiperbólico antes mencionado ([**GZ1**]). Cabe señalar que las imágenes de estos residuos son isomorfas a $(\mathfrak{g}, K)$-submódulos de dimensión finita de la serie principal esférica, e incluyen a la totalidad de las representaciones esféricas de dimensión finita de G, por un teorema de Helgason.

En el Capítulo 3 se considera la resolvente para los llamados espacios de Damek-Ricci. Una variedad riemanniana completa, M, se dice *armónica* si para cada punto $p \in M$, la acción de L preserva el espacio de las funciones radiales en p (es decir aquellas funciones que dependen sólo de la distancia a p)(ver [**R**]). En 1944, Lichnerowicz conjeturó que todo espacio armónico es localmente isométrico a un espacio dos puntos homogéneo, que en el caso no compacto, es equivalente a decir que los únicos espacio armónicos (simplemente conexos) son los espacios simétricos de rango uno. Muchos autores estudiaron el tema, en particular Z. Szabo probó que la conjetura es cierta en el caso compacto. En contraste, en 1991 E. Damek y F. Ricci mostraron que ciertas extensiones solubles de los llamado grupos *de tipo H*—que generalizan a los espacios simétricos de rango uno— son espacios armónicos (ver [**DR**]), dando contraejemplos a la famosa conjetura en el caso no compacto.

Como generalización del caso anterior, en el Capítulo 3, estudiamos la resolvente de L en $M = S$ un espacio de Damek-Ricci. En este caso, existe una realización de este espacio como un disco n-dimensional, por lo cual las ideas de radialidad del caso anterior (biinvariancia por K) aparecen aquí naturalmente. Esto hace posible la generalización de los resultados anteriores en cuanto permiten encontrar la resolvente como operador a núcleo, describir sus polos y correspondientes residuos. El problema de describir las imágenes es bastante diferente, porque no se cuenta con la teoría de representaciones del caso simétrico, aunque por cálculos bastante explícitos igualmente se pudo probar que éstos son espacios de dimensión finita.

En el Capítulo 4 se da otra generalización, tomándose, en lugar de funciones biinvariantes por K, funciones que transforman de acuerdo a una representación de K. Esto lleva a considerar, para $\tau \in \hat{K}$, las llamadas funciones *τ-esféricas* (ver Cap. I, Sec. 3). En este contexto, consideramos el caso de L actuando en secciones C^∞ de un fibrado homogéneo sobre G/K asociado a una representación unidimensional τ de K. Es fácil ver que este espacio se identifica con

$$\{f : G \mapsto V_\tau : f(gk) = \tau(k)^{-1} f(g)\}.$$

En este caso, N. Shimeno [**Sh**] desarrolló la teoría de las funciones esféricas, encontrando expresiones explícitas similares a las del caso del K-tipo trivial. Con esto fue posible encontrar la resolvente como operador a núcleo, inicialmente en un semiplano, de un modo análogo al anterior.

Notemos que el hecho de que K tenga representaciones de dimensión uno, en el caso de espacios simétricos de rango uno, nos restringe al espacio hiperbólico complejo. En este espacio, siguiendo las ideas de los capítulos anteriores obtuvimos los siguientes resultados:

TEOREMA 0.2. (a) *Para cada* $l \in \mathbb{Z}$, $\nu \in \mathbb{C}$, $\nu \notin -\mathbb{N}$, *existe una autofunción de* C, $Q_{\nu,l} \in C^{\infty}_{-l}(G-K)$, *de autovalor* $\lambda(\nu,l) = \nu^2 - (n-l)^2$. *Se tiene que* $Q_{\nu,l} \in L^1_{loc}(G)$, *y si* $\operatorname{Re}\nu > \rho$, $Q_{\nu,l} \in L^1(G)$. *Además, para* $f \in C^{\infty}_c(G/K,\tau_l)$ *y* $\nu \notin -\mathbb{N}$ *se cumple que*

$$\int_G Q_{\nu,l}(x^{-1}y)(C - \lambda(\nu,l)\mathrm{Id})f(y)dy = -2\nu\, c(\nu,l)f(x).$$

(b) *El operador a núcleo* $\tilde{R}(\lambda(\nu,l))$, *asociado al núcleo* $-\frac{Q_{\nu,l}(x^{-1}y)}{2\nu\, c(\nu,l)}$, *que coincide con* $R(\lambda(\nu,l)$ *para* $\operatorname{Re}\nu > \rho$, *tiene polos simples en* $\nu = \nu^{\pm}_{k,l}$ *con* $\nu^{-}_{k,l} = -|l| - n - 2k$, *para* $k \in \mathbb{N}_0$, *y* $\nu^{+}_{k,l} = |l| - n - 2k$, *para* $k \in \mathbb{N}_0$ *que satisface:* $|l| - n - 2k \geq 0$.

(c) *Para cada polo,* ν, $\operatorname{Res}_{z=\nu} \tilde{R}(\lambda(z,l))(f) = p(\nu)\, f * \check{\Phi}_{\nu,-l}$.

(d) *El conjunto de vectores* K*-finitos en la imagen del residuo asociado a un polo* μ, $V(\mu,l)_K$, *es un* $(\mathfrak{g},K)$*-módulo. Estos módulos son de dimensión finita sólo en el caso de que* $\mu = \nu^{-}_{k,l}$ *para* $k \in \mathbb{N}_0$. *Los módulos correspondientes a* $\mu = \nu^{+}_{k,l}$ *y* $\mu = 0$ *son equivalentes como* $(\mathfrak{g},K)$*-módulos, a representaciones de serie discreta holomorfa, y límite de serie discreta respectivamente.*

(e) *Se tiene que*

$$\begin{aligned}\dim V(\nu^{-}_{k,l}, l) &= \prod_{1\leq i<j\leq n+1} \frac{\langle \Lambda_{k,l} + \rho, \epsilon_i - \epsilon_j\rangle}{\langle \rho, \epsilon_i - \epsilon_j\rangle} \\ &= \prod_{1<j\leq n} \frac{\frac{|l|-l}{2} + k + j - 1}{j-1} \cdot \prod_{1<i\leq n} \frac{\frac{|l|+l}{2} + k + n + 1 - i}{n+1-i} \\ &\quad \cdot \frac{1}{n}\left(\frac{|l|+l}{2} + \frac{|l|-l}{2} + 2k + n\right)\end{aligned}$$

Cabe señalar que no hemos observado, aún en otros contextos, situaciones en que los residuos de la resolvente sean operadores de rango infinito. Además podríamos decir que en nuestro caso, la aparición de las series discretas es justificable por razones espectrales. Sin embargo la aparición de límites de series discreta resulta mucho más inesperada.

Agradecimientos Deseo agradecer en primer lugar a Roberto por su paciencia y su constante apoyo, no sólo en lo matemático sino también en lo profesional. Estoy muy agradecida también con los Profesores J. Vargas y T. Godoy, por fructíferas charlas.

También quisiera aprovechar esta oportunidad para agradecer a mis padres por su incondicional apoyo en todo aspecto. Por último quisiera agradecerle a mi esposo por todo, en especial por su constante aliento.

A todos, muchas gracias.

CAPITULO 1

Preliminares

1. Grupos de Lie semisimples

Comenzaremos introduciendo algunos elementos básicos de la teoría de Lie que utilizaremos a lo largo de este trabajo.

Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie semisimple sobre $\mathbb{C}$, y $\mathfrak{g}_0$ una forma real. Si $X, Y \in \mathfrak{g}_0$, la función $X + \mathbf{i}Y \mapsto X - \mathbf{i}Y$ define un automorfismo de $\mathfrak{g}$ como álgebra de Lie real, llamado la *conjugación de* $\mathfrak{g}$ *con respecto a* $\mathfrak{g}_0$.

Definición 1.1. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie semisimple real. Una *involución de Cartan* de $\mathfrak{g}$, θ, es un automorfismo involutivo de $\mathfrak{g}$ tal que si

$$\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} : \theta X = -X\} \quad \text{y} \quad \mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} : \theta X = X\}$$

y si $B(x, y) = \operatorname{tr} \operatorname{ad}(x) \operatorname{ad}(y)$ es la forma de Killing de $\mathfrak{g}$, se tiene que $B_{|\mathfrak{k}\times\mathfrak{k}}$ es definida negativa, y $B_{|\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}}$ es definida positiva.

En este caso, la descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ es llamada *descomposición de Cartan.*

Se sabe que toda álgebra de Lie semisimple real admite una involución de Cartan ([**W**] 3.7.9). Más aún, si G es un grupo conexo semisimple y lineal, se puede tomar la involución $\theta(X) = \overline{X^{-1}}^t$. Además se tiene que si K es el subgrupo de G con álgebra de Lie $\mathfrak{k}$ correspondiente a la descomposición de Cartan asociada a θ, K es un subgrupo compacto maximal de G (ver [**K**] 1.1).

Para dar una recíproca, necesitamos la siguiente definición.

Definición 1.2. Sea H un subgrupo cerrado de un grupo de Lie G. *Se dice que un par G, H, es reductivo si existe un subespacio,* $\mathfrak{m}$ *de* $\mathfrak{g}$*, el álgebra de Lie de G, que es* $\operatorname{Ad}_G(H)$*-invariante y tal que* $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$, donde $\mathfrak{h}$ denota el álgebra de Lie de H.

Notemos que si H es compacto entonces G/H es reductivo.

En este caso, se tiene que si G es un grupo de Lie real, lineal y reductivo, para todo subgrupo compacto maximal de G, K, existe un automorfismo involutivo, θ, cuyo conjunto de puntos fijos es exactamente K (ver [**GV**] Cap. 2, sec. 2.1).

En $\mathfrak{g}_c$ podemos definir el producto interno hermítico $\langle X, Y \rangle = -B_{\mathfrak{g}_c}(X, \tau(Y))$, que llamaremos *canónico*, donde τ es la conjugación de $\mathfrak{g}_c$ relativa a la forma real compacta $\mathfrak{g}_u = \mathfrak{t} + \mathbf{i}\mathfrak{p}$. Notemos que $\tau_{|\mathfrak{g}} = \theta$, con lo cual se tiene que $\langle , \rangle_{|\mathfrak{p}}$ coincide con B.

Es fácil ver que con este producto interno, $\operatorname{ad}(X)$ es una transformación antihermítica (resp. hermítica) para todo $X \in \mathfrak{k}$ (resp. $X \in \mathfrak{p}$) (ver [**W**] 7.2.3).

Fijemos un subespacio abeliano maximal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{p}$; si $X \in \mathfrak{a}$, por la observación anterior tenemos que $\operatorname{ad}(X)$ es un operador diagonalizable con autovalores reales. Luego, los elementos de $\operatorname{ad}(\mathfrak{a})$ son simultaneamente diagonalizables. Para cada

$\lambda \in \mathfrak{a}^*$ no nula, definimos el *espacio raíz* asociado a λ:

$$\mathfrak{g}_\lambda = \{X \in \mathfrak{g} : \mathrm{ad}(H)X = \lambda(H)X \ ; \ \forall\ H \in \mathfrak{a}\}.$$

Sea

$$\Sigma = \{\lambda \in \mathfrak{a}^*, \lambda \neq 0 : \mathfrak{g}_\lambda \neq 0\},$$

el conjunto de raíces restringidas del par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$, y sea $\mathfrak{m}$ el centralizador de $\mathfrak{a}$ en $\mathfrak{k}$ es decir, $\mathfrak{m} = \{X \in \mathfrak{k} : [X, H] = 0 \ \forall\ H \in \mathfrak{a}\}$.

Como todo espacio de dimensión finita, $\mathfrak{a}$ puede ser identificado a su dual vía el producto interno. Tomemos entonces para $\lambda \in \Sigma$, $H_\lambda \in \mathfrak{a}$ tal que $B(H, H_\lambda) = \lambda(H)$ para todo $H \in \mathfrak{a}$; es decir, tenemos la identificación $\lambda \leftrightarrow H_\lambda$.

Sea W el *grupo de Weyl* del par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$, esto es, el grupo finito generado por $\{s_\lambda : \lambda \in \Sigma\}$, donde s_λ es la reflexión ortogonal en $\mathfrak{a}$ con respecto al núcleo de λ. Por la identificación de arriba también podemos pensar a W actuando en $\mathfrak{a}$.

Por otro lado, se definen las *cámaras de Weyl* como las componentes conexas de

$$\mathfrak{a}' = \{\mu \in \mathfrak{a} \ : \ \langle \alpha, \mu \rangle \neq 0 \ \text{ para todo } \ \alpha \in \Sigma\}.$$

Para cada cámara $\mathcal{C}$ (hay sólo una cantidad finita de ellas) se puede ver que $\mathrm{CL}(\mathcal{C})$ es un dominio fundamental para la acción de W en $\mathfrak{a}$. Si $A^+ = \exp(\mathcal{C})$ se tiene $G = K\mathrm{CL}(A^+)K$ la llamada *descomposición polar*. Esta descomposición es única en el sentido de que si $kak' = a'$, entonces $a = a'$ y $k' = k^{-1}$ (Ver [**GV**] Lema 2.2.3 pág.65).

Tomemos el orden en Σ definido por $\mathcal{C}$ y denotemos con Σ^+ el conjunto de raíces positivas. Es claro que $-\Sigma^+$ es el conjunto de raíces negativas.

Si $\mathfrak{n} = \displaystyle\sum_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_\alpha$, entonces $\overline{\mathfrak{n}} = \theta(\mathfrak{n}) = \displaystyle\sum_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$, puesto que $\theta(H) = -H, \ \ \forall H \in \mathfrak{a}$.

Es fácil ver que $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} + \mathfrak{m} + \displaystyle\sum_{\alpha \in \Sigma} \mathfrak{g}_\alpha$, o equivalentemente que $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} + \mathfrak{m} + \mathfrak{n} + \overline{\mathfrak{n}}$. A partir de esto se prueba que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$, llamada la *descomposición de Iwasawa* de $\mathfrak{g}$ (Ver [**W**] 7.3).

A nivel de grupos, tenemos el siguiente teorema:

TEOREMA 1.3. [**W**, 7.4.3] *Sea G es un grupo de Lie semisimple con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, y $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$, la descomposición de Iwasawa de $\mathfrak{g}$. Si K, A, N son los respectivos grupos de Lie, entonces*

- $\exp : \mathfrak{a} \mapsto A$ *es un isomorfismo.*
- $\exp : \mathfrak{n} \mapsto N$ *es un difeomorfismo.*
- *La función $(k, a, n) \mapsto kan$ de $K \times A \times N \longrightarrow G$ es un difeomorfismo.*

Esta es llamada la descomposición de Iwasawa de G, donde en realidad es equivalente tomar $G = KAN$, o $G = NAK$. En adelante denotaremos con $g = \kappa(g) \exp H(g) n(g)$ la correspondiente descomposición de $g \in G$, donde $\kappa(g) \in K$, $\exp H(g) \in A$, y $n(g) \in N$.

Sea $\mathfrak{h}^-$ una subálgebra abeliana maximal de $\mathfrak{m}$. Entonces $\mathfrak{h}$, la complexificación de $\mathfrak{a} + \mathfrak{h}^-$ es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}_c$ ([**W**] 7.5.8). Podemos ordenar compatiblemente el sistema de raíces Δ de $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{h})$ con las de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$, de tal modo que los elementos de Δ^+ restrinjan a Σ^+ en $\mathfrak{a}$.

DEFINICIÓN 1.4. Dado un grupo de Lie conexo G y un subgrupo cerrado K, decimos que (G, K) es un *par simétrico* si existe un automorfismo involutivo analítico de G, σ, tal que $(K_\sigma)_0 \subset K \subset K_\sigma$, donde K_σ es el conjunto de puntos fijos de σ, y $(K_\sigma)_0$ denota su componente conexa. Si $\mathrm{Ad}(K)$ es compacto, entonces el par (G, K) es llamado *riemanniano simétrico.*

Si (G, K) es un par riemanniano simétrico, la variedad riemanniana G/K es un espacio simétrico (ver [**H2**] Prop. 3.4 pág. 174). Notemos que si G es como anteriormente, G/K es un espacio simétrico.

Recíprocamente, si M es una variedad riemanniana simétrica, y p_0 es un punto de M, sea $G = I_0(M)$ la componente conexa del grupo de isométrías de M y K el subgrupo de G que fija p_0. Entonces K es un subgrupo conexo y compacto de G, y $M \simeq G/K$ (ver [**H2**] teor. 3.3 pág. 208).

Se define el *rango geométrico de M* como la máxima dimensión de una subvariedad totalmente geodésicas y plana de M.

Sea (G, K) un par simétrico, y sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ la descomposición de $\mathfrak{g}$ en autoespacios de σ.

Si $\mathfrak{g}$ es compacta y semisimple, decimos que (G, K) es un par simétrico *de tipo compacto.*

Si $\mathfrak{g}$ no es compacta y es semisimple, decimos que (G, K) es un par simétrico *de tipo no compacto*, y en este caso, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ es una descomposición de Cartan.

Por último, si $\mathfrak{p}$ es un ideal abeliano en $\mathfrak{g}$, decimos que (G, K) es un par simétrico *de tipo euclideo.*

Si (G, K) es un par simétrico de tipo no compacto, podemos identificar naturalmente el espacio tangente a $M = G/K$ en $\bar{e}$ con $\mathfrak{p}$, y se tiene que $\mathfrak{s}_0 \subset \mathfrak{p}$ es tal que $S_0 = \exp(\mathfrak{s}_0)$ es una subvariedad totalmente geodésica y plana de M, si y sólo si $\mathfrak{s}_0$ es abeliana. Si G es semisimple y conexo, se define el *rango real de G* como la dimensión de $\mathfrak{a}$. El rango real no depende de la elección de $\mathfrak{a}$ ni de la descomposición de Cartan de $\mathfrak{g}$. Además, el rango real de G coincide con el rango gemétrico de G/K como espacio simétrico.

Por otro lado, si G es localmente compacto, y K es un subgrupo compacto de G, decimos que (G, K) es un *par de Gelfand* si $L^1(G//K)$, el espacio de las funciones integrables biinvariantes por K, con el producto de convolución, es un espacio conmutativo.

Es un hecho conocido que todo par simétrico (G, K) de tipo no compacto es un par de Gelfand (Ver [**GV**] 1.5.6).

2. Representaciones

Sea H un subgrupo cerrado de G. Dada (π, V_π), una representación irreducible de H, definimos el siguiente espacio

$$\mathcal{H}_\pi = \{f : G \mapsto V_\pi \,:\, f(gp) = \delta_H(p)\pi(p)^{-1}f(g),\ a.e.\ f_{|K} \in L^2(K)\}$$

donde δ_H es la función modular de H, y la acción de G es la regular a izquierda, es decir que $g.f(x) = f(g^{-1}x)$. Se define en $\mathcal{H}_\pi$ el siguiente producto interno:

$$\langle f, g\rangle = \int_k < f(k), g(k) > dk.$$

Esta es la llamada *representación inducida* de H a G por π, y se denota con $\mathrm{Ind}_H^G(\pi)$.

Un caso particular importante de estas representaciones es aquél en que se considera la representación de P definida por

$$\pi(man) = \sigma(m)e^{(\nu+\rho)log(a)},$$

donde σ es una representación irreducible de M, y $\nu \in \mathfrak{a}^*$. Estas es la llamada *serie principal de representaciones* de G, de parámetros (σ, ν) y que se denotará $(\pi_{\sigma,\nu}, \mathcal{H}_{\sigma,\nu})$.

Nota 1.5. Si $G = NAK$ (con lo cual $P = NAM$) la definición de arriba cambia, y se consideran funciones tales que $f(namg) = e^{(\nu+\rho)log(a)}\sigma(m)f(g)$ y la acción de G es a derecha $g.f(x) = f(xg)$. *Se verifica que ambas realizaciones son equivalentes.*

La restricción a K induce un isomorfismo isométrico de $\mathcal{H}_{\sigma,\nu})$ en el espacio $L^2(K, M, \sigma)$, de funciones de cuadrado integrable en K, de tipo σ, es decir, tales que $f(km) = \sigma(m)^{-1}f(k)$. Notemos que $\pi_{\sigma,\nu|K} \simeq \mathrm{Ind}_M^K(\sigma)$.

Otras representaciones fundamentales de G son las llamadas de serie discreta. Recapitularemos algunos hechos importantes acerca de estas representaciones. Si π es una representación de G en el espacio de Hilbert $(H_\pi, \langle , \rangle)$, una entrada matricial de π es una función de G de la forma $g \mapsto \langle \pi(g)v, w\rangle$, donde $v\, w \in H_\pi$. Cuando π es irreducible, las siguientes condiciones son equivalentes:

- Existe una entrada matricial de G (no nula) perteneciente al $L^2(G)$.
- Todas las entradas matriciales están en $L^2(G)$.
- π aparece en la descomposición de la representación regular (a derecha o izquierda) de G en el $L^2(G)$.

En este caso, π es llamada *representación de serie discreta* o *representación de cuadrado integrable.*

Es bien sabido que si G es semisimple, conexo, con centro finito y contiene un subgrupo compacto maximal K del mismo rango, entonces G tiene serie discreta; este hecho se corresponde con la existencia de un subgrupo de Cartan compacto en G; esta es una condición necesaria y suficiente para la existencia de serie discreta.

3. Operadores Diferenciales

Sea $D(G)$ el anillo de operadores diferenciales de G invariantes a izquierda. Notemos que con la composición, ésta es un álgebra asociativa con identidad, y se puede ver que es isomorfa al álgebra universal de $\mathfrak{g}$, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Para $X \in \mathfrak{g}$ la identificación está dada por

$$Xf(g) = \frac{d}{dt}_{|t=0} f(g \exp(tX)).$$

Bajo esta correspondencia, el centro de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{Z}$, se corresponde con los operadores biinvariantes, es decir con los operadores invariantes a derecha y a izquierda.

Si H es un subgrupo de G, sea

$$D_H(G) = \{D \in D(G) \,:\, D^{R_h} = D \,\text{para todo}\; h \in H\}.$$

Si G es reductivo, se tiene la siguiente caracterización de $D(G/K)$ (ver [**H**] Teor. 4.6 pág. 285).

PROPOSICIÓN 1.6. *Sea* $\mu : D_K(G) \mapsto D(G/K)$ *definida por*

$$(\mu(\tilde{u})f) = u\tilde{f} \quad f \in C(G/K)$$

donde $\pi : G \mapsto G/K$ *es la proyección canónica, y* $\tilde{f} = f \cdot \pi$. *Entonces* μ *es un homomorfismo sobre, con núcleo* $D_K(G) \cap D(G)^K$.

Sea $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ una base de $\mathfrak{g}$ y tomemos $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ tal que $B(X_i, Y_j) = \delta_{i,j}$. Definimos entonces $C \in U(\mathfrak{g}_c)$, el elemento de *Casimir* de $\mathfrak{g}$, como

$$C = \sum_{j=1}^{n} X_i Y_i.$$

Es fácil ver que C es independiente de la base elegida, y entonces

$$C = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Ad}(g)X_i \operatorname{Ad}(g)Y_i = \operatorname{Ad}(g)C,$$

por lo cual obtenemos que $C \in \mathfrak{Z}$, el centro del álgebra universal de $\mathfrak{g}$.

Sea σ una representación de M unitaria e irreducible y $\nu \in \mathbb{C}$; entonces, si $(\pi_{\sigma,\nu}, \mathcal{H}_{\sigma,\nu})$ es la serie principal de G asociada, $\pi_{\sigma,\nu}(C)$ actúa por un escalar, dado por

$$\lambda(\sigma, \nu) = \langle \nu, \nu \rangle - \langle \rho, \rho \rangle - \langle \mu_\sigma, \mu_\sigma + \delta_M \rangle \tag{1.1}$$

donde μ_σ es el peso máximo de σ y δ_M es la semisuma de las raíces positivas de M (ver [**K**] Prop. 8.22).

Introduciremos ahora el operador de Laplace-Beltrami. Si (M, g) es una variedad reimanniana definimos, para $f \in C^\infty(M)$ el *gradiente de* f, denotado por $\operatorname{grad}(f)$, como el campo en $\chi(M)$ tal que $\langle \operatorname{grad}(f), X \rangle = Xf$. En coordenadas, tenemos que $\operatorname{grad}(f) = \sum g^{i,j} \partial_i f \frac{\partial}{\partial x_j}$. Para $X \in \chi(M)$, sea la *divergencia* de X, denotada con $\operatorname{div}(X)$, la función de M que en cada entorno coordenado U está dada por $\operatorname{div}(X) = \frac{1}{\sqrt{\overline{g}}} \sum \partial_i(\sqrt{\overline{g}} X_i)$, donde si $[g_{i,j}]$ es la matriz asociada a g, denotamos con $\overline{g}$ su determinante, y $[g^{i,j}]$ es la inversa.

Definimos entonces el operador de Laplace Beltrami, L, como el operador diferencial en M dado por $Lf = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f))$ (se suele tomar también $Lf = -\operatorname{div}(\operatorname{grad}(f))$ si se quiere que sea positivo). Es un operador simétrico con respecto al producto interno $\langle f_1, f_2 \rangle = \int_M f_1(m) f_2(m) \omega$, y en coordenadas locales se tiene que (ver [**H**] pág. 31)

$$Lf = \frac{1}{\sqrt{\overline{g}}} \sum_k \partial_k \left(\sum g^{i,k} \sqrt{\overline{g}} \partial_i f \right)$$

Se puede ver que las acciones de C y L en $D(G/K)$ coinciden, es decir que en términos de la Proposición 1.6, $\mu(C) = L$.

Se sigue de la descomposición polar de G, $G = K \operatorname{Cl}(A^+)K$, que una función continua biinvariante por K, queda determinada por su restricción a A^+. Por ello, para cada operador diferencial esférico (invariante a derecha e izquierda por elementos de K), se puede definir un nuevo operador diferencial en A^+ $\Delta(D)$, llamado la *componente radial* de D, que esta dado por

$$(Df)^- = \Delta(D) f^-, \tag{1.2}$$

donde f^- denota la restricción de f a A^+ (ver [**GV**] 4.1).

En general, si D es un operador diferencial en una variedad V, se puede definir una 'proyección' de D sobre cualquier subvariedad S de V. Si la subvariedad cumple ciertas condiciones, esta 'proyección' se llama radial. En nuestro caso, estamos considerando $V = G/K$ y $S = A^+.0$ (ver [**H**] cap. II sec. 3).

4. Funciones esféricas

Sea G un grupo unimodular localmente compacto, K un subgrupo compacto y τ una representación irreducible de K. Una función $F : G \mapsto \mathrm{End}(\mathcal{H}_\tau)$ se dice de *tipo* τ si $f(gk) = \tau(k)^{-1}f(g)$, y se dice τ*-radial* si además se tiene que para todo $x \in G$, k_1, $k_2 \in K$, se cumple que

$$F(k_1xk_2) = \tau(k_2)^{-1}F(x)\tau(k_1)^{-1}.$$

Denotemos con $C^\infty(G, K, \tau)$ el espacio de funciones τ-radiales infinitamente diferenciables, y con $C^\infty(G, K, \tau)$ el espacio de las de tipo τ. Sea $D(G, K, \tau)$ la subálgebra de operadores diferenciales en G que preservan $C_c^\infty(G/K, \tau)$.

Equipemos a $C^\infty(G, K, \tau)$ con el siguiente producto de convolución:

$$(F * H)(x) = \int_G F(y^{-1}x)H(y)dy = \int_G F(y)H(xy^{-1})$$

Diremos que el triple (G, K, τ) es un *triple de Gelfand* si esta álgebra de convolución es conmutativa. Esta es la generalización natural de la noción de par de Gelfand, que corresponde al caso particular en que τ es la representación trivial de K.

En caso de que G sea semisimple, conexo, no compacto con centro finito, se tiene la siguiente caracterización, dada por Deitmar (ver [**Dt**] Teorema 3, Cor. 1 y Prop. 3).

PROPOSICIÓN 1.7. *Sea G un grupo de Lie semisimple, conexo, no compacto con centro finito, y sea K un subgrupo maximal compacto se G. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- *El K-tipo τ aparece con multiplicidad menor o igual a 1 en la descomposición de cualquier representación irreducible y unitaria de G.*
- *$\tau_{|M}$ es libre de multiplicidad*
- *$C_c^\infty(G, K, \tau)$ con el producto de convolución definido arriba es un álgebra conmutativa*
- *$D(G, k, \tau)$ es un álgebra conmutativa.*

Más aún, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^K$ es conmutativa si y sólo si $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(n, 1)$ o $\mathfrak{su}(n, 1)$, y en estos casos las condiciones anteriores son satisfechas por cualquier $\tau \in \hat{K}$.

DEFINICIÓN 1.8. Diremos que $\Phi \in C(G, K, \tau)$ es una función τ*-esférica* en G si es no nula y si la función

$$\chi_\Phi : F \mapsto \frac{1}{\dim \tau} \int_G \mathrm{tr}\{F(x)\Phi(x^{-1}\}dx$$

define un carácter de $C_c(G, K, \tau, \tau)$.

Denotaremos con $\Sigma(G, K, \tau)$ el espacio de las funciones τ-esféricas de G.

Estas funciones han sido estudiadas por muchos autores principalmente en el caso clásico, o sea el que $\tau \equiv 1$. Entre ellos podemos mencionar [**H**], [**K**], [**GV**] en el caso clásico, y en el caso general a [**Gd**], [**Wr**] y [**GV**]. A continuación, recordamos algunos hechos sobre funciones esféricas, extraídos de [**Wr**], [**W**], y [**O**] (ver también [**P**]), para el caso de un triple Gelfand, que es el que en particular nos interesa.

Asumamos desde ahora que (G, K, τ) es un triple de Gelfand. En este caso se tiene la siguiente caracterización.

PROPOSICIÓN 1.9. *Sea $\Phi \in C^\infty(G, K, \tau)$ tal que $\Phi(e) = 1$. Entonces Φ es una función τ-esférica en G si y sólo si es una autofunción del álgebra $D(G, K, \tau)$, en el sentido de que existe un carácter χ_Φ de $D(G, K, \tau)$ tal que para todo $D \in D(G, K, \tau)$ existe algún $\zeta \in \mathcal{H}_\tau$, $\zeta \neq 0$, tal que*

$$D\Phi(\cdot)\zeta = \chi_\Phi(D)\Phi(\cdot)\zeta \tag{1.3}$$

Más precisamente, el autovalor está dado por $\chi_\Phi(D) = \frac{1}{\dim \tau} \operatorname{tr}\{D\Phi\}(e)$.

Si además G es un grupo de Lie semisimple, conexo, con centro finito podemos describir más precisamente $\Sigma(G, K, \tau)$.

Sea σ una representación unitaria e irreducible de M, $\nu \in \mathbb{C}$, y $(\pi_{\sigma,\nu}, \mathcal{H}_{\sigma,\nu})$ la serie principal de G de parámetros (σ, ν). Sea $\hat{M}_\tau$ el subconjunto de representaciones unitarias e irreducibles de M que aparecen en la descomposición de τ como representación de M. Observemos que por el criterio de Deitmar, cada $\sigma \in \hat{M}$ sólo puede aparecer en $\tau_{|M}$ con multiplicidad ≤ 1. Entonces, para $\sigma \in \hat{M}_\tau$, $\operatorname{Hom}_M(\mathcal{H}_{\sigma,\nu}, H_\tau) \simeq \operatorname{Hom}_K(\mathcal{H}_\tau, L^2(K, M, \sigma))$ es unidimensional, y tiene como generador a

$$\zeta \mapsto J_\sigma^\tau \zeta = \sqrt{\frac{\dim \tau}{\dim \sigma}} P_\sigma \circ \tau(\cdot)^{-1}\zeta$$

donde P_σ denota la proyección en $\mathcal{H}_\tau$ sobre la componente isotípica de σ.

Análogamente, $P_\sigma^\tau = (J_\sigma^\tau)^*$ es un generador del espacio unidimensional $\operatorname{Hom}_K(\mathcal{H}_{\sigma,\nu}, \mathcal{H}_\tau)$, y está dado por

$$P_\sigma^\tau(f) = \sqrt{\frac{\dim \tau}{\dim \sigma}} \int_K \tau(k) f(k) dk.$$

Para cada $\sigma \in \hat{M}_\tau$, y $\nu \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$, sea

$$\Phi_\sigma^\tau(\lambda, \cdot) : G \mapsto \operatorname{End}(\mathcal{H}_\tau)$$

$$\Phi_\sigma^\tau(\nu, x) = P_\sigma^\tau \circ \pi_{\sigma,\nu}(x^{-1}) \circ J_\sigma^\tau.$$

Entonces $\Phi_\sigma^\tau(\lambda, \cdot)$ es una función τ-esférica, y admite la siguiente representación como integral de Eisenstein.

$$\Phi_\sigma^\tau(\lambda, x) = \int_G e^{-(\mathrm{i}\nu+\rho)(H(xk))} \tau(k) \circ P_\sigma \circ \tau(\kappa(xk)^{-1}) dk \tag{1.4}$$

PROPOSICIÓN 1.10. $\Sigma(G, K, \tau) = \{\Phi_\sigma^\tau(\lambda, \cdot) : \sigma \in \hat{M}_\tau, \nu \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*\}$.

Este resultado es consecuencia de un resultado más general de [**O**].

Como ya observamos, si G es lineal, semisimple y conexo, gracias a la descomposición polar de G, una función τ-radial queda determinada por su restricción a A^+. Fue idea de Harish Chandra, estudiar las funciones esféricas a través de la ecuación diferencial que define (1.3). Más aún estas ecuaciones, teniendo en cuenta (1.2) pueden ser vistas como ecuaciones en A, aunque para esto, hace falta saber algo de la componente radial de D.

5. Ecuaciones Diferenciales

Daremos ahora algunos elementos básicos del análisis de Jacobi, siguiendo [**K**]. Consideremos para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ el *peso*

$$J_{\alpha,\beta}(t) = (2\sinh t)^{2\alpha+1}(2\cosh t)^{2\beta+1}$$

y el operador diferencial de segundo orden (llamado el Laplaciano de Jacobi) dado por

$$\begin{aligned} L_{\alpha,\beta} &= \tfrac{d^2}{dt^2} + \tfrac{J'_{\alpha,\beta}}{J_{\alpha,\beta}}\tfrac{d}{dt} \\ &= \tfrac{d^2}{dt^2} + \{(2\alpha+1)\coth t + (2\beta+1)\tanh t\}\tfrac{d}{dt} \end{aligned}$$

Para λ, α, y $\beta \in \mathbb{C}$, se llama *ecuación de Jacobi* a la ecuación

$$(L_{\alpha,\beta} + \lambda^2 + \gamma^2)f = 0 \tag{1.5}$$

donde $\gamma = \alpha + \beta + 1$.

Es fácil ver que tomando $z = -\sinh^2 t$, esta ecuación se transforma en una ecuación hipergeométrica de parámetros a, b, c, donde $\alpha = c - 1$, $\beta = a + b - c$ y (ver [**GV**]); es decir que si definimos $u(z) = f(-\sinh^2 t)$, entonces u es solución de

$$z(z-1)u'' + (c - (a+b+1)zu' - abu(z) = 0. \tag{1.6}$$

La única solución acotada en un entorno de $z = 0$, y tal que en $z = 0$ vale 1 está dada para $|z| < 1$ por

$$u(z) =_2 F_1(a, b, c, z) = \sum_j \frac{(a)_j (d)_j}{c_j} z^j$$

que es la llamada función hipergeométrica de Gauss, y donde para cualquier número complejo a, denotamos con $(a)_0 = 1$, y $(a)_k = a(a+1)...(a+k-1)$.

Por lo tanto, las soluciones de 1.5 que en cero valen 1, llamadas *funciones de Jacobi* son de la forma

$$\phi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t) =_2 F_1\left(\frac{\gamma - \mathbf{i}\lambda}{2}, \frac{\gamma + \mathbf{i}\lambda}{2}, \alpha + 1, -\sinh(t)^2\right). \tag{1.7}$$

El estudio de estas funciones fue desarrollado, entre otros, por Koornwinder en [**Kr**], y en particular allí se muestra que para $\lambda \neq -\mathbf{i}, -2\mathbf{i}, ...$, otra solución l.i. con $\phi_\lambda^{(\alpha,\beta)}$ está dada por

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t) &= (2\cosh t)^{\mathbf{i}\lambda-\gamma}\ {}_2F_1\left(\tfrac{\gamma-\mathbf{i}\lambda}{2}, \tfrac{\alpha-\beta+1-\mathbf{i}\lambda}{2}, 1-\mathbf{i}\lambda, (\cosh t)^{-2}\right) \\ &= (2\sinh t)^{\mathbf{i}\lambda-\gamma}\ {}_2F_1\left(\tfrac{\gamma-\mathbf{i}\lambda}{2}, \tfrac{-\alpha+\beta+1-\mathbf{i}\lambda}{2}, 1-\mathbf{i}\lambda, -(\sinh t)^{-2}\right). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Se tiene que el comportamiento asintótico está dado por

$$\tilde{Q}_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t) \sim e^{(\mathbf{i}\lambda-\gamma)t} \qquad \text{cuando } t \mapsto \infty. \tag{1.9}$$

Para $\lambda \notin \mathbb{Z}$, es fácil ver que $\tilde{Q}_\lambda^{(\alpha,\beta)}$ y $\tilde{Q}_{-\lambda}^{(\alpha,\beta)}$ son linealmente independientes, con lo cual $\phi_\lambda^{(\alpha,\beta)}$ se escribe como combinación de las dos:

$$\phi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t) = c(-\lambda)\tilde{Q}_{-\lambda}(t) + c(\lambda)\tilde{Q}_\lambda(t) \tag{1.10}$$

donde

$$c(\lambda) = c(\lambda)_(\alpha, \beta) = \frac{2^{\gamma - \mathbf{i}\lambda}\,\Gamma(\mathbf{i}\lambda)\,\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\frac{\mathbf{i}\lambda+\gamma}{2})\Gamma(\frac{\mathbf{i}\lambda+\alpha-\beta+1}{2})}, \tag{1.11}$$

y si además $\mathrm{Im}\lambda < 0$, también podemos decir que el comportamiento asintótico de $\phi_\lambda^{(\alpha,\beta)}$ cuando $t \to \infty$, esta dado por:

$$\phi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t) \sim c(\nu)\, e^{t(\mathbf{i}\lambda - \gamma)}. \tag{1.12}$$

CAPITULO 2

Espacios simétricos de rango uno

1. Introducción

En este capítulo estudiaremos la resolvente del operador de Laplace L actuando en funciones C^∞ de un espacio simétrico de curvatura estrictamente negativa.

Sea entonces $M = G/K$, donde G es un grupo de Lie semisimple de rango real uno, no compacto y K un subgrupo compacto maximal de G. Cabe señalar que según la clasificación (ver [**H2**] pág. 518), hay sólo cuatro tipos de estos espacios, que son los llamados espacios hiperbólicos; a saber, el espacio hiperbólico n dimensional, $\mathbb{R}H^n$, correspondiente al par $(\mathrm{S}O(n,1), SO(n))$, el espacio hiperbólico complejo, $\mathbb{C}H^n$, correspondiente al par $(\mathrm{S}U(n,1), \mathrm{S}(U(n)\times \mathrm{U}(1))$, el hiperbólico cuaterniónico, $\mathbb{H}H^n$, correspondiente al par $(\mathrm{S}p(n,1), \mathrm{S}p(n))$ y el hiperbólico Cayley, $\mathbb{O}H(n)$ correspondiente al único grupo de Lie semisimple con álgebra de Lie $\mathfrak{f}_4$.

Sean $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ las correspondientes álgebras de Lie de G y K respectivamente. Tomemos $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ una descomposición de Cartan, $\mathfrak{a}$ una subálgebra abeliana maximal de $\mathfrak{p}$ y $G = KAN$ la correspondiente descomposición de Iwasawa. Extendemos de la manera usual $\mathfrak{a}$ a una subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}_c = \mathfrak{a}_c + \mathfrak{h}_c^-$ de $\mathfrak{g}$, donde $\mathfrak{h}^-$ es una subálgebra abeliana maximal de $\mathfrak{m}_c$, el centralizador de $\mathfrak{a}$ en $\mathfrak{k}$, e introducimos un orden compatible en el espacio dual de $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{a} + \mathbf{i}\mathfrak{h}^-$. Sea $\Sigma^+(\Delta^+)$ el correspondiente conjunto de raíces positivas del par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ (respectivamente $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{h}_c)$). En este caso, como la dimensión de $\mathfrak{a}$ es uno, existe un elemento $\alpha \in \Sigma^+$ tal que $\Sigma^+ = \{\alpha\}$ en el caso hiperbólico real, y $\Sigma^+ = \{\alpha, \frac{1}{2}\alpha\}$ en los otros casos. Más aún,

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{k}$	$\dim\mathfrak{g}_{\alpha/2}$	$\dim\mathfrak{g}_\alpha$
$\mathfrak{so}(n,1)$	$\mathfrak{so}(n)$	0	$n-1$
$\mathfrak{su}(n,1)$	$\mathfrak{s}(\mathrm{U}(n)\times\mathrm{U}(1))$	1	2(n-1)
$\mathfrak{sp}(n,1)$	$\mathfrak{sp}(n)$	3	4(n-1)
$\mathfrak{f}_{4(-20)}$	$\mathfrak{so}(9)$	7	8

Normalizaciones: Sea $p = \dim\mathfrak{g}_{\frac{\alpha}{2}}$, $q = \dim\mathfrak{g}_\alpha$. Sea $H_0 \in \mathfrak{a}$ tal que $\alpha(H_0) = 1$, y denotemos con $a_t = \exp(tH_0)$, como el rango de G es uno, se tiene que todo elemento de A es de la forma a_t para algún $t \in \mathbb{R}$. Para facilitar la notación, fijemos un producto interno $\langle , \rangle$ múltiplo de la forma de Killing, tal que $\langle H_0, H_0\rangle = 1$. Identificaremos también $\mathfrak{a}^*$ con $\mathbb{C}$, vía $\nu = z\alpha \mapsto z$, o lo que es lo mismo, $\nu \mapsto \nu(H_o)$. En particular, $\rho = \frac{p+2q}{4}$.

Usaremos en G, la medida de Haar normalizada de tal forma que

$$\int_G f(g)dg = \int_{KA^+K} f(k_1 a_t k_2)\delta(t)dk_1\, dt\, dk_2$$

donde $\delta(t) = 2^p(\sinh\, t/2)^p(\sinh\, t)^q$.

2. Funciones esféricas y la resolvente

Si τ es la representación trivial de K en $\mathbb{C}$, entonces tenemos que una función de tipo τ es una función invariante a derecha por K, y análogamente se puede ver que $C(G, K, \tau) \simeq C(G//K)$. Es claro también que $\hat{M}_\tau = \{\sigma\}$, donde $\sigma = \mathrm{Id}$ es la representación trivial de M.

Sea $P = MAN$ un subgrupo parabólico minimal de G, llamaremos en este caso a la serie principal inducida por P, de parámetros (σ, ν), la *serie principal esférica*, y la denotaremos simplemente con $(\pi_\nu, \mathcal{H}_\nu)$.

Si bien se conoce la clasificación de las funciones esféricas para el caso de los espacios simétricos, este caso sirve de modelo para los siguientes, y es por eso que daremos algunos detalles de las demostraciones.

Comencemos notando que estos espacios simétricos son *dos puntos homogéneos*, esto es que dados dos pares de puntos equidistantes, existe una isometría que lleva un par en el otro. Más aún estos son todos los espacios dos puntos homogéneos no compactos (ver [**H**] pág. 177), por lo cual, por un resultado de Helgason, L genera $D(G/K)$ (ver [**H**] Prop. 4.11 pág. 288). Luego, para encontrar funciones esféricas basta con buscar autofunciones de C.

Como motivación, observemos que si $c_{v,w}(x) = \langle \pi(x)v, w\rangle$ es una entrada matricial de π, entonces para $X \in \mathfrak{g}$ es fácil ver que

$$Xc_{v,w}(g) = \langle \pi(g)\pi(X)v, w\rangle = c_{\pi(X)v,w}(g)$$

y también vale para $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Si por otro lado tenemos que $\pi(C) = \lambda I$, es claro entonces que $\pi(C)c_{v,w} = \lambda c_{v,w}$. Más aún es fácil ver que si v es un vector fijo por K, $c_{v,w} \in C(G/K)$ y análogamente con w. Entonces para encontrar autofunciones K-biinvariantes, basta tomar entradas matriciales correpondientes a elementos de V^K.

Por ejemplo, en el caso de la serie principal esférica, se tiene que $(H^\nu)^K = \mathbb{C}1_\nu$, donde $1_\nu(nak) = a^{(\nu+\rho)\alpha}$, $n \in N, a \in A, k \in K$ (ver [**GV**] pág. 103), y la acción del Casimir, según (1.1) está dada por $\pi_\nu(C) = (\nu^2 - \rho^2)\mathrm{Id}$. Luego, tendríamos que para cada $\nu \in \mathbb{C}$, $\phi_\nu = \langle \pi(g)1_\nu, 1_\nu\rangle$, o equivalentemente

$$\phi_\nu(g) = \int_K e^{-(\nu+\rho)(H(g^{-1}k)}\, dk \tag{2.1}$$

es una autofunción de C biinvariante por K, que además satisface $\phi_\nu(e) = 1$, es decir que es una función esférica. Notemos que la fórmula (2.1) es lo que obtenemos en (1.4) poniendo $\tau = 1$. En adelante simplificaremos también la notación , denotando $\lambda(\nu) = (\nu^2 - \rho^2)$.

Este hecho es, para algunos valores de ν, un caso particular del siguiente teorema, el cual esta probado en [**H**] IV, Teor. 1.5 y 3.4.

Teorema 2.1. *Asumamos que $C(G//K)$ es conmutativo. Sea $F \not\equiv 0$ una función esférica, definida positiva en G, entonces existe una representación (π, V) unitaria , irreducible de G, que es K-esférica, es decir, que contiene elementos fijos por todo $\pi(K)$, y tal que $F(x) = \langle e, \pi(x)e\rangle$ para cierto vector $e \in V$. Recíprocamente, si π es una representación de G unitaria, irreducible y K-esférica, y e es un vector fijo por $\pi(K)$, entonces la función $F(x) = \langle e, \pi(x)e\rangle$ es una función esférica, definida positiva en G.*

Recordemos que una función $F : G \mapsto \mathbb{C}$ continua se dice definida positiva si dados subconjuntos $\{x_1, \dots x_n\} \subset G$, $\{\alpha_1, \dots \alpha_n\} \subset \mathbb{C}$, se tiene que

$$\sum_{i,j=1}^{n} F(x_i^{-1} x_j)\alpha_i \overline{\alpha}_j > 0.$$

Estudiaremos ahora el aspecto análitico, para lo cual comenzamos dando algunos hechos sobre la componente radial de C. En lo que sigue, daremos un procedimiento usual para calcular la componente radial de un operador, introducido por Harish-Chandra (ver [**Wr**], K VIII §4).

Sean $X_1, \dots, X_p, X_{p+1}, \dots, X_{p+q}$ una base de $\mathfrak{n}$ tal que $X_j \in \mathfrak{g}_{\alpha/2}$ si $1 \le j \le p$ y $X_j \in \mathfrak{g}_\alpha$ para $p < j \le p+q$, y tal que $\langle X_i, \theta(X_j)\rangle = \delta_{i,j}$, y sea U_i una base ortonormal de $\mathfrak{m}$. Tomemos entonces

$$Z_i = \frac{X_i + \theta(X_i)}{2} \qquad \text{y} \qquad Y_i = \frac{X_i - \theta(X_i)}{2}. \tag{2.2}$$

Notemos que $Z_i \in \mathfrak{k} \cap \mathfrak{m}^\perp$ e $Y_i \in \mathfrak{p} \cap \mathfrak{a}^\perp$ y además es fácil ver que, $\langle Z_i, Z_j\rangle = \langle Y_i, Y_j\rangle = \delta_{i,j}$, con lo cual obtenemos que

$$C = H_0^2 - C_{\mathfrak{m}} + \sum_{j=0}^{p} Y_j^2 - \sum_{j=p+1}^{p+q} Z_j^2.$$

Fijemos por un momento $H \in \mathfrak{a}$ y sea $a_t = \exp(tH)$, tenemos entonces que

$$Ad(a_{-t})Z_j = \cosh\left(t\tfrac{\alpha}{2}(H)\right)\, Z_j - \sinh\left(t\tfrac{\alpha}{2}(H)\right)\, Y_j \quad \text{si } j \le p,$$

$$Ad(a_{-t})Z_j = \cosh\left(t\alpha(H)\right)\, Z_j - \sinh\left(t\alpha(H)\right)\, Y_j \quad \text{si } j > p,$$

o lo que es equivalente,

$$\begin{aligned} Y_j &= \coth\left(t\tfrac{\alpha}{2}(H)\right)\, Z_j - \sinh\left(t\tfrac{\alpha}{2}\alpha(H)\right)^{-1} \mathrm{Ad}(a_{-t})Z_j \quad \text{si } j \le p, \\ Y_j &= \coth\left(t\alpha(H)\right)\, Z_j - \sinh\left(t\alpha(H)\right)^{-1} \mathrm{Ad}(a_{-t})Z_j \quad \text{si } j > p. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Como esto es independiente de la elección de H, tomemos $H = H_0$. Por otro lado, para $f \in C^\infty(G//K)$ es fácil ver, que para todo j, $Z_j f(a_t) = 0$, y más aún, como

$$\mathrm{Ad}(a_{-t})Z_j f(a_t) = \frac{d}{dt}_{|t=0} f(\exp(tZ_j)a_t), \tag{2.4}$$

se tiene que $\mathrm{Ad}(a_{-t})Z_j f(a_t) = 0$. Tenemos entonces que

$$Cf(a_t) = \left\{ \frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{2}(p\coth(t/2) + 2q\coth(t))\frac{d}{dt} \right\} f(a_t) \tag{2.5}$$

Nota 2.2. Es importante notar que (2.3) es independiente de la elección del múltiplo de $(X_i \pm \theta(X_i))$ que se toma en (2.2) y esta elección se hace de acuerdo al $\langle , \rangle$ elegido.

Nota 2.3. La diferencia entre (2.5) y la fórmula de la componente radial de C en [**GV**] o [**MW**] se debe a que nuestra parametrización de $\mathfrak{a}^*$ es diferente.

Esto nos lleva a que podemos ver las funciones esféricas como soluciones de la siguiente ecuación diferencial:

$$\left\{ \frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{2}(p\coth(t/2) + 2q\coth(t))\frac{d}{dt} - \lambda(\nu) \right\} f_\nu(a_t) = 0. \tag{2.6}$$

Como $2\coth 2t = \coth t + \tanh t$, esta es una ecuación de Jacobi, de parámetros $\lambda = 2\mathbf{i}\nu$, $\alpha = \frac{p+q-1}{2}$ y $\beta = \frac{q-1}{2}$ (con lo cual $\gamma = \frac{p+2q}{2} = 2\rho$). Es decir que si φ_ν es una función esférica en G, entonces $\varphi_\nu(a_t) = \phi_{2\mathbf{i}\nu}^{\frac{p+q-1}{2},\frac{q-1}{2}}(t/2)$. Es decir que por (1.7) tenemos que

$$\varphi_\nu(a_t) = {}_2F_1\left(\rho+\nu,\, \rho-\nu,\, n/2,\, -\sinh(t/2)^2\right). \tag{2.7}$$

De la misma forma obtenemos que el comportamiento asintótico de $\varphi_\nu(a_t)$, para $\mathrm{Re}(\nu) > 0$ cuando $t \to \infty$, está dado por

$$\varphi_\nu(a_t) \sim c(\nu)\, e^{t(\nu-\rho)}, \quad \text{donde} \quad c(\nu) = \frac{2^{-2(\nu+\rho)}\Gamma(n/2)\Gamma(2\nu)}{\Gamma(\nu+\rho)\Gamma(\nu+\frac{p+2}{4})}. \tag{2.8}$$

Notemos que según la notación del capítulo 2, sec. (5) estamos tomando $c(-\nu)$.

En este caso $c(\nu)$ coincide con la c-función de Harish-Chandra, y $\mu(z) = \left(c(z)c(-z)\right)^{-1}$ es la medida de Plancherel.

Mostraremos ahora la relación entre las funciones esféricas y la resolvente. Para ello, comencemos introduciendo alguna notación.

Dados $b \in \mathbb{R}$ y $\theta > 0$, sea $\mathcal{S}_{b,\theta} = \{\nu : \mathrm{Re}\,\nu > b,\ |\nu + j| > \theta \ \ \forall j \in -\mathbb{N} : b \leq j\}$. Esto es, $\mathcal{S}_{b,\theta} = \{\ \nu\ :\ \mathrm{Re}\,\nu > b\}$, si $b \geq 0$, y si $b < 0$ $\mathcal{S}_{b,\theta}$ es un semiplano al que le faltan los discos de radio θ centrados en $-1, -2, ..., -b$.

Teorema 2.4. *Si $\nu \in \mathbb{C}$, $2\nu \notin -\mathbb{N}$, existe una función $Q_\nu \in C^\infty(G - K//K)$ con las siguientes propiedades*

(a) $(C - \lambda(\nu))Q_\nu = 0$. *Si $\nu \notin -\frac{1}{2}\mathbb{N}$, Q_ν es una función holomorfa, y si $\nu \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$, Q_ν tiene a lo sumo un polo simple. Más aún, dados $b \in \mathbb{R}$, θ, $t_o > 0$, existe $K = K(b,\theta,t_o)$ tal que $|Q_\nu(a_t)| \leq K$ para todo $t \geq t_o$, $\nu \in \mathcal{S}_{b,\theta}$.*

(b) $\varphi_\nu(a_t) = c(\nu)Q_{-\nu}(a_t) + c(-\nu)Q_\nu(a_t)$

(c) *Cuando $t \mapsto 0$, $Q_\nu(a_t) \sim d(\nu)t^{-p-q+1}|\log t|^{\delta_{p+q,1}}$, con $d(\nu)$ una función meromorfa en $\mathbb{C}$, que es holomorfa si $2\nu \notin -\mathbb{N}$. Más aún, si $\nu \in \mathbb{C}\setminus -\mathbb{N}$, entonces $Q_\nu(g)$ está en $L^1_{loc}(G)$, y si $\mathrm{Re}\,\nu > \rho$, $Q_{\nu,l}(g) \in L^1(G)$.*

(d) $\displaystyle\lim_{t\mapsto 0^+} \delta(t)\,\frac{d}{dt}Q_\nu(t) = -2\nu c(\nu)$.

(e) *Si $f \in C_c^\infty(G/K)$ y $2\nu \notin -\mathbb{N}$ entonces*

$$\int_G Q_\nu(x^{-1}y)(C - \lambda(\nu)I)f(y)dy = -2\nu c(\nu)f(x). \tag{2.9}$$

Prueba. Buscamos una solución de (2.6) de la forma

$$Q_\nu(a_t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(\nu)e^{-(\nu+\rho+j)t}.$$

Al sustituir en (2.6) usando que $\coth(r) = \frac{1+e^{-2r}}{1-e^{-2r}}$, se obtiene que

$$\begin{aligned}&\sum_{j\geq 0}(2\rho+j)(2\nu+2\rho+j)a_j(\nu)e^{-jt} \ + \ p\sum_{j\geq 1}(\nu+\rho+j+1)a_{j+1}(\nu)e^{-jt} \ - \\ &+ \sum_{j\geq 2}(j+2)(2\nu+j+2)a_{j+2}(\nu)e^{-jt} \ = \ 0.\end{aligned}$$

Entonces los coeficientes $a_j(\nu)$, deberán satisfacer la siguiente relación de recurrencia:

$$\begin{aligned} a_1(\nu) &= a_0(\nu) f_{-1}(\nu), \\ a_{j+2}(\nu) &= a_{j+1}(\nu) f_j(\nu) + a_j(\nu) g_j(\nu) \end{aligned} \tag{2.10}$$

donde $f_j(\nu) = p\frac{\nu+\rho+j+1}{(j+2)(2\nu+j+2)}$ y $g_j(\nu) = \frac{(2\rho+j)(2\nu+2\rho+j)}{(j+2)(2\nu+j+2)}$, para $j \geq 0$.

Tomemos entonces, para $2\nu \notin -\mathbb{N}$

$$Q_\nu(a_t) = e^{-(\nu+\rho)t} \sum_{j=0}^{\infty} a_j(\nu) e^{-jt},$$

donde $a_0 = 1$ y $a_j(\nu)$ están dadas por (2.10).

Estudiaremos ahora la convergencia de esta serie. Si $b \in \mathbb{R}$ $\theta > 0$ y $\nu \in \mathcal{S}_{b,\theta}$, tenemos que:

$$|f_j(\nu)| \leq \frac{p}{2j+4}\left(1 + \frac{2\rho+j}{|2\nu+j+2|}\right) \leq \frac{p}{2j+4}\left(1 + \frac{2\rho+j}{(j+2-2k)}\right)$$

$$|g_j(\nu)| \leq \frac{2\rho+j}{2+j}\left(1 + \frac{|2\rho-2|}{|2\nu+j+2|}\right) \leq \frac{2\rho+j}{j+2}\left(1 + \frac{|2\rho-2|}{(j+2-2k)}\right)$$

para $j+2 > 2|k|$, donde k es el primer entero tal que $k \leq b$. Estas estimaciones implican claramente que dado $\varepsilon > 0$ existe j_0 y $M = M(\varepsilon)$ tal que $|f_j(\nu)| \leq \varepsilon, |g_j(\nu)| \leq 1+\varepsilon$, if $j \geq j_0, |f_j(\nu)| \leq M, |g_j(\nu)| \leq M$, if $j < j_0$, uniformemente para $\nu \in \mathcal{S}_{b,\theta}$. Usando esta estimaciones y (2.10) podemos ver que para $\nu \in \mathcal{S}_{b,\theta}$, si $M' = M'(\varepsilon) = j_0 M^{j_0}$, entonces

$$|a_j(\nu)| \leq \begin{cases} jM^j & j \leq j_0 \\ M'(1+2\varepsilon)^{j-j_0+1} & j \geq j_0 \end{cases} \tag{2.11}$$

Notemos ahora que esto implica que

$$|Q_\nu(r)| \leq e^{-(\operatorname{Re}\nu+\rho)t} M' \left(j_0 + \sum_{l\geq 0} (1+2\varepsilon)^{l+1} e^{-(l+j_0)t} \right),$$

y entonces la serie que define Q_ν converge absoluta y uniformemente para $\nu \in \mathcal{S}_{b,\theta}$ y $t > t_o$, para cada $t_o > 0$. Puesto que t_o es arbitrario, Q_ν define una función uniformemente acotada para ν, t en esta región. Con un argumento similar se puede probar la convergencia uniforme de la serie de las derivadas, en cada región $\mathcal{S}_{b,\theta}$, $t > t_o$, y por lo tanto Q_ν es una función suave.

Por el comportamiento asintótico cuando $t \mapsto +\infty$, se sigue que si $2\nu \notin \mathbb{Z}$, $Q_\nu(a_t), Q_{-\nu}(a_t)$, forman un sistema fundamental de soluciones de (2.6). Escribiendo φ_ν en término de Q_ν y $Q_{-\nu}$, se puede ver la ecuación funcional (b) como en [**MW**] (ver [**MW**], pág. 671).

Para probar (c), observemos que la ecuación (2.6) tiene un punto singular regular en $t = 0$ y la correspondiente ecuación indicial es $s(s-1) + (p+q)s = 0$, con raíces $s = 0$ y $s = 1-p-q$. La solución asociada a $s = 0$ (y por lo tanto continua en $t = 0$) es $\varphi_\nu(a_t)$. Si $p+q > 1$, como Q_ν y φ_ν son soluciones linealmente independientes (si $2\nu \notin -\mathbb{N}$), se sabe que existe una función $\psi_\nu(t)$ holomorfa en $t = 0$ tal que

$$Q_\nu(a_t) = at^{1-p-q}\psi(t) + b\log(t)\varphi_\nu(a_t) + c\log(t)\varphi_\nu(a_t). \tag{2.12}$$

Tenemos entonces que $\lim_{t\mapsto 0^+} Q_\nu(a_t)r^{p+q-1} := d(\nu)$ existe. Más aún, como Q_ν es una función meromorfa, también lo es $d(\nu)$. Análogamente, si $p+q=1$, $Q_\nu(a_t)\sim d(\nu)\log t$ cuando $t\mapsto 0^+$. Entonces, se sigue (c).

Observemos ahora que el límite del lado izquierdo de (d) existe para cada ν para el cual Q_ν este definida (ver (2.12)), y define por lo tanto una función meromorfa de ν.

Con la idea de dar el valor explícito de esta función, comencemos notando que en $G-K$ se tiene que

$$(C\varphi_\nu)\,Q_\nu - \varphi_\nu\,(CQ_\nu)\,.$$

Por lo tanto

$$0=\delta^{1/2}(t)\,(C\varphi_\nu(a_t))\,\delta^{1/2}(t)Q_\nu(a_t)-\delta^{1/2}(t)\varphi_\nu(a_t)\delta^{1/2}(t)CQ_\nu(a_t).$$

Por otro lado, se puede ver que para $h\in C^\infty(G//K)$

$$\delta(t)^{1/2}Ch(a_t)=\frac{d^2}{dt^2}\delta^{1/2}(t)h(a_t)+\delta(t)^{1/2}\eta(t)h(a_t) \tag{2.13}$$

Donde $\eta=\frac{(\delta')^2-2\delta''\delta}{4\delta^2}$ (ver [**MW**] pág. 673). Entonces, tenemos que

$$0=\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\left(\delta(t)^{1/2}\varphi(a_t)\right)\delta(t)^{1/2}Q_\nu(a_t)-\delta(t)^{1/2}\varphi(a_t)\frac{d}{dt}\left(\delta(t)^{1/2}Q_\nu(a_t)\right)\right)$$

con lo cual, la función

$$r(\nu,t)=\frac{d}{dt}\left(\delta(t)^{1/2}\varphi(a_t)\right)\delta(t)^{1/2}Q_\nu(a_t)-\delta(t)^{1/2}\varphi(a_t).\frac{d}{dt}\left(\delta(t)^{1/2}Q_\nu(a_t)\right)$$

es constante como función de t. Usando (c), se puede ver que

$$\lim_{t\mapsto 0} r(\nu,t)=\lim_{t\mapsto 0}\delta(t)\frac{d}{dt}\left(Q_\nu(a_t)\right).$$

Podemos obtener este valor entonces (como función de ν), calculando el límite de $r(\nu,t)$ cuando t tiende a ∞. Para ello notemos que si $\operatorname{Re}\nu>0$

$$\begin{aligned}\delta^{1/2}(t)Q_\nu(a_t)&\sim e^{-\nu t}, && t\mapsto\infty\\ \delta^{1/2}(t)\varphi_\nu(a_t)&\sim c(\nu)e^{\nu t}, && t\mapsto\infty\end{aligned}\tag{2.14}$$

y entonces

$$\lim_{t\mapsto\infty} r(\nu,t)=-2\nu c(\nu),$$

con lo cual hemos probado (d).

Para ver (e) asumamos que $x=e$. Tenemos que si $f\in C_c^\infty(G/K)$

$$\begin{aligned}&\int_G Q_\nu(y)(C-\lambda(\nu)I)f(y)\,d\mu(y)\\ &\qquad=\int_{KA^+K} Q_\nu(k_1a_tk_2)(C-\lambda(\nu)I)f(k_1a_tk_2)\delta(t)dt\,dk_1\,dk_2\\ &\qquad=\int_0^\infty Q_\nu(a_t)\delta(t)(C-\lambda(\nu))\overline{f}(a_t)\,dt,\end{aligned}$$

donde $\overline{f}(a_t) = \int_K f(ka_t)dk$. Entonces, usando (2.13), tenemos que el lado derecho de lo de arriba es igual a

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{d^2}{dr^2}\left(\delta(t)^{1/2}\overline{f}(a_t)\right)\delta(t)^{1/2}Q_\nu(a_t) - \delta(t)^{1/2}\overline{f}(a_t)\frac{d^2}{dt^2}\left(\delta(t)^{1/2}Q_\nu(a_t)\right)dt \\ = &\int_0^\infty \frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dt}\left(\delta(t)^{1/2}\overline{f}(a_t)\right)\delta(t)^{1/2}Q_\nu(a_t) - \delta(t)^{1/2}\overline{f}(a_t)\frac{d}{dt}\left(\delta(t)^{1/2}Q_\nu(a_t)\right)\right]dt \\ = &\ 2\nu c(\nu)f(e), \end{aligned}$$

usando (c) y (d), como queríamos demostrar. □

Nota 2.5. La función $Q_\nu(a_t)$ se puede expresar en términos de una función hipergeométrica. En efecto, si $\lambda = \mathbf{i}2\nu \notin -\mathbf{i}, -2\mathbf{i}, ...$, o equivalentemente si $2\nu \notin -\mathbb{N}$, tenemos que (1.8) define una solución de (2.6), $\tilde{Q}_\nu$, linealmente independiente de φ_ν, dada por

$$\tilde{Q}_\nu(t) = (2\cosh\, t/2)^{-(\nu+\rho)}\ {}_2F_1\left(\rho+\nu,\ \frac{p+2}{4}+\nu, 1+\nu,\ (\cosh\, t/2)^{-2}\right).$$

Más aún, por (1.9), el comportamiento asintótico de $\tilde{Q}_\nu$ está dado por

$$\tilde{Q}_\nu(t) \sim e^{-(\nu+\rho)t} \qquad \text{cuando} \quad t \mapsto \infty,$$

y por lo tanto, tenemos que $\tilde{Q}_\nu(t) = Q_\nu(a_t)$. De esta forma, la afirmación (b) es un caso particular de (1.10).

Nota 2.6. Los coeficientes pueden darse explícitamente en el caso del espacio hiperbólico real, gracias a que en ese caso $p = 0$. De hecho, a partir de (2.10) es fácil ver que si $p = 0$, $a_{2j+1} = 0\ \forall j$. Si definimos entonces $c_j = a_{2j}$, para $j \geq 0$, y $c_0 := 1$, se tiene que para $j \geq 1$:

$$c_j(\nu) = \frac{(\rho)_j}{j!}\frac{(\nu+\rho)_j}{(\nu+1)_j}. \tag{2.15}$$

3. Residuos del núcleo

Sea $\tilde{R}(\lambda(\nu))$ el operador a núcleo con núcleo $K_\nu(x,y) := -\frac{Q_\nu(x^{-1}y)}{2\nu c(\nu)}$ y sea $R(\lambda(\nu))$ la resolvente de C actuando en $L^2(G/K)$. La condición (e) del Teorema 2.4 dice que $-\frac{\check{Q}_\nu}{2\nu c(\nu)}$ es una solución fundamental del operador $(C - \lambda(\nu)\mathrm{Id})$, para $2\nu \notin -\mathbb{N}$. Notar que podríamos haber considerado $\frac{\check{Q}_{-\nu}}{2\nu c(-\nu)}$, para $2\nu \notin \mathbb{N}$, que es también una solución fundamental. Esto no es una contradicción, porque la diferencia es igual a $\frac{\varphi_\nu \mu(\nu)}{2\nu}$, que como distribución se anula en $(C - \lambda(\nu)\mathrm{Id})$f, con $f \in C_c^\infty(G/K)$.

Si se mira la resolvente hay que considerar funciones en $L^2(G/K)$, y en este caso sólo se tiene que $R(\lambda(\nu))$ coinciden con $\tilde{R}(\lambda(\nu))$ para $\mathrm{Re}\,\nu > \rho$, pues para esos valores de ν, $Q_\nu \in L_1(G)$ (ver Teor. 2.4 (c)). Análogamente $R(\lambda(\nu))$ coinciden con $\tilde{R}(\lambda(-\nu))$ sólo para $\mathrm{Re}\,\nu < -\rho$.

En el siguiente teorema, daremos una descripción de las singularidades de $\tilde{R}(\lambda(\nu))$.

Teorema 2.7. *Si p y q son ambos pares, $\tilde{(R)}(\lambda(\nu))$ es un función entera. En cualquier otro caso, tiene polos simples, que se encuentran en $\nu = \nu_k$, donde $\nu_k = -\rho - k$ para $k \in \mathbb{N}_0$.*

Prueba. Los posibles polos de $K_\nu(x, y)$ están en $-\frac{1}{2}\mathbb{N}$ o en un cero de $c(\nu)$. Usando la fórmula (2.8) se puede ver que $c(\nu)$ no tiene ceros en $\mathbb{C}$, si p y q son ambos pares. En los otros casos, q es impar y $c(\nu)$ tiene ceros simples en $\nu_k = -\rho - k$, para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, y posiblemente polos simples en $\nu \in -\frac{1}{2}\mathbb{N}$.

Como $\nu = 0$ es un polo simple de $c(\nu)$, y $\nu \mapsto Q_\nu$ es holomorfa en 0, $\frac{Q_\nu}{2\nu c(\nu)}$ es holomorfa en $\nu = 0$.

Por otro lado, $c(-\nu)$ y $Q_{-\nu}$ son holomorfas y no nulas en $\mathbf{R}^{<0}$ y φ_ν es una función entera que a demás cumple $\varphi_\nu(1) = 1$. Luego, la parte (b) del Teorema (2.4) implica que un polo de Q_ν debe ser compensado con un polo de $c(\nu)$ y que un cero de $c(\nu)$ no puede ser un cero de Q_ν.

Por lo tanto, $\frac{Q_\nu}{2\nu c(\nu)}$ tiene un polo en ν si y sólo si ν es un cero de $c(\nu)$, es decir, $\nu = \nu_k = -\rho - k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. También sabemos que $\frac{Q_{-\nu}}{2\nu c(-\nu)}$ es analítica en $\nu = \nu_k$, y entonces, si $f \in C_c^\infty(G/K)$ usando la parte (b) del Teorema 2.4, $-\frac{Q_\nu}{2\nu c(\nu)} = \frac{Q_{-\nu}}{2\nu c(-\nu)} - \frac{\mu(\nu)\varphi_\nu}{2\nu}$. Tenemos así que

$$T_{\nu_k}(f) = \mathrm{Res}_{\nu=\nu_k} \tilde{R}(\lambda(\nu))(f) = -\frac{p(\nu_k)}{2\pi\nu_k} f * \check{\varphi}_{\nu_k}. \tag{2.16}$$

Aquí, $p(\nu)$ denota la parte polinomial de la medida de Plancherel (ver Cap. IV, sec II).

□

Con respecto a los residuos, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.8. *Sea $M = G/K$ un espacio simétrico de tipo no compacto de rango real uno, y sea $\nu_k = -\rho - k$ con $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces si $\tilde{\alpha}$ es la raíz real de G, $Im(T_{\nu_k})$ es un $\mathfrak{g}_c$-módulo irreducible de peso máximo $k\tilde{\alpha}$.*

Prueba. Por un resultado de Helgason (ver [**H**], Ch. V, Teorema 4.1), las representaciones K-esféricas de dimensión finita de G pueden ser caracterizadas como las representaciones de $\mathfrak{g}_c$ de peso máximo $\Lambda \in \mathfrak{h}_c^*$ tal que : $\Lambda_{|\mathfrak{h}^-} = 0$ y $\langle \Lambda, \lambda \rangle / \langle \lambda, \lambda \rangle \in \mathbf{Z}^{\geq 0}$, para cualquier $\lambda \in \Sigma^+$. Como en nuestro caso $\Sigma^+ = \{\alpha, \alpha/2\}$ or $\{\alpha\}$, esto equivale a que $\Lambda_{|\mathfrak{a}} = k\tilde{\alpha}$, donde $k \in \mathbf{Z}^{\geq 0}$, y $\tilde{\alpha}$ es la raíz real. Denotaremos con $V_{k\tilde{\alpha}}$ el $\mathfrak{g}_c$-módulo de peso máximo $k\tilde{\alpha}$.

Probaremos que 1_{ν_k} genera un $(\mathfrak{g}, K)$-submódulo de H^{ν_k} de dimensión finita, V_{ν_k}, isomorfo a $V_{k\tilde{\alpha}}$.

Sea $\mathcal{P}$ el álgebra de Lie de P, entonces en la notación del Lemma 3.8.2 en [**W2**], tenemos que

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g},K}(V_{k\tilde{\alpha}}, H^{\nu_k}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P},M}(V_{k\tilde{\alpha}}/\mathfrak{n}V_{k\tilde{\alpha}}, \mathbb{C}_{\nu_k}) \tag{2.17}$$

donde $\mathbb{C}_{\nu_k}$ denota el MAN-módulo $\mathbb{C}$, con MN actuando trivialmente, y $a \in A$ actuando por multiplicación por $a^{(\nu_k+\rho)\alpha}$. Para probar esto basta con mostrar que existe un $(\mathcal{P}, M)$-morfismo no trivial $f : V_{k\tilde{\alpha}}/\mathfrak{n}V_{k\tilde{\alpha}} \to \mathbb{C}_{\nu_k}$. Denotemos con Λ_o el peso mínimo de $V_{k\alpha}$ y por v_o al correspondiente vector de peso mínimo. Entonces $\Lambda_o = s_o\Lambda$, s_o el elemento largo del grupo de Weyl de $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{h}_c)$. Como $\Lambda' = -s_o\Lambda$ es el peso máximo de la representación dual de $V_{k\tilde{\alpha}}$, que también K-esférica, Λ' satisface la condiciones del teorema de Helgason. Esto implica que $s_o\Lambda_{|\mathfrak{h}^-} = 0$ y

$s_o\Lambda_{|\mathfrak{a}} = -k\alpha$. Argumentando como en la prueba del Theorem 4.1, Ch.V en [**H**], se puede ver que $\pi_\Lambda(M)v_o = v_o$.

Como $s_o\Lambda_{|\mathfrak{h}^-} = 0$, se sigue que $V = \mathbb{C}v_o \oplus (\mathfrak{n}\oplus\mathfrak{m})V$. Ahora podemos definir el $(\mathcal{P}, M)$-morfismo $f : V/\mathfrak{n}V \to \mathbb{C}_\nu$ tal que $f : [v_o] \mapsto 1$ donde $[v_o]$ está en la clase de v_o y $f = 0$ en $\mathfrak{m}V$. Por lo tanto por (2.17), existe un G-morfismo no nulo de $V_{k\tilde{\alpha}}$ sobre un subespacio V_{ν_k} de H^{ν_k}, que debe contener a 1_{ν_k}.

Por otro lado, si $f \in C_c^\infty(G/K)$ y $x \in G$, por (2.16), se tiene que:

$$T_{\nu_k}(f)(x) = p_k\, f * \check{\varphi}_{\nu_k}(x) = p_k\, \langle \pi(x^{-1})\, \pi(f)1_{\nu_k}, 1_{\nu_k}\rangle$$

donde $p_k = -\frac{p(\nu_k)}{\pi\nu_k} \neq 0$, para todo k.

Por la irreducibilidad, cuando f varía, $\pi(f)1_{\nu_k}$ llena $V_{\nu_k} \simeq V_{k\alpha}$. Luego, la imagen de T_{ν_k} coincide con la la imagen del G-morfismo $T_k : V_{\nu_k} \mapsto C^\infty(G/K)$ dado por $T_k(v)(x) = \langle \pi_{\nu_k}(x^{-1})\, v, 1_\nu\rangle$, para $v \in V_{\nu_k}$. □

Proposición 2.9. La dimensión de la imagen del residuo de $R(\lambda(\nu))$ en $\nu = \nu_k$ está dada por

$$\dim Res_{\nu=\nu_k} = \binom{k+\frac{p}{2}+q-1}{k}.\binom{k+\frac{p+q-1}{2}}{k}.\frac{2k+\frac{p}{2}+q}{\frac{p}{2}+q}.\prod_{j=1}^{\frac{q+1}{2}-1}\frac{j}{k+j}$$

Prueba. En cada caso usaremos la fórmula de la dimensión de Weyl para calcular la dimensión del $\mathfrak{g}_c$-módulo $V_{k\tilde{\alpha}}$. Las raíces reales $\tilde{\alpha}$ pueden leerse del diagrama de Satake de $\mathfrak{g}$. Están dadas, para cada grupo de rango real uno en [**Mt**]. Usaremos para lo que sigue la notación de [**Mt**].

(i) $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n, 1)$, ($n$ par). En este caso, la raíz real es $\tilde{\alpha} = \epsilon_1$, el primer peso fundamental. El correspondiente $\mathfrak{g}_c$-módulo $V_{k\tilde{\alpha}}$ es isomorfo a la representación de G en H_k, el espacio de los polinomios homogéneos armónicos de grado k en $n+1$ variables, que tiene dimensión $\frac{(k+n-2)!(2k+n-1)}{k!(n-1)!}$.

(ii) $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n, 1)$. Aquí, la raíz real es $\tilde{\alpha} = \epsilon_1 - \epsilon_{n+1}$, donde $\lambda_j = \epsilon_1 + \ldots + \epsilon_j$, $1 \le j \le n$ son los pesos fundamentales. Las raíces positivas son $\epsilon_i - \epsilon_j$, $i < j$ y $2\rho = \sum_{j=1}^{n+1}(n-2j+2)\epsilon_j$. Luego,

$$\begin{aligned}\dim(V_{k\tilde{\alpha}}) &= \prod_{1\le i<j\le n+1}\frac{< k(\epsilon_1-\epsilon_{n+1})+\rho, \epsilon_i-\epsilon_j\rangle}{< \rho, \epsilon_i-\epsilon_j\rangle}\\ &= \prod_{2\le j\le n}\frac{k+j-1}{j-1}\prod_{2\le i\le n}\frac{k+n+1-i}{n+1-i}\,\frac{2k+n}{n} = \binom{k+n-1}{k}^2\frac{2k+n}{n}.\end{aligned}$$

(iii) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n, 1)$. En este caso, $\tilde{\alpha} = \epsilon_1 + \epsilon_2$. Las raíces positivas son $\epsilon_i \pm \epsilon_j$, $1 \le i < j \le n+1$, y $2\epsilon_i$, $1 \le i \le n+1$. También, $\rho = \sum_{j=1}^{n+1}(n+2-j)\epsilon_j$. Entonces, por la fórmula de Weyl

$$\begin{aligned}\dim(V_{k\tilde{\alpha}}) &= \left(\prod_{i=1}^{2}\prod_{j=3}^{n+1}\frac{2n+4-j-i+k}{2n+4-j-i}.\frac{j-i+k}{j-i}\right)\tfrac{2n+1+2k}{2n+1}.\tfrac{n+k}{n}.\tfrac{n+k+1}{n+1}\\ &= \tbinom{2n+k-1}{k}^2\tfrac{2n+k}{(2n+1)(2n)}.\tfrac{2n+2k+1}{k+1}\end{aligned}$$

(iv) $\mathfrak{g}=\mathfrak{f}_4$. La raíz real es $\tilde{\alpha}=\lambda_4$ $(=\epsilon_1)$, el cuarto peso fundamental. Las raíces positivas son $\epsilon_i,\ \epsilon_i\pm\epsilon_j,\ 1\leq i<j\leq 4,\ \frac{1}{2}(\epsilon_1\pm\epsilon_2\pm\epsilon_3\pm\epsilon_4)$ y $2\rho=11\epsilon_1+5\epsilon_2+3\epsilon_3+\epsilon_4$. Usando la fórmula, obtenemos en este caso:

$$\dim(V_{k\tilde{\alpha}})=\frac{2k+11}{11}\prod_{j=1}^{j=10}\frac{k+j}{j}.\prod_{j=4}^{j=7}\frac{k+j}{j}.$$

$\square$

CAPITULO 3

Espacios de Damek-Ricci

1. Introducción

En este capítulo, estudiamos el caso de los espacios de Damek-Ricci, que si bien son una generalización de los espacios simétricos de rango uno, el tratamiento debe ser diferente. Los resultados de este capítulo se pueden encontrar en [**MWl**].

Sea $\mathfrak{n}$ un álgebra de Lie dos pasos nilpotente munida de un producto interno $\langle\, ,\, \rangle$, y consideremos la descomposición ortogonal $\mathfrak{n} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{v}$, donde $\mathfrak{z}$ es el centro de $\mathfrak{n}$. Si $\mathfrak{n}$ es abeliano usaremos la convención de que $\mathfrak{v} = 0$ y $\mathfrak{n} = \mathfrak{z}$. Sea $J : \mathfrak{z} \to \mathrm{End}(\mathfrak{v})$ definido por

$$\langle J_Z X, Y\rangle = \langle Z, [X, Y]\rangle, \qquad x, y \in \mathfrak{v}, Z \in \mathfrak{z} \tag{3.1}$$

(notemos que una tal J_z es anti-simétrica). Decimos que $\mathfrak{n}$ es un álgebra de *tipo H* si para todo $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{z}$

$$J_{Z_1} J_{Z_2} + J_{Z_2} J_{Z_1} = -2\langle Z_1, Z_2\rangle \tag{3.2}$$

El correspondiente grupo de *tipo H* es el grupo de Lie simplemente conexo N con álgebra de Lie $\mathfrak{n}$, munido de la métrica invariante a izquierda inducida por el producto interno $\langle\, ,\, \rangle$ fijado en $\mathfrak{n}$.

Consideramos la extensión soluble, $S = AN$, o sea, el producto semidirecto de $A = \mathbf{R}^+$ y N, donde cada $t \in A$ actúa en N por la siguiente regla: $t.(x, z) \to (t^{\frac{1}{2}} x, tz)$. Si $\mathfrak{s}$ y $\mathfrak{a}$ son las álgebras de Lie de S y A respectivamente, entonces $\mathfrak{s} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, y $\mathfrak{a} = \mathbf{R}H$, donde ad H es la derivación de $\mathfrak{n}$ tal que ad $H|_{\mathfrak{v}} = \frac{1}{2} I$ y ad $H|_{\mathfrak{z}} = I$. En $\mathfrak{s}$ tomamos el producto interno que extiende al de $\mathfrak{n}$ y tal que $\|H\| = 1$, y $\langle H, \mathfrak{n}\rangle = 0$, el cual nos define en S una métrica riemanniana. Sea $q = \dim \mathfrak{z}$, $p = \dim \mathfrak{v}$, entonces si $n = \dim \mathfrak{s}$, $n = p + q + 1$. Definimos ahora Q, la dimensión homogénea de S como $Q = \frac{1}{2}(p + 2q)$.

Usando las coordenadas de $\mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z} \oplus \mathbf{R}^+$, el producto en S puede ser expresado como

$$(X, Z, a)(X', Z', a') = (X + a^{\frac{1}{2}} X', Z + aZ' + \frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} [X, X'], aa')$$

El elemento de volumen de la métrica inducida en S es la medida de Haar

$$dm = a^{-Q-1} dX dZ da.$$

Sea G un grupo de Lie semisimple, no compacto, de rango real uno y K un subgrupo compacto maximal. Sea $G = KAN$ la descomposición de Iwasawa, entonces N es un grupo de tipo H y $S = NA \approx G/K$ es un grupo de Lie soluble de la clase introducida arriba. De hecho, como $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}_{\alpha/2} \oplus \mathfrak{g}_\alpha$, tenemos que $\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{z}$, $\mathfrak{g}_{\alpha/2} = \mathfrak{v}$, y $\mathfrak{a} = \mathbf{R}H_o$. Si en $S = NA$ usamos la métrica G-invariante inducida por $2(p+4q)^{-1}B$ (B la forma de Killing de $\mathfrak{g}$) entonces S es isométrico a un espacio de Damek-Ricci. Notemos que, debido a nuestra convención, si $\mathfrak{n}$ es abeliano, $p = 0$, y $q = \dim \mathfrak{n}$. En este caso se tiene que $Q = 2\rho$. Como en el caso simétrico, estos espacios tienen una realización en el disco unidad en $\mathfrak{s}$:

$$B(\mathfrak{s}) = \{(X, Z, u) : |X|^2 + |Z|^2 + u^2 < 1\}$$

Concretamente, vía la función $H(X, Z, a) \mapsto (X, Z, a + \frac{1}{4}|X|^2)$, podemos identificar S con

$$D = \{(X, Z, t) \in \mathfrak{s} \, : \, t > \frac{1}{4}|X|^2\}.$$

Notemos que D es un dominio de Siegel en el caso simétrico hermítico. Se tiene la transformanda de Cayley generalizada $C : B(\mathfrak{s}) \mapsto D$ (ver [**DR**] pág. 229), definida por

$$C(X, Z, t) = \frac{1}{(1 - t^2) + |Z|^2} \left(2(1 - t + J_Z)X, 2Z, 1 - t^2 - |Z|^2\right).$$

Su inversa está dada por

$$C^{-1}(X', Z', t') = \frac{1}{(1 + t'^2) + |Z'|^2} \left((1 + t - J_{Z'})X', 2Z', -1 + t'^2 - |z|^2\right)$$

Es claro que $\tilde{C} = C^{-1}H$ lleva $e = (0, 0, 1)$ al centro de $B(\mathfrak{s})$, y por lo tanto induce allí una estructura riemanniana. Por otra parte, a cada elemento de S, (X, Z, a) le asignamos el subgrupo S_0 de S generado por $X, J_Z X$ y a. Esta resulta ser una subvariedad totalmente geodésica de S y la restricción de C^{-1} a $H(S_0)$ coincide con la transformada de Cayley usual de $\mathbb{C}H^2$ (ver [**DR**], Sección 4). Luego, las geodésicas de $B(\mathfrak{s})$ que pasan por el origen son los radios y la distancia (geodésica) de un punto $\tilde{p} = (X, Z, u)$ al origen es una función del radio ρ, dada por $r = d(\tilde{p}, 0) = \log\frac{1+|\tilde{p}|}{1-|\tilde{p}|}$, donde habría que notar que $r^2 = |X|^2 + |Z|^2 + u^2$. De esto se desprende que $\rho = |\tilde{p}| = \tanh(r/2)$, donde $\tilde{p} = \tilde{C}(p)$, si $p \in S$. Además, como

$$|\tilde{C}(X, Z, a)|^2 = 1 - \frac{4a}{(1 + a + \frac{1}{4}|X|^2)^2 + |Z|^2}$$

tenemos que

$$\cosh\left(\frac{r}{2}\right)^{-2} = \frac{4a}{(1 + a + \frac{1}{4}|X|^2)^2 + |Z|^2}. \tag{3.3}$$

En cuanto a la imagen de la medida de Haar en S via $\tilde{C}^{-1}$, se tiene que

$$dV = 2^n(1 - \rho^2)^{-Q-1}\rho^{n-1}d\rho d\sigma = J(r)drd\sigma$$

donde y $J(r) = 2^p \sinh(r/2)^p \sinh(r)^q$. Notemos que si S es simétrico, $J = \delta$.

2. Funciones esféricas y la resolvente

Los espacios de Damek-Ricci son muy similares a los espacios simétricos de curvatura negativa, en particular, son espacios armónicos. En S tenemos el operador de radialización π que corresponde al operador de radialización canónico en el disco unidad en $\mathfrak{s}$ (ver [**DR**] pág. 230). Si $f \in C_c^\infty(S)$, $p \in S$ y $\tilde{p} = \tilde{C}(p)$ entonces

$$\pi f(p) := \int_{S^{p+q}} \tilde{f}(\|\tilde{p}\|\mathfrak{s}))d\mathfrak{s}$$

donde $\tilde{f} := f \circ \tilde{C}^{-1}$. En el caso simétrico, si $f \in C^\infty(NA)$, entonces $\pi f(x) = \int_K \bar{f}(kx)dk$, donde $\bar{f}$ denota la extensión por K-invariancia de f a G.

Si $\{Z_i\}$, $\{V_j\}$ son bases ortonormales de $\mathfrak{z}$ y $\mathfrak{v}$ respectivamente, el operador de Laplace-Beltrami está dado por (ver [**D**] Teor. 2.1)

$$L = \sum_i Z_i^2 + \sum_j V_j^2 + H^2 - QH$$

Como L es autoadjunto y S es una variedad armónica, L conmuta con π. De hecho, se puede ver que L genera el álgebra de los operadores diferenciales en S invariantes a izquierda que conmutan con π (ver [**DR**], Teor. 5.2, [**R**] §6).

Si f es una función radial en $S - \{e\}$, denotaremos $f(r) = f(x)$, si $r = d(x, e)$. La acción de L en funciones radiales está dada por

$$Lf(r) = \frac{d^2}{dr^2} f(r) + \frac{1}{2}(p \coth(r/2) + 2q \coth(r)) \frac{d}{dr} f(r). \tag{3.4}$$

En este caso, una función esférica está definida como:

Definición 3.1. Una función *esférica* ψ en S es una autofunción radial de L tal que $\psi(e) = 1$.

Esto generaliza la noción que se tiene en el caso simétrico, y se tiene la siguiente caracterización ([**DR**]).

Proposición 3.2. *Para cada $\nu \in \mathbb{C}$, la función $\phi_\nu = \pi(a^{\nu+Q/2})$ es una función esférica de autovalor $\lambda(\nu) = \nu^2 - Q^2/4$. Más aún, toda función esférica en S es de esta forma. Además, $\phi_\nu = \phi_{-\nu}$, para cada $\nu \in \mathbb{C}$.*

Notemos por otro lado que de acuerdo a lo anterior, podemos también caracterizar a las funciones esféricas como las soluciones de la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2}{dr^2} f(r) + \frac{1}{2}(p \coth(r/2) + 2q \coth(r)) \frac{d}{dr} f(r) - \lambda(\nu) f(r) = 0, \tag{3.5}$$

que es la misma ecuación que teníamos en el caso simétrico, y por lo tanto tenemos que

$$\phi_\nu(r) = {}_2F_1 \left(Q/2 + \nu,\, Q/2 - \nu,\, \frac{n}{2},\, -\sinh(r/2)^2 \right). \tag{3.6}$$

En este caso el comportamiento asintótico para $\mathrm{Re}(\nu) > 0$ cuando $t \to \infty$, esta dado por

$$\phi_\nu(r) \sim c(\nu)\, e^{r(\nu - \frac{Q}{2})}, \quad \text{donde} \quad c(\nu) = \frac{2^{-2(\nu+\frac{Q}{2})}\Gamma(n/2)\Gamma(2\nu)}{\Gamma(\nu+\frac{Q}{2})\Gamma(\nu+\frac{p+2}{4})}.$$

La medida de Plancherel, $\mu(\nu) = (c(\nu)c(-\nu))^{-1}$, se puede expresar como

$$\mu(\nu) = c_o p(\nu) D(\nu),$$

donde c_o es una constante y $p(\nu)$ es el polinomio dado por:

$$\begin{aligned}
&\prod_{j=0}^{\frac{p}{4}-1} \left(-\nu^2 + (2j+1)^2/4\right) \prod_{j=0}^{\frac{Q}{2}-1} \left(-\nu^2 + (j^2/4)\right), && q, \tfrac{p}{2} \text{ par.}\\
&-\prod_{j=1}^{p/4} (-\nu^2 + j^2)^2 \nu^3, && q = 1, \tfrac{p}{2} \text{ impar.}\\
&-\prod_{j=0}^{\frac{p}{4}-1} \left(-\nu^2 + ((2j+1)^2/4)\right) \prod_{j=0}^{\frac{Q}{2}-1} \left(-\nu^2 + (2j+1)^2/4\right)\nu, && q \text{ impar}, \tfrac{p}{2} \text{ par.}
\end{aligned}$$

y $D(\nu)$ es igual a 1, $\cot(\pi\nu)$, y $\tan(\pi\nu)$ respectivamente (ver [**ADY**]).

Nota 3.3. Notemos que p es siempre par, dado que $\mathfrak{v}$ es un $\mathrm{Cl}(\mathfrak{z})$-módulo, donde $\mathrm{Cl}(\mathfrak{z})$ es el módulo de Clifford asociado a $\mathfrak{z}$. Si $p=0$, $X \approx H^{q+1}$, $G \simeq \mathbf{SO}(q+1,1)$ y en este caso $D(\nu)$ es igual a 1 o $\tan(\pi\nu)$ dependiendo si q es par o impar.

Con todo esto, el Teorema 2.4 se generaliza naturalmente:

Teorema 3.4. *Si $\nu \in \mathbb{C}$, $2\nu \notin -\mathbb{N}$, entonces existe una función radial $Q_\nu \in C^\infty(S-\{e\})$ con las siguientes propiedades*

(a) $(L-\lambda(\nu))Q_\nu = 0$. *Para cada $s \in S$, $Q_\nu(s)$ es una función holomorfa si $\nu \notin -\frac{1}{2}\mathbb{N}$ y si $\nu \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$, $Q_\nu(s)$ tiene a lo sumo un polo simple.*
(b) $\phi_\nu = c(\nu)Q_{-\nu} + c(-\nu)Q_\nu$
(c) *Cuando $r \mapsto 0$, $Q_\nu(r) \sim d(\nu)r^{-p-q+1}|\log r|^{\delta_{p+q,1}}$, para alguna función meromorfa $d(\nu)$ en $\mathbb{C}$ que es holomorfa si $2\nu \notin -\mathbb{N}$.*
(d) $\lim\limits_{r\mapsto 0^+} J(r)\dfrac{d}{dt}Q_\nu(r) = -2\nu c(\nu)$.
(e) *Si $f \in C_c^\infty(S)$ y $2\nu \notin -\mathbb{N}$ entonces*

$$\int_S Q_\nu(x^{-1}y)(L-\lambda(\nu)I)f(y)dy = -2\nu c(\nu)f(x). \tag{3.7}$$

Prueba. Dado que las funciones esféricas en este caso están en correspondencia con las soluciones de la misma ecuación diferencial que en el caso simétrico, es claro que todas las pruebas que se basan en el estudio de soluciones de esa ecuación, se generalizan en forma natural. Sólo daremos entonces, la prueba de (e), que es la más específica.

De la misma manera que en el caso anterior, podemos asumir que $x=e$, y tenemos entonces que para cada $f \in C_c^\infty(S)$

$$\begin{aligned}\int_S Q_\nu(y)(L-\lambda(\nu)I)f(y)\,d\mu(y) &= \int_{\partial B}\int_0^\infty \tilde{Q}_\nu(r\sigma)(L-\lambda(\nu)I)\tilde{f}(r\sigma)J(r)drd\sigma \\ &= \int_0^\infty Q_\nu(r)J(r)(L-\lambda(\nu))\pi f(r)\,dr\end{aligned}$$

Notemos ahora, que si h es una función radial en S,

$$J(r)^{1/2}Lh(r) = \frac{d^2}{dr^2}J^{1/2}(r)h(r) + J(r)^{1/2}\eta(r)h(r),$$

donde $\eta = \frac{(J')^2-2J''J}{4J^2}$. Entonces el lado derecho de lo de arriba es igual a

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{d^2}{dr^2}\Big(J(r)^{1/2}\pi f(r)\Big)\,J(r)^{1/2}Q_\nu(r) - J(r)^{1/2}\pi f(r)\frac{d^2}{dr^2}\Big(J(r)^{1/2}Q_\nu(r)\Big)\,dr \\ =\ &\int_0^\infty \frac{d}{dr}\left[\frac{d}{dr}(J(r)^{1/2}\pi f(r))J(r)^{1/2}Q_\nu(r) - J(r)^{1/2}\pi f(r)\frac{d}{dr}(J(r)^{1/2}Q_\nu(r))\right]dr \\ =\ &-2\nu c(\nu)f(e)\end{aligned}$$

donde hemos usado (c) y (d). □

3. Residuos del núcleo

Como en el caso anterior, tomamos $\tilde{R}(\lambda(\nu))$ el operador a núcleo de núcleo $K_\nu(x,y) = -\frac{Q_\nu(x^{-1}y)}{2\nu c(\nu)}$. Por el Teorema 3.4, si $\operatorname{Re}\nu > Q/2$, entonces $\tilde{R}(\lambda(\nu)) = R(\lambda(\nu))$.

Teorema 3.5. *Si p, q son ambos pares, entonces $\tilde{R}(\lambda(\nu))$ es una función entera. En cualquier otro caso, $R(\lambda(\nu)$ tiene polos simples en $\nu_k = -Q/2 - k$ con $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Si $\nu = \nu_k$, sea $T_{\nu_k}(f) := \operatorname{Res}_{\nu=\nu_k} \tilde{R}(\lambda(\nu))(f)$. Entonces $T_{\nu_k}(f) = (2\pi\nu_k)^{-1} p(\nu_k)\, f * \check{\phi}_\nu$ y T_{ν_k} es un operador de rango finito para cada valor de k.*

Prueba. Usando el mismo argumento que para el caso simétrico, podemos ver que $\frac{Q_\nu}{2\nu c(\nu)}$ tiene un polo en ν si y sólo si ν es un cero de $c(\nu)$, es decir, $\nu = \nu_k = -Q/2 - k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Análogamente, por la parte (b) del Teorema 3.4 se tiene que

$$T_{\nu_k}(f) = \operatorname{Res}_{\nu=\nu_k} \tilde{R}(\lambda(\nu))(f) = \frac{p(\nu_k)}{2\pi\nu_k} f * \check{\phi}_{\nu_k}. \tag{3.8}$$

El cálculo de la dimensión es bastante más claro en este caso, puesto que de la ecuación (3.6) y de la fórmula para $\cosh(\frac{r}{2})$ dada en 3.3, obtenemos que

$$\phi_\nu(X,Z,a) = \sum_{i\geq 0} \frac{(Q/2-\nu)_i (Q/2+\nu)_i}{i!\,(n/2)_i} \left[\frac{(a+\frac{1}{4}|X|^2)^2 + |Z|^2}{4a}\right]^i \tag{3.9}$$

donde $(u)_i = \displaystyle\prod_{l=0}^{i-1} u+l$, $u \in \mathbb{C}$. Por lo cual, para $\nu_k = -Q/2 - k$ los coeficientes de la expansión (3.9) son cero para $i \geq k+1$, . Fijemos $\{V_i\}$ y $\{W_j\}$, una base ortonormal de $\mathfrak{v}$ y $\mathfrak{z}$ respectivamente, y escribamos $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i V_i$ y $Z = \displaystyle\sum_{j=1}^{q} z_j W_j$. Si $I = (i_1,\ldots,i_p)$, $J = (j_1,\ldots,j_q)$, sea $X^I = \Pi x_j^{i_j}$, $Z^J = \Pi z_l^{j_l}$, $|I| = \displaystyle\sum_1^p i_j$ y similarmente para $|J|$. Sea F_k el espacio generado por las funciones de la forma

$$a^i X^{2I} Z^J \;:\; i \in \mathbf{Z}, |i| \leq k,\ |I|, |J| \leq 2k.$$

Es claro que $\phi_{\nu_k} \in F_k$. Si $t = (Y,U,b)$ y $s = (X,Z,a) \in S$, entonces

$$\begin{aligned} t^{-1}s &= \left(b^{-\frac{1}{2}}(X-Y), b^{-1}(Z-U+\frac{1}{2}[X,Y]), b^{-1}a\right) \\ &= \left(b^{-\frac{1}{2}}\sum(x_i-y_i)V_i, b^{-1}\sum(z_j-u_j)W_j + \frac{1}{2}\sum_l\sum_{i,j} x_i y_j a_{i,j}^l W_l, b^{-1}a\right) \end{aligned}$$

donde $[X,Y] = \displaystyle\sum_l\sum_{i,j} x_i y_j a_{i,j}^l W_l$. De donde, por (3.9) se desprende que $\phi_{\nu_k}(t^{-1}s)$ es una combinación lineal de funciones de la forma

$$a^{j_1} b^{j_2} X^{2I_1} Y^{2I_2} Z^{J_1} U^{J_2} \tag{3.10}$$

con $j_i \in \mathbf{Z}$, $|j_i| \leq k$, $i = 1,2$ y $|I_i|, |J_i| \leq 2k$ para $i = 1,2$.

Por lo tanto, si $f \in C_c^\infty(S)$ se sigue que $f * \check{\phi}_{\nu_k}(t) = \int_S f(s)\phi_{\nu_k}(t^{-1}s)ds$ es una combinación lineal de expresiones de la forma

$$t \mapsto b^{j_2} Y^{2I_2} U^{J_2} \int_{\mathfrak{z}} \int_{\mathfrak{v}} \int_A f(X, Z, a) a^{j_1} X^{2I_1} Z^{J_1}\ a^{-Q-1} da\, dX\, dZ.$$

de donde resulta que $f * \check{\phi}_{\nu_k}$ pertenece a F_k, que es un espacio de dimensión finita, como queríamos ver. $\square$

CAPITULO 4

Espacio Hiperbólico Complejo: K-tipos de dimensión uno

En este capítulo, estudiaremos el caso del Laplaciano actuando en funciones que transforman de acuerdo a un K-tipo de dimensión uno. Esto puede verse como generalización de lo anterior en el sentido de que una función en G/K mirada como función en G sería una función que transforma de acuerdo al K-tipo trivial. Notemos que si K tiene una representación unidimensional, entonces K tiene centro, lo cual en el caso de rango real de G uno, nos restringe al par $G = \mathrm{S}U(n,1)$, $K = \mathrm{S}(\mathrm{U}(n) \times \mathrm{U}(1))$.

Consideremos entonces $G = \mathrm{S}U(n,1)$ con $n > 1$ (el caso de $G = \mathrm{S}U(1,1)$ será tratado por separado). El álgebras de Lie de G esta dada por $\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C}) : XJ + J\overline{X}^t = 0\}$, donde $J = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathrm{Id} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.

Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ la descomposición de Cartan de $\mathfrak{g}$ asociada a la involución de Cartan $\theta(X) = \overline{X}^t$. Entonces

$$\mathfrak{k} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} : a \in \mathfrak{u}(n),\ \mathrm{tr}(a) + y = 0 \right\} \quad \text{y} \quad \mathfrak{p} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ \bar{b}^t & 0 \end{bmatrix} :\ b \in \mathbb{C}^n \right\}.$$

Si tomamos $H_0 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, es fácil ver que $\mathfrak{a} = \mathbb{R}H_0$ es una subálgebra abeliana maximal de $\mathfrak{p}$ y que $\mathfrak{z} = \mathbb{R}\left[\begin{smallmatrix} \frac{\mathbf{i}}{n}I & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} \end{smallmatrix}\right]$ es el centro de $\mathfrak{k}$. Se tiene también que $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_s + \mathfrak{z}$, donde $\mathfrak{k}_s = [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$ es la parte semisimple de $\mathfrak{k}$. Sea M el centralizador de A en K, o sea que para $n > 1$ tenemos que

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} e^{\mathbf{i}s} & 0 & 0 \\ 0 & U & 0 \\ 0 & 0 & e^{\mathbf{i}s} \end{bmatrix} :\ U \in \mathrm{U}(n-1),\ \det(U)e^{2\mathbf{i}s} = 1 \right\}.$$

Si $\mathfrak{t}$ es el conjunto de matrices diagonales de $\mathfrak{k}$, entonces $\mathfrak{t}$ es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{k}$ y también de $\mathfrak{g}$. El correspondiente sistema de raíces es

$$\Delta = \{\gamma_{i,j} = \epsilon_i - \epsilon_j \ \ :\ 1 \leq i \neq j \leq n+1\}$$

donde $\varepsilon_i(\mathrm{Diag}(h_1, \ldots, h_{n+1})) = h_i$. Elegimos un orden en el espacio dual de $\mathbf{i}\mathfrak{t}$ tal que las raíces positivas sean $\Delta^+ = \{\gamma_{i,j} \ \ :\ \ i > j\}$. Denotemos con Δ_c y Δ_n respectivamente, al subconjunto de raíces compactas y no compactas de Δ. Sea B un múltiplo de la forma de Killing tal que $B(H_0, H_0) = 1$, y para $\gamma \in \mathfrak{t}_c^*$ tomemos $H_\gamma \in \mathfrak{t}$ de forma tal que $\gamma(H) = B(H, H_\gamma)$ para cualquier $H \in \mathfrak{t}$. Sea

$$\mathfrak{t}^- = \mathbb{R}H_{\gamma_{1,n+1}}, \quad \text{y} \quad \mathfrak{t}^+ = \{H \in \mathfrak{t}\ :\ \gamma_{1,n+1}(H) = 0\}$$

Como $\{\gamma_{1,n+1}\}$ es una base de Δ_n, se tiene que $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}^- \oplus \mathfrak{t}^+$, y se sabe que existe un automorfismo de $\mathfrak{g}_c$ que lleva $\mathbf{i}\mathfrak{t}^-$ biyectivamente en $\mathfrak{a}$ fijando $\mathfrak{t}^+$ (ver [**S**] pág. 281).

Por lo tanto, $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}^+ + \mathfrak{a}$ es otra subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$, pero que contiene a $\mathfrak{a}$. Explícitamente, se tiene que

$$\mathfrak{h} = \left\{ H = \begin{bmatrix} \mathbf{i}u_1 & 0 & 0 & t \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{i}u_n & 0 \\ t & 0 & 0 & \mathbf{i}u_1 \end{bmatrix} : \begin{array}{c} \sum_2^n u_j + 2u_1 = 0 \\ \\ t, u_j \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

Sea ε_j la funcional en $\mathfrak{a}_c^*$ definida por

$$\varepsilon_1(H) = \mathbf{i}u_1 + t, \;\; \varepsilon_{n+1}(H) = \mathbf{i}u_1 - t, \text{ y } \; \varepsilon_j(H) = \mathbf{i}u_j \;\; (1 < j \leq n).$$

Luego, con el orden natural, el correspondiente conjunto de raíces positivas es

$$R^+ = \{\alpha_{i,j} = (\varepsilon_i - \varepsilon_{j+1}) : 1 \leq i \leq j \leq n\}.$$

Denotaremos con Σ al conjunto de raíces restringidas del par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$, ordenadas compatiblemente. Es decir que para $n > 1$, obtenemos $\Sigma^+ = \{\alpha, \frac{1}{2}\alpha\}$, donde α es la restricción de $\alpha_{1,n+1}$. Los espacios raíces asociados vienen dados por

$$\mathfrak{g}_{\alpha/2} = \left\{ \left[\begin{smallmatrix} 0 & {}^t\overline{x} & 0 \\ -x & 0 & x \\ 0 & {}^t\overline{x} & 0 \end{smallmatrix}\right] ; x \in \mathbb{C}^{n-1} \right\} \quad \text{y} \quad \mathfrak{g}_\alpha = \mathbb{R} \left[\begin{smallmatrix} -\mathbf{i} & 0 & \mathbf{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{i} & 0 & \mathbf{i} \end{smallmatrix}\right].$$

de lo cual se desprende que $m_\alpha = \dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ y $m_{\alpha/2} = \dim \mathfrak{g}_{\alpha/2} = 2(n-1)$.

En lo que sigue, identificaremos $\mathfrak{a}_c^*$ con $\mathbb{C}$ via la correspondencia $\nu = z\frac{1}{2}\alpha \mapsto z$. En otras palabras, puesto que $\alpha(H_0) = 2$, estamos identificando ν con $\nu(H_0)$.

Como es usual, sea $\rho \in \mathfrak{a}^*$ dada por $\rho(H) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R^+} m_\alpha \alpha(H)$. Luego, ρ es igual a n. Recordemos que se tiene la descomposición $G = K\,\mathrm{Cl}(A^+)K$, donde como siempre, podemos parametrizar $A^+ = \{a_t = \exp(tH_0) : \; t > 0\}$.

Denotaremos con $\hat{K}$ y $\hat{M}$ el conjunto de representaciones unitarias e irreducibles de K y M, respectivamente. Para $l \in \mathbb{Z}$ sea τ_l la representación unidimensional de K asociada al carácter $\chi_l \left(\left[\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & y \end{smallmatrix}\right] \right) = y^l$. Notemos que toda representación unidimensional de K es de esta forma. Denotemos con $\sigma_l = \tau_l|_M$. Para cada $l \in \mathbb{Z}$, definimos $m_\alpha(l) = 1 - 2l$, $\;m_{\alpha/2}(l) = 2(n-1) + 2l$ y $\rho(l) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R^+} m_\alpha(l)\alpha$. Entonces, por la identificación de arriba $\rho(l) = n - l$.

Si τ es una representación de K, sea E_τ el fibrado vectorial sobre G/K asociado a τ. Identificaremos, como es usual el espacio de las secciones C^∞ de E_τ con el espacio $C^\infty(G/K;\tau)$ de las funciones C^∞ en G tal que $f(xk) = \tau(k)^{-1}f(x)$ para toda $x \in G$, $k \in K$. Denotemos con $D_l = D_l(G/K)$, el espacio de los operadores diferenciales invariantes a izquierda en G que dejan invariante $C^\infty(G/K;\tau_l)$. Notemos que para $l = 0$, τ_l es la representación trivial de K, y $D_0 = D(G/K)$. En este caso ya vimos que

$$D(G/K) \simeq \mathcal{U}(\mathfrak{g})^K / \mathcal{U}(\mathfrak{g})^K \cap \mathcal{U}(\mathfrak{k}).$$

Este resultado fue generalizado ([**Dt**] pág. 99) y se tiene que

$$D(G, K, \tau) \simeq \mathcal{U}(\mathfrak{g})^K / \mathcal{U}(\mathfrak{g})^K \cap \mathcal{U}(\mathcal{I}(\tau))$$

donde $\mathcal{I}(\tau)$ es el núcleo de τ como representación de $\mathcal{U}(\mathfrak{k})$.

Para el caso de $\dim \tau = 1$, es fácil ver que $\mathcal{U}(\mathcal{I}(\tau)) = \{X + \tau(X)I \;:\; X \in \mathfrak{z}\}$, con lo cual se tiene el siguiente isomorfismo (ver [**Sh**]):

$$D_l \simeq \mathcal{U}(\mathfrak{g})^K/\mathcal{U}(\mathfrak{g})^K \cap \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{k}_l.$$

Notemos que como el centro de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{Z}$, está contenido en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^K$, el Casimir es siempre un elemento de $D(G, K, \tau)$.

1. Funciones esféricas y la resolvente

Una función compleja f en G se dice τ_l-*radial* si

$$f(k_1 x k_2) = \tau_l(k_1)^{-1} f(x) \tau_l(k_2)^{-1} \text{ para todo } g \in G,\ k_1, k_2 \in K.$$

Denotaremos con $C_l^\infty(G)$ al espacio de las funciones C^∞ τ_l-radiales en G.

Sea f^- la restricción a A^+ de una función $f \in C_l^\infty(G)$. Notemos que gracias a la descomposición polar $G = K\,\mathrm{Cl}(A^+)K$, se sigue que $f \in C_l^\infty(G)$ está unívocamente determinada por f^-. Para $D \in U(\mathfrak{g})$, denotaremos con $\Delta_l(D)$ la componente τ_l-radial, es decir, $\Delta_l(D)$ esta definido como el operador diferencial en A^+ que satisface la siguiente relación:

$$(Df)^- = \Delta_l(D)(f^-) \qquad \forall\, f \in C_l^\infty(G).$$

Aplicando las técnicas que ya hemos introducido en los otros casos, daremos ahora una fórmula para la componente radial de C en este caso. Sea $X_1, \ldots, X_{2(n-1)}$ y X_0 una base de $\mathfrak{g}_{\alpha/2}$ y $\mathfrak{g}_\alpha$ respectivamente, tal que $-B(X_i, \theta(X_j)) = \delta_{i,j}$. Sea $\{U_1, \ldots, U_r\}$una base ortonormal de $\mathfrak{m}$ con respecto a $-B_{|\mathfrak{m}}$.

PROPOSICIÓN 4.1. *Si $f \in C_l^\infty(G/K)$ y $C_\mathfrak{m}$ denota el elemento Casimir de $\mathfrak{m}$ con respecto a $-B_{|\mathfrak{m}}$, entonces*

$$\Delta_l(C) f(a_t) = \left(\frac{d^2}{dt^2} - \tau_l(C_\mathfrak{m}) + ((2n-1)\coth t + 2\coth 2t)\frac{d}{dt} - \frac{l^2}{(\cosh t)^2} \right) f(a_t).$$

PRUEBA. Como es usual en este contexto, definimos para $j = 0, \ldots, 2(n-1)$

$$Z_j = 2^{-\frac{1}{2}}(X_j + \theta(X_j)), \quad Y_j = 2^{-\frac{1}{2}}(X_j - \theta(X_j))$$

Es fácil ver que

$$C = H_0^2 - C_\mathfrak{m} + \sum_{j=0}^{2(n-1)} Y_j^2 - \sum_{j=0}^{2(n-1)} Z_j^2$$

Usando (2.3), podemos ver que para $f \in C_l^\infty(G/K)$

$$\begin{aligned} Cf(a_t) &= \tfrac{d^2}{dt^2}f(a_t) - \tau_l(C_{\mathfrak{m}})f(a_t) + (2(n-1)\coth t + 2\coth 2t)\tfrac{d}{dt}f(a_t) \\ &+(\sinh t)^{-2}\sum_{j=1}^{2(n-1)} \tau_l(Z_j^2)f(a_t) + (\sinh 2t)^{-2}\tau_l(Z_0^2)f(a_t) \\ &+(\coth t)^2\sum_{j=1}^{2(n-1)} f(a_t)\tau_l(Z_j^2) + (\coth 2t)^2 f(a_t)\tau_l(Z_0^2) \\ &-2(\sinh t)^{-1}(\coth t)\sum_{j=1}^{2(n-1)} \tau_l(Z_j)f(a_t)\tau_l(Z_j) \\ &-2(\sinh 2t)^{-1}(\coth 2t)\ \tau_l(Z_0)f(a_t)\tau_l(Z_0) - \sum_{j=0}^{2(n-1)} \tau_l(Z_j^2)f(a_t). \end{aligned}$$

Aquí, hemos usado que $\alpha(H_0) = 2$, y así $\alpha(\log(a_t)) = 2t$.

Por otro lado, tenemos que si $X = \begin{bmatrix} 0 & {}^t\overline{x} & 0 \\ -x & 0 & x \\ 0 & {}^t\overline{x} & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{g}_{\alpha/2}$, entonces

$$(X + \theta(X)) = \begin{bmatrix} 0 & 2{}^t\overline{x} & 0 \\ -2x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, de la definición de τ_l, se deduce que $\tau_l(Z_j) = 0$ para $j = 1, \ldots, 2(n-1)$. También podemos ver que $Z_0 = \mathbf{i}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, y entonces $\tau_l(Z_0) = \mathbf{i}l$. Así, la ecuación de arriba se transforma en

$$\begin{aligned} Cf(a_t) &= \tfrac{d^2}{dt^2}f(a_t) - \tau_l(C_{\mathfrak{m}})f(a_t) + (2(n-1)\coth t + 2\coth 2t)\tfrac{d}{dt}f(a_t) \\ &-l^2\left((\sinh 2t)^{-2} + (\coth 2t)^2 - 2(\sinh 2t)^{-1}\coth 2t - 1\right) f(a_t). \end{aligned}$$

Notemos que el último término de esta ecuación es igual a $\frac{-l^2}{(\cosh t)^2}$, con lo cual obtenemos lo que queríamos demostrar. $\square$

Nota 4.2. En el caso de $l = 0$, una función τ_0-radial corresponde a una función K-biinvariante en G, y entonces, la Proposición 4.1 generaliza la fórmula para la acción de $\Delta(C)$ en este caso (ver [**MW**] pág. 667).

Definición 4.3. Si $l \in \mathbb{Z}$ y ϕ es una función compleja en G continua y τ_l-radial, entonces decimos que ϕ es una función τ_l-*esférica* si $\phi(e) = 1$ y $D\phi = \chi(D)\phi$ para cada $D \in D_l$, con $\chi(D) \in \mathbb{C}$.

Se tiene la siguiente caracterización de una función τ_l-esférica, dada por Shimeno.

Proposición 4.4. [**Sh**, Prop. 3.3] *Para $l \in \mathbb{Z}$, $g \in G$ y $\nu \in \mathfrak{a}^*$, definimos*

$$\Phi_{\nu,l}(g) = \int_k e^{-(\nu+\rho)(H(g^{-1}k))}\tau_l(k^{-1}\kappa(g^{-1}k))dk.$$

La función $\Phi_{\nu,l}$ es una función τ_l-esférica en G y toda función τ_l-esférica es de esta forma, para algún $\nu \in \mathfrak{a}_c^*$. Más aún, $\Phi_{\nu,l} = \Phi_{\mu,l}$ si y sólo si existe s en el grupo de Weyl de G, W, tal que $\mu = s\nu$, y $\nu \to \Phi_{\nu,l}(g)$ es holomorfa para cada $g \in G$, fijo.

Para dar otra caracterización de una función τ_l-esférica, recurrimos a la serie principal de G. Para ello, tomemos $P = MAN$ un subgrupo parabólico minimal de G, $\nu \in \mathfrak{a}_c^*$ y $l \in \mathbb{Z}$. Debido a que nos será necesario distinguir cual es el subgrupo parabólico que estamos considerando, recargaremos un poco la notación, denotando con $(\pi_{l,\nu}, H_P^{l,\nu})$ a la serie principal de G inducida por P, de parámetros (σ, ν), como la definimos en el Capítulo 2. Dado que $[\tau_l : \sigma_l] = 1$, por la reciprocidad de Frobenius, τ_l aparece en la descomposición sobre K de $H_P^{l,\nu}$. Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \pi_{\nu,l}(g)1_{\nu,l}, 1_{\nu,l}\rangle &= \int_K 1_{\nu,l}(g^{-1}k)\overline{1_{\nu,l}(k)}dk \\ &= \int_K e^{-(\nu+\rho)H(g^{-1}k)}\tau_{-l}(k^{-1}\kappa(g^{-1}k)dk \end{aligned}$$

Es decir que $\Phi_{\nu,-l}(g) = \langle \pi_{\nu,l}(g)1_{\nu,l}, 1_{\nu,l}\rangle$, y entonces podemos mostrar que la restricción $\Phi_{\nu,l}^-$ de $\Phi_{\nu,l}$ a A^+ satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$\Delta_l(C)\Phi_{\nu,l}^- = \chi(\nu,l)\Phi_{\nu,l}^-$$

donde $\chi(\nu,l) = \nu^2 - \rho^2 + \tau_{-l}(C_{\mathfrak{m}})$ ((1.1) y [**K**] Prop. 8.22).

Como en el caso de la representación trivial de K, estas funciones estan relacionadas con funciones hipergeométricas, como veremos a continuación.

Proposición 4.5. [**Sh**, Prop. 2.6] *Si $u(t) = 2\cosh(t)$, tenemos que*

$$u(t)^l \cdot (\Delta_l(C) + \rho^2 - \tau_l(C_{\mathfrak{m}})) \cdot u(t)^{-l} = L(l) + \rho(l)^2$$

donde $L(l) = \frac{d^2}{dt^2} + ((2n-1)\coth t + (1-2l)\tanh t)\frac{d}{dt}$.

Usando esta proposición, se puede ver que la función $\psi(t) = u^l(t)\Phi_{\nu,l}^-(\exp(tH_0))$ es una función suave, par, $\psi(0) = 1$, y tal que

$$L(l)\psi = \lambda(\nu,l)\psi, \tag{4.1}$$

donde $\lambda(\nu,l) = \nu^2 - \rho(l)^2$. Tenemos entonces que como $L(l) - \lambda(\nu,l)$ es una ecuación de Jacobi de parámetros $\alpha = n-1$, $\beta = -l$ y $\lambda = \mathbf{i}\nu$,

$$\psi(t) = \phi_{i\nu}^{(n-1,-l)} = {}_2F_1\left(\frac{n-l+\nu}{2}, \frac{n-l-\nu}{2}, n, -(\sinh t)^2\right)$$

es la única solución de esta ecuación que satisface estas condiciones (ver Cap. I, sec. IV). Luego, tenemos que

$$\Phi_{\nu,l}(\exp tH_0) = (2\cosh t)^{-l}\phi_{i\nu}^{(n-1,-l)}(t).$$

También se puede ver de 1.8, que para $\nu \notin -\mathbb{N}$ una segunda solución de (4.1) en $(0,+\infty)$ está dada por

$$\tilde{Q}_{\nu,l}(t) = (2\cosh t)^{-(\nu+\rho(l))}\, {}_2F_1\left(\frac{n-l+\nu}{2}, \frac{n+l+\nu}{2}, 1+\nu, (\cosh t)^{-2}\right). \tag{4.2}$$

Como función de ν, $\tilde{Q}_{\nu,l}$ es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{N}$, y para $\nu \notin \mathbb{Z}$, $\tilde{Q}_{\nu,l}$ y $\tilde{Q}_{-\nu,l}$ son linealmente independientes, y podemos escribir

$$(2\cosh t)^l\Phi_{\nu,l}(\exp(tH_0)) = c(\nu,l)\tilde{Q}_{-\nu,l}(t) + c(-\nu,l)\tilde{Q}_{\nu,l}(t), \tag{4.3}$$

donde

$$c(\nu,l)=\frac{2^{n-l-\nu}(n-1)!\,\Gamma(\nu)}{\Gamma(\frac{\nu+n+l}{2})\Gamma(\frac{\nu+n-l}{2})}. \tag{4.4}$$

Además, se tiene que el comportamiento asintótico de $\Phi_{\nu,l}$ para $\operatorname{Re}\nu>0$ cuando $t\to\infty$, esta dado por:

$$\Phi_{\nu,l}(\exp(tH_0))\sim c(\nu,l)\,e^{t(\nu-\rho(l))} \tag{4.5}$$

También necesitaremos el siguiente hecho (ver [**HO**] Prop. 2.2),

$$\begin{aligned}\delta^{1/2}\cdot(\Delta_l(C)+\rho^2)\cdot\delta^{-1/2}&=\tfrac{d^2}{dt^2}+\tau_{-l}(C_{\mathfrak{m}})\\ &+\sum_{\alpha\in R^+}\frac{1}{4}m_{\frac{\alpha}{2}}(l)(2-m_{\frac{\alpha}{2}}(l)-2m_\alpha(l))4\sinh(2t)^{-2}\end{aligned} \tag{4.6}$$

Con todos estos elementos, podemos adaptar muchos de los argumentos antes usados para obtener extensiones de los Teoremas 2.4 y 2.7.

Teorema 4.6. *Si $\nu\in\mathbb{C}$, $\nu\notin-\mathbb{N}$, entonces existe una función $Q_{\nu,l}\in C^\infty_{-l}(G-K)$ con las siguientes propiedades:*

(a) $\Delta_l(C)Q_{\nu,l}=\chi(\nu,l)Q_{\nu,l}$. *$Q_{\nu,l}(x)$ es holomorfa para $\nu\notin-\mathbb{N}$ y si $\nu\in-\mathbb{N}$, $Q_{\nu,l}(x)$ tiene a lo sumo a polo simple.*
(b) $\phi^-_{\nu,l}=c(-\nu,l)Q^-_{\nu,l}+c(\nu,l)Q^-_{-\nu,l}$.
(c) *Cuando $t\mapsto0$, $Q_{\nu,l}(\exp(tH_0))\sim d(\nu)t^{-2(n-1)}|\log t|^{\delta_{n,1}}$, para cierta función meromorfa $d(\nu)$ en $\mathbb{C}$, holomorfa si $\nu\notin-\mathbb{N}$. Más aún, si $\nu\in\mathbb{C}\setminus-\mathbb{N}$, entonces $Q_{\nu,l}(g)$ esta en $L^1_{loc}(G)$, y si $\operatorname{Re}\nu>\rho$, $Q_{\nu,l}(g)\in L^1(G)$.*
(d) $\lim_{t\mapsto0^+}\delta(t)\,\frac{d}{dt}Q_{\nu,l}(\exp(tH_0))=-2\nu c(\nu,l)$.
(e) *Si $f\in C^\infty_c(G/K,\tau_l)$ y $\nu\notin-\mathbb{N}$ entonces*

$$\int_G Q_{\nu,l}(x^{-1}y)(C-\lambda(\nu,l)\mathrm{Id})\mathrm{f(y)dy}=-2\nu\,c(\nu,l)f(x). \tag{4.7}$$

Prueba. Sea $Q_{\nu,l}(ka_tk')=\tau_l(k)u(t)^{-l}\tilde{Q}_{\nu,l}(t)\tau_l(k')$. Como notamos antes, como $\tilde{Q}_{\nu,l}$ es una solución de $L(l)g(t)=\lambda(\nu,l)g(t)$, $Q_{\nu,l}$ es una solución de $\Delta_l(C)f^-=\chi(\nu,l)f^-$. Es claro de la definición que $Q_{\nu,l}\in C^\infty_{-l}(G-K)$, y de la observación de arriba, que satisface (a). También se desprende de la definición, que (b) es equivalente a (4.3).

La prueba de (c), es similar a la del caso de $l=0$ (ver Torema 2.4), por lo cual la omitiremos.

Por otra parte, notemos que (4.2) implica que $\tilde{Q}_{\nu,l}(t)\sim e^{-(\nu+\rho(l))t}$ cuando $t\mapsto\infty$, y entonces $Q_{\nu,l}(\exp(tH_0))\sim e^{-(\nu+\rho)t}$ cuando $t\mapsto\infty$. Con esto podemos probar (d) como en el caso de $l=0$.

Para ver (e), notemos primero que si $f\in C^\infty_c(G/K,\tau_l)$, también lo hace $L_{x^{-1}}f$, por lo cual es suficiente ver que

$$\int_G Q_{\nu,l}(y)(C-\lambda(\nu,l))f(y)dy=-2\nu c(\nu,l)f(e)$$

El lado izquierdo de esta igualdad es igual a

$$\int_0^\infty Q_{\nu,l}(a_t)(C-\lambda(\nu,l))\int_K\tau_l(k)f(ka_t)dk\,\delta(t)\ dt.$$

Si $f \in C_c^\infty(G/K, \tau_l)$, entonces $f^l(a_t) = \int_K \tau_l(k) f(ka_t)dk)$ es una función τ_l-radial en G. Entonces podemos reemplazar C por su parte radial, y obtener

$$= \int_0^\infty \delta^{\frac{1}{2}}(t) Q_{\nu,l}(a_t) \delta^{\frac{1}{2}}(t) \Delta_l(C) f^l(a_t) - \delta^{\frac{1}{2}}(t) \Delta_l(C) Q_{\nu,l}(a_t) \delta^{\frac{1}{2}}(t) f^l(a_t)\, dt$$

Usando ahora la radialización (4.6) y argumentando como en el caso de $l = 0$, podemos ver que lo de arriba es igual a

$$\int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(\delta(t) Q_{\nu,l}(\exp(tH_0)) \frac{d}{dt} f^l(a_t) - \delta(t) \frac{d}{dt} Q_{\nu,l}(\exp(tH_0)) f^l(a_t)\right)\, dt$$

Por lo tanto, si miramos el comportamiento asintótico cuando $t \mapsto 0$, y cuando $t \mapsto \infty$, obtenemos que la integral de arriba es igual a $\lim\limits_{t \mapsto 0^+} \delta(t) \dfrac{d}{dt} Q_{\nu,l}(\exp(tH_0)) f^l(e)$. Luego, usando (d) obtenemos lo que queríamos demostrar. □

2. Residuos del núcleo

Sea $\tilde{R}(\lambda(\nu, l))$ el operador a núcleo asociado al núcleo $K_{\nu,l} = -\frac{Q_{\nu,l}(x^{-1}y)}{2\nu c(\nu)}$. Se tiene que $\tilde{R}(\lambda(\nu, l))$ coincide con la resolvente de C en $\lambda(\nu, l)$ actuando en funciones $C_C^\infty(G/K, \tau_l)$, pero este operador es la resolvente sólo para $\operatorname{Re}\nu > \rho$. En este caso para las singularidades del núcleo se tiene el siguiente resultado.

Teorema 4.7. $\tilde{R}(\lambda(\nu, l))$ *tiene polos simples en* $\nu = \nu_{k,l}^{\pm}$ *con* $\nu_{k,l}^{-} = -|l| - n - 2k$, $k \in \mathbb{N}_0$, *y* $\nu_{k,l}^{+} = |l| - n - 2k$, *para* $k \in \mathbb{N}_0$ *tal que* $|l| - n - 2k \geq 0$. *Si* ν *es un polo y tomamos* $T_\nu(f) := \operatorname{Res}_{z=\nu} \tilde{R}(\lambda(z, l))(f)$, *entonces* $T_\nu(f) = p(\nu)\, f * \check{\Phi}_{\nu,-l}$.

Prueba. Sabemos que $\Phi_{\nu,l}(g)$ es una función entera como función de ν. Luego, usando (a) y (b) del Teorema 4.6, se obtiene que, como en los casos anteriores, los polos de $K_{\nu,l}$ son precisamente los ceros de $c(\nu, l)$.

Es fácil deducir de la fórmula (4.4) que los ceros de $c(\nu, l)$ están en $\nu = \nu_{k,l}^{\pm}$. Por otro lado, si $|l| > n$ se tiene que $|\nu_{k,l}^{+}| < |\nu_{0,l}^{-}|$, y por lo tanto, $\frac{Q_{-\nu,l}}{2\nu c(-\nu,l)}$ es analítica en $\nu_{k,l}^{\pm}$. Luego, para $f \in C_c^\infty(G/K, \tau_l)$, usando el Teorema 4.6 parte (b), obtenemos que si ν es un polo, entonces

$$\operatorname{Res}_{z=\nu} \tilde{R}(\lambda(z))(f) = p(\nu)\, f * \check{\Phi}_{\nu,-l},$$

donde $p(\nu) = \operatorname{Res}_{z=\nu}(c(\nu, l)c(-\nu, l)^{-1})$. □

Ahora estudiaremos las imágenes de estos operadores, y para ello, comenzaremos introduciendo algunas representaciones de K, para $n > 1$.

Para $p, q \in \mathbb{N}_0$, sea $V_{p,q}$, al conjunto de polinomios armónicos en $z \in \mathbb{C}^n$ de bigrado (p, q), y consideremos la siguiente acción de K en este espacio:

$$\tau_{l,p,q}\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\right) f(z) = y^{q-p+l} f({}^t z a).$$

Proposición 4.8. [**EK**, § 2] *Sea* τ *un* K*-tipo que contiene al* M*-tipo* σ_l. *Entonces existe* $p, q \in \mathbb{N}_0$ *tal que* τ *es equivalente a* $V_{p,q}$.

De hecho, si tomamos $F_{p,q}(z) = z_1^p \overline{z}_1^q\, {}_2F_1(-p, -q, n-1, -(|z_2|^2 + ... + |z_n|^2)/|z_1|^2)$ entonces $F_{p,q} \in V_{p,q}$, y es fácil ver que $\tau_{l,p,q}(X) F_{p,q} = \sigma_l(X) F_{p,q}$ para $X \in M$.

Sea P la función lineal de $V_{p,q}$ en $\mathbb{C}$ definida por $P(f) = f(1, 0, ..., 0)$. Como $P \in \operatorname{Hom}_M(V_{p,q}, H_l)$, entonces para $\nu \in \mathfrak{a}_c^*$ y $f \in V_{p,q}$, podemos definir (como en [**W**] 8.11.4)

$$L(p, f, \nu)(g) = e^{-(\nu+\rho)H(g)}P(\tau_{l,p,q}(\kappa(g)^{-1})f).$$

Es claro que $L(p, f, \nu) \in H_P^{l,\nu}$, y más aún, dado que $[\tau_{l,p,q} : \sigma_l] = 1$, tenemos que $f \mapsto L(P, f, \nu)$ es un operador de entrelazamiento para la acción de K de $V_{p,q}$ a $H_P^{l,\nu}$. Sea $\tilde{V}_{p,q} \subset H_P^{l,\nu}$ la imagen de $V_{p,q}$ por este homomorfismo. Sea $A(w, l, \nu) : H_P^{\nu,l} \mapsto H_P^{-\nu,l}$ el operador de entrelazamiento estándar, donde $w = \operatorname{Diag}(-1, -1, 1, ..., 1) \in K$ es un representante del elemento no trivial de W. En particular, de [**EK**] § 3, tenemos que

$$A(w, l, \nu)L(P, F_{p,q}, \nu) = (-1)^{p+q}c_{\tau_{l,p,q}}(\sigma_l, \nu)L(P, F_{p,q}, -\nu)$$

donde $c_{\tau_{l,p,q}}(\sigma_l, \nu)$ está dado por

$$c_{\tau_{l,p,q}}(\sigma_l, \nu) = \frac{k\Gamma(\nu)\prod_{j=0}^{p-1}(\nu - n + l - 2j)\prod_{j=0}^{q-1}(\nu - n - l - 2j)}{\Gamma(\frac{\nu+n-l+2p}{2})\Gamma(\frac{\nu+n+l+2q}{2})}$$

Si $\nu \neq 0$, sea $D_\nu^l = \{(p, q) \in \mathbb{N}_0^2 \ : \ c_{\tau_{l,p,q}}(\sigma_l, \nu) = 0\}$. Si $(p, q) \in D_\nu^l$, es claro que $L(P, F_{p,q}, \nu) \in \operatorname{Ker} A(w, l, \nu)$ el cual es un G-módulo, y entonces $\tilde{V}_{p,q} \subset \operatorname{Ker} A(w, l, \nu)$, y más aún, por la reciprocidad de Frobenius y por la Prop. 4.8 tenemos que

$$\operatorname{Ker} A((w, l, \nu) = \sum_{(p,q)\in D_\nu^l} \tilde{V}_{p,q}.$$

Se puede ver que

$$D_{\nu_k^-}^l = \left\{(p, q) \in \mathbb{N}_0^2 \ : \ p \leq k + \tfrac{l+|l|}{2}, \ q \leq k + \tfrac{|l|-l}{2}\right\},$$

y de esto se desprende que $\operatorname{Ker} A(w, l, \nu_{k,l}^-) = \sum_{(p,q)\in D_{\nu_k^-}^l} \tilde{V}_{p,q}$ es un $(\mathfrak{g}, K)$-módulo de dimensión finita, cuya restricción contiene a $\tau_l = \tau_{l,0,0}$.

Para $\nu = 0$, como sabemos que $c(\nu, l)$ tiene un polo, podemos considerar el operador de entrelazamiento normalizado

$$B(w, l, \nu) = \Gamma(\nu)^{-1}A(w, l, \nu);$$

como además $\Gamma(\nu)^{-1}c_{\tau_{l,p,q}}(\sigma_l, \nu)$ es holomorfa en $\nu = 0$, también tenemos que $\operatorname{Ker} B((w, l, 0) = \sum_{(p,q)\in D_0^l} \tilde{V}_{p,q}$, donde

$$D_0^l = \left\{(p, q) \in \mathbb{N}_0^2 \ : \ \Gamma(\nu)^{-1}c_{\tau_{l,p,q}}(\sigma_l, \nu)_{|\nu=0} = 0 \right\}.$$

Notemos que cuando $\nu = 0$ es un polo, entonces $|l| - n = 2k$, con $k \in \mathbb{N}$ y se puede ver que

$$D_0^l = \left\{(p, q) \in \mathbb{N}_0^2 \ : \ p \leq k = \tfrac{l-n}{2}, \ \right\}, \qquad \text{si } l > 0,$$

$$D_0^l = \left\{(p, q) \in \mathbb{N}_0^2 \ : \ q \leq k = \tfrac{-l-n}{2}, \ \right\}, \qquad \text{si } l < 0.$$

Es bien sabido que $H_P^{l,\nu}$ es equivalente a $H_{\overline{P}}^{l,-\nu}$ y que el operador de entrelazamiento es $R(w)$, donde R es la representación regular a derecha de G. También se sabe que si $A(\overline{P},P,\sigma_l,\nu)$ denota al entrelazamiento estandar de $H_P^{l,\nu}$ to $H_{\overline{P}}^{l,\nu}$, entonces $A(w,l,\nu)=R(w)A(\overline{P},P,\sigma_l,\nu)$ (ver [**K**] Cap. VII §4).

Sea $V(\mu,l)$ la imagen del residuo de $\tilde{R}(\lambda(\nu,l))$ en $\nu=\mu$, y $V(\mu,l)_K$ el espacio de vectores K-finitos en $V(\mu,l)$. Ahora, usando una generalización del teorema de Helgason, podemos describir explícitamente $V(\mu,l)_K$.

Teorema 4.9. *Si μ es un polo de $\tilde{R}(\lambda(\nu,l))$, entonces $V(\mu,l)_K$ es un $(\mathfrak{g},K)$-módulo. Estos módulos son de dimensión finita sólo en el caso de que $\mu=\nu_{k,l}^-$ para $k\in\mathbb{N}_0$. Los módulos correspondientes a $\mu=\nu_{k,l}^+$ son equivalentes, como $(\mathfrak{g},K)$-módulos, a representaciones de serie discreta holomorfa. Más aún, en el caso de que $\mu=\nu_{k,l}^-$ y $\mu=0$ estos $(\mathfrak{g},K)$-módulos son isomorfos a $\operatorname{Ker}A(w,l,\nu_{k,l}^-)$ y $\operatorname{Ker}B(w,l,0)$ respectivamente.*

Prueba. Si $f\in C_c^\infty(G/K,l)$ y $x\in G$, por el Teorema (4.7) tenemos que:

$$T_{\nu_{k,l}^\pm}(f)(x)=p(\nu_{k,l}^\pm)\,f*\check{\Phi}_{\nu_{k,l}^\pm,-l}(x)=p(\nu_{k,l}^\pm)\,\langle\pi_{\nu_{k,l}^\pm}(x^{-1})\,\pi_{\nu_{k,l}^\pm,l}(f)1_{\nu_{k,l}^\pm,l},1_{\nu_{k,l}^\pm,l}\rangle$$

Por lo tanto, para $\nu=\nu_{k,l}^\pm$, $V(\nu,l)_K$ es isomorfo al $(\mathfrak{g},K)$-módulo generado por $1_{\nu,l}$, los cuales describiremos a continuación.

Primero, daremos una condición en ν, para que $1_{l,\nu}$ genere un submódulo de dimensión finita de $H_P^{l,\nu}$.

Para $\lambda\in\mathfrak{h}_c^*$ definimos

$$m_0=\lambda(\mathbf{i}X)\quad\text{ y }\quad m_1=\tfrac{2\langle\lambda,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}$$

donde, como en [**S**] 4.4, $X=\begin{bmatrix}-1&&\\&\frac{2}{n-1}\mathrm{Id}&\\&&-1\end{bmatrix}$.

Si $\lambda|_{\mathfrak{t}^+\cap\mathfrak{k}_1}=0$, entonces por [**S**] Prop. 7.1, λ es dominante integral si y sólo si m_0 y m_1 son enteros tal que $|m_0|\le m_1$ y $(-1)^{m_0}=(-1)^{m_1}$.

Si $\lambda=a_1\alpha+\sum_{i=2}^n a_i\varepsilon_i$, entonces podemos ver que $\lambda|_{\mathfrak{t}^+\cap\mathfrak{k}_1}=0$ si y sólo si $a_2=a_3=\cdots=a_n$ Entonces, si $\beta=\sum_{i=2}^n\varepsilon_i$, y $\lambda=a_1\alpha+a_0\beta$, tenemos que $m_0=-2a_0$ y $m_1=2a_1$.

Por otro lado, por [**S**] Thm. 7.2, $\lambda=a_1\alpha+a_0\beta$, es peso máximo de una representación irreducible de G de dimensión finita, cuya restricción contiene el K-tipo de dimensión uno χ_{m_0} con multiplicidad uno.

Además, de la prueba del teorema, se desprende que estas representaciones son equivalentes a $\operatorname{Im}A(\overline{P},P,\sigma_l,\mu)$, que es un subrepresentación de $H_{\overline{P}}^{l,\nu}$, donde $\mu=\lambda_{|\mathfrak{a}}+\rho$. Por lo tanto, $1_{l,\nu}$ genera un G-submódulo de $H_P^{l,\nu}$ de dimensión finita (con peso máximo λ) si y sólo si $\nu=-\lambda_{|\mathfrak{a}}-\rho$, donde $\lambda=\frac{l}{2}\beta+(|l|+2k)\frac{\alpha}{2}$.

Notemos que por nuestra identificación, $\nu=\nu_{k,l}$, como queríamos demostrar.

Por otro lado, hemos probado que $\operatorname{Ker}A(w,l,\nu_{k,l}^-)$ es un submódulo de $H_P^{l,\nu_{k,l}^-}$ de dimensión finita que contiene a $1_{l,\nu_{k,l}^-}$, y también sabemos que $H_P^{l,\nu_{k,l}^-}$ es equivalente a $H_{\overline{P}}^{l,-\nu_{k,l}^-}$, que tiene un único submódulo irreducible ([**K**] pág. 273). Entonces, es claro que el $(\mathfrak{g},K)$-submódulo de $H_P^{l,\nu_{k,l}^-}$ generado por $1_{l,\nu_{k,l}^-}$ es $\operatorname{Ker}A(w,,\nu_{k,l}^-)$.

Estudiaremos ahora el caso de $\nu=\nu_{k,l}^+$, y para esto empezaremos observando que para para el caso de rango real uno, [**Sh**] Teor. 5.1 asegura que si $\lambda\in\mathfrak{a}_c^*$, $\lambda=$

$\nu.\frac{\alpha}{2}$, con $\nu \geq 0$, entonces $\Phi_{\lambda,l}$ pertenece a $L^2(G/K,\tau_l)$ si y sólo si

$$\frac{\langle -\lambda - \rho(|l|), \alpha\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle} \in \mathbb{N} \tag{4.8}$$

En particular, existe $\lambda \in \mathfrak{a}_c^*$ tal que $\Phi_{\lambda,l} \in L^2(G/K,\tau_l)$ si y sólo si $|l| > n$. Notemos que (4.8) dice que $-\nu - (n - |l|) = 2k$ con $k \in \mathbb{N}$, o equivalentemente, $\nu = \nu_{k,l}^+$ para algún k. Luego, el $(\mathfrak{g}, K)$-módulo generado por $1_{l,\nu}$ en $H_P^{l,\nu}$ es infinitesimalmente equivalente a una representación de serie dicreta si y sólo si $\nu = \nu_{k,l}^+$

Además, en [**Sh**] Teor. 5.10 se prueba que en realidad son infinitesimalmente equivalentes a representaciones de serie discreta holomorfa.

Para $\nu = 0$, es bien sabido que si $H_p^{l,0}$ es reducible, entonces es una suma de dos representaciones irreducibles no equivalentes. Estas representaciones son llamadas límites de serie discreta. Dado que son no equivalentes, y $B(w,l,0)$ es un entrelazamiento, se tiene que Ker $B(w,l,0)$ es el $(\mathfrak{g}, K)$-submódulo de $H_P^{l,0}$ generado por $1_{l,0}$. Esto concluye nuestra prueba. □

Nota 4.10. Notemos que toda representación de G (irreducible) de dimensión finita, o de serie discreta, o límite de serie discreta, que contenga a un K-tipo de dimensión uno, puede ser visto como un residuo del núcleo de la resolvente. Esto es, si (π, H_π) es de dimensión finita y contien al K-tipo unidimensional τ_m, entonces existe un fibrado lineal sobre G/K tal que esta representación es isomorfa al residuo de la continuación meromorfa del núcleo de la resolvente del operador Casimir actuando en ese fibrado, en algún polo. De hecho, si λ es el peso máximo de π, entonces por [**S**] Thm 7.2, se tiene que $\lambda = a\alpha + b\beta$, donde $a = |b| + k$. Luego, por la observación de arriba, H_π es isomorfa a $V_{k,2b}$, la imagen del residuo de $\tilde{R}(\lambda(\nu, 2b))$ en $\nu = \nu_{k,2b}^-$.

En el caso en que (π, H_π) es una serie discreta, esto implica que $\Phi_{\lambda,m} \in L^2(G/K,\tau_m)$, y entonces por [**Sh**] Teor. 5.1 $\lambda = \nu_{k,m}^+$. Luego, H_π es isomorfo a $V(\nu_{k,m}^+, m)$.

Finalmente, si (π, H_π) es un límite de serie discreta que contiene el K-tipo unidimensional τ_m, esto dice que $H_P^{m,0}$ es reducible, y entonces $m \equiv n \pmod 2$ y $|m| > n$ ([**K**] pág. 621). Entonces, H_π es isomorfo a la imagen de el residuo de $\tilde{R}(\lambda(\nu, m))$ en $\nu = \nu^+_{\frac{|m|-n}{2},m}$.

Nota 4.11. También queremos observar que $\nu = 0$ no es un polo del núcleo de $\tilde{R}_l(\lambda(\nu, l))$, para el caso en τ_l es la representación trivial de K (ver Cap. 2).

Ahora calcularemos la dimensión de la representación $V(\nu_{k,l}^-)$, usando la fórmula de la dimensón de Weyl.

Los pesos fundamentales de $\mathfrak{g}_c$ son $\Lambda_j = \epsilon_1 + \ldots + \epsilon_j$, $1 \leq j \leq n$, entonces $\alpha = \Lambda_1 + \Lambda_n$ y $\beta = \Lambda_n - \Lambda_1$. Estamos interesados entonces en la dimensión de los $\mathfrak{g}_c$-módulos asociados a $\Lambda_{k,l} = \frac{l}{2}\beta + \left(\frac{|l|+2k}{2}\right)\alpha = \left(\frac{|l|-l}{2} + k\right)\Lambda_1 + \left(\frac{|l|+l}{2} + k\right)\Lambda_n$.

Entonces se cumple que

$$\begin{aligned}\dim(V_{k,l},l) &= \prod_{1\le i<j\le n+1} \frac{\langle \Lambda_{k,l}+\rho, \epsilon_i-\epsilon_j\rangle}{\langle \rho, \epsilon_i-\epsilon_j\rangle} \\ &= \prod_{1<j\le n} \frac{\frac{|l|-l}{2}+k+j-1}{j-1}. \prod_{1<i\le n} \frac{\frac{|l|+l}{2}+k+n+1-i}{n+1-i}. \\ &\frac{1}{n}\left(\frac{|l|+l}{2}+\frac{|l|-l}{2}+2k+n\right)\end{aligned}$$

y así

$$\dim(V_{k,l},l) = \binom{\frac{|l|-l}{2}+k+n-1}{\frac{|l|-l}{2}+k}.\binom{\frac{|l|+l}{2}+k+n-1}{\frac{|l|+l}{2}+k}.\frac{|l|+2k+n}{n}.$$

3. Caso particular: $G = \mathrm{S}U(1,1)$

Consideraremos ahora en particular el caso en que $G = \mathrm{S}U(1,1)$. Veremos que los resultados son enteramente análogos a los de los de $\mathrm{S}U(n,1), n>1$, pero la notación y algunas de las definiciones son esencialmente diferentes, por lo cual trataremos este caso en forma independiente.

La involución de Cartan viene dada por $\theta(X) = \overline{X}^t$ y $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}+\mathfrak{p}$, donde

$$\mathfrak{k} = \left\{\begin{bmatrix} \mathbf{i}t & 0 \\ 0 & -\mathbf{i}t\end{bmatrix} : t\in\mathbb{R}\right\} \quad \text{y} \quad \mathfrak{p} = \left\{\begin{bmatrix} 0 & b \\ \bar{b} & 0\end{bmatrix} : \ b\in\mathbb{C}\right\}.$$

Si $H_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}$, y $\mathfrak{a} = \mathbb{R}H_0$, entonces $M = \{\pm I\}$ y en este caso, $\hat{K} = \{\tau_l : l\in\mathbb{Z}\}$ y $\hat{M} = \{1,\epsilon\}$, donde ϵ denota el carácter no trivial de M. De esto obtenemos que, para cada $\nu\in\mathbb{C}$ se tienen dos series principales, $H^{\nu,+}$ y $H^{\nu,-}$ correspondientes a 1 y ϵ, respectivamente. Es claro entonces que $\tau_{l|\mathfrak{m}} = I$ si y sólo si $l\equiv 0\ (2)$, y de lo contrario $\tau_{l|\mathfrak{m}} = \epsilon$. Ahora bien, notemos que la Proposición 4.1 puede ser enunciada entonces, de la siguiente forma:

$$\Delta_l(C) = \frac{d^2}{dt^2} + 2\coth\, t\frac{d}{dt} + l^2\cosh\, t^{-2}. \tag{4.9}$$

Además, la Prop. 4.5 es en este caso

$$u(t)^l\circ(\Delta_l(C)+\rho^2)\circ u(t)^{-l} = \frac{d^2}{dt^2} + (\coth\, t + (1-2l)\tanh\, t)\frac{d}{dt} + \rho(l)^2,$$

donde $u(t) = 2\cosh\, t$.

Definimos ahora el operador diferencial en $\mathbb{R}^+$, de acuerdo con la Proposición 4.5:

$$L(l) = \frac{d^2}{dt^2} + (\coth(t) + (1-2l)\tanh(t))\frac{d}{dt}.$$

Como en el caso en que $n>1$, se pueden relacionar las funciones esféricas $\Phi_{\nu,l}$ con las soluciones de $L(l)f = (\nu^2-\rho(l)^2)f$, que vienen dadas por

$$\Phi_{\nu,l}(\exp(tH_0)) = (2\cosh\, t)^{-l}\phi_{i\nu}^{(0,-l)}(t).$$

De la misma manera, podemos ver que si tomamos la solución que aparece en (4.2) para $n = 1$ y $\nu \notin -\mathbb{N}$, obtenemos la siguiene autofunción de $\Delta_l(C)$ en A^+:

$$Q_{\nu,l}(\exp tH_0) = (2\cosh(t))^{-(\nu+\rho(l))}\ {}_2F_1\left(\frac{1-l+\nu}{2}, \frac{1+l+\nu}{2}, 1+\nu, \cosh(t)^{-2}\right),$$

que además satisface

$$(2\cosh t)^l \Phi_{\nu,l}(\exp(tH_0)) = c(\nu,l)Q_{-\nu,l}(a_t) + c(-\nu,l)Q_{\nu,l}(a_t)$$

donde

$$c(\nu,l) = \frac{2^{1-l-\nu}\Gamma(\nu)}{\Gamma(\frac{\nu+1+l}{2})\Gamma(\frac{\nu+1-l}{2})}.$$

Con todos estos elementos, podemos ahora probar el análogo al Teorema 4.6 en nuestro caso, obteniendo así la continuación meromorfa del núcleo de la resolvente $K_{\nu,l}(x,y) = -\frac{Q_{\nu,l}(x^{-1}y)}{2\nu c(\nu,l)}$. Tenemos entonces el siguiente teorema.

TEOREMA 4.12. *$\tilde{R}(\lambda(\nu,l))$ tiene polos simples en $\nu = \nu^{\pm}_{k,l}$, donde $\nu^-_{k,l} = -|l| - 1 - 2k$, con $k \in \mathbb{N}_0$, y $\nu^+_{k,l} = |l| - 1 - 2k$, con $k \in \mathbb{N}$ tal que $|l| - 1 - 2k \geq 0$. Si ν es un polo, como en los otros casos,* $\mathrm{Res}_{z=\nu}\, \tilde{R}(\lambda(z))(f) = p(\nu)\, f * \check{\Phi}_{\nu,-l}$.

Además, el rango de los residuos de $\tilde{R}(\lambda(\nu))$ en $\nu = \nu^-_{k,l}$ es un $(\mathfrak{g}, K)$-módulo de dimensión finita. Los módulos correspondientes a $\nu = \nu^+_{k,l}$ son infinitesimalmente equivalentes a representaciones de G de serie discreta holomorfa.

PRUEBA. Como la prueba puede ser hecha como en el caso general, sólo probaremos las afirmaciones de teoría de representaciones.

Como $\Phi_{\nu,-l}(g) = \langle \pi_{\nu,l} 1_{l,\nu}, 1_{l,\nu}\rangle$, donde $1_{l,\nu}(kan) = a^{-(\nu+\rho)}\tau_l(k)^{-1}$ está en $H^{\nu,+}$ si l es par, y en $H^{\nu,-}$ si l es impar.

Si denotamos con $k(\theta) = \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta}\end{bmatrix}$, entonces $\tau_l(k(\theta)) = e^{-il\theta}$, y luego

$$1_{\nu,l}(k(\theta)an) = a^{-(\nu+\rho)}e^{il\theta}.$$

Por otro lado, como $\mathfrak{g}$ es isomorfo a $\tilde{\mathfrak{g}} = sl(2,\mathbb{R})$, para cada $\nu \in \mathbb{C}$, $1_{\nu,l}$ pede ser identificada a la función de $SL(2,\mathbb{R})$ definida por

$$\phi_{-l}(\begin{bmatrix} e^{-\mathrm{i}t} & 0 \\ 0 & e^{-\mathrm{i}t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{2\mathrm{i}t} & e^{2\mathrm{i}t}x \\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}) = e^{(\nu+1)t}e^{-\mathbf{i}l\theta}.$$

Esta función esta en

$$H(\nu) = \{f : Sl(2,\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{C}\ :\ f(ank) = a^{\nu+1}f(k), f_{|K} \in L^2(K)\}$$

(ver [**L**] pág 116) y el $(\mathfrak{g}, K)$-módulo de $H^{\nu,\pm}$ generado por $1_{\nu,l}$ es isomorfo al $(\tilde{\mathfrak{g}}, K)$-submódulo de $H(\nu)$ generado por ϕ_{-l}.

Notemos que la diferencia en el signo se debe a las distintas elecciones en la descomposición de Iwasawa.

Entonces tenemos que $V_{\nu^-_{k,l},l} \simeq \sum_{j=1}^{|l|-1+2k} \langle \phi_{-(|l|+2(k-j))} \rangle$, y de ahí $V_{\nu^-_{k,l},l}$ tiene dimensión finita. Si $\nu^+_{k,l} \neq 0$, entonces obtenemos una serie discreta:

$$V_{\nu^+_{k,l},l} \quad \simeq \quad \begin{cases} \sum\limits_{\substack{j\equiv l\,(2)\\ j\leq -l+2k}} \langle \phi_j \rangle & l > 0 \\ \sum\limits_{\substack{j\equiv l\,(2)\\ j\geq -l-2k}} \langle \phi_j \rangle & l < 0 \end{cases}$$

Finalmente, podemos ver que si $\nu = 0$ es un polo, entonces l es impar, con lo cual también obtenemos un límite de serie discreta:

$$V_{0,l} \quad \simeq \quad \begin{cases} \sum\limits_{\substack{j\equiv l\,(2)\\ j\leq -1}} \langle \phi_j \rangle & l > 0 \\ \sum\limits_{\substack{j\equiv l\,(2)\\ j\geq 1}} \langle \phi_j \rangle & l < 0 \end{cases}$$

concluyendo así la prueba. $\square$

Bibliografía

[ADY] ANKER J.P., DAMEK E., YACOUB CH., *Spherical analysis on harmonic AN groups*, Annali della Scuola Normale Sup. di Pisa 23 (1996), 643-679.

[A] ANKER, *Sharp estimates for some functions of the Laplacian on noncompact symmetric spaces*, Duke Math. Journal, 165 N^o 2, 1992.

[D] DAMEK, *A Poisson kernel of Heisenberg type nilpotent Lie groups*, Colloquium Mathematicum 53 (1987), 239-247.

[DR] DAMEK E., RICCI F., *Harmonic analysis on solvable extensions of H-type groups*, Journal of Geometric Analysis 2 (1992), 213-248.

[Dt] DEITMAR A., *Invariant operators on higher K-types*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 412 (1990), 97-107.

[MM] MAZZEO R., MELROSE R., *Meromorphic Extension of the Resolvent on Complete Spaces with Asymptotically Constant Negative Curvature*, Jour. of Func. Anal. 75, 1987.

[EK] EGUCHI M., KOIZUMI S., *The Explicit Formula for the Harish Chandra C-function of SU(n,1) for Arbitrary Irreducible Representation of K which Contain One Dimensional K-types*, Proc. Japan acad. 70, Ser a, 1994.

[GV] GANGOLLI R., VARADARAJAN V., *Harmonic analysis of spherical functions on real reductive groups,* Springer Verlag, New York, 1988.

[Gd] GODEMENT R., *A theory of spherical functions I*, Trans. of the Amer. Math. Soc. 73 (1952).

[GZ1] GUILLOPÉ L., ZWORSKI M., *Polynomial bounds for the number of resonances for some complete spaces of constant negative curvature near infinity*, Asymptotic Analysis 11 (1995), 1-22.

[GZ2] GUILLOPÉ L., ZWORSKI M., *Scattering asymptotics for Riemann surfaces*, Annals of Mathematica 145 (1997).

[HO] HECKMAN G.J., OPDAM E.M., *Root system and hypergeometric functions I*, Compositio Mathematicae, 64 (1987), 329-352.

[H] HELGASON S., *Groups and Geometric Analysis*, Pure and Applied Math 113, Academic Press, 1984.

[H2] HELGASON S., *Symmetric Spaces*, Pure and Applied Math 113, Academic Press, 1984.

[K] KNAPP A. W., *Representation Theory de Semisimple Groups. Princeton Univ. Press*, Princeton, New Jersey, 1986.

[Kr] KOORNWINDER T., *Jacobi functions and Analysis on non compact semisimple Lie groups 'Special functions: Group Theorical Aspects and Applications'* pág. 1-85, Reidel, Dordrecht, 1984.

[L] LANG. S., *$SL(2,\mathbb{R})$*, *Springer Verlag*, New York, 1985.

[M] MELROSE R. B., *Geometric scattering theory*, Cambridge University Press, London and New York, 1995.

[Mt] MIATELLO R.J., *On the Plancherel measure for linear Lie groups of rank one*, Manuscripta Math. 29 (1979), 249-276.

[MW] MIATELLO R.J., WALLACH N.R., *The resolvent de the Laplacian on negatively curved locally symmetric spaces of finite volume*, Jour. Diff. Geometry 36 (1992), 663-698.

[MWl] MIATELLO R., WILL C., *The residues of the resolvent on Damek-Ricci spaces*, Proceedings of the A.M.S, vol. 128 No 4 (2000).

[O] OLBRICH M, *Die Poisson-Transformation für homogene Vektorbúndeln*, Thesis, Humboldt Universität, Berlin, 1994.

[P] PEDON E., *Analyse Harmonique des Formes Differentielles sur l'Espace Hyperbolique Réel*, Tesis doctoral, Université Poincaré (Nancy I), 1997.

[RS] Reed M., Simon B., *Fourier Analysis, self-adjointness*, (Methods of modern mathematical physics). *Academic Press.*, Orlando, 1975.

[R] Ricci F., *Spherical Functions on certain non-symmetric Harmonic Manifolds*, ICTP, preliminary lecture notes, SMR.686/18, 1993.

[S] Schilchtkrull H., *One dimensional K-types in the finite dimensional representations of semisimple Lie Groups: a Generalization of Helgason's Theorem*, Math. Scand. 54 (1984), 279-294.

[Sh] Shimeno, N., *The Plancherel formula for spherical functions with a one-dimensional K-type on a simply connected, simple Lie group of hermitian type*, Journal de Functional analysis, 121, 1994.

[W] Wallach, N , *Harmonic analysis on Homogeneous Spaces*, (Pure y appl. Math. 19). *Marcel Dekker Inc.*, New York, 1973.

[W2] Wallach N. R., *Real Reductive Groups I*, Pure and Applied Math 132, Academic Press, 1988.

[Wr] Warner , *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups I, II*, *Grundlehren Math. Wiss* 188 & 189. *Springer Verlag*, 1972.

[Wl] Will C., *The Residues of the Resolvent Kernel on $\mathbb{C}H(n)$*, Pacific Journal of Math., en prensa.

[Z] Zworski M., *Resonances in Physics and Geometry*, Notices of the A.M.S., March 1999.