

ESPECIALIZACIÓN EN SISTEMAS DE RADAR E
INSTRUMENTACIÓN



**IMPLEMENTACIÓN DE UN GENERADOR DE
DATOS DE RADAR METEOROLÓGICO
DOBLE POLARIMÉTRICO DE BANDA C**

Autor: Lic. Luciana Heredia
Director: Mgter. Gustavo Lazarte
Asesor: Lic. Andrés Pérez Hortal

Fecha: 27 de marzo de 2014

Índice

1. INTRODUCCIÓN	1
2. DESARROLLO	1
2.1. Método Matriz T	1
2.2. Aplicación del método de Rayleigh a gotas de lluvia	3
2.2.1. Distribución de Tamaños de Gotas	4
2.2.2. Reflectividades	5
2.3. Implementación del método Matriz T	8
2.3.1. Código	8
2.3.2. Aplicación del código Matriz T	9
3. RESULTADOS	10
4. CONCLUSIONES	15
5. REFERENCIAS	17
A. ANEXO	19
A.1. Matriz de Scattering (<i>Matriz de Dispersión</i>)	19
A.1.1. Convención FSA	19
A.1.2. Convención BSA	21
A.2. Teorema de Reciprocidad	23
A.3. Matriz de scattering para una esfera y un esferoide teniendo en cuenta la aproximación de Rayleigh-Gans	24
A.3.1. Esfera	24
A.3.2. Esferoide	26

Resumen

En este trabajo se ha realizado la implementación de un generador de datos de radar meteorológico doble polarimétrico de banda C. El interés sobre el tema elegido surge sobre el hecho que en el país recién se está incorporando la polarimetría a este tipo de radares, por lo que es necesario contar con un simulador que permita obtener, en primera aproximación, el comportamiento de las distintas variables polarimétricas frente a diversos parámetros climáticos.

Para desarrollar el generador, se utilizó el método matriz T . Se comprobó su funcionamiento aplicándolo a gotas de lluvia empleando la banda S, y mediante comparaciones utilizando el método de Rayleigh. Finalmente, el generador se implementó para la banda C.

1. INTRODUCCIÓN

El radar meteorológico es una herramienta importante que permite detectar, entre otros fenómenos atmosféricos, lluvia y granizo en las nubes. El mismo emite ondas de radiofrecuencia, que al impactar contra partículas de agua o hielo, reflejan parte de su energía de regreso hacia el radar, lo que permite obtener los “observables de radar”, con los cuales se determinan los parámetros meteorológicos tales como la tasa de precipitación, entre otros.

Los radares meteorológicos existentes actualmente en el país, cuentan con tecnología doppler de banda C, la cual permite determinar la velocidad de las partículas suspendidas en el aire, ya sean líquidas o congeladas, para posteriormente, estimar la tasa de precipitación (R). Pero debido a que dicha estimación es poco precisa, es que se está comenzando a incorporar una nueva herramienta (ya sólidamente establecida en Europa) a este tipo de radares: *la polarimetría*. El motivo se debe a que la misma permite determinar la distribución de tamaños de gotas, y diversos parámetros polarimétricos, que contribuyen a una mejor estimación de R.

Debido a la reciente implementación de la polarimetría en Argentina, es necesario contar con simuladores que permitan conocer cómo será el comportamiento de las diferentes variables polarimétricas frente a las situaciones climáticas. Por este motivo, el objetivo general de este trabajo es implementar un generador de datos de radar meteorológico doble polarimétrico en la banda C para conocer, en primera aproximación, las principales características de los observables del radar. En primer lugar, se evaluarán las aplicaciones del *Método Matriz T* mediante la revisión de bibliografía relacionada, ya que el mismo es uno de los más utilizados para describir la dispersión de ondas debido a partículas resonantes. En segundo lugar, se realizará una aplicación a gotas de lluvia empleando la banda S, para posteriormente, implementar el generador con la banda C. Por último, se analizarán mediante el método comparativo, los resultados obtenidos por la aplicación de los marcos teóricos de Rayleigh y Mishchenko, con el fin de seleccionar el más adecuado para la investigación y desarrollo del generador.

2. DESARROLLO

2.1. Método Matriz T

En muchos campos de la ciencia y la ingeniería, tales como óptica atmosférica, oceanografía, meteorología de radar, astrofísica y biofísica, se requiere información precisa sobre las propiedades de dispersión de la luz de partículas pequeñas no esféricas. Frecuentemente, se trabaja con partículas de tamaño comparable con la longitud de onda de la radiación incidente. En este caso, se dice que dichas partículas son “resonantes”, y las aproximaciones de Rayleigh y de la óptica geométrica no son aplicables. Por lo tanto, los métodos numéricos deben basarse directamente en la resolución de las ecuaciones de Maxwell.

En la actualidad, la aproximación *Matriz T* de Waterman (1971) es una de las herramientas más utilizadas para cálculos rigurosos de dispersión de la luz debido a partículas no esféricas resonantes. En ella, se considera la dispersión de una onda electromagnética plana debido a una partícula no esférica, ubicada en una orientación fija con respecto al sistema de referencia. Los campos incidente y dispersado (ver Anexo) pueden expandirse en funciones vectoriales esféricas de la siguiente manera:

$$\vec{E}^{inc}(\vec{r}) = \sum_{n=1}^{n_{max}} \sum_{m=-n}^n \left[a_{mn} Rg \vec{M}_{mn}(k\vec{r}) + b_{mn} Rg \vec{N}_{mn}(k\vec{r}) \right] \quad (1)$$

$$\vec{E}^{dis}(\vec{r}) = \sum_{n=1}^{n_{max}} \sum_{m=-n}^n \left[p_{mn} \vec{M}_{mn}(k\vec{r}) + q_{mn} \vec{N}_{mn}(k\vec{r}) \right], \quad |\vec{r}| > r_0 \quad (2)$$

donde Rg indica que se utiliza la parte regular de las funciones esféricas, es decir, las funciones de Hankel se reemplazan por las de Bessel, r_0 es el radio de una esfera que circunscribe a la partícula dispersora, y el origen del sistema de coordenadas se asume dentro de la partícula (Figura 1). Debido a la linealidad de las ecuaciones de Maxwell y a las condiciones de contorno, la relación entre los coeficientes del campo dispersado (p_{mn} , q_{mn}) y los coeficientes del campo incidente (a_{mn} , b_{mn}) es lineal y está dada por la *Matriz de Transición T* (o *Matriz T*):

$$p_{mn} = \sum_{n'=1}^{n_{max}} \sum_{m'=-n'}^{n'} \left[T_{mnm'n'}^{11} a_{m'n'} + T_{mnm'n'}^{12} b_{m'n'} \right] \quad (3)$$

$$q_{mn} = \sum_{n'=1}^{n_{max}} \sum_{m'=-n'}^{n'} \left[T_{mnm'n'}^{21} a_{m'n'} + T_{mnm'n'}^{22} b_{m'n'} \right] \quad (4)$$

En notación matricial, las ecuaciones (3) y (4) pueden escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^{11} & \mathbf{T}^{12} \\ \mathbf{T}^{21} & \mathbf{T}^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Debido a que los coeficientes de expansión de la onda plana incidente a_{mn} y b_{mn} , pueden calcularse fácilmente utilizando expresiones analíticas, el conocimiento de la matriz T para un dispersor dado permite calcular el campo dispersado mediante las ecuaciones (2)-(4). Una característica fundamental de la matriz T es que sus elementos son independientes de los campos incidente y dispersado, y solo dependen de la forma, tamaño, índice de refracción y orientación con respecto al sistema de referencia de la partícula dispersora. Consecuentemente, la matriz T solo necesita calcularse una vez y luego puede ser utilizada para cualquier dirección de incidencia y dispersión.

Para más información sobre este método, se recomienda dirigirse al trabajo realizado por Mishchenko et al. (1996).

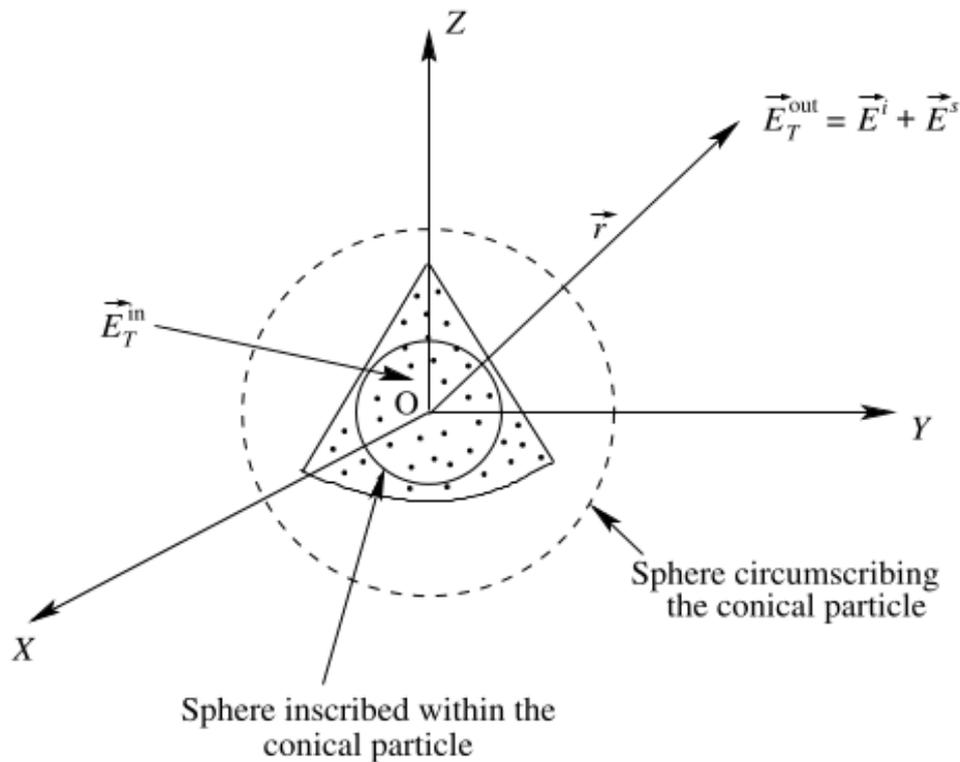


Figura 1: Geometría relevante a la Matriz T . Las condiciones de contorno se satisfacen dentro de la esfera inscrita. La expansión del campo dispersado es válida en el exterior de la esfera circunscrita.

2.2. Aplicación del método de Rayleigh a gotas de lluvia

Los hidrometeoros son partículas que consisten en agua líquida o congelada, y en mediciones reales, es posible la mezcla de estos dos estados. Las clases más populares son gotas de lluvia, copos de nieve, cristales de hielo y granizo. Para tener información sobre los mismos debemos mirar dentro de la nube. Por lo tanto, las mediciones ópticas comunes no son adecuadas debido a que la longitud de onda es muy corta (décimas de μm). Como consecuencia, se necesita considerar dispositivos con longitudes de onda largas, del orden de los milímetros o centímetros.

El estudio de las gotas de lluvia es el primer paso para realizar una clasificación de hidrometeoros con un radar meteorológico polarimétrico. Las mismas pueden modelarse como esferoides oblatos como muestra la Figura 2. El resultado es que la señal de retro dispersión (representada por σ_b) en polarización horizontal es mayor que aquella en polarización vertical. Además, el radar meteorológico mide la potencia de retro dispersión de un determinado volumen y no de puntos individuales en la atmósfera. Es por ello, que el cálculo de la reflectividad involucra el número de gotas por unidad de volumen (*Función Distribución de Tamaños de Gotas, DSD*). Entonces, para caracterizar la *Reflectividad Diferencial* es relevante la relación geométrica entre las dimensiones horizontal y vertical de las gotas. Esta

relación también se conoce como *Razón Axial* (r).

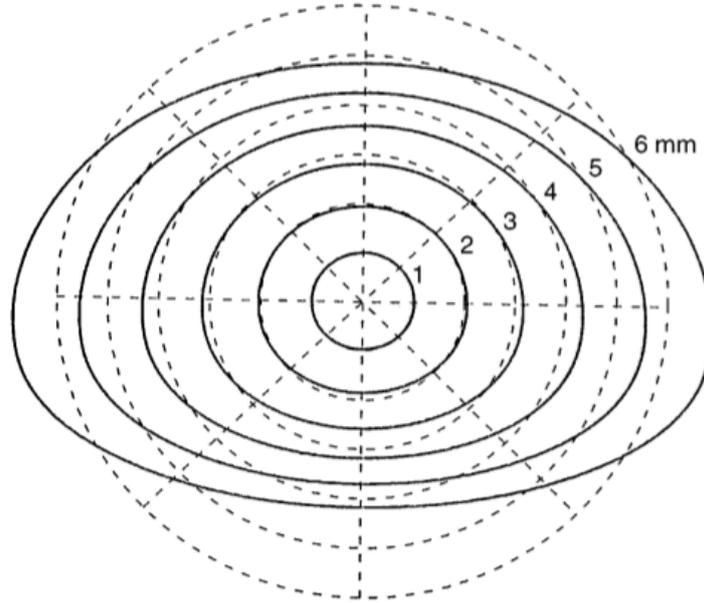


Figura 2: Formas de equilibrio para gotas con diámetros entre 1 y 6 mm. Figura obtenida de Beard & Chuang (1987).

Existen varias ecuaciones para describir la forma de la gota de lluvia, de las cuales, la más utilizada es la de Pruppacher & Beard (1970):

$$r = \frac{b}{a} = 1,03 - 0,62D_e, \quad [D_e] = cm \quad (6)$$

donde D_e es el diámetro equivalent volumétrico (el diámetro de una esfera con el mismo volumen que el esferoide), b es el semieje menor y a es el semieje mayor del esferoide oblado.

2.2.1. Distribución de Tamaños de Gotas

La distribución de gotas de lluvia en un volumen de dispersión puede describirse por una distribución exponencial (Marshall & Palmer, 1948), o de manera más general, por la función *Gamma* (Γ) dada por Ulbrich (1983) (Figura 3):

$$N(D_e) = N_0 \cdot (D_e)^\mu \cdot e^{-\Lambda \cdot D_e} \quad (7)$$

con,

$$N_0 = 1,52 \cdot 10^4 \cdot e^{3,14\mu} \quad (8)$$

y,

$$\Lambda = \frac{3,67 + \mu}{D_0} \quad (9)$$

$N(D_e)$ tiene unidades de $cm^{-1} \cdot m^{-3}$, N_0 de $cm^{-1-\mu} \cdot m^{-3}$ y el *diámetro medio* (D_0) de cm . Notar que si $\mu = 0$, la distribución Γ se transforma en una distribución exponencial.

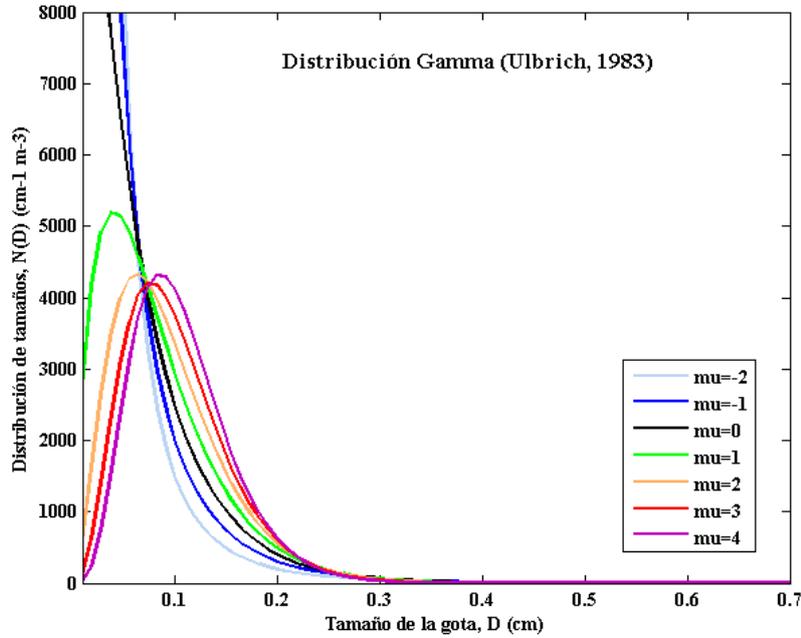


Figura 3: Distribución de tamaños de gotas de lluvia dada por la función Γ para valores de μ entre -2 y 4.

D_0 se relaciona con la *Tasa de Precipitación* (R) de la siguiente manera:

$$D_0 = \epsilon \cdot R^\delta \quad (10)$$

donde,

$$\epsilon = (3,67 + \mu) [33,31 \cdot N_0 \cdot \Gamma(4,67 + \mu)]^{-\frac{1}{4,67 + \mu}} \quad (11)$$

y,

$$\delta = \frac{1}{4,67 + \mu} \quad (12)$$

De esta manera, si se conocen el diámetro medio de las gotas de lluvia y los parámetros N_0 y μ , se puede obtener una estimación de R .

2.2.2. Reflectividades

Para una partícula simple, la *Reflectividad Diferencial* (en decibeles) se define como,

$$Z_{dr} = 10 \cdot \log_{10} \frac{|S_{hh}|^2}{|S_{vv}|^2} \quad (13)$$

donde S_{hh} y S_{vv} corresponden a elementos de la *Matriz de Dispersión* (ver Anexo).

Este parámetro se puede medir con sistemas de radar de doble polarización y es función del ángulo de incidencia (θ_i), de la permitividad relativa (ϵ_r), y de la excentricidad del esferoide.

La Figura 4 ilustra con mayor claridad, cómo puede utilizarse Z_{dr} para detectar esferoides oblatos cuando el rayo incidente se encuentra con un bajo ángulo de elevación (es decir, para el caso de $\theta_i \approx 90^\circ$). Las gotas muy pequeñas ($D_e \leq 1\text{mm}$) son esféricas con $b/a = 1$, mientras que las gotas grandes tienen razones axiales que decrecen linealmente a medida que D_e aumenta.

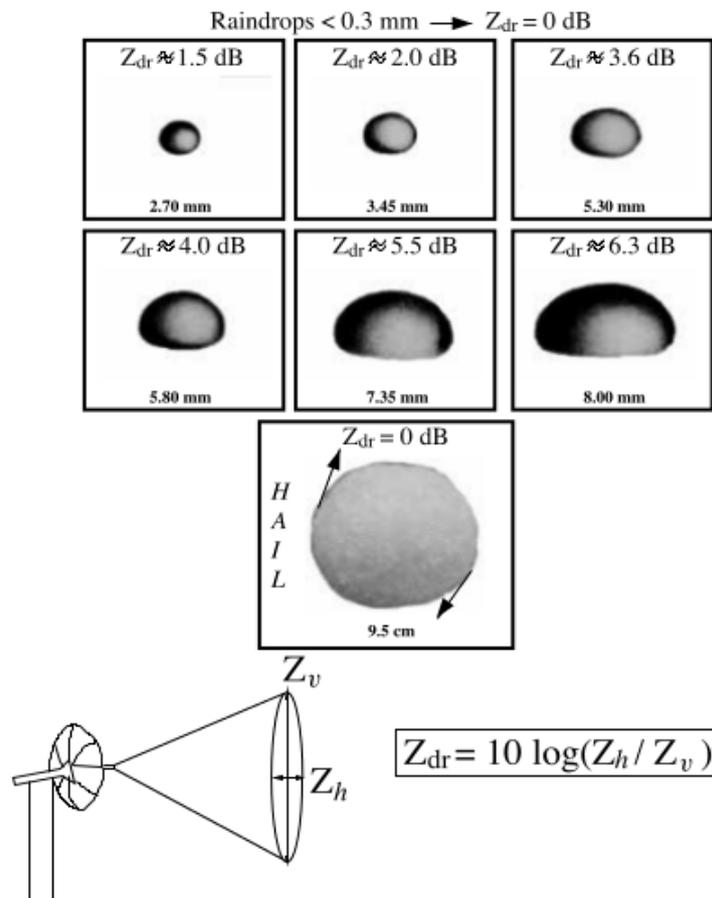


Figura 4: Valores típicos de Z_{dr} para gotas de lluvia de varios tamaños y granizo. Las flechas negras sobre la partícula de granizo representan los movimientos durante la caída en una tormenta. Figura tomada de Bringi & Chandrasekar (2001).

La Figura 4 también ilustra que $Z_{dr} \rightarrow 0$ dB para partículas de granizo que tienen forma aproximadamente esférica (o parecen ser esféricas debido al movimiento de “tambaleo”).

Teniendo en cuenta el trabajo de Hogan et al. (2012), la *Reflectividad en Polarización Horizontal* se define como la sumatoria de las secciones eficaces de retro dispersión, σ , de las partículas individuales por unidad de volumen de aire V :

$$z = z_{HH} = \frac{\lambda^4}{\pi^5 |K|^2} \sum_V \sigma_{HH} \quad (14)$$

De la misma manera, la *Reflectividad en Polarización Vertical* está dada por:

$$z_{VV} = \frac{\lambda^4}{\pi^5 |K|^2} \sum_V \sigma_{VV} \quad (15)$$

siendo λ la longitud de onda de la señal transmitida/recibida, K el factor dieléctrico:

$$K = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}, \quad (16)$$

$$\sigma_{HH} = \frac{\pi^5 D_e^6}{\lambda^4} \left| \frac{(\varepsilon_r - 1)/3}{1 + (\varepsilon_r - 1)L'} \right|^2 \quad (17)$$

y,

$$\sigma_{VV} = \frac{\pi^5 D_e^6}{\lambda^4} \left| \frac{(\varepsilon_r - 1)/3}{1 + (\varepsilon_r - 1)L} \right|^2 \quad (18)$$

donde L y L' son factores geométricos dados por:

$$L = 1 - 2L' = \frac{1}{e^2} \left(1 - \frac{r \sin^{-1} e}{e} \right), \quad (19)$$

$e = (1 - r^2)^{1/2}$ es la excentricidad, y r la razón axial.

Debido a que las partículas de precipitación pueden variar en diámetro muchos órdenes de magnitud, se utiliza la transformación logarítmica:

$$Z_{HH,VV} = 10 \cdot \log_{10}(z_{HH,VV}); \quad [Z_{HH,VV}] = dBZ \quad (20)$$

De esta manera, podemos expresar la reflectividad diferencial como:

$$Z_{dr} = Z_{HH} - Z_{VV} \quad (21)$$

Luego, el *Factor de Reflectividad*, z , para gotas esféricas (en el límite de Rayleigh-Gans) está dada por:

$$z = \int_D D^6 N(D) dD; \quad [z] = mm^6 m^{-3} \quad (22)$$

y en unidades logarítmicas,

$$Z = 10 \cdot \log_{10}(z); \quad [Z] = dBZ \quad (23)$$

Para entender mejor el significado de estas ecuaciones, la Figura 5 muestra Z_{dr} vs. Z_{HH} para $-2 \leq \mu \leq 4$.

Notar que Z_{dr} tiende a cero a medida que las gotas se hacen más pequeñas (más esféricas). Esto se debe a que la radiación recibida en polarización horizontal es aproximadamente igual a la recibida en polarización vertical.

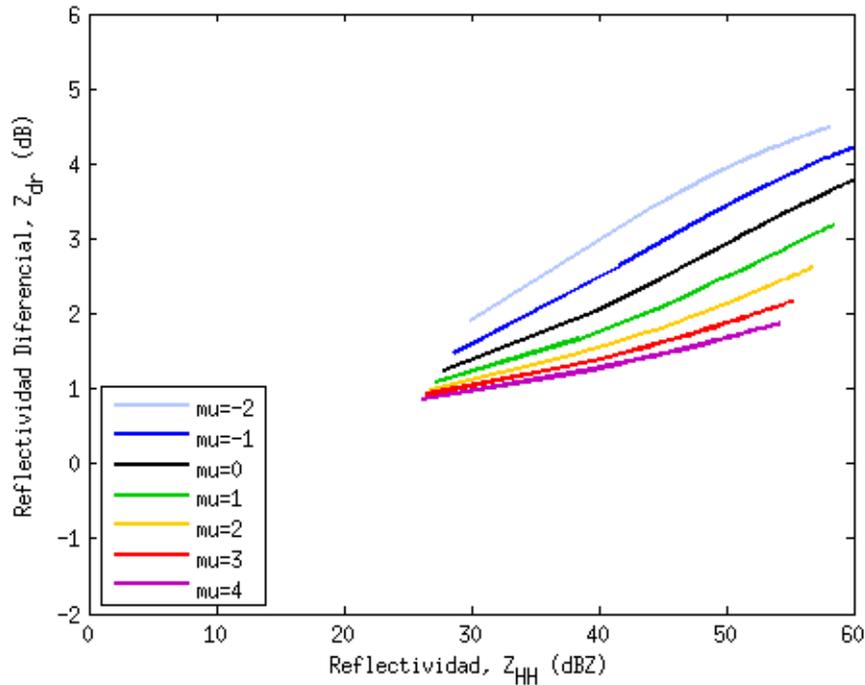


Figura 5: Z_{dr} vs. Z_{HH} para $-2 \leq \mu \leq 4$ teniendo en cuenta la función DSD Gamma.

2.3. Implementación del método Matriz T

Para implementar este método se ha utilizado un código diseñado por Michael Mishchenko en el Instituto Goddard de Estudios Espaciales (NASA), Nueva York. El mismo está basado en la aproximación matriz T (Waterman, 1971), también conocida como *Método Extendido de Condiciones de Contorno*.

2.3.1. Código

Esta versión del código utiliza variables de doble precisión y es aplicable a partículas esferoidales que se encuentran en una orientación fija. En particular, se considerará que las gotas son solo de agua y que su índice de refracción (n) varía con la temperatura de la siguiente manera:

1. $T = 0^\circ\text{C}$

* Banda S: $n = 9,07 - j1,31$

* Banda C: $n = 8,35 - j2,25$

2. $T = 10^\circ\text{C}$

* Banda S: $n = 9,0 - j0,95$

* Banda C: $n = 8,57 - j1,73$

3. $T = 20^\circ\text{C}$

$$* \text{ Banda S: } n = 8,87 - j0,7$$

$$* \text{ Banda C: } n = 8,63 - j1,3$$

Los parámetros de entrada que se requieren son:

- 1) **AXI**: Radio equivalente de la esfera.
- 2) **RAT**: Indica si el radio es equivolumétrico o equisuperficial.
- 3) **LAM**: Longitud de onda de la señal transmitida/recibida.
- 4) **MRR**: Parte real del índice de refracción.
- 5) **MRI**: Parte imaginaria del índice de refracción.
- 6) **EPS**: Inversa de la razón axial.
- 7) **NP**: Indica el tipo de partícula (en este caso, esferoidal).

Cabe aclarar que las unidades de longitud de los parámetros AXI y LAM deben ser las mismas. En este trabajo, se han utilizado los milímetros (mm).

De esta manera, los parámetros de salida son, entre otros, los elementos de la matriz de dispersión (**S**) (ver Anexo):

- 1) S_{HH}
- 2) S_{HV}
- 3) S_{VH}
- 4) S_{VV}

con los cuales es posible obtener las reflectividades Z_{HH} , Z_{VV} y Z_{dr} .

Una descripción clara del funcionamiento de este código puede encontrarse en Mishchenko & Travis (1998).

2.3.2. Aplicación del código Matriz T

Las ecuaciones (22) y (23) permiten calcular el factor de reflectividad para gotas esféricas teniendo en cuenta la aproximación de Rayleigh-Gans. Ahora, se extiende esto para gotas oblatas, utilizando las ecuaciones (14)-(20) y obteniendo,

$$Z_{HH}^R = 10 \cdot \log_{10} \left[\frac{D_e^6}{|K|^2} \left| \frac{(\varepsilon_r - 1)/3}{1 + (\varepsilon_r - 1)L'} \right|^2 \right] \quad (24)$$

y,

$$Z_{VV}^R = 10 \cdot \log_{10} \left[\frac{D_e^6}{|K|^2} \left| \frac{(\varepsilon_r - 1)/3}{1 + (\varepsilon_r - 1)L} \right|^2 \right] \quad (25)$$

El supraíndice R indica que las ecuaciones son obtenidas considerando el límite de Rayleigh-Gans. Por otro lado, los factores de reflectividad obtenidos teniendo en cuenta Mishchenko son:

$$Z_{HH}^M = 10 \cdot \log_{10} \left[\frac{4\lambda^4 S_{HH}^2 N(D_e)}{\pi^4 |K|^2} \right] \quad (26)$$

y,

$$Z_{VV}^M = 10 \cdot \log_{10} \left[\frac{4\lambda^4 S_{VV}^2 N(D_e)}{\pi^4 |K|^2} \right] \quad (27)$$

La Tabla 1 en la sección *Resultados* muestra los factores de reflectividad resultantes al aplicar las ecuaciones (24)-(27), considerando diferentes diámetros equivalentes (D_e) y discriminando entre gotas esféricas y obladas. Además, en ella se adjuntan dos columnas que indican los errores absolutos (Δ) entre los valores de Rayleigh y Mishchenko, y otras dos indicando el error relativo en porcentaje entre los valores mencionados. Luego, los valores publicados en la dicha Tabla se utilizan para realizar las figuras 7, 8, 10 y 11, que se presentan y analizan también en la sección *Resultados*.

De esta manera, el *Generador de Datos* obtiene los factores de reflectividad a partir de los parámetros de entrada mencionados en la subsección *Código*, los cuales, al tomar diferentes valores, permiten analizar el comportamiento de las variables polarimétricas mediante gráficos y tablas.

3. RESULTADOS

Con el objetivo de validar los resultados obtenidos mediante la comparación de las mediciones empíricas con los conceptos teóricos, es que se ha tomado la Figura 6 del trabajo de Steinert & Chandra (2008). En ella, los autores han graficado Z_{dr} vs. Z_{HH} para $-2 \leq \mu \leq 4$, de la misma manera que para la Figura 5 del presente informe. Claramente, se observa una fuerte correspondencia entre ambas figuras, lo cual indica, en principio, que el método utilizado para generar la Figura 5, sería el correcto.

Teniendo en cuenta la Tabla 1, la Figura 7 muestra (Z_{dr} vs. Z_{HH}), obtenida utilizando el código de Mishchenko para la banda S (9.4 cm). En la misma, también se superponen las curvas obtenidas bajo el método de Rayleigh (líneas punteadas). Como se dedujo de la teoría, se observa que a medida que el tamaño de la gota es más pequeño (es decir, es más esférica) las curvas de ambos métodos tienden a juntarse en $Z_{dr} = 0$. Contrariamente, al hacerse más obladas, la diferencia se vuelve más notable.

Luego, debido a que los resultados obtenidos para banda S fueron los esperados, se aplicó el código de Mishchenko a la banda de interés (banda C), obteniendo la Figura 8. En ella, se observa claramente una mayor diferencia entre ambos métodos, que se atribuye a los efectos de resonancia que se producen cuando el diámetro equivalente (D_e) de la gota y la longitud de onda de la radiación incidente satisfacen:

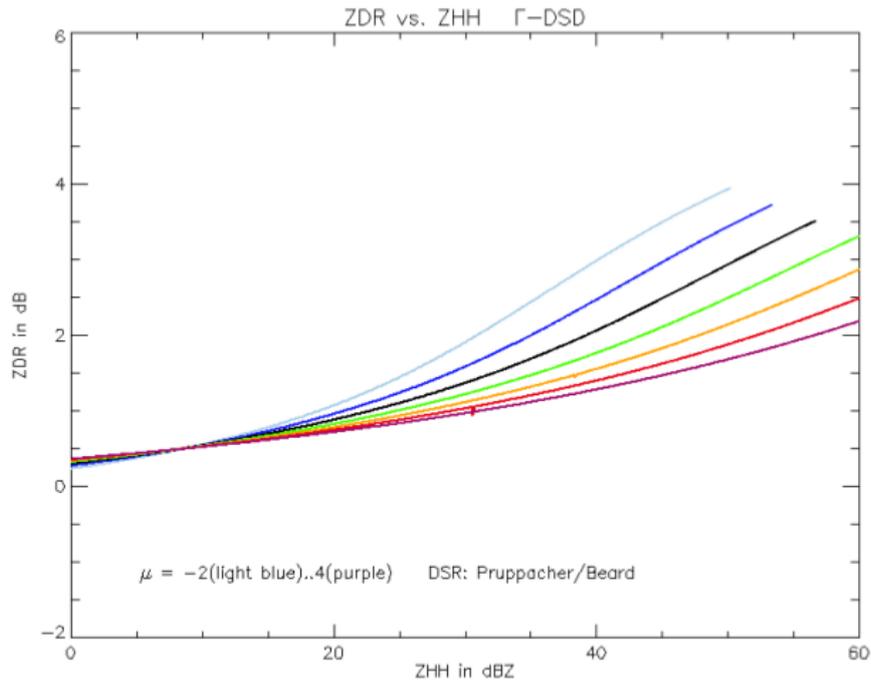


Figura 6: Z_{dr} vs. Z_{HH} para $-2 \leq \mu \leq 4$ teniendo en cuenta la función DSD Gamma. Gráfico obtenido de Steinert & Chandra (2008).

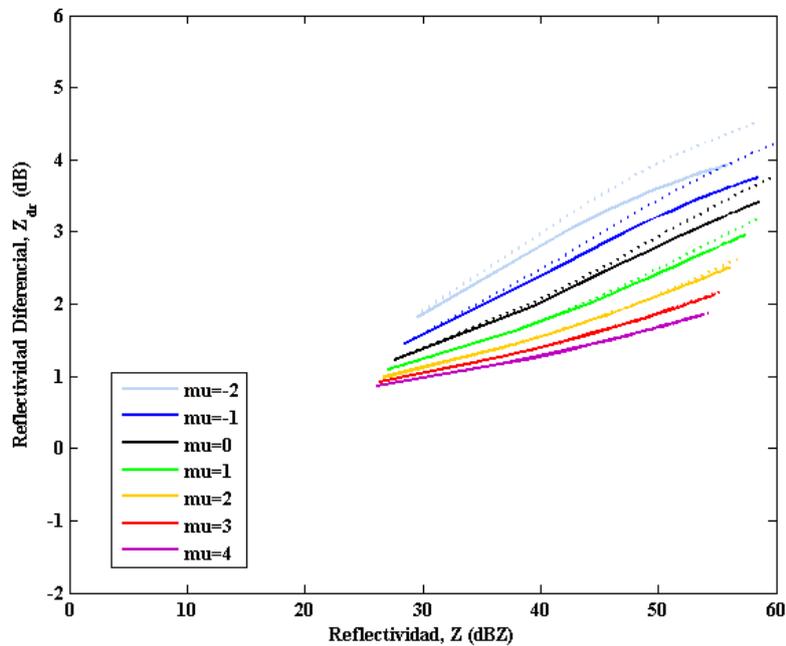


Figura 7: Z_{dr} vs. Z_{HH} para $-2 \leq \mu \leq 4$ teniendo en cuenta la función DSD Gamma. Se superponen las curvas obtenidas por los métodos de Rayleigh (líneas punteadas) y de Mishchenko en banda S (líneas llenas).

Tabla 1: Factores de Reflectividad (en dBZ) de Rayleigh y Mishchenko tanto en polarización horizontal como vertical. $\Delta_H = Z_{HH}^M - Z_{HH}^R$, $\Delta_V = Z_{VV}^M - Z_{VV}^R$, Err_H y Err_V corresponden a los errores porcentuales.

Gotas	D_e (mm)	$r = \frac{b}{a}$	Z_{HH}^R	Z_{VV}^R	Z_{HH}^M	Z_{VV}^M	Δ_H	Δ_V	Err_H (%)	Err_V (%)
Esféricas	0.5	1	11.9382	11.9382	11.9407	11.9407	0.0025	0.0025	0.02	0.02
	1	1	30.0000	30.0000	29.9864	29.9864	0.0136	0.0136	0.04	0.04
	1.5	1	40.5654	40.5654	40.5245	40.5245	0.0409	0.0409	0.10	0.10
	2	1	48.0617	48.0617	47.9812	47.9812	0.0806	0.0806	0.17	0.17
	3	1	58.6272	58.6272	58.4248	58.4248	0.2024	0.2024	0.35	0.35
	4	1	66.1235	66.1235	65.7254	65.7254	0.3981	0.3981	0.61	0.61
	5	1	71.9382	71.9382	71.2334	71.2334	0.7047	0.7047	0.99	0.99
	6	1	76.6890	76.6890	75.4908	75.4908	1.1982	1.1982	1.59	1.59
7	1	80.7058	80.7058	78.6541	78.6541	2.0517	2.0517	2.61	2.61	
Obladas	0.5	0.999	11.9415	11.9315	11.9441	11.9340	0.0025	0.0025	0.02	0.02
	1	0.968	30.1099	29.7842	30.0963	29.7697	0.0136	0.0144	0.04	0.05
	1.5	0.937	40.7878	40.1371	40.7462	40.0928	0.0416	0.0443	0.10	0.11
	2	0.906	48.4029	47.4173	48.3203	47.3284	0.0826	0.0889	0.17	0.19
	3	0.844	59.2268	57.5396	59.0154	57.3075	0.2114	0.2321	0.36	0.40
	4	0.782	67.0140	64.5772	66.5887	64.1085	0.4253	0.4687	0.64	0.73
	5	0.720	73.1582	69.9164	72.3834	69.0811	0.7748	0.8353	1.07	1.21
	6	0.658	78.2856	74.1741	76.9140	72.7876	1.3716	1.3866	1.78	1.90
7	0.596	82.7367	77.6787	80.2308	75.4769	2.5058	2.2017	3.12	2.92	

$$\frac{\lambda}{16} < D_e \quad (28)$$

Nuevamente, con el propósito de validar el método a utilizar, es que se compararon los resultados empíricos obtenidos mediante la aplicación de los diferentes métodos. La Figura 9 muestra el gráfico Z_{dr} vs. D_e dado por Ryzhkov & Zrnić (2005) para las bandas X ($\lambda = 3,2$ cm), C ($\lambda = 5,45$ cm) y S ($\lambda = 11$ cm), y para una temperatura de 20°C . En ella se observa el efecto de resonancia mencionado con anterioridad generado en la banda C a partir de $D_e \approx 4,5$ mm.

De esta manera, al igual que en los casos anteriores, se reprodujo el mismo gráfico utilizando los datos de la Tabla 1, obteniendo la Figura 10. Si bien ambos tienen perfiles similares, se observa un incremento de Z_{dr} en el efecto de resonancia de los resultados de este trabajo de aproximadamente unos 5 dB para la banda C, y también se encuentra una leve diferencia en la banda S. Esto se le puede atribuir a que Ryzhkov & Zrnić han considerado el “canting angle” en su trabajo, el cual genera un efecto que produce que la gota parezca más esférica de lo que en realidad es, disminuyendo así la reflectividad diferencial.

Ahora bien, como se mencionó anteriormente, el índice de refracción varía con la temperatura, lo cual indica que Z_{dr} también debería variar. En las Figuras 10 y 11 se observa este efecto, el cual es más notable a mayor temperatura.

En Zrnić et al. (2000) se realiza un trabajo en banda C, en el cual se obtuvo Z_{dr} vs. D_e para cuatro temperaturas diferentes (0°C , 10°C , 20°C y 30°C). Los resultados se muestran en la Figura 12.

En este caso, también se observa que el pico de resonancia se encuentra aproxi-

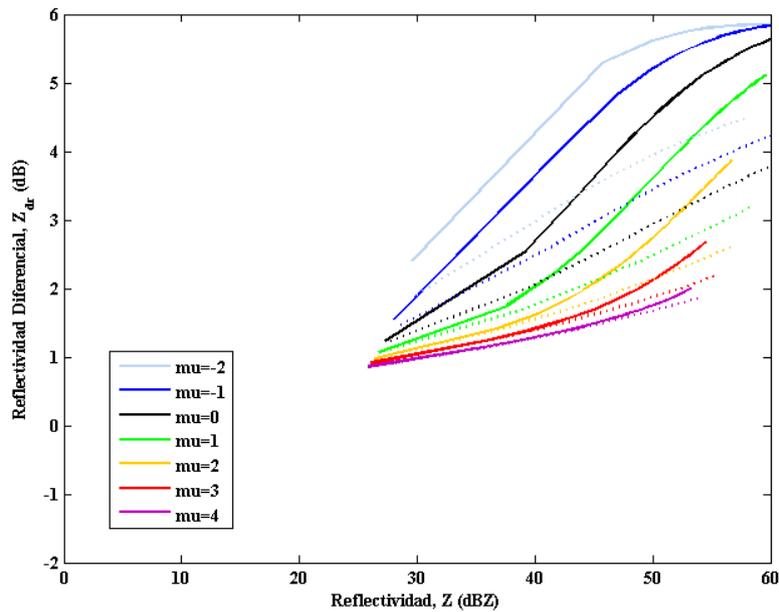


Figura 8: Z_{dr} vs. Z_{HH} para $-2 \leq \mu \leq 4$ teniendo en cuenta la función DSD Gamma. Se superponen las curvas obtenidas por los métodos de Rayleigh (líneas punteadas) y de Mishchenko en banda C (líneas llenas).

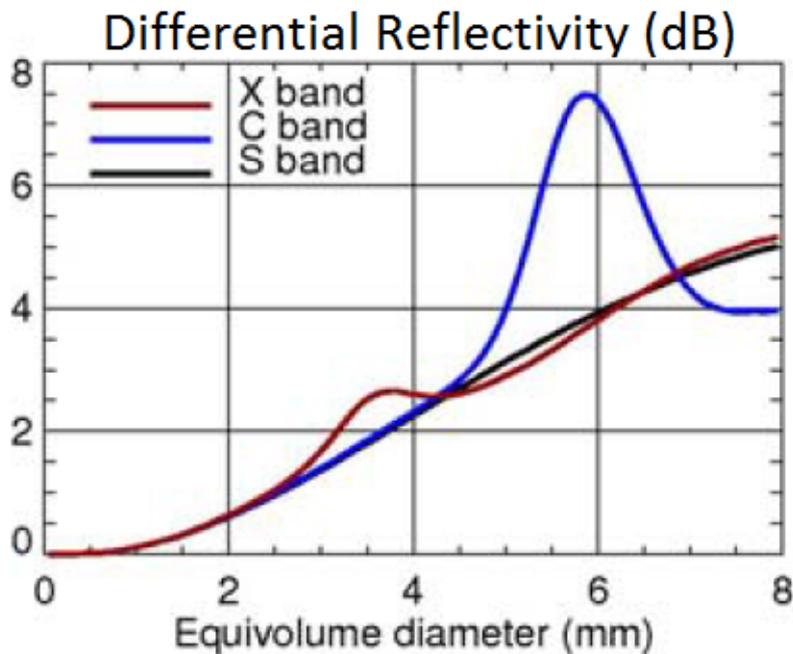


Figura 9: Z_{dr} vs. D_e para las bandas X (rojo), C (azul) y S (negro). Figura obtenida de Ryzhkov & Zrnić (2005).

madamente, unos 5 dB por debajo del pico obtenido en los resultados de este trabajo. Esto ocurre, debido a que Zrnić et al. (2000) consideran oscilaciones en las gotas de lluvia, las cuales pueden ser inducidas por colisiones (Beard et al., 1983), vientos

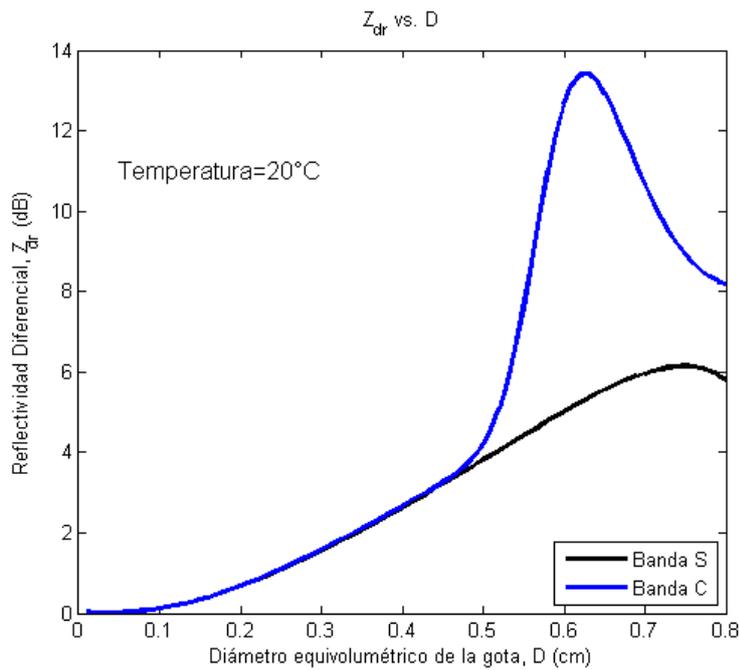


Figura 10: Z_{dr} vs. D_e para las bandas C (azul) y S (negro) teniendo en cuenta el código diseñado por M. Mishchenko para la temperatura de 20°C .

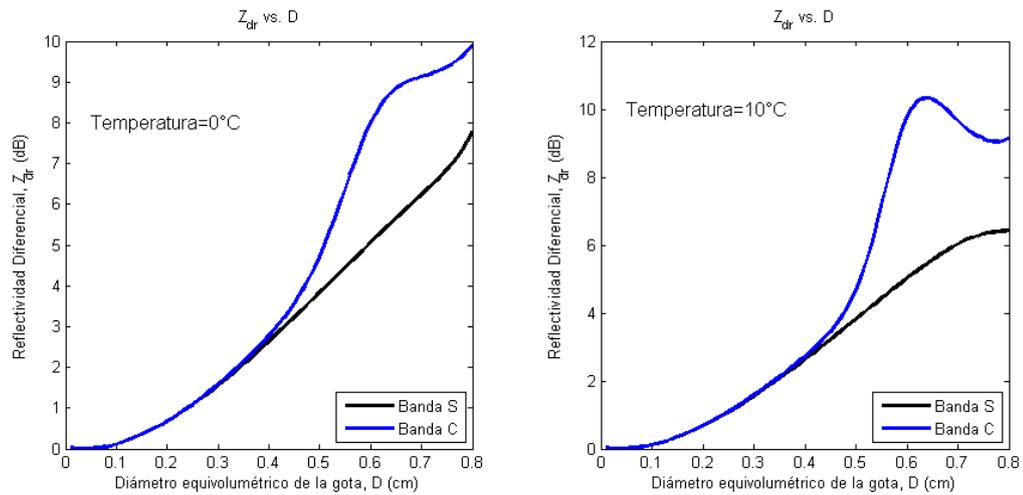


Figura 11: Z_{dr} vs. D_e para las bandas C (azul) y S (negro) teniendo en cuenta el código diseñado por M. Mishchenko para las temperaturas de 0°C y 10°C .

y turbulencias (Beard & Jameson, 1983). De esta manera, la forma de las gotas variará entre oblada y prolada, y como consecuencia, parecerán más esféricas al momento de observarlas con el radar.

Entonces, se puede decir que el generador de datos de radar desarrollado en este trabajo, cuenta con una base sólida, ya que los resultados obtenidos son consistentes con la teoría existente en la actualidad.

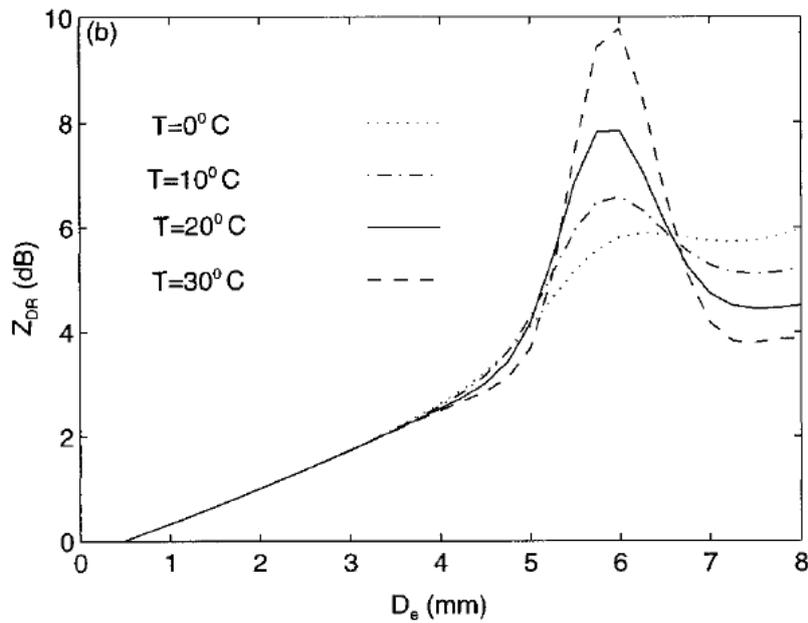


Figura 12: Z_{dr} vs. D_e para las temperaturas de 0°C , 10°C , 20°C y 30°C . Figura obtenida de Zrnić et al. (2000)

4. CONCLUSIONES

Como se mencionó en la primera sección, el objetivo general de este trabajo es implementar un generador de datos de radar meteorológico doble polarimétrico de banda C. Para ello, primero se estudió la bibliografía relacionada al método matriz T , segundo se realizó una aplicación para gotas de lluvia, tercero se implementó el código diseñado por Mishchenko y por último, se compararon los diferentes resultados obtenidos. Consecuentemente, se presentan las siguientes conclusiones:

1. El método matriz T es apropiado para este trabajo. Esto se debe a que los resultados obtenidos para la banda S, fueron idénticos a aquellos producidos mediante el método de Rayleigh, generando la confianza necesaria para extender la aplicación a la banda C (banda de interés), y así, continuar con la producción de nuevos resultados.
2. El código implementado para realizar el generador de datos resultó de mucha practicidad. El mismo utiliza pocos parámetros de entrada para generar los elementos de la matriz de dispersión, con los cuales se obtienen las reflectividades. Posteriormente, se han empleado en diferentes gráficos para compararlos con los enunciados deducidos de los marcos teóricos preliminarmente seleccionados. Finalmente, se obtuvieron los resultados buscados.
3. El generador de datos de radar meteorológico doble polarimétrico de banda C desarrollado en este trabajo, cumple con las expectativas deseadas, ya que los resultados empíricos generados por el mismo, son compatibles con los enunciados deducidos por los marcos teóricos preseleccionados, por lo tanto,

manifiestan la validez de los últimos. Consecuentemente, se podría asegurar la validez de los nuevos resultados a producirse consiguientemente. De esta manera, el mismo puede ser utilizado como una herramienta más en este novedoso proyecto, para analizar el comportamiento de las variables polarimétricas frente a distintos parámetros.

5. REFERENCIAS

- Beard, K. V.; Jameson, A. R.: Raindrop Canting. *Journal of Atmospheric Sciences*, vol. 40, Issue 2, pp.448-454, 1983.
- Beard, K. V.; Johnson, D. B.; Jameson, A. R.: Collisional Forcing of Raindrop Oscillations. *Journal of Atmospheric Sciences*, vol. 40, Issue 2, pp.455-462, 1983.
- Beard, K. V.; Chuang, C.: A New Model for the Equilibrium Shape of Raindrops. *Journal of Atmospheric Sciences*, vol. 44, Issue 11, pp.1509-1524, 1987.
- Bringi, V. N.; Chandrasekar, V.: *Polarimetric Doppler Weather Radar*. Polarimetric Doppler Weather Radar, by V. N. Bringi and V. Chandrasekar, pp. 662. ISBN 0521623847. Cambridge, UK: Cambridge University Press, October 2001.
- Hogan, R. J.; Tian, L.; Brown, P. R. A.; Westbrook, C. D.; Heymsfield, A. J.; Eastment, J. D.: Radar Scattering from Ice Aggregates Using the Horizontally Aligned Oblate Spheroid Approximation. *Journal of Applied Meteorology and Climatology*, vol. 51, issue 3, pp. 655-671, 2012.
- Marshall, J. S.; Palmer, W. McK.: The Distribution of Raindrops with Size. *Journal of Atmospheric Sciences*, vol. 5, Issue 4, pp.165-166, 1948.
- Mishchenko, M. I.; Travis, L. D.; Mackowski, D. W.: T-matrix computations of light scattering by nonspherical particles: a review. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, vol. 55, issue 5, pp. 535-575, 1996.
- Mishchenko, M.; Travis, L. D.: Capabilities and limitations of a current FOR-TAN implementation of the T-matrix method for randomly oriented, rotationally symmetric scatterers. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, vol. 60, issue 3, pp. 309-324, 1998.
- Pruppacher, H. R.; Beard, K. V.: A wind tunnel investigation of the internal circulation and shape of water drops falling at terminal velocity in air. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, vol. 96, issue 408, pp. 247-256, 1970.
- Ryzhkov, A. V.; Zrnić, D. S.: Radar polarimetry at S, C and X bands comparative analysis and operational implications. Preprints, 32nd Conf. on Radar Meteorology, Albuquerque, NM, Amer. Meteor. Soc., 9R.3, 2005.
- Steinert, J.; Chandra, M.: Cloud physical properties and empirical polarimetric measurements of rain signatures at C-Band. *Advances in Radio Science*, Volume 6, 2008, pp.315-318, 2008.
- Ulbrich, C. W.: Natural variations in the analytical form of the raindrop size distribution. *J. Climate Appl. Meteor.*, 22, 1764-1775, 1983.

- Waterman, P. C.: Symmetry, Unitarity, and Geometry in Electromagnetic Scattering. *Physical Review D*, vol. 3, Issue 4, pp. 825-839, 1971.
- Zrnić, D. S.; Keenan, T. D.; Carey, L. D.; May, P.: Sensitivity Analysis of Polarimetric Variables at a 5-cm Wavelength in Rain. *Journal of Applied Meteorology*, vol. 39, Issue 9, pp.1514-1526, 2000.

A. ANEXO

A.1. Matriz de Scattering (*Matriz de Dispersión*)

En esta sección se tratará la matriz de scattering de esferas y esferoides teniendo en cuenta el límite de Rayleigh-Gans. La mencionada matriz puede formularse en las convenciones FSA (Forward Scatter Alignment) y BSA (Back Scatter Alignment). Se considerará que la orientación de los hidrometeoros es fija para ilustrar el comportamiento de la polarización lineal de los observables del radar tales como la *Reflectividad* y la *Reflectividad Diferencial*.

A.1.1. Convención FSA

La matriz de scattering describe fundamentalmente la dispersión de una onda plana que incide sobre una partícula. Las componentes del campo dispersado en la aproximación de campo lejano están relacionadas con las componentes del campo incidente mediante una matriz amplitud de scattering 2×2 . Se introduce un sistema de coordenadas cartesiano (XYZ) , con origen (O) en el centro de la partícula. La dirección de incidencia de la onda plana se especifica con los ángulos esféricos θ_i y ϕ_i , o por el vector unitario \hat{k}_i , como se muestra en la Figura 13a. Los vectores unitarios en el sistema de coordenadas esférico forman el triplete $(\hat{k}_i, \hat{\theta}_i, \hat{\phi}_i)$, con $\hat{k}_i = \hat{\theta}_i \times \hat{\phi}_i$. Los vectores unitarios horizontal (\hat{h}_i) y vertical (\hat{v}_i) se definen como $\hat{v}_i = \hat{\theta}_i$ y $\hat{h}_i = \hat{\phi}_i$, por lo que el triplete de vectores unitarios es $(\hat{k}_i, \hat{v}_i, \hat{h}_i)$, con $\hat{k}_i = \hat{v}_i \times \hat{h}_i$.

La onda plana incidente tiene la forma,

$$\vec{E}^i = \hat{e}_i E_0 \exp(-jk_0 \hat{i} \cdot \vec{r}_i) \quad (29)$$

donde \vec{r}_i es un vector desde el origen al punto sobre el plano de fase constante, el cual es el plano ortogonal a la dirección de incidencia (\hat{i}) . Notar que k_0 es el número de onda del vacío ($k_0 = 2\pi/\lambda$), siendo λ la longitud de onda. En el origen, $\vec{E}^i(O) = \hat{e}_i E_0$, es una onda plana que puede resolverse en componentes como sigue,

$$\vec{E}^i(O) = \hat{e}_i E_0 = E_h^i \hat{h}_i + E_v^i \hat{v}_i \quad (30)$$

donde $E_h^i = \hat{h}_i \cdot \hat{e}_i E_0$ y $E_v^i = \hat{v}_i \cdot \hat{e}_i E_0$. Las direcciones vertical y horizontal son descriptores usuales cuando $\theta_i \approx 90^\circ$ y el plano XY se considera como la superficie de la Tierra. En este caso, \hat{v}_i es vertical (o perpendicular) a la superficie de la Tierra y \hat{h}_i es horizontal (o paralela) a dicha superficie. La amplitud de campo incidente puede escribirse, en término de sus dos componentes como una matriz columna 2×1 (o vector de Jones),

$$\vec{E}^i(O) = \hat{e}_i E_0 \equiv E_0 \begin{bmatrix} \hat{e}_i \cdot \hat{h}_i \\ \hat{e}_i \cdot \hat{v}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_h^i \\ E_v^i \end{bmatrix} \quad (31)$$

Ahora se considera la onda dispersada en campo lejano, y sea su dirección dada por los ángulos esféricos θ_s y ϕ_s , o por el vector unitario \hat{k}_s , como se muestra en la Figura 13b. Los vectores unitarios en el sistema de coordenadas esférico forman el triplete $(\hat{k}_s, \hat{\theta}_s, \hat{\phi}_s)$, con $\hat{k}_s = \hat{\theta}_s \times \hat{\phi}_s$. Los vectores unitarios horizontal y vertical en la

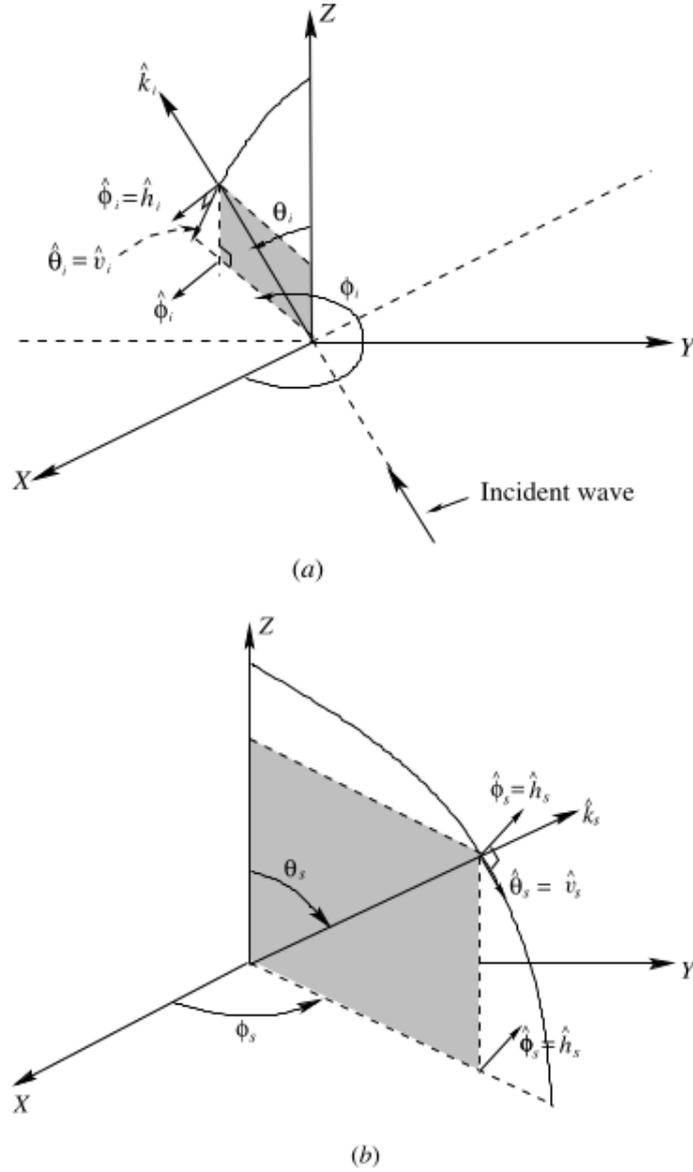


Figura 13: (a) Dirección de la onda incidente, especificada por \hat{k}_i , con $\hat{k}_i = \hat{\theta}_i \times \hat{\phi}_i$; (b) dirección de la onda dispersada en FSA, especificada por \hat{k}_s , con $\hat{k}_s = \hat{\theta}_s \times \hat{\phi}_s$. En (a): el plano sombreado es el plano $\phi = \phi_i$; el vector horizontal unitario es $\hat{h}_i = \hat{\phi}_i$, y el vector vertical unitario es $\hat{v}_i = \hat{\theta}_i$; el triplete de vectores unitarios para la onda incidente es $(\hat{k}_i, \hat{v}_i, \hat{h}_i)$, con $\hat{k}_i = \hat{v}_i \times \hat{h}_i$. En (b): el plano sombreado es el plano $\phi = \phi_s$; el vector horizontal unitario es $\hat{h}_s = \hat{\phi}_s$, y el vector vertical unitario es $\hat{v}_s = \hat{\theta}_s$. El triplete de vectores unitarios es $(\hat{k}_s, \hat{v}_s, \hat{h}_s)$, con $\hat{k}_s = \hat{v}_s \times \hat{h}_s$.

convención FSA se definen como $\hat{h}_s = \hat{\phi}_s$ y $\hat{v}_s = \hat{\theta}_s$, por lo cual el triplete está dado por $(\hat{k}_s, \hat{v}_s, \hat{h}_s)$, con $\hat{k}_s = \hat{v}_s \times \hat{h}_s$. La onda dispersada en campo lejano es:

$$\vec{E}^s = \frac{\vec{f}(\hat{s}, \hat{i})}{r} \exp(-jk_0 r) \quad (32)$$

donde $\vec{f}(\hat{s}, \hat{i})$ es el vector amplitud de scattering.

El campo dispersado (\vec{E}^s) se puede resolver en componentes de la siguiente ma-

nera,

$$\vec{E}^s = E_h^s \hat{h}_s + E_v^s \hat{v}_s \quad (33)$$

Notar que, en (32), $\hat{s} \equiv \hat{k}_s$ e $\hat{i} \equiv \hat{k}_i$, mientras que r es la magnitud del vector posición (\vec{r}). En la convención FSA, la matriz de scattering (o matriz de Jones) está definida como,

$$\begin{bmatrix} E_h^s \\ E_v^s \end{bmatrix} = \frac{e^{-jk_0r}}{r} \begin{bmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{bmatrix}_{FSA} \begin{bmatrix} E_h^i \\ E_v^i \end{bmatrix} \quad (34)$$

La matriz de scattering 2×2 se define también utilizando el símbolo \mathbf{S}_{FSA} , donde,

$$\mathbf{S}_{FSA} \equiv \begin{bmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{bmatrix}_{FSA} \quad (35)$$

La ecuación (34) puede escribirse de manera compacta como,

$$\mathbf{E}^s = \mathbf{S}_{FSA} \mathbf{E}^i \left(\frac{e^{-jk_0r}}{r} \right) \quad (36)$$

Para resumir la notación, la flecha sobre \vec{E} se refiere a la forma vectorial, mientras que la letra en negrita se refiere a la matriz correspondiente 2×1 . La convención FSA está basada esencialmente en los vectores unitarios del sistema de coordenadas esféricas, los cuales pueden relacionarse con los vectores unitarios $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ y los ángulos de incidencia (θ_i, ϕ_i) , o los ángulos de dispersión (θ_s, ϕ_s) de la siguiente manera:

$$\hat{\phi}_{i,s} = \hat{h}_{i,s} = -\sin \phi_{i,s} \hat{x} + \cos \phi_{i,s} \hat{y} \quad (37)$$

$$\hat{\theta}_{i,s} = \hat{v}_{i,s} = \cos \phi_{i,s} \cos \theta_{i,s} \hat{x} + \sin \phi_{i,s} \cos \theta_{i,s} \hat{y} - \sin \theta_{i,s} \hat{z} \quad (38)$$

$$\hat{k}_{i,s} = \cos \phi_{i,s} \sin \theta_{i,s} \hat{x} + \sin \phi_{i,s} \sin \theta_{i,s} \hat{y} + \cos \theta_{i,s} \hat{z} \quad (39)$$

En la dirección de retro dispersión, $\hat{k}_s = -\hat{k}_i$, $\theta_s = \pi - \theta_i$, y $\phi_s = \phi_i + \pi$, resultando en $\hat{v}_s = \hat{v}_i$ y $\hat{h}_s = -\hat{h}_i$.

A.1.2. Convención BSA

En las aplicaciones de radar, generalmente se utiliza la convención BSA para resolver las componentes del campo dispersado. Haciendo referencia a la Figura 14, los vectores unitarios \hat{h}_r y \hat{v}_r , se definen como $\hat{h}_r = -\hat{h}_s$ y $\hat{v}_r = \hat{v}_s$. De esta manera, de acuerdo al triplete FSA $(\hat{k}_s, \hat{v}_s, \hat{h}_s)$, con $\hat{k}_s = \hat{v}_s \times \hat{h}_s$, el triplete BSA es $(\hat{k}_r, \hat{v}_r, \hat{h}_r)$, con $\hat{k}_r = -\hat{k}_s = \hat{v}_r \times \hat{h}_r$. La onda dispersada puede expresarse como $\vec{E}^s = E_h^s \hat{h}_s + E_v^s \hat{v}_s$ en FSA, o como $\vec{E}^r = E_h^r \hat{h}_r + E_v^r \hat{v}_r$ en BSA. Así, las componentes de la onda dispersada en FSA (E_h^s, E_v^s) se relacionan fácilmente con las componentes de la onda “reflejada” en BSA (E_h^r, E_v^r) como sigue:

$$\begin{bmatrix} E_h^r \\ E_v^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_h^s \\ E_v^s \end{bmatrix} \quad (40)$$

Sustituyendo (40) en (34) obtenemos,

$$\begin{bmatrix} E_h^r \\ E_v^r \end{bmatrix} = \frac{e^{-jk_0r}}{r} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{bmatrix}_{FSA} \begin{bmatrix} E_h^i \\ E_v^i \end{bmatrix} \quad (41)$$

La matriz de scattering en BSA está definida como:

$$\mathbf{E}^r = \mathbf{S}_{BSA} \mathbf{E}^i \left(\frac{e^{-jk_0r}}{r} \right) \quad (42)$$

donde,

$$\mathbf{S}_{BSA} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{S}_{FSA} \quad (43)$$

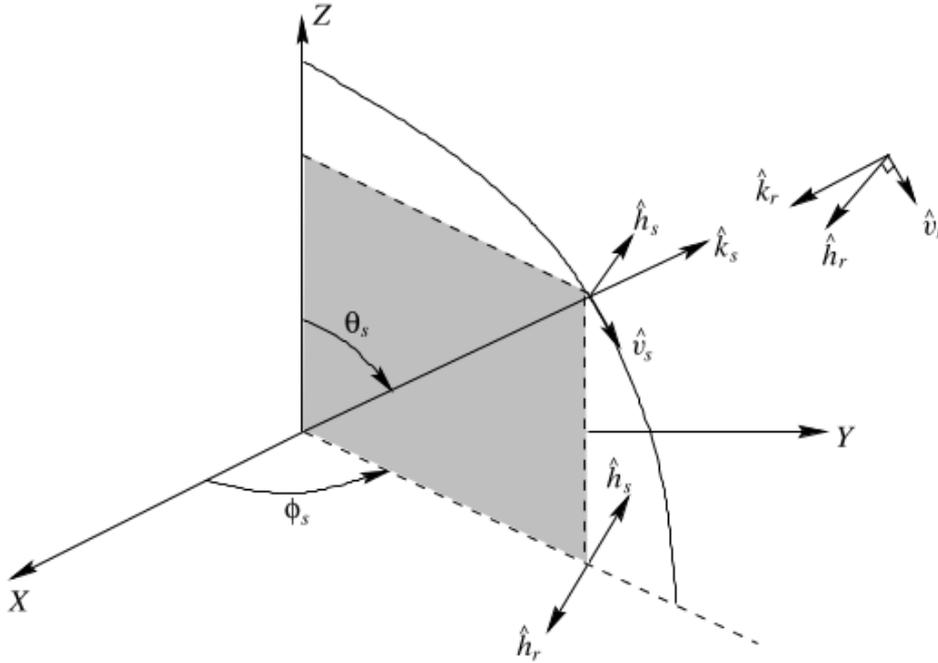


Figura 14: Vectores unitarios $(\hat{k}_r, \hat{v}_r, \hat{h}_r)$, con $\hat{k}_r = \hat{v}_r \times \hat{h}_r$, para la convención BSA. Notar que $\hat{k}_r = -\hat{k}_s$, $\hat{v}_r = \hat{v}_s$, y $\hat{h}_r = -\hat{h}_s$. La onda dispersada se propaga a lo largo de la dirección \hat{k}_s .

En el caso de un radar monostático, donde $\hat{k}_s = -\hat{k}_i$, los ángulos (θ_s, ϕ_s) están dados por $\theta_s = \pi - \theta_i$ y $\phi_s = \phi_i + \pi$.

De (37)-(39) está claro que $\hat{h}_s = -\hat{h}_i$ y $\hat{v}_s = \hat{v}_i$ en la dirección de retro dispersión. Así, en BSA $\hat{h}_r = \hat{h}_i$, $\hat{v}_r = \hat{v}_i$, y los vectores unitarios para las ondas incidente y reflejada son idénticos. También, $\hat{k}_i = \hat{k}_r = -\hat{k}_s$ y el triplete BSA $(\hat{k}_r, \hat{v}_r, \hat{h}_r)$, con $\hat{k}_r = \hat{v}_r \times \hat{h}_r$, es idéntico al triplete de la onda incidente $(\hat{k}_i, \hat{v}_i, \hat{h}_i)$, con $\hat{k}_i = \hat{v}_i \times \hat{h}_i$. En las aplicaciones de radar, se utiliza esta condición de equivalencia en BSA, debido a

que el estado de polarización de la antena, por ejemplo, se define como la polarización de la onda radiada por la antena, cuando la misma se usa como receptora.

A.2. Teorema de Reciprocidad

Se considera una onda plana incidente cuyo vector de amplitud en el origen es $\vec{E}^i(O) = E_0 \hat{q}$, como se muestra en la Figura 15a. El vector unitario \hat{q} describe el estado de polarización de la onda incidente. En este caso, sea $\hat{q} = \hat{v}_i$ ó \hat{h}_i , correspondiente a los estados de polarización vertical u horizontal. En la región de campo lejano, la onda dispersada (\vec{E}^s) puede escribirse, enfatizando su dependencia sobre las direcciones de incidencia (\hat{k}_i) y de dispersión (\hat{k}_s), y sobre el estado de polarización de la onda incidente (\hat{q}), como:

$$\vec{E}^s = \vec{E}^s(\hat{q}; \hat{k}_i, \hat{k}_s) \quad (44)$$

Luego, se considera la situación mostrada en la Figura 15b donde la dirección de la onda incidente es $-\hat{k}_s$, con un estado de polarización \hat{q}' . Ahora, la dirección de dispersión es $-\hat{k}_i$ y la onda dispersada está dada por $\vec{E}^s(\hat{q}'; -\hat{k}_s, -\hat{k}_i)$. El teorema de reciprocidad establece que,

$$\hat{q}' \cdot \vec{E}^s(\hat{q}; \hat{k}_i, \hat{k}_s) = \hat{q} \cdot \vec{E}^s(\hat{q}'; -\hat{k}_s, -\hat{k}_i) \quad (45)$$

Para el caso de un radar monostático, donde $\hat{k}_s = -\hat{k}_i$, $\hat{q} = \hat{v}_i$ y $\hat{q}' = \hat{h}_i$, se tiene,

$$\hat{h}_i \cdot \vec{E}^s(\hat{v}_i; \hat{k}_i, -\hat{k}_i) = \hat{v}_i \cdot \vec{E}^s(\hat{h}_i; \hat{k}_i, -\hat{k}_i) \quad (46)$$

En la convención BSA, $\vec{E}^s = \vec{E}^r$, obteniendo, de las ecuaciones (31) y (40) lo siguiente:

$$\vec{E}^r(\hat{v}_i; \hat{k}_i, -\hat{k}_i) = (S_{hv}\hat{h}_r + S_{vv}\hat{v}_r)_{BSA} E_0 \quad (47)$$

$$\vec{E}^r(\hat{h}_i; \hat{k}_i, -\hat{k}_i) = (S_{hh}\hat{h}_r + S_{vh}\hat{v}_r)_{BSA} E_0 \quad (48)$$

Usando (40) y teniendo en cuenta que en el caso del radar monostático $\hat{h}_i = \hat{h}_r$ y $\hat{v}_i = \hat{v}_r$,

$$\hat{h}_r \cdot (S_{hv}\hat{h}_r + S_{vv}\hat{v}_r)_{BSA} = \hat{v}_r \cdot (S_{hh}\hat{h}_r + S_{vh}\hat{v}_r)_{BSA} \quad (49)$$

ó,

$$(S_{hv} = S_{vh})_{BSA} \quad (50)$$

Así, para el caso monostático, \mathbf{S}_{BSA} es una matriz simétrica,

$$\begin{bmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{bmatrix}_{BSA} = \begin{bmatrix} S_{hh} & S_{vh} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{bmatrix}_{BSA} \quad (51)$$

Esto es una ventaja de usar la convención BSA para un radar monostático.

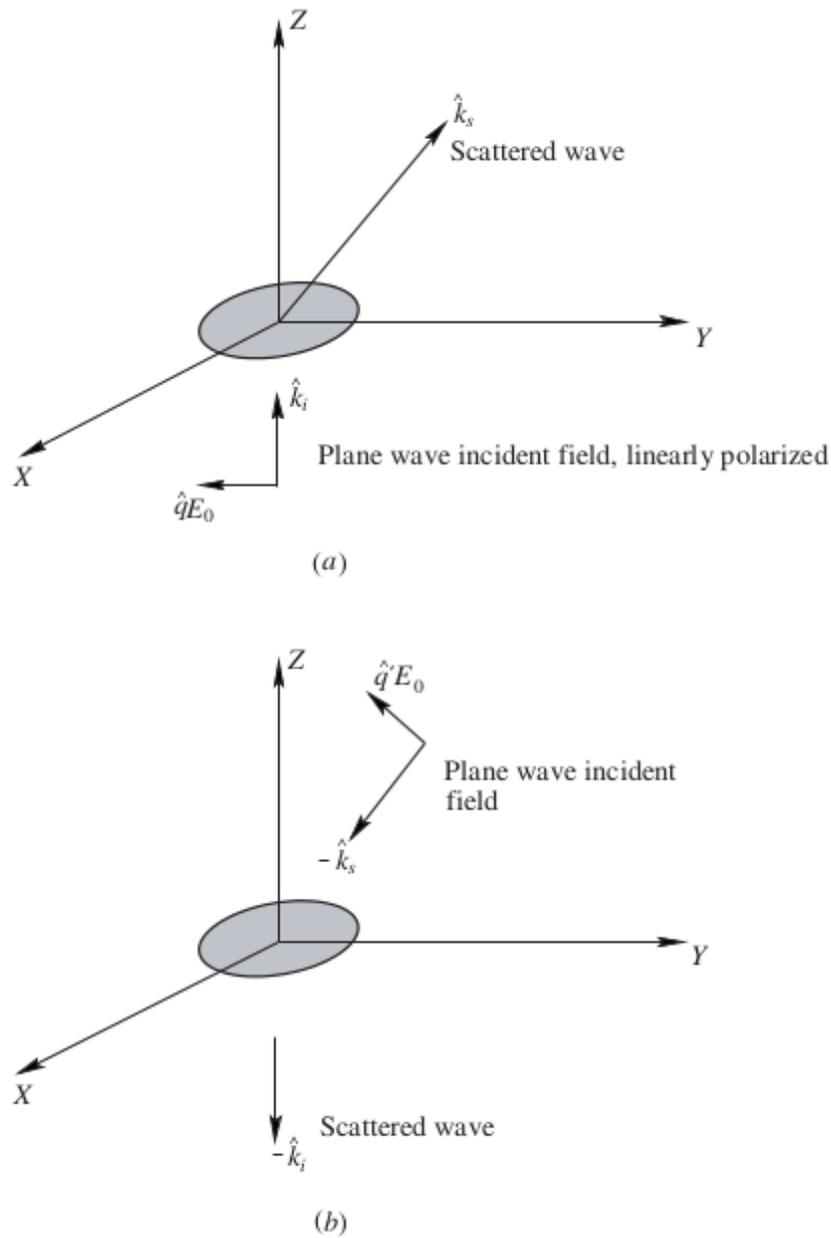


Figura 15: Teorema de reciprocidad. En (a) una partícula es iluminada por una onda plana linealmente polarizada ($\hat{q}E_0$), cuya dirección de propagación del campo incidente es \hat{k}_i . La onda dispersada está en la dirección \hat{k}_s . En (b), la onda plana del campo incidente está linealmente polarizada ($\hat{q}'E_0$) en la dirección $-\hat{k}_s$. La onda dispersada se propaga a lo largo de $-\hat{k}_i$.

A.3. Matriz de scattering para una esfera y un esferoide teniendo en cuenta la aproximación de Rayleigh-Gans

A.3.1. Esfera

El campo lejano dispersado de una onda plana incidente en una esfera dieléctrica de volumen V está dado por:

$$\vec{E}^s = \frac{k_0^2}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \right) 3V \left[\vec{E}^i - \hat{r}(\hat{r} \cdot \vec{E}^i) \right] \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \quad (52)$$

El origen está en el centro de la esfera, la dirección de dispersión es $\hat{k}_s = \hat{r}$, y \vec{E}^i es la amplitud de la onda incidente en el origen. Sea la dirección de la onda incidente a lo largo del eje positivo Z, como se muestra en la Figura 16 y sea el estado de polarización de la onda incidente \hat{v}_i ó \hat{h}_i . De (37) y (38) está claro que cuando $\theta_i = \phi_i = 0^\circ$, luego $\hat{h}_i = \hat{y}$, y $\hat{v}_i = \hat{x}$.

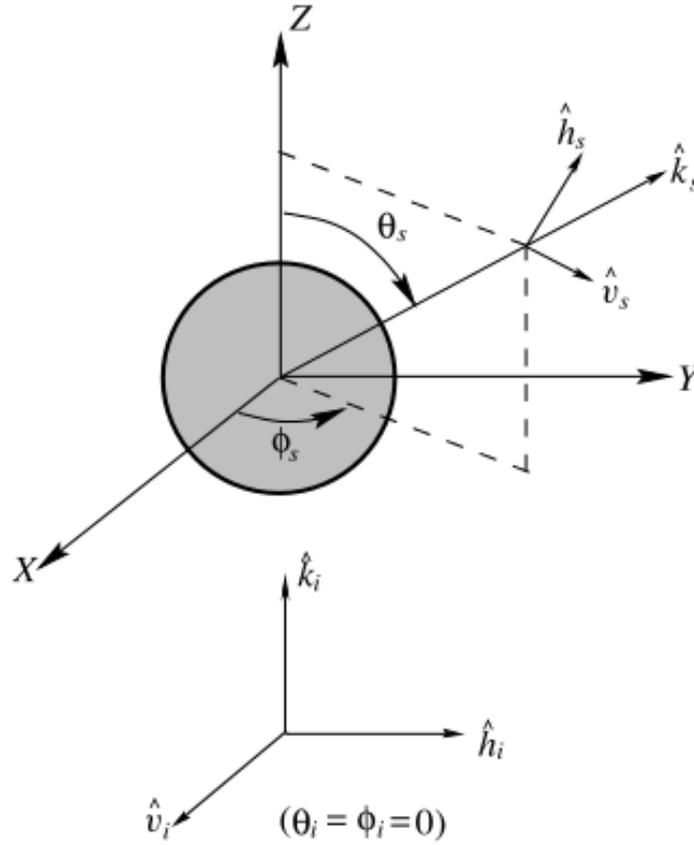


Figura 16: Dirección de dispersión y vectores unitarios de una onda plana incidente en una esfera dieléctrica.

La primer columna de la matriz de scattering en BSA se obtiene de (31) haciendo $E_h^i = 1$ y $E_v^i = 0$, en tanto que para la segunda columna consideramos $E_h^i = 0$ y $E_v^i = 1$. De esta manera, la expresión explícita para la matriz de scattering de una esfera dieléctrica en el límite de Rayleigh con una onda plana incidente en el eje positivo Z es,

$$\begin{bmatrix} E_h^s \\ E_v^s \end{bmatrix} = \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \frac{k_0^2}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \right) 3V \begin{bmatrix} \cos \phi_s & -\sin \phi_s \\ \cos \theta_s \sin \phi_s & \cos \theta_s \cos \phi_s \end{bmatrix}_{FSA} \begin{bmatrix} E_h^i \\ E_v^i \end{bmatrix} \quad (53)$$

Para el caso de retro dispersión, donde $\theta_s = \pi - \theta_i = \pi$ y $\phi_s = \phi_i + \pi = \pi$,

$$\mathbf{S}_{BSA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (54)$$

Esta es una de las ventajas de utilizar \mathbf{S}_{BSA} , ya que la misma asume la forma de la matriz identidad.

A.3.2. Esferoide

Ahora se considera el caso de esferoides oblatos o prolados orientados con su eje de simetría a lo largo del eje Z positivo, como se muestra en la Figura 17. Sea el vector de la onda incidente \hat{k}_i . Notar que \hat{k}_i está sobre el lado negativo de las X del plano XZ y, de aquí, $\phi_i = \pi$.

En aplicaciones de radar, la dirección de retro dispersión $\hat{k}_s = -\hat{k}_i$ se considera con $\theta_s = \pi - \theta_i$ y $\phi_s = \phi_i + \pi = 2\pi$. Los vectores unitarios \hat{h}_s y \hat{v}_s son, de (37) y (38),

$$\hat{h}_s = \hat{y} = -\hat{h}_i \quad (55)$$

$$\hat{v}_s = -\cos \theta_i \hat{x} - \sin \theta_i \hat{z} = \hat{v}_i \quad (56)$$

Obteniendo así en BSA,

$$\begin{bmatrix} E_h^r \\ E_v^r \end{bmatrix} = \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \frac{k_0^2}{4\pi\epsilon_0} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \cos^2 \theta_i + \alpha_z \sin^2 \theta_i \end{bmatrix}_{BSA} \begin{bmatrix} E_h^i \\ E_v^i \end{bmatrix} \quad (57)$$

Está claro que la alineación del eje de simetría del esferoide a lo largo del eje positivo Z resulta en $S_{vh} = S_{hv} = 0$.

En (57), α es la *polarizabilidad* del esferoide y está dada por:

$$\alpha_{x,y,z} = V\epsilon_0(\epsilon_r - 1)(\Lambda_{x,y,z}) \quad (58)$$

donde V es el volumen del esferoide, ϵ_0 la permitividad del vacío, ϵ_r la permitividad relativa del material y Λ se define como,

$$\Lambda_{x,y,z} = \frac{1}{(\epsilon_r - 1)\lambda_{x,y,z} + 1} \quad (59)$$

donde $\lambda_{x,y,z}$ es el factor de despolarización en la dirección indicada por el subíndice.

Se presentan dos casos especiales para θ_i que son relevantes en las aplicaciones de radar: el caso de incidencia “vertical”, ó $\theta_i = 0^\circ$, y el caso de incidencia “horizontal”, ó $\theta_i = 90^\circ$. Cuando $\theta_i = 0^\circ$, \mathbf{S}_{BSA} es diagonal tanto para esferoides oblatos como para prolados,

$$\mathbf{S}_{BSA}(\theta_i = 0^\circ) = \frac{k_0^2 \alpha}{4\pi\epsilon_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (60)$$

En tanto que para $\theta_i = 90^\circ$,

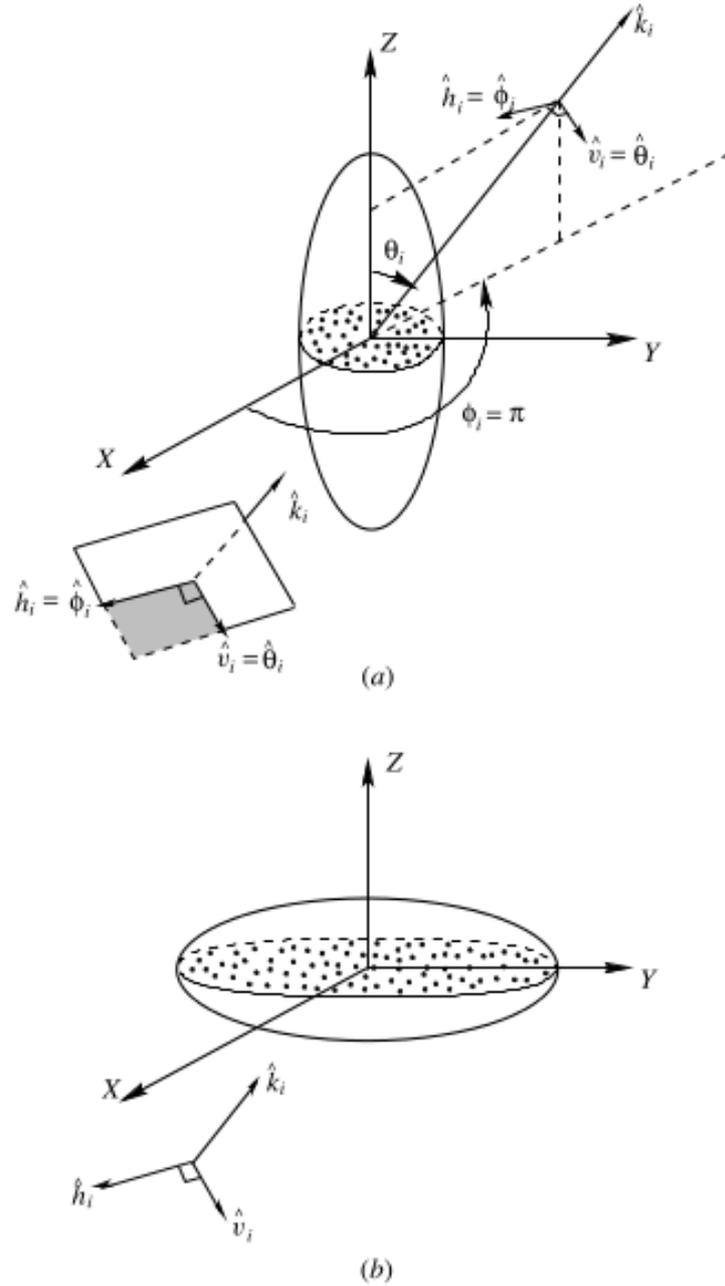


Figura 17: Esferoides (a) prolado y (b) oblado orientados con su eje de simetría a lo largo de la dirección Z. La onda incidente tiene dirección \hat{k}_i , con $(\theta_i, \phi_i = \pi)$, lo que se corresponde con el lado negativo de las X en el plano XZ.

$$\mathbf{S}_{BSA}(\theta_i = 90^\circ) = \frac{k_0^2}{4\pi\epsilon_0} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha_z \end{bmatrix} \quad (61)$$

Notar que $\alpha_x = \alpha_y = \alpha$ en (57), (60) y (61). En aplicaciones de radar, el *ángulo de elevación* del rayo del radar está definido como $90^\circ - \theta_i$. De (57) se tiene que la amplitud de la matriz de scattering para esferoides orientados como en la Figura 17, en la dirección de retro dispersión, es una función del ángulo de incidencia (θ_i), el

volumen del esferoide, la permitividad relativa (ε_r), y la excentricidad.