EXTRAPOLACIÓN PARA CLASES DE PESOS LATERALES

María Silvina Riveros

INTRODUCCIÓN

En 1930 G. Hardy y J. Littlewood [Hd-L] introdujeron el siguiente operador

$$Mf(x) = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, dy \ ,$$

donde Q es cualquier cubo en IR^n que contiene a x. Se conoce a Mf como el operador o la función maximal de Hardy–Littlewood. Su importancia reside en que controla numerosas expresiones que aparecen en diversas ramas del análisis en virtud de la desigualdad

$$||Mf||_p \leq C||f||_p \quad \text{para todo } 1 < p \leq \infty \ . \tag{0.0}$$

Otro operador fundamental en análisis es la transformada de Hilbert definida como

$$Hf(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x-y|>\epsilon} \frac{f(y)}{x-y}\, dy \ .$$

M. Riesz probó en 1927 [R] una desigualdad similar a (0.0) para la transformada de Hilbert

$$||Hf||_p \leq C\, ||f||_p \quad \text{para todo } 1 < p < \infty \ .$$

Por otra parte, en 1972, R. Muckenhoupt [Mu] estudió problemas de este tipo con pesos. Más precisamente demostró que dado un par de funciones u, v no negativas y $1 \leq p < \infty$, entonces

$$\int_{\{|Mf|>\lambda\}} u \leq C\, \frac{1}{\lambda^p} \int |f|^p v \tag{0.1}$$

se cumple si y sólo si (u, v) pertenece a la llamada clase A_p. Decimos que $(u, v) \in A_p$ si se satisface que

(0.2) $$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q u\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q v^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} \leq C \ ,$$

para todo cubo Q, con C independiente de Q, cuando $1 < p < \infty$, y

(0.3) $$Mu(x) \leq C\, v(x) \ ,$$

para casi todo x en IR^n, en el caso de que $p = 1$.

La desigualdad (0.1) expresa el tipo débil (p,p) del operador Mf con pesos (u,v). En el mismo trabajo Muckenhoupt también prueba que la acotación fuerte con un solo peso w,

(0.4) $$||Mf||_{p,w} = \left(\int (Mf)^p w\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left(\int |f|^p w\right)^{\frac{1}{p}} = C||f||_{p,w} \ \ 1 < p < \infty \ ,$$

vale si y sólo si $(w,w) \in A_p$. En este caso simplemente diremos que $w \in A_p$.

Siguiendo con esta línea de investigación, en un trabajo de 1973, [Hu-Mu-Wh], R. Hunt, B. Muckenhoupt y R. Wheeden demuestran que

$$\int |Hf|^p w \leq C \int |f|^p w$$

vale si y sólo si $w \in A_p$, con $1 < p < \infty$.

El valioso aporte de José Luis Rubio de Francia, con sus notables resultados sobre las propiedades de extrapolación de las clases A_p, constituye un importante cambio de punto de vista, ya que resulta suficiente verificar la acotación del operador para pesos pertenecientes a una clase A_p, con un p determinado. Explícitamente en el artículo [RF] de 1984 se obtiene

Teorema de Extrapolación de Rubio de Francia. *Sea T un operador sublineal. Supongamos que existe un p_0 , $1 < p_0 < \infty$ tal que para toda $f \in L^{p_0}(w)$, y todo $w \in A_{p_0}$ se verifica que*

$$\int |Tf|^{p_0} w \leq C \int |f|^{p_0} w \ ,$$

entonces para todo p con $1 < p < \infty$ y $w \in A_p$, vale que

$$\int |Tf|^p w \leq C \int |f|^p w \ .$$

En trabajos posteriores de R. Coifman, P. Jones, J.L. Rubio de Francia, [C-J-RF], y J. García Cuerva, [GC], aparecen demostraciones más simples de este teorema.

Otro avance en este sentido fue conseguido por E. Harboure, R. Macías y C. Segovia en el artículo [H-M-Se 1] de 1988, donde se muestra que es posible aplicar extrapolación desde el extremo $p = \infty$.

Teorema de Extrapolación desde ∞. *Sea T sublineal definido en $C_0^\infty(IR^n)$ tal que*

$$||w\chi_Q||_\infty \frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf(y) - \frac{1}{|Q|}\int_Q Tf|\,dy \le C||fw||_\infty\,,$$

para todo Q y peso w tal que $w^{-1}\in A_1$. Entonces, para todo $w \in A_p$, con $1 < p < \infty$, se cumple que

$$\int |Tf|^p w \le C \int |f|^p w\ .$$

En el mismo trabajo se encara el estudio de las propiedades de extrapolación de las clases $A(p,q)$ definidas como las formadas por los pares de pesos (u,v) que satisfacen

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q u^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q v^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \le C\ , \tag{0.5}$$

para todo cubo Q, con C independiente de Q, cuando $1 < p, q < \infty\,$, y

$$||\chi_Q v||_\infty \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q v^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \le C\ , \tag{0.6}$$

para todo cubo Q, con C independiente de Q, en el caso de que $q=\infty$ y $1 < p \le \infty$.

Se obtienen resultados que permiten extrapolar desigualdades fuertes tanto desde índices finitos como desde los extremos. Además en [H-M-Se 2] se consiguen resultados de extrapolación para clases $A(p,q)$ considerando acotaciones débiles.

Estos teoremas proporcionan demostraciones más simples de la continuidad de operadores, como la transformada de Hilbert y las integrales fraccionarias, en espacios L^p con pesos, ya que en general la continuidad para los extremos es fácilmente verificable.

Los trabajos de E. Sawyer, [S] 1986, F. Martín-Reyes, P. Ortega y A. de la Torre, [MR-O-T] 1990 y [MR] 1993, muestran que el operador maximal admite una versión lateral, para la cual las clases de pesos adecuadas son mayores que las A_p de Muckenhoupt. Estas maximales laterales se definen

$$M^+f(x) = \sup_{h>0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f| \qquad ; \qquad M^-f(x) = \sup_{h>0}\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x}|f|\ . \tag{0.7}$$

En [S] se caracterizan los pares de pesos $(u,v)\in A_p^+$ para los que el operador M^+ verifica las desigualdades (0.1) y (0.4), como aquellos para los que existe un número A tal que

$$\sup_x \sup_{h>0}\left(\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} u\right)\left(\frac{1}{h}\int_x^{x+h} v^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} = A\,,$$

cuando $1 < p < \infty$, ó, si $p = 1$,

$$M^- u(x) \le Av(x) \text{ para casi todo } x \ .$$

El operador maximal a izquierda M^- tiene propiedades análogas. Martín–Reyes dá en [MR] una prueba muy simplificada de estos resultados.

Más aún H. Aimar, L. Forzani y F. Martín–Reyes en [A-F-MR] muestran que es posible encontrar versiones laterales para los operadores integrales singulares y estudian los pesos para los cuales estos están acotados de $L^p(v)$ en $L^p(v)$, (ver Capítulo III).

En [MR-O-T] se prueba la versión lateral del Teorema de Rubio de Francia.

En el presente trabajo se consideran las clases de pesos laterales $A^+(p,q)$ y $A^-(p,q)$, y se estudian las propiedades de extrapolación para acotaciones débiles y fuertes con un peso, generalizando [H-M-Se 1]. y acotaciones débiles para clases de pares de pesos laterales, que extienden los resultados de [H-M-Se 2].

Más explícitamente, en el Capítulo I se definen las clases $A^+(p,q)$ y $A^-(p,q)$, y se introducen versiones laterales con peso de los espacios de oscilación media acotada, $BMO^+(v)$ y $BMO^-(v)$. También se enuncian y se prueban resultados que nos serán útiles para probar los Teoremas de Extrapolación de los Capítulos II . y IV.

En el Capítulo II se prueban tres Teoremas de extrapolación, uno para las clases $A^+(p,q)$ desde (p_0,q_0), otro para las mismas clases desde (p_0,∞) y el tercero para las clases A_p^+ desde el extremo ∞. En los tres casos se obtienen resultados para un peso y acotaciones de tipo fuerte, (p,q) en los dos primeros y (p,p) en el último. Como aplicación consideramos el operador

$$Tf(x) = I_\alpha^+ f(x) = \int_x^\infty \frac{f(y)}{(y-x)^{1-\alpha}}\, dy \qquad 0 < \alpha < 1$$

y se prueba que si $v \in A^+(p,q)$, $1/p - 1/q = \alpha$, entonces

$$\int |Tf|^q v^q \le \int |f|^p v^p \ .$$

Esto proporciona una demostración simplificada del resultado obtenido en [MR-T].

En el Capítulo III se prueba que los operadores integrales singulares laterales, definidos en [A-F-MR], están acotados de $L^\infty(v)$ en $BMO^+(v)$. Este resultado permite la aplicación de los Teoremas de Extrapolación del Capítulo II, obteniendo una demostración simplificada de la acotación fuerte de estos operadores en $L^p(v)$, para $v \in A_p^+$, con $1 < p < \infty$.

En el Capítulo IV se prueba un Teorema de extrapolación débil para las clases $A^+(p/r, q/r)$ con un peso, desde $(p_0/r, q_0/r)$. Asimismo, se muestra como estos resultados implican acotaciones de tipo fuerte (p,q).

Por otra parte, se estudian las propiedades de extrapolación de las clases de pares de pesos $A^+(p/r, q/r)$ desde el extremo $A^+(p_0/r, \infty)$, obteniendo acotaciones de tipo débil (p, q). Este ultimo resultado nos permite demostrar que los operadores maximales fraccionarios

$$M_\alpha^{r,+} f(x) = \sup_{h>0} \left(\frac{1}{h^{1-\alpha}} \int_x^{x+h} |f(y)|^r \, dy \right)^{\frac{1}{r}} ,$$

con $0 < \alpha < 1 \leq r < \infty$, son de tipo débil (p, q) con pesos (u^q, v^p), supuesto que $(u^r, v^r) \in A^+(p/r, q/r)$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \alpha$. En el caso $r = 1$ nos proporciona una demostración más sencilla de este tipo de acotación para el operador maximal fraccionario lateral, M_α^+, que la que se muestra en [G-K].

CAPÍTULO I
RESULTADOS PRELIMINARES Y DEFINICIONES.

Sección 1. Clases de Pesos Laterales.

Llamaremos peso a toda función w localmente integrable y no negativa. Dado $p \in I\!R$, p' es el índice conjugado de p, es decir $1/p + 1/p' = 1$. Como es usual cuando se trabaja con acotaciones con pesos adoptaremos la convención $0.\infty = 0$. Además, dado un conjunto medible $E \subset I\!R$, denotaremos

$$v(E) = \int_E v, \qquad v(a,b) = \int_a^b v \qquad \text{y} \qquad |E| = \int_E dx \ .$$

Se dice que un par de pesos (u, v) pertenece a la clase A_p^+, $1 \le p < \infty$, si existe una constante C tal que

$$\left(\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} u\right)\left(\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} v^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} \le C, \tag{1.1}$$

para todo $h > 0$ y $x \in I\!R$, cuando $p > 1$; y tal que

$$M^- u(x) \le C v(x) \ ,$$

para casi todo $x \in I\!R$, cuando $p = 1$. Análogamente se definen las clases A_p^-. Recordamos que los operadores M^+ y M^- fueron definidos en (0.7).

Para el caso de un solo peso, decimos que $v \in A_p^+$, $1 \le p < \infty$, si $(v, v) \in A_p^+$. En [MR-O-T] se considera también la clase A_∞^+, definida como formada por los pesos v para los cuales existen números positivos K y δ tales que para todos $a < b < c$ y todo conjunto medible $E \subset (b, c)$, se tiene

$$\frac{|E|}{c-a} \le K\left(\frac{v(E)}{v(a,b)}\right)^{\delta} \ .$$

La mayoría de los resultados son enunciados y probados en la versión "+" pero cabe destacar que, como es fácil verificar, continuan válidos en su versión "–".

Enunciaremos a continuación (1.2 a 1.5) algunas de las propiedades básicas de las clases A_p^+, con p finito, contenidas en [S].

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

1.2 Teorema de Factorización. *Un peso w está en A_p^+, con $1 < p < \infty$, si y sólo si existen $w_0 \in A_1^+$ y $w_1 \in A_1^-$ tales que $w_0 w_1^{1-p} = w$.*

La demostración del Teorema anterior se basa en la caracterización de las clases A_p^+ en términos de M^+, dada por Sawyer, y el argumento desarrollado por Coifman, Jones y Rubio de Francia en [C-J-RF].

Por otra parte es fácil verificar que $A_q^+ \subset A_p^+$ si $q < p$; en realidad vale

1.3 Teorema. *Si $w \in A_p^+$, con $1 < p < \infty$, existe $\epsilon > 0$ tal que $w \in A_{p-\epsilon}^+$ y por lo tanto $A_p^+ = \cup_{q<p} A_q^+$.*

1.4 Teorema. *$w \in A_p^+$ si y sólo si $w^{1-p'} \in A_{p'}^-$.*

1.5 Teorema. *Si $w \in A_1^+$ entonces existe $\delta > 0$ tal que $w^{1+\delta} \in A_1^+$.*

Para el caso $p = \infty$ son válidos los Teoremas 1.6 y 1.7, cuyas demostraciones pueden ser encontradas en [MR-O-T].

1.6 Teorema. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

i. $w \in A_\infty^+$.

ii. Existen constantes positivas K y δ tales que para todo $a < b < c$ y E medible contenido en (a, b)

$$\frac{w(E)}{w(a,c)} \leq K \left(\frac{|E|}{c-b} \right)^\delta .$$

iii. Existe p con $1 < p < \infty$ tal que $w \in A_p^+$.

iv. Existen η, $0 < \eta \leq 1/2$ y $K > 0$ tales que

$$\frac{w(a,b)}{b-a} \exp \left(\frac{1}{d-c} \int_c^d \log(\frac{1}{w}) \right) \leq K ,$$

para todo $a < b \leq c < d$ tales que $b - a = d - c = \eta(d - a)$.

1.7 Teorema. *Si $1 < p < \infty$, son equivalentes:*

i. $w \in A_\infty^+$ y $w^{\frac{-1}{p-1}} \in A_\infty^-$.

ii. $w \in A_p^+$.

Consideraremos además clases $A^+(p, q)$ y $A^-(p, q)$, formadas por pares de pesos. Dados $1 < p \leq \infty$ y $1 \leq q < \infty$, decimos que $(u, v) \in A^+(p, q)$ si

$$(1.8) \qquad \left(\frac{1}{h} \int_{x-h}^x u^q \right)^{1/q} \left(\frac{1}{h} \int_x^{x+h} v^{-p'} \right)^{1/p'} \leq C \text{ para todo } h > 0,\ x \in I\!R \, ;$$

$(u, v) \in A^+(p, \infty)$ si

$$(1.9) \qquad \|\chi_{[x-h,x]} u\|_\infty \left(\frac{1}{h} \int_x^{x+h} v^{-p'} \right)^{1/p'} \leq C \quad \text{para todo } h > 0,\ x \in I\!R \, ;$$

$(u,v) \in A^-(p,q)$, $1 < p \le \infty$ y $1 \le q < \infty$, si

$$(1.10) \quad \left(\frac{1}{h}\int_x^{x+h} u^q\right)^{1/q} \left(\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} v^{-p'}\right)^{1/p'} \le C \quad \text{para todo } h>0,\ x \in I\!R\ ;$$

y $(u,v) \in A^-(p,\infty)$ si

$$(1.11) \qquad \|\chi_{[x,x+h]}u\|_\infty \left(\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} v^{-p'}\right)^{1/p'} \le C \quad \text{para todo } h>0,\ x \in I\!R\ .$$

Diremos simplemente que $v \in A^+(p,q)$, $A^+(p,\infty)$, $A^-(p,q)$, $A^-(p,\infty)$, si el par (v,v) está en dicha clase.

1.12 Lema. *Sea* $1 < p \le \infty$, *y* $1 \le q \le \infty$.

i. $(u,v) \in A^+(p,q)$ *sii* $(u^q, v^q) \in A_r^+$ *con* $r = 1 + q/p'$.

ii. $(u,v) \in A^+(p,q)$ *sii* $(v^{-p'}, u^{-p'}) \in A_r^-$ *con* $r = 1 + p'/q$.

iii. $(u,v) \in A^+(p,\infty)$ *sii* $(v^{-p'}, u^{-p'}) \in A_1^-$.

iv. $(u,v) \in A^-(p,q)$ *sii* $(u^q, v^q) \in A_r^-$ *con* $r = 1 + q/p'$.

v. $(u,v) \in A^-(p,q)$ *sii* $(v^{-p'}, u^{-p'}) \in A_r^+$ *con* $r = 1 + p'/q$.

vi. $(u,v) \in A^-(p,\infty)$ *sii* $(v^{-p'}, u^{-p'}) \in A_1^+$.

vii. $(u,v) \in A^+(p,p)$ *sii* $(u^p, v^p) \in A_p^+$.

Demostración. Probaremos sólo una de las implicaciones de i, ii, y vii, y en forma completa el inciso iii ya que el resto se demuestra de manera similar.

i. Supongamos que $(u,v) \in A^+(p,q)$, y $r = 1 + q/p'$; luego

$$\left(\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} u^q\right)\left(\frac{1}{h}\int_x^{x+h} (v^q)^{-\frac{1}{r-1}}\right)^{r-1} = \left(\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} u^q\right)\left(\frac{1}{h}\int_x^{x+h} (v^q)^{1/q/p'}\right)^{q/p'}$$
$$= \left(\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} u^q\right)\left(\frac{1}{h}\int_x^{x+h} v^{-p'}\right)^{q/p'} \le C^q\ ,$$

por lo tanto $(u^q, v^q) \in A_r^+$.

ii. Sean $(u,v) \in A^+(p,q)$ y $r = 1 + p'/q$, entonces

$$\left(\frac{1}{h}\int_x^{x+h} v^{-p'}\right)\left(\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} (u^{-p'})^{-\frac{1}{r-1}}\right)^{r-1} = \left(\frac{1}{h}\int_x^{x+h} v^{-p'}\right)\left(\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} u^q\right)^{p'/q} \le C^{p'}.$$

Por lo tanto $(v^{-p'}, u^{-p'}) \in A_r^-$.

iii. Dado el par $(u,v) \in A^+(p,\infty)$,

$$\|\chi_{[x-h,x]}u\|_\infty \left(\frac{1}{h}\int_x^{x+h} v^{-p'}\right)^{1/p'} \leq C$$

se cumple para todo $x \in IR$ y para todo $h > 0$; entonces para casi todo x y para todo $h > 0$ tenemos que

$$u(x)\left(\frac{1}{h}\int_x^{x+h} v^{-p'}\right)^{1/p'} \leq C \ .$$

Por lo tanto para casi todo x es

$$u^{-p'}(x)M^+(v^{-p'}) \leq C \ ,$$

luego $(v^{-p'}, u^{-p'}) \in A_1^-$. Recíprocamente, si $(v^{-p'}, u^{-p'}) \in A_1^-$, vale

$$u(x)(M^+(v^{-p'}))^{1/p'}(x) \leq C$$

para casi todo $x \in IR$. Sean $x \in IR$ y $h > 0$ fijos. Si $\|\chi_{[x-h,x]}u\|_\infty < \infty$, entonces existe $t \in [x-h,x]$ tal que $\|\chi_{[x-h,x]}u\|_\infty \leq 2u(t)$. Luego

$$\begin{aligned}
||\chi_{[x-h,x]}u||_\infty \left(\frac{1}{h}\int_x^{x+h} v^{-p'}\right)^{1/p'} &\leq 2u(t)\left(\frac{x+h-t}{h}\frac{1}{x+h-t}\int_t^{x+h} v^{-p'}\right)^{1/p'} \\
&\leq Cu(t)\left(\frac{1}{x+h-t}\int_t^{x+h} v^{-p'}\right)^{1/p'} \\
&\leq Cu(t)(M^+(v^{-p'}))^{1/p'}(t) \\
&\leq C \ .
\end{aligned}$$

Si $||\chi_{[x-h,x]}u||_\infty = \infty$, entonces para todo $n \in IN$ existe x_n en $[x-h,x]$ tal que $u^{\frac{1}{p'}}(x_n) > n$. Por lo tanto tenemos que

$$nM^+(v^{-p'})(x_n) \leq C \ .$$

Resulta

$$\frac{n}{2h}\int_x^{x+h} v^{-p'} \leq \frac{n}{x+h-x_n}\int_{x_n}^{x+h} v^{-p'} \leq C$$

para todo n, luego

$$0 \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} v^{-p'} \leq \frac{C}{n} \ .$$

Y así tenemos que $||\chi_{[x-h,x]}u||_\infty \frac{1}{h}(\int_x^{x+h} v^{-p'})^{1/p'} = 0$.

vii. Sea $(u,v) \in A^+(p,p)$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} u^p\right)\left(\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} v^{p(-\frac{1}{p-1})}\right)^{p-1} &= \left(\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} u^p\right)\left(\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} v^{-p'}\right)^{p-1}\\ &= \left(\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} u^p\right)\left(\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} v^{-p'}\right)^{\frac{p}{p'}}\\ &\leq C^p\ . \quad \square\end{aligned}$$

El Lema 1.13 se prueba en [MR-T], incluímos su demostración para facilitar la lectura y dado que es utilizado en varias oportunidades.

1.13 Lema. *Si $v \in A_p^+$ con $1 < p < \infty$, entonces para todo $N > 0$*

$$\int_{x \leq -2N} \frac{v(x)}{|x|^p}\, dx < \infty\ .$$

Demostración. Primero notemos que si $v \in A_p^+$ entonces

$$v(a,b) \leq K\left(\frac{c-a}{c-b}\right)^p v(b,c)$$

para todo $a < b < c$. También sabemos por el Teorema 1.3 que existe $s < p$ tal que $v \in A_s^+$. Luego

$$v(a,b) \leq K\left(\frac{c-a}{c-b}\right)^s v(b,c)\ .$$

Aplicando esta propiedad

$$\begin{aligned}\int_{x \leq -2N} \frac{v(x)}{|x|^p}\, dx &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{ir}N^r}\int_{-2^{i+1}N}^{-2^iN} v(x)\, dx\\ &\leq K\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2^{(i+1)s}}{2^{ir}N^r} v(-N,0)\\ &\leq \frac{K}{N^r} v(-N,0)\ . \quad \square\end{aligned}$$

Sección 2. $BMO^+(v)$, y acotaciones para $f_+^\#$

En el trabajo [MR-T], Martín–Reyes y de la Torre definen la versión lateral de los espacios de oscilación media acotada y de la función $f^\#$. En esta sección introduciremos una versión con pesos de BMO^+ y BMO^-.

Recordemos primero algunos conceptos. Si f es localmente integrable, denotamos por

$$f_+^{\#}(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \left(f(y) - \frac{1}{h} \int_{x+h}^{x+2h} f(z)\, dz \right)^+ dy \ ,$$

y

$$f_-^{\#}(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{h} \int_{x-h}^{x} \left(f(y) - \frac{1}{h} \int_{x-2h}^{x-h} f(z)\, dz \right)^+ dy \ ,$$

donde $z^+ = \max(z,0)$.
Decimos que $f \in BMO^+$ ($f \in BMO^-$) si y sólo si $||f_+^{\#}||_\infty < \infty$ ($||f_-^{\#}||_\infty < \infty$). Notar que si f es creciente entonces $f_+^{\#} = 0$ y por lo tanto $f \in BMO^+$, de igual forma si f es decreciente $f_-^{\#} = 0$ y por lo tanto $f \in BMO^-$. También vemos que si $f \in BMO^+$ entonces $-f \in BMO^-$. Los conjuntos BMO^+ y BMO^- no son espacios vectoriales pues, por ejemplo, no son cerrados para la multiplicación por escalar.

Dados f localmente integrable y v un peso, definimos

$$|||f|||_{v,+} = \sup_x \sup_{h>0} \|v\chi_{[x-h,x]}\|_\infty \left(\frac{1}{h} \int_x^{x+h} \left(f(y) - \frac{1}{h} \int_{x+h}^{x+2h} f(z)\, dz \right)^+ dy \right)$$

y decimos que $f \in BMO^+(v)$ si $|||f|||_{v,+} < \infty$. De forma análoga se define $BMO^-(v)$.

1.14 Lema.
Sea $v \geq 0$ una función localmente integrable; entonces

$$\|vf_+^{\#}\|_\infty \ \leq \ |||f|||_{v,+} \ \leq \ C\|vM^+f\|_\infty \ .$$

Demostración. Sea x un punto de Lebesgue de v con $v(x) > 0$; así, para todo $h > 0$, es $0 < v(x) \leq \|v\chi_{[x-h,x]}\|_\infty$. De esta manera

$$v(x) \left(\frac{1}{h} \int_x^{x+h} \left(f(y) - \frac{1}{h} \int_{x+h}^{x+2h} f(z)\, dz \right)^+ dy \right)$$
$$\leq \|v\chi_{[x-h,x]}\|_\infty \left(\frac{1}{h} \int_x^{x+h} \left(f(y) - \frac{1}{h} \int_{x+h}^{x+2h} f(z)\, dz \right)^+ dy \right) \leq |||f|||_{v,+} \ ,$$

luego $v(x)f_+^{\#}(x) \leq |||f|||_{v,+}$ para casi todo x, y así obtenemos

$$\|vf_+^{\#}\|_\infty \ \leq \ |||f|||_{v,+} \ .$$

Podemos suponer $\|v\chi_{[x-h,x]}\|_\infty < \infty$. Por lo tanto existe $t \in [x-h,x]$ tal que $\|v\chi_{[x-h,x]}\|_\infty \le 2v(t)$. Luego

$$\begin{aligned}\|v\chi_{[x-h,x]}\|_\infty \frac{1}{h}\int_x^{x+h} &\left(f(y) - \frac{1}{h}\int_{x+h}^{x+2h} f\right)^+ dy \\ &\le 2v(t)2\frac{1}{h}\int_x^{x+2h} |f| \\ &\le 4v(t)\frac{x+2h-t}{h}\frac{1}{x+2h-t}\int_t^{x+2h} |f| \\ &\le 4v(t)\cdot 3M^+f(t) \\ &\le C\|vM^+f\|_\infty \,. \quad \square\end{aligned}$$

El Teorema que sigue, probado en [MR-T], es de fundamental importancia y por esta razón incluímos su demostración.

1.15 Teorema. *Sea $v \in A_\infty^+$ y supongamos $f \ge 0$ tal que $\int (M^+f)^{p_0} v < \infty$ para algún p_0, $1 < p_0 < \infty$. Entonces para todo $p_0 \le p < \infty$ se tiene*

$$\int_{-\infty}^{\infty} (M^+f)^p v \le C \int_{-\infty}^{\infty} (f_+^{\#})^p v \,.$$

Demostración. Sea $\lambda > 0$. Sean (a_i, b_i) las componentes conexas de

$$\{x : M^+f(x) > \lambda\} \,.$$

Primero notemos que por lo supuesto para f y v, tenemos que $b_i < \infty$. Como $M^+f \in L^{p_0}(v)$, entonces $\int_{a_i}^{b_i} v < \infty$. Ahora, si $b_i = \infty$, tomemos $b < c$ arbitrarios tales que $b > a_i$. Por Teorema 1.6 sabemos que existen K y $\delta > 0$ tales que

$$v(a_i, b) \le K\left(\frac{b-a_i}{c-b}\right)^\delta v(a_i, c) \,.$$

Haciendo tender c a ∞ tenemos que $v(a_i, b) = 0$, pues $v(a_i, \infty) < \infty$, lo que es una contradicción.

Como (a_i, b_i) son las componentes conexas de $\{x : M^+f(x) > \lambda\}$ tenemos que

$$\lambda \le \frac{1}{b_i - x}\int_x^{b_i} f$$

para todo $x \in (a_i, b_i)$. Fijemos $(a_i, b_i) = (a, b)$. Queremos probar que para algún $\delta > 0$, y para todo γ, $0 < \gamma < 1$, existe un K tal que

$$(1.16) \qquad v(\{x \in (a,b) : M^+f(x) > 2\lambda,\ f_+^{\#}(x) \le \gamma\lambda\}) \le K\gamma^\delta v(a,b) \,.$$

Como los intervalos (a,b) son disjuntos, se sigue la desigualdad de los buenos λ's, es decir

$$(1.17) \qquad v(\{x : M^+f(x) > 2\lambda,\ f_+^\#(x) \le \gamma\lambda\}) \le K\gamma^\delta v(\{x : M^+f(x) > \lambda\})\ .$$

Por lo que supusimos sobre M^+f tenemos que para todo $A < \infty$

$$\int_0^A \lambda^{p-1} v(\{x : M^+f(x) > \lambda\})\, d\lambda < \infty\ .$$

Luego

$$(1.18) \qquad \int_0^A \lambda^{p-1} v(\{x : M^+f(x) > \lambda\})\, d\lambda$$

$$\le 2^p \int_0^A \lambda^{p-1} v(\{x : M^+f(x) > 2\lambda,\, f_+^\#(x) \le \gamma\lambda\})\, d\lambda$$
$$+ 2^p \int_0^\infty \lambda^{p-1} v(\{x : f_+^\#(x) > \gamma\lambda\})\, d\lambda\ .$$

Ahora, usando (1.17), obtenemos que

$$(1.18) \le C2^p\gamma^\delta \int_0^A \lambda^{p-1} v(\{x : M^+f(x) > \lambda\})\, d\lambda + C||f_+^\#||_{p,v}^p\ .$$

Por lo tanto

$$(1 - C2^p)\gamma^\delta \int_0^A \lambda^{p-1} v(\{x : M^+f(x) > \lambda\})\, d\lambda \le ||f_+^\#||_{p,v}^p\ ,$$

lo que implica el Teorema.

Para probar (1.16), sean $\{(c_j, d_j)\}$ las componentes conexas de $\{x : M^+f(x) > 2\lambda\}$ incluídas en (a, b) y consideremos la sucesión $x_0 = \tilde{a}$, $x_{n+1} = (x_n + b)/2$, donde $\tilde{a}$ es tal que $a < \tilde{a} < b$. Afirmamos que:

$$(1.19) \qquad |\{x \in (x_n, x_{n+1}) : M^+f(x) > 2\lambda,\ f_+^\#(x) \le \gamma\lambda\}| \le K\gamma(x_{n+2} - x_{n+1})\ .$$

Supongamos que existe $x \in (x_n, x_{n+1})$ tal que $M^+f(x) > 2\lambda$ y $f_+^\#(x) \le \gamma\lambda$. Si no, no hay nada que probar. Sea α el ínfimo de tales x. Luego α pertenece a algún (c_j, d_j). Digamos que $\alpha \in (c_1, d_1)$. Luego, si

$$E_n = \{x \in (x_n, x_{n+1}) : M^+f(x) > 2\lambda,\ f_+^\#(x) \le \gamma\lambda\}$$

tenemos

$$E_n \subset \cup_{c_j > c_1} (c_j, d_j) \cup (\alpha, d_1)\ .$$

Sea $h = b - \alpha$. Como $\alpha \in (c_1, d_1)$ y $M^+f(b) \le \lambda$,

$$\text{(1.20)} \qquad \frac{1}{d_1-\alpha}\int_\alpha^{d_1}\left(f(y)-\frac{1}{h}\int_b^{b+h} f\right)^+ dy \geq \frac{1}{d_1-\alpha}\int_\alpha^{d_1} f - \frac{1}{h}\int_b^{b+h} f$$
$$\geq 2\lambda - \lambda \; .$$

Por otra parte, si $c_j > c_1$

$$\text{(1.21)} \qquad \frac{1}{d_j-c_j}\int_{c_j}^{d_j}\left(f(y)-\frac{1}{h}\int_b^{b+h} f\right)^+ dy \geq \frac{1}{d_j-c_j}\int_{c_j}^{d_j} f - \frac{1}{h}\int_b^{b+h} f$$
$$\geq 2\lambda - \lambda \; .$$

Sumando las desigualdades (1.20) y (1.21) obtenemos,

$$\lambda|E_n| \leq \int_\alpha^b \left(f(y)-\frac{1}{h}\int_b^{b+h} f\right)^+ dy \; .$$

Notando que $f_+^\#(\alpha) \leq \gamma\lambda$, resulta

$$|E_n| \leq \gamma(b-a) \leq \gamma(b-x_n) = 4\gamma(x_{n+2}-x_{n+1}) \; ,$$

lo que prueba (1.19). Aplicando la condición A_∞^+ al conjunto E_n y a los intervalos (x_n, x_{n+1}) y (x_{n+1}, x_{n+2}), obtenemos

$$\frac{v(E_n)}{v(x_n, x_{n+2})} \leq K\left(\frac{|E_n|}{x_{n+2}-x_{n+1}}\right)^\delta \leq K\gamma^\delta \; .$$

Finalmente, si multiplicamos esta desigualdad por $v(x_n, x_{n+1})$, y si sumamos en n, deducimos (1.16) con $\tilde{a}$ en lugar de a. Haciendo tender $\tilde{a}$ a a resulta (1.16) . $\square$

1.22 Corolario.

Si $v \in A_{p_0}^+$ y $0 \leq f \in L^{p_0}(v)$ para algún $1 < p_0 \leq p$, entonces existe C independiente de p_0 y f tal que

$$\|f\|_{p,v} \leq C\|f_+^\#\|_{p,v} \, .$$

Demostración. Para ver esto, sólo basta notar que $f(x) \leq M^+f(x)$ para casi todo x, y si $f \in L^{p_0}(v)$ y $v \in A_{p_0}^+$, entonces $\int (M^+f)^{p_0} v \leq \int |f|^{p_0} v < \infty$, luego por el Teorema 1.15

$$\|f\|_{p,v} \leq \|M^+f\|_{p,v} \leq C\|f_+^\#\|_{p,v} \, . \quad \square$$

Los Lemas 1.23 y 1.24 son mencionados en [MR-O-T], pero probados aparecen en la Tesis de P.Ortega. La versión biláterra de los mismos fue obtenida por García Cuerva en [GC] y Rubio de Francia [RF].

1.23 Lema. *Sean $v \in A_p^+$ y $1 \le p_0 < p < \infty$. Entonces para toda $h \ge 0$ en $L^{(p/p_0)'}(v)$ existe $H \ge h$ tal que*
i. $\|H\|_{(p/p_0)',v} \le C\|h\|_{(p/p_0)',v}$
ii. $(hv, Hv) \in A_{p_0}^+$.

Demostración. Existe un único $t \in (0,1]$ tal que $p_0 = p - tp/p'$. Dada h, definimos $H = (v^{-1}M^-(h^{1/t}v))^t$. Es evidente que $H \ge h$ para casi todo x. Para probar i, debemos tener en cuenta que $(p/p_0)' = p'/t$. Si usamos la definición de H, así como el hecho de que $v^{1-p'} \in A_{p'}^-$ y que en este caso M^- es de tipo fuerte (p', p'), obtenemos:

$$\begin{aligned} ||H||_{p'/t,v}^{p'/t} &= \int_{I\!R} v^{-p'}(M^-(h^{1/t}v))^{p'} v = \int_{I\!R} (M^-(h^{1/t}v))^{p'} v^{1-p'} \\ &\le C \int_{I\!R} (h^{1/t}v)^{p'} v^{1-p'} = C \int_{I\!R} h^{p'/t} v \\ &= C||h||_{p'/t,v}^{p'/t} \ . \end{aligned}$$

La prueba de la propiedad ii para $p_0 = 1$ (es decir para $t = 1$) es directa, ya que por definición de H se tiene $M^-(hv) = Hv$. Por lo tanto, $(hv, Hv) \in A_1^+$.

Supongamos $p_0 > 1$ (es decir, $0 < t < 1$). Sean $x \in I\!R$ y $r > 0$ fijos. Si usamos la desigualdad de Hölder, la definición de M^- y el hecho de que $v \in A_p^+$, obtenemos:

$$\left(\int_{x-r}^{x} hv\right) \left(\int_{x}^{x+r} H^{-1/(p_0-1)} v^{-1/(p_0-1)}\right)^{p_0-1}$$

$$\begin{aligned} &\le \left(\int_{x-r}^{x} h^{1/t} v\right)^{t} \left(\int_{x-r}^{x} v\right)^{1-t} \left(\int_{x}^{x+r} (M^-(h^{1/t}v))^{-tp'/(1-t)p} v^{1-p'}\right)^{(1-t)(p-1)} \\ &\le \left(\int_{x-r}^{x} h^{1/t} v\right)^{t} \left(\int_{x-r}^{x} v\right)^{1-t} \left(\int_{x}^{x+r} \left[\frac{(s-(x-r))}{\int_{x-r}^{s} h^{1/t} v}\right]^{tp'/(1-t)p} v^{1-p'}(s)\, ds\right)^{(1-t)(p-1)} \\ &\le \left(\int_{x-r}^{x} h^{1/t} v\right)^{t} \left(\int_{x-r}^{x} v\right)^{1-t} (2r)^t \left(\int_{x-r}^{x} h^{1/t} v\right)^{-t} \left(\int_{x}^{x+r} v^{1-p'}\right)^{(1-t)(p-1)} \\ &\le Cr^{1+p(1-t)} = Cr^{p_0}. \quad \square \end{aligned}$$

1.24 Lema.
i. Si $v \in A_p^+$ y $1 \le p_0 < p < \infty$, entonces para toda $h \ge 0$ en $L^{(p/p_0)'}(v)$ existe $H \ge h$ tal que $Hv \in A_{p_0}^+$ y

$$\|H\|_{(p/p_0)',v} \le C\|h\|_{(p/p_0)',v} \ .$$

ii. Si $v \in A_p^+$ y $1 < p < p_0$, entonces para toda $h \geq 0$ en $L^{p/(p_0-p)}(v)$ existe $H \geq h$ tal que $H^{-1}v \in A_{p_0}^+$ y

$$\|H\|_{p/(p_0-p),v} \leq C\|h\|_{p/(p_0-p),v} \ .$$

iii. Si $v \in A_p^-$ y $1 \leq p_0 < p < \infty$, entonces para toda $h \geq 0$ en $L^{(p/p_0)'}(v)$ existe $H \geq h$ tal que $Hv \in A_{p_0}^-$ y

$$\|H\|_{(p/p_0)',v} \leq C\|h\|_{(p/p_0)',v} \ .$$

iv. Si $v \in A_p^-$ y $1 < p < p_0$, entonces para toda $h \geq 0$ en $L^{p/(p_0-p)}(v)$ existe $H \geq h$ tal que $H^{-1}v \in A_{p_0}^-$ y

$$\|H\|_{p/(p_0-p),v} \leq C\|h\|_{p/(p_0-p),v} \ .$$

Demostración. Sólo veremos i y ii, la prueba de los otros dos items es similar. Comencemos con

i. Sea $h_0 = h$. Por el Lema anterior, existe $h_1 \geq h_0$ tal que $||h_1||_{(p/p_0)',v} \leq C||h_0||_{(p/p_0)',v}$ y $(h_0v, h_1v) \in A_{p_0}^+$, lo cual implica

$$\int_{\{M^+f>\lambda\}} h_0 v \leq \frac{C}{\lambda^{p_0}} \int_{I\!R} |f|^{p_0} h_1 v \ .$$

Procediendo por inducción, dada h_j obtenemos h_{j+1} con

$$||h_{j+1}||_{(p/p_0)',v} \leq C||h_j||_{(p/p_0)',v} \leq \cdots \leq C^{j+1}||h_0||_{(p/p_0)',v}$$

y

$$\int_{\{M^+f>\lambda\}} h_j v \leq \frac{C}{\lambda^{p_0}} \int_{I\!R} |f|^{p_0} h_{j+1} v \ . \tag{1.24}$$

Sea $H = \sum_{j=0}^{\infty}(C+1)^{-j}h_j$. Como $(C+1)^{-j}||h_j||_{(p/p_0)',v} \leq (\frac{C}{C+1})^j||h||_{(p/p_0)',v}$ para todo j, H está bien definida y pertenece a $L^{(p/p_0)'}(v)$. Además es claro que $H > h$. Por último, sumando sobre j en (1.24) después de multiplicar por $(C+1)^{-j}$, obtenemos:

$$\int_{\{M^+f>\lambda\}} Hv \leq \frac{C(C+1)}{\lambda^{p_0}} \int_{I\!R} |f|^{p_0} Hv \ .$$

Por lo tanto $Hv \in A_{p_0}^+$.

ii. Si $1 < p < p_0$, entonces $1 < p_0' < p'$. Por iii, para cada función $\tilde{h}$ no negativa en $L^{p/(p_0-p)}(v^{1-p'})$ existe $\tilde{H} \geq \tilde{h}$ tal que $\tilde{H}v^{1-p'} \in A^-_{p_0'}$ y

$$\|\tilde{H}\|_{(p'/p_0')',v^{1-p'}} \leq C\|\tilde{h}\|_{(p'/p_0')',v^{1-p'}} .$$

Dada $h \in L^{p/(p_0-p)}(v)$, existe $\tilde{h} \in L^{(p'/p_0')'}(v^{1-p'})$ tal que

$$h = \tilde{h}^{p_0-1}v^{\frac{p_0-p}{p-1}} .$$

Sea $\tilde{H}$ la función asociada a $\tilde{h}$ (según iii.) y sea $H = \tilde{H}^{p_0-1}v^{\frac{p_0-p}{p-1}}$. Entonces,

$$H^{-1}v = \tilde{H}^{1-p_0}v^{(1-p')(1-p_0)}$$

verifica la condición $A^+_{p_0}$, ya que $\tilde{H}v^{1-p'} \in A^-_{p_0'}$. Finalmente

$$\|H\|^{p/(p_0-p)}_{p/(p_0-p),v} \leq \|\tilde{H}\|^{(p'/p_0')}_{(p'/p_0')',v^{1-p'}} \leq C\|\tilde{h}\|^{(p'/p_0')}_{(p'/p_0')',v^{1-p'}} \leq \|h\|^{p/(p_0-p)}_{p/(p_0-p),v} . \quad \square$$

Nota : La constante C que aparece en las diferentes desigualdades de estos dos Lemas, sólo depende de la constante de acotación fuerte (p,p) de las M^+ y M^-, y no depende de H, ni de h.

CAPÍTULO II
TEOREMAS DE EXTRAPOLACIÓN FUERTES PARA LAS CLASES $A^+(p,q)$

En este Capítulo se prueban tres Teoremas de extrapolación, uno para las clases $A^+(p,q)$ desde (p_0,q_0), otro para las mismas clases desde (p_0,∞) y el tercero para las clases A_p^+ desde el extremo ∞. En los tres casos se obtienen resultados para un peso y acotaciones de tipo fuerte, (p,q) en los dos primeros y (p,p) en el último. Como aplicación del segundo teorema consideramos el operador

$$Tf(x) = I_\alpha^+ f(x) = \int_x^\infty \frac{f(y)}{(y-x)^{1-\alpha}}\,dy \qquad 0<\alpha<1$$

y probamos que si $v \in A^+(p,q)$, $1/p - 1/q = \alpha$, entonces

$$\int |Tf|^q v^q \le \int |f|^p v^p \ .$$

Esto proporciona una demostración simplificada del resultado obtenido en [MR-T].

Estos teoremas generalizan la versión de los resultados del trabajo “Extrapolation Results for Classes of Weights” de Harboure, Macías y Segovia (ver [H-M-Se 1]).

2.1 Teorema I.

Sea T un operador sublineal definido en $C_0^\infty(I\!R)$. Si la desigualdad

$$\left(\int |Tf|^q v^q\right)^{1/q} \le C(v)\left(\int |f|^p v^p\right)^{1/p}$$

vale para algún par (p_0,q_0), $1<p_0\le q_0<\infty$, y para todo peso v perteneciente a la clase $A^+(p_0,q_0)$, entonces también vale para todo par (p,q), $1<p\le q<\infty$, tal que

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{1}{p_0}-\frac{1}{q_0}\ ,$$

y todo peso $v \in A^+(p,q)$.

Demostración. Sea $v \in A^+(p,q)$, y tomemos primero $p > p_0$, esto implica $q > q_0$ y podemos escribir

$$\left(\int |Tf|^q v^q\right)^{1/q} = \left(\int |Tf|^{q_0} g v^q\right)^{1/q_0} ,$$

con $g \geq 0$ y $\|g\|_{(q/q_0)',v^q} = 1$. Por Lema 1.12.i, $v^q \in A_r^+$ con $r = 1 + q/p'$. Sea $r_0 = 1 + q_0/p_0'$, $h = g$ y $w = v^q$. Como $r/r_0 = q/q_0$, por Lema 1.23.i , existe $H \geq g$ con $\|H\|_{(q/q_0)',v^q} \leq C$ y $Hv^q \in A_{r_0}^+$. Esto implica $H^{1/q_0} v^{q/q_0} \in A^+(p_0, q_0)$, entonces

$$\begin{aligned}\left(\int |Tf|^q v^q\right)^{1/q} &\leq \left(\int |Tf|^{q_0} (H^{1/q_0} v^{q/q_0})^{q_0}\right)^{1/q_0}\\ &\leq C\left(\int |f|^{p_0} (H^{1/q_0} v^{q/q_0})^{p_0}\right)^{1/p_0}\\ &= C\left(\int |f|^{p_0} H^{p_0/q_0} v^{qp_0/q_0}\right)^{1/p_0}\\ &= C\left(\int |f|^{p_0} v^{p_0} H^{p_0/q_0} v^{q\left(\frac{1}{(p/p_0)'}\right)}\right)^{1/p_0} .\end{aligned}$$

Notar que $p_0\, q/q_0 = p_0 + q\,(1 - p_0/p)$, y por Hölder

$$\begin{aligned}\left(\int |Tf|^q v^q\right)^{1/q} &\leq C\left[\left(\int |f|^{p_0 \frac{p}{p_0}} v^{p_0 \frac{p}{p_0}}\right)^{\frac{p_0}{p}} \left(\int H^{\frac{p_0}{q_0}(\frac{p}{p_0})'} v^{q \frac{1}{(\frac{p}{p_0})'}(\frac{p}{p_0})'}\right)^{\frac{1}{(p/p_0)'}}\right]^{\frac{1}{p_0}}\\ &= C\left(\int |f|^p v^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int H^{(\frac{r}{r_0})'} v^q\right)^{\frac{1}{p}\frac{p}{p-p_0}}\\ &\leq C\|f\|_{p,v^p} .\end{aligned}$$

Sea ahora $p_0 > p$, entonces $q_0 > q$ y se tiene

$$\left(\int |f|^p v^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int \left(|fv^{p'}|^{p_0}\right)^{\frac{p}{p_0}} v^{-p'}\right)^{\frac{p_0}{p}\frac{1}{p_0}} .$$

Entonces (ver [Hd-L-P], Teorema 210) existe $g \geq 0$ tal que

$$\int g^{\frac{p}{p-p_0}} v^{-p'}\, dx = 1 ,$$

y

$$\left(\int |f|^p v^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int |fv^{p'}|^{p_0} g v^{-p'}\right)^{\frac{1}{p_0}} .$$

Sea $h = g^{-p_0'/p_0}$, $w = v^{-p'}$, $r = 1 + p'/q$ y $r_0 = 1 + p_0'/q_0$. Observando que $(r/r_0)'(-p_0'/p_0) = p/(p-p_0)$, resulta $\int h^{(\frac{r}{r_0})'} w = 1$. Por Lema 1.12.ii, $v^{-p'} \in A_r^-$ con $r = 1 + p'/q$. Como $p_0 > p$, tenemos que $r > r_0$, y entonces por Lema 1.24.iii existe $H \geq h$ tal que $\int H^{(\frac{r}{r_0})'} v^{-p'} \leq C$ y $Hv^{-p'} \in A^-_{r_0}$, luego $[Hv^{-p'}]^{-1/p_0'} \in A^+(p_0, q_0)$. De esta manera resulta

$$\left(\int |f|^p v^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int |fv^{p'}|^{p_0} g v^{-p'}\right)^{\frac{1}{p_0}} = \left(\int |f|^{p_0} h^{-\frac{p_0}{p_0'}} v^{p'(p_0-1)}\right)^{\frac{1}{p_0}}$$

$$\geq \left(\int |f|^{p_0} \left[H^{-\frac{1}{p_0'}} v^{\frac{p'}{p_0'}}\right]^{p_0}\right)^{\frac{1}{p_0}} \geq C\left(\int |Tf|^{q_0} \left[H^{-\frac{1}{p_0'}} v^{\frac{p'}{p_0'}}\right]^{q_0}\right)^{\frac{1}{q_0}} .$$

Teniendo en cuenta que $\frac{p'}{p_0'} q_0 = q_0 - p'(1 - \frac{1}{q/q_0})$, usando Hölder para exponente menor que 1 (ver [Hd-L-P] Teorema 189), obtenemos

$$\left(\int |f|^p v^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq C\left(\int |Tf|^q v^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int H^{-\frac{r}{r_0'}} v^{-p'}\right)^{\frac{q-q_0}{q_0 q}}$$

$$\geq C\left(\int |Tf|^q v^q\right)^{\frac{1}{q}} . \quad \square$$

Aplicando el Teorema I para el caso $p_0 = q_0$, se deduce la versión lateral del Teorema de extrapolación para índices finitos de Rubio de Francia. Como se ve, este Teorema I contiene el resultado probado en [MR-O-T].

2.2 Teorema de Extrapolación para las clases A_p^+, desde un índice finito.

Sea T un operador sublineal definido en $C_0^\infty(IR)$, y supongamos que para todo peso $v \in A^+_{p_0}$ con $1 < p_0 < \infty$ se tiene que

$$\int |Tf|^{p_0} v \leq C \int |f|^{p_0} v .$$

Entonces, si $v \in A_p^+$ con $1 < p < \infty$, se satisface

$$\int |Tf|^p v \leq C \int |f|^p v .$$

Demostración. Por el Lema 1.12.vii, si $u \in A^+(p_0, p_0)$ entonces $u^{p_0} \in A^+_{p_0}$, por lo tanto

$$\int |Tf|^{p_0} u^{p_0} \leq C \int |f|^{p_0} u^{p_0} .$$

Luego el Teorema I implica que si $u \in A^+(p, p)$

$$\int |Tf|^p u^p \leq C \int |f|^p u^p .$$

Si $v \in A_p^+$, por Lema 1.12.vii sabemos que $u = v^{\frac{1}{p}} \in A^+(p, p)$, y del comentario anterior resulta

$$\int |Tf|^p v \leq C \int |f|^p v . \quad \square$$

2.3 Teorema II.

Sea $1 < \beta < \infty$ y sea T un operador sublineal definido en $C_0^\infty(I\!R)$ que satisface

$$\|v\chi_{[x-h,x]}\|_\infty \left(\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\left(|Tf|(y) - \frac{1}{h}\int_{x+h}^{x+2h}|Tf|\right)^+ dy\right) \le C(v)\left(\int |f|^\beta v^\beta\right)^{1/\beta}$$

para todo $h > 0$, $x \in I\!R$ y $v \in A^+(\beta,\infty)$. Entonces para todo $1 < p < \beta$, $1/p - 1/q = 1/\beta$ y $v \in A^+(p,q)$, vale que

$$\left(\int |Tf|^q v^q\right)^{1/q} \le C(v)\left(\int |f|^p v^p\right)^{1/p} \quad ,$$

siempre que el lado izquierdo sea finito.

Demostración. Sea $v \in A^+(p,q)$ con $1/p - 1/q = 1/\beta$ y $f \in C_0^\infty(I\!R)$; puesto que

$$\left(\int |f|^p v^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int \left(|fv^{p'}|^\beta\right)^{\frac{p}{\beta}} v^{-p'}\right)^{\frac{\beta}{p}\frac{1}{\beta}} \quad ,$$

existe $g \ge 0$, $\int g^{(\frac{p}{\beta})'} v^{-p'} = 1$, tal que

$$\left(\int |f|^p v^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int |fv^{p'}|^\beta g v^{-p'}\right)^{\frac{1}{\beta}} \quad .$$

Sea $h = g^{-\beta'/\beta}$; entonces $h^{q/\beta'} = g^{-q/\beta} = g^{(p/\beta)'}$, luego

$$1 = \int g^{(\frac{p}{\beta})'} v^{-p'} = \int h^{\frac{q}{\beta'}} v^{-p'} \ .$$

Sea $r = 1 + p'/q$ y $r_0 = 1$; tenemos que $(r/r_0)' = (1 + p'/q)' = q/\beta'$. Entonces por el Lema 1.12.ii resulta que $v^{-p'} \in A_r^-$, y aplicando Lema 1.24.iii sabemos que existe $H \ge h$ con

$$Hv^{-p'} \in A_1^- \qquad \text{y} \qquad \int H^{\frac{q}{\beta'}} v^{-p'} \le C \ .$$

Usando las equivalencias del Lema 1.12.iii podemos ver que $H^{-1/\beta'} v^{p'/\beta'} \in A^+(\beta,\infty)$. De esta manera,

$$\begin{aligned}
\left(\int |f|^p v^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int |fv^{p'}|^\beta g v^{-p'}\right)^{\frac{1}{\beta}} = \left(\int |f|^\beta \left(h^{-\frac{1}{\beta'}} v^{\frac{p'}{\beta'}}\right)^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}} \\
&\ge \left(\int |f|^\beta \left(H^{-\frac{1}{\beta'}} v^{\frac{p'}{\beta'}}\right)^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}} \ge C\||\ |Tf|\ \||_{H^{-1/\beta'}v^{p'/\beta'},+} \\
&\ge C\|H^{-\frac{1}{\beta'}} v^{\frac{p'}{\beta'}} |Tf|_+^\#\|_\infty \ge C\left(\int H^{-\frac{q}{\beta'}} v^{\frac{qp'}{\beta'}} |Tf|_+^{\#\,q} H^{\frac{q}{\beta'}} v^{-p'}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= C\left(\int |Tf|_+^{\#\,q} v^q\right)^{\frac{1}{q}} \ .
\end{aligned}$$

Como $q > 1$ y $\int |Tf|^q v^q < \infty$, por Corolario 1.22

$$\left(\int |Tf|^q v^q\right)^{\frac{1}{q}} \le C\left(\int |f|^p v^p\right)^{\frac{1}{p}} \ . \quad \square$$

2.4 Teorema III de Extrapolación desde el infinito.
Sea T un operador sublineal definido en $C_0^\infty(IR)$ que satisface

$$\|v\chi_{[x-h,x]}\|_\infty \left(\frac{1}{h}\int_x^{x+h} \left(|Tf|(y) - \frac{1}{h}\int_{x+h}^{x+2h} |Tf| \right)^+ dy \right) \le C(v)\|fv\|_\infty$$

para todo $h>0$, $x \in IR$ y v tal que $v^{-1} \in A_1^-$. Entonces, si $1<p<\infty$ y $v \in A_p^+$, se cumple que

$$\left(\int |Tf|^p v \right)^{1/p} \le C(v) \left(\int |f|^p v \right)^{1/p} ,$$

siempre que el lado izquierdo sea finito.

Previo al Teorema III, enunciamos y probamos algunos resultados que nos serán de utilidad.

2.5 Lema.
Si $\Phi \in L^1$ y $\int |\Phi| = 1$, entonces existe h tal que $\int |h| \le 2$ y $\|\Phi h^{-1}\|_\infty = 1$.

Demostración. Sea

$$h(x) = \begin{cases} \Phi(x) & \text{si } \Phi(x) \neq 0 \\ e^{-\pi|x|^2} & \text{si } \Phi(x) = 0 \end{cases}$$

entonces

$$\int |h| = \int_{\{x \mid \Phi(x)\neq 0\}} |\Phi| + \int_{\{x \mid \Phi(x)=0\}} e^{-\pi|x|^2} \le 2$$

y $\|\Phi h^{-1}\|_\infty = 1$. □

2.6 Corolario.
Si $f \in L^p(v)$ y $\int |f|^p v \neq 0$, entonces existe $0 \le g \in L^p(v^{-\frac{1}{p-1}})$ tal que $\int g^p v^{-\frac{1}{p-1}} \le 2$ y $(\int |f|^p v)^{\frac{1}{p}} = \|f v^{\frac{1}{p-1}} g^{-1}\|_\infty$.

Demostración. Sea

$$\Phi = \frac{|f|^p v}{\int |f|^p v} \; ;$$

luego $\int |\Phi| = 1$, y existe h que satisface Lema 2.5. Sea $g \ge 0$ definida como

$$g^p = \begin{cases} v^{\frac{1}{p-1}} h & \text{si } v \neq 0 \\ e^{-\pi|x|^2} & \text{si } v = 0 \end{cases} \; ;$$

entonces $\int g^p v^{-\frac{1}{p-1}} = \int h \le 2$ y

$$1 = \|\Phi h^{-1}\|_\infty = \frac{1}{\int |f|^p v} \| \, |f|^p v^{\frac{p}{p-1}} g^{-p} \|_\infty . \quad \square$$

Demostración del Teorema III. Sea $v \in A_p^+$ y $f \in L^p(v)$. Por el Corolario 2.6, existe g que satisface $(\int |f|^p v)^{1/p} = \|fv^{\frac{1}{p-1}} g^{-1}\|_\infty$. Sea $w = v^{-\frac{1}{p-1}}$, $r = p'$, $r_0 = 1$ y $h = g \geq 0$. Entonces $w \in A_{p'}^-$, y $\int h^p w = \int h^{(r/r_0)'} w \leq 2$ con $(r/r_0)' = p$. Aplicando el Lema 1.24.iii existe $H \geq g$ tal que

$$Hw = Hv^{-\frac{1}{p-1}} \in A_1^- \qquad \text{y} \qquad \left(\int H^p v^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\,.$$

De este modo

$$(\int |f|^p v)^{\frac{1}{p}} = \|fv^{\frac{1}{p-1}} g^{-1}\|_\infty \geq \|fv^{\frac{1}{p-1}} H^{-1}\|_\infty\,.$$

Como $Hv^{-\frac{1}{p-1}} \in A_1^-$, por hipótesis del Teorema y por Lema 1.14, obtenemos

$$\|\,|Tf|_+^{\#} v^{\frac{1}{p-1}} H^{-1}\|_\infty \leq \||\,|Tf|\,\||_{v^{\frac{1}{p-1}} H^{-1},+} \leq C\|fv^{\frac{1}{p-1}} H^{-1}\|_\infty\,.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\left(\int |f|^p v\,dx\right)^{\frac{1}{p}} &\geq C\|\,|Tf|_+^{\#} v^{\frac{1}{p-1}} H^{-1}\|_\infty \left(\int H^p v^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\geq C\left(\int |Tf|_+^{\#\,p} v^{\frac{p}{p-1}} H^{-p} H^p v^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= C\left(\int |Tf|_+^{\#\,p} v\right)^{\frac{1}{p}}\,.
\end{aligned}$$

Aplicando el Corolario 1.22,

$$\left(\int |Tf|^p v\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left(\int |f|^p v\right)^{\frac{1}{p}}\,. \quad \square$$

Sea $0<\alpha<1$ y consideremos

$$I_\alpha^+ f(x)=\int_x^\infty \frac{f(y)}{(y-x)^{1-\alpha}}\,dy\ .$$

Queremos demostrar el resultado ya conocido

2.6 Teorema. *Dados $1/q=1/p-\alpha$, $1<p<1/\alpha$, y $v^q\in A_r^+$ con $r=1+q/p'$, entonces*

$$||I_\alpha^+ f||_{v^q,q}\leq C||f||_{v^p,p}\ .$$

Para lograr esto probaremos

2.7 Teorema.
Si f pertenece a $L^{\frac{1}{\alpha}}(v^{\frac{1}{\alpha}})$, con $v\in A^+(\frac{1}{\alpha},\infty)$, entonces se tiene

$$(2.8)\quad ||v\chi_{[x-h,x]}||_\infty \frac{1}{h}\int_x^{x+h}\left(|I_\alpha^+ f(y)|-\frac{1}{h}\int_{x+h}^{x+2h}|I_\alpha^+ f|\right)^+ dy\leq C\left(\int |fv|^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha$$

para todo $x\in I\!R$, $h>0$.

Aplicando el Teorema 2.7 y el Teorema II 2.3 obtenemos una prueba más simple del Teorema 2.6 que ya fue realizada en el artículo [MR-T].

Prueba del Teorema (2.7). Dado $x\in I\!R$ y $h>0$, pongamos $f=f_1+f_2$, con $f_1=f\chi_{[x,x+2h]}$ entonces

$$I_\alpha^+ f=I_\alpha^+ f_1+I_\alpha^+ f_2\ .$$

Veremos que se verifica (2.8) para f_1 y f_2. Consideremos

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\left(|I_\alpha^+ f_1(y)|-\frac{1}{h}\int_{x+h}^{x+2h}|I_\alpha^+ f_1(z)|\,dz\right)^+ dy$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{h}\int_x^{x+2h}|I_\alpha^+ f_1(y)|\,dy=\frac{1}{h}\int_x^{x+2h}\left|\int_y^{x+2h}\frac{f(t)}{(t-y)^{1-\alpha}}\,dt\right|dy\\
&=\frac{1}{h}\int_x^{x+2h}|f(t)|\left(\int_x^t\frac{1}{(t-y)^{1-\alpha}}\,dy\right)dt=\frac{1}{h}\int_x^{x+2h}\frac{|f(t)|}{\alpha}(t-x)^\alpha\,dt\\
&\leq \frac{1}{\alpha}\frac{(2h)^\alpha}{h}\int_x^{x+2h}|f(t)|\,dt.
\end{aligned}$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
&||v\chi_{[x-h,x]}||_\infty \frac{1}{h}\int_x^{x+h}\left(|I_\alpha^+ f_1(y)| - \frac{1}{h}\int_{x+h}^{x+2h} |I_\alpha^+ f_1(z)|\, dz\right)^+ dy \\
&\leq \frac{2}{\alpha}||v\chi_{[x-h,x]}||_\infty (2h)^{\alpha-1}\int_x^{x+2h} |f(t)|\, dt \\
&\leq C||v\chi_{[x-h,x]}||_\infty (2h)^{\alpha-1}\left(\int_x^{x+2h} (|f(t)|v)^{\frac{1}{\alpha}}\, dt\right)^\alpha \left(\int_x^{x+2h} (v^{-1})^{\frac{1}{\alpha-1}}\, dt\right)^{1-\alpha} \\
&\leq C\left(\int_x^{x+2h} (|f(t)|v)^{\frac{1}{\alpha}}\, dt\right)^\alpha ,
\end{aligned}
$$

donde la última desigualdad se debe a que $v \in A^+(\frac{1}{\alpha},\infty)$; por lo tanto resulta

$$
\begin{aligned}
&||v\chi_{[x-h,x]}||_\infty \frac{1}{h}\int_x^{x+h}\left(|I_\alpha^+ f_1(y)| - \frac{1}{h}\int_{x+h}^{x+2h} |I_\alpha^+ f_1(z)|\, dz\right)^+ dy \\
&\qquad \leq C\left(\int |fv|^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha .
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Consideremos ahora la expresión

$$
\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\left(|I_\alpha^+ f_2(y)| - \frac{1}{h}\int_{x+h}^{x+2h} |I_\alpha^+ f_2(z)|\, dz\right)^+ dy . \tag{2.10}
$$

Eso vale

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\left(\left|\int_{x+2h}^\infty \frac{f(t)}{(t-y)^{1-\alpha}}\, dt\right| - \frac{1}{h}\int_{x+h}^{x+2h}\left|\int_{x+2h}^\infty \frac{f(t)}{(t-z)^{1-\alpha}}\, dt\right| dz\right)^+ dy \\
&\leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h}\left(\frac{1}{h}\int_{x+h}^{x+2h}\left[\left|\int_{x+2h}^\infty \frac{f(t)}{(t-y)^{1-\alpha}}\, dt\right| - \left|\int_{x+2h}^\infty \frac{f(t)}{(t-z)^{1-\alpha}}\, dt\right|\right] dz\right)^+ dy \\
&\leq \frac{1}{h^2}\int_x^{x+h}\left|\int_{x+h}^{x+2h}\left(\left|\int_{x+2h}^\infty \frac{f(t)}{(t-y)^{1-\alpha}}\, dt\right| - \left|\int_{x+2h}^\infty \frac{f(t)}{(t-z)^{1-\alpha}}\, dt\right|\right) dz\right| dy .
\end{aligned}
$$

Usando el Teorema del valor medio y el hecho de que $(t-\xi)^{\alpha-2} \leq (t-y)^{\alpha-2}$, resulta

$$
\begin{aligned}
(2.10) &\leq \frac{1}{h^2}\int_x^{x+h}\int_{x+h}^{x+2h}\int_{x+2h}^\infty |f(t)(\alpha-1)2h(t-y)^{\alpha-2}|\, dt\, dz\, dy \\
&\leq C\frac{h^2}{h^2}\int_x^{x+h}\int_{x+2h}^\infty |f(t)||t-y|^{\alpha-2}\, dt\, dy \\
&\leq C\int_x^{x+h}\int_{x+2h}^\infty |f(t)||t-x-h|^{\alpha-2}\, dt\, dy \\
&\leq Ch\left(\int_{x+2h}^\infty |f(t)|^{\frac{1}{\alpha}} v^{\frac{1}{\alpha}}\, dt\right)^\alpha \left(\int_{x+2h}^\infty |t-x-h|^{\frac{\alpha-2}{1-\alpha}} v^{-\frac{1}{1-\alpha}}\, dt\right)^{1-\alpha} .
\end{aligned}
$$

Acotemos

$$||v\chi_{[x-h,x]}||_\infty h \left(\int_{x+2h}^{\infty} |t-x-h|^{\frac{\alpha-2}{1-\alpha}} v^{-\frac{1}{1-\alpha}}\, dt \right)^{1-\alpha} ,$$

esto es

$$\begin{aligned}
&C||v\chi_{[x-h,x]}||_\infty h \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int_{x+2^k h}^{x+2^{k+1}h} |t-x-h|^{\frac{\alpha-2}{1-\alpha}} v^{-\frac{1}{1-\alpha}}\, dt \right)^{1-\alpha} \\
&\leq ||v\chi_{[x-h,x]}||_\infty h \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{x+2^k h}^{x+2^{k+1}h} (2^{k-1}h)^{\frac{\alpha-2}{1-\alpha}} v^{-\frac{1}{1-\alpha}}\, dt \right)^{1-\alpha} \\
&\leq C \sum_{k=1}^{\infty} ||v\chi_{[x-2^{k+1}h,x]}||_\infty (2^{k-1}h)^{\alpha-2} h \left(\int_{x}^{x+2^{k+1}h} v^{-\frac{1}{1-\alpha}}\, dt \right)^{1-\alpha} \\
&= C \sum_{k=1}^{\infty} (2^{k-1}h)^{\alpha-2} (2^{k+1}h)^{1-\alpha} h \, \frac{||v\chi_{[x-2^{k+1}h,x]}||_\infty}{(2^{k+1}h)^{1-\alpha}} \left(\int_{x}^{x+2^{k+1}h} v^{-\frac{1}{1-\alpha}}\, dt \right)^{1-\alpha} \\
&\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{||v\chi_{[x-2^{k+1}h,x]}||_\infty}{(2^{k+1}h)^{1-\alpha}} \left(\int_{x}^{x+2^{k+1}h} v^{-\frac{1}{1-\alpha}}\, dt \right)^{1-\alpha} \\
&\leq C \sum \frac{1}{2^k} < \infty .
\end{aligned}$$

Así se tiene

$$\begin{aligned}
&||v\chi_{[x-h,x]}||_\infty \frac{1}{h} \int_{x}^{x+h} \left(|I_\alpha^+ f_2(y)| - \frac{1}{h} \int_{x+h}^{x+2h} |I_\alpha^+ f_2(z)|\, dz \right)^{+} dy \\
&\qquad \leq C \left(\int |fv|^{\frac{1}{\alpha}} \right)^{\alpha} .
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Uniendo (2.9) y (2.11), resulta (2.8). □

Demostración del Teorema 2.6. Después de haber probado el Teorema 2.7, para poder aplicar el Teorema II 2.3 deberíamos ver que

$I_\alpha^+ f \in L^q(v^q)$ si $f \in C_0^\infty(IR)$, $1 < p < 1/\alpha$, $1/q = 1/p - \alpha$ y $v \in A^+(p,q)$.

Sea f con soporte contenido en $(-N, N)$. Si $x \in (-2N, N)$ entonces

$$|I_\alpha^+ f(x)| \leq K N^\alpha ||f||_\infty .$$

Si $x \leq -2N$ se tiene

$$|I_\alpha^+ f(x)| \leq K ||f||_\infty \frac{1}{(-N-x)^{1-\alpha}} .$$

Si $x \geq N$

$$|I_\alpha^+ f(x)| = 0$$

Por lo tanto $I_\alpha^+ f \in L^q(v^q)$ si y sólo si

$$\int_{x \leq -2N} \frac{v^q(x)}{(-N-x)^{(1-\alpha)q}}\, dx < \infty \ .$$

Por Lema 1.12.i (notar que $1+q/p' = q(1-\alpha)$) y Lema 1.13 resulta que $I_\alpha^+ f \in L^q(v^q)$ obteniendo así lo deseado. $\square$

CAPÍTULO III
ACOTACIÓN DE OPERADORES INTEGRALES SINGULARES LATERALES

En este Capítulo probaremos cómo los operadores integrales singulares laterales son acotados de $L^\infty(v)$ en $BMO^+(v)$. A partir de esta acotación y aplicando el Teorema III 2.4, de extrapolación desde infinito, veremos que estos operadores son de tipo fuerte (p,p) con peso v si $v \in A_p^+$.

La noción clásica de un núcleo de Calderón–Zygmund es una función $K \in L^1_{loc}(I\!R - 0)$ que satisface las siguientes condiciones:

(3.1) existe una constante finita B_1 tal que

$$\left| \int_{\epsilon<|x|<N} K(x)\,dx \right| \leq B_1$$

para todo ϵ y todo N, con $0<\epsilon<N$; más aún, existe

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\epsilon<|x|<1} K(x)\,dx \;;$$

(3.2) existe una constante finita B_2 tal que

$$|K(x)| \leq \frac{B_2}{|x|} \text{ para todo } x \neq 0 \;;$$

(3.3) existe una constante finita B_3 tal que

$$|K(x-y) - K(x)| \leq B_3 \frac{|y|}{|x|^2} \quad \text{para todo } x \text{ e } y \text{ con } |x| > 2|y| \;.$$

Es conocido que estas condiciones son suficientes para la acotación fuerte L^p, $1<p<\infty$, y de tipo débil $(1,1)$ del operador integral singular

$$Tf(x) = \lim_{\epsilon\to 0^+} T_\epsilon f(x)\,,$$

y del operador maximal

$$T^* f(x) = \sup_{\epsilon>0} |T_\epsilon f(x)| \;, \tag{3.4}$$

con

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

$$(3.5) \qquad T_\epsilon f(x) = \int_{|x-y|>\epsilon} K(x-y) f(y)\, dy \ .$$

Los operadores integrales singulares laterales fueron recientemente definidos por Aimar, Forzani y Martín–Reyes, en [A-F-MR]; allí se caracterizan los pesos para los cuales estos operadores son acotados de $L^p(v)$ en $L^p(v)$, también se proporciona como ejemplo de núcleo de Calderón–Zygmund con soporte en la recta real negativa el siguiente

$$K_\lambda(x) = \frac{1}{x} . \frac{\operatorname{sen}(\log \lambda x)}{\log(\lambda x)} . \chi_{(-\infty,0)}(x) \,,$$

donde

$$K_\lambda(x) = \lambda K(\lambda x) \ .$$

Claramente si K es un núcleo de Calderón–Zygmund, K_λ también lo es y con las mismas constantes B_1, B_2, B_3, de K.

Por completitud, enunciamos como Teoremas A y B, algunos de sus resultados.

Teorema A. *Sea K un núcleo soportado en la recta real negativa que satisface (3.1), (3.2) y (3.3); entonces se tiene:*

(A.1) dado un peso $v \in A_\infty^+$ existe una costante C que depende sólo de B_1, B_2, B_3, p y de la constante de la condición A_∞^+, tal que

$$\int_{I\!R} |T^* f(x)|^p v(x)\, dx \le C \int_{I\!R} |M^+ f|^p v(x)\, dx \ \ 1 < p < \infty$$

y

$$\sup_{\lambda>0} \lambda^p v(\{T^* f(x) > \lambda\}) \le C \sup_{\lambda>0} \lambda^p v(\{M^+ f(x) > \lambda\}), \ 1 \le p < \infty \ ;$$

(A.2) dado un peso $v \in A_p^+$, con $1 < p < \infty$, existe una constante C dependiente sólo de B_1, B_2, B_3, p y de la constante de A_p^+ tal que

$$\int_{I\!R} |T^* f(x)|^p v(x)\, dx \le C \int_{I\!R} |f|^p v(x)\, dx \ ;$$

(A.3) dado un peso $v \in A_1^+$, existe una constante que sólo depende de B_1, B_2, B_3, p y de la constante de A_1^+ tal que

$$v(\{T^* f(x) > \lambda\}) \le \frac{C}{\lambda} \int_{I\!R} |f(x)| v(x)\, dx \ .$$

Observemos que este Teorema nos dice que los operadores maximales T_λ^* están uniformemente acotados en $L^p(v)$, $1 < p < \infty$, si $v \in A_p^+$ y en $L^1(v)$-débil si $v \in A_1^+$. El Teorema que sigue es una especie de recíproca.

Teorema B. *Sea K un núcleo integral singular soportado, en la recta real negativa que satisface (3.1), (3.2), (3.3), y $K(x) \not\equiv 0$. Sea T^*_λ el operador maximal asociado al núcleo K_λ .*

Si v es un peso y todos los operadores T^*_λ con $\lambda > 0$ son de tipo débil (p,p), $1 \leq p < \infty$, con respecto a la medida v y con constante C independiente de λ, entonces $v \in A_p^+$.

Como ya destacamos al comienzo de este Capítulo, probaremos que los operadores T^* y T inducidos por un núcleo en la recta real negativa, son acotados de $L^\infty(v)$ en $BMO^+(v)$ para $f's$ tales que $\|fv\| < \infty$. Una vez obtenida esta acotación, nuestros resultados de extrapolación (ver Teorema III 2.4) nos permiten obtener el tipo fuerte (p,p) con $v \in A_p^+$. Observemos además que en la prueba dada en [A-F-MR] es necesario demostrar una desigualdad de "buenos λ's" para T^*. En nuestro caso, sólo nos hace falta la ya conocida desigualdad de "buenos λ's" (ver Teorema 1.15).

3.6 Teorema I.

Sea K un núcleo, con soporte en la recta real negativa, que satisface (3.1), (3.2), (3.3). Sea T^* como en (3.4) y $v^{-1} \in A_1^-$. Entonces

$$|||T^*f|||_{v,+} \leq C||fv||_\infty$$

para toda f tal que $||fv||_\infty < \infty$.

Demostración. Ante todo notemos que

$$T_\epsilon f(x) = \int_{|x-y|>\epsilon} K(x-y)f(y)\,dy = \int_{x+\epsilon}^\infty K(x-y)f(y)\,dy\ .$$

Sea $v^{-1} \in A_1^-$, f tal que $||fv||_\infty < \infty$, $\delta > 0$ tal que $(v^{-1})^{1+\delta} \in A_1^-$ (ver Teorema 1.5), $x \in I\!R$, y $h > 0$.

Pongamos $f = f_1 + f_2$ con $f_1 = f\chi_{[x,x+8h]}$. Cabe destacar que bajo estas hipótesis $f_1 \in L^{1+\delta}(dx)$. Acotamos

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{h}\int_x^{x+h}\left(T^*f_1(y) - \frac{1}{h}\int_{x+h}^{x+2h} T^*f_1(z)\,dz\right)^+ dy &\leq \frac{1}{h}\int_x^{x+2h} |T^*f_1(y)|\,dy \\
&\leq C\left(\frac{1}{h}\int_x^{x+2h} |T^*f_1(y)|^{1+\delta}\,dy\right)^{\frac{1}{1+\delta}} \\
&\leq C\left(\frac{1}{h}\int_{I\!R} |f_1(y)|^{1+\delta}\,dy\right)^{\frac{1}{1+\delta}} = C\left(\frac{1}{h}\int_x^{x+8h} |f(y)|^{1+\delta}\,dy\right)^{\frac{1}{1+\delta}} \\
&\leq C\left(\frac{1}{h}\int_x^{x+8h} |f(y)|^{1+\delta}v^{1+\delta}(v^{-1})^{1+\delta}\,dy\right)^{\frac{1}{1+\delta}} \\
&\leq C||fv||_\infty\left(\frac{1}{h}\int_x^{x+8h} (v^{-1})^{1+\delta}\,dy\right)^{\frac{1}{1+\delta}} .
\end{aligned}$$

Como $(v^{-1})^{1+\delta} \in A_1^-$, usando el Lema 1.12.iii tenemos que

$$||v^{1+\delta}\chi_{[x-8h,x]}||_\infty \frac{1}{h}\int_x^{x+8h} (v^{-1})^{1+\delta} \leq C \ ,$$

lo cual implica

$$||v\chi_{[x-h,x]}||_\infty \frac{1}{h}\left(\int_x^{x+8h} (v^{-1})^{1+\delta}\right)^{\frac{1}{1+\delta}} \leq C$$

y obtenemos

$$\text{(3.7)} \quad \frac{||v\chi_{[x-h,x]}||_\infty}{h}\int_x^{x+h}\left(T^*f_1(y) - \frac{1}{h}\int_{x+h}^{x+2h} T^*f_1(z)\,dz\right)^+ dy \leq C||fv||_\infty \ .$$

Ahora consideramos

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\left(T^*f_2(y) - \frac{1}{h}\int_{x+h}^{x+2h} T^*f_2(z)\,dz\right)^+ dy \ ;$$

esto es

$$\leq \tfrac{1}{h}\int_x^{x+h}\frac{1}{h}\int_{x+h}^{x+2h} |T^*f_2(y) - T^*f_2(z)|\,dz\,dy$$

$$\leq \tfrac{1}{h}\int_x^{x+h}\frac{1}{h}\int_{x+h}^{x+2h}\left|\sup_{\epsilon>0}\left|\int_{y+\epsilon}^\infty K(y-t)f_2(t)\,dt\right| - \sup_{\epsilon>0}\left|\int_{z+\epsilon}^\infty K(z-t)f_2(t)dt\right|\right|dzdy$$

$$\leq \tfrac{1}{h}\int_x^{x+h}\frac{1}{h}\int_{x+h}^{x+2h}\left|\sup_{\epsilon>0}\left(\left|\int_{y+\epsilon}^\infty K(y-t)f_2(t)dt\right| - \left|\int_{z+\epsilon}^\infty K(z-t)f_2(t)dt\right|\right)\right|dzdy$$

$$\leq \tfrac{1}{h}\int_x^{x+h}\frac{1}{h}\int_{x+h}^{x+2h}\sup_{\epsilon>0}\left|\left|\int_{y+\epsilon}^\infty K(y-t)f_2(t)dt\right| - \left|\int_{z+\epsilon}^\infty K(z-t)f_2(t)dt\right|\right|dzdy$$

$$\leq \tfrac{1}{h}\int_x^{x+h}\frac{1}{h}\int_{x+h}^{x+2h}\sup_{\epsilon>0}\left|\int_{y+\epsilon}^\infty K(y-t)f_2(t)\,dt - \int_{z+\epsilon}^\infty K(z-t)f_2(t)\,dt\right|\,dz\,dy \ .$$

Analicemos

$$I_\epsilon = \left|\int_{y+\epsilon}^\infty K(y-t)f_2(t)\,dt - \int_{z+\epsilon}^\infty K(z-t)f_2(t)\,dt\right| \ .$$

Si $\epsilon < 6h$, es

$$\begin{aligned} I_\epsilon &= \left|\int_{x+8h}^\infty K(y-t)f_2(t)\,dt - \int_{x+8h}^\infty K(z-t)f_2(t)\,dt\right| \\ &\leq \int_{x+8h}^\infty |(K(y-t)-K(z-t))f(t)|\,dt \\ &= I_1 \ . \end{aligned}$$

Si $\epsilon \geq 6h$,

$$\begin{aligned} I_\epsilon &= \left|\int_{y+\epsilon}^{z+\epsilon} K(y-t)f_2(t)\,dt + \int_{z+\epsilon}^\infty (K(y-t)-K(z-t))f_2(t)\,dt\right| \\ &\leq \left|\int_{y+\epsilon}^{z+\epsilon} K(y-t)f_2(t)\,dt\right| + \int_{x+8h}^\infty |(K(y-t)-K(z-t))f(t)|\,dt \\ &= I_{2,\epsilon} + I_1 \ . \end{aligned}$$

Como $t-z>2(z-y)$, usando la propiedad 3.3 del núcleo tenemos que

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \int_{x+8h}^{\infty} \frac{z-y}{(t-z)^2}|f(t)|\,dt \leq 2h\sum_{k=3}^{\infty}\int_{x+2^k h}^{x+2^{k+1}h} \frac{|f(t)|}{(t-z)^2}\,dt \\ &\leq Ch\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{(2^k h)^2}\int_{x+2^k h}^{x+2^{k+1}h} |f(t)|\,dt \leq C||fv||_\infty \sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{1}{2^{k+1}h}\int_x^{x+2^{k+1}h} v^{-1}\,dt\ . \end{aligned}$$

Notemos que $|-\epsilon|\geq 2|\epsilon-(t-y)|$, luego por la propiedad 3.3

$$\begin{aligned} I_{2,\epsilon} &\leq \left|\int_{y+\epsilon}^{z+\epsilon}(K(y-t)-K(-\epsilon))f_2(t)\,dt\right| + \left|\int_{y+\epsilon}^{z+\epsilon}K(-\epsilon)f_2(t)\,dt\right| \\ &\leq \int_{y+\epsilon}^{z+\epsilon}\frac{-\epsilon+t-y}{\epsilon^2}|f_2(t)|\,dt + \int_{y+\epsilon}^{z+\epsilon}\frac{B_2}{\epsilon}|f_2(t)|\,dt \\ &\leq \frac{C}{\epsilon}\int_{y+\epsilon}^{z+\epsilon}|f_2(t)|\,dt \leq ||fv||_\infty\frac{C}{\epsilon}\int_{y+\epsilon}^{z+\epsilon}v^{-1} \\ &\leq ||fv||_\infty\frac{C}{\epsilon}\int_x^{x+2\epsilon}v^{-1}\ . \end{aligned}$$

Por lo tanto, usando el Lema 1.12.iii,

$$\begin{aligned} &||v\chi_{[x-h,x]}||_\infty\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\left(T^*f_2(y)-\frac{1}{h}\int_{x+h}^{x+2h}T^*f_2(z)\,dz\right)^+\,dy \\ &\qquad \leq ||v\chi_{[x-h,x]}||_\infty\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\frac{1}{h}\int_{x+h}^{x+2h}\sup_{\epsilon>0}(I_\epsilon)\,dz\,dy \\ &\qquad \leq C||v\chi_{[x-h,x]}||_\infty||fv||_\infty \\ &\qquad\qquad \times\left(\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{1}{2^{k+1}h}\int_x^{x+2^{k+1}h}v^{-1}\,dt + \sup_{\epsilon>0}\frac{1}{\epsilon}\int_x^{x+2\epsilon}v^{-1}\,dt\right) \\ &\qquad \leq C||fv||_\infty\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{||v\chi_{[x-2^{k+1}h,x]}||_\infty}{2^{k+1}h}\int_x^{x+2^{k+1}h}v^{-1}\,dt\right. \\ &\qquad\qquad\qquad \left. + \sup_{\epsilon>0}\frac{||v\chi_{[x-2\epsilon,x]}||_\infty}{2\epsilon}\int_x^{x+2\epsilon}v^{-1}\,dt\right) \\ &\qquad \leq C||fv||_\infty\ , \end{aligned}$$

es decir

(3.8)

$$||v\chi_{[x-h,x]}||_\infty\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\left(|T^*f_2(y)|-\frac{1}{h}\int_{x+h}^{x+2h}|T^*f_2(z)|\,dz\right)^+\,dy \leq C||fv||_\infty\ .$$

Uniendo (3.7) y (3.8) obtenemos

$$||v\chi_{[x-h,x]}||_\infty \frac{1}{h}\int_x^{x+h}\left(|T^*f(y)| - \frac{1}{h}\int_{x+h}^{x+2h}|T^*f(z)|\,dz\right)^+ dy \leq C||fv||_\infty$$

para todo $x \in I\!R$ y para todo $h > 0$, resultando así el Teorema. $\square$

Si consideramos T como en (3.5) en lugar de T^* en el Teorema anterior, procediendo de manera similar obtenemos

3.9 Teorema II.

Sea K un núcleo soportado en la recta real negativa que satisface (3.1), (3.2), (3.3). Sea T como en (3.5) y $v^{-1} \in A_1^-$. Entonces

$$|||\,|Tf|\,|||_{v,+} \leq C||fv||_\infty$$

para toda f tal que $||fv||_\infty < \infty$.

Aplicación del Teorema III.2.4

Consideremos a T^* como en el Teorema I 3.6; queremos probar

3.10 Teorema. *Si $v \in A_p^+$, entonces $||T^*f||_{p,v} < C||f||_{p,v}$ para toda $f \in L^p(v)$.*

Demostración. Para ver esta afirmación aplicaremos el Teorema III 2.4 de extrapolación desde infinito. Por lo probado en el Teorema I 3.6 sólo debemos corroborar que

si $v \in A_p^+$ y $f \in C_0^\infty(I\!R)$ entonces $T^*f \in L^p(I\!R)$, $1 < p < \infty$.

Sea $f \in C_0^\infty(I\!R)$, con soporte de $f \subset [-N, N]$; consideramos tres casos.

Si $x > N$, es $T^*f(x) = 0$.

Si $-2N \leq x \leq N$,

$$\begin{aligned} T^*f(x) &= \sup_{0<\epsilon}\left|\int_{x+\epsilon}^N K(x-y)f(y)\,dy\right| \\ &\leq ||f||_\infty \sup_{0<\epsilon}\left|\int_{x+\epsilon}^N K(x-y)\,dy\right| \\ &\leq ||f||_\infty \sup_{0<\epsilon}\left|\int_{\epsilon<|t|<N-x} K(t)\,dt\right| \\ &\leq B_1||f||_\infty\ . \end{aligned}$$

Si $x < -2N$, entonces $2|y-x| > |x|$, y se tiene

$$
\begin{aligned}
T^*f(x) &= \sup_{0<\epsilon} \left| \int_{x+\epsilon}^{N} K(x-y)f(y)\,dy \right| \\
&\leq ||f||_\infty \sup_{0<\epsilon} \int_{-N}^{N} B_2 \frac{1}{|y-x|}\,dy \\
&\leq B_2 ||f||_\infty \frac{4N}{|x|} \ .
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, si $x \leq -2N$, es

$$
T^*f(x) \leq C||f||_\infty \frac{N}{|x|} \ .
$$

Aplicando el Lema 1.13 obtenemos que

$$
||T^*f||_{p,v} < \infty \quad \text{s}i \quad v \in A_p^+ \ . \quad \square
$$

Cabe destacar que lo mismo se verifica para T.

CAPÍTULO IV
TEOREMAS DE EXTRAPOLACIÓN DÉBIL PARA CLASES $A^+(\frac{p}{r}, \frac{q}{r})$ DE PARES DE PESOS.

En este Capítulo se prueba un Teorema de extrapolación de las clases $A^+(\frac{p}{r}, \frac{q}{r})$ para acotaciones de tipo débil (p, q) con un peso, extrapolando desde la clase $A^+(\frac{p_0}{r}, \frac{q_0}{r})$ (ver Teorema I). Asimismo, se muestra cómo estos resultados implican acotaciones de tipo fuerte (p, q) con un peso (ver Teoremas II y III).

También se demuestran en el Teorema IV propiedades de extrapolación de las clases de pares de pesos $A^+(p/r, q/r)$ desde el extremo $A^+(p_0/r, \infty)$, obteniendo acotaciones de tipo débil (p, q). Este Teorema generaliza el resultado obtenido en [H-M-Se 2]. Además ilustramos cómo este resultado se aplica para obtener acotaciones de operadores (ver Teoremas 4.8 y 4.10).

4.1 Teorema I.

Sea T un operador sublineal definido en $C_0^\infty(IR)$, sea $1 \leq r < p_0 \leq q_0 < \infty$ y supongamos que para todo v tal que $v^r \in A^+(\frac{p_0}{r}, \frac{q_0}{r})$ tenemos que

$$(v^{q_0}\{x : |Tf(x)| > \lambda\})^{\frac{1}{q_0}} \leq C \left(\frac{1}{\lambda^{p_0}} \int |f|^{p_0} v^{p_0} \right)^{\frac{1}{p_0}} .$$

Entonces para todo p, q con $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0}$, $r < p \leq q < \infty$ y $v^r \in A^+(\frac{p}{r}, \frac{q}{r})$ se satisface

$$(v^q\{x : |Tf(x)| > \lambda\})^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\frac{1}{\lambda^p} \int |f|^p v^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Demostración. Sea v tal que $v^r \in A^+(p/r, q/r)$, y primero supongamos que $p > p_0 > 1$, luego $q > q_0$. Sea $f \in C_0^\infty(IR)$ y sea $E_\lambda = \{x : |Tf(x)| > \lambda\}$. Consideremos $I_n = (n, n+1]$, con $n \in IN$. Recordemos que por el Lema 1.12.i $v^r \in A^+(p/r, q/r)$ si y sólo si $v^q \in A^+_{1+q/r/(p/r)'}$; luego

$$\begin{aligned}(v^q\{x : |Tf(x)| > \lambda\} \cap I_n)^{\frac{1}{q}} &= \left(\int \chi_{E_\lambda \cap I_n} v^q \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int (\chi_{E_\lambda \cap I_n}^{q_0})^{q/q_0} v^q \right)^{\frac{q_0}{q}\frac{1}{q_0}} \\ &= \left(\int \chi_{E_\lambda \cap I_n}^{q_0} g_n v^q \right)^{\frac{1}{q_0}}\end{aligned}$$

donde $g_n \geq 0$ y $\|g_n\|_{(q/q_0)',v^q} = 1$. Notar que esta g_n existe pues $\chi^{q_0}_{E_\lambda \cap I_n} \in L^{q/q_0}(v^q)$. Tomando $s = 1 + (q/r)/(p/r)'$, $s_0 = 1 + (q_0/r)/(p_0/r)'$, notamos que $s/s_0 = q/q_0$; por lo tanto, por el Lema 1.24.i, existe $H_n \geq g_n$ con $H_n v^q \in A^+_{s_0}$ y $\|H_n\|_{(q/q_0)',v^q} \leq C$. Recordemos, por la Nota del Capítulo I, que esta C no depende de H_n. Esto implica que $(H_n^{1/q_0} v^{q/q_0})^r \in A^+(p_0/r, q_0/r)$, y entonces

$$
\begin{aligned}
(v^q\{x : |Tf(x)| > \lambda\} \cap I_n)^{\frac{1}{q}} &\leq \left(\int \chi^{q_0}_{E_\lambda \cap I_n} (H_n^{1/q_0} v^{q/q_0})^{q_0} \right)^{1/q_0} \\
&\leq C \left(\int \chi^{q_0}_{E_\lambda} (H_n^{1/q_0} v^{q/q_0})^{q_0} \right)^{1/q_0} \\
&\leq C \left(\frac{1}{\lambda^{p_0}} \int |f|^{p_0} H_n^{1/q_0} v^{q/q_0})^{p_0} \right)^{1/p_0} .
\end{aligned}
$$

Como $p_0\, q/q_0 = p_0 + q\,(1 - p_0/p)$, se tiene

$$
(v^q(E_\lambda \cap I_n))^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\frac{1}{\lambda^{p_0}} \int |f|^{p_0} v^{p_0} H_n^{\frac{p_0}{q_0}} v^{q(\frac{1}{(\frac{p}{p_0})'})} \right)^{\frac{1}{p_0}} ;
$$

además, como $(\frac{p_0}{q_0})(\frac{p}{p_0})' = (\frac{q}{q_0})'$, por la desigualdad de Hölder es

$$
\begin{aligned}
(v^q(E_\lambda \cap I_n))^{\frac{1}{q}} &\leq C\frac{1}{\lambda} \left(\int |f|^p v^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int H_n^{(\frac{q}{q_0})'} v^q \right)^{p/p_0(p-p_0)} \\
&\leq C\frac{1}{\lambda} \|f\|_{p,v^p} .
\end{aligned}
$$

Sumando sobre n resulta

$$
(v^q\{x : |Tf(x)| > \lambda\})^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\frac{1}{\lambda^p} \int |f|^p v^p \right)^{\frac{1}{p}} .
$$

Ahora supongamos que $1 < p \leq p_0$ (lo que implica que $1 < q \leq q_0$); igual que antes vemos que $v^q \in A^+_s$ con $s = 1 + (q/r)/(p/r)'$ y notamos que $p = q - pq/p_0 + pq/q_0$; luego,

$$
\begin{aligned}
\left(\int |f|^p v^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int |f|^p v^{(\frac{-q}{p_0} + \frac{q}{q_0})p} v^q \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int [(|f| v^{\frac{-q}{p_0} + \frac{q}{q_0}})^{p_0}]^{\frac{p}{p_0}} v^q \right)^{\frac{p_0}{p}\frac{1}{p_0}} .
\end{aligned} \tag{4.2}
$$

Entonces existe $g \geq 0$ con $\int (g^{-1})^{(\frac{p}{p_0})'} v^q = \int g^{p/(p_0-p)} v^q = 1$ y tal que

$$
(4.2) = \left(\int (|f| v^{\frac{-q}{p_0} + \frac{q}{q_0}})^{p_0} g^{-1} v^q \right)^{\frac{1}{p_0}} = \left(\int |f|^{p_0} v^{\frac{p_0 q}{q_0}} g^{-1} \right)^{\frac{1}{p_0}} .
$$

Sea $h = g^{-q_0/p_0}$. Observar que $||h||_{q/(q_0-q),v^q} = 1$ y $s/(s_0 - s) = q/(q_0 - q)$ con $s_0 = 1 + (q_0/s)/(p_0/s)'$; por lo tanto, por el Lema 1.24.ii existe $H \geq h$ con

$||H||_{q/(q_0-q),v^q} \leq C$ y $H^{-1}v^q \in A^+_{s_0}$, es decir que $(H^{-1/q_0}v^{q/q_0})^r \in A^+(p_0/r, q_0/r)$; luego

$$
\begin{aligned}
(v^q\{x : |Tf(x)| > \lambda\})^{\frac{1}{q}} &= \left(\int \chi^q_{E_\lambda} H^{\frac{q}{q_0}} H^{\frac{-q}{q_0}} v^q\right)^{1/q} \\
&\leq \left(\int \chi^{q_0}_{E_\lambda} H^{-1} v^q\right)^{1/q_0} \left(\int H^{\frac{q}{q_0}(\frac{q_0}{q})'} v^q\right)^{\frac{1}{q}\frac{1}{(\frac{q}{q_0})'}} \\
&\leq \left(\int \chi^{q_0}_{E_\lambda} (H^{-1/q_0} v^{q/q_0})^{q_0}\right)^{\frac{1}{q_0}} \left(\int H^{\frac{q}{(q_0-q)}} v^q\right)^{\frac{1}{q}\frac{q_0-q}{q}} \\
&\leq C\left(\frac{1}{\lambda^{p_0}} \int |f|^{p_0} (H^{\frac{-1}{q_0}} v^{\frac{q}{q_0}})^{p_0}\right)^{\frac{1}{p_0}} \\
&\leq C\left(\frac{1}{\lambda^{p_0}} \int |f|^{p_0} v^{\frac{p_0 q}{q_0}} g^{-1}\right)^{\frac{1}{p_0}} \\
&= C\left(\frac{1}{\lambda^{p}} \int |f|^{p} v^{p}\right)^{\frac{1}{p}} . \quad \square
\end{aligned}
$$

El Teorema que se prueba a continuación, muestra cómo con la sola hipótesis de que el operador esté débilmente acotado (p_0, q_0), para todo peso $v^r \in A^+(p_0/r, q_0/r)$, se obtienen acotaciones fuertes (p, q) para todo peso $v^r \in A^+(p/r, q/r)$. En la prueba se usa el Teorema I 4.1 y técnicas utilizadas en [Mu-Wh].

4.3 Teorema II.

Sea T un operador sublineal definido en $C^\infty_0(IR)$, sea $1 \leq r < p_0 \leq q_0 < \infty$ y supongamos que para todo v tal que $v^r \in A^+(p_0/r, q_0/r)$ se satisface

$$(v^{q_0}\{x : |Tf(x)| > \lambda\})^{\frac{1}{q_0}} \leq \left(\frac{1}{\lambda^{p_0}} \int |f|^{p_0} v^{p_0}\right)^{\frac{1}{p_0}} .$$

Entonces para todo par (p, q) con $r < p \leq q < \infty$ tal que $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0}$, y para toda $v^r \in A^+(p/r, q/r)$, tenemos que

$$\left(\int |Tf(x)|^q v^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int |f|^p v^p\right)^{\frac{1}{p}} .$$

Demostración. Por hipótesis, y por el Teorema I 4.1, tenemos que si $v^r \in A^+(p/r, q/r)$ entonces

$$(v^q\{x : |Tf(x)| > \lambda\})^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\frac{1}{\lambda^p} \int |f|^p v^p\right)^{\frac{1}{p}} .$$

Notar que $v^q \in A^+_s$ con $s = 1 + (q/r)/(p/r)'$, y por el Teorema 1.3 existe $\epsilon > 0$ tal que $v^q \in A^+_{s-\epsilon}$. Además existen p_1, q_1 con $p_1 < p$ y $q_1 < q$ tales que

$$s - \epsilon = s_1 = 1 + \frac{q_1/r}{(p_1/r)'} \quad \text{y} \quad \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0} .$$

Sea $\gamma = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0}$, y si p_2, q_2, son tales que $p_2 > p$, $q_2 > q$ y $\gamma = \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}$, entonces $v^q \in A^+_{s_2}$, con $s_2 = 1 + \frac{q_2/r}{(p_2/r)'}$. Recordemos que $s_1 < s_2$ implica $A^+_{s_1} \subset A^+_{s_2}$.
Consideremos el operador $Lg(x) = T(gw^\gamma)(x)$ donde $w = v^q$, y notemos que $w \in A^+_s, A^+_{s_1}, A^+_{s_2}$; entonces

$$\int_{\{x:|Lg(x)|>\lambda\}} w = \int_{\{x:|T(gw^\gamma)(x)|>\lambda\}} (w^{\frac{1}{q_1}})^{q_1} \leq C \left(\frac{1}{\lambda^{p_1}} \int g^{p_1} w^{p_1\gamma} w^{p_1/q_1} \right)^{\frac{q_1}{p_1}} .$$

Como $p_1(1/p_0 - 1/q_0) + p_1/q_1 = 1$, se tiene

$$\left(\frac{1}{\lambda^{p_1}} \int g^{p_1} w^{p_1\gamma} w^{p_1/q_1} \right)^{\frac{q_1}{p_1}} = \left(\frac{1}{\lambda^{p_1}} \int g^{p_1} w \right)^{\frac{q_1}{p_1}} .$$

Y de igual manera se ve que

$$\int_{\{x:|Lg(x)|>\lambda\}} w = \int_{\{x:|T(gw^\gamma)(x)|>\lambda\}} w \leq C \left(\frac{1}{\lambda^{p_2}} \int g^{p_2} w \right)^{\frac{q_2}{p_2}} .$$

Luego, por el Teorema de Interpolación de Marcinkiewicz, obtenemos

$$\left(\int |Lg|^q w \right)^{1/q} \leq C \left(\int |g|^p w \right)^{\frac{1}{p}}$$

para todo $p = tp_2 + (1-t)p_1$ y $q = tq_2 + (1-t)q_1$, con $0 \leq t \leq 1$.
Si $g = fw^{-\gamma}$, entonces $Lg = Tf$ y por lo tanto

$$\left(\int |Tg|^q v^q \right)^{1/q} \leq C \left(\int |f|^p v^{-q\gamma p + q} \right)^{\frac{1}{p}} = C \left(|f|^p v^p \right)^{\frac{1}{p}} . \quad \square$$

El Teorema III que sigue es una versión lateral del Teorema de Extrapolación de Rubio de Francia. Se prueba que teniendo como hipótesis que el operador sea de tipo débil (p_0, p_0) para la clase $A^+_{p_0/r}$ contenida en la $A^+_{p_0}$, obtenemos el fuerte (p,p) para la clase $A^+_{p/r}$ contenida en la A^+_p.

4.4 Teorema III.

Sea T un operador sublineal definido en $C_0^\infty(IR)$ y supongamos que para todo $v \in A^+_{p_0/r}$, con $1 < p_0/r < \infty$, tenemos que

$$(4.5) \qquad (v\{x : |Tf(x)| > \lambda\})^{\frac{1}{p_0}} \leq C \left(\frac{1}{\lambda^{p_0}} \int |f|^{p_0} v \right)^{\frac{1}{p_0}} .$$

Entonces para todo $v \in A^+_{p/r}$ y $1 < p < \infty$ tenemos

$$\int |Tf|^p v \leq C \int |f|^p v .$$

Demostración. Sea $v^r \in A^+(p_0/r, p_0/r)$, entonces $v^{p_0} \in A^+_{p_0/r}$, luego por hipótesis

$$(v^{p_0}\{x : |Tf(x)| > \lambda\})^{\frac{1}{p_0}} \le C\left(\frac{1}{\lambda^{p_0}}\int |f|^{p_0}v^{p_0}\right)^{\frac{1}{p_0}} ,$$

y así por el Teorema I 4.1, para toda $v^r \in A^+(p/r, p/r)$ y para todo $r < p < \infty$ se satisface

$$(v^p\{x : |Tf(x)| > \lambda\})^{\frac{1}{p}} \le C\left(\frac{1}{\lambda^p}\int |f|^p v^p\right)^{\frac{1}{p}} .$$

Si $v \in A^+_{p/r}$, existe $r < p_1 < p$ tal que $v \in A^+_{p_1/r} \subset A^+_{p/r}$. Por lo tanto $(v^{\frac{1}{p_1}})^r \in A^+(p_1/r, p_1/r)$ (Lema 1.12.vii) y vale (4.5) con p_1 en lugar de p_0. Notamos también que $v \in A^+_{p_2/r} \supset A^+_{p/r}$ para todo $p_2 > p$ y de igual manera vemos que (4.5) se cumple con p_2 en lugar de p_0. Aplicando el Teorema de Interpolación de Marcinkiewcz, tenemos que, si $v \in A^+_{p/r}$, entonces

$$\int |Tf|^p v \le \int |f|^p v . \quad \square$$

En el Teorema IV 4.6 usaremos las normas $L(p, q, \mu)$ de los Espacios de Lorentz. Recordemos, que si f es medible en un espacio de medida, un reordenamiento no-decreciente f^* de f se define como

$$f^*(t) = \inf\{s : \mu(\{x : |f(x)| > s\}) \le t\} ,$$

para $t > 0$.

Una función f se dice que pertenece al espacio de Lorentz $L(p, q, \mu)$ si

$$||f||_{p,q,\mu} = \left(\frac{p}{q}\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}} f^*(t)]^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty ,$$

con $1 < p < \infty$ y $1 < q < \infty$, y

$$||f||_{p,\infty,\mu} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) ,$$

con $1 < p \le \infty$ y $q = \infty$. Para más detalles ver [St-W].

4.6 Teorema IV.

Sea T un operador definido en $C_0^\infty(IR)$, con valores en el espacio de las funciones medibles. Supongamos que T satisface:

1. $|T(\lambda f)| = |\lambda||T(f)|$ *y* $|T(f + g)| \le |T(f)| + |T(g)|$

2. Dado r y β, $1 \le r < \beta \le \infty$, para todo par (a, b) de funciones tal que $(a^r, b^r) \in A^+(\frac{\beta}{r}, \infty)$ vale

$$||aT(f)||_\infty \le C||fb||_\beta ,$$

con C dependiendo sólo de la constante de $A^+\left(\frac{\beta}{r}, \infty\right)$ del par (a^r, b^r).

Si $r < p < \beta$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{\beta}$ y $(u^r, v^r) \in A^+\left(\frac{p}{r}, \frac{q}{r}\right)$, entonces existe C que depende de $\frac{p}{r}$, $\frac{q}{r}$, y de la constante $A^+\left(\frac{p}{r}, \frac{q}{r}\right)$ del par (u^r, v^r) tal que

$$u^q\left(\{x : |Tf(x)| > \lambda\}\right) \leq C\left(\lambda^{-p}\int |f|^p v^p\, dx\right)^{\frac{q}{p}} \quad \forall\lambda > 0\ .$$

Demostración. Sea $f \in C_0^\infty(R)$, $0 < m = \int |f|^p v^p\, dx$, y $(u^r, v^r) \in A^+\left(\frac{p}{r}, \frac{q}{r}\right)$. Definimos

$$b(x) = \begin{cases} |f(x)|^{\frac{p}{\beta}-1} v(x)^{\frac{p}{\beta}} m^{\frac{1}{q}} & \text{si} \quad |f(x)| > 0 \\ e^{\pi\frac{|x|^2}{q}} v(x) & \text{si} \quad |f(x)| = 0\ . \end{cases}$$

Esta b satisface

i. $||fv||_p = ||fb||_\beta$

ii. $\displaystyle\int b^{-q} v^q\, dx \leq 2$

Probemos estas dos afirmaciones:
Sea $\beta < \infty$
i.

$$\begin{aligned}\left(\int |f|^\beta b^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}} &= \left(\int_{\{x:f\neq 0\}} |f|^\beta |f|^{(\frac{p}{\beta}-1)\beta} v^p m^{\frac{\beta}{q}}\right)^{\frac{1}{\beta}} \\ &= \left(\int |f|^p v^p\right)^{\frac{1}{\beta}} \left(\int |f|^p v^p\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int |f|^p v^p\right)^{\frac{1}{p}}\ .\end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}\int b^{-q} v^q\, dx &= m^{-1}\int_{\{x:f\neq 0\}} \left(|f|^{\frac{p}{\beta}-1} v^{\frac{p}{\beta}}\right)^{-q} v^q + \int_{\{x:f=0\}} \left(e^{-\pi\frac{|x|^2}{q}} v\right)^{-q} v^q \\ &= m^{-1}\int_{\{x:f\neq 0\}} |f|^{\frac{-qp}{\beta}+q} v^{\frac{-qp}{\beta}+q} + \int_{\{x:f=0\}} e^{-\pi|x|^2} \\ &\leq 2\ .\end{aligned}$$

El caso $\beta = \infty$ es más simple , puesto que p coincide con q y las afirmaciones son inmediatas.

Definamos

$$a(x) = \left(M^+ b^{r(\frac{\beta}{r})'}(x)\right)^{-\frac{1}{r(\frac{\beta}{r})'}}\ .$$

Notemos que $(a^r,b^r)\in A^+(\frac{\beta}{r},\infty)$, pues: $||a^r\chi_{[x-h,x]}||_\infty\left(\frac{1}{h}\int_x^{x+h}b^{-r(\frac{\beta}{r})'}\right)^{\frac{1}{(\frac{\beta}{r})'}}$

$$\begin{aligned}
&=\left\|\left(M^+b^{r(\frac{\beta}{r})'}\right)^{-\frac{1}{(\frac{\beta}{r})'}}\chi_{[x-h,x]}\right\|_\infty\left(\frac{1}{h}\int_x^{x+h}b^{-r(\frac{\beta}{r})'}\right)^{\frac{1}{(\frac{\beta}{r})'}}\\
&\le 2\left(M^+b^{r(\frac{\beta}{r})'}(t)\right)^{-\frac{1}{(\frac{\beta}{r})'}}\left(\frac{2}{x+h-t}\int_t^{x+h}b^{-r(\frac{\beta}{r})'}\right)^{\frac{1}{(\frac{\beta}{r})'}}\\
&\le 4\left(M^+b^{r(\frac{\beta}{r})'}(t)\right)^{-\frac{1}{(\frac{\beta}{r})'}}\left(M^+b^{r(\frac{\beta}{r})'}(t)\right)^{\frac{1}{(\frac{\beta}{r})'}}\\
&=4\ ,
\end{aligned}$$

donde $t\in[x-h,x]$. Sea $E_\lambda=\{x:|Tf(x)|>\lambda\}$; luego

$$\begin{aligned}
u^q(E_\lambda)&=\int_{E_\lambda}u^q\\
&=\int\chi_{E_\lambda}(x)a^{-1}(x)a(x)u^q(x)\,dx\\
&\le||\chi_{E_\lambda}||_{(1+1/q,1,au^q)}||a^{-1}||_{(q+1,\infty,au^q)}\ .
\end{aligned}$$

Para estimar el segundo factor observamos que

$$\lambda^{q+1}\int_{\{x:a(x)^{-1}>\lambda\}}au^q\le\lambda^q\int_{\{x:M^+b^{-r(\frac{\beta}{r})'}(x)>\lambda^{r(\frac{\beta}{r})'}\}}u^q\ . \tag{4.7}$$

Ya que $(u^r,v^r)\in A^+\left(\frac{p}{r},\frac{q}{r}\right)$, por Lema 1.12.i, $(u^q,v^q)=(u^{r\frac{q}{r}},v^{r\frac{q}{r}})\in A_s^+$, con $s=1+(q/r)/(p/r)'$, y se sigue que (ver [S], [MR-O-T], [MR]) M^+ es de tipo débil $L^s(v^q)\to L^s(u^q)$.
Entonces

$$(4.7)\le\frac{\lambda^q}{(\lambda^{r(\frac{\beta}{r})'})^s}\int(b^{-r(\frac{\beta}{r})'})^s v^q=\int b^{-q}v^q\le 2C\ .$$

Calculamos la reordenada de a^{-1} respecto de la medida au^q, esto es

$$\begin{aligned}
(a^{-1})^*(t)&=\inf\{y:\ au^q(\{x:\ |a^{-1}|>y\})\le t\}\\
&\le\inf\{y:\ \frac{C}{y^{q+1}}\le t\}\\
&=\left(\frac{C}{t}\right)^{\frac{1}{q+1}}\ ;
\end{aligned}$$

luego, se tiene

$$||a^{-1}||_{(q+1,\infty,au^q)}=\sup_{t>0}\ t^{\frac{1}{q+1}}(a^{-1})^*(t)\le C\ .$$

Un reordenamiento no decreciente de χ_{E_λ} es $\chi_{[0,R)}$ con $R=\int_{E_\lambda}au^q$, por lo tanto

$$||\chi_{E_\lambda}||_{(1+\frac{1}{q},1,au^q)}=\frac{q}{q+1}\int_0^R t^{\frac{q}{q+1}}\,\frac{dt}{t}=\frac{q}{q+1}\int_0^R t^{-\frac{1}{q+1}}\,dt=R^{\frac{q}{q+1}}.$$

Por otro lado

$$
\begin{aligned}
R = \int_{E_\lambda} au^q &\leq \lambda^{-1}\int_{E_\lambda} |Tf| au^q \\
&\leq \lambda^{-1}||aTf||_\infty \int_{E_\lambda} u^q \\
&\leq C\lambda^{-1}||fb||_\beta \int_{E_\lambda} u^q \ .
\end{aligned}
$$

Por esto

$$||\chi_{E_\lambda}||_{(1+\frac{1}{q},1,au^q)} \leq \lambda^{-\frac{q}{q+1}}||fb||_\beta^{\frac{q}{q+1}}(\int_{E_\lambda} u^q)^{\frac{q}{q+1}} \ .$$

Teniendo presente las propiedades de b y que $\displaystyle\int_{E_\lambda} u^q < \infty$ pues $f \in C_0^\infty(IR)$, se sigue

$$
\begin{aligned}
u^q(E_\lambda) &\leq ||\chi_{E_\lambda}||_{(1+1/q,1,au^q)}||a^{-1}||_{(q+1,\infty,au^q)} \\
&\leq 2C\lambda^{-\frac{q}{q+1}}||fv||_p^{\frac{q}{q+1}}(u^q(E_\lambda))^{\frac{q}{q+1}} \ .
\end{aligned}
$$

Es decir

$$(u^q(E_\lambda))^{\frac{1}{q+1}} \leq 2C\lambda^{-\frac{q}{q+1}}||fv||_p^{\frac{q}{q+1}} \ .$$

En conclusión tenemos que

$$u^q(\{x : |Tf(x)| > \lambda\}) \leq C(\frac{1}{\lambda^p}\int f^p v^p)^{\frac{q}{p}} \ . \quad \square$$

Aplicaciones:

Primera aplicación.

Para $0 < \alpha < 1$ y $1 \leq r < \infty$ definimos

$$M_\alpha^{r,+} f(x) = \sup_{h>0} \left(\frac{1}{h^{1-\alpha}} \int_x^{x+h} |f(y)|^r \, dy \right)^{\frac{1}{r}} .$$

Cuando $r = 1$, $M_\alpha^{1,+} = M_\alpha^+$.

4.8 Teorema.
Sea $(u^r, v^r) \in A^+(\frac{p}{r}, \frac{q}{r})$*. Entonces existe* C *tal que*

$$u^q \left(\{x : |M_\alpha^{+,r} f(x)| > \lambda\} \right) \leq C \left(\lambda^{-p} \int |f|^p v^p \, dx \right)^{\frac{q}{p}} \quad \forall \lambda > 0 ,$$

con $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{r}$ *y* $r < p < \frac{r}{\alpha}$*.*

Demostración. Sea $T = M_\alpha^{r,+}$; veamos que T satisface las hipótesis del Teorema IV 4.6. Sea $\beta = \frac{r}{\alpha}$, $h > 0$, x fijo y $(a^r, b^r) \in A^+(\frac{\beta}{r}, \infty)$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^{1-\alpha}} \int_x^{x+h} |f(y)|^r \, dy &= \frac{1}{h^{1-\alpha}} \int_x^{x+h} |f|^r b^r b^{-r} \\ &\leq \frac{1}{h^{1-\alpha}} \left(\int_x^{x+h} |f|^{r\frac{1}{\alpha}} b^{\frac{r}{\alpha}} \right)^{\alpha} \left(\int_x^{x+h} b^{-r\frac{1}{1-\alpha}} \right)^{1-\alpha} . \end{aligned}$$

Notar que a es localmente finita, por lo tanto finita pp$x$, y sea x tal que $a^r(x) \leq ||a^r \chi_{[x-h,x]}||_\infty$; luego

$$a(x) \left(\frac{1}{h^{1-\alpha}} \int_x^{x+h} |f(y)|^r \, dy \right)^{\frac{1}{r}}$$

$$\begin{aligned} &\leq ||a^r \chi_{[x-h,x]}||_\infty^{\frac{1}{r}} \left[\frac{1}{h^{1-\alpha}} \left(\int_x^{x+h} |f(y)|^{r\frac{1}{\alpha}} b^{\frac{r}{\alpha}} \right)^{\alpha} \left(\int_x^{x+h} b^{-r\frac{1}{1-\alpha}} \right)^{1-\alpha} \right]^{\frac{1}{r}} \\ &\leq C(a^r, b^r) ||fb||_\beta \ . \end{aligned}$$

Por lo tanto $a(x) Tf(x) \leq C ||fb||_\beta$, es decir

$$||aTf||_\infty \leq C ||fb||_\beta \ .$$

Con esto, aplicando el Teorema IV 4.6 resulta lo enunciado. $\square$

Con $r = 1$ tenemos el resultado ya conocido ([G-K])

4.9 Teorema. *Sea $(u,v) \in A^+(p,q)$. Entonces existe C tal que*

$$u^q\left(\{x : |M_\alpha^+ f(x)| > \lambda\}\right) \le C\left(\lambda^{-p}\int |f|^p v^p\,dx\right)^{\frac{q}{p}} \quad \forall\lambda > 0 \ ,$$

con $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \alpha$ y $1 < p < \frac{1}{\alpha}$.

Segunda Aplicación.

4.10 Teorema.
Sea $Tf(x) = (I_\alpha^+|f|(x))_+^\#$. Si $(u,v) \in A^+(p,q)$, con $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \alpha$, entonces

$$u^q(\{x : (I_\alpha^+|f|(x))_+^\# > \lambda\}) \le C\left(\lambda^{-p}\int |f|^p v^p\,dx\right)^{\frac{q}{p}} \quad \forall\lambda > 0\ .$$

Demostración. Ante todo, se sabe que

$$(I_\alpha^+|f|(x))_+^\# \le C_\alpha M_\alpha^+ f(x)\ . \tag{4.11}$$

Por completitud, incluímos la prueba de (4.11) publicada en [M.R-T].
Supongamos $f > 0$, y $f = f_1 + f_2$, con $f_1 = f\chi_{[x,x+2h]}$.

$$\begin{aligned}
(I_\alpha^+ f(x))_+^\# &= \sup_{h>0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}(I_\alpha^+ f(y) - \frac{1}{h}\int_{x+h}^{x+2h} I_\alpha^+ f)^+\,dy \\
&\le \sup_{h>0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}(I_\alpha^+ f_1(y) - \frac{1}{h}\int_{x+h}^{x+2h} I_\alpha^+ f_1)^+\,dy \\
&+ \sup_{h>0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}(I_\alpha^+ f_2(y) - \frac{1}{h}\int_{x+h}^{x+2h} I_\alpha^+ f_2)^+\,dy\ .
\end{aligned}$$

Acotemos el primer sumando.

$$\begin{aligned}
\sup_{h>0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}(I_\alpha^+ f_1(y) - \frac{1}{h}\int_{x+h}^{x+2h} I_\alpha^+ f_1)^+\,dy &\le \sup_{h>0}\frac{1}{h}\int_x^{x+2h}|I_\alpha^+ f_1(y)|\,dy \\
&= \sup_{h>0}\frac{1}{h}\int_x^{x+2h}\int_y^{x+2h}\frac{f(z)}{(z-y)^{1-\alpha}}\,dz\,dy \\
&\le \sup_{h>0}\frac{1}{h}\int_x^{x+2h} f(z)\int_x^z\frac{1}{(z-y)^{1-\alpha}}\,dy\,dz \\
&\le \sup_{h>0}\frac{1}{h}\int_x^{x+2h} f(z)\frac{|x-z|^\alpha}{2-\alpha}\,dz \\
&\le \sup_{h>0}\frac{h^{\alpha-1}}{2-\alpha}\int_x^{x+2h} f(z)\,dz \\
&\le CM_\alpha^+ f(x)\ .
\end{aligned}$$

El segundo término es 0 pues lo encerrado entre paréntesis es ≤ 0, ya que

$$I_\alpha^+ f_2(y) - \frac{1}{h}\int_{x+h}^{x+2h} I_\alpha^+ f_2 = \int_{x+2h}^{\infty} \frac{f(t)}{(t-y)^{1-\alpha}}\, dt - \frac{1}{h}\int_{x+h}^{x+2h}\int_{x+2h}^{\infty} \frac{f(t)}{(t-z)^{1-\alpha}}\, dt\, dz$$
$$= \frac{1}{h}\int_{x+h}^{x+2h}\int_{x+2h}^{\infty} f(t)\left[\frac{1}{(t-y)^{1-\alpha}} - \frac{1}{(t-z)^{1-\alpha}}\right] dt\, dz\ = 0\ ,$$

pues $y < z < x+2h < t$ y esto implica que $t-z < t-y$.

Como para M_α^+ vale que

$$||aM_\alpha^+ f||_\infty \leq C||fb||_{\frac{1}{\alpha}}$$

para todo $(a,b) \in A^+(\frac{1}{\alpha},\infty)$ (ver Teorema 4.8 para r=1), teniendo en cuenta (4.11) se obtiene

$$||a(I_\alpha^+|f|)_+^{\#}||_\infty \leq C_\alpha ||fb||_{\frac{1}{\alpha}}$$

para todo $(a,b) \in A^+(\frac{1}{\alpha},\infty)$. Luego, si $(u,v) \in A^+(p,q)$ con $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \alpha$, aplicando el Teorema IV 4.6, resulta

$$u^q(\{x : (I_\alpha^+|f|(x))_+^{\#} > \lambda\}) \leq C\left(\lambda^{-p}\int |f|^p v^p\, dx\right)^{\frac{q}{p}} \quad \forall \lambda > 0\ . \quad \square$$

REFERENCIAS

[**A-F-MR**] H. Aimar, L. Forzani, F.J. Martín-Reyes, *On Weighted Inequalities For One-Sided Singular Integrals*, Impresión previa.

[**C-J-RF**] R. Coifman, P. Jones, J.L. Rubio de Francia, *Constructive Descomposition of BMO Functions and Factorization of A_p Weights*, Proc. Amer. Math. Soc. **87** (1983), 675–676.

[**GC**] J. García Cuerva, *An Extrapolation Theorem in The Theory of A_p Weights*, Proc. Amer. Math. Soc. **87** (1983), 422–426.

[**GC-RF**] J.García Cuerva, J.L. Rubio de Francia, *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*, North-Holland, 1985.

[**G-K**] M. Gabidzashvili, V. Kokilashvili, *Two Weight Weak Type Inequalities for Fractional-Type Integrals*, Math. Inst. Czech. Acad. Sci., Prague **45** (1989), 547–558.

[**Hd-L-P**] G. Hardy, J. Littlewood, Polya, *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge. Second Edition, 1952.

[**H-M-Se 1**] E. Harboure, R.A. Macías, C. Segovia, *Extrapolation Results for Classes of Weights*, Amer. Jour. of Math. **110** (1988), 383–397.

[**H-M-Se 2**] ______, *An Extrapolation Theorem for Pairs of Weights*, Cuadernos de Matemática y Mecánica **2-87** (1987).

[**Hu-Mu-Wh**] R. Hunt, B. Muckenhoupt, R. Wheeden, *Weighted Norm Inequalities for The Conjugated Hilbert Transform*, Trans. Amer. Math. Soc. **176** (1973), 227–251.

[**Mu**] B. Muckenhoupt, *Weighted Norm Inequalities for The Hardy Maximal Function*, Trans. Amer. Math. Soc. **165** (1972), 207–226.

[**MR**] F.J. Martín-Reyes, *New Proofs of Weighted Inequalities for The One-Sided Hardy–Littlewood Maximal Functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **117**, 691–698.

[**MR-T**] F.J. Martín-Reyes , A. de la Torre, *One Sided BMO Spaces*, Jour. of London Math. Soc. Por aparecer.

[**MR-O-T**] F.J. Martín-Reyes, P. Ortega, A. de la Torre, *Weighted Inequalities for One-Sided Maximal Functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **319-2** (1990), 517–534.

[**Mu-Wh**] B. Muckenhoupt, R. Wheeden, *Weighted Norm Inequalities for Fractional Integrals*, Trans. Amer. Math. Soc. **192** (1974), 261–274.

[**R**] M. Riesz, *Sur les Functions Conjugueés*, MZ **29** (1927), 218–244.

[**RF**] J.L. Rubio de Francia, *Factorization Theory and A_p Weights*, Amer. Jour. Math. **106** (1984), 533–547.

[**S**] E. Sawyer, *Weighted Inequalities for The One-Sided Hardy-Littelwood Maximal Function*, Trans. Amer. Math. Soc. **297** (1986), 53–61.

[**St-W**] E. Stein, G. Weiss, *Introduction to the Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, 1975.