Práctico 9

1. Encontrar el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de cada una de las siguientes series de potencias.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$. (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2+1}$. (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x^n$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!(x-a)^n$. (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n3^{n-1}}$. (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\frac{\pi}{2})}{2^n} x^n$.

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^2)}{n^n} x^n$. (h) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\ln n} x^n$. (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n^2+1} x^n$.

2. Si $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ tiene radio de convergencia 2 y $\sum_{n=1}^{\infty} d_n x^n$ tiene radio de convergencia 3, ¿qué radio de convergencia tiene $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n + d_n) x^n$?

3. Si $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x+2)^n$ converge en $x=-6$ y diverge en $x=8$, ¿qué puede decirse respecto a la convergencia de cada una de las siguientes series?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n$. (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n 10^n$. (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n(-5)^n$. (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n$.

4. Para cada una de las siguientes funciones, hallar la serie de Taylor alrededor del origen. Notar que las series obtenidas son series de potencias y calcular sus respectivos radios de convergencia R. Determinar si la serie representa a la función en el intervalo $(-R, R)$. Calcular la derivada de la función y expresarla como serie de potencias. ¿Cuál es el radio de convergencia de ésta?

(a) $f(x) = e^x$. (b) $f(x) = \cosh(x)$. (c) $f(x) = \arctan(x)$.

5. Hallar, usando la serie geométrica, la serie de Taylor centrada en a de las siguientes funciones. Hallar sus respectivos radios de convergencia.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, en $a=0$. (b) $f(x) = \dfrac{1}{2+3x}$, en $a=1$.

6. Encontrar la suma de cada una de las siguientes series, en todos los casos para $|x| < 1$.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n$. (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^n$. (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, x^n$. (e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-n}{2^n} x^n$. (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} x^n$.

7. Verificar las siguientes igualdades.

(a) $\dfrac{1}{e} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} - \dfrac{1}{5!} + \cdots$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{4^{2n}(2n)!} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

8. Dar un ejemplo de una función tal que su serie de Taylor en $a=0$ tenga radio de convergencia positivo o infinito y no coincida con la función en el intervalo de convergencia. *Sugerencia*: ejercicio 14 del Práctico 7.