



Universidad  
Nacional  
de Córdoba



Facultad de Matemática,  
Astronomía, Física y  
Computación

EXP-UNC 0029492/2019

Anexo de la RCD FAMAF 193/2019, página 39 de 66

|                                                                  |                         |                          |                         |
|------------------------------------------------------------------|-------------------------|--------------------------|-------------------------|
| <b>TÍTULO:</b> Introducción a la geometría hermitiana            |                         |                          |                         |
| <b>AÑO:</b> 2019                                                 | <b>CUATRIMESTRE:</b> 2° | <b>N° DE CRÉDITOS:</b> 3 | <b>VIGENCIA:</b> 3 años |
| <b>CARGA HORARIA:</b> 60 horas de teoría y 20 horas de práctica. |                         |                          |                         |
| <b>CARRERA/S:</b> Doctorado en Matemática                        |                         |                          |                         |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>FUNDAMENTOS</b></p> <p>Las variedades complejas, como las variedades diferenciables reales, son generalizaciones de curvas y superficies a dimensiones arbitrarias, pero con cartas coordenadas que toman valores en <math>\mathbb{C}^n</math> y con cambios de coordenadas holomorfos. A pesar de la similitud formal entre las definiciones, la teoría de variedades complejas es mucho más profunda que la teoría de variedades diferenciables, reemplazando la palabra "diferencial" o "suave" por "compleja" u "holomorfa". Para tener una idea de cómo se diferencian estas dos teorías, podemos considerar los siguientes hechos: (1) Todas las variedades complejas son orientables y poseen una orientación canónica; (2) Las únicas funciones holomorfas globales en una variedad compleja compacta son las funciones constantes; (3) No existen subvariedades complejas compactas de <math>\mathbb{C}^n</math> de dimensión positiva; (4) No existen las particiones de la unidad; (5) El espacio de campos vectoriales holomorfos en una variedad compleja compacta tiene dimensión finita, y en muchos casos contiene sólo el campo vectorial nulo.</p> <p>Las variedades complejas aparecen en muchas áreas de la matemática. Por ejemplo, juegan un papel esencial en:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Geometría riemanniana (métricas hermitianas y Kähler)</li> <li>• Análisis complejo clásico (superficies de Riemann)</li> <li>• Varias variables complejas (variedades de Stein)</li> <li>• Geometría algebraica (variedades algebraicas complejas no singulares)</li> <li>• Topología de dimensión baja (clasificación de variedades de dimensión 4)</li> <li>• Teoría de Lie (grupos de Lie complejos)</li> <li>• Teoría de cuerdas (variedades de Calabi-Yau)</li> </ul> <p>En este curso profundizaremos en la geometría diferencial de las variedades complejas. En muchos casos, variedades complejas interesantes pueden ser equipadas con métricas riemannianas especiales, y se pueden utilizar técnicas de la geometría riemanniana para distinguirlas. Esto se aplica particularmente a las variedades de Kähler, que se encuentran en la intersección de las geometrías riemanniana, algebraica y simpléctica. Buena parte del curso estará dedicada a estudiar estas variedades, pero también estudiaremos propiedades de métricas riemannianas compatibles más generales, en particular, la clasificación de métricas casi hermitianas de Gray-Hervella.</p> |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>OBJETIVOS</b></p> <p>La meta de esta asignatura es que al finalizar la materia los estudiantes estén en condiciones de:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Manejar los conceptos y técnicas básicas de la geometría hermitiana, de tal manera que le permitan resolver problemas relacionados.</li> <li>• Establecer analogías y diferencias con las variedades diferenciables reales.</li> <li>• Comprender enunciados y reproducir demostraciones de teoremas relacionados con el área.</li> </ul> |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

df



Universidad  
Nacional  
de Córdoba



Facultad de Matemática,  
Astronomía, Física y  
Computación

EXP-UNC 0029492/2019

Anexo de la RCD FAMAF 193/2019, página 40 de 66

## PROGRAMA

### Unidad 1: Teoría local

Funciones holomorfas de varias variables – Álgebra lineal hermitiana: estructuras complejas y hermitianas en espacios vectoriales – Formas diferenciales en  $C^n$ .

### Unidad 2: Variedades complejas

Definición y ejemplos – Fibrados vectoriales holomorfos – "Blow up" en puntos – Estructuras casi complejas e integrabilidad: el teorema de Newlander-Nirenberg – Cálculo diferencial en variedades complejas – Los operadores  $\partial$  y  $\bar{\partial}$  - Cohomología de Dolbeault – El fibrado canónico del espacio proyectivo complejo.

### Unidad 3: Variedades de Kähler

Repaso de métricas riemannianas – Métricas hermitianas – Métricas de Kähler – Caracterizaciones equivalentes – Ejemplos – La métrica de Fubini-Study – Conexión de Levi-Civita: curvatura seccional y curvatura seccional holomorfa – Tensor de Ricci – Holonomía y variedades de Calabi-Yau – Campos de Killing.

### Unidad 4: Cohomología de variedades de Kähler compactas

Las identidades de Kähler – Operadores de Lefschetz – Teoría de Hodge en variedades de Kähler – El lema  $\partial\bar{\partial}$  - Cohomología de de Rham de variedades de Kähler compactas – Teoremas de Lefschetz.

### Unidad 5: Variedades (casi) hermitianas

Clasificación de variedades casi hermitianas según Gray-Hervella – Variedades "almost Kähler", "nearly Kähler" y localmente conformes Kähler – Conexiones canónicas de Gauduchon: conexión de Chern y de Bismut.

## PRÁCTICAS

Habrán guías de ejercicios relacionados a los temas visto en el teórico. Se discutirán las soluciones de manera conjunta entre el profesor y todos los estudiantes.

## BIBLIOGRAFÍA

### BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

D. Huybrechts, Complex Geometry, Universitext, Springer.

W. Ballmann, Lectures on Kähler manifolds, European Mathematical Society.

A. Moroianu, Lectures on Kähler geometry, Cambridge University Press.

### BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

J. Morrow y K. Kodaira, Complex manifolds, American Mathematical Society.

A. L. Besse, Einstein Manifolds, Classics in Mathematics, Springer.

R. Wells, Differential Analysis On Complex Manifolds, Springer.

A. Gray y L. Hervella, The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants, Ann. Mat. Pura Appl. 123 (1980), 35–58.

P. Gauduchon, Hermitian connections and Dirac operators, Boll. Unione Mat. Ital. Ser. VII 2 (1997) 257–288.



Universidad  
Nacional  
de Córdoba



Facultad de Matemática,  
Astronomía, Física y  
Computación

EXP-UNC 0029492/2019

Anexo de la RCD FAMAF 193/2019, página 41 de 66

|                                |
|--------------------------------|
| <b>MODALIDAD DE EVALUACIÓN</b> |
|--------------------------------|

Para la regularidad:

- Asistencia mínima de 70% a las clases teóricas.
- Resolución y exposición oral de problemas seleccionados sobre los contenidos teórico-prácticos desarrollados en la materia.

Para aprobación del curso: El examen final contará de una evaluación escrita sobre contenidos prácticos, y una exposición oral sobre los contenidos completos de la materia.

|                                       |
|---------------------------------------|
| <b>REQUERIMIENTOS PARA EL CURSADO</b> |
|---------------------------------------|

Conocimientos de funciones analíticas, variedades diferenciables y geometría riemanniana